第二章 插值方法 /* Interpolation */

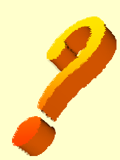
引言

表示两个变量x, y内在关系一般由函数式y=f(x)表达。
但在实际问题中，有两种情况:

1. 由实验观测而得到的一组离散数据(函数表)，虽然这种函数关系式y=f(x)存在且连续，但未知。

2. 函数解析表达式已知，但计算复杂，不便使用。通常也造函数表。如，y=sin(x), y=lg(x)。

有时要求不在表上的函数值，怎么办?



办法：根据所给的y=f(x)的函数表，

构造一个简单的连续函数g(x)近似代替f(x)。

Def: g(x)为逼近函数，f(x)为被逼近函数。

近似代替即逼近的方法有很多种，通常是：插值方法。

已知：f(x)的的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

求g(x)使 $g(x_i)=y_i$ ，$i=0,1,2,3\ldots n$.

Def: g(x)为f(x)的插值函数，f(x)为被插值函数。

构造g(x)的方法还有：

一致逼近、最佳均方逼近和数据拟合。

简单函数g(x)指可用四则运算计算的函数：

如：有理函数(分式函数)、多项式或分段多项式。

当g(x)为多项式时，该插值方法称为代数多项式插值，称插值函数g(x)为插值多项式。

本章主要介绍多项式插值的理论与方法。

它在实践中应用很广。

插值区间

Problem I：已知y=f(x)的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

且x_i(i=0,1,…,n)两两互异，

$x_i\in[a,b]$，

求次数不超过n的多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (2.1)$$

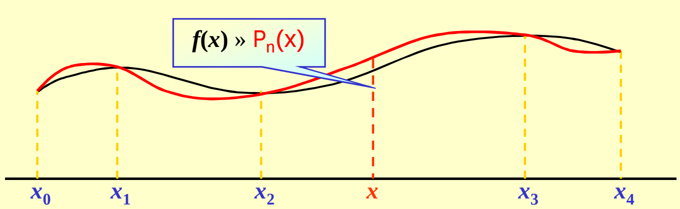
使得 $P_n(x_i)=y_i \qquad i=0,1,\ldots,n \qquad (2.2)$

插值条件

Def: n+1个互异点$x_0,x_1,\ldots,x_n$称为**插值节点**，其所在区间[a,b]为**插值区间**，(2.2)式为**插值条件**。

多项式插值问题的几何意义

多项式$P_n(x)$，其几何曲线过给定的y=f(x)的n+1个点(x_i，y_i)，i=0,1,2,...,n.



插值多项式的唯一性

对于Prbloem I中的$P_n(x)$是否存在？解是否唯一？如何求？

显然，关键是求$P_n(x)$ 的系数$a_0,a_1,\ldots,a_n$.

定理2.1 在n+1个互异的插值结点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上满足插值条件(2.2)的次数不超过n的代数多项式$P_n(x)$存在且唯一。

分析：为求 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (2.1)$

主要考虑插值条件

$$P_n(x_i)=y_i \qquad i=0,1,\cdots,n \qquad (2.2)$$

定理2.1的证明

证明：由插值条件，有，

$$\left.\begin{aligned}
P_n(x_0)&=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0\\
P_n(x_1)&=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1\\
&\vdots\\
P_n(x_n)&=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n
\end{aligned}\right\}\quad(2.3)$$

关于 $a_0,a_1,\ldots,a_n$的非齐次线性方程组

其系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ & & \cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)\neq 0$$

$$(\because i\neq j, x_i\neq x_j)$$

∴ 方程组(2.3)的解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$存在且唯一，

∴ 插值多项式 存在且唯一。

例1 给定f(x)的函数表，求f(x)的次数不超过3的插值多项式。

x	-1	1	2	5
y	-7	7	4	35

解：设$P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \\ 35 \end{pmatrix}$$

解方程组得 $a_0=10, a_1=5, a_2=-10, a_3=2$，

即$P_3(x)=10+5x-10x^2+2x^3$

n=20,在 10^8次/秒的计算机上计算需几十万年！