Vergleichsklausur Mathematik LK	**Analytische Geometrie**	Kurs: Q2 M1-M4 Datum: 18.05.2017

Name: ____

Aufgabe

Eine Fabrikhalle soll in einen gleichmäßig ansteigenden Hang hinein gebaut werden. Dazu wird aus dem Hang Erde abgetragen. Der entstehende Einschnitt in den Hang wird im Folgenden als Baugrube bezeichnet. Das Gelände vor der Baugrube ist eben und liegt in der x-y-Ebene.
Der Übergang von der x-y-Ebene in den Hang wird von der Geraden g beschrieben, die durch die Punkte $A(-10|30|0)$ und $B(-30|90|0)$ verläuft (vgl. Material 1). Diese Punkte sind gleichzeitig die beiden vorderen Eckpunkte der rechteckigen Grundfläche der Baugrube. Der Punkt $D(-40|20|0)$ ist ein weiterer Eckpunkt dieser Grundfläche.
Modellhaft kann angenommen werden, dass der Hang in einer Ebene H liegt. In dieser Ebene liegen auch die beiden oberen Eckpunkte E und $F(-45|5|15)$ der Baugrube.
Alle Angaben erfolgen in Metern.

1.1 Berechnen Sie den fehlenden Eckpunkt C der Grundfläche ABCD der Baugrube.
Bestätigen Sie durch Rechnung, dass diese Grundfläche bei A einen rechten Winkel besitzt.

(4 BE)

1.2 Geben Sie eine Gleichung der Hangebene H in Parameterform an und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.
[zur Kontrolle: H: $9x + 3y + 26z = 0$]

(6 BE)

1.3 Von einem festen Messpunkt $P(30|20|5)$ außerhalb der Baustelle wird der obere Eckpunkt E der Baugrube über den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -21 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$ anvisiert.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E.

(4 BE)

1.4 Die Punkte D, C, E und F sind die Eckpunkte der „hinteren Wand“ der Baugrube. Sie liegen in der steil abfallenden Ebene J.
Eine Koordinatengleichung dieser Ebene lautet J: $3x + y + 2z = -100$.
Nach Bauvorschrift darf eine solche Ebene gegenüber der Grundfläche höchstens einen Steigungswinkel von 60° besitzen.
Untersuchen Sie, ob die Ebene J die Vorgabe der Bauvorschrift erfüllt.

(3 BE)

2. Entwickeln Sie eine Lösungsstrategie, mit der das Volumen des Erdaushubs für die Baugrube berechnet werden kann. Erläutern Sie die einzelnen Schritte Ihres Lösungsweges.
Eine Durchführung der entsprechenden Rechnungen ist nicht erforderlich.

(4 BE)

Wahlaufgabe:

Wählen Sie eine der Aufgaben A3 oder B3 zur Bearbeitung aus:

A3. Zwei Meter unterhalb des Mittelpunktes der Grundfläche ABCD beginnt die Entwässerungsleitung des gesamten Bauvorhabens. Sie hat ein gleichmäßiges Gefälle von 2%.
Die Gerade, die sich durch die Projektion der Entwässerungsleitung in die x-y-Ebene ergibt, hat den Richtungsvektor $\vec{v}_{xy} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

A3.1 Bestimmen Sie für den dreidimensionalen Raum die Gleichung der Geraden g_E, die den Verlauf der Entwässerungsleitung beschreibt.
[zur Kontrolle: $g_E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -35 \\ 55 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$]

(5 BE)

A3.2 Der öffentliche Hauptkanal, an den die Entwässerungsleitung angeschlossen werden soll, lässt sich mithilfe folgender Geradengleichung modellhaft beschreiben:

$$g_H : \vec{x} = \begin{pmatrix} 65 \\ 20 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -0{,}01 \end{pmatrix}$$

Da sich die Entwässerungsleitung und der Hauptkanal nicht schneiden, ist ein vertikaler, in Richtung der z-Achse verlaufender Fallschacht einzubauen, der die Entwässerungsleitung mit dem Hauptkanal verbindet. Ermitteln Sie die Höhe dieses Fallschachtes.

(4 BE)

B3. An der Baugrube steht ein großer Kran in der Abendsonne, deren Strahlen längs des Richtungsvektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix}$ einfallen.
Die beiden Enden des horizontalen Lastarms bzw. Auslegers befinden sich in den Punkten $K(-50|54|32)$ und $L(-30|58|32)$ (vgl. Material 2).
Der Schatten des gesamten Lastarms von L bis K fällt auf die Hangebene bzw. die hintere Baugrubenwand.

B3.1. Der Schattenpunkt von K liegt in der Hangebene H mit der Gleichung H: $9x + 3y + 26z = 0$.
Ermitteln Sie den Schattenpunkt von K.

(4 BE)

B3.2. Der Schattenpunkt von L liegt auf der hinteren Baugrubenwand im Punkt $L_{Schatten}(-45|13|11)$.
Erläutern Sie die notwendigen Rechenschritte zur Berechnung des gesamten Schattenverlaufs des gesamten Kranauslegers (die Berechnung selbst ist nicht erforderlich).

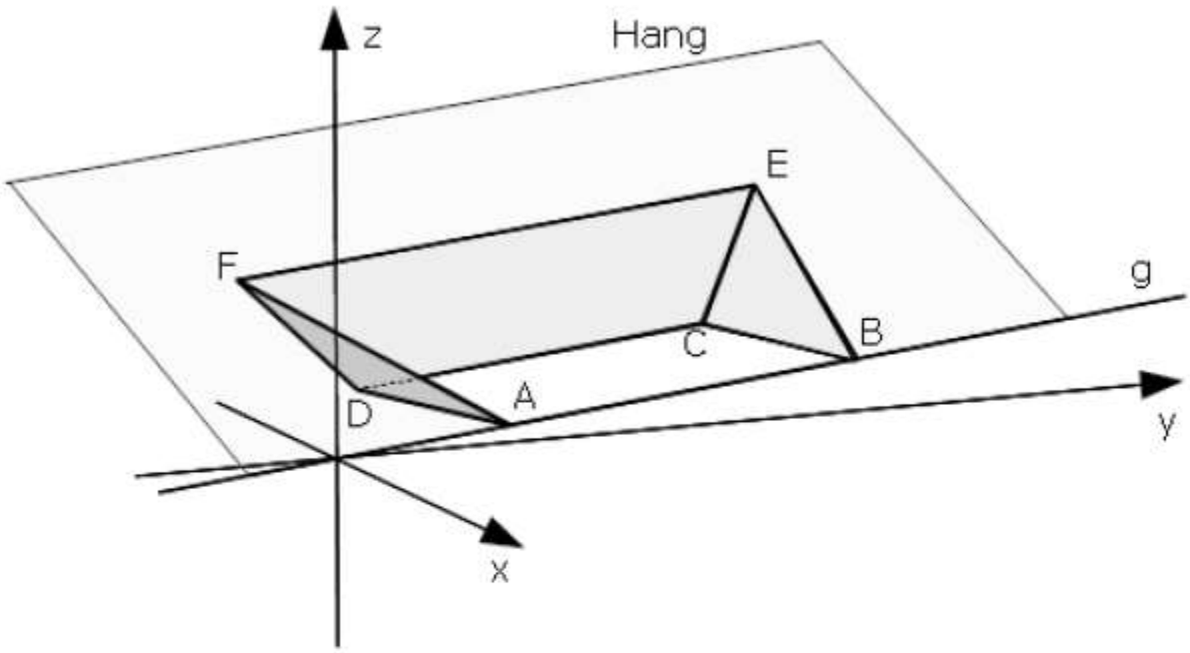
(5 BE)

Zulässige Hilfsmittel: WTR oder CAS, Formelsammlung

Viel Erfolg!

Material

Material 1: Hang und Baugrube



Material 2: Kran

Lösungen:

Aufg.	erwartete Leistungen	BE I	BE II	BE III	BE Σ
1.1	$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-30\\90\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-30\\-10\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60\\80\\0\end{pmatrix}$, also C(–60|80|0) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-20\\60\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-30\\-10\\0\end{pmatrix}=0$, also stehen beide Vektoren senkrecht zueinander.	4			4
1.2	$H:\vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\30\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-7\\-5\\3\end{pmatrix}$ ist eine mögliche Parameterform von H. Vektorprodukt der Spannvektoren oder LGS liefert den Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}9\\3\\26\end{pmatrix}$ und damit die linke Seite der Koordinatengleichung. Einsetzen eines Punktes der Ebene liefert das Ergebnis: H: $9x+3y+26z=0$	3	3		6
1.3	Die „Blickgerade" besitzt die Gleichung $g_B:\vec{x}=\begin{pmatrix}30\\20\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-21\\15\\2\end{pmatrix}$ Einsetzen von g_B in die Koordinatenform von H führt zu der Lösung t = 5. t = 5 in g_B eingesetzt ergibt den Punkt E (–75|95|15).	2	2		4
1.4	Steigungswinkel α zwischen $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{e_z}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: $\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{2}{\sqrt{14}\cdot 1}=0{,}53452\Rightarrow\alpha=57{,}69°<60°$ Die Bauvorschrift ist erfüllt.		3		3
2	Möglicher Lösungsansatz: Zerlegung des „Baugrubenkörpers" in ein schiefes Prisma und eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Hierzu wird (beispielsweise) der Punkt P auf der Strecke $\overline{EF}$ so gewählt, dass $\overline{CP}$ parallel zu $\overline{DF}$ verläuft. P lässt sich berechnen durch: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DF}$ Der „Baugrubenkörper" wird dann zerlegt in ein schiefes Prisma mit den kongruenten und parallel liegenden Dreiecksgrundflächen ΔADF und ΔBCP, sowie in eine Pyramide mit der dreieckigen Grundfläche ΔBCP und der Spitze E. Die Volumina beider Teilkörper können entweder mithilfe des Spatproduktes oder elementar berechnet werden.		1	3	4

A3.1	Berechnung des Mittelpunktes der Grundfläche: M(–35|55|0) Der Punkt N(–35|55|–2) liegt zwei Meter unter M und kann als Stützpunkt von g_E verwendet werden. Bestimmen des Richtungsvektors $\vec{v}$ von g_E: $\lvert\overrightarrow{v_{xy}}\rvert = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ z-Koordinate von $\vec{v}$: $z_v = 5 \cdot (-0{,}02) = -0{,}1$. Somit ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$ und $g_E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -35 \\ 55 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$ eine mögliche Darstellung der Geraden g_E.	4	1	5
A3.2	Senkrechte Projektion der Geraden g_E und g_H in die x-y-Ebene: $g_{Hxy} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 65 \\ 20 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $g_{Exy} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -35 \\ 55 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ Schnitt beider Geraden in der x-y-Ebene führt auf ein LGS mit der Lösung t = 15 und q = 20 und damit zum Schnittpunkt: $S_{xy}(25\|100)$ Berechnung der z-Koordinate des Schnittpunktes von Fallrohr und g_H: $z_H = -3{,}5 + 20 \cdot (-0{,}01) = -3{,}7$ z-Koordinate des Schnittpunktes von Fallrohr und g_E: $z_E = -2 + 15 \cdot (-0{,}1) = -3{,}5$ Länge des Fallrohres (in Meter): –3,5 – (–3,7) = 0,2 *Wird die Länge des Fallrohres nur als „Abstand windschiefer Geraden“ berechnet, erfolgt ein Abzug von 2 BE.*	2	2	4

B3.1	Sonnenstrahlgerade k durch K: k: $\begin{pmatrix} -50 \\ 54 \\ 32 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50-5\lambda \\ 54-15\lambda \\ 32-7\lambda \end{pmatrix}$ Einsetzen in H: $9(-50-5\lambda) + 3(54-15\lambda) + 26(32-7\lambda) = 0$ $-450 - 45\lambda + 162 - 45\lambda + 832 - 182\lambda = 0$ $544 - 272\lambda = 0$ ergibt $\lambda = 2$ Einsetzen von $\lambda = 2$ ergibt den Schattenpunkt K‘ = $\begin{pmatrix} -60 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}$	4
B3.2	Der gesamte Schattenverlauf dürfte an der Baugrubenkante [FE] einen Knick aufweisen. Zu berechnen ist also der Schatten des gesamten Kranauslegers auf der Kante [FE]: Dazu muss die Gleichung der „Sonnenstrahlenebene durch K und L“ aufgestellt werden. Es muss der Schnittpunkt S dieser Sonnenstrahlenebene mit der Geraden durch F und E berechnet werden. Zu den Schattenpunkten von K und L verlaufen von S aus (wegen der Linearität) - gerade Strecken.	5