二重积分

定义

- 设 f(x,y) 在有界闭区域 D 上有界, D 的面积为 S_D , D 上的一个分割为 $D=igcup\limits_{i=1}^n D_i$, $\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积
- 任取 $(arepsilon_i,\eta_i)\in D_i$,作乘积 $f(arepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$,并求和 $\sum\limits_{i=1}^n f(arepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$
- 如果当 $\max\{d_i|d_i$ 是 D_i 区域的直径 $\}\to 0$,极限 $\lim_{n\to +\infty}\sum_{i=1}^nf(arepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$ 存在,且与 D 的分割方法和 $(arepsilon_i,\eta_i)$ 的取法无关
- 那么称此极限为 f(x,y) 在区域 D 上的二重积分,记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

性质(线性)

- $ullet \int\limits_{D}(lpha f(x,y)+eta g(x,y))d\sigma=lpha \int\limits_{D}f(x,y)d\sigma+eta \int\limits_{D}g(x,y)d\sigma$
- $ullet \int\limits_D f(x,y)d\sigma$ = $\int\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$ + $\int\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$, $D=D_1+D_2$

对称性

普通对称性

区域 D 关于 x = a 对称, 我们有:

$$egin{aligned} ullet \int\limits_D f(x,y) d\sigma &= egin{cases} 2 \int\limits_{D_1} f(x,y) d\sigma, & f(2a-x) = f(x) \ 0, & f(2a-x) = -f(x) \end{cases} \end{aligned}$$

区域 D 关于 y = b 对称, 我们有:

$$egin{aligned} igcup_D & \iint\limits_D f(x,y) d\sigma = egin{cases} 2 \iint\limits_{D_1} f(x,y) d\sigma, & f(x,2b-y) = f(x,y) \ 0, & f(x,2b-y) = -f(x,y) \end{cases} \end{aligned}$$

轮换对称性

区域 D 关于 x = y 对称, 我们有:

$$ullet \int\limits_D f(x,y)d\sigma = \int\limits_D f(y,x)d\sigma = rac{1}{2}\int\limits_D \left[f(x,y) + f(y,x)
ight]d\sigma$$

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} eta & \iint\limits_D f(x,y) d\sigma = egin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y) d\sigma, & f(x,y) = f(y,x) \ 0, & f(x,y) = -f(y,x) \end{cases} \end{aligned}$$

计算

直角坐标

$$ullet \int\limits_D f(x,y) d\sigma = egin{cases} \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y) dy \ \int_a^b dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y) dx \end{cases}$$

极坐标

•
$$\iint\limits_{D} f(x,y) d\sigma = \iint\limits_{D'} r f(r\cos\theta,r\sin\theta) dr d\theta$$

变量替换

- 设D和 $D^{'}$ 是平面上两个(有界)区域,D到 $D^{'}$ 的对应 $\varphi:(u,v)\to(x,y)$ (这里 x=x(u,v),y=y(u,v) 连续可微),称为变量替换,要求 φ 在一个面积为 0 的集合外是 $1\sim 1$,我们有:
- $dxdy = J_{\varphi}(u,v)dudv$

$$ullet J_{arphi}(u,v) = rac{D(x,y)}{D(u,v)} = egin{bmatrix} rac{\partial x}{\partial u} & rac{\partial x}{\partial v} \ rac{\partial y}{\partial u} & rac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

重要积分

$$ullet \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = rac{\sqrt{\pi}}{2}$$

•
$$\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx \ge a^2$$