运动恢复结构（SFM）

Lu Peng
School of Computer Science,
Beijing University of Posts and Telecommunications

本课程三维重建篇所涉及的教学内容与课件参考了CS231A，
感谢CS231A课程团队在课程建设方面所做的工作！

Machine Vision Technology							
Semantic information				Metric 3D information			
Pixels	Segments	Images	Videos	Camera		Multi-view Geometry	
Convolutions Edges & Fitting Local features Texture	Segmentation Clustering	Recognition Detection	Motion Tracking	Camera Model	Camera Calibration	Epipolar Geometry	SFM
10	4	4	2	2	2	2	2

今日主题

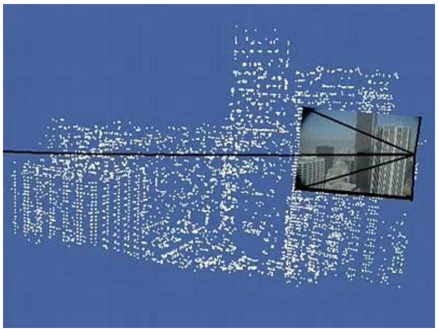
- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复

今日主题

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复

运动恢复结构问题

Structure from Motion (sfm)

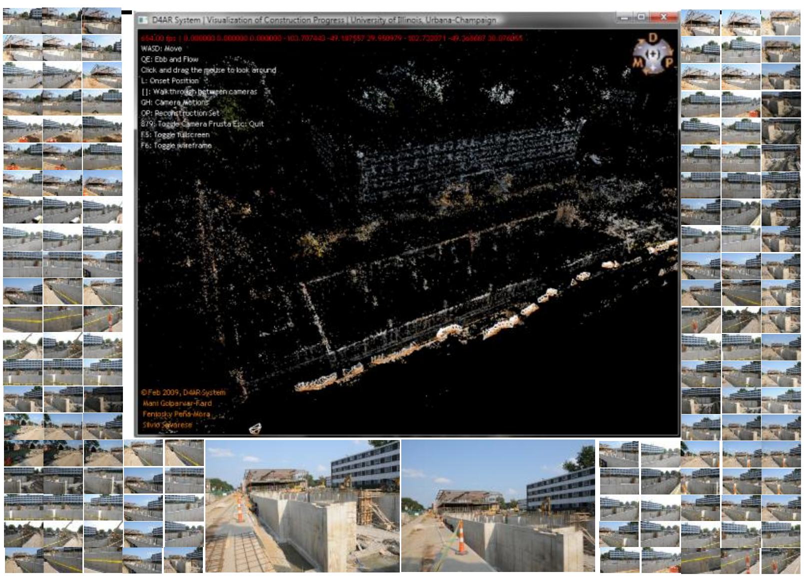


Courtesy of Oxford Visual Geometry Group

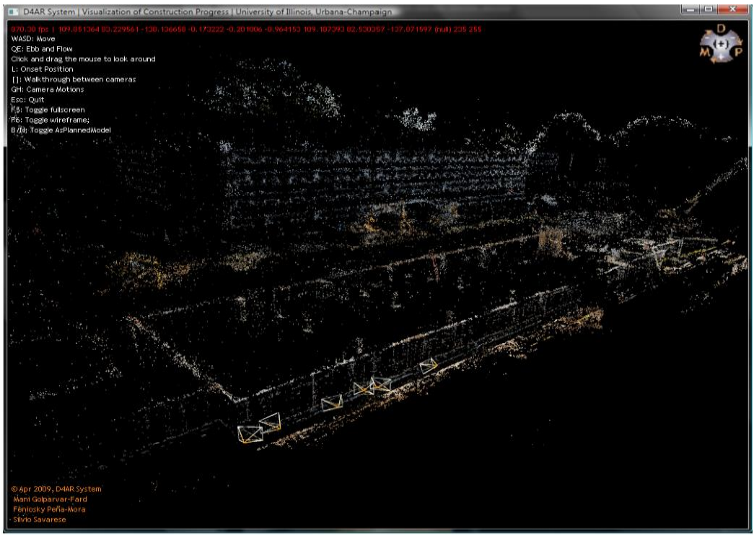
通过三维场景的多张图象，恢复出该场景的三维结构信息以及每张图片对应的摄像机参数

建筑场景的增量重构

Initial pair – 2168 & Complete Set 62,323 points, 160 images Golparvar-Fard. Pena-Mora, Savarese 2008



重构场景与摄像机位姿



照片重构

Noah Snavely, Steven M. Seitz, Richard Szeliski, "Photo tourism: Exploring photo collections in 3D," ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH Proceedings),2006,

运动恢复结构问题

已知:**n个3D点X_j在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij} $(i=1,\dots m, j=1\dots,n)$**

且 $x_{\mathrm{ij}} = M_i X_j \quad i=1,\dots m\ ;\ j=1\dots,n$

其中， M_i**为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵**

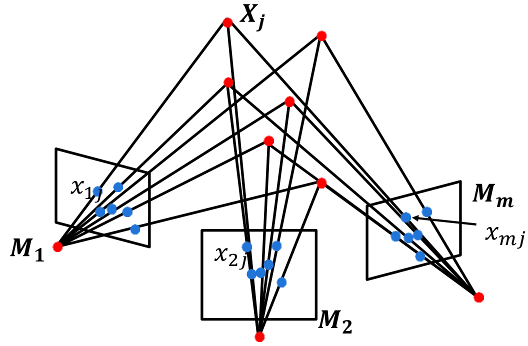
求解：

- **m个摄像机投影矩阵M_i $(i=1,\cdots,m)$；**

  运动（motion）

- **n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标。**

  结构（structure）



因此，该类问题也称为“运动恢复结构问题”！

三种典型的运动恢复结构任务

- 欧式结构恢复（摄像机内参数已知，外参数未知）
- 仿射结构恢复（摄像机为仿射相机，内、外参数均未知）
- 透视结构恢复（摄像机为透视相机，内、外参数均未知）

今日主题

- 运动恢复结构问题
- **欧式结构恢复**
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复

欧式结构恢复问题

已知：

- **n个三维点**X_j $(j=1,\cdots,n)$ **在**m**张图像中的对应点的像素坐标**x_{ij}
- **m张图像对应的摄像机的内参数矩阵**K_i $(i=1,\cdots,m)$

且 $x_{\mathrm{ij}}=M_iX_j=K_i[R_i\ \ T_i]X_j$ $\quad i=1,\ldots\boxed{m};\ j=1\ldots,\boxed{n}$

图像个数 **3D点个数**

其中， M_i，K_i，$[R_i\ \ T_i]$**为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵、内参数及外参数矩阵**

欧式结构恢复问题

已知：

- n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}
- m张图像对应的摄像机的内参数矩阵K_i $(i=1,\cdots,m)$

且 $x_{ij}=M_iX_j=K_i[R_i\ \ T_i]X_j$ $\qquad i=1,\ldots \boxed{m}$; $j=1\ldots,\boxed{n}$

图像个数 3D点个数

其中， M_i， K_i， $[R_i\ \ T_i]$为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵、内参数及外参数矩阵

求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标；
- m个摄像机的外参数 R_i 及 T_i $\quad (i=1,\cdots,m)$

欧式结构恢复问题

已知：

- n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}
- m张图像对应的摄像机的内参数矩阵K_i $(i=1,\cdots,m)$

且 $x_{ij}=M_iX_j=K_i[R_i\ \ T_i]X_j$ $\qquad i=1,\ldots \boxed{m}$; $j=1\ldots,\boxed{n}$

？ ？ ？

图像个数 3D点个数

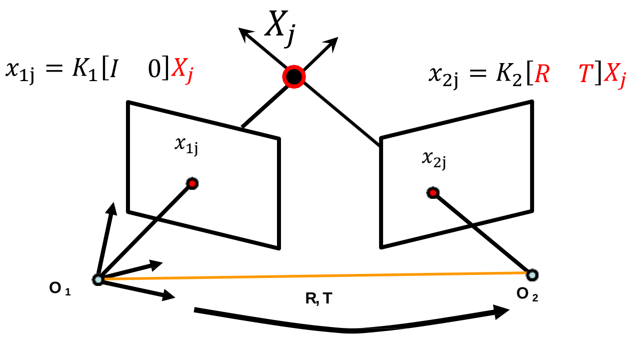
其中， M_i， K_i， $[R_i\ \ T_i]$为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵、内参数及外参数矩阵

求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标；
- m个摄像机的外参数 R_i 及 T_i $\quad (i=1,\cdots,m)$

欧式结构恢复问题（两视图）

欧式结构恢复问题（两视图）



欧式结构恢复问题（两视图）

问题:

$$x_{1j} = M_1 X_j = K_1 [I \quad 0] X_j$$

$$j = 1 \ldots, n$$

$$x_{2j} = M_2 X_j = K_2 [R \quad T] X_j$$

求解:1. 求解基础矩阵F

归一化八点法

2. 利用F与摄像机内参数求解本质矩阵E

$$E = K_2^T F K_1$$

3. 分解本质矩阵获得R与T

$$E \rightarrow R、T$$

4. 三角化求解三维点X_j坐标

$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}} \left(d(x_{1j}, M_1 X_j) + d(x_{2j}, M_2 X_j) \right)$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times] R$$

找到一个策略把 E 因式分解为两个组成部分……

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

找到一个策略把 E 因式分解为两个组成部分……

重要说明：

$x_2^T F x_1 = 0$ $\Longrightarrow$ $E = K_2^T F K_1$

无法确定F的符号及尺度；

$-F$或者kF都满足上式

所以，也无法确定E的符号及尺度

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质：相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质：相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

$[T_\times]$**可以写成：**$[T_\times] = kUZU^T$

其中，U **是单位正交矩阵。**

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质：相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

$[T_\times]$**可以写成：** $[T_\times] = kUZU^T$

其中， U **是单位正交矩阵。**

$\Rightarrow$ **不考虑符号、尺度**

$$[T_\times] = UZU^T = U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T = U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

$$[T_\times] = UZU^T = U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$$

$$E = [T_\times]R = (U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T)R$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

$$\Downarrow$$

$[T_\times] = UZU^T$
$= U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$
$= U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$

同理：

$R = UWV^T$

$$E = [T_\times]R = (U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T)R$$

$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

比较 $\Updownarrow$ $\Rightarrow$ $V^T = WU^TR$

SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R = UW^TV^T}$$

本质矩阵分解

$$R = UWV^T \text{ or } UW^TV^T$$

注意: E **的这个因式分解只保证了矩阵** UWV^T **或** UW^TV^T **是正交的。其为旋转矩阵还需确保行列式的值为正：**

$$R = (\det UWV^T)UWV^T \quad \text{或} \quad (\det UW^TV^T)UW^TV^T$$

$$T \times T = [T_\times]T = UZU^TT = 0$$

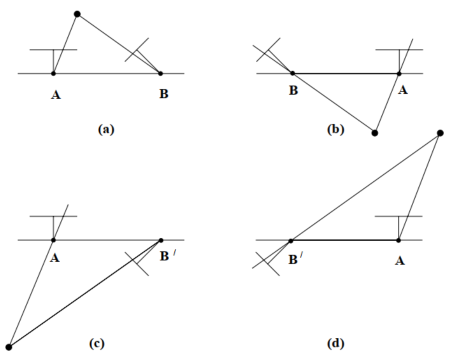
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{T} = \pm u_3 \text{（}U\text{的第三列）}$$

本质矩阵分解

四种潜在 R,T **对：**

$$\begin{cases} R = (\det UWV^T)UWV^T & T = u_3 \\ R = (\det UWV^T)UWV^T & T = -u_3 \\ R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = u_3 \\ R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = -u_3 \end{cases}$$



（图片来自于 Hartley and Zisserman 书第 260 页）

- **选择一个点三角化，正确的一组解能保证该点在两个摄像机的z坐标均为正。**
- **对多个点进行三角化，选择在两个摄像机系下z坐标均为正的个数最多的那组R、T。（更鲁棒）**

本质矩阵分解（总结）

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步骤1：SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

步骤2： $R = (\det UWV^T)UWV^T$ 或 $(\det UW^TV^T)UW^TV^T$

$\mathrm{T} = \pm u_3$

步骤3：

$$\boxed{\begin{cases} R = (\det UWV^T)UWV^T & T = u_3 \\ R = (\det UWV^T)UWV^T & T = -u_3 \\ R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = u_3 \\ R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = -u_3 \end{cases}}$$

步骤4：通过重建单个或多个点找出正确解

欧式结构恢复（2视图）

问题：

$x_{1j} = M_1X_j = K_1[I \quad 0]X_j$

$j = 1 \ldots, n$

$x_{2j} = M_2X_j = K_2[R \quad T]X_j$

求解：1. 求解基础矩阵F

归一化八点法

2. 利用F与摄像机内参数求解本质矩阵E

$E = K_2^T F K_1$

3. 分解本质矩阵获得R与T

$E \rightarrow R$、$T \rightarrow M_2$

4. 三角化求解三维点X_j坐标

$$X_j^* = \underset{X_j}{\mathrm{argmin}}\left(d\left(x_{1j}, M_1X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2X_j\right)\right)$$

欧式结构恢复歧义

- **例子：仅凭下图能否估计场景的绝对尺度？**

欧式结构恢复歧义

- **例子：仅凭下图能否估计场景的绝对尺度？**

显然不能！

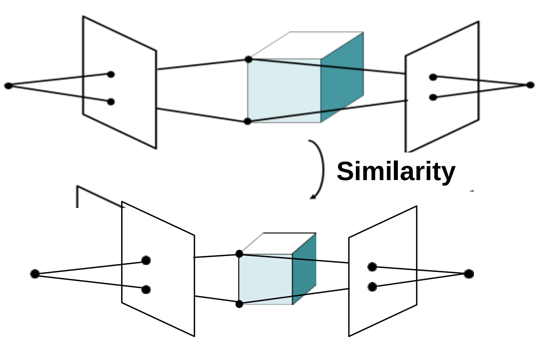
欧式结构恢复歧义

- **例子：仅凭下图能否估计场景的绝对尺度？**

需要其他先验信息！

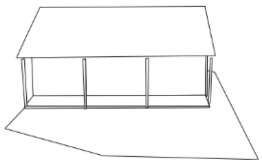
欧式结构恢复歧义

- **恢复出来的欧式结构与真实场景之间相差一个相似变换（旋转，平移，缩放）**
- **恢复的场景与真实场景之间仅存在相似变换的重构称为度量重构**



欧式结构恢复歧义

$S^* =$



R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd edition, 2003

今日主题

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- **仿射结构恢复**
- 透视结构恢复

仿射摄像机

透视

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} m_1 X \\ m_2 X \\ m_3 X \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$x^E = \left(\frac{m_1 X}{m_3 X}, \frac{m_2 X}{m_3 X}\right)^T$$

仿射

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2\times3} & b_{2\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & m_1 & & \\ & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{m_3 X = 1}$$

$$x^E = (m_1 X, m_2 X)^T = [A \;\; b] X = [\, A \;\; b \,] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = A X^E + b \qquad \boxed{X^E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

放大率

仿射结构恢复问题

问题：已知n个三维点X_j $(j = 1, \cdots, n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

问题：公式中各个元素的维度？

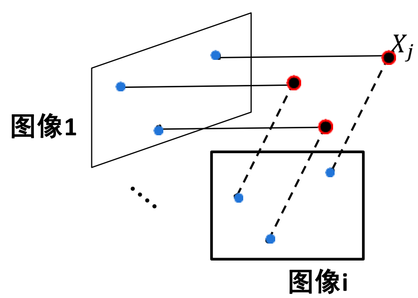
且 $x_{ij} = A_i X_j + b_i$ $\qquad i = 1, \ldots, \boxed{m}; \quad j = 1 \ldots, \boxed{n}$

图像个数 　　3D点个数

其中，A_i, b_i 组成了第i张图片对应的仿射摄像机的投影矩阵 $M_i = \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

求解：

- **n个三维点$X_j (j = 1, \cdots, n)$的坐标**
- **m个仿射摄像机的投影矩阵A_i与b_i $(i = 1, \cdots, m)$**



仿射结构恢复问题

两种方法：

–代数方法

–因式分解法

仿射结构恢复问题

两种方法：

–代数方法

–因式分解法

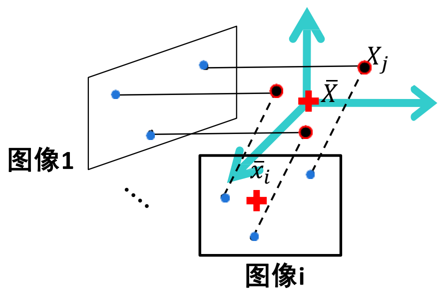
- **数据中心化**
- **因式分解**

数据中心化

中心化：减去图像点的质心

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i \qquad \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \qquad x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$$

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = A_i X_j + b_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_i X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_i$$



$$= A_i\left(X_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = A_i(X_j - \bar{X}) = A_i\hat{X}_j$$

$$\hat{x}_{ij} = A_i\hat{X}_j = A_i X_j$$

如果3D点的质心 ＝ 世界坐标系的中心

因式分解

把去均值以后的$m \times n$个测量值写成矩阵的形式：

$$D = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

$(2m)$

n

每个$\hat{x}_{ij}$是一个2×1向量！

因式分解

2m × n 维的数据(测量值)矩阵:

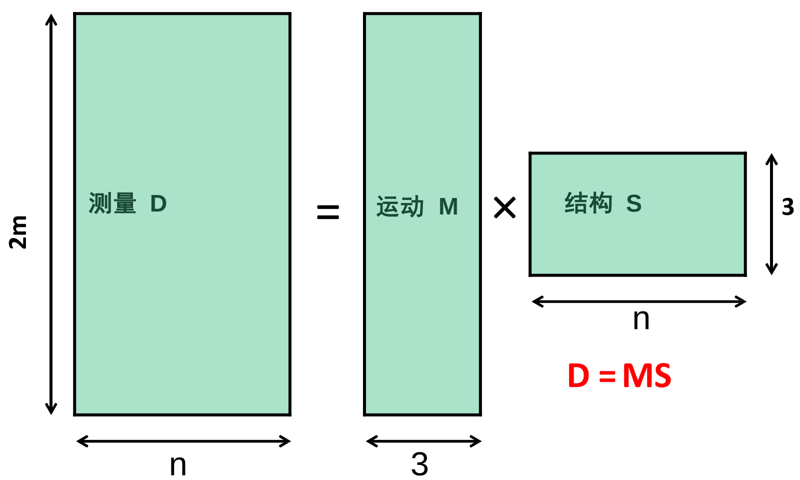
$$D = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}}_{(2m \times n)} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}}}_{\text{M 摄像机 } (2m\times 3)} \overbrace{\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix}}}_{\text{点 } (3\times \mathrm{n})}}^{\text{S}}$$

A_i **是** 2×3 **维，**X_j**是** 3×1 **维**

测量矩阵 D = M S 秩为3（它是 $2m\times 3$ **矩阵和** $3\times \mathrm{n}$ **矩阵的乘积）**

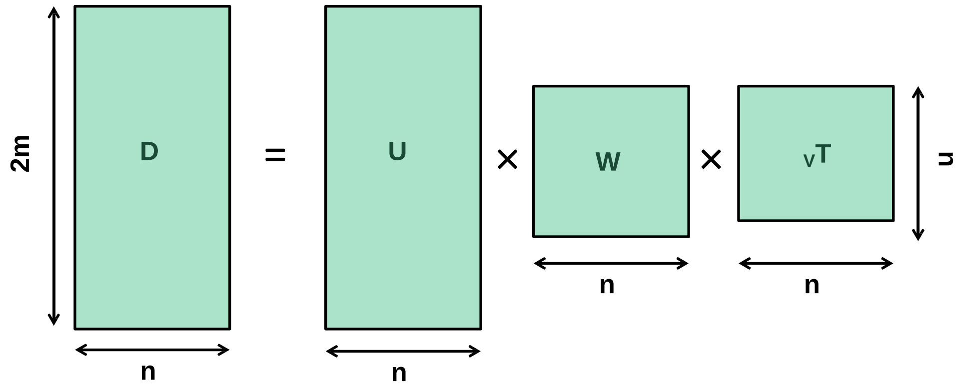
因式分解

怎么分解D?



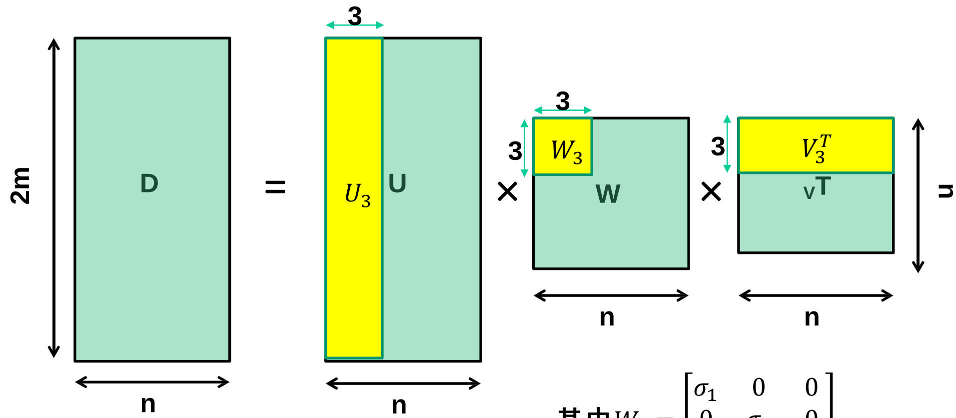
因式分解

- **通过计算D的奇异值分解！**



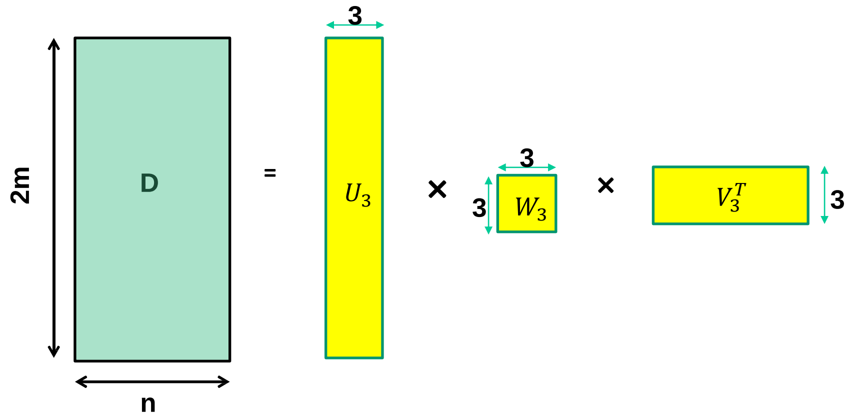
因式分解

由于 rank (D)=3, 理想情况下这里只有三个非零的奇异值 σ_1 , σ_2 和 σ_3

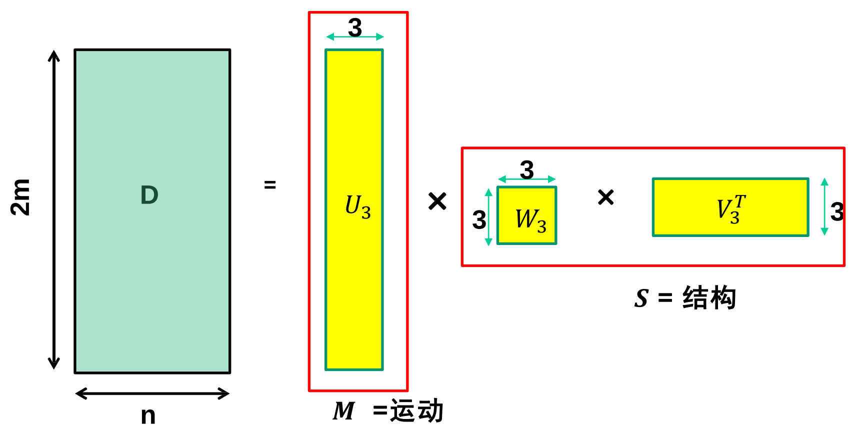


其中 $W_3 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

因式分解



求解运动与结构



$$D = U_3 W_3 V_3^T = U_3 (W_3 V_3^T) = MS$$

仿射结构恢复问题

问题： 已知n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

求解：

- n个三维点$X_j (j=1,\cdots,n)$的坐标
- m个投影矩阵M_i（即A_i与b_i） $(i=1,\cdots,m)$

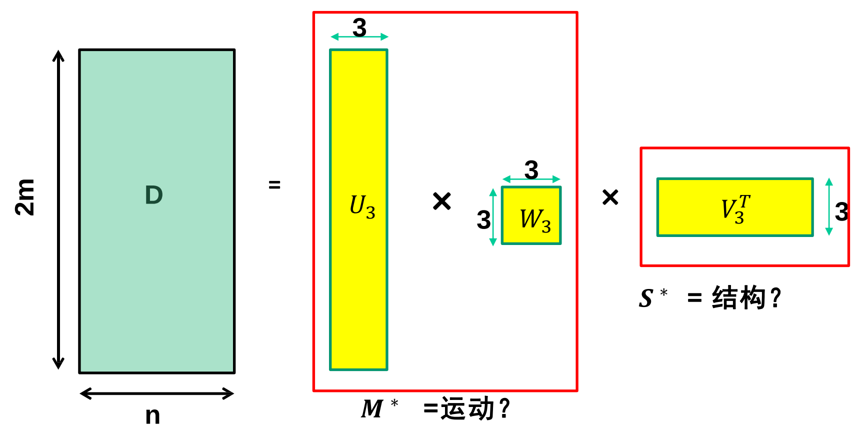
计算步骤：

1. 创建一个 2m x n 维的数据(测量值)矩阵D
2. 分解矩阵$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U_3 W_3 V_3^T}$，$M=\boldsymbol{U_3}$及$S=\boldsymbol{W_3 V_3^T}$

$$D=\begin{bmatrix}\hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n}\\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n}\\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}}_{\substack{\text{摄像机 } M\\ (2m\times 3)}}\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\end{bmatrix}}_{\text{点 }(3\times n)}}^{S}$$

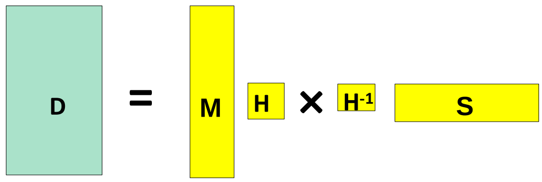
$(2m\times n)$

问题：这样分解可以吗？

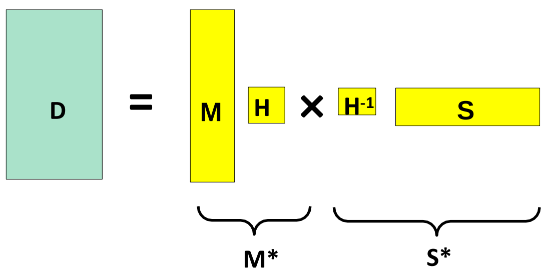


$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U_3 W_3 V_3^T}=(\boldsymbol{U_3 W_3})\boldsymbol{V_3^T}=\boldsymbol{M^* S^*}$$

仿射结构恢复歧义



仿射结构恢复歧义



- **分解不唯一。通过以下变换可以得到相同的D:**

$$M^* = M\,H$$
$$S^* = H^{-1}S$$

其中 H 是任意可逆的3×3矩阵

- **必须利用其他约束条件来解决歧义**

仿射结构恢复问题

问题：已知n个三维点$X_j\ (j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

求解：

- **n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标**
- **m个投影矩阵M_i（即A_i与b_i） $(i=1,\cdots,m)$**

问题：给定m个相机，n个三维点，我们有多少个等式，多少个未知量？

回答：2mn个等式，8m+3n-8个未知量

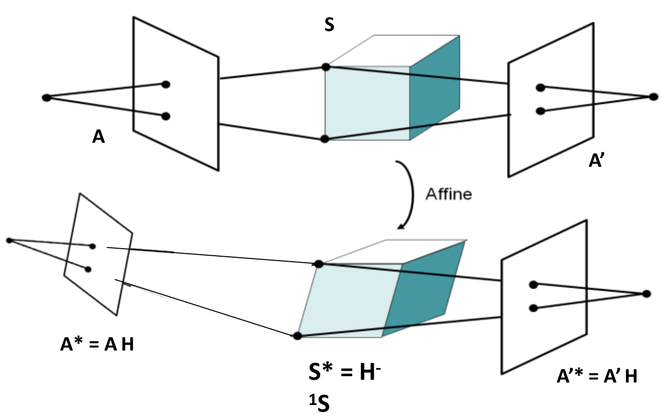
计算步骤：

1. 创建一个 2m x n 维的数据(测量值)矩阵D

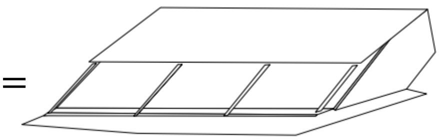
2. 分解矩阵$D=U_3W_3V_3^T$，$M=U_3$及$S=W_3V_3^T$

$$D=\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n}\\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n}\\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn}\end{bmatrix}}_{(2m\times n)}=\underbrace{\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}}_{\text{摄像机 } M\ (2m\times 3)}\overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\end{bmatrix}}_{\text{点}(3\times n)}}^{S}$$

仿射结构恢复歧义



仿射结构恢复歧义

$S^* =$ 

R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd edition, 2003

今日主题

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- **透视结构恢复**

透视摄像机

透视

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} m_1 X \\ m_2 X \\ m_3 X \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^E = \left(\frac{m_1 X}{m_3 X}, \frac{m_2 X}{m_3 X}\right)^T$$

仿射

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2\times 3} & b_{2\times 1} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} & m_1 & & \\ & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^E = (m_1 X, m_2 X)^T = [A \;\; b]X = [\,A \;\; b\,] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = AX^E + b \qquad \boxed{X^E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

放大率

透视结构恢复问题

问题：已知n个三维点X_j $(j = 1, \cdots, n)$在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}；

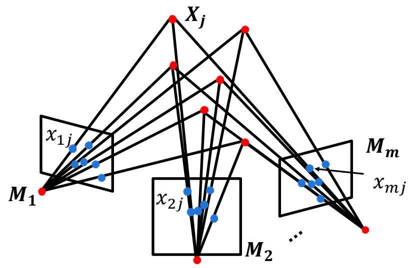
且 $x_{ij} = M_i X_j$ $\quad i = 1, \ldots, \boxed{m}\,;\; j = 1 \ldots, \boxed{n}$

图像个数 **3D点个数**

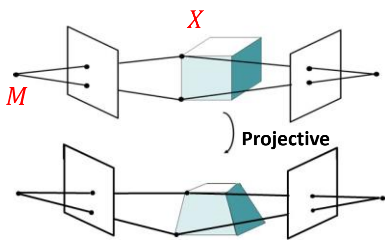
其中， M_i **为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵**

求解：

- **n个三维点$X_j (j = 1, \cdots, n)$的坐标；**
- **m个摄像机投影矩阵M_i $(i = 1, \cdots, m)$。**

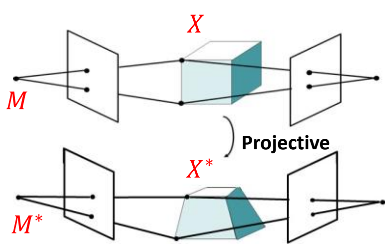


透视结构恢复歧义



$$x_{ij} = M_i X_j \qquad\qquad M_i = K_i[R_i \quad T_i]$$

透视结构恢复歧义



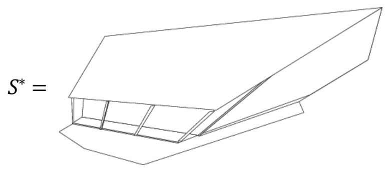
- **歧义由任意可逆4×4变换表示**

$$x_{ij} = M_i \boxed{X_j} \qquad\qquad \boxed{M_i} = K_i[R_i \quad T_i]$$

$$\boxed{HX_j} \qquad\qquad \boxed{M_i H^{-1}}$$

$$x_{ij} = M_i X_j = \underbrace{(M_i H^{-1})}_{M^*}\underbrace{(HX_j)}_{X^*} = M^* \, X^*$$

透视结构恢复歧义



R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd edition, 2003

透视结构恢复方法

在相差一个4×4的可逆变换的情况下恢复摄像机运动与场景结构

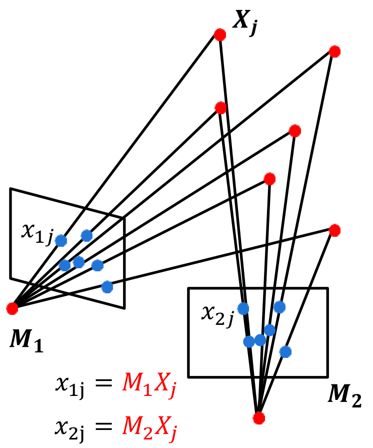
- **代数方法（通过基础矩阵）**
- **因式分解法（通过SVD）**
- **捆绑调整**

透视结构恢复方法

在相差一个4×4的可逆变换的情况下恢复摄像机运动与场景结构

- **代数方法（通过基础矩阵）**
- 因式分解法（通过SVD）
- 捆绑调整

代数方法（两视图情况）



$x_{1j} = M_1 X_j$

$x_{2j} = M_2 X_j$

代数方法(两视图情况)

1. **求解基础矩阵 F**

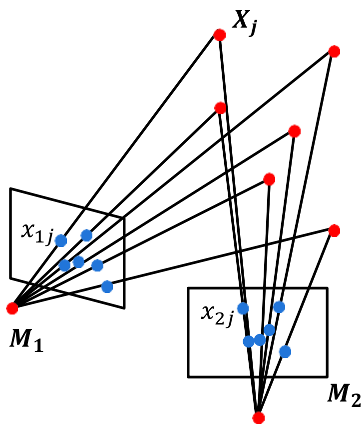
   归一化八点法

2. **利用 F 估计摄像机矩阵**

   $F \to M_1, M_2$

3. **三角化计算三维点坐标**

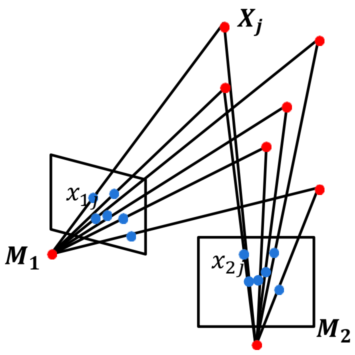
$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(x_{1j}, M_1 X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2 X_j\right)\right)$$



$x_{1j} = M_1 X_j$

$x_{2j} = M_2 X_j$

利用 F 估计摄像机矩阵



$x_{1j} = M_1 X_j$

$x_{2j} = M_2 X_j$

$j = 1 \ldots, \boxed{n}$

3D点个数

由于透视歧义存在，我们总是可以找到一个可逆矩阵 H ，使得：

$M_1 H^{-1} = [I|0]$ $M_2 H^{-1} = [A|b]$

利用 F 估计摄像机矩阵

- X表示3D点
- 将x和x'分别称为摄像机1和2的对应观测值

$$\begin{cases} \tilde{M}_1 = M_1 H^{-1} = [\ I \quad 0\ ] \\ \tilde{M}_2 = M_2 H^{-1} = [\ A \quad b\ ] \\ \tilde{X} = HX \end{cases}$$

$$x = M_1 X = M_1 H^{-1} H X = [I|0]\tilde{X}$$

$$x' = M_2 X = M_2 H^{-1} H X = [A|b]\tilde{X}$$

$$x' = [A|b]\tilde{X} = [A|b]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = A[I|0]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} + b = A\boxed{[I|0]\tilde{X}} + b = Ax + b$$

$$x' \times b = (Ax + b) \times b = Ax \times b$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}}$$

$$x'^T \cdot (x' \times b) = x'^T \cdot (Ax \times b) = 0$$

$$x'^T (b \times Ax) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x'^T [b_\times] A x = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x'^T F x = 0}}$$

基本矩阵！

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^{T}Fx = 0$ $\quad F = [b_\times]A$

1. 计算b:

- **考虑乘积**$F^T b$ $\quad \boxed{F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T[b_\times]^T \cdot b = -A^T[b_\times] \cdot b = 0}$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^{T}Fx = 0$ $\quad F = [b_\times]A$

1. 计算b:

- **考虑乘积**$F^T b$ $\quad F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T[b_\times]^T \cdot b = -A^T[b_\times] \cdot b = 0$ $\quad \boxed{F^T b = 0}$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b:

- 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b:

- 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A:

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$:

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b:

- 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T[b_\times]^T \cdot b = -A^T[b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A:

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$:

$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b:

- 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T[b_\times]^T \cdot b = -A^T[b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A:

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$:

$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

- 因此， $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b:

➢ 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$

➢ b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A:

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$:

$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}} - |\boldsymbol{b}|^2 \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

- 因此， $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

摄像机矩阵： $\widetilde{M}_1 = [\ I \ \ 0\ ]$ $\widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F \ \ b]$

利用 F 估计摄像机矩阵

问题：这里b是什么？

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b:

➢ 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$

➢ b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A:

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$:

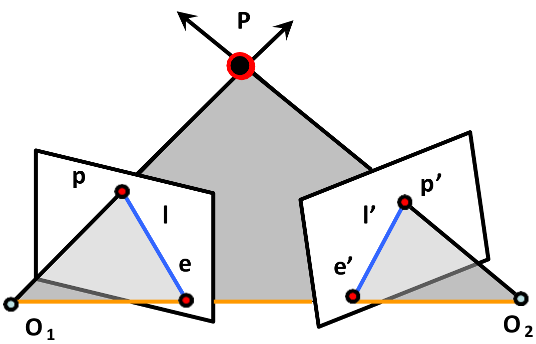
$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}} - |\boldsymbol{b}|^2 \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

- 因此， $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

摄像机矩阵： $\widetilde{M}_1 = [\ I \ \ 0\ ]$ $\widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F \ \ b]$

极几何约束

$p'^T F p = 0$



- $l = F^T p'$是p'对应的极线
- $l' = Fp$是p对应的极线
- $Fe = 0$，$F^T e' = 0$
- F是奇异的(秩2)
- F的DOF为7

利用 F 估计摄像机矩阵

已知：$x'^T F x = 0$ $F = [b_\times] A$

问题：这里b是什么？
回答：b是一个极点

1. 计算b:

➢ 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$

➢ b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A:

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$ ：

$$[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2 \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}$$

- 因此， $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

摄像机矩阵： $\widetilde{M}_1 = [\ I \ \ 0\ ]$ $\widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F \ \ b]$

代数方法(两视图情况)

1. 求解基础矩阵 F

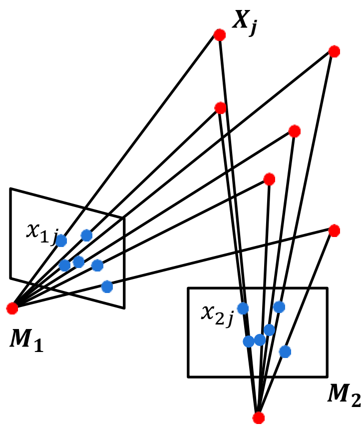
   归一化八点法

2. 利用 F 估计摄像机矩阵

   $\widetilde{M}_1 = [\ I\ \ 0\ ] \quad \widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F\ \ b]$

3. 三角化计算三维点坐标

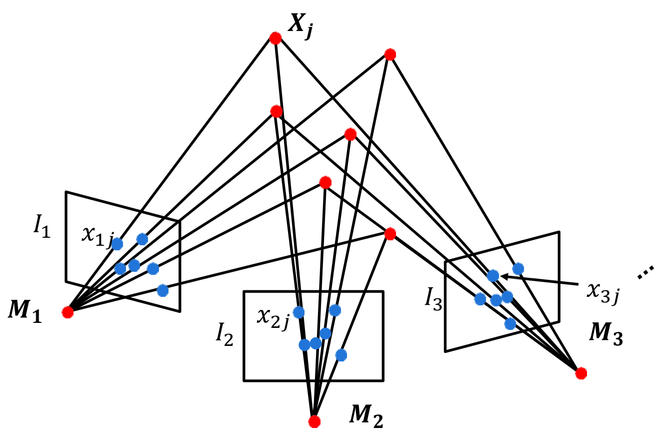
   $X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(x_{1j}, M_1X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2X_j\right)\right)$



$x_{1j} = M_1X_j$

$x_{2j} = M_2X_j$

代数方法(*N* 视图情况)



分别对每一个图像对I_k与I_h计算运动与结构

I_k与$I_h \quad \rightarrow \widetilde{M}_k, \widetilde{M}_h, \widetilde{X}_{[k,h]}$

增量法!

透视结构恢复方法

- 代数方法 （通过基础矩阵）
- 因式分解法(通过SVD)
- 捆绑调整

代数法与分解法的局限性

- 因式分解法假定所有点都是可见的，所以下述场合不可用：
  - 存在遮挡
  - 建立对应点关系失败

能够用于构建观测矩阵D的点少，重建点数少！

$$D = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

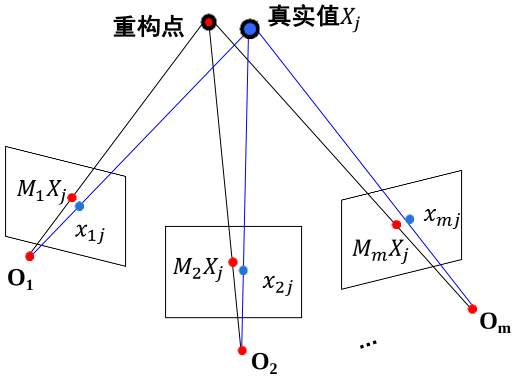
- 代数法应用于2视图重建

  易出现误差累积！

捆绑调整

- **恢复结构和运动的非线性方法**

最小化重投影误差： $E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_iX_j)^2$



捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ \ X_j\ \ )^2$$

测量值 **参数**

非线性最小化问题

－牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ \ X_j\ \ )^2$$

参数

测量值

非线性最小化问题

– 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

优势

- 同时处理大量视图
- 处理丢失的数据

捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ \ X_j\ \ )^2$$

参数

测量值

非线性最小化问题

– 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

优势

- 同时处理大量视图
- 处理丢失的数据

局限性

- 大量参数的最小化问题
- 需要良好的初始条件

捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ X_j\ )^2$$

测量值　参数

非线性最小化问题

－牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

优势

- 同时处理大量视图
- 处理丢失的数据

局限性

- 大量参数的最小化问题
- 需要良好的初始条件

实际操作：

- 常用作SFM的最后一步，分解或代数方法可作为优化问题的初始解

今日主题

- 运动恢复结构问题（完）
- 欧式结构恢复（完）
- 仿射结构恢复（完）
- 透视结构恢复（完）