Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 9, Abgabe 18.6.

Aufgabe 1

Beweisen Sie den lokalen Umkehrsatz und die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen.

Aufgabe 2

(i) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x + y + z - e^{xyz} = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ den Wert von z als eine Funktion von (x, y) bestimmt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$f(x, u, v) = \begin{pmatrix} \sin x + \sin u + v^2 \\ x^5 + \cosh u + e^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

für u und v als Funktionen von x in einer Umgebung des Punktes $(0, 0, 0)$ gelöst werden können. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix für die Funktion $x \mapsto (u(x), v(x))$ im Punkt 0.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} e^x + e^{2y} + e^{3u} + e^{4v} \\ e^x + e^y + e^u + e^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

für u und v als Funktionen von x and y in einer Umgebung des Punktes $(0, 0, 0, 0)^T$ gelöst werden können. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix für die Funktion $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 4

Sei $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$..

(i) Zeigen Sie, dass

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y) - z = 0\},$$

eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Bestimmen Sie einen Normalvektor an M im Punkt $(x, y, \varphi(x, y)) \in M$ und geben Sie eine Basis für den Tangentialraum in diesem Punkt an.

Aufgabe 5*

Sei $O(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T X = \mathrm{Id}\}$ die orthogonale Gruppe.

(i) Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $O(n)$ in Id der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen ist.

Bemerkung: Eine Matrix A ist schiefsymmetrisch, falls $A^T = -A$.