

Übungsblatt 5 - Wiederholungsaufgaben

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Schritte die Abbildungsmatrix A_s zu der linearen Abbildung f_s , die einen Vektor innerhalb des \mathbb{R}^2 an der y-Achse spiegelt.

- (a) Bestimmen Sie für

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_s(v_1)$ und $f_s(v_2)$, also die Spiegelung der kanonischen Einheitsvektoren im \mathbb{R}^2 .

- (b) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix A_s zu f_s auf.

Aufgabe 2

Stellen Sie die beiden Abbildungsmatrizen zu der linearen Abbildung $f : P_2 \rightarrow P_3$ mit $f(p(x)) = p(x) \cdot x$ auf. Benutzen Sie dabei für den Definitions- und für den Wertebereich die folgenden Basen:

(a) $B_{P_2} = (1, x, x^2) \quad B_{P_3} = (1, x, x^2, x^3)$

(b) $B_{P_2}^* = (8x^2, 4x, 2) \quad B_{P_3}^* = (1, x, x^2, x^3 + 1)$

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Finden Sie zu f eine Matrix A , so dass

$$f(x) = A \cdot x, \quad \text{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie müsste man den Zielbereich wählen, damit die Abbildung surjektiv ist?

Aufgabe 4

Für welche reellen Zahlen a ist die folgende Matrix A invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Geben sind die folgenden Abbildungen

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 1$

sowie die Mengen $A = [0; 5]$ und $B = [-5; 0]$.

Bestimmen Sie jeweils $f(0), f^{-1}(0), f(A), f^{-1}(A), f(B), f^{-1}(B)$.

Aufgabe 6

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 7

Die Abbildung $f : A \rightarrow B$, wobei $A = \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}$ sind, sei folgendermaßen definiert:

$$f(a) = a \bmod 17.$$

(a) Handelt es sich um eine lineare Abbildung?

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(0)$?

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung weder surjektiv noch injektiv ist.

(d) Welche Möglichkeiten gibt es, A und B zu wählen, damit die Abbildung bijektiv ist?

Aufgabe 8

Gesucht ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Abbildungsmatrix A . Geben Sie im Folgenden jeweils eine Abbildungsmatrix an, sodass f die angegebenen Eigenschaften besitzt oder begründen Sie warum dies nicht möglich ist.

(a) $\text{Kern}(f) = \{0\} \quad \text{Bild}(f) = \mathbb{R}^3$

(b) $\text{Kern}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Bild}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\text{Kern}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Bild}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$