幾何学特論 I レポート

0500-33-1052 羽田洋平

Abstract. レポート問題「授業中に紹介した定理の中で、自分が重要と考えるものの正確な主張とその証明を記述してください。」について, 私が重要と考えた, L^2-de Rham の定理の正確な主張および証明を与える. 証明は授業のほかに, [1] を参考にした.

1. 主張

(M,g) を n 次元コンパクト Riemann 多様体, $X=\widetilde{M}$ をその普遍被覆とする. この時, $\pi_1(M)$ が $X\to M$ のデッキ変換群である. X には g から誘導される Riemann 計量が入るが, それも g と書くことにする. X 上に誘導された Riemann 計量は完備であり, X に完備 Riemann 計量 g が定義されれば Λ^*T^*X に計量が入り, これによって $A^*(X):=\bigoplus_p A^p(X)$ に L^2-内積が定義され, X 上の余微分作用素 $\delta : A^*(X)\to A^*(X)$ や Laplace-Bertrami 作用素 $\Delta : A^*(X)\to A^*(X)$ が定まる. X の (簡約)L^2-de Rham コホモロジー $\overline{H}^*_{(2)}(X)$ は,

$$\overline{H}^p_{(2)}(X)=\frac{\mathrm{Ker}(d:W^1(X,\Lambda^p)\to L^2(X,\Lambda^{p+1}))}{\overline{\mathrm{Im}(d:W^1(X,\Lambda^{p-1})\to L^2(X,\Lambda^p))}}$$

と定める. ここで, $\mathcal{H}^p:=\{\omega\in L^2(X,\Lambda^p);\Delta\omega=0\}$ とおくと, Hodge-小平分解

$$L^2(X,\Lambda^p)=\overline{\mathrm{Im}(d:W^1(X,\Lambda^{p-1})\to L^2(X,\Lambda^p))}\oplus\mathcal{H}^p\oplus\overline{\mathrm{Im}(\delta:W^1(X,\Lambda^{p+1})\to L^2(X,\Lambda^p))}$$

が成立し, これによって Hodge の定理の類似 $\overline{H}^p_{(2)}(X)\cong\mathcal{H}^p$ が成立する.

一方で, M の単体分割 K を与えておくと, ここから X の単体分割 $\widetilde{K}$ が誘導される. ここで,

$$C^p_{(2)}(\widetilde{K}):=\left\{\sum_{\sigma\in\widetilde{K}_p}f_\sigma\cdot\sigma^* : {\scriptstyle f_\sigma\in\mathbb{R}, \atop \sum_\sigma|f_\sigma|^2<\infty}\right\}$$

とおく. ここで, $\widetilde{K}_p$ は K の向き付けられた p-単体のなす集合であり, $\sigma^*:\widetilde{K}_p\to\mathbb{R}$ は

$$\sigma^*(\iota)=\begin{cases}1 & (\iota=\sigma)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

で与えられる函数である.$C^p_{(2)}(\widetilde{K})$ には内積

$$\left\langle\sum_\sigma f_\sigma\sigma^*,\sum_\tau g_\tau\tau^*\right\rangle=\sum f_\sigma g_\sigma$$

が入り, この内積に関して (実)Hilbert 空間になる. この時 $\pi_1(M)$ は自然に $C^p_{(2)}(\widetilde{K})$ に作用し, この作用は等長写像である. さらに, Hilbert 空間の等長同型

$$C^p_{(2)}(\widetilde{K})\cong C^p(K)\otimes l^2(\pi_1(M))$$

があるので, $C^p_{(2)}(\widetilde{K})$ は Hilbert $\mathcal{N}(\pi_1(M))$-加群である.

$\partial : C_{p+1}(\widetilde{K}) \to C_p(\widetilde{K})$ を境界準同型とすると, $d_c : C^p_{(2)}(\widetilde{K}) \to C^{p+1}_{(2)}(\widetilde{K})$ を,

$$d_c(f)\sigma = f(\partial\sigma)$$

とおくことで, Hilbert $\mathcal{N}(\pi_1(M))$-複体 $(C^*_{(2)}(\widetilde{K}), d_c)$ を得る. この時, $\widetilde{K}$ の (簡約)L^2-単体コホモロジー $\overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})$ を,

$$\overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K}) = \frac{\mathrm{Ker}(d_c : C^p_{(2)}(\widetilde{K}) \to C^{p+1}_{(2)}(\widetilde{K}))}{\overline{\mathrm{Im}(d_c : C^{p-1}_{(2)}(\widetilde{K}) \to C^p_{(2)}(\widetilde{K}))}}$$

と定める. 実は $\overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})$ は M の単体分割 K に依らないことがわかる. この時以下の定理が成立する:

定理 1.1 (Dodziuk)**.**

$$\overline{H}^p_{(2)}(M) \cong \overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})$$

2. 定理の証明

まず, $\overline{H}^p_{(2)}(X) \to \overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})$ を構成する. $\omega \in W^k(X, \Lambda^p)$, $(k > n/2 + 1)$ について,

$$f(\omega) = \sum_{\sigma \in \widetilde{K}_p} \left(\int_{|\sigma|} \omega \right) \sigma^*$$

と定める. この時,

補題 2.1.

(1) $f(\omega) \in C^p_{(2)}(\widetilde{K})$ であり,

(2) $f : W^k(X, \Lambda^p) \to C^p_{(2)}(\widetilde{K})$ は連続線型写像である.

証明. $\widetilde{K}$ の取り方から, ある n_1 が存在して, 任意の $x \in X$ について, $x \in |\sigma|$ となる $\sigma \in \widetilde{K}_p$ は n_1 個以下になる. Sovolev の不等式より, ω は C^1 級であり, ある ω に依らない定数 $C_\sigma > 0$ が存在して,

$$\sup_{x \in |\sigma|} |\omega(x)| \leq C_\sigma(\|\omega\|_0 + \|\omega\|_{2k})$$

が成立する. よって,

$$\left(\int_{|\sigma|} \omega \right)^2 \leq (C_\sigma \mathrm{vol.}|\sigma|)^2 \cdot (\|\omega\|_0 + \|\omega\|_{2k})^2$$

となる. $\gamma \in \pi_1(M)$ について, $C_{\gamma.\sigma}\mathrm{vol.}|\gamma.\sigma| = C_\sigma \mathrm{vol.}|\sigma|$ となるので, 結局 X の基本領域の中の p 単体にわたったこの定数の最大値を C と置いたら,

$$\left(\sum_{\sigma \in \widetilde{K}_p} \left(\int_{|\sigma|} \omega \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n_1 C(\|\omega\|_0 + \|\omega\|_{2k}) \leq 2n_1 C \|\omega\|_{2k}$$

が成立する. □

ここで, Hodge 分解と同じ方法によって同型

$$\overline{H}^p_{(2)}(X) = \frac{\mathrm{Ker}(d : W^k(X, \Lambda^p) \to W^{k-1}(X, \Lambda^{p+1}))}{\overline{\mathrm{Im}(d : W^{k+1}(X, \Lambda^{p-1}) \to W^k(X, \Lambda^p))}}$$

がわかることと, 以下の補題によって, コホモロジーの射 $\int : \overline{H}^p_{(2)}(X) \to \overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})$ を得る:

補題 2.2.

$$f(\overline{d(W^{k+1}(X,\Lambda^{p-1}))})\subset\overline{B^p_{(2)}(\widetilde{K})}$$

証明. Stokes の定理より明らか. □

$\int:\overline{H}^p_{(2)}(X)\to\overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})$ が同型であることを示す. $v\in\widetilde{K}$ に対して, $U_v=\mathrm{St}(v)$ として, 局所有限な開被覆 $\{U_v\}$ を作る. この開被覆に従属する 1 の分割 $\{\rho_v\}$ で, 任意の $\gamma\in\pi_1(M)$ について, $\gamma^*\phi_v=\phi_{\gamma^{-1}v}$ となるものを取ってくる. この ϕ_v について, $W:C^p_{(2)}(\widetilde{K})\to A^p_0(X)$ を, $\sigma=[v_0,\dots,v_p]$ に対して,

$$W\sigma^*=\begin{cases}\phi_0 & (p=0)\\ p!\sum_{i=0}^p(-1)^i\phi_i d\phi_0\wedge\cdots\wedge d\check{\phi}_i\wedge\cdots\wedge d\phi_p & (p>0)\end{cases}\tag{1}$$

とおく. ここで, ϕ_{v_i} を ϕ_i と置いている. すると, W の像は滑らかな L^2 形式を与え, $dW=Wd_c$, $\int W=1_{C^p_{(2)}(X)}$ となる. 実際, $s\geq 0$ について, W は $\pi_1(M)$-同変なので, $\widetilde{K}_p$ の中の $\pi_1(M)$ 上の作用の同値類の代表元を一つずつ取ってきて $\sigma_1,\dots,\sigma_N$ とおくと,

$$\begin{aligned}f:=&\sum_{\sigma\in\widetilde{K}_p}f_\sigma\sigma^*\\=&\sum_{i=1}^N\sum_{\gamma\in\pi_1(M)}f_{\gamma^{-1}\sigma_i}\gamma^*W\sigma_i^*\end{aligned}$$

となる. $\gamma^*(1+\Delta)=(1+\Delta)\gamma^*$ で, 自然数 k について, $(1+\Delta)^k:W^{2k}\to W^0$ が連続な全単射を定めるので, Banach の逆写像定理から, ある $C>0$ が存在して,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{\gamma\in\pi_1(M)}f_{\gamma^{-1}\sigma_i}\gamma^*W\sigma_i^*\right\|_{2k}^2\leq&C\left\|\sum_\gamma f_{\gamma^{-1}\sigma_i}\gamma^*(1+\Delta)^kW\sigma_i^*\right\|_0\\\leq&C\|(1+\Delta)^k\|\sum_\gamma|f_{\gamma\sigma_i}|^2\|W\sigma_i^*\|_{2k}\\\leq&C\|(1+\Delta)^k\|\|f\|^2\|W\sigma_i^*\|_{2k}\end{aligned}$$

となる. よって, $W:C^p_{(2)}(\widetilde{K})\to W^{2k}(X,\Lambda^p)$ は連続である. 従って, W はコホモロジーの射 $W:\overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})\to\overline{H}^p_{(2)}(X)$ が定って, $\int W=1$ となる. よって, $\int$ は全射であることがわかった. 単射性を示すには, もう少し工夫が必要である.

K に対して, $\sigma:\Delta^n=\{(x_0,\dots,x_n)\colon\sum x_i=1,x_i\geq 0\}\to M$ を $\widetilde{K}$ の p-単体とする. この時, $v:=\sigma(1,0,\dots,0)$ として, p を Δ^n 上の x_0-成分への射影として, $f_v|_{|\sigma|}=p\circ\sigma^{-1}$ と定めると, f_v は U_v 上で張り合って, X 上に 0 で拡張することで $\phi_v:M\to\mathbb{R}$ をえる. 定義から $\gamma\in\pi_1(M)$ について, $\gamma^*\phi_v=\phi_{\gamma^{-1}v}$ で, 任意の $x\in X$ について

$$\sum_v\phi_v(x)=1$$

である. すると $\phi_v\in W^1(X)$ なので, この $\{\phi_v\}$ についても (1) のようにして $W_{\widetilde{K}}:C^p_{(2)}(\widetilde{K})\to W^0(X,\Lambda^p)$ を定めることができる. $W\sigma^*$ は W^0 の元ではあるが, 定義から $dW_{\widetilde{K}}\sigma^*$ は L^2 に入っていることがわかり, この意味で $dW_{\widetilde{K}}=W_{\widetilde{K}}d_c$ である. さらに $W_{\widetilde{K}}$ が連続な $\pi_1(M)$-同変写像であることもすぐにわかる. この W について, 以下の補題が成立する:

補題 2.3. 任意の $\epsilon > 0$ と $s \geq \frac{n}{2}+1$, $\omega \in W^s(X, \Lambda^p)$ について, K の細分 K' が存在して,

$$\left\| \omega - W_{\widetilde{K'}} \int_{\widetilde{K'}} \omega \right\|_0 < \epsilon$$

が成立する.

この補題によって, $\int_{\widetilde{K}} : \overline{H}^p_{(2)}(X) \to \overline{H}^p_{(2)}(\widetilde{K})$ が単射であることがわかる. 実際, $\omega \in W^s(X, \Lambda^p)$ が $[\int_{\widetilde{K}} \omega] = 0$ となるとする. まず上の補題を用いて, 任意の $\epsilon_1 > 0$ について, ある K の細分 K' が存在して,

$$\left\| \omega - W_{\widetilde{K'}} \int_{\widetilde{K'}} \omega \right\|_0 < \epsilon_1$$

が成立する. 条件と $\int$ が細分と可換であることと細分による射 $\overline{H}^*_{(2)}(\widetilde{K}) \to \overline{H}^*_{(2)}(\widetilde{K'})$ が同型であることから, 任意の $\epsilon_2 > 0$ について, ある $f \in C^{p-1}_{(2)}(\widetilde{K'})$ が存在して,

$$\left\| \int_{\widetilde{K'}} \omega - d_c f \right\| < \epsilon_2$$

となる. よって,

$$\| \omega - dW_{\widetilde{K'}} f \|_0 < \epsilon_1 + \| W_{\widetilde{K}} \| \epsilon_2$$

となる. よって $[\omega] \in \overline{B^p}$ となることがわかった.

補題 2.3. の証明. $\sigma = [v_0, \ldots, v_n] \in \widetilde{K}_n$ について, $|\sigma|$ を含む座標近傍 $(U_\sigma; x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma)$ を, $\overline{U_\sigma}$ がコンパクトであり, $x_i|_{|\sigma|} = \phi_{v_i}|_{|\sigma|}$ となるようにとり, さらに任意の $\gamma \in \pi_1(M)$ について, $\gamma U_\sigma = U_{\gamma\sigma}$, $x_i^{\gamma\sigma} = x_i^\sigma \circ \gamma$ となるようにすることができる. K' を K の細分として, $\tau \in \widetilde{K'}_n$ とすると, ある $\sigma \in \widetilde{K}_n$ で, $|\tau| \subset |\sigma|$ となるものが存在する, $x_i^\sigma = x_i$ と書くことにする. $\omega \in W^s(X, \Lambda^p)$ について,

$$\omega = \sum_{\substack{I \subset \{1, \ldots, n\} \\ \# I = p}} \omega_I(x) dx_I$$

とかけて, $x \in |\tau|$ について,

$$\left| \omega(x) - W_{\widetilde{K'}} \int_{\widetilde{K'}} \omega(x) \right| \leq C \mathrm{diam}(\tau) \sup_{x \in |\tau|} \left| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|$$

となる. ここで, 左辺の絶対値は $\mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$ の Euclid ノルムを表しており, 右辺の C は ω, τ, K' に依存しない定数である. U_σ の開集合 V_τ で, $|\tau|$ を含み, $\overline{V_\tau}$ がコンパクトであるようなもので, 任意の $\gamma \in \pi_1(M)$ について, $\gamma V_\tau = V_{\gamma\tau}$ となるものをとってくると, ソボレフの評価によって, ある ω, K', τ に依存しない定数 $C > 0$ が存在して,

$$\left| \omega(x) - W_{\widetilde{K'}} \int_{\widetilde{K'}} \omega(x) \right| \leq C \mathrm{diam}(\tau) (\|\omega\|_{W^s(V_\tau, \Lambda^p)} + \|\omega\|_{W^0(V_\tau, \Lambda^p)}) \leq 2C \mathrm{diam}(\tau) \|\omega\|_{W^s(V_\tau, \Lambda^p)}$$

となる. ある $m > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ について, $x \in V_\tau$ となる τ の個数が m 個以下となるので, この m を用いて, h を K' の mesh とすると,

$$\left\| \omega - W_{\widetilde{K'}} \int_{\widetilde{K'}} \omega \right\|_0^2 \leq m h^n \cdot 4 C^2 h^2 \|\omega\|_s$$

となる. h を十分小さくとれば, 補題の主張が示される. □

References

[1] J. Dodziuk. De rham-hodge theory for l2-cohomology of infinite coverings. *Topology*, 16(2):157–165, 1977.