

嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略

摘要

登月对我国整体战略发展具有重要意义，因此实现月球着陆尤为重要。本文针对嫦娥三号软着陆轨道的问题进行了递进式的设计，建立了多个数学模型来描述和设计嫦娥登月的轨道及过程。

针对问题一，首先以月球球心作为原点，嫦娥环绕轨道所在平面作为 $X-O-Y$ 面，垂直 $X-O-Y$ 的过球心直线作为 Z 轴，按照右手螺旋法则建立空间直角坐标系，在此基础上，建立空间解析几何模型，然后利用 Kepler 定律，来计算出嫦娥三号绕月轨道参数以及近地点和远地点的速度及方向，以及近月点和远月点的位置坐标。

针对问题二，首先是建立主减速阶段模型，鉴于此过程极为复杂。最初我们建立简单的平面模型来进行初步研究，然后在基本的平面模型的基础之上，将月球表面的弯曲考虑进入我们的模型，得到了新的极坐标模型，使得对轨道的控制更加细化，最后我们再在极坐标模型之上加入燃料最优的因素，得到了极坐标燃料最优模型，使得轨道设计进一步最优化，并且，在这个过程中我们利用 Simulink 仿真得出此模型的最优解，效果比较好。接着是快速调整阶段，这个阶段主要是减少水平速度，飞船主要是进行姿态调整和动力调整，只需将主减速阶段的模型稍作修改即可应用到此阶段之上。然后是粗蔽障阶段与细壁障阶段，这两个阶段由于自身的相似性，理论上可以利用同一个模型求解，模型的关键问题是如何快速识别地面形态并且制定最优策略，然后在保证燃料最省的状况之下快速调整位置，最后我们采用了数据挖掘里面的经典聚类算法 K-Means 算法来对地面进行快速分析，并且结合我们的中心螺旋式搜索法来寻找最优降落点，理论和实验都说明二者取得了较好的效果。最后是，缓慢下降阶段，这个阶段主要是姿态调整，数学模型相对简单。

针对问题三，利用 Simulink 仿真进行误差分析和敏感性分析，对主推力、比冲、初速度分别进行误差分析，绘图，根据图像发现各因素的误差的敏感型不同，经过分析发现主推力、比冲、初速度的敏感型呈下降趋势。

最后，针对模型建立的一些问题，给出了模型的优点和缺点，更好的分析出模型

关键词：制导方法 最优控制 螺旋式搜索 K-Means 聚类算法 Simulink 仿真

一、问题重述

1.1 引言

嫦娥三号于 2013 年 12 月 2 日 1 时 30 分成功发射，12 月 6 日抵达月球轨道。嫦娥三号在着陆准备轨道上的运行质量为 2.4t，其安装在下部的主减速发动机能够产生 1500N 到 7500N 的可调节推力，其比冲（即单位质量的推进剂产生的推力）为 2940m/s，可以满足调整速度的控制要求。在四周安装有姿态调整发动机，在给定主减速发动机的推力方向后，能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。嫦娥三号的预定着陆点为 19.51W，44.12N，海拔为-2641m（见附件 1）。

嫦娥三号在高速飞行的情况下，要保证准确地在月球预定区域内实现软着陆，关键问题是着陆轨道与控制策略的设计。其着陆轨道设计的基本要求：着陆准备轨道为近月点 15km，远月点 100km 的椭圆形轨道；着陆轨道为从近月点至着陆点，其软着陆过程共分为 6 个阶段（见附件 2），要求满足每个阶段在关键点所处的状态；尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

1.2 问题的提出

根据上述的基本要求，请你们建立数学模型解决下面的问题：确定嫦娥三号的着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略。

- （1）确定着陆准备轨道近月点和远月点的位置，以及嫦娥三号相应速度的大小与方向。
- （2）确定嫦娥三号的着陆轨道和在 6 个阶段的最优控制策略。
- （3）对于你们设计的着陆轨道和控制策略做相应的误差分析和敏感性分析。

二、模型假设

- （1）假设嫦娥三号在软着陆过程中不经过陨石带；
- （2）不考虑月球的自转、地球和太阳对嫦娥三号的引力作用；
- （3）忽略太空垃圾及宇宙射线等的影响；
- （4）月球近似为一个质量均匀的标准球体；
- （5）将嫦娥三号视为一个质点。

(6) 假设嫦娥的投影位于拍摄的数字高程图的中心位置

三、符号说明

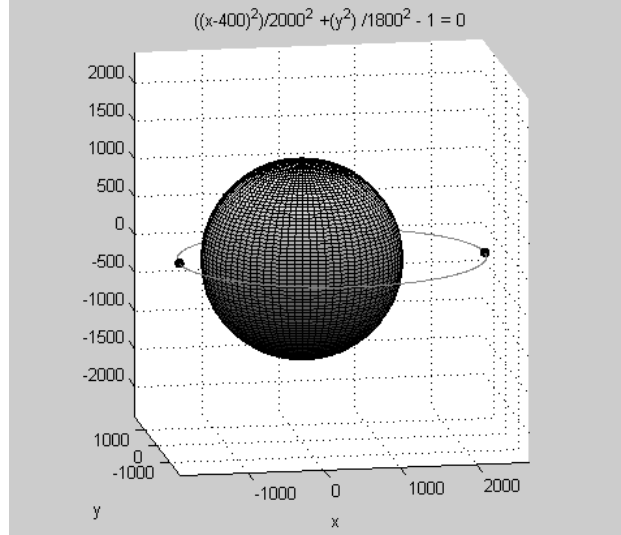
| 符号..... | 意义 |
|----------------|-------------------|
| v_A | 近地点速度 |
| v_B | 远地点速度 |
| a | 半长轴长 |
| c | 半焦距 |
| m | 着陆器质量 |
| v_x | 速度 x 轴分量 |
| v_y | 速度 y 轴分量 |
| f | 主推力 |
| a_x | 加速度 x 轴分量 |
| a_y | 加速度 y 轴分量 |
| I_{sp} | 比冲 |
| O | 卫星投影点 |
| R | 扫描点距卫星投影 O 的距离 |
| a | 扫描的正方形图形区域的宽度 |
| l | 扫描的小块的宽度 |
| D_i | 第 i 块月地表面起伏度的方差 |

四、模型的建立与求解

4.1 问题一的建模与解答

4.1.1 模型的建立和求解

在月球上建立空间直角坐标系，以月心为坐标原点，近月点和远月点分别在 y 轴的正负方向，扫描平面为 xoy 面， z 轴垂直于 xoy 面并符合右手定则，如下图所示：



绕月轨道三维图

由开普勒定律知：在图中，A，B 分别为行星运动的近月点和远月点，以 v_A 和 v_B 分别表示行星在该点的速度，由于速度沿轨道切线方向，可见 v_A 和 v_B 的方向均与此椭圆的长轴垂直，则行星在此两点时对应的面积速度分别为

$$S_A = \frac{1}{2}(r_A \times v_A) = \frac{1}{2}[(a-c) \times v_A] \quad (1)$$

$$S_B = \frac{1}{2}(r_B \times v_B) = \frac{1}{2}[(a+c) \times v_B]$$

根据开普勒第二定律，应有 $S_A = S_B$ ，因此得

$$v_B = \frac{a-c}{a+c} v_A \quad (2)$$

行星运动的总机械能 E 等于其动能与势能之和，则当他经过近月点和远月点时，其机械能应分别为

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GMm}{a-c} \quad (3)$$

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{r_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{a+c}$$

根据机械能守恒，应有 $E_A = E_B$ ，故得

$$\frac{1}{2}m(v_A^2 - v_B^2) = GMm\left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a+c}\right) \quad (4)$$

由(2)(4)两式可解得

$$v_A^2 = \frac{(a+c)GM}{a(a-c)} \quad (5)$$

$$v_B^2 = \frac{(a-c)GM}{a(a+c)}$$

而由椭圆公式性质可知：

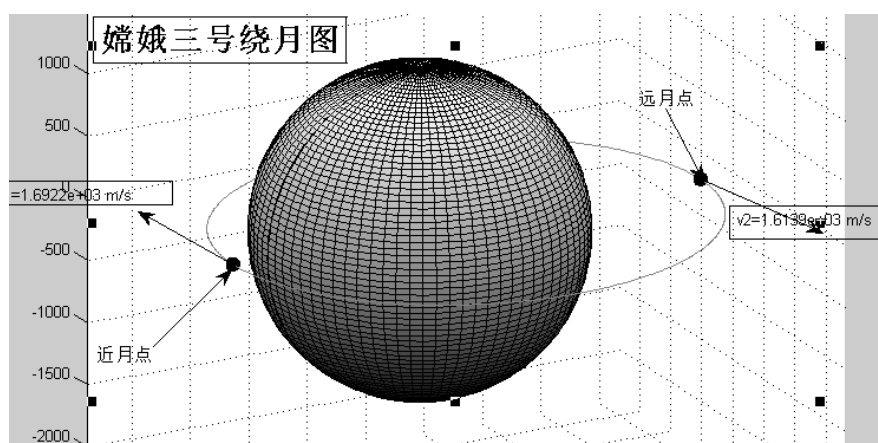
$$\text{半长轴长} \quad a = (r_{\text{近}} + r_{\text{远}} + 2 \times r) / 2 \quad \text{半焦距} \quad c = a - r_{\text{近}}$$

$$\text{万有引力常量} \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \quad \text{月球质量} \quad M = 7.3477 \times 10^{22} \text{ kg}$$

因此可得：

$$v_A = 1.6992 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_B = 1.6139 \times 10^3 \text{ m/s}$$



近地点远地点位置三维图

因此近月点位置坐标为（0，-1752.013，0），远地点坐标为（0，1847.013，0）

近地点速度方向沿 x 轴负方向，远地点速度方向沿 x 轴正方向。

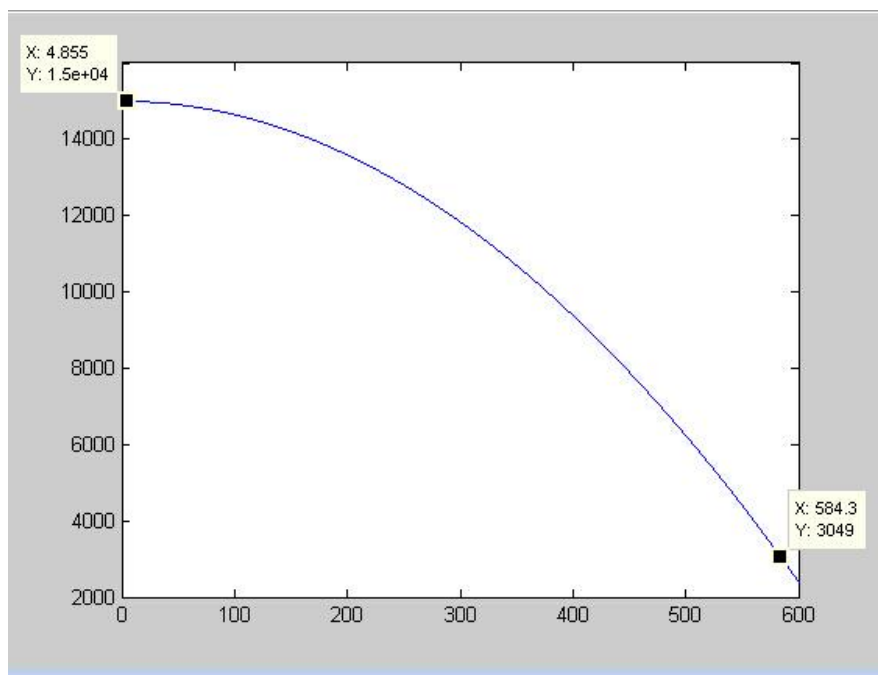
4.2 问题二的模型建立与解答

4.2.1 主减速阶段模型的建立

4.2.1.1 简化平面模型

由于月球表面附近没有大气，所以在飞行器的动力学模型中没有大气阻力项。而且从环月轨道（100km*15km 的椭圆）的近地点软着陆到非常接近月球表面的时间比较短，一般在几百秒，所以诸如月球引力非球项、日月引力摄动等影响因素均可忽略不计。另外，月球引起的哥氏力和牵引力的影响也可以忽略。使用简单的二维模型就可以描述这一问题。

由题中资料可知近地点卫星距月球表面大约为 **15km**，而月球半径约为 1737.013km， $15/1737.013 \ll 1$ ，因此可先将软着陆过程的着陆地面简化为一个平面，如下图所示：



图中在坐标系中，以月心到近地点方向为 y 轴，与月球表面交点为原点，原点到着陆点方向为 x 轴建立平面直角坐标系：

动力学方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = -\frac{f \times \cos \alpha}{m} \\ a_y = \frac{u}{r^2} - \frac{f \times \sin \alpha}{m} \\ \cos \alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \\ \sin \alpha = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \end{array} \right.$$

式中： u 是月球引力常数； v_x ， v_y ， a_x ， a_y 是着陆器在 x 轴、 y 轴方向的速度和加速度； r 为月球平均半径； f 为主发动机推力，其幅值恒定，且有 $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$ ， f_{\min} 和 f_{\max} 分别是可供选择的推力幅值允许的上下限。 α 为速度方向与 x 轴正方向的夹角。

化简得：

$$\begin{cases} v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \frac{f}{m} \times \frac{v_x(t)}{\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}} \Delta t \\ v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + \left(\frac{u}{r^2} - \frac{f}{m} \times \frac{v_y(t)}{\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}} \right) \Delta t \end{cases}$$

初始条件为 $v_x(0) = 1690$; $v_y(0) = 0$ 。

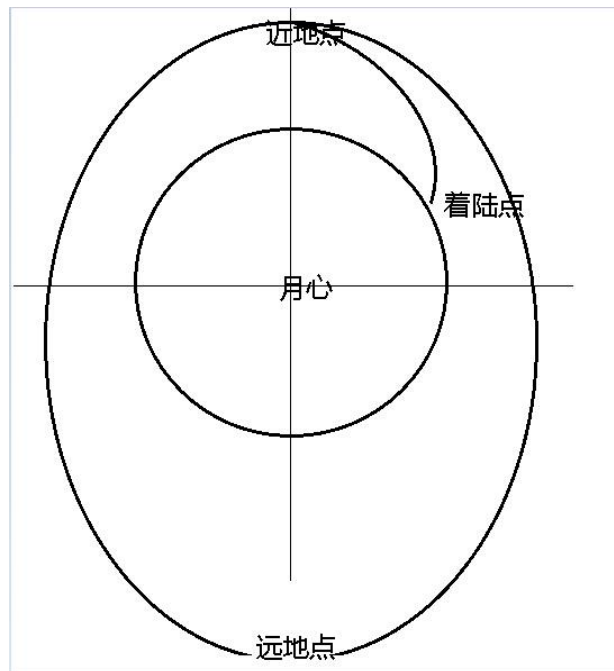
终止条件为 高度 $h \leq 3000$ 。

取间隔 $\Delta t = 1s$ ，则对该式进行迭代（matlab 程序见附件 1），直到到达终止条件时的时间即为运动时间 $t = 412s$ 。

4.2.1.2 极坐标模型

由上述模型可求得着陆器水平移动距离为 382km, 这个距离相对月球半径不能在忽略了，因此我们必须将月球转化为一个球体，在二维坐标系中就是一个圆，进一步计算着陆时间，因此定义坐标系如下：

以月心为坐标原点，原点 to 近地点方向为 y 轴，x 轴方向与抛出点方向一致建立极坐标系。如下图：



动力学方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{f}{m} \sin \varphi - \frac{u}{r^2} + r\omega^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{r} \left(\frac{f}{m} \cos \varphi + 2v\omega \right) \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{f}{I_{sp}g} \end{array} \right.$$

式中 r 为着陆器据月心失径, v_r 为着陆器在 r 方向上的速度, θ 为着陆器环绕月球表面的航程角, v_t 为着陆器在 θ 方向上的速度, ω 是航程角的角速度, m 为着陆器质量, u 为月球引力常数, f 为主减速器的推力, 其幅值恒定, $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$; f_{\min} 和 f_{\max} 分别是可供选择的推力幅值允许的上下限, I_{sp} 为主减速器的比冲, φ 为推力方向与 x 轴所夹锐角, 向上为正, 向下为负。

化简得:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t + \Delta t) = r(t) + v_r(t) \Delta t \\ v_r(t + \Delta t) = v_r(t) + \frac{f}{m} \times \frac{v_r^2(t)}{\sqrt{v_r^2(t) + v_t^2(t)}} - \frac{u}{r^2} + \frac{v_r^2(t)}{t} \\ v_t(t + \Delta t) = v_t(t) - \left(\frac{f}{m} \times \frac{v_t(t)}{\sqrt{v_r^2(t) + v_t^2(t)}} + \frac{2v_r(t)v_t(t)}{t} \right) \times \Delta t \\ m = m - \frac{f}{I_{sp}g} \Delta t \end{array} \right.$$

起始条件为: $v_r(0) = 0$; $v_t(0) = 1699.2m/s$; $r(0) = 1747.013$ 。

终止条件为: $r \leq 1735.013$ 。

取间隔 $\Delta t = 1s$, 则对该式进行迭代 (matlab 程序见附件 2), 直到到达终止条件时的时间即为运动时间 $t = 502s$ 。

4.2.1.3 着陆器三维动力学模型

首先定义两个月球软着陆坐标系。第一个是月心惯性坐标系 $O_I x_I y_I z_I$: 原点 O_I 选在月心, $O_I x_I$ 轴指向动力下降段起始点, $O_I y_I$ 轴垂直于 $O_I x_I$ 轴指向着陆点方向, $O_I z_I$ 轴按右手法则确定。探测器在空间的位置可由 r , α , β 表示成球坐标的形式, r 为从月心到探测器的距离, α , β 表示月球经度和纬度。第二个就是探测器轨道坐标系 $O_{x_o} y_o z_o$:

原点 O 选在探测器质心， Ox_o 轴与从月心到探测器质心的矢径方向重合，背离月心方向为正， Oy_o 轴垂直于 Ox_o 指向运动方向为正， Oz_o 按右手法则确定。制动推力 T 的方向与探测器本体轴重合， ψ ， ϕ 为在轨道坐标系中表示的推力方向角，如图。假设制动发动机为常推力液体发动机，忽略月球自转，则月球软着陆动力学方程可表示为：

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{f} \delta}{m} - \frac{\vec{r}}{r^3} \mu \quad (1)$$

其中， $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

\mathbf{r} 是探测器月心距矢径， $\ddot{\mathbf{r}}$ ， $\dot{\mathbf{r}}$ 分别表示径向加速度和速度， $\boldsymbol{\omega}$ 为轨道坐标系相对惯性系的角速度矢量， δ 为制动推力开关函数， μ 为月球引力常数， m 为探测器质量。用 u 、 v 、 w 表示上述动力学方程可得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = u \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{v}{r} \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega / (r \sin \beta) \\ \frac{du}{dt} = \frac{f \delta \cos \psi}{m} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{(v^2 + w^2)}{r} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{f \delta \sin \psi \cos \phi}{m} - \frac{uv}{r} + \frac{\omega^2}{r \tan \beta} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{f \delta \sin \psi \sin \phi}{m} - \frac{u\omega}{r} - \frac{v\omega}{r \tan \beta} \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{F}{I_{sp} g} \end{array} \right. \quad (2)$$

式中： $C = I_{sp} g_E$ ， I_{sp} 为发动机比冲， g_E 为月球地表重力加速度常数。

月球软着陆器的制导控制方案，采用一种燃耗次优制导率。其作用是求解推力方向角 ψ 和 ϕ 。可以将公式表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{6(r_f - r - ut_{go}) - 2(u_f - u)t_{go}}{t_{go}^2} \\ a_F = F / m \\ a_H = a_F \sin \psi \\ t_{go} = \sqrt{(w_f - w)^2 + (v_f - v)^2} / a_H \\ \psi = \arccos((a + \mu / r^2 - (v^2 + w^2) / r) / a_F) \\ \phi = \arccos((v_f - v) / \sqrt{(w_f - w)^2 + (v_f - v)^2}) \end{array} \right.$$

式中： r_f ， w_f ， v_f 分别为 r ， w ， v 的终值。

通过制导率求解出的推力方位角带入动力学方程可求出软着陆器的运动轨迹。

月球软着陆动力学模型为一非线性系统，为求得显示制导律，有必要在不影响着陆目标的前提下对上述模型再做更进一步的简化。对于径向运动，假设在软着陆过程中月球引力场是均匀的，且引力加速度为一常值 $\frac{\mu}{R_L^2}$ ，这里 R_L 为月球平均半径，则由图 3 可直接列写出径向运动方程为：

$$\begin{aligned}\dot{r} &= u \\ \dot{u} &= \frac{F}{m} \cos \psi - \frac{\mu}{R_L^2}\end{aligned}\quad (3)$$

其中， r 和 u 分别表示垂直方向的位置和速度。对于探测器，有 $m = m_0 - \frac{Ft}{C}$ （ m_0 为探测器初始质量），当 $\left| \frac{Ft}{C} \right| \ll m_0$ 时，可对推力加速度做一阶 Taylor 展开：

$$\frac{F}{m} = \frac{F}{m_0} \left(1 + \frac{Ft}{m_0 C} \right) \quad (4)$$

最优控制方向角可以分为两部分：一部分是用于满足目标点速度矢量所产生的控制角，一部分是用于满足目标点位置矢量所产生的附加控制角，且该部分为小量。由此，可设最优控制角 ψ 为

$$\psi = \psi_0 + p_1 + p_2 \quad (5)$$

其中 ψ_0 为满足目标点速度矢量部分， p_1 和 p_2 为满足目标点位置矢量所产生的附加控制角量值参数，那么：

$$\cos \psi = \cos \psi_0 - p_1 \sin \psi_0 - p_2 \sin \psi_0 \quad (6)$$

将式（5）和式（6）带入式（3）可得：

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{F^2}{m_0^2 C} \sin^2 \psi_0 + \frac{F}{m_0} \left(\frac{F}{m_0 C} \cos \psi_0 - \frac{F}{m_0 C} p_1 \sin \psi_0 - \frac{F}{m_0 C} p_2 \sin \psi_0 \right) \\ &\quad + \frac{F}{m_0} (\cos \psi_0 - p_1 \sin \psi_0) - \frac{\mu}{R_L^2}\end{aligned}\quad (7)$$

由前人工作可知，在径向的最优着陆轨迹可由一关于时间 t 的四次多项式来完全表示：

$$r = k_0 + k_1 t + \frac{k_2}{2} t^2 + \frac{k_3}{6} t^3 + \frac{k_4}{24} t^4 \quad (8)$$

其中， k_i ($i=0,1,2,3,4$) 为多项式的系数，可通过系统边值条件来确定。

在动力下降段，制动推力主要用来满足探测器终端速度约束，因此用于满足终端位置约束的控制推力仅占一小部分，也就是说 $p_1 \rightarrow 0$ 。此外，此推力控制推力的设计要求高效率的抵消初始速度，因此制动推力角 ψ_0 近似等于 90 度，则式（7）可近似表示为：

$$\dot{u} = -\frac{F^2}{m_0^2 C} p_2 t^2 - \frac{F}{m_0} p_2 t - \frac{\mu}{R_L^2} \quad (9)$$

对式 (8) 求二阶导数可得:

$$\ddot{r} = 2k_2 + 6k_3 t + 2k_4 \quad (10)$$

由式 (9)、式 (10) 两式可得:

$$\frac{k_4}{k_3} = \frac{F}{2m_0 C} \quad (11)$$

而 $\left| \frac{Ft}{C} \right| \ll m_0$, 所以可以忽略 k_4 。由此, 可以分别用一个三次多项式和二次多项式来近似表示探测器径向距离和径向速度。

根据上述推导, 分别用一个关于局部时间 τ 的三次多项式和二次多项式来近似表示月心到探测器质心之间的距离 r 和径向速度 u :

$$\begin{aligned} r &= k_0 + k_1 \tau + k_2 \tau^2 + k_3 \tau^3 \\ u &= k_1 + 2k_2 \tau + 3k_3 \tau \end{aligned} \quad (12)$$

这里的 τ 为局部时间, 它以当前时刻 t 为初始时刻, 其取值范围为 $[0, t_{go}]$, t_{go} 为剩余时间, 定义为探测器从当前时刻开始到达目标点所用的时间。式 (12) 中各系数可以由以下初始条件和终端条件确定:

$$r(0) = r, r(t_{go}) = r_f; u(0) = u, u(t_{go}) = u_f$$

其中, r_f 表示径向距离终端约束, u_f 表示径向速度终端约束。由此可以求出式 (12) 各系数, 得:

$$k_2 = \frac{3(r_f - r - ut_{go}) - (u_f - u)t_{go}}{t_{go}^2} \quad (13)$$

对式 (12) 中的 u 求导可得当前时刻的径向加速度:

$$a = 2k_2 = \frac{6(r_f - r - ut_{go}) - 2(u_f - u)t_{go}}{t_{go}^2} \quad (14)$$

下面来分析探测器各瞬时加速度矢量和速度矢量之间的几何关系。图 4 和图 5 分别为探测器在轨道坐标系下垂直平面内的加速度矢量几何关系示意图和水平面内的速度矢量几何关系示意图。其中, a 为径向加速度, a_f 为推力加速度, a_H 为加速度水平分量; V 为速度矢量在水平面内的投影, V_f 为水平终端约束速度, V_C 为由 V 变到 V_f 所需的速度增量。由动力学方程式 2 中第 4 式可以看出, 径向加速度 a 是由月球引力加速度、向心加速度和推力加速度径向分量组成的, 根据图 4 各加速度之间的几何关系即可写出推力角 ψ 的三角函数关系。在水平面中, 水平加速度 a_H 是产生水平速度增量 V_C 的主要原因, 故可令 V_C 和 a_H 同方向, 由此可根据图 4 确定另一个控制角 ϕ 的三角函数关系表达式。综合上述分析, 可以写出控制变量 ψ 、 ϕ 的表达式如下:

$$\begin{cases} \psi = \arccos \left(\frac{\left(a + \frac{\mu}{r^2} - \frac{v^2 + w^2}{r} \right)}{a_F} \right) \\ \varphi = \arccos \left(\frac{v_f - v}{\sqrt{(w_f - w)^2 + (v_f - v)^2}} \right) \end{cases} \quad (15)$$

在动力下降段，制导律的设计要求高效率地抵消水平方向的速度，换句话说，制动推力主要用来抵消探测器水平初始速度，因此，对于前面提到的剩余时间 t_{go} 可近似用下式来估计：

$$t_{go} = \frac{\sqrt{(w_f - w)^2 + (v_f - v)^2}}{a_H} \quad (16)$$

至此，式（14）、式（15）和式（16）就构成了多项式制导公式。其中， a_F 和 a_H 可由加速度仪实时测得。分析上述公式可以看出，该制导律是剩余时间的函数，而剩余时间只与探测器当前状态和末端约束状态有关。此外，还可以看出，上述制导公式对末端位置没有约束，而只对月心到探测器质心之间的距离作了约束，所以初始速度变化（尤其是初始速度方向变化）对制导终端位置影响很大，这就导致在执行实际的制导任务过程中，对初始速度的测量精度提出了较高要求（见后面的仿真分析）。

说明：

- 1) 从该制导律的求解过程可以看出，它是建立在一些假设的基础之上的，这些假设所带来的误差会在探测器接近月球的过程中逐渐减小。
- 2) 本制导律是一种燃料次优制导律。它的求解是建立在最优控制的基础之上的，但在求解过程中对剩余时间作了近似估计。
- 3) 本制导律对探测器终端位置没有约束，只对月心到探测器质心之间的径向距离作了约束，故初始速度的变化对探测器终端位置的影响很大，这就对探测器初始速度的测量精度提出了较高要求。当然，我们也可以根据无着陆位置约束这一点来对终端着陆位置进行调整，它在一定范围内实现定点软着陆。
- 4) 由式（16）可以看出，它只是剩余时间的近似估计表达式。当探测器到达终端位置时，剩余时间为零，这将导致 ψ 角在最末端出现突变，由 ψ 角的计算公式可以很容易看出。

4.2.2 主减速阶段模型的求解

推力器的参数为： $F=1500N$ ， $I_{sp}=300s$ ， $g_E=9.8m/s^2$ ；

月球常数： $\mu=4.88775 \times 10^{12} m^3/s^2$ ，月球半径 $R_L=1738km$ ；

初始参数: $r_0 = 1753km$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $u_0 = 0$, $v_0 = 1692m/s$, $w_0 = 0$, $m_0 = 600kg$;

终端参数: $r_f = 1740km$, $u_f = 0$, $v_f = 0$, $w_f = 0$ 。

对于初始参数 β_0 , 取 0 会导致公式 $\dot{v} = F \sin \psi \cos \varphi / m - uv / r + w^2 / (r \tan \beta)$ 分母为 0, 故在实际计算中定义 $\beta_0 = 0.01^\circ$ 。

通过 Simulink (程序见附件) 搭建模型如下:

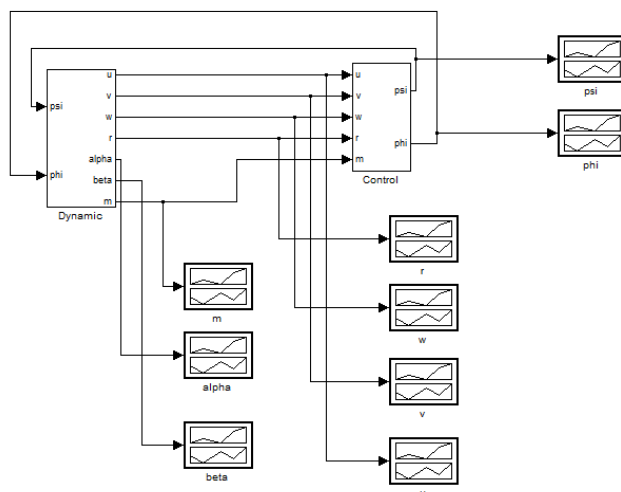


图 0-1 Simulink 模型

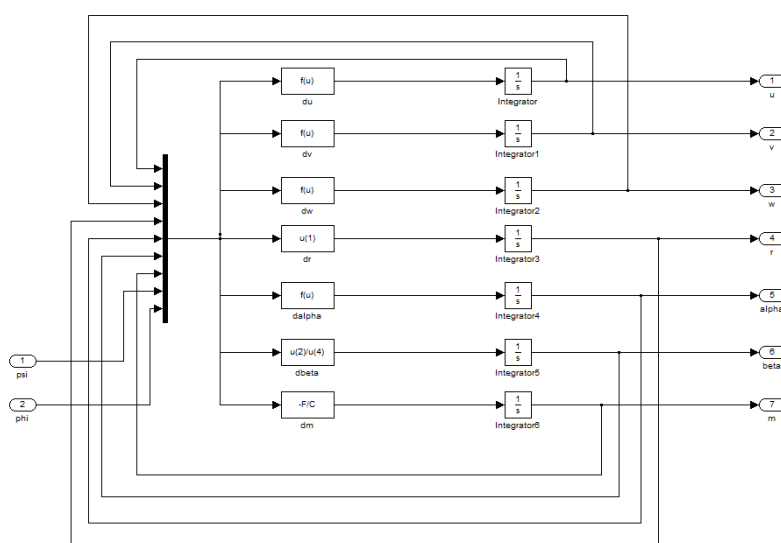


图 0-2 动力学 Dynamic 子系统

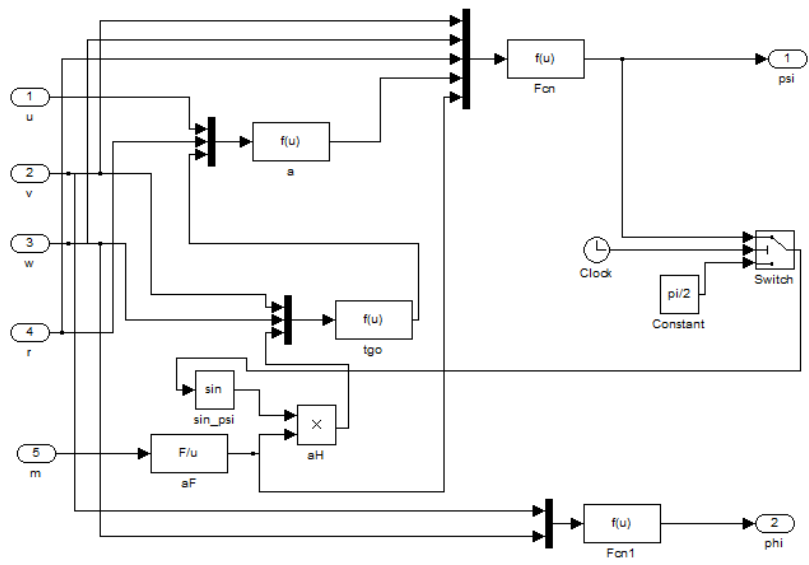


图 0-3 制导控制率 Control 子系统

仿真分析：

通过系统仿真，可得到速度、位置、推力方位角等参数随时间的变化曲线。如图 0-1 所示为着陆器到月心距离随时间变化曲线。着陆器下降到具月球表面 2km 高度用时 534s，推进剂燃烧后飞船质量下面将分别针对发动机推力、比冲和初始速度方向的偏差，分析其对着陆器飞行过程的影响。

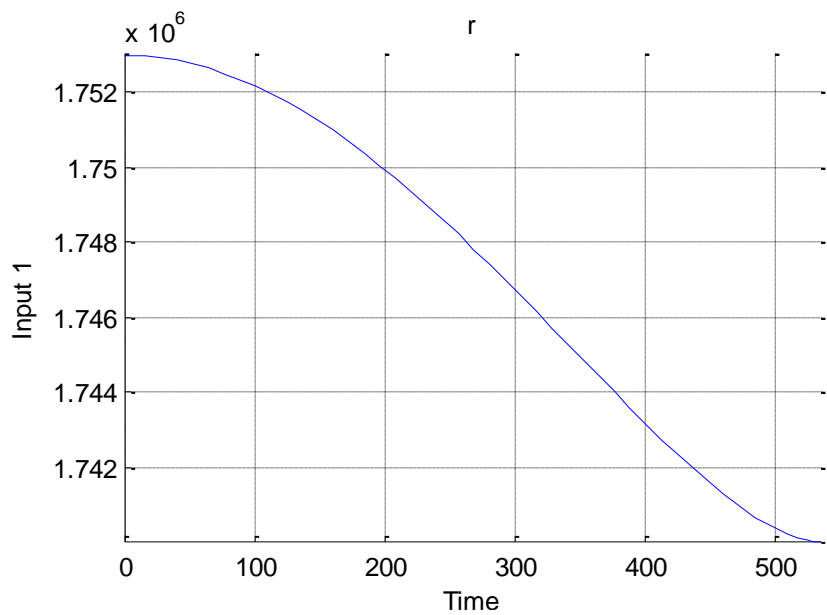


图 0-1 到月心距离随时间变化曲线

4. 2. 2 快速调整阶段

经查阅新闻报道知，当高度下降到 3km 时，开始进入快速调整段，此阶段下落的平均速度为 30m/s，大约 20s 左右到达 2400m 高度。

4. 2. 3 粗避障阶段模型的建立与解答

4. 2. 3. 1 模型的建立：

粗避障阶段建立名为“中心外围搜索法”的数学模型来寻找最近的适合降落区域，这个过程中。

先将图像分割成 $\frac{a}{l}$ 块，计算出 (D_1, D_2, \dots, D_i) ，找出 $D_{\max} = \text{Max}\{D_i | D_i \in (D_1, D_2, \dots, D_i)\}$ 和 $D_{\min} = \text{Min}\{D_i | D_i \in (D_1, D_2, \dots, D_i)\}$ 的两块月地表，将他们作为“坑对象”的特征代表和“平面对象”的特征代表，将二者放入特征库，作为下一步聚类算法 K-Means 的特征库用于初始化。

将得到的两个特征类作为 K-Means 聚类算法的初始值，形成两个簇，进行聚类，直到收敛，具体做法如下：

1. 将 D_{\max} 和 D_{\min} 作为聚类算法的初始 2 个聚类质心点。

$$2. \text{对于第 } i \text{ 块，计算每个聚类对象的均值 } d_1 = \frac{\left(\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l (h(i, j) - D_{\max})^2 \right)}{l^2} \text{ 和}$$

$$d_2 = \frac{\left(\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l (h(i, j) - D_{\min})^2 \right)}{l^2}$$

$$3. \text{更新高度: } h(i, j) = h(i, j) - \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}}$$

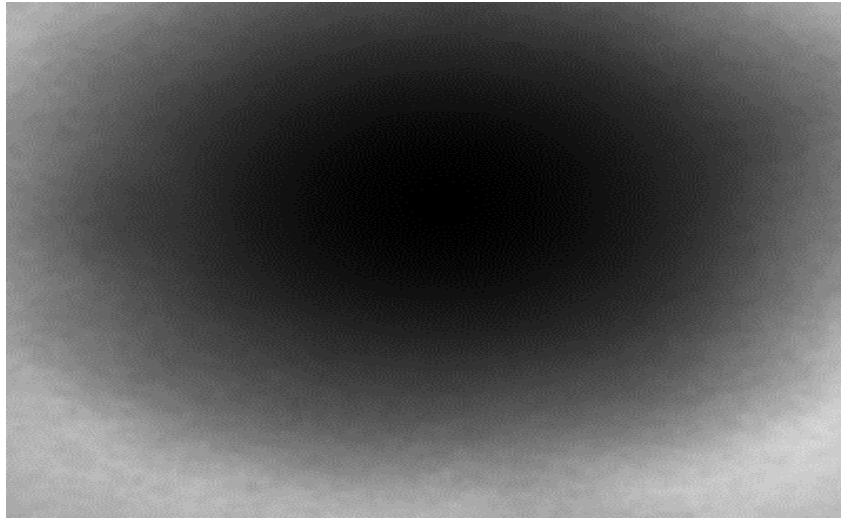
4. 计算是否有均值收敛 ($d'_i - d_i < 0.1$)，如果不收敛，转步骤 2，否则若 d_1 收敛，判定此地为坑区，若 d_2 收敛，则判定此地为平地

以投影点作为中心，做类螺旋线的向外围搜索，搜索的面积皆为 $l \times l$ 的正方形区域。将所有的平地元素 $(D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_k})$ 提取出来，然后选取离投影点最近的那个平地作为移动目标方向，这样可以使得燃料最省。

4.2.3.2 模型求解

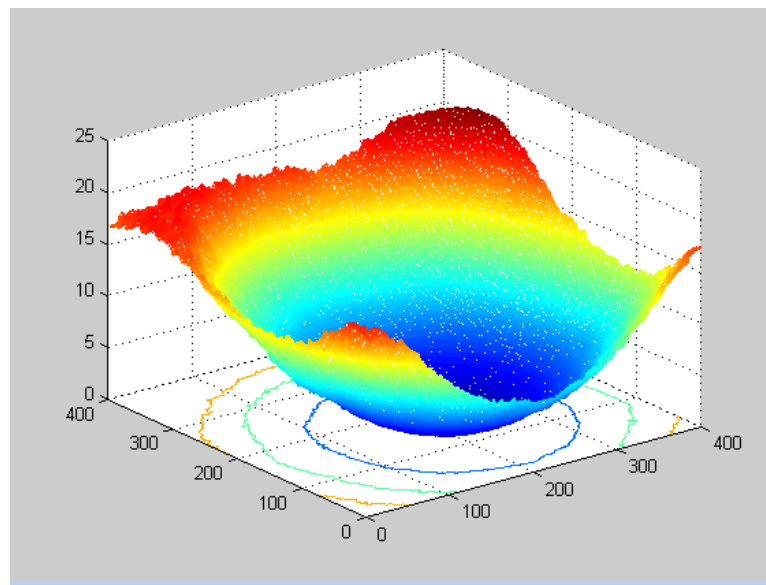
一、分割图片提取特征对象，有我们写得方差计算式得到下面两个比较好的特征对象：

坑对象：

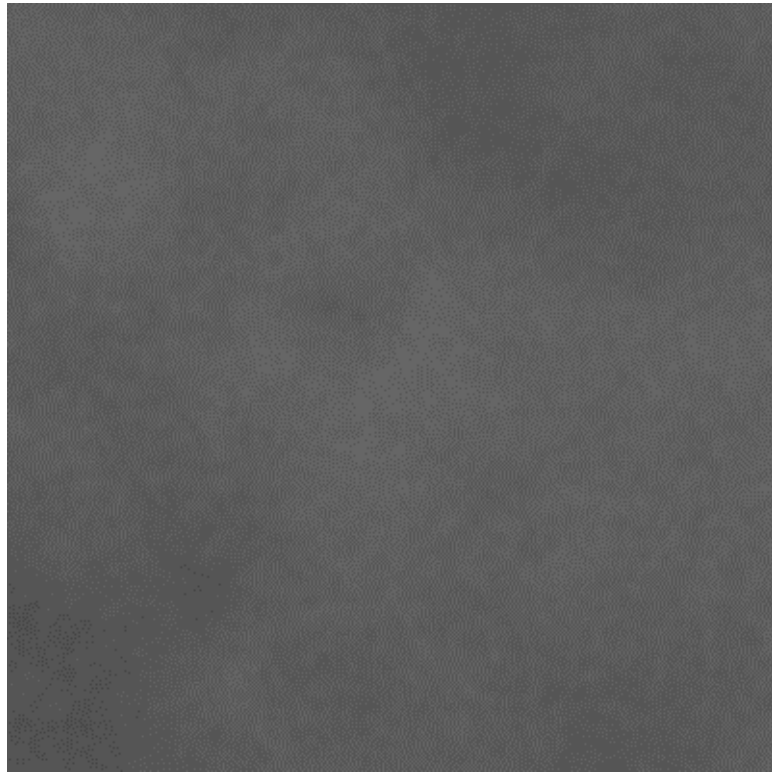


.tif 提取对象（坑）

坑对象是通过方差拟合得到的关于月表的具有显著大坑特征的地貌特征，利用这个对象可以有效地区分一片未知的地貌的属性，当然这得配合下面的平地对象才能发挥作用，因为在采用 K-Means 算法聚合时必须对 k 个对象同时进行聚合判断才能发挥作用。下面是坑对象的三维表面图形，可以看到，这个对象却是精确的表征了大坑这种地貌的显著特征。

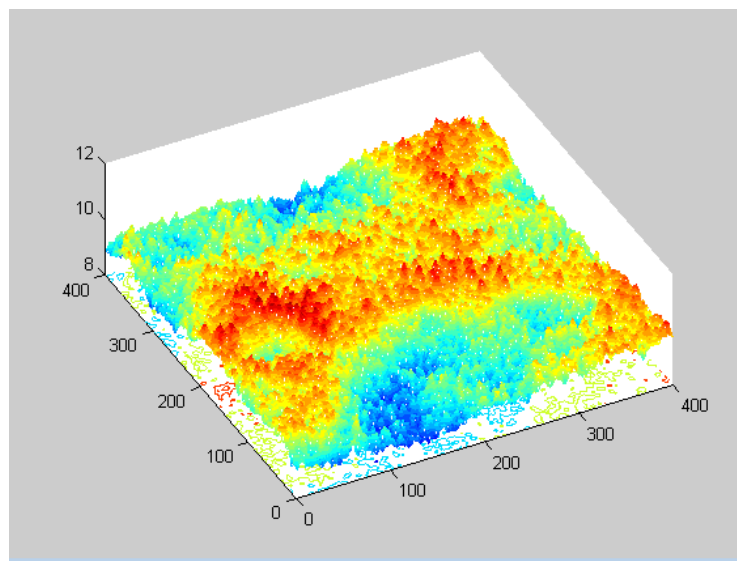


平面对象：



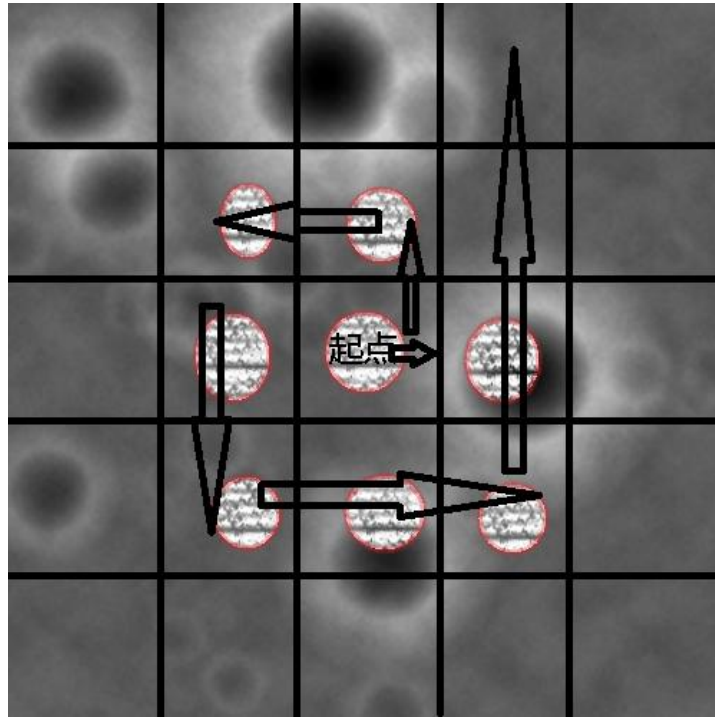
.tif 平地对象 tif 图

平地对象是通过方差拟合得到的关于月表的具有显著；平地特征的地貌特征，利用这个对象可以有效的区分一片未知的地貌的属性，当然这得配合前面的坑对象才能发挥作用，因为在采用 K-Means 算法聚合时必须对 k 个对象同时进行聚合判断才能发挥作用。下面是平地对象的三维表面图形，可以看到，这个对象确实是较为精确的表征了平地这种地貌的显著特征。



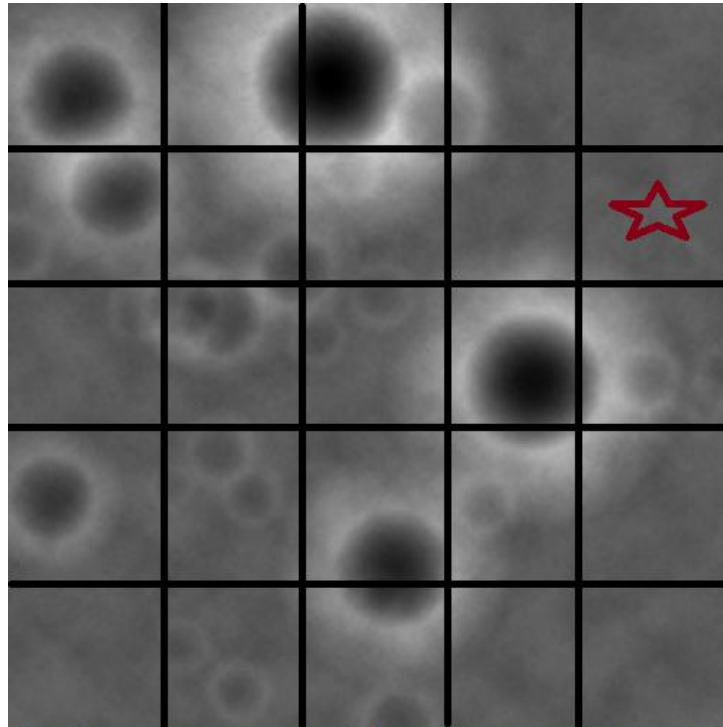
.tif 平地对象三维立体图

二、螺旋搜索过程:

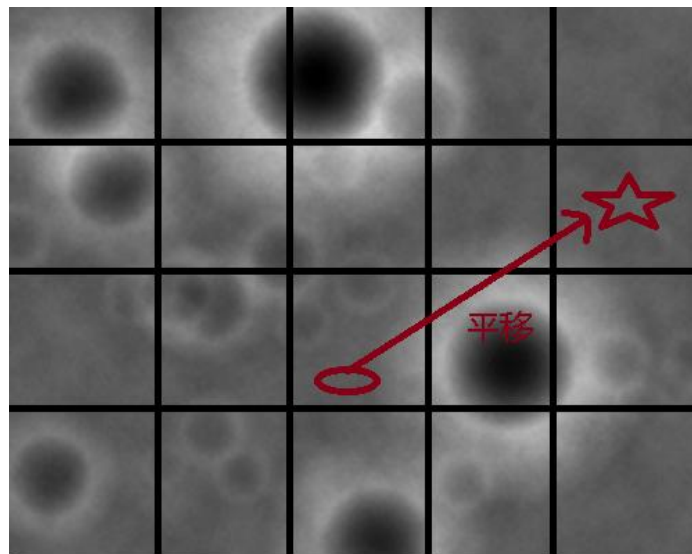


螺旋搜索过程示意图

通过这个螺旋搜索法,以嫦娥在中心的投影为起点,逆时针的沿着类螺旋线的方向螺旋式的搜索逐步搜索,遇到平地就将其纳入我们的平地集合之中,遇到大坑就跳过,最终会一串平地的序列,我们只需从中找出那块离投影点最近的平坦地貌就达到了目的。

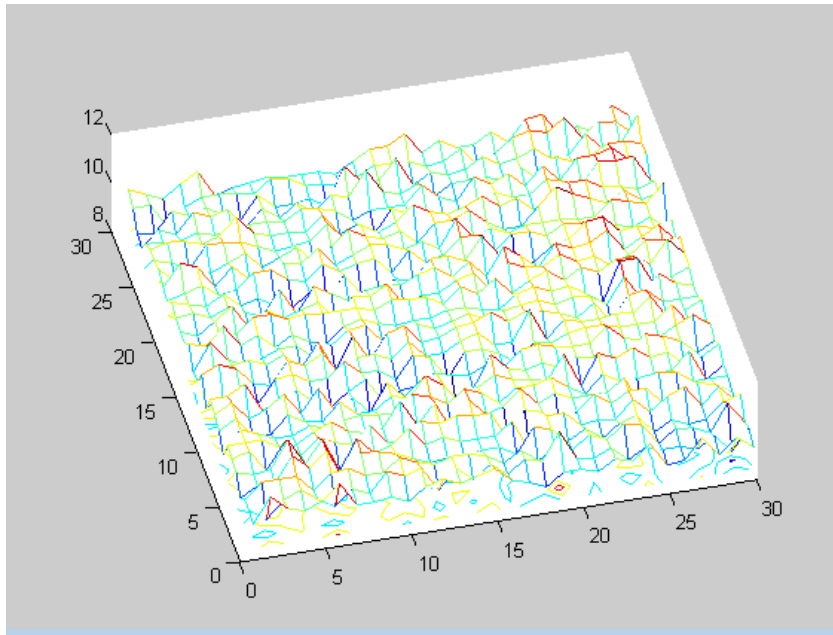


为了是燃料达到最优，我们只需要将卫星沿着投影点和目标区域的连线的方向平移至目标点的上方即可：



4.2.4 精细避障阶段模型的解答

方法：采用和粗避障阶段相同的模型，只不过将每次搜索的范围变为之前的百分之一，使得精度大为提高。采用相同的手段提取出两类特征对象”坑对象”以及”平坦地面对象”：即是我们采用相同的算法，对精细避障阶段进行分析，这里灵敏度大大提高，这里，我们将算法的精细程度提高了 100 倍，运行程序之后得到的目标区域是下面的这个地方，位于 100 米拍摄图的右上位置，理想落点位于区域的中心位置：



一百米精细避障的落地区域

五、误差分析和敏感度分析

5.1 误差分析

发动机推力偏差对软着陆过程的影响

发动机推力偏差为 $\pm 10\%$ ，标准推力为 7500N ，最小推力为 1500N ，最大推力为 7500N 。由于制导控制率不变，着陆器仍然能下降到月球表面 2km 的高度，但时间会缩短。由图 0-可见推力的增大可以缩短着陆器下降的时间。

由于比冲不变，推力变化会引起燃料消耗速度的变化，如错误!未找到引用源。-1 所示。然而，由于飞行时间的减小，大推力下总的燃料消耗量会减小。可见采用大推力发动机可以减小燃料的使用量。但实际情况下还要考虑大推力发动机是否会增加额外的重量，因为推力增大对燃料的节约很有效。

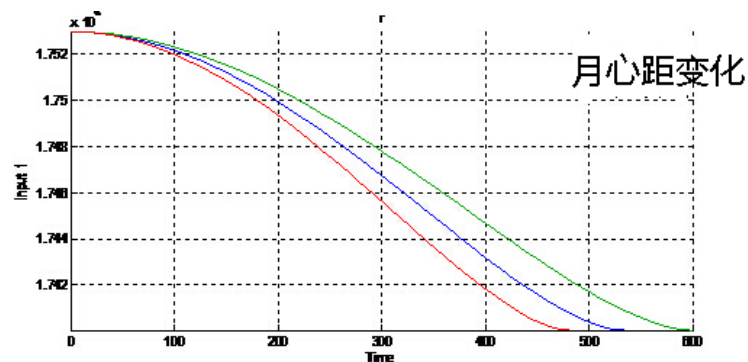


图 0-1 到月心距离随时间变化曲线

比冲偏差对软着陆过程的影响

发动机比冲偏差为 $\pm 10\%$ ，标准比冲为 2940，最小比冲为 2911，最大比冲为 2969。比冲偏差对着陆过程的影响要小于推力偏差的影响。在相同的推力下，推进剂的比冲越大，会延长下降段的时间。这会需要发动机工作更长时间。但由于当推力一定时，大比冲的推进剂单位时间的消耗量更少，所以综合考虑大比冲推进剂在下降段消耗的推进剂质量更少，如图 0-所示。

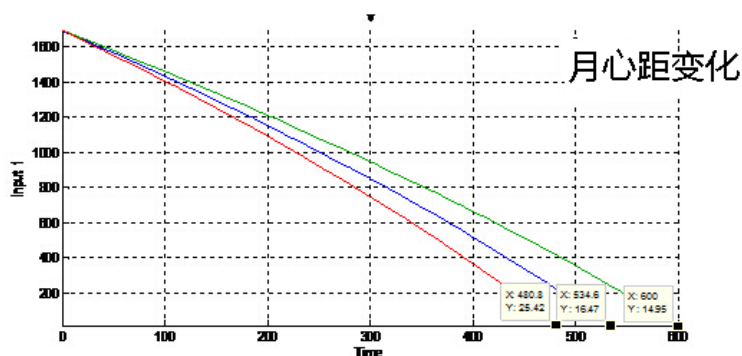


图 0-2 到月心距离虽时间变化曲线

初始速度方向偏差对软着陆过程的影响

为了研究初始速度方向偏差对着陆过程的影响，定义另外两个情况。分别为将初始速度向 x 轴方向偏转 5° ，和将初始速度方向朝 y 轴偏转 5° 。根据初速度 $u_0 = 0$ ， $v_0 = 1692m/s$ ， $w_0 = 0$ 计算出另外两组初始速度为： $u_0 = 0$ ， $v_0 = 1686m/s$ ， $w_0 = 147m/s$ ； $u_0 = 147m/s$ ， $v_0 = 1686m/s$ ， $w_0 = 0$ 。

由图 0-可以看出，着陆器高度的变化曲线不受横向偏航的影响。着陆器的飞行轨迹与初始的俯仰方向有关。

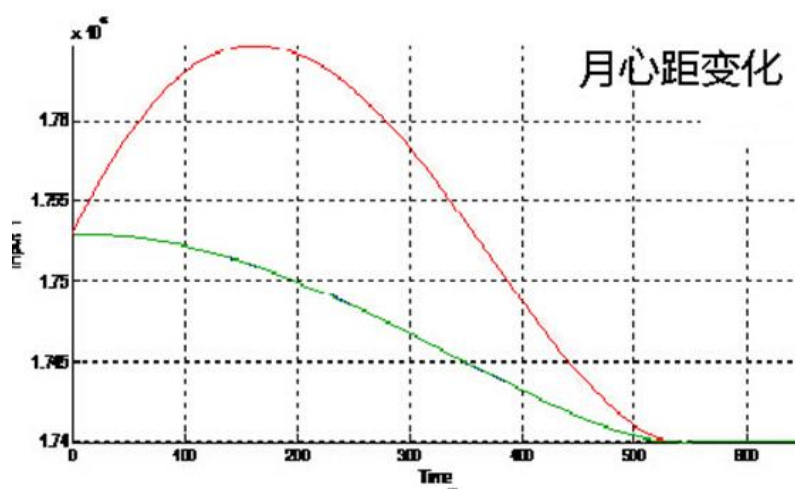


图 0-3 到月心距离虽时间变化曲线

5.2 敏感度分析

由误差分析可知,主推力和比冲越大,所消耗的推进剂越少,因此控制在最大值最优;初速度俯仰方向对滞空时间有影响,因此影响推进剂的量。通过图可看出,初速度俯仰方向对最优解影响较小即敏感度较低,而主推力和比冲影响都较明显,但是比冲通常变化较少,而主推力更易发生偏移,因此主推力对最优质敏感度要高于比冲对最优质敏感度。

六、模型的优缺点

6.1 模型的优点

- (1) 显示制导律根据着陆器当前状态实时计算控制量,是一种闭环显式制导律,且具备燃耗次优的特性,具有一定的工程应用价值。
- (2) 模型具有坚实的物理基础。很多物理理论已经证明模型的优越性。
- (3) 模型算法整体上较为简单,只是利用一些易懂的公式。

6.2 模型的缺点

- (1) 模型忽略了很多现实因素,如月球自转,环境因素等。
- (2) 考虑误差的影响因素较少,不能更全面地分析出敏感度。
- (3) 分阶段建立模型,模型间联系性较差。

七、参考文献

- [1]杨杰. 数字图像处理及 MATLAB 实现. 北京: 电子工业出版社, 2010
- [2]韩忠庚. 数学建模方法及其应用. 北京: 高等教育出版社, 2009
- [3]肖溪安. 集合论导引. 大连: 大连理工大学出版社, 2008
- [4]李俊峰. 登月飞行器软着陆轨道的遗传算法优化. 北京, 清华大学学报, 2003
- [5]刘志全、黄传平. 月球探测器软着陆机构发展综述. 北京: 中国空间学技术, 2006
- [6]步媛媛、关忠仁. 基于 K-means 聚类算法的研究. 成都: 西南民族大学学报·自然科学版, 2009
- [7]李飞、薛彬、黄亚楼. 初始中心优化的 K-Means 聚类算法. 天津: 计算机科学, 2002
- [8]JIAWEI HAN, MICHELINE KAMBER. 数据挖掘概念与技术[M]. 范明, 孟小峰, 译. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [9]张防, 平面度误差的最小二乘法分析. 江苏: 机械制造与研究, 2002
- [10]Han I, Kamber M. Data Mining: Concepts and Techniques. Berlin: Morgan Kaufmann Publishers, 2000.
- [11]Hathaway RJ, Bezdek JC, Hu YK. Generalized fuzzy c-means clustering strategies using Lp norm distances. IEEE Trans. on

Fuzzy Systems, 2000

[12]Yang MS, Wu KL, Yu J. A novel fuzzy clustering algorithm. In: Proc. of the 2003 IEEE Int'l Symp. on Computational Intelligence in Robotics and Automation. Kobe: IEEE, 2003.

附录

附录一

```
v1(1:1000)=1690;
v2(1:1000)=0;
s1(1:1000)=15000;s2(1:1000)=0;
f=7500;
I=2940;
G=6.67*10^-11;
r=1.735*10^6;
M=7.3477*10^22;
g=G*M/r^2-1.364;
m=2400;
for i=1:1000
    s1(i+1)=s1(i)-v2(i);
    s2(i+1)=s2(i)+v1(i);
    v1(i+1)=v1(i)-f/m*v1(i)/sqrt(v1(i)^2+v2(i)^2);
    v2(i+1)=v2(i)+(g-f/m*v2(i)/sqrt(v1(i)^2+v2(i)^2));
    m=m-f/I;
    if(s1(i+1)<3000)
        i
        s2(i+1)
        break;
    end
end
```

附录二

```
vr(1:1000)=0;
vt(1:1000)=1690;
r=1.735*10^6;
s1(1:1000)= r+15000;
f=7500;
I=2940;
G=6.67*10^-11;
M=7.3477*10^22;
```

```

g=G*M/r^2-0.448;
m=2400;
for i=1:1000
    s1(i+1)=s1(i)-vr(i);
    vt(i+1)=vt(i)-f/m*vt(i)/sqrt(vt(i)^2+vr(i)^2)-2*vr(i)*vt(i)/r;
    vr(i+1)=vr(i)+(g-f/m*vr(i)/sqrt(vr(i)^2+vt(i)^2))-vt(i)^2/r1;
    m=m-f/I;
    if(s1(i+1)<r+3000)
        i
        break;
    end
end
end

```

附录三

```

g=imread('距 2400m 处的数字高程图.tif');
%imshow(g);
g=double(g);
%disp(size(g));
[x,y]=size(g);
[X,Y]=meshgrid(1:x,1:y);
mesh(X,Y,g);
%disp(p);

```

附录四

```

g=imread('image911711.tif');
g=double(g);
[x,y]=size(g);
[X,Y]=meshgrid(1:x,1:y);
meshc(X,Y,g/10); %带等高线的三维图
%disp(g/10);
%imshow(g);
%surf(X,Y,g/10);

```

附录五

```

syms d1 d2 a b c r ;
d1=15000.000;
d2=100000.000;
r=1737013;
a=(d1+d2+2*r)/2;
c=(a-r-d1);
b=sqrt(a^2-c^2);
disp(a);

```



```

disp(b);
disp(c);
hold on;
theta=linspace(0,2*pi,1000);
X=a*cos(theta);Y=b*sin(theta);
plot(X,Y);
plot(0,Y);
plot(X,0);
hold on;
x=-c*10+r/5*(+cos(theta));y=r/5*sin(theta);

plot(x,y);
xlabel('X');ylabel('Y');
plot(-c,0);

syms v G M ;
M=7.3477e+22;
G=6.67e-11;
v=sqrt((a+c)*G*M/(a*(a-c)));
disp(v);
v=sqrt((a-c)*G*M/(a*(a+c)));
disp(v);
%M=5.96e+24;
%disp(sqrt(G*M/r));

```

附录六：

```

function [s] = ww(p)
    syms s t sum;
    t=size(p);
    %计算高度的平均值
    sum=0.0;
    for i=1:1:t(1)
        for j=1:1:t(2)
            sum=sum+p(i,j);
        end
    end
    sum=sum/(t(1)*t(2));
    s=0.0;
    for i=1:1:t(1)
        for j=1:1:t(2)
            s=s+(p(i,j)-sum)^2;
        end
    end

```

```

        end
    end
    s=s/(t(1)*t(2));
    s=sqrt(s);
end

```

附录七（避障）

```

ground=imread('2400.tif');
p=zeros(400,400);
minp=zeros(400,400);
s=1000;
m=-1;
n=-1;
for k=1:30:1800
    for r=1:30:1800
        for i=1:1:400
            for j=1:1:400
                p(i,j)=ground(i+k,j+r);
            end
        end
        t=ww(p);
        if s>t
            s=t;
            m=t;
            n=r;
            for i=1:1:400
                for j=1:1:400
                    minp(i,j)=p(i,j);
                end
            end
        end
    end
    a=num2str(k*10000+r);
    file=['C:\Users\dsd-dell\Desktop\数学建模
\A\jianmoCode\pic\image',a,'.tif'];
    imwrite( uint8(p),file,'tif' );
end
end

hold on;
disp(s);
disp(m);

```

```

disp(n);
g=double(minp);
[x,y]=size(g);
[X,Y]=meshgrid(1:x,1:y);
meshc(X,Y,g/10);%带等高线的三维图

```

```

%imshow();
%surf(X,Y,g/10);

```

附录 8

```

syms x0 y0 z0 r a b c;
a=2000;
b=1800;
c=400;
colormap(gray);
hold on;
x0=0;y0=0;z0=0;%球心
r=1300;
[x,y,z]=sphere(80);
surf(r*x+x0,r*y+y0,r*z+z0);
axis equal;
t=0:0.1:2*pi;
%plot(1794.5*cos(t),1794.0*sin(t));
%plot(2500*cos(t),1900*sin(t));
ezplot('( (x-400)^2)/2000^2 +(y^2)/1800^2 - 1', [-2000,2500,-2200,2200]);
%画出两个月点

```

```

x0=a+c;y0=0;z0=0;
r=50;
[x,y,z]=sphere(100);
surf(r*x+x0,r*y+y0,r*z+z0);
x0=-a+c;
surf(r*x+x0,r*y+y0,r*z+z0);
axis equal;
grid on;
hold off;

```