Prof. Dr. Florian Heinrichs, Yvonne Albrecht, Johannes Dreßen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Aufgabe 1

(a) Wie ist die Zahl a zu wählen, damit die durch $f_X(x) := ae^{-|x|}$, $x \in$, definierte Funktion eine Dichte wird?

(b) Wie lautet die dazugehörige Verteilungsfunktion?

Aufgabe 2 Das monatliche Einkommen einer Person betrage mindestens x_0 Geldeinheiten, wobei x_0 durch Tarifverträge, das soziale Netz und dergleichen bestimmt wird. Zur Beschreibung der Einkommensverteilung wird häufig eine Dichtefunktion der Form

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{\alpha+1}} & \text{für } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

benutzt, wobei α ein positiver vorgegebener Parameter ist.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X des Einkommens X.

(c) Setzen Sie speziell $\alpha = 1$ sowie $x_0 = 1\,000$ [Euro] und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 10\,000 | X \geq 5\,000)$ d.h. den Anteil derjenigen unter den mindestens $5\,000$ [Euro] Verdienenden, die sogar über $10\,000$ [Euro] verdienen.

Aufgabe 3 Die Weibull-Verteilung ist eine vielseitig einsetzbare Modellverteilung, die sich aufgrund ihrer mathematischen Eigenschaften vielen Formen von Häufigkeitsverteilungen anpasst. Sie wird meist bei Lebensdaueruntersuchungen von Bauelementen oder ganzen Geräten eingesetzt. Die Dichte $f_{T,b}(t)$ der zweiparametrigen Weibull-Verteilung lautet

$$f_{T,b}(t) = \begin{cases} \left(\frac{b}{T}\right) \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem „Formparameter“ b ($b > 0$) und der „Charakteristischen Lebensdauer“ T ($T > 0$).

(a) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F_{T,b}(t)$ an.

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Bauteil innerhalb der charakteristischen Lebensdauer T ausfällt.

(c) Welche Garantiezeit würden Sie als Hersteller vereinbaren, wenn Sie den kostenlosen Ersatz von 10% aller verkauften Geräte wirtschaftlich verkraften können und die charakteristische Lebensdauer Ihres Produktes $T = 10a$ beträgt bei einem “Formparameter“ von $b = 1{,}5$?

(d) Welche Verteilungsfunktion $F_{T,b}(t)$ ergibt sich für den Spezialfall $b = 1$?

Aufgabe 4 Die Lebensdauer elektrischer Bauteile einer bestimmten Sorte (in Stunden) lasse sich durch eine mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariable X angemessen beschreiben. Für die Aufgabenteile a) bis b) sei $\lambda = 1/500$ vorausgesetzt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauteil

(1) vor dem Zeitpunkt $t_0 = 200$ nicht ausfällt?

(2) vor dem Zeitpunkt $t_1 = 100$ ausfällt?

(3) zwischen den Zeitpunkten $t_2 = 200$ und $t_3 = 300$ ausfällt?

(b) Welchen Zeitpunkt t_4 überlebt ein Bauteil mit genau 90% Sicherheit, welche Zeitpunkte überlebt ein Bauteil mit mindestens 90% Sicherheit?

(c) Für welchen Wert des Parameters λ ergibt sich eine Lebensdauerverteilung, bei der mit Wahrscheinlichkeit 0,9 die Lebensdauer eines Bauteils mindestens 50 Stunden beträgt?