



本科生毕业论文（设计）

题目：在缺陷两格的棋盘上
的直线骨牌平铺问题

姓 名 卢皓斌

学 号 19337077

院 系 数学学院（珠海）

专 业 信息与计算科学

指导教师 崔潇易

2023 年 3 月 11 日

学术诚信声明

本人郑重声明：所呈交的毕业论文（设计），是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文（设计）不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本论文（设计）的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本论文（设计）的知识产权归属于培养单位。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期： 年 月 日

【摘 要】

由古老的国际象棋游戏演变进化而来的骨牌平铺问题, 又称棋盘覆盖问题, 是组合数学中历史悠久的经典问题。最初的研究是关于 2 格多米诺骨牌在 8×8 的国际象棋棋盘上的覆盖问题, 逐步推广到了 k 格骨牌在 $m \times n$ 阶的数学棋盘上的覆盖问题。

对棋盘覆盖问题的研究由来已久, 冯跃峰证明了线型骨牌在完整矩形棋盘的完全覆盖充要条件; 康庆德用染色法证明了残缺棋盘可被 1×2 多米诺骨牌完全覆盖的充要条件; 张媛则用轨道循环标号法证明了线型骨牌在残缺一格棋盘上的覆盖问题。

而关于棋盘覆盖实际问题的研究的应用, 宗传明则发现骨牌覆盖问题可应用于地砖铺设当中, 不仅限于线型骨牌, 还存在多边形骨牌覆盖, 并且完整刻画了能构成六重晶格铺砌的所有铺砖, 而经典的俄罗斯方块的拼图小游戏, 文件加密技术等都会应用到棋盘覆盖问题的相关结论。

本文在残缺一格棋盘的平铺问题的基础上进行扩展, 利用循环染色法, 构建出残缺两格棋盘的平铺问题的解, 从而解决了该问题。

关键词: 本科毕业论文, 染色方法, 轮换, 中山大学

[ABSTRACT]

The content of the English abstract is the same as the Chinese abstract, 250-400 content words are appropriate. Start another line below the abstract to indicate English keywords (Keywords 3-5).

Keywords: undergraduate thesis, Sun Yat-Sen University

目录

| | |
|----------------------------------|----|
| 1 绪论 | 1 |
| 1.1 选题背景与意义 | 1 |
| 1.2 国内外研究现状和相关工作 | 1 |
| 1.3 本文的论文结构与章节安排 | 1 |
| 2 棋盘所满足的条件 | 3 |
| 3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案 | 5 |
| 3.1 骨牌大小 $k = 3$ 时的情况 | 5 |
| 3.2 骨牌大小 $k > 3$ 时的情况 | 6 |
| 4 简单的使用例子 | 9 |
| 4.1 图像的插入 | 9 |
| 4.2 表格的插入 | 12 |
| 4.3 公式 | 12 |
| 4.4 算法流程图 | 13 |
| 4.5 例子、定理与证明 | 13 |
| 4.6 代码 | 14 |
| 4.7 其他的一些用法 | 14 |
| 5 实验与结果 | 16 |
| 5.1 关于生僻字 | 16 |
| 参考文献 | 17 |
| 附录 A 补充更多细节 | 18 |
| A.1 补充图 | 18 |
| 致谢 | 19 |

插图目录

| | | |
|-----|-------------------------|----|
| 4.1 | 镶嵌在文中的图像 | 9 |
| 4.2 | 单张图像 | 10 |
| 4.3 | 并排的多张图像 | 10 |
| 4.4 | 并排的多张图像加各自的注解 | 10 |
| 4.5 | 复杂的两列对象的插入 | 11 |
| A.1 | 一个配有彩色表格的插图 | 18 |

表格目录

| | | |
|-----|---------------------|----|
| 2.1 | 对棋盘的初步划分 | 3 |
| 2.2 | k 阶染色 | 4 |
| 3.1 | 3 阶染色 | 5 |
| 3.2 | 3 阶重染色 | 5 |
| 3.3 | 4-5 染色 | 6 |
| 3.4 | k 阶染色 | 7 |
| 3.5 | k 阶重染色 | 8 |
| 4.1 | 典型的实验对比表格 | 12 |
| 4.2 | 复杂一些的表格 | 12 |

1 绪论

棋盘完全覆盖问题 (problem of perfect cover of chessboard) 是一类组合问题, 是研究对于一个 $m \times n$ 的广义棋盘, 在缺陷 z 格的情况下 (通常 $z = 0$), 被骨牌完全覆盖的问题。

在过去, 我们对此问题的研究主要落在棋盘完全覆盖问题的方案数, 却甚少对棋盘完全覆盖问题的可解性进行考虑, 显然, 只有在确保该缺陷棋盘可被覆盖的基础上, 棋盘完全覆盖的方案数的研究才有价值。此外, 研究棋盘完全覆盖问题的可解性, 有助于对现实中的地砖覆盖等问题提供参考。

1.1 选题背景与意义

我们称某 $1 \times k$ 骨牌能完全覆盖某缺陷棋盘, 当且仅当以下条件满足:

- 1) 每块骨牌能够连续覆盖棋盘上同一行或者同一列的相邻 k 格
- 2) 棋盘上每一格都被骨牌覆盖。
- 3) 没有两块骨牌同时覆盖一格。
- 4) 对于棋盘的缺陷处, 没有任意一张骨牌将其覆盖。

而本文研究的缺陷两格棋盘的覆盖问题, 则是研究在 $m \times n$ 的广义棋盘上, 挖去任意两格的格子, 是否可被 $1 \times k$ 的骨牌所覆盖。

对于此问题而言, 我们一般会使用染色法求解, 也能够经典问题: 国际棋盘挖去做左上右下两个格子是否可被 1×2 骨牌平铺的问题上做出相当漂亮的证明。

可是对于高维度而言, 普通的染色法有点力不从心, 只能排除较为基础的情况而无法对整个棋盘的各种缺陷情况进行完整的考量。

在本文中, 我推广了染色法进行更多情况的排除, 得到了在普遍条件下, 缺陷两格棋盘是否可被平铺的证明,

1.2 国内外研究现状和相关工作

对国内外研究现状和相关领域中已有的研究成果的简要评述。

1.3 本文的论文结构与章节安排

本文共分为六章, 各章节内容安排如下:

第一章绪论。简单说明了本文章的选题背景与意义。

第二章构建出可被 1×3 大小的骨牌平铺的棋盘的必要条件，初步构建出满足条件的棋盘的大小。

第三章解析了在绝大部分情况下，格子残缺可以满足 1×3 大小的骨牌进行平铺。

第四章对于极特殊的情况，给出了格子残缺不可被平铺的证明。

第五章则推广了对于 $1 \times k$ 大小的骨牌，能够平铺棋盘的充分必要条件。

2 棋盘所满足的条件

对一般的 $m \times n$ 的完整矩形棋盘，冯跃峰给出了 k 格线型骨牌完全覆盖的充分必要条件，这是我们研究覆盖问题的基础。

引理 2.1 $m \times n$ 棋盘中存在 k 格线型骨牌完全覆盖，当且仅当 $k \mid m$ 或 $k \mid n$ 。

而对于多格残缺棋盘，重点是确定棋盘的大小 (m, n) 和残缺格子所在的位置 (i, j) ，在这一章节我们先考虑棋盘的大小所满足的条件。

以下的符号均建立在整数集的基础上。

显而易见的，我们能简单得到以下引理。

引理 2.2 $m \times n$ 的广义棋盘中，挖去 2 个格子，如果存在 k 格线型骨牌完全覆盖，当且仅当 $k \mid mn - 2$ 。

仅仅有这个条件是不够的，我们希望说能多加限制条件来排除更多的棋盘，因此我们对棋盘重新考虑，令

$$\begin{cases} m = kx_m + m_1, m_1 \in [0, k) \\ n = kx_n + n_1, n_1 \in [0, k) \end{cases}$$

接下来我们对棋盘进行划分，有

表 2.1 对棋盘的初步划分

| | |
|--------------------|-------------------|
| $kx_m \times kx_n$ | $m_1 \times kx_n$ |
| $kx_m \times n_1$ | $m_1 \times n_1$ |

由 2.1, 可得除 $m_1 \times n_1$ 外，均可被 $1 \times k$ 骨牌平铺，故我们只需要考虑 $m_1 \times n_1$ 这一块，记为模块 C。

我们给出以下定理，来规整棋盘的大小

定理 2.1 当 $m \times n$ 的缺陷两格广义棋盘可被 $1 \times k$ 大小的骨牌平铺时，一定满足 $m \equiv 1(\text{mod} k), n \equiv 2(\text{mod} k)$

证明 不妨设 $m_1 \leq n_1$ ，对表格进行染色，有 3.4a

由 3.4a, 记 $f(x)$ 为棋盘中染色为 x 的格子数目，有 $f(m_1) = f(n_1) = f(n_1+1)+1$ ，而 $n_1 < k \rightarrow n_1 + 1 \leq k$ ，故 $f(1) < 1 + f(n_1 + 1) = 1 + f(n_1) - 1 = f(n_1)$ ，得到式子

$$f(m_1) = f(n_1) > f(1) \quad (2.1)$$

表 2.2 k 阶染色

| | | | | | | | |
|----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------------|
| 1 | 2 | \cdots | \cdots | m_1 | \cdots | $n_1 - 1$ | n_1 |
| 2 | 3 | \cdots | \cdots | $m_1 + 1$ | \cdots | n_1 | $n_1 + 1$ |
| \vdots | \vdots | \ddots | \ddots | | | \vdots | \vdots |
| m_1 | \cdots | $n_1 - 1$ | n_1 | \cdots | \cdots | \vdots | $m_1 + n_1 - k$ |

而缺陷两格至多使某个 $f(x)$ 减少 2 或者使某两个 $f(x)$ 减少 1，而每个平铺会且仅会覆盖 1 个 $1, 2, \dots, k$ ，故我们需要所有的 $f(x)$ 相等，且至多 2 个 $f(x)$ 大于 $f(1)$

此时分情况讨论

1) $m_1 < n_1 - 1$ ，由 3.4a 有 $f(m_1) = f(n_1) - 1 = f(n_1) > f(1)$ ，而缺陷格子为 2 个，至多两个 $f(x)$ 减少 1，矛盾。

2) $m_1 = n_1$ ，有 $f(m_1) \geq f(1) + 1$

(a) $f(m_1) = f(1) + 1$ ，则有 $f(x) = f(m_1) - 1, \forall x < k, x \neq m_1$ ，而缺陷格子数目为 2，则挖去一个染色为 m_1 的格子后，所有颜色的格子数目已经平衡，此时挖去任意其他格子均无法保证所有 x 相等，故矛盾。

(b) $f(m_1) > f(1) + 1$ ，则有 $f(m_1) = f(m_1 + 1) + 1 = f(m_1 + 2) + 2 \geq f(1)$ ，因此我们至少需要挖去染色为 m_1 的两个格子和染色为 $m_1 + 1$ 的一个格子，但我们只能挖去两个格子，矛盾

3) $m_1 = n_1 - 1$ 由上述讨论我们可以得到，我们能且只能挖去染色为 m_1 和 n_1 的格子各一个，此时将有 $1 \equiv n_1 + 2 \pmod{k} \rightarrow 1 = n_1 + 2 - k \rightarrow n_1 = k - 1, m_1 = k - 2$ 此时我们能证明（待补充），这种情况我们能找到一个染色方案不满足条件，故成立

故我们一定只能得到 $m_1 = 1, n_1 = 2$ ，得证。

□

3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案

3.1 骨牌大小 $k = 3$ 时的情况

由 2.1 有, 此时棋盘的大小只可能为 $(3a + 1) \times (3b + 2)$ 。

在图 3.4a 的基础上, 我们对棋盘进行两种染色, 即

表 3.1 3 阶染色

| (a) 3 阶染色-1 | | | | | | (b) 3 阶染色-2 | | | | | |
|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ... | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | ... |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | ... | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ... |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ... | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

不妨设棋盘行数 $m \equiv 1(\text{mod } k)$, 列数 $n \equiv 2(\text{mod } k)$, 显然有 $f(1) = f(2) = f(3) + 1$ 。故缺陷格子有且只可能分别染色为 1 和染色为 2, 此时我们将两张图合并, 并以以下规则重新染色:

- 在 3.1a 和 3.1b 均染色为 1 的格子, 在新图染色为 1
- 在 3.1a 和 3.1b 均染色为 2 的格子, 在新图染色为 2
- 在 3.1a 染色为 1, 3.1b 染色为 2 的格子, 在新图染色为 4
- 在 3.1a 染色为 2, 3.1b 染色为 1 的格子, 在新图染色为 5
- 在 3.1a 或 3.1b 染色为 3 的格子, 在新图染色为 0

在此条件下重新染色后, 棋盘为

表 3.2 3 阶重染色

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | ... |
| 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | ... |
| 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | ... |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | ... |
| 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | ... |
| 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

由于缺陷格子分别只能染色 1 和染色 2, 故在两种染色下缺陷格子都能需要处在颜色 1 或颜色 2 中, 且必须分别在颜色 1 和颜色 2, 因此缺陷格子的可能性就缩小为以下 2 种情况之一

- 分别处在 3.5 的 1 和 2
- 分别处在 3.5 的 4 和 5

在这里我们给出一个定理，来辅助我们之后的证明

定理 3.1 对于 $m \times n$ 的广义棋盘和 $1 \times k$ 的骨牌, 且 $m \equiv 1(mod k), n \equiv 2(mod k)$, 如果存在 $i \times j$ 的缺陷, $i \equiv 1(mod k), j \equiv 2(mod k), i \leq m, j \leq n$, 则该棋盘一定能被平铺

(待补充证明)

由此定理, 我们可以得到, 当可以把两个缺陷组合成一个 $i \times j$ 的缺陷, $i \equiv 1(mod k), j \equiv 2(mod k)$, 那么 $\forall m > i, \forall n > j, m \times n$ 的广义棋盘都可以被平铺。

3.1.1 在染色中分别处于 4 和 5

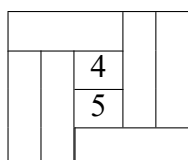
由图, 我们可以简单的写出 4 和 5 所对应的格子的坐标,

- 4 的坐标: $(3k_{41}, 3k_{42} + 2)$
- 5 的坐标: $(3k_{51}, 3k_{52} + 3)$

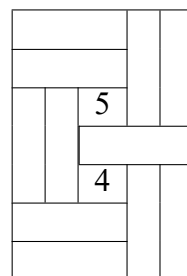
在这里我们直接给出 $k_{41} = k_{51}, k_{42} = k_{52}$ 和 $k_{41} = k_{51}, k_{42} = k_{52} + 1$ 时的平铺方案

表 3.3 4-5 染色

(a) 4-5 染色



(b) 5-4 染色



3.2 骨牌大小 $k > 3$ 时的情况

在 $k > 4$ 的情况下, 我们仍然假设 $m \equiv 1(mod k), n \equiv 2(mod k)$, 我们可以给出以下引理。

定理 3.2 当 $m \times n$ 的缺陷两格广义棋盘可被 $1 \times k$ 大小的骨牌平铺时, 若 $k \geq 4$, 则缺陷格子分别只可能在坐标 $(kx_1 + 1, ky_1 + 1)$ 和 $(kx_2 + 1, ky_2 + 2)$ 处。

证明 我们不妨令坐标为 $(1, 1)$ 和坐标为 $(1, 2)$ 的格子染色为颜色 1 和颜色 2, 由引理? 我们可以得知, 我们只能挖去在所有染色组合中, 均被染色为 1 或染色 2 的

表 3.4 k 阶染色

| (a) k 阶正染色 | | | | | | | (b) k 阶染色-逆 | | | | | | |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 3 | ... | k | 1 | ... | 1 | 2 | 3 | ... | k | 1 | ... |
| 2 | 3 | 4 | ... | 1 | 2 | ... | k | 1 | 2 | ... | k-1 | k | ... |
| 3 | 4 | 5 | ... | 2 | 3 | ... | k-1 | k | 1 | ... | k-2 | k-1 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \ddots | \ddots | ... | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \ddots | \ddots | ... |
| k | 1 | 2 | ... | k-1 | k | ... | 2 | 3 | 4 | ... | 1 | 2 | ... |
| 1 | 2 | 3 | ... | k | 1 | ... | 1 | 2 | 3 | ... | k | 1 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \ddots |

格子，再由定理 3.4 得知，坐标 (kx_1+1, ky_1+1) 和 (kx_2+1, ky_2+2) 处的格子在所有染色情况下，均会被染色成颜色 1 和颜色 2，缺陷格子可以坐标 (kx_1+1, ky_1+1) 和 (kx_2+1, ky_2+2) 处。

接下来我们证明，当坐标不是 (kx_1+1, ky_1+1) 和 (kx_2+1, ky_2+2) 时，均存在某种染色方案，使得该坐标染色既不是 1 也不是 2，则定理得证。

基于 3.4a，不妨把 $(1, j)$ 染色为 j ， $(1, j), j \neq 1 \text{ or } 2$ 时，该格子已经不是染色为 1 或 2，故第一行的已排除。对于第 1 列和第 2 列且不为第一行时，当格子在 3.4a 中为 2 时，在 3.4b 为 k ，当格子在 3.4a 为 1 时，在 3.4b 为 3，故第一列和第二列也已排除。

对于 $(i, j), i > 1, j > 2$ ，当格子在 3.4a 中为 1 时，由于 $k \geq 4$ ，我们考虑第 j 列的元素，故 $[2, k]$ 共计 $k-1$ 个元素中，排除染色为 1 或者 2 的元素，还剩下 $k-1-2=k-3$ 个元素，由于 $k \geq 4$ ，故 $k-3 \geq 1$ ，至少存在一个元素满足条件，染色为非 1 或 2，且不在第一行，记为第 k 个元素。交换第 i 行和第 j 行后，这种染色也是满足条件的，但是在新染色中， (i, j) 染色既不为 1 也不为 2，故 (i, j) 也不能是格子。

证毕。

□

因此类似 $k=3$ 的情况，我们只需考虑像这样的染色

其中染色 1 的格子的坐标为 (kx_1+1, ky_1+1) ，染色 2 的格子为 (kx_2+1, ky_2+2)

表 3.5 k 阶重染色

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 0 | ... | 0 | 1 | 2 | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| 1 | 2 | 0 | ... | 0 | 1 | 2 | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

4 简单的使用例子

本部分将会根据毕业论文的写作需要，放置相关的例子和代码段供大家参考，方便大家的论文写作，如果更多有用的 Latex 使用例子也会欢迎提出 PR，贡献更多的例子。

4.1 图像的插入

4.1.1 镶嵌在文中的图像

论文主体是毕业论文的主要部分，必须言之成理，论据可靠，严格遵循本学科国际通行的学术规范。在写作上要注意结构合理、层次分明、重点突出，章节标题、公式图表符号必须规范统一。论文主体的内容根据不同学科有不同的特点，一般应包括以下几个方面：(1) 毕业论文（设计）总体方案或选题的论证；(2) 毕业论文（设计）各部分的设计实现，包括实验数据的获取、数据可行性及有效性的处理与分析、各部分的设计计算等；(3) 对研究内容及成果的

客观阐述，包括理论依据、创新见解、创造性成果及其改进与实际应用价值等；(4) 论文主体的所有数据必须真实可靠，凡引用他人观点、方案、资料、数据等，无论曾否发表，无论是纸质或电子版，均应详加注释。自然科学论文应推理正确、结论清晰；人文和社会学科的论文应把握论点正确、论证充分、论据可靠，恰当运用系统分析和比较研究的方法进行模型或方案设计，注重实证研究和案例分析，根据分析结果提出建议和改进措施等。论文主体是毕业论文的主要部分，必须言之成理，论据可靠，严格遵循本学科国际通行的学术规范。在写作上要注意结构合理、层次分明、重点突出，章节标题、公式图表符号必须规范统一。论文主体的内容根据不同学科有不同的特点，一般应包括以下几个方面：(1) 毕业论文（设计）总体方案或选题的论证；(2) 毕业论文（设计）各部分的设计实现，包括实验数据的获

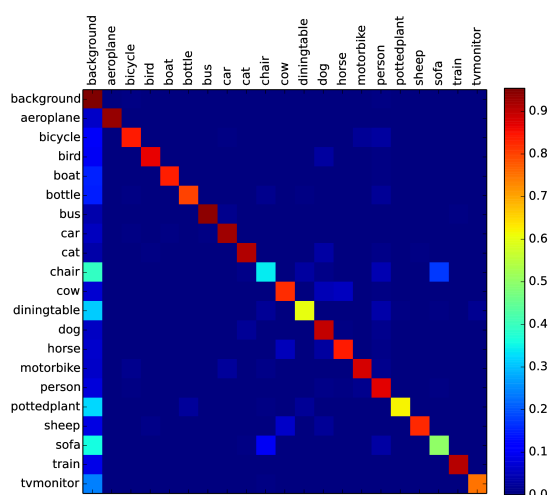


图 4.1 镶嵌在文中的图像

取、数据可行性及有效性的处理与分析、各部分的设计计算等；(3) 对研究内容及成果的客观阐述，包括理论依据、创新见解、创造性成果及其改进与实际应用价值等；(4) 论文主体的所有数据必须真实可靠，凡引用他人观点、方案、资料、数据等，无论曾否发表，无论是纸质或电子版，均应详加注释。自然科学论文应推理正确、结论清晰；人文和社会学科的论文应把握论点正确、论证充分、论据可靠，恰当运用系统分析和比较研究的方法进行模型或方案设计，注重实证研究和案例分析，根据分析结果提出建议和改进措施等。

4.1.2 单张图像的插入

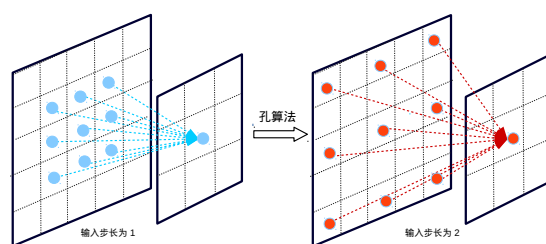


图 4.2 单张图像

4.1.3 多张图像的并排插入

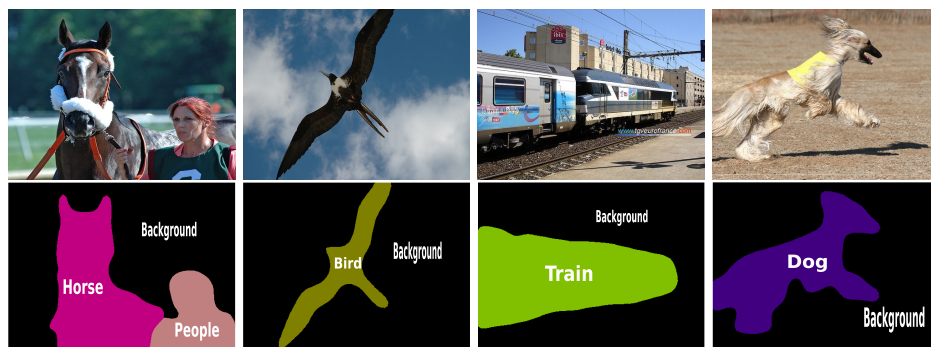


图 4.3 并排的多张图像

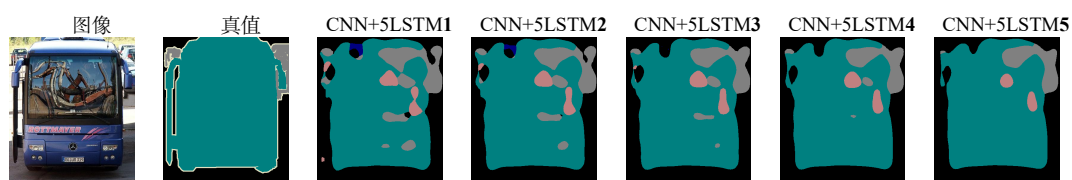


图 4.4 并排的多张图像加各自的注解

4.1.4 两列图像的插入

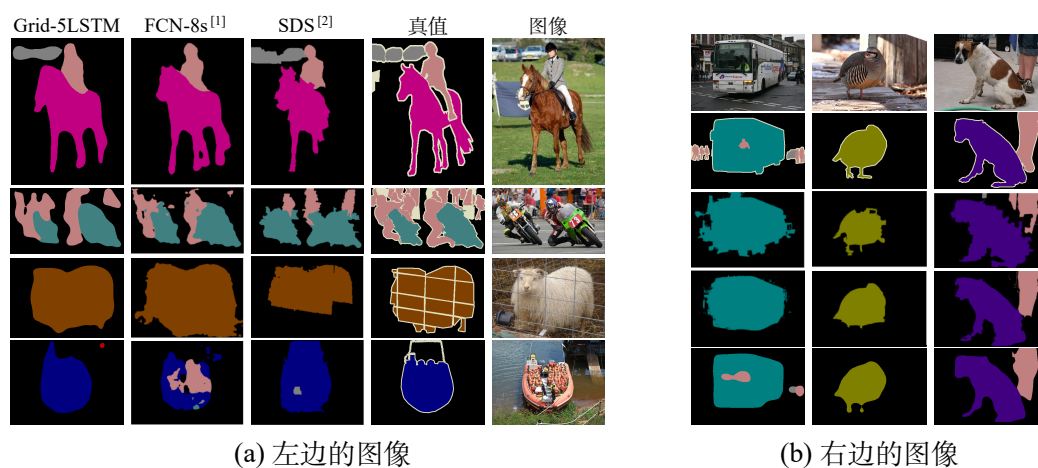


图 4.5 复杂的两列对象的插入

4.2 表格的插入

表 4.1 典型的实验对比表格

| Method | Pixel Acc. | Mean Acc. | Mean Iu. |
|---------------------------------|-------------|-------------|-------------|
| Liu 等人 ^[3] | 76.7 | - | - |
| Tighe 等人 ^[4] | 78.6 | 39.2 | - |
| FCN-16s ^[1] | 85.2 | 51.7 | 39.5 |
| Deeplab-LargeFOV ^[5] | 85.6 | 51.2 | 39.7 |
| Grid-LSTM5 | 86.2 | 51.0 | 41.2 |

表 4.2 复杂一些的表格

| Method | aero | bike | bird | boat | bottle | bus | car | cat | chair | cow | table | dog | horse | mbike | person | plant | shep | sofa | train | tv | mIoU. |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| CNN | 72.6 | 29.6 | 70.2 | 53.1 | 65.1 | 81.0 | 74.3 | 79.8 | 25.0 | 64.8 | 47.8 | 69.5 | 66.2 | 65.2 | 74.2 | 42.1 | 69.6 | 38.8 | 74.4 | 58.6 | 62.5 |
| CNN+1LSTM | 71.5 | 30.6 | 70.5 | 53.8 | 64.9 | 82.4 | 77.1 | 79.5 | 25.1 | 65.8 | 47.8 | 71.5 | 64.6 | 67.0 | 74.0 | 43.9 | 69.6 | 38.6 | 74.9 | 59.4 | 63.0 |
| CNN+2LSTM | 76.1 | 32.6 | 72.1 | 57.0 | 65.3 | 83.6 | 75.4 | 81.7 | 24.7 | 69.3 | 47.5 | 72.3 | 68.9 | 69.5 | 74.7 | 41.5 | 69.8 | 38.3 | 77.8 | 62.1 | 64.3 |
| CNN+3LSTM | 77.7 | 32.3 | 72.6 | 60.0 | 68.3 | 85.5 | 78.5 | 82.3 | 25.3 | 71.1 | 49.7 | 71.5 | 69.7 | 70.8 | 75.9 | 47.9 | 71.2 | 38.9 | 80.2 | 61.7 | 65.8 |
| CNN+4LSTM | 79.1 | 33.7 | 73.6 | 62.0 | 70.4 | 85.5 | 80.9 | 83.7 | 24.1 | 70.7 | 45.7 | 73.7 | 69.6 | 72.1 | 75.6 | 47.2 | 76.0 | 37.3 | 80.5 | 62.2 | 66.4 |
| CNN+5LSTM | 79.9 | 33.6 | 73.6 | 61.7 | 68.0 | 88.5 | 80.9 | 84.0 | 23.6 | 71.3 | 49.7 | 73.1 | 71.3 | 72.9 | 76.4 | 48.9 | 75.1 | 38.1 | 84.5 | 63.8 | 67.2 |
| CNN+5LSTM† | 84.8 | 36.4 | 82.0 | 69.4 | 73.0 | 87.2 | 81.8 | 86.1 | 34.5 | 82.4 | 53.1 | 81.5 | 77.4 | 79.0 | 81.3 | 54.8 | 81.1 | 47.0 | 84.3 | 67.3 | 72.3 |

4.3 公式

没有编号的公式

$$\mathbf{z}^{(l)} = \mathbf{W}^{(l)} \mathbf{a}^{(l-1)} + \mathbf{b}^{(l)}$$

$$\mathbf{a}^{(l)} = f(\mathbf{z}^{(l)})$$

公式中含有中文

$$\text{像素准确率} = \sum_{i=1}^{n_{cl}} n_{ii} / \sum_{i=1}^{n_{cl}} t_i$$

$$\text{平均像素准确率} = \frac{1}{n_{cl}} \sum_{i=1}^{n_{cl}} (n_{ii} / t_i) \quad (4.1)$$

$$\text{Mean IU} = \frac{1}{n_{cl}} \sum_{i=1}^{n_{cl}} \frac{n_{ii}}{t_i + \sum_j^{n_{cl}} n_{ji} - n_{ii}}$$

公式中含有矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} * \mathbf{x}_i \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

每行后面都有编号的公式

$$\frac{\partial}{\partial W_{ij}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y) = \frac{\partial J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y)}{\partial z_i^{(l+1)}} \cdot \frac{\partial z_i^{(l+1)}}{\partial W_{ij}^{(l)}} = \delta_i^{(l+1)} a_j^{(l)} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial b_i^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y) = \frac{\partial J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y)}{\partial z_i^{(l+1)}} \cdot \frac{\partial z_i^{(l+1)}}{\partial b_i^{(l)}} = \delta_i^{(l+1)} \quad (4.4)$$

4.4 算法流程图

算法 4.1: 梯度下降算法

输入: m 个训练样本
 1 对于 $l = 1$ 转到 n_l 进行 初始化: $\Delta \mathbf{W}^{(l)} = 0$, $\Delta \mathbf{b}^{(l)} = 0$;
 2 对于每个 训练样本 进行
 3 对于 $l = 1$ 转到 $n_l - 1$ 进行 前向传播: $\mathbf{z}^{(l+1)} = \mathbf{W}^l \mathbf{a}^l + \mathbf{b}^l, \mathbf{a}^{(l+1)} = f(\mathbf{z}^{(l+1)})$;
 4 输出误差计算: $\delta^{(n_l)} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^{(n_l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y)$;
 5 对于 $l = n_l - 1$ 转到 1 进行 后向传播: $\delta^{(l)} = ((\mathbf{W}^{(l)})^T \delta^{(l+1)}) f'(\mathbf{z}^{(l)})$;
 6 对于所有 层 l 进行
 7 计算梯度: $\nabla_{\mathbf{W}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y) = \delta^{(l+1)} (\mathbf{a}^{(l)})^T$
 8 $\nabla_{\mathbf{b}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y) = \delta^{(l+1)}$;
 9 累加梯度: $\Delta \mathbf{W}^{(l)} \leftarrow \Delta \mathbf{W}^{(l)} + \nabla_{\mathbf{W}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y)$;
 10 $\Delta \mathbf{b}^{(l)} \leftarrow \Delta \mathbf{b}^{(l)} + \nabla_{\mathbf{b}^{(l)}} J(\mathbf{W}, \mathbf{b}; \mathbf{x}, y)$;
 11 对于所有 层 l 进行
 12 更新权重: $\mathbf{W}^{(l)} \leftarrow \mathbf{W}^{(l)} - \alpha \left[\frac{1}{m} \Delta \mathbf{W}^{(l)} \right]$
 13 $\mathbf{b}^{(l)} \leftarrow \mathbf{b}^{(l)} - \alpha \left[\frac{1}{m} \Delta \mathbf{b}^{(l)} \right]$

4.5 例子、定理与证明

例 4.1 这是一个例子, 用以验证特殊环境的字体成功更改为楷体。

定理 4.1 (定理例子) 这是一个定理。

推论 4.1 (推论例子) 这是一个推论。

引理 4.1 (引理例子) 这是一个引理。

这里我们先给出定理 4.2

定理 4.2 (中山大学毕业论文模板定理) 中山大学 L^AT_EX 毕业论文模板^[6]可以用于写各种证明。

下面我们对定理 4.2 进行证明:

证明 下面我们开始证明：

由本定理的证明可见，我可以引用定理 4.1和引理4.1以及推论4.1来证明我这个 L^AT_EX 可以用来写各种证明。

定理 4.2得证。

□

4.6 代码

本模版支持在论文中插入代码片段，或直接从源码文件进行插入。例如，在论文中插入代码片段的效果为：

```
def func():
    print("hello_world")
    with open('./output.txt', 'w') as f:
        L = f.readlines()

    if __name__ == "__main__":
        # this is a comment line
        func()
```

也可在行内插入代码片段，例如：Python 中重载加法运算符的函数为 `__add__`，类的标识符为 `class`。此外，还可直接插入代码文件，例如插入 `./code/demo.cpp` 的效果为：

```
#include <iostream>
int main()
{
    ::std::cout << "hello_world" << ::std::endl;
    return 0;
}
```

4.7 其他的一些用法

4.7.1 子章节编号

4.7.1.1 更小的章节

更小的章节编号也是支持的。

可以如此引用章节：

- 章 4
- 节 4.7
- 小节 4.7.1

- 小小节 4.7.1.1

4.7.2 列表的使用

这是一个无序列表

- 引用文献^[1]
- 引用文献作者Long et al.
- 引用文献年份2015

这是一个有序列表

- 1) 索引前面的节 4.3、图像4.5、表格4.1
- 2) 加脚注^①

^① 测试一下脚注和 URL <http://cs231n.github.io/transfer-learning/>

5 实验与结果

5.1 关于生僻字

测试生僻字

F 塵 F F F F F F F F

FFFFFF

参考文献

- [1] LONG J, SHELHAMER E, DARRELL T. Fully convolutional networks for semantic segmentation[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2015: 3431-3440.
- [2] HARIHARAN B, ARBELÁEZ P, GIRSHICK R, et al. Simultaneous detection and segmentation [M]//Computer vision–ECCV 2014. Springer, 2014: 297-312.
- [3] LIU C, YUEN J, TORRALBA A. Sift flow: Dense correspondence across scenes and its applications[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 2011, 33(5): 978-994.
- [4] TIGHE J, LAZEBNIK S. Finding things: Image parsing with regions and per-exemplar detectors [C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2013: 3001-3008.
- [5] CHEN L C, PAPANDREOU G, KOKKINOS I, et al. Semantic image segmentation with deep convolutional nets and fully connected crfs[C/OL]//ICLR. 2015. <http://arxiv.org/abs/1412.7062>.
- [6] CHEN S, HUANG J, YONGFENG W. 中山大学毕业论文 Latex 模板[EB/OL]. 2020. <https://github.com/SYSU-SCC/sysu-thesis>.

附录 A 补充更多细节

A.1 补充图

A.1.1 补充图

这是附录内容，应该用宋体小四号字体。

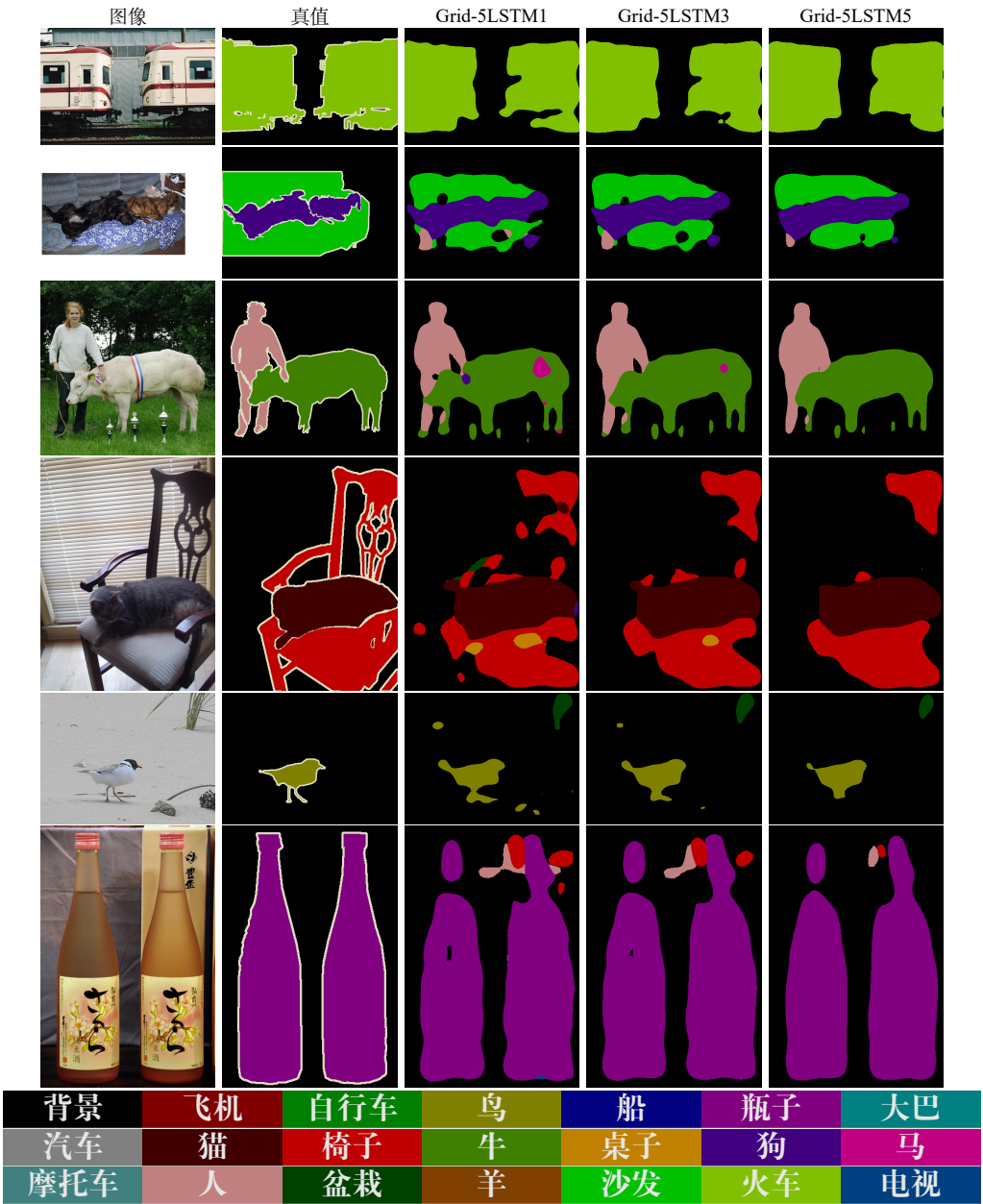


图 A.1 一个配有彩色表格的插图

致谢

四年时间转眼即逝，青涩而美好的本科生活快告一段落了。回首这段时间，我不仅学习到了很多知识和技能，而且提高了分析和解决问题的能力与养成了一定的科学素养。虽然走过了一些弯路，但更加坚定我后来选择学术研究的道路，实在是获益良多。这一切与老师的教诲和同学们的帮助是分不开的，在此对他们表达诚挚的谢意。

首先要感谢的是我的指导老师王大明教授。我作为一名本科生，缺少学术研究经验，不能很好地弄清所研究问题的重点、难点和热点，也很难分析自己的工作所能够达到的层次。王老师对整个研究领域有很好的理解，以其渊博的知识和敏锐的洞察力给了我非常有帮助的方向性指导。他严谨的治学态度与辛勤的工作方式也是我学习的榜样，在此向王老师致以崇高的敬意和衷心的感谢。

最后我要感谢我的家人，正是他们的无私的奉献和支持，我才有了不断拼搏的信心和勇气，才能取得现在的成果。

王小明

2023年3月11日