複素多様体

Hans

概複素構造

定義 1(概複素構造)

実 $2n$ 次元多様体 M の点 p の局所座標系 $(x_1, \ldots, x_{2n})$ について,
$T_p(M)$ の一次変換 J_p を, $J_p^2 = \mathbf{id}$ となるように定める. $T_p(M)$ の基底 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{2n}} \right)_p \right\}$ に関する J_p の表現行列を $(J_{ij}(p))_{ij}$ として, この各成分が C^∞-級であるとき, 対応
$J : M \ni p \mapsto J_p \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ を**概複素構造**と呼ぶ.

(注意) 外複素構造定められない場合もある. 例えば, S^4 には, このような構造は定まらない.

定義 2(概複素多様体)

概複素構造を持つ実 $2n$ 次元 C^∞-級多様体 M を，概複素多様体という.

命題 1

概複素多様体 M について，以下の 2 条件は同値である:

(i) M の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在して，各 U_α 上の局所座標系 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ で，任意の $p \in U_\alpha$ で，以下の式が成立する:

$$\begin{cases} J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p \\ J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \end{cases} \tag{1}$$

(ii) M は複素多様体である.

(証明) (ii)$\Longrightarrow$(i) については，M が複素多様体ならば，後に示す命題 2 より，式 (1) を満たすような概複素構造 J を取ってくることができるので，明らかである．(i)$\Longrightarrow$(ii) を示す．$\alpha, \beta \in A$ について，U_α, U_β の局所座標系を，それぞれ $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$，$(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ とする．$U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ の時，$U_{\alpha\beta}$ での座標変換を

$$\begin{aligned} u_k &= \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \\ v_k &= \psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

とすると，$p \in U_{\alpha\beta}$ で，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)_p \end{aligned}$$

となるので，これに J_p を作用させると，

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)_p - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)_p + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \end{aligned}$$

が得られる.(続く)

(証明続き) ここで，$z_k = x_k + \sqrt{-1}y_k$， $w_k = u_k + \sqrt{-1}v_k$ と置いて，$u + \sqrt{-1}v \in T_p^{\mathbb{C}}(M)$ について，$J_p(u + \sqrt{-1}v) = J_p u + \sqrt{-1}J_p v$ で，J_p の作用を定めると，前のスライドで見た $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$，$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p$ の 2 通りの表示を見比べると，$T_p(M)$ の基底の一次独立性から，

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(p)$$
$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(p) = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}(p)$$

が，任意の $p \in M$ で成立するが，これは Cauchy-Riemann の関係式に他ならない．よって，$\varphi + \sqrt{-1}\psi$ は正則関数になるので，M は複素多様体である． □

命題 2

M を複素多様体とする．この時，概複素構造 J で，式 (1) を満たすものが存在し，これは局所座標系の取り方によらない．

(証明) 存在については，M 開集合 U 上のある局所座標系 $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$，について，$J_p \in \mathrm{End}(T_p^{\mathbb{C}}(M))$ を，

$$\begin{cases} J_p\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_p = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_p \\ J_p\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\right)_p = -\sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\right)_p \end{cases}$$

と定義すると，$x_k := \frac{1}{2}(z_k + \overline{z_k})$，$y_k := \frac{1}{2\sqrt{-1}}(z_k - \sqrt{-1}\overline{z_k})$ について，式 (1) を満たすことから，明らかである．

(続く)

(証明の続き) 次に, 概複素構造 J が局所座標系によらないことを示す. $u, v \in T_p(M)$ として, $u+\sqrt{-1}v \in T_p^{\mathbb{C}}(M)$ について, $J_p(u+\sqrt{-1}v) = J_p u + \sqrt{-1}J_p v$ と定義する. この時, 以下の式が容易にわかる:

$$\begin{cases} J_p\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)_p = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) \\ J_p\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\right)_p = -\sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\right) \end{cases}$$

このことから, w が z_k(resp. $\overline{z_k}$) の一次結合でかけるとき, $J_p w = \sqrt{-1}w$(resp. $J_p w = -\sqrt{-1}w$) となることがわかる.
局所座標系 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ が定義されている開集合内の開集合 U に, 別の座標系 $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ が定義されているとする. さらに, $w_k = u_k + \sqrt{-1}v_k$ として, I_p を, 座標系 $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$ に関して式 (1) を満たすものとする. この時, J_p と同じ方法で I_p を複素化することで, 先ほどと同様にして,

$$\begin{cases} I_p\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)_p = \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)_p \\ I_p\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\right)_p = -\sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\right)_p \end{cases}$$

が得られる. 一方で, U 上で,

$$\begin{aligned} z_k &= F_k(w_1, \ldots, w_n) \ (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)_p &= \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial w_k}(p)\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_p \\ \left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\right)_p &= \sum_j \overline{\frac{\partial F_j}{\partial w_k}}(p)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\right)_p \end{aligned}$$

となり, 特に, $\left(\frac{\partial}{\partial w_k}\right)_p$(resp.$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{w_k}}\right)_p$) は $\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_p$(resp. $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\right)_p$) の一次結合で表されることがわかるので,

$I_p = J_p$ がわかる

定義 3(概正則写像)

M, N を概複素多様体, J_M, J_N を, それぞれ M, N の概複素構造とする. この時, 可微分写像 $\varphi : M \to N$ が**概正則写像** (pseudo-holomorphic map) であるとは, 以下の式が成立することである:

$$d\varphi \circ J_M = J_N \circ d\varphi$$

定義 4(概複素同型)

概複素多様体 M, N が**概複素同型**であるとは, 概正則写像 $\varphi : M \to N$ および, $\psi : N \to M$ が存在して, $\varphi \circ \psi = \mathbf{id}_N$, $\psi \circ \varphi = \mathbf{id}_M$ が成立することである.

概複素多様体 M および，その概複素構造 J について，ベクトル場 $X \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}M)$ が，各点 p において，$J_pX_p = \sqrt{-1}X_p$(resp. $J_pX_p = -\sqrt{-1}X_p$) を満たす時，X は**正則型** (resp. **反正則型**) であるという．T^+M(resp. T^-M) を，**正則接束** (resp. **反正則接束**) という．この時，直和分解

$$T^{\mathbb{C}}M = T^+M \oplus T^-M$$

が成立する．

定義 5(積分可能性)

$A, B \in \Gamma(T^+M)$ について，$[A, B] \in \Gamma(T^+M)$ となる時，概複素構造 J は**積分可能** (integrable) であるという．これは，概複素構造 J の定める接分布 $T^+(M)$ が積分可能であることと同値である (Frobenius の定理)．また，積分可能な概複素構造を**複素構造**という．

(例) S^6 には積分可能でない概複素構造が定義される．

定義 6(Nijenhuis テンソル)

$X, Y \in \Gamma(TM)$ について, Nijenhuis テンソル $N(X, Y)$ を, 以下のように定義する:

$$N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]$$

定理 (Nijenhuis)

概複素構造 J が積分可能であることと, 任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ について, $N(X, Y) = 0$ となることは同値である.

(証明) 任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$ について，$N(X, Y) = 0$ を仮定する．この時，$X, Y, X', Y' \in \Gamma(TM)$ について，$A = X + \sqrt{-1}Y$, $B = X' + \sqrt{-1}Y'$ とおくと，N を複素化 (線形拡張) することで，

$$N(A, B) = N(X, X') - N(Y, Y') + \sqrt{-1}(N(X, Y') + N(Y, X')) = 0$$

が得られるので，任意の $A, B \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}M)$ について，$N(A, B) = 0$ である．ここで，$A, B \in \Gamma(T^+M)$ とすると，

$$N(A, B) = 2\sqrt{-1}(\sqrt{-1}[A, B] - J[A, B]) = 0$$

となるので，$J[A, B] = \sqrt{-1}[A, B]$ となる．つまり，$[A, B] \in \Gamma(T^+M)$ となるので，J は積分可能である．
次に，J が積分可能であると仮定すると，任意の $A, B \in T^+M$ について，$[A, B] \in \Gamma(T^+M)$ である．ここで，$T^{\mathbb{C}}M = T^+M \oplus T^-M$ および N の双線型性から，A, B が，それぞれ $\Gamma(T^+M), \Gamma(T^-M)$ のいずれかの元である場合についてのみ示せば良い．

- $A, B \in \Gamma(T^+M)$ の時，$J[A, B] = \sqrt{-1}[A, B]$ に注意すると，

$$\begin{aligned} N(A, B) =& [\sqrt{-1}A, \sqrt{-1}B] - [A, B] - J[A, \sqrt{-1}B] - J[\sqrt{-1}A, B] \\ =& (-1 - 1 + 1 + 1)[A, B] = 0 \end{aligned}$$

  となる．
- $A \in \Gamma(T^+M)$, $B \in \Gamma(T^-M)$ とすると，

$$\begin{aligned} N(A, B) =& [\sqrt{-1}A, -\sqrt{-1}B] - [A, B] - J[A, -\sqrt{-1}B] - J[\sqrt{-1}A, B] \\ =& (1 - 1)[A, B] + \sqrt{-1}(1 - 1)J[A, B] = 0 \end{aligned}$$

  となる．

(証明の続き)

- $A \in \Gamma(T^- M)$, $B \in \Gamma(T^+ M)$ の時,

$$\begin{aligned} N(A,B) =& [-\sqrt{-1}A, \sqrt{-1}B] - [A,B] - J[A, \sqrt{-1}B] - J[-\sqrt{-1}A, B] \\ =& (1-1)[A,B] - \sqrt{-1}(1-1)[A,B] = 0 \end{aligned}$$

- $A, B \in \Gamma(T^- M)$ の時, $J[A,B] = -\sqrt{-1}[A,B]$ に注意して,

$$\begin{aligned} N(A,B) =& [-\sqrt{-1}A, -\sqrt{-1}B] - [A,B] - J[A, -\sqrt{-1}B] - J[-\sqrt{-1}A, B] \\ =& (-1-1+1+1)[A,B] = 0 \end{aligned}$$

よって, 任意の $A, B \in \Gamma(T^{\mathbb{C}} M)$ について, $N(A,B) = 0$ が示されたので, 特に, $X, Y \in \Gamma(TM)$ についても,

$N(X,Y) = 0$ が成立する. □

植田一石. (2015). 数物系のためのシンプレクティック幾何入門 (初版.). 東京都: サイエンス社.

松島与三. (2017). 多様体入門 (新装第 1 版.). 東京都: 裳華房.