S2S 新歓 加群の拡大について

Hans

目 次

概 要

本資料は, S2S 新歓講義において, 加群の拡大の理論について, 加群の拡大の同型類と因子団の同値類の 1 対 1 対応を中心的な目標にして解説したものです. 1 章, 2 章に関しては, 大学数学の予備知識を一切仮定せずに, 因子団の同値類との 1 対 1 対応までを解説し, 3 章では, (co)homology の理論を用いて, 加群 N の加群 M に関する因子団の同値類のなす加群は, $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ と同型であることを見ていきます. この章に関しては, 入学次に全てを理解する必要はなく, homology という専門的な理論を用いて, 加群の拡大問題が, その特殊な加群についての研究に帰着する姿を肌で感じていただけたら幸いです

1 群論速習

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする.

定義 1.1. 集合 X, Y について, $X \times Y$ の部分集合 F で, 以下の条件を満たすものを, **写像**という:

- 任意の $x \in X$ について, $\#(F \cap (\{x\} \times Y)) = 1$

この定義から, 第一成分を指定すると F の元が定まるので, $F = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ のように書くことができ, 写像 $F \subset X \times Y$ を, 対応づけ $x \mapsto f(x)$ と同一視できる. よって, 写像 $F \subset X \times Y$ を, $f : X \to Y$ と書くことが多い. F について, X を**始域**, Y を**終域**という. さらに, 写像 $F \subset X \times Y$ と $Z \subset X$ に対して, $F|_Z := \{(x, f(x)) : x \in Z\} \subset Z \times Y$ を F の Z への制限という. F' に対応する対応づけを, $f|_Z : Z \to Y$ と書く. 以下, 写像と対応づけを同一視して議論を進める.

例 1.1. $F = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ は, 写像であるこれは, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, $f(x) = x^2$ で定めている. 同様に, $F' = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ は, 写像である. しかし, $F'' = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2$ は写像ではない. このように, 始域と終域がそれぞれ異なれば, 与えている対応の中身は同じでも異なる写像とみなすべきである. ここは高校数学で曖昧にされていた側面である.

定義 1.2. X を集合とする. $R \subset X \times X$ が X 上の**同値関係**であるとは, 以下の条件を満たすことである:

(1) 任意の $x \in X$ について, $(x, x) \in R$

(2) 任意の $x, y \in X$ について, $(x, y) \in R$ ならば, $(y, x) \in R$.

(3) 任意の $x, y, z \in X$ について, $(x.y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば, $(x, z) \in R$.

我々はしばしば $(x, y) \in R$ のことを xRy と書く.

問題 1. 集合 X とその上の同値関係 R について, $x \in X$ について, $[x] := \{y \in X : xRy\}$ とすると, 任意の $x, y \in X$ について, $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ ならば, $[x] = [y]$ となる.

定義 1.3. 集合 X および X 上の同値関係 R について, 以下のように定めた集合 X/R を X の関係 R による**商**と呼ぶ:

$$X/R := \{[x] : x \in X\}$$

定義 1.4. $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) : x \in X\} \subset Y$ を f の**像**という.

(2) $Z \subset Y$ に対して, $f^{-1}(Z) = \{x \in X : f(x) \in Z\}$ を Z の f による**逆像**という. $Z = \{z\}$ が一元集合の時, $f^{-1}(\{z\})$ は単に $f^{-1}(z)$ と書くことがある.

(3) f が**全射**あるいは**上への写像**であるとは, 任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して, $f(x) = y$ となること, つまり, $\mathrm{Im}(f) = Y$ となる時である.

(4) f が**単射**あるいは **1 対 1** であるとは, 任意の $y \in Y$ に対して, $\#\{x \in X : f(x) = y\} \leq 1$ となることである.

(5) f が全射かつ単射の時, **全単射**あるいは**上への 1 対 1 写像**であるという.

(6) $g : Y \to Z$ を今一つの写像とする. この時, 合成 $g \circ f : X \to Z$ を, $x \mapsto g(f(x))$ で定める. 混乱がない限り, 合成 $g \circ f$ は略記して gf と書くことにする.

(7) f に対して, 随伴する全射 $f^s : X \to \mathrm{Im}(f)$ を, $f^s(x) = f(x)$ によって定める.

(8) f に随伴する X 上の同値関係 R_f を, $xR_fy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ で定める. この時, f に随伴する単射 $f^i : X/R_f \to Y$ を, $f^i([x]) = f(x)$ で定める.

(9) f に対して, 随伴する全単射 $f^b : X/R_f \to \mathrm{Im}(f)$ を, $f^{si} = f^{is}$ で定める.

問題 2. $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) f が全射であることと, ある $s : Y \to X$ が存在して, $fs = \mathrm{id}_Y$ となることは同値である.

(2) f が単射であることと, ある $t : Y \to X$ が存在して, $tf = \mathrm{id}_X$ となることは同値である.

(3) f が全単射であることと, ある $s : Y \to X$ が存在して, $fs = \mathrm{id}_Y$, $tf = \mathrm{id}_X$ となることは同値である.

定義 1.5. 集合 G と写像 $m : G \times G \to G$ の対 (G, m) が以下の条件を満たす時, (G, m) を**群**であるという:

(1) ある $e \in G$ が存在して, $m(e, -) : G \to G$ および $m(-, e) : G \to G$ は恒等写像である. つまり, 任意の $x \in G$ で, $m(x, e) = m(e, x) = x$ となる. この e を単位元という.

(2) 任意の $x, y, z \in G$ について, $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$ となる.

(3) 任意の $x \in G$ について, ある $y \in G$ が存在して, $m(x, y) = e$ となる. この y を x の逆元という. x の逆元は x^{-1} で表すことが多い.

また, これらの条件に加えて, 任意の $x, y \in G$ について, $m(x, y) = m(y, x)$ が成立するとき, (G, m) は**加群 (Abel 群)** と呼ぶ. m が明らかな時は, (G, m) を略記して G と書くことがある. m を群 G の**算法**と呼ぶ. また, $m(x, y)$ を xmy, あるいはさらに略記して xy と書くことが多い. また, 慣習的に, 加群の場合の算法は "+" で表される.

例 1.2. X を集合とする. この時, 全単射写像 $X \to X$ 全体からなる集合 $\mathfrak{S}(X)$ は, $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(X)$ について, $m(\sigma, \tau) =: \sigma\tau : X \to X$ を, 写像の合成 $w \mapsto \sigma(\tau(w))$ で定めると, 群になる. しかし, これは加群ではない.

例 1.3. 整数全体の集合に加法の演算を入れた $(\mathbb{Z}, +)$ は群であり, 加群である. しかし, 整数全体の集合に乗法の演算を入れた $(\mathbb{Z}, \times)$ は群でない.

定義 1.6. 群 G, H について, 写像 $f : G \to H$ が**準同型**であるとは, 任意の $x, y \in G$ について, $f(xy) = f(x)f(y)$ となることである. さらに, f が全単射の時, f は**同型**であるという.

注意 1.1. G の単位元を e とすると, $f(e)$ は必然的に H の単位元になる. というのも, 任意の $x \in G$ について, $f(e)f(x) = f(ex) = f(x) = f(xe) = f(x)f(e)$ となり, $f(x)^{-1}$ を左右から作用させることで, $f(e) = f(x)f(x)^{-1} = f(x)^{-1}f(x) = (H$ の単位元$)$ となるからである. 同様に, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ もわかる.

定義 1.7. 群 (G, m) および, 群 (H, m') について, H が G の部分集合であり, 任意の $x, y \in H$ について, $m'(x, y) = m(x, y)$ となるとき, (H, m') を (G, m) の**部分群**といい, $H \leq G$ と書く.

G, H を群, e, e' をそれぞれ G, H の単位元とする. 準同型 $f : G \to H$ に対して, $f^{-1}(e)$ を f の**核**といい, $\ker(f)$ で表す. $\ker(f)$ 及び $\mathrm{Im}(f)$ は G の部分群である. この時, $f(x) = f(y)$ であることと, $f(xy^{-1}) = e' = f(x^{-1}y)$ となることは同値なので, f に随伴する関係 R_f の同値類は, $[x] = \{y \in G : x^{-1}y \in \ker(f)\} = x\ker(f)$ と書ける. ここで, $G/\ker(f) := G/R_f$ とすると, $G/\ker(f)$ は G の算法と両立する. これは, 任意の $z, z' \in \ker(f)$ 及び $x, y \in G$ について,

$$f(xzyz') = f(x)f(y) = f(xy)$$

なので, $xzyz' \in xy\ker(f) = [xy]$ となることからわかる. よって, $[x][y] = [xy]$ と定めることで, $G/\ker(f)$ に G から算法が誘導される. よって, f に随伴する全単射 f^b は群の同型になっている. これは群の**準同型定理**と呼ばれるものである. 一般に, G の部分群 H について, 任意の $x \in G$ について, $x^{-1}Hx = H$ となる時, H を G の**正規部分群**といい, $H \lhd G$ と書き, $x, y \in G$ について, $xRy \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ とすると, G/R は G に付随する算法をもち, これによって群構造が入る. この群を G/H と書き, G の H による**剰余群**と呼ぶ.

定義 1.8. 群準同型の列

$$\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

が任意の i について, $\ker(f_i) \supset \mathrm{Im}(f_{i-1})$ となるならば, それを**準完全列**と呼ぶ. $\ker(f_i) = \mathrm{Im}(f_{i-1})$ が任意の i で成立する時, これを**完全列**という.

定義 1.9. G, H を群とする. この時, 群の完全列

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{i} G' \xrightarrow{j} H \longrightarrow 1$$

を G の H による**拡大**と言う. ここで, 1 は**自明群** (単位元のみからなる群) である.

拡大は一通りとは限らない. 例えば,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathfrak{S}_3 := \mathfrak{S}(\{1,2,3\}) \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は $i : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_3$ を, $0 \mapsto \mathrm{id}$, $1 \mapsto (123)$, $2 \mapsto (132)$ として, j を $(12), (13), (23) \mapsto 1$, $e, (123), (132) \mapsto 0$ とすると完全になるが, 同様に,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

も, 自然な埋め込み, 射影で完全になる. ここで, 完全列に出てくる 0 は自明群である. 完全列の前後の群が加群である時には, 自明群は 0 で表

記し, そうでない時には 1 を使うことにする. 拡大とは, 完全列の射も含めた情報であるが, しばしば略記して, N の M による拡大を E のみで表す. 加群の拡大という時には, 拡大によって得られる加群 E も加群になっているものとする.

2 加群の拡大

おそらく前節で予備知識は揃った. 以下, 話を簡単にするために, 加群の拡大問題に限って, それに関するアプローチを述べていく. 加群 N の M による拡大の取り方は一意ではない. よって, 以下の問題が生じてくる:

主題. 加群 N の M による拡大はどれだけ存在するのか？

拡大の個数をしっかりと数えるのには, 同型なものを同一視して考えた方が良い. ここで, 2 つの拡大の同型を以下のように定める:

定義 2.1. 加群 N の M による 2 つの拡大 E, E' が**同型**であるとは, 以下の図式を可換にする準同型 φ が存在することである:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "j'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

拡大 E と E' が同値であることを, $E \sim E'$ とかく.

上の定義において, φ を準同型としたが, 実は φ は同型になる.

証明. j の全射性から, 任意の $\xi' \in E'$ について, $j'(\xi') = j(\xi)$ なる $\xi \in E$ が 取れて, この ξ について, 図式の可換性から,

$$j'(\xi') = j(\xi) = j'(\varphi(\xi))$$

となる. つまり,

$$\xi' - \varphi(\xi) \in \ker(j') = \mathrm{Im}(i')$$

なので, i' の単射性から, ある $a \in N$ が一意に取れて

$$\xi' - \varphi(\xi) = i'(a) = \varphi(i(a))$$

となる. つまり,

$$\xi' = \varphi(\xi + i(a))$$

と表されるので, φ は全射である. 単射性について, $\varphi(\xi) = 0$ とすると, 図式の右側の可換性から, $0 = j'\varphi(\xi) = j(\xi)$ となるので, ある $a \in N$ が取れて, $i(a) = \xi$ となる. 今度は左側の可換性から, $i'(a) = \varphi i(a) = 0$ なので, i' の単射性より $a = 0$ がわかる. よって, $\xi = i(a) = 0$. □

上の結果から, 拡大の同型は同値律を満たすことが示される.

N の M による拡大

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} M \longrightarrow 0$$

について, j が全射なので, j の右逆写像 $s : M \to E$ が取れる. これは準同型とは限らないことに注意. このような s を一つ固定して考える. まず, $x, y \in M$ について,

$$j(s(x) + s(y) - s(x + y)) = 0$$

となるので, 図式の完全性および i の単射性から, ある $a \in N$ が一意に存在して,

$$i(a) = s(x) + s(y) - s(x+y)$$

となる. この a を $f(x, y)$ とおくことで, 写像 $f : M \times M \to N$ が作れる. この f は, 以下のような性質を満たす:

命題 2.1. $x, y \in M$ とする.

(1) $f(x, y) = f(y, x)$

(2) $f(x+y, z) + f(x, y) = f(x, y+z) + f(y, z)$

証明. (1) は明らか. (2) について,

$$\begin{aligned} i(f(x+y, z) + f(x, y)) =& s(x+y) + s(z) - s(x+y+z) + s(x) + s(y) - s(x+y) \\ =& s(x) + s(y) + s(z) - s(x+y+z) \\ =& s(x) + s(y+z) - s(x+y+z) + s(y) + s(z) - s(y+z) \\ =& i(f(x, y+z) + f(y, z)) \end{aligned}$$

および, i の単射性より, 示される. □

定義 2.2. 命題 2.1 の 2 条件を満たす $f : M \times M \to N$ を, M に関する N の**因子団**という. 因子団 f が拡大 $0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} M \to 0$ について, j のある右逆写像 s から上の構成で誘導されたものである時, f を E から得られる因子団と呼び, f を誘導する s を, f に対応する右逆写像という.

補題 2.1. 加群 N の M による拡大 E の元 ξ は, 上で定義した s および s に随伴する因子団 f について, $x \in M, a \in N$ を用いて,

$$\xi = s(x) + i(a)$$

と一意に表される. さらに. $\xi, \eta \in E$ が, $\xi = s(x) + i(a), \eta = s(y) + i(b)$ $(x, y \in M,\ a, b \in N)$ となる時,

$$\xi + \eta = s(x+y) + i(a + b + f(x, y))$$

となる.

証明. $j(\xi) = x$ とすると,

$$j(\xi - s(x)) = 0$$

となるので, ある $a \in N$ で,

$$\xi - s(x) = i(a)$$

となるものが x に対して一意に存在する. よって,

$$\xi = s(x) + i(a)$$

と分解できる. 一意性を示す. $\xi = s(x') + i(a')$ と分解されたとすると,

$$\xi - s(x') \in \mathrm{Im}(i) = \ker(j)$$

なので, $j(\xi - s(x')) = 0$, つまり, $j(\xi) = x = x'$ となる. よって, 一意性も示された.

$\xi = s(x) + i(a)$, $\eta = s(y) + i(b)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \xi + \eta =& s(x) + s(y) + i(a+b) \\ =& s(x+y) + i(a+b) + s(x) + s(y) - s(x+y) \\ =& s(x+y) + i(a + b + f(x, y)) \end{aligned}$$

より, 主張の後半も示された. □

命題 2.2. 加群 N, M の 2 つの拡大

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} M \longrightarrow 0$$

および

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{j'} M' \longrightarrow 0$$

について, 以下の 2 条件は同値である:

(1) $E \sim E'$

(2) ある E, E' からの因子団の組み f, f' が存在して, 任意の $x, y \in M$ について,

$$f(x,y) - f'(x,y) = g(x) + g(y) - g(x+y)$$

となるような写像 $g : M \to N$ が存在する.

証明.

($\Rightarrow$) j, j' の右逆写像 s, s' を任意にとってくる. さらに, s, s' に随伴する因子団を f, f' とおく. $E \sim E'$ なので, 同型 $\varphi : E \to E'$ が存在して, 以下の図式を可換にする:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "j'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで, 任意の $x \in M$ について,

$$j'\varphi s(x) = js(x) = x$$

なので, $\varphi s : M \to E'$ も, j' の右逆写像になっている. よって,

$$j'(\varphi s(x) - s'(x)) = x - x = 0$$

となるので, 図式 2 段目の完全性から, 任意の $x \in M$ について, ある $a \in N$ で,

$$i'(a) = \varphi s(x) - s'(x)$$

となるものが一意に定まる. x に対してこの $a \in N$ を対応させる写像を $g : M \to N$ と置くと,

$$\begin{aligned}
i'(g(x) + g(y) - g(x+y)) =& \varphi s(x) + \varphi s(y) - \varphi s(x+y) - s'(x) - s'(y) + s'(x+y) \\
=& \varphi i f(x,y) - i' f'(x,y) \\
=& i'(f(x,y) - f'(x,y))
\end{aligned}$$

となる. i' の単射性から,

$$f(x,y) - f'(x,y) = g(x) + g(y) - g(x+y)$$

が従う.

($\Leftarrow$) $\varphi : E \to E'$ をうまく構成すれば良い. s, s' を, それぞれ f, f' に対応する右逆写像とすると, 補題 2.1 から, 任意の $\xi \in E,\ \xi' \in E'$ は, それぞれ

$$\begin{aligned}
\xi =& s(x) + i(a)\ (x \in M,\ a \in N) \\
\xi' =& s'(x') + i'(a')\ (x' \in M.\ a' \in N)
\end{aligned}$$

と, 一意的に書ける. よって, $\varphi : E \to E'$ を,

$$\varphi(s(x)+i(a)) = s'(x)+i'(a+g(x))$$

とすると, これは well-defined に定まる.
任意の $x, y \in M,\ a, b \in N$ について,

$$\begin{aligned}
&\varphi(s(x)+i(a)+s(y)+i(b))\\
=&\varphi(s(x+y)+i(a+b+f(x,y)))\\
=&s'(x+y)+i'(a+b+f(x,y)+g(x+y))\\
=&s'(x+y)+i'(a+b+f'(x,y)+g(x)+g(y))\\
=&s'(x+y)+i'(a)+i'(b)+s'(x)+s'(y)-s'(x+y)+i'g(x)+i'g(y)\\
=&s'(x)+i'(a+g(x))+s'(y)+i'(b+g(y))\\
=&\varphi(s(x)+g(a))+\varphi(s(y)+g(b))
\end{aligned}$$

となるので, $\varphi : E \to E'$ は準同型である.
$i(a) = s(0)+i(a-f(0,0))$ なので,

$$\begin{aligned}
\varphi i(a) =&\varphi(s(0)+i(a-f(0,0)))\\
=&s'(0)+i'(a-f(0,0)+g(0))\\
=&s'(0)+i'(a-f'(0,0))\\
=&i'(a)
\end{aligned}$$

となる. さらに,

$$\begin{aligned}
j'\varphi(s(x)+i(a)) =&j'(s'(x)+i'(a+g(x)))\\
=&x = j(s(x)+i(a))
\end{aligned}$$

も成立するので, φ によって $E \sim E'$ がわかる. □

定義 2.3. 因子団 $f, f' : M \times M \to N$ が**同値**であるとは, ある写像 $g : M \to N$ が存在して,

$$f(x,y) - f'(x,y) = g(x)+g(y)-g(x+y)$$

が成立することとする. f と f' が同値であることを $f \sim f'$ と書く.
因子団の同値は同値律を満たす.

証明. 反射率に関しては, g を 0-射とすれば良い. 対称律については,

$$f(x,y) - f'(x,y) = g(x)+g(y)-g(x+y)$$

とすると, $g'(x) := -g(x)$ と置くことで,

$$f'(x,y) - f(x,y) = g'(x)+g'(y)-g'(x+y)$$

となるので, 確かに満たしている. 推移律については,

$$f_1(x,y) - f_2(x,y) = g_1(x)+g_1(y)-g_1(x+y)$$

および

$$f_2(x,y) - f_3(x,y) = g_2(x)+g_2(y)-g_2(x+y)$$

について,

$$f_1(x,y) - f_3(x,y) = (g_1+g_2)(x)+(g_1+g_2)(y)-(g_1+g_2)(x+y)$$

と書けることから, 明らかである. □

命題 2.3. 任意の M に関する N の因子団 f について, N の M に関するある拡大 E が存在して, E から得られる一つの因子団が f と一致するように取ることができる.

証明. $E := \{(x,a) : x \in M.\ a \in N\}$ として, E の二元 $(x,a),(y,b)$ に対して算法 $(x,a)+(y,b)$ を,

$$(x,a)+(y,b) = (x+y, a+b+f(x,y))$$

と定める. 定義より, この算法は可換である. $(x,a),(y,b),(z,c) \in E$ について,

$$\begin{aligned}\{(x,a)+(y,b)\}+(z,c) =&(x+y,a+b+f(x,y))+(z,c)\\ =&(x+y+z,a+b+c+f(x,y)+f(x+y,z))\\ =&(x+y+z,a+b+c+f(x,y+z)+f(y,z))\\ =&(x,a)+\{(y,b)+(z,c)\}\end{aligned}$$

となるので, E の算法 $+$ は結合的である. また,

$$f(x+y,z)+f(x,y) = f(x,y+z)+f(y,z)$$

に $y=z=0$ を代入することで,

$$f(x,0) = f(0,0)$$

が得られるので, 任意の $(x,a) \in E$ について,

$$(x,a)+(0,-f(0,0)) = (x, a-f(0,0)+f(x,0)) = (x,a)$$

となる. よって, $(0,-f(0,0))$ は E の算法 $+$ に関する単位元である.

$$(x,a)+(-x,-a-f(x,-x)-f(0,0)) = (0,-f(0,0))$$

より, 任意の $(x,a) \in E$ について, 算法 $+$ に関する逆元 $(-x,-a-f(x,-x)-f(0,0)) \in E$ が存在する. よって, $(E,+)$ は加群になる. 写像 $i : N \to E$ を, $i(a) = (0, a-f(0,0))$ によって定めると,

$$\begin{aligned}i(a+b) =&(0,a+b-f(0,0))\\ =&(0,a-f(0,0))+(0,b-f(0,0))\end{aligned}$$

となるので, これは準同型である. また, これは明らかに単射である. 次に, $j : E \to M$ を, $g(x,a) = x$ で定めると, これもまた準同型になり, $ji = 0$, つまり $\mathrm{Im}(i) \subset \ker(j)$ が成立する. 逆に, $(x,a) \in \ker(j)$ ならば, $x = 0$ なので, $(0,a) = i(a+f(0,0))$ に注意すれば $\mathrm{Im}(i) = \ker(j)$ となることがわかる. 故に,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} M \longrightarrow 0$$

は, 完全列である. $s : M \to E$ を, $s(x) = (x,0)$ で定めると, 明らかに s は j の右逆写像である. さらに,

$$\begin{aligned}s(x)+s(y)-s(x+y) =&(x+y,f(x,y))+(-x-y,-f(x+y,-x-y)-f(0,0))\\ =&(0,f(x,y)-f(0,0)) = if(x,y)\end{aligned}$$

となるので, s は f に対応する右逆写像になっている. よって, f は E から得られる因子団の一つになっている. □

命題 2.2 および 2.3 をまとめると, 以下の定理が導かれる

定理 2.1. 加群 N の M による拡大の同型類は, M に関する N の因子団 f の同値類と 1 対 1 に対応する.

例 2.1. 因子団 $f : M \times M \to N$ が, 0-射 (任意の $M \times M$ の元に対して, $0 \in N$ を返す射) と同値な時, つまり, ある $g : M \to N$ で,

$$f(x, y) = g(x) + g(y) - g(x + y)$$

となる時, f を分解因子団という. f に対応する加群の拡大は, 直積 $N \times M$ と同型である.

3 〆～新しい群構造～

一般に, $\overbrace{M \times M \times \cdots \times M}^{n \text{ 個}}$ から N への写像 f, f' について, その和 $f + f'$ を,

$$(f + f')(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + f'(x_1, \dots, x_n)$$

と定める.

定義 3.1. 整数 n について, $C^n(M, N)$ を, $n \leq 0$ の時, 0, $n > 0, n \neq 2$ の時, $\overbrace{M \times M \times \cdots \times M}^{n \text{ 個}}$ から N への写像全体のなす加群, $n = 2$ の時, 写像 $f : M \times M \to N$ のうち, 対称的なもの, つまり, 任意の $x, y \in M$ について, $f(x, y) = f(y, x)$ となるもののなす加群とする. この時, 加群の射 $d^n : C^n(M, N) \to C^{n+1}(M, N)$ を $n \leq 0$ の時は, 0-射, $n \geq 1$ の時,

$$\begin{aligned} d^n f(x_1, \dots, x_{n+1}) =& f(x_2, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

命題 3.1. 以下の列は準完全である

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} C^{n-1}(M, N) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(M, N) \xrightarrow{d^n} \cdots$$

証明. 計算すればわかる. □

上によって, 複体 $(C^\bullet(M, N), d^\bullet)$ が得られた.

命題 3.2. 上で定義された 2 次の輪体加群 $Z^2(M, N)$ は因子団全体のなす加群である. また, 2 次の境界加群 $B^2(M, N)$ は, 分解因子団全体のなす加群である. よって, 2 次の cohomology 群 $H^2(M, N)$ は, N の M による拡大と 1 対 1 の対応がつく. $H^2(M, N)$ を, 特別に $\mathrm{ext}(M, N)$ と書くことにする.

証明. 定義より明らかである. □

命題 3.3. $0 \to L \xrightarrow{i} P \xrightarrow{j} M \to 0$ を, 加群の完全列として, P は射影的であるとする. この時, 準同型 $i^* : \mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(L, N)$ を, $i^*(\varphi) = \varphi \circ i$ でさだめると,

$$\mathrm{Hom}(L, N)/i^*(\mathrm{Hom}(P, N)) \cong \mathrm{ext}(M, N)$$

となる.

証明. P は L を M で拡大した加群なので, j の右逆写像 s を決めれば.

$$s(x)+s(y)=s(x+y)+i(f_0(x,y))$$

なる $f_0\in Z^2(M,N)$ が存在する. 以下, 簡単のため (s の選び方は任意なので), $s(0)=0$ と定める. この時, $f_0(0,0)=s(0)=0$ となる.

$\varphi\in\mathrm{Hom}(L,N)$ について, $f_\varphi=\varphi\circ f_0$ と定めると, まず,

$$f_\varphi(x,y)=\varphi f_0(x,y)=\varphi f_0(y,x)=f_\varphi(y,x)$$

および,

$$\begin{aligned}f_\varphi(x+y,z)+f_\varphi(x,y)=&\varphi f_0(x+y,z)+\varphi f_0(x,y)\\=&\varphi(f_0(x+y,z)+f_0(x,y))\\=&\varphi(f_0(x,y+z)+f_0(y,z))\\=&\varphi f_0(x,y+z)+\varphi f_0(y,z)\\=&f_\varphi(x,y+z)+f_\varphi(y,z)\end{aligned}$$

より, $f_\varphi\in Z^2(M,N)$ である. $\sigma:\mathrm{Hom}(L,N)\ni\varphi\mapsto f_\varphi\in Z^2(M,N)$ は準同型である. なぜならば, まず, 任意の $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}(L,N)$ について,

$$\begin{aligned}f_{\varphi+\psi}=&(\varphi+\psi)\circ f_0\\=&\varphi\circ f_0+\psi\circ f_0\\=&f_\varphi+f_\psi\end{aligned}$$

となるからである.

$\varphi\in i^*(\mathrm{Hom}(P,N))$, つまり $\psi\in\mathrm{Hom}(P,N)$ が存在して, $\psi i=\varphi$ となる時, $g:=\varphi s:M\to N$ とすると,

$$\begin{aligned}f_\varphi(x,y)=&\varphi f_0(x,y)\\=&\psi i f_0(x,y)\\=&\varphi(s(x)+s(y)-s(x+y))\\=&g(x)+g(y)-g(x+y)\end{aligned}$$

となるので, $f_\varphi\in B^2(M,N)$ となる. よって, 以下の図式を可換にするような $\tau\in\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(L,N)/(i^*\mathrm{Hom}(P,N)))\to\mathrm{ext}(M,N)$ が得られる (π_1,π_2 は標準的な射影):

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Hom}(L,N) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi_1"] & Z^2(M,N) \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathrm{Hom}(L,N)/(i^*\mathrm{Hom}(P,N)) \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{ext}(M,N)\end{tikzcd}$$

ここで, $f_\varphi\in B^2(M,N)$ の時, つまり, ある $g:M\to N$ が存在して, $f_\varphi(x,y)=g(x)+g(y)-g(x+y)$ となる時, $\xi=i(a)+s(x)\in P$ について, $\psi(\xi)=\varphi(a)+g(x)\in N$ とすると,

$$\begin{aligned}&\psi(i(a)+s(x)+i(b)+s(y))\\=&\psi(i(a+b+f_0(x,y))+s(x+y))\\=&\varphi(a+b+f_0(x,y))+g(x+y)\\=&\varphi(a)+\varphi(b)+f_\varphi(x+y)+g(x)+g(y)-f_\varphi(x,y)\\=&\psi(i(a)+s(x))+\psi(i(b)+s(y))\end{aligned}$$

となるので, $\psi \in \mathrm{Hom}(P,N)$ となる. および, $\psi i(a) = \varphi(a)$ となるので (ここで, $s(0) = 0$ としていることが効いている), $\varphi = i^*\psi \in i^*\mathrm{Hom}(P,N)$ となる. よって, τ は単射である.

次に, τ の全射性を示す. これは, 任意の $f \in Z^2(M,N)$ について, ある $\varphi \in \mathrm{Hom}(L,N)$ が存在して, $f_\varphi \sim f$ となることを示せば良い. P が射影的なので, 任意の N の M に関する拡大 $0 \to N \xrightarrow{i'} E \xrightarrow{j'} M \to 0$ について, 以下の図式が可換になるような φ, ψ が存在する:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\psi"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & E \arrow[r, "j'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ψ の存在は, 射影加群の定義から, φ については, $j'\psi i = ji = 0$ なので, $a \in L$ に対して, $\psi i(a) \in \ker(j') = \mathrm{Im}(i')$ となるが, i' の単射性から, $i'(a') = \psi i(a)$ となる a' が一位に定まり, これを $\varphi(a)$ とすれば良い. E を, その因子団に f を持つようなものとして, 対応する右逆写像を s' とする. このとき, ψs も j' の右逆写像なので, 任意の $x \in M$ について, $j'(\psi s(x) - s'(x)) = 0$. i' の単射性から, $a \in N$ が一意的に取れて, $i'(a) = \varphi s(x) - s'(x)$ となる. この a を $h(x)$ とおくと, 任意の $x, y \in M$ で, $i' f_\varphi(x,y) = i'\varphi f_0(x,y) = \psi(s(x)+s(y)-s(x+y))$ および $i'f(x,y) = s'(x)+s'(y)-s'(x+y)$ となるので,

$$i'(f_\varphi(x,y) - f(x,y)) = i'(h(x) + f(y) - h(x+y))$$

となる. i' は単射なので,

$$f_\varphi \sim f$$

がわかった. よって, τ は全射である.

以上によって, 同型 $\mathrm{Hom}(L,N)/i^*\mathrm{Hom}(P,N) \cong \mathrm{ext}(M,N)$ が導かれた. □

定理 3.1. M, N を加群とする, この時, $\mathrm{ext}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1(M,N)$ となる.

証明. M の射影分解を,

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d^n} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

とする. この時, 複体

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0,N) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}(P_1,N) \xrightarrow{d_2^*} \cdots \xrightarrow{d_n^*} \mathrm{Hom}(P_n.N) \xrightarrow{d_{n+1}^*} \cdots$$

を得る. ここで, $\ker(\varepsilon) = X_0$, $\ker(d_n) = X_n$ $(n \geq 1)$ とする. この時, i_n を標準的な埋め込み, $i_0 d_1' = d_1$, $i_1 d_2' = d_2$ とすると, 以下の列は全て完全になる:

$$0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{i_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{i_1} P_1 \xrightarrow{d_1'} X_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow X_2 \xrightarrow{i_2} P_2 \xrightarrow{d_2'} X_1 \longrightarrow 0$$

よって, 以下の列も完全になる:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_1, N) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{i_0^*} \mathrm{Hom}(M, N)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_0, N) \xrightarrow{d_1'^*} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{i_1^*} \mathrm{Hom}(X_1, N)$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_1, N) \xrightarrow{d_2'^*} \mathrm{Hom}(P_2, N) \xrightarrow{i_2^*} \mathrm{Hom}(X_2, N)$$

ここから,

$$\ker(d_2^*) = \ker(d_2'^* i_1^*) = \ker(i_1^*) = \mathrm{Im}(d_1'^*) \cong \mathrm{Hom}(X_0, N)$$

及び,

$$\mathrm{Im}(d_1^*) = \mathrm{Im}(d_1'^* i_0^*) = i_0^* \mathrm{Hom}(P_0, N)$$

となるので, 命題 3.1 より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1(M, N) &= \ker(d_2^*)/\mathrm{Im}(d_1^*) \\ &\cong \mathrm{Hom}(X_0, N)/i_0^* \mathrm{Hom}(P_0, N) \\ &\cong \mathrm{ext}(M, N)\end{aligned}$$

となる. □

このようにして, 群の拡大の問題が, cohomology の理論を通して, もう一度群の問題に帰着されるのである. 本稿では, 加群に絞って理論を紹介したが, 加群でない一般の群の拡大問題を扱うような理論はまだ存在していない[1]. 本稿を通じて, 一つの問題が, より大きな枠組みを通じて, より明快なものと対応づく姿を見て, 少しでも数学に興味を持っていただけたら幸いである.

4 おまけ

本節では, Brown, Porter[3] によって示された, 一般の (可換とは限らない) 群の拡大に関する定理を (証明は述べないが) そのアプローチの概略とともに述べる. なお, 私もそんなに詳しくないので, 新歓で話すつもりはない (許して ♡).

定義 4.1. M を, P-作用を持つ群とする. この時, 群準同型 $\mu : M \to P$ が **crossed module** であるとは, P の M への作用を, $\alpha : P \times M \to M$ とした時に, 以下の図式が可換になることをさす:

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[rr, "\mu \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "Ad"'] & & P \times M \arrow[dl, "\alpha"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \times M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ P \times P \arrow[r, "Ad"] & P \end{tikzcd}$$

ここで, 一般に, 群 G に対して, $Ad : G \times G \to G$ を, $Ad(g, h) = h^g = g^{-1}hg$ で定めている.

[1] ただし, 中心拡大 (拡大した群 E に対して, $N \leq Z(E)$ となるような拡大) に関しては, 本稿に述べたものと本質的に同じ理論が存在し, さらに一般に, Schreier[2] 等による理論が存在する

定義 4.2. 2 つの crossed module($\mu : M \to P$) と ($\nu : N \to Q$) について, その間の射を, 群準同型 $f : M \to N$ と $g : P \to Q$ の対 (f, g) で, 以下の図式を可換にするものとして定める:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "\nu"] & Q \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \times M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g \times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ Q \times N \arrow[r, "\alpha'"] & N \end{tikzcd}$$

群 N の G による拡大とは, 完全列

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

のことであった. よって, $G \cong E/i(N)$ となり, $i(N)$ と N の自然な同一視で $N \lhd E$ となる. よって, N には E の元の共役による作用が自然に入り, $i : N \to E$ は crossed module になる.

定義 4.3. 群 N, G, Q および crossed module$\nu : N \to Q$ について, N の G による拡大

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

が **type** ν であるとは, 以下の図式を可換にするような射 $\omega : E \to Q$ が取れることである:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\omega"] & G \arrow[r] & 1 \\ & N \arrow[r, "\nu"] & Q & & \end{tikzcd}$$

定義 4.4. $\mu : M \to P$, $\nu : N \to Q$ を crossed module とする. この時, cross module の射 $(k^2, k^1), (l^2, l^1) : \mu \to \nu$ の間の **homotopy**$h : (k^2, k^1) \simeq (l^2, l^1)$ とは, 写像 $h : P \to N$ で, 任意の $p, p' \in P$, $m \in M$ について, 以下の条件を満たすもののことである:

(1) $h(pp') = (hp)^{l^1 p'}(hp')$

(2) $k^1 p = (h^1 p)(\nu hp)$

(3) $k^2 m = (l^2 m)(h\mu m)$

また, μ と ν の間に homotopy が存在するとき, μ と ν は **homotopy 同値**と言い, $\mu \simeq \nu$ と書く.

homotopy 同値は, crossed module の射 $\mu \to \nu$ 全体の集合 $\mathrm{Map}(\mu, \nu)$ の間の同値関係を定める. この同値関係で $\mathrm{Map}(\mu, \nu)$ を割った集合を, **homotopy 類**と言い, $[\mu \to \nu]$ と書くことにする.

定理 4.1 (Brown, Porter(1996))**.** $\mu : M \to P$, $\nu : N \to Q$ を crossed module とする. $[\mu \to \nu]^0$ で, 射 $(k^2, k^1) : \mu \to \nu$ のうち, $k^2(\ker \mu) = 1 \in N$ なるものの homotopy 類全体の集合を表すことにすると, 任意の群 G について, 自然な埋め込み

$$\mathbf{E} : [\mu \to \nu]^0 \to \mathrm{Ext}_{N \to Q}(G, N)$$

が存在する. この埋め込みは, $\mathbf{k} := (k^2, k^1)$ に対して, $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ を, Q を通じた P の N への作用での半直積 $P \ltimes N$ を, $(\mu m, (k^2 m)^{-1}), m \in M$ の型の元全体からなる部分群で割ったものを対応させて, 拡張

$$1 \to N \to \mathbf{E}(\mathbf{k}) \to G \to 1$$

を, 今の構成に付随する標準的な射で対応づけている. さらに, P が自由群の時はこの $\mathbf{E}$ は全射でもある.

参考文献

[1] 彌永昌吉, 小平邦彦 (1961), 『現代数学概説 I』, 岩波書店

[2] Schreier, O. 1926, *Über die Erweiterung von Gruppen, I. Monatschefte für Mathematik und Physik* **34** 165-180.

[3] Brown, R. & Proter, T. 1996, *On the Schreier Theory of Non-abelian Extension: Generalisations and Computations. Proceedings Royal Irish Academy* **96A** 213-227.