SERRE の GAGA 定理

HANS

Abstract. 本稿では, Serre の GAGA 定理を証明する. Serre の GAGA 定理とは, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の射影代数多様体について, その上の解析的連接層はある代数的連接層の複素解析化と同型になっており, さらに解析化によって誘導される代数的連接層のコホモロジーからその解析化のコホモロジーへの射は同型になっているというものである. これは射影多様体上では代数幾何と解析幾何の (少なくともコホモロジー論を展開する上での) 等価性が保証し, その間の往来を許す定理であり, 例えば小平消滅定理の古典的な証明など, さまざまな応用がある.

1. 複素解析空間

本節では, 複素解析空間について, GAGA 定理の証明に必要そうな最低限の知識をまとめておいた. 複素解析空間とは, 大体特異点を許した複素多様体である. まず, $\mathbb{C}^n$ の部分集合 Δ^n を,

$$\Delta^n := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < 1, \text{for all } i = 1, \ldots, n\}$$

と定める.

定義 1.1 (複素解析空間)**.**

(1) M を複素多様体とする. M の**解析的集合**とは, 部分集合 $X \subset M$ で, 任意の $x \in M$ について, ある x の開近傍 $U \subset M$ および $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_M(U)$ が存在して、

$$X \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}$$

となることをいう. ここで, r は x に依存して良い.

(2) Δ^n の解析的集合 X について, $\mathcal{O}_{\Delta^n}$ のイデアル層 $\mathcal{I}_X$ を,

$$\mathcal{I}_X(U) = \{f \in \mathcal{O}_{\Delta^n}(U) \mid f|_{X \cap U} = 0\}$$

と定める. また, $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_{\Delta^n}/\mathcal{I}_X$ と定めると, $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X) \subset X$ であり, $(X, \mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間となっている.

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$ が**複素解析空間**であるとは, X の開被覆 $\{U_i\}$ が存在して, $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ が Δ^n の解析的集合と局所環付き空間の同型になっていることである.

Δ^n の解析的集合 X について, Δ^n の開被覆 $\{U_i\}$ があって, $U_i \cap X$ は U_i の閉集合なので, X は必ず閉集合になっている. ここで, 岡の連接定理から, 複素解析空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ について, $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_X$-連接加群であることがわかる. このように, 環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ で, 環の層 $\mathcal{O}_X$ が $\mathcal{O}_X$ 加群として連接であるとき, 環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ は連接であるという (もちろん体上の代数的スキームなども連接な環付き空間である). 連接な環付き空間上の連接層について, 以下の定理が知られている:

定理 1.1 (Serre[1])**.** 連接な環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ について, $\mathcal{O}_X$ 加群が連接であることと, 局所有限表示可能であることは同値である.

さて, $(X, \mathcal{O}_X)$ を $\mathbb{C}$ 上の代数的スキームとする. この時, X の開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^N$ が存在して, $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ が affine 代数的スキームになっている. つまり, ある $f_{i1}, \ldots, f_{ir_i} \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n_i}]$ が存在して, $U_i = V(f_{i1}, \ldots, f_{ir_i}) \subset \mathbb{A}^{n_i}_{\mathbb{C}}$ となっている. そこで, U_i^{an} を $U_i^{\mathrm{an}} := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_{i1}(x) = \cdots = f_{ir_i}(x) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ と定めると, これは $\mathbb{C}^n$ の解析的集合で, 従って, 複素解析空間 $(U_i^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{U_i})$ を定

める． $U_{ij} := U_i \cap U_j$ はまた affine 開集合なので, 同様にして複素解析空間 $(U_{ij}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\mathrm{an}})$ が作れる． $(U_{ij}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\mathrm{an}}) \to (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\mathrm{an}})$ は開埋め込みで, 自然な同型 $\varphi_{ij} : (U_{ij}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\mathrm{an}}) \cong (U_{ji}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{U_{ji}}^{\mathrm{an}})$ が存在するので, $\{(U_i^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\mathrm{an}}), (U_{ij}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{U_{ij}}^{\mathrm{an}}), \varphi_{ij}\}$ を貼り合わせデータとして局所環付き空間の貼り合わせを行うことで, 局所環付き空間 $(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ を得る．これは作り方から複素解析空間になっている．またこれは affine 開被覆に依らないこともわかる．さらに X^{an} は集合として $X(\mathbb{C})$ と同型になっており, 自然な局所環付き空間の射 $i : (X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ を得る．さらに, $\mathbb{C}$ 上代数的スキームの射 $X \to Y$ について, 自然に複素解析空間の射 $X^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ が対応付き, 複素解析化と呼ばれる函手 $\{\}^{\mathrm{an}}$: ($\mathbb{C}$ 上代数的スキームの圏) $\to$ (複素解析空間の圏) を定める．ここで, 複素解析空間の圏は複素解析空間を対象として, その間の局所環付き空間の射を射とした圏である．この時, $\mathbb{C}$ 上代数的スキーム X 上の連接層 F について, i^*F を F^{an} と書き, F の複素解析化と呼ぶ. 定理 1.1 によって, X 上の連接層 F の解析化 F^{an} もまた X^{an} 上の連接層になっている．従って, 解析化は函手 $\mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}})$ を定める．さらに, 上の i は忠実平坦なので, $F, G \in \mathrm{Coh}(X)$ について, 自然な射

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, G)^{\mathrm{an}} \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}}, G^{\mathrm{an}})$$

は同型になる (各茎を見る)．Serre の GAGA 定理とは以下の定理である:

定理 1.2 (Serre[2])**.** *X を $\mathbb{C}$ 上の射影的代数多様体とする．この時, 以下が成立する．*

(1) *$F \in \mathrm{Coh}(X^{\mathrm{an}})$ について, ある $F^{\mathrm{alg}} \in \mathrm{Coh}(X)$ が同型を除いて一意に存在して, $(F^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{an}} \cong F^{\mathrm{an}}$ となる．*

(2) *$F \in \mathrm{Coh}(X)$ について, 標準的な射 $H^*(X, F) \to H^*(X^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}})$ は同型になる．*

本記事ではこの定理を証明しようと思う．

2. $\mathcal{O}(m)$

Hodge の分解定理と $(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}$ の整係数コホモロジーを考えることで, $H^{p,q}((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}})$ は $p = q, 0 \leq p \leq n$ の時のみ $\mathbb{C}$, それ以外で 0 であることがわかる．よって, 特に,

$$H^p((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}}) = \begin{cases} \mathbb{C} & (p = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となることがわかり, これは, 複素解析化により誘導されるコホモロジーの射 $H^*(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to H^*((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}})$ が同型になることも示している．一般に, $(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}$ 上の直線束 $\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}}(m)$ のコホモロジーも代数的なものと同型であることを示す．

補題 2.1. *複素解析化から自然に誘導される射*

$$H^*(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) \to H^*((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})$$

は同型である．ここで, $\mathbb{P}^n := \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n])$ は n 次元複素射影空間である．

証明. 以下の証明と, Hartshone [3] などの $\mathbb{P}^n$ のコホモロジーの計算と見比べてみるとより理解が深まるであろう．$(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}$ の斉次座標 $X_0, \ldots, X_n$ をひとつ固定して, $U_i := \{[x_0, \ldots, x_n] \in (\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}} \mid x_i \neq 0\}$ とする．この時, 双正則同型 $U_{i_0 \ldots i_p} \cong (\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^{n-p}$ が作れて, これは $\mathbb{C}^{n+p}$ の閉部分多様体

$$\{(y_1, z_1, \ldots, y_p, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+p} \mid 1 - y_i z_i = 0, (i = 1, \ldots, p)\}$$

と双正則同型なので, Cartan の定理 B より, $i > 0$ について, $H^i(U_{i_0 \ldots i_p}, \mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}}|_{U_{i_0 \ldots i_p}}) = 0$ となる． よって, Leray の定理より, 開被覆 $\{U_i\}_{i=0}^n$ についての Čech コホモロジーを計算すれば良い. $H^0((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})$ の元は $(f_i)_{i=0}^n \in \prod_{i=0}^n \Gamma(U_i, \mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})$ で, $f_j|_{U_{ij}} - f_i|_{U_{ij}} = 0$ が任意の $i < j$ で成

り立つものである．ここで, U_i 上の標準的な座標函数を $z_{j/i}=X_j/X_i$ と定める．$i>0$ として, U_0 の原点での f_0 の Taylor 展開を

$$f_0=\sum_{r_1+\cdots+r_n\le m} a_{r_1\dots r_n} z_{1/0}^{r_1}\dots z_{n/0}^{r_n}$$

とおくと, 座標変換によって,

$$f_i=\sum a_{r_1\dots r_n} z_{0/i}^{m-r_1-\cdots-r_n} z_{1/i}^{r_1}\dots z_{n/i}^{r_n}$$

となる．これは f_i の U_i の原点における Taylor 展開を与えているので, $a_{r_1\dots r_n}\ge 0$ となるのは, 任意の i で $r_i\ge 0$ で, $r_1+\cdots+r_n\le m$ となるときのみである．逆にこの条件が満たされれば f_0 は多項式になり, 他の座標変換もみることでコサイクルになることがわかる．これは $\mathbb{P}^n$ について対応する開被覆で 0 次 Čech コホモロジーを計算したものの解析化による像になっているので, $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(m))\to H^0((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})$ は同型である．次に, $H^n((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})$ を見る．$g_i\in\Gamma(U_{01\dots\hat{i}\dots n},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})$ を, U_0 の自明化の中で原点での Laurent 展開を

$$g_i=\sum a_{r_1\dots r_n} z_{1/0}^{r_1}\dots z_{n/0}^{r_n}$$

とすると, $i\ne 0$ の時, $r_i\ge 0$ の時のみで $a_{r_1\dots r_n}\ne 0$ となる．一方で, $i=0$ の時は, U_1 で自明化したところで g_0 を Laurent 展開して,

$$g_0=\sum a_{r_0r_2\dots r_n} z_{0/1}^{r_0}\dots z_{n/1}^{r_n}$$

として, $r_0\ge 0$ の時のみ $a_{r_0r_2\dots r_n}\ne 0$ となるので, これを U_0 での自明化における有理切断に変換すると,

$$g_0=\sum a_{r_0r_2\dots r_n} z_{1/0}^{m-r_0-r_2-\cdots-r_n} z_{2/0}^{r_2}\dots z_{n/0}^{r_n}$$

となる．よって, この $z_{1/0}^{r_1}\dots z_{n/0}^{r_n}$ の係数を $a_{r_1\dots r_n}$ と置き直すと, $r_1+r_2+\cdots+r_n\le m$ の時のみ 0 でない値が取れる．よって, $s_i=-1-r_i$ と置くことで,

$$H^n((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})=\left\{\sum_{\substack{s_1+\cdots+s_n\le -m-n-1\\ s_i\ge 0}} b_{s_1\dots s_n} z_{1/0}^{-1-s_1}\dots z_{n/0}^{-1-s_n}\mid b_{s_1\dots s_n}\in\mathbb{C}\right\}$$

がわかり, これは $\mathbb{P}^n$ の対応する開被覆で Čech コホモロジーを計算した結果と自然に同型になっている．

あとは $0<p<n$ でコホモロジーが消えることを示せばよい, これは次元による帰納法を使う．$n=1$ の時はこれは明らか．$n-1$ までで示されているとする．この時, 以下の短完全列

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-1)^{\mathrm{an}}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)^{\mathrm{an}}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(m)^{\mathrm{an}}\to 0$$

の長完全列を考える．まず, $h^{n-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(m)^{\mathrm{an}})=\binom{-1-m}{n-1}$, $h^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-1)^{\mathrm{an}})=\binom{-m}{n}$, $h^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)^{\mathrm{an}})=\binom{-1-m}{n}$ なので,

$$0\to H^{n-1}((\mathbb{P}^{n-1})^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})\to H^n((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m-1)^{\mathrm{an}})\to H^n((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})\to 0$$

は完全．同様に,

$$0\to H^0((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m-1)^{\mathrm{an}})\to H^0((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})\to H^0((\mathbb{P}^{n-1})^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}})\to 0$$

も完全であることがわかる．従って, 帰納法の仮定と合わせて, 任意の $m\in\mathbb{Z}$ で,

$$H^p((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m-1)^{\mathrm{an}})=H^p((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}(m)^{\mathrm{an}}),\ (0<p<n)$$

がわかる．$m=0$ の時, $H^p((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\mathrm{an}})=0$ は示してあるので, これで全てが示された． □

上の補題は Serre の GAGA 定理のもっとも基本的なものとして見ることができる. また, それだけでなく, この補題が Serre の GAGA 定理の証明の鍵になっているのである. もうひとつ, Serre の GAGA 定理を示すに当たって重要な定理が以下の定理である.

定理 2.1 (Serre vanishing. anal. ver.)**.** F を $(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}$ 上の連接層とする. この時, 以下の主張が成立する:

(1) $m \gg 0$ について, $F(m)$ は大域切断で生成される.
(2) $m \gg 0$ について, $H^i((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, F(m)) = 0$ $(i > 0)$ となる.

証明. この証明において, $X_n := (\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}$ とおく. (1) について, $a \in X_n$ について, ある $m_0(a)$ が存在して, $H^0(X_n, F(m)) \otimes \mathcal{O}_{X_n} \to F(m)$ が a において全射であることを示せば, この射の余核も連接層なので, 台は閉であり, a の開近傍においてこれは全射であることがわかる. X_n のコンパクト性から, この時ある m_0 が存在して, $m \geq m_0$ なら $H^0(X, F(m)) \otimes \mathcal{O}_{X_n} \to F(m)$ は全射になる. つまり大域切断で生成されることがわかる.

これに注意して n に関する帰納法で示す. $n = 0$ の時は (1) も (2) も明らか. $n-1$ で (1) も (2) も成立することを仮定する. $a \in X_n$ をとり, a を通る超平面 H を固定することで, 完全列

$$0 \to F(m-1) \to F(m) \to F|_H(m) \to 0$$

が定まる. $H \cong X_{n-1}$ なので, $n-1$ の場合の (2) から, ある m_0 が存在して, $m \geq m_0$ なら $H^i(X_n, F(m)) = 0$ $(i > 0)$ が成立する. 従って, このコホモロジーの長完全列は

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(X_n, F(m-1)) \to H^0(X_n, F(m)) \to H^0(H, F|_H(m)) \\ &\to H^1(X_n, F(m-1)) \to H^1(X_n, F(m)) \to 0 \end{aligned}$$

となる. これによって, 全射の列

$$H^1(X_n, F(m_0-1)) \to H^1(X_n, F(m_0)) \to \cdots \to H^1(X_n, F(m)) \to \cdots$$

を得るが, コンパクト複素解析空間上の連接層のコホモロジーは有限次元である (証明は例えば [4]. Chapter VI 参照) ので, ある m_1 が存在して, $m \geq m_1$ で $H^1(X_n, F(m-1)) \to H^1(X_n, F(m))$ は同型になる. 従って, $m \geq m_1$ で,

$$0 \to H^0(X_n, F(m-1)) \to H^0(X_n, F(m)) \to H^0(H, F|_H(m)) \to 0$$

は完全になる. m_2 を, $m \geq m_2$ で $F|_H(m)$ が大域切断で生成されるようにとってくると, 上の完全列の右側から, $m \geq m_2$ なら $H^0(X_n, F(m)) \otimes \mathcal{O}_{X_n,a} \to F(m)_a$ は H の定義イデアルの a での茎を法として全射になっている. 従って, 中山の補題から, これは全射になることがわかった. つまり n の場合の (1) が示された.

次に (2) を示す. $i > n$ の時は, 任意の $F \in \mathrm{Coh}(X_n)$ について, $H^i(X_n, F) = 0$ なので, OK. 従って, 命題 P_i を, 「任意の $F \in \mathrm{Coh}(X_n)$ について, ある m_0 が存在して, $m \geq m_0$ ならば, 任意の $p \geq i$ で $H^p(X_n, F(m)) = 0$ となる」として, $P_{i+1} \implies P_i$ を示せば良い. $F \in \mathrm{Coh}(X_n)$ を任意にとる. (1) より, ある $r \geq 0$, $m_0 \geq 0$ が存在して, 全射 $\mathcal{O}_{X_n}^{\oplus r} \to F(m_0)$ が作れる. 従って, 短完全列

$$0 \to K \to \mathcal{O}(-m_0)^{\oplus r} \to F \to 0$$

が取れる. P_{i+1} を仮定すると, ある m_1 が存在して, $m \geq m_1$ なら, $p > i$ で, $H^p(X_n, K(m)) = 0$ となる. また, (補題 2.1 より, 例えば)$m_1 > m_0$ となるように取り替えることで, $p > 0$ について, $H^p(X_n, \mathcal{O}(m-m_0)^{\oplus r}) = 0$ となる. よって, このコホモロジーの長完全列を考えることで, $m \geq m_1$ とすれば, 任意の $p \geq 1$ で, $H^p(X_n, F(m)) = H^{p+1}(X_n, K(m))$ となることがわかる. よって特に $p \geq i$ で $H^p(X_n, F(m)) = 0$ が成立する. これは P_i に他ならない. よって (2) も示された. $\square$

3. GAGA 定理の証明

さて, 準備は済んだので, GAGA 定理の証明をしよう. 射影多様体 X とその上の連接層 F について, $j : X \to \mathbb{P}^n$ を射影埋め込みとすると, これはもちろん閉埋め込みなので, 標準的なコホモロジーの同型 $H^*(\mathbb{P}^n, j_*F) \to H^*(X, F)$ がある. 同様に, Cartan の定理 B より, X^{an} 上の連接層 F^{an} のコホモロジーについても $(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}$ の標準開被覆の X への引き戻しによる Čech コホモロジーでもとまるので, 標準的な同型 $H^*((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}}) \to H^*(X^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}})$ がある. また, X(resp. X^{an}) 上の連接層は $\mathbb{P}^n$(resp. $(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}$) 上の連接層で, 台が X に含まれるものと同一視されるので, F の解析化の台は F の台の解析化になっていることを踏まえると, $X = \mathbb{P}^n$ のときに示せば良いことがわかる. まず (1) の存在性を示そう. $F \in \mathrm{Coh}((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}})$ とする. この時, 定理 2.1(2) より, ある m, r について, 短完全列

$$0 \to K \to \mathcal{O}(-m)^{\oplus r} \to F \to 0$$

が存在する. K についても同じように全射 $\mathcal{O}(-l)^{\oplus s} \to K$ をとることで, ある $\varphi : \mathcal{O}(-l)^{\oplus s} \to \mathcal{O}(-m)^{\oplus r}$ が存在して, $F = \mathrm{Cok}(\varphi)$ となることがわかる. ここで, 補題 2.1 より,

$$\begin{aligned}\varphi \in& H^0((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}}}(\mathcal{O}(-l)^{\oplus s}, \mathcal{O}(-m)^{\oplus r})) \\ =& H^0((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}(l-m)^{\oplus rs}) \\ \cong& H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(l-m)^{\oplus rs})\end{aligned}$$

となるので, ある $\varphi_{\mathrm{alg}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(\mathcal{O}(-l)^{\oplus s}, \mathcal{O}(-m)^{\oplus r})$ が存在して, $\varphi = (\varphi^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{an}}$ となる. そこで, $F^{\mathrm{alg}} = \mathrm{Cok}(\varphi^{\mathrm{alg}})$ とすると, 解析化の完全性から $(F^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{an}} = \mathrm{Cok}(\varphi) = F$ となる.

次に, (2) を示す. $p > n$ ならば, $H^p((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}}) = H^p(\mathbb{P}^n, F) = 0$ なので, $p \geq i+1$ について, 任意の $F \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$ で標準的な射によって $H^p(\mathbb{P}^n, F) \cong H^p((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}, F^{\mathrm{an}})$ が示されているときに $p = i$ でもこれが成り立つことを示せば良い. 代数的な Serre の消滅定理から, 短完全列

$$0 \to K \to \mathcal{O}(-m)^{\oplus r} \to F \to 0$$

がある. $L := \mathcal{O}(-m)^{\oplus r}$ とおく. 解析化してコホモロジーの長完全列をかくと, 以下のようになる:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i(L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(F) \arrow[r] \arrow[d] & H^{i+1}(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{i+1}(L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
\cdots \arrow[r] & H^i(L^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & H^i(F^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & H^{i+1}(K^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & H^{i+1}(L^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

縦の射は解析化 (環つき空間の射 $(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}} \to \mathbb{P}^n$ による引き戻し) から誘導された自然なものなので, 各四角形は可換図式になっている. ここから, 図式追跡によって, 任意の $F \in \mathrm{Coh}(X)$ について, $H^i(F) \to H^i(F^{\mathrm{an}})$ が全射であることがわかる. 次に, 以下の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i(K) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & H^i(L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^i(F) \arrow[r] \arrow[d] & H^{i+1}(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & {} \\
\cdots \arrow[r] & H^i(K^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & H^i(L^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & H^i(F^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & H^{i+1}(K^{\mathrm{an}}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

この図式追跡によって, $H^i(F) \to H^i(F^{\mathrm{an}})$ は単射であることがわかる. 従って, (2) が示された.

最後に (1) の一意性を示す. $F, G \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^n)$ について, $F^{\mathrm{an}} \cong G^{\mathrm{an}}$ であったとすると, その同型射を φ として, $\varphi \in H^0(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}}}(F^{\mathrm{an}}, G^{\mathrm{an}})) = H^0(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}(F, G))$ となるので, ある $\varphi^{\mathrm{alg}} : F \to G$ があって, $(\varphi^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{an}} = \varphi$ となる. 解析化の函手は忠実平坦だったので, $\mathrm{Ker}(\varphi^{\mathrm{alg}}) = 0$ および $\mathrm{Cok}(\varphi^{\mathrm{alg}}) = 0$ を得て, φ^{alg} が同型射になる. よって一意性も示された. $\square$

系 3.1 (Chow の定理)**.** $X \subset \mathbb{P}^n$ を解析的集合とする. この時, X は代数的集合でもある.

証明. X の構造層 $\mathcal{O}_X$ は連接 $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^n)^{\mathrm{an}}}$ 加群で, $X = \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X) = \mathrm{Supp}((\mathcal{O}_X)_{\mathrm{alg}})$ となるので, X は代数的集合になる. $\square$

References

[1] Serre, Jean-Pierre. "Faisceaux Algébriques Cohérents." Annals of Mathematics, vol. 61, no. 2, 1955, pp. 197–278. JSTOR, https://doi.org/10.2307/1969915.

[2] Serre, Jean-Pierre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 (1956), pp. 1-42. doi : 10.5802/aif.59. https://aif.centre-mersenne.org/articles/10.5802/aif.59/

[3] Hartshone, Robin. "*Algebraic Geometry*", Springer New York, NY, Graduate Texts in Mathematics, 1977, https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0.

[4] Grauert, Hans. & Remmert, Reinhold. "*Theory of Stein Spaces*", Springer Berlin, Heidelberg, Classics in Mathematics, 2003, https://doi.org/10.1007/978-3-642-18921-0.

[5] Griffiths, Phillip. & John, Adams. "*Topics in Algebraic and Analytic Geometry*". (MN-13): Notes From a Course of Phillip Griffiths. Princeton University Press, 1974. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/j.ctt130hk5x.