多元函数微分学

多元函数基本概念

邻域

- δ 邻域: 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, $U(P_0,\delta)$ 表示以 P_0 为中心, 半径为 δ 的圆盘, 即 $U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$
- 去心 δ 邻域: $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$

极限

- 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0,y_0)\in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存 $\delta>0$, 使得当点 $P(x,y)\in D$ 且 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x,y)$ 都满足不等式 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, 那么称函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限为 A, 记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

连续

- 设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有定义, 如果对于区域 D 内任意一点 $P_0(x_0,y_0)$, 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, 那么称函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续

偏导数

- $f(x)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域内有定义
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f'_x(x_0,y_0)$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=f'_y(x_0,y_0)$

高阶偏导数

- 二元函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 的偏导数称为 $f(x,y)$ 的二阶偏导数
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$

- $z=f(x,y)$ 两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在函数 $f(x,y)$ 的定义域内连续, 则有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

可微

- 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义, $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$
- 若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$, 其中 A,B 仅与 x,y 有关,而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关, $o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$ 是当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时, 比 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小, 我们称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分, 记为 $dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$
- 可微必要条件: 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在, 并且有 $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$
- 可微充分条件: 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在, 并且在该邻域内连续, 则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

多元函数微分法则

链式法则

- $z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$
- $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$
- $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

多元函数的极值和最值

极值

- 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有定义
- 如果存在邻域 $U(P_0,\delta)$，使得对于任意 $(x,y)\in U(P_0,\delta)$，都有 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$，那么称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个极大值
- 如果存在邻域 $U(P_0,\delta)$，使得对于任意 $(x,y)\in U(P_0,\delta)$，都有 $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$，那么称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个极小值

最值

- 如果对于区域 D 上的任意 (x,y)，都有 $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$，那么称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个最大值
- 如果对于区域 D 上的任意 (x,y)，都有 $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$，那么称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个最小值

无条件极值

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极值的必要条件:
  $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$
- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极值的充分条件:
  $$\begin{cases} f'_{xx}(x_0,y_0)=A \\ f'_{xy}(x_0,y_0)=B \\ f'_{yy}(x_0,y_0)=C \end{cases} \quad \Delta=AC-B^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta>0, \begin{cases} A>0, & \min \\ A<0, & \max \end{cases} \\ \Delta<0, 非极值 \\ \Delta=0, 方法失效 \end{cases}$$

有条件极值(拉格朗日数乘法)

- 求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$ 下的最值
- 构造辅助函数: $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$
- 令 $\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda g'_x+\mu h'_x=0 \\ F'_y=f'_y+\lambda g'_y+\mu h'_y=0 \\ F'_z=f'_z+\lambda g'_z+\mu h'_z=0 \\ F'_\lambda=g(x,y,z)=0 \\ F'_\mu=h(x,y,z)=0 \end{cases}$
- 得到所有的备选点 P_i，计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.