第四章

常微分方程的数值解法

Numerical Solutions to Ordinary Differential Equations

概述

Ø **一阶常微分方程初值问题:**

Problem I: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ **求函数**y=y(x)**满足：** $y'(x) = f(x, y(x))$

Ø $f(x,y)$**在**$D=\{(x,y)|a \leqq x \leqq b, -\infty \leqq y \leqq \infty\}$**上连续，且满足**

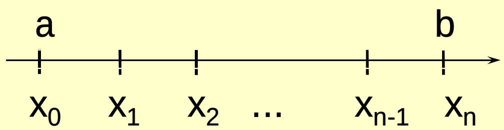
Lipschitz**条件:** $\exists L, \forall y_1, y_2,$ s.t. $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$

则初值问题Problem I**有唯一解。**

Ø**实际工程技术、生产、科研上会出现大量的微分方程问题很难得到其解析解，有的甚至无法用解析表达式来表示，因此只能依赖于数值方法去获得微分方程的数值解。**

Ø 微分方程的数值解法：

- p 不求y=y(x)的精确表达式,而求离散点$x_0,x_1,\ldots x_n$处的函数值
- p 设Problem I的解y(x)的存在区间是[a,b]，初始点$x_0=a$，取[a,b]内的一系列节点$x_0, x_1,\ldots,x_n$。$a= x_0< x_1<\ldots< x_n =b$，一般采用等距步长。



- p 用数值方法，求得y(x)在每个节点x_k的值$y(x_k)$的近似值，用y_k表示，即$y_k \approx y(x_k)$，
- p 这样$y_0, y_1,\ldots,y_n$称为微分方程的数值解。
- p 求y(x)————>求$y_0, y_1,\ldots,y_n$

HUST

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

Ø @方法：采用步进式和递推法

将[a,b]n等分，$a= x_0< x_1<\ldots< x_n =b$，步长$h=\frac{b-a}{n}$，$x_k=a+kh$

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = g(h, x_n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots y_{n-m}) \end{cases}$$

Ø 计算过程：

$$y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-m} \to y_{n-m+1} \to \cdots \to y_n \to y_{n+1} \to \cdots$$

Ø 怎样建立递推公式？

- ü Taylor公式
- ü 数值积分法

HUST

4.1 欧拉公式

@思想:用向前差商近似代替微商.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \qquad h=x_{n+1}-x_n$$

$$\therefore f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}.$$

$$\therefore y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_n, y(x_n))$$

$\therefore y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ ——**欧拉公式**（Euler Schema）

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

几何意义

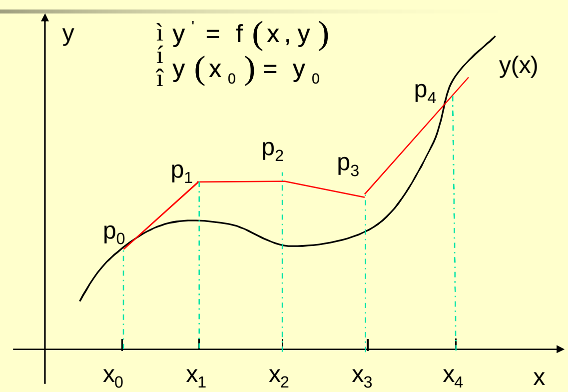
1. **$y(x)$过点$P_0(x_0,y_0)$且在任意点(x,y)的切线斜率为$f(x,y)$,**
2. **$y(x)$在点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为：**

$y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$

在切线上取点$P_1(x_1,y_1)$

$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$

y_1正是Euler 公式所求。



3. **类似2，过P_1以$f(x_1,y_1)$为斜率作直线，近似平行于$y(x)$在x_1的切线，在其上取点$P_2(x_2,y_2)$，依此类推…**

4. **折线$P_0\ P_1\ P_2 \ldots P_n\ldots$作为曲线$y(x)$的近似 ——欧拉折线法**

欧拉法（续）

@用向后差商近似代替微商：

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(x_{n+1}) \approx y[x_n, x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \quad h = x_{n+1} - x_n$$

$$\therefore f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

?

$$\therefore y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$ ——隐式欧拉公式

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots\cdots$$

注：用隐式欧拉法，每一步都需解方程

（或先解出y_{n+1}的显式表达式），但其稳定性好。

欧拉法（续）

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

@用中心差商近似代替微商：

$$y'(x_n) \approx y[x_{n-1}, x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})}{2h} \Rightarrow f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})}{2h}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n) \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots$$ —— 二步欧拉法

注：计算时，先用欧拉法求出y_1，以后再用二步欧拉法计算。

欧拉法（续）

公式	单步否	显式否	截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$	单步	显式	
$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$	单步	隐式	
$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$	二步	显式	

局部截断误差

定义1 假设$y_n=y(x_n)$,即第n步计算是精确的前提下,称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为欧拉法的局部截断误差.

注：无$y_n=y(x_n)$ 前提下，称R_{n+1}为整体截断误差。

定义2 若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,称该算法有p阶精度.

定义3 假设$y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$,称$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为二步欧拉法的局部截断误差.

定理 欧拉法的精度是一阶。

局部截断误差

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

定理 欧拉法的精度是一阶。

分析：证明其局部截断误差为O(h^2),可通过Taylor展开式分析。

证明： Euler 公式为 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

令$y_n=y(x_n)$，下证： $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2)$

$\because\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$ 由 $y'(x)=f(x,y(x))$

$=y(x_n)+hy'(x_n)$

$\because\ y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{y''(x)}{2!}h^2,x\in(x_n,x_{n+1})$

$\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{y''(x)}{2}h^2=O(h^2)$

HUST

二步法的局部截断误差$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

定理 隐式欧拉法的精度是一阶，二步欧拉法的精度是二阶。

证明： 对二步欧拉法进行证明，考虑其局部截断误差，

令$y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，

$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)=y(x_{n-1})+2hf(x_n,y(x_n))=y(x_{n-1})+2hy'(x_n)$

$\because\ y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{y'''(x)}{3!}h^3,x\in(x_n,x_{n+1})$

$y(x_{n-1})=y(x_n-h)=y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{(-h)^2}{2!}y''(x_n)+\frac{y'''(h)}{3!}(-h)^3,h\in(x_{n-1},x_n)$

将上两式左右两端同时相减：

$\therefore\ y(x_{n+1})-y(x_{n-1})=2hy'(x_n)+\frac{y'''(x)+y'''(h)}{3!}h^3$ $\quad\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$

∴二步欧拉法的局部截断误差为O(h^3)，其精度是二阶。

HUST

例: 求 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ $x = 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$ 的近似值。

解: 这儿 $f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y}$， $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$

由欧拉公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ，$y_0 = 1$ 得:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \times (1 - \frac{0}{1}) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \times (1.1 - \frac{2 \times 0.1}{1.1}) = 1.191818$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.277438 \quad \cdots\cdots$$

又其精确解为 $y = \sqrt{2x+1}$

整体误差 $e_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1}$ ，下面对其加以分析

Chapter 4 Initial
-value problems for ODE

x_k	y_k	$y(x_k)$	e_k
0.1	1.1	1.0954451	0.0045548
0.2	1.191818	1.183216	0.0086022
0.3	1.2774379	1.2649111	0.012527
0.4	1.3582127	1.3416408	0.016572
0.5	1.4351330	1.4142136	0.0209194
0.6	1.5089664	1.4831397	0.0257267
0.7	1.5803384	1.5491933	0.0311906
0.8	1.6497836	1.6124519	0.037332
0.9	1.7177795	1.6722301	0.044594
1.0	1.7847710	1.7320508	0.0527201

从表中看出误差在逐步增加、积累

$$\bar{y}_{10} = y(x_9) + hf(x_9, y(x_9)) = 1.7330815$$

局部截断误差 $y(x_{10}) - \bar{y}_{10} = 0.00103$ 而误差是 $y(x_{10}) - y_{10} = 0.05272$

HUST

复 习

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

求：y(x) ⇒ 数值解 $y_0, y_1, \ldots, y_n$

公式	单步否	显式否	局部截断误差$y(x_{n+1})-y_{n+1}$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$	单步	显式	$O(h^2)$
$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$	单步	隐式	$O(h^2)$
$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$	二步	显式	$O(h^3)$

定义1 假设$y_n=y(x_n)$,即第n步计算是精确的前提下,称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为**欧拉法的局部截断误差**.

定义2 若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,称该算法有**p阶精度**.

数值积分法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1})-y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

对右端的定积分用数值积分公式求近似值：

（1）用左矩形数值积分公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx (x_{n+1}-x_n)\,f(x_n,y(x_n))$$

$$\therefore\ y(x_{n+1})-y(x_n) \approx hf(x_n,y(x_n))$$

$$\Rightarrow\ y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$$

$$\Rightarrow\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n,\ y_n)$$

数值积分法

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

（2）用梯形公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx \frac{(x_{n+1}-x_n)}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y(x_{n+1})-y(x_n) \approx \frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$ ——梯形公式

- 梯形公式:将显示欧拉公式,隐式欧拉公式平均可得
- 梯形公式是隐式、单步公式,其精度为二阶

梯形公式的精度

定理：梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 的精度是2阶的.

分析：证明其局部截断误差为$O(h^3)$；用二元函数的Taylor公式。

证：令$y_n=y(x_n)$,由Talor公式有

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_{n+1},y(x_{n+1})+(y_{n+1}-y(x_{n+1})))$

$=f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$， η介于y_{n+1}与$y(x_{n+1})$之间

$=y'(x_{n+1})+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2) +f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=f(x_n,y_n)+hy''(x_n) +f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1})) +O(h^2)$

又$y(x_{n+1})= y(x_n +h) = y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n) /2 +O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_n,y_n)+hy''(x_n)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)$

$y(x_{n+1})=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h\,[f(x_{n+1},y_{n+1})$

$-f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)]/2+O(h^3)$

$=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$

$+h\,f_y(x_{n+1},\eta)(y(x_{n+1})-y_{n+1})/2+O(h^3)$

从而$y(x_{n+1})=y_{n+1}+h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore y(x_{n+1})-y_{n+1}=h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)/[1-hf_y(x_{n+1},\eta)/2]=O(h^3)$

∴**梯形公式的截断误差为**$O(h^3)$，**其精度是2阶。**

梯形公式的应用

例4.1 用梯形公式求初值问题的 $\dfrac{dy}{dx}=y,\ y(0)=1.$ **解在**$x=0.01$**上的值**$y(0.01)$.

解: 取$h=0.01$, $x_0=0$, $y_0=y(0)=1$. 则 $y(0.01)\approx y_1$

$f(x,y)=y$，**由梯形公式,**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]=y_n+\frac{h}{2}[y_n+y_{n+1}]\ \Rightarrow y_1=y_0+\frac{h}{2}[y_0+y_1]$$

$$y_1=\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}y_0$$

基于幂级数理论 $y_1=(1+\frac{h}{2})(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\dots)y_0$

$$\approx(1+\frac{h}{2})^2+\frac{h^2}{4}=1.01005$$

解析解 $y=e^x$ 　$y(0.01)=e^{0.01}=1+0.01+\frac{0.01^2}{2!}+\frac{0.01^3}{3!}+\dots$

$$\approx \mathbf{1+0.01+\frac{0.01^2}{2!}=1.01005}$$

欧拉公式的比较

欧拉法	最简单,精度低
隐式欧拉法	稳定性好
二步欧拉法	显式，但需要两步初值，且第2个初值只能由其它方法给出,可能对后面的递推精度有影响
梯形公式法	精度有所提高,但为隐式,需迭代求解,计算量大

HW:
p.116 #3，
证明隐式欧拉法的精度为一阶