代数幾何学 SCHEME 論

HANS

Contents

1. scheme 2
1.1. 定義と基本性質 2
1.2. 被約 scheme 2
1.3. Glueing property 3
1.4. Scheme の圏の性質 4
1.5. Fibre 積 6
1.6. 基底変換 10
1.7. scheme に課す諸性質 16
1.8. 代数多様体 17
1.9. 代数閉でない体上の scheme 19
1.10. 分離性再論 20
1.11. scheme の射の性質に関する一般論 23
1.12. 固有射と完備性 24
1.13. affine 射, 有限射, 有限被覆多様体 29
1.14. 有理写像 32
2. 射影多様体 37
2.1. 導入 37
2.2. 次数付き環, 次数付き加群, Proj 37
2.3. 可逆層, 因子, 曲線の Riemann-Roch の定理 52
Appendix A. Krull の標高定理と次元論 63
Appendix B. 演習問題 66
References 67

1. SCHEME

1.1. **定義と基本性質.**

定義 1.1. 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ であって, 任意の $x \in X$ について, x の開近傍 U が存在して, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がある affine scheme$(\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A})$ と同型である時, $(X, \mathcal{O}_X)$ を **scheme** であるという. また, X の開集合 U で, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ が affine scheme と同型になるようなものを, X の **affine 開集合**という. 以下, 混乱がない限り, scheme$(X, \mathcal{O}_X)$ を単に X と書く. scheme$X$, Y について, scheme の射 $f : X \to Y$ は局所環付き空間の射 (f, φ) で定める. この際の φ は屡々略記される. 対象を scheme, 射を scheme の射とした圏を **scheme の圏**といい, **Sch** と書くことにする.

定義 1.2. X を scheme とする. scheme の圏 **Sch** について, そのスライス圏 **Sch**$/X$ を **X-scheme の圏**といい, その対象を X-scheme という. 本稿では, X-scheme の対象を, scheme Y と射 $f : Y \to X$ の組 (Y, f) によって表し, 構造射がすでに明示されている場合に限り "X-scheme Y" のような書き方をする. S-scheme (Y, f), (Z, g) について, その射集合を, $\mathrm{Hom}_X(Y, Z)$ と書く.

scheme の基本的性質を以下にまとめる. 証明は省略する.

補題 1.1. X を scheme とする.

(1) affine scheme は scheme である.
(2) X の affine 開集合の全体は, X の位相に関して, 開集合の生成系をなす.
(3) X は T_0 空間であるが, 必ずしも T_1 ではない.
(4) $F \subset X$ を既約閉集合とすると, F はただ一つの生成点を持つ. このように, 既約閉集合がただ一つの生成点をもつ位相空間を **Zariski 空間**という.
(5) $\mathcal{J}$ を, 準連接 $\mathcal{O}_X$-イデアル層とすると, $Y := \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Y)$, $\mathcal{O}_Y := \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ として, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は scheme である. このようにして定まる scheme Y を X の**閉部分 scheme** といい, 自然な射 $i : Y \to X$ を, **閉埋入射**という.
(6) 任意の $x \in X$ について, $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) = \{y \in X : x \in \overline{\{y\}}\}$ となる. 2 点 $x, y \in X$ について, $x \in \overline{\{y\}}$ となるとき, x は y の**特殊化**, y は x の**一般化**という.
(7) $U \subset X$ を開集合とすると, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ は scheme である. このような scheme を X の**開部分 scheme** といい, 自然な射 $i : U \to X$ を**開埋入射**という.

1.2. **被約 scheme.**

定義 1.3. X を scheme とする. X は**被約**であるとは, 任意の $x \in X$ について, $\mathcal{O}_{X,x}$ が被約であることをいう.

命題 1.1. X を scheme とする. X が被約であることと, 任意の X の開集合 U について, $\mathcal{O}_X(U)$ が被約であることは同値である.

証明. X が被約であったと仮定する. 開集合 $U \subset X$ を任意にとって, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ について, ある $n \geq 0$ が存在して, $f^n = 0$ となったとする. この時, 任意の $x \in U$ について, $\rho^U_x(f) = 0$ である. ここで, $\rho^U_x = \operatorname*{colim}_{x \in V \subset U} \rho^U_V$ は $\mathcal{O}_X(U)$ から $\mathcal{O}_{X,x}$ への射影である. よって, 任意の $x \in U$ について, ある x の開近傍 $U_x \subset U$ が存在して, $\rho^U_{U_x}(f) = 0$ がわかるので, 層の定義から, $f = 0$ がわかる. よって, $\mathcal{O}_X(U)$ は被約である. 逆に, 任意の開集合 $U \subset X$ について, $\mathcal{O}_X(U)$ が被約であるとすると, $x \in X$ を任意にとって, $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ が, ある $n \geq 0$ について, $f^n_x = 0$ となるとすると, ある x の開近傍 U_x で, $f \in \mathcal{O}_X(U_x)$ かつ $f_x = \rho^{U_x}_x(f)$ となるが, $f \neq 0$ とすると, $0 = f^n_x = \rho^{U_x}_x(f^n)$ となる. よって, ある x の開近傍 $V \subset U_x$ が存在して, $\rho^{U_x}_V(f^n) = 0$ となる. $g := \rho^{U_x}_V(f) \in \mathcal{O}_X(V)$ とすると, $g^n = 0$ となるので, $g = 0$. つまり, $f_x = \rho^{U_x}_x(f) = 0$ がわかり, $\mathcal{O}_{X,x}$ が被約であることが従う. □

命題 1.2. X を scheme とする. $F \subset X$ を閉集合とすると, F にはただ一通りの方法で X の被約閉部分 scheme の構造がはいる. この閉部分 scheme を F_{red} とかく.

証明. $x \in X$ について, $\kappa(x)$ で $\mathcal{O}_{X,x}$ の剰余体を表し, U を X の開集合として, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ について, $f(x)$ を, $\rho_x^U(f) \in \mathcal{O}_{X,x}$ の $\kappa(x)$ における像を表すことにする. X の開集合 U について,

$$\mathcal{I}(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) : f(x) = 0,\ \forall x \in F \cap U\}$$

と定めると, これは自然に $\mathcal{O}_X$-イデアル層になっている. $U \subset X$ を affine 開集合とする. $U = \mathrm{Spec}(R)$ とおくと, ある R のイデアル I で, $\sqrt{I} = I$ であって, かつ $U \cap F = V(I)$ が成立する. $x \in F \cap U$ について, 対応する素イデアルを $\mathfrak{p}_x$ とおくと, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ について, $f(x) = 0$ であることと, $f \in \mathfrak{p}_x$ であることは同値なので,

$$\mathcal{I}(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \sqrt{I} = I$$

となる. $g \in R$ について, $D(g) \subset U$ を考えても, 同様の理由によって, $\mathcal{I}(D(g)) = I_g$ となるので, $\mathcal{I}\mid_U = \widetilde{I}$ がわかる. よって, $\mathcal{I}$ は準連接である. 定義から明らかに $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = F$ なので, これは X の閉部分 scheme を定める. また, $x \in F$, $f \in (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x$ について, $f^n = 0$ ならば, $f^n(x) = 0$ となるので, $f(x) = 0$, つまり $f = 0$ がわかる. よって, これは被約である.

次に, $(F, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ を被約な閉部分 scheme とすると, X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(R)$ について, R のイデアル J で, $F \cap U = \mathrm{Spec}(R/J)$ となるものが取れる. 仮定よりこれは被約なので, $J = \sqrt{J}$ とならねばならない. よって, $J = \mathcal{I}(U)$ となり, $\mathcal{I}\mid_U = \mathcal{J}\mid_U$ がわかる. つまり, $\mathcal{J} = \mathcal{I}$ であることがわかった. □

系 1.1. X を scheme とする. このとき, 被約な閉部分 scheme$X_{\mathrm{red}} \subset X$ で, その底空間は X に等しいものがただ一つ存在する. この X_{red} を X の**被約型**という.

1.3. **Glueing property.** I を添字集合, $(X_i)_{i \in I}$ を局所環付き空間の族とする. このとき, 各 $i \in I$ について, X_i の開部分空間の族 $(U_{ij})_{j \in I}$ が定まっていて, 局所環付き空間の同型の族 $(\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji})_{i,j \in I}$ が存在して, 以下の条件が成立するとする:

(1) 任意の $i \in I$ について, $U_{ii} = X_i$
(2) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_{ii}}$
(3) 任意の $i, j, k \in I$ について, $\varphi_{kj}\varphi_{ji}\mid_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \varphi_{ki}\mid_{U_{ij} \cap U_{ik}}$

このとき, $\{(X_i)_{i \in I}, (U_{ij})_{i,j \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I}\}$ を, **glueing data** という

命題 1.3. $\{(X_i)_{i \in I}, (U_{ij})_{i,j \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I}\}$ を glueing data とすると, ある局所環付き空間 X および X の開部分空間の族 $(U_i)_{i \in I}$ および局所環付き空間の同型の族 $(\varphi_i : X_i \to U_i)_{i \in I}$ が存在して, 以下の条件を満たす.

(1) $X = \bigcup_{i \in I} U_i$
(2) 任意の $i, j \in I$ について, $\varphi_i\mid_{U_{ij}}$ は U_{ij} と $U_i \cap U_j$ の同型になる.
(3) 任意の $i, j \in I$ について, $\varphi_i\mid_{U_{ij}} = \varphi_j\varphi_{ji}$ となる.

さらに, この X は以下の普遍性を満たす: 任意の局所環付き空間 Y について, $(\psi_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ が, 任意の $i, j \in I$ について, $\psi_j\varphi_{ji} = \psi_i\mid_{U_{ij}}$ となるならば, ある $f : X \to Y$ が一意的に定まって, 任意の $i \in I$ で, $f\varphi_i = \psi_i$ が成立する.

証明. まず, 位相空間として, X を以下のように構成する:

$$X = \coprod_{i \in I} X_i \Big/ \sim$$

ここで, 同値関係 $\sim$ を, $x_1 \sim x_2$ を, $x_1 \in U_{ij}$, $x_2 \in U_{ji}$ として, $x_2 = \varphi_{ji}(x_1)$ となることとして定める. これが同値関係になっていることは, φ_{ij} の cosycle 性からわかる. 位相空間としての直和から誘導さ

れる標準的な写像を $\varphi_i : X_i \to X$ とすると, $U \subset X$ が開集合であるとは, 任意の $i \in I$ で, $\varphi_i^{-1}(U)$ が X_i の開集合であることとして定める. $U_i := \varphi_i(X_i)$ とする. このとき, $\varphi_i^{-1}(U_i) = X_i$ が成立し, 任意の $j \in I$ について, $x \in X_j$ が, X_i の元と同値になっていることは, x が φ_{ji} の像となっていることが必要十分条件なので,

$$\varphi_j^{-1}(U_i) = U_{ji}$$

となる. よって, U_i は X の開集合である. 位相の定め方から, 任意の $i \in I$ について, φ_i が連続であることもわかる.

X 上の環層 $\mathcal{O}_X$ を, 以下のようにして定める: $U \subset X$ を開集合として,

$$\mathcal{O}_X(U) := \left\{ (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{O}_{X_i}(\varphi_i^{-1}(U)) : s_j \mid_{\varphi_j^{-1}(U)\cap U_{ji}} = (\varphi_{ji})_{\varphi_i^{-1}(U)\cap U_{ij}}(s_i \mid_{\varphi_i^{-1}(U)\cap U_{ij}}) \right\}$$

として, 制限射は, $\mathcal{O}_{X_i}$ たちから自然に誘導されるものとする. $\pi : \bigsqcup X_i \to X$ を商写像とする. 開集合 $U \subset X$ が, $U \subset U_i$ となるとき, $s \in \mathcal{O}_{X_i}(\varphi_i^{-1}(U))$ について, $s_i = s$. $s_j = (\varphi_{ji})_{\varphi_i^{-1}(U)\cap U_{ij}}(s \mid_{\varphi_i^{-1}(U)\cap U_{ij}}$) と定めると, $(s_j)_{j\in I} \in \mathcal{O}_X(U)$ となる. 逆に, $(s_j)_{j\in I} \in \mathcal{O}_X(U)$ は全てその形に書くことができるので, $\mathcal{O}_X(U)$ と $\mathcal{O}_{X_i}(\varphi_i^{-1}(U))$ は集合として同型である. しかし, この対応 $s \mapsto (s_j)_{j\in I}$ は, 環の準同型でもあるので, これは環の同型になる. これが制限写像と可換であることは容易にに確かめることができるので, 環付き空間の同型 $\varphi_i : (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \cong (U_i, \mathcal{O}_X \mid_{U_i})$ を誘導する. 構成法から, これが条件 (2), (3) を満たすことがわかる. 後半について, $f_i = \psi_i\varphi_i^{-1}$ とおくと, $V \subset U_i \cap U_j$ ならば,

$$f_i \mid_V = \psi_i\varphi_i^{-1} \mid_V = \psi_i(\varphi_j\varphi_{ji})^{-1} \mid_V = \psi_i\varphi_{ij}\varphi_j^{-1} \mid_V = \psi_j\varphi_j^{-1} \mid_V = f_j \mid_V$$

なので, 層の貼り合わせ条件から, 局所環付き空間の射 $f : X \to Y$ で, $f \mid_{U_i} = f_i$ となるものが一意に定まる. $\square$

上の命題において, 各 X_i が scheme ならば, 各 $x \in X$ の周りで affine 開近傍が取れるので, X も scheme になる.

例.

(1) X_i たちを局所環付き空間とする. このとき, X_i たちの**直和** $\bigsqcup X_i$ を, $U_{ij} = \emptyset (i \neq j)$, $U_{ii} = X_i$, $\varphi_{ij} = \emptyset$ による X_i たちの貼り合わせとする. このとき, 命題 1.3 より, 任意の $Y \in \mathbf{Sch}$ について, 以下の集合の同型が成立する:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}\left(\bigsqcup_{i\in I} X_i, T\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X_i, Y)$$

(2) k を体とする. このとき, $X_1 := \mathrm{Spec}(k[x])$, $X_2 := \mathrm{Spec}(k[y])$ として, $0 \in X_1$ は, $k[x]$ の素イデアル (x) に対応する点, $\infty \in X_2$ は $k[y]$ の素イデアル (y) に対応する点とする. $U_{11} = X_1$, $U_{22} = X_2$, $U_{12} = X_1 \setminus \{0\} = D(x) = \mathrm{Spec}(k[x, 1/x])$, $U_{21} = X_2 \setminus \{\infty\} = D(y) = \mathrm{Spec}(k[y, 1/y])$ として, $\varphi_{12} : U_{21} \to U_{12}$ を, k-代数の射 $k[x, 1/x] \to k[y, 1/y]; x \mapsto 1/y$ によって定まる affine scheme の同型として, $\varphi_{21} : U_{12} \to U_{21}$ をその逆射とする. このとき, glueing data $\{(X_i)_{i=1,2},\ (U_{ij})_{i,j=1,2},\ (\varphi_{ij})_{i,j=1,2}\}$ に関する X_1 と X_2 の貼り合わせを $\mathbb{P}_k^1$ といい, **射影直線**という. 一般の射影空間についても, 同様の定義が可能であるが, Proj を使ったより一般的な定義があるので, そのときにまた解説する.

1.4. **Scheme の圏の性質.**

命題 1.4. X を scheme, $Y = \mathrm{Spec}(R)$ を affine scheme とする. このとき, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y)$ について, $\varphi = \Gamma(Y, f^\flat) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ を対応させる写像は, 同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ を誘導する.

注意. X も affine scheme であるときは, すでに結果は知られている.

証明. $f \mapsto \varphi$ の単射性を示す. まず, φ が位相空間の射として f を決定することを示す. 以下の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho_{f(x)}"'] & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho'_x"] & \\
R_{f(x)} \arrow[r, "f_x^\flat"] \arrow[rr, bend right, "f_x^\#"'] & \operatorname*{colim}_{f(x)\in U} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[r] & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

ここで, ρ, ρ' はそれぞれ X, Y の制限写像を表しており, ρ_x などは, $\operatorname*{colim}_{x\in U}\rho_U^X$ などを表すものとしている. これが可換であることは, 定義より明らかである. $\mathfrak{m}_{X,x}$ を $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアルとして, $a \in R$ とすると, $f_x^\#(\rho_{f(x)}(a)) \in \mathfrak{m}_{X,x}$ であることは, $\rho_{f(x)}(a) \in \mathfrak{p}_{f(x)}R_{f(x)}$, つまり $a \in \mathfrak{p}_{f(x)}$ であることと同値であり, 上の図式の可換性から, $f_x^\#(\rho_{f(x)}(a)) = \rho'_x(\varphi(a))$ となることと合わせると, $\mathfrak{p}_{f(x)} = (\rho'_x\varphi)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x})$ がわかるので, $f(x)$ は φ と x によって定まる. 次に, f が scheme の射として一意に定まることをいう. これは, $D(g) \subset Y$ について, $f^\flat(D(g)) : R_g \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(g)))$ が定まることを言えば良いが, 制限射との可換性から, $f^\flat(D(g))(a/g^n) = (\rho')_U^X(\varphi(a))/(\rho')_U^X(\varphi(g))$ とならなければならない. よって, $f^\flat$ も φ によって一意に定まることがわかった.

次に, 全射性を示す. $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ を任意に取る. X の affine 開集合による開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ をとると, $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$(つまり, $A_i = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$) として, φ に制限写像 $(\rho')_U^X$ を合成させることで, $\varphi_i : R \to A_i$ ができる. φ_i に対応する affine scheme の射を $f_i : U_i = \mathrm{Spec}(A_i) \to \mathrm{Spec}(R) = Y$ とすると, 以下の図式は可換になる:

(1)
$$\begin{tikzcd}
R \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_i"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_j"'] & & \\
& \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "(\rho')^X_{U_i}"] \arrow[d, "(\rho')^X_{U_j}"'] & \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \arrow[d, "(\rho')^{U_i}_{U_{ij}}"] \\
& \Gamma(U_j, \mathcal{O}_{U_j}) \arrow[r, "(\rho')^{U_j}_{U_{ij}}"'] & \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

$f_i := \mathrm{Spec}(\varphi_i)$ とおくと, $f_i\mid_{U_i\cap U_j} = f_j\mid_{U_i\cap U_j}$ なので, 層の貼り合わせ条件から, ある $f : X \to Y$ が一意に存在して, $f\mid_{U_i} = f_i$ となる. $\rho^X_{U_i} f^\flat(Y) = \varphi_i$ となることから, $f^\flat(Y) - \varphi$ の像の元は, 任意の i について, U_i への制限が 0 になることがわかるので, $f^\flat(Y) - \varphi = 0$, つまり, $f\flat(Y) = \varphi$ が成立する. □

系 1.2. X を scheme, $Y = \mathrm{Spec}(R)$ を affine scheme とする. 任意の scheme の射 $f : X \to Y$ は, $\varphi := f^\flat(Y) : R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ から誘導された affine scheme の射 $g := \mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(R) \to Y$ と, 標準的な射 $h : X \to \mathrm{Spec}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ について, $f = gh$ となる.

証明. 前の命題において, $\varphi = \mathrm{id}_{\Gamma(X,\mathcal{O}_X)}$ としたものを h とおくと, $f = gh$ となる. □

系 1.3. $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は $\mathbf{Sch}$ における終対象となる.

証明. scheme$X$ を任意に取ると, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ となる. $\mathbb{Z}$ は $\mathbf{Ring}$ の始対象なので, 主張が従う. □

1.5. **Fibre 積.** S を scheme とする．S-scheme (X, f), (Y, g) について, 関手 $F : (\mathbf{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ を, $F = \mathrm{Hom}_S(-, X) \times \mathrm{Hom}_S(-, Y)$ と定める．これが表現可能である時, ある S-scheme (Z, h) が存在して, 関手の同型

$$s : \mathrm{Hom}_S(-, Z) \cong F(-)$$

が成立する．Yoneda の補題から, 自然な同型

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_S(-, Z), F(-)) \cong F(Z)$$

が成立し, $s(\mathrm{id}_Z) := (\pi_1, \pi_2) \in F(Z)$ を定める．対 $(Z, (\pi_1, \pi_2))$ は, 同型を除いて一意に定まる．実際 $(Z', (\pi_1', \pi_2'))$ を, F を表現する今一つの対とすると, (π_1', π_2') から, 関手の同型 $t : \mathrm{Hom}_S(-, Z') \to F(-)$ を, $(\pi_1', \pi_2') \circ \mathrm{Hom}_S(-, Z')$ によって定める．よって, $t^{-1}s$ は関手の同型 $\mathrm{Hom}_S(-, Z) \cong \mathrm{Hom}_S(-, Z')$ を誘導し, 以下の図式を可換にする:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "\cong"] & \\
X & & Y \\
& Z' \arrow[ul, "\pi_1'"] \arrow[ur, "\pi_2'"'] &
\end{tikzcd}$$

中央の同型は $t^{-1}s(\mathrm{id}_Z)$ である．関手 F を表現する対 $(Z, (\pi_1, \pi_2))$ の一つを S-scheme (X, f) と (Y, g) の (これを略記して, “X と Y の” と書くことが多い)**fibre 積**といい, $(X \times_S Y, (\pi_1, \pi_2))$, あるいは射影 π_1, π_2 を略して $X \times_S Y$ と書く[1]. つまり, fibre 積は $\mathbf{Sch}/S$ における直積である．$\mathbf{Sch}/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \mathbf{Sch}$ なので, $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上の fibre 積のことを屡々**直積**という．さらに, $S = \mathrm{Spec}(R)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ とした時, 任意の S-scheme (T, h) について, $k_1 \in \mathrm{Hom}_S(T, X)$ ならば, $fk_1 = h$ となるが, 系 1.2 の分解を, k_1, h で適応して, affine scheme $(T, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^{\sim})$ を $\widetilde{T}$ とおくと, 以下の図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "\mathrm{Spec}(\varphi)"] \arrow[drrr, bend left, "k_1"] \arrow[ddrr, bend right, "h"'] & & & \\
& \widetilde{T} \arrow[rr, "\overline{k_1}"] \arrow[dr, "\overline{h}"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& & S &
\end{tikzcd}$$

命題 1.4 から, $\mathrm{Spec}(\varphi)$ は $\mathbf{Sch}$ における mono 射であることが従うので, この図式の内側の三角形は可換である．$k_2 \in \mathrm{Hom}_S(T, Y)$ についても同様にして考えると, 以下の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{T} \arrow[rr, "\overline{k_1}"] \arrow[dl, "\overline{k}_2"'] \arrow[dr, "\overline{h}"] & & X \arrow[dl, "f"] \\
Y \arrow[rr, "g"'] & & S &
\end{tikzcd}$$

よって, (Z, π_1, π_2) が $X \times_S Y$ と同型である必要十分条件は, 任意の affine scheme T について, 以下の図式の外側が可換になるならば, 点線で描いた射が一意に存在して, 図式の全てが可換になること

[1] $X \times_S Y$ は, その都度指定しているのであって, global に定めているわけでないことに注意.

である:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & Z \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

(Z, π_1, π_2) について, $(\widetilde{Z}, \overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2)$ も fibre 積の条件を満たすので, fibre 積の同型を除いた一意性から, Z は affine scheme として良いことがわかる. すると, 上の図式に出てくる対象は全て affine scheme なので, 大域切断を取ることで, **Ring** の図式とみなすと, これは $Z \cong \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ を表していることがわかる. つまり, 以下の補題が示された:

補題 1.2. $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(R)$ として, 構造射 $f : X \to S$, $g; Y \to S$ によって, X, Y を S-scheme と見做した時, $X \times_S Y \cong \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ である. □

命題 1.5. S を scheme とする. このとき, 任意の S-scheme(X, f), (Y, g) について, その fibre 積 $X \times_S Y$ が存在する.

この命題の証明のために, いくつかの補題を用意する.

補題 1.3. S-scheme (Z, h) と, S-scheme の射 $\pi_1 : Z \to X$, $\pi_2 : Z \to Y$ について, (Z, π_1, π_2) が fibre 積 $X \times_S Y$ を与えたとする. この時, 開集合 $U \subset X$, $V \subset Y$ について, 開部分 scheme $W := \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ は, $(U, \mathcal{O}_X |_U)$, $(V, \mathcal{O}_Y |_V)$ の fibre 積 $U \times_S V$ を与える.

証明. S-scheme (T, k) について, 射 $p_1 : T \to U$, $p_2 : T \to V$ は, U, V から X, Y への開埋入射 i_1, i_2 との合成によって, S-scheme の射 $i_1 p_1 : T \to X$, $i_2 p_2 : T \to Y$ を作る. よって, $r : T \to Z$ で, $i_1 p_1 = \pi_1 r$, $i_2 p_2 = \pi_2 r$ となるものが一意に定まる. ここで, 底空間を見ると, $i_1 p_1(T) \subset U$ なので, $r(T) \subset \pi_1^{-1}(U)$ が成立する. 同様に, $r(T) \subset \pi_2^{-1}(V)$ もわかるので, r は W を経由することがわかる. よって, $W \cong U \times_S V$ が成立することがわかる. □

補題 1.4. S-scheme (Z, h) と, S-scheme の射 $\pi_1 : Z \to X$, $\pi_2 : Z \to Y$ について, X の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$, Y の開被覆 $\{V_j\}_{j \in J}$ が存在して, 任意の $i \in I$, $j \in J$ について, $W_{ij} = \pi_1^{-1}(U_i) \cap \pi_2^{-1}(V_j)$ が $U_i \times_S V_j$ と同型ならば, Z は $X \times_S Y$ と同型である.

証明. 任意の S-scheme (T, k) について, $\mathrm{Hom}_S(T, Z) \to \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y);\ r \mapsto (\pi_1 r, \pi_2 r)$ が同型を与えることを示す.

単射性: $r_1, r_2 \in \mathrm{Hom}_S(T, Z)$ について, $\pi_1 r_1 = \pi_1 r_2$, $\pi_2 r_1 = \pi_2 r_2$ とする. この時,

$$\begin{aligned} r_1^{-1}(W_{ij}) &= r_1^{-1}(\pi_1^{-1}(U_i) \cap \pi_2^{-1}(V_j)) \\ &= r_1^{-1}\pi_1^{-1}(U_i) \cap r_1^{-1}\pi_2^{-1}(V_j) \\ &= r_2^{-1}\pi_1^{-1}(U_i) \cap r_2^{-1}\pi_2^{-1}(V_j) \\ &= r_2^{-1}(\pi_1^{-1}(U_i) \cap \pi_2^{-1}(V_j)) \\ &= r_2^{-1}(W_{ij}) \end{aligned}$$

となるので, $T_{ij} := r_1^{-1}(W_{ij})$ とすると, $(\pi_m |_{W_{ij}})(r_1 |_{T_{ij}}) = (\pi_m |_{W_{ij}})(r_2 |_{T_{ij}})$ $(m = 1, 2)$ が成立する. 故に, 任意の $i \in I$, $j \in J$ について, $r_1 |_{T_{ij}} = r_2 |_{T_{ij}}$ となる. T_{ij} は T を被覆するので, $r_1 = r_2$ が従う.

全射性: $l_1 : T \to X$, $l_2 : T \to Y$ を S-scheme の射とする. この時, $T'_{ij} := l_1^{-1}(U_i) \cap l_2^{-1}(V_j)$ と置くと, $(l_1 \mid_{T'_{ij}}, l_2 \mid_{T'_{ij}}) = ((\pi_1 \mid_{W_{ij}}), (\pi_2 \mid_{W_{ij}}))l_{ij}$ となる $l_{ij} : T'_{ij} \to W_{ij}$ が存在する. $i, i' \in I$, $j, j' \in J$ について, $T'_{ij} \cap T'_{i'j'} = l_1^{-1}(U_i \cap U_{i'}) \cap l_2^{-1}(V_j \cap V_{j'})$ であり, これが空でないならば,

$$l_{ij}(T'_{ij} \cap T'_{i'j'}) \subset \pi_1^{-1}(U_{i'}) \cap \pi_2^{-1}(V_{j'}) = W_{i'j'}$$

となる. もちろんこれは W_{ij} の部分集合でもあるので, 補題 1.3 を用いて,

$$\begin{aligned} l_{ij}(T'_{ij} \cap T'_{i'j'}) \cup l_{i'j'}(T'_{ij} \cap T'_{i'j'}) \subset & W_{ij} \cap W_{i'j'} \\ = & \pi_1^{-1}(U_i \cap U_{i'}) \cap \pi_2^{-1}(V_j \cap V_{j'}) \\ = & (U_i \cap U_{i'}) \times_S (V_j \cap V_{j'}) \end{aligned}$$

がわかる. l_{ij} の定義より, $m = 1, 2$ について,

$$(\pi_m \mid_{W_{ij} \cap W_{i'j'}})(l_{ij} \mid_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}}) = l_m \mid_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}} = (\pi_m \mid_{W_{ij} \cap W_{i'j'}})(l_{i'j'} \mid_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}})$$

がわかるので, $l_{ij} \mid_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}} = l_{i'j'} \mid_{T'_{ij} \cap T'_{i'j'}}$ がわかった. T'_{ij} たちは T を被覆するので, ある $l : T \to Z$ が存在して, $l \mid_{T'_{ij}} = l_{ij}$ となることがわかった. つまり, $\pi_m l = l_m$ が, $m = 1, 2$ について成立する. □

補題 1.5. X の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$, Y の開被覆 $\{V_j\}_{j \in J}$ について, 任意の $i \in I$, $j \in J$ について, fibre 積 $U_i \times_S V_j$ が存在すれば, fibre 積 $X \times_S Y$ も存在する.

証明. $(Z_{ij}, \pi_{1,ij}, \pi_{2,ij})$ を, U_i と V_j の fibre 積とその射影の組みとする. 以下, $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3) \in I \times J$ である. 補題 1.3 より,

$$\begin{aligned} \pi_{1,i_1j_1}^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \cap \pi_{2,i_1j_1}^{-1}(V_{j_1} \cap V_{j_2}) \cong & (U_{i_1} \cap U_{i_2}) \times_S (V_{j_1} \cap V_{j_2}) \\ \cong & \pi_{1,i_2j_2}^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \cap \pi_{2,i_2j_2}^{-1}(V_{j_1} \cap V_{j_2}) \end{aligned}$$

が成立する. $\pi_{1,i_1j_1}^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \cap \pi_{2,i_1j_1}^{-1}(V_{j_1} \cap V_{j_2}) =: Z_{i_1j_1,i_2j_2}$ などと置くと, S-同型

$$\theta_{i_2j_2,i_1j_1} : Z_{i_1j_1,i_2j_2} \to Z_{i_2j_2,i_1j_1}$$

が一意に定まり, $\pi_{m,i_2j_2}\theta_{i_2j_2,i_1j_1} = \pi_{m,i_1j_1} \mid_{Z_{i_1j_1,i_2j_2}}$ $(m = 1, 2)$ が成立する. $Z_{i_aj_a,i_bj_b} \cap Z_{i_aj_a,i_cj_c}$ $(a, b, c \in \{1, 2, 3\},\ a \neq b \neq c \neq a)$ は, 全て fibre 積 $(U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap U_{i_3}) \times_S (V_{j_1} \cap V_{j_2} \cap V_{j_3})$ を定めるので, これらは同型であり, 同型射は $\theta_{i_bj_b,i_aj_a}$, $\theta_{i_cj_c,i_aj_a}$ の制限で与えられる. このことと, fibre 積の普遍性から,

$$\theta_{i_3j_3,i_2j_2}\theta_{i_2j_2,i_1j_1} \mid_{Z_{i_1j_1,i_2j_2} \cap Z_{i_1j_1,i_3j_3}} = \theta_{i_3j_3,i_1j_1} \mid_{Z_{i_1j_1,i_2j_2} \cap Z_{i_1j_1,i_3j_3}}$$

がわかる. $\theta_{i_1j_1,i_1j_1} = \mathrm{id}_{Z_{i_1j_1}}$ は明らかなので, 命題 1.3(およびその直後の記述) が使えて, ある scheme Z と, その開被覆 $\{W_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ および scheme の同型の族 $\{\theta_{ij} : Z_{ij} \to W_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ が存在して, 任意の $(i, j), (i', j') \in I \times J$ について, $\theta_{ij} \mid_{Z_{ij,i'j'}}$ は $Z_{ij,i'j'}$ と $W_{ij} \cap W_{i'j'}$ の同型を与え, $\theta_{i'j'}\theta_{i'j',ij} = \theta_{ij} \mid_{Z_{ij,i'j'}}$ が成立する. 任意の $(i, j), (i', j') \in I \times J$ について,

$$\pi_{m,i'j'}\theta_{i'j',ij} = \pi_{m,ij} \mid_{Z_{ij,i'j'}} \quad (m = 1, 2)$$

が成立するので, 標準的な開埋入射によって, $\pi_{1,ij}$ たちを X への射とみて, $\pi_{2,ij}$ たちを Y への射と見ることで, 命題 1.3 の後半が使えて, $\pi_1 : Z \to X$, $\pi_2 : Z \to Y$ が一意に定まり, $\pi_1 \mid_{W_{ij}} = \pi_{1,ij}\theta_{ij}^{-1}$ となる. よって, 補題 1.4 によって, (Z, π_1, π_2) は fibre 積 $X \times_S Y$ を与えることがわかる. □

補題 1.6. $\{S_i\}_{i \in I}$ を S の開被覆, $X_i = f^{-1}(S_i)$, $Y_i = g^{-1}(S_i)$ とする. 任意の $i \in I$ について, fibre 積 $X_i \times_{S_i} Y_i$ が存在すれば, fibre 積 $X \times_S Y$ が存在する.

証明. $X_i \times_{S_i} Y_i$ を, S_i から S への開埋入射によって S-scheme とみると, 任意の S-scheme (Z,h) について, S-scheme の射 $p_1 : Z \to X_i$, $p_2 : Z \to Y_i$ が存在すれば, これは自然に S_i-scheme の射になって, ある $\overline{h} : Z \to X_i \times_S Y_i$ が存在して, $p_m = \pi_m \overline{h}$ $(m = 1,2)$ が成立する. つまり, $X_i \times_S Y_i \cong X_i \times_{S_i} Y_i$ がわかる. $X_{ij} = X_i \cap X_j$, $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$ とおくと, 補題 1.3 によって, $X_{ij} \times_S Y_{ij}$ が存在するが, $X_i \times_S Y_i$ の第 m 成分への射影を, $\pi_{m,i}$ として, $k : X_{ij} \times_S Y_{ij} \to S$ を構造射とすると,

$$\begin{aligned}
X_{ij} \times_S Y_{ij} \cong& \pi_{1,i}^{-1}(X_i \cap X_j) \cap \pi_{2,i}^{-1}(Y_i \cap Y_j) \\
=& \pi_{1,i}^{-1}(f^{-1}(S_i) \cap f^{-1}(S_j)) \cap \pi_{2,i}^{-1}(g^{-1}(S_i) \cap g^{-1}(S_j)) \\
=& k^{-1}(S_i) \cap k^{-1}(S_j) \\
=& \pi_{1,i}^{-1}(X_i) \cap \pi_{1,j}^{-1}(Y_j) \\
=& X_i \times_S Y_j
\end{aligned}$$

となる. つまり, $X_{ij} \times_S Y_{ij}$ が fibre 積 $X_i \times_S Y_j$ を与えるので, 補題 1.5 から, 主張が示された. □

命題 1.5 の証明. 補題 1.6 より, S は affine scheme として良い. 補題 1.5 より, X, Y の affine 開被覆をとり, それぞれの fibre 積の存在を言えば良いが, これは補題 1.2 によって存在が示されている. よって, X と Y の fibre 積は存在する. □

fibre 積の基本的性質を述べておく:

命題 1.6. S を scheme, (X,f), (Y,g) を S-scheme, (Z,h) を Y-scheme とする. この時, 以下が成立する:

(1) $X \times_S Y \cong Y \times_S X$
(2) $X \times_S S \cong X$
(3) $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$. ここで, 右辺において, Z は gh によって S-scheme と見ている.
(4) $U \subset S$ を開部分 scheme とすると, $X \times_S U = f^{-1}(U)$ となる.

証明. (1),(2) は明らか. (3) は diagram chase による. (4) も fibre 積の定義からすぐに従う. □

Sets における fibre 積は, $(X,f),(Y,g) \in \mathbf{Sets}/S$ について, $\{(x,y) \in X \times Y : f(z) = g(y)\}$ となっていた. **Sch** における fibre 積においては, 以下の対応が成立する:

命題 1.7. (X,f), $(Y,g) \in \mathbf{Sch}/S$ とする. この時, $X \times_S Y$ の点全体のなす集合 $|X \times_S Y|$ と, 以下の集合は 1:1 に対応する:

$$N := \{(x,y,s,\mathfrak{p}) : f(x) = g(y) = s,\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))\}$$

証明. $(x,y,s,\mathfrak{p}) \in N$ とする. $f(x) = s$ より, 局所環の射 $f_x^{\#} : \mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{X,x}$ が得られ, ここから $\alpha : \kappa(s) \to \kappa(x)$ を得る. 同様に, $\beta : \kappa(s) \to \kappa(y)$ も得られる. これから誘導された affine scheme の射を構造射として, $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ および $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$ を $\mathrm{Spec}(\kappa(s))$-scheme とみる. この時, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))$ なので, 自然な商写像

$$\varphi : \kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y) \to (\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}$$

を得る. Spec をとって,

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}((\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(y)) \cong \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \times_{\mathrm{Spec}(\kappa(s))} \mathrm{Spec}(\kappa(y))$$

が得られる. fibre 積の定義から, ある $a : \mathrm{Spec}((\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y))/\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ と $b : \mathrm{Spec}((\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)} \kappa(y))/\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ が存在して, 以下の図式が可換になる:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}((\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y))/\mathfrak{p}) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "a"] \arrow[ddr, bend right, "b"'] & & & \\
& \mathrm{Spec}(\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \arrow[r, "x"] \arrow[d] & X \arrow[dd] \\
& \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \arrow[r] \arrow[d, "y"'] & \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \arrow[dr, "s"] & \\
& Y \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

ここで, scheme T の点 t と射 $\mathrm{Spec}(\kappa(t)) \to T$ との自然な同一視をしている. 外側の図式の可換性から, 射 $\mathrm{Spec}((\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y))/\mathfrak{p}) \to X\times_S Y$ が存在して, 以下の図式を可換にする:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}((\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y))/\mathfrak{p}) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "xa"] \arrow[ddr, bend right, "yb"'] & & \\
& X\times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

得られた射 $\mathrm{Spec}((\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y))/\mathfrak{p}) \to X\times_S Y$ について, $\mathrm{Spec}((\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y))/\mathfrak{p})$ の生成点の像を z とおく.

逆に, $z \in X\times_S Y$ が与えられた時, 点 z と S-scheme の射 $z : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to X\times_S Y$ を同一視したとき, fibre 積の定義から, S-scheme の射 $a : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to X$ および $b : \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \to Y$ で, $fa = gb$ となるものが一意に定まる. この a, b について, $a(z) = x,\ b(z) = y$ とおくと, $f(x) = g(y) = s$ となる $s \in S$ が存在して, $a_x^{\#}$ から射 $\kappa(x) \to \kappa(z)$ および $\kappa(y) \to \kappa(z)$ が得られ, $\kappa(s) \to \kappa(x) \to \kappa(z)$ と $\kappa(s) \to \kappa(y) \to \kappa(z)$ は, 合成によって互いに同じ射を定める. よって, 射 $\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y) \to \kappa(z)$ が定まり, その核を $\mathfrak{p}$ とすると, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\kappa(x)\otimes_{\kappa(s)}\kappa(y))$ となる. これらが互いに逆を定めることは, 容易にわかる. $\square$

これで, S-scheme X と Y の fibre 積の点集合としての構造がわかった. このことから, $X\times_S Y$ は, 点集合として必ずしも $\{(x, y) \in X\times Y : f(x) = g(y)\}$ と一致するとは限らないことがわかる. 例えば, $R := \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ について, $(1\otimes 1 + i\otimes i) \subset \mathfrak{p}_1$, $(1\otimes 1 - i\otimes i) \subset \mathfrak{p}_2$ なる素イデアルが存在するが, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ とすると, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 \supset (1\otimes 1 + i\otimes i, 1\otimes 1 - i\otimes i) = R$ となるので, これらは互いに異なる. つまり, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})\times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{R})}\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ は, 点集合として少なくとも 2 点存在する. 特にこれは, scheme の fibre 積は, 位相空間としての fibre 積とも異なることを示している. このことについてはさらに単純な状況についても言える. 体 k 上の affine 空間 $\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}(k[x_1])$ と, 自身との直積 (ここでの直積は $\mathrm{Spec}(k)$ 上の fibre 積) は $\mathbb{A}_k^2 = \mathrm{Spec}(k[x_1, x_2])$ となるが, この位相は, 底空間の直積空間の位相ではない.

1.6. **基底変換.** S を scheme とする. (X, f) を S-scheme とした時, S-scheme (Y, g) について, $X\times_S Y$ は, その射影 $\pi_1 : X\times_S Y \to X$ によって, X-scheme の構造が入る. このようにして, S-scheme Y から, X-scheme $X\times_S Y$ を構成することを, **基底変換**という. S-scheme Y の X による基底変換 $X\times_S Y$ を, 屡々Y_X と書いたりする.

例. (1) X を scheme として, X の点 $x : \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$ があったとする．この時, scheme の射 $f : Y \to X$ について, 以下の fibre 積を考える:

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \mathrm{Spec}(\kappa(x)) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\kappa(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

fibre 積 $Y \times_X \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ を, Y **の点** x **における fibre** といい, Y_x で表す．Y_x を具体的に書くと, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(B)$ および Y の affine 開集合の族 $\{V_i\}_{i \in I}$ を, $\bigcup V_i \supset f^{-1}(x)$, $f(V_i) \subset U$ となるように定め, $V_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ とすると,

$$Y_x = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}(A_i \otimes_B \kappa(x))$$

となる．すると, 各 i について, $\varphi_i : B \to A_i$ を構造射とすると, $\mathrm{Spec}(\varphi_i) = f\,|_{V_i}$ となるので,

$$\mathrm{Spec}(A_i \otimes_B \kappa(x)) \cong \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_i) : \varphi_i(\mathfrak{p}_x) \subset \mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_x \supset \varphi_i^{-1}(\mathfrak{p})\} = f^{-1}(x) \cap V_i$$

がわかる．よって, Y_x の底空間は $f^{-1}(y)$ と位相空間として同型であることがわかった．点集合としての同型は命題 1.7 から従う．これによって, scheme の射を, fibre の族で, 何らかの "連続性" の条件を満たすものとして捉えることができる．このような例として, 体 k-scheme[2] X_0 および任意の $y \in Y$ について, $\kappa(y) = k$ なる底空間が連結な k-scheme Y について, scheme の射 $f : X \to Y$ であって, ある $y_0 \in Y$ について, $X_{y_0} \cong X_0$ となるようなものを, scheme X_0 の**変形族**といい, 各 $y \in Y$ について, X_y を schemeX_0 の**変形**という．

(2) R を離散賦値環, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする．この時, $X := \mathrm{Spec}(R)$ は 2 点 (生成点 η と, $\mathfrak{m}$ に対応する点 s) からなっている．$f : Y \to X$ を scheme の射とすると, Y は 2 つの fibre Y_η および Y_s からなる．これらは, 以下の pull back の図式からなっている:

$$\begin{array}{ccc} Y_\eta & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(Q(R)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y_s & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Y_s を Y_η の特殊化という．ここで, $Q(R)$ は R の商体を指している．

(3) U を X の開部分 scheme とする．X-scheme (Y, f) について, $Y_U = Y \times_X U = f^{-1}(U)$ である (c.f. 命題 1.6(4))．(Y_U, f_U) について, 以下の命題が成立する:

命題 1.8. $\mathcal{F}$ を準連接 $\mathcal{O}_Y$-加群層とする．この時, $\mathcal{F}\,|_{f^{-1}(U)}$ を $\mathcal{F}_U$ と書くことにすると, 任意の $i \geq 0$ で, $(R^i f_* \mathcal{F})_U \cong R^i (f_U)_* \mathcal{F}_U$ が成立する．

証明. $\mathcal{F}$ の移入分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{\Delta^0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{\Delta^1} \cdots$$

について, 移入的加群層は散布層なので, これと,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{J}_U^0 \xrightarrow{\Delta^0} \mathcal{J}_U^1 \xrightarrow{\Delta^1} \cdots$$

は散布分解でもある．$R^i f_* \mathcal{F}$ は, $\mathcal{F}$ の散布分解についての f の高次順像をとったものと同型で, これの $f^{-1}(U)$ への制限は制限を取ってから高次順像を取ったものと同型である．よって, 主張が従う． □

[2] これは, $\mathrm{Spec}(k)$-scheme という意味である．屡々使われる用法なので, ここで使っておく．

(4) scheme の射 $g : Z \to X$ が**平坦射**であるとは, 任意の $z \in Z$ について, $g_z^\# : \mathcal{O}_{X,g(z)} \to \mathcal{O}_{Z,z}$ が平坦であることを指す. より一般に, (Z, g) を X-scheme とし, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_Z$-加群層とする. $\mathcal{F}$ が $z \in Z$ において X 上平坦であるとは, $x = g(z)$ として, $\mathcal{F}_z$ が平坦 $\mathcal{O}_{X,x}$-加群であることをさす. 任意の $z \in Z$ において, $\mathcal{F}$ が X 上平坦である時, $\mathcal{F}$ を X 上平坦であるという. 平坦射についても, 上の命題と同様の結果が成立する:

命題 1.9. X, Y を scheme, $g : Z \to X$ を平坦射, $\mathcal{F}$ を準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群層として, さらに $f : Y \to X$ を scheme の射とする. $\mathcal{F}_Z$ で, $(f_Z)^*\mathcal{F}$ を表すことにする. この時, 同型 $(R^i f_* \mathcal{F})_Z \cong R^i (f_Z)_* \mathcal{F}_Z$ が成立する. □

(X, f) を S-scheme とする. この時, 恒等射 $\mathrm{id}_X : X \to X$ について, $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$ に対応する射 $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ を**対角射**という. 対角射の像 $\Delta_{X/S}(X)$ について調べる. $x \in X$ を任意にとり, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ と, $f(x)$ の affine 開近傍 $V = \mathrm{Spec}(B)$ を, $U \subset f^{-1}(V)$ となるようにとる. この時, $\Delta_{U/V} : U \to U \times_V U$ は, 環準同型 $m : A \otimes_B A \to A$; $m(a \otimes a') = aa'$ によって定まる. よって, U は, $\ker(m)$ の定める $U \times_V U$ の閉部分 scheme と同型になる. $\Delta_{X/S} \mid_U = \Delta_{U/V}$ であり, $U \times_S U$ は $X \times_S X$ の開部分 scheme なので, $U \times_V U$ の和集合によって定まる $X \times_S X$ の開部分 scheme を W とおくと, $\Delta_{X/S}$ は W への閉埋入射であることがわかる. つまり, $\Delta_{X/S}$ は次の意味で埋入射である:

定義 1.4.

(1) X を scheme, Y を, 底空間が X の部分空間であるような scheme とする. ある X の開部分空間 U が存在して, Y が U の閉部分空間となる時, Y は X の**部分 scheme** という. また, $f : X \to Y$ を scheme の射として, f の像が Y の部分 scheme であるとき. f を**埋入射**という. つまり, f が埋入射であるとは, f が Y の開部分 scheme への閉埋入射であることである.

(2) scheme の射 $f : X \to S$ が**分離的**であるとは, 対角射 $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ が閉埋入射であることを指す.

(3) $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は scheme の圏の終対象だったので, scheme の射 $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ が一意に定まる. これが分離的であるとき, X は分離的であるという.

位相空間の圏 **Top** において, 分離的対象とは Hausdorff 空間そのものであることに注意せよ. 分離的射の分離性に関する基本的性質をまとめておく:

命題 1.10. $f : X \to S$ が affine scheme の射ならば, f は分離的である.

証明. 上の議論から明らかである. □

命題 1.11. $f : X \to S$ を scheme の射, $\{V_i\}_{i \in I}$ を S の開被覆とする. $U_i = f^{-1}(V_i)$ とすると, f が分離的であることと, 任意の $i \in I$ について, $f_i := f \mid_{f^{-1}(V_i)} : U_i \to V_i$ が分離的であることは同値である.

証明. f が分離的であるとすると, $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ は閉埋入射である. つまり, ある準連接 $X \times_S X$-イデアル層 $\mathcal{J}$ が存在して, f は $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(X \times_S X, \mathcal{O}_{X \times_S X}/\mathcal{J})$ の同型を誘導するが, ここから, 各 V_i について, $X \times_S X$ の S-scheme としての構造射を F として, $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ と $(F^{-1}(V_i), \mathcal{O}_{X \times_S X}/\mathcal{J} \mid_{F^{-1}(V_i)})$ の間の同型を誘導する. $F^{-1}(V_i) = U_i \times_{V_i} U_i$ なので, 各 i について, $f_i : U_i \to V_i$ は分離的であることがわかった. 逆に, 各 i について, f_i が閉埋入射であるとすると, $U_i \times_{V_i} U_i = F^{-1}(V_i)$ は $X \times_S X$ を被覆するので, f も閉埋入射である. □

命題 1.12. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が共に分離的ならば, $gf : X \to Z$ も分離的である.

この命題には, 証明に幾らかの補題を必要とする.

補題 1.7. scheme の射 $a : S \to T$, $b : T \to T'$ が共に閉埋入射ならば, $b \circ a : S \to T'$ も閉埋入射である.

証明. T' の affine 開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ をとってきて, 各 $i \in I$ について, $ba\mid_{(ba)^{-1}(U_i)}: (ba)^{-1}(U_i) \to U_i$ が閉埋入射であることが示されれば良いので, $T' = \mathrm{Spec}(A)$ としても支障ない. すると, b が閉埋入射であることから, ある A のイデアル I が存在して, $T \cong \mathrm{Spec}(A/I)$ となる. さらに, a も閉埋入射なので, ある I を含む A のイデアル J が存在して, $S \cong \mathrm{Spec}(A/J)$ が成立する. よって, ba は閉埋入射である. □

補題 1.8. scheme の射 $f : X \to S$ が閉埋入射ならば, 任意の X-scheme (Y, g) について, 基底変換 $f_Y : X \times_S Y \to Y$ も閉埋入射である.

証明. S, X, Y, $X \times_S Y$ の affine 開被覆 $\{S_i\}_{i\in I}$, $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$, $\{U_i\}_{i\in I}$ を, 任意の $i \in I$ について, $X_i \subset f^{-1}(S_i)$[3], $Y_i \subset g^{-1}(S_i)$, $f_Y^{-1}(Y_i) \subset U_i$, $g_Y^{-1}(X_i) \subset U_i$ となるように選び, 任意の i について,$f_Y\mid_{U_i}: U_i \to Y_i$ が閉埋入射であることが示されれば, f_Y が閉埋入射であることが示されるので, 初めから X, Y, S は affine scheme として良い. $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(R)$ とおく. f が閉埋入射なので, ある R のイデアル I が存在して, $A \cong R/I$ となる. よって, $X \times_S Y \cong \mathrm{Spec}(B \otimes_R R/I) = \mathrm{Spec}(B/IB)$ となるので, f_Y は閉埋入射であることがわかる. □

命題 1.12 の証明. f, g が分離的射なので, $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ および $\Delta_{Y/Z} : Y \to Y \times_Z Y$ が閉埋入射である. 以下の図式によって一意に得られる射 $X \times_Y X \to X \times_Z X$ を G とおく:

$$
\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[dr, dashed, "G"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "gf"] \\
& X \arrow[r, "gf"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

対角射の定義から, 以下の図式は点線に上下どちらの射をとっても可換になる:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "G\Delta_{X/Y}", "\Delta_{X/Z}"'] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "gf"] \\
& X \arrow[r, "gf"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

よって, fibre 積の普遍性から $G\Delta_{X/Y} = \Delta_{X/Z}$ がわかった. 定義より, $\Delta_{X/Y}$ は閉埋入射なので, G が閉埋入射であることが示されれば, 補題 1.7 から, $\Delta_{X/Z}$ が閉埋入射であることが従い, 主張が従う. 以下, $p_1 : X \times_Y X \to X$, $p_2 : X \times_Z X \to X$, $p_3 : Y \times_Z Y \to Y$ を, それぞれ fibre 積の射影とする. まず, 2 本の $fp_2 : X \times_Z X \to Y$ と, fibre 積の普遍性から得られる射を $(f, f)_Z : X \times_Z X \to Y \times_Z Y$ と

[3] f は閉埋入射なので, 実際のところ $X_i := f^{-1}(S_i)$ として良い.

する. 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[dr, "G"] \arrow[rrrdd, bend left, "fp_1"] \arrow[rrddd, bend right, "fp_1"'] & & & \\
& X \times_Z X \arrow[dr, "(f,f)_Z"] \arrow[rrd, bend left, "fp_2"] \arrow[rdd, bend right, "fp_2"'] & & \\
& & Y \times_Z Y \arrow[r, shift left, "p_3"] \arrow[d, shift left, "p_3"] & Y \arrow[l, shift left, "\Delta_{Y/Z}"] \arrow[d, "g"] \\
& & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[u, shift left, "\Delta_{Y/Z}"] & Z
\end{tikzcd}$$

今わかっていることは, 上の図式から $\Delta_{Y/Z}$ を除いた部分の可換性である. $p_3\Delta_{Y/Z} = \mathrm{id}_Y$ に注意して, $gp_3\Delta_{Y/Z}fp_1 = gp_3(f,f)_Z G$ がわかるので, $Y \times_Z Y$ の普遍性から, 以下の図式が可換になる:

(2)
$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "fp_1"'] & X \times_Z X \arrow[d, "(f,f)_Z"] \\
Y \arrow[r, "\Delta_{Y/Z}"'] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

この図式が pull back になっていることを示す. W を scheme, $w_1 : W \to X \times_Z X$, $w_2 : W \to Y$ を scheme の射として, $(f,f)_Z w_1 = \Delta_{Y/Z} w_2$ となるものとする. この時, 以下の図式から点線の射を除いた図式

(3)
$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, bend left, "w_1"] \arrow[ddr, bend right, "w_2"'] & & & \\
& X \times_Y X \arrow[r, "G"] \arrow[d, "fp_1"'] & X \times_Z X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "(f,f)_Z"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "\Delta_{Y/Z}"'] & Y \times_Z Y \arrow[r, "p_3"'] & Y
\end{tikzcd}$$

が得られるが, $p_2 G = p_1$, $p_3\Delta_{Y/Z} = \mathrm{id}_Y$ などに注意して, W を w_2 によって Y-scheme とみると, 以下の Y-scheme の可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "w"] \arrow[drr, bend left, "p_2 w_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2 w_1"'] & & \\
& X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

よって, $X \times_Y X$ の普遍性から, 点線の射 w で, 上の図式の全てを可換にするものが一意に取れる. あとは $Gw = w_1$ および $fp_1 w = w_2$ が示されれば良い. 図式 3 は, Y-scheme の可換図式ともみれるが,

$g : Y \to Z$ によって, Z-scheme の図式とも見ることができる. 先ほど示した図式の外側の可換性および小さい四角形の可換性から,

$$gfp_2w_1 = gfp_2Gw$$

となるので, 以下の図式において, 点線の射を Gw としても w_1 としても可換になる:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "p_2w_1"] \arrow[ddr, bend right, "p_2w_1"'] & & \\
& X \times_Z X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

$X \times_Z X$ の普遍性から, $Gw = w_1$ がわかった. $p_3\Delta_{Y/Z} = \mathrm{id}_Y$ を用いると, $fp_1w = w_2$ が得られる. よって, 図式 2 は pull back になっていることが示された. すると, 補題 1.8 より, G が閉埋入射であることが従い, 主張が従う. □

命題 1.13. X, Y を scheme とする.

(1) $j : Y \to X$ が閉埋入射ならば, j は分離的である.
(2) $j : Y \to X$ が開埋入射ならば, j は分離的である.

証明.

(1) X の affine 開被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ をとる. j は閉埋入射だったので, 各 i について, $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ とおくと, $j^{-1}(V_i) =: U_i$ は, 空でないならば affine 開集合である. U_i が空でない時, これを $\mathrm{Spec}(A_i)$ とおくと, ある B_i のイデアル J_i が存在して, $A_i = B_i/J_i$ とできる. すると, $B_i \to A_i \times_{B_i} A_i; b \mapsto b \otimes 1$ は同型射となるので, 射影 $\pi_i : U_i \times_{V_i} U_i \to U_i$ は同型射となる. $\{U_i\}_{i \in I}$ は Y を被覆するので, 射影 $\pi : Y \times_X Y \to Y$ は同型射となる. $\mathrm{id}_Y = \pi\Delta_{Y/X}$ なので, $\Delta_{Y/X}$ も同型射, 特に閉埋入射である. よって, j が分離的であることがわかる.
(2) $j(Y)$ は X の開部分 scheme になる. $j(Y)$ の開被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ をとると, $U_i := j^{-1}(V_i)$ は V_i と同型である. よって, 射影 $p_i : U_i \times_{V_i} U_i \to U_i$ は同型射であり, 上と同様にして j が分離的であることが示される. □

系 1.4. $f : X \to S$ が分離的射で, $j : Y \to X$ が閉埋入射 (resp. 開埋入射) ならば, $fj : X \to S$ も分離的射である. □

命題 1.14. $f : X \to S$ が分離的射ならば, 任意の $g : Y \to S$ について, g による基底変換 $f_Y : X_Y \to Y$ は分離的である.

証明. 以下の図式は pull back の図式になっていることが容易に ($X \times_S Y$ の普遍性などを用いて) 確かめることができる:

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_S Y) \times_Y (X \times_S Y) \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \times_S X
\end{tikzcd}$$

ここで, 下の射は $\Delta_{X/S}$, 上の射は $\Delta_{X \times_S Y/Y}$ である. よって, 補題 1.8 より, f_Y も分離的であることが従う. □

命題 1.15. scheme の射 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ について, $gf : X \to Z$ が分離的ならば, f も分離的である.

証明. Γ_f を, 以下の図式を可換にするものとして定義する:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Gamma_f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

この時, Γ_f は mono 射である. なぜならば, scheme の射 h_1, h_2 が, $\Gamma_f h_1 = \Gamma_f h_2$ となるならば, p_1 を合成することによって $h_1 = h_2$ が得られるからである. このことから, 以下の図式は pull back になっている:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "\Gamma_f"] \\
X \arrow[r, "\Gamma_f"'] & X \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

よって, Γ_f から誘導される対角射は同型射になっており, 特に閉埋入射になっているので, Γ_f は分離的である. $\pi : X \times_Y Z \to Y$ を射影とすると, これは gf の基底変換なので, 前の命題から分離的である. よって, 命題 1.12 より, $f = \pi\Gamma_f$ も分離的である. □

1.7. **scheme に課す諸性質.** 本節では, scheme の圏 **Sch** の対象に対して考えられる性質について, 簡単に触れておく.

定義 1.5. X を scheme とする.

(1) X が**整**であるとは, 任意の X の開集合 U について, $\mathcal{O}_X(U)$ が整域であることを指す.
(2) X が**局所整**であるとは, 任意の $x \in X$ について, $\mathcal{O}_{X,x}$ が整域であることを指す.
(3) X が**局所 Noether** であるとは, X の affine 開被覆 $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}_{i \in I}$ で, 任意の $i \in I$ について, A_i が Noether 環であることを指す.
(4) X が **Noether** であるとは, X が局所 Noether であり, かつ準コンパクトであることを指す.
(5) X が**正規**であるとは, 任意の $x \in X$ について, $\mathcal{O}_{X,x}$ が正規環であることを指す.
(6) X が**連結**であるとは, X の底空間が連結空間であることを指す.

scheme X が Noether ならば, 有限個の Noether 環の Spec によって X が被覆されるので, 特に X の底空間は Noether であることに注意せよ.

補題 1.9. scheme X が整であることと, X が既約かつ被約であることは同値である.

証明. X を整 scheme とする. この時, X が被約であることは明らか. X が既約でないとすると, ある空でも X でもない閉集合 F_1, F_2 で, $X = F_1 \cup F_2$ と表される. $i = 1, 2$ について, $U_i := X \setminus F_i$ とおくと, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となる. よって, 層の定義から, $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) \cong \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ がわかるが, これが整域であると仮定すると, $\mathcal{O}_X(U_1)$ あるいは $\mathcal{O}_X(U_2)$ が零環にならねばならないが, そうすると今度はそれが整域で無くなってしまう. つまり, X は既約でなければならない. 逆に, X を既約かつ被約な scheme とする. この時, X の開集合 U について, $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$, $fg = 0$ なるものが存在したとする. すると, $X_f = \{x \in X : f_x \notin \mathfrak{m}_x\}$ などとおいて, U の affine 開集合 $V = \mathrm{Spec}(B)$ を任意に取ると, f の V への制限 f_V について, $X_f \cap V = D(f_V)$ となる. つまり, X_f は開集合であることがわかった. 同様にして, X_g も開集合であることがわかる. $F_1 := U \setminus X_f$, $F_2 := U \setminus X_g$ とすると, これらは U の閉集合であり, 任意の $x \in U$ について, $f_x g_x = 0$ が成立するので, $F_1 \cup F_2 = \{x \in U : f_x \in \mathfrak{m}_x, \text{or } g_x \in \mathfrak{m}_x\} = U$

となる. X の既約性から, U も既約であることがわかるので, $F_1 = U$ として良い. この時, f の U における affine 開集合 $V = \mathrm{Spec}(B)$ への制限は皆冪零元[4]となるので, X の被約性から, $f|_V = 0$ がわかる, つまり, $f = 0$ である. よって, $\mathcal{O}_X(U)$ は整域になることがわかった. □

補題 1.10. Noether scheme$X$ が連結かつ局所整であることと, 整であることは同値である.

証明. X が整ならば, 連結かつ局所整であることは明らかである. 逆を示す. 補題 1.9 より, X が既約かつ被約であることを示せばよい. X が被約であることと, X の各茎が被約であることは同値であったので, X の被約性は従う. 既約性について, X の 2 つの既約成分 F_1, F_2 をとってきて, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ とする. この時, $x \in F_1 \cap F_2$ について, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ を取ると, $F_1 \cap U$ と $F_2 \cap U$ は U の既約成分である. 既約成分はその生成点をただ一つ持つので, $F_i \cap U$ の生成点に対応する A の素イデアルを $\mathfrak{p}_i$ とする. $\mathrm{Spec}(A)$ の既約成分たちを $G_1, \ldots, G_k$ とかくと[5], 任意の A の素イデアル $\mathfrak{q}$ について, ある $j \in \{1, \ldots, k\}$ が存在して, $V(\mathfrak{q}) \subset G_i$ とならねばならないので, 各 G_i に対応する素イデアルは極小素イデアルである. x に対応する A の素イデアルを $\mathfrak{p}$ とすると, $A_\mathfrak{p}$ は整域なので, その極小素イデアルはただ一つしか存在せず, $\mathfrak{p}_1 A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2 A_\mathfrak{p}$ がわかる. よって, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ が示され, $F_1 \cap U = F_2 \cap U$ がわかった. しかし, $F_i \cap U$ について, $F_i = \overline{(F_i \cap U)} \cup (F_i \setminus U)$ と, 閉集合の和集合で表せるが, F_i の既約性から $F_i = \overline{(F_i \cap U)}$ がわかる. つまり, $F_i \cap U$ は F_i で稠密なので, $F_1 = F_2$ が従う. よって, X の各既約成分は互いに素であることがわかり, X の連結性から, これは X が既約であることを示している. □

1.8. 代数多様体.

定義 1.6. $f : X \to Y$ を scheme の射とする.

(1) Y の準コンパクト開集合 V について, $f^{-1}(V)$ も常に準コンパクト開集合である時, f を**準コンパクト射**であるという.

(2) 任意の $x \in X$ について, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ および $f(x)$ の affine 開近傍 $V = \mathrm{Spec}(B)$ が, $U \subset f^{-1}(V)$ となるように取れて, A が B 上有限生成代数となる時, f は**局所有限生成射**であるという.

(3) f が準コンパクトかつ局所有限生成ならば, f を**有限生成射**と言い, Y-scheme (X, f) を有限生成 Y-scheme という. 特に k を体として, $Y = \mathrm{Spec}(k)$ となる時, 有限生成 Y-scheme のことを k 上の**代数的 scheme** であるという.

(4) k 上代数的 scheme X が**代数多様体**, あるいは単に**多様体**であるとは, 以下の条件を満たすことである:
   (a) k の代数閉包 $\overline{k}$ について, $X \times_k \overline{k}$ も整である.
   (b) 構造射 $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ は分離的である.

(5) k 上の代数多様体 X の部分 k-scheme Y が, それ自身代数多様体である時, Y は X の**部分代数多様体**であるという.

k-scheme の構造射 $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ が準コンパクトであることは, 底空間が準コンパクトであることを指しており, X の affine 開被覆を取った時に, その有限開被覆が存在することを指す[6]. また, f が局所有限であるということは, k 上有限生成代数の Spec からなる X の開被覆が得られるということである. つまり, 代数的 scheme は, 有限個の有限生成 k-代数に関する affine scheme で被覆される. また, 代数多様体の条件から分離性を除いたものを屡々**前多様体**という.

補題 1.11. X を体 k 上局所有限生成 scheme とすると, 任意の X の affine 開集合 U について, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ は k 上有限生成である.

---

[4] 全ての素イデアルの共通部分は冪零根基であったことに注意.

[5] ここで A の Noether 性を使っている

[6] affine 開集合は X の開基を成したので, これはコンパクト性の同値条件になっている.

証明. 各 $x \in U$ について, x の affine 開近傍 $V_x \subset U$ で, $S := \Gamma(V_x, \mathcal{O}_X)$ が有限生成 k-代数であるものが存在する. $x \in D_U(f_x) \subset V_x$ となるような $f_x \in R := \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ が存在して, この f_x について, $D_U(f_x) = D_{V_x}(f_x\mid_{V_x})$ が成立することから, R_{f_x} は有限生成 k-代数となる. U は準コンパクトなので, ある $f_1, \dots, f_n \in R$ が存在して, $\{D(f_i)\}_{i=1,\dots,n}$ は U を被覆して, 各 i について, R_{f_i} は k 上有限である. よって, R も k-上有限である. □

命題 1.16. X を体 k 上整な代数的 scheme とする.

(1) X は Noether 空間である.
(2) $U = \mathrm{Spec}(A)$ を X の affine 開集合とすれば, その商体は U の選び方によらず, X によってのみ決まる, k-上有限生成拡大体である. これを X の**函数体**と言って, $k(X)$ と書く. この時 $\mathrm{tr.deg}_k k(X) = \dim X$ である.
(3) k の代数閉包 $\overline{k}$ について, $X \times_k \overline{k}$ が $\overline{k}$ 上整である必要十分条件は, $k(X) \otimes_k \overline{k}$ が体になることである. このような k の拡大体のことを, **正則拡大体**という. この時, $\overline{k}(X \times_k \overline{k}) \cong k(X) \otimes_k \overline{k}$ である.
(4) X の点 x が閉点であることと, $\kappa(x)$ が k の有限次代数拡大になることは同値である. $\kappa(x) = k$ となる点 x を k-有理点という. k-有理点全体の集合に X からの誘導位相を与えた位相空間を $X(k)$ とかく.

証明.

(1) 上に述べた通り, k 上代数的 scheme$X$ は, 有限生成 k 代数の Spec による有限 affine 被覆 $\{\mathrm{Spec}(A_i)\}_{i=1,\dots,n}$ が取れる. 体上有限生成代数は特に Noether 環なので, そのスペクトルが Noether 空間である. よって, X が Noether 空間であることが示された.
(2) 補題 1.9 より, X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, A は整域である. よって, 商体 $Q(A)$ が定義できる. $x \in X$ について, x の 2 つの affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A), V = \mathrm{Spec}(B)$ を取ると, 任意の $y \in U \cap V$ について, $A_{\mathfrak{p}_y} = \mathcal{O}_{X,y} = B_{\mathfrak{q}_y}$ となる. ここで, $\mathfrak{p}_y$ は点 y に対応する A の素イデアル, $\mathfrak{q}_y$ は点 y に対応する B の素イデアルである. よって, $Q(A) = Q(A_{\mathfrak{p}_y}) = Q(B_{\mathfrak{q}_y}) = Q(B)$ がわかる. つまり, 商体は, X の点, および affine 開近傍の取り方によらないことがわかった. X の affine 開集合の座標環は常に k 上有限生成整域なので, その商体は k 上有限生成拡大体である.
(3) $X \times_k \overline{k}$ が既約かつ被約であるとする. この時, X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, $U \times_k \overline{k} = \mathrm{Spec}(A \otimes_k \overline{k})$ は $X \times_k \overline{k}$ の開集合であり, $X \times_k \overline{k}$ が整 scheme であることから, $A \otimes_k \overline{k}$ は整域であることがわかる. よって, 商体 $Q(A \otimes_k \overline{k})$ が定義でき, 以下の包含関係が成立する:

$$Q(A) \subset Q(A) \otimes_k \overline{k} \subset Q(A \otimes_k \overline{k})$$

ここで, 最初の包含では, $a/a' \in Q(A)$ について, $(a/a') \otimes 1 \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ を同一視しており, 2 つ目の包含関係においては, $(a/a') \otimes s \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ と $(a \otimes s)/(a' \otimes 1) \in Q(A \otimes_k \overline{k})$ を同一視している. $0 \neq \alpha \otimes s \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ について, s の最小多項式 $f \in k[X]$ を用いて, $g(X) := \alpha^{\deg f} f(X/\alpha) \in Q(A)[X]$ を定義すると, これはモニック多項式であり, $g(\alpha \otimes s) = 0$ となる. よって, $Q(A) \otimes_k \overline{k}$ は $Q(A)$ 上整である. よって, $Q(A) \otimes_k \overline{k}$ は体である. $\overline{k}$ は k 上平坦なので, 以下の列は完全である:

$$0 \longrightarrow A \otimes_k \overline{k} \longrightarrow Q(A) \otimes_k \overline{k}$$

この完全列における単射は $a \otimes s \in A \otimes_k \overline{k}$ について, $(a/1) \otimes s \in Q(A) \otimes_k \overline{k}$ を定めるので, これは, 上の同一視によって, 包含写像になっている. よって, 商体の普遍性から, $Q(A) \otimes_k \overline{k} = Q(A \otimes_k \overline{k})$ がわかった. つまり, $k(X) \otimes_k \overline{k} = \overline{k}(X \times_k \overline{k})$ である.

$k(X)\otimes_k \overline{k}$ が体であるとする．この時, X の affine 開集合 $U=\mathrm{Spec}(A)$ について, $A\otimes_k \overline{k}$ は体 $Q(A)\otimes_k \overline{k}$ の部分環である．よって, $A\otimes_k \overline{k}$ は整域になる．まず, $X\times_k \overline{k}$ は連結であることを示す．X は既約かつ被約なので, 特に連結であるので, $X\times_k \overline{k}$ が連結でないとすると, ある X の affine 開集合 $U=\mathrm{Spec}(A)$ が存在して, $U\times_k \overline{k}$ が非連結である．この U について, 互いに素な $U\times_k \overline{k}$ の開集合 V_1,V_2 が存在して, $U\times_k \overline{k}=V_1\cup V_2$ と表せたとすると, 層の定義から, $\mathcal{O}_{X\times_k\overline{k}}(U\times_k \overline{k})=\mathcal{O}_{X\times_k\overline{k}}(V_1)\times\mathcal{O}_{X\times_k\overline{k}}(V_2)$ となる．よって, ある $e_1,e_2\in\mathcal{O}_{X\times_k\overline{k}}(U\times_k \overline{k})$ について, $e_1+e_2=1$, $e_i^2=e_i$ $(i=1,2)$, $e_1e_2=0$ が成立する．つまり, $\mathcal{O}_{X\times_k\overline{k}}(U\times_k \overline{k})=A\otimes_k \overline{k}$ は整域では無くなってしまい, 矛盾である．よって, $X\times_k \overline{k}$ が連結である．よって, 各茎が整域であることが示されれば補題 1.10 から, $X\times_k \overline{k}$ が整であることが従うが, 各 $z\in X\times_k \overline{k}$ について, その X への射影 $\overline{z}$ の affine 開近傍 $U=\mathrm{Spec}(A)$ をとってきて, $U\times_k \overline{k}$ の大域切断が整域なので, その局所化 $\mathcal{O}_{X\times_k\overline{k},z}$ も整域である．よって, $X\times_k \overline{k}$ は整であることがわかった．

(4) $x\in X$ を閉点とする．この時, x の affine 開近傍 $U=\mathrm{Spec}(A)$ について, A は k 上有限生成整域であり, x は U でも閉点である．よって, Hilbert の零点定理から, x に対応する A の素イデアル $\mathfrak{p}_x$ について, $\kappa(x)=A/\mathfrak{p}_x$ は k 上有限次代数拡大体である. 逆に, $\kappa(x)$ が k 上有限次代数拡大であったとする．x の affine 開近傍 $U=\mathrm{Spec}(A)$ について, 以下の自然な射の合成を考える:

$$k\hookrightarrow A\longrightarrow A/\mathfrak{p}_x\hookrightarrow Q(A/\mathfrak{p}_x)=\kappa(x)$$

これによって, $A/\mathfrak{p}_x$ は加群として k-上有限生成な整域であることがわかり, $A/\mathfrak{p}_x$ が体であることがわかる．つまり, x は U で閉点である．一方で, X の開集合 V について, $x\notin V$ とすると, $\overline{\{x\}}$ の定義から, $\overline{\{x\}}\cap V=\emptyset$ となる．つまり,

$$\overline{\{x\}}=\overline{\{x\}}\cap X=\bigcup_{x\in U}(\overline{\{x\}}\cap U)=\{x\}$$

であることが従い, x が閉点であることが従う． □

k を代数閉体, X を k 上整な代数的 scheme とする．この時, $X(k)$ は X の閉点全体のなす空間である．$X(k)$ 上に, $X(k)$ の開集合 U について

$$\mathcal{O}_{X(k)}(U):=\bigcap_{x\in U(k)}\mathcal{O}_{X,x}$$

と定めると, $(X(k),\mathcal{O}_{X(k)})$ は環付き空間を成し, $U=\mathrm{Spec}(A)$ が X の affine 開集合の時, $V\subset U$ を開集合として, $\mathcal{O}_{X(k)}(V(k))=\mathcal{O}_X(V)$ となる．さらに $X(k)$ は X で稠密なので, $(X(k),\mathcal{O}_{X(k)})$ は $(X,\mathcal{O}_X)$ を回復する．このような理由から, 代数閉体 k 上の (前) 多様体 X と, その k-有理点全体 $X(k)$ を同一視することがある．

1.9. **代数閉でない体上の scheme.** k を必ずしも代数閉体でないような体とする．また, X を k 上局所有限生成な scheme とする．

命題 1.17. 上の条件において, X の閉点全体の集合は X で very dense である．

証明. X の任意の空でない局所閉集合が閉点を持つことを示せば良い．$Z\subset X$ を空でない局所閉集合とする．このとき, $Z\cap U$ が U の閉集合であるような X の開集合全体は X の開被覆をなし, $(\mathrm{Op}(X),\subset)^{\mathrm{op}}$ の filter を成している．よって, 空でない affine 開集合 $U=\mathrm{Spec}(A)$ で, $U\cap Z$ が U の閉集合であるようなものが存在する．補題 1.11 から, A は有限生成 k 代数であり, $U\cap Z=V_U(I)$ には U での閉点が存在する．これを x とおくと, $\kappa(x)\cong A/\mathfrak{p}_x$ は体なので, x は X の閉点である[7]．よって, 主張が示された． □

[7]命題 1.16(4) の証明に X が準コンパクトであることは使っていないので, これは k 上局所有限生成の場合にも使える

1.10. **分離性再論.** (S-)scheme の分離性を定義した際に, それが scheme の圏における Hausdorff 性の analogy であることに触れて. 本節では, scheme の分離性一つの特徴付けとして, 分離性に関する**賦値判定法**を紹介する. これは, 位相空間における Hausdorff 性を特徴付ける, 以下の性質に着目したものである: “X を Hausforff 空間とする. 任意に与えられた連続写像 $f : (0,1) \to X$ について, $\lim_{x\to 1} f(x)$ は存在すれば一意に定まる”. その前に, 幾らか体論からの準備が必要である.

補題 1.12. k を体, A を k 上有限生成整域とする. この時, A は**永田環**である. つまり, $K := Q(A)$ の有限次代数拡大体 L について, A の L での整閉包 B は A 上有限生成代数である.

証明. O. Zariski & P. Samuel[2] 参照. □

補題 1.13. A を k 上有限生成整域, K をその商体, L を K の有限次代数拡大体とする. この時, A の素イデアル $\mathfrak{p}$ について, L の離散賦値環 R で, $A_{\mathfrak{p}}$ を支配するものが存在する. つまり, $A_{\mathfrak{p}} \subset R$ であり, R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $A_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ となる.

証明. $\mathfrak{p} = \displaystyle\sum_{1}^{n} x_i A$ とおいて, $B := A[x_2/x_1, \ldots, x_n/x_1]$ とおく. この時, $\mathfrak{p}B = x_1 B$ となる. すると, $Q(B) = K$ であり, B の L での整閉包を S とおく. すると, 補題 1.12 より, S は k 上有限生成整域になっている. よって, lying over theorem より, $\mathfrak{p}$ の上に乗っている S の素イデアル $\mathfrak{q}$ が取れ, S の $\mathfrak{q}$ による局所化 $S_{\mathfrak{q}}$ が取れる. イデアル $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{q}}$ の素因子の一つを $\mathfrak{P}$ とおくと, $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{q}} = x_1 S_{\mathfrak{q}}$ であることから, $(S_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{P}}$ は離散賦値環となる[8]. これを R とおくと, R は $A_{\mathfrak{p}}$ を支配する. □

X を scheme, R を離散賦値環として, $g : \mathrm{Spec}(R) \to X$ を scheme の射とする. $\mathrm{Spec}(R)$ の閉点を s, 生成点を η とする. $g(s) = x'$, $g(\eta) = x$ とすると, g に付随して射 $\varphi := g^{\#}_{x'} : \mathcal{O}_{X,x'} \to R$ が得られる. g の連続性から, $x' \in \overline{\{x\}}$ であることが従い, x' は x の特殊化であることがわかる. $Y := (\overline{\{x\}})_{\mathrm{red}}$ とおく. すると, g は Y を経由する.

[理由: $U = \mathrm{Spec}(A)$ を x' の X での affine 開近傍とすると, これは x を包含するので, g は U を経由する. よって, 予め X は affine scheme としても支障ない. $X = \mathrm{Spec}(A)$ とおく. Y は既約かつ被約な U の閉部分 scheme なので, A の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在して, $Y = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$ となる. Y の生成点は x なので, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_x$ である. $\varphi := \Gamma(X, g^{\flat}) : A \to R$ とすると, $g^{\#}_{\eta} : A_x \to Q(R)$ は局所環の射なので, $\ker(g^{\#}_{\eta}) = \mathfrak{p}_x A_x$ である. よって, $\ker(\varphi) = \mathfrak{p}_x$ が従う. よって, 準同型定理から, 以下の図式を可換にする単射 $A/\mathfrak{p}_x \to R$ が唯一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & R \\ & A/\mathfrak{p}_x \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Spec を取ることで, 主張が従う.]

上の証明で得た射 $h : \mathrm{Spec}(R) \to Y$ について, $h^{\#}_s : \mathcal{O}_{Y,x'} \to R$ は局所環の単射なので, R は $\mathcal{O}_{Y,x'}$ を支配することがわかる. また, $\kappa(x)$ は Y の函数体なので, φ は体の準同型 $\kappa(x) \to Q(R)$ を誘導する. 逆に, 以下の命題が成立する:

補題 1.14. X を体 k 上の代数的 scheme, $x \in X$, $Y = (\overline{\{x\}})_{\mathrm{red}}$, $x' \in \overline{\{x\}}$ とする. L を $k(Y)$ の有限次代数拡大体とすると, L の離散賦値環 R が存在して, R が $\mathcal{O}_{X,x'}$ を支配する.

証明. Y は k 上代数的 scheme なので, Y の点 x' における affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, A は k 上有限生成整域である. x' に対応する A の素イデアル $\mathfrak{p}_{x'}$ について, 補題 1.13 を使うと, L の離散賦値環 R で, $A_{\mathfrak{p}_{x'}} = \mathcal{O}_{Y,x'}$ を支配するものが存在することがわかる. □

[8]正規環の単項イデアルの素因子は高さ 1 であることに注意.

上のように, 離散賦値環 R について, 射 $\mathrm{Spec}(R) \to X$ で, $\eta \mapsto x$, $s \mapsto x'$ となるようなものを, x の R に沿った**特殊化**といい, $x \to x'$ と書く. 無論, 特殊化を支配する離散賦値環は一意的ではなく, $x \in X$ と離散賦値環 R が与えられても, x の特殊化 x' は一般には一意に定まらない.

補題 1.15. X を体 k 上の代数的 scheme, Y をその部分 scheme とする. この時, 以下の 2 条件は同値である:

(1) Y は閉部分 scheme である.
(2) R を離散賦値環, $x \to x'$ を R に沿った特殊化として, $x \in Y$ ならば $x' \in Y$ となる.

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2): x' の X での affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ は x も含む. Y が閉部分 scheme なので, ある A のイデアル I が存在して, $U \cap Y = \mathrm{Spec}(A/I)$ となる. A において, x, x' に対応する素イデアルを $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_{x'}$ とおくと, x' は x の特殊化であることから $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'}$ となる. $x \in Y$ ならば, $I \subset \mathfrak{p}_x$ となるので, $I \subset \mathfrak{p}_{x'}$ がわかり, $x' \in U \cap Y$, つまり $x' \in Y$ がわかる.
(2) $\Longrightarrow$ (1): $x \in Y$ ならば $\overline{\{x\}} \subset Y$ なので, $\overline{Y} = Y$ であることが従い, Y が X の閉部分 scheme であることがわかる. □

ここで, 以下の補題を用いている:

補題 1.16. $f : Y \to X$ を埋入射とする. f が閉埋入射であることと, $f(Y)$ が閉であることは同値である.

証明. f が閉埋入射ならば, $\{U_\lambda = \mathrm{Spec}(R_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の affine 開被覆とすると, 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $f^{-1}(U_\lambda) \cong \mathrm{Spec}(R_\lambda/I_\lambda)$ となる R_λ のイデアル I_λ が存在する. この I_λ を用いて, $f(Y) \cap U_\lambda = V_{R_\lambda}(I_\lambda)$ となるので, $U_\lambda \setminus f(Y)$ は U_λ の, 従って X の開集合である. よって,

$$X \setminus f(Y) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \setminus f(Y)$$

は X の開集合になり, $f(Y)$ が閉であることが従う. 逆に, $f(Y)$ が閉であるとすると, f が埋入射なので, ある X の開部分 scheme U が存在して, f は閉埋入射 $i : Y \to U$ と開埋入射 $j : U \to X$ の合成となる. i が閉埋入射なので, ある $\mathcal{O}_U$ の準連接イデアル層 $\mathcal{I}$ が存在して, $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}), \mathcal{O}_U/\mathcal{I})$ となる. $i(Y)$ は閉であり, $\mathcal{I}\mid_{U\setminus i(Y)} = \mathcal{O}_U \mid_{U\setminus i(Y)} = \mathcal{O}_X \mid_{U\setminus i(Y)}$ がわかるので, $\mathcal{I}$ と $\mathcal{O}_{X\setminus i(Y)}$ は張り合って, 一つの準連接イデアル層 $\mathcal{J}$ を作る. この $\mathcal{J}$ について, $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}), \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ となるので, f が閉埋入射であることが従う. □

これらの準備のもと, 以下の結果がわかる:

定理 1.1. X を体 k 上の代数的 scheme, $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ をその構造射とする. この時, 以下の 2 条件は同値である:

(1) f は分離的射である. つまり, X は分離的である.
(2) R を離散賦値環, $x \to x'$ と $x \to x''$ を R に沿った特殊化で, それから誘導された体の準同型 $\kappa(x) \to Q(R)$ が等しいならば, $x' = x''$ となる.

証明. (1) を仮定すると, 対角射 $\Delta_{X/k} : X \to X \times_k X$ は閉埋入射である. よって, $\Delta_{X/k}(X)$ は閉集合である. $g : x \to x'$, $h : x \to x''$ を, 共に R に沿った特殊化として, 以下の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(R) \arrow[dr, dashed, "{(g,h)}"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X \times_k X \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k)
\end{tikzcd}$$

ここで, $\eta : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(R)$ を $\mathrm{Spec}(R)$ の生成点とすると, $g^{\#}_{\eta} = h^{\#}_{\eta}$ なので, $g\eta = h\eta$ である. よって, $(g,h)(s) =: (x,x) \in \Delta_{X/k}(X)$. $x', x'' \in \overline{\{x\}}$ なので, $(g,h)(s) =: y \in \overline{\{(x,x)\}}$ となる. $\Delta_{X/k}$ は閉埋入射なので, $\overline{\{(x,x)\}} \subset \Delta_{X/k}(X)$ である. よって, $x' = p_1(y) = p_2(y) = x''$ がわかった.

次に, (2) を仮定する. この時, $\Delta_{X/k}(X)$ が閉集合であることを示せば良い. $\Delta_{X/k}(x) =: (x,x)$ について, $y \in \overline{\{(x,x)\}}$ ならば, ある DVR R と R に沿った特殊化 $(x,x) \to y$ が存在する. これを $l : \mathrm{Spec}(R) \to X \times_k X$ とすると, $g := p_1 l$, $h := p_2 l$ は x から $p_1(y)$, $p_2(y)$ への R に沿った特殊化である. また, g, h の誘導する体準同型は等しく, (2) より, $p_1(y) = p_2(y)$ がわかる. よって, $y \in \Delta_{X/k}(X)$ がわかった. つまり $\Delta_{X/k}(X)$ は閉集合である. □

この命題は, X が分離的であることと, 以下の図式を可換にするような lift(点線部分) は高々一つであることが同値であることを示している:

(4)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (\mathrm{Spec}(k))
\end{tikzcd}$$

離散賦値環 R に沿った特殊化 $x \to x'$ について, 上に与えた点線の射が得られることを, 特殊化が**収束する**といい, 得られる射を R に沿った特殊化の**極限**と言うことにする[9]. すると, 上の命題は, X の分離性は, **特殊化に沿った極限が収束すれば一意である**と言い換えることができる. そうすると, これは位相空間の圏において, Hausdorff 性と, 極限が収束すれば一意であることの同値性の analogy になっていることに気づくであろう. この例は, 以下の例によってより明確になるであろう:

例. k を体, $X_1 := \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x_1])$, $X_2 := \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[x_2])$ とおき, 0_1 を X_1 の (x) に対応する点, 0_2 を X_2 の (x_2) に対応する点とする. $U_{12} := X_1 \setminus \{0_1\} = \mathrm{Spec}(k[x_1, 1/x_1])$, $U_{21} = X_2 \setminus \{0_2\} = \mathrm{Spec}(k[x_2, 1/x_2])$ となる. $\varphi_{12} : k[x_1, 1/x_1] \to k[x_2, 1/x_2]$ を, $x_1 \mapsto x_2$ によって定まる k-代数の射として, φ_{12} に対応する射を $f_{12} : U_{21} \to U_{12}$ として, φ_{12}^{-1} に対応する射を f_{21} とする. Glueing data$\{(X_i), (U_{ij}), (f_{ij})\}$ による X_1 と X_2 の張り合わせを X とおき, **原点を 2 点持つ直線**という. これについて, 体 $k(x)$ と, その部分環 $k[x]_{(x)}$ について, $\mathrm{Spec}(k(x)) \to X$ を, 自然な射 $\mathrm{Spec}(k(x)) \to X_i$ の張り合わせとして, $\mathrm{Spec}(k[x]_{(x)}) \to \mathrm{Spec}(k)$ を構造射とすると, 以下の図式を可換にする点線の射は 2 通り存在することになる (各 i について, X_i を経由する射を考えることができる)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k(x)) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(k[x]_{(x)}) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (\mathrm{Spec}(k))
\end{tikzcd}$$

よって, 定理 1.1 によって, X は分離的でないことがわかった. □

最後に, より一般に, 射の分離性に関しても同様の言い換えが可能であることを述べておく. 証明は上と同じなので, 省略する.

定理 1.2. X, Y を局所 Noether scheme, $f : X \to Y$ を有限射とする. この時, 以下の 2 条件は同値である:

(1) f は分離的射である.
(2) R を離散賦値環, $x \to x'$ と $x \to x''$ を R に沿った特殊化で, それから誘導された体の準同型 $\kappa(x) \to Q(R)$ が等しいならば, $x' = x''$ である. つまり, 以下の図式の実線部分が可換ならば, 図式の全てを可換にするような点線の射は高々一つである.

[9] これは一般的な語法ではない.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

1.11. **scheme の射の性質に関する一般論.** 上で見たように, scheme の図形的性質は, その (構造) 射に関する性質として書くのが有効なアプローチであることがわかる. よって, scheme の射に関する命題が, どの程度の安定性を持つかといった議論は, 幾何学をやる上で重要になってくる. そこで, 本節では, scheme の射に関するメタ的な命題を紹介することにする.

定義 1.7. P を環の射に関する命題とする.

(1) P が**局所的性質**であるとは, 以下の 3 条件を満たすことを言う:
 (a) 任意の環の射 $\varphi : R \to S$ について, 常に以下の論理式は真である.
$$P(\varphi) \implies (\forall f \in R,\ P(\varphi_f : R_f \to S_f))$$
 (b) R, S を環, $f \in R$ として, $\varphi : R_f \to S$ を環の射とする. この時, 以下の論理式は常に真である:
$$P(\varphi) \implies (\forall a \in S, P(R \to R_f \to S \to S_a))$$
 (c) $(a_1, \dots, a_n) = S$ を満たす $a_1, \dots, a_n \in S$ を任意に取ると, 任意の環の射 $\varphi : R \to S$ について, 以下の論理式は真になる:
$$(\forall i,\ P(R \to S \to S_{a_i})) \implies P(R \to S)$$
(2) P が**基底変換で安定**であるとは, 任意の環の射 $\varphi : R \to S$ と任意の R-代数 R' について, について, $P(\varphi) \implies P(\varphi \otimes_R R')$ となることである.

(3) P が**合成で安定**であるとは, 任意の環の射 $\varphi : R \to S$, $\psi : S \to T$ について,$P(\varphi) \wedge P(\psi) \implies P(\psi \circ \varphi)$ となることを指す.

定義 1.8. P を環の射に関する命題とする. scheme の射 $f : X \to Y$ が**局所的に P である**とは, 任意の $x \in X$ について, ある x の affine 開近傍 U 及び $f(x)$ の affine 開近傍 V が存在して, $f(U) \subset V$ であり, かつ誘導される環の射 $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ が P を満たすことである.

補題 1.17. X を scheme とする. 任意の $x \in X$ について, その affine 開近傍 $U, V \subset X$ を任意に取ってくると, $U \cap V$ の affine 開集合で, U, V のどちらに関しても標準的なものが存在する. ここで, affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ の標準的 affine 開近傍とは, $D_U(f)$ の形をした U の affine 開近傍のことである.

証明. $U = \mathrm{Spec}(R)$, $V = \mathrm{Spec}(S)$ とする. この時, $x \in U \cap V$ について, その U に関する標準的 affine 開近傍 U' が取れて, U' の標準的 affine 開近傍は U の標準的 affine 開近傍であることから, U' の標準的 affine 開近傍で, V に関しても標準的な affine 開近傍が取れることを言えばよい. つまり初めから $U \subset V$ として良い. まず, x に対応する R の素イデアルを $\mathfrak{p}$, x に対応する S の素イデアルを $\mathfrak{q}$ とする. x の V に関する標準的 affine 開近傍 $D_V(f)$ を取ってくると, 制限写像 $\rho : S \to R$ による f の像を f' として, $D_V(f) = D_U(f')$ が成立するので, これは標準的である. □

命題 1.18. P を環の射に関する局所的性質とする. また, $f : X \to Y$ を局所的に P な sheme の射として, $x \in X$, x の affine 開近傍 U, $f(x)$ の affine 開近傍 V を, $f(U) \subset V$ となるようにとる. すると, 自然な射 $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ は性質 P をもつ.

証明. $x \in U$ を任意に取る. この時, ある x の affine 開近傍 U_x 及び $f(x)$ の affine 開近傍 V_x が存在して, $\mathcal{O}_Y(V_x) \to \mathcal{O}_X(U_x)$ は性質 P をもつ. $U_x' \subset U \cap U_x$ を, U, U_x のどちらもに関して標準的な x の開近傍として取ってくると, 定義 1.8(1)(b) より, $\mathcal{O}_Y(V_x) \to \mathcal{O}_X(U_x')$ も性質 P をもつ. よって, 初めから U_x は U の標準的 affine 開集合として良い. $V_x' \subset V \cap V_x$ を, V 及び V_x に関する $f(x)$ の標準的

開近傍とする．この時, $U''_x := f^{-1}(V'_x) \cap U_x \cong U_x \times_V V'_x$ は U_x の (従って U の)affine 開集合である．$\mathcal{O}_Y(V_x) \to \mathcal{O}_X(U_x)$ が P を満たすので, 定義 1.8(1)(a) より, $\mathcal{O}_Y(V'_x) \to \mathcal{O}_X(U''_x)$ も P を満たす．よって, U, V の標準的 affine 開近傍の対の族 $\{(U_x, V_x) : x \in U\}$ で, 各 x について, $x \in U_x$, $f(x) \in V_x$ で, $f(U_x) \subset V_x$ となるものを得る．もう一度定義 1.8(1)(b) を用いることで, $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U_x)$ が P を満たすことがわかる．U は準コンパクトなので, 有限個の点 $x_1, \ldots, x_n$ が存在して, U は上で定めた U_{x_i} によって被覆される．よって, 定義 1.8(1)(c) を用いることで, $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_Y(U)$ は性質 P をもつことがわかる． □

命題 1.19. P を環の射に関する局所的性質で, 合成で安定であるものとする．この時, scheme の射 $f : X \to Y$, $g : T \to Z$ が共に局所的に P であるならば, $gf : X \to Z$ も局所的に P である．

証明. f, g が共に局所的に P であるとする．$x \in X$ を任意に取る．上に示した命題から, $gf(x)$ の affine 開近傍 W と, $f(x)$ の affine 開近傍 $V \subset g^{-1}(W)$ について, $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_Y(V))$ は真であり, x の affine 開近傍 $U \subset f^{-1}(V)$ について, $P(\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U))$ は真なので, 仮定より, $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U))$ も真である．よって, gf も局所的に P である． □

命題 1.20. P を環の射に関する局所的性質で, かつ基底変換で安定であるとする．この時, scheme の射 $f : X \to Y$ が局所的に P であるならば, その基底変換も局所的に P である．

証明. $g : Z \to Y$ を scheme の射とする．この時, 任意の $z \in Z$ に対して, z の affine 開近傍 W 及び $g(z) =: y$ の affine 開近傍 V で, $g(W) \subset V$ となるものを取ってくると, 命題 1.18 より, $f^{-1}(V)$ は X の affine 開集合 U_i であって, $P(\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U_i))$ が成立するようなもので被覆される．以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd} U_i \times_V W \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ U_i \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

すると, $U_i \times_V W \to W$ の大域切断は $\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_Z(W)$ となり, これは $(\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U_i)) \otimes_Y \mathcal{O}_Z(W)$ である．P は基底変換で安定だったので, $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_Z(W))$ は真である．

$w \in X \times_Y Z$ を任意にとる． この時, $z := f \times_Y Z(w)$ として上のような V, W, U_i を取ると, $w \in f^{-1}(V) \times_V W$ となり, これはある i について, $w \in U_i \times_V W$ となることを指し, 上の議論から $P(\mathcal{O}_Z(W) \to \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_Z(W))$ は真である．よって, f の基底変換も局所的に P である． □

1.12. **固有射と完備性.** scheme の底空間に入る位相はかなり荒いので, 我々が考える scheme の底空間は大体コンパクトになってしまう．分離性と同様, scheme の圏においてもコンパクト性の analogy を作りたい．ここで, 位相空間の圏において, コンパクト性を特徴づける以下の命題から出発する:

定理 1.3 (Kuratowski-Mrówka)**.** 位相空間 X がコンパクトであることと, 任意の位相空間 Y について, 射影 $p : X \times Y \to Y$ は閉写像であることは同値である． □

一般に, 位相空間の射 $f : X \to Y$ が絶対閉 (普遍閉) であるというのは, 任意の位相空間の射 $g : Z \to Y$ について, $f \times Z : X \times_Y Z \to Z$ が閉写像であることをいう．つまり, X がコンパクトであるということは, 一意的な射 $f : X \to \{pt\}$ が絶対閉であることと同値である．これを踏まえて, scheme の圏においては以下のようにしてコンパクト性の analogy を考えるのは自然である:

定義 1.9.

(1) scheme の射 $f : X \to Y$ が**閉射**であるとは, f が位相空間の射として閉写像であることをさす．また, f が**絶対閉射**であるとは, 任意の Y-scheme (Z, g) について, 基底変換 $f_Z : X_Z \to Z$ は閉射であることをさす．

(2) S-scheme X が S 上**閉**[10]であるとは, 構造射が絶対閉射であることを指す.
(3) scheme の射 $f : X \to Y$ が有限生成[11]で, 分離的かつ絶対閉射である時, f は**固有射**であるという. また, 体 k 上の代数的 scheme X について, その構造射が固有射である時, X は k 上固有であるという.
(4) 体 k 上固有な代数多様体を**完備代数多様体**という.

まず, 絶対閉射, 固有射に関する性質を調べていこう.

命題 1.21.

(1) 閉埋入射は固有射である.
(2) scheme の射 $f : X \to Y$ が固有射ならば, 任意の Y-scheme (Z, g) について, 基底変換 $f_Z : X \times_Y Z \to Z$ も固有射である.
(3) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が共に固有射であるとき, $g \circ f$ も固有射である.

証明.

(1) X の底空間が Y の閉集合となるようにしても良い. $F \subset Y$ が準コンパクトならば, 準コンパクト集合の閉集合も準コンパクトなので, $F \cap X$ も準コンパクトである. よって f は準コンパクト射である. $U = \mathrm{Spec}(R)$ を Y の affine 開集合とすると, イデアル $I \subset R$ が存在して, $f^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(R/I)$ となるので, f は局所有限生成であることがわかった. 補題 1.8 によって, f の任意の基底変換は閉埋入射であることがわかり, 特に f が絶対閉射であることがわかった. さらに, 命題 1.13(1) より, f は分離的射であることもわかるので, 主張が従う.
(2) 絶対閉射であることは, 明らかに基底変換で安定である. また, 準コンパクト性も基底変換で安定であり, 環の射の有限生成性は局所的性質で, 基底変換で安定なので, 局所有限生成性は基底変換で安定になる. 分離性が基底変換で安定であることは既に示してあるので, 固有性も基底変換で安定である.
(3) (2) と同様, 固有性を定める諸性質は合成で安定なので, 固有性も合成で安定である. □

ここで, 以下の事実を用いている:

補題 1.18. $f : X \to Y$ を scheme の準コンパクト射とする. この時, 任意の scheme の射 $g : Z \to Y$ について, $f_Z : X \times_Y Z \to Z$ は準コンパクト射である.

証明. scheme W の部分集合が準コンパクトであることと, 有限枚の affine 開集合で被覆されることは同値であるので, 結局 Z の affine 開集合 V について, $f_Z^{-1}(V)$ が準コンパクトであることを示せば良い. V の affine 開被覆 $\{V_i\}_{i=1}^{p}$ で, 任意の i について, ある Y の affine 開集合 U_i が存在して, $g(V_i) \subset U_i$ となるようにとる. 各 i について, $f^{-1}(U_i)$ は準コンパクトなので, $f^{-1}(U_i)$ の有限 affine 開被覆 $\{U_{ij}\}_{j=1}^{q_i}$ が取れる.

$$f_Z^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q_i} U_{ij} \times_{U_i} V$$

となるので, $U_{ij} \times_{U_i} V$ は $X \times_Y Z$ の affine 開集合であることから, $f_Z^{-1}(V)$ は準コンパクトであることが従う. □

命題 1.21 の系として, 以下が得られる:

系 1.5. X, Y, Z を scheme, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を scheme の射とする. $g \circ f$ が固有射で, g が分離的ならば, f は固有射である.

[10] これも一般的な語法ではない
[11] 実はこれは局所有限生成で十分である. というのも, 絶対閉射は準コンパクトだからである.

証明. 以下の図式を考える:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Gamma_f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}
$$

p_2 は固有射 gf の基底変換なので, 固有射である. Γ_f は対角射 $\Delta_{Y/Z}$ の $(f,1)_Z$ による基底変換なので, g が分離的射であることから, $\Delta_{Y/Z}$ は閉埋入射となり, 閉埋入射は固有射なので, Γ_f も固有射. $f = p_2\Gamma_f$ なので, f は固有射である. □

ここで使った, Γ_f は対角射 $\Delta_{Y/Z}$ の $(f,1)_Z$ による基底変換であるということは, 以下のようにして示せる: まず, 以下の図式の実線部分が全て可換であったとする.

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "p_1\pi_1"] \arrow[drr, bend left, "\pi_1"] \arrow[drrrr, bend left, "p_1\pi_1"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_2"'] & & & & \\
& X \arrow[r, "\Gamma_f"'] \arrow[d, "f"] & X \times_Z Y \arrow[rr, "p_1"] \arrow[d, "(f,1)_Z"] \arrow[ddr, bend left, "p_2"] & & X \arrow[d, "gf"] \\
& Y \arrow[r, "\Delta_{Y/Z}"'] \arrow[drr, bend right, "1_Y"] & Y \times_Z Y \arrow[dr] & & Z \\
& & & Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

点線の射を $p_1\pi_1$ で定めると,

$$p_1\pi_1 = p_1\Gamma_f p_1\pi_1$$

及び,

$$p_2\pi_1 = fp_1\pi_1 = p_2\Gamma_f p_1\pi_1$$

がわかるので, $X \times_Z Y$ の fibre 積の普遍性から, $\pi_1 = \Gamma_f p_1\pi_1$ となる. 一方で, $fp_1\pi_1 = p_2\pi_1 = \pi_2$ であることは既に示されているので, 点線の射を含めた図式の全てが可換になる. このような点線の射の一意性は, Γ_f が mono 射であることから従うので, 図式の中央 (左側?) の四角形は pull back である. よって, $\Delta_{Y/Z}$ の $(f,1)_Z$ での基底変換は Γ_f になることが分かった.

射の固有性 (絶対閉性) について, 以下のような賦値判定法が存在する.

定理 1.4. $f : X \to Y$ を局所 Noether scheme の有限射とする. この時, 以下は同値である:

(1) f は固有射 (resp. 絶対閉射) である.
(2) 任意の離散賦値環 R について, 下の図式の実戦部分が可換になるならば, 点線の持ち上げが一意に (resp. 少なくとも一つ) 存在する.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}
$$

証明は省略する. 特に, 以下の系が成立する:

系 1.6. X を k 上代数的 scheme とする．この時, X が k 上固有であることと, その構造射 $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ について, 任意の離散賦値環 R について, 上の図式において $Y = \mathrm{Spec}(k)$ としたものの実線部分が可換ならば, 点線の射が一意に定まることは同値である． □

さて, 次に scheme の固有射に関するかなり重要な性質を示していく:

定理 1.5. X, Y を体 k 上の分離的代数 scheme として, X は既約かつ被約でもあるとする．また, $f : X \to Y$ を固有射とする．この時, $f_*\mathcal{O}_X$ は連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．

定理の証明の前に, 以下の補題を示しておく:

補題 1.19. X, Y を体 k 上の分離的代数的 scheme, $f : X \to Y$ を k-scheme の射とする．X 上の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ について, その f での順像 $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．

証明は, 以下の手順に則ってする:

(1) Y を affine 代数的 scheme の場合に帰着させる．
(2) X が affine 代数的 scheme ならば, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．
(3) U, U' を X の 2 つの affine 開集合とすると, $U \cap U'$ も X の affine 開集合である．
(4) $\{U_i\}_{i \in I}$ を X の affine 開被覆, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ とする．この時, 以下の列が完全になる．

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{F} \longrightarrow \prod_i (f|_{U_i})_*(\mathcal{F}|_{U_i}) \longrightarrow \prod_{i,j} (f|_{U_{ij}})_*(\mathcal{F}|_{U_{ij}})$$

(5) $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群になる．

証明.

(1) $f_*\mathcal{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることの定義を書き下すと, 任意の $y \in Y$ について, y の開近傍 V 及び添字集合 I, J が存在して, 以下の $\mathcal{O}_V$ 加群の完全列が作れることである:

$$\mathcal{O}_V^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_V^{(I)} \longrightarrow (f_*\mathcal{F})|_V \longrightarrow 0$$

V の中での y の affine 開近傍をとって, それに制限することで, V は元々affine として良い．無論, このような完全列が初めから与えられていれば $(f_*\mathcal{F})|_V$ は準連接 $\mathcal{O}_V$ 加群なので, $f_*\mathcal{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であるならば, Y の affine 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して, $(f_*\mathcal{F})|_{V_\lambda}$ は準連接 $\mathcal{O}_{V_\lambda}$ 加群である．逆にそのような affine 開被覆が存在すれば, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群になるので, Y の affine 開集合 V について $(f_*\mathcal{F})|_V$ が準連接 $\mathcal{O}_V$ 加群であることを示せば十分である．結局これは Y を V で, X を $f^{-1}(V)$ で取り替えて示せばよいことになるので, Y を affine 代数的 scheme として良い．

(2) X も affine 代数的 scheme とする．つまり, $X = \mathrm{Spec}(R)$, $Y = \mathrm{Spec}(S)$ で, R, S は k 上有限生成代数である．この時, $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$ とおくと, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ であり, $f_*\mathcal{F}$ は, R 加群 M を $\Gamma(Y, f^\flat) : S \to R$ によって S 加群とみたものに相当する．よって, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．

(3) $U, U' \subset X$ を affine 開集合とする．この時, $U \times_k U'$ は affine 代数的 scheme であり, X は k 上分離的 scheme であり, 開埋入射は分離的射なので, その開部分 scheme の構造射は 2 つの分離的射の合成になり, 従って X の開部分 scheme は分離的であることがわかる．つまり, 対角射 $\Delta : U \cap U' \to (U \cap U') \times_k (U \cap U') = U \times_k U'$ は閉埋入射である．よって, $U = \mathrm{Spec}(R)$, $U' = \mathrm{Spec}(R')$ とおくと, $R \otimes_k R'$ のイデアル I が存在して, $U \cap U' = \mathrm{Spec}(R \otimes_k R'/I)$ と表される．つまり, $U \cap U'$ は affine 開集合である．

(4) Y の開集合 V について,

$$(f|_{U_i})_*(\mathcal{F}|_{U_i})(V) = \mathcal{F}(U_i \cap f^{-1}(V))$$

となる．$\{U_i \cap f^{-1}(V)\}$ は $f^{-1}(V)$ の開被覆なので, $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij} \cap f^{-1}(V))$$

が得られる．よって，上の系列は各切断で完全になるので，もちろん層の完全列にもなる．

(5) (4) に示したことから，$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(Y, f_*\mathcal{F}) \longrightarrow \prod_i M_i \longrightarrow \prod_{i,j} M_{ij}$$

が得られる．ここで，$M_i = \Gamma(Y, (f|_{U_i})_*(\mathcal{F}|_{U_i}))$, $M_{ij} = \Gamma(Y, (f|_{U_{ij}})_*(\mathcal{F}|_{U_{ij}}))$ である．tilde 関手をとって，5 項補題を使うと，

$$f_*\mathcal{F} \cong \Gamma(Y, f_*\mathcal{F})^{\sim}$$

が得られる．よって，$f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることが従う．

さて，定理の証明に入ろうか．

定理 1.5 の証明． まず，$Z := (\overline{f(X)})_{\mathrm{red}}$ とする．既約 scheme の像の閉包は既約である (なぜならば，$Z = F_1 \cup F_2$ と閉集合の結びで表したときに，$X = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$ となるが，F_1, F_2 は共に Y の閉集合なので，$f^{-1}(F_1)$, $f^{-1}(F_2)$ は X の閉集合．X の既約性から，このうちどちらかが X に等しい．$f^{-1}(F_1) = X$ としても良いが，この時 $f(X) \subset F_1$．つまり $Z \subset F_1$ がわかる)．このことを用いると，Z は既約かつ被約であることが分かった．被約 scheme の普遍性から，$g : X \to Z$ が定まって，$f = ig$ となる．ここで，$i : Z \to Y$ は閉埋入射．$g_*\mathcal{O}_X$ が連接 $\mathcal{O}_Z$ 加群ならば，$f_*\mathcal{O}_X$ は連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．今は体 k 上の代数 scheme の話をしているので，Noether 加群の部分加群は自明に有限生成であることから，有限生成性についてのみ確認すれば良い．i が閉埋入射なので，これも容易に確認できる．よって，初めから Y は被約かつ既約で k 上分離的な代数 scheme で，f は支配的として良い．

X の生成点 ξ, Y の生成点を η とおく．この時，f は支配的なので，$f(\xi) = \eta$ となる．$k(X) = \mathcal{O}_{X,\xi} (= \kappa(\xi))$, $k(Y) = \mathcal{O}_{Y,\eta} (= \kappa(\eta))$ なので，f は体の埋め込み $k(Y) \to k(X)$ を誘導する．f は固有射なので，特に有限生成であることに注意すると，$k(X)$ は $k(Y)$ の有限生成拡大であることがわかる．$k(Y)$ の $k(X)$ における代数閉包を L とおく．この時，L は $k(X)$ の有限生成代数拡大なので，有限次拡大である．ところで $f_*\mathcal{O}_X$ が連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることは局所的性質なので，$Y = \mathrm{Spec}(R)$, R は k 上有限生成多元整域として良い．k 上分離的代数 scheme の間の射による順像は，準連接性を保存するので，$f_*\mathcal{O}_X = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^{\sim}$ となる．

- R の L における整閉包を S とおき，$\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を，$Q(\mathcal{O}_\lambda) = k(X)$ となる離散附値環のうち，A を含むもの全体からなる族とすると，$S = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ となる．
- 任意の $\lambda \in \Lambda$ について，$\mathcal{O}_{X,x} \leq \mathcal{O}_\lambda$ となるような $x \in X$ が存在する．

この 2 つが示されれば，$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} \subset S$ がわかり，R は永田環なので，S は有限 R 加群であることと，R が Noether 環であることから S が Noether 加群になり，$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ は有限 R 加群であることが従う．つまり $f_*\mathcal{O}_X$ が連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であることが従う．

- 各 $\lambda \in \Lambda$ について，$\mathcal{O}_\lambda$ は R を含む整閉整域なので，$S \subset \mathcal{O}_\lambda$．よって，

$$S \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$$

となる．$\xi \in \bigcap \mathcal{O}_\lambda$ で，$\xi \notin S$ なるものが取れたとする．この時，$\xi \notin R$ なので，$\xi^{-1}R[\xi^{-1}]$ は $R[\xi^{-1}]$ の真のイデアルになる．$k(X)$ は $k(Y)$ の有限生成拡大なので，不定元 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ が存在して，$k(X)$ は $k(Y)(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ の有限次代数拡大になる．よって，$R' := R[\xi^{-1}, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ のイデアル $\xi^{-1}R'$ の素因子 $\mathfrak{p}$ について，$R'_{\mathfrak{p}}$ を支配する $k(X)$ の離散附値環 $\mathcal{O}$ が存在する．この $\mathcal{O}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は ξ^{-1} を含むので，$\xi \notin \mathcal{O}$．よって，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $\xi \notin \mathcal{O}_\lambda$ となるものが取れた．此れは矛盾である．

- 以下の図式の実線部分は可換になる:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k(X)) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\lambda) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y = \mathrm{Spec}(R) \end{tikzcd}$$

  f は固有射だったので, 賦値判定法より, 点線の射で, 図式の全てを可換にするものが一意に存在する. この射による $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\lambda)$ の閉点の像を $x \in X$ とすると, $\mathcal{O}_{X,x} \leq \mathcal{O}_\lambda$ となることが容易にわかる.

よって, 示したいことの全てが示された. □

系 1.7 (Liouville)**.** k を代数閉体, X を k 上完備代数多様体とする. この時, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ となる.

証明. X を代数閉体 k 上の完備代数多様体とすると, その構造射は無論固有射なので, $f_*\mathcal{O}_X$ は $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ と同一視できることに注意して, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ はは有限生成 k 加群になる. また X は既約かつ被約なので, その大域切断は整域になることに注意して, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ は有限 k 多元整域であることがわかる. よって, k が代数閉体であることから, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ が成立する. □

1.13. **affine 射, 有限射, 有限被覆多様体.**

定義 1.10. X, Y を scheme, $f : X \to Y$ を scheme の射とする.

(1) f が **affine 射**であるとは, Y の affine 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f^{-1}(V_\lambda)$ は X の affine 開集合であることを指す.
(2) f が**有限射**であるとは, f が affine 射であって, さらに (1) の条件を満たす開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に関して, 任意の $\lambda \in \Lambda$ で, $B_\lambda := \Gamma(f^{-1}(V_\lambda), \mathcal{O}_X)$ は有限生成 $A_\lambda := \Gamma(V_\lambda, \mathcal{O}_Y)$ 加群になっていることを指す.

例.

(1) 閉埋入射は有限射である.
(2) affine scheme の間の射は affine 射である.

まず, affine 射, 有限射の性質をみる前に, 準コンパクト射についての性質からみる.

命題 1.22. $f : X \to Y$ を scheme の射とする. この時, 以下は同値である:

(1) f は準コンパクトである.
(2) Y の affine 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f^{-1}(V_\lambda)$ は準コンパクトである.

証明. (1) ならば (2) であることは明らか. 逆を示す. (2) を仮定する. $C \subset Y$ を準コンパクト集合として, C の有限 affine 被覆を $\{W_i\}_{i=1}^n$ とおく. 各 i について, $f^{-1}(W_i)$ が準コンパクトであることが示されれば $f^{-1}(C)$ も準コンパクトであることがわかるので, 元々C は affine 開集合として良い. 任意の $y \in C$ について, ある $\lambda(y)$ が存在して, $y \in V_{\lambda(y)} \cap C$ となる. $V_{\lambda(y)} \cap C$ の標準的 affine 開集合 $U_y \ni y$ をとることで, $\{U_y\}$ は C の開被覆をなす. C はコンパクトなので, $y_1, \ldots, y_m \in C$ が存在して, $\{U_{y_j}\}_{j=1}^m$ は C の affine 開被覆をなす. $f^{-1}(V_{\lambda(y_j)})$ の affine 開被覆を $\{O_{jk}\}_{k \in K_j}$ (K_j は有限集合) と表すことにすると, U_{y_j} は $V_{\lambda(y_j)}$ の標準的 affine 開集合なので, $f^{-1}(U_{y_j}) \cap O_{jk} = (f|_{O_{jk}})^{-1}(U_{y_j})$ は O_{jk} の標準的 affine 開集合である. よって, $f^{-1}(U_{y_j}) \cap O_{jk}$ は affine 開集合であることがわかったので, $f^{-1}(U_{y_j})$ は有限枚の affine 開集合で覆われる. よって, $f^{-1}(C)$ も準コンパクトであることが示され, 主張が従う. □

命題 1.23. $f : X \to Y$ を scheme の射とする．f が分離的ならば, $U, V \subset X$ を affine 開集合で, $f(U), f(V) \subset W$ となる Y の affine 開集合 W が存在するならば, $U \cap V$ もまた affine 開集合で, $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V)$ は全射になる．逆に, 任意の $y \in Y$ および $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ について, ある x_1 の affine 開近傍 U および x_2 の affine 開近傍 V が存在して, U, V は f によって共通の y の affine 開近傍 W の中に写像され, $U \cap V$ が affine 開集合であり, さらに $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V)$ が全射ならば, f は分離的である．

証明. 前半の証明から行う．開埋入射は分離的なので, 対角射 $\Delta : U \cap V \to U \times_W V = (U \cap V) \times_W (U \cap V)$ は閉埋入射である．$U = \mathrm{Spec}(A)$, $V = \mathrm{Spec}(B)$, $W = \mathrm{Spec}(R)$ とすると, $U \times_W V = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ となるので, あるイデアル $I \subset A \otimes_R B$ が存在して, $U \cap V = \mathrm{Spec}(A \otimes_R B/I)$ となる．よって, $U \cap V$ は X の affine 開集合であり, $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to A \otimes_R B$ および $A \otimes_R B \to A \otimes_R B/I$ は共に全射なので, $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V)$ が全射であることがわかった．よって, 前半が証明された．後半をしめす．$y \in Y$ について, 条件を満たす x_1, x_2 および U, V 全体を取ってくると, $U \times_W V$ 達は $X \times_Y X$ を被覆する．条件から, 対角射の上の環準同型 $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V)$ は全射なので, 準同型定理より, あるイデアル $I \subset \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathcal{O}_X(V)$ が存在して, $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathcal{O}_X(V)/I \cong \mathcal{O}_X(U \cap V)$ となることがわかる．つまり, 対角射は閉埋入射であることが示された． □

命題 1.24. affine 射は準コンパクトかつ分離的射である．

証明. affine 射が準コンパクトであることは命題 1.22 より明らか．分離性について, $f : X \to Y$ を affine 射とする．$y \in Y$ を任意に取ってきて, $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ も任意にとると, y の affine 開近傍 W について $U = V = f^{-1}(W)$ と置くと, $U \cap V$ は affine であり, $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \cap V) = \mathcal{O}_X(U)$ は全射である．よって, 命題 1.23 より, f は分離的であることがわかった． □

命題 1.25. X, Y を体 k 上分離的な代数的 scheme, $f : X \to Y$ を scheme の射とする．この時, 以下は同値

(1) f は有限射
(2) f は固有射かつ affine 射

証明. まず, (2) から (1) を示す．f は affine 射なので, Y の affine 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f^{-1}(V_\lambda)$ は X の affine 開集合である．$\Gamma(f^{-1}(V_\lambda), \mathcal{O}_X)$ が有限生成 $\Gamma(V_\lambda, \mathcal{O}_Y)$ 加群であることを示せば良い．f は固有射でもあったので, $f \times_k V_\lambda : f^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda$ も固有射．定理 1.5 より, $f_* \mathcal{O}_{f^{-1}(V_\lambda)} = \Gamma(f^{-1}(V_\lambda), \mathcal{O}_X)^\sim$ は連接 $\Gamma(V_\lambda, \mathcal{O}_Y)^\sim$ 加群であることがわかり, ゆえに $\Gamma(f^{-1}(V_\lambda), \mathcal{O}_X)$ は有限生成 $\Gamma(V_\lambda, \mathcal{O}_Y)$ 加群になる．

次に (1) を仮定して, (2) を示す．定義より, 有限射は affine 射なので, 命題 1.24 より, 示すべきことで残っているのは絶対閉射であることである．Y の affine 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在し, 任意の $\lambda \in \Lambda$ で $f_\lambda := f \times_Y V_\lambda$ が絶対閉射ならば, $g : Z \to Y$ を scheme の射としたときに, $f_Z := f \times_Y g : X \times_Y Z \to Z$ は閉射である．実際に, $U_\lambda := f_Z^{-1}(g^{-1}(V_\lambda)) = f^{-1}(V_\lambda) \times_{V_\lambda} g^{-1}(V_\lambda)$ と置くと, $f_Z|_{U_\lambda} = f_\lambda \times_Y g|_{g^{-1}(V_\lambda)}$ なので, これは閉射であり, $X \times_Y Z$ の閉集合 F を任意に取ると, $f_Z|_{U_\lambda}(F \cap U_\lambda)$ は $g^{-1}(V_\lambda)$ の閉集合である．つまり, $g^{-1}(V_\lambda) \setminus f_Z|_{U_\lambda}(F \cap U_\lambda)$ は Z の開集合で,

$$Z \setminus f_Z(F) = \bigcup_\lambda g^{-1}(V_\lambda) \setminus f_Z|_{U_\lambda}(F \cap U_\lambda)$$

なので, これは Z の開集合．ゆえに $f_Z(F)$ は Z の閉集合であることがわかり, f が絶対閉射であることが従う．f は有限射で, 特に affine 射なので, Y の affine 開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を, 任意の λ について, $f^{-1}(V_\lambda)$ が X の affine 開集合になるように取れる．よって, 示すべきことは, affine scheme $X = \mathrm{Spec}(R)$, $Y = \mathrm{Spec}(S)$ について, R が S 代数であり, 同時にその構造射によって有限生成 S 加群であるならば, S 代数の構造射 $f : X \to Y$ が絶対閉であるということである．f に対応する環の射を $\varphi : S \to R$ とする．Z を Y-scheme として, $f_Z : X \times_Y Z \to Z$ を基底変換とすると, Z の affine 開被覆

$\{Z_i\}$ について, $f_{Z_i} : X \times_Y Z_i \to Z_i$ は有限射である．というのも, $Z_i = \mathrm{Spec}(T_i)$ とすると, R の S-加群としての生成元を $\{e_j\}_{j=1}^r$ と置くと, $R \otimes_S T_i$ は $\{e_j \otimes 1\}_{j=1}^r$ によって T_i-加群として生成されるからである．f が絶対閉射であることを示すには, f_{Z_i} が閉射であることが示されれば良いが, 上に見たことから,「R が有限生成 S 加群ならば, $f : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(S)$ が閉射である」ことを示せばよい．F を X の閉集合とすると, F には X の被約閉部分 scheme の構造が入るが, これはある被約イデアル $I \subset R$ が存在して, $F = \mathrm{Spec}(R/I)$ となることで, R/I は有限生成 S 加群なので, 結局 $\overline{f(X)} = f(X)$ を示せば良い．φ を f に対応する環準同型, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ として, $\mathfrak{P} := f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ とする．このとき, 今示すべきことは $\mathfrak{Q} \supset \mathfrak{P}$ となる $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}(S)$ について, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ となる $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ が存在して, $\mathfrak{Q} = f(\mathfrak{q})$ となることである．$\mathfrak{Q}$ に対応する $\mathrm{Spec}(S/\mathfrak{P})$ の元を $\overline{\mathfrak{Q}}$ とかくと, φ から誘導された環の単射 $\overline{\varphi} : S/\mathfrak{P} \to R/\mathfrak{p}$ について, $R/\mathfrak{p}$ は整域, $S/\mathfrak{P}$ はその部分環で, $R/\mathfrak{p}$ は有限生成 $S/\mathfrak{P}$ 加群なので, 特に $R/\mathfrak{p}$ は $S/\mathfrak{P}$ 上整であり, lying over theorem より示したいことが示される． □

命題 1.26. X, Y を体 k 上の分離的代数的 scheme, $f : X \to Y$ を affine 射とする．この時, 任意の Y の affine 開集合 U について, $f^{-1}(U)$ は X の affine 開集合である．

証明. $U \subset Y$ を affine 開集合とする．f が affine 射なので, ある Y の開被覆 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f^{-1}(V_\lambda)$ は X の affine 開集合である．$\{U \cap V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は U の affine 開被覆であり, $U \cap V_\lambda$ の標準的な affine 開集合 V について, $f^{-1}(V)$ は X の affine 開集合となり, このようなもの全体は U の開被覆 $\{U \cap V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の細分になっているので, $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ は affine 射である．よって, $U = Y$ の場合のみを示せばよい．

$Y = \mathrm{Spec}(R)$ とおく．$S := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ とおくと, $f : X \to Y$ は $g : X \to \mathrm{Spec}(S)$ と $\mathrm{Spec}(f^\flat(Y)) : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ との合成になっている．ここで, g は制限写像の Spec の貼り合わせで作られる, f によらない scheme の射である．g が同型であることを示せば, X は affine scheme であることが従い, 主張が示される．Y の affine 開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f^{-1}(U_\lambda)$ が X の affine 開集合であるようにとる．$f|_{f^{-1}(U_\lambda)} =: f_\lambda$ について, $(f_\lambda)_*\left(\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U_\lambda)}\right) = (f_*\mathcal{O}_X)|_{U_\lambda}$ となるので, $(f_*\mathcal{O}_X)|_{U_\lambda}$ は準連接 $\mathcal{O}_{U_\lambda}$ 加群である．これが任意の λ について成立するので, $f_*\mathcal{O}_X$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群である．よって, $f_*\mathcal{O}_X = \widetilde{S}$ である．g の構成法から, $g|_{f^{-1}(U_\lambda)}$ は $\mathrm{Spec}(S \otimes_R R_\lambda)$ の恒等射を与えるので, g は同型である． □

命題 1.27. X, Y を体 k 上の分離的代数的 scheme, $f : X \to Y$ を有限射とする．この時, 任意の Y の affine 開集合 U について, $f^{-1}(U)$ は X の affine 開集合であり, さらに $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ は有限生成 $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ 加群である．

証明. $f_*\mathcal{O}_X$ は連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群になるので, 特に $f_*\mathcal{O}_{f^{-1}(U)}$ は連接 $\mathcal{O}_U$ 加群である．よって, $U = \mathrm{Spec}(R)$ とおくと, ある $f_1, \ldots, f_m \in R$ で, $\bigcup D(f_i) = \mathrm{Spec}(R)$ で, $\Gamma(D(f_i), f_*\mathcal{O}_{f^{-1}(U)})$ は有限生成 R_{f_i} 加群になる．その生成系を $\{b_{ij}\}_{j=1}^{r_i}$ とすると, $S := \Gamma(U, f_*\mathcal{O}_{f^{-1}(U)})$ とおいて, $b_{ij} \in S$ となるようにできる．$z \in S$ を任意に取ると, $z = \sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} b_{ij}$ (in S_{f_i}, $a_{ij} \in R_{f_i}$) となるので, ある $N > 0$ が存在して, 任意の i について, $f_i^N z = \sum_{j=1}^{r_i} a'_{ij} b_{ij}$ (in S) となる $a'_{ij} \in R$ が存在するようにできる．$D(f_i^N) = D(f_i)$ たちは U を被覆するので, ある $n_i \in R$ たちで, $\sum f_i^N n_i = 1$ となるものが存在する．この n_i について,

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} f_i^N a'_{ij} n_i b_{ij}$$

がわかる．よって, S は有限生成 R 加群である． □

定義 1.11. k を体, X, Y を k 上の代数多様体とする．scheme の射 $f : X \to Y$ が支配的な有限射である時, f は**有限被覆**であるといい, Y-scheme X を Y の**有限被覆多様体**という．

命題 1.28. k を体として, X を k 上代数多様体とし, $K = k(X)$ とする．K の有限次代数拡大 L について, ある X の有限被覆 (Z, f) で, Z は函数体が L な正規 scheme であり, 任意の L を函数体とする

X の有限被覆多様体 (Z', f') で, Z' が $k(Z') = L$ となる正規 scheme について, ある $g : Z \to Z'$ が一意に存在して, $f = f'g$ となる.

証明の前に, 例を一つ書いておく. $k = \mathbb{C}$, $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]/(x^3 - y^2))$ とすると, これは正規でない. 実際, $\mathbb{C}$ 代数の射 $\varphi : \mathbb{C}[x,y]/(x^3-y^2) \to \mathbb{C}[t]$ を $\varphi(x) = t^2$, $\varphi(y) = t^3$ によって定めると, $\ker\varphi = 0$ であり, 準同型定理より $\mathbb{C}[x,y]/(x^3-y^2) \cong \mathbb{C}[t^2,t^3]$ となるが, 例えば $\mathbb{C}[t^2,t^3]$ 係数 monic 多項式 $X^2 - t^2$ が $Q(\mathbb{C}[t,t^2]) = \mathbb{C}(t)$ では根をもつが $\mathbb{C}[t^2,t^3]$ では根を持たない. 今定めた φ によって, scheme の射 $f = \mathrm{Spec}(\varphi) : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to X$ が定まり, これは支配的な有限射である (実際にこれが命題の他の主張を満たしていることは確かめることができる). 実は, 代数曲線が非特異であることと, 函数環が正規環であることは同値なので, 上の定理は, 非特異曲線の特異点解消への直接的な貢献である. H. T. Muhly & O.Zariski [3] で, この方法による代数曲線の特異点解消が実現された.

証明. X の affine 開被覆 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を一つ取って固定する. $X_\lambda = \mathrm{Spec}(R_\lambda)$ とする. この時, $Z_\lambda := \mathrm{Spec}(\overline{R_\lambda})$ と定めて, $f_\lambda : Z_\lambda \to X_\lambda$ を, 環の拡大 $R_\lambda \to \overline{R_\lambda}$ に付随する affine scheme の射とする. ここで, $\overline{R_\lambda}$ は R_λ の L での整閉包. R_λ は永田環なので, $\overline{R_\lambda}$ は有限生成 R_λ 加群である. よって, f_λ は有限射であることがわかった. 任意の $\lambda \in \Lambda$ について,

$$R_\lambda = \bigcap_{x\in X_\lambda} \mathcal{O}_{X,x} \subset K$$

が成立する.

X は k 上分離的なので, $\lambda, \mu \in \Lambda$ について, $X_{\lambda\mu} := X_\lambda \cap X_\mu$ は X の affine 開集合である. $X_{\lambda\mu} := \mathrm{Spec}(R_{\lambda\mu})$ として, $Z_{\lambda\mu} := f_\lambda^{-1}(X_{\lambda\mu})$ と定めると,

$$Z_{\lambda\mu} = Z_\lambda \times_{X_\lambda} X_{\lambda\mu} = \mathrm{Spec}(\overline{R_\lambda} \otimes_{R_\lambda} R_{\lambda\mu})$$

がわかる. よって, $\overline{R_\lambda} \otimes_{R_\lambda} R_{\lambda\mu}$ は整閉整域 $\overline{R_\lambda}$ の $X_{\lambda\mu}$ の点での局所化の共通部分で書けるので, これもまた正規環であり, さらに $\overline{R_\lambda}$ が有限生成 R_λ 加群だったので, $\overline{R_\lambda} \otimes_{R_\lambda} R_{\lambda\mu}$ もまた有限生成 $R_{\lambda\mu}$ 加群である. $R_{\lambda\mu}$ の L における整閉包 $\overline{R_{\lambda\mu}}$ も有限生成 $R_{\lambda\mu}$ 加群であり, 逆に正規環かつ有限生成 $R_{\lambda\mu}$ 加群となる L の部分環は $\overline{R_{\lambda\mu}}$ しかないので, $\overline{R_{\lambda\mu}} = \overline{R_\lambda} \otimes_{R_\lambda} R_{\lambda\mu}$ がわかった. つまり, $Z_{\lambda\mu} = \mathrm{Spec}(\overline{R_{\lambda\mu}}) = Z_{\mu\lambda}$ となる. 次に, $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ について, $X_{\lambda\mu\nu} := X_\lambda \cap X_\mu \cap X_\nu := \mathrm{Spec}(R_{\lambda\mu\nu})$, $Z_{\lambda\mu\nu} := f_\lambda^{-1}(X_{\lambda\mu\nu}) = \overline{R_\lambda} \otimes_{R_\lambda} R_{\lambda\mu\nu}$ とする. すると, 上と同様にして, L の部分環として $\overline{R_\lambda} \otimes_{R_\lambda} R_{\lambda\mu\nu} = \overline{R_{\lambda\mu\nu}}$ がわかるので, $Z_{\lambda\mu\nu} = Z_{\mu\lambda\nu} = Z_{\nu\lambda\mu}$ などが得られる. よって, Glueing property が使えて, ある scheme Z と, $f : Z \to X$ で, $Z = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ で, 任意の $\lambda \in \Lambda$ で $f|_{Z_\lambda} = f_\lambda$ であり, $Z_\lambda \cap Z_\mu = Z_{\lambda\mu}$ となるもののうち, 普遍的なものが得られる. 各 $\lambda \in \Lambda$ について, f_λ が有限射だったので, f も有限射になる. また f は底空間の射として全射なので, これは支配的な有限射であることがわかった. Z' は k 上正規代数多様体で, その商体が L であるものとする. 有限被覆 $f' : Z' \to X$ が存在したとする. この時, 上に取ってきた X の開被覆 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, $f'^{-1}(X_\lambda)$ は Z' の affine 開集合であり, これを $\mathrm{Spec}(R'_\lambda)$ とおくと, R'_λ は有限生成 R_λ 加群になっている. よって, $R'_\lambda = \overline{R_\lambda}$ であることがわかったので, affine scheme の射 $g_\lambda : Z_\lambda \to f'^{-1}(X_\lambda)$ が得られた. また, 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ について, $R'_{\lambda\mu}$ を $f'^{-1}(X_{\lambda\mu})$ の座標環とすると, これもまた整閉なので, $R'_{\lambda\mu} = \overline{R_{\lambda\mu}}$ となる. よって, $g_\lambda|_{Z_{\lambda\mu}} = g_\mu|_{Z_{\lambda\mu}}$ がわかり, Glueing property の普遍性より, ある $h : Z \to Z'$ で, $f = f'h$ となるものが一意に定まる. □

この命題で構成した, k 上の代数多様体 X の有限被覆 $f : Z \to X$ を, X の L における**正規化**といい, 特に $L = K$ と取った時の Z を X の正規化と呼ぶ.

1.14. 有理写像.

定義 1.12. S を scheme, X, Y を S-scheme とする. X の稠密開集合 U と, S-scheme の射 $f : U \to Y$ の組 (U, f) のなす集合 R に, 同値関係 $\sim$ を,「$(U,f) \sim (V,g) \iff$ ある X の稠密開集合 $W \subset U \cap V$ が存在して, $f|_W = g|_W$ となる」と定め, $R/\sim$ の元, あるいはその代表元のことを, X から Y への

S-scheme の**有理写像**であると言い, $f : X \dashrightarrow Y$ と書く. $f : X \dashrightarrow Y$ を有理写像とする. この時, f が $x \in X$ で**定義されている**とは, f の代表元 (U, f) で, $x \in U$ となるものが存在することを指す. 集合 $\{x \in X : f$ が x で定義されている $\}$ を有理写像 f の**定義域**という.

命題 1.29. X を被約な S-scheme, Y を S 上分離的 scheme とする. この時, 任意の S-有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ について, その定義域を U_0 とすると, ある S-scheme の射 $f : U_0 \to Y$ が存在して, (U_0, f) は f を代表する.

証明. $f_1 : U_1 \to Y$ 及び $f_2 : U_2 \to Y$ は共に f を代表するとする. この時, ある X の稠密開集合 $V \subset U_1 \cap U_2 =: X'$ で, $f_1|_V = f_2|_V$ となる. $g := (f_1, f_2) : X' \to Y \times_S Y$ について, $h := f_1|_V = f_2|_V$ とすると, 以下の図式が全て可換になることと, fibre 積の普遍性から, $\Delta_{Y/S} h = g|_V$ となる.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, shift left, "g|_V"] \arrow[dr, shift right, "\Delta_{Y/S}h"'] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& Y \times_S Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Y は S 上分離的なので, $\Delta_{Y/S}$ は閉埋入射であり,

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X' \times_{Y \times_S Y} Y \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d, "g"] \\
& Y \arrow[r, "\Delta_{Y/S}"'] & Y \times_S Y
\end{tikzcd}$$

を考えると, 補題 1.8 より, $X' \times_{Y \times_S Y} Y$ は X' の閉部分 scheme で, X' の稠密開集合 V を含んでいることがわかった. X' 及び $X' \times_{Y \times_S Y} Y$ は被約 scheme であり[12], 被約 scheme の閉集合には被約 scheme の構造が一意に入ることから, $X' \times_{Y \times_S Y} Y = X'$ がわかる. 射影 $X' \times_{Y \times_S Y} Y \to Y$ に対応する射 $f_{12} : X' \to Y$ は $f_i|_{X'} = f_{12}$ $(i = 1, 2)$ が成立する. Glueing property より, ある $f : U_0 \to Y$ が存在して, f は今考えている有理写像を代表することがわかった. $\square$

命題 1.30. k を体とする. X を k 上の既約かつ被約な scheme, Y を k 上代数的な scheme とする. この時, 以下の 1:1 対応が存在する:

$$\{\text{ 有理写像 } f : X \dashrightarrow Y\} \longleftrightarrow \{Y \text{ の } k(X) \text{ 有理点 }\}$$

証明. 有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ の代表元を一つ取ってきて, $f : U \to Y$ とおく. X の生成点を η とすると, η は X の任意の空でない開集合 W に含まれる. 実際, $X \setminus W$ は閉集合であるが, $\eta \notin W$ ならば, $X \setminus W$ は η の閉包, すなわち X 全体を含むことになり, 矛盾する. よって, 代表元の取り方によらず $f(\eta)$ は定まることがわかった. Y の $k(X)$ 有理点 $f_\eta : \mathrm{Spec}(k(X)) \to Y$ を, $f_\eta := f \circ \eta'$ として定める. ここで, $\eta' : \mathrm{Spec}(k(X)) \to U$ は U の生成点 $\eta' (= \eta)$ に対応する U の $k(X)$ 有理点である. $f(\eta)$ の開近傍 V 及び $V' \subset V$ について, $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to k(X)$ と, $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_Y(V') \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V')) \to k(X)$ は同じ写像を定めるので, 有理写像 f の別の代表元 f' を取ってきても, $f_\eta = f'_\eta$ となることがわかっ

[12] $X' \times_{Y \times_S Y} Y$ が被約であることは, $X' \times_{Y \times_S Y} Y$ から X' への閉埋入射が存在することからわかる.

た．これによって, 有理写像 $f: X \dashrightarrow Y$ について, Y の $k(X)$ 有理点 f_η を定めることができた．逆に, Y の $k(X)$ 有理点 $a: \mathrm{Spec}(k(X)) \to Y$ について, Y の affine 開集合 $V = \mathrm{Spec}(R)$ が存在して, $\varphi: R \to k(X)$ が a を定める．$R = k[r_1, \ldots, r_n]$ とおいて, $s_i := \varphi(r_i)$ として, s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を定める．$U = \mathrm{Spec}(S)$ を X の affine 開集合とすると, $Q(S) = k(X)$ なので, $s_i = \frac{a_i}{b_i}$ となる $a_i, b_i \in S$ が各 i について取れる．$W := D_U(b_1 b_2 \cdots b_n) \subset \{x \in X : \forall i,\ s_i \in \mathcal{O}_{X,x}\}$ とおく．$W = \mathrm{Spec}(T)$ とすると, $\varphi(R) \subset T$ となる．W は X で稠密である[13]ので, $f_W: W \to V \to Y$ によって有理写像 $f: X \dashrightarrow Y$ を定めることができる．これらが互いに逆を定めていることは容易にわかる． □

系 1.8. k を体, X を k 上既約かつ被約な scheme とする．この時, 以下の 1:1 対応が存在する:

$$\left\{\text{有理写像 } f: X \dashrightarrow \mathbb{A}_k^1\right\} \longleftrightarrow k(X)$$

証明. 有理点 $a: \mathrm{Spec}(k(X)) \to \mathbb{A}_k^1$ は, 環準同型 $\varphi_a: k[t] \to k(X)$ に対応するが, 環 R について, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(k[t], R) \cong R$ となることから $\mathbb{A}_k^1$ の $k(X)$ 有理点と $k(X)$ は 1:1 に対応する．これと命題 1.30 によって, 主張が従う． □

X, Y を体 k 上の代数多様体とする．$f: X \dashrightarrow Y$ を有理写像とし, $f_U: U \to Y$ は f を代表する射とする．また, $g := f \times_k Y$ とする．この時, 以下の図式は pull back になる:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(1_U, f_U)"'] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/k}"] \\
U \times_k Y \arrow[r, "g"'] & Y \times_k Y
\end{tikzcd}$$

実際, scheme W および scheme の射 $q_1: W \to Y$ および $q_2: W \to U \times_k Y$ が,

$$\Delta_{Y/k} q_1 = g q_2$$

となるようにして任意に与えられたとする．この時, $p_1: U \times_k Y \to U$, $p_2: U \times_k Y \to Y$ をそれぞれ射影として, $r := p_1 q_2$ と定めると,

$$(1_U, f_U) r = (1_U, f_U) p_1 q_2 = q_2$$

となる．一方で,

$$f r = f p_1 q_2 = p_2 (1_U, f_U) p_1 q_2 = p_2 q_2$$

となるので, $\pi: Y \times_k Y \to Y$ を射影とすると,

$$f r = \pi \Delta_{Y/k} f r = \pi \Delta_{Y/k} p_2 q_2 = \pi g q_2 = \pi \Delta_{Y/k} q_1 = q_1$$

となる．つまり, r は以下の図式の全てを可換にする:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_2"'] & & \\
& U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(1_U, f_U)"'] & Y \arrow[d, "\Delta_{Y/k}"] \\
& U \times_k Y \arrow[r, "g"'] & Y \times_k Y
\end{tikzcd}$$

逆にこのような r はただ一つしか存在しない．なぜならば, $p_1(1_U, f_U) = 1_U$ だからである．今, Y は分離的なので, $\Delta_{Y/k}$ は閉埋入射．つまりその基底変換である $(1_U, f_U)$ も閉埋入射である．そこで,

[13] W は開集合ゆえ生成点を含むからである

$(1_U, f_U)$ の像を Γ_{f_U} とおくと, Γ_{f_U} は $U \times_k Y$ の閉集合である. Γ_{f_U} の $X \times_k Y$ における閉包を Γ_f と書き, 有理写像 f の**グラフ**という.

命題 1.31. k を体, X, Y を k 上の代数多様体とする. この時, $X \times_k Y$ も代数多様体である.

証明. まず, $X \times_k Y$ が分離的であることを示す. 賦値判定法を用いる. R を体 K/k の離散附値環であり, かつ k-代数であるとして, $i : \mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(R)$ を標準的射とする. k-scheme の射 $\alpha : \mathrm{Spec}(K) \to X \times_k Y$ および $\beta_j : \mathrm{Spec}(R) \to X \times_k Y$ $(j = 1, 2)$ が, $\beta_j i = \alpha$ $(j = 1, 2)$ となっていたとする. この時, p_1, p_2 をそれぞれ $X \times_k Y$ から X, Y への射影とすると, $p_l \beta_1 i = p_l \alpha = p_l \beta_2 i = p_l \beta_2 i$ $(l = 1, 2)$ となるので, X および Y の分離性から, $p_l \beta_1 = p_l \beta_2$ $(l = 1, 2)$ となる. さらに fibre 積の普遍性から, $\beta_1 = \beta_2$ となるので, $X \times_k Y$ は k 上分離的であることがわかった. 次に, $X \times_k Y$ が幾何学的整であることを示す. $U = \mathrm{Spec}(A)$, $V = \mathrm{Spec}(B)$ をそれぞれ X, Y の affine 開集合とした時, $A \otimes_k B \otimes_k \overline{k}$ は $k(X) \otimes_k k(Y) \otimes_k \overline{k}$ の部分環である. さらに, $k(X)$, $k(Y)$ が k の正則拡大だったので, $k(X) \otimes_k k(Y) \otimes_k \overline{k}$ は整域になる. よって, $A \otimes_k B \otimes_k \overline{k}$ も整域であることが示される. よって, $X \times_k Y$ は幾何学的整であることが従う. □

引き続き, $f : X \dashrightarrow Y$ を, k 上の代数多様体の間の有理写像とする. グラフ Γ_f には $X \times_k Y$ の既約かつ被約な閉部分 scheme の構造が一意に入るので, これによって $X \times_k Y$ の部分多様体と見做せる. $X \times_k Y$ の第一成分および第二成分への射影の Γ_f への制限をそれぞれ p, q とする. この時, $p_U^{-1} := (1_U, f_U)$ によって有理写像 $p^{-1} : X \dashrightarrow \Gamma_f$ が定まるが, もちろん自然に定まる合成について, $qp^{-1} = f$ となる.

f の代表する多様体の射 $f_U : U \to Y$ が支配的射であるとき, 有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ は支配的であるという. これは U の取り方によらない. 実際, $f_U : U \to Y$ が支配的であるとき, X の生成点 η の像 $f_U(\eta)$ は Y の生成点である. よって, $f_{U'} : U' \to Y$ を別の代表元としたとき, $f_{U'}(\eta)$ も Y の生成点である. つまり $f_{U'}$ も支配的である. $f : X \dashrightarrow Y$ を支配的な有理写像とする. η を X の生成点とすると, f を代表する射 $f_U : U \to Y$ について, $f_U(\eta)$ は Y の生成点になる. よって, f_U は函数体の準同型 $f_U^* : k(Y) \to k(X)$ を誘導する. これは明らかに代表元に依存しないので, この誘導された函数体の準同型を $f^* : k(Y) \to k(X)$ と書くことにする. 逆に, k-準同型 $\varphi : k(Y) \to k(X)$ が与えられた時, 命題 1.30 の方法によって, $f^* = \varphi$ となるような支配的な有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ を構成できる. f から出発して, f^* から f' を構成すると, これは f と等しいことがわかるので, 以下の対応が得られた:

命題 1.32. X, Y を体 k 上の代数多様体とする. この時, 以下の 1:1 対応が成立する.

$$\{ f : X \dashrightarrow Y : \text{支配的な有理写像} \} \longleftrightarrow \{ f^* : k(Y) \to k(X) : k\text{-準同型} \}$$

□

ここで, 有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ に対応する函数体の埋め込み $f^* : k(Y) \to k(X)$ が体の同型になっているとすると, その逆写像に対応する有理写像を $g : Y \dashrightarrow X$ として, $f \circ g = 1_Y$, $g \circ f = 1_X$ となる[14]. このようなとき, f は X から Y への**双有理写像**といい, X と Y は**双有理同型**であるという.

先に見たように有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ に対して, そのグラフ Γ_f から X への射影 $p : \Gamma_f \to X$ は X と Γ_f との間の双有理同型を与える. つまり $k(X) \cong k(\Gamma_f)$ である. 以下, $k(X)$ と $k(\Gamma_f)$ を同一視する. 有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ が与えられると,

$$x \sim_f y \iff \exists z \in \Gamma_f,\ p(z) = x \wedge q(z) = y$$

によって, 関係 $\sim_f \subset X \times Y$ が定まる. $x \sim_f y$ となることを, x と y が f によって**対応している**という. X の閉集合 F に対して, この関係による F の像のことを, F の f による**全変換像**あるいは**全像**という. これは $qp^{-1}(F)$ と等しい. X が完備代数多様体ならば, $q : \Gamma_f \to Y$ が固有射になるので, X の閉集合 F の f による全像も閉集合になる. 逆に, Y の閉集合 G について, 関係 $\sim_f$ による G の像のこ

[14]有理写像 f, g の合成 $f \circ g$ は, g を代表する scheme の射の像と g を代表する scheme の射の定義域が交わるときに定義される. ここでは, f, g は支配的なので, もちろん合成は定義される.

とを, G の f による全像という．勿論これは $pq^{-1}(G)$ に等しくなる．Y が完備ならば, これは閉集合になる．

定理 1.6. k を体, X, Y を k 上の代数多様体とし, $f : X \dashrightarrow Y$ を支配的な有理写像とする．f^* によって, $k(Y) \subset k(X)$ とみなす．

(1) $x \sim_f y$ とする．f が x において定義されていることと, $\mathcal{O}_{X,x} \geq \mathcal{O}_{Y,y}$ であることは同値である．
(2) X が正規代数多様体, Y が完備代数多様体であるとする．この時, U_0 を f の定義域とすると, $\operatorname{codim}_X(X \setminus U_0) \geq 2$ である．

証明.

(1)
- $\Longrightarrow$ f が x において定義されているならば, x の開近傍 U が存在して, $p^{-1}(U) \subset \Gamma_f$ と U が同型になる．よって, $p(z) = x$, $q(z) = y$ とすると, $\mathcal{O}_{\Gamma_f,z} = \mathcal{O}_{X,x}$ となり, $\mathcal{O}_{Y,y} \leq \mathcal{O}_{\Gamma_f,z}$ となる．よって, $\mathcal{O}_{Y,y} \leq \mathcal{O}_{X,x}$ がわかった．
- $\Longleftarrow$ $\mathcal{O}_{Y,y} \leq \mathcal{O}_{X,x}$ とする．x の affine 開近傍 $U = \operatorname{Spec}(A)$ および, y の affine 開近傍 $V = \operatorname{Spec}(B)$ を取ってきて, x(resp. y) に対応する A(resp. B) の素イデアルを $\mathfrak{p}$(resp. $\mathfrak{q}$) とする．$B = k[r_1, \ldots, r_n]$ とすると, $B \subset B_{\mathfrak{q}} \subset A_{\mathfrak{p}}$ なので, 各 i について, ある $a_i \in A$, $s_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ が存在して, $r_i = \frac{a_i}{s_i}$ となる．$s := \prod_{i=1}^n s_i$ として, U を $D_U(s)$ で取り替えることで, 初めから $B \subset A$ として良い．この時, 包含 $B \subset A$ に付随する射 $f_0 : U \to V \subset Y$ が f を代表することは明らかである．ゆえに, f は x で定義されていることがわかった．

(2) $x \in X$ を余次元 1 の点として, f が x で定義されていることを示せば良い．X が正規なので, $\mathcal{O}_{X,x}$ は次元 1 の正規局所環になる．つまり $\mathcal{O}_{X,x}$ は $k(X)$ の離散賦値環である．まず, このことと $k(X) = k(\Gamma_f)$ であることから, $z \in \Gamma_f$ が $p(z) = x$ となるならば, $\mathcal{O}_{\Gamma_f,z} = \mathcal{O}_{X,x}$ となることがわかる．実際, $a \in \mathcal{O}_{\Gamma_f,z} \setminus \mathcal{O}_{X,x}$ が存在したとすると, ν_x を $\mathcal{O}_{X,x}$ を賦値環にもつ $k(X)$ の加法賦値として, $\nu_x(a) < 0$ となる．つまり, $a^{-1} \in \mathfrak{m}_x = (g)$ となるが, これは $g^{-1} \in \mathcal{O}_{\Gamma_f,z}$, つまり $\mathcal{O}_{\Gamma_f,z} = k(X)$ を指すので矛盾．よって, この z について, $q(z) = y$ とすると, $\mathcal{O}_{X,x} \geq \mathcal{O}_{Y,y}$ となる．あとは実際にこのような $z \in \Gamma_f$ が存在することをいえば良いが, Y は完備なので, Y の全像 $pq^{-1}(Y)$ は X の閉集合で, X の稠密な開集合を含む．ゆえに $pq^{-1}(Y) = X$ であることがわかるので, p は全射である．ゆえに, $p(z) = x$ となるような $z \in \Gamma_f$ が存在することがわかった． □

さて, X, Y を体 k 上の正規な完備代数多様体として, $f : X \dashrightarrow Y$ を双有理写像とする．$x \in X$ を余次元 1 の点とすると, f は x で定義されているので, $y := f(x)$ が定まる[15]．$F := \overline{\{x\}}$ に対して, $G := \overline{\{y\}}$ を F の f による**固有変換像**あるいは**固有像**という．また, $y \in Y$ を余次元 1 の点とした時, $G := \overline{\{y\}}$ に対して, $F := \overline{\{f^{-1}(y)\}}$ を G の f による[16]固有像という．Appendix A. の命題 A.3 より, $x \in X$ を余次元 1 の点とした時,

$$\operatorname{codim}_Y(\overline{\{f(x)\}}) \geq \operatorname{codim}_X(\overline{\{x\}}) = 1$$

となり, 命題 A.4 より, ほとんどの点においてこれは等号が成立する．

[15]命題 1.29 参照
[16]タイプミスではない．

2. 射影多様体

2.1. **導入.** 本節では, 古典的な方法によって代数閉体 k 上の射影多様体を定義して, 次節以降の議論へつなげていこうと思う. 代数閉体 k 上の射影空間 $\mathbb{P}^n(k)$ は, k^{n+1} の 1 次元部分空間全体のなす集合であった. あるいは (同じことではあるが), $k^{n+1} \setminus \{0\}$ に, 同値関係 $(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \iff \exists\lambda \in k, \text{s.t. } (b_0, \ldots, b_n) = \lambda(a_0, \ldots, a_n)$ を定め, $\mathbb{P}^n(k) := (k^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ とするのであった. この同値類のことを $(a_0 : \cdots : a_n)$ と書くことにしよう. 射影空間 $\mathbb{P}^n(k)$ について, 各 $i \in \{0, \ldots, n\}$ に関して, $U_i := \{(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n(k) : a_i \neq 0\}$ とすると, これは $(a_0 : \cdots : a_n) \mapsto \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right) \in k^n$ によって, k^n に同型である. ここで, k^n には既に affine 代数多様体の構造が入っている. k^n の閉集合は, ある n 変数多項式 $f_1, \ldots, f_m$ の生成するイデアルの零点集合として定義された. $f_i \in k[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}]$ とすると, 十分大きな N を取ってくれば, $X_i^N f_j$ は $X_0, \ldots, X_n$ に関する斉次多項式になっている. これを F_i と置くと, $F_1, \ldots, F_m$ の共通零点の集合と U_i の共通部分が $V_{U_i}(f_1, \ldots, f_m)$ となる. ゆえに, $\mathbb{P}^n(k)$ の Zariski 閉集合は, $k[X_0, \ldots, X_n]$ の斉次多項式によって生成されるイデアル I で, どれかの i について, $X_i \notin I$ となるようなもの, つまり $(X_0, \ldots, X_n) \not\subset I$ となるものについて, $Z(I) := \{(a_0 : \cdots : a_n) : f(a_0, \ldots, a_n) = 0, \forall f \in I\}$ によって定義すれば良いことがわかる. 一般の体上にこれを拡張しようとすると,

$$\mathbb{P}^n_k = \left\{ P \subset k[X_0, \ldots, X_n] : \substack{P \text{ は斉次多項式によって生成される素イデアルで,} \\ (X_0, \ldots, X_n) \not\subset P \text{ なるもの}} \right\}$$

と定めると良い類似が作れるであろうという見当がつくと思われる.

2.2. **次数付き環, 次数付き加群, Proj.**

定義 2.1. $(\Gamma, +)$ を可換モノイド, 可換環 A が

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

と, 加群の直和で書けていて, さらに任意の $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ について, $A_\gamma A_{\gamma'} \subset A_{\gamma+\gamma'}$ となったとする. この時, A を Γ-**次数付き環**という. また可換環 R について, A_0 が R 代数になっている時, A を次数付き R-代数という.

$A = \sum_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ を次数付き環とする. この時, 任意の $a \in A$ は $a = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$, $a_\gamma \in A_\gamma$ の形に一意に表される. この a_γ のことを a の γ 次**斉次成分**といい, 分解 $a = \sum_\gamma a_\gamma$ を a の**斉次分解**と言う. また, $a \in A$ について, ある $\gamma \in \Gamma$ が存在して, $a \in A_\gamma$ となるものを A の**斉次元**と言って, $a \in A$ が斉次元である際に, $a \in A_\gamma$ となる $\gamma \in \Gamma$ のことを a の**次数**といい, $\deg(a)$ と表す.

定義 2.2. Σ を Γ-集合として, $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ を次数付き環とする. 加群の族 $\{M_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ について, $M := \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} M_\sigma$ および $m : A \times M \to M$ の組 (M, m) が次数付き A-加群であるとは, M が環 A 上の加群であって, さらに任意の $\gamma \in \Gamma$, $\sigma \in \Sigma$ について, $A_\gamma M_\sigma \subset M_{\gamma\sigma}$ であることを指す.

例. k を体, $A := k[x_0, \ldots, x_n]$ とする.

$$A_i := \begin{cases} \{f \in k[x_0, \ldots, x_n] : f \text{ は } i \text{ 次斉次多項式}\} & (i \geq 0) \\ 0 & (i < 0) \end{cases}$$

とすると, $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ であり, これによって A は次数付き k-代数になる.

定義 2.3. $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ を次数付き環とする. イデアル $I \subset A$ が**斉次イデアル**であるとは, 任意の $f \in I$ について, f の各斉次成分も I に属することを指す. つまり, $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i$, $f_i \in A_i$ とした時に, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ について, $f_i \in I$ となることである.

定義 2.4. $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環とすると, $A_+:=\bigoplus_{i>0}A_i$ は A の斉次イデアルである. このイデアルを A の**無縁イデアル**という.

命題 2.1. $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環とする.

(1) A が Noether であることと, A_0 が Noether であり, かつ A が有限生成 A_0-代数であることは同値である.

(2) さらに A が Noether であるとして, $M:=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i$ を次数付き A-加群とする. M が有限生成であることと, 以下の 3 条件を同時に満たすことは同値である:
 (a) 任意の $i\in\mathbb{Z}$ について, M_i は有限生成 A_0-加群である
 (b) ある $i_0\in\mathbb{Z}$ が存在して, 任意の $i\leq i_0$ について, $M_i=0$ となる.
 (c) ある $i_1,d\in\mathbb{Z}$ が存在して, 任意の $i\geq i_1$ について, $A_dM_i=M_{i+d}$ である.

証明.

(1) A_0 が Noether でないならば, A_0 には停留しないイデアルの昇鎖列 $I_0\subsetneq I_1\subsetneq I_2\subsetneq\dots$ が存在する. $J_k=I_kA$ とすると, $J_k\cap A_0=I_k$ なので, $J_0\subsetneq J_1\subsetneq\dots$ となる. よって, A が Noether でなくなってしまう. A が有限生成 A_0-代数でないならば, A の斉次元からなる列 $\{a_0,a_1,\dots\}$ を, $0<\deg a_0\leq\deg a_1\leq\dots$, $a_i\notin A_0[a_0,\dots,a_{i-1}]$ となるようにとる. この時, $a_i\notin\sum_{j=0}^{i-1}a_jA$ となる[17]ので, $(a_0)\subsetneq(a_0,a_1)\subsetneq(a_0,a_1,a_2)\subsetneq\dots$ となる. ゆえに, A は Noether ではなくなる. 逆に, A_0 が Noether であり, かつ A が有限生成 A_0-代数である時に A が Noether であることは, Hilbert の基底定理そのものである. □

(2) M が有限生成 A-加群であると仮定して, その生成元を $m_1,\dots,m_n$ とする. この時, 生成元の斉次成分達も M を生成するので, あらかじめ $m_1,\dots,m_n$ は斉次元であるとして良い. $\min\{\deg(m_j)\}-1=:i_0$ とすると, $i\leq i_0$ について, $M_i=0$ となる. また, $m\in M_i$ ならば, $m=\sum_{j=1}^n a_jm_j$ とすると, a_j の $i-\deg(m_j)$ 成分以外の部分は打ち消し合うので, a_j は $i-\deg(m_j)$ 次の斉次元として取れる. つまり, $M_i=\sum_{j=1}^n A_{i-\deg(m_j)}m_j$ となるが, A が Noether であることから, $A_{i-\deg(m_j)}$ は有限生成 A_0 加群が従うので, M_i は有限生成 A_0 加群であることも従う. 最後に, A の A_0-代数としての生成元を $c_1,\dots,c_p$ として, d を $\deg(c_j)$ たちの最小公倍数とし, $(\prod c_j^{d_j})m_l$, $0\leq d_j<d/\deg(c_j)$ たちを, 改めて $\{x_q\}$ と置き直すことにする. 明らかに $\{x_q\}$ は M の A-加群としての生成系になっており, $\max\deg(x_q)=:i_1$ とすると, 任意の $i\geq i_1$, $j\geq 0$, $m\in M_{i+j}$ について, $m=\sum a_lm_l$, $a_l\in A_{i+j-\deg(m_l)}$ とかけるが, さらに a_lm_l を $(\prod(c_l^{d/\deg(c_l)})^{r_l})x_q$ たちの A_0-係数の線型結合でかけるので, $\deg(c_l^{d/\deg(c_l)})=d$ であることから, $A_dM_i=M_{i+d}$ がわかった. 逆に, M が条件 (a) から (c) を満たしていたとすると, (a) によって, 各 M_i について有限生成系 $\{m_{ij}\}_{j=1}^{n(i)}$ がとれ, (b) によって, $i\leq i_0$ の時は $n(i)=0$ とできる. また (c) によって, $\{m_{ij}\}_{(i,j):\substack{i_0\leq i\leq i_1+d\\ 1\leq j\leq n(i)}}$ が M を生成することがわかる. □

$A=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i$ を次数付き環とする. この時, A のイデアル I でについて, 次数付きイデアル $I^*\subset A$ を, I の斉次元の生成するイデアルと定める. これは I に含まれる最大の斉次イデアルである. 一般に, A のイデアル I について, A/I は次数付き環にならないが, A/I^* なら次数付き環になる.

命題 2.2. $A=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i$ を次数付き環として, $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$ とする. この時, $\mathfrak{p}^*$ も素イデアルである.

証明. $a=\sum_i a_i, b=\sum_i b_i\in A$, $a_i,b_i\in A_i$ として, $ab\in\mathfrak{p}^*$ とする. $a,b\notin\mathfrak{p}^*$ とすると, ある $p,q\in\mathbb{Z}$ が存在して, $i<p$ ならば $a_i\in\mathfrak{p}^*$, $j<q$ ならば $b_j\in\mathfrak{p}^*$ となり, $a_p,b_q\notin\mathfrak{p}^*$ となる. $ab\in\mathfrak{p}^*$ で, $\mathfrak{p}^*$ は斉次イデアルなので, ab の $p+q$ 次成分も $\mathfrak{p}^*$ の元である. ab の $p+q$ 次成分は a_ib_j, $(i+j=p+q)$ の

[17] もし $a_i\in\sum_{j=0}^{i-1}a_jA$ となるならば, $a_i\notin A_0[a_0,\dots,a_{i-1}]$ となることから $\deg a_i$ より小さい次数の元 a で, $a\notin A_0[a_0,\dots,a_{i-1}]$ なるものが存在する. これは $\{a_j\}$ の取り方に矛盾.

和であり, $(i,j)\neq(p,q)$ ならば, $a_ib_j\in\mathfrak{p}^*$ となるので, $a_pb_q\in\mathfrak{p}^*\subset\mathfrak{p}$ となる. よって, $a_p\in\mathfrak{p}$ あるいは $b_q\in\mathfrak{p}$ となるが, a_p および b_q は斉次元なので, $a_p\in\mathfrak{p}$ (resp. $b_q\in\mathfrak{p}$) ならば $a_p\in\mathfrak{p}^*$ (resp. $b_q\in\mathfrak{p}^*$) である. これは矛盾である. □

定義 2.5. $A:=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環とする. $\mathrm{Proj}(A)$ を, A の斉次素イデアルのうち, 無縁イデアルを含まないもの全体からなる集合とする. また, $E\subset A$ に対して, $V_+(E):=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Proj}(A):E\subset\mathfrak{p}\}$ と定める.

命題 2.3. $\{V_+(E):E\subset A\}$ は $\mathrm{Proj}(A)$ の閉集合系になる.

証明. $V_+(0)=\mathrm{Proj}(A)$, $V_+(A)=\emptyset$ である. $E\subset A$ について, $\langle E\rangle$ で E の生成する A のイデアルとすると, $V_+(E)=V_+(\langle E\rangle)$ となるので, 以下, 考える A の部分集合はイデアルとして良い. $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A のイデアルからなる族として, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(E_\lambda)=V_+\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda\right)$ となる. $E_1,E_2\subset A$ をイデアルとすると, $\mathfrak{p}\in\mathrm{Proj}(A)$ について, $E_1\subset\mathfrak{p}$ または $E_2\subset\mathfrak{p}$ ならば, $E_1E_2\subset\mathfrak{p}$ であり, $\mathfrak{p}$ は素イデアルなので, $E_1E_2\subset\mathfrak{p}$ ならば $E_1\subset\mathfrak{p}$ または $E_2\subset\mathfrak{p}$ が成立する. よって, $V_+(E_1)\cap V_+(E_2)=V_+(E_1E_2)$. □

定義 2.6. 命題 2.3 によって定義された $\mathrm{Proj}(A)$ の位相を $\mathrm{Proj}(A)$ の **Zariski 位相**という.

$A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環とする. また, $f\in A_d$ として, $\mathrm{Proj}(A)_f:=D_+(f):=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Proj}(A): f\notin\mathfrak{p}\}$ とする. $\{D_+(f):f\in\bigcup_{i\geq 0}A_i\}$ が $\mathrm{Proj}(A)$ の開基になっていることはすぐにわかる. $a\in A_e$, $\frac{a}{f^n}\in A[f^{-1}]$[18]について, $\deg(\frac{a}{f^n}):=e-nd$ とすると, これは well-defined であり, これによって $A[f^{-1}]$ は $(\mathbb{Z})$ 次数付き環になる. $\alpha_f:D_+(f)\to\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]_0)$ を, $\alpha_f(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}A[f^{-1}]\cap A[f^{-1}]_0$ と定めると, 実際に $\alpha_f(\mathfrak{p})\in\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]_0)$ となることがわかり, $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2\in D_+(f)$, $\mathfrak{p}_1\not\subset\mathfrak{p}_2$ について, $a\in\mathfrak{p}_1$, $a\notin\mathfrak{p}_2$ となる斉次元 a が取れるので, この a について, $\frac{a^d}{f^{\deg(a)}}\in\alpha_f(\mathfrak{p}_1)\setminus\alpha_f(\mathfrak{p}_2)$ となる. ゆえに, $\mathfrak{p}_1\neq\mathfrak{p}_2$ ならば $\alpha_f(\mathfrak{p}_1)\neq\alpha_f(\mathfrak{p}_2)$ がわかる. 一方で, $\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]_0)$ をとり, $\mathfrak{p}:=(\mathfrak{q}\cap A)^*$ とすると, $\mathfrak{p}_i:=\{a\in A_i:\frac{a^d}{f^i}\in\mathfrak{q}\}$ は $\mathfrak{p}$ の i 次成分である. $\mathfrak{q}$ の任意の元は $\frac{a}{f^n}$, $\deg(a)=nd$ のかたちで表され, $\frac{a^d}{f^{nd}}\in\mathfrak{q}$ ゆえ, $a\in\mathfrak{p}_{nd}\subset\mathfrak{p}$ となる. よって, $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}A[f^{-1}]\cap A[f^{-1}]_0$ がわかる. 逆の包含は明らかなので, $\alpha_f(\mathfrak{p})=\mathfrak{q}$ がわかった. つまり, 1:1 対応 $\alpha_f:D_+(f)\to\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]_0)$ が得られる. また, $f_1\in A_d$, $f_2\in A_e$ とすると, $A[(f_1f_2)^{-1}]_0$ の元は $\frac{a}{(f_1f_2)^j}$, $a\in A_{j(d+e)}$ と表される. $j+l=dh$ となるような $l,h\geq 0$ を選んでこれば, $\frac{a}{(f_1f_2)^j}=\frac{af_2^l}{f_1^jf_1^{eh}}\frac{f_1^{eh}}{f_2^{dh}}\in A[f_1^{-1}]_0\left[\frac{f_1^e}{f_2^d}\right]$ となる. よって, $A[(f_1f_2)^{-1}]_0\subset A[f_1^{-1}]_0\left[\frac{f_1^e}{f_2^d}\right]$ がわかった. 逆の包含は明らかなので, $A[(f_1f_2)^{-1}]_0=A[f_1^{-1}]_0\left[\frac{f_1^e}{f_2^d}\right]$ が示された. よって, 特に $\alpha_{f_1}(D_+(f_1f_2))=D(\frac{f_2^d}{f_1^e})$ となることがわかった.

命題 2.4. 上に得た 1:1 対応 $\alpha_f:D_+(f)\to\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]_0)$ は同相写像である.

証明. $\mathrm{Spec}(A[f^{-1}]_0)$ の標準的 affine 開集合 $D(\frac{g^d}{f^e})$, $(g\in A_e)$ について, $\alpha_f^{-1}(D(\frac{g^d}{f^e}))=D_+(fg)$ なので, これは開集合である. よって, α_f は連続であることがわかった. 逆に, $D_+(f)$ の開基 $\{D_+(fg):\exists e\geq 0, g\in A_e\}$ の元 $D_+(fg)$ について, $\alpha_f(D_+(fg))=D(\frac{g^d}{f^e})$ となるので, α_f は開写像でもある. □

$X:=\mathrm{Proj}(A)$ とする. $f\in A_d$ について, $\mathcal{O}_X(D_+(f)):=A[f^{-1}]_0$ として定め, $f\in A_d$, $g\in A_e$, $D_+(g)\subset D_+(f)$ について, $g\in\sqrt{f}$ なので, $g^n=fh$ となる $n\geq 0$, $h\in A_{en-d}$ が存在する. $\rho_{D_+(g)D_+(f)}:\mathcal{O}_X(D_+(f))\to\mathcal{O}_X(D_+(g))$ を,

$$\rho_{D_+(g)D_+(f)}\left(\frac{a}{f^j}\right)=\frac{ah^j}{g^{nj}}$$

[18]誤解を避けるため, 以下 A の積閉系 $\{1,f,f^2,\dots\}$ による局所化のことを $A[f^{-1}]$ と書くことにする.

と定めると, $D_+(f)=D_+(g)$ ならば $A[f^{-1}]_0=A[g^{-1}]_0$ であり, $\rho_{D_+(g)D_+(f)}\rho_{D_+(f)D_+(g)}=1_{D_+(g)}$ であること, そして $D_+(g')\subset D_+(g_1)$, $D_+(g')\subset D_+(g_2)$, $D_+(g_i)\subset D_+(f)$ となるとき,

$$\rho_{D_+(g')D_+(g_1)}\rho_{D_+(g_1)D_+(f)}=\rho_{D_+(g')D_+(g_2)}\rho_{D_+(g_2)D_+(f)}$$

となることも容易にわかる. ゆえに, 層 $\mathcal{O}_X:\mathrm{Op}(X)^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Ring}$ が定義できた. 定義より, $(X,\mathcal{O}_X)$ は scheme になることがわかる. また, $A[f^{-1}]_0$ たちは A_0-代数であり, 制限写像は A_0-代数の射になるので, これは $\mathrm{Spec}(A_0)$-scheme であることもわかる.

定理 2.1. $A:=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環, $X:=\mathrm{Proj}(A)$ とする. A が Noether 環であり, A_0 上 A_1 で生成されているならば, $(X,\mathcal{O}_X)$ は $S:=\mathrm{Spec}(A_0)$ 上固有である.

この定理の証明にはいくつかの補題を要する.

補題 2.1. $A:=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環とする. この時, $\mathrm{Proj}(A)$ は $\mathrm{Spec}(A_0)$ 上分離的である.

証明. $\pi:\mathrm{Proj}(A)\to\mathrm{Spec}(A_0)$ を構造射とする. $\{D_+(f):f\in\bigcup_{i>0}A_i\}$ は $\mathrm{Proj}(A)$ の affine 開被覆であり, $f\in A_d$, $g\in A_e$ について, 制限射から誘導される環準同型 $A[f^{-1}]_0\otimes_{A_0}A[g^{-1}]_0\to A[(fg)^{-1}]_0$ は全射である. これは, $\frac{a}{(fg)^n}\in A[(fg)^{-1}]_0$ について, $l+n=dh$ となる $l,h\geq 0$ をとってきて, $\frac{ag^l}{f^nf^{eh}}\cdot\frac{f^{eh}}{g^{dh}}$ となることからわかる. よって, $D_+(a)\cap D_+(b)\to D_+(a)\times_{A_0}D_+(b)$ は閉埋入射になり, これは対角射 $\Delta:X\to X\times_{A_0}X$ の $D_+(a)\cap D_+(b)$ への制限なので, Δ は閉埋入射であることがわかった. □

補題 2.2. $A:=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環, $I\subset A$ を斉次イデアルとする. この時, $\sqrt{I}$ も斉次イデアルである.

証明. $x^n\in I$ とする. $x=\sum_{i=i_0}^{i_1}x_i$ を x の斉次分解とすると, まず $x_{i_0}^n\in I$ がわかる. よって $x_{i_0}\in\sqrt{I}$ となる. $i<d$ について, $x_i\in\sqrt{I}$ がわかっているならば, x^n の nd 次成分は, $x_d^n+(\sqrt{I}$ の元$)\in I\subset\sqrt{I}$ となるので, $x_d^n\in\sqrt{I}$. つまり $x_d\in\sqrt{I}$ がわかった. つまり, x の各成分も $\sqrt{I}$ の元であることがわかったので, $\sqrt{I}$ も斉次イデアルである. □

補題 2.3. $A:=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数付き環, $N_+:=\sqrt{0}\cap A_+$ として, $X:=\mathrm{Proj}(A)$, $S:=\mathrm{Spec}(A_0)$ とする.

(1) $X_{\mathrm{red}}\cong\mathrm{Proj}(A/N_+)$ となる.
(2) $N_+=0$ であると仮定する. X が既約である必要十分条件は, A_+ が A_+ の中に零因子を持たないことである.
(3) $A^{(d)}:=\sum_{i\geq 0}A_{id}$ とすると[19], $a\in A_d$ について, $A[a^{-1}]_0\cong A^{(d)}/(a-1)$ となる.
(4) A が Noether 環ならば, X も Noether scheme であり, 構造射 $\pi:X\to S$ は有限生成射である.

証明.

(1) 上の補題から, $\sqrt{0}$ は斉次イデアルであり, 特に $N_+=\sqrt{0}\cap A_+$ も斉次イデアルになる. $a\in A_i$, $(i\geq 1)$ とする. $\varphi_a:A[a^{-1}]_0\to(A[a^{-1}]/N_+A[a^{-1}])_0=A[a^{-1}]_0/(N_+A[a^{-1}])_0\cong(A/N_+)[a^{-1}]_0$ を, $\varphi(\frac{x}{a^p})=\frac{\overline{x}}{\overline{a}^p}$ と定めると,

$$\begin{aligned}\frac{x}{a^p}\in\mathrm{Ker}(\varphi)&\iff\frac{\overline{x}}{\overline{a}^p}=0\ (\text{in }A[a^{-1}]_0)\\&\iff\exists s\geq 0,\ a^sx\in N\ (\text{in }A)\\&\iff\exists t\geq 0,\ \left(\frac{x}{a^p}\right)^t=0\ (\text{in }A)\\&\iff\frac{x}{a^p}\in\mathrm{nil}(A[a^{-1}]_0)\end{aligned}$$

[19] この $A^{(d)}$ を A の d 次 **Veronese 部分環**という

となる．ここで, $\mathrm{nil}(A[a^{-1}]_0)$ は $A[a^{-1}]_0$ の冪零根基である．$a \in A_i$, $b \in A_j$, $i, j \geq 0$ を任意に取った時, 以下の図式が可換になることがわかるので, Gluing property より, scheme の閉埋入射 $f : \mathrm{Proj}(A/N_+) \to \mathrm{Proj}(A) = X$ が得られる:

$$\begin{tikzcd} A[a^{-1}]_0 \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d] & A/N_+[a^{-1}]_0 \arrow[d] \\ A[(ab)^{-1}]_0 \arrow[r, "\varphi_{ab}"'] & A/N_+[(ab)^{-1}]_0 \end{tikzcd}$$

f によって $\mathrm{Proj}(A/N_+)$ を X の閉部分 scheme と見た時, 任意の $x \in X$ について, x の affine 開近傍 U が存在して, $f^{-1}(U)$ は U の被約化になっていることがわかるので, 主張が従う．

(2)

$\Longrightarrow$ A_+ の 0 でない斉次元 a, b で, $ab = 0$ なるものが存在したとすると, $D_+(a) = \mathrm{Spec}(A[a^{-1}]_0) = \emptyset$ ならば $A[a^{-1}]_0$ が零環になるが, これは a が冪零であることを示しており, $N_+ = 0$ であることに反する．同様に $D_+(b) \neq \emptyset$ である．しかし, $D_+(a) \cap D_+(b) = \emptyset$ となるので, X は既約にならない．

$\Longleftarrow$ $D_+(a)$, ($a \in A_+$, 斉次元) は X の開基を作る．X が既約であることと, 空でない 2 つの X の開集合の共通部分は必ず空にならばいことは同値であり, 従って 2 つの開基の元の共通部分が空でないことが示されれば良い．$a \in A_+$, $a \neq 0$ を斉次元として, $D_+(a) = \emptyset$ ならば, $A[a^{-1}] = 0$ となるので, ある $n > 0$ について, $a^n = 0$ となる．これは $N_+ = 0$ であることに反する． 次に, $a, b \in A_+$ を斉次元とすると, 仮定より $ab \neq 0$ なので, $D_+(a) \cap D_+(b) = D_+(ab) \neq \emptyset$ となる．

(3) $\varphi : A^{(d)} \to A[a^{-1}]_0$ を, $b = \sum_{i \geq 0} b_{id}$, $b_{id} \in A_{id}$ として, $\varphi(b) = \sum_{i \geq 0} \frac{b_{id}}{a^i}$ と定めると, これは環準同型になる．$b = b_0 + \cdots + b_{nd}$ として, $\varphi(b) = 0$ とする．この時, ある $s > 0$ が存在して,

$$a^s(a^n b_0 + \cdots + b_{nd}) = 0$$

となるので,

$$\begin{aligned} b =& b - a^s(a^n b_0 + \cdots + b_n) \\ =& (1 - a^{s+n})b_0 + (1 - a^{s+n-1})b_d + \cdots + (1 - a^s)b_{nd} \in (a-1)A^{(d)} \end{aligned}$$

となる．$\varphi(a - 1) = 0$ と合わせて, $\mathrm{Ker}(\varphi) = (a - 1)A^{(d)}$ がわかる．よって, 準同型定理より, $A^{(d)}/(a - 1)A^{(d)} \cong A[a^{-1}]_0$ がわかった．

(4) A が Noether 環ならば, A_0 は Noether 環であり, A は A_0 上有限生成多元環である．A の A_0 上の生成元を $a_1, \ldots, a_n$ として, $d_i := \deg(a_i)$ と定める．$a \in A_+$ を斉次元として, $\pi|_{D_+(a)} : D_+(a) \to S$ が有限生成であることを示せば良いが, これは $A[a^{-1}]_0 \cong A^{(d)}/(a-1)A^{(d)}$ が有限生成 A_0 代数であることを確認すれば十分である．$E := \{a_1^{e_1} \cdots a_n^{e_n} : 0 \leq e_i \leq d, \sum d_i e_i \equiv 0 \pmod d\}$ とすると, E は有限集合であり, $A^{(d)}$ の A_0 上の生成系になっている．よって, $A^{(d)}$ は有限生成 A_0 多元環であることがわかり, 従って $A^{(d)}/(a - 1)A^{(d)}$ もそうである． □

定理 2.1 の証明. π が有限生成かつ分離的射であることはわかっているので, π が普遍閉であることを示せば良い．つまり, 任意の S-scheme Y について, $\pi_Y : X \times_S Y \to Y$ が閉射であることを示せば良いが, これは局所的性質なので, Y は affine scheme として良い．つまり, 示すべきことは, 任意の A_0-代数 B について, $\pi_B := \pi \times_S \mathrm{Spec}(B) : X \times_S \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B)$ は閉射であることである．まず, $p_1 : X \times_S \mathrm{Spec}(B) \to X$ を射影とすると, $a \in A_1$ について, $p_1^{-1}(D_+(a)) = \mathrm{Spec}(A[a^{-1}]_0 \otimes_{A_0} B)$ となり, $p_1^{-1}(D_+(aa')) \to p_1^{-1}(D_+(a)) \to D_+(a) \to X$ と, $p_1^{-1}(D_+(aa')) \to p_1^{-1}(D_+(a')) \to D_+(a') \to X$ は同じ射を定めるので, glueing property の普遍性の部分から $X \times_S \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Proj}(A \otimes_{A_0} B)$ となることがわかる．ここで, $A \otimes_{A_0} B = \bigoplus_{i \geq 0} A_i \otimes_{A_0} B$ である．A は Noether であり, A_0 上 A_1 で生成され

ていることから, A_1 は有限生成 A_0 加群であることがわかる. よって, $A\otimes_{A_0}B$ は B 上 $A_1\otimes_{A_0}B$ で生成されており, $A_1\otimes_{A_0}B$ は有限生成 B 加群である. π_B が閉射であることを示すには, $\mathrm{Proj}(A\otimes_{A_0}B)$ の閉集合 F の像が閉集合であることを示せば良いが, $\mathrm{Proj}(A\otimes_{A_0}B)$ の閉集合は, ある斉次イデアル $I\subset A\otimes_{A_0}B$ について, $F=V_+(I)$ と表され, $V_+(I)=\mathrm{Proj}(A\otimes_{A_0}B/I)$ であることと, $A\otimes_{A_0}B/I$ は $B/(I\cap B)$ 上 $A_1\otimes_{A_0}B/I_1$ で生成されており, $A_1\otimes_{A_0}B/I_1$ は $B/(I\cap B)$ 上有限生成なので, 結局以下の主張を示せば良いことになる:

主張: $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を次数つき環として, A は A_0 上 A_1 で生成されており, A_1 は有限生成 A_0 加群とする. この時, $\pi: X:=\mathrm{Proj}(A)\to\mathrm{Spec}(A_0)=:S$ はについて, $\pi(X)$ は S の閉集合である.

$a_1,\ldots,a_n$ を A_1 の A_0 加群としての生成元とする. $y\in S$ を任意にとると, $\pi^{-1}(y)=X_y=\mathrm{Proj}(A\otimes_{A_0}\kappa(y))$ となるので, $y\notin\pi(X)$ であることと, 任意の j で

$$\kappa(y)\left[\frac{\overline{a_1}}{\overline{a_j}},\ldots,\frac{\overline{a_n}}{\overline{a_j}}\right]=0$$

となることは同値である. ここで, $\overline{a_k}$ は a_k の $A\otimes_{A_0}\kappa(y)$ における像である. これは, ある $N>0$ が存在して, 任意の j について,

$$\overline{a_j}^N=0$$

となることを指している[20]. これは, 十分大きい n について $A_n\otimes_{A_0}\kappa(y)=0$ となることを意味しており, この時, 中山の補題より, 十分大きな n について, $A_n\otimes_{A_0}\mathcal{O}_{S,y}=0$ がわかる. 逆に $A_n\otimes_{A_0}\mathcal{O}_{S,y}=0$ ならば $A_n\otimes_{A_0}\kappa(y)=0$ は明らかなので, $y\notin\pi(X)\iff A_n\otimes_{A_0}\mathcal{O}_{S,y}=0$, $(\forall n\gg 0)$ がわかった. $I_n:=(0:A_n)_{A_0}$ とすると, $A_n\otimes_{A_0}\mathcal{O}_{S,y}=0\iff y\notin V(I_n)$ である. $A_1A_n=A_{n+1}$ に注意すると, $I_n\subset I_{n+1}$ となる. $I:=\bigcup_{n\geq 0}I_n$ とすれば, $y\notin\pi(X)\iff y\notin V(I)$ となることがわかる. よって, $\pi(X)=V(I)$ がわかり, 定理が証明された. $\square$

定義 2.7. A が次数つき Noether 環で, A_0 上 A_1 で生成されているとき, $\mathrm{Proj}(A)$ を $S:=\mathrm{Spec}(A_0)$ 上の**射影 scheme** という. 特に A_0 が体 k であり, $\mathrm{Proj}(A)$ が k 上の代数多様体である時, $\mathrm{Proj}(A)$ を**射影代数多様体**と言う.

例. R を可換環として, $A=R[X_0,\ldots,X_n]$ とすると, $\deg(X_i)=1$ $(i=0,1,\ldots,n)$ と定めることで A は次数付き環となる. $\mathrm{Proj}(A)$ を $\mathbb{P}^n_R$ と書き, R 上の n 次元射影空間という. この時,

$$D_+(X_i)=\mathrm{Spec}\left(R\left[\frac{X_0}{X_i},\ldots,\frac{X_n}{X_i}\right]\right)$$

となり, 座標変換 $\varphi_{ji}:D_+(X_i)\supset D(X_j/X_i)\to D(X_i/X_j)\subset D_+(X_j)$ は,

$$\frac{X_l}{X_j}\mapsto\frac{X_l}{X_i}$$

の誘導する環準同型によって定まっている. 特に, k を体とすると, $\mathbb{P}^n_k$ は k 上の完備代数多様体になる. さらに, k を代数閉体としよう. この時, $\mathbb{P}^n_k$ の閉点全体の集合を $\mathbb{P}^n(k)$ として, $P\in\mathbb{P}^n(k)$ とする. この時, $P\in D_+(X_i)$ となるような i が存在する. 簡単のため $i=0$ とすると, P は $k[X_1/X_0,\ldots,X_n/X_0]$ の極大イデアル

$$\left(\frac{X_1}{X_0}-a_1,\ldots,\frac{X_n}{X_0}-a_n\right)$$

に対応する. これは $k[X_0,\ldots,X_n]$ の斉次イデアル

$$(X_1-a_1X_0,\ldots,X_n-a_nX_0)$$

[20]各 j について N_j が存在して, $\overline{a_j}^{N_j}=0$ となることがわかり, j は有限個なので, N を十分大きく取ればこのようにとれる.

と対応し, これは直線 $\{\lambda(1, a_1, \ldots, a_n) : \lambda \in k\} \subset k^{n+1}$ と対応している. 逆に, 直線 $\{\lambda(a_0, a_1, \ldots, a_n) : \lambda \in k\}$ が与えられた時, $a_i \neq 0$ となるような i が存在するので, 斉次イデアル

$$(a_i X_0 - a_0 X_i, \ldots, a_i X_n - a_n X_i)$$

が対応し, これは $D_+(X_i)$ の閉点に対応している. よって, 対応

$$\mathbb{P}^n(k) \longleftrightarrow (k^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$$

が得られた. ここで, $(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \iff \exists \lambda \in k^*,\ \forall j,\ a_j = \lambda b_j$ として $k^{n+1} \setminus \{0\}$ の同値関係を定めている (2.1 節参照). また, k が代数閉体のとき, $\mathbb{P}^n(k)$ のことも射影多様体という. $\diamondsuit$

k を体とする. この時, $\mathbb{P}^n_k$ の閉集合は斉次イデアル I について, $V_+(I)$ と表すことができる. $A := k[X_0, \ldots, X_n]$, $B := A/I$ とすると, B は $k = A_0$ 上 $A_1/(A_1 \cap I)$ で生成された次数付き環であり, $\mathrm{Proj}(B) \cong V_+(I)$ となる. 特に, k が代数閉体で, I が素イデアルの時は, $V_+(I)$ は $\mathbb{P}^n_k$ の部分多様体になっている. k を代数閉体, $I \subset A$ を斉次素イデアルとして, $X := \mathrm{Proj}(A/I) \subset \mathbb{P}^n_k$ とする. I を生成する斉次多項式を $f_1, \ldots, f_r$ とすると, $(a_0 : \cdots : a_n) \in X(k)$ であることと, 任意の $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ で, $f_j(a_0, \ldots, a_n) = 0$ となることは同値である. 実際, $(a_0 : \cdots : a_n) \in X(k)$ ならば, ある i で, $a_i \neq 0$ となるものが存在する. 簡単のため, $a_0 \neq 0$ とすると, $(a_1/a_0, \ldots, a_n/a_0) \in X(k) \cap \mathrm{Spm}(k[X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0])$ となるので, 任意の j について,

$$f_j\left(1, \frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right) = 0$$

が従う. よって, $a_0^{\deg f_j}$ 倍すると $f_j(a_0, \ldots, a_n) = 0$ が分かった. 逆に, $f_j(a_0, \ldots, a_n) = 0$ が任意の j で成立するならば, $(a_0 : \cdots : a_n) \in D_+(X_i)$ なる i について, $(a_0/a_i, \ldots, a_n/a_i) \in X(k) \cap D_+(X_i)$ となることが確かめられるので, 逆も言えた.

引き続き, k を体とする. $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ を d 次斉次多項式とした時, f の生成する斉次イデアル I について, $V_+(I)$ のことを (I が既約であるかどうかによらず)$f = 0$ で定義された $\mathbb{P}^n_k$ の d 次**超曲面**と呼ぶ. 特に, 1 次超曲面のことを**超平面**という.

次に, k 上の線型空間 V について,

$$\mathrm{Sym}(V^\vee) := \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Sym}^i(V^\vee)$$

と定め, 自然な次数付き環の構造を与える. この時, $\mathbb{P}V := \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(V^\vee))$ と定め, 線型空間 V の**射影化**という. V を $n+1$ 次元線型空間とした時は, これは $\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}(k[x_0, \cdots, x_n])$ と同型であるが, 同型射は V の基底の取り方に依存する. 上の超平面の定義は 1 次斉次多項式の零点集合であったが, これに対応するものは, V の線型汎函数の零点集合であろう. これを V の超平面と呼ぶことにする[21]. この時, 超平面 H が与えられた際に, $V^\vee$ の元が定数倍を除いて決定されるので, $\mathbb{P}V$ の k-値点が対応することになる.

1 次斉次多項式 f の定義する超平面を $H(f)$ と書くことにする. $f = \sum_{i=0}^n a_i X_i$, $g = \sum_{i=0}^n b_i X_i$ として, $H(f) = H(g)$ となったとすると, 各 i について, $H(f) \cap D_+(X_i) = H(g) \cap D_+(X_i)$ となる. さらに, $H(f)$, $H(g)$ は空でないので, ある i が存在して, $H(f) \cap D_+(X_i) = H(g) \cap D_+(X_i) \neq \emptyset$ となる. 簡単のため, $H(f) \cap D_+(X_0) = H(g) \cap D_+(X_0) \neq \emptyset$ とする. この時,

$$a_0 + a_1 \frac{X_1}{X_0} + \cdots + a_n \frac{X_n}{X_0} \in \left(b_0 + b_1 \frac{X_1}{X_0} + \cdots + b_n \frac{X_1}{X_0}\right)$$

となるので, 次数を考えると, ある $\lambda \in k^*$ が存在して, 任意の i について, $a_i = \lambda b_i$ となることがわかる. 逆に, ある $\lambda \in k^*$ が存在して, 任意の i について, $a_i = \lambda b_i$ となるならば, $H(f) = H(g)$ となるこ

[21]通常の定義よりも狭い定義になっていることに注意.

とは明らかなので, $\mathbb{P}_k^n$ の超平面と別の射影空間 $(\mathbb{P}_k^n)'$ の k-値点は 1 対 1 に対応することが分かった. この $(\mathbb{P}_k^n)'$ のことを $\mathbb{P}_k^n$ の**双対射影空間**という.

例. k を代数閉体, $X \subset \mathbb{P}_k^3 = \mathrm{Proj}(k[x,y,z,w])$ を, $X = V_+(wz-xy, x^2-wy, y^2-xz)$ と定める. 以下, $I := (wz-xy, x^2-wy, y^2-xz)$ とする. 準同型 $\varphi : k[x,y,z,w] \to k[s,t]$ を,

$$\varphi(x) = s^2t,\ \varphi(y) = st^2,\ \varphi(z) = t^3,\ \varphi(w) = s^3$$

と定めると, これは $k[x,y,z,w]/I$ を経由する. この φ によって, $f : \mathbb{P}_k^1 \to X$ が得られるが, $f|_{U_s} : U_s \to X_w$ は,

$$\begin{aligned}&\varphi_0 : k[x',y',z']/(z'-x'y', x'^2-y', y'^2-x'z') \to k[t'];\\&\varphi_0(x') = t'\end{aligned}$$

によって定まる同型であり, 同様に, $f|_{U_t}$ も U_t から X_z への同型であることがわかるので, これは $\mathbb{P}_k^1$ に同型である. 特に, X は $\mathbb{P}_k^3$ の閉部分多様体であることがわかった. この X のことを**捻れ 3 次曲線**という. ♢

さて, 今次数付き環 $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ から scheme $\mathrm{Proj}(A)$ を作ることができた. $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$, $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ を次数付き環として, $\varphi : A \to B$ を次数付き環の準同型, つまり $\varphi(A_n) \subset B_n$ を満たすような環準同型とする. この時, B の斉次イデアル I について, $\varphi^{-1}(I)$ は A の斉次イデアルになる. 実際, $x \in \varphi^{-1}(I)$ について,$x = \sum_{n\geq 0} x_n$ を斉次分解として, $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0}\varphi(x_n) \in I$ となるが, I は斉次イデアルなので, $\varphi(x_n) \in I \cap B_n$. よって, $x_n \in \varphi^{-1}(I) \cap A_n$ がわかり, $\varphi^{-1}(I)$ が斉次イデアルになることが従う. そこで,

$$G(\varphi) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(B) : \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \not\supset A_+\}$$

と定める. $\mathfrak{p} \in G(\varphi)$ とすると, ある $f \in A_+$ が存在して, $f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ となる. $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ は斉次イデアルなので, f は斉次元として良い. この時, $\mathfrak{p} \in D_+(\varphi(f))$ となるが, $D_+(\varphi(f)) \subset G(\varphi)$ もわかるので, $G(\varphi)$ は $\mathrm{Proj}(A)$ の開集合になる. すると, 写像 ${}^a\varphi : G(\varphi) \to \mathrm{Proj}(A); \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ が定まる. これが連続であることは, A_+ の斉次元 f について, ${}^a\varphi(D_+(\varphi(f)) = D_+(f)$ となることから従う. さらに, φ の誘導する射 $\varphi[f^{-1}]_0 : A[f^{-1}]_0 \to B[\varphi(f)^{-1}]_0$ が定める Spec の射 $\widetilde{\varphi[f^{-1}]_0} : G(\varphi)_{\varphi(f)} \to \mathrm{Proj}(A)_f$ について, $f, g \in A_+$ を斉次元とすると, $\widetilde{\varphi[f^{-1}]_0}|_{G(\varphi)_{\varphi(fg)}} = \widetilde{\varphi[g^{-1}]_0}|_{G(\varphi)_{\varphi(fg)}}$ となることがわかるので, ${}^a\varphi$ は scheme の射になる.

例. k を体として, $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,\ldots,n} \in \mathrm{GL}(n+1, k)$ とする. この時, k 代数の準同型 $\varphi : k[X_0,\ldots,X_n] \to k[X_0,\ldots,X_n]$ を

$$\varphi(X_i) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}X_j$$

と定めると, $G(\varphi) = \mathbb{P}_k^n$ なので, これは ${}^a\varphi : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^n$ を誘導する. φ は可逆で, φ^{-1} は A^{-1} から誘導される $k[X_0,\ldots,X_n]$ の自己同型なので, ${}^a\varphi$ は $\mathbb{P}_k^n$ は自己同型になる. 逆に, $\mathbb{P}_k^n$ の自己同型は全てこの形で表される. ♢

次に, $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ を次数付き環として, $M = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j$ を次数付き加群とする. この時, $f \in A_+$ を斉次元として, $\deg(f) = d$ とすると, $M[f^{-1}]$ は自然に次数付き $A[f^{-1}]$ 加群になる. その 0 次斉次成分 $M[f^{-1}]_0$ は, $A[f^{-1}]_0$-加群なので, $D_+(f)$ 上の準連接層 $M[f^{-1}]_0^\sim$ が定義できる. $f, g \in A_+$ を斉次元として, $\deg(f) = d$, $\deg(g) = e$ とする. この時, $M[f^{-1}]_0[(f^e/g^d)] \cong M[(fg)^{-1}]_0$ となる. 実際, $\frac{m}{(fg)^n} \in M[(fg)^{-1}]_0$ について, $cd > n$ となるような $c \geq 0$ を取ってきて,

$$\varphi\left(\frac{m}{(fg)^n}\right) := \frac{g^{cd-n}m}{f^{n+ce}} \cdot \left(\frac{f^e}{g^d}\right)^c$$

と定めると, これは c の取り方によらず, well-defined に加群の同型を定める. 上の同型による同一視で, $M[f^{-1}]_0^{\sim}|_{D_+(fg)} = M[g^{-1}]_0^{\sim}|_{D_+(fg)}$ となるので, $M[f^{-1}]_0^{\sim}$ が貼り合わさって一つの準連接 $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ 加群 $\widetilde{M}$ を定める.

引き続き A を次数付き環として, $M = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_j, N = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} N_j$ を次数付き A 加群とする. さらに, $\alpha : M \to N$ を次数 0 の準同型とする. つまり, $\alpha(M_i) \subset N_i$ が任意の i について成立するような A-線型写像とする. $f \in A_+$ を斉次元とすると, 局所化によって, 自然に次数 n の $A[f^{-1}]_0$ 加群準同型 $\alpha_f : M[f^{-1}]_0 \to N[f^{-1}]_0$ が得られる. $f, g \in A_+$ を斉次元とすると, 以下の図式は可換になる:

$$\begin{array}{ccc} M[f^{-1}]_0 & \xrightarrow{\alpha_f} & N[f^{-1}]_0 \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ M[(fg)^{-1}]_0 & \xrightarrow{\alpha_{fg}} & N[(fg)^{-1}]_0 \end{array}$$

よって, $\{D_+(f) : f \in A_+, \text{斉次元}\}$ が $\mathrm{Proj}(A)$ の開基を作ることから, $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ 上の準連接層の準同型

$$\widetilde{\alpha} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$$

が得られる.

次に, テンソル積について考えてみよう. $f \in A_+$ を斉次元とすると, $(m/f^i) \otimes (n/f^j) \mapsto (m \otimes n)/f^{i+j}$ によって, $A[f^{-1}]_0$ 加群の射

$$\lambda_f : M[f^{-1}]_0 \otimes_{A[f^{-1}]_0} N[f^{-1}]_0 \to (M \otimes_A N)[f^{-1}]_0$$

が定まる. 上と同様に, これは制限写像と可換なので, 準連接 $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ 加群層の準同型 $\lambda : \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}} \widetilde{N} \to (M \otimes_A N)^{\sim}$ が得られる.

ここで, 一つ定義をしておこう:

定義 2.8. $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ を次数付き環, $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$, $N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N_i$ を次数付き A 加群とする. この時, A 加群の準同型 $\varphi : M \to N$ で, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ について, $\varphi(M_i) \subset N_{i+d}$ が成立するようなものを, 次数 d の準同型という. 次数 d の準同型全体を, $\mathrm{Hom}_A(M, N)_d$ と書く. ♢

$\varphi : M \to N$ を A 加群の準同型とすると, $d \in \mathbb{Z}$ について, $\varphi_d : M \to N$ を $m \in M_i$ について, $\varphi(m)$ の $i + d$ 次斉次成分を返す写像の M への線型拡張とする. つまり, $m = \sum m_i$ とした時,

$$\varphi_d(m) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi(m_i)_{i+d}$$

である. これは A 加群の準同型になっている. 実際,

$$\begin{aligned} \varphi_d(am) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\sum_{j+k=i} a_j m_k\right)_{i+d} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j+k=i} a_j \varphi(m_k)_{k+d} \\ &= a\varphi_d(m) \end{aligned}$$

となる. この時, $\varphi = \sum_{d\in\mathbb{Z}} \varphi_d$ となることは明らかであり, ここから, M が有限生成ならば $\mathrm{Hom}_A(M, N) = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(M, N)_d$ となることがわかる.

定義 2.9. $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ を次数付き環, $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$, $N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N_i$ を次数付き A 加群とする. この時, ${}^*\mathrm{Hom}_A(M, N) := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(M, N)_d$ と定める. ♢

定義から明らかに $^*\mathrm{Hom}_A(M,N)$ は次数付き A 加群になる．$f\in A_+$ を斉次元とする．この時, $\mu_f : {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N)[f^{-1}]_0 \to {}^*\mathrm{Hom}_{A[f^{-1}]_0}(M[f^{-1}]_0, N[f^{-1}]_0)$ を, $\alpha\in\mathrm{Hom}_A(M,N)_d$ について,

$$\mu_f\left(\frac{\alpha}{f^d}\right)\left(\frac{m}{f^r}\right)=\frac{\alpha(m)}{f^{d+r}}$$

と定めると, μ_f は $A[f^{-1}]_0$ 加群の準同型になる．$\rho' : {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N)[f^{-1}]_0 \to {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N)[(fg)^{-1}]_0$ および $\rho : {}^*\mathrm{Hom}_{A[f^{-1}]_0}(M[f^{-1}]_0, N[f^{-1}]_0) \to {}^*\mathrm{Hom}_{A[(fg)^{-1}]_0}(M[(fg)^{-1}]_0, N[(fg)^{-1}]_0)$ を自然な射とすると, $\rho\mu_f=\mu_{fg}\rho'$ が成立するので, $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}$ 加群の準同型 $\mu : {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N)^\sim \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}(\widetilde{M},\widetilde{N})$ を得る．

命題 2.5. $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ を Noether 次数付き環として, A_0 上 A_1 で生成されているとする．$X=\mathrm{Proj}(A)$, M,N を次数付き A 加群として, 以下が成立する．

(1) M が有限生成ならば, $\widetilde{M}$ は連接 $\mathcal{O}_X$ 加群である．
(2) $\lambda : \widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\widetilde{N} \to (M\otimes_A N)^\sim$ は同型射である．
(3) M が有限生成 A 加群ならば, $\mu : {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N)^\sim \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)}}(\widetilde{M},\widetilde{N})$ は同型射である．

証明.

(1) M が有限生成 A 加群ならば, 任意の 1 次斉次元 f について, $M[f^{-1}]_0$ は有限生成 $A[f^{-1}]_0$ 加群になる．実際, $m_1,\ldots,m_n$ が A 上 M を生成するならば, $M[f^{-1}]_0$ は $\{\frac{m_j}{f}\}_{j=1}^n$ によって生成される．よって, $\widetilde{M}|_{D_+(f)}$ は連接 $\mathcal{O}_{D_+(f)}$ 加群になることが従い, 連接性は局所的な性質なので, $\widetilde{M}$ は連接 $\mathcal{O}_X$ 加群になることがわかった． $\square$

(2) $\mathrm{Proj}(A)=\bigcup_{\deg(f)=1}D_+(f)$ なので, $\deg(f)=1$ なる斉次元 f について, $\lambda_f : M[f^{-1}]_0\otimes_{A[f^{-1}]_0}N[f^{-1}]_0 \to (M\otimes_A N)[f^{-1}]_0$ が同型になることを示せばよい．λ_f が全射になることは明らか．単射性を示す．$\lambda_f(m\times n)=0$, $m=\sum_{i=0}^p m_i/f^{d_i}$, $n=\sum_{j=0}^q n_j/f^{e_j}$ とおくと, $d:=\max\{d_i; i=0,1,\ldots,p\}$, $e:=\max\{e_j; j=0,1,\ldots,q\}$ として, m_i,n_j を $f^{d-d_i}m_i, f^{e-e_j}n_j$ で置き換えることによって, $m\in M_d$, $n\in N_e$ としてかまわない．この時, $M[f^{-1}]\otimes_{A[f^{-1}]}N[f^{-1}]$ において $m\otimes n=0$ が成立するので, ある $r>0$ が存在して, $f^r(m\otimes n)=0$ となる．これは, $M\times N$ において,

$$\begin{aligned}f^r(m,n)\in\langle &a(m',n')-(am',n'), a(m',n')-(m',an'),\\ &(m_1+m_2,n_1)-(m_1,n_1)-(m_1,n_2),\\ &(m_1,n_1+n_2)-(m_1,n_1)-(m_1,n_2); a\in A, m',m_1,m_2\in M, n',n_1,n_2\in N\rangle\\ :=&L\end{aligned}$$

が成立することを指す．よって, f で局所化した時, $(m/f^d, n/f^e)=L[f^{-1}]_0$ がわかる．ゆえに, λ_f は同型になる． $\square$

(3) $n\in\mathbb{Z}$ および次数付き A 加群 M について, 次数付き A 加群 $M[n]$ を, $M[n]_d=M_{d+n}$ によって定める．M は有限生成なので, 有限個の生成元 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ が取れる．ここで, $l_i:=\deg(x_i)$ とすると, $u : \bigoplus_{i=1}^n A[-l_i] \to M$ を, $A[-l_i]_{l_i}\ni 1\mapsto x_i$ として定めると, u は全射である．A は Noether なので, $\mathrm{Ker}(u)$ は有限生成であり, 今と同様の方法によって全射準同型 $v_1 : \bigoplus_{j=1}^r A[-m_j] \to \mathrm{Ker}(u)$ をえる．$\ker(u)\circ v_1 =: v$ とおくことで, 完全列

$$\bigoplus_{j=1}^r A[-m_j] \xrightarrow{v} \bigoplus_{i=1}^n A[-l_i] \xrightarrow{u} M \longrightarrow 0$$

が得られた．$P := \bigoplus_{i=1}^n A[-l_i]$, $Q := \bigoplus_{j=1}^r A[-m_j]$ とおく．$a \in A_1$ について，

$$Q[a^{-1}]_0 \xrightarrow{v_a} P[a^{-1}]_0 \xrightarrow{u_a} M[a^{-1}]_0 \longrightarrow 0$$

は完全になる．この時, $R := A[a^{-1}]_0$ とおくと, 次数付き A 加群 N について, 図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N)[a^{-1}]_0 \arrow[r] \arrow[d] & {}^*\mathrm{Hom}_A(P,N)[a^{-1}]_0 \arrow[r] \arrow[d] & {}^*\mathrm{Hom}_A(Q,N)[a^{-1}]_0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M[a^{-1}]_0, N[a^{-1}]_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P[a^{-1}]_0, N[a^{-1}]_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(Q[a^{-1}]_0, N[a^{-1}]_0)
\end{tikzcd}$$

は横 2 行については完全, 各四角形が可換になる．この図式の縦の射の右 2 本が同型であることが示されれば $\mu_a : {}^*\mathrm{Hom}_A(M,N)[a^{-1}]_0 \to \mathrm{Hom}_R(M[a^{-1}]_0, N[a^{-1}]_0)$ が同型になることが示されるので, 主張が従う．つまり, $M = \bigoplus_{i=1}^n A[-l_i]$ とかけるもののみを議論すれば良いことになった．さらに, この時,

$$\begin{aligned}
{}^*\mathrm{Hom}_A(M,N) &\cong \bigoplus_{i=1}^n {}^*\mathrm{Hom}_A(A[-l_i], N) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^n N[l_i]
\end{aligned}$$

となるので, 結局 $P = A[-l]$ の場合に示せば良い．$\mu_a : N[l][a^{-1}]_0 \to \mathrm{Hom}_R(A[-l][a^{-1}]_0, N[a^{-1}]_0)$ は, x/a^k, $x \in N_{k+l}$ について,

$$\mu_a\left(\frac{x}{a^k}\right)\left(\frac{1}{a^l}\right) = \frac{x}{a^{l+k}}$$

によって定められるので, $\mu_a(x/a^k) = 0$ なら, ある $s > 0$ が存在して, $a^s x = 0$ となるので, $x/a^k = 0$ となる．逆に, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(A[-l][a^{-1}]_0, N[a^{-1}]_0)$ が与えられた時, $z := \varphi(1/a^l)$ とおくと, $\mu_a(a^l z) = \varphi$ となる．従って, μ_a は同型であることがわかった． □

定義 2.10. A を次数付き Noether 環として, A_0-多元環として A_1 で生成されているとする．さらに, $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathrm{Proj}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ とおいて, $l \in \mathbb{Z}$ とする．この時,

$$\mathcal{O}_X(l) = A[l]^\sim$$

と定める． ◇

上の場合において, $a \in A_1$ として,

$$\begin{aligned}
A[l][a^{-1}]_0 &= \left\{ \frac{x}{a^k} ; x \in A_{k+l} \right\} \\
&= a^l \cdot A[a^{-1}]_0 \\
&\cong A[a^{-1}]_0
\end{aligned}$$

となるので, $\mathcal{O}_X(l)$ は階数 1 の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群である．さらに, 上の命題の (2) より,

$$\mathcal{O}_X(l) \otimes \mathcal{O}_X(m) \cong A[l+m]^\sim = \mathcal{O}_X(l+m)$$

となることがわかった．さらに, 上の命題の (3) から,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(l), \mathcal{O}_X(m)) \cong \mathcal{O}_X(l-m)$$

もわかる．よって, 準同型 $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(X)$ を, $l \mapsto [\mathcal{O}_X(l)]$ と定めることができる．後で見るように, 実はこれは同型になっている．

A を次数付き Noether 環として, A_0 上 A_1 で生成されているとする. この時, $(X, \mathcal{O}_X) = (\mathrm{Proj}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ として,

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) := \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(l))$$

と定めると, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(l)) =: \Gamma(\mathcal{O}_X)_l$ として, 同型射 $\mathcal{O}_X(l) \otimes \mathcal{O}_X(m) \to \mathcal{O}_X(l+m)$ から誘導される射 $\Gamma(\mathcal{O}_X)_l \otimes \Gamma(\mathcal{O}_X)_m \to \Gamma(\mathcal{O}_X)_{l+m}$ によって, 積 $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) \times \Gamma_*(\mathcal{O}_X) \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ を定める. すると, $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ は次数付き環になる. $f \in A_l$ とする. 任意の $a \in A_1$ について,

$$f \in A[l][a^{-1}]_0 = \left\{ \frac{x}{a^k}; x \in A_{k+l} \right\}$$

なので, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(l))$ となる. 従って, 加法群の射 $A_l \to \Gamma(\mathcal{O}_X)_l$ が定まる. これの直和によって加法群の射 $\varphi : A \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ が定まり, $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ の積の定め方から φ は環準同型にもなる.

次に, $\mathcal{F}$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の可逆層とする. この時,

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) := \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(l))$$

と定めると, $\Gamma_*(\mathcal{F})$ は次数付き $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ 加群になる. 従って, 上で構成した $\varphi : A \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ を通じて $\Gamma_*(\mathcal{F})$ は次数付き A 加群にもなる.

$a \in A_d$ について, $\Gamma_*(\mathcal{F})[a^{-1}]_0$ の元は x/a^n, $x \in \Gamma_*(\mathcal{F})_{nd} = \Gamma(X, \mathcal{F}(nd))$ と書けるので, $(x|_{D_+(a)})/a^n \in \Gamma(D_+(a), \mathcal{F})$ となる. これによって, $\mathcal{O}_X$ 加群の射 $\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim \to \mathcal{F}$ が定まる.

定理 2.2. A を次数付き Noether 環として, A_0 上 A_1 で生成されているとする. この時, 以下が成立する:

(1) A が整域ならば, $\varphi : A \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ は単射になる. さらに, A_1 が A の素元によって A_0 上生成されるならば, φ は同型である.
(2) $\mathcal{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群ならば, 上で定義された射 $\Gamma_*(\mathcal{F})^\sim \to \mathcal{F}$ は同型である.

証明.

(1) $\varphi : A \to \Gamma(\mathcal{O}_X)$ が単射であることを示すには, 0 でない斉次元が決して 0 に写像されないことを示せばよい. 実際, $a \in A$, $A \neq 0$ について, $\varphi(a) = 0$ ならば, $a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ を a の斉次分解として, $\varphi(a_n) = 0$ が任意の n で成立するので, ある n で $a_n \neq 0$ かつ $\varphi(a_n) = 0$ となる. $a \in A_d$ とする. $\varphi(a) = 0$ となるならば, X の開被覆 $\{D_+(a_i)\}_{i=1,\dots,N}$ $(a_i \in A_1)$ について, 任意の i について, ある n_i が存在して, $a_i^{n_i} a = 0$ が成立するので, A が整域ならばこのようなことは起こり得ない. 主張の後半を示す. $A_1 = \sum_{i=1}^m A_0 a_i$ として, 各 i について, a_i は A の素元であり, $i \neq j$ の時 $A_0 a_i \not\subset A_0 a_j$ として良い. この時, $s \in \Gamma(X, \prime_X(l))$ とすると, $s|_{D_+(a_i)} \in A[l][a_i^{-1}]_0$ は, $s_i \in A_d$, $d \geq l$ について,

$$\frac{s_i}{a_i^d} \cdot a_i^l$$

と表すことができる. d を十分大きく取ることで, 任意の i について, この d を等しいものとして取れる. $D_+(a_i a_j)$ 上で考えることで,

$$s_i a_j^{d-l} = s_j a_i^{d-l}$$

となる. a_i が素元なので, $a_i | s_i$ あるいは $a_i | a_j^{d+l}$ となる. $a_i | a_j$ ならば, $a_j = c a_i$, $c \in A_0$ とかける. これは a_i の定め方に反するので, $a_i | s_i$ となる. すなわち, $d = l$ としてよいことがわかった. この時, $s_i \in A_l$ であり, $\varphi(s_i) = s$ となる. つまり, φ は同型であることがわかった. □

(2) $d \geq 1$, $a \in A_d$ とする．このとき, $\Gamma_*(\mathcal{F})[a^{-1}]_0 \to \Gamma(D_+(a), \mathcal{F})$ が同型であることが示せれば良い．$\Gamma_*(\mathcal{F})[a^{-1}]_0$ の元は, ある $n \geq 1$ 及び $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}(nd))$ について, s/a^n と表される．これが 0 に写像されるならば, ある $N \geq 0$ について, $a^N s|_{D_+(a)} = 0$ となる．$a^N s \in \Gamma(X, \mathcal{F}((n+m)d))$ と見た時, $a^N s = 0$ を示せばよい．$a_1, \ldots, a_m \in A_1$ を, $\mathrm{Proj}(A) = \bigcup D_+(a_i)$ となるように取って, $\mathcal{F}|_{D_+(a_i)} \cong \widetilde{M_i}$ とする．実際, $D_+(a_i)$ は Affine scheme なので, $M_i = \Gamma(D_+(a_i), \mathcal{F})$ とすればよい．$a^N s|_{D_+(a)} = 0$ ならば, 任意の i について, $a^N s|_{D_+(aa_i)} = 0$ となるので, $a^N s$ を $(M_i)_{a_i}$ の元と見た時 0 と等しい．これは $a_i^M a^N s = 0$ が M_i で成立することを意味する．これは $a^N s|_{D_+(a_i)} = 0$ を意味する．これが任意の i で成立するので, $a^N s = 0$ が得られた．次に全射性を示す．$f \in \Gamma(D_+(a), \mathcal{F})$ をとってきた時, 上の a_i について, $f|_{D_+(aa_i)} \in M_i\left[\left(\frac{a}{a_i}\right)^{-1}\right]$ なので, n を十分大きくとって i に依らないようにして, $s_i := a^n f \in \Gamma(D_+(a_i), \mathcal{F}(nd))$ として良い．この時, $s_i|_{D_+(aa_ia_j)} = s_j|_{D_+(aa_ia_j)}$ となるので, さらに n を大きく取り直すことで $s_i|_{D_+(a_ia_j)} = s_j|_{D_+(a_ia_j)}$ が成立するように取れる．$\{s_i\}$ を貼り合わせて得られる大域切断を $s \in \Gamma(X, \mathcal{F}(nd))$ とおくと, $s/a^n \in \Gamma_*(\mathcal{F})[a^{-1}]_0$ は f に写像される．□

系 2.1. A を Noether 次数付き環として, A_0 上 A_1 で生成されているとする．$X = \mathrm{Proj}(A)$ としたとき, 任意の連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ について, ある有限生成次数付き A 加群 M が存在して, $\mathcal{F} \cong \widetilde{M}$ となる．

証明. $M := \Gamma_*(\mathcal{F})$ とすれば, $\widetilde{M} \cong \mathcal{F}$ となる．$\{a_i\}_{i=1}^m \subset A_1$ を, $\bigcup D_+(a_i) = X$ となるようにとる．この時, $\mathcal{F}|_{D_+(a_i)} \cong M[a_i^{-1}]_0^{\sim}$ は連接 $\mathcal{O}_{D_+(a_i)}$ 加群なので, $M[a_i^{-1}]_0$ は有限生成 $A[a_i^{-1}]_0$ 加群である．従って, $M[a_i^{-1}]_0$ の生成元 $\{x_{ij}/a_i^d\}_{j=1}^{r_j}$, $d \geq 0$, $x_{ij} \in M$ が取れる．i は有限個に渡っているので, d は i, j に依らないように取れる．$N := \sum Ax_{ij}$ とすると, N は有限生成 A 加群であり, $N[a_i^{-1}]_0 = M[a_i^{-1}]_0$ なので, $\widetilde{N} \cong \widetilde{M} \cong \mathcal{F}$ となる．□

さて, 状況を制限して具体的に考察してみよう．k を体, $R := k[T_1, \ldots, T_n]$ として, $\mathbb{P} := \mathbb{P}_k^n$ とする．さらに, $I \subset R$ を, R_+ を含まない R のイデアルとして, $A := R/I$ とする．$X := \mathrm{Proj}(A)$ とおくと, これは $\mathbb{P}$ のイデアル層 $\mathcal{I}_X := \widetilde{I}$ の定める $\mathbb{P}$ の部分多様体であり, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

を得る．従って, $m \in \mathbb{Z}$ について, 完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X(m) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m) \longrightarrow \mathcal{O}_X(m) \longrightarrow 0$$

が得られるので, 大域切断をとって, 完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{I}_X(m)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$$

が得られる．ここで, $\mathcal{I}_X(m) = \mathcal{I}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)$ となることに注意して, $f \in \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{I}_X(m))$ とすると, 各 i について, $f|_{T_i} = f/T_i^m \in IR[T_i^{-1}] \cap R[T_i]_0$ なので, ある r が存在して, 任意の i について, $T_i^r f \in I$ となる．I が素イデアルならば, $I \not\subset R_+$ なので, $f \in I$ が従い, $f \in I_m$ がわかった．つまりこの場合は $A_m \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ は単射になる．さらに, 長完全列から, $H^1(\mathbb{P}, \mathcal{I}_X(m)) = 0$ ならば, これは同型になることがわかる．

$\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_X$ 加群とする．この時, 有限生成 A 加群 M が存在して, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ となるので, $i : X \to \mathbb{P}$ を自然な閉埋入とすると, $i_*\mathcal{F} = (M_R)^{\sim}$ となる．ここで M_R は商写像 $R \to A = R/I$ によって M を R 加群とみなしたものである．M_R の自由分解

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_0} R[d_{0i}] \longrightarrow M_R \longrightarrow 0$$

が得られて, これによって自由分解

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r_0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d_{0i}) \longrightarrow i_*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

を得る.

定理 2.3. A_0 を Noether 環, X を $\mathrm{Spec}(A_0)$ 上有限型かつ分離的 scheme とする. この時, ある $N>0$ が存在して, 任意の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ について, $H^n(X,\mathcal{F})=0$ $(n>N)$.

証明. X が $\mathrm{Spec}(A_0)$ 上有限型なので, affine 開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^N$ が存在して, $U_i=\mathrm{Spec}(A_i)$, $U_i\cap U_j=\mathrm{Spec}(A_{ij})$ $(i\neq j)$ とすると[22], A_{ij} は A_0 上有限生成多元環であり, Hilbert の基底定理からこれは Noether である. 同様に, 異なる U_i たちの有限個の共通部分は Noether 環のスペクトラムになっており, $\mathcal{F}$ が準連接であることから, $H(U_{i_0 i_1\dots i_p},\mathcal{F})=0(i_0<i_1<\cdots<i_p)$ がわかった. つまり, X の開被覆 $\{U_i\}$ は $\mathcal{F}$-acyclic であることがわかったので,

$$\check{H}^n(\{U_i\}_{i=1}^N,\mathcal{F})=H^n(X,\mathcal{F})$$

がわかった. $n>N$ の時, Čech 複体の n 次成分が 0 な r ので, 左辺は 0 になる. 従って, 主張が示された. □

定理 2.4. $\mathbb{P}=\mathbb{P}_k^n$ について, 以下が成立する.

(1) $H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))=k[x_0,\dots,x_n]_m$
(2) $H^p(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))=0$ $(0<p<n)$
(3) $\dim H^n(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))=\begin{cases}\binom{-m-1}{n} & (m\le -n-1)\\ 0 & (m>-n-1)\end{cases}$

証明.

(1) これは定理 2.2 より明らか.
(2) $R:=k[T_0,\dots,T_n]$ として, $\mathbb{P}$ の標準開被覆 $\{U_i=\mathrm{Spec}(R[T_i^{-1}]_0)\}_{i=0}^n$ をとる. この時, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)|_{U_{i_0,\dots,i_p}}=(R[T_{i_0}^{-1},\dots,T_{i_p}^{-1}]_0)^{\sim}$ なので, $f\in\Gamma(U_{i_0,\dots,i_p},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))$ とすると, $f=g/T_{i_0}^{e_0}\dots T_{i_p}^{e_p}$, $g\in k[T_0,\dots,T_n]_{m+|e|}$ とかける. ここで, $(e_0,\dots,e_p)\in\mathbb{Z}^{p+1}$ について, $|e|=e_0+\cdots+e_p$ としている. $f=(f_{i_0,\dots,i_p})\in C^p(\{U_i\}_{i=0}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))$ をコサイクルとする. この時, f の成分の個数は有限なので, ある $e\ge 0$ が存在して, 任意の $(i_0,\dots,i_p)$ について,

$$g_{i_0,\dots,i_p}:=(T_{i_0}\dots T_{i_p})^e f_{i_0,\dots,i_p}\in k[T_0,\dots,T_n]_{m+(p+1)e}$$

となる. コサイクル条件を書き下すと,

$$\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\frac{T_{i_j}^e g_{i_0,\dots,\check{i_j},\dots,i_{p+1}}}{(T_{i_0}\dots T_{i_{p+1}})^e}=0$$

となる. 従って,

$$T_{i_0}^e g_{i_1,\dots,i_{p+1}}=\sum_{l=1}^{p+1}(-1)^{l+1}T_{i_l}^e g_{i_0,\dots,\check{i_l},\dots,i_{p+1}}$$

が成立する. 右辺は $\pmod{T_{i_0}^e}$ で 0 になるので, $g_{i_0,\dots,\check{i_l},\dots,i_{p+1}}=r_{i_0,\dots,\check{i_l},\dots,i_{p+1}}+T_{i_j}^e h_{i_0,\dots,\check{i_l},\dots,i_{p+1}}$, $\deg_{T_j} r_{i_0,\dots,\check{i_j},\dots,i_{p+1}}\le e-1$ とすれば,

$$0=\sum_{l=1}^{p+1}(-1)^l T_{i_l}^e r_{i_0,\dots,\check{i_l},\dots,i_{p+1}}$$

[22] X が分離的なので, $U_i\cap U_j$ は affine 開集合であることに注意

となるので,

$$g_{i_1,\dots,i_{p+1}} = \sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{l+1} T_{i_l}^e h_{i_0,\dots,\check{i_l},\dots,i_{p+1}}$$

が示された. 従って,

$$f_{i_1,\dots,i_{p+1}} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \frac{T_{i_j}^e h_{i_0,\dots,\check{i_j},\dots,i_{p+1}}}{(T_{i_1}\cdots T_{i_{p+1}})^e}$$

となるので, f はコバウンダリになる. つまり, $0 < p < n$ について, $H^p(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) = 0$ がわかった.

(3) $f \in \Gamma(D_+(T_0T_1\dots T_n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))$ とする. この時, $f = g/(T_0T_1\dots T_n)^e$ $(e > 0)$, $g \in k[T_0,\dots,T_n]_{m+(n+1)e}$ と書くことができる. f がコバウンダリなら, ある $g_i \in k[T_0,\dots,T_n]_{m+ne}$ 達が存在して,

$$g = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i T_i^e g_i$$

となる. $(n+1)(e-1) < m + (n+1)e$, つまり $-(n+1) < m$ ならば, g に出てくる各の単項式はある T_i^e で割り切れる. 従って, コサイクルは常にコバウンダリになっている. そうでない時は, $H^n(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m))$ の基底として, $T_0^{-e_0}\cdots T_n^{-e_n}$ $(e_0 + \cdots + e_n = -m,\ e_i > 0)$ が選べるので, $m \le -n-1$ の時, $\dim H^n(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) = \binom{-m-1}{n}$ である. □

系 2.2.

$$H^p(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}) = \begin{cases} k & (p = 0) \\ 0 & (p > 0) \end{cases}$$

補題 2.4. $f : X \to Y$ を体 k 上分離的代数的 scheme の射とする. f が affine 射ならば, 任意の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ について, $H^*(X, \mathcal{F}) \cong H^*(Y, f_*\mathcal{F})$ が成立する.

証明. f が affine 射なので, Y の affine 開被覆 $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}_{i=1}^n$ をとると, $\{f^{-1}(U_i) := \mathrm{Spec}(B_i)\}_{i=1}^n$ は X の affine 開被覆になっている. 補題より, $f_*\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群であり, 入射加群の順像は脆弱層なので, $\mathcal{F}$ の開被覆 $\{U_i\}$ に関する Cech 分解の f による順像の入射分解の大域切断によって得られる二重複体は入射分解の方向に acyclic である. 今, 底空間は k 上分離的なので, $\{f^{-1}(U_i)\}$ は準連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群に関して acyclic な分解になっているので, 得られた二重複体は Cech 分解の方向にも acyclic である. 従って, 同型 $H^*(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^*(X, \mathcal{F})$ が得られた. □

X を射影的 scheme, つまり X がある $\mathbb{P}_k^n$ の閉部分 scheme になっている場合を考える. $i : X \to \mathbb{P}_k^n$ は閉埋入射なので, 上の補題より任意の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ について, $H^*(X, \mathcal{F}) \cong H^*(\mathbb{P}_k^n, f_*\mathcal{F})$ となる. $\mathcal{F}$ が連接の時, Cech cohomology によって $\dim_k H^p(X, \mathcal{F}) < \infty$ がわかる. さらに $\mathcal{P}_k^n$ の $i_*\mathcal{F}$-acyclic な $(n+1)$-被覆が存在するので, $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ が任意の $p > n$ で成立する. さらに, 以下の定理が成立する:

定理 2.5 (Serre の消滅定理)**.** X を体 k 上の射影的 scheme, $\mathcal{F}$ を X 上の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群とする. この時, $N \gg 0$ について, $H^p(X, \mathcal{F}(N)) = 0$, $\forall p > 0$ となる.

証明. $\mathcal{F}$ が準連接なので, $i : X \to \mathbb{P}^n_k$ を閉埋入射として, $\mathbb{P} := \mathbb{P}^n_k$ 上の短完全列 $0 \to \mathcal{G} \to \bigoplus_{i=0}^l \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m_i) \to i_*\mathcal{F} \to 0$ が取れる. この長完全列をとることで,

$$
\begin{array}{l}
0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}, \mathcal{G}(N)) \longrightarrow \bigoplus H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m_i+N)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(N)) \\
\longrightarrow H^1(\mathbb{P}, \mathcal{G}(N)) \longrightarrow \bigoplus H^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m_i+N)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}(N)) \\
\longrightarrow \cdots \\
\longrightarrow H^n(\mathbb{P}, \mathcal{G}(N)) \longrightarrow \bigoplus H^n(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m_i+N)) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F}(N)) \\
\longrightarrow 0
\end{array}
$$

が得られる. 従って, 定理 2.4 より, ある N_1 が存在して, $N \geq N_1$ ならば $H^n(X, \mathcal{F}(N)) = 0$, $H^p(X, \mathcal{F}(N)) \cong H^{p+1}(\mathbb{P}, \mathcal{G}(N))$ $(\forall p > 0)$ となる. さらに, $\mathcal{G}$ についても同じことをして, ある N_2 が存在して $N \geq N_2$ ならば $H^n(X, \mathcal{F}(N)) = H^{n-1}(X, \mathcal{F}(N)) = H^n(\mathbb{P}, \mathcal{G}(N)) = 0$ となる. これを繰り返せば良い. □

k を体, $\mathbb{P} := \mathbb{P}^n_k$ として, X を $\mathbb{P}$ の閉部分 scheme とする. この時, X 上の連接層 $\mathcal{F}$ について, $h^p(X, \mathcal{F}) := \dim_k H^p(X, \mathcal{F})$ と定め, さらに $\mathcal{F}$ の **Euler 標数** $\chi(X, \mathcal{F})$ を

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p h^p(X, \mathcal{F})$$

と定める. 例えば $\chi(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(m)) = \binom{n+m}{n}$ である. cohomology の長完全列によって, X 上の連接層の短完全列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ が与えられた時,

$$\chi(X, \mathcal{F}) + \chi(X, \mathcal{H}) = \chi(X, \mathcal{G})$$

となることがわかる. これを Euler 標数の加法性という.

2.3. 可逆層, 因子, 曲線の Riemann-Roch の定理.

定義 2.11. X を scheme[23]として, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群とする. $\mathcal{L}$ が**可逆層** (あるいは**直線束**) であるとは, 任意の $x \in X$ について, ある x の開近傍 U が存在して, $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$ となることである. つまり, 階数 1 の局所自由層のことである. ◇

X を scheme, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ を X 上の可逆層とする. この時, X の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ で, 任意の $i \in I$ で, $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{L}'|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ となるものが存在する. したがって, $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ となるので, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ は可逆層になる. また, $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}' \cong \mathcal{L}'_1$ となるとき, $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}' \cong \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'_1$ となる. テンソル積は結合的であり, $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{L}$ なので, , X 上の可逆層の同型類全体 $\mathrm{Pic}(X)$ にはテンソル積によってモノイドの構造が入る. さらに, X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ について, $\mathcal{L}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ として, $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_X$ となるので, $\mathrm{Pic}(X)$ は群になることがわかる. これを X の **Picard 群**という.

[23] より一般に環つき空間で定義できる.

X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ に対して, X の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して, 同型 $\varphi_i : \mathcal{L}_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ が存在する. $\varphi_i^{-1}(U_i)(1) = s_i$ とおいて, $\theta_{ij} = \varphi_j(s_i|_{U_{ij}})$ とおくと, $(\theta_{ij})_{i,j\in I} \in C^1(\{U_i\}_{i\in I}, \mathcal{O}_X^*)$ は 1-コサイクルである. 組 $(\{U_i\}_{i\in I}, \varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i})$ を $(\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, \varphi'_\lambda : \mathcal{L}|_{V_\lambda} \cong \mathcal{O}_{V_\lambda})$ に取り替えると, 2 つの開被覆 $\{U_i\}, \{V_\lambda\}$ の共通細分をとることで, 得られるコサイクルはコバウンダリを法として同じである. つまり, 写像 $\mathrm{Pic}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ が得られる. これは同型であることも容易にわかる.

もう一つ, 大切な概念を定義しておく.

定義 2.12. X を Noether scheme とする. X の余次元 1 の既約閉部分集合の生成する自由加群を $\mathrm{Weil}(X)$ と書き, その元を X 上の **Weil 因子**という. $D = \sum_{\mathrm{codim}_X Y=1} a_Y \cdot Y$ を Weil 因子とした時, X の開集合 U 上の Weil 因子 $D|_U$ を $D_U = \sum a_Y \cdot Y \cap U$ とおく. ただし, $Y \cap U = \emptyset$ の時は, $Y \cap U = 0$ と定めている. ◇

X を余次元 1 で正規な既約かつ被約な scheme とする. この時, X 余次元 1 の既約閉集合 Y は, その生成点 y と一対一に対応する. y を X の余次元 1 の点とすると, $\mathcal{O}_{Y,y}$ は離散附値環なので, y は $k(X)$ の離散附値 $\nu_Y : k(X)^* \to \mathbb{Z}$ を (一意に) 定める. さらに, X が分離的ならば, $\nu_Y = \nu_{Y'}$ なら $Y = Y'$ となる. $f \in k(X)^*$ について,

$$(f) = \sum_{\mathrm{codim}_X Y=1} \nu_Y(f) \cdot Y$$

と定めると, これは Weil 因子になっている. 実際, X の affine 開集合 $U = \mathrm{Spec}(A)$ について, $f \in k(X) = Q(A)$ なので, ある $a, b \in A$ で, $f = a/b$ となる. $Y \cap U \neq \emptyset$, $\nu_Y(f) > 0$ ならば, Y に対応する A の素イデアル $\mathfrak{p}$ について, $a \in \mathfrak{p}$ となるので, $\mathfrak{p}$ は a の上の極小素イデアルになる. さらに, $\mathrm{ht}\mathfrak{p} = 1$ なので, $\mathfrak{p}$ は a の上の極小素イデアルになることがわかる. (a) の上の極小素イデアルは有限個しか存在しないので, このような $\mathfrak{p}$ は有限個である. b についても同じことが言えるので, $\sum \nu_Y(f) \cdot Y \cap U$ は有限和である. さらに, X は準コンパクトなので, (f) も有限和であることがわかり, $(f) \in \mathrm{Weil}(X)$ であることがわかった. $k(X)^*$ の元から上のように定義される Weil 因子を**主因子**という.

定義 2.13. X を余次元 1 で正規な既約かつ被約な分離的 Noether scheme とする. この時, $\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{Weil}(X)/k(X)^*$ と定め, これを**因子類群**と呼ぶ. また, $D, E \in \mathrm{Weil}(X)$ について, $D - E$ が主因子になることを, D と E は**線型同値**であるといい, $D \sim E$ と書く. ◇

X を余次元 1 で正規な既約かつ被約な分離的 Noether scheme とする. この時, X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ に対して, X の affine 開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$(I は有限集合) が存在して, 各 $i \in I$ について, 同型射 $\varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ が存在する. $\varphi_{ij} = \varphi_i(U_{ij})\varphi_j^{-1}(U_{ij}) : \mathcal{O}_X(U_{ij}) \to \mathcal{O}_X(U_{ij})$ とすると, これはある $\mathcal{O}_X(U_{ij})^* \subset k(X)$ の元に対応している. $i_0 \in I$ を一つ固定して, $f_i := \varphi_{ii_0} \in k(X)$ とすると, $i, i' \in I$ について, $f'_i = \varphi_{i'i} f_i$, $\varphi_{ii'} \in \mathcal{O}_X(U_{ii'})^*$ となるので, $(f_i)|_{U_{ii'}} = (f'_i)|_{U_{ii'}}$ がわかる. 従って, $\{(f_i)|_{U_i}\}_{i\in I}$ を貼り合わせることで, 因子 $D \in \mathrm{Weil}(X)$ を得る. i_0 を取り換えることで, 得られる Weil 因子は主因子分の差があり, 有限 affine 開被覆 $\{V_j\}_{j\in J}$ と $\mathcal{O}_{V_j}$ への同型の組および $j_0 \in J$ を別のもので取ったとしても, $\{U_i\}$ と非交和を取って作ることで, 得られる因子は主因子の差しかないことがわかる. $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}'$ が同型ならば, 得られる因子の線型同値類は同じであることがわかるので, 写像 $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Cl}(X); [\mathcal{L}] \mapsto [D(\mathcal{L})]$ が得られる. これが群準同型であることも容易に確かめることができる.

一方で, X 上の $\mathcal{O}_X$-代数の層 $\mathcal{K}_X$ を X の開集合 U に対して $\mathcal{O}_X(U)$ の全商環を返す前層の層化で得られる層として, $\mathcal{K}_X^*$ をその単元で作られる Abel 群の層とする. 一般の scheme 上で以下の Abel 群の層の完全列を考える:

$$1 \to \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{K}_X^* \to \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \to 1$$

この完全列から得られる長完全列

$$\cdots \to H^0(X, \mathcal{K}_X^*) \to H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^1(X, \mathcal{K}_X^*) \to \cdots$$

によって, 単射 $\mathrm{CaCl}(X) := H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)/H^0(X, \mathcal{K}_X^*) \to \mathrm{Pic}(X)$ を得る. $H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ の元を **Cartier 因子**という.

X が既約かつ被約なら, $\mathcal{K}_X^*$ は $k(X)$-定数層で, 任意の X の空でない開集合が必ず交わりをもつことからこれは散布層になるので, $H^1(X, \mathcal{K}_X^*) = 0$ となることがわかる．つまり, $\mathrm{CaCl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$ となる．

さらに X が余次元 1 で正規な既約かつ被約な分離的 Noether scheme の時, Cartier 因子は自然に Weil 因子と思うことができる．これは Cartier 因子の代表元 $(f_i)_{i\in I}$, $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$ をとってくると $i, j \in I$ について, $f_i|_{U_{ij}}$ と $f_j|_{U_{ij}}$ は $\mathcal{O}_X^*(U_{ij})$ の分しか差がないので, $(f_i)|_{U_i}$ は互いに張り合って, 一つの Weil 因子 D を定める．さらにこれが最初に取った代表元の取り方によらないことは明らかである．逆に, この設定において局所的に主であるような Weil 因子は Cartier 因子であることも容易にわかる．上で見た可逆層と Weil 因子の線型同値類との対応とこの Cartier 因子と Weil 因子の対応が compatible であることは構成を見れば明らかである．

scheme X が**局所分解的** (locally factorial) であるとは, 任意の $x \in X$ について, $\mathcal{O}_{X,x}$ が素元分解環であることをいう．X が分解的なら, X は正規であり, 特に余次元 1 で正規である．X を既約かつ被約な局所分解的分離的 Noether scheme とする．$D = \sum_{i=1}^r a_i Y_i \in \mathrm{Weil}(X)$ とする．この時, $x \in X$ について, ある affine 開集合 $U_x \subset X$ および $f_i \in \mathcal{O}_X(U_x)$ が存在して, $\mathcal{O}_{Y_i,x} = \mathcal{O}_{X,x}/f_i\mathcal{O}_{X,x}$ となる[24]. $g_x = \prod f_i^{a_i}$ として, 開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 及び $g_\lambda \in k(X)^*$ を得る．$g_{\lambda\mu} = g_\lambda g_\mu^{-1}$ として, $(g_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ の定める可逆層を $\mathcal{O}_X(D)$ とすると, その同型類は f_i の取り換えによらない. 定め方から, $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Pic}(X); [D] \mapsto [\mathcal{O}_X(D)]$ は, 上に定めた写像の逆写像になっていることがわかるので, 以下の定理が示された：

定理 2.6. X が既約かつ被約な局所分解的分離的 Noether scheme の時は, $\mathrm{Pic}(X)$ と $\mathrm{Cl}(X)$ の間に自然な同型が存在する □

Weil 因子 D について, D の各成分が非負であるとき, D は**有効因子** (effective divisor) であるといい, D が有効因子であることを $D \geq 0$ と書く．Weil 因子 D, D' について, $D \geq D'$ とは, $D - D' \geq 0$ となることを指す．

X を既約かつ被約な余次元 1 で正規な体 k 上代数的 scheme とする．X 上の Weil 因子 D について, $|D| := \{D' \in \mathrm{Weil}(X); D' \sim D, D' \geq 0\}$ として, D の**完備線型系** (complete linear system) という．X が分離的であり, さらに D が Catrier 因子の時について, 考えてみよう．D に対応する可逆層 $\mathcal{L}$ を一つ定めておき, $\mathcal{L}$ の局所自明化 affine 被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ と, 同型 $\varphi_i : \mathcal{L}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$, 及び $i_0 \in I$ を定めておき, i_0 を基準に $\mathcal{L}$ から因子 $D(\mathcal{L})$ を構成すれば D になるように取ってくる．$0 \neq \sigma \in H^0(X, \mathcal{L})$ について, $\varphi_i(U_i)(\sigma|_{U_i}) = s_i \in \mathcal{O}_X(U_i) \subset k(X)$ とする．$\varphi_{i'i}$ を変換函数とすると, $\varphi_{i'i}s_i = s_{i'}$ となり, $f_i := \varphi_{ii_0}$ と置くことで, $f_i^{-1}s_i|_{U_{ii'}} = f_{i'}^{-1}s_{i'}|_{U_{ii'}}$ となる．従って, これは大域的に張り合って, 一つの函数 $h \in k(X)$ を定める．この時, $s_i = f_i h \in \mathcal{O}_X(U_i)$ なので, $D + (h)|_{U_i} \geq 0$ が任意の $i \in I$ で成立する．よって, $D(\sigma) = D + (h)$ とすると, $\mathcal{L}$ の大域切断 σ から $D(\sigma) \in |D|$ が得られた．ここで, D を線型同値な別の因子の取り替えると, つまり i_0 を取り替えると, f_i がそのずらした函数倍されるので, h はずらした函数で割られることになる．つまり最終的に得られる因子は初めの D の取り方によらないことがわかるので, 写像 $H^0(X, \mathcal{L}) \setminus \{0\} \to |D|$ が得られる．

$\sigma, \tau \in H^0(X, \mathcal{L})$ について, 対応する因子 $D' \in |D|$ が等しかったとする．この時, $\varphi_i(U_i)(\sigma|_{U_i}) = s_i$, $\varphi_i(U_i)(\tau|_{U_i}) = t_i$ として,

$$(s_i|_{U_{ii'}})^{-1}(t_i|_{U_{ii'}}) = (\varphi_{ii'}s_{i'}|_{U_{ii'}})^{-1}(\varphi_{ii'}t_i'|_{U_{ii'}}) = (s_{i'}|_{U_{ii'}})^{-1}(t_{i'}|_{U_{ii'}})$$

となるので, $s_i^{-1}t_i \in k(X)$ は全域で張り合って一つの有理関数 a を定める．この a を用いて, h_s, h_t をそれぞれ σ, τ から上の段落の方法で得た函数とすると, $h_t = ah_s$ となるので, $(h_s) = (h_t)$ ならば $(a) = 0$. 有理関数 $f \in k(X)$ について, $(f) \geq 0$ であることは $f \in \mathcal{O}_X(X)$ であることを指すので, $a \in \mathcal{O}_X(X)^*$. X が k 上固有ならば, ある k の代数拡大 $K(= \mathcal{O}_X(X))$ について, $a \in K^*$ となる．従っ

[24]Noether 整域が UFD であることと, 任意の高さ 1 の素イデアルが単項イデアルになることが同値であることに注意. $x \notin Y_i$ ならば, $f_i \in \mathcal{O}_{X,x}^*$ となる.

て, $t_i = as_i$ が任意の i で成立するので, $\tau = a\sigma$ となり, 単射 $H^0(X,\mathcal{L})/\sim\to|D|$ が得られた. ここで, $\sigma\sim\tau \iff \exists a\in K\setminus\{0\}, \tau = a\sigma$ としている.

$D'\in|D|$ に対して, $D' = D+(h)$ とすると, $s_i = f_ih$ と定めると, $D'\geq 0$ なので, $D'|_{U_i} = (f_i)|_{U_i} + (h)|_{U_i} = (f_ih)|_{U_i}\geq 0$ がわかり, 従って $s_i\in\mathcal{O}_X(U_i)$ がわかった. $\sigma_i := \varphi_i(U_i)^{-1}(s_i)\in\Gamma(U_i,\mathcal{L})$ とすると, $s_{i'} = \varphi_{i'i}s_i$ が任意の $i,i'\in I$ で成立し,

$$\sigma_i|_{U_{ii'}} = \varphi_i(U_{ii'})^{-1}(s_i)|_{U_{ii'}} = \varphi_i(U_{ii'})^{-1}(\varphi_{ii'}s_{i'}) = \varphi_{i'}(U_{ii'})^{-1}(s_{i'}) = \sigma_{i'}|_{U_{ii'}}$$

となるので, $\sigma\in H^0(X,\mathcal{L})$ で, $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ となるものが一意に存在する. つまり, 上の写像 $\mathbb{P}^{h^0(X,\mathcal{L})-1}\cong H^0(X,\mathcal{L})/\sim\to|D|$ は全単射である.

定理 2.7. k を体, X が既約かつ被約な余次元 1 で正規な k 上固有代数的 scheme とする. $K = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ とすると, K は k の代数的拡大であり, X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ について, 以下の同型が成立する;

$$\mathbb{P}_K(H^0(X,\mathcal{L}))\cong|\mathcal{L}|$$

ここで, $|\mathcal{L}|$ とは, $|D(\mathcal{L})|$ のことである. □

以下, X を被約かつ既約な余次元 1 で正規な k 上分離的代数的 scheme とする. $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層として, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ とする. $M\subset H^0(X,\mathcal{L})$ を $K = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-線型部分空間として, $L(M) := \{D(\sigma);\sigma\in M\}$ とすると, これは $|D|$ の線型部分空間になっている. 逆に, $|D|$ の線型部分空間 L' について, $M(L') := \{\sigma\in H^0(X,\mathcal{L}); D(\sigma)\in L'\}$ とすると, これは $H^0(X,\mathcal{L})$ の線型部分空間で, $L(M(L')) = L'$ となる. 逆に, $M'\subset H^0(X,\mathcal{L})$ を K-線型部分空間とすると, $M(L(M')) = M'$ となるので, これは互いに逆を定める. L を $|D|$ の部分線型系といい, $M(L)$ を L に付随した K-加群という. $|D|$ の部分線型系 L について, $\{h\in k(X);(h) = D(\sigma)-D,\exists\sigma\in L\}$ は M と同型な $k(K)$-線型空間である.

例. R を正規環として, $X = \mathrm{Spec}(R)$ とする. この時, $\mathrm{Cl}(X)$ は R の因子類群と言う. 以下によって, X 上の可逆層はある射影加群に付随した準連接層であることがわかる.

命題 2.6. R を Noether 環とする. この時, 有限生成 R 加群 M について, 以下は同値である.

(1) M が射影的である.
(2) 任意の R の極大イデアル P について, M_P が自由 R_P-加群になる.
(3) ある $x_1,\ldots,x_r\in R$ で, $(x_1,\ldots,x_r) = R$ となり, 任意の i で, $M[x_i^{-1}]$ が自由 $R[x_i^{-1}]$ 加群になるものが存在する.

証明.

◇ まず (1) ならば (2) を示す. M が射影的であることと, M がある自由 R 加群の直和因子になることは同値だった. 従って, M が射影的なら, M_P も射影的 R_P 加群になる. 従って, 以下の補題を示せば良い:

補題 2.5. (R,P) を Noether 局所環とし, M を有限生成 R 加群とする. この時, M が R 上平坦であることと, R 上射影的であることと, M が R 上自由であることが同値である.

証明. 自由 $\Longrightarrow$ 射影的 $\Longrightarrow$ 平坦は明らか. M を有限生成平坦 R 加群とする. M の最小生成系 $\{m_1,\ldots,m_n\}$ をとってきて, 短完全列

$$0\to K\to R^n\overset{\varphi}{\to}M\to 0$$

を作る. ここで, R^n の標準基底 $e_1,\ldots,e_n$ について, $\varphi(e_i) = m_i$ として R-線型写像 φ を定めている. 平坦性より, R/P-テンソルして Tor-長完全列を取ることで,

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(R/P.M)\to K/PK\to(R/P)^n\overset{\overline{\varphi}}{\to}M/PM\to 0$$

がわかる．一方で，$\{\overline{m_1},\dots,\overline{m_n}\}\subset M/MP$ が R/P 上線型独立にならないなら，ある i で，$\overline{m_i}\in \mathrm{Span}\{\overline{m_1},\dots,\hat{\overline{m_i}},\dots,\overline{m_n}\}$ となるので，

$$M=\sum_{j\neq i} m_jR+PM$$

がわかり，中山の補題より，$M=\sum_{j\neq i} m_jR$ が従う．これは $\{m_1,\dots,m_n\}$ の最小性に矛盾．従って，$\overline{\varphi}$ は同型写像で，つまり $K/PK=0$．再び中山の補題より $K=0$ が従う．すなわち $R^n\cong M$ がわかった．

- ◇ (2) ならば (3) を示す．各極大イデアル P で M_P が有限生成自由 R_P 加群なので，M_P の R_P-基底を M から取れる．それを $m_1,\dots,m_{n(P)}$ とする．R-線型写像 $\psi: R^{n(p)}\to M$ を，$\psi(e_i)=m_i$ として定めると，$K=\ker(\varphi)$, $Q=\mathrm{cok}(\varphi)$ とおくと，$K_P=Q_P=0$ となる．K, Q は有限生成なので，これはある $x_P\in R$, $x_P\notin P$ が存在して，$K[x_P^{-1}]=Q[x_P^{-1}]=0$ となることを意味する．このようにして x_P を構成すると，$\{D(x_P)\}$ は $X=\mathrm{Spec}(R)$ の開被覆になっている．X は準コンパクトなので，有限部分被覆をとって，選ばれた x_P たちを $x_1,\dots,x_r$ とおく．すると，$(x_1,\dots,x_r)=R$ で，$K[x_i^{-1}]=Q[x_i^{-1}]=0$, つまり $M[x_i^{-1}]$ は自由 $R[x_i^{-1}]$ 加群である．
- ◇ (3) ならば (2) は明らかである．
- ◇ (2) ならば (1) を示す．再び M の最小生成系を用いて，全射 $\varphi: R^n\to M$ を構成する．ここから，

$$^M\varphi:\mathrm{Hom}_R(M,R^n)\to\mathrm{Hom}_R(M,M)$$

を得る．M が有限生成 R 加群だったので，各 P で局所化して，M_P が自由 R_P-加群であることに注意して，

$$\mathrm{Hom}_R(M,R^n)\otimes_R R_P\to\mathrm{Hom}_R(M,M)\otimes_R R_P\to\mathrm{Ext}^1_{R_P}(M_P,K_P)=0$$

を得る．よって，任意の P について，$^M\varphi\otimes R_P$ が全射になる．これは $^M\varphi$ が全射になることを意味する [$^M\varphi$ の余核 Q について，$0\neq y\in Q$ なら，$I=(0:y)_Q\subset R$ として，I を含む極大イデアルを P とすれば，$y/1\neq 0$ in Q_P となる]. $1\in\mathrm{Hom}_R(M,M)$ の逆像から $\alpha: M\to R^n$ をとってこればこれは φ の分裂を与えており，従って M は R^n の直和因子になる．つまり M は射影的 R 加群である． □

特に R が Dedekind 環，つまり 1 次元正規環のとき，R の任意の極大イデアル P による局所化は 1 次元正規局所環なので離散附値環になる．R は極大イデアル以外に 0 しか素イデアルを持たないので，$X=\mathrm{Spec}(R)$ は局所分解的であることがわかった．従ってこの場合 $\mathrm{Pic}(X)=\mathrm{Cl}(X)$ になる．この $\mathrm{Cl}(X)$ のことを R の因子類群と言うのであった．

命題 2.7. R を Noether 正規環とする．この時，$\mathrm{Cl}(R)=0$ であることと，R が UFD であることが同値である．

証明. R が UFD なら任意の高さ 1 の素イデアルは単項イデアルなので，$\mathrm{Cl}(R)=0$ となることがわかる．逆に，$\mathrm{Cl}(R)=0$ としよう．この時，$\mathfrak{p}$ を R の高さ 1 の素イデアルとすると，ある $f\in Q(R)$ が存在して，$\mathfrak{p}=(f)$ となる．ここで，$f\in R$ であることを示そう．$\mathfrak{q}$ も高さ 1 の R の素イデアルとする．$\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}$ ならば $\nu_{\mathfrak{q}}(f)=0$ となるので，$f\in R_{\mathfrak{q}}^*\subset R_{\mathfrak{q}}$ となる．また $\nu_{\mathfrak{p}}(f)=1$ より $f\in\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\subset R_{\mathfrak{p}}$ なので，R が正規環であることから，

$$f\in\bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{q})=1} R_{\mathfrak{q}}=R$$

がわかった．ここから，さらに $f\in\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\cap R=\mathfrak{p}$ がわかった．$a\in\mathfrak{p}$ について，$a\in fR$ となることを示す．$\mathfrak{q}$ を任意の高さ 1 の素イデアルとする．この時，$\nu_{\mathfrak{q}}(a)\geq\nu_q(f)$ となるので，$a/f\in R_{\mathfrak{q}}$ となる．

よって,

$$\frac{a}{f} \in \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{q})=1} R_{\mathfrak{q}} = R$$

がわかった. つまり $a \in fR$ となる. 以上より $\mathfrak{p} = fR$ が示され, 任意の高さ 1 の素イデアルが単項であることがわかった. つまり R は UFD である. □

このようにして, 因子類群は代数的整数論に現れるものの一般化と見ることができる. ◇

例. scheme の因子類群を求めるのに有用な命題として以下の命題がある:

命題 2.8. X を余次元 1 で正規で既約かつ被約な分離的 scheme として, $Y \subset X$ を既約因子 (つまり既約かつ被約な余次元 1 の部分 scheme) とする. この時, 以下の完全列がある:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(X \setminus Y) & \longrightarrow & 0 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\ 1 & \longmapsto & Y & & & & \end{array}$$

証明. X の Weil 因子 D について, $D|_{X\setminus Y}$ を当てる写像は, $D = (f)$ が主因子ならば, $D|_{X\setminus Y} = (f|_{X\setminus Y})$ となるので, 全射 $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(X \setminus Y)$ を定める. その核は Y が生成する $\mathrm{Cl}(X)$ の部分群である. □

例として k を体として, $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n_k) = \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k)$ を求めてみよう. $H \subset \mathbb{P}^n_k$ を超平面とする. $\mathbb{P}^n_k \setminus H \cong \mathbb{A}^n_k = k[x_1, \dots, x_n]$ なので, $k[x_1, \dots, x_n]$ が UFD であることから, $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n_k) = 0$. よって, 全射

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n_k) = \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k); 1 \mapsto [H] = [\mathcal{O}(1)]$$

を得るが, 大域切断を見ることで任意の $n \in \mathbb{Z}$ について, $[\mathcal{O}(n)] \neq [\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}]$ がわかるので, $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n_k) = \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_k) \cong \mathbb{Z}$ で, $[H] = [\mathcal{O}(1)]$ が生成することがわかった. ◇

例. 因子類群を求めることである環が UFD かどうかを判定することができる場合がある. 例えば $R := \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ が UFD かどうかを判定してみよう.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1) &\cong \mathbb{R}[s, t]/((2s - 1)^2 + (2t)^2 - 1) \\ &\cong \mathbb{R}[s, t]/(s^2 + t^2 - s) \\ &\cong \mathbb{R}[s, t, u]/(t^2 - su, s + u - 1) \\ &\cong \mathbb{R}[x, y]^{(2)}/(x^2 + y^2 - 1) \\ &\cong \left(\mathbb{R}[x, y][(x^2 + y^2)^{-1}]\right)_0 \end{aligned}$$

となるので, 以下の完全列を得る:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(R)) \longrightarrow 0$$

よって, $\mathrm{Cl}(\mathrm{Spec}(R)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. つまりこれは UFD でないことがわかった. ◇

以下, k を体, X を k 上固有な既約かつ被約な代数的 scheme で, 余次元 1 で正規なものとする. X 上の Cartier 因子 D について, $|D|$ の部分線型系 L と, L に付随した k-加群 $M = M(L)$ をとる. M の基底 $\{\sigma_0, \dots, \sigma_l\}$ を用意すると, 各 $i \in \{0, 1, \dots, l\}$ について, $h_i \in k(X)^*$ を, $D(\sigma_i) - D = (h_i)$ となるようにとれる. $\Phi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^l_k$ を定めることを考える. 任意の i について, $h_i \in O_X(V)^*$ となる affine 開集合 $V = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ を定める. この V について, $f : V \to \mathbb{P}^l_k$ を,

$$k[x_{0/i}, \dots, \check{x_{i/i}}, \dots, x_{l/i}] \to A; x_{j/i} \to \frac{h_j}{h_i}$$

によって定める. 実際これらは張り合うことは容易に確かめることができる. この f の定める有理写像を $\Phi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^l_k$ と書き, L の定める $\mathbb{P}^l_k$ への有理写像という. k が代数閉体で X が k 上完備な代数多様体の時は, 上の有理写像 φ_L の閉点 x の行き先が $[h_0(x) : \cdots : h_l(x)]$ となることに注意せよ.

M の異なる基底 $\{\tau_0,\dots,\tau_l\}$ をとる．この時，

$$(\tau_0,\dots,\tau_l)=(\sigma_0,\dots,\sigma_l)\cdot g$$

となる $g\in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ が存在する．$\{\tau_0,\dots,\tau_l\}$ について定まる有理写像は元の有理写像に g による $\mathbb{P}^l_k$ への自然な作用 (線型変換) を合成したものになっていることがわかる．つまり，線型系の引き起こす射影空間への有理写像は線型群の作用を法として一意である．

例. k を体，n,m を正整数とする．$\mathbb{P}^n_k$ の上の可逆層 $\mathcal{O}(m)$ について，$\Gamma(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}(m))$ の基底は

$$\left\{x_0^{a_0}\dots x_n^{a_n};\, {\scriptstyle a_0,\dots,a_n\geq 0,\atop a_0+\dots+a_n=m}\right\}$$

で与えられる．この $\Gamma(\mathbb{P}^n_k,\mathcal{O}(m))$ は，$N=\binom{n+m}{n}-1$ として，閉埋め込み $\mathbb{P}^n_k\to\mathbb{P}^N_k$ を与える．実際，これは次数付き環 $k[X_0,\dots,X_n]$ を $\deg(X_i)=m$ と定めた時の次数付き環の射

$$\varphi : k[X_0,\dots,X_N]\to k[x_0,\dots,x_n];$$
$$X_i\mapsto x_0^{a_0(i)}\dots x_n^{a_n(i)}$$

の Proj によって誘導される $\mathbb{P}^n_k$ から $\mathbb{P}^N_k$ への射であり，局所化 $(k[X_0,\dots,X_N]_{X_i})_0\to(k[x_0,\dots,x_n]_{x_0^{a_0(i)}\dots x_n^{a_n(i)}})_0$ は全射であることがわかる．ここで，$\{(a_0(0),\dots,a_n(0)),\dots,(a_0(N),\dots,a_n(N))\}$ は適切な順序 (例えば辞書式順序) で $\{(a_0,\dots,a_n);a_0+\dots,a_n=m,a_i\geq 0\}$ を並べたものを指している．この埋め込みを **Veronese 埋め込み**という． $\diamond$

X 上の因子 D について，線型系 $L\subset|D|$ を取ってくる．既約因子 A が任意の $D'\in L$ について，$A\leq D'$ を満たすとき，A は L の**固定成分**であるという．$L\neq\emptyset$ ならば，有効因子 F で，任意の $D'\in L$ について，$F\leq D'$ となり，これを満たす有効因子の中で最大のものが取れる．この F のことを L の**固定部分**という．この時 $L-F=\{D'-F;D'\in L\}$ は $|D-F|$ の部分線型系で，$M(L-F)=M(L)$ も容易にわかる．この $L-F$ を L の**変化部分**という．

因子 D および $P\in X$ について，$P\in D$ とは，$D=\sum_{i=1}^N a_iZ_i$, $a_i\neq 0$ とした時に，$P\in\bigcup_{i=1}^n Z_i=:\mathrm{Supp}(D)$ となることと約束する．線型系 $L\subset|D|$ が固定成分を持たなくてもある $P\in X$ が存在して，任意の $D'\in L$ について，$P\in D'$ となることがある．このような P を L の**基点** (Base point) といい，L の基点全体を $\mathrm{Bs}(L)$ と書く．$\mathrm{Bs}(L)=\bigcap_{D\in L}\mathrm{Supp}(D)$ なので，これは閉集合である．

命題 2.9. X を閉体 k 上固有な既約かつ被約な正規代数的 scheme とする．

(1) D を X 上の Cartier 因子，$L\subset|D|$ を $\dim L>0$ なる線型系として，F を L の固定部分とする．この時，L に付随する有理写像 Φ_L の定義域は $X\setminus\mathrm{Bs}(L-F)$ を含む．

(2) $\rho : X\dashrightarrow Y$ を X から k 上既約かつ被約な射影的代数的 scheme Y への支配的有理写像とすると，X 上の線型系 L が存在して，$\rho=\Phi_L$ となる．

証明.

(1) $M(L-F)=M(L)$, $\Phi_{L-F}=\Phi_L$ なので，初めから $F=0$ として Φ_L の定義域が $X\setminus\mathrm{Bs}(L)$ を含んでいることを示せば良い．$D_0\in L$ を取ると，$L\subset|D_0|$ と見ることができる．この時，$1\in M(L)$ なので，$M(L)$ の基底を $\{1,f_1,\dots,f_r\}$ と取れる．$P\in X\setminus D_0$ について，$f_i\in\mathcal{O}_{X,P}$ を示そう．もし仮に $f_i\notin\mathcal{O}_{X,P}$ となる i が存在すれば，X は正規なので，

$$\mathcal{O}_{X,P}=\bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1}(\mathcal{O}_{X,P})_{\mathfrak{p}}$$

となることから，$f_i\notin\mathcal{O}_{X,Q}$ なる X の余次元 1 の点 Q で，$Z:=\overline{\{Q\}}$ が P を通るものが存在する．この時 $\mathcal{O}_{X,Q}$ は離散附値環なので，$f_i^{-1}\in\mathcal{O}_{X,Q}$ となる．つまり Z は f_i の極になるので，$D_0+(f_i)\geq 0$ と合わせると，$Z\subset\mathrm{Supp}(D_0)$ を得る．しかし Z は P を通るので，これは $P\in D_0$ を導き，P の仮定に反する．すなわち $P\notin\mathrm{Bs}(L)$ について，任意の i で $f_i\in\mathcal{O}_{X,P}$ となること

がわかった. 次に, $D_i = D_0 + (f_i) \in L$ とおく ($f_0 = 1$ とおいている). $P \notin \mathrm{Bs}(L)$ について, ある i が存在して, $P \notin D_i$ となることを示す. もし任意の i で $P \in D_i$ となるなら, $f \in M(L)$ を $f = a_0 + a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ とおいて, D_0 の P の周りでの定義式を $g = 0$ とおくと, $gf(P) = 0$ となる. すなわち $P \in \mathrm{Bs}(L)$ となり, 再び P についての仮定に反する. $P \notin D_i$ としよう. この時, $gf_i \in \mathcal{O}_{X,P}^*$ となる. $\{1/f_i, f_1/f_i, \ldots, f_r/f_i\}$ は k 加群 $\{h \in k(X); (h) = D - D_i \ \exists D \in L\}$ の基底をなし, $1/f_i = g/gf_i$, $f_1/f_i = gf_1/gf_i, \ldots, f_r/f_i = gf_r/gf_i$ は全て P で定義されている. 従って, Φ_L は P で定義されていることがわかった.

(2) 必要なら Y の埋め込まれている射影空間の線形部分空間をとることで, $Y \subset \mathbb{P}_k^n$ は如何なる超平面にも含まれないものとして良い. この時, Y を定義する $\mathbb{P}_k^n$ 上のイデアル層 $\mathcal{I}_Y$ について, 以下の完全列が得られる:

$$0 \to \mathcal{I}_Y(1) \to \mathcal{O}(1) \to \mathcal{O}_Y(1) \to 0$$

従って, 大域切断をとることで, 単射 $i : H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(1)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1))$ を得る. ρ の定義域を U として, $\varphi := \rho|_U : U \to Y$ と定める. $\mathcal{L} := \varphi^*\mathcal{O}_Y(1)$ とすると, $\mathcal{O}_Y(1)$ の局所自明化 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ について, $\varphi'_\lambda : \mathcal{L}|_{\varphi^{-1}(U_\lambda)} \to \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U_\lambda)}$ を, $\varphi^*(\varphi_\lambda)$ と定めると, ρ が支配的有理写像なので, 各 $x \in U$ で, $\varphi_x^\# : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{U,x}$ は単射であり, 従って自然な射 $\varphi^*\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_U$ が同型になることに注意すると, これは $\mathcal{L}$ の局所自明化を与えることがわかる. 従って $\mathcal{L}$ は X 上の可逆層である. $j : H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1)) \to H^0(U, \mathcal{L})$ を自然な射とする. $M := \mathrm{Im}(ji)$ とおく. すると, M の非零元 σ は U 上の因子 $D'(\sigma) = \sum a_\nu Z_\nu$ を定めるので, その閉包 $\sum a_\nu \overline{Z_\nu}$ を $D(\sigma)$ とおく. $L := \{D(\sigma); \sigma \in M \setminus \{0\}\}$ と定め, $\sigma_0 \in H^0(U, \mathcal{L})$ を一つとって固定して, $M(L) := \{h \in k(X)^*; \exists\sigma \in H^0(U, \mathcal{L}), D(\sigma) - D(\sigma_0) = (h)\} \cup \{0\}$ と定めると, 定理 1.6(2)[25] より, L は X 上の線形系で, $M(L) = M$ となることがわかる. $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ を, ji による斉次座標 $X_0, \ldots, X_n$ の像とする. さらに, $D(\sigma_i) = D(\sigma_0) + (f_i)$ によって $f_1, \ldots, f_n \in k(X)^*$ を定めると, ある X の affine 開集合 V について, ρ は環準同型 $k[x_{1/0}, \ldots, x_{n/0}] \to \mathcal{O}_X(V); x_{i/0} \mapsto f_i$ によって定まる有理写像である. $\{1, f_1, \ldots, f_n\}$ が線型独立であることは, Y が超平面に含まれないことから従うので, これは基底 $\{1, f_1, \ldots, f_n\}$ に関する Φ_L の構成そのものなので, $\rho = \Phi_L$ が示された. □

この (2) の証明の中で, ji によって同型 $M \cong H^0(\mathcal{P}_k^n, \mathcal{O}(1))$ がわかった. 従って, $\sigma \in M$ について, 超平面 $H(\sigma)$ が定まる. $D(\sigma)$ のことを $H(\sigma)$ の ρ による**引き戻し**といって, $D(\sigma) = X \cdot H(\sigma)$ と書く. さらに, (2) から, 以下の定理が導かれる:

定理 2.8. 上の命題の仮定のもと, Φ_L の定義域 U_0 について, $\mathrm{Bs}(L - F) = X \setminus U_0$ となる.

証明. 上の命題 (1) によって, $\mathrm{Bs}(L - F) \supset X \setminus U_0$ となることはわかっている. $\rho = \Phi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^n$ について, $Y = \overline{\rho(U_0)}$ とおけば, $\rho : X \dashrightarrow Y$ は支配的有理写像である. さらに, 上の命題 (2) によって, $L - F = \{X \cdot H(\sigma); \sigma \in M \setminus \{0\}\}$ とかける. $\{H(\sigma); \sigma \in M \setminus \{0\}\}$ は $\mathbb{P}_k^n$ の超平面全体なので, これは共有点を持たない. 従って, それを U_0 に引き戻した $\{D'(\sigma); \sigma \in M \setminus \{0\}\}$ も共有点を持たず, 従って $\{D(\sigma) = X \cdot H(\sigma); \sigma \in M \setminus \{0\}\}$ は共有点を持ったとしても U_0 上ではない. つまり $\mathrm{Bs}(L - F) \subset X \setminus U_0$ が示された. □

定義 2.14. X を体 k 上固有な既約かつ被約な代数的 scheme, $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層とする. この時, $H^0(X, \mathcal{L}) \neq 0$ の時, 完備線型系 $\Lambda := |\mathcal{L}|$ によって定まる有理写像を $\Phi_{\mathcal{L}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^n$ と書く. $\mathrm{Bs}\Lambda = \emptyset$ で, $\Phi_{\mathcal{L}}$ が閉埋入射なら, $\mathcal{L}$ は**非常に豊富** (very ample) であるという. さらにある正整数 r について, $\mathcal{L}^{\otimes r}$ が非常に豊富な時, $\mathcal{L}$ は**豊富** (ample) であるという. ⋄

代数閉体上の完備代数多様体について, その上の線型系の指定する射影空間への有理写像が閉埋入射になっている必要十分条件を与える以下の命題がある:

[25] この定理は k 上の代数多様体について証明されているが, X が k 上既約かつ被約な正規代数的 scheme, Y を k 上固有な既約かつ被約な代数的 scheme として全く同じ証明が回る.

定理 2.9. k を代数閉体, X を k 上定義された完備代数多様体, D_0 を X 上の Cartier 因子, $L \subset |D_0|$ を線型系, $\Phi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n (n = \dim L)$ を L に付随する有理写像とする．このとき, Φ_L が閉埋入射であることと, 以下の 2 つが成立することは同値である:

(1) 任意の $P, Q \in X(k)$ について, ある $D \in L$ が存在して, $P \in D$ かつ $Q \notin D$
(2) $P \in X(k)$ について, $M_P := \{\sigma \in M; \sigma(P) = 0\}$ とおくと, P の周りにおける局所自明化 $\varphi : \mathcal{O}_X(D_0)|_U \to \mathcal{O}_U$ に対して定まる射 $M_P \to \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2; \sigma \mapsto \varphi(\sigma)_P + \mathfrak{m}_P^2$ は全射になる．

証明. まず Φ_L が閉埋入射であると仮定する．この時, X は $\mathbb{P}^n$ の閉部分多様体として良い．この時, $\mathbb{P}^n$ の超平面 H に対して, $X \cdot H \in L$ を当てる写像によって, $L \cong (\mathbb{P}^n)'$ となるので, (1) は明らかである．(2) について, 適当に射影変換して $P = (1 : 0 : \cdots : 0)$ の場合に示せばよい．$\mathbb{P}^n$ の斉次座標 $T_0, \ldots, T_n$ を取って, $M_P \subset \{\sum_{i=1}^n a_i t_{i/0}\} =: M_{\mathbb{P}^n,P}$ であり, $\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^n,P}/\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^n,P}^2$ と同型で, M_P は $\mathfrak{m}_P + \mathfrak{m}_{\mathbb{P}^n,P}^2/\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^n,P}^2$ の上に写像される．さらにここから $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ への射は全射なので, (2) も示された．

逆を示そう．$\{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ を M の基底とする．この時, (1) より, 任意の $P \in X(k)$ について, $\sigma(P) \neq 0$ となる $\sigma \in M$ が存在する．つまり, 従って, Φ_L は射影変換を除いて $X(k) \to \mathbb{P}^n(k); P \mapsto (\sigma_0(P) : \sigma_1(P) : \cdots : \sigma_n(P))$ によって定まる[26]. 再び (1) より Φ_L は単射であることもわかる．あとは Φ_L が閉埋入射であることを確かめれば良いが, それは $(\Phi_L)_P^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,P} \to \mathcal{O}_{X,P}$ が任意の $P \in X(k)$ で全射であることを確かめればよい．簡単のため, $(\Phi_L)_P^\# =: \psi$, $\mathcal{O}_{X,P} =: A$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n,P} =: B$, $\mathfrak{m}_{X,P} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^n,P} = \mathfrak{n}$, とおく．まず Φ_L は固有射なので[27], $(\Phi_L)_*\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ 上連接である．よって特に A は有限生成 B 加群であることがわかった．(2) より, $\mathfrak{m} = \psi(\mathfrak{n})A + \mathfrak{m}^2$ となるので, 中山の補題より, $\mathfrak{m} = \psi(\mathfrak{n})A$ が従う．さらに, $A = \psi(B) + \mathfrak{m}$ もわかるので, $A = \psi(B) + \psi(\mathfrak{n})A$ が従い, 再び中山の補題から $A = \psi(B)$ がわかった．つまり ψ は全射である． □

次に, 豊富性のコホモロジー論的特徴づけをみよう．定理 2.5 から, 射影多様体 X の上の豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を取ると, 任意の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ について, ある $N > 0$ が存在して, $n \geq N$ ならば, $H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0, (\forall p > 0)$ となることがわかる．実際, $\mathcal{L}^m$ が非常に豊富とすると, $\mathcal{L}^m$ に付随する射影埋め込み $\Phi : X \to \mathbb{P}^h$ について, $\mathcal{L}^m = \Phi^*\mathcal{O}(1)$ なので, 定理 2.5 より, 各 $i = 0, 1, \ldots, m-1$ について, ある $N(i)$ が存在して, $n \geq N(i)$ ならば $H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^i \otimes \mathcal{L}^{mn}) = 0, (\forall p > 0)$ が成立する．従って, $N := \max\{mN(i) + i; i = 0, 1, \ldots, m-1\}$ とおくと, $n \geq N$ なら任意の $n \geq N$ で, $H^p(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0, (\forall p > 0)$ がわかる．実はこの逆も成立する．

定理 2.10. X を体 k 上の既約かつ被約な射影的代数的 scheme として, $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層とする．任意の $\mathcal{O}_X$ の準連接イデアル層 $\mathcal{I}$ について, ある $n_0 = n_0(\mathcal{I})$ が存在して, $n \geq n_0$ なら, $H^p(X, \mathcal{I} \otimes \mathcal{L}^n) = 0, (\forall p > 0)$ が成り立つと仮定する．この時, $\mathcal{L}$ は豊富である．

証明には以下の補題を用いる:

補題 2.6. X を体 k 上の代数的 scheme, $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層として, $\mathcal{F}$ を準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群とする．この時, 以下が成立する．

(1) $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ について, $\sigma|_{X_f} = 0$ ならば, ある $m > 0$ が存在して, $\sigma \otimes f^m = 0$ となる．
(2) $\tau \in \Gamma(X_f, \mathcal{F})$ について, ある $m > 0$ および $\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m)$ が存在して, $\sigma|_{X_f} = \tau \otimes f^m$ となる．

証明.

(1) $x \in X$ に対して, x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ を, $\varphi : \mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$ が存在するものをとる．U は affine なので, $M := \Gamma(U, \mathcal{F})$ とすると, $\mathcal{F}|_U = \widetilde{M}$ となる, $f|_U$ を φ の大域切断によって A の元とみたものも f と書くことにすると, $U \cap X_f = \mathrm{Spec}(A_f)$ であり, $\sigma|_{U_f} = 0$ ならばある

[26] これは局所自明化によらないことに注意
[27] X は k 上固有で, $\mathbb{P}^n$ は k 上分離的．分離的射を合成して固有ならば固有であった．

$m>0$ が存在して, $f^m\sigma|_U=0$ となる. X は k 上有限型なので, 特に準コンパクトで, X の affine 開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^N$ が存在して, ある $m>0$ が存在して, $(\sigma\otimes f^m)|_{U_i}=0$ となる. よって, $\sigma\otimes f^m=0$ である. □

(2) X の affine 開被覆 $\{U_i=\mathrm{Spec}(A_i)\}_{i=1}^N$ と同型 $\varphi_i:L|_{U_i}\cong\mathcal{O}_{U_i}$ をとっておく. $\varphi_i(f|_{U_i})=f_i$ として, $M_i=\Gamma(U_i,F)$ とおく. (1) と同様に, $\tau|_{U_i\cap X_f}\in(M_i)_{f_i}$ となるので, ある $m_i>0$ が存在して, $f_i^{m_i}\tau|_{U_i\cap X_f}$ が U_i 上の $\mathcal{F}$ の大域切断の制限になっている. $m=\max_{1\le i\le N}\{m_i\}$ と置いて, m_i を m で置き換えて良い. この時, $1\otimes\varphi_i^m:\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}|_{U_i}^m\to\mathcal{F}$ について, $f_i^m\tau|_{U_i\cap X_f}$ を引き戻したものはある $\sigma_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^m)$ の制限になっている. $\sigma_i|_{U_{ij}\cap X_f}=\sigma_j|_{U_{ij}\cap X_f}$ なので, (1) より十分大きな $m_{ij}>0$ を取れば $\sigma_i\otimes f^{m_{ij}}=\sigma_j\otimes f^{m_{ij}}$ となる. よってもう一度 m を十分大きく取り直せば, $\sigma_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^m)$ は互いに張り合って $\sigma\in\Gamma(X,\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^m)$ で, $\sigma|_{X_f}=\tau\otimes f^m$ となるものが得られる. □

定理 2.10 の証明. $x\in X$ を閉点, $U=\mathrm{Spec}(A)$ を x の affine 開近傍で, $\mathcal{L}$ を自明化するものとする. $X\setminus U$, $(X\setminus U)\cup\{x\}$ を定義する $\mathcal{O}_X$ のイデアルを $\mathcal{I},\mathcal{I}'$ とすると, $K=\mathcal{I}/\mathcal{I}'$ として, 以下の完全列を得る:

$$0\to\mathcal{I}'\to\mathcal{I}\xrightarrow{p}\mathcal{K}\to 0$$

この時, $\mathrm{Supp}\mathcal{K}=\{x\}$ である. $\mathcal{L}^n$ によるテンソル積をとり長完全列を取ると

$$H^0(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L}^n)\to H^0(\mathcal{K}\otimes\mathcal{L}^n)\to H^1(\mathcal{I}'\otimes\mathcal{L}^n)$$

を得る. n を十分大きくとると仮定より $H^1(\mathcal{I}'\otimes\mathcal{L}^n)=0$ となる. 一方で, $\mathrm{Supp}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{L}^n)=\{x\}$ なので,

$$H^0(\mathcal{K}\otimes L^n)=\mathcal{K}_x\otimes k(x)$$

となる. ここで, $k(x)=\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ は x における剰余体. $\mathcal{K}_x\neq 0$ なので, $H^0(\mathcal{K}\otimes\mathcal{L}^n)$ の非零元 g が取れる. この g に対して, ある $h\in H^0(\mathcal{I}\otimes\mathcal{L}^n)\subset H^0(\mathcal{L}^n)$ で, $p(h)=g$ となるものが存在する. これは $h(x)\neq 0$ を意味する. $X_h\subset U$ かつ $x\in X_h$ より, 自明化によって $h|_U\in A$ と見ると, $X_h=\mathrm{Spec}(A_{h|_U})$ は x の affine 開近傍である. これによって, 任意の $x\in X$ について, ある $n(x)$ と $h(x)\in H^0(\mathcal{L}^{n(x)})$ が存在して, X_h は x の affine 開近傍になる. X は準コンパクトなので, 有限個の $h(i)\in H^0(\mathcal{L}^{n(i)})$ で, $X=X_{h(1)}\cup\cdots\cup X_{h(r)}$ となる. $n(i)$ たちの最小公倍数を n として, $h(i)$ を $h(i)^{n/n(i)}$ で置き換えることで n は一定にして良い. X_h は X の affine 開集合なら, $X_h=\mathrm{Spec}(k[\psi_1,\dots,\psi_{r(h)}])$ とおける. $\psi_j\in\Gamma(X_h,\mathcal{O}_X)$ なので, ある $\widetilde{\psi}_j\in\Gamma(\mathcal{L}^{nm})$ が存在して, $\widetilde{\psi}_j|_{X_h}=\psi_j\otimes h^m$ となる. 各 $X_{h(i)}$ について同様な操作を行い, m を共通に大きくして, $h(i)$ を $h(i)^m$ と置き換えることによって, $h(1),\dots,h(r),\widetilde{\psi}_1,\dots,\widetilde{\psi}_\alpha\in\Gamma(\mathcal{L}^{nm})$ を得る. これによって

$$\Phi:X\to\mathbb{P}^{r+\alpha-1};\ p\mapsto(h(1)(p):\cdots:h(r)(p):\widetilde{\psi}_1(p):\cdots:\widetilde{\psi}_\alpha(p))$$

と定めると, $T_1,\dots,T_{r+\alpha}$ を $\mathbb{P}^{\alpha+r-1}$ の斉次座標として, $i\in\{1,\dots,r\}$ について, $\Phi^{-1}(D_+(T_i))=X_{h(i)}$ となり, 対応する射 $\Phi_i^*:k[t_{1/i},\dots,t_{r+\alpha-1/i}]\to k[\psi_1,\dots,\psi_r]$ は全射になる. よって, $\mathcal{L}^{nm}$ が非常に豊富になり, L が豊富であることが示された. □

系 2.3. X を体 k 上代数的 scheme として, $\mathcal{L}$ をその上の豊富な可逆層とする. この時, X の閉部分 scheme$Z$ について, $\mathcal{L}|_Z$ は Z 上の豊富な直線束になる.

証明. $\mathcal{I}$ を $\mathcal{O}_Z$ の連接イデアルとすると, これは Z の定義イデアルを含む $\mathcal{O}_X$ の連接イデアル $\mathcal{J}$ の Z への制限になっている. $H^q(Z,\mathcal{I}\otimes(\mathcal{L}|_Z)^n)=H^q(Z,(\mathcal{J}\otimes\mathcal{L}^n)|_Z)=H^q(X,\mathcal{J}\otimes\mathcal{L}^n)$ なので, 定理 2.10 より L は豊富であることがわかる. □

豊富性のもう一つの特徴づけも載せておく.

命題 2.10. X を体 k 上の代数的 scheme, $\mathcal{F}$ を X 上の連接層, $\mathcal{L}$ を X 上の豊富な可逆層とする. この時, ある $m(\mathcal{L},\mathcal{F})\ge 0$ が存在して, $m\ge m(\mathcal{L},\mathcal{F})$ ならば $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^m$ は大域切断で生成される.

証明. 閉点 $x \in X$ について, x の定義イデアルを $\mathcal{I}_x$ とする. この時, 以下の完全列がある:

$$0 \to \mathcal{I}_x\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{I}_x\mathcal{F} \to 0$$

また, ある $m(\mathcal{L},\mathcal{F}) \geq 0$ が存在して, $m \geq m(\mathcal{L},\mathcal{F},x)$ ならば $H^1(\mathcal{I}_x\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) = 0$ となる. つまり $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) \to \mathcal{F}_x \otimes k(x)$ が全射になる. 従って, $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) \otimes \mathcal{O}_{X,x} + \mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x$ となるので, 中山の補題より $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) \otimes \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{F}_x$ となる. x の affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A)$ をとってくると, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m|_U = (\sum_{i=1}^r A\varphi_i)^\sim$ とかける. 必要に応じて U を小さくとることで, φ_i たちが大域切断の制限になるようにできる. そうすると任意の $y \in U$ について, $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m) \otimes O_{X,y} = \mathcal{F}_y$ となる. つまり任意の $x \in X$ について, ある $m(x)$ と x の affine 開近傍 U_x が存在して, $m \geq m(x)$ なら $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m|_{U_x}$ は大域切断で生成される. このようにして, X の開被覆 $\{U_x\}_{x \in X}$ が作られるが, X は準コンパクトなので, 有限部分被覆 $\{U_{x_i}\}_{i=1}^N$ をえる. $m(\mathcal{L},\mathcal{F}) = \max\{m(x_i)\}$ とすると, $m \geq m(\mathcal{L},\mathcal{F})$ なら $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^m$ は大域切断で生成されている. □

Appendix A. Krull の標高定理と次元論

k を体, X を k-scheme とする. この時, U を X の開集合として, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ とした時, $f(x) \in \kappa(x)$ を, $f_x \pmod{\mathfrak{m}_x}$ として定める. ここで, $\mathfrak{m}_x$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアル. $y \in \overline{\{x\}}$ とすると, $f(x) = 0$ ならば, $f(y) = 0$ となる. なぜならば, y の affine 開近傍 $U_0 = \mathrm{Spec}(R)$ を取れば, $x \in U_0$ であり, x, y に対応する R の素イデアルを $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$ とすると, $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_y$ となる. $f(x) = 0$ ならば, $f|_{U_0} \in \mathfrak{p}_x$ なので, $f|_{U_0} \in \mathfrak{p}_y$. つまり, $f(y) = 0$ となる. よって, $Z(f) := \{x \in U : f(x) = 0\}$ は局所閉集合である. 特に, $Z(f)$ は部分 scheme になる.

定理 A.1 (Krull)**.** k を体, X を k 上既約かつ被約な代数的 scheme, U を X の開集合として, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $f \neq 0$ とする. Z を $\{x \in U : f(x) = 0\}$ の既約成分とすると, $\mathrm{codim}_X Z = 1$ である.

証明. $x \in Z$ として, x の X における affine 開集合 $U_0 := \mathrm{Spec}(R)$ をとる. $g := f|_{U_0} \in R$ とすると, $Z \cap U_0$ はイデアル (g) の上の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ に対応. よって, 以下の命題を証明すればよい:

補題 A.1. R を k 上有限生成多元整域とする. この時, 任意の $f \in R \setminus \{0\}$ および (f) の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ について, $\mathrm{tr.dim}_k(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{tr.dim}_k(R) - 1$ となる. ここで, $\mathrm{tr.dim}_k(R) := \mathrm{tr.deg}_k(Q(R))$ としている.

証明. $X := \mathrm{Spec}(R)$, $Z := V(f)$ と置き直す. $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ を (f) の極小素イデアルとする. 定義より, ある $g \in \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$ で, $g \notin \mathfrak{p}$ となるものが存在する. $U = D(g)$ とすると, $Z \cap D(g) = V(\mathfrak{p})$ となる. よって, 初めから $\sqrt{(f)} = \mathfrak{p}$ としてしまってよい (R は R_g で置き換える). $K := Q(R)$ とする. Noether の正規化定理より, $n := \mathrm{tr.dim}_k(K)$ としたときに, 支配的な有限射 $\pi : X \to \mathbb{A}^n$ が存在する. π の大域切断を $\varphi : S := k[x_1, \ldots, x_n] \to R$ とする. $L := Q(S)$ とすると, R は S 上整なので, K は L の有限次代数拡大体である.

$$f_0 := N_{K/L}(f)$$

とすると, $f_0 \in S \cap \mathfrak{p}$ となる. 実際, f の L 上の最小多項式を $X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m$ とすると, a_i は K の適当な正規拡大における f の L 上の共軛元に関する対称式で書けるので, a_i は S 上整であり, ゆえに $a_i \in S$ である. 特に, ある d について, $f_0 = a_m^d \in S$ なので,

$$\begin{aligned} 0 =& a_m^{d-1}(f^m + \cdots + a_m) \\ =& (a_m^{d-1} f^{m-1} + a_m^{d-1} a_1 f^{m-2} + \cdots + a_m^{d-1} a_{m-1}) f + f_0 \end{aligned}$$

となる. よって, $f_0 \in (f) \subset \mathfrak{p}$ であることがわかり, $f_0 \in \mathfrak{p} \cap S$ がわかった. 逆に, $g \in \mathfrak{p} \cap S$ とすると, $g \in \mathfrak{p} = \sqrt{(f)}$ なので, $g^r = fh$ となる $r > 0$, $h \in R$ が存在する.

$$g^{r[K:L]} = f_0 N_{K/L}(h) \in (f_0)$$

なので, $g \in \sqrt{(f_0)}$ となる. よって, $\mathfrak{p} \cap S = \sqrt{(f_0)}$ となる. ゆえに, $\sqrt{(f_0)} = (f_1)$ として[28], $S/\sqrt{(f_0)}$ は $R/\mathfrak{p}$ 上整なので,

$$\mathrm{tr.dim}_k(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{tr.dim}_k(S/(f_1)) = n - 1$$

となる. □

X を体 k 上既約かつ被約な代数的 scheme, $Z \subset X$ をその真の既約閉集合とする[29]. この時, $x \in Z$ について, x の X における affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(R)$ を取ってきて, $Z \cap U = \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$ とすると, 定義より, $k(Z) = Q(R/\mathfrak{p})$ となる. $n := \dim(X)$ とすると, R のなかに代数的に独立な $x_1, \ldots, x_n$ が取れるが, $p \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ を取ってくると, $p, x_1, \ldots, x_n$ は代数的に独立でない. よって, ある $F \in k[Y, X_1, \ldots, X_n]$ が存在して,

$$F(p, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

---

[28] $\sqrt{(f_0)}$ は素イデアル. よって, f_0 は素元の冪と単元の積で書ける.

[29] Z には, 被約な閉部分 scheme の構造が一意に入ったことに注意.

となる．R は整域で, $p \neq 0$ なので, $F \notin (Y)$ とできる．この F について, $G \in k[X_1, \dots, X_n]$ を,

$$G(X_1, \dots, X_n) = F(0, X_1, \dots, X_n)$$

と定めると，これは 0 ではなく，$\overline{x_i} := x_i \pmod{\mathfrak{p}}$ とすると，$G(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = 0$ となる．つまり $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ は代数的に独立にはなり得ない．逆に, $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ が代数的に独立ならば, $x_1, \dots, x_n$ も代数的に独立であるということは明白なので, $\mathrm{tr.dim}(R/\mathfrak{p}) < \mathrm{tr.dim}(R)$ がわかった．ゆえに, $\dim(Z) < \dim(X)$ である．

特に, Z が余次元 1 の X の既約な閉部分 scheme である場合, Z の点 x の周りの X に関する affine 開近傍 $U = \mathrm{Spec}(R)$ を取ると, $Z \cap U = \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$ なる素イデアル $0 \neq \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ が存在する．$f \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ を適当に取ってきて, $V(f)$ のある既約成分 W について, $U \supsetneq W \supset Z \cap U$ となるが,

$$\dim(X) > \dim(W) \geq \dim(Z) = \dim(X) - 1$$

となる．ゆえに, $\dim(Z) = \dim(W)$ となってしまうので, 上に見たことから $Z = W$ が従う．つまり, 以下のことが示された:

命題 A.1. X を体 k 上既約かつ被約な代数的 scheme, Z を X の余次元 1 の既約な閉部分 scheme とする．この時, 任意の $x \in Z$ について, ある x の affine 開近傍 U および $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ が存在して, $Z \cap U$ は $V(f)$ の既約成分に一致する． □

以上より, 以下の定理も示される:

定理 A.2. X を体 k 上既約かつ被約な代数的 scheme, $U \subset X$ を開集合, $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ とする．この時, $V(f_1, \dots, f_r) := \{x \in U : f_1 = \cdots = f_r = 0\}$ の既約成分 W の余次元は高々r である．

証明. r に関する帰納法で示す．$r = 1$ の時は, 上に示したことから明らかである．W は $V(f_1, \dots, f_{r-1})$ の既約な部分集合なので, $V(f_1, \dots, f_r)$ の既約成分 W' に含まれる．帰納法の仮定より, $\mathrm{codim}_X W' \leq r - 1$ である．一方, $W \subset V(f_r)$ でもあるので, $W \subset W' \cap V(f_r)$ となる．$W' \subset V(f_r)$ ならば $W = W'$ なので, $\mathrm{codim}_X W \leq r - 1$ がわかる．そうでないならば, 定理 A.1 より, $\mathrm{codim}_X W \leq r$ がわかる． □

系 A.1. X を体 k 上の既約かつ被約な代数的 scheme, Z を X の既約閉集合のうち, 極大なものとする．すると, $\dim(Z) = \dim(X) - 1$ となる． □

系 A.2. X を体 k 上の既約かつ被約な代数的 scheme とすると, X の Noether 空間としての Krull 次元と X の次元は一致する． □

命題 A.2. U を体 k 上の既約かつ被約な affine 代数的 scheme とする．この時, $Z \subset U$ を余次元 r の閉部分多様体とすると, ある $f_1, \dots, d_r \in R := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ が存在して, Z は $V(f_1, \dots, f_r)$ の既約成分になる．

証明. $Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_r = Z$ を, $\mathrm{codim}_U Z_i = i$ となるような閉埋部分多様体の鎖とする．ある $f_1, \dots, f_r \in R$ が存在して, 各 s について, Z_s が $V(f_1, \dots, f_s)$ の既約成分になるということを示す．$s = 1$ の時, Z の定義イデアル $\mathfrak{p}$ の元 $f_1 \neq 0$ を任意に取れば, 命題 A.1 によって, Z は $V(f_1)$ の既約成分である．さらに, (f_1) の極小素イデアル $\mathfrak{p}_{1,0}, \dots, \mathfrak{p}_{1,r(1)}$ は全て高さ 1 である (定理 A.2 より, 高さが 1 以下, 一方 $\mathfrak{p}_{1,i} \supset \mathfrak{p}$ なので, 高さは 1 以上)．$f_1, \dots, f_{s-1} \in R$ で, Z_{s-1} が $V(f_1, \dots, f_{s-1})$ の既約成分になり, $(f_1, \dots, f_{s-1})$ の極小素イデアル $\mathfrak{p}_{s-1,0}, \dots, \mathfrak{p}_{s-1,r(s-1)}$ が全て高さ $s - 1$ であるものが存在したとする．すると, Z_s の定義イデアル $\mathfrak{p}_s$ について, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_s) = s$ となる．実際, ある i について, $\mathfrak{p}_s \supset \mathfrak{p}_{s-1,i}$ となり, Z_s の余次元が s なので, これは真の包含である．ゆえに, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_s) \geq s$ がわかり, 定理 A.2 によって, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_s) \leq s$ となる．よって, 特に $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{p}_{s-1,i}$ が任意の i で成立するので, prime avoidance によって, $\mathfrak{p} \setminus \bigcup_{i=1}^{r(s-1)} \mathfrak{p}_{s-1,i} \neq \emptyset$ となる．$f_s \in \mathfrak{p} \setminus \bigcup_{i=1}^{r(s-1)} \mathfrak{p}_{s-1,i}$ とすると, $(f_1, \dots, f_s) \subset \mathfrak{p}_s$ であり, $V(f_1, \dots, f_s) \subset V(f_1, \dots, f_{s-1})$ は真の閉集合なので, $\dim(U) - s = \dim Z_s \leq \dim V(f_1, \dots, f_{s-1}, f_s) \leq \dim V(f_1, \dots, f_{s-1}) - 1 = \dim(U) - s$ となる．よって, Z_s は $V(f_1, \dots, f_s)$ の既約成分に一致する． □

一般に, 位相空間 X, Y の間の射 $f : X \to Y$ について, X の既約閉集合 Z は Y の既約閉集合の中に写像される. 実際, Y の閉集合 W_1, W_2 について, $\overline{f(Z)} = W_1 \cup W_2$ となったとすると, $Z \subset f^{-1}(W_1) \cup f^{-1}(W_2)$ となるので, $Z \subset f^{-1}(W_1)$ または $Z \subset f^{-1}(W_2)$ となる. ゆえに, $\overline{f(Z)} \subset W_1$ あるいは $\overline{f(Z)} \subset W_2$ がわかる. 特に, X, Y が k 上の既約かつ被約な代数的 scheme となる場合, $\overline{f(X)}$ は Y の既約な閉部分 scheme になるので, f の像と X の関係を調べたい時は, f は支配的としても構わない.

命題 A.3. k を体, X, Y を k 上の既約かつ被約な代数的 scheme とする. また, $f : X \to Y$ を支配的な射とする. この時, Y の既約閉集合 W と, $f^{-1}(W)$ の既約成分 Z で, $\overline{f(Z)} = W$ となるものの組 (Z, W) について, $r := \dim X - \dim Y$ とすると, 以下の不等式が成立する:

$$\dim Z \geq \dim W + r$$

証明. U を $W \cap U \neq \emptyset$ となる affine 開集合として, $Z' := Z \cap f^{-1}(U)$ とする. X の閉集合 Z_1, Z_2 について, $Z' = (Z_1 \cup Z_2) \cap f^{-1}(U)$ となったとすると, $f^{-1}(U)$ は X で稠密なので, $Z = Z_1 \cup Z_2$ となり, $Z \subset Z_1$ あるいは $Z \subset Z_2$ となる. よって, Z' は $f^{-1}(U)$ の既約閉集合である. また, $f(Z') \cap V = \emptyset$, $V \cap W \neq \emptyset$ なる Y の開集合 V が存在したとすると, $U \cap V \neq \emptyset$ かつ $Z \cap f^{-1}(V \cap U) = \emptyset$ となる. しかし, $\overline{f(Z)} = W$ なので, $\overline{f(Z)} \cap V \cap U \neq \emptyset$ である. 特に, $f(Z) \cap U \cap V \neq \emptyset$ なので, ある $z \in Z$ が存在して, $f(z) \in U \cap V$. これは先ほどの式に矛盾する. ゆえに, $\overline{f(Z')} \cap W = f^{-1}(U) \cap W$ となることがわかった. つまり, Y を U に, X を $f^{-1}(U)$ に, W を $W \cap U$ に, Z を Z' に置き換えることで, 初めから Y は affine scheme としてしまっても構わないことがわかる. $s := \mathrm{codim}_Y W$ とおくと, 命題 A.2 より, ある $f_1, \ldots, f_s \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ が存在して, W は $V(f_1, \ldots, f_s)$ の既約成分になる. $g_i := f^\flat(Y)(f_i)$ とすると, Z は $V(g_1, \ldots, g_s)$ の既約部分集合である. Z' を Z を含む $V(g_1, \ldots, g_s)$ の既約成分とすると,

$$W = \overline{f(Z)} \subset \overline{f(Z')} \subset V(f_1, \ldots, f_s)$$

となるので, $\overline{f(Z')}$ が既約であることから, $W = \overline{f(Z')}$ が従う. つまり $Z \subset Z' \subset f^{-1}(W)$ が従うが, Z は $f^{-1}(W)$ の既約成分だったので, $Z = Z'$ が従う. よって, 定理 A.2 より, $\dim(Z) \geq \dim X - s = r + \dim W$ がわかった. □

実は, 上の不等式はほとんど至る所で等式になる.

命題 A.4. k を体, X, Y を k 上既約かつ被約な代数的 scheme とする. $f : X \to Y$ を支配的射とすると, ある開集合 $U \subset Y$ が存在して, 以下の 2 条件を満たす:

(1) $f(X) \subset U$
(2) U と交わる任意の既約閉集合 $W \subset Y$ と, $f^{-1}(W)$ の既約成分 Z で, $\overline{f(Z)} = W$ となるものについて, $r := \dim X - \dim Y$ とすると,

$$\dim Z = \dim W + r$$

が成立する.

証明. 上の命題の証明と同様にして, Y は affine scheme として良い. X の affine 開被覆 $\{X_i\}_{i=1}^n$ を取ってきて, f の各 X_i への制限に関して命題を示せば良いので, 初めから X は affine scheme として良い. $X = \mathrm{Spec}(R)$, $Y = \mathrm{Spec}(S)$ として, $K := k(Y)$ とする. f は支配的なので, f を誘導する $\varphi : S \to R$ を単射になる. よって, $S \subset R$ として良い. この時,

$$\mathrm{tr.dim}_K(K \otimes_S R) = \mathrm{tr.deg}_{k(Y)}(k(X)) = r$$

となるので, ある $X_1, \ldots, X_r \in K \otimes_S R$ が存在して, $K \otimes_S R$ は $K[X_1, \ldots, X_r]$ の整拡大になっている. ここで, $X_1, \ldots, X_n$ は R の元としても構わない. すると, $S[X_1, \ldots, X_r] \subset R$ となる. R の各生成元は $K[X_1, \ldots, X_r]$ 上整なので, R は k 上有限生成で, $K = Q(S)$ あることから, ある $g \in S \subset R$ が存在して, R_g は $S_g[X_1, \ldots, X_r]$ 上整である. $U := D_S(g)$ とする. $f^{-1}(U) = \mathrm{Spec}(R_g) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(S_g \otimes_k$

$k[X_1,\dots,X_r]) = U\times_k\mathbb{A}^r \xrightarrow{p_1} U$ は 2 つの全射の合成なので全射になる．よって, $U\subset f(X)$ となる．W を Y の既約な閉部分集合で, $W_0 := W\cap U\neq\emptyset$ となったとする．さらに, $\overline{f^{-1}(W)}$ の既約成分 Z で, $\overline{f(Z)} = W$ となるものが存在したとすると, $Z_0 := Z\cap f^{-1}(U)$ について, $\overline{\pi(Z_0)}\subset W_0\times_k\mathbb{A}^r$ となる．よって,

$$\dim\overline{\pi(Z_0)}\le\dim(W_0\times\mathbb{A}^r) = \dim W + r$$

となる．一方で, π は有限射だったので, $\dim\overline{\pi(Z_0)} = \dim Z_0 = \dim Z$ となるので,

$$\dim Z\le\dim W + r$$

となる．よって, 命題 A.3 と合わせて, 主張が示された． □

X を位相空間とすると, $Z\subset X$ が構成可能集合であるとは, Z が局所閉集合の有限個の和集合になっていることを指したのであった．

命題 A.5. k を体, $f: X\to Y$ を, k 上既約かつ被約な代数的 scheme の間の射とする．この時, $f(X)$ は構成可能集合である．

証明. $\dim Y$ に関する帰納法を用いる．$\dim Y = 0$ のとき, Y は一点集合なので, 明らかに命題が成立する．f が支配的でない時は, f は $Z := \overline{f(X)}$ を経由し, Z は Y の閉部分多様体となるので, 帰納法の仮定によって, $f(X)$ は構成可能集合であることが従う．f が支配的である場合, 命題 A.4 より, 空でない開集合 $U\subset f(X)$ が存在する．$Y\setminus U$ の既約成分を $Z_1,\dots,Z_s$ として, $f^{-1}(Z_i)$ の既約成分を $W_{i1},\dots,W_{ij(i)}$ として, $g_{ij}: W_{ij}\to Z_i$ を f から誘導される射とすると, $\dim Z_i<\dim Y$ なので, 帰納法の仮定より, $g_{ij}(W_{ij})$ たちは構成可能集合である．

$$f(X) = U\cup\bigcup_{i,j} g_{ij}(W_{ij})$$

となるので, $f(X)$ は構成可能集合であることがわかる． □

系 A.3. k を体, X, Y を k 上既約かつ被約な代数的 scheme, $f: X\to Y$ を k-scheme の射とする．この時, X の構成可能集合 Z について, $f(Z)$ は Y の構成可能集合である． □

$f: X\to Y$ を k 上代数的 scheme の射とする．この時, 函数 $n_{Y/X}: Y\to\{0,1,2,\dots,\infty\}$ を,

$$n_{Y/X}(y) = \dim X_y$$

と定める．この時, 以下の定理が成立する (証明は省略する):

定理 A.3. $f: X\to Y$ を体 k 上の既約な代数的 scheme の間の k-scheme の射とする．このとき, 任意の非負整数 n について, $Z := \{y\in Y: n_{Y/X}(y)\ge n\}$ は Y の閉集合である．

Appendix B. 演習問題

問題 B.1. 被約だが幾何学的に被約でない体 k 上の代数的 scheme の例を挙げよ．

解答. $k = \mathbb{F}_p(T)$ として, $X := \mathrm{Spec}(k[x]/(x^p - T))$ とする．この時, X は k 上代数的 scheme で, $\mathbb{F}_p[T]$ における T-Eisenstein および Gauss の補題によって, $x^p - T\in k[x]$ は既約多項式であることがわかり, 従って X は既約かつ被約である．しかし, $x^p - T = (x - T^{1/p})^p\in\overline{k}[x]$ なので, X は幾何学的に被約ではない． □

References

[1] 宮西正宜：代数幾何学, 裳華房, 数学選書 10
[2] Goldi, A. (1958). *Commutative Algebra, Vol. I.* By O. Zariski and P. Samuel. Pp. xi 329. 52s. 6d. 1958. (D. van Nostrand, Princeton). The Mathematical Gazette, 43(345), 238-238. doi:10.2307/3611016
[3] Muhly, H. T., and Zariski, O. (1939). The Resolution of Singularities of an Algebraic Curve. American Journal of Mathematics, 61(1), 107-114. `https://doi.org/10.2307/2371389`
[4] Mumford, D. B.: 代数幾何学講義 (The Red Book of Varieties and Schemes), シュプリンガー・ジャパン株式会社, 数学クラシックス 19.
[5] The Stacks Project Authors. (2018). *Stacks Project*, `https://stacks.math.columbia.edu`