Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 27. 10. 2025

Übungsblatt 3 Analysis I WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 8.

Sei $f : A \to B$ gegeben. Zeigen Sie, dass für alle $U, V \subseteq A$ die Inklusion

$$f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$$

gilt. Geben Sie ein Beispiel $f : A \to B$ und Mengen $U, V \subseteq A$ an, sodass die andere Inklusion falsch ist. [1]

Aufgabe A 9.

Führen Sie den „*Pseudocode aus 1.4.9*“ aus dem Skript für das folgende Beispiel durch: Bestimmen Sie für $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}, f(n) = -n^2 + 4n - 1$ die Ausgabe zu den Werten $y = 3$ und $y = 2$.

Aufgabe A 10.

Zeigen Sie, dass sinh eine ungerade Funktion und cosh eine gerade Funktion ist.

Aufgabe A 11.

Geben Sie die Definition von Injektivität an und beantworten Sie die folgenden Fragen:

(a) Was ist der größtmögliche Definitionsbereich D der durch $f(x) = \sqrt{x}$ definierten Funktion?

(b) Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ injektiv?

(c) Finden Sie die größtmögliche Menge W, sodass $f : D \to W$ surjektiv ist.

[1] Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass die Gleichheit nicht gilt.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 9. (4+4 Punkte)

Sei $f : A \to B$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $U \subseteq A$ die Inklusion

$$f(A \setminus U) \supseteq f(A) \setminus f(U)$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $V \subseteq B$ die Inklusion

$$f^{-1}(B \setminus V) = A \setminus f^{-1}(V)$$

gilt.

Aufgabe B 10. (3 Punkte)

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an, sodass $f^{-1}(\{2\}) = \{1, 5\}$.

Aufgabe B 11. (5 Punkte)

Geben Sie das größtmögliche Intervall I an, sodass $0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = x^2 - x,$$

injektiv ist. Was ist das Bild von f auf I?

Aufgabe B 12. (6+3 Punkte)

Es seien A, B Mengen mit $A \subseteq B$.

(a) Geben Sie einen direkten Beweis für die folgende Aussage, in dem Sie für den Fall unendlicher Mächtigkeit die Bijektion zu den natürlichen Zahlen explizit konstruieren:
Wenn B höchstens abzählbar ist, dann ist A höchstens abzählbar.

(b) Folgern Sie aus a) per Widerspruch:
Wenn A überabzählbar ist, so ist B überabzählbar.