

# 计算机动画原理与技术 作业 4 报告

于泽汉 No.118039910141

## 1. 圆上的珠子

仿真效果和对应代码见 [hw4\\_a\\_bead\\_on\\_wire.html](#)。

浏览器（推荐使用 Chrome）打开可查看动画，文本编辑器打开可查看代码。

令  $p$  表示珠子坐标， $v$  表示珠子速度， $a$  表示珠子加速度， $\lambda$  表示拉格朗日乘子。

由约束条件  $|p| = r$ ，建立拉格朗日方程，并得到拉格朗日乘子。

由于这一部分的工作在所给笔记《Physically Based Modeling: Constrained Dynamics》中已经提及，故此处不再写出推导过程。

我们可以得到

$$\lambda = \frac{-p \cdot x - m \cdot \dot{p} \cdot \dot{p}}{p \cdot p}$$

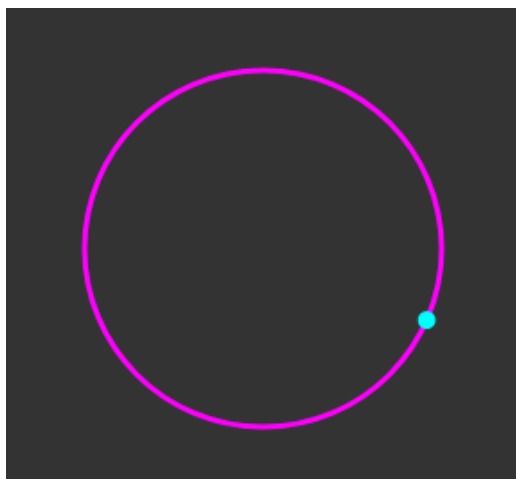
根据关系式  $f = m \cdot g$ 、 $f_c = \lambda \cdot p$  和  $\ddot{p} = \frac{f_c + f}{m}$ ，可以运算、化简得到如下差分形式

$$\ddot{p} = -\frac{g \cdot p + v \cdot v}{p \cdot p} \cdot p + g$$

使用二元四阶龙格-库塔方法进行数值模拟：

```
// [v,a] = f(p,v)
function f(p,v) {
    return [v, add(mult(p, -(dot(g,p)+dot(v,v))/dot(p,p)), g,
        mult(v,-d/m))];
}
function rk(p,v) {
    let k1 = f(p,v);
    let tmp1 = add([p,v],mult(h/2,k1))
    let k2 = f(tmp1[0], tmp1[1]);
    let tmp2 = add([p,v],mult(h/2,k2));
    let k3 = f(tmp2[0], tmp2[1]);
    let tmp3 = add([p,v],mult(h,k3));
    let k4 = f(tmp3[0],tmp3[1]);
    return add([p,v], mult(h/6, add(k1,mult(2,k2),mult(2,k3),
        k4))));
}

[p,v] = rk(p,v);
```

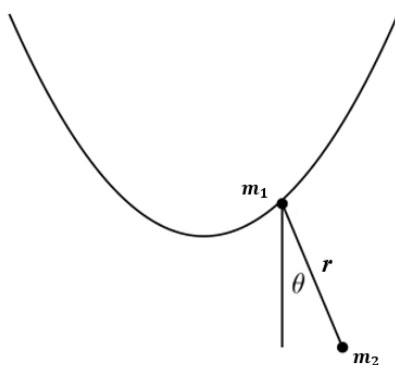


圆上的珠子仿真效果

## 2. 双摆系统

仿真效果和对应代码见 `hw4_double_pendulum.html`。

浏览器（推荐使用 Chrome）打开可查看动画，文本编辑器打开可查看代码。



其中一个质点在抛物线上的双摆

令  $(x_i, y_i)$  表示质点  $m_i$  的坐标，可以建立参数方程如下：

$$x_1 = u$$

$$y_1 = a \cdot u^2$$

$$x_2 = u + r \cdot \sin(\theta)$$

$$y_2 = a \cdot u^2 - r \cdot \cos(\theta)$$

对上述各式求一阶导数

$$\dot{x}_1 = \dot{u}$$

$$\dot{y}_1 = 2a \cdot u \cdot \dot{u}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{u} + r \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{y}_2 = 2a \cdot u \cdot \dot{u} + r \cdot \sin(\theta) \dot{\theta}$$

双摆系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(1 + 4a^2u^2)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2 + m_2r\dot{u}\dot{\theta}(\cos(\theta) + 2au\sin(\theta)) \end{aligned}$$

双摆系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= m_1gy_1 + m_2gy_2 \\ &= (m_1 + m_2)gau^2 - mgr\cos(\theta) \end{aligned}$$

则拉格朗日量为

$$L = T - V$$

只保留平方项

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2 + m_2r\dot{u}\dot{\theta} - (m_1 + m_2)gau^2 - \frac{1}{2}m_2gr\theta^2$$

则有对应的欧拉-拉格朗日方程，化简得到

$$\ddot{u} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}r\ddot{\theta} + 2gau = 0$$

$$\ddot{u} + r\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

进一步化简得到  $\ddot{u}$  和  $\ddot{\theta}$  的表达式

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot 2gau + \frac{m_2}{m_1} \cdot gw \\ \ddot{\theta} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1r} \cdot (2gau - g\theta) \end{aligned}$$

使用四元四阶龙格-库塔方法进行数值模拟：

```
function uw2uudd(u,w) {
    return [-(1+m2/m1)*2*g*a*u + m2/m1*g*w, (m1+m2)/(m1*r)*(2*
        g*a*u-g*w)];
}
// [uudd,wdd,ud,wd] = f(ud,wd,u,w)
function f(ud,wd,u,w) {
    let [uudd,wdd] = uw2uudd(u,w);
    return [uudd,wdd,ud,wd];
}
```

```

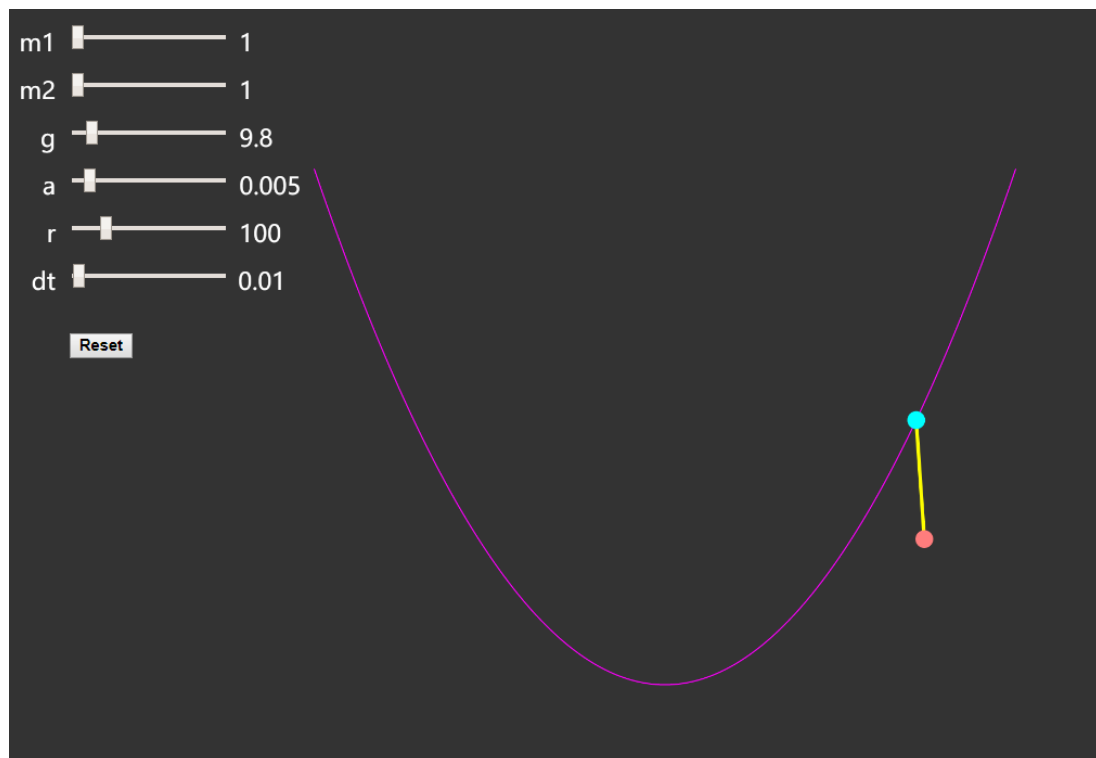
function rk(ud,wd,u,w) {
    let k1 = f(ud,wd,u,w);
    let tmp1 = add([ud,wd,u,w], mult(k1,h/2));
    let k2 = f(...tmp1);
    let tmp2 = add([ud,wd,u,w], mult(k2,h/2));
    let k3 = f(...tmp2);
    let tmp3 = add([ud,wd,u,w], mult(k3,h));
    let k4 = f(...tmp3);
    return add([ud,wd,u,w], mult(add(k1,mult(2,k2),mult(2,k3),
        k4),h/6));
}

function uw2xy1(u,w){
    return [u, -a*u*u];
}

function uw2xy2(u, w){
    return [u + r*sin(w), -a*u*u + r*cos(w)];
}

[ud,wd,u,w] = rk(ud,wd,u,w);
p1 = uw2xy1(u,w);
p2 = uw2xy2(u,w);

```



抛物线上的双摆系统仿真效果