Winkelberechnungen – Grundwissen

Internatsschule Schloss Hansenberg

1 Winkel zwischen zwei Vektoren – Skalarprodukt

1.1 Das Skalarprodukt für Spezialfälle: Orthogonale und parallele Vektoren

Sie haben bereits die ***Koordinatenform des Skalarprodukts*** kennengelernt. Im IR³ lautet sie:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Man kann das Skalarprodukt für ein ***Orthogonalitätskriterium*** verwenden:

> Zwei Vektoren $\vec{a}\neq\vec{o}$ und $\vec{b}\neq\vec{o}$ sind genau dann zueinander ***orthogonal***, wenn $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Weiterhin haben Sie gelernt, den ***Betrag eines Vektors im IR³*** zu berechnen:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Berechnet man nun das ***Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst***, so erkennt man, dass es dem Produkt des Betrags mit sich selbst entspricht:

$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

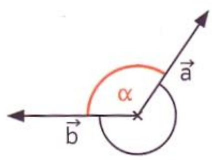
Daraus lässt sich eine einfache Rechenregel für das ***Skalarprodukt zweier zueinander paralleler und in die gleiche Richtung zeigender Vektoren*** $\vec{a}$ und $\vec{b} = r\cdot\vec{a}$ $(r\in IR^+)$ ableiten:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot r\cdot\vec{a} = r\cdot\vec{a}\cdot\vec{a} = r\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|\cdot r\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, in Worten:

> Das ***Skalarprodukt*** zweier zueinander ***paralleler*** und in die gleiche Richtung zeigender Vektoren ist gleich dem Produkt ihrer Beträge.

1.2 Das Skalarprodukt für beliebige Winkel

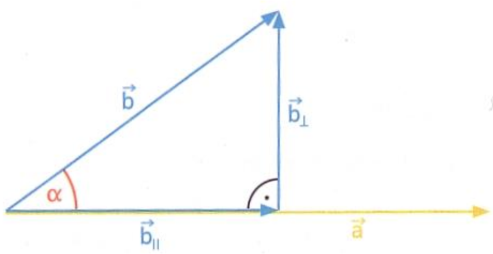
Zeichnet man zu einem gemeinsamen Anfangspunkt Pfeile zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die nicht zueinander parallel sind, so entstehen zwei Winkel. Den kleineren dieser Winkel bezeichnet man als den ***Winkel zwischen den Vektoren*** $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Die Größe dieses Winkels kann man mittels des Skalarproduktes bestimmen.



Dazu zerlegt man den Vektor $\vec{b}$ in einen zum Vektor $\vec{a}$ parallelen Anteil $\vec{b}_{II}$ und einen zu $\vec{a}$ orthogonalen Anteil $\vec{b}_{\perp}$.

Also ist $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\vec{b}_{II} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a}\cdot\vec{b}_{II} + \vec{a}\cdot\vec{b}_{\perp}$

Wegen $\vec{a}\perp\vec{b}_{\perp}$ ist $\vec{a}\cdot\vec{b}_{\perp} = 0$ und wegen $\vec{a}\,\mathrm{II}\,\vec{b}_{II}$ ist $\vec{a}\cdot\vec{b}_{II} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{II}|$.



Damit folgt $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{II}|$.

In Worten formuliert bedeutet das, dass für das Skalarprodukt nur der zu $\vec{a}$ parallele Anteil von $\vec{b}$ relevant ist.

Da $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{b}_{II}|}{|\vec{b}|}$ bzw. $|\vec{b}_{II}| = |\vec{b}|\cdot\cos\alpha$, erhält man insgesamt $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{II}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$.

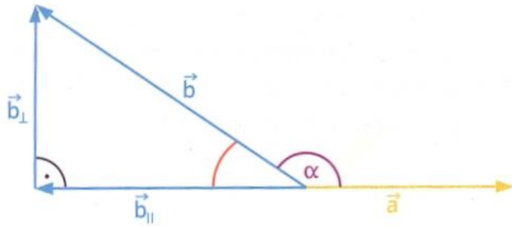
Winkelberechnungen – Grundwissen

Internatsschule Schloss Hansenberg

Ist der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ größer als 90°, so erhält man aus analogen Überlegungen

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(180°-\alpha)$ und wegen $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

ebenfalls $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$.

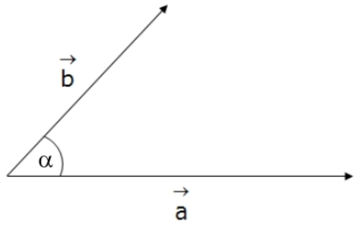


Insgesamt ergibt sich aus diesen Überlegungen folgender Zusammenhang:

Satz:

Für den ***Winkel*** α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ bzw. $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ mit $0° \le \alpha \le 180°$.



Anmerkung:

Man bezeichnet den Anteil $\vec{b}_{II}$ auch als ***senkrechte Projektion*** des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$, da man ihn sich als Schattenwurf von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ senkrechtem Lichteinfall vorstellen kann.

Beispiel 1.1: Winkelberechnung

Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|-5)$, $B(3|2|-4)$ und $C(5|-1|-2)$.
Bestimmen Sie jeweils die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ bzw. $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{AC}$.

Lösung: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{14}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC}| = 5$

α: Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$,

$\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{8+0+3}{\sqrt{14}\cdot 5} = \dfrac{11}{5\sqrt{14}}$; $\alpha \approx 54{,}0°$

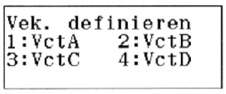
β: Winkel zwischen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{AC}$

$\cos(\beta) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-8+0-3}{\sqrt{14}\cdot 5} = \dfrac{-11}{5\sqrt{14}}$; $\beta \approx 126{,}0°$

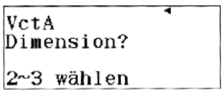
Beispiel 1.2: Winkelberechnung mit dem Casio 991 DE-X:

Es sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ gegeben.

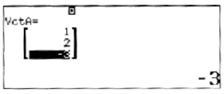
Du wechselst zuerst mit [MENU][5] in den Vektormodus. Nun wählst du [1], um den Vektor $\vec{a}$ zu definieren



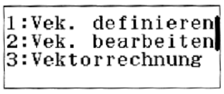
Da es sich um einen dreidimensionalen Vektor handelt, tippst du eine 3 ein.



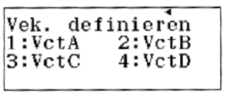
Nun gibst du die einzelnen Einträge ein und schließt die Eingabe jeweils mit [=] ab.



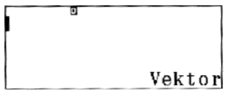
Um den zweiten Vektor einzugeben, tippst du zuerst [OPTN], und wählst dann Vek. definieren aus.



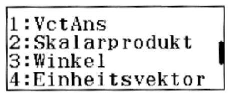
Durch tippen von [2] wählst du VctB aus, um $\vec{b}$ zu definieren.



Als nächstes musst du nun [AC] drücken, um zum Vektorberechnungsbildschirm zu gelangen.

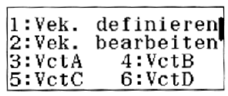


Du rufst den Winkelbefehl auf mit [OPTN], [▼] und Winkel .

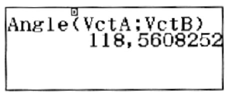


Nun kannst du den ersten Vektor mit [OPTN] und dann [3] aufrufen.

Nun gibst du die beiden Vektoren ein, getrennt durch S[;].



Der Winkel wird angezeigt. Es ist also $\alpha \approx 118{,}56°$.



Winkelberechnungen – Grundwissen

2 Schnittwinkel bei Geraden und Ebenen

Schnittwinkel Gerade – Gerade

Wenn zwei Geraden sich schneiden, entstehen vier Winkel, je zwei der Größe α ($\alpha \le 90°$) und je zwei der Größe $180° - \alpha$ (Fig. 1). Unter dem **Schnittwinkel zweier Geraden** versteht man den Winkel, der kleiner oder gleich 90° ist. Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Richtungsvektoren der Geraden, dann kann man den Schnittwinkel α der Geraden mit der Formel $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ berechnen.

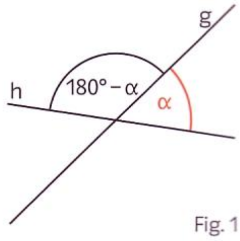


Fig. 1

Die Betragsstriche im Zähler der Formeln sichern, dass $\cos(\alpha) \ge 0$ und damit $0° \le \alpha \le 90°$ ist.

Schnittwinkel Ebene – Ebene

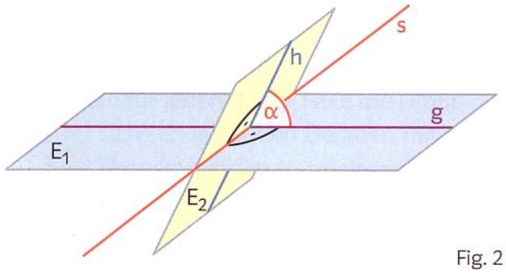


Fig. 2

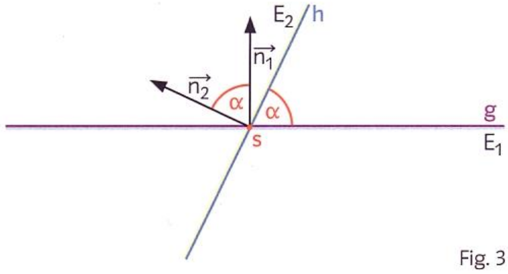


Fig. 3

Unter dem **Schnittwinkel α zweier Ebenen E_1 und E_2** versteht man den Schnittwinkel zweier Geraden g und h, die in E_1 bzw. E_2 liegen und orthogonal zur Schnittgeraden s der beiden Ebenen sind (Fig. 2). Dieser Winkel ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ der Ebenen E_1 und E_2 in Fig. 3. Deshalb kann man den Schnittwinkel α der Ebenen E_1 und E_2 mit der Formel $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$ berechnen.

Schnittwinkel Gerade – Ebene

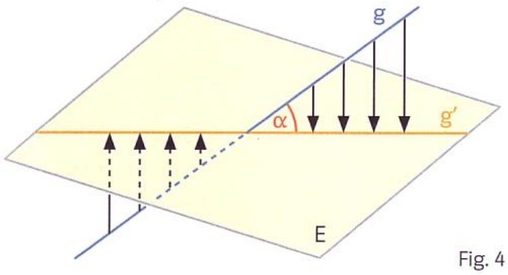


Fig. 4

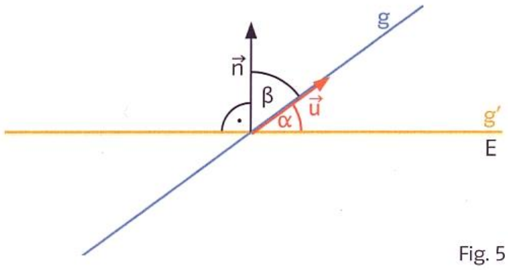


Fig. 5

Fällt man von jedem Punkt einer Geraden g das Lot auf die Ebene E, so erhält man in E eine Gerade g'. Unter dem **Schnittwinkel α der Geraden g und der Ebene E** versteht man den Winkel zwischen den Geraden g und g' (Fig. 4). Der Winkel β zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g in Fig. 5 ergänzt den Schnittwinkel α zu 90°. Daher kann man den Schnittwinkel α direkt mit der Formel $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ berechnen.

Es ist $\cos(\beta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.
Wegen $\beta = 90° - \alpha$ und $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ erhält man:
$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.

Satz: Schnittwinkel bei sich schneidenden Geraden und Ebenen
Haben die Geraden g_1 und g_2 die Richtungsvektoren $\vec{u_1}$ und $\vec{u_2}$ und die Ebenen E_1 und E_2 die Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$, so gilt für den **Schnittwinkel α**

- der Geraden g_1 und g_2: $\quad \mathbf{\cos(\alpha)} = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|}, \quad 0° \le \alpha \le 90°$
- der Ebenen E_1 und E_2: $\quad \mathbf{\cos(\alpha)} = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}, \quad 0° \le \alpha \le 90°$
- der Geraden g_1 und der Ebene E_1: $\quad \mathbf{\sin(\alpha)} = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{n_1}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{n_1}|}, \quad 0° \le \alpha \le 90°.$

Winkelberechnungen – Grundwissen

Internatsschule Schloss Hansenberg

Beispiel 2.1: Winkelberechnungen bei Geraden und Ebenen

Gegeben sind die sich schneidenden Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sowie die Ebenen $E_1\colon 2x_1 + x_2 - x_3 = 12$ und $E_2\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels
a) der Geraden g und h, b) der Ebenen E_1 und E_2, c) der Geraden g und der Ebene E_1.

Lösung: a) $\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}$. Somit ist $\alpha \approx 70{,}9°$.

Der Schnittwinkel beträgt 70,9°.

b) $\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}}$. Somit ist $\alpha \approx 42{,}4°$.

Der Schnittwinkel beträgt 42,4°.

c) $\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}$. Somit ist $\alpha \approx 19{,}1°$.

Der Schnittwinkel beträgt 19,1°.

Links zum Thema Skalarprodukt:

- Herleitung ähnlich zu 1.2 als Video, dazu Erklärungen zum Skalarprodukt in der Physik:
  http://www.youtube.com/watch?v=uhwW7HiPp_U
- Der umgekehrte Weg: Herleitung der Koordinatenform des Skalarprodukts aus seinen Eigenschaften, dazu ebenfalls Erklärungen zum Skalarprodukt in der Physik:
  http://www.youtube.com/watch?v=tKVeHS5XDe8
- Alle Herleitungen und Erklärungen noch einmal zum Nachlesen, dazu über die Schulmathematik hinausgehende Erläuterungen:
  http://de.wikipedia.org/wiki/Skalarprodukt