$\boxed{8.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 25

****

(Abgabe: 06.06.)

Aufgabe H29. Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei U ein Unterraum von V, so dass s_U regulär ist. Zeigen Sie: Es gilt

$$V = U \perp U^{\perp}.$$

Aufgabe H30. Sei $1+1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein endlich-dimensionaler symplektischer K-Vektorraum. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher die symplektische Normalform von s berechnet.

Aufgabe H31. Sei $1+1 \neq 0$ in K, und sei $A \in K^{n,n}$ eine schiefsymmetrische Matrix. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ berechnet, so dass

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Es gilt dann automatisch $\mathrm{Rang}(A) = 2m$.)

Aufgabe H32. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Finden Sie ein $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass $S^T A S$ die symplektische Normalform von A ist.

****