特性類

羽田洋平

Abstract. 前半は飯塚さんに Stiefel-Whitney 類について話していただき, 後半は私が Euler 類や Chern 類について話す予定である. 資料に書いた内容以外にも, 時間があれば Chern-Weil 理論などについて話したいと思っている.

Contents

1. 向き

有限次元実ベクトル空間 V ($\dim V = n$) には向きを定めることができた. 向きとは, V の順序付けられた基底 $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$ の間の, 以下で定まる同値関係の同値類のことである: すなわち $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ と $\langle e'_1, \ldots, e'_n\rangle$ が同値であるとは, 2 つの基底の間の変換行列の行列式が正であることである. そうすると, V には向きが 2 つ存在することになる.

これを用いて, V に埋め込まれた, 頂点に番号が付けられた n-単体 $\Sigma = \langle A_0, \ldots, A_n\rangle$ にも, 向きを定めることができる. それは, 基底 $\left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right\rangle$ の向きとすれば良い.

これを用いて, V の向きは, $H^n(V, V \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) = H_0(V, \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ との同型を定めることということもできる. 実際, V の向きを一つ定めると, その向きに沿った線型な n 単体 $\sigma : \Delta^n \to V$(i.e. affine 写像の Δ^n への制限で得られる n-単体) ので, 像の重心が $0 \in V$ に等しいものが取れる. この σ について, $[\sigma] \in H_n(V, V_0)$ は σ の取り方によらずに一意に定まる. その双対の元 $\mu \in H^n(V, V_0)$ について, $H^n(V, V_0) \cong \mathbb{Z}$ を $\mu \mapsto 1$ として定めることができる. もちろん向きが逆ならば μ は $-\mu$ になり, 同型は -1 倍される.

これを使って, より一般に, 多様体の向きを定めることもできる. M を n 次元位相多様体として, $x \in M$ とする. 特にことわりのない限り, 多様体は連結なものとする. x の周りの座標近傍 (U, ϕ) をとると, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 V の上への同相になっている. 適宜並行移動して, $\phi(x) = 0$ として良い. 切除公理から,

$$H^n(M, M \setminus \{x\}) \cong H^n(V, V \setminus \{0\}) \cong H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

となるので, $\mathbb{R}^n$ の向きは同型 $H^n(M.M \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ を定める. ここで, 同型 $H^n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z})$ を定めることを, x の周りでの M の向きを定めることと定めるのである. 今, 同型 $H^n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ が定まったとする. この時, x の任意の座標近傍 $(U, \phi)(\phi(x) = 0)$ について, $\phi_x : H^n(M, M \setminus \{x\}) \cong H^n(\phi(U), \phi(U) \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ を定めることになるので, 任意の $y \in U$ について, $(U, \phi - \phi(y))$ を考えることで, $H^n(M, M \setminus \{y\}) \cong H^n(\phi(U), \phi(U) \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ が定まるので, y の周りでの向きも定まる. これによって定まる同型を ϕ_{yUx} とおくことにする.

$\gamma : [0,1] \to M$ を道とする．すると，γ を座標近傍 $U_1, \ldots, U_N$ で被覆して，$x_i \in U_i \cap U_{i+1}$ をとってくると，今の操作を繰り返すことで，$\gamma(0) =: x_0$ について，$\mu \in H^n(M, M \setminus \{x\})$ を取ると，$x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, \gamma(1) =: x_N$ について，$\mu_i \in H^n(M, M \setminus \{x_i\})$ が $(\mu_i = \phi_{x_i U_i x_{i-1}}^{-1} \phi_{x_{i-1}} \mu_{i-1}$ によって) 順次定まる．これが道の端点を止めたホモトピー同値によらないことはすぐにわかり，これによって M 上の $\mathbb{Z}$-局所系 $\mathfrak{or}_M$ が定まる．この局所系 $\mathfrak{or}_M$ の 0 でない大域切断が存在することを，M が向き付け可能であるという．また，M が向き付け可能である時，$\mathfrak{or}_M$ の大域切断は $\mathbb{Z}$ に同型であるが，この同型を定めることを M の向きを定めるという．もちろん M の向きが定まれば，M の各点の周りでの向きも定まる．

ここで，M がコンパクト向き付け可能多様体とする．同型 $H^n(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ が定まったとすると，$H^n(M, M \setminus \{x\}) \to H^n(M) \cong \mathbb{Z}$ によって各点の周りに向きが定まり，M の向きが定まる．向きは 2 通りに取れることを考えると，逆もまた然りである．

ここから，多様体 (これはより一般にパラコンパクトな位相空間で大丈夫であるが，最後に述べる主張以外で多様体でないものを使わないので，多様体だと思って良い) 上の向き付け可能な多様体をファイバー F とするファイバー束 $\xi = (E, \pi, M)$ についても向き付け層を定めることができる．M の開集合 U について，$\mathfrak{or}_\xi(U)$ を，$s : U \to \prod_{x \in U} \mathfrak{or}_{E_x}(E_x)$ で，任意の $x \in U$ と x の U の中の局所自明化 $\psi : E|V \cong F \times V$ について，$s(x) \in \mathfrak{or}_{E_x}(E_x)$ で，ψ_y $(y \in V)$ の定める同型 $\mathfrak{or}_{E_y}(E_y) \cong \mathfrak{or}_F(F)$ を通じて $s(x)$ と $s(y)$ が等しくなるものとする (制限射は自明なものとする)．この時，$E|_U$ が自明なら，$\mathfrak{or}_\xi(U) = \mathbb{Z}$ がわかる．

同様にして，多様体上のベクトル束にも向きを定めることができる．$\xi = (E, \pi, M)$ を階数 r のベクトル束とする．M の開集合 U に対して，$\prod_{x \in U} H^r(E_x, E_x \setminus \{0\})$ の元 $(s(x))_{x \in U}$ で，任意の $x \in U$ と任意の局所自明化 $\phi : V \times \mathbb{R}^r \cong E|_V$，$(V \subset U)$ と任意の $y \in V$ について，$\phi_x^* s(x) = \phi_y^* s(y)$ となるものを当てる層が $\mathfrak{or}_\xi$ である．

階数 r のベクトル束 ξ に対して，対応する S^{r-1}-束を作ることができる．これは，ξ に計量を入れるなどして，ξ から $O(r)$ を構造群とする主束が作れて，$O(r)$ の自然な S^{r-1} への作用によって，S^{r-1}-束 $S(\xi) = (S, \pi, M)$ が作れる．同様にして，$\overline{D^r}$-束 $\overline{D}(\xi) = (\overline{D}, \pi, M)$ も作れる．ここで，自然な同型 $H^*(\overline{D^r}, S^{r-1}) \cong H^*(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r \setminus \{0\})$ と $H^{r-1}(S^{r-1}) \xrightarrow{\partial} H^r(\overline{D^r}, S^{r-1})$ によって，ξ の向きに対して $S(\xi)$ の向きが定まる．同様にして $S(\xi)$ の向きが定まれば ξ の向きも定まるので，このようにして，ξ の向きを定めることは S^{r-1}-束 $S(\xi)$ の向きを定めることに対応することがわかった．

向き付け可能なベクトル束 $\xi = (E, \pi, M)$ について，Serre のスペクトル系列 $H^p(M, H^q(E_x, E_{x,0})) \Rightarrow H^{p+q}(E, E_0) (H^*(M) = H^*(E)$-加群として) によって，

$$H^p(E, E_0) \cong \begin{cases} 0 & (p \leq r-1) \\ H^{p-n}(M) & (p \geq r) \end{cases}$$

がわかる．この同型は同型 $H^n(E_x, E_{x,0}) \cong \mathbb{Z}$，すなわち向きを指定すると得られるものである．ここで，一点で向きを指定すれば，仮定から向き付け層が定数層と同型なので，大域的な向きが定まることに注意．ここで，$u \in H^r(E, E_0)$ を上の同型における 1 に対応するコホモロジーとすると，上の同型は，以下のように書ける:

$$\phi : H^p(M) \to H^{r+p}(E, E_0);\ \alpha \mapsto (\pi^* \alpha) \cup u$$

u を向きづけられたベクトル束 ξ の**基本類**といい，この同型を **Thom 同型**という．

また，Serre スペクトル系列は $R(\Gamma \circ \Gamma_M) = R\Gamma \circ R\Gamma_M$ とも書け，$R^p \Gamma_Z(\mathbb{Z}_E) = 0$ $(p \leq r-1)$ なので，前層 $\underline{H}_M^r(\mathbb{Z}_E)$ は層になる．上に見たことから，この層の M への引き戻しがまさに $\mathfrak{or}_\xi$ であることもわかる．このことからも，同型 $H^r(E, E_0) \cong \mathbb{Z}$ を定めることと，ξ の向きを定めることが同値であることもわかる．

コホモロジーの制限射 $H^*(E, E_0) \to H^*(E) \cong H^*(M)$ による u の像を $e(\xi)$ と書き，ξ の **Euler 類**という．

2. Euler 類

Euler 類について少し詳しく見てみよう．前節と同じように $\xi=(E,\pi,M)$ を多様体 M 上の向き付けられた階数 r のベクトル束として, $S(\xi)=(S,\pi,M)$ をそこから構成した球面束とする．まず, 球面束 $S(\xi)$ の全空間のコホモロジーを求めよう．これも Serre のスペクトル系列 $E_2^{p,q}=H^p(M,H^q(S_x))\Rightarrow H^{p+q}(S)$ によって求めるわけだが, 今 ξ の向きから $S(\xi)$ の向きが定まっており, これによって同型 $H^{r-1}(S_x)\cong\mathbb{Z}$ が定まるので, $1\in\mathbb{Z}$ に対応する $\alpha\in E_2^{0,r-1}$ が取れる．$d_r^{0,r-1}(\alpha)=\beta\in H^r(M)$ とおくと, 任意の $\gamma\in E_2^{*,0}$ について, $d_r(\gamma)=0$ なので, $d_r(\alpha\cdot\gamma)=\beta\cdot d_r(\gamma)$ となる．このスペクトル系列は E_{r+1} で退化するので, 以下の完全系列が得られる:

$$\cdots\to H^p(M)\xrightarrow{\pi^*}H^p(S)\to H^{p-r+1}(M)\xrightarrow{\beta}H^{p+1}(M)\to H^{p+1}(S)\to\cdots$$

この完全系列を **Gysin 系列**という．一方で, $H^*(\overline{D})=H^*(M)$, $H^*(\overline{D},S)=H^*(E,E_0)$ などに注意して, 以下の完全系列が得られる:

$$H^{r-1}(M)\xrightarrow{\pi^*}H^{r-1}(S)\to H^r(E,E_0)\to H^r(M)\to H^r(S)\to\cdots$$

従って, 以下の図式をえる:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{r-1}(M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{r-1}(S) & \longrightarrow & H^0(M) & \xrightarrow{\beta} & H^r(M) & \longrightarrow & H^r(S)\\
\| & & \| & & \downarrow\phi & & \| & & \|\\
H^{r-1}(M) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{r-1}(S) & \longrightarrow & H^r(E,E_0) & \longrightarrow & H^r(M) & \longrightarrow & H^r(S)
\end{array}$$

ここで, $\alpha\in H^0(M)$ の ϕ による行き先が向き付け $H^r(E,E_0)\cong\mathbb{Z}$ による 1 に対応する元になっているので, この図式の全ての四角形は可換になっている．従って, Euler 類の定義から, $\beta=e(\xi)$ が得られる．

さて, これで結構 Euler 類の面白みがわかってきたかもしれない．そのまま Euler 類の面白い性質を探ってみよう．

命題 2.1. $e(\xi)$ の $\pmod 2$-還元が $w_r(\xi)$ である．

証明. Thom 同型 $\phi: H^r(M)\to H^{2r}(E,E_0)$ によって, $\phi(e(\xi))=\pi^*e(\xi)\cup u=u|_E\cup u=u\cup u$ となるので, $e(\xi)=\phi^{-1}(u\cup u)$ となる．この $\pmod 2$-還元は $\mathrm{Sq}^n(u\pmod 2))=w_n(\xi)$ なので, 示された． □

命題 2.2 (Euler 類の自然性)**.** $\xi=(E,\pi,M)$, $\xi'=(E',\xi',M')$ を向きづけられた階数 r のベクトル束として, $f:M\to M'$ が向きを保つ (resp. 逆にする) ベクトル束の射とすると, $e(\xi)=f^*e(\xi')$(resp. $e(\xi)=-f^*e(\xi')$ となる．

証明. 向きを保つなら, ξ, ξ' の基本類をそれぞれ u,u' とすると, $f^*u'=u$ となる．逆にするなら $f^*u'=-u$ となる． □

命題 2.3. r が奇数なら, $2e(\xi)=0$ となる．

証明. 各ファイバーを -1 倍する M の恒等写像を覆うベクトル束の射 $\xi\to\xi$ が向きを逆にするので． □

命題 2.4. $\xi=(E,\pi,M)$ を多様体 M 上の向き付けられたベクトル束とする．この時, ξ が至る所 0 でない大域切断を持つなら, $e(\xi)=0$ である．

証明. $s : M \to E$ を至るところ 0 でない切断とする．すると, $S(\xi)$ を作る時に入れた計量について規格化することで, 大域切断 $\widetilde{s} = s/\|s\| : M \to S$ が作れる．$\pi \circ \widetilde{s} = 1_M$ なので, $\widetilde{s}^*\pi^* = 1$．従って, Gysin 系列から,
$$e(\xi) = s^*\pi^*(e(\xi)) = 0$$
を得る． □

M をコンパクトな C^∞-多様体とすると, $H^*(M,\mathbb{Z}) \to H^*(M,\mathbb{R}) = H^*_{DR}(M)$ によって, ベクトル束 ξ の Euler 類 $e(\xi)$(を H^* の捩れで割った同値類) を微分形式で代表することができる．この時, 以下の定理が成立する:

定理 2.1 (Gauss-Bonnet)**.**
$$\int_M e(\tau_M) = \chi(M)$$
ここで, $\tau_M = (TM, \pi, M)$ は M の接束, $\chi(M)$ は M の Euler 標数． ⋄

これと命題 2.4 を用いると, 以下の定理が従う:

定理 2.2. 閉多様体 M について, M の Euler 標数が 0 でないなら, 任意の M 上のベクトル場は少なくとも 1 点は零点を持つ．特に, S^{2n} には至る所 0 でないベクトル場を持ち得ない． □

3. Chern 類

今まで実ベクトル束のことを考えてきたが, 今得た知見を用いて, 複素ベクトル束の特性類を構成してみよう．階数 r の複素ベクトル束 ξ を実ベクトル束とみたものを $\xi_{\mathbb{R}}$ とおくと, ここには複素構造から向きが誘導されている．実際, $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V の順序付けられた基底 $\{e_1, \dots, e_r\}$ について, $\mathbb{R}$-ベクトル空間の基底 $\{e_1, \sqrt{-1}r_1, \dots, e_r, \sqrt{-1}e_r\}$ を対応付け, これの誘導する向きを定めることができるが, 埋め込み $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2r}(\mathbb{R})$ は連続で, $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ は連結なので, $\mathbb{C}$ 上の基底の変換行列の誘導する $\mathbb{R}$ 上の基底の変換行列は単位行列のある連結成分に入っていることがわかる．つまりその行列式は正である．

したがって, 階数 r の複素ベクトル束 $\xi = (E, \pi, M)$ に対して, その Euler 類 $e(\xi) \in H^{2r}(M, \mathbb{R})$ を, ξ から誘導された向き付けられた階数 $2r$ の実ベクトル束 $\xi_{\mathbb{R}}$ の Euler 類として定めることができる．

ここで, $S(\xi) = (S, p, M)$ について, S 上の複素ベクトル束 $p^*\xi$ が誘導される．$p^*\xi$ の部分束 $\tau(E) = (L(E), q, S)$ を, $v \in S$ について, v におけるファイバーが $v \in E_{p(v)}$ の張る p^*E の部分ベクトル束になるものとして定める．さらに, $\xi_0 = (Q(E), q', S)$ を商束 $p^*\xi/\tau$ として定める．

以上から, ベクトル束の階数に関して帰納的に ξ の Chern 類を定義できる．まず, $c_r(\xi) = e(\xi)$, $N > r$ については $c_N(\xi) = 0$ とする．次に, Gysin 系列
$$H^{i-2n}(M) \overset{e(\xi)}{\to} H^i(M) \overset{\pi^*}{\to} H^i(S) \to H^{i-2n+1}(M)$$
について, $i < 2n-1$ ならば, $\pi^* : H^i(M) \to H^i(S)$ は同型である．そこで, $c_{r-i}(\xi) = (\pi^*)^{-1}c_{r-i}(\xi_0)$ として $r-i$ 次 Chern 類を定義することができる．$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots \in H^{\Pi}(M, \mathbb{Z})$ を ξ の全 Chern 類という．

命題 3.1 (Chern 類の自然性)**.** $f : M \to M'$ が, 各ファイバーが同型な複素ベクトル束の射 $\xi \to \xi'$ で覆われるとき, $c(\xi) = f^*c(\xi')$ となる．

証明. 帰納法で示す．ξ の階数を r とする．$c_r(\xi) = f^*c_r(\xi')$ は Euler 類の自然性 (命題 2.2) より従う．これによって, 特に $r = 1$ の場合はすでに示されていることになる．階数が $r-1$ 以下の場合に示されていたとする．$\widetilde{f} : E(\xi) \to E(\xi')$ は, $\overline{f} : S(\xi) \to S(\xi')$ を誘導し, これは $\xi_0 \to \xi'_0$ によって覆われる．

ξ_0, ξ_0' は階数 $r-1$ なので, 帰納法の仮定より $\overline{f}^* c(\xi_0') = c(\xi_0)$ となる. これと以下の可換図式から, 主張が従う:

$$\begin{array}{ccc} S(\xi) & \xrightarrow{\overline{f}} & S(\xi') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

□

系 3.1. $\xi = (E, \pi, M)$ について, $\phi = \xi \oplus \epsilon^k$ ならば, $c(\phi) = c(\xi)$ となる. ここで, ϵ^k は M 上の階数 k の自明束.

証明. straightforfard である. □

さて, 複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ の上の自然束 (tautological line bundle)γ^1 の Chern 類 (=Euler 類) について少し見てみよう. $S(\gamma^1)$ は S^{2n+1} と同一視されるので, Gysin 系列は

$$H^p(S^{2n+1}) \to H^{p-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \overset{\cup c_1}{\to} H^{p+1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \to H^{p+1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

となる. 従って, $1 \leq p \leq 2n$ なら, $\cup c_1 : H^{p-1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \to H^{p+1}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ は同型であることがわかる. したがって, コホモロジー環 $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ は $\mathbb{Z}[a^2]/(a^{2n+2})$ と同型で, γ^1 の第一 Chern 類 c_1 で生成されていることがわかった. 実はこれはより一般的な定理に拡張される:

定理 3.1. 複素 Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^N)$(そして Gr_n) のコホモロジー環は, 普遍束 $\gamma^n(\mathbb{C}^N)$ の Chern 類によって生成される. また, Gr_n の普遍束の Chern 類は代数的関係式を持たない. ⋄