无穷级数

常数项级数

概念

- 给定一个无穷数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$, 将其各项用加号连起来得到记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 记作无穷级数, 简称级数
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$
- u_n 是级数的通项, 若 u_n 是常数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是常数项无穷级数, 简称常数项级数

敛散性

敛散性定义

- $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \cdots, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \cdots$
- S_n 是级数的部分和, $\{S_n\}$ 是级数的部分和数列, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$
- 若 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 存在, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 不存在, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

几何级数

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} (a \neq 0) = \begin{cases} \text{发散}, & |q| \geq 1 \\ \text{收敛}, & |q| < 1 \end{cases}$

性质

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 收敛
2. 改变级数任意有限项, 不会改变该级数的敛散性
3. 收敛级数的任意项加括号所得到的新级数仍收敛, 且其和不变
4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

级数敛散性判别

正项级数：通项 $u_n \geq 0, n = 1, 2, \cdots$，称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 为正项级数

定义法

- 充分必要条件：正项级数部分和 S_n 有界

比较判别法

- 两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$，从某一项起，满足 $u_n \leq v_n$
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 也收敛
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 也发散

比较判别法极限形式

- 两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n (v_n \neq 0)$，且 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$
- $A = 0$，若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 也收敛
- $A = \infty$，若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 也发散
- $0 < A < \infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的敛散性

比值判别法(达朗贝尔判别法)

- 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$，如果 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$
- 若 $\rho < 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛
- 若 $\rho > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散
- 若 $\rho = 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

根值判别法(柯西判别法)

- 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 如果 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$
- 若 $\rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛
- 若 $\rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

积分判别法

- 正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 若存在在 $[1, +\infty)$ 上单调减少的非负函数 $f(x)$, 使得 $u_n = f(n)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同

交错级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$

- u_n 单调不增
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
- 交错级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛

一般项级数(绝对值判别法)

- 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任意项级数, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 绝对收敛
- 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是任意项级数, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 条件收敛
- $\begin{cases} v_n = \dfrac{u_n + |u_n|}{2} \\ w_n = \dfrac{|u_n| - u_n}{2} \end{cases}$

常见级数收敛判别

0. 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 是任意项级数
1. a, b, c 是非零常数, 且 $au_n + bv_n + cw_n = 0$, 在 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 中只要有两个级数收敛, 另一个级数必收敛

2. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 发散

3. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}$ 绝对收敛 $\left|\frac{u_n}{n}\right| \le \frac{1}{2}(u^2+\frac{1}{n^2})$

4. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛性不确定 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

5. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ 收敛性不确定 $u_n=(-1)^n\frac{1}{n}$

6. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$ 收敛性不确定 $u_n=(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

7. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_{2n}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_{2n-1}$ 收敛性不确定

函数项级数

函数项级数定义

- 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称 $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 为定义在区间 I 上的 **函数项级数**, 记作 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$, 当 x 取确定的值 x_0 时, $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$

幂级数

幂级数定义

- 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是 x 的 n 次幂函数, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 为**幂级数**, 一般形式: $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$
- 标准形式: $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$, 其中 $a_n(n=0,1,2\cdots)$ 为**幂级数的系数**

收敛点和发散点

- 若给定 $x_0\in I$, 有 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛, 则称 $x=x_0$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**;

  若 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 发散, 则称 $x=x_0$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的**发散点**

收敛域

- 函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的**收敛域**

阿贝尔定理

- 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_1(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 对于满足 $|x| < |x_1|$ 的一切 x, 幂级数 **绝对收敛**
- 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_1(x_2 \neq 0)$ 处发散, 对于满足 $|x| > |x_2|$ 的一切 x, 幂级数 **发散**

收敛半径

- 若 $R \geq 0$ 满足条件:
- $|x| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 绝对收敛
- $|x| > R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 发散
- 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 区间 $(-R, R)$ 为幂级数的收敛区间

求收敛域

- (**充分条件**)不缺项幂级数: 先求**收敛半径**, 再求**收敛域**, 验证收敛区间端点的收敛性

$$\begin{cases} \rho = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ \rho = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \\ R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \rho \neq +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases} \end{cases}$$

- (**充分条件**)缺项幂级数和一般项幂级数: 先求**收敛区间**, 再验证收敛区间端点的收敛性

$$\begin{cases} (a,b) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1 \\ (a,b) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} < 1 \end{cases}$$

- 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小
- 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大

幂级数求和函数

概念

- 在**收敛域上**，记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$，称 $S(x)$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 的**和函数**

运算法则

- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b，且 $R_a\neq R_b$
- $k\sum\limits_{n=0}^{n}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{n}ka_nx^n,|x|<R_a$
- $\sum\limits_{n=0}^{n}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{n}(a_n\pm b_n)x^n,|x|<\min\{R_a,R_b\}$
- $\sum\limits_{n=0}^{n}a_nx^n\sum\limits_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n$

性质

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续
2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积分，且有逐项积分公式，收敛半径不变，收敛域可能变大
   $\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\right)dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^x t^ndt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}(x\in I)$
3. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 上可导，且有逐项求导公式，收敛半径不变，收敛域可能变小
   $S'(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_nx^n)'=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}(|x|<R)$

重要展开式

1. $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$
2. $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1$
3. $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,-1<x<1$

4. $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\le 1$

5. $\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,-1\le x<1$

6. $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$

7. $\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$

8. $$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\ &=\begin{cases} x\in(-1,1), & \alpha\le -1\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1], & \alpha>0\ \&\ \alpha\notin\mathbb{N}_+\\ x\in(-\infty,+\infty), & \alpha\in\mathbb{N}_+\end{cases}\end{aligned}$$

函数展开成幂级数

- $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在任意阶导数
  $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$
  是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**泰勒级数**,若收敛,$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
- 特别的,$x_0=0\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 是 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**,若收敛,$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$
- 通过已知函数的幂级数展开,利用四则运算、求导、积分可以得到函数的幂级数展开

傅里叶级数

傅里叶级数定义

- 设函数 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数,且在 $[-l,l]$ 上可积,称
  $\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)cos\frac{n\pi}{l}xdx, & (n=0,1,2,\cdots)\\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx, & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$ 为 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数系数
- 级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$ 是 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数,记作
  $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$

狄利克雷收敛定理

- $f(x)$ 以 $2l$ 为周期的可积函数, 在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足条件:
- 连续或者只有有限个第一类间断点
- 至多有有限个极值点
- $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l,l]$ 上处处收敛, 其和函数 $S(x)$ 满足

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x_-)+f(x_+)}{2}, & x\text{为间断点} \\ \dfrac{f(-l_+)+f(l_-)}{2}, & x=\pm l \end{cases}$$

正弦级数和余弦级数

- $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上是奇函数, 傅里叶级数展开式是正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,\cdots$$

- $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上是偶函数, 傅里叶级数展开式是余弦级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,\cdots$$

周期奇延拓和周期偶延拓

- $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上有定义, 延拓到 $[-l,l]$ 上的奇函数或者偶函数