代数学特論 I レポート

0500-33-1052 羽田洋平

Abstract. 本レポートでは, 複素微分幾何的側面で用いられる安定性の議論に現れてくる種々の方法の実の場合に関するアナロジーをまとめた.

Contents

1. 主束の接続と Gauge 変換

まず, 主束の接続に関して復習する. 本節は, 主に Atiyah[1] と小林 [6] を参考にした. M を n 次元可微分多様体, G を Lie 群として, $\pi : P \to M$ を主 G 束とする. まず, P の接束 TP には自然な G の作用が入る. 具体的には, $u \in P$, $\xi \in T_uP$, $g \in G$ について, $\xi g = (R_g)_*\xi \in T_{ug}P$ である. ここで, $R_g : P \to P$ は $g \in G$ による P への右作用である. TP をこの G の作用で割った空間を Q とおくと, $\pi \circ R_g = \pi$ なので, $\pi_* : TP \to TM$ から $\overline{\pi_*} : Q \to TM$ が誘導される.

命題 1.1. Q は M 上のベクトル束であり, $\overline{\pi_*}$ は M 上のベクトル束の射である.

証明. $p : Q \to M$ を $\overline{\pi_*}$ と接束の射影との合成で定める. U を M の座標開近傍として, $\sigma : U \to P$ を切断とする. この時, σ によって, P の局所自明化 $U \times G \to P|_U ; (x, g) \mapsto \sigma(x)g$ が得られ, その微分によって $TU \oplus TG \cong TP|_U$ を得る. この同型は G-同変なので, 右不変ベクトル場によって TG を $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ をファイバーとする自明束と同一視すると, ここから $TU \oplus (U \times \mathfrak{g}) \cong Q|_U$ をえる. これが Q の局所自明化を与える. $\overline{\pi_*}$ がベクトル束の射を与えることは作り方から明らか. □

Q の変換函数を見てみよう. $\{U_i\}_{i \in I}$ を M の開被覆で, $\sigma_i : U_i \to P$ を主束の切断とする. この時, σ_i によって

$$\widehat{u}_i : TU_i \oplus (U_i \times \mathfrak{g}) \to Q|_{U_i} ; (v, \xi) \mapsto [(\sigma_i)_*(v) + \xi^*_{\sigma_i(x)}]$$

を定める. ここで, $\xi \in \mathfrak{g}$ について, ξ^* は,

$$\xi^*_u := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ue^{t\xi}$$

によって定まるベクトル場である．$i, j \in I$ について，$g_{ij} : U_{ij} \to G$ を，$\sigma_i g_{ij} = \sigma_j$ となるようにして定めると，

$$\begin{aligned}
&\left[(\sigma_j)_*(v) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_j(x)e^{t\xi}\right] \\
=&\left[(\sigma_i g_{ij})_*(v) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_i(x)e^{t\mathrm{Ad}(g_{ij})\xi} \cdot g_{ij}(x)\right] \\
=&\left[(\sigma_i)_*(v) + \rho_{ij}(v)^*_{\sigma_i(x)} + \mathrm{Ad}(g_{ij})\xi^*_{\sigma_i(x)}\right]
\end{aligned}$$

となる．ここで，ρ_{ij} は U_{ij} 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 形式で，

$$\rho_{ij} = (R_{g_{ij}^{-1}})_* \circ (g_{ij})_* (=: dg_{ij} \cdot g_{ij}^{-1})$$

のことである．以上より，

$$\widehat{u}_i^{-1}\widehat{u}_j(v, \xi) = (v, \mathrm{Ad}(g_{ij})\xi + \rho_{ij}(v)) \tag{1}$$

である．$\overline{\pi_*} : Q \to TM$ の核を L とおくと，上の式から $L = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ となることがわかる．つまり，以下のベクトル束の完全列が得られる:

$$0 \to P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g} \to Q \to TM \to 0 \tag{2}$$

定義 1.1. 上の完全列 (2) の分裂，つまりベクトル束の射 $s : TM \to Q$ であって，$\overline{\pi_*}s = 1_{TM}$ となるもののことを主 G 束 P の**接続**と言う．

上の接続 s について，s が与えられたら Q を "水平成分" と "垂直成分" の直和に分解することができて，各 U_i 上で $s(v) = (v, \xi^i(v))$ とおくと，$(v, 0)$ の垂直成分への射影は $-\xi^i(v)$ となる．従って，$\theta^i = -\xi^i$ とおくと，θ^i は U_i 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-形式である．さらに，(1) によって，s によって与えられる 1-形式の族 $(\theta^i)_{i\in I}$ は，

$$\theta^j = g_{ij}^{-1}dg_{ij} + \mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1})\theta^i \tag{3}$$

を満たす．逆に (3) を満たす $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-形式の族は接続を定めることもすぐにわかる．この θ^i を (U_i, σ_i) に関する接続形式と言う．また，定義から，P の接続を与えることはは P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-形式 ω で，$R_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$, $\omega(\xi^*) = \xi$ を満たすものを与えることとも等価になる (これも垂直分布への射影である)．この時，ω は射影 $TP \to Q$ による Q の垂直成分への射影の引き戻しで得られるが，(1) によって，U_i 上の σ_i による局所自明化によって $P|_{U_i}$ の元を (x, g) と座標表示したとき，

$$\omega|_{P|U_i} = \mathrm{Ad}(g^{-1})\pi^*\theta^i + g^{-1}dg \tag{4}$$

で与えられることがわかる．ここで，$g^{-1}dg$ は Maurer-Cartan 形式と解釈する．実際にこれが貼り合うことも (3) から確かめることが可能である．接続 s の接続形式が (θ^i) となるとき，$d\theta^i + \frac{1}{2}[\theta^i, \theta^i]$ は $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ に値をとる 2 形式として貼り合う．これを接続の曲率形式といい，Ω と書くことにする．計算によって，

$$d\omega^i + \omega^i \wedge \omega^i = \mathrm{Ad}(g^{-1})\pi^*\Omega|_{U_i}$$

がわかる．ここで，$\omega^i := \omega|_{P|_{U_i}}$ とした．$d\omega + \omega \wedge \omega$ のことも曲率といい，これは P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 2 形式である．P 上の接続全体を $\mathcal{C}(P)$ と書くことにする．容易にわかるように，$\mathcal{C}(P)$ は $A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ を構造線型空間とするアフィン空間である．

多様体 M 上の主 G 束 P について，P 上の Gauge 変換とは，G-同変な微分同相 $\phi : P \to P$ で，ファイバーを保つもののことである．P 上の Gauge 変換全体のなす (合成を積とした) 群を $\mathcal{G}(P)$ と書くことにする．P 上の 1-形式 ω が接続であるとき，$\phi^*\omega$ も接続になる．実際，ϕ は G-同変なので，

$$R_g^*\phi^*\omega = \phi^*R_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\phi^*\omega$$

となり, 再び ϕ は G 同変なので, $\phi_*\xi^*_u = \xi^*_{\phi(u)}$ がわかり, $\phi^*\omega(\xi^*) = \xi$ を得る．これによって Gauge 群 $\mathcal{G}(P)$ は $\mathcal{C}(P)$ に (右) 作用する．接続を各局所自明化 (U_i, σ_i) に対する $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-形式の族 (θ^i) としてみた時は, U_i 上で $\phi(\sigma_i(x)) = \sigma_i(x)f_i(x)$ とおくと, ϕ は G-同変なので $\phi(\sigma_i(x)g) = \sigma_i(x)f_i(x)g$ となることに注意すると, (4) によって, $\phi^*(\theta_i) = (f_i^{-1}df_i + \mathrm{Ad}(f_i^{-1})\theta^i)$ となる．定義から, $f_i = g_{ij}f_j$ となるので, これが実際に関係式 (3) を満たすことが確かめられる．曲率形式 Ω についても, ϕ によって U_i における Ω の局所表示 Ω^i が $\mathrm{Ad}(f_i^{-1})\Omega^i$ と変化することがわかる.

2. シンプレクティック簡約

(M, ω) をシンプレクティック多様体, G を Lie 群とする．群準同型 (あるいは反準同型．本節では一般のシンプレクティック幾何の教科書に習って左作用を考えることにするが, 右作用 (反準同型) でも話は全く同じであり, 次節で用いるのは右作用である.)

$$\pi : G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$$

を考える．M を G の作用で割ることを考えたい．そのためには, 作用に関してある仮定をしなければならない．まず, G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とすると, 上の作用から, $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\xi.x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi).x$$

とすることで, ξ は M 上のベクトル場を定める．そのベクトル場を X_ξ とおくと, $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ について,

$$\begin{aligned} X_{[\xi_1,\xi_2]}(x) =& \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t[\xi_1, \xi_2]).x \\ =&[X_{\xi_1}, X_{\xi_2}](x) \end{aligned}$$

となるので, Lie 環の準同型 $\mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$ を得る.

定義 2.1.

(1) G の M への作用が弱 Hamilton 的であるとは, 任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ について, $\omega(X_\xi, \cdot) = -dH_\xi$ となるような $H_\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ が存在することである.
(2) G の M への作用が Hamilton 的であるとは, 作用の誘導する Lie 環の準同型 $\mathfrak{g} \to \Gamma(TM)$ が, Lie 環の準同型として $\mathcal{C}^\infty(M)$ を経由することである．つまり, 以下の図式が可換になるような $\phi : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M)$ が存在することである:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\phi"'] & & \Gamma(TM) \\ & \mathcal{C}^\infty(M) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

命題 2.1.

(1) $H^1(M) = 0$ あるいは $H^1(\mathfrak{g}) = 0$ ならば, G の M への作用は常に弱 Hamilton 的である
(2) さらに, $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ ならば, G の M への弱 Hamilton 的な作用は常に Hamilton 的になる．ここで, $H^*(\mathfrak{g})$ は Lie 代数のコホモロジーである.

従って, G の作用が弱 Hamilton 的であるならば, $\mathfrak{g}$ の像はシンプレクティックベクトル場になっている．上の命題の仮定は G が半単純であれば満たされることに注意.

G を Lie 群, (M, ω) をシンプレクティック多様体として, G が (M, ω) に Hamilton 的な作用をしているとする．この時, **運動量写像 (moment map)**$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ を,

$$\mu(x)\xi = H_\xi(x)$$

と定めることができる.

命題 2.2. G を Lie 群, (M,ω) をシンプレクティック多様体として, G は (M,ω) に Hamilton 作用を持つとする. この時, 以下の命題が成立する:

(1) $\xi \in \mathfrak{g}$ について, $\mu^*\xi = H_\xi$ が成立する. ここで, $\mu^*\xi : M \to \mathbb{R}$ は, $\mu^*\xi(x) = \mu(x)\xi$ として定めている
(2) 運動量写像の誘導する $\mu^* : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M)$ は Lie 環の準同型である.
(3) G が連結ならば, 運動量写像 μ は G-同変である. ここで, $\mathfrak{g}^*$ への G-作用は余随伴で入れている.

証明.

(1) 定義より明らか.
(2) $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ について,

$$\{\mu^*\xi_1, \mu^*\xi_2\} = \{H_{\xi_1}, H_{\xi_2}\} = H_{[\xi_1,\xi_2]} = \mu^*[\xi_1,\xi_2]$$

がわかった.
(3) μ が G-同変であるとは, 任意の $g \in G$ および $x \in M$ について, $\mu(g.x) = \mathrm{Ad}^*(g)\mu(x)$ となることを指す. これは任意の $g \in G$, $x \in M$, $\xi \in \mathfrak{g}$ について, $\mu(g.x)\xi = \mu(x)(\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi)$, すなわち $H_\xi(g.x) = H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi}(x)$ となることと同値である. G は連結なので, これは任意の $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$ について,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H_\xi(e^{\xi' t}.x) = H_{[\xi,\xi']}(x)$$

となることと同値だが,

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H_\xi(e^{\xi' t}.x) =& dH_\xi(X_{\xi'})(x) \\ =& -\omega_x(X_\xi, X_{\xi'}) \\ =& \{H_\xi, H_{\xi'}\}\end{aligned}$$

となるが, これは G の作用が Hamilton 的であることに他ならない. □

上の命題から, 連結 Lie 群 G によるシンプレクティック多様体 (M,ω) への Hamilton 作用について,

$$\mu(g.x) = \mathrm{Ad}_g^*(\mu(x))$$

が得られる. 特に, G が可換 Lie 群ならば, 運動量写像は G-軌道の中で一定であることがわかった. この等式に注意すると, Hamilton 簡約が定義できる:

定義 2.2. Lie 群 G の Hamilton 作用のあるシンプレクティック多様体 (M,ω) について, $0 \in \mathfrak{g}^*$ が運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ の正則値になっている時, M の 0 における **Hamilton 簡約**とは,

$$M /\!\!/_0\, G := \mu^{-1}(0)/G$$

のことである. より一般に, G の余随伴軌道 $\mathcal{O}$ に対して, M の $\mathcal{O}$ における Hamilton 簡約は,

$$M /\!\!/_{\mathcal{O}}\, G := \mu^{-1}(\mathcal{O})/G$$

で定まる. ◇

本論に入る前に, いくつか例を見る.

例 2.1. $M=\mathbb{R}^6=T^*\mathbb{R}^3$ として, M に標準シンプレクティック形式 $\omega:=\sum_{i=1}^3 dq_i\wedge dp_i$ を入れたシンプレクティック多様体 (M,ω) を考える. (M,ω) には, SO(3) が回転によって作用しているとする. つまり, $A\in \mathrm{SO}(3)$ について, $A.(q,p):=(Aq,pA^{-1})$ となっているとする. この作用がシンプレクティックであることは計算により直接確かめることができる. この作用は線型なので, $\xi\in\mathfrak{so}(3)$ について,

$$X_\xi(q,p)=(\xi q,-p\ {}^t\xi)$$

が成立する. 次に, (q,p) の微小変化に関する $\omega(X_\xi,-)$ の変化をみる.

$$\begin{aligned}\omega((\xi q,-p^t\xi),(\delta q,\delta p))&=\sum_{i,j=1}^3 \xi_i^j q_j\delta p_i+p_j({}^t\xi)_i^j\delta q_i\\&=\sum_{i,j=1}^3 \xi_i^j q_j\delta p_i-\xi_i^j p_j\delta q_i\\&=\sum_{i,j=1}^3 \xi_i^j q_j\delta p_i+\xi_j^i p_j\delta q_i\\&=\sum_{i,j=1}^3 \xi_i^j (q_j\delta p_i+p_i\delta q_j)\\&=\delta\left(\sum_{i=1}^3\xi_i^j q_jp_i\right)\end{aligned}$$

となるので,

$$H_\xi(q,p)=\langle p,\xi q\rangle$$

と取れることがわかる. 実際,

$$\begin{aligned}H_{[\xi_1,\xi_2]}(q,p)&=\sum_{i,j,k}\left[(\xi_1)_k^j q_j(\xi_2)_i^k p_i-(\xi_1)_i^k p_i(\xi_2)_k^j q_j\right]\\&=\sum_k\left(\frac{\partial H_{\xi_1}}{\partial p_k}\frac{\partial H_{\xi_2}}{\partial q_k}-\frac{\partial H_{\xi_1}}{\partial q_k}\frac{\partial H_{\xi_2}}{\partial p_k}\right)\\&=\{H_{\xi_1},H_{\xi_2}\}\end{aligned}$$

が成立する. よって, この作用は Hamilton 的である. $\mathfrak{so}(3)$ の基底を

$$\Omega_1:=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\Omega_2:=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\Omega_3:=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

とおいて, $\mathfrak{so}(3)$ をこの基底によって $\mathbb{R}^3$ と同一視すると,

$$H_\xi(q,p)=(q\times p)\cdot\xi$$

が得られる. 従って, $\mu(q,p)=q\times p$ がわかった. ◇

例 2.2. $M=\mathbb{R}^2$ として, 標準的なシンプレクティック形式 $\omega=dq\wedge dp$ を入れたシンプレクティック多様体 (M,ω) を考える. $m>0$ を定数として, 加法群 $\mathbb{R}$ の作用を,

$$t.(q,p)=\left(q+\frac{p}{m}t,p\right)$$

と定めると, これはシンプレクティック的になっている. $\xi \in \mathrm{Lie}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ について,

$$X_\xi(q,p) = \left(\frac{p}{m}\xi, 0\right)$$

となる. 従って,

$$\omega\left(\left(\frac{p}{m}\xi, 0\right), (\delta q, \delta p)\right) = \delta\left(\frac{p^2}{2m}\xi\right)$$

となり, $H_\xi(q,p) = \frac{p^2}{2m}\xi$ がわかる. ここで,

$$H_{[\xi_1,\xi_2]} = 0 = \{H_{\xi_1}, H_{\xi_2}\}$$

に注意せよ. 従って,

$$\mu(q,p) = \frac{p^2}{2m}$$

がわかった. ◇

例 2.3. $M = \mathbb{C}^n$ に, 標準的なシンプレクティック形式 ω を入れる. これを複素座標に関して書き下すと,

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\overline{z_i}$$

となる. $U(1) := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ について,

$$\lambda.(z_1, \ldots, z_n) := (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)$$

と定めると, $U(1)$ は M にシンプレクティックに作用している. この時, $\sqrt{-1}\xi \in \mathfrak{u}(1) = \sqrt{-1}\mathbb{R}$ について,

$$X_{\sqrt{-1}\xi}(z) = (\sqrt{-1}\xi z_1, \ldots, \sqrt{-1}\xi z_n)$$

となるので,

$$\omega((\sqrt{-1}\xi z_i), (\delta z_i)) = \delta\left(-\frac{1}{2}\xi\|z\|^2\right)$$

となる. 従って, $H_{\sqrt{-1}\xi}(z) = -\frac{1}{2}\xi\|z\|^2$ となることがわかり, $\mathbb{R}$ と $\mathfrak{u}(1)$ の同一視によって, $\mu(z) = -\frac{1}{2}\|z\|^2$ となる. $U(1)$ は可換 Lie 群なので, $\mathfrak{u}(1)^*$ の各点が余随伴軌道になっている. $x \neq 0$ の時, $\mu^{-1}(\{x\})$ は μ 正則値になっており, $M /\!\!/_{\{x\}} U(1) = \mu^{-1}(\{x\})/U(1) \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ となる. ◇

シンプレクティック多様体 (M,ω) への Lie 群 G の Hamilton 作用があった時, その余随伴軌道 $\mathcal{O}$ における Hamilton 簡約 $M /\!\!/_{\mathcal{O}} G$ にはシンプレクティック構造が誘導される. 実際, $\mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ 上のベクトル場は, $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ 上のベクトル場で G 不変なものと見ることができて, G の元はシンプレクティック同相写像として作用していたので, ω は $\mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ の上のシンプレクティック形式を誘導する.

例 2.4. 例 2.3 において, $r \neq 0$ における Hamilton 簡約で得られた $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ に誘導されたシンプレクティック形式は,

$$\omega_r = \frac{r\sqrt{-1}}{2\|z\|^2}\sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\overline{z_i} - \frac{r\sqrt{-1}}{2\|z\|^4}\sum_{i<j}\overline{z_i}z_j dz_i \wedge d\overline{z_j}$$

となる. $r = -2$ の時, これは $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ の **Fubini-Study 形式**という. これによって $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に Kähler 多様体の構造が入る. ◇

3. 平坦主 G 束のモジュライ

本節では曲面上の主束の平坦接続のモジュライについて議論する．ここは主に [2] を参考にした．Σ を曲面 (:=向き付け可能 2 次元実閉多様体), G を Lie 群として, P を Σ 上の主 G 束とする．さらに, G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は Ad-不変な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{R}$ をもつとする．$\mathcal{C}(P)$ は $A^1(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ を構造空間とするアフィン空間なので, これによって局所凸空間をモデルとした多様体の構造が入る．$\mathcal{C}(P)$ の各点における接空間は $A^1(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ と自然に同一視される．この同一視によって, 接続 $\omega\in\mathcal{C}(P)$ に対して, $v,w\in T_\omega\mathcal{C}(P)=A^1(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ について,

$$\Omega_\omega(v,w)=\int_\Sigma\langle v\wedge w\rangle$$

とすると, Ω は非退化な 2 形式である．ここで, $v=v_xdx+v_ydy, w=w_xdx+w_ydy$ と局所的に表された時,

$$\langle v\wedge w\rangle=(\langle v_x,w_y\rangle-\langle v_y,w_x\rangle)dx\wedge dy$$

と定めている．実際, Σ の上の Riemann 計量 g を固定すると, Hodge の $*$-作用素 $*: A^*(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})\to A^{2-*}((P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})')\cong A^{2-*}(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ が定義されるが, $v\in T_\omega\mathcal{C}(P)=A^1(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ について,

$$\Omega_\omega(v,*v)=\|v\|^2_{L^2(\Sigma,P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})}$$

となるので, $v\neq 0$ なら $\Omega_\omega(v,*v)\neq 0$ となる．以下, Σ の Riemann 計量 g を固定して考える．Ω は接続 ω に依存しないので, $d\Omega=0$ となる．つまり Ω は $\mathcal{C}(P)$ 上のシンプレクティック形式となる．さらに, $**=-1$ なので, $*$ は $\mathcal{C}(P)$ の概複素構造を定め, $\Omega_\omega(v,*w)=(v,w)_{L^2}$ なので, これは上に定めたシンプレクティック構造に両立する．$*$ もまた ω によらないので, $*$ は複素構造になる．つまり, $(\mathcal{C}(P),\Omega,*)$ は (無限次元)Kähler 多様体である．この Ω を Goldman 形式という．

$\mathcal{G}(P)$ の $\mathcal{C}(P)$ への作用は Goldman 形式を保つ．これは, $\phi\in\mathcal{G}(P),\omega\in\mathcal{C}(P)$ について, $\{(U_i,\sigma_i)\}_{i\in I}$ を P の局所自明被覆 (σ_i は U_i 上の P の切断) について, $f_i:U_i\to G$ を $\phi(\sigma_i(x))=\sigma_i(x)f_i(x)$ と定めると, $v\in T_\omega\mathcal{C}(P)=A^1(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ について, $\phi_*v|_{U_i}=\mathrm{Ad}(f_i^{-1})v$[1] となることと, 内積の Ad-不変性からわかる．Gauge 群 $\mathcal{G}(P)$ の元 ϕ は局所切断 $\sigma_i:U_i\to P$ の上で, $f_i:U\to G$, $\phi(\sigma_i(x))=\sigma_i(x)f_i(x)$ によって代表され, $f_i(x)g_{ij}(x)=f_j(x)$ となるので, $\phi=(f_i)_{i\in I}$ と書いて, $\epsilon_i:U_i\to\mathfrak{g}$ によって f_i を $f_i':=f_ie^{\epsilon_i}$ と摂動させたときにまた $f_i'g_{ij}=f_j'$ となるには,

$$f_i'g_{ij}=f_ig_{ij}e^{\mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1})\epsilon_i}=f_je^{\mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1})\epsilon_i}$$

となるので, $\epsilon_j=\mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1})\epsilon_i$ とならねばならない．従って, (無限次元)Lie 群 $\mathcal{G}(P)$ の Lie 環は $A^0(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ となる．もちろん $\exp: A^0(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})\to\mathcal{G}(P)$ は上のように $(\epsilon_i)\mapsto(e^{\epsilon_i})$ で与えられる．

$\xi\in A^0(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ に対して, $e^{t\xi}$ を接続 ω に作用させてみる．(U_i,σ_i) に関する接続, および ξ の局所表示を, それぞれ θ^i, ξ^i とおくと,

$$\begin{aligned}R_{\exp(t\xi^i)}\theta^i=&(1-t\xi^i)d(1+t\xi^i)+(1-t\xi^i)\theta^i(1+t\xi^i)+O(t^2)\\=&t(d\xi^i-[\xi^i,\theta^i])+O(t^2)\end{aligned}$$

となる．ここで, t は十分小さいとしていて, 局所的に G を行列群に埋め込むことで計算している．よって, $X_\xi(\omega)|_{U_i}=d\xi^i-[\xi^i,\theta^i]$ となる．実際 $\xi^j=\mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1})\xi^i$ と式 (3) によってこれは $A^1(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ の元として貼り合うことがわかる．前節でやったように, $\mathcal{G}(P)$ の $(\mathcal{C}(P),\Omega)$ へのシンプレクティック作用の変分を考えてみよう．$\{U_i\}_{i\in I}$ を $P|_{U_i}$ が各 i について自明束となるような局所有限な Σ の開被覆として, $\{\rho_i\}_{i\in I}$ を $\{U_i\}_{i\in I}$ に従属する 1 の分割とする．さらに各 i について, 切断 $\sigma_i:U_i\to P$ を固

[1] これは σ_i の定める $P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$ の局所自明化によって $\phi_*v|_{U_i}$ を U_i 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-形式と思った時, 右辺と等しいという意味で書いている．

定して, 接続 $\omega \in \mathcal{C}(P)$ と $\{(U_i, \sigma_i)\}_{i\in I}$ の与える $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 形式の族を $(\theta_i)_{i\in I}$ とおく. この時, $\xi \in A^0(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ について,

$$\begin{aligned}
\Omega_\omega(X_\xi(\omega), \delta\omega) =& \sum_{i\in I} \int_\Sigma \rho_i \cdot \left\langle d\xi^i - [\xi^i, \theta^i], \delta\theta^i \right\rangle \\
=& \sum_{i\in I} \int_\Sigma \rho_i \cdot \left(d\left\langle \xi^i, \delta\theta^i \right\rangle - \left\langle \xi^i, d\delta\theta^i \right\rangle - \left\langle [\xi^i, \theta^i], \delta\theta^i \right\rangle \right) \\
=& \int_\Sigma df_\delta - \sum_{i\in I} \int_\Sigma \rho_i \cdot \left(\left\langle \xi^i, d\delta\theta^i \right\rangle - \left\langle \xi^i, [\theta^i, \delta\theta^i] \right\rangle \right) \\
=& -\delta \left(\sum_{i\in I} \int_\Sigma \rho_i \cdot \left\langle \xi^i, d\theta^i - \frac{1}{2}[\theta^i, \theta^i] \right\rangle \right) \\
=& -\delta \int_\Sigma \langle \xi, \Omega \rangle
\end{aligned}$$

となる. ここで, $f_\delta : \Sigma \to \mathbb{R}$ は, U_i 上で $\left\langle \xi^i, \delta\theta^i \right\rangle$ で与えられる函数である. 実際, ξ, $(\delta\theta^i)$ は共に $A^0(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ の元なので, これらは張り合う. 途中で, $\mathfrak{g}$ に入れている内積が Ad-不変であるという条件式を微分して得られる式

$$\langle [\xi, \xi_1], \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, [\xi, \xi_2] \rangle = 0, (\forall \xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g})$$

を用いている. $H_\xi : \mathcal{C}(P) \to \mathbb{R}$ を,

$$H_\xi(\omega) = -\int_\Sigma \langle \xi, \Omega \rangle$$

と定めると,

$$\begin{aligned}
\{H_{\xi_1}, H_{\xi_2}\} =& \Omega((d\xi_2^i - [\xi_2^i, \theta^i]), (d\xi_1^i - [\xi_1^i, \theta^i])) \\
=& -\sum_{i\in I} \int_\Sigma \rho_i \cdot \left(\left\langle \theta^i, [\xi_2^i, d\xi_1^i] + [d\xi_2^i, \xi_1^i] \right\rangle - \left\langle [\xi_2^i, \theta^i], [\xi_1^i, \theta^i] \right\rangle \right) \\
=& -\sum_{i\in I} \int_\Sigma \rho_i \cdot \left\langle [\xi_1^i, \xi_2^i], d\theta^i + \frac{1}{2}[\theta^i, \theta^i] \right\rangle \\
=& H_{[\xi_1, \xi_2]}
\end{aligned}$$

となることがわかった. これによって, Gauge 群 $\mathcal{G}(P)$ の $(\mathcal{C}(P), \Omega)$ への作用は Hamilton 的であり, その運動量写像 $\mu : \mathcal{C}(P) \to A^0(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})^* \cong A^2(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ は,

$$\mu(\omega) = -\Omega$$

で与えれることがわかった. 特に, Σ 上の平坦接続の同型類全体のなす空間は, 上の作用の Hamilton 簡約で得られるため, 自然なシンプレクティック構造を持つことがわかった. しかしこれは多様体になるとは限らないことに注意しておく. 以上を纏めて, 以下の定理を得る:

定理 3.1 (Atiyah-Bott)**.** G を Lie 群として, その Lie 環 $\mathfrak{g}$ に Ad-不変な内積を与えるものとする. この時, 曲面 Σ 上の主 G 束 P について, $(\mathcal{C}(P), \Omega)$ への $\mathcal{G}(P)$ の作用は Hamilton 的であり, 運動量写像は (マイナス) 曲率形式を与え, 従ってその Hamilton 簡約は P 上の平坦接続の同型類全体の空間となる. さらに主 G 束 P を自明束にとることで, 以下の同型を得る:

$$\mathrm{Rep}(\pi_1(\Sigma), G) := \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/G \cong \bigsqcup_{[P]} \mathcal{C}(P) /\!\!/_0\, \mathcal{G}(P)$$

ここで, $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)$ への G の作用は共軛で与えており, 右辺の和は Σ 上の主束の同型類全体を渡っている. □

$\mathrm{Rep}(\pi_1(\Sigma), G)$ を指標多様体という. 定理の最後の同型のうち, 平坦接続の同型類を主束の同型類全体に渡って非交和を取ったものと指標多様体の同型は曲面に限らず一般次元でいえることを記しておく.

指標多様体には別の方法でもシンプレクティック構造を入れることができる. 以下, $\pi := \pi_1(\Sigma)$ とおく. まず, π は有限生成であり, $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ の元は π の生成元の行き先がわかれば一位に定まるので, π の生成元を $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ として, $R_1, \ldots, R_m$ を π の関係式とすると,

$$\mathrm{Hom}(\pi, G) \cong \{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n; R_1(g_1, \ldots, g_n) = \ldots, R_m(g_1, \ldots, g_n) = 1\}$$

となる. ここで, 左辺の $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ は G^π にコンパクト開位相を入れたものの部分空間として考えている. つまり $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ は G^n の閉部分多様体 (analytic subvariety の意味) となっている. ここで, G^π は有限次元多様体ではないが, その上の滑らかな函数を考えることができて, それによって自然に環つき空間になっている. このような空間も有限次元多様体とほぼ同様に扱うことができる. 詳しくは Y.Karshon[3] 参照すると良い. $\phi \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ について, ϕ における Zariski 接空間を求めてみる. $(\phi_t)_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ を $\phi_0 = \phi$ となる $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ の中の連続族として,

$$\phi_t(x) = e^{tu(x)+O(t^2)}\phi(x)$$

とおく. この時, ϕ_t は準同型なので, $x, y \in \pi$ について, $\phi_t(xy) = \phi_t(x)\phi_t(y)$ となるので,

$$\begin{aligned}\phi_t(x)\phi_t(y) =& e^{tu(x)+O(t^2)}e^{t\mathrm{Ad}(\phi(x))u(y)+O(t^2)}\phi(xy)\\ =& e^{t(u(x)+\mathrm{Ad}(\phi(x))u(y))+O(t^2)}\phi(xy)\\ =& e^{tu(xy)+O(t^2)}\phi(xy)\end{aligned}$$

がわかる. つまり, $u : \pi \to \mathfrak{g}$ は, コサイクル条件

$$\mathrm{Ad}(\phi(x))u(y) - u(xy) + u(x) = 0$$

を満たす. 逆にこの条件を満たしていれば, $[e^{tu}\phi] \in T_\phi G^\pi$ は $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ の接ベクトルを与える. これは, $\mathrm{Hom}(\pi, G) = \{\phi \in G^\pi; \phi(x)\phi(y)\phi(xy)^{-1} = 1, \forall x, y \in \pi\}$ と, 各 $x, y \in \pi$ について,

$$e^{tu(x)}\phi(x)e^{tu(y)}\phi(y)\phi(xy)^{-1}e^{tu(xy)} = e^{t(u(x)+\mathrm{Ad}(\phi(x)u(y)-u(xy)))+O(t^2)} = e^{O(t^2)}$$

となることからわかる. 従って, $T_\phi\mathrm{Hom}(\pi, G)$ は G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を $\mathrm{Ad}\circ\phi$ によって π-加群とみた加群 $\mathfrak{g}_\phi$ の 1-コサイクル全体 $Z^1(\pi, \mathfrak{g}_\phi)$ と同型である.

次に, $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ への G の共軛作用を考える. $\phi \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ を取ってきて, $g : (-\epsilon, \epsilon) \to G; t \mapsto g_t$, $g_0 = 1$ について, $\phi_t := g_t^{-1}\phi g_t$ とおく. $g_t = e^{t\xi+O(t^2)}$ として $\xi \in \mathfrak{g}$ を定めると,

$$\phi_t(x) = e^{-t\xi+O(t^2)}\phi(x)e^{t\xi+O(t^2)} = e^{t(-\xi+\mathrm{Ad}(\phi(x))\xi)+O(t^2)}\phi(x)$$

となるので, 上の同型 $Z^1(\pi, \mathfrak{g}_\phi) \cong T_\phi\mathrm{Hom}(\pi, G)$ に対応する函数 $u : \pi \to \mathfrak{g}$ は,

$$u(x) = \mathrm{Ad}(\phi(x))\xi - \xi$$

となる. つまり, 共軛作用による準同型の軌道の接ベクトルはコバウンダリである. 逆に, u がコバウンダリならば, $u(x) = \mathrm{Ad}(\phi(x))\xi - \xi$ となる $\xi \in \mathfrak{g}$ が存在するので, $g_t = e^{t\xi}$ とすれば, u は接ベクトル $[g_t^{-1}\phi g_t]$ に対応する. このことから, 商空間 $\mathrm{Rep}(\pi, G) = \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ の点 $[\phi]$ ($\phi \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ の代表する同値類) における Zariski 接空間は 1 次の群コホモロジー $H^1(\pi, \mathfrak{g}_\phi)$ となることがわかる. 今, $\mathfrak{g}$ には Ad-不変な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ が入るとする. この時, $\mathfrak{g}_\phi^*$ を $\mathfrak{g}_\phi$ の双対 ($= \mathrm{Hom}_\pi(\mathfrak{g}_\phi, \mathbb{R})$.

$f \in \mathfrak{g}_\phi^*$, $x \in \pi$ について, $xf = f \circ \mathrm{Ad}(\phi(x)^{-1})$ と定めている.) とすると, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は π-同型 $\mathfrak{g}_\phi \cong \mathfrak{g}_\phi^*$ を与える. これによって, 非退化交代 2 次形式

$$H^1(\pi, \mathfrak{g}_\phi) \times H^1(\pi, \mathfrak{g}_\phi) \to H^2(\pi, \mathbb{R}) = H^2(B\pi, \mathbb{R}) = H^2(\Sigma, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

が与えられる.

実は, Hamilton 簡約によって $\mathrm{Rep}(\pi, G)$ に誘導されたシンプレクティック形式と, 今得たものが等しくなる. その説明を軽くする. そのためにまず, π の G への表現がどのようにして自明束に平坦接続を与えるかを確認しておく. まず, 群準同型 $\phi : \pi \to G$ が与えられた時, Σ の普遍被覆を $\widetilde{\Sigma}$ として, $\widetilde{\Sigma} \times G$ に π の作用を $\gamma.(x, g) = (\gamma x, \phi(\gamma)g)$ と定めて, この作用で割ることで, 主 G 束 P_ϕ をえる. P_ϕ には $\widetilde{\Sigma} \times G$ から誘導された水平な局所自明化が存在して, その変換函数 (g_{ij}) は局所定数函数である. また, $\widetilde{\Sigma} \times G$ の標準的な (平坦) 接続から誘導される平坦接続を D_ϕ とおくと, $g_{ij}^{-1} dg_{ij} = 0$ なので, これは $P_\phi \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ の上に平坦な接続を誘導し, $P_\phi \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ は P_ϕ の水平な局所自明化から誘導される局所自明化があり, これは π-加群 $\mathfrak{g}_\phi$ の誘導する Σ 上の平坦ベクトル束の自明化と同値なものである. これと局所系係数の de Rham の定理 (と, $K(\pi, 1) = \Sigma$ であること) から, 自然な同型

$$H^*(\pi, \mathfrak{g}_\phi) \cong H^*_{DR}(\Sigma, P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$$

を得る. 同型の自然性から, この cohomology の同型を通して, Goldman 形式は先程定義した非退化 2 次形式と一致しているというわけである.

これは同様の議論がコンパクト Kähler 多様体でも適用できて, これによって, Kähler 多様体 (M, ω) と Lie 環に Ad-不変な内積をもつ Lie 群 G について, $\mathrm{Rep}(\pi, G)$ にはシンプレクティック形式が入る (Y.Karshon[3], Theorem 5)

4. Yang-Mills 理論

G を Lie 群として, P を n 次元コンパクト Riemann 多様体 (M, g) 上の主 G 束とする. $\mathfrak{g}$ には Ad-不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ が入るとする. 例えば G がコンパクトなら $\mathfrak{g}$ に適当な内積 $(\cdot, \cdot)$ を入れて,

$$\langle x, y \rangle = \int_G (\mathrm{Ad}(g)x, \mathrm{Ad}(g)y) d\mu$$

とすればこのような内積が得られる. ここで, μ は正規化された (i.e. $\mu(G) = 1$ の)G の Haar 測度である. この時, $\mathfrak{g}$ の Ad-不変な内積は $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ に計量を誘導する. これによって, $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ には Hodge-$*$-作用素

$$* : A^p(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}) \to A^{n-p}((P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})')$$

が定義される. ここで, 実ベクトル束 E について, E' はその双対束としている. P の接続 ω について, Yang-Mills 汎関数 $J : \mathcal{C}(P) \to \mathbb{R}$ を,

$$J(\omega) = \frac{1}{2} \int_M \langle \Omega \wedge * \Omega \rangle = \frac{1}{2} \int_M \|\Omega\|^2 \mathrm{vol}.$$

と定める. 内積の Ad-不変性より $J(\omega)$ は Gauge 変換によらない. ここで, Ω は ω の曲率形式である. ここで, Y の極小値を与える接続が存在するかが気になる. それを見るために, $\mathcal{C}(P)$ の中で ω を連続的に動かしてみる. P 上の接続 $\omega \in \mathcal{C}(P)$ について,

$$\omega_t = \omega + t\alpha + O(t^2), (\alpha \in A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}))$$

とすると, P の局所自明化 (U_i, σ_i) に関する ω, ω_t, α の局所表示を θ^i, θ^i_t, α^i とおくと,

$$d\theta^i_t + \frac{1}{2}[\theta^i_t, \theta^i_t] = d\theta^i + \frac{1}{2}[\theta^i, \theta^i] + t(d\alpha^i + [\theta^i, \alpha^i]) + O(t^2)$$

となる．ここで, $d\alpha^i + [\theta^i, \alpha^i]$ は $\alpha \in A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ の接続 ω に関する共変微分 $D\alpha \in A^2(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ を与える．これによって, $\alpha \in A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ 方向の変化に対する Yang-Mills 汎関数の変分は

$$\delta J = \int_M \langle \Omega, D\alpha \rangle \, \mathrm{vol.} = (\Omega, D\alpha)$$

で与えられる．ここで, D の内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する随伴[2]はを D^* とおくと, ω が J の極値を与える条件は, 任意の $\alpha \in A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ について, $(\Omega, D\alpha) = (D^*\Omega, \alpha) = 0$ となること, すなわち

$$D^*\Omega = 0 \tag{5}$$

となる．一方で $D\Omega = 0$ は常に成立している (Bianchi の恒等式) ことに注意．ここで, 余微分と同様, D^* は Hodge の $*$ 作用素を用いて簡潔に書くことができる．実際, $\alpha \in A^{p-1}(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}), \beta \in A^p(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ について,

$$\begin{aligned}(D\alpha, \beta) &= \int_M \langle D\alpha \wedge *\beta \rangle \\ &= \int_M d\langle \alpha \wedge *\beta \rangle + (-1)^p \int_M \langle \alpha \wedge D * \beta \rangle \\ &=(\alpha, (-1)^{n(p-1)-1} * D * \beta)\end{aligned}$$

となる．すなわち,

$$D^* = (-1)^{n(p-1)-1} * D *$$

となる．ここで, 共変外微分 D が $P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ の計量を保つことを用いている．この方程式 (5) こそが, Yang-Mills 汎関数の極値を与える接続の満たすべき方程式である．これを Yang-Mills 方程式といい, これを満たす接続を Yang-Mills 接続という．

次に, 得られた Yang-Mills 接続が J の極小値を与えるかを考えたい．そのためには, 接続の 2 次変分まで考える必要がある．ω を Yang-Mills 接続として,

$$\omega_t = \omega + t\alpha + \frac{1}{2}t^2\beta + O(t^3)$$

としよう．すると, 上に使った記号の用法と同じようにして, (U_i, σ_i) 上で

$$\Omega_t^i = \Omega^i + tD\alpha^i + \frac{1}{2}t^2(D\beta^i + [\alpha^i, \alpha^i]) + O(t^3)$$

となる．従って, $(\Omega, D\alpha) = (\Omega, D\beta) = 0$ に注意して,

$$(\Omega_t, \Omega_t) = (\Omega, \Omega) + t^2(D\alpha.D\alpha) + t^2(\Omega, [\alpha, \alpha]) + O(t^3)$$

を得る．よって,

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} J(\omega_t) = (D\alpha, D\alpha) + (\Omega, [\alpha, \alpha])$$

となる．さらに,

$$\begin{aligned}(\Omega, [\alpha, \alpha]) &= \int_M \langle [\alpha, \alpha] \wedge *\Omega \rangle \\ &=(-1)^{n-1} \int_M \langle \alpha \wedge [*\Omega, \alpha] \rangle \\ &=(\alpha, *[*\Omega, \alpha])\end{aligned}$$

---

[2]コンパクト (Riemann) 多様体上の (計量の入った) ベクトル束の間の微分作用素 Riemann 計量とベクトル束の計量から誘導される L^2 内積についての随伴を一意にもち, それも元の作用素と同じ階数の微分作用素である．

となるので,

$$(D\alpha, D\alpha) + (\Omega, [\alpha, \alpha]) = (\alpha, D^* D\alpha + *[*\Omega, \alpha])$$

となる. $S : A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}) \to A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ を,

$$S(\alpha) = D^* D\alpha + *[*\Omega, \alpha]$$

と定めると, ω が極小値を与えることは, S が半正定値であること, すなわち任意の $\alpha \in A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ について,

$$(S(\alpha), \alpha) \geq 0$$

となることということができる. これを満たす Yang-Mills 接続を弱安定な Yang-Mills 接続という. もちろん平坦接続は弱安定である. 一方で, 以下の定理が知られている:

定理 4.1 (J. Simons)**.** $n \geq 5$ について, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$($n+1$ 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の単位球面) 上の如何なるコンパクト Lie 群をファイバーとした主束は平坦でない弱安定 Yang-Mills 接続を持ち得ない. $\diamond$

このように, Riemann 多様体で, その上のいかなるコンパクト群をファイバーとする主束も平坦でない弱安定 Yang-Mills 接続を持ち得ないものが存在する. このような多様体を Yang-Mills 不安定な多様体という. しかし, 一方で Yang-Mills 接続の存在性については, 以下のような定理も知られている.

定理 4.2 (M. Katagiri[4])**.** $n \geq 5$ 次元 Riemann 多様体 (M, g) と, コンパクト Lie 群をファイバーとする M 上の主束 P について, ある $\omega \in \mathcal{C}(P)$ および g に共形同値な M 上の Riemann 計量 $\widetilde{g}$ が存在して, ω は $(M, \widetilde{g})$ に関して Yang-Mills 接続である. $\diamond$

これらは Riemann 多様体の話であるが, 同様のアプローチは Kähler 多様体でもあり, 例えば Kähler 多様体 (M, ω) 上の ω と同じ Kähler 類をもつ cscK 計量は $\mathcal{K} := \{\omega' : \omega'$ は Kähler 形式で, $[\omega] = [\omega']\}$[3] 上で定義されるの満渕汎関数の臨界点で与えられる ([5] Chapter 4).

Appendix A. Simons の定理の証明

本節では Simons の定理の証明を行う. (M, g) を向き付けられたコンパクト Riemann 多様体, G をコンパクト Lie 群として, P を M 上の主 G 束とする. U を M の座標近傍で, $P|U$ が自明なものとして, $\{e_i\}$ を $TM|U$ の正規直交枠とし, $\{\theta^i\}$ をその双対枠とする. $\alpha \in A^1(P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ の U への制限は, P の局所自明化を通じて $\alpha|U = \sum a_i \theta^i$, $a_i : U \to \mathfrak{g}$ と表される. この時の $(S(\alpha), \alpha)$ を求めよう. P の接続を一つ用意して, その局所表示を $\phi = \sum \phi_i \theta^i \in A^1(U, \mathfrak{g})$ とする. $\alpha = \frac{1}{p!} \sum a_{i_1 \ldots i_p} \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p} \in A^p(U, \mathfrak{g})$, ($a_{i_1 \ldots i_p}$ は反対称) について,

$$\nabla_i a_{i_1 \ldots i_p} = d a_{i_1 \ldots i_p}(e_i) - \sum_{r=1}^{p} c^j_{i_r i} a_{i_1 \ldots i_{r-1} j i_{r+1} \ldots i_p} + [\phi_i, a_{i_1 \ldots i_p}]$$

[3] $\partial\bar{\partial}$-lemma によって, $\omega' \in \mathcal{K}$ はある $\phi : M \to \mathbb{R}$ を用いて, $\omega' = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$ とかける.

とおく. ここで, $c^i_{jk}\theta^k = \theta^i_j$ は (M,g) の Levi-Civita 接続の局所表示. この時, 与えられた P の接続について, 誘導された $P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$ の接続 ∇ に関する α の共変微分 $D\alpha$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
D\alpha =& \frac{1}{p!}\left(da_{i_1\dots i_p}\wedge\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_p} - a_{i_1\dots i_p}\omega^{i_1}_j\wedge\theta^j\wedge\theta^{i_2}\wedge\dots\wedge\theta^{i_p}\right.\\
&- a_{i_1\dots i_p}\omega^{i_2}_j\wedge\theta^{i_1}\wedge\theta^j\wedge\dots\wedge\theta^{i_p} - \dots\\
&\left.+[\phi_j, a_{i_1\dots i_p}]\theta^j\wedge\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_p}\right)\\
=& \frac{1}{p!}\nabla_j a_{i_1\dots i_p}\theta^j\wedge\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_p}\\
=& \frac{1}{(p+1)!}(\nabla_j a_{i_1\dots i_p} - \nabla_{i_1}a_{ji_2\dots i_p} - \dots - \nabla_{i_p}a_{i_1\dots i_{p-1}j})\theta^j\wedge\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_p}
\end{aligned}$$

となる. また, $*(\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_p}) = \theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_{n-p}}$ とおいて, $\widetilde{a}_{j_1\dots j_{n-p}} := a_{i_1\dots i_p}$ とすると,

$$D*\alpha = \frac{1}{(n-p)!}\sum_{r=1}^{p}\nabla_{i_r}\widetilde{a}_{j_1\dots j_{n-p}}\theta^{i_r}\wedge\theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_{n-p}}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}
\nabla_i\widetilde{a}_{j_1\dots j_{n-p}} =& da_{i_1\dots i_p}(e_i) - c^j_{j_1 i}\widetilde{a}_{jj_2\dots j_{n-p}} - \dots + [\phi_i, a_{i_1\dots i_p}]\\
=& da_{i_1\dots i_p}(e_i) - c^j_{i_1 i}a_{ji_2\dots i_p} - \dots + [\phi_i, a_{i_1\dots i_p}]\\
=& \nabla_i a_{i_1\dots i_p}
\end{aligned}$$

となるので,

$$D*\alpha = \frac{1}{(n-p+1)!}\sum_{r=1}^{p}\nabla_{i_r}a_{i_1\dots i_p}\theta^{i_r}\wedge\theta^{j_1}\wedge\dots\wedge\theta^{j_{n-p}}$$

がわかる. よって,

$$\begin{aligned}
D^*\alpha =& (-1)^p * D * \alpha\\
=& \frac{1}{(p-1)!}\sum_{r=1}^{p}(-1)^r\nabla_{i_r}a_{i_1\dots i_p}\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{\theta^{i_r}}\wedge\dots\theta^{i_p}\\
=& -\frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_j\nabla_j a_{ji_1\dots i_{p-1}}\right)\theta^{i_1}\wedge\dots\wedge\theta^{i_{p-1}}
\end{aligned}$$

がわかる. 従って, 特に $\alpha = a_i\theta^i$ の時,

$$D^*D\alpha = -\sum(\nabla_i\nabla_i a_j - \nabla_i\nabla_j a_i)\theta^j$$

となる. ここで, 以下の補題を用いてこれを少し変形する.

補題 A.1.

$$[\nabla_i, \nabla_j]a_k = [F_{ij}, a_k] - R^l_{kij}a_l$$

ここで, $\Omega = d\phi + \frac{1}{2}[\phi,\phi] = \frac{1}{2}F_{ij}\theta^i\wedge\theta^j$.

証明.

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j a_k =& d(\nabla_j a_k)(e_i) - c_{ji}^l \nabla_l a_k - c_{ki}^l \nabla_j a_l + [\phi_i, \nabla_j a_k] \\ =& d(da_k(e_j))(e_i) - d(c_{kj}^l a_l)(e_i) + d[\phi_j, a_k](e_i) \\ & - c_{ji}^l d(a_k)(e_l) + c_{ji}^l c_{kl}^m a_m - c_{ji}^l [\phi_l, a_k] \\ & - c_{ki}^l d(a_l)(e_j) + c_{ki}^l c_{lj}^m a_m - c_{ki}^l [\phi_j, a_l] \\ & + [\phi_i, da_k(e_j)] - c_{kj}^l [\phi_i, a_l] + [\phi_i, [\phi_j, a_k]]\end{aligned}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}d\phi(e_i, e_j) =& d(\phi_l\theta^l)(e_i, e_j) \\ =& d\phi_j(e_i) - d\phi_i(e_j) + \phi_l(c_{ij}^l - c_{ji}^l)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}[\phi, \phi](e_i, e_j) = \frac{1}{2}([\phi_i, \phi_j] - [\phi_j, \phi_i])$$

$$[\phi_i, [\phi_j, a_k]] = [\phi_j, [\phi_i, a_k]] + [[\phi_i, \phi_j], a_k]$$

$$\begin{aligned}d\theta_k^l(e_i, e_j) =& dc_{kj}^l(e_i) - dc_{ki}^l(e_j) + c_{km}^l(c_{ij}^m - c_{ji}^m) \\ \theta_m^l \wedge \theta_k^m(e_i, e_j) =& c_{mi}^l c_{kj}^m - c_{mj}^l c_{ki}^m\end{aligned}$$

$$0 = d(da_k)(e_i, e_j) = d(d(a_k)(e_j))(e_i) - d(d(a_k)(e_i))(e_j) + da_k(e_l)c_{ij}^l - da_k(e_l)c_{ji}^l$$

を用いて, 上に得た式を整理すると,

$$[\nabla_i, \nabla_j]a_k = [F_{ij}, a_k] - R_{kij}^l a_l$$

を得る． □

これによって,

$$D^*D\alpha = \sum(\nabla_j\nabla_i a_i - \nabla_i\nabla_i a_j + [F_{ij}, a_i] + R_{ij}a_i)\theta^j$$

を得る．さらに,

$$\begin{aligned}(\Omega, [\alpha, \alpha]) =& \sum(F_{ij}, [a_i, a_j]) \\ =& \sum([F_{ij}, a_i], a_j) \\ =& (\sum[F_{ij}, a_i]\theta^j, \alpha)\end{aligned}$$

となるので, 以下の補題が得られる:

補題 A.2.

$$S(\alpha) = \sum(\nabla_j\nabla_i a_i - \nabla_i\nabla_i a_j + 2[F_{ij}, a_i] + R_{ij}a_i)\theta^j$$

□

$P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ に値をとる 2 形式についても同様の計算を行なっておく． 補題 A.1 と同様の計算で, $\Psi := \frac{1}{2}\sum b_{ij}\theta^i \wedge \theta^j$ についても,

$$[\nabla_i, \nabla_j]b_{kl} = [F_{ij}, b_{kl}] - R_{kij}^m b_{ml} - R_{lij}^m b_{km}$$

が示せるので,

$$\begin{aligned}
D\Psi =&\frac{1}{6}\sum(b_{ij,k}-b_{kj,i}-b_{ik,j})\theta^i\wedge\theta^j\wedge\theta^k\\
D^*\Psi =&-\sum b_{ij,i}\theta^j\\
DD^*\Psi =&\frac{1}{2}\sum(b_{ij,i,k}-b_{ik,i,j})\theta^j\wedge\theta^k\\
D^*D\Psi =&\frac{1}{2}\sum(-b_{ij,k,i}+b_{kj,i,i}+b_{ik,j,i})\theta^j\wedge\theta^k\\
\Delta\Psi =&\frac{1}{2}\sum(b_{kj,i,i}+[F_{ki},b_{ij}]-R_{ik}b_{ij}-R^l_{jik}b_{il}+[F_{ij},b_{ik}]+R_{ij}b_{ik}-R^l_{kij}b_{il})\theta^j\wedge\theta^k\\
=&\frac{1}{2}\sum(-b_{jk,i,i}-2[F_{ji},b_{ik}]+2R_{ij}b_{ik}-R^l_{ijk}b_{il})\theta^j\wedge\theta^k
\end{aligned}$$

となる. ここで, 最後は Bianchi の第一恒等式 $R^l_{ijk}+R^l_{jki}+R^l_{kij}=0$ を使っている.

さて, 今 M は $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれているとして, g は $\mathbb{R}^N$ の標準 Euclid 計量の M への引き戻しになっているとしよう. この時, P 上の接続を固定して, その曲率形式が Ψ になっていたとしよう. $y:M\to\mathbb{R}^N$ を埋め込みとして, U を P の局所自明座標近傍, $\{e_1,\dots,e_n\}$ を $TM|U$ の正規直交枠, $\{e_{n+1},\dots,e_N\}$ を $T^\perp M|U$ の正規直交枠, $\{\theta^1,\dots,\theta^N\}$ をその双対枠とする. すると,

$$dy=\sum_{i=1}^n e_i\theta^i$$

となる. 従って, $e_i=(y_i^1,\dots,y_i^N)$ とおくと,

$$dy^\lambda=\sum_{i=1}^n y_i^\lambda\theta^i$$

となる. $\alpha^\lambda\in A^1(P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g})$ を,

$$\alpha^\lambda=a_j^\lambda\theta^j=\left(\sum_{i=1}^n b_{ij}y_i^\lambda\right)\theta^j$$

によって定める. つまり, $\alpha=(\alpha^1,\dots,\alpha^N)$ とおくと,

$$\alpha=\sum b_{ij}e_i\theta^j$$

である.

$$\begin{aligned}
a_{i,j} =&db_{li}(e_j)e_l+b_{li}de_l(e_j)-c^k_{ij}b_{lk}e_l+[\phi_j,b_{li}]e_l\\
=&(db_{li}(e_j)-c^k_{lj}b_{ki}-c^k_{ij}b_{lk}+[\phi_j,b_{li}])e_l+b_{li}(de_l(e_j)-c^k_{lj}e_k)\\
=&b_{li,j}e_l+b_{li}e_{i,j}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $\nabla_ie_l=e_{l,i}$ は e_l の共変微分. 同様の計算で,

$$a_{i,j,k}=b_{li,j,k}e_l+b_{li,j}e_{l,k}+b_{li,k}e_{l,j}+b_{li}e_{l,j,k}$$

となる. ここで, $de_i=\theta_i^\lambda e_\lambda$ で, $p=n+1,n+2,\dots,N$ について, $\theta_i^p=h^p_{ij}\theta^j$ とおくと,

$$\begin{aligned}
e_{i,j} =&h^p_{ij}e_p\\
e_{i,j,k} =&\sum_p\left(h^p_{ij,k}e_p-\sum_l h^p_{ij}h^p_{lk}e_l\right)
\end{aligned}$$

となる．よって，h^p_{ij} が i,j について対象で，b_{ij} が反対称であることに注意して，

$$\begin{aligned} a_{i,i,j} =& b_{li,i,j}e_l + b_{li,i}h^p_{lj}e_p + b_{li,j}h^p_{li}e_p + b_{li}h^p_{li,j}e_p \\ a_{j,i,i} =& b_{lj,i,i}e_l + 2b_{lj,i}e_{l,i} + b_{lj}e_{l,i,i} \\ [F_{ij}, a_i] =& [F_{ij}, b_{li}]e_l \\ R_{ij}a_i =& R_{ij}b_{li}e_l \end{aligned}$$

がわかった．従って，

$$\begin{aligned} (S(\alpha),\alpha) :=& \sum_{\lambda=1}^{N}(S(\alpha^\lambda),\alpha^\lambda) \\ =& \sum(b_{li,i,j},b_{lj}) - \sum(b_{lj,i,i},b_{lj}) + \sum(b_{lj}h^p_{li}h^p_{ik},b_{kj}) \\ &+ 2\sum([F_{ij},b_{li}],b_{lj}) + \sum(R_{ij}b_{li},b_{lj}) \\ =& 2(\Delta\Psi,\Psi) - \sum(R_{ij}b_{ik},b_{jk}) + \sum(b_{li,i,j},b_{lj}) + \sum(b_{lj}h^p_{li}h^p_{ik},b_{kj}) - \sum(R_{iljk}b_{il},b_{jk}) \\ =& 2(\Delta\Psi,\Psi) - (D^*\Psi,D^*\Psi) - 2\sum(b_{ij}R_{ik},b_{kj}) + \sum(b_{lj}h^p_{ii}h^p_{lk},b_{kj}) - \sum(R_{iljk}b_{il},b_{jk}) \end{aligned}$$

となる．ここで，$R_{jk} = \sum_{p,i}(h^p_{ii}h^p_{jk} - h^p_{ij}h^p_{ik})$ を用いている．つまり，

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(\Psi,\Psi) :=& \sum(b_{ij}R_{ik},b_{kj}) \\ R(\Psi,\Psi) :=& \sum(R_{iljk}b_{il},b_{jk}) \\ H(\Psi,\Psi) :=& \sum(b_{jl}h^p_{ii}h^p_{jk},b_{kl}) \end{aligned}$$

とおくことで，

$$(S(\alpha),\alpha) = 2(\Delta\Psi,\Psi) - (D^*\Psi,D^*\Psi) - 2\mathrm{Ric}(\Psi,\Psi) + \mathrm{H}(\Psi,\Psi) - \mathrm{R}(\Psi,\Psi)$$

とすることができた．$M = S^n(\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面) の時，$h^{n+1}_{ij} = \delta_{ij}$ なので，

$$\begin{aligned} (S(\alpha),\alpha) =& 2(\Delta\Psi,\Psi) - (D^*\Psi,D^*\Psi) - 4(n-1)(\Psi,\Psi) + 2n(\Psi,\Psi) - 4(\Psi,\Psi) \\ =& 2(\Delta\Psi,\Psi) - (D^*\Psi,D^*\Psi) - 2(n-4)(\Psi,\Psi) \end{aligned}$$

となる．$\omega \in \mathcal{C}(P)$ を Yang-Mills 接続として，$\Psi = \Omega(\omega)$ として上の式に代入すると，

$$(S(\alpha),\alpha) = -2(n-4)(\Psi,\Psi)$$

となるので，$n \geq 5$ なら ω が弱安定であることと ω が平坦であることが同値になる．従って，Simons の定理が示された □

References

[1] M. F. Atiyah. Complex analytic connections in fibre bundles. *Transactions of the American Mathematical Society*, 85(1):181–207, 1957.
[2] W. M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Advances in Mathematics*, 54(2):200–225, 1984.
[3] Y. Karshon. An algebraic proof for the symplectic structure of moduli space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 116(3):591–605, 1992.
[4] M. Katagiri. On the existence of Yang-Mills connections by conformal changes in higher dimensions. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 46(1):139 – 147, 1994.
[5] G. Székelyhidi. An introduction to extremal kähler metrics. *American Mathematical Society*, 2014.
[6] 小林昭七. **接束の微分幾何とゲージ理論**. 裳華房, 1989.