二重积分

定义

- 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界, D 的面积为 S_D, D 上的一个分割为 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, $\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积
- 任取 $(\varepsilon_i,\eta_i)\in D_i$, 作乘积 $f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$,并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$
- 如果当 $\max\{d_i|d_i\text{是}D_i\text{区域的直径}\}\to 0$,极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$ 存在, 且与 D 的分割方法和 (ε_i,η_i) 的取法无关
- 那么称此极限为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

性质(线性)

- $\iint\limits_D(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))d\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$
- $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ = $\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ + $\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma, D=D_1+D_2$

对称性

普通对称性

区域 D 关于 $x=a$ 对称, 我们有:

- $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(2a-x)=f(x)\\ 0, & f(2a-x)=-f(x)\end{cases}$$

区域 D 关于 $y=b$ 对称, 我们有:

- $$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,2b-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,2b-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

轮换对称性

区域 D 关于 $x=y$ 对称,我们有:

- $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D} f(y,x)d\sigma = \dfrac{1}{2}\iint\limits_{D}[f(x,y)+f(y,x)]d\sigma$
- $\displaystyle\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(y,x) \\ 0, & f(x,y)=-f(y,x) \end{cases}$

计算

直角坐标

- $\displaystyle\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy \\ \int_a^b dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \end{cases}$

极坐标

- $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D'} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta$

变量替换

- 设D和$D^{'}$是平面上两个(有界)区域,D到$D^{'}$的对应$\varphi:(u,v)\to(x,y)$ (这里 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 连续可微),称为变量替换,要求 φ 在一个面积为 0 的集合外是 $1\sim 1$,我们有:
- $dxdy = J_{\varphi}(u,v)dudv$
- $J_{\varphi}(u,v) = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

重要积分

- $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
- $\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx \geq a^2$