第五章　方程求根的数值解

/* Solutions of Nonlinear Equations */

引入

在科学与工程计算中经常需求解方程$f(x)=0$的根

① 当$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+......a_1x+a_0$ 时

　　$n=1,2,3,4$时,可用求根公式求解

　　$n \geqslant 5$时,不能用公式表示方程的根

② 对于一般的非线性方程$f(x)=0$, $x\in R$. 只能求出其近似值，我们探讨其数值解法——逐步逼近法

1.初始近似根x_0

2. $x_k \longrightarrow \boxed{递推关系} \longrightarrow x_{k+1}$　　(x_k收敛于真解x^*)

5.1 根的隔离和二分法

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

为了确定初始近似根 x_0 ，必须知道**f(x)=0** 的根的大致范围。

若**f(x)=0** 在**(a,b)** 内有一个根，称**(a,b)**为**f(x)=0** 的有根区间

若**f(x)=0** 在 **(a,b)**只有一个根，称**(a,b)**为**f(x)=0** 的隔根区间

当(a,b) 为隔根区间时，可取$x_0 \in (a,b)$

Def: 根的隔离——求f(x)=0的隔根区间的过程。

根的隔离的依据

Th5.1 设函数f(x)在[a,b]上连续，且有f(a)f(b)<0**,** 则方程 f(x)=0 在[a,b]内至少有一个根**.**

注**:** ① [a,b]为有根区间

② 当 f(x) 满足Th5.1 的条件且在[a,b] 上单调时**,**

f(x)在**[a,b]**内只有一根**.**

即 (a,b)为隔根区间.

HUST

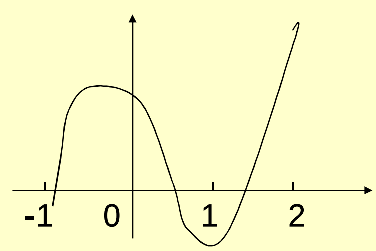
根的隔离的方法

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

图象法**:**作出 y=f(x)的草图，由曲线y=f(x) 与x轴的交点的大致位置来确定隔根区间**.**

例 隔根区间：(-1,0),(0,1),(1,2)

区间端点上函数值f(x) 异号



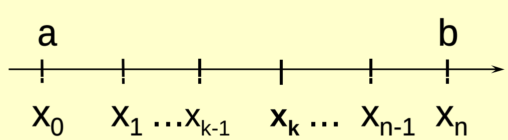
逐步搜索法

已知：[a,b]为 f(x)=0的有根区间，

且[a,b] 较大**,**

求一个缩小的有根区间

Ø取步长h=(b-a)/n



Ø从x_0=a出发以h 为步长向右搜索直至找到第一个点x_k=a+kh 满足 $f(a)f(x_k) \le 0$, 则得缩小得有根区间$[x_{k-1},x_k]$

Ø取初始近似根为x_{k-1}或x_k，其误差限为h

HUST

Algorithm

step 1: $x_0 = a$, $h=(b-a)/n$

step 2: If $(f(x_0)f(x_0+h) \le 0)$ 输出(x_0,x_0+h)

Else $x_0 = x_0+h$, goto step 2

例 求方程$f(x)=x^3-x-1=0$ 的有根区间。

解: ∵ $f(0)=-1<0$, $f(+\infty)>0$ ∴ $(0,+\infty)$为有根区间

从x=0 出发, 步长h=0.5向右计算, 则

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	-	-	-	+	+

得缩小的有根区间为（1.0，1.5）

可取初始近似根$x_0=1.0$或$x_0=1.5$

小结 :当 h很小时，得到很小的有根区间，

取$x^* \in (x_0,x_0+h)$，从而可算得任意精度的近似根，

但h越小计算量越大，利用此法求近似根仍不十分理想。

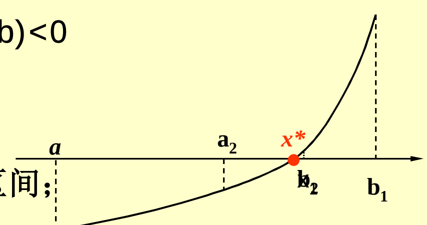
5.1.2 二分法 /* Bisection Method */

思想：将有根区间 [a,b]逐次减半（二分），使有根区间缩小直到误差容许范围内，然后取区间中点为真根x* 的近似值。

设f(x)=0的有根区间为[a,b]且f(a)f(b)<0

(1) 取$x_0=(a+b)/2$

If $f(x_0)=0$，则 x_0为 f(x)=0的根;



else if $f(a)f(x_0)<0$, 则$[a,x_0]$为有根区间;

记 $a_1=a$, $b_1=x_0=(a+b)/2$

else $f(x_0)f(b)<0$,则$[x_0,b]$ 为有根区间,记 $a_1=x_0=(a+b)/2$, $b_1=b$

∴ 得缩小的有根区间$[a_1,b_1]$且$b_1-a_1=(b-a)/2$，$[a,b]$包含$[a_1,b_1]$

(2) 将$[a_1,b_1]$ 二等分，其中点$x_1=(a_1+b_1)/2$，计算$f(x_1)$，重复(1)，或$f(x_1)=0$ 则$x^*=x_1$，或得有根区间 $[a_2,b_2]$ 且$b_2-a_2=(b_1-a_1)/2$.

(3) ……反复进行，则得到有根区间套

$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_k,b_k] \ldots \ni x^*$

$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \ldots = \frac{1}{2^k}(b-a)$

记 $[a_k,b_k]$ 的中点为 $x_k=(a_k+b_k)/2$ 并作为根的近似值

从而有近似根序列$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$

$\because \lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^k}=0$ 且 $\forall k,\ x^* \in [a_k,b_k]$ $\therefore \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

二分法是收敛的

将有限次二分的结果x_k 作为根的近似值，其误差为多少呢？

$\because x^*, x_k \in [a_k,b_k],\ x_k=\frac{a_k+b_k}{2}$ $\therefore |x^*-x_k| \le \frac{1}{2}(b_k-a_k)=b_{k+1}-a_{k+1}$

从而误差估计式 $|x^*-x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}$

$$|x^*-x_k| \le |b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

于是用二分法解f(x)=0，使误差不超过 ε 的终止准则：

（1） 先验估计 $|x^*-x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon \Rightarrow k > \frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2} - 1$

（2） 后验估计 $b_{k+1}-a_{k+1} < \varepsilon$

Algorithm

Step1. 输入a, b, ε,δ

Step2. X=(a+b)/2

Step3. if (|f(x)|<δ 或b-x<ε) 输出x stop

else if (f(a)f(x)<0) b=x

else a=x

Step4. Goto Step2

例题

例 5.2 求方程$f(x)=x^3-x-1$在区间(1,1.5)内的根,要求精确到小数点后的第二位,($\varepsilon=10^{-2}/2$).用四位小数计算.

解: ① $a=1, b=1.5$ 且$f(a)<0$, $f(b)>0$

精度要求为 $\varepsilon=10^{-2}/2=0.005$　由误差估计式$|x^*-x_k|\le(b-a)/2^{k+1}$

得$0.5/2^{k+1}<0.005$　从而　$2^{k+1}>100$　取$k=6$　即可

② $x_0=\frac{1}{2}(a+b)=1.25$　$f(x_0)<0$

$\because f(x_0)f(b)<0$　$\therefore$ 令$a_1=x_0=1.25$, $b_1=b=1.5$

新的有根区间(a_1,b_1)　取 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)=1.375$, $f(x_1)>0$　$f(a_1)f(x_1)<0$

$\therefore a_2=a_1=1.25$, $b_2=x_1=1.375$　从而得有根区间(a_2,b_2) … …

二分法分析

①简单;收敛性有保证

② 对 $f(x)$ 要求不高(只要连续即可) .

①无法求复根及偶重根

② 收敛慢

HW: p.152 #1
$f(x)=x^3-x^2-1$, $x\in[1,2]$

注：用二分法求根，最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。或用搜索程序，将$[a, b]$分为若干小区间，对每一个满足条件 $f(a_k)\cdot f(b_k)<0$ 的区间调用二分法程序，可求$[a, b]$内的多个根 。

5.2 迭代法

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

思想：先给出f(x)=0的一个初始近似根x_0，再反复使用某一公式校正这个初始根，使之逐步精确化，直到满足精度要求为止。

$$\begin{cases} x_0 & \text{迭代初值} \\ x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,2,\ldots & \text{迭代格式} \end{cases}$$

g(x)称为迭代函数。

如何构造迭代格式？ ——不动点迭代法/* Fixed-Point Iteration */

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$$

$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ $g(x)$ 的不动点

思路

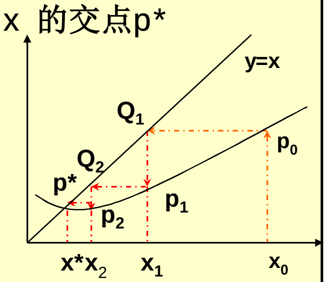
从 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, …, $x_{k+1}=g(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 g 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k)$，得 $x^* = g(x^*)$，即x^* 是 g 的不动点，也就是$f(x)=0$的根。

HUST

迭代法的几何解释

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

x=g(x) 的解即为曲线y=g(x) 与直线y=x 的交点p*



初始值x_0, 得y=g(x) 上点$p_0(x_0,g(x_0))$

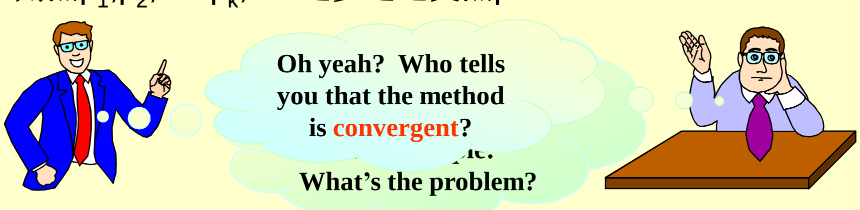
…$p_1(x_1,g(x_1))$ $x_1=g(x_0)$

…$p_2(x_2,g(x_2))$ $x_2=g(x_1)$

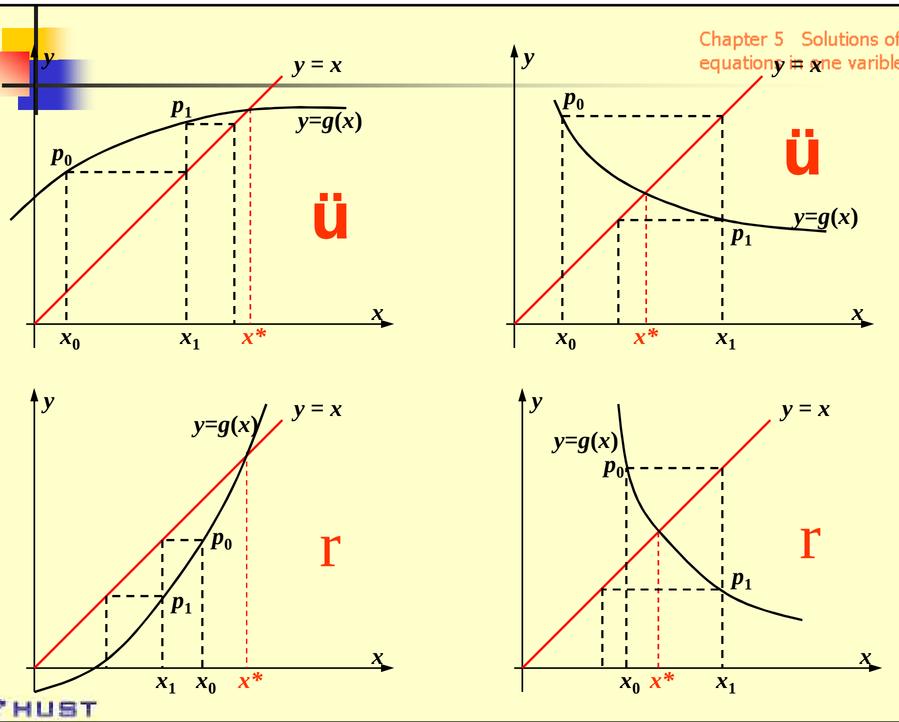
……

…$p_{k+1}(x_{k+1},g(x_{k+1}))$ $x_{k+1}=g(x_k)$

当由$x_{k+1}=g(x_k)$ 所决定 的点列$x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$收敛到$x^*$.
则点$p_1,p_2,\ldots\ldots p_k,\ldots\ldots$逐步逼近交点p*.



HUST



例： 求 $x^3-x-1=0$ 在$x=1.5$ 附近的一个根 (用六位有效数字近似）

解 Ⅰ： $x^3-x-1=0$ 等价于$x=\sqrt[3]{x+1}$ 取$g(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 取$x_0=1.5$ 则

$x_1=\sqrt[3]{1.5+1}=1.35721$

$x_2=\sqrt[3]{1.35721+1}=1.33086$

...

$x_7=\sqrt[3]{x_6+1}=1.32472$

$x_8=\sqrt[3]{x_7+1}=1.32472=x_7$

$\Rightarrow x^*\approx 1.32472$

Ⅱ： $x^3-x-1=0$ 等价于 $x=x^3-1$; $g(x)=x^3-1$

迭代格式为 $x_{k+1}=x_k^3-1$ $(k=0,1,2,\ldots)$

取$x_0=1.5$ 则 $x_1=1.5^3-1=2.375$, $x_2=x_1^3-1=12.3976$

....

序列$\{x_k\}$ 发散

注： (1)必须适当选取x_0 及$g(x)$才能使迭代公式所求的序列$\{x_k\}$收敛

(2)$\{x_k\}$收敛时，k 次迭代的结果的误差$\varepsilon_k=x_k-x^*=$?

迭代法收敛性分析

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$, 从而有迭代格$x_{k+1}=g(x_k)$ k=0,1,2,.....

Th5.3 设迭代函数 g(x) 在[a,b] 上具有连续的一阶导数，且当

(1) $x \in [a,b]$ 时,$a \leq g(x) \leq b$;

(2) 存在正数L<1，对 $x \in [a,b]$ 有$|g'(x)| \leq L<1$成立,

则 x=g(x) 在 [a,b] 上 有 唯 一 解 x*， 且 对 任 意 的 初 始 近 似 值 $x_0 \in [a,b]$迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)(k=0,1,2,.....)$ 收敛且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

证明： ① x^*的存在性

作 h(x)=x-g(x) , 则h(x) 在[a,b]上连续

而 $h(a)=a-g(a) \leq 0$ $h(b)=b-g(b) \geq 0$

由连续函数性质，必有$x^* \in [a,b]$ 使 $h(x^*)=0$ 即$x^*=g(x^*)$

② x^*的唯一性

若$x^\triangle \in [a,b]$,且$x^\triangle=g(x^\triangle)$，则$x^*-x^\triangle=g(x^*)-g(x^\triangle)$

那么$x^*-x^\triangle=g'(\xi)(x^*-x^\triangle)$，$\xi$在$x^*$与$x^\triangle$之间且$\xi \in [a,b]$

则$(x^*-x^\triangle)(1-g'(\xi))=0$，而$|g'(\xi)| \leq L<1$ $\therefore x^*=x^\triangle$

③ 迭代过程的收敛性

$\because x^*-x_{k+1}=g(x^*)-g(x_k)=g'(\xi)(x^*-x_k)$，

由条件(1)知$x_k \in [a,b]$，则$\xi \in [a,b]$

$\therefore |x^*-x_{k+1}|=|g'(\xi)||x^*-x_k|$

$\leq L|x^*-x_k| \leq L^2 |x^*-x_{k-1}| \leq \ldots$

$\leq L^{k+1} |x^*-x_0| \to 0$, $(\because 0 \leq L<1)$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} x_k = x^*$$

说明

- Th中条件(1) 迭代序列$\{x_k\}$ 均在[a,b] 内
- 条件(2)保证x_k与x^*间的距离随k增加而减少并最终趋于0
- 对$x^3-x-1=0$ 的两种格式分析

$g(x)=\sqrt[3]{x+1}$ $g(x)=x^3-1$ $[a,b]=[1,2]$

误差估计式

Th5.4 在 Th5.3的条件下，有如下误差估计式

$$|x^*-x_k| \le \frac{|x_{k+1}-x_k|}{1-L} \qquad \text{后验估计}$$

$$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \qquad \text{先验估计}$$

证:

$\because |x^*-x_{k+1}| \le L|x^*-x_k|$

$$\begin{aligned}\therefore |x_{k+1}-x_k| &= |x^*-x_k-(x^*-x_{k+1})| \\ &\ge |x^*-x_k|-|x^*-x_{k+1}| \\ &\ge |X^*-X_K|-L|X^*-X_K| \\ &= (1-L)|X^*-X_K|\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |X^*-X_k| \le \frac{|X_{k+1}-X_k|}{1-L}$$

又 $|x_{k+1}-x_K|$

$$\begin{aligned}&= |g(x_k)-g(x_{k-1})| \\ &= |g'(\xi)(x_k-x_{k-1})|,\ \xi\in[a,b] \\ &\le L|x_k-x_{k-1}| \\ &\le L^2|x_{k-1}-x_{k-2}| \\ &\quad \cdots\cdots \\ &\le L^k|x_1-x_0|\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

停机准则: ①先验估计

Q$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \le \varepsilon$

$\therefore k > [\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|} \div \ln L]$

②后验估计

$|x^*-x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \le \varepsilon$ 若L不接近于1

实用方法：$|x_{k+1}-x_k| < \varepsilon$

Algorithm: Fixed-Point Iteration

Find a solution to $x = g(x)$ given an initial approximation x_0.

Input: initial approximation x_0; tolerance *TOL*; max. num. of iterations N_{max}.

Output: approximate solution x or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$;

Step 2 While (i £ N_{max}) do steps 3-6

- ***Step 3*** Set $x = g(x_0)$; /* compute x_i */
- ***Step 4*** If $|x - x_0| < TOL$ then Output (x); /* successful */ STOP;
- ***Step 5*** Set i ++;
- ***Step 6*** Set $x_0 = x$; /* update x_0 */

当 x 很大时，此处可改为 $\left|\frac{x - x_0}{x}\right| < TOL$

Step 7 Output (The method failed after N_{max} iterations); /* unsuccessful */ STOP.

例5.3求方程 $x=e^{-x}$ 在 $x_0=0.5$ 附近的近似根,要求精确到小数后三位.

解：此时 $f(x)=x-e^{-x}=0$

$f(0.5)<0 \quad f(0.6)>0$

∴ [0.5,0.6] 为f(x)=0 的有根区间

取 $g(x)=e^{-x}$；从而迭代格式 $x_{k+1}=e^{-x_k} \quad k=0,1,2,\cdots\cdots$

判定收敛性：

当 $x\in[0.5,0.6]$，$|g'(x)|=|-e^{-x}|=e^{-x}\le e^{-0.5}\approx 0.607<1$

∴ 迭代格式收敛

取 $x_0=0.5$，精度要求 $\varepsilon=10^{-3}/2=0.0005$ 迭代，

结果见p129表

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	0.5	
1	0.60653	0.10653
2	0.54524	−0.06129
3	0.57970	0.03446
4	0.56007	−0.01963
5	0.57117	0.0110
6	0.56486	−0.00631
7	0.56844	0.00358
8	0.56641	−0.00203
9	0.56756	0.00115
10	0.56691	−0.00065

注：定理条件非必要条件，可将 $[a, b]$ 缩小，定义局部收敛性。

局部收敛性

Th5.3 的迭代收敛条件之一**:** $x \in [a,b]$， $|g'(x)| \le L<1$

在[a,b]较大时，其该条件不易满足，考虑局部收敛性 ——

Def: 若在x^*的某邻域$\triangle$:$|x-x^*|\le\delta$, 迭代过程对任意的初始值 $x_0\in\triangle$均收敛，则称其具有局部收敛性。

Th5.5 设g(x)在x=g(x) 的根x^*邻近有连续的一阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$，则迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$具有局部收敛性**.**

局部收敛性

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

Th5.5 设g(x)在x=g(x) 的根x^*邻近有连续的一阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$，则迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$具有局部收敛性**.**

分析**:** 在$\triangle$:$|x-x^*|\le\delta$即$[x^*-\delta, x^*+\delta]$应用**Th5.3**来证明.

证 $\because |g'(x^*)|<1$且$g'(x)$ 在x^*的邻近连续

$\therefore$ 存在充分小的邻域$\triangle$：$|x-x^*|\le\delta$使

$x\in\triangle$时，$|g'(x)|\le L<1$ （L为常数）

而 $g(x)-g(x^*)=g'(\xi)(x-x^*)$

又 $x\in\triangle$时$\xi\in\triangle$，有$|g'(\xi)|\le L<1$.

$\therefore |g(x)-x^*|=|g(x)-g(x^*)|\le L|x-x^*|<|x-x^*|\le\delta$，即$g(x)\in\triangle$

$\therefore$ g(x)在x^*的 δ 邻域$\triangle$内满足**Th5.3**收敛条件(1) (2);

$\therefore x_{k+1}=g(x_k)$ 对任意 $x_0\in\triangle$ 收敛，即具有局部收敛性。

例5.4 求$x^3-2x-5=0$ 在$x_0=2$ 附近的实根。

解: 由$x^3-2x-5=0$ 得 $x=\sqrt[3]{2x+5} \Rightarrow g(x)=\sqrt[3]{2x+5}$

$$\begin{cases} x_{k+1}=g(x_k)=\sqrt[3]{2x_k+5} \\ x_0=2 \end{cases} \qquad g'(x)=\tfrac{2}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}}$$

∵ $g'(x_0)<1/6$ 且$g'(x)$在$x_0=2$邻近连续

∴ 迭代格式$x_{k+1}=g(x_k)$ 在$x_0=2$的邻域内具有局部收敛性

$$x_1=\sqrt[3]{2x_0+5}=2.0800838$$
$$x_2=2.0923507,\ x_3=2.0942170,$$
$$x_4=2.0945006,\ x_5=2.0945438,$$
$$x_6=2.0945503,$$

$x^*=2.0945514815$

误差逐步减小，减小速度为6^{-k}

注： 构造 $x=\frac{1}{2}(x^3-5)$ $\quad g(x)=\frac{1}{2}(x^3-5)$ $\quad g'(x)=\frac{3}{2}x^2$ $\quad g'(2)=6>1$

如取 $x_0=2$ $\quad x_1=1.5,\ x_2=-0.125,\ x_3=-2.500,$

则 $x_4=-10.312,\ x_5=-551.2,\ L,$ 是发散序列。

迭代法在实时系统设计中的应用

假定实时系统由N个实时任务构成集合 $\Gamma=\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$

$\Gamma=\{t_i=\langle C_i, T_i, D_i, p_i\rangle \mid i=1, \ldots, N\}$

$R_i \leqslant D_i$, $i=1, 2, \ldots, N$

$$R_i=C_i+\sum_{\forall t_j\in\Gamma,\, p_j>p_i}\left\lceil\frac{R_i}{T_j}\right\rceil C_j$$

$$R_i^{(n+1)}=C_i+\sum_{\forall t_j\in\Gamma,\, p_j>p_i}\left\lceil\frac{R_i^{(n)}}{T_j}\right\rceil C_j$$

取迭代初值 $R_i^{(0)}=0$

如果 $R_i^{(n+1)}=R_i^{(n)}$ 表明迭代收敛，$R_i=R_i^{(n+1)}$

如果 $R_i^{(n+1)}>D_i$ 表明任务t_i是不可调度的.

5.3.1 迭代过程的收敛速度

迭代格式 $x_{k+1}=g(x_k)$的收敛速度依赖于什么？ $|x^*-x_k|\le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

若$|g'(x)|\le L<1$:

当 $L\approx 0$ 时　　收敛快，
当 $L\approx 1$ 时　　收敛慢，
而 $L>1$ 时，　　不收敛(发散)

收敛速度用收敛阶来衡量

Def5.2 迭代序列$\{x_k\}$收敛于$f(x)=0$ 的根x^* (x_k à x^*),
记第k 步迭代的误差为$e_k=x_k-x^*(k=0,1,2,......)$,
若有某个实数 $p\ge 1$和非零常数C 使 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C\ (k\ne 0)$
则称$\{x_k\}$ 是 p阶收敛的。

注：p的大小反映收敛速度的快慢，p越大，收敛越快
$p=1$ —— 线性收敛；　$p=2$ —— 平方收敛
$p>1$ —— 超线性收敛

Th5.6 对于迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$，如果迭代函数g(x)在根x^*的邻近有连续二阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$

(1) 当$g'(x^*)\ne 0$ 时,迭代过程线性收敛

(2) 当$g'(x^*)=0$ 而$g''(x^*)\ne 0$ 时, 迭代过程平方收敛

分析：用泰勒公式证

（1）$\frac{e_{k+1}}{e_k}\to g'(x^*)$　　（2）$\frac{e_{k+1}}{e_k^2}\to\frac{g''(x^*)}{2}$

注：推广的结论Th5.7

注：构造迭代函数的一般方法

$x=x+\lambda(x)f(x)$，　$g(x)=x+\lambda(x)f(x)$

由$|g'(x)|\le L<1$ → 选$\lambda(x)$

5.3.2 迭代过程的加速

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

对于收敛的迭代过程，若收敛速度太慢，需改进以加速收敛.

/* accelerating convergence */

迭代公式的加工：对于迭代公式$x_{k+1}=g(x_k)$ k=0,1,2,……

若$g'(x)$ 在求根范围内改变不大，取$g'(x) \approx a$

当$|g'(x)| \approx |a| \le L<1$

（1）x_k为 x^*的近似值，迭代一次得 $\tilde{x}_{k+1}=g(x_k)$

$$\therefore x^*-\tilde{x}_{k+1}=g(x^*)-g(x_k)=g'(\xi)(x^*-x_k)\approx a(x^*-x_k)$$

$$\therefore (1-a)x^*-\tilde{x}_{k+1}\approx -ax_k \Rightarrow (1-a)x^*-\tilde{x}_{k+1}+a\tilde{x}_{k+1}\approx a\tilde{x}_{k+1}-ax_k$$

$$\therefore (1-a)(x^*-\tilde{x}_{k+1})\approx a(\tilde{x}_{k+1}-x_k) \Rightarrow x^*-\tilde{x}_{k+1}\approx \frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{k+1}-x_k)$$

（2）将以上误差补偿给 $\tilde{x}_{k+1}$ 得更精确的近似根 $x_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}+\frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{k+1}-x_k)$

从而得迭代加速公式

$$\left.\begin{aligned}&\text{迭代}\quad \tilde{x}_{k+1}=g(x_k)\\&\text{改进}\quad x_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}+\tfrac{a}{1-a}(\tilde{x}_{k+1}-x_k)\end{aligned}\right\}$$

HUST

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

例 用加速收敛的方法求$x=e^{-x}$ 在$x=0.5$ 附近的一个根，要求精度为 $\varepsilon=10^{-5}$

分析：例5.3曾算过此题，用简单迭代法迭代10次才达到精度10^{-3} 那么用改进的公式迭代多少次满足精度要求10^{-5}？

解：$g(x)=e^{-x}$且$g'(x)=-e^{-x}$，在$x=0.5$ 附近有 $g'(x)\approx -0.6$

从而加速公式为

$$\begin{cases}\tilde{x}_{k+1}=e^{-x_k}\\ x_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}-\dfrac{0.6}{1.6}(\tilde{x}_{k+1}-x_k)\end{cases}$$

取$x_0=0.5$，迭代结果为

k	0	1	2	3	4
x_k	0.5	0.56658	0.56713	0.56714	0.56714
$\tilde{x}_k$		0.60653	0.56746	0.56715	0.56715

HUST

Review: $x_{k+1}=g(x_k)$

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

Th5.3 设迭代函数 **g(x)** 在**[a,b]** 上具有连续的一阶导数，且当

(1) $x \in [a,b]$ 时, $a \leqslant g(x) \leqslant b$;

(2) 存在正数 $L<1$，对 $x \in [a,b]$ 有 $|g'(x)| \leqslant L<1$ 成立,

则 $x=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解 x^*，且对任意的初始近似值 $x_0 \in [a,b]$ 迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)(k=0,1,2,.....)$ 收敛且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

Th5.4 在 Th5.3的条件下，有误差估计式:

$$|x^*-x_k| \le \frac{|x_{k+1}-x_k|}{1-L}$$

$$|x^*-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

局部收敛性: 若在 x^* 的某邻域△:$|x-x^*|\le\delta$, 迭代过程对任意的初值 $x_0\in$△均收敛。

Th5.5 设g(x)在x=g(x)的根 x^* 邻近有连续的一阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$，则迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)$ 具有局部收敛性。

HUST

Aitken 加速法

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

迭代 $\tilde{x}_{k+1}=g(x_k)$

改进 $x_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}+\frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{k+1}-x_k)$

缺点：

要用导数 **g′(x)** 的近似值 **a**，下面对它进一步改进。

如 $\tilde{x}_{k+1}=g(x_k) \qquad x^*-\tilde{x}_{k+1}\approx a(x^*-x_k)$

$\bar{x}_{k+1}=g(\tilde{x}_{k+1}) \qquad x^*-\bar{x}_{k+1}\approx a(x^*-\tilde{x}_{k+1})$

$$\therefore \frac{x^*-\tilde{x}_{k+1}}{x^*-\bar{x}_{k+1}}\approx\frac{x^*-x_k}{x^*-\tilde{x}_{k+1}} \Rightarrow x^*\approx\bar{x}_{k+1}-\frac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k}$$

注：新的改进值（不含**a** 的信息，对两次迭代值加工 ）

$$\begin{cases}\tilde{x}_{k+1}=g(x_k)\\ \bar{x}_{k+1}=g(\tilde{x}_{k+1})\\ x_{k+1}=\bar{x}_{k+1}-\dfrac{(\bar{x}_{k+1}-\tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1}-2\tilde{x}_{k+1}+x_k}\end{cases}$$

——Aitken 加速法

HUST

例5.8 用Aitken 法解方程x^3-x-1=0.

说明： 迭代格式 $x_{k+1}=x_k^3-1$ (x_0=1.5) 是发散的

解：对 $x_{k+1}=x_k^3-1$ 利用Aitken 加速迭代公式

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k^3 - 1$$

$$\bar{x}_{k+1} = \tilde{x}_{k+1}^3 - 1$$

$$x^* \approx \bar{x}_{k+1} - \frac{(\bar{x}_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2}{\bar{x}_{k+1} - 2\tilde{x}_{k+1} + x_k} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

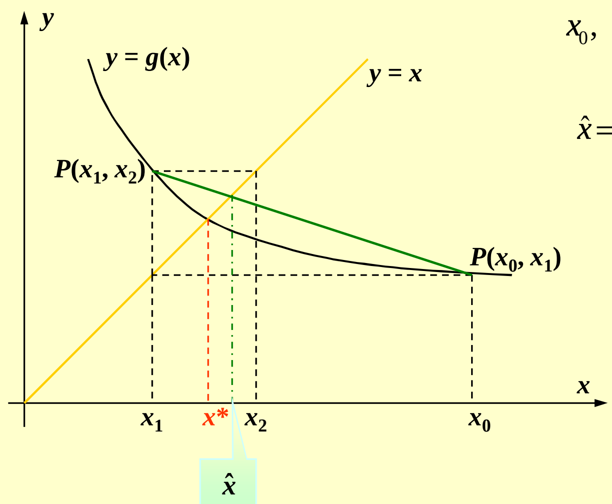
取x_0=1.5 进行迭代， 结果见P135表

k	$\tilde{x}_k$	$\bar{x}_k$	x_k
0			1.5
1	2.37500	123965	1.41629
2	1.84092	5.23888	1.35565
3	1.49140	2.31728	1.32895
4	1.34710	1.44435	1.32480
5	132518	1.32714	1.32472

发散的迭代公式被加速后有较好的收敛性。

Aitken 加速法的几何解释

Chapter 5 Solutions of equations in one varible



$$x_0,\ x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),$$

$$\hat{x} = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

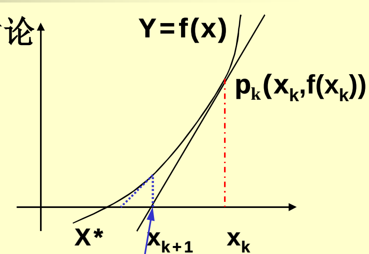
HW:
p.130 #2(2),使结果具有3位有效数字；
p.152 #2

HUST

5.4 牛顿法

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

假设f(x)=0 有根x^*， 下面从几何上来讨论



①则x^*为曲线y=f(x)与x轴的交点

②若f(x)=0 有近似根x_k，在 y=f(x) 上找到点$p_k(x_k,f(x_k))$

③过P_k 作y=f(x) 的切线

$$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

其与x 轴交于点x_{k+1}，则 $0=f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)$

x_{k+1}比x_k更接近于x^*,反复作切线得点x_{k+2}，x_{k+3}，……→x^*

④由③得 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ k=0,1,2,... —— Newton迭代法(切线法)

注：将非线性方程线性化 —— **Taylor** 展开

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x)}{2!}(x-x_k)^2,$$ x 在 x_k 和 x 之间。

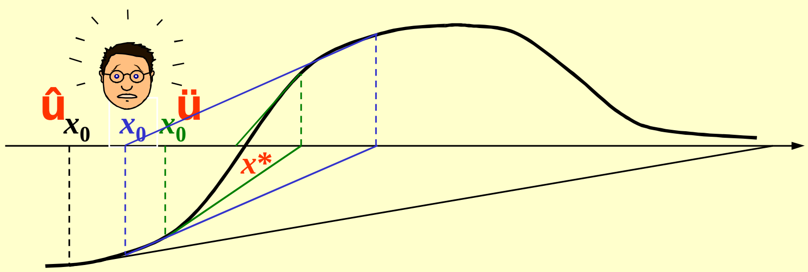
将 $(x^* - x_k)^2$ 看成高阶小量，则有：

$$0=f(x^*)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k) \Rightarrow x^*\approx x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

HUST

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} & k=0,1,2,\ldots \\ x_0 \end{cases}$$

注：**Newton’s Method** 收敛性依赖于x_0 的选取。



下面给出Newton法的算法和步骤

（1）准备 取初始值x_0 及精度 ε 和最大迭代次数N， 置k=0

（2）迭代 if **($f'(x_0)=0$) stop (失败)**

else

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

（3）控制 if ($|x_1-x_0|<\varepsilon$) stop ($x^*\approx x_1$)

else if （k=N） stop **(发散)**

else k=k+1;

$x_0=x_1$;

Goto (2)

例5.8 用 Newton法求方程$f(x)=x^4-2x-4$的根，精确到0.01。

解 ∵ $f'(x)=4x^3-2$，则Newton 迭代公式 为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^4-2x_k-4}{4x_k^3-2}$

$f(1)=-5$，$f(2)=8$，选取$x_0=1.5$， $f'(1.5)=11.5$

(1) $f(1.5)=-1.9375,\ f'(1.5)=11.5$

$$x_1=1.5-\frac{(-1.9375)}{11.5}=1.668478$$

(2) $f(x_1)=0.412696,\ f'(x_1)=16.57896$

$$x_2=1.668478-\frac{0.412696}{16.57896}=1.643585$$

(3) $f(x_2)=0.010243,\ f'(x_2)=15.75974$

$$x_3=1.643585-\frac{0.010243}{15.75974}=1.642935$$

$$|x_3-x_2|=0.00065<\varepsilon$$

$$x^*\approx 1.642935.$$

(4) $f(x_3)=1.62\times10^{-6}$, $f'(x_3)=15.7387$

$$x_4=1.642935-\frac{1.62\times10^{-6}}{15.7387}=1.64293519$$

HW: p.152
#8（牛顿法）
#5（选做）

Newton法的收敛性

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=g(x_k)\quad\Rightarrow\quad g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

条件：若 f(x)有单根x*，且 f(x)在x*邻近具有连续二阶导数，
隐含： $f(x^*)=0$， $f'(x^*)\neq0$

应用 Th5.5讨论其收敛性

$$\because\quad g'(x^*)=\left.\frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|_{x=x^*}=0$$ 由Th5.4，Newton 法是局部收敛的

$$g''(x)=\frac{[f'(x)f''(x)+f(x)f'''(x)]\cdot[f'(x)]^2-f(x)f''(x)2f'(x)f''(x)]}{[f'(x)]^4}$$

$$\therefore\quad g''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

∴ 当 $f''(x^*)\neq0$时， $g''(x^*)\neq0$,

由Th5.6，Newton 法是平方收敛的（二阶收敛速度）。

例5.10 用Newton法求方程$xe^x-1=0$的根，取五位小数计算.

解：$f(x)=xe^x-1$，$f'(x)=e^x+xe^x$，Newton迭代公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k e^{x_k}-1}{e^{x_k}+x_k e^{x_k}}$

即 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$，取$x_0=0.5$ 迭代结果为

k	0	1	2	3
x_k	0.5	0.57102	0.56716	0.56714

Newton 法收敛速度快

例5.11 Newton法应用：$\sqrt{c}=?$ 解$x^2-c=0$，$f(x)=x^2-c$，$f'(x)=2x$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-C}{2x_k} \quad \text{或} \quad x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{C}{x_k}\right) \qquad (*)$$

(*)式 含义：$\sqrt{c}$ 的两个近似值x_k，$\dfrac{c}{x_k}$ 的算术平均是更好的近似值

注：$x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{c}{x_k}\right)$对任意$x_0>0$ 都为平方收敛

牛顿法初值的选取

- 牛顿法是一种局部收敛法，如果初值 x_0 选择不当，可能得不到收敛的迭代序列。
- 为使牛顿法收敛，必须满足：用迭代公式算出的x_1比 x_0 更靠近准确根 x^*。
- 如果 $f'(x_0)=0$，则不能运用牛顿迭代公式，如果 $f'(x_0)$ 非常小，也不能得到很快的收敛序列。

牛顿法初值的选取（续）

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \longrightarrow \underbrace{x_1 - x^*}_{e_1} = (\underbrace{x_0 - x^*}_{e_0}) - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\frac{e_1}{e_0} = 1 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x_0 - x^*)} = 1 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}$$

$$= \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)}{f'(x_0)(x^* - x_0)}$$

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_0)^2 = 0$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) = \boxed{-\frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_0)^2}$$

$$\frac{e_1}{e_0} = -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)^2}{2f'(x_0)(x^* - x_0)} = -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)}{2f'(x_0)}$$

HUST

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

$$\frac{e_1}{e_0} = -\frac{f''(\xi)(x^* - x_0)}{2f'(x_0)}$$

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(\eta)(x^* - x_0) = 0 \longrightarrow x^* - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(\eta)}$$

如果 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 x_0 附近变化不大，并且 $f''(x_0) \neq 0$，则可近似的认为：

$$f''(\xi) \approx f''(x_0) \qquad f'(\eta) \approx f'(x_0)$$

$$\frac{e_1}{e_0} = -\frac{f''(\xi)\left(-\dfrac{f(x_0)}{f'(\eta)}\right)}{2f'(x_0)} = \frac{f''(\xi)\cdot f(x_0)}{2f'(x_0)\cdot f'(\eta)} \approx \frac{f''(x_0)\cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

HUST

$$\frac{e_1}{e_0} \approx \frac{f''(x_0)\cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}$$

为了满足 x_1 比 x_0 更靠近准确根 x^*，必须有：

$$|e_1| < |e_0|$$

即：

$$\left|\frac{e_1}{e_0}\right| < 1 \longrightarrow \left|\frac{f''(x_0)\cdot f(x_0)}{2[f'(x_0)]^2}\right| < 1$$

从而：

$$[f'(x_0)]^2 > \frac{1}{2}|f''(x_0)|\cdot|f(x_0)|$$ 条件 1

$$f'(x_0) \neq 0$$ 条件 2

Newton下山法/* Descent Method */

x_0 的选取很重要,如 x_0偏离x^* 较远，则可能发散.

例 用Newton 法解方程$x^3-x-1=0$ 的根

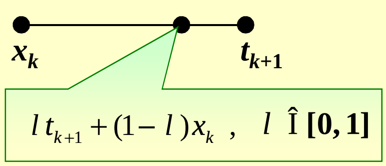
解 迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$ ，取$x_0=1.5$ 收敛很快。

k	0	1	2	3
x_k	1.5	1.34783	1.32520	1.32472

取$x_0=0.6$时， $x_1= 17.9$，……， 发散。

为控制迭代发散， 介绍 Newton下山法:

原理：迭代的每一步满足$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$, 令 $t_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$



$$x_{k+1}=\lambda\left[x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]+(1-\lambda)x_k$$
$$=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \lambda \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ |f(x_{k+1})| < |f(x_k)| \end{cases} \qquad 0 < \lambda \le 1$$

确定：$\lambda = 1 \to \lambda = \frac{1}{2} \to \lambda = \frac{1}{2^2} \to \ldots$

注：$\lambda = 1$ 时就是Newton's Method 公式。

当 $\lambda = 1$ 代入效果不好时，将 λ 减半计算, 逐步试探。

例 $x^3 - x - 1 = 0.$ $\quad x_{k+1} = x_k - \lambda \dfrac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}$

取$x_0 = 0.6, t_1 = 17.9, \lambda = \dfrac{1}{32}.$

$$x_1 = \frac{1}{32}\bar{x}_1 + \frac{31}{32}x_0 = 1.140625$$

Algorithm: Newton's Descent Method

Find a solution to $f(x) = 0$ given an initial approximation x_0.

Input: initial approximation x_0; $f(x)$ and $f'(x)$; minimum step size of x_{min}; tolerance $TOL1$ for x; tolerance $TOL2$ for λ; maximum number of iterations N_{max}.

Output: approximate solution x or message of failure.

Step 1 Set $k = 1$;

Step 2 While ($k \le N_{max}$) do steps 3-10

Step 3 Set $\lambda = 1$;

Step 4 Set $x = x_0 - \lambda \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$; /* compute x_k */

Step 5 If $|x - x_0| < TOL1$ then Output (x); STOP; /* successful */

Step 6 If $|f(x)| < |f(x_0)|$ then $x_0 = x$; GOTO *Step 10* ; /* update x_0 */

Step 7 Set $\lambda = \lambda / 2$; /* update λ to descend */

Step 8 If $\lambda > TOL2$ then GOTO *Step 4* ; /* compute a better x_i */

Step 9 Set $x_0 = x_0 + x_{min}$; /* move forward anyway to avoid deadlock */

Step 10 Set k ++;

Step 11 Output (Method failed after N_{max} iterations); STOP. /* unsuccessful */

5.5 近似牛顿法

$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 每一步迭代须计算$f'(x_k)$

简化 Newton法

$f'(x_k)$换为常数C， $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{C}$ ——推广的简化的Newton法

取$C=f'(x_0)$， $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_0)}$ ——简化的Newton法

上述两种方法简化了迭代计算过程，但收敛速度受到影响。

由迭代函数$g(x)=x-f(x)/c$ 得推广的简化Newton 法收敛

$$\Leftrightarrow |g'(x^*)|=|1-\frac{f'(x^*)}{C}|<1 \Leftrightarrow 0<\frac{f'(x^*)}{C}<2$$

此时，推广的简化 Newton 法局部收敛且一般为线性收敛。

弦截法

对 Newton法作另一种改进:

$$\because f'(x_k)\approx\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}=f[x_0,x_k] \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0)\quad k=1,2,\ldots$$

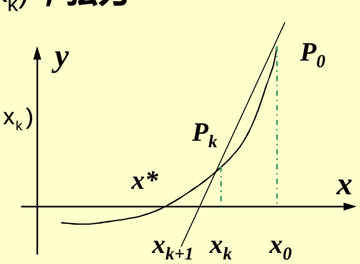
迭代函数: $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0)$

用弦 $\overline{P_0P_k}$ 的斜率代替P_k 点的切线斜率$f'(x_k)$，弦为

$$y-f(x_k)=\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}(x-x_k)$$

其与x轴交点x_{k+1}： $0-f(x_k)=\dfrac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}(x_{k+1}-x_k)$

$$\therefore x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0)$$



上述迭代法称为**弦截法**

弦截法的收敛性

迭代函数 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0)$

$$\because g'(x)=1-\left\{\left[\frac{f'(x)(f(x)-f(x_0))-f(x)f'(x)}{(f(x)-f(x_0))^2}\right](x-x_0)+\frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}\right\}$$

$$=1-\left\{\left[\frac{-f'(x)f(x_0)}{(f(x)-f(x_0))^2}\right](x-x_0)+\frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}\right\}$$

$$\therefore g'(x^*)=1+\frac{f'(x^*)}{f(x_0)}(x^*-x_0)=1-\frac{f'(x^*)}{\dfrac{f(x^*)-f(x_0)}{x^*-x_0}}$$

当x_0 靠近x^* 时，$0<|g'(x^*)|<1$，弦截法线性收敛.

为提高弦截法的收敛速度，介绍另一类型的弦截法.

快速弦截法

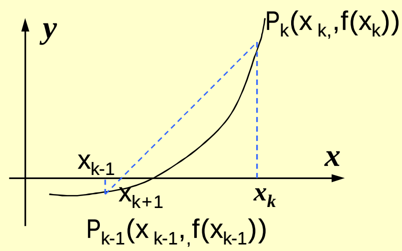
$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\because f'(x_k)\approx f[x_{k-1},x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

—— 快速弦截法

其几何意义:

x_{k+1}为弦 $\overline{P_{k-1}P_k}$ 与x 轴的交点



收敛性 **如果:f(x) 在根x^*的邻域△:$|x-x^*|\le\delta$ 内具有二阶连续导数，且对x∈△,有$f'(x)\ne0$，当x_0, x_1∈△且△充分小时，快速弦截法按阶** $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx1.618$ **收敛到根x^*.**

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$ **计算**x_{k+1} **时须用**x_k, x_{k-1}

Algorithm:

step1: 选取x_0, x_1 **, 计算函数值**$f_0=f(x_0)$, $f_1=f(x_1)$;

step2: 迭代 $x_2=x_1-\frac{f_1}{f_1-f_0}(x_1-x_0)$

step3: if **(**$|x_2-x_1|<\varepsilon_1$ or $|f(x_2)|<\varepsilon_2$**)**, then $x^*\approx x_2$, stop.

else if **(迭代次数≤N)** then

{ $x_0=x_1, x_1=x_2, f_0=f(x_0), f_1=f(x_1)$;

goto step2

}

else **输出"迭代过程不收敛" , stop.**

例 求方程$f(x)=\sin x-(x/2)^2=0$ **的正根， 要求用快速弦截法,** $\varepsilon_1=\varepsilon_2=10^{-4}/2$

解

n	$x_0=1, x_1=2$		$x_{n+1}-x_n$	$f(x_n)$
2	$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1-x_0)=$	1.86704	0.064316	+0.84981
3	$x_3=$	1.93135	0.002490	+0.003167
4	$x_4=$	1.93384	-0.000091	–0.000120
5	$x_5=$	1.93375	-0.000001	+0.000001
6	$x_6=$	1.93375		

得 $x^*\approx x_6=1.93375$

小结

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

本章的问题是: 求解非线性方程 $f(x)=0$

二分法: $x_k=\frac{1}{2}(a_k+b_k)$ $\quad |x^*-x_k|\le\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$

特点--简便、易掌握、对f(x)的要求不高,但收敛较慢。

简单迭代法: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$

收敛要求: $|g'(x)|\le L<1$

迭代格式: $x_{k+1}=g(x_k)$

停机准则: $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$

大范围收敛与局部收敛性的理论　　收敛的阶

加速迭代: Aitken加速

牛顿迭代法: $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$　　二阶收敛　　Newton法的改进

HUST