

---

# 摄像机标定

Lu Peng

School of Computer Science,  
Beijing University of Posts and Telecommunications

本课程三维重建篇所涉及的教学内容与课件参考了CS231A ,  
感谢CS231A课程团队在课程建设方面所做的工作!

---

Machine Vision Technology							
Semantic information				Metric 3D information			
Pixels	Segments	Images	Videos	Camera		Multi-view Geometry	
Convolutions Edges & Fitting Local features Texture	Segmentation Clustering	Recognition Detection	Motion Tracking	Camera Model	Camera Calibration	Epipolar Geometry	SFM
10	4	4	2	2	2	2	2

# 摄像机标定

---

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题
- 径向畸变的摄像机标定

# 摄像机标定

---

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题
- 径向畸变的摄像机标定

## 为什么重要？

摄像机标定，即求解摄像机内外参数



Source: Silvio Savarese

## 为什么重要？

摄像机内、外参数描述了三维世界到二维像素的映射关系



Source: Silvio Savarese

## 标定目标

$$P' = MP_w = \boxed{K} \boxed{[R \ T]} P_w$$

内参数                      外参数

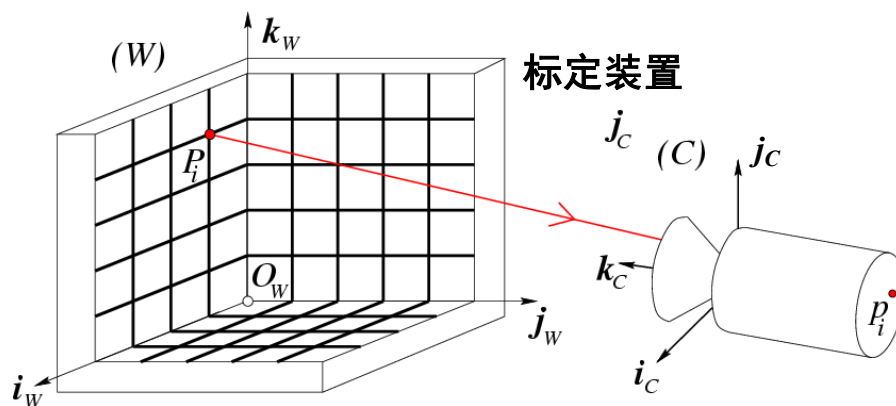
目标：从1张或多张图像中估算内外参数

更换符号：

$$P = P_w$$

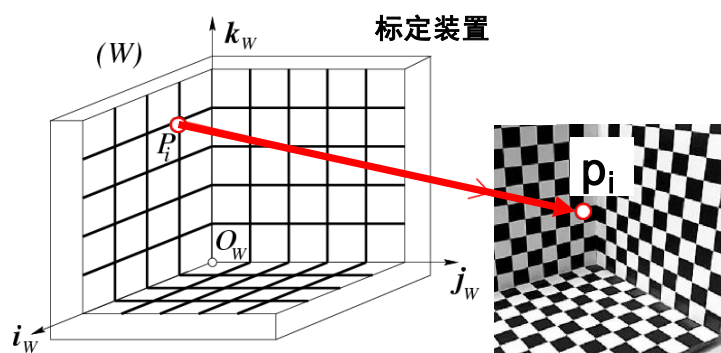
$$p = P'$$

## 标定问题



- 世界坐标系中  $P_1 \dots P_n$  位置已知

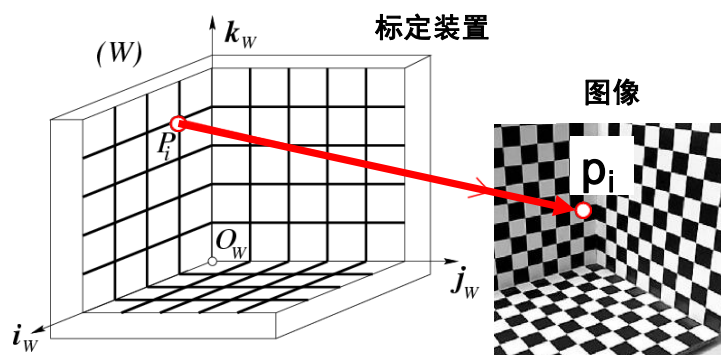
## 标定问题



- 世界坐标系中  $P_1 \cdots P_n$  位置已知
- 图像中  $p_1 \cdots p_n$  位置已知

**目标：** 计算摄像机内、外参数

## 标定问题



$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 P_i \\ m_3 P_i \\ m_2 P_i \\ m_3 P_i \end{bmatrix}$$

像素

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

问题：摄像机投影矩阵有几个未知量？

---

像素  $\rightarrow$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix}$$
$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

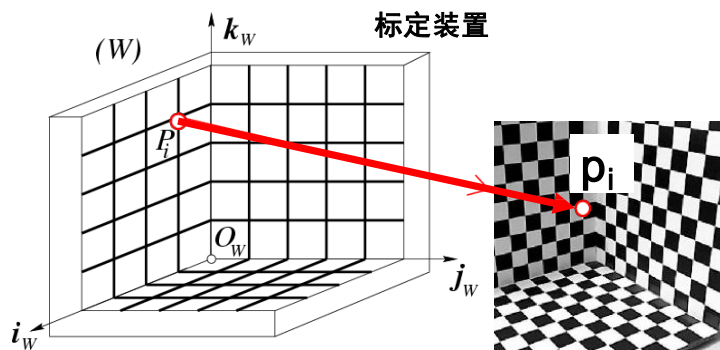
问题：求解投影矩阵需要多少对应点？

---

像素  $\rightarrow$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix}$$
$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

## 标定问题



实际操作中使用多于六对点来获得更加鲁棒的结果。

## 标定问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \\ \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \end{bmatrix}$$

$$u_i = \frac{m_1 P_i}{m_3 P_i} \rightarrow u_i(m_3 P_i) = m_1 P_i \rightarrow u_i(m_3 P_i) - m_1 P_i = 0$$

$$v_i = \frac{m_2 P_i}{m_3 P_i} \rightarrow v_i(m_3 P_i) = m_2 P_i \rightarrow v_i(m_3 P_i) - m_2 P_i = 0$$

## 标定问题

$$\begin{cases} u_1(m_3 P_1) - m_1 P_1 = 0 \\ v_1(m_3 P_1) - m_2 P_1 = 0 \\ \vdots \\ u_i(m_3 P_i) - m_1 P_i = 0 \\ v_i(m_3 P_i) - m_2 P_i = 0 \\ \vdots \\ u_n(m_3 P_n) - m_1 P_n = 0 \\ v_n(m_3 P_n) - m_2 P_n = 0 \end{cases}$$

## 标定问题

$$\begin{cases} -u_1(m_3 P_1) + m_1 P_1 = 0 \\ -v_1(m_3 P_1) + m_2 P_1 = 0 \\ \vdots \\ -u_n(m_3 P_n) + m_1 P_n = 0 \\ -v_n(m_3 P_n) + m_2 P_n = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\mathbf{P} \mathbf{m} = \mathbf{0}}$$

齐次线性方程组

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} P_1^T & 0^T & -u_1 P_1^T \\ 0^T & P_1^T & -v_1 P_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_n^T & 0^T & -u_n P_n^T \\ 0^T & P_n^T & -v_n P_n^T \end{pmatrix}_{2n \times 12}$$

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} m_1^T \\ m_2^T \\ m_3^T \end{pmatrix}_{12 \times 1}$$



## 齐次线性方程组

$$\begin{aligned} M &= \text{方程数} = 2n \\ N &= \text{未知参数} = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} & N \\ & \boxed{\phantom{000}} \\ M & \boxed{P} \\ & \boxed{\phantom{000}} \end{matrix} \quad \boxed{m} = \boxed{0}$$

当  $M > N$  时，超定方程组（不少于6对点）

- 0 总是一个解，不存在非零解

目标：求非零解  $\min_m \|Pm\|$

$$s. t. \|m\|=1$$

## 标定问题

$$Pm = 0 \iff \begin{aligned} & \min_m \|Pm\| \\ & s. t. \|m\|=1 \end{aligned}$$

## 标定问题

$$P m = 0 \iff \begin{array}{l} \min_m \|P m\| \\ \text{s.t. } \|m\|=1 \end{array}$$

奇异值分解!!!

## 标定问题

$$\boxed{P} m = 0 \iff \begin{array}{l} \min_m \|P m\| \\ \text{s.t. } \|m\|=1 \end{array}$$

奇异值分解!!!

$$\boxed{U_{2n \times 12} D_{12 \times 12} V_{12 \times 12}^T}$$

## 标定问题

$$\boxed{P} m = 0 \iff \begin{array}{l} \min_m \|Pm\| \\ \text{s.t. } \|m\|=1 \end{array}$$

奇异值分解!!!

$$\boxed{U_{2n \times 12} D_{12 \times 12} V_{12 \times 12}^T}$$

结论:  $m$  为  $P$  矩阵最小奇异值的右奇异向量, 且  $\|m\| = 1$

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} m_1^T \\ m_2^T \\ m_3^T \end{pmatrix} \implies M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = [A \ b]$$

## 提取摄像机参数

$$P' = M P_w = \boxed{K} \boxed{[R \ T]} P_w$$

内参数

外参数

$$M = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T & \alpha t_x - \alpha \cot \theta t_y + u_0 t_z \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T & \frac{\beta}{\sin \theta} t_y + v_0 t_z \\ r_3^T & t_z \end{pmatrix} \quad 3 \times 4$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

## 提取摄像机参数

求解得到的 $M$

$$\rho[A \ b] = K[R \ T]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$



$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T \\ r_3^T \end{pmatrix} = KR$$

$$K[R \ T] = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T & \alpha t_x - \alpha \cot \theta t_y + u_0 t_z \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T & \frac{\beta}{\sin \theta} t_y + v_0 t_z \\ r_3^T & t_z \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

## 提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T \\ r_3^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

内参数

$$\rho = \frac{\pm 1}{|a_3|} \quad \begin{aligned} u_0 &= \rho^2 (a_1 \cdot a_3) \\ v_0 &= \rho^2 (a_2 \cdot a_3) \end{aligned}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

## 提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T \\ r_3^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (a_1 \times a_3) = \alpha r_2 - \alpha \cot \theta r_1 \\ \rho^2 (a_2 \times a_3) = \frac{\beta}{\sin \theta} r_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 |a_1 \times a_3| = \frac{|\alpha|}{\sin \theta} \\ \rho^2 |a_2 \times a_3| = \frac{|\beta|}{\sin \theta} \end{cases}$$

**内参数**

$$\cos \theta = -\frac{(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3)}{|a_1 \times a_3| \cdot |a_2 \times a_3|}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

## 定理 (Faugeras, 1993)

$$M = K [R \ T] = [KR \ KT] = [A \ b] \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令  $M = (A \ b)$  为  $3 \times 4$  的矩阵,  $a_i^T (i = 1, 2, 3)$  表示由矩阵  $A$  的行

- $M$  是透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$
- $M$  是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$  且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

- $M$  是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$  且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

## 提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T \\ r_3^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (a_1 \times a_3) = \alpha r_2 - \alpha \cot \theta r_1 \\ \rho^2 (a_2 \times a_3) = \frac{\beta}{\sin \theta} r_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 |a_1 \times a_3| = \frac{|\alpha|}{\sin \theta} \\ \rho^2 |a_2 \times a_3| = \frac{|\beta|}{\sin \theta} \end{cases}$$

内参数

$$\alpha = \rho^2 |a_1 \times a_3| \sin \theta$$

$$\beta = \rho^2 |a_2 \times a_3| \sin \theta$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

## 定理 (Faugeras, 1993)

$$M = K [R \ T] = [KR \ KT] = [A \ b] \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令  $M = (A \ b)$  为  $3 \times 4$  的矩阵,  $a_i^T (i = 1, 2, 3)$  表示由矩阵  $A$  的行

- $M$  是透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$
- $M$  是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$  且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

- $M$  是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是  $\text{Det}(A) \neq 0$  且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

## 提取摄像机参数

$$\rho A = \rho \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1^T - \alpha \cot \theta r_2^T + u_0 r_3^T \\ \frac{\beta}{\sin \theta} r_2^T + v_0 r_3^T \\ r_3^T \end{pmatrix} = KR$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \rho^2 (a_1 \times a_3) = \alpha r_2 - \alpha \cot \theta r_1 \\ \rho^2 (a_2 \times a_3) = \frac{\beta}{\sin \theta} r_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 |a_1 \times a_3| = \frac{|\alpha|}{\sin \theta} \\ \rho^2 |a_2 \times a_3| = \frac{|\beta|}{\sin \theta} \end{cases}$$

**外参数**

$$r_1 = \frac{(a_2 \times a_3)}{|a_2 \times a_3|} \quad r_3 = \frac{\pm a_3}{|a_3|}$$

$$r_2 = r_3 \times r_1$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

## 提取摄像机参数

求解得到的 $M$

$$\rho[A \ b] = K[R \ T]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

**外参数**

$$T = \rho K^{-1} b$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

## 提取摄像机参数

求解得到的 $M$

$$\rho[A \ b] = K[R \ T]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

### 内参数

$$\rho = \frac{\pm 1}{|a_3|} \quad u_0 = \rho^2(a_1 \cdot a_3) \\ v_0 = \rho^2(a_2 \cdot a_3)$$

$$\cos \theta = -\frac{(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3)}{|a_1 \times a_3| \cdot |a_2 \times a_3|}$$

$$\alpha = \rho^2 |a_1 \times a_3| \sin \theta$$

$$\beta = \rho^2 |a_2 \times a_3| \sin \theta$$

### 外参数

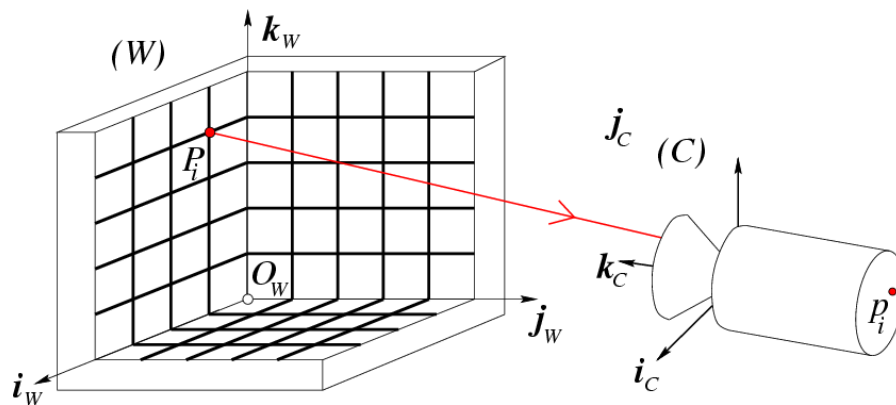
$$r_1 = \frac{(a_2 \times a_3)}{|a_2 \times a_3|}$$

$$r_3 = \frac{\pm a_3}{|a_3|}$$

$$r_2 = r_3 \times r_1$$

$$T = \rho K^{-1} b$$

## 退化示例



- $P_i (i = 1, \dots, n)$  不能位于同一平面!!!



# 摄像机标定

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题

- 径向畸变的摄像机标定

2020/5/25

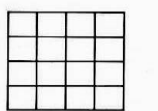
Beijing University of Posts and Telecommunications

32

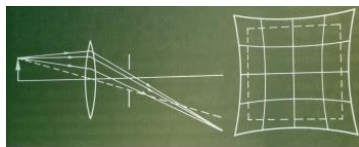
## 透镜问题：径向畸变

- 径向畸变**: 图像像素点以畸变中心为中心点, 沿着径向产生的位置偏差, 从而导致图像中所成的像发生形变

没有畸变



枕形



畸变像点相对于理想像点沿径向向外偏移, 远离中心

桶形



畸变像点相对于理想像点沿径向向中心靠拢



**产生原因**: 光线在远离透镜中心的地方比靠近中心的地方更加弯曲

Source: Silvio Savarese

2020/5/25

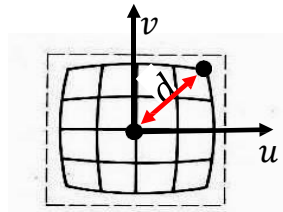
Beijing University of Posts and Telecommunications

33

## 径向畸变

图像放大率随距光轴距离的增加而减小

如何建模?



$S_\lambda$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MP_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i$$

$$\lambda = 1 \pm \sum_{p=1}^3 K_p d^{2p}$$

畸变因子

多项式函数

$$d^2 = u^2 + v^2$$

建模径向特性

## 径向畸变

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Q$

$$MP_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_3 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$

$$\begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

$Q$ 

径向畸变

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M P_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_3 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

问题：这是线性方程组吗？

 $Q$ 

径向畸变

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M P_i \rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = p_i \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_3 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_i q_3 P_i = q_1 P_i \\ v_i q_3 P_i = q_2 P_i \end{cases}$$

问题：这是线性方程组吗？

不是！

## 标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \frac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \longrightarrow X = f(Q)$$

$i = 1 \dots n$

$f()$  为非线性映射

测量值      参数

## 标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \frac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \longrightarrow X = f(Q)$$

$i = 1 \dots n$

$f()$  为非线性映射

测量值      参数

### – 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法 (L-M方法)

- 从初始解开始迭代
- 若初始解与实际相距较远，可能会很慢
- 估计解可能是初始解的函数（由于局部最小值）
- 牛顿法需要计算一阶导矩阵J（雅可比矩阵），二阶导矩阵H（海塞矩阵）
- L-M算法不用计算H

## 标定的一般问题

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 P_i}{q_3 P_i} \\ \frac{q_2 P_i}{q_3 P_i} \end{bmatrix} \longrightarrow X = f(Q)$$

$i = 1 \dots n$

$f()$  为非线性映射

测量值      参数

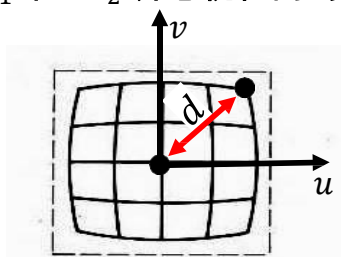
一种可能算法

1. 求解系统的线性部分以找到近似解
2. 使用该解作为整个系统的初始条件
3. 使用牛顿法或 L-M 算法求解整个系统

## 求解线性部分

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1 p_i}{q_3 p_i} \\ \frac{q_2 p_i}{q_3 p_i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} m_1 p_i \\ m_3 p_i \\ m_2 p_i \\ m_3 p_i \end{bmatrix}$$

我们能估计出  $m_1$  和  $m_2$  并忽视径向畸变吗？



## 求解线性部分

估计  $m_1$  和  $m_2$  ...

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} m_1 p_i \\ m_3 p_i \\ m_2 p_i \\ m_3 p_i \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{u_i}{v_i} = \frac{\frac{1}{\lambda} (m_1 p_i)}{\frac{1}{\lambda} (m_2 p_i)} = \frac{m_1 p_i}{m_2 p_i}$$

$$\begin{cases} v_1(m_1 P_1) - u_1(m_2 P_1) = 0 \\ v_i(m_1 P_i) - u_i(m_2 P_i) = 0 \\ \vdots \\ v_n(m_1 P_n) - u_n(m_2 P_n) = 0 \end{cases} \quad L \mathbf{n} = 0 \quad L \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_1 p_1^T & -u_1 p_1^T \\ v_2 p_2^T & -u_2 p_2^T \\ \vdots & \vdots \\ v_n p_n^T & -u_n p_n^T \end{pmatrix}$$

↓

通过SVD求得  $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} m_1^T \\ m_2^T \end{bmatrix}$

## 求解线性部分

一旦估计出  $m_1$  和  $m_2$  ...

$$p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} m_1 p_i \\ m_3 p_i \\ m_2 p_i \\ m_3 p_i \end{bmatrix}$$

$m_3$  是关于  $m_1, m_2, \lambda$  的非线性函数

**-牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法 (L-M方法)**

# 摄像机标定

---

- 针孔模型 & 透镜摄像机标定问题（完）
- 径向畸变的摄像机标定（完）