連接層の安定性とそのモジュライ

羽田洋平

Abstract. 本 pdf は, 1/8 日以降の Huybrechts-Lehn[2] のセミナーの発表ノートである. 内容は基本的に [2] に則っているが, 時々他の文献も参考にしている.

Contents

1. 予備知識

1.1. Notation.

- スキーム X について, $\mathrm{Coh}(X)$ で, 連接 $\mathcal{O}_X$ 加群のなす圏とする. また, $F \in \mathrm{Coh}(X)$ について, $\dim(F) = \dim(\mathrm{Supp}(F))$ と定める.
- (半) 安定性について, 文「... が (半) 安定である (ならば/とは/etc.), ... $A(\leq)B$ である」を,「... が安定である (ならば/とは/etc.), ... $A < B$ であり, ... が半安定である (ならば/とは/etc.), ... $A \leq B$ である」と解釈する.

1.2. **安定性の定義.** Hilbert 多項式についての基礎的な事項を復習する. 以下, X を (無限) 体 k 上の射影的スキームとして, $\mathcal{O}(1)$ を X 上の豊富な直線束として固定する. この時, X 上の連接層 F の Hilbert 多項式 $P(F, m)$ は以下で定義された:

$$P(F, m) = \chi(F(m))$$

ここで, χ は Euler 標数.

Proposition 1.2.1. $F \in \mathrm{Coh}(X)$, $\dim(F) = d$ として, $H_1, \dots, H_d \in |\mathcal{O}(1)|$ を F-正則列とする．この時,

$$\chi(F(m)) = \sum_{i=0}^{d} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j \le i} H_j})$$

となる．

proof. d による帰納法．$d = 0$ の時は明らか．$d < d_0$ で命題が成立すると仮定する．$F \in \mathrm{Coh}(X)$ が $\dim(F) = d_0$ の時, H_1 は F-正則なので, $F|_{H_1}$ は $d_0 - 1$ 次元となる．よって, 帰納法の仮定から,

$$\chi(F|_{H_1}(m)) = \sum_{i=0}^{d_0-1} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j \le i+1} H_j})$$

となる．完全列

$$0 \to F(m-1) \to F(m) \to F|_{H_1}(m) \to 0$$

より,

$$\chi(F(m)) - \chi(F(m-1)) = \chi(F|_{H_1}(m)) = \sum_{i=0}^{d_0-1} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j \le i+1} H_j})$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\chi(F(m)) =& \chi(F) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=0}^{d_0-1} \binom{l+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j \le i+1} H_j}) \\
=& \chi(F) + \sum_{i=1}^{d_0} \left(\sum_{l=1}^{m} \binom{l+i-2}{i-1} \right) \chi(F|_{\bigcap_{j \le i} H_j}) \\
=& \chi(F) + \sum_{i=1}^{d_0} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j \le i} H_j}) \\
=& \sum_{i=0}^{d} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j \le i} H_j})
\end{aligned}$$

がわかった． □

一般に, F の Hilbert 多項式はたかだか $\dim(F)$ 次の多項式であることが知られている．よって, 特に $\alpha_i(F) \in \mathbb{Q}$ $(i = 0, \dots, d)$ を用いて,

$$P(F, m) = \sum_{i=0}^{d} \frac{\alpha_i(F)}{i!} m^i$$

とかける．

Remark 1.2.1. $\mathcal{O}(N)$ が非常に豊富の時, F の正則列 $H_1, \dots, H_d \in |\mathcal{O}(N)|$ をとってくると,

$$P(F, mN) = \sum_{i=0}^{d} \binom{m+i-1}{i} \chi(F|_{\bigcap_{j \le i} H_j})$$

となる．よって, この先頭係数を見ることで, $\alpha_d(F) = \frac{1}{N^d} \chi(F|_{\bigcap_{i \le d} H_i}) \in \frac{1}{N^d} \mathbb{Z}_{\ge 0}$ がわかる．この $\alpha_d(F)$ は F の重複度といい, 今見たように, 取れる値が離散的であることに注意.

Definition 1.2.1. $F \in \mathrm{Coh}(X)$ を $\dim(F) = \dim(X) = d$ となる連接層とする．この時, F の階数を $\mathrm{rk}(F) = \frac{\alpha_d(F)}{\alpha_d(\mathcal{O}_X)}$ で定める．

Proposition 1.2.2. *X が整スキームなら, $\mathrm{rk}(F)$ は生成ファイバーの次元と一致する．*

proof. General Flatness から, X のある開集合 U が存在して, $F|_U$ は自由 $\mathcal{O}_U$ 加群になる．U をいずれかの標準 affine 開集合に含まれる affine 開集合として良い．$F|_U$ の階数を r とおき, 同型 $\phi : \mathcal{O}_U^{\oplus r} \to F|_U$ をひとつとる．ϕ は $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}, F)$ の U での切断で, 同型 $\psi : \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus r}$ を定める．

$$0 \to K \to \mathcal{H}om_{O_X}(\mathcal{O}_X^{\oplus r}, F) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, F|_U) \to 0$$

について, $m \gg 0$ で $H^1(X, K(m)) = 0$ なので, この m について,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}, F) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U(-m)^{\oplus r}, F|_U) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_U^{\oplus r}, F|_U)$$

は全射．よって, ϕ はある $\tilde{\phi} : \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r} \to F$ に伸びる．$\mathrm{Ker}\phi$ および $\mathrm{Cok}\phi$ はともに U の外にあるので, 次元が落ちている．よって, $\alpha_d(F) = \alpha_d(\mathcal{O}_X^{\oplus r}) = r\alpha_d(\mathcal{O}_X)$. □

Remark 1.2.2. 一般には, $\mathrm{rk}(F)$ は整数とは限らない．

Definition 1.2.2. $F \in \mathrm{Coh}(X)$ について, 簡約 Hilbert 多項式 $p(F)$ を,

$$p(F, m) = \frac{P(F, m)}{\alpha_d(F)}$$

と定める．ここで, $d = \dim(F)$ である．

2 つの実係数多項式 f, g について, $f \leq g$ (あるいは $f < g$) とは, $m \gg 0$ について, $f(m) \leq g(m)$ (あるいは $f(m) < g(m)$) となることとして定める．これは多項式の次数が大きい順に通常の辞書式に順序関係を入れた順序で大小を見ることと同じである．

Definition 1.2.3. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ を純な加群層とする．E が (Gieseker-丸山)(半) 安定であるとは, 任意の部分加群層 $F \subsetneq E$ について, $p(F)(\leq)p(E)$ となることを指す．

Proposition 1.2.3. *$E \in \mathrm{Coh}(X)$ を純な連接層として, $\dim E = d$ とおく．この時, 以下は同値である:*

(1) *E が (半) 安定である*
(2) *任意の飽和な真の部分加群層 $F \subset E$ について, $p(F)(\leq)p(E)$ である*
(3) *任意の真の商 $E \to G$ について, $\alpha_d(G) > 0$ ならば $p(E)(\leq)p(G)$ となる．*
(4) *任意の真の純 d 次元の商 $E \to G$ について, $p(E)(\leq)p(G)$ となる．*

proof. (1) $\Longrightarrow$ (2), (3) $\Longrightarrow$ (4) は明らか．短完全列

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

をみる．$P(E) = P(F) + P(G)$ と, $\alpha_d(E) = \alpha_d(F) + \alpha_d(G)$ から,

$$\alpha_d(G)(p(E) - p(G)) = \alpha_d(F)(p(F) - p(E))$$

を得る．よって, (1) $\Longrightarrow$ (3), (2) $\Longleftrightarrow$ (4) がわかる．(2) $\Longrightarrow$ (1) は, F' を F の飽和化とすると, $P(F) \leq P(F')$, $\alpha_d(F) = \alpha_d(F')$ となることからわかる． □

Proposition 1.2.4. *$F, G \in \mathrm{Coh}(X)$ を半安定な連接層とする．*

(1) *$p(F) > p(G)$ なら, $\mathrm{Hom}(F, G) = 0$.*
(2) *$p(F) = p(G)$ で, F が安定なら, 任意の $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}(F, G)$ は単射.*
(3) *$p(F) = p(G)$ で, G が安定なら, 任意の $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}(F, G))$ は全射.*

(4) $p(F)=p(G)$ かつ $\alpha_d(F)=\alpha_d(G)$ なら, F か G のいずれかが安定なら任意の $0\neq\phi\in\mathrm{Hom}(F,G)$ は同型.

proof. $p(F)\geq p(G)$ とする. $\phi: F\to G$ の像 $\phi(F)$ は $F/\mathrm{Ker}(\phi)$ と同型なので, これが 0 でないなら $p(F)\leq p(\phi(F))\leq p(G)$ となる. よって, もし $p(F)>p(G)$ ならこのようなことはあり得ない. $p(F)=p(G)$ かつ F が安定なら, $\phi\neq 0$ を仮定すると, $p(F)=p(\phi(F))$ がわかり, この等号が成立するのは $F\cong\phi(F)$ のときのみなので, $\mathrm{Ker}(\phi)=0$ がわかる. したがって, ϕ は単射. $p(F)=p(G)$ で, G が安定なら, $p(\phi(F))=p(G)$ から, $\phi=0$ または $\phi(F)=G$ がわかる. また, $p(F)=p(G)$ かつ $\alpha_d(F)=\alpha_d(G)$ なら, F(resp. G) が安定なら, ϕ は単射 (resp. 全射) だが, $P(F)=P(G)$ なので, 核 (resp. 余核) の Hilbert 多項式が 0 になる. よって, ϕ は同型. □

Corollary 1.2.1. *E が安定な連接層とすると, $\mathrm{End}(E)$ は k 上の有限次元可除環となっている. 特に k が代数閉体なら, $\mathrm{End}(E)=k$ となる.*

proof. $\mathcal{H}om(E,E)$ は連接層なので, その大域切断 $\mathrm{End}(E)$ は k 上有限次元線型空間. また, E は安定なので, $\phi\in\mathrm{End}(E)$ は 0 か可逆である. k が代数閉体なら, $x\in\mathrm{End}(E)$ を k に付け加えた拡大体は k 自身になるので, $x\in k$ がわかる. □

Definition 1.2.4. $E\in\mathrm{Coh}(X)$ が幾何学的に安定であるとは, 任意の拡大体 K/k について, 基底変換 $X_K\to X$ による引き戻し E_K が X_K 上安定であることを指す.

半安定の方はこの条件は半安定性と同値であることを Harder-Narashimhan フィルトレーションの一意性の系として後で見る.

安定性の議論は代数曲線上のベクトル束の文脈で初めて現れた. X を種数 g の非特異射影曲線として, E を X 上の階数 r のベクトル束とする. この時, Riemann Roch の定理から,

$$\chi(E)=\int_X ch(E)td(TX)=\deg(E)+r(1-g)$$

となる. よって, Hilbert 多項式は

$$P(E,m)=r\deg(X)m+\deg(E)+r(1-g)=r(\deg(X)m+\frac{\deg(E)}{r}+1-g)$$

となる. したがって, $\mu(E)=\frac{\deg(E)}{r}$ とおけば, E が (半) 安定であることと, 任意の非自明な部分ベクトル束 $F\subset E$ について, $\mu(F)(\leq)\mu(E)$ となることが同値である (命題 1.2.3 の (2) 参照). この $\mu(E)$ は E の slope と呼ばれる量である. この安定性は Mumford-竹本安定性として高次元においても一般化される.

Definition 1.2.5. E を次元 $d=\dim(X)$ の連接層とする. この時,

$$\deg(E):=\alpha_{d-1}(E)-\mathrm{rk}(E)\alpha_{d-1}(\mathcal{O}_X)$$

と定め, E の X の偏極 H に関する次数という. また, E の slope は,

$$\mu(E):=\frac{\deg(F)}{\mathrm{rk}(E)}$$

として定義される.

Remark 1.2.3. X が既約かつ被約の時, $H\in|\mathcal{O}_X(1)|$ として,

$$\begin{aligned}\chi(E(m))=&\int_X ch(E)(1+mH+\frac{1}{2}m^2H^2+\cdots)(1+\frac{1}{2}c_1(X)+\dots)\\ =&\mathrm{rk}(E)\cdot\frac{\deg(X)}{d!}m^d+\frac{(\mathrm{rk}(E)c_1(X)+2c_1(E).H^{d-1})}{2(d-1)!}m^{d-1}+\cdots\end{aligned}$$

より, $\alpha_{d-1}(E) = \frac{(\mathrm{rk}(E)c_1(X)+2c_1(E).H^{d-1})}{2}$ である．よって,

$$\deg(E) = \int_X c_1(E).H^{d-1}$$

であることがわかった.

Definition 1.2.6. (X, L) を偏極多様体とする．上の連接層が Mumford-竹本 (半) 安定であるとは, $T_{d-1}(E) = T_{d-2}(E)$ であり[1], 任意の非自明な部分層 $F \subset E$ について, $\mu(F)(\leq)\mu(E)$ となることである.

Proposition 1.2.5. *$E \in \mathrm{Coh}(X)$ が純であるとする．この時, 以下が成立する.*

$$MT\text{安定} \implies GM\text{安定} \implies GM\text{半安定} \implies MT\text{半安定}$$

proof. MT 安定は Hilbert 多項式の上から 2 項のみを見ているので, 明らか. □

Remark 1.2.4. (MT-/GM-) 安定性の定義は一般には偏極に依存する．曲線の場合は MT 安定性が偏極に依存しないので, 依存しない.

Proposition 1.2.6. *X が整とする．X 上の連接層が MT 半安定かつ次数と階数が互いに素だったとすると, E は MT 安定になる.*

proof. $0 \neq F \subset E$ について, $\mu(F) = \mu(E)$ なら, $\deg(F)\mathrm{rk}(E) = \deg(E)\mathrm{rk}(F)$. この式と仮定から, $\mathrm{rk}(F)$ は $\mathrm{rk}(E)$ の倍数となる．よって, $F = E$ となるしかない. □

Example 1.2.1 ((半) 安定なベクトル束の例)**.** (半) 安定なベクトル束の例をいくつか挙げていく．簡単のため, X は非特異射影曲線とする.

- 任意の直線束は安定である (これは命題 1.2.3(2) からわかる).
- L_1. L_2 を X 上の直線束として, $\deg(L_1) + 1 = \deg(L_2)$ とする. $0 \to L_1 \to F \to L_2 \to 0$ を非自明な拡大とする. $\mathrm{rk}(F) = 2$ であり, $\deg(F) = 2\deg(L_1) + 1$ なので, $\mu(F) = \deg(L_1) + \frac{1}{2}$ である. $M \subset F$ を飽和な部分層とすると, $\mathrm{rk}(M) = 1$ または $\mathrm{rk}(F) = 2$ である. $\mathrm{rk}(M) = 2$ の時は $M = F$ となる. $\mathrm{rk}(M) = 1$ の時は, $M \subset L_1$ か, $M \to L_2$ が単射である [$\because$ $K = \mathrm{Ker}(M \to L_2)$ とする. $M/K \subset L_2$ なので, L_2 が純なことと M は直線束であることから $\dim(K) < \dim(X)$ または $K = M$. 前者の場合は M が直線束 (特に純) であることから, $K = 0$ がわかる．よって, $K = M$ または $K = 0$. 前者の場合, $M \subset L_1$ で後者の場合は $M \subset L_2$].

  $\mu(F) = \deg(L_1) + \frac{1}{2}$ で, $\mu(L_1) = \deg(L_1)$ なので, 前者の場合, $\mu(M) = \deg(M) \leq \deg(L_1) < \mu(F)$ となる．後者の場合, $M = L_2$ なら $F = L_1 \oplus L_2$ となり, 仮定に反する. L_2 は安定なので, $\mu(M) < \mu(L_2)$ となり, $\mu(M) \leq \mu(L_2) - 1 = \mu(L_1) < \mu(F)$ がわかる．よって, F は安定である.
- 上の議論から, 上の L_1, L_2 について, $F = L_1 \oplus L_2$ は半安定ではあることがわかった.
- 同様の議論で, 安定でないが単純なベクトル束も作れる. X を閉体 k 上の種数 $g \geq 2$ の非特異射影曲線として, E_1, E_2 をそれぞれ階数 r_1, r_2 の互いに同型でない安定ベクトル束で, $\mu(E_1) = \mu(E_2)$(したがって $p(E_1) = p(E_2)$) とする．すると, 命題 1.2.4 より, $\mathrm{Hom}(E_2, E_1) = 0$ となる．したがって,

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(E_2, E_1)) = h^1(E_2^\vee \otimes E_1) = -\chi(E_2^\vee \otimes E_1) = r_1 r_2(g-1)$$

---

[1]これは d 次元以下の連接層のなす $\mathrm{Coh}(X)$ の充満圏 $\mathrm{Coh}(X)_d$ を, その Serre 部分圏 $\mathrm{Coh}(X)_{d-2}$ で割った圏 $\mathrm{Coh}(X)_{d,d-1}$ における pure object であるということである.

となる. よって, 非自明な拡大 $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ が存在する. E の真の部分層 F をとると, $0 \to E_1 \cap F \to F \to F/(E_1 \cap F) \to 0$ があって,

$$\begin{aligned} P(F) =& P(E_1 \cap F) + P(F/(E_1 \cap F)) \\ \leq& \mathrm{rk}(E_1 \cap F)p(E_1) + (\mathrm{rk}(F) - \mathrm{rk}(E_1 \cap F))p(E_2) \\ =& \mathrm{rk}(F)p(E_2) + \mathrm{rk}(E_1 \cap F)(p(E_1) - p(E_2)) \\ =& \mathrm{rk}(F)p(E_2) \\ P(E) =& \mathrm{rk}(E_1)p(E_1) + (\mathrm{rk}(E) - \mathrm{rk}(E_1))p(E_2) \\ =& \mathrm{rk}(E)p(E_2) + \mathrm{rk}(E_1)(p(E_1) - p(E_2)) \\ =& \mathrm{rk}(E)p(E_2) \end{aligned}$$

より, $p(F) \leq p(E)$ がわかる. つまり, E は半安定である. しかし, $E_1 \subset E$ は $\mu(E_1) = \mu(E)$ となるので, これは安定ではない. しかし, 実はこれは単純であることが示せる. $\phi : E \to E$ を非自明な準同型としよう. すると, E_1 と E_2 は同型でないことから, $E_1 \to E \xrightarrow{\phi} E \to E_2$ は 0 になるので, $\phi(E_1) \subset E_1$ となることがわかる. E_1 は単純なので, $\phi|_{E_1} = \lambda \cdot 1_{E_1}$ となる $\lambda \in k$ が存在する. $\psi := \phi - \lambda \cdot 1_E$ とする. $\psi|_{E_1} = 0$ なので, ψ は $E_2 = E/E_1$ を経由する. $\psi' : E_2 \to E$ をその射とする. $E_2 \xrightarrow{\psi'} E \to E_2$ が 0 でなければ, これは同型なので, 逆が取れる. これは ψ' と合成して $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ の分裂を与えるので, これが非自明な拡大であったことに矛盾. よって, $\psi'(E_2) \subset E_1$. しかし再び E_1 と E_2 は同型でない安定束であることから, $\psi' = 0$ がわかる. したがって, $\psi = 0$. つまり $\phi = \lambda \cdot 1_E$ であることがわかった.

- 単純なベクトル束であって半安定ですらないものも存在する. X を閉体 k 上の種数 $g \geq 3$ の非特異射影曲線とすると, $\mathrm{Pic}^1(X) \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ は g 次元の多様体で, そのうち大域切断が存在するものは $X \to \mathrm{Pic}^1(X); p \mapsto [\mathcal{O}(p)]$ の像で, これは 1 次元なので, 特に次数 1 の直線束で, 大域切断を持たないものが取れる. これを L とおく. Riemann-Roch より,

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, L) = h^1(X, L) = g - 2 > 0$$

となるので, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, L) \neq 0$. よって, 非自明な拡大

$$0 \to L \to E \to \mathcal{O}_X \to 0$$

が存在する. $\mu(E) = 1/2$ で, $\mu(L) = 1$ なので, これは半安定ではない. 以下の完全列を考える

$$0 \to \mathrm{Hom}(E, L) \to \mathrm{Hom}(E, E) \to \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$$

まず, E を定義する完全列に $\mathrm{Hom}(-, L)$ して, 完全列

$$0 \to H^0(L) \to \mathrm{Hom}(E, L) \to H^0(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, L) = H^1(L)$$

を得るので, $h^1(L) > 0$ 及び $H^0(L) = 0$ と, E が非自明な拡大なので, $H^0(\mathcal{O}_X) \to H^1(L)$ が単射になることから, $\mathrm{Hom}(E, L) = 0$ がわかる. さらに, E を定義する完全列に $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_X)$ をすると,

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X) \to H^0(-L) = 0$$

となるので, $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$ は 1 次元であることがわかった。 $\mathrm{Hom}(E, E) \to \mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$ は単射であることがわかっているので, $\mathrm{Hom}(E, E) = k$ がわかった.

1.3. **Harder-Narashimhan フィルトレーション.** 射影的スキーム上の任意の純な連接層は, 半安定層によるフィルトレーションをもつ. 最も基礎的な例は以下の定理である:

Theorem 1.3.1. $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束は直線束の直和に一意にかける.

proof. ベクトル束の階数に関する帰納法を用いる. 階数 1 の時は明らか. 階数 r 未満では命題が成立することを仮定する. $\mathbb{P}^1$ 上の階数 r のベクトル束 E をとる. E の階数 1 の部分層 F をとってくる (E をたくさん捻って, $H^0(E(m)) \neq 0$ とする. $0 \neq s \in H^0(E(m))$ をとってきて, $s\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \subset E(m)$ をとってくる. すると, $s\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \subset E$ は階数 1 の部分加群層である). F の飽和化をとると, E/F は捩れなしの部分層になるので, $\mathbb{P}^1$ は 1 次元であることから, E/F はベクトル束になる. よって, F も直線束になる. Serre の消滅定理から, $\mathcal{O}(a) \subset E$ となる a のうち, 最大の a が取れる. これを a_0 とおこう. 帰納法の仮定から, $E/F = \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(a_i)$ とかける. 短完全列

$$0 \to \mathcal{O}(a_0) \to E \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(a_i) \to 0$$

について, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(a_0+1), \mathcal{O}(a_0)) = H^1(\mathcal{O}(-1)) = 0$ なので,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(a_0+1), E) = H^0(E(-a_0-1)) \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} H^0(\mathcal{O}(a_i - a_0 - 1))$$

となる. しかし, a_0 は $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(a), E) \neq 0$ となる最大の a だったので, 左辺は 0. よって, 右辺も 0 となる. つまり, 任意の $1 \leq i \leq r-1$ で, $a_i \leq a_0$ となる. よって, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(a_i), \mathcal{O}(a_0)) = H^1(\mathcal{O}(a_0 - a_i)) = 0$ となる. つまり,

$$E \cong \bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathcal{O}(a_i)$$

となることがわかった. これはすなわちあるベクトル空間 V_a たちが存在して,

$$E \cong \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} V_a \otimes \mathcal{O}(a)$$

となることを示している. 次に一意性を示す. これは上の表示の V_a が同型を除いて一意であることを示せば良い. E_a を自然な射 $H^0(E(a)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a) \to E$ の像とおくと, 任意の a で, $E_{a-1} \subset E_a$ で, 十分大きな a で $E_a = E$ となり, 十分小さな a で $E_a = 0$ となる. つまり (E_a) は有限長の E のフィルトレーションを作る. また, $E = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} V_a \otimes \mathcal{O}(a)$ とかけるとすると, $E_a = \bigoplus_{b \geq a} V_b \otimes \mathcal{O}(b)$ となり, したがって $\dim(V_a) = \mathrm{rk}(E_a/E_{a+1})$ がわかり, 一意性が示された. □

Corollary 1.3.1. $\mathbb{P}^1$ 上の半安定な層は, 0 次元の層か, あるいは $\mathcal{O}(a)^{\oplus r}$ の形のものしかない.

proof. 0 次元の場合は明らか. 1 次元の場合は, 定理 1.3.1 の形に分解し, slope をみる ($\mathbb{P}^1$ は 1 次元なので, 捩れなしであることとベクトル束になることは同値であることに注意). □

この定理を体上の射影的スキームの上の純な連接層に拡張したのが Hardar-Narashimhan フィルトレーションである.

Definition 1.3.1. $(X, \mathcal{O}_X(1))$ を k 上の偏極が固定された射影的スキームとして, $E \in \mathrm{Coh}(X)$ を次元 d の非自明かつ純な連接層とする. この時, E の Hardar-Narashimhan

フィルトレーション (HNF と略すことにする) とは, フィルトレーション

$$0 = \mathrm{HN}_0(E) \subset \cdots \subset \mathrm{HN}_l(E) = E$$

で, $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{HN}} = \mathrm{HN}^i(E)/\mathrm{HN}^{i-1}(E)$ が半安定であり, さらに $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{HN}}$ の簡約 Hilbert 多項式 p_i たちが $p_{\max} = p_0 > p_1 > \cdots > p_l = p_{\min}$ となるものを指す.

E が半安定であることと, $p_{\max} = p_{\min}$ であることは同値である. また, $p_{\max}$, $p_{\min}$ という記法にはアプリオリにはフィルトレーションに関する不定性があるが, 以下の定理によって, この記法は問題ないことがわかる.

Theorem 1.3.2 (Harder-Narashimhan)**.** *体 k 上の代数的スキーム X 上の純な連接層 E は HNF を一意にもつ.*

照明には以下の補題を使う

Lemma 1.3.1. *定理 1.3.2 の状況において, E の部分層 F で, 任意の E の部分加群層 G について, $p(G) \le p(F)$ かつ, $p(G) = p(F)$ ならば $G \subset F$ となるものがただ一つ存在する.*

Definition 1.3.2. 上の補題の F を**極大脱安定化部分層** (maximal destabilizing subsheaf) という.

proof. E の 0 でない連接部分層全体の集合を $\mathfrak{S}$ とおいて, $\mathfrak{S}$ の順序関係を $F_1 \le F_2 \iff F_1 \subset F_2 \wedge p(F_1) \le p(F_2)$ によって定める. Zorn の補題から, $\mathfrak{S}$ は極大元をもつ. 極大元全体の中で, α_d の最も小さいものを F とおく. ここで, $d = \dim E$ である.

Step 1 $G \subset E$ で, $p(G) \ge p(F)$, $G \not\subset F$ となるものが存在したとする. この時, $p(G \cap F) > p(G) \ge p(F)$ となる.

proof. 短完全列 $0 \to G \cap F \to G \oplus F \to G + F \to 0$ を考える. まず, F の $\le$-極大性から, $p(F) > p(G+F)$ となる. さらに,

$$\begin{cases} P(G) + P(F) = P(F \cap G) + P(F+G) \\ \alpha_d(F) + \alpha_d(G) = \alpha_d(F+G) + \alpha_d(F \cap G) \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned} &(\alpha_d(F) - \alpha_d(F+G))(p(F) - p(G)) \\ =&\alpha_d(F \cap G)(p(F \cap G) - p(G)) + \alpha_d(F+G)(p(F+G) - p(F)) \end{aligned}$$

となる. 左辺は非負で, $p(F+G) < p(F)$, $\alpha_d(F+G) > 0$ なので, $p(F \cap G) > p(G) \ge p(F)$

Step 2 次に, $G \subset F$ で, $p(G) > p(F)$ となるものが存在すると仮定する. G を F の部分層の中で $\le$-極大なものに置き換えても支障ない. G' を, $G \le G'$ かつ E の部分層の中で $\le$-極大なものととる. すると, F の次数最小性から, $G' \not\subset F$ となる. すると, 再び Step 1 から, $p(G) \le p(G') < p(G' \cap F)$ かつ, $G \subset G' \cap F$ より, $G < G' \cap F$ となる. これは G の取り方に矛盾. □

proof of Theorem1.3.2.

存在性 α_d による帰納法. $\alpha_d(E) = 0$ のとき, $E = 0$ なので明らか. $\alpha_d < n$ で存在が示されたと仮定する. E が半安定であるときは明らか. E が半安定でないとする. $\alpha_d(E) = n$ として, E の極大脱安定化部分層を F とおく. F の飽和化を $\bar{F}$ とすると, $F \ne \bar{F}$ なら, $p(F) < p(\bar{F})$ となるので, $F = \bar{F}$ がわかる. よって, E/F は純で, α_d. よって, E/F は HNF を持つ. これを $0 = \bar{E}_0 \subset \bar{E}_1 \subset \cdots \subset \bar{E}_r = E/F$ として, $p : E \to E/F$ を自然な商とし

て, $E_0=0$, $E_{i+1}:=p^{-1}(E_i)$ $(i=0,1,\dots,r)$ と定める．$0\to F\to E_2\to E_2/F\to 0$ と, $p(F)>p(E_2)$ から, $p(E_2/F)<p(E_2)<p(F)$ となる．よって, $0=E_0\subset E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_{r+1}=E$ は HNF である．

一意性 こちらも α_d による帰納法．$\alpha_d=0$ の時は良い．$\alpha_d<n$ で示されたとする．$\alpha_d(E)=n$ として, E の 2 つの HNF$0\subset E_1\subset\cdots\subset E_r=E$, $0\subset E'_1\subset\cdots\subset E'_s=E$ が取れたとする．$E_1\subset E'_i$ となる最小の i をとると, $E_1\to E'_i\to E'_i/E'_{i-1}$ は半安定層の間の非零な射なので, $p(E_1)\le p(E'_i/E'_{i-1})\le p(E'_1)$．ここで, $p(E'_i/E'_{i-1})=p(E_1)$ が成立するのは $i=1$ のときのみである．$E_\star$ と $E'_\star$ を逆にして同じ議論をすると, $E_1=E'_1$ を得る．E/E_1 に帰納法の仮定を適用することで, 一意性が示される．□

Corollary 1.3.2. *E,F を X 上純な連接層として, $p_{\max}(F)<p_{\min}(E)$ とする．この時, $\mathrm{Hom}(E,F)=0$ となる．*

proof. E の $\mathrm{HNF}(E_\star)$ と F の $\mathrm{HNF}(F_\star)$ を取る．

- $\phi:E\to F$ について, まず ϕ の E_1 への制限 $\phi_1:E_1\to F$ は 0 になることを示す．$\phi(E_1)\subset F_i$ となる最小の i を取ってくる．$i\neq 0$ と仮定しよう．$E_1\xrightarrow{\phi}F_i\to F_i/F_{i-1}$ とすると, $p(E_1)=p_{\max}(E)>p_{\min}(F)\ge p(F_i/F_{i-1})$ なので, $\phi(E_1)\subset F_{i-1}$ となって, i の取り方に矛盾．よって $\phi|_{E_1}=0$.
- 次に, $\phi|_{E_i}=0$ が示されたとしよう．すると, ϕ は E/E_i を経由する．誘導された射 $\phi_i:E/E_i\to F$ について, 同様の議論を行うと, $\phi|_{E_{i+1}}=0$ が示される．よって, 主張が示された．□

Mumford-竹本安定性に関しても全く同様の方法で HNF が一意に存在することが示せる．HNF の一意性はかなり強力な結果を生み出す．以下, これをいくつか見ていこう．

Theorem 1.3.3. *E を体 k 上射影的スキーム上の純な連接層とする．また, K/k を体の拡大とする．この時, $\mathrm{HN}_\star(E_K)=\mathrm{HN}_\star(E)_K$ である．*

proof. E_K が半安定なら E も半安定になることは flat base change から明らか．よって, E のフィルトレーション E_i で, $\mathrm{HN}_i(E_K)=E_i\otimes K$ となるものが存在することさえ示せば良い．$\mathrm{HN}_i(E_K)$ は有限表示で, X_K は準コンパクトなので, ある $K/L/k$ で, L/k は有限次拡大体であり, さらに $\mathrm{HN}_i(E_K)$ は X_L 上の連接層の基底変換で得られるものになっている．よって, K/k は有限次拡大としてしまって良い．K/k をフィルタリングして．$K=k(x)$ の場合に示せば良い．以下の 2 つの場合に場合わけして示す．

- K/k が純超越拡大あるいは分離拡大の場合: E_K の部分加群が E の部分加群の基底変換になっているのは, $G=\mathrm{Aut}_k(K)$ の作用で不変なとき, そしてその時のみである．任意の $g\in G$ について, $g(\mathrm{HN}(E_K))$ はまた E_K の HNF になっているので, HNF の一意性から, まず, $\mathrm{HN}_1(E_K)=E_1\otimes K$ となる $E_1\subset E$ が存在する．これが極大脱安定化部分層であることは $E_1\otimes K=\mathrm{HN}_1(E_K)$ であることから明らか．E/E_1 でもう一度同じことをやって, $E_1\subset E_2\subset E$ で, $E_2\otimes K=\mathrm{HN}_2(E_K)$ となる E_2 が取れる．これを繰り返して主張が示される．
- K/k が純非分離拡大で, $x^p\in k$ $(p:=\mathrm{char}(k))$ の場合．Jacobson descent から, $E\otimes K$ の部分加群が E の部分加群の基底変換になっていることは, $A=\mathrm{Der}_k(K)$ の作用で不変であることと同値である．$\delta\in A$ としよう．$F=\mathrm{HN}_i(E_K)$ について,

$$\phi:F\to E_K\xrightarrow{\delta}E_K\to E_K/F$$

として ϕ を考えると, $f \in \mathcal{O}_{X_K}(U)$, $s \in F(U)$ について,

$$\delta(fs) = f\delta(s) + \delta(f)s = f\delta(s) \pmod F$$

となるので, ϕ は $\mathcal{O}_{X_K}$ 加群の準同型. Corollary1.3.2. によって, $\phi = 0$ がわかる. よって, この場合も HNF は下降する. □

Corollary 1.3.3. *E を k 上射影的スキーム X 上の半安定な連接層として, K/k を体の拡大とする. この時, E_K も半安定である.* □

Example 1.3.1 (安定だが幾何学的安定でない連接層)**.** $X = \mathrm{Proj}(\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2))$ とする. $\mathbb{H}$ を四元数体とする. この時, 左 $\mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X$-加群の射

$$\phi : \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X(-1) \to \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X$$

を, 右から $I \otimes x_0 + J \otimes x_1 + K \otimes x_2$ を掛けるものとする. $F = \mathrm{Cok}(\phi)$ とする. F の左 $\mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_X$-加群構造から, $\mathbb{R}$-代数の準同型 $\mathbb{H} \to \mathrm{End}(F)$ が存在する. $\mathbb{H}$ は斜体なので, これは単射で, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{End}(F)) \geq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = 4$ がわかる. これを複素化する. まず,

$$i : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[u, v]) \cong X_{\mathbb{C}} = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2))$$

を,

$$x_0 \mapsto \frac{1}{2}(u^2 + v^2),\ x_1 \mapsto \sqrt{-1}uv,\ x_2 \mapsto \frac{\sqrt{-1}}{2}(u^2 - v^2)$$

によって定める. すると, $i^*\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ となる. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$ が,

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

によって定まるので, この同一視をすると, $\phi_{\mathbb{C}}$ は,

$$\phi_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v & u \end{pmatrix}$$

となる. ${}^t(-u, v) : M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \to \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ は全射なので, $i^*F_{\mathbb{C}} = \mathrm{Cok}(\phi_{\mathbb{C}})$ は, $(-u, v) : \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(-1) \to M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ の余核と一緒である. これを計算すると, $\mathrm{Cok}(\phi_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(1)^{\oplus 2}$ となる. よって, $F_{\mathbb{C}}$ は半安定であり, $\mathrm{End}(F_{\mathbb{C}}) = \mathrm{End}(\mathcal{O}(1)^{\oplus 2}) = M_2(\mathbb{C})$ となる. もちろん $F_{\mathbb{C}}$ は安定ではない. 次に F は安定であることを示す. 仮に F が安定でなければ, F の真の部分 $\mathcal{O}_X$-加群層 L で, $p(F) \leq p(L)$ となるものがある. F は半安定なので, この L は飽和 (したがって X は一次元であることから直線束) であり, $p(F) = p(L)$ となる. $L' = F/L$ とおくとこれも直線束で, $p(F) = p(L)$ になっている. つまり $\deg(L) = \deg(L')$ なので, $L \cong L'$ でないかぎり, $\mathrm{Ext}^1(L', L) = H^1(L \otimes (L')^{-1}) = 0$ となる. よって, $L \not\cong L'$ なら $F = L \oplus L'$. この場合は $\dim \mathrm{End}(F) = 2$ となるので矛盾. よって, $\mathrm{Ext}^1(L', L) = H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$ となる. つまり $F \cong L^{\oplus 2}$ がわかる. したがって, $\mathrm{End}(F) \cong M_2(\mathbb{R}) \not\cong \mathbb{H}$ となるので, これも矛盾. よって, F は安定である.

1.4. **具体例.** 本節では, 標数 0 の体 k 上の射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ 上の余接束 $\Omega_{\mathbb{P}^n}$ が安定であることをみる. これは, のちに Flenner-Mehta-Ramanathan の制限定理を示すのに用いる.

k を標数 0 の代数閉体として, V を $n+1$ 次元 k-線型空間とする. 射影空間 $\mathbb{P}(V)$ の上の余接束 $\Omega_{\mathbb{P}(V)}$ に関連したベクトル束の列を調べる. まず, Euler 完全列

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}(V)}(1) \to V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \to 0 \tag{1}$$

を考える.

Lemma 1.4.1. A を可換環, L, M, N を平坦 A 加群とする．短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ を考える．この時, 任意の $m > 0$ について, 誘導される射 $S^m M \to S^m N$ は全射であり, その核は $y_1 \dots y_{m-1} z$, $y_i \in M$, $z \in L$ によって生成される．

proof. 前半の全射性は明らか．後半について, 非可換次数付き環の準同型 $\phi : T^\star M \to T^\star N$ を考える．この核は $T^\star M$ の次数付き両側イデアルである．これを $I^\star$ とする．$I^0 = 0, I^1 = L$ である．$m < m_0$ について, I^m が $y_1 \otimes \dots \otimes y_{m-1} \otimes y_m$, ($y_i \in L$ for some i) で生成されていたとする．$T^{m_0}(\phi) : T^{m_9} M = M \otimes_A T^{m_0 - 1} M \to N \otimes_A T^{m_0-1} N = T^{m_0} N$ は $(N \otimes T^{m_0-1}(\phi)) \circ (\phi \otimes T^{m_0-1} M)$ と分解できる．したがって, この核は, $\phi \otimes 1$ で送った時に $\mathrm{Ker}(1 \otimes T^{m_0-1}\phi)$ に入っているもの全体である．つまり,

$$\mathrm{Ker}(T^{m_0}\phi) = (\phi \otimes T^{m_0-1}M)^{-1}\left(\bigoplus_{i=2}^{m_0} N \otimes M \otimes \dots \otimes \overset{i}{L} \otimes \dots \otimes M\right) = \bigoplus_{i=1}^{m_0} M \otimes \dots \otimes \overset{i}{L} \otimes \dots \otimes M$$

となることがわかった．適切に商を取ると主張が示される． □

ここから, 例えば L を k 上代数的スキーム X 上の直線束, F, G をベクトル束として, $0 \to L \to F \to G \to 0$ という短完全列があったとすると, 短完全列

$$0 \to L \otimes_{\mathcal{O}_X} S^{m-1} F \to S^m F \to S^m G \to 0 \tag{2}$$

が導かれる．この双対を取ると, 今 k の標数が 0 なので, $(S^m F)^\vee = S^m(F^\vee)$ などが成立して,

$$0 \to S^m(G^\vee) \to S^m(F^\vee) \to S^{m-1}(F^\vee) \otimes L^\vee \to 0$$

が成立する．完全列 1 の双対がちょうど完全列 2 になるようにしてこれを適用することで, $d > 0$ について完全列

$$0 \to S^d(\Omega(1)) \to S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\delta_d} S^{d-1}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \to 0 \tag{3}$$

を得る．層の射 δ_d^i を,

$$\delta_d^i = \delta_{d-i+1}(i-1) \cdots \delta_{d-1}(1)\delta_d : S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to S^{d-i}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i)$$

として定め, $K_d^i := \mathrm{Ker}(\delta_d^i)$ とおく． $K_d^1 = \mathrm{Ker}\delta_d = S^d(\Omega(1))$ であり, $0 = K_d^0 \subset K_d^1 \subset K_d^2 \subset \dots \subset K_d^{d+1} = S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ となる．

Lemma 1.4.2. $0 < i < j < d$ とする．

(1) 自然な同型 $K_d^j / K_d^i \cong K_{d-i}^{j-i}(i)$ となる．
(2) さらに, $j = i + 1$ の時, 短完全列 $0 \to K_d^i \to K_d^j \to K_{d-i}^{j-i}(i) \to 0$ は分裂しない．

proof. (1) は明らか． (2) について, $j = i + 1$ の時, $K_{d-i}^1(i) = S^{d-i}(\Omega(1))(i)$ なので, $\mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), K_d^{i+1}) = 0$ を示せば良い． $K_d^{i+1} \subset S^d V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ なので, $\mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$ を示せば良い．短完全列

$$0 \to S^{d-i}(\Omega(1))(i) \to S^{d-i}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i) \to S^{d-i-1}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i+1) \to 0$$

に, $\mathrm{Hom}(-, S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ を当てて, 完全列

$$\begin{aligned} 0 =& \mathrm{Hom}(S^{d-i}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to \mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \\ \to& \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}}(S^{d-i-1}(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(i+1), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0 \end{aligned}$$

を得るので, 真ん中の項である $\mathrm{Hom}(S^{d-i}(\Omega(1))(i), S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ も 0 である． □

Lemma 1.4.3. K_d^i のスロープについて, 以下が成立する:

(1) $\mu(S^d(\Omega(1))) = -\frac{d}{n}$
(2) $\mu(K_d^1) < \mu(K_d^2) < \dots < 0$

proof.

(1) $\mathrm{rk} S^d V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} = \binom{n+d}{d}$ となるので,

$$\mu(S^d(\Omega(1))) = \frac{-\binom{n+d-1}{d-1}}{\binom{n+d}{d} - \binom{n+d-1}{d-1}} = -\frac{d}{n}$$

となる.

(2)

$$\mu(K_d^{i+1}/K_d^i) = \mu(S^{d-i}(\Omega(1))(i)) = -\frac{d}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

となるので, $\mu(K_d^{i+1}/K_d^i)$ は単調増加. ここで, 以下の補題を示す:

Lemma 1.4.4. *E_0, E_1, E_2 を k 上代数的スキーム X 上の純 $\dim(X)$ 次元の連接層として, 以下の短完全列*

$$0 \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to 0$$

を考える. この時, 以下の 3 条件は同値である.
(a) $\mu(E_0) < \mu(E_2)$
(b) $\mu(E_0) < \mu(E_1)$
(c) $\mu(E_1) < \mu(E_2)$

proof.

$$\begin{aligned} & \mu(E_0) < \mu(E_1) \\ \iff & \frac{\deg(E_0)}{\mathrm{rk}(E_0)} < \frac{\deg(E_0) + \deg(E_2)}{\mathrm{rk}(E_0) + \mathrm{rk}(E_2)} \\ \iff & \deg(E_0)\mathrm{rk}(E_2) < \deg(E_2)\mathrm{rk}(E_0) \\ \iff & \mu(E_0) < \mu(E_2) \end{aligned}$$

より, (a) と (b) の同値性がわかる. 同様の計算で, (a) と (c) の同値性も示せる. □

上の補題と完全列

$$0 \to K_d^1 \to K_d^2 \to K_{d-1}^1(1) \to 0$$

から, $\mu(K_d^1) < \mu(K_d^2) < \mu(S^{d-1}(\Omega(1))(1))$ がわかる. $\mu(K_d^i) < \mu(K_d^{i+1}) < \mu(S^{d-i}(\Omega(1))(i))$ を仮定する. この時, 完全列

$$0 \to K_d^{i+1} \to K_d^{i+2} \to S^{d-i-1}(\Omega(1))(i+1) \to 0$$

について, $\mu(K_d^{i+1}) < \mu(S^{d-i}(\Omega(1))(i)) < \mu(S^{d-i-1}(\Omega(1))(i+1))$ となるので, 再び補題から, $\mu(K_d^{i+1}) < \mu(K_d^{i+2}) < S^{d-i-1}(\Omega(1))(i+1)$ がわかる. 以上より, $\mu(K_d^1) < \mu(K_d^2) < \cdots < \mu(S^d(V^\vee) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$ がわかった. □

$\mathbb{P}(V)$ には $\mathrm{SL}(V)$ の作用が入る. また, $\mathrm{SL}(V)$ は $\mathcal{O}(1)$, Ω などにも自然に (右から) 作用し, Euler 系列 1 は $\mathrm{SL}(V)$-同変な系列であることがわかる. したがって, 系列 3 も同様に $\mathrm{SL}(V)$ 同変な系列である.

Lemma 1.4.5. *$S^d(\Omega(1))$ は真の $\mathrm{SL}(V)$-不変な部分層は存在しない.*

proof. $\mathrm{SL}(V)$ は $\mathbb{P}V$ に推移的に作用するので, 不変部分層はベクトル束になる. 超曲面 $W \subset V^\vee$ に対応する点 $x \in \mathbb{P}V$ について, x のイソトロピー部分群 $\mathrm{SL}(V)_x$ は W を固定する ($\mathrm{SL}(V)_x$ の元を $V^\vee$ の元の右から合成することで $V^\vee$ に作用が入るが, W は x に対応する線型空間を 0 に飛ばすもの全体からなるからである). 全射反

準同型 $\mathrm{SL}(V)_x \to \mathrm{GL}(W)$ ができる．ここから, $S^d(\Omega(1))(x) = S^d W^2$に $\mathrm{SL}(V)_x$(や $\mathrm{GL}(W)$) の右 (左) 作用が入る．仮定より $G(x)$ はこの作用で不変である．しかし, $\mathrm{GL}(W) \to \mathrm{GL}(S^d W)$ は既約表現[3]なので, 非自明な不変部分空間を持たない．したがって, $G = 0$ または $G = S^d(\Omega(1))$ となる． □

Lemma 1.4.6. $S^d V \otimes \mathcal{O}$ の不変部分空間は K_d^i のみである．

proof. $d = 0$ の場合は明らか．$d > 0$ として, $d' < d$ については補題が成立すると仮定する．$G \subset S^d V \otimes \mathcal{O}$ を真の不変部分層とする．この時, $G_i := G \cap K_d^i \subset K_d^i$ と置くと, δ_d^i は $\mathrm{SL}(V)$ 同変なので, K_d^i は不変部分層である．したがって G_i も不変部分層．同様に, $\bar{G}_i = G_i/G_{i-1} \subset S^{d-i+1}(\Omega(1)) \otimes \mathcal{O}(i-1)$ も不変部分層である．i を $G_i \neq 0$ となる最小の i とする．$i > 1$ ならば, $G_i \cong \bar{G}_i \neq 0$ なので, ひとつ前の補題から, $\bar{G}_i = S^{d-i+1}(\Omega(1)) \otimes \mathcal{O}(i-1)$ となる．しかし, この同型は完全列

$$0 \to K_d^{i-1} \to K_d^i \to S^{d-i+1}(\Omega(1)) \otimes \mathcal{O}(i-1) \to 0$$

の分裂を与える．これは補題 1.4.2(2) に矛盾する．よって, $i = 1$ である．$K_d^1 = S^d(\Omega(1))$ の不変部分層は自明なものしかないので, $G_1 = K_d^1$ となる．$\nu \geq 1$ は $G_\nu = K_d^\nu$ となる最大の ν とすると, $G = G_\nu$ なら話は終わっている．そうでないなら, $G' = G/G_\nu$ は $S^d V \otimes \mathcal{O}/K_\nu^1 = S^{d-\nu} V \otimes \mathcal{O}(\nu)$ の不変部分層となるので, 帰納法の仮定から, $\bar{G_{\nu+1}} = G_{\nu+1}/G_\nu = K_{d-\nu}^1(\nu)$ となるので, $G_{\nu+1} = K_d^{\nu+1}$ となる．これは ν の取り方に矛盾． □

以上から, 以下の定理が導かれる:

Theorem 1.4.1. K_d^i たちは半安定であり, $\Omega(1)$ は安定である．

proof. K_d^i の HNF は $\mathrm{SL}(V)$ の作用で不変なので, 特に脱安定化部分層もそうである, しかし, $i > j$ ならば $\mu(K_d^i) < \mu(K_d^j)$ なので, $p(K_d^i) < p(K_d^j)$ であり, 補題 1.4.6 から, K_d^i は半安定であることがわかる．また, $\mu(\Omega(1)) = -\frac{1}{n}$ であり, 命題 1.2.6 より, $\Omega(1)$ は安定であることがわかる． □

1.5. **Jordan-Hölder フィルトレーション.** HNF は純な連接層を半安定な連接層の直和に分解していた．Jordan-Hölder フィルトレーションは半安定な連接層を安定層によってフィルトレーションするものである．

Definition 1.5.1. E を体 k 上の偏極多様体 (X, L) 上の半安定な連接層とする．この時, E の Jordan-Hölder フィルトレーションとは, フィルトレーション

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_N = E$$

で, $i = 1, \ldots, N$ について, E_i/E_{i-1} は $p(E_i/E_{i-1}) = p(E)$ なる安定層であるようなもののことを言う．

Jordan-Hörder フィルトレーションの存在性は以下のようにして言える: $E(\neq 0)$ を半安定な連接層として, $E_1 \subset E$ を, $p(F) = p(E)$ となる部分加群層 $F \subset E$ の中で $\alpha_d(F)$ が最小なものとする．この時, E_1 は E の飽和な部分層で, E_1 は安定, さらに $p(E) = p(E/E_1)$ となる．フィルトレーション $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_i$ で, 任意の j について, $p(E_j) = p(E_j/E_{j-1}) = p(E)$ かつ E_j/E_{j-1} が安定なものが取れた時, $E_i = E$ ならこれは Jordan-Hölder フィルトレーションになる．$E_i \neq E$ なら, $\bar{E}_{i+1} \subset E/E_i$ を, $p(\bar{E}_{i+1}) = p(E/E_i) = p(E)$ となるような部分加群層の中で α_d が最小のものとして, E_{i+1} を商 $E \to E/E_i$ による $\bar{E}_{i+1}$ の引き戻しとすると, $p(E_{i+1}) = p(E)$ であり, さらに, E_{i+1}/E_i は安定になる．これでフィルトレーション

[2] $\Omega(1)$ は代入写像 $V^\vee \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$ の核なので, $\Omega(1)(x) = W$ である．

[3] ここでも標数 0 の仮定を使っている．

$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{i+1}$ がえられる．$\alpha_d(E_0) < \alpha_d(E_1) < \cdots \le \alpha_d(E)$ となるので, この操作は有限でとまり, Jordan-Hölder フィルトレーション　$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_N = E$ を得る．

HNF とは異なり, Jordan-Hölder フィルトレーションは一意には定まらない．これは例えば 2 つの同型な直線束の直和などを考えれば良い．しかし, もう少し弱い形の一意性は持つことがわかる:

Theorem 1.5.1. *E を半安定連接層, $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_l = E$, $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \cdots \subset E'_{l'} = E$ を E の 2 つの Jordan-Hölder フィルトレーションとする．この時, $l = l'$ であり,*

$$\bigoplus_{i=1}^{l} E_i/E_{i-1} \cong \bigoplus_{j=1}^{l'} E'_j/E'_{j-1}$$

となる．

Definition 1.5.2. 上の定理の状況で, $\mathrm{gr}(E) := \bigoplus_{i=1}^{l} E_i/E_{i-1}$ と定める．

proof. α_d に関する帰納法を使う．$\alpha_d(E) = 0$ の時は明らか, E を半安定な連接層として, $\alpha_d(F) < \alpha_d(E)$ なる半安定な連接層 F については主張が成立すると仮定する．$j > 0$ を, $E_1 \subset E'_j$ となる j の中で最小なものとする．この時, $E_1 \to E'_j/E'_{j-1}$ は非自明な射で, $E_1, E'_j/E'_{j-1}$ は安定で, $p(E_1) = p(E'_j/E'_{j-1})$ なので, これは同型である．したがって, $E'_j \cong E'_{j-1} \oplus E_1$ がわかった．したがって, 以下の完全列がある:

$$0 \to E'_{j-1} \xrightarrow{i} E/E_1 \xrightarrow{\pi} E/E'_j$$

この時, E/E_1 には二つの Jordan-Hölder フィルトレーションが取れる: まず一つは $0 = E_1/E_1 \subset E_2/E_1 \subset \cdots \subset E_l/E_1 = E/E_1$ であり, もう一つは $0 \subset i(E'_1) \subset \cdots \subset i(E'_{j-1}) \subset \pi^{-1}(E'_{j+1}/E'_j) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(E'_{l'}/E'_j)$ である．これらのフィルトレーションの長さはそれぞれ $l-1$, $l'-1$ であり, $\alpha_d(E/E_1) < \alpha_d(E)$ なので, 帰納法の仮定から $l = l'$ がわかる．また, $k \ge j$ について, $\pi^{-1}(E'_{k+1}/E'_j)/\pi^{-1}(E'_k/E'_j) = E'_{k+1}/E'_k$ などから,

$$\bigoplus_{i=2}^{l} E_i/E_{i-1} \cong \bigoplus_{k \neq j} E'_k/E'_{k-1}$$

が成立する．$E_1 \cong E_j/E_{j-1}$ なので, これで主張が示された． □

Definition 1.5.3. 二つの半安定な連接層 E, E' について, E と E' が S-同値であるとは, $\mathrm{gr}(E) \cong \mathrm{gr}(E')$ であることを指す．

Definition 1.5.4. 半安定層 E が多重安定であるとは, E が安定層の直和になっていることを指す．

定義から, 半安定層の S-同値類はただ一つの多重安定層を含む．あとで見るように, 半安定層のモジュライはその S-同値類をパラメトライズしているものなので, これは多重安定層のモジュライと考えることもできる．

Proposition 1.5.1. *任意の半安定層 E は唯一の $p(E) = p(F)$ な極大多重安定部分加群 F を持つ．これを E の socle という．*

proof. 極大多重安定部分加群の存在は良い．一意性を α_d に関する帰納法で示す．$\alpha_d(E) = 0$ の場合は明らか．$\alpha_d(E') < \alpha_d(E)$ となる半安定層 E' については命題が示されているとする．$F, F' \subset E$ をともに E の極大多重安定部分加群とする．この時, 二つの Jordan-Hölder フィルトレーション $0 = F_0 \subset \cdots \subset F_l = F \subset F_{l+1} \subset \cdots \subset F_n = E$, $0 = F'_0 \subset \cdots \subset F'_{l'} = F' \subset F'_{l+1} \subset \cdots \subset F'_n = E$ が取れる．$F_1 \subset F'_k$ となる最小の

k を j とおくと, $F_1 \to F'_j/F'_{j-1}$ は同型である. したがって, $F'_j \to F'_j/F'_{j-1}$ は分裂をもち, したがって, $j \le l'$, つまり $F_1 \subset F'$ がわかる. F/F_1 および F'/F_1 は E/E_1 の極大多重安定部分加群なので, 帰納法の仮定から $F/F_1 = F'/F_1$, したがって $F = F'$ が示される. □

Definition 1.5.5. 半安定層 E について, E の extended socle とは, E の半安定部分加群層 F' で, $p(E) = p(F')$ かつ $\mathrm{gr}(F')$ の任意の直和因子が E の socle F のある直和因子と同型になり, そのような性質を持つ部分加群層の中で極大なもののことである.

Proposition 1.5.2. *E を半安定層とする.*

(1) *$F \subset E$ を E の extended socle とする. この時, $\mathrm{Hom}(F, E/F) = 0$ である.*
(2) *E の extended socle は一意に存在する.*

proof.

(1) F の Jordan-Hölder フィルトレーションを延長して E の Jordan-Hölder フィルトレーション $E_\star$ を作る. $E_i = F$ とおく. $\phi : F \to E/F$ を非自明な射とすると, ある $j \le i$ で, $\phi(E_j) \neq 0$ となる最小のものが取れる. $\phi(E_j) \subset E_k/F$ となる最小の $k > i$ をとってくる. すると, ϕ の E_j への制限は非自明な射 $E_j/E_{j-1} \to E_k/E_{k-1}$ を誘導するが, これは F が extended socle であることに反する.
(2) F, F' を二つの extended socle とする. $F \neq F'$ なら, $F' \not\subset F$ として良い. すると, $F' \subset E \to E/F$ によって, 非自明な射 $F' \to E/F$ が作れる. 一方で, $\mathrm{gr}(F')$ の直和因子と $\mathrm{gr}(E/F)$ の直和因子で同型なものはないので, (1) と同様な理由から $\mathrm{Hom}(F', E/F) = 0$ となってしまう. これは矛盾 □

Corollary 1.5.1. *E を半安定層とする. この時, socle および extended socle は (X, E) の群作用で不変である. また, E が単純かつ半安定かつ extended socle が E 自身になっているなら, E は安定である.*

proof. 最初の主張は明らか. E が安定でないとする. E は単純なので, E が socle と等しくなることはない. E の socle を F とする. E の Jordan-Hölder フィルトレーション $0 = E_0 \subset \cdots \subset E_l = E$ の最後の部分を見ると, E/E_{l-1} は F の直和因子と同型なので, 非自明な射 $\psi : E \to E/E_{l-1} \to F \subset E$ を得る. しかし $\psi^2 = 0$ なので, $\mathrm{End}(E)$ の単純性に矛盾する. □

Theorem 1.5.2. *E を単純層とする. この時, E が安定であることと, 幾何学的安定であることは同値である.*

proof. 定理 1.3.3 の証明と同様にして, 体の拡大 K/k について, E_K の extended socle は E の extended socle の基底変換と等しいことがわかる. したがって, 系 1.5.1 から, E_K も安定であることがわかる. □

1.6. **μ-安定性.** (X, L) を偏極多様体とする.

Definition 1.6.1. $d \le \dim(X)$ とする. 圏 $\mathrm{Coh}_d(X)$ を, $\mathrm{Coh}(X)$ の充満部分圏で, $E \in \mathrm{Coh}_d(X) \iff \dim(E) \le d$ となるものとする.

$0 \le d' \le d \le \dim(X)$ について, $\mathrm{Coh}_{d'}(X)$ は $\mathrm{Coh}_d(X)$ の Serre 部分圏である. したがって, 圏 $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ を以下のように定義できる:

Definition 1.6.2. $0 \le d' \le d \le \dim(X)$ とする. 圏 $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ を, Serre 商 $\mathrm{Coh}_d(X)/\mathrm{Coh}_{d'-1}(X)$ として定義する. $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ が純であるとは, $T_{d-1}E \cong 0$ (in $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$) となることを指す.

$E \in \mathrm{Coh}(X)$ について, $\dim(E) \leq d'-1$ ならば, $\deg(P(E)) < d'$ となることに注意すると, $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ について, 多項式

$$P_{d,d'}(E) = \frac{\alpha_d(E)}{d!}m^d + \cdots + \frac{\alpha_{d'}(E)}{d'!}m^{d'}$$

が, $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の同型によらず定義できる. ここで, $\alpha_d(E) \neq 0$ となるような E について,

$$p_{d,d'}(E) := \frac{P_{d,d'}(E)}{\alpha_d(E)}$$

と定め, これを $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の簡約 Hilbert 多項式と言う.

Definition 1.6.3. $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ が (半) 安定であるとは, E が純であり, 任意の E の部分加群 F について $p_{d,d'}(F)(\leq)p_{d,d'}(E)$ となることを指す.

Lemma 1.6.1. *$j < i$ とする. この時, $E \in \mathrm{Coh}(X)$ を $\dim(E) = d$ なる純な連接層とすると, E が $\mathrm{Coh}_{d,i}(X)$ の対象として安定 $\Longrightarrow$ E が $\mathrm{Coh}_{d,j}(X)$ の対象として安定 $\Longrightarrow$ E が $\mathrm{Coh}_{d,j}(X)$ の対象として半安定 $\Longrightarrow$ E が $\mathrm{Coh}_{d,i}(X)$ の対象として半安定となる.* □

Example 1.6.1. $d = \dim(X)$, $d' = d-1$ のとき,

$$P_{d,d-1}(E) = \frac{\deg(X)\mathrm{rk}(E)}{d!}m^d + \frac{(2c_1(E) - \mathrm{rk}(E)K_X.H^{n-1})}{2(d-1)!}m^{d-1}$$

となる. したがって,

$$\hat{\mu}(E) := \frac{\alpha_{d-1}(E)}{\alpha_d(X)} = \frac{1}{\deg(X)}\left[\mu(E) - \frac{1}{2}(K_X.H^{n-1})\right]$$

とおくと, $E \in \mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ が (半) 安定であることと, $T_{d-1}(E) = T_{d-2}(E)$ かつ任意の $F \subset E$ について, $\hat{\mu}(F)(\leq)\hat{\mu}(E)$ となることは同値である. つまり. E が (半) 安定であることと, E が μ-(半) 安定であることは同値である.

Example 1.6.2. $d = \dim(X)$, $d' = 0$ の時, $E \in \mathrm{Coh}(X)$ の (半) 安定性は Gieseker-丸山 (半) 安定性と同値である.

前節まででやった定理は少し証明を直せば $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の中での安定性に関しても同じようなことが言える. 特に, 以下の 2 つの定理が成立する:

Theorem 1.6.1.

(1) *(HNF) E を $\dim(E) = d$ な連接層で, $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の対象として純であるとする. この時, フィルトレーション*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_N = E$$

が存在して, E_i/E_{i-1} は $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の対象として半安定であり, $p_{d,d'}(E_1) > p_{d,d'}(E_2/E_1) > \cdots > p_{d,d'}(E_N/E_{N-1})$ となる. さらに, このフィルトレーションは $\mathrm{Coh}_{d,d'}$ の対象として (つまり $d'-1$ 次元以下の部分加群の差異を除いて) 一意である.

(2) *(JHF) $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ が半安定であるとする. この時, $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ におけるフィルトレーション*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_N = E$$

で, 各 E_i/E_{i-1} は $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の対象として安定であり, $p_{d,d'}(E_i/E_{i-1}) = p_{d,d'}(E)$ となる. また, このフィルトレーションの $\mathrm{gr}(E_\star)$ はフィルトレーションによらずに $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の対象として同型をのぞき一意に定まる.

μ-安定性の話にフォーカスしよう. (X, L) を d 次元正規偏極多様体としよう. この時, 上の定理のフィルトレーションは μ-HNF および μ-JHF と呼ばれる. もし E が $\mathrm{Coh}(X)$ の対象として捩れなしならば, 全ての E_i/E_{i-1} が torsion free であるようにしてフィルトレーションを定めると HNF は一意に定まる. しかし, (2) の $\mathrm{gr}(E)$ は余次元 2 を除いた部分でしか定まらない. E が捩れなしならば, (2) のフィルトレーションにおける E_i/E_{i-1} も捩れなしになるようにとれる (各 E_i を飽和化しても, $\mu(E_i) = \mu(E)$ かつ E は半安定となることから, JHF であることがわかる.). したがって, $\mathrm{gr}(E_\star)$ は捩れなしとして良い. また, 捩れなしの連接層 E について, 自然な射 $\theta : E \to E^{\vee\vee}$ は単射かつ $\mathrm{Coh}_{d,d-1}$ の同型になるので, 定理 A.0.2 と合わせると $\mathrm{gr}(E_\star)^{\vee\vee}$ は一意に定まることがわかる.

Definition 1.6.4. E を正規射影多様体 (X, L) 上の捩れなし連接層で, 半安定であるとする. この時, $E_\star$ を E の JHF として, $\mathrm{gr}(E) := \mathrm{gr}(E_\star)^{\vee\vee}$ と定める.

純な $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ について, 多重安定性も以下のように定義できる:

Definition 1.6.5. $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ を純な対象とする. この時, E が多重安定であるとは, E が半安定であり, $p_{d,d'}(E_i) = p_{d,d'}(E)$ なる安定層 $E_i \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ が存在して, $E \cong \bigoplus_i E_i$ とかけることとする.

E がベクトル束の時, 系 A.0.1 およびベクトル束の直和因子もまたベクトル束になっていること (と, 余次元 2 の閉集合を除いて同型な二つの反射的層は同型であること) から, 以下の命題が得られる:

Proposition 1.6.1. *E を射影正規多様体 (X, L) 上のベクトル束とする. E が μ-多重安定であることと, $\mu(E_i) = \mu(E)$ なる安定な部分束 E_i が存在して, $E = \bigoplus_i E_i$ となることは同値である. また, E が多重安定の時, 飽和な部分層 $F \subset E$ が $\mu(F) = \mu(E)$ を満たすならば, F は E の直和因子である.*

proof. 最初の主張はすでに示した. E が多重安定とする. この時, $F \subset E$ を飽和な部分層で, $\mu(F) = \mu(E)$ を満たし, F が安定であったとする. すると, F から始まる JHF を考えることで, F が反射的であることから, F は $\mathrm{gr}(E) = E$ の直和因子であることがわかる. 次に, $F \subset E$ を飽和な部分層で, $\mu(F) = \mu(E)$ となるとする. この時, F の JHF の第一成分 F_1 について, 今得た結果を使うことで, F_1 は E の直和因子であることがわかる. したがって, F_1 で割って E の階数に関する帰納法を回すと後半の主張が得られる. □

1.7. **有界性.** 本節では, moduli の構成に必要な有界性定理の概説をする. 本節は主に [3] を参考にしている.

Definition 1.7.1. S を Noehter スキーム, $f : X \to S$ を有限型の射とする.

(1) $s \in S$ について, 2 つの体の拡大 $K, K'/k(s)$ を見る. $X_K := S \times_S \mathrm{Spec}(K)$ 上の連接層 F_K と, $X_{K'}$ 上の連接層 $F_{K'}$ が同値であるとは, ある体の埋め込み $\phi : K \to L$ と $\psi : K' \to L$ が存在して, X_L 上で $(F_K)_L \cong (F_{K'})_L$ となることである.

(2) f のファイバー上の連接層の族 $\mathcal{F}$ が有界であるとは, ある有限型の射 $T \to S$ と, X_T 上の連接層 E が存在して, 任意の $F \in \mathcal{F}$ は, ある $E_t := E|_{X_t}$, $(t \in T)$ と同値になることをいう.

Remark 1.7.1. 定理 1.7.1 の (2) について, 条件は T の点における剰余体にしかよらないので, T を被約化して, 初めから T は被約であるとしてしまって良い. そうすると, general flatness から, T の稠密開集合 U が存在して, $E|_U$ は S 上平坦になる. ここで, T を $U \sqcup (T - U)$ に置き換えて E をこれに引き戻しても良い. T の次元による帰納法で, E は S 上平坦であるようにできることがわかる.

Theorem 1.7.1. S を *Noether* スキーム, $f: X \to S$ を射影的射として, $\mathcal{O}_X(1)$ を f-豊富な可逆層とする. また, $\mathcal{F}$ を f のファイバー上の連接層の族として, これが有界であると仮定する. この時, ある N が存在して, 任意の $n \geq N$ 及び任意の $F \in \mathcal{F}$ について, $F(n)$ は大域切断で生成され, $H^i(X_K, F(n)) = 0$ $(i > 0)$ となる.

proof. 仮定から, $T \to S$ を有限型の射として, $E \in \mathrm{Coh}(X_T)$ を T 上平坦な連接層として, $\mathcal{F} = \{E_t \mid t \in T\}$ として良い. $\mathcal{O}_X(1)$ は f-豊富なので, ある N が存在して, $n \geq N$ ならば $R^i f_*(E(n)) = 0$ $(\forall i > 0)$ かつ $f_T^* f_{T,*}(E(n)) \to E(n)$ は全射なる. すると, E は T 上平坦なので, Base change theorem から, 任意の $t \in T$ で,

$$(R^i f_{T,*}E(n)) \otimes k(t) \to H^i(X_t, E_t(n))$$

は同型, つまり $H^i(X_t, E_t(n)) = 0$ $(\forall i > 0)$ かつ $f_{T,*}(E(n)) \otimes k(t) \to H^0(X_t, E_t(n))$ は同型になる. また, $f_T^* f_{T,*}(E(n)) \otimes \mathcal{O}_{X_t} = f_T^*(f_{T,*}(E(n)) \otimes k(t))$ なので,

$$f_T^*(f_{T,*}(E(n)) \otimes k(t)) = H^0(X_t, E_t(n)) \otimes \mathcal{O}_{X_t} \to E_t(n)$$

が全射になることがわかる. したがって主張が示された. □

本節の目標はこの定理の逆を示すことである.

Definition 1.7.2. k を代数閉体, X を k 上の射影的スキームとして, $\mathcal{O}_X(1)$ を X 上の非常に豊富な直線束とする. この時, X 上の連接層 E が m-正則であるとは, 任意の正の整数 p について, $H^p(X, E(m-p)) = 0$ が成立することと定める. また,

$$\mathrm{reg}(E) := \inf\{m \in \mathbb{Z} \mid E \text{ は } m\text{-正則 }\}$$

と定める.

今, k は無限体なので, $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$ を E に付随する点を通らないようにとれる. したがって, 完全列

$$0 \to E(-1) \to E \to E|_H \to 0 \tag{4}$$

を得る.

Proposition 1.7.1. 上の完全列において, E が m-正則とすると, $E|_H$ も m-正則である.

proof. 上の完全列に $\mathcal{O}(m-p)$ を掛けてコホモロジーの長完全列を考えると, $p > 0$ について,

$$H^p(X, E(m-p)) \to H^p(X, E|_H(m-p)) \to H^{p+1}(X, E(m-p-1))$$

を得るが, 両端は 0 なので, 真ん中も 0 である. □

Proposition 1.7.2. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ が m-正則とする. この時, $n \geq m$ について, 以下が成立する:

(1) E は n-正則である.
(2) 自然な射 $H^0(E(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \to H^0(E(n+1))$ は全射である
(3) $E(n)$ は大域切断で生成される.

proof.

Step 1 (1), (2) を $\dim(E)$ に関する帰納法で示す. $\dim(E) = 0$ の時は明らか. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ について, 短完全列 4 を考える. 命題 1.7.1 から, $G := E|_H$ は m-正則である. したがって, 帰納法の仮定から, $n \geq m$ について, G は n-正則でもある. すると,

$$H^p(E(n-p-1)) \to H^p(E(n-p))$$

は全射になり, 全射の列

$$H^p(E(m-p)) \to H^p(E(m+1-p)) \to \cdots \to H^p(E(n-p))$$

を得る. したがって, $H^p(E(n-p)) = 0$. 次に以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(E(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(G(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^0(E(n)) \arrow[ur] \arrow[r] & H^0(E(n+1)) \arrow[r] & H^0(G(n+1)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

これを追跡すると $H^0(E(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \to H^0(E(n+1))$ は全射であることがわかる.

Step 2 (3) を示す. 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
H^0(E(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & H^0(E(n+1)) \otimes \mathcal{O}_X \arrow[d] \\
H^0(E(n)) \otimes \mathcal{O}(1) \arrow[r] & E(n+1)
\end{tikzcd}$$

n を十分大きくとると, $E(n+1)$ は大域切断で生成される. つまり右の縦の射は全射になる. また, $n \geq m$ なら, 上の射も全射になる. したがって, 下の射は全射である. これに $\mathcal{O}(-1)$ を掛けて $E(n)$ が大域切断で生成されていることがわかる. これで n を上から落としていくと主張が示される. □

Proposition 1.7.3. *$0 \to E(-1) \to E \to G \to 0$ を, 短完全列 4 とする. G が m-正則とする. この時, 以下が成立する:*

(1) *$p \geq 2$ とする. この時, 任意の $n \geq m-p$ について, $H^p(X, E(n)) = 0$ となる.*
(2) *任意の $n \geq m-1$ について, $h^1(X, E(n-1)) \geq h^1(X, E(n))$ となる.*
(3) *任意の $n \geq m-1+h^1(X, E(m-1))$ について, $H^1(X, E(n)) = 0$ となる.*

特に, E は $m + h^1(X, E(m-1))$-正則である.

proof.

(1) 今, $p \geq 2$ について, $n \geq m-p$ ならば $H^{p-1}(G(n+1)) = H^p(G(n+1)) = 0$ となる. したがって, $H^p(E(n)) = H^p(E(n+1))$ がわかる. よって, $H^p(E(m-p)) = H^p(E(n))$ が任意の $n \geq m-p$ で成立する. したがって, Serre の消滅定理から, $H^p(E(n)) = 0$ がわかる.
(2) 完全列
$$H^0(G(n)) \to H^1(E(n-1)) \to H^1(E(n)) \to H^1(G(n))$$
があるが, $n \geq m-1$ なら $H^1(G(n)) = 0$ なので, $H^1(E(n-1)) \to H^1(E(n))$ は全射. よって, $h^1(E(n-1)) \geq h^1(E(n))$ となる.
(3) $n \geq m$ として, 図式

$$\begin{tikzcd}
H^0(E(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[r, "u_n \otimes 1"] \arrow[d] & H^0(G(n)) \otimes H^0(\mathcal{O}(1)) \arrow[d, "v_n"] \\
H^0(E(n+1)) \arrow[r, "u_{n+1}"] & H^0(G(n+1))
\end{tikzcd}$$

を考える．命題 1.7.2 (2) から, v_n は全射．ここで, u_n が全射 ($\iff$ $H^1(E(n-1)) \to H^1(E(n))$ が単射) とすると, $v_n(u_n \otimes 1)$ も全射になるので, u_{n+1} も全射．つまり $H^1(E(n)) \to H^1(E(n+1))$ も単射になる．これを帰納的に行うと, u_n が全射, つまり $H^1(E(n-1)) \to H^1(E(n))$ が単射になった時点で $H^1(E(n)) = 0$ がわかる．ところで, $n \geq m-1$ なら $H^1(G(n)) = 0$ なので, $H^1(E(n-1)) \to H^1(E(n))$ は全射である．つまり, $h^1(E(n-1)) > h^1(E(n))$ となる．これが続くのは m から数えて高々$h^1(E(m-1))$ 回なので, $n \geq m-1+h^1(E(m-1))$ なら $H^1(E(n)) = 0$ とならなければならない． □

Definition 1.7.3. $E \in \mathrm{Coh}(X)$, $r \geq \dim(E)$ とする．非負整数の列 $(b) = (b_0, \ldots, b_r)$ について, E が (b)-層であるとは, 以下のように r について帰納的に定義される:

(1) $h^0(E(-1)) \leq b_0$ であり,
(2) ある E-正則な $s \in H^0(\mathcal{O}(1))$ が存在して, 完全列

$$0 \to E(-1) \xrightarrow{s} E \to E/E(-1) \to 0$$

において, $E/E(-1)$ は $(b_1, \ldots, b_r)$-層である

Remark 1.7.2. 言い換えると, $s \leq r$ 次元連接層について, E が (b)-層であることとは, E-正則列 $H_1, \ldots, H_s \in |\mathcal{O}(1)|$ がとれて, $h^0(E|_{\bigcap_{j<i} H_j}(-1)) \leq b_i$ が任意の $i \leq s$ で成立することである．

Proposition 1.7.4. *E を (b)-層とする．この時, E はある (b) 及び Hilbert 多項式 $P(E)$ のみから決まる定数 m について, m-正則であり, $h^0(E(a))$ は a, (b) および $P(E)$ のみから定まる定数によって上から抑えられる．*

proof. $\dim(E)$ による帰納法で示す． $\dim(E) = 0$ の時, $\mathrm{reg}(E) = -\infty$ であり, $h^0(E(a)) = h^0(E) = P(E, 0)$ なので OK. $\dim(E) > 0$ とする． E は (b)-層なので, ある E-正則な $H \in |\mathcal{O}(1)|$ が存在して, $E|_H$ は $(b_1, \ldots, b_r)$-正則である．完全列

$$0 \to E(-1) \to E \to E|_H \to 0$$

によって, $P(E|_H, n) = P(E, n) - P(E, n-1)$ となるので, 帰納法の仮定から, $E|_H$ は (b) と $P(E)$ のみからなる定数 m_1 について, m_1-正則であることがわかる．さらに, (b), $P(E)$ のみから定まる非負整数列 $c_0, c_1, \ldots$ が存在して, 任意の $i \geq 0$ について, $h^0(E|_H(i)) \leq c_i$ となる．

$$\begin{aligned} h^0(E(i)) \leq & h^0(E(i-1)) + h^0(E|_H(i)) \\ \leq & h^0(E(i-1)) + c_i \end{aligned}$$

となるので,

$$h^0(E(a)) \leq h^0(E(-1)) + \sum_{i=0}^{a} c_i \leq b_0 + \sum_{i=0}^{a} c_i$$

がわかる．最右辺は (b) と $P(E)$ と a のみから定まっているので, $h^0(E(a))$ が $a, P(E), (b)$ のみから定まる定数で抑えられることが分かった． 命題 1.7.3(2) から, $p \geq 2$ の時, $H^p(E(m_1 - 1)) = 0$ となる．したがって,

$$h^1(E(m_1-1)) = h^0(E(m_1-1)) - P(E, m_1-1) \leq b_0 + \sum_{i=0}^{m_1-1} c_i - P(E, m_1-1)$$

となるので, 命題 1.7.3 から $\mathrm{reg}(E)$ は (b) 及び $P(E)$ のみから定まる定数で抑えられることが分かった． □

これで, 連接層の族が有界であることの必要十分条件を与える定理を示す準備ができた.

Theorem 1.7.2. $f : X \to S$ を *Noether* スキームの間の射影的射として, $\mathcal{O}_X(1)$ を f に関して非常に豊富な可逆層とする. $\mathcal{F}$ を f のファイバー上の連接層の族とする. $P_{\mathcal{F}} := \{P(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ とする. この時, 以下の主張は全て同値である:

(1) $\mathcal{F}$ は有界である.

(2) $P_{\mathcal{F}}$ は有限集合で, ある非負整数の列 $(b) = (b_0, \dots, b_r)$ が存在して, $\mathcal{F}$ の任意の元の同値類はある代数閉体 K について, X_K 上の (b)-層 F_K によって代表される.

(3) $P_{\mathcal{F}}$ は有限集合で, ある m について, 任意の $F_K \in F$ は m-正則になる.

(4) P_F は有限で, ある S 上有限型のスキーム T と, X_T 上の連接層 E が存在して,

$$\mathcal{F} \underset{\sim}{\subset} \{F \mid t \text{: } T \text{ の体値点で, } F \text{ は } E_t \text{ の商 }\}$$

となる.

(5) ある S 上有限型のスキーム T と, X_T 上の連接層 E, E' が存在して,

$$\mathcal{F} \underset{\sim}{\subset} \{\mathrm{Cok}(\phi : E'_t \to E_t) \mid t \text{: } T \text{ の体値点, } \phi \in \mathrm{Hom}(E'_t, E_t)\}$$

となる.

ここで, $A \underset{\sim}{\subset} B$ は, 任意の A の元の同値類が B の元によって代表されることを指すことにする.

proof. 全ての主張は S-local であるので, S を affine として良い. すると, $\mathcal{O}_X(1)$ は f に関して非常に豊富なので, S 上の局所自由層 E と射影埋め込み $i : X \to \mathbb{P}_S(E)$ を, $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(E)}(1) = \mathcal{O}_X(1)$ となるものが取れる. したがって, さらに S を小さくとって, $X = \mathbb{P}^n \times S$, π は第二射影として良い.

$(1) \Longrightarrow (2)$ 仮定から, ある S 上有限型の被約スキーム T と, X_T 上の連接層 E が存在して, E は T 上平坦で, 任意の $\mathcal{F}$ の元は, ある体値点 t について, E_t で代表される (Remark1.7.1 参照). E が T 上平坦なので, $\#\{P(E_t)\}$ は T の連結成分の個数で上から抑えられる. したがって, 示すべきことは主張を満たす非負整数の列 (b) の存在性である.

$e(E) := \max\{\dim E_t \mid t \in T\}$ として, $e = e(E)$ に関する帰納法で示す. $e = 0$ の時はコホモロジー次元の上半連続性から明らか. $e \le a - 1$ で主張が示されているとする. $e = a$ とする. $\dim E_t < a$ となる t は T の連結成分の和集合になっている ($\dim E_t$ は E_t の Hilbert 多項式の次数である), $\dim E_t < a$ となる連結成分については, 帰納法の仮定から, 主張を満たす列 (b') を取れる. したがって, 任意の $t \in T$ について, $\dim E_t = a$ として良い. T は被約なので, base change theorem から, $f_{T,*}(\mathcal{O}_X(1)_T)$ は局所自由層になる. $t \in T$ をとる. すると, $k(t)$ の有限次拡大 K と $s \in H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}(1))$ が存在して, 単射 $E_K(-1) \to E_K$ を定めるものが取れる. すると, t の開近傍の有限被覆 $U_t \to T$ と, $\tilde{s} \in H^0(U_t, f_{U_t,*}(\mathcal{O}(1)_{U_t}))$ が存在して, t の上の点 $u \in U_t$ について, $\tilde{s}(u) = s$ となるものが取れる.

短完全列

$$0 \to E(-1)_{X_u} \xrightarrow{s} E|_{X_u} \to G|_{X_u} \to 0$$

について, $G|_{X_u}$ はもちろん $K = k(u)$ 上平坦である. したがって, 完全列

$$E(-1)|_{U_t} \xrightarrow{\tilde{s}} E|_{U_t} \to G \to 0$$

について, 定理 B.0.1 より, U_t をより小さい u の近傍に取り替えることで, $\tilde{s}$ は U_t 上で単射であり, さらに G は U_t 上平坦であることがわかる. このように U_t を構成すると, T のコンパクト性から有限個の U_{t_i} たちの非交和 T' が

T を被覆するように取れる. T を T' と取り替え, $s \in H^0(X_T, \mathcal{O}_X(1)_T)$ が存在して, 任意の $t \in T$ について, s は単射 $E(-1) \to E$ を定め, その余核 G も T 上平坦になる状況に帰着できた. 今, $e(G) = e(E) - 1$ となっている. したがって, 帰納法の仮定から, ある $(b_1, \dots, b_r)$ が存在して, 任意の $t \in T$ について, G_t は $(b_1, \dots, b_r)$-層である. コホモロジー次元の上半連続性から, ある b_0 について, 任意の $t \in T$ で $h^0(E(-1)|_{X_t}) \leq b_0$ となるので, $(b) = (b_0, \dots, b_r)$ とすればこれが主張を満たす (b) である.

(2) $\Longrightarrow$ (3) これは命題 1.7.4 からすぐに従う.

(3) $\Longrightarrow$ (4) (3) を仮定すると, 任意の $F \in \mathcal{F}$ について, 命題 1.7.2 から, $F(m)$ は大域切断で生成されており, $H^i(F(m)) = 0$ $(i > 0)$ となる. したがって, $M := \max\{P(F, m) \mid F \in \mathcal{F}\}$ として, $T = S$, $E = \mathcal{O}_X(-m)$ とすれば良い.

(4) $\Longrightarrow$ (5) (4) を仮定する. $\mathcal{F}$ の元はある E_t の商と同値なので, それを F とおくと, ある $t \in T$ について, 短完全列

$$0 \to F' \to E_t \to F \to 0$$

を得る. (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明から, $\{P(E_t) \mid t \in T\}$ は有限集合で, ある数列 (b) が存在して, $\{E_t \mid t \in T\}$ は (b)-層の族である. $P_{\mathcal{F}}$ も有限集合なので, このようにとった F' たちのなす族 $\mathcal{F}'$ についても, $P_{\mathcal{F}'}$ は有限集合で, $\mathcal{F}'$ は E_t の部分層のなす族なので, これも (b)-層の族になっている. したがって, (2) $\Longrightarrow$ (3) から, $\mathcal{F}'$ の正則性は上から抑えられることがわかる. すると, (3) $\Longrightarrow$ (4) から, $\mathcal{F}'$ の任意の元はある $E' \in \mathrm{Coh}(X)$ の S の体値点での引き戻しの商でかけることがわかるので, (5) を得る.

(5) $\Longrightarrow$ (1) $\{E'_t \mid t \in T\}$ は有界性の定義から明らかに有界である. したがって, (1) $\Longrightarrow$ (4) から, ある m, M が存在して, 任意の $t \in T$ について, ある全射 $\psi_t : \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus M} \to E'_t$ がある. m を十分大きくとって, $H^i(E(m)) = 0$ $(\forall i > 0)$ として良い. 任意の $F \in \mathcal{F}$ は, ある $\phi : E'_t \to E_t$ について,

$$F = \mathrm{Cok}(\phi : E'_t \to E_t) = \mathrm{Cok}(\phi\psi_t)$$

と書けるので, E' を $\mathcal{O}_{X_T}(-m)^{\oplus M}$ と置き換えて良いことがわかる.

$$H_0 := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_T}}(E', E) \cong E(m)^{\oplus M}$$

とする. m の取り方から, $H^i(H_{0,t}) = 0$ $(\forall i > 0)$ となるので,

$$\begin{cases} H := f_{T,*}H_0 \text{は局所自由} \\ H_y \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(E'_y, E_y) \quad (\forall y \in T) \end{cases}$$

が成立する. $\mathbf{H} := \mathrm{Spec}_T(\mathrm{Sym}^*(H^\vee))$ として, $\Phi \in H^0(H_{\mathbf{H}})$ を tautological な切断とする. この時, 以下の図式

$$\begin{tikzcd} X_{\mathbf{H}} \arrow[r, "f_{\mathbf{H}}"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{H} \arrow[d, "\bar{g}"] \\ X_T \arrow[r, "f_T"] & T \end{tikzcd}$$

に関して, base change theorem を用いると,

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{H}, H_{\mathbf{H}}) \cong & H^0(\mathbf{H}, \bar{g}^* f_{T,*} H_0) \\ \cong & H^0(\mathbf{H}, f_{\mathbf{H},*} g^* H_0) \\ \cong & H^0(X_{\mathbf{H}}, g^* H_0) \\ \cong & H^0(X_{\mathbf{H}}, E_{\mathbf{H}}(m)^{\oplus M}) \\ \cong & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_{\mathbf{H}}}}(E'_{\mathbf{H}}, E_{\mathbf{H}}) \end{aligned}$$

となり, Φ に対応するのは普遍射である. これも Φ とおいて, $\tilde{F} := \mathrm{Cok}(\Phi)$ とおくと, $\tilde{F}$ は $\mathcal{F}$ を bound する. したがって, $\mathcal{F}$ は有界であることがわかった. □

この定理を用いて例えば以下のことがわかる:

Corollary 1.7.1. *X を k 上一次元非特異射影曲線とする. この時, X 上の Hilbert 多項式一定の半安定連接層全体のなす族 $\mathcal{F}$ は有界である.*

proof. 0 次元の場合は定理 1.7.2(3) から明らか. 1 次元の場合も, Serre 双対性から, 任意の $E \in \mathrm{Coh}(X)$ について,

$$H^1(E(m-1)) = \mathrm{Hom}(E, \omega_X(1-m))^{\vee}$$

となる. E が半安定なら, $\mu(E) > \deg(\omega_X(1-m))$ なら右辺は 0 なので,

$$m > \frac{2g-2-\mu(E)}{\deg(\mathcal{O}_X(1))} + 1$$

なら 0 である. 今, Hilbert 多項式が定まっているので $\mu(E)$ は定まっている. よって, E の正則性が上から抑えられて, Hilbert 多項式が一定の半安定連接層の族は有界であることがわかった. □

Lemma 1.7.1 (Grothendieck)**.** *X を体 k 上の射影多様体として, $\mathcal{O}_X(1)$ を X 上の非常に豊富な直線束とする. E を X 上の純 d 次元の連接層とする. この時, E の純 d 次元の商 F について, $\hat{\mu}(F)$ は E の Hilbert 多項式 P と $\rho = \mathrm{reg}(E)$ のみに依存する定数 C でしたから抑えられる. さらに, 任意の C' で, E の純 d 次元の商 F で, $\hat{\mu}(F) \leq C'$ となるもの全体のなす族は有界である.*

proof. まず, 射影埋め込み $j : X \to \mathbb{P}^n$ を与えて, E を j_*E とすることで, X を $\mathbb{P}^n$ に置き換えても良いことがわかる. $\mathrm{Supp}(E)$ と交わらない $n-d-1$ 次元線型空間 L をとって, $\pi : \mathrm{Supp}(E) \subset \mathbb{P}^n - L \to \mathbb{P}^d$ を射影とすると, $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{Supp}(E)}(1)$ となる. したがって, 射影公式と, π は有限射であることから, 任意の $G \in \mathrm{Coh}(\mathrm{Supp}(E))$ について, $\pi_*G \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^d)$ であり,

$$H^i(\pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(m)) = H^i(\pi_*(G(m))) = H^i(G(m))$$

となる. つまり, $P_G = P_{\pi_*G}$, 特に $\hat{\mu}(G) = \hat{\mu}(\pi_*G)$ および $\mathrm{reg}(G) = \mathrm{reg}(\pi_*G)$ が成立する. E は純なので, π_*E は捩れなしである. したがって, $X = \mathbb{P}^d$, E は捩れなしとして良い. 今, $\rho = \mathrm{reg}(E)$ なので, 全射

$$\mathcal{O}_X(-\rho)^{\oplus P(\rho)} \to E$$

がある. したがって, E の商は, $G := \mathcal{O}_X(-\rho)^{\oplus P(\rho)}$ の商でもある. $\phi : G \to F$ を商とすると, $s = \mathrm{rk}(F)$ として, generically surjective な射

$$\Lambda^s\phi : \Lambda^s G = \Lambda^s(k^{P(\rho)}) \otimes \mathcal{O}_X(-s\rho) \to \Lambda^s F = \det(F)$$

を得る. 特に,

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^s(k^{P(\rho)})\otimes\mathcal{O}(-s\rho),\mathcal{O}(c_1(F)))=\Lambda^s(k^{P(\rho)})\otimes H^0(\mathcal{O}(s\rho+c_1(F)))\neq 0$$

を得る. したがって,

$$s\rho+\deg(F)\geq 0$$

つまり,

$$\hat{\mu}(F)\geq -\rho+\frac{1}{2}(d+1)$$

となる. 右辺を C とおいて, 前半の主張を得る.

C' を固定して, $G\to F$ を捩れなしの商として, $\hat{\mu}(F)=C'$ とする. この時, $\mathrm{rk}(F)=s$ として,

$$\deg(F)=s\left(C'-\frac{1}{2}(d+1)\right)$$

となる. 商 $q:G\to F$ から誘導される射

$$G\otimes\Lambda^{s-1}G\xrightarrow{\wedge}\Lambda^s G\to\det(F)=\mathcal{O}(\deg(F))$$

を考える. ここから,

$$\hat{\psi}:G\to\mathcal{O}(\deg(F))\otimes\Lambda^{s-1}G^\vee$$

が誘導されるが, $U\subset\mathbb{P}^d$ を F が自由になるような稠密開集合とすると, 簡単な線形代数から, $\mathrm{Ker}(\hat{\psi})|_U$ と $\mathrm{Ker}(q)|_U$ は一致することもわかるので, 命題 A.0.2 より, これらは全体でも一致する. したがって, $\hat{\psi}(G)\cong F$. したがって, 定理 1.7.2 の (5) $\Longrightarrow$ (1) の証明と同様にして, $\mathcal{F}$ は bounded であることが示される □

Remark 1.7.3. 上の補題から, 射影多様体 X 上の連接層 E の捩れなしの商 F は, $\hat{\mu}(F)$ を固定されればその取りうる Hilbert 多項式は有限個しかないことがわかる.

2. 連接層の平坦族と安定性の openness

2.1. 平坦族と determinant.

Proposition 2.1.1. *$f:X\to S$ を体 k 上有限型スキームの間の射影的な平滑射として, f のファイバーの次元を n として, $\mathcal{O}_X(1)$ を f に関して非常に豊富な直線束, $F\in\mathrm{Coh}(X)$ を S 上平坦な連接層とする. この時, F は以下の条件を満たす局所自由分解 $0\to F_n\to\cdots\to F_0\to F$ を持つ:*

(1) *任意の $i=1,\dots,n$, $p<n$ について, $R^pf_*F_i=0$ となる.*
(2) *$R^nf_*F_i$ は局所自由である.*

さらに, この時, $R^pf_*F=h_{n-p}(R^nf_*F_\star)$ となる.

proof. まず, Serre duality と Base change theorem から, ある m_0 が存在して, 任意の $m\geq m_0$ について, $R^if_*F(-m)=0$ $(i<n)$ かつ $R^nf_*F(-m)$ は局所自由となり, $\mathcal{O}_X$ に関する同様の条件も成立する. $K_0=F$ と置いて, S 上平坦な K_ν と局所自由層 G_ν を以下のように帰納的に構成する. $K_0,G_0,\dots,G_{\nu-1},K_\nu$ が取れたとすると, $m_\nu\gg m_0$ を, 任意の $s\in S$ について, $(K_\nu)_s$ が m_ν-正則であるように取れる. すると, $f_*K_\nu(m_\nu)$ は局所自由であり, 標準的な射 $G_\nu:=f^*(f_*K_\nu(m_\nu))(-m_\nu)\to K_\nu$ は全射である. 射影公式から,

$$R^if_*G_\nu=f_*(K_\nu(m_\nu))\otimes R^if_*\mathcal{O}_X(-m_\nu)$$

となるので, これは $i<n$ の時 0 になり, $i=n$ の時局所自由になる. $K_{\nu+1}:=\mathrm{Ker}(G_\nu\to K_\nu)$ と定める.

$K_{\nu+1}$ が S 上平坦であることは, 短完全列

$$0 \to K_{\nu+1} \to G_\nu \to K_\nu \to 0$$

によってすぐにわかる.

層の完全列

$$0 \to K_n \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to F \to 0$$

について, 出てくる層が全て S 上平坦なので, 任意の $s \in S$ について,

$$0 \to (K_n)_s \to \cdots \to (G_1)_s \to (G_0)_s \to F_s \to 0$$

も完全である. f は平滑射なので, X_s は滑らかで, したがって, Auslander-Bachsbaum の定理から, 任意の $x \in X_s$ について, $\mathrm{hd}(F_s) \le n$ となる. したがって, $(K_n)_s$ は局所自由層であることがわかる. したがって, 次に示す補題から, K_n も局所自由であることがわかる. $F_i = G_i$ $(i < n)$, $F_n = K_n$ とすれば, これが主張を満たすことを示す. 短完全列

$$0 \to K_{i+1} \to G_i \to K_i \to 0$$

に f の高次順像を作用させると, $R^p f_* K_{i+1} = R^{p-1} f_* K_i$, $(\forall p < n)$ および $R^p f_* F_i = 0$ $(p < i)$ がわかる. 特に, $R^p f_* K_n = 0$ $(p < n)$ が示される. したがって, Serre duality と Base change theorem から, $R^n f_* K_n$ が局所自由であることがわかる. 以上から, (1), (2) が示された.

最後に, 局所自由分解 $F_\star \to F \to 0$ は $D^b(\mathrm{Coh}(X))$ の擬同型を与えるので, $R^p f_* F = \mathbb{R}^p f_* F_\star$ となる. スペクトル系列 $E_2^{p,q} = h_{-p}(R^q f_* F_\star) \implies \mathbb{R}^{p+q} f_* F_\star$ は条件から E_2 ページで退化しており, したがって残りの主張も示された. □

上の証明に使った補題を示しておこう

Lemma 2.1.1. *$(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n})$ を Noether 局所環で, $A \to B$ を有限型な局所環準同型とする. M を A-平坦な有限 B 加群とする. この時, $M/\mathfrak{m}M$ が自由 $B/\mathfrak{m}B$ 加群なら, M は自由 B 加群である.*

proof. $M/\mathfrak{m}M$ が自由なので, その階数を r として, 同型 $(B/\mathfrak{m}B)^{\oplus r} \to M/\mathfrak{m}M$ が取れる. 各基底の行き先を M に持ち上げて, B 加群の準同型 $B^{\oplus r} \to M$ ができるが, 中山の補題からこれは全射である. この準同型の核を K とおくと, M は A-平坦なので, $K/\mathfrak{m}K = 0$ となることがわかるが, 再び中山の補題から, $K = 0$ が導かれる. したがって M は自由であることがわかった. □

$f : X \to S$ を Noether スキームの間の固有射とすると, $f_! : K_0(X) \to K_0(S)$ が,

$$f_![F] = \sum_{i \ge 0} (-1)^i [R^i f_* F]$$

として定まった.

Corollary 2.1.1. *$f : X \to S$ を体 k 上有限型スキームの間の射影的な平滑射として, f のファイバー次元を n として, $F \in \mathrm{Coh}(X)$ を S 上平坦な連接層とする. この時, $[F] \in K^0(X)$ であり, $f_![F] \in K^0(S)$ も成立する.*

proof. 命題 2.1.1 で与えられる局所自由分解 $F_\star \to F$ について,

$$[F] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [F_i] \in K^0(X)$$

であり,

$$f_![F] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} [R^n f_* F_i] \in K^0(S)$$

となる. □

局所自由層の短完全列

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

について, $\det(E) = \det(F) \otimes \det(G)$ となるので, これを拡張して $\det : K^0(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ が定義された. 命題 2.1.1 の状況においては,

$$\det(F) = \bigotimes_{i=0}^{n} \det(F)^{(-1)^i}$$

となり, さらに,

$$\det(f_![F]) = \bigotimes_{i=0}^{n} \det(R^n f_* F_i)^{(-1)^{n-i}}$$

と計算できる. この構成は基底変換と可換であり, 例えば標準的な同型

$$\det(f_![F])(s) \cong \bigotimes_{i=0}^{n} \det(H^i(F_s))^{(-1)^i}$$

などが導かれる.

2.2. **Grassmannian と Quot スキーム.** 本節では, moduli 空間の構成に不可欠な Quot スキームの構成をしていく.

Proposition 2.2.1. *k を体, V を有限次元 k-線型空間として, $0 \le r \le \dim(V)$ となる整数 r をとる. この時, 函手 $\underline{\mathrm{Grass}}(V, r) : (\mathrm{Sch}/k)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$ を, k 上のスキーム S について, $V \otimes_k \mathcal{O}_S$ の部分加群 K で, 商 $V \otimes \mathcal{O}_S / K$ が階数 r の局所自由層になるもの全体のなす集合を当て, 射は層の引き戻しで与えるものとする. この時, $\underline{\mathrm{Grass}}$ は (Sch/k) の Zariski 位相で層になっており, これは表現可能である. さらに, その表現する対象を $\mathrm{Grass}(V, r)$ とおくと, $\mathrm{Grass}(V, r)$ は非特異射影多様体になっている.*

proof. Zariski 位相で層になっているのは明らか. $W \subset V$ を r 次元の部分空間として, $\underline{\mathrm{Grass}}(V, r)$ の部分層 $\mathcal{G}_W$ を以下のように定義する:

$$\mathcal{G}_W(S) := \{K \in \underline{\mathrm{Grass}}(V, r)(S) \mid W \otimes \mathcal{O}_S \subset V \otimes \mathcal{O}_S \to V \otimes \mathcal{O}_S / K =: F \text{ は同型 }\}$$

$K \in \mathcal{G}_W(S)$ について, 同型 $W \otimes \mathcal{O}_S \to F$ の逆に, 射影 $V \otimes \mathcal{O}_S \to F$ を合成することで, 包含 $W \otimes \mathcal{O}_S \subset V \otimes \mathcal{O}_S$ の分裂 $V \otimes \mathcal{O}_S \to W \otimes \mathcal{O}_S$ をえる. これは, $\mathbb{H}\mathrm{om}(V, W) := \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(V, W)^\vee)$ の閉部分スキーム G_W への射と思うことができる. 逆に, 分裂が与えられたら, K はその核として実現されるので, $\mathcal{G}_W$ は affine スキーム G_W によって表現される.

$\mathcal{G}_W \subset \underline{\mathrm{Grass}}(V, r)$ は開部分層である. 実際, $K \in \underline{\mathrm{Grass}}(V, r)(S)$ について, 誘導される $W \otimes \mathcal{O}_S \to F$ の核および余核の台は閉であることからわかる.

$\{\mathcal{G}_W\}_{W \subset V, \dim(W) = r}$ は $\underline{\mathrm{Grass}}(V, r)$ の開被覆であり, 核をとる射 $G_W \subset \mathbb{H}\mathrm{om}(V, W) \to \mathbb{V} := \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}^* V^\vee)$ によって, G_W を $\mathbb{V}$ 上のスキームと思うことで,

$$\mathcal{G}_W \times_{\underline{\mathrm{Grass}}(V, r)} \mathcal{G}_{W'} = \mathrm{Hom}(-, G_W \times_{\mathbb{V}} G_{W'})$$

となることがわかる. 射影 $G_W \times_{\mathbb{V}} G_{W'} \to G_W$ は開埋め込みであり, その像を $G_{W,W'}$ とおくと, 同型 $\phi_{W,W'} : G_{W',W} \to G_{W,W'}$ が得られ, これがコサイクル条件を満たすことが容易にわかるので, スキームの貼り合わせによって, $\underline{\mathrm{Grass}}(V, r)$ は表現可能であることがわかる. 残りの主張は, Plücker 埋め込み

$$\mathrm{Grass}(V, r) \to \mathbb{P}(\Lambda^r V); [\phi : V \otimes \mathcal{O}_S \to F] \mapsto [\Lambda^r \phi : \Lambda^r V \otimes \mathcal{O}_S \to \det(F)]$$

の計算を座標をとってすれば良い. □

Proposition 2.2.2. S を体 k 上代数的スキーム, E を S 上の連接層として, 函手

$$\underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r) : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$$

を,

$$T \mapsto \{E_T \to F \mid F : \textit{loc. free. quotient of } E_T \textit{ with rank } r\}/\sim$$

と定める. ここで,

$$[E_T \to F] \sim [E_T \to F'] :\Longleftrightarrow \exists \phi : F \overset{\cong}{\to} F' \ \textit{s.t.}\ E_T \to F \overset{\phi}{\to} F' = E_T \to F'$$

として同値関係を定めている. この時, $\underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r)$ は S 上射影的スキームによって表現可能である.

proof. S の affine 被覆をとって, 各 affine 開集合について, 表現可能性がわかれば, 表現するスキームを共通部分で貼り合わせれば良いので, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $E = M^{\sim}$ (M は有限 A 加群) として良い. M の表示

$$A^m \overset{b}{\to} A^n \overset{a}{\to} M$$

をとる. すると層の射

$$\begin{aligned}&\underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r) \to \underline{\mathrm{Grass}}_S(\mathcal{O}_S^{\oplus n},r) = S \times_k \underline{\mathrm{Grass}}(k^n,r);\\&[E_T \to F] \mapsto [\mathcal{O}_S^{\oplus n} \to E_T \to F]\end{aligned}$$

が作れる. これが閉埋め込みであることが以下のようにしてわかる: T を S-スキームとして, $[q : E_T \to F] \in \underline{\mathrm{Grass}}_S(\mathcal{O}_S^{\oplus n},r)$ をとり, 対応する射によるファイバー積の図式

$$\begin{CD}\underline{T} \times_{\underline{\mathrm{Grass}}_S(\mathcal{O}_S^{\oplus n},r)} \underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r) @>>> \underline{T}\\ @VVV @VVV\\ \underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r) @>>> \underline{\mathrm{Grass}}_S(\mathcal{O}_S^{\oplus n},r)\end{CD}$$

を考える. このファイバー積が T の閉部分スキームである (によって表現される) ことを示せばよい. 閉埋め込みであることは local に確かめれば良いので, T は affine で, $F = \mathcal{O}_T^{\oplus r}$ としてしまって良い. T' を S-スキームとすると, $\underline{T} \times_{\underline{\mathrm{Grass}}_S(\mathcal{O}_S^{\oplus n},r)} \underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r)(T')$ の元は S-スキームの射 $g : T' \to T$ と, 連接層の全射 $\phi : E_{T'} \to \mathcal{O}_{T'}^{\oplus r}$ の組み (g,ϕ) で, $g^*q = \phi \circ a_{T'}$ となるものである. 今, $E_{T'} = \mathrm{Cok}(\mathcal{O}_{T'}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{T'}^{\oplus n})$ なので, これは, $g^*(q \circ b_T) = 0$ となる g を与えることと同値である. したがって, T_0 を, $q \circ b_T$ を行列表示した時に現れる各成分の生成するイデアルに対応する T の閉部分スキームとすると,

$$\underline{T} \times_{\underline{\mathrm{Grass}}_S(\mathcal{O}_S^{\oplus n},r)} \underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r) \cong \underline{T_0}$$

となることがわかった. したがって, $\underline{\mathrm{Grass}}_S(E,r)$ は S 上射影的スキーム $\mathrm{Grass}_S(E,r)$ によって表現される. □

さて, Quot スキームの構成をしよう.

Definition 2.2.1. S を体 k 上代数的スキームとして, $X \to S$ を射影的射とする. $E \in \mathrm{Coh}(X)$ と, 多項式 $P \in \mathbb{Q}[t]$ について, 函手 $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/X/S} : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$ を, S-スキーム T について, X_T 上の連接層の T 上平坦な商 $E_T \to F$ で, 各ファイバーの Hilbert 多項式は P となるものの同型類全体の集合を当てる函手とする.

Theorem 2.2.1. $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/X/S}$ は S 上射影的スキームによって表現可能である.

proof.

<u>Step 1</u> まず, $S = \mathrm{Spec}(k)$, $X = \mathbb{P}^n$ の場合に示す．定理 1.7.2 (4) $\Longrightarrow$ (3) によって, ある m_0 が存在して, $m > m_0$ ならば, 任意の $P(F) = P$ となる商 $E \to F$ について, E, F は m-正則になる．さらに, 1.7.2 (2) $\Longrightarrow$ (1) によって, 商 $E \to F$ の核 K のなす族も有界であることがわかり, m_0 を取り替えると $m > m_0$ ならば K, E, F が全て m-正則になるように取れる．したがって, $T \in (\mathrm{Sch}/k)$, $[\phi : E_T \to F] \in \underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/X/S}(T)$, $K = \mathrm{Ker}(\phi)$ について, $m > m_0$ ならば, 任意の $t \in T$ について, $K_t, (E_T)_t, F_t$ は m-正則になる．ここから, 完全列

$$0 \to f_{T,*}(K(m)) \to \mathcal{O}_T \otimes H^0(E(m)) \to f_{T,*}(F(m)) \to 0$$

を得る．また, 自然な射

$$f_{T,*}(K(m_0)) \otimes H^0(\mathcal{O}_X(m - m_0)) \to f_{T,*}(K(m))$$

は全射なので, $\bigoplus_{m \geq m_0} f_{T,*}F(m)$ は, つまり F は $f_{T,*}K(m_0)$ のみからきまる．したがって, $[\phi : E_T \to F] \mapsto [H^0(E(m_0)) \otimes \mathcal{O}_T \to f_{T,*}(F(m_0))]$ によって, 単射

$$\underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/X/S} \to \underline{\mathrm{Grass}}(H^0(E(m_0)), P(m_0))$$

が定まる．これが閉埋め込みであることを示せば良い．$T \in \mathrm{Sch}/k$ として, $\Phi : \underline{T} \to \mathrm{Grass}(H^0(E(m_0)), P(m_0))$ を射とする．$G = \mathrm{Grass}(H^0(E(m_0)), P(m_0))$ の tautological sequence を

$$0 \to \mathcal{A} \to H^0(E(m_0)) \otimes \mathcal{O}_G \to \mathcal{B} \to 0$$

とする．$\mathcal{A}$ の生成する次数付き $\mathcal{S} = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}(i))$-部分加群 $\mathcal{A} \cdot \mathcal{S} \subset \bigoplus_{i \geq 0} H^0(E(i)) \otimes \mathcal{O}_G$ について, 商 $\bigoplus_{i \geq 0} H^0(E(i)) \otimes \mathcal{O}_G / \mathcal{A} \cdot \mathcal{S}$ に対応する G_X 上の層を $\mathcal{F}$ とする．Φ は $\phi : T \to G$ に対応し, これは階数 $P(m_0)$ の局所自由な商 $H^0(E(m_0)) \otimes \mathcal{O}_T \to Q = \phi^* f_{G,*}\mathcal{F}$ に対応するが, これが $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/X/S}(T)$ に入っているためには, $(\phi \times X)^*\mathcal{F}$ は T 上平坦で, 各ファイバーの Hilbert 多項式が P である必要がある．逆に $\phi : T \to G_P$ が与えられれば, 対応する商は, $\mathcal{F}_P$ を $G_P \to G$ による $\mathcal{F}$ の引き戻しとして,

$$H^0(E(m_0)) \otimes \mathcal{O}_T \to f_{T,*}(\phi \times X)^*\mathcal{F}_P$$

とかけるので, $[E_T \to (\phi \times X)^*\mathcal{F}_P(-m_0)] \in \underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/X/S}(T)$ が対応することがわかる．つまり, $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/X/S}$ はある準射影的スキーム Q によって表現されることがわかった．あとはこれが k 上固有であることが示されれば良い．体 L と L を商体に持つ離散賦値環 R について, 以下の図式の平行な矢に対応する射が与えられ, この図式の実線部分が可換になったとする:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(L) \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{Spec}(k)
\end{tikzcd}$$

つまり, X_L 上の連接層の短完全列

$$0 \to K \to E_L \to F \to 0$$

が与えられたとする．K_R を, E_R の部分層で, その $X_R \to \mathrm{Spec}(R)$ の生成点におけるファイバーへの制限が K に一致するもの全体の中で極大なものとして, $F_R := E_R/K_R$ とおく．すると, K_R の極大性から, R の一意化元 t をかけ

る写像 $t : F_R \to F_R$ は単射になる．したがって, F_R は平坦になり, $E_R \to F_R$ の誘導する点線の射 $\mathrm{Spec}(R) \to Q$ で, 図式を可換にするものが得られた．

<u>Step 2</u> S が一般の時, $f : X \to S$ は射影的射なので, これは $\mathbb{P}^N_S \to S$ を閉埋込で経由する．したがって, $X = \mathbb{P}^N_S$ として良い．$E \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^N_S)$ について, 完全列

$$\mathcal{O}(-m')^{\oplus n'} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}(-m)^{\oplus n} \xrightarrow{\alpha} E \to 0$$

がある．T を S 上のスキームとして, $q : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_T}(-m)^{\oplus n} \to F$ が E_T を経由する必要十分条件は $q \circ \beta_T = 0$ となることである．これを踏まえて, 命題 2.2.2 の議論から, α の誘導する射 $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{E/\mathbb{P}^N_S/S} \to \underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{O}(-m)^{\oplus n}/\mathbb{P}^N_S/S}$ は閉埋込であることがわかる．また, $\underline{\mathrm{Quot}}^P_{\mathcal{O}(-m)^{\oplus n}/\mathbb{P}^N_S/S}$ は $S \times_k \mathrm{Quot}^P_{\mathcal{O}(-m)^{\oplus n}/\mathbb{P}^N_k/\mathrm{Spec}(k)}$ によって表現されるので, 主張が示された． □

Example 2.2.1.

(1) $X = S$ の時, $X \to S$ のファイバーの次元は 0 なので, 取りうる P は定数のみである．また, この時, T 上平坦な T 上の連接層はベクトル束であることと合わせて, $\mathrm{Quot}^P_{E/X/S} = \mathrm{Grass}_X(E, P)$ となることがわかる．

(2) $S = \mathrm{Spec}(k)$, $E = \mathcal{O}_X$ の時, E の商の族は X の部分多様体の族である．この時, $\mathrm{Quot}^P_{\mathcal{O}_X/X/k}$ を Hilbert スキームと言い, これは X の閉部分スキームの平坦族をパラメトライズしているとみることができる (定理 B.0.1)． □

定理 2.2.1 によって, $Q = \mathrm{Quot}^P_{E/X/S}$ とすると, $1_Q \in \mathrm{Hom}(Q, Q)$ に対応する商 $[E_Q \to F_{\mathrm{univ}}]$ が取れる．S-スキーム T 上の商 $[E_T \to F]$ に対応する射 $f : T \to Q$ で, これで $[E_Q \to F_{\mathrm{univ}}]$ を引き戻したら $[E_T \to F]$ が得られる．この商 $[E_Q \to F_{\mathrm{univ}}]$ を**普遍商**という．

上の定理の証明と Plücker 埋め込みと合わせて以下の系を得る:

Corollary 2.2.1. X, S, P, Q を上のようにとる．この時, $m \gg 0$ で, $\det(f_*(F_{\mathrm{univ}}(m)))$ は S に対して非常に豊富になる． □

次に, Quot スキームの接空間の次元を見てみようと思う．まず, k 上代数的スキーム X について, その k-値点 x での Zariski 接空間は,

$$T_{X,x} = \{\phi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(k[\epsilon]), X) \mid \phi|_{\mathrm{Spec}(k)} = x\}$$

によって定めることができた (ϕ は $\mathcal{O}_{X,x} \to k[\epsilon]$ を誘導し, $\phi(f) = a(f) + \epsilon \cdot b(f)$ とおくと, 仮定から $a(f) = f(x)$ なので, $b : \mathcal{O}_{X,x} \to k$ は Leibniz 則を満たす．逆に導分 $\delta : \mathcal{O}_{X,x} \to k$ が与えられたら, $\phi(f) = f(x) + \epsilon \cdot \delta(f)$ として定めると ϕ が構成できるのであった)．

S を k 上代数的スキーム, $X \to S$ を射影的射として, E を X 上の連接層で, S 上平坦なものとしよう．$P \in \mathbb{Q}[t]$ として, $Q = \mathrm{Quot}^P_{E/X/S}$ を考える．Q の k-値点 x について, 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k) \arrow[r, "x"] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(k[\epsilon]) \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, dashed] & S
\end{tikzcd}$$

この ψ が点線の $\mathrm{Spec}(k[\epsilon]) \to Q$ に持ち上がるかを考える．これがいつも持ち上がるならば, $f_* : T_{Q,x} \to T_{S,f(x)}$ が全射になることがわかる．より一般に, スキームの射の平滑性について, 以下の定理を思い出しておこう:

Theorem 2.2.2. $f : X \to S$ をスキームの間の局所有限表示な射とする．この時, 以下は同値である*:*

(1) f は平滑射である．
(2) 任意の *Artin* 局所環 A, A_0 の間の全射 $A \to A_0$ で, $\mathrm{Ker}(A \to A_0) \cong A/\mathfrak{m}_A$ となるもの *(*これを *small extension* という*)* および, 以下の可換図式について, 点線の射で, 図式を可換にするものが存在する*:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A_0) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

proof. [4], Part 2, Lemma 31.11.7 などを参照. □

上の通り, S を k 上代数的スキーム, X を S 上射影的スキーム, $\mathcal{O}_X(1)$ をその上の S-豊富な直線束として, $Q = \mathrm{Quot}^P_{E/X/S}$ として．E は S 上平坦な連接層とする．$A' \to A$ を k 上 Artin 局所環で, 剰余体が k と同型になるようなものの間の small extention として, $I := \mathrm{Ker}(A' \to A)$ とする．この時, 以下の実線の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "x"] \arrow[d, "\sigma"'] & Q \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A') \arrow[r, "\psi"] \arrow[ur, dashed, "q'"] & S \end{tikzcd}$$

この点線の射 q' が存在したとしよう．q に対応する短完全列を

$$0 \to K \to E_A \to F \to 0$$

として, q' に対応する短完全列を,

$$0 \to K' \to E_{A'} \to F' \to 0$$

とする．この時, 図式の可換性から, $q' \otimes_{A'} A'/I = q$ となる．$F_0 = F \otimes_A A/\mathfrak{m}_A$ などとおいて, 可換図式

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & I \otimes_k K_0 \arrow[r, "1\otimes i_0"] \arrow[d] & I \otimes_k E_0 \arrow[r, "1\otimes q_0"] \arrow[d, "j"] & I \otimes_k F_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & E_{A'} \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "\sigma"] & F' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E_A \arrow[r, "q"] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

を得る．ここで, 最上段の完全列は, $\mathfrak{m}_{A'} I = 0$ より, $I \otimes_{A'} K' = I \otimes_k K_0$ などが成立することに注意. そして E_A および F が A' 上平坦なので, K もそうで, したがって, 縦の完全列は完全である．さらに, F_0 が k 上平坦なので, 一番上の行も完全列. したがって, 上の図式は完全可換図式である．ここで, i' は $\hat{i} : K \to E_{A'}/j(1 \otimes i_0)(I \otimes_k K_0)$ を誘導し

て, $\hat{i}$ の余核と i' の余核は等しく F' となる．また, $\bar{\sigma}$ を σ の誘導する $E_{A'}/(j(1\otimes_k K_0))$ から E_A への射とすると, $\bar{\sigma}\hat{i}=i$ となることにも注意.

逆に, $\hat{i}: K\to E_{A'}/j(1\otimes_k i_0)(I\otimes_k K_0)$ で, $\bar{\sigma}\hat{i}=i$ となるものが与えられたら, その余核を F' とすれば, 完全列

$$0\to I\otimes_k F_0\to F'\to F\to 0$$

を得る．今, $F'|_0=F_0$ は k 上平坦で, $I\otimes_{A'}F'=I\otimes_k F_0\to F'$ は単射なので, 補題 B.0.1 から, F' は A' 上平坦であることがわかる.

$\hat{i}: K\to E_{A'}/j(1\otimes_k i_0)(I\otimes_k K_0)$ で, $\bar{\sigma}\hat{i}=i$ となるものについて, $\hat{i}$ の像は $\bar{\sigma}^{-1}(K)$ の中に入っている．つまり, B を, 複体

$$0\to I\otimes_k K_0\overset{j(1\otimes i_0)}{\to}E_{A'}\overset{\sigma q}{\to}F\to 0$$

の 1 次のコホモロジーとすると, $\hat{i}$ は σ の誘導する自然な全射 $B\to K$ の分裂を与えている．$B\to K$ の核は $I\otimes_k E_0/(I\otimes_k K_0)=I\otimes_k F_0$ となるので, この $\hat{i}$ が存在する必要十分条件は, 拡大

$$0\to I\otimes_k F_0\to B\to K\to 0$$

が自明であることと同値であり, これは, 誘導する $\mathfrak{o}(\sigma,q,\psi)\in \mathrm{Ext}^1_{X_{A'}}(K, I\otimes_k F_0)$ が消えていることと同値である．この $\mathfrak{o}(\sigma,q,\psi)$ を**障害類**という．今, $I\mathfrak{m}_{A'}=0$ で, K が A-平坦なので, $\mathrm{Ext}^1_{X_{A'}}(K, I\otimes_k F_0)=\mathrm{Ext}^1_{X_s}(K_0,F_0)\otimes_k I$ となる．以上をまとめると, 以下の補題を得る:

Lemma 2.2.1. *上の状況において, q の拡大 q' が存在する必要十分条件は, 障害類 $\mathfrak{o}(\sigma,q,\psi)\in \mathrm{Ext}^1_{X_s}(K_0,F_0)\otimes_k I$ が消えることと同値である．さらに, これが消える時, とりうる拡大 q' の同型類は $\mathrm{Hom}_{X_s}(K_0,F_0)$ によってパラメトライズされる.*

proof. 前半は明らか．後半については, q' と分裂 $K\to B$ の対応から出る. □

$A=k$, $A'=k[\epsilon]$ の場合に上の議論を適用すると, 以下の命題を得る:

Proposition 2.2.3. *$f: X\to S$ を k 上有限型スキームの間の射影的射として, $\mathcal{O}_X(1)$ を f-豊富な直線束とする．E を S-平坦な $\mathcal{O}_X$-加群として, $P\in\mathbb{Q}[t]$ とする．$\pi: Q=\mathrm{Quot}^P_{E/X/S}\to S$ を対応する相対 Quot スキームとする．$s\in S$ として, $q_0\in\pi^{-1}(s)$ を商 $E_s\to F$ に対応する k-有理点として, その核を K とすると, 以下の短完全列を得る:*

$$0\to \mathrm{Hom}_{X_s}(K,F)\to T_{q_0}Q\overset{d\pi}{\to}T_sS\overset{\mathfrak{o}}{\to}\mathrm{Ext}^1_{X_s}(K,F)$$

□

また, 以下のような次元の評価も知られている:

Proposition 2.2.4. *X を k 上射影的スキームとして, E を X 上の連接層とする．$[q: E\to F]\in\mathrm{Quot}(E,P)$ を, k-有理点として, $K=\mathrm{Ker}(q)$ とする．この時,*

$$\hom(K,F)\geq \dim_{[q]}\mathrm{Quot}(E,P)\geq \hom(K,F)-\mathrm{ext}^1(K,F)$$

が成立する．さらに, 二つ目の不等号が等号になるならば, $\mathrm{Quot}(E,P)$ は $[q]$ で局所完全交叉であり, $\mathrm{ext}^1(K,F)=0$ ならば, $\mathrm{Quot}(E,P)$ は $[q]$ で平滑である.

proof. 上からの評価は明らか．下からの評価は後で示す．さらに, $\mathrm{ext}^1(K,F)=0$ ならば, 定理 2.2.2 から $\mathrm{Quot}(E,P)$ は $[q]$ で平滑になることもわかる. □

Corollary 2.2.2. F', F'' を種数 g の非特異射影曲線 C 上の階数 $r', r'' > 0$, 傾き μ', μ'' のベクトル束とする．この時, $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ を連接層の拡大で, 対応する $\Sigma := \mathrm{Quot}^{P(F'')}_{F/C/k}$ の点を s とする．この時,

$$\dim_s \Sigma \geq \hom(F', F'') - \mathrm{ext}^1(F', F'') =: \chi(F', F'') = r'r''(\mu'' - \mu' + 1 - g)$$

となる．

proof. 最後の式はスペクトル系列 $E_2^{p,q} = H^p(C, \mathcal{E}xt^q_C(F', F'')) \implies \mathrm{Ext}^{p+q}(F', F'')$ からわかる． □

2.3. **相対 HNF.** 本節では, 上で構成した Quot スキームの存在性の応用として, 連接層のいくつかの性質の開であることを示し, 最後に HNF の相対化をして終わろうと思う．

Proposition 2.3.1. 以下の連接層の性質は開である*:* 単純, 純, 半安定, 幾何学的安定

proof. $f : X \to S$ を Noether スキームの間の射影的射として, $\mathcal{O}_X(1)$ を f に関して非常に豊富な直線束とする．F を X 上の連接層で, S 上平坦なものとする．連接層に関する主張 $\mathbf{P}$ について, $\{s \in S \mid F_s$が $\mathbf{P}$ を満たす $\}$ が開になることを示す．単純性については, 相対 Ext 層の階数の半連続性から明らか．集合 A を, 次数 d の多項式 $P' \in \mathbb{Q}[t]$ で, $\hat{\mu}(P') \leq \hat{\mu}(P)$ で, ある S の幾何学的点 s および純な商 $F_s \to F'$ が存在して, $P' = P(F')$ となるような P' 全体の集合とする．補題 1.7.1 より, A は有限集合である．A の部分集合 A_1 を, $P' \in A$ で, $\deg(P') = d$ で, $\deg(P - P') \leq d - 1$ となるもの全体のなす集合として, A_2 を, $P' \in A$ で, $p' < p$ となるもの全体として, A_3 を, $P' \in A$ で, $p' \leq p$ かつ $P' < P$ となるもの全体のなす集合とする．$P' \in A_1$ に対応する商 $F_s \to F''$ は, F_s をその非自明な捩れで割っているものになっているので, F_s は純にならない．逆も成立するので, F の純でないファイバーが存在する s 全体は $Q_1 = \coprod_{P' \in A_1} \mathrm{Quot}^{P'}_{F/X/S} \to S$ の像である．Q_1 は S 上射影的で, A_1 は有限集合なので, その像は S の閉集合である．したがって, 純性は開な性質であるあなる節句種．A_2 に対応するのが半安定でないファイバーで, A_3 に対応するのが幾何学的安定でないファイバーであり, これらも同様に開であることが示される． □

次に, HNF の相対化である以下の定理を示す:

Theorem 2.3.1. S を k 上有限型な整スキームとする．$f : X \to S$ を射影的射として, $\mathcal{O}_X(1)$ を X 上の f に関して豊富な可逆層とする．F を S 上平坦な連接層で, 各ファイバーが d 次元であるとする．この時, 射影的双有理射 $g : T \to S$ と, フィルトレーション

$$0 = \mathrm{HN}_0(F) \subset \mathrm{HN}_1(F) \subset \mathrm{HN}_2(F) \subset \cdots \subset \mathrm{HN}_l(F) = F_T$$

が存在して, 以下を満たす*:*

(1) 各因子 $\mathrm{HN}_i(F)/\mathrm{HN}_{i-1}(F)$ は T 上平坦である．
(2) ある稠密開集合 $U \subset T$ が存在して, 任意の $t \in U$ について, $\mathrm{HN}_\star(F)_t = g_X^*\mathrm{HN}(F_{g(t)})$ が成立する．

さらに, $(g, \mathrm{HN}_\star(F))$ は以下の意味で普遍的である*:* $g' : T' \to S$ を整スキームの支配的な有理射として, $F'_\star$ を F'_T のフィルトレーションで, 上の二つの条件を満たすものとすると, ある S 上の射 $h : T' \to T$ が存在して, $F'_\star = h_X^*\mathrm{HN}_\star(F)$ となる．

Definition 2.3.1. このフィルトレーションを F の**相対的 HNF** とよぶ．

proof. A を上の命題で示した多項式の集合とする．この時, $A_4 \subset A$ を, $P'' \in A$ で, $p'' \leq p$ となるもの全体のなす集合とする．$P'' \in A_4$ について, $S(P'')$ を, $\mathrm{Quot}^{P''}_{F/X/S} \to S$ の像とすると, S は集合論的に $S(P'')$, $(P'' \in A_4)$ によって被覆される．S は既約なので, ある $P'' \in A_4$ が存在して, $S(P'') = S$ となる．$S(P'') = S$ と満たす $P'' \in A_4$ 全体の中で, A_4 に入る以下の順序 $\preceq$ において最小のものを P_- とする: $P_1 \preceq P_2$ であるとは, $p_1 \leq p_2$ であり, かつ $p_1 = p_2$ ならば $P_1 \geq P_2$ となることである．この時,

$$\bigcup_{P'' \in A_4, P'' \preceq P_-} S(P'')$$

は S の真の閉部分スキームになる．V をその補集合としよう．$\pi : Q(P_-) \to S$ を構造射とすると, P_- の定義から π は全射である．任意の $s \in S$ について, π の s でのファイバーは F_s の商で, Hilbert 多項式が P_- になるようなもの全体をパラメトライズしている．しかし, $s \in V$ ならば, この商の核はまさに F_s の極大脱安定化部分層である．, $U := \pi^{-1}(V)$ として, $\pi : U \to V$ は全単射で, 任意の $t \in U$ について, $k(t) = k(\pi(s))$ である．また, 前節の最後の結果から, $s \in V$ について, $0 \to F'_s \to F_s \to F''_s \to 0$ を, F_s の極小脱安定化商に対応する完全列とすると, $\mathrm{Hom}(F'_s, F''_s) = 0$ なので, π のファイバーの Zariski 接空間は 0 である．したがって, $\Omega_{U/V} = 0$ であることがわかり, Zariski の主定理から, $\pi|_U$ は同型射である．T を U の $Q(P_-)$ での閉包とすると, $U \subset T$ は T の開部分スキームで, $f := \pi|_T : T \to S$ は射影的双有理射である．$g' : T' \to S$ を整スキームの間の支配的射で, $F_{T'} \to G$ を, 任意の $t \in T'$ で, $P(G_t) = P_-$ となるような商とすると, $Q(P_-)$ の普遍性から, g' はある $h : T' \to Q(P_-)$ を介する．この像は既約かつ被約で U を含むので, T に含まれる．したがって, $\pi \circ h|_{g'^{-1}V} = g'|_{g'^{-1}V}$ がわかる．

これを普遍商について繰り返し行うと, 定理の主張が得られる． □

2.4. **Langton Theory.** 本節では, Quot スキームの応用として, Langton による半安定層の Moduli のコンパクト性に関する以下の定理を示す:

Theorem 2.4.1 (Langton)**.** *k を代数閉体, $(R, \mathfrak{m} = (\pi))$ を k 上の DVR で, 剰余体が k となるものとして, R の商体を K とおく．また, X を k 上の平滑な射影代数多様体として, X 上の豊富な直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ を固定する．F を R-平坦な X_R 上の d-次元の連接層として, F_K がある $d' < d$ について, $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X_K)$ で半安定であるとする．この時, F の部分層 E で, E_k が $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ で半安定であるようなものが存在する．*

proof. $d > \delta \geq d'$ について, F_k が $\mathrm{Coh}_{d,\delta+1}(X)$ で半安定であると仮定して, $E \subset F$ で, E_k が $\mathrm{Coh}_{d,\delta}(X)$ で半安定であるようなものが存在することを示せば良い．

これが偽であると仮定して矛盾を導く．この時, F の部分層の下降列 $F = F^0 \supset F^1 \supset \dots$ で, 任意の $n \geq 0$ について, $F^n_K = F_K$ で, さらに F^n_k は $\mathrm{Coh}_{d,\delta}(X)$ で不安定なものが以下のようにして取れる: F^n までが定義されたとする．この時, $B^n \subset F^n_k$ を極大脱安定化部分層として, $G^n := F^n/B^n$ とする．F^{n+1} を, $F^n \to F^n_k \to G^n$ の核とすると, F^{n+1} は R-平坦な加群の部分加群なので R-平坦で, 完全列

$$0 \to B^n \to F^n_k \to G^n \to 0 \quad 0 \to G^n \to F^{n+1}_k \to B^n \to 0$$

を得る．ここで, 二つ目の完全列は, F^{n+1} の定義から得られる完全列 $0 \to F^{n+1} \to F^n \to G^n \to 0$ に k をテンソルすると得られる．

$C^n = B^{n+1} \cap G^n$ としよう．$C^n \neq 0$ ならば, $p(G^n) < p(B^n) \pmod{\mathbb{Q}[t]_{\delta-1}}$ なので,

$$p(C^n) \leq p_{\max}(G^n) < p(F^{n+1}_k) \leq p(B^{n+1}) \pmod{\mathbb{Q}[t]_{\delta-1}}$$

がわかる．したがって, どのみち B^{n+1}/C^n は B^n の部分加群に同型で, $p_{d,\delta}(B^{n+1}) \leq p_{d,\delta}(B^{n+1}/C^n) \leq p_{d,\delta}(B^n)$ となり, 等号成立は $C^n = 0$ の時のみであることがわか

る．今，F_k が $\mathrm{Coh}_{d,\delta+1}$ で半安定なので，任意の n で，$p_{d,\delta+1}(B^n) = p_{d,\delta+1}(F_k) = p_{d,\delta+1}(G^n)$ となる．したがって，$p_{d,\delta}(B^n) - p_{d,\delta}(F_k) = \beta_n \cdot T^\delta \pmod{\mathbb{Q}[t]_{\delta-1}}$ とおける．β_n は正の有理数の現象列で，そのとりうる値は離散的なので，必ず停留する．したがって，十分大きな n については，$C^n = 0$ となる．つまり，ある n_0 が存在して，$n \geq n_0$ ならば $B^{n+1} \subset B^n$ および $G^n \subset G^{n+1}$ が成立し，$P(B^n) = P(B^{n+1}) = \cdots \pmod{\mathbb{Q}[t]_{\delta-1}}$，$P(G^n) = P(G^{n+1}) = \cdots \pmod{\mathbb{Q}[t]_{\delta-1}}$ が成り立つ．今，$G^{n_0} \subset G^{n_0+1} \subset \cdots$ は純 d 次元の層の上昇列で，$\delta \leq d-1$ 次元以上では同型なので，これらの反射閉包 $(G^n)^{DD}$ はすべて等しい．したがって，これはある反射的連接層の部分層の上昇列と見做せるので，ある $n_1 \geq n_0$ が存在して，$n \geq n_1$ ならば $G^n = G^{n+1}$ となる．n を n_0 から初めて (F も取り替えてしまって) 任意の $n \geq 0$ でこれが成立するとしてしまって良い．この時，上の完全列は分裂し，任意の $n \geq 0$ について，$B^n = B$，$G^n = G$，$F_k^n = B \oplus G$ となる．$Q_k^n = F/F^n$ とすると，Q^n は $F/\pi^n F$ の商になっており，補題 B.0.1 より，これは R/π^n 上平坦である．完全列 $0 \to G \to Q^{n+1} \to Q^n \to 0$ より，このファイバー上の Hilbert 多項式はすべて等しく，$P(Q_k^1) = P(G)$ となることがわかる．したがって，任意の $n \geq 0$ について，$\sigma : \mathrm{Quot}^{P(G)}_{F/X_R/R} \to \mathrm{Spec}(R)$ の像は $\mathrm{Spec}(R/\pi^n R)$ を含み，したがってこれは全射である．つまりある K の拡大体 K' が存在して，$F_{K'}$ は脱安定化商をもち，すなわち半安定ではなくなる．しかしこれは仮定に矛盾する． $\square$

Appendix A. 反射的層

[2] では，反射的連接層を X が非特異 (あるいは Gorenstein) 射影多様体の時のみに定義しており，標準的な射 $\theta : E \to E^{DD} := \mathcal{E}xt^c(\mathcal{E}xt^c(E, \omega_X), \omega_X)$ が同型であるとしている ($c = \mathrm{codim} E$)．この定義は codim が高い時は確かに有用であるが，X が少しでも特異点をもつと大変である．そこで，捩れなし連接層の場合に限り，本 PDF では以下の定義を採用することにする (これが X が Gorenstein の場合に一致することは明らかである)．なお，本節は [1] を参考にして議論している．

Definition A.0.1. X をスキームとして，$E \in \mathrm{Coh}(X)$ を捩れなしの連接層とする．この時，E が反射的であるとは，標準的な射 $E \to E^{\vee\vee} := \mathcal{H}om(\mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$ が同型であることと定める．

Lemma A.0.1. *X を整な Noether スキームとする．$F \in \mathrm{Coh}(X)$ を捩れなしの連接層とする．この時，以下は同値である．*

(1) F が反射的である
(2) 任意の $x \in X$ について，x の開近傍 U がおよび U 上の局所自由な連接層 E と捩れなしの連接層 G が存在して，$F|_U$ がある $\phi : E \to G$ の核と同型である

proof. F が反射的であるとする．$F^\vee \in \mathrm{Coh}(X)$ なので，任意の $x \in X$ について，x の開近傍 U がおよび U 上の局所自由な連接層 E_1, E_2 が存在して，

$$E_2 \to E_1 \to F^\vee|_U \to 0$$

が完全になる．この双対をとると，完全列

$$0 \to F|_U \to E_1^\vee \to E_2^\vee$$

ができる．$E_1^{\vee\vee} =: E$ として，$E \to E_2^{\vee\vee}$ の像を G とすると，G は局所自由層の部分層なので捩れなしである．よって，(1) $\Longrightarrow$ (2) が分かった．

次に，(2) を仮定する．問題は局所的なので，F はある局所自由層 E から捩れなしの連接層 G への射の核になるとして良い．つまり，以下の完全列がある．

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

この二重双対を取って, E は局所自由なので, 特に反射的であることに注意すると, $F^{\vee\vee} \to E$ がとれるが, X の生成点 η では F_η は有限次元 $\kappa(\eta)$-線型空間なので, $F_\eta^{\vee\vee} = F_\eta$ となっているため, $F_\eta^{\vee\vee} \to E_\eta$ は単射である. したがってその核は捩れ層になっているが, $F^{\vee\vee}$ は捩れなしなので, これは単射であることがわかる. F は捩れなしなので, $F \subset F^{\vee\vee}$ となるが, この包含によって全射 $G \to \mathrm{Cok}(F^{\vee\vee} \to E)$ ができる. これも生成点では同型になっており, G は捩れなしであったことから, この射は同型である. よって, $F \cong F^{\vee\vee}$ がわかる. □

Corollary A.0.1. *X を整な Noether スキーム, E を X 上の局所自由な連接層とした時, E の飽和な部分層は反射的になる.* □

Proposition A.0.1. *X を整な Noether スキーム, $F \in \mathrm{Coh}(X)$ を捩れなし (この仮定はいらない) とする. この時, $F^\vee$ は反射的である.*

proof. F は局所自由な連接層 E_1, E_2 の間の射 $E_2 \to E_1$ の余核になっているとして良い. すると, その双対を取って, 完全列

$$0 \to F^\vee \to E_1^\vee \to E_2^\vee$$

を得るが, $E_1^\vee \to E_2^\vee$ の像は捩れなしである. よって, 補題 A.0.1 から, $F^\vee$ は反射的であることがわかる. □

Theorem A.0.1. *X を正規かつ整な Noether スキームとして, $F \in \mathrm{Coh}(X)$ を捩れなしとする. この時, 以下は同値*

(1) *F が反射的である.*
(2) *F は S_2 条件を満たす. つまり, 任意の $x \in X$ について, $\mathrm{depth}(F_x) \geq \min\{2, \dim(\mathcal{O}_{X,x})\}$ となる.*

proof. F を反射的とする. F は局所自由連接層 E と, 捩れなし連接層 G の間の全射 $F \to G$ の核になっているとして良い. つまり, 以下の完全列がある

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

$x \in X$ を余次元 2 以上の点とする. この時, $\mathrm{depth}(G_x) \geq 1$ であり, X は正規なので $\mathrm{depth}(\mathcal{O}_{X,x}) \geq 2$ となるので, $\mathrm{depth}(E_x) \geq 2$ である. よって, $\mathrm{depth}(F_x) \geq 2$ が分かった. よって, (1) $\Longrightarrow$ (2) が示された.

次に, (2) を仮定する. F は捩れなし (これは仮定からも (2) からも従う) なので, $F \to F^{\vee\vee}$ は単射. その余核を G とおく.

$$0 \to F \to F^{\vee\vee} \to G \to 0$$

$x \in X$ を余次元 1 の点とすると, X は正規なので, $\mathcal{O}_{X,x}$ は離散賦値環である. よって, F_x は自由であり, $F_x \cong F_x^{\vee\vee}$ となる. つまり $G_x = 0$ となる. よって, G の台は余次元 2 以上である. $x \in \mathrm{Ass}(G)$ をとると, これは余次元 2 以上の点であり, $\mathrm{depth}(G_x) = 0$ となる. 命題 A.0.1 より, $F^{\vee\vee}$ は反射的なので, 上に示したことから $\mathrm{depth}(F_x^{\vee\vee}) \geq 2$. よって, $\mathrm{depth}(F_x) = 1$ とならなければならないが, これは仮定に反する. □

Theorem A.0.2. *E を正規かつ整な Noether スキーム X 上の捩れなし連接層とする. この時, 以下は同値である:*

(1) *E が反射的 (すなわち $E \to E^{\vee\vee}$ は同型) である*
(2) *任意の開集合 $U \subset X$ と X の $\mathrm{codim}_X Y \geq 2$ なる閉集合 Y について. 制限写像 $E(U) \to E(U - Y)$ は同型である.*
(3) *任意の余次元 2 以上の閉集合 $Y \subset X$ について, $\mathcal{H}^1_Y(E) = 0$*

proof. 今, E は捩れなしであることから, $\mathcal{H}^0_Y(E)=0$ が出ることに注意. Y を $\mathrm{codim}_X Y \geq 2$ となる X の閉集合として, $j : X-Y \to X$ を開埋め込みとする. 完全列

$$0 \to \mathcal{H}^0_Y(E) \to E \to j_*j^*E \to \mathcal{H}^1_Y(E) \to 0$$

によって, $E \cong j_*j^*E$ であることと, $(\mathcal{H}^0(E)=)\mathcal{H}^1(E)=0$ となることが同値であることがわかる. よって, (2) $\Longleftrightarrow$ (3) が分かった. (1) を仮定する. この時, 定理 A.0.1 から, 任意の余次元 2 以上の点 $x \in X$ について, $\mathrm{depth}(E_x) \geq 2$, つまり $\mathcal{H}^0_x(E)=\mathcal{H}^1_x(E)=0$ となる. よって, 任意の開集合 U について, $E(U) \cong E(U-\bar{x})$ が成立する. さて, $Y = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ を既約分解として, n に関する帰納法で, $E(U) \to E(U-Y)$ が同型であることを示す. $n=1$ の場合は上に示した. $n-1$ の時主張が成立するとすると, $E(U) \to E(U-(X_1 \cup \cdots \cup X_{n-1}))$ が同型で, $E(U-(X_1 \cup \cdots \cup X_{n-1})) \to E(U-Y)$ も同型になるので, $E(U) \to E(U-Y)$ は同型になる. したがって, (2) が示された. (2) を仮定すると, 任意の余次元 2 以上の $x \in X$ について, $\mathcal{H}^0_x(E)=\mathcal{H}^1_x(E)=0$ となるので, E は反射的であることがわかる. □

Proposition A.0.2. *X を整スキームとして, P を準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群とする. Q_1, Q_2 を P の捩れなしの商で, Q_1 と Q_2 は X の非空な開集合 U 上で $P|_U$ の商として同型であるとする. この時, Q_1 と Q_2 は同型である.*

proof. $K_i = \mathrm{Ker}(P \to Q_i)$ として, $K = K_1 + K_2 \subset P$ とする. 仮定から, $K|_U = K_i|_U$ が成立する. しかし, $K/K_i \subset Q_i$ は捩れなしなので, これが U で消えていることから $K = K_i$ が成立する. □

Appendix B. 平坦性に関する幾つかの定理

Theorem B.0.1. *$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環, B を Noether 的 A 代数, I を A のイデアルで, $IB \subset Jac(B)$ となるものとする. 有限生成 B 加群の完全列*

$$M' \to M \to M'' \to 0$$

が以下の性質を満たすとする:

(1) *M は A-平坦で, $M'' \otimes_A A/I$ は A/I-平坦である.*
(2) *$u \otimes_A (A/I) : M' \otimes_A A/I \to M \otimes_A A/I$ は単射である.*

この時, M'' は平坦 A 加群で, u は単射である.

proof. $n > 0$ として, N を $I^nN = 0$ となる A-加群とする. この時, $u \otimes_A N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ は単射になることを n に関する帰納法で示す.

1. $n=1$ の時, N は A/I 加群と見れる. (2) の仮定から, 短完全列

$$0 \to M'/IM' \to M/IM \to M''/IM'' \to 0$$

があり, (1) の仮定から, M''/IM'' は A/I-平坦なので,

$$M' \otimes_A N = M'/IM' \otimes_{A/I} N \to M/IM \otimes_{A/I} N = M \otimes_A N$$

は単射.

2. $m \geq 1$ として, $n < m$ の場合に主張が示されているとする. A-加群 N を, $I^mN = 0$ となるものとする. 短完全列

$$0 \to IN \to N \to N/IN \to 0$$

を考えて, M は A-平坦であることから, 以下の完全可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} & M' \otimes_A (IN) \arrow[r] \arrow[d] & M' \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d] & M' \otimes_A (N/IN) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \otimes_A (IN) \arrow[r] & M \otimes_A N \arrow[r] & M \otimes_A (N/IN) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

蛇の補題から, 完全列

$$\mathrm{Ker}(u \otimes_A (IN)) \to \mathrm{Ker}(u \otimes_A N) \to \mathrm{Ker}(u \otimes_A (N/IN))$$

を得るが, 帰納法の仮定から, この両サイドは0である. したがって, $\mathrm{Ker}(u \otimes_A N) = 0$ がわかる.

N を有限 A 加群とする, $x \in \mathrm{Ker}(u \otimes_A N)$ について, 上に示したことから, 任意の $k \geq 0$ について, $\bar{x} \in M' \otimes_A (N/I^k N) = (M' \otimes_A N)/I^k(M' \otimes_A N)$ は 0 になることがわかる. つまり,

$$x \in \bigcap_{k \geq 0} I^k(M' \otimes_A N)$$

今, $M' \otimes_A N$ は有限 B 加群で, $I^k(M' \otimes_A N) = (IB)^k(M' \otimes_A N)$ なので, Krull の交叉定理から, これは 0 になる. つまり, $u \otimes_A N$ は単射であることが分かった.

$N = A$ としてこれを適用すると, u が単射であることがわかる. さらに, M の平坦性から, 任意の有限 A 加群 N について, $\mathrm{Tor}_1^A(M'', N) = 0$ がわかるので, M'' は A-平坦であることも分かった. □

Lemma B.0.1. *A を可換環として, $I \subset A$ をを冪零イデアルとする. A 加群 M について, 以下は同値である:*

(1) *M が平坦である.*
(2) *M/IM が A/I 上平坦であり, さらに $I \otimes_A M \to M$ が単射である.*

proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) は明らか. (2) を仮定する. 任意の加群 N について, $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ を示せば良い. 完全列

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

について, $I \otimes M \to M$ が単射で, $\mathrm{Tor}_1^A(A, M) = 0$ なので, $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ を得ることに注意. I は冪零なので, $I^k N = 0$ となる k が存在する. この k に関する帰納法で示す. $k = 1$ の時, N は A/I-加群でもある. したがって, N の生成元をとって, 短完全列

$$0 \to K \to (A/I)^{\oplus I} \to N \to 0$$

を得る. これに $\otimes_A M$ して, $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, M) = 0$ を用いると,

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \to K \otimes_A M \to (M/IM)^{\oplus I} \to M \otimes_A N \to 0$$

を得るが, K および N は I で消えるので, $K \otimes_A M = K \otimes_{A/I} (M/IM)$, $M \otimes_A N = (M/IM) \otimes_{A/I} N$ が成り立ち, M/IM が A/I 上平坦なので,

$$0 \to\to K \otimes_A M \to (M/IM)^{\oplus I} \to M \otimes_A N \to 0$$

は完全であることがわかる. したがって, $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ がわかった. $r > 1$ として, $I^k N = 0$ がある $k < r$ で成立する加群 N については $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ が示されているとする. この時, N を $I^r N = 0$ となる A 加群として, 完全列

$$0 \to IN \to N \to N/IN \to 0$$

を考えると, 帰納法の過程から, $\mathrm{Tor}_1^A(M, IN) = \mathrm{Tor}_1^A(M, N/IN) = 0$ がわかるので, $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ が帰結される. したがって, (2) $\Longrightarrow$ (1) が示された. □

Appendix C. flattening stratification

$f : X \to S$ を Noether スキームの間の射影的射として, $\mathcal{O}(1)$ を X 上の可逆層で, f に関して非常に豊富なものとする. この時, F が S 上平坦であることと, 十分大きな $m > 0$ で, $f_*F(m)$ が局所自由であることは同値で, F が S 上平坦ならば $s \mapsto P(F_s)$ は局所定数で, S が被約ならばその逆も成立することが知られている. そこで, 一般の F について, F を平坦にする普遍的な局所閉集合による stratification が取れることを示す:

Theorem C.0.1. *$f : X \to S$ を Noether スキームの間の射影的射として, $\mathcal{O}(1)$ を X 上の可逆層で, f に関して非常に豊富なものとする. この時, X 上の連接層 F について, $\mathcal{P}_F := \{P(F_s) \mid s \in S\}$ は有限集合であり, $P \in \mathcal{P}$ で添字付けられた局所閉な部分スキーム $S_P \subset S$ たちで, 以下を満たすものが取れる:*

(1) $j : \coprod_{P \in \mathcal{P}} S_P \to S$ は全単射である.
(2) $g : S' \to S$ を Noether スキームの間の射とした時, $g_X^* F$ が S' 上平坦であることと, g が j を経由することは同値である.

まず, 以下の補題を示す:

Lemma C.0.1. *上の定理の仮定のもと, 有限個の互いに交わらない S の局所閉集合 S_i たちで, F_{S_i} は S_i 上平坦なものが取れる.*

proof. S の空でない開部分スキーム U で, F が U_{red} 上で平坦なものが存在することを示せば良い. これは X, S に関して局所的なので, X, S は affine としてしまって良い. $S = \mathrm{Spec}(A)$. $X = \mathrm{Spec}(B)$ で, A は Noether 整域, B は有限生成 A-代数で, $A \to B$ は単射としてしまって良い. K を A の商体として, $F = \tilde{M}$ (M は有限 B 加群) とする. M は有限 B 加群なので, M のフィルトレーション $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ で, $M_i/M_{i-1} = B/p_i$, ($p_i \in \mathrm{Spec}(B)$) となるものが取れる. n に関する帰納法で主張を示す. $n \geq 2$ について, $n-1$ までで示されていたとすると, M_{n-1} および B/p_n は A 上平坦の場合に帰着されるので, 短完全列 $0 \to M_{n-1} \to M \to B/p_n \to 0$ から, M も A 上平坦であることがわかる. したがって, $n = 1$ の場合のみ示せば良い. $p_1 \cap A \neq 0$ ならば, $f \in p_1 \cap A$ について, $M_f = 0$ となるので OK. よって, B を B/p_1 で置き換えて, $A \to B$ は単射で, かつ $M = B$ は Noether 整域として良い. Noether の正規化定理から, $b_1, \ldots, b_r \in B$ で, $K \otimes_A B$ が多項式環 $K[b_1, \ldots, b_r]$ 上有限加群であるように取れる. $m_1, \ldots, m_s \in B$ をその生成系とすると, B の A-代数としての生成系 $z_1, \ldots, z_t$ は m_i たちの $K[b_1, \ldots, b_r]$-線型結合で書ける. ここに現れてくる K の元の "分母" の積を f とすると, $M_f = B_f$ はまた $A_f[b_1, \ldots, b_r]$ 上の有限加群であることがわかる. つまり, M は有限 B 加群, B は A 上の多項式環の場合に帰着される. 再び M の filtration の長さによる帰納法で, $M = B$, B は A 上の多項式環の場合に帰着され, この場合は明らかである. □

proof of theoremC.0.1. $\Gamma_* F := \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma_m F = \bigoplus_{m \geq 0} f_* F(m)$ とする. $i_0 : S_0 := \coprod_i S_i \to S$ を上の補題で得た射とすると, ある $m_0 \geq 0$ が存在して, $m \geq m_0$ ならば, $i_0^* \Gamma_m F = \Gamma_m(i_0^* F)$ となる. さらに, $i_{0,X}^* F$ は S_0 上平坦なので, m_0 をより大きく取り替えることで, $m \geq m_0$ について, 任意の $s \in S$ について,

(1) $H^i(F_s(m)) = 0$ $(i > 0)$
(2) $H^0(F_s(m)) = \Gamma_m(i_{0,X}^* F)(s) = i_0^* \Gamma_m(F)(s) = \Gamma_m(F)(s)$

となる. ここで, $g : S' \to S$ を Noether スキームの間の射とした時, $g_X^* F$ が S' 上平坦であることと, 十分大きな m で, $g^* \Gamma_m F$ が局所自由であることが同値であることに注意して, $m \geq m_0$ について, S の局所閉部分スキーム $S_{m,r}$ たちを, 以下のようにとることを考える:

(1) 自然な射 $j_m : \coprod_r S_{m,r} \to S$ は全単射である.
(2) $\Gamma_m(F)|_{S_{m,r}}$ は階数 r の局所自由層である.
(3) $g : S' \to S$ が j_m を介することと, $g^*\Gamma_m(F)$ が局所自由であることが同値である.

集合論的には, $S_{m,r} = \{s \in S \mid \dim_{k(s)} \Gamma_m(F)(s) = r\}$ となる. この $S_{m,r}$ にスキームの構造を入れたい. $s \in S_{m,r}$ をとる. U を s の S における十分小さい開近傍とすると, 表示

$$\mathcal{O}_U^{r'} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_U^{r} \to \Gamma_m(F)|_U \to 0$$

を作れる. A の行列成分の生成するイデアルは, この表示によらず, このイデアルに対応する U の閉部分スキーム $S_{m,r,U}$ の台は $U \cap S_{m,r}$ であり, これは以下のような普遍性を持つ: $g : U' \to U$ を Noether スキームの間の射とすると, g が $S_{m,r,U} \to U$ を介することと, $g^*\Gamma_m(F)$ が局所自由であることは同値である. したがって, これを貼り合わせて $S_{m,r}$ に S の部分スキームとしての構造が入る.

さて, $g : S' \to S$ を Noether スキームの間の射として, $g_X^* F$ が S' 上平坦で, 各ファイバーの Hilbert 多項式は P であったとする. この時, $m \geq m_0$ について, $g^*\Gamma_m(F)$ は階数 $P(m)$ の局所自由層になっている. ここで, $P \in \mathcal{P}$ について, 集合 $S_P \subset S$ を,

$$S_P := \{s \in S \mid P(F_s) = P\} = \bigcap_{m \geq m_0} S_{m,P(m)}$$

と定める. S_P の最初の表示と先に示した補題から, S_P は S の局所閉集合の非交和になることがわかり, 2 つ目の表示と S の Noether 性から, この交叉は (スキームとして考えても) 有限個の部分スキームの交叉であることがわかる. S_P の 2 つ目の表示から誘導されるスキームの構造を入れると, $\{S_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ は定理の主張を満たす stratification になっていることがわかる. $\square$

References

[1] Robin Hartshorne. Stable reflexive sheaves. *Mathematische Annalen*, Vol. 254, pp. 121–176, 1980.

[2] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2 edition, 2010.

[3] Maruyama Masaki. *Moduli Spaces of Stable Sheaves on Schemes*. MSJ Momoirs. 2016.

[4] The Stacks project authors. The stacks project. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2025.