# 算法设计与分析

Computer Algorithm Design & Analysis

2019.11

王多强

dqwang@mail.hust.edu.cn

群名称：2019-算法

群　号：835135560

群名称：2019-算法

群　号：835135560

# Chapter 25
# All-Pairs Shortest Paths

所有结点对的最短路径问题

# 一个新的最短路径问题：

给定一个带权重的**有向图**G=(V,E)，其权重函数为ω:E→R。在图中，对所有的结点对 u,v∈V，找出从结点u到结点v的最短路径。

该问题的解以表格（二维数组）的形式给出：第u行第v列给出从结点u到结点v的最短路径权重。

- **一条路径的权重是组成该路径的所有边的权重之和。**

如何求解？

## 用单源最短路径算法求解：

执行|V|次单源最短路径算法，每次使用一个不同的结点作为源点，从而可以求出每个结点到其他所有结点的最短路径。

- 如果所有的边的权重为非负值，用**Dijkstra算法**：
  - 用线性数组实现最小优先队列：$O(V^3+VE)=O(V^3)$;
  - 用二叉堆实现最小优先队列：$O(VE\lg V)$；（对稀疏图较好）
  - 用斐波那契堆实现最小优先队列：$O(V^2\lg V+VE)$；
- 如果有权重为负值边，用**Bellman-Ford算法：**
  - 一般的运行时间：$O(V^2E)$;
  - 对稠密图，运行时间为$O(V^4)$。

怎么更好地求解？

# 本章约定：

1）结点编号：不失一般性，结点编号为1，2，…，|V|。

2）成本邻接矩阵：图G用一个n×n的邻接矩阵$W=(w_{ij})$表示，

其中，

$$w_{ij}=\begin{cases}0 & \text{若 } i=j \\ \text{有向边}(i,j)\text{的权重} & \text{若 } i\neq j \text{ 且 } (i,j)\in E \\ \infty & \text{若 } i\neq j \text{ 且 } (i,j)\notin E\end{cases}$$

3）允许存在权重为负值的边，但不能包含权重为负值的环路。

- 否则无解。

4）最短路径矩阵：算法的输出为一个n×n的**最短路径矩阵**

**$D=(d_{ij})$**，其中$d_{ij}$表示从结点i到结点j的一条最短路径的权重。算法结束时有$d_{ij}=\delta(i,j)$。

5）前驱结点矩阵：

前驱结点矩阵记为：$\Pi=(\pi_{ij})$，其中

$$\pi_{ij}=\begin{cases} NIL, & \text{若}i=j\text{或者从}i\text{到}j\text{不存在路径} \\ \text{从结点}i\text{到结点}j\text{的某条最短路径上结点}j\text{的前驱结点，否则} \end{cases}$$

- 利用前驱结点矩阵Π可以计算出每对结点间的最短路径。

前驱结点矩阵Π的**第i行所诱导(induce)的子图**是一棵根结点为i的最短路径树。

对于每个结点i∈V，定义图G对于结点i的**前驱子图**为$G_{\pi,i}=(V_{\pi,i},E_{\pi,i})$，其中

$$V_{\pi,i}=\{j\in V:\pi_{ij}\neq \text{NIL}\}\cup\{i\}$$

$$E_{\pi,i}=\{(\pi_{ij},j):j\in V_{\pi,i}-\{i\}\}\ .$$

## 6）PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH过程：

如果$G_{\pi,i}$是一棵最短路径树，则**PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH**过程输出从结点i到结点j的一条最短路径。

PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH$(\Pi, i, j)$

**if** $i == j$<br>
    print $i$<br>
**elseif** $\pi_{ij}$ == NIL<br>
    print “no path from” $i$ “to” $j$ “exists”<br>
**else** PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH$(\Pi, i, \pi_{ij})$<br>
    print $j$

# 25.1 最短路径和矩阵乘法

本节给出有向图所有结点对最短路径问题的一种**动态规划算法**。时间复杂度$\Theta(V^4)$，然后改进到$\Theta(V^3 \lg V)$。

- **最短路径的最优子结构性质：每条路径都是最短路径**

考虑从结点i到结点j的一条最短路径p。假定p至多包含m条边（假定没有权重为负值的环路），且m为有限值。

- 如果i=j，则p中不包含任何边，所以p的权重等于0；
- 如果i≠j，则将路径p分解为 $i \overset{p'}{\leadsto} k \rightarrow j$ ，其中
  - p′至多包含m-1条边，根据引理24.1，p′是从i到k的一条最短路径，
  - 且$\delta(i,j)=\delta(i,k)+w_{kj}$。 ■

## ▪ 递归解

设 $l_{ij}^{(m)}$ 是从结点i到结点j的至多包含m条边的任意路径中的最小权重。

- 当m=0时，表示从结点i到结点j**中间没有边**的最短路径，所以有

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j\ , \\ \infty & \text{if } i \neq j\ . \end{cases}$$

- 当m≥1时，可以在 $l_{ij}^{(m-1)}$ 的基础上计算从i到j的最多由m条边组成的任意路径的最小权重 $l_{ij}^{(m)}$ 。
  - $l_{ij}^{(m-1)}$ 是从i到j最多由m-1条边组成的最短路径的权重。

- $l_{ij}^{(m)}$的计算：通过对j的所有可能的前驱k进行检查获得。

$l_{ij}^{(m)}$的递归定义：
$$l_{ij}^{(m)} = \min\left(l_{ij}^{(m-1)}, \min_{1\le k\le n}\left\{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\right\}\right) = \min_{1\le k\le n}\left\{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\right\} .$$

含有$l_{ij}^{(m-1)}$

- 结点间的最短路径权重δ(i,j)

如果图G不包含权重为负值的环路，则对于每一对结点i和j，如果δ(i,j)<∞，则从i到j之间存在一条最短路径。并且，由于最短路径是简单路径，其中至多包含n-1条边，因此有：

$$\delta(i, j) = l_{ij}^{(n-1)}$$

且：

$$\delta(i, j) = l_{ij}^{(n-1)} = l_{ij}^{(n)} = l_{ij}^{(n+1)} = \ldots$$

## ■ 自底向上计算最短路径权重

（1）$l_{ij}^{(1)}$ 表示从结点i到结点j中间至多包含1条边的路径的最小权重，因此 $l_{ij}^{(1)} = w_{ij}$ 。

（2）自底向上计算方法：

根据输入矩阵W=($w_{ij}$)，计算L(1)=( $l_{ij}^{(1)}$ )，然后根据递归关系式计算L(2)、…、L(n-1)。其中，

$$L^{1} = (w_{ij}) = W$$

$$L^{m} = l_{ij}^{(m)}$$ ，m=1,2，…, n-1。

（3）L(n-1)即是最后的最短路径权重结果矩阵，有

$$l_{ij}^{(n-1)} = \delta(i, j)$$

# 自底向上计算算法的伪代码表示

EXTEND-SHORTEST-PATHS算法在给定W和$L^{(m-1)}$的情况下计算$L^{(m)}$ ：

EXTEND-SHORTEST-PATHS$(L, W)$

$n = L.rows$<br>
let $L' = (l'_{ij})$ be a new $n \times n$ matrix<br>
**for** $i = 1$ **to** $n$<br>
    **for** $j = 1$ **to** $n$<br>
        $l'_{ij} = \infty$<br>
        **for** $k = 1$ **to** $n$<br>
            $l'_{ij} = \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$<br>
**return** $L'$

- 算法将最近计算出的最短路径扩展一条边：
  - 找一条从i到某结点k，再经过边(k, j)到达j的更短路径。
- 算法结束时返回结果矩阵$L' = L^{(m)}$。
- 时间复杂度$O(n^3)$。

# 最短路径和矩阵乘法

上述一次计算最短路径结果矩阵$L^{(m)}$的过程和矩阵乘法在整体框架上是一致的：（详见P401）

EXTEND-SHORTEST-PATHS$(L, W)$

$n = L.rows$
let $L' = (l'_{ij})$ be a new $n \times n$ matrix
**for** $i = 1$ **to** $n$
    **for** $j = 1$ **to** $n$
        $l'_{ij} = \infty$
        **for** $k = 1$ **to** $n$
            $l'_{ij} = \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$
**return** $L'$

SQUARE-MATRIX-MULTIPLY$(A, B)$

$n = A.rows$
let $C$ be a new $n \times n$ matrix
**for** $i = 1$ **to** $n$
    **for** $j = 1$ **to** $n$
        $c_{ij} = 0$
        **for** $k = 1$ **to** $n$
            $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$
**return** $C$

$$L \bullet W \equiv A \bullet B$$

时间复杂度都是$O(n^3)$

一次“L与W的乘L•W”完成一次从$L^{(m-1)}$向$L^{(m)}$的计算。

所以从上述L的计算过程以及与矩阵乘法的对比可以看出：

设A•B表示由算法EXTEND-SHORTEST-PATHS(A, B)返回的矩阵"乘积"，可以得到以下从$L^{(1)}$到$L^{(n-1)}$的计算序列：

$$
\begin{aligned}
L^{(1)} &= L^{(0)} \cdot W &&= W, \\
L^{(2)} &= L^{(1)} \cdot W &&= W^2, \\
L^{(3)} &= L^{(2)} \cdot W &&= W^3, \\
&\ \ \vdots \\
L^{(n-1)} &= L^{(n-2)} \cdot W &&= W^{n-1}.
\end{aligned}
$$

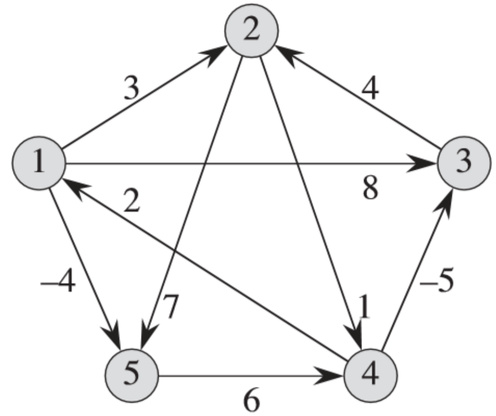
矩阵$L^{(n-1)}=W^{(n-1)}$将包含最短路径权重

计算矩阵序列的过程：

```
SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS(W)
n = W.rows
L^(1) = W
for m = 2 to n - 1
    let L^(m) be a new n × n matrix
    L^(m) = EXTEND-SHORTEST-PATHS(L^(m-1), W)
return L^(n-1)
```

时间复杂度：$O(n^4)$

# 例：已知有向图：




```
EXTEND-SHORTEST-PATHS(L, W)
n = L.rows
let L′ = (l′_ij) be a new n × n matrix
for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        l′_ij = ∞
        for k = 1 to n
            l′_ij = min(l′_ij, l_ik + w_kj)
return L′
```

## **SLOW**-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS的计算过程：

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \underline{2} & -4 \\ \underline{3} & 0 & \underline{-4} & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \underline{5} & \underline{11} \\ 2 & \underline{-1} & -5 & 0 & \underline{-2} \\ \underline{8} & \infty & \underline{1} & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \underline{-3} & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & \underline{-1} \\ \underline{7} & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & \underline{5} & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & \underline{3} \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵序列：$L^{(1)} \rightarrow L^{(2)} \rightarrow L^{(3)} \rightarrow L^{(4)}$。而任何$m \geq 4$， $L^{(m)} = L^{(4)}$。

## 改进的算法：

我们的目标是算出矩阵$L^{(n-1)}$，而对所有$m \ge n-1$， $L^{(m)}=L^{(n-1)}$，因此可用以下$\lceil \lg(n-1) \rceil$个矩阵乘过程来计算矩阵$L^{(n-1)}$，而不是依次计算所有的$L^{(1)} \sim L^{(n-1)}$矩阵。

$$
\begin{aligned}
L^{(1)} &= W\,, \\
L^{(2)} &= W^2 = W \cdot W\,, \\
L^{(4)} &= W^4 = W^2 \cdot W^2 \\
L^{(8)} &= W^8 = W^4 \cdot W^4\,, \\
&\vdots \\
L^{(2^{\lceil \lg(n-1) \rceil})} &= W^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} = W^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1}} \cdot W^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1}}\,.
\end{aligned}
$$

注：由于 $2^{\lceil \lg(n-1) \rceil} \ge n-1$，所以最后的乘积 $L^{(2^{\lceil \lg(n-1) \rceil})}$ 等于$L^{(n-1)}$。

# 改进的计算过程如下：

下面的过程使用“重复平方技术”（repeated squaring）来计算上述矩阵序列：

EXTEND-SHORTEST-PATHS$(L, W)$

$n = L.rows$
let $L' = (l'_{ij})$ be a new $n \times n$ matrix
**for** $i = 1$ **to** $n$
  **for** $j = 1$ **to** $n$
    $l'_{ij} = \infty$
    **for** $k = 1$ **to** $n$
      $l'_{ij} = \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$
**return** $L'$

FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS$(W)$

$n = W.rows$
$L^{(1)} = W$
$m = 1$
**while** $m < n - 1$
  let $L^{(2m)}$ be a new $n \times n$ matrix
  $L^{(2m)} = $ EXTEND-SHORTEST-PATHS$(L^{(m)}, L^{(m)})$
  $m = 2m$
**return** $L^{(m)}$

- 计算从m=1开始，每次迭代后对m加倍；
- 最后计算的$L^{(2m)}$即是$L^{(n-1)}$：$L^{(2m)} = L^{(n-1)}$，其中$n-1 \le 2m \le 2n-2$。
- 算法的运行时间是：$O(n^3 \lg n)$。

# 25.2 Floyd-Warshall算法

本节讨论另一种**动态规划**策略来求解有向图的所有结点对最短路径问题——**Floyd-Warshall算法**。

- 算法的时间复杂度Θ($V^3$)。
- 算法允许图中存在负权重的边，但不能存在权重为负值的环路。

## 最短路径结构的重新描述：

**中间结点**：一条简单路径$p=\langle v_1, v_2, \cdots, v_l \rangle$上的**中间结点**是指路径p上除$v_1$和$v_l$之外的其它任意结点。

假定图G的结点集为V={1,2,...,n}。考虑其中的一个子集{1,2,...,k}，这里k是小于n的某个整数，并是其中的最大编号。

对于任意一对结点i, j∈V，定义p是从i到j、且所有中间结点均取自于集合{1,2,...,k}的最短路径。含义：

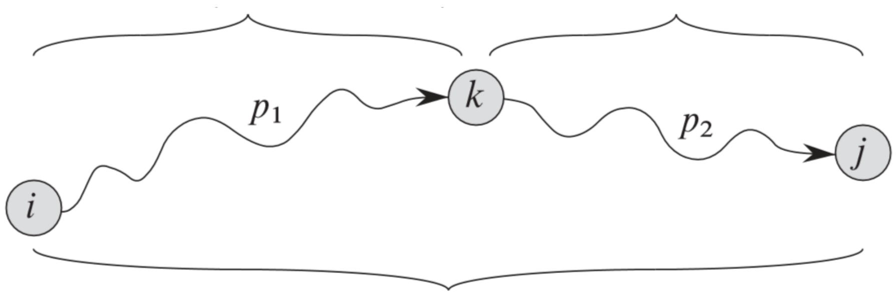
- p是简单路径，且p的中间结点都不大于k。
- p从i到j，仅经过集合{1, 2, …, k}中的结点，但，
  - 不一定经过其中的每一个结点，且与顺序无关；
  - 也可能不存在这样的路径，此时p的权重等于∞。

在从i到j之间中间结点均取自集合{1,2,...,k-1}的基础上，试图回答这样一个问题：结点k是否是路径p上的一个中间结点?

## 结点k是否是路径p上的一个中间结点?

- 情况1：如果结点k不是路径p上的中间结点，则p上的所有中间结点都属于集合{1, 2, …, k−1}。
  - 此时，从结点i到结点j的中间结点取自集合{1,2,…,k-1}的一条最短路径也是从结点i到结点j的中间结点取自集合{1,2,…,k}的一条最短路径。

- 情况2：如果结点k是路径p上的中间结点，则k将路径p分解为两段： $i \overset{p_1}{\leadsto} k \overset{p_2}{\leadsto} j$




$p$: all intermediate vertices in $\{1, 2, \ldots, k\}$

  - 根据引理24.1（最优子结构性），$p_1$是从结点i到结点k的一条最短路径，且中间结点全部取自集合{1,2,...,k-1}。

    这是因为结点k不是路径$p_1$上的中间结点，所以路径$p_1$上的所有结点都属于集合{1, 2, ⋯, k−1}。

  - 同理，$p_2$是从结点k到结点j的一条最短路径，且中间结点全部取自集合{1,2,...,k-1}。

## 状态转移方程：

设 $d_{ij}^{(k)}$ 为从结点i到结点j的所有中间结点全部取自集合{1,2, …,k}的一条最短路径的权重，则有：

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$

其中，

- k=0时，代表从结点i到结点j的一条不包含编号大于0的中间结点的路径，这样的路径没有任何中间结点，最多只有一条边。所以 $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$ 。

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0\,, \\ \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right) & \text{if } k \geq 1\,. \end{cases}$$

- 而因为任何路径的中间结点都属于集合{1,2,⋯,n}，所以k=n时，$d_{ij}^{(n)}$ 给出所有可能的从结点i到结点j的中间结点均取自集合{1,2,...,n}的一条最短路径的权重，也就是从结点i到结点j的最短路径的权重。所以对所有的 $i, j \in V$ 有：

$$d_{ij}^{(n)} = \delta(i, j)$$

- **矩阵 $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ 为结果矩阵。**

# 算法描述：

FLOYD-WARSHALL($W$)

$n = W.rows$

$D^{(0)} = W$

**for** $k = 1$ **to** $n$

  let $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$ be a new $n \times n$ matrix

  **for** $i = 1$ **to** $n$

    **for** $j = 1$ **to** $n$

      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$

**return** $D^{(n)}$

- $W_{n \times n}$：权重邻接矩阵；
- $D_{n \times n}$：最短路径权重矩阵
- FLOYD-WARSHALL自底向上地完成D矩阵的计算。
- D矩阵的计算可以在原址上完成。

# 构建最短路径

在计算矩阵$D^{(k)}$的同时，计算**前驱矩阵Π**序列：$\Pi^{(0)}$，$\Pi^{(1)}$，…，$\Pi^{(n)}=\Pi$。

其中，

- $\pi_{ij}^{(k)}$ 为从结点i到结点j的一条所有中间结点都取自集合{1,2，…，k}的最短路径上j的前驱结点。
- k=0时：

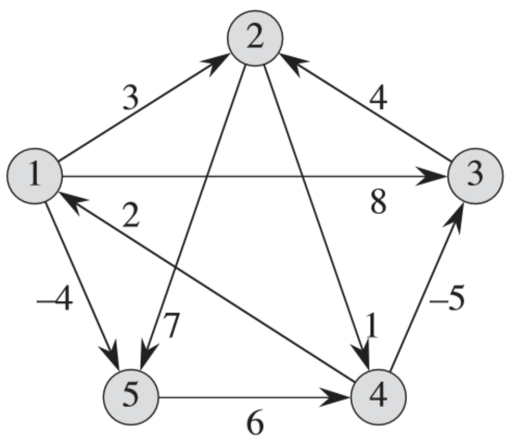
$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NIL} & \text{if } i = j \text{ or } w_{ij} = \infty , \\ i & \text{if } i \neq j \text{ and } w_{ij} < \infty . \end{cases}$$

  - k=0时，是一条从i到j的没有中间结点的最短路径，所以当路径存在时($w_{ij}<\infty$)，j的前驱就是i。

- k≥1时，从结点i到结点j的一条所有中间结点都取自集合{1,2, …, k} 的最短路径或者经过k，或者不经过k。
  - 若不经过k，则有 $d_{ij}^{(k-1)} \le d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$
    - 此时求从结点i到结点j的所有中间结点都取自集合{1, 2, …, k}的最短路径上的j的前驱等价于求从结点i到结点j的所有中间结点都取自集合{1, 2, …, k-1}的最短路径上的j的前驱。
  - 若经过k，则有 $d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$
    - 此时求从结点i到结点j的所有中间结点都取自集合{1, 2, …, k}的最短路径上的j的前驱等价于求从结点k到结点j的所有中间结点都取自集合{1, 2, …, k-1}的最短路径上的j的前驱。

所以有：
$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} \le d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} , \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} . \end{cases}$$

# 例：对下例， FLOYD-WARSHALL算法的计算过程如下：




FLOYD-WARSHALL$(W)$

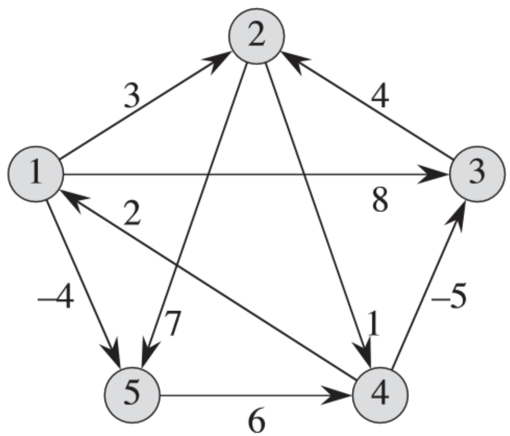
$n = W.rows$
$D^{(0)} = W$
**for** $k = 1$ **to** $n$
  let $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$ be a new $n \times n$ matrix
  **for** $i = 1$ **to** $n$
    **for** $j = 1$ **to** $n$
      $d_{ij}^{(k)} = \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$
**return** $D^{(n)}$

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & \text{NIL} & 4 & \text{NIL} & \text{NIL} \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \underline{5} & -5 & 0 & \underline{-2} \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & \underline{1} & 4 & \text{NIL} & \underline{1} \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \underline{4} & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \underline{5} & \underline{11} \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \underline{2} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \underline{2} & \underline{2} \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & \underline{-1} & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & \underline{3} & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$




$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & \text{NIL} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & \text{NIL} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} \le d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} , \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} . \end{cases}$$

# 算法时间分析

- 3层嵌套的for循环，所以时间是：Θ(n$^3$)。

FLOYD-WARSHALL($W$)

$n = W.rows$
$D^{(0)} = W$
**for** $k = 1$ **to** $n$
  let $D^{(k)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)$ be a new $n \times n$ matrix
  **for** $i = 1$ **to** $n$
    **for** $j = 1$ **to** $n$
      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$
**return** $D^{(n)}$

思考：怎么在上述算法中加入计算Π的代码？

## 有向图的传递闭包

对有向图G=(V, E)，定义图G的传递闭包G*=(V, E*)，其中

E*={(i, j)：如果图G中包含一条从结点i到结点j的路径}。

## 求有向图的传递闭包：

**方法一：** 给E中每条边赋权重1，然后运行FLOYD-WARSHALL算法，可以在$\Theta(n^3)$求出权重路径矩阵D。在D中若$d_{ij}<n$，则表示存在一条从结点i到结点j的路径；否则$d_{ij}=\infty$。

**方法二：** 定义矩阵$T=\{t_{ij}\}$，若存在一条从结点i到结点j的路径，$t_{ij}=1$，否则$t_{ij}=0$。

# 计算T

对FLOYD-WARSHALL算法进行改造：用**逻辑或**操作（V）和**逻辑与**操作（Λ）替换算术操作min和+，得以下计算公式：

k=0时，
$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \text{ and } (i, j) \notin E , \\ 1 & \text{if } i = j \text{ or } (i, j) \in E , \end{cases}$$

k≥1时，
$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}\right) .$$

# 有向图的传递闭包计算过程如下：

TRANSITIVE-CLOSURE($G$)

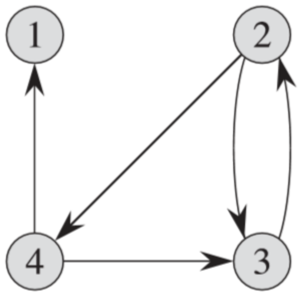
$n = |G.V|$<br>
let $T^{(0)} = (t_{ij}^{(0)})$ be a new $n \times n$ matrix<br>
**for** $i = 1$ **to** $n$<br>
    **for** $j = 1$ **to** $n$<br>
        **if** $i == j$ or $(i, j) \in G.E$<br>
            $t_{ij}^{(0)} = 1$<br>
        **else** $t_{ij}^{(0)} = 0$<br>
**for** $k = 1$ **to** $n$<br>
    let $T^{(k)} = (t_{ij}^{(k)})$ be a new $n \times n$ matrix<br>
    **for** $i = 1$ **to** $n$<br>
        **for** $j = 1$ **to** $n$<br>
            $t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)})$<br>
**return** $T^{(n)}$

按照k的递增次序依次计算 $T^{(k)} = (t_{ij}^{(k)})$

时间复杂度：$\Theta(n^3)$

注：逻辑运算比算术运算快；空间需求也较小

例，求如图所示的图G的传递闭包矩阵T。




$$T^{(0)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\quad T^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&\underline{1}\\0&\underline{1}&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\quad T^{(2)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&\underline{1}\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$T^{(3)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\1&\underline{1}&1&1\end{pmatrix}\quad T^{(4)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\underline{1}&1&1&1\\\underline{1}&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

# 25.4 用于稀疏图的Johnson算法

对于有|V|个结点、|E|条边的有向图，求每对结点之间的最短路径：

- FLOYD-WARSHALL算法的时间复杂度：$\Theta(n^3)$
- 用单源最短路径算法，执行|V|次单源最短路径算法，每次使用一个不同的结点作为源点，求出每个结点到其他所有结点的最短路径。
  - 如果所有的边的权重为非负值，用Dijkstra算法：
    - 用线性数组实现最小优先队列：$O(V(V^2+E))=O(V^3)$；
    - 用二叉堆实现最小优先队列：$O(VE\lg V)$；（**对稀疏图较好**）
    - 用斐波那契堆实现最小优先队列：$O(V^2\lg V+VE)$；

- 用单源最短路径算法
  - 如果有权重为负值边，用Bellman-Ford算法：
    - 一般的运行时间：$O(V^2E)$；
    - 对稠密图，运行时间为$O(V^4)$。

Johnson算法：在稀疏图中求每对结点之间的最短路径权重。

- 对稀疏图，Johnson算法优于Floyd-Warshall算法，时间复杂度可达$O(V^2 \lg V+VE)$。
- Johnson算法使用Dijkstra算法和Bellman-Ford算法作为自己的子程序，可处理带有负权重的图。
- 如果图中包含所有结点对的最短路径，Johnson算法输出一个包含所有结点对的最短路径权重矩阵；否则报告图中包含权重为负值的环路。

**重赋权重**：Johnson算法使用**重新赋予权重**的技术求解。

**工作原理**：

- 如果图G=(V, E)中所有的边权重ω皆为非负值，则通过对每个结点运行一次Dijkstra算法来找到所有结点对之间的最短路径；
- 如果图G包含权重为负值的边，但没有权重为负值的环路，则通过**重赋权重**，构造出一组新的非负权重值，然后使用上面同样的方法求解(Dijkstra算法)。

新赋予的权重函数记为：$\widehat{w}$

- $\widehat{w}$ 必须满足以下两个重要性质：

新赋予的权重 $\hat{w}$ 必须满足以下两个重要性质:

1. **路径等价性**：对于所有结点对u, v∈V，一条路径p是在使用权重函数ω时的从结点u到结点v的一条最短路径，**当且仅当**p是在使用权重 $\hat{w}$ 时的从u到v的一条最短路径。

   - 即不管是使用原来的权重函数还是新的权重函数，所能求出来的最短路径应是一致的。

2. **非负性**：对于所有的边(u, v)，新权重 $\hat{w}(u, v)$ 为非负值。

   - 即，需要经过技术处理，把负权重的边的权重改造成非负值。

如何找这样的新权重函数呢?

下面的引理，使得我们可以对边的权重重新赋值，以满足上面的两个条件：

这里，

- 用δ表示从权重函数ω所导出的最短路径权重；
- 用 $\hat{\delta}$ 表示从权重函数 $\hat{w}$ 所导出的最短路径权重。

**引理25.1** (重新赋予权重并不改变最短路径) 给定带权重的有向图G=(V, E)，其权重函数为ω：E→R，设h:V→R为任意函数，该函数将结点映射到实数上。对于每条边(u, v)∈E，定义

$$\widehat{w}(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)\,.$$

设p=<$v_0$, $v_1$, …, $v_k$>为从结点$v_0$到结点$v_k$的任意一条路径，那么，p是在使用权重函数ω时从结点$v_0$到结点$v_k$的一条最短路径，当且仅当p是在使用权重函数$\widehat{w}$时从结点$v_0$到结点$v_k$的一条最短路径，即：ω(p)=δ($v_0$,$v_k$) 当且仅当 $\widehat{w}(p)=\widehat{\delta}(v_0,v_k)$ 。

而且，图G在使用权重函数ω时不包含权重为负值的环路，当且仅当p在使用权重函数$\widehat{w}$也不包含权重为负值的环路。

# 证明：

（1）首先证明： $\hat{w}(p) = w(p) + h(v_0) - h(v_k)$

根据定义，对于边有： $\hat{w}(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$ .

所以有：

$$\begin{aligned}\hat{w}(p) &= \sum_{i=1}^{k} \hat{w}(v_{i-1}, v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (w(v_{i-1}, v_i) + h(v_{i-1}) - h(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) + h(v_0) - h(v_k) \\ &= w(p) + h(v_0) - h(v_k) .\end{aligned}$$

p=<$v_0$,$v_1$,…,$v_k$>

因为$h(v_0)$和$h(v_k)$不依赖于任何具体路径，因此，如果从结点$v_0$到结点$v_k$的一条路径在使用权重函数ω时比另一条路径短，则其在使用权重函数$\hat{w}$时也比另一条短。因此ω(p)=δ($v_0$, $v_k$)当且仅当 $\hat{w}(p) = \hat{\delta}(v_0, v_k)$

然后证明：

若G在使用权重函数ω时包含一个权重为负值的环路当且仅当p在使用权重函数$\hat{w}$也包含一个权重为负值的环路。

考虑任意环路 c=⟨$v_0$, $v_1$, …, $v_k$⟩，其中$v_0=v_k$。

因为 $\hat{w}(p) = w(p) + h(v_0) - h(v_k)$

所以有
$$\begin{aligned}\hat{w}(c) &= w(c) + \underline{h(v_0) - h(v_k)} \\ &= w(c)\,,\end{aligned}$$

因此，环路c在使用权重函数ω时为负当且仅当在使用权重函数$\hat{w}$时也为负值。 证毕。

剩下的问题就是到哪里去找能使$\hat{w}$为非负的h函数映射

# 通过重新赋值来生成非负权重

对于图G构造一幅新图G′=(V′, E′)，其中

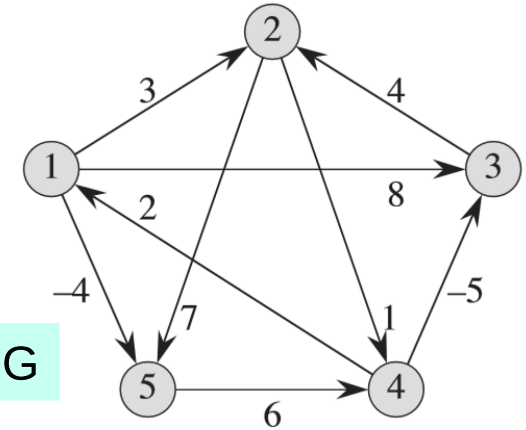
V′ =V∪{s}，s是一个新结点，$s \notin V$，

$E' = E \cup \{(s, v) : v \in V\}$ 。

并令，对于所有结点v∈V，有ω(s, v)=0。

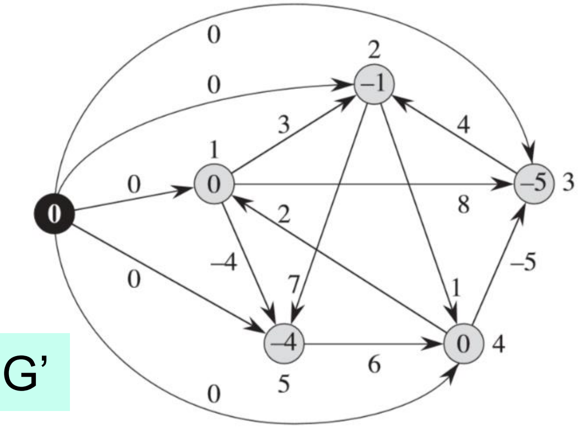
注：由于结点s没有入边，所以除了以s为源点的最短路径外，图G′中没有其它包含s的最短路径。而且G'不包含权重为负值的环路当且仅当图G不包含权重为负值的环路。

如：




图G

改造




图G′

假定图G和图G′ 都不包含权重为负值的环路。

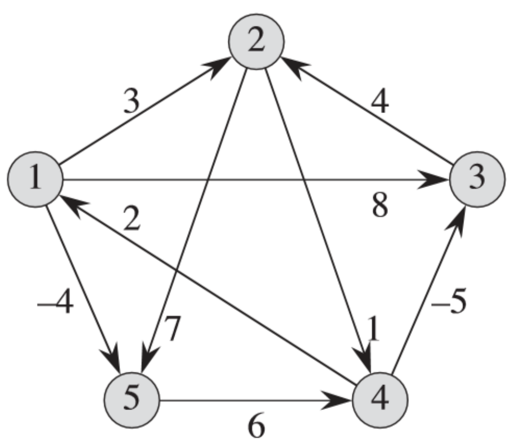
对于所有的结点v∈V’，定义：h(v)=δ(s,v)。

- 根据三角不等式，对于所有的边(u, v)∈E’，有

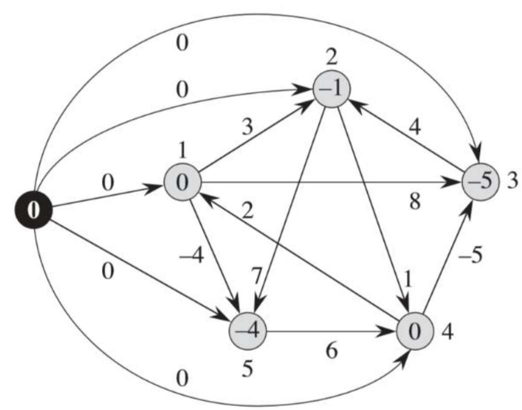
h(v)≤h(u)+ω(u,v)。

定义新权重 $\hat{w}$ ，有 $\hat{w}(u,v) = w(u,v) + \underline{h(u) - h(v)} \geq 0$

即满足性质二的要求（性质1已经证明成立）。

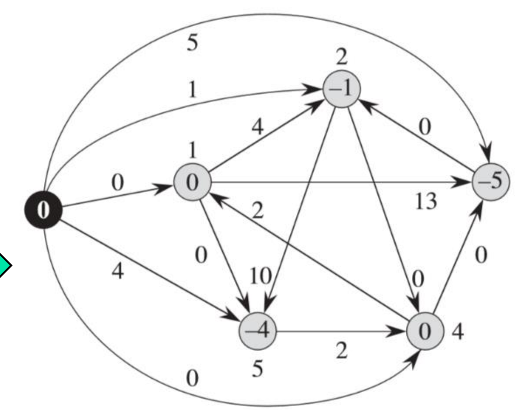



图G



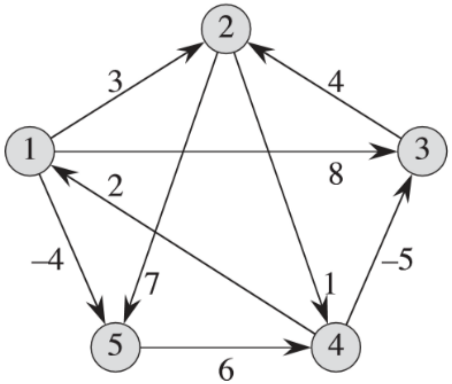

(a)

结点里标记的是h(v)=δ(s,v)的值



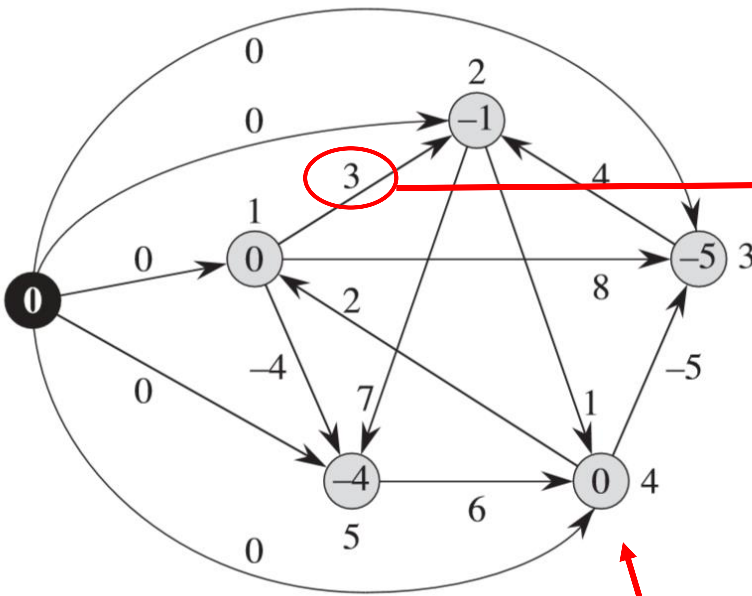

(b)

重新赋予权重的图G’
每条边的新权重函数为：
$\hat{w}(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$



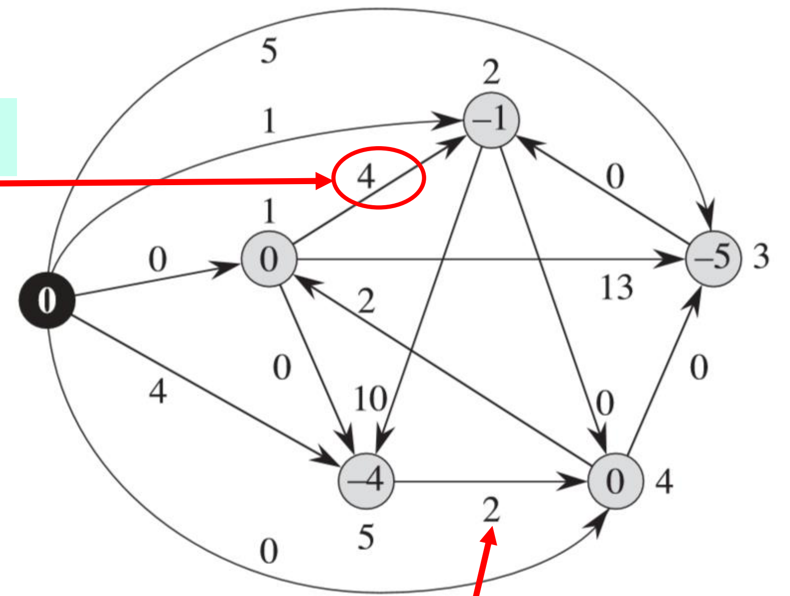

图G

$$\hat{w}(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)$$




(a)

3+(0-(-1))



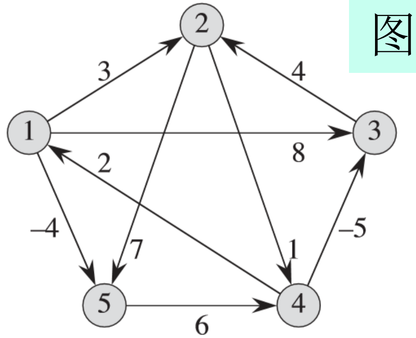

(b)

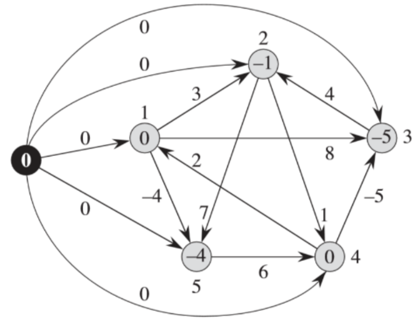
结点里标记的是h(v)=δ(s,v)的值

重新赋予权重的图G'
每条边的新权重函数为：

$$\hat{w}(u,v)=w(u,v)+h(u)-h(v)$$

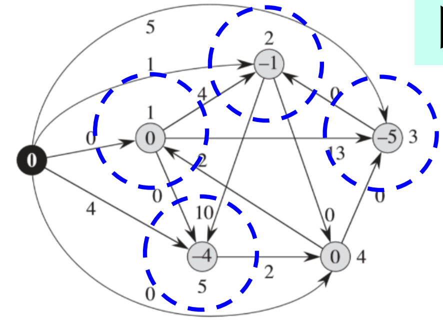
图G



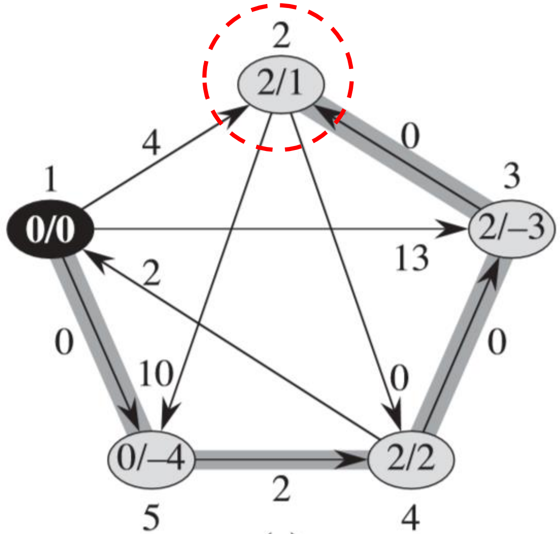




(a)

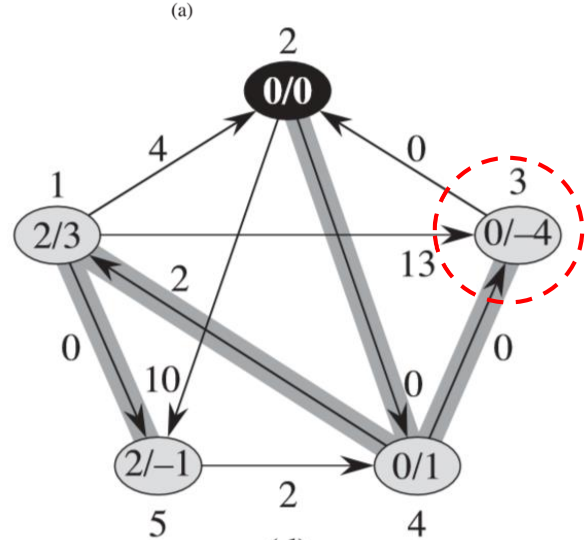
图G'



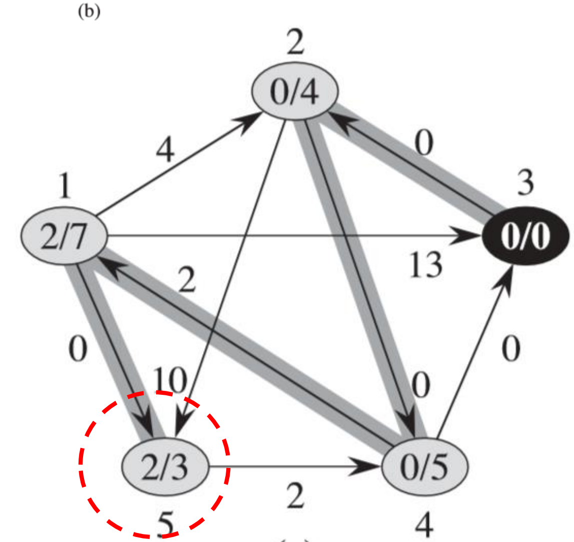

(b)




(c)




(d)




(e)

- (c)~(g)使用权重函数 $\hat{w}$ 在G的每个结点上运行Dijkstra算法。
- 黑色结点是当前源结点u。
- 加了阴影的边是由算法计算出来的属于最短路径树里面的边。
- 每个结点里面标记的是 $\hat{\delta}(u,v)$ / $\delta(u,v)$的值。还原：

$$d_{uv} = \delta(u,v) = \hat{\delta}(u,v) + h(v) - h(u)$$

如：

$d_{12}$ =2+h(2)-h(1)
=2+(-1)-0 = 1

$d_{23}$ =0+h(3)-h(2)
=0+(-5)-(-1) = -4

$d_{35}$ =2+h(5)-h(3)
=2+(-4)-(-5)=3

# Johnson算法计算所有结点对之间的最短路径

Johnson算法使用Bellman-Ford算法和Dijkstra算法作为子程序来计算所有结点之间的最短路径。

JOHNSON$(G, w)$

compute $G'$, where $G'.V = G.V \cup \{s\}$,
  $G'.E = G.E \cup \{(s, v) : v \in G.V\}$, and
  $w(s, v) = 0$ for all $v \in G.V$
**if** BELLMAN-FORD$(G', w, s)$ == FALSE
  print "the input graph contains a negative-weight cycle"
**else for** each vertex $v \in G'.V$
    set $h(v)$ to the value of $\delta(s, v)$
      computed by the Bellman-Ford algorithm
  **for** each edge $(u, v) \in G'.E$
    $\widehat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$
  let $D = (d_{uv})$ be a new $n \times n$ matrix
  **for** each vertex $u \in G.V$
    run DIJKSTRA$(G, \widehat{w}, u)$ to compute $\widehat{\delta}(u, v)$ for all $v \in G.V$
    **for** each vertex $v \in G.V$
      $d_{uv} = \widehat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$
  **return** $D$

先用Bellman-Ford算法计算s到各个结点的最短路径，并判断是否存在负权重的环路。

利用Bellman-Ford算法计算得到的δ(s,v)定义h(v)的值，并重新赋边的权重。

对每个结点执行Dijkstra算法，得到路径权重。

还原路径权重，得到原图的路径权重矩阵D。

```
JOHNSON(G, w)
compute G′, where G′.V = G.V ∪ {s},
      G′.E = G.E ∪ {(s, v) : v ∈ G.V}, and
      w(s, v) = 0 for all v ∈ G.V
if BELLMAN-FORD(G′, w, s) == FALSE
      print "the input graph contains a negative-weight cycle"
else for each vertex v ∈ G′.V
            set h(v) to the value of δ(s, v)
                  computed by the Bellman-Ford algorithm
      for each edge (u, v) ∈ G′.E
            ŵ(u, v) = w(u, v) + h(u) − h(v)
      let D = (d_uv) be a new n × n matrix
      for each vertex u ∈ G.V
            run DIJKSTRA(G, ŵ, u) to compute δ̂(u, v) for all v ∈ G.V
            for each vertex v ∈ G.V
                  d_uv = δ̂(u, v) + h(v) − h(u)
      return D
```

- Johnson算法假定所有的边都保存在邻接表里。返回一个$|V|\times|V|$的矩阵$D=d_{ij}$，其中$d_{ij}=\delta(i,j)$。
- 或者报告图G中包含权重为负值的环路。

# 时间分析：

算法的运行时间依赖于Dijkstra算法中最小优先队列的实现方式：

- 如果使用斐波那契堆实现，则Johnson算法的运行时间为$O(V^2 \lg V + VE)$。

  $O(V \lg V + E)$

- 如果使用二叉最小堆实现，则Johnson算法的运行时间为$O(VE \lg V)$。

  $O((V+E) \lg V)$

- 在稀疏图的情况下，该算法的时间比Floyd-Warshall算法的表现($O(V^3)$)要好。

# 22-25章作业

- 计算题：
  24.1-1
  24.4-1
  25.2-1

- 设计、证明题：
  24.1-3
  24-3
  25.2-7

- 思考题：25.2-6