Lösungshinweise zu den Projektionsaufgaben

Carport

a. Anwendung von tan via Höhendifferenz und Umrechnung in %: Dachneigung = 8,3%
Prisma mit Trapez als Grundfläche: V = 49,5m^3

b. Bestimmung der Geradengleichungen für LE, LF, LG
Berechnung der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Erdboden (mit der x-y-Ebene bzw. x- und y-Achse)
Zeichnung
Die Schattenfläche (die die Grundfläche des Carports nicht enthält) zerlegt man in ein Trapez sowie die Restfläche in ein Trapez und ein Dreieck – dies ergibt einen Flächeninhalt von 160 m^2.

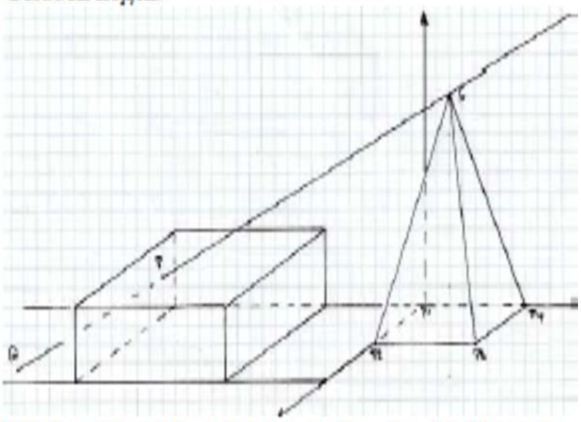
Die Pyramiden in Ägypten

- Die Zeichnungen in a. und b. dürften klar sein
- Zu beachten ist, dass der Schatten der ersten Pyramide auf der zweiten zu berechnen und zu zeichnen ist.
- Es geht auch anders, aber der folgende Lösungsvorschlag verwendet die häufig sehr praktische **Methode der Berechnung der Schnittgeraden von Ebenen:**

1. (siehe Skizze): Berechnung der Schnittgeraden g von der Ebene 1 (durch E, Eckpunkt unten rechts der ersten Pyramide und in Sonnenstrahlrichtung) und der Ebene durch die rechte vordere Seitenfläche der zweiten Pyramide **sowie** Berechnung der „Schattenrandstrecke" auf der rechten vorderen Seitenfläche der zweiten Pyramide (Berechnung der Schnittpunkte von g mit der Grundfläche und mit der vorderen Seitenkantengeraden der zweiten Pyramide.
2. Genauso kann man die Schnittstrecke der Ebene 2 (durch E, Eckpunkt unten rechts der ersten Pyramide und in Sonnenstrahlrichtung) mit der linken vorderen Seitenfläche der zweiten Pyramide.
3. Zeichnen der geschlossenen Verbindung der berechneten Schattenränder

Pyramide und Treppe

a. Zunächst müssen die Daten (Koordinaten der Pyramidenpunkte und Abmessungen der Stufe) der Zeichnung entnommen und die entsprechenden Punkte definiert werden.
Die Gleichung der Gerade durch die Spitze wird ermittelt und nachgeprüft, dass die Punkte P und Q auf der Geraden liegen.

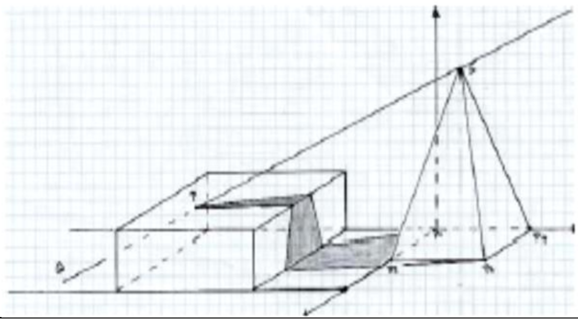


Mit dem Lineal lässt sich begründen, dass die Dreiecke P3P4S und P1P4S in der Sonne liegen.

b. Um den Schatten zeichnen zu können, müssen die Schnittpunkte mit den Kanten berechnet werden.
Dazu wird die Ebene, die durch den Sonnenstrahl SP und die Pyramidenkante SP3 gebildet wird betrachtet und ihre Gleichung in Punkt-Richtungsform bestimmt.
Die Stufenkanten werden durch einfache Gleichungen. (z.B.x2 = -4 und x3=2) beschrieben.

Die Schnittpunkte der Stufenkanten mit der Ebene werden berechnet und gezeichnet.

Die übrigen Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ werden als Schnittpunkte der Stufenkanten mit der durch SP und der Pyramidenkante SP1 aufgespannten Ebene berechnet und eingezeichnet.



Pantheon

a) Radius des Innenraums: 21,6 m
Der Okulus befindet sich nicht „ganz oben".
Pythagoras: h_{ges} = $\sqrt{21{,}6x21{,}6-4{,}5x4{,}5}$ = 21,13
Ergebnis: Der Okulus befindet in einer Höhe von
21,13m + 21,6m = 42,73m

d) Mittelpunkt M des Okulus bei entsprechendem Koordinatensystem:
M(0; 0; 42,73)
<u>2. Teil der Aufgabe zuerst</u>: Geradengleichung der Strahlen durch M

$$g: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 42{,}73 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ mit } \beta \in \mathbf{R} \text{ beliebig}$$

Berechnung des Schnittpunkts M_g von g mit der x_1-x_2-Ebene (z=0!):
Im Sinne einer Parallelprojektion durch die angenommen parallelen Sonnenstrahlen ist das Bild des Okulus ein kongruenter Kreis um M_g (14,24; 7,12; 0) mit Radius 4,5m, der <u>vollständig</u> auf den Fußboden fällt (denn Addition von 4,5 zur x_1- und x_2-Koordinate ist immer noch jeweils unter 21,6).

<u>1. Teil der Aufgabe</u>: Geradengleichung der Strahlen durch M

$$h: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 42{,}73 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma \in \mathbf{R} \text{ beliebig}$$

Berechnung des Schnittpunkts M_h von h mit der x_1-x_2-Ebene (z=0, Auflösen in der z-Koordinate nach γ und Einsetzen von γ in die x- und die y-Komponente):
Das Bild des Okulus ist ein kongruenter Kreis um
M_h ($\frac{-85{,}46}{a}$; $\frac{-42{,}73}{a}$; 0) mit Radius 4,5m.
Damit der Bildkreis vollständig auf den Fußboden fällt (und nicht bereits auf die Seitenwand), muss gelten:

$$21{,}6 \geq \frac{-85{,}46}{a} + 4{,}5$$

d.h. (gerundet) a < -5

Lunar laser ranging

a) Aufstellen der Geradengleichung für den Laserblitz
Berechnung der drei Spurpunkte
Die Spurpunktkoordinaten müssen positiv sein:
Der Laserblitz trifft zuerst die Spiegelfläche in der x_2-x_3-Ebene im Punkt S(0; 7; 6)

b) Erläuterung: Nach der Spiegelung verläuft der Blitz auf einer neuen Geraden, deren Richtungsvektor in einer Komponente das Vorzeichen wechselt und in den beiden anderen Komponenten mit dem alten Richtungsvektor übereinstimmt.

Geradengleichung nach der ersten Spiegelung: $g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
mit $\mu \in \mathbf{R}$ beliebig

c) Siehe Erläuterung zu b): Wechselt der Richtungsvektor bei jeder Spiegelung in genau einer und jeweils anderer Komponente sein Vorzeichen, entsteht zuletzt der Gegenvektor des anfänglichen Richtungsvektors.
Ergebnis: Nach drei Spiegelungen verläuft der Blitz parallel zum Beginn in die Gegenrichtung

d) Siehe Ergebnis von b) und vgl. mit a):
Berechnung der Spurpunkte von g_1 mit der x_1-x_3- und der x_1-x_2-Ebene
Ergebnis: g_1 trifft anschließend die x_1-x_3-Ebene in T(3,5; 0; 2,5)

Geradengleichung nach der zweiten Spiegelung: $g_2 = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
mit $\kappa \in \mathbf{R}$ beliebig

Berechnung des Spurpunkts von g_2 mit der x_1-x_2-Ebene:
Ergebnis: g_2 trifft die x_1-x_2-Ebene in U(6; 5; 0)

Geradengleichung nach der dritten Spiegelung: $g_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
mit $\alpha \in \mathbf{R}$ beliebig

e) Vernachlässigung der Laufzeit des Blitzes während der Spiegelungen im Tripelspiegel
Halbe Laufzeit = Laufzeit des Blitzes von der Erde zum Mond mit der nachzuschlagenden Lichtgeschwindigkeit

Ergebnis: $\overline{EM} \approx 382235$ km

Hobbyraum

a. S = 5
Bestimmung der Koordinaten von G und F
Bestimmung der Geraden GF
Berechnung des Schnittpunkts b' von GF mit der x-y-Ebene
Berechnung des Prismenvolumens mit dem Dreieck b'CG als Grundfläche

b. z-Koordinate jedes Tischplattenpunktes: 0,8m
x-Koordinate des Tischplattenmittelpunktes P: 2,5 m
Ges.: y-Koordinate von P (2,5; ?; 0,8), d.h.
P liegt auf der zur Hauswand parallelen Geraden
t ={(2,5; y; 0,8); y ϵ **R** beliebig

Zentralprojektion von FG in die Tischplattenebene T mit Projektionszentrum L:
Berechnung der Schnittgeraden g der Ebene FGL mit der Ebene T = {(x; y; 0,8); x, y ϵ **R** beliebig}, indem man z.B. eine Parametergleichung für T bestimmt:

$$g: \begin{pmatrix} 0 \\ 4,6 \\ 0,8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbf{R}$$

<u>Ges.</u>: Jener Punkt P auf t, dessen Abstand zu g 0,5m beträgt

<u>1. Variante (geometrisch):</u>
1. Bestimmung aller Normalenvektoren n_g zu g mit Hilfe des Skalarprodukts und Berücksichtigung des Richtungsvektors von g: Dies ergibt eine Normalenvektorenebene.
2. Davon sind nur jene in der Tischplattenebene T relevant: Für diese, genannt n_g^T, gilt: z = 0
3. Bestimmung derjenigen n_g^T, deren Betrag 0,5 beträgt (Tischradius): Dies sind zwei, davon besitzt einer, genannt $n^{richtig}$ die „richtige" Richtung.
4. „Verschiebung" von g „über den Tischplattenmittelpunkt" zu h:

$$h = g + n^{richtig}: \begin{pmatrix} 0 \\ 4,6 \\ 0,8 \end{pmatrix} + n^{richtig} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -0,75 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbf{R}\ \textbf{bel.}$$

5. Tischplattenmittelpunkt = t ∩ h
6. Ergebnis: y ≈ 4,7

<u>2. Variante („brutaler und kürzer via lineares Gleichungssystem")</u>:
Lösung z.B. anhand von Bsp. 2 auf S. 158 (direkter erscheint dort die „2.Möglichkeit" mit einem linearen Gleichungssystem), nur dass umgekehrt der Abstand gegeben, aber die gesuchte y-Koordinate nicht gegeben ist.

Expeditionszelt

b. E (1; 2,05; 0); F (-1; 2,05; 0)

Zu bestimmen sind g_2 in G (0,75; g_2; 1,8) und
h_2 in H (-0,75; h_2; 1,8):
$g_2 = h_2$ (GH ist parallel zur x1- Achse)
Bestimmung der Parameter- bzw. Koordinatengleichung der Ebene BCS, denn G liegt darin.
Gleichsetzen von G mit einer Ebenengleichung liefert $g_2 = 0{,}73$

Trapezhöhe via Pythagoras ergibt $h_{Trapez} = 2{,}23$ m

c. Drehung des Mittelpunkts von [EF] um [GH]:
Bestimmung des Mittelpunkts von [GH]
Bestimmung von dessen Abstand zum Mittelpunkt von [EF]
Veränderung der x2-Koordinate des Mittelpunkts von [GH] mit Hilfe dieses Abstands
Die x1-Koordinate wird nicht verändert, die x3-Koordinate ergibt sich durch G bzw. H

E' (1; 2,96; 1,8); F' (-1; 2,96, 1,8)

d. Bestimmung der Gleichung der Geraden durch den Mittelpunkt von [E'; F'] mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$
(oder Bestimmung der Gleichung der Ebene, die durch die Gerade E'F' und diesen Richtungsvektor festgelegt ist)
Berechnung der Schnittmenge der Geraden (oder Ebene) mit der x2-Achse (oder x1-x2-Ebene)
Vergleich mit der x2-Koordinate des Zelteingangs liefert eine Ungleichung: Es regnet in den Zelteingang, wenn a > -1,98.