# 数理科学の最前線大学院講義 I レポート課題 1

HADA YOHEI
0530-37-8944

数理科学の最前線大学院講義 I にて行われた藤野先生の「コホモロジーの消滅定理」の講演で出されたレポート課題の一つである、「Kawamata-Viehweg の消滅定理について調べよ」という課題をしようと思う.

## 1. 主張

Kawamata-Viehweg の消滅定理とは, 以下の定理である:

**Theorem 1.** *$k$ を標数 $0$ の体として, $X$ を $k$ 上非特異射影多様体とする. また, $L$ を $X$ 上の nef かつ big な直線束とする. この時, 任意の $i > 0$ について,*

$$H^i(X, \omega_X \otimes L) = 0$$

*が成立する.*

曲面の場合は Ramanujam の消滅定理とも言われる. この定理は $X$ が K3 曲面の場合には一般標数で成立する. 今回は [1] を参考にしてそれを示そうと思う:

**Definition 1.** $k$ を体とする. $k$ 上の K3 曲面とは, $k$ 上二次元非特異射影代数多様体 $X$ で, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ かつ $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ となるもののことをいう.

**Theorem 2.** *$k$ を体, $X$ を $k$ 上の K3 曲面とする. この時, $X$ 上の nef かつ big な直線束 $L$ について,*

$$H^i(X, L) = 0 \ (\forall i > 0)$$

*が成立する.*

まず, flat base change でコホモロジー等は保たれるので, $k$ が代数閉体の場合に示せばよい. 以下, $k$ は代数閉体とする.

## 2. 準備

**Definition 2.** $X$ を $k$ 上の代数曲面 (:= 二次元非特異射影多様体) として, $C$ を $X$ の有効因子とする. $C$ が 1-連結であるとは, 2 つの有効因子 $C_1, C_2$ について, $C = C_1 + C_2$ となったならば, $C_1.C_2 > 01$ となることをいう.

**Lemma 1.** *$X$ を $k$ 上の代数曲面, $C$ をその上の有効因子で, nef かつ big なものとする. この時, $C$ は 1-連結である.*

*proof.* $C = C_1 + C_2$, $C_1, C_2 > 0$ とする. また, $\lambda := (C_1.C)/(C^2)$ とする. $C$ は nef かつ big なので, $0 \leq \lambda \leq 1$ がわかる.

$$0 < (C^2) = (C_1.C) + (C_2.C)$$

かつ $(C_1.C), (C_2.C) \geq 0$ なので, 必要ならば $C_1$ と $C_2$ を入れ替えることで, $(C_2.C) > 0$ としても良い.

*Date*: April 2025.

(1) $(C_1.C)=0$ のとき, $(C^2)>0$ なので, Hodge の指数定理から $(C_1^2)<0$. 一方で,
$$0=(C.C_1)=(C_1^2)+(C_1.C_2)$$
なので, $(C_1.C_2)>0$ がわかった.

(2) $(C_1.C)>0$ の時, $\mathbb{Q}$-因子 $D$ を, $D:=\lambda C-C_1$ と定めると, $(C.D)=0$ となる. よって, Hodge の指数定理から, $D=0$ または $(D^2)<0$ となる. $D=0$ の時は, $(C_1.C_2)=\lambda(C.C_2)>0$ となる. $(D^2)<0$ の時は,
$$(C_1.C_2)=(\lambda C-D.(1-\lambda)C+D)=\lambda(1-\lambda)(C^2)-(D^2)>0$$
がわかる. □

**Lemma 2.** *$X$ を $k$ 上の代数曲面, $C$ をその上の有効因子で, 1-連結なものとする. この時, $h^0(C,\mathcal{O}_C)=1$ となる.*

*proof.* $C$ の既約成分 $C_1$ については, $h^0(C_1,\mathcal{O}_{C_1})=1$ となる. $X$ の有効因子 $D$ で, $C-D\geq 0$ かつ $h^0(D,\mathcal{O}_D)=1$ となるもの全体の集合 $\Sigma$ を考える. $D_1,D_2\in\Sigma$ について, $D_1\leq D_2$ とは, $D_2-D_1\geq 0$ となることとして大小関係を入れると, $\Sigma$ は極大元を持つ. それを $C'$ とおこう. $C\neq C'$ であると仮定しよう. この時, $C$ は 1-連結なので, $C-C'$ の既約因子 $C_2$ で, $(C_2.C')>0$ となるものが取れる. この時, $h^0(\mathcal{O}_{C'+C_2}(-C_2))=0$ である. 短完全列
$$0\to\mathcal{O}_{C'+C_2}(-C_2)\to\mathcal{O}_{C'+C_2}\to\mathcal{O}_{C'}\to 0$$
について, コホモロジーの長完全列を取れば,
$$0\to H^0(\mathcal{O}_{C'+C_2})\to H^0(\mathcal{O}_{C'})\to\cdots$$
となるので, $h^0(\mathcal{O}_{C'+C_2})\leq 1$. 一方, $k\subset H^0(\mathcal{O}_{C'+C_2})$ なので, $h^0(\mathcal{O}_{C'+C_2})=1$ がわかる. これは $C'$ の極大性に矛盾. □

## 3. 定理 2 の証明

$X$ を $k$ 上の K3 曲面, $L$ をその上の nef かつ big な直線束とする. まず, Serre duality より, $h^2(X,L)=h^0(X,L^{-1})$ となるが, $h^0(L^{-1})>0$ なら, $C\in|L^{-1}|$ について, $L$ は big なので, $(C.L)=-(L^2)<0$ となる. しかしこれは $L$ の nef 性に反するので, $h^2(L)=h^0(L^{-1})=0$. また, Riemann-Roch から,
$$h^0(L)-h^1(L)=\chi(L)=\frac{1}{2}(L^2)+2>0$$
となるので, $h^0(L)>0$ がわかる. よって, $C\in|L|$ が取れる. 補題 1 から, $C$ は 1-連結である. よって, 補題 2 より, $h^0(C,\mathcal{O}_C)=1$ となる. 短完全列
$$0\to L^{-1}\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_C\to 0$$
に関するコホモロジーの長完全列をとると,
$$0\to H^0(\mathcal{O}_X)\to H^0(\mathcal{O}_C)\to H^1(L^{-1})\to H^1(\mathcal{O}_X)=0$$
となるので, $H^1(L^{-1})=0$ がわかる. 再び Serre duality を使って, $H^1(L)=0$ が示される. □

## References

[1] Daniel Huybrechts. *Lectures on K3 Surfaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.