Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 6

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) .$$

$\mathcal{B}$ sei die im Uhrzeigersinn um 45° gedrehte Basis.

(a) Bestimmen Sie die Basisvektoren von $\mathcal{B}$.

(b) Berechnen Sie jeweils die Koordinaten des Vektors x mit $K_{\mathcal{E}}(x) = (4,5)^\top$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen, die die Koordinaten bezüglich $\mathcal{A}$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ umrechnen beziehungsweise umgekehrt. Verifizieren Sie die Richtigkeit mit Hilfe des Beispiels aus b).

Aufgabe 2

Sie haben Koordinaten bzgl. der Einheitsmatrix (e_1, e_2, e_3) gegeben, geben Sie eine Matrix an, welche die gegebenen Koordinaten in Koordinaten bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

transformiert.

Aufgabe 3

Die Abbildung I bildet Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B}_1$=$(1,x,x^2)$ auf Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B}_2$=$(1,x,x^2,x^3)$ ab, also $I : P_2 \to P_3$. I bildet dabei jedes Polynom auf sein unbestimmtes Integral (Stammfunktion) ab. Um Eindeutigkeit zu erreichen, fordern wir, dass die Stammfunktion keinen konstanten Anteil aufweisen soll.
Geben Sie die zugehörige Abbildungsmatrix an.

Aufgabe 4

Stellen Sie die Transformationsmatrizen für folgende Transformationen im $\mathbb{R}^3$ auf:

(a) Drehung um die y-Achse um den Winkel ϕ

(b) Spiegelung an der z-Achse

(c) Dehnung in x-Richtung um den Faktor 2 und Stauchung in z-Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}$

(d) Hintereinanderschaltung der Transformationen in der Reihenfolge a) bis c)

Hausaufgaben

Aufgabe 5

$\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{A}' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ und $\mathcal{A}'' = (a''_1, a''_2, a''_3)$ bilden mit den kanonischen Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie

$$a'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$a''_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, a''_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, a''_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils Basen des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$ sowie $T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$.

(b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}''}$ sowie $T_{\mathcal{A}''}^{\mathcal{A}}$.

(c) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{A}''}^{\mathcal{A}'}$ sowie $T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}''}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $(1, -1, 0)^\top$ bzgl. der Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ unter Zuhilfenahme der in der Vorlesung benutzten Schreibweise.

Aufgabe 6

Die Kavalierprojektion dient dazu, dreidimensionale Objekte zweidimensional darzustellen. Die zugehörige Projektionsmatrix bzgl. der kanonischen Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ lautet

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $(a'_1, a'_2, a'_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ spannen einen Spat auf und bilden die Basis $\mathcal{A}'$.

(a) Zeichnen Sie den Spat.

(b) Bestimmen Sie alle acht Eckpunkte des Spates sowie dessen Volumen.

(c) Projizieren Sie alle Eckpunkte des Spates mit Hilfe der Kavalierprojektion in die $\mathbb{R}^2$-Ebene.

(d) Neben der kanonischen Basis $\mathcal{B}$ gibt es im $\mathbb{R}^2$ auch noch die Basis $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2)$ mit

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}$ bzgl. der Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ der Polynome vom $\mathrm{Grad} \leq 3$. Stellen Sie die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ auf mit

$$\mathcal{C} = \left(1, x - c, (x + c)^2, (x - c)^3\right), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 8

Die untenstehende Transformationsmatrix für den $\mathbb{R}^2$ wurde durch eine Drehung, eine Spiegelung an einer Achse und eine Verzerrung (in dieser Reihenfolge) erstellt. Geben Sie durch die drei einzelnen Transformationsmatrizen eine mögliche Lösung für die Zerlegung der Matrix an.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Eine Verzerrung ist von der Form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b > 0,$$

d.h. in x_1-Richtung bzw. x_2-Richtung wird um den Faktor a bzw. b gedehnt oder gestaucht.