第六章　线性方程组的解法

Methods for Solving Linear Systems

引论

- 这一章介绍求解线性方程组(如下)的解法。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

- 工程科学中的许多领域，如热传导，震动，气象学及数量经济学等中的问题解决必须求解下列数值计算问题：

$$\left.\begin{array}{l} \text{微分方程组的差分方法，有限元法．} \\ \text{最小二乘拟合（最小二乘法）} \end{array}\right\} \text{求解线性方程组}$$

- 解线性方程组的方法在计算数学与科学计算中尤为重要．

引论

- 线性方程组表示为AX=b
- 当D=|A|≠0时．由Gramer法则，方程组有唯一解．

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

- 注：用Gramer求解时，要计算n+1个n阶行列式，共做$N=n!(n^2-1)+n$次乘除法。
- n=20时，用高性能计算机要计算几万年。

Chapter 6 Methods for solving linear systems

引论

有效的解法：

- 直接法：有限步运算求精确解(由于舍入误差的影响，其解是近似的。）——Gauss消元法及其变形
- 迭代法：不是用有限步运算求精确解，而是通过迭代产生近似解序列逐步逼近精确解。

  ——Jacobi迭代， Gauss -Seidel迭代

6.1 向量和矩阵的范数/* Norms of Vectors and Matrices */

数值分析中,经常要用向量和矩阵,为了应用的需要(误差分析),引入衡量向量和矩阵大小的度量—范数.

对于实数$x \in R$,我们定义了绝对值

其满足 $|x|\geq 0$ 非负性. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$|\alpha x| = |\alpha|\cdot|x|$ 齐次性

$|x+y| \leq |x| + |y|$ 三角不等式

类似,定义向量范数

Def 6.1 在实n维线性空间R^n中定义一个映射,它使任意$X\in R^n$有一个非负实数与之对应,记为$||x||$,且该映射满足:

(1) 正定性 任意$x\in R^n$, $||x||\geq 0$, iff $X=0$时, $||X||=0$

(2) 齐次性 任意$x\in R^n$, $\lambda\in R$,有 $||\lambda X|| = |\lambda|\cdot||X||$

(3) 三角不等式 任意$X,Y\in R^n$,有 $||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||$

则称该映射在R^n中定义了一个向量范数.

注: R^n中的范数不唯一.

常用的范数有三种: 设$X=(x_1, x_2,\dots, x_n)^T\in R^n$, 则

1—范数: $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2—范数: $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = (\sum_{i=0}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

∞—范数: $||X||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

P-范数 $\|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

注: (1) 根据范数的定义可验证上述皆为向量范数

(2) p=1,2, $\|X\|_p$ 即为 $\|X\|_1$,$\|X\|_2$.

(3) 任意$x\in R^n$:

$$\lim_{p\to\infty}\|X\|_p = \|X\|_\infty$$

例: $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$,

$$\|X\|_1 = 1+2+3=6$$

$$\|X\|_\infty = 3$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$$

向量范数的性质

(1) 任意$X,Y\in R^n$,则 $\big|\,\|X\| - \|Y\|\,\big| \le \|X-Y\|$

证: $\because$ $\|X\| = \|X-Y+Y\| \le \|X-Y\| + \|Y\|$

$\|Y\| = \|Y-X+X\| \le \|Y-X\| + \|X\| = \|X-Y\| + \|X\|$

$\therefore$ $-\|X-Y\| \le \|X\| - \|Y\| \le \|X-Y\|$

(2) R^n上向量范数的等价性:

即若$\|X\|_a$ 与$\|X\|_b$为R^n上两种范数,则存在正数M与m(M>m)对任意$X\in R^n$,有

$$m\|X\|_b \le \|X\|_a \le M\|X\|_b$$

例:

$$\frac{1}{n}\|X\|_1 \le \|X\|_\infty \le \|X\|_1$$

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le n\|X\|_\infty$$

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\|X\|_\infty$$

注: R^n范数的等价性表明,虽不同向量范数其值不同,但考虑到向量序列收敛性时,却有明显的一致性。

向量范数的应用

Def 6.2 R^n中的向量序列$\{X_k\}$, 即$X_0, X_1, \dots X_K, \dots$
其中$X_K = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^T$，若对任意i（i=1,2,…,n）都有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$$

则向量 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ 称为$\{X_k\}$的极限。

记做 $$\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$$

注： 向量序列收敛实际上是按分量收敛（数列收敛）
利用向量范数，也可以说明向量序列收敛的概念。

Th. 向量序列$\{X_K\}$依分量收敛于X^* 的充要条件是:

$$\lim_{k\to\infty} \|X_k - X^*\| = 0$$

注：(1) 数列 $\|X_k - X^*\|$ 收敛于0
(2) 依范数收敛等价于依分量（坐标）收敛.

矩阵的范数

类似于向量范数，给出矩阵范数的定义。

Def. 在线性空间$R^{n\times n}$中定义一个映射，使任意$A\in R^{n\times n}$对应一个非负实数，记做|| A ||, 如果该映射满足：

1.**正定性**：$\forall A\in R^{n\times n}, \|A\|\ge 0$, 且$\|A\| = 0$ iff $A = 0$

2.**齐次性**：$\forall \lambda\in R, A\in R^{n\times n}, \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

3.**三角不等式**：$\forall A, B\in R^{n\times n}, \Rightarrow \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

4.**相容性**： $\forall A, B\in R^{n\times n}, \Rightarrow \|AB\| \le \|A\| \|B\|$

（相容性是矩阵乘法的需要，而1. 2. 3.为向量范数的推广）

在$R^{n\times n}$中可定义多种范数。

例 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$, 则 $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 称为A的Frobenius范数.

例2．$A\in R^{n\times n}$，$||\dots||$为R^n中的向量范数，则定义$R^{n\times n}$中的范数为

$$\|A\| = \sup_{\substack{||x||=1 \\ x\in R^n}} \|Ax\|$$

易验证这样由向量范数导出的映射为矩阵范数，称之为**诱导范数**（或**算子范数**）。

诱导范数具有如下性质：

$$\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|, \forall A\in R^{n\times n}, x\in R^n$$

证：(1) 当$x=0$时，显然成立

(2) 当$x\neq 0$时，$\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\|A\cdot\dfrac{x}{\|x\|}\right\| \le \|A\|$

Def. 对于$R^{n\times n}$中的矩阵范数$\|\dots\|_a$与R^n中的向量范数$\|\dots\|_b$，若任意$x\in R^n$，$A\in R^{n\times n}$都有$\|Ax\|_b \le \|A\|_a\cdot\|x\|_b$

则称矩阵范数$\|\dots\|_a$和向量范数$\|\dots\|_b$**相容**（协调）。

注：（1）任何向量范数与其诱导范数是相容的。

（2）给出一种向量范数$\|x\|_p$，就有对应的诱导范数$\|A\|_p$.

（3）向量范数$||\dots||_1$，$||\dots||_2$，$||\dots||_\infty$的诱导矩阵范数仍记为 $||\dots||_1$，$||\dots||_2$，$||\dots||_\infty$.

定理：$A\in R^{n\times n}$ 则A的诱导范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{（列和范数）}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} \quad \text{其中}\lambda_1\text{为}A^TA\text{的最大特征值} \qquad \text{（谱范数）}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{（行和范数）}$$

证：对谱范数$\|A\|_2$来证明。 $\|AX\|_2^2=(AX,AX)=X^TA^TAX\ge 0$

A^TA为对称半正定阵.

设A^TA的特征值为$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_n\ge 0$，
相应的特征向量为e_1，e_2，…，e_n 且 $(e_i,e_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$

设 $X\in G=\{X \mid \|X\|_2=1, X\in R^n\}$

$X=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n.$

则 $AX=\lambda_1x_1e_1+\lambda_2x_2e_2+\ldots+\lambda_nx_ne_n.$

从而， $\|AX\|_2^2=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2\le\lambda_1\sum_{i=1}^n x_i^2=\lambda_1$

$\therefore \|AX\|_2\le\sqrt{\lambda_1}$

当$X=e_1$时，上式等号成立，故 $\|A\|_2=\sup_{\|X\|=1}\|AX\|_2=\sqrt{\lambda_1}$

例 求$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$**的**$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$, $\|A\|_2$.

$\|A\|_1=\max\{4,5,5\}=5,\qquad \|A\|_\infty=\max\{5,4,5\}=5,$

$\|A\|_F=\sqrt{4+1+4+1+4+1+1+4+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$A^TA=\begin{pmatrix}6 & -2 & 3\\ -2 & 9 & 4\\ 3 & 4 & 9\end{pmatrix}$ **A^TA的特征值为：**

$\lambda_1=13.0902,\quad \lambda_2=9.0000,\quad \lambda_3=1.9098$

$\therefore \|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}=\sqrt{13.092}\approx 3.6180$

线性方程组的性态

对于线性方程组Ax=b，当|A|≠0,时，可用消去法求数值解.

一般，A，b都是由观测数据而得，都存在误差，那么原始数据的误差，对解的结果有什么影响呢？——稳定性分析

（1）若A精确，b有微小误差δb，所得解的误差为δX，

而精确解X满足Ax=b

即A(X+δX)=b+δb.

∴ AδX=δb

$\delta X=A^{-1}\delta b$

$$\|\delta X\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|X\|} = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|X\|}$$

$$\because \|A\|\|X\| \ge \|AX\| = \|b\|$$

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

X的相对误差为b的相对误差的 || A || || A^{-1} || 倍.

（2）若b精确，A有微小误差δA，所得解的误差为δX

即 （A+δA）(X+δX)=b

∴ AX+AδX+(δA)X+δAδX=b

∴ AδX+(δA)X+δAδX=0

假设A可逆，且A＋δA非奇异（当||A^{-1}||·||δA||<1）,则

$\delta X= - A^{-1}(\delta A)X - A^{-1}\delta A\cdot\delta X$

$$\therefore \|\delta X\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|\cdot\|X\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|\delta X\|$$

$$(1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|)\,\|\delta X\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|X\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\|A^{-1}\|\|A\|\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

解的相对误差近似等于原始数据相对误差的||A|| ||A^{-1}||倍，若||A|| ||A^{-1}||较大，解会对舍入误差很敏感。

Def 6.4 设A为非奇异矩阵，称$\|A\|\,\|A^{-1}\|$为矩阵A的条件数，记为**cond(A)**。

条件数的性质：

- cond(A) ≥1
- cond(kA)=cond(A) ,k≠0
- 若||A||＝1，则 cond（A）=|| A^{-1}||

若cond(A)很大，称方程组AX = b是病态的(不稳定)；否则，是良态的。

例 $\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.501\\ 0.375\end{pmatrix}$ **精确解** $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

原始数据微小变化

$\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5\\ 0.37\end{pmatrix}$ **其解为** $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -10\end{pmatrix}$

原始数据的绝对误差限$\leq 0.5\times 10^{-2}$**,而解的误差很大。**

$$A=\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix}1000 & 4000\\ -4000 & 16016\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}\ \|A\|_\infty=1.251.\ \|A^{-1}\|_\infty=20016$$

$$\therefore \text{cond}(A)=25040$$

$\therefore AX=b$**是病态方程组。**

6.2 迭代法

思想: 由某初始近似解向量X_0,按一迭代格式产生向量序列$\{X_k\}$, X_k 为准确解X^*的近似值, 但其逐步逼近X^*,即

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$$

- 怎样建立迭代格式
- 迭代格式的收敛性
- $\| X^* - X_k \| = ?$

将$AX=b$, A非奇异,变换为一个等价的方程组:

$x=Bx+f$ (B为n阶方阵,f 为n维向量).

有迭代格式
$$\begin{cases} X_0 \\ X_{k+1} = BX_k + f \quad k=0,1,\dots \end{cases}$$

从而产生向量序列$\{X_k\}$:X_0, X_1,…, X_k,…称为**简单迭代法**, B为**迭代矩阵**, $\{X_k\}$为**迭代序列**.

若$\{X_k\}$收敛: $\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$

则有$X^*=BX^*+f$, 即X^*为$AX=b$的解.

若$B=(b_{ij})_{n\times n}$, $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T$,则上式可用分量形式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \dots + b_{1n}x_n^{(k)} + f_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \dots + b_{2n}x_n^{(k)} + f_2 \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \dots + b_{nn}x_n^{(k)} + f_n \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots, \quad X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

或 $$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{(k)} + f_i, \quad i=1,2,\dots n \quad k=0,1,2,\dots$$

那么,如何由$AX=b$ 等价变形为 $x=Bx+f$?

例: $A=M-N$. (M非奇异)

例: $A=L+D+U$.

则有 $(M-N)x=b$.

$\therefore MX = NX+b$

$\therefore X=M^{-1}NX+ M^{-1}b$

从而,迭代矩阵 $B= M^{-1}N$, $f= M^{-1}b$.

迭代过程的收敛性

对某一迭代过程: $X_{k+1}=BX_k+f$. **其产生的序列 $\{X_k\}$ 是否收敛呢? 它和迭代矩阵B相关.**

Def 6.5 已知 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为A的全体特征值，A的谱半径为:

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$$

Th. 设 $A\in R^{n\times n}$, 则A的谱半径不超过A的任何一种范数:

$$\rho(A) \le ||A||$$

证明: 设λ是A的任意特征值, x为对应的特征向量 $(x\neq 0)$, 则

$Ax=\lambda x$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\| \qquad \because \|x\|>0 \qquad \therefore |\lambda| \le \|A\|$$

$$\therefore \quad \rho(A) \le ||A||$$

引理 设 $B\in R^{n\times n}$, 则 $B^k\to O_{n\times n}(k\to\infty)$ 的充要条件是 $\rho(B)<1$.

证明: (参考Th6.13, 引理6.3, Jordan标准型)

迭代法的收敛性条件

Th6.14 对于任意的初始向量 X_0, 迭代过程 $X_{k+1}=BX_k+f$ 收敛于 $AX=b$ 的解 X^* 的充要条件是 $\rho(B)<1$, 此时 $AX=b$ 有唯一解 X^*.

证: （1） $\because X^*=BX^*+f$

$X_{k+1}=BX_k+f$

$\therefore X_{k+1}-X^*=B(X_k-X^*)$

$\therefore X_{k+1}-X^*=B^{k+1}(X_0-X^*)$，**从而:**

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k(X_0 - X^*) = 0_n \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = O_{n\times n} \Leftrightarrow \rho(B)<1$$

（2） $X=BX+f$, 即为 $(I-B)X=f$

$\rho(B)<1$ 则 $|I-B|\neq 0$,

从而 $X=BX+f$ 有唯一解.

Th 6.15 当||B||<1时,迭代过程$X_{k+1}= BX_k+f$收敛于$X= BX+f$的解X^*,且

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X_k - X_{k-1}\| \qquad (6.59)$$

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|X_1 - X_0\| \qquad (6.60)$$

证明: （1） ∵ ρ **(B)** ≤ ||B||<1

∴ **迭代过程收敛**

(2) ∵$X_k-X^*= B (X_{k-1}-X^*)$

∴$\|X_k-X^*\| \le \|B\| \cdot \|X_{k-1}-X^*\|$

$= \|B\| \cdot \|X_{k-1}- X_k + X_k -X^*\|$

$\le \|B\| (\|X_{k-1}- X_k\| + \|X_k -X^*\|)$

∴$(1- \|B\|)\|X_k-X^*\| \le \|B\| \cdot \|X_{k-1}-X_k\|$

$$\therefore \|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X_k - X_{k-1}\|$$

(3) ∵ $X_k - X_{k-1}= B (X_{k-1}-X_{k-2})=\ldots=B^{k-1} (X_1-X_0)$

∴ $\|X_k- X_{k-1}\| \le \|B\|^{k-1}\|X_1-X_0\|$；**将其代入**(6.59)**即得**(6.60)

停机准则: 用户精度要求 $\|X_k- X^*\|<\varepsilon$.

Ⅰ. **先验估计法:**

$$\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|X_1 - X_0\| < \varepsilon$$

则迭代次数

$$k > \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\|X_1 - X_0\|}}{\ln\|B\|}$$

取k为满足上式的最小正整数(保守估计)

Ⅱ. **后验估计法:**

$$\|X_k -X_{k-1}\|<\varepsilon$$

6.3 简单迭代法

对AX=b**的**A**作如下分解:**

若A**的主对角线元素都不为0,即**$a_{ii}\neq 0, i=1\sim n$.

记$D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$.

若A=D-N.

则(D-N)X=b，**即**$X=D^{-1}NX+D^{-1}b$

则迭代格式为:

$$X_{k+1}=D^{-1}NX_k+D^{-1}b$$

此迭代称为Jacobi**迭代,迭代矩阵**$B=D^{-1}N$**,其主对角线元素全为**0.

下面讨论: Jacobi**迭代的收敛性**

充要条件—— $\rho(D^{-1}N)<1$，**充分条件——**$\|D^{-1}N\|<1$

Def 6.6 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$的各行元素满足$|a_{ii}|\geq \sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|\quad, i=1,2,\ldots,n$
则称**A**是对角占优阵**,**
若上各式严格不等号成立**,**则称**A**为严格对角占优阵。

Th 6.17 严格对角占优阵是可逆的。

Th 6.18 若**A**严格对角占优阵，则其**Jacobi**迭代收敛**.**

分析: A=D-N

迭代矩阵 $B=D^{-1}N$

只需证: $\|B\|_\infty=\|D^{-1}N\|_\infty<1$

例6.7 用Jacobi迭代法解下列方程组(精确到10^{-3})

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0.06 & -0.02 \\ 0.03 & 1 & -0.05 \\ 0.01 & -0.02 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解: 原方程组可变形为右上形式, 记为AX=b

∵A为严格对角占优阵， ∴其Jacobi迭代收敛.

令 A=D-N， D=I, 则

$$B=D^{-1}N=\begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{-1}b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

∴Jacobi迭代格式为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Chapter 6 Methods for solving linear systems

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

取$X_0=(2,3,5)^T$迭代得:

$X_1=(1.92,3.19,5.04)^T$

$X_2=(1.909,3.194,5.045)^T$

∵$\| X_2 - X_1 \|_\infty > 10^{-3}$

∴进一步迭代

$X_3=(1.909,3.194,5.045)^T$

又$\| X_3 - X_2 \|_\infty < 10^{-3}$

取$X^* \approx X_3$

Algorithm: **(Jacobi迭代法)**

Step 1 **取X_0,置精度要求和最大迭代次数**N,k=0

Step 2 **计算**$X_{k+1}=BX_k+f$

Step 3 if ($\max_{i=1}^{n}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|<\varepsilon$) stop ($X^*\approx X_{k+1}$)

else if (k=N) stop (不收敛)

else k=k+1；

goto **Step** 2