

Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
14. November 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Mehrdimensionale Normalverteilung

Standardnormalverteilung

- > Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unabhängige Zufallsvariablen
- > Für die gemeinsame Dichte gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T x\right)$$

- > Sei $\mu = 0 \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma = I_n$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$
- > Dann gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right)$$

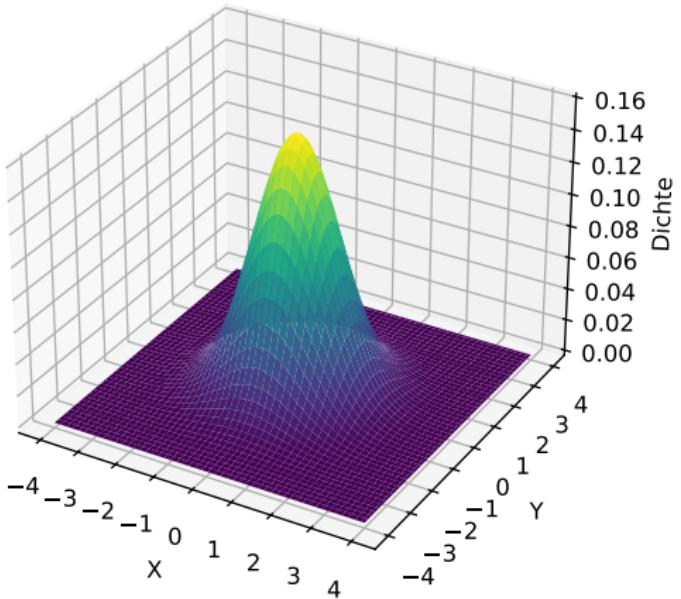
- > Für die einzelnen Koordinaten gilt

$$\mu_i = \mathbb{E}[X_i] \quad \text{und} \quad \Sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$$

- > Ein Zufallsvektor X mit der Dichte f heißt *n-dimensional standardnormalverteilt*
- > **Notation:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ bzw. $\mathcal{N}(\mathbf{0}, I_n)$

Standardnormalverteilung

2D Standardnormalverteilung



Normalverteilung

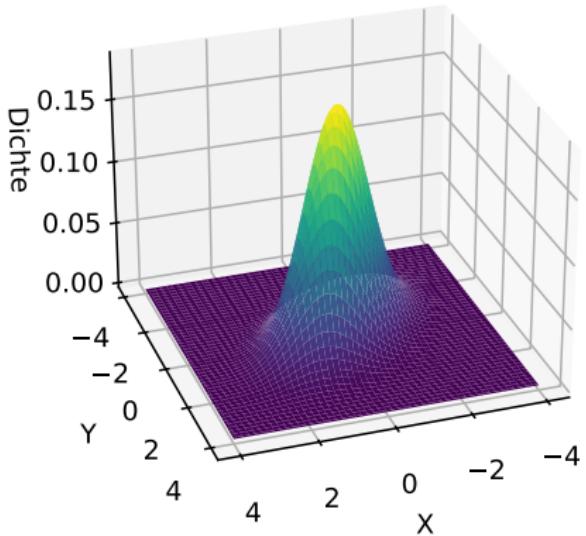
- > Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I_n)$ n -dimensional standardnormalverteilt
- > Sei $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- > Dann ist $X = AZ + \mu$ normalverteilt
- > Es gilt $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$ und $\Sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$ mit $\Sigma = AA^T$
- > Falls Σ invertierbar ist, hat X die Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right)$$

- > **Notation:** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

Normalverteilung

2D Standardnormalverteilung



Normalverteilung

Übung 68

Seien X und Y unabhängig, standardnormalverteilt. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von X und $aX + Y$ für $a \in \mathbb{R}$.

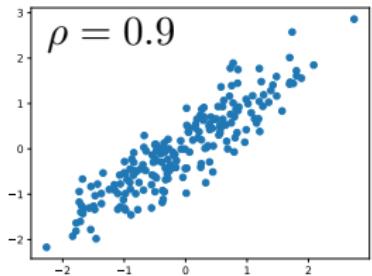
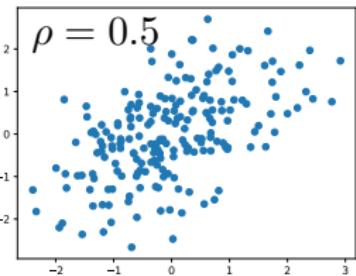
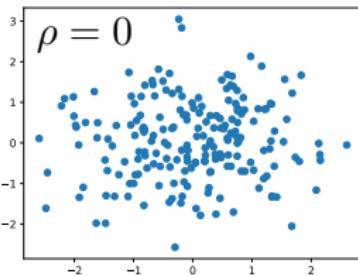
Zweidimensionale Normalverteilung

- > Da $\Sigma = AA^T$, ist die *Kovarianzmatrix* symmetrisch
- > Für $n = 2$ ergibt sich mit $\sigma_{12} = \sigma_{21}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

- > Seien $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ mit $\text{cov}(X_1, X_2) = \rho$, dann ist $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ mit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$



Zweidimensionale Normalverteilung

Beispiel 122

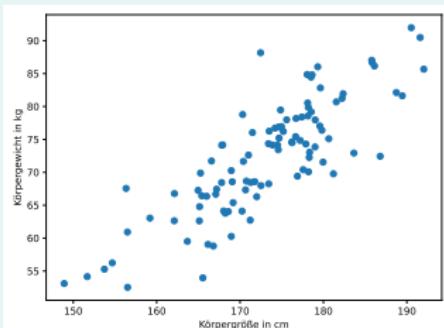
> Angenommen Körpergewicht und -größe sind gemeinsam normalverteilt → Warum ist das keine realistische Annahme?

> Sei $(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit

$$\mu = \begin{pmatrix} 173 \\ 73 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 100 & 40 \\ 40 & 25 \end{pmatrix}$$

> Was ist die Korrelation von X und Y ?

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} = 0.8$$



Normalverteilung

- > Seien X, Y Zufallsvariablen
- > Falls X, Y unabhängig sind, gilt $\text{cov}(X, Y) = 0$
- > Im Allgemeinen folgt aus $\text{cov}(X, Y) = 0$ nicht, dass X, Y unabhängig sind
- > Für die Normalverteilung gilt die Aussage!

Satz 31

Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung eine n -dimensionale Normalverteilung ist. Falls $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$, dann sind die Zufallsvariablen unabhängig.

Beweis: Satz 9.25 in [Dehling and Haupt, 2006].

Normalverteilung

Übung 69

Seien $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ mit $\text{cov}(X, Y) = 0$. Was ist

$$\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq -1)?$$

Normalverteilung

- > Seien X, Y gemeinsam normalverteilte Zufallsvariablen
- > Welche Verteilung hat $X + Y$?

Satz 32

Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung eine n -dimensionale Normalverteilung ist. Für beliebige Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ist die Linearkombination $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ (eindimensional) normalverteilt.

Falls die Zufallsvariablen unabhängig sind mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, dann gilt

$$b + \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim \mathcal{N}\left(b + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Normalverteilung

Übung 70

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, standardnormalverteilt.

- > Bestimmen Sie die Verteilung des Durchschnitts $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- > Was passiert für $n \rightarrow \infty$?
- > Bestimmen Sie die Verteilung von $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$.

Literatur I

 Bundesministerium für Gesundheit (2024).

Infektionsradar.

https:

//infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

 Dehling, H. and Haupt, B. (2006).

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

Springer-Verlag.

Literatur II

 Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).

Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.

Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

 Henze, N. et al. (1997).

Stochastik für Einsteiger, volume 4.

Springer.