函数极限和连续性基础

函数基础知识和性质

- 函数三要素: 定义域、对应关系和值域
- 函数四大性质: 有界性、奇偶性、周期性和单调性
- 函数运算: 四则运算、复合运算、反函数运算
- 初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数六类
- 任意一个定义在 $[-l,l]$ 上的函数 $f(x)$ 均可以写成一个奇函数和一个偶函数的和
  $f(x)=h(x)+g(x)$, 其中 $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数,
  $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数

重要函数和预备知识

三角函数和差化积、积化和差公式

积化和差

- $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$
- $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
- $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

和差化积

- $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

- $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

反三角函数

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$**,构造函数求导,导函数恒为** 0**,** $f(x)=f(0)=\frac{\pi}{2}$

反正弦函数

- $f(x)=\arcsin(x),x\in[-1,1],y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

反余弦函数

- $f(x)=\arccos(x),x\in[-1,1],y\in[0,\pi]$

反正切函数

- $f(x)=\arctan(x),x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

双曲函数

双曲正弦函数

- $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2},x\in\mathbb{R},\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

双曲余弦函数

- $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},x\in\mathbb{R},\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

双曲正切函数

- $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},x\in\mathbb{R},\mathbb{R}\to(-1,1)$

黎曼函数和狄利克雷函数

黎曼函数定义在 $[0,1]$ 上的分段函数

- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & p,q\in\mathbb{Q}且x=\frac{p}{q}\in(0,1)\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}或x=0,1\end{cases}$

狄利克雷函数定义在全平面上的分段函数

- $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

符号函数

- $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

取整函数

- $f(x)=[x], x-1<[x]\le x, \lim\limits_{x\to 0^+}=0, \lim\limits_{x\to 0^-}=-1$

平均值不等式

调和平均值

- $H_n=\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{a_k}}$

几何平均值

- $G_n=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$

算术平均值

- $A_n=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}$

平方平均值

- $Q_n=\sqrt{\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{n}}$

平均值大小关系

- $H_n\le G_n\le A_n\le Q_n$,每一个等号成立的条件都是$a_1=a_2=\ldots=a_n$

重要不等式

柯西不等式: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$

$\sin x < x < \tan x, x \in (0\frac{\pi}{2})$, $\arctan x < x < \arcsin x, x \in [0,1]$

$x - 1 \geq \ln x, x \in (0,+\infty)$, $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$

函数图形

几个坐标系下的重要图形

极坐标

- 圆: $r = a\sin\theta$
- 心形线: $r = a(1 \pm \cos\theta)$
- 三叶玫瑰线: $r = a\sin 3\theta$
- 阿基米德螺线: $r = a\theta$
- 伯努利双纽线: $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 或者 $r^2 = a^2\sin 2\theta$

参数方程

- 摆线: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$
- 星形线: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

函数的极限

函数极限定义

定义

- 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

- 单侧极限[左极限(右极限)]: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左(右)邻域内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0 < x - x_0 < \delta$($0 < x_0 - x < \delta$)时, 对应的函数值 $f(x)$都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左(右)极限, 记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$)
- 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 收敛的充分必要条件为 $f(x)$ 在 $x = a$ 处左右极限存在且相等, 即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$
- 无穷远处极限(双侧,单侧只取一边): $f(x)$ 在 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ 上有定义, $\forall \epsilon > 0$, $\exists A > 0$, 当 $|x| > A$ 时, $|f(x) - l| < \epsilon$, 我们称 l 是当 x 趋于无穷远时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$
- 极限发散
  - 震荡发散: $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ 反复震荡
  - 左右极限存在但不相等: $\lim\limits_{x \to 0} [x]$
  - 广义收敛: $f(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a, \delta)$ 上有定义, $\forall X > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $|f(x)| > X$, 则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 处广义收敛

函数极限性质

唯一性

- 若极限存在, 则极限唯一

局部有界性

- 若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则存在正数 $M > 0$, 存在正数 $\delta > 0$, 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| \leq M$

局部保号性

- 若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$, 则存在正数 $\delta > 0$, 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x) > 0$

函数极限计算

无穷小

极限四则运算

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, B \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$

无穷小比阶: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

- 等价无穷小: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 记作 $f(x) \sim g(x)$
- 同阶无穷小: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k(k \neq 0)$, 记作 $f(x) \approx g(x)$
- 高阶无穷小: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 记作 $f(x) = o(g(x))$
- 低阶无穷小: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 记作 $g(x) = O(f(x))$

常见等价无穷小: $x \to 0$

- $\tan x \sim \sin x \sim x, \ln(x+1) \sim x \sim e^x - 1$
- $\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}, a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0)$
- $\arcsin x \sim \arctan x \sim x$
- $(1+x)^a - 1 \sim ax$

洛必达法则

定理内容:设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 的某邻域内可导(a 可以为 ∞, 邻域也可以是单侧的), 且 $g'(a)\neq 0$

- (1). $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$
- (2). $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$
- 如果 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$($l$ 可以是实数或者 ∞),我们有: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

泰勒公式

- 欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$
- $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$
- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$
- $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
- $\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}, x\in(-1,1)$
- $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x\in(-1,1)$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots, x\in(-1,1]$
- $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\cdots, x\in[-1,1)$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

七种未定式极限: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, +\infty+(-\infty), 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^{0}$

函数的连续和间断

连续点定义

- 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

间断点

第一类间断点:

- 可去间断点: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$($f(x_0)$ 可以无定义)
- 跳跃间断点: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \neq \lim\limits_{x \to x_0^+}$

第二类间断点: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在

- 震荡间断点: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 震荡不存在
- 无穷间断点: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$
- 其他第二类间断点