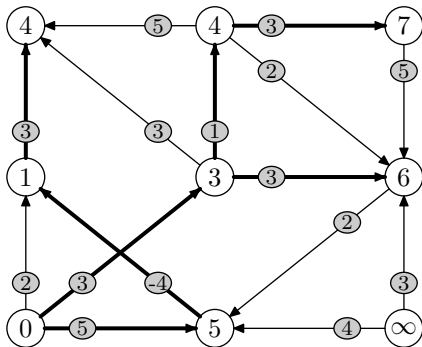


Kürzeste Wege mit negativen Kantengewichten



Dijkstra funktioniert nicht mit negativen Kantengewichten.

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Idee:

- Relaxiere alle Kanten
- Wiederhole dies, bis keine Änderung

Warum korrekt?

Induktion über die Länge eines kürzesten Pfads.
(Also genügen n Wiederholungen)

Was passiert bei Kreisen mit negativem Gewicht?

→ Keine Terminierung.

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Algorithmus

```
function Bellman – Ford(s) boolean :  
for v in V do d[v] :=  $\infty$  od;  
d[s] := 0;  
for i = 1 to |V| – 1 do  
  forall(v, u) in E do  
    d[u] := min { d[u], d[v] + length(v, u) }  
  od  
od;  
forall(v, u) in E do  
  if d[u] > d[v] + length(v, u) then return false fi  
od;  
return true
```

Java

```
public static<V> Map<V, Double> bellmanFord(Graph<V> G, V s,
    Map<Edge<V>, Double> length, Map<V, V> pred) {
    Map<V, Double> dist = new HashMap<>();
    for(V u : G.allNodes()) dist.put(u, Double.MAX_VALUE);
    dist.put(s, 0.0);
    boolean changed = true;
    int count = G.allNodes().size();
    while(changed) {
        changed = false;
        for(V u : G.allNodes()) {
            for(V v : G.neighbors(u)) {
                double d = dist.get(u) + length.get(G.edge(u, v));
                if(d < dist.get(v)) {
                    dist.put(v, d); pred.put(v, u);
                    changed = true;
                }
            }
        }
    }
}
```

Der Algorithmus von Bellman und Ford

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $E \rightarrow \mathbf{R}$ und ein Knoten $s \in V$.

Wir können in $O(|V| \cdot |E|)$ feststellen, ob ein Kreis mit negativem Gewicht existiert, und falls nicht, die kürzesten Wege von s zu allen Knoten berechnen.

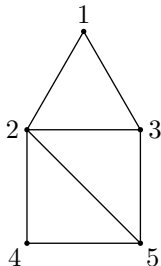
Beweis.

Wir haben die Korrektheit bereits nachgewiesen.

Zur Laufzeit: Jeder Knoten wird $|V|$ mal relaxiert, also wird auch jede Kante $|V|$ mal relaxiert (in konstanter Zeit). □

Rekapitulation: Darstellung von Graphen

Adjazenzliste



1	2, 3
2	1, 3, 4, 5
3	1, 2, 5
4	2, 5
5	2, 3, 4

Alle bisherigen Algorithmen:

Adjazenzliste gute Darstellung

Kritische Operation: Alle ausgehenden Kanten besuchen.

All Pairs Shortest Paths

Eingabe: Gerichteter Graph mit Kantengewichten

Ausgabe: Abstände und kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren

Laufzeit $O((|V|^2 + |V| \cdot |E|) \log |V|)$ mit Dijkstra.

→ Wende Dijkstra auf jeden Knoten an.

Algorithmus von Floyd

Algorithmus

```
procedure Floyd1 :  
for  $i = 1, \dots, n$  do  
  for  $j = 1, \dots, n$  do  $d[i, j, 0] := \text{length}[i, j]$  od  
od;  
for  $k = 1, \dots, n$  do  
  for  $i = 1, \dots, n$  do  
    for  $j = 1, \dots, n$  do  
       $d[i, j, k] := \min \{ d[i, j, k - 1], d[i, k, k - 1] + d[k, j, k - 1] \}$   
    od  
  od  
od
```

Der Abstand von i nach j ist in $d[i, j, n]$ zu finden.

Theorem

Die kürzesten Wege zwischen allen Knotenpaaren eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ können in $O(|V|^3)$ Schritten gefunden werden.

Beweis.

Per Induktion: $d[i, j, k]$ enthält die Länge des kürzesten Pfades von i nach j , wenn nur $1, \dots, k$ als Zwischenstationen erlaubt sind.

Dann enthält $d[i, j, n]$ den wirklichen Abstand. □

Algorithmus von Floyd

Einfachere Version:

Algorithmus

```
procedure Floyd :  
for  $i = 1, \dots, n$  do  
  for  $j = 1, \dots, n$  do  $d[i, j] := \text{length}[i, j]$  od  
od;  
for  $k = 1, \dots, n$  do  
  for  $i = 1, \dots, n$  do  
    for  $j = 1, \dots, n$  do  
       $d[i, j] := \min \{ d[i, j], d[i, k] + d[k, j] \}$   
    od  
  od  
od
```

Spezialfall: Transitive Hülle – Algorithmus von Warshall

Frage: Zwischen welchen Knotenpaaren gibt es einen Weg?

Algorithmus

procedure Warshall :

for $i = 1, \dots, n$ **do**

for $j = 1, \dots, n$ **do** $D[i, j] := A[i, j]$ **od**

od;

for $k = 1, \dots, n$ **do**

for $i = 1, \dots, n$ **do**

for $j = 1, \dots, n$ **do**

$D[i, j] := D[i, j] \vee D[i, k] \wedge D[k, j]$

od

od

od

Transitive Hülle

Theorem

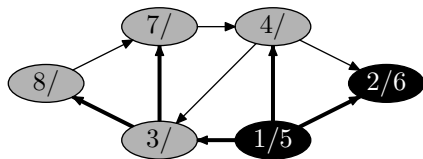
Wir können die transitive Hülle eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$, der k starke Zusammenhangskomponenten hat, in $O(|V| + |E'| + k^3)$ Schritten berechnen, wobei E' die Kanten der transitiven Hülle sind.

Beweis.

- 1 Berechne die starken Zusammenhangskomponenten
- 2 Schrumpfe jede SCC X zu einem Knoten
- 3 Berechne die transitive Hülle H dieses Graphen
- 4 Für jede Kante (X, Y) in H gib alle Kanten (x, y) mit $x \in X, y \in Y$ aus.



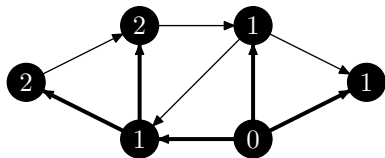
Breitensuche



Breitensuche ist das „Gegenteil“ von Tiefensuche.

- Tiefensuche: Aktive Knoten auf Stack
- Breitensuche: Aktive Knoten in FIFO-Queue
- Intelligente Suche: Weder Stack noch Queue
- Breitensuchbaum enthält kürzeste Pfade (ungewichtet)
- Discovery- und Finishzeiten wenig Anwendungen

Breitensuche



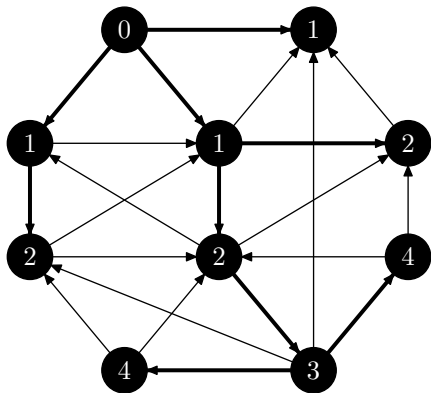
Knoten wird aktiv:

Abstand berechnen und Kante in BFS-Baum

Anwendung:

Alle Abstände und kürzesten Wege von s berechnen

Breitensuche – Größeres Beispiel



Java

```
public static<V> Map<V, V> BFS(Graph<V> G, V s) {  
    Map<V, V> pred = new HashMap<V, V>();  
    Map<V, Integer> color = new HashMap<V, Integer>();  
    for(V u : G.allNodes()) color.put(u, WHITE);  
    Queue<V> q = new Queue<V>();  
    q.enqueue(s); color.put(s, GRAY);  
    while(!q.isEmpty()) {  
        V u = q.dequeue();  
        for(V v : G.neighbors(u)) {  
            if(color.get(v) == WHITE) {  
                color.put(v, GRAY);  
                q.enqueue(v);  
                pred.put(v, u);  
            }  
        }  
        color.put(u, BLACK);  
    }  
    return pred;  
}
```


Breitensuche

Theorem

Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein Knoten $s \in V$.

Die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten und die zugehörigen Abstände können in $O(|V| + |E|)$ berechnet werden.

Beweis.

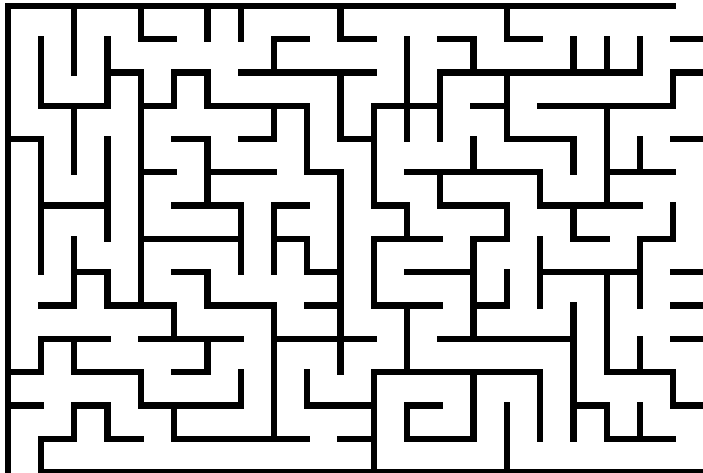
Wir verwenden Breitensuche.

Die Laufzeit ist offensichtlich linear.

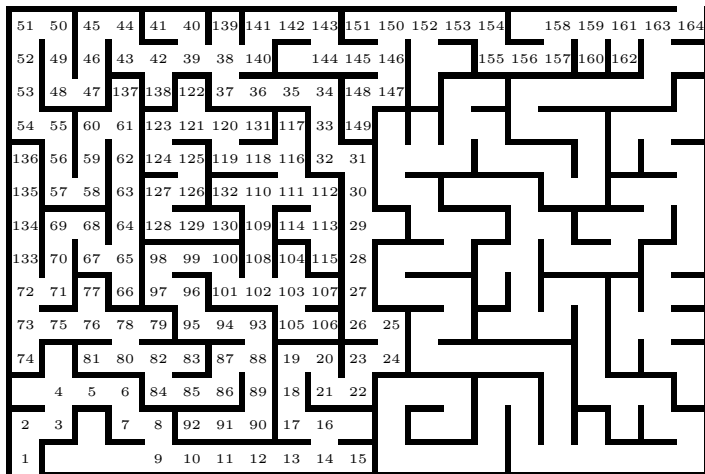
Der Korrektheitsbeweis sei hier weggelassen (etwas lang und technisch).



Beispiel



Beispiel: DFS



Beispiel: BFS

