Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 08. 12. 2025

Übungsblatt 9 — Analysis I — WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 32.

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(a)
$$\gamma_n := (1 - n^{1/n})^n$$

(b)
$$\delta_n := \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right)^{n+1}}$$

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, die Ungleichung von Bernoulli zu verwenden.

Aufgabe A 33.

(a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Wenn eine Folge konvergent ist, dann ist sie monoton und beschränkt.

(ii) Eine Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist.

(iii) Eine nicht monotone Folge kann nicht konvergieren.

(b) Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit und bestimmen Sie ihre Häufungswerte, wobei
$$a_n = \frac{1 + 12n + 4n^2}{n(n+3)}.$$

Aufgabe A 34.

Bestimmen Sie das Bild und die Umkehrfunktion von f, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 9, \\ \exp(9 - x) + 9, & 9 < x < \infty, \end{cases}$$

falls die Funktion invertierbar ist.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 35. (2+2+2+1+2 Punkte)

Wir definieren die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_1 := 1, a_2 := 2$ und

$$a_n := \tfrac{1}{2}\left(a_{n-2} + a_{n-1}\right)$$

für $n \geq 3$. Wir werden zeigen, dass die Folge konvergiert. Wir gehen dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a_{n+1}| = \tfrac{1}{2^{n-1}}.$$

(c) Folgern Sie für $m > n$ die von m unabhängige (!) Abschätzung

$$|x_n - x_m| \leq \tfrac{1}{2^{n-2}}$$

(d) Folgern Sie, dass die Folge Cauchy ist und damit konvergiert.

(e) Bestimmen Sie den Grenzwert durch die Betrachtung einer clever gewählten Teilfolge.

Aufgabe B 36. ((1+1+2) + (2+2) Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

  (i) Eine unbeschränkte Folge kann nicht konvergieren.

  (ii) Wenn eine Folge konvergiert, dann hat sie einen eindeutigen Häufungswert.

  (iii) Eine Folge konvergiert, wenn sie einen eindeutigen Häufungswert hat.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit und bestimmen Sie ihre Häufungswerte:

  (i) $b_n = 5 - \frac{6+n^2}{n}$

  (ii) $c_n = \frac{2+3^n}{2+3^n+(-3)^n}$

Aufgabe B 37. (5 Punkte)

Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a \text{ und } \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a\right).$$

Aufgabe B 38. (2+3+3 Punkte)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Beweisen Sie:
Der größte Häufungswert der Folge ist gegeben durch $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass $S_n := \sup_{k\geq n} a_k$ eine nach unten beschränkte und monoton fallende Folge definiert und folgern Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \inf\{S_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} =: S \in \mathbb{R}.$$

(b) Zeigen Sie, dass S ein Häufungswert von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
Hinweis: Konstruieren Sie induktiv eine Teilfolge $\{S_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ von $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Teilfolge $\{a_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$|S - S_{n_m}| < \frac{1}{2m} \quad \text{und} \quad |S_{n_m} - a_{k_m}| < \frac{1}{2m}.$$

(c) Zeigen Sie, dass $a \leq S$ für jeden Häufungswert a von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.