第六章 线性方程与最大公因数

> **线性方程定理**：设a与b是非零整数，$g = gcd(a, b)$。方程总是有一个整数解(x_1, y_1)，它可由欧几里得算法得到。则方程的每一个解可由
>
> $$(x_1 + k \cdot \frac{b}{g}, y_1 - k \cdot \frac{a}{g})$$
>
> 得到，其中k可为任意整数。

> **习题**

- *6.1*
  - *(a)* 求方程$12345x + 67890y = gcd(12345, 67890)$的一组整数解。
  - *(b)* 求方程$54321x + 9876y = gcd(54321, 9876)$的一组整数解。

(a) $67890 = 5 \times 12345 + 6165$　　$\frac{12345 - gcd}{2} + 5 \times 12345 = 67890$

$12345 = 2 \times 6165 + 15$　$\Rightarrow$　$12345 - gcd + 10 \times 12345 = 2 \times 67890$

$6165 = 411 \times 15 + 0$　　$11 \times 12345 - 2 \times 67890 = gcd(12345, 67890)$

(b) $54321 = 5 \times 9876 + 4941$　　$4941 = a - 5b \ (a = 54321, b = 9876)$

$9876 = 1 \times 4941 + 4935$　　$4935 = 6b - a$

$4941 = 1 \times 4935 + 6$　$\Rightarrow$　$6 = 2a - 11b$

$4935 = 822 \times 6 + 3$　　$gcd = 9048b - 1645a$

$6 = 2 \times 3 + 0$　　$54321 \times (-1645) + 9876 \times 9048 = gcd(54321, 9876)$

- *6.2* 求下述方程的所有整数解
  - *(a)* $105x + 121y = 1$
  - *(b)* $12345x + 67890y = gcd(12345, 67890)$
  - *(c)* $54321x + 9876y = gcd(54321, 9876)$

(a) $121 = 1 \times 105 + 16$　　$16 = a - b \ (a = 121, b = 105)$

$105 = 6 \times 16 + 9$　　$9 = 7b - 6a$

$16 = 1 \times 9 + 7$　$\Rightarrow$　$7 = 7a - 8b$

$9 = 1 \times 7 + 2$　　$2 = 15b - 13a$

$7 = 3 \times 2 + 1$　　$105 \times (-53) + 121 \times 46 = 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

根据线性方程定理，所有整数解为$(-53 + 121k, 46 - 105k)$

(b) $12345 \times 11 + 67890 \times (-2) = gcd(12345, 67890) = 15$

根据线性方程定理，所有整数解为$(11 + 4526k, -2 - 823k)$

(c) $54321 \times (-1645) + 9876 \times 9048 = gcd(54321, 9876) = 3$

根据线性方程定理，所有整数解为$(-1645 + 3292k, 9048 - 18107k)$

- *6.3* 编写程序使得能够计算正整数a与b的最大公因数g以及方程$ax + by = gcd(a, b)$的一组特解(x, y)。

- *(a)* 用你的程序对下述有序对(a, b)计算$g = gcd(a, b)$以及$ax + by = g$的整数解。
  - *(i)* $(19789, 23548)$
  - *(ii)* $(31875, 8387)$
  - *(iii)* $(22241739, 19848039)$

```go
package main

import "fmt"

func extendedGCD(a, b int) (g, x, y int) {
	if b == 0 {
		return a, 1, 0
	}

	g, x1, y1 := extendedGCD(b, a%b)
	x = y1
	y = x1 - (a/b)*y1

	return g, x, y
}

func main() {
	a1 := 19789
	b1 := 23548

	a2 := 31875
	b2 := 8387

	a3 := 22241739
	b3 := 19848039

	g1, x1, y1 := extendedGCD(a1, b1)

	g2, x2, y2 := extendedGCD(a2, b2)

	g3, x3, y3 := extendedGCD(a3, b3)

	fmt.Printf("gcd(%d, %d) = %d\n", a1, b1, g1)
	fmt.Printf("特解 (x, y) = (%d, %d)\n", x1, y1)

	fmt.Printf("gcd(%d, %d) = %d\n", a2, b2, g2)
	fmt.Printf("特解 (x, y) = (%d, %d)\n", x2, y2)

	fmt.Printf("gcd(%d, %d) = %d\n", a3, b3, g3)
	fmt.Printf("特解 (x, y) = (%d, %d)\n", x3, y3)
}
```

```
tangxianning@MacBook-Air GoProject % go run test.go
gcd(19789, 23548) = 7
特解 (x, y) = (1303, -1095)
gcd(31875, 8387) = 1
特解 (x, y) = (-381, 1448)
gcd(22241739, 19848039) = 237
特解 (x, y) = (-8980, 10063)
```

- *6.4*
  - *(a)* 求方程$6x+15y+20z=1$的整数解x，y与z。
  - *(b)* a，b，c满足什么条件时方程$ax+by+cz=1$有整数解？当有解时给出求解的一般方法。
  - *(c)* 使用*(b)*中的方法求方程$155x+341y+385z=1$的一组整数解。

(a) 因为gcd(15,20)=5，令x=1，15y+20z=-5 ⇒ 15×(-y)+20×(-z)=5

即转换为与上述题目相同的做法

20=1×15+5

15=3×5+0 ⇒ 15×(-1)+20×1=5 ⇒ (y,z)=(1,-1)

整数解为(1,1,-1)

(b) 当gcd(a,b,c)=1时，ax+by+cz=1有整数解

首先求解 ax+by=gcd(a,b)，因为gcd(a,b,c)=1，所以gcd(gcd(a,b),c)=1，求解

gu+cz=1，即(ax+by)w+cz=1，解为(x,y,z)=(xu,yu,z)

(c) 首先求gcd(341,155)=31

341=2×155+31 ⇒ 341+155×(-2)=31

155=5×31

再求gcd(31,385)=1

385=12×31+13　　13=a-12b (a=385,b=31)

31=2×13+5　　5=25b-2a

13=2×5+3 ⇒ 3=5a-62b

5=1×3+2　　2=87b-7a

3=1×2+1　　385×12+31×(-149)=1

2=2×1+0

所以x=-2，y=1，u=-149，z=12

整数解为(298，-149，12)

- 6.5 假设$gcd(a,b)=1$。证明对每个整数c，方程$ax+by=c$有整数解x与y。

65 如果$gcd(a,b)=1$，那么$aX+bY=1$有整数解(X,Y)，所以$ax+by=1$有整数解

$(x,y)=(cX,cY)$使得$a(cX)+b(cY)=c$

先求$gcd(37,47)=1$

$47=1\times37+10$		$10=a-b$ $(a=47,b=37)$
$37=3\times10+7$		$7=4b-3a$
$10=1\times7+3$	$\Rightarrow$	$3=4a-5b$
$7=2\times3+1$		$1=14b-11a$
$3=1\times2+1$		$47\times(-11)+37\times14=1$
$2=2\times1+0$		

所以解为$(1442,-1133)$

- 6.6
  - (a) 解释为什么方程$3x+5y=4$没有整数解$x\geq0$与$y\geq0$。
  - (b) 制作形如$3x+5y(x\geq0, y\geq0)$的数值表，给出不可能出现的数值的猜想，然后证明你的猜想是正确的。
  - (c) 对$(a,b)=(3,7)$，求不能表示成$ax+by(x\geq0, y\geq0)$形式的最大整数。

(a) $x\geq0$时如果$y\geq1$，$3x+5y\geq5$，$3x+5y=4$不成立

所以$y=0$，$3x=4$没有整数解得证

(b)

x\y	0	1	2	3	4	5
0	0	5	10	15	20	25
1	3	8	13	18	23	28
2	6	11	16	21	26	31
3	9	14	19	24	29	34
4	12	17	22	27	32	37
5	15	20	25	30	35	40

$\Rightarrow$ 不可能出现的数值为$\{1,2,4,7\}$

(c)

x\y	0	1	2	3	4
0	0	7	14	21	28
1	3	10	17	24	31
2	6	13	20	27	34
3	9	16	23	30	37
4	12	19	26	33	40

$\Rightarrow$ 不能表示成$ax+by(x\geq0, y\geq0)$形式的最大整数为11