



第二章 插值方法 /* Interpolation */



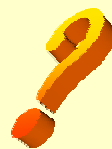
引言

Chapter 2
插值方法

表示两个变量 x, y 内在关系一般由函数式 $y=f(x)$ 表达。
但在实际问题中，有两种情况：

1. 由实验观测而得到的一组离散数据(函数表)，虽然这种函数关系式 $y=f(x)$ 存在且连续，但未知。
2. 函数解析表达式已知，但计算复杂，不便使用。通常也造函数表。如， $y=\sin(x)$, $y=\lg(x)$ 。

有时要求不在表上的函数值，怎么办？



办法：根据所给的 $y=f(x)$ 的函数表，
构造一个简单的连续函数 $g(x)$ 近似代替 $f(x)$ 。

Def: $g(x)$ 为逼近函数， $f(x)$ 为被逼近函数。

近似代替即逼近的方法有很多种，通常是：插值方法。

已知： $f(x)$ 的的函数表

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

求 $g(x)$ 使 $g(x_i) = y_i$, $i=0,1,2,3 \dots n$.

Def: $g(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数， $f(x)$ 为被插值函数。

构造 $g(x)$ 的方法还有：

一致逼近、最佳均方逼近和数据拟合。

简单函数 $g(x)$ 指可用四则运算计算的函数：

如：有理函数(分式函数)、多项式或分段多项式。

当 $g(x)$ 为多项式时，该插值方法称为代数多项式插值，
称插值函数 $g(x)$ 为插值多项式。

本章主要介绍多项式插值的理论与方法。

它在实践中应用很广。

插值区间

Problem I: 已知 $y=f(x)$ 的函数表

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

且 $x_i (i=0, 1, \dots, n)$ 两两互异,

$x_i \in [a, b]$,

求次数不超过 n 的多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2.1)$$

$$\text{使得 } P_n(x_i) = y_i \quad i=0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

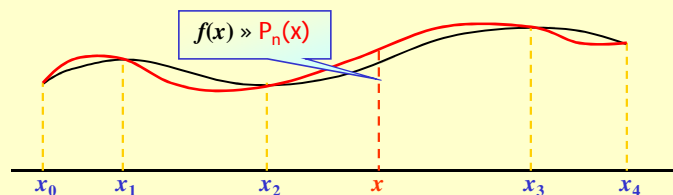
插值条件

Def: $n+1$ 个互异点 x_0, x_1, \dots, x_n 称为插值节点,

其所在区间 $[a, b]$ 为插值区间, (2.2)式为插值条件。

多项式插值问题的几何意义

多项式 $P_n(x)$, 其几何曲线过给定的 $y=f(x)$ 的 $n+1$ 个点 (x_i, y_i) , $i=0, 1, 2, \dots, n$.



插值多项式的唯一性

Chapter 2
插值方法

对于 Problem 1 中的 $P_n(x)$ 是否存在? 解是否唯一? 如何求?

显然, 关键是求 $P_n(x)$ 的系数 a_0, a_1, \dots, a_n .

定理 2.1 在 $n+1$ 个互异的插值结点 x_0, x_1, \dots, x_n 上满足插值条件 (2.2) 的次数不超过 n 的代数多项式 $P_n(x)$ 存在且唯一。

分析: 为求 $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (2.1)

主要考虑插值条件

$$P_n(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

HUST

定理 2.1 的证明

Chapter 2
插值方法

证明: 由插值条件, 有,

$$\left. \begin{aligned} P_n(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ P_n(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ &\quad \mathbf{M} \\ P_n(x_n) &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & & \mathbf{M} & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = V_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0$$

(因 $i \neq j, x_i \neq x_j$)

关于 a_0, a_1, \dots, a_n 的非齐次线性方程组

\therefore 方程组 (2.3) 的解 a_0, a_1, \dots, a_n 存在且唯一,

\therefore 插值多项式 存在且唯一。

HUST

例1 给定 $f(x)$ 的函数表, 求 $f(x)$ 的次数不超过3的插值多项式。

x	-1	1	2	5
y	-7	7	4	35

解: 设 $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \\ 35 \end{pmatrix}$$

解方程组得 $a_0=10, a_1=5, a_2=-10, a_3=2$,

即 $P_3(x)=10+5x-10x^2+2x^3$

$n=20$, 在 10^8 次/秒的计算机上计算需几十万年!



2.2 Lagrange 插值——线性插值

Problem 2.1 已知函数 $y=f(x)$ 的函数表
求次数不超过1的多项式 $P_1(x)=a_0+a_1x$,
满足插值条件 $P_1(x_0)=y_0, P_1(x_1)=y_1$.

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

分析: 过点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ 作直线 $y=P_1(x)$ ——线性插值。

解: 由点斜式方程,

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$y = P_1(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0$$

$$P_1(x) = \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{l_0(x)} y_0 + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{l_1(x)} y_1 = \sum_{i=0}^1 l_i(x) y_i$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

称为线性插值基函数, 而
 $P_1(x)$ 是它们的线性组合。

线性插值基函数的性质

Chapter 2
插值方法

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \sum_{i=0}^1 l_i(x) y_i$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow l_0(x) + l_1(x) = 1$$

$$\begin{aligned} l_0(x_0) &= 1, l_0(x_1) = 0 \\ l_1(x_0) &= 0, l_1(x_1) = 1 \end{aligned} \Rightarrow l_i(x_j) = d_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j=0,1$$

d_{ij} /* Kronecker Delta */

HUST

线性插值

Chapter 2
插值方法

例2.2 已知 $\lg 2.71 = 0.4330, \lg 2.72 = 0.4364$. 求 $y = \lg 2.718$.

分析: 对 $y = \lg x$, 给出了两点 $(2.71, 0.4330) = (x_0, y_0)$,

$$(2.72, 0.4364) = (x_1, y_1)$$

为求 $\lg 2.718$ 构造简单的插值多项式作为 $\lg x$ 的近似。

解: 已知 $(x_0, y_0) = (2.71, 0.4330), (x_1, y_1) = (2.72, 0.4364)$

利用线性插值, 则

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{x - 2.72}{2.71 - 2.72} * 0.4330 + \frac{x - 2.71}{2.72 - 2.71} * 0.4364 \\ &= 0.34x - 0.4884 \end{aligned}$$

$$\therefore \lg x \approx P_1(x) \Rightarrow \lg 2.718 \approx P_1(2.718) = 0.43572$$

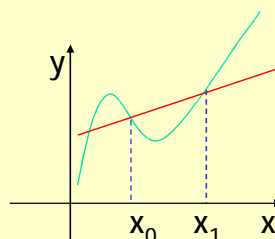
HUST

2.2.2 抛物插值

Chapter 2
插值方法

线性插值:

用直线 $y=P_1(x)$ 近似曲线 $y=f(x)$



当插值区间较大或曲线在 $[x_0, x_1]$ 凸凹变化大时，
线性插值的误差很大。

为了减小误差，用简单的曲线(抛物线)去近似代替
复杂曲线 $y=f(x)$ 。二次多项式函数的曲线为抛物线，
所以构造插值函数 $P_2(x)$ ，即 $n=2$ 。

HUST

抛物插值

Chapter 2
插值方法

Problem 2.2 已知 $y=f(x)$ 的函数表， x_0, x_1, x_2

为互异节点，求一个次数不超过2的多项式

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2: P_2(x_0) = y_0, P_2(x_1) = y_1, P_2(x_2) = y_2$$

几何意义: $P_2(x)$ 为过三点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的抛物线

方法: 基函数法，构造基函数 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ (三个二次式)

使 $P_2(x) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) + y_2l_2(x)$ 满足插值条件。

$$l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0$$

$$l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0$$

$$l_2(x_0) = 0, l_2(x_1) = 0, l_2(x_2) = 1$$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 0, 1, 2$$

HUST

求二次多项式 $l_0(x)$: $l_0(x_0)=1$ $l_0(x_1)=0$ $l_0(x_2)=0$

$\Leftrightarrow l_0(x) = C(x-x_1)(x-x_2)$ 只须求 $C=?$

由 $l_0(x_0)=1$ 得 $C(x_0-x_1)(x_0-x_2)=1$ $l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$
 $\therefore C=1/(x_0-x_1)(x_0-x_2)$

同法求得: $l_1(x)$, $l_2(x)$, 即抛物插值的插值基函数如下:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

抛物插值问题Problem 2.2的解:

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2.2.3 Lagrange插值公式

Problem 2.3 已知 $y=f(x)$ 在两两互异节点 x_0, x_1, \dots, x_n 的函数值 y_0, y_1, \dots, y_n , 求 n 次多项式 $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

满足插值条件 $P_n(x_j) = y_j$, $j=0, 1, 2, 3, \dots, n$

基函数法: 求 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$, 使

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x).$$

$P_n(x)$ 须满足插值条件 $P_n(x_j) = y_j$, $j=0, 1, 2, 3, \dots, n$

$$\text{即 } y_0 l_0(x_j) + y_1 l_1(x_j) + \dots + y_j l_j(x_j) + \dots + y_n l_n(x_j) = y_j$$

$$l_0(x_j) = 0, l_1(x_j) = 0, \dots, l_j(x_j) = 1, \dots, l_n(x_j) = 0$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow l_{kj}(x_j) = d_{kj} = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad k, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Lagrange插值公式

Chapter 2
插值方法

$$l_k(x_0)=0, \dots, l_k(x_{k-1})=0, l_k(x_{k+1})=0, \dots, l_k(x_n)=0$$

即 $l_k(x)$ 有 n 个 0 点 $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$

$$\therefore l_k(x) = C(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) \quad \text{又 } l_k(x_k)=1$$

$$\therefore C(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)=1$$

$$\therefore C = \frac{1}{(x_k-x_0)L(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})L(x_k-x_n)}$$

与节点有关
而与 f 无关

$$\therefore l_k(x) = \frac{(x-x_0)L(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})L(x-x_n)}{(x_k-x_0)L(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})L(x_k-x_n)} = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$\therefore P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k \left(\prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \right) \quad \text{Lagrange插值多项式}$$

(当 $n=1$, $n=2$ 时分别就是线形插值与抛物插值公式)

HUST

2.2.4 插值余项 /* Remainder */

Chapter 2
插值方法

函数 $y=f(x)$ 与其 Lagrange 插值多项式 $P_n(x)$:

$$(1) \quad P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i=0,1,2,\dots,n$$

(2) 而对于插值区间 $[a,b]$ 内插值节点 $x_i (i=1,2,\dots,n)$ 以外的点 x , 一般 $P_n(x) \neq f(x)$, 存在误差。

Def: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 为 $P_n(x)$ 的截断误差或插值余项。

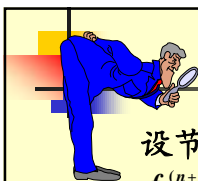
$$(1) \Rightarrow R_n(x_i) = 0, \quad i=0,1,2,\dots,n$$

$$(2) \Rightarrow \text{若 } x \neq x_i, \text{ 可能 } R_n(x) \neq 0,$$

利用 Lagrange 插值公式 $P_n(x)$ 来计算, 结果是否可靠, 要看余项 $R_n(x)$ 是否足够小。

$$R_n(x) = ?$$

HUST



设节点 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, 且 f 满足条件 $f \in C^{n+1}[a, b]$,
 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 内存在, 考察截断误差

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Rolle's Theorem: 若 $j(x)$ 充分光滑, $j(x_0) = j(x_1) = 0$, 则
 存在 $\xi \in (x_0, x_1)$ 使得 $j'(\xi) = 0$.

推广: 若 $j(x_0) = j(x_1) = j(x_2) = 0 \Rightarrow \xi_1 \in (x_0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2)$

使得 $j'(\xi_1) = j'(\xi_2) = 0 \Rightarrow \xi \in (x_0, x_2)$ 使得 $j''(\xi) = 0$

$$j(x_0) = \dots = j(x_n) = 0$$

\Rightarrow 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $j^{(n)}(\xi) = 0$



设 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, 且 f 满足条件 $f \in C^{n+1}[a, b]$,
 $f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 内存在, 考察截断误差

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$R_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个根 $\Rightarrow R_n(x) = K(x) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

任意固定 $x \neq x_i (i=0, \dots, n)$, 考察 $j(t) = R_n(t) - K(x) \prod_{i=0}^n (t - x_i)$

$j(t)$ 有 $n+2$ 个不同的根 x_0, \dots, x_n, x

对 t 求导

$$\Rightarrow j^{(n+1)}(\xi) = 0, \quad \xi \in (a, b)$$

||

$$f^{(n+1)}(\xi) - \cancel{P_n^{(n+1)}(\xi)} - K(x)(n+1)! = R_n^{(n+1)}(\xi) - K(x)(n+1)!$$

$$\Rightarrow K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Review

Chapter 2
插值方法

Problem 1: 已知 $y=f(x)$ 的函数表
且 $x_i(i=0,1,\dots,n)$ 两两互异, $x_i \in [a,b]$,
求次数不超过 n 的多项式

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, 使得 $P_n(x_i) = y_i, i=0,1,\dots,n$.

定理2.1 在 $n+1$ 个互异的插值结点 x_0, x_1, \dots, x_n 上满足上述插值条件且次数不超过 n 的代数多项式 $P_n(x)$ 存在且唯一。

采用基函数法可以导出Lagrange插值公式: $P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

HUST

插值余项

Chapter 2
插值方法

定理1: 设函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数 $y=f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,
 $y=f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 上存在; 插值结点为 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$,
 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次拉格朗日插值多项式; 则对任意 $x \in [a,b]$ 有:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_n(x)$$

其中 $\xi \in (a,b)$, ξ 依赖于 x , $w_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

F 通常不能确定 ξ , 而是估计 $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$, $\xi \in (a,b)$

将 $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x-x_i|$ 作为误差估计上限。

F 当 $f(x)$ 为任一个次数 $\leq n$ 的多项式时, $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, 可知

$R_n(x) \equiv 0$, 即插值多项式对于次数 $\leq n$ 的多项式是精确的。

当 $f(x) \equiv 1$, $P_n(x) = f(x) \equiv 1$, 即 $l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) \equiv 1$

HUST

例2.3 已知 $y=\lg(x)$ 的函数表如右, 求 $\lg 2.718$ 并估计其误差.

x	2.71	2.72	2.73
y=lgx	0.4330	0.4346	0.4362

解:
$$P_2(x) = \frac{(x-2.72)(x-2.73)}{(2.71-2.72)(2.71-2.73)} * 0.4330 + \frac{(x-2.71)(x-2.73)}{(2.72-2.71)(2.72-2.73)} * 0.4346$$

$$+ \frac{(x-2.71)(x-2.72)}{(2.73-2.71)(2.73-2.72)} * 0.4362$$

$$= 13038x^2 - 7092.08x + 96459.032 \quad \therefore \lg 2.718 \approx P_2(2.718) = 0.48$$

$$Q R_2(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad x \in [x_0, x_2]$$

$$Q f(x) = \lg x \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3 \ln 10} \Rightarrow \max_{2.71 \leq x \leq 2.73} |f'''(x)| = 0.043642$$

$$|R_2(2.718)| \leq \frac{0.043642}{6} |(2.718-2.71)(2.718-2.72)(2.718-2.73)| = 1.39654 \times 10^{-9}$$

Newton插值——引言

1. 已知 $y=f(x)$ 的 $n+1$ 个互异节点 $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ 及其上的函数值 $y_i=f(x_i), i=0, 1, 2, \dots, n$, 利用基函数法求出其上的Lagrange插值多项式: $P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x)$

其中基函数为:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \mathbf{L}(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \mathbf{L}(x-x_n)}{(x_i-x_0) \mathbf{L}(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \mathbf{L}(x_i-x_n)}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

2. 若 $f(x)$ 有直到 $n+1$ 阶导数, 其插值余项为:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x-x_k) \quad x \in (a, b)$$

Lagrange插值虽然易算, 但若要增加一个节点时, 全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新计算。——不具有承袭性
Newton插值——具有承袭性

2.3.1 基函数

Chapter 2
插值方法

Problem 2.4 已知 $y=f(x)$ 的 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 及函数值 $f(x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$. 求作 n 次多项式 $N_n(x)$:

$$N_n(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

且满足插值条件: $N_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$N_n(x)$ 是 $1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$ 的线性组合,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(x) &= 1 \\ \Phi_i(x) &= (x-x_{i-1})\Phi_{i-1}(x) \\ &= (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1}) \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} (2.9)$$

定义2.1 由(2.9)定义的 $n+1$ 个多项式称为Newton插值以 x_0, x_1, \dots, x_n 为节点的**基函数**。

$$N_n(x) = C_0\Phi_0(x) + C_1\Phi_1(x) + \dots + C_n\Phi_n(x)$$

HUST

求系数

Chapter 2
插值方法

$$N_n(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

已知基函数, 求 $N_n(x) \Rightarrow$ 求系数 $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$

$$N_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

在公式中, 取 $x=x_0$ 有: $N_n(x_0) = C_0$ 而 $N_n(x_0) = f(x_0) \quad \therefore C_0 = f(x_0)$

在公式中, 取 $x=x_1$ 有: $N_n(x_1) = C_0 + C_1(x_1-x_0)$, 而 $N_n(x_1) = f(x_1)$

$$\therefore C_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\text{同理, 有: } C_2 = \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] / (x_2 - x_0)$$

为了易于计算 $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ 引进**差商**。

HUST

2.3.2 差商 /* divided difference */ Chapter 2 插值方法

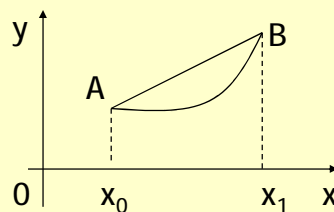
设函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个相异节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值分别为 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

1. 一阶差商: 称 $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_0, x_1 的一阶差商, 记为 $f[x_0, x_1]$. /* the 1st divided difference*/

(1) 差商的几何意义:

$f[x_0, x_1]$ 为弦AB的斜率.

(2) 显然, $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$



HUST

2.3.2 差商 /* divided difference */ Chapter 2 插值方法

设函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个相异节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的函数值分别为 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

2. 二阶差商: $\frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = f[x_0, x_1, x_2]$

称为 $f(x)$ 关于节点 x_0, x_1, x_2 的二阶差商.

3. k 阶差商: $f(x)$ 在互异节点 x_0, x_1, \dots, x_k 处的 k 阶差商为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \{f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k]\} / (x_0 - x_k)$$

一般记忆为: $f[A, B, C] = \{f[A, B] - f[B, C]\} / (A - C)$

HUST

差商表

Chapter 2
插值方法

计算出差商可列表如下:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	...
x_0	$f(x_0)$...
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$...
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$...
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$...
...

HUST

计算差商

Chapter 2
插值方法

例: 已知 $f(x) = \sqrt{x}$ 在节点
 $x=1, 4, 9$ 的函数值为:

x	1	4	9
$f(x)$	1	2	3

试构造差商表。

解:

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
1	1		
4	2	$f[x_0, x_1] = (2-1)/(4-1) = 1/3$	
9	3	$f[x_1, x_2] = (3-2)/(9-4) = 1/5$	$f[x_0, x_1, x_2] = (1/3 - 1/5)/(1-9) = -1/60$

HUST

2.3.3 差商性质

Chapter 2
插值方法

1. n 阶差商可以表示成 $n+1$ 个函数值的线性组合,即

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k - x_j)}$$

例:
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

2. (对称性): 差商与节点的顺序无关, 例

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = \dots = f[x_0, x_2, x_1]$$

3. 若 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则一阶差商 $f[x, x_0]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式, 二阶差商 $f[x, x_0, x_1]$ 是 x 的 $n-2$ 次多项式;

一般, 函数 $f(x)$ 的 k 阶差商 $f[x, x_0, \dots, x_{k-1}]$ 是 x 的 $n-k$ ($k \leq n$)次多项式, 而 $k > n$ 时, k 阶差商为零。 (自学本性质的证明)

HUST

2.3.4 Newton插值公式

Chapter 2
插值方法

x_0, x_1, \dots, x_n 为 $[a, b]$ 中互异节点, 且 x 是 $[a, b]$ 中一点

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0), \quad (1式)$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1), \quad (2式)$$

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \dots, x_n]}{x - x_n}$$

$$\Rightarrow f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_n), \quad (n+1式)$$

HUST

牛顿插值 /* Newton's Interpolation */

Chapter 2
插值方法



$$N_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x, x_0] & \text{..... ①} \\ f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x-x_1)f[x, x_0, x_1] & \text{..... ②} \\ \dots \dots \dots \dots \\ f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, \dots, x_n] + (x-x_n)f[x, x_0, \dots, x_n] & \text{..... ②} \end{cases}$$

$$\text{①} + (x-x_0) \cdot \text{②} + \dots \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \cdot \text{②}$$

$$\rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) + f[x, x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

$N_n(x)$

$$c_i = f[x_0, \dots, x_i]$$

$R_n(x)$

HUST

Newton插值公式

Chapter 2
插值方法

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x) : R_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$$

$$\text{由于 } R_n(x_i) = 0 \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

$$\therefore N_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

从而 $N_n(x)$ 为满足插值条件的次数不超过 n 的多项式

$\therefore N_n(x)$ 即为Problem 2.4的解,

定义: $N_n(x)$ 为 $y=f(x)$ 在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的

n 阶Newton插值公式;

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

为其插值余项。

HUST

当 $n=1$ 时：

$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$R_1(x) = f[x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1)$$

当 $n=2$ 时：

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$R_2(x) = f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

例：已知 $f(x)$ 在六个点的函数值如下表，运用牛顿插值多项式求 $f(0.596)$ 的近似值，并估计其误差。

x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商	4阶差商	5阶差商	$x - x_k$
0.4	0.41075						0.196
0.55	0.57815	1.1160					0.046
0.65	0.69675	1.1860	0.2800				-0.054
0.80	0.88811	1.2757	0.3588	0.1973			-0.204
0.90	1.02652	1.3841	0.4336	0.2137	0.0334		-0.454
0.596	0.63195	1.2979	0.4225	0.2056	-0.1761	-1.1	

$$N_4(x) = 0.41075 + 1.1160(x - 0.4) + 0.2800(x - 0.4)(x - 0.55) + 0.1973(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.65) + 0.0334(x - 0.4)(x - 0.55)(x - 0.65)(x - 0.80)$$

$$f(0.596) \approx N_4(0.596) = 0.63195$$

$$|R_4(0.596)| = |f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, 0.596](0.596 - x_0) \cdots (0.596 - x_4)| \approx 0.33215 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$$

Newton插值公式

Chapter 2
插值方法

注意: 1. 在给定节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上的 Newton 插值公式 $N_n(x)$ 与 Lagrange 插值公式 $P_n(x)$ 都满足插值条件:

$$N_n(x_i) = P_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

由插值多项式的唯一性 $P_n(x) = N_n(x)$

2. 由 1 知 $P_n(x)$ 与 $N_n(x)$ 有相同的余项:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} w(x) \\ &= f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, \dots, x_n] w(x) \end{aligned}$$

HW:
p.52 #14

定理 2.3 在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 所阶定的范围 $\Phi: [\min_{0 \leq i \leq n} x_i, \max_{0 \leq i \leq n} x_i]$ 内存在一点 ξ , 使得 $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

HUST

2.5 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

Chapter 2
插值方法

多项式插值

对于 $y=f(x) \quad a \leq x \leq b$

给定插值结点 x_0, x_1, \dots, x_n , 构造插值多项式 $P_n(x)$, 为使 $P_n(x)$ 更好地逼近 $f(x)$, 一般使:

节点间距较小 \Rightarrow 节点多 (n 较大) \Rightarrow 插值多项式 $P_n(x)$ 的次数很高
(高次插值)

高次插值使 $P_n(x)$ 在较多点上与 $f(x)$ 相等, 但在插值节点外,

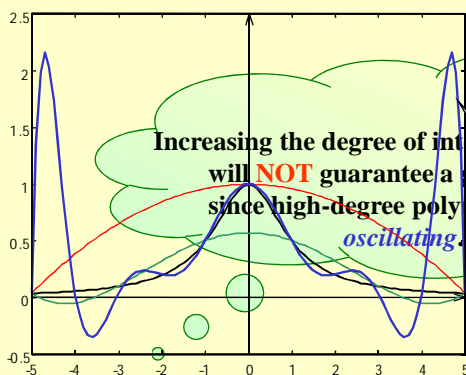
误差如何? 是否插值多项式 $P_n(x)$ 的次数越高越好?

HUST

2.5 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

Chapter 2
插值方法

例：在 $[-5, 5]$ 上考察 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的 $P_n(x)$ 。取 $x_i = -5 + \frac{10i}{n}$ ($i=0, \dots, n$)



$P_n(x) \approx f(x)$

Increasing the degree of interpolating polynomial will **NOT** guarantee a good result, since high-degree polynomials are *oscillating*.

n 越大，
端点附近抖动
越大，称为
Runge 现象



分段低次插值

HUST

分段插值

Chapter 2
插值方法

思想： 将一个区间分成若干小区间，在每个小区间上进行低次插值，将产生的多项式装配成整个大区间上的分段 k 次式。

其步骤为：

- (1) 对 $[a, b]$ 作分划 $\Phi: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$
- (2) 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上构造低次插值多项式 $P_i(x)$
- (3) 将 $P_i(x), i=0, 1, \dots, n-1$ 拼接为 $[a, b]$ 上的分段多项式 $g(x)$ 作为 $f(x)$ 的插值函数，即 $g(x)=P_i(x) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$

一般 $P_i(x)$ 都为 k 次式，此时的 $g(x)$ 记为 $S_k(x)$ ，称其为分段 k 次式。

(即在分划 Φ 的每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 $S_k(x)$ 都为 k 次式)。

HUST

分段线性插值——用折线逼近曲线f(x)

Chapter 2
插值方法

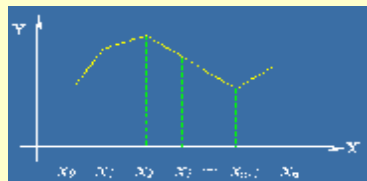
Problem 2.6 对 $y=f(x)$, $x \in [a, b]$ 定义区间有分划

$\Phi: a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$, 且已知 $y_i=f(x_i)$ $i=0, 1, \dots, n$,

求具有分划 Φ 的分段一次式 $S_1(x)$, 使: $S_1(x_i) = y_i$, $i=0, 1, 2, \dots, n$.

只须求 $S_1(x)$ 在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的表达式, 拼装即成。

$$f(x) \approx S_1(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$



$$|f(x) - S_1(x)| = \left| \frac{f''(x)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right|, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}]$$

HUST

分段线性插值余项

Chapter 2
插值方法

$$|f(x) - S_1(x)| = \left| \frac{f''(x)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1}) \right|, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\text{又 } |f''(x)| \leq \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| = M,$$

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |(x - x_i)(x - x_{i+1})| = \frac{1}{4} (x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{1}{4} h_i^2 \leq \frac{1}{4} (\max_{i=0}^{n-1} h_i)^2 = \frac{1}{4} h^2$$

定理 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 且 $f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$, 已知, $S_1(x)$ 为问题 2.5 的解, 则当 $x \in [a, b]$ 时

$$|f(x) - S_1(x)| \leq Mh^2/8$$

其中 $M = \max |f''(x)|$, $x \in [a, b]$, $h = \max \{h_i, i=0, \dots, n-1\}$

因而 $S_1(x)$ 在 $[a, b]$ 上一直收敛到 $f(x)$ 。

HUST

练习

Chapter 2
插值方法

例 要构造对数表 $\log_{10}x$, $10 \leq x < 100$, 怎样选步长 h , 才能使分段一次插值具有六位有效数字?

解: $\because 1 \leq \log_{10}x < 2$, 要使结果具有六位有效数字,

\therefore 误差限 $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-5}$,

$$Q \quad (\log_{10} x)'' = -\frac{1}{x^2 \ln 10} \quad \therefore M = \max_{10 \leq x \leq 100} |(\log_{10} x)''| = \frac{1}{10^2 \ln 10}$$

$$\therefore |\log_{10} x - S_1(x)| \leq \frac{1}{8} M h^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^2 \ln 10} h^2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow h \leq 0.959705 \times 10^{-2}$$

$$\therefore h = 0.01$$

HW:
p.53 #19

HUST