FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN,
FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

M.Hollstein, A.Kleefeld, H.Schäfer

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
bzw. “ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Stochastik, WiSe 2020/21, am 30.03.2021

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift*: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(6)
Aufgabe 2)		(6)
Aufgabe 3)		(6)
Aufgabe 4)		(6)
Aufgabe 5)		(6)
Aufgabe 6)		(6)
Aufgabe 7)		(6)
Aufgabe 8)		(6)
Gesamtpunkte:		Note:

*Durch meine Unterschrift erkläre ich, dass ich die Bearbeitung der Prüfungsarbeit persönlich, ohne fremde Hilfe vorgenommen habe. Mir ist bewusst, dass eine Zuwiderhandlung gegen die oben gemachte Erklärung als Täuschungsversuch gewertet wird. Eine vorsätzliche Täuschung kann mit einer Geldbuße oder weiteren Sanktionen bis hin zur Exmatrikulation geahndet werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz NRW).

1. Aufgabe **6 Punkte**

Eine Versicherungsgesellschaft teilt ihre Kunden für die Unfallversicherung in die Klassen „gutes Risiko", „mittleres Risiko" und „schlechtes Risiko" ein. Nach den bisherigen Untersuchungen beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein gutes Risiko während des folgenden Jahres einen Unfall erleidet, gerade $0,05$. Für ein mittleres Risiko ist diese Wahrscheinlichkeit $0,15$ und für ein schlechtes Risiko $0,3$. 20% der Kunden wurden als gutes Risiko, 50% als mittleres Risiko und 30% als schlechtes Risiko durch die Abfrage ihrer Arbeits- und Lebensumstände bei Versicherungsbeginn eingestuft.

a) Erstellen Sie einen zugehörigen Wahrscheinlichkeitsbaum.

b) Welcher Anteil der Kunden hat dann innerhalb eines Jahres einen Unfall?

c) Ein Kunde war im vergangenen Jahr unfallfrei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört er zur Klasse des „guten Risikos"?

2. Aufgabe **6 Punkte**

Eine Zufallsvariable X kann die drei verschiedenen Werte 30, 55 und 90 annehmen. Die Verteilung der Zufallsvariablen sei gegeben durch:

$$P(X = 30) = 0,3; \qquad P(X = 55) = 0,6; \qquad P(X = 90) = 0,1$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen X.

b) Seien $X_1, \ldots, X_{200}$ 200 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die die gleiche Verteilung wie X haben. Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz der Summe $S_{200} := X_1 + \ldots + X_{200}$ an.

c) Berechnen Sie den Wert S_0, so dass $P(S_{200} \leq S_0) = 0,95$

(*Tipp:* Zentraler Grenzwertsatz! Ohne Stetigkeitskorrektur.)

3. Aufgabe **6 Punkte**

X und Y haben die folgende gemeinsame Verteilung:

Y / X	0	1	2	3	
0	$0,01$	$0,03$	$0,05$	$0,01$	
1	$0,06$	$0,18$	$0,3$	$0,06$	
2	$0,03$	$0,09$	$0,15$	$0,03$	

(z.B. die Wahrscheinlichkeit, dass $X = 1$ und $Y = 2$ beträgt $0,3$)

a) Bestimmen Sie die Marginalverteilungen (bzw. Randverteilungen) von X und Y.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe von X und Y kleiner oder gleich 2?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von $Z_1 = 2X + 3Y + 4$.

d) Berechnen Sie die Varianz von $Z_2 = 3Y + 4$.

e) Wie würden Sie überprüfen, ob X und Y stochastisch unabhängig sind?

4. Aufgabe **6 Punkte**

Gegeben sei die Messreihe

$$2,1 \quad -0,83 \quad 3,73 \quad 6,8 \quad 6,6 \quad 8,2 \quad -4,5 \quad 1,3 \quad 4,3 \quad -1,2$$

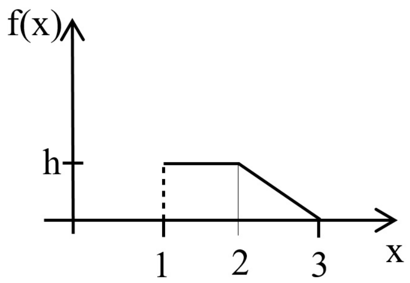
Es darf angenommen werden, dass es sich um normalverteilte, unabhängige Messergebnisse mit Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ handelt.

a) Bestimmen Sie ein 90%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ, unter der Annahme, dass $\sigma^2 = 12.$

b) Wie groß muss der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit die Intervallbreite circa 1 beträgt?

5. Aufgabe **6 Punkte**

Gegeben sei der folgende Graph einer Dichtefunktion der Zufallsgröße X:



a) Bestimmen Sie h.

b) Geben Sie die Dichtefunktion an.

c) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(1,5 < X < 2,5)$.

6. Aufgabe **6 Punkte**

An einem Getränkestand eines Schulfestes kann ein/e Schüler/in so viel Kakao trinken wie er/sie mag. Aus Erfahrung ist bekannt, dass der Kakaokonsum X [ml/Kopf] eine Standardabweichung von exakt $\sigma = 44$ [ml/Kopf] besitzt und als normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ angenommen werden kann. Man geht davon aus, dass im Mittel ein/e Schüler/in 200 ml trinkt. Um dies mit einem Fehler 1. Art von 5% zu testen, wird bei $n = 40$ unabhängig und zufällig ausgewählten Schüler/innen der Kakaokonsum gemessen. Der mittlere Konsum bei dieser Beobachtung betrug 196 [ml/Kopf].

Testen Sie $H_0 : \mu = 200$ gegen $H_1 : \mu \neq 200.$

7. Aufgabe **6 Punkte**

Die Dichte einer stetigen Zufallsvariablen habe die Form

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2^a} \cdot x^{a-1} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die auf einer Stichprobe des Umfangs n der Zufallsvariablen X basierende Maximum-Likelihood-Schätzung von a.

8. Aufgabe **6 Punkte**

Bei einem Vergleichsdiktat für alle 2. Jahrgangsstufen eines Bundeslandes ergaben sich an einer Grundschule in Aachen folgende Fehlerzahlen:

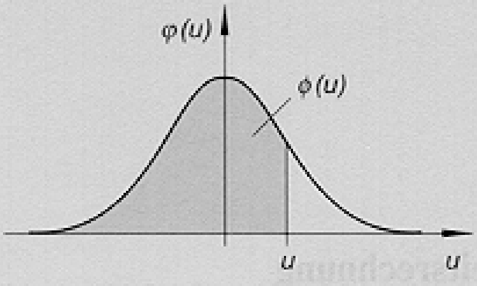
Fehler	Anzahl
0	18
1	22
2	15
3	11
4	8
5	4
6	2

a) Erstellen Sie eine Tabelle für die relativen Häufigkeiten und für die Daten, die Sie für die empirische Verteilungsfunktion benötigen.

b) Stellen Sie die relativen Häufigkeiten und die empirische Verteilungsfunktion graphisch dar.

c) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und bestimmen Sie den Median anhand der gegebenen Daten.

Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung



Schrittweite: $\Delta u = 0{,}01$

Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \qquad (u > 0)$$

Für $u \geqslant 4$ ist $\phi(u) \approx 1$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8398
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000