

Лабораторная работа №1: Ряды Фурье

Задание 1. Вещественная функция

Квадратная волна

Для функции

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [t_0, t_1) \\ b, & x \in [t_1, t_2) \end{cases}$$

Выбрали $t_0 = 0, t_1 = \frac{7}{2}, t_2 = 7, a = 3, b = 5$. Период функции $T = 7$.

Рассмотрим частичные суммы Фурье для функции $f(t)$

$$F_N(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{-i\omega_n t}$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n, c_n вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T} x} dx$$

Аналитическое решение

Вычислим значения коэффициентов для $N = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \frac{1}{7} \int_{-3.5}^{3.5} f(x) dx = \\
&= \frac{1}{7} \left(\int_{-3.5}^0 3 dx + \int_0^{3.5} 5 dx \right) = \\
&= \frac{1}{7} \left((3x) \Big|_{-3.5}^0 + (5x) \Big|_0^{3.5} \right) = \\
&= \frac{1}{7} \left(0 - \left(-\frac{3 \times 7}{2} \right) + \frac{5 \times 7}{2} - 0 \right) = \frac{1}{7} \times \left(-\frac{7}{2} \right) \times 8 = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) dx \right)_{\substack{n=1 \\ T=7}} = \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(2\pi \frac{1}{T} x\right) dx \right) = \\
&= \frac{2}{7} \left(\int_{-3.5}^0 3 \cos\left(2\pi \frac{1}{7} x\right) dx + \int_0^{3.5} 5 \cos\left(2\pi \frac{1}{7} x\right) dx \right) = \\
&= \frac{2}{7} \left[3 \times \frac{7}{2\pi} \int_{-3.5}^0 \cos\left(2\pi \frac{1}{7} x\right) d\left(2\pi \frac{1}{7} x\right) + 5 \times \frac{7}{2\pi} \int_0^{3.5} \cos\left(2\pi \frac{1}{7} x\right) d\left(2\pi \frac{1}{7} x\right) \right] = \\
&= \frac{21}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{7}\right) \Big|_{x=-3.5}^{x=0} + \frac{35}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{7}\right) \Big|_{x=0}^{x=3.5} = \\
&= \frac{21}{2\pi} (\sin(-\pi) - \sin(0)) + \frac{35}{2\pi} (\sin(0) - \sin(\pi)) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) dx \right)_{\substack{n=2 \\ T=7}} = \frac{2}{7} \left(\int_{-3.5}^{3.5} f(x) \cos\left(4\pi \frac{x}{7}\right) dx \right) = \\
&= \frac{2}{7} \left[\int_{-3.5}^0 3 \cos\left(4\pi \frac{x}{7}\right) dx + \int_0^{3.5} 5 \cos\left(4\pi \frac{x}{7}\right) dx \right] = \\
&= \frac{2}{7} \times 3 \times \frac{7}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi x}{7}\right) \Big|_{-3.5}^0 + \frac{2}{7} \times 5 \times \frac{7}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi x}{7}\right) \Big|_0^{3.5} = \\
&= \frac{3}{2\pi} (\sin(-2\pi) - \sin(0)) + \frac{5}{2\pi} (\sin(0) - \sin(2\pi)) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) dx \right)_{\substack{n=1 \\ T=7}} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) \sin\left(2\pi \frac{x}{7}\right) dx = \\
&= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{7}{2}}^0 3 \sin\left(2\pi \frac{x}{7}\right) dx + \int_0^{\frac{7}{2}} 5 \sin\left(2\pi \frac{x}{7}\right) dx \right) = \\
&= \frac{2}{7} \int_{-\frac{7}{2}}^0 3 \sin\left(2\pi \frac{x}{7}\right) \frac{7}{2\pi} d\left(\frac{2\pi x}{7}\right) + \frac{2}{7} \int_0^{\frac{7}{2}} 5 \sin\left(2\pi \frac{x}{7}\right) \frac{7}{2\pi} d\left(\frac{2\pi x}{7}\right) = \\
&= -\frac{3 \cos\left(\frac{2\pi x}{7}\right)}{\pi} \Big|_{-\frac{7}{2}}^0 + -\frac{5 \cos\left(\frac{2\pi x}{7}\right)}{\pi} \Big|_0^{\frac{7}{2}} = \left[-\frac{3 \cos 0}{\pi} + \frac{3 \cos(-\pi)}{\pi} \right] + \left[-\frac{5 \cos(\pi)}{\pi} + \frac{5 \cos 0}{\pi} \right] = \\
&= \frac{3}{\pi} [-1 + (-1)] + \frac{5}{\pi} [-(-1) + 1] = \frac{10}{\pi} - \frac{6}{\pi} = \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} x\right) dx \right)_{\substack{n=2 \\ T=7}} = \frac{2}{7} \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) \sin\left(4\frac{\pi}{7} x\right) dx = \\
&= \frac{2}{7} \left[\int_{-\frac{7}{2}}^0 3 \sin\left(4\frac{\pi}{7} x\right) dx + \int_0^{\frac{7}{2}} 5 \sin\left(4\frac{\pi}{7} x\right) dx \right] = \\
&= \frac{2}{7} \left[\frac{3 \times 7}{4\pi} \int_{-\frac{7}{2}}^0 \sin\left(4\frac{\pi}{7} x\right) d\left(4\frac{\pi}{7} x\right) + \frac{5 \times 7}{4\pi} \int_0^{\frac{7}{2}} \sin\left(4\frac{\pi}{7} x\right) d\left(4\frac{\pi}{7} x\right) \right] = \\
&= \frac{2}{7} \left[-\frac{21}{4\pi} \cos\left(4\frac{\pi}{7} x\right) \Big|_{-\frac{7}{2}}^0 - \frac{35}{4\pi} \cos\left(4\frac{\pi}{7} x\right) \Big|_0^{\frac{7}{2}} \right] = \\
&= \frac{2}{7} \left[-\frac{21}{4\pi} (\underbrace{\cos 0 - \cos(-2\pi)}_0) - \frac{35}{4\pi} (\underbrace{\cos 2\pi - \cos 0}_0) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^0 dx = \frac{a_0}{2} = 4$$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i2\pi \frac{n}{T} x} dx \right)_{\substack{T=7 \\ n=1}} = \frac{1}{7} \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{7} x} dx = \\
 &= \frac{1}{7} \left[\int_{-\frac{7}{2}}^0 3e^{-i\frac{2\pi}{7} x} dx + \int_0^{\frac{7}{2}} 5e^{-i\frac{2\pi}{7} x} dx \right] = \\
 &= \frac{1}{7} \left[\frac{3 \times 7}{2\pi} \int_{-\frac{7}{2}}^0 e^{-i\frac{2\pi}{7} x} d\left(\frac{2\pi}{7} x\right) + \frac{5 \times 7}{2\pi} \int_0^{\frac{7}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{7} x} d\left(\frac{2\pi}{7} x\right) \right] = \\
 &= \left(\frac{3}{2\pi} \times \left(\frac{1}{-i} \right) e^{-i\frac{2\pi}{7} x} \right) \Big|_{-\frac{7}{2}}^0 + \left(\frac{5}{2\pi} \times \left(\frac{1}{-i} \right) e^{-i\frac{2\pi}{7} x} \right) \Big|_0^{\frac{7}{2}} = \\
 &= \frac{3i}{2\pi} (e^0 - e^{i\pi}) + \frac{5i}{2\pi} (e^{-i\pi} - e^0) = \frac{3i}{2\pi} \times 2 + \frac{5i}{2\pi} \times (-2) = \\
 &= -\frac{2i}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\frac{4\pi}{T} x} dx \right)_{\substack{T=7 \\ n=2}} = \frac{1}{7} \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) e^{-i\frac{4\pi}{7} x} dx = \\
 &= \frac{1}{7} \left[\int_{-\frac{7}{2}}^0 3e^{-i\frac{4\pi}{7} x} dx + \int_0^{\frac{7}{2}} 5e^{-i\frac{4\pi}{7} x} dx \right] = \\
 &= \frac{1}{7} \left[\frac{3 \times 7}{-4\pi i} \int_{-\frac{7}{2}}^0 e^{-i\frac{4\pi}{7} x} d\left(-i\frac{4\pi}{7} x\right) + \frac{5 \times 7}{-4\pi i} \int_0^{\frac{7}{2}} e^{-i\frac{4\pi}{7} x} d\left(-i\frac{4\pi}{7} x\right) \right] = \\
 &= \frac{3i}{4\pi} e^{-i\frac{4\pi}{7} x} \Big|_{-\frac{7}{2}}^0 + \frac{5i}{4\pi} e^{-i\frac{4\pi}{7} x} \Big|_0^{\frac{7}{2}} = \frac{3i}{4\pi} (e^0 - e^{2\pi i}) + \frac{5i}{4\pi} (e^{-2\pi i} - e^0) = 0
 \end{aligned}$$

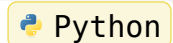
Воспользуемся фактом, что функция $f(x)$ вещественная, поэтому:

$$c_{-1} = \overline{c_1} = \frac{2i}{\pi}$$

$$c_{-2} = \overline{c_2} = 0$$

Численное решение

Для вычисления значения коэффициентов при помощи численных методов написали программу на **Python3.13** с использованием библиотеки **numpy** (Листинг 1):



```
1  import numpy as np
2
3  def F_N(func, T, N, n_points=2000):
4      """
5      Generator that yields tuples of `(n, a_n, b_n, omega_n)`
6
7      for `n = 0` yields `(0, a_0, a_0, 0)`
8      """
9      xs = np.linspace(-T/2, T/2, n_points)
10     ys = np.vectorize(func)(xs)
11     a0 = 1/T * np.trapezoid(ys, xs)
12     yield (0, a0, a0, 0)
13
14     for n in range(1, N+1):
15         omega = 2*np.pi * n / T
16         a = 2/T * np.trapezoid(ys * np.cos(omega * xs), xs)
17         b = 2/T * np.trapezoid(ys * np.sin(omega * xs), xs)
18         yield (n, a, b, omega)
19     return
20
21 def G_N(func, T, N, n_points=2000):
22     """
23     Generator that yields tuples of `(n, c_n, omega_n)`
24     """
25     xs = np.linspace(-T/2, T/2, n_points)
26     ys = np.vectorize(func)(xs)
27     for n in range(-N, N+1):
28         omega = 2*np.pi * n / T
29         c = 1/T * np.trapezoid(ys * np.exp(-1j*omega*xs), xs)
30         yield (n, c, omega)
31     return
32
33 def G_N_sum(func, T, N, n_points=2000):
34     """Returns partial sum `G_N(t)`"""
35     gen = G_N(func, T, N, n_points)
36     other = np.array(list(gen))
37     c = other[:, 1]; omega = other[:, 2]
```

```

38     return lambda t: np.sum(
39         c[:,np.newaxis]*np.exp(1j * omega[:,np.newaxis]*t),
40         axis=0)
41
42 def F_N_sum(func, T, N, n_points=2000):
43     """Returns partial sum `F_N(t)`"""
44     gen = F_N(func, T, N, n_points)
45     a0 = next(gen)[1]
46     other = np.array(list(gen))
47     a = other[:, 1]; b = other[:, 2]; omega = other[:, 3]
48     return lambda t: a0 + np.sum(
49         a[:,np.newaxis]*np.cos(omega[:,np.newaxis]*t) +
50         b[:,np.newaxis]*np.sin(omega[:,np.newaxis]*t),
51         axis=0)

```


Листинг 1. Программа для вычисления коэффициентов

Затем вычислили коэффициенты для квадратной волны (Листинг 2):

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from fourier import *
4
5  t2, t1, t0 = 7, 3.5, 0
6  a, b = 5, 3
7  T = t2 - t0
8  func = lambda x: a if t0 <= x % T < t1 else b
9  func = np.vectorize(func)
10
11 xs = np.linspace(-2*T, 2*T, 2000)
12
13 for N in [2,3,4,27,50]:
14     fs_func = F_N_sum(func, T, N)
15     fs_func_comp = G_N_sum(func, T, N)
16
17     fig, ax = plt.subplots()
18     ax.set_xlabel("$t$")
19     ax.set_ylabel("$F_N(t)$")
20     ax.grid(True)

```

 Python

```
21
22     ax.plot(xs, func(xs))
23     ax.plot(xs, fs_func(xs))
24     fig.savefig(f'../fig/square/N{N}.svg', format='svg',
25                 bbox_inches='tight')
26
27     fig, ax = plt.subplots(clear=True)
28     ax.set_xlabel("$t$")
29     ax.set_ylabel("$G_N(t)$")
30     ax.grid(True)
31
32     ax.plot(xs, func(xs))
33     ax.plot(xs, fs_func_comp(xs))
34     fig.savefig(f'../fig/square/N{N}-comp.svg', format='svg',
35                 bbox_inches='tight')
36
37
38 F = list(F_N(func, T, 50))
39 G = list(G_N(func, T, 50))
40
41
42 xs = np.linspace(-T/2, T/2, 2000)
43
44 s = np.trapezoid(func(xs)**2, xs)
45
46
47 s1 = 0
48 for _, a_, b_, omega_ in F:
49     s1 += a_**2 * np.trapezoid(np.cos(omega_*xs)**2, xs)
50     s1 += b_**2 * np.trapezoid(np.sin(omega_*xs)**2, xs)
51
52 s2 = 0
53 for n_, c_, omega in G:
54     s2 += abs(c_)**2 * abs(np.trapezoid(np.exp(-1j * omega * xs)
55     * np.exp(1j * omega * xs), xs))
56
57
58 print(s, s1, s2)
59 print((s2 - s)/s*100)
```

Листинг 2. Программа для вычисления коэффициентов для квадратной волны

Сравнение аналитического и численного решения

Коэффициенты полученные численными методами будем обозначать с «^» сверху.

Для численного решения возьмем разбиение отрезка $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ на 2000 точек, получим:

$$\hat{c}_0 = \frac{\hat{a}_0}{2} = 3.999499749874937, \quad \varepsilon_{\frac{a_0}{2}} = 0.0125\%$$

$$\hat{a}_1 = 0.0010005002501249597, \quad \Delta a_1 = 0.0010005002501249597$$

$$\hat{a}_2 = -0.001000500250125277, \quad \Delta a_2 = -0.001000500250125277$$

$$\hat{b}_1 = 1.2732392826737682, \quad \varepsilon_{b_1} = -2.058225379424016 \times 10^{-5}\%$$

$$\hat{b}_2 = 1.5723695966838946 \times 10^{-06}, \quad \Delta b_2 = 1.5723695966838946 \times 10^{-06}$$

$$\hat{c}_1 = 0.0005002501250625434 - 0.6366196413368842i,$$

$$\Delta(\text{Re } \hat{c}_1) = 0.005002501250625434$$

$$\varepsilon \text{Im}(c_1) = -2.0582253776800817 \times 10^{-5}\%$$

$$\hat{c}_2 = -0.0005002501250626068 - 7.86184798278506 \times 10^{-07}i$$

$$\Delta(\text{Re } \hat{c}_2) = -0.0005002501250626068$$

$$\Delta(\text{Im}) = -7.86184798278506 \times 10^{-07}i$$

Для c_{-1}, c_{-2} отклонение аналогичное.

Графики

Построим графики каждого разложения для разных N .

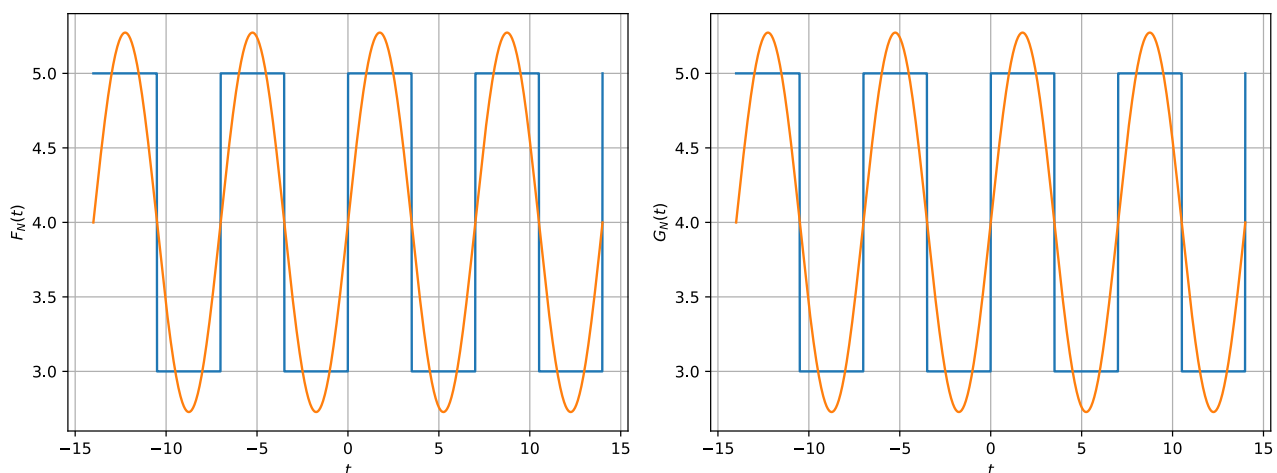


Рис. 1. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

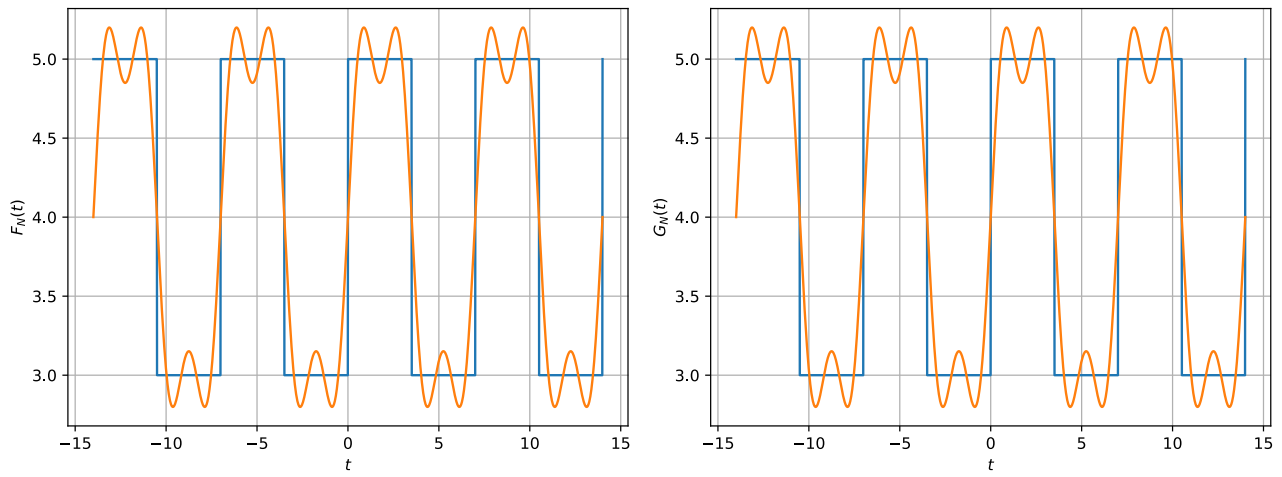


Рис. 2. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

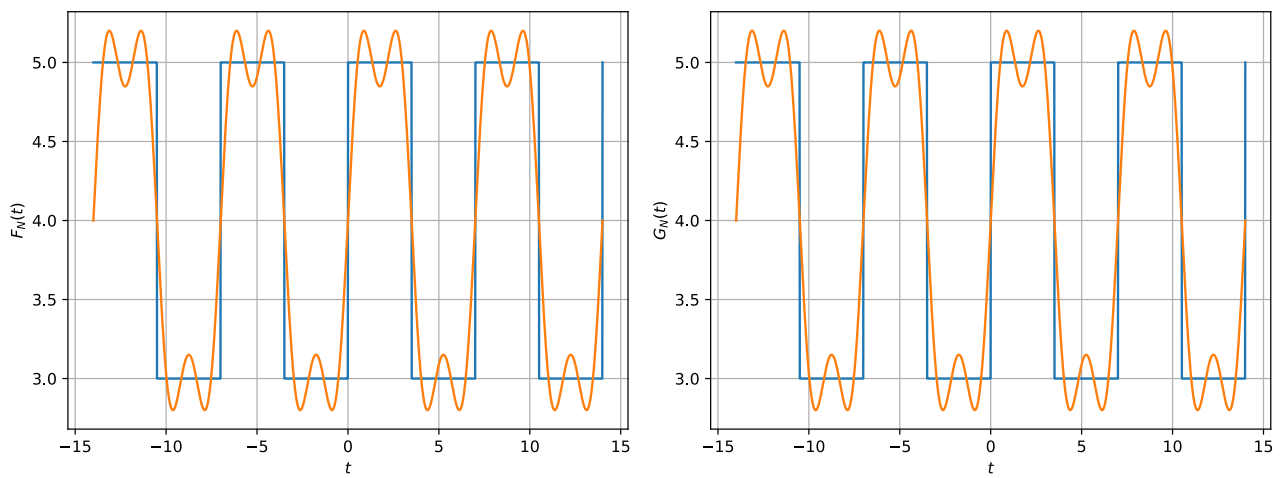


Рис. 3. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

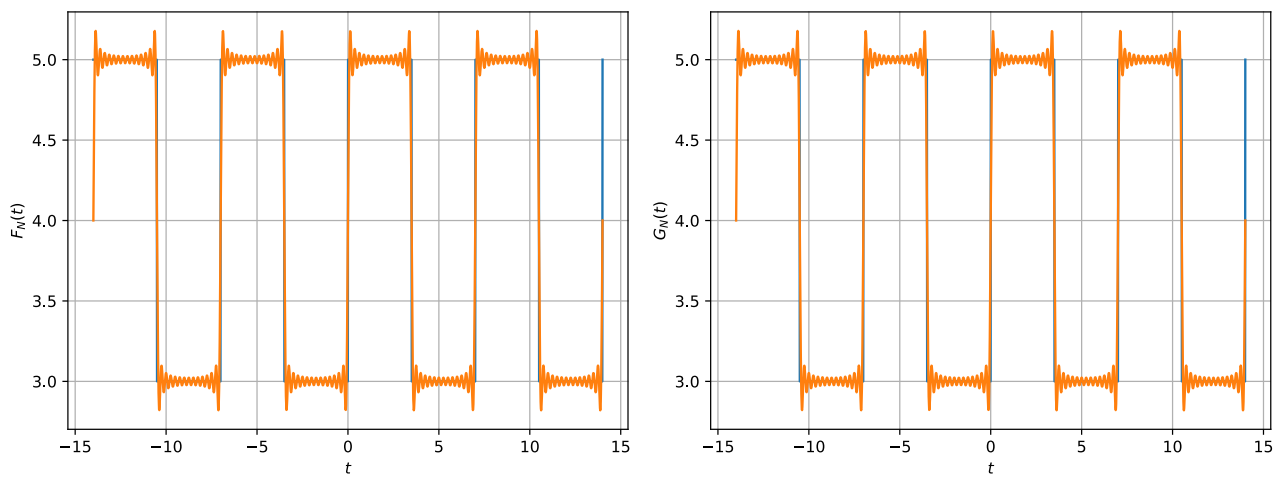


Рис. 4. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

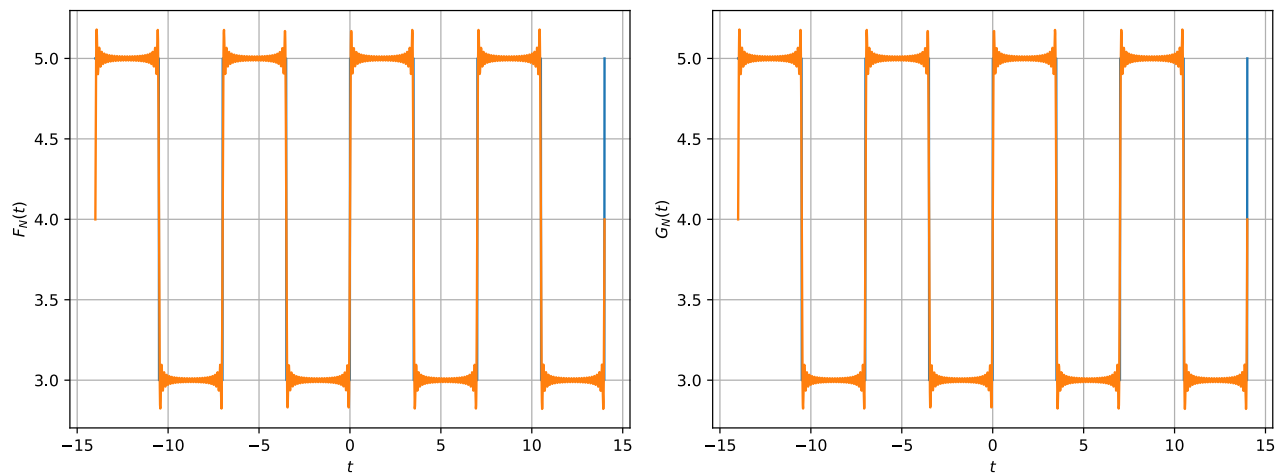


Рис. 5. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

Равенство Парсеваля

Проверим выполнения равенства Парсеваля для функции $F_N(t)$ при $N = 50$. Равенство имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^N (a_n^2 \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \|\sin(\omega_n t)\|^2) = \|f(t)\|^2$$

где

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2 dx$$

Получили следующие значения:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= 118.97198599299651 \\ \sum (a_n^2 \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \|\sin(\omega_n t)\|^2) &= \\ = \sum (|c_n|^2 \|e^{-i\omega_n t}\|^2) &= 118.91537227725621 \\ \varepsilon &= -0.0476\% \end{aligned}$$

Равенство выполняется с небольшим отклонением.

Другие функции

Четная функция

$$f(x) = \cos(2x) \sin(3x) \sin(x)$$

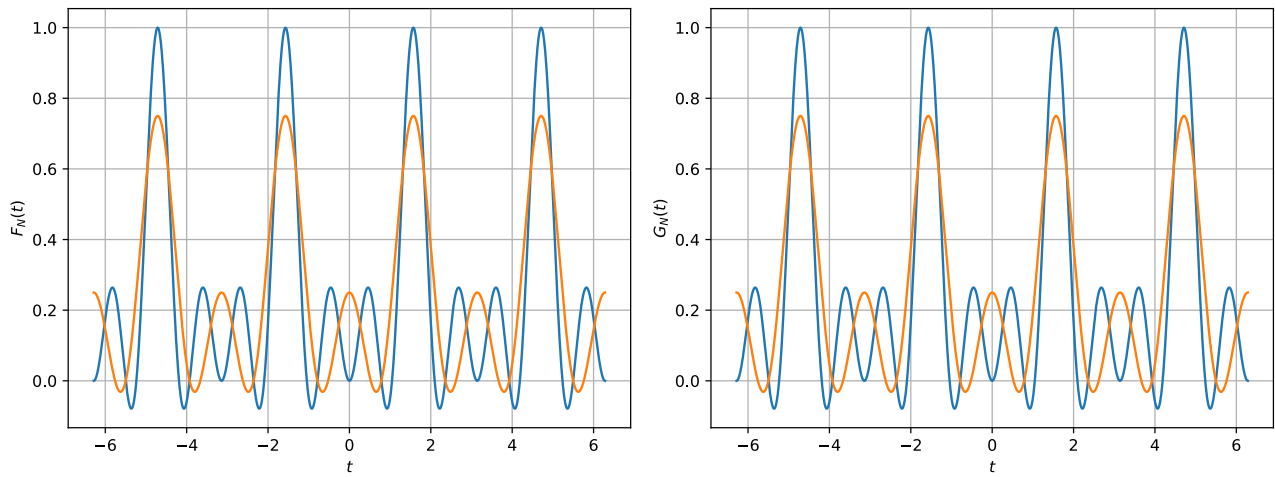


Рис. 6. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

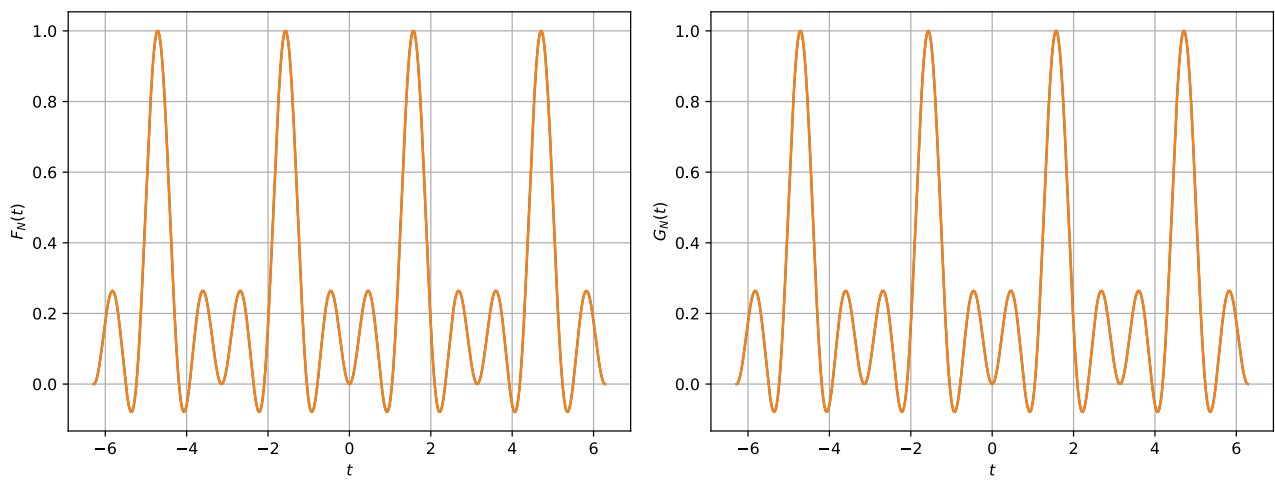


Рис. 7. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

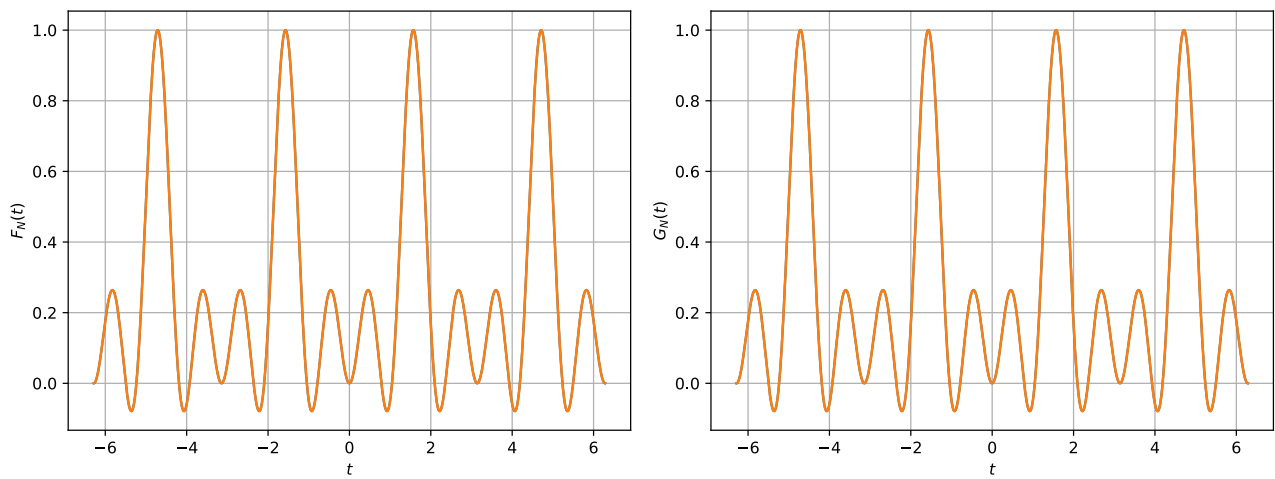


Рис. 8. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

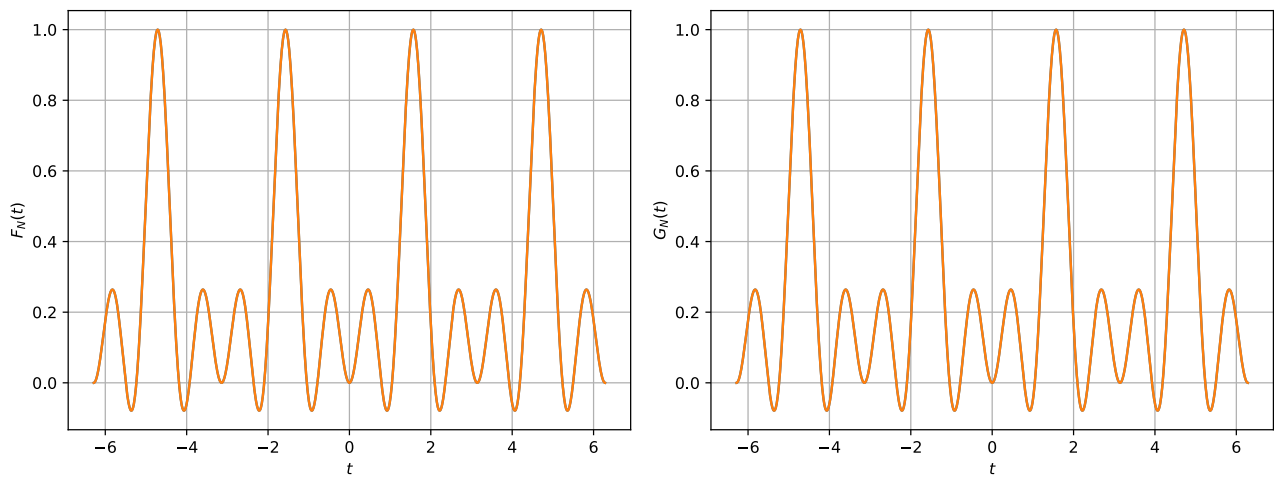


Рис. 9. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

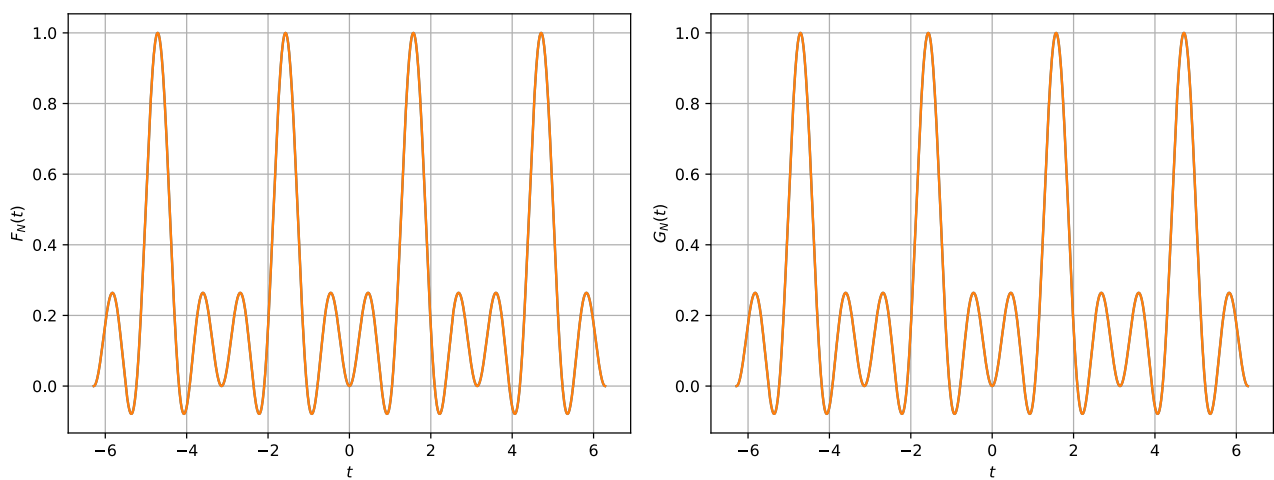


Рис. 10. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

$$\frac{a_0}{2} = 0.25$$

$$a_1 = -0.25 \quad b_1 = 0$$

$$a_2 = 0.25 \quad b_2 = 0$$

$$c_0 = 0.25$$

$$c_{-2} = \quad c_1 = 0.125$$

$$c_{-1} = \quad c_2 = -0.125$$

$$\|f\|^2 \approx 0.49087$$

$$\begin{aligned} \sum (a_n^2 \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \|\sin(\omega_n t)\|^2) = \\ = \sum (|c_n|^2 \|e^{-i\omega_n t}\|^2) \approx 0.49087 \end{aligned}$$

Равенство выполняется

Нечетная функция

$$f(x) = \sin(2x) \cos(x), T = 2\pi$$

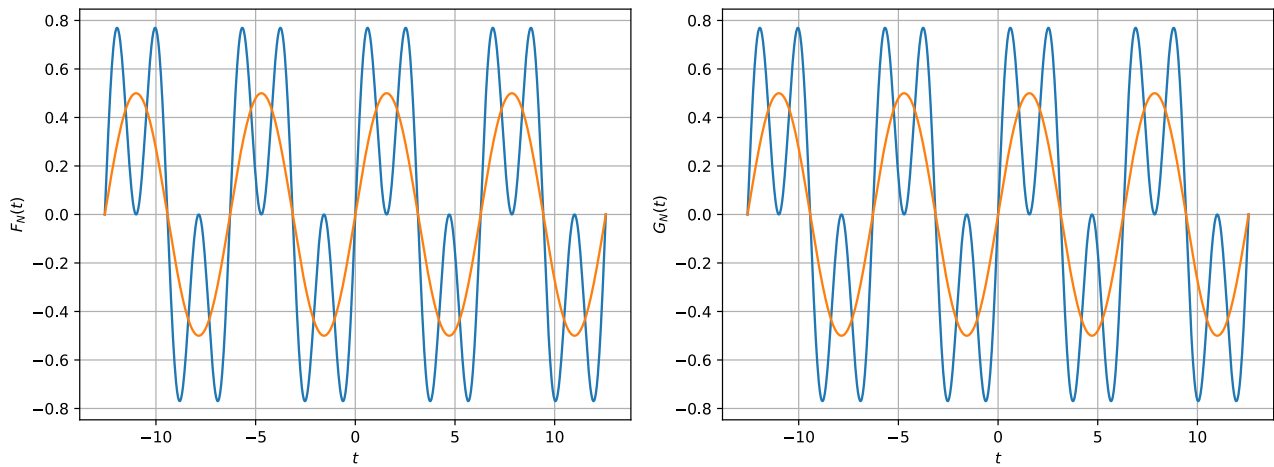


Рис. 11. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

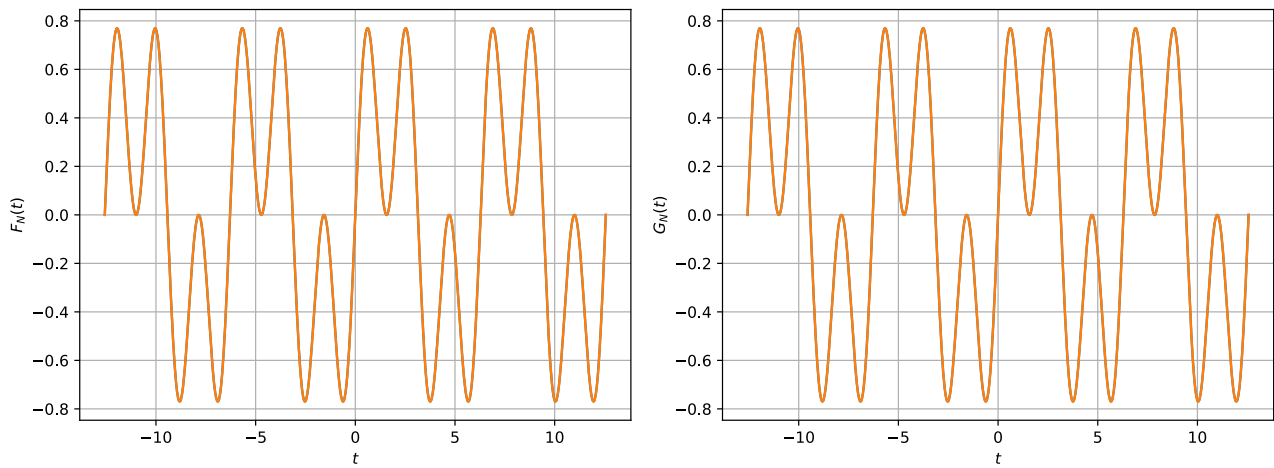


Рис. 12. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

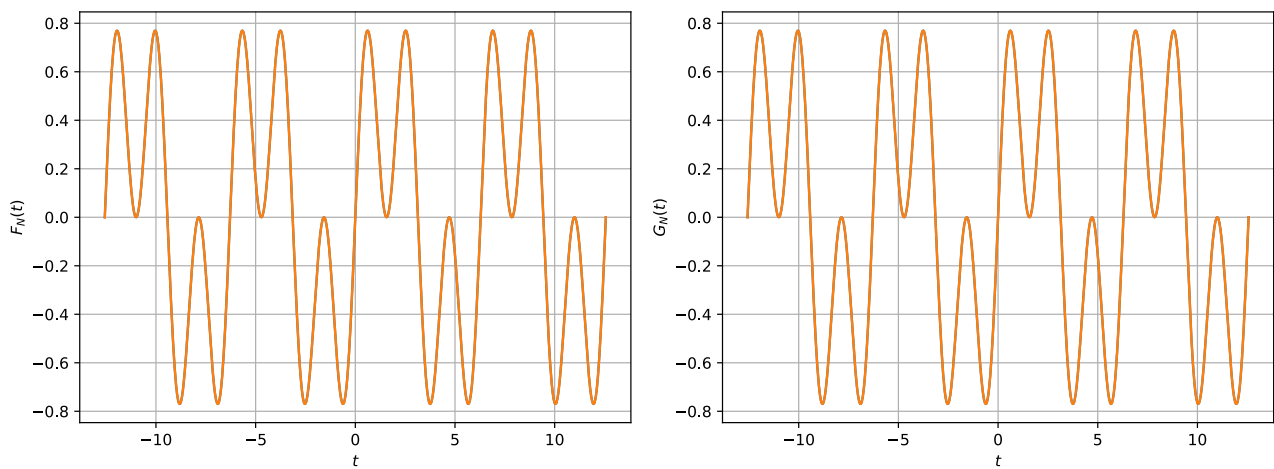


Рис. 13. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

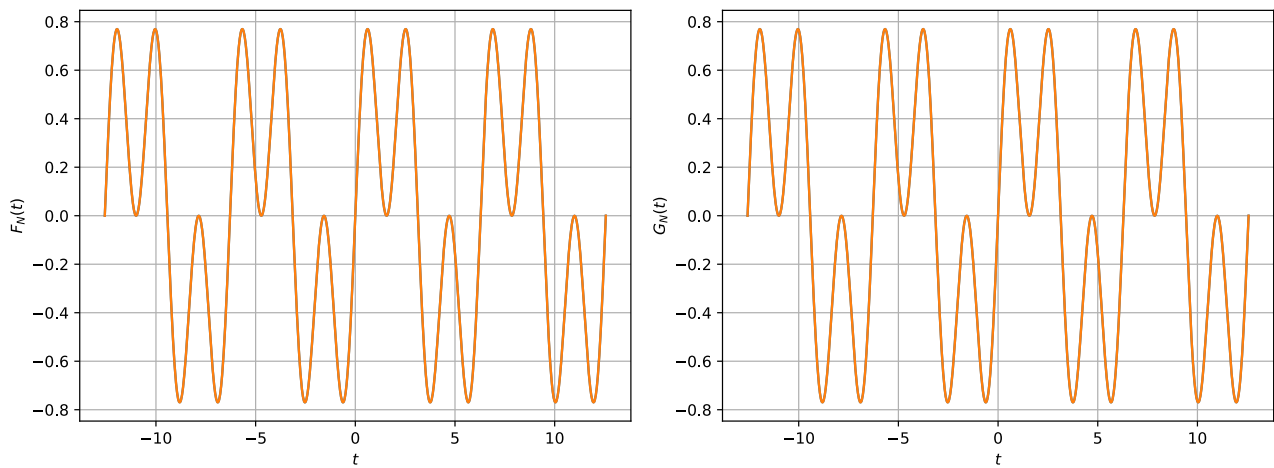


Рис. 14. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

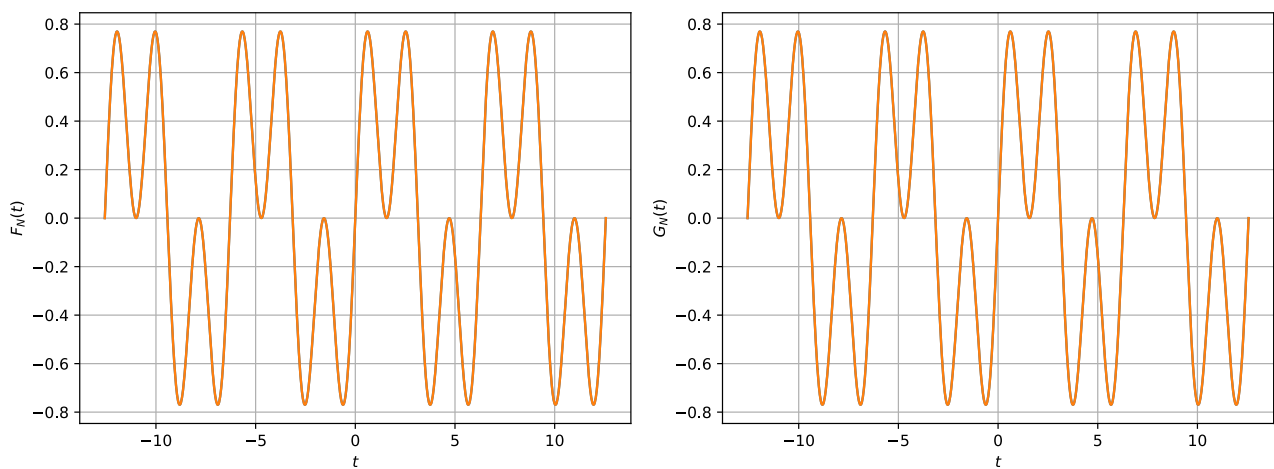


Рис. 15. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= 0 & c_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 & b_1 &= 0.5 \\ a_2 &= 0 & b_2 &= 0 \\ c_{-2} &= 0 & c_2 &= 0 \\ c_{-1} &= 0.25i & c_1 &= -0.25i \end{aligned}$$

$$\|f\|^2 \approx 1.57079$$

$$\begin{aligned} \sum (a_n^2 \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \|\sin(\omega_n t)\|^2) = \\ = \sum (|c_n|^2 \|e^{-i\omega_n t}\|^2) \approx 1.57079 \end{aligned}$$

Равенство выполняется

Функция без четности

$$f(x) = (x \bmod 3)^2 + 3(x \bmod 3) - 7, T = 3$$

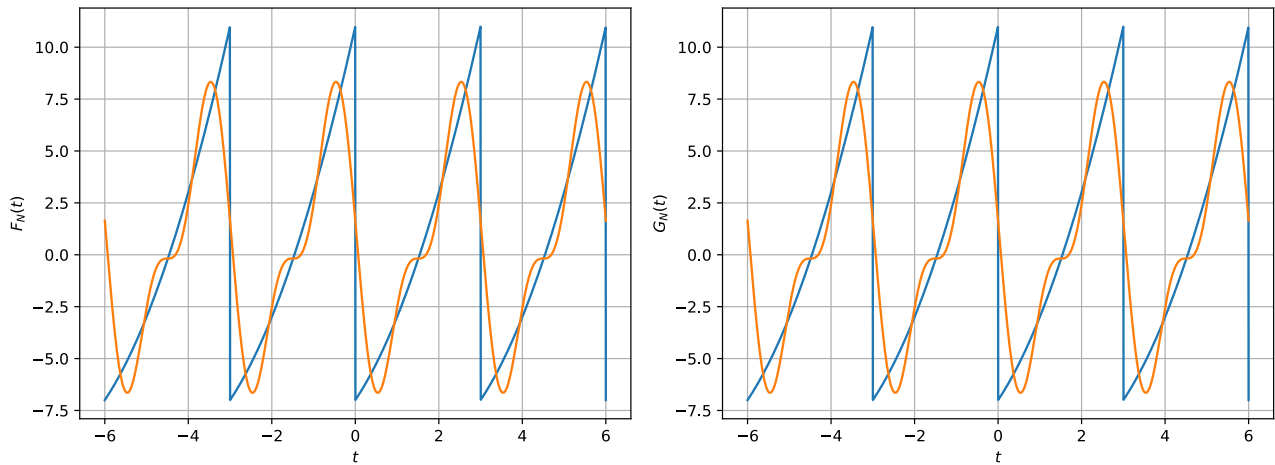


Рис. 16. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

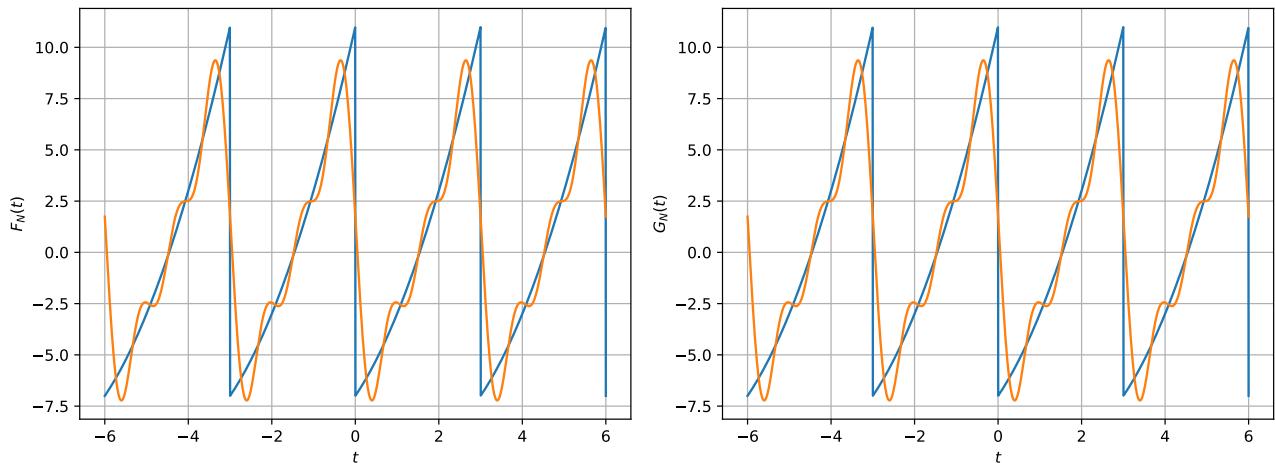


Рис. 17. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

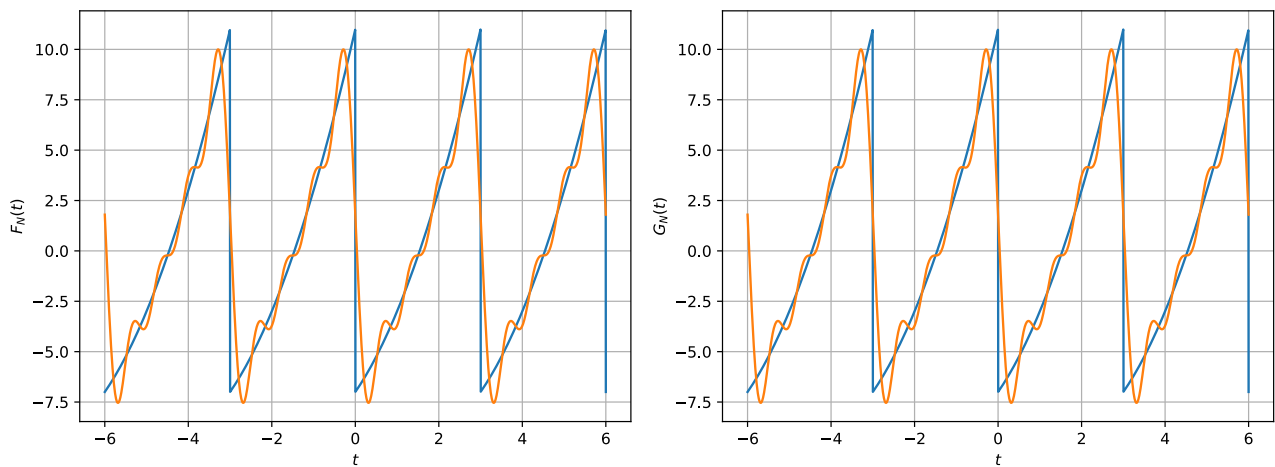


Рис. 18. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

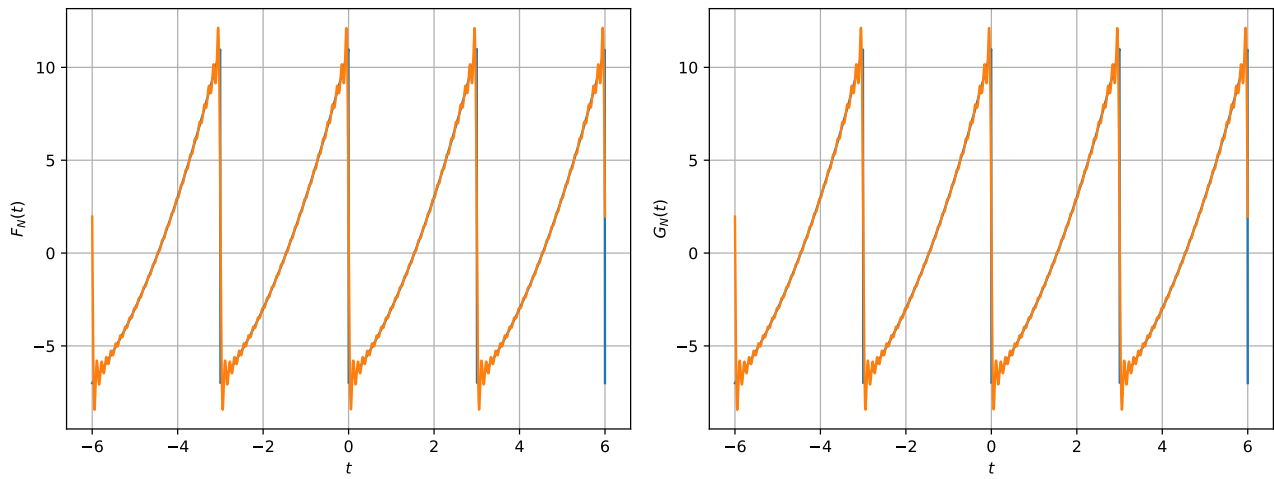


Рис. 19. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

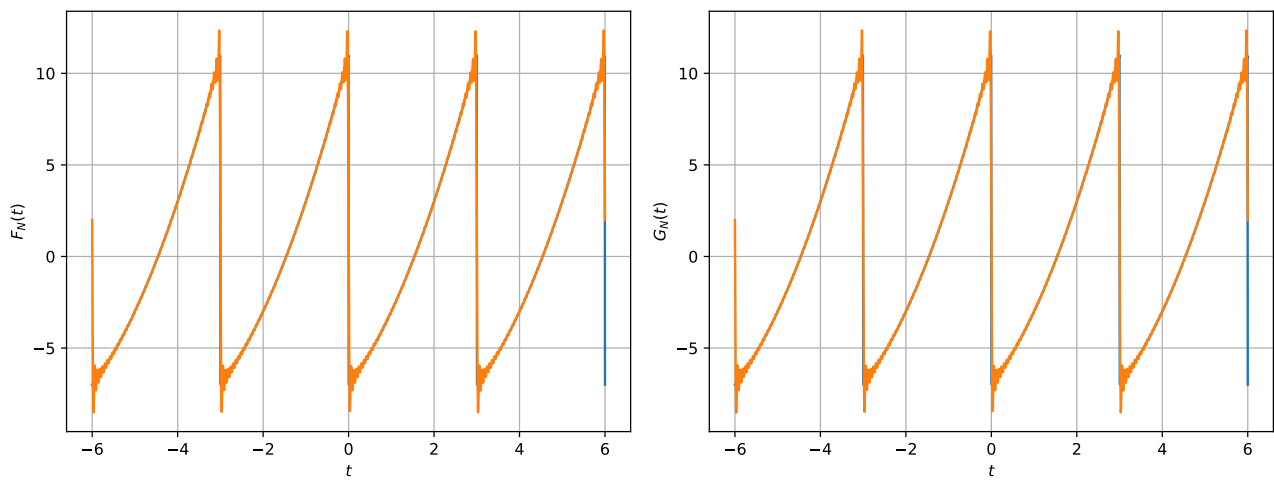


Рис. 20. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

$$\frac{a_0}{2} = 0.5$$

$$a_1 = 0.91189$$

$$a_2 = 0.22797$$

$$b_1 = -5.72958$$

$$b_2 = -2.86479$$

$$c_{-2} = 0.11399 - 1.4324i$$

$$c_{-1} = 0.45595 - 2.86479i$$

$$c_0 = 0.5$$

$$c_1 = 0.45595 + 2.86479i$$

$$c_2 = 0.11399 + 1.4324i$$

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &\approx 83.09997 \\ \sum (a_n^2 \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \|\sin(\omega_n t)\|^2) &= \\ &= \sum (|c_n|^2 \|e^{-i\omega_n t}\|^2) \approx 82.12696\end{aligned}$$

Выводы

Убедились в том, что любую периодическую функцию можно представить в виде ряда синусов, косинусов или экспонент с мнимым показателем. Точность представления зависит от числа членов ряда. Построили графики, накладывающие график частичного разложения функции на график самой функции.

Привели формулы для вычисления коэффициентов a_n , b_n , c_n , а также вычисления коэффициентов вручную для первой функции.

Создали программу для вычисления коэффициентов a_n , b_n , c_n и вычислили их значения для каждой функции.

В последнюю очередь проверили выполнение равенства Парсеваля. Оно выполняется, это говорит о том, что элемент f на самом деле является суммой своего ряда Фурье.¹

Задание 2. Комплексная функция

Выбрали $T = 8$, $R = 2$, получили комплексную функцию $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\operatorname{Re}(f(t)) = \begin{cases} 2, & x \in [-1, 1) \\ 4 - 2t, & x \in [1, 3) \\ -2, & x \in [3, 5) \\ -12 + 2t, & x \in [5, 7) \end{cases} \quad \operatorname{Im}(f(t)) = \begin{cases} 2t, & x \in [-1, 1) \\ 2, & x \in [1, 3) \\ 8 - 2t, & x \in [3, 5) \\ -2, & x \in [5, 7) \end{cases}$$

Поведение функции хорошо видно на графике (Рис. 21):

¹(Ряды Фурье. Преобразование Фурье : учебно-методическое пособие / под редакцией А. Н. Канатникова. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. — 51 с. — Текст : электронный <https://e.lanbook.com/book/52059> (дата обращения: 21.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей. — С. 8.).

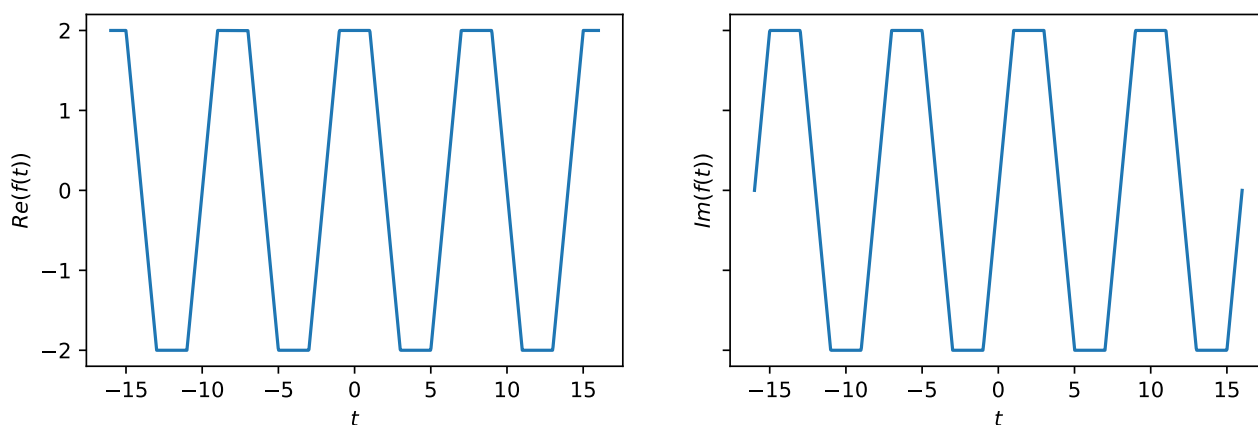


Рис. 21. График функции $f(t)$

Частичные суммы

Составили частичные суммы разложения $G_N(t)$ для $f(t)$ и построили их графики, наложив их на график функции:

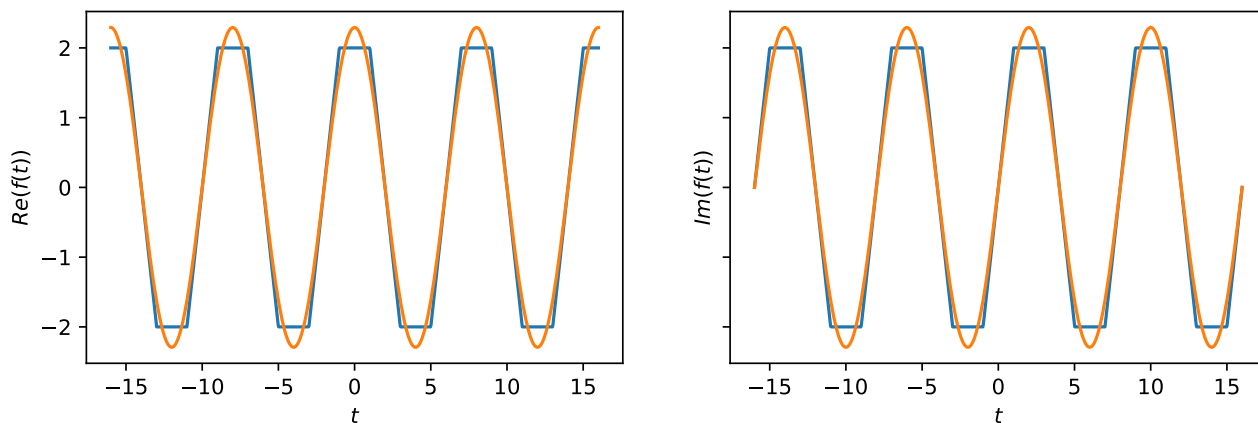


Рис. 22. Разложение $G_N(t)$ при $N = 1$

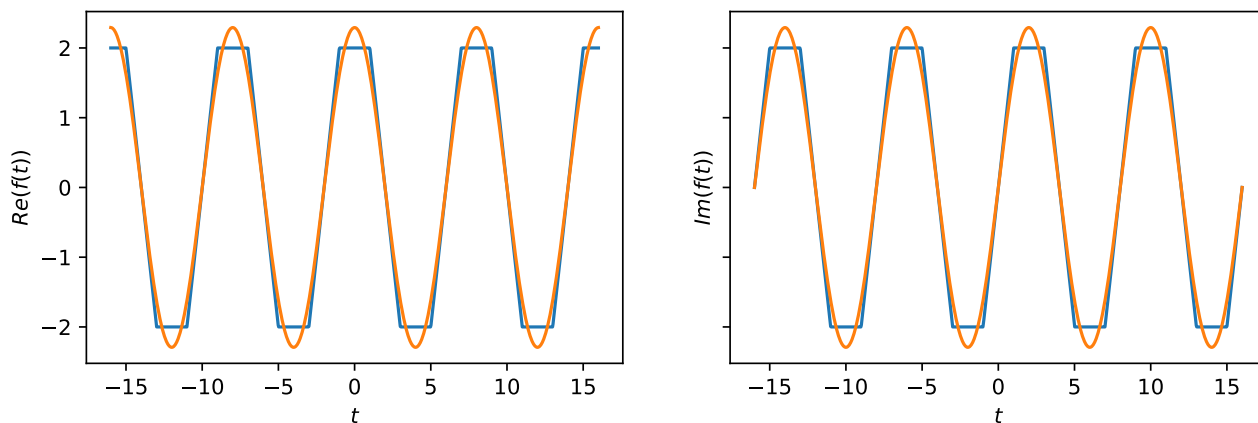
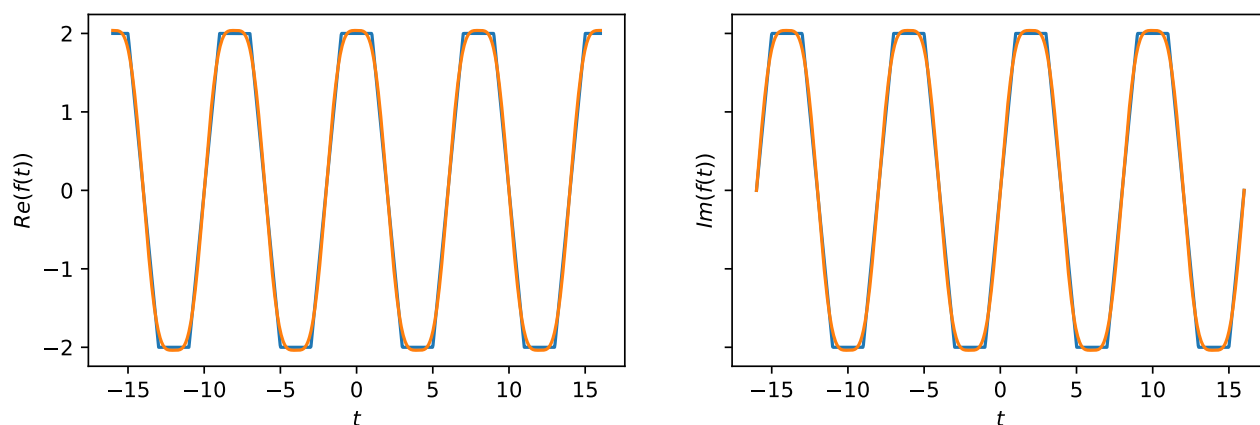
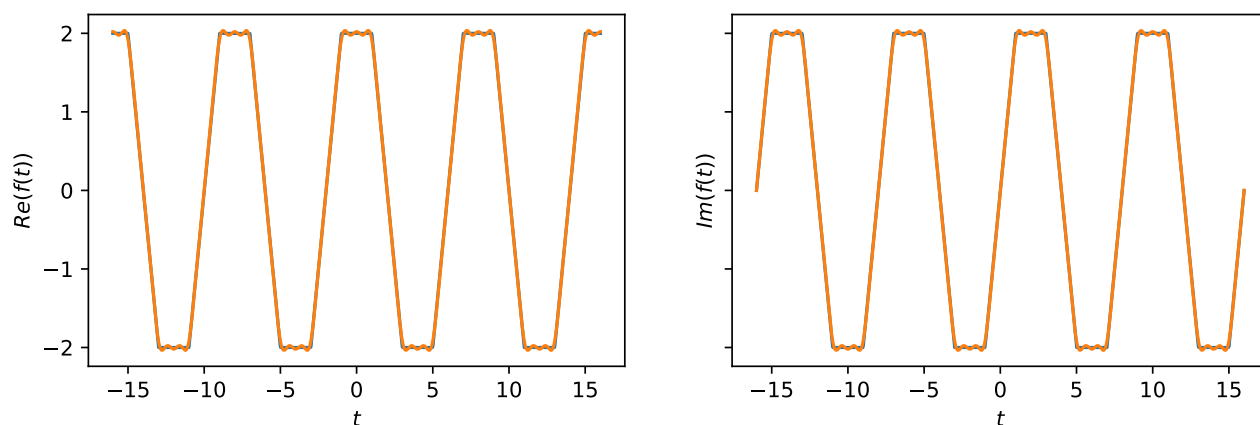


Рис. 23. Разложение $G_N(t)$ при $N = 2$


 Рис. 24. Разложение $G_N(t)$ при $N = 3$

 Рис. 25. Разложение $G_N(t)$ при $N = 10$

Вычисление коэффициентов

Аналитически

Вычислили значения коэффициентов $\{c_n\}_{n=-2}^2$:

$$c_{-2} = \frac{1}{8} \int_{-1}^7 f(t) e^{i\frac{\pi}{2}t} dt =$$

$$\frac{1}{8} \left[\int_{-1}^1 (2 + 2ti) e^{i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_1^3 ((4 - 2t) + 2i) e^{i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_3^5 (-2 + (8 - 2t)i) e^{i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_5^7 ((-12 + 2t) - 2i) e^{i\frac{\pi}{2}t} dt \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[\frac{8(\pi - 2)}{\pi^2} - \frac{8i(-2 + \pi)}{\pi^2} - \frac{8(-2 + \pi)}{\pi^2} + \frac{8i(-2 + \pi)}{\pi^2} \right] = 0$$

$$c_{-1} = \frac{1}{8} \int_{-1}^7 f(t) e^{i\frac{\pi}{4}t} dt =$$

$$\frac{1}{8} \left[\int_{-1}^1 (2 + 2ti) e^{i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_1^3 ((4 - 2t) + 2i) e^{i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_3^5 (-2 + (8 - 2t)i) e^{i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_5^7 ((-12 + 2t) - 2i) e^{i\frac{\pi}{4}t} dt \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[\frac{16\sqrt{2}(-2 + \pi)}{\pi^2} - \frac{16\sqrt{2}(-2 + \pi)}{\pi^2} + \frac{16\sqrt{2}(-2 + \pi)}{\pi^2} - \frac{16\sqrt{2}(-2 + \pi)}{\pi^2} \right] = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^7 f(t) dt =$$

$$\frac{1}{8} \left[\int_{-1}^1 2 + 2ti dt + \int_1^3 4 - 2t + 2i dt + \int_3^5 -2 + (8 - 2t)i dt + \int_5^7 (-12 + 2t) - 2i dt \right] =$$

$$\frac{1}{8} [4 + -4i - 4 - 4i] = 0$$

$$\frac{1}{8} \int_{-1}^7 f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt =$$

$$\frac{1}{8} \left[\int_{-1}^1 (2 + 2ti) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_1^3 ((4 - 2t) + 2i) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_3^5 (-2 + i(8 - 2t)) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt + \int_5^7 ((-12 + 2t) - 2i) e^{-i\frac{\pi}{4}t} dt \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[\frac{32\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{32\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{32\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{32\sqrt{2}}{\pi^2} \right] = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}$$

$$c_2 = \frac{1}{8} \int_{-1}^7 f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt =$$

$$\frac{1}{8} \left[\int_{-1}^1 (2 + 2ti) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_1^3 (4 - 2t + 2i) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_3^5 (-2 + i(8 - 2t)) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt + \int_5^7 (-12 + 2t - 2i) e^{-i\frac{\pi}{2}t} dt \right] =$$

$$\frac{1}{8} \left[\frac{8(2 + \pi)}{\pi^2} - \frac{8i(2 + \pi)}{\pi^2} - \frac{8(2 + \pi)}{\pi^2} + \frac{8i(2 + \pi)}{\pi^2} \right] = 0$$

Численно

Воспользовались функциями из Листинга 1 и нашли численные значения коэффициентов $\{c_n\}_{n=-2}^2$ (См. Листинг 3):

$$c_{-2} = 5.01682 \times 10^{-07} \approx 0$$


$$c_{-1} = -1.39049 \times 10^{-10} + 5.55112 \times 10^{-17}i \approx 0$$

$$c_0 = -5.00500 \times 10^{-07} \approx 0$$

$$c_1 = 2.29264 + 1.73472 \times 10^{-18}i \approx 2.29264$$

$$c_2 = -4.99322 \times 10^{-07} \approx 0$$

```
1 from fourier import *
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 T = 8
6 R = 2
7 def func(xs: np.array):
```

 Python

```
8     global T, R
9     xs = (xs+T/8)%T-T/8
10    real = np.piecewise(xs,
11        [
12            np.logical_and( -T/8 <= xs , xs < T/8),
13            np.logical_and(  T/8 <= xs , xs < 3*T/8),
14            np.logical_and( 3*T/8 <= xs , xs < 5*T/8),
15            np.logical_and( 5*T/8 <= xs , xs < 7*T/8),
16        ],
17        [
18            lambda _: R,
19            lambda xs: 2*R-8*R*xs/T,
20            lambda _: -R,
21            lambda xs: -6*R+8*R*xs/T
22        ]
23    )
24    imag = np.piecewise(xs,
25        [
26            np.logical_and( -T/8 <= xs , xs < T/8),
27            np.logical_and(  T/8 <= xs , xs < 3*T/8),
28            np.logical_and( 3*T/8 <= xs , xs < 5*T/8),
29            np.logical_and( 5*T/8 <= xs , xs < 7*T/8),
30        ],
31        [
32            lambda xs: (8*R*xs/T),
33            lambda _: (R),
34            lambda xs: (4*R-8*R*xs/T),
35            lambda _: (-R)
36        ]
37    )
38    return real + 1j*imag
39
40    xs = np.linspace(-2*T, 2*T, 1000)
41    ys0 = func(xs)
42    ys = ys0
43
44    fig, ax = plt.subplots(ncols=2, sharey=True)
```

```
45 fig.set_size_inches(10, 3)
46
47 ax[0].set_ylabel("$\text{Re}(f(t))$")
48 ax[1].set_ylabel("$\text{Im}(f(t))$")
49 ax[0].set_xlabel("$t$")
50 ax[1].set_xlabel("$t$")
51
52 ax[0].plot(xs, np.real(ys))
53 ax[1].plot(xs, np.imag(ys))
54
55 fig.savefig("fig/comp/f.svg", format='svg', bbox_inches='tight')
56
57 for N in [1, 2, 3, 10]:
58     ys = G_N_sum(func, T, N)(xs)
59     re = np.real(ys)
60     im = np.imag(ys)
61
62     ax[0].clear(); ax[1].clear();
63     ax[0].set_ylabel("$\text{Re}(f(t))$")
64     ax[1].set_ylabel("$\text{Im}(f(t))$")
65     ax[0].set_xlabel("$t$")
66     ax[1].set_xlabel("$t$")
67
68
69     ax[0].plot(xs, np.real(ys0))
70     ax[0].plot(xs, re)
71
72     ax[1].plot(xs, np.imag(ys0))
73     ax[1].plot(xs, im)
74     fig.savefig(f'fig/comp/N{N}.svg', format='svg',
75                 bbox_inches='tight')
76
77 # Значение коэффициентов c_n
78 np.set_printoptions(precision=5, linewidth=120)
79 print(np.array(list(G_N(func, T, 2))))
80
81 # Проверка равенства Парсеваля
82 xs = np.linspace(-T/2, T/2, 2000)
```

```

82 ys = func(xs)
83
84 lhs = np.abs(np.trapezoid(ys*np.conj(ys), xs))
85 rhs = 0
86 for _, c_, omega in (G_N(func, T, 50, 2000)):
87     rhs += abs(c_)**2 * abs(np.trapezoid(np.exp(-1j * omega * xs)
88         * np.exp(1j * omega * xs), xs))
89
90 print(lhs, rhs)
91 print((rhs - lhs)/lhs*100)
    
```

Листинг 3. Программа для поиска коэффициентов и проверки равенства Парсеваля для задания 2

Равенство Парсеваля

Проверим выполнение равенства Парсеваля для $G_N(t)$ при $N = 50$. Проверка реализована в программе (См. Листинг 3-80)

$$\|f\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{f(t)} dt \approx 42.66666$$

$$\sum_{n=-2}^2 |c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega_n t} e^{i\omega_n t} dt = \sum_{n=-2}^2 \left(|c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t} dt \right) \approx 42.66661$$

$$\varepsilon = -1.3124 \times 10^{-4}\%$$

Выводы

В этом задании выбрали периодическую комплекснозначную функцию, построили графики для ее мнимой и действительной частей.

Нашли коэффициенты частичного разложения для $N = 2$ как вручную, так и программно; привели вычисления и найденные значения. Увидели, что для комплекснозначной функции не выполняется условие $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Построили графики разложения $G_N(t)$ для различных N .

Убедились в выполнении равенства Парсеваля для функции $f(t)$ для базиса $\{e^{i\omega_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.