

Aufgaben zur Veranstaltung Analysis 2, SoSe 2025

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen

FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 11

02./03.06.2025

1. Sind die folgenden Funktionen im Punkt $(0, 0)$ stetig?

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. Lassen sich folgende Funktionen im Nullpunkt stetig ergänzen und, wenn ja, wie?

a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$ b) $f(x, y) = \frac{x^3 + 2yx^2 + xy^2 + 2y^3}{x + 2y}$

3. (Präsentation der Lösung) Bestimmen Sie die Tangentialebene der Funktion

$$f(x, y) = x \cdot \ln(y) \cdot e^{x \cdot y} + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$

in vektorieller und analytischer Form.

4. (Präsentation der Lösung) Gegeben seien

$$f(x, y, z) = x^2 \cdot y + (2x + y^2)^2 - x \cdot y \cdot z^3, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

- den Gradienten von f an der Stelle (x_0, y_0, z_0) .
- die Gleichung für die Tangentialebene von f an der Stelle (x_0, y_0, z_0) .
- die Richtungsableitung von f an der Stelle (x_0, y_0, z_0) in Richtung des Vektors \vec{a} .
- die Richtung an der Stelle (x_0, y_0, z_0) , in der die Richtungsableitung von f maximal wird, und den Wert in dieser Richtung.

5. (Präsentation der Lösung) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 \cdot y - y^3 \cdot x + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. (**Präsentation der Lösung**) Differenzieren Sie implizit

$$\text{a) } (x^2 + y^2)^2 - 2x \cdot (x^2 + y^2) = y^2 \quad \text{b) } y^3 - 2x \cdot y^2 = \frac{1}{x}$$

7. (**Präsentation der Lösung**) Betrachten Sie die Strömungsgeschwindigkeitsvektoren an den Raumkoordinaten (x, y, z) .

a) Sei zunächst ein Fluss mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass ein solches Feld quellen- und wirbelfrei ist.

b) Sei nun das Feld mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit parallel zur x -Achse für $x > 0$ gemäß

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie nun, dass dieses Feld Quellen hat, jedoch wirbelfrei ist.