代数幾何学 SCHEME 論

HANS

1. SCHEME

1.1. 定義と基本性質.

定義 1.1. 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ であって, 任意の $x \in X$ について, x の開近傍 U が存在して, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がある affine scheme(Spec$(A), \tilde{A}$) と同型である時, $(X, \mathcal{O}_X)$ を **scheme** であるという. また, X の開集合 U で, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ が affine scheme と同型になるようなものを, X の **affine 開集合**という. 以下, 混乱がない限り, scheme$(X, \mathcal{O}_X)$ を単に X と書く. scheme$X$, Y について, scheme の射 $f : X \to Y$ は局所環付き空間の射 (f, φ) で定める. この際の φ は屡々略記される. 対象を scheme, 射を scheme の射とした圏を **scheme の圏**といい, **Sch** と書くことにする.

定義 1.2. X を scheme とする. scheme の圏 **Sch** について, そのスライス圏 **Sch**$/X$ を X**-scheme の圏**といい, その対象を X-scheme という. 本稿では, X-scheme の対象を, scheme Y と射 $f : Y \to X$ の組 (Y, f) によって表し, 構造射がすでに明示されている場合に限り “X-scheme Y” のような書き方をする. S-scheme (Y, f), (Z, g) について, その射集合を, $\mathrm{Hom}_X(Y, Z)$ と書く.

scheme の基本的性質を以下にまとめる. 証明は省略する.

補題 1.1. X を scheme とする.

(1) affine scheme は scheme である.
(2) X の affine 開集合の全体は, X の位相に関して, 開集合の生成系をなす.
(3) X は T_0 空間であるが, 必ずしも T_1 ではない.
(4) $F \subset X$ を既約閉集合とすると, F はただ一つの生成点を持つ. このように, 既約閉集合がただ一つの生成点をもつ位相空間を **Zariski 空間**という.
(5) $\mathcal{J}$ を, 準連接 $\mathcal{O}_X$-イデアル層とすると, $Y := \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Y)$, $\mathcal{O}_Y := \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ として, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は scheme である. このようにして定まる scheme Y を X の**閉部分 scheme** といい, 自然な射 $i : Y \to X$ を, **閉埋入射**という.
(6) 任意の $x \in X$ について, $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) = \{y \in X : x \in \overline{\{y\}}\}$ となる. 2 点 $x, y \in X$ について, $x \in \overline{\{y\}}$ となるとき, x は y の**特殊化**, y は x の**一般化**という.
(7) $U \subset X$ を開集合とすると, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ は scheme である. このような scheme を X の**開部分 scheme** といい, 自然な射 $i : U \to X$ を**開埋入射**という.

1.2. 被約 scheme.

定義 1.3. X を scheme とする. X は**被約**であるとは, 任意の $x \in X$ について, $\mathcal{O}_{X,x}$ が被約であることをいう.

命題 1.1. X を scheme とする. X が被約であることと, 任意の X の開集合 U について, $\mathcal{O}_X(U)$ が被約であることは同値である.

証明. X が被約であったと仮定する. 開集合 $U \subset X$ を任意にとって, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ について, ある $n \geq 0$ が存在して, $f^n = 0$ となったとする. この時, 任意の $x \in U$ について, $\rho^U_x(f) = 0$ である. こ

こで, $\rho_x^U = \operatorname*{colim}_{x\in V\subset U}\rho_V^U$ は $\mathcal{O}_X(U)$ から $\mathcal{O}_{X,x}$ への射影である. よって, 任意の $x\in U$ について, ある x の開近傍 $U_x\subset U$ が存在して, $\rho_{U_x}^U(f)=0$ がわかるので, 層の定義から, $f=0$ がわかる. よって, $\mathcal{O}_X(U)$ は被約である. 逆に, 任意の開集合 $U\subset X$ について, $\mathcal{O}_X(U)$ が被約であるとすると, $x\in X$ を任意にとって, $f_x\in\mathcal{O}_{X,x}$ が, ある $n\geq 0$ について, $f_x^n=0$ となるとすると, ある x の開近傍 U_x で, $f\in\mathcal{O}_X(U_x)$ かつ $f_x=\rho_x^{U_x}(f)$ となるが, $f\neq 0$ とすると, $0=f_x^n=\rho_x^{U_x}(f^n)$ となる. よって, ある x の開近傍 $V\subset U_x$ が存在して, $\rho_V^{U_x}(f^n)=0$ となる. $g:=\rho_V^{U_x}(f)\in\mathcal{O}_X(V)$ とすると, $g^n=0$ となるので, $g=0$. つまり, $f_x=\rho_x^{U_x}(f)=0$ がわかり, $\mathcal{O}_{X,x}$ が被約であることが従う. □

命題 1.2. X を scheme とする. $F\subset X$ を閉集合とすると, F にはただ一通りの方法で X の被約閉部分 scheme の構造がはいる. この閉部分 scheme を F_{red} とかく.

証明. $x\in X$ について, $\kappa(x)$ で $\mathcal{O}_{X,x}$ の剰余体を表し, U を X の開集合として, $f\in\mathcal{O}_X(U)$ について, $f(x)$ を, $\rho_x^U(f)\in\mathcal{O}_{X,x}$ の $\kappa(x)$ における像を表すことにする. X の開集合 U について,

$$\mathcal{I}(U):=\{f\in\mathcal{O}_X(U): f(x)=0,\ \forall x\in F\cap U\}$$

と定めると, これは自然に $\mathcal{O}_X$-イデアル層になっている. $U\subset X$ を affine 開集合とする. $U=\mathrm{Spec}(R)$ とおくと, ある R のイデアル I で, $\sqrt{I}=I$ であって, かつ $U\cap F=V(I)$ が成立する. $x\in F\cap U$ について, 対応する素イデアルを $\mathfrak{p}_x$ とおくと, $f\in\mathcal{O}_X(U)$ について, $f(x)=0$ であることと, $f\in\mathfrak{p}_x$ であることは同値なので,

$$\mathcal{I}(U)=\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(I)}\mathfrak{p}=\sqrt{I}=I$$

となる. $g\in R$ について, $D(g)\subset U$ を考えても, 同様の理由によって, $\mathcal{I}(D(g))=I_g$ となるので, $\mathcal{I}\mid_U=\tilde{I}$ がわかる. よって, $\mathcal{I}$ は準連接である. 定義から明らかに $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})=F$ なので, これは X の閉部分 scheme を定める. また, $x\in F$, $f\in(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x$ について, $f^n=0$ ならば, $f^n(x)=0$ となるので, $f(x)=0$, つまり $f=0$ がわかる. よって, これは被約である.

次に, $(F,\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ を被約な閉部分 scheme とすると, X の affine 開集合 $U=\mathrm{Spec}(R)$ について, R のイデアル J で, $F\cap U=\mathrm{Spec}(R/J)$ となるものが取れる. 仮定よりこれは被約なので, $J=\sqrt{J}$ とならねばならない. よって, $J=\mathcal{I}(U)$ となり, $\mathcal{I}\mid_U=\mathcal{J}\mid_U$ がわかる. つまり, $\mathcal{J}=\mathcal{I}$ であることがわかった. □

系 1.1. X を scheme とする. このとき, 被約な閉部分 scheme$X_{\mathrm{red}}\subset X$ で, その底空間は X に等しいものがただ一つ存在する. この X_{red} を X の**被約型**という.

1.3. **Glueing property.**

I を添字集合, $(X_i)_{i\in I}$ を局所環付き空間の族とする. このとき, 各 $i\in I$ について, X_i の開部分空間の族 $(U_{ij})_{j\in I}$ が定まっていて, 局所環付き空間の同型の族 $(\varphi_{ji}:U_{ij}\to U_{ji})_{i,j\in I}$ が存在して, 以下の条件が成立するとする:

(1) 任意の $i\in I$ について, $U_{ii}=X_i$
(2) $\varphi_{ii}=\mathrm{id}_{U_{ii}}$
(3) 任意の $i,j,k\in I$ について, $\varphi_{kj}\varphi_{ji}\mid_{U_{ij}\cap U_{ik}}=\varphi_{ki}\mid_{U_{ij}\cap U_{ik}}$

このとき, $\{(X_i)_{i\in I},(U_{ij})_{i,j\in I},(\varphi_{ij})_{i,j\in I}\}$ を, **glueing data** という

命題 1.3. $\{(X_i)_{i\in I},(U_{ij})_{i,j\in I},(\varphi_{ij})_{i,j\in I}\}$ を glueing data とすると, ある局所環付き空間 X および X の開部分空間の族 $(U_i)_{i\in I}$ および局所環付き空間の同型の族 $(\varphi_i:X_i\to U_i)_{i\in I}$ が存在して, 以下の条件を満たす.

(1) $X=\bigcup_{i\in I}U_i$

(2) 任意の $i,j \in I$ について, $\varphi_i |_{U_{ij}}$ は U_{ij} と $U_i \cap U_j$ の同型になる.
(3) 任意の $i,j \in I$ について, $\varphi_i |_{U_{ij}} = \varphi_j \varphi_{ji}$ となる.

さらに, この X は以下の普遍性を満たす: 任意の局所環付き空間 Y について, $(\psi_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ が, 任意の $i,j \in I$ について, $\psi_j \varphi_{ji} = \psi_i |_{U_{ij}}$ となるならば, ある $f : X \to Y$ が一意的に定まって, 任意の $i \in I$ で, $f\varphi_i = \psi_i$ が成立する.

証明. まず, 位相空間として, X を以下のように構成する:

$$X = \coprod_{i \in I} X_i \Big/ \sim$$

ここで, 同値関係 $\sim$ を, $x_1 \sim x_2$ を, $x_1 \in U_{ij}$, $x_2 \in U_{ji}$ として, $x_2 = \varphi_{ji}(x_1)$ となることとして定める. これが同値関係になっていることは, φ_{ij} の cosycle 性からわかる. 位相空間としての直和から誘導される標準的な写像を $\varphi_i : X_i \to X$ とすると, $U \subset X$ が開集合であるとは, 任意の $i \in I$ で, $\varphi_i^{-1}(U)$ が X_i の開集合であることとして定める. $U_i := \varphi_i(X_i)$ とする. このとき, $\varphi_i^{-1}(U_i) = X_i$ が成立し, 任意の $j \in I$ について, $x \in X_j$ が, X_i の元と同値になっていることは, x が φ_{ji} の像となっていることが必要十分条件なので,

$$\varphi_j^{-1}(U_i) = U_{ji}$$

となる. よって, U_i は X の開集合である. 位相の定め方から, 任意の $i \in I$ について, φ_i が連続であることもわかる.

X 上の環層 $\mathcal{O}_X$ を, 以下のようにして定める: $U \subset X$ を開集合として,

$$\mathcal{O}_X(U) := \left\{ (s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{O}_{X_i}(\varphi_i^{-1}(U)) : s_j |_{\varphi_j^{-1}(U) \cap U_{ji}} = (\varphi_{ji})_{\varphi_i^{-1}(U) \cap U_{ij}} (s_i |_{\varphi_i^{-1}(U) \cap U_{ij}}) \right\}$$

として, 制限射は, $\mathcal{O}_{X_i}$ たちから自然に誘導されるものとする. $\pi : \coprod X_i \to X$ を商写像とする. 開集合 $U \subset X$ が, $U \subset U_i$ となるとき, $s \in \mathcal{O}_{X_i}(\varphi_i^{-1}(U))$ について, $s_i = s$. $s_j = (\varphi_{ji})_{\varphi_i^{-1}(U) \cap U_{ij}} (s |_{\varphi_i^{-1}(U) \cap U_{ij}})$ と定めると, $(s_j)_{j \in I} \in \mathcal{O}_X(U)$ となる. 逆に, $(s_j)_{j \in I} \in \mathcal{O}_X(U)$ は全てその形に書くことができるので, $\mathcal{O}_X(U)$ と $\mathcal{O}_{X_i}(\varphi_i^{-1}(U))$ は集合として同型である. しかし, この対応 $s \mapsto (s_j)_{j \in I}$ は, 環の準同型でもあるので, これは環の同型になる. これが制限写像と可換であることは容易にに確かめることができるので, 環付き空間の同型 $\varphi_i : (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \cong (U_i, \mathcal{O}_X |_{U_i})$ を誘導する. 構成法から, これが条件 (2), (3) を満たすことがわかる. 後半について, $f_i = \psi_i \varphi_i^{-1}$ とおくと, $V \subset U_i \cap U_j$ ならば,

$$f_i |_V = \psi_i \varphi_i^{-1} |_V = \psi_i (\varphi_j \varphi_{ji})^{-1} |_V = \psi_i \varphi_{ij} \varphi_j^{-1} |_V = \psi_j \varphi_j^{-1} |_V = f_j |_V$$

なので, 層の貼り合わせ条件から, 局所環付き空間の射 $f : X \to Y$ で, $f |_{U_i} = f_i$ となるものが一意に定まる. □

上の命題において, 各 X_i が scheme ならば, 各 $x \in X$ の周りで affine 開近傍が取れるので, X も scheme になる.

例.

(1) X_i たちを局所環付き空間とする. このとき, X_i たちの**直和** $\coprod X_i$ を, $U_{ij} = \emptyset (i \neq j)$, $U_{ii} = X_i$, $\varphi_{ij} = \emptyset$ による X_i たちの貼り合わせとする. このとき, 命題 1.3 より, 任意の $Y \in \mathbf{Sch}$ について, 以下の集合の同型が成立する:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}} \left(\coprod_{i \in I} X_i, T \right) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X_i, Y)$$

(2) k を体とする．このとき, $X_1 := \mathrm{Spec}(k[x])$, $X_2 := \mathrm{Spec}(k[y])$ として, $0 \in X_1$ は, $k[x]$ の素イデアル (x) に対応する点, $\infty \in X_2$ は $k[y]$ の素イデアル (y) に対応する点とする．$U_{11} = X_1, U_{22} = X_2$, $U_{12} = X_1 \setminus \{0\} = D(x) = \mathrm{Spec}(k[x, 1/x])$, $U_{21} = X_2 \setminus \{\infty\} = D(y) = \mathrm{Spec}(k[y, 1/y])$ として, $\varphi_{12} : U_{21} \to U_{12}$ を, k-代数の射 $k[x, 1/x] \to k[y, 1/y]; x \mapsto 1/y$ によって定まる affine scheme の同型として, $\varphi_{21} : U_{12} \to U_{21}$ をその逆射とする．このとき, glueing data $\{(X_i)_{i=1,2},\ (U_{ij})_{i,j=1,2},\ (\varphi_{ij})_{i,j=1,2}\}$ に関する X_1 と X_2 の貼り合わせを $\mathbb{P}^1_k$ といい, **射影直線**という．一般の射影空間についても, 同様の定義が可能であるが, Proj を使ったより一般的な定義があるので, そのときにまた解説する．

1.4. **Scheme の圏の性質.**

命題 1.4. X を scheme, $Y = \mathrm{Spec}(R)$ を affine scheme とする．このとき, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y)$ について, $\varphi = \Gamma(Y, f^\flat) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ を対応させる写像は, 同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ を誘導する．

注意. X も affine scheme であるときは, すでに結果は知られている．

証明. $f \mapsto \varphi$ の単射性を示す．まず, φ が位相空間の射として f を決定することを示す．以下の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_{f(x)}"'] & & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho'_x"] & \\
R_{f(x)} \arrow[rr, "f^\flat_x"] \arrow[rrr, bend right, "f^\#_x"'] & & \operatorname*{colim}_{f(x) \in U} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

ここで, ρ, ρ' はそれぞれ X, Y の制限写像を表しており, ρ_x などは, $\operatorname*{colim}_{x \in U} \rho^X_U$ などを表すものとしている．これが可換であることは, 定義より明らかである．$\mathfrak{m}_{X,x}$ を $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアルとして, $a \in R$ とすると, $f^\#_x(\rho_{f(x)}(a)) \in \mathfrak{m}_{X,x}$ であることは, $\rho_{f(x)}(a) \in \mathfrak{p}_{f(x)} R_{f(x)}$, つまり $a \in \mathfrak{p}_{f(x)}$ であることと同値であり, 上の図式の可換性から, $f^\#_x(\rho_{f(x)}(a)) = \rho'_x(\varphi(a))$ となることと合わせると, $\mathfrak{p}_{f(x)} = (\rho'_x \varphi)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x})$ がわかるので, $f(x)$ は φ と x によって定まる．次に, f が scheme の射として一意に定まることをいう．これは, $D(g) \subset Y$ について, $f^\flat(D(g)) : R_g \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(g)))$ が定まることを言えば良いが, 制限射との可換性から, $f^\flat(D(g))(a/g^n) = (\rho')^X_U(\varphi(a))/(\rho')^X_U(\varphi(g))$ とならなければならない．よって, $f^\flat$ も φ によって一意に定まることがわかった．

次に, 全射性を示す．$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ を任意に取る．X の affine 開集合による開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ をとると, $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$(つまり, $A_i = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$) として, φ に制限写像 $(\rho')^X_U$ を合成させることで, $\varphi_i : R \to A_i$ ができる．φ_i に対応する affine scheme の射を $f_i : U_i = \mathrm{Spec}(A_i) \to \mathrm{Spec}(R) = Y$

とすると, 以下の図式は可換になる:

(1)
$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_j"'] & & \\
& \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \arrow[r, "(\rho')^X_{U_i}"] \arrow[d, "(\rho')^X_{U_j}"'] & \Gamma(U_i,\mathcal{O}_{U_i}) \arrow[d, "(\rho')^{U_i}_{U_{ij}}"] \\
& \Gamma(U_j,\mathcal{O}_{U_j}) \arrow[r, "(\rho')^{U_j}_{U_{ij}}"'] & \Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}
$$

$f_i := \mathrm{Spec}(\varphi_i)$ とおくと, $f_i\mid_{U_i\cap U_j}= f_j\mid_{U_i\cap U_j}$ なので, 層の貼り合わせ条件から, ある $f : X \to Y$ が一意に存在して, $f\mid_{U_i}= f_i$ となる. $\rho^X_{U_i} f^\flat(Y) = \varphi_i$ となることから, $f^\flat(Y) - \varphi$ の像の元は, 任意の i について, U_i への制限が 0 になることがわかるので, $f^\flat(Y) - \varphi = 0$, つまり, $f\flat(Y) = \varphi$ が成立する. □

系 1.2. X を scheme, $Y = \mathrm{Spec}(R)$ を affine scheme とする. 任意の scheme の射 $f : X \to Y$ は, $\varphi := f^\flat(Y) : R \to \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ から誘導された affine scheme の射 $g := \mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(R) \to Y$ と, 標準的な射 $h : X \to \mathrm{Spec}(\Gamma(X,\mathcal{O}_X))$ について, $f = gh$ となる.

証明. 前の命題において, $\varphi = \mathrm{id}_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}$ としたものを h とおくと, $f = gh$ となる. □

系 1.3. $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は **Sch** における終対象となる.

証明. scheme$X$ を任意に取ると, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}, \Gamma(X,\mathcal{O}_X))$ となる. $\mathbb{Z}$ は **Ring** の始対象なので, 主張が従う. □

1.5. **Fibre 積.**

S を scheme とする. S-scheme (X, f), (Y, g) について, 関手 $F : (\mathbf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ を, $F = \mathrm{Hom}_S(-,X) \times \mathrm{Hom}_S(-,Y)$ と定める. これが表現可能である時, ある S-scheme (Z, h) が存在して, 関手の同型

$$s : \mathrm{Hom}_S(-,Z) \cong F(-)$$

が成立する. Yoneda の補題から, 自然な同型

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_S(-,Z), F(-)) \cong F(Z)$$

が成立し, $s(\mathrm{id}_Z) := (\pi_1, \pi_2) \in F(Z)$ を定める. 対 $(Z, (\pi_1, \pi_2))$ は, 同型を除いて一意に定まる. 実際 $(Z', (\pi'_1, \pi'_2))$ を, F を表現する今一つの対とすると, (π'_1, π'_2) から, 関手の同型 $t : \mathrm{Hom}_S(-,Z') \to F(-)$ を, $(\pi'_1, \pi'_2) \circ \mathrm{Hom}_S(-,Z')$ によって定める. よって, $t^{-1}s$ は関手の同型 $\mathrm{Hom}_S(-,Z) \cong \mathrm{Hom}_S(-,Z')$ を誘導し, 以下の図式を可換にする:

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "\cong"] & \\
X & & Y \\
& Z' \arrow[ul, "\pi'_1"] \arrow[ur, "\pi'_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

中央の同型は $t^{-1}s(\mathrm{id}_Z)$ である. 関手 F を表現する対 $(Z, (\pi_1, \pi_2))$ の一つを S-scheme (X, f) と (Y, g) の (これを略記して, "X と Y の" と書くことが多い)**fibre 積**といい, $(X\times_S Y, (\pi_1, \pi_2))$, あるいは射影 π_1, π_2

を略して $X \times_S Y$ と書く[1]. つまり, fibre 積は $\mathbf{Sch}/S$ における直積である. $\mathbf{Sch}/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \mathbf{Sch}$ なので, $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上の fibre 積のことを屡々**直積**という. さらに, $S = \mathrm{Spec}(R)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ とした時, 任意の S-scheme (T, h) について, $k_1 \in \mathrm{Hom}_S(T, X)$ ならば, $fk_1 = h$ となるが, 系 1.2 の分解を, k_1, h で適応して, affine scheme $(T, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^{\sim})$ を $\tilde{T}$ とおくと, 以下の図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\mathrm{Spec}(\varphi)"] \arrow[drr, bend left, "k_1"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& \tilde{T} \arrow[r, "\overline{k_1}"] \arrow[d, "\overline{h}"'] & X \arrow[dl, "f"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

命題 1.4 から, $\mathrm{Spec}(\varphi)$ は $\mathbf{Sch}$ における mono 射であることが従うので, この図式の内側の三角形は可換である. $k_2 \in \mathrm{Hom}_S(T, Y)$ についても同様にして考えると, 以下の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{T} \arrow[r, "\overline{k_1}"] \arrow[dl, "\overline{k}_2"'] \arrow[d, "\overline{h}"] & X \arrow[dl, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & S &
\end{tikzcd}$$

よって, (Z, π_1, π_2) が $X \times_S Y$ と同型である必要十分条件は, 任意の affine scheme T について, 以下の図式の外側が可換になるならば, 点線で描いた射が一意に存在して, 図式の全てが可換になることである:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& Z \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

(Z, π_1, π_2) について, $(\tilde{Z}, \overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2)$ も fibre 積の条件を満たすので, fibre 積の同型を除いた一意性から, Z は affine scheme として良いことがわかる. すると, 上の図式に出てくる対象は全て affine scheme なので, 大域切断を取ることで, $\mathbf{Ring}$ の図式とみなすと, これは $Z \cong \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ を表していることがわかる. つまり, 以下の補題が示された:

補題 1.2. $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(R)$ として, 構造射 $f : X \to S$, $g; Y \to S$ によって, X, Y を S-scheme と見做した時, $X \times_S Y \cong \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ である. □

命題 1.5. S を scheme とする. このとき, 任意の S-scheme(X, f), (Y, g) について, その fibre 積 $X \times_S Y$ が存在する.

この命題の証明のために, いくつかの補題を用意する.

補題 1.3. S-scheme (Z, h) と, S-scheme の射 $\pi_1 : Z \to X$, $\pi_2 : Z \to Y$ について, (Z, π_1, π_2) が fibre 積 $X \times_S Y$ を与えたとする. この時, 開集合 $U \subset X$, $V \subset Y$ について, 開部分 scheme $W := \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ は, $(U, \mathcal{O}_X \mid_U)$, $(V, \mathcal{O}_Y \mid_V)$ の fibre 積 $U \times_S V$ を与える.

[1] $X \times_S Y$ は, その都度指定しているのであって, global に定めているわけでないことに注意.

証明. S-scheme (T, k) について, 射 $p_1 : T \to U$, $p_2 : T \to V$ は, U, V から X, Y への開埋入射 i_1, i_2 との合成によって, S-scheme の射 $i_1 p_1 : T \to X$, $i_2 p_2 : T \to Y$ を作る. よって, $r : T \to Z$ で, $i_1 p_1 = \pi_1 r$, $i_2 p_2 = \pi_2 r$ となるものが一意に定まる. ここで, 底空間を見ると, $i_1 p_1(T) \subset U$ なので, $r(T) \subset \pi_1^{-1}(U)$ が成立する. 同様に, $r(T) \subset \pi_2^{-1}(V)$ もわかるので, r は W を経由することがわかる. よって, $W \cong U \times_S V$ が成立することがわかる. □

補題 1.4. S-scheme (Z, h) と, S-scheme の射 $\pi_1 : Z \to X$, $\pi_2 : Z \to Y$ について, X の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$, Y の開被覆 $\{V_j\}_{j \in J}$ が存在して, 任意の $i \in I$, $j \in J$ について, $W_{ij} = \pi_1^{-1}(U_i) \cap \pi_2^{-1}(V_j)$ が $U_i \times_S V_j$ と同型ならば, Z は $X \times_S Y$ と同型である.

証明. 任意の S-scheme (T, k) について, $\mathrm{Hom}_S(T, Z) \to \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y);\ r \mapsto (\pi_1 r, \pi_2 r)$ が同型を与えることを示す.

単射性: $r_1, r_2 \in \mathrm{Hom}_S(T, Z)$ について, $\pi_1 r_1 = \pi_1 r_2$, $\pi_2 r_1 = \pi_2 r_2$ とする. この時,

$$\begin{aligned} r_1^{-1}(W_{ij}) =& r_1^{-1}(\pi_1^{-1}(U_i) \cap \pi_2^{-1}(V_j)) \\ =& r_1^{-1}\pi_1^{-1}(U_i) \cap r_1^{-1}\pi_2^{-1}(V_j) \\ =& r_2^{-1}\pi_1^{-1}(U_i) \cap r_2^{-1}\pi_2^{-1}(V_j) \\ =& r_2^{-1}(\pi_1^{-1}(U_i) \cap \pi_2^{-1}(V_j)) \\ =& r_2^{-1}(W_{ij}) \end{aligned}$$

となるので, $T_{ij} := r_1^{-1}(W_{ij})$ とすると, $(\pi_m |_{W_{ij}})(r_1 |_{T_{ij}}) = (\pi_m |_{W_{ij}})(r_2 |_{T_{ij}})$ $(m = 1, 2)$ が成立する. 故に, 任意の $i \in I$, $j \in J$ について, $r_1 |_{T_{ij}} = r_2 |_{T_{ij}}$ となる. T_{ij} は T を被覆するので, $r_1 = r_2$ が従う.

全射性: $l_1 : T \to X$, $l_2 : T \to Y$ を S-scheme の射とする. この時, $T'_{ij} := l_1^{-1}(U_i) \cap l_2^{-1}(V_j)$ と置くと, $(l_1 |_{T'_{ij}}, l_2 |_{T'_{ij}}) = ((\pi_1 |_{W_{ij}}), (\pi_2 |_{W_{ij}}))l_{ij}$ となる $l_{ij} : T'_{ij} \to W_{ij}$ が存在する. $i, i' \in I$, $j, j' \in J$ について, $T'_{ij} \cap T'_{i'j'} = l_1^{-1}(U_i \cap U_{i'}) \cap l_2^{-1}(V_j \cap V_{j'})$ であり, これが空でないならば,

$$l_{ij}(T'_{ij} \cap T'_{i'j'}) \subset \pi_1^{-1}(U_{i'}) \cap \pi_2^{-1}(V_{j'}) = W_{i'j'}$$

となる. もちろんこれは W_{ij} の部分集合でもあるので, 補題 1.3 を用いて,

$$\begin{aligned} l_{ij}(T'_{ij} \cap T'_{i'j'}) \cup l_{i'j'}(T'_{ij} \cap T'_{i'j'}) \subset& W_{ij} \cap W_{i'j'} \\ =& \pi_1^{-1}(U_i \cap U_{i'}) \cap \pi_2^{-1}(V_j \cap V_{j'}) \\ =& (U_i \cap U_{i'}) \times_S (V_j \cap V_{j'}) \end{aligned}$$

がわかる. l_{ij} の定義より, $m = 1, 2$ について,

$$(\pi_m |_{W_{ij} \cap W_{i'j'}})(l_{ij} |_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}}) = l_m |_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}} = (\pi_m |_{W_{ij} \cap W_{i'j'}})(l_{i'j'} |_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}})$$

がわかるので, $l_{ij} |_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}} = l_{i'j'} |_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}}$ がわかった. T'_{ij} たちは T を被覆するので, ある $l : T \to Z$ が存在して, $l |_{T'_{ij}} = l_{ij}$ となることがわかった. つまり, $\pi_m l = l_m$ が, $m = 1, 2$ について成立する. □

補題 1.5. X の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$, Y の開被覆 $\{V_j\}_{j \in J}$ について, 任意の $i \in I$, $j \in J$ について, fibre 積 $U_i \times_S V_j$ が存在すれば, fibre 積 $X \times_S Y$ も存在する.

証明. $(Z_{ij}, \pi_{1,ij}, \pi_{2,ij})$ を, U_i と V_j の fibre 積とその射影の組みとする. 以下, $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3) \in I \times J$ である. 補題 1.3 より,

$$\begin{aligned}\pi_{1,i_1j_1}^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \cap \pi_{2,i_1j_1}^{-1}(V_{j_1} \cap V_{j_2}) \cong &(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \times_S (V_{j_1} \cap V_{j_2}) \\ \cong &\pi_{1,i_2j_2}^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \cap \pi_{2,i_2j_2}^{-1}(V_{j_1} \cap V_{j_2})\end{aligned}$$

が成立する. $\pi_{1,i_1j_1}^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \cap \pi_{2,i_1j_1}^{-1}(V_{j_1} \cap V_{j_2}) =: Z_{i_1j_1,i_2j_2}$ などと置くと, S-同型

$$\theta_{i_2j_2,i_1j_1} : Z_{i_1j_1,i_2j_2} \to Z_{i_2j_2,i_1j_1}$$

が一意に定まり, $\pi_{m,i_2j_2}\theta_{i_2j_2,i_1j_1} = \pi_{m,i_1j_1} |_{Z_{i_1j_1,i_2j_2}}$ $(m = 1, 2)$ が成立する. $Z_{i_aj_a,i_bj_b} \cap Z_{i_aj_a,i_cj_c}$ $(a, b, c \in \{1, 2, 3\},\ a \neq b \neq c \neq a)$ は, 全て fibre 積 $(U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap U_{i_3}) \times_S (V_{j_1} \cap V_{j_2} \cap V_{j_3})$ を定めるので, これらは同型であり, 同型射は $\theta_{i_bj_b,i_aj_a}$, $\theta_{i_cj_c,i_aj_a}$ の制限で与えられる. このことと, fibre 積の普遍性から,

$$\theta_{i_3j_3,i_2j_2}\theta_{i_2j_2,i_1j_1} |_{Z_{i_1j_1,i_2j_2} \cap Z_{i_1j_1,i_3j_3}} = \theta_{i_3j_3,i_1j_1} |_{Z_{i_1j_1,i_2j_2} \cap Z_{i_1j_1,i_3j_3}}$$

がわかる. $\theta_{i_1j_1,i_1j_1} = \mathrm{id}_{Z_{i_1j_1}}$ は明らかなので, 命題 1.3(およびその直後の記述) が使えて, ある scheme Z と, その開被覆 $\{W_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ および scheme の同型の族 $\{\theta_{ij} : Z_{ij} \to W_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ が存在して, 任意の $(i, j), (i', j') \in I \times J$ について, $\theta_{ij} |_{Z_{ij,i'j'}}$ は $Z_{ij,i'j'}$ と $W_{ij} \cap W_{i'j'}$ の同型を与え, $\theta_{i'j'}\theta_{i'j',ij} = \theta_{ij} |_{Z_{ij,i'j'}}$ が成立する. 任意の $(i, j), (i', j') \in I \times J$ について,

$$\pi_{m,i'j'}\theta_{i'j',ij} = \pi_{m,ij} |_{Z_{ij,i'j'}} \quad (m = 1, 2)$$

が成立するので, 標準的な開埋入射によって, $\pi_{1,ij}$ たちを X への射とみて, $\pi_{2,ij}$ たちを Y への射と見ることで, 命題 1.3 の後半が使えて, $\pi_1 : Z \to X$, $\pi_2 : Z \to Y$ が一意に定まり, $\pi_1 |_{W_{ij}} = \pi_{1,ij}\theta_{ij}^{-1}$ となる. よって, 補題 1.4 によって, (Z, π_1, π_2) は fibre 積 $X \times_S Y$ を与えることがわかる. □

補題 1.6. $\{S_i\}_{i \in I}$ を S の開被覆, $X_i = f^{-1}(S_i)$, $Y_i = g^{-1}(S_i)$ とする. 任意の $i \in I$ について, fibre 積 $X_i \times_{S_i} Y_i$ が存在すれば, fibre 積 $X \times_S Y$ が存在する.

証明. $X_i \times_{S_i} Y_i$ を, S_i から S への開埋入射によって S-scheme とみると, 任意の S-scheme (Z, h) について, S-scheme の射 $p_1 : Z \to X_i$, $p_2 : Z \to Y_i$ が存在すれば, これは自然に S_i-scheme の射になって, ある $\overline{h} : Z \to X_i \times_S Y_i$ が存在して, $p_m = \pi_m\overline{h}$ $(m = 1, 2)$ が成立する. つまり, $X_i \times_S Y_i \cong X_i \times_{S_i} Y_i$ がわかる. $X_{ij} = X_i \cap X_j$, $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$ とおくと, 補題 1.3 によって, $X_{ij} \times_S Y_{ij}$ が存在するが, $X_i \times_S Y_i$ の第 m 成分への射影を, $\pi_{m,i}$ として, $k : X_{ij} \times_S Y_{ij} \to S$ を構造射とすると,

$$\begin{aligned}X_{ij} \times_S Y_{ij} \cong &\pi_{1,i}^{-1}(X_i \cap X_j) \cap \pi_{2,i}^{-1}(Y_i \cap Y_j) \\ = &\pi_{1,i}^{-1}(f^{-1}(S_i) \cap f^{-1}(S_j)) \cap \pi_{2,i}^{-1}(g^{-1}(S_i) \cap g^{-1}(S_j)) \\ = &k^{-1}(S_i) \cap k^{-1}(S_j) \\ = &\pi_{1,i}^{-1}(X_i) \cap \pi_{1,j}^{-1}(Y_j) \\ = &X_i \times_S Y_j\end{aligned}$$

となる. つまり, $X_{ij} \times_S Y_{ij}$ が fibre 積 $X_i \times_S Y_j$ を与えるので, 補題 1.5 から, 主張が示された. □

命題 1.5 の証明. 補題 1.6 より, S は affine scheme として良い. 補題 1.5 より, X, Y の affine 開被覆をとり, それぞれの fibre 積の存在を言えば良いが, これは補題 1.2 によって存在が示されている. よって, X と Y の fibre 積は存在する. □

fibre 積の基本的性質を述べておく:

命題 1.6. S を scheme, (X, f), (Y, g) を S-scheme, (Z, h) を Y-scheme とする. この時, 以下が成立する:

(1) $X \times_S Y \cong Y \times_S X$

(2) $X \times_S S \cong X$
(3) $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$. ここで, 右辺において, Z は gh によって S-scheme と見ている.
(4) $U \subset S$ を開部分 scheme とすると, $X \times_S U = f^{-1}(U)$ となる.

証明. (1),(2) は明らか. (3) は diagram chase による. (4) も fibre 積の定義からすぐに従う. □

Sets における fibre 積は, $(X, f), (Y, g) \in \mathbf{Sets}/S$ について, $\{(x, y) \in X \times Y : f(z) = g(y)\}$ となっていた. **Sch** における fibre 積においては, 以下の対応が成立する:

命題 1.7. $(X, f),\ (Y, g) \in \mathbf{Sch}/S$ とする. この時, $X \times_S Y$ の点全体のなす集合 $|X \times_S Y|$ と, 以下の集合は 1:1 に対応する:

$$N := \{(x, y, s, \mathfrak{p}) : f(x) = g(y) = s,\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))\}$$

証明. $(x, y, s, \mathfrak{p}) \in N$ とする. $f(x) = s$ より, 局所環の射 $f_x^\# : \mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{X,x}$ が得られ, ここから $\alpha : \kappa(s) \to \kappa(x)$ を得る. 同様に, $\beta : \kappa(s) \to \kappa(y)$ も得られる. これから誘導された affine scheme の射を構造射として, $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ および $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$ を $\mathrm{Spec}(\kappa(s))$-scheme とみる. この時, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))$ なので, 自然な商写像

$$\varphi : \kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y) \to (\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}$$

を得る. Spec をとって,

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)) \cong \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \times_{\mathrm{Spec}(\kappa(s))} \mathrm{Spec}(\kappa(y))$$

が得られる. fibre 積の定義から, ある $a : \mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ と $b : \mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ が存在して, 以下の図式が可換になる:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "a"] \arrow[ddr, bend right, "b"'] & & & \\
& \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \arrow[r, "x"] \arrow[d] & X \arrow[dd] \\
& \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \arrow[r] \arrow[d, "y"'] & \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \arrow[dr, "s"] & \\
& Y \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

ここで, scheme T の点 t と射 $\mathrm{Spec}(\kappa(t)) \to T$ との自然な同一視をしている. 外側の図式の可換性から, 射 $\mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \to X \times_S Y$ が存在して, 以下の図式を可換にする:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "xa"] \arrow[ddr, bend right, "yb"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

得られた射 $\mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \to X \times_S Y$ について, $\mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p})$ の生成点の像を z とおく.

逆に, $z \in X \times_S Y$ が与えられた時, 点 z と S-scheme の射 $z : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to X \times_S Y$ を同一視したとき, fibre 積の定義から, S-scheme の射 $a : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to X$ および $b : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to Y$ で, $fa = gb$ となるものが一意に定まる．この a, b について, $a(z) = x,\ b(z) = y$ とおくと, $f(x) = g(y) = s$ となる $s \in S$ が存在して, $a_x^\#$ から射 $\kappa(x) \to \kappa(z)$ および $\kappa(y) \to \kappa(z)$ が得られ, $\kappa(s) \to \kappa(x) \to \kappa(z)$ と $\kappa(s) \to \kappa(y) \to \kappa(z)$ は, 合成によって互いに同じ射を定める．よって, 射 $\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y) \to \kappa(z)$ が定まり, その核を $\mathfrak{p}$ とすると, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))$ となる．これらが互いに逆を定めることは, 容易にわかる． □

これで, S-scheme X と Y の fibre 積の点集合としての構造がわかった．このことから, $X \times_S Y$ は, 点集合として必ずしも $\{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$ と一致するとは限らないことがわかる．例えば, $R := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ について, $(1 \otimes 1 + i \otimes i) \subset \mathfrak{p}_1$, $(1 \otimes 1 - i \otimes i) \subset \mathfrak{p}_2$ なる素イデアルが存在するが, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ とすると, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 \supset (1 \otimes 1 + i \otimes i, 1 \otimes 1 - i \otimes i) = R$ となるので, これらは互いに異なる．つまり, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{R})} \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ は, 点集合として少なくとも 2 点存在する．特にこれは, scheme の fibre 積は, 位相空間としての fibre 積とも異なることを示している．このことについてはさらに単純な状況についても言える．体 k 上の affine 空間 $\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}(k[x_1])$ と, 自身との直積 (ここでの直積は $\mathrm{Spec}(k)$ 上の fibre 積) は $\mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}(k[x_1, x_2])$ となるが, この位相は, 底空間の直積空間の位相ではない．

1.6. **基底変換.**

S を scheme とする．(X, f) を S-scheme とした時, S-scheme (Y, g) について, $X \times_S Y$ は, その射影 $\pi_1 : X \times_S Y \to X$ によって, X-scheme の構造が入る．このようにして, S-scheme Y から, X-scheme $X \times_S Y$ を構成することを, **基底変換**という．S-scheme Y の X による基底変換 $X \times_S Y$ を, 屡々Y_X と書いたりする．

例. (1) X を scheme として, X の点 $x : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ があったとする．この時, scheme の射 $f : Y \to X$ について, 以下の fibre 積を考える:

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \mathrm{Spec}(\kappa(x)) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

fibre 積 $Y \times_X \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ を, Y **の点** x **における fibre** といい, Y_x で表す．Y_x を具体的に書くと, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(B)$ および Y の affine 開集合の族 $\{V_i\}_{i \in I}$ を, $\bigcup V_i \supset f^{-1}(x)$, $f(V_i) \subset U$ となるように定め, $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ とすると,

$$Y_x = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}(A_i \otimes_B \kappa(x))$$

となる．すると, 各 i について, $\varphi_i : B \to A_i$ を構造射とすると, $\mathrm{Spec}(\varphi_i) = f\,|_{V_i}$ となるので,

$$\mathrm{Spec}(A_i \otimes_B \kappa(x)) \cong \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_i) : \varphi_i(\mathfrak{p}_x) \subset \mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_x \supset \varphi_i^{-1}(\mathfrak{p})\} = f^{-1}(x) \cap V_i$$

がわかる．よって, Y_x の底空間は $f^{-1}(y)$ と位相空間として同型であることがわかった．点集合としての同型は命題 1.7 から従う．これによって, scheme の射を, fibre の族で, 何らかの "連続性" の条件を満たすものとして捉えることができる．このような例として, 体 k-scheme[2] X_0 および任意の $y \in Y$ について, $\kappa(y) = k$ なる底空間が連結な k-scheme Y について, scheme の射 $f : X \to Y$ であって, ある $y_0 \in Y$ について, $X_{y_0} \cong X_0$ となるようなものを, scheme X_0 の**変形族**といい, 各 $y \in Y$ について, X_y を schemeX_0 の**変形**という．

[2] これは, $\mathrm{Spec}(k)$-scheme という意味である．屡々使われる用法なので, ここで使っておく．

(2) R を離散賦値環, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする．この時, $X := \mathrm{Spec}(R)$ は 2 点 (生成点 η と, $\mathfrak{m}$ に対応する点 s) からなっている．$f : Y \to X$ を scheme の射とすると, Y は 2 つの fibre Y_η および Y_s からなる．これらは, 以下の pull back の図式からなっている:

$$\begin{array}{ccc} Y_\eta & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(Q(R)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y_s & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Y_s を Y_η の特殊化という．ここで, $Q(R)$ は R の商体を指している．

(3) U を X の開部分 scheme とする．X-scheme (Y, f) について, $Y_U = Y \times_X U = f^{-1}(U)$ である (c.f. 命題 1.6(4))．(Y_U, f_U) について, 以下の命題が成立する:

命題 1.8. $\mathcal{F}$ を準連接 $\mathcal{O}_Y$-加群層とする．この時, $\mathcal{F}\,|_{f^{-1}(U)}$ を $\mathcal{F}_U$ と書くことにすると, 任意の $i \geq 0$ で, $(R^i f_* \mathcal{F})_U \cong R^i (f_U)_* \mathcal{F}_U$ が成立する．

証明. $\mathcal{F}$ の移入分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{\Delta^0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{\Delta^1} \cdots$$

について, 移入的加群層は散布層なので, これと,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{J}_U^0 \xrightarrow{\Delta^0} \mathcal{J}_U^1 \xrightarrow{\Delta^1} \cdots$$

は散布分解でもある．$R^i f_* \mathcal{F}$ は, $\mathcal{F}$ の散布分解についての f の高次順像をとったものと同型で, これの $f^{-1}(U)$ への制限は制限を取ってから高次順像を取ったものと同型である．よって, 主張が従う． □

(4) scheme の射 $g : Z \to X$ が**平坦射**であるとは, 任意の $z \in Z$ について, $g_z^\# : \mathcal{O}_{X,g(z)} \to \mathcal{O}_{Z,z}$ が平坦であることを指す．より一般に, (Z, g) を X-scheme とし, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_Z$-加群層とする．$\mathcal{F}$ が $z \in Z$ において X 上平坦であるとは, $x = g(z)$ として, $\mathcal{F}_z$ が平坦 $\mathcal{O}_{X,x}$-加群であることをさす．任意の $z \in Z$ において, $\mathcal{F}$ が X 上平坦である時, $\mathcal{F}$ を X 上平坦であるという．平坦射についても, 上の命題と同様の結果が成立する:

命題 1.9. $\mathcal{F}$ を準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層として, $f : Y \to X$ を scheme の射とし, $\mathcal{F}_Z$ で, $g^* \mathcal{F}$ を表すことにする．この時, 同型 $(R^i f_* \mathcal{F})_Z \cong R^i (f_Z)_* \mathcal{F}_Z$ が成立する． □

(X, f) を S-scheme とする．この時, 恒等射 $\mathrm{id}_X : X \to X$ について, $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$ に対応する射 $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ を**対角射**という．対角射の像 $\Delta_{X/S}(X)$ について調べる．$x \in X$ を任意にとり, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ と, $f(x)$ の affine 開近傍 $V = \mathrm{Spec}(B)$ を, $U \subset f^{-1}(V)$ となるようにとる．この時, $\Delta_{U/V} : U \to U \times_V U$ は, 環準同型 $m : A \otimes_B A \to A$; $m(a \otimes a') = aa'$ によって定まる．よって, U は, $\ker(m)$ の定める $U \times_V U$ の閉部分 scheme と同型になる．$\Delta_{X/S}\,|_U = \Delta_{U/V}$ であり, $U \times_S U$ は $X \times_S X$ の開部分 scheme なので, $U \times_V U$ の和集合によって定まる $X \times_S X$ の開部分 scheme を W とおくと, $\Delta_{X/S}$ は W への閉埋入射であることがわかる．つまり, $\Delta_{X/S}$ は次の意味で埋入射である:

定義 1.4.

(1) X を scheme, Y を, 底空間が X の部分空間であるような scheme とする．ある X の開部分空間 U が存在して, Y が U の閉部分空間となる時, Y は X の**部分 scheme** という．また, $f : X \to Y$ を scheme の射として, f の像が Y の部分 scheme であるとき．f を**埋入射**という．つまり, f が埋入射であるとは, f が Y の開部分 scheme への閉埋入射であることである．

(2) scheme の射 $f : X \to S$ が**分離的**であるとは, 対角射 $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ が閉埋入射であることを指す.
(3) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は scheme の圏の終対象だったので, scheme の射 $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ が一意に定まる. これが分離的であるとき, X は分離的であるという.

位相空間の圏 **Top** において, 分離的対象とは Hausdorff 空間そのものであることに注意せよ. 分離的射の分離性に関する基本的性質をまとめておく:

命題 1.10. $f : X \to S$ が affine scheme の射ならば, f は分離的である.

証明. 上の議論から明らかである. □

命題 1.11. $f : X \to S$ を scheme の射, $\{V_i\}_{i\in I}$ を S の開被覆とする. $U_i = f^{-1}(V_i)$ とすると, f が分離的であることと, 任意の $i \in I$ について, $f_i := f\mid_{f^{-1}(V_i)}: U_i \to V_i$ が分離的であることは同値である.

証明. f が分離的であるとすると, $\Delta_{X/S} : X \to X\times_S X$ は閉埋入射である. つまり, ある準連接 $X\times_S X$-イデアル層 $\mathcal{J}$ が存在して, f は $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(X\times_S X, \mathcal{O}_{X\times_S X}/\mathcal{J})$ の同型を誘導するが, ここから, 各 V_i について, $X\times_S X$ の S-scheme としての構造射を F として, $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ と $(F^{-1}(V_i), \mathcal{O}_{X\times_S X}/\mathcal{J}\mid_{F^{-1}(V_i)})$ の間の同型を誘導する. $F^{-1}(V_i) = U_i \times_{V_i} U_i$ なので, 各 i について, $f_i : U_i \to V_i$ は分離的であることがわかった. 逆に, 各 i について, f_i が閉埋入射であるとすると, $U_i \times_{V_i} U_i = F^{-1}(V_i)$ は $X \times_S X$ を被覆するので, f も閉埋入射である. □

命題 1.12. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が共に分離的ならば, $gf : X \to Z$ も分離的である.

この命題には, 証明に幾らかの補題を必要とする.

補題 1.7. scheme の射 $a : S \to T$, $b : T \to T'$ が共に閉埋入射ならば, $b \circ a : S \to T'$ も閉埋入射である.

証明. T' の affine 開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ をとってきて, 各 $i \in I$ について, $ba\mid_{(ba)^{-1}(U_i)}: (ba)^{-1}(U_i) \to U_i$ が閉埋入射であることが示されれば良いので, $T' = \mathrm{Spec}(A)$ としても支障ない. すると, b が閉埋入射であることから, ある A のイデアル I が存在して, $T \cong \mathrm{Spec}(A/I)$ となる. さらに, a も閉埋入射なので, ある I を含む A のイデアル J が存在して, $S \cong \mathrm{Spec}(A/J)$ が成立する. よって, ba は閉埋入射である. □

補題 1.8. scheme の射 $f : X \to S$ が閉埋入射ならば, 任意の X-scheme (Y, g) について, 基底変換 $f_Y : X \times_S Y \to Y$ も閉埋入射である.

証明. S, X, Y, $X \times_S Y$ の affine 開被覆 $\{S_i\}_{i\in I}$, $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$, $\{U_i\}_{i\in I}$ を, 任意の $i \in I$ について, $X_i \subset f^{-1}(S_i)$[3], $Y_i \subset g^{-1}(S_i)$, $f_Y^{-1}(Y_i) \subset U_i$, $g_Y^{-1}(X_i) \subset U_i$ となるように選び, 任意の i について,$f_Y\mid_{U_i}: U_i \to Y_i$ が閉埋入射であることが示されれば, f_Y が閉埋入射であることが示されるので, 初めから X, Y, S は affine scheme として良い. $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(R)$ とおく. f が閉埋入射なので, ある R のイデアル I が存在して, $A \cong R/I$ となる. よって, $X \times_S Y \cong \mathrm{Spec}(B \otimes_R R/I) = \mathrm{Spec}(B/IB)$ となるので, f_Y は閉埋入射であることがわかる. □

[3] f は閉埋入射なので, 実際のところ $X_i := f^{-1}(S_i)$ として良い.

命題 1.12 の証明. f, g が分離的射なので, $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ および $\Delta_{Y/Z} : Y \to Y \times_Z Y$ が閉埋入射である. 以下の図式によって一意に得られる射 $X \times_Y X \to X \times_Z X$ を G とおく:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[dr, dashed, "G"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "gf"] \\
& X \arrow[r, "gf"'] & Z
\end{tikzcd}$$

対角射の定義から, 以下の図式は点線に上下どちらの射をとっても可換になる:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "G\Delta_{X/Y}", "\Delta_{X/Z}"'] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "gf"] \\
& X \arrow[r, "gf"'] & Z
\end{tikzcd}$$

よって, fibre 積の普遍性から $G\Delta_{X/Y} = \Delta_{X/Z}$ がわかった. 定義より, $\Delta_{X/Y}$ は閉埋入射なので, G が閉埋入射であることが示されれば, 補題 1.7 から, $\Delta_{X/Z}$ が閉埋入射であることが従い, 主張が従う. 以下, $p_1 : X \times_Y X \to X$, $p_2 : X \times_Z X \to X$, $p_3 : Y \times_Z Y \to Y$ を, それぞれ fibre 積の射影とする. まず, 2 本の $fp_2 : X \times_Z X \to Y$ と, fibre 積の普遍性から得られる射を $(f,f)_Z : X \times_Z X \to Y \times_Z Y$ とする. 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[dr, "G"] \arrow[ddrrr, bend left, "fp_1"] \arrow[dddrr, bend right, "fp_1"'] & & & \\
& X \times_Z X \arrow[dr, "(f,f)_Z"] \arrow[drr, bend left, "fp_2"] \arrow[ddr, bend right, "fp_2"'] & & \\
& & Y \times_Z Y \arrow[r, shift left, "p_3"] \arrow[d, shift left, "p_3"] & Y \arrow[l, shift left, "\Delta_{Y/Z}"] \arrow[d, "g"] \\
& & Y \arrow[u, shift left, "\Delta_{Y/Z}"] \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

今わかっていることは, 上の図式から $\Delta_{Y/Z}$ を除いた部分の可換性である. $p_3\Delta_{Y/Z} = \mathrm{id}_Y$ に注意して, $gp_3\Delta_{Y/Z}fp_1 = gp_3(f,f)_ZG$ がわかるので, $Y \times_Z Y$ の普遍性から, 以下の図式が可換になる:

(2)
$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "fp_1"'] & X \times_Z X \arrow[d, "(f,f)_Z"] \\
Y \arrow[r, "\Delta_{Y/Z}"'] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

この図式が pull back になっていることを示す．W を scheme, $w_1 : W \to X \times_Z X$, $w_2 : W \to Y$ を scheme の射として, $(f, f)_Z w_1 = \Delta_{Y/Z} w_2$ となるものとする．この時, 以下の図式から点線の射を除いた図式

(3)
$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, bend left, "w_1"] \arrow[ddr, bend right, "w_2"'] & & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "fp_1"'] & X \times_Z X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "(f,f)_Z"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "\Delta_{Y/Z}"'] & Y \times_Z Y \arrow[r, "p_3"'] & Y
\end{tikzcd}$$

が得られるが, $p_2 G = p_1$, $p_3 \Delta_{Y/Z} = \mathrm{id}_Y$ などに注意して, W を w_2 によって Y-scheme とみると, 以下の Y-scheme の可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, bend left, "p_2 w_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2 w_1"'] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

よって, $X \times_Y X$ の普遍性から, 点線の射 w で, 上の図式の全てを可換にするものが一意に取れる．あとは $Gw = w_1$ および $fp_1 w = w_2$ が示されれば良い．図式 3 は, Y-scheme の可換図式ともみれるが, $g : Y \to Z$ によって, Z-scheme の図式とも見ることができる．先ほど示した図式の外側の可換性および小さい四角形の可換性から,

$$gfp_2 w_1 = gfp_2 Gw$$

となるので, 以下の図式において, 点線の射を Gw としても w_1 としても可換になる:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "p_2 w_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2 w_1"'] & & \\
& X \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

$X \times_Z X$ の普遍性から, $Gw = w_1$ がわかった．$p_3 \Delta_{Y/Z} = \mathrm{id}_Y$ を用いると, $fp_1 w = w_2$ が得られる．よって, 図式 2 は pull back になっていることが示された．すると, 補題 1.8 より, G が閉埋入射であることが従い, 主張が従う． □

命題 1.13. X, Y を scheme とする．

(1) $j : Y \to X$ が閉埋入射ならば, j は分離的である．
(2) $j : Y \to X$ が開埋入射ならば, j は分離的である．

証明.

(1) X の affine 開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ をとる．j は閉埋入射だったので, 各 i について, $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ とおくと, $j^{-1}(V_i) =: U_i$ は, 空でないならば affine 開集合である．U_i が空でない時, これを $\mathrm{Spec}(A_i)$ とおくと, ある B_i のイデアル J_i が存在して, $A_i = B_i/J_i$ とできる．すると, $B_i \to A_i \times_{B_i} A_i; b \mapsto b\otimes 1$ は同型射となるので, 射影 $\pi_i : U_i \times_{V_i} U_i \to U_i$ は同型射となる．$\{U_i\}_{i\in I}$ は Y を被覆するので, 射影 $\pi : Y \times_X Y \to Y$ は同型射となる．$\mathrm{id}_Y = \pi\Delta_{Y/X}$ なので, $\Delta_{Y/X}$ も同型射, 特に閉埋入射である．よって, j が分離的であることがわかる．

(2) $j(Y)$ は X の開部分 scheme になる．$j(Y)$ の開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ をとると, $U_i := j^{-1}(V_i)$ は V_i と同型である．よって, 射影 $p_i : U_i \times_{V_i} U_i \to U_i$ は同型射であり, 上と同様にして j が分離的であることが示される． □

系 1.4. $f : X \to S$ が分離的射で, $j : Y \to X$ が閉埋入射 (resp. 開埋入射) ならば, $fj : X \to S$ も分離的射である． □

命題 1.14. $f : X \to S$ が分離的射ならば, 任意の $g : Y \to S$ について, g による基底変換 $f_Y : X_Y \to Y$ は分離的である．

証明. 以下の図式は pull back の図式になっていることが容易に ($X \times_S Y$ の普遍性などを用いて) 確かめることができる:

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_S Y) \times_Y (X \times_S Y) \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \times_S X
\end{tikzcd}$$

ここで, 下の射は $\Delta_{X/S}$, 上の射は $\Delta_{X\times_S Y/Y}$ である．よって, 補題 1.8 より, f_Y も分離的であることが従う． □

命題 1.15. scheme の射 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ について, $gf : X \to Z$ が分離的ならば, f も分離的である．

証明. Γ_f を, 以下の図式を可換にするものとして定義する:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Gamma_f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

この時, Γ_f は mono 射である．なぜならば, scheme の射 h_1, h_2 が, $\Gamma_f h_1 = \Gamma_f h_2$ となるならば, p_1 を合成することによって $h_1 = h_2$ が得られるからである．このことから, 以下の図式は pull back になっている:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "\Gamma_f"] \\
X \arrow[r, "\Gamma_f"'] & X \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

よって, Γ_f から誘導される対角射は同型射になっており, 特に閉埋入射になっているので, Γ_f は分離的である．$\pi : X \times_Y Z \to Y$ を射影とすると, これは gf の基底変換なので, 前の命題から分離的である．よって, 命題 1.12 より, $f = \pi\Gamma_f$ も分離的である． □

1.7. 一般的な scheme に課す性質について.

本節では, scheme の圏 **Sch** の対象に対して考えられる性質について, 簡単に触れておく.

定義 1.5. X を scheme とする.

(1) X が**整**であるとは, 任意の X の開集合 U について, $\mathcal{O}_X(U)$ が整域であることを指す.
(2) X が**局所整**であるとは, 任意の $x \in X$ について, $\mathcal{O}_{X,x}$ が整域であることを指す.
(3) X が**局所 Noether** であるとは, X の affine 開被覆 $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}_{i \in I}$ で, 任意の $i \in I$ について, A_i が Noether 環であることを指す.
(4) X が **Noether** であるとは, X が局所 Noether であり, かつ準コンパクトであることを指す.
(5) X が**正規**であるとは, 任意の $x \in X$ について, $\mathcal{O}_{X,x}$ が正規環であることを指す.
(6) X が**連結**であるとは, X の底空間が連結空間であることを指す.

scheme X が Noether ならば, 有限個の Noether 環の Spec によって X が被覆されるので, 特に X の底空間は Noether であることに注意せよ.

補題 1.9. scheme X が整であることと, X が既約かつ被約であることは同値である.

証明. X を整 scheme とする. この時, X が被約であることは明らか. X が既約でないとすると, ある空でも X でもない閉集合 F_1, F_2 で, $X = F_1 \cup F_2$ と表される. $i = 1, 2$ について, $U_i := X \setminus F_i$ とおくと, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる. よって, 層の定義から, $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) \cong \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ がわかるが, これが整域であると仮定すると, $\mathcal{O}_X(U_1)$ あるいは $\mathcal{O}_X(U_2)$ が零環にならねばならないが, そうすると今度はそれが整域で無くなってしまう. つまり, X は既約でなければならない. 逆に, X を既約かつ被約な scheme とする. この時, X の開集合 U について, $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$, $fg = 0$ なるものが存在したとする. すると, $X_f = \{x \in X : f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$ などとおいて, U の affine 開集合 $V = \mathrm{Spec}(B)$ を任意に取ると, f の V への制限 f_V について, $X_f \cap V = D(f_V)$ となる. つまり, X_f は開集合であることがわかった. 同様にして, X_g も開集合であることがわかる. $F_1 := U \setminus X_f$, $F_2 := U \setminus X_g$ とすると, これらは U の閉集合であり, 任意の $x \in U$ について, $f_x g_x = 0$ が成立するので, $F_1 \cup F_2 = \{x \in U : f_x \in \mathfrak{m}_x, \text{or } g_x \in \mathfrak{m}_x\} = U$ となる. X の既約性から, U も既約であることがわかるので, $F_1 = U$ として良い. この時, f の U における affine 開集合 $V = \mathrm{Spec}(B)$ への制限は皆冪零元[4]となるので, X の被約性から, $f|_V = 0$ がわかる, つまり, $f = 0$ である. よって, $\mathcal{O}_X(U)$ は整域になることがわかった. □

補題 1.10. Noether scheme$X$ が連結かつ局所整であることと, 整であることは同値である.

証明. X が整ならば, 連結かつ局所整であることは明らかである. 逆を示す. 補題 1.9 より, X が既約かつ被約であることを示せばよい. X が被約であることと, X の各茎が被約であることは同値であったので, X の被約性は従う. 既約性について, X の 2 つの既約成分 F_1, F_2 をとってきて, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ とする. この時, $x \in F_1 \cap F_2$ について, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ を取ると, $F_1 \cap U$ と $F_2 \cap U$ は U の既約成分である. 既約成分はその生成点をただ一つ持つので, $F_i \cap U$ の生成点に対応する A の素イデアルを $\mathfrak{p}_i$ とする. $\mathrm{Spec}(A)$ の既約成分たちを $G_1, \ldots, G_k$ とかくと[5], 任意の A の素イデアル $\mathfrak{q}$ について, ある $j \in \{1, \ldots, k\}$ が存在して, $V(\mathfrak{q}) \subset G_i$ とならねばならないので, 各 G_i に対応する素イデアルは極小素イデアルである. x に対応する A の素イデアルを $\mathfrak{p}$ とすると, $A_{\mathfrak{p}}$ は整域なので, その極小素イデアルはただ一つしか存在せず, $\mathfrak{p}_1 A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_2 A_{\mathfrak{p}}$ がわかる. よって, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ が示され, $F_1 \cap U = F_2 \cap U$ がわかった. しかし, $F_i \cap U$ について, $F_i = \overline{(F_i \cap U)} \cup (F_i \setminus U)$ と, 閉集合の和集合で表せるが, F_i の既約性から $F_i = \overline{(F_i \cap U)}$ がわかる. つまり, $F_i \cap U$ は F_i で稠密なので, $F_1 = F_2$ が従う. よって, X の各既約成分は互いに素であることがわかり, X の連結性から, これは X が既約であることを示している. □

---

[4]全ての素イデアルの共通部分は冪零根基であったことに注意.

[5]ここで A の Noether 性を使っている

1.8. 代数多様体.

定義 1.6. $f : X \to Y$ を scheme の射とする.

(1) Y の準コンパクト開集合 V について, $f^{-1}(V)$ も常に準コンパクト開集合である時, f を**準コンパクト射**であるという.
(2) 任意の $x \in X$ について, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ および $f(x)$ の affine 開近傍 $V = \mathrm{Spec}(B)$ が, $U \subset f^{-1}(V)$ となるように取れて, A が B 上有限生成代数となる時, f は**局所有限生成射**であるという.
(3) f が準コンパクトかつ局所有限生成ならば, f を**有限生成射**と言い, Y-scheme (X, f) を有限生成 Y-scheme という. 特に k を体として, $Y = \mathrm{Spec}(k)$ となる時, 有限生成 Y-scheme のことを k 上の**代数的 scheme** であるという.
(4) k 上代数的 scheme X が**代数多様体**, あるいは単に**多様体**であるとは, 以下の条件を満たすことである:
   (a) k の代数閉包 $\overline{k}$ について, $X \times_k \overline{k}$ も整である.
   (b) 構造射 $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ は分離的である.
(5) k 上の代数多様体 X の部分 k-scheme Y が, それ自身代数多様体である時, Y は X の**部分代数多様体**であるという.

k-scheme の構造射 $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ が準コンパクトであることは, 底空間が準コンパクトであることを指しており, X の affine 開被覆を取った時に, その有限開被覆が存在することを指す[6]. また, f が局所有限であるということは, k 上有限生成代数の Spec からなる X の開被覆が得られるということである. つまり, 代数的 scheme は, 有限個の有限生成 k-代数に関する affine scheme で被覆される. また, 代数多様体の条件から分離性を除いたものを屡々**前多様体**という.

補題 1.11. X を体 k 上局所有限生成 scheme とすると, 任意の X の affine 開集合 U について, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ は k 上有限生成である.

証明. 各 $x \in U$ について, x の affine 開近傍 $V_x \subset U$ で, $S := \Gamma(V_x, \mathcal{O}_X)$ が有限生成 k-代数であるものが存在する. $x \in D_U(f_x) \subset V_x$ となるような $f_x \in R := \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ が存在して, この f_x について, $D_U(f_x) = D_{V_x}(f_x |_{V_x})$ が成立することから, R_{f_x} は有限生成 k-代数となる. U は準コンパクトなので, ある $f_1, \ldots, f_n \in R$ が存在して, $\{D(f_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ は U を被覆して, 各 i について, R_{f_i} は k 上有限である. よって, R も k-上有限である. □

命題 1.16. X を体 k 上整な代数的 scheme とする.

(1) X は Noether 空間である.
(2) $U = \mathrm{Spec}(A)$ を X の affine 開集合とすれば, その商体は U の選び方によらず, X によってのみ決まる, k-上有限生成拡大体である. これを X の**関数体**と言って, $k(X)$ と書く. この時 $\mathrm{tr.deg}_k k(X) = \dim X$ である.
(3) k の代数閉包 $\overline{k}$ について, $X \times_k \overline{k}$ が $\overline{k}$ 上整である必要十分条件は, $k(X) \otimes_k \overline{k}$ が体になることである. このような k の拡大体のことを, **正則拡大体**という. この時, $\overline{k}(X \times_k \overline{k}) \cong k(X) \otimes_k \overline{k}$ である.
(4) X の点 x が閉点であることと, $\kappa(x)$ が k の有限次代数拡大になることは同値である. $\kappa(x) = k$ となる点 x を k-有理点という. k-有理点全体の集合に X からの誘導位相を与えた位相空間を $X(k)$ とかく.

証明.

[6] affine 開集合は X の開基を成したので, これはコンパクト性の同値条件になっている.

(1) 上に述べた通り, k 上代数的 scheme$X$ は, 有限生成 k 代数の Spec による有限 affine 被覆 $\{\mathrm{Spec}(A_i)\}_{i=1,\dots,n}$ が取れる. 体上有限生成代数は特に Noether 環なので, そのスペクトルが Noether 空間である. よって, X が Noether 空間であることが示された.
(2) 補題 1.9 より, X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, A は整域である. よって, 商体 $Q(A)$ が定義できる. $x \in X$ について, x の 2 つの affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$, $V = \mathrm{Spec}(B)$ を取ると, 任意の $y \in U \cap V$ について, $A_{\mathfrak{p}_y} = \mathcal{O}_{X,y} = B_{\mathfrak{q}_y}$ となる. ここで, $\mathfrak{p}_y$ は点 y に対応する A の素イデアル, $\mathfrak{q}_y$ は点 y に対応する B の素イデアルである. よって, $Q(A) = Q(A_{\mathfrak{p}_y}) = Q(B_{\mathfrak{q}_y}) = Q(B)$ がわかる. つまり, 商体は, X の点, および affine 開近傍の取り方によらないことがわかった. X の affine 開集合の座標環は常に k 上有限生成整域なので, その商体は k 上有限生成拡大体である.
(3) $X \times_k \overline{k}$ が既約かつ被約であるとする. この時, X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, $U \times_k \overline{k} = \mathrm{Spec}(A \otimes_k \overline{k})$ は $X \times_k \overline{k}$ の開集合であり, $X \times_k \overline{k}$ が整 scheme であることから, $A \otimes_k \overline{k}$ は整域であることがわかる. よって, 商体 $Q(A \otimes_k \overline{k})$ が定義でき, 以下の包含関係が成立する:

$$Q(A) \subset Q(A) \otimes_k \overline{k} \subset Q(A \otimes_k \overline{k})$$

ここで, 最初の包含では, $a/a' \in Q(A)$ について, $(a/a') \otimes 1 \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ を同一視しており, 2 つ目の包含関係においては, $(a/a') \otimes s \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ と $(a \otimes s)/(a' \otimes 1) \in Q(A \otimes_k \overline{k})$ を同一視している. $0 \neq \alpha \otimes s \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ について, s の最小多項式 $f \in k[X]$ を用いて, $g(X) := \alpha^{\deg f} f(X/\alpha) \in Q(A)[X]$ を定義すると, これはモニック多項式であり, $g(\alpha \otimes s) = 0$ となる. よって, $Q(A) \otimes_k \overline{k}$ は $Q(A)$ 上整である. よって, $Q(A) \otimes_k \overline{k}$ は体である. $\overline{k}$ は k 上平坦なので, 以下の列は完全である:

$$0 \longrightarrow A \otimes_k \overline{k} \longrightarrow Q(A) \otimes_k \overline{k}$$

この完全列における単射は $a \otimes s \in A \otimes_k \overline{k}$ について, $(a/1) \otimes s \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ を定めるので, これは, 上の同一視によって, 包含写像になっている. よって, 商体の普遍性から, $Q(A) \otimes_k \overline{k} = Q(A \otimes_k \overline{k})$ がわかった. つまり, $k(X) \otimes_k \overline{k} = \overline{k}(X \times_k \overline{k})$ である.

$k(X) \otimes_k \overline{k}$ が体であるとする. この時, X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, $A \otimes_k \overline{k}$ は体 $Q(A) \otimes_k \overline{k}$ の部分環である. よって, $A \otimes_k \overline{k}$ は整域になる. まず, $X \times_k \overline{k}$ は連結であることを示す. X は既約かつ被約なので, 特に連結であるので, $X \times_k \overline{k}$ が連結でないとすると, ある X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ が存在して, $U \times_k \overline{k}$ が非連結である. この U について, 互いに素な $U \times_k \overline{k}$ の開集合 V_1, V_2 が存在して, $U \times_k \overline{k} = V_1 \cup V_2$ と表せたとすると, 層の定義から, $\mathcal{O}_{X \times_k \overline{k}}(U \times_k \overline{k}) = \mathcal{O}_{X \times_k \overline{k}}(V_1) \times \mathcal{O}_{X \times_k \overline{k}}(V_2)$ となる. よって, ある $e_1, e_2 \in \mathcal{O}_{X \times_k \overline{k}}(U \times_k \overline{k})$ について, $e_1 + e_2 = 1$, $e_i^2 = e_i$ $(i = 1, 2)$, $e_1 e_2 = 0$ が成立する. つまり, $\mathcal{O}_{X \times_k \overline{k}}(U \times_k \overline{k}) = A \otimes_k \overline{k}$ は整域では無くなってしまい, 矛盾である. よって, $X \times_k \overline{k}$ が連結である. よって, 各茎が整域であることが示されれば補題 1.10 から, $X \times_k \overline{k}$ が整であることが従うが, 各 $z \in X \times_k \overline{k}$ について, その X への射影 $\overline{z}$ の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ をとってきて, $U \times_k \overline{k}$ の大域切断が整域なので, その局所化 $\mathcal{O}_{X \times_k \overline{k}, z}$ も整域である. よって, $X \times_k \overline{k}$ は整であることがわかった.
(4) $x \in X$ を閉点とする. この時, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, A は k 上有限生成整域であり, x は U でも閉点である. よって, Hilbert の零点定理から, x に対応する A の素イデアル $\mathfrak{p}_x$ について, $\kappa(x) = A/\mathfrak{p}_x$ は k 上有限次代数拡大体である. 逆に, $\kappa(x)$ が k 上有限次代数拡大であったとする. x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, 以下の自然な射の合成を考える:

$$k \hookrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{p}_x \hookrightarrow Q(A/\mathfrak{p}_x) = \kappa(x)$$

これによって, $A/\mathfrak{p}_x$ は加群として k-上有限生成な整域であることがわかり, $A/\mathfrak{p}_x$ が体であることがわかる. つまり, x は U で閉点である. 一方で, X の開集合 V について, $x \notin V$ とすると, $\overline{\{x\}}$ の定義から, $\overline{\{x\}} \cap V = \emptyset$ となる. つまり,

$$\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}} \cap X = \bigcup_{x \in U} (\overline{\{x\}} \cap U) = \{x\}$$

であることが従い, x が閉点であることが従う. □

k を代数閉体, X を k 上整な代数的 scheme とする. この時, $X(k)$ は X の閉点全体のなす空間である. $X(k)$ 上に, $X(k)$ の開集合 U について

$$\mathcal{O}_{X(k)}(U) := \bigcap_{x \in U(k)} \mathcal{O}_{X,x}$$

と定めると, $(X(k), \mathcal{O}_{X(k)})$ は環付き空間を成し, $U = \mathrm{Spec}(A)$ が X の affine 開集合の時, $V \subset U$ を開集合として, $\mathcal{O}_{X(k)}(V(k)) = \mathcal{O}_X(V)$ となる. さらに $X(k)$ は X で稠密なので, $(X(k), \mathcal{O}_{X(k)})$ は $(X, \mathcal{O}_X)$ を回復する. このような理由から, 代数閉体 k 上の (前) 多様体 X と, その k-有理点全体 $X(k)$ を同一視することがある.

1.9. **代数閉でない体上の scheme.** k を必ずしも代数閉体でないような体とする. また, X を k 上局所有限生成な scheme とする.

命題 1.17. 上の条件において, X の閉点全体の集合は X で very dense である.

証明. X の任意の空でない局所閉集合が閉点を持つことを示せば良い. $Z \subset X$ を空でない局所閉集合とする. このとき, $Z \cap U$ が U の閉集合であるような X の開集合全体は X の開被覆をなし, $(\mathrm{Op}(X), \subset)^{\mathrm{op}}$ の filter を成している. よって, 空でない affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ で, $U \cap Z$ が U の閉集合であるようなものが存在する. 補題 1.11 から, A は有限生成 k 代数であり, $U \cap Z = V_U(I)$ には U での閉点が存在する. これを x とおくと, $\kappa(x) \cong A/\mathfrak{p}_x$ は体なので, x は X の閉点である[7]. よって, 主張が示された. □

1.10. **分離性再論.** (S-)scheme の分離性を定義した際に, それが scheme の圏における Hausdorff 性の analogy であることに触れて. 本節では, scheme の分離性一つの特徴付けとして, 分離性に関する**賦値判定法**を紹介する. これは, 位相空間における Hausdorff 性を特徴付ける, 以下の性質に着目したものである: "X を Hausforff 空間とする. 任意に与えられた連続写像 $f : (0,1) \to X$ について, $\lim_{x \to 1} f(x)$ は存在すれば一意に定まる". その前に, 幾らか体論からの準備が必要である.

補題 1.12. k を体, A を k 上有限生成整域とする. この時, A は**永田環**である. つまり, $K := Q(A)$ の有限次代数拡大体 L について, A の L での整閉包 B は A 上有限生成代数である.

証明. O. Zariski & P. Samuel[1] 参照. □

補題 1.13. A を k 上有限生成整域, K をその商体, L を K の有限次代数拡大体とする. この時, A の素イデアル $\mathfrak{p}$ について, L の離散賦値環 R で, $A_{\mathfrak{p}}$ を支配するものが存在する. つまり, $A_{\mathfrak{p}} \subset R$ であり, R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $A_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ となる.

証明. $\mathfrak{p} = \sum_1^n x_i A$ とおいて, $B := A[x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1]$ とおく. この時, $\mathfrak{p}B = x_1 B$ となる. すると, $Q(B) = K$ であり, B の L での整閉包を S とおく. すると, 補題 1.12 より, S は k 上有限生成整域になっている. よって, lying over theorem より, $\mathfrak{p}$ の上に乗っている S の素イデアル $\mathfrak{q}$ が取れ, S の $\mathfrak{q}$ に

[7] 命題 1.16(4) の証明に X が準コンパクトであることは使っていないので, これは k 上局所有限生成の場合にも使える

よる局所化 $S_{\mathfrak{q}}$ が取れる．イデアル $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{q}}$ の素因子の一つを $\mathfrak{P}$ とおくと, $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{q}} = x_1 S_{\mathfrak{q}}$ であることから, $(S_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{P}}$ は離散賦値環となる[8]．これを R とおくと, R は $A_{\mathfrak{p}}$ を支配する． □

X を scheme, R を離散賦値環として, $g : \mathrm{Spec}(R) \to X$ を scheme の射とする．$\mathrm{Spec}(R)$ の閉点を s, 生成点を η とする．$g(s) = x'$, $g(\eta) = x$ とすると, g に付随して射 $\varphi := g^{\#}_{x'} : \mathcal{O}_{X,x'} \to R$ が得られる．g の連続性から, $x' \in \overline{\{x\}}$ であることが従い, x' は x の特殊化であることがわかる．$Y := (\overline{\{x\}})_{\mathrm{red}}$ とおく．すると, g は Y を経由する．

証明. $U = \mathrm{Spec}(A)$ を x' の X での affine 開近傍とすると, これは x を包含するので, g は U を経由する．よって, 予め X は affine scheme としても支障ない．$X = \mathrm{Spec}(A)$ とおく．Y は既約かつ被約な U の閉部分 scheme なので, A の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在して, $Y = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$ となる．Y の生成点は x なので, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x$ である．$\varphi := \Gamma(X, g^{\flat}) : A \to R$ とすると, $g^{\#}_{\eta} : A_x \to Q(R)$ は局所環の射なので, $\ker(g^{\#}_{\eta}) = \mathfrak{p}_x A_x$ である．よって, $\ker(\varphi) = \mathfrak{p}_x$ が従う．よって, 準同型定理から, 以下の図式を可換にする単射 $A/\mathfrak{p}_x \to R$ が唯一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & R \\ & A/\mathfrak{p}_x \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Spec を取ることで, 主張が従う． □

上の証明で得た射 $h : \mathrm{Spec}(R) \to Y$ について, $h^{\#}_s : \mathcal{O}_{Y,x'} \to R$ は局所環の単射なので, R は $\mathcal{O}_{Y,x'}$ を支配することがわかる．また, $\kappa(x)$ は Y の関数体なので, φ は体の準同型 $\kappa(x) \to Q(R)$ を誘導する．逆に, 以下の命題が成立する:

補題 1.14. X を体 k 上の代数的 scheme, $x \in X$, $Y = (\overline{\{x\}})_{\mathrm{red}}$, $x' \in \overline{\{x\}}$ とする．L を $k(Y)$ の有限次代数拡大体とすると, L の離散賦値環 R が存在して, R が $\mathcal{O}_{X,x'}$ を支配する．

証明. Y は k 上代数的 scheme なので, Y の点 x' における affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, A は k 上有限生成整域である．x' に対応する A の素イデアル $\mathfrak{p}_{x'}$ について, 補題 1.13 を使うと, L の離散賦値環 R で, $A_{\mathfrak{p}_{x'}} = \mathcal{O}_{Y,x'}$ を支配するものが存在することがわかる． □

上のように, 離散賦値環 R について, 射 $\mathrm{Spec}(R) \to X$ で, $\eta \mapsto x$, $s \mapsto x'$ となるようなものを, x の R に沿った**特殊化**といい, $x \to x'$ と書く．無論, 特殊化を支配する離散賦値環は一意的ではなく, $x \in X$ と離散賦値環 R が与えられても, x の特殊化 x' は一般には一意に定まらない．

補題 1.15. X を体 k 上の代数的 scheme, Y をその部分 scheme とする．この時, 以下の 2 条件は同値である:

(1) Y は閉部分 scheme である．
(2) R を離散賦値環, $x \to x'$ を R に沿った特殊化として, $x \in Y$ ならば $x' \in Y$ となる．

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2): x' の X での affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ は x も含む．Y が閉部分 scheme なので, ある A のイデアル I が存在して, $U \cap Y = \mathrm{Spec}(A/I)$ となる．A において, x, x' に対応する素イデアルを $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_{x'}$ とおくと, x' は x の特殊化であることから $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'}$ となる．$x \in Y$ ならば, $I \subset \mathfrak{p}_x$ となるので, $I \subset \mathfrak{p}_{x'}$ がわかり, $x' \in U \cap Y$, つまり $x' \in Y$ がわかる．
(2) $\Longrightarrow$ (1): $x \in Y$ ならば $\overline{\{x\}} \subset Y$ なので, $\overline{Y} = Y$ であることが従い, Y が X の閉部分 scheme であることがわかる． □

ここで, 以下の補題を用いている:

[8]正規環の単項イデアルの素因子は高さ 1 であることに注意.

補題 1.16. $f : Y \to X$ を埋入射とする．f が閉埋入射であることと，$f(Y)$ が閉であることは同値である．

証明. f が閉埋入射ならば，$\{U_\lambda = \mathrm{Spec}(R_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の affine 開被覆とすると，各 $\lambda \in \Lambda$ について，$f^{-1}(U_\lambda) \cong \mathrm{Spec}(R_\lambda/I_\lambda)$ となる R_λ のイデアル I_λ が存在する．この I_λ を用いて，$f(Y)\cap U_\lambda = V_{R_\lambda}(I_\lambda)$ となるので，$U_\lambda \setminus f(Y)$ は U_λ の，従って X の開集合である．よって，

$$X \setminus f(Y) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \setminus f(Y)$$

は X の開集合になり，$f(Y)$ が閉であることが従う．逆に，$f(Y)$ が閉であるとすると，f が埋入射なので，ある X の開部分 scheme U が存在して，f は閉埋入射 $i : Y \to U$ と開埋入射 $j : U \to X$ の合成となる．i が閉埋入射なので，ある $\mathcal{O}_U$ の準連接イデアル層 $\mathcal{I}$ が存在して，$(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}), \mathcal{O}_U/\mathcal{I})$ となる．$i(Y)$ は閉であり，$\mathcal{I} \mid_{U\setminus i(Y)}= \mathcal{O}_U \mid_{U\setminus i(Y)}= \mathcal{O}_X \mid_{U\setminus i(Y)}$ がわかるので，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{O}_{X\setminus i(Y)}$ は張り合って，一つの準連接イデアル層 $\mathcal{J}$ を作る．この $\mathcal{J}$ について，$(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}), \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ となるので，f が閉埋入射であることが従う． □

これらの準備のもと，以下の結果がわかる:

定理 1.1. X を体 k 上の代数的 scheme, $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ をその構造射とする．この時，以下の 2 条件は同値である:

(1) f は分離的射である．つまり，X は分離的である．
(2) R を離散賦値環，$x \to x'$ と $x \to x''$ を R に沿った特殊化で，それから誘導された体の準同型 $\kappa(x) \to Q(R)$ が等しいならば，$x' = x''$ となる．

証明. (1) を仮定すると，対角射 $\Delta_{X/k} : X \to X \times_k X$ は閉埋入射である．よって，$\Delta_{X/k}(X)$ は閉集合である．$g : x \to x'$, $h : x \to x''$ を，共に R に沿った特殊化として，以下の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(R) \arrow[dr, dashed, "{(g,h)}"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X \times_k X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k)
\end{tikzcd}$$

ここで，$\eta : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(R)$ を $\mathrm{Spec}(R)$ の生成点とすると，$g^\#_\eta = h^\#_\eta$ なので，$g\eta = h\eta$ である．よって，$(g, h)(s) =: (x, x) \in \Delta_{X/k}(X)$．$x', x'' \in \overline{\{x\}}$ なので，$(g, h)(s) =: y \in \overline{\{(x, x)\}}$ となる．$\Delta_{X/k}$ は閉埋入射なので，$\overline{\{(x, x)\}} \subset \Delta_{X/k}(X)$ である．よって，$x' = p_1(y) = p_2(y) = x''$ がわかった．

次に，(2) を仮定する．この時，$\Delta_{X/k}(X)$ が閉集合であることを示せば良い．$\Delta_{X/k}(x) =: (x, x)$ について，$y \in \overline{\{(x, x)\}}$ ならば，ある DVR R と R に沿った特殊化 $(x, x) \to y$ が存在する．これを $l : \mathrm{Spec}(R) \to X \times_k X$ とすると，$g := p_1 l$, $h := p_2 l$ は x から $p_1(y)$, $p_2(y)$ への R に沿った特殊化である．また，g, h の誘導する体準同型は等しく，(2) より，$p_1(y) = p_2(y)$ がわかる．よって，$y \in \Delta_{X/k}(X)$ がわかった．つまり $\Delta_{X/k}(X)$ は閉集合である． □

この命題は, X が分離的であることと, 以下の図式を可換にするような lift(点線部分) は高々一つであることが同値であることを示している:

(4)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (\mathrm{Spec}(k)) \end{tikzcd}$$

離散賦値環 R に沿った特殊化 $x \to x'$ について, 上に与えた点線の射が得られることを, 特殊化が**収束する**といい, 得られる射を R に沿った特殊化の**極限**と言うことにする[9]. すると, 上の命題は, X の分離性は, **特殊化に沿った極限が収束すれば一意である**と言い換えることができる. そうすると, これは位相空間の圏において, Hausdorff 性と, 極限が収束すれば一意であることの同値性の analogy になっていることに気づくであろう. この例は, 以下の例によってより明確になるであろう:

例. k を体, $X_1 := \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x_1])$, $X_2 := \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x_2])$ とおき, 0_1 を X_1 の (x) に対応する点, 0_2 を X_2 の (x_2) に対応する点とする. $U_{12} := X_1 \setminus \{0_1\} = \mathrm{Spec}(k[x_1, 1/x_1])$, $U_{21} = X_2 \setminus \{0_2\} = \mathrm{Spec}(k[x_2, 1/x_2])$ となる. $\varphi_{12} : k[x_1, 1/x_1] \to k[x_2, 1/x_2]$ を, $x_1 \mapsto x_2$ によって定まる k-代数の射として, φ_{12} に対応する射を $f_{12} : U_{21} \to U_{12}$ として, φ_{12}^{-1} に対応する射を f_{21} とする. Glueing data$\{(X_i), (U_{ij}), (f_{ij})\}$ による X_1 と X_2 の張り合わせを X とおき, **原点を 2 点持つ直線**という. これについて, 体 $k(x)$ と, その部分環 $k[x]_{(x)}$ について, $\mathrm{Spec}(k(x)) \to X$ を, 自然な射 $\mathrm{Spec}(k(x)) \to X_i$ の張り合わせとして, $\mathrm{Spec}(k[x]_{(x)}) \to \mathrm{Spec}(k)$ を構造射とすると, 以下の図式を可換にする点線の射は 2 通り存在することになる (各 i について, X_i を経由する射を考えることができる)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k(x)) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(k[x]_{(x)}) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (\mathrm{Spec}(k)) \end{tikzcd}$$

よって, 定理 1.1 によって, X は分離的でないことがわかった. □

最後に, より一般に, 射の分離性に関しても同様の言い換えが可能であることを述べておく. 証明は上と同じなので, 省略する.

定理 1.2. X, Y を局所 Noether scheme, $f : X \to Y$ を有限射とする. この時, 以下の 2 条件は同値である:

(1) f は分離的射である.
(2) R を離散賦値環, $x \to x'$ と $x \to x''$ を R に沿った特殊化で, それから誘導された体の準同型 $\kappa(x) \to Q(R)$ が等しいならば, $x' = x''$ である. つまり, 以下の図式の実線部分が可換ならば, 図式の全てを可換にするような点線の射は高々一つである.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

[9] これは一般的な語法ではない.

1.11. **scheme の射の性質に関する一般論.** 上で見たように, scheme の図形的性質は, その (構造) 射に関する性質として書くのが有効なアプローチであることがわかる. よって, scheme の射に関する命題が, どの程度の安定性を持つかといった議論は, 幾何学をやる上で重要になってくる. そこで, 本節では, scheme の射に関するメタ的な命題を紹介することにする.

定義 1.7. P を環の射に関する命題とする.

(1) P が**局所的性質**であるとは, 以下の 3 条件を満たすことを言う:
  (a) 任意の環の射 $\varphi : R \to S$ について, 常に以下の論理式は真である.
$$P(\varphi) \implies (\forall f \in R,\ P(\varphi_f : R_f \to S_f))$$
  (b) R, S を環, $f \in R$ として, $\varphi : R_f \to S$ を環の射とする. この時, 以下の論理式は常に真である:
$$P(\varphi) \implies (\forall a \in S, P(R \to R_f \to S \to S_a))$$
  (c) $(a_1, \ldots, a_n) = S$ を満たす $a_1, \ldots, a_n \in S$ を任意に取ると, 任意の環の射 $\varphi : R \to S$ について, 以下の論理式は真になる:
$$(\forall i,\ P(R \to S \to S_{a_i})) \implies P(R \to S)$$
(2) P が**基底変換で安定**であるとは, 任意の環の射 $\varphi : R \to S$ と任意の R-代数 R' について, について, $P(\varphi) \implies P(\varphi \otimes_R R')$ となることである.
(3) P が**合成で安定**であるとは, 任意の環の射 $\varphi : R \to S$, $\psi : S \to T$ について,$P(\varphi) \wedge P(\psi) \implies P(\psi \circ \varphi)$ となることを指す.

定義 1.8. P を環の射に関する命題とする. scheme の射 $f : X \to Y$ が**局所的に** P **である**とは, 任意の $x \in X$ について, ある x の affine 開近傍 U 及び $f(x)$ の affine 開近傍 V が存在して, $f(U) \subset V$ であり, かつ誘導される環の射 $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ が P を満たすことである.

補題 1.17. X を scheme とする. 任意の $x \in X$ について, その affine 開近傍 $U, V \subset X$ を任意に取ってくると, $U \cap V$ の affine 開集合で, U, V のどちらに関しても標準的なものが存在する. ここで, affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ の標準的 affine 開近傍とは, $D_U(f)$ の形をした U の affine 開近傍のことである.

証明. $U = \mathrm{Spec}(R)$, $V = \mathrm{Spec}(S)$ とする. この時, $x \in U \cap V$ について, その U に関する標準的 affine 開近傍 U' が取れて, U' の標準的 affine 開近傍は U の標準的 affine 開近傍であることから, U' の標準的 affine 開近傍で, V に関しても標準的な affine 開近傍が取れることを言えばよい. つまり初めから $U \subset V$ として良い. まず, x に対応する R の素イデアルを $\mathfrak{p}$, x に対応する S の素イデアルを $\mathfrak{q}$ とする. x の V に関する標準的 affine 開近傍 $D_V(f)$ を取ってくると, 制限写像 $\rho : S \to R$ による f の像を f' として, $D_V(f) = D_U(f')$ が成立するので, これは標準的である. □

命題 1.18. P を環の射に関する局所的性質とする. また, $f : X \to Y$ を局所的に P な sheme の射として, $x \in X$, x の affine 開近傍 U, $f(x)$ の affine 開近傍 V を, $f(U) \subset V$ となるようにとる. すると, 自然な射 $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ は性質 P をもつ.

証明. $x \in U$ を任意に取る. この時, ある x の affine 開近傍 U_x 及び $f(x)$ の affine 開近傍 V_x が存在して, $\mathcal{O}_Y(V_x) \to \mathcal{O}_X(U_x)$ は性質 P をもつ. $U'_x \subset U \cap U_x$ を, U, U_x のどちらもに関して標準的な x の開近傍として取ってくると, 定義 1.8(1)(b) より, $\mathcal{O}_Y(V_x) \to \mathcal{O}_X(U'_x)$ も性質 P をもつ. よって, 初めから U_x は U の標準的 affine 開集合として良い. $V'_x \subset V \cap V_x$ を, V 及び V_x に関する $f(x)$ の標準的開近傍とする. この時, $U''_x := f^{-1}(V'_x) \cap U_x \cong U_x \times_V V'_x$ は U_x の (従って U の)affine 開集合である. $\mathcal{O}_Y(V_x) \to \mathcal{O}_X(U_x)$ が P を満たすので, 定義 1.8(1)(a) より, $\mathcal{O}_Y(V'_x) \to \mathcal{O}_X(U''_x)$ も P を満たす. よって, U, V の標準的 affine 開近傍の対の族 $\{(U_x, V_x) : x \in U\}$ で, 各 x について, $x \in U_x$, $f(x) \in V_x$ で, $f(U_x) \subset V_x$ となるものを得る. もう一度定義 1.8(1)(b) を用いることで, $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U_x)$ が P を満たすことがわかる. U は準コンパクトなので, 有限個の点 $x_1, \ldots, x_n$ が存在して, U は上で定めた

U_{x_i} によって被覆される．よって, 定義 1.8(1)(c) を用いることで, $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_Y(U)$ は性質 P をもつことがわかる． □

命題 1.19. P を環の射に関する局所的性質で, 合成で安定であるものとする．この時, scheme の射 $f : X \to Y$, $g : T \to Z$ が共に局所的に P であるならば, $gf : X \to Z$ も局所的に P である．

証明. f, g が共に局所的に P であるとする．$x \in X$ を任意に取る．上に示した命題から, $gf(x)$ の affine 開近傍 W と, $f(x)$ の affine 開近傍 $V \subset g^{-1}(W)$ について, $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_Y(V))$ は真であり, x の affine 開近傍 $U \subset f^{-1}(V)$ について, $P(\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U))$ は真なので, 仮定より, $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U))$ も真である．よって, gf も局所的に P である． □

命題 1.20. P を環の射に関する局所的性質で, かつ基底変換で安定であるとする．この時, scheme の射 $f : X \to Y$ が局所的に P であるならば, その基底変換も局所的に P である．

証明. $g : Z \to Y$ を scheme の射とする．この時, 任意の $z \in Z$ に対して, z の affine 開近傍 W 及び $g(z) =: y$ の affine 開近傍 V で, $g(W) \subset V$ となるものを取ってくると, 命題 1.18 より, $f^{-1}(V)$ は X の affine 開集合 U_i であって, $P(\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U_i))$ が成立するようなもので被覆される．以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd} U_i \times_V W \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ U_i \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

すると, $U_i \times_V W \to W$ の大域切断は $\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_Z(W)$ となり, これは $(\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U_i)) \otimes_Y \mathcal{O}_Z(W)$ である．P は基底変換で安定だったので, $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_Z(W))$ は真である．

$w \in X \times_Y Z$ を任意にとる． この時, $z := f \times_Y Z(w)$ として上のような V, W, U_i を取ると, $w \in f^{-1}(V) \times_V W$ となり, これはある i について, $w \in U_i \times_V W$ となることを指し, 上の議論から $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_Z(W))$ は真である．よって, f の基底変換も局所的に P である． □

1.12. **固有射, 完備性.** scheme の底空間に入る位相はかなり荒いので, 我々が考える scheme の底空間は大体コンパクトになってしまう．分離性と同様, scheme の圏においてもコンパクト性の analogy を作りたい．ここで, 位相空間の圏において, コンパクト性を特徴づける以下の命題から出発する:

定理 1.3 (Kuratowski-Mrówka)**.** 位相空間 X がコンパクトであることと, 任意の位相空間 Y について, 射影 $p : X \times Y \to Y$ は閉写像であることは同値である． □

一般に, 位相空間の射 $f : X \to Y$ が絶対閉 (普遍閉) であるというのは, 任意の位相空間の射 $g : Z \to Y$ について, $f \times Z : X \times_Y Z \to Z$ が閉写像であることをいう．つまり, X がコンパクトであるということは, 一意的な射 $f : X \to \{pt\}$ が絶対閉であることと同値である．これを踏まえて, scheme の圏においては以下のようにしてコンパクト性の analogy を考えるのは自然である:

定義 1.9.

(1) scheme の射 $f : X \to Y$ が**閉射**であるとは, f が位相空間の射として閉写像であることをさす．また, f が**絶対閉射**であるとは, 任意の Y-scheme (Z, g) について, 基底変換 $f_Z : X_Z \to Z$ は閉射であることをさす．
(2) S-scheme X が S 上**閉**[10]であるとは, 構造射が絶対閉射であることを指す．

[10] これも一般的な語法ではない

(3) scheme の射 $f : X \to Y$ が有限生成[11]で, 分離的かつ絶対閉射である時, f は**固有射**であるという. また, 体 k 上の代数的 scheme X について, その構造射が固有射である時, X は k 上固有であるという.
(4) 体 k 上固有な代数多様体を**完備代数多様体**という.

まず, 絶対閉射, 固有射に関する性質を調べていこう.

命題 1.21.

(1) 閉埋入射は固有射である.
(2) scheme の射 $f : X \to Y$ が固有射ならば, 任意の Y-scheme (Z, g) について, 基底変換 $f_Z : X \times_Y Z \to Z$ も固有射である.
(3) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が共に固有射であるとき, $g \circ f$ も固有射である.

証明.

(1) X の底空間が Y の閉集合となるようにしても良い. $F \subset Y$ が準コンパクトならば, 準コンパクト集合の閉集合も準コンパクトなので, $F \cap X$ も準コンパクトである. よって f は準コンパクト射である. $U = \mathrm{Spec}(R)$ を Y の affine 開集合とすると, イデアル $I \subset R$ が存在して, $f^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(R/I)$ となるので, f は局所有限生成であることがわかった. 補題 1.8 によって, f の任意の基底変換は閉埋入射であることがわかり, 特に f が絶対閉射であることがわかった. さらに, 命題 1.13(1) より, f は分離的射であることもわかるので, 主張が従う.
(2) 絶対閉射であることは, 明らかに基底変換で安定である. また, 準コンパクト性も基底変換で安定であり, 環の射の有限生成性は局所的性質で, 基底変換で安定なので, 局所有限生成性は基底変換で安定になる. 分離性が基底変換で安定であることは既に示してあるので, 固有性も基底変換で安定である.
(3) (2) と同様, 固有性を定める諸性質は合成で安定なので, 固有性も合成で安定である. □

ここで, 以下の事実を用いている:

補題 1.18. $f : X \to Y$ を scheme の準コンパクト射とする. この時, 任意の scheme の射 $g : Z \to Y$ について, $f_Z : X \times_Y Z \to Z$ は準コンパクト射である.

証明. scheme W の部分集合が準コンパクトであることと, 有限枚の affine 開集合で被覆されることは同値であるので, 結局 Z の affine 開集合 V について, $f_Z^{-1}(V)$ が準コンパクトであることを示せば良い. V の affine 開被覆 $\{V_i\}_{i=1}^{p}$ で, 任意の i について, ある Y の affine 開集合 U_i が存在して, $g(V_i) \subset U_i$ となるようにとる. 各 i について, $f^{-1}(U_i)$ は準コンパクトなので, $f^{-1}(U_i)$ の有限 affine 開被覆 $\{U_{ij}\}_{j=1}^{q_i}$ が取れる.

$$f_Z^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q_i} U_{ij} \times_{U_i} V$$

となるので, $U_{ij} \times_{U_i} V$ は $X \times_Y Z$ の affine 開集合であることから, $f_Z^{-1}(V)$ は準コンパクトであることが従う. □

命題 1.21 の系として, 以下が得られる:

系 1.5. X, Y, Z を scheme, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を scheme の射とする. $g \circ f$ が固有射で, g が分離的ならば, f は固有射である.

[11] 実はこれは局所有限生成で十分である. というのも, 絶対閉射は準コンパクトだからである.

証明. 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "\Gamma_f"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

p_2 は固有射 gf の基底変換なので, 固有射である. Γ_f は対角射 $\Delta_{Y/Z}$ の $(f,1)_Z$ による基底変換なので, g が分離的射であることから, $\Delta_{Y/Z}$ は閉埋入射となり, 閉埋入射は固有射なので, Γ_f も固有射. $f = p_2\Gamma_f$ なので, f は固有射である. □

ここで使った, Γ_f は対角射 $\Delta_{Y/Z}$ の $(f,1)_Z$ による基底変換であるということは, 以下のようにして示せる: まず, 以下の図式の実線部分が全て可換であったとする.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "p_1\pi_1"] \arrow[drr, bend left, "\pi_1"] \arrow[drrrr, bend left, "p_1\pi_1"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_2"'] & & & & \\
& X \arrow[r, "\Gamma_f"'] \arrow[d, "f"] & X \times_Z Y \arrow[rr, "p_1"] \arrow[d, "(f,1)_Z"] \arrow[ddr, bend left, "p_2"] & & X \arrow[d, "gf"] \\
& Y \arrow[r, "\Delta_{Y/Z}"'] \arrow[drr, bend right, "1_Y"] & Y \times_Z Y \arrow[dr] & & Z \\
& & & Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

点線の射を $p_1\pi_1$ で定めると,

$$p_1\pi_1 = p_1\Gamma_f p_1\pi_1$$

及び,

$$p_2\pi_1 = fp_1\pi_1 = p_2\Gamma_f p_1\pi_1$$

がわかるので, $X \times_Z Y$ の fibre 積の普遍性から, $\pi_1 = \Gamma_f p_1\pi_1$ となる. 一方で, $fp_1\pi_1 = p_2\pi_1 = \pi_2$ であることは既に示されているので, 点線の射を含めた図式の全てが可換になる. このような点線の射の一意性は, Γ_f が mono 射であることから従うので, 図式の中央 (左側?) の四角形は pull back である. よって, $\Delta_{Y/Z}$ の $(f,1)_Z$ での基底変換は Γ_f になることが分かった.

射の固有性 (絶対閉性) について, 以下のような賦値判定法が存在する.

定理 1.4. $f : X \to Y$ を局所 Noether scheme の有限射とする. この時, 以下は同値である:

(1) f は固有射 (resp. 絶対閉射) である.
(2) 任意の離散賦値環 R について, 下の図式の実戦部分が可換になるならば, 点線の持ち上げが一意に (resp. 少なくとも一つ) 存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}$$

証明は省略する. 特に, 以下の系が成立する:

系 1.6. X を k 上代数的 scheme とする．この時, X が k 上固有であることと, その構造射 $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ について, 任意の離散賦値環 R について, 上の図式において $Y = \mathrm{Spec}(k)$ としたものの実線部分が可換ならば, 点線の射が一意に定まることは同値である． □

さて, 次に scheme の固有射に関するかなり重要な性質を示していく:

定理 1.5. X, Y を体 k 上の分離的代数 scheme として, X は既約かつ被約でもあるとする．また, $f : X \to Y$ を固有射とする．この時, $f_*\mathcal{O}_X$ は連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．

定理の証明の前に, 以下の補題を示しておく:

補題 1.19. X, Y を体 k 上の分離的代数的 scheme, $f : X \to Y$ を scheme の射とする．X 上の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ について, その f での順像 $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．

証明は, 以下の手順に則ってする:

(1) Y を affine 代数的 scheme の場合に帰着させる．
(2) X が affine 代数的 scheme ならば, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．
(3) U, U' を X の 2 つの affine 開集合とすると, $U \cap U'$ も X の affine 開集合である．
(4) $\{U_i\}_{i \in I}$ を X の affine 開被覆, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ とする．この時, 以下の列が完全になる．

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{F} \longrightarrow \prod_i (f|_{U_i})_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \longrightarrow \prod_{i,j} (f|_{U_{ij}})_*(\mathcal{F}|_{U_{ij}})$$

(5) $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群になる．

証明.

(1) $f_*\mathcal{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることの定義を書き下すと, 任意の $y \in Y$ について, y の開近傍 V 及び添字集合 I, J が存在して, 以下の $\mathcal{O}_V$ 加群の完全列が作れることである:

$$\mathcal{O}_V^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_V^{(I)} \longrightarrow (f_*\mathcal{F})|_V \longrightarrow 0$$

V の中での y の affine 開近傍をとって, それに制限することで, V は元々affine として良い．無論, このような完全列が初めから与えられていれば $(f_*\mathcal{F})|_V$ は準連接 $\mathcal{O}_V$ 加群なので, $f_*\mathcal{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であるならば, Y の affine 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して, $(f_*\mathcal{F})|_{V_\lambda}$ は準連接 $\mathcal{O}_{V_\lambda}$ 加群である．逆にそのような affine 開被覆が存在すれば, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群になるので, Y の affine 開集合 V について $(f_*\mathcal{F})|_V$ が準連接 $\mathcal{O}_V$ 加群であることを示せば十分である．結局これは Y を V で, X を $f^{-1}(V)$ で取り替えて示せばよいことになるので, Y を affine 代数的 scheme として良い．

(2) X も affine 代数的 scheme とする．つまり, $X = \mathrm{Spec}(R)$, $Y = \mathrm{Spec}(S)$ で, R, S は k 上有限生成代数である．この時, $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$ とおくと, $\mathcal{F} = \tilde{M}$ であり, $f_*\mathcal{F}$ は, R 加群 M を $\Gamma(Y, f^\flat) : S \to R$ によって S 加群とみたものに相当する．よって, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．

(3) $U, U' \subset X$ を affine 開集合とする．この時, $U \times_k U'$ は affine 代数的 scheme であり, X は分離的 scheme なので, 賦値判定法より, その開部分 scheme も分離的であることが従う．つまり, 対角射 $\Delta : U \cap U' \to (U \cap U') \times_k (U \cap U') = U \times_k U'$ は閉埋入射である．よって, $U = \mathrm{Spec}(R)$, $U' = \mathrm{Spec}(R')$ とおくと, $R \otimes_k R'$ のイデアル I が存在して, $U \cap U' = \mathrm{Spec}(R \otimes_k R'/I)$ と表される．つまり, $U \cap U'$ は affine 開集合である．

(4) Y の開集合 V について,

$$(f|_{U_i})_*(\mathcal{F}|_{U_i})(V) = \mathcal{F}(U_i \cap f^{-1}(V))$$

となる．$\{U_i \cap f^{-1}(V)\}$ は $f^{-1}(V)$ の開被覆なので, $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij} \cap f^{-1}(V))$$

が得られる．よって, 問題の系列は各切断で完全になるので, もちろん層の完全列にもなる．

(5) (4) に示したことから, $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) \longrightarrow \prod_i M_i \longrightarrow \prod_{i,j} M_{ij}$$

が得られる．ここで, $M_i = \Gamma(Y, (f|_{U_i})_*(\mathcal{F}|_{U_i}))$, $M_{ij} = \Gamma(Y, (f|_{U_{ij}})_*(\mathcal{F}|_{U_{ij}}))$ である．tilde 関手をとって, 5 項補題を使うと,

$$f_*\mathcal{F} \cong \Gamma(Y, f_*\mathcal{F})^{\sim}$$

が得られる．よって, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることが従う．

さて, 定理の証明に入ろうか．

定理 1.5 の証明． まず, $Z := (\overline{f(X)})_{\mathrm{red}}$ とする．既約 scheme の像の閉包は既約である (なぜならば, $Z = F_1 \cup F_2$ と閉集合の結びで表したときに, $X = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$ となるが, F_1, F_2 は共に Y の閉集合なので, $f^{-1}(F_1)$, $f^{-1}(F_2)$ は X の閉集合．X の既約性から, このうちどちらかが X に等しい．$f^{-1}(F_1) = X$ としても良いが, この時 $f(X) \subset F_1$．つまり $Z \subset F_1$ がわかる)．このことを用いると, Z は既約かつ被約であることが分かった．被約 scheme の普遍性から, $g : X \to Z$ が定まって, $f = ig$ となる．ここで, $i : Z \to Y$ は閉埋入射．$g_*\mathcal{O}_X$ が連接 $\mathcal{O}_Z$ 加群ならば, $f_*\mathcal{O}_X$ は連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．今は体 k 上の代数 scheme の話をしているので, Noether 加群の部分加群は自明に有限生成であることから, 有限生成性についてのみ確認すれば良い．i が閉埋入射なので, これも容易に確認できる．よって, 初めから Y は被約かつ既約で k 上分離的な代数 scheme で, f は支配的として良い．

X の生成点 ξ, Y の生成点を η とおく．この時, f は支配的なので, $f(\xi) = \eta$ となる．$k(X) = \mathcal{O}_{X,\xi}(= \kappa(\xi))$, $k(Y) = \mathcal{O}_{Y,\eta}(= \kappa(\eta))$ なので, f は体の埋め込み $k(Y) \to k(X)$ を誘導する．f は固有射なので, 特に有限生成であることに注意すると, $k(X)$ は $k(Y)$ の有限生成拡大であることがわかる．$k(Y)$ の $k(X)$ における代数閉包を L とおく．この時, L は $k(X)$ の有限生成代数拡大なので, 有限次拡大である．ところで $f_*\mathcal{O}_X$ が連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることは局所的性質なので, $Y = \mathrm{Spec}(R)$, R は k 上有限生成多元整域として良い．k 上分離的代数 scheme の間の射による順像は, 準連接性を保存するので, $f_*\mathcal{O}_X = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^{\sim}$ となる．

- R の L における整閉包を S とおき, $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を, $Q(\mathcal{O}_\lambda) = k(X)$ となる離散附値環のうち, A を含むもの全体からなる族とすると, $S = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ となる．
- 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $\mathcal{O}_{X,x} \leq \mathcal{O}_\lambda$ となるような $x \in X$ が存在する．

この 2 つが示されれば, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x\in X} \mathcal{O}_{X,x} \subset S$ がわかり, R は永田環なので, S は有限 R 加群であることと, R が Noether 環であることから S が Noether 加群になり, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ は有限 R 加群であることが従う．つまり $f_*\mathcal{O}_X$ が連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることが従う．

- 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $\mathcal{O}_\lambda$ は R を含む整閉整域なので, $S \subset \mathcal{O}_\lambda$．よって,

$$S \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$$

となる．$\xi \in \bigcap \mathcal{O}_\lambda$ で, $\xi \notin S$ なるものが取れたとする．この時, $\xi \notin R$ なので, $\xi^{-1}R[\xi^{-1}]$ は $R[\xi^{-1}]$ の真のイデアルになる．$k(X)$ は $k(Y)$ の有限生成拡大なので, 不定元 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ が存在して, $k(X)$ は $k(Y)(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ の有限次代数拡大になる．よって, $R' := R[\xi^{-1}, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ のイデアル $\xi^{-1}R'$ の素因子 $\mathfrak{p}$ について, $R'_{\mathfrak{p}}$ を支配する $k(X)$ の離散附値環 $\mathcal{O}$ が存在する．この $\mathcal{O}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は ξ^{-1} を含むので, $\xi \notin \mathcal{O}$．よって, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $\xi \notin \mathcal{O}_\lambda$ となるものが取れた．此れは矛盾である．

- 以下の図式の実線部分は可換になる:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k(X)) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\lambda) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y = \mathrm{Spec}(R) \end{tikzcd}$$

  f は固有射だったので, 賦値判定法より, 点線の射で, 図式の全てを可換にするものが一意に存在する. この射による $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\lambda)$ の閉点の像を $x \in X$ とすると, $\mathcal{O}_{X,x} \leq \mathcal{O}_\lambda$ となることが容易にわかる.

よって, 示したいことの全てが示された. □

系 1.7 (Liouville)**.** k を代数閉体, X を k 上完備代数多様体とする. この時, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ となる.

証明. X を代数閉体 k 上の完備代数多様体とすると, その構造射は無論固有射なので, $f_*\mathcal{O}_X$ は $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ と同一視できることに注意して, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ はは有限生成 k 加群になる. また X は既約かつ被約なので, その大域切断は整域になることに注意して, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ は有限 k 多元整域であることがわかる. よって, k が代数閉体であることから, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ が成立する. □

References

[1] Goldi, A. (1959). Commutative Algebra, Vol. I. By O. Zariski and P. Samuel. Pp. xi 329. 52s. 6d. 1958. (D. van Nostrand, Princeton). The Mathematical Gazette, 43(345), 238-238. doi:10.2307/3611016
[2] 宮西正宜：代数幾何学, 裳華房, 数学選書 10
[3] The Stacks Project Authors. (2018). *Stacks Project*, `https://stacks.math.columbia.edu`