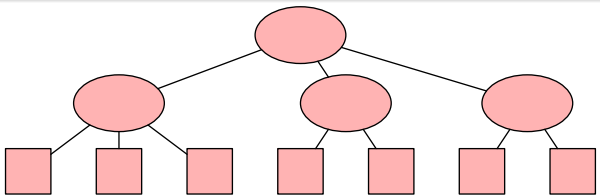
(a, b)-Bäume

Es sei $a \geq 2$ und $b \geq 2a - 1$.

Definition

Ein (a, b)-Baum ist ein Baum mit folgenden Eigenschaften:

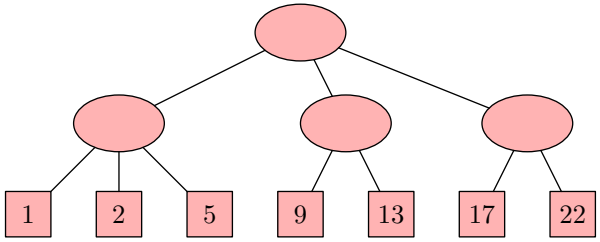
1. Jeder Knoten hat höchstens b Kinder.
2. Jeder innere Knoten außer der Wurzel hat mindestens a Kinder.
3. Alle Blätter haben die gleiche Tiefe.



Ein $(2, 3)$-Baum.

(a, b)-Bäume als assoziatives Array

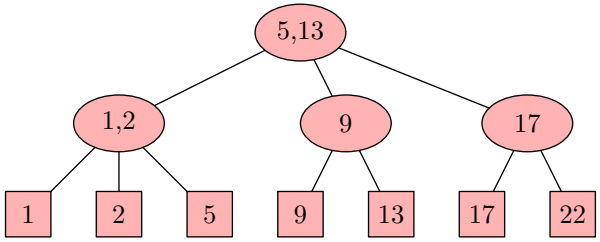
Wir speichern Schlüssel und Datenelemente nur in den Blättern:



Die Schlüssel sind von links nach rechts geordnet.

(a, b)-Bäume als assoziatives Array

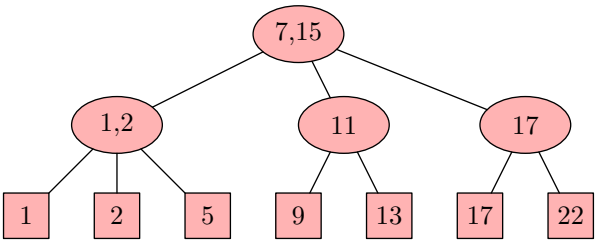
Als Suchhilfe enthält ein innerer Knoten mit m Kindern genau $m - 1$ Schlüssel.



Jetzt kann effizient nach einem Element gesucht werden.

(a, b)-Bäume als assoziatives Array

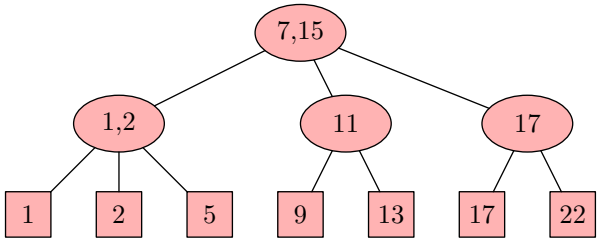
Wir bestehen nicht darauf, daß die Hilfsschlüssel in inneren Knoten in den Blättern vorkommen:



$\rightarrow$ etwas flexibler

(a, b)-Bäume – Einfügen

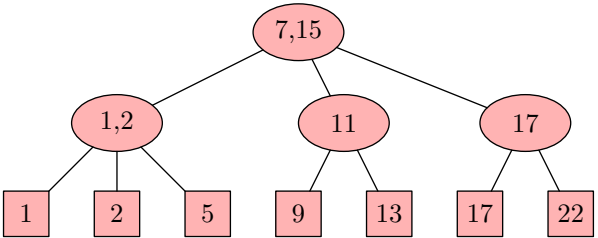
Die Blätter enthalten die Schlüssel in aufsteigender Reihenfolge.



- Neues Blatt an richtiger Stelle einfügen
- Problem, falls Elternknoten mehr als b Kinder hat
- $\rightarrow$ in zwei Knoten mit $\lfloor (b+1)/2) \rfloor$ und $\lceil (b+1)/2 \rceil$ Kindern teilen
- Jetzt kann Vater überfüllt sein etc.

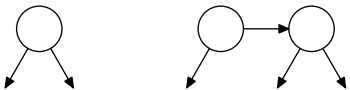
(a, b)-Bäume – Löschen

Die Blätter enthalten die Schlüssel in aufsteigender Reihenfolge.



- Blatt mit Schlüssel entfernen
- Problem, falls Elternknoten weniger als a Kinder hat
- $\rightarrow$ mit einem Geschwisterknoten vereinigen
- Dieser muß vielleicht wieder geteilt werden
- Der nächste Elternknoten kann nun wieder unterbelegt sein

(a, b)-Bäume als assoziatives Array



- $(2, 3)$-Bäume sind als assoziatives Array geeignet
- Löschen, Suchen, Einfügen in $O(\log n)$
- Welche anderen (a, b) sind interessant?

Bei großen Datenmengen, die nicht mehr im Hauptspeicher Platz haben, sind die bisher betrachteten Datenstrukturen nicht gut geeignet.

Verwende $(m, 2m)$-Bäume mit großem m

(2,3)-Bäume: Beispiel

(2,4)-Bäume: Beispiel

(3,6)-Bäume: Beispiel

B-Bäume und Datenbanken

Ein B-Baum ist ein $(m, 2m)$-Baum.

Wir wählen m so groß, daß ein Knoten soviel Platz wie eine Seite im Hintergrundspeicher benötigt (z.B. 4096 Byte).

Blätter eines Elternknotens gemeinsam speichern.

Zugriffszeit:

Nur $O(\log_m(n))$ Zugriffe auf den Hintergrundspeicher.

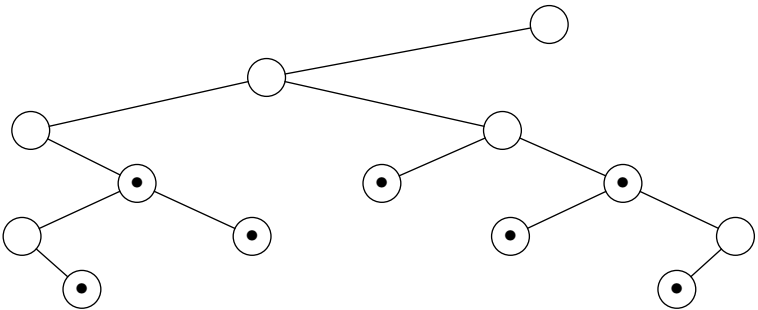
Wurzel kann immer im RAM gehalten werden.

Falls $m \approx 500$, dann enthält ein B-Baum der Höhe 3 bereits mindestens $500 \cdot 500 \cdot 500 = 125\,000\,000$ Schlüssel und Datenelemente.

Jede Suche greift auf nur zwei Seiten zu!

Tries

In vergleichsbasierten Suchbäumen wird nicht in Schlüssel hineingeschaut.



In Tries entspricht die $i$te Verzweigung dem $i$ten Zeichen des Schlüssels.

Obiger Trie enthält die Schlüssel AAB, AABAB, AABB, ABA, ABB, ABBA und ABBBA.

Übersicht

Hashing

Wie können wir eine partielle Funktion $\{1, \ldots, n\} \to \mathbf{N}$ effizient speichern?
Wie können wir ein assoziatives Array für die Schlüssel $\{1, \ldots, n\}$ effizient implementieren?

Durch ein Array mit n Elementen.

Aber: Gewöhnlich speichern wir n Schlüssel aus einem riesigen Universum U.

$S \subseteq U$, $|S|$ klein, $|U|$ sehr groß.

Ein Array der Größe $|U|$ ist zu groß.

Ein Array der Größe $O(|S|)$ wäre optimal.

Finde Funktion $h\colon U \to \{1, \ldots, |S|\}$, die auf S injektiv ist.

Hashing

Es sei $S \subseteq U$.
Wir haben eine Funktion $h\colon U \to \{1, \ldots, n\}$, so daß

- $n \geq |S|$,
- $h(x) \neq h(y)$ für alle $x \neq y$, $x, y \in S$.

Wir können $x \in S$ in der $n$ten Position eines Arrays speichern.

Probleme:

- Wie finden wir h?
- Können wir $h(x)$ effizient berechnen?
- Ist S überhaupt bekannt? Ändert es sich?

Universelles Hashing

Wir nehmen an, S ist bekannt und ändert sich nicht.

Beispiel: Tabelle der Schlüsselwörter in einem Compiler.

Es sei $n \geq |S|$ und $\mathcal{H}$ die Menge aller Funktion $U \to \{1, \ldots, n\}$.
Offensichtlich enthält $\mathcal{H}$ Funktionen, die injektiv auf S sind.

Idee:
Ersetze $\mathcal{H}$ durch eine kleinere Klasse von Funktionen, die für jedes $S' \subseteq U$, $|S| = |S'|$ eine auf S' injektive Funktion h enthält.

Universelles Hashing

Definition

Es sei $\mathcal{H}$ eine nicht-leere Menge von Funktionen $U \to \{1, \ldots, m\}$.
Wir sagen, daß $\mathcal{H}$ eine universelle Familie von Hashfunktionen ist, wenn für jedes $x, y \in U$, $x \neq y$ folgendes gilt:

$$\frac{|\{\, h \in \mathcal{H} \mid h(x) = h(y) \,\}|}{|\mathcal{H}|} \leq \frac{1}{m}$$

Wir können auch Funktionen $U \to \{0, \ldots, m-1\}$ erlauben, was oft praktischer ist.

Theorem

Es sei $\mathcal{H}$ eine universelle Familie von Hashfunktionen $U \to \{1, \ldots, m\}$ für das Universum U und $S \subseteq U$ eine beliebige Untermenge.
Wenn $x \in U$, $x \notin S$ und $h \in \mathcal{H}$ eine zufällig gewählte Hashfunktion ist, dann gilt

$$E\Big(|\{\, y \in S \mid h(x) = h(y) \,\}|\Big) \leq \frac{|S|}{m}.$$

Beweis.

$$E\Big(|\{\, y \in S \mid h(x) = h(y) \,\}|\Big) =$$

$$\sum_{y \in S} \Pr[h(x) = h(y)] = \sum_{y \in S} \frac{|\{\, h \in \mathcal{H} \mid h(x) = h(y) \,\}|}{|\mathcal{H}|} \leq \frac{|S|}{m}$$

Universelles Hashing

Im folgenden nehmen wir an, daß wir eine zufällige Hashfunktion aus einer geeigneten universellen Familie verwenden.

In der Praxis verwendet man oft einfachere Hashfunktionen, aber Experimente deuten an, daß sie sich praktisch so gut wie universelle Hashfunktionen verhalten.

Sie funktionieren im Worst-Case nicht, aber haben sich doch praktisch bewährt. Wir müssen darauf achten, daß die Schlüssel möglichst gleichmäßig und unabhängig voneinander verteilt werden.

Hashing mit Verkettung

Auf Hashing basiertes assoziatives Array:

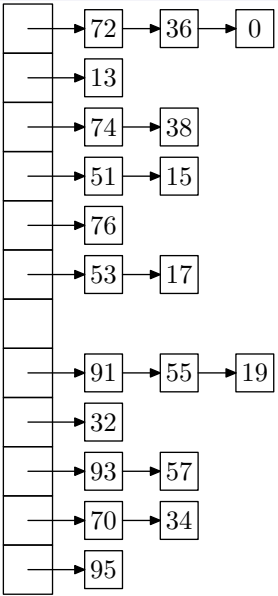
Wie behandeln wir Kollisionen?

Eine einfache Möglichkeit:

- Die Hashtabelle hat m Positionen
- Jede Position besteht aus einer verketteten Liste
- Die Liste auf Position k enthält alle x mit $h(x) = k$

Vorteile: Einfügen, Suchen und Löschen sehr einfach umzusetzen.

Nachteile: Speicherverschwendung?



Beispiel einer Hashtabelle mit Verkettung

- 20 Elemente
- Tabellengröße 12
- Lastfaktor $\alpha = 5/3$

Hashing mit Verkettung – Analyse

Hashtabelle der Größe m mit n Elementen gefüllt.

Erfolglose Suche:

Sei x ein Element, das nicht in der Tabelle ist.

$$\Pr[h(x) = k] = 1/m$$

Sei L_i die Größe der Liste auf Position i.
Erwartete Anzahl besuchter Listenelemente:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} L_k = \frac{n}{m} = \alpha$$

Laufzeit $O(\alpha)$.

Hashing mit Verkettung – Analyse

Erfolgreiche Suche:
Wir wählen ein Element x aus der Tabelle zufällig aus.
Es bestehe S aus den anderen Elementen in der Tabelle.

Erwartete Anzahl von anderen Elementen in der Liste, die x enthält:

$$E(\{\, y \in S \mid h(x) = h(y) \,\}) \leq \frac{n-1}{m}$$

Da x zufällig gewählt wurde, ist x ein zufälliges Element in dieser Liste und daher an zufälliger Position.

$\rightarrow$ Im Durchschnitt sind die Hälfte der anderen Elemente vor x.

Anzahl besuchter Listenelemente im Durchschnitt:
$\leq 1 + \alpha/2$ (x und Hälfte der Fremden)

Hashing mit Verkettung – Analyse

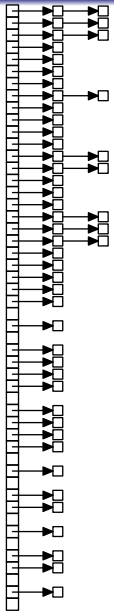
Insgesamt erhalten wir folgende Abschätzung:

Theorem

Sei eine Hashtabelle mit Verkettung der Größe m gegeben, die mit n Schlüsseln gefüllt ist.
Bei universellem Hashing benötigt

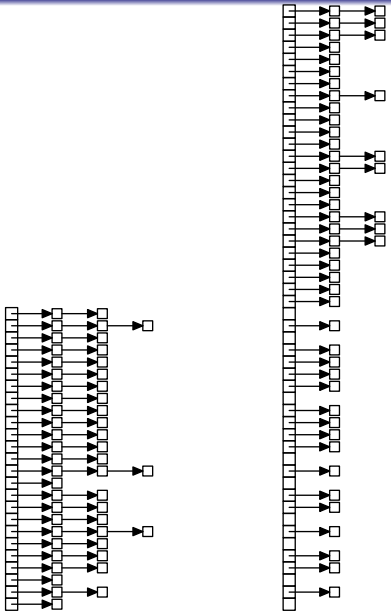
1. *eine erfolglose Suche nach einem beliebigen Element $x \in U$ im Durchschnitt höchstens $\alpha = n/m$ viele Vergleiche,*
2. *eine erfolgreiche Suche nach einem zufällig gewählten Element x aus der Tabelle im Durchschnitt höchstens $1 + \alpha/2$ viele Vergleiche.*

Hashing ist sehr effizient, wenn wir die Hashfunktion schnell auswerten können und α nicht zu groß ist.



Ein größeres Beispiel einer Hashtabelle mit Verkettung

- 50 Elemente
- Tabellengröße 50
- Lastfaktor $\alpha = 1$



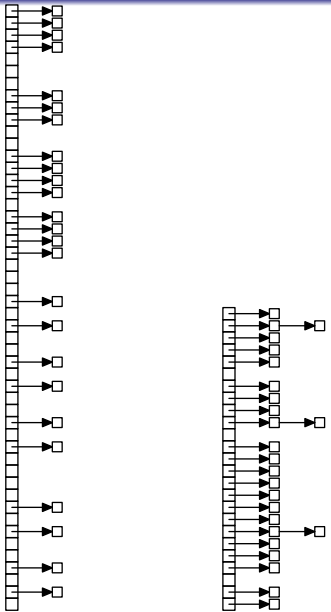
Rehashing

Nach Einfügen ist Tabelle zu voll

- Lastfaktor $\alpha = 2$
- Rehashing auf doppelte Größe
- $\rightarrow$ Lastfaktor 1

Wie teuer?

Amortisierte Kosten: $O(1)$



Rehashing

Nach Löschen ist Tabelle zu leer (Speicherplatz!)

- Lastfaktor $\alpha = 1/2$
- Rehashing auf halbe Größe
- $\rightarrow$ Lastfaktor 1

Wie teuer?

Amortisierte Kosten: $O(1)$

Java

```
int slot(K k) {
  int n = k.hashCode()%table.size();
  return n > 0 ? n : -n;
}
```

Java

```
public D find(K k) {
  int l = slot(k);
  if(table.get(l) == null) return null;
  return table.get(l).find(k);
}
```

Java

```
public void insert(K k, D d) {
  int l = slot(k);
  if(table.get(l) == null) table.set(l, new ADList⟨K, D⟩());
  if(!table.get(l).containsKey(k)) size++;
  table.get(l).put(k, d);
  rehash();
}
```

Java

```
public void delete(K k) {
  int l = slot(k);
  if(table.get(l) == null || !table.get(l).containsKey(k)) return;
  table.get(l).delete(k);
  if(table.get(l).isEmpty()) table.set(l, null);
  size--;
  rehash();
}
```

Java

```
void rehash() {
  if(size ≤ table.size() && 4 * size + 10 ≥ table.size()) return;
  int newtablesize = 2 * size + 10;
  List⟨ADList⟨K, D⟩⟩ newtable;
  newtable = new ArrayList⟨ADList⟨K, D⟩⟩(newtablesize);
  for(int i = 0; i < newtablesize; i++) { newtable.add(null); }
  Iterator⟨K, D⟩ it;
  for(it = iterator(); it.more(); it.step()) {
    int l = it.key().hashCode()%newtablesize;
    if(l < 0) l = −l;
    if(newtable.get(l) == null) newtable.set(l, new ADList⟨K, D⟩());
    newtable.get(l).put(it.key(), it.data());
  }
  table = newtable;
}
```