Winkelberechnungen – Aufgaben

1 Aufgaben zu Winkeln zwischen Vektoren

Grundaufgaben und kurze Anwendungsaufgaben: Bigalke S. 82, Nr. 2; S. 84, Nr. 1, 4

Aufgabe 1.1: Treideln *(physikalische Anwendungsaufgabe, relativ einfach)*

Vorbemerkung: Bewegt sich ein Körper unter Einfluss einer konstanten Kraft $\vec{F}$ um ein geradliniges Wegstück $\vec{s}$ (der Betrag von $\vec{s}$ gibt die Weglänge, die Richtung von $\vec{s}$ die Bewegungsrichtung an), dann wird längs dieses Weges die Arbeit $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ verrichtet.

Beim Treideln (Bild 111/1) bringt ein Pferdegespann längs eines geradlinigen Treidelpfades von 2400 m Länge ständig eine Kraft von $|\vec{F}| = 420$ N auf. Zugrichtung am Seil und Flussrichtung bilden einen Winkel der Größe $\alpha = 22{,}5°$. Welche Arbeit wird am Schiff verrichtet?

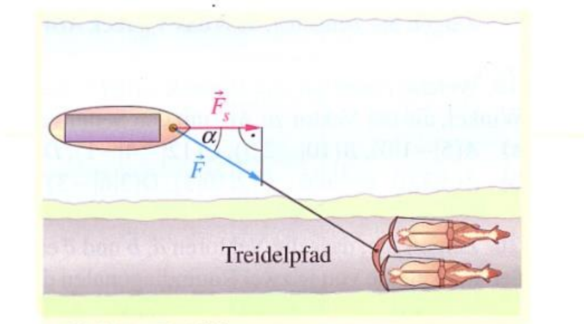


Bild 111/1: Treideln

2 Aufgaben zu Winkeln bei Geraden und Ebenen

Grundaufgaben: Bigalke S. 211-213, Nr. 2, 3a-d, 4
Umfangreichere Anwendungsaufgaben: Bigalke S. 222 (Beispiel); S. 229, Nr. 15

Aufgabe 2.1: Dachkonstruktion *(mittelschwer)*

Ein Haus mit einem Walmdach hat eine 20 m lange und 8 m breite rechteckige Grundfläche und einen 12 m langen und 4 m hohen Dachfirst, der symmetrisch zur Dachbodenfläche liegt.

a) Welchen Winkel bilden die Dachflächen mit der Dachbodenfläche?
b) Welchen Winkel bilden die Dachflächen miteinander?
c) Wie lang ist der Grat und welchen Winkel bildet er mit dem Dachboden?
d) Lässt sich für dieses Haus ein Dach konstruieren, bei dem alle Dachflächen mit der Grundfläche einen Winkel von 60° bilden?

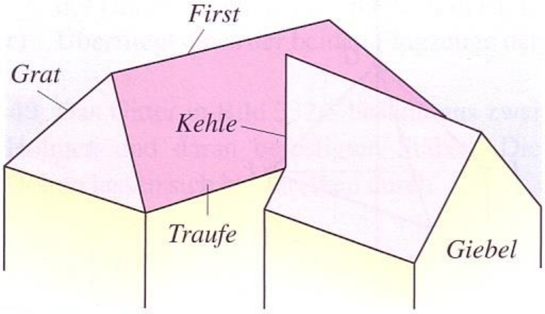


Bild 334/1: Haus mit Anbau

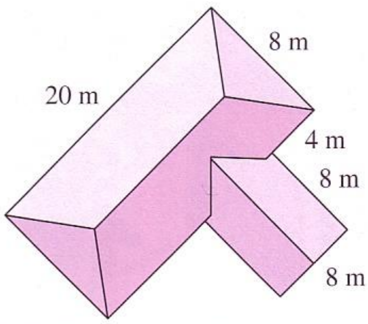
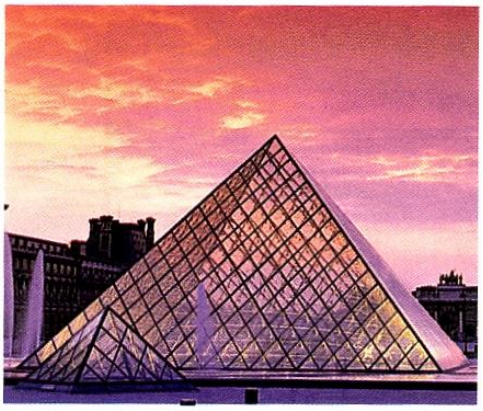
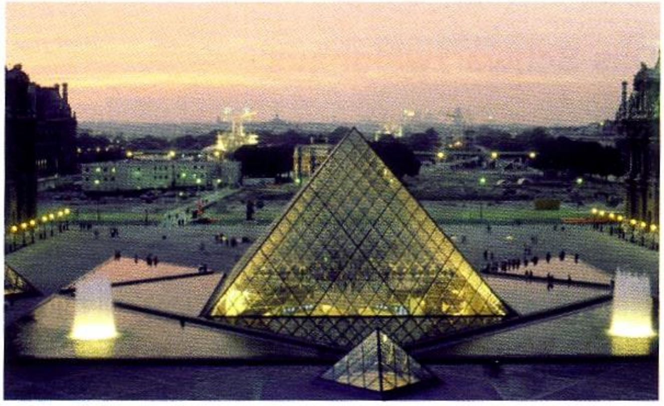


Bild 334/2: Grundriss der Dächer

Winkelberechnungen – Aufgaben

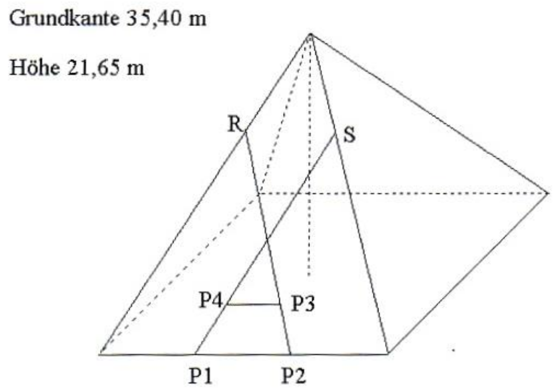
Aufgabe 2.2: Die gläserne Pyramide – Eingang zum Louvre *(umfangreich und anspruchsvoll)*





Im Rahmen der Modernisierung der größten Kunstsammlung der Welt, des Pariser Louvre errichtete im Jahre 1981 der amerikanische Architekt Ieoh Ming Pei eine gläserne Pyramide, durch welche die Besucher in die Napoleon-Halle des Museums gelangen.

a) Welche Neigung haben die Seitenflächen?
Welchen Winkel schließen die Seitenflächen miteinander ein?



b) Die Punkte P_1 und P_2 teilen eine Grundkante in drei gleich lange Teile, die Punkte R und S teilen die beiden Seitenkanten der zugehörigen Seitenfläche im Verhältnis 2:1.
Den Pyramideneingang bildet ein gleichschenkliges Trapez, das von den Geraden P_1S und P_2R sowie der Parallelen P_3P_4 zur Grundkante gebildet wird. Die Eingangshöhe beträgt 2,80 m.
Welche Maße hat die trapezförmige Eingangsöffnung?

c) Zeichnen Sie ein maßstabsgetreues Schrägbild mit Eingangsbereich.
Wie groß ist die gesamte Glasfläche?

d) In einem Reiseführer wird erwähnt, die Pyramide habe die gleichen Proportionen wie die Cheops-Pyramide in Gizeh, deren Basisbreite ursprünglich 230,36 m und deren Höhe 146,59 m betrug. Überprüfen Sie diese Behauptung.

e) Die Pyramide steht auf einer quadratischen Fläche. Sie wird auf drei Pyramidenseiten durch sieben Wasserbecken gebildet, welche die Form eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks haben. Die Wege zwischen den Becken haben eine Breite von 2 m.
Welche Maße haben die Wasserbecken, wie groß ist die gesamte quadratische Fläche?
Zeichnen Sie einen maßstabsgetreuen Grundriss dieser quadratischen Fläche mit Pyramide, Wasserbecken und Wegen.

Lösungen der Aufgaben

1 Lösungen der Aufgaben zu Winkeln zwischen Vektoren

Lösungen der Aufgaben aus Bigalke S. 82-84:

2. a) Messen: $|\vec{a}| \approx 5{,}7$, $|\vec{b}| \approx 4{,}5$, $\gamma \approx 72°$, $\vec{a}\cdot\vec{b} \approx 7{,}92$

$|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| \approx 6{,}4$, $\gamma \approx 88°$, $\vec{a}\cdot\vec{b} \approx 1{,}12$

$|\vec{a}| \approx 4{,}5$, $|\vec{b}| = 5$, $\gamma \approx 117°$, $\vec{a}\cdot\vec{b} \approx -10{,}21$

b) Koordinatenform: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 8$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix} = 1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = -10$

1. a) $\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{18}}$, $\gamma \approx 63{,}43°$

b) $\cos\gamma = \frac{-10}{\sqrt{14\cdot 20}}$, $\gamma \approx 126{,}70°$

c) $\cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{41\cdot 21}}$, $\gamma = 90°$

4. Der Ansatz $\cos 45° = \frac{24+2z}{6\cdot\sqrt{36+z^2}} = 0{,}707$ führt auf $24+2z = 0{,}707\cdot 6\cdot\sqrt{36+z^2}$.

Quadrieren und umformen: $z^2 - \frac{48}{7}z + \frac{36}{7} = 0$, $z_1 = 6$, $z_2 = \frac{6}{7}$.

Lösung zu Aufgabe 1.1:

$W = 420\,\mathrm{N}\cdot 2400\,\mathrm{m}\cdot\cos 22{,}5° \approx 931{,}27\,\mathrm{kJ}$

2 Lösungen der Aufgaben zu Winkeln bei Geraden und Ebenen

Lösungen der Aufgaben aus Bigalke S. 211-213 und 229:

2. $\cos\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{12\cdot 20}}$, $\gamma \approx 75{,}04°$, g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$

3. a) $\sin\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{9}{\sqrt{27\cdot 17}}$, $\gamma \approx 24{,}84°$

b) $\sin\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|}$, $\gamma \approx 35{,}3°$

c) $\sin\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\-3\\7\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}9\\-3\\7\end{pmatrix}\right|} = \frac{15}{\sqrt{27\cdot 139}}$, $\gamma \approx 14{,}2°$

d) $\sin\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{27}}$, $\gamma \approx 35{,}3°$

4. a) $\cos\gamma = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$, $\gamma \approx 61°$

$E_1: \; 3x-2y+2z=5$, $E_2: \; \vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ in E_1: $s = \frac{3}{2}r - \frac{5}{2}$

$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2,5\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$

b) $E_2: \; \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+s\\1+s\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ in E_1: $1+s+2(1+s)+2r=6$, $r = -\frac{3}{2}s + \frac{3}{2}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1,5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1,5\end{pmatrix}$, $\cos\gamma = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$, $\gamma \approx 76,37°$

c) $\cos\gamma = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}9\\-3\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}9\\-3\\7\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right|}$, $\gamma \approx 36,4°$, E_1 in E_2: $t = -\frac{7}{8}s$, g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}9\\20\\-3\end{pmatrix}$

15. a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\500\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}100\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\100\\100\end{pmatrix}$, $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\500\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$

b) $\cos\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}}$, $\gamma = 45°$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix}2500\\750\\25\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-10\\-50\\25\end{pmatrix}$ in E: $\begin{pmatrix}2500-10r\\250-50r\\25+25r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 225-75r = 0$

$r = 3$, $l = 3\cdot\left|\begin{pmatrix}-10\\-50\\25\end{pmatrix}\right| \approx 170,37\text{m}$

Ab einer Schnurlänge von ca. 170m gelangt der Drachen in den überwachten Luftraum.

d) $\sin 45° = \sqrt{0,5} = \dfrac{\begin{pmatrix}10\\50\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2600+z^2}}$, $\sqrt{0,5}\cdot\sqrt{2600+z^2} = z$

$0,5(2600+z^2) = z^2$, $z = \sqrt{2600} \approx 51$

Für z = 51 beträgt der Winkel der neuen Lage zur Erde 45°.
Winkel zwischen den Schnurstellungen:

$\cos\gamma' = \dfrac{\begin{pmatrix}-10\\-50\\25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\50\\51\end{pmatrix}}{\sqrt{3225\cdot5201}}$, $\gamma' \approx 108,88°$ (Drehwinkel)

Lösung zu Aufgabe 2.1:

a) Es sind $A(8\,|\,0\,|\,0)$, $B(8\,|\,20\,|\,0)$, $C(0\,|\,20\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$ die Eckpunkte des Dachbodens, $E(4\,|\,4\,|\,4)$ und $F(4\,|\,16\,|\,4)$ die Eckpunkte des Dachfirstes.

$\varepsilon_{\text{Dachboden}} : z = 0;$ $\varepsilon_{ABE} : x + z = 8;$ Schnittwinkel $\beta = 45°$

$\varepsilon_{\text{Dachboden}} : z = 0;$ $\varepsilon_{DAE} : -y + z = 0;$ Schnittwinkel $\beta = 45°$

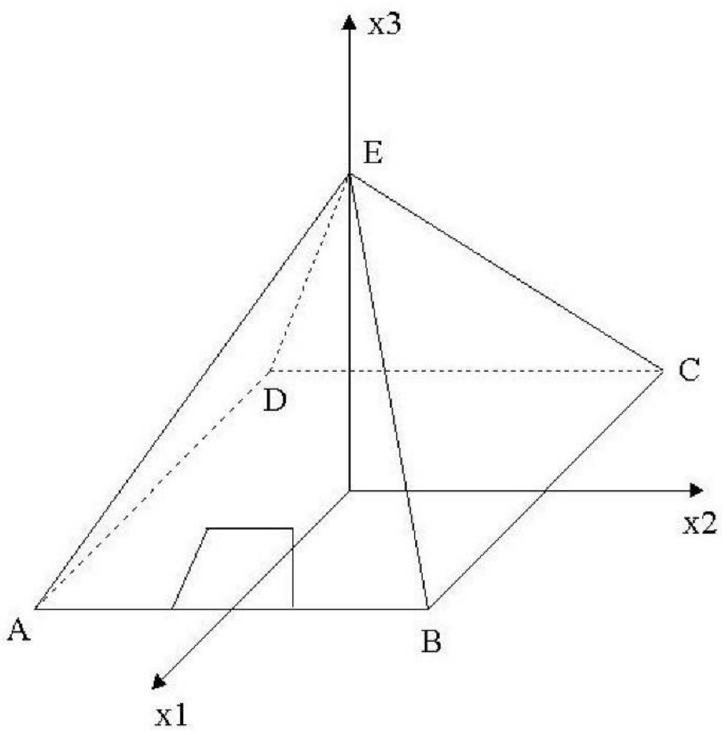
b) Winkel $\beta = 60°$

c) Länge des Grats $|\overline{DE}| = 4\sqrt{3}$, Winkel: $\beta = 35,264°$

d) Die Firsthöhe müsste $4\sqrt{3}\ m$ betragen; also $E'(4\,|\,4\,|\,4\sqrt{3})$ und $F'(4\,|\,16\,|\,4\sqrt{3})$.

Lösung zu Aufgabe 2.2:

a) ***Festlegung eines räumlichen Koordinatensystems***



A(17,7/- 17,7/0); B(17,7/17,7/0); C(- 17,7/17,7/0), D(-17,7/- 17,7/0); E(0/0/21,65)

Ebene E_1 durch die Punkte A,B und E

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 17,7 \\ -17,7 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -17,7 \\ 17,7 \\ 21,65 \end{pmatrix}$$

Normalenform von E_1:

$$\begin{pmatrix} 21,65 \\ 0 \\ 17,7 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 17,7 \\ -17,7 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Neigung der Ebene E_1:

Winkel zwischen E_1 und der x_1x_2-Ebene

$$\cos(\alpha)=\frac{\begin{pmatrix}21{,}65\\0\\17{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{21{,}65^2+17{,}7^2}}\text{, also } \alpha\approx 50{,}7°$$

Die Dachneigung beträgt $\tan(\alpha)\approx 1{,}22\approx 122\%$.

Alternative Lösung ohne Vektorrechnung: $\tan(\alpha)=\frac{21{,}65}{17{,}7}\approx 1{,}22$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der quadratischen Pyramide haben alle vier Seitenflächen dieselbe Neigung.
Winkel zwischen zwei Seitenflächen:
Ebene E_2 durch die Punkte B,C und E

$$E_2\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}17{,}7\\17{,}7\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-17{,}7\\-17{,}7\\21{,}65\end{pmatrix}$$

Normalenform von E_2:

$$\begin{pmatrix}0\\21{,}65\\17{,}7\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}17{,}7\\17{,}7\\0\end{pmatrix}\right)=0$$

Winkel zwischen E_1 und E_2:

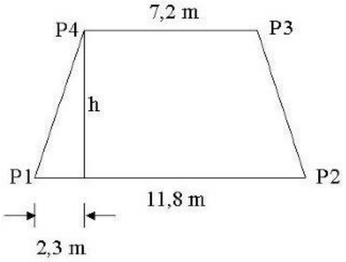
$$\cos(\beta)=\frac{\begin{pmatrix}21{,}65\\0\\17{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\21{,}65\\17{,}7\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}21{,}65\\0\\17{,}7\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\21{,}65\\17{,}7\end{pmatrix}\right|}\text{, also } \beta\approx 66{,}4°$$

Der Innenwinkel zwischen den beiden Seitenflächen ist der Supplementwinkel zu β, also $180° - \beta\approx 113{,}6°$.

b) $P_1(17{,}7/-5{,}9/0)$; $P2(17{,}7/5{,}9/0)$; damit $\left|\overline{P_1P_2}\right|=11{,}8$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}17{,}7\\-17{,}7\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}-17{,}7\\17{,}7\\21{,}65\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}5{,}9\\-5{,}9\\14{,}4\end{pmatrix}\text{, also } R(5{,}9/-5{,}9/14{,}4)$$

Entsprechend: $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BE}\approx\begin{pmatrix}5{,}9\\5{,}9\\14{,}4\end{pmatrix}$, also



$S(5{,}9/5{,}9/14{,}4)$
Gleichung der Geraden P_1S:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}17{,}7\\-5{,}9\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}11{,}8\\-11{,}8\\-14{,}4\end{pmatrix}$$

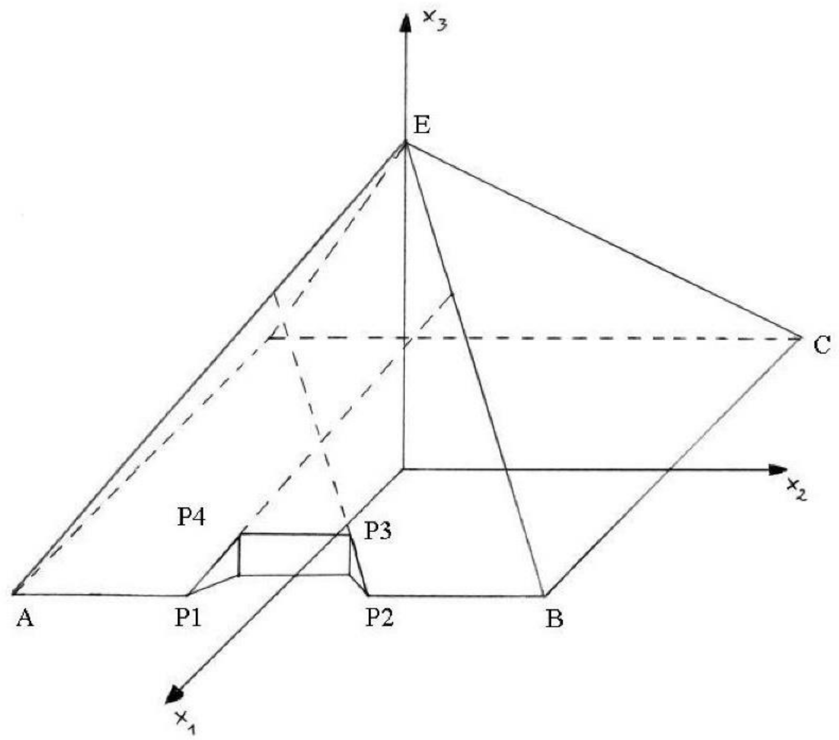
P_4 mit $x_3 = 2{,}8$ liegt auf der Geraden P_1S, also –

14,4k = 2,8, damit k $\approx$ - 0,194 und
$P_4(15{,}4/-3{,}6/2{,}8)$
Aus Symmetriegründen gilt dann: $P_3(15{,}4/3{,}6/2{,}8)$
Damit ergeben sich folgende Maße der Eingangsöffnung $P_1P_2P_3P_4$:
Länge der parallelen Seiten
$\left|\overline{P_1P_2}\right| = 11{,}8$ m; $\left|\overline{P_3P_4}\right| = 7{,}2$ m
Höhe des symmetrischen Trapezes:

$\left|\overline{P_1P_4}\right|^2 = 2{,}3^2 + h^2$, also $h \approx 3{,}6$

Trapezhöhe: 3,6 m

c)



Fläche des Dreiecks ABE:

Für die Höhe des Dreiecks gilt: $h_{\text{Dreieck}} = \sqrt{21{,}65^2 + 17{,}70^2} \approx 28{,}0$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot h_{\text{Dreieck}} \approx 494{,}97$

Fläche der nicht verglasten Eingangsöffnung: $A_{\text{Trapez}} = \approx \frac{1}{2}\cdot(7{,}2+11{,}8)\cdot 3{,}6 \approx 34{,}2$

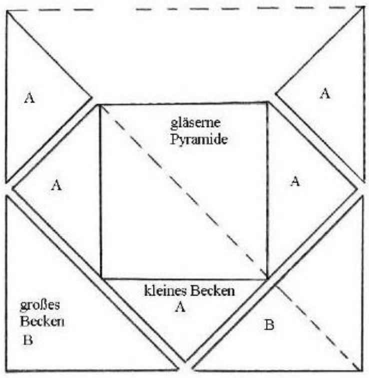
Damit beträgt die gesamte verglaste Fläche $4\cdot A_{\text{Dreieck}} - A_{\text{Trapez}} \approx 1945{,}68\ \text{m}^2$.

d) Bei der Louvre-Pyramide: Verhältnis $\frac{\text{Pyramidenhöhe}}{\text{Grundkante}} \approx 0{,}612$

Bei der Cheops-Pyramide: Verhältnis $\frac{\text{Pyramidenhöhe}}{\text{Grundkante}} \approx 0{,}636$

Man kann annähernd von gleichen Proportionen ausgehen, umso mehr, als die ursprünglichen Maße der Cheops-Pyramide nur geschätzt sind.

e) Die gläserne Pyramide ist auf der quadratischen Fläche auf drei Seiten von 7 Wasserbecken umgeben, die vierte Pyramidenseite mit dem Eingang ist frei von Wasserbecken.
Es gibt zwei größere kongruente Becken (B), die fünf restlichen kleineren Becken (A) sind ebenfalls kongruent.



- Für die kleineren Becken gilt:
  Die Basislänge entspricht der Länge der Pyramidengrundkante a = 35,40 m.
  Die Schenkellänge ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras zu $s_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 25{,}03$ m
  Für die Dreieckshöhe gilt: $h_1 = \frac{a}{2} = 17{,}70$ m
- Für die beiden größeren Becken gilt:
  Basislänge $a_2 = 2\cdot s_1 = \frac{2\cdot a}{\sqrt{2}} = a\cdot\sqrt{2} \approx 50{,}06$ m
  Schenkellänge $s_2 = s_1\cdot\sqrt{2} = a = 35{,}40$ m
  Dreieckshöhe: $h_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = s_1 \approx 25{,}03$ m

Damit erhält man die Diagonale der quadratischen Grundfläche:

$$d = 2\cdot s_1 + 4 + d_{\text{Pyramidengrundfläche}} = 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} + 4 + a\cdot\sqrt{2} = 4 + 2a\cdot\sqrt{2} \approx 100{,}53$$

Für die Seitenlänge b der quadratischen Grundfläche gilt dann:

$$b = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4+2a\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2a \approx 73{,}63 \text{ m}$$

Quellenangaben:

Lambacher Schweizer 11/12. Klett-Verlag 2010

Analytische Geometrie. Lineare Algebra. Cornelsen Verlag 2003