计算机动画原理与技术 作业 4 报告

于泽汉　No.118039910141

1. 圆上的珠子

仿真效果和对应代码见 hw4_a_bead_on_wire.html。
浏览器（推荐使用 Chrome）打开可查看动画，文本编辑器打开可查看代码。

令 p 表示珠子坐标，v 表示珠子速度，a 表示珠子加速度，λ 表示拉格朗日乘子。
由约束条件 $|p| = r$，建立拉格朗日方程，并得到拉格朗日乘子。
由于这一部分的工作在所给笔记《Physically Based Modeling: Constrained Dynamics》中已经提及，故此处不再写出推导过程。
我们可以得到

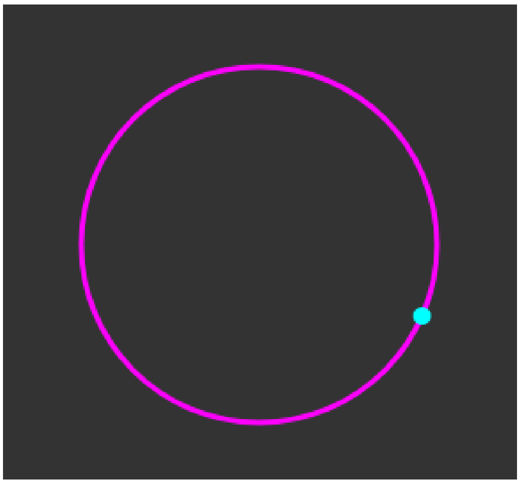
$$\lambda = \frac{-p \cdot x - m \cdot \dot{p} \cdot \dot{p}}{p \cdot p}$$

根据关系式 $f = m \cdot g$、$f_c = \lambda \cdot p$ 和 $\ddot{p} = \frac{f_c + f}{m}$，可以运算、化简得到如下差分形式

$$\ddot{p} = -\frac{g \cdot p + v \cdot v}{p \cdot p} \cdot p + g$$

使用二元四阶龙格-库塔方法进行数值模拟：

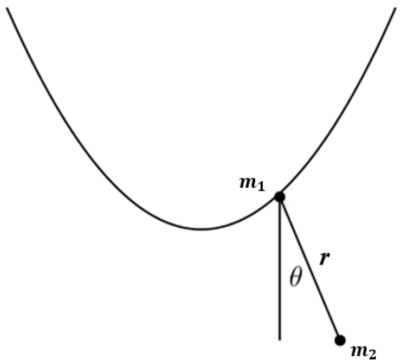
```
// [v,a] = f(p,v)
function f(p,v) {
    return [v, add(mult(p, -(dot(g,p)+dot(v,v))/dot(p,p)), g,
        mult(v,-d/m))];
}
function rk(p,v) {
    let k1 = f(p,v);
    let tmp1 = add([p,v],mult(h/2,k1))
    let k2 = f(tmp1[0], tmp1[1]);
    let tmp2 = add([p,v],mult(h/2,k2));
    let k3 = f(tmp2[0], tmp2[1]);
    let tmp3 = add([p,v],mult(h,k3));
    let k4 = f(tmp3[0],tmp3[1]);
    return add([p,v], mult(h/6, add(k1,mult(2,k2),mult(2,k3),
        k4)));
}

[p,v] = rk(p,v);
```



圆上的珠子仿真效果

2. 双摆系统

仿真效果和对应代码见 `hw4_double_pendulum.html`。
浏览器（推荐使用 Chrome）打开可查看动画，文本编辑器打开可查看代码。



其中一个质点在抛物线上的双摆

令 (x_i, y_i) 表示质点 m_i 的坐标，可以建立参数方程如下：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= u \\
y_1 &= a \cdot u^2 \\
x_2 &= u + r \cdot \sin(\theta) \\
y_2 &= a \cdot u^2 - r \cdot \cos(\theta)
\end{aligned}
$$

对上述各式求一阶导数

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \dot{u} \\
y_1 &= 2a \cdot u \cdot \dot{u} \\
x_2 &= \dot{u} + r \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \\
y_2 &= 2a \cdot u \cdot \dot{u} + r \cdot \sin(\theta)\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

双摆系统的动能为

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(1 + 4a^2u^2)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2 + m_2r\dot{u}\dot{\theta}(\cos(\theta) + 2au\sin(\theta))
\end{aligned}
$$

双摆系统的势能为

$$
\begin{aligned}
V &= m_1gy_1 + m_2gy_2 \\
&= (m_1 + m_2)gau^2 - mgr\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

则拉格朗日量为

$$L = T - V$$

只保留平方项

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\theta}^2 + m_2r\dot{u}\dot{\theta} - (m_1 + m_2)gau^2 - \frac{1}{2}m_2gr\theta^2$$

则有对应的欧拉-拉格朗日方程，化简得到

$$
\begin{aligned}
\ddot{u} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}r\ddot{\theta} + 2gau &= 0 \\
\ddot{u} + r\ddot{\theta} + g\theta &= 0
\end{aligned}
$$

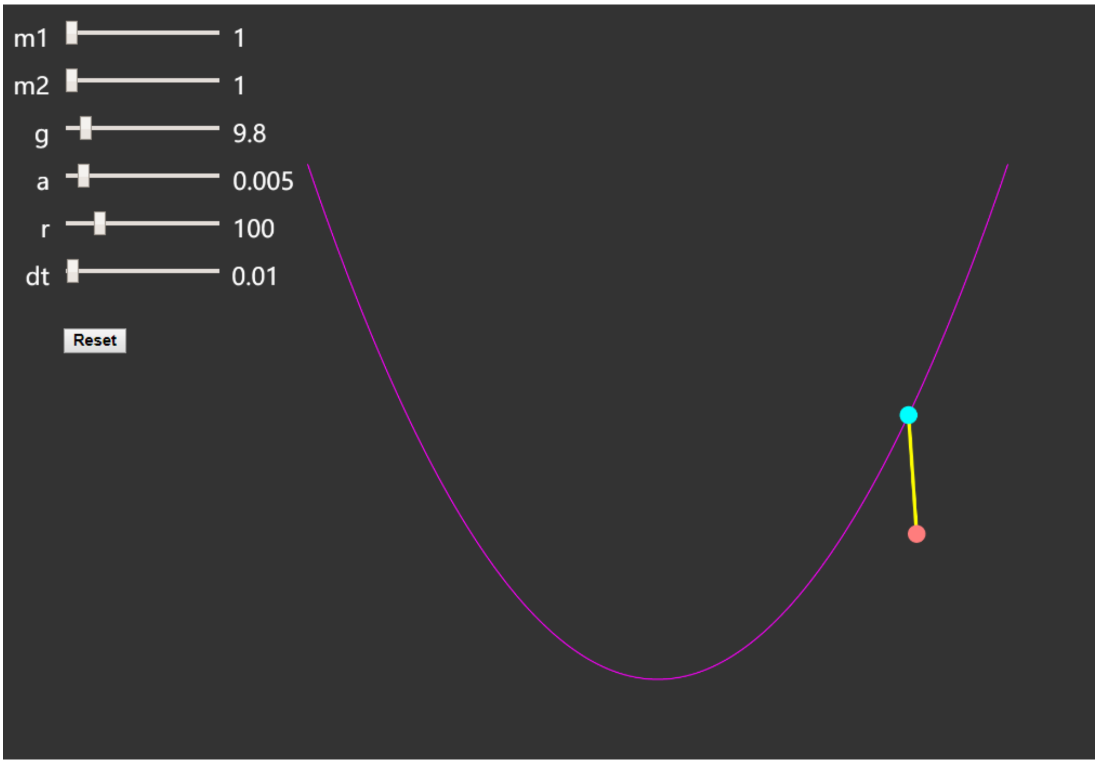
进一步化简得到 $\ddot{u}$ 和 $\ddot{\theta}$ 的表达式

$$
\begin{aligned}
\ddot{u} &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot 2gau + \frac{m_2}{m_1} \cdot gw \\
\ddot{\theta} &= \frac{m_1 + m_2}{m_1 r} \cdot (2gau - g\theta)
\end{aligned}
$$

使用四元四阶龙格-库塔方法进行数值模拟：

```
function uw2uwdd(u,w) {
    return [-(1+m2/m1)*2*g*a*u + m2/m1*g*w, (m1+m2)/(m1*r)*(2*
       g*a*u-g*w)];
}
// [udd,wdd,ud,wd] = f(ud,wd,u,w)
function f(ud,wd,u,w) {
    let [udd,wdd] = uw2uwdd(u,w);
    return [udd,wdd,ud,wd];
}
```

```
function rk(ud,wd,u,w) {
    let k1 = f(ud,wd,u,w);
    let tmp1 = add([ud,wd,u,w], mult(k1,h/2));
    let k2 = f(...tmp1);
    let tmp2 = add([ud,wd,u,w], mult(k2,h/2));
    let k3 = f(...tmp2);
    let tmp3 = add([ud,wd,u,w], mult(k3,h));
    let k4 = f(...tmp3);
    return add([ud,wd,u,w], mult(add(k1,mult(2,k2),mult(2,k3),
       k4),h/6));
}
function uw2xy1(u,w){
    return [u, -a*u*u];
}
function uw2xy2(u, w){
    return [u + r*sin(w), -a*u*u + r*cos(w)];
}

[ud,wd,u,w] = rk(ud,wd,u,w);
p1 = uw2xy1(u,w);
p2 = uw2xy2(u,w);
```



抛物线上的双摆系统仿真效果