第七章 因数分解与算数基本定理

> 令p是素数，假设p整除乘积ab，则p整除a或p整除b(或者p既整除a也整除b)。

> **素数整除性质**：假设素数p整除乘积$a_1a_2...a_r$，则p整除a_1，a_2，...，a_r中至少一个因数。

> **算数基本定理**：每个整数$n \geq 2$可唯一分解成素数乘积$n = p_1p_2...p_r$

> **习题**

- *7.1* 假设$gcd(a, b) = 1$，进而设a整除乘积bc。证明a必整除c。

  7.1 因为 $gcd(a,b)=1$，方程 $ax+by=1$ 有整数解，从而 $acx+bcy=c$ 有整数解
  因为 a 整除 ac，bc，所以 a 必整除 c

- *7.2* 假设$gcd(a, b) = 1$，进而设a整除c，b整除c。证明乘积ab必整除c。

  7.2 因为 $gcd(a,b)=1$，方程 $ax+by=1$ 有整数解，从而 $acx+bcy=c$ 有整数解
  根据题目，a 整除 c，b 整除 c，所以 ab 整除 ac、ab 整除 bc，因此，ab 必整除 c

- *7.3* 设s，t为奇数，$s > t \geq 1$，$gcd(s, t) = 1$，证明st，$\frac{s^2-t^2}{2}$，$\frac{s^2+t^2}{2}$两两互素。

  7.3 ① 证明 $gcd(st, \frac{s^2-t^2}{2})=1$
  由于 s, t 为奇数，所以 st 为奇数，$\frac{s^2-t^2}{2}$ 为偶数，$gcd(st, \frac{s^2-t^2}{2})=1$ 得证
  ② 证明 $gcd(st, \frac{s^2+t^2}{2})=1$
  假设 d 是 st 和 $\frac{s^2+t^2}{2}$ 的公因数，由于 d 整除 st，所以 d 整除 s 或 t，假设 d 整除 s
  又由于 d 整除 $\frac{s^2+t^2}{2}$，即 $s^2+t^2 \equiv 0 \pmod{2d}$。然而，$s$ 和 t 是互质的，所以 $d=1$
  因此 $gcd(st, \frac{s^2+t^2}{2})=1$ 得证
  ③ 证明 $gcd(\frac{s^2-t^2}{2}, \frac{s^2+t^2}{2})=1$
  由于 s, t 为奇数，所以 $\frac{s^2-t^2}{2}$ 为偶数，$\frac{s^2+t^2}{2}$ 为奇数，$gcd(\frac{s^2-t^2}{2}, \frac{s^2+t^2}{2})=1$ 得证

- *7.5* 本习题继续研究$\mathbb{E}$-区域。
  - *(a)* 叙述所有$\mathbb{E}$-素数。
  - *(b)* 证明每个偶数可分解成$\mathbb{E}$-素数的乘积。
  - *(c)* 我们看到180有三种分解法分解成$\mathbb{E}$-素数的乘积。求有两种不同分解法分解成$\mathbb{E}$-素数乘积的最小数。180是有三种分解法的最小数吗？求有四种分解法的最小数。

- *(d)* 求仅有一种分解法分解成$\mathbb{E}$-素数乘积的所有偶数。

(a) E-素数是除以2结果为奇数的素数

(b) 如果偶数是2的幂次，则是2的乘积

如果偶数除以2到最后结果为奇数，则这个偶数是E-素数2和2乘奇数的乘积

(c) 有两种不同分解法分解成E-素数乘积的最小数为36 ⇒ 2×18 或 6×6

180是有三种分解法的最小数。

有4种分解法的情况为 $2 \cdot 2pqr$，$2p \cdot 2qr$，$2q \cdot 2pr$，$2r \cdot 2pq$

要求最小数就要让 p, q, r 取最小素数，又因为要分解成 E-素数的乘积，所以 $p, q, r = 3, 5, 7$

2×210，6×70，10×42，14×30，即最小数为 420

(d) 仅有一种分解法分解成E-素数乘积的所有偶数为 $2^k p$（p为素数）

- *7.6* $\mathbb{M}$-世界只有被4除余1的正整数。在$\mathbb{M}$-世界中，我们不可能把数相加，但可以把数相乘。如果对某$\mathbb{M}$-数k有$n = mk$，则称m $\mathbb{M}$整除 n。如果n的$\mathbb{M}$-因数仅为1与它本身，则称n是$\mathbb{M}$-素数。
  - *(a)* 求前6个$\mathbb{M}$-素数
  - *(b)* 求有两种不同分解法分解成$\mathbb{M}$-素数乘积的$\mathbb{M}$-数n

(a) M数 = {1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65 ...}

所以前6个 M-素数为 {5, 9, 13, 17, 21, 29}

(b) 有两种不同分解法分解成M-素数乘积的M-数为441

- *7.7* 编写将正整数n分解成素数乘积的程序。

```go
package main

import (
	"fmt"
)

func primeFactors(n int) []int {
	var factors []int

	for n%2 == 0 {
		factors = append(factors, 2)
		n = n / 2
	}

	for i := 3; i*i <= n; i = i + 2 {
		for n%i == 0 {
			factors = append(factors, i)
			n = n / i
		}
	}

	if n > 2 {
		factors = append(factors, n)
	}
```

```go
    return factors
}

func main() {
    var n int
    fmt.Print("请输入一个正整数: ")
    _, err := fmt.Scan(&n)
    if err != nil {
        return
    }

    factors := primeFactors(n)
    fmt.Printf("%d 的素数因子分解为: %v\n", n, factors)
}
```