射影多様体の双対についての覚書

HANS

1. Introduction

$k(=\mathbb{C})$ を代数閉体, $X \subset \mathbb{P}^n$ を k 上の射影多様体として, X_0 を X の smooth locus とする．この時, $\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^\vee$ の代数的集合 $\tilde{X}$ を, 以下のように定義する．

$$\tilde{X} := \overline{\{(x,H) \in \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^\vee \mid x \in X_0, T_xX \subset H\}}$$

Remark 1. $n=2$ で, X が平面曲線の時を考えると, これは古典力学の Lagrangian-Hamiltonian の対応の analogy と見ることができる．

Property 1. *X が非特異多様体なら, $\tilde{X} = \mathbb{P}_X(N^\vee_{X/\mathbb{P}^n}) := \underline{\mathrm{Proj}}_X(\mathrm{Sym}(N_{X/\mathbb{P}^n}))$ となる．特に $\tilde{X}$ は非特異多様体である．*

proof. $\mathbb{P}^n = \mathbb{P} = \mathbb{P}(V) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(V^\vee))$ とする．normal sequence $0 \to TX \to T\mathbb{P}|_X \to N_{X/\mathbb{P}} \to 0$ と Euler sequence $0 \to \mathcal{O}_\mathbb{P} \to \mathcal{O}_\mathbb{P}(1) \otimes V \to TX \to 0$ の最後の射を合成して, 全射 $\mathcal{O}_\mathbb{P}(1) \otimes V \to N_{X/\mathbb{P}}$ を得る．この射は $\mathcal{O}_X(1) \otimes V$ を経由するので, 閉埋め込み $i : \mathbb{P}_X(N^\vee_{X/\mathbb{P}}) \to \mathbb{P}_X(V^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = X \times \mathbb{P}(V^\vee)$ を得る．$x \in X$ として, $H = V(l)$ を x を通る超平面とすると, $T_xX \subset H$ であることと $((dl)|_X)_x = 0$ となることは同値であり, conormal sequence $0 \to N^\vee_{X/\mathbb{P}} \to \Omega_\mathbb{P}|_X \to \Omega_X \to 0$ から, これは $dl_x \in N^\vee_{X/\mathbb{P},x}$ となることと同値である．よって, i の像は $\tilde{X}$ となる． □

Remark 2. これで X が非特異ではない時も $\tilde{X}$ を $\mathbb{P}_{X_0}(N^\vee_{X_0/\mathbb{P}^n}) \subset X \times (\mathbb{P}^n)^\vee$ の (スキーム論的) 閉包として定めることができる．この時も $\tilde{X}$ は多様体になる．

Corollary 1. *$X \subset \mathbb{P}^n$ を d 次元射影多様体とする．この時, $\dim \tilde{X} = n-1$ である．* □

Definition 1. 自然な射影 $p_2 : \tilde{X} \to (\mathbb{P}^n)^\vee$ の像を $X^\vee$ と書き, X の**双対多様体**という．

この時, $X^\vee$ はほとんどの場合超曲面になる．これが超曲面になるかについては, 以下の判定法がある．

Theorem 1. *$X \subset \mathbb{P}^n$ を k 上の d 次元非特異射影多様体として, $\tilde{X}, X^\vee$ を上のように定める．また, $\pi : \tilde{X} \to X$, $f : \tilde{X} \to X^\vee$ を射影とする．この時, 以下が成立する:*

(1)
$$\deg(f_*[\tilde{X}]) = (-1)^d \int_X \frac{c(TX)}{(1+c_1(\mathcal{O}_X(1)))^2}$$

(2) *特に, $X^\vee \subset (\mathbb{P}^n)^\vee$ が超曲面であることと, 上の積分が消えていることは同値である．*

Date: November 2024.

proof. (2) は (1) からすぐに従う．(1) を示す．まず, $\mathcal{O}_{N^\vee}(1)$ を $\tilde{X} = \mathbb{P}_X(N^\vee) \to X$ の相対標準ツイスト層とすると,

$$f^*\mathcal{O}_{X^\vee}(1) = \mathcal{O}_{N^\vee}(1) \otimes \pi^*\mathcal{O}(-1))$$

であることに注意する．以下の可換図式をもとに, $\deg(f_*[\tilde{X}])$ を計算する:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X^\vee \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\deg(f_*[\tilde{X}]) &= \int_{X^\vee} c_1(\mathcal{O}_{X^\vee}(1))^{n-1} \cap f_*[\tilde{X}] \\
&= \int_{X^\vee} f_*(c_1(f^*\mathcal{O}_{X^\vee}(1))^{n-1} \cap [\tilde{X}]) \\
&= \int_{X^\vee} f_*((c_1(\mathcal{O}_{N^\vee}(1)) + c_1(\pi^*\mathcal{O}_X(-1)))^{n-1} \cap [\tilde{X}]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i \int_X \pi_*(c_1(\pi^*\mathcal{O}_X(1))^i \cap c_1(\mathcal{O}_{N^\vee}(1))^{n-i-1} \cap [\tilde{X}]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i \int_X c_1(\mathcal{O}_X(1))^i \cap \pi_*(c_1(\mathcal{O}_{N^\vee}(1))^{n-i-1} \cap \pi^*[X]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i \int_X c_1(\mathcal{O}_X(1))^i \cap s_{d-i}(N^\vee) \\
&= (-1)^d \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \int_X c_1(\mathcal{O}_X(1))^i \cap s_{d-i}(N) \\
&= (-1)^d \int_X (1 + c_1(\mathcal{O}_X(1)))^{n-1} \cap s(N)
\end{aligned}$$

となる．ここで, 代数多様体 Y 上のベクトル束 E について, $s(E)$ は E の全 Segre 類．ここで, normal sequence

$$0 \to TX \to T\mathbb{P}^n|_X \to N \to 0$$

より, $c(N)c(TX) = c(T\mathbb{P}^n) = (1 + c_1(\mathcal{O}_X(1)))^{n+1}$ となるので,

$$s(N) = c(N)^{-1} = \frac{c(TX)}{(1 + c_1(\mathcal{O}_X(1)))^{n+1}}$$

となる．よって,

$$\deg(f_*[\tilde{X}]) = (-1)^d \int_X \frac{c(TX)}{(1 + c_1(\mathcal{O}_X(1)))^2}$$

が示された． □

Example 1. $\mathbb{P}^1$ の $d > 1$ 次 Veronese 埋め込みの像 $X \subset \mathbb{P}^d$ をみる．上の公式から $\deg(f_*[\tilde{X}]) = 2d - 2 \neq 0$ なので, $X^\vee$ は超曲面．$X^\vee = V(\Delta_X)$ とする．この時, $(a_0 : \cdots : a_d) \in V(\Delta_X)$ となることは, ある $P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ が存在して, $H = V(\sum a_i Z_i)$ が P で X と接するということである．$x_0 \neq 0$ として, $f(x) = \sum a_i x^i$ とすると, これは $f(x)$ が点 x_1/x_0 で重根をもつということを言っている．つ

まり, $Z_0,\dots,Z_d$ についての斉次多項式 $\Delta_X(Z)$ は, ($Z_d = 1$ とすると)d 次多項式 $f(x)=\sum_{i=1}^d Z_i x^i$ の判別式になっている. □

Definition 2. $X\subset\mathbb{P}^n$ を d 次元代数多様体とする.

(1) $\mathrm{def}(X):=\mathrm{codim}_{(\mathbb{P}^n)^\vee}(X^\vee)-1$ と置いて, X の **defect** という.
(2) $\mathrm{def}(X)=0$ のとき, X の**判別式**を, $X^\vee=V(\Delta_X)$ となるような斉次多項式 Δ_X として定める. $\mathrm{def}(X)>0$ ならば, $\Delta_X=1$ と置く.

先ほど, ほとんどの $X\subset\mathbb{P}^n$ に対して, $X^\vee$ は $n-1$ 次元といったが, それにも関わらず以下の定理が成立する.

Theorem 2 (Reflexivity theorem)**.** $X\subset\mathbb{P}^n$ を代数多様体とする. この時,

$$(X^\vee)^\vee = X$$

となる.

proof. $\mathbb{C}$ 上で示す. $\tilde{X}=\tilde{X^\vee}$ を示せば良い. $\mathbb{P}^n=\mathbb{P}(V)$ とする. $Y:=\mathrm{Cone}(X)\subset V$ とする. $T^*V=V\times V^\vee$ であることに注意して, $\mathrm{Lag}(Y)=\overline{N^\vee_{Y_0/V}}\subset V\times V^\vee$ とする. ここで Y_0 は Y の smooth locus. $\pi: Y-\{0\}\to X$ を射影として, 以下の完全列を見る:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N^\vee_{Y/V} & \longrightarrow & T^*V|_Y & \longrightarrow & T^*Y & \longrightarrow & 0\\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \pi^*N^\vee_{X/\mathbb{P}} & \longrightarrow & \pi^*T^*\mathbb{P}|_X & \longrightarrow & \pi^*T^*X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

一番左の射は単射であり, さらに各ファイバーの次元が等しいので同型である. この同型から, $N^\vee_{Y/V}$ を第二射影で射影した像 $Y^\vee$ は $X^\vee$ の錐であることがわかる. よって, 結局 $\mathrm{Lag}(Y)=\mathrm{Lag}(Y^\vee)$ が示されれば良いことがわかる. 以下の補題を用意する.

Lemma 1. *X を非特異代数多様体として, Y をその閉部分多様体とする. この時, T^*X には標準的なシンプレクティック型式 ω が入ることはよく知られている. この時, $\mathrm{Lag}(Y):=\overline{N^\vee_{Y_0/X}}$ として, 以下が成立する.*

(1) $\mathrm{Lag}(Y)$ は T^*X の *Lagrangian* 部分多様体である.
(2) 任意の T^*X の *conical* な *Lagrangian* 部分多様体 Λ*(i.e.* $\mathrm{pr}: T^*X\to X$ を射影として, 任意の $y\in\mathrm{pr}(\Lambda)$ について, $\mathrm{pr}^{-1}(y)\cap\Lambda\subset T^*_yX$ が *cone* になっている*)* について, $\Lambda=\mathrm{Lag}(\mathrm{pr}(\Lambda))$ となる.

この補題から. $\mathrm{Lag}(Y^\vee)\subset V\times V^\vee$ は *conical* な *Lagrangian* 部分多様体なので, $\mathrm{Lag}(Y^\vee)=\mathrm{Lag}(\mathrm{pr}(\mathrm{Lag}(Y^\vee)))=\mathrm{Lag}(Y)$ となることがわかる.

proof. (1) は以下のようにしてわかる: Y の smooth point y の周りの X の座標近傍系 $x_0,\dots,x_n$ で, Y が $x_1=\cdots=x_r=0$ で定義されるようなものをとってくると, T^*X の y の近傍上のファイバーは $dx_i=\xi_i$ として, 座標 $x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n$ で定義され, $\mathrm{Lag}(Y)$ は $x_1=\cdots=x_r=\xi_{r+1}=\cdots=\xi_n=0$ となるので, 標準的なシンプレクティック型式を $\mathrm{Lag}(Y)$ に引き戻すと 0 になる. また, (ここから)$\dim(\mathrm{Lag}(Y))=\dim(X)=\frac{1}{2}\dim(T^*X)$ もわかるので, $\mathrm{Lag}(Y)$ は Lagrangian 部分多様体である.

(2) については, Λ も $\mathrm{Lag}(\mathrm{pr}(\Lambda))$ も次元が等しい代数多様体なので, $\Lambda\subset\mathrm{Lag}(\mathrm{pr}(\Lambda))$ を示せば良い. 以下, $Y=\mathrm{pr}(\Lambda)$ とする. $y\in Y_0$ について, $\mathrm{pr}^{-1}(y)\cap\Lambda\subset\mathrm{Lag}(Y)$ を示せば良いが, $\xi\in\mathrm{pr}^{-1}(y)\cap\Lambda$ とする. $\mathrm{pr}^{-1}(y)$ は線型空間なので, ξ は $\mathrm{pr}^{-1}(y)$ の ξ における接ベクトルと思うことができて, $\mathrm{pr}^{-1}(y)\subset T^*X$ によって, $\xi\in T_\xi(T^*X)$ で, ファイバー方向の接ベクトルと思うことができる. また, Λ は conical なので,

$\xi \in T_\xi \Lambda$ となる．すると, Λ は Lagrangian 部分多様体なので, 任意の $v \in T_\xi \Lambda$ について, $\omega(\xi, v) = 0$ となる．y の周りの X の座標近傍 $x_1, \ldots, x_n$ をとって, Y が y の周りで $x_1 = \cdots = x_r = 0$ で定義されているとすると, $dx_i = \xi_i$ と置いて, ξ はファイバー方向の接ベクトルだったので,

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)_\xi$$

とかける (これは $\xi = \sum a_i dx_i$ と言っているのと同じである).

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_y + \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)_\xi$$

と書くと, 今えた式は,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \xi(\mathrm{pr}_* v)$$

となるので, 任意の y における Y の接ベクトル u に対して, $\xi(u) = 0$ がわかる．したがって, $\xi \in N^\vee_{Y_0/X} \subset \mathrm{Lag}(Y)$ となる． $\square$

2. 応用

Corollary 2. *$X \subset \mathbb{P}^n$ を射影多様体とする．この時, $X^\vee$ が超曲面ならば, $\tilde{X} \to X^\vee$ は双有理同型である．特に, X が非特異で $X^\vee$ が超曲面なら, $\tilde{X} \to X^\vee$ は特異点解消になっている．*

proof. reflexivity theorem より, $\tilde{X} = \tilde{X^\vee}$ であり, $\xi \in (X^\vee)_0$ について, $f : \tilde{X^\vee} \to X^\vee$ のファイバーは一点である．したがって, 主張が示された． $\square$

Example 2. $X \subset \mathbb{P}^n$ が $\mathbb{P}^1$ の n 次 Veronese 埋め込みの像なら, 全節の計算から, $f : \tilde{X} \to X^\vee$ について, $\deg(X^\vee)\deg(f) = \deg(f_*[\tilde{X}]) = 2n-2$ となる．上の系から $\deg(f) = 1$ なので, $X^\vee$ は $2n-2$ 次の超曲面になっている．つまり, 判別式の次数は $2n-2$ 次であることがわかった． $\square$

3. 終わりに

最初の方は [1] を主に参考にして, 途中から [2] を参考にした.

References

[1] William Fulton. *Intersection Theory.* Springer New York, NY, 1998.
[2] Evgueni Tevelev. Projectively dual varieties, 2001.