数列极限

定义

- 设 x_n 是一数列, 若存在常数 $a, \forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或者说数列 $\{x_n\}$ 趋近于 a

证明数列极限不存在

任意子列发散

两个子列的极限存在但不相等

性质

唯一性

- 若极限存在, 则极限唯一

保号性

- 若数列 $\{x_n\}$ 的极限 $a > 0(a < 0)$, 则存在正整数 N_0, 当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0(x_n < 0)$, 取 $\epsilon = \pm a$ 即可

有界性

- 若数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界

推论

- 推论 1: 如果数列从某项起有 $x_n \geq 0$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$
- 推论 2: 如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$, 则 $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = |A|$

求数列极限

定义法

极限运算规则

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n \pm y_n] = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} [x_n \cdot y_n] = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$

归结原理

- 设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, 那么 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ 的充分必要条件是: 对与一切序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(a,\delta)$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

夹逼准则

设数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 条件可变为 $n > N_0$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$(有限无关性)

单调有界准则

单调有界数列必有极限