



算法设计与分析

Computer Algorithm Design & Analysis
2019.11

王多强

dqwang@mail.hust.edu.cn

群名称: 2019-算法
群 号: 835135560



群名称: 2019-算法
群 号: 835135560



Chapter 24

Single-Source Shortest Paths

单源最短路径

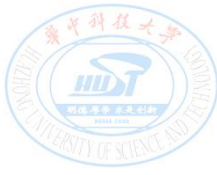
最短路径问题:

给定一个带权重的有向图 $G=(V,E)$ 和权重函数 $\omega:E \rightarrow \mathbb{R}$ 。图中一条路径 $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ 的权重 $\omega(p)$ 是构成该路径的所有边的权重之和:

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) .$$

从结点 u 到结点 v 的最短路径权重 $\delta(u,v)$ 定义如下:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{if there is a path from } u \text{ to } v , \\ \infty & \text{otherwise .} \end{cases}$$



单源最短路径问题：

给定一个图 $G=(V,E)$ ，找出从给定的源点 $s \in V$ 到其它每个结点 $v \in V$ 的最短路径。

■ 最短路径的最优子结构

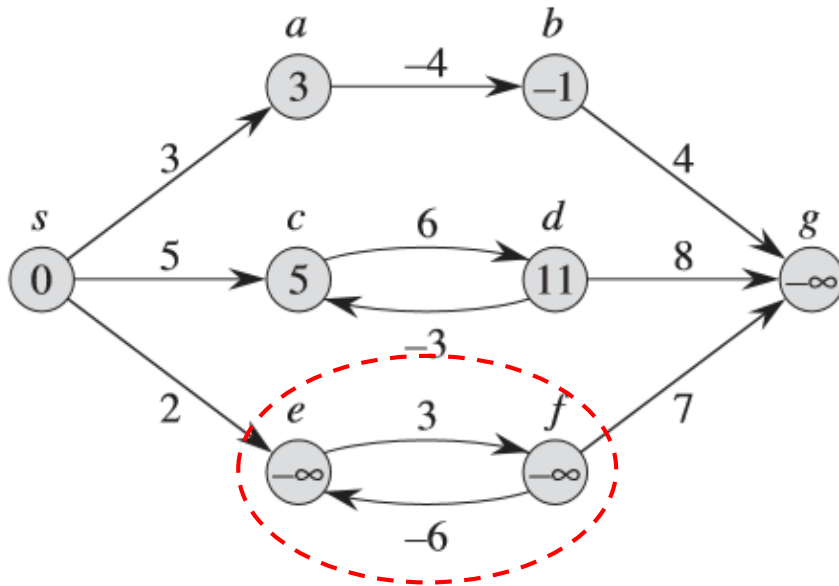
这样最短路径具有最优子结构性：两个结点之间的最短路径的任何子路径都是最短的。

引理24.1 给定一个带权重的有向图 $G=(V,E)$ 和权重函数 $\omega:E \rightarrow \mathbb{R}$ 。设 $p=\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ 为从结点 v_0 到结点 v_k 的一条最短路径，并且对于任意的 i 和 j ， $0 \leq i \leq j \leq k$ ，设 $p_{ij}=\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$ 为路径 p 中从结点 v_i 到结点 v_j 的子路径，则 p_{ij} 是从结点 v_i 到结点 v_j 的一条最短路径。（证明略，见P375）

■ 负权重的边

权重为负值的边称为**负权重的边**。

- 如果存在负权重的边，则有可能存在**权重为负值的环路**，而造成图中**最短路径无定义**（路径的权重为 $-\infty$ ）。





- 如果一条路径中包含两个相同的结点，则该路径包含**环路**。
- 不包含环路的路径称为**简单路径**。
- 最短路应为简单路径，不包含环路。
 - 对任何简单路径最多包含 $|V|-1$ 条边和 $|V|$ 个结点。
 - 不失一般性，假设后续算法寻找的最短路径都不包含环路。

■ 最短路径的表示

- 一个结点的前驱结点记为： **$v.\pi$**
 - 前驱结点或者为NIL或者为另一个结点
- 利用 $v.\pi$ 的记录可以搜索出最短路径上的所有结点。

■ 前驱子图

一个源点 s 所诱导的**前驱子图**定义为 $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ ，其中，

- 结点集合 $V_\pi = \{v \in V: v.\pi \neq \text{NIL}\} \cup \{s\}$
 - 即 V_π 是源点 s 和图 G 中的前驱结点不为NIL的所有结点的集合。
- 边集合 $E_\pi = \{(v.\pi, v) \in E: v \in V_\pi - \{s\}\}$
 - 即 E_π 是由 V_π 中的结点 v 的 π 值所“诱导”(induced)的边的集合。

则，算法终止时， **G_π 是一棵最短路径树。**

- 该树包含了从源点 s 到每个可以从 s 到达的结点的最短路径。

设 $G=(V,E)$ 是一条带权重的有向图，其权重函数为 $\omega:E\rightarrow\mathbb{R}$ ，假定 G 不包含从 s 可以到达的权重为负值的环路。此时，所有的最短路径都有定义。

一棵根结点为 s 的最短路径树是一个有向子图 $G'=(V', E')$ ，这里 $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ 。且有以下性质：

- (1) V' 是图 G 中从源结点 s 出发可以到达的所有结点的集合。
- (2) G' 形成一棵根结点为 s 的树。
- (3) 对于任意结点 $v \in V'$ ，图 G' 中从结点 s 到结点 v 的唯一简单路径是图 G 中从结点 s 到结点 v 的一条最短路径。



■ 松弛操作 (Relax)

对于每个结点 v ，维持一个属性 $v.d$ ，记录从源点 s 到结点 v 的最短路径权重的上界。称 $v.d$ 为 s 到 v 的最短路径估计。

- 过程INITIALIZE-SINGLE-SOURCE对每个结点的最短路径估计 d 和前驱结点 π 进行初始化：

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )  
1  for each vertex  $v \in G.V$   
2       $v.d = \infty$   
3       $v.\pi = \text{NIL}$   
4   $s.d = 0$ 
```

初始化后，对所有的结点 $v \in V$ 有，

- $v.\pi = \text{NIL}$;
- $s.d = 0$;
- 对所有的结点 $v \in V - \{s\}$ 有： $v.d = \infty$ 。

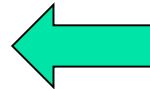
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE 的时间： $\Theta(V)$

松弛操作：首先测试一下是否可以对从s到v的最短路径进行改善（即有没有更短的路径）。如果可以改善，则v.d更新为新的最短路径估计值，v的前驱v.π更新为新的前驱结点。

RELAX(u, v, w)

```

1  if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
2       $v.d = u.d + w(u, v)$ 
3       $v.\pi = u$ 
    
```



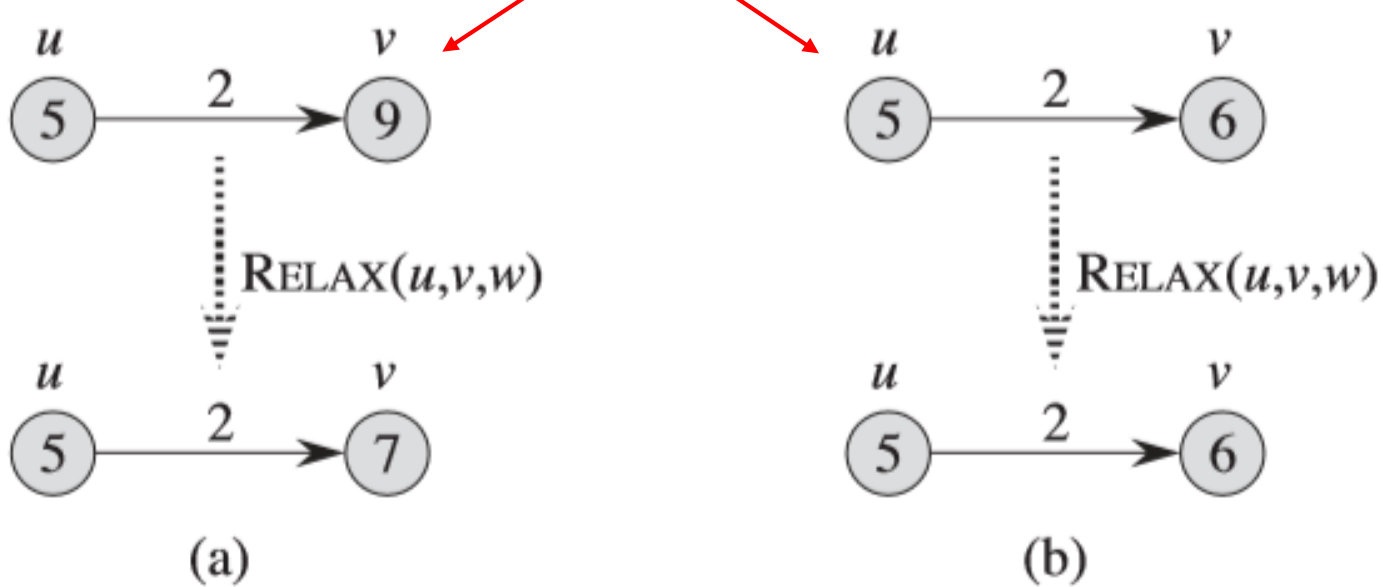
测试：对s到v所经过的**最后一个中间结点u**，按下列方式计算从s出发，经过u而到达v的路径的权重：

将从结点s到结点u之间最短路径加上结点u到v之间的边的权重，然后与当前的s到v的最短路径估计v.d进行比较，看有没有变小。如果变小，则对v.d和v.π进行更新——这一操作就称为“**松弛**”

RELAX 的时间：O(1)

例:

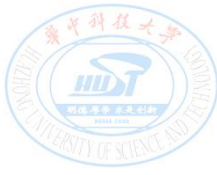
圆圈中的数字表示每个结点的d值



对边 (u, v) 进行松弛操作，权重： $\omega(u, v) = 2$ ：

(a) : 因为 $v.d > u.d + \omega(u, v)$ ，所以 $v.d$ 的值减小 ($9 > 5 + 2$)。

(b) : 因为 $v.d \leq u.d + \omega(u, v)$ ，所以 $v.d$ 的值没有改变。



最短路径和松弛操作的相关性质

1. 三角不等式性质

引理24.11 设 $G=(V, E)$ 为一个带权重的有向图，其权重函数为 $\omega:E \rightarrow \mathbb{R}$ ，设源结点为 s 。那么对于所有的边 $(u, v) \in E$ ，有

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + \omega(u, v)$$

证明：

假定 p 是从源结点 s 到结点 v 的一条最短路径，则 p 的权重不会比任何从 s 到 v 的其它路径的权重大，因此路径 p 的权重也不会比这样的一条路径的权重更大：从源结点 s 到结点 u 的一条最短路径，再加上边 (u, v) 而到达结点 v 的这条路径。

如果 s 到 v 没有最短路径，则不可能存在 s 到 v 的路径。 ■

2. 上界性质: $v.d$ 是 s 到 v 的最短路径权重 $\delta(s, v)$ 的上界

引理24.11 设 $G=(V,E)$ 为一个带权重的有向图, 其权重函数为 $\omega:E \rightarrow \mathbb{R}$, 设源结点为 s , 该图由算法 *INITIALIZE-SINGLE-SOURCE*(G, s) 执行初始化。那么对于所有的结点 $v \in V$, $v.d \geq \delta(s, v)$ 。并且该不变式在对图 G 的边进行任何次序的松弛过程中都保持成立, 而一旦 $v.d$ 取得其下界 $\delta(s, v)$ 后, 将不再发生变化。

用数学归纳法证明: 对于所有的结点 $v \in V$, $v.d \geq \delta(s, v)$ 。

➤ 注: 归纳的主体是松弛步骤的数量。

基础步: *INITIALIZE-SINGLE-SOURCE*(G, s) 中进行初始化时, 对于所有的结点 $v \in V - \{s\}$, 置 $v.d = \infty$, 而 $s.d = 0$, 显然 $s.d \geq \delta(s, s)$, 而其它的结点 $v.d \geq \delta(s, v)$, 结论成立。



归纳步：考虑对边 (u, v) 的松弛操作。

假设在对边 (u, v) 进行松弛之前，对所有的结点 $x \in V$ ，都有

$$x.d \geq \delta(s, x)。$$

在对边 (u, v) 进行松弛的过程中，唯一可能发生改变的值只有 $v.d$ ，而如果该值发生变化，则有：

$$\begin{aligned} v.d &= u.d + w(u, v) \\ &\geq \delta(s, u) + w(u, v) \quad (\text{by the inductive hypothesis}) \\ &\geq \delta(s, v) \quad (\text{by the triangle inequality}) , \end{aligned}$$

同时，根据计算的规则，在 $v.d$ 达到其下界 $\delta(s, v)$ 后，就无法再减小（也不可能增加）。

引理得证。

RELAX (u, v, w)

```
1  if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
2       $v.d = u.d + w(u, v)$ 
3       $v.\pi = u$ 
```

3. 非路径性质

推论24.12 给定一个带权重的有向图 $G=(V,E)$ ，其权重函数为 $\omega:E\rightarrow\mathbb{R}$ 。假定从源结点 s 到给定点 v 之间**不存在路径**，则该图在由算法 *INITIALIZE-SINGLE-SOURCE*(G,s) 进行初始化后，有

$$v.d \geq \delta(s,v) = \infty,$$

并且该等式作为不变式一直维持到图 G 的所有松弛操作结束。

证明：

因为从源点 s 到给定点 v 之间**不存在路径**，所以 $\delta(s,v) = \infty$ 。

而根据上界性质，总有 $v.d \geq \delta(s,v)$ ，所以， $v.d \geq \delta(s,v) = \infty$ 。

得证。

引理24.13 设 $G=(V,E)$ 为一个带权重的有向图，其权重函数为 $\omega:E \rightarrow \mathbb{R}$ ，并且边 $(u,v) \in E$ 。那么在对边 (u,v) 进行松弛操作 $\text{RELAX}(u,v,\omega)$ 后，有 $v.d \leq u.d + \omega(u,v)$ 。

证明：

如果在对边 (u,v) 进行松弛操作前，有 $v.d > u.d + \omega(u,v)$ ，则松弛操作时，置 $v.d = u.d + \omega(u,v)$ 。

如果在松弛操作前有 $v.d \leq u.d + \omega(u,v)$ ，则松弛操作不会改变 $v.d$ 和 $u.d$ 的值，因此在松弛操作后仍有 $v.d \leq u.d + \omega(u,v)$ 。

得证。

```

RELAX( $u, v, w$ )
1  if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
2       $v.d = u.d + w(u, v)$ 
3       $v.\pi = u$ 
    
```




4. 收敛性质

引理24.14 设 $G=(V,E)$ 为一个带权重的有向图，其权重函数为 $\omega:E\rightarrow\mathbb{R}$ 。设 $s\in V$ 为某个源结点， $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ 为图 G 中从 s 到 v 的一条最短路径 ($u,v\in V$)。

假定图 G 由算法 *INITIALIZE-SINGLE-SOURCE*(G,s) 进行初始化，并在这之后进行了一系列边的松弛操作，其中包括对边 (u,v) 的松弛操作 *RELAX*(u,v,ω)。如果在对边 (u,v) 进行松弛操作之前的某时刻有 $u.d = \delta(s,u)$ ，则在该松弛操作之后的所有时刻有 $v.d = \delta(s,v)$ 。

证明:

根据上界性质, 如果在对边 (u, v) 进行松弛前的某个时刻有

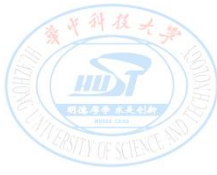
$u.d = \delta(s, u)$, 则该等式在松弛之后仍然成立。

对边 (u, v) 进行松弛时将有,

$$\begin{aligned} v.d &\leq u.d + w(u, v) && \text{(by Lemma 24.13)} \\ &= \delta(s, u) + w(u, v) \\ &= \delta(s, v) && \text{(by Lemma 24.1) .} \\ &&& \text{最优子结构性} \end{aligned}$$

而根据上界性质, 有 $v.d \geq \delta(s, v)$ 。所以有 $v.d = \delta(s, v)$, 并且该等式在此之后一直保持成立。

得证。



4. 路径松弛性质

引理24.15 设 $G=(V,E)$ 为一个带权重的有向图，其权重函数为 $\omega:E\rightarrow\mathbb{R}$ 。设 $s\in V$ 为某个源结点，考虑从源结点 s 到结点 v_k 的任意一条最短路径 $p=\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ ， $v_0=s$ 。

如果图 G 由算法 *INITIALIZE-SINGLE-SOURCE*(G,s) 进行初始化，并在这之后进行了一系列边的松弛操作，其中包括对边 (v_0, v_1) 、 (v_1, v_2) 、 \dots 、 (v_{k-1}, v_k) 按照所列次序而进行的松弛操作，则在所有这些松弛操作之后，有 $v_k.d = \delta(s, v_k)$ ，并且在此之后该等式一直保持。

该性质的成立与其他边的松弛操作及次序无关，即使这些松弛操作是与对 p 上的边所进行的松弛操作穿插进行的。

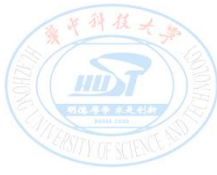
归纳法证明： 在最短路径 p 的第 i 条边被松弛之后，有 $v_i.d = \delta(s, v_i)$

基础步： 在对路径 p 的任何一条边进行松弛操作之前，从初始化算法可以得出： $v_0.d = s.d = \delta(s, s)$ 。结论成立，且 $s.d$ 的取值在此之后不再发生变化。

归纳步： 假定依次经过 (v_0, v_1) 、 (v_1, v_2) 、 \dots 、 (v_{i-2}, v_{i-1}) 松弛操作之后， $v_{i-1}.d = \delta(s, v_{i-1})$ 。

则在对边 (v_{i-1}, v_i) 进行松弛操作时，根据**收敛性质**，必有在对该边进行松弛后 $v_i.d = \delta(s, v_i)$ ，并且该等式在此之后一直保持成立。

得证。



24.1 Bellman-ford算法

Bellman-ford算法可以求解一般情况下的单源最短路径问题

——可以有负权重的边，但不能有负权重的环。

设 $G=(V, E)$ 为一个带权重的有向图，其权重函数为 $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ 。

$s \in V$ 为源结点。

```
BELLMAN-FORD( $G, w, s$ )
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  for  $i = 1$  to  $|G.V| - 1$ 
3      for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4          RELAX( $u, v, w$ )
5  for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
6      if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
7          return FALSE
8  return TRUE
```

Bellman-ford算法通过对边反复进行松弛操作来渐近地降低从源点 s 到每个结点 v 的最短路径的估计值 $v.d$ ，直到该估计值与实际的最短路径权重 $\delta(s, v)$ 相同时为止。

算法返回TRUE当且仅当图 G 中不包含从源结点可达的权重为负值的环路。

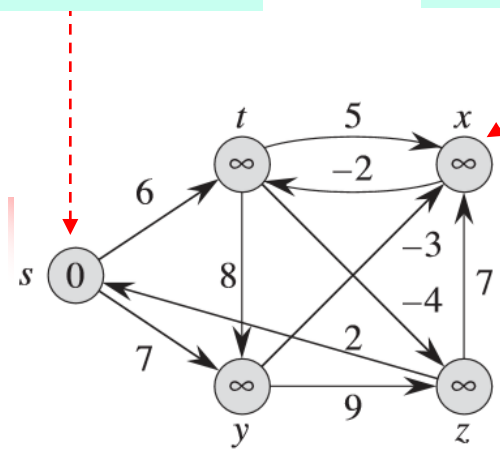
```

RELAX( $u, v, w$ )
1  if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
2       $v.d = u.d + w(u, v)$ 
3       $v.\pi = u$ 

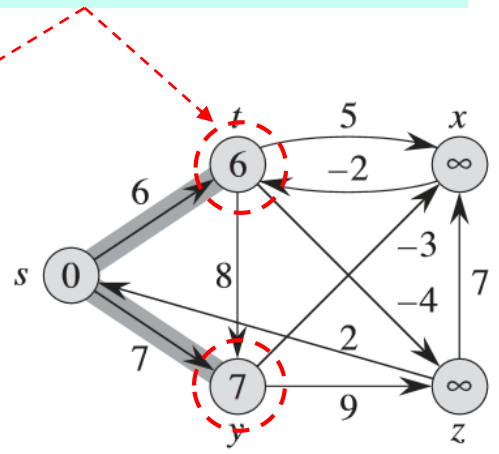
```

源结点: s

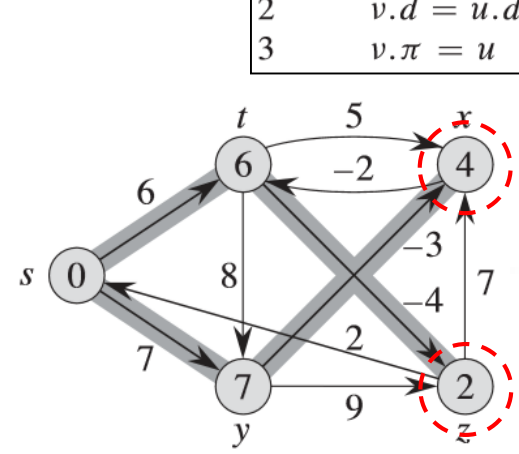
结点中的数值是结点的 d 值



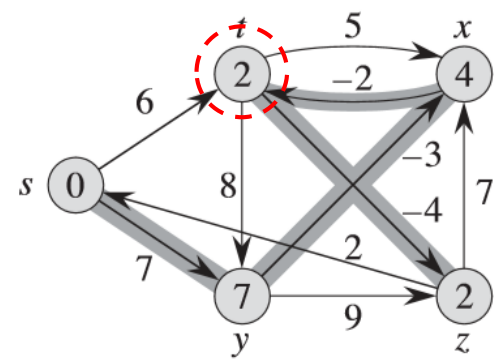
(a) 初始化后



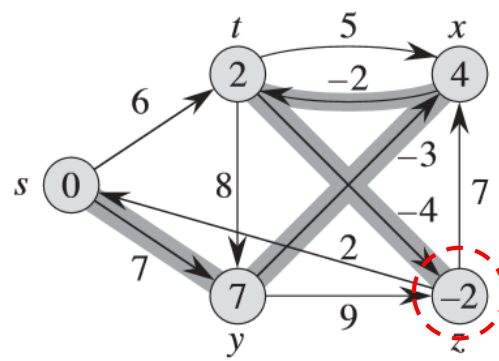
(b) 第一次松弛操作后



(c) 第二次松弛操作后



(d) 第三次松弛操作后



(e) 第四次松弛操作后

初始化后，算法将对图中每条边进行 $|V|-1$ 次松弛处理：


for 循环执行 $|V|-1$ 次，
每次对所有的边进行进行一次松弛处理。

例，Bellman-ford算法的执行过程

- 加了阴影的边表示前驱值：如果边 (u, v) 加了阴影，则 $v.\pi = u$ 。
- 本例中Bellman-ford算法执行4次松弛操作后返回TRUE。

Bellman-ford算法的运行时间

初始化: $\Theta(V)$ 

松弛处理: for循环执行 $|V|-1$ 次,
每次的时间是 $\Theta(E)$ 

BELLMAN-FORD(G, w, s)

```
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2 for  $i = 1$  to  $|G.V| - 1$ 
3   for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4     RELAX( $u, v, w$ )
5   for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
6     if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
7       return FALSE
8 return TRUE
```

$O(E)$

- Bellman-ford算法总的运行时间是 $O(VE)$ 。

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

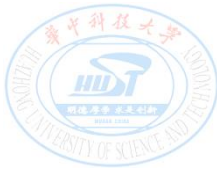
```
1 for each vertex  $v \in G.V$ 
2    $v.d = \infty$ 
3    $v.\pi = \text{NIL}$ 
4  $s.d = 0$ 
```

$\Theta(V)$

RELAX(u, v, w)

```
1 if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
2    $v.d = u.d + w(u, v)$ 
3    $v.\pi = u$ 
```

$\Theta(1)$

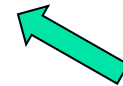


Bellman-ford算法的证明

设 $G=(V, E)$ 为一个带权重的源点为 s 的有向图，其权重函数为 $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ ，并假定图 G 中不包含从源结点 s 可以到达的权重为负值的环路。

引理24.2 Bellman-ford算法的第2~4行的for循环在执行 $|V|-1$ 次之后，对于所有从源结点 s 可以到达的结点 v 有

$$v.d = \delta(s, v)。$$



v.d到达下界

```
BELLMAN-FORD( $G, w, s$ )
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  for  $i = 1$  to  $|G.V| - 1$ 
3      for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4          RELAX( $u, v, w$ )
5  for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
6      if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
7          return FALSE
8  return TRUE
```


引理24.2 假定图G中不包含从源结点s可以到达的权重为负值的环路。则Bellman-ford算法的第2~4行的for循环在执行 $|V|-1$ 之后，对于所有从源结点s可以到达的结点v有 $v.d = \delta(s, v)$ 。

```
BELLMAN-FORD( $G, w, s$ )
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  for  $i = 1$  to  $|G.V| - 1$ 
3      for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4          RELAX( $u, v, w$ )
5  for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
6      if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
7          return FALSE
8  return TRUE
```

证明：（使用**路径松弛性质**证明）

考虑任意从源结点s可以到达的结点v。设 $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ 是从结点s到结点v的任意一条最短路径，这里 $v_0 = s$ ， $v_k = v$ 。

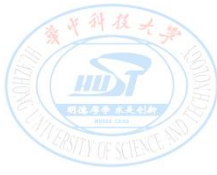
- 因为最短路径都是简单路径，所以p中最多包含 $|V|-1$ 条边，故 $k \leq |V|-1$ 。
- 同时，算法第2~4行的for循环每次松弛所有的 $|E|$ 条边，**每一次为p最多扩展一条边**（想想为什么？）。所以对序列 $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ 在其第i次松弛操作时，被松弛的边中包含边 (v_{i-1}, v_i) ，这里 $i = 1, 2, \dots, k$ 。
- 根据路径松弛性质有： $v.d = v_k.d = \delta(s, v_k) = \delta(s, v)$ 。得证。

引理24.3 对所有结点 $v \in V$ ，存在一条从源结点 s 到结点 v 的路径当且仅当Bellman-ford算法终止时有 $v.d < \infty$ 。

证明：（略）

定理24.4（Bellman-ford算法的正确性） 设Bellman-ford算法运行在一个带权重的源点为 s 的有向图 $G=(V,E)$ 上，其权重函数为 $\omega:E \rightarrow \mathbb{R}$ 。

- 如果图 G 中不包含从源结点 s 可以到达的权重为负值的环路，则算法将返回TRUE，且对于所有结点 $v \in V$ ，前驱子图 G_π 是一个根结点为 s 的最短路径树。
- 而如果图 G 中包含一条从源结点 s 可以到达的权重为负值的环路，则算法将返回FALSE。



定理24.4 (Bellman-ford算法的正确性) 的证明:

1) **首先证明**: 如果图 G 中不包含从源结点 s 可以到达的权重为负值的环路, 则算法将返回TRUE, 且对于所有结点 $v \in V$, 前驱子图 G_π 是一个根结点为 s 的最短路径树。

证明:

(1) 证明: 对于所有结点 $v \in V$, 在算法终止时, 有 $v.d = \delta(s, v)$ 。

- 如果结点 v 是从 s 可以到达的, 则论断可以从引理24.2得到证明。
- 如果结点 v 不能从 s 可达, 则论断可以从非路径性质获得。

因此, 对于所有结点 $v \in V$, 在算法终止时, 有 $v.d = \delta(s, v)$ 。

(2) 综合前驱子图性质和本论断, 可以推导出 G_π 是一棵最短路径树

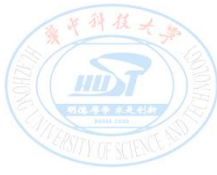
(3) 终止时，算法是否返回TRUE?

算法终止时，对所有的边 $(u,v) \in E$ ，有

$$\begin{aligned} v.d &= \delta(s, v) \\ &\leq \delta(s, u) + w(u, v) \quad (\text{by the triangle inequality}) \\ &= u.d + w(u, v), \end{aligned}$$

因此，算法第6行中没有任何测试可以让算法返回FALSE（G中不包含从源结点s可以到达的权重为负值的环路），因此一定返回TRUE值。

```
BELLMAN-FORD( $G, w, s$ )
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  for  $i = 1$  to  $|G.V| - 1$ 
3      for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
4          RELAX( $u, v, w$ )
5  for each edge  $(u, v) \in G.E$ 
6      if  $v.d > u.d + w(u, v)$ 
7          return FALSE
8  return TRUE
```



2) 然后证明：如果图G中包含一条从源结点s可以到达的权重为负值的环路，则算法将返回FALSE。

证明：

假定图G包含一个权重为负值的环路，并且该环路可以从源结点s到达。设该环路为 $c = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ ，这里 $v_0 = v_k$ 。

因为环路的权重为负值，所以有：

$$\sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) < 0 . \quad (24.1)$$

反证法证明： 假设此种情况下Bellman-ford算法还是返回TRUE值。

对所有的 $i=1,2,\dots,k$,

$$v_i.d \leq v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)$$

将环路c上的所有这种不等式都加起来，有：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k v_i.d &\leq \sum_{i=1}^k (v_{i-1}.d + w(v_{i-1}, v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k v_{i-1}.d + \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) \end{aligned}$$

由于 $v_0 = v_k$, 环路c上面的每个结点在上述求和表达式 $\sum_{i=1}^k v_i \cdot d$ 和 $\sum_{i=1}^k v_{i-1} \cdot d$ 中都刚好各出现一次。因此有

$$\sum_{i=1}^k v_i \cdot d = \sum_{i=1}^k v_{i-1} \cdot d .$$

因此有 $0 \leq \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$

与 $\sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) < 0$. 相矛盾。

因此, 如果图G中不包含从源结点s可以到达的权重为负值的环路, 则算法将返回TRUE, 否则返回FALSE。 得证。

24.3 Dijkstra算法

- Dijkstra算法解决带权重的有向图上单源最短路径问题。
- 该算法要求所有边的权重均为非负值，即对于所有的边 $(u,v) \in E$, $\omega(u,v) \geq 0$, —— 不能有负权重的边和环。

DIJKSTRA(G, w, s)

```
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  $S = \emptyset$ 
3  $Q = G.V$ 
4 while  $Q \neq \emptyset$ 
5      $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6      $S = S \cup \{u\}$ 
7     for each vertex  $v \in G.Adj[u]$ 
8         RELAX( $u, v, w$ )
```

对所有结点的d值和 π 值初始化, $s.d=0$.

算法维护一个结点集合S, 集合中的每个结点都已经求出从s到该结点的最短路径。

对Q初始化

算法从结点集V-S中选择当前最短路径估计最小的结点u, 将u从Q中删除, 并加入到S中, u.d就是源结点s到u的最短路径的长度。这里Q是一个最小优先队列, 保存结点集V-S。

然后对所有从u出发的边进行松弛。然后重复上述过程, 直到 $Q=\emptyset$ 。

Dijkstra算法是一个贪心算法：每次总是选择V-S集合中最短路径估计值最小的结点加入S中。

DIJKSTRA(G, w, s)

```
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  $S = \emptyset$ 
3  $Q = G.V$ 
4 while  $Q \neq \emptyset$ 
5      $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6      $S = S \cup \{u\}$ 
7     for each vertex  $v \in G.Adj[u]$ 
8         RELAX( $u, v, w$ )
```

$s.d=0$, s 是从Q中第一个被选中的结点。

每个结点有且仅有一次机会被从Q中抽取并加入S中。一旦 u 被从Q中抽取出来, $u.d$ 就是 s 到 u 的最短路径长度(不再改变, 上界性质)。

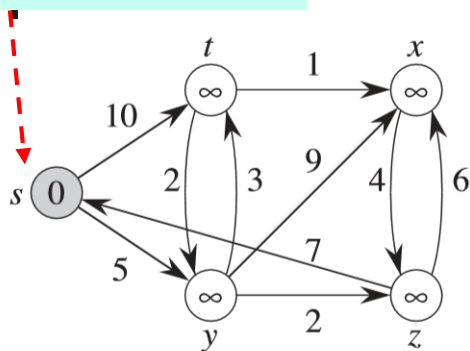
u 加入S后, 对从 u 出发的边的 (u,v) 进行松弛。而如果 $v.d$ 变小, 则是因为存在从 s 经过 u 到达 v 的更短路径所致。此时, 修改 $v.d = u.d + \omega(u,v)$, $v.\pi = u$, 即最短路径上 v 结点的新前驱为 u 。

while循环总共执行了 $|V|$ 次

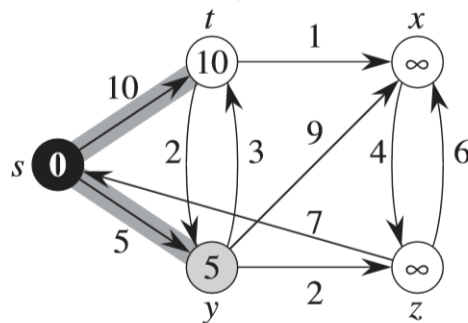
源结点: s

开始的时候 $s \in S$

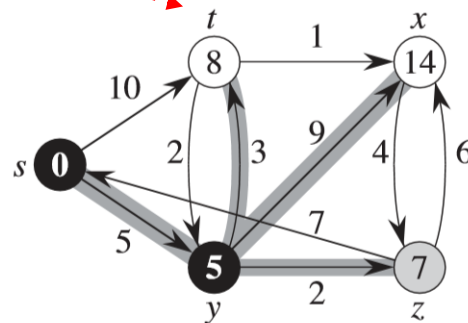
结点中的数值是 s 到该结点的最短路径的估计值



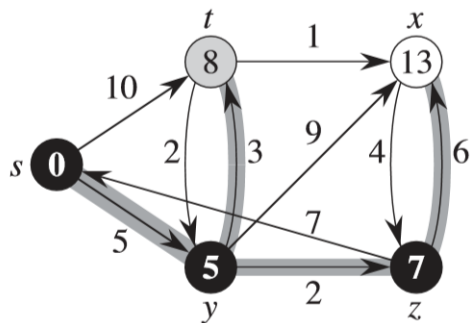
(a)



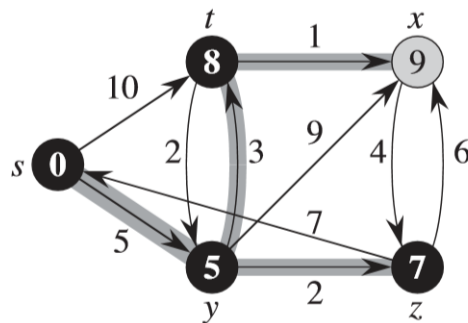
(b)



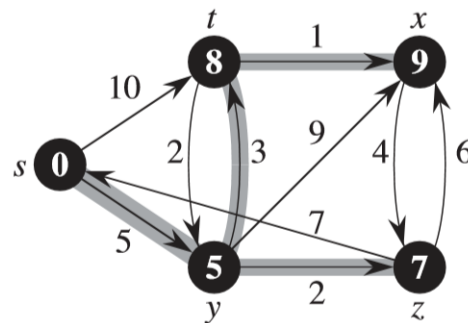
(c)



(d)



(e)



(f)

例, Dijkstra算法的执行过程

- 加了阴影的边表明前驱值 (当前 u 出发的边)。
- 黑色的结点属于 S , 白色的结点属于 $V-S$ 。加阴影的结点是算法下一次循环将选择加入 S 的点。

定理24.6 (Dijkstra算法的正确性) 设Dijkstra算法运行在带权重的有向图 $G=(V,E)$ 上。如果所有边的权重为非负值, 则在算法终止时, 对于所有结点 $u \in V$, 有 $u.d = \delta(s,u)$ 。

证明: 利用循环不变式证明

循环不变式: 算法在while语句的每次循环开始前, 对于每个结点 $u \in S$, 有 $u.d = \delta(s,u)$

只需证明: 对于每个结点 $u \in V$, 当 u 被加入到 S 时, 有 $u.d = \delta(s,u)$ 。

注: 一旦 u 加入 S , 就不会再修正 $u.d$ 。且根据上界性质, 该等式将一直保持。

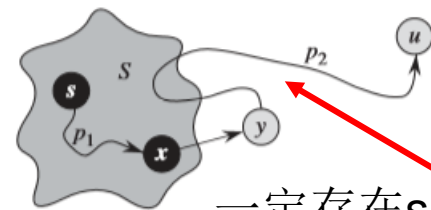
证明过程:

- (1) 初始化: 初始时, $S=\emptyset$, 因此循环不变式直接成立。
- (2) 保持: 在每次循环中, 对于加入到集合 S 中的结点 u 而言,
 $u.d=\delta(s,u)$ 。

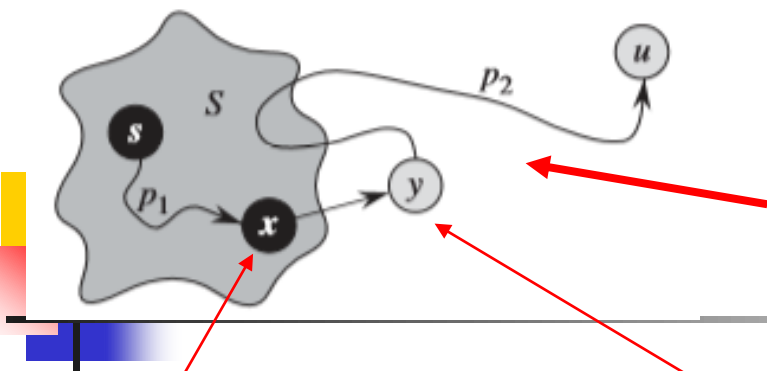
用反证法证明: 设结点 u 是第一个在加入到集合 S 时 $u.d \neq \delta(s,u)$ 的结点。

由于 s 是第一个加入到集合 S 中的结点, 并且 $s.d = \delta(s,s)=0$, 所以 $u \neq s$, 并且在 u 即将加入 S 时, $S \neq \emptyset$, 因为 S 中至少包含了 s 。

故, 此时必存在至少一条从 s 到 u 的路径 (否则, 根据非路径性质将有 $u.d = \delta(s,u) = \infty$, 与假设的 $u.d \neq \delta(s,u)$ 相矛盾, 故这样路径一定存在), 这样也必存在一条从 s 到 u 的最短路径, 记为 p 。



一定存在 s 到 u 的最短路径 p



在将结点 u 加入集合 S 之前， p 连接的是集合 S 中的结点 s 和 $V-S$ 中的结点 u 。

考虑路径 p 上第一个满足 $y \in V-S$ 的结点 y ，并设 y 的前驱是结点 x ， $x \in S$ ，如图所示。路径分为：

$$s \xrightarrow{p_1} x \rightarrow y \xrightarrow{p_2} u$$

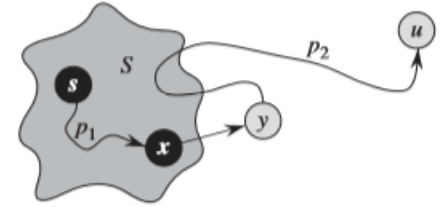
注： x 有可能是 s 本身， y 也有可能是 u 本身（事实上也只能是 u 本身，除非 $\delta(y,u)=0$ ）。

则有：**在结点 u 加入到集合 S 时，应有 $y.d = \delta(s,y)$ 。**

- 这是因为 $x \in S$ ， u 是第一个 $u.d \neq \delta(s,u)$ 的结点，在将 x 加入到集合 S 时，有 $x.d = \delta(s,x)$ ， y 是 x 的邻接点，所以此时边 (x,y) 将被松弛。由于 y 是最短路径 p 上的结点，根据最短路径的最优子结构性和收敛性质，此时应有 $y.d = \delta(s,y)$ 。

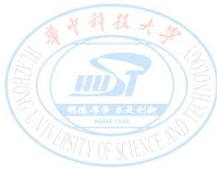
因为结点 y 是从结点 s 到结点 u 的一条最短路径上位于 u 前面的一个结点，所以应有 $\delta(s,y) \leq \delta(s,u)$ ，因此

$$\begin{aligned} y.d &= \delta(s, y) \\ &\leq \delta(s, u) \\ &\leq u.d \quad (\text{by the upper-bound property}) \end{aligned}$$



而在算法第5行选择结点 u 时，**结点 u 和 y 都还在集合 $V-S$ 里**，所以有 $u.d \leq y.d$ （思考为什么）。因此上述的不等式事实上只能是等式，即： $y.d = \delta(s, y) = \delta(s, u) = u.d$ 。

这与假设的 $u.d \neq \delta(s,u)$ 相矛盾。**因此假设不成立。所以， u 在加入 S 时，将有 $u.d = \delta(s,u)$ ，该等式在随后的循环中一直保持。**



终止：在算法终止时， $Q=\emptyset$ ， $S=V$ 。

根据前面保持性的证明，终止时对于所有的结点 $u \in V$ ，有 $u.d = \delta(s, u)$ 。

证毕。

推论24.7 如果在带权重的有向图 $G=(V, E)$ 上运行Dijkstra算法，其中的权重皆为非负值，源结点为 s ，则在算法终止时，前驱子图 G_π 是一棵根结点为 s 的最短路径树。

从定理24.6和前驱子图性质可证（证明略）。

```
1 INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
2  $S = \emptyset$ 
3  $Q = G.V$ 
4 while  $Q \neq \emptyset$ 
5      $u = \text{EXTRACT-MIN}(Q)$ 
6      $S = S \cup \{u\}$ 
7     for each vertex  $v \in G.Adj[u]$ 
8         RELAX( $u, v, w$ )
```

Dijkstra算法运行时间分析

- 根据算法的处理规则，每个结点 u 仅被加入集合 S 一次，邻接链表 $Adj[u]$ 中的每条边在整个运行期间也只被检查一次。因此**算法第7-8行的for循环执行次数总共为 $|E|$ 次**（即松弛判定总次数）。
- Dijkstra算法的总运行时间依赖于**最小优先队列 Q** 的实现。
 - 如果用**线性数组(无序或者按序插入)**实现，每次找 d 最小的结点 u 需要 $O(V)$ 的时间，所以算法的总运行时间为 $O(V^2 + E) = O(V^2)$ 。
 - 如果用**二叉堆**实现，每次找 d 最小的结点 u 需要 $O(\lg V)$ 的时间，所以算法的总运行时间为 $O((V + E) \lg V)$ 。
 - 如果用**斐波那契堆**实现，算法的总运行时间可以改善至 **$O(V \lg V + E)$** 。

24.4 差分约束和最短路径

线性规划：给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A 、一个 m 维的向量 b 和一个 n 维的向量 c 。试找一 n 维向量 x ，使得在 $Ax \leq b$ 的约束下，目标函数 $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ 最大。

- 本节讨论线性规划的一个特例：差分约束系统。

差分约束系统：在一个差分约束系统中，线性规划矩阵A的每一行包括一个1和一个-1，其它所有项皆为0。由 $Ax \leq b$ 给出的约束条件形式上是**m个涉及n个变量的差额限制条件**(difference constraints)，每个约束条件是以下简单的线性不等关系：

$$x_j - x_i \leq b_k$$

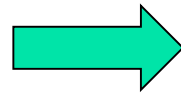
这里 $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, 并且 $1 \leq k \leq m$ 。

例：一个满足下列条件的5维向量 $x=(x_i)$ 的问题：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

上述问题的一般形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_5 \leq -1, \\ x_2 - x_5 \leq 1, \\ x_3 - x_1 \leq 5, \\ x_4 - x_1 \leq 4, \\ x_4 - x_3 \leq -1, \\ x_5 - x_3 \leq -3, \\ x_5 - x_4 \leq -3. \end{cases}$$

- 找一组满足上述约束条件的解。
- 问题可能的答案有： $x=(-5,-3,0,-1,-4)$ 、

$x'=(0,2,5,4,1)$ 等多组可行解。

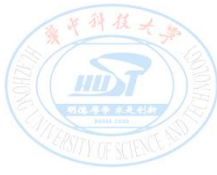


这些解之间的一个基本关系是：

引理24.8 设向量 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为差分约束系统 $Ax \leq b$ 的一个解，设 d 为任意常数，则 $x+d=(x_1+d, x_2+d, \dots, x_n+d)$ 也是个该差分约束系统的一个解。

证明：

根据约束条件，对每对 x_i 和 x_j ， $(x_i+d)-(x_j+d)=x_i-x_j$ 。
因此若向量 x 满足 $Ax \leq b$ ，则向量 $x+d$ 也满足 $Ax \leq b$ 。 ■



差分约束系统的应用举例

未知变量 x_i 代表事件发生的时间，每个约束条件给出的是在两个时间之间必须间隔的最短时间。

比如，设这些事件是产品装配过程中的步骤：

如果在时刻 x_1 使用一种需要两个小时才能风干的粘贴剂材料，则下一个步骤需要2个小时后等粘贴剂干了之后才能在时刻 x_2 安装部件。这样就有约束条件 $x_2 \geq x_1 + 2$ ，亦即 $x_1 - x_2 \leq -2$ 等。



约束图:

在一个 $Ax \leq b$ 的差分约束系统中，将 $m \times n$ 的矩阵 A 看成是一张有 n 个结点和 m 条边构成的图的邻接矩阵的转置。

约束图定义如下:

对给定的差分约束系统 $Ax \leq b$ ，其对应的约束图是一个带权重的有向图 $G=(V,E)$ ，这里，

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$$

相当于结点 v_i 对应未知变量 x_i , $i=1,2,\dots,n$
 v_0 是虚设的一个结点，当作图的源点

$$E = \{(v_i, v_j) : x_j - x_i \leq b_k \text{ 是一个约束条件}\}$$

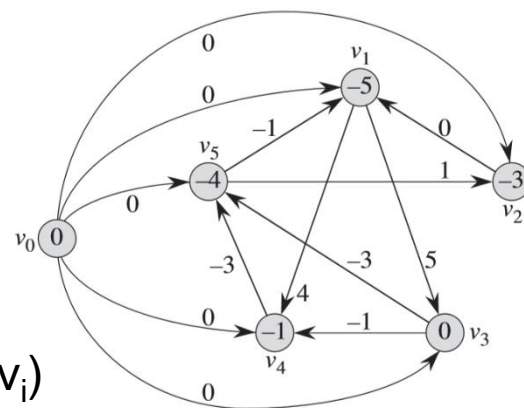
$$\cup \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \dots, (v_0, v_n)\}$$

每条有向边对应一个不等式， (v_0, v_i) 是从新增的 v_0 到其他所有结点的边

说明:

- (1) **结点集合**: 约束图中引入一个额外的结点 v_0 , 从其出发可以达到其他所有结点。因此**结点集合 V** 由代表每个变量 x_i 的结点 v_i 和额外的结点 v_0 组成。
- (2) **边集合**: 边集合 E 包含代表每个差分约束的边, 同时包含 v_0 到其他所有结点的边 (v_0, v_i) , $i=1, 2, \dots, n$ 。
- (3) **边的权重**: 如果 $x_j - x_i \leq b_k$ 是一个差分约束条件, 则**边 (v_i, v_j)** 的权重记为 $\omega(v_i, v_j) = b_k$, 而从 v_0 出发到其他结点的边的权重 $\omega(v_0, v_j) = 0$ 。

上例的差分约束系统的约束图如下:

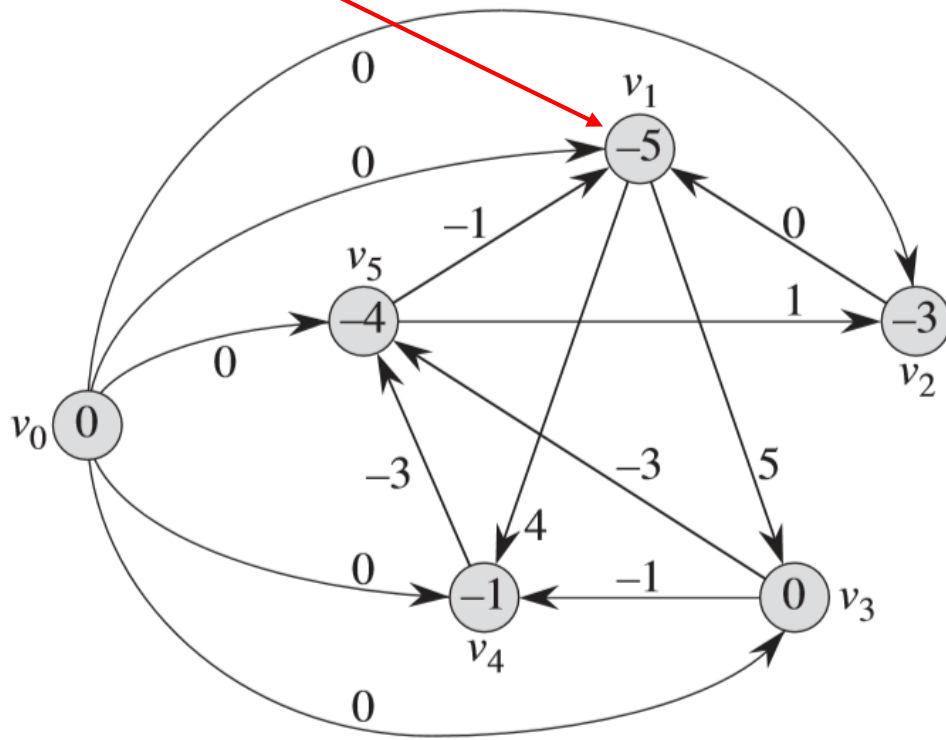


$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 &\leq 0, \\
 x_1 - x_5 &\leq -1, \\
 x_2 - x_5 &\leq 1, \\
 x_3 - x_1 &\leq 5, \\
 x_4 - x_1 &\leq 4, \\
 x_4 - x_3 &\leq -1, \\
 x_5 - x_3 &\leq -3, \\
 x_5 - x_4 &\leq -3.
 \end{aligned}$$

结点中的数值是 $\delta(v_0, v_i)$

上例的差分约束系统的约束图如下：

结点中的数值是 $\delta(v_0, v_i)$



$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 0, \\ x_1 - x_5 &\leq -1, \\ x_2 - x_5 &\leq 1, \\ x_3 - x_1 &\leq 5, \\ x_4 - x_1 &\leq 4, \\ x_4 - x_3 &\leq -1, \\ x_5 - x_3 &\leq -3, \\ x_5 - x_4 &\leq -3. \end{aligned}$$

- 结点集合 V 由代表每个变量 x_i 的结点 v_i 和额外的结点 v_0 组成
- 边集合 E 包含代表每个差分约束的边，同时包含 v_0 到其他所有结点的边 (v_0, v_i)
- 边 (v_i, v_j) 的权重记为 $\omega(v_i, v_j) = b_k$, $\omega(v_0, v_j) = 0$

定理24.9 给定差分约束系统 $Ax \leq b$, 设 $G=(V,E)$ 是该差分约束系统所对应的约束图。

(1) 如果图 G 不包含权重为负值的回路, 则

$$x = (\delta(v_0, v_1), \delta(v_0, v_2), \delta(v_0, v_3), \dots, \delta(v_0, v_n))$$

是该系统的一个可行解。

(2) 如果图 G 包含权重为负值的回路, 则该系统没有可行解。

证明: 考虑任意一条边 $(v_i, v_j) \in E$, 根据三角不等式有:

$$\delta(v_0, v_j) \leq \delta(v_0, v_i) + w(v_i, v_j)$$

即:

$$\delta(v_0, v_j) - \delta(v_0, v_i) \leq w(v_i, v_j)$$

因此, 令 $x_i = \delta(v_0, v_i)$, $x_j = \delta(v_0, v_j)$ 则 x_i 和 x_j 满足对

应边 (v_i, v_j) 的差分约束条件 $x_j - x_i \leq w(v_i, v_j)$ 。

$$w(v_i, v_j) = b_k$$



因此, $x = (\delta(v_0, v_1), \delta(v_0, v_2), \delta(v_0, v_3), \dots, \delta(v_0, v_n))$

是问题的一个可行解。

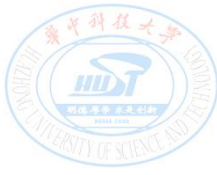
(前提: 不包含权重为负的环路)。

而如果约束图包含权重为负值的环路，不失一般性，设权重为负值的环路为 $c = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ ，这里 $v_1 = v_k$ 。

环路 c 对应下面的差分约束条件组：

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\leq w(v_1, v_2), \\ x_3 - x_2 &\leq w(v_2, v_3), \\ &\vdots \\ x_{k-1} - x_{k-2} &\leq w(v_{k-2}, v_{k-1}), \\ x_k - x_{k-1} &\leq w(v_{k-1}, v_k). \end{aligned}$$

- 不等式左侧求和，等于0。（ $v_1 = v_k$ ，所有 v_i 相互抵消）
- 不等式右侧求和，等于环路 c 的权重 $\omega(c)$ ，且有： $0 \leq \omega(c)$
- 这与 c 是权重为负值的环路相矛盾。故该组不等式无解。

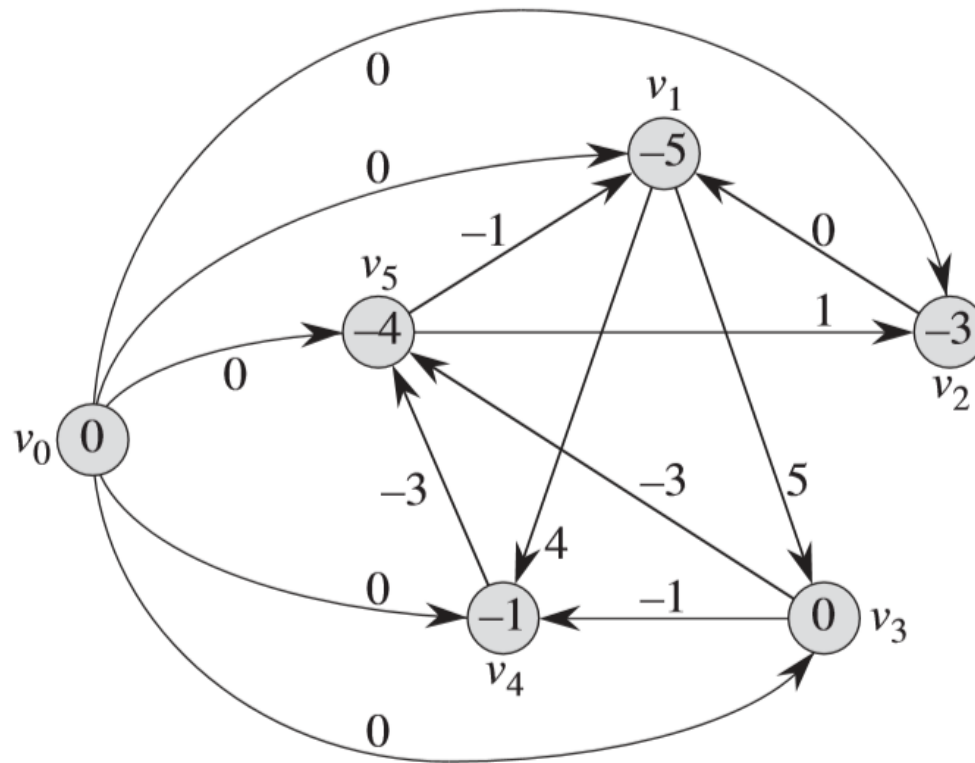


求解差分约束系统:

由定理24.9可得, 可以使用Bellman-Ford算法来求解差分约束系统 (思考为什么是Bellman-Ford算法?) 。

约束图中含有从源结点 v_0 到其他所有结点的边, 若存在权重为负值的环路, 则都可以从结点 v_0 到达。则,

- 如果Bellman-Ford算法返回TRUE, 则最短路径权重 $\delta(v_0, v_i), i=1, 2, \dots, n$, 给出该系统的一个可行解。
- 如果算法返回FALSE, 则该系统无解。



- 结点中的数值是 $\delta(v_0, v_i)$;
- 该例的一个最短路径权重提供的可行解是: $x=(-5, -3, 0, -1, -4)$;
- 同时, 对于任意常数 d , $(d-5, d-3, d, d-1, d-4)$ 也是问题的解 (引理24.8)。