উচ্চমাধ্যমিক উচ্চতর গণিত ১ম পত্র

অধ্যায়-২: ভেক্টর

প্রশ্ন ▶১ $\vec{P}=3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{Q}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\vec{R}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$. [রা. বো. '১৭]

ক. $\vec{P}$ বিন্দুগামী এবং $\vec{Q}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\vec{P}-\vec{Q}$ ভেক্টরটি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\vec{P}=3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{P}$ বিন্দুগামী এবং $\vec{Q}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\vec{r}=\vec{P}+t\vec{Q}$

$=3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}+t(3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})$

$=(3+3t)\hat{i}-(3+2t)\hat{j}+(4+4t)\hat{k}$ **(Ans.)**

খ $\vec{P}-\vec{Q}$

$=3\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}-3\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$

$=-\hat{j}$

$\therefore$ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{M}=\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}$$

$=(-12+8)\hat{i}-(12-12)\hat{j}+(-6+9)\hat{k}$

$=-4\hat{i}+3\hat{k}$

এখন, $(\vec{P}-\vec{Q}).\vec{M}=(-\hat{j}).(-4\hat{i}+3\hat{k})=0$

$\therefore$ $(\vec{P}-\vec{Q})$ ভেক্টরটি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব ভেক্টরের সাথে লম্ব। (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $\vec{R}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স,

$$A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix}3 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$=3(-4+4)-(-3)(6-4)+4(-3+2)$

$=0+6-4=2\neq 0$

$\therefore$ A ম্যাট্রিক্সটি বিপরীতযোগ্য।

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}$

$=-4+4=0$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}$

$=-(6-4)=-2$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}$

$=-3+2=-1$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{vmatrix}$

$=-(-6+4)=2$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}$

$=6-4=2$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}$

$=-(-3+3)=0$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 4\end{vmatrix}$

$=-12+8=-4$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & 4\end{vmatrix}$

$=-(12-12)=0$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}$

$=-6+9=3$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj }A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{bmatrix}^t$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶২ $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{C}=\hat{i}+b\hat{j}+3\hat{k}$. [দি. বো. '১৭]

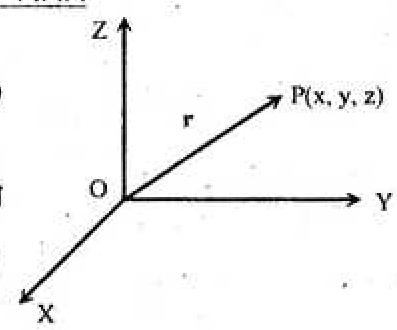
ক. অবস্থান ভেক্টর বলতে কি বুঝ? ২

খ. $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $\vec{C}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে b এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}\times\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **অবস্থান ভেক্টর:** যদি প্রসঙ্গ কাঠামোয় মূল বিন্দু O এর সাপেক্ষে একটি বিন্দু P এর অবস্থানকে $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় তবে $\overrightarrow{OP}$ কে P এর অবস্থান ভেক্টর বলে।



$\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}$ হলে, **r** কে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।

যেকোনো বিন্দু P(x, y, z) এর অবস্থান ভেক্টর,

$\mathbf{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

খ দেওয়া আছে, $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{C}=\hat{i}+b\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $=\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}\right)\left(\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}\right)$

$=\left(\frac{2+6+1}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}\right)\left(\frac{2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}\right)$

$=\frac{9}{14}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$

প্রশ্নমতে, $\frac{9}{14}(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}+b\hat{j}+3\hat{k})=0$

বা, $2+3b-3=0$

বা, $3b=1$

$\therefore$ $b=\frac{1}{3}$ **(Ans.)**

গ $\vec{A}+\vec{B}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}+\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$

এবং $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$

$=(-3+2)\hat{i}-(-2+1)\hat{j}+(4-3)\hat{k}$

$=-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{A}+\vec{B}$ ও $\vec{A}\times\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ,

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{(3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}).(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{3^2+5^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\right)$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{-3+5-2}{\sqrt{38}\sqrt{3}}\right)$$

$=\cos^{-1}(0)=90°$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $\vec{P}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{Q}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}, \vec{R}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$.

[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]

ক. $2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, λ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\vec{P}$ এবং অক্ষত্রয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলি নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\vec{P}, \vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, তাদের স্কেলার গুণন শূন্য হবে।

$\therefore$ $(2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k}).(4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})=0$

বা, $8-2\lambda-2=0$

বা, $6-2\lambda=0$

বা, $2\lambda=6$

বা, $\lambda=\frac{6}{2}$

$\therefore$ $\lambda=3$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\vec{P}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{P}$ ভেক্টরের সাথে x-অক্ষের উৎপন্ন কোণ,

$$\theta_x=\cos^{-1}\frac{(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i})}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(1)^2}\sqrt{1^2}}$$

$$=\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{14}}$$

y-অক্ষের উৎপন্ন কোণ, $\theta_y=\cos^{-1}\frac{(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}).(\hat{j})}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(1)^2}\sqrt{1^2}}$

$$=\cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{14}}$$

z-অক্ষের উৎপন্ন কোণ, $\theta_z=\cos^{-1}\frac{(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}).(\hat{k})}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(1)^2}\sqrt{1^2}}$

$=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{14}}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\vec{P}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{Q}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

$\vec{R}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

এখন, $|\vec{P}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}$

$=\sqrt{14}$

$\therefore$ $P^2=14$

$|\vec{Q}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{35}$

$\therefore$ $Q^2=35$

$|\vec{R}|=\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$

$\therefore$ $R^2=21$

এখানে, $P^2+R^2=14+21$

$=35=Q^2$

এবং $\vec{P}.\vec{R}=(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}).(2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k})$

$=6-2-4$

$=0$

অতএব, ভেক্টরগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। যার P এবং R বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ এক সমকোণ এবং Q অতিভুজ। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪ $\vec{a}=-3\hat{i}+2\hat{j}+\mu\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}, \vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর।

[ময়মনসিংহ গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ময়মনসিংহ]

ক. $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে μ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. μ এর মান কত হলে $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত হবে? ৪

গ. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা সৃষ্ট সমতলের উপর লম্ব। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -3 & 2 & \mu\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}$

$=(8+2\mu)\hat{i}-(-12-3\mu)\hat{j}+(6-6)\hat{k}$

$=(8+2\mu)\hat{i}+(3\mu+12)\hat{j}$

ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে $\vec{a}\times\vec{b}=0$ হবে।

অর্থাৎ $(8+2\mu)\hat{i}+(3\mu+12)\hat{j}$

উভয়পক্ষের $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$8+2\mu=0$	$3\mu+12=0$
$\therefore$ $\mu=-4$	$\therefore$ $\mu=-4$

$\therefore$ $\mu=-4$ হলে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ পরস্পর সমান্তরাল। **(Ans.)**

খ যেহেতু $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত।

সুতরাং তাদের সহগগুলো দ্বারা গঠিত নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\begin{vmatrix}-3 & 2 & \mu\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}=0$

বা, $-3(-10+12)-2(15-4)+\mu(-9+2)=0$

বা, $-6-22-7\mu=0$

বা, $7\mu=-28$

$\therefore$ $\mu=-4$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}, \vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$

$\vec{b}$ ও $\vec{c}$ অবস্থানকারী সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}$.

$$\therefore \quad \hat{\eta}=\pm\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$$

এখন, $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}$

$=\hat{i}(-10+12)-\hat{j}(15-4)+\hat{k}(-9+2)$

$=2\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}$

$\therefore$ $|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-11)^2+(-7)^2}$

$=\sqrt{4+121+49}$

$=\sqrt{174}$

$\therefore$ $\hat{\eta}=\pm\frac{2\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k}}{\sqrt{174}}=\pm\frac{1}{\sqrt{174}}(2\hat{i}-11\hat{j}-7\hat{k})$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{p} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

এবং $\vec{q} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ *[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]*

ক. দেখাও যে, $\vec{q}$ বরাবর $\vec{p}$ এর উপাংশ $\hat{q}$। ২

খ. $A^3 - 2A^2 + A - 2I$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\vec{q}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\vec{q}$ বরাবর $\vec{p}$ এর উপাংশ $= \dfrac{\vec{p}.\vec{q}}{|\vec{q}|}\hat{q}$

$= \dfrac{(5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}).(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}\hat{q}$

$= \dfrac{10 - 3 - 4}{\sqrt{9}}\hat{q}$

$= \dfrac{3}{3}\hat{q} = \hat{q}$

$\therefore$ $\vec{q}$ বরাবর $\vec{p}$ এর উপাংশ $\hat{q}$ **(দেখানো হলো)**

খ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+6+2 & 3+0-2 & 2+9+2 \\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0+3 \\ 1-2+1 & 3-0-1 & 2-3+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

এবং $A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9+2+13 & 27+0-13 & 18+3+13 \\ 5+6+7 & 15+0-7 & 10+9+7 \\ 0+4+0 & 0+0+0 & 0+6+0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

এখন প্রদত্ত রাশি $= A^3 - 2A^2 + A - 2I$

$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 9 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 24 & 14 & 34 \\ 18 & 8 & 26 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 2 & 26 \\ 10 & 6 & 14 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 24-18+1-2 & 14-2+3-0 & 34-26+2-0 \\ 18-10+2-0 & 8-6+0-2 & 26-14+3-0 \\ 4-0+1-0 & 0-4-1-0 & 6-0+1-2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 10 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ভেক্টর, $\vec{q} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

মনে করি, x-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর, $\vec{b} = \hat{i}$

ভেক্টর $\vec{q}$ ও $\vec{b}$ এর অন্তর্গত কোণ θ_x হলে,

$\cos\theta_x = \dfrac{\vec{q}.\vec{b}}{|\vec{q}||\vec{b}|} = \dfrac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).\hat{i}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}\sqrt{1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore \theta_x = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ **(Ans.)**

মনে করি, y অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\vec{c} = \hat{j}$.

ভেক্টর $\vec{q}$ ও $\vec{c}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ_y হলে,

$\cos\theta_y = \dfrac{\vec{q}.\vec{c}}{|\vec{q}||\vec{c}|} = \dfrac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).\hat{j}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (2)^2}\sqrt{1^2}} = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore \theta_y = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ **(Ans.)**

আবার, মনে করি, z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর, $\vec{d} = \hat{k}$.

ভেক্টর $\vec{q}$ ও $\vec{d}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ_z হলে,

$\cos\theta_z = \dfrac{\vec{q}.\vec{d}}{|\vec{q}||\vec{d}|}$

$= \dfrac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).\hat{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}\sqrt{1^2}}$

$= \dfrac{2}{3}$

$\therefore \theta_z = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $\vec{P} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{Q} = \hat{i} + 3\hat{k}$, $\vec{R} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. x-অক্ষের উপর $(\vec{P} - \vec{Q})$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

খ. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\vec{P}$ এবং $\vec{R}$ ভেক্টরদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত তার উপর লম্ব। ৪

গ. সারি আকারে $\vec{P}$, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ ভেক্টর তিনটির সহগগুলি নিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $\vec{P} - \vec{Q} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} - \hat{i} - 3\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore$ x অক্ষের উপর $\vec{P} - \vec{Q}$ এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{(\vec{P} - \vec{Q}).\hat{i}}{|\hat{i}|}$

$= \dfrac{2}{1} = 2$ **(Ans.)**

খ এখানে, $\vec{P} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= -11\hat{i} + 10\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm\dfrac{\vec{P} \times \vec{R}}{|\vec{P} \times \vec{R}|}$

$= \pm\dfrac{-11\hat{i} + 10\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{11^2 + 10^2 + 7^2}}$

$= \pm\dfrac{-11\hat{i} + 10\hat{j} + 7\hat{k}}{3\sqrt{30}}$ **(Ans.)**

গ $\vec{P}, \vec{Q}$ ও $\vec{R}$ ভেক্টরগুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে,

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

$= 3(0-15) - 4(-4-6) - 1(5-0)$

$= -45 + 40 - 5$

$= -10 \neq 0$

$\therefore$ A বিপরীতযোগ্য।

A এর সহগুণকসমূহ, $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(-4-6) = 10$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -(-16+5) = -(-11) = 11$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(15-8) = -7$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(9+1) = -10$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$\therefore \text{Adj } A = \begin{bmatrix} -15 & 10 & 5 \\ 11 & -10 & -7 \\ 12 & -10 & -4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{\text{Adj } A}{|A|} = -\dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3 + 6 + 5 = 14$

$\therefore$ $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= |\vec{a}| \cos\theta$

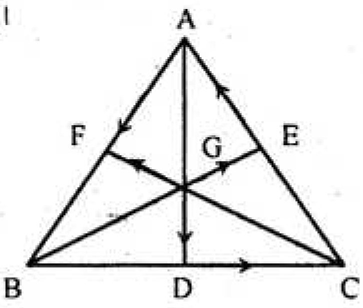
$= \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

$= \dfrac{14}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 5^2}}$

$= \dfrac{14}{\sqrt{35}}$ **(Ans.)**

খ সৃজনশীল প্রশ্ন-৩(গ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৮

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



তাহলে, D-এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{b+c}{2}$

E- এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{c+a}{2}$

এবং F-এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{a+b}{2}$

G বিন্দুটি AD মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে G এর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{1.a + 2\left(\dfrac{b+c}{2}\right)}{1+2} = \dfrac{a+b+c}{3}$

অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে, BE এবং CF মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃবিভক্তকারী বিন্দুদ্বয়ের উভয়ের অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{a+b+c}{3}$

সুতরাং, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৮ $\vec{a} = -\hat{i} - \hat{j} + 2m\hat{k},\ \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k},\ \vec{d} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$।

[ঝিনাইদহ ক্যাডেট কলেজ, ঝিনাইদহ]

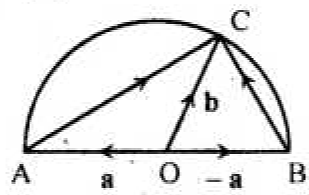
ক. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। ২

খ. $\vec{b}$ এর দিক বরাবর $\vec{d}$ এর অংশক বের কর। ৪

গ. m এর কোন মানের জন্য প্রদত্ত ভেক্টরগুলো সমতলীয় হবে না? ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB একটি ব্যাস এবং C পরিধির ওপর একটি বিন্দু।



ধরি, $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OC} = b$, তাহলে

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $\vec{a} + \overrightarrow{AC} = \vec{b}$

বা, $\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a}$

তদ্রূপ, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{b} + \vec{a}$

এখন, ডট গুণন নিয়ে,

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$

$= \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{a}$

$= b^2 - a^2$, [যেহেতু, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$]

$= 0$ [$\because a = b =$ ব্যাসার্ধ]

সুতরাং, $AC \perp BC$

অর্থাৎ, $\angle ACB = 90°$

অতএব, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। (দেখানো হলো)

খ $\vec{b}$ বরাবর $\vec{d}$ এর অংশক $= \dfrac{(\vec{b} \cdot \vec{d})}{|\vec{b}|^2}\ \vec{b}$

এখন, $\vec{b} \cdot \vec{d} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$

$= 12 + 2 + 12 = 26$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$

$\therefore\ |\vec{b}|^2 = (\sqrt{29})^2 = 29$

$\therefore$ $\vec{b}$ বরাবর $\vec{d}$ এর অংশক $= \dfrac{(\vec{b} \cdot \vec{d})}{|\vec{b}|^2}\ \vec{b} = \dfrac{26}{29}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$ **(Ans.)**

গ $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{d}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হবে না যদি $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2m \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ হয়।

বা, $-1(-6+4) - (-1)(9-16) + 2m(-3+8) \neq 0$

বা, $2 - 7 + 10m \neq 0$

বা, $10m \neq 5$

$\therefore\ m \neq \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ m এর মান $\dfrac{1}{2}$ না হলে ভেক্টরগুলো সমতলীয় হবে না।

$\therefore\ m = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৯ $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর।

[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]

ক. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব। ৪

গ. দেখাও যে, $\vec{A}, \vec{A} - \vec{B}$ এবং $2\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ লব্ধি ভেক্টর, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$= (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর $= \pm \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$

$= \frac{\pm(4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2}}$

$= \pm \frac{4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{18}}$

$= \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}(4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{A} + \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$= 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} - 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, $(\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} - \vec{B})$

$= (4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= 4(-2) + 1.3 + (-1)(-5)$

$= -8 + 3 + 5 = 0$

$\therefore$ $(\vec{A} + \vec{B})$ ও $(\vec{A} - \vec{B})$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$;

$\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

ধরি, $P = \vec{A} - \vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ ('খ' থেকে)

$\vec{Q} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$A = |\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

$P = |\vec{P}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$

$Q = |\vec{Q}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24}$

$\therefore$ $A^2 + Q^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{24})^2 = 14 + 24 = 38 = (\sqrt{38})^2$

$\therefore$ $A^2 + Q^2 = P^2$

আবার, $\vec{A}.\vec{Q} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}).(2\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k})$

$= (1)(2) + (2)(-4) + (-3)(-2)$

$= 2 - 8 + 6 = 8 - 8 = 0$

$\therefore$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১০ ΔABC এর শীর্ষবিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর হলো: $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}, -4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$।

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. a এর মান কত হলে, $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে? ২

খ. প্রমাণ কর যে, ΔABC সমবাহু। ৪

গ. $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা বের কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\vec{P} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$; এই ভেক্টর দুইটি লম্ব হবে যদি $\vec{P}.\vec{Q} = 0$ হয়।

অর্থাৎ $(a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

বা, $2a^2 + 2a - 4 = 0$

বা, $a^2 + a - 2 = 0$

বা, $(a + 2)(a - 1) = 0$

$\therefore$ $a = -2, 1$ **(Ans.)**

খ মনে করি, ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$.

তাহলে $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

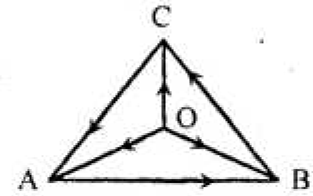
$= (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore$ $|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 25}$

$= \sqrt{38}$



আবার, $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$

$= (-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) - (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$

$= -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ $|\vec{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$

আবার, $\vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC}$

$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore$ $|\vec{CA}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{25 + 4 + 9}$

$= \sqrt{38}$

$\therefore$ $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CA}|$

$\therefore$ ΔABC সমবাহু। **(প্রমাণিত)**

গ ধরি, X, Y ও Z অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore$ $\cos\alpha = \frac{\hat{i}.(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$

$\therefore$ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$ **(Ans.)**

$\cos\beta = \frac{\hat{j}.(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$

$\therefore$ $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$ **(Ans.)**

$\cos\gamma = \frac{\hat{k}.(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

$\therefore$ $\gamma = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{14}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১১ $\vec{P} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{Q} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{R} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$, তিনটি ভেক্টর এবং $D = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ca \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix}$

[বিয়াম মডেল স্কুল ও কলেজ, বগুড়া]

ক. দেখাও যে, $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $|D| = 4a^2b^2c^2$ ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত ভেক্টর গুলির $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগগুলো দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স A হলে A^{-1} নির্ণয় কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সৃজনশীল প্রশ্ন-৩(গ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

খ বামপক্ষ = |D|

$$= \begin{vmatrix} a^2 & bc & ca+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ca \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$$

$$= abc \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 2b & b & a \\ 2b & b+c & c \end{vmatrix} \quad [c_1' = (c_1 + c_2) - c_3 \text{ প্রয়োগ করে}]$$

$$= 2b \times abc \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 1 & b & a \\ 1 & b+c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2ab^2c \begin{vmatrix} 0 & c & a+c \\ 0 & -c & a-c \\ 1 & b+c & c \end{vmatrix} \quad [r_2' = r_2 - r_1 \text{ প্রয়োগ করে}]$$

$$= 2ab^2c \begin{vmatrix} c & a+c \\ -c & a-c \end{vmatrix} \quad [\text{প্রথম কলাম সাপেক্ষে বিস্তার করে}]$$

$$= 2ab^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & a+c \\ -1 & a-c \end{vmatrix}$$

$= 2ab^2c^2(a - c + a + c)$
$= 2ab^2c^2(2a)$
$= 4a^2b^2c^2$
= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ভেক্টরগুলির সহগগুলো দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$\therefore |A| = 3(12 - 5) + 2(-4 - 10) + 1(1 + 6)$
$= 21 - 28 + 7$
$= 0$
$\therefore A^{-1}$ বিদ্যমান নাই। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১২ $\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{CA} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

[দিনাজপুর সরকারি কলেজ, দিনাজপুর]

ক. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকে ΔABC এর প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে $\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$ হলে এবং $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CA}$ অপরিবর্তিত থাকলে a এর কোন মানের জন্য ভেক্টরত্রয় একতলীয় হবে, তা নির্ণয় কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (-2 - 2)\hat{i} - (4 + 1)\hat{j} + (4 - 1)\hat{k}$

$= -4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{CA} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore AB = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$

$\therefore BC = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore CA = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

এখানে, $AB = CA \neq BC$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু **(Ans.)**

আবার, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$= -2 - 2 + 2 = -2$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{AB \cdot BC}$ বা, $\cos\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{6} \cdot 3}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{-2}{3\sqrt{6}} = 105.79°$ **(Ans.)**

গ $\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CA}$ ভেক্টরত্রয় একতলীয় হবে যদি

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ হয়।}$$

বা, $2(-2 - 4) - a(1 - 2) + 1(-2 - 2) = 0$

বা, $-12 + a - 4 = 0$

$\therefore a = 16$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৩ $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{Q} = -\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{R} = 5\hat{i} - 4\hat{j} - \lambda\hat{k}$ এবং $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{Q}$.

[পুলিশ লাইন্স স্কুল এন্ড কলেজ, রংপুর]

ক. $\vec{P}$ এবং $\vec{R}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\vec{P}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ৪

গ. $\vec{M}$ বরাবর $\vec{R}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{R} = 5\hat{i} - 4\hat{j} - \lambda\hat{k}$

$\vec{P}$ ও $\vec{R}$ পরস্পর লম্ব হলে, $\vec{P}.\vec{R} = 0$ হবে।

$\therefore \quad (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (5\hat{i} - 4\hat{j} - \lambda\hat{k}) = 0$

বা, $10 - 12 + 4\lambda = 0$

বা, $-2 + 4\lambda = 0$

বা, $4\lambda = 2$

$\therefore \quad \lambda = \dfrac{1}{2}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{P}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$

মনে করি, $\vec{P}$ ভেক্টরটি x, y, z অক্ষের সাথে যথাক্রমে $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, x, y ও z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$।

তাহলে, $\cos\theta_1 = \dfrac{\vec{P}.\hat{i}}{|\vec{P}|\,|\hat{i}|} = \dfrac{(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot \hat{i}}{\sqrt{29} \cdot 1} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$

$\therefore \quad \theta_1 = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$ **(Ans.)**

আবার, $\cos\theta_2 = \dfrac{\vec{P}.\hat{j}}{|\vec{P}|\,|\hat{j}|} = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$

$\therefore \quad \theta_2 = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right)$ **(Ans.)**

এবং $\cos\theta_3 = \dfrac{\vec{P}.\hat{k}}{|\vec{P}|\,|\hat{k}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{29}}$

$\therefore \quad \theta_3 = \cos^{-1}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{29}}\right)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{R} = 5\hat{i} - 4\hat{j} - \lambda\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -\hat{i} + 2\hat{j}$

$$\therefore \vec{M} = \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(0+8) - \hat{j}(0-4) + \hat{k}(4+3)$$
$$= 8\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

এখন, $\vec{M}.\vec{R} = (8\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}).(5\hat{i} - 4\hat{j} - \lambda\hat{k})$
$$= 40 - 16 - 7\lambda$$
$$= 24 - 7\lambda$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{129}$$

$\therefore$ $\vec{M}$ ভেক্টরের উপর $\vec{R}$ এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{M}.\vec{R}}{|\vec{M}|} = \dfrac{24 - 7\lambda}{\sqrt{129}}$

$\vec{M}$ বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{m} = \dfrac{\vec{M}}{|\vec{M}|} = \dfrac{8\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}}{\sqrt{129}}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপাংশ = (অভিক্ষেপ) $(\hat{m})$
$$= \frac{24 - 7\lambda}{\sqrt{129}} \times \frac{(8\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k})}{\sqrt{129}}$$
$$= \frac{24 - 7\lambda}{129}(8\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}) \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ১৪ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} + b\hat{j} + 3\hat{k}$.

[ব্রাহ্মণবাড়িয়া সরকারি মহিলা কলেজ, ব্রাহ্মণবাড়িয়া]

ক. একক ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ২

খ. $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $\vec{C}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে, b এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **একক ভেক্টর :** যে ভেক্টরের মান এক তাকে একক ভেক্টর বলে। অর্থাৎ $\vec{a}$ একটি ভেক্টর হলে, $|\vec{a}| = 1$

খ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore (\vec{A} + \vec{B}) = (2+1)\hat{i} + (3+2)\hat{j} + (-1-1)\hat{k} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore (\vec{A} - \vec{B}) = (2-1)\hat{i} + (3-2)\hat{j} + (-1+1)\hat{k} = \hat{i} + \hat{j}$

এখন, $(\vec{A} + \vec{B})$ ও $(\vec{A} - \vec{B})$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{(\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} + \vec{B}||\vec{A} - \vec{B}|}$$

বা, $\cos\theta = \dfrac{3 \times 1 + 5 \times 1}{\{\sqrt{3^2 + 5^2 + (-2)^2}\}\{\sqrt{1^2 + 1^2}\}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{8}{(\sqrt{38})\sqrt{2}}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{8}{\sqrt{76}}\right)$

$\therefore$ $\theta = 23.41°$ **(Ans.)**

গ সৃজনশীল প্রশ্ন-২(খ)নং এর সমাধান দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা-৩৩

প্রশ্ন ▶ ১৫ তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $\vec{C} = -4\hat{i} + m\hat{j} + 6\hat{k}$

[নোয়াখালী সরকারি মহিলা কলেজ, নোয়াখালী]

ক. প্রথম দুটি ভেক্টরের উপর একটি লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $\vec{C}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে m এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} \times \vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= (16+3)\hat{i} - (8+3)\hat{j} + (-1+2)\hat{k}$$
$$= 19\hat{i} - 11\hat{j} + \hat{k}$$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর একটি লম্ব একক ভেক্টর,

$$\hat{\eta} = \pm \frac{19\hat{i} - 11\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{(19)^2 + (-11)^2 + (1)^2}}$$
$$= \pm \frac{19\hat{i} - 11\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{361 + 121 + 1}}$$
$$= \pm \frac{1}{\sqrt{483}}(19\hat{i} - 11\hat{j} + \hat{k}) \textbf{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $\vec{C} = -4\hat{i} + m\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর উপাংশ $= (\vec{A}.\vec{B})\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|^2}$

$\therefore \vec{A}.\vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$
$$= -1 - 2 + 24$$
$$= 21$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{14}$$

$\therefore$ উপাংশ $= 21 \times \dfrac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})}{(\sqrt{14})^2}$
$$= \frac{3}{2}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

শর্তমতে,

$\dfrac{3}{2}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(-4\hat{i} + m\hat{j} + 6\hat{k}) = 0$

বা, $-4 + 2m + 18 = 0$

বা, $2m = -14$

$\therefore$ $m = -7$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$

'খ' হতে, $\vec{C} = -4\hat{i} - 7\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore \vec{A} + \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$
$$= \hat{j} + 11\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (12+21)\hat{i} - (6+12)\hat{j} + (-7+8)\hat{k}$$
$$= 33\hat{i} - 18\hat{j} + \hat{k}$$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \cos^{-1}\dfrac{(\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} \times \vec{C})}{|\vec{A} + \vec{B}||\vec{A} \times \vec{C}|}$

$$= \cos^{-1}\frac{(\hat{j} + 11\hat{k}).(33\hat{i} - 18\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{1^2 + 11^2}.\sqrt{33^2 + (-18)^2 + 1^2}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{-18 + 11}{\sqrt{122}.\sqrt{1414}}$$

≈ 91° (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৬ $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{Q} = -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, \vec{R} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

[এম.সি একাডেমী (মডেল স্কুল ও কলেজ), গোলাপগঞ্জ, সিলেট]

ক. $|\vec{P} - \vec{Q}|$ নির্ণয় কর। ২

খ. $\vec{P} + \vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{Q} = -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{P} - \vec{Q} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (-3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{P} - \vec{Q}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\vec{R} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{Q} = -3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{P} + \vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} - 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} = -2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$(\vec{P} + \vec{Q})$ এবং $\vec{R}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{(\vec{P} + \vec{Q}).\vec{R}}{|\vec{P} + \vec{Q}|\,|\vec{R}|} = \frac{(-2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (-1)^2}\sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

বা, $\cos\theta = \dfrac{-6 - 2 - 1}{\sqrt{6}\sqrt{14}}$

বা, $\cos\theta = -\dfrac{9}{\sqrt{84}}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{9}{\sqrt{84}}\right)$

$\therefore \quad \theta = 169.11°$ **(Ans.)**

গ মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লম্ব একক ভেক্টর $\hat{\eta}$.

$\therefore \quad \hat{\eta} = \pm \dfrac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|}$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4 - 3) - \hat{j}(2 - 9) + \hat{k}(-1 + 6)$

$= \hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore \quad |\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{75}$

$\therefore \quad \hat{\eta} = \pm \dfrac{\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{75}}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} + m\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

[সরকারি সুন্দরবন আদর্শ কলেজ, খুলনা]

ক. যদি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° হয় তবে m এর মান কত? ২

খ. $\vec{A} + \vec{C}$ ও $\vec{A} \times \vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত ভেক্টরগুলোর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স P হলে P^{-1} নির্ণয় কর যেখানে $m = -6$. ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} + m\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° হলে,

$$\cos 90° = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$$

বা, $0 = \dfrac{(2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + m\hat{j} + 4\hat{k})}{\sqrt{4 + 16 + 25}\sqrt{4 + m^2 + 16}}$

বা, $0 = 4 + 4m + 20$

বা, $4m = -24$

$\therefore \quad m = -6$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{A} + \vec{C} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} + \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-8 + 10) - \hat{j}(-4 - 5) + \hat{k}(-4 - 4)$

$= 2\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ,

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}).(2\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k})}{\sqrt{9 + 4 + 9} \cdot \sqrt{4 + 81 + 64}}$$

$= \cos^{-1}\dfrac{6 + 18 - 24}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{149}}$

$= \cos^{-1} 0 = 90°$ **(Ans.)**

গ উদ্দীপকে উল্লেখিত ভেক্টরগুলোর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্স P হলে,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |P| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 2(12 + 8) - 4(-4 - 4) + 5(-4 + 6)$

$= 40 + 32 + 10$

$= 82 \neq 0$

$\therefore \quad P^{-1}$ নির্ণয়যোগ্য।

$P_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 8 = 20$

$P_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 4) = 8$

$P_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$

$P_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(-8 + 10) = -2$

$P_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9$

$P_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 4) = 8$

$P_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 30 = 46$

$P_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 10) = 2$

$P_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 8 = -20$

$\therefore \quad P^{-1} = \dfrac{\text{adj } P}{|P|}$

$$= \frac{1}{82}\begin{bmatrix} 20 & 8 & 2 \\ -2 & -9 & 8 \\ 46 & 2 & -20 \end{bmatrix}'$$

$$= \frac{1}{82}\begin{bmatrix} 20 & -2 & 46 \\ 8 & -9 & 2 \\ 2 & 8 & -20 \end{bmatrix}$$ **(Ans.)**