Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

7. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung. Das vorliegende siebte Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 28.5., 10:15 Uhr abzugeben.

---

1. (Starkes GGZ) (10 Punkte) Sei $0 < p < 1$, und seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch p-Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen, d.h.

$$\forall i \in \mathbb{N} : \mathbb{P}[X_i = 1] = p,\ \mathbb{P}[X_i = 0] = 1 - p.$$

Sei

$$Y_k := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} X_{k+i}.$$

a) Bestimme $\mu := \mathbb{E}[Y_i]$.

b) Zeige

$$\mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k = \mu] = 1$$

2. (Korrelation) (6 Punkte)
Seien X_1, X_2 reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) \neq 0$.

a) Berechnen Sie die Korrelation $\rho(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

b) Seien X_1 und X_2 zusätzlich unabhängig. Berechnen Sie die Korrelation $\rho(X_1, X_1 + X_2)$.

3. (Schwaches GGZ) (8 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilung

$$\mathbb{P}(X_k \geq x) = \frac{1}{x^\alpha}, x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{1}$$

wobei $\alpha > 0$. Sei $\mu \in [0, \infty]$ der Erwartungswert von X_1.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist den Erwartungswert endlich?

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}_+$ kann man *aus dem schwachen Gesetz der Großen Zahlen aus der Vorlesung* die folgende Aussage herleiten? (Wieso?)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

4. (Zeitumkehr einer Markovkette) (8 Punkte)
Sei $X_0, \ldots, X_n$ eine Markovkette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $P(x, y)$, die in einer invarianten Verteilung μ gestartet wird. Weiter sei $Y_0 := X_n, \ldots, Y_n := X_0$.

(a) Zeigen Sie, dass $Y_0, \ldots, Y_n$ eine Markovkette mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\hat{P}(x, y) \;=\; \frac{\mu(y)\, P(y, x)}{\mu(x)}$$

und invarianter Verteilung μ ist.

(b) Wann gilt $\hat{P}(x, y) = P(x, y)$?

5. (Geburtenverteilung) (8 Punkte) Angenommen, die Gesamtzahl G der Geburten pro Woche in einem Krankenhaus ist Poisson-verteilt mit Parameter λ. Weiterhin sei jede Geburt, unabhängig von anderen Geburten und von der Gesamtzahl der Geburten, mit Wahrscheinlichkeit p ein Junge, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ein Mädchen. Wir beschreiben die Anzahl der pro Woche geborenen Jungen bzw. Mädchen durch Zufallsvariablen J und M. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}[J = j, M = m] \;=\; \frac{(\lambda p)^j \mathrm{e}^{-\lambda p}}{j!} \cdot \frac{(\lambda q)^m \mathrm{e}^{-\lambda q}}{m!} \;,$$

und folgern Sie, dass J und M unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λp bzw. λq sind.