第三章 勾股数组与单位圆

> 圆$x^2+y^2=1$上的坐标是有理数的点都可由公式
>
> $$(x,y)=(\frac{1-m^2}{1+m^2},\frac{2m}{1+m^2})$$
>
> 得到，其中m取有理数值。

> 如果将有理数m写成分数v/u，则公式变成
>
> $$(x,y)=(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2},\frac{2uv}{u^2+v^2})$$
>
> 消去分母就给出勾股数组
>
> $$(a,b,c)=(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$$

> **习题**

- *3.1* 正如我们已看到的，所有勾股数组(a,b,c)(其中b为偶数)有如下形式：

  $$(a,b,c)=(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)(\text{其中}u\text{，}v\text{为整数})$$

  - *(a)* 如果u与v有公因数，解释(a,b,c)不是本原勾股数组的原因。
  - *(b)* 求出没有公因数的整数$u>v>0$，使得勾股数组$(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$不是本原的。
  - *(c)* 制作一个由满足$1\le v<u\le 10$的所有u和v值得到的勾股数组表。
  - *(d)* 应用*(c)*表求出使勾股数组$(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$是本原的充分条件。

- (e) 证明在(d)中你给出的条件的确是充分的。

(a) 因为 u 与 v 有公因数 k，设 $u=kx$，$v=ky$，所以 $u^2-v^2=k^2(x^2-y^2)$，$2uv=2k^2xy$，$u^2+v^2=k^2(x^2+y^2)$ 即 a,b,c 有公因数 k^2，根据本原勾股数组的定义，a,b,c 没有除1以外的公因数，所以 (a,b,c) 不是本原勾股数组。

(b) 令 $u=3$，$v=1$，$u^2-v^2=8$，$2uv=6$，$u^2+v^2=10$，有公因数2，此时，勾股数组 $(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2)$ 不是本原的。

(c)

$v \backslash u$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	(3, 4, 5)	(8, 6, 10)	(15, 8, 17)	(24, 10, 26)	(35, 12, 37)	(48, 14, 50)	(63, 16, 65)	(80, 18, 82)	(99, 20, 101)
2		(5, 12, 13)	(12, 16, 20)	(21, 20, 29)	(32, 24, 40)	(45, 28, 53)	(60, 32, 68)	(77, 36, 85)	(96, 40, 104)
3			(7, 24, 25)	(16, 30, 34)	(27, 36, 45)	(40, 42, 58)	(55, 48, 73)	(72, 54, 90)	(91, 60, 109)
4				(9, 40, 41)	(20, 48, 52)	(33, 56, 65)	(48, 64, 80)	(65, 72, 97)	(84, 80, 116)
5					(11, 60, 61)	(24, 70, 74)	(39, 80, 89)	(56, 90, 106)	(75, 100, 125)
6						(13, 84, 85)	(28, 96, 100)	(45, 108, 117)	(64, 120, 136)
7							(15, 112, 113)	(32, 126, 130)	(51, 140, 149)
8								(17, 144, 145)	(36, 160, 164)
9									(19, 180, 181)

(d) 充分条件是 $u>v$，u 和 v 必须奇偶性不同且 u 和 v 没有公因数。

(e) 如果 u 和 v 都是奇数，令 $u=2x+1$，$v=2y+1$，则 $u^2-v^2=4x^2+4x-4y^2-4y$，$2uv=2(2x+1)(2y+1)$，$u^2+v^2=4x^2+4x+4y^2+4y+2$，此时勾股数组中三个数均为偶数，所以不是本原的。

如果 u 和 v 都是偶数或 u 和 v 有公因数，则根据(a)，此时的勾股数组不是本原的。

- 3.2 使用过点$(1,1)$的直线来描述圆$x^2+y^2=2$上所有坐标是有理数的点。

3.2 假设我们取任意有理数 m，观察过点 $(1,1)$ 斜率为 m 的直线 L，直线 L 由方程 $L: y-1=m(x-1)$ 给出

得到方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=m(x-1)+1 \end{cases} \Rightarrow x=1$ 或 $\dfrac{m^2-2m-1}{1+m^2}$

将 x 的值代入直线 L 的方程 $y=m(x-1)+1=m\left(\dfrac{m^2-2m-1-1-m^2}{1+m^2}\right)+1=\dfrac{-2m^2-2m+1+m^2}{1+m^2}=\dfrac{-m^2-2m+1}{1+m^2}$

这样，对每一个有理数 m 得到方程 $x^2+y^2=2$ 的一个有理数解 $\left(\dfrac{m^2-2m-1}{1+m^2}, \dfrac{-m^2-2m+1}{1+m^2}\right)$

- 3.3 求双曲线$x^2-y^2=1$上坐标是有理数的点的公式。

3.3 假设我们取任意有理数 m，观察过点 $(1,0)$ 斜率为 m 的直线 L，直线 L 由方程 $L: y=m(x-1)$ 给出，得到方程组 $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ y=m(x-1) \end{cases} \Rightarrow x=1$ 或 $\dfrac{m^2+1}{m^2-1}$

将 x 的值代入直线 L 的方程 $y=m(x-1)=\dfrac{2m}{m^2-1}$

这样，对每一个有理数 m 得到双曲线 $x^2-y^2=1$ 上坐标是有理数的点 $\left(\dfrac{m^2+1}{m^2-1}, \dfrac{2m}{m^2-1}\right)$

- 3.4 曲线$y^2=x^3+8$上有点$(1,-3)$与$(\frac{-7}{4},\frac{13}{8})$。过这两点的直线与曲线恰好在另一点相交，求第三个点。你能解释为什么第三个点的坐标是有理数吗?

3.4 过这两点的直线是 $y=-\frac{37}{22}(x-1)-3$

假设我们取任意有理数 m，观察过点 $(1,-3)$ 斜率为 m 的直线 L，直线 L 由方程 $L: y=m(x-1)-3$

给出，得到方程组 $\begin{cases} y^2=x^3+8 \\ y=m(x-1)-3 \end{cases} \Rightarrow x=1$ 或 $\frac{\pm\sqrt{m^4-6m^2-24m-3}-1+m^2}{2}$

将 $m=-\frac{37}{22}$ 代入得 $x=1, -\frac{7}{4}, \frac{433}{121}$

所以第三个点的坐标是 $\left(\frac{433}{121}, \frac{9765}{1331}\right)$，是有理数。

- *3.5* 在第一章中介绍了既是平方数又是三角数的自然数，并且在习题*1.1*中对它们进行了研究。
  - *(a)* 证明每个平方三角数都可用方程$x^2-2y^2=1$的正整数解来描述
  - *(b)* 点$(1,0)$在曲线$x^2-2y^2=1$上。设直线L经过点$(1,0)$且斜率为m。求出L与曲线的另一个交点。
  - *(c)* 取$m=\frac{v}{u}$，其中$u^2-2v^2=1$。证明*(b)*中求出的那个交点的坐标是整数，进而证明你找到了$x^2-2y^2=1$的一个正整数解。
  - *(d)* 从$x^2-2y^2=1$的解$(3，2)$出发，反复应用*(b)*和*(c)*求出更多$x^2-2y^2=1$的解。通过那些解找出另外一些平方三角数的例子。
  - *(e)* 证明这个过程会产生无穷多个不同的平方三角数

(a) 因为平方三角数满足 $m^2=\frac{1}{2}(n^2+n)$，即 $2m^2=(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

两边同时乘以4得 $4(n+\frac{1}{2})^2-8m^2=1$

令 $x=2(n+\frac{1}{2})=2n+1$，$y=2m$ 即可

(b) 直线 L 为 $y=m(x-1)$，联立得方程组 $\begin{cases} x^2-2y^2=1 \\ y=m(x-1) \end{cases} \Rightarrow x=1$ 或 $\frac{2m^2+1}{2m^2-1}$

所以 L 与曲线的另一个交点为 $\left(\frac{2m^2+1}{2m^2-1}, \frac{2m}{2m^2-1}\right)$

(c) 将 $m=\frac{v}{u}$ 代入得另一个交点为 $(-2v^2-u^2, -2uv)$，同时 $(2v^2+u^2, 2uv)$ 是 $x^2-2y^2=1$ 的一个正整数解

(d) 利用(c)中的公式得解有 $(3,2)$，$(17,12)$，$(577,408)$

此时 $n=1, 8, 288$，$m=1, 6, 204$

平方三角数有 36，41616。

(e) 根据(d)中的计算过程，将每次的解作为 u, v 重新得到一个更大的解且都是整数解，因此会产生无穷多个不同的平方三角数、