

# Density Peak Clustering

## 1. 引言

本次Project完成了 [1] 中提出的一种新型聚类算法，对其性能分析，并进行了相关优化。

## 2. 算法实现

### 2.1 数据处理

数据来自作者在 [Supplementary Materials](#) 中提供的数据。其中存储 1 – 1999 数据点及其各点之间距离，数据格式为  $(p1, p2, distance(p1, p2))$ ，根据给定的数据格式初始化，映射各点对和其距离，保存到字典中，同时计算出数据中数据点个数。

#### 2.1.1 局部密度 $\rho_i$

- Cut-off Kernel

给定截断距离  $d_c > 0$ ，采用Cut-off kernel方式计算局部密度，由  $\rho_i = \sum_j \chi(d_{ij} - d_c)$  且  $\chi(x) = 1$  if  $x < 0$  and  $\chi(x) = 0$  otherwise，这种方式计算局部密度  $\rho_i$  为连续值。

- Gaussian kernel

给定截断距离  $d_c > 0$ ，采用Gaussian kernel方式计算局部密度，由  $\rho_i = \sum_j e^{-\left(\frac{d_{ij}}{d_c}\right)^2}$  且  $\chi(x) = 1$  if  $x < 0$  and  $\chi(x) = 0$  otherwise，这种方式计算局部密度  $\rho_i$  为离散值。

#### 2.1.2 最小距离 $\delta_i$

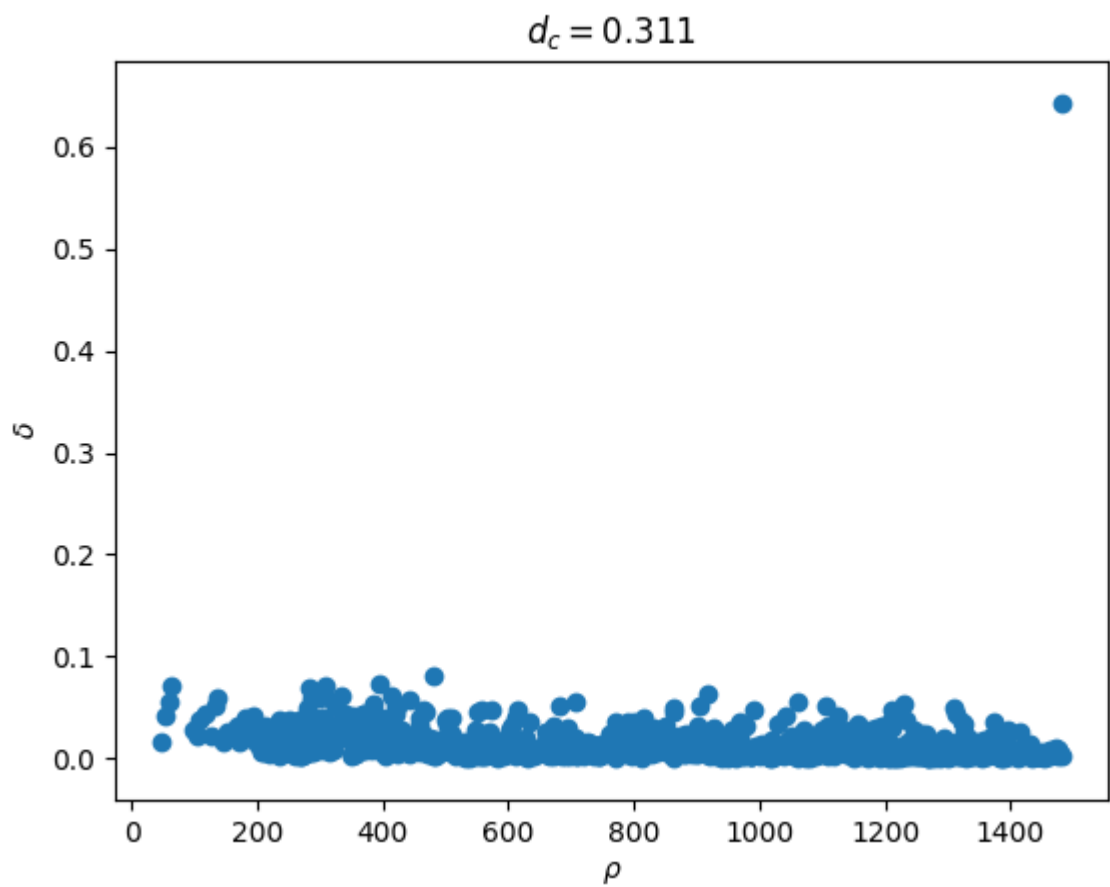
由最小距离的定义可知，当点  $i$  不是局部密度最高的点时有  $\delta_i = \min_{j: \rho_j > \rho_i} (d_{ij})$ ，否则  $\delta_i = \max_j (d_{ij})$ 。

若点  $i$  是最高密度点，则其最小距离是点集  $S$  中与其距离最大的距离，否则最小距离是局部密度比  $i$  高的点中与其距离最小的点。

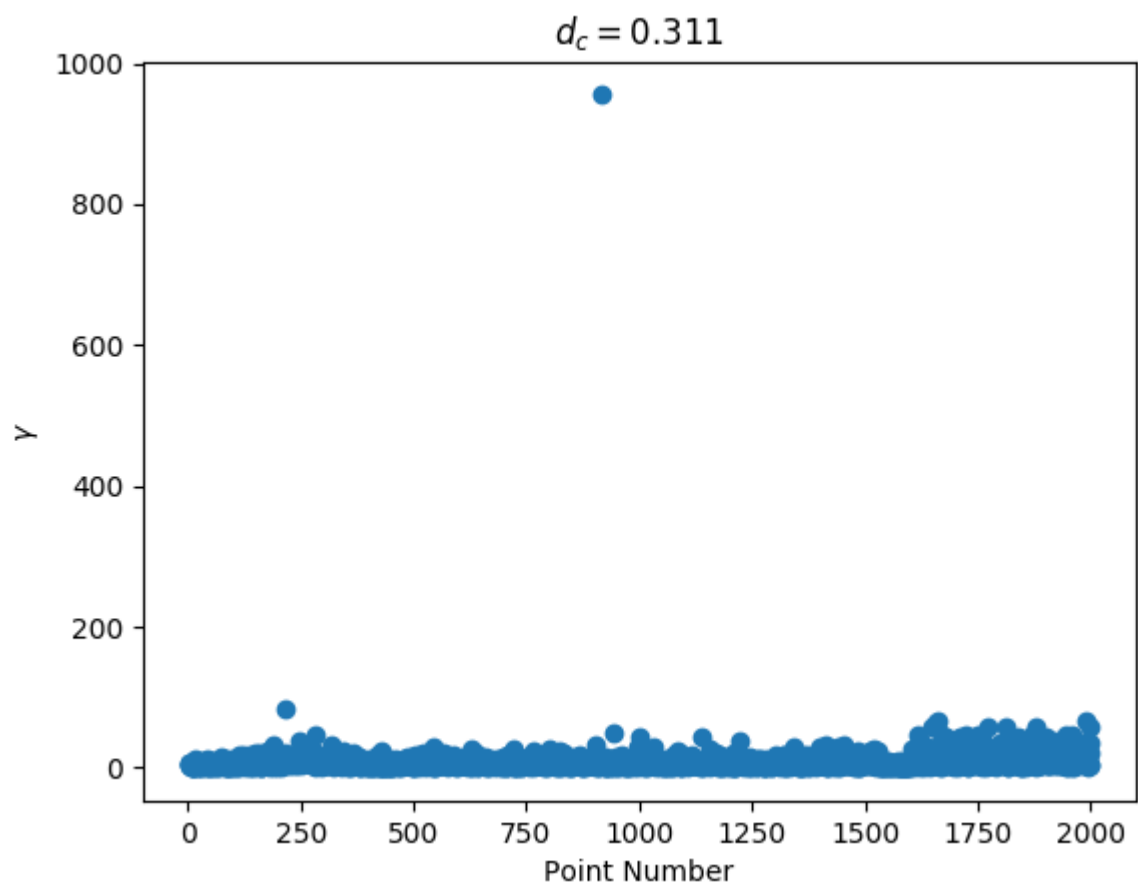
故对局部密度进行降序排序处理后，求最小距离，返回最小距离字典，同时返回最小距离对应的点对字典，方便后面的cluster划分。

#### 2.1.3 聚类中心

对于任意点  $i$ ，同时具有较大的  $\rho_i$  和  $\delta_i$ ，则更有可能成为聚类中心，采用Guassian计算局部密度，截断距离  $d_c$  取 0.311，根据此规则画出  $(\rho_i, \delta_i)$  的决策图如下：



文章中提出对 $(\rho_i, \delta_i)$ , 定义 $\gamma_i = \rho_i \delta_i$ 为聚类中心的划分标准, 画出图像如下:



文章中对截断距离 $d_c$ 的选取没有作任何介绍，只说按照效果自行选择最佳值，这就导致了如上图所示效果，无法选择除了最突出点之外的其余聚类中心，因此对 $d_c$ 的取值需要衡量，在将值从0.511不断下调的过程中发现效果不断变好，但任然不能很准确的判断聚类中心应该选择的个数。

## 2.2 $d_c$ 优化

在一篇对[1]的comment中找到了很好的对截断距离进行选择的算法，优化针对的Gaussian function计算的局部密度，具体见[2]。下面简要介绍其算法：

### 2.2.1 Potential Of Point(POP)

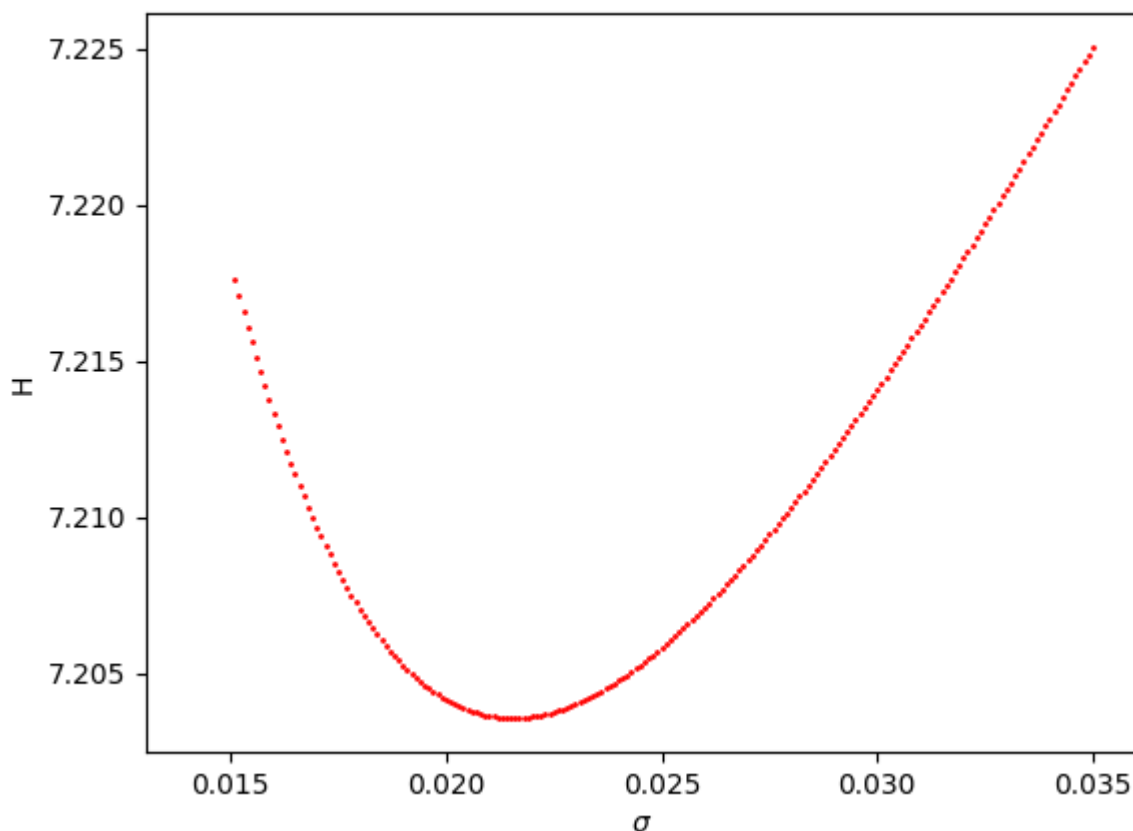
对一个数据集 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，每个点的potential计算公式为

$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \left( e^{-\left(\frac{\|x-x_i\|}{\sigma}\right)^2} \right)$ ，类似Gaussian kernel的计算，其中 $\|x - x_i\|$ 代表欧式几何空间的 $x$ 与 $x_i$ 的距离， $\sigma$ 为需要确定的变量值。

### 2.2.2 Entropy

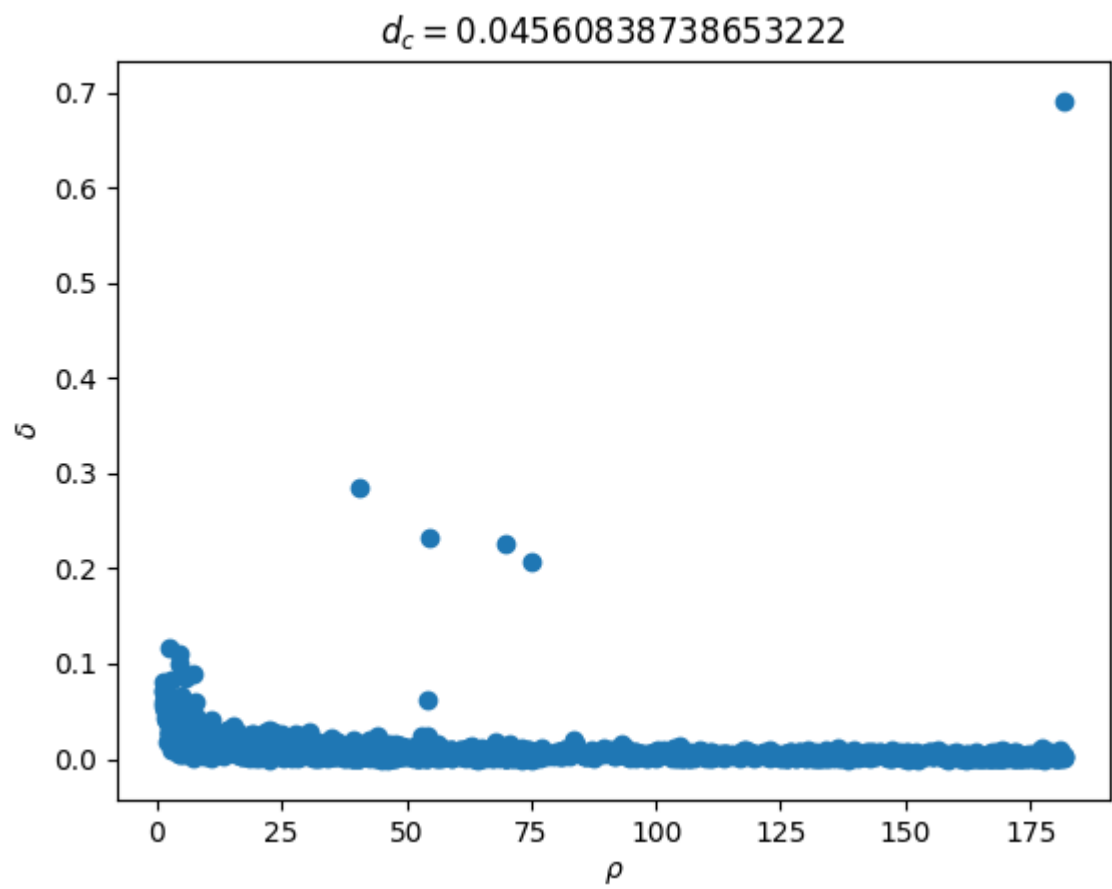
对一个POP集 $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ，定义数据域的熵值 $H = -\sum_{i=1}^n \left( \frac{\varphi_i}{Z} \right) \log\left(\frac{\varphi_i}{Z}\right)$ ，熵值代表数据域的混乱度，我们要求使得 $H$ 最小的变量 $\sigma$ 。

下图直观展示了 $H$ 随 $\sigma$ 的变化趋势：

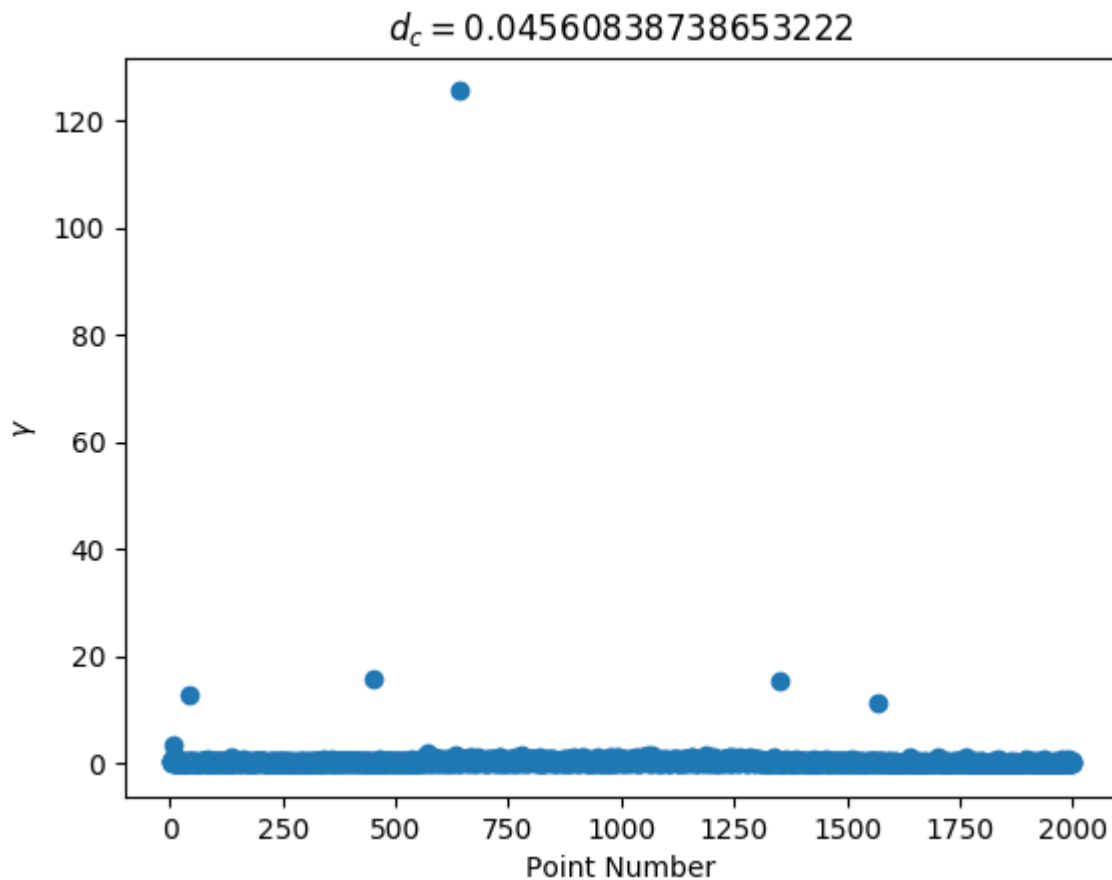


### 2.2.3 $d_c$ 的选取

随着 $\sigma$ 从0不断增加到 $\infty$ ，熵值递减再递增，故取使得熵值最小的 $\sigma$ 值，根据Gaussian分布的3B原则，每个点的影响半径为 $\frac{3}{\sqrt{2}}\sigma$ ，取该值为截断距离 $d_c = 0.0456$ ，此时生成决策图如下：



定义 $\gamma_i = \rho_i \delta_i$ 为聚类中心的划分标准，图像如下：



## 2.3 聚类过程

### 2.3.1 聚类中心

由上图很容易得到聚类中心点共六个，易得聚类中心列表 `[1061, 1515, 400, 6, 1566, 614]`。对各点作处理，分为聚类中心和非聚类中心两类：

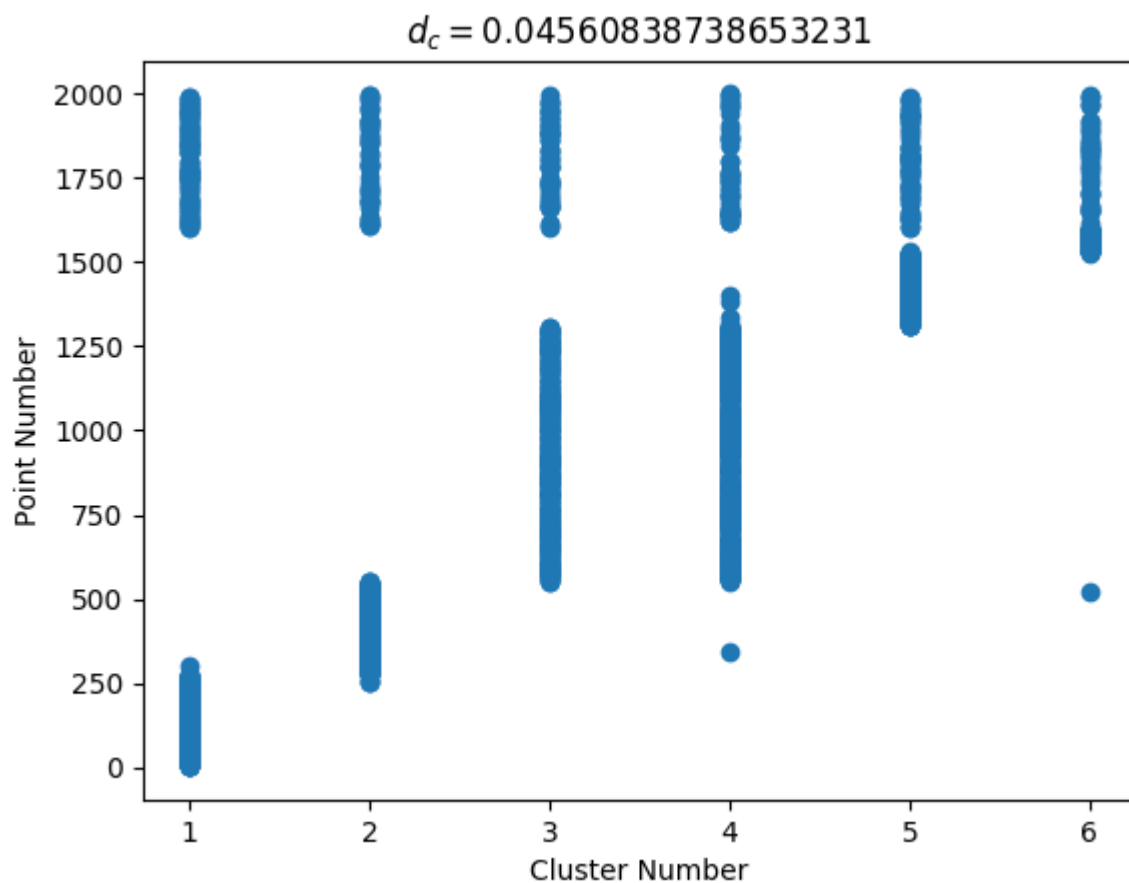
```
# cluster_centers = [1061, 1515, 400, 6, 1566, 614]
tag_info = dict()
cluster_id = 1
for i in range(1, maxid + 1):
    if i in cluster_centers:
        tag_info[i] = cluster_id
        cluster_id += 1
    else:
        tag_info[i] = -1
```

### 2.3.2 聚类

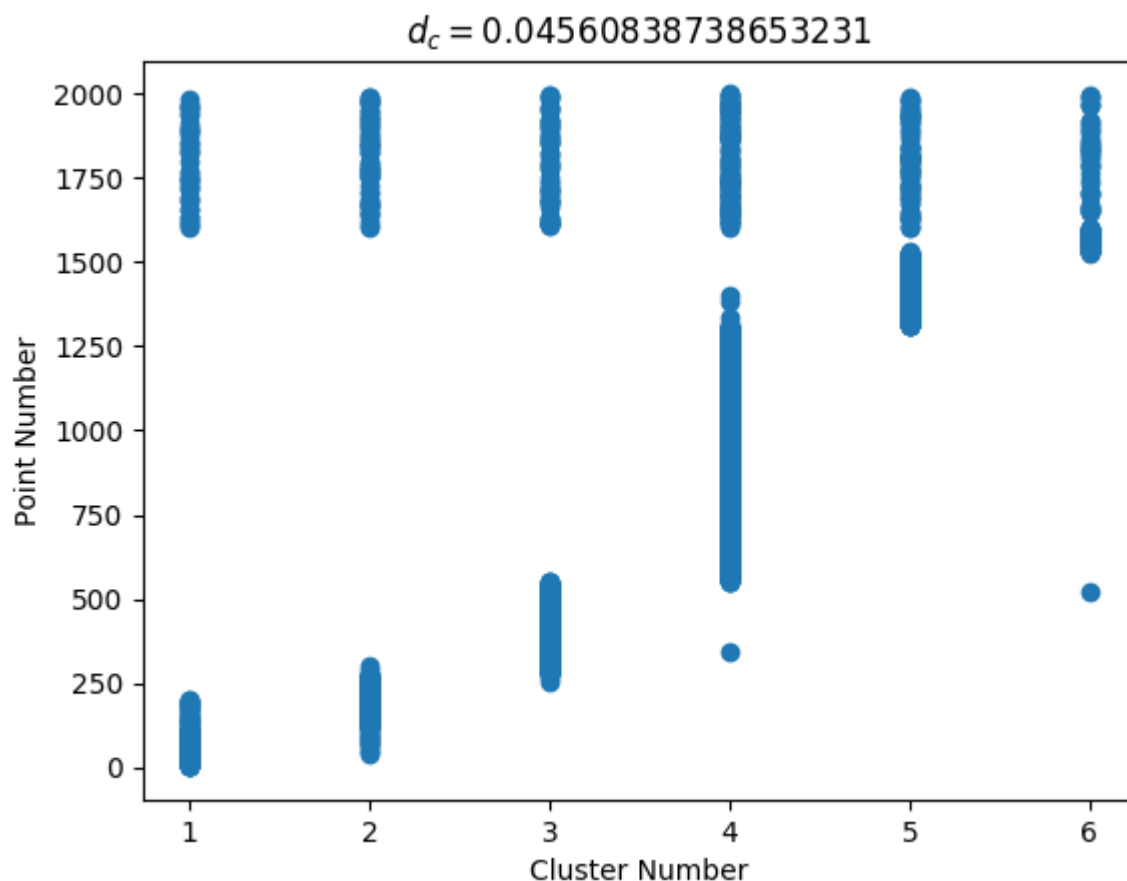
对非聚类中心进行聚类，基本思路是：将点集按照 $\rho_i$ 降序排列然后遍历，对非聚类点 $x$ ，在 $\{i | \rho_i > \rho_x\}$ 点集中找与点 $x$ 距离最小的点 $i$ ，将 $x$ 归类到 $i$ 。

```
def classify(self, taginfo, srt_dens, min_num, maxid):
    '''
    :taginfo: dict of tag info
    :srt_dens: desc sorted list with density values (point, density)
    :min_num: minimum number dict
    :maxid: number of points
    :rtype: tag dict with classified points not cluster center
    '''
    dens_dict = dict()
    for ele in srt_dens:
        dens_dict[ele[0]] = ele[1]
    for i in dens_dict.keys():
        if taginfo[i] == -1:
            taginfo[i] = taginfo[min_num[i]]
    return taginfo
```

- Cut-off kernel聚类如下图:



- Gaussian kernel聚类如下:



### 3. 总结

由于对距离定义未知，所以没有进行六类cluster的plot。文章中提到的聚类算法其实只实现了聚类中心的选择，在这基础上阅读了文章的增补内容，进行了聚类过程算法的补全，同时对截断距离的选取进行优化。在这基础之上还可以对聚类边界进行讨论，对离群点和交叉点进行划分。

对聚类算法的聚类中心选择一直是个研究热点，该算法很朴素但切中要点，能很好地解决聚类中心问题，但是在聚类中心个数的选择上和k-means算法一样，还是需要人为选择，联系对局部密度算法的优化，猜测是否可以对每个点进行熵值计算，寻找聚类中心熵值的特性，从而实现聚类中心个数的自动选择。

### 参考文献

[1] Alex Rodriguez, Alessandro Laio. Clustering by fast search and find of density peaks. *Science*, 27 JUNE 2014 • VOL 344 ISSUE 6191, 1492-1496.

[2] Shuliang Wang, Dakui Wang, Caoyuan Li, Yan Li. Comment on “Clustering by fast search and find of density peaks”.

