Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье.

Прежде, чем приступить к выполнению задания, рассмотрим знакомую прямоугольную функцию $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2. \end{cases}$$

Её Фурье-образом будет являться аналитическое выражение:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} \, dt.$$

Ожидаемые результаты:

- Вручную аналитически вычисленный образ функции $\Pi(t)$.
- Построенные графики функций $\Pi(t)$ и $\hat{\Pi}(\nu)$.

1.1. Численное интегрирование.

Задайте функцию $\Pi(t)$ в `MATLAB`. Найдите её Фурье-образ с помощью численного интегрирования (функция `trapz`). Вновь используя численное интегрирование, выполните обратное преобразование Фурье от найденного Фурье-образа с целью восстановить исходную функцию. Схематично ваши действия можно представить так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\texttt{trapz}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\texttt{trapz}} \Pi(t).$$

Ожидаемые результаты:

- Проведены исследования и выбраны наиболее показательные значения T (промежуток интегрирования по времени), Δt (шаг дискретизации), V (промежуток интегрирования по частоте) и $\Delta\nu$ (шаг частот).
- Построены на своих частотах сравнительные графики аналитического образа $\hat{\Pi}(\nu)$ и функций найденных с помощью численного интегрирования.
- Построены сравнительные графики исходной функций $\Pi(t)$ и *восстановленных* функции $\Pi(t)$ для выбранных значений T, Δt, V и $\Delta\nu$.
- Написаны выводы о влиянии величины шага и размера промежутка интегрирования, а также о точности и быстродействии метода.

1.2. Использование DFT.

Найдите Фурье-образ функции $\Pi(t)$ с помощью дискретного преобразования Фурье (конструкция `fftshift(fft())`), используя его так, чтобы преобразование было *унитарным.* Выполните обратное преобразование от найденного Фурье-образа с помощью обратного дискретного преобразования (конструкция `ifft(ifftshift())`. Схематично ваши действия можно представить так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\texttt{fftshift(fft())}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\texttt{ifft(ifftshift())}} \Pi(t).$$

Ожидаемые результаты:

- Проведены исследования и выбраны наиболее показательные значения T (промежуток времени) и Δt (шаг дискретизации), а также найдены соответствующие им V, $\Delta\nu$.
- Построены на своих частотах сравнительные графики аналитического образа $\hat{\Pi}(\nu)$ и функций найденных с помощью унитарного `fftshift(fft())`.
- Построены сравнительные графики исходной функций $\Pi(t)$ и *восстановленных* функции $\Pi(t)$ для выбранных значений T и Δt.
- Написаны выводы о влиянии величины шага и размера промежутка интегрирования, а также о точности и быстродействии метода.

1.3. Ваши объяснения.

Если вы правильно выполнили предыдущие пункты, то могли заметить, что функция `trapz` работает долго, а `fft` – быстро. Однако приблизиться к истинному Фурье-образу получилось только у одной из них. Почему так? И почему обратное преобразование в одном из случаев работает лучше? Дайте максимально подробное объяснение успехов и неудач каждого из методов.

1.4. Приближение непрерывного с помощью DFT.

Давайте исправим ситуацию и попробуем совместить достоинства обоих подходов: точность и быстродействие. Найдите способ получить правильный Фурье-образ, соответствующий непрерывному преобразованию Фурье, используя функцию `fft` и не прибегая к численному интегрированию. Найдите способ восстановить исходный сигнал по полученному Фурье-образу – тоже с помощью `fft`. Схема вашего успеха:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{умное использование } \texttt{fft}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{умное использование } \texttt{ifft}} \Pi(t).$$

Воспользуйтесь следующими идеями, чтобы сделать реализацию:

- Любой интеграл по конечному промежутку можно аппроксимировать с помощью суммы Римана:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)\Delta t, \text{ где } t_n = a + n\Delta t, \quad \Delta t = \frac{b-a}{N-1}.$$

- Преобразование Фурье найденное на конечном промежутке T можно задать как сумму Римана, умноженную на некую константу c_m:

$$\hat{f}(\nu) \approx \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt \;\to\; \hat{f}(\nu_m) \approx c_m \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i\frac{nm}{N}}.$$

- Программно преобразование Фурье при известных c_m можно задать через `fft` как:

$$\mathcal{F}\{f\} \;\to\; \texttt{fftshift(c.*fft(f))}.$$

- Тогда обратное преобразование Фурье можно найти как:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} \;\to\; \texttt{ifft(ifftshift(f\_hat)./c)}.$$

Ожидаемые результаты:

- Аналитические выводы формулы коэффициентов c_m.
- Написано развёрнутое объяснение (с необходимыми формулами) того, как и почему найденный метод работает и какое действие с функцией совершают c_m.
- Проведены исследования нового метода и выбраны наиболее показательные значения T (промежуток интегрирования по времени) и Δt (шаг дискретизации), а также найдены соответствующие им V, $\Delta\nu$.
- Построены на своих частотах сравнительные графики аналитического образа $\hat{\Pi}(\nu)$ и функций найденных с помощью разрабатанного алгоритма.
- Построены сравнительные графики исходной функций $\Pi(t)$ и *восстановленных* функции $\Pi(t)$ для выбранных значений T и Δt.
- Построены сравнительные графики разработанного метода и алгоритмов из двух предыдущих пунктов для наиболее показательных значений. Когда новый метод выигрывает, а когда нет?
- Написаны выводы о влиянии величины шага и размера промежутка интегрирования, а также о точности и быстродействии метода.

Задание 2. Сэмплирование.

Задайтесь параметрами $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$, b и рассмотрите функции

$$y_1(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad y_2(t) = \mathrm{sinc}(bt).$$

В этом задании вам предстоит исследовать теорему Найквиста-Шеннона-Котельникова на двух примерах. Чтобы результат численного моделирования был максимально близок к математическому, мы просим вас *задавать* рассматриваемые функции на как можно более *большом* промежутке. Однако, чтобы картинка получилось достаточно наглядной, мы рекомендуем *строить графики* полученных функций на относительно *коротком* промежутке (оставляя часть заданной функции за пределами графического окна, но показывая самую весомую).

Выполните следующие шаги последовательно для каждой функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$:

- Задайте в `MATLAB` соответствующие массивы времени `t` и значений `y`. Массив времени `t` должен быть задан с достаточно частым шагом – в данный момент мы имитируем непрерывную функцию. Постройте непрерывный график.
- Теперь задайте сэмплированный вариант указанной функции: рассмотрите разреженный вариант массива времени и соответствующий ему массив значений. Постройте дискретный график поверх непрерывного.
- Примените **интерполяционную формулу** из лекции к сэмплированным данным с целью восстановить непрерывную функцию. Должны получиться новые массивы времени и значений – той же размерности, что и исходные.
- Постройте график восстановленной функции поверх исходной.
- Исследуйте влияние шага дискретизации на вид восстановленной функции.

Ожидаемые результаты:

- Для каждый из функций $y_n(t)$:
  - Построен график функции $y_n(t)$ без видимой дискретизации.
  - Проведены исследования и выбраны наиболее показательные значения T (промежуток интегрирования по времени) и Δt (шаг сэмплирования), а также найдены соответствующие им B, $\Delta\nu$.
  - Для каждой комбинации $T, \Delta t$ найдены интерполяции функции исходя из формулы Найквиста-Шеннона-Котельникова. Построены сравнительные графики исходной $y_n(t)$ без видимой дискретизации, сэмплированной и интерполяции.

  - С помощью разработанного алгоритма (пункт 1.4) найдены образы функций $\hat{y}_n(\nu)$. Построены сравнительные графики образа $\hat{y}_n(\nu)$ для случаев функции без видимой дискретизации, сэмплированного варианта и интерполяции на соответствующих им частотах. Графики должны накладываться. Для наглядности нанесите вертикальные линии для обозначения частоты B.

- Соотнесены полученные результаты с теоремой Найквиста-Шеннона-Котельникова.

- Выводы.

Контрольные вопросы для подготовки к защите:

1. Какие виды преобразования Фурье в зависимости от характеристик функции (непрерывность-дискретность, периодичность-апериодичность) существуют?
2. Дискретное преобразование Фурье: формула, свойства.
3. DTFT преобразование Фурье: формула, свойства.
4. Что такое Дельта-распределение – её приближения, образ, связь с дискретным преобразованием.
5. Матрица дискретного преобразования Фурье. Какие у неё свойства?
6. Что такое Сэмплирование? Какая связь шага частоты и промежутка времени?
7. Теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова. Какая формула интерполяции?
8. Почему теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова в полной мере не применима на практике?
9. Виды изученных пространств функций, как задаются?
10. Что такое пространство Шварца? Что такое двойственное пространство Шварца?
11. Как связь гладкости функции и скорости убывания образа?