Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen
Aachen, den 16. 10. 2025

Übungsblatt 2 — Analysis I — WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 1.

Finden Sie geschlossene Ausdrücke für die folgenden Summen und beweisen Sie Ihre Vermutungen mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \quad = \quad ?$

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = -1 + 4 - 9 + \ldots (-1)^n n^2 \quad = \quad ?$

Aufgabe A 2.

Zeigen Sie das (mengentheoretische) Distributivgesetz, also

$$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$$

für Mengen M, N und P.

Aufgabe A 3.

Zeigen Sie, dass für Mengen A, B und C die Gleichung

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

gilt.

Aufgabe A 4.

Betrachten Sie die Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x + 1, & 0 \le x < 5 \end{cases}$$

und geben Sie die folgenden Informationen an (ohne Begründung):

(a) Den größtmöglichen Definitionsbereich (in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$).

(b) Das Bild der Funktion f.

(c) Das Urbild $f^{-1}(\{2\})$ der 2.

(d) Das Bild $f((-1, 1))$ des Intervalls $(-1, 1)$.

(e) Das Urbild $f^{-1}((-1, 0))$ des Intervalls $(-1, 0)$.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 1. (Vollständige Induktion, 5 Punkte)

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Größe eine natürliche Zahl darstellt:

$$\frac{2^{4n} - (-1)^n}{17}.$$

Aufgabe B 2. (De Morgan, 4+4 Punkte)

Zeigen Sie die (mengentheoretischen) De Morganschen Regeln, also für Mengen $A, B \subseteq X$ die Regeln

(i) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ und

(ii) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.

Aufgabe B 3. (4+3 Punkte)

(a) Bringen Sie die folgenden Mengen in eine aufzählende Schreibweise, d.h. schreiben Sie die Mengen als $M = \{n_1, \ldots, n_N\}$. Wir lassen $M = \emptyset$ als mögliche Lösung zu.

  (1) $M_1 = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 42\}$,

  (2) $M_2 = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 42\}$,

  (3) $M_3 = M_2 \cap \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}$,

  (4) $M_4 = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 42 \wedge (n = 5k \text{ für ein } k \in \mathbb{N})\}$,

(b) Schreiben Sie die folgenden Mengen als $M = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$, wobei $p(n)$ eine *Aussage* über $n \in \mathbb{N}$ ist.

  (1) $M_5 = \{42, 84, 126\}$,

  (2) $M_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42\}$,

  (3) $M_7 = \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe B 4. (Urbild trifft Schnitt und Vereinigung, 3+3 Punkte)

Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $B_1, B_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Zeigen Sie

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.