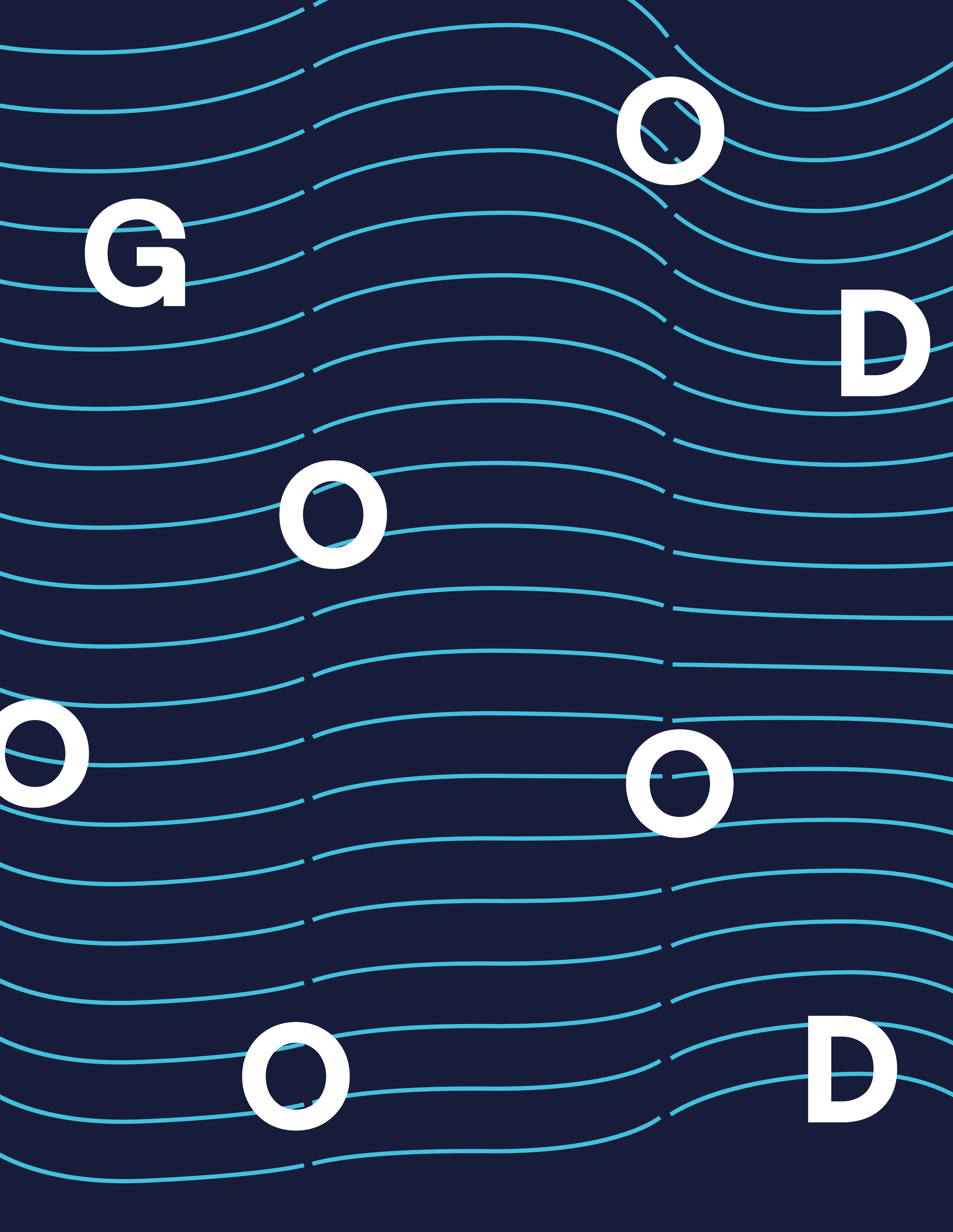
G
O
D
O
O
O
O
D

16.10.2024. matematická analyza

Stredná hodnota náhodnej premennej

$X \in \{h_1; h_2 \dots\dots, h_n\}$

elementárne javy sú čísla

X = náhodná premenná

E_X = stredná hodnota náhodnej premennej

$$E_X = p_1 \cdot h_1 + p_2 \cdot h_2 + p_1 \cdot h_1$$

= toto je dosť presnejší, keď sa uváže priemerný plat - dôležité viac odpovedá realite

Príklad. 1)

nespravodlivou 8 stenou kockou;

↓ ↳ niektoré čísla sú pravdepodobnosti, že padnú

Pravidelný osemsten

Čo vieme: $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{8}$

$$p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{12}$$

$p_7 = p_8 = ?$

a) Chceme určit průměrná hozená hodnota

b) Průměrná hozená hodnota součtu nebo součinu (2 hody)?

- Co mi víme?

Aká je pravděpodobnost že padne nějaké číslo

= pravděpodobnost = 1

$p_7 + p_8 = 1 - \{$ ty máme pravděpodobnosti $\}$

$$1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{12} = 1$$

$$= 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{8 - 3 - 2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$p_7 = p_8 = \frac{3}{16}$$

Už máme všetko stačí počítať podľa vzorca

$X \in [1;8]$ = náhodná premenná, to vhodené číslo

→ je vlastne takší mieru rýchnosti

$$EX = \frac{1}{8}\cdot(1+2+3) + \frac{1}{12}\cdot(4+5+6)$$

$$+ \frac{3}{16}(7+8) = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{45}{16}$$

→ na desať číslo

$$= \frac{12+20+45}{16} = \frac{77}{16} = 4{,}8125$$

je jakoby blízka päti

= o čom mi dáva informáciu

Nadlejme 10 000 pokusu

Zistili by sme sa len v malých jednotkách

E = Expected v angličtiny

b) zavedem si dvě náhodné proměnné

X – 1 hod $\quad x \in [1,8]$

Y – 2 hod $\quad Y \in [1,8]$

$$E(X+Y) = EX + EY = \frac{77}{16} + \frac{77}{16} = \frac{154}{16}$$

↳ střední hodnota součtu

→ zkrátíme

$$\frac{154}{16} = \frac{77}{8} = 9{,}625$$

první hod nijak neovlivní ten druhý hod

je to dvojnásobek

neplatí vždy náhodné proměnné musí být nezávislé

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$$

střední hodnota součinu

$$= \frac{77}{16} \cdot \frac{77}{16} = \frac{5929}{256} = 23.16015625$$

Příklad 2.)

7M	12
8M	25
3M	1

= Sady to chápu, že jeden vytáhnu a ten to nevracím to

$$\frac{7}{18}$$

7 → k míčku, který chceme

18 → celkově

= Závislé náhodné proměnné, všechny možné součiny, to by bylo pracné

∇ Bacha na součin jen když jsou to nezávislé

3.) Hody mincí ; aký je priemerný počet hodov, aby sme dosiahli 3 stejných znaku

náhodná premenná X

⊗ = hlava

O = líc

$X \in \{3, 4, 5\}$

⊗ O ⊗ ⊗

musia byť aspoň 3 hody aby som mal šancu hodiť tri mince

-> ⊗ ⊗ O O

(a) 3 hody : $p_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = \frac{1}{4}$

⊗ ⊗ ⊗ = dejme tomu že by padli 3 hlavy

to samé

b) pokračujeme na to 4 hody

⊗ O ⊗ | ⊗

<=> a v tom súčasne sem opäť hodil hlavu

$p_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\; p'(2;1)$ = 3 hlavy vo sledu hlava vždy môže padnúť len jedna strana

→ Teraz ešte opačne len iný prístup môžme voliť $= \frac{1}{8} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{3}{8}$

Je to permutácie s opakovaním

c) 5 hodov : ⊗ ⊗ ○ ○ |

$$p_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P'(2,2)$$

↳ pravdepodobnosť v 5 hode

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{4!}{\cancel{2!} \cdot 2!} \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \quad = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

= Už len spočítame strednú hodnotu

$$Ex = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{3}{8} \cdot 5 =$$

Princíp vhlenu a exhlenu

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

→ Konečný počet prvkov

→ Spravíme zjednotení
čo tam je viac
mať nechaný tam len jednou

→ Fungovalo keby dve množiny mali prázdny prienik

→ Iné ktoré sú v prieniku dvoch daní
dvakrát

→ Ideálne mať ich disjunktné

↳ ten mechanizmus je princíp vhlenu a exhlenu

$$= \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1; 2; \dots; n\}} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|$$

→ J o je sama keby nabodo

opäť mohutnosť

nejaký prvok z množiny J

$$J = \{2, 3, 9\} \to A_2 \cap A_3 \cap A_9$$

$$J = \{4; 6\}$$

= liché tak je tam +

= sudé tak je tam −

Konkrétní příklad

4.) Kolik je v [1, 128] čísel, která nejsou dělitelná 2, 3, 5 ani sedmi, hledám kolik je č která nejsou dělitelná

[1; 128] = 128 → kolik má čísel

→ oceď víme tuto úlohu snažíme se vyřešit kolik je těch špatných {ji dělitelná jedním a více}

Já si zavedu množiny $A_2; A_3; A_5; A_7$

$A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$

= své to tie špatné čísla

všechna čísla v [1; 128] která jsou dělitelná 5ti

= musím vyřešit možnosti vzdálo sama

= $|A_2|$ = jedna množina už první → když další +

$|A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_3|$

$- |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5|$

$- |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| +$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7|$

$+ |A_3 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|$

= Konkrétně rozepsaný nahlíme a sečteme

Příklad: $|A_3 \cap A_5 \cap A_7|$

↳ každé 105 číslo je to naše číslo

$= \left\lfloor \frac{128}{105} \right\rfloor$ → 1,82 dolní celá část je 3 . . .

↳ beru dolní celou část

to není celé číslo

= písemka hodně podobná předpokladnou

Binomická věta

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 \cdot b^n$$

$$+ \binom{n}{2} a^2 \cdot b^{n-2} + \ldots \ldots \binom{n}{n} a \cdot b^0$$

1.) $(x-1)^{26}$; aký je koeficient u členu s x^{22}

$x + (-1)$ $\quad n = 26$, $k = 22$ $\quad \binom{26}{22} \cdot x^{22} \cdot (-1)^{26-22}$

zistíme

$(-1)^4 \quad -1$

$$\binom{26}{22} = \binom{26}{4} = \frac{26!}{4!\,22!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot \cancel{24} \cdot 23}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2}}$$

$$= 14\,950$$

$$a_r = 14\,950$$

= Toto je pomerne ľahký príklad

Rekurence

- o čo tu ide
  - -> máme postupnosť, čísla za sebou prý člen, druhý, prvé kľúčo máme, chceme poznať celú postupnosť

a_n - je vyjadrený ako lineárny kombinácia k predošlých členov

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \alpha_k \cdot a_{n-k}$$

- lineárna rekurence k - tého řádu

$$a_n = A_{n-1} + B a_{n-2}$$

-> lineární rekurence druhého řádu

2.) $a_1 = -3$; $a_2 = 13$ $\qquad a_{1027}$

$$a_n = 5 a_{n-1}$$

$$6 a_{n-2}$$

najdi mi tenhle člen

$a_3 = 5 \cdot 13 + 6 \cdot (-3) = 47$

-> hledalo se řešení rekurentnosti

a_{1027}

-> najít tvar předpisu, jenom n dosadím a skončím

-> Co kdyby som predpokladal, že bude geometrická

$a_n = r^n$

$r^n = 5 r^{n-1} + 6 r^{n-2}$

$r^2 = 5r + 6$

$r^2 - 5r - 6 = 0$

-> charakteristická rovnica

-> myšlienka se dá napsat jako alfa 1 krát prvý druhý kořen na n-tou

$r_1 = -1 \,|\, r_2 = 6$

dá v součinu -6 a v súčte dá 5

$r_1 \cdot r_2 = -6$

$r_1 + r_2 = 5$

$$a_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 6^n$$

-> Čo sme nepoužili zo zadania?

L> Potrebujeme aby sme na

a_1 = na n treba dosadiť jednotku

$$a_1 = -\alpha_1 + 6\alpha_2 = -3$$

$$a_2 = \alpha_1 + 36\alpha_2 = 13$$

$$\alpha_1 = \frac{10}{7} + \frac{21}{7}$$

$$\alpha_1 = \frac{31}{7}$$

3.) $a_1 = 2$; $a_2 = 7$

Recurrence :

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 3$$

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3^n$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 3$$

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 3$$

$$\begin{array}{l} a_1 \Rightarrow \\ a_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \\ 9\alpha_1 + 18\alpha_2 \end{array} \right.$$

$$3\alpha_1 + \cancel{6}^{1} \cdot \frac{1}{\cancel{9}_{3}} = 2$$

$$3\alpha_1 = \frac{6}{3} - \frac{1}{3}$$

$$3\alpha_1 = \frac{5}{3}$$

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}$$

$$a_n = \frac{5}{9} 3^n + \frac{1}{9} n \cdot 3^n$$

$$= \frac{1}{9} 3^n (n + 5)$$

$$= 3^{n-2} (n + 5)$$

$$a_3 = 6 \cdot 7 .$$

Princíp vzniku vlnenia

stredná bodu sa nakoľký prenos