গতিবিদ্যা(দ্বিমাত্রিক গতি)

প্রশ্ন → (১) সংজ্ঞা লিখ ঃ (i) প্রাস (ii) প্রাসের পাল্লা (iii) ব্যাসার্ধ ভেক্টর (iv) কৌণিক সরণ (v) কৌণিক বেগ (vi) কৌণিক ত্বরন (vii) কেন্দ্রমুখী ত্বরণ এবং (viii) স্পর্শী ত্বরণ।

উত্তর ঃ (i) প্রাস বা প্রক্ষেপক (Projectile) ঃ অনুভূমিকের সাথে তীর্যকভাবে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুকে প্রাস বা প্রক্ষেপক বলে। যেমন- তীর্যকভাবে শূন্যে নিক্ষিপ্ত ঢিল, বর্শা, ক্ষেপনাস্ত্র ইত্যাদি। প্রাসের গতির উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য হলো- দ্বিমাত্রিক গতি, বক্রগতি, সমত্বরন বিশিষ্ট এবং গতিপথ অধিবৃত্তাকার।

(ii) প্রাসের পাল্লা (Range) ঃ যে বিন্দু থেকে প্রাসকে নিক্ষেপ করা হয় তাকে নিক্ষেপণ বিন্দু এবং প্রসঙ্গ সমতলের যে বিন্দুতে প্রাস পতিত হয় তাকে পতন বিন্দু বলে। এই নিক্ষেপণ বিন্দু ও পতন বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে প্রাসের পাল্লা বলে। ইহাকে সাধারণত R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(iii) ব্যাসার্ধ ভেক্টর ঃ একটি কণা বৃত্তপথে ঘুরতে থাকলে বৃত্তটির কেন্দ্র ও কণার অবস্থানের সংযোগকারী সরলরেখাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। ব্যাসার্ধ ভেক্টরের মান = বৃত্তাকর পথের ব্যাসার্ধ = r ।

(iv) কৌণিক সরণ ঃ যদি কোন বস্তুকণা বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তাহলে বস্তুটি নির্দিষ্ট সময়ে নির্দিষ্ট বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। এই বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে কৌণিক সরণ বলে। একে θ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(v) কৌণিক বেগ ঃ কোন বস্তুকণা একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে উহার চতুর্দিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকলে একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক বেগ বলে। একে ω দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

t সময়ে কোন বস্তুর কৌণিক সরণ θ হলে কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{\theta}{t}$ । এর একক=রেডিয়ান/সে।

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \theta \times \frac{1}{t} = \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} \times \frac{1}{\text{সময়}}$$

$\therefore$ কৌণিক বেগের মাত্রা সমীকরণ = $\frac{L}{L} \times \frac{1}{T} = \left[T^{-1}\right]$ ।

(vi) কৌণিক ত্বরন ঃ একক সময়ে কৌণিক বেগের পরিবর্তনকে কৌণিক ত্বরণ বলে। একে α দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একটি বস্তুর আদি কৌণিক বেগ ω_1 এবং t সময় পর বেগ পরিবর্তন হয়ে ω_2 হলে কৌণিক ত্বরন, $\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t}$ । এর একক রেডিয়ান/ সে^{2} । মাত্রা = $[T^{-2}]$

(vii) কেন্দ্রমুখী ত্বরণ (Centripetal Acceleration) ঃ যখন কোন বস্তুকণা একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে কণাটির উপর একটি বল ক্রিয়া করে। এই বলকে কেন্দ্রমুখী বল বলে। কেন্দ্রমুখী বলের দরুণ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান বস্তুতে যে ত্বরণ সৃষ্টি হয় তাকে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বলে। এই ত্বরণের অভিমুখ বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে। তাই এই ত্বরণকে ব্যাসার্ধমুখী ত্বরণ বা অভিলম্ব ত্বরণ বা লম্ব ত্বরণও বলে। এর একক $m\bar{s}^2$ এবং মাত্রা=$[LT^{-2}]$

(viii) স্পর্শী ত্বরণ ঃ যখন কোন বস্তুকণা অসম কৌণিক বেগে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তপথের স্পর্শক বরাবর একটি ত্বরণ সৃষ্টি হয়। এই ত্বরণকে স্পর্শী ত্বরণ বলে। একটি বস্তু যখন সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকে তখন এর শুধু কেন্দ্রমুখী ত্বরণ থাকে কিন্তু অসম কৌণিক বেগে ঘুরতে থাকলে এর কৌণিক ত্বরণ, কেন্দ্রমুখী ত্বরণ এবং স্পর্শী ত্বরণ সবগুলো থাকে।

প্রশ্ন→ (২) ঃ সরণ, বেগ ও ত্বরণের ভেক্টর রূপ সম্বন্ধে আলোচনা কর।

সরণের ভেক্টর রূপ ঃ সরণকে সাধারণত s বা r দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গতির প্রকৃতি অনুসারে সরণকে বিভিন্ন উপাংশেও বিভাজিত করা যায়। কোন বস্তুর সরণ x অক্ষ বরাবর হলে সরণের ভেক্টর রূপ, $\vec{r} = x\hat{i}$ ।

বস্তুর সরণ XY সমতলে হলে , দ্বি-মাত্রিক সরণের ভেক্টর রূপ, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ । বস্তুর সরণ ত্রিমাত্রিক স্থানে হলে , $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ।

যেখানে x, y ও z যথাক্রমে x, y ও z অক্ষ বরাবর সরণের তিনটি উপাংশ।

বেগের ভেক্টর রূপ ঃ বস্তুর বেগ শুধুমাত্র x অক্ষ বরাবর হলে বেগের ভেক্টররূপ $\vec{V} = V_x\hat{i}$, অনুরূপভাবে দ্বিমাত্রিক এবং ত্রিমাত্রিক বেগের ভেক্টর রূপ যথাক্রমে, $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j}$ এবং $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ যেখানে, V_x, V_y ও V_z যথাক্রমে x, y ও z অক্ষ বরাবর বেগের তিনটি উপাংশ।

ত্বরনের ভেক্টর রূপ ঃ ত্বরণকে সাধারনত a দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একমাত্রিক ত্বরনের ভেক্টর রূপ $\vec{a} = a_x\hat{i}$, দ্বিমাত্রিক এবং ত্রিমাত্রিক ত্বরণের ভেক্টররূপ যথাক্রমে , $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$ এবং $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ যেখানে a_x, a_y ও a_z যথাক্রমে x, y ও z অক্ষ বরাবর ত্বরনের তিনটি উপাংশ।

প্রশ্ন→ (৩) ঃ বেগ এবং ত্বরণের উপাংশের সাথে সরনের উপাংশের সম্পর্ক স্থাপন কর।

অথবা ঃ সরন থেকে বেগ ও ত্বরণের রাশিমালা বের কর।

আমরা জানি, ত্রিমাত্রিক স্থানে সরন $\vec{r}$ কে লেখা যায়,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \text{ -------------- } (1)$$

এখানে x, y ও z সরনের তিনটি উপাংশ। এখন প্রকৃত বেগ $\vec{V}$ হলে আমরা পাই,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

বা, $\vec{V} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$ [(1) থেকে $\vec{r}$ এর মান বসাইয়া]

বা, $\vec{V} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$ ------------------------ (2)

সমীকরন (2) সরন থেকে প্রাপ্ত বেগের রাশিমালা। এখন আমরা জানি, বেগের ভেক্টররূপর,

$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ --------------------- (3)

(2) ও (3) তুলনা করে পাই, $V_x = \frac{dx}{dt}; V_y = \frac{dy}{dt};$ এবং $V_z = \frac{dz}{dt}$ ---------------- (4)

সমীকরন (4) বেগের উপাংশ ও সরণের উপাংশের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে। আবার প্রকৃত ত্বরনের সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি,

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

(2) থেকে $\vec{V}$ -এর মান বসাই, $\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \text{ ---------------- (5)}$$

সমীকরণ (5) সরন থেকে প্রাপ্ত ত্বরণের রাশিমালা। এখন আমরা জানি, ত্বরণের ভেক্টররূপ, $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ ---------- (6)

সমীকরণ (5) এবং (6) তুলনা করে পাই,

$$\therefore a_x = \frac{d^2x}{dt^2};\ \ a_y = \frac{d^2y}{dt^2};\ \ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \text{ -------------- (7)}$$

সমীকরন (7) ত্বরণের উপাংশ ও সরণের উপাংশের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

প্রশ্ন→ (৪) ঃ প্রমাণ কর যে, (i) $\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{a}t$ **এবং (ii)** $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{V}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

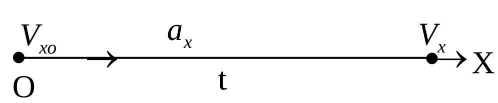
প্রমাণ $\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{a}t$

প্রথমে আমরা ধরে নিব যে, বস্তুটি শুধুমাত্র x অক্ষ বরাবর গতিশীল (চিত্র-১)

x অক্ষ বরাবর আদিবেগ = V_{xo}

সমত্বরন = a_x

t সময় পর শেষবেগ = V_x



চিত্র - (১)।

সমত্বরনে t সময় পর শেষ বেগের সমীকরন থেকে পাই,

$V_x = V_{xo} + a_x t$ -------------------- (i)

বস্তুটি Y অক্ষ বরাবর গতিশীল হলে আমরা পাই,

$V_y = V_{yo} + a_y t$ ---------------------- (ii)

একইভাবে বস্তুটি z অক্ষ বরাবর সমত্বরনে গতিশীল হলে পাই,

$V_z = V_{zo} + a_z t$ --------------------- (iii)

এখন বস্তুটি ত্রিমাত্রিক স্থানে গতিশীল হলে বেগের ভেক্টর রূপ থেকে পাই,

$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$

বা, $\vec{V} = (V_{xo} + a_x t)\hat{i} + (V_{yo} + a_y t)\hat{j} + (V_{zo} + a_z t)\hat{k}$

[(i), (ii) ও (iii) থেকে মান বসাইয়া]

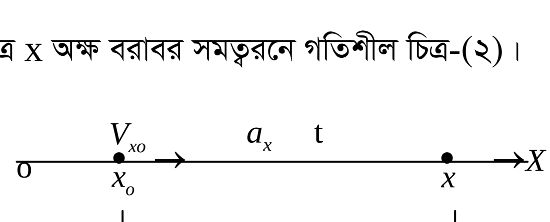
বা, $\vec{V} = (V_{x_o}\hat{i} + V_{y_o}\hat{j} + V_{z_o}\hat{k}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})t$

বা, $\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{a}t$ (প্রমাণিত) $\left[\therefore \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right]$

প্রমাণ (ii) ঃ $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{V}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

প্রথমে আমরা ধরে নিব যে, একটি বস্তু শুধুমাত্র x অক্ষ বরাবর সমত্বরনে গতিশীল চিত্র-(২)।

বস্তুটির আদি অবস্থান = x_o , t সময় পরের অবস্থান = x। x_o অবস্থানে আদিবেগ = V_{xo} । ধরি, সমত্বরন = a_x এবং x_o থেকে x অবস্থান পর্যন্ত সরন = S ।



চিত্র (২)

এখন সমত্বরনে t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ থেকে পাই,

$$S = V_{xo}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

বা, $x - x_o = V_{xo}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \therefore x = x_o + V_{xo}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ ----------------------- (i)

অনুরূপভাবে বস্তুটি Y অক্ষ এবং z অক্ষ বরাবর গতিশীল হলে আমরা পাই,

$y = y_0 + V_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ -------------- (ii)

এবং $z = z_o + V_{zo}t + \frac{1}{2}a_z t^2$ -------------- (iii)

বস্তুটি ত্রিমাত্রিক স্থানে গতিশীল হলে সরনের ভেক্টর রূপ থেকে পাই,

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ [(i), (ii) ও (iii) থেকে মান বসাই]

$$\vec{r} = (x_o + V_{xo}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (y_o + V_{yo}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{j} + (z_o + V_{zo}t + \frac{1}{2}a_z t^2)\hat{k}$$

বা, $\vec{r} = (x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k}) + (V_{xo}\hat{i} + V_{yo}\hat{j} + V_{zo}\hat{k})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})t^2$

এখানে, $x_o\hat{i} + y_o\hat{j} + z_o\hat{k} = \vec{r}_o$; $V_{xo}\hat{i} + V_{yo}\hat{j} + V_{zo}\hat{k} = \vec{V}_o$ এবং $a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \vec{a}$

অতএব, আমরা পাই, $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{V}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন→ গড় ত্বরণ এবং তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলতে কি বুঝ ?

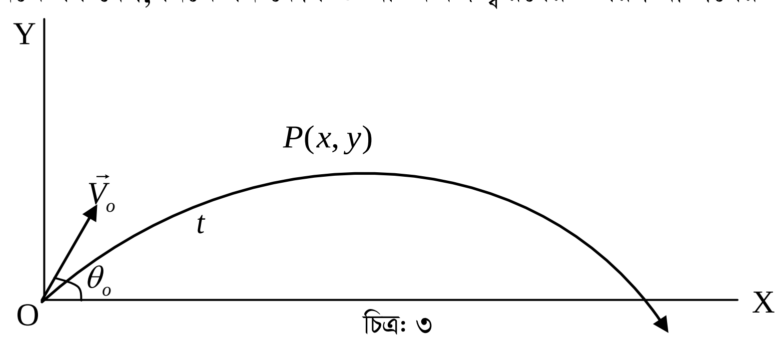
গড়ত্বরন: যে কোন সময় ব্যবধানে কোন বস্তুর গড়ে প্রতি একক সময়ে বেগের পরিবর্তন কে বল হয় গড় ত্বরণ।

তাৎক্ষণিক ত্বরন: সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর বেগ পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে। Δt সময়ে বেগের পরিবর্তন Δv হলে তাৎক্ষণিক ত্বরন,

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\vec{a}}$ । এখানে $\bar{\vec{a}} =$ গড়ত্বরন।

প্রশ্ন→ (৫) ঃ অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর (প্রাস বা প্রক্ষেপকের) গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এই গতিপথ অধিবৃত্তাকার।

একটি প্রাসের গতিপথ নির্ভর করে উহার নিক্ষেপণ বেগ, নিক্ষেপন কোণ ও অভিকর্ষজ ত্বরণের উপর। বাতাসের বাবা কিছুটা প্রভাবিত করলেও তা উপেক্ষা করা হয়।



চিত্র: ৩

মনেকরি, বায়ু মধ্যস্থিত O বিন্দু হতে একটি বস্তুকে v_o নিক্ষেপণ বেগে ও θ_o নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষেপ করা হলো। এখানে অভিকর্ষজ ত্বরন g খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করবে।

নিক্ষেপণ বেগের অনুভূমিক উপাংশ = $v_o \cos\theta_o$

এবং উল্লম্ব উপাংশ = $v_o \sin\theta_o$

অভিকর্ষীয় বলের দরুন প্রাসটি উল্লম্ব বরাবর সমমন্দনে এবং কোন বল ক্রিয়া না করায় অনুভূমিক বরাবর সমবেগে চলবে। এখন ধরি, নিক্ষেপ করার t সময় পর প্রাসটি $P(x, y)$ বিন্দুতে পৌছিল। P অবস্থানে প্রাসটির অনুভূমিক বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব = x । এবং উল্লম্ব বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব = y । যেহেতু প্রাস অনুভূমিক বরাবর সমবেগে এবং উল্লম্ব বরাবর সমমন্দনে চলে, অতএব আমরা পাই,

$x = (v_o \cos\theta_o) \times t$ --------------------------- (1)

এবং $y = (v_o \sin\theta_o) \times t - \frac{1}{2}gt^2$ ---------------------- (2)

(1) নং সমীকরণ হতে পাই,

$t = \frac{x}{v_o \cos\theta_o}$ ------------------ (3)

t এর মান (2) নং সমীকরণে বসাইয়া পাই,

$$y = (v_o \sin\theta_o) \times \frac{x}{v_o \cos\theta_o} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_o \cos\theta_o}\right)^2$$

$$\text{বা, } y = x\tan\theta_o - \left(\frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta_o}\right)x^2 \text{ ---------------- } (4)$$

এখন ধরি, $\tan\theta_o = b$ (ধ্রুবক) এবং $\frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta_o} = c$(ধ্রুবক)

আমরা পাই, $y = bx - cx^2$ --- (5)

সমীকরণ (5) হচ্ছে প্রাসের গতিপথের সমীকরণ। এই সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণের সাথে মিলে যায়। অতএব, প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন→ (৬):- অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে নিক্ষিপ্ত প্রাসের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত রাশিমালা নির্ণয় কর। (i) সর্বাধিক উচ্চতায় উঠার সময় (ii) সর্বাধিক উচ্চতা (iii) বিচরন কাল বা উড্ডয়ন কাল (iv) পাল্লা (v) সর্বাধিক পাল্লা।

উত্তর:- (i) সর্বাধিক উচ্চতায় উঠার সময়:- ধরি একটি প্রাসের নিক্ষেপনবেগ বা আদিবেগ $= \vec{v}_o$ এবং নিক্ষেপন কোণ $= \theta_o$। আবার t সময় পর বেগ = $\vec{v}$।

$\therefore$ নিক্ষেপন বেগের উল্লম্ব উপাংশ $v_{yo} = v_o\sin\theta_o$

$\therefore$ t সময় পর প্রাপ্ত বেগ $\vec{v}$ এর উলম্ব উপাংশ,

$$v_y = v_o\sin\theta_o - gt \text{ --------------------- } (1)$$

মনেকরি, t' সময়ে প্রাসটি সর্বাধিক উচ্চাতায় উঠে। অতএব, t' সময় পর বেগের উলম্ব উপাংশ $v_y = 0$।

$\therefore$ আমরা পাই,

$$0 = v_o\sin\theta_o - gt'$$

$$\text{বা, } gt' = v_o\sin\theta_o$$

$$\therefore t' = \frac{v_o\sin\theta_o}{g} \text{ --------------------------------------- } (2)$$

(ii) সর্বাধিক উচ্চতা:- আমরা জানি নিক্ষেপন বেগের শুধু উলম্ব উপাংশের জন্যই কোন একটি প্রাস উপরের দিকে উঠে। ধরি, প্রাসটির নিক্ষেপন বেগ = v_o এবং নিক্ষেপন কোণ = θ_o। তাহলে নিক্ষেপন বেগের উল্লম্ব উপাংশ = $v_o\sin\theta_o$। যদি অভিকর্ষজ ত্বরণ = g এবং h উচ্চতায় উঠার পর বেগের উল্লম্ব উপাংশ = v_y হয়, তাহলে আমরা পাই,

$$v_y^2 = v_o^2\sin^2\theta_o - 2gh \text{ --------------------------- } (1)$$

কিন্তু সর্বাধিক উচ্চতায় বেগের উল্লম্ব উপাংশ শূন্য। অর্থাৎ $h = H$ হলে $v_y = 0$। অতএব, (1) থেকে পাই,

$$0 = v_o^2\sin^2\theta_o - 2gH$$

$$\text{বা, } 2gH = v_0^2\sin^2\theta_o$$

$$\therefore H = \frac{v_o^2\sin^2\theta_o}{2g} \text{ -------------------------- } (2)$$

ইহা প্রাসের সর্বাধিক উচ্চতার রাশিমালা।

(iii) বিচরন কাল বা উড্ডয়ন কাল:- মনেকরি একটি প্রাসের t সময়ে উলম্ব দিকে সরণ = h। অতএব আমরা পাই,

$$h = (v_o\sin\theta_o)\times t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ ---------------------- } (1)$$

এখন যদি প্রাসটির বিচরন কাল = T হয় তবে T সময় পরে প্রাসটি ভূমিতে ফিরে আসবে অর্থাৎ $h = 0$ হবে। অতএব আমরা পাই,

$$0 = (v_o\sin\theta_o)\times T - \frac{1}{2}gT^2$$

$$\text{বা, } \frac{gT^2}{2} = (v_o\sin\theta_o)T$$

$$\text{বা, } \frac{gT}{2} = v_o\sin\theta_o$$

$$\therefore T = \frac{2v_o\sin\theta_o}{g} \text{ ------------------------------- } (2)$$

(iv) পাল্লা :- ধরি, কোন একটি প্রাসের বিচরন কাল বা উড্ডয়ন কাল = T। তাহলে T সময়ে প্রাস অনুভূমিক বরাবর যে দূরত্ব অতিক্রম করে সেই দুরত্বই হবে উহার পাল্লা। নিক্ষেপন বা আদিবেগ v_o হলে এই বেগের অনুভূমিক উপাংশ = $v_o\cos\theta_o$। আমরা জানি, অনুভূমিক দিকে প্রাসের বেগ হলো সমবেগ। অতএব, সমবেগে T সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব = পাল্লা R

$$\therefore R = \text{সমবেগ} \times \text{সময়}$$

বা, $R = v_o \cos\theta_o \times T$ | এখানে, $\mathrm{T} = \frac{2\mathrm{v}_o \sin\theta_o}{g}$

$\therefore R = v_o \cos\theta_o \times \frac{2\mathrm{v}_o \sin\theta_o}{g}$

বা, $R = \frac{\mathrm{v}^2{}_o 2\sin\theta_o \cos\theta_o}{g} = \frac{\mathrm{v}_o^2 \sin 2\theta_o}{\mathrm{g}}$

$\therefore$ পাল্লা, $R = \frac{\mathrm{v}_o^2 \sin 2\theta_o}{\mathrm{g}}$ ------------------ (1)

(v) সর্বাধিক পাল্লাঃ- আমরা জানি, প্রাসের পাল্লা, $R = \frac{\mathrm{v}_o^2 \sin 2\theta_o}{\mathrm{g}}$

কোন একটি নির্দিষ্ট স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরন, $g =$ ধ্রুবক। অতএব, একটি নির্দিষ্ট নিক্ষেপন বেগ v_o এর জন্য পাল্লার সর্বাধিক বা সর্বনিম্নমান নির্ভর করবে শুধুমাত্র $\sin 2\theta_o$ এর উপর। $\sin 2\theta_o$ এর মান সর্বাধিক হলে পাল্লা, R এর মানও সর্বাধিক হবে।

আমরা জানি, $\sin 2\theta_o$ এর সর্বাধিক মান $= 1$, যখন $2\theta_o = 90^o$ $\therefore \theta_o = 45^o$ । অতএব নিক্ষেপণ কোণ 45^o হলে পাল্লার মান সর্বাধিক হয়। সুতরাং সর্বাধিক পাল্লা,

$$R_{\max} = \frac{\mathrm{v}_o^2 \sin(2\times 45^o)}{g} = \frac{\mathrm{v}_o^2 \sin 90^o}{g}$$

$\therefore R_{\max} = \frac{\mathrm{v}_o^2}{\mathrm{g}}$ ------------------------- (1)

প্রশ্ন→ (৭):- পর্যায় কাল ও কম্পাঙ্ক বলতে কি বুঝ? কৌণিক বেগের সাথে উহাদের সম্পর্ক স্থাপন কর।

উত্তর ঃ- পর্যায় কাল ঃ- কোন একটি বস্তু যদি কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে সমকৌণিক বেগে ঘোরে তবে বস্তুটি বৃত্তপথ একবার ঘুরে আসতে যে সময় নেয় তাকে পর্যায় কাল বলে।

কম্পাঙ্ক ঃ- সমকৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান বস্তু প্রতি সেকেন্ডে যতবার বৃত্তাকার পথ পরিভ্রমন করে তাকে কম্পাঙ্ক বলে। কম্পাংককে n দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ইহার একক সাইকেল/সেকেন্ড বা হার্টজ (H_z)

কম্পাংক ও পর্যায় কালের মধ্যে সম্পর্ক ঃ- মনেকরি, একটি কণা সমকৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে, যার পর্যায় কাল $= T$ সে.। এখন পর্যায় কাল $= T$, সেকেন্ড কথাটির অর্থ হচ্ছে

বৃত্তাকার পথটি T সেকেন্ডে ঘুরে $= 1$ বার

$\therefore$ ॥ ॥ 1 ॥ ॥ $= \frac{1}{T}$

কিন্তু বস্তুটি 1 সেকেন্ডে বৃত্তাকার পথটি যতবার ঘুরে তাহাই কম্পাঙ্ক $= n$

$\therefore n = \frac{1}{T}$ ----------------------- (1)

কৌণিক বেগ ও পর্যায় কালের মধ্যে সম্পর্ক ঃ- মনেকরি, একটি বস্তু সমকৌণিক বেগে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। ধরি বস্তুটির পর্যায়কাল $= T$, এবং কৌণিক বেগ $= \omega$ । আমরা জানি বৃত্তের কেন্দ্রে উহার পরিধি 360^o বা 2π কোণ উৎপন্ন করে।

যেহেতু বস্তুটির পর্যায়কাল $= T$ অতএব আমরা বলতে পারি,

T সেকেন্ডে বস্তুটির কৌণিক সরণ $= 2\pi$

$\therefore$ ॥ ॥ ॥ ॥ $= \frac{2\pi}{T}$

কিন্তু এক সেকেন্ডে কোন বস্তুর যে কৌণিক সরণ হয় তাকেই বলা হয় কৌণিক বেগ। অতএব, কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ----- (1)

সমীকরন (1) কৌণিক বেগ ও পর্যায়কালের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

কৌণিক বেগ ও কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক ঃ আমরা জানি, কৌণিক বেগ,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ এখানে T = পর্যায়কাল।

বা, $\omega = 2\pi.\frac{1}{T}$ -------------------------- (1)

আবার আমরা জানি, $n = \frac{1}{T}$ যেখানে $n =$ কম্পাঙ্ক। $\therefore$ সমীকরন (1) থেকে পাই,

$\omega = 2\pi n$ ---------------------------- (2)

সমীকরন (2) কৌণিক বেগ ও পর্যায়কালের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

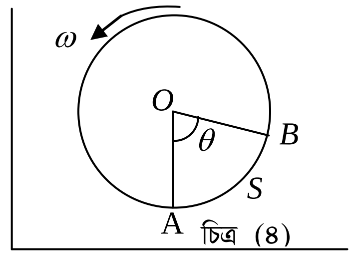
প্রশ্ন→(৮)ঃ কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। এই সম্পর্কের ভেক্টর রূপ দেখাও।

উত্তর ঃ মনেকরি, একটি বস্তুকণা O কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। কোন এক মুহূর্তে বস্তুটি A অবস্থানে ছিল। t সময় পর বস্তুটি B অবস্থানে পৌছিল। তাহলে t সময়ে বস্তুটি $AOB=\theta$ কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করল। ধরি বৃত্তচাপ $AB=S$ । চিত্র- (৪)। এখন আমরা জানি,

কোণ = $\frac{\text{বৃত্তচাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$

বা, $\theta=\frac{S}{r}$

বা, $S=r\theta$ ------------ (1)



চিত্র (৪)

সমীকরন (1)- এর উভয় পক্ষে t সাপেক্ষে অন্তরীকরন করি,

$$\frac{d}{dt}(S)=\frac{d}{dt}(r\theta)$$

বা, $\frac{dS}{dt}=r\frac{d}{dt}(\theta)$ [$r=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=$ ধ্রুবক]

বা, $\frac{dS}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}$ --------------- (2)

কিন্তু আমরা জানি, রৈখিক বেগ $V=\frac{dS}{dt}$ এবং কৌণিক বেগ $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ অতএব, সমীকরন (2) থেকে পাই, $V=\omega r$ ------- (3)

অর্থাৎ রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ$\times$বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

দ্বিতীয় অংশ : $V=\omega r$ সম্পর্কের ভেক্টর রূপঃ যেহেতু বস্তুটি ω সমকৌণিক বেগে r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ঘুরছে, অতএব, বস্তুটির ব্যাসার্ধ ভেক্টর = $\vec{r}$ । এখন কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ এর দিক, সর্বদা ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r}$ সাথে সমকোণী।

অতএব, ক্রস গুণনের নিয়ম অনুসারে পাই,

$$|\vec{\omega}\times\vec{r}|=\omega r\sin 90^o$$

বা, $|\vec{\omega}\times\vec{r}|=\omega r=V=|\vec{V}|$

$\therefore \vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ ------------------ (4)

ইহাই নির্ণেয় ভেক্টর রূপ।

প্রশ্ন→ (৯):- রৈখিক ত্বরণ ও কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

উত্তরঃ মনেকরি, একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে গতিশীল। যদি বস্তুটির রৈখিক ত্বরণ = a এবং কৌণিক ত্বরন = α হয় তাহলে a এবং α এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে।

বস্তুকণাটির রৈখিক বেগ = V এবং কৌণিক বেগ = ω হলে আমরা পাই,

$V=\omega r$ ----------------- (1)

সমীকরন (1)- এর উভয় পক্ষে t সাপেক্ষে অন্তরীকরন করি,

$$\frac{d}{dt}(V)=\frac{d}{dt}(\omega r)$$

বা, $\frac{dV}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}$ [rবৃত্তেরব্যাসার্ধ বলে ধ্রুবক]

এখন আমরা জানি, $\frac{dV}{dt}=$ রৈখিক ত্বরন = a এবং $\frac{d\omega}{dt}=$ কৌণিক ত্বরন $=\alpha$ । অতএব, আমরা পাই,

$a=\alpha r$ --------------- (2)

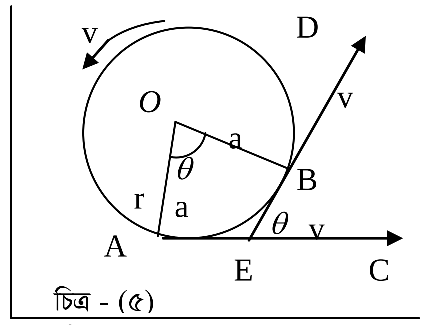
অর্থাৎ, রৈখিক ত্বরন = কৌণিক ত্বরণ $\times$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

প্রশ্ন→ (১০):- কেন্দ্রমুখী ত্বরন কি? সুষমবৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে কেন্দ্রমুখী ত্বরনের রাশিমালা বাহির কর। উহা হতে দেখাও যে, কেন্দ্রমুখী বল,

$$F_c=\frac{mv^2}{r}=m\omega^2 r \text{ ।}$$

উত্তরঃ কেন্দ্রমুখী ত্বরনঃ কেন্দ্রমুখী বলের প্রভাবে বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান বস্তুতে ব্যাসার্ধ বরাবর কেন্দ্রের দিকে যে ত্বরন সৃষ্টি হয় তাকে কেন্দ্রমুখী ত্বরন বা ব্যাসার্ধমুখী ত্বরন বা অভিলম্ব ত্বরন বলে। একে সাধারনত a দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর একক ms^{-2} এবং মাত্রা $\left[LT^{-2}\right]$ ।

কেন্দ্রমুখী ত্বরনের রাশিমালা ঃ মনে করি, একটি বস্তুকণা O কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে V সমদ্রুতিতে গতিশীল। ধরি কোন এক মুহূর্তে বস্তুটি A অবস্থানে আসে এবং অতি অল্প t সময়ে A হতে B অবস্থানে যায়। A অবস্থানে বেগ V -এর দিক স্পর্শক AC বরাবরএবং B অবস্থানে বেগ V -এর দিক স্পর্শক BD বরাবর। BD কে পিছনের দিকে বর্ধিত করায় AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র - (৫)

এখন, $AOBE$ চতুর্ভূজের ,
$\underline{|OAE} + \underline{|OBE} = 2$ সমকোণ
$\therefore \underline{|AOB} + \underline{|AEB} = 2$ সমকোণ -------------------- (1)
চিত্র থেকে আবার আমরা পাই, $\underline{|AEB} + \underline{|BEC} = 2$ সমকোণ--------------- (2)
সমীকরণ (1) ও (2) থেকে আমরা পাই,
$\underline{|AOB} = \underline{|BEC}$ $\quad \therefore \underline{|BEC} = \theta$, এখন B বিন্দুতে বেগ V কে দুটি উপাংশে বিভক্ত করি। যথা,
AC এর সমান্তরাল দিকে উপাংশ, $x = V\cos\theta$
এবং AO এর সমান্তরাল দিকে উপাংশ, $y = V\sin\theta$
এখন t অতিক্ষুদ্র সময় বলে A ও B খুবই নিকটবর্তী হবে এবং কোণ θ অতিক্ষুদ্র হবে। এখন আমরা জানি,
θ খুব ক্ষুদ্র হলে $\cos\theta = 1$ এবং $\sin\theta = \theta$ হয়।
অতএব, B বিন্দুতে বেগ V এর উপাংশগুলোকে লেখা যায়,

$$\left.\begin{array}{l} x = V \\ \text{এবং} \quad y = V\theta \end{array}\right\} \text{--------------} \ (3)$$

এখন A বিন্দুতে বেগ V কে দুটি উপাংশে বিভক্ত করি, AC বরাবর এবং AO বরাবর। চিত্র (৫) থেকে দেখা যায় A বিন্দুতে বেগ V সম্পূর্ণরূপে AC বরাবর, অতএব AO বরাবর V -এর কোন উপাংশ নাই। অর্থাৎ, A বিন্দুতে,

$$\left.\begin{array}{l} x = V \\ \text{এবং} \quad y = 0 \end{array}\right\} \text{--------------} \ (4)$$

সমীকরণ (3) এবং (4) থেকে দেখা যাচ্ছে যে, স্পর্শক AC বরাবর বেগের উপাংশের কোন পরিবর্তন হয়নি। তাই স্পর্শক বরাবর কোন ত্বরন নাই। কিন্তু ব্যাসার্ধ AO বরাবর বেগের পরিবর্তন $= V\theta$ ।এই পরিবর্তন হয়েছে t সময়ে। অতএব, ত্বরন,

$$a = \frac{V\theta}{t} = V\omega \ [\text{যেহেতু কৌণিক বেগ } \omega = \frac{\theta}{t}]$$

বা, $a = V\omega$ ------------------------- (5)

এখন আমরা জানি, $V = \omega r \quad \therefore \omega = \dfrac{V}{r}$ । সমীকরণ (5) - এ প্রথমে V - এর মান এবং পরে ω - এর মান বসিয়ে পাই,

$$a = \omega^2 r \text{ ------------------- } (6)$$

$$\text{এবং } a = \frac{V^2}{r} \text{--------------------- } (7)$$

সমীকরণ (6) এবং (7) কেন্দ্রমুখী বা ব্যাসার্ধমুখী বা অভিলম্ব ত্বরনের রাশিমালা নির্দেশ করে।

কেন্দ্রমুখী বলের রাশিমালা ঃ ধরি ঘূর্ণায়ান বস্তুকণাটির ভর $= m$ । তাহলে আমরা পাই,
কেন্দ্রমুখী বল, $F_c =$ ভর $\times$ কেন্দ্রমুখী ত্বরন
বা, $F_c = ma$

$$\text{বা, } F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \text{ ----------------- } (8)$$

সমীকরণ (8) কেন্দ্রমুখী বলের রাশিমালা নির্দেশ করে।

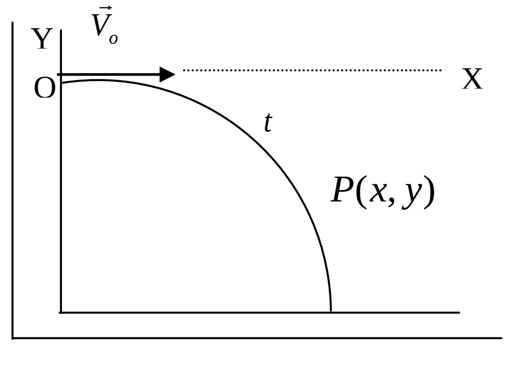
প্রশ্ন→ (১১):- সমদ্রুতিতে (সমবেগ) সরলপথে চলমান বস্তুতে ত্বরন থাকে না, কিন্তু সুষম বা সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে চলমান বস্তুতে ত্বরন থাকে, ব্যাখ্যা কর।

উত্তরঃ আমরা জানি, বেগ একটি ভেক্টর রাশি। সুতরাং বেগের পরিবর্তন ঘটতে পারে তিনটি কারণে। যথা (i) মানের পরিবর্তনে (ii) দিকের পরিবর্তনে এবং (iii) মান ও দিক উভয়ের পরিবর্তনে। আর যে কোন কারণে বেগের পরিবর্তন হলেই বস্তুতে ত্বরন সৃষ্টি হয়। কোন বস্তুকণা যখন সমবেগে সরল পথে চলে, তখন সমবেগে চলার দরুন বেগের মানের কোন পরিবর্তন হয় না আবার সরলপথে চলার দরুন বেগের দিকেরও কোন পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ বস্তুর বেগের কোন পরিবর্তন হয় না। অতএব, সুষ দ্রুতিতে সরলপথে চলমান বস্তুতে ত্বরন থাকে না।

অপরদিকে, কোন বস্তুকণা যখন সুষম দ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে চলমান থাকে তখন সুষম দ্রুতিতে চলার দরুন বেগের মানের পরিবর্তন না হলেও বৃত্তাকার পথে চলার দরুন দিক সব সময় পরিবর্তন হয়। আর এই দিকের পরিবর্তনের জন্যই বেগের পরিবর্তন হয়। অতএব সুষম দ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে চলমান বস্তুতে ত্বরন থাকে।

প্রশ্ন→ (১২):- বায়ু মধ্যস্থিত কোন বিন্দু হতে অনুভূমিক দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, গতিপথটি একটি অধিবৃত্ত।

উত্তরঃ ধরি, বায়ু মধ্যস্থ 0 বিন্দু থেকে X অক্ষের সমান্তরালে অর্থাৎ ভূমির সাথে 0^o নিক্ষেপন কোণে এবং v_o নিক্ষেপন বেগে একটি বস্তুকে নিক্ষেপ করা হলো। তাহলে,



চিত্রঃ ৬

নিক্ষেপন বেগের অনুভূমিক উপাংশ $= \mathrm{v_o}\cos 0^o$

$= \mathrm{v_o}$

এখানে বস্তুটি অনুভূমিক বরাবর সমবেগে চলবে

যেখানে সমবেগ $= \mathrm{v_o}$ এবং উল্লম্ব বরাবর নিচ দিকে সমত্বরনে পড়বে যেখানে সমত্বরন $= g$ এবং আদিবেগ = ০ ।

মনেকরি, t সময়ে বস্তুটি $P(x,y)$ বিন্দুতে যায়। তাহলে x দূরত্ব সমবেগে এবং y দূরত্ব সমত্বরনে অতিক্রম করে। অতএব, আমরা পাই,

$$x = v_o t \text{ ------------- } (1) \text{ এবং } y = o.t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 \text{ --------------------- } (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $t = \dfrac{x}{v_o}$ ------------ (3)

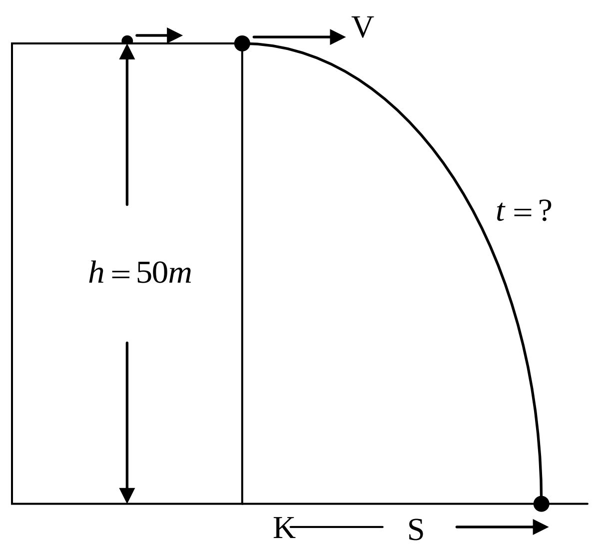
সমীকরণ (3) থেকে t এর মান (2) - এ বসাই, $y = \dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v_o^2}$

বা, $y = \dfrac{g}{2v_o^2}x^2$ ধরি, $\dfrac{g}{2v_o^2} = C$ (ধ্রুবক)

$\therefore y = cx^2$ ---------- (4) ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ। যা একটি প্যারাবোলা বা অধিবৃত্তের সমীকরণ। (প্রমাণিত)

গাণিতিক সমস্যা

সমস্যা→ (১) 50m উচু একটি দালানের উপর হতে একটি মার্বেল $2ms^{-1}$ বেগে গড়িয়ে পড়ল। মার্বেলটি কখন এবং দালানের কিনারা হতে কত দূরে মাটিতে পতিত হবে?



এখানে, উচ্চতা, $h = 50m$, মার্বেলটির অনুভূমিক বেগ $v = 2ms^{-1}$ । ধরি t সময়ে মার্বেলটি ভূমি স্পর্শ করে। তাহলে t সময়ে মার্বেলটি ভূমি বরাবর S দূরত্ব সমবেগে এবং উল্লম্ব বরাবর $50m$ সমত্বরনে অতিক্রম করবে।

মার্বেলটির অনুভূমিক বরাবর সমবেগ $v = 2ms^{-1}$ উল্লম্ব বরবার নিচ দিকে আদিবেগ = ০ এবং অভিকর্ষজ ত্বরন $g = 9.8ms^{-2}$ । অতএব, আমরা পাই, ও

$S = vt$ বা, $S = 2t$ ----------- (1)

আবার, $h = o.t + \dfrac{1}{2}gt^2$

বা, $50 = \dfrac{1}{2}.9.8.t^2$ বা, $4.9t^2 = 50$ $\therefore t = \sqrt{\dfrac{50}{4.9}}$

$\therefore t = 3.19\sec$ (Ans)

এখন t -এর মান (1) -এ বসাই, $S = 2\times 3.19 = 6.38m$ (Ans)

সমস্যা→ (২): একটি বোমারু বিমান $120ms^{-1}$ বেগে ভূমির সমান্তরালে চলা অবস্থায় $490m$ উচু হতে একটি বোমা ফেলে দিল। বোমাটি কখন ও কোথায় মাটিতে পতিত হবে?

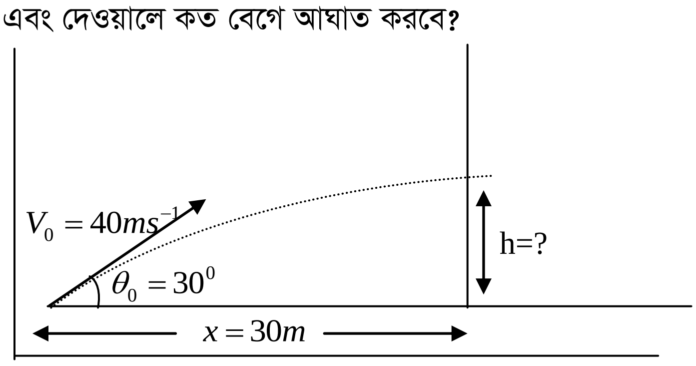
উত্তর: 10 s পর এবং $1200m$ দুরে।

সমস্যা→ (৩): 4 ফুট উচু একটি টেবিলের উপর দিয়ে একটি মার্বেল নিচে গড়িয়ে পড়ল। মার্বেলটি টেবিলের কিনারা হতে 2 ফুট অনুভূমিক দূরত্বে মেঝে স্পর্শ করে। গড়িয়ে পড়ার মূহুর্তে মার্বেলটির বেগ কত ছিল?

উ: 4 ফুট/সে।

[সমস্যা (১) - এর অনুরূপ। $S = \mathrm{vt}$ $\therefore \mathrm{v} = \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}} = \dfrac{2}{\mathrm{t}}$ ।] $g = 32$ ফুট/সে^{2}

সমস্যা → (৪):অনুভূমিকের সাথে 30^o কোণ করে ভূ-পৃষ্ঠ হতে $40ms^{-1}$ বেগে একটি বুলেট ছোড়া হলো। বুলেটটি $30m$ দূরে অবস্থিত একটি দেওয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে? এবং দেওয়ালে কত বেগে আঘাত করবে?



এখানে নিক্ষেপণ বেগ, $\mathrm{v_o} = 40ms^{-1}$

" কোণ, $\theta_o = 30^o$

অনুভূমিক দূরত্ব $x = 30m$

উল্লম্ব দিকে দূরত্ব, $h = ?$

h উচ্চতায় বুলেটে বেগ = ?

নিক্ষেপণ বেগের অনুভূমিক উপাংশ $= \mathrm{v_o}\cos\theta_o$

" " উল্লম্ব উপাংশ $= \mathrm{v_o}\sin\theta_o$

মনেকরি, বুলেটটি t সময়ে দেওয়ালটিকে আঘাত করে। তাহলে t সময়ে বুলেটি অনুভূমিক দিকে $30m$ দূরত্ব সমবেগে এবং উল্লম্ব দিকে $h-m$ দূরত্ব সমমন্দনে অতিক্রম করবে। অতএব, আমরা পাই,

$$x = \mathrm{v_o} \cos\theta_o t \text{------------------ (1)}$$

এবং $h = \mathrm{v_o} \sin\theta_o t - \frac{1}{2} g t^2$ ------------------ (2)

(1) থেকে পাই, $\mathrm{t} = \frac{x}{\mathrm{v_o}\cos\theta_o}$

বা, $\mathrm{t} = \frac{30}{40\cos 30^o} = \frac{30}{40\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{20\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} Sec.$

t - এর মান (2)- এ বসাই,

$$h = 40\sin 30^o \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times 9.8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 40\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times 9.8\times\frac{3}{4}$$

$$= 13.65m \text{ (Ans)}$$

দ্বিতীয় অংশ : নিক্ষেপণ বেগের অনুভূমিক উপাংশ, $v_{xo} = v_o\, cos\, 30^o = 40\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore v_{xo} = 34.64 ms^{-1}$$

〃 〃 উল্লম্ব উপাংশ = $v_{yo} = v_o\, sin 30^o = 40\times\frac{1}{2}$

$$\therefore v_{yo} = 20ms^{-1}$$

বুলেটটি ছোড়ার $(t = \frac{\sqrt{3}}{2})$ = 0.866 Sec পর দেওয়ালটিকে আঘাত করে। এই t সময় পর বেগের উল্লম্ব উপাংশের পরিবর্তন হবে কিন্তু অনুভূমিক উপাংশ কোন পরিবর্তন হবে না। ধরি উল্লম্ব উপাংশ $= v_y$ । এখন বুলেটটি যদি v বেগে দেওয়ালকে আঘাত করে তাহলে আমরা পাই,

$$v = \sqrt{v_{xo}^2 + v_y^2 + 2v_{xo}v_y \cos 90^o}$$

বা, $v = \sqrt{v_{xo}^2 + y_y^2} = \sqrt{(34.64)^2 + (11.51)^2}$

$$\therefore v = \sqrt{1199.93 + 132.48} = 36.5ms^{-1} \text{ (Ans)}$$

এখানে

$$v_y = v_{yo} - gt$$
$$= 20 - 9.8\times 0.866$$
$$= 11.51 ms^{-1}$$

সমস্যা→ (৫): একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30^o কোণে $40ms^{-1}$ বেগে কিক করা হলো। 2sec. পরে ফুটবলটির বেগ কত হবে?

উ: $34.64ms^{-1}$

[সংকেত: সমস্যা (৪) - এর দ্বিতীয় অংশের অনুরূপ]

সমস্যা→ (৬): একটি দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর অনুভূমিকভাবে $20ms^{-1}$ বেগে নিক্ষেপ করা হলো। 3sec. পর পাথরটির বেগ কত হবে?

[সংকেত: নিক্ষেপণ বেগের অনুভূমিক উপাংশ, $v_{xo} = 20ms^{-1}$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $v_{yo} = 0$ । অনুভূমিক দিকে বস্তুটি সমবেগ v_{xo} নিয়ে চলবে কিন্তু নিচের সমত্বরনে চলবে। যেখানে ত্বরন = g । $t = 3$sec পর বেগের উপাংশ $v_y = v_{yo} + gt$ বা, $v_y = 0 + 9.8\times 3 = 294ms^{-1}$ । $\therefore 3$sec পর বেগ $v = \sqrt{v_{xo}^2 + v_y^2 + 2v_{xo}v_y\cos 90^o}$ থেকে v নির্ণয় কর]

উ: $35.58ms^{-1}$

সমস্যা→ (৭): $20ms^{-1}$ গতিবেগে এবং 30^o নিক্ষেপণ কোণে একটি বস্তুকে শূণ্যে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটির (i) সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে কত সময় লাগবে? (ii) সর্বাধিক উচ্চতা কত? (iii)বিচরন কাল বা উড্ডয়ন কাল কত? (iv) পাল্লা কত ? (v) কখন বেগের অভিমুখ অনুভূমিক হবে?

উ: (i) 1.02sec (ii) $5.1m$ (iii) 2.04sec (iv) $35.347m$ (v) 1.02sec পর।

সমস্যা→ (৮): উপর হতে ফেলে দেয়া একটি বোমা মাটিতে ফাটলে এর কণা সমুহ চারদিকে ভূমির সাথে বিভিন্ন আনত কোণে এবং বিভিন্ন বেগে ছড়িয়ে পড়ে। সর্বাধিক বেগ 100 মিটার / সেকেন্ড হলে ভূপৃষ্ঠের যে বৃত্তাকার অংশ জুড়ে কণাসমুহ বিস্তৃত হবে তার ব্যাসার্ধ, ব্যাস ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[উ: ব্যাসার্ধ=$1020.41m$, ব্যাস=$2040.82m$, ক্ষেত্রফল=$32.7\times 10^5 m^2$]

[সংকেত: এখানে কণা সমুহের সর্বাধিক বেগ = $100ms^{-1}$ । বোমাটির কণা সমুহ যে বৃত্তাকার অংশ জুড়ে ছড়িয়ে পড়বে তার ব্যাসার্ধ হবে কণাসমুহের সর্বাধিক পাল্লা $R_{\max}$ -এর সমান। $R_{\max}=\frac{v_o^2\sin 2\times 45^o}{g}=\frac{v_o^2}{g}$ । ব্যাস = $2R_{\max}$; ক্ষেত্রফল $\pi R_{\max}^2$ ।]

সমস্যা⟶ (৯): নিক্ষেপণ কোণ কত হলে অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক উচ্চতার (i) সমান হবে (ii) দ্বিগুণ হবে এবং (iii) অর্ধেক হবে।

[সংকেত: ধরি প্রাসের পাল্লা = R এবং সর্বাধিক উচ্চতা = H । নিক্ষেপণ কোণ θ_o হলে আমরা পাই, $R=\frac{v_o^2\sin 2\theta_o}{g}$ এবং $H=\frac{v_o^2\sin\theta_o}{2g}$]

(i) শর্তানুসারে, $R=H$ (ii) শর্তানুসারে $R=2H$ (iii) শর্তানুসারে $R=\frac{H}{2}$ $\therefore \mathrm{H}=2\mathrm{R}$

উ: (i) 75.96^o (ii) 63.43^o (iii) 82.87^o ।

সমস্যা⟶ (১০): একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা $96m$, নিক্ষপণ বেগ $66ms^{-1}$ । প্রাসটিকে কত কোণে নিক্ষিপ করা হয়েছিল?

উ: 6.24^o

সমস্যা⟶ (১১): একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা $75m$ এবং সর্বাধিক উচ্চতা $5m$ । প্রাসটির নিক্ষপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

[সংকেত: এখানে, পাল্লা, $R=75m$, সর্বাধিক উচ্চতা $H=5m$ । $\theta_o=?\, v_o=?$

আমরা জানি, $R=\frac{v_o^2\sin 2\theta_o}{g}$ --------- (1) এবং $H=\frac{v_o^2\sin^2\theta_o}{2g}$ ----------------- (2)

$(2)\div(1)$ করলে θ_o পাওয়া যাবে। θ_o -এর মান (1)- এ বসাইলে v_o বের হবে।

উ: 14.93^o এবং $38.42ms^{-1}$]

সমস্যা⟶ (১২): একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা $79.53m$ এবং বিচরণকাল 5.3sec. নিক্ষেপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$R=\frac{v_o^2\sin 2\theta_o}{g} \text{ ------------------ } (1)$$

এবং $$T=\frac{2v_o\sin\theta_o}{g} \text{ ------------- } (2)$$

এখানে, $R=79.53m.$

$T=5.3\sec$

$v_o=?$

$\theta_o=?$

$(1)\div(2)$ করিয়া, $$\frac{R}{T}=\frac{v_o^2.2\sin\theta_o\cos\theta_o}{g}\times\frac{g}{2v_o\sin\theta_o}$$

বা, $$\frac{79.53}{5.3}=v_o\cos\theta_o \quad \therefore v_o\cos\theta_o=15.006 \text{ --------------- } (3)$$

সমীকরণ (2) থেকে পাই, $$5.3=\frac{2v_o\sin\theta_o}{9.8} \quad \therefore v_o\sin\theta_o=25.97 \text{ --------------- } (4)$$

সমীকরণ $(4)\div(3)$ করিয়া,

$$\tan\theta_o=1.7306 \quad \therefore \theta_o=\tan^{-1}(1.7306)=60^0$$

θ_o এর মান (3)-এ বসাই, $v_o\cos 60^o=15.006 \quad \therefore \frac{v_o}{2}=15.006 \quad \therefore v_o=30.012ms^{-1}$

উ: নিক্ষেপণ কোণ = 60^o এবং নিক্ষেপণ বেগ = $30.012ms^{-1}$

সমস্যা⟶ (১৩): একটি প্রাসকে $10ms^{-1}$ বেগে নিক্ষেপ করা হলো। ইহার সর্বাধিক পাল্লার মান নির্ণয় কর। $g=9.8ms^{-2}$ ।

উ: $10.204m$ ।

সমস্যা⟶ (১৪): একটি বস্তুকে $40ms^{-1}$ বেগে অনুভূমিকের সাথে 60^o কোণে নিক্ষেপ করা হলো। বস্তুটির (i) সর্বাধিক উচ্চতা (ii) অনুভূমিক পাল্লা (iii) সর্বাধিক উচ্চতায় উঠার সময় (iv) উড্ডয়ন কাল এবং (v) ভূমিতে আঘাত করার সময় নির্নয় কর।

উ: (i) $61.22m$ (ii) $141.39m$ (iii) 3.53sec (iv) 7.07sec (v) 7.07sec ।

সমস্যা⟶ (১৫): একটি মিনারের শীর্ষদেশ হতে একটি বন্দুকের গুলি অনুভূমিকভাবে $980ms^{-1}$ বেগে ছোড়া হলো। ইহা 2sec পর ভূমিতে স্পর্শ করে। মিনারটির উচ্চতা কত ? এবং মিনারের পাদদেশ হতে কত দূরে গুলিটি পতিত হবে?

[সংকেত : সমস্যা (২) - এর অনুরূপ] উ: উচ্চতা $19.6m$, দূরত্ব $1960m$

সমস্যা⟶ (১৬): একটি গ্রামোফোন রেকর্ড প্রতিমিনিটে 78 বার ঘুরছে। উহার কৌণিক বেগ কত? সুইচ বন্ধ করায় $30s$ এ রেকর্ডটি থেমে গেল। কৌণিক মন্দন কত? থামার পূর্বে কৌণিক সরণ ও ঘূর্ণন সংখ্যা নির্ণয় কর।

আমরা জানি, কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi N}{T}$

$= \frac{2\times 3.14\times 78}{60}$

$= 8.164 rads^{-1}$ (Ans)

এখানে,
ঘূর্ণন বা আবর্তনের জন্য সময়
$T = 1\min = 60s$
ঘূর্ণন বা আবর্তন সংখ্যা
$N = 78$ বার
কৌণিক বেগ, $\omega = ?$
আবার,
সুইচ বন্ধ করার পর আদি কৌণিক বেগ $\omega_1 = \omega = 8.164 rads^{-1}$
শেষ কৌণিক বেগ, $\omega_2 = 0$
কৌণিক মন্দন $\alpha = ?$

এখন, আমরা জানি, $\omega_2 = \omega_1 - \alpha t$

$0 = 8.164 - 30\alpha$

$\therefore \alpha = 0.272 rads^{-2}$ (Ans)

সুইচ বন্দের পর কৌণিক সরন,

$\theta = \omega_1 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

$= 8.164\times 30 - \frac{1}{2}\times .272\times (30)^2$

$= 122.52 rad$ (Ans)

কৌণিক সরন $\theta = ?$
থামার পূর্বে ঘূর্ণন সংখ্যা = ?
থামার জন্য সময়, $t = 30s$

আমরা জানি,

2π কৌণিক সরন হলে ঘূর্ণন সংখ্যা = 1 বার

$\therefore 1$ 〃 〃 〃 〃 $= \frac{1}{2\pi}$ 〃

$\therefore 122.52$ 〃 〃 〃 〃 $= \frac{1\times 122.52}{2\times 3.14}$

= 19.5 বার (উত্তর)

সমস্যা→ (১৭): একটি বৈদ্যুতিক পাখা প্রতি মিনিটে 1500 বার ঘুরছে। সুইচ বন্ধ করায় পাখাটি 1.5 মিনিটে থেমে যায়। পাখাটির কৌণিক মন্দন কত? থেমে যাবার আগে পাখাটি কত বার ঘোরে?

উ: $\alpha = 1.744 rads^{-2}$, থামার পূর্বে ঘূর্ণন সংখ্যা = 1125.28।

[সংকেত: সমস্যা ১৬ - এর অনুরূপ]

সমস্যা→ (১৮): একটি বস্তুকণা $450cm$. ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতিমিনিটে 225 বার আবর্তন করে। বস্তুটির কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগ নির্ণয় কর।

উ: $23.55 rads^{-1}$ এবং $105.98 ms^{-1}$।

[সংকেত: $r = 45om = 4.5m, T = 60s. N = 225; \omega = \frac{2\pi N}{T}; v = \omega r$]

সমস্যা→ (১৯): বৃত্তাকার পথে $72 kmh^{-1}$ সমদ্রুতিতে চলমান কোন মোটর গাড়ীর কেন্দ্রমুখী ত্বরন $1ms^{-2}$ হলে বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত? [$a = \frac{v^2}{r}$ ব্যবহার কর]

উ: $400m$

সমস্যা→ (২০): $40gm$ ভরের একটি বস্তুকে $30cm$ দীর্ঘ একটি সুতার সাহায্যে $10ms^{-1}$ বেগে বৃত্তাকার পথে ঘুরানো হলে (i) কেন্দ্রমুখী ত্বরন কত? (ii) কেন্দ্রমুখী বল কত?

[সংকেত: (i) $a = \frac{v^2}{r}$ ও (ii) $F_c = \frac{mv^2}{r}$ সূত্র ব্যবহার কর]

উ: (i) $333.33 ms^{-2}$ (ii) $13.33N$

সমস্যা→(২১): হাইড্রোজেন পরমানুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে $5.3\times 10^{-11} m$ ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে $2.21\times 10^6 ms^{-1}$ বেগে ঘুরছে। ইলেকট্রনটির কৌণিক বেগ কত? ইলেক্ট্রনটির কেন্দ্রমুখী বা ব্যাসার্ধমুখী ত্বরন ও কেন্দ্রমুখী বল নির্ণয় কর। ইলেকট্রনের ভর $9.1\times 10^{-31} kg$।

উ: $4.16\times 10^{16} rads^{-1}$, $9.21\times 10^{22} ms^{-2}$, $83.81\times 10^{-9} N$.

[সংকেত : $v = \omega r$ $\therefore \omega = \frac{v}{r}$; $a = \frac{v^2}{r}$; $F_c = \frac{mv^2}{r}$ সূত্র ব্যবহার কর]

সমস্যা→(২২): পৃথিবীর আহ্নিক গতি হেতু বিষুম রেখায় অবস্থিত কোন বিন্দুর রৈখিক বেগ নির্ণয় কর। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6400km$। উ: $464.64 m\bar{s}^{1}$

সমস্যা→(২৩): পৃথিবীর চারদিকে একবার প্রদক্ষিণ করতে চাঁদের সময় লাগে 27.3 দিন। চাঁদের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ $3.85\times 10^5 km$ হলে চাঁদের কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগ নির্ণয় কর।

উঃ $2.665\times10^{-6} rad s^{-1}$ এবং $1026 ms^{-1}$ ।

[সংকেতঃ $\omega = \dfrac{2\pi N}{T}$ এবং $v = \omega r$ সূত্র ব্যবহার কর]

সমস্যা→(২৪)ঃ একটি বৈদ্যুতিক পাখার সুইচ অন করলে 10 বার পূর্ণ ঘূর্ণনের পর $20 rad s^{-1}$ কৌণিক বেগ লাভ করে। কৌণিক ত্বরন কত? [$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\theta$ সূত্র ব্যবহার কর] উঃ $3.18 rad s^{-2}$

সমস্যা→(২৫)ঃ স্থিরাবস্থা হতে একটি কণাকে $3.24 rad s^{-2}$ সমকৌণিক ত্বরণে ঘুরালে $10s$ পর কণাটি কত কৌণিক বেগ লাভ করবে? এবং উক্ত সময়ে কতবার ঘুরবে? উঃ $31.4 rad s^{-1}$ 25 বার।

[সংকেতঃ $\omega_2 = \omega_1 + \alpha t;\ \theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$; এবং ঘূর্ণন সংখ্যা = $\theta/2\pi$]

সমস্যা→(২৬)ঃ একটি বস্তুকে $100 ms^{-1}$ বেগে এবং 29.34^o নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষেপ করা হলো। $3s$ ও $7s$. পর বস্তুটির উচ্চতা নির্ণয় কর। ফলাফল ব্যাখ্যা কর। উঃ $102.9m$

[$h = v_o \sin\theta_o t - \frac{1}{2} g t^2$ ব্যবহার কর]