

## 7. Übungsaufgaben LA II, SS 25

\*\*\*\*\*

(Abgabe: 30.05.)

**Aufgabe H25.** Sei  $s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$(v, w) \mapsto 3v_1w_2 + 4v_1w_3 - 3v_2w_1 - v_2w_3 - 4v_3w_1 + v_3w_2.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $s$  bezüglich einer geeigneten Involution eine Metrik ist.
- (ii) Zu welchem der Typen (H), (S), (SH), (SS) gehört  $s$ ?
- (iii) Berechnen Sie die Koordinatenmatrizen  $\mathbf{c}_B(s)$  und  $\mathbf{c}_C(s)$  und die zugehörige Basiswechselmatrix, wobei

$$B = (e_1, e_2, e_3) \quad \text{und} \quad C = (e_3, e_2, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}).$$

**Aufgabe H26.** Sei  $(V, s)$  ein metrischer Vektorraum, und seien  $U$  und  $W$  Unterräume von  $V$ . Zeigen Sie:

- (i)  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ .
- (ii) Aus  $U \subseteq W$  folgt  $W^\perp \subseteq U^\perp$ .

**Aufgabe H27.** Sei  $(V, s)$  ein  $n$ -dimensionaler metrischer Vektorraum, und sei  $B$  eine geordnete Basis von  $V$ . Zeigen Sie: Es gilt

$$\text{Rad}(V) = \mathbf{c}_B^{-1}(\text{Kern}(\mathbf{c}_B(s)^T)),$$

wobei  $\mathbf{c}_B: V \rightarrow K^n$  die Koordinatenabbildung ist. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass i. Allg.

$$\text{Rad}(V) \neq \mathbf{c}_B^{-1}(\text{Kern}(\mathbf{c}_B(s))).$$

**Aufgabe H28.** Seien  $(V, s_V)$  und  $(W, s_W)$  metrische Vektorräume (bzgl. derselben Involution  $\bar{\cdot}$ ). Sei  $f: V \rightarrow W$  eine Isometrie.

- (i) Zeigen Sie, dass wir via Einschränkung eine Isometrie

$$\text{Rad}(V) \rightarrow \text{Rad}(W)$$

erhalten.

- (ii) Sei nun  $V = V' \oplus \text{Rad}(V)$  und  $W = W' \oplus \text{Rad}(W)$ . (Wir wissen dann schon, dass beide Summen orthogonale Summen sind.) Durch Einschränkung von  $s_V$  und  $s_W$  erhalten wir metrische Vektorräume  $(V', s_{V'})$  bzw.  $(W', s_{W'})$ . Zeigen Sie, dass  $(V', s_{V'}) \cong (W', s_{W'})$ .

\*\*\*\*\*