

第五章 方程求根的数值解

/* Solutions of Nonlinear Equations */

引入

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

在科学与工程计算中经常需求解方程 $f(x)=0$ 的根

- ① 当 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 时
 $n=1,2,3,4$ 时,可用求根公式求解
 $n \geq 5$ 时,不能用公式表示方程的根
- ② 对于一般的非线性方程 $f(x)=0, x \in \mathbb{R}$. 只能求出其近似值,
 我们探讨其数值解法——**逐步逼近法**

1. 初始近似根 x_0

2. $x_k \rightarrow$ **递推关系** x_{k+1} (x_k 收敛于真解 x^*)

5.1 根的隔离和二分法

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

为了确定初始近似根 x_0 ，必须知道 $f(x)=0$ 的根的大致范围。

若 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有一个根，称 (a,b) 为 $f(x)=0$ 的**有根区间**

若 $f(x)=0$ 在 (a,b) **只有** 一个根，称 (a,b) 为 $f(x)=0$ 的**隔根区间**

当 (a,b) 为隔根区间时，可取 $x_0 \in (a,b)$

Def: **根的隔离**——求 $f(x)=0$ 的隔根区间的过程。

根的隔离的依据

Th5.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且有 $f(a)f(b)<0$ ，则方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 内至少有一个根。

注: ① $[a,b]$ 为有根区间

② 当 $f(x)$ 满足 Th5.1 的条件且在 $[a,b]$ 上单调时，
 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内只有一根。
即 (a,b) 为隔根区间。

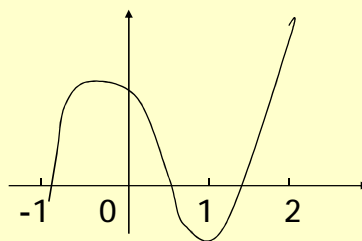
HUST

根的隔离的方法

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

图象法: 作出 $y=f(x)$ 的草图，由曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的大致位置来确定隔根区间。

例 隔根区间: $(-1,0), (0,1), (1,2)$
区间端点上函数值 $f(x)$ 异号

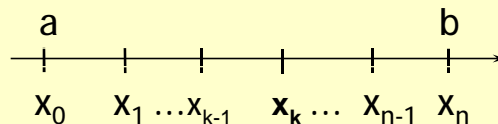


逐步搜索法

已知: $[a,b]$ 为 $f(x)=0$ 的有根区间，
且 $[a,b]$ 较大，

求一个缩小的有根区间

取步长 $h=(b-a)/n$



从 $x_0=a$ 出发以 h 为步长向右搜索直至找到第一个点 $x_k=a+kh$ 满足 $f(a)f(x_k) \leq 0$ ，则得缩小得有根区间 $[x_{k-1}, x_k]$

取初始近似根为 x_{k-1} 或 x_k ，其误差限为 h

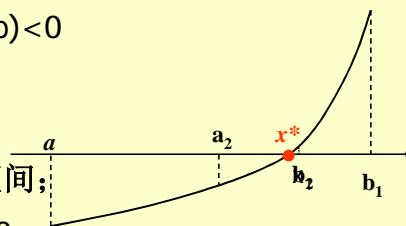
HUST

Algorithmstep 1: $x_0 = a, h = (b-a)/n$ step 2: If $(f(x_0)f(x_0+h) \leq 0)$ 输出 (x_0, x_0+h) Else $x_0 = x_0 + h$, goto step 2**例** 求方程 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 的有根区间。**解:** $\because f(0) = -1 < 0, f(+\infty) > 0 \therefore (0, +\infty)$ 为有根区间从 $x=0$ 出发, 步长 $h=0.5$ 向右计算, 则

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	-	-	-	+	+

得缩小的有根区间为 $(1.0, 1.5)$ 可取初始近似根 $x_0 = 1.0$ 或 $x_0 = 1.5$ **小结:** 当 h 很小时, 得到很小的有根区间,取 $x^* \in (x_0, x_0+h)$, 从而可算得任意精度的近似根,但 h 越小计算量越大, 利用此法求近似根仍不十分理想。**5.1.2 二分法 /* Bisection Method */****思想:** 将有根区间 $[a, b]$ 逐次减半 (二分), 使有根区间缩小直到误差容许范围内, 然后取区间中点为真根 x^* 的近似值。设 $f(x) = 0$ 的有根区间为 $[a, b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$ (1) 取 $x_0 = (a+b)/2$ **If** $f(x_0) = 0$, 则 x_0 为 $f(x) = 0$ 的根;**else if** $f(a)f(x_0) < 0$, 则 $[a, x_0]$ 为有根区间;记 $a_1 = a, b_1 = x_0 = (a+b)/2$ **else** $f(x_0)f(b) < 0$, 则 $[x_0, b]$ 为有根区间, 记 $a_1 = x_0 = (a+b)/2, b_1 = b$ \therefore 得缩小的有根区间 $[a_1, b_1]$ 且 $b_1 - a_1 = (b-a)/2$, $[a, b]$ 包含 $[a_1, b_1]$ (2) 将 $[a_1, b_1]$ 二等分, 其中点 $x_1 = (a_1 + b_1)/2$, 计算 $f(x_1)$, 重复(1), 或 $f(x_1) = 0$ 则 $x^* = x_1$, 或得有根区间 $[a_2, b_2]$ 且 $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$.

(3)反复进行, 则得到有根区间套



$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \dots \ni x^*$$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2} (b_{k-1} - a_{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^k} (b - a)$$

记 $[a_k, b_k]$ 的中点为 $x_k = (a_k + b_k)/2$ 并作为根的近似值

从而有近似根序列 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$

$$Q \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^k} = 0 \text{ 且 } \forall k, x^* \in [a_k, b_k] \quad \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

二分法是收敛的

将有限次二分的结果 x_k 作为根的近似值, 其误差为多少呢?

$$Q x^*, x_k \in [a_k, b_k], x_k = \frac{a_k + b_k}{2} \quad \therefore |x^* - x_k| \leq \frac{1}{2} (b_k - a_k) = b_{k+1} - a_{k+1}$$

$$\text{从而误差估计式} \quad |x^* - x_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

$$|x^* - x_k| \leq b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

于是用二分法解 $f(x)=0$, 使误差不超过 ε 的终止准则:

$$(1) \text{ 先验估计 } |x^* - x_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon \Rightarrow k > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

$$(2) \text{ 后验估计 } b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$$

Algorithm

Step1. 输入 $a, b, \varepsilon, \delta$

Step2. $X = (a+b)/2$

Step3. if $(|f(x)| < \delta \text{ 或 } b-x < \varepsilon)$ 输出 x stop

else if $(f(a)f(x) < 0)$ $b = x$

else $a = x$

Step4. Goto Step2

例题

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

例 5.2 求方程 $f(x)=x^3-x-1$ 在区间 $(1,1.5)$ 内的根,要求精确到小数点后的第二位, ($\varepsilon = 10^{-2}/2$), 用四位小数计算.

解: ① $a=1, b=1.5$ 且 $f(a)<0, f(b)>0$

精度要求为 $\varepsilon = 10^{-2}/2 = 0.005$ 由误差估计式 $|x^*-x_k| \leq (b-a)/2^{k+1}$

得 $0.5/2^{k+1} < 0.005$ 从而 $2^{k+1} > 100$ 取 $k=6$ 即可

② $x_0 = \frac{1}{2}(a+b) = 1.25$ $f(x_0) < 0$

$\because f(x_0)f(b) < 0 \therefore$ 令 $a_1 = x_0 = 1.25, b_1 = b = 1.5$

新的有根区间 (a_1, b_1) 取 $x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) = 1.375, f(x_1) > 0, f(a_1)f(x_1) < 0$

$\therefore a_2 = a_1 = 1.25, b_2 = x_1 = 1.375$ 从而得有根区间 $(a_2, b_2) \dots \dots$



二分法分析

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable



① 简单;收敛性有保证

② 对 $f(x)$ 要求不高(只要连续即可).



① 无法求复根及偶重根

② 收敛慢

HW: p.152 #1
 $f(x)=x^3-x^2-1,$
 $x \in [1,2]$

注: 用二分法求根, 最好先给出 $f(x)$ 草图以确定根的大概位置。
或用搜索程序, 将 $[a, b]$ 分为若干小区间, 对每一个满足条件
 $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$ 的区间调用二分法程序, 可求 $[a, b]$ 内的多个根。



5.2 迭代法

Chapter 5 Solutions of equations in one variable

思想：先给出 $f(x)=0$ 的一个初始近似根 x_0 ，再反复使用某一公式校正这个初始根，使之逐步精确化，直到满足精度要求为止。

$$\begin{cases} x_0 & \text{迭代初值} \\ x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,2,\dots & \text{迭代格式} \end{cases} \quad g(x) \text{称为迭代函数.}$$

如何构造迭代格式？——不动点迭代法/* Fixed-Point Iteration */

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$$

$f(x)$ 的根 \longleftrightarrow $g(x)$ 的不动点



从 x_0 出发，计算 $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, ..., $x_{k+1}=g(x_k)$, ... 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ，且 g 连续，则

思路

由 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k)$ ，得 $x^* = g(x^*)$ ，即 x^* 是 g 的不动点，也就是 $f(x)=0$ 的根。

HUST

迭代法的几何解释

Chapter 5 Solutions of equations in one variable

$x=g(x)$ 的解即为曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点 p^*

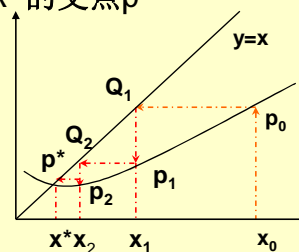
初始值 x_0 ，得 $y=g(x)$ 上点 $p_0(x_0, g(x_0))$

... $p_1(x_1, g(x_1))$ $x_1=g(x_0)$

... $p_2(x_2, g(x_2))$ $x_2=g(x_1)$

.....

... $p_{k+1}(x_{k+1}, g(x_{k+1}))$ $x_{k+1}=g(x_k)$



当由 $x_{k+1}=g(x_k)$ 所决定的点列 $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ 收敛到 x^* 。

则点 $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ 逐步逼近交点 p^* 。

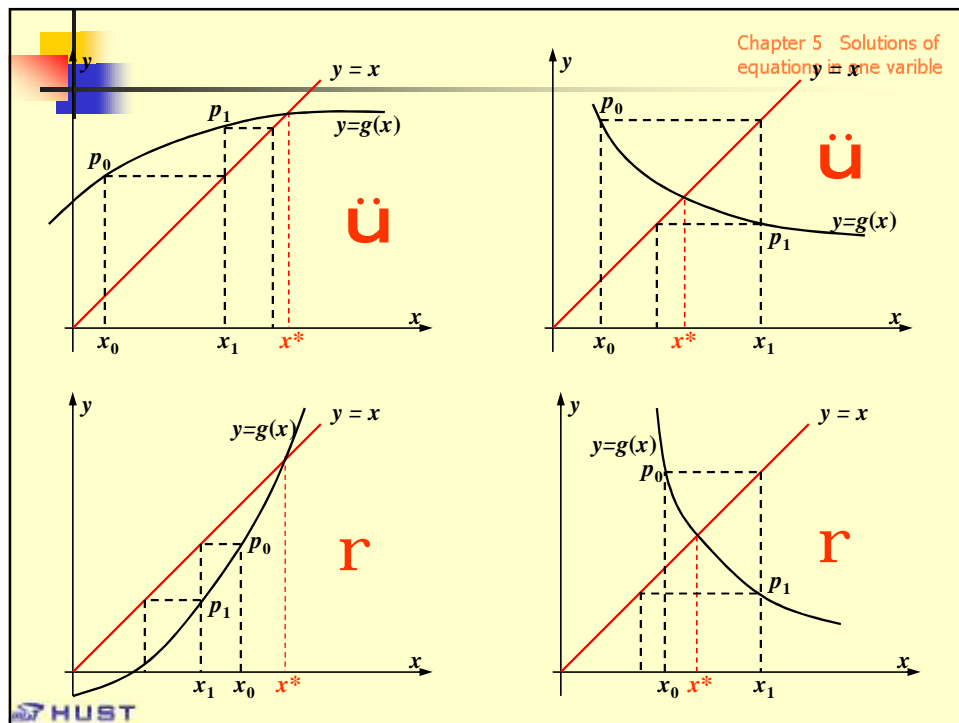


Oh yeah? Who tells you that the method is **convergent**?

What's the problem?



HUST



Chapter 5 Solutions of equations in one variable

例: 求 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的一个根 (用六位有效数字近似)

解 I: $x^3 - x - 1 = 0$ 等价于 $x = \sqrt[3]{x+1}$ 取 $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ 取 $x_0 = 1.5$ 则

$x_1 = \sqrt[3]{1.5+1} = 1.35721$	$x_7 = \sqrt[3]{x_6+1} = 1.32472$
$x_2 = \sqrt[3]{1.35721+1} = 1.33086$	$x_8 = \sqrt[3]{x_7+1} = 1.32472 = x_7$
...	$\Rightarrow x^* \approx 1.32472$

II: $x^3 - x - 1 = 0$ 等价于 $x = x^3 - 1$; $g(x) = x^3 - 1$

迭代格式为 $x_{k+1} = x_k^3 - 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

取 $x_0 = 1.5$ 则 $x_1 = 1.5^3 - 1 = 2.375$, $x_2 = x_1^3 - 1 = 12.3976$

.....

序列 $\{x_k\}$ 发散

注: (1) 必须适当选取 x_0 及 $g(x)$ 才能使迭代公式所求的序列 $\{x_k\}$ 收敛

(2) $\{x_k\}$ 收敛时, k 次迭代的结果的误差 $\varepsilon_k = x_k - x^* = ?$

HUST

迭代法收敛性分析

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$, 从而有迭代格 $x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,2,\dots$

Th5.3 设迭代函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的一阶导数, 且当

(1) $x \in [a,b]$ 时, $a \leq g(x) \leq b$;

(2) 存在正数 $L < 1$, 对 $x \in [a,b]$ 有 $|g'(x)| \leq L < 1$ 成立,

则 $x=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解 x^* , 且对任意的初始近似值 $x_0 \in [a,b]$ 迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k) (k=0,1,2,\dots)$ 收敛且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$

证明: ① x^* 的存在性

作 $h(x)=x-g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

而 $h(a)=a-g(a) \leq 0 \quad h(b)=b-g(b) \geq 0$

由连续函数性质, 必有 $x^* \in [a,b]$ 使 $h(x^*)=0$ 即 $x^*=g(x^*)$

② x^* 的唯一性

若 $x^\Delta \in [a,b]$, 且 $x^\Delta = g(x^\Delta)$, 则 $x^* - x^\Delta = g(x^*) - g(x^\Delta)$

那么 $x^* - x^\Delta = g'(\xi)(x^* - x^\Delta)$, ξ 在 x^* 与 x^Δ 之间且 $\xi \in [a,b]$

则 $(x^* - x^\Delta)(1 - g'(\xi)) = 0$, 而 $|g'(\xi)| \leq L < 1 \quad \therefore x^* = x^\Delta$

HUST

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

③ 迭代过程的收敛性

$\therefore x^* - x_{k+1} = g(x^*) - g(x_k) = g'(\xi)(x^* - x_k)$,

由条件(1)知 $x_k \in [a,b]$, 则 $\xi \in [a,b]$

$\therefore |x^* - x_{k+1}| = |g'(\xi)| |x^* - x_k|$

$\leq L |x^* - x_k| \leq L^2 |x^* - x_{k-1}| \leq \dots$

$\leq L^{k+1} |x^* - x_0| \rightarrow 0, \quad (\because 0 \leq L < 1)$

$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$

说明

Ø Th中条件(1) 迭代序列 $\{x_k\}$ 均在 $[a,b]$ 内

Ø 条件(2)保证 x_k 与 x^* 间的距离随 k 增加而减少并最终趋于0

Ø 对 $x^3 - x - 1 = 0$ 的两种格式分析

$g(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad g(x) = x^3 - 1 \quad [a,b] = [1,2]$

HUST

误差估计式

Chapter 5 Solutions of equations in one variable

Th5.4 在 Th5.3的条件下, 有如下误差估计式

$$|x^* - x_k| \leq \frac{|x_{k+1} - x_k|}{1-L} \quad \text{后验估计}$$

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \quad \text{先验估计}$$

证:

$$\begin{aligned} \because |x^* - x_{k+1}| &\leq L |x^* - x_k| \\ \therefore |x_{k+1} - x_k| &= |x^* - x_k - (x^* - x_{k+1})| \\ &\geq |x^* - x_k| - |x^* - x_{k+1}| \\ &\geq |x^* - x_k| - L |x^* - x_k| \\ &= (1-L) |x^* - x_k| \end{aligned}$$

$$\therefore |x^* - x_k| \leq \frac{|x_{k+1} - x_k|}{1-L}$$

停机准则: ①先验估计

$$Q |x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

$$\therefore k > \left[\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|} \div \ln L \right]$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |x_{k+1} - x_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &= |g'(\xi)(x_k - x_{k-1})|, \xi \in [a, b] \\ &\leq L |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq L^2 |x_{k-1} - x_{k-2}| \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

$$\leq L^k |x_1 - x_0| \quad \therefore |x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

②后验估计

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{1-L} |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \quad \text{若 } L \text{ 不接近于 } 1$$

实用方法: $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$

HUST

Algorithm: Fixed-Point Iteration

Chapter 5 Solutions of equations in one variable

Find a solution to $x = g(x)$ given an initial approximation x_0 .

Input: initial approximation x_0 ; tolerance TOL ; max. num. of iterations N_{max} .

Output: approximate solution x or message of failure.

Step 1 Set $i = 1$;

Step 2 While ($i \leq N_{max}$) do steps 3-6

Step 3 Set $x = g(x_0)$; /* compute x_i */

Step 4 If $|x - x_0| < TOL$ then Output (x); /* successful */
STOP;

Step 5 Set $i++$;

Step 6 Set $x_0 = x$;
/* update x_0 */

当 x 很大时, 此处
可改为 $\left| \frac{x - x_0}{x} \right| < TOL$

Step 7 Output (The method failed after N_{max} iterations); /* unsuccessful */
STOP.

HUST

例5.3 求方程 $x=e^{-x}$ 在 $x_0=0.5$ 附近的近似根,要求精确到小数后三位.

解: 此时 $f(x)=x-e^{-x}=0$

$$f(0.5)<0 \quad f(0.6)>0$$

$\therefore [0.5, 0.6]$ 为 $f(x)=0$ 的有根区间

取 $g(x)=e^{-x}$; 从而迭代格式 $x_{k+1}=e^{-x_k} \quad k=0, 1, 2, \dots$

判定收敛性:

$$\text{当 } x \in [0.5, 0.6], |g'(x)| = |-e^{-x}| = e^{-x} \leq e^{-0.5} \approx 0.607 < 1$$

\therefore 迭代格式收敛

取 $x_0=0.5$, 精度要求 $\varepsilon=10^{-3}/2=0.0005$ 迭代,

结果见p129表

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	0.5	
1	0.60653	0.10653
2	0.54524	-0.06129
3	0.57970	0.03446
4	0.56007	-0.01963
5	0.57117	0.0110
6	0.56486	-0.00631
7	0.56844	0.00358
8	0.56641	-0.00203
9	0.56756	0.00115
10	0.56691	-0.00065

注: 定理条件非必要条件, 可将 $[a, b]$ 缩小, 定义局部收敛性。

局部收敛性

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

Th5.3 的迭代收敛条件之一: $x \in [a, b]$, $|g'(x)| \leq L < 1$

在 $[a, b]$ 较大时, 其该条件不易满足, 考虑局部收敛性 ——

Def: 若在 x^* 的某邻域 $\Delta: |x - x^*| \leq \delta$, 迭代过程对任意的初始值 $x_0 \in \Delta$ 均收敛, 则称其具有 **局部收敛性**。

Th5.5 设 $g(x)$ 在 $x=g(x)$ 的根 x^* 邻近有连续的一阶导数, 且 $|g'(x^*)| < 1$, 则迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 具有局部收敛性.



局部收敛性

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

Th5.5 设 $g(x)$ 在 $x=g(x)$ 的根 x^* 邻近有连续的一阶导数, 且 $|g'(x^*)| < 1$, 则迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 具有局部收敛性.

分析: 在 $\Delta: |x - x^*| \leq \delta$ 即 $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ 应用 Th5.3 来证明.

证 $\because |g'(x^*)| < 1$ 且 $g'(x)$ 在 x^* 的邻近连续

\therefore 存在充分小的邻域 $\Delta: |x - x^*| \leq \delta$ 使

$x \in \Delta$ 时, $|g'(x)| \leq L < 1$ (L 为常数)

而 $g(x) - g(x^*) = g'(\xi)(x - x^*)$

又 $x \in \Delta$ 时 $\xi \in \Delta$, 有 $|g'(\xi)| \leq L < 1$.

$\therefore |g(x) - x^*| = |g(x) - g(x^*)| \leq L|x - x^*| < |x - x^*| \leq \delta$, 即 $g(x) \in \Delta$

$\therefore g(x)$ 在 x^* 的 δ 邻域 Δ 内满足 Th5.3 收敛条件 (1) (2);

$\therefore x_{k+1} = g(x_k)$ 对任意 $x_0 \in \Delta$ 收敛, 即具有局部收敛性。



例5.4 求 $x^3-2x-5=0$ 在 $x_0=2$ 附近的实根。

解: 由 $x^3-2x-5=0$ 得 $x=\sqrt[3]{2x+5} \Rightarrow g(x) = \sqrt[3]{2x+5}$

$$\begin{cases} x_{k+1}=g(x_k)=\sqrt[3]{2x_k+5} & g'(x)=\frac{2}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}} \\ x_0=2 \end{cases}$$

$\because g'(x_0)<1/6$ 且 $g'(x)$ 在 $x_0=2$ 邻近连续

\therefore 迭代格式 $x_{k+1}=g(x_k)$ 在 $x_0=2$ 的邻域内具有局部收敛性

$$x_1 = \sqrt[3]{2x_0 + 5} = 2.0800838$$

$$x^* = 2.0945514815$$

$$x_2 = 2.0923507, x_3 = 2.0942170,$$

误差逐步减小, 减小速度为 6^{-k}

$$x_4 = 2.0945006, x_5 = 2.0945438,$$

$$x_6 = 2.0945503,$$

注: 构造 $x = \frac{1}{2}(x^3 - 5)$ $g(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 5)$ $g'(x) = \frac{3}{2}x^2$ $g'(2) = 6 > 1$

如取 $x_0 = 2$ $x_1 = 1.5, x_2 = -0.125, x_3 = -2.500,$

则 $x_4 = -10.312, x_5 = -551.2, \dots$ 是发散序列。

迭代法在实时系统设计中的应用

假定实时系统由 N 个实时任务构成集合 $\Gamma = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$

$$\Gamma = \{t_i = \langle C_i, T_i, D_i, p_i \rangle \mid i=1, \dots, N\}$$

$$R_i \leq D_i, \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$R_i = C_i + \sum_{\forall t_j \in \Gamma, p_j > p_i} \left\lceil \frac{R_i}{T_j} \right\rceil C_j$$

$$R_i^{(n+1)} = C_i + \sum_{\forall t_j \in \Gamma, p_j > p_i} \left\lceil \frac{R_i^{(n)}}{T_j} \right\rceil C_j$$

取迭代初值 $R_i^{(0)} = 0$

如果 $R_i^{(n+1)} = R_i^{(n)}$ 表明迭代收敛, $R_i = R_i^{(n+1)}$

如果 $R_i^{(n+1)} > D_i$ 表明任务 t_i 是不可调度的。

5.3.1 迭代过程的收敛速度

Chapter 5 Solutions of equations in one variable

迭代格式 $x_{k+1}=g(x_k)$ 的收敛速度依赖于什么? $|x^*-x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1-x_0|$

若 $|g'(x)| \leq L < 1$:

当 $L \approx 0$ 时 收敛快,
 当 $L \approx 1$ 时 收敛慢,
 而 $L > 1$ 时, 不收敛(发散)

收敛速度用收敛阶来衡量

Def5.2 迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^* ($x_k \rightarrow x^*$),

记第 k 步迭代的误差为 $e_k = x_k - x^*$ ($k=0, 1, 2, \dots$),

若有某个实数 $p \geq 1$ 和非零常数 C 使 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$ ($k \neq 0$)

则称 $\{x_k\}$ 是 **p 阶收敛**的。

注: p 的大小反映收敛速度的快慢, p 越大, 收敛越快

$p=1$ —— **线性收敛**; $p=2$ —— **平方收敛**

$p>1$ —— **超线性收敛**

HUST

Chapter 5 Solutions of equations in one variable

Th5.6 对于迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)$, 如果迭代函数 $g(x)$ 在根 x^* 的邻近有连续二阶导数, 且 $|g'(x^*)| < 1$

(1) 当 $g'(x^*) \neq 0$ 时, 迭代过程线性收敛

(2) 当 $g'(x^*) = 0$ 而 $g''(x^*) \neq 0$ 时, 迭代过程平方收敛

分析: 用泰勒公式证

$$(1) \frac{e_{k+1}}{e_k} \rightarrow g'(x^*) \quad (2) \frac{e_{k+1}}{e_k^2} \rightarrow \frac{g''(x^*)}{2}$$

注: 推广的结论 **Th5.7**

注: 构造迭代函数的一般方法

$$x = x + \lambda(x)f(x), \quad g(x) = x + \lambda(x)f(x)$$

$$\text{由 } |g'(x)| \leq L < 1 \rightarrow \text{选 } \lambda(x)$$

HUST

5.3.2 迭代过程的加速

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable

对于收敛的迭代过程, 若收敛速度太慢, 需改进以加速收敛.

/* accelerating convergence */

迭代公式的加工: 对于迭代公式 $x_{k+1}=g(x_k)$ $k=0,1,2,\dots$ 若 $g'(x)$ 在求根范围内改变不大, 取 $g'(x) \approx a$ 当 $|g'(x)| \approx |a| \leq L < 1$ (1) x_k 为 x^* 的近似值, 迭代一次得 $\tilde{x}_{k+1}=g(x_k)$

$$\therefore x^* - \tilde{x}_{k+1} = g(x^*) - g(x_k) = g'(\xi)(x^* - x_k) \approx a(x^* - x_k)$$

$$\therefore (1-a)x^* - \tilde{x}_{k+1} \approx -a x_k \Rightarrow (1-a)x^* - \tilde{x}_{k+1} + a \tilde{x}_{k+1} \approx a \tilde{x}_{k+1} - a x_k$$

$$\therefore (1-a)(x^* - \tilde{x}_{k+1}) \approx a(\tilde{x}_{k+1} - x_k) \Rightarrow x^* - \tilde{x}_{k+1} \approx \frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{k+1} - x_k)$$

(2) 将以上误差补偿给 \tilde{x}_{k+1} 得更精确的近似根 $x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + \frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{k+1} - x_k)$

从而得迭代加速公式

$$\left. \begin{array}{l} \text{迭代} \quad \tilde{x}_{k+1} = g(x_k) \\ \text{改进} \quad x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + \frac{a}{1-a}(\tilde{x}_{k+1} - x_k) \end{array} \right\}$$

HUST

Chapter 5 Solutions of
equations in one variable例 用加速收敛的方法求 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的一个根,
要求精度为 $\varepsilon = 10^{-5}$ 分析: 例5.3曾算过此题, 用简单迭代法迭代10次才达到精度 10^{-3}
那么用改进的公式迭代多少次满足精度要求 10^{-5} ?解: $g(x)=e^{-x}$ 且 $g'(x) = -e^{-x}$, 在 $x=0.5$ 附近有 $g'(x) \approx -0.6$

$$\text{从而加速公式为} \quad \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = e^{-x_k} \\ x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - \frac{0.6}{1.6}(\tilde{x}_{k+1} - x_k) \end{cases}$$

取 $x_0 = 0.5$, 迭代结果为

k	0	1	2	3	4
x_k	0.5	0.56658	0.56713	0.56714	0.56714
\tilde{x}_k		0.60653	0.56746	0.56715	0.56715

HUST