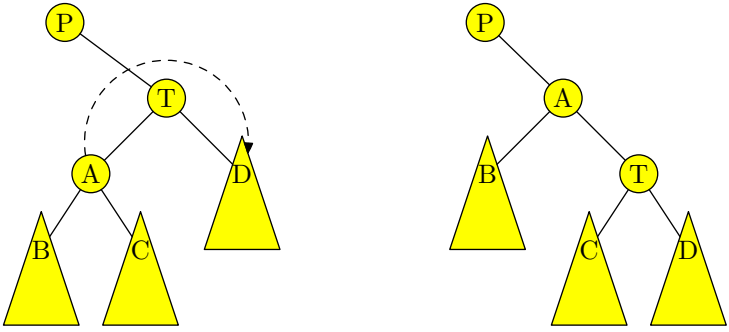
Umstrukturierung durch Rotationen



Eine Rechtsrotation um T.

Die Suchbaumeigenschaft bleibt erhalten.

B, C, D können nur aus externen Knoten bestehen.

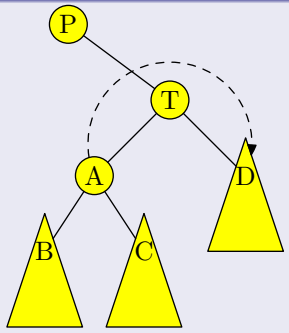
Laufzeit: Konstant!

Rotationen

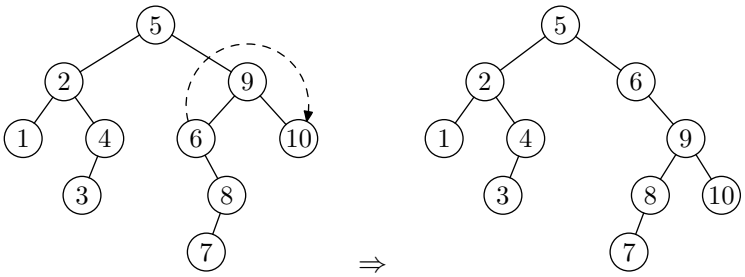
Wir rotieren rechts um 5 und dann zurück links um 3.

Java

```
void rotateright() {
  Searchtreenode⟨K, D⟩ p, a, b, c, d;
  p = this.parent;
  a = this.left;  d = this.right;
  b = a.left;  c = a.right;
  if(p ≠ null) {
    if(p.left == this) p.left = a;
    else p.right = a;
  }
  a.right = this;  a.parent = p;
  this.left = c;  this.parent = a;
  if(c ≠ null) c.parent = this;
}
```

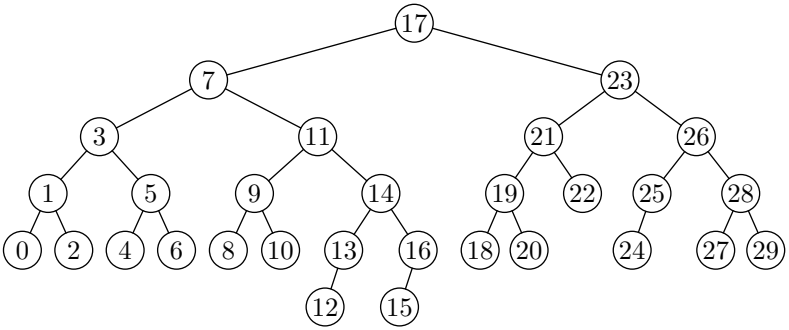


Beispiel



Frage: Kann man einen Knoten durch Rotationen zu einem Blatt machen?

AVL-Bäume

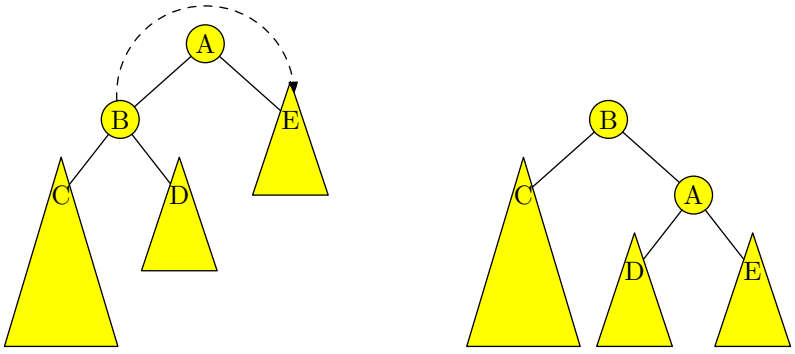


AVL-Bäume werden annähernd balanziert gehalten.

AVL-Eigenschaft:

Die Höhen des rechten und linken Unterbaums jedes Knotens unterscheiden sich höchstens um 1.

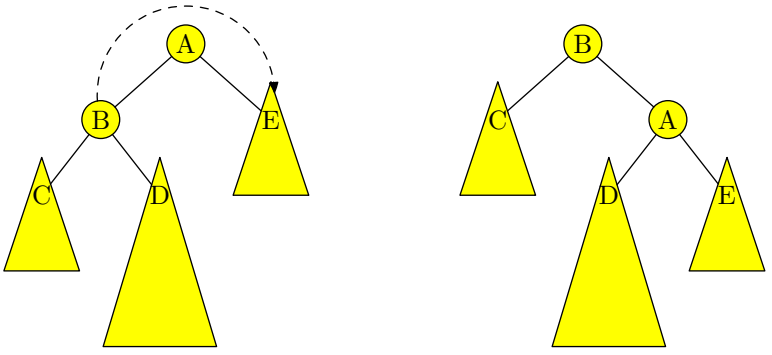
AVL-Bäume – Einfügen



Durch Einfügen in C ist die AVL-Bedingung verletzt.

Reparieren durch Rechtsrotation um A.

AVL-Bäume – Einfügen

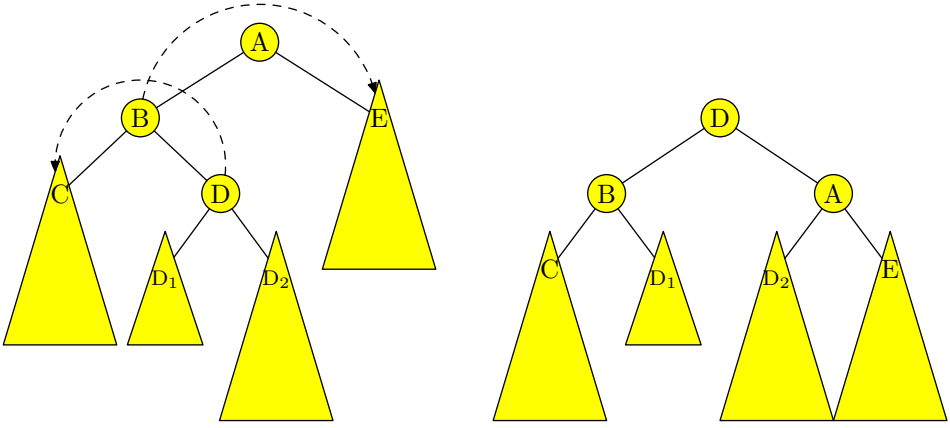


Durch Einfügen in D ist die AVL-Bedingung verletzt.

Reparieren durch Rechtsrotation um A?

Lösung: Erst um B links, dann um A rechts rotieren!

AVL-Bäume – Einfügen



Durch Einfügen in D ist die AVL-Bedingung verletzt.

Erst um B links, dann um A rechts rotieren!

AVL-Bäume – Einfügen

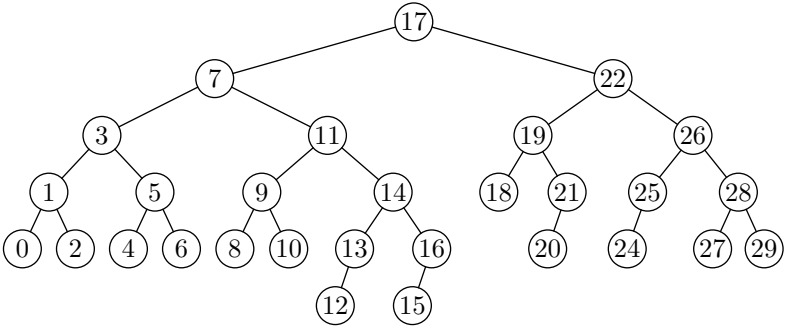
Durch Einfügen können nur Knoten auf dem Pfad von der Wurzel zum eingefügten Blatt unbalanziert werden.

Algorithmus

```
procedure avl − insert(key k) :
  insert(k);
  n := findnode(k);
  while n ≠ root do
    if n unbalanced then rebalance n fi;
    n := parent(n);
  od
```

Es werden höchstens zwei Rotationen durchgeführt.

Beispiel



Java

```
void rebalance() {
 computeheight();
 if(height(left) > height(right) + 1) {
  if(height(left.left) < height(left.right)) left.rotateleft();
  rotateright();
 }
 else if(height(right) > height(left) + 1) {
  if(height(right.right) < height(right.left)) right.rotateright();
  rotateleft();
 }
 if(parent ≠ null)((AVLtreenode⟨K, D⟩) parent).rebalance();
}
```

Java

```
public void insert(K k, D d) {
  if(root == null) root = newNode(k, d);
  else root.insert(newNode(k, d));
  ((AVLtreenode⟨K, D⟩) root.findsubtree(k)).rebalance();
  repair_root();
}
```

Java

```
public void repair_root() {
  if(root == null) return;
  while(root.parent ≠ null) root = root.parent;
}
```

AVL-Bäume – Einfügen

- Nur Knoten auf Pfad zur Wurzel können unbalanziert werden.
- Durch Rotation oder Doppelrotation reparieren.
- Dadurch nimmt Höhe ab!
- $\Rightarrow$ Danach wieder balanziert.
- $\Rightarrow$ Es muß nur einmal repariert werden.
- Einfügen benötigt maximal zwei Rotationen.

AVL-Bäume – Löschen

Wiederholung

Drei Möglichkeiten beim Löschen:

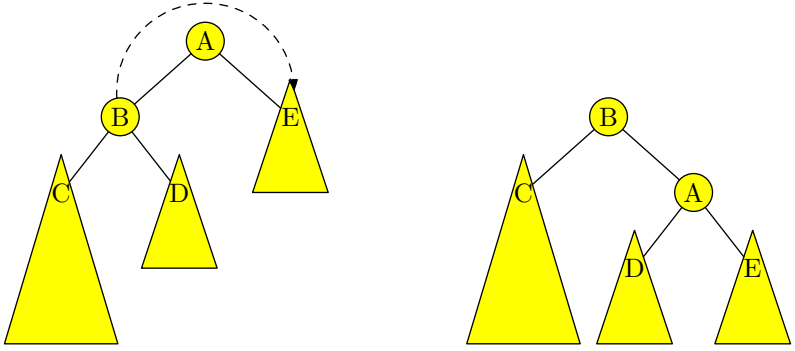
1. Ein Blatt
2. Kein linkes Kind
3. Es gibt linkes Kind

Nur bei den ersten beiden Fällen ändert sich die Höhe direkt!

Nur Knoten auf dem Pfad zur Wurzel können unbalanziert werden.

$\Rightarrow$ Wieder durch Rotationen reparieren.

AVL-Bäume – Löschen



Durch Löschen aus E ist AVL-Bedingung in A verletzt.

Reparieren durch Rechtsrotation um A.

Die Höhe ist dadurch gesunken!
Elternknoten von A kann wieder unbalanziert werden!

Java

```
void delete() {
  if(left == null && right == null) {
    if(parent.left == this) parent.left = null;
    else parent.right = null;
    ((AVLtreenode<K, D>) parent).rebalance(); }
  else if(left == null) {
    copy(right);
    if(right.left ≠ null) right.left.parent = this;
    if(right.right ≠ null) right.right.parent = this;
    left = right.left; right = right.right;
    rebalance(); }
  else {
    Searchtreenode<K, D> max = left;
    while(max.right ≠ null) max = max.right;
    copy(max); max.delete(); }
}
```

AVL-Bäume – Löschen

Java

```
public void delete(K k) {
  if(root == null) return;
  AVLtreenode<K, D> n;
  n = (AVLtreenode<K, D>) root.findsubtree(k);
  if(n == null) return;
  if(n == root && n.left == null && n.right == null) {
    root = null;
  }
  else {
    n.delete();
  }
  repair_root();
}
```

AVL-Bäume – Beispiel

Schlüssel von 1 bis 40 werden zufällig eingefügt und gelöscht.

AVL-Bäume – Analyse

Theorem

Ein AVL-Baum der Höhe h besitzt zwischen F_h und $2^h - 1$ viele Knoten.

Definition

Wir definieren die $n$te Fibonaccizahl:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

Beweis.

Trivial: Ein vollständiger Binärbaum der Höhe h hat genau $2^h - 1$ viele interne Knoten (und ist ein AVL-Baum).

Ein Baum der Höhe 0 hat keinen internen Knoten und $F_0 = 0$.

Ein Baum der Höhe 1 hat genau einen internen Knoten und $F_1 = 1$.

Falls $h > 1$, dann hat der linke oder rechte Unterbaum Höhe $h - 1$ und damit mindestens F_{h-1} viele interne Knoten.

Der andere Unterbaum hat mindestens Höhe $h - 2$ und damit mindestens F_{h-2} viele interne Knoten.

Insgesamt macht das mindestens $F_{h-1} + F_{h-2} = F_h$ viele Knoten. □

AVL-Bäume – Analyse

Theorem

Die Höhe eines AVL-Baums mit n Knoten ist $\Theta(\log n)$.

Beweis.

Es gilt $F_h = \Theta(\phi^h)$ mit $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

$$F_h \leq n \Rightarrow h \log(\phi) + O(1) \leq \log n$$
$$n \leq 2^h - 1 \Rightarrow \log n \leq h + O(1)$$

□

AVL-Bäume – Analyse

Theorem

Einfügen, Suchen und Löschen in einen AVL-Baum mit n Elementen benötigt $O(\log n)$ Schritte.

Beweis.

Die Höhe des AVL-Baumes ist $\Theta(\log n)$.
Einfügen, Suchen und Löschen benötigt $O(h)$ Schritte, wenn h die Höhe des Suchbaums ist.
Das Rebalanzieren benötigt ebenfalls $O(h)$ Schritte. □

Treaps

Suchbaumeigenschaft:

- Alle Knoten im linken Unterbaum kleiner als die Wurzel
- Alle Knoten im rechten Unterbaum größer als die Wurzel

Heapeigenschaft (Min-Heap):

- Alle Knoten im linken Unterbaum größer als die Wurzel
- Alle Knoten im rechten Unterbaum größer als die Wurzel

Ein Heap ist einfacher als ein Suchbaum.

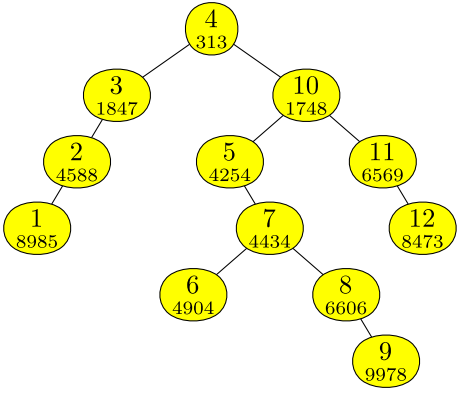
Treaps

Definition

Ein Treap ist ein binärer Baum mit:

- Jeder Knoten hat einen Schlüssel
- Jeder Knoten hat eine Priorität
- Der Baum ist ein Suchbaum bezüglich der Schlüssel
- Der Baum ist ein Heap bezüglich der Prioritäten

Treaps – Beispiel



Die Schlüssel sind groß und die Prioritäten klein geschrieben.

Treaps

Theorem

Gegeben seien n Schlüssel mit paarweise verschiedenen Prioritäten.
Dann gibt es genau einen Treap, der diese Schlüssel und Prioritäten enthält.

Beweis.

Die Wurzel ist eindeutig:
Der Schlüssel mit minimaler Priorität.

- Der linke Unterbaum besteht aus allen kleineren Schlüsseln
- Der rechte Unterbaum besteht aus allen größeren Schlüsseln
- Induktion: Der linke und rechte Unterbaum ist eindeutig

Treaps

Lemma

Gegeben sei ein Treap mit paarweise verschiedenen Prioritäten.
Dann ist die Form dieselbe wie bei einem binären Suchbaum, in den die Schlüssel in Reihenfolge der Prioritäten eingefügt wurden.

Beweis.

Die Wurzel im Treap hat die kleinste Priorität.
Wird sie in einen leeren Suchbaum als erste eingefügt, ist und bleibt sie die Wurzel des Suchbaums.

Durch vollständige Induktion haben auch die rechten und linken Teilbäume dieselbe Form wie im Treap. □

Theorem

Gegeben sei ein Treap der Größe n, dessen Prioritäten zufällig uniform aus der Menge $\{1, \ldots, m\}$ stammen, wobei $m \geq n^3$.
Dann ist die Höhe des Treaps im Erwartungswert $O(\log n)$.

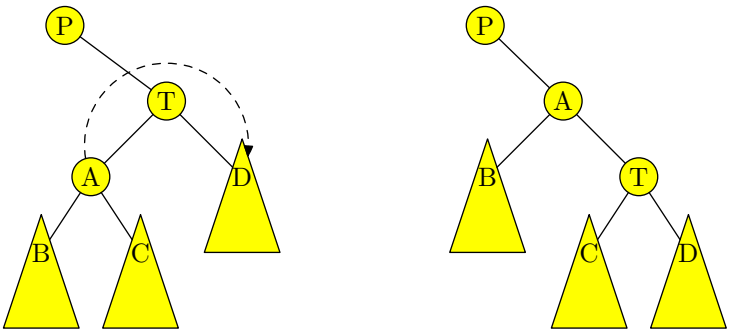
Beweis.

Seien $P_1, \ldots, P_n$ die Prioritäten.
Dann gilt $\Pr[P_i = P_j] \leq 1/n^3$ für $i \neq j$.
Es gibt weniger als n^2 Paare von Prioritäten. Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Paar identisch ist, ist höchstens

$$\sum_{i \neq j} \Pr[P_i = P_j] \leq n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Der Erwartungswert der Höhe ist höchstens $O(\log n) + \frac{1}{n} \cdot n = O(\log n)$. □

Rotate-Down



Die Heapeigenschaft sei erfüllt, außer für T:
T habe eine zu große Priorität.

Nach der Rotation gilt wieder, daß die Heapeigenschaft erfüllt ist, außer für T.

Wir können T nach unten rotieren, bis es ein Blatt ist.

Java

```
void rotate_down(Treapnode⟨K, D⟩ n) {
  while(true) {
    if(n.left ≠ null) {
      if(n.right == null ||
        ((Treapnode⟨K, D⟩) n.left).weight ≤
        ((Treapnode⟨K, D⟩) n.right).weight) n.rotateright();
      else n.rotateleft();
    }
    else if(n.right == null) break;
    else n.rotateleft();
  }
  repair_root();
}
```

Ergebnis: Die Heapeigenschaft ist erfüllt, außer vielleicht für n.

Treaps – Löschen

Java

```
public void delete(K k) {
  if(root == null) return;
  Treapnode<K, D> n = (Treapnode<K, D>) root.findsubtree(k);
  if(n == null) return;
  rotate_down(n);
  super.delete(k);
}
```

Wir rotieren den Knoten nach unten und entfernen ihn dann.

Treaps – Einfügen

Einfügen ist das Gegenteil von Löschen.

Löschen:

1. Knoten nach unten rotieren
2. Als Blatt entfernen

Einfügen:

1. Knoten als Blatt einfügen
2. Nach oben zur richtigen Position rotieren

Treaps – Einfügen

Java

```
void rotate_up(Treapnode⟨K, D⟩ n) {
  while(true) {
   if(n.parent == null) break;
   if(((Treapnode⟨K, D⟩) n.parent).weight ≤ n.weight) break;
   if(n.parent.right == n) n.parent.rotateleft();
   else n.parent.rotateright();
  }
  repair_root();
}
```

Wir rotieren nach oben bis wir die Wurzel erreichen oder der Elternknoten kleinere Priorität hat.

Treaps – Einfügen

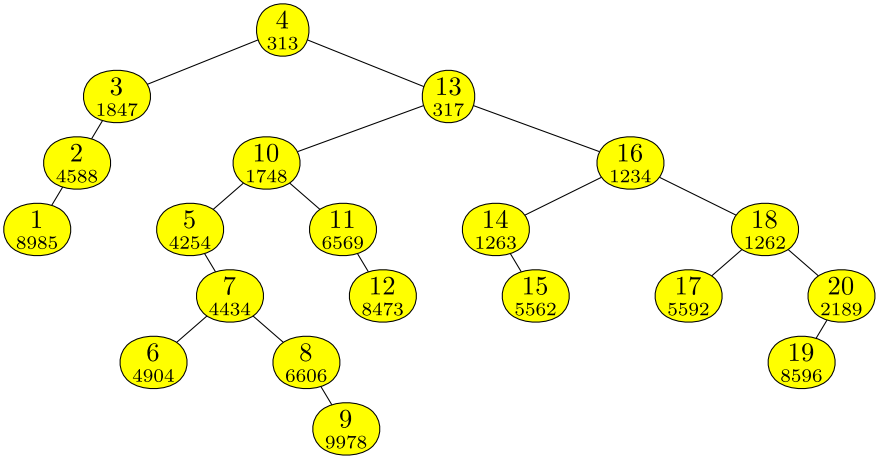
Java

```
public void insert(K k, D d) {
 if(root == null) root = newNode(k, d, generator);
 else {
   root.insert(newNode(k, d, generator));
   notifyTreeChanged("Treap insert: " + k);
   rotate_up((Treapnode<K, D>) root.findsubtree(k));
 }
}
```

1. Normal als Blatt einfügen
2. Hochrotieren

Einfügen von 20 Elementen in einen Treap

Die Prioritäten sind zufällig gewählt.



Treaps – Beispiel

Die Schlüssel von 1 bis 40 werden zufällig eingefügt und gelöscht.

Treaps

Theorem

Einfügen, Suchen und Löschen in einen Treap mit n Elementen benötigt $O(\log n)$ Schritte im Mittel, falls die Prioritäten aus einem ausreichend großen Bereich zufällig gewählt werden.

- Treaps sind in der Praxis sehr schnell.
- Standardimplementation für assoziative Arrays in LEDA.
- Einfach zu analysieren.
- Einfach zu implementieren.
- Sehr hübsch.