第二章 插值方法 /* Interpolation */

引言

表示两个变量x, y内在关系一般由函数式y=f(x)表达。

但在实际问题中，有两种情况:

1. 由实验观测而得到的一组离散数据(函数表)，虽然这种函数关系式y=f(x)存在且连续，但未知。

2. 函数解析表达式已知，但计算复杂，不便使用。通常也造函数表。如，y=sin(x), y=lg(x)。

有时要求不在表上的函数值，怎么办?

HUST

引言

办法：根据所给的y=f(x)的函数表，

构造一个简单的连续函数g(x)近似代替f(x)。

Def: g(x)为逼近函数，f(x)为被逼近函数。

近似代替即逼近的方法有很多种，通常是：插值方法。

已知： f(x)的的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

求g(x)使 $g(x_i)=y_i$ ，i=0,1,2,3 …n.

Def: g(x)为f(x)的插值函数，f(x)为被插值函数。

引言

构造g(x)的方法还有：

一致逼近、最佳均方逼近和数据拟合。

简单函数g(x)指可用四则运算计算的函数：

如：有理函数(分式函数)、多项式或分段多项式。

当g(x)为多项式时，该插值方法称为代数多项式插值，称插值函数g(x)为插值多项式。

本章主要介绍多项式插值的理论与方法。

它在实践中应用很广。

插值区间

Problem I：已知y=f(x)的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

且x_i(i=0,1,…,n)两两互异，

$x_i \in [a,b]$，

求次数不超过n的多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (2.1)$$

使得 $P_n(x_i)=y_i \quad i=0,1,\cdots,n \quad (2.2)$

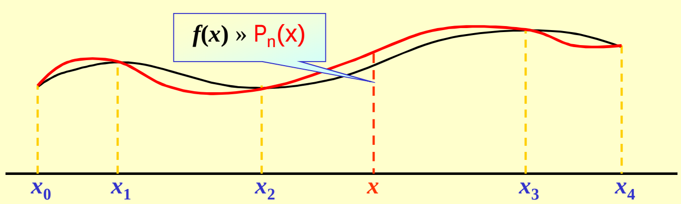
插值条件

Def: n+1个互异点$x_0,x_1,\ldots,x_n$称为**插值节点**，

其所在区间[a,b]为**插值区间**，(2.2)式为**插值条件**。

多项式插值问题的几何意义

多项式$P_n(x)$，其几何曲线过给定的y=f(x)的n+1个点(x_i，y_i)，i=0,1,2,...,n.



插值多项式的唯一性

对于Prbloem I中的$P_n(x)$是否存在？解是否唯一？如何求？

显然，关键是求$P_n(x)$ 的系数$a_0,a_1,\ldots,a_n$.

定理2.1 在n+1个互异的插值结点$x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上满足插值条件(2.2)的次数不超过n的代数多项式$P_n(x)$存在且唯一。

分析：为求 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (2.1)$

主要考虑插值条件

$$P_n(x_i)=y_i \qquad i=0,1,\cdots,n \qquad (2.2)$$

定理2.1的证明

证明：由插值条件，有，

$$\left.\begin{aligned}
P_n(x_0)&=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0\\
P_n(x_1)&=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1\\
&\vdots\\
P_n(x_n)&=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n
\end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

其系数矩阵的行列式为

关于 $a_0,a_1,\ldots,a_n$的
非齐次线性方程组

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & & \cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)\neq 0$$

$$(\because i\neq j, x_i\neq x_j)$$

$\therefore$ 方程组(2.3)的解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$存在且唯一，

$\therefore$ 插值多项式 存在且唯一。

例1 给定f(x)的函数表，求f(x)的次数不超过3的插值多项式。

x	-1	1	2	5
y	-7	7	4	35

解：设$P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \\ 35 \end{pmatrix}$$

解方程组得 $a_0=10, a_1=5, a_2=-10, a_3=2$，

即$P_3(x)=10+5x-10x^2+2x^3$

n=20,在 10^8次/秒的计算机上计算需几十万年！

2.2 Lagrange 插值——线性插值

Chapter 2
插值方法

Problem 2.1 已知函数y=f(x)的函数表求次数不超过1的多项式$P_1(x)=a_0+a_1x$，满足插值条件 $P_1(x_0)=y_0$, $P_1(x_1)=y_1$.

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

分析：过点$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$作直线$y=P_1(x)$ —线性插值。

解：由点斜式方程，

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$y=P_1(x)=y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_0$$

$$P_1(x)=\underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{l_1(x)}y_1=\sum_{i=0}^{1} l_i(x)y_i$$

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

称为线性插值基函数，而$P_1(x)$是它们的线性组合。

HUST

线性插值基函数的性质

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$$

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\quad\Rightarrow l_0(x)+l_1(x)=1$$

$$\begin{array}{l} l_0(x_0)=1,\ l_0(x_1)=0 \\ l_1(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1 \end{array}\quad \Rightarrow l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\quad i,j=0,1$$

δ_{ij} /* Kronecker Delta */

Chapter 2
插值方法

线性插值

例2.2 已知lg2.71=0.4330,lg2.72=0.4364.求y=lg2.718.

分析: 对y=lgx ,给出了两点(2.71,0.4330)=(x_0,y_0),

(2.72,0.4364)=(x_1,y_1)

为求lg2.718构造简单的插值多项式作为lgx的近似。

解: 已知(x_0,y_0)= (2.71,0.4330),(x_1,y_1)=(2.72,0.4364)
利用线性插值，则

$$P_1(x)=\frac{x-2.72}{2.71-2.72}*0.4330+\frac{x-2.71}{2.72-2.71}*0.4364$$

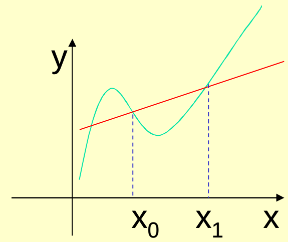
$$=0.34x-0.4884$$

$$\therefore \lg x\approx P_1(x)\ \Rightarrow\ \lg 2.718\approx P_1(2.718)=0.43572$$

2.2.2 抛物插值

线性插值:

用直线$y=P_1(x)$近似曲线$y=f(x)$



当插值区间较大或曲线在$[x_0,x_1]$凸凹变化大时，线性插值的误差很大。

为了减小误差，用简单的曲线(抛物线)去近似代替复杂曲线$y=f(x)$。二次多项式函数的曲线为抛物线，所以构造插值函数$P_2(x)$，即$n=2$。

抛物插值

Problem2.2 已知$y=f(x)$的函数表，x_0, x_1, x_2为互异节点，求一个次数不超过2的多项式

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$：$P_2(x_0)=y_0$, $P_2(x_1)=y_1$, $P_2(x_2)=y_2$

几何意义: $P_2(x)$为过三点(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)的**抛物线**

方法: 基函数法，构造基函数$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$（三个二次式）

使$P_2(x)= y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$满足插值条件。

⇧

6 4 4 4 4 44 7 4 4 4 4 4 48

$$l_0(x_0)=1,\ l_0(x_1)=0,\ l_0(x_2)=0$$

$$l_1(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1,\ l_1(x_2)=0$$

$$l_2(x_0)=0,\ l_2(x_1)=0,\ l_2(x_2)=1$$

$$l_i(x_j)=d_{ij} \quad i,j=0,1,2$$

抛物插值

求二次多项式$l_0(x)$: $l_0(x_0)=1$ $l_0(x_1)=0$ $l_0(x_2)=0$

$<=>$ $l_0(x) = C(x-x_1)(x-x_2)$ 只须求C=?

由$l_0(x_0)=1$ 得 $C(x_0-x_1)(x_0-x_2)=1$

$\therefore$ $C=1/(x_0-x_1)(x_0-x_2)$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同法求得: $l_1(x)$, $l_2(x)$, 即抛物插值的插值基函数如下:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\ l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\ l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

抛物插值问题Problem 2.2的解:

$$P_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2.2.3 Lagrange插值公式

Problem2.3 已知y=f(x)在两两互异节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$的函数值$y_0,y_1,\ldots,y_n$, 求*n*次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ 满足插值条件$P_n(x_j)=y_j$. $j=0,1,2,3,\ldots,n$

基函数法: 求n+1个n次多项式 $l_0(x),l_1(x),\ldots,l_n(x)$, 使

$$P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\ldots+y_nl_n(x).$$

$P_n(x)$须满足插值条件 $P_n(x_j)=y_j$, $j=0,1,2,3,\ldots,n$

即$y_0l_0(x_j)+y_1l_1(x_j)+\ldots+y_jl_j(x_j)\ \ldots+y_nl_n(x_j) = y_j$

$$\Uparrow$$

$$\underbrace{l_0(x_j)=0,\ l_1(x_j)=0,\cdots,l_j(x_j)=1,\cdots,l_n(x_j)=0}$$

$$j=0,1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow l_k(x_j)=d_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}\quad k,j=0,1,2,\cdots,n$$

Lagrange插值公式

$l_k(x_0)=0,\dots,l_k(x_{k-1})=0, l_k(x_{k+1})=0,\dots,l_k(x_n)=0$

即$l_k(x)$有n个0点$x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n$

$\therefore l_k(x)=C(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$ 又$l_k(x_k)=1$

$\therefore C(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)=1$

$$\therefore C=\frac{1}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

与节点有关
而与 f 无关

$$\therefore l_k(x)=\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$\therefore P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\Big(\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\Big)$$ Lagrange插值多项式

（当n=1，n=2时分别就是线形插值与抛物插值公式）

2.2.4 插值余项 /* Remainder */

函数y=f(x)与其 Lagrange插值多项式$P_n(x)$:

(1) $P_n(x_i)= f(x_i) =y_i$, i=0,1,2,...,n

(2) 而对于插值区间[a,b]内插值节点x_i(i=1,2,...,n)以外的点x，一般$P_n(x)\neq f(x)$，存在误差。

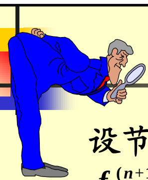
Def: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$为$P_n(x)$的截断误差或插值余项。

（1） => $R_n(x_i)=0$, i=0,1,2,...,n

（2） => 若$x \neq x_i$,可能 $R_n(x) \neq 0$,

利用Lagrange插值公式$P_n(x)$来计算，结果是否可靠，要看余项$R_n(x)$是否足够小。

$R_n(x)$=？



设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a\,,b]$ 内存在，考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Rolle's Theorem: 若 $\varphi(x)$ 充分光滑，$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$，则存在 $\xi \in (x_0, x_1)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$。

推广：若 $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0 \Rightarrow \xi_0 \in (x_0, x_1),\ \xi_1 \in (x_1, x_2)$
使得 $\varphi'(\xi_0) = \varphi'(\xi_1) = 0 \Rightarrow \xi \in (\xi_0, \xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi) = 0$

$$\varphi(x_0) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$$

$\Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a\,,b]$ 内存在，考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$R_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个根 $\Rightarrow R_n(x) = K(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

任意固定 $x \ne x_i\ (i = 0, \ldots, n)$，考察 $\varphi(t) = R_n(t) - K(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$

$\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个不同的根 $x_0, \ldots, x_n, x$

对 t 求导

$\Rightarrow \varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0,\quad \xi_x \in (a, b)$

$$f^{(n+1)}(\xi_x) - \cancel{P_n^{(n+1)}}(\xi_x) - K(x)(n+1)! = R_n^{(n+1)}(\xi_x) - K(x)\,(n+1)!$$

$\Rightarrow K(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ $\quad$ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Review

Problem I：已知y=f(x)的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

且x_i(i=0,1,…,n)两两互异，$x_i \in [a,b]$，求次数不超过n的多项式

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$，使得 $P_n(x_i) = y_i,\ i = 0,1,\cdots,n.$

定理2.1　在n+1个互异的插值结点$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 上满足上述插值条件且次数不超过n的代数多项式$P_n(x)$存在且唯一。

采用基函数法可以导出**Lagrange**插值公式：$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

插值余项

定理1：设函数y=f(x)的n阶导数$y=f^{(n)}(x)$在[a,b]上连续，$y=f^{(n+1)}(x)$在(a,b)上存在；插值结点为$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$，$P_n(x)$是f(x)的n次拉格朗日插值多项式；则对任意$x \in [a,b]$有：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_n(x)$$

其中$\xi \in (a,b)$，ξ依赖于x，　$w_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)$

☞ 通常不能确定 ξ，而是估计$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$，$\forall x \in (a,b)$

将 $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$ 作为误差估计上限。

☞ 当 $f(x)$ 为任一个次数$\le n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x) \equiv 0$，可知

$R_n(x) \equiv 0$，即插值多项式对于次数$\le n$ 的多项式是精确的。

当 $f(x) \equiv 1$，$P_n(x) = f(x) \equiv 1$，即$l_0(x) + l_1(x) + \cdots + l_n(x) \equiv 1$

例2.3 已知y=lg(x)的函数表如右，求lg2.718并估计其误差.

x	2.71	2.72	2.73
y=lgx	0.4330	0.4346	0.4362

解：$P_2(x)=\dfrac{(x-2.72)(x-2.73)}{(2.71-2.72)(2.71-2.73)}*0.4330+\dfrac{(x-2.71)(x-2.73)}{(2.72-2.71)(2.72-2.73)}*0.4346$

$$+\frac{(x-2.71)(x-2.72)}{(2.73-2.71)(2.73-2.72)}*0\cdot4362$$

$$=13038x^2-7092.08x+96459.032 \qquad \therefore \lg 2.718\approx P_2(2.718)=0.48$$

$$\because R_2(x)=\frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad x\in[x_0,x_2]$$

$$\because f(x)=\lg x \Rightarrow f'''(x)=\frac{2}{x^3\ln 10}\Rightarrow \max_{2.71\le x\le 2.73}\left|f'''(x)\right|=0.043642$$

$$\left|R_2(2.718)\right|\le\frac{0.043642}{6}\left|(2.718-2.71)(2.718-2.72)(2.718-2.73)\right|=1.39654\times10^{-9}$$