

# Assignment 3

[github仓库](#)

## 一、频域滤波

给定图像 'barb.png'，利用一阶 Butterworth 低通滤波器进行频域滤波，当  $D_0 = 10, 20, 40, 80$  时，给出相应滤波图像，并分别以频域和空域的观点解释有关滤波结果。

提示：

- (1) 以  $(-1)^{(x+y)}(-1)^{(x+y)}$  乘以输入图像进行中心变换；
- (2) 直接以FFT2进行傅立叶变换；
- (3) DFT反变换后取实部；
- (4) 以  $(-1)^{(x+y)}(-1)^{(x+y)}$  乘以 (3) 中结果，反中心变换。

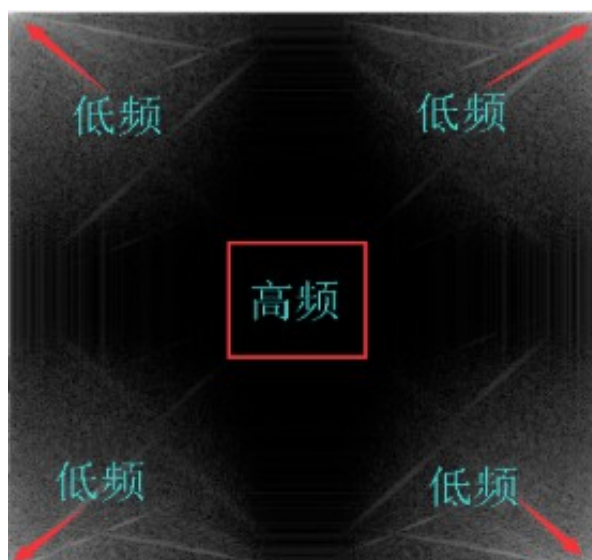
## 算法描述

### a) 二维离散傅立叶变换

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$
$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

其中  $f(x,y)$  为输入的  $M*N$  图像， $F(u,v)$  为二维频谱系数， $u$  和  $v$  可用于确定正余弦的频率， $F(u,v)$  所在坐标系被称为频域。显然频域矩阵的大小与原空间域矩阵大小相同。

得到的频谱图像一般为



1、考虑到傅立叶变换具有对称性，为了便于显示，频率图像往往以**图像的中心为坐标原点**，左上-右下、右上-左下对称。

2、图像**中心**为原始图像的平均亮度，**频率为0**。从**图像中心向外**，**频率增高**。**高亮度表明频率特征明显**。

3、此外，频率域图像中心明显的频率变化方向与原图像中地物方向垂直。也就是说如果原始图像中有多种水平分布的地物，那么频率域图像中在垂直方向的频率变化比较明显。如果原始图像中地物左下-右上分布，那么频率域图像中在左上-右下方向频率变化比较明显，反之亦然。

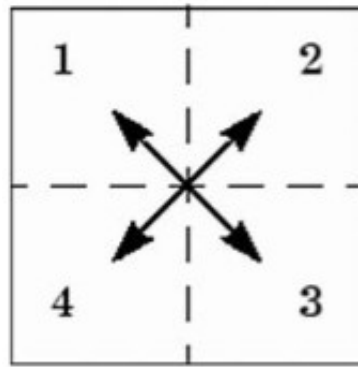
为了便于频域的滤波和频谱的分析，常常在变换之前进行频谱的中心化。根据频域平移性的性质有：

$$F(u - u_0, v - v_0) = f(x, y) e^{j2\pi(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N})}$$

$$F(u - u_0, v - v_0) = f(x, y) e^{j2\pi(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N})}$$

当  $u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2}$  时,  $e^{j2\pi(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N})} = (-1)^{x+y} e^{j2\pi(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N})} = (-1)^{x+y}$

从数学上说是在变换之前用指数项乘以原始函数，又因为  $e^{j\pi} = 1e^{j\pi} = 1$ ，所以往往我们在写程序的时候实际上是把原始矩阵乘以  $(-1)^{x+y}(-1)^{x+y}$  达到**平移频域坐标原点至屏幕正中央的目的**。如下图所示：1<----->3 对调，2<----->4 对调，如matlab中的fftshift命令，可以将频域的坐标原点从显示屏起始点 (0, 0) 移至显示屏的中心点。



## b) 频域滤波

1. 用  $(-1)^{u+v}$  乘以输入图像来进行中心变换, 如式(4.2.21)所示。
2. 由(1)计算图像的 DFT, 即  $F(u, v)$ 。
3. 用滤波器函数  $H(u, v)$  乘以  $F(u, v)$ 。
4. 计算(3)中结果的反 DFT。
5. **得到(4)中结果的实部。**
6. 用  $(-1)^{u+v}$  乘以(5)中的结果。

## c) 理想低通滤波器 (ILPF)

ILPF可以截断傅立叶变化中所有高频成分

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}, \text{ 其中 } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & D(u, v) > D_0 \end{cases}, \text{ 其中 } D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

以  $D_0$  为半径的圆内所有频率分量无损的通过, 圆外的所有频率分量完全衰减。**注意: 傅立叶变换是酉变换, 不改变信号能量**根据测不准原理, 这时  $D_0$  越小对应的空域模板越大, 即空域卷积核越大, 当  $D_0$  趋近于0的时候, 形成冲积函数, 所有频率信息无损通过。

遇到的问题:

1. 理想低通滤波器  $H(u)$  在频域是矩形, 其空域滤波器核  $h(x)$  是 sinc 函数
2. sinc 会有正负震荡, 导致出现振铃现象

原因: 在截止频率  $D_0$  附近对频谱过于“粗暴”的截断

## d) 改进后的 Butterworth 低通滤波器

n阶

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0}\right)^{2n}}$$

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0}\right)^{2n}}$$

n = 1阶，完全无振铃现象

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u^2+v^2}{D_0}\right)}$$

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u^2+v^2}{D_0}\right)}$$

1. 滤波器对 (0, 0) 对称，对各方向的频率成分有相同效果。
2. 不同于ILPF，随着 (u, v) 增加，对频率成分逐渐衰减，可有效抑制振铃现象。
3. 当n增加时，对频率成分趋于锐截断，振铃效果增强。

模糊减少的原因在于：当和ILPF采用同样D0时，BLPF可以保留更多高频成分

## 源码实现

详见pro1.m和butterworth\_filter.m

```
% butterworth_filter.m
function [res,f_res] = butterworth_filter(img,n,D0)
    [M,N] = size(img);
    f_res = zeros(M,N);
    % 对图像进行二维快速傅里叶变换
    F = fft2(img);
    % 频谱图像大小与空域图像相同
    for u = 1:M
        for v = 1:N
            % butterworth低通滤波器
            if D0 == 0
                h = 0;
            else
                h = 1 / (1 + (sqrt(u^2+v^2)/D0)^(2*n));
            end
            % 与滤波函数相乘，等于空域卷积
            f_res(u,v) = F(u,v)*h;
        end
    end
    % DFT反变换取实部
    res = real(ifft2(f_res));
    % 频谱矩阵取对数
```

```

f_res = log(1+abs(f_res));
% 反中心变换
[X,Y]=meshgrid(1:N,1:M);
res = uint8(res.*(-1).^(X+Y));
end

```

```

% pro1.m
clear

barb_img = imread('../barb.png');

[M,N] = size(barb_img);

subplot(321),imshow(barb_img,[]),title('原图像f(x,y)')
% subplot(321),imshow(log(1+abs(fft2(barb_img))),[]),title('原频谱图像f(x,y)')

% 以(-1)^{(x+y)}乘以输入图像进行中心变换
[X,Y]=meshgrid(1:N,1:M);
% 类型转换
barb_img = double(barb_img);
barb_img = barb_img.*(-1).^(X+Y);

subplot(322),imshow(uint8(barb_img),[]),title('空域中心化调制图像')

[res_10,f_res10] = butterworth_filter(barb_img,1,10);
[res_20,f_res20] = butterworth_filter(barb_img,1,20);
[res_40,f_res40] = butterworth_filter(barb_img,1,40);
[res_80,f_res80] = butterworth_filter(barb_img,1,80);

subplot(323),imshow(res_10,[]),title('D0=10 butterworth filter低通滤波')
subplot(324),imshow(res_20,[]),title('D0=20 butterworth filter低通滤波')
subplot(325),imshow(res_40,[]),title('D0=40 butterworth filter低通滤波')
subplot(326),imshow(res_80,[]),title('D0=80 butterworth filter低通滤波')

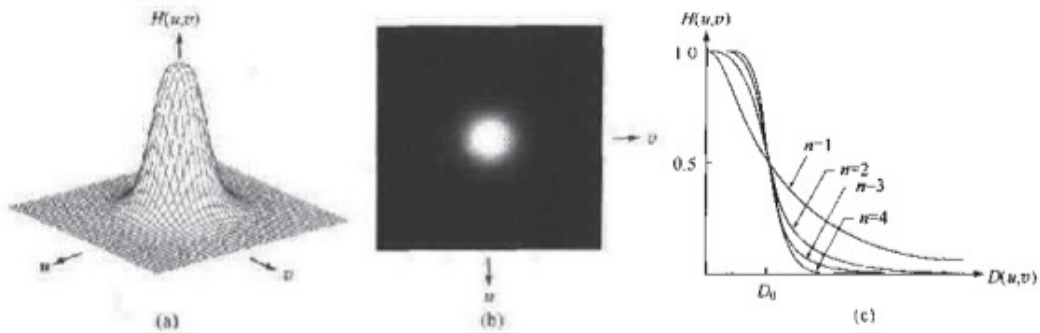
% 显示频谱图像
% subplot(322),imshow(log(1+abs(fft2(barb_img))),[]),title('空域中心化调制后的频谱图
像')
% subplot(323),imshow(f_res10,[]),title('D0=10 ')
% subplot(324),imshow(f_res20,[]),title('D0=20 ')
% subplot(325),imshow(f_res40,[]),title('D0=40 ')
% subplot(326),imshow(f_res80,[]),title('D0=80 ')

```

## 显示结果

### 空域显示

根据滤波函数， $D_0$ 越小，其保留的频率信息越少，且越低频的信息保留程度越大，在空域中则表现为卷积核的尺寸越大，丧失图片细节的部分，主要是低频信号。但它比同等 $D_0$ 下的理想低通滤波器保留的高频信息要多，且振铃现象在 $n$ 较小的时候明显较少。随着 $D_0$ 的增加，图片的轮廓信息和一些细节逐渐显现，更多的高频信息被保留了下来。



原图像 $f(x,y)$



空域中心化调制图像



$D_0=10$  butterworth filter低通滤波



$D_0=20$  butterworth filter低通滤波



D0=40 butterworth filter低通滤波



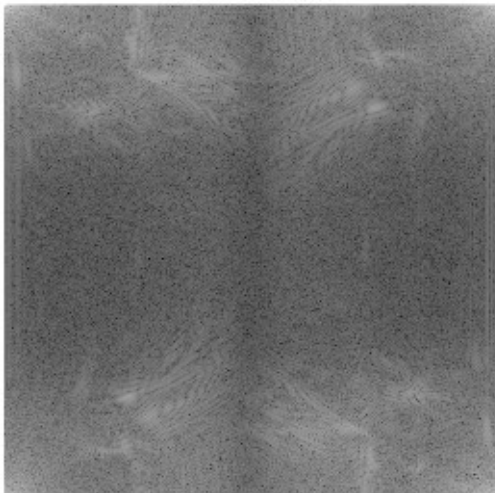
D0=80 butterworth filter低通滤波



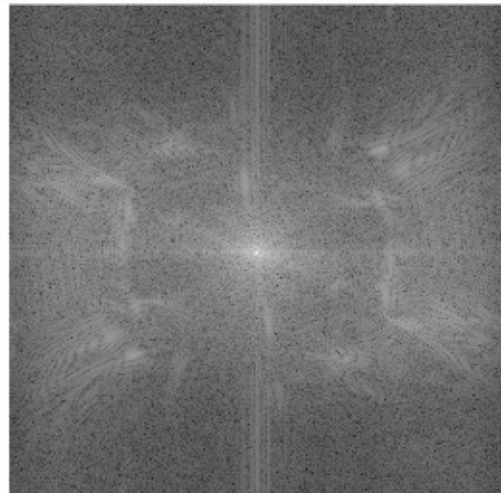
## 频域显示

从频谱图像看到，当D0较小时，高频的信号被滤波器过滤掉，随着D0增加，中心周围的信号逐渐被保留。

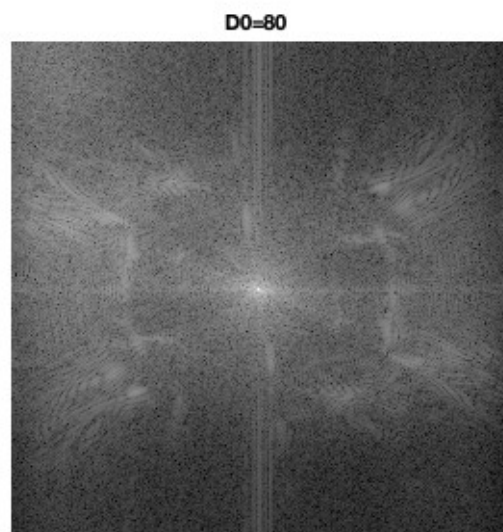
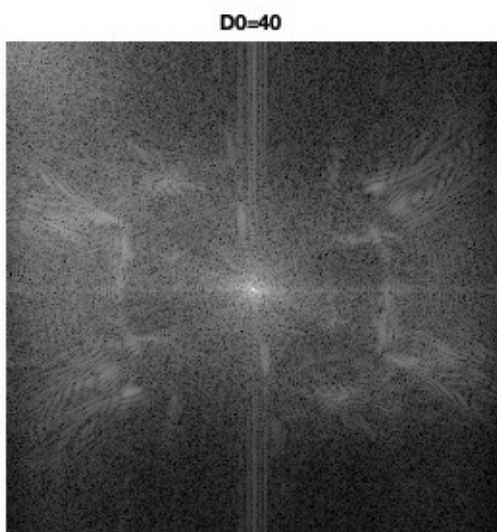
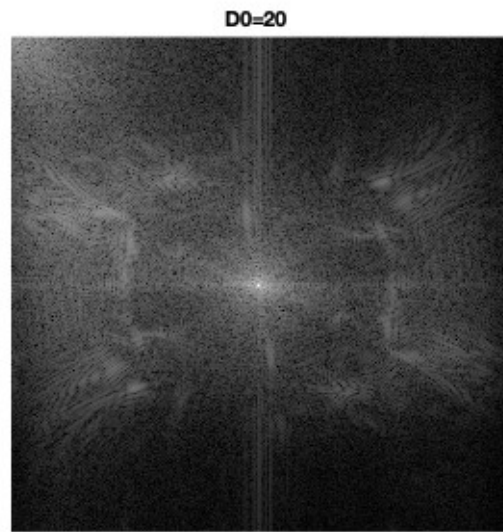
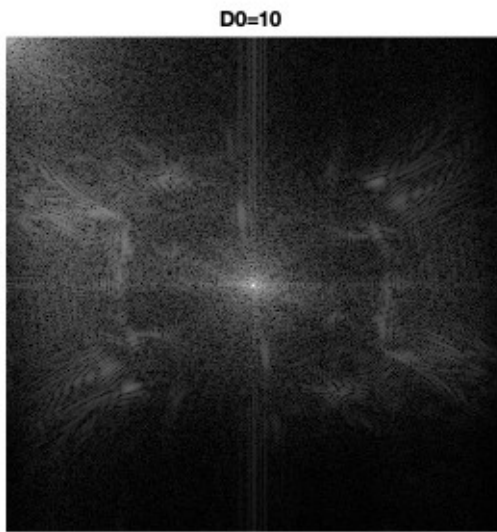
原频谱图像 $f(x,y)$



空域中心化调制后的频谱图像







## 二、同态滤波

采用同态滤波来增强图像'office.jpg'细节，对数频域滤波器为：

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L)[1 - e^{-c[D^2(u, v)/D_0^2]}] + \gamma_L$$



$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L)[1 - e^{-c[D^2(u,v)/D_0^2]}] + \gamma_L$$

(1) 参数选择：参考  $\gamma_H = 2, \gamma_L = 0.25, C = 1$   $\gamma_H = 2, \gamma_L = 0.25, C = 1$

(2) 自己尝试不同的  $D_0$  以得到最好的结果。

(3) 如将滤波器替换为一阶 Butterworth 高通滤波器，比较滤波结果。

提示：对于滤波输出图像，确定图像的最大和最小像素值  $\max$  和  $\min$ ，得到  $range = \max - \min$   
 $range = \max - \min$ ，对于  $f(x, y)$ ，以  $255 * (f(x, y) - \min) / range$   
 $255 * (f(x, y) - \min) / range$ ，得到最好的显示效果。

## 算法描述

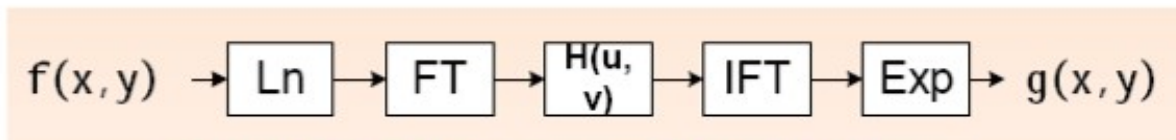
### a) 对数变换

对于一幅光照不均匀的图像  $f(x, y)$ ，可以表示为照射分量  $i(x, y)$  和反射分量  $r(x, y)$  的乘积。 $0 < i(x, y) < \infty$ ， $0 < r(x, y) < 1$ 。 $i(x, y)$  描述光强分量，变化缓慢，处于低频成分。 $r(x, y)$  描述景物反射到人眼中的图像，变化较快，处于高频成分。

因为该性质是乘性的，所以不能直接使用傅里叶变换对  $i(x, y)$  和  $r(x, y)$  进行控制，因此可以先对  $f(x, y)$  取对数，分离  $i(x, y)$  和  $r(x, y)$ 。

$$\ln f(x, y) = \ln f_i(x, y) + \ln f_r(x, y)$$

$$FFT[\ln f(x, y)] = FFT[\ln f_i(x, y)] + FFT[\ln f_r(x, y)]$$



设计对数域上的滤波函数  $H(u, v)$ ，去除光照的影响  $f_i(x, y)$

为了避免出现  $\ln(0)$  的情况，采用  $\ln(f(x, y) + 1)$  来计算。

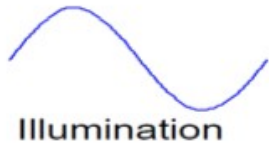
### b) 滤波函数

Illumination changes "slowly" across scene

⇒ Illumination  $\approx$  low frequencies.

Surface reflections change "sharply" across scene

⇒ reflectance  $\approx$  high frequencies.

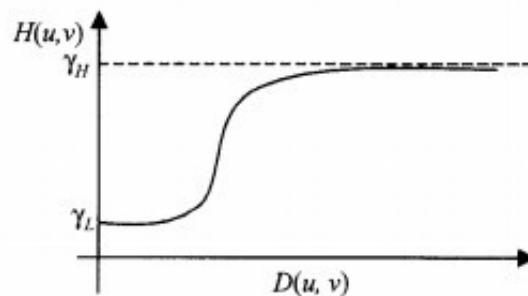


这种图像一般动态范围很大，但我们感兴趣的部分很暗，无法辨认细节的图像，为了减少光照的影响，增强图像的高频部分的细节，采用同态滤波来增强对比度，增强细节。是一种高斯高通滤波器的变形。

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L)[1 - e^{-c(D^2(u, v)/D_0^2)}] + \gamma_L$$

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L)[1 - e^{-c(D^2(u, v)/D_0^2)}] + \gamma_L$$

1. 同态滤波用于解决乘性干扰
2. 滤波器 $H(u, v)$ 的设计取决于信号 $f_i(x, y)$ 的分布



选择 $H > 1$ ,  $L < 1$ 可以达到衰减低频，增强高频的目的，常数 $c$ 控制函数坡度的锐利度。 $D(u, v)$ 和 $D_0$ 与之前低通滤波的时候意义一样。分别表示和频率中心的距离和截止频率。 $D_0$ 越大，对细节的增强越明显。

本次实验参考 $\gamma_H = 2, \gamma_L = 0.25, C = 1, \gamma_H = 2, \gamma_L = 0.25, C = 1$

## 源码实现

```
% homomorphic_filter.m
function [res, f_res] = homomorphic_filter(img, D0, H, L, C)
    % 转换为灰度图像
    img = double(rgb2gray(img));
    % 取对数
    img = log(1+img);
```

```

[M,N] = size(img);

% 中心变换
[X,Y]=meshgrid(1:N,1:M);
img = img.*(-1).^(X+Y);
% 频谱矩阵
f_res = zeros(M,N);
% 傅立叶变换
F = fft2(img);
% 高通同态滤波
for u = 1:M
    for v = 1:N
        d = u^2+v^2;
        h = (H-L).*(1-exp(-C.*(d./D0^2)))+L;
        f_res(u,v) = h*F(u,v);
    end
end
% 反傅立叶变换
res = real(ifft2(f_res));
% 反中心变换
[X,Y] = meshgrid(1:N,1:M);
res = res.*(-1).^(X+Y);
% 取指数
res = exp(res)-1;
% 频谱矩阵
f_res = log(1+abs(f_res));

subplot(221),imshow(res,[]),title(['D0=',num2str(D0),' homomorphic filter高通图像'])
subplot(222),imshow(f_res,[]),title(['D0=',num2str(D0),' homomorphic filter高通频谱'])

```

```

% butterworth_high_filter.m
function [res,f_res] = butterworth_high_filter(img,n,D0)
% 转换为灰度图像
img =double(rgb2gray(img));
% 中心变换
[M,N] = size(img);
[X,Y]=meshgrid(1:N,1:M);
img = img.*(-1).^(X+Y);

f_res = zeros(M,N);
% 对图像进行二维快速傅里叶变换
F = fft2(img);
% 频谱图像大小与空域图像相同
for u = 1:M
    for v = 1:N
        % butterworth低通滤波器
        if D0 == 0

```

```

        h = 0;
    else
        h = 1 / (1 + (D0/sqrt(u^2+v^2))^(2*n));
    end
    % 与滤波函数相乘, 等于空域卷积
    f_res(u,v) = F(u,v)*h;
end
end
% DFT反变换取实部
res = real(fft2(f_res));
% 频谱矩阵取对数
f_res = log(1+abs(f_res));
% 反中心变换
[X,Y]=meshgrid(1:N,1:M);
res = res.*(-1).^(X+Y);

subplot(223),imshow(res,[]),title(['D0=',num2str(D0),' butterworth filter高通图像'])
subplot(224),imshow(f_res,[]),title(['D0=',num2str(D0),' butterworth filter高通频谱'])

```

```

% pro2.m
clear

office_img = imread('./office.jpg');

[r1,f1] = homomorphic_filter(office_img,500,2,0.25,1);
[r2,f2] = butterworth_high_filter(office_img,1,500);

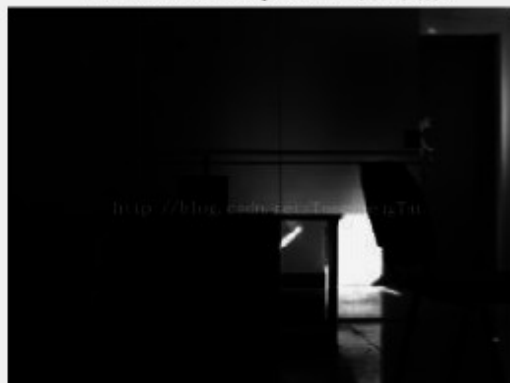
```

## 显示结果

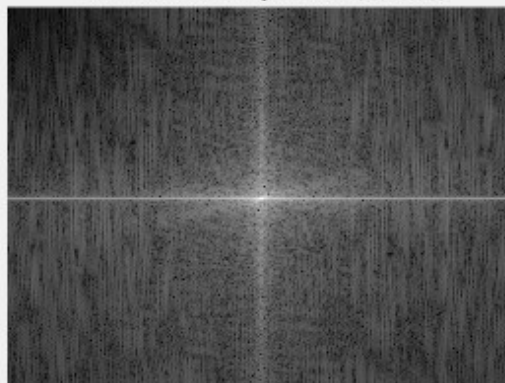
上面两张为同态滤波, 下面两张为一阶 Butterworth 高通滤波器。

**D0 = 100**

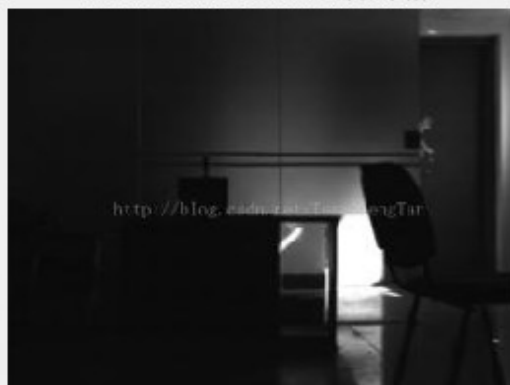
D0=100 homomorphic filter高通图像



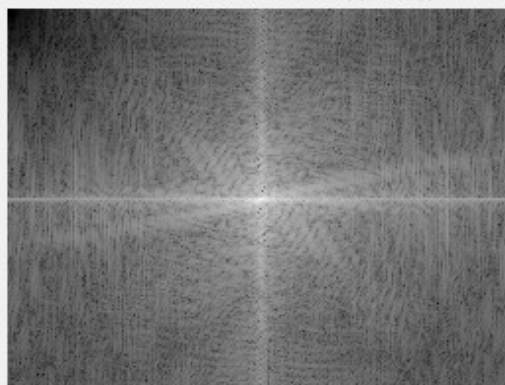
D0=100 homomorphic filter高通频谱



D0=100 butterworth filter高通图像



D0=100 butterworth filter高通频谱

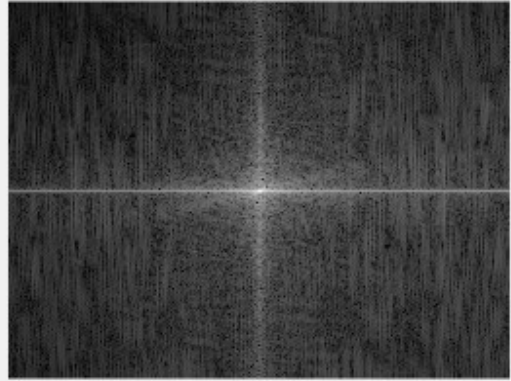


D0 = 500

D0=500 homomorphic filter高通图像



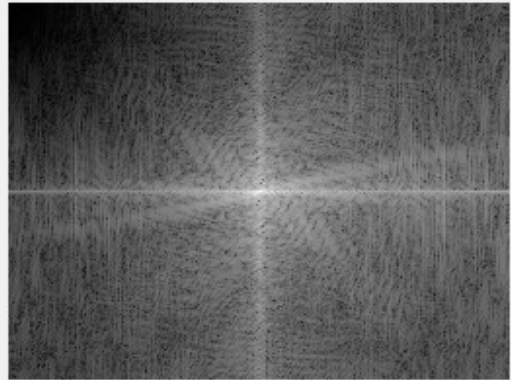
D0=500 homomorphic filter高通频谱



D0=500 butterworth filter高通图像



D0=500 butterworth filter高通频谱

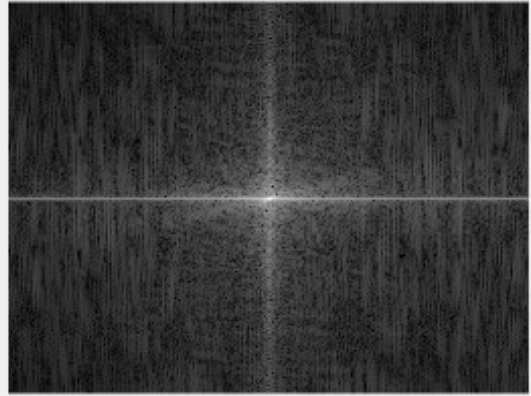


D0 = 1000

D0=1000 homomorphic filter高通图像



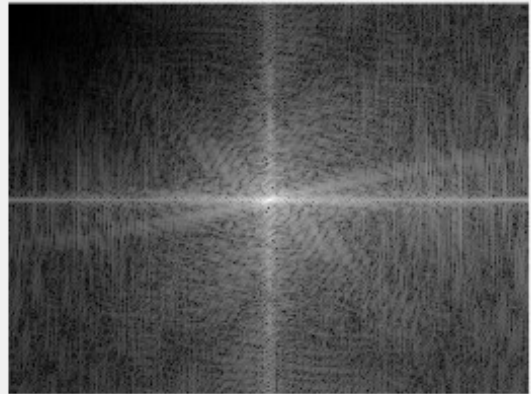
D0=1000 homomorphic filter高通频谱



D0=1000 butterworth filter高通图像



D0=1000 butterworth filter高通频谱



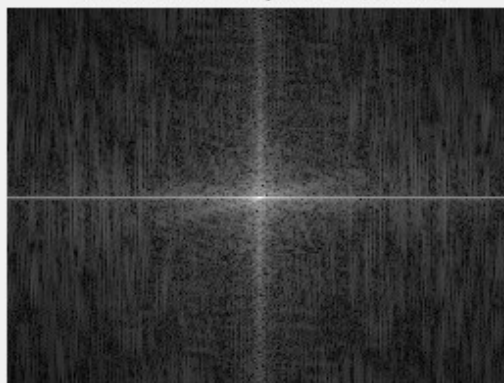
D0 = 2000



D0=2000 homomorphic filter高通图像



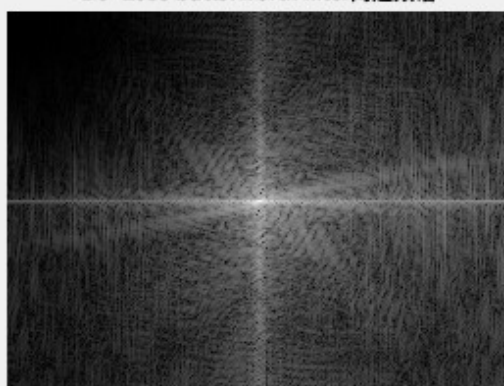
D0=2000 homomorphic filter高通频谱



D0=2000 butterworth filter高通图像



D0=2000 butterworth filter高通频谱



总体来说，由于同态滤波对输入图像进行对数变换，将乘性干扰转换为传统噪声模型进行处理，处理后的图像可以看到更多的细节，降低了照射分量的影响，而Butterworth 高通滤波器对这种图像的效果基本没有变化。

随着D0的增加，阴暗处的部分光照强度逐渐增加，且当D0等于1000的时候，可以看到很多的细节，且曝光度没有D0等于2000时那么明显，然而Butterworth 高通滤波器虽然过滤了更多的低频成分，但图片的处理效果不明显。