Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

6. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung. Das vorliegende sechste Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 21.5., 10:15 Uhr abzugeben.

---

1. (Gedächtnislosigkeit II) (6 Punkte) In Aufgabe 3 des 5. Übungsblatts wurde gezeigt, dass die geometrische Verteilung gedächtnislos ist, d.h. die Eigenschaft

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

für alle $s, t \in \mathbb{N}$ besitzt. Zeigen sie nun die umgekehrte Implikation: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N}$ eine (diskrete) Zufallsvariable. Falls X gedächtnislos ist, so ist X geometrisch verteilt!

2. (Hardy-Weinberg-Gesetz der Populationsgenetik) (10 Punkte) Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung von Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung.

a) Begründen Sie anhand eines geeigneten Modells, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(x, y) \;:=\; \mathbb{P}\big[\,\text{Genotyp } y \text{ in Generation } n+1 \,|\, \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n\,\big]$$

durch $P(aa, aa) = P(AA, AA) = 1$, $P(Aa, AA) = P(Aa, aa) = 1/4$ und $P(Aa, Aa) = 1/2$ gegeben sind.

b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichte der Dynamik.

c) Berechnen Sie die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $P^n(Aa, Aa)$.

d) Der Genotyp zu Beginn sei durch zufälliges Entnehmen einer einzelnen Stichprobe aus einer Population gegeben, in der der Anteil des Allels A unter allen Allelen 20% beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich nach hinreichend vielen Generationen der Genotyp AA einstellt?

3. (Binomialmodell für Aktienkurse) (10 Punkte) In einem einfachen Finanzmarktmodell wird angenommen, dass der Kurs S_n einer Aktie an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit p um den Faktor $u > 1$ auf den Wert $u \cdot S_n$ steigt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ um den Faktor $d < 1$ auf den Wert $d \cdot S_n$ fällt.

a) Präzisieren sie ein Modell, mit welchem sich der Kurs S_n zu einem Zeitpunkt $n > 0$ beschreiben lässt.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Kurses S_n nach n Tagen, wenn der Kurs bei $S_0 = 1$ startet.

c) Sei nun $p = 1/2$, $d = 1/2$ und $u = 7/4$. Was können Sie über das asymptotische Verhalten von S_n für $n \to \infty$ aussagen?

4. (Erwartungswert und Covarianz) (6 Punkte) Betrachten Sie drei Zufallsvariablen X, Y und Z auf $\mathbb{N}$. Sei $Y \sim \mathrm{Ber}(q)$ unabhängig von $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Dazu sei $Z \sim \mathrm{Ber}(p)$ und $\mathrm{Cov}(Y, Z) = \rho$.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X \cdot Y$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $W = Y \cdot (X + Z)$.

5. (Tschebyscheffsche Ungleichung) (8 Punkte) Ist X eine Zufallsvariable, für welche $\mathbb{E}[X^2]$ existiert, so folgt für $k > 0$ nach der Tschebyscheffschen Ungleichung die Abschätzung

$$0 \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq k) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{k^2}.$$

Zeigen Sie, dass diese Schranken für $k > \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ scharf sind. Es existieren also Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit

$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X] \text{ und } \mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{Var}[X_2] = \mathrm{Var}[X]$$

sodass

$$0 = \mathbb{P}(|X_1 - \mathbb{E}[X_1]| \geq k) \text{ und } \mathbb{P}(|X_2 - \mathbb{E}[X_2]| \geq k) = \frac{\mathrm{Var}[X]}{k^2}\ .$$