Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

3. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung. Das vorliegende dritte Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 30.4., 10:15 Uhr abzugeben.

---

1. (Zufallsstichproben mit und ohne Zurücklegen) (10 Punkte)

a) Eine Prüfung besteht aus 12 Fragen, die mit *ja* oder *nein* zu beantworten sind. Sie gilt bei mindestens 8 richtigen Antworten als bestanden.

   i) Eine Person kreuzt auf gut Glück die Antworten an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht sie die Prüfung?

   ii) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, wenn sie 2 Fragen mit Sicherheit richtig beantworten kann und nur den Rest zufällig ankreuzt?

   iii) Falls sie gar nichts weiß, wäre es dann für sie günstiger, zufällig 6-mal *ja* und 6-mal *nein* anzukreuzen, vorausgesetzt, dass für 6 Fragen die richtige Antwort *ja* lautet?

b) Geben Sie die Massenfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern n und p und der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern n, m und r an (Bezeichnungen wie in der Vorlesung). Zeigen Sie: Für $m \to \infty$ und $r \to \infty$ mit $p = \frac{r}{m}$ konstant konvergiert die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung mit Parametern n und p. Interpretieren Sie diese Aussage.

2. (Erwartungswerte beim Würfeln) (10 Punkte) Geben Sie geeignete Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen an, und berechnen sie die Verteilungen und Erwartungswerte für

a) die Augenzahl beim Werfen eines fairen Würfels,

b) die maximale Augenzahl beim Werfen von zwei fairen Würfeln,

c) das Produkt der Augenzahlen beim Werfen von zwei fairen Würfeln.

3. (Erwartungswert von Zufallsvariablen mit ganzzahligen Werten) (10 Punkte)

a) Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[T] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T \geq k].$$

b) Berechnen Sie, wieviele Würfe im Schnitt nötig sind, bis beim Würfeln mit einem fairen Würfel zum ersten Mal eine 6 fällt.

4. (Varianz I) (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Varianz einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ durch

$$\mathrm{Var}[X] \;=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \qquad \text{gegeben ist.}$$

b) Zehn Personen sitzen in einem Kreis, und jeder wirft eine faire Münze. Sei N die Anzahl der Personen, deren Münze die gleiche Seite wie die Münzen beider Nachbarn zeigt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[N = 9]$ und $\mathbb{P}[N = 10]$, sowie den Erwartungswert $\mathbb{E}[N]$.

c) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}[N]$.