第四章

常微分方程的数值解法

Numerical Solutions to Ordinary Differential Equations

概述

Ø一阶常微分方程初值问题:

Problem I: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 求函数y=y(x)满足:
$y'(x) = f(x, y(x))$

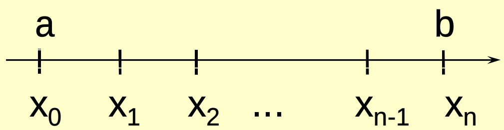
Ø f(x,y)在D={(x,y)|a≦x≦b, -∞≦y≦∞}上连续，且满足Lipschitz条件: $\exists L, \forall y_1, y_2$, s.t. $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$

则初值问题Problem I有唯一解**y(x),** 称为积分曲线。

Ø实际工程技术、生产、科研上会出现大量的微分方程问题很难得到其解析解，有的甚至无法用解析表达式来表示，因此只能依赖于数值方法去获得微分方程的数值解。

HUST

- 微分方程的数值解法：
  - 不求y=y(x)的精确表达式,而求离散点$x_0,x_1,\ldots x_n$处的函数值
  - 设Problem I的解y(x)的存在区间是[a,b]，初始点$x_0=a$，取[a,b]内的一系列节点$x_0, x_1,\ldots,x_n$。$a= x_0< x_1<\ldots< x_n =b$，一般采用等距步长。



  - 用数值方法，求得y(x)在每个节点x_k的值$y(x_k)$的近似值，用y_k表示，即$y_k \approx y(x_k)$，
  - 这样$y_0, y_1,\ldots,y_n$称为微分方程的数值解。
  - 求y(x)————>求$y_0, y_1,\ldots,y_n$

- @方法：采用步进式和递推法

将[a,b]n等分， $a= x_0< x_1<\ldots< x_n =b$，步长$h=\frac{b-a}{n}$， $x_k=a+kh$

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = g(h, x_n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots y_{n-m}) \end{cases}$$

- 计算过程：

$$y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-m} \to y_{n-m+1} \to \cdots \to y_n \to y_{n+1} \to \cdots$$

- 怎样建立递推公式？
  - Taylor公式
  - 数值积分法

4.1 欧拉公式

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

@思想:用向前差商近似代替微商. $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \qquad h=x_{n+1}-x_n$$

$$\therefore f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}.$$

$$\therefore y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_n, y(x_n))$$

$\therefore y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ ——欧拉公式（Euler Schema）

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

HUST

几何意义

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

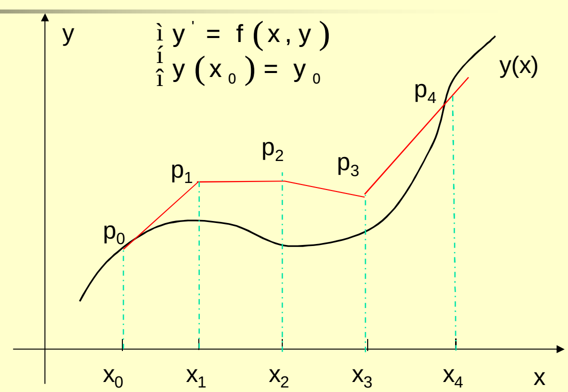
1. y(x)过点$P_0(x_0,y_0)$且在任意点(x,y)的切线斜率为f(x,y),
2. y(x)在点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为:

   $y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$

在切线上取点$P_1(x_1,y_1)$

$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$

y_1正是Euler 公式所求。



3. 类似2，过P_1以$f(x_1,y_1)$为斜率作直线，近似平行于y(x)在x_1的切线，在其上取点$P_2(x_2,y_2)$，依此类推...

4.折线P_0 P_1 P_2 ...P_n...作为曲线y(x)的近似 ——欧拉折线法

HUST

欧拉法（续）

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

@用向后差商近似代替微商：

$$y'(x_{n+1}) \approx y[x_n, x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \quad h=x_{n+1}-x_n$$

$$\therefore f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

?

$$\therefore y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$ ——隐式欧拉公式

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

注：用隐式欧拉法，每一步都需解方程

（或先解出y_{n+1}的显式表达式），但其稳定性好。

HUST

欧拉法（续）

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

@用中心差商近似代替微商：

$$y'(x_n) \approx y[x_{n-1}, x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h} \Rightarrow f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}$$

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots$$ —— 二步欧拉法

注：计算时，先用欧拉法求出y_1，以后再用二步欧拉法计算。

HUST

欧拉法（续）

公式	单步否	显式否	截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$	单步	显式	
$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$	单步	隐式	
$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$	二步	显式	

局部截断误差

定义1 假设$y_n=y(x_n)$,即第n步计算是精确的前提下,称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为欧拉法的局部截断误差.

注：无$y_n=y(x_n)$ 前提下，称R_{n+1}为整体截断误差。

定义2 若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,称该算法有**p**阶精度.

定义3 假设$y_n=y(x_n)$, $y_{n-1}=y(x_{n-1})$,称$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为二步欧拉法的局部截断误差.

定理 欧拉法的精度是一阶。

局部截断误差

定理 欧拉法的精度是一阶。

分析：证明其局部截断误差为$O(h^2)$，可通过Taylor展开式分析。

证明： Euler 公式为 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

令$y_n=y(x_n)$，下证： $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2)$

$\because\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$ 由 $y'(x)=f(x,y(x))$

$=y(x_n)+hy'(x_n)$

$\because\ y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\dfrac{y''(x)}{2!}h^2,x\in(x_n,x_{n+1})$

$\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=\dfrac{y''(x)}{2}h^2=O(h^2)$

二步法的局部截断误差$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$

定理 隐式欧拉法的精度是一阶，二步欧拉法的精度是二阶。

证明： 对二步欧拉法进行证明，考虑其局部截断误差，

令$y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，

$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)=y(x_{n-1})+2hf(x_n,y(x_n))=y(x_{n-1})+2hy'(x_n)$

$\because\ y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\dfrac{h^2}{2!}y''(x_n)+\dfrac{y'''(x)}{3!}h^3,x\in(x_n,x_{n+1})$

$y(x_{n-1})=y(x_n-h)=y(x_n)-hy'(x_n)+\dfrac{(-h)^2}{2!}y''(x_n)+\dfrac{y'''(h)}{3!}(-h)^3,h\in(x_{n-1},x_n)$

将上两式左右两端同时相减：

$\therefore\ y(x_{n+1})-y(x_{n-1})=2hy'(x_n)+\frac{y'''(x)+y'''(h)}{3!}h^3$ $\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$

∴二步欧拉法的局部截断误差为$O(h^3)$，其精度是二阶。

例：求 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$ 的近似值。

解：这儿 $f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y}$ $\quad x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$

由欧拉公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ，$y_0 = 1$

得：

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \times (1 - \frac{0}{1}) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \times (1.1 - \frac{2 \times 0.1}{1.1}) = 1.191818$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.277438 \quad \cdots\cdots$$

又其精确解为 $y = \sqrt{2x+1}$

整体误差 $e_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1}$ ，下面对其加以分析

x_k	y_k	$y(x_k)$	e_k
0.1	1.1	1.0954451	0.0045548
0.2	1.191818	1.183216	0.0086022
0.3	1.2774379	1.2649111	0.012527
0.4	1.3582127	1.3416408	0.016572
0.5	1.4351330	1.4142136	0.0209194
0.6	1.5089664	1.4831397	0.0257267
0.7	1.5803384	1.5491933	0.0311906
0.8	1.6497836	1.6124519	0.037332
0.9	1.7177795	1.6722301	0.044594
1.0	1.7847710	1.7320508	0.0527201

从表中看出误差在逐步增加、积累

$$\bar{y}_{10} = y(x_9) + hf(x_9, y(x_9)) = 1.7330815$$

局部截断误差 $y(x_{10}) - \bar{y}_{10} = 0.00103$ 而误差是 $y(x_{10}) - y_{10} = 0.05272$

复 习

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ 求：y(x) ⇒ 数值解 $y_0, y_1, \ldots, y_n$

公式	单步否	显式否	局部截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$	单步	显式	$O(h^2)$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$	单步	隐式	$O(h^2)$
$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$	二步	显式	$O(h^3)$

定义1 假设 $y_n=y(x_n)$，即第n步计算是精确的前提下,称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$ 为欧拉法的局部截断误差.

定义2 若某算法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$,称该算法有p阶精度.

数值积分法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1})-y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

对右端的定积分用数值积分公式求近似值：

（1）用左矩形数值积分公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx (x_{n+1}-x_n)f(x_n,y(x_n))$$

$$\therefore y(x_{n+1})-y(x_n) \approx hf(x_n,y(x_n))$$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow}{y(x_{n+1})} \approx \underset{\downarrow}{y(x_n)}+hf(x_n,\underset{\downarrow}{y(x_n)})$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

数值积分法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

（2）用梯形公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx \frac{(x_{n+1}-x_n)}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y(x_{n+1})-y(x_n) \approx \frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$ ——梯形公式

- 梯形公式:将显示欧拉公式,隐式欧拉公式平均可得
- 梯形公式是隐式、单步公式,其精度为二阶

梯形公式的精度

定理：梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 的精度是2阶的.

分析：证明其局部截断误差为$O(h^3)$；用二元函数的Taylor公式。

证：令$y_n=y(x_n)$,由Talor公式有

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$，$\eta$介于$y_{n+1}$与$y(x_{n+1})$之间

$=y'(x_{n+1})+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=f(x_n,y_n)+hy''(x_n)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)$

又$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_n,y_n)+hy''(x_n)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)$

$y(x_{n+1})=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h\,[f(x_{n+1},y_{n+1})$

$-f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)]/2+O(h^3)$

$=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$

$+h\,f_y(x_{n+1},\eta)(y(x_{n+1})-y_{n+1})/2+O(h^3)$

从而$y(x_{n+1})=y_{n+1}+h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore y(x_{n+1})-y_{n+1}=h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)/[1-hf_y(x_{n+1},\eta)/2]=O(h^3)$

∴梯形公式的截断误差为$O(h^3)$，其精度是2阶。

梯形公式的应用

例4.1 用梯形公式求初值问题的 $\dfrac{dy}{dx}=y,\ y(0)=1.$ 解在x=0.01上的值y(0.01).

解: 取h=0.01, $x_0=0$, $y_0=y(0)=1$. 则 $y(0.01)\approx y_1$

$f(x,y)=y$，由梯形公式,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]=y_n+\frac{h}{2}[y_n+y_{n+1}]\ \Rightarrow y_1=y_0+\frac{h}{2}[y_0+y_1]$$

$$y_1=\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}y_0$$ 基于幂级数理论 $$y_1=(1+\frac{h}{2})(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\ldots)y_0$$

$$\approx(1+\frac{h}{2})^2+\frac{h^2}{4}=1.01005$$

解析解 $y=e^x$ $$y(0.01)=e^{0.01}=1+0.01+\frac{0.01^2}{2!}+\frac{0.01^3}{3!}+\ldots$$

$$\approx \mathbf{1+0.01+\frac{0.01^2}{2!}=1.01005}$$

欧拉公式的比较

欧拉法	最简单,精度低
隐式欧拉法	稳定性好
二步欧拉法	显式，但需要两步初值，且第2个初值只能由其它方法给出,可能对后面的递推精度有影响
梯形公式法	精度有所提高,但为隐式,需迭代求解,计算量大

HW:
p.116 #3，
证明隐式欧拉法的精度为一阶

4.2 改进的Euler法

- Euler公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 显式 一阶
- 梯形公式 $y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$ 隐式 二阶

- Euler公式 计算量小，精度低。
- 梯形公式 计算量大，精度高。

综合两个公式，提出预报—校正公式:

$$\left.\begin{aligned}&\text{预报}\quad \bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\&\text{校正}\quad y_{n+1}=y_n+\tfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})]\end{aligned}\right\}\text{——改进的Euler法}$$

嵌套形式：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$ 显式单步法

$$y_{n+1}=\tfrac{1}{2}[y_n+hf(x_n,y_n)+y_n+hf(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$$

平均化形式：
$$\begin{cases}y_p=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_c=y_n+hf(x_{n+1},y_p)\\ y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_c)\end{cases}$$

例4.4 用改进的Euler法解初值问题在区间[0,0.4]上，$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

步长h=0.1的解，并比较与精确解的差异。

说明：精确解 $y=1/(1-x)$。

解：Euler法的具体形式为：$y_{n+1}=y_n+hy_n^2$，

改进的Euler法的具体形式为：

$$\begin{cases} y_p = y_n + hy_n^2 \\ y_c = y_n + hy_p^2 \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

$\because x_0=0, h=0.1$,则

$x_1=0.1, x_2=0.2, x_3=0.3, x_4=0.4$

计算y_1: $y_p=y_0+0.1y_0^2=1+0.1\cdot 1^2=1.1$

$y_c=1+0.1\text{X}1.1^2=1.121$

$y_1=(1.1+1.121)/2\approx 1.1118$

同样可求y_2, y_3, y_4，见P93表

Chapter 4 Initial
-value problems for ODE

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$y_n - y(x_n)$
1	0.1	1.1118	1.1111	0.0007
2	0.2	1.2521	1.2500	0.0021
3	0.3	1.4345	1.4236	0.0059
4	0.4	1.6782	1.6667	0.015

$y_n-y(x_n)$ 随n增大而增大，表明误差积累。

HUST

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

注：

（1）令$y(x_n)=y_n$，可推导改进的Euler法的局部截断误差为$O(h^3)$,具有二阶精度。

（2） 改进的Euler法也可写成如下平均化形式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1)$$

龙格—库塔方法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Euler公式：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 写成 $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_1 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \end{cases}$ 精度：一阶

改进的Euler公式：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1) \end{cases}$ 精度：二阶

由Lagrange中值定理， $\exists x \in (x_n, x_{n+1})$ $y'(x) = \dfrac{y_{(x_{n+1})} - y_{(x_n)}}{h}$

$$\therefore y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x)$$

而$y'(x) = f(x, y(x))$ 称为$y(x)$在$[x_n,x_{n+1}]$上的平均斜率

$$\therefore y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x, y(x)) \Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + k^*$$

- 取 $k^* = hf(x_n, y_n) = k_1$ —Euler公式
- 取 $k^* = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}$—改进Euler公式

Euler公式用一点的值k_1作为k^*的近似值，而改进的Euler公式用二个点的值k_1和k_2的平均值作为k^*近似值，其精度更高。

龙格－库塔法

Runge-Kutta法的思想：在［x_n, x_{n+1}］内多预报几个点的k_i值并用其加权平均作为k^*近似而构造出具有更高精度的公式。

4.3.2 二阶龙格—库塔方法

以k_1与k_2的加权平均来近似k^*，设

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + a h, y_n + b k_1) \end{cases} \quad (*)$$

其中w_1, w_2, α, β为待定参数。适当选取参数，使(*)式的精度为二阶，即使其局部截断误差为$O(h^3)$

令$y(x_n)=y_n$，由泰勒公式：$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$

$$\because y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) = f(x_n, y_n) \qquad y''(x_n) = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)$$

$$(\because y''(x) = (y'(x))' = [f(x,y)]'_x = f_x + f_y y'(x) = f_x + f_y f(x,y) \quad)$$

$$\therefore y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3)$$

二阶龙格－库塔法

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

$$y(x_{n+1}) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3) \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + a h, y_n + b k_1) \end{cases} \quad (*)$$

由多元函数的泰勒公式

$$k_2 = hf(x_n + ah, y_n + bk_1) = h\{f(x_n, y_n) + ahf_x(x_n, y_n) + bk_1 f_y(x_n, y_n) + O(h^2)\}$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + w_1 hf(x_n, y_n) + w_2 hf(x_n, y_n) + w_2 a h^2 f_x(x_n, y_n)$$
$$+ w_2 b h^2 f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2) hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}[2w_2 a f_x(x_n, y_n)$$
$$+ 2w_2 b f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)] + O(h^3) \quad (2)$$

比较(1)与(2)要使：$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$ 则有

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = 1/2 \\ w_2 \beta = 1/2 \end{cases}$$

注：上述方程组有四个未知量，只有三个方程，有无穷多组解。

二阶龙格－库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = 1/2 \\ w_2 \beta = 1/2 \end{cases}$$

- 取任意一组解便得一种二阶龙－库公式。
- 当$w_1=w_2=1/2$, $\alpha=\beta=1$时二阶Runge-Kutta公式为

$y_{n+1}=y_n+k_1/2+k_2/2$

$k_1=hf(x_n,y_n)$ 此即改进的Euler法

$k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1)$

- 取$w_1=0$， $w_2=1$，$\alpha=1/2$，$\beta=1/2$

$y_{n+1}=y_n+k_2$

$k_1=hf(x_n,y_n)$ 此为中点法或变形的 Euler公式

$k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2)$

HUST

三阶龙格－库塔法

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

- 三阶龙格－库塔法是用k_1,k_2,k_3的加权平均来近似k^*，即有：

$y_{n+1}=y_n+c_1k_1+c_2k_2+c_3k_3$

$k_1=hf(x_n,y_n)$

$k_2=hf(x_n+a_2h,y_n+b_{21}k_1)$

$k_3=hf(x_n+a_3h,y_n+b_{31}k_1+b_{32}k_2)$

- 要使其具有三阶精度，必须使局部截断误差为$O(h^4)$
- 类似二阶龙格－库塔法的推导，$c_1,c_2,c_3,a_2,a_3,b_{21},b_{31},b_{32}$应满足

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=1 \\ a_2=b_{21} \\ a_3=b_{31}+b_{32} \\ c_2a_2+c_3a_3=1/2 \\ c_2a_2^2+c_3a_3^2=1/3 \\ c_3b_{32}a_2=1/6 \end{cases}$$

由其任意解可得

三阶龙格-库塔公式

例：Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+4k_2+k_3)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h,y_n-k_1+2k_2) \end{cases}$$

HUST

四阶龙格－库塔法

- 类似可推出四阶龙格-库塔公式，常用的有

例：经典Runge-Kutta法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h/2,y_n+k_2/2) \\ k_4=hf(x_n+h,y_n+k_3) \end{cases}$$

局部截断误差 $O(h^5)$

- 还有： Gill公式及m (m>4)阶龙格－库塔法。
- m>4时：计算量太大，精确度不一定提高，有时会降低。

求解： $\begin{cases} dy/dx=f(x,y) \quad a\le x\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

对于经典的四阶Runge-Kutta法给出如下算法：

- Step 1: 输入a,b,y_0 及N
- Step 2: (b-a)/N=>h,a=>x,y_0=>y
- Step 3: 输出 (x,y)
- Step 4: For i=1 T0 N
  - hf(x,y)=>k_1
  - hf(x+h/2,y+ k_1/2)=> k_2
  - hf(x+h/2,y+k_2/2)=>k_3
  - hf(x+h,y＋k_3)=>k_4
  - y+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6=>y
  - x+h=>x
  - 输出(x,y)
- END

龙格—库塔法

例：用四阶经典Runge—Kutta方法解初值问题：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y-\dfrac{2x}{y} \\ y(0)=1 \end{cases}$ $h=0.2$

(1)求 y_1 ，$x_0=0, y_0=1, h=0.2$

$$K_1=hf\left(x_0,y_0\right)=h\left(y_0-\frac{2x_0}{y_0}\right)=0.2$$

$$K_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{1}{2}K_1\right)=h\left(y_0+\frac{1}{2}K_1-\frac{2\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{y_0+\frac{1}{2}K_1}\right)=0.18363636$$

$$K_3=hf\left(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{1}{2}K_2\right)=h\left(y_0+\frac{1}{2}K_2-\frac{2\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{y_0+\frac{1}{2}K_2}\right)=0.1817275$$

$$K_4=hf\left(x_0+h,y_0+K_3\right)=h\left[y_0+K_3-\frac{2\left(x_0+h\right)}{y_0+K_3}\right]=0.16864798$$

$$y_1=y_0+\frac{1}{6}\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right)=1.1832293$$

$$y(x_1)=\sqrt{2x_1+1}=\sqrt{1.4}=1.1832160 \qquad e_1=y(x_1)-y_1\approx 1.3\times10^{-5}$$

HUST

龙格—库塔法

(2)求 y_2，$x_1=0.2, h=0.2$ $\quad y_1=1.1832293$

$$K_1=hf\left(x_1,y_1\right)=h\left(y_1-\frac{2x_1}{y_1}\right)=0.16903428$$

$$K_2=hf\left(x_1+\tfrac{h}{2},y_1+\tfrac{1}{2}K_1\right)=0.15893312$$

$$K_3=hf\left(x_1+\tfrac{h}{2},y_1+\tfrac{1}{2}K_2\right)=0.1574989 \qquad K_4=hf\left(x_1+h,y_1+K_3\right)=0.1488075$$

$$y_2=y_1+\frac{1}{6}\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right)=1.3416803$$

$$y(x_2)=\sqrt{2x_2+1}=1.3416408 \qquad e_2=4.0\times10^{-5}$$

x_k	y_k	$y(x_k)$	e_k
0.2	1.1832293	1.1832160	1.3×10^{-5}
0.4	1.3416803	1.3416408	4.0×10^{-5}
0.6	1.4832838	1.4832397	4.4×10^{-5}
0.8	1.6125172	1.6124515	6.6×10^{-5}
1.0	1.7321463	1.7320508	9.6×10^{-5}

HUST

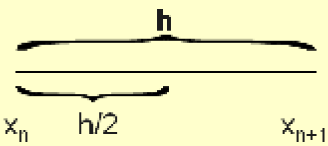
变步长龙格－库塔法

- 问题I： 求数值解 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 要求误差<ε＝10^{-8}

问题：①：如何判断$|y(x_n)-y_n|<\varepsilon$ ②：如何取h=?

解①：如用p阶龙格－库塔法计算，局部截断误差为$O(h^{p+1})$

- 如 x_n------------------ → x_{n+1}



令 $y_n=y(x_n)$ $y_{n+1}^{(h)}$

则 $y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h)}\approx ch^{p+1}$

步长折半x_n → $x_{n+h/2}$ → x_{n+1}分两步计算$y(x_{n+1})$的近似值$y_{n+1}^{(h/2)}$。

则 $y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h/2)}\approx 2c(h/2)^{p+1}$

$$\therefore \frac{y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}}{y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h)}}\approx\frac{1}{2^p}\Rightarrow y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}\approx\frac{1}{2^p-1}[y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{n+1}^{(h)}]=\Delta$$

HUST

变步长龙格－库塔法

定理：对于问题I若用P阶龙格－库塔法计算$y(x_{n+1})$在步长折半前后的近似值分别为$y_{n+1}^{(h)}$, $y_{n+1}^{(h/2)}$则有误差公式

$$|y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}|\approx\frac{1}{2^p-1}|y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{n+1}^{(h)}|=\Delta$$

注：1^0 误差的事后估计法

2^0 停机准则：△<ε (可保证$|y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h/2)}|<\varepsilon$)

解②： (1) h取大，局部截断误差ch^{p+1}大，不精确

(2) h取小，运算量大（步多），舍入误差积累大

解决策略：变步长龙格－库塔法

if（△>ε） 将步长折半反复计算，直至△<ε为止， 取h为最后一次的步长， y_{n+1}为最后一次计算的结果。

else if (△<ε) 将步长增倍反复计算，直至△>ε为止，最后一次运算的前一次计算结果即为所需。

HUST

HW:

p.116 #3（用经典四阶Runge-Kuttta法）

#8（选作）

4.5 收敛性与稳定性

对于常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

数值解法：

- 求y=y(x) $\xrightarrow{\text{离散化}}$ 求$y(x_n)$ $\xrightarrow{\text{某种公式}}$ 求y_n

  $x_n=x_0+nh$

单步法：计算y_{n+1}时只用到前一步的结果y_n。

例：Euler法，改进的Euler法，龙格－库塔法都是单步法。

- 显式单步法： $y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)$

  $\varphi(x,y,h)$为增量函数，它依赖于f, 仅是x_n,y_n, h的函数

- Def:若某数值方法对于任意固定的$x_n=x_0+nh$,当

  $h\to 0(n\to\infty)$时， $y_n\to y(x_n)$，则称该法是收敛的。

  即 $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$ ($x_n=x_0+nh$为固定值)

整体截断误差与收敛性

注：数值方法是否收敛取决于误差$y(x_n)-y_n$的变化情况。

对于p阶公式,其局部截断误差为$O(h^{p+1})$，

即$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^{p+1})$， 其前提假定$y_n=y(x_n)$.

虽h->0时，局部截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}\to 0$，并不能说明其收敛（因其前提$y_n=y(x_n)$不成立），为此我们引入——

Def: 称$y(x_n)-y_n$为单步法的解y_n的整体截断误差。

局部截断误差与整体截断误差有何区别？

单步法收敛 ó $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$

即h→ 0时，整体截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}\to 0$

收敛性的判定

单步法收敛 ó $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$

Th：若单步法$y_{n+1}=y_n+h\,\varphi(x_n,y_n,h)$具有p阶精度，且增量函数$\varphi(x,y,h)$关于y满足Lipschitz条件：

$$|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|\le L_\Phi\,|y-\bar{y}|$$

若初值y_0是准确的($y_0=y(x_0)$)，则其整体截断误差为：

$$y(x_n)-y_n=O(h^p).$$

注：若单步法满足以上条件,显然其收敛。

改进Euler法的收敛性

$$y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n))]/2$$

则$\varphi(x,y,h)=[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))]/2$

若：①$y_o=y(x_0)$ ②$f(x,y)$关于y满足李--条件:$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|$

则：$|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|$

$$\le \tfrac{1}{2}[|f(x,y)-f(x,\bar{y})|+|f(x+h,y+hf(x,y))-f(x+h,\bar{y}+hf(x,\bar{y}))|]$$

$$\le \tfrac{1}{2}[L|y-\bar{y}|+L|y+hf(x,y)-\bar{y}-hf(x,\bar{y})|]$$

$$\le \frac{1}{2}[L|y-\bar{y}|+L|y-\bar{y}|+L^2h|y-\bar{y}|]=L(1+\frac{h}{2}L)|y-\bar{y}|$$

限定$h\le h_0$，则 $|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|\le L(1+\frac{h_0}{2}L)|y-\bar{y}|$

即**Φ** (x,y,h) 满足李普希兹条件， 由定理知改进的Euler法收敛。

其它方法的收敛性

- 同样可验证，

①若f(x,y)关于y满足李普希兹条件且② $y_0=y(x_0)$时，

Euler法，标准四阶龙格－库法也收敛。

- 微分方程中的f(x,y)给定，可具体验证条件①的满足。