一元函数积分学

不定积分

定义

- $\forall x \in I$, 对于可导函数 $F(x)$, 均有 $F'(x) = f(x)$, 我们称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数
- 原函数存在定理(充分条件): 连续函数 $f(x)$ 必存在原函数 $F(x)$
  - 1. 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 证明 $F'(x) = f(x)$
  - 2. $\forall x \in (a,b), F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$
- 达布定理(必要性): 导函数存在, 必有介值性(无第一类间断点)
  - 1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有介值性
  - 2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无第一类间断点
  - 3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无无穷间断点

不定积分计算

基本积分公式

- 幂、指、对
  - $\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C, k \neq -1$, 两个常用公式: $\begin{cases} \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C \end{cases}$
  - $\begin{cases} \int e^x dx = e^x + C \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \end{cases}$
  - $\begin{cases} \int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{x+a}{x-a}| + C \\ \int \frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{x+a}{x-a}| + C \end{cases}$
- 三角函数
  - $\begin{cases} \int \sin x dx = -\cos x + C \\ \int \cos x dx = \sin x + C \\ \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \\ \int cotx dx = \ln|\sin x| + C \\ \int secx dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int cscx dx = \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \end{cases}$
  - $\begin{cases} \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \\ \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \\ \int \sec^2 x dx = -\tan x + C \\ \int \csc^2 x dx = \cot x + C \\ \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C \\ \int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C \end{cases}$

- $\begin{cases} \int \sec x \tan x = \sec x + C \\ \int \csc x \cot x = \csc x + C \end{cases}$

- 反三角函数
  - $\begin{cases} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \\ \int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \end{cases}$
- 根式积分 (分部积分或三角换元)
  - $\begin{cases} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \end{cases}$

凑微分

- $\int f[g(x)] g'(x) dx = \int f[g(x)] dg(x) = \int f(u) du$

换元法

- 一般换元法
  - $\int f(x) dx \overset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$
- 三角换元法 (多项式根式)
  - $x = \sin t, x = \cos t, x = \tan t$
  - 万能公式:

    $$f(x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow x = \tan \frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}) \frac{2}{1+t^2} dt$$
  - $R(\sin x, \cos x) = R(\sin x, -\cos x) \Rightarrow t = \sin x$
  - $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \cos x$
  - $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x) \Rightarrow t = \tan x$
- 根式代换
  - $t = \sqrt{x + a}$
- 倒代换
  - $t = \frac{1}{x}$

分部积分

- $\int u dv = uv - \int v du$
- 递归法: $I_n = I_{n-1} + f(x)$
- 组合积分法

有理函数积分

- $\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0 \\ p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^n, b_m \neq 0 \end{cases}$

- $\frac{p(x)}{q(x)}=\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j_i=1}^{r_i}\frac{A_{i,j_1}}{(x-a_i)^{j_i}}+\sum\limits_{m=1}^{l}\sum\limits_{n_m=1}^{s_m}\frac{M_{m,n_m}x+N_{m,n_m}}{(x^2-b_mx+c_m)^{s_m}}$

定积分

定义

- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$, 定义 $x_0=a,x_n=b$, 且满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1},k=1,2,\cdots,n$, 任取一点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 记 $\lambda=\max\{\Delta x_k\}$, 当 $\lambda\to 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 和 ξ_k 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分
- 任取 x_i: 变为将区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间, 且每个小区间的长度为 Δx_k, 且 $\Delta x_k\to 0$, 且 ξ_k 为每个小区间的右端点, $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$
- 定积分存在(必要条件): 区间有界, 函数有界
  - $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 (充分条件)
  - $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 (充分条件)
  - $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调(有界),则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 (充分条件)

定积分计算

- 基本公式
  - 牛顿-莱布尼茨公式: $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数, $\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$
- 对称函数积分
  - $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$
  - $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_0^l f(x)dx$
  - $f(a+b-x)=-f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 奇对称, $\int_a^b f(x)dx=0$
  - $f(a+b-x)=f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 偶对称, $\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)dx$
  - $f(a+b-x)=f(x)$, $f(x)$ 关于 $\dfrac{a+b}{2}$ 对称, $g(a+b-x)+g(x)=A$, A 为常数, 我们有: $\int_a^b f(x)g(x)dx=\dfrac{A}{2}\int_a^b f(x)dx=A\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=A\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)dx$
- 华里士公式
  - $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

变限积分

定义

- $x \in [a,b], \forall x \in [a,b]$, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 都有一个确定的值, 我们将这个关于 x 的函数 $\int_a^x f(t)dt$ 称作变限积分

性质

- $f(x)$ 可积, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定连续
- $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定可导, 且 $F'(x) = f(x)$
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一跳跃间断点 x_0, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处不可导
- $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一可去间断点 x_0, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

变限积分求导

- $f(x)$ 是连续函数, 则 $\left[\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)]\phi'(x)$

反常积分 (广义积分)

- 定义
  - 积分区间无界 (无穷区间: 奇点)
  - 积分函数无界 (无界函数: 瑕点)
- 敛散性判别
  - 比较判别法 (无穷区间)
    - 函数 $f(x), g(x)$ 连续, 且 $0 \le f(x) \le g(x)$
    - (1). $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
    - (2). $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
  - 比较判别法极限形式 (无穷区间)
    - 函数 $f(x), g(x)$ 连续, 且 $g(x) > 0, f(x) \ge 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$
    - (1). $\lambda \ne 0$ 且 $\lambda \ne \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散
    - (2). $\lambda = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
    - (3). $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散
  - 比较判别法 (无界函数)
    - 函数 $f(x), g(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, 瑕点为 $x = a$, 且 $0 \le f(x) \le g(x)$
    - (1). $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛
    - (2). $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散
  - 比较判别法极限形式 (无界函数)
    - 函数 $f(x), g(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, 瑕点为 $x = a$, 且 $g(x) > 0, f(x) \ge 0, \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$

    - (1). $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散
    - (2). $\lambda = 0$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛
    - (3). $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散
  - p 反常积分
    - $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ 收敛 $\Rightarrow 0 < p < 1 \Leftarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}dx$
    - $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ 发散 $\Rightarrow p \geq 1 \Leftarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}dx$
    - $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 收敛 $\Rightarrow p > 1 \Leftarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}dx$
    - $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 发散 $\Rightarrow p \leq 1 \Leftarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p}dx$

一元函数积分学应用

面积

- 直角坐标 $y = f(x)$ $S = \int_a^b f(x)dx$ S 表示的是由 $y = 0, y = f(x)$ 和 $x = a, x = b$ 四条直线围成的平面图形的面积
- 极坐标 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$ $S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|[r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2\right| d\theta$ S 表示的是由 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和 $r = r_1(\theta), r = r_2\theta$ 四条曲线围成的平面图形的面积.
- 参数方程
  $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} S = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$
  S 表示的是由 $t = \alpha, t = \beta$ 和 $x = x(t), y = y(t)$ 四条曲线围成的平面图形的面积.

弧长

- 直角坐标 $y = f(x)$
  $s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$
- 极坐标 $r = r(\theta)$
  $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}d\theta$
- 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$

旋转体体积

- 绕 x 轴旋转
  $y = f(x)$与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕x轴旋转得到的几何体体积 V:
  $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$
- 绕 y 轴旋转
  $y = f(x)$与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕y轴旋转得到的几何体体积 V:
  $V = 2\pi\int_a^b x|f(x)|dx$

- 绕任意直线 $L_0: Ax+By+C=0$ 旋转

$$\begin{cases} V=\pi\int_{l_1}^{l_2} r^2 dl \\ r=\dfrac{|Ax+Bf(x)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ dl=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{l}}{|\vec{l}|} \\ \vec{n}=(dx,dy) \\ \vec{l}=(B,-A) \end{cases} \Rightarrow V=\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b [Ax+Bf(x)+C]^2 |Af'(x)-B| dx$$

- 平面区域 D 绕直线 $L_0: Ax+By+C=0$

$$V=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D} r d\sigma=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D}\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}d\sigma$$

旋转体表面积

- 直角坐标 $S=2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$
- 参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} S=2\pi\int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

- 极坐标 $S=2\pi\int_\alpha^\beta |r\sin\theta|\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

平均值

- $\overline{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

形心

- $$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\iint x d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \\ \overline{y}=\dfrac{\iint y d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \end{cases}$$

物理应用

- 变力做功
  - $W=\int_a^b F ds$
- 抽水做功
  - $W=\rho g\int_a^b xA(x)dx$
- 水压力
  - $F=\rho g\int_a^b x(f(x)-h(x))dx$