Согласно теореме Коши, для каждого $x > x_0$ существует такое $\xi = \xi(x, x_0) > x_0$, что

$$f(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}[g(x) - g(x_0)] + f(x_0).$$

Отсюда

$$\frac{f(x)}{g(x)} - k = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k + \frac{1}{g(x)}\Big[f(x_0) - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}g(x_0)\Big].$$

Положив

$$\alpha(x) \overset{def}{=} \frac{1}{|g(x)|}\Big|f(x_0) - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}g(x_0)\Big|,$$

будем иметь

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - k\Big| \le \Big|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k\Big| + \alpha(x). \tag{12.22}$$

В силу условия (12.21), отношение $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ ограничено при $x > x_0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) \underset{(12.19)}{=} 0$. Поэтому найдется такое $x_1 > x_0$, что для всех $x > x_1$ будет выполняться неравенство

$$\alpha(x) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12.23}$$

и, таким образом, при $x > x_1$ верно неравенство

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}\Big| - k\Big| \underset{(12.22)}{\le} \Big|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k\Big| + \alpha(x) \underset{\substack{(12.21)\\(12.23)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

а это и означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.

2) Если, например,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty, \tag{12.24}$$

то для любого $c > 0$ существует такое $x_0 > a$, что для всех $x > x_0$ выполняются неравенства $g(x) \ne 0$ и

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 3c. \tag{12.25}$$

Согласно теореме Коши, при любом $x > x_0$ имеет место равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Big[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\Big] + \frac{f(x_0)}{g(x)},$$