计算方法/数值分析复习

Chapter 1 误差的基本理论

HUST

- 近似计算的基本方法
  - 离散化
  - 递推化
  - 近似替代
- 误差的来源
  - 模型误差
  - 观测误差
  - 截断误差
  - 舍入误差

能举例说明两者的区别

误差的概念

HUST

- 误差 $e = x^* - x$
- 绝对误差 $e(x) = \left| x - x^* \right| \le h = \frac{1}{2} \times 10^{-n}$
- 绝对误差限
- 相对误差 $e_r = \dfrac{x^* - x}{x^*}$
- 相对误差限 $\left| e_r \right| = \left| \dfrac{x^* - x}{x^*} \right| \le \dfrac{h}{\left| x^* \right|} = e_r$
- 有效数字

3

绝对误差、相对误差与有效数字的关系

HUST

$$x^* = 0.a_1 a_2 \cdots a_l \cdots a_n \times 10^m, a_1 \ne 0$$

- 绝对误差与有效数字的关系

$$\left| x^* - x \right| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-l} = h \iff x^* \text{有} l \text{位有效数字}$$

- 相对误差与有效数字的关系

定理1 x^*有n位有效数字 $\Rightarrow e_r(x^*) = \dfrac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$

定理2 $e_r(x^*) = \dfrac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-n+1} \Rightarrow x^*$有$n$位有效数字

- 有效数字的判定方法
  - 定义法
  - 四舍五入法
  - 定理2

4

应用举例

例1 求π有5位有效数字的近似值的绝对、相对误差限。

解：求绝对误差限

π=3. xxxxxx …，　且x^*有5位有效数字，则

$$\left|x^* - p\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4} = h$$

求相对误差限

（1）根据定理1（ a_1=3，n=5 ）

$$e_r(x^*) = \frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1} = \frac{1}{6}\times 10^{-4}$$

（2）根据绝对误差限与相对误差限的关系

$$e_r = \frac{h}{|p|} = \frac{1}{2p}\times 10^{-4} \approx 0.1592\times 10^{-4}$$

5

应用举例

例2 设x =3.78696，问其下列近似值各有几位有效数字？

x_1^*=3.7870 ，　x_2^*=3.7869.

解：对x_1^*可用三种方法

（1）x_1^*符合四舍五入法则，故其有5位有效数字；

（2）根据有效数字的定义，先求绝对误差限

$$\left|x_1^* - x\right| = 0.00004 \le \tfrac{1}{2}\times 10^{-4} \Rightarrow x_1^*\text{有5位有效数字}$$

（3）根据定理2，先求相对误差限

$$\left|\frac{x_1^* - x}{x}\right| = \frac{0.00004}{3.78695} = 0.1056\times 10^{-4} \le \frac{1}{2(3+1)}\times 10^{-5+1}$$

$\Rightarrow x_1^*$有5位有效数字

x_2^*不符合四舍五入法则

6

算术运算的误差限估计及应用

HUST

$\eta(x^* + y^*) = \eta(x^*) + \eta(y^*)$

$\eta(x^* - y^*) = \eta(x^*) + \eta(y^*)$

$\eta(x^* y^*) \approx |x^*|\,\eta(y^*) + |y^*|\,\eta(x^*)$

$$\eta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \frac{|x^*|\,\eta(y^*) + |y^*|\,\eta(x^*)}{|y^*|^2},\quad 其中\ y \neq 0,\ y^* \neq 0$$

7

Chapter 2 插值方法与多项式拟合

HUST

Problem I：已知y=f(x)的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

且x_i(i=0,1,…,n)两两互异，$x_i \in [a,b]$，求次数不超过n的多项式$P_n(x)$，使得

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\quad P_n(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

- 插值多项式的存在唯一性： $P_n(x) = N_n(x)$
- Lagrange插值(利用基函数法推导)

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} w_n(x),\ x \in [a,b]$$

8

Lagrange插值余项公式的应用

HUST

- 若f(x)为次数不超过n的多项式，则其n次插值多项式

$$P_n(x)= f(x)$$

证：∵ $f^{(n+1)}(\xi)=0$，

$$\therefore R_n(x)=f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}w_n(x)=0$$

∴ $P_n(x)= f(x)$

- Lagrange插值基函数的性质

$$l_0(x)+l_1(x)+\mathbf{L}+l_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)\equiv 1 \qquad l_i(x_j)=d_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j;\\ 0 & \text{if } i\neq j.\end{cases}$$

- 估计插值计算结果的截断误差

9

Newton插值公式及余项

HUST

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

- 差商的定义，性质与差商表的计算

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$$

10

Hermite插值

- 规则Hermite插值多项式（记住两点三次公式$H_3(x)$）

Problem:已知函数$y=f(x)$在插值节点$a\le x_0<x_1<\dots<x_n\le b$上的函数值$f(x_i)$与导数值$f'(x_i)$,$i=0,1,2,\dots n$.求多项式$H(x)$，使：
$H(x_i)=f(x_i)$，$H'(x_i)=f'(x_i)$ $i=0,1,2,\dots n$

$$H_{2n+1}(x)=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\dots+\alpha_n(x)f(x_n)$$
$$+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)+\dots+\beta_n(x)f'(x_n)$$

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w_n^{\;2}(x)$$

- 不规则Hermite插值，余项估计与证明
  - § 基函数法
  - § 基于承袭性的方法

11

分段线性插值

Problem 对$y=f(x)$，$x\in[a,b]$，其定义区间有分划
$\Phi:a=x_0<x_1<x_2<\dots\dots x_n=b$，且已知$y_i=f(x_i)$ $i=0,1,\dots,n$，
求具有分划Φ的分段一次式$S_1(x)$,使: $S_1(x_i)=y_i$,$i=0,1,2,\dots,n$.

$$f(x)\approx S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\quad \text{for}\ \ x\in[x_i,x_{i+1}]$$

定理设$f(x)\in c^2[a,b]$,$a<x_0<x_1<\dots<x_n=b$,且$f(x_i)$，$i=0,1,\dots,n$,若$S_1(x)$为问题的解,则当$x\in[a,b]$时

$$|f(x)-S_1(x)|\le Mh^2/8$$

其中$M=\max|f''(x)|$，$x\in[a,b]$，$h=\max\{h_i,\ i=0,\dots n-1\}$

因而$S_1(x)$在$[a,b]$上一直收敛到$f(x)$。

直线拟合的最小二乘法

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \mathbf{L}, (x_n, y_n)$$

$$j(x) = a + bx$$

$$Q(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(y_k - j(x_k))^2 = \sum_{k=1}^{n}(y_k - a - bx_k)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

正规方程组
$$\begin{cases} na + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

13

Chapter 3 数值积分 $I = \int_a^b f(x)dx$

- 机械求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n)$
- 代数精度的概念及判别方法（m次） 当$f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^m$时，求积公式精确成立，而$f(x)= x^{m+1}$时公式近似成立。
- 求积公式的构造方法 $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$
  - 利用代数精度解方程组 $\Leftrightarrow A_k = \int_a^b l_k(x)dx$
  - 插值型求积公式 $\Leftrightarrow$至少具有n次代数精度
- **Newton-Cotes求积公式——**等距节点的插值型求积公式

$$I_n = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$$ n≤7时，公式稳定性好.

I_n至少有n次代数精度，当n为偶数时，它有n+1次代数精度.

14

基本数值积分公式

- 梯形公式

$$I_1 = T = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$

$$R_T = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 = O(b-a)^3 \quad \xi \in (a,b)$$

- **Simpson**公式

$$I_2 = S = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

$$R_S = -\frac{(b-a)}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\xi) = O(b-a)^5$$

- 复化求积公式

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$I-T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)] = O(h^2)$$

$$I-T_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(x) = O(h^2), x \in (a,b)$$

基本数值积分算法

- 变步长梯形算法

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\left[T_n + h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\right]$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

$$|T_{2n} - T_n| < \varepsilon \Rightarrow |I - T_{2n}| < \varepsilon$$

- **Romberg**外推方法

$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \qquad C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \qquad R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

$$|R_{2n}-R_n| < \varepsilon$$

HUST

例： 下述公式是否为插值型，为什么，其代数精度是多少？

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$$

解： $x_0=1, x_1=2$, $[a, b]=[0, 3]$， $A_0 = A_1 = \frac{3}{2}$

判定方法一：

$$\int_0^3 l_0(x)dx = \int_0^3 \frac{x-2}{1-2}dx = \frac{3}{2} = A_0$$

$$\int_0^3 l_1(x)dx = \int_0^3 \frac{x-1}{2-1}dx = \frac{3}{2} = A_1$$

由插值型公式的定义，可判定其为插值型。

判定方法二：代数精度至少为**n=1**

当$f(x)=1$时， $\int_0^3 1dx = 3 \quad \frac{3}{2}[1+1]=3$

当$f(x)=x$时， $\int_0^3 xdx = \frac{9}{2} \quad \frac{3}{2}[1+2]=\frac{9}{2}$

当$f(x)=x^2$时， $\int_0^3 x^2dx = 9 \quad \frac{3}{2}[1^2+2^2]=\frac{15}{2}$

该公式为插值型，其代数精度1次

17

Chapter 4 常微分方程数值解法

HUST

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a b

x_0 x_1 x_2 ... x_{n-1} x_n

Ø求$y=y(x)\xrightarrow{\text{离散化}}$求$y(x_n)\xrightarrow{\text{递推公式}}$求$y_n$

$x_n=x_0+nh$

- 如何建立递推公式
  - 差商法/ Taylor公式法
  - 数值积分法
  - Runge-Kutta法
- **p阶精度：** 局部截断误差为$O(h^{p+1})$

局部截断误差的定义与计算方法，如二阶公式、隐式公式。

18

基本公式

- **Euler公式** $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$
- 隐式**Euler**公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$
- 梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$
- 改进**Euler**公式 $\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_2 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1) \end{cases}$
- 经典四阶**Runge-Kutta**公式

19

收敛性与稳定性

- 单步法的收敛性及其判定定理：整体截断误差

  $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$ ($x_n=x_0+nh$为固定值)
- 判定：显式单步法$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)$ 有**p**阶精度,且

  （1）$y_0=y(x_0)$； （2）$\varphi(x,y,h)$为关于**y**满足**Li-**条件，则其整体截断误差为：$y(x_n)-y_n=O(h^p)$，显然是收敛的.
- 稳定性：考虑模型方程$y'=\lambda y$， ($\lambda<0$)

  $|d_{n+1}|\le|d_n|$ 扰动量不增长，确定**h**的取值条件
- 边值问题的差分方法

20

Chapter 5 方程求根

$f(x)=0$ [a，b]为有根区间

- 二分法 $|x^*-x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}$
- 不动点迭代法 $f(x)=0 \xLeftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

- 停机准则 实用方法：$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$
- 大范围收敛性及局部收敛性的概念及其判定

设g(x)在x=g(x) 的根x^*邻近有连续的一阶导数，且 $|g'(x^*)|<1$，则迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$具有局部收敛性.

- 收敛速度及其判定，Aitken 加速法

21

Newton迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- 一般是平方收敛的
- 可应用于求根 $\sqrt[n]{c}=?$

解$x^n-c=0$，$f(x)=x^n-c$，

即 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^n-c}{nx_k}$

22

Chapter 6 线性方程组的数值解法(了解)

- 向量与矩阵的范数，条件数与方程组的性态
- 迭代法及其收敛性判定，误差的先验与后验估计
- **Jacobi**迭代

答疑及考试相关问题

（考试时请备简单计算器：$\ln x, e^x$ ）

考试题：7大题

（分析简答、计算、证明）

时间：**01**.04 下午

地点：**C12**

S101-S103

S112

Thanks.

Good Luck!