非特異射影曲線に関する WEIL 予想の証明

HANS

Abstract. 本稿では, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の非特異射影曲線に関する Weil 予想を証明しようと思う.

1. Hasse-Weil ゼータ函数の定義と Weil 予想

$q = p^m$ を素冪, X を $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体とする. ここで, 体 k 上の代数多様体とは, k 上幾何学的整な代数的スキームのことを指す. この時, X に関する Hasse-Weil ゼータ函数 $Z(X,t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ を,

$$Z(X,t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#(X(\mathbb{F}_{q^m}))}{m} t^m\right)$$

と定める. Weil 予想とは, 以下の主張である:

予想 1.1. X を $\mathbb{F}_q$ 上滑らかな n 次元射影代数多様体とすると, 以下が成立する.

(1) 有理性: $Z(X,t)$ は有理函数である. つまり $Z(X,t) \in \mathbb{Q}(t)$ である.

(2) 函数等式: 以下の等式が成立する;

$$Z\left(X, \frac{1}{qt}\right) = \pm q^{n(\Delta^2)/2} t^{(\Delta^2)} Z(X,t)$$

ここで, $\Delta \subset X \times_{\mathbb{F}_q} X$ は対角線である.

(3) Riemann 予想: 各 $i \in \{0, \dots, 2n\}$ について, $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して, $P_0(t) = 1 - t$, $P_{2n}(t) = (1 - q^n t)$ であり, $1 \leq i \leq 2n-1$ について,

$$P_i(t) = \prod_j (1 - \alpha_{ij} t),\ |\alpha_{ij}| = q^{i/2}$$

が成立し,

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t) \dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t) \dots P_{2n}(t)}$$

が成立する.

本稿では, これらを (一般の場合には証明が難しいので)X が一次元の場合に限って証明しようと思う.

2. 有理性の証明

本節では $\mathbb{F}_q$ 上の非特異完備曲線の Hasse-Weil ゼータ函数の有理性を以下のかたちで証明する. 以下 X は $\mathbb{F}_q$ 上の完備非特異曲線として, g をその種数 $(= h^1(X, \mathcal{O}_X))$ とする.

定理 2.1. ある $2g$ 次以下の多項式 $f \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して,

$$Z(X,t) = \frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

となる.

補題 2.1. X^{cl} で X の閉点全体を表すことにする. このとき,

$$Z(X,s)=\prod_{x\in X^{\mathrm{cl}}}\frac{1}{(1-t^{\deg(x)})}=\sum_{D\geq 0}t^{\deg(D)}$$

証明. 2 つめの等号は明らかなので, 一つ目を調べる. $b_r:=\#\{x\in X^{\mathrm{cl}};[k(x):\mathbb{F}_q]=r\}$ として, 定義式の対数を取って,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\#X(\mathbb{F}_{q^m})}{m}t^m&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{r|m}\frac{rb_r}{m}t^m\\&=\sum_{r=1}^{\infty}b_r\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}t^{rl}\\&=\sum_{r=1}^{\infty}\log(1-t^r)^{-b_r}\\&=\sum_{x\in X^{\mathrm{cl}}}\log(1-t^{\deg(x)})^{-1}\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$X(\mathbb{F}_{q^m})=\bigsqcup_{\deg(x)|m}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^m}),\mathrm{Spec}(k(x)))$$

で, 各 Hom は $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q)$ の推移的作用があり, その固定化群は $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^m}/k(x))$ となるので,

$$\#X(\mathbb{F}_{q^m})=\sum_{r|m}rb_r$$

となることを用いている. □

さて, これが有理函数であることを示すには, 補題 2.1 の最右辺を用いる. まず, $g=h^1(X,\mathcal{O}_X)$ を X の種数として, この和を $\deg(D)<2g-1$ の部分と $\deg(D)\geq 2g-1$ の部分に分ける. $\deg(D)\geq 2g-1$ の時, $\deg(K_X)=2g-2$ なので, $\deg(K_X-D)<0$ となり, Serre 双対性から $h^1(D)=h^0(K_X-D)=0$ となる. 従って, Riemann-Roch の定理より, $h^0(D)=\deg(D)+1-g$ となる. 従って, 完備線型系 $|D|$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{\deg(D)-g}$ に同型[1]で,

$$\#(|D|)=\frac{q^{\deg(D)+1-g}-1}{q-1}$$

がわかる. ここで, $\deg(\mathrm{Pic}(X))=e\mathbb{Z}$, $e>0$ とおくと, $\#(\mathrm{Pic}^0(X))=h$ として,

$$\sum_{\deg(D)\geq 2g-1}t^{\deg(D)}=h\sum_{m\geq(2g-1)/e}\frac{q^{me+1-g}-1}{q-1}t^{me}=\frac{h}{q-1}\left(\frac{(qt)^{m_0e}q^{1-g}}{1-(qt)^e}-\frac{1}{1-t^e}\right)$$

である. ここで, m_0 は $me\geq 2g-1$ を満たす最小の非負整数である. $\deg(D)<2g-1$ となる有効因子は高々$(2g-1)h\cdot\frac{q^g-1}{q-1}$ 個なので,

$$Z(X,t)=\sum_{D\geq 0,\deg(D)<2g-1}t^{\deg(D)}+\sum_{D\geq 0,\deg(D)\geq 2g-1}t^{\deg(D)}\in\mathbb{Q}(t)$$

[1] 幾何学的整の仮定から, $H^0(X,\mathcal{O}_X)=\mathbb{F}_q$ が出ることに注意.

がわかった．さらに, $Z(X,s)$ の極は 1 の冪根とその $1/q$ 倍に限られ, 全て位数は 1 であることもわかった．さらに, ある $f \in \mathbb{Z}[t]$ について, $\deg(f) \leq \max\{2+(2g-2)/e, m_0+1\}$

$$Z(X,t) = \frac{f(t^e)}{(1-t^e)(1-(qt)^e)}$$

と表されることもわかった．$e=1$ となることを示そう．$e>1$ を仮定する．すると, $X' := X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{q^e})$ とおくと, これも仮定を満たし, $\deg(\mathrm{Pic}(X)) = \mathbb{Z}$ なので, ある $g \in \mathbb{Z}[t]$, $\deg(g) \leq 2$ が存在して,

$$Z(X',t) = \frac{g(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

となる．補題 2.1 および上に示した表示より, ξ_e を 1 の原始 e 乗根とすると,

$$Z(X',t^e) = \prod_{j=0}^{e-1} Z(X, \xi_e^j t) = Z(X,t)^e$$

となることがわかり, 例えば $Z(X',t^e)$ の $t=1$ での極の位数は 1 なので, $e=1$ が導かれる．従って, $g \geq 1$ の時は $\deg(f) \leq \max\{2g-2, m_0+1\} \leq \max\{2g-2, 2g-1+1\} = 2g$ もわかり, 定理 2.1 が示された．$g=0$ の時は,

$$Z(X,t) = \frac{h}{q-1}\left(\frac{q}{1-qt} - \frac{1}{1-t}\right) = \frac{h}{(1-t)(1-qt)}$$

となるので, この場合についても定理の主張が成立する． □

3. 函数等式の証明

本節では, 函数等式を示す．そのために, まず $\Delta \subset X \times X$ の自己交点数を求める．$X \cong \Delta$ なので, $\deg(K_\Delta) = \deg(K_X)$ となる．随伴公式より, $K_\Delta \sim (K_{X\times X} + \Delta)|_\Delta$ となり, $i \in \{1,2\}$ について, $p_i : X \times X \to X$ を代 i 成分への射影とすると, $\omega_{X\times X} \cong p_1^*\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_{X\times X}} p_2^*\omega_X$ となるので,

$$2g-2 = (\Delta.K_{X\times X} + \Delta) = (\Delta^2) + (\Delta.p_1^*K_X) + (\Delta.p_2^*K_X) = (\Delta^2) + 2(2g-2)$$

となる．つまり,

$$(\Delta^2) = 2-2g$$

がわかった．従って, 以下の主張を示せばよい:

定理 3.1.

$$Z\left(X, \frac{1}{qt}\right) = q^{1-g}t^{2-2g}Z(X,t)$$

証明. $g=0$ の時は前節で求めた具体的表示によって明らか. $g \geq 1$ を仮定する.

$$\begin{aligned} Z(X,t) &= \sum_{D \geq 0} t^{\deg(D)} \\ &= \sum_{0 \leq \deg(D) \leq 2g-2} t^{\deg(D)} + \sum_{2g-1 \leq \deg(D)} t^{\deg(D)} \\ &= \sum_{m=0}^{2g-2} \left(\sum_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^m(X)} \frac{q^{h^0(\mathcal{L})}-1}{q-1} \right) t^m + \sum_{m=2g-1}^{\infty} \frac{h(q^{m+1-g}-1)}{q-1} t^m \\ &= \sum_{m=0}^{2g-2} \left(\sum_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^m(X)} \frac{q^{h^0(\mathcal{L})}}{q-1} \right) t^m - \frac{h}{q-1}\frac{1}{1-t} + \frac{hq^{1-g}}{q-1}\frac{(qt)^{2g-1}}{1-qt} \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} S_1(t) &:= \sum_{m=0}^{2g-2} \left(\sum_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^m(X)} \frac{q^{h^0(\mathcal{L})}}{q-1} \right) t^m \\ S_2(t) &:= -\frac{h}{q-1}\frac{1}{1-t} + \frac{hq^{1-g}}{q-1}\frac{(qt)^{2g-1}}{1-qt} \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} S_1\left(\frac{1}{qt}\right) =& q^{1-g}t^{2-2g} \sum_{m=0}^{2g-2} \left(\sum_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^m(X)} \frac{q^{h^0(\mathcal{L})-m-1+g}}{q-1} \right) t^{2g-2-m} \\ =& q^{1-g}t^{2-2g} \sum_{m=0}^{2g-2} \left(\sum_{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^m(X)} \frac{q^{h^1(\mathcal{L}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X)}}{q-1} \right) t^{2g-2-m} \\ =& q^{1-g}t^{2-2g} S_1(t) \end{aligned}$$

がわかる. ここで, 2 つめの等式では曲線の Riemann-Roch の定理を, 3 つめの等式では Serre 双対性を用いている. さらに,

$$\begin{aligned} S_2\left(\frac{1}{qt}\right) =& \frac{h}{q-1}\frac{qt}{qt-1} - \frac{hq^{1-g}}{q-1}\frac{t^{2-2g}}{1-t} \\ =& q^{1-g}t^{2-2g} \left(-\frac{h}{q-1}\frac{1}{1-t} + \frac{hq^{1-g}}{q-1}\frac{(qt)^{2g-1}}{1-qt} \right) \\ =& q^{1-g}t^{2-2g} S_2(t) \end{aligned}$$

となるので, 函数等式が示された. □

4. Riemann 予想の証明

さて, 最後に Riemann 予想を証明しよう. 一次元の場合の主張は以下のようになる:

定理 4.1. $f \in \mathbb{Z}[t]$ について,

$$Z(X,t) = \frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

と表したとき, $f(t)=\prod_j(1-\alpha_j t)$, $|\alpha_j|=q^{1/2}$ となる.

まず, 前節に示した函数等式から, 実は前節で求めた有理函数表示 $Z(X,t)=\frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)}$ において, f は丁度 $2g$ 次式であることがわかる. 実際, まず $f(t)=\prod_{j=1}^{2g}(1-\alpha_j t)$ とおく (この時点では $\omega_j=0$ であってもよいとする) と,

$$\begin{aligned} Z\left(X,\frac{1}{qt}\right) =& \frac{q^{1-g}t^{2-2g}\prod_j(\sqrt{q}t-\alpha_j/\sqrt{q})}{(1-t)(1-qt)} \\ =& q^{1-g}t^{2-2g}\frac{f(t)}{(1-t)(1-qt)} \end{aligned}$$

なので, 函数等式より, $f(t)$ は $2g$ 次式であることもわかる. つまり任意の j について, $\alpha_j\neq 0$ が成立することがわかる. さらに, ここから

$$\prod_{j=1}^{2g}(1-\alpha_j t)=q^g\prod_{j=1}^{2g}(t-\alpha_j/q)$$

がわかるので, $\prod_j\alpha_j=q^g$ もわかる. 従って, 任意の j について, $|\alpha_j|\le q^{1/2}$ となることが示せれば, 任意の j について, $|\alpha_j|=q^{1/2}$ となることがわかる. また, $N_m:=\#X(\mathbb{F}_{q^m})$ とおくと,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_m}{m}t^m =& \sum_{j=1}^{2g}\log(1-\alpha_j t)-\log(1-t)-\log(1-qt) \\ =& \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+q^m-\sum_j\alpha_j^m}{m}t^m \end{aligned}$$

となるので,

$$N_m=1+q^m-\sum_{j=1}^{2g}\alpha_j^m$$

がわかる.

$$a_m:=\sum_{j=1}^{2g}\alpha_j^m$$

とおく. 任意の j について, $|\alpha_j|\le q^{1/2}$ ならば, $|a_m|\le 2gq^{m/2}$ となる. 逆に, 任意の m について, $|a_m|\le 2gq^{m/2}$ ならば,

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m t^m=\sum_{j=1}^{2g}\frac{\alpha_j t}{1-\alpha_j t}$$

となる. $|a_m|<2gq^{m/2}$ なので, 左辺の級数は $|t|<q^{-1/2}$ で絶対収束し, 特にこの範囲では極を持たない. よって $|\alpha_j|^{-1}\ge q^{-1/2}$ がわかり $|\alpha_j|\le q^{1/2}$ がわかる. つまり, Riemann 予想を示すには $|a_m|\le 2gq^{m/2}$ を示せ示せばよ良い. まず, 次の補題から示す.

補題 4.1. k を代数閉体, Y を k 上の非特異射影曲面 (=非特異 2 次元代数多様体) とする. D_1, D_2 を Y 上の 2 つの Weil 因子として, $(D_1^2)>0$ とする. この時,

$$(D_1)^2(D_2)^2\le(D_1.D_2)^2$$

となる.

証明. $D_2 = (D_1.D_2)D_1 - (D_1^2)D_2$ とすると, $(D_1.D_2) = 0$ となるので, Hodge の指数定理より $(D_2^2) \leq 0$ となる. 従って,

$$(D_2^2) = -(D_1.D_2)^2(D_1^2) + (D_1^2)^2(D_2^2) \leq 0$$

がわかり, 主張が示された. □

補題 4.2. X_1, X_2 を代数閉体 k 上非特異射影曲線として, $Y = X_1 \times X_2$ とおく. $x_1 \in X_1^{\mathrm{cl}}$, $x_2 \in X_2^{\mathrm{cl}}$ と, Y 上の Weil 因子 D について,

$$(D^2) \leq 2(D.X_1 \times \{x_2\})(D.\{x_1\} \times X_2)$$

となる.

証明. x_2' を X_2 の x_2 と異なる点とすると, 2 つの Weil 因子 $X_1 \times \{x_2\}$, $X_1 \times \{x_2'\}$ は代数的同値なので, $((X_1 \times \{x_2\})^2) = (X_1 \times \{x_2\}.X_1 \times \{x_2'\}) = 0$ となる. 同様に $\{x_1\} \times X_2$ も自己交点数が 0 になる. さらに, $(X_1 \times \{x_2\}.\{x_1\} \times X_2) = 1$ なので,

$$D' := D - (D.\{x_1\} \times X_2)(X_1 \times \{x_2\}) - (D.X_1 \times \{x_2\})(\{x_1\} \times X_2)$$

とおくと, $(D'.X_1 \times \{x_2\}) = (D'.\{x_1\} \times X_2) = 0$ がわかる. $((X_1 \times \{x_2\} + \{x_1\} \times X_2)^2) = 2 > 0$ なので, 再び Hodge の指数定理より $(D'^2) \leq 0$ がわかる.

$$(D'^2) = (D^2) - 2(D.X_1 \times \{x_2\})(D.\{x_1\} \times X_2)$$

なので, 主張が示された. □

さて, X を $k = \mathbb{F}_q$ 上の非特異射影曲線として, $X_{\overline{k}} := X \times_k \overline{k}$ とする. $f = \mathrm{Frob}_{q^m} : X_{\overline{k}} \cong X_{\overline{k}}^{(q^m)} \to X_{\overline{k}}$ を Frobenius 射として, $\Delta, \Gamma_f \subset X_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} X_{\overline{k}}$ をそれぞれ対角線および f のグラフとする. この時, $(\Delta.\Gamma_f) = \#X(\mathbb{F}_{q^m})$ となる.

$s, t, \in \mathbb{Z}$ について, $X_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} X_{\overline{k}}$ 上の Weil 因子 $D_{s,t}$ を,

$$D_{s,t} := s\Delta + t\Gamma_f$$

とおく. 第 3 節の初めでやった計算と同様にして, Frob_{q^m} が次数 q^m の全射であることを用いて,

$$(\Delta^2) = 2 - 2g,\ ({\Gamma_f}^2) = q^m(2 - 2g)$$

がわかる. よって,

$$\begin{aligned}&(D_{s,t}^2) - 2(D_{s,t}.X_{\overline{k}} \times \{pt\})(D_{s,t}.\{pt\} \times X_{\overline{k}})\\ =&(2-2g)s^2 + 2(\Delta.\Gamma_f)st + (2-2g)q^m t^2 - 2(s+t)(s+q^m t)\\ =&-2gs^2 + 2\{(\Delta.\Gamma_f) - q^m - 1\}st - 2q^m g t^2 \leq 0\end{aligned}$$

がわかる. つまり $(D_{s,t}^2)$ は s, t についての負定値 2 次形式となることがわかった. よって, この判別式が非正になり,

$$|a_m| = |(\Delta.\Gamma_f) - q^m - 1| \leq 2g\sqrt{q^m}$$

となることがわかった. 従って, Hasse-Weil ゼータ函数に関する Riemann 予想が証明された. □

References

[1] L. Bădescu. Algebraic Surface, Springer New York, 2001

[2] M. Mustaţă. Zeta functions in algebraic geometry, 2011, https://dept.math.lsa.umich.edu/~mmustata/zeta_book.pdf#page95