第 2 種 VOLTERRA 方程式の解の存在および一意性

HANS

定理 0.1. $K \in L^2([0,1]^2),\ f \in L^2([0,1])$ について, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について, 以下の積分方程式は $L^2([0,1])$ に一意的な解を持つ.

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy$$

Notation の定義から始める. 積分核 K は $y \geq x$ で 0 を取るものとして, K について,

$$A(x) := \sqrt{\int_0^x |K(x,y)|^2 dy}$$

$$B(x) := \sqrt{\int_x^1 |K(y,x)|^2 dy}$$

と定める. これは $L^2([0,1])$ の関数であり, $\|K\|_2 = \|A\|_2 = \|B\|_2$ が成立する. さらに,

$$\begin{cases} K_1(x,y) = K(x,y) \\ K_n(x,y) = \displaystyle\int_0^1 K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz = \int_y^x K_(x,z)K_{n-1}(z,y)dz \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

として,

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = f(x) \\ \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \displaystyle\int_0^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy & (n \geq 1) \\ \psi_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) & (n \geq 1) \end{cases}$$

と定める. このとき, $K_{n+m}(x,y) = \int_0^1 K_n(x,z)K_m(z,y)dz$ が成立し,

$$\psi_n(x) = \lambda^n \int_0^x K_n(x,y)f(y)dy$$

もわかる.

証明. 一意性から示す. これは, $\varphi \in L^2([0,1])$ について,

$$0 = \varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy$$

となるならば, $\varphi(x)=0$ が成立することを示ば良い. Schwarz の不等式から,

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)|^2 \leq & |\lambda|^2 \int_0^x |K(x,y)|^2 dy \int_0^x |\varphi(y)|^2 dy \leq |\lambda|^2 A^2(x) \|\varphi\|_2^2 \\
|\varphi(x)|^2 \leq & |\lambda|^2 A^2(x) \int_0^x |\lambda|^2 \int_0^y |K(y,z)|^2 dz \int_0^y |\varphi(z)|^2 dz dy \leq |\lambda|^4 \|\varphi\|_2^2 A^2(x) \int_0^x A^2(y) dy \\
& \vdots \\
|\varphi(x)|^2 \leq & |\lambda|^{2n} \|\varphi\|_2^2 A^2(x) \int_0^x A^2(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} A^2(x_2) dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} A^2(x_{n-1}) dx_{n-1}
\end{aligned}
$$

がわかる. ここで,

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{x_0} A^2(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} A^2(x_2) dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} A^2(x_{n-1}) dx_{n-1} \\
&= \int_{0 \leq x_{n-1} \leq x_{n-2} \leq \cdots \leq x_1 \leq x_0} \left(\prod_{i=0}^{n-1} A^2(x_i) \right) dx_0 \ldots dx_{n-1}
\end{aligned}
$$

となるが, $\sigma \in S_n$ について, $X_\sigma := \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in [0, x_0]^n ; 0 \leq x_{\sigma(1)-1} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)-1}\}$ とおいて,

$$
[0, x_0]^n = \bigcup_{\sigma \in S_n} X_\sigma
$$

であり, $\sigma \neq \tau$ のとき, $X_\sigma \cap X_\tau$ は null set なので, 以下の等式が成立する:

$$
\int_{[0,x_0]^n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} A^2(x_i) \right) dx_0 \ldots dx_{n-1} = \sum_{\sigma \in S_n} \int_{X_\sigma} \left(\prod_{i=0}^{n-1} A^2(x_i) \right) dx_0 \ldots dx_{n-1}
$$

対称性より, 任意の $\sigma \in S_n$ について, 積分 $\int_{X_\sigma} \left(\prod_{i=0}^{n-1} A(x_i) \right) dx_0 \ldots dx_{n-1}$ は等しいので,

$$
\begin{aligned}
\int_{0 \leq x_{n-1} \leq x_{n-2} \leq \cdots \leq x_1 \leq x_0} \left(\prod_{i=0}^{n-1} A^2(x_i) \right) dx_0 \ldots dx_{n-1} = & \frac{1}{n!} \int_{[0,x_0]^n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} A^2(x_i) \right) dx_0 \ldots dx_{n-1} \\
= & \frac{1}{n!} \left(\int_0^{x_0} A^2(x) dx \right)^n \\
\leq & \frac{1}{n!} \|K\|_2^{2n}
\end{aligned}
$$

となる. 故に, A が発散しない点において,

$$
|\varphi(x)|^2 \leq \frac{1}{n!} (|\lambda| \|K\|_2)^{2n} \|\varphi\|_2^2 A^2(x) \to 0
$$

が成立し, 故にほとんど至る所で $\varphi = 0$ が成立することがわかる. よって, 一意性が示された.
次に, 存在を示す. K_n の評価をしていく.

$$\begin{aligned}
|K_2(x,y)|^2 \leq& \int_0^x |K(x,z)|^2 dz \cdot \int_0^1 |K(z,y)|^2 dz = A^2(x)B^2(y) \\
|K_3(x,y)|^2 \leq& \int_0^x |K(x,z)|^2 dz \cdot \int_0^x |K_2(z,y)|^2 dz \\
\leq& A^2(x)B^2(y) \int_0^x A^2(z) dz \\
|K_4(x,y)|^2 \leq& \int_0^x |K(x,z)|^2 dz \cdot \int_0^x |K_3(z,y)|^2 dz \\
\leq& A^2(x)B^2(y) \int_0^x A^2(z_1) dz_1 \int_0^{z_1} A^2(z_2) dz_2 \\
&\vdots \\
|K_n(x,y)|^2 \leq& A^2(x)B^2(y) \int_0^x A^2(z_1) dz_1 \int_0^{z_1} A^2(z_2) dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-2}} A^2(z_{n-2}) dz_{n-2}
\end{aligned}$$

がわかるが, 一意性の部分と同じ議論によって,

$$|K_n(x,y)|^2 \leq \frac{1}{n!} A^2(x)B^2(y) \|K\|_2^{2n}$$

つまり

$$\|K_n(x,y)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{n!}} \|K\|_2^{n+2}$$

となる. よって,

$$H(x,y;\lambda) := -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,y)$$

は L^2 の関数である. また,

$$K(x,y) + H(x,y;\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,y) = \lambda \int_0^x K(x,z)H(z,y;\lambda) dz$$

となる.

$$\varphi(x) := f(x) - \lambda \int_0^x H(x,y;\lambda) f(y) dy$$

とおくと, f が L^2 の関数なので, φ も L^2 の関数である. さらに,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y) dy =& f(x) - \int_0^x \left(H(x,y;\lambda) + K(x,y) - \lambda \int_0^x K(x,z)H(z,y;\lambda) dz \right) f(y) dy \\
=& f(x)
\end{aligned}$$

となるので, φ が求める解であることがわかった. □

例. 方程式

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_0^x e^{x-y} \varphi(y) dy, \ (x \in [0,1])$$

を考える．$K(x,y) := e^{x-y}$ とすると，

$$\begin{aligned} K_2(x,y) &= \int_y^x e^{x-y} dz = (x-y)e^{x-y} \\ K_3(x,y) &= \int_y^x (z-y)e^{x-z}e^{z-y} dz = \frac{1}{2}(x-y)^2 e^{x-y} \\ &\vdots \\ K_n(x,y) &= \frac{1}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}e^{x-y} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$H(x,y;\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda(x-y))^n e^{x-y} = -e^{(\lambda+1)(x-y)}$$

がわかるので，解は

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-y)} f(y) dy$$

となる． □