

Aufgabe 1 Bei Ausgrabungen werden Skelettreste bestimmter ausgewachsener Tiere gefunden. Anhand von Messungen am Schädelknochen soll überprüft werden, ob es Tiere derjenigen Art sind, für die ein durchschnittliches Maß von $\mu_0 = 146$ bekannt ist. Zudem weiß man, dass die Varianz σ^2 derartiger Messungen 36 beträgt, und dass die Schädelmessungen Realisationen einer normalverteilten Zufallsvariable sind. An $n = 10$ Skeletten werden folgende Werte gemessen:

$$141, \quad 140, \quad 145, \quad 135, \quad 147, \quad 141, \quad 154, \quad 138, \quad 152, \quad 149$$

- Testen Sie $H_0 : \mu = 146$ gegen $H_1 : \mu \neq 146$ zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$.
- Leiten Sie die Gütfunktion des verwendeten Tests her.
- Bestimmen und interpretieren Sie die Gütfunktion an den Stellen
 - $\mu_1 = 140$ und
 - $\mu_1 = 150$.
- Wie ändert sich die Gütfunktion für $\alpha = 0,01$?

Aufgabe 2 In einer Getränkeabfüllanlage sollen Flaschen mit einem Sollinhalt von $\mu_0 = 500$ ml abgefüllt werden. Die Abfüllung wird stichprobenartig kontrolliert.

- Bei der Kalibrierung der Anlage ist die Standardabweichung des Füllvolumens bekannt und beträgt $\sigma = 5$ ml. Eine Stichprobe von $n = 50$ Flaschen hat den Mittelwert $\bar{x}_{50} = 497$ ml. Untersuchen Sie auf dem Niveau $\alpha = 0,05$, ob der tatsächliche Mittelinhalt von 500 ml abweicht.
- In einer weiteren Kontrolle ist die Standardabweichung nun unbekannt. Eine kleine Stichprobe von $n = 10$ Flaschen ergibt den Mittelwert $\bar{x}_{10} = 503$ ml und die Stichprobenstandardabweichung $s_{10} = 6$ ml. Untersuchen Sie erneut auf dem Niveau $\alpha = 0,05$, ob der Mittelinhalt von 500 ml abweicht.

Aufgabe 3 In einer empirischen Studie über Schulreife und Schulerfolg untersuchten K.Lühning und R.Schmid 1978 die Einflussgrößen Schulreife, Schulnoten und Intelligenz. Eine Stichprobe von $n = 18$ Schüler einer niedersächsischen Gemeinde mit dem Einschulungsjahr 1970 ergab einen Mittelwert $\bar{x} = 109$ der IQ-Punkte mit einer empirischen Standardabweichung von $s = 13,5$. Psychologen mögen herausgefunden haben, dass der IQ normalverteilt ist mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$.

- Ist die Standardabweichung s mit der Varianz $\sigma^2 = 15^2$ vereinbar? Führen Sie den Test zum Signifikanzniveau
 - $\alpha = 0,05$
 - $\alpha = 0,01$
 - $\alpha = 0,001$durch.
- Ist der Befund der empirischen Studie bezüglich des Mittelwertes mit der Annahme der Psychologen vereinbar? Entscheiden Sie auf Basis des Ergebnisses aus a) welchen Test Sie wählen.

Aufgabe 4 In einer Molkerei wird an zwei Maschinen Vollmilch in Litertüten abgefüllt. An den beiden Abfüllanlagen wurden Stichproben vom Umfang $n_1 = 7$ bzw. $n_2 = 9$ genommen, um die tatsächlich abgefüllte Milchmenge pro Tüte zu überprüfen.

Tüte i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anlage 1 x_{1i}	0,98	0,96	1,02	1,01	0,98	0,98	1,0		
Anlage 2 x_{2i}	1,02	1,04	0,98	0,97	1,03	1,0	1,02	1,04	0,99

Den Abfüllanlagen sollen jeweils normalverteilte Zufallsvariablen zugrunde liegen, wobei die Standardabweichungen der Anlagen vom Hersteller mit $\sigma_1 = 0,01 \text{ l}$ und $\sigma_2 = 0,015 \text{ l}$ angegeben werden. Liegen zum Niveau 5% signifikante Unterschiede zwischen den durchschnittlichen Abfüllmengen vor?