連接層の安定性とそのモジュライ

HADA YOHEI

ABSTRACT. 本 pdf は, 1/8 日以降の Huybrechts-Lehn[1] のセミナーの発表ノートである. 内容は基本的に [1] に則っているが, 時々他の文献も参考にしている.

1. 予備知識

1.1. Notation.

- スキーム X について, $\mathrm{Coh}(X)$ で, 連接 $\mathcal{O}_X$ 加群のなす圏とする. また, $F \in \mathrm{Coh}(X)$ について, $\dim(F) = \dim(\mathrm{Supp}(F))$ と定める.
- (半) 安定性について, 文「... が (半) 安定である (ならば/とは/etc.), ... $A(\leq)B$ である」を,「... が安定である (ならば/とは/etc.), ... $A < B$ であり, ... が半安定である (ならば/とは/etc.), ... $A \leq B$ である」と解釈する.

1.2. **安定性の定義.** Hilbert 多項式についての基礎的な事項を復習する. 以下, X を (無限) 体 k 上の射影的スキームとして, $\mathcal{O}(1)$ を X 上の豊富な直線束として固定する. この時, X 上の連接層 F の Hilbert 多項式 $P(F, m)$ は以下で定義された:

$$P(F, m) = \chi(F(m))$$

ここで, χ は Euler 標数.

Property 1. $F \in \mathrm{Coh}(X)$, $\dim(F) = d$ として, $H_1, \ldots, H_d \in |\mathcal{O}(1)|$ を F-正則列とする. この時,

$$\chi(F(m)) = \sum_{i=0}^{d} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j\leq i} H_j})$$

となる.

proof. d による帰納法. $d = 0$ の時は明らか. $d < d_0$ で命題が成立すると仮定する. $F \in \mathrm{Coh}(X)$ が $\dim(F) = d_0$ の時, H_1 は F-正則なので, $F|_{H_1}$ は $d_0 - 1$ 次元となる. よって, 帰納法の仮定から,

$$\chi(F|_{H_1}(m)) = \sum_{i=0}^{d_0-1} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j\leq i+1} H_j})$$

となる. 完全列

$$0 \to F(m-1) \to F(m) \to F|_{H_1}(m) \to 0$$

より,

$$\chi(F(m)) - \chi(F(m-1)) = \chi(F|_{H_1}(m)) = \sum_{i=0}^{d_0-1} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j\leq i+1} H_j})$$

Date: November 2024.

となるので,

$$\begin{aligned}\chi(F(m)) =&\chi(F) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{i=0}^{d_0-1}\binom{l+i-1}{i}\chi(F|_{\bigcap_{j\le i+1}H_j})\\ =&\chi(F) + \sum_{i=1}^{d_0}\left(\sum_{l=1}^{m}\binom{l+i-2}{i-1}\right)\chi(F|_{\bigcap_{j\le i}H_j})\\ =&\chi(F) + \sum_{i=1}^{d_0}\binom{m+i-1}{i}\chi(F|_{\bigcap_{j\le i}H_j})\\ =&\sum_{i=0}^{d}\binom{m+i-1}{i}\chi(F|_{\bigcap_{j\le i}H_j})\end{aligned}$$

がわかった. □

一般に, F の Hilbert 多項式はたかだか $\dim(F)$ 次の多項式であることが知られている. よって, 特に $\alpha_i(F) \in \mathbb{Q}$ $(i = 0, \ldots, d)$ を用いて,

$$P(F, m) = \sum_{i=0}^{d}\frac{\alpha_i(F)}{i!}m^i$$

とかける.

Remark 1. $\mathcal{O}(N)$ が非常に豊富の時, F の正則列 $H_1, \ldots, H_d \in |\mathcal{O}(N)|$ をとってくると,

$$P(F, mN) = \sum_{i=0}^{d}\binom{m+i-1}{i}\chi(F|_{\bigcap_{j\le i}H_j})$$

となる. よって, この先頭係数を見ることで, $\alpha_d(F) = \frac{1}{N^d}\chi(F|_{\bigcap_{i\le d}H_i}) \in \frac{1}{N^d}\mathbb{Z}_{\ge 0}$ がわかる. この $\alpha_d(F)$ は F の重複度といい, 今見たように, 取れる値が離散的であることに注意.

Definition 1. $F \in \mathrm{Coh}(X)$ の階数を $\mathrm{rk}(F) = \frac{\alpha_d(F)}{\alpha_d(\mathcal{O}_X)}$ で定める.

Property 2. *X が整スキームなら, $\mathrm{rk}(F)$ は生成ファイバーの次元と一致する.*

proof. General Flatness から, X のある開集合 U が存在して, $F|_U$ は自由 $\mathcal{O}_U$ 加群になる. U をいずれかの標準 affine 開集合に含まれる affine 開集合として良い. $F|_U$ の階数を r とおき, 同型 $\phi : \mathcal{O}_U^{\oplus r} \to F|_U$ をひとつとる. ϕ は $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}, F)$ の U での切断で, 同型 $\psi : \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus r}$ を定める.

$$0 \to K \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}, F) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, F|_U) \to 0$$

について, $m \gg 0$ で $H^1(X, K(m)) = 0$ なので, この m について,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}, F) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U(-m)^{\oplus r}, F|_U) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, F|_U)$$

は全射. よって, ϕ はある $\tilde{\phi} : \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r} \to F$ に伸びる. $\mathrm{Ker}\phi$ および $\mathrm{Cok}\phi$ はともに U の外にあるので, 次元が落ちている. よって, $\alpha_d(F) = \alpha_d(\mathcal{O}_X^{\oplus r}) = r\alpha_d(\mathcal{O}_X)$. □

Remark 2. 一般には, $\mathrm{rk}(F)$ は整数とは限らない.

Definition 2. $F \in \mathrm{Coh}(X)$ について, 簡約 Hilbert 多項式 $p(F)$ を,

$$p(F, m) = \frac{P(F, m)}{\alpha_d(F)}$$

と定める．

2 つの実係数多項式 f, g について，$f \le g$ (あるいは $f < g$) とは，$m \gg 0$ について，$f(m) \le g(m)$ (あるいは $f(m) < g(m)$) となることとして定める．これは多項式の次数が大きい順に通常の辞書式に順序関係を入れた順序で大小を見ることと同じである．

Definition 3. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ を純な加群層とする．E が (Gieseker-丸山)(半) 安定であるとは，任意の部分加群層 $F \subsetneq E$ について，$p(F)(\le)p(E)$ となることを指す．

Property 3. *$E \in \mathrm{Coh}(X)$ を純な連接層として，$\dim E = d$ とおく．この時，以下は同値である:*

(1) *E が (半) 安定である*
(2) *任意の飽和な真の部分加群層 $F \subset E$ について，$p(F)(\le)p(E)$ である*
(3) *任意の真の商 $E \to G$ について，$\alpha_d(G) > 0$ ならば $p(E)(\le)p(G)$ となる．*
(4) *任意の真の純 d 次元の商 $E \to G$ について，$p(E)(\le)p(G)$ となる．*

proof. (1) $\Longrightarrow$ (2), (3) $\Longrightarrow$ (4) は明らか．短完全列

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

をみる．$P(E) = P(F) + P(G)$ と，$\alpha_d(E) = \alpha_d(F) + \alpha_d(G)$ から，

$$\alpha_d(G)(p(E) - p(G)) = \alpha_d(F)(p(F) - p(E))$$

を得る．よって，(1) $\Longrightarrow$ (3), (2) $\Longleftrightarrow$ (4) がわかる．(2) $\Longrightarrow$ (1) は，F' を F の飽和化とすると，$P(F) \le P(F')$, $\alpha_d(F) = \alpha_d(F')$ となることからわかる． □

Property 4. *$F, G \in \mathrm{Coh}(X)$ を半安定な連接層とする．*

(1) *$p(F) > p(G)$ なら，$\mathrm{Hom}(F, G) = 0$.*
(2) *$p(F) = p(G)$ で，F が安定なら，任意の $0 \ne \phi \in \mathrm{Hom}(F, G)$ は単射．*
(3) *$p(F) = p(G)$ で，G が安定なら，任意の $0 \ne \phi \in \mathrm{Hom}(F, G))$ は全射．*
(4) *$p(F) = p(G)$ かつ $\alpha_d(F) = \alpha_d(G)$ なら，F か G のいずれかが安定なら任意の $0 \ne \phi \in \mathrm{Hom}(F, G)$ は同型．*

proof. $p(F) \ge p(G)$ とする．$\phi : F \to G$ の像 $\phi(F)$ は $F/\mathrm{Ker}(\phi)$ と同型なので，これが 0 でないなら $p(F) \le p(\phi(F)) \le p(G)$ となる．よって，もし $p(F) > p(G)$ ならこのようなことはあり得ない．$p(F) = p(G)$ かつ F が安定なら，$\phi \ne 0$ を仮定すると，$p(F) = p(\phi(F))$ がわかり，この等号が成立するのは $F \cong \phi(F)$ のときのみなので，$\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ がわかる．したがって，ϕ は単射．$p(F) = p(G)$ で，G が安定なら，$p(\phi(F)) = p(G)$ から，$\phi = 0$ または $\phi(F) = G$ がわかる．また，$p(F) = p(G)$ かつ $\alpha_d(F) = \alpha_d(G)$ なら，F(resp. G) が安定なら，ϕ は単射 (resp. 全射) だが，$P(F) = P(G)$ なので，核 (resp. 余核) の Hilbert 多項式が 0 になる．よって，ϕ は同型． □

Corollary 1. *E が安定な連接層とすると，$\mathrm{End}(E)$ は k 上の有限次元可除環となっている．特に k が代数閉体なら，$\mathrm{End}(E) = k$ となる．*

proof. $\mathcal{H}om(E, E)$ は連接層なので，その大域切断 $\mathrm{End}(E)$ は k 上有限次元線型空間．また，E は安定なので，$\phi \in \mathrm{End}(E)$ は 0 か可逆である．k が代数閉体なら，$x \in \mathrm{End}(E)$ を k に付け加えた拡大体は k 自身になるので，$x \in k$ がわかる． □

Definition 4. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ が幾何学的に安定であるとは，任意の拡大体 K/k について，基底変換 $X_K \to X$ による引き戻し E_K が X_K 上安定であることを指す．

半安定の方はこの条件は半安定性と同値であることを Harder-Narashimhan filtration の一意性の系として後で見る．

安定性の議論は代数曲線上のベクトル束の文脈で初めて現れた. X を種数 g の非特異射影曲線として, E を X 上の階数 r のベクトル束とする. この時, Riemann Roch の定理から,

$$\chi(E) = \int_X ch(E)td(TX) = \deg(E) + r(1-g)$$

となる. よって, Hilbert 多項式は

$$P(E,m) = r\deg(X)m + \deg(E) + r(1-g) = r(\deg(X)m + \frac{\deg(E)}{r} + 1 - g)$$

となる. したがって, $\mu(E) = \frac{\deg(E)}{r}$ とおけば, E が (半) 安定であることと, 任意の非自明な部分ベクトル束 $F \subset E$ について, $\mu(F)(\leq)\mu(E)$ となることが同値である (命題 3 の (2) 参照). この $\mu(E)$ は E の slope と呼ばれる量である. この安定性は Mumford-竹本安定性として高次元においても一般化される.

Definition 5. E を次元 $d = \dim(X)$ の連接層とする. この時,

$$\deg(E) := \alpha_{d-1}(E) - \mathrm{rk}(E)\alpha_{d-1}(\mathcal{O}_X)$$

と定め, E の X の偏極 H に関する次数という. また, E の slope は,

$$\mu(E) := \frac{\deg(F)}{\mathrm{rk}(E)}$$

として定義される.

Remark 3. X が既約かつ被約の時, $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$ として,

$$\begin{aligned}\chi(E(m)) = &\int_X ch(E)(1 + mH + \frac{1}{2}m^2H^2 + \cdots)(1 + \frac{1}{2}c_1(X) + \dots) \\ =&\mathrm{rk}(E)\cdot\frac{\deg(X)}{d!}m^d + \frac{(\mathrm{rk}(E)c_1(X) + 2c_1(E).H^{d-1})}{2(d-1)!}m^{d-1} + \cdots\end{aligned}$$

より, $\alpha_{d-1}(E) = \frac{(\mathrm{rk}(E)c_1(X)+2c_1(E).H^{d-1})}{2}$ である. よって,

$$\deg(E) = \int_X c_1(E).H^{d-1}$$

であることがわかった.

Definition 6. (X,H) を偏極多様体とする. 上の連接層が Mumford-竹本 (半) 安定であるとは, $T_{d-1}(E) = T_{d-2}(E)$ であり[1], 任意の非自明な部分層 $F \subset E$ について, $\mu(F)(\leq)\mu(E)$ となることである.

Property 5. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ が純であるとする. この時, 以下が成立する.

$$MT\text{安定} \implies GM\text{安定} \implies GM\text{半安定} \implies MT\text{半安定}$$

proof. MT 安定は Hilbert 多項式の上から 2 項のみを見ているので, 明らか. □

Remark 4. (MT-/GM-) 安定性の定義は一般には偏極に依存する. 曲線の場合は MT 安定性が偏極に依存しないので, 依存しない.

Property 6. *X が整とする. X 上の連接層が MT 半安定かつ次数と階数が互いに素だったとすると, E は MT 安定になる.*

[1]これは d 次元以下の連接層のなす $\mathrm{Coh}(X)$ の充満圏 $\mathrm{Coh}(X)_d$ を, その Serre 部分圏 $\mathrm{Coh}(X)_{d-2}$ で割った圏 $\mathrm{Coh}(X)_{d,d-2}$ における pure object であるということである.

proof. $0 \neq F \subset E$ について, $\mu(F) = \mu(E)$ なら, $\deg(F)\mathrm{rk}(E) = \deg(E)\mathrm{rk}(F)$. この式と仮定から, $\mathrm{rk}(F)$ は $\mathrm{rk}(E)$ の倍数となる. よって, $F = E$ となるしかない. □

Example 1 ((半) 安定なベクトル束の例)**.** (半) 安定なベクトル束の例をいくつか挙げていく. 簡単のため, X は非特異射影曲線とする.

- 任意の直線束は安定である (これは命題 3(2) からわかる).
- L_1. L_2 を X 上の直線束として, $\deg(L_1) + 1 = \deg(L_2)$ とする. $0 \to L_1 \to F \to L_2 \to 0$ を非自明な拡大とする. $\mathrm{rk}(F) = 2$ であり, $\deg(F) = 2\deg(L_1) + 1$ なので, $\mu(F) = \deg(L_1) + \frac{1}{2}$ である. $M \subset F$ を飽和な部分層とすると, $\mathrm{rk}(M) = 1$ または $\mathrm{rk}(F) = 2$ である. $\mathrm{rk}(M) = 2$ の時は $M = F$ となる. $\mathrm{rk}(M) = 1$ の時は, $M \subset L_1$ か, $M \to L_2$ が単射である [$\because$ $K = \mathrm{Ker}(M \to L_2)$ とする. $M/K \subset L_2$ なので, L_2 が純なことと M は直線束であることから $\dim(K) < \dim(X)$ または $K = M$. 前者の場合は M が直線束 (特に純) であることから, $K = 0$ がわかる. よって, $K = M$ または $K = 0$. 前者の場合, $M \subset L_1$ で後者の場合は $M \subset L_2$].
  $\mu(F) = \deg(L_1) + \frac{1}{2}$ で, $\mu(L_1) = \deg(L_1)$ なので, 前者の場合, $\mu(M) = \deg(M) \leq \deg(L_1) < \mu(F)$ となる. 後者の場合, $M = L_2$ なら $F = L_1 \oplus L_2$ となり, 仮定に反する. L_2 は安定なので, $\mu(M) < \mu(L_2)$ となり, $\mu(M) \leq \mu(L_2) - 1 = \mu(L_1) < \mu(F)$ がわかる. よって, F は安定である.
- 上の議論から, 上の L_1, L_2 について, $F = L_1 \oplus L_2$ は半安定ではあることがわかった.
- 同様の議論で, 安定でないが単純なベクトル束も作れる. X を閉体 k 上の種数 $g \geq 2$ の非特異射影曲線として, E_1, E_2 をそれぞれ階数 r_1, r_2 の互いに同型でない安定ベクトル束で, $\mu(E_1) = \mu(E_2)$(したがって $p(E_1) = p(E_2)$) とする. すると, 命題 4 より, $\mathrm{Hom}(E_2, E_1) = 0$ となる. したがって,
  $$\dim(\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)) = h^1(E_2^\vee \otimes E_1) = -\chi(E_2^\vee \otimes E_1) = r_1 r_2 (g-1)$$
  となる. よって, 非自明な拡大 $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ が存在する. E の真の部分層 F をとると, $0 \to E_1 \cap F \to F \to F/(E_1 \cap F) \to 0$ があって,
  $$\begin{aligned} P(F) =& P(E_1 \cap F) + P(F/(E_1 \cap F)) \\ \leq& \mathrm{rk}(E_1 \cap F)p(E_1) + (\mathrm{rk}(F) - \mathrm{rk}(E_1 \cap F))p(E_2) \\ =& \mathrm{rk}(F)p(E_2) + \mathrm{rk}(E_1 \cap F)(p(E_1) - p(E_2)) \\ =& \mathrm{rk}(F)p(E_2) \\ P(E) =& \mathrm{rk}(E_1)p(E_1) + (\mathrm{rk}(E) - \mathrm{rk}(E_1))p(E_2) \\ =& \mathrm{rk}(E)p(E_2) + \mathrm{rk}(E_1)(p(E_1) - p(E_2)) \\ =& \mathrm{rk}(E)p(E_2) \end{aligned}$$
  より, $p(F) \leq p(E)$ がわかる. つまり, E は半安定である. しかし, $E_1 \subset E$ は $\mu(E_1) = \mu(E)$ となるので, これは安定ではない. しかし, 実はこれは単純であることが示せる. $\phi : E \to E$ を非自明な準同型としよう. すると, E_1 と E_2 は同型でないことから, $E_1 \to E \xrightarrow{\phi} E \to E_2$ は 0 になるので, $\phi(E_1) \subset E_1$ となることがわかる. E_1 は単純なので, $\phi|_{E_1} = \lambda \cdot 1_{E_1}$ となる $\lambda \in k$ が存在する. $\psi := \phi - \lambda \cdot 1_E$ とする. $\psi|_{E_1} = 0$ なので, ψ は $E_2 = E/E_1$ を経由する. $\psi' : E_2 \to E$ をその射とする. $E_2 \xrightarrow{\psi'} E \to E_2$ が 0 でなければ, これは同型なので, 逆が取れる. これは ψ' と合成して $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ の分裂を与えるので, これが非自明な拡大であったことに矛盾. よって, $\psi'(E_2) \subset E_1$.

しかし再び E_1 と E_2 は同型でない安定束であることから, $\psi' = 0$ がわかる. したがって, $\psi = 0$. つまり $\phi = \lambda \cdot 1_E$ であることがわかった.

- 単純なベクトル束であって半安定ですらないものも存在する. X を閉体 k 上の種数 $g \geq 3$ の非特異射影曲線とすると, $\mathrm{Pic}^1(X) \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ は g 次元の多様体で, そのうち大域切断が存在するものは $X \to \mathrm{Pic}^1(X); p \mapsto [\mathcal{O}(p)]$ の像で, これは 1 次元なので, 特に次数 1 の直線束で, 大域切断を持たないものが取れる. これを L とおく. Riemann-Roch より,

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, L) = h^1(X, L) = g - 2 > 0$$

となるので, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, L) \neq 0$. よって, 非自明な拡大

$$0 \to L \to E \to \mathcal{O}_X \to 0$$

が存在する. $\mu(E) = 1/2$ で, $\mu(L) = 1$ なので, これは半安定ではない. 以下の完全列を考える

$$0 \to \mathrm{Hom}(E, L) \to \mathrm{Hom}(E, E) \to \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$$

まず, E を定義する完全列に $\mathrm{Hom}(-, L)$ して, 完全列

$$0 \to H^0(L) \to \mathrm{Hom}(E, L) \to H^0(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, L) = H^1(L)$$

を得るので, $h^1(L) > 0$ 及び $H^0(L) = 0$ と, E が非自明な拡大なので, $H^0(\mathcal{O}_X) \to H^1(L)$ が単射になることから, $\mathrm{Hom}(E, L) = 0$ がわかる. さらに, E を定義する完全列に $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_X)$ をすると,

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X) \to H^0(-L) = 0$$

となるので, $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$ は 1 次元であることがわかった。 $\mathrm{Hom}(E, E) \to \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$ は単射であることがわかっているので, $\mathrm{Hom}(E, E) = k$ がわかった.

1.3. **Harder-Narashimhan フィルトレーション.** 射影的スキーム上の任意の純な連接層は, 半安定層によるフィルトレーションをもつ. 最も基礎的な例は以下の定理である:

Theorem 1. *$\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束は直線束の直和に一意にかける.*

proof. ベクトル束の階数に関する帰納法を用いる. 階数 1 の時は明らか. 階数 r 未満では命題が成立することを仮定する. $\mathbb{P}^1$ 上の階数 r のベクトル束 E をとる. E の階数 1 の部分層 F をとってくる (E をたくさん捻って, $H^0(E(m)) \neq 0$ とする. $0 \neq s \in H^0(E(m))$ をとってきて, $s\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \subset E(m)$ をとってくる. すると, $s\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \subset E$ は階数 1 の部分加群層である). F の飽和化をとると, E/F は捩れなしの部分層になるので, $\mathbb{P}^1$ は 1 次元であることから, E/F はベクトル束になる. よって, F も直線束になる. Serre の消滅定理から, $\mathcal{O}(a) \subset E$ となる a のうち, 最大の a が取れる. これを a_0 とおこう. 帰納法の仮定から, $E/F = \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(a_i)$ とかける. 短完全列

$$0 \to \mathcal{O}(a_0) \to E \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(a_i) \to 0$$

について, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(a_0+1), \mathcal{O}(a_0)) = H^1(\mathcal{O}(-1)) = 0$ なので,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(a_0+1), E) = H^0(E(-a_0-1)) \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} H^0(\mathcal{O}(a_i - a_0 - 1))$$

となる．しかし, a_0 は $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(a), E) \neq 0$ となる最大の a だったので, 左辺は 0．よって, 右辺も 0 となる．つまり, 任意の $1 \leq i \leq r-1$ で, $a_i \leq a_0$ となる．よって, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(a_i), \mathcal{O}(a_0)) = H^1(\mathcal{O}(a_0 - a_i)) = 0$ となる．つまり,

$$E \cong \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}(a_i)$$

となることがわかった．これはすなわちあるベクトル空間 V_a たちが存在して,

$$E \cong \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} V_a \otimes \mathcal{O}(a)$$

となることを示している．次に一意性を示す．これは上の表示の V_a が同型を除いて一意であることを示せば良い．E_a を自然な射 $H^0(E(a)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a) \to E$ の像とおくと, 任意の a で, $E_{a-1} \subset E_a$ で, 十分大きな a で $E_a = E$ となり, 十分小さな a で $E_a = 0$ となる．つまり (E_a) は有限長の E のフィルトレーションを作る．また, $E = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} V_a \otimes \mathcal{O}(a)$ とかけるとすると, $E_a = \bigoplus_{b \geq a} V_b \otimes \mathcal{O}(b)$ となり, したがって $\dim(V_a) = \mathrm{rk}(E_a / E_{a+1})$ がわかり, 一意性が示された． □

Corollary 2. *$\mathbb{P}^1$ 上の半安定な層は, 0 次元の層か, あるいは $\mathcal{O}(a)^{\oplus r}$ の形のものしかない．*

proof. 0 次元の場合は明らか．1 次元の場合は, 定理 1 の形に分解し, slope をみる ($\mathbb{P}^1$ は 1 次元なので, 捩れなしであることとベクトル束になることは同値であることに注意)． □

この定理を体上の射影的スキームの上の純な連接層に拡張したのが Hardar-Narashimhan フィルトレーションである．

Definition 7. $(X, \mathcal{O}_X(1))$ を k 上の偏極が固定された射影的スキームとして, $E \in \mathrm{Coh}(X)$ を次元 d の非自明かつ純な連接層とする．この時, E の Hardar-Narashimhan フィルトレーション (HNF と略すことにする) とは, フィルトレーション

$$0 = \mathrm{HN}_0(E) \subset \cdots \subset \mathrm{HN}_l(E) = E$$

で, $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{HN}} = \mathrm{HN}^i(E)/\mathrm{HN}^{i-1}(E)$ が半安定であり, さらに $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{HN}}$ の簡約 Hilbert 多項式 p_i たちが $p_{\max} = p_0 > p_1 > \cdots > p_l = p_{\min}$ となるものを指す．

E が半安定であることと, $p_{\max} = p_{\min}$ であることは同値である．また, $p_{\max}, p_{\min}$ という記法にはアプリオリにはフィルトレーションに関する不定性があるが, 以下の定理によって, この記法は問題ないことがわかる．

Theorem 2 (Harder-Narashimhan)**.** *体 k 上の代数的スキーム X 上の純な連接層 E は HNF を一意にもつ．*

照明には以下の補題を使う

Lemma 1. *定理 2 の状況において, E の部分層 F で, 任意の E の部分加群層 G について, $p(G) \leq p(F)$ かつ, $p(G) = p(F)$ ならば $G \subset F$ となるものがただ一つ存在する．*

Definition 8. 上の補題の F を**極大脱安定化部分層** (maximal destabilizing subsheaf) という．

proof. E の 0 でない連接部分層全体の集合を $\mathfrak{S}$ とおいて, $\mathfrak{S}$ の順序関係を $F_1 \leq F_2 \iff F_1 \subset F_2 \wedge p(F_1) \leq p(F_2)$ によって定める．Zorn の補題から, $\mathfrak{S}$ は極大元をもつ．極大元全体の中で, α_d の最も小さいものを F とおく．ここで, $d = \dim E$ である．

Step 1 $G \subset E$ で, $p(G) \geq p(F)$, $G \not\subset F$ となるものが存在したとする．この時, $p(G \cap F) > p(G) \geq p(F)$ となる．

proof. 短完全列 $0 \to G \cap F \to G \oplus F \to G + F \to 0$ を考える．まず, F の $\leq$-極大性から, $p(F) > p(G + F)$ となる．さらに,

$$\begin{cases} P(G) + P(F) = P(F \cap G) + P(F + G) \\ \alpha_d(F) + \alpha_d(G) = \alpha_d(F + G) + \alpha_d(F \cap G) \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned} &(\alpha_d(F) - \alpha_d(F + G))(p(F) - p(G)) \\ =&\alpha_d(F \cap G)(p(F \cap G) - p(G)) + \alpha_d(F + G)(p(F + G) - p(F)) \end{aligned}$$

となる．左辺は非負で, $p(F + G) < p(F)$, $\alpha_d(F + G) > 0$ なので, $p(F \cap G) > p(G) \geq p(F)$

Step 2 次に, $G \subset F$ で, $p(G) > p(F)$ となるものが存在すると仮定する．G を F の部分層の中で $\leq$-極大なものに置き換えても支障ない．G' を, $G \leq G'$ かつ E の部分層の中で $\leq$-極大なものととる．すると, F の次数最小性から, $G' \not\subset F$ となる．すると, 再び Step 1 から, $p(G) \leq p(G') < p(G' \cap F)$ かつ, $G \subset G' \cap F$ より, $G < G' \cap F$ となる．これは G の取り方に矛盾． □

proof of Theorem2.

存在性 α_d による帰納法．$\alpha_d(E) = 0$ のとき, $E = 0$ なので明らか．$\alpha_d < n$ で存在が示されたと仮定する．E が半安定であるときは明らか．E が半安定でないとする．$\alpha_d(E) = n$ として, E の極大脱安定化部分層を F とおく．F の飽和化を $\bar{F}$ とすると, $F \neq \bar{F}$ なら, $p(F) < p(\bar{F})$ となるので, $F = \bar{F}$ がわかる．よって, E/F は純で, α_d．よって, E/F は HNF を持つ．これを $0 = \bar{E}_0 \subset \bar{E}_1 \subset \cdots \subset \bar{E}_r = E/F$ として, $p : E \to E/F$ を自然な商として, $E_0 = 0$, $E_{i+1} := p^{-1}(E_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ と定める．$0 \to F \to E_2 \to E_2/F \to 0$ と, $p(F) > p(E_2)$ から, $p(E_2/F) < p(E_2) < p(F)$ となる．よって, $0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{r+1} = E$ は HNF である．

一意性 こちらも α_d による帰納法．$\alpha_d = 0$ の時は良い．$\alpha_d < n$ で示されたとする．$\alpha_d(E) = n$ として, E の 2 つの HNF$0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_r = E$, $0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_s = E$ が取れたとする．$E_1 \subset E'_i$ となる最小の i をとると, $E_1 \to E'_i \to E'_i/E'_{i-1}$ は半安定層の間の非零な射なので, $p(E_1) \leq p(E'_i/E'_{i-1}) \leq p(E'_1)$．ここで, $p(E'_i/E'_{i-1}) = p(E_1)$ が成立するのは $i = 1$ のときのみである．$E_\star$ と $E'_\star$ を逆にして同じ議論をすると, $E_1 = E'_1$ を得る．E/E_1 に帰納法の仮定を適用することで, 一意性が示される． □

Corollary 3. *E, F を X 上純な連接層として, $p_{\max}(F) < p_{\min}(E)$ とする．この時, $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$ となる．*

proof. E の HNF$(E_\star)$ と F の HNF$(F_\star)$ を取る．

- $\phi : E \to F$ について, まず ϕ の E_1 への制限 $\phi_1 : E_1 \to F$ は 0 になることを示す．$\phi(E_1) \subset F_i$ となる最小の i を取ってくる．$i \neq 0$ と仮定しよう．$E_1 \xrightarrow{\phi} F_i \to F_i/F_{i-1}$ とすると, $p(E_1) = p_{\max}(E) > p_{\min}(F) \geq p(F_i/F_{i-1})$ なので, $\phi(E_1) \subset F_{i-1}$ となって, i の取り方に矛盾．よって $\phi|_{E_1} = 0$.
- 次に, $\phi|_{E_i} = 0$ が示されたとしよう．すると, ϕ は E/E_i を経由する．誘導された射 $\phi_i : E/E_i \to F$ について, 同様の議論を行うと, $\phi|_{E_{i+1}} = 0$ が示される．よって, 主張が示された． □

Mumford-竹本安定性に関しても全く同様の方法で HNF が一意に存在することが示せる. HNF の一意性はかなり強力な結果を生み出す. 以下, これをいくつか見ていこう.

Theorem 3. *E を体 k 上射影的スキーム上の純な連接層とする. また, K/k を体の拡大とする. この時, $\mathrm{HN}_\star(E_K) = \mathrm{HN}_\star(E)_K$ である.*

proof. E_K が半安定なら E も半安定になることは flat base change から明らか. よって, E のフィルトレーション E_i で, $\mathrm{HN}_i(E_K) = E_i \otimes K$ となるものが存在することさえ示せば良い. $\mathrm{HN}_i(E_K)$ は有限表示で, X_K は準コンパクトなので, ある $K/L/k$ で, L/k は有限次拡大体であり, さらに $\mathrm{HN}_i(E_K)$ は X_L 上の連接層の基底変換で得られるものになっている. よって, K/k は有限次拡大としてしまって良い. K/k をフィルタリングして. $K = k(x)$ の場合に示せば良い. 以下の 2 つの場合に場合わけして示す.

- K/k が純超越拡大あるいは分離拡大の場合: E_K の部分加群が E の部分加群の基底変換になっているのは, $G = \mathrm{Aut}_k(K)$ の作用で不変なとき, そしてその時のみである. 任意の $g \in G$ について, $g(\mathrm{HN}(E_K))$ はまた E_K の HNF になっているので, HNF の一意性から, まず, $\mathrm{HN}_1(E_K) = E_1 \otimes K$ となる $E_1 \subset E$ が存在する. これが極大脱安定化部分層であることは $E_1 \otimes K = \mathrm{HN}_1(E_K)$ であることから明らか. E/E_1 でもう一度同じことをやって, $E_1 \subset E_2 \subset E$ で, $E_2 \otimes K = \mathrm{HN}_2(E_K)$ となる E_2 が取れる. これを繰り返して主張が示される.
- K/k が純非分離拡大で, $x^p \in k$ $(p := \mathrm{char}(k))$ の場合. Jacobson descent から, $E \otimes K$ の部分加群が E の部分加群の基底変換になっていることは, $A = \mathrm{Der}_k(K)$ の作用で不変であることと同値である. $\delta \in A$ としよう. $F = \mathrm{HN}_i(E_K)$ について,
$$\phi : F \to E_K \xrightarrow{\delta} E_K \to E_K/F$$
として ϕ を考えると, $f \in \mathcal{O}_{X_K}(U)$, $s \in F(U)$ について,
$$\delta(fs) = f\delta(s) + \delta(f)s = f\delta(s) \pmod F$$
となるので, ϕ は $\mathcal{O}_{X_K}$ 加群の準同型. Corollary3. によって, $\phi = 0$ がわかる. よって, この場合も HNF は下降する. □

Corollary 4. *E を k 上射影的スキーム X 上の半安定な連接層として, K/k を体の拡大とする. この時, E_K も半安定である.* □

Example 2 (安定だが幾何学的安定でない連接層)**.** $X = \mathrm{Proj}(\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2))$ とする. $\mathbb{H}$ を四元数体とする. この時, 左 $\mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X$-加群の射
$$\phi : \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X(-1) \to \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X$$
を, 右から $I \otimes x_0 + J \otimes x_1 + K \otimes x_2$ を掛けるものとする. $F = \mathrm{Cok}(\phi)$ とする. F の左 $\mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X$-加群構造から, $\mathbb{R}$-代数の準同型 $\mathbb{H} \to \mathrm{End}(F)$ が存在する. $\mathbb{H}$ は斜体なので, これは単射で, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{End}(F)) \geq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = 4$ がわかる. これを複素化する. まず,
$$i : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[u, v]) \cong X_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2))$$
を,
$$x_0 \mapsto \frac{1}{2}(u^2 + v^2),\ x_1 \mapsto \sqrt{-1}uv,\ x_2 \mapsto \frac{\sqrt{-1}}{2}(u^2 - v^2)$$

によって定める. すると, $i^*\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ となる. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$ が,

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

によって定まるので, この同一視をすると, $\phi_{\mathbb{C}}$ は,

$$\phi_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v & u \end{pmatrix}$$

となる. ${}^t(-u,v) : M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ は全射なので, $i^*F_{\mathbb{C}} = \mathrm{Cok}(\phi_{\mathbb{C}})$ は, $(-u,v) : \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(-1) \to M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ の余核と一緒である. これを計算すると, $\mathrm{Cok}(\phi_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(1)^{\oplus 2}$ となる. よって, $F_{\mathbb{C}}$ は半安定であり, $\mathrm{End}(F_{\mathbb{C}}) = \mathrm{End}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 2}) = M_2(\mathbb{C})$ となる. もちろん $F_{\mathbb{C}}$ は安定ではない. 次に F は安定であることを示す. 仮に F が安定でなければ, F の真の部分 $\mathcal{O}_X$-加群層 L で, $p(F) \le p(L)$ となるものがある. F は半安定なので, この L は飽和 (したがって X は一次元であることから直線束) であり, $p(F) = p(L)$ となる. $L' = F/L$ とおくとこれも直線束で, $p(F) = p(L)$ になっている. つまり $\deg(L) = \deg(L')$ なので, $L \cong L'$ でないかぎり, $\mathrm{Ext}^1(L', L) = H^1(L \otimes (L')^{-1}) = 0$ となる. よって, $L \ncong L'$ なら $F = L \oplus L'$. この場合は $\dim \mathrm{End}(F) = 2$ となるので矛盾. よって, $\mathrm{Ext}^1(L', L) = H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$ となる. つまり $F \cong L^{\oplus 2}$ がわかる. したがって, $\mathrm{End}(F) \cong M_2(\mathbb{R}) \ncong \mathbb{H}$ となるので, これも矛盾. よって, F は安定である.

1.4. **具体例.** 本節では, 標数 0 の体 k 上の射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ 上の余接束 $\Omega_{\mathbb{P}^n}$ が安定であることをみる. これは, のちに Flenner-Mehta-Ramanathan の制限定理を示すのに用いる.

k を標数 0 の代数閉体として, V を $n+1$ 次元 k-線型空間とする. 射影空間 $\mathbb{P}(V)$ の上の余接束 $\Omega_{\mathbb{P}(V)}$ に関連したベクトル束の列を調べる. まず, Euler 完全列

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}(V)}(1) \to V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \to 0 \tag{1}$$

を考える.

Lemma 2. *A を可換環, L, M, N を平坦 A 加群とする. 短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ を考える. この時, 任意の $m > 0$ について, 誘導される射 $S^m M \to S^m N$ は全射であり, その核は $y_1 \dots y_{m-1} z$, $y_i \in M$, $z \in L$ によって生成される.*

proof. 前半の全射性は明らか. 後半について, 非可換次数付き環の準同型 $\phi : T^\star M \to T^\star N$ を考える. この核は $T^\star M$ の次数付き両側イデアルである. これを $I^\star$ とする. $I^0 = 0, I^1 = L$ である. $m < m_0$ について, I^m が $y_1 \otimes \cdots \otimes y_{m-1} \otimes y_m$, ($y_i \in L$ for some i) で生成されていたとする. $T^{m_0}(\phi) : T^{m_9} M = M \otimes_A T^{m_0 - 1} M \to N \otimes_A T^{m_0-1} N = T^{m_0} N$ は $(N \otimes T^{m_0-1}(\phi)) \circ (\phi \otimes T^{m_0-1} M)$ と分解できる. したがって, この核は, $\phi \otimes 1$ で送った時に $\mathrm{Ker}(1 \otimes T^{m_0-1}\phi)$ に入っているもの全体である. つまり,

$$\mathrm{Ker}(T^{m_0}\phi) = (\phi \otimes T^{m_0-1} M)^{-1}\left(\bigoplus_{i=2}^{m_0} N \otimes M \otimes \cdots \otimes \overset{i}{L} \otimes \cdots \otimes M\right) = \bigoplus_{i=1}^{m_0} M \otimes \cdots \otimes \overset{i}{L} \otimes \cdots \otimes M$$

となることがわかった. 適切に商を取ると主張が示される. □

ここから, 例えば L を k 上代数的スキーム X 上の直線束, F, G をベクトル束として, $0 \to L \to F \to G \to 0$ という短完全列があったとすると, 短完全列

$$0 \to L \otimes_{\mathcal{O}_X} S^{m-1} F \to S^m F \to S^m G \to 0 \tag{2}$$

が導かれる. この双対を取ると, 今 k の標数が 0 なので, $(S^mF)^\vee = S^m(F^\vee)$ などが成立して,

$$0 \to S^m(G^\vee) \to S^m(F^\vee) \to S^{m-1}(F^\vee) \otimes L^\vee \to 0$$

が成立する. 完全列 1 の双対がちょうど完全列 2 になるようにしてこれを適用することで, $d > 0$ について完全列

$$0 \to S^d(\Omega(1)) \to S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\delta_d} S^{d-1}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \to 0 \tag{3}$$

を得る. 層の射 δ_d^i を,

$$\delta_d^i = \delta_{d-i+1}(i-1)\cdots\delta_{d-1}(1)\delta_d : S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to S^{d-i}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i)$$

として定め, $K_d^i := \mathrm{Ker}(\delta_d^i)$ とおく. $K_d^1 = \mathrm{Ker}\delta_d = S^d(\Omega(1))$ であり, $0 = K_d^0 \subset K_d^1 \subset K_d^2 \subset \cdots \subset K_d^{d+1} = S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ となる.

Lemma 3. $0 < i < j < d$ とする.

(1) 自然な同型 $K_d^j/K_d^i \cong K_{d-i}^{j-i}(i)$ となる.

(2) さらに, $j = i+1$ の時, 短完全列 $0 \to K_d^i \to K_d^j \to K_{d-i}^{j-i}(i) \to 0$ は分裂しない.

proof. (1) は明らか. (2) について, $j = i+1$ の時, $K_{d-i}^1(i) = S^{d-i}(\Omega(1))(i)$ なので, $\mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), K_d^{i+1}) = 0$ を示せば良い. $K_d^{i+1} \subset S^dV \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ なので, $\mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$ を示せば良い. 短完全列

$$0 \to S^{d-i}(\Omega(1))(i) \to S^{d-i}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i) \to S^{d-i-1}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i+1) \to 0$$

に, $\mathrm{Hom}(-, S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ を当てて, 完全列

$$\begin{aligned} 0 =&\mathrm{Hom}(S^{d-i}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to \mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \\ \to&\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}}(S^{d-i-1}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i+1), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0 \end{aligned}$$

を得るので, 真ん中の項である $\mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ も 0 である. □

Lemma 4. K_d^i のスロープについて, 以下が成立する:

(1) $\mu(S^d(\Omega(1))) = -\frac{d}{n}$

(2) $\mu(K_d^1) < \mu(K_d^2) < \cdots < 0$

proof.

(1) $\mathrm{rk}S^dV \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} = \binom{n+d}{d}$ となるので,

$$\mu(S^d(\Omega(1))) = \frac{-\binom{n+d-1}{d-1}}{\binom{n+d}{d} - \binom{n+d-1}{d-1}} = -\frac{d}{n}$$

となる.

(2)

$$\mu(K_d^{i+1}/K_d^i) = \mu(S^{d-i}(\Omega(1))(i)) = -\frac{d}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

となるので, $\mu(K_d^{i+1}/K_d^i)$ は単調増加. ここで, 以下の補題を示す:

Lemma 5. E_0, E_1, E_2 を k 上代数的スキーム X 上の純 $\dim(X)$ 次元の連接層として, 以下の短完全列

$$0 \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to 0$$

を考える. この時, 以下の *3* 条件は同値である.

(a) $\mu(E_0) < \mu(E_2)$

(b) $\mu(E_0) < \mu(E_1)$
(c) $\mu(E_1) < \mu(E_2)$

proof.

$$\begin{aligned} & \mu(E_0) < \mu(E_1) \\ \iff & \frac{\deg(E_0)}{\mathrm{rk}(E_0)} < \frac{\deg(E_0)+\deg(E_2)}{\mathrm{rk}(E_0)+\mathrm{rk}(E_2)} \\ \iff & \deg(E_0)\mathrm{rk}(E_2) < \deg(E_2)\mathrm{rk}(E_0) \\ \iff & \mu(E_0) < \mu(E_2) \end{aligned}$$

より, (a) と (b) の同値性がわかる. 同様の計算で, (a) と (c) の同値性も示せる. □

上の補題と完全列

$$0 \to K_d^1 \to K_d^2 \to K_{d-1}^1(1) \to 0$$

から, $\mu(K_d^1) < \mu(K_d^2) < \mu(S^{d-1}(\Omega(1))(1))$ がわかる. $\mu(K_d^i) < \mu(K_d^{i+1}) < \mu(S^{d-i}(\Omega(1))(i))$ を仮定する. この時, 完全列

$$0 \to K_d^{i+1} \to K_d^{i+2} \to S^{d-i-1}(\Omega(1))(i+1) \to 0$$

について, $\mu(K_d^{i+1}) < \mu(S^{d-i}(\Omega(1))(i)) < \mu(S^{d-i-1}(\Omega(1))(i+1))$ となるので, 再び補題から, $\mu(K_d^{i+1}) < \mu(K_d^{i+2}) < S^{d-i-1}(\Omega(1))(i+1)$ がわかる. 以上より, $\mu(K_d^1) < \mu(K_d^2) < \cdots < \mu(S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$ がわかった. □

$\mathbb{P}(V)$ には $\mathrm{SL}(V)$ の作用が入る. また, $\mathrm{SL}(V)$ は $\mathcal{O}(1)$, Ω などにも自然に (右から) 作用し, Euler 系列 1 は $\mathrm{SL}(V)$-同変な系列であることがわかる. したがって, 系列 3 も同様に $\mathrm{SL}(V)$ 同変な系列である.

Lemma 6. *$S^d(\Omega(1))$ は真の $\mathrm{SL}(V)$-不変な部分層は存在しない.*

proof. $\mathrm{SL}(V)$ は $\mathbb{P}V$ に推移的に作用するので, 不変部分層はベクトル束になる. 超曲面 $W \subset V^\vee$ に対応する点 $x \in \mathbb{P}V$ について, x のイソトロピー部分群 $\mathrm{SL}(V)_x$ は W を固定する ($\mathrm{SL}(V)_x$ の元を $V^\vee$ の元の右から合成することで $V^\vee$ に作用が入るが, W は x に対応する線型空間を 0 に飛ばすもの全体からなるからである). 全射反準同型 $\mathrm{SL}(V)_x \to \mathrm{GL}(W)$ ができる. ここから, $S^d(\Omega(1))(x) = S^dW$[2]に $\mathrm{SL}(V)_x$(や $\mathrm{GL}(W)$) の右 (左) 作用が入る. 仮定より $G(x)$ はこの作用で不変である. しかし, $\mathrm{GL}(W) \to \mathrm{GL}(S^dW)$ は既約表現[3]なので, 非自明な不変部分空間を持たない. したがって, $G = 0$ または $G = S^d(\Omega(1))$ となる. □

Lemma 7. *$S^dV \otimes \mathcal{O}$ の不変部分空間は K_d^i のみである.*

proof. $d = 0$ の場合は明らか. $d > 0$ として, $d' < d$ については補題が成立すると仮定する. $G \subset S^dV \otimes \mathcal{O}$ を真の不変部分層とする. この時, $G_i := G \cap K_d^i \subset K_d^i$ と置くと, δ_d^i は $\mathrm{SL}(V)$ 同変なので, K_d^i は不変部分層である. したがって G_i も不変部分層. 同様に, $\bar{G}_i = G_i/G_{i-1} \subset S^{d-i+1}(\Omega(1)) \otimes \mathcal{O}(i-1)$ も不変部分層である. i を $G_i \neq 0$ となる最小の i とする. $i > 1$ ならば, $G_i \cong \bar{G}_i \neq 0$ なので, ひとつ前の補題から, $\bar{G}_i = S^{d-i+1}(\Omega(1)) \otimes \mathcal{O}(i-1)$ となる. しかし, この同型は完全列

$$0 \to K_d^{i-1} \to K_d^i \to S^{d-i+1}(\Omega(1)) \otimes \mathcal{O}(i-1) \to 0$$

[2] $\Omega(1)$ は代入写像 $V^\vee \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$ の核なので, $\Omega(1)(x) = W$ である.
[3] ここでも標数 0 の仮定を使っている.

の分裂を与える．これは補題 3(2) に矛盾する．よって，$i=1$ である．$K_d^1 = S^d(\Omega(1))$ の不変部分層は自明なものしかないので，$G_1 = K_d^1$ となる．$\nu \geq 1$ は $G_\nu = K_d^\nu$ となる最大の ν とすると，$G = G_\nu$ なら話は終わっている．そうでないなら，$G' = G/G_\nu$ は $S^dV \otimes \mathcal{O}/K_\nu^1 = S^{d-\nu}V \otimes \mathcal{O}(\nu)$ の不変部分層となるので，帰納法の仮定から，$\bar{G}_{\nu+1} = G_{\nu+1}/G_\nu = K_{d-\nu}^1(\nu)$ となるので，$G_{\nu+1} = K_d^{\nu+1}$ となる．これは ν の取り方に矛盾．□

以上から，以下の定理が導かれる:

Theorem 4. *K_d^i たちは半安定であり，$\Omega(1)$ は安定である．*

proof. K_d^i の HNF は $\mathrm{SL}(V)$ の作用で不変なので，特に脱安定化部分層もそうである，しかし，$i > j$ ならば $\mu(K_d^i) < \mu(K_d^j)$ なので，$p(K_d^i) < p(K_d^j)$ であり，補題 7 から，K_d^i は半安定であることがわかる．また，$\mu(\Omega(1)) = -\frac{1}{n}$ であり，命題 6 より，$\Omega(1)$ は安定であることがわかる．□

References

[1] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2 edition, 2010.