Автор: Смирнов Алексей Владимирович ИСУ: 409578 Группа: R3242

Отчет по расчетно-графической работе №1 «Численное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка»

Санкт-Петербург, 2024 г.

Вариант 16

Методом Рунге-Кутта проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' = 2y + xe^{-x}$$

на отрезке $[0, 0.3]$ с шагом $h = 0.1$. Найти аналитическое решение уравнения $y = y(x)$ и сравнить значение точного и приближенного решений в точках$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Все вычисления вести с шестью десятичными знаками.

Численное решение

Понизим порядок уравнения превратив его в систему

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 2y + xe^{-x} \end{cases}$$

Пусть

$$g(x, y) = 2y + xe^{-x}$$
$$f(z) = z$$

Одна итерация метода Рунге-Кутта

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \end{cases}$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right)$$
$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}\right)$$

$$x_0 = 0$$
$$y_0 = y(0) = 2$$
$$z_0 = y'(0) = 1$$

$$K_1^{(0)} = hg(x_0, y_0) = 0.4$$
$$l_1^{(0)} = hf(z_0) = 0.1$$

$$K_2^{(0)} = hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{l_1^{(0)}}{2}\right) = 0.414756$$
$$l_2^{(0)} = hf\left(z_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = 0.120000$$

$$K_3^{(0)} = hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{l_2^{(0)}}{2}\right) = 0.416756$$

$$l_3^{(0)} = hf\left(z_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = 0.120738$$

$$K_4^{(0)} = hg\left(x_0 + h, y_0 + \frac{l_3^{(0)}}{2}\right) = 0.421122$$

$$l_4^{(0)} = hf\left(z_0 + \frac{K_3^{(0)}}{2}\right) = 0.120838$$

$$\Delta y_0 = 0.702313,\ \Delta z_0 = 2.484147$$

Все вычисления для каждой итерации представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Результаты вычислений численного решения уравнения

i	x	y	z	K	l	Δy	Δz
0	0.00	2.000000	1.000000	0.400000	0.100000	0.100000	0.400000
	0.05	2.050000	1.200000	0.414756	0.120000	0.240000	0.829512
	0.05	2.060000	1.207378	0.416756	0.120738	0.241476	0.833512
	0.10	2.060369	1.208378	0.421122	0.120838	0.120838	0.421122
						0.702313	2.484147
1	0.10	2.117052	1.414024	0.432459	0.141402	0.141402	0.432459
	0.15	2.187753	1.630254	0.450461	0.163025	0.326051	0.900923
	0.15	2.198565	1.639255	0.452624	0.163926	0.327851	0.905247
	0.20	2.199015	1.640336	0.456178	0.164034	0.164034	0.456178
						0.959338	2.694806
2	0.20	2.276942	1.863159	0.471763	0.186316	0.186316	0.471763
	0.25	2.370100	2.099040	0.493490	0.209904	0.419808	0.986980
	0.25	2.381894	2.109904	0.495849	0.210990	0.421981	0.991698
	0.30	2.382437	2.111083	0.498712	0.211108	0.211108	0.498712
						1.239213	2.949153
3	0.30	2.483477	2.354684				

Аналитическое решение

Линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$y'' = 2y + xe^x$$

$$y'' - y = xe^x$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$y_0 = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

Подбор частного решения по виду правой части

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= (Ax + B) && e^{-x} \\ \tilde{y}' &= (A - B - Ax) && e^{-x} \\ \tilde{y}'' &= (-2A + B + Ax)e^{-x}\end{aligned}$$

$$\tilde{y}'' - 2\tilde{y} = e^{-x}(-Ax - 2A - B) = xe^{-x}$$

$$\begin{cases}-Ax & = x \\ -2A - B = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}A = -1 \\ B = 2\end{cases}$$

Общее решение уравнение

$$y(x) = C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_1 e^{-\sqrt{2}x} + (2 - x)e^{-x}$$

Начальные условия: $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

$$\begin{cases}1 = -\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 - 1 - 2 \\ 2 = C_1 + C_2 + 2\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}C_1 = -C_2 \\ -\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 = 2\end{cases}$$

$$2\sqrt{2}C_2 = 2 \Longrightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases}C_2 = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ C_1 = & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Финальное решение

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x} + (2 - x)e^{-x}$$

Сравнение результатов

Представлены в Таблице 2.

Таблица 2. Сравнение численного и аналитического решения

x_i	метод Рунге-Кутта y_i	Точное решение $y(x_i)$	Абсолютная погрешность $\lvert y_i - y(x_i) \rvert$
x_0	2.000000	2.000000	0.000000
x_1	2.117052	2.120526	0.003474
x_2	2.276942	2.284425	0.007483
x_3	2.483477	2.495716	0.012239