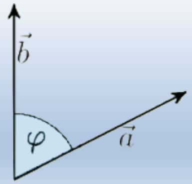
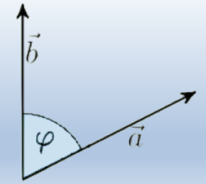


Inhalt



1 Winkel zwischen zwei Vektoren – Skalarprodukt

1.1 Das Skalarprodukt für Spezialfälle

Koordinatendefinition des Skalarprodukts: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Betrag eines Vektors im IR³: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

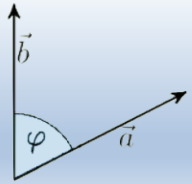
Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

Skalarprodukt zweier zueinander paralleler und in die gleiche Richtung zeigender Vektoren, d.h. $\vec{b} = r\cdot\vec{a}\ \ (r \in IR^+)$

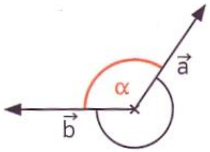
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot r\cdot\vec{a} = r\cdot\vec{a}\cdot\vec{a} = r\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|\cdot r\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Skalarprodukt zweier zueinander paralleler und in die entgegengesetzte Richtung zeigender Vektoren, d.h. $\vec{b} = -r\cdot\vec{a}\ \ (r \in IR^+)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(-r\cdot\vec{a}) = -r\cdot\vec{a}\cdot\vec{a} = -r\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = -|\vec{a}|\cdot\underbrace{r\cdot|\vec{a}|}_{=|\vec{b}|} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$



1.2 Das Skalarprodukt für beliebige Winkel



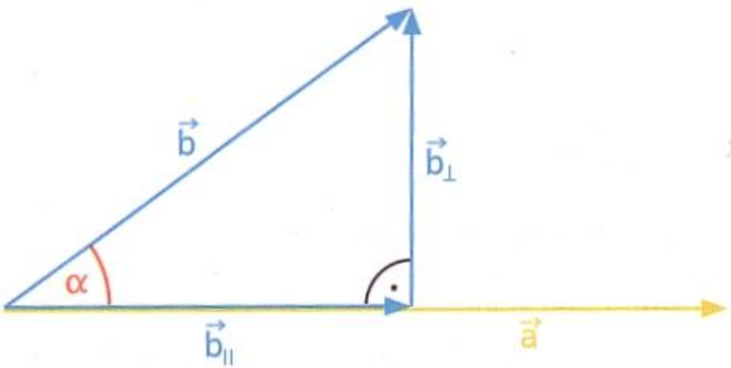
Fall 1: $0 \le \alpha \le 90°$

Zerlegung des Vektors $\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a}\cdot\vec{b}_{\parallel} + \vec{a}\cdot\vec{b}_{\perp}$$

Mit $\vec{a}\cdot\vec{b}_{\perp} = 0$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}_{\parallel} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\parallel}|$

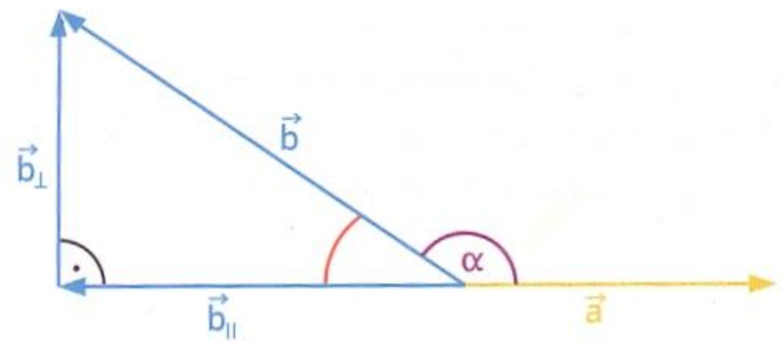
folgt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\parallel}|$



Mit $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{b}_{\parallel}|}{|\vec{b}|}$ bzw. $|\vec{b}_{\parallel}| = |\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

folgt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\parallel}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

Fall 2: 90°<α≤180°



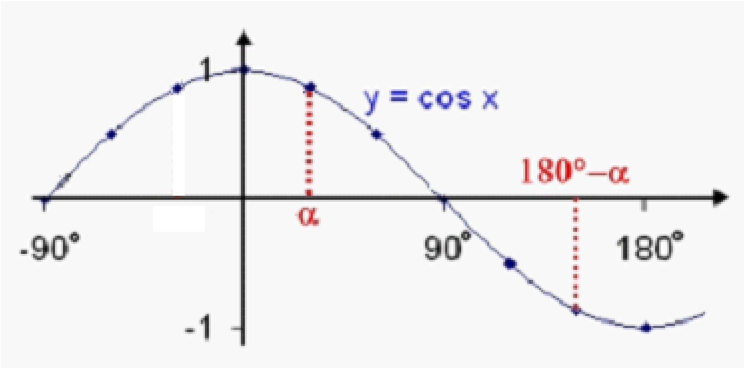
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}) = \vec{a}\cdot\vec{b}_{\parallel} + \vec{a}\cdot\vec{b}_{\perp}$$

Mit $\vec{a}\cdot\vec{b}_{\perp} = 0$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}_{\parallel} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\parallel}|$

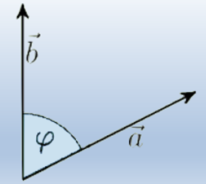
folgt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\parallel}|$

Mit $\cos(180^\circ - \alpha) = \dfrac{|\vec{b}_{\parallel}|}{|\vec{b}|}$ bzw. $|\vec{b}_{\parallel}| = |\vec{b}|\cdot\cos(180^\circ - \alpha)$

und $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$



folgt auch hier: $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\parallel}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$



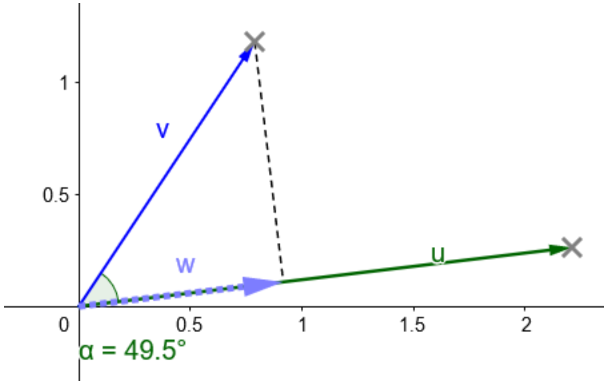
Winkel

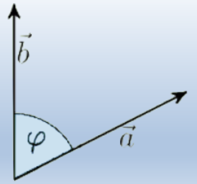
Satz:

Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $0° \leq \alpha \leq 180°$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

[Veranschaulichung des Skalarprodukts in GeoGebra:]





Beispiel 1.1: Winkelberechnung

Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|-5)$, $B(3|2|-4)$ und $C(5|-1|-2)$.
Bestimmen Sie jeweils die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ bzw. $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{AC}$.

Lösung: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{14}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC}| = 5$

α: Winkel zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$,

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{8+0+3}{\sqrt{14} \cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{14}};\ \alpha \approx 54{,}0°$$

β: Winkel zwischen $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{AC}$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-8+0-3}{\sqrt{14} \cdot 5} = \frac{-11}{5\sqrt{14}};\ \beta \approx 126{,}0°$$

Beispiel 1.2: Winkelberechnung mit [Casio 991DE-X]:

Es sind die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Du wechselst zuerst mit [MENU][5] in den Vektormodus. Nun wählst du [1], um den Vektor $\vec{a}$ zu definieren

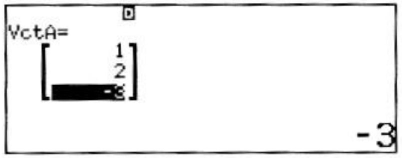
```
Vek. definieren
1:VctA    2:VctB
3:VctC    4:VctD
```

Da es sich um einen dreidimensionalen Vektor handelt, tippst du eine 3 ein.

```
VctA
Dimension?

2~3 wählen
```

Nun gibst du die einzelnen Einträge ein und schließt die Eingabe jeweils mit [=] ab.

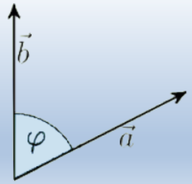


Um den zweiten Vektor einzugeben, tippst du zuerst [OPTN], und wählst dann Vek. definieren aus.

```
1:Vek. definieren
2:Vek. bearbeiten
3:Vektorrechnung
```

Durch tippen von [2] wählst du VctB aus, um $\vec{b}$ zu definieren.

```
Vek. definieren
1:VctA    2:VctB
3:VctC    4:VctD
```



Winkel

Als nächstes musst du nun [AC] drücken, um zum Vektorberechnungsbildschirm zu gelangen.

```
                   Vektor
```

Du rufst den Winkelbefehl auf mit [OPTN], [▼] und Winkel .

```
1:VctAns
2:Skalarprodukt
3:Winkel
4:Einheitsvektor
```

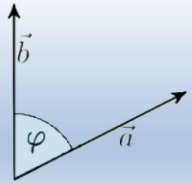
Nun kannst du den ersten Vektor mit [OPTN] und dann [3] aufrufen.

Nun gibst du die beiden Vektoren ein, getrennt durch ^{S}[;].

```
1:Vek. definieren
2:Vek. bearbeiten
3:VctA    4:VctB
5:VctC    6:VctD
```

Der Winkel wird angezeigt. Es ist also $\alpha \approx 118,56°$.

```
Angle(VctA;VctB)
       118,5608252
```



2 Winkelberechnungen bei Geraden und Ebenen

Schnittwinkel Gerade – Gerade

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Die Betragsstriche im Zähler der Formeln sichern, dass $\cos(\alpha) \geq 0$ und damit $0° \leq \alpha \leq 90°$ ist.

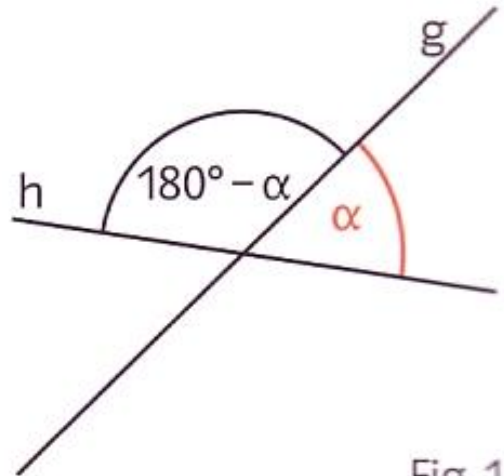
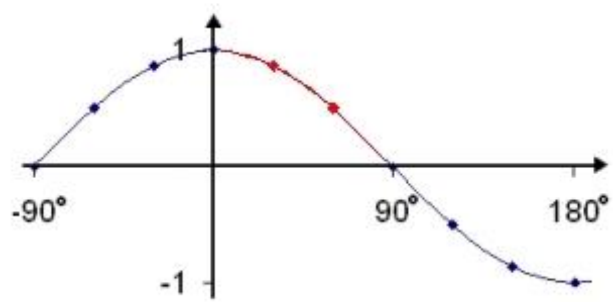


Fig. 1



Winkel

Schnittwinkel Ebene – Ebene

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

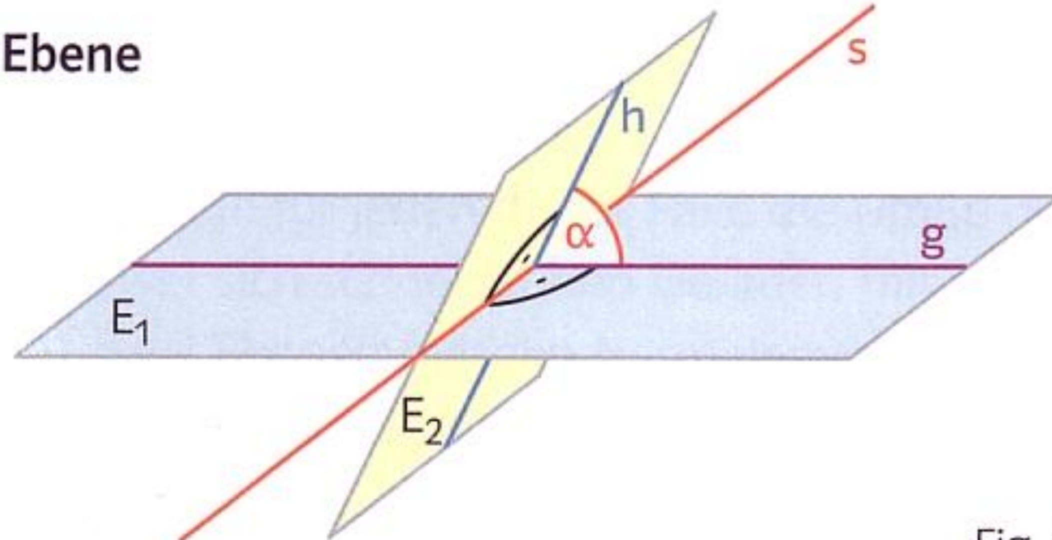


Fig. 2

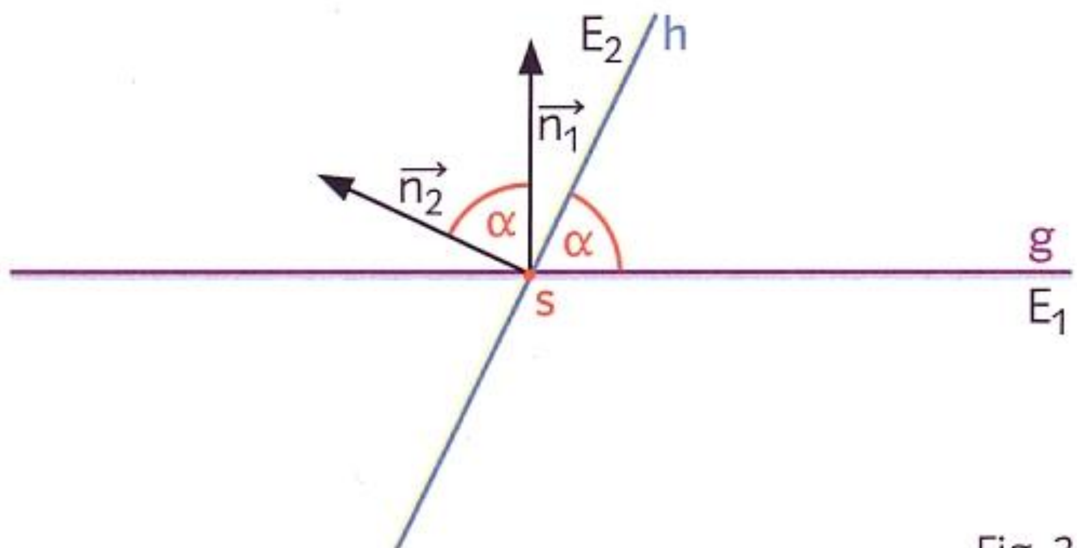
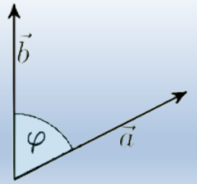


Fig. 3



Winkel

Schnittwinkel Gerade – Ebene

Es ist $\cos(\beta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.

Wegen $\beta = 90° - \alpha$ und $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ erhält man:

$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$.

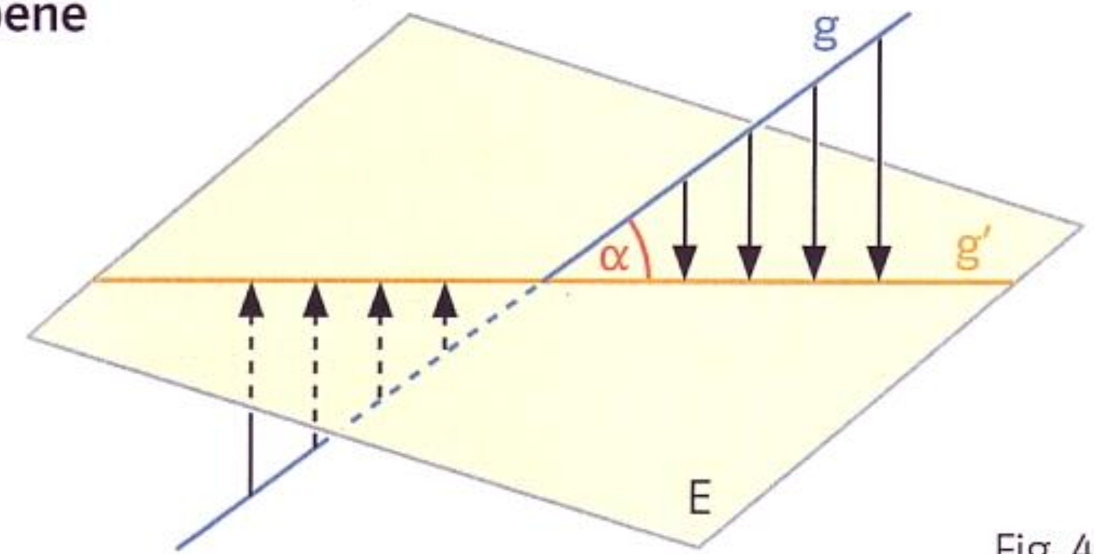


Fig. 4

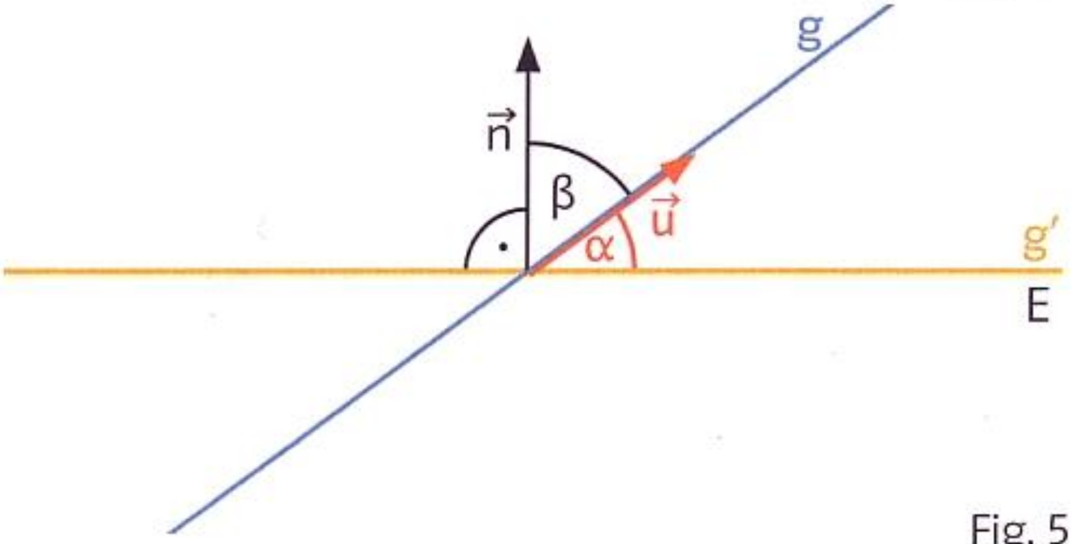


Fig. 5

3 Aufgaben aus dem Skript und weitere Aufgaben

Aufgabe 1.1: Treideln

Vorbemerkung: Bewegt sich ein Körper unter Einfluss einer konstanten Kraft $\vec{F}$ um ein geradliniges Wegstück $\vec{s}$ (der Betrag von $\vec{s}$ gibt die Weglänge, die Richtung von $\vec{s}$ die Bewegungsrichtung an), dann wird längs dieses Weges die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ verrichtet.

Beim Treideln (Bild 111/1) bringt ein Pferdegespann längs eines geradlinigen Treidelpfades von 2400 m Länge ständig eine Kraft von $|\vec{F}| = 420$ N auf. Zugrichtung am Seil und Flussrichtung bilden einen Winkel der Größe $\alpha = 22{,}5°$. Welche Arbeit wird am Schiff verrichtet?

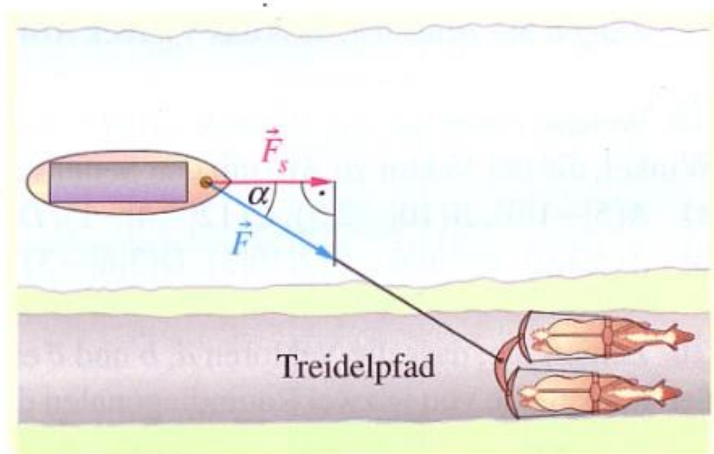


Bild 111/1: Treideln

Lösung: $W = 420\,\text{N} \cdot 2400\,\text{m} \cdot \cos 22{,}5° \approx 931{,}27\,\text{kJ}$

Weitere Aufgabe (nicht im Skript):

a) Verbindet man die Mittelpunkte der Kanten eines Würfels, so erhält man ein Kuboktaeder (Fig. 2). Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Flächen des Kuboktaeders gleichseitige Dreiecke und Quadrate sind.

b) Betrachten Sie

(1) eine Dreiecksfläche und ein Quadrat mit gemeinsamer Kante,

(2) zwei der Dreiecksflächen mit einem gemeinsamen Punkt.

Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den Ebenen durch diese beiden Flächen.

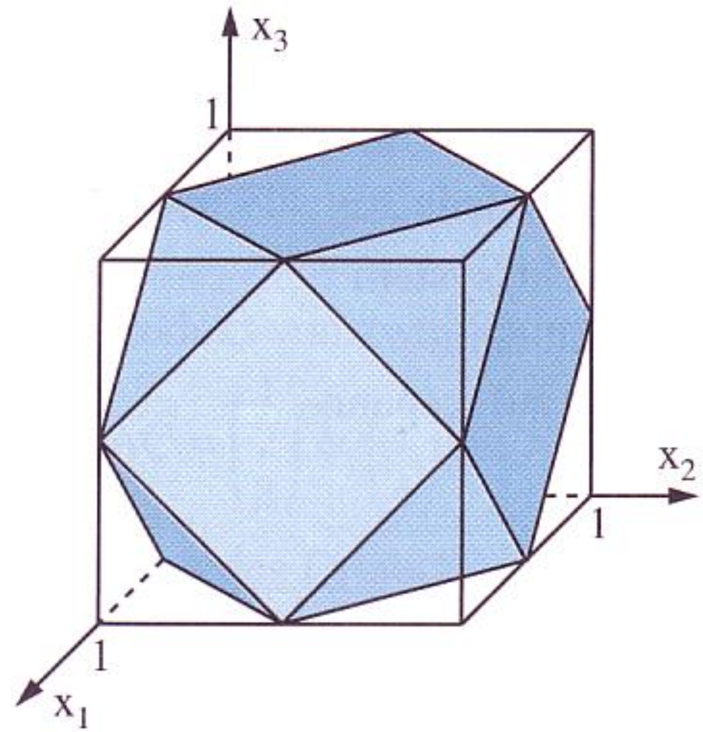
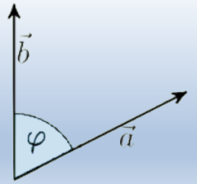


Fig. 2



Lösung:

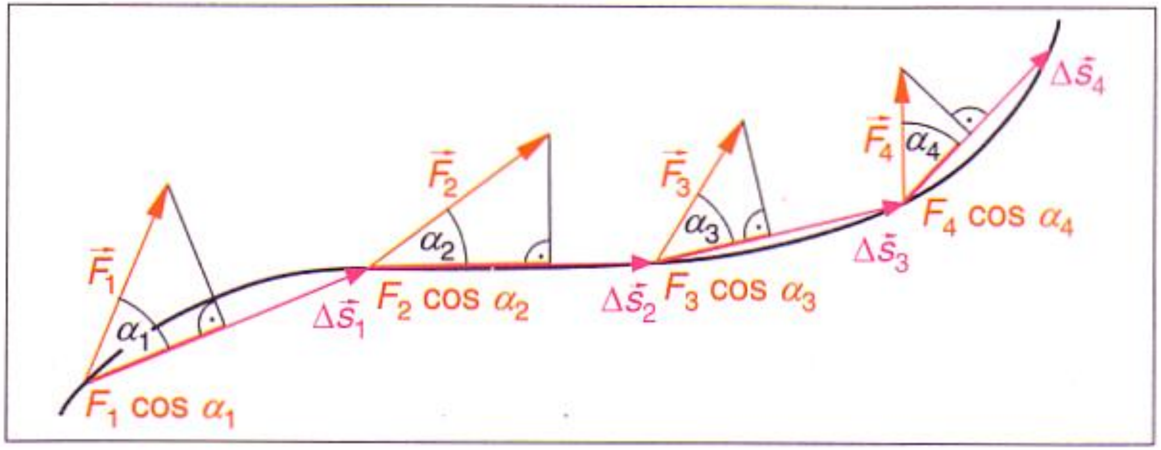
Die Kanten des Kuboktaeders sind aus Symmetriegründen alle gleich lang.

Bestimmung des gesuchten Winkel zu (1):

- Ebenengleichungen aus je drei Punkten und Umformen in Normalenform:
  z.B. $x_3=1$ für die Fläche des oberen Quadrats (durch scharfes Hingucken),
  $x_1-x_2+x_3=1{,}5$ für die Ebene der Dreiecksfläche in der Zeichnung links davon
- Bestimmen der Schnittwinkel liefert für den Winkel dazwischen 54,7°
- Betrachtung von Fig. 2 zeigt aber: Der Schnittwinkel ist offensichtlich stumpf!
  Der gesuchte Winkel muss also der Nebenwinkel dazu sein: 180°-54,7°= 125,3°
- Anmerkung: Das Problem ließe sich evtl. vermeiden, indem man den Betrag im Zähler der Formel für den Winkel weglässt – aber das funktioniert nur bei geeigneter Wahl der Vorzeichen der Normalenvektoren.

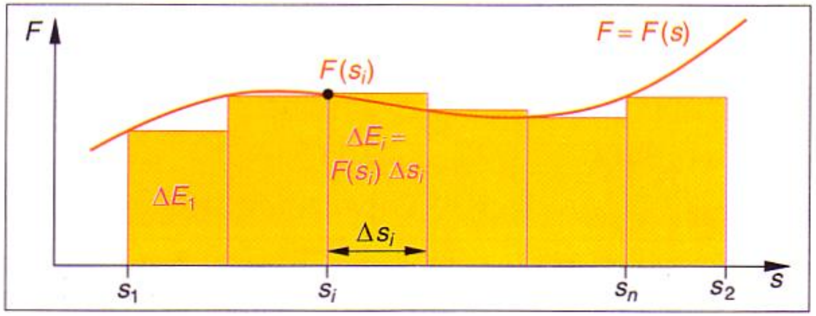
4 Ergänzungen

4.1 Linienintegrale am Beispiel des Arbeitsintegrals



$$E \approx \Sigma \Delta E_i = \Sigma \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i = \Sigma F_i \, \Delta s_i \cos \alpha_i$$

$$E = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(s_i) \cdot \Delta \vec{s}_i = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{s}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) \, \mathrm{d}s,$$



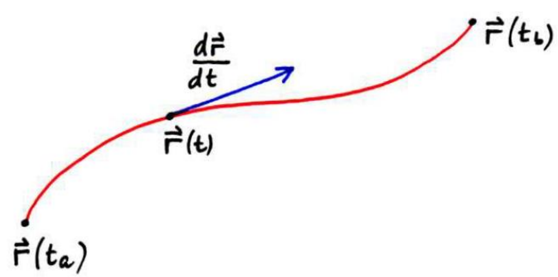
Praktische Berechnung eines Linienintegrals:

Ein Kurvenstück C ist oft in Parameterform gegeben. Der Ortsvektor lautet dann

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t_a \leq t \leq t_b \qquad \text{(t ist i. allg. die Zeit)}$$

Mit der Substitution $d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt$ folgt: $W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt$

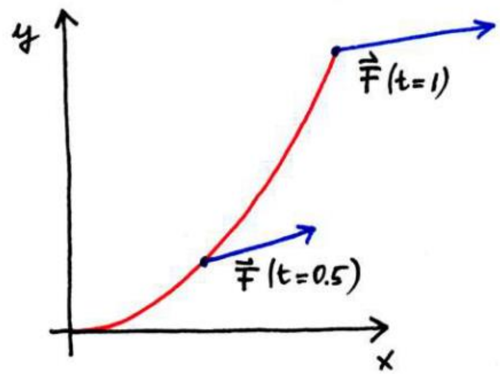
$\frac{d\vec{r}}{dt}$ ist die Ableitung des Ortsvektors , d.h. der Geschwindigkeitsvektor



Der Geschwindigkeitsvektor $d\vec{r}(t)/dt$ ist tangential zur Kurve $\vec{r}(t)$

Beispiel:

Bestimmt werden soll das Arbeitsintegral für das Kraftfeld $\vec{F}(x,y) = (2x+y, x)$ entlang der Parabel $\vec{r}(t) = (t, t^2)$:



$$\vec{F}(x(t), y(t)) = \begin{pmatrix} 2x(t) + y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Ableitung des Ortsvektors nach t liefert

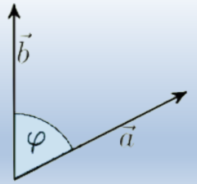
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

und somit

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 2t + t^2 + 2t^2 = 2t + 3t^2.$$

Das Kurvenintegral ist deshalb gegeben als:

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \int_0^1 (2t + 3t^2) dt = \frac{2t^2}{2} + \frac{3t^3}{3} \bigg|_0^1 = 1 + 1 = 2.$$



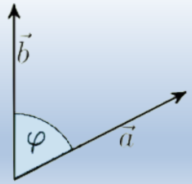
4.2 Das Standardskalarprodukt und Winkel im n-dimensionalen Raum

Definition [Bearbeiten]

Das Standardskalarprodukt zweier reeller Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ und $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ ist definiert als

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x^T y,$$

wobei x^T den transponierten Vektor zu x bezeichnet und das Ergebnis eine reelle Zahl ist. Das reelle Standardskalarprodukt berechnet sich also durch Multiplikation der jeweils entsprechenden Vektorkomponenten und durch Summation über alle diese Produkte. Alternativ wird das Standardskalarprodukt statt über spitze Klammern auch durch $x \cdot y$ oder $x \circ y$ notiert.



Winkel

Beispiel [Bearbeiten]

Das Standardskalarprodukt der beiden reellen Vektoren $x = (1, 2, -3)^T$ und $y = (5, -4, 1)^T$ im dreidimensionalen Raum ist

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 1 = 5 - 8 - 3 = -6.$$

Winkel [Bearbeiten]

Über das reelle Standardskalarprodukt wird der Winkel φ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle}\,\sqrt{\langle y, y \rangle}} = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}$$

Quelle: [*http://de.wikipedia.org/wiki/Standardskalarprodukt*](http://de.wikipedia.org/wiki/Standardskalarprodukt)