連接層の半安定性の降下について

HADA YOHEI

1. モチベーション

(X, H) を偏極多様体, $\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層のなす圏とする. $0 \leq d \leq \dim(X)$ について, $\mathrm{Coh}_d(X)$ を, $\dim \mathrm{Supp}(E) \leq d$ となる $E \in \mathrm{Coh}(X)$ からなる充満部分圏とする. $0 \leq d' < d \leq \dim(X)$ について, $\mathrm{Coh}_{d'-1}(X)$ は $\mathrm{Coh}_d(X)$ の Serre 部分圏であり, したがって, Serre 商 $\mathrm{Coh}_d(X)/\mathrm{Coh}_{d'-1}(X)$ が定義される. これを $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ とおく. $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ について, E の Hilbert 多項式 $P(E) = \chi(E(mH))$ の d' 次以上の部分は $\mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ の同型で不変である. したがって,

$$P_{d,d'} : \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)/\cong \to \mathbb{Q}[T]_{d,d'};\ E \to (E \text{ の Hilbert 多項式の } d' \text{ 次以上の部分}) =: \sum_{j=d'}^{d} \frac{\alpha_j(E)}{j!} T^j$$

が定まる. さらに, $0 \not\cong E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ について, $p_{d,d'}(E) := \frac{P_{d,d'}(E)}{\alpha_d(E)}$ と定める.

Definition 1. $E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ が (半) 安定であるとは, $T_{d-1}(E) = T_{d'-1}(E)$ であり, さらに任意の E の部分加群 $F \not\cong 0$ について, $p_{d,d'}(F)(\leq)p_{d,d'}(E)$ となることを指す. ここで, $T_j(E)$ とは E の j 次元以下の捩れ部分加群の中で最大のものを指す.

この定義の初めの条件は, E が純であると言われることがある.

Example 1. $d' = 0$ の時は, この安定性は Gieseker-丸山安定性, $d = \dim(X)$, $d' = d - 1$ の時は, μ-安定性である.

Theorem 1. *$E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$. この時, E の filtration $T(E) = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_N = E$ で, 以下の条件を満たすものが一意に存在する: 任意の $0 \leq n < N$ について, E_{n+1}/E_n は μ-半安定であり, さらに $p_{d,d'}(E_1) > p_{d,d'}(E_2/E_1) > \cdots > p_{d,d'}(E_N/E_{N-1})$ が成立する. この filtration を E の Harder-Narashimhan filtration (略して HNF) という.*

この一意性が非常に多くの結果を出しており, 以下のような系がある:

Corollary 1. *$E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ は純であるとする. また, K/k を体の拡大とする. この時, $\mathrm{HN}_\star(E_K) = \mathrm{HN}_\star(E)_K$ である.*

proof. [3] に倣って証明する[1]. E_K が半安定なら E も半安定になることは flat base change から明らか. よって, E のフィルトレーション E_i で, $\mathrm{HN}_i(E_K) = E_i \otimes K$ となるものが存在することさえ示せば良い. $\mathrm{HN}_i(E_K)$ は有限表示で, X_K は準コンパクトなので, ある $K/L/k$ で, L/k は有限次拡大体であり, さらに $\mathrm{HN}_i(E_K)$ は X_L 上の連接層の基底変換で得られるものになっている. よって, K/k は有限次拡大としてしまって良い. K/k をフィルタリングして. $K = k(x)$ の場合に示せば良い. 以下の 2 つの場合に場合わけして示す.

Date: March 2025.

[1] この本では Gieseker-丸山安定性に関する同じ命題の証明が載っている

- K/k が純超越拡大あるいは分離拡大の場合: E_K の部分加群が E の部分加群の基底変換になっているのは, $G = \mathrm{Aut}_k(K)$ の作用で不変なとき, そしてその時のみである. 任意の $g \in G$ について, $g(\mathrm{HN}(E_K))$ はまた E_K の HNF になっているので, HNF の一意性および Galois descent から, まず, $\mathrm{HN}_1(E_K) = E_1 \otimes K$ となる $E_1 \subset E$ が存在する. これが極大脱安定化部分層であることは $E_1 \otimes K = \mathrm{HN}_1(E_K)$ であることから明らか. E/E_1 でもう一度同じことをやって, $E_1 \subset E_2 \subset E$ で, $E_2 \otimes K = \mathrm{HN}_2(E_K)$ となる E_2 が取れる. これを繰り返して主張が示される.
- K/k が純非分離拡大で, $x^p \in k$ $(p := \mathrm{char}(k))$ の場合. Jacobson descent から, $E \otimes K$ の部分加群が E の部分加群の基底変換になっていることは, $A = \mathrm{Der}_k(K)$ の作用で不変であることと同値である. $\delta \in A$ としよう. $F = \mathrm{HN}_i(E_K)$ について,

$$\phi : F \to E_K \xrightarrow{\delta} E_K \to E_K/F$$

として ϕ を考えると, $f \in \mathcal{O}_{X_K}(U)$, $s \in F(U)$ について,

$$\delta(fs) = f\delta(s) + \delta(f)s = f\delta(s) \pmod F$$

となるので, ϕ は $\mathcal{O}_{X_K}$ 加群の準同型. $p_{d,d'}(F) > p_{d,d'}(E_K/F)$ なので, $\phi = 0$ がわかる. よって, この場合も HNF は下降する. □

Corollary 2. *$E \in \mathrm{Coh}_{d,d'}(X)$ を半安定な連接層として, K/k を体の拡大とする. この時, E_K も半安定である.* □

このように, HNF の一意性が成立するため, 群の作用によって HNF が保たれることにより, 様々な結果を生み出す. 今回示すのは以下の定理である:

Theorem 2. *k を標数 0 の体, X, Y をその上の d 次元正規射影代数多様体とする. $f : Y \to X$ を全射な有限射として, L を X 上の豊富な直線束, $E \in \mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ を $T_{d-1}(E) = T_{d-2}(E)$ を満たすものとする. この時, 任意の j について, 自然な全射 $f^*\mathrm{HN}_j(E) \to \mathrm{HN}_j(f^*E)$ があって, これは $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ の同型である. ここで, $\mathrm{HN}_\star(E)$ は E の L に関する HNF, $\mathrm{HN}_\star(f^*E)$ は f^*E の f^*L に関する HNF である. 特に, E が μ-半安定であることと, f^*E が μ-半安定であることは同値である.* □

これは正標数だと [2] に挙げられているような反例がある.

2. 降下理論からの準備

まず, 上の体の拡大から見たように標数 0 の場合は, “Galois 閉包” に引き戻して Galois 降下を使うのが真っ当な方法であろう. そこで, Galois 降下の理論の準備をする.

Definition 2. $\pi : Y \to X$ をスキームの間の有限射とする. この時, π が Galois であるとは, 自然な射 $Y \times \mathrm{Aut}_X(Y) \to Y \times_X Y; (y, \sigma) \mapsto (y, \sigma(y))$ が全射であることをいう.

これは位相空間の被覆の Galois 性 (正規性) のアナロジーであるが, 以下の命題が成立することがわかる:

Lemma 1. *k を代数閉体, X を k 上正規な代数多様体として, $K(X)$ を X の有理函数体とする. $K(X)$ の有限次拡大 $L/K(X)$ について, L における X の正規化を X^L とおく. この時, 標準的な射 $\pi : X^L \to X$ が Galois であることと, $L/K(X)$ が正規拡大であることは同値である.*

proof.

(1) まず, X を k 上の代数多様体として, L を $K(X)$ の有限次拡大体とする. $\pi : X^L \to X$ を X の L における正規閉包としたとき, $\mathrm{Aut}_X X^L = \mathrm{Aut}_{K(X)} L$ となることを示す. $\sigma \in \mathrm{Aut}_{K(X)} L$ をとる. $U = \mathrm{Spec}(A)$ を X の affine 開集合とすると, $\pi^{-1}U = \mathrm{Spec}(\tilde{A})$ は X^L の affine 開集合であり, $\tilde{A}$ は A の L での整閉包である. したがって, $a \in \tilde{A}$ について, a の A 上の最小多項式を考えると, $\sigma(a) \in \tilde{A}$ もわかる. したがって, σ は X 上の X^L の自己同型を定めることがわかる. これによって, 群準同型 $\mathrm{Aut}_{K(X)} L \to \mathrm{Aut}_X X^L$ が定まった. 逆に, $f \in \mathrm{Aut}_X X^L$ をとると, f は X^L の生成点 η を固定するが, $f_\eta : L \to L$ は $K(X)$ 上の体の同型になっている. したがって, 群準同型 $\mathrm{Aut}_X X^L \to \mathrm{Aut}_{K(X)} L$ ができる. これらは互いに逆を定めるので, $\mathrm{Aut}_X X^L = \mathrm{Aut}_{K(X)} L$ が示された.

(2) 以下, X は正規スキームとする. $L/K(X)$ が正規拡大であるとする. この時, 自然な射 $X^L \times \mathrm{Aut}_{K(X)} L \to X^L \times_X X^L$ が全射であることを示す. X を affine としてしまっても支障ない. $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X^L = \mathrm{Spec}(\tilde{A})$ とする. ここで, (1) と同様に, $\tilde{A}$ は A の L の中での整閉包. $Q, Q' \in \mathrm{Spec}(\tilde{A})$ が, $\pi(Q) = \pi(Q') = P \in \mathrm{Spec}(A)$ となったとする. Q の $\mathrm{Aut}_{K(X)} L$ の作用における軌道を $Q = Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ とおく. $Q' \neq Q_i$ が全ての i で成立したとすると, $\tilde{A}$ は A 上整なので, incomparability から $Q' \not\subset Q_i$ が全ての i で成立する. prime avoidence より, ある $a \in Q'$ で, $a \notin Q_1 \cup \cdots \cup Q_n$ となるものが存在する. $a \in Q'$ で, $L/K(X)$ は正規拡大なので, $L/K(X)$ の分離閉包を $M/K(X)$ として,

$$N_{L/K(X)}(a) = \left(\prod_{\sigma \in \mathrm{Aut}_{K(X)} L} \sigma(a) \right)^{[L:M]} \in A \cap Q' = P$$

となる (ここで A が正規であることを使っている). しかし, ある i で, $\sigma(a) \in Q_i$ となったとすると, ある j について, $a \in \sigma^{-1}(Q_i) = Q_j$ となるので, 全ての i および $\sigma \in \mathrm{Aut}_{K(X)} L$ で, $\sigma(a) \notin Q_i$. よって, Q_i たちは素イデアルなので, $N_{L/K(X)}(a) \notin Q_i \cap A = P$ が示される. これは上の結果と矛盾するので, ある $\sigma \in \mathrm{Aut}_{K(X)} L$ が存在して, $Q' = \sigma(Q)$ が成立することがわかった. つまり $\pi : X^L \to X$ は Galois である.

(3) 次に, $\pi : X^L \to X$ が Galois であるとする. $x \in X^L$ を π に関して smooth な点とすると, $\mathrm{Aut}_X X^L = \mathrm{Aut}_{K(X)} L$ の作用で移る点も smooth でなければならない. また, $x \in X$ について, Galois 性から $y \in \pi^{-1}(x)$ の分岐指数は一定であることがわかるので, これを d とすると,

$$[L : K(X)] = \sum_{y \in \pi^{-1}(x)} [\kappa(y) : \kappa(x)] \cdot d = \#\pi^{-1}(x) \cdot d$$

となる. $L/K(X)$ の非分離閉包 M を取ると, ある $e \geq 0$ について, $M = L^{p^e}$ とかけて, $d = [L : M] = p^e$ であることがわかる. 一方で, Galois 性から $\#\pi^{-1}(x) \leq \#\mathrm{Aut}_{K(X)} L = \#\mathrm{Aut}_{K(X)} M$ であるので,

$$[M : K(X)] \leq \#\mathrm{Aut}_{K(X)} M$$

がわかる. つまり $M/K(X)$ は Galois 拡大である. 特に $L/K(X)$ は正規拡大であることがわかった. □

以下, 標数 0 の場合の考察に必要な降下理論を [1] に倣って作ってみようと思う.

Lemma 2. k を標数 0 の体, A を有限生成 k-代数として, A は整閉整域とする．この時, A の商体 $K = K(A)$ の有限次 *Galois* 拡大 L/K について, L における A の整閉包を B とおく．この時, A 加群 M について, 以下の図式が完全になる:

$$M \xrightarrow{\phi} M \otimes_A B \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} M \otimes_A B \otimes_A B$$

ここで, 最初の $M \to M \otimes_A B$ は $m \mapsto m \otimes 1$ で定めており, 次の *2* つの射は, $m \otimes b \mapsto m \otimes b \otimes 1$, $m \otimes b \mapsto m \otimes 1 \otimes b$ の二つで定めている．

proof. 上の議論と同様にして, A 加群の射 $\mathrm{Tr}_{B/A} : B \to A$ が,

$$\mathrm{Tr}_{B/A}(b) = \frac{1}{[L:K]} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)} \sigma(b)$$

として定まり, これは正規化写像 $A \to B$ の右逆を与えている．$x = \sum_j m_j \otimes b_j \in M \otimes_A B$ が, $p_1^* x = p_2^+ x$ となるとすると,

$$\sum_j m_j \otimes b_j \otimes 1 = \sum_j m_j \otimes 1 \otimes b_j$$

なので, $1_M \otimes 1_B \otimes \mathrm{Tr}_{B/A}$ を作用させて,

$$\sum_j m_j \otimes b_j = \left(\sum_j \mathrm{Tr}_{B/A}(b_j) m_j \right) \otimes 1$$

となる．つまりこれは ϕ の像に入っている．逆に x が ϕ の像に入っている時 $p_1^* x = p_2^* x$ となるのは明らか． $\square$

Theorem 3 (Galois Descent for Coherent Shraves)**.** k を標数 0 体, X を k 上の d 次元正規代数多様体として, $K = K(X)$ を X の函数体とする．また, L/K を有限次 *Galois* 拡大として, L における X の正規化を $\nu : Y \to X$ とする．この時, 以下が成立する:

(1) F, G を連接 $\mathcal{O}_X$ 加群として, $p_i : Y \times_X Y \to Y$ $(i = 1, 2)$ を第 i 成分への射影, $q : Y \times_X Y \to X$ を $q = \nu \circ p_1 = \nu \circ p_2$ とする．この時, 以下の図式は完全である:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, G) \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\nu^* F, \nu^* G) \underset{p_2^*}{\overset{p_1^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y \times_X Y}}(q^* F, q^* G)$$

(2) H を連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群として, $\alpha : p_1^* H \to p_2^* H$ を $p_{13}^* \alpha = p_{23}^* \alpha \circ p_{12}^* \alpha$ を満たす同型とする．ここで, $p_{ij} : Y \times_X Y \times_X Y \to Y \times_X Y$ $(1 \le i < j \le 3)$ は第 i, j 成分への射影である．この時, $\mathcal{O}_X$ 加群 G と全射 $\phi : (\nu^* G) \to H$ が存在して, これは $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ の同型である．

proof.

Step 1 まず X が affine の場合に示す．$X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ とする．$F = \widetilde{M}$, $G = \widetilde{N}$ とする．補題 2 から, $N \to N \otimes_A B \rightrightarrows N \otimes_A B \otimes_A B$ が完全で, これに $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ を噛ませることで, テンソル-Hom 随伴から

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{B \otimes_A B}(M \otimes_A B \otimes_A B, N \otimes_A B \otimes_A B)$$

が完全になる．(2) について，$H = \widetilde{M}$ として，A 加群 N を，$M \rightrightarrows B \otimes_A M; m \mapsto 1 \otimes m, m \mapsto \alpha(m \otimes 1)$ の等化子として定める．すると，以下の可換図式が得られる:

$$\begin{tikzcd} N \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M \otimes_A B \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & B \otimes_A M \otimes_A B \arrow[d] \\ M \arrow[r] & B \otimes_A M \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \otimes_A B \otimes_A M \end{tikzcd}$$

ここで，上の系列は N を定義した系列に $\otimes_A B$ したもの，下の系列は補題 2 のもので，縦の中央の射は α，縦の右側の射は $p_{23}^*\alpha$ である．すると，等化子の普遍性および N の定義から，全射 $\phi : N \otimes_A B \to M$ で，左側の四角形を可換にするものがただ一つ存在する．$A \to B$ が平坦なら，上の系列も完全になるので，これは同型である．今，A および B は正規なので，有限射 $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ の non-flat locus は余次元 2 以上である．したがって，$\mathrm{Ker}(\phi)$ の台の余次元は 2 以上である．左の四角形の可換性がまさに $\alpha \circ p_1^*\phi = p_2^*\phi$ を示している．

Step 2 一般の場合，X の affine 開被覆をとって，局所的に Step 1 のようにして構成して貼り合わせれば良い．(2) についても，Step 1 の射 ϕ の一意性があるので，そのまま張り合って $\phi : \nu^*G \to H$ を作ることに注意．□

この定理から，以下の系が帰結される:

Corollary 3 (Galois Descent for Subsheaves)**.** *X を標数 0 の体 k 上の正規代数多様体，$K = K(X)$ を函数体として，$L/K(X)$ を Galois 拡大，$\nu : Y \to X$ を X の L における正規化とする．X 上の連接層 E について，ν^*E の部分加群層 F が $\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用で閉じているなら，ある E の部分加群層 F' が存在して，自然な射 $\nu^*F' \to F$ が $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ における同型になっている．*

proof. ν^*E には自然な α がある ($\nu \circ p_1 = \nu \circ p_2$ なので)．ν は Galois なので，α は α から誘導された $\mathrm{Gal}(L/K)$ の作用から復元される．したがって定理 3(2) から主張を得る．□

Remark 1. F' は跡写像 $\mathrm{Tr}_{Y/X} : \nu_*\nu^*E \to E$ による F の像である．

3. 定理 2 の証明

準備は整ったので，定理 2 を示す．

proof. $E \in \mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ を純であるとする．f^*E の極大脱安定化部分層 F が，E の極大脱安定化部分層 F' の引き戻しからの自然な射 $\phi : f^*F' \to f^*E$ の像になっていることを見る．まず，L を体の拡大 $K(Y)/K(X)$ の Galois 閉包として，X の $L/K(X)$ における正規化を $\nu : \widetilde{X} \to X$ とおく．正規化の普遍性から，$g : \widetilde{X} \to Y$ が存在して，$f \circ g = \nu$ となる．また，g は正規閉包であることに注意．ν^*E の極大脱安定化層 $\tilde{F}$ について，$\tilde{F}$ は ν^*E への Galois action で不変なので，系 3 から，ある $G \subset E$ が存在して，短完全列

$$0 \to K \to \nu^*G \to \tilde{F} \to 0$$

がある．ここで，$\mathrm{codim}\ \mathrm{Supp}(K) \geq 2$ である．したがって $\deg(\nu)\mu(G) = \mu(\nu^*G) = \mu(\tilde{F})$ となる．一方で，$\mu(\tilde{F}) \geq \mu(\nu^*F') = \deg(\nu)\mu(F')$ となるので，$\mu(G) = \mu(F')$．したがって，$G \subset F'$ となる．つまり，$\nu^*F' \to \nu^*E$ の像は $\tilde{F}$ を含むことになり，さらにスロープは $\mu(\tilde{F})$ と等しくなるので，これは $\tilde{F}$ に等しくなる．また，X および $\tilde{X}$ の正規性から，その核は余次元 2 以上であることもわかる．したがって，$\nu^*F' \to \tilde{F}$ は全射であり，さらに $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ の同型であることがわかった．g も正規化写像なので，

f^*E の脱安定化部分層 F についても, $g^*F \to \tilde{F}$ は全射であり, かつ $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ の同型であることがわかる.

$\mu(\nu^*F') = \mu(g^*F)$ となるので, $\deg(g)$ で割ることで, $\mu(f^*F') = \mu(F)$ がわかる. したがって, $f^*F' \to f^*E$ の像は F に含まれる, $f^*F' \to F$ を g で引き戻すと, $\nu^*F' \to g^*F$ ができるが, これに $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ での同型 $g^*F \to \tilde{F}$ を合成すると $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ での同型になるので $\nu^*F' \to g^*F$ も $\mathrm{Coh}_{d,d-1}(X)$ での同型になる. よって, $f^*F' \to F$ の余核を Q とすると, $g^*Q = 0$ となるので, $Q = 0$ がわかる. したがって, $f^*F' \to F$ は全射になり, その核は余次元 2 以上になる. これで $j = 1$ に関する主張が示された. 高次の部分でも同じことを繰り返せば良い. □

Gieseker-丸山安定性の場合, singular locus が簡約 Hilbert 多項式にダイレクトに寄与するため, もう少し精密な考察が必要である. また, 多様体の normality についても singular locus の次元の制御の問題が生じるので, 外すのは困難であろうと思われる.

References

[1] Jarod Alper. Stacks and moduli. `https://sites.math.washington.edu/~jarod/moduli.pdf`.

[2] D.Gieseker. Stable vector bundles and the frobenius morphism. *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supériure*, 1973.

[3] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2 edition, 2010.