超函数入門

HANS

Abstract. この pdf は, s2s の春セミナーにおける発表「超函数入門」で話した内容のまとめです. 誤植やコメント等, 何かお気づきの点がございましたら Hans(@Hans12021364) までご連絡いただけると幸いです.

1. モチベーション

Dirac の著書 “The Principles of Quantum Mechanics”(文献 [2] の第 3 章 16 項[1]) において, 以下のような “函数” が登場する:

$$\delta(x) = 0 \text{ (if } x \neq 0)$$
$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$$

これは例えば

$$\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon^2}\right)$$

と定めた時の, φ_ϵ のある種の $\epsilon \downarrow 0$ の極限と捉えることができる. さらに, Dirac は, この捉え方から発生する自然な要請として, 閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ について,

$$f(x) = \int_a^b \delta(y-x)f(y)dy \ (a < x < b) \tag{1}$$

となることを要請した. もちろんこの “函数”δ は本来の意味での函数ではない. この定式化として, 主に 2 つの理論が知られている. 一つは δ を $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (コンパクト台をもつ C^∞ 級函数と, 各コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ および非負整数 n の組に対して与えられるセミノルムの族のなす局所凸空間) の双対空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の元としてみなす方法で, これは $\mathbb{R}$ 上の Schwarz 超函数と呼ばれている. 今回紹介するのは, もう一つの理論である, 佐藤超函数の理論の導入である. 上の式 (1) を, f が $[a,b]$ の近傍で解析的である場合について考察してみよう. f は $[a,b]$ の近傍で解析的なので, ある $[a,b]$ の開近傍 $U \subset \mathbb{C}$ が存在して, f は U 上正則函数に拡張される. そこで, a を始点, b を終点とする, 上半平面 $\mathfrak{H}_+$ と U の共通部分上の区分的に滑らかな曲線を C_+, 下半平面 $\mathfrak{H}_-$ と U の共通部分上の区分的に滑らかな曲線を C_- として,

$$f(x) = \left(\int_{C_+} - \int_{C_-}\right) \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{x-z} dz \tag{2}$$

となることに注意すると, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の函数 $F(z) := \frac{-1}{2\pi i z}$ の, 上半平面からの極限と下半平面からの極限の差異として見直してやると, 少なくとも f が解析函数である限りにおいては式 (1) が正当化され

[1] この本は, 章ごとに節番号が新しくなるのではなく, 節番号がページに関して単調増加になっている. よって, 「節」ではなく「項」という言葉を用いた.

そうである. 我々はこれを表すのにしばしば以下のような記法を用いる:

$$\delta(x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)$$

このように, 新たな "函数" を, 上半平面と下半平面で与えた正則函数の境界部分 $\mathbb{R}$ における差異という形で定式化するという方向に進んでいったのが佐藤超函数である.

2. 定義: 1 変数の場合.

$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}$ の開集合 Ω に対して, Ω 上の解析的函数のなす層として, $\mathcal{O}$ を $\mathbb{C}$ の開集合 U について, U 上の正則函数のなす層とする. 前節で説明したようなモチベーションのもと, δ 函数のような "函数" を定式化する方法を考えてみよう. まず, Ω を相対閉集合として含む $\mathbb{C}$ の開集合 U について, $U \setminus \Omega$ 上の正則函数 F を考えよう. F の定める超函数 f は,

$$f(x) = F(x+i0) - F(x-i0)$$

のように定めたいのであった. U_+ を U と上半平面の共通部分, U_- を U と下半平面の共通部分として, $F_\pm$ を F の $U_\pm$ への制限とする. 上のように定義したいということは, $F_\pm$ が $U_\pm \cup \Omega$ 上の連続函数に拡張されて, その拡張を $\overline{F}_\pm$ としたときに, $\overline{F}_+|_\Omega = \overline{F}_-|_\Omega$ となるような F 分の差異は同一視したい. 実は以下の定理が成立する:

定理 2.1 (Painleve)**.** U, V を $\mathbb{C}$ の開集合として, U と V は共通の境界である C^1 級曲線 C によって互いに連結されているとする. $f_1 \in \mathcal{O}(U) \cap C(\overline{U})$, $f_2 \in \mathcal{O}(V) \cap C(\overline{V})$ として, $f_1|_C = f_2|_C$ となったとする. この時,

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & (z \in U \cup C) \\ f_2(z) & (z \in V \cup C) \end{cases}$$

とすると, $F \in \mathcal{O}(U \cup C \cup V)$ となる.

証明. Morera の定理 (詳しい証明は文献 [3] 第 8 章 4 節, 定理 VIII. 3 参照). □

よって, Ω 上の超函数というものを, 以下のように定義できそうである:

定義 2.1. $\Omega \in \mathbb{R}$ を開集合とする. $\mathcal{U}_\Omega$ を Ω を相対閉集合として含むような $\mathbb{C}$ の開集合全体のなす, 包含を射とした圏とする. この時, 函手 $\mathcal{F}_\Omega : \mathcal{U}_\Omega^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_\mathbb{C}$ を, $\mathcal{F}_\Omega(U) = \mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U)$[2], $\mathcal{F}_\Omega(V \to U)$ は自然に定義される制限写像として定める. また, $\mathcal{B}(\Omega)$ を,

$$\mathcal{B}(\Omega) := \operatorname{colim} \mathcal{F}_\Omega$$

と定義し, $\mathcal{B}(\Omega)$ の元を Ω 上の**超函数**という.

定義の well-defined 性について一言述べておく. $U, V \in \mathcal{U}_\Omega$, $V \subset U$ とする. $F_1, F_2 \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ について, $F_1 - F_2 \in \mathcal{O}(U)$ ならば, $F_1|_{V\setminus\Omega} - F_2|_{V\setminus\Omega} \in \mathcal{O}(V)$ なので, $[F_1|_{V\setminus\Omega}] = [F_2|_{V\setminus\Omega}] \in \mathcal{O}(V\setminus\Omega)/\mathcal{O}(V)$ となる. よって, $\mathbb{C}$-線型空間の射 $\rho_{VU} : \mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$ が well-defined に定まり, もちろん $U, V, W \in \mathcal{U}_\Omega$, $W \subset V \subset U$ について, $\rho_{WV}\rho_{VU} = \rho_{WU}$ となる.

$\Omega_1 \subset \Omega_2$ を $\mathbb{R}$ の開集合として, $f \in \mathcal{B}(\Omega_2)$ とする. この時, $F \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega_2)$ について, $[F]$ が f を代表する[3]とすると, ある $V \in \mathcal{U}_{\Omega_1}$ で, $V \subset U$ なるものが存在する. $[F|_{V\setminus\Omega_1}] \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega_1)/\mathcal{O}(V)$ の代表する $\mathcal{B}(\Omega_1)$ の元を $f|_{\Omega_1}$ と書くと, これは最初の代表元の取り方によらず, well-defined に定まる. これによって, $\rho_{\Omega_1\Omega_2} : \mathcal{B}(\Omega_2) \to \mathcal{B}(\Omega_1)$ が定まる. 定義から明らかに $\rho_{\Omega_1\Omega_2}$ は $\mathbb{C}$-線型空間の準同型である.

定理 2.2. $\mathcal{B} : \mathrm{Op}(\mathbb{R})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_\mathbb{C}$ は層になる.

---

[2]制限写像 $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ は単射なので, これによって $\mathcal{O}(U)$ を $\mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ の部分空間と見ている. 以降もこのような記法を用いる.

[3]このことを単に F が f を代表すると言ってしまうことにする.

証明. 前層であることは上の考察からほとんど明らかである. $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ が, 開被覆 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, $f|_{\Omega_\lambda} = 0$, $(\forall\lambda \in \Lambda)$ となったとする. f を代表する正則函数を $F \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ とおくと, 各 $\lambda \in \Lambda$ について, ある $U_\lambda \in \mathcal{U}_{\Omega_\lambda}$ が存在して, $F|_{U_\lambda\setminus\Omega_\lambda} \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ となる. よって, F は Ω の近傍で正則であることがわかったので, $F \in \mathcal{O}(U)$, つまり $f = 0$ が分かった. 貼り合わせ条件については, 以下の補題を要する.

補題 2.1. $U_j \subset \mathbb{C}$ $(j = 0, 1)$ を開集合とする. $F \in \mathcal{O}(U_0 \cap U_1)$ について, ある $F_j \in \mathcal{O}(U_j)$ $(j = 0, 1)$ が存在して, $F = F_1|_{U_0\cap U_1} - F_0|_{U_0\cap U_1}$ となる.

証明. まず, U_j がともに有界で, 区分的に滑らかな境界を持ち, F は $\overline{U_0 \cap U_1}$ の近傍で正則である場合を考える. $\partial U_j \cap \overline{U_{1-j}} = \gamma_j$ とおき, $\gamma_1 - \gamma_0$ が反時計回りの閉路の和集合になるようにして向きを定める. この時,

$$F_j(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

とすると, Cauchy の積分公式より, 任意の $z \in U_0 \cap U_1$ について, $F_1(z) - F_0(z) = F(z)$ となる. 一般の場合, 有界開集合の増大列 $U_{j,k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ を以下のようにしてとる:

(1) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{j,k} = U_j$
(2) $U_{j,k-1} \Subset U_{j,k}$
(3) 任意の k について, $\partial U_{j,k}$ は区分的に滑らかである.
(4) 任意の k について, $(U_0 \cup U_1, U_{0,k} \cup U_{1,k})$ は Runge 対である. つまり, $\mathbb{PC}^1 \setminus (U_{0,k} \cup U_{1,k})$ の連結成分は全て $\mathbb{PC}^1 \setminus (U_0 \cup U_1)$ と交わる.

上に見たことから, 各 k について, $F_{j,k} \in \mathcal{O}(U_{j,k})$ $(j = 0, 1)$ が存在して,

$$F|_{U_{0,k}\cap U_{1,k}} = F_{1,k}|_{U_{0,k}\cap U_{1,k}} - F_{0,k}|_{U_{0,k}\cap U_{1,k}}$$

が成立する. $U_{0,k} \cap U_{1,k} \subset U_{0,k+1} \cap U_{1,k+1}$ なので, 任意の $z \in U_{0,k} \cap U_{1,k}$ で,

$$F_{0,k+1}(z) - F_{0,k}(z) = F_{1,k+1}(z) - F_{1,k}(z)$$

となる. 左辺は $U_{0,k}$ で定義されており, 右辺は $U_{0,k}$ で定義されているので, これは $U_{0,k} \cup U_{1,k}$ 上の正則函数 G_k を定める. Runge の近似定理より, ある $H_k \in \mathcal{O}(U_0 \cup U_1)$ が存在して,

$$|G_k(z) - H_k(z)| \leq \frac{1}{2^k} \ (\forall z \in U_{0,k-1} \cup U_{1,k-1})$$

となるものが存在する. ここで,

$$F_j(z) := F_{j,1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(G_k(z) - H_k(z))$$

と定めると, これは $U_{j,1}$ 上の正則函数になるが, U_j 上の正則函数に拡張される. 実際, 任意の N および $z \in U_{j,1}$ について,

$$F_{j,N}(z) + \sum_{k=N}^{\infty}(G_k(z) - H_k(z)) - \sum_{k=1}^{N-1} H_k(z) = F_j(z)$$

となるので, 左辺によって $U_{j,N}$ 上の正則函数に拡張される. もちろん $F_1 - F_0 = F$ が $U_0 \cap U_1$ 上で成立するので, 補題の証明が終了する. □

補題 2.2. $U \subset \mathbb{C}$ を開集合, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U の局所有限な開被覆とする. $(F_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda} \in \prod_{\lambda,\mu} \mathcal{O}(U_{\lambda\mu})$ を 1-cocycle とすると, これは 1-coboundary となる. 特に, $\check{H}^1(U, \mathcal{O}) = 0$ である.

証明. まず有限被覆の場合を示す. $\Lambda = \{1, \ldots, N\}$ とする. $N = 2$ の時は補題 2.1 に他ならない. $N-1$ 枚の場合に成立していると仮定して, $\Lambda = \{1, \ldots, N\}$ の場合について示す. $\{U_j\}_{j=1}^N$ を U の開被覆として, $(F_{jk})_{j,k=1}^N$ を 1-cocycle とする. $\{U_j\}_{j=1}^{N-1}$ について, 帰納法の仮定を用いることで, $(F_j)_{j=1}^{N-1} \in \prod_{j=1}^{N-1} \mathcal{O}(U_j)$ で,

$$F_k - F_j = F_{jk} \ (j, k \in \{1, \ldots, N-1\})$$

となるものが存在する. $V = \bigcup_{j=1}^{N-1} U_j$ として, $U_N \cap V$ 上の正則函数 G を,

$$G(z) = F_{jN} + F_j \ (z \in U_N \cap U_N)$$

とすると, これは well-defined である. 実際, $z \in U_j \cap U_k \cap U_N$ の時,

$$F_{jN}(z) - F_{kN}(z) + F_j - F_k = F_{kj}(z) + F_{jN}(z) + F_{Nk}(z) = 0$$

となる. (V, U_N) について補題 2.1 を用いると, ある $F'_N \in \mathcal{O}(U_N)$ と $H \in \mathcal{O}(V)$ が存在して, $G = F'_N - H$ (on $V \cap U_N$) となる. $F'_j := H + F_j$ (on U_j) とすると,

$$F'_j - F'_N = H + F_j - F'_N = F_j - G = F_{Nj}$$

となり, $1 \leq j, k \leq N-1$ についても $F'_j - F'_k = F'_{jk}$ となるので, $\partial(F'_j)_{j=1}^N = (F_{jk})_{j,k=1}^N$ となることがわかる. 一般の場合, U は第二可算なので, その局所有限な開被覆は可算被覆である. これを $\{U_j\}_{j=1}^\infty$ とおき, これに関する 1-cosycle を $(F_{jk})_{j,k=1}^\infty$ とおく. 開集合の増大列 $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ を以下のようにとる:

(1) $U = \displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty V_n$
(2) $V_n \Subset V_{n+1}$ $(\forall n)$
(3) 任意の n について, (U, V_n) は Runge 対である.

各 n について, $\overline{V_n}$ はコンパクトである. また, $x \in \overline{V_n}$ について, ある x の開近傍 $V(x)$ が存在して, $V(x)$ と交差する U_j は有限個である. $\{V(x)\}_{x \in \overline{V_n}}$ は $\overline{V_n}$ の開被覆になるので, 有限個の点 $x_1, \ldots, x_m \in \overline{V_n}$ で, $\{V(x_k)\}_{k=1}^m$ が $\overline{V_n}$ の開被覆になっているようにできる. $V_n \cap U_j \neq \emptyset$ とすると, ある k が存在して, $V(x_k) \cap U_j \neq \emptyset$ となるので, このような j は高々有限個である. つまり, $\{V_n \cap U_j\}_{j=1}^\infty$ は実際は有限集合である. 先ほど示したことにより, $(F_{n,j})_{j=1}^\infty \in \prod_j \mathcal{O}(U_j \cap V_n)$ で, $F_{n,k} - F_{n,j} = F_{jk}$ が $V_n \cap U_j \cap U_k$ で成立するようにできる. この時,

$$G_n(z) := F_{n+1,j} - F_{n,j} \ (z \in V_n \cap U_j)$$

によって V_n 上の正則函数 G が定まるので, Runge の近似定理より, $H_n \in \mathcal{O}(U)$ で,

$$|G_n(z) - H_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \ (z \in V_{n-1})$$

となるようなものが取れる.

$$F_j(z) = F_{1,j}(z) + \sum_{n=1}^\infty (G_n(z) - H_n(z)) \ (z \in U_j \cap V_1)$$

と定めると,

$$F_j(z) = F_{N,j}(z) + \sum_{n=N}^\infty (G_n(z) - H_n(z)) - \sum_{n=1}^{N-1} H_n(z)$$

ともなるので, これは U_j に解析的拡張を持ち, これを改めて F_j と書くことにすると, $j, k \in \mathbb{N}$ について,

$$F_k - F_j = F_{jk}$$

も成立し, $\partial(F_j)_{j=1}^{\infty} = (F_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ となることが分かった. よって, 補題が示された. $\square$

では定理の証明に戻ろう. Ω の開被覆 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod \mathcal{B}(\Omega_\lambda)$ が, 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ について, $f_\lambda|_{\Omega_{\lambda\mu}} = f_\mu|_{\Omega_{\lambda\mu}}$ となるとする. 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $F_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda \setminus \Omega_\lambda)$ で, F_λ が f_λ を代表するように取れる. 各 U_λ は適当に制限することによって, $U_\lambda \cap \mathbb{R} = \Omega_\lambda$ となるとしてよい[4]. また, 適当に細分をとることで, $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ および $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限であるとしてよい. $F_\lambda \in \mathcal{O}(U_\lambda \setminus \Omega_\lambda)$ $(U_\lambda \in \mathcal{U}_{\Omega_\lambda})$ が f_λ を代表する函数とする. 条件より, 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ について,

$$F_{\lambda\mu} := F_\mu|_{U_{\lambda\mu}\setminus\Omega_{\lambda\mu}} - F_\lambda|_{U_{\lambda\mu}\setminus\Omega_{\lambda\mu}} \in \mathcal{O}(U_{\lambda\mu})$$

となる. $(F_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda} \in \prod_{\lambda,\mu} \mathcal{O}(U_{\lambda\mu})$ は 1-cocycle なので, $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_\lambda \mathcal{O}(U_\lambda)$ で, $\partial(G_\lambda) = (G_{\lambda\mu})$ となるものが存在する. つまり,

$$F_\lambda - G_\lambda = F_\mu - G_\mu \ (\text{in } (U_\lambda \setminus \Omega_\lambda) \cap (U_\mu \setminus \Omega_\mu))$$

となるので, これは $F \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ を定める. $[F|_{U_\lambda}] = [F_\lambda - G_\lambda] = [F_\lambda]$ なので, $[F]$ の代表する $\mathcal{B}(\Omega)$ の元を f とすれば, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f|_{U_\lambda} = f_\lambda$ になっている. $\square$

また, 上の定理の中で示した補題から, 以下のようなことがわかる:

命題 2.1. $U, V \in \mathcal{U}_\Omega$, $V \subset U$ とする. この時, $\rho_{VU} : \mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$ は全射である. つまり, 任意の $U \in \mathcal{U}_\Omega$ について, $\mathcal{B}(\Omega) = (\mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U))$ としてよい.

証明. $F \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$ について, $(U \setminus \Omega, V)$ について補題 2.1 を用いると, $G \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$, $H \in \mathcal{O}(V)$ で, $F = G - H$ (in $V \setminus \Omega$) が成立する. よって, $[G]|_V = [F]$ となることが分かった. 後半の主張は一致の定理より明らか. $\square$

少し超函数の層 $\mathcal{B}$ の性質を見てみよう.

命題 2.2. $\mathcal{B}$ は脆弱層である.

証明. 補題 2.1 によって, $U := \mathbb{C} \setminus \partial\Omega$ とすると, 任意の $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ について, f を代表する函数 $F \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega) = \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega})$ が取れる. $F' := F|_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ として, f' を F' の代表する $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の元とすると, 明らかに $f'|_\Omega = f$ となる. $\square$

$f \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$ とすると, ある $U \in \mathcal{U}_\Omega$ が存在して, $\varphi \in \mathcal{O}(U)$ となるので, $F \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ を f を代表する函数とすると, $\varphi F \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ であり, $G \in \mathcal{O}(U)$ について, $\varphi G \in \mathcal{O}(U)$ なので, $\varphi f := [\varphi F] \in \mathcal{B}(\Omega)$ が well-defined に定まる. この $\mathcal{A}$ の作用は制限写像と整合的なので, $\mathcal{B}$ は実は $\mathcal{A}$-加群になる. また, 層の射 $D : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を,

$$D[F] = \left[\frac{dF}{dz}\right]$$

によって定めると, これは well-defined である. 実際, 正則函数の微分はまた正則函数なので, D の定義は代表元の取り方によらない. もちろん D は $\mathbb{C}$-線型である. $f \in \mathcal{B}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$, $f = [F]$ とすると,

$$D(\varphi f) = \left[\frac{d}{dz}(\varphi F)\right] = [\varphi F' + \varphi' F] = \varphi Df + \varphi' f$$

となる. これによって, $\mathcal{B}$ には微分が定義された. $\mathcal{A}$ を係数にもつ微分作用素全体のなす非可換環層 $\mathcal{D}$ を考えると, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{D}$-加群になる.

[4] これは便宜上そうしているだけであって, 本質的ではない.

3. 函数の拡張として.

本節では, 1 変数の超函数がちゃんと我々の普段考えている函数の拡張になっていることを示す. その前にまず超函数の積分を定義しよう. 超函数 $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ について, $\mathrm{supp}(f)$ を, f の台, つまり, $x \in \Omega$ で, ある x の開近傍 $\Omega_x \subset \Omega$ が存在して, $f|_{\Omega_x} = 0$ となるもの全体の補集合として定める.

定義 3.1. $\Omega \subset \mathbb{R}$ を開集合, $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ とし, $U \in \mathcal{U}_\Omega$, $F \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ を f を代表する元する. $a, b \notin \mathrm{supp}(f)$, $a < b$ について, $\gamma_\pm$ を, a を始点, b を終点とする区分的に滑らかな道で, それぞれ $\gamma_+ \subset U \cap \mathfrak{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$, $\gamma_- \subset U \cap \mathfrak{H}_- := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) < 0\}$ となるものとする. このとき,

$$\int_a^b f(x)dx := \left(\int_{\gamma_+} - \int_{\gamma_-}\right) F(z)dz$$

と定め, 超函数 f の区間 $[a, b]$ における積分と呼ぶ. これが F および $\gamma_\pm$ の選び方によらないことは明らかである.

$f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を, 台がコンパクトであるような超函数とする. この時, $U \supset \mathrm{supp}(f) =: K$ を $\mathbb{C}$ の開集合として, $F \in \mathcal{O}(U \setminus K)$ を, f を代表する正則函数とする. $G : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ を,

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z}dx$$

と定める. $z \in \mathbb{C} \setminus K$ を一つ取ってきた時, γ を K を内部に含む U の内部の正に向き付けられた区分的に滑らかな単純閉曲線で, z が γ の外側にあるようなものとすると,

$$G(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

となる. このとき, Lebesgue の収束定理より, G は z の周りで複素微分可能であることがわかり, ゆえに $G \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ であることがわかった. $z \in U \setminus K$ について, 内部に z を含まないような区分的に滑らかな単純閉曲線 γ を取ってくる. γ' を z を内部に含む, 正に向き付けられた, γ と向きを逆にして道の一部を共有する, $U \setminus K$ の単純閉曲線とすると,

$$\begin{aligned} F(z) - G(z) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma + \gamma'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \end{aligned}$$

これは $\gamma + \gamma'$ の内部で正則である. つまり $F - G$ は U 上正則函数に拡張可能なので, $[F] = [G]$ であることがわかった. つまり, 以下の命題が示された:

命題 3.1. $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を, コンパクトな台を持つ超函数とする. このとき,

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z}dx$$

とすると, $[G] = f$ となる. G を f の**標準型** (canonical representation) と呼ぶ. □

コンパクト台を持つ任意の L^1 函数を超函数と見做す方法を与える. これは以下のようなものである:

定義 3.2. $f \in L^1(\mathbb{R})$ はコンパクトな台を持つとする. $K := \mathrm{supp}(f)$ として, $G : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ を,

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z}dx$$

と定める．これは普通の意味での積分 (i.e. Lebesgue 積分) である．$\iota(f) := [G]$ とおき, これを f に対応する超函数という．

この定義は, モチベーションの章に挙げた式 (1) の解釈と一致することに注意せよ．また, $\mathrm{supp}(\iota(f)) \subset \mathrm{supp}(f)$ となることがこの積分表示から容易に従う．ここからさらに発展して, $\mathbb{R}$ の上の局所可積分函数の層 $\mathcal{L}^1_{loc}$ から, $\mathcal{B}$ への埋め込みを与える．まず, どちらも脆弱層で, 任意の切断は大域切断に 0 で延長できるので, 単射 $\mathbb{C}$-準同型 $L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ で, $\mathrm{supp}(\iota(f)) \subset \mathrm{supp}(f)$ となるもの (これは $\mathrm{supp}(\iota(f)) = \mathrm{supp}(f)$ となることと同値である) を構成すれば良いことに注意する．$\mathbb{R}$ の局所有限な開被覆 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を取って, $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を開被覆 $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に従属する 1 の分割とする．すると, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ について, $\mathrm{supp}(\rho_\lambda f)$ はコンパクトなので, 各 λ について, 対応する超函数 $\iota(\rho_\lambda f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が定まる．ここで, 形式和

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \iota(\rho_\lambda f)$$

を持って $\iota(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を定義したい．この解釈を以下のように与える: ある $\mathbb{R}$ の開被覆 $\{\Omega'_i\}_{i\in I}$ で, 各 $i \in I$ について, $\Omega'_i \cap \Omega_\lambda \neq \emptyset$ となる λ は有限個であるようなものが存在する．この $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ について,

$$\iota(f)_i := \sum_{\lambda\in\Lambda} \iota(\rho_\lambda f)|_{\Omega'_i}$$

は有限和になるので well-defined であり, 任意の $i, j \in I$ について, $f_i|_{\Omega'_i\cap\Omega'_j} = f_j|_{\Omega'_i\cap\Omega'_j}$ となるので, 層の貼り合わせ条件より, ある $\iota(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が一意に存在して, $\iota(f)|_{V_i} = \iota(f)_i$ が任意の $i \in I$ で成立する．もちろんこれは条件を満たす開被覆 $\{\Omega'_i\}_{i\in I}$ の取り方によらない．また, $\iota : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について, 任意の $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ について, $\mathrm{supp}(\iota(f)) \subset \mathrm{supp}(f)$ である．実際, $x \notin \mathrm{supp}(f)$ ならば, ある x の開近傍 Ω_x で, $\Omega_x \cap \Omega_\lambda \neq \emptyset$ となる λ は有限個であり, さらに $\Omega_x \cap \mathrm{supp}(f) = \emptyset$ となるものが存在する．この Ω_x について,

$$\iota(f)|_{\Omega_x} = \sum_{\Omega_x\cap\Omega_\lambda\neq\emptyset} \iota(\rho_\lambda f)|_{\Omega_x} = 0$$

となる．ここで, $\mathrm{supp}(\iota(\rho_\lambda f)) \subset \mathrm{supp}(\rho_\lambda f) \subset \mathrm{supp}(f) \subset \Omega_x^c$ であることを用いている．このことから, $\iota : L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ は層の射 $\iota : \mathcal{L}^1_{loc} \to \mathcal{B}$ を定めることがわかった．

$\{\Omega_\kappa\}_{\kappa\in K}$ を今一つの局所有限な $\mathbb{R}$ の開被覆として, $\{\eta_\kappa\}_{\kappa\in K}$ を $\{\Omega_\kappa\}_{\kappa\in K}$ に従属する 1 の分割とする．すると, 上の方法で, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ について, $\iota'(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が構成できるが, $\mathbb{R}$ の開被覆 $\{\Omega'_j\}_{j\in J}$ を, 任意の $j \in J$ について, $\Omega'_j \cap \Omega_\lambda \neq \emptyset$ となる $\lambda \in \Lambda$ および $\Omega'_j \cap \Omega_\kappa \neq \emptyset$ となる $\kappa \in K$ が, 共に有限であるように取れるので, この $\{\Omega'_j\}_{j\in J}$ について,

$$\begin{aligned}\iota(f)|_{\Omega'_j} - \iota'(f)|_{\Omega'_j} =& \iota\left(\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda|_{\Omega'_j} - \sum_{\kappa\in K} \eta_\kappa|_{\Omega'_j}\right) f|_{\Omega'_j}\right) \\ =& 0\end{aligned}$$

がわかる．ゆえに, ι は開被覆および 1 の分割の取り方によらないことがわかった．ι が $\mathbb{C}$-線型であることは明らかである．つぎに ι が単射であることを示す．これは先ほど述べた通り $\mathrm{supp}(\iota(f)) = \mathrm{supp}(f)$ を示せば良い．f がコンパクト台を持つ場合にこれが示されれば, 一般の場合は, 上の $\{\Omega'_i\}$ を, 各 $i \in I$

について, Ω'_i が相対コンパクトであるように選んでこれば,

$$
\begin{aligned}
&\iota(f)|_{\Omega} = 0 \\
\iff& \text{任意の } i \in I \text{ で}, \sum_{\lambda \in \Lambda} \iota(\rho_\lambda f)|_{\Omega \cap \Omega'_i} = 0 \\
\iff& \text{任意の } i \in I \text{ で}, \iota\left(\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda f \chi_{\Omega'_i}\right)\chi_\Omega\right) = 0 \\
\iff& \text{任意の } i \in I \text{ で}, \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda f \chi_{\Omega'_i}\right)\chi_\Omega = 0 \\
\iff& \text{任意の } i \in I \text{ で}, \operatorname{supp}(f) \cap \Omega'_i \cap \Omega = \emptyset \\
\iff& \operatorname{supp}(f) \cap \Omega = \emptyset
\end{aligned}
$$

となるので, $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(\iota(f))$ が示される. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ をコンパクト台をもつ函数として, $\operatorname{supp}(f) \subset \operatorname{supp}(\iota(f))$ を示す. $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ を, $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(\iota(f)) = \emptyset$ となるように取ってきて, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = 0$ が示されれば, $\operatorname{supp}(f) \subset \operatorname{supp}(\iota(f))$ がわかる.

$$
\varphi_\epsilon(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{z-y}{\epsilon}\right)^2}\varphi(y)dy
$$

とすると, この積分は $z \in \mathbb{C}$ について局所一様収束し, ゆえに φ_ϵ は $\mathbb{C}$ 上の整函数になる. ここで, $\epsilon \downarrow 0$ の極限を考える. $D := \mathbb{C} \setminus \{y + z : y \in \operatorname{supp}(\varphi),\ |\Im(z)| \geq |\Re(z)|\}$ とすると, D に含まれるコンパクト集合 K 上で, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$
\Re\left(-\frac{(z-y)^2}{\epsilon^2}\right) \leq -\frac{\delta}{\epsilon^2}
$$

と抑えられるので, K 上で一様に $\varphi_\epsilon \to 0$ $(\epsilon \downarrow 0)$ が成立する. γ を, $\operatorname{supp}(\iota(f))$ を内部に含む D 内の区分的に滑らかな単純閉曲線とすると, $\iota(f)$ の標準形を G とおいて,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \iota(f)\varphi_\epsilon(x)dx = -\oint_\gamma G(z)\varphi_\epsilon(z)dz \to 0 \ (\epsilon \downarrow 0)
$$

となる. γ' を $\operatorname{supp}(f)$ を内部に含む, 区分的に滑らかな単純閉曲線とすると, $\gamma, \gamma' \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\iota(f))$ で homotopy 同値なので,

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \iota(f)\varphi_\epsilon(x)dx &= -\oint_\gamma G(z)\varphi_\epsilon(z)dz \\
&= -\oint_{\gamma'} G(z)\varphi_\epsilon(z)dz \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma'} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\varphi_\epsilon(z)}{x-z}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma'} \frac{\varphi_\epsilon(z)}{z-x}dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx
\end{aligned}
$$

となる．よって,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx = 0$$

がわかった．初めの等式は,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx =& \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\varphi(x-\epsilon y)dy\\ =& \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\varphi(x-\epsilon y)e^{-y^2}dxdy\\ \overset{\text{DCT}}{\to}& \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx,\ (\epsilon\downarrow 0)\end{aligned}$$

からわかる．よって, $\mathrm{supp}(f)\subset\mathrm{supp}(\iota(f))$ がわかり, ι は単射であることがわかった．ゆえに, 以下の定理を得る:

定理 3.1. $\mathcal{L}^1_{loc}$ から $\mathcal{B}$ への標準的な埋め込み $\iota:\mathcal{L}^1_{loc}\to\mathcal{B}$ が存在する． □

これとほとんど同じ方法で, Schwartz 超函数の層 $\mathcal{D}'$ から超函数の層 $\mathcal{B}$ への埋め込みも構成できる．特に, f が連続函数である場合, $\iota(f)$ の定義する正則函数 $F\in\mathcal{O}(U\setminus\mathbb{R})$, $U\supset\mathbb{R}$ について,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)=f(x)$$

であることが, 以下のようにしてわかる: まず, f がコンパクト台をもつ場合,

$$\begin{aligned}F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon) =& \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{f(t)}{t-(x+i\epsilon)}-\frac{f(t)}{t-(x-i\epsilon)}\right)dt\\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\epsilon}{(t-x)^2+\epsilon^2}dt\\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\epsilon t)\frac{1}{t^2+1}dt\end{aligned}$$

となる．よって, Lebesgue の収束定理より,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} F(x+i\epsilon)-F(x-i\epsilon)=f(x)$$

が示される．f の台がコンパクトでない場合はコンパクトな場合と ι の構成法から明らかである．

もう一つ, $\mathcal{A}$ の超函数の層への埋め込みは, もちろん $\mathcal{A}\to\mathcal{L}^1_{loc}\to\mathcal{B}$ によって構成されるが, $f\in\mathcal{A}(\Omega)$ について, ある $U\in\mathcal{U}(\Omega)$ および $F\in\mathcal{O}(U)$ が存在して, $f(x)=F(x)$, $\forall x\in\Omega$ となる．そこで, $G\in\mathcal{O}(U\setminus\Omega)$ を,

$$G(z)=\begin{cases}F(z) & (\Im z>0)\\ 0 & (\Im z<0)\end{cases}$$

と定め, $\iota'(f)=[G]$ とすれば, これはまた埋め込み $\iota':\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を定める．

命題 3.2. $f\in\mathcal{A}(\Omega)$ に関して, $\iota'(f)=\iota(f)$ となる．

証明. $\Omega\supset[a,b]$ とする．$f\chi_{[a,b]}\in L^1(\mathbb{R})$ なので, $\iota(f\chi_{[a,b]})$ の標準形 $G'\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus[a,b])$ は

$$G'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{F(t)}{t-z}dt$$

となる．ここで, z が下半平面にある時, U と上半平面の共通部分に端点を除いた全ての点があるような道 γ_- を考えても,

$$G'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{F(t)}{t-z}dt$$

となる, よって, G' の下半平面への制限は, 上半平面 (具体的には γ_- の下側にある部分) に解析的延長ができる．同様に, G' の上半平面への制限は, 下半平面に解析的延長ができる．これらをそれぞれ G_-, G_+ として, $G_\pm$ の定義域の共通部分 (上の構成法に従えば, $V \in \mathcal{U}_{(a,b)}$ になる) を V とおくと, $V \supset (a,b)$ であり, z が V と上半平面の共通部分にあるとき,

$$G'(z) - G_-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(t)}{t-z}dt = F(z)$$

となる．また, z が V と下半平面の共通部分にある時は,

$$G'(z) - G_-(z) = 0$$

となるので, $\iota(f)|_{(a,b)} = [G'] = [G]_{(a,b)}$ であることがわかった．貼り合わせの原理より, 題意が従う． □

4. 最後に

一変数の佐藤超函数について, その定義と, (主に局所可積分) 函数の埋め込みについて議論した．時間の都合上, いくつかの重要な概念 (例えば microfunction の話など) は紹介できなかったが, 概ね文献 [1] の第 1 章に沿っている．

References

[1] Kaneko, A. (1989). *Introduction to Hyperfunctions*, Kluwer Academic Publishers.
[2] Dirac, Paul Adrien Maurice (1930). The Principles of Quantum Mechanics. Clarendon Press.
[3] 辻 正次：複素函数論, 1988