微分方程

基础知识

微分方程及其阶

- 表示未知函数及其导数(或者微分)与自变量之间关系的方程称为微分方程, 一般写为:
- $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$或$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$
- 微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶

常微分方程

- 未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程

线性微分方程

- $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$
- 形如上述的微分方程称为 n 阶\textbf{线性微分方程}, 其中 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是自变量 x 的函数, $a_k(x) \not\equiv 0$, 当 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数时,又称方程为 n 阶常系数线性微分方程; 若右端 $f(x) \equiv 0$, 则称方程为 n 阶齐次线性微分方程, 否则称其为 n 阶非齐次线性微分方程

微分方程的解和通解

- 若将函数代入微分方程, 使方程成为恒等式, 则该函数称为微分方程的解, 微分方程解的图形称为积分曲线
- 若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数, 则该解称为微分方程的通解

初始条件和特解

- 确定通解中常数的条件就是初始条件,如 $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$,其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 n 个给定的数, 确定通解中的常数后, 解就成为特解

一阶微分方程

可分离变量型微分方程

直接可分离

- $\frac{dy}{dx}=F(x,y)=f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$

换元后可分离

- $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)\Rightarrow\begin{cases}u=ax+by+c\\ \frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\\ \frac{du}{dx}=a+bf(u)\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{a+bf(u)}=\int dx$
- 在换元过程中, 可能会因为定义域问题漏掉某些解, 这些解称为奇解.
- 非线性微分方程的所有解等于通解和奇解的并集; 线性微分方程的所有解等于通解, 没有奇解.

齐次型微分方程

- $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{y}{x}\\ \frac{dy}{dx}=\frac{d(ux)}{x}=u+x\frac{du}{dx}\\ u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$

一阶线性微分方程

- $y'+p(x)y=q(x),p(x)$和$q(x)$是已知的连续函数
- $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$

伯努利方程

- $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$
- $y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)\Rightarrow\begin{cases}z=y^{1-n}\\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{1-n}y^{-n}\frac{dy}{dx}\end{cases}\Rightarrow(1-n)\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$
- $\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)\Rightarrow z=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[e^{\int(1-n)p(x)dx}\cdot q(x)+C\right]$

二阶可降阶微分方程

$y''=f(y,y')\Leftrightarrow F(y,y',y'')=0$

- 我们令: $p=y'$,则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p\Rightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

$y'' = f(x, y') \Leftrightarrow F(x, y', y'') = 0$

- 我们令: $p(x) = y'$,则$y'' = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$

高阶微分方程

二阶常系数线性微分方程

- 二阶常系数齐次微分方程: $y'' + py' + py = 0$
- 二阶常系数非齐次微分方程: $y'' + py' + py = f(x)$

二阶常系数齐次线性微分方程解

- 对于二阶常系数齐次x线性微分方程,特征方程:$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
- 当方程有两个不同的实数根 λ_1, λ_2 ,微分方程通解: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
- 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,微分方程通解: $y = C_1 + C_2 x e^{\lambda x}$
- 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$,微分方程通解: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程解

- 对于二阶常系数非齐次线性微分方程: $y'' + py' + py = f(x)$
- 通解为二阶常系数齐次线性微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

当 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 时,特解 y^*:

- $y^* = e^{\alpha x} x^k Q_n(x)$
- 当 α 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 α 是特征方程的一个根,$k = 1$
- 当 α 是特征方程的重根,$k = 2$

当 $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x)$ 时,特解 y^*:

- $y^* = e^{\alpha x} x^k (Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x), \quad l = max\{m, n\}$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根,$k = 1$

欧拉方程

欧拉方程形式

- 形如以下形式的微分方程: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

当 $x>0$ **时,令** $x=e^t,t=\ln x;\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

- $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$
- $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$
- 原微分方程可化为: $\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$

当 $x<0$ **时,令** $x=-e^t,t=\ln(-x);\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

- $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$
- $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$
- 原微分方程可化为: $\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(-e^t)$

n 阶常系数齐次线性微分方程

- r 是单实数根, 通解包含: Ce^{rx}
- r 是 k 重实数根, 通解包含: $(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots C_kx^{k-1})e^{rx}$
- r 是 单复根$\alpha\pm\beta i$, 通解包含: $e^{rx}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
- r 是 二重复根$\alpha\pm\beta i$, 通解包含: $e^{rx}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3x\cos\beta x+C_4x\sin\beta x)$