一元函数微分学

一元微分学概念

导数

定义

- 设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，自变量在 $x=x_0$ 处增加一个增量 Δx 时，其中 $x_0\in I, x_0+\Delta\in I$，函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，那么称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

导数存在的充要条件

- $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是: $f(x)$ 在 x_0 处存在左导数和右导数，且左导数等于右导数

导数几何意义

- 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的切线的斜率

微分概念

- 设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为 $dy=f'(x_0)dx$，其中 dx 是自变量 x 的增量，dy 是因变量 y 的增量

一元函数微分学计算

基本导数公式

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(e^x)'=e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$$

$$(\csc x)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$\left(\ln(x+\sqrt{x^2-a})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a}}$$

导数的四则运算

和差法则

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

积法则

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

商法则

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

复合函数的导数

$$F[G(x)]' = F[G(x)]' \cdot G'(x)$$

反函数的导数

一阶导数

$x = \varphi(y), y = f(x)$ 记 $x'_y = \varphi'(y), y'_x = f'(x)$

$$x'_y y'_x = 1 \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

二阶导数

$$x''_{yy} = -\frac{y''_x}{(y'_x)^3}, y''_{xx} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

隐函数的导数

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow F'(x, y) \cdot y' = 0$$

参数方程的导数

一阶导数

$$x = x(t), y = y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

二阶导数

$$x = x(t), y = y(t) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx}\left[\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}\right]$$

对数求导和指数求导

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$y=a^{f(x)} \Rightarrow y=e^{f(x)\ln a}$

高阶导数的计算

归纳法

$\sin^{(n)} x=\sin(x+\frac{n\pi}{2}),\quad \sin^{(n)}(ax+b)=a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

$\cos^{(n)} x=\cos(x+\frac{n\pi}{2}),\quad \cos^{(n)}(ax+b)=a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad [\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$

$(\dfrac{1}{ax+b})^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

莱布尼茨公式

$(uv)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{i}{n}u^{(i)}v^{(n-i)}$

泰勒展开式

- 欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
- $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$
- $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{2n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$
- $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$
- $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1},x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$
- $\arcsin x=x+\dfrac{x^3}{6}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1},x\in(-1,1)$
- $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in(-1,1)$
- $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots,x\in(-1,1]$
- $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}+\cdots,x\in[-1,1)$

- $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

一元函数微分学应用

函数单调性和极值

极值: 设 $f(x)$ 在 x_0 有定义, 如果存在 $\delta>0$, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x)\leq f(x_0)$ 或 $f(x)\geq f(x_0)$, 那么称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值或极小值, 称 x_0 是极值点

单调性

$f'(x)\geq 0\Rightarrow f(x)$**(在有限个点处为零) 在 x 处严格单调递增**

$f'(x)\leq 0\Rightarrow f(x)$**(在有限个点处为零) 在 x 处严格单调递减**

极值点(驻点或者不可导点)

一阶导数判别(第一充分条件): $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 上可导,且 $x\in(x_0-\delta,x_0)$, 有 $f'(x)>(<)0$, $x\in(x_0,x_0+\delta)$, 有 $f'(x)<(>)0$, 那么 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大(小)值点

二阶导数(第二充分条件): $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$, 若 $f''(x_0)<0$, 那么 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值点; 若 $f''(x_0)>0$, 那么 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值点

凹凸性和拐点

凹凸函数

$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>(<)\lambda_1f(x_2)+\lambda_2f(x_2)$**,其中**
$0<\lambda_1<1, 0<\lambda_2<1, \lambda_1+\lambda_2=1$**, 那么称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是凸(凹)函数**

$f(x)$ **在 $[a,b]$上连续, 在 (a,b) 上可导,满足:**
$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)>(<)f(x), x, x_0\in(a,b)$**, 那么称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸(凹)函数**

拐点

连续曲线凹弧和凸弧的分界点称为曲线的拐点 $(x_0,f(x_0))$

1. 函数在拐点处连续 2. 函数在拐点处凹凸性发生改变 3. 函数在拐点处二阶导数存在,必有 $f''(x_0)=0$

函数图像

1. 定义域(间断点)

2. 奇偶性

3. 渐近线(铅垂、水平、斜)

4. 单调性和极值

5. 凹凸性和拐点

渐近线

在同一个趋向方向中水平渐近线和斜渐进线只能有一个

间断点处看铅垂渐近线, $\pm\infty$ 处看水平渐近线和斜渐近线

曲率和曲率半径

曲率推导

曲率: $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

曲率半径: $\rho=\dfrac{1}{k}$

一元微分学物理应用

速度和加速度

相关变化率