ABSTÄNDE TOLEDO

Wir <u>definieren</u> das Wort „Abstand“ geometrisch als die kleinste Entfernung zwischen den zu betrachtenden geometrischen Objekten.

Abstand:
- eines Punktes von einer Ebene
- eines Punktes von einer Geraden
- windschiefer Geraden unter sich

Ebenengleichung in Parameterform: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \quad (r, s \in \mathbb{R})$

Ebenengleichung in Koordinatenform: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

Ebenengleichung in Normalenform: $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

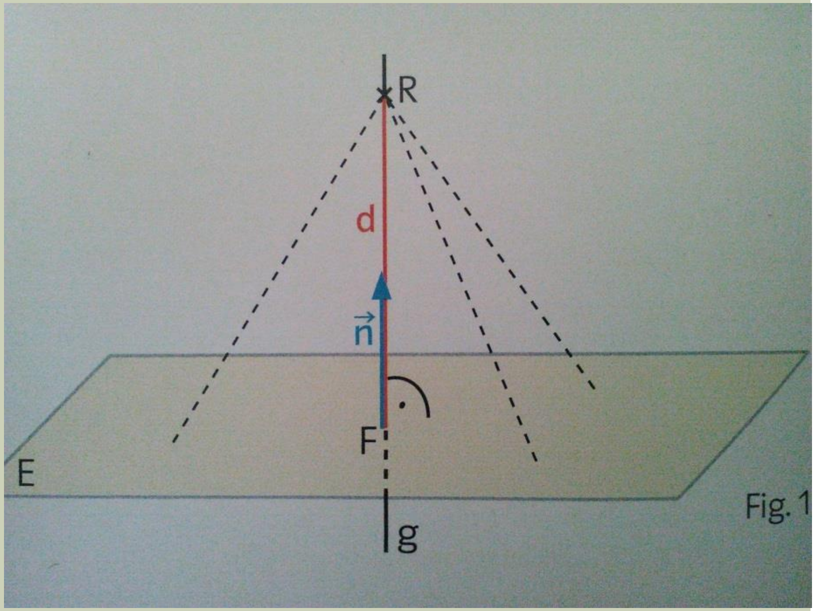
Ebenengleichung in Hesse’scher Normalenform

$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$; $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$

$$\frac{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = 0$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER EBENE



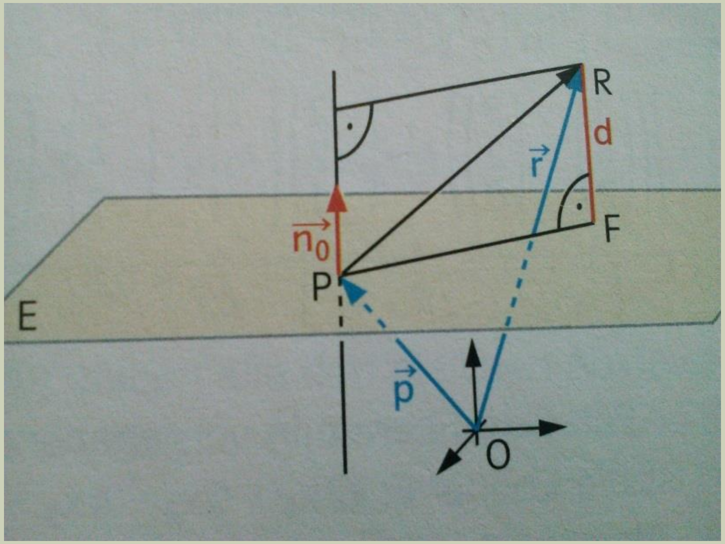
Lotfußverfahren (oder Hilfsgeradenverfahren):

1. Man stellt eine Lotgerade g auf (Hilfsgerade), die senkrecht (orthogonal) zur Ebene **E** steht und den Punkt **R** enthält. (Die Koordinaten des Punktes **R** ergeben den Stützvektor. Die Koeffizienten der Ebenengleichung ergeben den Richtungsvektor der Lotgerade.)

2. Man errechnet ihren Schnittpunkt **F** mit der Ebene E, den sogenannten Lotfußpunkt **F**.

3. Der gesuchte Abstand **d** von Punkt und Ebene ergibt sich als Abstand der beiden Punkte **R** und **F**, also **d** = $\left|\overrightarrow{RF}\right|$.

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER EBENE



<u>Verfahren HNF (mit der Hesse'schen Normalenform)</u>:

Mit Hilfe der HNF kann man den Abstand d eines Punktes R von einer Ebene E berechnen, ohne dass es notwendig wird, den Lotfußpunkt zu bestimmen:

$\left| (\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 \right| = d.$

Begründung der Abstandsformel:

R sei ein Punkt, der auf derjenigen Seite der Ebene E liegt, nach der $\vec{n}_0$ zeigt.

$\vec{n}_0$ sei ein Normaleneinheitsvektor.

Dann gilt Folgendes:

$$(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}_0 = \left(\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FR}\right) \cdot \vec{n}_0 =$$

$$= \overrightarrow{PF} \cdot \vec{n}_0 + \overrightarrow{FR} \cdot \vec{n}_0 = 0 + \overrightarrow{\boldsymbol{FR}} \cdot \vec{n}_0 =$$

$$= \left|\overrightarrow{\boldsymbol{FR}}\right| \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_0 \cdot \vec{n}_0 = \left|\overrightarrow{FR}\right| \cdot 1 = \left|\overrightarrow{FR}\right| = d.$$

Liegt R auf der anderen Seite von E, so ergibt sich $(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = -d.$

Insgesamt: $\left| (\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 \right| = d.$ *

BEISPIELE: BESTIMMUNG DES ABSTANDES EINES PUNKTES VON EINER EBENE

Beispiel 1a): Lotfußverfahren

Gesucht ist der Abstand des Punktes $R(4\,|\,4\,|\,5)$ von der Ebene

$E: x + y + 2z = 6.$

1. ***Lotgerade g:*** $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\quad r \in \mathbb{R}$

2. ***Schnittpunkt F von g und E:*** $(4+r) + (4+r) + 2(5+2r) = 6$ → $18 + 6r = 6$ → $r = -2$

$r = -2$ in der Gleichung der Lotgerade einsetzen → F $(2\,|\,2\,|\,1)$

3. ***Abstand von R und F:*** $d = |\overrightarrow{RF}| = \sqrt{(2-4)^2 + (2-4)^2 + (1-5)^2}$ →

$d = \sqrt{24} \approx 4{,}90\ LE$

Beispiel 1b): Verfahren mit Hilfe der HNF

Gesucht ist der Abstand des Punktes $R(4\,|\,4\,|\,5)$ von der Ebene

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

1.HNF von E (nach dem Errechnen des $\vec{n}_0$***):***

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = 0.$$

2. Abstand von R und E (nach dem Ersetzen von $\vec{x}$ ***durch die Koordinaten von*** $\vec{r}$ ***):***

$$d = \left| \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right| = \frac{12}{\sqrt{6}} \approx 4{,}90\ LE$$

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER EBENE

Beispiel 3): “Umgekehrte“ Abstandsaufgabe (Punkt mit vorgegebenen Abstand bestimmen)

Gegeben ist ein Quadrat ABCD, das in der Ebene $E\colon\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$ liegt. Der Punkt $\boldsymbol{M}(4|1|0)$ ist der Mittelpunkt des Quadrats. Bestimmen Sie den Punkt **S** so, dass ABCDS eine senkrechte Pyramide mit der Höhe 6 ist.

Es gibt <u>zwei</u> Lösungen.

*Man findet die Spitzen S_1 und S_2 , indem man von **M** aus 6 LE in Richtung des Normalenvektors bzw. in die entgegengesetzte Richtung geht.*

Es gilt: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3$, ***also*** $\vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OM} + 6\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ***bzw.***

$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OM} - 6\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Man enthält $S_1(8|3|4)$ *und* $S_2(0|-1|-4)$.

ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER EBENE

Beispiel 5: Abstand einer Geraden zu einer Ebene **(Rückführung auf Abstand Punkt-Ebene).**

Bestimmen Sie den Abstand der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$ **von der Ebene** $E\colon\ \ x + 2y + 2z = 8$**.**

1. Zunächst muss die Parallelität nachgeprüft werden (Skalarprodukt aus dem Richtungsvektor von g und dem Normalenvektor von E muss null ergeben) →

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 - 2 + 4 = 0$$

2. HNF $E\colon\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0$

3. Abstandsberechnung $d = \left| \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right| = 3$ ***LE***

• ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER EBENE

Beispiel 6: Abstand Ebene-Ebene (Rückführung auf Abstand Punkt-Ebene).
Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Ebenen

$\boldsymbol{\alpha}$: $2x + y - 3z = 1$ **und β**: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

1. Parallelitätsnachweis: Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren kollinear sind, also wenn $\vec{n}_\alpha = k \cdot \vec{n}_\beta$ ***gilt.***

Mit $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ***und*** $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ***folgt*** $\vec{n}_\alpha = (-2) \cdot \vec{n}_\beta$ → $\alpha \parallel \beta$

2. Abstandsberechnung:

R$(1 \mid 2 \mid 1)$ → $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Aus der** ***Ebenengleichung*** **von β:** $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ***wird der Koordinatengleichung von α entnommen.***

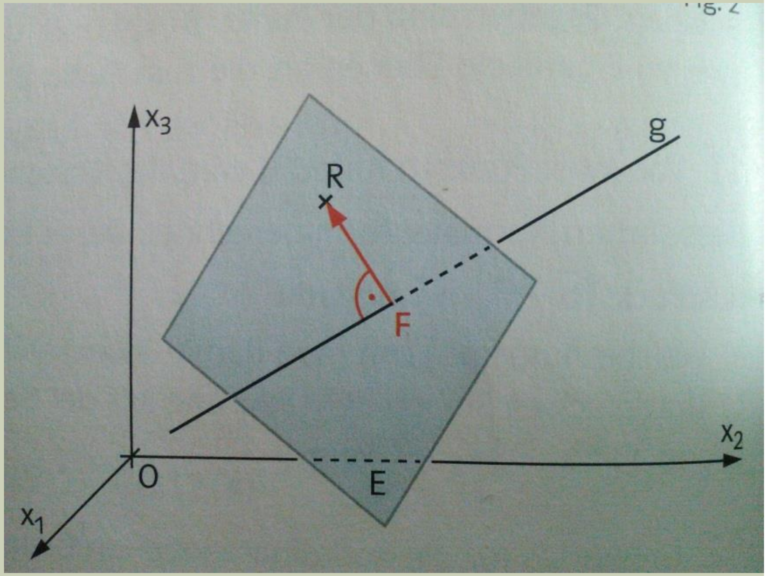
$$\rightarrow \quad d(\alpha, \beta) = \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{14}} \approx 1{,}07$$

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER GERADE

<u>Dreidimensionaler Fall</u> (zwei unterschiedliche Methoden)

a) Methode der Hilfsebene:

1. Im $\mathbb{R}^3$ bestimmt man zunächst eine Normalengleichung derjenigen *Hilfsebene* **H**, die orthogonal auf **g** steht und den Punkt **R** enthält.
2. Man berechnet den Lotfußpunkt **F** als Schnittpunkt der Gerade **g** mit der Hilfsebene **H**.
3. Man bestimmt den gesuchten Abstand **d** als Länge des Lotvektors $\overrightarrow{RF}$.



b) Methode des „laufenden“ Punktes:

Den Lotfußpunkt **F** kann man bestimmen, indem man zunächst die Koordinaten von **F** *in Abhängigkeit des Parameters* von **g** notiert (**F** „läuft“ auf **g**) und dann ausnutzt , dass der Vektor $\overrightarrow{RF}$ orthogonal zum Richtungsvektor von **g** ist. Der Abstand ist dann wieder $d = \overrightarrow{RF}$.

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER GERADE

Beispiel 8a) Abstand Punkt-Gerade im $\mathbb{R}^3$ ***(Mit der Methode der <u>Hilfsebene</u>)***

Gesucht ist der Abstand des Punktes $R(-1\,|\,4\,|\,5)$ von der Gerade

$$g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}.$$

1. Hilfsebene H: $(H \perp g;\ R \in H)$

Als Normalenvektor von H nehmen wir den Richtungsvektor von g und als Stützvektor den Ortsvektor von R.

$$H:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = 0\ .$$

2. Lotfußpunkt F : ***Wird errechnet durch Einsetzen der rechten Seite der Geradengleichung für den allgemeinen Ortsvektor*** $\vec{x}$ ***in der Ebenengleichung.***

$$\left[\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = 0$$

$-14 + 14r = 0 \quad \rightarrow \quad r = 1 \quad \rightarrow \quad F(0\,|\,5\,|\,4)$

3. Abstand von R und F: $d = \left|\overrightarrow{RF}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3} \approx 1{,}73$

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER GERADE

Beispiel 8b) Abstand Punkt-Gerade im $\mathbb{R}^3$ (***Methode des „laufenden“ Punktes***)

Gesucht ist der Abstand des Punktes $R\left(-1 \,\middle|\, 4 \,\middle|\, 5\right)$ von der Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}.$$

Es gilt: $F\left(1 - r \,\middle|\, 2 + 3r \,\middle|\, 2 + 2r\right)$.

Aus $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{RF} = 0$ ***folgt*** $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - r + 1 \\ 2 + 3r - 4 \\ 2 + 2r - 5 \end{pmatrix} = 0$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 - r \\ -2 + 3r \\ -3 + 2r \end{pmatrix} = 0$

und dann $-14 + 14r = 0 \quad \rightarrow \quad r = 1 \quad \rightarrow \quad F\left(0 \,\middle|\, 5 \,\middle|\, 4\right)$

Danach bestimmt man den Abstand wie im 3. Schritt der Methode der Hilfsebene.

Der Abstand des Punktes R von der Gerade g ist ca. 1,73 LE.

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER GERADE

Beispiel: „Umgekehrte“ Abstandaufgabe Punkt-Gerade
(<u>Methode eines „laufenden“ Punktes</u>).

Gegeben sind die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

und der Punkt P$\left(1 \middle| 2 \middle| -1\right)$ auf g.

Gesucht sind Punkte auf g, die von P den Abstand **d**=10 haben.

Für Punkte Q auf g gilt: $Q\left(4 + 3t \middle| 2 \middle| 3 + 4t\right)$. Damit ergibt sich der Vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 + 3t \\ 0 \\ 4 + 4t \end{pmatrix}$

mit dem Betrag $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(3 + 3t)^2 + (0)^2 + (4 + 4t)^2}$ = $\sqrt{25(1 + t)^2}$ =$5 \cdot |1 + t|$.

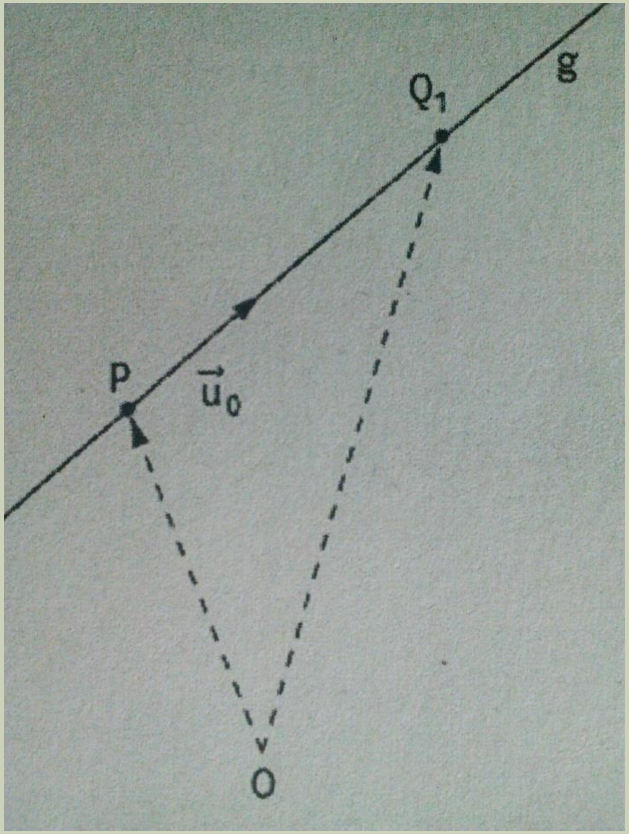
Die Bedingung $5 \cdot |1 + t| = 10$ liefert $5 \cdot (1 + t_1) = 10$ oder $5 \cdot (1 + t_2) = -10$ und damit $t_1 = 1$; $t_2 = -3$.

Also sind $Q_1\left(7 \middle| 2 \middle| 7\right)$ und $Q_2\left(-5 \middle| 2 \middle| -9\right)$ die gesuchten Punkte.

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER GERADE

Beispiel: „Umgekehrte“ Abstandaufgabe Punkt-Gerade (<u>Methode der Einheitsvektoren</u>)

Gegeben sind die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und der Punkt P$(1 \mid 2 \mid -1)$ auf g. Gesucht sind Punkte auf g, die von P den Abstand **d**=10 haben.



Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ erhält man

$$\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP} + 10 \cdot \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP} - 10 \cdot \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Damit gilt: $Q_1(7 \mid 2 \mid 7)$ und $Q_2(-5 \mid 2 \mid -9)$

● ABSTAND EINES PUNKTES VON EINER GERADE

Beispiel 9: Abstand paralleler Geraden (Rückführung auf Abstand Punkt-Gerade).
Kurz nach dem Start befindet sich Flugzeug α in einem geradlinigen Steigflug durch die Punkte $A(-8\,|\,5\,|\,1)$ und $B(2\,|\,-1\,|\,2)$. Gleichzeitig befindet sich Flugzeug β im Landeanflug durch die Punkte $C(13\,|\,-5\,|\,5)$ und $D(-7\,|\,7\,|\,3)$. (Angaben in km). Weisen Sie nach, dass die Flugbahnen beider Flugzeuge parallel verlaufen, und berechnen Sie den Abstand der Flugbahnen.

*- Flugbahn von **α** : Gerade* $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$

*- Flugbahn von **β** : Gerade* $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -20 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$

1.Die Geraden g und h sind parallel. (Kollinearitätsfaktor -2.)
*2.Abstand des Punktes **C** von der Gerade **g** wird bestimmt. Die Hilfebene **H** enthält den Punkt **C** und ist orthogonal zur Gerade **g**.*

Hilfebene $H\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad H\colon\ 10x - 6y + z = 165$

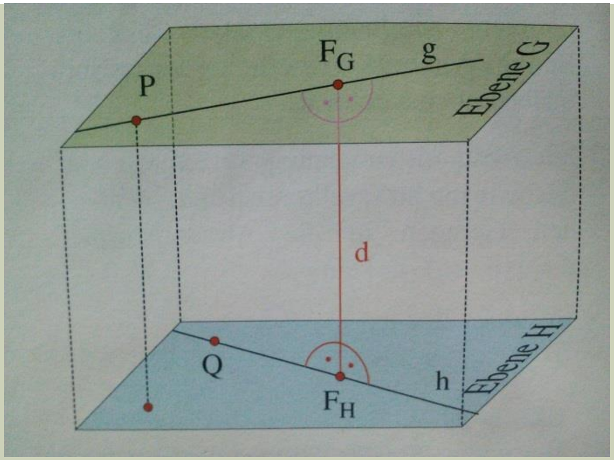
*3. Schnittpunkt von **g** und **H** (Fußpunkt **F** des Lotes von Punkt **C** auf die Gerade **g**)*
$10(-8 + 10r) - 6(5 - 6r) + 1 + r = 165 \quad \rightarrow \quad 137r - 109 = 165 \quad \rightarrow \quad r = 2 \quad \rightarrow \quad F(12\,|\,-7\,|\,3).$
4. Abstand: $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{CF} = \sqrt{1+4+4} = 3$
*Der Abstand der Punkte **C** und **F** ist damit gleich dem Abstand der Geraden **g** und **h**. Er beträgt 3 km.*

● ABSTAND WINDSCHIEFER GERADEN

Beispiel 10:
Gegeben sind die windschiefen Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

und $\quad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \; s \in \mathbb{R}$ **.**



Berechnen Sie den Abstand von g und h.

1. Bestimmung eines Normaleneinheitsvektors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ***orthogonal zu beiden Richtungsvektoren:*** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \;, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 & \text{I} \\ -x + 2y \qquad\quad = 0 & \text{II} \end{cases}$$

Bei z.B. x=2 → y=1 und z=2 . → $\vec{n}$ **ist z.B.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ → $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

2. Abstandsberechnung: Wir setzen $\vec{n}_0$ ***sowie die Stützvektoren*** $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $q = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ***in der Formel*** $d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0|$ ***ein und bekommen das Ergebnis***

$d = 3$ ***LE.***