第五章　方程求根的数值解

/* Solutions of Nonlinear Equations */

HUST

引入

Chapter 5 Solutions of equations in one varible

在科学与工程计算中经常需求解方程f(x)=0的根

① 当$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots\ldots a_1 x+a_0$ 时

n=1,2,3,4时,可用求根公式求解

n ⩾ 5时,不能用公式表示方程的根

② 对于一般的非线性方程f(x)=0, x∈R . 只能求出其近似值，我们探讨其数值解法——逐步逼近法

1.初始近似根x_0

2. $x_k \rightarrow$ 递推关系 $\rightarrow x_{k+1}$　　(x_k收敛于真解x^*)

HUST

5.1 根的隔离和二分法

为了确定初始近似根 x_0，必须知道**f(x)=0** 的根的大致范围。

若**f(x)=0** 在**(a,b)** 内有一个根，称**(a,b)**为**f(x)=0** 的有根区间

若**f(x)=0** 在 **(a,b)**只有一个根，称**(a,b)**为**f(x)=0** 的隔根区间

当(a,b) 为隔根区间时，可取$x_0\in(a,b)$

Def: 根的隔离——求f(x)=0的隔根区间的过程。

根的隔离的依据

Th5.1 设函数f(x)在[a,b]上连续，且有f(a)f(b)<0, 则方程 f(x)=0 在[a,b]内至少有一个根.

注: ① [a,b]为有根区间

② 当 f(x) 满足Th5.1 的条件且在[a,b] 上单调时，**f(x)**在**[a,b]**内只有一根.

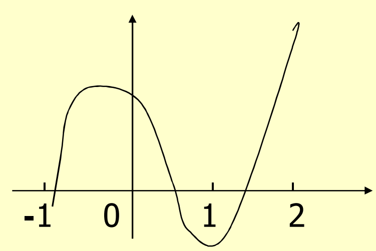
即 (a,b)为隔根区间.

根的隔离的方法

图象法:作出 y=f(x)的草图，由曲线y=f(x) 与x轴的交点的大致位置来确定隔根区间.

例 隔根区间：(-1,0),(0,1),(1,2)

区间端点上函数值f(x) 异号

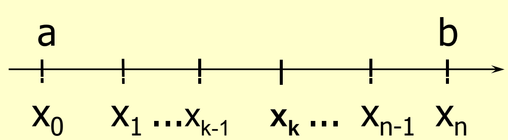


逐步搜索法

已知：[a,b]为 f(x)=0的有根区间，且[a,b] 较大,

求一个缩小的有根区间

- 取步长h=(b-a)/n



- 从x_0=a出发以h 为步长向右搜索直至找到第一个点x_k=a+kh 满足 $f(a)f(x_k) \le 0$, 则得缩小得有根区间$[x_{k-1},x_k]$

- 取初始近似根为x_{k-1}或x_k，其误差限为h

Algorithm

step 1: $x_0 = a$, $h=(b-a)/n$

step 2: If ($f(x_0)f(x_0+h) \le 0$) 输出(x_0,x_0+h)

Else $x_0 = x_0+h$, goto step 2

例 求方程$f(x)=x^3-x-1=0$ 的有根区间。

解: ∵ $f(0)=-1<0$, $f(+\infty)>0$ ∴ $(0,+\infty)$为有根区间

从$x=0$ 出发, 步长$h=0.5$向右计算, 则

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	-	-	-	+	+

得缩小的有根区间为（1.0，1.5）

可取初始近似根$x_0=1.0$或$x_0=1.5$

小结 :当 h很小时，得到很小的有根区间，

取$x^* \in (x_0,x_0+h)$，从而可算得任意精度的近似根，

但h越小计算量越大，利用此法求近似根仍不十分理想。

5.1.2 二分法 /* Bisection Method */

思想：将有根区间 [a,b]逐次减半（二分），使有根区间缩小直到误差容许范围内，然后取区间中点为真根x^* 的近似值。

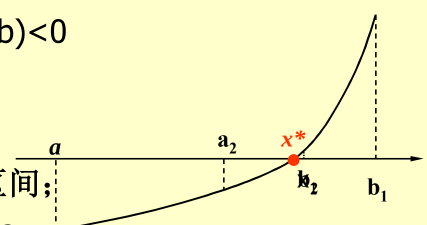
设$f(x)=0$的有根区间为[a,b]且$f(a)f(b)<0$

(1) 取$x_0=(a+b)/2$

If $f(x_0)=0$，则 x_0为 $f(x)=0$的根；

else if $f(a)f(x_0)<0$, 则$[a,x_0]$为有根区间；

记 $a_1=a$, $b_1=x_0=(a+b)/2$



else $f(x_0)f(b)<0$,则$[x_0,b]$ 为有根区间,记 $a_1=x_0=(a+b)/2$, $b_1=b$

∴ 得缩小的有根区间$[a_1,b_1]$且$b_1-a_1=(b-a)/2$，[a,b]包含$[a_1,b_1]$

(2) 将$[a_1,b_1]$ 二等分，其中点$x_1=(a_1+b_1)/2$，计算$f(x_1)$，重复(1)，或$f(x_1)=0$ 则$x^*=x_1$ ，或得有根区间 $[a_2,b_2]$ 且$b_2-a_2=(b_1-a_1)/2$.

(3) ……反复进行，则得到有根区间套

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_k,b_k] \ldots \ni x^*$$

$$b_k - a_k = \tfrac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \ldots = \tfrac{1}{2^k}(b-a)$$

记 $[a_k,b_k]$ 的中点为 $x_k=(a_k+b_k)/2$ 并作为根的近似值

从而有近似根序列 $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k, \ldots\ldots$

$$\because \lim_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^k}=0 \text{ 且 } \forall k,\ x^*\in[a_k,b_k] \qquad \therefore \lim_{k\to\infty}x_k=x^*$$

二分法是收敛的

将有限次二分的结果 x_k 作为根的近似值，其误差为多少呢？

$$\because x^*, x_k\in[a_k,b_k],\ x_k=\frac{a_k+b_k}{2} \qquad \therefore |x^*-x_k| \le \frac{1}{2}(b_k-a_k)=b_{k+1}-a_{k+1}$$

从而误差估计式 $\quad |x^*-x_k| \le \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$

$$|x^*-x_k| \le |b_{k+1}-a_{k+1}| = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

于是用二分法解f(x)=0，使误差不超过 ε 的终止准则：

（1） 先验估计 $|x^*-x_k| \le \dfrac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon \ \Rightarrow k > \dfrac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln 2}-1$

（2） 后验估计 $b_{k+1}-a_{k+1} < \varepsilon$

Algorithm

Step1. 输入a, b, ε,δ

Step2. X=(a+b)/2

Step3. if (|f(x)|<δ 或b-x<ε) 输出x stop

else if (f(a)f(x)<0) b=x

else a=x

Step4. Goto Step2

例题

例 5.2 求方程 $f(x)=x^3-x-1$ 在区间 $(1,1.5)$ 内的根,要求精确到小数点后的第二位,($\varepsilon=10^{-2}/2$).用四位小数计算.

解: ① $a=1, b=1.5$ 且 $f(a)<0$, $f(b)>0$

精度要求为 $\varepsilon=10^{-2}/2=0.005$　由误差估计式 $|x^*-x_k|\le(b-a)/2^{k+1}$

得 $0.5/2^{k+1}<0.005$　从而　$2^{k+1}>100$　取 $k=6$　即可

② $x_0=\frac{1}{2}(a+b)=1.25$　　$f(x_0)<0$

$\because f(x_0)f(b)<0$　$\therefore$ 令 $a_1=x_0=1.25$, $b_1=b=1.5$

新的有根区间 (a_1,b_1) 取 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)=1.375$, $f(x_1)>0$　$f(a_1)f(x_1)<0$

$\therefore a_2=a_1=1.25$, $b_2=x_1=1.375$　从而得有根区间 (a_2,b_2) … …

二分法分析

①简单;收敛性有保证

② 对 $f(x)$ 要求不高(只要连续即可) .

①无法求复根及偶重根

② 收敛慢

HW: p.152 #1
$f(x)=x^3-x^2-1$, $x\in[1,2]$

注:用二分法求根,最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。或用搜索程序,将 $[a,b]$ 分为若干小区间,对每一个满足条件 $f(a_k)\cdot f(b_k)<0$ 的区间调用二分法程序,可求 $[a,b]$ 内的多个根 。

5.2 迭代法

思想：先给出f(x)=0的一个初始近似根x_0，再反复使用某一公式校正这个初始根，使之逐步精确化，直到满足精度要求为止。

$$\begin{cases} x_0 & \text{迭代初值} \\ x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,2,\ldots & \text{迭代格式} \end{cases}$$

g(x)称为迭代函数.

如何构造迭代格式？——不动点迭代法/* Fixed-Point Iteration */

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$$

$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ $g(x)$ 的不动点

思路

从 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, …, $x_{k+1}=g(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 g 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k)$ $x^*=g(x^*)$，即x^*是 g 的不动点，也就是f 的根。

HUST