



# 本科生毕业论文

题目：在缺陷两格的棋盘上  
的直线骨牌平铺问题

姓 名 卢皓斌

学 号 19337077

院 系 数学学院（珠海）

专 业 信息与计算科学

指导教师 崔潇易

2023 年 3 月 25 日

## 学术诚信声明

本人郑重声明：所呈交的毕业论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本论文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本论文的知识产权归属于培养单位。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期： 年 月 日

## 【摘 要】

由古老的国际象棋游戏演变进化而来的骨牌平铺问题, 又称棋盘覆盖问题, 是组合数学中历史悠久的经典问题, 目前对于缺陷棋盘的直线骨牌覆盖问题中, 只研究到了残缺一格的直线骨牌覆盖问题。

本文在残缺一格棋盘的平铺问题的解法基础上进行扩展, 利用循环染色法, 构建出残缺两格棋盘的直线骨牌平铺问题的解并给出例子, 对于边界条件上的不容易处理的问题, 本文利用了分治的思想, 结合数学归纳和无穷递降的思想, 把边界情况上的问题缩小到规模更小的问题来证明了边界条件上的平铺的不可行, 较为完整的解决了残缺两格棋盘的直线骨牌平铺问题。

本文在以往的文献基础上, 通过拓展的循环染色法有助于解决更多残缺格子的直线骨牌覆盖问题, 而在边界条件上的无穷递降的解法的构建, 为各类骨牌覆盖问题的边界条件提供了一个例子以供拓展和使用。

**关键词:** 染色方法, 分治, 无穷递降

## [ABSTRACT]

The domino tiling problem, also known as the board coverage problem, evolved from the ancient chess game, is a classic problem with a long history in combinatorics, and only the problem of incomplete straight domino coverage has been studied in the problem of straight domino coverage of defective chessboards.

This paper expands on the solution of the tiling problem of the incomplete one-grid chessboard, and uses the circular staining method to construct the solution of the rectilinear domino tiling problem of the incomplete two-square chessboard and gives examples. Combined with mathematical induction and the idea of infinite descension, the problem of boundary case is reduced to a smaller scale problem to prove that tiling on boundary conditions is not feasible, and the problem of rectilinear domino tiling with a broken two-square chessboard is solved more completely.

Based on the previous literature, the extended cyclic staining method helps to solve the problem of linear domino coverage of more incomplete lattices, and the construction of an infinitely decreasing solution on the boundary condition provides an example for the boundary conditions of various domino cover problems for extension and use.

**Keywords:** stain, partition, infinite descending

## 目录

1 绪论 . . . . .	1
1.1 选题背景与意义 . . . . .	1
1.2 本文的论文结构与章节安排 . . . . .	2
1.3 基础定义与符号表 . . . . .	2
2 棋盘所满足的条件 . . . . .	4
3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案 . . . . .	7
3.1 骨牌大小 $k = 3$ 时的情况 . . . . .	7
3.2 骨牌大小 $k > 3$ 时的情况 . . . . .	10
4 棘手情况的处理 . . . . .	12
4.1 符号定义 . . . . .	12
4.2 棘手情况处理的前置 . . . . .	12
4.3 棘手情况的正式处理 . . . . .	14
5 结论与展望 . . . . .	16
5.1 结论 . . . . .	16
5.2 展望 . . . . .	16
参考文献 . . . . .	17
附录 A 区域划分 . . . . .	18
A.1 $k_{12} - k_{22} = 1$ 区域划分 . . . . .	18
A.2 $k_{12} - k_{22} > 1$ 区域划分 . . . . .	18
致谢 . . . . .	19

## 表格目录

1.1 符号解释 . . . . .	3
2.1 对棋盘的初步划分 . . . . .	4
2.2 $k$ 阶染色 . . . . .	5
2.3 对表 2.2 的计数 . . . . .	5
3.1 对缺陷棋盘的划分 . . . . .	7
3.2 3 阶染色 . . . . .	8
3.3 3 阶染色-3 . . . . .	8
3.4 $k_{52} \geq k_{42}$ 时的缺陷拼接 . . . . .	8
3.5 $k_{52} < k_{42}$ 的缺陷拼接 . . . . .	9
3.6 $k_{22} \geq k_{12}$ 的缺陷拼接 . . . . .	9
3.7 $k_{22} < k_{12}$ 且 $k_{21} > k_{11}$ 的缺陷拼接 . . . . .	9
3.8 $k$ 阶染色 . . . . .	10
3.9 $k \times k$ 的区域划分 . . . . .	10
3.10 $k$ 阶重染色 . . . . .	11

# 1 绪论

棋盘完全覆盖问题 (problem of perfect cover of chessboard) 是一类组合问题, 是研究对于一个  $m \times n$  的广义棋盘, 在缺陷  $z$  格的情况下 (通常  $z = 0$ ), 被骨牌完全覆盖的问题。

在过去, 我们对此问题的研究主要落在棋盘完全覆盖问题的方案数, 却甚少对棋盘完全覆盖问题的可解性进行考虑, 显然, 只有在确保该缺陷棋盘可被覆盖的基础上, 棋盘完全覆盖的方案数的研究才有价值。此外, 研究棋盘完全覆盖问题的可解性, 有助于对现实中的地砖覆盖等问题提供参考。

## 1.1 选题背景与意义

### 1.1.1 选题背景

我们称某  $1 \times k$  骨牌能完全覆盖某缺陷棋盘, 当且仅当以下条件满足:

- 1) 每块骨牌能够连续覆盖棋盘上同一行或者同一列的相邻  $k$  格
- 2) 棋盘上每一格都被骨牌覆盖。
- 3) 没有两块骨牌同时覆盖一格。
- 4) 对于棋盘的缺陷处, 没有任意一张骨牌将其覆盖。

而本文研究的缺陷两格棋盘的覆盖问题, 则是研究在  $m \times n$  的广义棋盘上, 挖去任意两格的格子, 是否可被  $1 \times k$  的骨牌所覆盖。

对于此问题而言, 我们一般会使用染色法求解, 也能够在经典问题: 国际棋盘挖去做左上右下两个格子是否可被  $1 \times 2$  骨牌平铺的问题上做出相当漂亮的证明。

可是对于高维度而言, 普通的染色法有点力不从心, 只能排除较为基础的情况而无法对整个棋盘的各种缺陷情况进行完整的考量。

在本文中, 我推广了染色法进行更多情况的排除, 得到了在普遍条件下, 缺陷两格棋盘是否可被平铺的证明,

### 1.1.2 国内外研究现状和相关应用

对棋盘覆盖问题的研究由来已久, 冯跃峰证明了线型骨牌在完整矩形棋盘的完全覆盖充要条件; 康庆德用染色法证明了残缺棋盘可被  $1 \times 2$  多米诺骨牌完全覆盖的充要条件; 张媛则用轨道循环标号法证明了线型骨牌在残缺一格棋盘上的覆

盖问题。

而关于棋盘覆盖实际问题的研究的应用，宗传明则发现骨牌覆盖问题可应用于地砖铺设当中，不仅限于线型骨牌，还存在多边形骨牌覆盖，并且完整刻画了能构成六重晶格铺砌的所有铺砖，而经典的俄罗斯方块的拼图小游戏，文件加密技术等都会应用到棋盘覆盖问题的相关结论。

## 1.2 本文的论文结构与章节安排

本文共分为五章，各章节内容安排如下：

第一章绪论。简单说明了本文章的选题背景与意义。

第二章构建出可被  $1 \times k$  大小的骨牌平铺的棋盘的必要条件，初步构建出满足条件的棋盘的大小。

第三章展示了在大部分情况下，残缺格子位于哪些位置可以满足  $1 \times 3$  大小的骨牌进行平铺，并给出了相对应的平铺方式。

第四章对于棘手的情况，给出了这类缺陷棋盘不可被平铺的证明。

第五章总结了问题的解，并展望以后的工作。

## 1.3 基础定义与符号表

在本文中，所有的符号与变量的取值范围都是整数集。

### 1.3.1 基础定义

**定义 1.1** 我们定义一个  $m \times n$  的广义棋盘的某个  $k$  阶染色为，规定第一行第  $k$  列染色为  $(j-1)\%k+1$  后，其余格子能满足每连续  $k$  个横着的或者竖着的格子中，有且只有一个  $1, 2, \dots, k$ ，这样的排布。

**定义 1.2** 我们定义一个  $m \times n$  的广义棋盘的两个  $k$  阶染色不同，当且仅当在第一行的染色完全相同时，剩余的格子中存在染色不同的格子。

由上述定义，我们能简单的得到一个引理

**引理 1.1** 对于一个  $m \times n$  的广义棋盘的某个  $k$  阶染色，任意交换其中的两行或两列后，新的棋盘仍然是一个合法的  $k$  阶染色。

### 1.3.2 符号表



表 1.1 符号解释

符号	意义	取值范围
$m \times n$	棋盘大小为 $m$ 行 $n$ 列	$[1, \text{inf}) \times [1, \text{inf})$
$1 \times k$	骨牌大小为 1 行 $k$ 列	$[3, \min(m, n)]$
$(i, j)$	第 $i$ 行第 $j$ 列的格子	$[1, m] \times [1, n]$
$Color(i, j)$	第 $i$ 行第 $j$ 列的格子所染的颜色	$[1, k]$
$Color_p^k$	$k$ 阶染色方案 $p$	$\mathbb{Z}$
$Color_p^k(i, j)$	$(i, j)$ 在 $Color_p^k$ 下所染的颜色	$[1, k]$
$f(x)$	染色为 $x$ 的格子的个数	$[1, k]$
$g(x)$	标记为 $x$ 的格子的个数	$[1, m + n]$
$Corner_C$	矩形缺陷 $C$ 的左上角和右下角的坐标	—

## 2 棋盘所满足的条件

对一般的  $m \times n$  的完整矩形棋盘, de Bruijn's theorem<sup>[1]</sup> 给出了  $k$  格线型骨牌完全覆盖的充分必要条件, 这是我们研究覆盖问题的基础。

**引理 2.1**  $m \times n$  棋盘中存在  $k$  格线型骨牌完全覆盖, 当且仅当  $k \mid m$  或  $k \mid n$ 。

而对于多格残缺棋盘, 重点是确定棋盘的大小  $(m, n)$  和残缺格子所在的位置  $(i, j)$ , 在这一章节我们先考虑棋盘的大小所满足的条件。

以下的符号均建立在整数集的基础上, 由于康庆德已经研究完毕  $1 \times 2$  骨牌的覆盖<sup>[2]</sup>, 因此我们的只研究骨牌长度大于 3 的情况。

显而易见的, 我们能简单得到以下引理。

**引理 2.2**  $m \times n$  的广义棋盘中, 挖去 2 个格子, 存在  $k$  格线型骨牌完全覆盖的充分条件是  $k \mid mn - 2$ 。

**证明** 简单的, 假设存在  $t$  个线性骨牌能够完全覆盖整个棋盘, 由于骨牌不会互相重复的覆盖同一个格子, 所以所有骨牌所覆盖的格子数目应该要和棋盘的总的格子数目相同, 即

$$tk = mn - 2 \rightarrow k \mid mn - 2 \quad (2.1)$$

□

我们给出以下定理, 来规整棋盘的大小。

**定理 2.1** 当  $m \times n$  的缺陷两格广义棋盘可被  $1 \times k$  大小的骨牌平铺时, 一定满足  $m \equiv 1(mod k), n \equiv 2(mod k)$ 。

**证明**

$$\begin{cases} m = kx_m + m_1, m_1 \in [0, k) \\ n = kx_n + n_1, n_1 \in [0, k) \end{cases} \quad (2.2)$$

简单的, 不妨设 2.2, 并据此对大小相同的完整棋盘进行划分, 得到表 2.1。

表 2.1 对棋盘的初步划分

A: $kx_m \times kx_n$	B: $m_1 \times kx_n$
C: $kx_m \times n_1$	D: $m_1 \times n_1$

由引理2.1, 模块 A, B, C 均可被  $1 \times k$  骨牌平铺, 由 de Bruijn's theorem<sup>[1]</sup>的证明中, 我们可以得到模块 A, B, C 的标记和染色我们都不需要考虑, 只需要考虑模块 D 的标记和染色<sup>[1]</sup>。不妨设  $m_1 \leq n_1$ , 并基于张媛对残缺一格棋盘的研究<sup>[3]</sup>对模块 D 进行标记, 有表2.2。

表 2.2  $k$  阶染色

1	2	$\cdots$	$\cdots$	$m_1$	$\cdots$	$n_1 - 1$	$n_1$
2	3	$\cdots$	$\cdots$	$m_1 + 1$	$\cdots$	$n_1$	$n_1 + 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$
$m_1$	$\cdots$	$n_1 - 1$	$n_1$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$m_1 + n_1 - 1$

表 2.3 对表2.2的计数

$x$	1	2	3	$\cdots$	$m_1$	$m_1 + 1$	$\cdots$	$n_1$	$n_1 + 1$	$\cdots$	$m_1 + n_1 - 1$
$g(x)$	1	2	3	$\cdots$	$m_1$	$m_1$	$\cdots$	$m_1$	$m_1 - 1$	$\cdots$	1

记  $g(x)$  标记为  $x$  的格子的个数, 对表2.2进行计数, 得到表2.3, 就可以简单的得到公式2.3。

$$g(x) = \begin{cases} x, x \in [1, m_1] \\ m_1, x \in (m_1, n_1) \\ m_1 + n_1 - x, x \in [n_1, m_1 + n_1 - 1] \end{cases} \quad (2.3)$$

我们将所有标记为  $x$  的染色为  $x \% k$ , 记  $f(x)$  为棋盘中染色为  $x$  的格子数目, 有  $f(x) = g(x) + g(x + k)$ 。而  $n_1 < k \rightarrow n_1 + 2 \leq k + 1$ , 故

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) + g(k + 1) \\ &\leq 1 + g(n_1 + 2) \\ &= 1 + g(n_1) - 2 \\ &< g(n_1) = f(n_1) \end{aligned}$$

因此我们能得到等式2.4。

$$f(m_1) = f(n_1) > f(1) \quad (2.4)$$

现在我们考虑残缺两格的棋盘上的直线覆盖, 由于每个直线骨牌会且仅会分别覆盖 1 个染色为  $1, 2, \dots, k$  的方块, 因此残缺两格后的棋盘能被直线骨牌覆盖的充分条件是,  $\forall p_1, p_2, f(p_1) = f(p_2)$  因此根据残缺两格分布在同种颜色和不同颜色的可能上, 需要满足以下两个条件之一:

- 条件 1:  $\exists p \in [0, k), s.t. f(p) = f(x) + 2, x \neq p, x \in [0, k)$
- 条件 2:  $\exists p_1, p_2 \in [0, k), s.t. f(p_1) = f(p_2) = f(x) + 1, x \neq p_1 \neq p_2, x \in [0, k)$

因此如果模块 D 存在, 分情况讨论:

- 1) 若  $m_1 < n_1 - 1$ , 由 2.2 有  $f(m_1) = f(n_1) - 1 = f(n_1) > f(1), \exists p_1, p_2, p_3, s.t. f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) > f(1)$ , 矛盾。
- 2) 若  $m_1 = n_1 - 1$ , 由上述讨论我们可以得到, 此时  $p_1 = m_1, p_2 = n_1 = m_1 + 1$ , 满足条件 2, 而  $f(1) = f(n_1) - 1 \rightarrow g(1) + g(k+1) = f(n_1) - 1 \rightarrow g(k+1) = g(n_1) - 2 \rightarrow n_1 = k - 1$ , 即  $m_1 = k - 2, n_1 = k - 1$ 。

假设对于所有的染色, 都存在两个格子使得在所有的染色下, 这两个格子都被染色为  $p_1$  和  $p_2$ , 记  $Color_p^k(i, j) = a$  为第  $i$  行第  $j$  列在染色方案  $p$  下染色为  $a$ , 任取一种染色方案  $Color_p^k$ :

- 若  $2 \mid k$ , 由对称性, 此时两个缺陷格子必然位于  $(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2}), (\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$ , 由 2.2 简单的得到  $Color_p^k(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2}) = 1, Color_p^k(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}) = 2$ , 此时交换第一列和第  $\frac{k}{2}$  列, 仍然是一个合法的染色  $Color_{p'}^k$ , 但是交换后的染色中, 由于  $Color_p^k(1, 1) = 1$ , 因此交换后的  $Color_{p'}^k(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2}) \neq Color_{p'}^k(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}) \neq 1$ , 因此矛盾。
- 若  $2 \nmid k$ , 由对称性, 此时两个缺陷格子必然位于  $(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}), (\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2})$ , 由 2.2 简单的得到  $Color_p^k(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}) = 1, Color_p^k(\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}) = 2$ , 此时交换第一行和第  $\frac{k-1}{2}$  行, 仍然是一个合法的染色  $Color_{p'}^k$ , 但是交换后的染色中, 由于  $Color_p^k(1, 1) = 1$ , 因此交换后的  $Color_{p'}^k(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}) \neq Color_{p'}^k(\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}) \neq 1$ , 也矛盾。

, 因此我们总能找到一种染色不满足条件, 故矛盾。

- 3) 若  $m_1 = n_1$ , 由 2.4, 有  $f(m_1) \geq f(1) + 1$ 。

- (a) 若  $f(m_1) = f(1) + 1$ , 则有  $f(x) = f(m_1) - 1, \forall x < k, x \neq m_1$ , 既不满足条件 1 也不满足条件 2, 矛盾。
- (b) 若  $f(m_1) > f(1) + 1$ , 则有  $f(m_1) = f(m_1 + 1) + 1 = f(m_1 + 2) + 2 \geq f(1)$ , 故令  $p = m_1$  后,  $f(p) \geq f(1) + 2$  但  $f(m_1) > f(1)$ , 矛盾。

所以挖去两格后, 若模块 D 仍然存在, 则所有条件均矛盾, 故模块 D 不存在, 即此时  $m_1 = 1, n_1 = 2$ . □

因此, 对于我们已经规整好了棋盘的规模, 并把问题转化如下:

对于大小为  $1 \times k$  的骨牌, 我们考虑缺陷两格的  $m \times n$  的棋盘, 其中  $m \equiv 1(mod k), n \equiv 2(mod k)$ , 哪些棋盘可以被平铺。

### 3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案

#### 3.1 骨牌大小 $k = 3$ 时的情况

由 2.1 有, 此时棋盘的大小只可能为  $m \times n, m \equiv 1(\text{mod } 3), n \equiv 2(\text{mod } 3)$ , 不妨假设缺陷格子分别为  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ 。

在这里我们给出一个定理, 来辅助我们之后的证明。

**定理 3.1** 对于  $m \times n$  的广义棋盘和  $1 \times k$  的骨牌, 且  $m \equiv 1(\text{mod } k), n \equiv 2(\text{mod } k)$ , 记某格子的坐标为  $(i, j)$ , 意味着某格子处于第  $i$  行第  $j$  列, 则如果存在  $i \times j$  的矩形缺陷  $C$ ,  $i \equiv 1(\text{mod } k), j \equiv 2(\text{mod } k), i \leq m, j \leq n$ , 且  $\text{Corner}_C = \{(3k_{11} + 1, 3k_{12} + 1), (3k_{21} + 1, 3k_{22} + 2)\}$ , 则该棋盘一定能被平铺。

**证明** 当存在这样的缺陷时, 我们可以把棋盘分成如 3.1 的 9 个区域, 分别如图所示, 由 2.1, 可得除了矩形缺陷  $C$  外的 8 个区域均可被  $1 \times k$  的骨牌平铺, 证毕。

表 3.1 对缺陷棋盘的划分

$3k_{11} \times 3k_{12}$	$3k_{11} \times (3k_{22} - 3k_{12} + 2)$	$3k_{11} \times 3k_{22}$
$(3k_{21} - 3k_{11} + 1) \times 3k_{12}$	$C : i \times j$	$(3k_{21} - 3k_{11} + 1) \times 3k_{22}$
$3k_{21} \times 3k_{12}$	$3k_{21} \times 3(k_{22} - k_{12}) + 2$	$3k_{21} \times 3k_{22}$

□

由定理 3.1, 我们可以得把问题转化为: 对于某个残缺两格的棋盘, 如果他的两个缺陷格子可以组合成一个满足 3.1 中条件的矩形缺陷  $C$ , 那么该棋盘可以被平铺。

在图 3.8a 的基础上, 我们对棋盘进行两种染色, 分别记为  $\text{Color}_1^3$  和  $\text{Color}_2^3$ , 显然有  $f(1) = f(2) = f(3) + 1$ , 并据此按照以下规则重新染色得到  $\text{Color}_3^3$ , 即图 3.3。

- $\text{Color}_1^3(i, j) = \text{Color}_2^3(i, j) = 1$ , 则  $\text{Color}_3^3(i, j) = 1$ 。
- $\text{Color}_1^3(i, j) = \text{Color}_2^3(i, j) = 2$ , 则  $\text{Color}_3^3(i, j) = 2$ 。
- $\text{Color}_1^3(i, j) = 1, \text{Color}_2^3(i, j) = 2$ , 则  $\text{Color}_3^3(i, j) = 4$ 。
- $\text{Color}_1^3(i, j) = 2, \text{Color}_2^3(i, j) = 1$ , 则  $\text{Color}_3^3(i, j) = 5$ 。
- $\text{Color}_1^3(i, j) = 3$  或  $\text{Color}_2^3(i, j) = 3$ , 则  $\text{Color}_3^3(i, j) = 0$ 。

而该棋盘可被平铺的充分条件为缺陷的两个格子在  $\text{Color}_1^3$  和  $\text{Color}_2^3$  中都落在染色 1 和染色 2 的位置, 即以下两个条件之一:

- $Color_3^3(i_1, j_1) = 1, Color_3^3(i_2, j_2) = 2$
- $Color_3^3(i_1, j_1) = 4, Color_3^3(i_2, j_2) = 5$

表 3.2 3 阶染色

(a) 3 阶染色-1						(b) 3 阶染色-2					
1	2	3	1	2	...	1	2	3	1	2	...
2	3	1	2	3	...	3	1	2	3	1	...
3	1	2	3	1	...	2	3	1	2	3	...
1	2	3	1	2	...	1	2	3	1	2	...
2	3	1	2	3	...	3	1	2	3	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

表 3.3 3 阶染色-3

1	2	0	1	2	0	...
0	0	4	0	0	4	...
0	0	5	0	0	5	...
1	2	0	1	2	0	...
0	0	4	0	0	4	...
0	0	5	0	0	5	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

### 3.1.1 在染色中分别处于 4 和 5

由图 3.3，我们可以简单的得到染色为 4 和 5 所对应的格子的坐标，

- $Color_3^3(i_1, j_1) = Color_3^3(3k_{41} + 2, 3k_{42}) = 4$
- $Color_3^3(i_2, j_2) = Color_3^3(3k_{51} + 3, 3k_{52}) = 5$

由于棋盘具有对称性，在这里我们不妨假设  $k_{51} \geq k_{41}$ ，则有以下 2 种情况：

 表 3.4  $k_{52} \geq k_{42}$  时的缺陷拼接

$1 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$				$(3k_{52} - 3k_{42} + 3) \times 2$
$(3k_{52} - 3k_{42} + 3) \times 2$	4	$1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$		
	$(3k_{52} - 3k_{42}) \times (3k_{51} - 3k_{41} + 1)$			
	$1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$		5	
	$1 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$			

- 在图 3.4 中， $Corner_C = \{(3k_{41} + 1, 3k_{42} - 2), (3k_{51} + 4, 3k_{52} + 2)\}$ 。
- 在图 3.5 中， $Corner_C = \{(3k_{51} + 1, 3k_{52} - 2), (3k_{41} + 4, 3k_{42} + 2)\}$ 。

由 3.4 和 3.5 可得，无论缺陷格子如何落在颜色 4 和颜色 5 上，我们都能找到一种拼接方案，将两个缺陷拼接成满足 3.1 中的条件的矩形缺陷。

表 3.5  $k_{52} < k_{42}$  的缺陷拼接

$2 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$			$3 \times 2$
$2 \times (3k_{42} - 3k_{52} + 3)$	5	$1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$	
	$(3k_{42} - 3k_{52}) \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$		$3 \times 2$
	$1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$	4	
$2 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$			

### 3.1.2 在染色中分别处于 1 和 2

同在染色中处于 4 和 5 的情况，我们可以写出染色为 1 和 2 所对应的格子坐标。

- $Color_3^3(i_1, j_1) = Color_3^3(3k_{11} + 1, 3k_{12} + 1) = 1$
- $Color_3^3(i_2, j_2) = Color_3^3(3k_{21} + 1, 3k_{22} + 2) = 2$

由于对称性，在这里我们不妨假设  $k_{21} \geq k_{11}$ ，则同样有以下两种情况：

 表 3.6  $k_{22} \geq k_{12}$  的缺陷拼接

1	$1 \times (3k_{22} - 3k_{12})$	$(3k_{21} - 3k_{11}) \times 1$
$(3k_{21} - 3k_{11}) \times (3k_{22} - 3k_{12})$		
		2

 表 3.7  $k_{22} < k_{12}$  且  $k_{21} > k_{11}$  的缺陷拼接

$(3k_{21} - 3k_{11}) \times 1$	2	$1 \times (3k_{12} - 3k_{22})$
	$\dots$	
$1 \times (3k_{12} - 3k_{22})$		1

- 若  $k_{22} \geq k_{12}$ ，有缺陷拼接图 3.6，  
 $Corner_C = \{(3k_{11} + 1, 3k_{12} + 1), (3k_{21} + 1, 3k_{22} + 2)\}$ 。
- 若  $k_{22} < k_{12}$ ，有以下分类：
  - 若  $i_1 \neq i_2$ ，有缺陷拼接图 3.7，  
 $Corner_C = \{(3k_{21} + 1, 3k_{22} + 1), (3k_{11} + 1, 3k_{22} + 2)\}$ 。
  - 若  $i_1 = i_2 \notin \{1, m\}$ ，有  $m \geq 7$ ，当  $n = 5$  时，穷举得到无解；当  $n \geq 8$  时：
    - \* 若  $k_{12} - k_{22} = 1$ ，存在缺陷拼接图见附录，此时  
 $Corner_C = \{(3k_{21} - 2, 3k_{22} + 1), (3k_{11} + 1, 3k_{22} + 2)\}$ 。
    - \* 若  $k_{12} - k_{22} > 1$ ，存在缺陷拼接图见附录，此时  
 $Corner_C = \{(3k_{21} - 2, 3k_{22} + 1), (3k_{11} + 4, 3k_{22} + 5)\}$ 。

– 若  $i_1 = i_2 \in \{1, m\}$  时, 我们称为棘手情况, 把它放在下一节讨论。

除了棘手情况, 无论缺陷如何分布在颜色 1 和颜色 2 上, 我们都能找到一种拼接方案, 将两个缺陷拼接成满足 3.1 中的条件的矩形缺陷。

因此由 3.1, 除棘手情况外, 当缺陷分别落在颜色 4 和颜色 5 上, 或者分别落在颜色 1 和颜色 2 上时, 无论缺陷怎么分布, 该缺陷棋盘都可被平铺。

### 3.2 骨牌大小 $k > 3$ 时的情况

表 3.8  $k$  阶染色

(a) $k$ 阶染色-1							(b) $k$ 阶染色-2						
1	2	3	...	k	1	...	1	2	3	...	k	1	...
2	3	4	...	1	2	...	k	1	2	...	k-1	k	...
3	4	5	...	2	3	...	k-1	k	1	...	k-2	k-1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	...
k	1	2	...	k-1	k	...	2	3	4	...	1	2	...
1	2	3	...	k	1	...	1	2	3	...	k	1	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

表 3.9  $k \times k$  的区域划分

A: $1 \times 2$	B: $1 \times (k-2)$
C: $(k-1) \times 2$	D: $(k-1) \times (k-2)$

在  $k \geq 4$  的情况下, 我们可以给出以下定理。

**定理 3.2** 当  $m \times n$  的缺陷两格广义棋盘可被  $1 \times k$  大小的骨牌平铺时, 若  $k \geq 4$ , 则缺陷格子分别只可能在坐标  $(kx_1 + 1, ky_1 + 1)$  和  $(kx_2 + 1, ky_2 + 2)$  处。

**证明** 我们能够很轻易的得到  $f(1) = f(2) = f(x), x \neq 1, x \neq 2$ , 缺陷格子只能落在在所有染色组合中均被染色为 1 或染色 2 的格子, 即 3.1

$$Color_p^k(i_1, j_1) \in \{1, 2\}, Color_p^k(i_2, j_2) \in \{1, 2\} \forall p \quad (3.1)$$

而  $Color_p^k(kx_1 + 1, ky_1 + 1) = 1, Color_p^k(kx_2 + 1, ky_2 + 2) = 2, \forall p$ , 因此当  $(i_1, j_1) = (kx_1 + 1, ky_1 + 1), (i_2, j_2) = (kx_2 + 1, ky_2 + 2)$  时, 棋盘可能可以被平铺。

接下来我们证明, 当  $(i, j) \neq (kx_1 + 1, ky_1 + 1), (i, j) \neq (kx_2 + 1, ky_2 + 2)$  时,  $\exists p, s.t. Color_p^k(i, j) \notin \{1, 2\}$ 。

挑选  $k$  阶染色中最经典的两种染色方案  $Color_1^k$  和  $Color_2^k$  (图 3.8a 和图 3.8b), 考虑最左上的  $k \times k$  大小的区域, 做出表 3.9 的区域划分, 随后分别考虑模块 B, C



和 D:

模块 B 由于模块 B 不会染色为 1 或 2, 所以缺陷格子不可能落在模块 B 中。

模块 C

- $Color_1^k(2, 1) = 2, Color_2^k(2, 1) = k$
- $Color_1^k(2, 2) = 3, Color_2^k(2, 2) = 1$
- $Color_1^k(k, 1) = k, Color_2^k(k, 1) = 2$
- $Color_1^k(k, 2) = 1, Color_2^k(k, 2) = 3$

由于模块 C 在两种染色下只有共计 4 个 1 或 2, 故模块 C 中的所有格子, 均不可能满足  $Color_p^k(i, j) \in \{1, 2\}, \forall p$ 。

模块 D 对于任意  $i$ , 不妨假定  $Color_1^k(i, j_1) = 1, Color_1^k(i, j_2) = 2$ , 考虑  $Color_1^k(i, y) = 1, y \in [2, k], y \notin \{j_1, j_2\}$ , 由于  $k \geq 4$ , 故  $\exists j', s.t. Color_1^k(i, j') = t \notin \{1, 2\}$ , 此时交换第  $j_1$  列和第  $j'$  列, 仍然是一个满足条件的染色方案  $p$ , 但  $Color_p^k(i, j) = Color_1^k(i, j') = t \notin \{1, 2\}$ , 矛盾。

因此缺陷格子只能落在模块 A 中, 证毕。  $\square$

因此类似  $k = 3$  的情况, 我们只需考虑像这样的染色

表 3.10  $k$  阶重染色

1	2	0	...	0	1	2	...
0	0	0	...	0	0	0	...
0	0	0	...	0	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
0	0	0	...	0	0	0	...
1	2	0	...	0	1	2	...
0	0	0	...	0	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

同  $k = 3$  的情况, 我们只需要考虑染色分别处于 1 和 2 的情况, 此时可以完全的套用  $k = 3$  的情况, 且棘手情况也一样, 为  $k > 3$  时的边界情况, 我们在下一节一起讨论。

## 4 棘手情况的处理

在上一节，我们遗留了一个情况没有处理，我们称为棘手情况。不妨假设棘手情况的缺陷格子坐标为  $(1, t_1 \times k + 2)$  和  $(1, t_2 \times k + 1)$ ，其中  $t_1 < t_2$ 。棋盘规模为  $(t'k + 1) \times (tk + 2)$ ，骨牌大小为  $1 \times k$ 。这一节我们将证明在此情况下，棋盘不可被平铺。

### 4.1 符号定义

我们先考虑长度为  $x$  的位于边界上的待铺一行，由于这一行可以被若干个横着的或者竖着的骨牌所铺设，因此我们用类似等式4.1的等式表示一个铺设，

$$x = k_- \oplus 1_{\downarrow} \oplus m * k_- \oplus (1) \oplus r \quad (4.1)$$

记  $1_{\downarrow}$  为一个竖着的骨牌， $k_-$  为一个横着的骨牌， $=$  表示铺设， $a \oplus b$  表示两边骨牌 (区域) 的相接合， $m * k_-$  表示  $m$  个横着的骨牌的连续铺设， $(k)$  表示  $k$  个待铺设区域， $r$  表示不需要铺设的区域。

如等式4.1表示长度为  $x$  的一行从左到右按顺序被 1 个横着的骨牌，1 个竖着的骨牌， $m$  个横着的骨牌，1 个待铺设格子，和 1 个缺陷格子的铺设。

简单的，根据以上规则命名我们可以得到如下的转化公式，即引理4.1。

**引理 4.1**  $x = \dots \oplus k * 1_{\downarrow} \oplus \dots \rightarrow x = \dots \oplus k_- \oplus \dots$

**证明** 对于边界上的一行，连续水平铺设  $k$  个竖着的骨牌和铺设一个横着的骨牌表现上都是能把连续  $k$  个格子铺满，而连续垂直铺设  $k$  个横着的骨牌和连续水平铺设  $k$  个竖着的骨牌所覆盖的区域是相同的，也就意味着，对于边界上的一行，连续水平铺设  $k$  个竖着的骨牌只是只铺设一个横着的骨牌的子情况，因此我们只需要考虑铺设一个横着的骨牌的情况，即  $x = \dots \oplus k * 1_{\downarrow} \oplus \dots \rightarrow x = \dots \oplus k_- \oplus \dots$ 。□

### 4.2 棘手情况处理的前置

我们先考虑长度为  $x$  的位于边界上的待铺一行，

**定理 4.1** 对于一个棋盘的边界上的一行长度为  $x$ ，骨牌的的大小为  $1 \times k$ ，则所有的关于  $x$  铺设都可以转换为  $x = m * k_- \oplus t * 1_{\downarrow} \oplus n * k_-$ ,  $t < k$

**证明** 当长度  $x < k$  时, 此时  $m = n = 0$ , 有  $x = x * 1_1$ 。

当长度  $x = k$  时, 一个横着的骨牌可以平铺一整行, 有  $x = k_-$ , 假若有竖着的骨牌, 则有等式

$$x = (t) \oplus 1 \oplus (k - t - 1) = t * 1_1 \oplus 1 \oplus (k - t - 1) * 1_1 = k * 1_1 = k_-。$$

此时考虑边界上的某个横着的骨牌, 倘若他的左右都有一根竖着的骨牌, 那么考虑第二行的这个区域, 满足前述的长度为  $x = k$  的情况, 因此等价于铺设一根横着的骨牌, 重复考虑  $k$  次, 则相当于连续铺设了  $k$  根横着的骨牌, 也是属于连续铺设  $k$  根竖着的骨牌的子情况, 因此我们能得到第二条转化公式, 即引理4.2。

**引理 4.2**  $x = \dots \oplus 1_1 \oplus k_- \oplus 1_1 = \dots \oplus (k + 2) * 1_1 \oplus \dots$

假设对于长度小于  $x - 1$  的行都成立时, 则我们考虑长度为  $wk$  的一行两端各有  $1_1$ ,  $rk < x$ , 根据递推, 我们有 4.2。

$$x = \dots \oplus 1_1 \oplus (wk) \oplus 1_1 \oplus \dots = \dots \oplus 1_1 \oplus w * k_- \oplus 1_1 \oplus \dots \quad (4.2)$$

由于对于随后的每一行, 我们都需要这么铺设, 连续  $k$  次后, 就等价于铺设了  $wk \times k$  的区域, 与  $wk * 1_1$  表现相同, 有哪次我们能得到第三条转化公式。

**引理 4.3**  $x = \dots \oplus 1_1 \oplus w * k_- \oplus 1_1 = \dots \oplus (wk + 2) * 1_1 \oplus \dots$

我们考虑长度为  $x$  的行, 有

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^a (m_i * k_- \oplus n_i * 1_1) \oplus m_{a+1} * k_- \\ \rightarrow x &= m_1 * k_- \oplus n_1 * 1_1 \oplus \sum_{i=1}^a (m_i * k_- \oplus n_i * 1_1) \oplus m_{a+1} * k_- \\ \rightarrow x &= m_1 * k_- \oplus n_1 * 1_1 \oplus \sum_{i=1}^a (m_i k * 1_1 \oplus n_i * 1_1) \oplus m_{a+1} * k_- \\ \rightarrow x &= m_1 * k_- \oplus n_1 * 1_1 \oplus \sum_{i=1}^a (m_i k + n_i) * 1_1 \oplus m_{a+1} * k_- \\ \rightarrow x &= m_1 * k_- \oplus (x - m_1 k - m_{a+1} k) * 1_1 \oplus m_{a+1} * k_- \\ \rightarrow x &= m_1 * k_- \oplus n_1 * k_- \oplus t * 1_1 \oplus n_2 * k_- \oplus m_{a+1} * k_- \\ \rightarrow x &= m * k_- \oplus t * 1_1 \oplus n * k_-。 \end{aligned}$$

故  $\forall x, \exists m, t, n, s.t. x = m * k_- \oplus t * 1_1 \oplus n * k_-$ ,  $t < k$

□

### 4.3 棘手情况的正式处理

不妨记  $x_k$  为棘手情况第  $k$  行的表示，我们很自然的能写出棘手情况的第一行的表示4.3。

$$x_1 = (t_1 k + 1) \oplus r \oplus ((t_2 - t_1)k - 2) \oplus r \oplus (t_2 k + 1) \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} t_1 k + 1 = (t_1 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_- \\ (t_2 - t_1)k - 2 = (t_2 - t_1 - 1 - u) * k_- \oplus (k - 2) * 1_+ \oplus u * k_- \\ t_2 k + 1 = (t - t_2 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_- \end{cases} \quad (4.4)$$

由定理 4.1，我们得到式子 4.4，因此第一行的铺设为：

$$x_1 = (t_1 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_- \oplus r \oplus (t_2 - t_1 - 1 - u) * k_- \oplus (k - 2) * 1_+ \oplus u * k_- \oplus r \oplus (t - t_2 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_-$$

对于棋盘的两端，我们可以看做是一条无限长的竖着铺的骨牌，我们用  $-1_+$  表示向两端借铺设一个竖着的骨牌，则可以再次进行转化化简式子：

$$\begin{aligned} x_1 &= (t_1 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_- \oplus r \oplus \dots \\ &\oplus r \oplus (t - t_2 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_- \\ \rightarrow x_1 &= -1_+ \oplus 1_+ \oplus (t_1 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_- \oplus r \oplus \dots \\ &\oplus r \oplus (t - t_2 - u) * k_- \oplus 1_+ \oplus u * k_- \oplus 1_+ \oplus (-1_+) \\ \rightarrow x_1 &= -1_+ \oplus ((t_1 - u)k + 2) * 1_+ \oplus u * k_- \oplus r \oplus \dots \\ &\oplus r \oplus (t - t_2 - u) * k_- \oplus (uk + 2) * 1_+ \oplus (-1_+) \\ \rightarrow x_1 &= -1_+ \oplus 2 * 1_+ \oplus (t_1 - u) * k_- \oplus u * k_- \oplus r \dots \\ &r \oplus (t - t_2 - u) * k_- \oplus u * k_- \oplus 2 * 1_+ \oplus (-1_+) \\ \rightarrow x_1 &= 1_+ \oplus t_1 * k_- \oplus r \dots \oplus r \oplus (t - t_2) * k_- \oplus 1_+ \end{aligned}$$

显然的，第一行的所有  $1_+$  会同时占用第 1 行到  $k$  行的所有对应的格子。现在我们考虑第二行，因此我们可以把所有第一行的  $1_+$  在第二行的铺设中替换为  $r$ ，因此得到第二行的表示4.5。

$$x_2 = r \oplus ((t_2 - 1 - u)k + 1) \oplus (k - 2) * r \oplus ((t - t_2 + u)k + 1) \oplus r \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} (t_2 - 1 - u)k + 1 = (t_2 - 1 - u - u') * k_- \oplus 1_1 \oplus u' * k_- \\ (t - t_2 + u)k + 1 = (t - t_2 + u - u'') * k_- \oplus 1_1 \oplus u'' * k_- \end{cases} \quad (4.6)$$

由定理 4.1，有式子 4.6，因此第二行可以分解为

$$x_2 = r \oplus (t_2 - 1 - u - u') * k_- \oplus 1_1 \oplus u' * k_- \oplus (k - 2) * r \oplus (t - t_2 + u - u'') * k_- \oplus 1_1 \oplus u'' * k_- \oplus r$$

由于第二行的所有  $1_1$  也会同时占用第 2 行到  $k + 1$  行的所有对应的格子。而  $k \geq 3$  所以在第一行和第二行的所有  $1_1$  在第三行的铺设中仍需替换为  $r$ ，我们就写出了第三行的铺设表示 4.7。

$$x_3 = r \oplus ((t_2 - 1 - u - u')k) \oplus r \oplus (u'k) \oplus (k - 2) * r \oplus ((t - t_2 + u - u'')k) \oplus r \oplus (u''k) \oplus r \quad (4.7)$$

由定理 4.1，有 4.8：

$$\begin{cases} (t_2 - 1 - u - u')k = (t_2 - 1 - u - u') * k_- \\ (t - t_2 + u - u'')k = (t - t_2 + u - u'') * k_- \\ u'k = u' * k_- \\ u''k = u'' * k_- \end{cases} \quad (4.8)$$

故第三行已经不需要铺设任何竖着的骨牌，对于第  $k' \in [3, k]$  行，我们全部像可以第三行一样考虑和铺设。

此时前  $k$  行已经全部铺设完毕，最后我们考虑第  $k + 1$  行，只有第 2 行的  $1_1$  会影响到第  $k + 1$  行，因此第  $k + 1$  行的铺设表示为等式 4.9，恰好对应第一行的铺设，因此也就意味着， $(tk + 2) \times (t'k + 1)$  的棘手情况与  $(t'k + 1 - k) \times (tk + 2)$  中的某种棘手情况对应。

$$x_{k+1} = (t'_1k + 1) \oplus r \oplus ((t'_2 - t'_1)k - 2) \oplus r \oplus (t'_2k + 1) \quad (4.9)$$

如此反复归纳，我们可以得到，所有棘手情况都和  $1 \times (tk + 2)$  的某种棘手情况相对应，而在  $1 \times (tk + 2)$  的棘手情况中，我们是无法平铺的，因此所有的棘手情况，我们都无法平铺。

## 5 结论与展望

### 5.1 结论

对于  $m \times n$  的缺陷两格广义棋盘，骨牌大小  $1 \times k$ ，如果棋盘可以被平铺，棋盘一定满足条件  $m \equiv 2(\text{mod } k), n \equiv 1(\text{mod } k)$ 。且在此前提下，当  $k \geq 3$  时，当两个缺陷的坐标  $(i_1, j_1)$  和  $(i_2, j_2)$  满足  $i_1 \equiv i_2 \equiv 1(\text{mod } k), j_1 + 1 \equiv j_2 \equiv 2(\text{mod } k)$ ，且当  $i_1 = i_2 = 1$  或  $i_1 = i_2 = m$  时， $j_2 > j_1, m \geq 2k + 2, n \geq 2k + 1$ ，则此时棋盘可被平铺。

当  $k = 3$  的情况，当两个缺陷的坐标  $(i_1, j_1)$  和  $(i_2, j_2)$  满足  $i_1 + 1 \equiv i_2 \equiv 0(\text{mod } 3), j_1 \equiv j_2 \equiv 0(\text{mod } 3)$ ，棋盘也可以被平铺。

除此之外，所有的缺陷两格的  $m \times n$  棋盘都不可被平铺。

### 5.2 展望

事实上，关于残缺棋盘的完全覆盖问题是一个困难而且复杂的问题，在本论文解决了缺陷两格的完全覆盖问题后，可以沿着本文的解决思路结局缺陷三格甚至缺陷  $k$  格的完全覆盖问题，这是下一步的研究方向。

## 参考文献

- [1] SOLOMON W. GOLOMB P, Warren Lushbaugh. Puzzles, patterns, problems, and packings[M]. Princeton University Press, 1994: 116-118.
- [2] 康庆德. 格盘上的覆盖问题[J]. 自然杂志, 1992(377-381).
- [3] 李冠洁张媛; 郭璐;. 残缺一格棋盘上线型骨牌覆盖问题的研究[J]. 数学的实践与认知, 2021.

## 附录 A 区域划分

### A.1 $k_{12} - k_{22} = 1$ 区域划分

$3 \times 2$		$1 \times 6$				$6 \times 1$
		$3 \times 1$	$2 \times 3$			
$3 \times 1$	2		1	$3 \times 1$		
	$2 \times 3$					
$1 \times 6$						

### A.2 $k_{12} - k_{22} > 1$ 区域划分

$3 \times 2$		$1 \times (3k_{12} - 3k_{22})$					
		$3 \times 2$	$2 \times (3k_{12} - 3k_{22} - 3)$		$3 \times 1$		
$3 \times 1$	2		$3 \times (3k_{12} - 3k_{22} - 4)$			1	
	$2 \times 3$				$3 \times 2$		
$1 \times (3k_{12} - 3k_{22})$							



## 致谢

四年时间转眼即逝，青涩而美好的本科生活快告一段落了。回首这段时间，我不仅学习到了很多知识和技能，而且提高了分析和解决问题的能力与养成了一定的科学素养。虽然走过了一些弯路，但更加坚定我后来选择学术研究的道路，实在是获益良多。这一切与老师的教诲和同学们的帮助是分不开的，在此对他们表达诚挚的谢意。

首先要感谢的是我的指导老师崔潇易教授。我作为一名本科生，缺少学术研究经验，不能很好地弄清所研究问题的重点、难点和热点，也很难分析自己的工作所能够达到的层次。崔老师对整个研究领域有很好的理解，以其渊博的知识和敏锐的洞察力给了我非常有帮助的方向性指导。他严谨的治学态度与辛勤的工作方式也是我学习的榜样，在此向崔老师致以崇高的敬意和衷心的感谢。

最后我要感谢我的家人，正是他们的无私的奉献和支持，我才有了不断拼搏的信心和勇气，才能取得现在的成果。

卢皓斌

2023 年 3 月 25 日