中值定理

一、闭区间连续函数: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

1. 最值定理: $f(x)$ 必存在最大值 M 和最小值 m

2. 介值定理: $\forall c\in[m,M]$, $\exists\xi\in[a,b]$, s.t. $f(\xi)=c$

3. 零点定理: 若 $f(a)f(b)<0$, $\exists\xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=0$

4. 最值定理 $+$ 介值定理 $\Rightarrow$ 平均值定理:

$$\forall x_i\in[a,b](i=1,2,\cdots,n),\exists c\in[a,b],s.t.\ f(c)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)}{n}$$

9. 积分中值定理: $\exists\xi\in(a,b),s.t.\ \int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

(1). 构造辅助函数: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导

(2). 拉格朗日中值定理: $\exists\xi\in(a,b),s.t.\ F'(\xi)=f(\xi)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

二、闭区间连续, 开区间可导函数: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导

5. 费马定理: $x_0\in(a,b)$, $f(x)$ 在 x_0 处取极值, 则 $f'(x_0)=0$ (导数定义,左右导数存在且相等 $\Rightarrow f'(x_0)=0$)

6. 罗尔定理: $f(a)=f(b)\Rightarrow\exists\xi\in(a,b),s.t.\ f'(\xi)=0$

(1). 最值定理: $\exists m,M$

(2). $m=M\Rightarrow f'(x)\equiv0$

(3). $m\neq M$ 费马定理 $\Rightarrow\exists\xi\in(a,b),s.t.\ f'(\xi)=0$

7. 拉格朗日中值定理: $\exists\xi\in(a,b),s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(1). 构造辅助函数: $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)-f(b)$

(2). $F(a)=F(b)=0$

(3). 罗尔定理 $\Rightarrow \exists\xi \in (a,b), s.t.\ F'(\xi) \Longrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

8. 柯西中值定理: $g'(x) \neq 0$, $\exists\xi \in (a,b), s.t.\ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

(1). 构造辅助函数: $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] - f(a)$

(2). $F(a) = F(b) = 0$

(3). 罗尔定理 $\Rightarrow \exists\xi \in (a,b), s.t.\ F'(\xi) \Longrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)$

10. 泰勒公式

(1). 拉格朗日余项 ($f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内 $n+1$ 阶可导):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(2). 佩亚诺余项 ($f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

- 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
- $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}, x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$
- $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$
- $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \cdots, x \in [-1, 1)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

三、扩展定理

1. 导数零点定理: $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上可导,** $f'_+(a)f'_-(b)<0$**,** $\exists\xi\in(a,b)$**, s.t.** $f'(\xi)=0$

2. 导数介值定理(达布定理): $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上可导, 且** $f'_+(a)\neq f'_-(b)$**,** $\forall c\in[f'_-(b),f'_+(a)]$**,** $\exists\xi\in(a,b)$**, s.t.** $f'(\xi)=c$

3. 广义积分中值定理: $f(x),g(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续, 且** $g(x)$ **不变号,** $\exists\xi\in(a,b)$**, s.t.** $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

(1). 构造函数: $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt, G(x)=\int_a^x g(t)dt$

(2). 柯西中值定理: $\exists\xi\in(a,b)$**, s.t.**

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}\Rightarrow\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=f(\xi)$$