激光的前端配准算法-二

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人

电子科技大学硕士

帧间匹配算法

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

帧间匹配算法

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

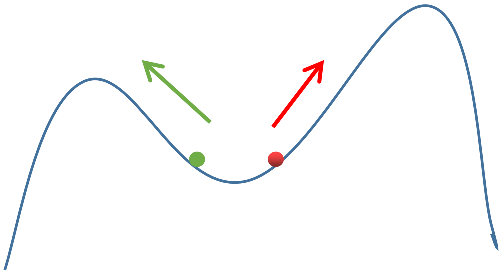
2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

爬山法(拟梯度法)

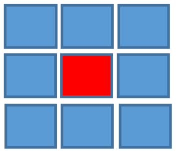
示意图



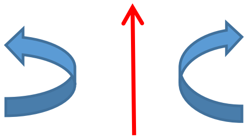
爬山法示意图

基本思想

- 搜索方向固定(只在有限的几个方向中选取，平移8个，旋转2个)



平移搜索



旋转搜索

- 搜索时，保持得分单调递增；不满足则把搜索步长减半

- 当搜索步长减半的次数大于一定的次数时，则认为收敛

爬山法(拟梯度法)

得分函数定义

T 机器人的位姿

$S_i(T)$ 激光点i位姿变换T后的坐标

$M(x)$ 似然场地图中坐标x处的值

n 当前帧激光点的数量

$$Score(T)=\sum_{i=1}^{n} M(S_i(T))$$

- $Score(T)$函数表示位姿T在似然场地图中的得分
- 似然场地图由前一帧或前几帧激光数据生成

算法流程

- 搜索从一个初始位姿开始T(0)
- 对于当前最优位姿搜索位姿T(i)，计算周围10个待搜索位姿的得分，并得到最高得分对应的位姿T(*)
- 如果最高得分比当前搜索位姿得分更高，则更新当前搜索位姿T(i+1)=T(*)
- 否则，搜索步长减半，继续从当前搜索位姿进行搜索T(i+1)=T(i)
- 如果搜索步长减半的次数超过阈值，则认为搜索结束，返回当前的最优位姿

爬山法(拟梯度法)

伪代码

$$ComputePose(pose, dir, searchStep):$$
$$\quad newPose = pose + dir * searchStep$$
$$\quad return \quad newPose$$

$$bestPose = T_0$$
$$bestScore = Score(T_0)$$
$$while(iterations < iteration\_thres)$$
$$\quad \max Score = bestScore$$
$$\quad \max Pose = bestPose$$
$$\quad \text{for} \quad \text{move} \quad in \quad all - search - direction$$
$$\qquad \text{tmp}Pose = computePose(bestScore, move, searchStep)$$
$$\qquad \text{tmp}Score = Score(tmpPose)$$
$$\qquad if\ (tmpScore > \max Score)$$
$$\qquad\quad \max Score = tmpScore$$
$$\qquad\quad \max Pose = tmpPose$$
$$\qquad endif$$
$$\quad \text{end}for$$
$$\quad \text{if}\ (\max Score > bestScore)$$
$$\qquad bestScore = \max Score$$
$$\qquad bestPose = \max Pose$$
$$\quad else$$
$$\qquad searchStep = searchStep / 2$$
$$\qquad iterations{+}{+}$$
$$\quad endif$$
$$endwhile$$

爬山法伪代码

帧间匹配算法

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

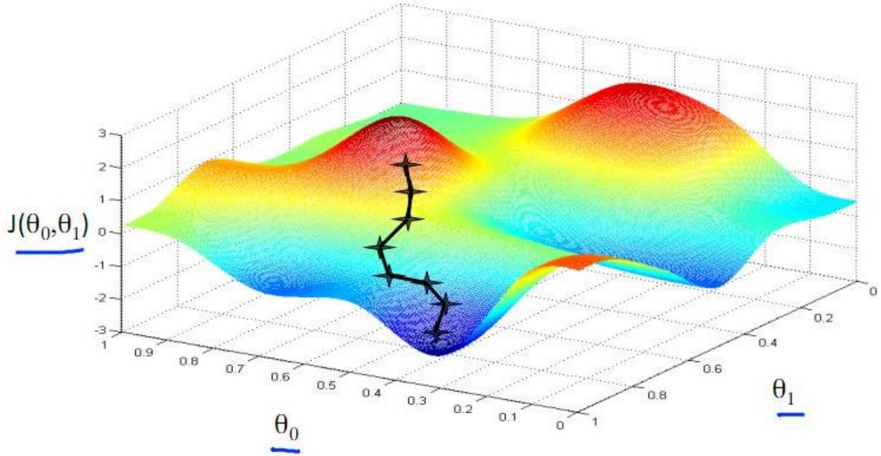
2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

基于优化的方法(Optimization-based Method)

示意图



梯度下降示意图

数学描述

- 给定一个目标函数，把激光的帧间匹配问题转换为求解目标函数的极值问题：

$$E(T) = arg\min_{T}\sum[1 - M(S_i(T))]^2$$

其中，

$T = (T_x, T_y, T_\theta)$表示机器人的位姿

$p_i = (p_{ix}, p_{iy})$表示第i个激光点的坐标

$S_i(T)$ 表示第i个激光点位姿变换T后的坐标

$$S_i(T) = \begin{bmatrix} \cos T_\theta & -\sin T_\theta & T_x \\ \sin T_\theta & \cos T_\theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M(x)$ 表示似然场地图中坐标x处的值

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$E(T) = arg \min_{T} \sum [1 - M(S_i(T))]^2$$

$M(S_i(T))$为非线性函数，进行一阶泰勒展开，可得：

$$E(T+\Delta T) = arg \min_{T} \sum \left[1 - M\big(S_i(T)\big) - \nabla M\big(S_i(T)\big)\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]^2$$

求$E(T+\Delta T)$对ΔT的导数，并令其等于0：

$$\sum \left[M\big(S_i(T)\big)\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T \left[1 - M\big(S_i(T)\big) - \nabla M\big(S_i(T)\big)\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right] = 0$$

$\Downarrow$

求得ΔT

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1-M\big(S_i(T)\big)-\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]=0$$

展开得:

$$\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1-M\big(S_i(T)\big)\right]=\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]$$

等式两边同时乘以 H^{-1}:

$$\Delta T=H^{-1}\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1-M\big(S_i(T)\big)\right]$$

$$H=\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$\Delta T = H^{-1}\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T[1-M(S_i(T))] \qquad H=\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]$$

ΔT表达式中似然场地图$M(S_i(T))$已知，未知量：$\nabla M(S_i(T))$、$\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}$

$\boxed{\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}}$

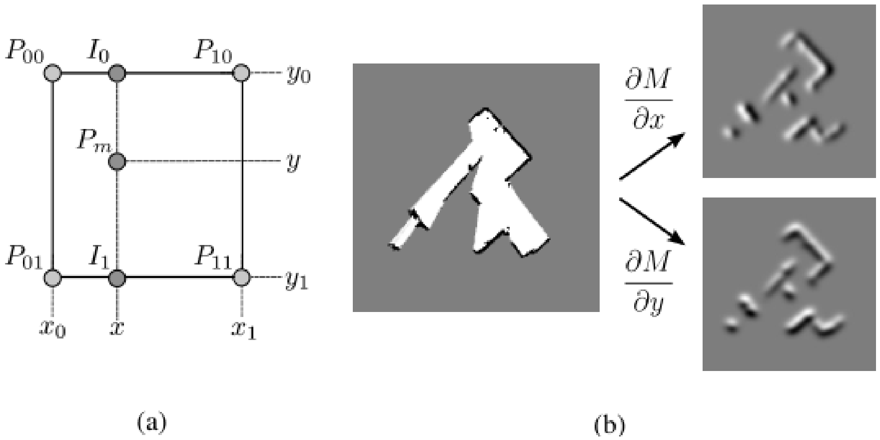
$$S_i(T)=\begin{bmatrix}\cos T_\theta & -\sin T_\theta & T_x\\ \sin T_\theta & \cos T_\theta & T_y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{ix}\\ p_{iy}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos T_\theta * p_{ix} - \sin T_\theta * p_{iy} + T_x\\ \sin T_\theta * p_{ix} + \cos T_\theta * p_{iy} + T_y\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S_i(T)}{\partial T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin T_\theta * p_{ix} - \cos T_\theta * p_{iy}\\ 0 & 1 & \cos T_\theta * p_{ix} - \sin T_\theta * p_{iy}\end{bmatrix}$$

$\boxed{\nabla M(S_i(T))}$ $M(S_i(T))$表示似然场地图中坐标$S_i(T)$处的值；$\nabla M(S_i(T))$表示似然场对坐标位置的导数，需要通过插值求解。

基于优化的方法(Optimization-based Method)

地图双线性插值



地图插值示意图

- 拉格朗日插值法
- X,Y两个方向进行插值
- 一维线性插值的推广

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法——一维线性插值

- 插值的定义

设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且存在已知点：

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值$y_i = f(x_i)$,若存在n次多项式：

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

使得值$L_n(x_i) = y_i$成立,则称$L_n(x)$为$f(x)$的插值多项式。

可以证明：$L_n(x)$存在且唯一

- 拉格朗日插值方法

实现上述插值的一种方法

主要特点为把插值多项式表示成基函数的线性组合：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i$$

基函数$l_i(x)$满足以下条件：

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \ne i \end{cases}$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法—基函数构造

基函数$l_i(x)$在除x_i以外的所有插值点都为0，即点$(x_0,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$都是$l_i(x)$的解，因此可以构造函数:

$$l_i(x)=c(x-x_0)\cdots\underline{\underline{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}}(x-x_n)$$

显然$l_i(x)$满足上述条件，同时$l_i(x_i)=1$，因此：

$$l_i(x_i)=c(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)=1$$

因此：

$$c=\frac{1}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_n)}$$

$$l_i(x)=\prod_{k=0,k\neq i}^{n}\frac{x-x_k}{(x_i-x_k)}$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法—双线性插值

设平面中有四个点:

$$Z_1 = f(x_0, y_0), Z_2 = f(x_1, y_0)$$
$$Z_3 = f(x_1, y_1), Z_4 = f(x_0, y_1)$$

令:

$$\mathrm{u} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad \mathrm{v} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

则对应的四个点的坐标变为:

$$(x_0, y_0) = (0,0) \qquad (x_1, y_0) = (1,0)$$
$$(x_1, y_1) = (1,1) \qquad (x_0, y_1) = (0,1)$$

构造基函数:

$$l_1(u, v) = (1 - u)(1 - v)$$

$$l_2(u, v) = u(1 - v)$$

$$l_3(u, v) = uv$$

$$l_4(u, v) = (1 - u)v$$

插值函数为:

$$L_4(u, v) = Z_1 l_1(u, v) + Z_2 l_2(u, v) + Z_3 l_3(u, v) + Z_4 l_4(u, v)$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

地图插值

插值函数: $L_4(u,v) = Z_1 l_1(u,v) + Z_2 l_2(u,v) + Z_3 l_3(u,v) + Z_4 l_4(u,v)$

把(u,v)替换回(x,y)可得:

$$L(x,y) = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_3 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_4\right) + \frac{y_1-y}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_2 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_1\right)$$

x的偏导数:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}\left(\frac{Z_3-Z_4}{x_1-x_0}\right) + \frac{y_1-y}{y_1-y_0}\left(\frac{Z_2-Z_1}{x_1-x_0}\right)$$

y的偏导数:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_3 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_4\right) - \frac{1}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}Z_2 + \frac{x_1-x}{x_1-x_0}Z_1\right)$$

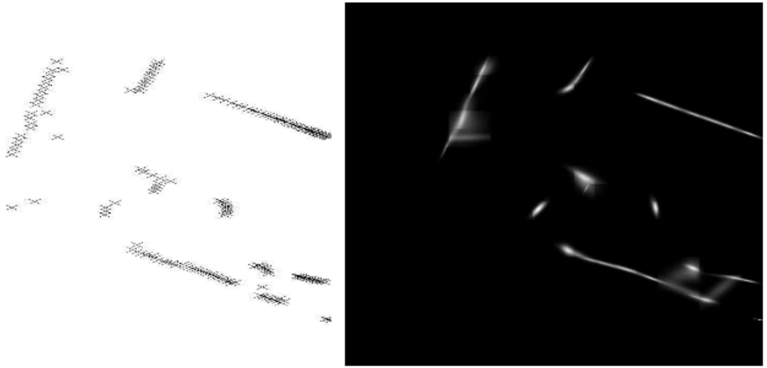
帧间匹配算法

帧间匹配算法

- 1、爬山法(拟梯度法)
- 2、高斯牛顿优化方法
- **3、NDT方法**
- 4、相关匹配方法及分支定界加速

NDT方法

示意图



NDT方法示意图

基本思想

- 把空间用cell进行划分；
- 用高斯分布去模拟似然场，形成一个天然分段连续的似然场；
- 在得到连续的似然场之后，直接用牛顿方法进行迭代即可；
- 似然场连续，不受离散化带来的影响。

NDT方法

数学描述

$T=(T_x,T_y,T_\theta)$ 表示需要求解的姿态变换

$X_i=\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ 表示第i个激光点的坐标

$X_i^{'}$ 表示第i个激光点经过姿态变换T后的坐标

$$X_i'=\begin{pmatrix} \cos T_\theta & -\sin T_\theta \\ \sin T_\theta & \cos T_\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

q_i,Σ_i 表示点X_i对应的高斯分布的均值和方差

- 当前帧激光点i的得分为:

$$score_i=\exp(-\frac{(X_i^{'}-q_i)^T\Sigma_i^{-1}(X_i^{'}-q_i)}{2})$$

- 因此匹配的目标函数:

$$\max\sum score_i \longrightarrow \min\sum -score_i$$

令 $q=X_i^{'}-q_i$，则

$$score_i=\exp(-\frac{q^T\Sigma_i^{-1}q}{2})$$

- 目标函数并没有取误差的平方。
- 不对score()函数进行线性化。
- 本式中可以直接求解Hessian矩阵。

NDT方法

牛顿方法

- 假设目标函数为：

$$\min f(x)$$

- 等价于：

$$g(x) = f'(x) = 0$$

- 进行泰勒展开，取一阶进行：

$$g(x+\Delta x) = g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x}\Delta x = 0$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x}\Delta x = -g(x)$$

$$x = x + \Delta x$$

- 等价于：

$$H\Delta x = -J$$

因此，用牛顿法进行迭代求解时，关键是要计算目标函数$f(x)$的Hessian矩阵和Jacobian矩阵。

- 同时，如果：

$$f(x) = \sum f_i(x)$$

则：

$$J = \sum J_i$$

$$H = \sum H_i$$

NDT方法

NDT求解

显然：

$$f_i = \text{-}score_{\mathrm{i}} = \text{-}\exp(-\frac{q^T \Sigma_i^{-1} q}{2})$$

因此，根据链式法则：

$$J_{\mathrm{i}} = \frac{\partial f_i}{\partial T} = -\exp(-\frac{q^T \Sigma_i^{-1} q}{2})(-q^T \Sigma_i^{-1}) \frac{\partial q}{\partial T}$$

$$H_{\mathrm{i}} = \frac{\partial J_i}{\partial T} = -\exp(-\frac{q^T \Sigma^{-1} q}{2})(-q^T \Sigma^{-1} \frac{\partial q}{\partial T})(-q^T \Sigma^{-1} \frac{\partial q}{\partial T}) - \exp(-\frac{q^T \Sigma^{-1} q}{2})(-\frac{\partial q^T}{\partial T} \Sigma^{-1} \frac{\partial q}{\partial T}) - \exp(-\frac{q^T \Sigma^{-1} q}{2})(-q^T \Sigma^{-1} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2})$$

其中，$q = X_i^{'} - q_i$ $\quad \frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\partial X_i^{'}}{\partial T}$

$$X_i^{'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\partial X_i^{'}}{\partial T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_i \sin\theta - y_i \cos\theta \\ 0 & 1 & x_i \cos\theta - y_i \sin\theta \end{pmatrix}$$

NDT方法

算法流程

1. 将空间环境进行cell分割（若是二维空间，则离散为栅格，若是三维空间则离散划分为立方体），这样就可以将点云划分到不同cell中；

2. 用高斯分布刻画每个cell点云的分布，其均值和方差根据下方公式计算；

$$\mu_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|} \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{V}_i} \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{\Sigma}_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|} \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{V}_i} (\mathbf{p}_i - \mu_i)^T (\mathbf{p}_i - \mu_i)$$

3. 根据初始解把当前帧的激光点转换到参考帧，并确定在哪一个cell中；

4. 计算当前帧每个激光点在所属cell中的$score_i$；

5. 计算目标函数$max \sum score_i$，通过牛顿方法进行迭代求解，得到姿态转换矩阵T。

帧间匹配算法

帧间匹配算法

1、爬山法(拟梯度法)

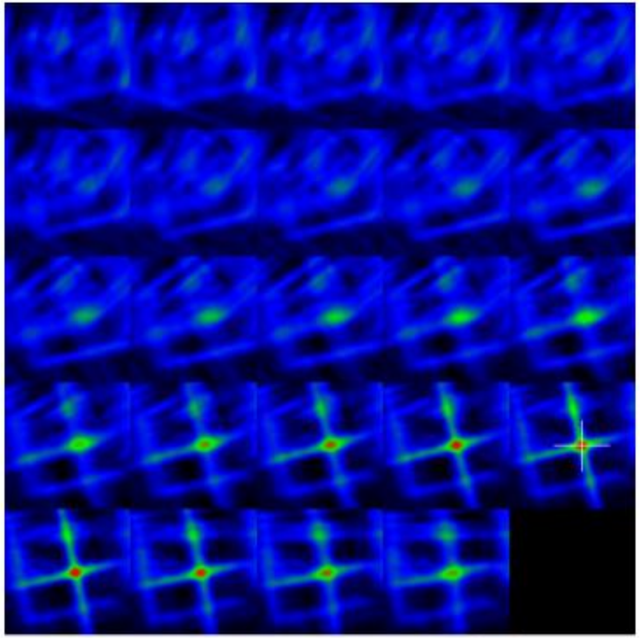
2、高斯牛顿优化方法

3、NDT方法

4、相关匹配方法及分支定界加速

相关方法(Correlation-based Method)

帧间匹配似然场



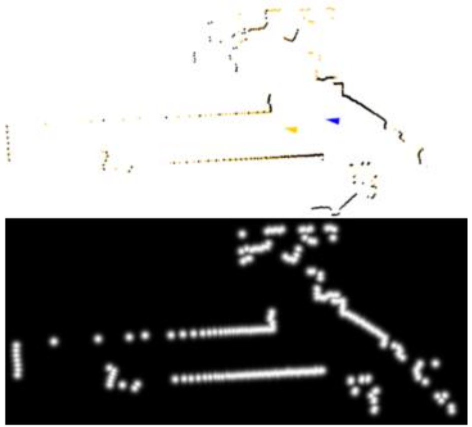
似然场示意图

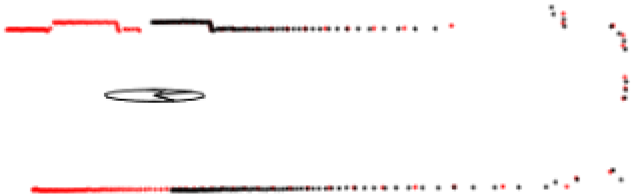
- 高度非凸，存在很多的局部极值
- 对初值非常敏感
- 进行暴力匹配，排除初值影响
- 通过加速策略，降低计算量
- 计算位姿匹配方差

相关方法(Correlation-based Method)

算法流程

- 1. 构造似然场(方法见第3节课)；
- 2. 在指定的位姿搜索空间内进行搜索，计算每一个位姿的得分；
- 3. 根据步骤2中位姿的得分，得分最高的位姿即为要求解的位姿，同时计算本次位姿匹配的方差。





相关方法(Correlation-based Method)

位姿搜索

1. 暴力搜索

三层for循环(x,y,θ)枚举每一个位姿，
分别计算每一个位姿的得分，计算量巨大。
因为激光雷达数据在每一个位姿都要重新投影，
投影需要计算sin和cos函数。

- 计算量巨大，投影矩阵生成需要计算sin和cos，计算的次数为：$n_x n_y n_\theta$
- 点的投影涉及到矩阵乘法，需要计算的次数：$n_x n_y n_\theta \mathrm{n}$

$bestPose = (x_0, y_0, \theta_0)$
$bestScore = Score(V2T(bestPose), Z_t)$
$for \quad \mathrm{dx} \in (-\Delta x, \Delta x)$
$for \quad dy \in (-\Delta y, \Delta y)$
$for \quad d\theta \in (-\Delta\theta, \Delta\theta)$
$T = V2T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \theta_0 + \Delta\theta)$
$\mathrm{if}\ (\mathrm{Score}(T, Z_t) > bestScore)$
$bestScore = Score(T, Z_t)$
$bestPose = (x_0 + dx, y_0 + dy, \theta_0 + d\theta)$
$endif$

$Score(T, Z):$
$tmpScore = 0$
$for \quad i = 1:n$
$z_i' = Tz_i$
$tmpScore += M(z_i')$
$endfor$
$return \quad tmpScore$

相关方法(Correlation-based Method)

位姿搜索

2. 预先投影搜索

交换暴力搜索中的循环顺序，

最外层对θ进行搜索，生成投影矩阵时，

sin 和cos的计算从$n_x n_y n_\theta$降低到n_θ

Score函数中的点投影运算乘法运算消除，

只剩下加法运算

$$
\begin{aligned}
& bestPose = (x_0, y_0, \theta_0) \\
& bestScore = Score(V2T(bestPose), Z_t) \\
& for \quad d\theta \in (-\Delta\theta, \Delta\theta) \\
& \quad R = R(\theta + d\theta) \\
& \quad Z_t' = RZ_t \\
& \quad for \quad dx \in (-\Delta x, \Delta x) \\
& \qquad for \quad dy \in (-\Delta y, \Delta y) \\
& \qquad\quad t = \begin{bmatrix} x_0 + \Delta x & y_0 + \Delta y \end{bmatrix}^T \\
& \qquad\quad T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \qquad\quad \text{if } (\text{Score}(T, Z_t') > bestScore) \\
& \qquad\qquad bestScore = Score(T, Z_t') \\
& \qquad\qquad bestPose = (x_0 + \text{d}x, y_0 + dy, \theta_0 + d\theta) \\
& \qquad\qquad endif
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Score(T, Z): \\
& \quad tmpScore = 0 \\
& \quad for \quad i = 1:n \\
& \qquad z_i' = z + \text{t}_i \\
& \qquad tmpScore += M(z_i') \\
& \quad endfor \\
& \quad return \quad tmpScore
\end{aligned}
$$

相关方法(Correlation-based Method)

位姿搜索

3. 多分辨率搜索

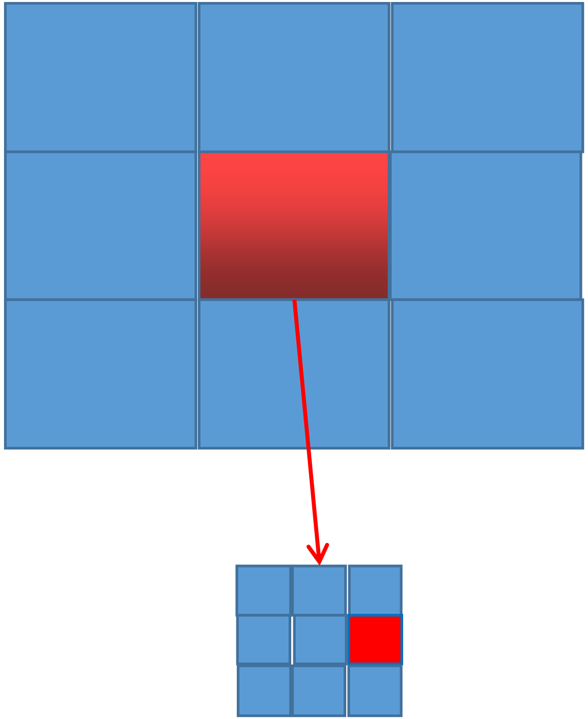
(1)构造粗分辨率($25cm$)和细分辨率($2.5cm$)两个似然场

(2)首先在粗分辨率似然场上进行搜索，获取最优位姿

(3)把粗分辨率最优位姿对应的栅格进行细分辨率划分，然后再进行细分辨率搜索，再次得到最优位姿。

(4)粗分辨率地图的栅格的似然值为对应的细分辨率地图对应空间的所有栅格的最大值

不能保证得到最优解!!!



相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界算法

- 常用的树形搜索剪枝算法
- 求解整数规划问题
- 解的数量为有限个
- 把最优解求解问题转换为树形搜索问题，根节点表示整个解空间，叶子节点表示最优解，中间的节点表示解空间的某一部分子空间。

- 分枝：即根节点(深度为n)表示整个解深度n-1子节点表示解空间的子空间，深度n-2的节点表示深度n-1节点的子空间，这样层层划分，直到划分到真实解，也就是叶子节点(深度为0)为止。
- 定界：对于搜索树中的每一个节点，确定以该节点为根节点的子树的界。对于最小值问题，确定下界；对于最大值问题，确定上界。(SLAM中为上界)
- SLAM中一个多棵树同时搜索，每棵树表示一个固定的角度

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界算法

Algorithm 2 Generic branch and bound

```
best_score ← −∞
𝒞 ← 𝒞_0
while 𝒞 ≠ ∅ do
    Select a node c ∈ 𝒞 and remove it from the set.
    if c is a leaf node then
        if score(c) > best_score then
            solution ← n
            best_score ← score(c)
        end if
    else
        if score(c) > best_score then
            Branch: Split c into nodes 𝒞_c.
            𝒞 ← 𝒞 ∪ 𝒞_c
        else
            Bound.
        end if
    end if
end while
return best_score and solution when set.
```

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

- 搜索树中的节点表示一个正方形的索索范围:$(c_x, c_y, c_\theta, c_h)$

$$\overline{\overline{\mathcal{W}}}_c = \left(\left\{ (j_x, j_y) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{matrix} c_x \le j_x < c_x + 2^{c_h} \\ c_y \le j_y < c_y + 2^{c_h} \end{matrix} \right\} \times \{c_\theta\}\right)$$

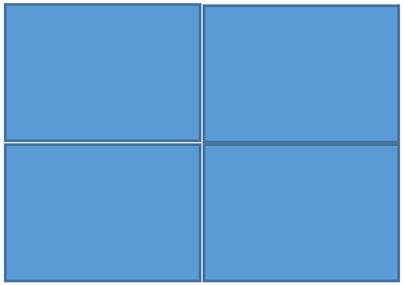
(c_x, c_y)表示搜索空间的起点

c_h表示树的深度

c_θ表示该节点对应的角度

- 分枝：对于节点$(c_x, c_y, c_\theta, c_h)$，分枝为4个子节点，四个子节点为：

$$\mathcal{C}_c = \left(\left(\{c_x, c_x + 2^{c_h - 1}\} \times \{c_y, c_y + 2^{c_h - 1}\} \times c_\theta\right) \cap \overline{\mathcal{W}}\right) \times \{c_h - 1\}.$$



相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

- 定界：构造得分函数，使得得分函数对于节点c的打分，是以节点c为根节点的子树的上界：

$$
\begin{aligned}
score(c) &= \sum_{k=1}^{K} \max_{j \in \overline{\overline{\mathcal{W}}}_c} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k) \\
&\geq \sum_{k=1}^{K} \max_{j \in \overline{\mathcal{W}}_c} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k) \\
&\geq \max_{j \in \overline{\mathcal{W}}_c} \sum_{k=1}^{K} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k).
\end{aligned}
$$

对于每一个激光点，遍历该节点的每一个搜索位姿，选择得分最高的位姿的得分，作为该搜索空间的得分

以节点C为根节点的子树的最高得分

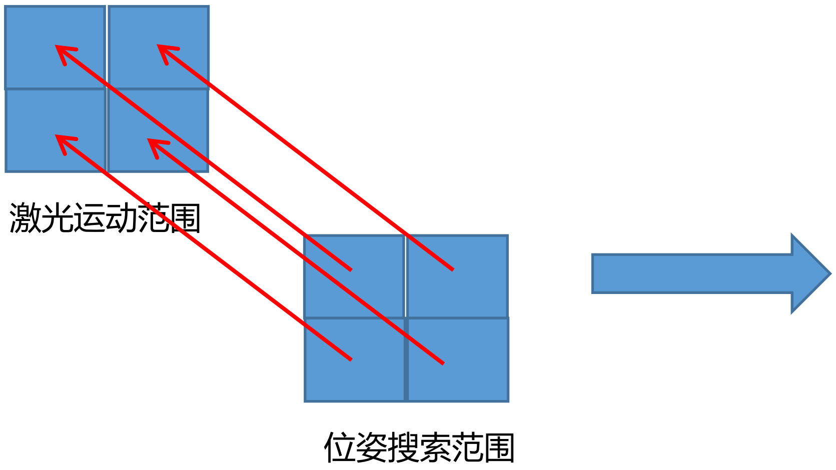
$$\overline{\mathcal{W}}_c = \overline{\overline{\mathcal{W}}}_c \cap \overline{\mathcal{W}}$$

$\bar{W}$ 表示地图的可行区域

$M_{nearest}(X)$ 表示地图中点X的似然值

相关方法(Correlation-based Method)

多分辨率地图



遍历位姿等价于遍历激光点击中范围

得分函数可以通过多分辨率地图的方式解决

机器人位姿不变，不同层节点构造不同分辨率地图

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

Algorithm 2 Generic branch and bound

$best\_score \leftarrow -\infty$
$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}_0$
while $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **do**
  Select a node $c \in \mathcal{C}$ and remove it from the set.
  if c is a leaf node **then**
    if $score(c) > best\_score$ **then**
      $solution \leftarrow n$
      $best\_score \leftarrow score(c)$
    end if
  else
    if $score(c) > best\_score$ **then**
      Branch: Split c into nodes $\mathcal{C}_c$.
      $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_c$
    else
      Bound.
    end if
  end if
end while
return $best\_score$ and $solution$ when set.

Algorithm 3 DFS branch and bound scan matcher for (BBS)

$best\_score \leftarrow score\_threshold$
Compute and memorize a score for each element in $\mathcal{C}_0$.
Initialize a stack $\mathcal{C}$ with $\mathcal{C}_0$ sorted by score, the maximum score at the top.
while $\mathcal{C}$ is not empty **do**
  Pop c from the stack $\mathcal{C}$.
  if $score(c) > best\_score$ **then**
    if c is a leaf node **then**
      $match \leftarrow \xi_c$
      $best\_score \leftarrow score(c)$
    else
      Branch: Split c into nodes $\mathcal{C}_c$.
      Compute and memorize a score for each element in $\mathcal{C}_c$.
      Push $\mathcal{C}_c$ onto the stack $\mathcal{C}$, sorted by score, the maximum score last.
    end if
  end if
end while
return $best\_score$ and $match$ when set.

参考资料

[1]A Flexble and Scalable SLAM System with Full 3D Motion Estimation

[2] The Normal Distributions Transform：A New Approach to Laser Scan Matching

[3] Real-Time Correlative Scan Matching

[4] Real-Time Loop Closure in 2D LIDAR SLAM

作业

- 详细见作业说明

结语

感谢聆听！

Thanks for Listening