



本科生毕业论文（设计）

题目：在缺陷两格的棋盘上
的直线骨牌平铺问题

姓 名 卢皓斌

学 号 19337077

院 系 数学学院（珠海）

专 业 信息与计算科学

指导教师 崔潇易

2023 年 3 月 21 日

学术诚信声明

本人郑重声明：所呈交的毕业论文（设计），是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文（设计）不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本论文（设计）的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本论文（设计）的知识产权归属于培养单位。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期： 年 月 日

【摘 要】

由古老的国际象棋游戏演变进化而来的骨牌平铺问题, 又称棋盘覆盖问题, 是组合数学中历史悠久的经典问题, 目前对于缺陷棋盘的直线骨牌覆盖问题中, 只研究到了残缺一格的直线骨牌覆盖问题。

本文在残缺一格棋盘的平铺问题的解法基础上进行扩展, 利用循环染色法, 构建出残缺两格棋盘的直线骨牌平铺问题的解并给出例子, 对于边界条件上的不容易处理的问题, 本文利用了分治的思想, 结合数学归纳和无穷递降的思想, 把边界情况上的问题缩小到规模更小的问题来证明了边界条件上的平铺的不可行, 较为完整的解决了残缺两格棋盘的直线骨牌平铺问题。

本文在以往的文献基础上, 通过拓展的循环染色法有助于解决更多残缺格子的直线骨牌覆盖问题, 而在边界条件上的无穷递降的解法的构建, 为各类骨牌覆盖问题的边界条件提供了一个例子以供拓展和使用。

关键词: 本科毕业论文, 染色方法, 分治, 无穷递降, 中山大学

[ABSTRACT]

The domino tiling problem, also known as the board coverage problem, evolved from the ancient chess game, is a classic problem with a long history in combinatorics, and only the problem of incomplete straight domino coverage has been studied in the problem of straight domino coverage of defective chessboards.

This paper expands on the solution of the tiling problem of the incomplete one-grid chessboard, and uses the circular staining method to construct the solution of the rectilinear domino tiling problem of the incomplete two-square chessboard and gives examples. Combined with mathematical induction and the idea of infinite descension, the problem of boundary case is reduced to a smaller scale problem to prove that tiling on boundary conditions is not feasible, and the problem of rectilinear domino tiling with a broken two-square chessboard is solved more completely.

Based on the previous literature, the extended cyclic staining method helps to solve the problem of linear domino coverage of more incomplete lattices, and the construction of an infinitely decreasing solution on the boundary condition provides an example for the boundary conditions of various domino cover problems for extension and use.

Keywords: undergraduate thesis, stain, partition, infinite descending, Sun Yat-Sen University

目录

| | |
|--|----|
| 1 绪论 | 1 |
| 1.1 选题背景与意义 | 1 |
| 1.2 国内外研究现状和相关工作 | 1 |
| 1.3 本文的论文结构与章节安排 | 2 |
| 2 棋盘所满足的条件 | 3 |
| 3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案 | 6 |
| 3.1 骨牌大小 $k = 3$ 时的情况 | 6 |
| 3.2 骨牌大小 $k > 3$ 时的情况 | 9 |
| 4 棘手情况的处理 | 11 |
| 4.1 棘手情况处理的前置 | 11 |
| 4.2 棘手情况的正式处理 | 12 |
| 5 结论与展望 | 15 |
| 5.1 结论 | 15 |
| 5.2 展望 | 15 |
| 参考文献 | 16 |
| 附录 A 区域划分 | 17 |
| A.1 $k_{12} - k_{22} = 1$ 区域划分 | 17 |
| A.2 $k_{12} - k_{22} > 1$ 区域划分 | 17 |
| 致谢 | 18 |

表格目录

| | | |
|-----|--------------------------|----|
| 2.1 | 对棋盘的初步划分 | 3 |
| 2.2 | k 阶染色 | 4 |
| 3.1 | 对棋盘的 9 划分 | 6 |
| 3.2 | 3 阶染色 | 6 |
| 3.3 | 3 阶重染色 | 7 |
| 3.4 | 挖去 4 和 5 的染色-1 | 7 |
| 3.5 | 挖去 4 和 5 的染色-2 | 8 |
| 3.6 | 挖去 1 和 2 的染色 | 8 |
| 3.7 | 挖去 2 和 1 的染色-1 | 9 |
| 3.8 | k 阶染色 | 9 |
| 3.9 | k 阶重染色 | 10 |

1 绪论

棋盘完全覆盖问题 (problem of perfect cover of chessboard) 是一类组合问题, 是研究对于一个 $m \times n$ 的广义棋盘, 在缺陷 z 格的情况下 (通常 $z = 0$), 被骨牌完全覆盖的问题。

在过去, 我们对此问题的研究主要落在棋盘完全覆盖问题的方案数, 却甚少对棋盘完全覆盖问题的可解性进行考虑, 显然, 只有在确保该缺陷棋盘可被覆盖的基础上, 棋盘完全覆盖的方案数的研究才有价值。此外, 研究棋盘完全覆盖问题的可解性, 有助于对现实中的地砖覆盖等问题提供参考。

1.1 选题背景与意义

我们称某 $1 \times k$ 骨牌能完全覆盖某缺陷棋盘, 当且仅当以下条件满足:

- 1) 每块骨牌能够连续覆盖棋盘上同一行或者同一列的相邻 k 格
- 2) 棋盘上每一格都被骨牌覆盖。
- 3) 没有两块骨牌同时覆盖一格。
- 4) 对于棋盘的缺陷处, 没有任意一张骨牌将其覆盖。

而本文研究的缺陷两格棋盘的覆盖问题, 则是研究在 $m \times n$ 的广义棋盘上, 挖去任意两格的格子, 是否可被 $1 \times k$ 的骨牌所覆盖。

对于此问题而言, 我们一般会使用染色法求解, 也能够在经典问题: 国际棋盘挖去做左上右下两个格子是否可被 1×2 骨牌平铺的问题上做出相当漂亮的证明。

可是对于高维度而言, 普通的染色法有点力不从心, 只能排除较为基础的情况而无法对整个棋盘的各种缺陷情况进行完整的考量。

在本文中, 我推广了染色法进行更多情况的排除, 得到了在普遍条件下, 缺陷两格棋盘是否可被平铺的证明,

1.2 国内外研究现状和相关工作

对棋盘覆盖问题的研究由来已久, 冯跃峰证明了线型骨牌在完整矩形棋盘的完全覆盖充要条件; 康庆德用染色法证明了残缺棋盘可被 1×2 多米诺骨牌完全覆盖的充要条件; 张媛则用轨道循环标号法证明了线型骨牌在残缺一格棋盘上的覆盖问题。

而关于棋盘覆盖实际问题的研究的应用，宗传明则发现骨牌覆盖问题可应用于地砖铺设当中，不仅限于线型骨牌，还存在多边形骨牌覆盖，并且完整刻画了能构成六重晶格铺砌的所有铺砖，而经典的俄罗斯方块的拼图小游戏，文件加密技术等都会应用到棋盘覆盖问题的相关结论。

1.3 本文的论文结构与章节安排

本文共分为五章，各章节内容安排如下：

第一章绪论。简单说明了本文章的选题背景与意义。

第二章构建出可被 $1 \times k$ 大小的骨牌平铺的棋盘的必要条件，初步构建出满足条件的棋盘的大小。

第三章展示了在大部分情况下，残缺格子位于哪些位置可以满足 1×3 大小的骨牌进行平铺，并给出了相对应的平铺方式。

第四章对于棘手的情况，给出了这类缺陷棋盘不可被平铺的证明。

第五章总结了问题的解，并展望以后的工作。

2 棋盘所满足的条件

对一般的 $m \times n$ 的完整矩形棋盘，冯跃峰^[1]给出了 k 格线型骨牌完全覆盖的充分必要条件，这是我们研究覆盖问题的基础。

引理 2.1 $m \times n$ 棋盘中存在 k 格线型骨牌完全覆盖，当且仅当 $k \mid m$ 或 $k \mid n$ 。

而对于多格残缺棋盘，重点是确定棋盘的大小 (m, n) 和残缺格子所在的位置 (i, j) ，在这一章节我们先考虑棋盘的大小所满足的条件。

以下的符号均建立在整数集的基础上，由于康庆德已经研究完毕 1×2 骨牌的覆盖^[2]，因此我们的只研究骨牌长度大于 3 的情况。

显而易见的，我们能简单得到以下引理。

引理 2.2 $m \times n$ 的广义棋盘中，挖去 2 个格子，如果存在 k 格线型骨牌完全覆盖，当且仅当 $k \mid mn - 2$ 。

证明 简单的，假设存在 t 个线性骨牌能够完全覆盖整个棋盘，由于骨牌不会互相重复的覆盖同一个格子，所以所有骨牌所覆盖的格子数目应该要和棋盘的总的格子数目相同，即

$$tk = mn - 2 \rightarrow k \mid mn - 2 \quad (2.1)$$

□

我们给出以下定理，来规整棋盘的大小

定理 2.1 当 $m \times n$ 的缺陷两格广义棋盘可被 $1 \times k$ 大小的骨牌平铺时，一定满足 $m \equiv 1(mod k), n \equiv 2(mod k)$ 。

证明

$$\begin{cases} m = kx_m + m_1, m_1 \in [0, k) \\ n = kx_n + n_1, n_1 \in [0, k) \end{cases} \quad (2.2)$$

简单的，不妨设 2.2，并据此对大小相同的完整棋盘进行划分，得到表 2.1。

表 2.1 对棋盘的初步划分

| | |
|-----------------------|----------------------|
| A: $kx_m \times kx_n$ | B: $m_1 \times kx_n$ |
| C: $kx_m \times n_1$ | D: $m_1 \times n_1$ |

由引理2.1, 模块 A, B, C 均可被 $1 \times k$ 骨牌平铺, 故我们只需要考虑模块 D。不妨设 $m_1 \leq n_1$, 并基于张媛对残缺一格棋盘的研究^[3]对模块 D 进行染色, 有2.2。

 表 2.2 k 阶染色

| | | | | | | | |
|----------|----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------------|
| 1 | 2 | \cdots | \cdots | m_1 | \cdots | $n_1 - 1$ | n_1 |
| 2 | 3 | \cdots | \cdots | $m_1 + 1$ | \cdots | n_1 | $n_1 + 1$ |
| \vdots | \vdots | \ddots | \ddots | | | \vdots | \vdots |
| m_1 | \cdots | $n_1 - 1$ | n_1 | \cdots | \cdots | \vdots | $m_1 + n_1 - k$ |

记 $g(x)$ 为棋盘中标记为 x 的格子数目, 由表2.2, 有

$$g(m_1) = m_1 = g(n_1) = g(n_1 + i) + i = g(i) + m_1 - i, \forall i \in [0, n_1) \quad (2.3)$$

记 $f(x)$ 为棋盘中染色为 x 的格子数目, 我们有 $f(x) = g(x) + g(x + k)$ 。而 $n_1 < k \rightarrow n_1 + 2 \leq k + 1$, 故 $f(1) = g(1) + g(k + 1) \leq 1 + g(n_1 + 2) = 1 + g(n_1) - 2 < g(n_1) = f(n_1)$, 因此我们能得到等式2.4。

$$f(m_1) = f(n_1) > f(1) \quad (2.4)$$

现在我们考虑残缺两格的棋盘上的直线覆盖, 由于每个直线骨牌会且仅会分别覆盖 1 个染色为 $1, 2, \dots, k$ 的方块, 因此残缺两格后的棋盘能被直线骨牌覆盖的充分条件是, $\forall p_1, p_2, f(p_1) = f(p_2)$ 因此根据残缺两格分布在同种颜色 and 不同颜色的可能上, 需要满足以下两个条件之一:

- 条件 1: $\exists p \in [0, k), st.f(p) = f(x) + 2, x \neq p, x \in [0, k)$
- 条件 2: $\exists p_1, p_2 \in [0, k), st.f(p_1) = f(p_2) = f(x) + 1, x \neq p_1 \neq p_2, x \in [0, k)$

因此如果模块 D 存在, 分情况讨论:

- 1) $m_1 < n_1 - 1$, 由2.2有 $f(m_1) = f(n_1) - 1 = f(n_1) > f(1)$, $\exists p_1, p_2, p_3, st.f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) > f(1)$, 矛盾。
- 2) $m_1 = n_1 - 1$ 由上述讨论我们可以得到, 此时 $p_1 = m_1$, $p_2 = n_1 = m_1 + 1$, 满足条件 2, 而 $f(1) = f(n_1) - 1 \rightarrow g(1) + g(k + 1) = f(n_1) - 1 \rightarrow g(k + 1) = g(n_1) - 2 \rightarrow n_1 = k - 1$, 即 $m_1 = k - 2, n_1 = k - 1$ 。

由于需要在任意染色下, 我们都需要满足条件, 因此我们需要两个缺陷格子在任意染色下都落在染色 p_1 和 p_2 , 接下来我们证明对任意两个格子, 存在一种染色, 使得染色不都为 p_1 和 p_2 , 导出矛盾。

记 $P(i, j) = a$ 为第 i 行第 j 列染色为 a , $P'(i, j) = a$ 为进行某种交换后, 第 i 行第 j 列染色为 a 。

当 $2 \mid k$ 时, 由对称性, 此时两个缺陷格子必然位于 $(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2}), (\frac{k}{2}, \frac{k}{2})$, 由2.2简单的得到 $P(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2}) = 1, P(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}) = 2$, 此时交换第一列和第 $\frac{k}{2}$ 列, 仍然是一个合法的染色, 但是交换后的染色中, 由于 $P(1, 1) = 1$, 因此交换后的 $P'(\frac{k}{2} - 1, \frac{k}{2}) \neq P'(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}) \neq 1$, 因此矛盾。

当 $2 \nmid k$ 时, 由对称性, 此时两个缺陷格子必然位于 $(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}), (\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2})$, 由2.2简单的得到 $P(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}) = 1, P(\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}) = 2$, 此时交换第一行和第 $\frac{k-1}{2}$ 行, 仍然是一个合法的染色, 但是交换后的染色中, 由于 $P(1, 1) = 1$, 因此交换后的 $P'(\frac{k-1}{2}, \frac{k-1}{2}) \neq P'(\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}) \neq 1$, 也矛盾。

因此我们总能找到一种染色不满足条件, 故矛盾。

3) $m_1 = n_1$, 由2.4, 有 $f(m_1) \geq f(1) + 1$

(a) $f(m_1) = f(1) + 1$, 则有 $f(x) = f(m_1) - 1, \forall x < k, x \neq m_1$, 既不满足条件 1 也不满足条件 2, 矛盾。

(b) $f(m_1) > f(1) + 1$, 则有 $f(m_1) = f(m_1 + 1) + 1 = f(m_1 + 2) + 2 \geq f(1)$, 故令 $p = m_1$ 后, $f(p) \geq f(1) + 2$ 但 $f(m_1) > f(1)$, 矛盾。

所以挖去两格后, 若模块 D 仍然存在, 则所有条件均矛盾, 故模块 D 不存在, 即此时 $m_1 = 1, n_1 = 2$, 证毕。 \square

因此, 对于我们已经规整好了棋盘的规模, 并把问题转化如下:

对于大小为 $1 \times k$ 的骨牌, 我们考虑缺陷两格的 $m \times n$ 的棋盘, 其中 $m \equiv 1(mod k), n \equiv 2(mod k)$, 哪些棋盘可以被平铺。

3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案

3.1 骨牌大小 $k = 3$ 时的情况

由 2.1 有, 此时棋盘的大小只可能为 $(3x_m + 1) \times (3x_n + 2)$, 不妨假设缺陷格子的坐标分别为 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ 。

在这里我们给出一个定理, 来辅助我们之后的证明

定理 3.1 对于 $m \times n$ 的广义棋盘和 $1 \times k$ 的骨牌, 且 $m \equiv 1(\text{mod } k), n \equiv 2(\text{mod } k)$, 记某格子的坐标为 (i, j) , 意味着某格子处于第 i 行第 j 列, 则如果存在 $i \times j$ 的缺陷 C , $i \equiv 1(\text{mod } k), j \equiv 2(\text{mod } k), i \leq m, j \leq n$, 且棋盘的左上角和右下角的格子坐标分别为 $(3k_{11} + 1, 3k_{12} + 1), (3k_{21} + 1, 3k_{22} + 2)$, 则该棋盘一定能被平铺

证明 当存在这样的缺陷时, 我们可以把棋盘分成如 3.1 的 9 个区域, 分别如图所示, 由 2.1, 可得除了缺陷 C 外的 8 个区域均可被 $1 \times k$ 的骨牌平铺, 而中央的缺陷 C 不需要被平铺, 故此时整个棋盘已经可以被平铺, 证毕。

表 3.1 对棋盘的 9 划分

| | | |
|--|--|--|
| $3k_{12} \times 3k_{11}$ | $(3k_{22} - 3k_{12} + 2) \times 3k_{11}$ | $3k_{22} \times 3k_{11}$ |
| $3k_{12} \times (3k_{21} - 3k_{11} + 1)$ | $C : i \times j$ | $3k_{22} \times (3k_{21} - 3k_{11} + 1 + 1)$ |
| $3k_{12} \times 3k_{21}$ | $3(k_{22} - k_{12}) + 2 \times 3k_{21}$ | $3k_{22} \times 3k_{21}$ |

□

因此根据 3.1, 我们可以得把问题转化为: 对于某个残缺两格的棋盘, 如果他的两个缺陷可以组合成一个满足 3.1 中条件的 $i \times j$ 大小的缺陷, 那么该棋盘可以被平铺。

在图 3.8a 的基础上, 我们对棋盘进行两种染色, 即

表 3.2 3 阶染色

| (a) 3 阶染色-1 | | | | | | (b) 3 阶染色-2 | | | | | |
|-------------|---|---|---|---|-----|-------------|---|---|---|---|-----|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ... | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | ... |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | ... | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ... |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | ... |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | ... | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

不妨设棋盘行数 $m \equiv 1(mod 3)$, 列数 $n \equiv 2(mod 3)$, 记 $f(x)$ 为染色为 x 的格子的数目, 显然有 $f(1) = f(2) = f(3) + 1$ 。

记 $P(i, j) = \{a, b\}$, 意味着在坐标为 (i, j) 在 3.2a 和 3.2b 分别染色为 a, b , 并据此按照以下规则重新染色得到 3.3。

- $P(i, j) = \{2, 2\}$ 染色为 1, $P(i, j) = \{2, 2\}$ 染色为 2
- $P(i, j) = \{1, 2\}$ 染色为 4, $P(i, j) = \{2, 1\}$ 染色为 5
- $P(i, j) = \{3, any\}$ 或 $P(i, j) = \{any, 3\}$ 染色为 0

表 3.3 3 阶重染色

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | ... |
| 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | ... |
| 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | ... |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | ... |
| 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | ... |
| 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 5 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

而该棋盘可被平铺的充分条件为缺陷的两个格子分别落在染色 1 和染色 2 的位置, 意味着如果棋盘可以被平铺, 则只有以下两种情况

- $P(i_1, j_1) = \{2, 2\}, P(i_2, j_2) = \{2, 2\}$, 即在 3.3 中分别位于染色 1 和染色 2 处
- $P(i_1, j_1) = \{1, 2\}, P(i_2, j_2) = \{2, 1\}$, 即在 3.3 中分别位于染色 4 和染色 5 处

3.1.1 在染色中分别处于 4 和 5

由图, 我们可以简单的写出 4 和 5 所对应的格子的坐标,

- 4 的坐标: $(3k_{41} + 2, 3k_{42})$
- 5 的坐标: $(3k_{51} + 3, 3k_{52})$

由于棋盘具有对称性, 在这里我们不妨假设 $k_{51} \geq k_{41}$, 因此会有以下 2 种情况:

表 3.4 挖去 4 和 5 的染色-1

| | | | | |
|------------------------------------|--|--------------------------------|---|------------------------------------|
| $1 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$ | | | | $(3k_{52} - 3k_{42} + 3) \times 2$ |
| $(3k_{52} - 3k_{42} + 3) \times 2$ | 4 | $1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$ | | |
| | $(3k_{52} - 3k_{42}) \times (3k_{51} - 3k_{41} + 1)$ | | | |
| | $1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$ | | 5 | |
| | $1 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$ | | | |

- 当 $k_{52} \geq k_{42}$ 时, 有如 3.4 一样的划分, 此时左上角坐标为 $(3k_{41} + 1, 3k_{42} - 2)$, 右下角坐标为 $(3k_{51} + 4, 3k_{52} + 2)$ 。

表 3.5 挖去 4 和 5 的染色-2

| | | | |
|------------------------------------|--|--------------------------------|--------------|
| $2 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$ | | | 3×2 |
| $2 \times (3k_{42} - 3k_{52} + 3)$ | 5 | $1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$ | |
| | $(3k_{42} - 3k_{52}) \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$ | | 3×2 |
| | $1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$ | 4 | |
| $2 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$ | | | |

- 当 $k_{52} < k_{42}$ 时，有如 3.5 一样的划分，此时左上角坐标为 $(3k_{51} + 1, 3k_{52} - 2)$ ，右下角坐标为 $(3k_{41} + 4, 3k_{42} + 2)$ 。

由 2.1 可得，无论如何，所有区块均可被 1×3 的骨牌平铺，也就等价于，这两个缺陷可以组合成一个大小为 $(3k_{52} - 3k_{42} + 4) \times (3k_{51} - 3k_{41} + 5)$ 大小的缺陷，并且角落坐标满足 3.1 中的条件。因此由 3.1，当缺陷分别处在染色 4 和染色 5 的位置时，无论缺陷怎么分布，该缺陷棋盘都可被平铺。

3.1.2 在染色中分别处于 1 和 2

同在染色中处于 4 和 5 的情况一样，我们可以写出颜色 1 和颜色 2 所在的方格坐标。

- 1 的坐标: $(3k_{11} + 1, 3k_{12} + 1)$
- 2 的坐标: $(3k_{21} + 1, 3k_{22} + 2)$

由于对称性，在这里我们不妨假设 $k_{21} \geq k_{11}$ ，则同样有以下两种情况：

- 当 $k_{22} \geq k_{12}$ 时，有如 3.6 的区域划分，此时左上角坐标为 $(3k_{11} + 1, 3k_{12} + 1)$ ，右下角坐标为 $(3k_{21} + 1, 3k_{22} + 2)$ 。
- 当 $k_{22} < k_{12}$ 时，将再次有以下分类
 - 当缺陷不处于同一行时，即 $k_{21} > k_{11}$ ，有如 3.7 的区域划分，左上角坐标为 $(3k_{21} + 1, 3k_{22} + 1)$ ，右下角坐标为 $(3k_{11} + 1, 3k_{22} + 2)$
 - 当缺陷处于同一行且不在边界上时，有 $m \geq 7$ ，当 $n = 5$ 时，穷举得到无解，当 $n \geq 8$ ，则当 $k_{12} - k_{22} = 1$ 时，存在区域划分，左上角坐标为 $(3k_{21} - 2, 3k_{22} + 1)$ ，右下角坐标为 $(3k_{11} + 1, 3k_{22} + 2)$ ；当 $k_{12} - k_{22} > 1$ 时，存在区域划分，左上角坐标为 $(3k_{21} - 2, 3k_{22} + 1)$ ，右下角坐标为

表 3.6 挖去 1 和 2 的染色

| | | |
|--|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 | $1 \times (3k_{22} - 3k_{12})$ | $(3k_{21} - 3k_{11}) \times 1$ |
| $(3k_{21} - 3k_{11}) \times (3k_{22} - 3k_{12})$ | | 2 |

表 3.7 挖去 2 和 1 的染色-1

| | | |
|--------------------------------|---------|--------------------------------|
| $(3k_{21} - 3k_{11}) \times 1$ | 2 | $1 \times (3k_{12} - 3k_{22})$ |
| | \dots | |
| $1 \times (3k_{12} - 3k_{22})$ | | $(3k_{21} - 3k_{11}) \times 1$ |

$(3k_{11} + 4, 3k_{22} + 5)$ 。两种情况的区域划分我都放在了附录中。

– 当缺陷都处在边界上时，我们称为棘手情况，把它放在下一节讨论。

3.2 骨牌大小 $k > 3$ 时的情况

表 3.8 k 阶染色

(a) k 阶染色-1

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 3 | \dots | k | 1 | \dots |
| 2 | 3 | 4 | \dots | 1 | 2 | \dots |
| 3 | 4 | 5 | \dots | 2 | 3 | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \ddots | \ddots | \dots |
| k | 1 | 2 | \dots | k-1 | k | \dots |
| 1 | 2 | 3 | \dots | k | 1 | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \ddots |

(b) k 阶染色-2

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 3 | \dots | k | 1 | \dots |
| k | 1 | 2 | \dots | k-1 | k | \dots |
| k-1 | k | 1 | \dots | k-2 | k-1 | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \ddots | \ddots | \dots |
| 2 | 3 | 4 | \dots | 1 | 2 | \dots |
| 1 | 2 | 3 | \dots | k | 1 | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \ddots |

在 $k \geq 4$ 的情况下，我们仍然假设 $m \equiv 1(\text{mod } k), n \equiv 2(\text{mod } k)$ ，我们可以给出以下引理。

定理 3.2 当 $m \times n$ 的缺陷两格广义棋盘可被 $1 \times k$ 大小的骨牌平铺时，若 $k \geq 4$ ，则缺陷格子分别只可能在坐标 $(kx_1 + 1, ky_1 + 1)$ 和 $(kx_2 + 1, ky_2 + 2)$ 处。

证明 我们不妨令坐标为 $(1, j)$ 的格子染色为颜色 $j \% k$ ，记 $Q_p(i, j) = a$ ，意味着在坐标为 (i, j) 在染色方案 p 下被染色为 a ， $f(x)$ 为染色为 x 的格子数目，我们能够很轻易的得到 $f(1) = f(2) = f(x), x \neq 1, x \neq 2$ ，因此我们只能挖去在所有染色组合中，均被染色为 1 或染色 2 的格子，即 $Q_p(i, j) = 1 \text{ or } 2, \forall p$ ，而 $Q_p(kx_1 + 1, ky_1 + 1) = 1, \forall p$ ， $Q_p(kx_2 + 1, ky_2 + 2) = 1, \forall p$ ，因此缺陷格子分别落在坐标 $(kx_1 + 1, ky_1 + 1)$ 和 $(kx_2 + 1, ky_2 + 2)$ 处的格子时，棋盘可能可以被平铺。

接下来我们证明，当 $(i, j) \neq (kx_1 + 1, ky_1 + 1), (i, j) \neq (kx_2 + 1, ky_2 + 2)$ 时， $\exists p, s.t. Q_p(i, j) \neq 1 \text{ or } 2$ 。

挑选 k 阶染色中最经典的两种染色 3.8a 和 3.8b，考虑最左上的 $k \times k$ 大小的区域，做出以下区域划分：

| | |
|-----------------------|-----------------------------|
| A: 1×2 | B: $1 \times (k - 2)$ |
| C: $(k - 1) \times 2$ | D: $(k - 1) \times (k - 2)$ |

记 $Q(i, j) = a, b$, 意味着在3.8a和3.8b分别染色为 a, b , 除去模块 A, 分别考虑剩下 3 个模块:

模块 B 由于模块 B 不会染色为 1 或 2, 所以缺陷格子不可能落在模块 B 中。

模块 C $Q(2, 1) = \{2, k\}, Q(2, 2) = \{3, 1\}, Q(2, k) = \{k, 1\}, Q(k, 2) = \{1, 3\}$ 所以对于模块 C 中的所有格子, 均不可能满足 $Q(i, j) = \{1 \text{ or } 2, 1 \text{ or } 2\}$ 。

模块 D 假设 $\exists i, j, s.t. Q_1(i, j) = 1$, 在第 i 行, 第 2 列到第 j 列的元素中, 排除染色为 1 或者 2 的元素, 还剩下 $k - 1 - 2 = k - 3 \geq 1$ 个元素, 故 $\exists j', s.t. Q_1(i, j') = t, t \neq 1 \text{ or } 2$, 此时交换第 j 行和第 j' 行, 仍然是一个满足条件的染色, 但是在这个染色中, $Q_p(i, j) = Q_1(i, j') = t \neq 1 \text{ or } 2$, 矛盾。

因此缺陷格子只能落在模块 A 中, 证毕。 \square

因此类似 $k = 3$ 的情况, 我们只需考虑像这样的染色

表 3.9 k 阶重染色

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2 | 0 | ... | 0 | 1 | 2 | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| 1 | 2 | 0 | ... | 0 | 1 | 2 | ... |
| 0 | 0 | 0 | ... | 0 | 0 | 0 | ... |
| \vdots | \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

同 $k = 3$ 的情况, 我们只需要考虑染色分别处于 1 和 2 的情况, 此时可以完全的套用 $k = 3$ 的情况, 且棘手情况也一样, 为 $k > 3$ 时的边界情况, 我们在下一节一起讨论。

4 棘手情况的处理

在上一节，我们遗留了一个情况没有处理，也就是当缺陷坐标为 $(1, t_1 \times k + 2)$ 和 $(1, t_2 \times k + 1), t_1 < t_2$ 时，该情况我们称为棘手情况，这一节我们将证明在此情况下，棋盘不可被平铺。

4.1 棘手情况处理的前置

我们先考虑长度为 x 的位于边界上的待铺一行，骨牌大小为 $1 \times k$ ，则 x 可以分为若干个 k 和若干个 1 的相加，如 $x = k + 1 + k$ ，即等价于这一行按顺序为 1 个横着的骨牌， 1 个竖着的骨牌， 1 个横着的骨牌的铺设。记 $n * 1$ 为 n 根竖着的并排放置的骨牌， $m * k$ 为 m 根横着并排放置的骨牌， $+$ 为两种不同的铺设的接合。

定理 4.1 对于一个棋盘的边界上的一行长度为 x ，骨牌的的大小为 $1 \times k$ ，则 x 一定可以分解为 $x = m * k + t * 1 + n * k, t < k$

证明 对于一个大小为 $k \times k$ 的区域，由 k 个竖着的骨牌平铺和 k 个横着的骨牌平铺是相等的，而处于边界上的一行，铺设 k 个竖着的骨牌和一个横着的骨牌表现都可以把他铺满，因此我们能得到第一条转化公式

$$x = \dots + k * 1 + \dots \rightarrow x = \dots + 1 * k + \dots \quad (4.1)$$

当长度 $x < k$ 时，此时 $m = n = 0$ ，有 $x = x * 1$ 。

当长度 $x = k$ 时，一个横着的骨牌可以平铺一整行，有 $x = 1 * k$ ，假若有竖着的骨牌，则有等式 $x = 1 + (x - 1) = 1 + (x - 1) * 1 = x * 1 = 1 * x = 1 * k$ 。

此时考虑边界上的某个横着的骨牌，倘若他的左右都有一根竖着的骨牌，那么考虑第二行的这个区域，满足前述的长度为 $x = k$ 的情况，因此等价于铺设一根横着的骨牌，重复考虑 k 次，则相当于连续铺设了 k 根横着的骨排，也就等价于铺设了 k 根竖着的骨牌，因此我们得到第二条转化公式

$$x = \dots + 1 + k + 1 = \dots + 1 + k * 1 + 1 + \dots = \dots + (k + 2) * 1 + \dots \quad (4.2)$$

假设对于长度小于 $x-1$ 的行都成立时，我们考虑长度为 x 的行，有

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=0}^a (m_i * k + n_i * 1) + m_{a+1} * k \\
 &= m_1 * k + n_1 * 1 + \sum_{i=1}^a (m_i * k + n_i * 1) + m_{a+1} * k \\
 &= m_1 * k + n_1 * 1 + \sum_{i=1}^a ((m_i \times k) * 1 + n_i * 1) + m_{a+1} * k \\
 &= m_1 * k + n_1 * 1 + \sum_{i=1}^a ((m_i \times k) + n_i) * 1 + m_{a+1} * k \\
 &= m_1 * k + (x - m_1 \times k - m_{a+1} \times k) * 1 + m_{a+1} * k \\
 &= m_1 * k + n_1 * k + t * 1 + n_2 * k + m_{a+1} * k \\
 &= m * k + t * 1 + n * k.
 \end{aligned}$$

故 $\forall x, \exists m, t, n, s.t. x = m * k + t * 1 + n * k, m, t < k$

□

4.2 棘手情况的正式处理

不妨假设棘手情况的缺陷坐标的 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 满足 $i_1 = i_2 = 1, j_1 = t_1 \times k + 2, j_2 = t_2 \times k + 1$ ，且长度 $x = tk + 2$ ，棋盘的宽度为 $y = t'k + 1$ 以便我们后续讨论。

考虑棘手情况的第一行，两个缺陷格子自然把第一行分作三个小行，分别是第 1 到第 $j_1 - 1$ 个方格，第 $j_1 + 1$ 到 $j_2 - 1, j_2 + 1$ 到 x 的方格，由 4.1，我们将得到

$$\begin{cases} j_1 - 1 = (t_1 - u) * k + 1 * 1 + u * k \\ j_2 - j_1 - 3 = (t_2 - t_1 - 1 - u) * k + (k - 2) * 1 + u * k \\ x - j_2 = (t - t_2 - u) * k + 1 * 1 + u * k \end{cases}$$

因此第一行可以分解为

$$\begin{aligned}
 x &= (t_1 - u) * k + 1 * 1 + u * k + r + (t_2 - t_1 - 1 - u) * k + (k - 2) * 1 + u * k + r + \\
 &\quad (t - t_2 - u) * k + 1 * 1 + u * k
 \end{aligned}$$

由于对于边界来说，我们可以看做是一条无限长的竖着铺的骨牌，因此我们

可以再次进行转化化简式子

$$\begin{aligned}
 x &= (t_1 - u) * k + 1 * 1 + u * k + r + \dots \\
 &+ r + (t - t_2 - u) * k + 1 * 1 + u * k \\
 &= -1 * 1 + 1 * 1 + (t_1 - u) * k + 1 * 1 + u * k + r + \dots \\
 &+ r + (t - t_2 - u) * k + 1 * 1 + u * k + 1 * 1 - 1 * 1 \\
 &= -1 * 1 + ((t_1 - u) \times k + 2) * 1 + u * k + r + \dots \\
 &+ r + (t - t_2 - u) * k + (u \times k + 2) * 1 - 1 * 1 \\
 &= -1 * 1 + 2 * 1 + (t_1 - u) * k + u * k + r \dots \\
 &r + (t - t_2 - u) * k + u * k + 2 * 1 - 1 * 1 \\
 &= 1 * 1 + t_1 * k + r \dots + r + (t - t_2) * k + 1 * 1
 \end{aligned}$$

现在我们考虑第二行, 对于第一行的所有竖着铺的骨牌, 他在第二行中不需要被铺设, 可以看做是第二行的缺陷, 因此我们等价于考虑两条长度为 $(t_2 - 1 - u) \times k + 1$ 和 $(t - t_2 + u) \times k + 1$ 的需要平铺的行, 由 4.1, 有 4.2

$$\begin{cases} (t_2 - 1 - u) \times k + 1 = (t_2 - 1 - u - u') * k + 1 * 1 + u' * k \\ (t - t_2 + u) \times k + 1 = (t - t_2 + u - u'') * k + 1 * 1 + u'' * k \end{cases}$$

因此第二行可以分解为

$$x = 1 * r + (t_2 - 1 - u - u') * k + 1 * 1 + u' * k + (k - 2) * r + (t - t_2 + u - u'') * k + 1 * 1 + u'' * k + 1 * 1$$

现在我们考虑第三行, 由于 $k \geq 3$, 因此第一行和第二行所竖着铺的骨牌在第三行仍然不需要铺设, 仍然是缺陷, 因此我们等价于考虑 $(t_2 - 1 - u - u') \times k$ 和 $(t - t_2 + u - u'') \times k$ 的两行需要平铺的行, 4.1, 有 4.2

$$\begin{cases} (t_2 - 1 - u - u') \times k = (t_2 - 1 - u - u') * k \\ (t - t_2 + u - u'') \times k = (t - t_2 + u - u'') * k \end{cases}$$

故第三行已经不需要铺设任何竖着的骨牌, 对于第 3 行到第 k 行的所有行, 我们全部像可以第三行一样铺设和考虑。

此时前 k 行已经全部铺设完毕, 最后我们考虑第 $k + 1$ 行的缺陷所在位置, 只有第 2 行的竖着的骨牌铺设会影响到第 $k + 1$ 行, 第二行的竖着的骨牌所在位置分别为 $2 + (t_2 - 1 - u - u') \times k$ 和 $x - u'' \times k - 2$, 故恰好对应着 $(t'k + 1 - k) \times (tk + 2)$, 的某种棘手情况, 如此反复归纳, 我们可以得到, 所有棘手情况都和 $1 \times (kb + 2)$

的某种棘手情况相对应，而只有一行的棘手情况中，我们是无法平铺的，因此也就是所有的棘手情况，我们都无法平铺，得证。

5 结论与展望

5.1 结论

对于 $m \times n$ 的广义棋盘, 骨牌大小 $1 \times k$, 如果棋盘可以被平铺, 棋盘一定满足条件 $m \equiv 1(\text{mod}k), n \equiv 1(\text{mod}k)$ 。且在此前提下, 当 $k \geq 3$ 时, 当两个缺陷的坐标 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 满足 $i_1 \equiv i_2 \equiv 1(\text{mod}k), j_1 + 1 \equiv j_2 \equiv 2(\text{mod}k)$, 且当 $i_1 = i_2 = 1$ 或 $i_1 = i_2 = m$ 时, $j_2 > j_1$, 则此时棋盘可被平铺。

当 $k = 3$ 的情况, 当两个缺陷的坐标 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 满足 $i_1 + 1 \equiv i_2 \equiv 0(\text{mod}3), j_1 \equiv j_2 \equiv 0(\text{mod}3)$, 棋盘也可以被平铺。

除此之外, 所有的缺陷两格的 $m \times n$ 棋盘都不可被平铺。

5.2 展望

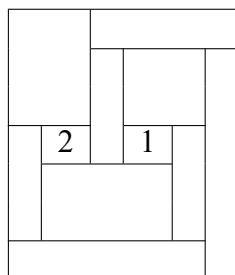
事实上, 关于残缺棋盘的完全覆盖问题是一个困难而且复杂的问题, 在本论文解决了缺陷两格的完全覆盖问题后, 可以沿着本文的解决思路结局缺陷三格甚至缺陷 k 格的完全覆盖问题, 这是下一步的研究方向。

参考文献

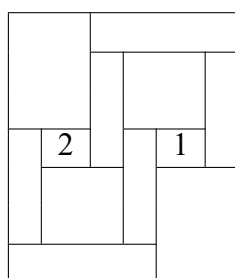
- [1] 冯跃峰. 棋盘上的组合数学[M]. 上海教育出版社, 1998.
- [2] 康庆德. 格盘上的覆盖问题[J]. 自然杂志, 1992(377-381).
- [3] 李冠洁张媛; 郭璐;. 残缺一格棋盘上线型骨牌覆盖问题的研究[J]. 数学的实践与认知, 2021.

附录 A 区域划分

A.1 $k_{12} - k_{22} = 1$ 区域划分



A.2 $k_{12} - k_{22} > 1$ 区域划分



致谢

四年时间转眼即逝，青涩而美好的本科生活快告一段落了。回首这段时间，我不仅学习到了很多知识和技能，而且提高了分析和解决问题的能力与养成了一定的科学素养。虽然走过了一些弯路，但更加坚定我后来选择学术研究的道路，实在是获益良多。这一切与老师的教诲和同学们的帮助是分不开的，在此对他们表达诚挚的谢意。

首先要感谢的是我的指导老师崔潇易教授。我作为一名本科生，缺少学术研究经验，不能很好地弄清所研究问题的重点、难点和热点，也很难分析自己的工作所能够达到的层次。崔老师对整个研究领域有很好的理解，以其渊博的知识和敏锐的洞察力给了我非常有帮助的方向性指导。他严谨的治学态度与辛勤的工作方式也是我学习的榜样，在此向崔老师致以崇高的敬意和衷心的感谢。

最后我要感谢我的家人，正是他们的无私的奉献和支持，我才有了不断拼搏的信心和勇气，才能取得现在的成果。

卢皓斌

2023 年 3 月 21 日