

## 第四章 高幂次之和与费马大定理

### 习题

- 4.2 求方程  $a^3 + b^3 = c^2$  满足  $c \geq b \geq a \geq 1$  的整数解。
  - (a) 求出方程的三个正整数解。
  - (b) 如果  $(A, B, C)$  是方程的解,  $n$  是任意整数, 证明  $(n^2A, n^2B, n^3C)$  也是方程的解。
  - (c) 求方程的4个不同本原解。
  - (d) 解  $(2, 2, 4)$  满足  $a = b$ 。求满足  $a = b$  的所有本原解  $(a, b, c)$ 。
  - (e) 求出方程的一个满足  $a > 10000$  的本原解。

(a)  $(1, 2, 5), (2, 2, 4), (8, 8, 24)$

(b)  $(n^2A)^3 + (n^2B)^3 = n^6A^3 + n^6B^3$ , 因为  $(A, B, C)$  是方程的解, 所以  $n^6(A^3 + B^3) = n^6C^2$   
所以  $(n^2A, n^2B, n^3C)$  也是方程的解

(c) 4个不同本原解为  $(1, 2, 5), (2, 2, 4), (70, 105, 1225), (65, 260, 4225)$

(d) 当  $a = b$  时,  $a^3 + b^3 = 2a^3 = c^2$ , 此时  $c$  为偶数, 设  $c = 2x$ ,  $2a^3 = 4x^2 \Rightarrow 2x^2 = a^3$  所以  $a$  也为偶数  
当  $a$  为偶数时, 所有解都形如  $(2n, 2n, 4n^3)$ , 所以没有本原解

(e) 根据题(a)的提示, 取  $x = 1$ , 寻找  $(a, b, c) = (1+y^3, y(1+y^3), (1+y^3)^2)$

若要  $a > 10000$ , 取  $y = 22$ , 本原解  $(a, b, c) = (10694, 234278, 113401201)$