উচ্চমাধ্যমিক উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়-২: যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম

প্রশ্ন ▶ ১ দৃশ্যকল্প-১: $p = x - 5, x \in \mathbb{R}$. *[রা. বো. ১৭]*

দৃশ্যকল্প-২: $f = 2x + 3y$, $g = 5x + 3y$ যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$.

ক. বাস্তব সংখ্যায় বিপরীত এর অস্তিত্ব ব্যাখ্যা কর। ২

খ. $\frac{1}{|p|} \geq 3$ হলে $(x \neq 5)$ সমাধান সেট নির্ণয় করে সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

গ. দৃশ্যকল্প ২ এর আলোকে $f \leq 12$, $g \geq 15$ এবং $x, y \geq 0$ হলে লেখচিত্রের মাধ্যমে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি নির্বাচন কর। শর্তে কী পরিবর্তন করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি চতুর্ভুজ হবে? ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বিপরীতকের অস্তিত্বশীলতা: সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য, একটি মাত্র $-a \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a + (-a) = (-a) + a = 0$ হবে। এখানে, $-a$ কে a এর যোগের বিপরীতক বলা হয়। আবার, সকল $a \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$ এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in \mathbb{R}$ পাওয়া যাবে যার জন্য $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, এখানে, a^{-1} কে a এর গুণনের বিপরীতক বলা হয়।

খ দেওয়া আছে, $p = x - 5$

$\therefore \frac{1}{|p|} \geq 3$

বা, $\frac{1}{|x-5|} \geq 3$

বা, $|x - 5| \leq \frac{1}{3}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $-\frac{1}{3} \leq x - 5 \leq \frac{1}{3}$

বা, $-\frac{1}{3} + 5 \leq x - 5 + 5 \leq \frac{1}{3} + 5$ [5 যোগ করে]

বা, $\frac{15-1}{3} \leq x \leq \frac{1+15}{3}$

বা, $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3}$ এবং $x \neq 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{14}{3} \leq x \leq \frac{16}{3} \text{ এবং } x \neq 5\right\}$ **(Ans.)**

সংখ্যারেখা : 

গ দেওয়া আছে, $f = 2x + 3y$

$g = 5x + 3y$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $2x + 3y \leq 12$

$5x + 3y \geq 15$

এবং $x, y \geq 0$

অসমতাগুলিকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি, $2x + 3y = 12$

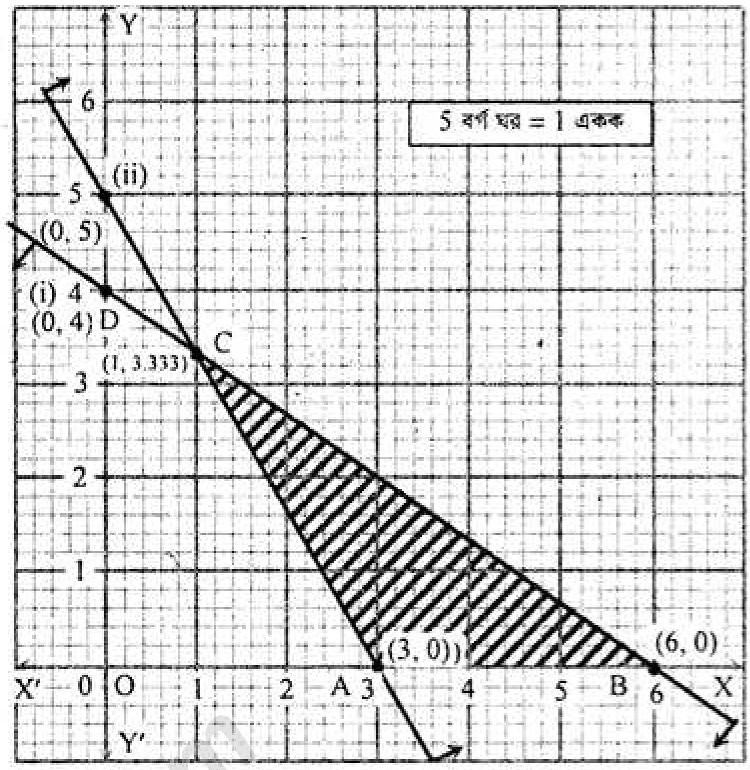
বা, $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (i)

$5x + 3y = 15$

বা, $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ ……… (ii)

$x = 0$ ……… (iii)

$y = 0$ ……… (iv)



লেখচিত্রে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি ABC যা ত্রিভুজাকৃতির। **(Ans.)**

শর্তে $g \geq 15$ এর স্থলে $g \leq 15$ বিবেচনা করলে সম্ভাব্য ক্ষেত্রটি হবে OACD যা একটি চতুর্ভুজ।

প্রশ্ন ▶ ২ A ও B দুই ধরনের খাবার আছে যার মধ্যে প্রোটিন ও শ্বেতসার নিম্নরূপ: *[দি. বো. ১৭]*

খাদ্য	প্রোটিন	শ্বেতসার	প্রতি এককের দাম
A	4	5	40 টাকা
B	6	3	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	16	11	

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম বলতে কি বুঝ? ২

খ. সমস্যাটির একটি যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন কর। ৪

গ. লেখচিত্রের সাহায্যে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটির সমাধান কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming):** সর্বনিম্ন বিনিয়োগের বিনিময়ে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মুনাফা অর্জনের লক্ষ্যে কোনো পরিকল্পনাকে (i) উদ্দেশ্য ফাংশন (objective function) (ii) সিদ্ধান্ত চলক (Decision variable) ও (iii) শর্ত বা সীমাবদ্ধতা (Constraints) এই তিনটি তথ্যকে ক্যান্টোরোভিচের নিয়মে গাণিতিক মডেলে রূপদান করলে যে সমাধান যোগ্য গাণিতিক সমস্যা পাওয়া যায় তাকে **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম (Linear programming)** বলা হয়।

খ মনে করি, A খাবার x কেজি এবং B খাবার y কেজি প্রয়োজন।

দেওয়া আছে,

A এবং B খাবারে প্রোটিন আছে যথাক্রমে 4 একক ও 6 একক। দৈনিক ন্যূনতম প্রোটিন প্রয়োজন 16 একক।

A ও B দৈনিক শ্বেতসার আছে যথাক্রমে 5 একক ও 3 একক। প্রত্যেহ ন্যূনতম শ্বেতসার প্রয়োজন 11 একক।

A খাবারের প্রতি এককের দাম = 40 টাকা

B „ „ „ „ = 50 টাকা

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে, অভীষ্ট ফাংশন, $z = 40x + 50y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$

$5x + 3y \geq 11$

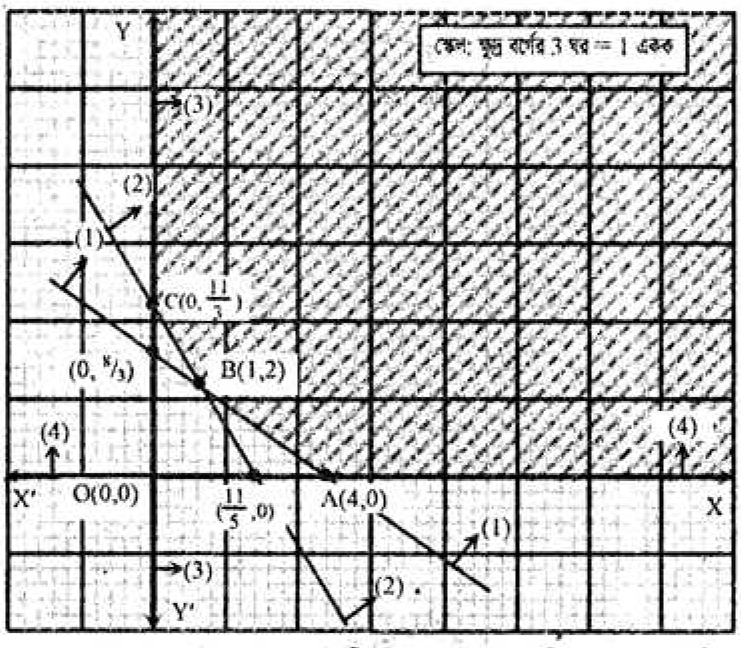
$x \geq 0, y \geq 0$

গ অভীষ্ট ফাংশন, $z = 40x + 50y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $4x + 6y \geq 16$

$5x + 3y \geq 11$

$x \geq 0, y \geq 0$



প্রদত্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব আমরা পাই, $4x + 6y = 16$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$5x + 3y = 11$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{3}} = 1 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x = 0 \ \ldots\ldots\ldots (3)$$
$$y = 0 \ \ldots\ldots\ldots (4)$$

লেখচিত্রে দেখা যায় (1), (2) এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $4x + 6y \geq 16$ এবং $5x + 3y \geq 11$ সত্য। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC হতে শুরু করে প্রথম চতুর্ভাগের ডানের সমস্ত এলাকা। যেখানে A (4, 0), B হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদ বিন্দু।

$\therefore$ B (1, 2) এবং C $(0, \frac{11}{3})$

এখন A (4, 0) বিন্দুতে $z = (40 \times 4) + (50 \times 0) = 160$

B (1, 2) " $z = (40 \times 1) + (50 \times 2) = 140$

এবং C $\left(0, \frac{11}{3}\right)$ " $z = (40 \times 0) + \left(50 \times \frac{11}{3}\right) = 183.33$

স্পষ্টতঃ B (1, 2) বিন্দুতে z এর সর্বনিম্নমান পাওয়া যায়।

A খাদ্য 1 কেজি; B খাদ্য 2 কেজি; মোট সর্বনিম্ন খরচ 140 টাকা **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $f(x) = ax + by + c, \ g(x) = lx + my + n$ *[কু. বো. ১৭]*

ক. $|2x - 1| < \frac{1}{3}$ এর সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও। ২

খ. উদ্দীপকে $a = 1, b = c = 0, |f(x) - 1| < \frac{1}{11}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$|\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ ৪

গ. $a = 1, b = -1, c = 2, f(x) \geq 0, l = 1, m = 1, n = -4, g(x) \leq 0$ এবং $x, y \geq 0$ হলে, $z = x + 2y$ এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $|2x - 1| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < 2x - 1 < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} + 1 < 2x < \frac{1}{3} + 1$ [সকল পক্ষে 1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{2}{3} < 2x < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$

সমাধান সেট: $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$

সংখ্যারেখা: 0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$

এবং $a = 1, b = c = 0, |f(x) - 1| < \frac{1}{11}$

তাহলে, $f(x) = x$

$\therefore \{f(x)\}^2 = x^2$

এখন, $|x - 1| < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} < x - 1 < \frac{1}{11}$

$\Rightarrow -\frac{1}{11} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{1}{11} + 1$ [1 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{10}{11} < x < \frac{12}{11}$

$\Rightarrow \frac{100}{121} < x^2 < \frac{144}{121}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{100}{121} - 1 < x^2 - 1 < \frac{144}{121} - 1$ [1 বিয়োগ করে]

$\Rightarrow \frac{100 - 121}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{144 - 121}{121}$

$\Rightarrow -\frac{21}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121}$

$\Rightarrow -\frac{23}{121} < \{f(x)\}^2 - 1 < \frac{23}{121}$ $\left[\because -\frac{23}{121} < \frac{-21}{121}\right]$

$\therefore |\{f(x)\}^2 - 1| < \frac{23}{121}$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে, $f(x) = ax + by + c$

$g(x) = lx + my + n$

এখানে, $a = 1, b = -1, c = 2$ হলে

$f(x) = x - y + 2$

এবং $l = 1, m = 1, n = -4$ হলে

$g(x) = x + y - 4$

তাহলে, আমরা পাই,

অভিষ্ট ফাংশন: $z = x + 2y$

শর্ত: $x - y + 2 \geq 0$ বা, $x - y \geq -2$

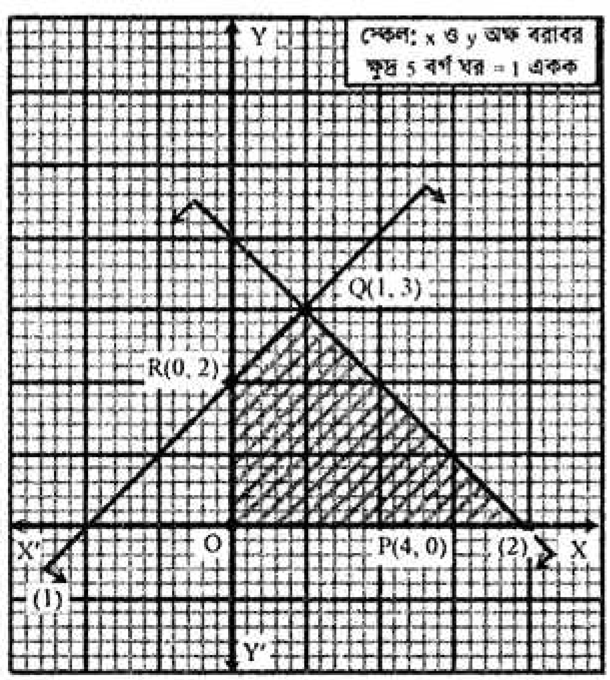
$x + y - 4 \leq 0$ বা, $x + y \leq 4$

$x \geq 0, y \geq 0$

প্রাপ্ত অসমতাগুলির সমাধানযোগ্য সমীকরণ,

$$x - y = -2 \ldots\ldots\ldots (i)$$
$$x + y = 4 \ldots\ldots\ldots (ii)$$
$$x = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$$
$$y = 0 \ldots\ldots\ldots (iv)$$

গ্রাফ কাগজে i, ii, iii ও iv নম্বর রেখা অঙ্কন করি।



সমীকরণ (1) $\Rightarrow 0 - 0 \geq -2$ সত্য

সমীকরণ (2) $\Rightarrow 0 + 0 \leq 4$ সত্য

$\therefore$ সমাধান অঞ্চল সরলরেখা i, ii, iii, iv এর যেদিক মূলবিন্দু সেদিকে অবস্থিত।

সমাধান অঞ্চল: OPQR

P বিন্দু নির্ণয়: (ii) ও (iv) নং রেখার ছেদবিন্দু:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(4, 0)$$

Q বিন্দু নির্ণয়: i ও ii নং রেখার ছেদবিন্দু:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(1, 3)$$

R বিন্দু নির্ণয়: i ও iii নং রেখার ছেদবিন্দু:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = -2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R(0, 2)$$

O বিন্দু নির্ণয়: iii ও iv নং রেখার ছেদবিন্দু O(0, 0)

এখন সমাধান অঞ্চল হতে প্রাপ্ত OPQR বিন্দুগুলো $z = x + 2y$ এ বসিয়ে z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করি।

	O(0, 0)	P(4, 0)	Q(1, 3)	R(0, 2)
$z = x + 2y$	0	4	7	4

$\therefore$ Q(1, 3) বিন্দুতে z এর মান সর্বোচ্চ 7 হয়। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ দৃশ্যকল্প-১ : $f(x) = |x - 3|$ [সি. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২ : $4x + y \geq 16$, $4x + 7y \geq 40$, $x, y \geq 0$.

ক. $-4 < 2x - 1 < 12$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. $f(x) < \frac{1}{5}$ হলে দেখাও যে, $f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$ ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে লেখচিত্রের সাহায্যে $Z = 4x + 2y$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $-4 < 2x - 1 < 12$

বা, $-4 - 4 < 2x - 1 - 4 < 12 - 4$

বা, $-8 < 2x - 5 < 8$

$\therefore |2x - 5| < 8$ **(Ans.)**

খ $f(x) = |x - 3|$

$f(x^2 - 6) = |x^2 - 6 - 3| = |x^2 - 9|$

এখন, $f(x) < \frac{1}{5}$

বা, $|x - 3| < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} < x - 3 < \frac{1}{5}$

বা, $-\frac{1}{5} + 3 < x - 3 + 3 < \frac{1}{5} + 3$

বা, $\frac{14}{5} < x < \frac{16}{5}$

বা, $\frac{196}{25} < x^2 < \frac{256}{25}$

বা, $\frac{196}{25} - 9 < x^2 - 9 < \frac{256}{25} - 9$

বা, $-\frac{29}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$

বা, $-\frac{31}{25} < x^2 - 9 < \frac{31}{25}$ $\left[\because -\frac{31}{25} < -\frac{29}{25}\right]$

বা, $|x^2 - 9| < \frac{31}{25}$

$\therefore f(x^2 - 6) < \frac{31}{25}$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $4x + y \geq 16$ ……… (i)

$4x + 7y \geq 40$ ……… (ii)

(i) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + y = 16$

বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} = 1$

যা A (4, 0) এবং B(0, 16) বিন্দু দিয়ে যায়

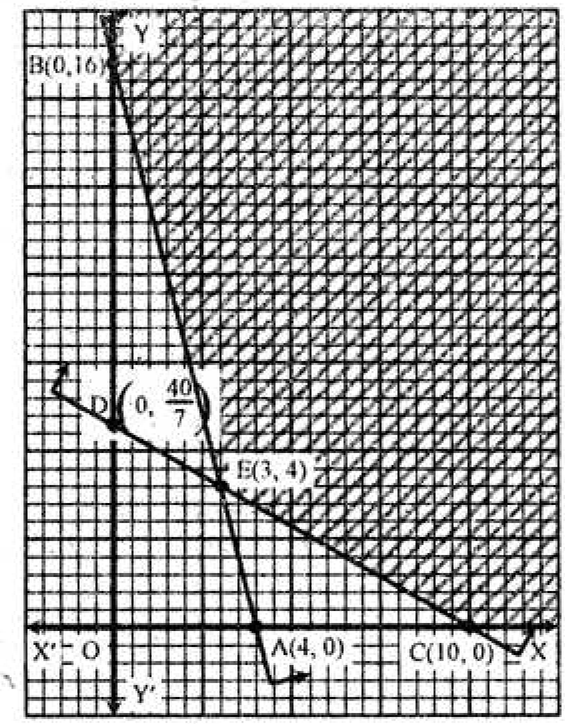
আবার (ii) নং অসমতার অনুরূপ সমীকরণ,

$4x + 7y = 40$

বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{\frac{40}{7}} = 1$

যা C(10, 0) এবং $D\left(0, \frac{40}{7}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

প্রাপ্ত বিন্দুসমূহ ছক কাগজে স্থাপন করি।



ছায়াঘেরা অংশের কৌণিক বিন্দুগুলো C(10, 0) E(3, 4), B (0, 16)

$z = 4x + 2y$

B বিন্দুতে $z = 4.0 + 2.16 = 32$

C বিন্দুতে $z = 4.10 + 2.0 = 40$

E বিন্দুতে $z = 4.3 + 2.4 = 20$

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান, $z_{min} = 20$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ দৃশ্যকল্প-১: দুই প্রকার খাদ্য F_1 এবং F_2 তে ভিটামিন A ও C পাওয়া যায়। এক একক F_1 খাদ্যে 7- একক ভিটামিন A ও 3-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। আবার প্রতি একক F_2 খাদ্যে 2-একক ভিটামিন A ও 5-একক ভিটামিন C পাওয়া যায়। F_1 ও F_2 খাদ্যের প্রতি এককের দাম যথাক্রমে 25 টাকা ও 18 টাকা। একজন লোকের দৈনিক ন্যূনতম 45 একক ভিটামিন A এবং 60-একক ভিটামিন C প্রয়োজন।

দৃশ্যকল্প-২: দুই চলকের যোগাশ্রয়ী

অসমতা: $x + y - 7 \leq 0$

$x - 2y - 4 \geq 0$ [ব. বো. ১৭]

ক. 1 এর ঘনমূল নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে $x, y \geq 0$ শর্তে $z = 3x + 4y$ এর সর্বনিম্ন মান লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন-এর চাহিদা মেটানোর জন্য একটি যোগাশ্রয়ী সমস্যা গঠন কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$

তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$

$= \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$

সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

খ প্রদত্ত অভীষ্ট ফাংশন, $Z = 3x + 4y$

এবং সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y - 7 \leq 0$

$\therefore x + y \leq 7$

$x - 2y - 4 \geq 0$

$\therefore x - 2y \geq 4$

$x, y \geq 0.$

প্রথমে অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণে রূপান্তর করি,

$x + y \le 7$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x + y = 7$

$$\therefore \frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1 \; \ldots \ldots (1)$$

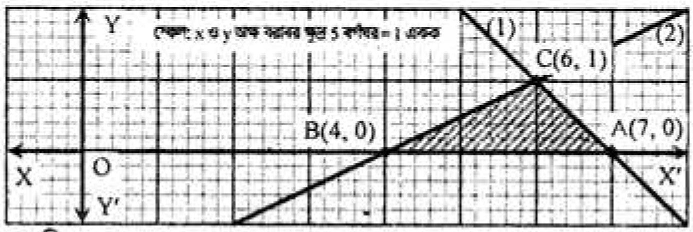
$x - 2y \ge 4$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x - 2y = 4$

$$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1 \; \ldots \ldots (2)$$

$x \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $x = 0 \ldots \ldots (3)$

$y \ge 0$ এর রূপান্তরিত সমীকরণ, $y = 0 \ldots \ldots (4)$

এখন ছক কাগজে উপরোক্ত সরলরেখাগুলি অঙ্কন করে এদের সাহায্যে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা নির্ণয় করি। প্রতি 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হলো।



লেখচিত্র হতে দেখা যায় ABC সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল। সমাধান অঞ্চলের কৌণিক বিন্দুগুলো A(7, 0), B(4, 0) এবং C(6, 1)

A(7, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 7 + 4 \times 0 = 21$

B(4, 0) বিন্দুতে, $z = 3 \times 4 + 4 \times 0 = 12$

C(6, 1) বিন্দুতে, $z = 3 \times 6 + 4 \times 1 = 18 + 4 = 22$

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান 12 **(Ans.)**

গ দৃশ্যকল্প-১ এ বর্ণিত তথ্যসমূহ নিম্নোক্তভাবে সাজানো হলো:

খাদ্য	ভিটামিন A	ভিটামিন C	প্রতি এককের মূল্য
F_1	7	3	25 টাকা
F_2	2	5	18 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	45	60	

মনে করি, F_1 খাদ্য x একক এবং F_2 খাদ্য y একক।

অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 25x + 18y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $7x + 2y \ge 45$

$$3x + 5y \ge 60$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

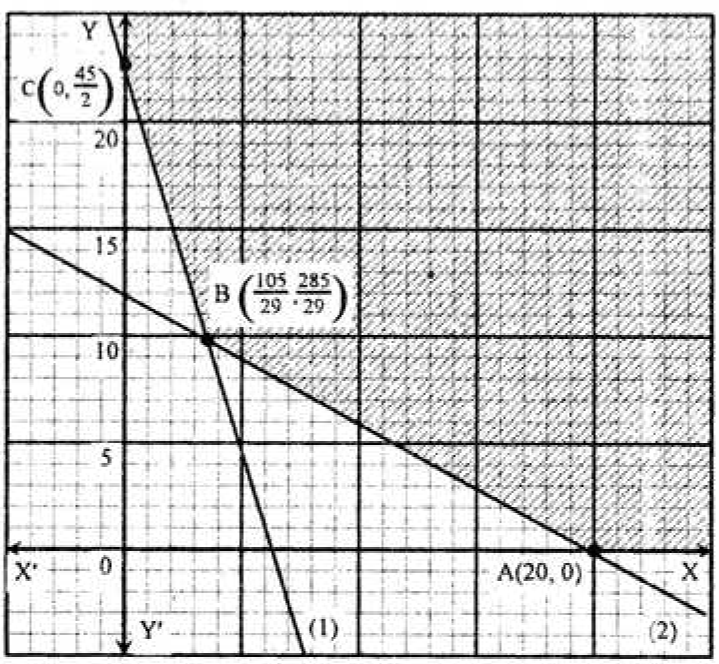
প্রাপ্ত অসমতাগুলোকে সমতা ধরে সমীকরণ গঠন করি এবং ছক কাগজে স্থাপন করে সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি। ছক কাগজে 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরা হল।

$$7x + 2y = 45 \Rightarrow \frac{x}{\frac{45}{7}} + \frac{y}{\frac{45}{2}} = 1 \; \ldots \ldots (1)$$

$$3x + 5y = 60 \Rightarrow \frac{x}{20} + \frac{y}{12} = 1 \; \ldots \ldots (2)$$

$x = 0 \ldots \ldots (3)$

$y = 0 \ldots \ldots (4)$



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, (1) ও (2) নং এর যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশের বিন্দুসমূহ সমাধান এলাকা গঠন করে। লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা ABC হতে শুরু করে ১ম চতুর্ভাগের ডানদিকের সমস্ত এলাকা। এখানে A(20, 0), $C\left(0, \frac{45}{2}\right)$ এবং (1) ও (2) এর ছেদবিন্দু $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ সম্ভাব্য সমাধান বিন্দু।

A(20, 0) বিন্দুতে $z = 25 \times 20 + 18 \times 0 = 500$

$B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে, $z = 25 \times \frac{105}{29} + 18 \times \frac{285}{29}$

$$= \frac{7755}{29} = 267.414$$

$C\left(0, \frac{45}{2}\right)$ বিন্দুতে, $z = 25 \times 0 + 18 \times \frac{45}{2} = 405.$

স্পষ্টত $B\left(\frac{105}{29}, \frac{285}{29}\right)$ বিন্দুতে z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ সর্বনিম্ন 267.414 টাকা খরচ করে ন্যূনতম চাহিদা মেটানো সম্ভব। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $z = 5x + y$

শর্ত : $x + y \le 5 \ldots \ldots \ldots \ldots (i)$

$x + 2y \ge 8 \ldots \ldots \ldots \ldots (ii)$

$x \ge 0, y \ge 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (iii)$ *[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]*

ক. সরল সমীকরণ এবং দুই চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ কী? ২

খ. z এর সর্বনিম্ন মান কত? ৪

গ. (i) ও (ii) নং অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **সরল সমীকরণ :** যে সমীকরণের চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 1 তাকে সরল সমীকরণ বলে।

দুই চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ : যে সরল সমীকরণের চলক 2টি তাকে দুই চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ বলে।

খ সর্বনিম্নকরণ, $z = 5x + y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ: $x + y \le 5$; $x + 2y \ge 8$; $x \ge 0, y \ge 0$

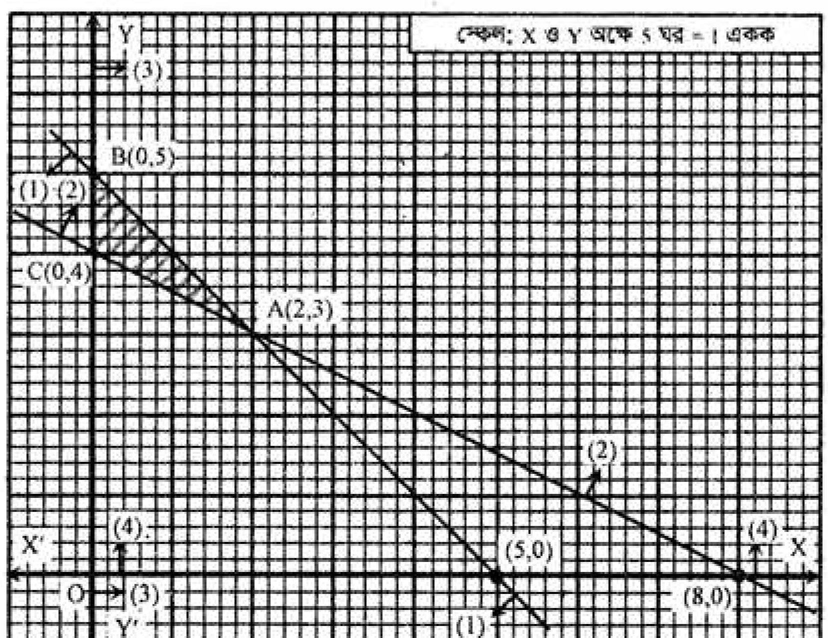
প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব, আমরা পাই, $x + y = 5 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \quad \ldots \ldots (1)$

$x + 2y = 8 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \quad \ldots \ldots (2)$

$x = 0 \quad \ldots \ldots (3)$

$y = 0 \quad \ldots \ldots (4)$



লেখচিত্র হতে দেখা যায় (1) এর সকল বিন্দু এবং (1) এর যে পার্শ্বে মূল বিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + y \le 5$ সত্য। আবার (2) এর সকল বিন্দু এবং (2) এর যে পার্শ্বে মূলবিন্দু তার বিপরীত পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x + 2y \ge 8$ সত্য।

লেখচিত্র হতে পাই সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা ABC।

$\therefore$ A হচ্ছে (1) এবং (2) এর ছেদবিন্দু।

B হচ্ছে (1) ও (3) এর ছেদবিন্দু।

এবং C হচ্ছে (2) ও (3) এর ছেদবিন্দু।

$\therefore$ A(2, 3), B(0, 5) ও C(0, 4)

এখন A(2, 3) বিন্দুতে $z = 5 \times 2 + 3 = 13$

B(0, 5) " $z = 5 \times 0 + 5 = 5$

C(0, 4) " $z = 5 \times 0 + 4 = 4$

স্পষ্টত C(0, 4) এর জন্য Z এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ z এর সর্বনিম্ন মান = 4 **(Ans.)**

গ প্রদত্ত অসমতাদ্বয়, $x + y \le 5$ ……… (i)

$x + 2y \ge 8$ ……… (ii)

প্রদত্ত অসমতাদ্বয়কে সমতা আকারে লিখে লেখচিত্র অঙ্কন করি।

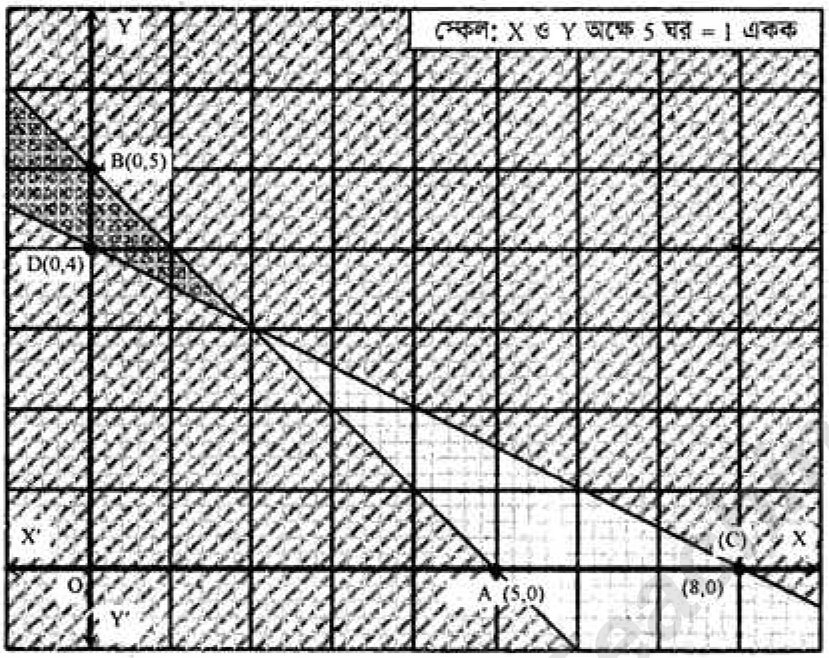
(i) হতে পাই, $x + y = 5$

$\therefore \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$

(ii) হতে পাই, $x + 2y = 8$

বা, $\frac{x}{8} + \frac{2y}{8} = 1$

$\therefore \quad \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$



উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য আনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখা বরাবর প্রতি 5 বর্গ ঘর সমান 1 একক ধরে A(5, 0) ও B(0, 5) বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে $x + y = 5$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।

আবার, C(8, 0) ও D(0, 4) বিন্দুদ্বয় ছক কাগজে স্থাপন করে যোগ করলে, $x + 2y = 8$ রেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়।

(0, 0) বিন্দুর জন্য $0 + 0 \le 5$ যা সত্য।

$\therefore$ $x + y \le 5$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $x + y = 5$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, রেখাটিসহ সেই পাশের অঞ্চল।

আবার, (0, 0) বিন্দুর জন্য $0 + 2 \times 0 \ge 8$ যা সত্য নয়।

$\therefore$ $x + 2y \ge 8$ দ্বারা নির্দেশিত অঞ্চল $x + 2y = 8$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু আছে, রেখাটিসহ তার বিপরীত পাশের অঞ্চল।

অতএব, লেখচিত্রে অসমতা দুইটি দ্বারা সংশ্লিষ্ট ছেদক অংশই উপরোক্ত অসমতা দুইটির যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

প্রশ্ন ▶ ৭ $z = 6x + 12y$

শর্ত: $x + y \le 7$

$2x + 5y \le 20$

$x \ge 0, y \ge 0$

[পাবনা ক্যাডেট কলেজ, পাবনা]

ক. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম ব্যাখ্যা কর। ২

খ. z এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামের সুবিধাগুলো কী? ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম:** যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম হচ্ছে কোনো শর্তাধীনে ও সীমাবদ্ধতায় একাধিক স্বাধীন চলকের রৈখিক অসমতা ও অভীষ্ট ফাংশন গঠনের মাধ্যমে সবচেয়ে সুবিধাজনক মানের জন্য স্বাধীন চলকগুলির নির্দিষ্ট মান নির্ণয়ের একটি বিশেষ বীজগণিতীয় পদ্ধতি।

যেমন, A ও B দুই প্রকারের খাদ্যে প্রতি কিলোগ্রামে প্রোটিন ও শ্বেতসার এবং এর মূল্য নিম্নরূপ:

খাদ্য	প্রোটিন	শ্বেতসার	কিলোগ্রাম প্রতি মূল্য
A	2	5	40 টাকা
B	3	3	50 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	8	11	

সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক খাদ্যের প্রয়োজন মেটাতে যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম গঠন করলে প্রোগ্রামটি দাঁড়ায়, Minimize $z = 40x + 50y$

শর্তসমূহ $2x + 3y \ge 8$, $5x + 3y \ge 11$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

এখানে, x, y চলক, রৈখিক অসমতা বা শর্ত $2x + 3y \ge 8$, $5x + 3y \ge 11$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ এবং অভিষ্ট ফাংশন

$z = 40x + 50y$

খ সর্বোচ্চকরণ, $z = 6x + 12y$

সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ : $x + y \le 7$; $2x + 5y \le 20$;

$x \ge 0$; $y \ge 0$;

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি।

অতএব, আমরা পাই, $x + y = 7$

বা, $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1$ ……… (i)

$2x + 5y = 20$

বা, $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$ ……… (ii)

$x = 0$ ……… (iii)

$y = 0$ ……… (iv)

লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) ও (ii) নং এর সকল বিন্দু এবং এদের যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য প্রদত্ত অসমতাদ্বয় সত্য। এখানে, O হচ্ছে মূলবিন্দু।

$\therefore$ O(0, 0)

A হচ্ছে (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু

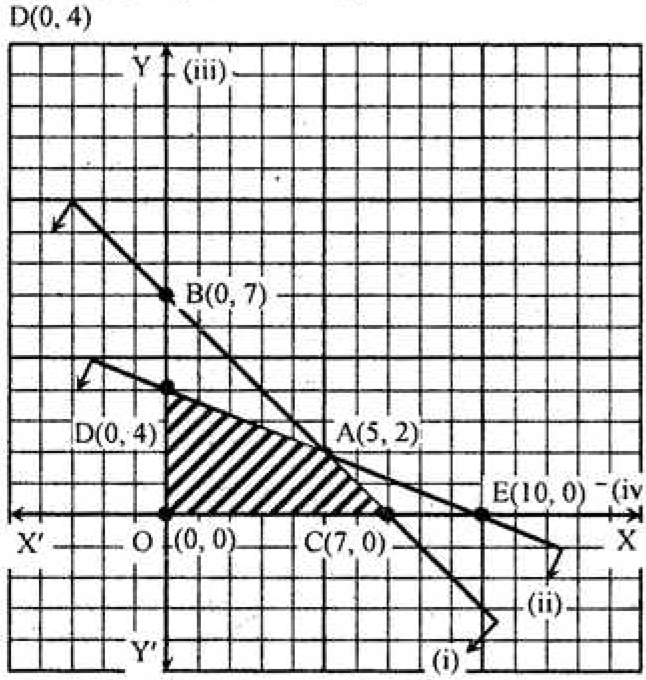
$\therefore$ A(5, 2)

C হচ্ছে (i) ও (iv) এর ছেদবিন্দু

$\therefore$ C(7, 0)

D হচ্ছে (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু

$\therefore$ D(0, 4)



এখন, O(0, 0) বিন্দুতে, $z = 6 \times 0 + 12 \times 0 = 0$

A(5, 2) বিন্দুতে, $z = 6 \times 5 + 12 \times 2 = 54$

C(7, 0) বিন্দুতে, $z = 6 \times 7 + 12 \times 0 = 42$