Splay-Bäume

- Splay-Bäume sind eine selbstorganisierende Datenstruktur.
- Basiert auf binären Suchbäumen.
- Restrukturiert durch Rotationen.
- Keine Zusatzinformation in Knoten.
- Nur amortisiert effizient.
- Einfach zu implementieren.
- Viele angenehme Eigenschaften (z.B. „selbstlernend“)
- Nur eine komplizierte Operation: splay

Die Splay-Operation

Gegeben ist ein binärer Suchbaum und ein Knoten x.

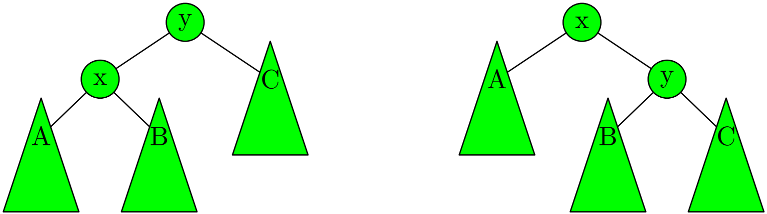
Algorithmus

procedure splay(node x) :
  while x $\neq$ root **do**
    splaystep(x)
  od

Wir führen Splay-Schritte auf x aus, bis es zur Wurzel wird.

Ein Splay-Schritt ist ein zig, zag, zig-zig, zig-zag, zag-zig oder zag-zag.

Zig und Zag

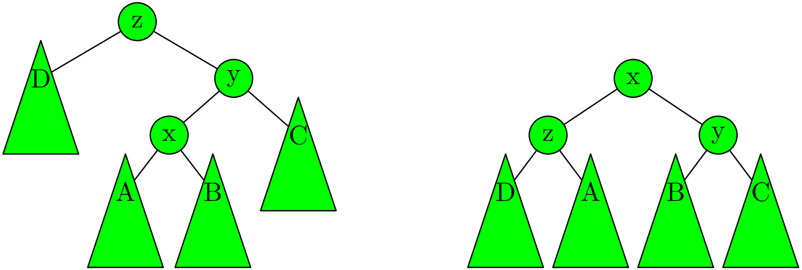


Ein zig auf x ist eine Rechtsrotation des Vaters von x.

Sie wird nur ausgeführt, wenn x das linke Kind der Wurzel ist.

Ein zag ist eine Linksrotation des Vaters, wenn x das rechte Kind der Wurzel ist.

Zig-zag und Zag-zig

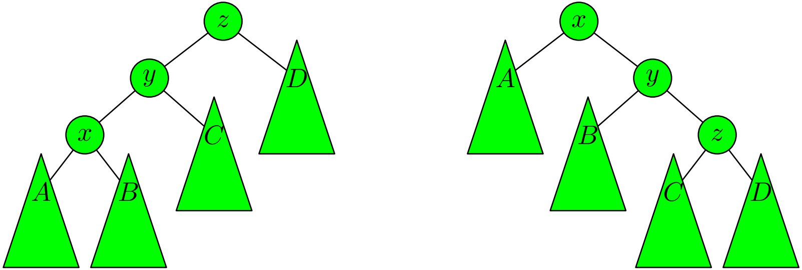


Ein Zig-zag auf x ist eine Rechtsrotation auf y gefolgt von einer Linksrotation auf z.

Dabei muß y das rechte Kind von z und x das linke Kind von y sein.

Zag-zig ist symmetrisch hierzu.

Zig-zig und Zag-zag



Ein Zig-zig auf x ist eine Rechtsrotation auf z gefolgt von einer Rechtsrotation auf y.

Dabei muß y das linke Kind von z und x das linke Kind von y sein.

Diese Operation sieht unerwartet aus!

Zag-zag ist wieder symmetrisch hierzu.

Amortisierte Analyse

Jeder Knoten x habe ein Gewicht $g(x) \in \mathbf{N}$.

Definition

- Der Kontostand eines Splay-Baums T ist $\sum_{v \in T} r(v)$.
- $r(v) = \Big\lfloor \log(\bar{g}(v)) \Big\rfloor$.
- $\bar{g}(v) = \sum_{u \in T(v)} g(u)$.
- $T(v)$ ist der Unterbaum mit Wurzel v

Amortisierte Analyse

Definition

Gegeben sei ein Splay-Schritt, der einen Splay-Baum T in einen Splay-Baum T' verwandelt.

Die amortisierten Kosten dieses Schrittes betragen

$$\sum_{v \in T'} r(v) - \sum_{v \in T} r(v) + 1.$$

Ein Schritt sind die tatsächlichen Kosten.

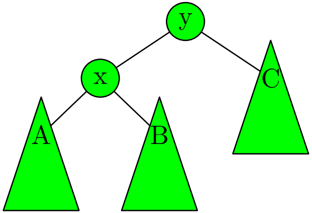
Der Rest ist eine Einzahlung oder Abhebung vom Konto.

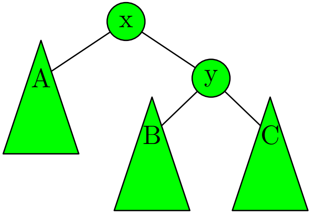
Lemma

Die amortisierten Kosten eines

- *zig sind* $\leq 1 + 3(r(y) - r(x))$,
- *zig-zag sind* $\leq 3(r(z) - r(x))$,
- *zig-zig sind* $\leq 3(r(z) - r(x))$.

x, y, z sind die Knoten in den entsprechenden Zeichnungen.
Auf x wird die Operation ausgeführt.
z ist Großvater, y ist Vater von x.

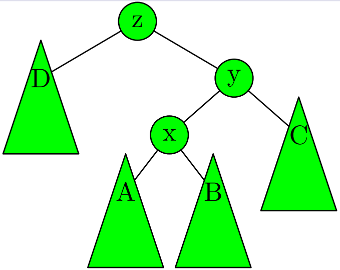


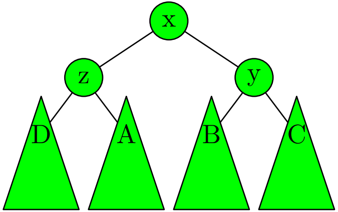


- $r'(x) = r(y)$
- $r'(y) \leq r(y)$
- $r(y) \geq r(x)$

Die amortisierten Kosten eines zig sind

$$\begin{aligned} 1 + r'(x) - r(x) + r'(y) - r(y) &\leq 1 + r'(y) - r(x) \\ &\leq 1 + r(y) - r(x) \leq 1 + 3(r(y) - r(x)). \end{aligned}$$



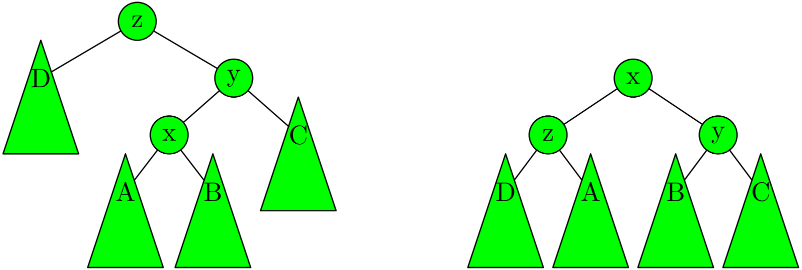


Wir nehmen erst einmal $r(z) > r(x)$ an.

- $r'(x) = r(z)$
- $r'(y) \leq r'(x) = r(z)$
- $r'(z) \leq r'(x) = r(z)$

- $r(y) \geq r(x)$
- $1 \leq r(z) - r(x)$

$$\begin{aligned} 1 + r'(x) + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) - r(z) &\leq 1 + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) \\ &\leq r(z) - r(x) + r(z) + r(z) - r(x) - r(x) = 3(r(z) - r(x)). \end{aligned}$$



Jetzt nehmen wir $r(z) = r(x)$ an.

- $r'(x) = r(z)$
- $r'(y) < r(x)$ oder $r'(z) < r(x)$ (sonst $r'(x) > r(z)$)

$$1 + r'(x) + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) - r(z)$$
$$\leq 1 + r'(y) + r'(z) - r(x) - r(y) \leq 0 = 3(r(z) - r(x))$$

(Zig-zig ähnlich)

Splay-Bäume – Analyse

Theorem

Die amortisierten Kosten einer Splay-Operation auf einem Knoten x sind $O\bigl(\log(\bar{g}(w)/\bar{g}(x))\bigr)$, wenn w die Wurzel des Baums ist.

Beweis.

Die amortisierten Kosten sind höchstens

$$1 + 3(r(v_t) - r(v_{t-1})) + 3(r(v_{t-1}) - r(v_{t-2})) + \\ + \ldots + 3(r(v_2) - r(v_1)) = 1 + 3r(v_t) - 3r(v_1),$$

wobei $v_t = w$ und $v_1 = x$.

$$1 + 3r(w) - 3r(x) = O(\log(\bar{g}(w)) - \log(\bar{g}(x))) = O(\log(\bar{g}(w)/\bar{g}(x)))$$

$\square$

AACHEN
VERSITY

Splay-Bäume – Suchen

Wir suchen folgendermaßen nach Schlüssel k:

1. Normale Suche im Suchbaum
2. Endet in Knoten x mit Schlüssel k oder in x^+ oder x^-
3. Wende Splay auf den gefundenen Knoten an
4. Siehe nach, ob k in Wurzel

Amortisierte Laufzeit:

$$O\left(\log\left(\frac{(\bar{g}(w))}{\bar{g}(x)}\right)\right) \text{ erfolgreiche Suche}$$

$$O\left(\log\left(\frac{\log(\bar{g}(w))}{\min\{\bar{g}(x^+), \bar{g}(x^-)\}}\right)\right) \text{ erfolglose Suche}$$

Splay-Bäume – Einfügen

Wir fügen einen Schlüssel k mit Gewicht a ein, der noch nicht vorhanden ist:

- Normale Suche im Suchbaum
- Einfügen eines neuen Knotens als Blatt
- Splay-Operation auf diesen Knoten

Amortisierte Laufzeit:

Das Konto wird zunächst erhöht.
x sei der neu eingefügte Knoten.
Die Splay-Operation benötigt $O(\log(\bar{g}(\bar{w}))/\bar{g}(x))$.

Splay-Bäume – Löschen

Wir löschen einen Schlüssel k:

1. Suche nach dem Schlüssel k
2. Siehe nach, ob k in der Wurzel ist
3. Splay-Operation auf dem größten Knoten im linken Unterbaum
4. Klassisches Löschen von k

Amortisierte Laufzeit:
Zuerst wie Suche:

$$O\left(\log\left(\frac{(\bar{g}(w))}{\bar{g}(x)}\right)\right) \text{ erfolgreiche Suche}$$

$$O\left(\log\left(\frac{\log(\bar{g}(w))}{\min\{\bar{g}(x^+), \bar{g}(x^-)\}}\right)\right) \text{ erfolglose Suche}$$

Dann sinkt der Kontostand, was wir aber nicht ausnutzen.

Splay-Bäume als assoziatives Array

Theorem

In einem anfänglich leeren Splay-Baum können n Operationen (Suchen, Einfügen, Löschen) in $O(n \log n)$ Schritten ausgeführt werden.

Beweis.

Wir setzen $g(x) = 1$.

Dann ist $\bar{g}(T)$ die Anzahl der Knoten im Baum.
Also ist $\bar{g}(T) \leq n$.
Die amortisierten Kosten einer Operation sind $O(\log(\bar{g}(T)) = O(\log n)$.
(Beim Einfügen kommt zur Splay-Operation noch die Erhöhung des Kontostands um $O(\log n)$ hinzu.) $\square$

Amortisierte Analyse – Wiederholung

Eine Datenstruktur werde durch n Operationen verändert:

$$D_0 \xrightarrow{t_1} D_1 \xrightarrow{t_2} D_2 \xrightarrow{t_3} \cdots \xrightarrow{t_n} D_n$$

Die Zeit dafür ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_i$.

Klassische Analyse:

- Jede Operation benötigt höchstens $f(n)$ Schritte
- Die Gesamtzeit ist $O(f(n)n)$.

Problematisch, wenn t_i sehr schwankend.

Amortisierte Analyse – Wiederholung

$$D_0 \xrightarrow{t_1} D_1 \xrightarrow{t_2} D_2 \xrightarrow{t_3} \cdots \xrightarrow{t_n} D_n$$

Wir definieren uns eine Potentialfunktion Φ mit:

1. $\Phi(D_0) = 0$
2. $\Phi(D_i) \geq 0$
3. $a_i := t_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$ für $i > 0$
4. a_i nicht sehr schwankend

Amortisierte Analyse:

- Zeige, daß $a_i \leq g(n)$
- Gesamtzeit höchstens $O(ng(n))$

$$ng(n) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} t_i + \Phi(D_n) + \Phi(D_0) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i$$

Splay-Bäume – Beispiel

Die Schlüssel von 1 bis 40 werden zufällig eingefügt und gelöscht.

Splaytrees und Optimale Suchbäume

Theorem

Gegeben sei ein Suchbaum T für n Schlüssel. Eine bestimmte Folge von m Suchoperationen in T benötige Zeit t.
Wenn wir die n Schlüssel in einen Splay-Baum einfügen und dann dieselbe Folge von Suchoperationen ausführen, dauert dies $O(n^2 + t)$.

Bedeutung:

Asymptotisch verhalten sich Splay-Bäume ebensogut wie optimale Suchbäume.

Der Splay-Baum benötigt aber Zeit, um die Zugriffshäufigkeiten zu „lernen“.

Beweis.

Sei $d(k)$ die Tiefe des Knotens mit Schlüssel k in T und d die Gesamttiefe von T. Wir definieren $g(k) = 3^{d-d(k)}$ als Gewichtsfunktion.

Die amortisierten Kosten einer Suche nach k sind:

$$O\left(\log\left(\frac{\bar{g}(w)}{\bar{g}(k)}\right)\right)$$

Es gilt $\bar{g}(w) \leq \sum_{i=1}^{n} 3^{d-d(k_i)} \leq \sum_{j=0}^{d} 2^j 3^{d-j} \leq 3^{d+1}$ und $\bar{g}(k) \geq g(k) = 3^{d-d(k)}$.

Die Kosten sind daher höchstens $O(\log(3^{d+1}/3^{d-d(k)}) = O(d(k))$.

Die Suche in T benötigt aber $\Omega(d(k))$ Zeit.

Das Aufbauen des Splaytrees geht in $O(n^2)$. $\square$

Java

```
private void splay(Searchtreenode⟨K, D⟩ t) {
  while(t.parent ≠ null) {
    if(t.parent.parent == null) {
      if(t == t.parent.left) t.parent.rotateright();   // Zig
      else t.parent.rotateleft(); } // Zag
    else if(t == t.parent.left && t.parent == t.parent.parent.left) {
      t.parent.parent.rotateright();   // Zig-zig
      t.parent.rotateright(); }
    else if(t == t.parent.left && t.parent == t.parent.parent.right) {
      t.parent.rotateright();   // Zig-zag
      t.parent.rotateleft(); }
    else if(t == t.parent.right && t.parent == t.parent.parent.right) {
      t.parent.parent.rotateleft();   // Zag-zag
      t.parent.rotateleft(); }
    else if(t == t.parent.right && t.parent == t.parent.parent.left) {
      t.parent.rotateleft();   // Zag-zig
      t.parent.rotateright(); }
  }
  root = t;
}
```

AACHEN
VERSITY

Java

```
public boolean containsKey(K k) {
  if(root == null) return false;
  Searchtreenode⟨K, D⟩ n = root, last = root;
  int c;
  while(n ≠ null) {
    last = n;
    c = k.compareTo(n.key);
    if(c < 0) n = n.left;
    else if(c > 0) n = n.right;
    else { splay(n); return true; }
  }
  splay(last); return false;
}
```

Java

```
public void insert(K k, D d) {
  super.insert(k, d);
  containsKey(k);
}
```

Java

```
public D find(K k) {
  containsKey(k);
  if(root ≠ null && root.key.equals(k)) return root.data;
  return null;
}
```

Java

```
public void delete(K k) {
  if(!containsKey(k)) return;
  if(root.left ≠ null) {
    Searchtreenode⟨K, D⟩ max = root.left;
    while(max.right ≠ null) max = max.right;
    splay(max);
  }
  super.delete(k);
}
```