উচ্চমাধ্যমিক উচ্চতর গণিত ২য় পত্র

অধ্যায়-৩: জটিল সংখ্যা

প্রশ্ন ▶১ $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 + 2i, a = p\omega^2 + q + r\omega$ এবং $b = p\omega + q + r\omega^2$, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলির একটি জটিল ঘনমূল। *[কু. বো. ১৭]*

ক. $\frac{1}{2-i}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\overline{z_1 - z_2}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপকের সাহায্যে $a^3 + b^3 = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে,
$2p = q + r, 2q = r + p$ এবং $2r = p + q$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{4-i^2} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z_1 = 2 + 3i$
$z_2 = 1 + 2i$
$\therefore z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i$
$\therefore \overline{z_1 - z_2} = \overline{1 + i} = 1 - i$
মনে করি, $\sqrt{1-i} = x - iy$
$\Rightarrow 1 - i = x^2 - i\,.\,2xy + i^2y^2$
$\Rightarrow 1 - i = x^2 - y^2 - i\,.\,2xy$
উভয় পক্ষ হতে বাস্তব ও অবাস্তব অংশ সমীকৃত করে পাই,
$x^2 - y^2 = 1$ ..... (i)
এবং $-2xy = -1 \Rightarrow 2xy = 1$ ..... (ii)
এখন, $x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$
$= \sqrt{1^2 + (2xy)^2} = \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ ..... (iii)
এখন, (i) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$2x^2 = 1 + \sqrt{2}$
$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$
$\therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} + 1}$
আবার, (iii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = \sqrt{2} - 1$
$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$
$\therefore y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} - 1}$
$\therefore \sqrt{1 - i} = x - iy$
$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$
$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $a = p\omega^2 + q + r\omega$
$b = p\omega + q + r\omega^2$
প্রদত্ত সমীকরণ, $a^3 + b^3 = 0$
$\Rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$
$\Rightarrow (a + b)(\{a^2 + (\omega + \omega^2)ab + \omega^3b^3\}) = 0$
$\Rightarrow (a + b)\{a^2 + \omega ab + \omega^2 ab + \omega^3b^3\} = 0$
$\Rightarrow (a + b)\{a(a + \omega b) + \omega^2 b(a + \omega b)\} = 0$
$\Rightarrow (a + b)(a + \omega b)(a + \omega^2 b) = 0$
হয়, $a + b = 0$
$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega + q + r\omega^2 = 0$
$\Rightarrow p(\omega + \omega^2) + 2q + r(\omega + \omega^2) = 0$
$\Rightarrow 2q - p - r = 0$
$\therefore 2q = r + p$
অথবা, $a + \omega b = 0$
$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega^2 + q\omega + r\omega^3 = 0$
$\Rightarrow 2p\omega^2 + q(1 + \omega) + r(\omega + 1) = 0$
$\Rightarrow 2p\omega^2 - q\omega^2 - r\omega^2 = 0$
$\Rightarrow 2p - q - r = 0$
$\therefore 2p = q + r$
অথবা, $a + b\omega^2 = 0$
$\Rightarrow p\omega^2 + q + r\omega + p\omega^3 + q\omega^2 + r\omega^4 = 0$
$\Rightarrow p\omega^2 + p + q + q\omega^2 + r\omega + r\omega = 0$
$\Rightarrow p(1 + \omega^2) + q(1 + \omega^2) + 2r\omega = 0$
$\Rightarrow -p\omega - q\omega + 2r\omega = 0$
$\Rightarrow 2r - p - q = 0$
$\therefore 2r = p + q$
সুতরাং, $2p = q + r, 2q = r + p$ এবং $2r = p + q$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ▶২ নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ্য কর : *[চ. বো. ১৭]*

$z = x + iy; |z + 5| + |z - 5| = 15$ .... (i)
$\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1}$ .... (ii)

ক. এককের ঘনমূলসমূহ নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপক-১ হতে, সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. উদ্দীপক-২ এ বর্ণিত অসমতাটির সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় দেখাও। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$ তাহলে, $x^3 = 1$ বা, $x^3 - 1 = 0$
বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
$\therefore$ $x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$
এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$
আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$
$= \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$
সুতরাং, এককের ঘনমূলগুলি $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$
এবং $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$
এখন, $|z + 5| + |z - 5| = 15$
বা, $|x + iy + 5| + |x + iy - 5| = 15$
বা, $|x + 5 + iy| + |x - 5 + iy| = 15$
বা, $\sqrt{(x + 5)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = 15$
বা, $\sqrt{(x + 5)^2 + y^2} = 15 - \sqrt{(x - 5)^2 + y^2}$
বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 = 225 + (x^2 - 10x + 25 + y^2)$
$- 30\sqrt{(x - 5)^2 + y^2}$ [বর্গ করে]
বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 225 - x^2 + 10x - 25 - y^2$
$= -30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$
বা, $20x - 225 = -30\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$
বা, $4x - 45 = -6\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}$
বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36(x^2 - 10x + 25 + y^2)$
বা, $16x^2 - 360x + 2025 = 36x^2 - 360x + 900 + 36y^2$
বা, $20x^2 + 36y^2 = 1125$
বা, $\frac{x^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1$
যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ প্রদত্ত অসমতা $\frac{2x+3}{x-3} < \frac{x+3}{x-1}$
বা, $\frac{2x+3}{x-3} - \frac{x+3}{x-1} < 0$
বা, $\frac{(2x^2 + 3x - 2x - 3) - (x^2 - 9)}{(x-3)(x-1)} < 0$
বা, $\frac{2x^2 + x - 3 - x^2 + 9}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\dfrac{x^2+x+6}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\dfrac{x^2+2.\frac{1}{2}.x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+6-\frac{1}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0$

বা, $\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}}{(x-3)(x-1)} < 0 \ldots\ldots\ldots (i)$

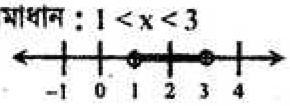
এখানে, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4} > 0$

$\therefore$ $(x-3)$ ও $(x-1)$ এর মধ্যে একটির চিহ্ন ধনাত্মক এবং অপরটির চিহ্ন ঋণাত্মক হলে (i) অসমতাটির শর্ত সিদ্ধ করে।

শর্ত	$(x-1)$ এর চিহ্ন	$(x-3)$ এর চিহ্ন	$(x-3)(x-1)$ এর চিহ্ন
$x<1$	$-$	$-$	$+$
$1<x<3$	$+$	$-$	$-$
$x>3$	$+$	$+$	$+$

$\therefore$ (i) অসমতাটি সত্য হবে যদি $1<x<3$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $1<x<3$

সংখ্যারেখা : 

প্রশ্ন ▶ ৩ দৃশ্যকল্প-১ : $x+iy=2e^{-i\theta}$ [ব. বো. ১৭]

দৃশ্যকল্প-২ : $F=y-2x$

শর্তগুলি : $x+2y\le 6, x+y\ge 4, x, y\ge 0$

ক. $z=x+iy$ হলে, $|z+i|=|\bar{z}+2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=4$. ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এ বর্ণিত যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রামটি হতে লৈখিক পদ্ধতিতে F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় কর। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $z=x+iy$

$\therefore |z+i|=|\bar{z}+2|$

বা, $|x+iy+i|=|\overline{x+iy}+2|$

বা, $|x+iy+i|=|x-iy+2|$

বা, $|x+i(y+1)|=|(x+2)-iy|$

বা, $\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

বা, $x^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2$

বা, $x^2+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2$

বা, $2y+1=4x+4$

বা, $4x-2y+3=0$

যা নির্ণেয় সরলরেখার সঞ্চার পথ। **(Ans.)**

খ দৃশ্যকল্প-১ হতে পাই, $x+iy=2e^{i\theta}$

বা, $x+iy=2(\cos\theta+i\sin\theta)$

বা, $x+iy=2\cos\theta+2i\sin\theta$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই,

$x=2\cos\theta$ এবং $y=2\sin\theta$

এখন, $x^2+y^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2$

$=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta$

$=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=4$

$\therefore x^2+y^2=4$ **(প্রমাণিত)**

গ দৃশ্যকল্প ২ হতে পাই, $F=y-2x$

শর্তগুলি : $x+2y\le 6, x+y\ge 4, x, y\ge 0$

F এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য এলাকা চিহ্নিত করি।

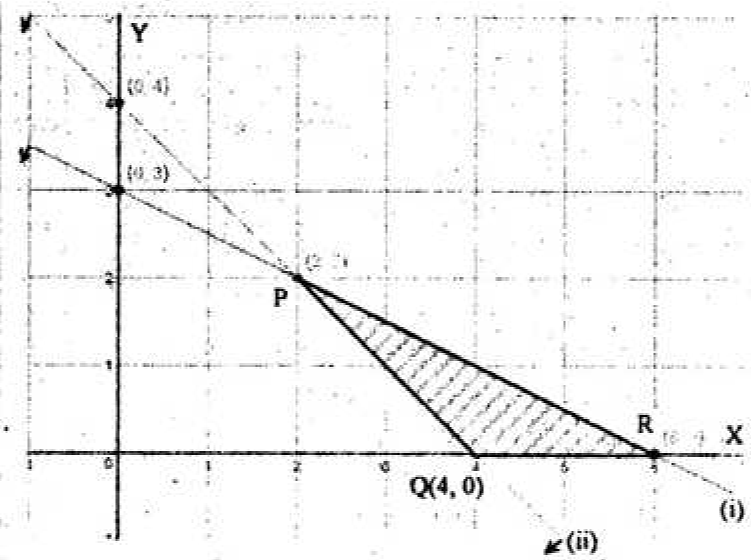
আমরা পাই, $x+2y=6$

বা, $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1 \ldots\ldots\ldots (i)$

$x+y=4$ বা, $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1 \ldots\ldots\ldots (ii)$

$x=0 \ldots\ldots\ldots (iii)$

$y=0 \ldots\ldots\ldots (iv)$



লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

লেখচিত্রে দেখা যায়, (i) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূল বিন্দু সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

(ii) নং এর সকল বিন্দু এবং এর যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর জন্য সত্য।

আবার (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু P(2, 2)

(iv) ও (ii) এর ছেদবিন্দু Q(4, 0)

(iv) ও (i) এর ছেদবিন্দু R (6, 0)

$\therefore$ নির্ণেয় কৌণিক বিন্দু P(2, 2), Q(4, 0) ও R(6, 0)

এখন P(2, 2) বিন্দুতে $F=2-2.2=2-4=-2$

Q (4, 0) বিন্দুতে $F=0-2.4=0-8=-8$

R (6, 0) বিন্দুতে $F=0.-2.6=0-12=-12$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ মান -2 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪ $f(x)=|x-3|$ [ব. বো. ১৭]

$g(x)=p+qx+rx^2$

ক. $15+8i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)<\frac{1}{7}$ হলে প্রমাণ কর যে, $|x^2-9|<\frac{43}{49}$. ৪

গ. $p+q+r=0$ হলে প্রমাণ কর যে,
$\{g(\omega)\}^3+\{g(\omega^2)\}^3=a^x pqr$ যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং $a=x=3$. ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $p=15+8i$

$\therefore \sqrt{p}=\pm\sqrt{15+8i}=\pm\sqrt{16+8i-1}$

$=\pm\sqrt{4^2+2.4.i+i^2}=\pm\sqrt{(4+i)^2}=\pm(4+i)$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(4+i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f(x)=|x-3|$ এবং $f(x)<\frac{1}{7}$

$\therefore |x-3|<\frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7}<x-3<\frac{1}{7}$

$\Rightarrow -\frac{1}{7}+3<x-3+3<\frac{1}{7}+3$ [3 যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{-1+21}{7}<x<\frac{1+21}{7}$

$\Rightarrow \frac{20}{7}<x<\frac{22}{7}$

$\Rightarrow \frac{400}{49}<x^2<\frac{484}{49}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow \frac{400}{49}-9<x^2-9<\frac{484}{49}-9$ ['– 9' যোগ করে]

$\Rightarrow \frac{400-441}{49}<x^2-9<\frac{484-441}{49}$

$\Rightarrow \frac{-41}{49}<x^2-9<\frac{43}{49}$

$\Rightarrow \frac{-43}{49}<\frac{-41}{49}<x^2-9<\frac{43}{49}$

$\Rightarrow \frac{-43}{49}<x^2-9<\frac{43}{49}$

$\therefore |x^2-9|<\frac{43}{49}$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $g(x) = p + qx + rx^2$

$\therefore\ g(\omega) = p + q\omega + r\omega^2$

এবং $g(\omega^2) = p + q\omega^2 + r\omega^4 = p + q\omega^2 + r\omega$

এখন, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3$

$= (p + q\omega + r\omega^2)^3 + (p + q\omega^2 + r\omega)^3$

ধরি, $p + q\omega + r\omega^2 = x$ এবং $p + q\omega^2 + r\omega = y$

বামপক্ষ $= x^3 + y^3$

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$= (x + y)\{x^2 + (-1)xy + y^2\}$

$= (x + y)\{x^2 + (\omega^2 + \omega)xy + y^2\}$ $[\because \omega^2 + \omega + 1 = 0]$

$= (x + y)(x^2 + \omega^2 xy + \omega xy + y^2)$

$= (x + y)(x^2 + \omega xy + \omega^2 xy + y^2)$

$= (x + y)\left\{x(x + \omega y) + \omega^2 y\left(x + \dfrac{y}{\omega^2}\right)\right\}$

$= (x + y)\{x(x + \omega y) + \omega^2 y(x + \omega y)\}$ $\left[\because \omega^3 = 1 \therefore \omega = \dfrac{1}{\omega^2}\right]$

$= (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y)$

$\therefore\ x + y = p + q\omega + r\omega^2 + p + q\omega^2 + r\omega$

$= 2p + q(\omega + \omega^2) + r(\omega^2 + \omega) = 2p - q - r$

$\therefore\ x + \omega y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega + q\omega^3 + r\omega^2$

$= p(1 + \omega) + q(\omega + 1) + 2r\omega^2$

$= p(-\omega^2) + q(-\omega^2) + 2r\omega^2 = \omega^2(2r - p - q)$

$\therefore\ x + \omega^2 y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega^4 + r\omega^3$

$= p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega + r$

$= p(1 + \omega^2) + 2q\omega + r(1 + \omega^2)$

$= p(-\omega) + 2q\omega + r(-\omega) = \omega(2q - p - r)$

$\therefore\ (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y)$

$= (2p - q - r)\omega^2(2r - p - q)\omega(2q - p - r)$

$= \omega^3(2p - q - r)(2r - p - q)(2q - p - r)$

$= \{2p - (q + r)\}\{2r - (p + q)\}\{2q - (p + r)\}$

$= \{2p - (-p)\}\{2r - (-r)\}\{2q - (-q)\}$ $[\because p + q + r = 0]$

$= 3p.3r.3q = 27pqr = 3^3 pqr$

$= a^x pqr$ $[\because a = x = 3]$

= ডানপক্ষ

$\therefore\ \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $f(x) = 2x - 1$, যখন $x \in \mathbb{R}$ এবং $A = \sqrt[4]{-16}$.
$B = a^2 + i\sqrt{x^4 - a^4}$, যখন i হচ্ছে কাল্পনিক রাশির একক।

[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ, জয়পুরহাট]

ক. পরমমান চিহ্নের সাহায্যে $-2 < f(x) < 8$ অসমতাটি প্রকাশ কর। ২

খ. A এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. B এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = 2x - 1$

$\therefore\ -2 < f(x) < 8$

বা, $-2 < 2x - 1 < 8$

বা, $-2 - 3 < 2x - 1 - 3 < 8 - 3$ [প্রত্যেক পার্শ্বে (-3) যোগ করে পাই]

বা, $-5 < 2x - 4 < 5$

$\therefore\ |2x - 4| < 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \sqrt[4]{-16}$

$= (-16)^{\frac{1}{4}} = \{(-1)16\}^{\frac{1}{4}}$

$= (i^2 . 4^2)^{\frac{1}{4}}$

$= \{(\pm 4i)^2\}^{\frac{1}{4}}$

$= (\pm 4i)^{\frac{1}{2}}$

$= \{2(\pm 2i)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{2(1 \pm 2i - 1)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{2(1 \pm 2i + i^2)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{(\pm\sqrt{2})^2(1 \pm i)^2\}^{\frac{1}{2}}$

$= [\{\pm\sqrt{2}(1 \pm i)\}^2]^{\frac{1}{2}}$

$= \pm\sqrt{2}(1 \pm i)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $B = a^2 + i\sqrt{x^4 - a^4}$

$= \dfrac{1}{2}(2a^2 + 2i\sqrt{x^4 - a^4})$

$= \dfrac{1}{2}\{(x^2 + a^2) - (x^2 - a^2) + 2i\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}\}$

$= \dfrac{1}{2}\{(\sqrt{x^2 + a^2})^2 + 2i\sqrt{(x^2 + a^2)}\sqrt{(x^2 - a^2)} + (i\sqrt{x^2 - a^2})^2\}$

$= \dfrac{1}{2}(\sqrt{x^2 + a^2} + i\sqrt{x^2 - a^2})^2$

$\therefore$ B এর বর্গমূল $= \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2 + a^2} + i\sqrt{x^2 - a^2})$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $z = \dfrac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta} = x + iy$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. $-3 - 4i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $(z - 3i)$ এর আর্গুমেন্ট π এবং $|z + 6| = 5$ হয় তবে z নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $2(x^2 + y^2) = 3x - 1$ ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-3 - 4i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{-3 - 4i}$

$= \pm\sqrt{1 - 4i - 4}$

$= \pm\sqrt{1 - 2.2i.1 + (2i)^2}$

$= \pm\sqrt{(1 - 2i)^2}$

$= \pm(1 - 2i)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\arg(z - 3i) = \pi$

বা, $\arg(x + iy - 3i) = \pi$ $[\because z = x + iy]$

বা, $\arg\{x + i(y - 3)\} = \pi$

বা, $\tan^{-1}\left(\dfrac{y - 3}{x}\right) = \pi$

বা, $\dfrac{y - 3}{x} = \tan\pi$ বা, $\dfrac{y - 3}{x} = 0$ বা, $y - 3 = 0$ $\therefore\ y = 3$

এবং $|z + 6| = 5$

বা, $|x + iy + 6| = 5$

বা, $|(x + 6) + iy| = 5$

বা, $\sqrt{(x + 6)^2 + y^2} = 5$

বা, $x^2 + 12x + 36 + y^2 = 25$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 12x + 36 + 3^2 = 25$ $[\because y = 3]$

বা, $x^2 + 12x + 20 = 0$

বা, $x^2 + 10x + 2x + 20 = 0$

বা, $x(x + 10) + 2(x + 10) = 0$

বা, $(x + 10)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = -2, -10$

$x = -2$ এবং $y = 3$ হলে $z = x + iy$

$\therefore\ z = -2 + 3i$ **(Ans.)**

আবার, $x = -10$ এবং $y = 3$ হলে, $z = -10 + 3i$ **(Ans.)**

গ এখানে, $x + iy = \dfrac{2}{3 + \cos\theta + i\sin\theta}$

$= \dfrac{2(3 + \cos\theta - i\sin\theta)}{(3 + \cos\theta + i\sin\theta)(3 + \cos\theta - i\sin\theta)}$

$= \dfrac{6 + 2\cos\theta - i2\sin\theta}{(3 + \cos\theta)^2 - i^2\sin^2\theta}$

$= \dfrac{6 + 2\cos\theta - i2\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$= \dfrac{2(3 + \cos\theta) - i2\sin\theta}{9 + 6\cos\theta + 1}$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \dfrac{2(3 + \cos\theta)}{10 + 6\cos\theta} - \dfrac{i2\sin\theta}{2(5 + 3\cos\theta)}$

$= \dfrac{2(3 + \cos\theta)}{2(5 + 3\cos\theta)} - \dfrac{i2\sin\theta}{2(5 + 3\cos\theta)}$

$= \dfrac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta} + i\dfrac{(-\sin\theta)}{5 + 3\cos\theta}$

$\therefore\ x = \dfrac{3 + \cos\theta}{5 + 3\cos\theta}$ .... (i) এবং $y = \dfrac{-\sin\theta}{5 + 3\cos\theta}$ ...... (ii)

বামপক্ষ $= 2(x^2 + y^2)$

$= 2\left\{\left(\frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{-\sin\theta}{5+3\cos\theta}\right)^2\right\}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$= 2\left\{\frac{9+6\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(5+3\cos\theta)^2}\right\}$

$= 2 \times \left\{\frac{9+6\cos\theta+1}{(5+3\cos\theta)^2}\right\}$

$= 2 \times \frac{(10+6\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2}$

$= 2 \times \frac{2(5+3\cos\theta)}{(5+3\cos\theta)^2}$

$= \frac{4}{5+3\cos\theta}$

ডানপক্ষ $= 3x - 1 = 3 \times \frac{3+\cos\theta}{5+3\cos\theta} - 1$

$= \frac{9+3\cos\theta-5-3\cos\theta}{5+\cos\theta}$

$= \frac{4}{5+3\cos\theta}$

$\therefore \quad 2(x^2+y^2) = 3x - 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৭ $z = x + iy$ এবং এককের একটি জটিল ঘনমূল ω।

[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ক. $|2z - 1| = |z - 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 1$ এবং $a^2 + b^2 = 1$ হলে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\bar{z}}{z} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। যেখানে, $a, b \in \mathbb{R}$। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\omega^n + (\omega^2)^n = 2$, যখন n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য এবং -1, যখন n অপর কোনো পূর্ণসংখ্যা। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $|2z - 1| = |z - 2|$

বা, $|2(x+iy) - 1| = |x + iy - 2|$

বা, $|(2x-1) + 2iy| = |(x-2) + iy|$

বা, $\sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

বা, $(2x-1)^2 + 4y^2 = (x-2)^2 + y^2$

বা, $4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2$

বা, $3x^2 + 3y^2 = 3$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 1$

যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $z = x + iy$

$\therefore \bar{z} = x - iy$

$x = 1$ হলে, $z = 1 + iy$

এখন, $\frac{\bar{z}}{z} = a - ib$

বা, $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$

বা, $\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{1}{a-ib}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{1+ix-1+ix}{1+ix+1-ix} = \frac{1-a+ib}{1+a-ib}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2ix}{2} = \frac{(1-a+ib)(1+a+ib)}{(1+a-ib)(1+a+ib)}$

বা, $ix = \frac{(1+ib-a)(1+ib+a)}{(1+a)^2 - (ib)^2}$

$= \frac{(1+ib)^2 - a^2}{1+2a+a^2-i^2b^2}$

$= \frac{1+2ib+i^2b^2-a^2}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-(a^2+b^2)}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-(a^2+b^2)}{1+2a+a^2+b^2}$

$= \frac{1+2ib-1}{1+2a+1}$ $[\because a^2+b^2=1]$

$= \frac{2ib}{2(1+a)} = \frac{ib}{1+a}$

বা, $x = \frac{b}{1+a}$, যা x এর একটি বাস্তব মান। **(দেখানো হলো)**

গ প্রদত্ত রাশি $= \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^n + \omega^{2n}$

এখানে $n = 3m$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$

$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1 + 1 = 2$

$n = 3m + 1$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+1} + (\omega^2)^{3m+1}$

$= (\omega^3)^m.\ \omega + (\omega^3)^{2m}.\ \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

$n = 3m + 2$ হলে,

প্রদত্ত রাশি $= (\omega)^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$

$= (\omega^3)^m.\ \omega^2 + (\omega^3)^{2m}.\ \omega^4$

$= \omega^2 + \omega = -1$

অর্থাৎ, n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে, প্রদত্ত রাশিটি $= 2$ এবং n এর মান অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা হলে, রাশিটি $= -1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৮ ω একটি এককের জটিল ঘনমূল এবং $x = a + b,\ y = a\omega + b\omega^2,\ z = a\omega^2 + b\omega$। *[বরিশাল ক্যাডেট কলেজ, বরিশাল]*

ক. বর্গমূল নির্ণয় কর : $-7 + 24i,\ i = \sqrt{-1}$

খ. দেখাও যে, $(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10}) = 9$

গ. দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = 6ab$।

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $-7 + 24i$ এর বর্গমূল $= \pm\sqrt{-7+24i}$

$= \pm\sqrt{3^2 + 2.3.4i + (4i)^2}$

$= \pm\sqrt{(3+4i)^2}$

$= \pm(3+4i)$ **(Ans.)**

খ বামপক্ষ $= (1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})$

$= (1-\omega^2)(1-\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^2)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^3.\omega)$

$= (1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)$ $[\because \omega^3 = 1]$

$= (1-\omega^2)^2(1-\omega)^2$

$= (1-2\omega^2+\omega^4)(1-2\omega+\omega^2)$

$= (1-2\omega^2+\omega)(1-2\omega+\omega^2)$

$= (1+\omega+\omega^2-3\omega^2)(1+\omega+\omega^2-3\omega)$

$= (-3\omega)(-3\omega^2) = 9\omega^3$

$= 9$ $[\because \omega^3 = 1]$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x = a + b$

বা, $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ……… (i)

$y = a\omega + b\omega^2$

বা, $y^2 = (a\omega + b\omega^2)^2$

বা, $y^2 = a^2\omega^2 + 2ab\omega^3 + b^2\omega^4$

$\therefore \quad y^2 = a^2\omega^2 + 2ab + b^2\omega$ $[\because \omega^3 = 1]$ ……… (ii)

এবং $z = a\omega^2 + b\omega$

বা, $z^2 = (a\omega^2 + b\omega)^2$

বা, $z^2 = a^2\omega^4 + 2ab\omega^3 + b^2\omega^2$

$\therefore \quad z^2 = a^2\omega + 2ab + b^2\omega^2$ $[\because \omega^3 = 1]$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$x^2 + y^2 + z^2$

$= a^2(1+\omega^2+\omega) + 6ab + b^2(1+\omega+\omega^2)$

$= a^2.0 + 6ab + b^2.0$ $[\because 1+\omega+\omega^2 = 0]$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 6ab$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶৯ দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = \dfrac{1 - ix}{1 + ix}$

দৃশ্যকল্প-২: F_1 ও F_2 দুই ধরনের খাদ্যের প্রতি কেজিতে ভিটামিন C ও D পাওয়া যায় নিম্নরূপ:

খাদ্যের নাম	ভিটামিন-C	ভিটামিন-D	প্রতি এককের মূল্য (টাকায়)
F_1	8 একক	10 একক	70
F_2	12 একক	6 একক	90
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32 একক	22 একক	

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $(-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ এর আলোকে যদি $p^2 + q^2 = 1$ হয় তাহলে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $f(x) = p - iq$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। ৪

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন C ও D এর চাহিদা মেটানো যায় তা নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $(-1 + \sqrt{-3})^7 + (-1 - \sqrt{-3})^7$

$$= \left\{\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^7 + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^7\right\}.2^7$$
$$= \{\omega^7 + (\omega^2)^7\}.2^7$$
$$= 2^7(\omega + \omega^2)$$
$$= 128.(-1)$$
$$= -128 \text{ (Ans.)}$$

খ দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{1 - ix}{1 + ix}$

শর্তমতে, $\dfrac{1 - ix}{1 + ix} = p - iq$ বা, $(1 + ix)(p - iq) = 1 - ix$

বা, $p + ipx - iq - i^2qx = 1 - ix$ বা, $p + ipx - iq + qx = 1 - ix$

বা, $ipx + qx + ix = 1 - p + iq$

বা, $x\{i(1 + p) + q\} = 1 - p + iq$

বা, $x = \dfrac{(1 - p + iq)}{i(1 + p) + q} = \dfrac{(1 - p + iq)\{q - i(1 + p)\}}{\{q + i(1 + p)\}\{q - i(1 + p)\}}$

$$= \frac{q - pq + iq^2 - i + ip - i^2q - ip + ip^2 - i^2pq}{q^2 + (1 + p)^2}$$
$$= \frac{q - pq + iq^2 - i + q + ip^2 + pq}{q^2 + (1 + p)^2}$$
$$= \frac{2q + i(q^2 + p^2 - 1)}{q^2 + 1 + 2p + p^2} = \frac{2q + i(1 - 1)}{1 + 1 + 2p} \text{ [দেওয়া আছে, } p^2 + q^2 = 1]$$
$$= \frac{2q}{2(1 + p)} \quad \therefore x = \frac{q}{1 + p}$$

সুতরাং x এর একটি বাস্তব মান $f(x) = p - iq$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(দেখানো হলো)

গ মনে করি, F_1 প্রকারের x একক ও F_2 প্রকারের y একক খাদ্য প্রতিদিন ক্রয় করলে দৈনন্দিন প্রয়োজন মিটানো যাবে। তাহলে $x \geq 0$ ও $y \geq 0$

$\therefore$ অভীষ্ট ফাংশন, $z_{min} = 70x + 90y$

শর্তসমূহ: $8x + 12y \geq 32 \Rightarrow 2x + 3y \geq 8$

$10x + 6y \geq 22 \Rightarrow 5x + 3y \geq 11$

$x, y \geq 0$

এটিই নির্ণেয় যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম।

প্রথমে অসমতাগুলিকে অনুরূপ সমীকরণে রূপান্তর করি,

$2x + 3y \geq 8$ এর অনুরূপ সমীকরণ $2x + 3y = 8$

বা, $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8/3} = 1$ ...... (1)

$5x + 3y \geq 11$ এর অনুরূপ সমীকরণ $5x + 3y = 11$

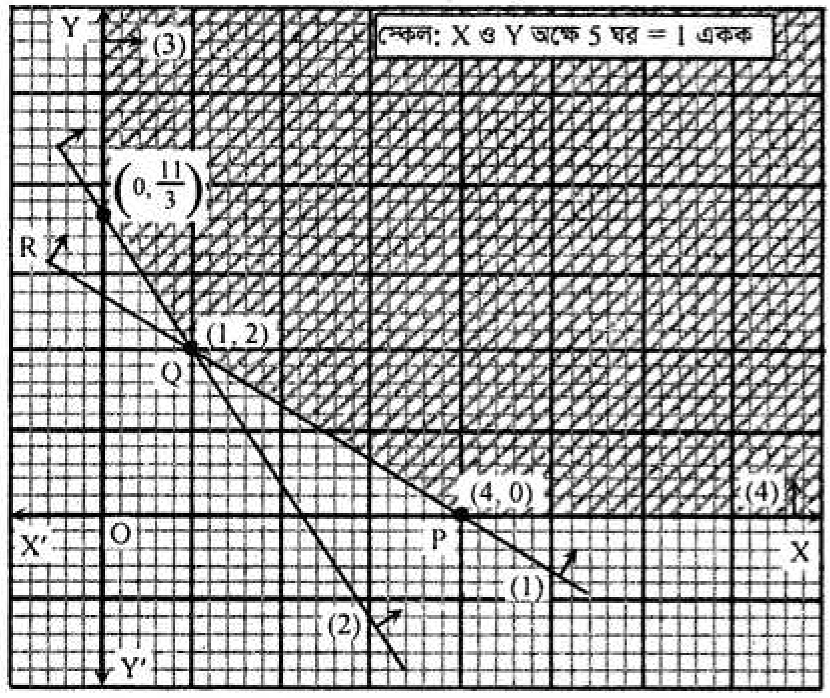
বা, $\dfrac{x}{11/5} + \dfrac{y}{11/3} = 1$ ...... (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ এর অনুরূপ সমীকরণ যথাক্রমে $x = 0$ ...... (3)

এবং $y = 0$ ...... (4)

এখন ছক কাগজে ক্ষুদ্র 5 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক বিবেচনা করে, মূলবিন্দু x ও y অক্ষ চিহ্নিত করে (1), (2), (3) ও (4) নং সমীকরণের লেখ অঙ্কন করি।

এবার $2x + 3y \geq 8$ অসমতায় মূলবিন্দু (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 8$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রে ছক কাগজে (1) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হলো $2x + 3y \geq 8$ অসমতার সমাধান।



পুনরায় $5x + 3y \geq 11$ অসমতায় (0, 0) প্রয়োগ করলে পাই $0 \geq 11$ যা সত্য নয়। এ ক্ষেত্রেও ছক কাগজের (2) নং রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বস্থ সকল বিন্দুই হল $5x + 3y \geq 11$ অসমতার সমাধান।

$x \geq 0$ অসমতা দ্বারা y-অক্ষের ওপর এবং x-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়।

এবং $y \geq 0$ দ্বারা x-অক্ষের ওপর এবং y-অক্ষের ধনাত্মক পার্শ্বস্থ সকল বিন্দু বোঝায়।

লেখচিত্রের ছায়াঘেরা এলাকাকে সম্ভাব্য সমাধান এলাকা বলা হয়।

লেখচিত্রানুসারে, এখানে সম্ভাব্য এলাকার তিনটি কৌণিক বিন্দু আছে।

কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে (1) ও (4) নং এর ছেদ বিন্দু (4, 0); (1) ও (2) নং এর ছেদ বিন্দু (1, 2); (2) ও (3) এর ছেদ বিন্দু $\left(0, \frac{11}{3}\right)$

মনে করি P(4, 0), Q(1, 2) এবং $R\left(0; \frac{11}{3}\right)$

কৌণিক বিন্দু	$z = 70x + 90y$
P(4,0)	$z = 70 \times 4 + 90 \times 0 = 280$
Q(1, 2)	$z = 70 \times 1 + 90 \times 2 = 250$
$R\left(0, \frac{11}{3}\right)$	$z = 70 \times 0 + 90 \times \frac{11}{3} = 330$

z এর এই মানগুলির মধ্যে সর্বাপেক্ষা ছোট মানটি হলো 250

সুতরাং দৈনিক F_1 প্রকারের খাদ্য 1 একক ও F_2 প্রকারের খাদ্য 2 একক গ্রহণ করলে, সবচেয়ে কম খরচে প্রয়োজন মিটে যাবে।

প্রশ্ন ▶১০ $f(x, y) = x + iy$ *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. $x + y \leq 12, x \leq 4, y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0$ দ্বারা আবদ্ধ সমাধান এলাকাটি ছক কাগজে চিহ্নিত কর। ২

খ. $|f(x - 4, y)| + |f(x + 4, y)| = 12$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $f(1, 0)$ এর ঘনমূলগুলির জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক **সীমাবদ্ধতার শর্তসমূহ :**

$x + y \leq 12, x \leq 4, y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত অসমতাগুলিকে সমতা ধরে সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করি এবং সমাধানের সম্ভাব্য অনুকূল এলাকা বের করি। অতএব আমরা পাই,

$x + y = 12$

বা, $\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{12} = 1$ .... (i)

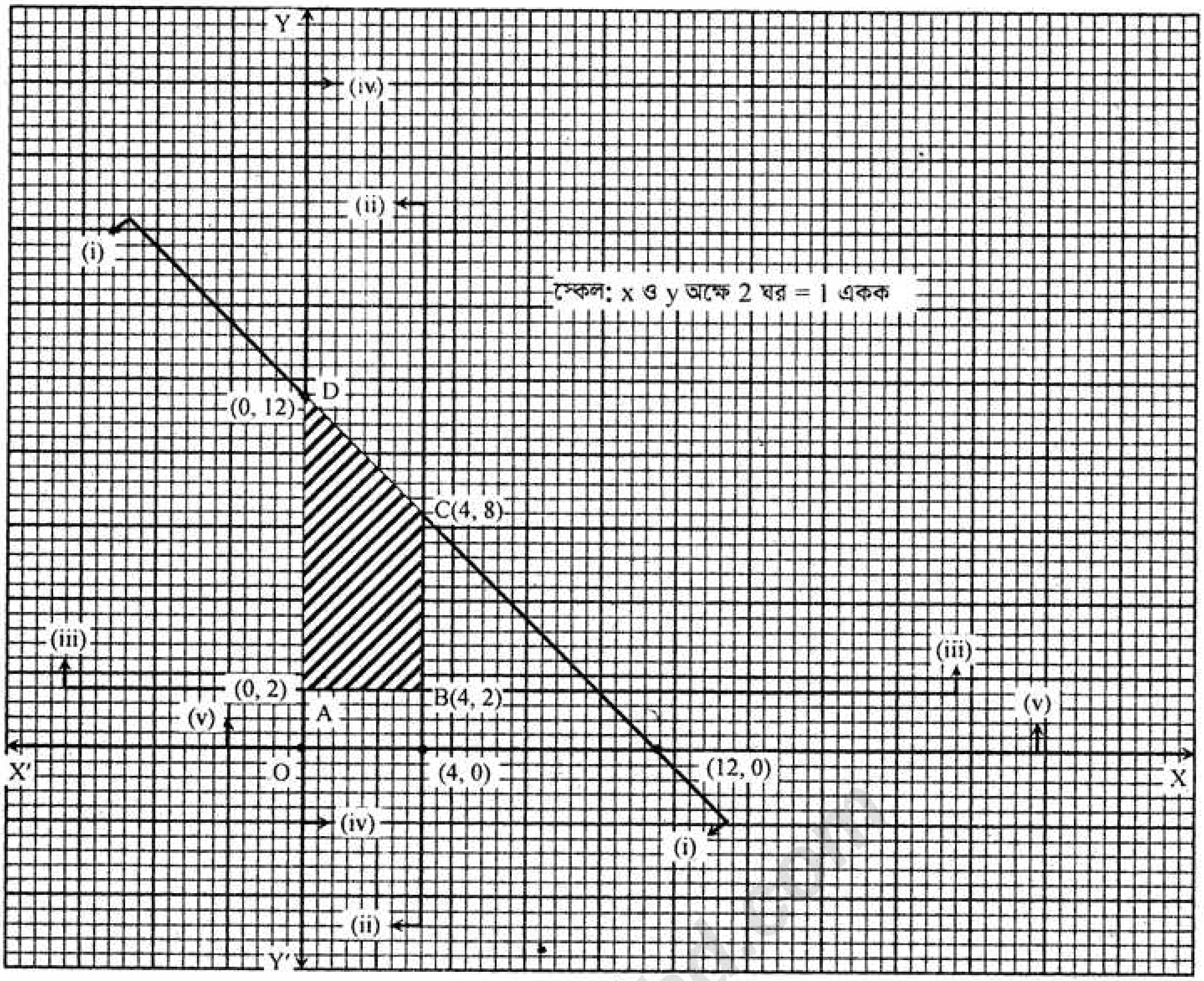
$x = 4$ .... (ii)

$y = 2$ .... (iii)

$x = 0$ .... (iv)

এবং $y = 0$ .... (v)

লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, সীমাবদ্ধতার শর্তানুসারে A, B, C, D দ্বারা আবদ্ধ এলাকাটি সমাধানের এলাকা।



খ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + iy$

$\therefore \quad f(x - 4, y) = x - 4 + iy$

এবং $f(x + 4, y) = x + 4 + iy$

প্রদত্ত সমীকরণ, $|f(x - 4, y)| + |f(x + 4, y)| = 12$

$\Rightarrow |x - 4 + iy| + |x + 4 + iy| = 12$

$\Rightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 12$

$\Rightarrow \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 12 - \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$

$\Rightarrow (x + 4)^2 + y^2 = 12^2 + (x - 4)^2 + y^2 - 24\sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + y^2 = 144 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 24\sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 24\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 144 - 16x$

$\Rightarrow 3\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 18 - 2x$

$\Rightarrow 9\{(x - 4)^2 + y^2\} = 324 + 4x^2 - 72x$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 9(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 324 + 4x^2 - 72x$

$\Rightarrow 9x^2 - 72x + 144 + 9y^2 = 324 + 4x^2 - 72x$

$\Rightarrow 5x^2 + 9y^2 = 180$

$\Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ যা উপবৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।

$\therefore$ ইহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $f(x, y) = x + iy$

$\therefore \quad f(1, 0) = 1 + i\,.\,0 = 1$

এখন, $f(1, 0)$ বা 1 এর ঘনমূল বের করি।

মনে করি, $\sqrt[3]{1} = x$

বা, $x^3 = 1$

বা, $x^3 - 1 = 0$

বা, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore \quad x - 1 = 0$ অথবা $x^2 + x + 1 = 0$

এখন, $x - 1 = 0$ হলে, $x = 1$

আবার, $x^2 + x + 1 = 0$ হলে,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$$

সুতরাং $f(1, 0)$ এর ঘনমূলগুলির জটিল মূলদ্বয়

$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ এবং $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$

মনে করি, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

তাহলে, $\omega^2 = \frac{1}{4}(1 - 2i\sqrt{3} - 3) = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

আবার, $\omega = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ হলে, $\omega^2 = \frac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} - 3) = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$

$\therefore \quad f(1, 0)$ এর ঘনমূলগুলির জটিল মূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১১ দৃশ্যকল্প-১: $p, q \in \mathbb{R}$ যথাক্রমে $p = 7$ এবং $q = 30\sqrt{2}$.

দৃশ্যকল্প-২: কোন একটি এলাকায় শরণার্থীদের পর্যালোচনা করে দেখা যায় তাদের শিশুরা বিভিন্ন অপুষ্টিতে ভুগছে। তাদের খাদ্য সরবরাহের জন্য F_1 ও F_2 দুই ধরনের খাদ্য নির্বাচন করা হলো। যাতে প্রতি কিলোতে ভিটামিন C ও ভিটামিন D প্রাপ্তির পরিমাণ নিম্নরূপ:

খাদ্য	ভিটামিন C	ভিটামিন D	কিলো প্রতি মূল্য
F_1	5	15	7 টাকা
F_2	15	10	14 টাকা

[আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

ক. দেখাও যে, $\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{2}$; যেখানে $i = \sqrt{-1}$. ২

খ. দৃশ্যকল্প-১ হতে $\sqrt{p - qi}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. ভিটামিন C ও ভিটামিন D এর দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন যথাক্রমে 45 ও 60 হলে সবচেয়ে কম খরচে দৈনিক ভিটামিন C ও D এর চাহিদা কিভাবে মেটানো যাবে? ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{i^2 + 2i + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + i)^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

$\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{-2i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + i^2 - 2i}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 - i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$