HOMEWORK 1: Exercises for Monte Carlo Methods

16340232 王泽浩

github repo：https://github.com/hansenbeast/2019-SYSU-DM/tree/master/HW1

Exercise 1

蒙特卡洛方法可以用于产生接近 pi 的近似值。图 1 显示了一个带有 1/4 内切圆在内的边长为 1 的正方形。正方形的面积是 1，该 1/4 圆的面积为 pi/4。通过编 程实现在这个正方形中产生均匀分布的点。落在圈内（红点）的点和总的投在 正方形（红和绿点）上的点的比率给出了 pi/4 的近似值。这一过程称为使用蒙 特卡洛方法来仿真逼近 pi 实际值。令 N 表示总的投在正方形的点。当投点个数分别是 20, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 5000 时，pi 值分别是多少？对于每个 N， 每次实验算出 pi 值，重复这个过程 20 次，并在表中记下均值和方差。

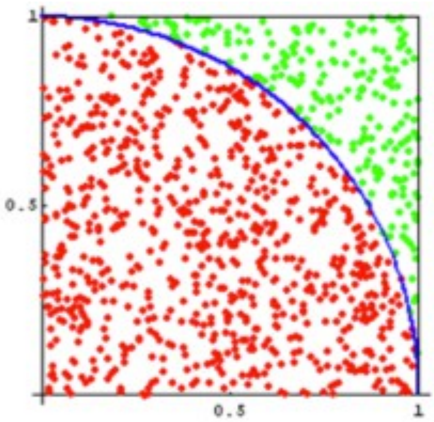


Figure 1 蒙特卡洛方法求解 pi

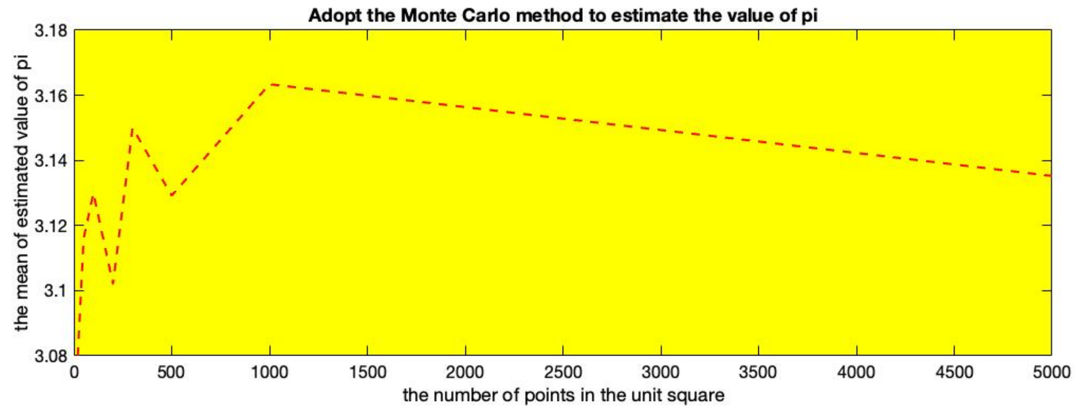
算法概述

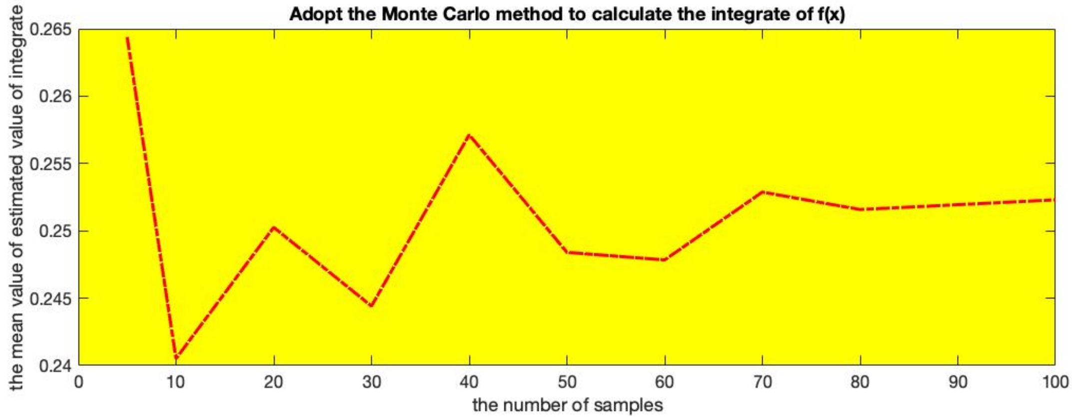
蒙特卡洛方法的名字来源于摩纳哥的一个城市蒙特卡洛，该城市以赌博业闻名，而蒙特卡洛方法正是以概率为基础的方法。 蒙特卡洛方法（Monte Carlo method），也称统计模拟方法，是二十世纪四十年代中期由于科学技术的发展和电子计算机的发明，而被提出的一种以概率统计理论为指导的一类非常重要的数值计算方法。是指使用随机数（或更常见的伪随机数）来解决很多计算问题的方法。

在单位正方形中，产生随机坐标点，计算与原点的距离小于等于1的点的个数，记作 n，与所有点的个数 N 的比值即可作为 pi/4 的近似值。根据概率论，当 N 越大时，近似值的误差越小。

```
clear;
points_num = [20, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 5000];
cal_pi_mean = [];
cal_pi_var = [];

for num = points_num
    cal_pi = [];
    for x = 1:20
        in_count = 0;
        for y = 1:num
            x_cor = rand(1);
            y_cor = rand(1);
            if x_cor*x_cor + y_cor*y_cor <= 1
                in_count = in_count + 1;
            end
        end
        cal_pi = [cal_pi in_count * 4 / num];
    end
    cal_pi_mean = [cal_pi_mean mean(cal_pi)];
    cal_pi_var = [cal_pi_var var(cal_pi)];
end

subplot(2,1,1);
plot(points_num,cal_pi_mean);
title('Adopt the Monte Carlo method to estimate the value of pi');
xlabel('the number of points in the unit square');
ylabel('the mean of estimated value of pi');
subplot(2,1,2);
plot(points_num,cal_pi_var);
xlabel('the number of points in the unit square');
ylabel('the variance of estimated value of pi');
```

实验结果





投点个数	20 次测试 pi 的均值	20 次测试的方差
20	3.08000000000000	0.132210526315790
50	3.11600000000000	0.0676884210526316
100	3.13000000000000	0.0348421052631579
200	3.10200000000000	0.0179326315789474
300	3.15000000000000	0.0106456140350877
500	3.12920000000000	0.00593027368421052
1000	3.16340000000000	0.00176383157894737
5000	3.13524000000000	0.000549758315789475

1. 随着投点的次数增加，方差在减少，圆周率 π 计算的准确率在增加
2. 但当次数达到一定规模时，准确率精度增加在减缓，其原因是生成的随机数是伪随机的，这也是蒙特卡洛算法达不到祖冲之求圆周率精度的内在原因
3. 当采样点的个数达到 50000 时，经实验证明，pi 的均值会在 3.141 左右。

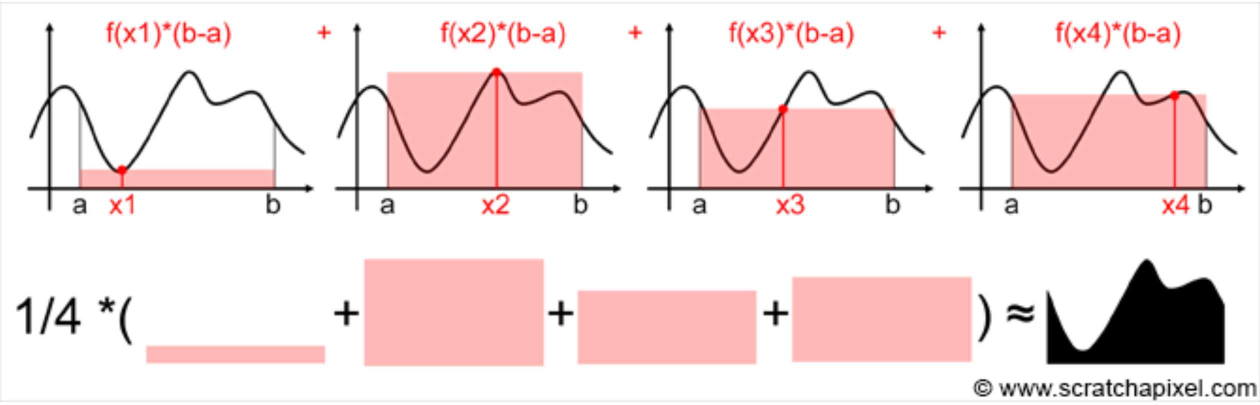
Exercise 2

我们现在尝试通过蒙特卡洛的方法求解如下的积分：

$$\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$$

该积分的求解我们可以直接求解，即有$\int_{x=0}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}$。如果你用蒙特卡洛的方法求解该积分，你认为 x 可以通过什么分布采样获得？如果采样次数是分别是 N = 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100，积分结果有多好？对于每个采样次数 N，重复蒙特卡洛过程 100 次，求出均值和方差，然后在表格中记录对应的均值和方差。

算法描述



> 参考：http://www.scratchapixel.com/lessons/mathematics-physics-for-computer-graphics/monte-carlo-methods-in-practice/monte-carlo-integration

对于一个连续函数f，它的积分公式为：

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

对应的，f的蒙特·卡罗积分公式如下：

$$F^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}$$

连续的随机变量X的数学期望为：

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} pdf(x) x dx$$

$$pdf(x_i) = \frac{1}{b-a}$$

所以对于连续函数f，f的每个可能取值x的出现概率等于x的取值范围[a,b]的倒数，即均匀分布

可以使用 matlab 中的 rand 产生随机分布的采样点

f(x)是连续函数时:

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)pdf(x)dx$$

$$E[\frac{f(X_i)}{pdf(X_i)}] = E[\frac{f(x)}{pdf(x)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{pdf(x)}pdf(x)dx$$

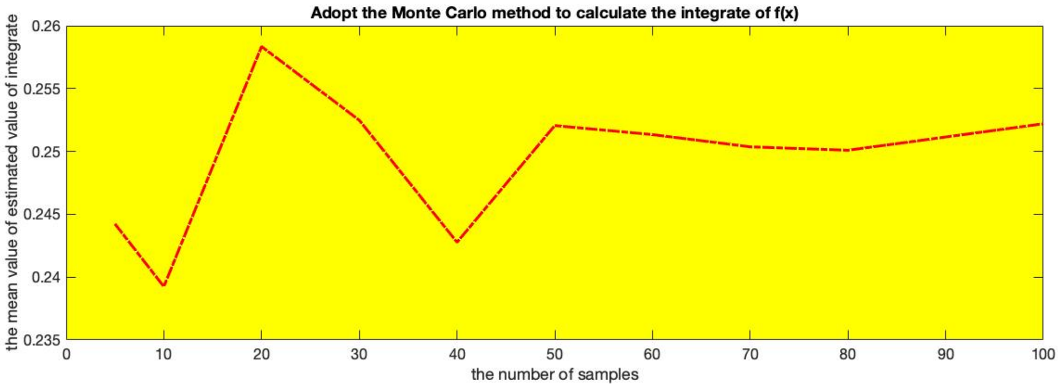
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

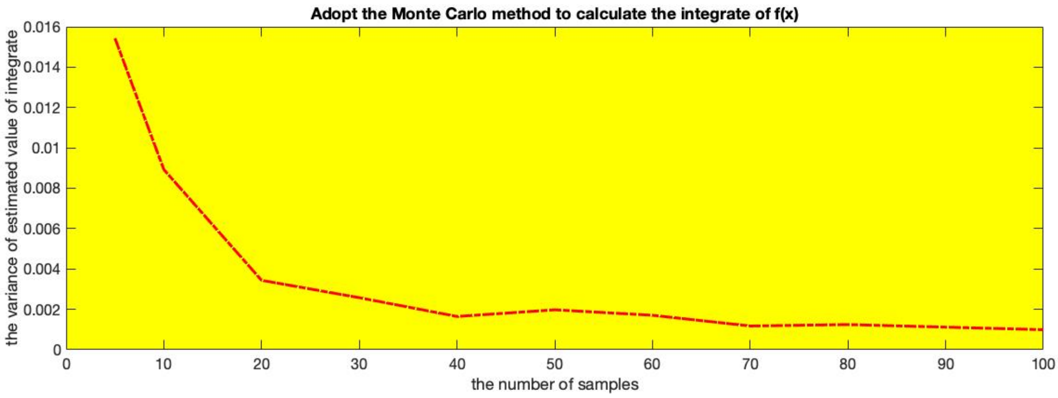
在函数图像上直观的理解就是，求积分区间中均匀分布的采样点所形成不同矩形面积的均值，即近似为连续函数的积分。

```
clear;
sample_num = [5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100];

cal_integrate_mean = [];
cal_integrate_var = [];

for num = sample_num
    cal_integrate = [];
    for x = 1:100
        cal_sum = 0;
        for y = 1:num
            x_cor = rand(1);
            cal_sum = cal_sum + power(x_cor,3);
        end
        cal_integrate = [cal_integrate cal_sum / num];
    end
    cal_integrate_mean = [cal_integrate_mean mean(cal_integrate)];
    cal_integrate_var = [cal_integrate_var var(cal_integrate)];
end

subplot(2,1,1);
plot(sample_num,cal_integrate_mean);
title('Adopt the Monte Carlo method to calculate the integrate of f(x)');
xlabel('the number of samples');
ylabel('the mean value of estimated value of integrate');
subplot(2,1,2);
plot(sample_num,cal_integrate_var);
xlabel('the number of samples');
```

```
ylabel('the variance of estimated value of integrate');
```

实验结果





采样次数	100次测试的均值	100次测试的方差
5	0.244234442843949	0.0154290530849741
10	0.239243678731331	0.00892726102142538
20	0.258343794651879	0.00343968199866542
30	0.252479391401457	0.00257872525916870
40	0.242771408252728	0.00164868773369621
50	0.252054098370322	0.00197827066319704
60	0.251338271860725	0.00170797214775276
70	0.250363662253486	0.00117675272075054
80	0.250091736260338	0.00124772108843291
100	0.252201478522939	0.000992651575872455

1. 随着采样次数增加，结果会逐渐接近真实值 1/4 ，但方差在减少。
2. 之所以在采样次数较少的情况下，结果有时也会接近真实值的原因在于程序产生的是伪随机数。

Exercise 3

我们现在尝试通过蒙特卡洛的方法求解如下的更复杂的积分：

$$\int_{x=2}^{4}\int_{y=-1}^{1} f(x,y) = \frac{y^2 * e^{-y^2} + x^4 * e^{-x^2}}{x * e^{-x^2}}$$

你能够通过公式直接求解上述的积分吗？如果你用蒙特卡洛的方法求解该积分，你认为(x, y)可以通过什么分布采样获得？如果点（x, y）的采样次数是分别是 N = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 200, 500, 积分结果有多好？对于每个采样次数 N，重复蒙特卡洛过程 100 次，求出均值和方差，然后在表格中记录对应的均值和方差。

算法描述

对 Ex2 中进行二重积分的推导，利用 matlab 中 rand 随机产生均匀分布的 x 和 y 值

```
x_cor = rand(1) * 2 + 2;
y_cor = rand(1) * 2 - 1;
```

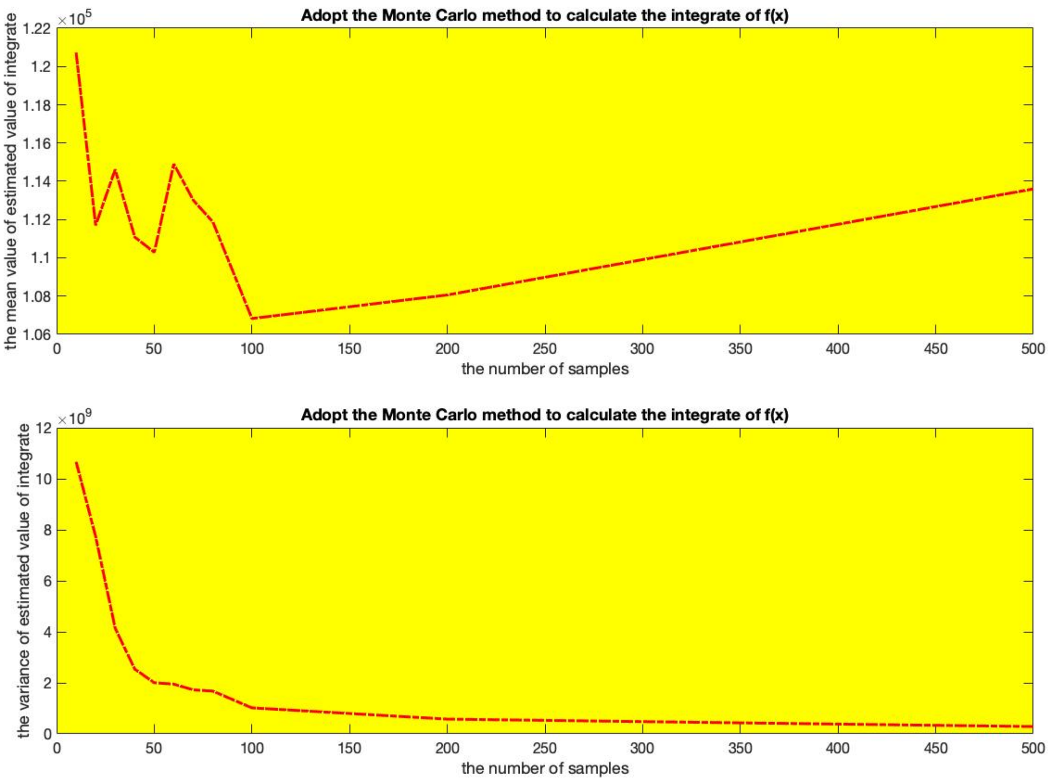
注意 pdf 发生变化，为 $\frac{1}{(4-2)*(1-(-1)}$

即在三维坐标系中，求立方体的平均体积，近似为二重积分。其中立方体的底面积为 4， 高为在 x 和 y 积分区间均匀分布的采样点得到的连续函数值。

```
clear;
sample_num = [10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 200, 500];

cal_integrate_mean = [];
cal_integrate_var = [];

for num = sample_num
    cal_integrate = [];
    for x = 1:100
        cal_sum = 0;
        for y = 1:num
            x_cor = rand(1) * 2 + 2;
            y_cor = rand(1) * 2 - 1;
            cal_sum = cal_sum + 4 *(power(y_cor,2) * exp(-power(y_cor,2)) +
power(x_cor,4) * exp(-power(x_cor,2))) / (x_cor * exp(-power(x_cor,2)));
        end
```

```
        cal_integrate = [cal_integrate cal_sum / num];
    end
    cal_integrate_mean = [cal_integrate_mean mean(cal_integrate)];
    cal_integrate_var = [cal_integrate_var var(cal_integrate)];
end

subplot(2,1,1);
plot(sample_num,cal_integrate_mean);
title('Adopt the Monte Carlo method to calculate the integrate of f(x)');
xlabel('the number of samples');
ylabel('the mean value of estimated value of integrate');
subplot(2,1,2);
plot(sample_num,cal_integrate_var);
xlabel('the number of samples');
ylabel('the variance of estimated value of integrate');
```

实验结果



采样次数	100次测试的均值	100次测试的方差
10	120730.533081229	10664179995.0494
20	111697.886086776	7734098696.89073
30	114617.371155045	4143089883.10746
40	111088.819658631	2540573683.00076
50	110290.009120780	2005603506.71850
60	114904.894810841	1949580397.16369
70	113007.219401813	1725246918.10752
80	111878.052497373	1677042560.01881
100	106829.332907505	1020086295.36318
200	108061.021477633	578874013.891964
500	113602.480835554	287945639.303187

使用 python 的 scipy 库可以计算二重积分

```
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import dblquad

def fun(y,x):
    return (y*y * math.exp(-y*y) + x*x*x*x * math.exp(-x*x)) / (x * math.exp(-x*x))

# print(fun(1,4))
#二重积分
val2,err2=dblquad(fun,2,4,lambda x:-1,lambda x:1)
print ('二重积分结果：',val2)
print('二重积分绝对误差的估计值',err2)
```

二重积分结果： 112958.6199895223 二重积分绝对误差的估计值 0.0014382408930888665

1. 通过表中结果，发现随着采样次数的增加，结果会逐渐接近真实值。
2. 100次测试样本的方差在不断减少。