Автор: Смирнов Алексей Владимирович ИСУ: 409578 Группа: R3242

Лабораторная работа №1: Ряды Фурье

Санкт-Петербург, 2025 г.

Содержание

Задание 1. Вещественная функция

Квадратная волна

Для функции

$$f(x) = \begin{cases} a, x \in [t_0, t_1) \\ b, x \in [t_1, t_2) \end{cases}$$

Выбрали $t_0 = 0, t_1 = \frac{7}{2}, t_2 = 7, a = 3, b = 5$. Период функции $T = 7$.

Рассмотрим частичные суммы Фурье для функции $f(t)$

$$F_N(t) = \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{-i\omega_n t}$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n, c_n вычисляются по следеющим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \,\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \mathrm{d}x$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{T} x} \,\mathrm{d}x$$

Аналитическое решение

Вычислим значения коэффицентов для $N = 2$:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int_{-3.5}^{3.5} f(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{7}\left(\int_{-3.5}^{0} 3\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3.5} 5\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{7}\left((3x)\Big|_{3.5}^{0} + (5x)\Big|_{0}^{3.5}\right) = \\
&= \frac{1}{7}\left(0 - \left(-\frac{3\times 7}{2}\right) + \frac{5\times 7}{2} - 0\right) = \frac{1}{7}\times\left(-\frac{7}{2}\right)\times 8 = 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}x\right)\mathrm{d}x\right)_{\substack{n=1\\T=7}} = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(2\pi\frac{1}{T}x\right)\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{2}{7}\left(\int_{-3.5}^{0} 3\cos\left(2\pi\frac{1}{7}x\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{3.5} 5\cos\left(2\pi\frac{1}{7}x\right)\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{2}{7}\left[3\times\frac{7}{2\pi}\int_{-3.5}^{0}\cos\left(2\pi\frac{1}{7}x\right)\mathrm{d}\left(2\pi\frac{1}{7}x\right) + 5\times\frac{7}{2\pi}\int_{0}^{3.5}\cos\left(2\pi\frac{1}{7}x\right)\mathrm{d}\left(2\pi\frac{1}{7}x\right)\right] = \\
&= \frac{21}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{7}\right)\Bigg|_{x=-3.5}^{x=0} + \frac{35}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{7}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3.5} = \\
&= \frac{21}{2\pi}(\sin(-\pi) - \sin(0)) + \frac{35}{2\pi}(\sin(0) - \sin(\pi)) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(2\pi\frac{n}{T}x\right)\mathrm{d}x\right)_{\substack{n=2\\T=7}} = \frac{2}{7}\left(\int_{-3.5}^{3.5} f(x)\cos\left(4\pi\frac{x}{T}\right)\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{2}{7}\left[\int_{-3.5}^{0} 3\cos\left(4\pi\frac{x}{7}\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{3.5} 5\cos\left(4\pi\frac{x}{7}\right)\mathrm{d}x\right] = \\
&= \frac{2}{\cancel{7}}\times 3\times\frac{\cancel{7}}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{7}\right)\Bigg|_{-3.5}^{0} + \frac{2}{\cancel{7}}\times 5\times\frac{\cancel{7}}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{7}\right)\Bigg|_{0}^{3.5} = \\
&= \frac{3}{2\pi}(\sin(-2\pi) - \sin(0)) + \frac{5}{2\pi}(\sin(0) - \sin(2\pi)) = 0
\end{aligned}
$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}x\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{\substack{n=1\\T=7}} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x)\sin\left(2\pi\frac{x}{7}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{7}{2}}^{0} 3\sin\left(2\pi\frac{x}{7}\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{7}{2}} 5\sin\left(2\pi\frac{x}{7}\right)\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{7}\int_{-\frac{7}{2}}^{0} 3\sin\left(2\pi\frac{x}{7}\right)\frac{7}{2\pi}\,\mathrm{d}\left(\frac{2\pi x}{7}\right) + \frac{2}{7}\int_{0}^{\frac{7}{2}} 5\sin\left(2\pi\frac{x}{7}\right)\frac{7}{2\pi}\,\mathrm{d}\left(\frac{2\pi x}{7}\right) =$$

$$= -\frac{3\cos\left(\frac{2\pi x}{7}\right)}{\pi}\Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{0} + -\frac{5\cos\left(\frac{2\pi x}{7}\right)}{\pi}\Bigg|_{0}^{\frac{7}{2}} = \left[-\frac{3\cos 0}{\pi} + \frac{3\cos(-\pi)}{\pi}\right] + \left[-\frac{5\cos(\pi)}{\pi} + \frac{5\cos 0}{\pi}\right] =$$

$$= \frac{3}{\pi}[-1 + (-1)] + \frac{5}{\pi}[-(-1) + 1] = \frac{10}{\pi} - \frac{6}{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(2\pi\frac{n}{T}x\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{\substack{n=2\\T=7}} = \frac{2}{7}\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x)\sin\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{7}\left[\int_{-\frac{7}{2}}^{0} 3\sin\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{7}{2}} 5\sin\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{2}{7}\left[\frac{3\times 7}{4\pi}\int_{-\frac{7}{2}}^{0} \sin\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\mathrm{d}\left(4\frac{\pi}{7}x\right) + \frac{5\times 7}{4\pi}\int_{0}^{\frac{7}{2}} \sin\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\mathrm{d}\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{7}\left[-\frac{21}{4\pi}\cos\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{0} - \frac{35}{4\pi}\cos\left(4\frac{\pi}{7}x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{7}{2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{7}\left[-\frac{21}{4\pi}\underbrace{(\cos 0 - \cos(-2\pi))}_{0} - \frac{35}{4\pi}\underbrace{(\cos 2\pi - \cos 0)}_{0}\right] = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^0\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} = 4$$

$$c_1 = \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i 2\pi \frac{n}{T} x} \, \mathrm{d}x \right)_{\substack{T=7 \\ n=1}} = \frac{1}{7} \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{7} x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{7} \left[\int_{-\frac{7}{2}}^{0} 3 e^{-i\frac{2\pi}{7}x} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{7}{2}} 5 e^{-i\frac{2\pi}{7}x} \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \frac{1}{7} \left[\frac{3 \times 7}{2\pi} \int_{-\frac{7}{2}}^{0} e^{-i\frac{2\pi}{7}x} \, \mathrm{d}\left(\frac{2\pi}{7} x \right) + \frac{5 \times 7}{2\pi} \int_{0}^{-\frac{7}{2}} e^{-i\frac{2\pi}{7}x} \, \mathrm{d}\left(\frac{2\pi}{7} x \right) \right] =$$

$$= \left(\frac{3}{2\pi} \times \left(\frac{1}{-i} \right) e^{-i\frac{2\pi}{7}x} \right) \Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{0} + \left(\frac{5}{2\pi} \times \left(\frac{1}{-i} \right) e^{-i\frac{2\pi}{7}x} \right) \Bigg|_{0}^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{3i}{2\pi} (e^0 - e^{i\pi}) + \frac{5i}{2\pi} (e^{-i\pi} - e^0) = \frac{3i}{\cancel{2}\pi} \times \cancel{2} + \frac{5i}{\cancel{2}\pi} \times (-\cancel{2}) =$$

$$= -\frac{2i}{\pi}$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i \frac{4\pi}{7} x} \, \mathrm{d}x \right)_{\substack{T=7 \\ n=2}} = \frac{1}{7} \int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) e^{-i \frac{4\pi}{7} x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{7} \left[\int_{-\frac{7}{2}}^{0} 3 e^{-i\frac{4\pi}{7}x} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{7}{2}} 5 e^{-i\frac{4\pi}{7}x} \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{7}} \left[\frac{3 \times \cancel{7}}{-4\pi i} \int_{-\frac{7}{2}}^{0} e^{-i\frac{4\pi}{7}x} \, \mathrm{d}\left(-i \frac{4\pi}{7} x \right) + \frac{5 \times \cancel{7}}{-4\pi i} \int_{0}^{\frac{7}{2}} e^{-i\frac{4\pi}{7}x} \, \mathrm{d}\left(-i \frac{4\pi}{7} x \right) \right] =$$

$$= \frac{3i}{4\pi} e^{-i\frac{4\pi}{7}x} \Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{0} + \frac{5i}{4\pi} e^{-i\frac{4\pi}{7}x} \Bigg|_{0}^{\frac{7}{2}} = \frac{3i}{4\pi} (e^0 - e^{2\pi i}) + \frac{5i}{4\pi} (e^{-2\pi i} - e^0) = 0$$

Воспользуемся фактом, что функция $f(x)$ вещественная, поэтому:

$$c_{-1} = \overline{c_1} = \frac{2i}{\pi}$$

$$c_{-2} = \overline{c_2} = 0$$

Численное решенеие

Для вычисления значения коэффициентов при помощи численных методов написали программу на **Python3.13** с использованием библиотеки **numpy** (Листинг 1):

Затем вычислили коэффиценты для квадратной волны (Листинг 2):

Сравнение аналитического и численного решения

Коэффиценты полученные численными методами будем обозначать с «ˆ» сверху.

Для численного решения возьмем разбиение отрезка $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ на 2000 точек, получим:

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_0 &= \frac{\hat{a}_0}{2} = 3.999499749874937, & \varepsilon_{\frac{a_0}{2}} &= 0.0125\% \\
\hat{a}_1 &= 0.0010005002501249597, & \Delta a_1 &= 0.0010005002501249597 \\
\hat{a}_2 &= -0.001000500250125277, & \Delta a_2 &= -0.001000500250125277 \\
\hat{b}_1 &= 1.2732392826737682, & \varepsilon_{b_1} &= -2.058225379424016 \times 10^{-5}\% \\
\hat{b}_2 &= 1.5723695966838946 \times 10^{-06}, & \Delta b_2 &= 1.5723695966838946 \times 10^{-06}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\hat{c}_1 = 0.0005002501250625434 - 0.6366196413368842i, \\
\Delta(\operatorname{Re} \hat{c}_1) = 0.005002501250625434 \\
\varepsilon \operatorname{Im}(c_1) = -2.0582253776800817 \times 10^{-5}\% \\
\hat{c}_2 = -0.0005002501250626068 - 7.86184798278506 \times 10^{-07} i \\
\Delta(\operatorname{Re} \hat{c}_2) = -0.0005002501250626068 \\
\Delta(\operatorname{Im}) = -7.86184798278506 \times 10^{-07} i
\end{gathered}
$$

Для c_{-1}, c_{-2} отклонение аналогичное.

Графики

Построим графики каждого разложения для разных N.

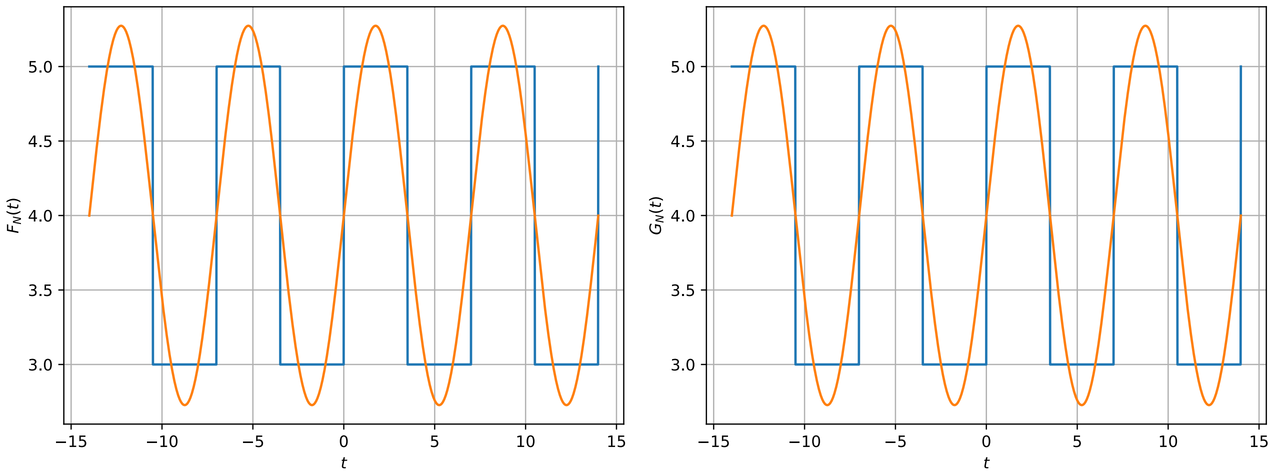

Рис. 1. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

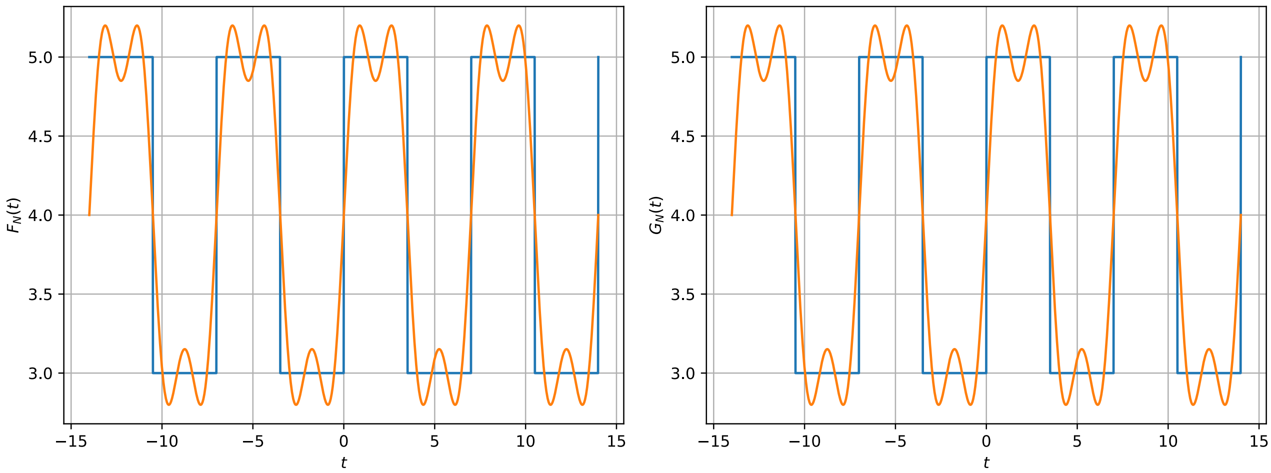

Рис. 2. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

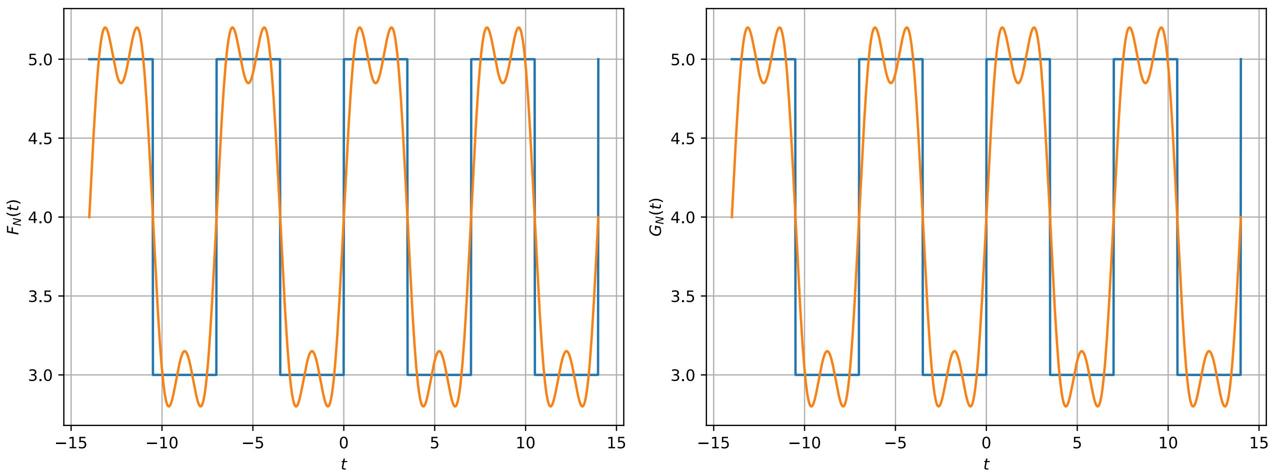

Рис. 3. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

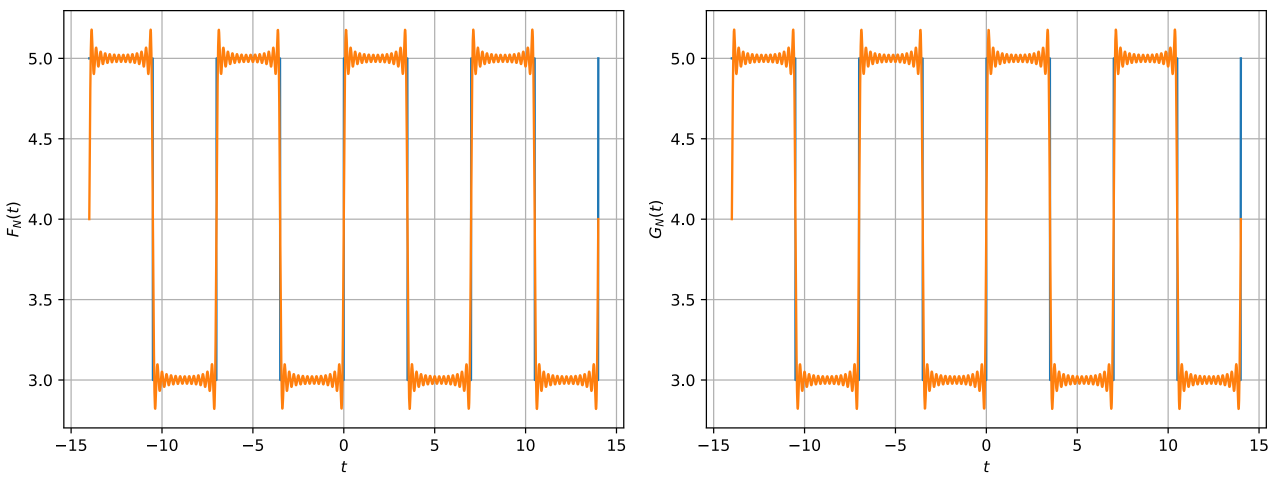

Рис. 4. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

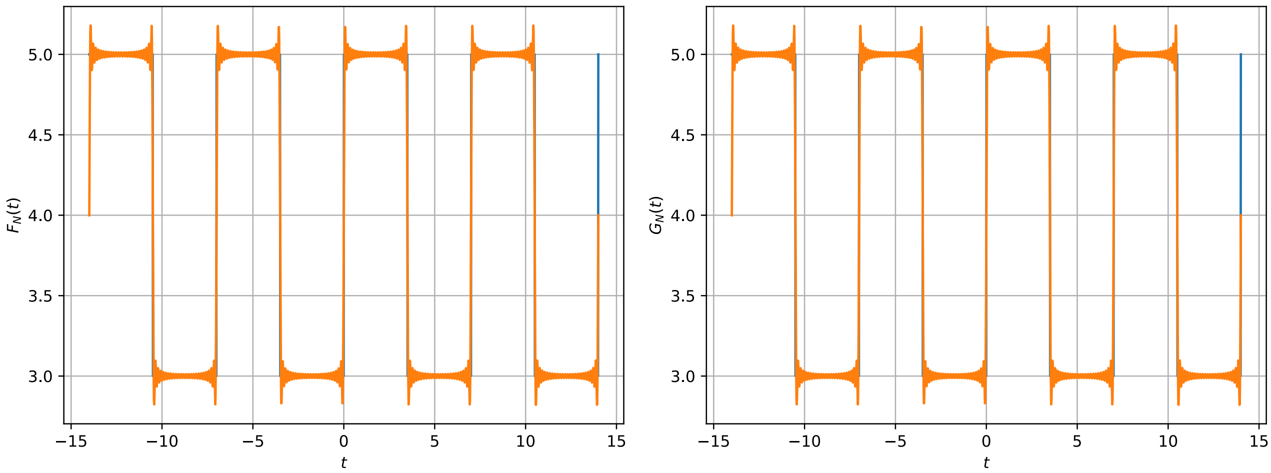

Рис. 5. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

Равенство Парсеваля

Проверим выполнения равенства Парсеваля для функции $F_N(t)$ при $N = 50$. Равенство имеет слещующий вид:

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 \ \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \ \|\sin(\omega_n t)\|^2) = \|f(t)\|^2$$

где

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2 \,\mathrm{d}x$$

Получили следующие значения:

$$\|f\|^2 = 118.97198599299651$$

$$\sum(a_n^2 \ \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \ \|\sin(\omega_n t)\|^2) =$$

$$= \sum(|c_n|^2 \ \|e^{-i\omega_n t}\|^2) = 118.91537227725621$$

$$\varepsilon = -0.0476\%$$

Равенство выполняется с небольшим отклонением.

Другие функции

Четная функция

$$f(x) = \cos(2x)\sin(3x)\sin(x)$$

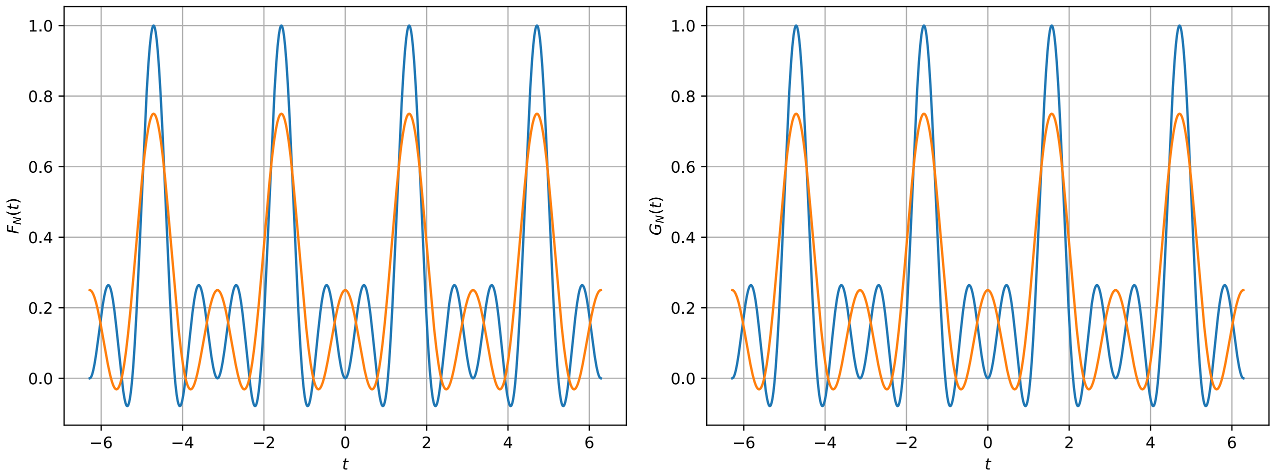

Рис. 6. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

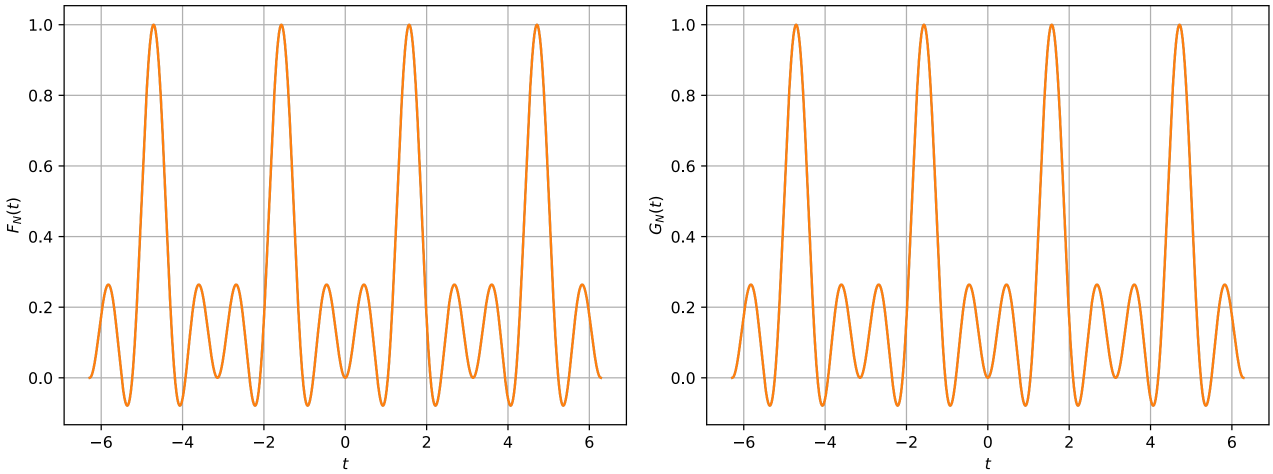

Рис. 7. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

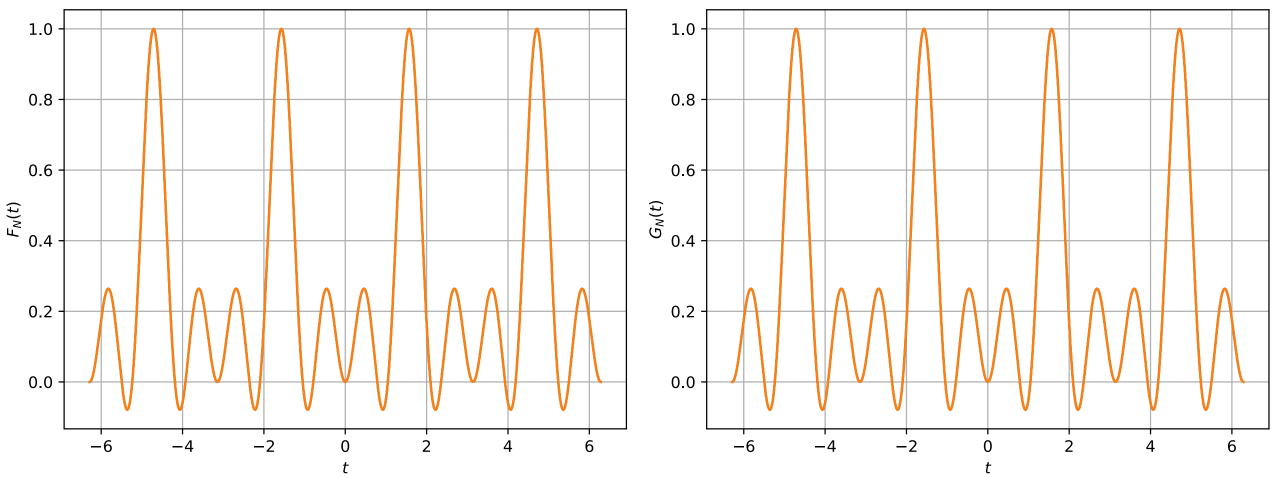

Рис. 8. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

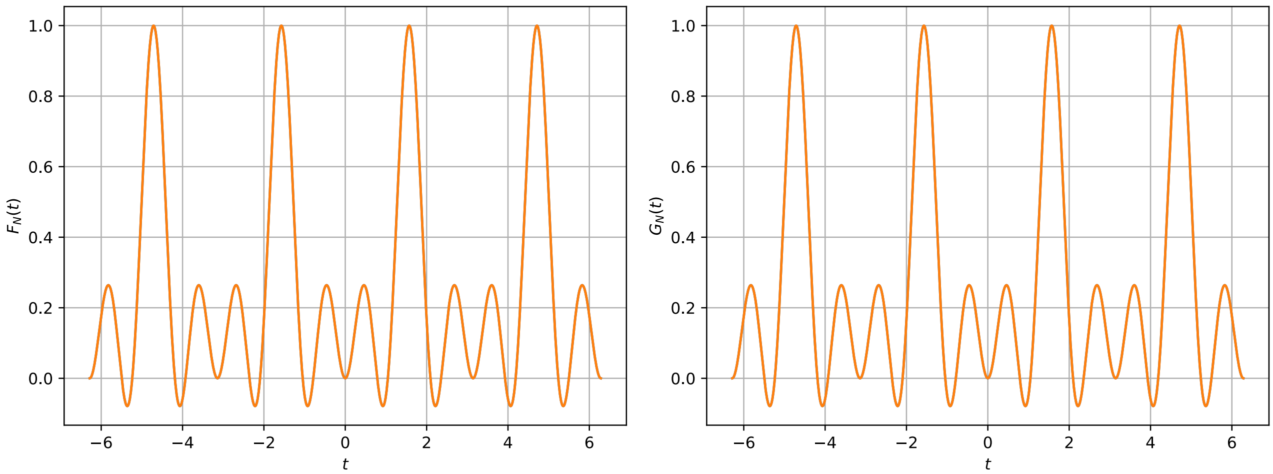

Рис. 9. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

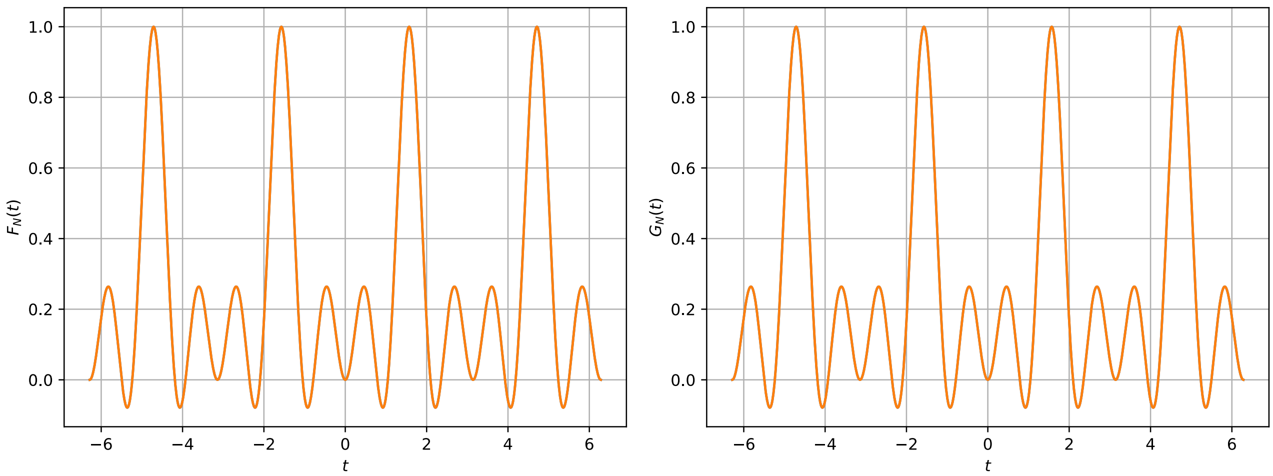

Рис. 10. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

$$\frac{a_0}{2} = 0.25$$

$$a_1 = -0.25 \qquad b_1 = 0$$

$$a_2 = 0.25 \qquad b_2 = 0$$

$$c_0 = 0.25$$

$$c_{-2} = \qquad c_1 = 0.125$$

$$c_{-1} = \qquad c_2 = -0.125$$

$$\|f\|^2 \approx 0.49087$$

$$\sum(a_n^2 \ \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \ \|\sin(\omega_n t)\|^2) =$$

$$= \sum(|c_n|^2 \ \|e^{-i\omega_n t}\|^2) \approx 0.49087$$

Равенство выполняется

Нечетная функция

$$f(x) = \sin(2x)\cos(x), T = 2\pi$$

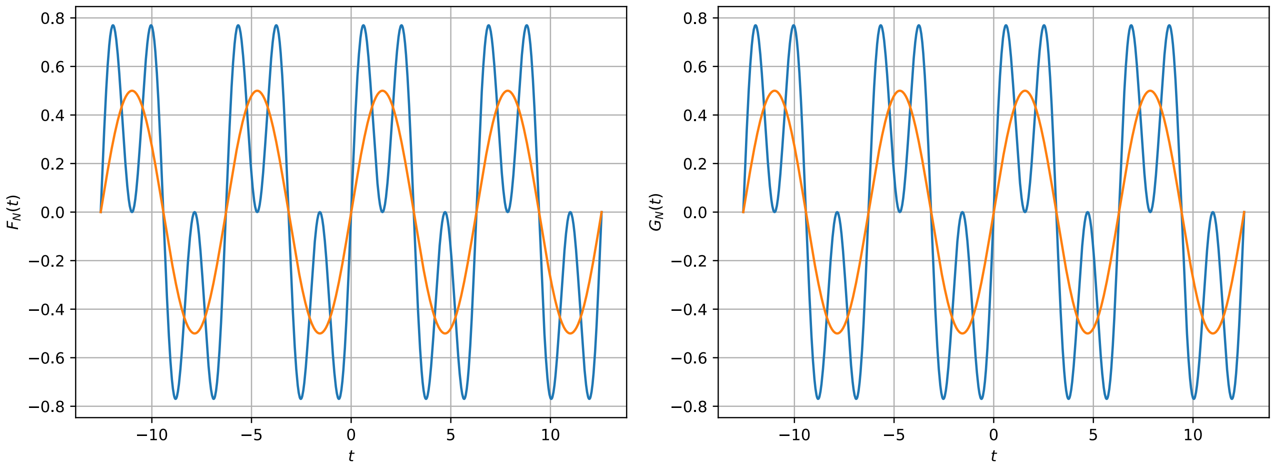

Рис. 11. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

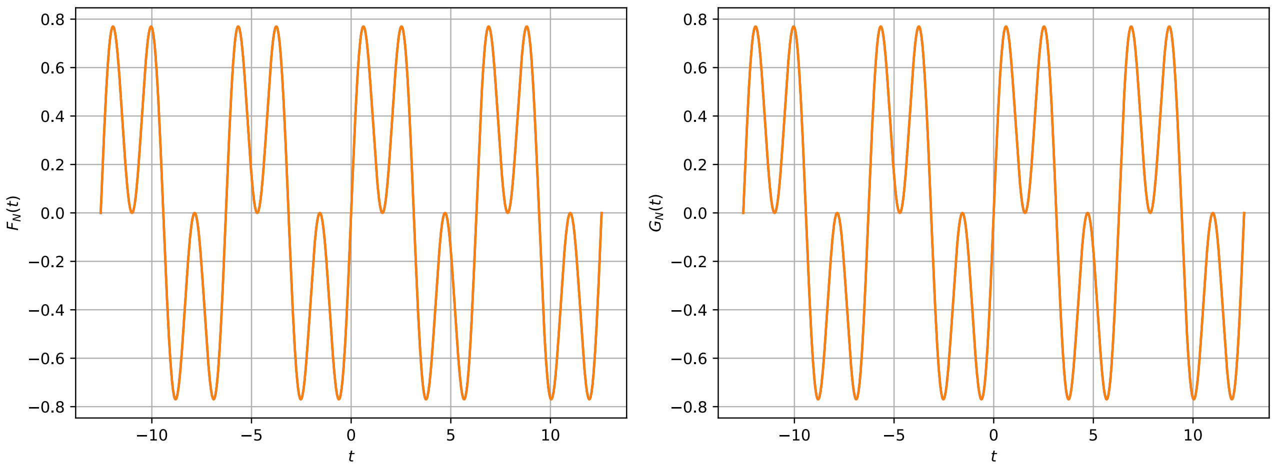

Рис. 12. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

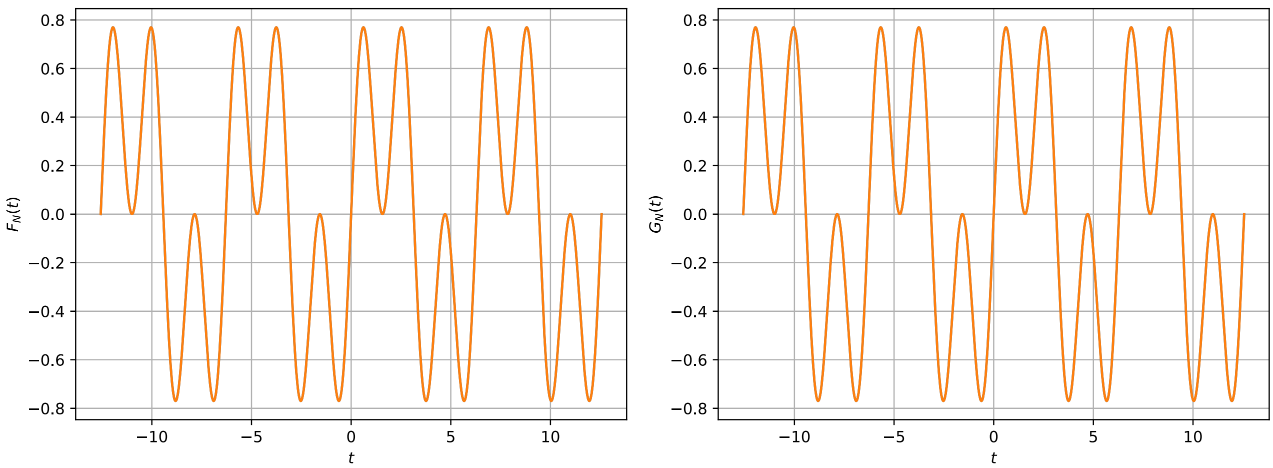

Рис. 13. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

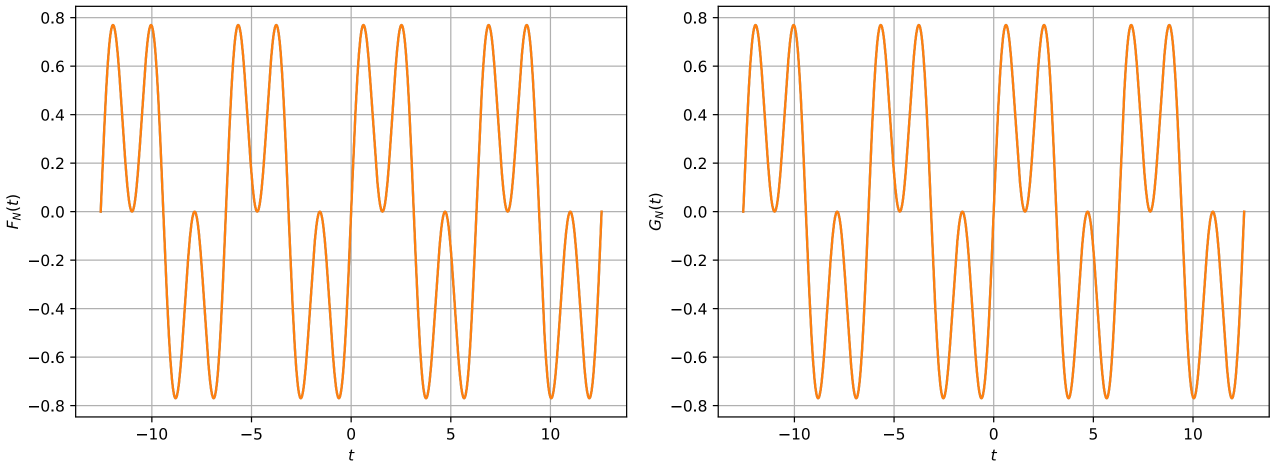

Рис. 14. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

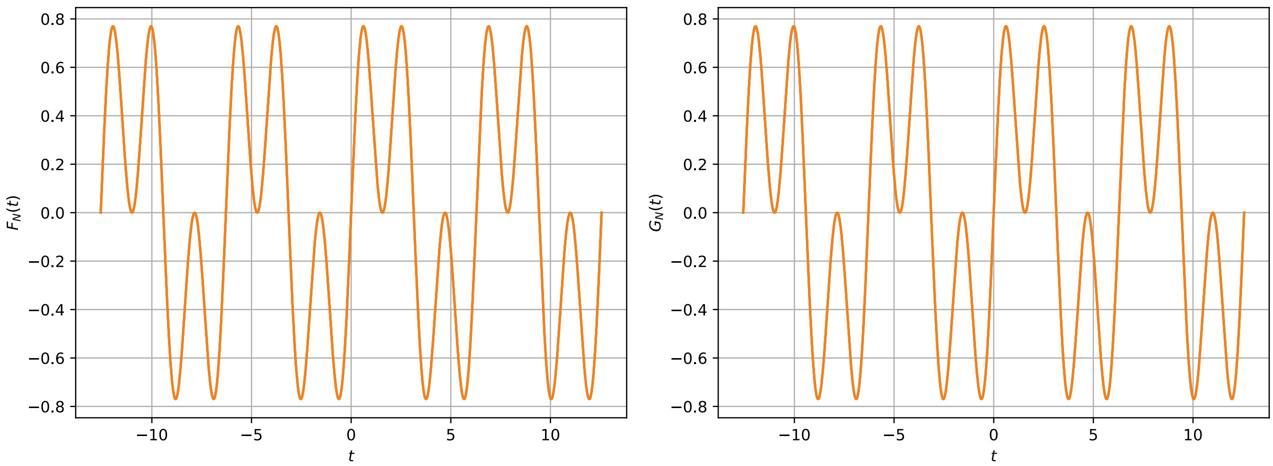

Рис. 15. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= 0 & c_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 & b_1 &= 0.5 \\ a_2 &= 0 & b_2 &= 0 \\ c_{-2} &= 0 & c_2 &= 0 \\ c_{-1} &= 0.25i & c_1 &= -0.25i \end{aligned}$$

$$\|f\|^2 \approx 1.57079$$

$$\sum (a_n^2 \ \| \cos(\omega_n t) \|^2 + b_n^2 \ \| \sin(\omega_n t) \|^2) =$$

$$= \sum (|c_n|^2 \ \| e^{-i\omega_n t} \|^2) \approx 1.57079$$

Равенство выполняется

Функция без четности

$$f(x) = (x \bmod 3)^2 + 3(x \bmod 3) - 7, T = 3$$

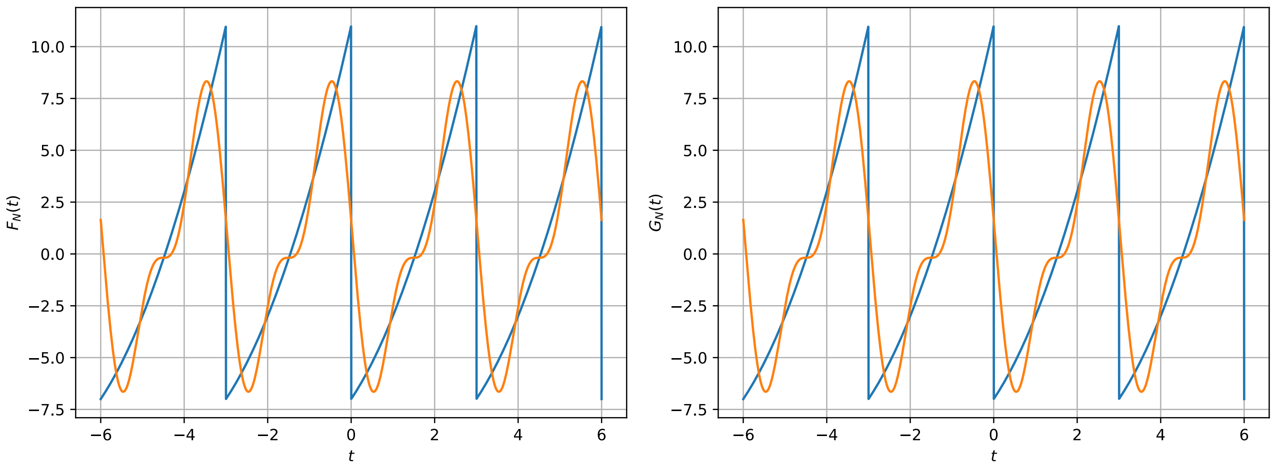

Рис. 16. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 2$

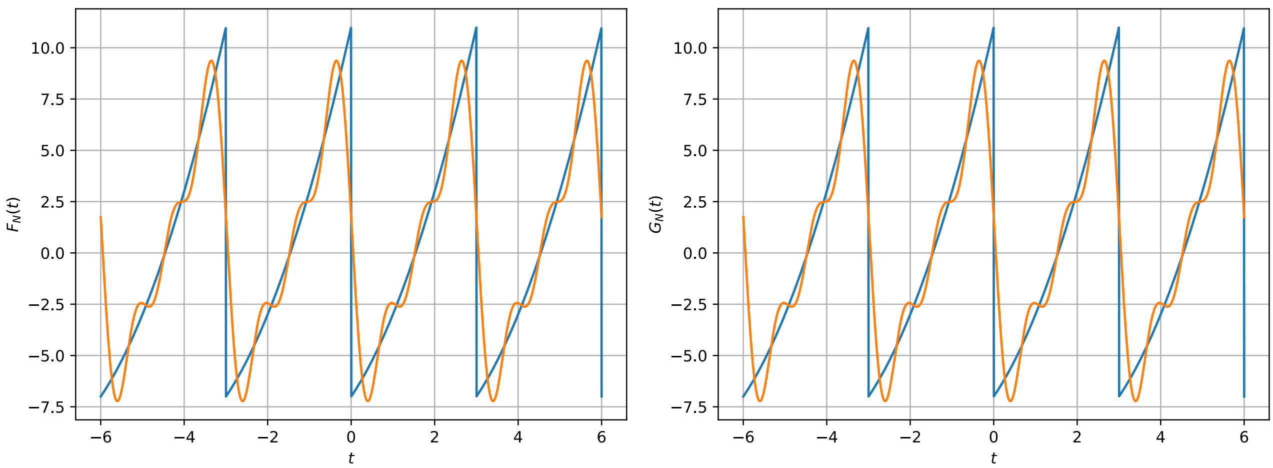

Рис. 17. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 3$

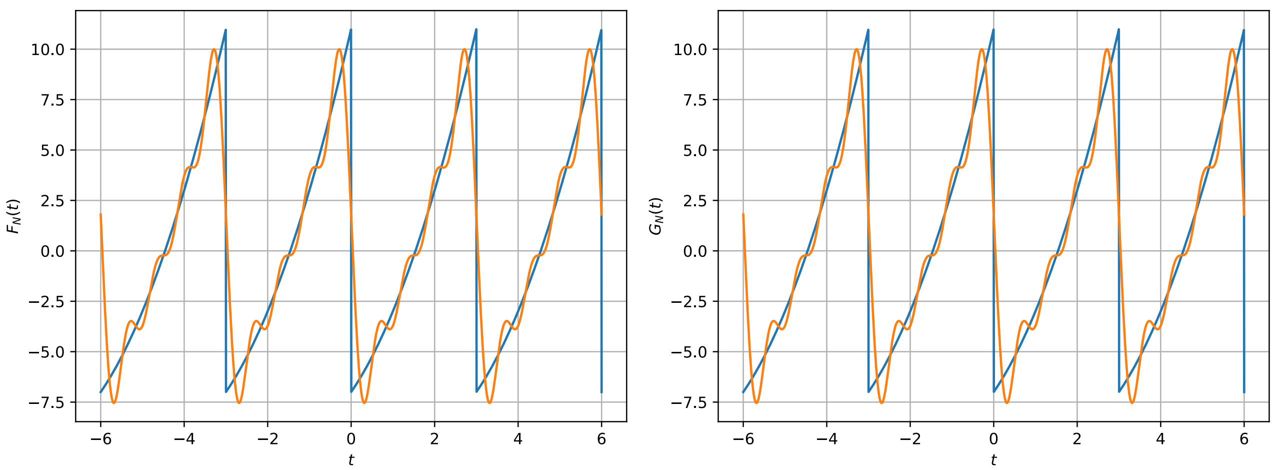

Рис. 18. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 4$

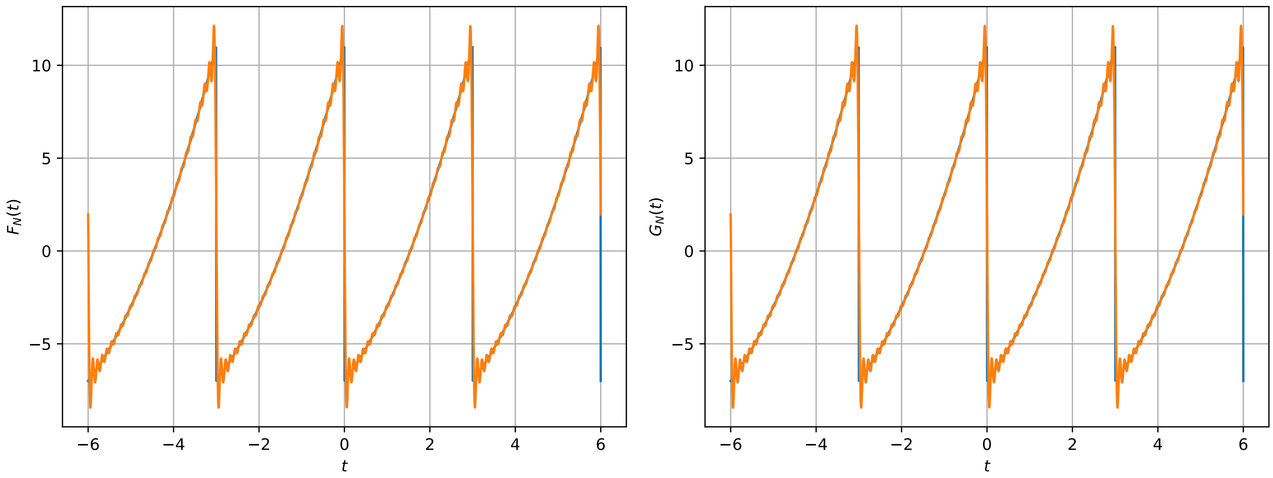

Рис. 19. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 27$

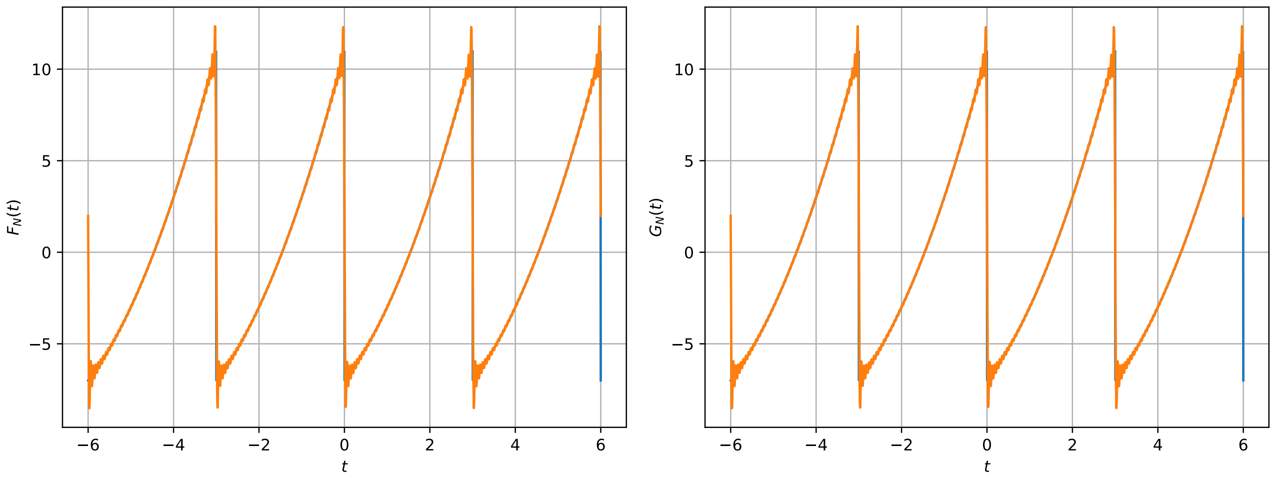

Рис. 20. Разложения $F_N(t)$ и $G_N(t)$ при $N = 50$

$$\frac{a_0}{2} = 0.5$$

$$a_1 = 0.91189$$

$$a_2 = 0.22797$$

$$b_1 = -5.72958$$

$$b_2 = -2.86479$$

$$c_{-2} = 0.11399 - 1.4324i$$

$$c_{-1} = 0.45595 - 2.86479i$$

$$c_0 = 0.5$$

$$c_1 = 0.45595 + 2.86479i$$

$$c_2 = 0.11399 + 1.4324i$$

$$\|f\|^2 \approx 83.09997$$
$$\sum(a_n^2 \ \|\cos(\omega_n t)\|^2 + b_n^2 \ \|\sin(\omega_n t)\|^2) =$$
$$= \sum(|c_n|^2 \ \|e^{-i\omega_n t}\|^2) \approx 82.12696$$

Выводы

Убедились в том, что любую перодическую функцию можно представить в виде ряда синусов, косинусов или экспонент с мнимым показателем. Точность преставления зависит от числа членов ряда. Построили графики, накладывающие график частичного разложения функции на график самой фукнции.

Привели формулы для вычисления коэффицентов a_n, b_n, c_n, а также вычисления коэффициентов вручнную для первой функции.

Создали программу для вычисления коэффициантов a_n, b_n, c_n и вычислили их значения для каждой функции.

В последнюю очередь проверили выполенине равенства Парсеваля. Оно выполняется, это говорит о том, что элемент f на самом деле является суммой своего ряда Фурье.[1]

Задание 2. Комплексная функция

Выбрали $T = 8$, $R = 2$, получили комплексную функцию $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\mathrm{Re}(f(t)) = \begin{cases} 2, & x \in [-1, 1) \\ 4 - 2t, & x \in [1, 3) \\ -2, & x \in [3, 5) \\ -12 + 2t, & x \in [5, 7) \end{cases} \qquad \mathrm{Im}(f(t)) = \begin{cases} 2t, & x \in [-1, 1) \\ 2, & x \in [1, 3) \\ 8 - 2t, & x \in [3, 5) \\ -2, & x \in [5, 7) \end{cases}$$

Поведение функции хорошо видно на графике (Рис. 21):

[1](Ряды Фурье. Преобразование Фурье : учебно-методическое пособие / под редакцией А. Н. Канатникова. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. — 51 с. — Текст : электронный https://e.lanbook.com/book/52059 (дата обращения: 21.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей. — С. 8.).

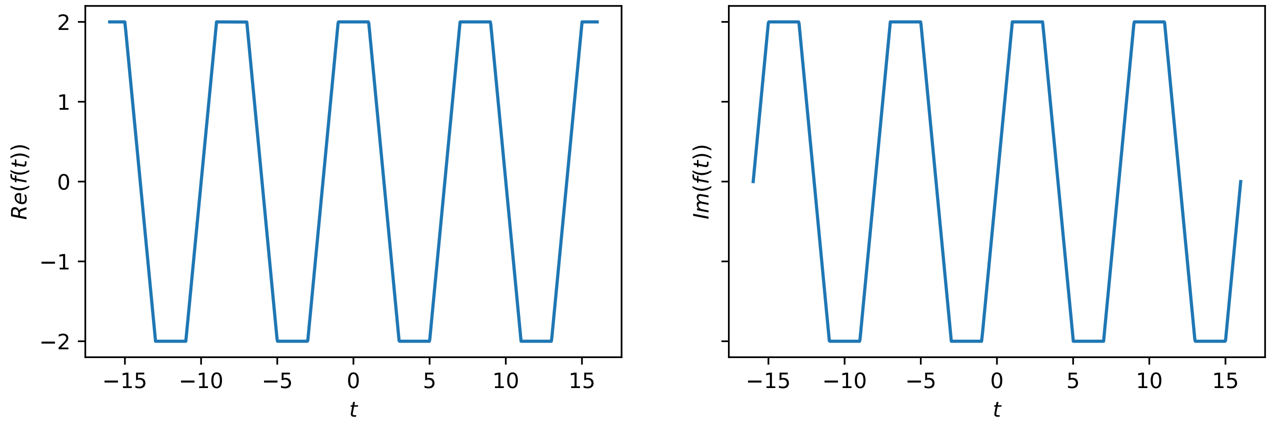

Рис. 21. График функции $f(t)$

Частичные суммы

Составили частичные суммы разложения $G_N(t)$ для $f(t)$ и построили их графики, наложив их на график функции:

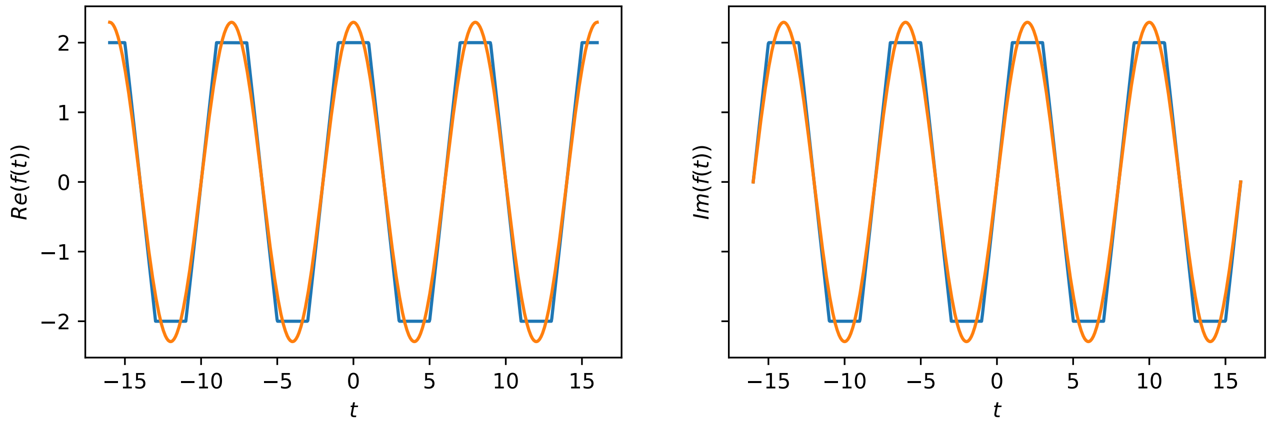

Рис. 22. Разложение $G_N(t)$ при $N = 1$

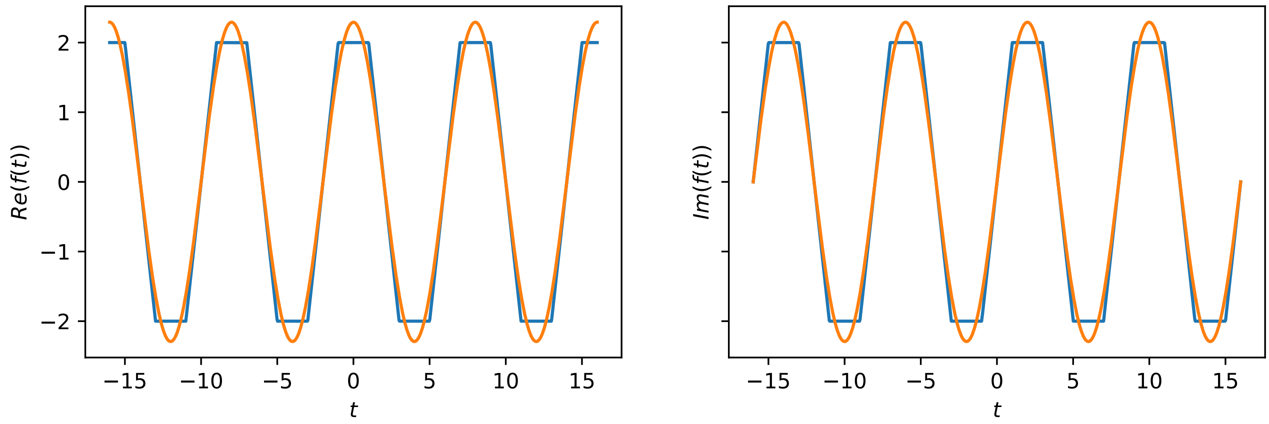

Рис. 23. Разложение $G_N(t)$ при $N = 2$

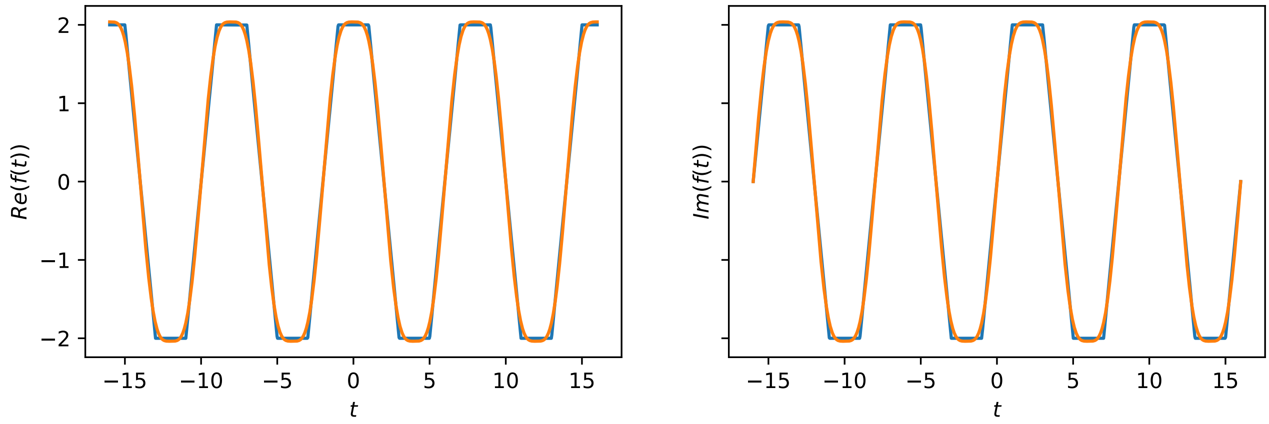

Рис. 24. Разложение $G_N(t)$ при $N = 3$

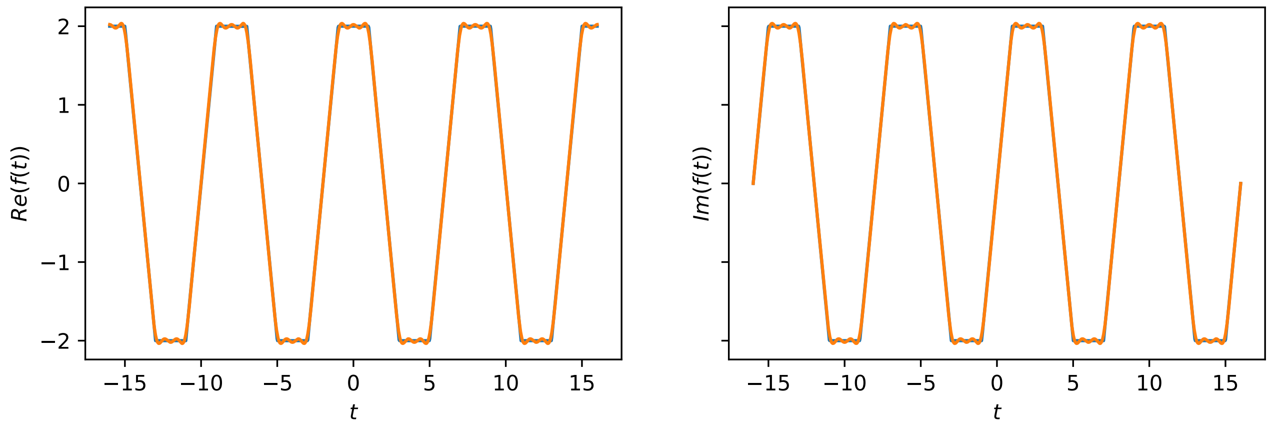

Рис. 25. Разложение $G_N(t)$ при $N = 10$

Вычисление коэффициантов

Аналитически

Вычислили значения коэффициентов $\{c_n\}_{n=-2}^{2}$:

$$c_{-2} = \frac{1}{8}\int_{-1}^{7} f(t)e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int_{-1}^{1}(2+2ti)e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3}((4-2t)+2i)e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{5}(-2+(8-2t)i)e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{7}((-12+2t)-2i)e^{i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{8(\pi-2)}{\pi^2} - \frac{8i(-2+\pi)}{\pi^2} - \frac{8(-2+\pi)}{\pi^2} + \frac{8i(-2+\pi)}{\pi^2}\right] = 0$$

$$c_{-1} = \frac{1}{8}\int_{-1}^{7} f(t)e^{i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int_{-1}^{1}(2+2ti)e^{i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3}((4-2t)+2i)e^{i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{5}(-2+(8-2t)i)e^{i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{7}((-12+2t)-2i)e^{i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{16\sqrt{2}(-2+\pi)}{\pi^2} - \frac{16\sqrt{2}(-2+\pi)}{\pi^2} + \frac{16\sqrt{2}(-2+\pi)}{\pi^2} - \frac{16\sqrt{2}(-2+\pi)}{\pi^2}\right] = 0$$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^{7} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int_{-1}^{1} 2 + 2ti\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} 4 - 2t + 2i\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{5} -2 + (8-2t)i\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{7} (-12+2t) - 2i\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$\frac{1}{8}[4 + -4i - 4 - 4i] = 0$$

$$\frac{1}{8} \int_{-1}^{7} f(t) e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int_{-1}^{1} (2+2ti)e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} ((4-2t)+2i)e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{5} (-2+i(8-2t))e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{7} ((-12+2t)-2i)e^{-i\frac{\pi}{4}t}\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{32\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{32\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{32\sqrt{2}}{\pi^2} + \frac{32\sqrt{2}}{\pi^2}\right] = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}$$

$$c_2 = \frac{1}{8} \int_{-1}^{7} f(t) e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{8}\left[\int_{-1}^{1} (2+2ti)e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} (4-2t+2i)e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{5} (-2+i(8-2t))e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t + \int_{5}^{7} (-12+2t-2i)e^{-i\frac{\pi}{2}t}\,\mathrm{d}t +\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{8(2+\pi)}{\pi^2} - \frac{8i(2+\pi)}{\pi^2} - \frac{8(2+\pi)}{\pi^2} + \frac{8i(2+\pi)}{\pi^2}\right] = 0$$

Численно

Воспользовались функциями из Листинга 1 и нашли численные значение коэффициентов $\{c_n\}_{n=-2}^{2}$ (См. Листинг 3):

$$c_{-2} = 5.01682 \times 10^{-07} \approx 0$$
$$c_{-1} = -1.39049 \times 10^{-10} + 5.55112 \times 10^{-17} i \approx 0$$
$$c_0 = -5.00500 \times 10^{-07} \approx 0$$
$$c_1 = 2.29264 + 1.73472 \times 10^{-18} i \approx 2.29264$$
$$c_2 = -4.99322 \times 10^{-07} \approx 0$$

Равенство Парсеваля

Проверим выполение равенства Парсеваля для $G_N(t)$ при $N = 50$. Проверка реализована в программе (См. Листинг 3-80)

$$\|f\|^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\overline{f(t)}\,\mathrm{d}t \approx 42.66666$$

$$\sum_{n=-2}^{2} |c_n|^2 \parallel e^{-i\omega_n t} \parallel^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-2}^{2} \left(|c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\omega_n t} e^{-i\omega_n t}\,\mathrm{d}t \right) \approx 42.66661$$

$$\varepsilon = -1.3124 \times 10^{-4}\%$$

Выводы

В этом задании выбрали периодическую комплекснозначную функцию, построили графики для ее мниной и действительной частей.

Нашли коэффициенты частичного разложения для $N = 2$ как вручную, так и програмно; привели вычисления и найденные значения. Увидели, что для комплекснозначной функции не выполняется условие $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Построили графики разложения $G_N(t)$ для различных N.

Убедились в выполнении равенства Парсеваля для функции $f(t)$ для базиса $\{e^{i\omega_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Заключение

В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены ряды Фурье и их применение к анализу периодических функций. Были рассмотрены вещественные и комплексные функции, вычислены их коэффициенты Фурье аналитическим и численным методами. Также было проверено выполнение равенства Парсеваля, что подтвердило корректность разложения функций в ряд Фурье.

Были построены графики частичных сумм разложения для различных значений N, что позволило визуально оценить приближение функций их рядами Фурье. Анализ результатов показал, что точность аппроксимации возрастает с увеличением количества членов ряда, а равенство Парсеваля выполняется с высокой точностью.

Приложение

Исходный код программ, а также графики можно найти в репозитории по адресу:

github.com/Hanqnero/typst/tree/master/FrequencyMethods/L1

Python

```
import numpy as np

def F_N(func, T, N, n_points=2000):
    """
    Generator that yields tuples of `(n, a_n, b_n, omega_n)`

    for `n = 0` yields `(0, a_0, a_0, 0)`
    """
    xs = np.linspace(-T/2,T/2, n_points)
    ys = np.vectorize(func)(xs)
    a0 = 1/T * np.trapezoid(ys, xs)
    yield (0, a0, a0, 0)

    for n in range(1, N+1):
        omega = 2*np.pi * n / T
        a = 2/T * np.trapezoid(ys * np.cos(omega * xs), xs)
        b = 2/T * np.trapezoid(ys * np.sin(omega * xs), xs)
        yield (n, a, b, omega)
    return

def G_N(func, T, N ,n_points=2000):
    """
    Generator that yields tuples of `(n, c_n, omega_n)`
    """
    xs = np.linspace(-T/2,T/2, n_points)
    ys = np.vectorize(func)(xs)
    for n in range(-N, N+1):
        omega = 2*np.pi * n / T
        c = 1/T * np.trapezoid(ys * np.exp(-1j*omega*xs), xs)
        yield (n, c, omega)
    return

def G_N_sum(func, T, N, n_points=2000):
```

```
    """Returns partial sum `G_N(t)`"""
    gen = G_N(func, T, N, n_points)
    other = np.array(list(gen))
    c = other[:, 1]; omega = other[:, 2]
    return lambda t: np.sum(
            c[:,np.newaxis]*np.exp(1j * omega[:,np.newaxis]*t),
            axis=0)


def F_N_sum(func, T, N, n_points=2000):
    """Returns partial sum `F_N(t)`"""
    gen = F_N(func, T, N, n_points)
    a0 = next(gen)[1]
    other = np.array(list(gen))
    a = other[:, 1]; b = other[:, 2]; omega = other[:, 3]
    return lambda t: a0 + np.sum(
                a[:,np.newaxis]*np.cos(omega[:,np.newaxis]*t) +
                b[:,np.newaxis]*np.sin(omega[:,np.newaxis]*t),
                axis=0)
```

Листинг 1. Программа для вычисления коэффициентов

Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from fourier import *

t2, t1, t0 = 7, 3.5, 0
a, b = 5, 3
T = t2 - t0
func = lambda x: a if t0 <= x % T < t1 else b
func = np.vectorize(func)

xs = np.linspace(-2*T, 2*T, 2000)

for N in [2,3,4,27,50]:
    fs_func = F_N_sum(func, T, N)
    fs_func_comp = G_N_sum(func, T, N)

    fig, ax = plt.subplots()
```

```
    ax.set_xlabel("$t$")
    ax.set_ylabel("$F_N (t)$")
    ax.grid(True)

    ax.plot(xs, func(xs))
    ax.plot(xs, fs_func(xs))
    fig.savefig(f'../fig/square/N{N}.svg', format='svg', bbox_inches='tight')

    fig, ax = plt.subplots(clear=True)
    ax.set_xlabel("$t$")
    ax.set_ylabel("$G_N (t)$")
    ax.grid(True)

    ax.plot(xs, func(xs))
    ax.plot(xs, fs_func_comp(xs))
    fig.savefig(f'../fig/square/N{N}-comp.svg', format='svg', bbox_inches='tight')

F = list(F_N(func, T, 50))
G = list(G_N(func, T, 50))

xs = np.linspace(-T/2, T/2, 2000)

s = np.trapezoid(func(xs)**2, xs)

s1 = 0
for _, a_, b_, omega_ in F:
    s1 += a_**2 * np.trapezoid(np.cos(omega_*xs)**2, xs)
    s1 += b_**2 * np.trapezoid(np.sin(omega_*xs)**2, xs)

s2 = 0
for n_, c_, omega in G:
    s2 += abs(c_)**2 * abs(np.trapezoid( np.exp(-1j * omega * xs) * np.exp(1j * omega * xs), xs))

print(s, s1, s2)
print((s2 - s)/s*100)
```

Листинг 2. Программа для вычисления коэффицентов для квадратной волны

Python
```python
from fourier import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 8
R = 2
def func(xs: np.array):
    global T, R
    xs = (xs+T/8)%T-T/8
    real = np.piecewise(xs,
        [
           np.logical_and(  -T/8 <= xs , xs < T/8),
           np.logical_and(   T/8 <= xs , xs < 3*T/8),
           np.logical_and( 3*T/8 <= xs , xs < 5*T/8),
           np.logical_and( 5*T/8 <= xs , xs < 7*T/8),
         ],
         [
             lambda _: R,
             lambda xs: 2*R-8*R*xs/T,
             lambda _: -R,
             lambda xs: -6*R+8*R*xs/T
         ]
    )
    imag = np.piecewise(xs,
        [
           np.logical_and(  -T/8 <= xs , xs < T/8),
           np.logical_and(   T/8 <= xs , xs < 3*T/8),
           np.logical_and( 3*T/8 <= xs , xs < 5*T/8),
           np.logical_and( 5*T/8 <= xs , xs < 7*T/8),
         ],
         [
             lambda xs: (8*R*xs/T),
             lambda _: (R),
             lambda xs: (4*R-8*R*xs/T),
             lambda _: (-R)
         ]
```

```
    )
    return real + 1j*imag

xs = np.linspace(-2*T, 2*T, 1000)
ys0 = func(xs)
ys = ys0

fig, ax = plt.subplots(ncols=2, sharey=True)
fig.set_size_inches(10, 3)

ax[0].set_ylabel("$Re(f(t))$")
ax[1].set_ylabel("$Im(f(t))$")
ax[0].set_xlabel("$t$")
ax[1].set_xlabel("$t$")

ax[0].plot(xs, np.real(ys))
ax[1].plot(xs, np.imag(ys))

fig.savefig("../fig/comp/f.svg",
format='svg', bbox_inches='tight')

for N in [1, 2, 3, 10]:
    ys = G_N_sum(func, T, N)(xs)
    re = np.real(ys)
    im = np.imag(ys)

    ax[0].clear(); ax[1].clear();
    ax[0].set_ylabel("$Re(f(t))$")
    ax[1].set_ylabel("$Im(f(t))$")
    ax[0].set_xlabel("$t$")
    ax[1].set_xlabel("$t$")


    ax[0].plot(xs, np.real(ys0))
    ax[0].plot(xs, re)

    ax[1].plot(xs, np.imag(ys0))
    ax[1].plot(xs, im)
```

```
    fig.savefig(f'../fig/comp/N{N}.svg', format='svg', bbox_inches='tight')

# Значение коэффициентов c_n
np.set_printoptions(precision=5, linewidth=120)
print(np.array(list(G_N(func, T, 2))))

# Проверка равенства Парсеваля
xs = np.linspace(-T/2, T/2, 2000)
ys = func(xs)

lhs = np.abs(np.trapezoid(ys*np.conj(ys), xs))
rhs = 0
for _, c_, omega in (G_N(func, T, 50, 2000)):
    rhs += abs(c_)**2 * abs(np.trapezoid( np.exp(-1j * omega * xs) * np.exp(1j * omega * xs), xs))

print(lhs, rhs)

print((rhs - lhs)/lhs*100)
```

Листинг 3. Программа для поиска коэффициентов и проверки равенства Парсеваля для задания 2