Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 5, Abgabe 14.5.

Aufgabe 1

Für $(r, \theta, \phi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ seien die Kugelkoordinaten gegeben durch

$$f(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix und die Funktionaldeterminante von f.

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

(i) Zeigen Sie $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$.

(ii) Seien $u_i \in C^2(\Omega)$ die Komponenten des Vektorfelds $u = (u_1, u_2, u_3)^T$. Zeigen Sie

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = \nabla(\operatorname{div} u) - \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & : \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & : \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie

(i) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(ii) $\partial_{xy} f(0, 0) = 1$ und $\partial_{yx} f(0, 0) = -1$.

Aufgabe 4

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{n-2}} & : \quad n \geq 3 \\ \ln \frac{1}{|x|} & : \quad n = 2 \end{cases}$$

harmonisch ist, d.h. es gilt $\Delta f(x) = 0$ für alle $x \neq 0$.

(ii) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und $g(r, \phi) := f(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Zeigen Sie, dass für $(x, y) := (r\cos\phi, r\sin\phi)$ mit $r \neq 0$ gilt

$$\Delta f(x, y) = \Big(\partial_r^2 g + \frac{1}{r}\partial_r g + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 g\Big)(r, \phi)\,.$$