Assignment 3

一、频域滤波

给定图像 ‘barb.png’， 利用一阶 Butterworth 低通滤波器进行频域滤波， 当 D 0 = 10,20,40,80 时，给出相应滤波图像，并分别以频域和空域的观点解释有关滤波结果。

提示：

（1）以$(-1)^{(x+y)}$ $(-1)^{(x+y)}$ 乘以输入图像进行中心变换；

（2）直接以FFT2进行傅立叶变换；

（3）DFT反变换后取实部；

（4）以$(-1)^{(x+y)}$ $(-1)^{(x+y)}$ 乘以（3）中结果，反中心变换。

算法描述

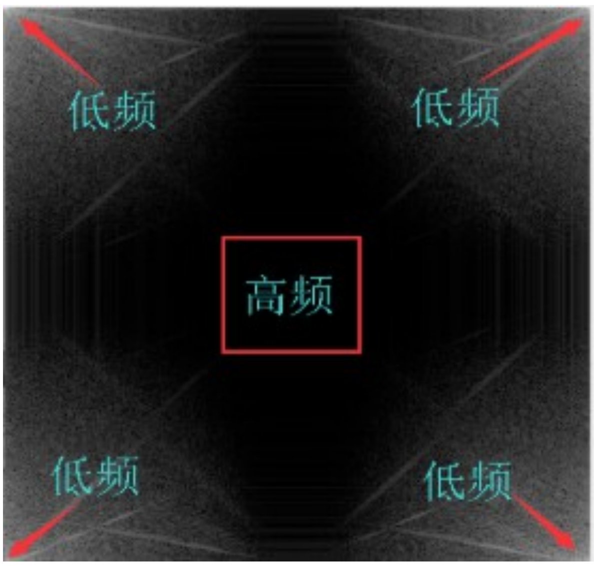
1. 二维离散傅立叶变换

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{0}^{M-1}\sum_{0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{0}^{M-1}\sum_{0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中f(x,y)为输入的M*N图像，F(u,v)为二维频谱系数，u和v可用于确定正余弦的频率，F(u,v)所在坐标系被称为频域。显然频域矩阵的大小与原空间域矩阵大小相同。

得到的频谱图像一般为



1、考虑到傅立叶变换具有对称性，为了便于显示，频率图像往往**以图像的中心为坐标原点**，左上-右下、右上-左下对称。

2、图像中心为原始图像的平均亮度，频率为0.从图像中心向外，频率增高。**高亮度表明频率特征明显**。

3、此外，频率域图像中心明显的频率变化方向与原图像中地物方向垂直。也就是说如果原始图像中有多种水平分布的地物，那么频率域图像中在垂直方向的频率变化比较明显。如果原始图像中地物左下-右上分布，那么频率域图像中在左上-右下方向频率变化比较明显，反之亦然。

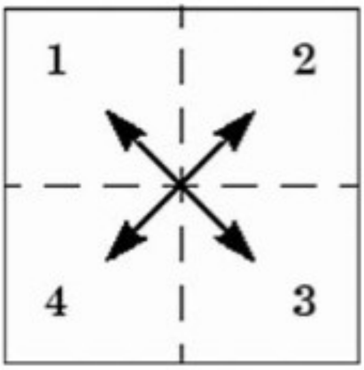
为了便于频域的滤波和频谱的分析，常常在变换之前进行频谱的中心化。根据频域平移性的性质有：

$$F(u-u_0, v-v_0) = f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}$$

$$F(u-u_0, v-v_0) = f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}$$

当$u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2}$$u_0 = \frac{M}{2}, v_0 = \frac{N}{2}$时，$e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} = (-1)^{x+y}$$e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} = (-1)^{x+y}$

从数学上说是在变换之前用指数项乘以原始函数，又因为$e^{j\pi} = 1$$e^{j\pi} = 1$，所以往往我们在写程序的时候实际上是把原始矩阵乘以$(-1)^{x+y}$$(-1)^{x+y}$**达到平移频域坐标原点至屏幕正中央的目的**。如下图所示：1<----->3 对调，2<----->4 对调，如matlab中的fftshit命令，可以将频域的坐标原点从显示屏起始点（0，0） 移至显示屏的中心点。



2. 频域滤波

1. 用$(-1)^{x+y}$乘以输入图像来进行中心变换，如式(4.2.21)所示。
2. 由(1)计算图像的 DFT，即 $F(u,v)$。
3. 用滤波器函数 $H(u,v)$乘以 $F(u,v)$。
4. 计算(3)中结果的反 DFT。
5. 得到(4)中结果的实部。
6. 用$(-1)^{x+y}$乘以(5)中的结果。

3. 理想低通滤波器（ILPF）

截断傅立叶变化中所有高频成分

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & D(u,v)\le D_0\\ 0 & D(u,v)>D_0\end{cases}\text{，其中}D(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$$

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & D(u,v)\le D_0\\ 0 & D(u,v)>D_0\end{cases}\text{，其中}D(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$$

以D0为半径的圆内所有频率分量无损的通过，圆外的所有频率分量完全衰减。

注意：傅立叶变换是酉变换，不改变信号能量

根据测不准原理，这时D0越小对应的空域模板越大，即空域卷积核越大，当D0趋近于0的时候，形成冲积函数，所有频率信息无损通过。

问题：

1. 理想低通滤波器H(u)在频域是矩形，其空域滤波器核h(x)是sinc函数
2. sinc会有正负震荡，导致出现振铃现象

原因：

在截止频率D0附近对频谱过于"粗暴"的截断

4. 改进后的Butterworth低通滤波器

   n阶

$$H(u,v)=\frac{1}{1+(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0})^{2n}}$$

$$H(u,v)=\frac{1}{1+(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{D_0})^{2n}}$$

n = 1,1阶，完全无振铃现象

$$H(u,v)=\frac{1}{1+(\frac{u^2+v^2}{D_0})}$$
$$H(u,v)=\frac{1}{1+(\frac{u^2+v^2}{D_0})}$$

1. 滤波器对（0，0）对称，对各方向的频率成分有相同效果。
2. 不同于ILPF，随着（u，v）增加，对频率成分是逐渐衰减，可有效抑制振铃现象。
3. 当n增加时，对频率成分趋于锐截断，振铃效果增强。

模糊减少的原因在于：当和ILPF采用同样D0时，BLPF可以保留更多高频成分

二、同态滤波

采用同态滤波来增强图像‘office.jpg’细节，对数频域滤波器为：

$$H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)[1-e^{-c[D^2(u,v)/D_0^2]}]+\gamma_L$$
$$H(u,v)=(\gamma_H-\gamma_L)[1-e^{-c[D^2(u,v)/D_0^2]}]+\gamma_L$$

（1）参数选择：参考$\gamma_H=2,\gamma_L=0.25,C=1$$\gamma_H=2,\gamma_L=0.25,C=1$

（2）自己尝试不同的 D0 以得到最好的结果。

（3）如将滤波器替换为一阶 Butterworth 高通滤波器，比较滤波结果。

提示：对于滤波输出图像，确定图像的最大和最小像素值 max 和 min ，得到$range=max-min$$range=max-min$，对于$f(x,y)$$f(x,y)$，以$255*(f(x,y)-min)/range$$255*(f(x,y)-min)/range$，得到最好的显示效果。