Prof. Dr. Florian Heinrichs, Yvonne Albrecht, Johannes Dreßen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Aufgabe 1 Von einem Laptoptyp sei bekannt, dass dieser nach längerem Einsatz zwei Arten von Fehlern aufweist, Pixelfehler auf dem Display und defekter Akku. Bei längerem Einsatz tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,08 keiner dieser Fehler auf, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 hat der Laptop entweder einen Pixelfehler oder der Akku ist defekt und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,72 treten beide Fehler auf.

(a) Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Herr Krieger kauft unabhängig voneinander zwei Laptops dieses Typen, einen Laptop bei der Firma MeerDim, welchen er geschäftlich im Büro nutzt, und einen zweite Laptop bei der Firma Soene für den privaten Gebrauch.
Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Laptops an, die mindestens eine Fehlerart aufweisen, die Zufallsvariable Y bezeichne die Summe der Fehler, die beide Laptops zusammen haben.

b) Bestimmen Sie die zweidimensionale Verteilung des Zufallsvektors (X,Y).

c) Wie lauten die Randverteilungen von X und Y?

Aufgabe 2 X und Y seien die zufälligen Wartezeiten von zwei Kunden A und B, die an unterschiedlichen Kassen stehen. Wir nehmen an, dass X und Y stochastisch unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter 1 sind; die Wahrscheinlichkeit von X bzw. Y ist also $f(x) = exp(-x)$ für $x > 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Wartezeit von Kunde A größer als 2?

(b) Geben Sie die gemeinsame Dichte X und Y, also die Wahrscheinlichkeitsdichte des Vektor (X,Y), an.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit sowohl von Kunde A wie auch von Kunde B größer als 2 ist?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die längere der beiden Wartezeiten größer als 2 ist?

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kunde B mindestens doppelt so lange wie Kunde A wartet?

Aufgabe 3 Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim EXP(2)$ und Y gleichverteilt auf $[2; 4]$.

(a) Bestimmen Sie eine Dichtefunktion $f_{X,Y}$ des Zufallsvektors (X,Y).

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[XY]$.

Aufgabe 4 Teilchen treffen zufällig auf einen Viertelkreis. Der Treffpunkt werde durch eine Zufallsvariable (X,Y) mit einer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \text{für } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Dichten der Randverteilungen von X und Y.

(b) Berechnen Sie dann die zugehörigen Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$.

(c) Bestimmen Sie die Werte für

(1) $\mathbb{E}[XY]$ (2) $cov(X,Y)$

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für $\mathbb{P}(X + Y > 1)$

Hinweise: Für die Integration in b) ist die Substitution $z = \sqrt{1 - x^2}$ hilfreich.
Für die Integration in c) (und auch in d)) ist die Substitution $x = \sin(z)$ hilfreich sowie $sin^n(x) = \frac{1}{n} \cdot (1 - cos(nx))$ und $cos^n(x) = \frac{1}{n} \cdot (1 + cos(nx))$.

Aufgabe 5 Eine Maschine produziert Bolzen, deren Durchmesser normalverteilt sind mit Mittelwert 9,8 mm und Standardabweichung 0,10 mm. Eine andere Maschine bohrt Löcher in einer Metallplatte, deren Durchmesser normalverteilt sind mit Mittelwert 10,0 mm und Standardabweichung 0,08 mm. Die beiden Durchmesser dürfen als unabhängig betrachtet werden.

(a) Welche Verteilung beschreibt den Abstand zwischen Bolzen und Loch in einer Metallplatte?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewählter Bolzen in ein beliebig ausgewähltes Loch passt?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei einer zufälligen Auswahl von Bolzen und Loch eine Verbindung mit zu viel Spiel, wenn der Unterschied zwischen Durchmesser des Lochs in der Metallplatte und Bolzendurchmesser höchstens 0,5 mm betragen darf?