算法设计与分析

Computer Algorithm Design & Analysis

2019.11

王多强
dqwang@mail.hust.edu.cn

群名称：2019-算法
群　号：835135560

群名称：2019-算法
群　号：835135560

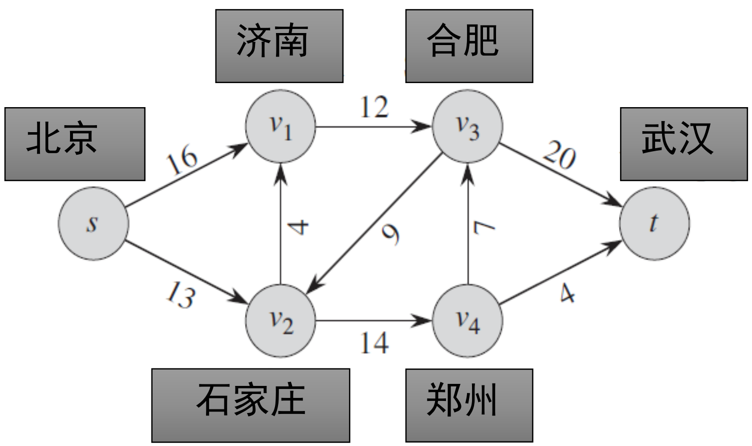
Chapter 26

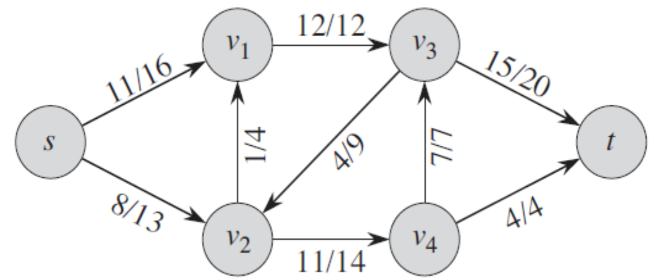
Maximum Flow

最大流

最大流问题由 T. E. Harris and F. S. Ross于1954年提出

问题的引出：实例**物流网络**





最优解

有一个**源结点**和一个**汇点**，从源结点向汇点“运输”货物。

在不违反任何**路径容量限制的**条件下，**从源结点到汇点运送货物的最大速率**是多少——这一问题的抽象称为**最大流问题**。

26.1 流网络

带权有向图：网络

- **结　点：**表示城市
- **有向边：**表示运输路径和物流的方向
- **权　重：**表示运量限制
- **流**：一条从源点到汇点的路径即路径上的流量

—— 这种用来表示"**流（flow）**"的图称为“**流网络**”。

（1）**流量守恒：**除源结点和汇点外，其它结点上物料只是“流过”，即物料进入的速率等于离开的速率；

（2）物料的生成速率和接收速率恒定且足够快、足够多，满足需要；

（3）每条边上的容量是物料通过该边的最大速率，不能突破。

流网络是一个有向图 $G=(V,E)$，边上定义有**容量函数**：$c:E\to R^{+}\cup\{0\}$

（1） 有一个源结点s和汇点t；

（2） 有向边表示流向；

（3） 每条边 $(u,v)\in E$ 上有一个非负的**容量值** $c(u,v)\geq 0$；

如果 $(u,v)\notin E$，为方便起见，定义 $c(u,v)=0$；

（4） 如果边集合E中包含边 (u,v)，则图中不包含其反向边 (v,u)；

（5） 图中不允许有自循环；

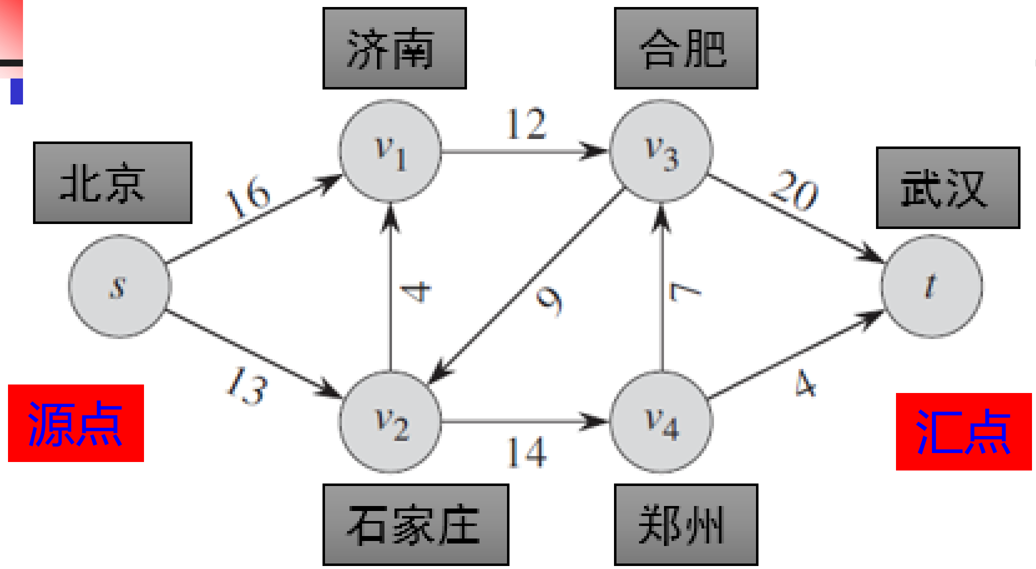
（6） 流网络是连通图，每个结点都在从s到t的某条路径上；

（7） 除源结点外，每个结点至少有一条流入的边；

（8） 除汇点外，每个结点至少有一条流出的边；

（9） $|E|\geq|V|-1$

流网络示例



$$V=\{s, v_1, v_2, v_3, v_4, t\}$$

$$E=\{sv_1, sv_2, v_1v_3, v_2v_1, v_2v_4, v_3v_2, v_4v_3, v_3t, v_4t\}$$

容量函数

$$c(s,v_1)=16$$
$$c(s,v_2)=13$$
$$c(v_1,v_3)=12$$
$$c(v_2,v_1)=4$$
$$c(v_2,v_4)=14$$
$$c(v_3,v_2)=9$$
$$c(v_4,v_3)=7$$
$$c(v_3,t)=20$$
$$c(v_4,t)=4$$

流网络遵循以下基本性质：

（1）**流量守恒**：除源结点和汇点外，其它结点上物料只是“流过”， 即物料进入的速率等于离开的速率；

（2）物料的生成速率和接收速率恒定且足够快、足够多，满足需要（包括源结点的输出和所有结点的输入）；

（3）每条边上的容量是物料通过该边的最大速率，不能突破。

设 $G=(V,E)$ 是一个流网络，其容量函数为 $c:E\rightarrow R^{+}\cup\{0\}$。设s为源结点，t为汇点。

流是定义在G上的一个实值函数映射，记为 $f:V\times V\rightarrow R$，并满足：

（1）**容量限制**：对于所有的结点 $u,v\in V$，有

$$0\le f(u,v)\le c(u,v)$$

（2）**流量守恒**：对于所有结点 $u\in V-\{s,t\}$，有

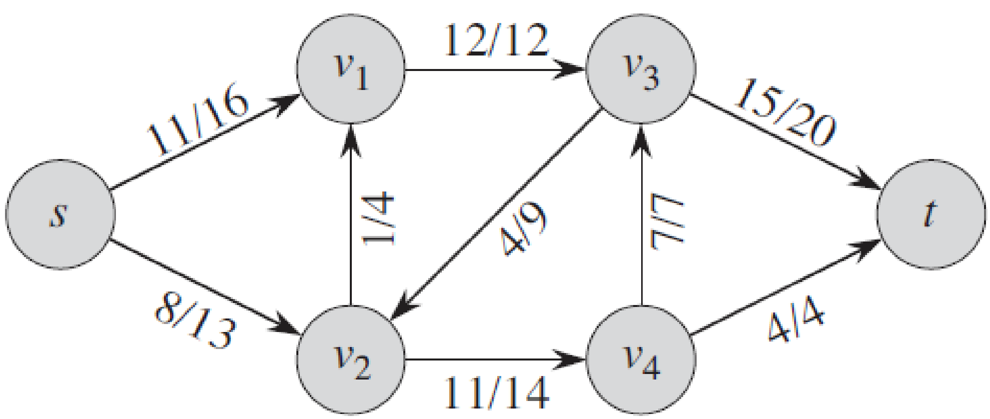
$$\sum_{v\in V} f(v,u)=\sum_{v\in V} f(u,v)$$

若 $(u,v)\notin E$，记 $f(u,v)=0$ 。

流的值：

一个**流** f **的值**定义为流出源结点s的总流量减去流入源结点s的总流量，即**源结点的净流出量**，用|f |表示：

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$$



$f(s,v_1)=11$

$f(s,v_2)=8$

$f(v_1,v_3)=12$

$f(v_2,v_1)=1$

$f(v_2,v_4)=11$

$f(v_3,v_2)=4$

$f(v_4,v_3)=7$

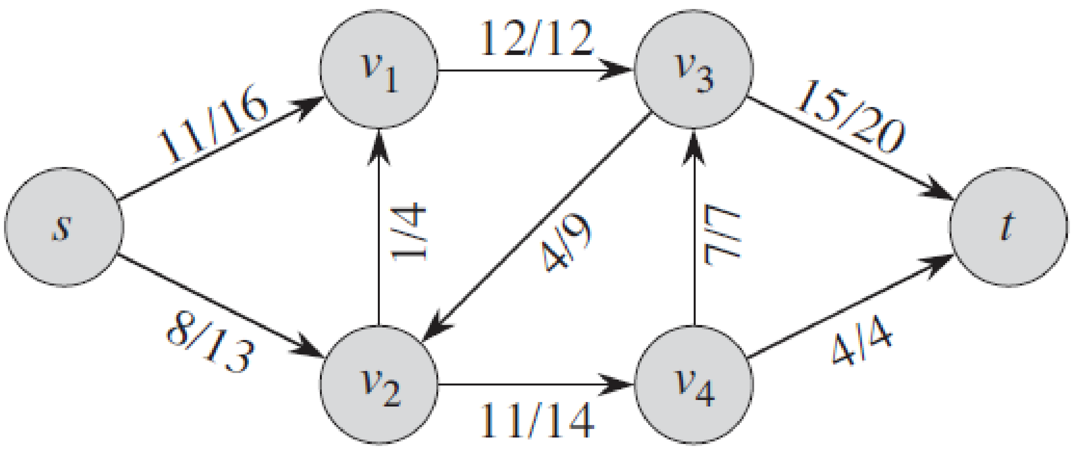
$f(v_3,t)=15$

$f(v_4,t)=4$

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) = 19$$

最大流问题：在给定的流网络G中找一个**流值最大的流**

最大流示例



$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) = 19$$

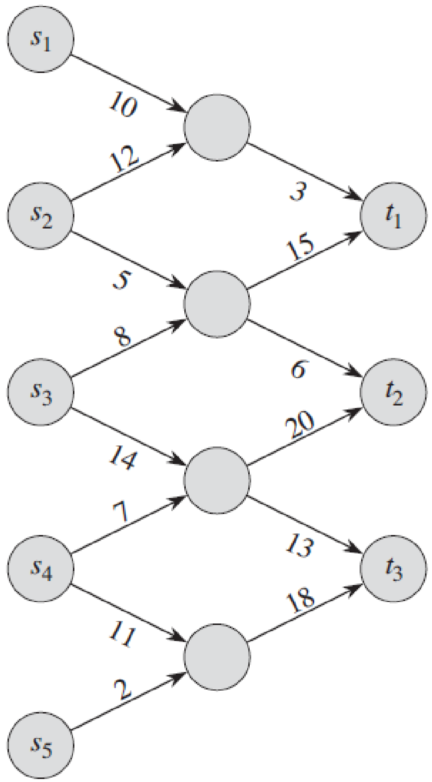
标准流网络：

(1) **无反向边**

反向边：也称为**反向平行边。**一个有向图中，(v,u) (u,v) 互为反向平行边。

无反向边：如果 $(u,v)\in E$，则 $(v,u)\notin E$。

(2) **只有单一的源结点和汇点。**



非标准流网络

非标准流网络：

不满足上述要求的流网络**是非标准的流网络**。对于非标准的流网络可转化为标准流网络。

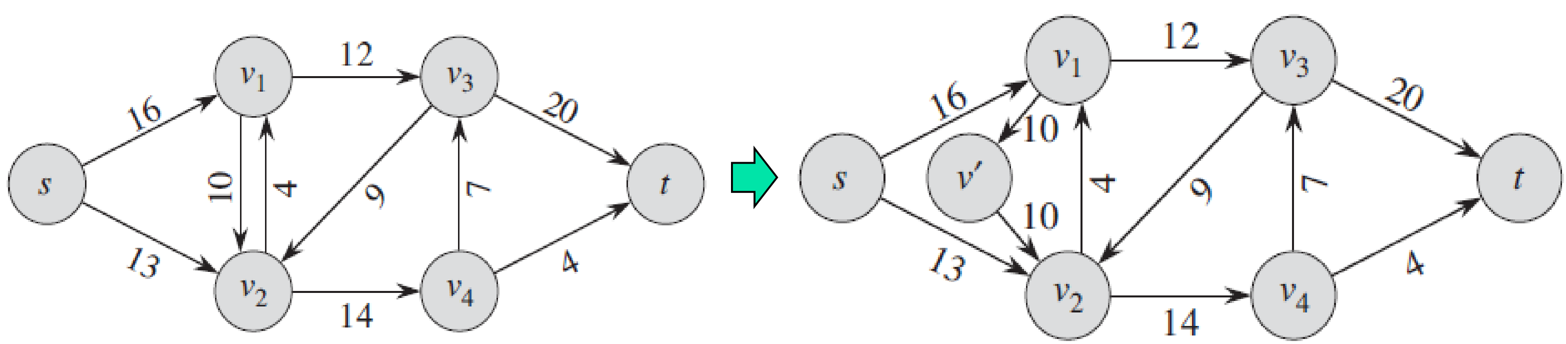
将非标准的流网络转化为标准流网络

（1）反向平行边

转化方法：反向平行边 (u,v) 和 (v,u)，选择其中的一条，然后加入一个新的结点v’，将其分为两条边 (u,v') 和 (v',v)，并置：

$$c(u,v') = c(v',u) = c(u,v)$$

如：



替换 (v_1,v_2)

（2）多个源结点和多个汇点

◆ **多个源结点** ，

转化方法：加入一个**超级源结点s**，并加入有向边 (s, s_i) ，

然后令 $c(s, s_i) = \infty$ ，$1 \le i \le m$ ；

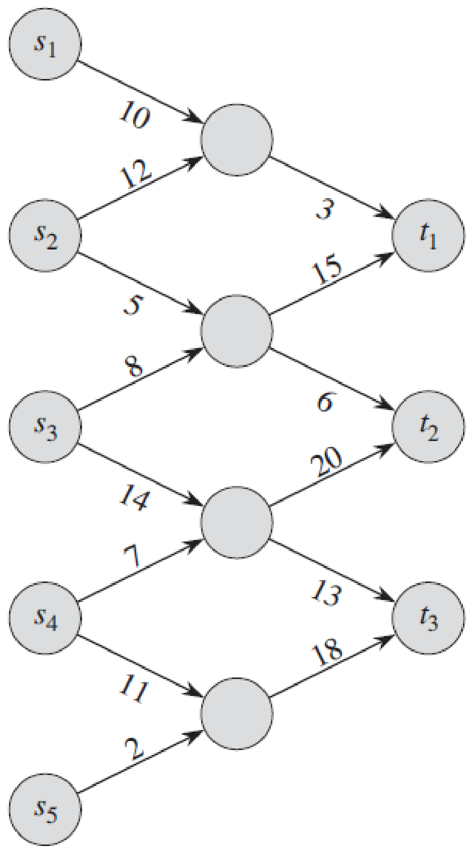
◆ **多个汇点** ，

转化方法：加入一个**超级汇点t**，并加入有向边 (t_i, t),

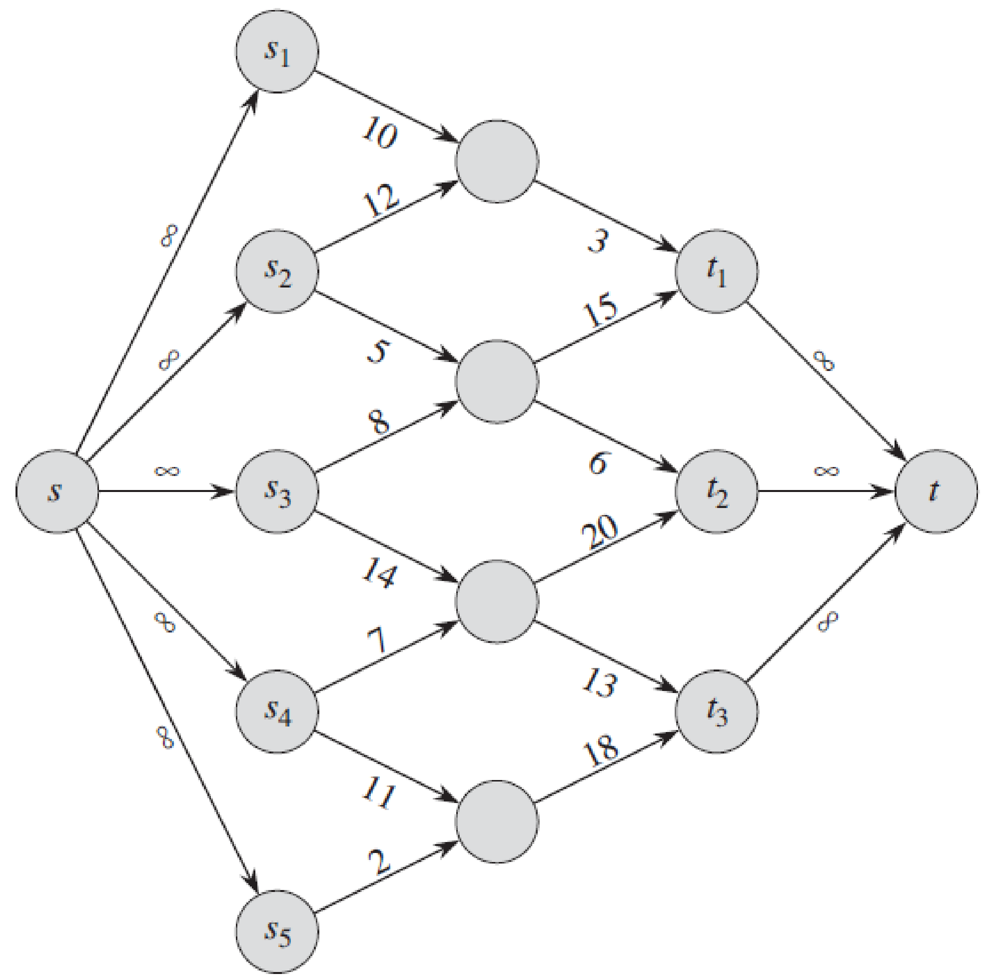
然后令 $c(t_i, t) = \infty$ ，$1 \le i \le n$ 。

可以证明：转化后的两个网络是等价的，具有相同的流。

例:



s_1
s_2
s_3
s_4
s_5
t_1
t_2
t_3
10
12
5
8
14
7
11
2
3
15
6
20
13
18



s
s_1
s_2
s_3
s_4
s_5
t_1
t_2
t_3
t
∞
10
12
5
8
14
7
11
2
3
15
6
20
13
18

求流网络的最大流：

从最小流值开始，一点一点地增加，直到最大值。

从而引出以下问题：

（1）最小流值是多少?

（2）怎么增加流值?

（3）何时能得到最大流?

26.2 Ford-Fulkerson方法

1. 基本思想

通过不断增加可行流值的方式找到最大流：

（1）从**流值为0**的初始流开始；

（2）通过某种方法，对流值进行增加；

（3）当确认无法再增加流值时，就得到最大流；

1955年由Lester R. Ford, Jr. 和 Delbert R. Fulkerson提出

方法的要点：

(1) **残存网络G_f**　　(residual network)

(2) **增广路径p**　　(augmenting path) 。

◆ 用增广路径对路径上边的流量进行修改，以增加流网络的流量。

判断是否得到最大流的条件是**最大流最小切割定理**，该定理将说明**算法何时终止，并在终止时获得一个最大流**。

Ford-Fulkerson方法的过程描述

FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)

1 initialize flow f to 0

2 **while** there exists an augmenting path p in the residual network G_f

3   augment flow f along p

4 **return** f

2. 残存网络（Residual Network）

对给定流网络G和流量f，G的**残存网络**记为G_f，也是一个有向图，由G中的结点和以下的边组成：

对于G中的一条任意边(u,v)，

(1) 若 $f(u,v) < c(u,v)$，则将**边(u,v)**和它的**反向边**(v,u)加入G_f，并设它们的**残存容量**为：

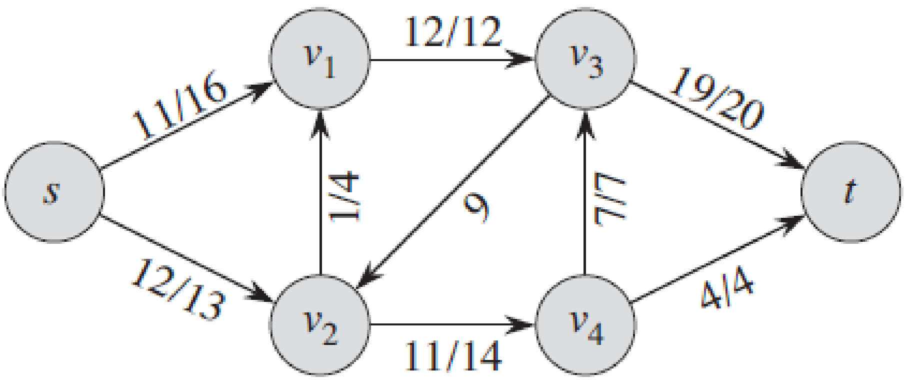
$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

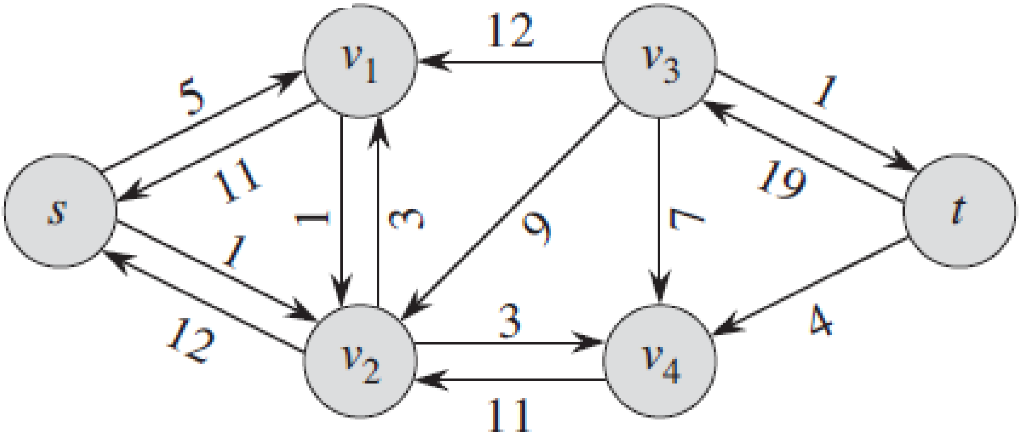
$$c_f(v,u) = f(u,v)$$

残存容量$c_f(u,v)$反映了边上可以增加流量的空间。

(2) 如果边(u,v)的流量等于其容量，则 $c_f(u,v)=0$，(u,v)不加入G_f。但**反向边(v,u)** 加入G_f，并置 $c_f(v,u)=f(u,v)$

例：





残存网络

残存容量

设流网络$G=(V,E)$，f是G中的一个流

◆ **残存容量**：

$$c_f(u,v)=\begin{cases} c(u,v)-f(u,v) & \text{if } (u,v)\in E\,, \\ f(v,u) & \text{if } (v,u)\in E\,, \\ 0 & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

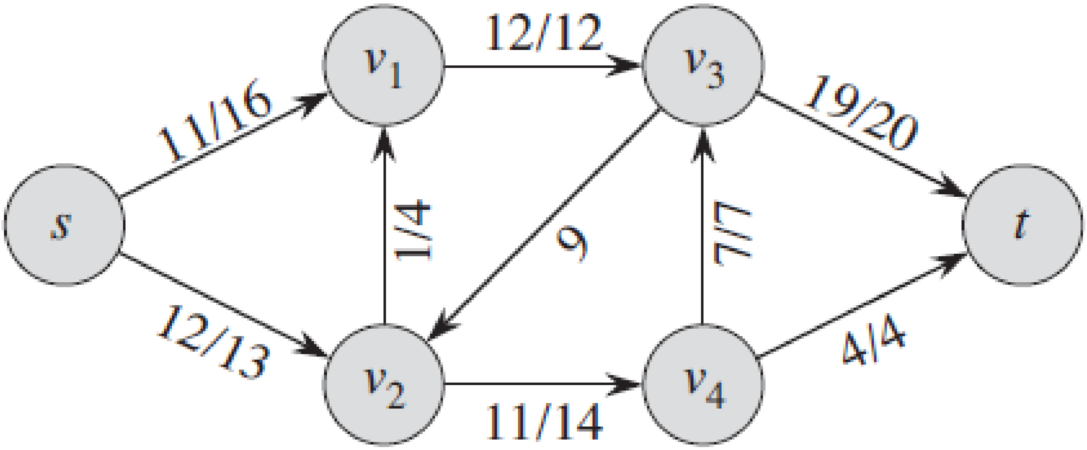
由f所诱导的图G的残存网络记为G_f：

$$G_f=(V,E_f)$$

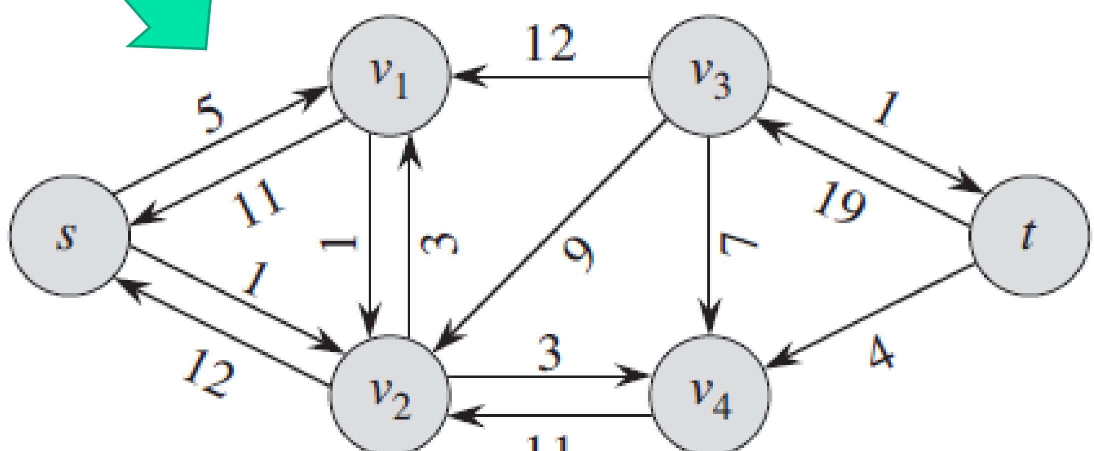
$E_f=\{(u,v)\in V\times V : c_f(u,v)>0\}$ 且 $|E_f|\le 2|E|$。

仅由残存容量大于0的边组成

残存网络示例：



流网络G



残存网络 G_f

定义 $f \uparrow f'$ 为用流 f' **对流f递增** (augmentation) 后得到的流：

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{if } (u,v) \in E\,, \\ 0 & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

其中，

$f'(u,v)$表示的是边（u,v）上流量的增加，

$f'(v,u)$表示的是边（u,v）上流量的减少

引理26.1 设G=(V,E)为一个流网络，源结点为s，汇点为t。设**f为G中的一个流。** 设 G_f 为由流 f 所诱导的G的残存网络，设 f' 为 G_f 中的一个流。那么 $f \uparrow f'$ **是G的一个流**，其值为：$|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$

证明

1.证明 $f\uparrow f'$ 是图G的一个流：(满足容量限制和流量守恒)

(1) 容量限制

根据定义，如果边（u, v）$\in E$，则 $c_f(v,u)=f(u,v)$。而且

因为 f' 是 G_f 的一个流，所以 $f'(v,u)\le c_f(v,u)=f(u,v)$。

因此,

$$\begin{aligned}(f\uparrow f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)-f'(v,u) \text{（根据定义）}\\ &\ge f(u,v)+f'(u,v)-f(u,v)\\ &= f'(u,v)\\ &\ge 0.\end{aligned}$$

每条边上的流量不为负

此外，

$$
\begin{aligned}
(f \uparrow f')(u,v) & \\
&= f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) \\
&\le f(u,v) + f'(u,v) \\
&\le f(u,v) + c_f(u,v) \\
&= f(u,v) + c(u,v) - f(u,v) \\
&= c(u,v)\,.
\end{aligned}
$$

满足容量限制

所以递增后，流 $f \uparrow f'$ 不超过容量的限制。

(2) 流量守恒

对所有的$u \in V-\{s,t\}$ 有：

$$
\begin{aligned}
\sum_{v\in V}(f \uparrow f')(u,v) &= \sum_{v\in V}(f(u,v)+f'(u,v)-f'(v,u)) \\
&= \sum_{v\in V} f(u,v)+\sum_{v\in V} f'(u,v)-\sum_{v\in V} f'(v,u) \\
&= \sum_{v\in V} f(v,u)+\sum_{v\in V} f'(v,u)-\sum_{v\in V} f'(u,v) \\
&= \sum_{v\in V}(f(v,u)+f'(v,u)-f'(u,v)) \\
&= \sum_{v\in V}(f \uparrow f')(v,u)\ ,
\end{aligned}
$$

注：f'是G_f的一个流，f和 f' 都满足流量守恒

2. 证明: $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$

定义 $V_1 = \{v : (s, v) \in E\}$

$V_2 = \{v : (v, s) \in E\}$

任意(s,v)和(v,s)不可能同时存在于流网络中，则：

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 且 $V_1 \cup V_2 \subseteq V$ 。

则有，

$$
\begin{aligned}
|f \uparrow f'| &= \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(s, v) - \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(v, s) \\
&= \sum_{v \in V_1} (f \uparrow f')(s, v) - \sum_{v \in V_2} (f \uparrow f')(v, s) ,
\end{aligned}
$$

$$|f \uparrow f'|$$

$$= \sum_{v \in V_1} (f \uparrow f')(s, v) - \sum_{v \in V_2} (f \uparrow f')(v, s)$$

$$= \sum_{v \in V_1} (f(s, v) + f'(s, v) - f'(v, s)) - \sum_{v \in V_2} (f(v, s) + f'(v, s) - f'(s, v))$$

$$= \sum_{v \in V_1} f(s, v) + \sum_{v \in V_1} f'(s, v) - \sum_{v \in V_1} f'(v, s) - \sum_{v \in V_2} f(v, s) - \sum_{v \in V_2} f'(v, s) + \sum_{v \in V_2} f'(s, v)$$

$$= \sum_{v \in V_1} f(s, v) - \sum_{v \in V_2} f(v, s) + \underline{\sum_{v \in V_1} f'(s, v) + \sum_{v \in V_2} f'(s, v)} - \underline{\sum_{v \in V_1} f'(v, s) - \sum_{v \in V_2} f'(v, s)}$$

$$= \sum_{v \in V_1} f(s, v) - \sum_{v \in V_2} f(v, s) + \sum_{v \in V_1 \cup V_2} f'(s, v) - \sum_{v \in V_1 \cup V_2} f'(v, s)$$

$$= \underline{\sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)} + \underline{\sum_{v \in V} f'(s, v) - \sum_{v \in V} f'(v, s)}$$

注：$V_1 \cup V_2 \subseteq V$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$$= |f| + |f'|$$

证毕

3. 增广路径

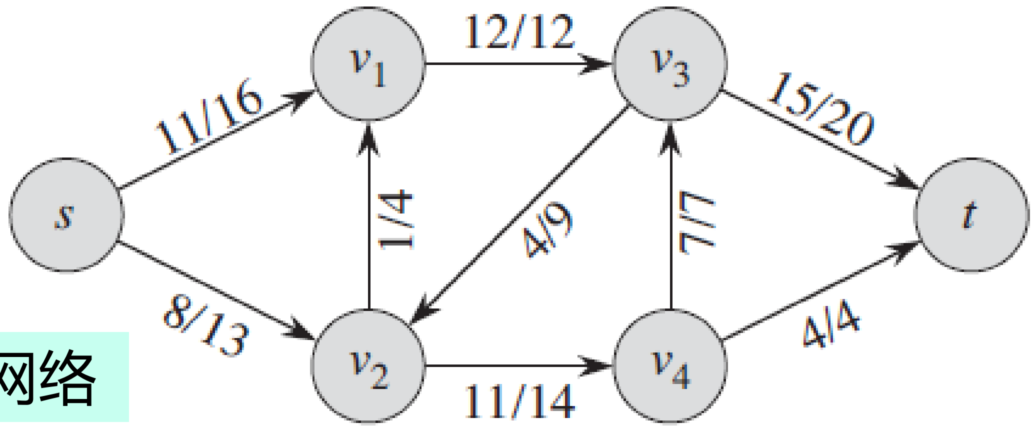
对给定流网络G=(V,E)和流f，**增广路径p**(Augmenting Path)是其**残存网络**G_f**中一条从源结点s到汇点t的简单路径。**

- 对于增广路径上的一条边(u,v)，其可增加的流值最大为该边的残存容量 $c_f(u,v)$。
- **对于增广路径p，能增加的最大流值称为该路径的残存容量**，记为$c_f(p)$：

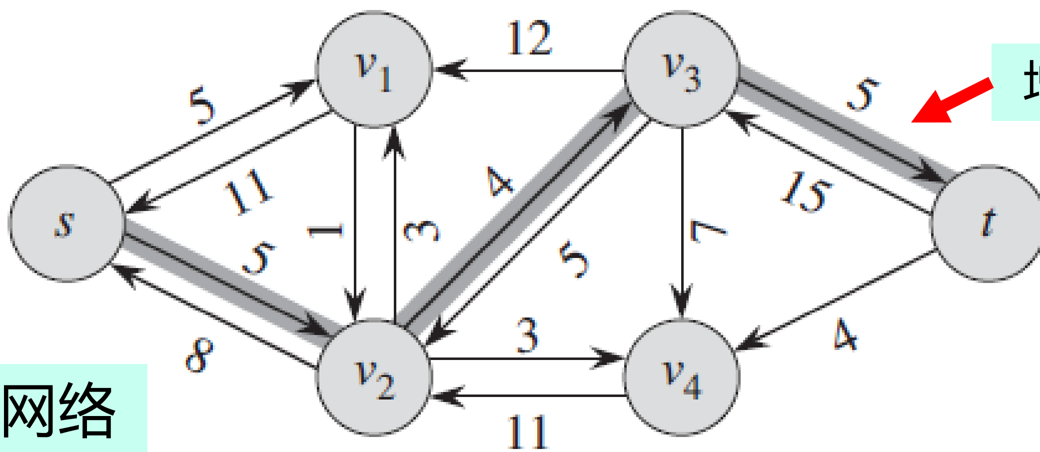
$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ is on } p\}$$

$$> 0$$

示例:



流网络



残存网络

增广路径 $p = \{s, v_2, v_3, t\}$

$c_f(s, v_2) = 5$

$c_f(v_2, v_3) = 4$

$c_f(v_3, t) = 5$

增广路径的残存容量

$$c_f(p) = \min\{c_f(s, v_2), c_f(v_2, v_3), c_f(v_3, t)\}$$

$$= 4$$

引理26.2 设$G=(V,E)$为一个流网络，f是图G的一个流。

记p为其残存网络G_f中的一条增广路径。

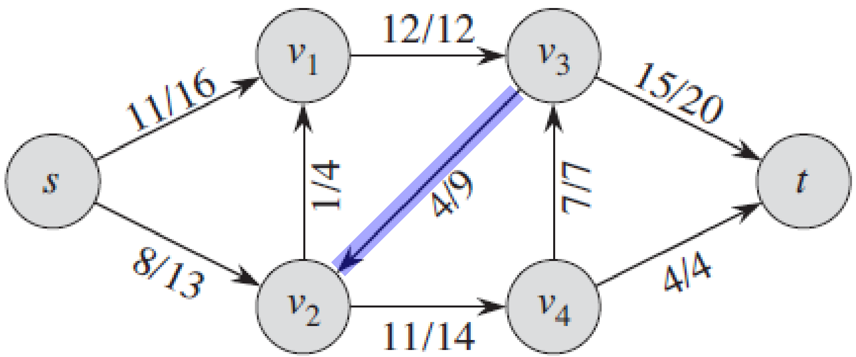
定义一个函数$f_p: V\times V \to R$ 如下：

$$f_p(u,v)=\begin{cases} c_f(p) & \text{if } (u,v) \text{ is on } p\,, \\ 0 & \text{otherwise}\,. \end{cases}$$

则f_p是残存网络G_f中的一个流，其值为$|f_p|=c_f(p)>0$。

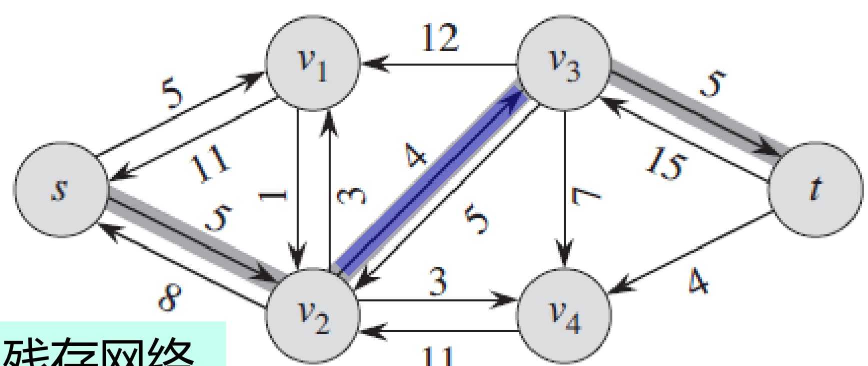
证明：略（参见26.2-7）。

将流 f 增加 f_p 的量，得到的仍是G的一个流，且**该流的值更加接近最大值。**

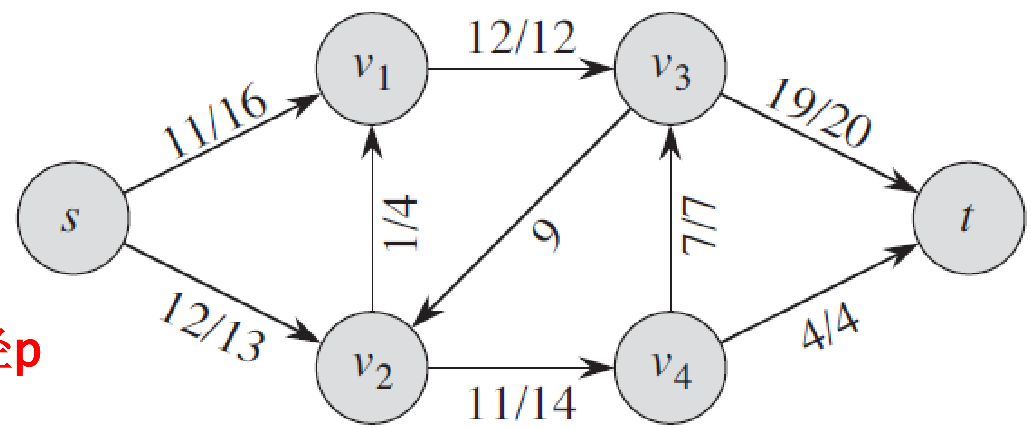


流网络

增广路径p



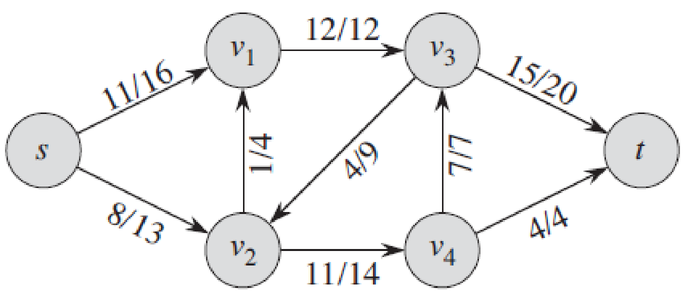
残存网络

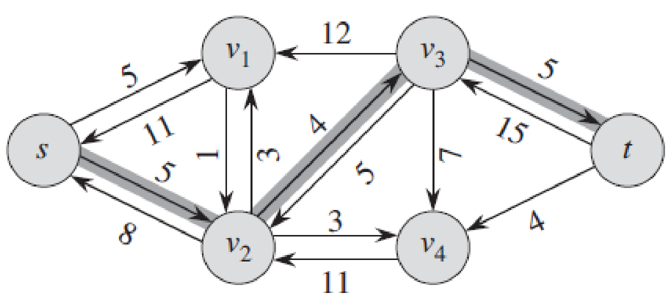


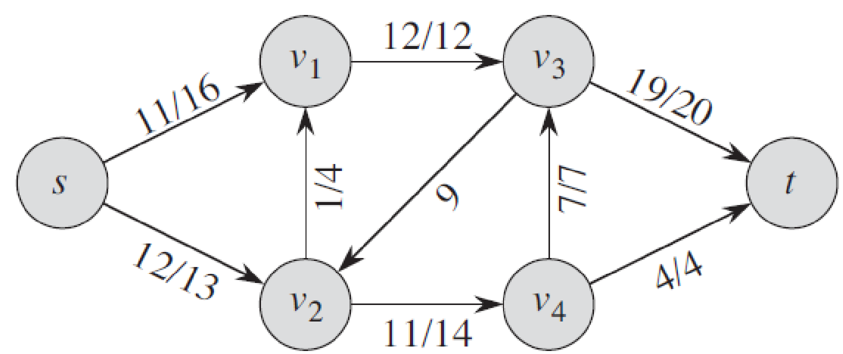
用 f_p 增加流量后的流网络

推论26.3：设 $G=(V,E)$为一个流网络，f是图G的一个流，p为残存网络 G_f 中的一条增广路径。设 f_p 是上式定义的残存网络的流，假定将f增加 f_p 的量，则**函数 $f\uparrow f_p$ 是图G的一个流，其值为 $|f\uparrow f_p|=|f|+|f_p|>|f|$。**

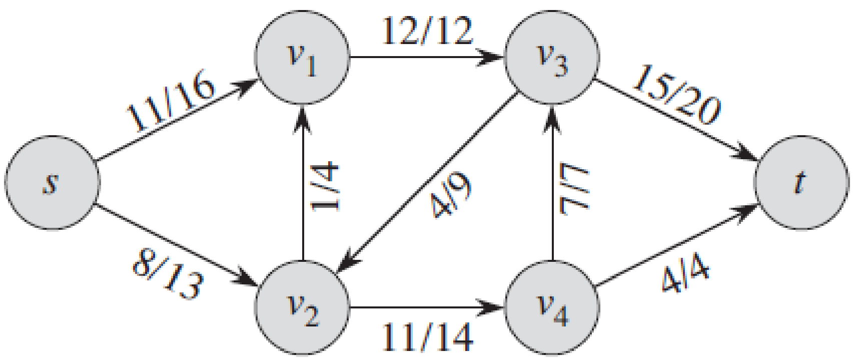
证明：根据引理26.1和引理26.2可得证。



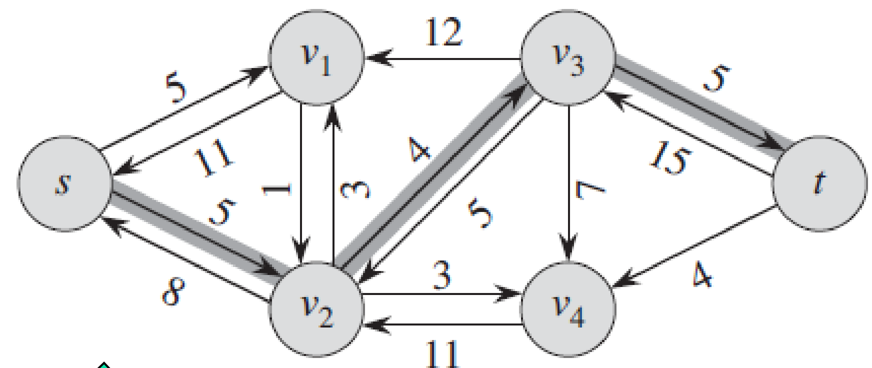




利用残存网络和增广路径实现Ford-Fulkerson方法:

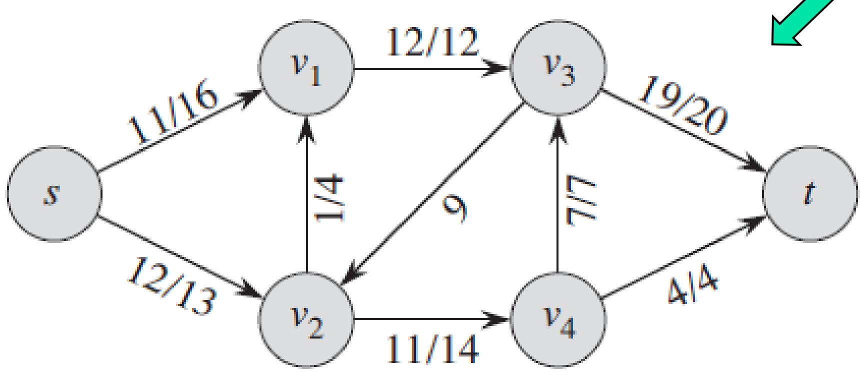


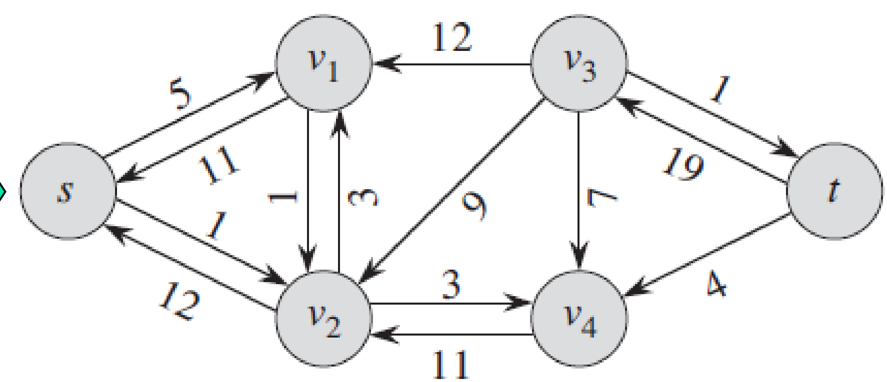
流网络



残存网络1与一条增广路径

增加流值





残存网络2

4. 流网络的切割

给定流网络 $G=(V,E)$，源结点为s，汇点为t。

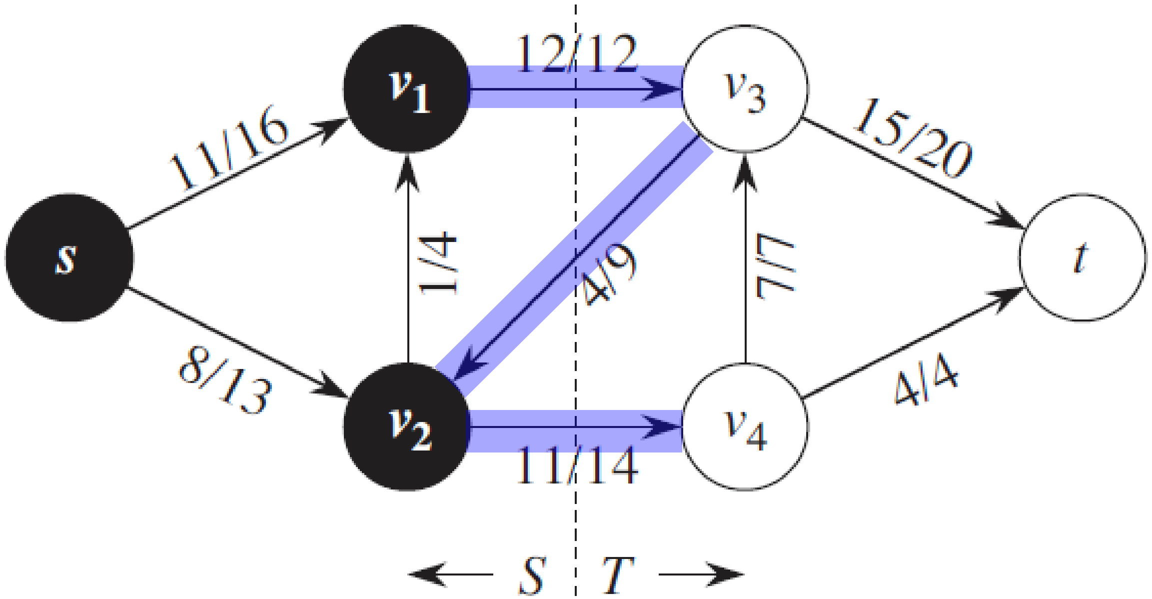
定义一个**切割(S,T)**，**将结点集合V分成两部分S和T=V-S**，**使得** $s\in S, t\in T$。

若f是G上的一个流，横跨切割(S,T)的净流量f(S,T)为：

$$f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)-\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)$$

切割(S,T)的容量为： $c(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)$

- **最小切割**：**网络中容量最小的切割**。



切割：$(S,T): S=\{s,v_1,v_2\}, T=\{v_3,v_4,t\}$

$$f(S,T)=f(v_1,v_3)+f(v_2,v_4)-f(v_3,v_2)=12+11-4=19$$

$$c(S,T)=c(v_1,v_3)+c(v_2,v_4)=12+14=26$$

引理26.4 设f为流网络G的一个流，该流网络的源结点为s，汇点为t，设(S,T)为流网络G的任意切割，则**横跨切割(S,T)的净流量为**　　　　　　　　　。

证明： 对于任意 $u \in V - \{s, t\}$：

$$\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) = 0 .$$

则： $$\sum_{u \in S - \{s\}} \left(\sum_{v \in V} f(u, v) - \sum_{v \in V} f(v, u) \right)$$

定义： $$| f | = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right)$$

$$= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S-\{s\}} \sum_{v \in V} f(v,u)$$

$$= \sum_{v \in V} \left(f(s,v) + \sum_{u \in S-\{s\}} f(u,v) \right) - \sum_{v \in V} \left(f(v,s) + \sum_{u \in S-\{s\}} f(v,u) \right)$$

$$= \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in V} \sum_{u \in S} f(v,u)$$

将上式针对S和T进行分解，得：

$$|f| = \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(u,v) + \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(u,v) - \sum_{v \in S} \sum_{u \in S} f(v,u) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v,u)$$

化简有：

$$
\begin{aligned}
|f| &= \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(u,v) + \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\
&= \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) + \left(\sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(u,v) - \sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u)\right) \\
&= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u) \\
&= f(S,T)
\end{aligned}
$$

证毕，即横跨（任何）切割的净流量都等于流的值 $|f|$。

推论26.5：**流网络G中任意流f的值不能超过G的任意切割的容量。**

证明：设(S,T)为流网络G的任意切割，设f为G中的任意流。

$$
\begin{aligned}
|f| &= f(S,T) \\
&= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u) \\
&\le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \\
&\le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) \\
&= c(S,T) .
\end{aligned}
$$

最大流最小切割定理

定理 26.6： 设f为流网络G=(V,E)中的一个流，该流网络的源结点为s，汇点为t，则下面的条件是等价的：

（1）**f是G的一个最大流**

（2）**残存网络G_f不包括任何增广路径**

（3）$|f|=c(S,T)$，**其中(S,T)是流网络G的某个切割**

最大流最小切割定理说明，流网络G的最大流f在流的值等于某个切割的容量时达到，此时在对应的残存网络G_f中不再有增广路径。

定理的证明

(1)→(2)证明：使用反证法

假定f是G的一个最大流，但残存网络G_f同时**包含一条增广路径p**。设f_p是残存网络G_f中由增广路径p定义的流。

根据推论1，对f增加流 f_p所形成的流是G中的一个流，且流值严格大于|f|: $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$，**与f是最大流冲突**。

(2)→(3) 证明：假定G_f中不包含任何增广路径，即**残存网络**G_f**中不存在从源结点s到汇点t的路径。**

定义**切割(S,T)**如下

$$S=\{v\in V:在G_f中存在一条从s到v的路径\}，\ \mathrm{T}=\mathrm{V}-\mathrm{S}$$

为证明定理，只需证明$|f|=c(S,T)$。

根据引理26.4，$f(S,T)=|f|$，

所以只需要证明 $f(S,T)=c(S,T)$

情况1：$(u,v)\in E$，则有 $f(u,v)=c(u,v)$。

否则 $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)>0$，从而得到 $(u,v)\in E_f$，

并推出 $v\in S$，与v的定义矛盾。

情况2：$(v,u)\in E$，则有 $f(v,u)=0$。

否则 $c_f(u,v)=f(v,u)>0$，从而得到 $(u,v)\in E_f$，

并推出 $v\in S$，与v的定义矛盾。

情况3：$(v,u)\notin E$ 且 $(u,v)\notin E$，则 $f(u,v)=f(v,u)=0$

综上，
$$\begin{aligned} f(S,T) &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u) \\ &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) - \sum_{v\in T}\sum_{u\in S} 0 \\ &= c(S,T)\,. \end{aligned}$$

证毕

(3)→(1)证明：根据推论26.5，对于所有切割(S,T)，$|f| \le c(S,T)$ 。

因此，$|f| = c(S,T)$ 意味着f是一个最大流。

定理证毕

找最大流：

```
FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
initialize flow f to 0
while there exists an augmenting path p in the residual network G_f
    augment flow f along p
return f
```

基本思想：通过不断增加**可行流值**找最大流

技术路线：

（1）从流值为0的初始流开始

（2）对流值进行增加

（3）确认无法增加流值，即得到最大流。

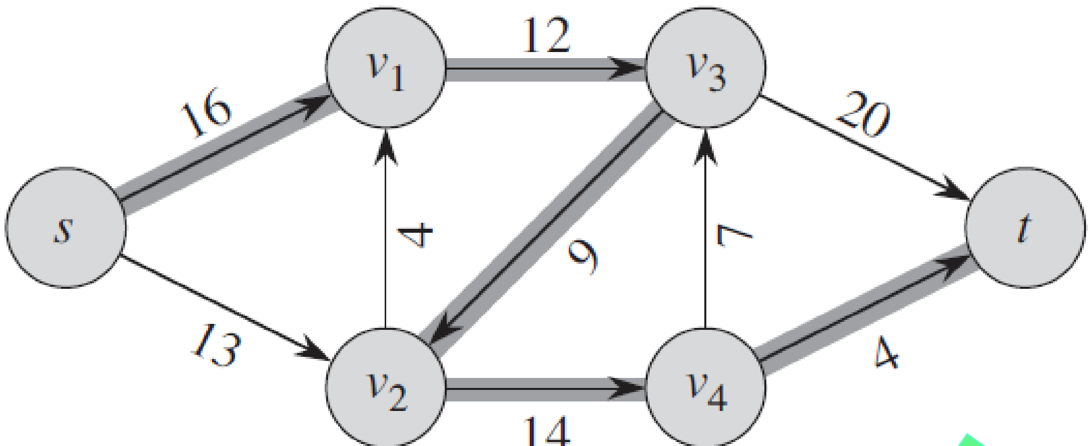
Ford-Fulkerson算法的细化

```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    (u, v).f = 0
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
    c_f(p) = min {c_f(u, v) : (u, v) is in p}
    for each edge (u, v) in p
        if (u, v) ∈ E
            (u, v).f = (u, v).f + c_f(p)
        else (v, u).f = (v, u).f − c_f(p)
```

- **深度优先搜索**或者**广度优先搜索**

基本的Ford-Fulkerson算法

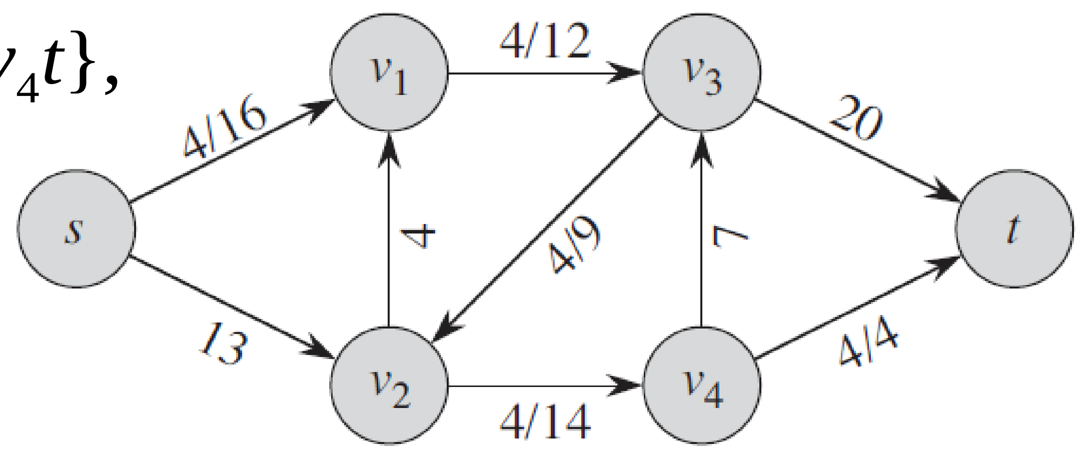
算法运行示例：Iteration 1



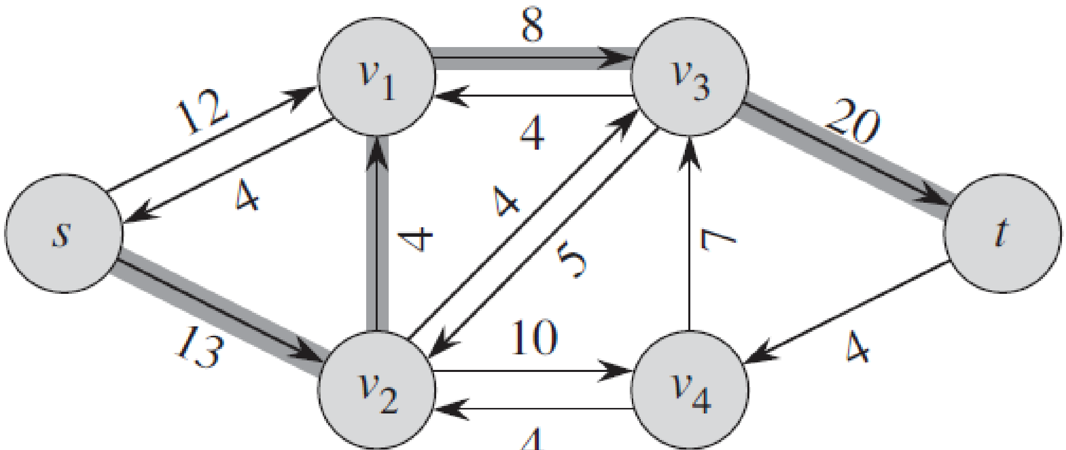
流网络和增广路径

$$p=\{sv_1, v_1v_3, v_3v_2, v_2v_4, v_4t\},$$

$$c_f(p)=4$$



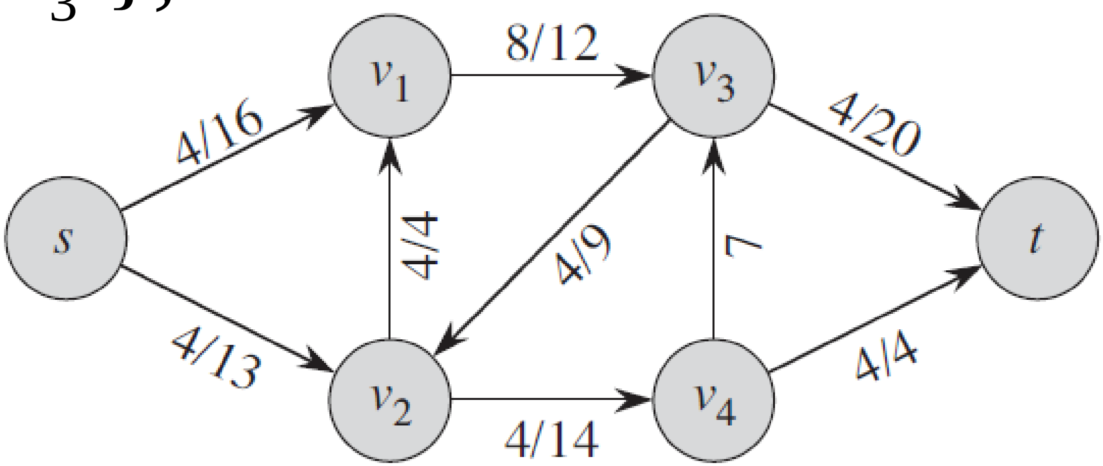
Iteration 2



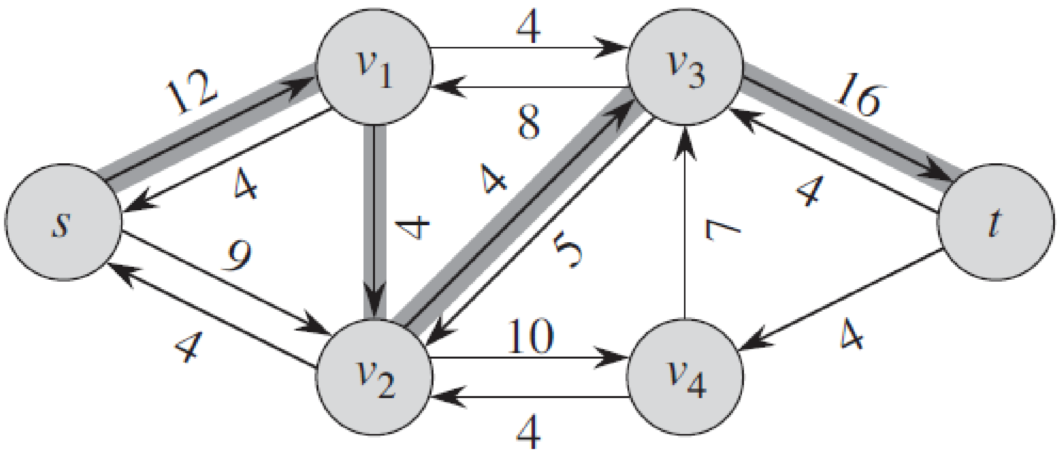
残余网络和增广路径

$$p = \{sv_2, v_2v_1, v_1v_3, v_3t\},$$

$$c_f(p) = 4$$



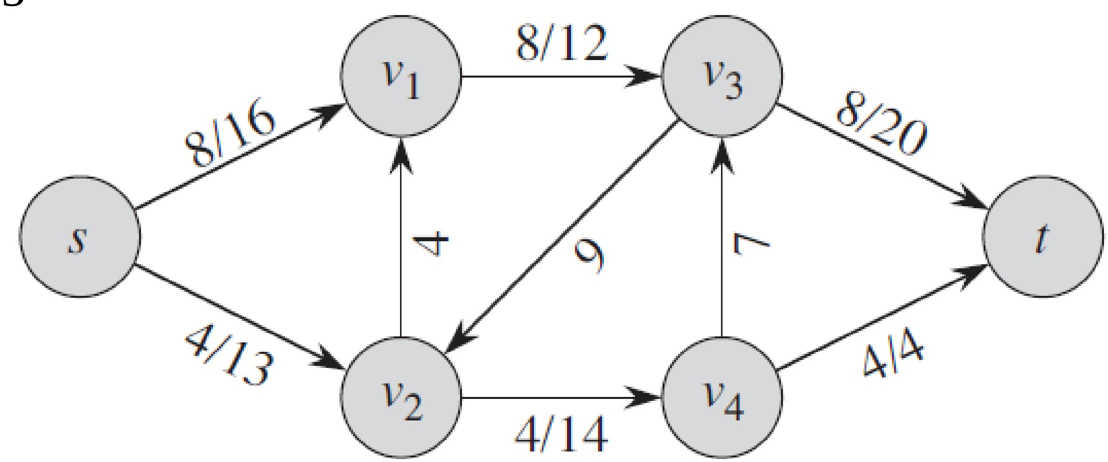
Iteration 3



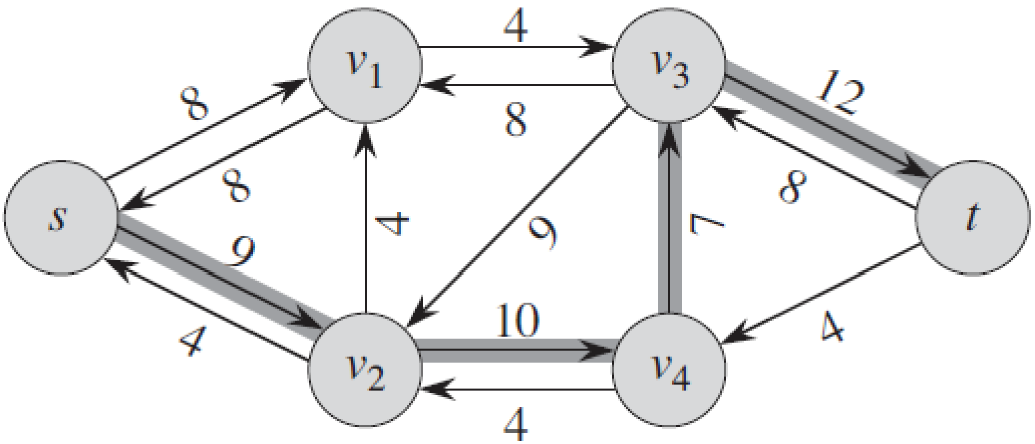
残余网络和增广路径

$$p=\{sv_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3t\},$$

$$c_f(p)=4$$

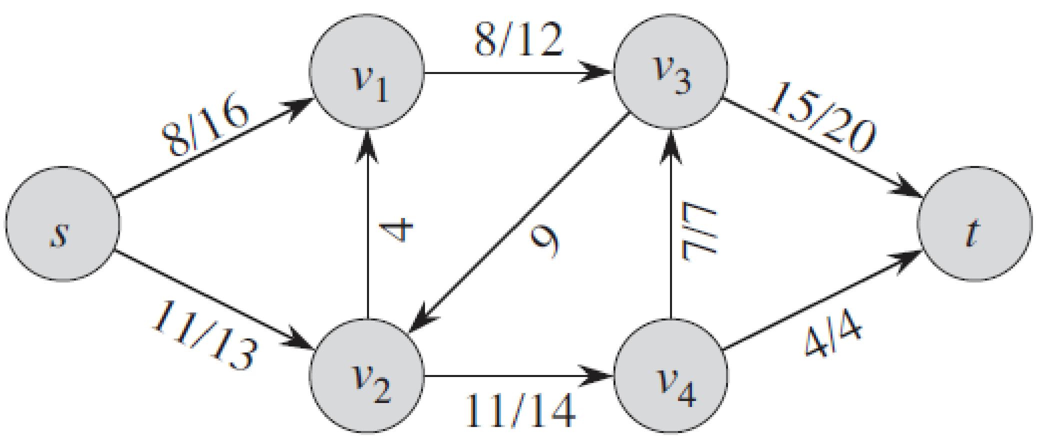


Iteration 4



流网

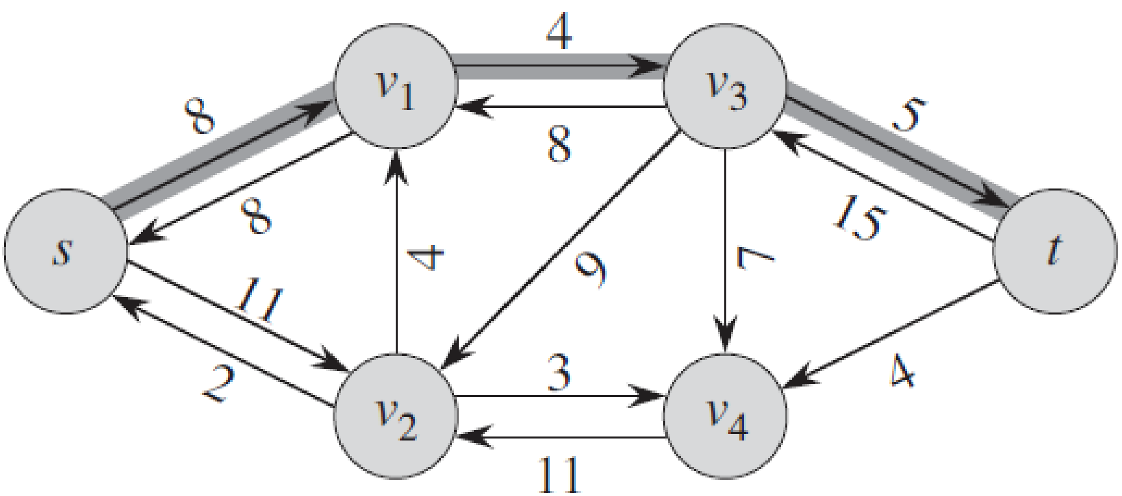
残余网络和增广路径



$$p = \{sv_2, v_2v_4, v_4v_3, v_3t\},$$

$$c_f(p) = 7$$

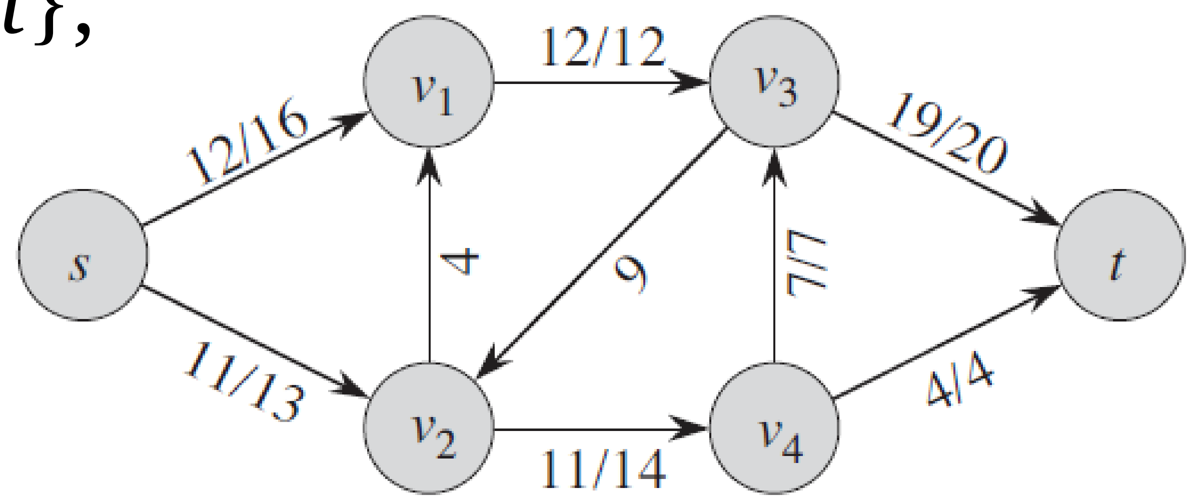
Iteration 5



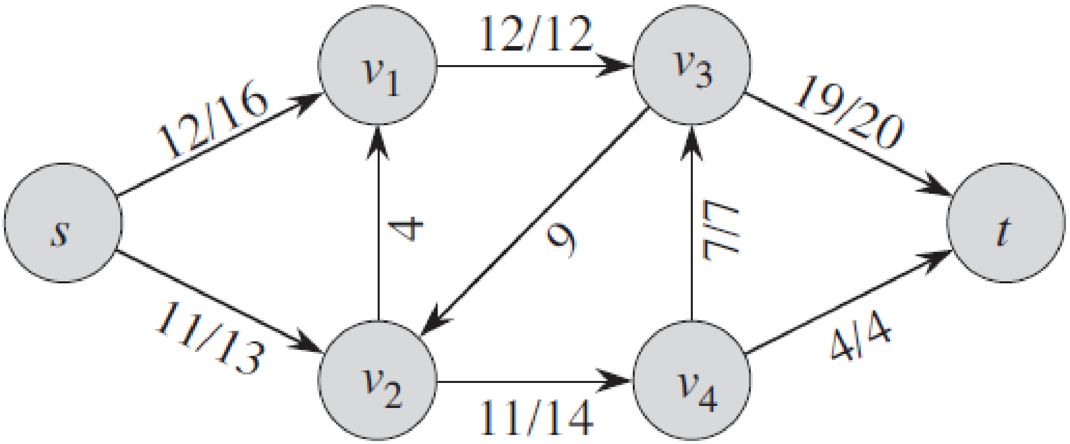
残余网络和增广路径

$$p = \{sv_1, v_1v_3, v_3t\},$$

$$c_f(p) = 4$$



无增广路径，得到最大流 $|f| = 23$



Ford-Fulkerson算法复杂性分析

假定：容量为整数。

时间复杂度：$O(|E| \times |f^*|)$，

注：如边的容量是无理数时，Ford-Fulkerson方法可能不能终止，也就是不会得到最大流。

运行时间分析：

（1）while循环的次数：因为每一次循环，流值至少增加1，所以最多有 $O(|f^*|)$ 次迭代。

（2）每次循环时间

每次循环做三个主要操作，**计算残存网络**、**寻找增广路径**和**更新每条边的流值。**

◆计算残存网络：$O(|E|)$

◆计算增广路径：$O(|\mathrm{V}|+|E|)\in O(|E|)$

◆更新：$O(|E|)$

综和：$O(|E|\times|f^*|)$

Edmonds-Karp算法

Edmonds-Karp算法的不同：**使用广度优先搜索寻找源结点到汇点的最短路径作为增广路径。**

FORD-FULKERSON(G, s, t)

for each edge $(u, v) \in G.E$
  $(u, v).f = 0$
while there exists a path p from s to t in the residual network G_f
  $c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } p\}$
  for each edge (u, v) in p
    if $(u, v) \in E$
      $(u, v).f = (u, v).f + c_f(p)$
    else $(v, u).f = (v, u).f - c_f(p)$

运行时间：$O(VE^2)$

Edmonds-Karp算法运行时间分析

(1) **找最短路径:O(E)。**

(2) **关键边：O(VE)。**

综合：**O(VE²)。**

证明过程:

令 $\delta_f(u,v)$表示残存网络中 G_f 中从结点u到结点v的最短路径距离。

引理4： 如果Edmonds-Karp算法运行的流网络$G=(V,E)$上，该网络的源结点是s汇点为t，则对于所有结点 $v \in V-\{s,t\}$ ，残存网络 G_f 中的最短路径距离 $\delta_f(s,v)$ 随着每次流量的递增而单调递增

证明： 假设对于某个结点$v \in V-\{s,t\}$，存在一个流量递增操作，导致从源结点s到v的路径距离减小。

设f是第一个导致某条最短路径距离减少的流量递增操作之前的流量，f'是递增操作之后的流量。

设v是在流递增操作中最短路径被减小的结点中$\delta_{f'}(s,v)$最小的结点，根据假设，应有 $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$。

下面证明这个不等式不成立。

设 $p = s \cdots \to u \to v$ 为残存网络 $G_{f'}$ 中从源结点s到结点v的一条最短路径，则：

$(u,v) \in E_{f'}$，且 $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$

对于u，应有 $\delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u)$

且 $(u,v) \notin E_f$。否则

$$\begin{aligned} \delta_f(s,v) &\leq \delta_f(s,u) + 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s,u) + 1 \\ &= \delta_{f'}(s,v) \end{aligned}$$

与假设矛盾。

由上可得：$(u,v)\in E_{f'}$ 时，$(u,v)\notin E_f$ 。

(1) $(u,v)\notin E_f$：意味着相对流*f*，*f*(u,v) = c(u,v)；

(2) $(u,v)\in E_{f'}$：意味着相对流*f′*，*f′*(u,v) < c(u,v)。

根据**Edmonds-Karp算法**，增广路径是最短路径，增广路径上的一条边(v,u)存在于此最短路径上。根据最短路径的性质，应有：

$$\begin{aligned} \delta_f(s,v) &= \delta_f(s,u) - 1 \\ &\leq \delta_{f'}(s,u) - 1 \qquad \delta_{f'}(s,u) \geq \delta_f(s,u) \\ &= \delta_{f'}(s,v) - 2 \qquad \delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1 \end{aligned}$$

所以流量递增操作导致从源结点s到v的路径距离减小不成立。

定理2：如果Edmonds-Karp算法运行在源结点为s汇点为t的流网络G=(V,E)上，则算法执行的流量递增操作的次数为**O(VE)**。

关键边：在残存网络G_f中，如果一条路径p的残存容量等于该条路径上边（u,v）的残存容量，即 $c_f(p) = c_f(u,v)$. 那么(u,v)称为增广路径p上的关键边。

- 由前一引理已知： **Edmonds-Karp算法中，当流值增加的时候，从s到每个结点的距离会增加。**
- 证明：**一条边（u,v）成为关键边之后，下次再成为关键边的时候，s到u的最短距离至少会增加2。**

设u,v∈V，且(u,v)∈ E。

考虑(u,v)第一次成为关键边时：(u,v)处于增广路径上，而增广路径是最短路径，所以有：$\delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1$

对流增加后，(u,v) 就会从下面的残存网络中消失，直到某一步从u到v的流量减小了：此时，**(v,u)是增广路径上的边**，记此时的流为f'，则有

$$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1$$

根据引理26.7，$\delta_f(s,v)\le\delta_{f'}(s,v)$，所以有

$$\begin{aligned}\delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v)+1\\ &\ge \delta_f(s,v)+1\\ &= \delta_f(s,u)+2\,.\end{aligned}$$

因此，从(u,v)第一次成为关键边后算起，(u,v)最多还能成为关键边的次数至多是 $(|V|-2)/2=|V|/2-1$。即，(u,v)能成为关键边的总次数最多为 $|V|/2$ 。

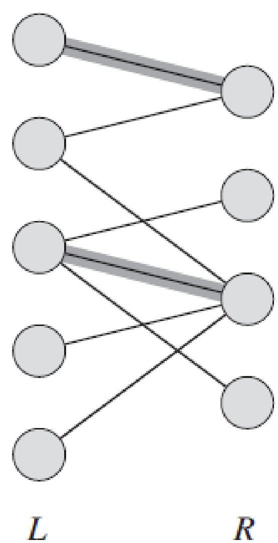
而每次流值增加，都存在一条增广路径，每条增广路径上至少有一条关键边，而每条边都可能成为关键边，所以Edmonds-Karp算法执行流值递增操作的次数至多为 O(VE)。 ■

最大流算法应用：寻找最大二分匹配

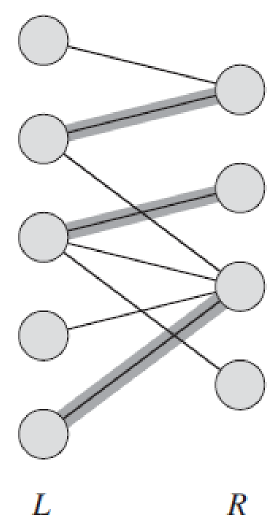
匹配：对无向图G=(V,E)的一个**匹配是边的一个子集** $M \subseteq E$，使得对于所有的结点v，子集M中最多有一条边与结点v相连。

M中边的数量称为M的基数，记为|M|。

最大匹配：基数最大的匹配。即，如果M是一个最大匹配，则对于任意匹配M'，有 $|M| \geq |M^{'}|$



一个匹配

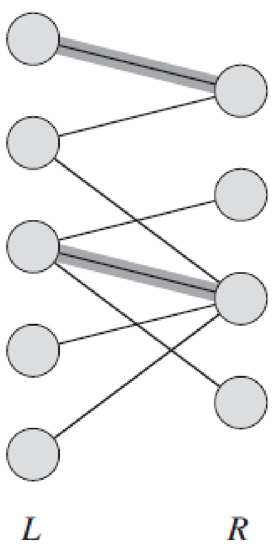


最大匹配

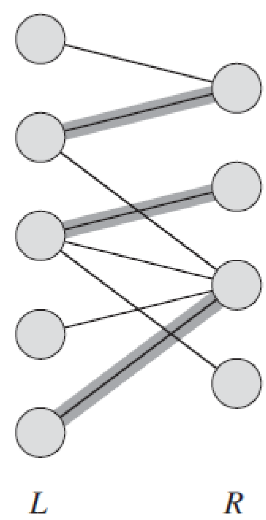
二分图：

结点集合V可以划分为两部分L和R，$L \cup R = V, L \cap R = \varnothing$ ，边集E中所有边横跨L和R，即对于任意的 $(u,v) \in E$ ，有

$$u \in L, v \in R \text{或} v \in L, u \in R$$



二分匹配



最大二分匹配

寻找最大二分匹配

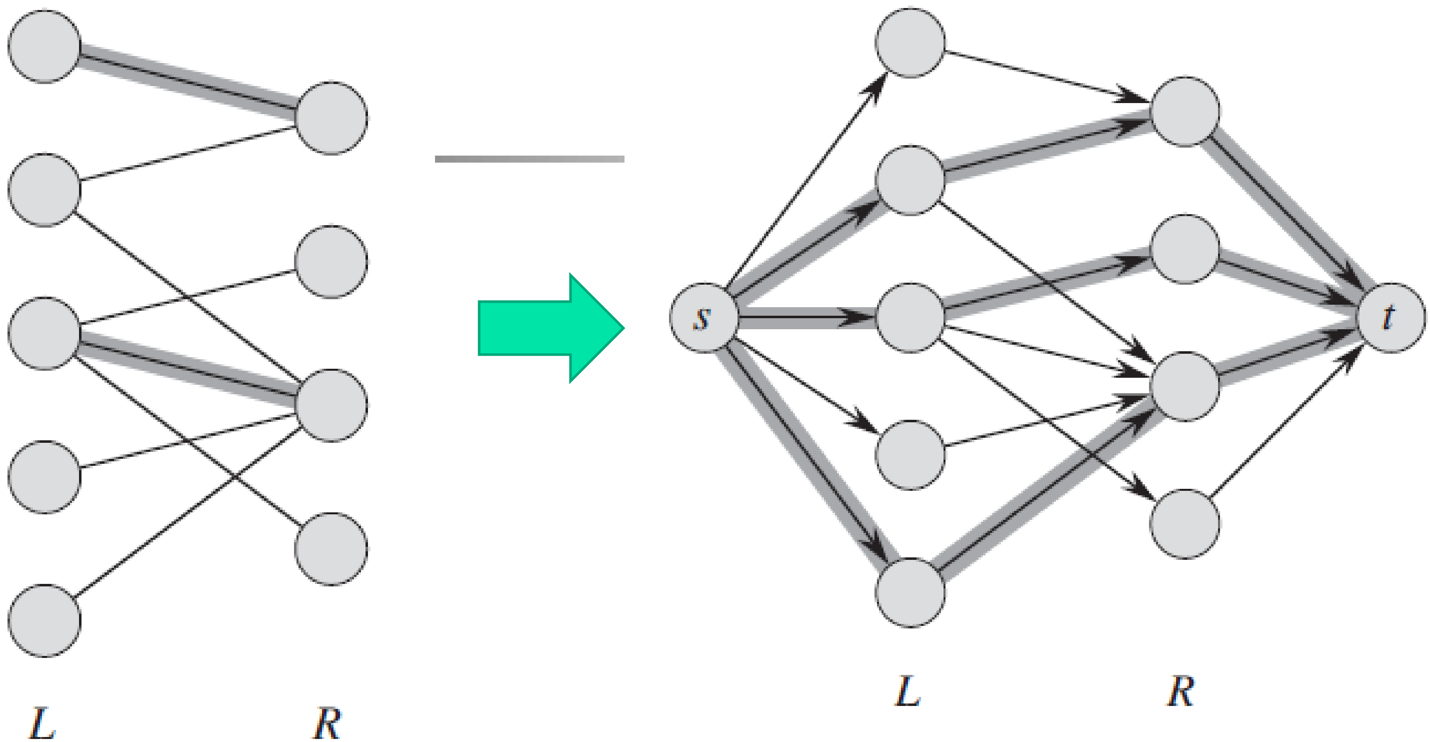
转化:

- **新增源结点s和汇点t，令**$V'=V\cup\{s,t\}$
- **新增s到L中所有结点的边和R中所有结点到t的边**

$$E'=\{(s,u):u\in L\}\cup\{(u,v):(u,v)\in E\}\cup\{(v,t):v\in R\}$$

- **定义每条边上的容量为单位容量:** $(u,v)\in E'$

  $c(u,v)=1$

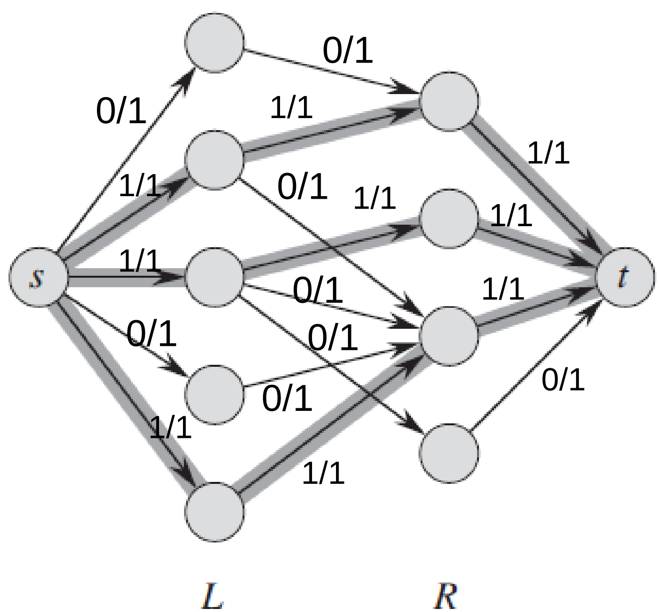


- 不失一般性，假定结点集V中的每个结点至少有一条相连的边，|E|≥|V|/2，则有 $|E| \le |E'| = |E| + |V| \le 3|E|$

  所以 $|E'| \in \Theta(|E|)$

寻找最大二分匹配算法

利用Ford-Fulkerson算法求得G' 中的最大流。流值大于0且在原图中的边将构成最大匹配，而最大匹配的边数就是最大流的流值。



最大匹配=3

(1) 证明原图和转化后的流网络中，匹配和流一一对应，并且匹配的边数对应于流值

引理26.9：如果M是G中的一个匹配，则流网络G' 中存在一个整数值的流f，使得$|f|=|M|$。反之，如果f是G' 中的一个整数流，则G中存在一个匹配M，使得$|M|=|f|$。

证明：假定M是G中匹配，定义G' 中对应的流f：

如果$(u,v)\in M$，$f(s,u)=f(u,v)=f(v,t)=1$;

所有其它属于E’ 的边(u, v)，$f(u, v)=0$ 。

（1）可以验证f满足容量限制和流量守恒性质 (自行验证)。

（2）$|M|=|f|$?

假定f是G' 中如上所定义的一个整数值流，并设

$$M = \{(u, v) : u \in L,\ v \in R,\ \text{and}\ f(u, v) > 0\}$$

根据G' 的构造，每个结点$u \in L$只有一条进入的边，即(s,u)，其容量为1：根据能量守恒性质，必有一个单位的流出。由于f是整数值的流， 所以u不仅最多只能从一个单边流入1单位流量，而且也只能最多从一条边流出。

同样的讨论可应用于v∈R，**v最多有一条带有正值流的入边。**

所以M是一个匹配（即对于所有的结点v，M中最多有一条边与之相连）。

从而有**|M|=|*f*|**：

根据f的定义，对每个匹配的结点u∈L，有f(s,u)=1，而对于每条边(u,v)∈E-M，有f(u,v)=0。

因此，横跨切割(L∪{s}，R∪{t})的净流量f(L∪{s}, R∪{t})等于|M|。根据引理26.4，流的值 $|f|=|M|$。 证毕

（2）证明在容量限制是整数的前提下，Ford-Fulkerson方法产生的流是整数值的流。

定理26.10（完整性定理）如果容量函数c只能取整数值，则Ford-Fulkerson方法所生成的最大流f满足$|f|$是整数值的性质。而且，对于所有的结点u和v，$f(u,v)$的值都是整数。

证明：可以通过对迭代次数的归纳进行证明，留作练习。

（3）证明最大流的流值等于最大匹配的基数

推论26.11 二分图G的一个最大匹配M的边数等于其对应的流网络G' 中某一最大流f的值。

证明：

假定M是图G中的一个最大匹配，但流网络G'中的流f不是最大流。那么G'中存在一个最大流f'，满足$|f'|>|f|$。

由于G' 的容量都是整数值，根据定理26.10，f'的值也是整数值。同时，f'有一个对应的匹配M'，使得$|M'|=|f'|>|f|=|M|$，这与M是最大匹配相矛盾。

同理可证，如果f是G'中的一个最大流，则其对应的匹配是G的一个最大匹配。 ■

最大匹配M可以直接从找到的整数最大流*f*获得，这一过程的时间复杂度是O(VE)。

最大流总结

1. 基本概念：**流网络**，**流**，**最大流**等；
2. 解决最大流问题的**Ford-Fulkerson方法**，相关概念有**残存网络**、**增广路径**以及理论基础**最大流最小切割定理**；
3. **Ford-Fulkerson算法**和**Edmonds-Karp**算法，相关性质和证明；
4. 最大流算法的应用：解决**最大二分匹配问题。**

作业：26.1-1，26.2-3，26.3-1