Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 1

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = |x|$$

sowie die Mengen $A = [-1; 1[$ und $B =]-1; 1]$. Bestimmen Sie $f(1)$, $f^{-1}(1)$, $f(A)$ und $f^{-1}(B)$.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Kern.

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 2x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ -1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$

(c) $f_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \\ |x_1| \end{pmatrix}$

(d) $f_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Berechnen Sie $\ker(f)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von f.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_2 + x_1)^\top$

(a) Zeigen Sie: f ist linear.

(b) Bestimmen Sie den Kern von f und geben Sie $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ an.

(c) Berechnen Sie die $\dim(\mathrm{Bild}(f))$ bzw. $\mathrm{rg}(f)$ und bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(f)$.

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv? Zeigen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$

(b) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$

(c) $f(x_1, x_2) = (x_2, |x_1|)$

Aufgabe 6

Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

sowie die Menge $A = [-\pi; \pi] \times [0; 1]$.

Bestimmen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 2\pi \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $f(A)$ und $f^{-1}(A)$.

Aufgabe 7

Lesen und verstehen Sie die Beweise in **Bemerkung 4.5** und **4.6** im Skript. Beweisen oder widerlegen Sie anschließend die folgenden Aussagen.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gilt f invertierbar $\Rightarrow f(0) = 0$.

(b) Es ex. eine zu sich selbst inverse Abbildung $f : A \to A$. A sei ein Vektorraum.

(c) Es sei $f : A \to B$ und $g : B \to C$. f und g invertierbar. Zur Verkettung $g \circ f : A \to C$ ist die Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1}$ invers.

(d) Es sei $f, g \in C[a, b]$, f und g invertierbar. Eine Linearkombination, wie in **Beispiel 3.24** definiert, von f und g ist invertierbar.

Aufgabe 8

(a) Sei $\emptyset \neq M$ und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Wir betrachten die Abbildung $\varphi : M \to \mathcal{P}(M); \varphi(m) = \{m\}$ für $m \in M$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass φ injektiv bzw. surjektiv ist.

(b) Zwei Mengen M_1, M_2 sind "gleichmächtig" im Sinne von Cantor ($|M_1| = |M_2|$), wenn es eine Bijektion zwischen M_1 und M_2 gibt. Sind die beiden Mengen endlich, impliziert dies, dass M_1 und M_2 gleich viele Elemente enthalten. Man zeige, dass es im Cantorschen Sinne "so viele gerade wie natürliche Zahlen gibt", indem man beweist, dass $\varphi : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $\varphi(n) = 2n$ eine Bijektion ist.

(c) Wir definieren

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & , \quad n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & , \quad n \text{ gerade} \end{cases}, \quad f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

Beweisen Sie: f ist Bijektion. Was folgt daraus für die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$?