本科生毕业论文（设计）

题目：在缺陷两格的棋盘上的直线骨牌平铺问题

姓　　名　卢皓斌

学　　号　19337077

院　　系　数学学院（珠海）

专　　业　信息与计算科学

指导教师　崔潇易

2023 年 3 月 19 日

学术诚信声明

本人郑重声明：所呈交的毕业论文（设计），是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文（设计）不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本论文（设计）的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本论文（设计）的知识产权归属于培养单位。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日　　期：　　　　年　　　月　　　日

【摘　要】

由古老的国际象棋游戏演变进化而来的骨牌平铺问题, 又称棋盘覆盖问题, 是组合数学中历史悠久的经典问题。最初的研究是关于 2 格多米诺骨牌在 8×8 的国际象棋棋盘上的覆盖问题，逐步推广到了 k 格骨牌在 $m\times n$ 阶的数学棋盘上的覆盖问题。

对棋盘覆盖问题的研究由来已久，冯跃峰证明了线型骨牌在完整矩形棋盘的完全覆盖充要条件；康庆德用染色法证明了残缺棋盘可被 1×2 多米诺骨牌完全覆盖的充要条件；张媛则用轨道循环标号法证明了线型骨牌在残缺一格棋盘上的覆盖问题。

而关于棋盘覆盖实际问题的研究的应用，宗传明则发现骨牌覆盖问题可应用于地砖铺设当中，不仅限于线型骨牌，还存在多边形骨牌覆盖，并且完整刻画了能构成六重晶格铺砌的所有铺砖，而经典的俄罗斯方块的拼图小游戏，文件加密技术等都会应用到棋盘覆盖问题的相关结论。

本文在残缺一格棋盘的平铺问题的基础上进行扩展，利用循环染色法，构建出残缺两格棋盘的平铺问题的解，从而解决了该问题。

关键词：　本科毕业论文，染色方法，轮换，中山大学

[ABSTRACT]

The content of the English abstract is the same as the Chinese abstract, 250-400 content words are appropriate. Start another line below the abstract to indicate English keywords (Keywords 3-5).

Keywords: undergraduate thesis, Sun Yat-Sen University

目录

1 绪论 1
1.1 选题背景与意义 1
1.2 国内外研究现状和相关工作 1
1.3 本文的论文结构与章节安排 1

2 棋盘所满足的条件 3

3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案 5
3.1 骨牌大小 k = 3 时的情况 5
3.2 骨牌大小 k > 3 时的情况 8

4 棘手情况的处理 10
4.1 棘手情况处理的前置 10

5 结论与展望 13
5.1 结论 13
5.2 展望 13

参考文献 14

致谢 15

插图目录

表格目录

2.1 对棋盘的初步划分 3

2.2 k 阶染色 3

3.1 3 阶染色 5

3.2 3 阶重染色 5

3.3 对棋盘的 9 划分 6

3.4 k 阶染色 8

3.5 k 阶重染色 9

1 绪论

棋盘完全覆盖问题 (problem of perfect cover of chessboard) 是一类组合问题，是研究对于一个 $m \times n$ 的广义棋盘, 在缺陷 z 格的情况下 (通常 $z = 0$), 被骨牌完全覆盖的问题。

在过去，我们对此问题的研究主要落在棋盘完全覆盖问题的方案数，却甚少对棋盘完全覆盖问题的可解性进行考虑，显然，只有在确保该缺陷棋盘可被覆盖的基础上，棋盘完全覆盖的方案数的研究才有价值。此外，研究棋盘完全覆盖问题的可解性，有助于对现实中的地砖覆盖等问题提供参考。

1.1 选题背景与意义

我们称某 $1 \times k$ 骨牌能完全覆盖某缺陷棋盘，当且仅当以下条件满足:

1) 每块骨牌能够连续覆盖棋盘上同一行或者同一列的相邻 k 格
2) 棋盘上每一格都被骨牌覆盖。
3) 没有两块骨牌同时覆盖一格。
4) 对于棋盘的缺陷处，没有任意一张骨牌将其覆盖。

而本文研究的缺陷两格棋盘的覆盖问题，则是研究在 $m \times n$ 的广义棋盘上，挖去任意两格的格子，是否可被 $1 \times k$ 的骨牌所覆盖。

对于此问题而言, 我们一般会使用染色法求解, 也能够在经典问题: 国际棋盘挖去做左上右下两个格子是否可被 1×2 骨牌平铺的问题上做出相当漂亮的证明。

可是对于高维度而言，普通的染色法有点力不从心，只能排除较为基础的情况而无法对整个棋盘的各种缺陷情况进行完整的考量。

在本文中，我推广了染色法进行更多情况的排除，得到了在普遍条件下，缺陷两格棋盘是否可被平铺的证明,

1.2 国内外研究现状和相关工作

对国内外研究现状和相关领域中已有的研究成果的简要评述。

1.3 本文的论文结构与章节安排

本文共分为六章，各章节内容安排如下:

第一章绪论。简单说明了本文章的选题背景与意义。

第二章构建出可被 1×3 大小的骨牌平铺的棋盘的必要条件，初步构建出满足条件的棋盘的大小。

第三章解析了在绝大部分情况下，格子残缺可以满足 1×3 大小的骨牌进行平铺。

第四章对于极特殊的情况，给出了格子残缺不可被平铺的证明。

第五章则推广了对于 $1 \times k$ 大小的骨牌，能够平铺棋盘的充分必要条件。

2 棋盘所满足的条件

对一般的 $m \times n$ 的完整矩形棋盘，冯跃峰给出了 k 格线型骨牌完全覆盖的充分必要条件，这是我们研究覆盖问题的基础。

引理 2.1　$m \times n$ 棋盘中存在 k 格线型骨牌完全覆盖，当且仅当 $k \mid m$ 或 $k \mid n$。

而对于多格残缺棋盘，重点是确定棋盘的大小 (m, n) 和残缺格子所在的位置 (i, j)，在这一章节我们先考虑棋盘的大小所满足的条件。

以下的符号均建立在整数集的基础上。

显而易见的，我们能简单得到以下引理。

引理 2.2　$m \times n$ 的广义棋盘中，挖去 2 个格子，如果存在 k 格线型骨牌完全覆盖，当且仅当 $k \mid mn - 2$。

我们给出以下定理，来规整棋盘的大小

定理 2.1　当 $m \times n$ 的缺陷两格广义棋盘可被 $1 \times k$ 大小的骨牌平铺时，一定满足 $m \equiv 1(modk), n \equiv 2(modk)$

证明

$$\begin{cases} m = kx_m + m_1, m_1 \in [0, k) \\ n = kx_n + n_1, n_1 \in [0, k) \end{cases}$$

并据此对棋盘进行划分，有

表 2.1 对棋盘的初步划分

A: $kx_m \times kx_n$	B: $m_1 \times kx_n$
C: $kx_m \times n_1$	D: $m_1 \times n_1$

由 2.1, 模块 A，B，C 均可被 $1 \times k$ 骨牌平铺，故我们只需要考虑模块 D。不妨设 $m_1 \leq n_1$，并对模块 D 进行染色，有 2.2。

表 2.2 k 阶染色

1	2	$\cdots$	$\cdots$	m_1	$\cdots$	$n_1 - 1$	n_1
2	3	$\cdots$	$\cdots$	$m_1 + 1$	$\cdots$	n_1	$n_1 + 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$			$\vdots$	$\vdots$
m_1	$\cdots$	$n_1 - 1$	n_1	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$m_1 + n_1 - k$

记 $g(x)$ 为棋盘中标记为 x 的格子数目，由 2.2，有 $g(m_1) = m_1 = g(n_1) = g(n_1 + i) + i = g(i) + m_1 - i, \forall i \in [0, n_1)$。

记 $f(x)$ 为棋盘中染色为 x 的格子数目，我们有 $f(x) = g(x) + g(x + k)$。而 $n_1 < k \rightarrow n_1 + 2 \leq k + 1$，故 $f(1) = g(1) + g(k + 1) \leq 1 + g(n_1 + 2) = 1 + g(n_1) - 2 < g(n_1) = f(n_1)$

$$f(m_1) = f(n_1) > f(1) \tag{2.1}$$

而缺陷两格相当于挖去两个相同颜色的格子或者不同颜色的格子，等价于使某个 $f(x)$ 减少 2 或者使某两个 $f(x)$ 减少 1，而每个平铺会且仅会分别覆盖 1 个染色为 1, 2, ... ,k 的方块，因此我们需要使得挖去两格后的棋盘中所有的 f(x) 相等，等价于挖去两格前的棋盘中，满足以下两个条件之一：

- 条件 1: $\exists p \in [0, k), st.f(p) = f(x) + 2, x \neq p, x \in [0, k)$
- 条件 2: $\exists p_1, p_2 \in [0, k), st.f(p_1) = f(p_2) = f(x) + 1, x \neq p_1 \neq p_2, x \in [0, k)$

若挖去两格后，模块 D 仍然存在，此时分情况讨论：

1) $m_1 < n_1 - 1$, 由 2.2有 $f(m_1) = f(n_1) - 1 = f(n_1) > f(1)$, $\exists p_1, p_2, p_3, st.f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) > f(1)$，矛盾。
2) $m_1 = n_1 - 1$ 由上述讨论我们可以得到，此时 $p_1 = m_1$，$p_2 = n_1 = m_1 + 1$，满足条件 2，而 $f(1) = f(n_1) - 1 \rightarrow g(1) + g(k + 1) = f(n_1) - 1 \rightarrow g(k + 1) = g(n_1) - 2 \rightarrow n_1 = k - 1$，即 $m_1 = k - 2, n_1 = k - 1$。

   由于需要在任意染色下，我们都需要满足条件，因此我们需要被挖去的两个格子在任意染色下，都需要分别被染色成 p_1 和 p_2，可是染色的总方案数为 $(n_1 - 1)!$ 个，（待补充）。。

   故矛盾。
3) $m_1 = n_1$，由 2.1，有 $f(m_1) \geq f(1) + 1$
   (a) $f(m_1) = f(1) + 1$，则有 $f(x) = f(m_1) - 1, \forall x < k, x \neq m_1$, 既不满足条件 1 也不满足条件 2，矛盾。
   (b) $f(m_1) > f(1) + 1$, 则有 $f(m_1) = f(m_1 + 1) + 1 = f(m_1 + 2) + 2 \geq f(1)$, 故令 $p = m_1$ 后，$f(p) \geq f(1) + 2$ 但 $f(m_1) > f(1)$，矛盾。

所以挖去两格后，若模块 D 仍然存在，则所有条件均矛盾，故模块 D 不存在，即此时 $m_1 = 1, n_1 = 2$，证毕。 □

3 缺陷格子可能存在的位置与相对应的平铺方案

3.1 骨牌大小 k = 3 时的情况

由 2.1有，此时棋盘的大小只可能为 $(3a+1)\times(3b+2)$。

在图 3.4a的基础上，我们对棋盘进行两种染色，即

表 3.1 3 阶染色

(a) 3 阶染色-1

1	2	3	1	2	$\cdots$
2	3	1	2	3	$\cdots$
3	1	2	3	1	$\cdots$
1	2	3	1	2	$\cdots$
2	3	1	2	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(b) 3 阶染色-2

1	2	3	1	2	$\cdots$
3	1	2	3	1	$\cdots$
2	3	1	2	3	$\cdots$
1	2	3	1	2	$\cdots$
3	1	2	3	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

不妨设棋盘行数 $m\equiv 1(modk)$，列数 $n\equiv 2(modk)$，显然有 $f(1)=f(2)=f(3)+1$。故缺陷格子有且只有可能分别染色为 1 和染色为 2，此时我们将两张图合并，并以以下规则重新染色：

- 在 3.1a和 3.1b均染色为 1 的格子，在新图染色为 1
- 在 3.1a和 3.1b均染色为 2 的格子，在新图染色为 2
- 在 3.1a染色为 1，3.1b染色为 2 的格子，在新图染色为 4
- 在 3.1a染色为 2，3.1b染色为 1 的格子，在新图染色为 5
- 在 3.1a或 3.1b染色为 3 的格子，在新图染色为 0

在此条件下重新染色后，棋盘为

表 3.2 3 阶重染色

1	2	0	1	2	0	$\cdots$
0	0	4	0	0	4	$\cdots$
0	0	5	0	0	5	$\cdots$
1	2	0	1	2	0	$\cdots$
0	0	4	0	0	4	$\cdots$
0	0	5	0	0	5	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

由于缺陷格子分别只能染色 1 和染色 2，故在两种染色下缺陷格子都能需要处在颜色 1 或颜色 2 中，且必须分别在颜色 1 和颜色 2，因此缺陷格子的可能性就缩小为以下 2 种情况之一

- 分别处在 3.5的 1 和 2
- 分别处在 3.5的 4 和 5

在这里我们给出一个定理，来辅助我们之后的证明

定理 3.1　对于 $m \times n$ 的广义棋盘和 $1 \times k$ 的骨牌，且 $m \equiv 1(modk), n \equiv 2(modk)$，如果存在 $i \times j$ 的缺陷 C，$i \equiv 1(modk), j \equiv 2(modk), i \leq m, j \leq n$，且棋盘的左上角和右下角的格子坐标分别为 $(3k_{11}+1, 3k_{12}+1)$，$(3k_{21}+1, 3k_{22}+2)$，则该棋盘一定能被平铺

证明 当存在这样的缺陷时，我们可以把棋盘分成如 3.3的 9 个区域，大小分别如图所示

表 3.3 对棋盘的 9 划分

$3k_{12} \times 3k_{11}$	$(3k_{22} - 3k_{12} + 2) \times 3k_{11}$	$3k_{22} \times 3k_{11}$
$3k_{12} \times (3k_{21} - 3k_{11} + 1)$	$C : i \times j$	$3k_{22} \times (3k_{21} - 3k_{11} + 1 + 1)$
$3k_{12} \times 3k_{21}$	$3(k_{22} - k_{12}) + 2 \times 3k_{21}$	$3k_{22} \times 3k_{21}$

由 2.1，可得除了缺陷 C 外的 8 个区域均可被 $1 \times k$ 的骨牌平铺，而中央的缺陷 C 不需要被平铺，故此时整个棋盘已经可以被平铺，证毕。 □

由 3.1，我们可以得把问题转化为，我们如果能把两个缺陷组合成一个满足 3.1中条件的 $i \times j$ 缺陷，那么该带有缺陷的棋盘就可以被平铺。

3.1.1　在染色中分别处于 4 和 5

由图，我们可以简单的写出 4 和 5 所对应的格子的坐标，

- 4 的坐标: $(3k_{41} + 2, 3k_{42})$
- 5 的坐标: $(3k_{51} + 3, 3k_{52})$

在这里我们不妨假设 $k_{51} \geq k_{41}$，(否则我们只需要左右翻转棋盘即可)，则有以下 2 种情况：

- 当 $k_{52} \geq k_{42}$ 时，有以下区域划分

<table>
<tr><td colspan="4">$1 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$</td><td rowspan="4">$(3k_{52} - 3k_{42} + 3) \times 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$(3k_{52} - 3k_{42} + 3) \times 2$</td><td>4</td><td colspan="2">$1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(3k_{52} - 3k_{42}) \times (3k_{51} - 3k_{41} + 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1 \times (3k_{51} - 3k_{41})$</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="4">$1 \times (3k_{51} - 3k_{41} + 3)$</td></tr>
</table>

由 2.1可得，此时所有区块均可被 1×3 的骨牌平铺，也就等价于，这两个缺陷可以组合成一个大小为 $(3k52 - 3k_{42} + 4) \times (3k_{51} - 3k_{41} + 5)$ 大小的缺陷，且

此时左上角坐标为 $(3k_{41}+1, 3k_{42}-2)$，右下角坐标为 $(3k_{51}+4, 3k_{52}+2)$，故由 3.1，该棋盘可被平铺。

- 当 $k_{52} < k_{42}$ 时，有以下区域划分

<table>
<tr><td colspan="3">$2\times(3k_{51}-3k_{41}+3)$</td><td rowspan="2">$3\times 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$2\times(3k_{42}-3k_{52}+3)$</td><td>5</td><td>$1\times(3k_{51}-3k_{41})$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(3k_{42}-3k_{52})\times(3k_{51}-3k_{41}+3)$</td></tr>
<tr><td>$1\times(3k_{51}-3k_{41})$</td><td>4</td><td rowspan="2">3×2</td></tr>
<tr><td colspan="3">$2\times(3k_{51}-3k_{41}+3)$</td></tr>
</table>

由 2.1可得，此时所有区块均可被 1×3 的骨牌平铺，也就等价于，这两个缺陷可以组合成一个大小为 $(3k52-3k_{42}+4)\times(3k_{51}-3k_{41}+5)$ 大小的缺陷，且此时左上角坐标为 $(3k_{51}+1, 3k_{52}-2)$，右下角坐标为 $(3k_{41}+4, 3k_{42}+2)$，故由 3.1，该棋盘可被平铺。

3.1.2 在染色中分别处于 1 和 2

同上述情况，我们可以写出颜色 1 和颜色 2 所在的方格坐标。

- 1 的坐标: $(3k_{11}+1, 3k_{12}+1)$
- 2 的坐标: $(3k_{21}+1, 3k_{22}+2)$

在这里我们不妨假设 $k_{21} > k_{11}$（否则只需要简单的上下翻转棋盘即可），则同样有以下两种情况：

- 当 $k_{22} \geq k_{12}$ 时，有以下区域划分

<table>
<tr><td>1</td><td>$1\times(3k_{22}-3k_{12})$</td><td rowspan="2">$(3k_{21}-3k_{11})\times 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">$(3k_{21}-3k_{11})\times(3k_{22}-3k_{12})$</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
</table>

由 2.1可得，此时所有区块均可被 1×3 的骨牌平铺，也就等价于，这两个缺陷可以组合成一个大小为 $(3k21-3k_{11})\times(3k_{22}-3k_{21}+1)$ 大小的缺陷，且此时左上角坐标为 $(3k_{11}+1, 3k_{12}+1)$，右下角坐标为 $(3k_{21}+1, 3k_{22}+2)$，故由 3.1，该棋盘可被平铺。

- 当 $k_{22} < k_{12}$ 时，将再次有以下分类
  - 当不处于同一行时，即，可以有以下区域划分，由 2.1得，此时棋盘可被平铺
  - 当处于同一行且不在边界上时，有以下区域划分，由 2.1得，此时棋盘可被平铺

– 当都处在边界上时，我们称为棘手情况，把它放在下一节讨论

3.2 骨牌大小 k > 3 时的情况

表 3.4 k 阶染色

(a) k 阶正染色

1	2	3	$\cdots$	k	1	$\cdots$
2	3	4	$\cdots$	1	2	$\cdots$
3	4	5	$\cdots$	2	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\cdots$
k	1	2	$\cdots$	k-1	k	$\cdots$
1	2	3	$\cdots$	k	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

(b) k 阶染色-逆

1	2	3	$\cdots$	k	1	$\cdots$
k	1	2	$\cdots$	k-1	k	$\cdots$
k-1	k	1	$\cdots$	k-2	k-1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\cdots$
2	3	4	$\cdots$	1	2	$\cdots$
1	2	3	$\cdots$	k	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

在 k>4 的情况下，我们仍然假设 $m \equiv 1(modk), n \equiv 2(modk)$，我们可以给出以下引理。

定理 3.2　当 $m \times n$ 的缺陷两格广义棋盘可被 $1 \times k$ 大小的骨牌平铺时，若 $k \geq 4$，则缺陷格子分别只可能在坐标 (kx_1+1, ky_1+1) 和 (kx_2+1, ky_2+2) 处。

证明 我们不妨令坐标为 $(1,1)$ 和坐标为 $(1,2)$ 的格子染色为颜色 1 和颜色 2，由引理？我们可以得知，我们只能挖去在所有染色组合中，均被染色为 1 或染色 2 的格子，再由定理？得知，坐标 (kx_1+1, ky_1+1) 和 (kx_2+1, ky_2+2) 处的格子在所有染色情况下，均会被染色成颜色 1 和颜色 2，缺陷格子可以坐标 (kx_1+1, ky_1+1) 和 (kx_2+1, ky_2+2) 处。

接下来我们证明，当坐标不是 (kx_1+1, ky_1+1) 和 (kx_2+1, ky_2+2) 时，均存在某种染色方案，使得该坐标染色既不是 1 也不是 2，则定理得证。

基于3.4a, 不妨把 $(1, j)$ 染色为 j，$(1, j), j \neq 1or2$ 时，该格子已经不是染色为 1 或 2，故第一行的已排除。对于第 1 列和第 2 列且不为第一行时，当格子在3.4a中为 2 时，在3.4b为 k，当格子在3.4a为 1 时，在3.4b为 3，故第一列和第二列也已排除。

对于 $(i, j), i > 1, j > 2$，当格子在3.4a中为 1 时，由于 $k \geq 4$，我们考虑第 j 列的元素，故 $[2, k]$ 共计 k-1 个元素中，排除染色为 1 或者 2 的元素，还剩下 $k-1-2 = k-3$ 个元素，由于 $k \geq 4$，故 $k-3 \geq 1$，至少存在一个元素满足条件，染色为非 1 或 2，且不在第一行，记为第 k 个元素。交换第 i 行和第 j 行后，这种染色也是满足条件的，但是在新染色中，(i, j) 染色既不为 1 也不为 2，故 (i, j) 也不能是格子。

证毕。

□

因此类似 k=3 的情况，我们只需考虑像这样的染色

表 3.5 k 阶重染色

1	2	0	$\cdots$	0	1	2	$\cdots$
0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
1	2	0	$\cdots$	0	1	2	$\cdots$
0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

同 k=3 的情况，我们只需要考虑染色分别处于 1 和 2 的情况，此时可以完全的套用 k=3 的情况，且棘手情况也一样，为 $k > 3$ 时的边界情况，我们在下一节一起讨论。

4 棘手情况的处理

4.1 棘手情况处理的前置

在上一节, 我们遗留了一个情况没有处理, 也就是当缺陷坐标 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 满足 $i_1 = i_2 = 1$ 或 $i_1 = i_2 = m$ 时，$j_2 < j_1$，该情况我们称为棘手情况，这一节我们将讨论在此情况下，棋盘不可被平铺。

我们先记一行的长度为 x，骨牌大小为 $1 \times k$，则 x 可以分为若干个 k 和若干个 1 的相加，如 $x = k + 1 + k$ 等价于这一行按顺序为 1 个横着的骨牌，一个竖着的骨牌，一个横着的骨牌的平铺。记 $n * 1$ 为 n 根竖着的并排放置的骨牌，$m * k$ 为 m 根横着并排放置的骨牌。

我们先定义一个平铺方案的转化

定义 4.1　我们称一个平铺方案 A 可以转化为染色 B，当且仅当对于存在一种基于平铺方案 B 的平铺方案 C，平铺方案 C 已经铺设的格子与平铺方案 A 相同。

由于 k 个竖着的骨牌平铺等价于 k 个横着的骨牌平铺，因此对于处于边界上的一行来说，铺设 k 个竖着的骨牌和一个横着的骨牌表现是相同的，因此也就意味着对于 $x = ... + k * 1 + ... \rightarrow x = ... + 1 * k + ...$

而假设对于边界上的某个横着的骨牌，他的左右都有一根竖着的骨牌，则此时递归的对他铺设横着的骨牌，铺满 k 根，则此时相当于铺设了 k 跟竖着的骨牌，也就意味着 $x = ... + 1 + k + 1 = ... + 1 + k * 1 + 1 + ... = ... + (k + 2) * 1 + ...$

定理 4.1　对于一个棋盘的边界上的一行长度为 x，骨牌的的大小为 $1 \times k$，则 x 一定可以分解为 $x = m * k + t * 1 + n * k, m, t < k$

证明　当长度 $x < k$ 时，此时 $m = n = 0$，有 $x = x * 1$。

当长度 $x = k$ 时，一个横着的骨牌可以平铺一整行，有 $x = 1 * k$，假若有竖着的骨牌则有等式 $x = 1 + (x - 1) = 1 + (x - 1) * 1 = x * 1 = 1 * x = 1 * k$，符合。

当长度 $x > k$，则有

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{i=0}^{a}(m_i * k + n_i * 1) + m_{a+1} * k \\
&= m_1 * k + n_1 * 1 + \sum_{i=1}^{a}(m_i * k + n_i * 1) + m_{a+1} * k \\
&= m_1 * k + n_1 * 1 + \sum_{i=1}^{a}((m_i \times k) * 1 + n_i * 1) + m_{a+1} * k \\
&= m_1 * k + n_1 * 1 + \sum_{i=1}^{a}((m_i \times k) + n_i) * 1 + m_{a+1} * k \\
&= m_1 * k + (x - m_1 \times k - m_{a+1} \times k) * 1 + m_{a+1} * k \\
&= m_1 * k + n_1 * k + t * 1 + n_2 * k + m_{a+1} * k \\
&= m * k + t * 1 + n * k.
\end{aligned}
$$

□

处理

故对于棘手情况的第一行，不妨假设棘手情况的缺陷坐标的 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 满足 $i_1 = i_2 = 1, j_1 = t_1 \times k + 2, j_2 = t_2 \times k + 1$，且长度 $x = tk + 2$, 以便我们后续讨论。

那么分别考虑第一行中第 1 到第 $j_1 - 1$ 个方格，第 $j_1 + 1$ 到 $j_2 - 1$, $j_2 + 1$ 到 x 的方格，由 4.1，他们可以分别分解为 $j_1 - 1 = (t_1 - u) * k + 1 * 1 + u * k$, $j_2 - j_1 - 3 = (t_2 - t_1 - 1 - u) * k + (k - 2) * 1 + u * k$, $x - j_2 = (t - t_2 - u) * k + 1 * 1 + u * k$, 即第一行可以分解为（r 代表缺陷）

$x = (t_1 - u) * k + 1 * 1 + u * k + r + (t_2 - t_1 - 1 - u) * k + (k - 2) * 1 + u * k + r + (t - t_2 - u) * k + 1 * 1 + u * k$

由于对于边界来说，我们可以看做是一条无限长的竖着铺的骨牌，因此可以通过操作转化，重写上述等式为

$x = 1 * 1 + (t_1 - u) * k + u * k + r + (t_2 - t_1 - 1 - u) * k + (k - 2) * 1 + u * k + r + (t - t_2 - u) * k + u * k + 1 * 1$

也就是

$x = 1 * 1 + t_1 * k + r + (t_2 - t_1 - 1 - u) * k + (k - 2) * 1 + u * k + r + (t - t_2) * k + 1 * 1$

对于每一根竖着铺的骨牌，他就是下一行的缺陷，因此对于第二行，我们等价于考虑两条长度为 $(t_2 - 1 - u) \times k + 1$ 和 $(t - t_2 + u) \times k + 1$ 的需要平铺的行，由 4.1，他们可以分别分解为 $(t_2 - 1 - u) \times k + 1 = (t_2 - 1 - u - u') * k + 1 * 1 + u' * k)$ 和

$(t-t_2+u)\times k+1=(t-t_2+u-u'')*k+1*1+u''*k$，则第二行可以分解为

$$x=1*r+(t_2-1-u-u')*k+1*1+u'*k+(k-2)*r+(t-t_2+u-u'')*k+1*1+u''*k+1*1$$

由于对于第二行的缺陷来说，该缺陷所对应的列直到第 k 行仍然是缺陷，所以对于第三行来说，我们只剩下两条长为 $(t_2-1-u-u')\times k$ 和 $(t-t_2+u-u'')\times k$ 的行，我们可以分别全部使用横着的骨牌平铺直到第 k 行，如此前 k 行就已经全部平铺完毕。

此时考虑第 k+1 行的缺陷所在位置，只有第 2 行的竖着的骨牌铺设会影响到第 k+1 行, 第二行的竖着的骨牌所在位置分别为 $2+(t_2-1-u-u')\times k$ 和 $x-u''\times k-2$，故假设原先的棋盘大小为 $(ka+1)\times(kb+2)$，则这个棋盘中的一种棘手情况将对应着 $(ka+1-k)\times(kb+2)$ 中的某种棘手情况，如此反复使用，也就意味着所有棘手情况都和 $1\times(kb+2)$ 的某种棘手情况相对应，而只有一行的棘手情况中，我们是无法平铺的，因此也就是所有的棘手情况，我们都无法平铺[1]

5 结论与展望

5.1 结论

对于 $m \times n$ 的广义棋盘，骨牌大小 $1 \times k$，如果棋盘可以被平铺，棋盘一定满足条件 $m \equiv 1(modk), n \equiv 1(modk)$。且在此前提下，当 $k \geq 3$ 时，当两个缺陷的坐标 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 满足 $i_1 \equiv i_2 \equiv 1(modk), j_1 + 1 \equiv j_2 \equiv 2(modk)$，且当 $i_1 = i_2 = 1$ 或 $i_1 = i_2 = m$ 时，$j_2 > j_1$，则此时棋盘可被平铺。

当 $k = 3$ 的情况，当两个缺陷的坐标 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 满足 $i_1 + 1 \equiv i_2 \equiv 0(mod3), j_1 \equiv j_2 \equiv 0(mod3)$，棋盘也可以被平铺。

除此之外，所有的缺陷两格的 $m \times n$ 棋盘都不可被平铺。

5.2 展望

事实上，关于残缺棋盘的完全覆盖问题是一个困难而且复杂的问题，在本论文解决了缺陷两格的完全覆盖问题后，可以沿着本文的解决思路结局缺陷三格甚至缺陷 k 格的完全覆盖问题，这是下一步的研究方向。

参考文献

[1] LIU C, YUEN J, TORRALBA A. Sift flow: Dense correspondence across scenes and its applications[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 2011, 33(5): 978-994.

致谢

四年时间转眼即逝，青涩而美好的本科生活快告一段落了。回首这段时间，我不仅学习到了很多知识和技能，而且提高了分析和解决问题的能力与养成了一定的科学素养。虽然走过了一些弯路，但更加坚定我后来选择学术研究的道路，实在是获益良多。这一切与老师的教诲和同学们的帮助是分不开的，在此对他们表达诚挚的谢意。

首先要感谢的是我的指导老师王大明教授。我作为一名本科生，缺少学术研究经验，不能很好地弄清所研究问题的重点、难点和热点，也很难分析自己的工作所能够达到的层次。王老师对整个研究领域有很好的理解，以其渊博的知识和敏锐的洞察力给了我非常有帮助的方向性指导。他严谨的治学态度与辛勤的工作方式也是我学习的榜样，在此向王老师致以崇高的敬意和衷心的感谢。

最后我要感谢我的家人，正是他们的无私的奉献和支持，我才有了不断拼搏的信心和勇气，才能取得现在的成果。

王小明

2023 年 3 月 19 日