RWTH Institut für Mathematik
Prof. Dr. Michael Westdickenberg Tel.: +49 241 80-94569
Templergraben 55 Sekr.: +49 241 80-94921
52062 Aachen mwest@instmath.rwth-aachen.de
Raum 110/111 https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

Teil A

Aufgabe A16

Bestimmen sie alle lokalen und globalen Minima von der folgenden Funktion $f : [0,7] \to \mathbb{R}$.

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ x-1 & x \in (1,2] \\ (x-3)^2 & x \in (2,4] \\ (x-5)^2 & x \in (4,7] \end{cases}$$

Lösung

- Randpunkte: Für die einseitigen Ableitungen gilt
  - $f'_+(0) = 1 > 0$, also lokales Minimum bei $x = 0$
  - $f'_-(7) = 4 > 0$, also lokales Maximum bei $x = 7$
- f ist differenzierbar auf $(0,7) \setminus \{1,2,4\}$. Betrachte die Punkte, wo f nicht diff'bar ist.
  - $\underline{x = 1}$: $f'_-(1) = 1 > 0$ und $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = f(1) = 1 > 0 = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x)$, also lokales Maximum bei $x = 1$
  - $\underline{x = 2}$: f ist stetig und $f'_-(2) = 1 > 0, f'_+(2) = -2 < 0$, also lokales Maximum bei $x = 2$
  - $\underline{x = 4}$: f ist stetig und $f'_-(4) = 2 > 0, f'_+(4) = -2 < 0$, also lokales Maximum bei $x = 4$
- Auf $(0,1), (1,2)$ ist f streng monoton wachsend, d.h. kein kritischer Punkt
- Auf $(2,4)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ und $f''(x) = 2 > 0$, also lokales Minimum bei $x = 3$
- Auf $(4,7)$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ und $f''(x) = 2 > 0$, also lokales Minimum bei $x = 5$
- Weiter gilt:
  - $f(7) = 4 > 1 = f(1) = f(2) = f(4)$, also globales Maximum bei $x = 7$
  - $f(0) = f(3) = f(5) = 0$, alle lokalen Minima sind auch globale Minima

Aufgabe A17

Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist. Was, wenn das Intervall nicht beschränkt wäre?

Lösung

Sei $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ die stetige Ableitung von f. Somit haben wir eine stetige Funktion

$$g : [a,b] \to \mathbb{R} : \begin{cases} f'(x), & x \in (a,b) \\ f'_+(a), & x = a \\ f_-(b), & x = b \end{cases}$$

Die stetige Funktion $|g|$ nimmt ihr Maximum auf $[a, b]$ an, d.h. es existiert ein x_0, so dass

$$|g|(x_0) = \|g\|_\infty \geq |g|(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Somit ist es identisch zum Supremum von $|f'|$. Nun gilt nach Mittelwertsatz für alle $x, y \in [a, b]$, dass ein $\xi \in (x, y)$ existiert (ohne Einschränkung $x < y$, ansonsten vertausche), so dass:

$$(f(x) - f(y)) = f'(\xi)(x - y)$$

Nun nehmen wir auf beiden Seiten den Betrag:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||(x - y)| \leq \sup_{z \in (a,b)} |f'(z)||x - y| \leq \|g\|_\infty |x - y|$$

Somit ist die Lipschitzkonstante gleich dem Supremum der Ableitung.
Wenn das Intervall nicht beschränkt ist, muss das Supremum nicht in $\mathbb{R}$ liegen, z.B. erfüllt $x \mapsto x^2$ die Lipschitz-Stetigkeit auf jedem kompakten Intervall, aber auf $\mathbb{R}$ nicht ($x, y \in \mathbb{R}$ mit gleichem Vorzeichen und $x < y$: $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \geq 2|x||x - y|$).

Aufgabe A18

(i) Beweisen Sie, dass die Funktion $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \tan(x)$, injektiv ist. *Im folgenden werden wir ohne Beweis benutzen, dass* tan *auch surjektiv ist (das könnte zum Beispiel mit Hilfe des Zwischenwertsatzes bewiesen werden).*

(ii) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(iii) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle $x \neq 0$ gilt:

$$|\arctan(x)| < |x|.$$

Lösung

1. Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Wegen $\cos(x) \neq 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, siehe A6, ist g wohldefiniert. Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist g differenzierbar. Es gilt $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, siehe Aufgabe A15. Also ist $\tan' > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und somit ist g streng monoton steigend nach Aufgabe B16. Insbesondere ist g injektiv.

2. g ist streng monoton steigend, stetig und surjektiv. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung existiert die stetige Umkehrabbildung von g, die wir als $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bezeichnen. Wegen $\tan' > 0$ folgt mit Satz 8.14, dass arctan ebenfalls differenzierbar ist mit Ableitung

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

3. Definiere $f(x) := \arctan(x)$. Dann ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Es gilt weiterhin, dass $\tan(0) = \sin(0)/\cos(0) = 0$ und somit $\arctan(0) = 0$. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt dann:

$$\begin{aligned} & f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot (x - 0) \qquad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } 0 \text{ und } x \\ \text{also} \quad & \arctan(x) - \arctan(0) = \frac{1}{1 + \xi^2} \cdot x \\ \text{also} \quad & \arctan(x) = \frac{1}{1 + \xi^2} \cdot x. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$|\arctan(x)| = \underbrace{\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right|}_{<1,\text{ da } \xi\neq 0} \cdot |x| < |x| \,.$$

Aufgabe A19

Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}$ *Hinweis:* $\sin(x) \neq x$ *für alle* $x \neq 0$*.*

(ii) $\lim_{x\searrow 0} x^x$

(iii) $\lim_{x\to\infty} x\log(1+\frac{1}{x})$

Lösung

Teil B

Aufgabe B14 [4+5 = 9 Punkte]

a) Finden Sie alle lokalen Extrema der Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$.

b) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $|f|$ auf $[-3, 3]$.

Lösung

a) f ist als Polynomfunktion glatt auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = 3x^2 - 1$ und $f''(x) = 6x$.
Jede lokale Extremstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ muss erfüllen, dass $f'(x_0) = 0$ ist, somit sind die möglichen Extremstellen $x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.
Für $x_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ gilt $f''(x) > 0$, also lokales Minimum.
Für $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ gilt $f''(x) < 0$, also lokales Maximum.

b) $|f|$ ist differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, somit müssen Extremstellen in $[-3, 3] \setminus \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ erfüllen, dass $|f|'(x_0) = 0$ ist. $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (3x^2-1)\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(x^2-1)$, also sind die möglichen Extremstellen auch hier $x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ und analog zu a) sind beides Extremstellen, aber in beiden lokale Extrema.
Nun müssen wir noch $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ ausprobieren, aber da gilt wegen $|f| \geq 0$ und $|f(x_0)| = 0$, dass es sich um lokale Extrema (Minima) handelt (sogar globale Minima).
Bei $x_0 = -3$ gilt $f'_+(x) < 0$, also ist -3 ein lokales Maximum.
Bei $x_0 = 3$ gilt $f'_-(x) > 0$, also ist 3 ein lokales Minimum.

Aufgabe B15 [7 Punkte]
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existieren und endlich sind. Beweisen Sie, dass dann $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ gilt.

Lösung
Wir beweisen die Behauptung per Widerspruch. Angenommen $\lim_{x\to\infty} f'(x) \neq 0$. Da wir f durch $-f$ ersetzen könnten, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\lim_{x\to\infty} f'(x) > 0$ ist.
Sei $c \in (0, \lim_{x\to\infty} f'(x)$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $f'(x) \geq c$ für alle $x \geq n_0$.
Sei $n \geq n_0$ beliebig. Da f differenzierbar ist, ist sie auch stetig.
Es folgt aus dem Mittelwertsatz angewendet auf f eingeschränkt auf $[n, n+1]$, dass ein $\xi \in (n, n+1)$ existiert sodass

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi)(n+1-n) = f'(\xi) \geq c.$$

Also

$$f(n+1) \geq f(n) + c$$

und per Induktion erhalten wir

$$f(n) \geq f(n_0) + c(n - n_0).$$

Es folgt, dass

$$\limsup_{x\to\infty} f(x) \geq \limsup_{n\to\infty} f(n) = \infty,$$

im Widerspruch zu $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe B16 [5+(2+1)+(2+2)=12 Punkte]
Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Beweisen Sie: die Funktion f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.

(b) Beweisen Sie:

(i) Die Funktion f ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie anhand des Beispiels $g : (-1,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$, dass die Umkehrung von (i) nicht gelten muss.

(c) (i) Beweisen Sie, dass die Funktion $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1,1)$ injektiv ist. *Im Folgenden dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass die Abbildung auch sujektiv ist.*

(ii) Es sei $\arcsin : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die stetige Inverse von sin. Zeigen Sie, dass arcsin differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Lösung

(a) $\Leftarrow$: Für alle x, y mit $a < x < y < b$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x,y)$, so dass

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot \underbrace{(y-x)}_{>0}.$$

Wenn also $f'(\xi) \geq 0$ für alle $\xi \in (a,b)$ gilt, folgt

$$f(y) - f(x) \geq 0 \quad \forall y > x,$$

d.h. f ist monoton wachsend.

$\Rightarrow$: Sei $x_0 \in (a,b)$. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x$, die gegen x_0 konvergiert. Insbesondere können wir x_n monoton fallend wählen. Dies hat den Vorteil, dass der Differenzenquotient ein Vorzeichen hat:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt

$$f'(x_0) \geq 0.$$

Da x_0 beliebig war, ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$.

(b) (i) Für alle x, y mit $a < x < y < b$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x,y)$, so dass

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Da laut Voraussetzung $f'(\xi) > 0$ gilt, muss also stets $f(y) - f(x) > 0$ gelten.

(ii) Es gilt $x^3 = y^3$ genau dann wenn $x = y$ gilt. Also ist g injektiv. Allerdings ist $g'(0) = 0$.

(c) (i) Es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $\cos(x) \neq 0$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist, und $\cos(0) = 1 > 0$ ist, folgt, dass $\cos(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt. (Ansonsten gäbe es eine Nullstelle aufgrund des Zwischenwertsatzes.)
Insbesondere ist sin streng monoton steigend auf dem Intervall und somit injektiv.

(ii) Da $\sin'(x) \neq 0$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt, folgt mit Satz 8.14, dass arcsin differenzierbar ist. Die Ableitung lautet:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}.$$

Es gilt $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ und da $\cos(x) > 0$ ist gilt $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. Also

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2((\arcsin(y)))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Aufgabe B17 [5+5+5+8 = 23 Punkte]

Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital die folgenden Grenzwerte.

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad \text{(iii)} \lim_{x\to\infty} \log\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right) \quad \text{(iv)} \lim_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

Lösung

Aufgabe A 19

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \tan(x)}{x - \sin(x)}$ $\begin{matrix} \} =: f(x) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0) \\ \} =: g(x) \longrightarrow 0 \quad (x \to 0) \end{matrix}$

•) f, g sind diff'bar mit $f'(x) = 1 - 1 - \tan^2(x)$
$= - \tan^2(x)$
und $g'(x) = 1 - \cos(x)$

•) Wegen $\cos \leq 1$ und da $\cos$ diff'bar ist, gilt

$\cos(x) = 1 \Rightarrow x$ ist lok. Max. von $\cos$

$\Rightarrow \sin(x) = \cos'(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \pi \mathbb{Z}$

Sei $I_0 := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$. Dann ist $\boxed{g'(x) \neq 0, \; x \in I_0}$

•) Insbesondere ist $g' < 0$ auf I_0, also ist g streng mon. fallend. Es folgt

••) $g(x) > g(0) = 0$ für $x \in I_0, x < 0$

••) $g(x) < g(0) = 0$ für $x \in I_0, x > 0$

Also ist $\boxed{g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_0.}$

Betrachte für $x \in I_0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = - \frac{\tan^2(x)}{1 - \cos(x)} \quad \begin{matrix} \longrightarrow 0 \; (x \to 0) \\ \longrightarrow 0 \; (x \to 0) \end{matrix}$$

•) f', g' diff'bar mit $f''(x) = -2 \tan(x)(1 + \tan^2(x))$
$g''(x) = \sin(x)$

•) $\sin(x) \neq 0$ $\quad x \in I_0$, also $g'' \neq 0$ auf I_0

Betrachte für $x \in I_0$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = -2\, \frac{\overset{\sin(x)/\cos(x)}{\tan(x)}\,(1+\tan^2(x))}{\sin(x)}$$

$$= -2\, \frac{(1+\tan^2(x))}{\cos(x)} \longrightarrow -2 \quad (x \to 0)$$

Mit dem Satz von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = -2$$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$.

Es gilt $x^x = e^{\log(x)\cdot x}$

Berechne zunächst $\lim\limits_{x\searrow 0} x \log(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x)}{\frac{1}{x}}$

Seien $f(x) := \log(x)$, $g(x) := \frac{1}{x}$

Es gilt $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

Außerdem: •) $\frac{1}{x} \neq 0$ für alle $x \neq 0$.

•) f, g diff'bar mit $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

•) $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$

Betrachte

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{x} = -x \longrightarrow 0 \quad (x \searrow 0)$$

Mit dem Satz von l'Hôpital folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Da $t \mapsto e^t$ stetig ist folgt $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x = e^0 = 1$.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Def.: $f(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Es gilt:

log stetig

•) $\lim\limits_{x\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ •) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

•) f, g diff'bar

•) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{x(x+1)}$, $x>0$

•) $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ •) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x>0$

•) $g(x) \neq 0 \quad \forall x>0$

Betrachte für $x>0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{x(x+1)} \cdot (-1) \cdot x^2 = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[(x\to\infty)]{} 1$$

Mit Hilfe von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

Aufgabe B17

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Seien $f(x) := \sin(x)$, $g(x) := x$

Es gilt •) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ •) $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

•) f, g diff'bar mit $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = 1$

•) $g(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

•) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

Betrachte für $x \neq 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos(x)}{1} \xrightarrow[(x \to 0)]{} 1$$

Mit Hilfe von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ $\quad \left. 1-\cos(x) \right\} =: f(x) \longrightarrow 0 \ (x \to 0)$, $\quad \left. x^2 \right\} =: g(x) \longrightarrow 0 \ (x \to 0)$

•) f, g sind diff'bar mit $f'(x) = \sin(x)$, $g'(x) = 2x$

•) $g(x)$ und $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$

Betrachte für $x \neq 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\sin(x)}{2x} \xrightarrow[(x \to 0)]{(i)} \frac{1}{2}$$

Mit Hilfe von l'Hôpital folgt $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\log\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right)}$

$$= \underbrace{x}_{\frac{1}{g(x)}} \underbrace{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{=:\, f(x)}$$

log stetig

Es gilt $\cdot)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \log\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\underbrace{1-\frac{1}{x}}}\right) = 0$

$\longrightarrow 1 \quad (x\to\infty)$

$\cdot)$ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

$\cdot)$ f, g diff'bar mit

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{\cancel{x}-1-(\cancel{x}+1)}{(x-1)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{x+1}$$

$$= -\frac{2}{(x-1)(x+1)} = -\frac{2}{x^2-1}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$\cdot)$ $g(x), g'(x) \neq 0$ für $x \neq 0$

Betrachte für $x > 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{2}{x^2-1} \cdot (-x^2) = \frac{x^2}{x^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[(x\to\infty)]{} 2$$

Mit dem Satz von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$$

(iv) $\underbrace{\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)}$

$$= \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \quad \begin{matrix} \} =: f(x) \xrightarrow[(x \searrow 0)]{} 0 \\ \} =: g(x) \longrightarrow 0 \end{matrix}$$

•) f, g diff'bar mit $f'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = e^x - 1 + x e^x = e^x(x+1) - 1$

•) $g(x) \neq 0$ für $x > 0$

•) $g'(x) = 0 \iff e^x(x+1) = 1 \iff e^x = \frac{1}{x+1}$

für $x > 0$ ist $e^x > 0$ und $\frac{1}{x+1} < 0$

Also ist $g'(x) \neq 0$ für $x > 0$

Betrachte für $x > 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - 1}{e^x(x+1) - 1} \quad \begin{matrix} \} \longrightarrow 0 \\ \} \longrightarrow 0 \end{matrix} \quad (x \searrow 0)$$

•) f', g' diff'bar mit $f''(x) = e^x$

$g''(x) = e^x(x+1) + e^x$

•) $g''(x) = 0 \iff e^x(x+2) = 0 \iff x = -2$

Also ist $g''(x) \neq 0$ für $x > 0$

Betrachte für $x > 0$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x}{e^x(x+2)} = \frac{1}{x+2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (x \searrow 0)$$

Mit dem Satz von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}$$