Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Grundlagen der Algebra
Tutorium - Blatt 2

Das Blatt wird vom 23.10.2025 bis zum 28.10.2025 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Verneinungen)
Bilden Sie von jeder der folgenden Aussagen die Verneinung. Stellen Sie fest, ob die Aussage selbst oder ihre Verneinung wahr ist, und beweisen Sie es.

(a) $\exists x \in \mathbb{Z} \;\; \forall y \in \mathbb{Z} : \; x \cdot y = y$

(b) $\forall x \in \mathbb{Z} \;\; \exists y \in \mathbb{Z} : \; x \cdot y = y$

(c) $\forall M \subseteq \mathbb{Z} \;\; \exists x \in M : \; x = x$

(d) $\exists x \in \mathbb{Z} \;\; \forall y \in \mathbb{Z} : \; x + y = 0$

Aufgabe 2 (Vereinigung und Durchschnitt)
Sei I eine Indexmenge und M_i Mengen für alle $i \in I$. Bestimmen Sie $\bigcup_{i\in I} M_i$ und $\bigcap_{i\in I} M_i$ in den folgenden Fällen:

(a) $I := \mathbb{N}$, $M_i := \{k \in \mathbb{Z} | -i \leq k \leq i\}$ für alle $i \in I$

(b) $I := \mathbb{Z}$, $M_i := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ein Teiler von } i\}$ für alle $i \in I$
Hinweis: x ist ein Teiler von i, geschrieben $x \mid i$, genau dann, wenn $\exists m \in \mathbb{Z}$: $xm = i$.

Aufgabe 3 (Beweisprinzipien)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mithilfe der angegebenen Beweismethode aus der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie durch Kontraposition die folgende Aussage:
Sei $n \in \mathbb{Z}$. Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

(b) Zeigen Sie durch einen Widerspruchsbeweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Aufgabe 4 (Vollständige Induktion)
Für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die jeweilige Aussage? Beweisen Sie ihre Behauptung per vollständiger Induktion.

(a) 3 teilt $n^3 + 2n$.

(b) $n! > 2^n$.