RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Westdickenberg Tel.: +49 241 80-94569
Templergraben 55 Sekr.: +49 241 80-94921
52062 Aachen mwest@instmath.rwth-aachen.de
Raum 110/111 https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

Teil A

Aufgabe A20
Sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen $x_0 \in [a,b]$ ist ein Punkt, so dass f auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist und angenommen der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass f bei x_0 differenzierbar ist und dass f' bei x_0 stetig ist.

Lösung
Sei $h \neq 0$, sodass $x_0 + h \in [a,b]$. Sei I das Intervall $[x_0 + h, x_0]$, falls $h < 0$, bzw. $[x_0, x_0 + h]$, falls $h > 0$. Nach Voraussetzung ist f stetig auf I und differenzierbar im Inneren von I. Nach dem Mittelwertsatz gilt für ein $\xi = \xi(h)$ zwischen x_0 und $x_0 + h$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi(h)).$$

Falls $x_0 \in (a,b)$, dann gilt Vorheriges für alle $h \neq 0$ mit $|h|$ hinreichend klein. Es gilt $0 < |\xi(h) - x_0| < h$ und daher $\lim_{h\to 0} \xi(h) = x_0$. Es folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\xi(h)) = \lim_{x\to x_0} f'(x_0) =: u.$$

Also ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = u$ und f' ist stetig in x_0.
Die Fälle $x_0 \in \{a,b\}$ folgen analog: betrachte entweder alle hinreichend kleinen $h > 0$ und $\lim_{h\downarrow 0}$, bzw. alle hinreichend großen $h < 0$ und $\lim_{h\uparrow 0}$.

Aufgabe A21
Beweisen Sie, dass jede konvexe Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Geben Sie ein Beispiel einer konvexen Funktion $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ an, die nicht stetig ist.

Lösung
Wir zeigen Stetigkeit in einem beliebigen Punkt $x \in I$. Da $x \in I$ innerer Punkt, existieren $u, v \in I$ mit $u < x < v$.
Für jedes z mit $u < z < v$ und $z \neq x$ gilt dann

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(v) - f(x)}{v - x}.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Konvexität, für $z < x$ kann man z als $z = \lambda u + (1 - \lambda)x$ darstellen, dann ist $\lambda = \frac{x-z}{x-u}$ und $f(z) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(x) = \frac{(x-z)f(u)+(z-u)f(x)}{(x-u)}$, daraus folgt durch Umstellung die linke Ungleichung, und man kann x als $x = \lambda z + (1 - \lambda)v$ darstellen, daraus bekommt man $\lambda = \frac{v-x}{v-z}$ und $f(x) \leq \lambda f(z) + (1 - \lambda)f(v)$ und schließlich die rechte Ungleichung. Der Beweis für $z > x$ geht analog.
Somit gilt insbesondere $|f(z) - f(x)| \leq |z - x| \max\{|\frac{f(x)-f(u)}{x-u}|, |\frac{f(v)-f(x)}{v-x}|\}$, also lokal Lipschitz-stetig in jedem Punkt, also insbesondere stetig in jedem Punkt.
Die Funktion $g(x) = 0$ für $x \in (0,1)$ und $g(0) = g(1) = 1$ ist konvex aber nicht stetig.

Aufgabe A22

(i) Seien f_1, f_2 zwei konvexe Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $f_1 + f_2$ konvex ist.

(ii) Sei I eine Indexmenge und sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von konvexen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $\sup_{i\in I} f_i(x) < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ konvex ist.

Lösung

1. Seien x_0 und $x_1 \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ und $x_t := tx_1 + (1 - t)x_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x_t) &= f_1(x_t) + f_2(x_t)\\ &\overset{f_1,f_2 \text{ konv.}}{\leq} (1-t)f_1(x_0) + tf_1(x_1) + (1-t)f_2(x_0) + tf_2(x_1)\\ &= (1-t)\big(f_1(x_0) + f_2(x_0)\big) + t\big(f_1(x_1) + f_2(x_1)\big)\\ &= (1-t)(f_1 + f_2)(x_0) + t(f_1 + f_2)(x_1).\end{aligned}$$

2. Seien x_0 und $x_1 \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ und $x_t := tx_1 + (1 - t)x_0$. Dann gilt für alle $j \in I$

$$\begin{aligned}f_j(x_t) &\overset{f_j \text{ konv.}}{\leq} (1-t)f_j(x_0) + tf_j(x_1) \leq \sup_{i\in I} \big((1-t)f_i(x_0) + tf_i(x_1)\big)\\ &\leq (1-t)\sup_{i\in I} f_i(x_0) + t\sup_{i\in I} f_i(x_1).\end{aligned}$$

Bilden wird das Supremum über alle $j \in I$, so folgt die Behauptung.

Aufgabe A23
Beweisen Sie für alle $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $a, b \geq 0$ die *Young'sche Ungleichung*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Zeigen Sie, dass Gleichheit gilt, genau dann wenn $a^p = b^q$ gilt.

Lösung
Falls $a = 0$ oder $b = 0$, dann folgt die Ungleichung sofort. Es gilt exp ist differenzierbar mit Ableitung exp. Daher gilt $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist exp streng konvex nach Korollar 8.42. Setze $t = \frac{1}{p} \in (0, 1)$. Dann gilt $(1 - t) = \frac{1}{q}$. Es folgt für $a, b > 0$, dass

$$\begin{aligned}ab = a^{\frac{p}{p}}b^{\frac{q}{q}} &= \exp\big(\log(a^{\frac{p}{p}}b^{\frac{q}{q}})\big)\\ &= \exp\big(\frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q)\big)\\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{p}\exp(\log(a^p)) + \frac{1}{q}\exp(\log(b^q))\\ &= \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.\end{aligned}$$

Falls Gleichheit in der Young'schen Ungleichung gilt, dann muss auch Gleichheit in $(*)$ gelten. Da exp strikt konvex ist, folgt daraus $\log(a^p) = \log(b^q)$ und aufgrund der Injektivität von log, dass $a^p = b^q$.
Sei nun umgekehrt $a^p = b^q$. Dann folgt wegen $q = \frac{p}{p-1}$, dass

$$ab = a(a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{1+\frac{p}{\frac{p}{p-1}}} = a^{1+p-1} = a^p = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^p = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Aufgabe A24
Beweisen Sie die Ungleichung

$$x \;+\; \frac{ab}{x} \;<\; b \;+\; a \qquad \big(0 < a < x < b\big).$$

Lösung
Wir betrachten die linke Seite der Ungleichung und bestimmen deren zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} g\;(x) &:= \; x + \frac{ab}{x} \\ g'\,(x) &= \; 1 - \frac{ab}{x^2} \\ g''(x) &= \qquad \frac{2ab}{x^3} \end{aligned}$$

Da $x > 0$ ist, gilt $g''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Also ist g strikt konvex.
Als strikt konvexe Funktion nimmt $g \;:\; [a,b] \to \mathbb{R}$ alle Maxima auf dem Rand von $[a,b]$ an.
Diese Maximalwerte sind:

$$\begin{aligned} x = a: &\qquad g(a) \;=\; a + \frac{ab}{a} \;=\; a + b \;=\; b + a \\ x = b: &\qquad g(b) \;=\; b + \frac{ab}{b} \;=\; b + a \end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in (a,b)$, dass

$$g(x) \;=\; x + \frac{ab}{x} \;<\; b + a\;.$$

Aufgabe A25
Benutzen Sie Obersummen und Untersummen um $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \; dx$ zu berechnen.
Hinweis: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

Lösung
Sei P_n die Zerlegung

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Die Funktion sin ist stetig und somit existieren für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ und $x_i := \frac{i\pi}{n}$ die Werte

$$m_i := \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} \sin(x), \qquad \text{und } M_i := \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} \sin(x).$$

Wir berechnen eine zur Partition P gehöhrende Obersumme unter Ausnutzung der Monotonie von sin:

$$\begin{aligned} O(P_n, \sin) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(i\frac{\pi}{2n}\right) \\ &= \frac{\pi}{2n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \end{aligned}$$

und eine Untersumme

$$\begin{aligned} U(P_n, \sin) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sin\left((i-1)\frac{\pi}{2n}\right) \\ &= \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \sin\left(i\frac{\pi}{2n}\right) \\ &= \frac{\pi}{2n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)}. \end{aligned}$$

Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, also

$$\frac{\pi}{2n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4n}\right)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 2.$$

Es folgt mit der Stetigkeit von sin und wegen $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, dass

$$\lim_{n\to\infty} U\left(P_n, \sin\right) = \lim_{n\to\infty} O(P_n, \sin) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1.$$

Teil B

Aufgabe B18 [2 Punkte]

Zeigen Sie anhand eines Beispiels die Notwendigkeit der Voraussetzung im Mittelwertsatz, dass der Definitionsbereich D der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Lösung

Angenommen wir haben $f : [-1, 0] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f = 0$ in $[-1, 0]$ und $f = 1$ in $[1, 2]$, dann ist f auf D^o differenzierbar mit $f' = 0$ auf D^o. und stetig auf D. Nun existiert aber für $f(1) - f(0) = 1$ kein $f'(\xi) = 1$.

Aufgabe B19 [6 Punkte]

Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie die Formel:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$

für alle $x \in I$.

Lösung

Wir zeigen die Behauptung mit dem Satz von L'Hospital. Sei x fest, dann definieren wir

$$g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} : h \mapsto f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)$$

und

$$k : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} : h \mapsto h^2,$$

wobei $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $x \pm \varepsilon \in (a, b)$. Dann erfüllt der Grenzwert $\lim_{h\to 0} g(h) = \lim_{h\to 0} k(h) = 0$ und außerdem gilt $k(h) \neq 0$ für $h \neq 0$. Sowohl g als auch k sind differenzierbar mit $g'(h) = f'(x+h) - f'(x-h)$ und $k'(h) = 2h$. Weiterhin ist $k'(h) \neq 0$ für $k \neq 0$. Mit dem Satz von L'Hospital erhalten wir, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{k(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{g'(h)}{k'(h)},$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.
Dies prüfen wir nun. Da f zwei mal differenzierbar ist, erhalten wir

$$\frac{g'(h)}{k'(h)} = \frac{f'(x + h) - f'(x - h)}{2h} = \frac{1}{2}\frac{f'(x + h) - f'(x)}{h} + \frac{1}{2}\frac{f'(x - h) - f'(x)}{-h} \xrightarrow[(h\to 0)]{} f''(x).$$

Aufgabe B20 [6+4 = 10 Punkte]

(i) Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $(f_k)_{k=1}^m$ eine Familie konvexer Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf\{f_1(x_1) + \cdots + f_m(x_m) \mid x_k \in \mathbb{R},\, x_1 + \cdots + x_m = x\}$$

konvex ist.

(ii) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend. Beweisen Sie, dass $\phi \circ f$ konvex ist.

Lösung

1. Seien $u, v \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Definition von f existieren $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^m u_i = u$, sodass

$$f(u) = \inf\{f_1(x_1) + \cdots + f_m(x_m) \mid x_k \in \mathbb{R},\, x_1 + \cdots + x_m = u\} > \sum_{i=1}^m f_i(u_i) - \varepsilon,$$

sowie $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}$ sodass $\sum_{i=1}^m v_i = v$ und $f(v) > \sum_{i=1}^m f_i(v_i) - \varepsilon$.
Da die Funktionen $f_i, i \in \underline{m}$ konvex sind, folgt

$$\sum_{i=1}^m f_i(tv_i+(1-t)u_i) \leq \sum_{i=1}^m tf(v_i)+(1-t)f(u_i) = t\sum_{i=1}^m f_i(v_i)+(1-t)\sum_{i=1}^m f_i(u_i) < tf(v)+(1-t)f(u)+2\varepsilon.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^m tv_i + (1-t)u_i = tv + (1-t)u.$$

Nach Definition von f folgt daher

$$f(tv + (1-t)u) \leq \sum_{i=1}^m f_i(tv_i + (1-t)u_i) < tf(v) + (1-t)f(u) + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $f(tv + (1-t)u) \leq tf(v) + (1-t)f(u)$. Also ist f konvex.

2. Seien x_0 und $x_1 \in \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ und $x_t := tx_1 + (1-t)x_0$. Es folgt, da f konvex ist und ϕ monoton steigend, dass

$$(\phi \circ f)(x_t) \leq \phi(tf(x_1) + (1-t)f(x_0))$$

Da ϕ konvex ist, folgt

$$\phi(tf(x_1) + (1-t)f(x_0)) \leq t(\phi \circ f)(x_1) + (1-t)(\phi \circ f)(x_0),$$

also ist $\phi \circ f$ konvex.

Aufgabe B21 [3+3+1 = 7 Punkte]

(i) Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

(a) Wenn f in $x_0 \in I$ ein lokales Minimum annimmt, dann ist es auch ein globales Minimum.

(b) Wenn f in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum annimmt, ist f in einer Umgebung von x_0 konstant.

(ii) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe und stetige Funktion. Beweisen Sie, dass g ihr Supremum auf dem Rand des Intervalls annimmt.

Lösung

(i) (a) Angenommen es gibt ein lokales Minimum $x_0 \in (a,b)$ und ein $x_1 \in (a,b)$, so dass $f(x_1) < f(x_0)$. Dann gilt für alle $t \in [0,1]$ und $x_t := tx_1 + (1-t)x_0$ aufgrund der Konvexität von f, dass

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1) < f(x_0)$$

Da x_0 lokales Minimum ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in (a,b)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt. Wegen $\lim_{t\to 0} x_t = x_0$ folgt, dass es ein $s > 0$ gibt, sodass $|x_s - x_0| < \varepsilon$. Es folgt $f(x_s) \geq f(x_0)$. Dies ist ein Widerspruch.

(b) Da x_0 ein lokales Maximum und I offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$. Angenommen, es gäbe keine Umgebung von x_0, auf der f konstant ist. Dann gibt es insbesondere einen Punkt $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, sodass $f(x_1) < f(x_0)$. Betrachten wir die Konvexungleichung für $t = 1/2$ mit $y_0 := x_1(= x_0 + (x_1 - x_0))$ und $y_1 := 2x_0 - x_1(= x_0 - (x_1 - x_0))$

$$f(x_0) = f(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_1) \leq \frac{f(y_0) + f(y_1)}{2} \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_0) < f(x_0)$$

Dies ist ein Widerspruch.

(ii) Da g stetig ist, wird das Supremum angenommen. Angenommen, g nimmt ein Maximum in (a, b) an. Dann ist g laut (i)(b) in einer Umgebung von diesem Maximum konstant. In dieser Umgebung kann dann die strikte Konvexitätsungleichung nicht gelten. Also kann g kein Maximum in (a, b) annehmen.

Aufgabe B22 [6 Punkte]

Zeigen Sie die Ungleichung

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

für das harmonische, das arithmetische und das geometrische Mittel von $x_1, .., x_n \in \mathbb{R}_{>0}$.
Hinweis: Jensen's Ungleichung.

Lösung

Die Exponentialfunktion exp ist strikt konvex. Da alle x_i positiv sind, rechnen wir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \exp\left(-\log(x_i)\right) \geq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -\log(x_i) \frac{1}{n} \right) = \exp\left(-\log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \frac{1}{n} \right) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-\frac{1}{n}}$$

Bilden wir das Inverse bezüglich Multiplikation dieser Ungleichung, dann erhalten wir die erste Ungleichung, die zu zeigen war.
Außerdem gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \exp\left(\log(x_i)\right) \geq \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log(x_i) \right) = \exp\left(\log\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \right) \right) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}},$$

und somit die zweite Ungleichung, die zu zeigen war.

Aufgabe B23 [6 Punkte]

Sei $b > 0$. Benutzen Sie Obersummen und Untersummen um

$$\int_0^b x^3 \, dx$$

zu berechnen. *Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ und $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Lösung

Wir wählen eine äquidistante Zerlegung von $[0, b]$ in n Teilintervalle mit Zwischenpunkten $x_i = \frac{i}{n} b$, also

$$0 = x_0 \ < \ x_1 = \frac{1}{n} b \ < \ x_2 = \frac{2}{n} b \ < \ \ldots \ < \ x_{n-1} = \frac{n-1}{n} b \ < \ x_n = b$$

und bemerken, dass x^3 als Funktion streng monoton steigend ist, also:

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^3 \;=\; x_i^3 \;=\; \frac{b^3}{n^3} i^3$$

und

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^3 \;=\; x_{i-1}^3 \;=\; \frac{b^3}{n^3}(i-1)^3 \,.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
O(f,P) \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^3\right] \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \;\frac{b^3}{n^3} i^3 \;\;\cdot \left(\frac{i}{n} b - \frac{i-1}{n} b\right) \\
&=\; \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 \cdot (i - i + 1) = \;\frac{b^4}{n^4} \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \;=\; \frac{b^4}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&=\; \frac{b^4}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}
U(f,P) \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} x^3\right] \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \;\frac{b^3}{n^3} (i-1)^3 \;\;\cdot \left(\frac{i}{n} b - \frac{i-1}{n} b\right) \\
&=\; \frac{b^4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \cdot (i - i + 1) = \;\frac{b^4}{n^4} \left(\sum_{i=1}^{n} (i-1)\right)^2 \;=\; \frac{b^4}{n^4} \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 \\
&=\; \frac{b^4}{4} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Da die Grenzwerte wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \;=\; 1 \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

gleich sind, erhalten wir:

$$O(f) \;=\; \frac{b^4}{4} \;=\; U(f) \,.$$