Assignment 4

证明：对线性回归中的单一系数进行假设检验，做 F test 等价于做 t test

pf：假设需要进行假设检验的系数为 β，$\mathrm{H}_0:\beta=0$，$\mathrm{H}_1:\beta\neq 0$，

对于 t-test 而言，$\widehat{\beta}\sim\mathbf{N}(\beta,\ \frac{\sigma^2}{S_{xx}})$，其中 $S_{xx}=\sum_i(x_i-\bar{x})^2$，假设当 $|\widehat{\beta}|>c^*$时，拒绝 H_0，

则 size $\alpha=\mathrm{P}(\text{reject }\mathrm{H}_0|\mathrm{H}_0)=\mathrm{P}(|\widehat{\beta}|>c^*|\mathrm{H}_0)=\mathrm{P}(\left|\frac{\widehat{\beta}}{\sigma/\sqrt{S_{xx}}}\right|>\frac{c^*}{\sigma/\sqrt{S_{xx}}})$，

令 $s^2=\frac{1}{n-k-1}\sum_i(Y_i-\widehat{Y_i})^2$ 为 σ^2 的无偏估计，则在 α 表达式的不等号两侧同时除以 s/σ，

则 $\alpha=\mathrm{P}(\left|\frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{S_{xx}}}\right|>\frac{c^*}{s/\sqrt{S_{xx}}})$，$\because$ under H_0 $\frac{\widehat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{S_{xx}}}=\frac{\widehat{\beta}}{\sigma/\sqrt{S_{xx}}}\sim\mathbf{N}(0,1)$，$s/\sigma\sim\sqrt{\frac{\chi^2_{n-k-1}}{n-k-1}}$，

$\therefore\frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{S_{xx}}}\sim t_{n-k-1}$，$\therefore c^*=\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}t_{n-k-1}(\alpha/2)$.

对于 F-test 而言，定义 $ESS=\sum_i(\widehat{Y_i}-\overline{Y})^2$，$RSS=\sum_i(Y_i-\widehat{Y_i})^2$，

则 ESS，RSS 的自由度 $df_{ESS}=k$，$df_{RSS}=n-k-1$，

$F=\frac{ESS/df_{ESS}}{RSS/df_{RSS}}=\frac{\widehat{\beta}^2S_{xx}}{s^2}=(\frac{\widehat{\beta}}{s/\sqrt{S_{xx}}})^2$，从而可见 F-统计量 是 t-统计量 的平方，

从而易知，对线性回归中的单一系数进行假设检验，做 F test 等价于做 t test。