数值积分和数值微分

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

由微积分学基本定理,当f(x)在[a,b]上连续时,存在原函数F(x),

由Newton-Leibnits公式 $I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

有时,用上面的方法计算定积分有困难.

1.不易求f(x)的原函数F(x) e.g. $\frac{\sin x}{x}, \frac{1}{\ln x}, e^{-x^2}$

2.f(x)的原函数表达式很复杂**(**计算量大**)** e.g. $\int_a^b \frac{1}{1+x^4}dx$

3.f(x)用列表给出**(**观测所得数据表**)**

所以,讨论数值积分,即用数值方法计算定积分的近似值.

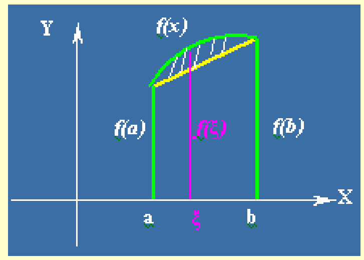
机械求积

对于 $I=\int_a^b f(x)dx$,若f(x)>0时,则I对应于曲边梯形的面积.

当f(x)在[a,b]上连续,由积分中值定理.

$\exists\ \xi\in[a,b]\quad \int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$

I是以b-a为底,高为f(ξ)的矩形的面积.
f(ξ)称为[a,b]上的平均高度.



1. 梯形公式 取 $f(\xi)\approx\frac{f(a)+f(b)}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{(b-a)}{2}f(a)+\frac{(b-a)}{2}f(b)$$

2. 中矩形公式

取 $f(\xi)\approx f(\frac{a+b}{2})\qquad \int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

3. Simpson公式

$$取\quad f(\xi)\approx\frac{1}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

$$\therefore\ \int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}f(a)+\frac{4(b-a)}{6}f(\frac{a+b}{2})+\frac{b-a}{6}f(b)$$

机械求积公式:

在[a,b]中有n+1个互异的节点$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) \qquad (3.1)$$

称上式为机械求积公式,其中$x_0 \sim x_n$为求积节点,

$A_i(i=0,1,\dots,n)$为求积系数(权).

注:1. 求积系数A_k仅与节点x_i的选取有关,而不依赖于被积函数f(x)的具体形式.

2.通过机械求积,把求积分值转化为求函数值,避免了Newton-Leibnits求原函数的困难.

3. 机械求积是求定积分的近似方法.

$R_n(f) = I - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 求积公式(3.1)的截断误差或余项.

代数精度

对于机械求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

$$R_n(f) = I - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

定义 若上述公式对所有次数不超过m的多项式$P_m(x)$都精确成立,

即$R_n(P_m)=0$,而对某一个m+1次多项式$P_{m+1}(x)$近似成立,

即$R_n(P_{m+1}) \neq 0$.则称机械求积公式具有**m次代数精度**.

梯形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$ 的代数精度为1.

判断代数精度的方法

当$f(x)=1,x,x^2,\ldots,x^m$时,求积公式精确成立,
而$f(x)= x^{m+1}$时公式近似成立, ó 求积公式的代数精度为m次.

证明: 必要性显然.下证充分性

∵对任意次数低/等于m的多项式$P_m(x)=a_0+a_1x+ a_2x^2+\ldots+ a_mx^m$,

由于求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 对于 $f(x)=1,x,x^2,\ldots,x^m$时精确成立

$$\therefore \int_a^b 1dx = \sum_{k\neq 0}^{n} A_k, \quad \int_a^b xdx = \sum_{k\neq 0}^{n} A_k x_k, \quad \ldots, \int_a^b x^m dx = \sum_{k\neq 0}^{n} A_k x_k^m$$

$$\int_a^b P_m(x)dx = a_0\int_a^b dx + a_1\int_a^b xdx + \ldots + a_m\int_a^b x^m dx = a_0\sum_{k=0}^{n} A_k + a_1\sum_{k=0}^{n} A_k x_k + \ldots + a_m\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k (a_0 + a_1 x_k + \ldots + a_m x_k^m) = \sum_{k=0}^{n} A_k P_m(x_k)$$

∴求积公式对$P_m(x)$精确成立. 但对m+1次多项式, 公式近似成立
($R\neq 0$), 由定义知该公式的代数精度是m次。

例 验证梯形公式的代数精度为1.

解: 梯形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

令$f(x)=1$ $\quad$ 左$=\int_a^b 1dx = b-a$, 右$=\frac{b-a}{2}[1+1]=b-a$, 左=右

公式对 $f(x)=1$精确成立.

令$f(x)=x$ $\quad$ $\int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2}$, 右$=\frac{b-a}{2}[a+b]=\frac{b^2-a^2}{2}$, 左=右

公式对 $f(x)=x$精确成立

令$f(x)=x^2$ $\quad$ 左$=\int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3}$, 右$=\frac{b-a}{2}[a^2+b^2]\neq$左

公式对 $f(x)=x^2$不再精确成立

∴梯形公式代数精度为1.

例 Simpson公式的代数精度为3

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

Review

机械求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

$$R_n(f) = I - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

定义 若上述公式对所有次数不超过m的多项式$P_m(x)$都精确成立，即$R_n(P_m)=0$,而对某一个m+1次多项式$P_{m+1}(x)$近似成立，即$R_n(P_{m+1})\neq 0$.则称机械求积公式具有**m次代数精度**.

定理 对上述机械求积公式，代数精度为m次的充分必要条件是：当$f(x)=1,x,x^2,\ldots,x^m$时,求积公式精确成立，而$f(x)= x^{m+1}$时公式近似成立.

求积公式的构造方法一

例 设有求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$
试确定系数 A_0,A_1,A_2,使这个公式具有最高的代数精度.

分析：要确定公式中3个待定常数A_0,A_1,A_2，可令公式对$1,x,x^2$都精确成立.

解：令$f(x)= 1, x, x^2$公式都精确成立,则

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

解得$A_0=1/3,A_1=4/3,A_2=1/3$

∴该求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)]$$

易验证:$f(x)= x^3$时，求积公式也精确成立

而$f(x)= x^4$时 $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{3} = \frac{1}{3}[(-1)^4 + 4\times 0 + 1^4]$

∴该求积公式具有3次代数精度,它是[-1,1]上的Simpson公式.

一般,对于n+1给节点上的机械求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

若使其代数精度至少为n,则可确定A_k,构造出求积公式.

只需令上式对$f(x)=1, x, x^2,\dots, x^n$都精确成立,则

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_n = b - a \\ A_0x_0 + A_1x_1 + \dots + A_nx_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2} \\ \quad\dots \qquad\qquad \dots \\ A_0x_0^n + A_1x_1^n + \dots + A_nx_n^n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{cases} \tag{3.4}$$

上面是关于$A_0, A_1, A_2,\dots,A_n$的线性方程组,

其系数行列式为范德蒙行列式,其值非零,

可求得唯一解.

求积公式的构造方法二——插值法

Problem 已知给定的一组节点$a\le x_0<x_1<x_2<\dots<x_n\le b$
及函数值 $f(x_0),f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_n)$

构造:求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

思想: 构造f(x)在n+1个插值节点上的Lagrange插值多项式

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$,其中Lagrange插值基函数 $l_k(x) = \prod_{j=0, j\ne k}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_k - x_j}$

$$f(x) \approx P_n(x) \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

$$\because \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b [\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)]dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b l_k(x)dx\right) f(x_k) \qquad (*)$$

(*)式为所求的求积公式.(称为插值型求积公式)

求积系数 $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$

考虑: 插值型求积公式(*)的代数精度是多少?

1. ∵任意次数≤n的多项式f(x),其n次Lagrange插值多项式

$$P_n(x)= f(x)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_n(x)dx$$

∴插值型求积公式对f(x)精确成立，其至少具有n次代数精度.

2. 反之,假设 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 至少具有n次代数精度.

∴求积公式对任意次数≤n的多项式精确成立

又在$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$上的Lagrange插值基函数$l_k(x)$为n次多项式.

$$\therefore \int_a^b l_k(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j l_k(x_j) \quad 而 \quad l_k(x_j) = \delta_{kj}\begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

$$\therefore \int_a^b l_k(x)dx = A_k$$

∴该求积公式就是(*),为插值型的.

综合1,2 有:

Th3.2 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

至少具有n次代数精度的充要条件是：它是插值型的.

小结:已知f(x)的函数表 x_i互异,$x_i \in [a,b]$

x	x_0	x_1	...	x_n
y	$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

构造其求积公式，有两种方法:

1. 解线性方程组, 求A_k
2. 利用插值型公式

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx$$

Newton-Cotes求积公式

下面介绍一种特殊的插值型求积公式:等距节点的求积公式.

对于[a,b]中的n+1个互异节点$x_0, x_1, x_2,\dots, x_n$.

可构造插值型求积公式: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$　　n次代数精度.

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}dx$$

现在取$x_0, x_1, x_2,\dots, x_n$ 为[a,b]的n等分点.

即 $x_k = a+kh\ (k=0,1,\dots,n)$, $h=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$ ，则

$$A_k = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}dx \overset{x=a+th}{=\!=\!=\!=} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} \frac{(t-j)}{(k-j)}hdt$$

$$= \int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)}{k(k-1)\cdots(k-k+1)(k-k-1)\cdots(k-n)}hdt$$

Newton-Cotes求积公式

$$A_k = \frac{(-1)^{n-k}h}{k!(n-k)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)dt$$

$$= (b-a)\frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(t-j)dt @ (b-a)C_k$$

其中 $C_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(t-j)dt$　称为Cotes系数 .

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n}(b-a)C_k f(x_k) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$$

称 $I_n = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$ 为n阶Newton–Cotes公式.

注: Newton–Cotes公式为等距节点、插值型求积公式。

Cotes系数

$$C_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)dt$$

注: Cotes系数不仅与函数f(x)无关，而且与积分区间[a,b]无关。

例:n=1时， $C_0^{(1)} = \frac{(-1)^1}{0!\ 1!}\int_0^1 (t-1)dt = \frac{1}{2}$ $C_1^{(1)} = \frac{(-1)^0}{1!\ 0!}\int_0^1 (t-0)dt = \frac{1}{2}$

例:n=3时，

$$C_0^{(3)} = \frac{(-1)^3}{0!\ 3!\times 3}\int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt = \frac{1}{8} \qquad C_1^{(3)} = \frac{(-1)^3}{1!\ 2!\times 3}\int_0^3 (t-0)(t-2)(t-3)dt = \frac{3}{8}$$

$$C_2^{(3)} = \frac{(-1)^3}{2!\ 1!\times 3}\int_0^3 (t-0)(t-1)(t-3)dt = \frac{3}{8} \qquad C_3^{(3)} = \frac{(-1)^3}{3!\ 0!\times 3}\int_0^3 (t-0)(t-1)(t-2)dt = \frac{1}{8}$$

当n=0,1.2,...8时，Cotes系数见书本上第65页

Chapter 3
Numerical Integration
and Differentiation

Cotes系数

n	$C_0(n)$	$C_1(n)$	$C_2(n)$	$C_3(n)$	$C_4(n)$	$C_5(n)$	$C_6(n)$	$C_7(n)$	$C_8(n)$
1	1/2	1/2							
2	1/6	2/3	1/6						
3	1/8	3/8	3/8	1/8					
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90				
5	19/288	25/96	25/144	25/144	25/96	19/288			
6	41/840	9/35	9/280	34/105	9/280	9/35	41/840		
7	751/17280	3577/17280	1323/17280	2989/17280	2989/17280	1323/17280	3577/17280	751/17280	
8	989/28350	5888/28350	−928/28350	10496/28350	−4540/28350	10496/28350	−928/28350	5888/28350	989/28350

Cotes系数的性质

性质**1**. Cotes系数的和等于1，即 $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1$

证明**:** 设f(x)=1. 则使用**n**次多项式插值时：f(x)=P_n(x)=1.

$$\therefore \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1dx = b-a$$

$$而\int_a^b p_n(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1$$

性质**2**. Cotes系数具有对称性，即$C_k(n)=C_{n-k}(n)$,k=0,1,...,n.

性质**3**. 对n≤7时**,** $C_k(n)$都是正数**,** n≥8时不成立.

低阶Newton–Cotes公式

Chapter 3
Numerical Integration and Differentiation

n=1时**,** $I_1 = (b-a)[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)] = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$

此即梯形公式**,** 即 $T = I_1 = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$

n=2时**,**

$$I_2 = (b-a)[\frac{1}{6}f(a) + \frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)] = \frac{1}{6}(b-a)[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

此即Simpson公式 $S = I_2 = \frac{1}{6}(b-a)[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

n=4时**,** 4阶Newton–Cotes公式称为Cotes公式.

$$C = I_4 = \frac{1}{90}(b-a)[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

注**:** 梯形公式由线性插值推导而得.

Simpson公式由抛物插值推导而得.

Cotes公式由4次插值推导而得.

HUST

低阶Newton–Cotes公式的截断误差或余项

$$\because \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

$$\therefore R = I - I_n = \int_a^b [f(x) - P_n(x)]dx$$ 为Newton-Cotes公式的余项

又$f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad \xi_x \in [a,b]$

$$\therefore R = I - I_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)dx$$

其中 $x_k = x_0 + kh \quad (k=0,1,\ldots,n) \quad x_0 = a$

对以上积分进行变量代换$x=x_0+th$，并使用积分定理，有

低阶Newton–Cotes公式的截断误差或余项

$$\therefore R = I - I_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)dx$$

其中 $x_k = x_0 + kh \quad (k=0,1,\ldots,n) \quad x_0 = a$

Th: 若f(x)在[a,b]有连续的n+2阶导数,则Newton-Cotes公式余项为

$$R = \begin{cases} \dfrac{h^{n+2} \cdot f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^n t(t-1)\cdots(t-n)dt & n \text{ 是奇} \\ \dfrac{h^{n+3} \cdot f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\displaystyle\int_0^n (t-\frac{n}{2})t(t-1)\cdots(t-n)dt & n \text{ 是偶} \end{cases} \quad \text{其中 } h = \frac{b-a}{n} \quad \xi \in [a,b]$$

由定理易知:

n阶Newton-Cotes公式至少有n次代数精度(因该公式为插值型);

而当n为偶数时,它有n+1次代数精度.

积分中值定理：若f(x)在[a，b]上连续，g(x)是在[a，b]上保号的可积函数，则存在ξ∈(a,b)使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)\int_a^b g(x)dx$

梯形公式的余项(n=1) $R_T = I - T = \int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b)dx$

$$\because \begin{cases} 若 f^{(2)}(x) \in C[a,b] \\ (x-a)(x-b) \le 0 \quad\quad x \in [a,b] \end{cases}$$

$\exists\xi \in (a,b)$ $\quad R_T = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

$$R_T = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 = O(b-a)^3 \quad \xi \in (a,b)$$

注：此结论可由余项定理直接得到

Simpson公式的余项

直接由定理得Simpson公式(n=2)的余项

$$R_S = I - S = \frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^2 (t-1)t(t-1)(t-2)dt = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

$$R_S = -\frac{(b-a)}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi) = O(b-a)^5$$

分析：Simpson公式是由a，b及其中点c进行抛物插值得到的，其代数精度是3，为证明以上余项公式，构造f(x)的3次插值多项式$H_3(x)$，即考虑如下插值问题：

已知f(x)的函数表 $c = \frac{1}{2}(a+b)$

x	a	c	b ...
y	f(a)	f(c)	f(b)...
f′(x)		f′(c)	

求 f(x)的Hermite插值多项式$H_3(x)$,使

$H_3(a)=f(a)$, $H_3(b)=f(b)$, $H_3(c)=f(c)$, $H'_3(c)=f'(c)$.

Simpson公式的余项的证明

证明：$f(x)-H_3(x)$有根 a、b、c（二重），易知其插值余项

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(x-a)(x-b)(x-c)^2 \quad \eta\text{依赖于}x,\text{且}\ \eta\in[a,b]$$

又Simpson公式代数精度为3.

$$\therefore \int_a^b H_3(x)dx=\frac{b-a}{6}[H_3(a)+4H_3(c)+H_3(b)]=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)]=S$$

$$R_S=I-S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H_3(x)dx=\int_a^b[f(x)-H_3(x)]dx$$

$$\therefore R_S=\int_a^b\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}(x-a)(x-b)(x-c)^2dx \quad \text{根据积分中值定理}$$

$$R_S=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_a^b(x-a)(x-b)(x-c)^2dx=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\xi),\quad \xi\in(a,b).$$

Cotes公式的余项(n=4，代数精度为5)

$$R_C=I-C=-\frac{8}{945}h^7f^{(6)}(\xi)=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi)=O(b-a)^7,\quad \xi\in[a,b]$$

例.分别用梯形公式,Simpson公式,Cotes公式和n=8的Newton-Cotes公式计算 $\int_{0.5}^1\sqrt{x}dx \quad (=0.430964406)$

解:(1)利用梯形公式 $\int_{0.5}^1\sqrt{x}dx\approx\frac{1-0.5}{2}(\sqrt{0.5}+\sqrt{1})\approx 0.4267767$

(2)利用Simpson公式 $\int_{0.5}^1\sqrt{x}dx\approx\frac{1-0.5}{6}(\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+\sqrt{1})\approx 0.4309403$

(3) 利用Cotes公式

$$\int_{0.5}^1\sqrt{x}dx\approx\frac{1-0.5}{90}\left(7\sqrt{0.5}+32\sqrt{\frac{5}{8}}+12\sqrt{\frac{6}{8}}+32\sqrt{\frac{7}{8}}+7\sqrt{1}\right)\approx 0.43096407$$

(4)利用n=8的Newton-Cotes公式计算

$$\int_{0.5}^1\sqrt{x}dx\approx\frac{1}{2\times 28350}\left[989(\sqrt{0.5}+\sqrt{1})+5888\left(\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{15}{16}}\right)\right.$$
$$\left.-928\left(\sqrt{\frac{10}{16}}+\sqrt{\frac{14}{16}}\right)+10496\left(\sqrt{\frac{11}{16}}+\sqrt{\frac{13}{16}}\right)-4540\sqrt{\frac{12}{16}}\right]$$
$$\approx 0.430964406$$

n较大时,结果较精确