

Übungsblatt 11

Analysis I

WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 39.

Zeigen Sie, dass $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis: Im Skript wird ein Anhang mit Aussagen zu Sinus und Cosinus bereitgestellt; diese dürfen Sie verwenden.

Aufgabe A 40.

Finden Sie Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$, so dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 10x^2 & x < 1, \\ cx^4 + d & 1 \leq x \leq 2, \\ 7x & x > 2. \end{cases}$$

Aufgabe A 41.

Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade,

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom mit $a_n > 0 > a_0$. Zeigen Sie, dass $p(x)$ mindestens zwei reelle Nullstellen besitzt.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 43. (5 Punkte)

Entscheiden Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{-x^2 - x + 6},$$

ob eine stetige Fortsetzung existiert. Falls ja, bestimmen Sie die stetige Fortsetzung. Falls nicht, erklären Sie, weshalb dies nicht möglich ist.

Aufgabe B 44. (5 Punkte)

Wir wollen den Zwischenwertsatz zu schätzen lernen und einen alternativen, eleganten Beweis für eine bereits bekannte Aussage finden:

Zeigen Sie, unter Verwendung des Zwischenwertsatzes, dass $\exp(\mathbb{R}) \supseteq (0, \infty)$.

Aufgabe B 45. (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass eine positive Lösung der Gleichung

$$\cos(x) = \exp(x) - 1$$

existiert.

Aufgabe B 46. (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass \log gleichmäßig stetig auf $(1, \infty)$ ist.

Aufgabe B 47. (5 Punkte)

(a) Seien $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie:

Eine gleichmäßig stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt.

(†b) Finden Sie ein Intervall (a, b) mit $-\infty < a < b < \infty$ und eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig und beschränkt, nicht aber gleichmäßig stetig, ist.

Diese Zusatzaufgabe ist eine reine Zusatzaufgabe für diejenigen von Ihnen, die etwas tiefer einsteigen wollen und wird nicht korrigiert werden.