層とコホモロジー

Hans

定義

- S を Riemann 面とする.
- $p \in S$ について, $\mathfrak{O}_p$ を, p の周りで正則な関数全体からなる (局所) 環とする．また, S の開集合 U について, U 上の正則関数全体からなる環を $\mathfrak{O}(U)$ とおく.
- $p \in S$ について, $\mathfrak{M}_p$ を, p の周りで定義された有理関数全体からなる体とする．また, S の開集合 U について, U 上の有理関数全体からなる体を $\mathfrak{M}(U)$ とおく.

Mittag-Leffler 問題

$\{p_n\} \subset S$ を，S の離散部分集合とする．各々の p_i で，指定された Laurent 主要部を持つ S 上の有理関数で，$S \setminus \{p_n\}$ では正則な関数は存在するか?

Čech によるアプローチ

$\underline{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を S の開被覆で，$\#(\{p_n\} \cap U_\alpha) \leq 1$ が任意の α で成立しているものとする．この時，U_α 上では Mittag-Leffler 問題の局所的な解が取れる．ここで，その解を $\{f_\alpha \in \mathfrak{M}(U_\alpha)\}$ とすると，$U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ 上の正則関数 $f_{\alpha\beta}$ を，

$$f_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta$$

と置くと，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in A$ について，$U_{\alpha\beta\gamma}$ 上でコサイクル条件

$$f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0$$

が成立する．ここで，正則関数族 $\{g_\alpha \in \mathfrak{O}(U_\alpha)\}$ で，

$$f_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha$$

なるものが見つかれば，$\{f_\alpha + g_\alpha\}$ は大域的に "張り合い"，それを f と置くと，これが題意を満たす関数になる．
問題：$\{f_\alpha + g_\alpha\}$ は大域的に張り合う，つまり，$f_\alpha + g_\alpha = f_\beta + g_\beta$ が $U_{\alpha\beta}$ 上で成立することを示せ．

Čech の理論から,

$$\{\{f_{\alpha\beta}\} \mid f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = 0\} = Z^1(\underline{U}, \mathfrak{O})$$

$$\{\{f_{\alpha\beta}\} \mid \text{ある } \{g_\alpha \in \mathfrak{O}(U_\alpha)\} \text{ で}, f_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha\}$$
$$= \delta C^0(\underline{U}, \mathfrak{O}) = B^1(\underline{U}, \mathfrak{O})$$

となるので, 一次 Čech コホモロジー

$$H^1(\underline{U}, \mathfrak{O}) := \frac{Z^1(\underline{U}, \mathfrak{O})}{B^1(\underline{U}, \mathfrak{O})}$$

を考えればいいことになる.

Čech コホモロジー

定義

$\mathfrak{F}$ を多様体 M 上の層とする．この時，$\underline{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を M の開被覆として，

$$C^0(\underline{U}, \mathfrak{F}) := \prod_{\alpha} \mathfrak{F}(U_\alpha)$$

$$C^1(\underline{U}, \mathfrak{F}) := \prod_{\alpha_0 \neq \alpha_1} \mathfrak{F}(U_{\alpha_0 \alpha_1})$$

$$\vdots$$

$$C^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) := \prod_{\#I = p+1,\ I \subset A} \mathfrak{F}(U_I)$$

とする．$C^p(\underline{U}, \mathfrak{F})$ の元を p-コチェインという．

定義 (続き)

射
$$\delta : C^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) \to C^{p+1}(\underline{U}, \mathfrak{F})$$
を, $I = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}), \sigma \in C^p(\underline{U}, \mathfrak{F})$ に関して,
$$(\delta\sigma)_I = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sigma_{I \setminus \{\alpha_j\}} |_{U_I}$$
で定義して, これをコバウンダリ作用素という. p-コチェインであり, さらに $\ker \delta$ の元となるものを p-コサイクルといい, $\mathrm{Im}\delta$ の元となるものを p-コバウンダリという.

定義

p-コサイクル全体からなる Abel 群を，$Z^p(\underline{U}, \mathfrak{F})$ と書き，p-コバウンダリ全体からなる Abel 群を $B^p(\underline{U}, \mathfrak{F})$ と書く．この時，$\delta^2 = 0$ なので，

$$H^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) = \frac{Z^p(\underline{U}, \mathfrak{F})}{B^p(\underline{U}, \mathfrak{F})}$$

が定義できて，これを p 次 Čech コホモロジー群という．

M の開被覆 $\underline{U}$ の細分 $\underline{U}'$ について，$U_\alpha \in \underline{U}$ に対して，$\underline{U}' \ni U'_\beta \subset U_\alpha$ なる β を一つ対応づける写像を φ と置くと，制限写像 $\rho^{U_\alpha}_{U_{\varphi\alpha}}$ を各 α に対応づけることで，

$$\rho_\varphi : C^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) \to C^p(\underline{U}', \mathfrak{F})$$

が定義される．ここで，$\delta \circ \rho_\varphi = \rho_\varphi \circ \delta$ なので，ψ を今ひとつの上のような写像とすると，$\sigma \in Z^p(\underline{U}, \mathfrak{F})$ について，$\delta \circ \rho_\varphi(\sigma) = 0$ かつ $\delta \circ \rho_\psi(\sigma) = 0$ が成立する．故に，φ によらない写像

$$\rho : H^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) \to H^p(\underline{U}', \mathfrak{F})$$

が定義される．よって，極限

$$\varinjlim_{\underline{U}} H^p(\underline{U}', \mathfrak{F})$$

を，$H^p(M, \mathfrak{F})$ といい，M 上の p 次 Čech コホモロジー群という．

Leray の定理

上の定義は確かに well-defined であるものの，実用上は扱いにくい．ここで，ある $\underline{U}$ で，$H^*(\underline{U}, \mathfrak{F}) = H^*(M, \mathfrak{F})$ が成り立っていて欲しい．

定理: Leray の定理

M の被覆 $\underline{U} = \{U_i\}_{i \in A}$ が，非輪状である，つまり，ある p が存在して，任意の $q > 0, I \subset A, \#I = p + 1$ で，

$$H^q(U_I, \mathfrak{F}) = 0$$

が成立するならば，$H^*(\underline{U}, \mathfrak{F}) = H^*(M, \mathfrak{F})$ が成立する．

準備

Abel 群の層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{H} \longrightarrow 0$$

について，自然に，射

$$C^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha} C^p(\underline{U}, \mathfrak{G})$$

$$C^p(\underline{U}, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta} C^p(\underline{U}, \mathfrak{H})$$

が誘導される．コバウンダリ δ と α, β は可換なので，さらに

$$H^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha^*} H^p(\underline{U}, \mathfrak{G})$$

$$H^p(\underline{U}, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta^*} H^p(\underline{U}, \mathfrak{H})$$

が誘導される．

$\sigma \in C^p(\underline{U}, \mathfrak{H})$ で, $\delta\sigma = 0$ を満たすものをとってくる. この時, β の全射性から, $\underline{U}$ のある細分 $\underline{U}'$ と, σ の制限写像による分割 $\rho\sigma$ で, ある $\tau \in C^p(\underline{U}', \mathfrak{G})$ で, $\beta\tau = \rho\sigma$ なるものがとってこれる. さらに, $\beta\delta\tau = \delta\beta\tau = \delta\rho\sigma = \rho\delta\sigma = 0$ なので, $0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 0$ の完全性から, さらに細かい細分 $\underline{U}''$ と, $\mu \in C^{p+1}(\underline{U}, \mathfrak{F})$ で, $\alpha\mu = \rho\delta\tau$ を満たすものが唯一 (i.e. α が単射) 存在する. ここで, τ に自由度があるが, 異なる τ' をとってきた時でも, $\beta(\tau - \tau') = 0$ から, ある $\kappa \in C^{p-1}(\underline{U}, \mathfrak{H})$, $\delta\kappa = 0$ なるものが取れて, さらに細かい被覆 $\underline{U}'$ で見ると, β と δ の可換性から, ある $\lambda \in C^{p-1}(\underline{U}', \mathfrak{G})$ で, $\beta\lambda = \kappa$ かつ $\delta\lambda = \rho(\tau - \tau')$ となるものが取れて, $\delta(\tau - \tau') = \delta^2\lambda = 0$ となり, μ は τ の選び方によらず決まることがわかった. よって,

$$\delta^* : H^p(M, \mathfrak{H}) \to H^{p+1}(M, \mathfrak{G})$$

が定義できた.

補題

Abel 群の層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{H} \longrightarrow 0$$

について,

$$0 \longrightarrow H^0(M,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha^*} H^0(M,\mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta^*} H^0(M,\mathfrak{H})$$

$$\xrightarrow{\quad\delta^*\quad} \qquad \cdots$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^p(M,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha^*} H^p(M,\mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta^*} H^p(M,\mathfrak{H})$$

$$\xrightarrow{\quad\delta^*\quad} \qquad \cdots$$

は完全列である.

ここで, $\underline{U}$ の任意の p-単体 $U = U_I$ について,

$$0 \to \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{G}(U) \to \mathfrak{H}(U) \to 0$$

が完全ならば, 十分細かい開被覆 $\underline{U}$ で,

$$C^p(\underline{U}, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha} C^p(\underline{U}, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta} C^p(\underline{U}, \mathfrak{H})$$

が完全になるので, 図式を追うことで,

$$H^p(\underline{U}, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\beta^*} H^p(\underline{U}, \mathfrak{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(\underline{U}, \mathfrak{F})$$

が完全になることがわかる.

Mittag-Leffler 問題再び

問題に戻る．$\mathfrak{PP} := \mathfrak{M}/\mathfrak{O}$ とする．この時，完全列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{O} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{PP} \longrightarrow 0$$

を得る．この時，先の完全列の議論から，

$$H^0(S, \mathfrak{M}) \to H^0(S, \mathfrak{PP}) \to H^1(S, \mathfrak{O})$$

が完全になる．よって，Mittag-Leffler 問題について，大域切断 $g \in \mathfrak{PP}(S) = H^0(S, \mathfrak{PP})$ が与えられた時に (これは，$g_{\alpha\beta} = -g_\alpha + g_\beta \in \mathfrak{O}(U_{\alpha\beta})$ となるので $\mathfrak{PP}$ で見た時に，0 になる)，$f \in H^0(S, \mathfrak{M})$ で，$\beta^* f = g$ となるものがあれば，自動的に，$\delta^* g = (-f_U + f_V)_{UV} = 0$ となり，f が求める答えとなる．