Übersicht

Übersicht

Lineare Suche

Wir suchen x im Array $a[0, \ldots, n-1]$

Algorithmus

```
function find1(int x) boolean :
for i = 0 to n − 1 do
  if x = a[i] then return true fi
od;
return false
```

Die innere Schleife ist langsam.

Lineare Suche – verbessert

Wir verwenden ein *Sentinel*-Element am Ende.

Das Element $a[n]$ muß existieren und unbenutzt sein.

Algorithmus

```
function find2(int x) boolean :
i := 0;
a[n] := x;
while a[i] ≠ x do i := i + 1 od;
return i < n
```

Die innere Schleife ist sehr schnell.

Lineare Suche – ohne zusätzlichen Platz

Algorithmus

```
function find3(int x) boolean :
if x = a[n − 1] then return true fi;
temp := a[n − 1];
a[n − 1] := x;
i := 0;
while a[i] ≠ x do i := i + 1 od;
a[n − 1] := temp;
return i < n − 1
```

Erheblicher Zusatzaufwand.

Innere Schleife immer noch sehr schnell.

Lineare Suche – Analyse

Wieviele Vergleiche benötigt eine erfolgreiche Suche nach x im Mittel?

Wir nehmen an, daß jedes der n Elemente mit gleicher Wahrscheinlichkeit gesucht wird.

Es gilt $\Pr[x = a[i]] = 1/n$ für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Sei C die Anzahl der Vergleiche:
$C = i + 1$ gdw. $x = a[i]$

Lineare Suche – Analyse

Wir suchen den Erwartungswert von C.

$$\Pr[C = i] = 1/n \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

$$E(C) = \sum_{k=1}^{n} k \Pr[C = k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$$

Es sind im Mittel $(n+1)/2$ Vergleiche.

Lineare Suche – Analyse

Unser Ergebnis:

Es sind im Mittel $(n+1)/2$ Vergleiche.

Ist das Ergebnis richtig?

Wir überprüfen das Ergebnis für kleine n.

- $n = 1$?
- $n = 2$?

Binäre Suche

Wir suchen wieder x in $a[0, \ldots, n-1]$.

Algorithmus

```
function binsearch(int x) boolean :
l := 0;  r := n − 1;
while l ≤ r do
  m := ⌊(l + r)/2⌋;
  if a[m] < x then l := m + 1 fi;
  if a[m] > x then r := m − 1 fi;
  if a[m] = x then return true fi
od;
return false
```

Wir halbieren den Suchraum in jedem Durchlauf.

Binäre Suche

Programm in Python

```
def binsearch(x, a) :
    l = 0
    r = len(a) - 1
    while l ≤ r :
        m = (l + r)//2
        if x == a[m] :
            return True
        if x < a[m] :
            r = m - 1
        else :
            l = m + 1
     return False
```

Binäre Suche

Java

```
static public boolean binsearch(int x, int[] a) {
  int l = 0, r = a.length - 1, m, c;
  while(l ≤ r) {
    m = (l + r)/2;
    if(x == a[m]) return true;
    if(x < a[m]) r = m - 1;
    else l = m + 1;
  }
  return false;
}
```

Binäre Suche – Analyse

Java

```
function binsearch(int x) boolean :
l := 0;  r := n − 1;
while l ≤ r do
  m := ⌊(l + r)/2⌋;
  if a[m] < x then l := m + 1 fi;
  if a[m] > x then r := m − 1 fi;
  if a[m] = x then return true fi
od;
return false
```

Es sei $n = r - l + 1$ die Größe des aktuellen Unterarrays.

Im nächsten Durchgang ist die Größe $m - l$ oder $r - m$.

Binäre Suche – Analyse

Lemma

Es sei $a \in \mathbf{R}$ *und* $n \in \mathbf{N}$. *Dann gilt*

1. $\lfloor a + n \rfloor = \lfloor a \rfloor + n$
2. $\lceil a + n \rceil = \lceil a \rceil + n$
3. $\lfloor -a \rfloor = -\lceil a \rceil$

Binäre Suche – Analyse

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $m - l$ oder $r - m$.

Hierbei ist $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$.

Die neue Größe ist also

- $m - l = \lfloor (l + r)/2 \rfloor - l = \lfloor (r - l)/2 \rfloor = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ oder
- $r - m = r - \lfloor (l + r)/2 \rfloor = \lceil (r - l)/2 \rceil = \lceil (n - 1)/2 \rceil$.

Im schlimmsten Fall ist die neue Größe des Arrays

$$\lceil (n - 1)/2 \rceil.$$

Rekursionsgleichung für binäre Suche

Sei S_n die Anzahl der Schleifendurchläufe im schlimmsten Fall bei einer erfolglosen Suche.

Wir erhalten die Rekursionsgleichung

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < 1, \\ 1 + S_{\lceil (n-1)/2 \rceil} & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Die ersten Werte sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Wir suchen eine geschlossene Formel für S_n.

Lösen der Rekursionsgleichung

Wir betrachten den Spezialfall $n = 2^k - 1$:

$$\left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^k - 2}{2} \right\rceil = \lceil 2^{k-1} - 1 \rceil = 2^{k-1} - 1.$$

Daher: $S_{2^k-1} = 1 + S_{2^{k-1}-1}$ für $k \geq 1$

$$\Rightarrow S_{2^k-1} = k + S_{2^0-1} = k$$

Binäre Suche – Analyse

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Vermutung: $S_{2^k} = S_{2^k-1} + 1$

S_n steigt monoton $\Rightarrow S_n = k$, falls $2^{k-1} \leq n < 2^k$.

Oder falls $k - 1 \leq \log n < k$.

Dann wäre $S_n = \lfloor \log n \rfloor + 1$.

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S_n = \lfloor \log n \rfloor + 1$ für $n \geq 1$.

Induktion über n:

$S_1 = 1 = \lfloor \log 1 \rfloor + 1$

$n > 1$:

$$S_n = 1 + S_{\lceil (n-1)/2 \rceil} \overset{\text{I.V.}}{=} 1 + \left\lfloor \log \lceil (n-1)/2 \rceil \right\rfloor + 1.$$

Noch zu zeigen:

$$\lfloor \log n \rfloor = \left\lfloor \log \lceil (n-1)/2 \rceil \right\rfloor + 1$$

$\rightarrow$ Übungsaufgabe.

Binäre Suche – Analyse

Theorem

Binäre Suche benötigt im schlimmsten Fall genau

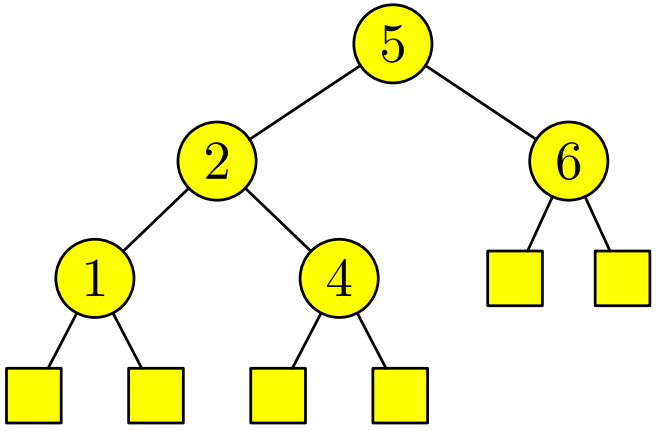
$$\lfloor \log n \rfloor + 1 = \log(n) + O(1)$$

viele Vergleiche.

Die Laufzeit ist $O(\log n)$.

Übersicht

Binäre Suchbäume



- Als assoziatives Array geeignet
- Schlüssel aus geordneter Menge
- Linke Kinder kleiner, rechte Kinder größer als Elternknoten
- Externe und interne Knoten
- Externe Knoten zu einem Sentinel zusammenfassen?

Binäre Suchbäume

Java

```
public class Searchtree⟨K extends Comparable⟨K⟩, D⟩
                        extends AbstractMap⟨K, D⟩ {
  protected Searchtreenode⟨K, D⟩ root;
```

Java

```
class Searchtreenode⟨K extends Comparable⟨K⟩, D⟩ {
  K key;
  D data;
  Searchtreenode⟨K, D⟩ left, right, parent;
```

Binäre Suchbäume – Suchen

Java

```
public D find(K k) {
  if(root == null) return null;
  Searchtreenode⟨K, D⟩ n = root.findsubtree(k);
  return n == null ? null : n.data;
}
```

Im Gegensatz zu Liste:
Zusätzlicher Test auf **null**.

Binäre Suchbäume – Suchen

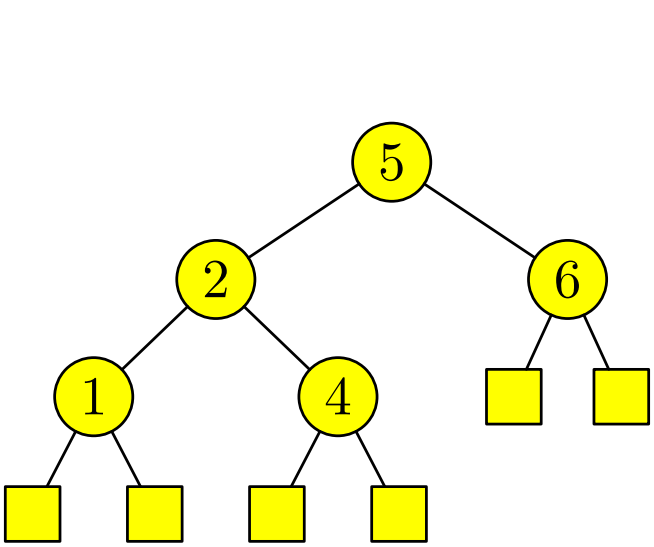
Java

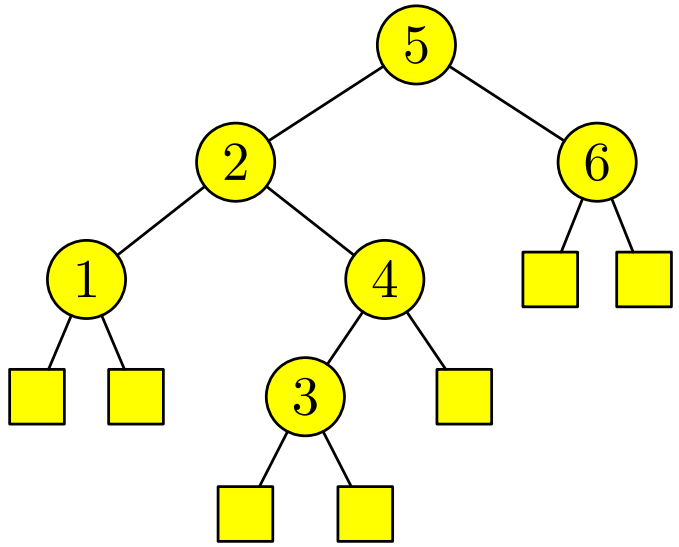
```
Searchtreenode⟨K, D⟩ findsubtree(K k) {
  int c = k.compareTo(key);
  if(c > 0) return right == null ? null : right.findsubtree(k);
  else if(c < 0) return left == null ? null : left.findsubtree(k);
  else return this;
}
```

Wieder zusätzlicher Test auf **null**.
Durch Sentinel verhindern!

Besser: Iterativ statt rekursiv.

Binäre Suchbäume – Einfügen





Wo fügen wir 3 ein?

Wie fügen wir es ein?

In den richtigen externen Knoten!

Binäre Suchbäume in Python

Wir definieren einen Knoten des Suchbaums:

Programm in Python

```
class Node :
    def __init__(self, key, value) :
        self.key = key
        self.value = value
        self.parent = None
        self.left = None
        self.right = None
```

Binäre Suchbäume – Einfügen

Programm in Python

```
def insert(self, node) :
    if self.key == node.key :
        self.value = node.value
    elif node.key < self.key :
        if self.left == None :
            self.left = node
            node.parent = self
        else :
            self.left.insert(node)
    elif node.key > self.key :
        if self.right == None :
            self.right = node
            node.parent = self
        else :
            self.right.insert(node)
```

Binäre Suchbäume – Einfügen

Java

```
public void insert(K k, D d) {
  if(root == null) root = newNode(k, d);
  else root.insert(newNode(k, d));
}
```

Binäre Suchbäume – Einfügen

Java

```
public void insert(Searchtreenode⟨K, D⟩ n) {
  int c = n.key.compareTo(key);
  if(c < 0) {
      if(left ≠ null) left.insert(n);
      else { left = n;  left.parent = this;  }
  }
  else if(c > 0) {
      if(right ≠ null) right.insert(n);
      else { right = n;  right.parent = this;  }
  }
  else copy(n);
}
```

Binäre Suchbäume – Löschen

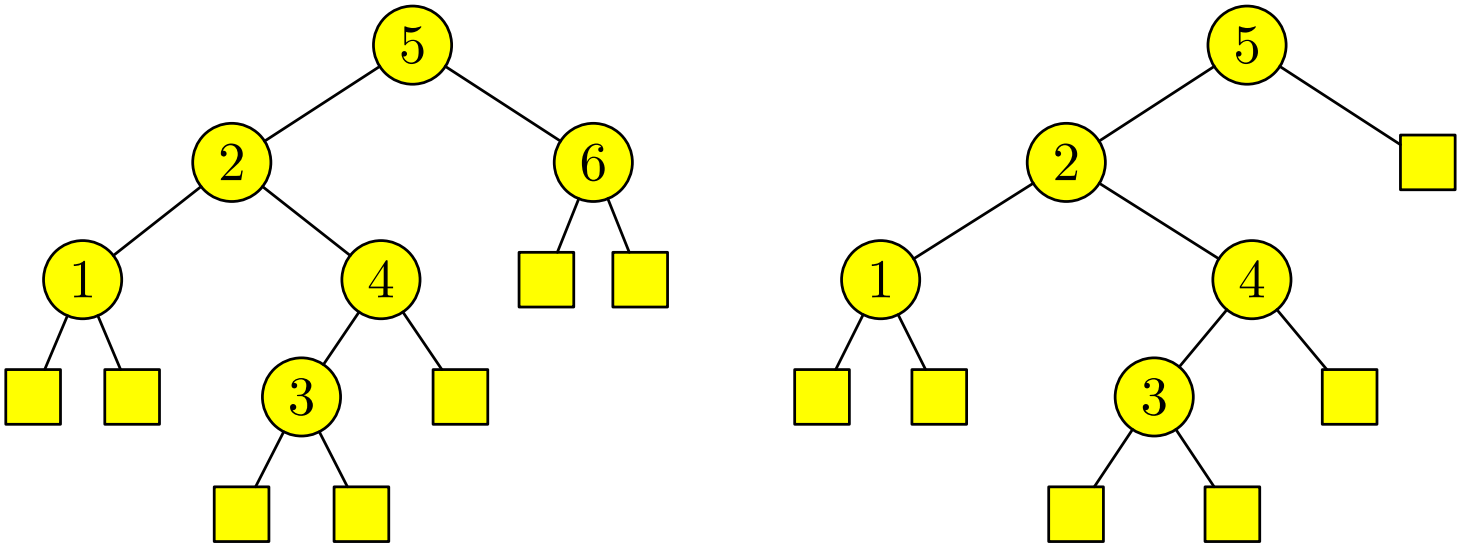
Beim Löschen unterscheiden wir drei Fälle:

- Blatt (einfach)
- Der Knoten hat kein linkes Kind (einfach)
- Der Knoten hat ein linkes Kind (schwierig)

Damit sind alle Fälle abgedeckt!
Warum kein Fall: Kein rechtes Kind?

Binäre Suchbäume – Löschen

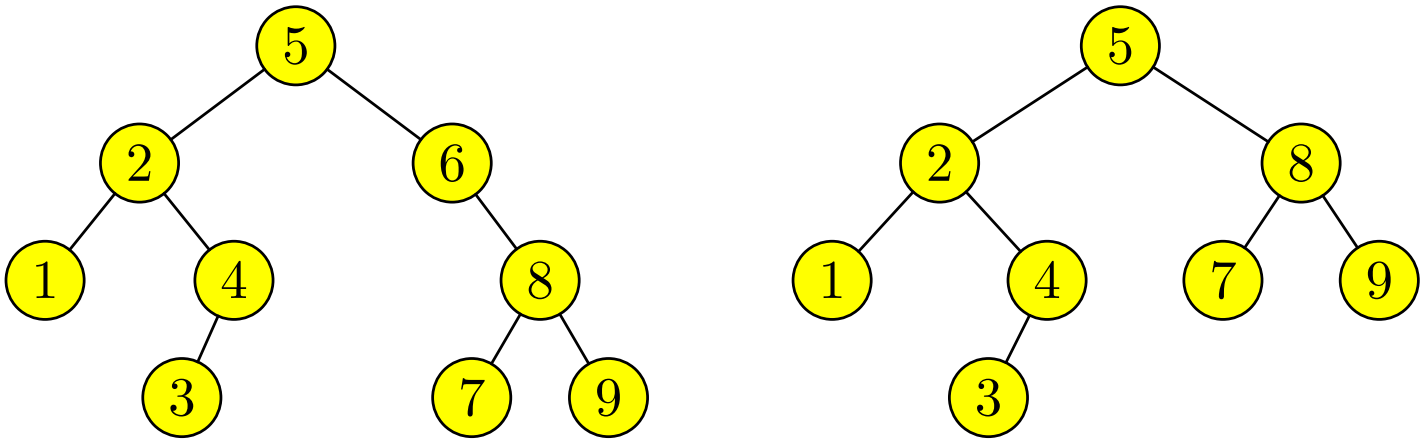
Löschen eines Blatts:



Ein Blatt kann durch Zeigerverbiegen gelöscht werden.

Binäre Suchbäume – Löschen

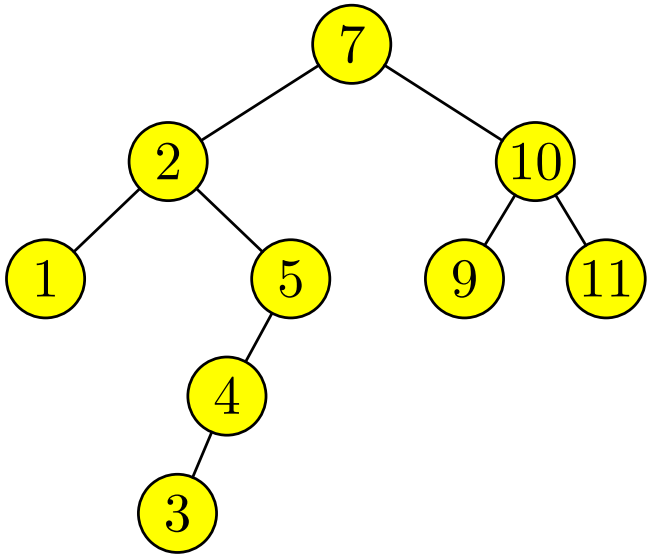
Löschen eines Knotens ohne linkes Kind:



Wir können kopieren oder Zeiger verbiegen.

Binäre Suchbäume – Löschen

Löschen eines Knotens mit linkem Kind:



1. Finde den größten Knoten im linken Unterbaum
2. Kopiere seinen Inhalt
3. Lösche ihn