# উচ্চমাধ্যমিক উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

## অধ্যায়-১: বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা

**প্রশ্ন ▶ ১** $f(x) = x - 1$ যেখানে $x \in \mathbb{R}$. /চ. বো. ১৭/

ক. $-2 < 2 - f(x) < 8$ অসমতাকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. $|f(x)| < \frac{1}{10}$ হলে, দেখাও যে, $|f(x).f(x+2)| < \frac{21}{100}$. ৪

গ. $|3\, f(x) - 1| < 2$ অসমতাকে সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

### ১ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$

$\therefore \quad -2 < 2 - f(x) < 8$

বা, $\quad -2 < 2 - x + 1 < 8$

বা, $\quad -2 < 3 - x < 8$

বা, $\quad -2 - 3 < 3 - 3 - x < 8 - 3$

[অসমতা চিহ্নের প্রত্যেক পার্শ্বের সংখ্যার সাথে $(-3)$ যোগ করে পাই]

বা, $\quad -5 < -x < 5$

বা, $\quad 5 > x > -5$

বা, $\quad -5 < x < 5$

$\therefore \quad |x| < 5$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$

$\therefore f(x+2) = x + 2 - 1 = x + 1$

এখন, $|f(x)| < \frac{1}{10}$ বা, $|x - 1| < \frac{1}{10}$

বা, $-\frac{1}{10} < x - 1 < \frac{1}{10}$

বা, $-\frac{1}{10} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{10} + 1$

বা, $\frac{9}{10} < x < \frac{11}{10}$ বা, $\frac{81}{100} < x^2 < \frac{121}{100}$

বা, $\frac{81}{100} - 1 < x^2 - 1 < \frac{121}{100} - 1$

বা, $\frac{81 - 100}{100} < x^2 - 1 < \frac{121 - 100}{100}$

বা, $-\frac{19}{100} < (x+1)(x-1) < \frac{21}{100}$

বা, $-\frac{21}{100} < f(x)\, f(x+2) < \frac{21}{100}$ $\left[\because \frac{-19}{100} > \frac{-21}{100}\right]$

$\therefore |f(x)\, f(x+2)| < \frac{21}{100}$ **(দেখানো হলো)**

**গ** $|3\, f(x) - 1| < 2$

বা, $\quad |3(x - 1) - 1| < 2$

বা, $\quad |3x - 3 - 1| < 2$

বা, $\quad |3x - 4| < 2$

বা, $\quad -2 < 3x - 4 < 2$

বা, $\quad -2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 2 + 4$ [প্রত্যেক পার্শ্বে 4 যোগ করে]

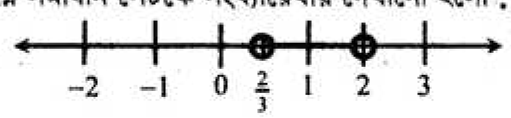
বা, $\quad 2 < 3x < 6$

বা, $\quad \frac{2}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{6}{3}$ [প্রত্যেক পার্শ্বকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \quad \frac{2}{3} < x < 2$

$\therefore \quad$ নির্ণেয় সমাধান সেট $= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{3} < x < 2\right\}$

নিম্নে সমাধান সেটকে সংখ্যারেখায় দেখানো হলো :




**প্রশ্ন ▶ ২** দৃশ্যকল্প-১ : $L = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 5x < 0\}$ /য. বো. ১৭/

দৃশ্যকল্প-২ : $f(x) = x^2 - x$

ক. সমাধান কর : $|2x - 7| > 5$ ২

খ. L এর সমাধান সেটের অসমতাটিকে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

গ. সংখ্যারেখার সাহায্যে $f(x) \le 0$ এর সমাধান কর। ৪

### ২ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে, $|2x - 7| > 5$

$\therefore\ 2x - 7 > 5$ অথবা, $2x - 7 < -5$

বা, $2x > 5 + 7$ বা, $2x < -5 + 7$

বা, $2x > 12$ বা, $2x < 2$

বা, $x > \frac{12}{2}$ বা, $x < \frac{2}{2}$

$\therefore\ x > 6$ $\therefore\ x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x > 6$ অথবা $x < 1$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $L = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 5x < 0\}$

এখানে, $2x^2 + 5x < 0$

বা, $\quad x^2 + \frac{5}{2}x < 0$

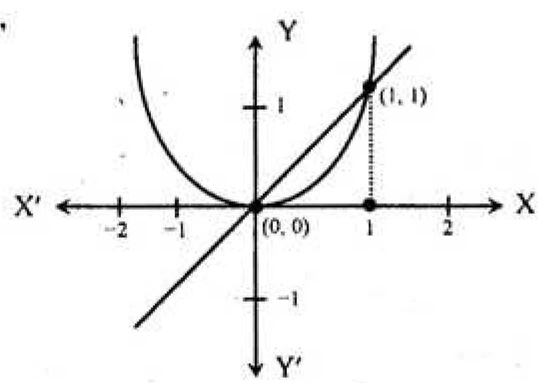
বা, $\quad x^2 + 2.\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$

বা, $\quad \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\therefore \quad \left|x + \frac{5}{4}\right| < \frac{5}{4}$

যা নির্ণেয় পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ। **(Ans.)**

**গ** দৃশ্যকল্প-২ হতে পাই,




$f(x) = x^2 - x$

$\therefore\ f(x) \le 0$

বা, $x^2 - x \le 0$

ধরি $g(x) = x^2$ এবং $h(x) = x$

এখন $g(x)$ ও $h(x)$ এর লেখচিত্র সংখ্যারেখায় বসাই।

সংখ্যারেখা থেকে আমরা দেখতে পাই যে $g(x)$ ও $h(x)$ ফাংশনদ্বয় $(0, 0)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং

$[0, 1]$ সীমায় $g(x) - h(x) \le 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $[0, 1]$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৩** $f(x) = x$ এবং $g(x) = x - 5, x \in \mathbb{R}$ /মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল/

ক. সমাধান কর : $|7x - 5| < 2$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|f(a) + f(b)| \le |f(a)| + |f(b)|$ ৪

গ. যদি $|g(y)| < \frac{1}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে, $|8y^3 + 29| < 1360$ ৪

### ৩ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** $|7x - 5| < 2$

বা, $-2 < 7x - 5 < 2$

বা, $-2 + 5 < 7x - 5 + 5 < 2 + 5$

বা, $3 < 7x < 7$

বা, $\frac{3}{7} < \frac{7x}{7} < \frac{7}{7}$

$\therefore$ $\frac{3}{7} < x < 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{7} < x < 1$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = x$

$\therefore f(a) = a$

এবং $f(b) = b$

$\therefore$ $(|f(a)| + |f(b)|)^2 = (|a| + |b|)^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$
$= a^2 + 2|ab| + b^2$
$[\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \ge a^2 + 2ab + b^2$ $[\because |ab| \ge ab]$

বা, $(|a| + |b|)^2 \ge (a + b)^2$

বা, $(|a| + |b|)^2 \ge (|a + b|)^2$

বা, $|a + b|^2 \le (|a| + |b|)^2$

$\therefore$ $|a + b| \le |a| + |b|$

$\therefore$ $|f(a) + f(b)| \le |f(a)| + |f(b)|$ **(প্রমাণিত)**

**গ** দেওয়া আছে, $g(x) = x - 5$

$\therefore g(y) = y - 5$

$\therefore$ $|g(y)| < \frac{1}{2}$

বা, $|y - 5| < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} < y - 5 < \frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} + 5 < y - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$ [প্রত্যেক পক্ষে 5 যোগ করে]

বা, $\frac{-1 + 10}{2} < y < \frac{1 + 10}{2}$

বা, $\frac{9}{2} < y < \frac{11}{2}$

বা, $\left(\frac{9}{2}\right)^3 < y^3 < \left(\frac{11}{2}\right)^3$ [প্রত্যেক পক্ষকে ঘন করে]

বা, $\frac{729}{8} < y^3 < \frac{1331}{8}$

বা, $729 < 8y^3 < 1331$ [প্রত্যেক পক্ষকে 8 দ্বারা গুণ করে]

বা, $729 + 29 < 8y^3 + 29 < 1331 + 29$ [প্রত্যেক পক্ষে 29 যোগ করে]

বা, $758 < 8y^3 + 29 < 1360$

বা, $-1360 < 758 < 8y^3 + 29 < 1360$

$\therefore$ $|8y^3 + 29| < 1360$ **(দেখানো হলো)**

**প্রশ্ন ▶ ৪** $x, y \in \mathbb{R}$ /পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা/

ক. বাস্তব সংখ্যার অভেদকের অস্তিত্ব কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|x + y| \le |x| + |y|$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $|x - y| \le |x| + |y|$ ৪

### ৪ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** **অভেদকের অস্তিত্ব (Existence of identity) ঃ** একটি মাত্র সংখ্যা 0 (শূন্য) $\in \mathbb{R}$ বিদ্যমান, যেন সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য $a + 0 = 0 + a = a$ এবং একটি মাত্র সংখ্যা $1 \in \mathbb{R}$ বিদ্যমান যেন সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য $a.1 = 1.a = a$ । 0 এবং 1 কে যথাক্রমে যোগ ও গুণনের অভেদক বলা হয়।

**খ** $(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$
$= x^2 + 2|xy| + y^2$ $[\because |x|^2 = x^2, |y|^2 = y^2, |x||y| = |xy|]$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge x^2 + 2xy + y^2$ $[\because |xy| \ge xy]$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge (x + y)^2$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge (|x + y|)^2$

বা, $|x + y|^2 \le (|x| + |y|)^2$

$\therefore$ $|x + y| \le |x| + |y|$ **(প্রমাণিত)**

**গ** $|-xy| \ge -xy$ $[\because |a| \ge a]$

বা, $2|xy| \ge -2xy$ $[\because |-a| = |a|]$

বা, $x^2 + y^2 + 2|x||y| \ge x^2 + y^2 - 2xy$ $[\because |xy| = |x||y|]$

বা, $|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \ge (x - y)^2$

বা, $(|x| + |y|)^2 \ge |x - y|^2$

যেহেতু $|x| + |y| \ge 0$ এবং $|x - y| \ge 0$

সুতরাং উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে পাই, $|x - y| \le |x| + |y|$ **(প্রমাণিত)**

**প্রশ্ন ▶ ৫** $f(x) = x^2 - 2x + 2, g(x) = x - 8$ /পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা/

ক. $f(x) = 0$ এর কতটি মূল রয়েছে? কেন? ২

খ. $-8 < g(x) - 3 < 10$ অসমতাটি পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

গ. $f(x) < 17$ অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর। ৪

### ৫ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 2x + 2$

এখন, $f(x) = 0$

বা, $x^2 - 2x + 2 = 0$ ... ... ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের 2টি মূল রয়েছে। কারণ, সমীকরণটির ঘাত 2। **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $g(x) = x - 8$

$\therefore$ $-8 < g(x) - 3 < 10$

বা, $-8 < x - 8 - 3 < 10$

বা, $-8 < x - 11 < 10$

বা, $-8 + 11 < x - 11 + 11 < 10 + 11$

বা, $3 < x < 21$

বা, $-21 < x < 21$ $[\because -21 < 3]$

বা, $|x| < 21$ $[\because -\alpha < x < \alpha \Rightarrow |x| < \alpha]$

$\therefore$ $|x| < 21$ **(Ans.)**

**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 2x + 2$

$\therefore$ অসমতাটি হল : $f(x) < 17$

বা, $x^2 - 2x + 2 < 17$

বা, $x^2 - 2x + 2 - 17 < 0$

বা, $x^2 - 2x - 15 < 0$

বা, $x^2 - 5x + 3x - 15 < 0$

বা, $x(x - 5) + 3(x - 5) < 0$

বা, $(x - 5)(x + 3) < 0$

| শর্ত | $(x + 3)$ এর চিহ্ন | $(x - 5)$ এর চিহ্ন | $(x + 3)(x - 5)$ এর চিহ্ন |
|---|---|---|---|
| $x < -3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $-3 < x < 5$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $x > 5$ | $+$ | $+$ | $+$ |

নির্ণেয় সমাধান: $-3 < x < 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $S = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 5\}$ **(Ans.)**

**প্রশ্ন ▶ ৬** $f(x) = 3x - 2, |x + y| < \frac{7}{3}$ /ঢাকা কলেজ, ঢাকা/

ক. যদি $p, q, r \in \mathbb{R}$, $pq = rq$ এবং $q \ne 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $p = r$। ২

খ. $\frac{1}{|f(x - 2) + 3|} > 3$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. দেখাও যে, $|f(2x) + f(2y)| < 10$ ৪

### ৬ নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** যেহেতু $q \ne 0$, সুতরাং q এর গুণাত্মক বিপরীতক বা, $q^{-1}$ এর অস্তিত্ব আছে।

কল্পনানুসারে, $pq = rq$

বা, $(pq)q^{-1} = (rq)q^{-1}$ [গুণনের অনন্যতা বিধি]

বা, $p(qq^{-1}) = r(qq^{-1})$ [সংযোজন যোগ্যতা বিধি অনুসারে]

বা, $p.1 = r.1$ [গুণের বিপরীতক]

$\therefore$ $p = r$ [গুণের অভেদক] **(দেখানো হলো)**

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - 2$

$\therefore f(x - 2) = 3(x - 2) - 2$
$= 3x - 6 - 2 = 3x - 8$

$\therefore$ $\frac{1}{|f(x - 2) + 3|} > 3$

বা, $|f(x - 2) + 3| < \frac{1}{3}$

বা, $|3x - 8 + 3| < \frac{1}{3}$

বা, $|3x - 5| < \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} < 3x - 5 < \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{3} + 5$

বা, $\frac{-1+15}{3} < 3x < \frac{1+15}{3}$

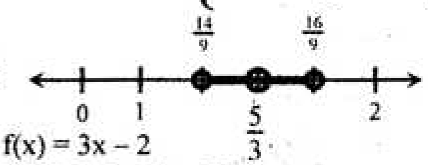
বা, $\frac{14}{3} < 3x < \frac{16}{3}$

বা, $\frac{14}{9} < x < \frac{16}{9}$ [উভয় পক্ষকে $\left(\frac{1}{3}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\frac{14}{9} < x < \frac{16}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{14}{9} < x < \frac{16}{9} \text{ এবং } x \neq \frac{5}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায় :




**গ** দেওয়া আছে, $f(x) = 3x - 2$

$\therefore$ $f(2x) = 3(2x) - 2 = 6x - 2$

এবং $f(2y) = 3(2y) - 2 = 6y - 2$

এখন, $|x + y| < \frac{7}{3}$

বা, $\frac{-7}{3} < x + y < \frac{7}{3}$

বা, $\frac{-6 \times 7}{3} < 6(x + y) < 6 \times \frac{7}{3}$ [উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করে]

বা, $-14 < 6x + 6y < 14$

বা, $-14 - 4 < 6x + 6y - 4 < 14 - 4$ [উভয় পক্ষে 4 বিয়োগ করে]

বা, $-18 < 6x - 2 + 6y - 2 < 10$

বা, $-10 < f(2x) + f(2y) < 10$ [$\because -18 < -10$]

$\therefore$ $|f(2x) + f(2y)| < 10$ **(দেখানো হলো)**

**প্রশ্ন ▶ ৭** $f(x) = 3x$ *[সরকারি বঙ্গবন্ধু বিশ্ববিদ্যালয় কলেজ, গোপালগঞ্জ]*

ক. যদি $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a + c = b + c$ হয় তবে দেখাও যে, $a = c$ ২

খ. সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও,

$\frac{1}{|f(x) - 5|} > 2, \left(x \neq \frac{5}{3}\right)$ ৪

গ. $|f(x) - 2x - 1| < \frac{1}{10}$ হলে দেখাও যে, $\left|\left[\left(\frac{1}{3}\right) f(x)\right]^2 - 1\right| < 1$ ৪

**৭ নং প্রশ্নের সমাধান**

**ক** $a + c = b + c$ [কল্পনা]

বা, $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$ [যোগের অনন্যতা বিধি]

বা, $a + \{c + (-c)\} = b + \{c + (-c)\}$ [যোগের সংযোগ বিধি]

বা, $a + 0 = b + 0$ [যোগের বিপরীতক]

$\therefore$ $a = c$ **(দেখানো হলো)** [যোগের অভেদক]

**খ** দেওয়া আছে, $f(x) = 3x$

$\therefore$ $\frac{1}{|f(x) - 5|} > 2 \left(x \neq \frac{5}{3}\right)$

বা, $\frac{1}{|3x - 5|} > 2 \left(x \neq \frac{5}{3}\right)$

বা, $|3x - 5| < \frac{1}{2}$ বা, $-\frac{1}{2} < 3x - 5 < \frac{1}{2}$

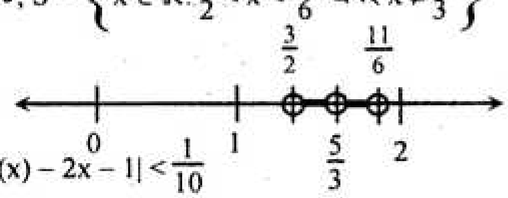
বা, $-\frac{1}{2} + 5 < 3x - 5 + 5 < \frac{1}{2} + 5$

বা, $\frac{9}{2} < 3x < \frac{11}{2}$ $\therefore$ $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{3}{2} < x < \frac{11}{6}$ এবং $x \neq \frac{5}{3}$

নির্ণেয় সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{3}{2} < x < \frac{11}{6} \text{ এবং } x \neq \frac{5}{3}\right\}$

সংখ্যারেখায়:




**গ** দেওয়া আছে, $|f(x) - 2x - 1| < \frac{1}{10}$

বা, $|3x - 2x - 1| < \frac{1}{10}$ [$\because f(x) = 3x$]

বা, $|x - 1| < \frac{1}{10}$ ………… (i)

বা, $|x - 1| + 2 < \frac{1}{10} + 2$

এখন, $|x - 1| + 2 \geq |x - 1 + 2| \geq |x + 1|$

$\therefore$ $|x + 1| < \frac{1}{10} + 2$ বা, $|x + 1| < \frac{1 + 20}{10}$

বা, $|(x + 1)| < \frac{21}{10}$ ………… (ii)

(i) × (ii) হতে, $|x - 1| |x + 1| < \frac{1}{10} \times \frac{21}{10}$

বা, $|(x - 1)(x + 1)| < \frac{21}{100}$ [$\because |a| |b| = |ab|$]

বা, $|x^2 - 1| < \frac{21}{100}$ বা, $\left|\left(\frac{3x}{3}\right)^2 - 1\right| < \frac{21}{100}$

বা, $\left|\left[\frac{1}{3} f(x)\right]^2 - 1\right| < \frac{21}{100}$

$\therefore$ $\left|\left[\frac{1}{3} f(x)\right]^2 - 1\right| < 1$ $\left[\because \frac{21}{100} < 1\right]$ **(দেখানো হলো)**

**প্রশ্ন ▶ ৮** $f(x) = x - 1$ একটি ফাংশন।

*[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]*

ক. $-3 < f(x) < 5$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. $\frac{1}{|f(x) - 1|} \geq 5$ অসমতাটি সমাধান কর ও সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও। ৪

গ. $|f(x)| < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $|x^2 - 1| < \frac{11}{25}$ ৪

**৮ নং প্রশ্নের সমাধান**

**ক** দেওয়া আছে, $f(x) = x - 1$

প্রশ্নমতে, $-3 < f(x) < 5 \Rightarrow -3 < x - 1 < 5$

$\Rightarrow -3 - 1 < x - 1 - 1 < 5 - 1$ [1 বিয়োগ করে]

$\Rightarrow -4 < x - 2 < 4$

$\therefore$ $|x - 2| < 4$ **(Ans.)**

**খ** দেওয়া আছে, $\frac{1}{|f(x) - 1|} \geq 5$

$\Rightarrow \frac{1}{|x - 2|} \geq 5$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ হলে প্রদত্ত অসমতাটি অসংজ্ঞায়িত হয়ে যাবে।

$\therefore$ $x \neq 2$

এখন, $\frac{1}{|x - 2|} \geq 5 \Rightarrow |x - 2| \leq \frac{1}{5}$ [ব্যস্তকরণ করে]

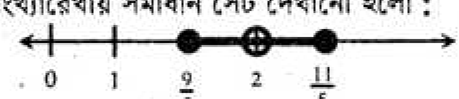
$\Rightarrow -\frac{1}{5} \leq x - 2 \leq \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + 2 \leq x - 2 + 2 \leq \frac{1}{5} + 2$

$\therefore$ $\frac{9}{5} \leq x \leq \frac{11}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $= \frac{9}{5} \leq x \leq \frac{11}{5}$ এবং $x \neq 2$

$\therefore$ সমাধান সেট, $S = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{9}{5} \leq x \leq \frac{11}{5} \text{ এবং } x \neq 2\right\}$

নিম্নে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হলো :




**গ** দেওয়া আছে, $|f(x)| < \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $|x - 1| < \frac{1}{5}$ ………… (i)

$\therefore$ $|x + 1| = |x - 1 + 2| \leq |x - 1| + 2 < \frac{1}{5} + 2$

$\therefore$ $|x + 1| < \frac{11}{5}$ ……… (ii)

(i) ও (ii) গুণ করে পাই, $|x - 1| |x + 1| < \frac{1}{5} \cdot \frac{11}{5}$

$\Rightarrow$ $|(x - 1)(x + 1)| < \frac{11}{25}$

$\therefore$ $|x^2 - 1| < \frac{11}{25}$ **(দেখানো হলো)**