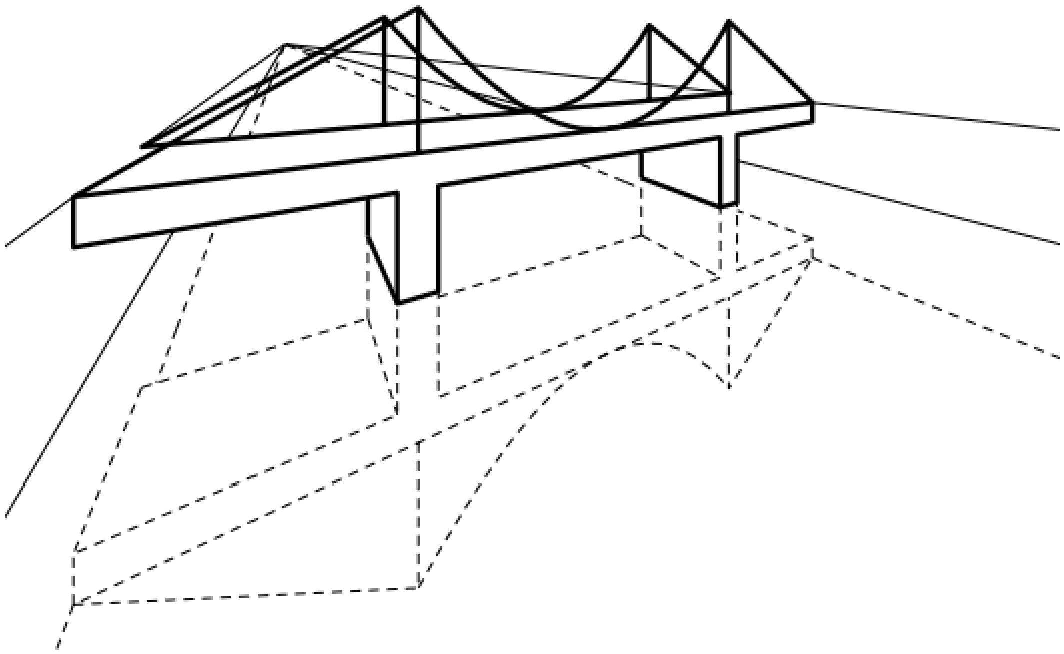
Projektionen



Grundwissen

Zentralprojektionen und Parallelprojektionen

Auszug aus einem Vorlesungsskript der TU Darmstadt
„Darstellende Geometrie für Bauingenieure“
von Erich Hartmann und Karsten Große-Brauckmann
online unter http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/darg15.pdf

zur vollständigen Lektüre bei vertieftem Interesse empfohlen

Kapitel 1

Projektionen in der Darstellenden Geometrie

1.1 Abbildungen

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Dabei gibt es zwei konkurrierende Ziele:
• *Maßgenauigkeit* bedeutet, dass man aus der Abbildung leicht genaue Abmessungen ablesen kann.
• *Anschaulichkeit* bedeutet, dass die zweidimensionale Darstellung einen guten räumlichen Eindruck erweckt.
Die beiden folgenden Bilder eines Hauses sind maßgenau, aber nicht sehr anschaulich:

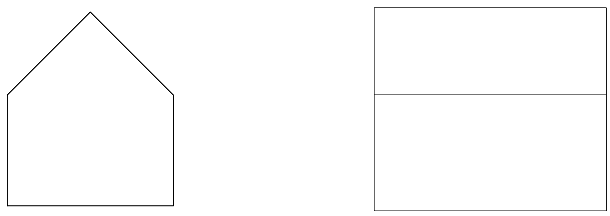


Abbildung 1.1: Haus in Seitenansicht

Dagegen bringen die nächsten beiden Bilder den räumlichen Eindruck zur Geltung. Allerdings lassen sich genaue Abmessungen gerade aus dem rechten Bild nur schwer ablesen.

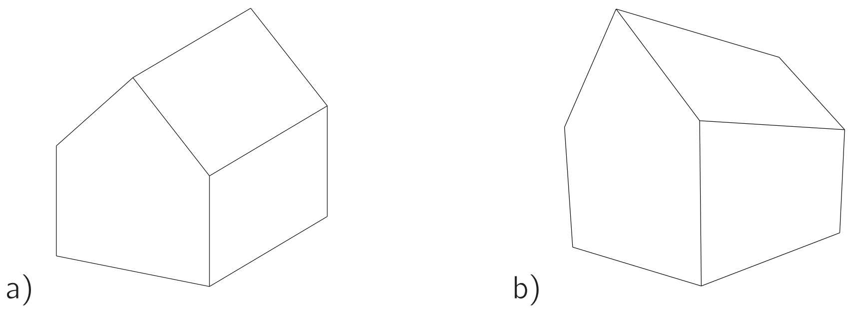


Abbildung 1.2: Haus in a) senkrechter Parallel- und b) Zentralprojektion

Es gibt viele Möglichkeiten, den dreidimensionalen Raum auf die zweidimensionale Ebene abzubilden, d.h. jedem Punkt P des Raumes einen Punkt P' der Bildebene zuzuordnen.
In der Darstellenden Geometrie bedient man sich zweier spezieller Abbildungsverfahren, die geometrisch definiert sind. Beide **projizieren** das Objekt **längs Geraden in die Ebene**. Man kann sich dazu konkret vorstellen, dass die Geraden *Lichtstrahlen* sind, welche die Punkte und Kurven eines Objektes im Raum auf einen *Schatten* in der Bildebene abbilden. Wir stellen diese beiden Abbildungen nun vor.

1.2 Parallelprojektion

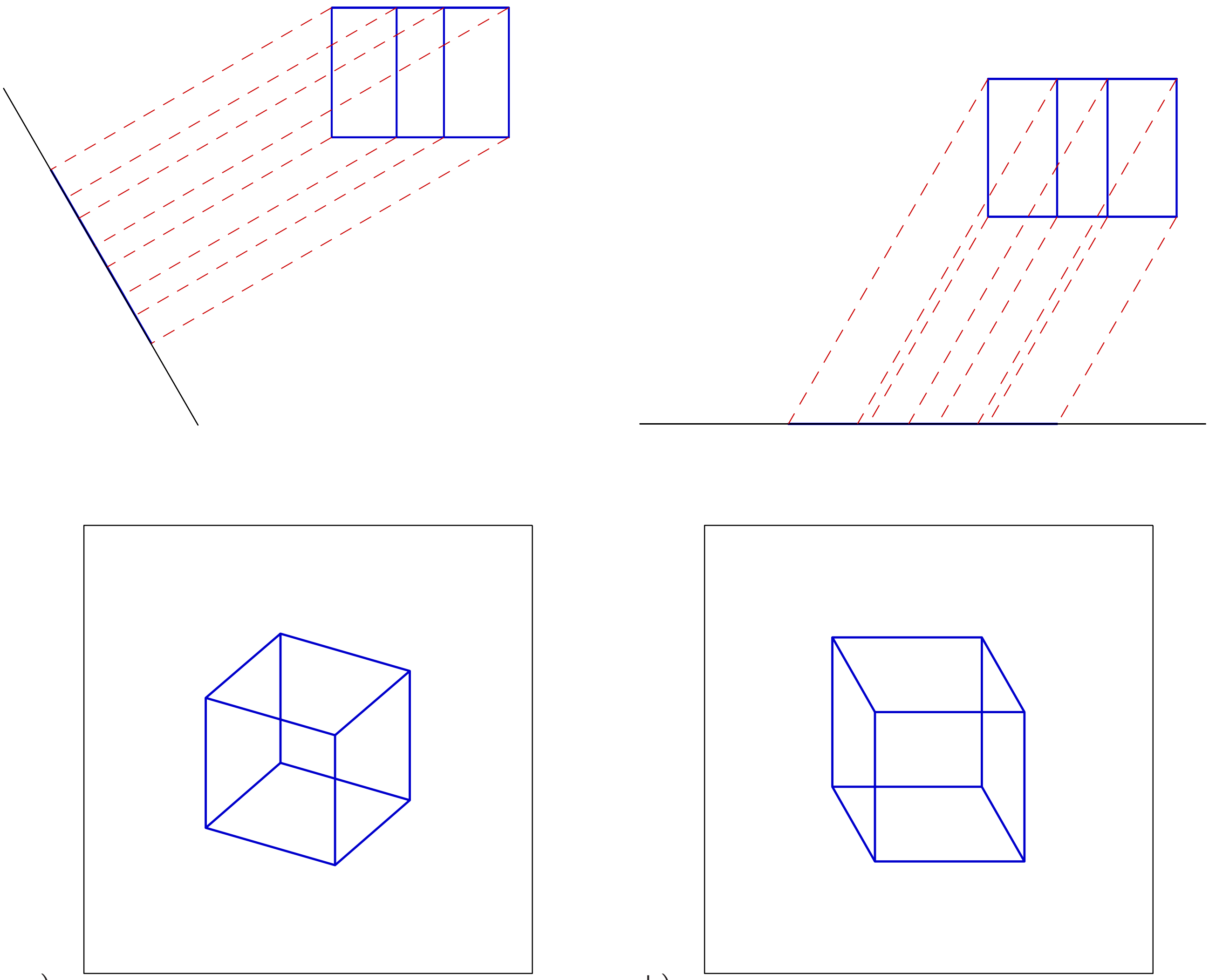
Abbildungsvorschrift

Bei dieser Projektion sind alle Abbildungsstrahlen **parallel**, d.h. jeder Punkt P wird längs paralleler Geraden auf einen Punkt P' der Bildebene abgebildet. Je nach Winkel zwischen Strahlen und Bildebene unterscheidet man zwei Fälle:

Senkrechte (orthogonale) **Parallelprojektion**: Die Strahlen stehen *senkrecht* zur Bildtafel.

Schiefe Parallelprojektion: Die Strahlen stehen *nicht senkrecht* zur Bildtafel.

Senkrechte Parallelprojektion hat eine deutlich bessere Bildwirkung, schiefe Parallelprojektionen sind aber oft einfacher zu erzeugen.



a) b)

Abbildung 1.3: Würfel in a) senkrechter und b) schiefer Parallelprojektion

Die Parallelprojektion läßt sich als Schattenwurf eines Objektes durch eine weit entfernte Punktlichtquelle deuten. Von der Entfernung her ist Sonnenlicht ein gutes Beispiel dafür, wegen der Größe der Sonnenscheibe ist das Schattenbild allerdings unscharf. (Warum sehen Sie auf dem Waldboden kleine kreisförmige besonnte Flecken?).

Wir werden einen Vektor v, der parallel zu den Projektionsstrahlen ist und vom Objekt auf die Projektionsebene zeigt, als **Blickrichtung** bezeichnen.

Eigenschaften der Parallelprojektion

Die Parallelprojektion ist

(G) *geradentreu*, das Bild einer Gerade g ist wiederum eine Gerade g'. Ausnahme: Fällt g mit einem Projektionsstrahl zusammen, so wird g' zu einem Punkt; in diesem Fall heißt g *projizierend*.

(P1) Die Bilder paralleler Geraden sind im Allgemeinen wieder parallel. (Ausnahmen: projizierende Geraden.)

(P2) Parallele Geradenstücke werden im gleichen Verhältnis verzerrt (*Teilverhältnistreue*).

(P3) Ebene Figuren erscheinen im Bild unverzerrt, wenn sie parallel zur Bildtafel liegen.

Allerdings sind Parallelprojektion weder winkel- noch längentreu. Unter senkrechter Parallelprojektion können sich Längen immerhin nicht vergrößern.

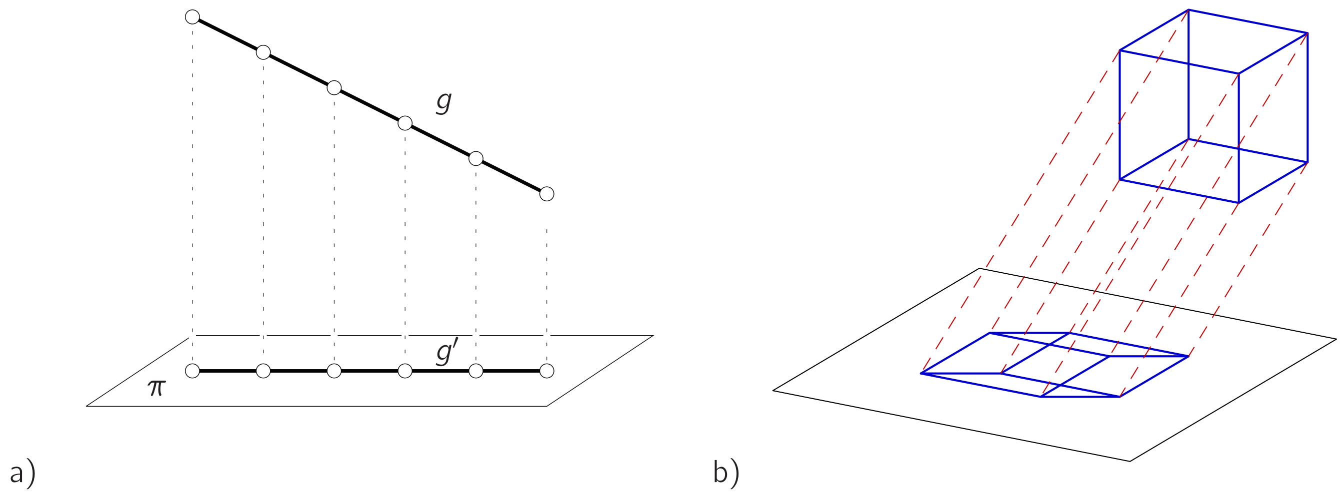


Abbildung 1.4: a) Teilverhältnistreue der Parallelprojektion b) Schiefe Parallelprojektion eines Würfels. Deckel und Boden sind parallel zur Bildebene und bleiben daher unverzerrt, während die vier vertikalen Kanten im gleichen Maß verzerrt sind.

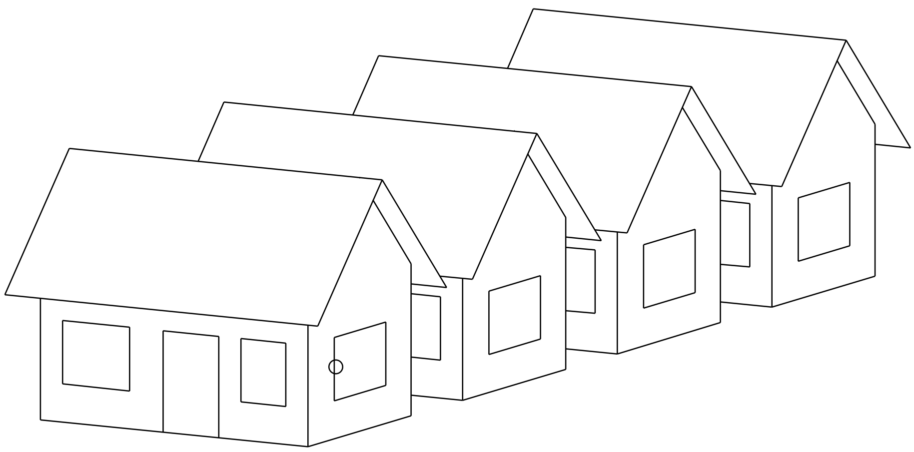


Abbildung 1.5: Häuser in Parallelprojektion: Parallelitäten und Teilverhältnistreue sind z.B. an den Fenstern ablesbar

Wir werden uns in Kapitel 2 bis 4 näher mit der Parallelprojektion befassen.

1.3 Zentralprojektion

Abbildungsvorschrift

Bei Zentralprojektion gehen alle Abbildungsstrahlen durch einen Punkt, *Projektionszentrum* oder *Augpunkt* genannt. Dieses Abbildungsverfahren entspricht dem Schattenwurf durch eine nahe Punktlichtquelle. Es ist auch das Abbildungsverfahren, das der Fotografie oder dem Sehen mit einem Auge entspricht; daher ist die Bildwirkung natürlicher als bei Parallelprojektion.

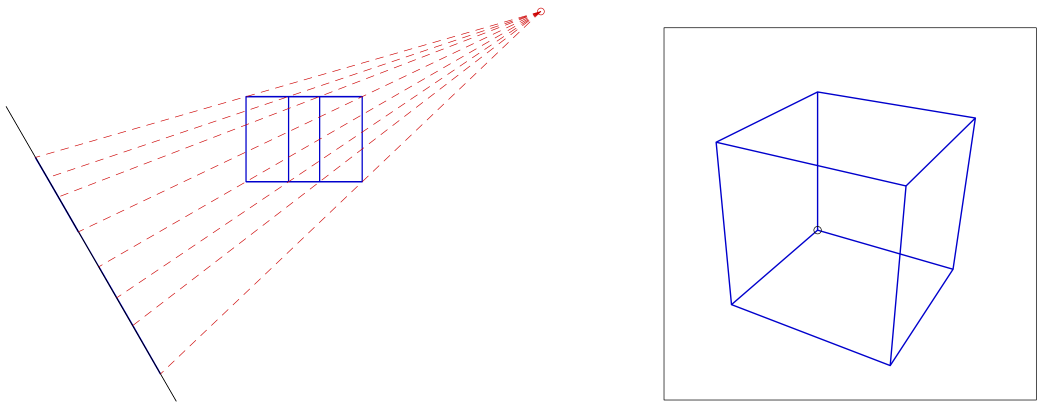


Abbildung 1.6: Würfel in Zentralprojektion

Eigenschaften der Zentralprojektion

Die Eigenschaften (P1) – (P3) gelten bei Zentralprojektion nicht, wie z.B. Abbildung 1.2 belegt. Aber es gilt:

(G) Geradentreue.

(Z) Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich i.A. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* der Geradenschar. Ausnahme: Die Bilder von parallelen Geraden, die in einer Ebene parallel zur Bildtafel liegen, bleiben parallel.

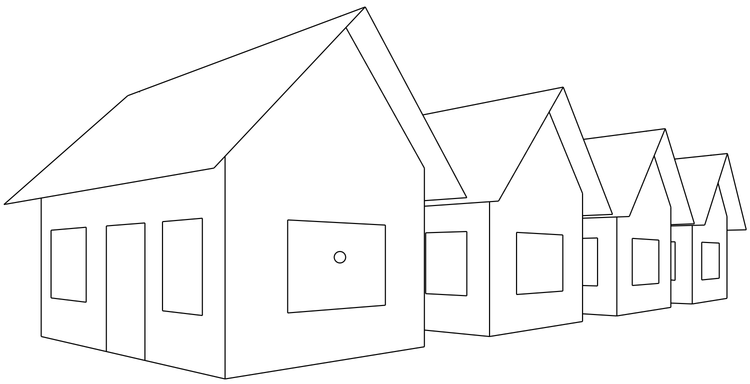


Abbildung 1.7: Häuser in Zentralprojektion

In Kapitel 5 werden wir die Zentralprojektion genauer untersuchen.

1.4 Grund– und Aufriss

Zur eindeutigen Beschreibung eines Punktes im Raum sind wenigstens **zwei** Parallelprojektionen notwendig. Üblicherweise verwendet man *Grund-* und *Aufriss* als zwei senkrechte Parallelprojektionen.

Es seien dazu π_1, π_2 zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen: die **Grundrissebene** π_1 und die **Aufrissebene** π_2. Ihre Schnittgerade $k_{12} := \pi_1 \cap \pi_2$ nennen wir **Risskante**. Üblicherweise ist π_1 die horizontale xy-Ebene und π_2 die vertikale yz-Ebene, so dass k_{12} der y-Achse entspricht.

Projiziert man einen Punkt P *senkrecht* auf die Ebene π_1 bzw. π_2, so erhält man den *Grundriss* P' bzw. den *Aufriss* P'' von P. In Standard-Koordinaten hat $P = (x, y, z)$ den Grundriss $P' = (x, y)$ und den Aufriss $P'' = (y, z)$. Hat man noch eine weitere zu π_1 senkrechte Ebene π_3, so nennt man die Projektion $P''' = (*, z)$ von P auf π_3 einen **Seitenriss**.

In Architektur und technischen Zeichnungen stellt man Grund- und Aufriss in einer Zeichenebene dar. Man kann sich dazu vorstellen, dass man die Aufrisstafel π_2 um die Risskante k_{12} in die Grundrisstafel π_1 klappt. *Nach* dieser Umklappung liegen P' und P'' auf einer Senkrechten zur Risskante. Diese Senkrechte heißt **Ordner**; er verbindet $P' = (x, y)$ und $P'' = (y, z)$ mit konstantem y-Wert.

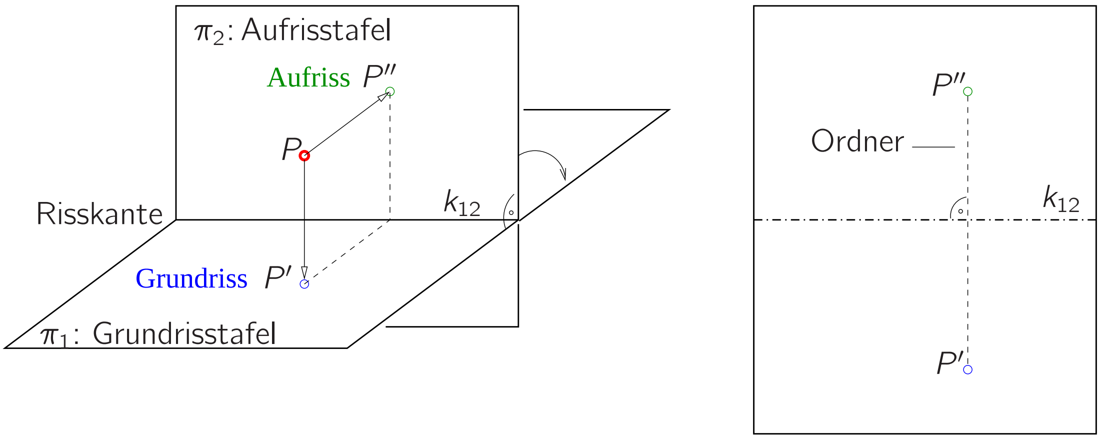


Abbildung 1.8: Grund- und Aufriss eines Punktes

Merke:
- Grundriss P' und Aufriss P'' eines Punktes liegen auf demselben Ordner!
- Ein Punkt P ist durch seinen Grund– und Aufriss eindeutig bestimmt.

Im Folgenden sind Grund– und Aufrisse einiger Objekte gegeben; die Grundrisse sind jeweils ein Quadrat.

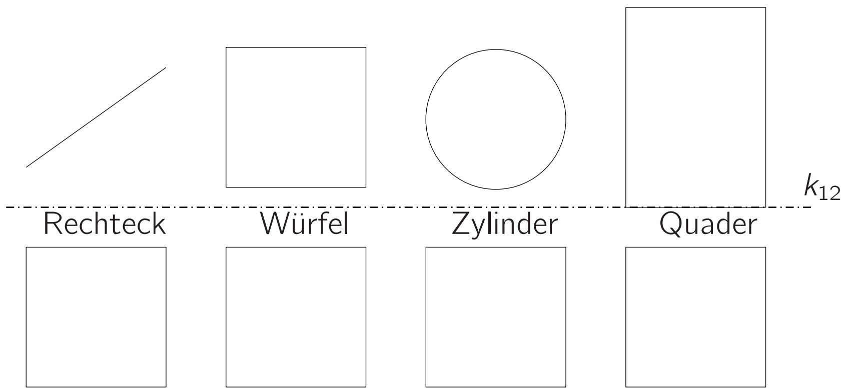


Abbildung 1.9: Verschiedene Objekte mit dem gleichen Grundriss

Definition von Parallelprojektionen:

$f_P: \quad R^n \longrightarrow E \qquad$ (Bildebene bzw. Hyperebene)

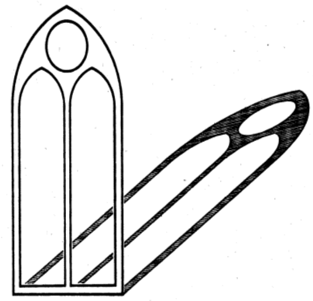
$\qquad Q \longmapsto (Q + \mu \vec{r}\,) \cap E \qquad$ mit $\mu \in R$ beliebig

heißt **<u>Parallelprojektion</u>** längs des Richtungsvektors $\vec{r}$ in E.

Der Bildpunkt Q′ zu einem Originalpunkt Q ergibt sich durch Schnitt einer Geraden durch Q in Richtung $\vec{r}$ mit der Ebene E.

Bei **orthogonalen Parallelprojektionen** („Orthogonalprojektionen“ bzw. „Normalprojektionen“) ist $\vec{r}$ orthogonal zu E.

Jeder Parallelschatten einer ebenen Figur auf eine Ebene ist ein zu ihr affines (parallelverwandtes) Bild.

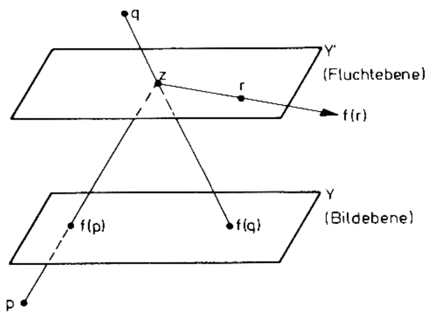


Definition von Zentralprojektionen:

$f_Z: \quad R^n \setminus \{ P \in R^n \wedge ZP \parallel E \} \longrightarrow E \qquad$ (Bildebene bzw. Hyperebene)

$\qquad Q \longmapsto ZQ \cap E$

heißt **<u>Zentralprojektion</u>** mit Zentrum Z, wenn dim E = n - 1.



Der Bildpunkt Q′ zu einem Originalpunkt Q ergibt sich durch Schnitt einer Geraden ZQ durch P und Q mit der Ebene E.

Die Definition bedeutet, dass das Objekt vom Projektionszentrum Z aus auf eine nicht durch Z verlaufende Bildebene E projiziert wird. Ein solches Bild existiert für alle Punkte des R^3, die nicht in der zu E parallelen Ebene durch Z liegen.
Nicht abgebildet werden also die Punkte P, für die die Gerade ZP parallel zu E ist: $\{ P \in R^n \wedge ZP \parallel E \}$

Alle Projektionen sind in der Mathematik immer

- Abbildungen in gerader Richtung (längs Geraden)
- abstrahiert von physikalischen Einflüssen (Gravitation, Licht- oder Raumkrümmung)
- lineare Abbildungen des R^n auf einen Teilraum des R^n (speziell vom R^3 auf eine Ebene, die Bildebene)

Auch wenn wir hier speziell nur Abbildungen vom R^3 auf den R^2, also von räumlichen Objekten auf eine Projektionsebene (Bildebene) betrachten, sind ganz allgemein in der Mathematik Projektionen immer Abbildungen vom R^n auf den R^m mit m < n.

Außerdem beschäftigen wir uns ebenfalls mit Schattenwürfen, bei denen in mehrere Ebenen projiziert wird wie in der nebenstehenden Abbildung.

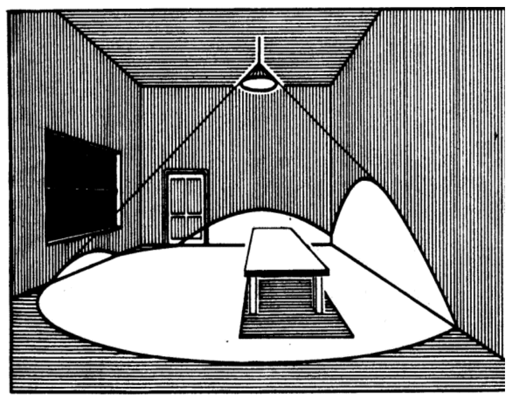


Abb. aus: Graf, Ulrich / Barner, Martin: Darstellende Geometrie, 11. Auflage, Heidelberg: Quelle & Meyer 1978, S. 183

Anleitungen zur Bearbeitung einiger grundlegender Aufgaben mit jeweils zugehörigen Übungen finden sich in **Bigalke|Köhler – Mathematik Q2 Hessen** und sollten dort bearbeitet werden:

1. **Schattenwurf mit abknickendem Schatten:**
   S. 115 **Beispiel: Schattenwurf**
   Übungen: 116|10 (Parallelprojektion)
   118|15 e) - g) (Parallelprojektion)

2. **Sichtlinien:**
   S. 137 **Beispiel: Sichtlinie**
   Übungen: 140|17, 140|18, 148|4 b) – d)

3. **Zentralprojektion:**
   Übungen: 119|17

4. **Parallelprojektion:**
   Übungen: 148|4 d), 148|5 d)

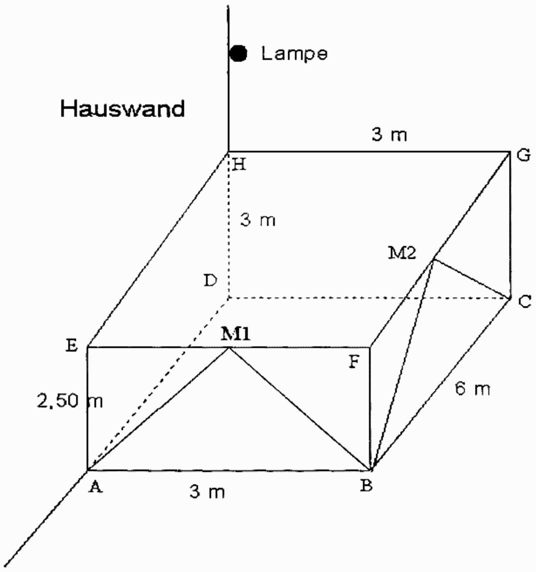
Lösungen zu diesen Aufgaben sind bei den Mathematiklehrern im Lernlabor und im offenen Raum jeweils einsehbar und werden (in Kürze) auf der Lernplattform Moodle eingestellt werden.

Weitere (teilweise anspruchsvollere) **Übungsaufgaben** finden Sie auf den nächsten Seiten. Diese sind ebenso wie die zugehörigen Lösungshinweise von Dr. Bernöster in den vergangenen Jahren zusammengestellt worden.
Beschäftigen Sie sich mit mehreren dieser Aufgaben wenigstens kurz und überlegen Sie bei jeder Aufgabe, wie ein geeigneter Lösungsweg aussehen könnte. Wenn Sie ein Vorgehen zur Lösung durchdacht haben, entscheiden Sie frei, welche Aufgaben Sie selbst lösen wollen und bei welchen Aufgaben Sie sich darauf beschränken wollen, die Lösung von einem oder mehreren Ihrer Mitschüler anzuschauen.
Zu diesen Aufgaben werden *keine vollständigen* Lösungen zur Verfügung gestellt. Allerdings können Sie Lösungshinweise ebenfalls in Moodle einsehen und Ihre Fragen und Lösungen zu diesen Aufgaben im offenen Raum mit Herrn Seidel diskutieren.

Zusätzlich werden zwei **Aufgaben auf Klausurniveau** angeboten. Die Lösungen zu diesen Aufgaben werden ebenfalls in Moodle hinterlegt, die Aufgaben finden Sie am Ende dieses Skriptes.

Projektionen – Übungsaufgaben

Anbau eines Carports



Herr Schmitt plant, einen Carport direkt an die Wand seines Hauses anzubauen. Sein Nachbar empfiehlt ihm, bei der Planung eine Dachneigung von mindestens 5 % zu berücksichtigen, damit der Regen gut abfließen kann.

a) Hat Herr Schmitt mit seinem Plan diese Empfehlung befolgt? Wie groß ist der „umbaute Raum“?

b) An der Hauskante ist eine Lampe in 4 m Höhe befestigt, die rundum strahlt.
Wie groß wäre die Fläche des Schattens, den der Carport werfen würde? Zeichnen Sie ein maßstabsgetreues Schrägbild des Carports. Zeichnen Sie auch die Schattenfläche ein.

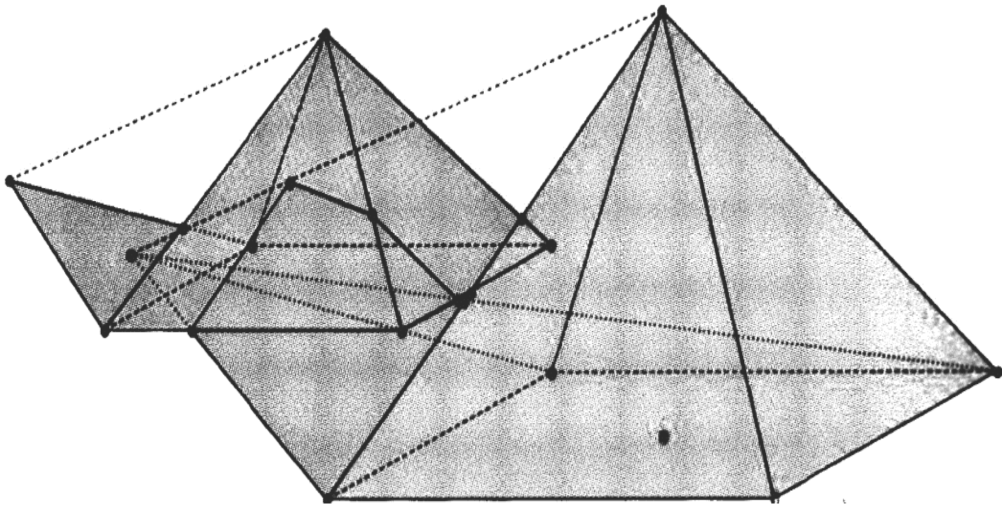
Die Pyramiden in Ägypten (b. ist anspruchsvoll)

In der Nähe von Kairo steht die Cheops- neben der Chephrenpyramide. Die eine wirft einen Schatten auf die andere.
Wir nehmen einmal vereinfacht an, dass die erste Pyramide die folgenden Eckpunkte hat:
A(-3;3;0), B(3;3;0), C(3;-3;0), D(-3;-3;0) und E(0;0;5).

Die Richtung der Sonnenstrahlen ist vorgegeben durch den Vektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$

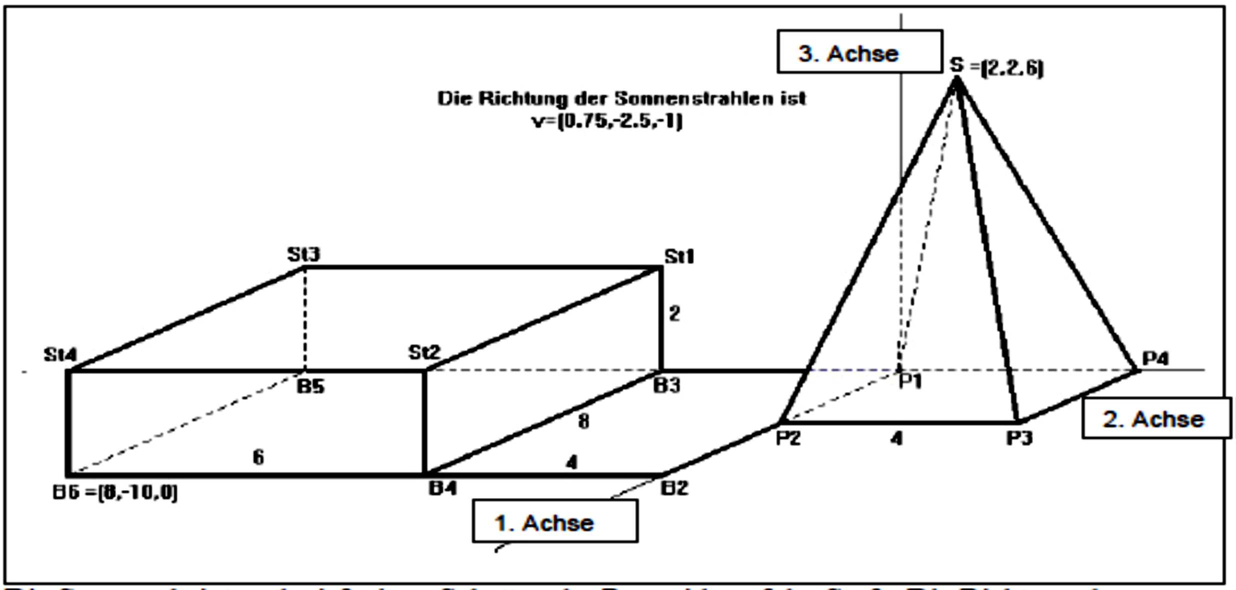
a. Zeichnen Sie ein Bild der Pyramide und ihres Schattens in einem großzügigen Koordinatensystem.

b. Eine zweite Pyramide hat die folgenden Eckpunkte: P(-5;-10;0), Q(-5;-6;0), R (-9;-6;0), S (-9;-10;0) und T (-7;-8;3).
Zeichnen Sie das Bild dieser Pyramide in dasselbe Koordinatensystem. Zeichnen Sie den Schatten, den die erste Pyramide auf der zweiten erzeugt, nachdem Sie die notwendigen Rechnungen durchgeführt haben.



Kunst in der Wüste: Eine Pyramide und eine Riesentreppe (eher anspruchsvoll)

Eine quadratische Pyramide (Grundkante 4 und Höhe 6) steht neben einer Stufe.



Die Sonne scheint und wirft einen Schatten der Pyramide auf der Stufe. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

---

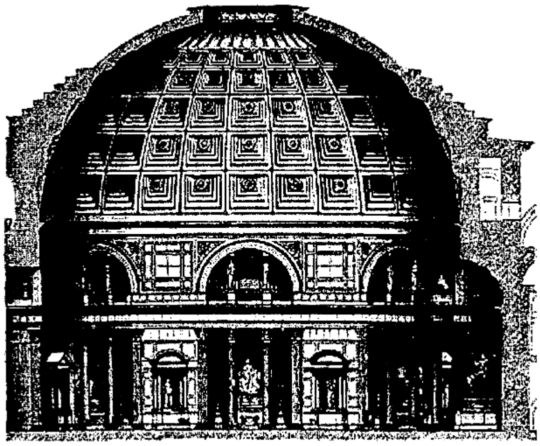
a. **Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Spitze, die den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat (Sonnenstrahl durch die Spitze der Pyramide). Zeigen Sie, dass die Punkte $P = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 6.5 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dieser Geraden liegen, und erklären Sie, wie man mit Hilfe des Punktes Q entscheiden kann, welche Pyramidenflächen in der Sonne liegen.**

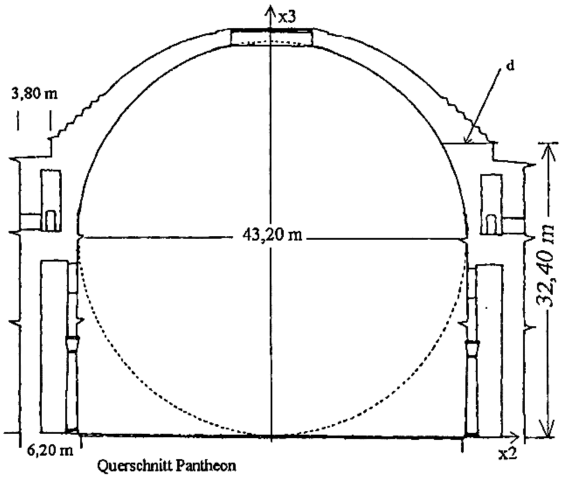
---

b. Die Punkte $\begin{pmatrix} 5.2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4.4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen auf dem Schattenrand. Zeichnen Sie den Schatten der Pyramide, nachdem Sie die noch fehlenden Punkte berechnet haben. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Disegno angelico è non umano – das Pantheon

Das Pantheon in Rom, der größte und berühmteste Kuppelbau der Antike, wurde von Kaiser Hadrian in den Jahren 117 bis 138 in der heutigen Form erbaut. Auf den 6,20 m starken Wänden des Rundbaus liegt die Kuppel auf, deren Scheitelhöhe von 21,60 m der Höhe der Wände entspricht. Die Gesamthöhe von 43,20 m entspricht wiederum dem Durchmesser des Innenraums. Diese Übereinstimmung der Maße bedingt, dass die Kuppel im Innenraum die Form einer Halbkugel aufweist. Der Raum wird einzig durch eine große kreisrunde Öffnung (Okulus) von 9 m Durchmesser im Scheitel der Kuppel erhellt.





Querschnitt Pantheon

a) In welcher Höhe über dem Fußboden befindet sich der Okulus?

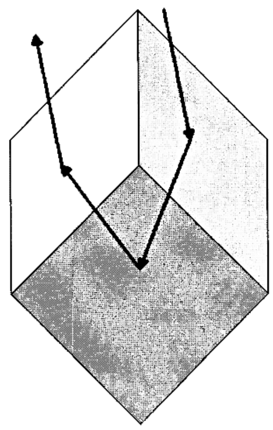
d) Parallel einfallende Sonnenstrahlen haben die Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $a < 0$.

Untersuchen Sie die Lage des Lichtflecks in Abhängigkeit von a.

Es fallen Sonnenstrahlen in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ ein. Geben Sie die Art und die genaue Lage des Lichtflecks an.

Einmal zum Mond und zurück – Lunar Laser Ranging

Bei den verschiedenen Mondlandungen ließen die Astronauten auf dem Mond Reflektoren in der Form von Tripelspiegeln bzw. Tripelprismen zurück, die dazu dienen, ständig Informationen, z.B. über den Abstand des Mondes zur Erde oder die Verschiebung der Kontinente auf der Erde, zu gewinnen.
Das Messverfahren (lunar laser ranging) läuft folgendermaßen ab:
Ein sehr kurzer Laserblitz wird von einem Teleskop in Richtung des Spiegels geschossen, von ihm reflektiert und vom Teleskop wieder aufgefangen. Mithilfe der gemessenen Laufzeit des Laserstrahls konnte man bereits im Jahr 1969 die Entfernung zwischen Mond und Erde auf 20 cm genau bestimmen.



Ein Tripelspiegel besteht aus drei je paarweise orthogonalen ebenen Spiegeln, die von quadratischer Form mit 10 LE Seitenlänge sind.

a) Zur Vereinfachung wird der Tripelspiegel so in ein räumliches Koordinatensystem gelegt, dass jeder der drei Spiegel auf jeweils einer der Koordinatenebenen liegt.
Ein Laserblitz wird vom Punkt P(23/53/29) aus in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ geschossen.
Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl den Tripelspiegel trifft. Welche der drei Spiegelflächen trifft er zuerst?

b) Erklären Sie anhand einer Skizze, wie man im Allgemeinen den Richtungsvektor erhält, in dessen Richtung der gespiegelte Strahl verläuft. Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf welcher der Laserblitz nach der Spiegelung an der ersten Spiegelfläche verläuft.

c) Eine Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ wird an der x_1x_2-Ebene gespiegelt.
Wie lautet der Richtungsvektor der gespiegelten Geraden? Was ändert sich, wenn Sie die Gerade g anstatt an der x_1x_2-Ebene an der x_1x_3-Ebene bzw. an der x_2x_3-Ebene spiegeln?
Wie verläuft demnach ein Lichtstrahl, der nacheinander an allen drei Spiegelflächen des Tripelspiegels gespiegelt wird, nach der Reflexion?

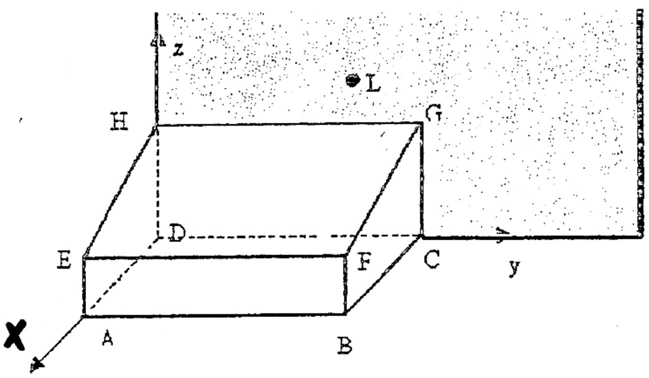
d) Verfolgen Sie den weiteren Weg des Laserblitzes aus a). Wird er an allen drei Spiegelflächen gespiegelt? Auf welcher Geraden verlässt er den Tripelspiegel?
Wie groß ist der Abstand zwischen ein- und ausfallendem Strahl?

e) Die Laufzeit eines Laserblitzes von der Erde zum Mond und zurück wurde mit 2,55 s gemessen. Welcher Wert ergibt sich hiermit für die Entfernung vom Teleskop zum Tripelspiegel?

Hobbyraum

(erfrischend schwierig)

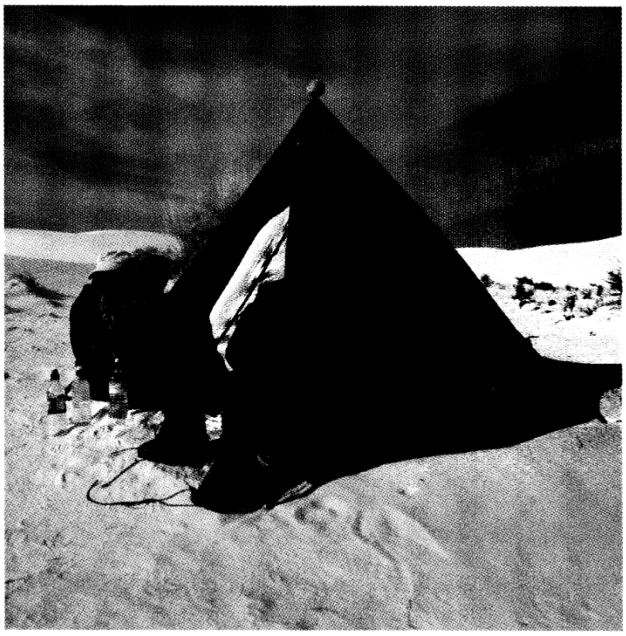
Tori Zeppelin plant einige Veränderungen auf ihrem Grundstück. Das Haus soll einen Anbau erhalten, der als Hobbyraum genutzt werden soll. Dieser soll eine rechteckige Grundfläche und ein Pultdach erhalten.
Um bei der Planung Fehler zu vermeiden, zeichnet Tori Zeppelin den Hobbyraum mit den gewünschten Maßen in ein kartesisches Koordinatensystem.
Drei Kanten liegen auf den Koordinatenachsen, der Boden ist Teil der x-y-Ebene. Es ist A(5;0;0), B(5;3;0), E(S;O;2,S) und H(0;0;4) (Angabe in Metern), mit $S \in \mathbb{R}$.

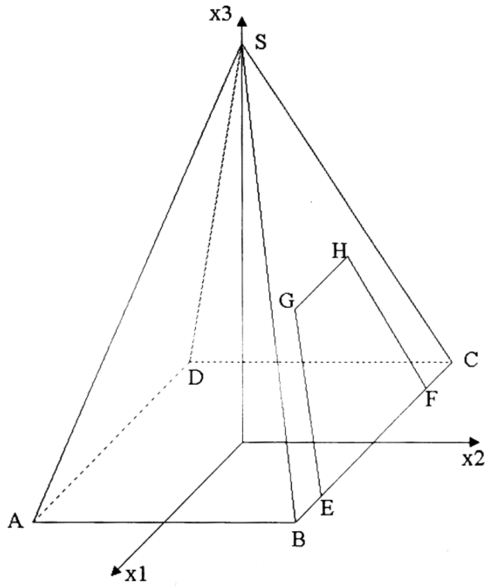


a) Tori denkt auch über die Verlängerung des Pultdaches bis zum Erdboden nach, um zusätzlich einen Unterstand für Brennholz zu erhalten.
Wie viel Kubikmeter Holz könnte sie dann maximal lagern?

b) An der in der y-z-Ebene befindlichen Wand des Wohnhauses ist eine Lampe im Punkt L(0; 2,5 ; 5) befestigt, die auch weiterhin genutzt werden soll.
Neben der Seitenwand BCGF des Anbaus und der Wohnhauswand will Tori Zeppelin eine Sitzecke anlegen.
Dabei soll ein runder Tisch, Durchmesser 1,00m, Höhe 0,80m, so fest positioniert werden, dass er vollständig von der Lampe ausgeleuchtet wird <u>und</u> zwischen Wohnhauswand und Tischplatte ein Abstand von 2,00m besteht.
Ermitteln Sie, wie weit der Mittelfuß des Tisches mindestens von der Seitenwand des Anbaus entfernt sein muss.

Pyramidenförmiges Expeditionszelt





Außer kuppel- und tunnelförmigen Zelten werden bei Expeditionen vereinzelt noch pyramidenförmige Zelte als Basiszelte eingesetzt.
Ein solches Pyramidenzelt hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 4,10 m und eine Höhe von 2,80 m.

---

b) Der Zelteingang EFGH hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes, das symmetrisch zur Symmetrieachse der Seitenfläche BCS liegt. Die Längen der beiden parallelen Seiten $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ betragen 2,0 m und 1,50 m, die Eingangshöhe beträgt 1,80 m.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte E, F, G und H sowie die Trapezhöhe.

c) Die trapezförmige Eingangsöffnung kann durch eine Drehung um die Seite $\overline{GH}$ mithilfe zweier Zeltstangen horizontal aufgespannt werden. Welche Koordinaten haben die Bildpunkte E' und F'?

d) Bei aufgespannter Zeltöffnung beginnt es leicht zu regnen. Dabei werden die Regentropfen vom Wind in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, $a < 0$ getrieben.
Untersuchen Sie, für welche Werte von a es in das Zelt hineinregnet.

Typische Aufgaben auf Klausur- bzw. Abiturniveau

1. Fliegender Teppich (Zentral- und Parallelprojektion)

Zeichnen Sie in ein übersichtliches Koordinatensystem einen fliegenden, zauberhaft ebenen und dabei kuschelig weichen, aber abschüssigen Teppich, der durch die Punkte A (-2; -2; 2), B (2; -2; 4), C (2; 2; 4) und D (-2; 2; 2) begrenzt ist.

a) Berechnen und zeichnen Sie die Schattenfläche des Teppichs, der nachts durch das punktuelle Opferlicht in O (2; 2; 6) in der x-y-Ebene erzeugt wird.

b) Berechnen Sie das Volumen des Schattenraums, der durch die Frühlingssonne erzeugt wird, wenn die parallelen Sonnenstrahlen dem folgenden Richtungsvektor folgen: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Vergleichen Sie hier den Schattenflächeninhalt in der x – y – Ebene mit dem Schattenflächeninhalt aus a).

2. Pharao Seltsamis (Teil der Abituraufgabe 2007)

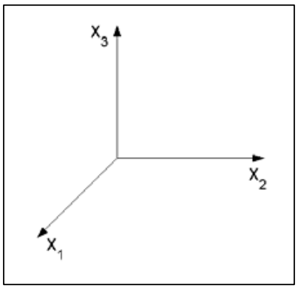
   Bearbeitungszeit: ca. 60 Min.

   Aufgabe: siehe nächste Seite

Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Aufgaben

Pharao Seltsamis gab bei seinen Baumeistern eine dreiseitige Pyramide in Auftrag. Die Baumeister hatten nach geraumer Zeit einen ersten Entwurf angefertigt. In diesem gaben sie die Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (siehe nebenstehende Abbildung) wie folgt an:
A(0|0|0), B(60|35|0), C(0|70|0) und die Spitze mit D(20|35|50).
Die Koordinaten sind in den damals üblichen Längeneinheiten (LE) angegeben.



a. Zeichnen Sie die Pyramide in ein geeignet eingeteiltes Koordinatensystem gemäß den Vorgaben ein.

(4 BE)

b. Pharao Seltsamis stellt vor Baubeginn eine zusätzliche Bedingung für den Bau: Der Abstand des Punktes B von der Kante AD solle 58 LE betragen, wobei eine Abweichung von etwa 1% zugelassen sei. Überprüfen Sie, ob diese Bedingung durch die vorgelegte Planung erfüllt wird.

(8 BE)

c. Die Pyramide wird wie geplant gebaut. Die Sonnenstrahlen fallen am Geburtstag des Pharao zu einer bestimmten Uhrzeit in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ auf die Pyramide.

Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die der Schatten der Pyramide in der x_1-x_2-Ebene erzeugt. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise bei der Lösung dieser Teilaufgabe, insbesondere hinsichtlich Ihrer Entscheidung, welche Pyramidenkanten für den Schattenwurf maßgeblich sind.

(8 BE)

d. Der Pharao möchte von seinem Lieblingsplatz L(120 |75 | 0) aus gerne die Spitze S(−480 | −15 | 300) des einzigen Berges in der Umgebung sehen. Ist dies noch möglich? Begründen Sie Ihre Antwort durch entsprechende Berechnungen. (Gehen Sie dabei von der stark vereinfachenden Annahme aus, dass die Augenhöhe des Pharaos mit dem Lieblingsplatz übereinstimmt.)

(7 BE)

e. Der Pharao möchte um die in Teilaufgabe c genannte Uhrzeit mit dem Kopf im Schatten liegen und trotzdem die o.g. Bergspitze S sehen. Von welchem Punkt auf der Strecke $\overline{BL}$ ist dies *gerade noch* möglich? Erläutern Sie, wie dieser Punkt bestimmt werden kann. (Keine Berechnung erforderlich!)

(3 BE)