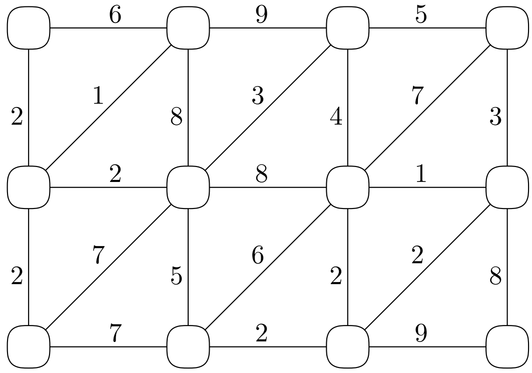
Datenstrukturen und Algorithmen, SS 2024
Prof. Dr. P. Rossmanith
D. Cloerkes, M. Gehnen, D. Mock, N. Speetzen

Abgabe: 28.06.2024

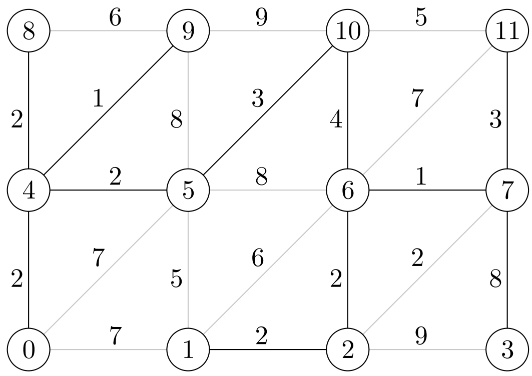
Übungsblatt mit Lösungen 10

Aufgabe T34

Finden Sie jeweils einen minimalen Spannbaum mithilfe der Algorithmen von Kruskal und Prim für folgenden Graphen:



Lösungsvorschlag



Aufgabe T35

Betrachten Sie die folgenden Strukturen. Handelt es sich jeweils um einen Matroid?

a) Ein Sudoku, wobei die Grundmenge hier Tripel von drei Zahlen aus der Menge $\{1, \dots, 9\}$ sind. Eine Menge von Tripeln ist dann unabhängig, wenn sie die Sudoku-Eigenschaften erfüllt: Jede Zelle (identifiziert durch Zeilen- und Spaltenindex an den ersten beiden Stellen des Tripels) taucht höchstens einmal in der Menge auf. Weder in einer Zeile, noch in einer Spalte oder einem Block dürfen zwei Zellen derselben Ziffer (im dritten Element des Tripels) zugeordnet sein.

b) Graphen mit höchstens zehn Zusammenhangskomponenten, wobei die Grundmenge die Menge der Kanten ist. Die Menge der Knoten ist für alle unabhängigen Kantenmengen gleich.

c) Paarweise teilerfremde Zahlen, wobei die Grundmenge eine Menge natürlicher Zahlen ist.

d) Matching in einem bipartiten Graphen, wobei die Grundmenge die Menge der Kanten ist. Die Menge der Knoten ist für alle unabhängigen Kantenmengen gleich.

Lösungsvorschlag

a) Nein, es handelt sich nicht um einen Matroid. Angenommen das erste Sudoku besteht nur aus einer einzigen 1 oben links (Tripelmenge $\{(1,1,1)\}$). Das zweite Sudoku hat eine 1 unten links und eine 1 oben rechts (Tripelmenge $\{(9,1,1),(1,9,1)\}$). Wegen der Austauscheigenschaft muss nun eine der beiden Einsen des zweiten Sudokus dem ersten Sudoku hinzugefügt werden können, ohne dass die Sudoku-Eigenschaft verletzt wird. Das ist aber nicht der Fall, da wir entweder eine Dopplung in der ersten Zeile oder in der ersten Spalte erhalten. Also handelt es sich bei unserer Sudoku-Struktur nicht um einen Matroid.

b) Nein, es handelt sich nicht um einen Matroid. Angenommen ein Graph besteht aus elf Knoten und einer Kante zwischen zwei beliebigen Knoten. Wegen der ersten Matroid-Eigenschaft muss auch die leere Kantenmenge enthalten sein, wodurch sich aber elf Zusammenhangskomponenten ergeben: Die leere Menge ist demnach nicht unabhängig und es handelt sich bei dieser Struktur nicht um einen Matroid.

c) Nein, es handelt sich nicht um einen Matroid. Sei $M_1 = \{3,5\}$ und $M_2 = \{15\}$. Dann muss wegen der Austauscheigenschaft $M_2 \cup \{3\}$ oder $M_2 \cup \{5\}$ unabhängig sein, aber beide Mengen sind nicht paarweise teilerfremd. Also handelt es sich bei dieser Struktur nicht um einen Matroid.

d) Nein, es handelt sich nicht um einen Matroid. Angenommen der bipartite Graph besteht aus vier Knoten (je zwei pro Partitionsklasse) und drei Kanten. Dann gibt es ein perfektes Matching mit zweien dieser drei Kanten. Ein anderes Matching besteht nur aus der dritten Kante. Wegen der Austauscheigenschaft müsste auch der Graph mit der dritten und einer der beiden ersten Kanten ein Matching darstellen, was aber nicht der Fall ist.

Aufgabe T36

Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen kantengewichteten Graphen $G = (V, E)$ den schwersten zusammenhängenden Untergraphen berechnet, der höchstens einen Kreis enthält. Die Laufzeit soll in $O((|V| + |E|) \cdot \log |E|)$ liegen. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Lösungsvorschlag

1. G in seine Zusammenhangskomponenten zerteilen
2. Pro Zusammenhangskomponente:
   (a) Kanten nach Gewicht sortieren
   (b) Kanten nach und nach hinzufügen, bis der erste Kreis sich schließt
   (c) Weitere Kanten nach und nach hinzufügen, wenn sich dadurch kein Kreis schließt
3. Wähle diejenige Zusammenhangskomponente mit dem schwersten Untergraphen mit maximal einem Kreis und gib diesen Untergraphen zurück

Dieser Algorithmus ist korrekt, da es sich bei den einzelnen Zusammenhangskomponenten (mit der jeweiligen Kantenmenge als Grundmenge) um Matroide handelt, wobei eine Untermenge der Kantenmenge dann unabhängig ist, wenn die Zusammenhangskomponente mit diesen Kanten höchstens einen Kreis enthält. Im folgenden Beweis befinden wir uns in einer Zusammenhangskomponente des Eingabegraphen, der aber wiederum durch die unabhängige Kantenmenge in verschiedene Zusammenhangskomponenten - und diese sind im Folgenden gemeint, wenn von Zusammenhangskomponente die Rede ist - unterteilt werden kann.

Die Vererbbarkeitseigenschaft ist offensichtlich erfüllt, da beim Entfernen von Kanten keine neuen Kreise entstehen können.

Die Austauscheigenschaft ist ebenfalls erfüllt:

Seien E_1, E_2 unabhängige Mengen mit $|E_1| < |E_2|$. Hat E_1 keinen Kreis, so kann eine beliebige Kante $\{u, v\}$ von $E_2 \setminus E_1$ zu E_1 hinzugefügt werden: Falls $\{u, v\}$ einen Kreis schließt, so schließt es maximal einen Kreis: Der Weg von u nach v in E_1 ist eindeutig (da E_1 kreisfrei ist), dieser Weg und der Kante $\{u, v\}$ wird also der einzige Kreis in $E_1 \cup \{\{u, v\}\}$ sein.

Hat E_1 bereits einen Kreis, so hat (V, E_2) mindestens eine Zusammenhangskomponente weniger als (V, E_1) - selbst wenn (V, E_2) ebenfalls einen (anderen) Kreis hat, muss es mindestens eine Zusammenhangskomponente weniger geben, damit $|E_1| < |E_2|$. Damit gibt es aber auch zwei Knoten u, v, die in (V, E_2) in einer Zusammenhangskomponente sind; in (V, E_1) jedoch nicht. Es gibt nun also mindestens eine Kante auf dem Weg von u nach v in E_2, die zwei Zusammenhangskomponenten in (V, E_1) verbindet - diese Kante kann nun zu E_1 hinzugefügt werden, ohne einen Kreis zu schließen.

Weil wir es mit einem Matroid zu tun haben, funktioniert je Zusammenhangskomponente der obige Greedy-Algorithmus. Da der schwerste zusammenhängende Untergraph keine Knoten aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten umfassen kann, ist auch die separate Betrachtung der einzelnen Zusammenhangskomponenten zulässig: Hätte ein schwerster zusammenhängender Untergraph Knoten aus mehreren Zusammenhangskomponenten, wären diese gar nicht in verschiedenen Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe H32 (15 Punkte)

Die Produktionsaufträge $J_1, J_2, \ldots, J_n$ eines Unternehmens benötigen verschiedene Maschinen $M_1, M_2, \ldots, M_m$, wobei ein Auftrag auch mehrere Maschinen belegen kann. Ein Auftrag bringt natürlich einen gewissen Geldbetrag ein. Die Maschinen können entweder gekauft werden — diese Kosten entstehen dann nur einmal und jede weitere Nutzung ist Kostenfrei — oder gemietet werden. Letzteres kostet pro Auftrag einen gewissen Betrag (dieser Betrag variiert also von Auftrag zu Auftrag!). Die dritte Tabelle enthält die Mietkosten der Maschinen für die jeweiligen Aufträge, eine leere Zelle bedeutet, dass diese Maschine für diesen Auftrag nicht benötigt wird, ansonsten benötigt man *alle* anderen Maschinen für diesen Auftrag. Zum Beispiel kostet Auftrag J_1 auf der Maschine M_1 30 Geldeinheiten (vorausgesetzt, M_1 wurde nicht gekauft).

Für so ein Szenario mit gegebenen Aufträgen, Maschinen und Kosten soll eine gewinnmaximierende Menge von Aufträgen mit entsprechender Zuteilung von Maschinen berechnet werden. Beschreiben Sie ein allgemeines Verfahren, um dieses Problem möglichst effizient zu lösen. Begründen Sie, wieso Ihr Verfahren korrekt funktioniert.

Benutzen Sie Ihr Verfahren, um eine optimale Lösung für das gegebene Szenario zu berechnen.

Auftrag	Zahlung
J_1	80
J_2	80
J_3	120

Maschine	Kaufpreis
M_1	62
M_2	80
M_3	100
M_4	32

	M_1	M_2	M_3	M_4
J_1	30		50	
J_2		60	22	
J_3	30	30	30	30

Lösungsvorschlag

Die Knotenmenge des Flussnetzwerks ist $\{s,t\} \cup \{J_1, \ldots, J_n\} \cup \{M_1, \ldots, M_m\}$. Die Kanten des Netzwerks sind wie folgt:

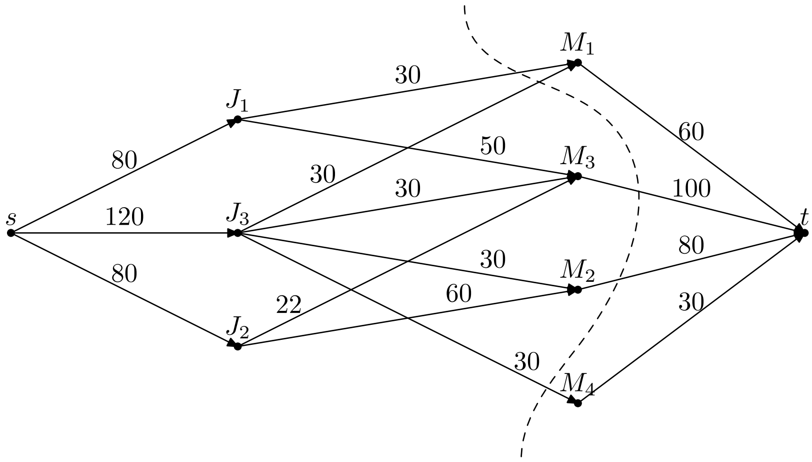
1. Von der Quelle s läuft zu jedem Knoten J_i eine Kante mit Kapazität j_i, wenn j_i die für einen angenommenen Auftrag J_i erhaltene Zahlung ist.

2. Von einem Auftrag J_i läuft eine Kante zur Maschine M_j, wenn M_j für den Auftrag J_i benötigt wird. Die Kapazität auf dieser Kante sind die Kosten, die für eine einmalige Anmietung der Maschine M_j für den Auftrag J_i entstehen (Tabelle 3).

3. Von jedem Knoten M_i läuft eine Kante mit Kapazität m_i in die Senke t, wenn m_i die Kosten sind, um die Maschine M_i zu kaufen.

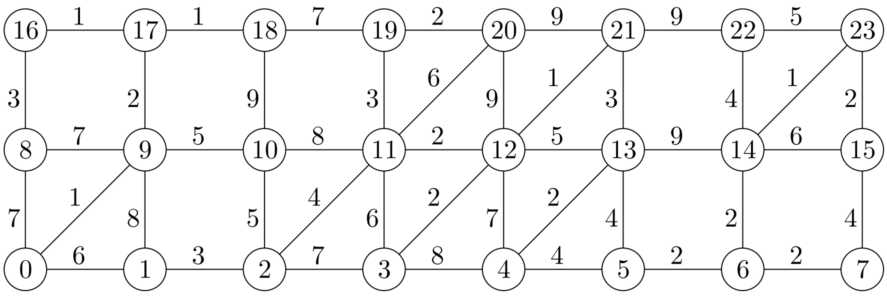
Ein Min-Cut (S,T) für dieses Netzwerk ist natürlich endlich und ganzzahlig und kann effizient mit der Methode von Ford und Fulkerson berechnet werden. Wir wählen nun diejenigen Aufträge aus, die in S enthalten sind. Ebenso kaufen wir alle Maschinen in S.

Zur Begründung, warum dieses Verfahren korrekt ist: Die Kanten im Schnitt entsprechen anschaulich einem *Verzicht* auf einen Geldbetrag, welche der Kapazität dieser Kante entspricht. Wird etwa eine Kante $s \to J_i$ für einen Auftrag J_i vom Schnitt (S,T) geschnitten, dann verzichtet man auf die Einnahmen in Höhe von j_i. Der Verzicht auf die Einnahmen kann günstiger sein (und zu einem kleineren Schnitt führen), als wenn man den Job annimmt und dafür viele andere Kanten (für Aufträge oder Maschinen) schneiden muss. Schneidet man analog eine Kante $M_i \to t$, dann muss man den entsprechenden Kaufpreis für eine Maschine bezahlen. Auch dieses kann günstiger sein, als die Maschine für jeden angenommen Job zu mieten. Liegt andererseits eine Maschine M_j in T, dann ist es offenbar günstiger, M_j für jeden angenommenen Auftrag J_i anzumieten; andernfalls könnte man leicht einen kleineren Schnitt konstruieren, indem man M_j nach S verschiebt (und dem Fall entspricht, M_j zu kaufen), was im Widerspruch zur Minimalität des Schnittes steht.

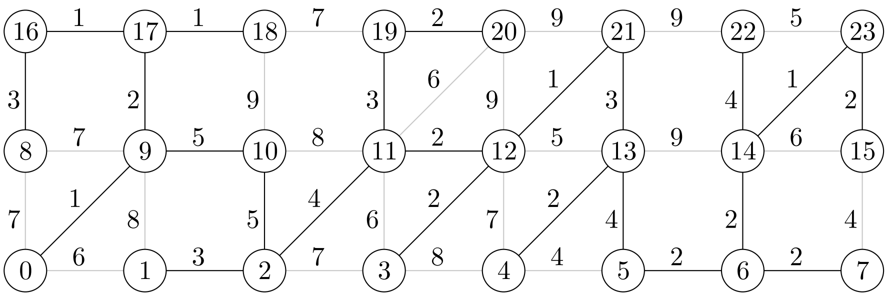


Aufgabe H33 (10 Punkte)

Finden Sie einen minimalen Spannbaum mithilfe des Algorithmus von Kruskal, Prim oder Borůvka[1] für folgenden Graphen. Es reicht aus, wenn Sie den resultierenden, minimalen Spannbaum angeben.



Lösungsvorschlag



Aufgabe H34 (15 Punkte)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$. Mit $G[F]$ bezeichnen wir den von der Kantenmenge $F \subseteq E$ induzierten Untergraphen. Dieser hat als Knoten alle Knoten des Graphen G und als Kantenmenge genau F.

Es sei $\mathcal{F} = \{ F \subseteq E \mid G[F] \text{ ist kreisfrei und hat mindestens drei Komponenten} \}$. Beweisen Sie, dass $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid ist.

Lösungsvorschlag

Wir müssen folgende zwei Eigenschaften aus der Vorlesung zeigen:

Ein Matroid $M = (S, I)$ besteht aus einer Basis S und einer Familie $I \subseteq 2^S$ von unabhängigen Mengen mit:

[1] `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/500114/Boruvka_01-0000-6_1.pdf`

1. Falls $A \subseteq B$ und $B \in I$, dann $A \in I$ (M ist hereditary).
2. Falls $A, B \in I$ und $|A| < |B|$ dann gibt es ein $x \in B$ so dass $A \cup \{x\} \in I$ (M hat die Austauscheigenschaft).

Die erste Eigenschaft ist einfach zu sehen, da das Entfernen einer Kante niemals Kreise hinzufügt oder Komponenten verbindet.

Für die zweite Eingeschaften beachten wir, dass ein Wald mit k Kanten aus $|V| - k$ Bäumen besteht. Sei nun $G_A = (V, A)$ und $G_B = (V, B)$ mit $A, B \in I$ und $|A| < |B|$.

Demnach hat G_B mehr Kanten und damit weniger Bäume als G_A. Da G_B mindestens aus drei Bäumen besteht muss G_A mindestens aus vier Bäumen bestehen. Nehmen wir an jede Kante in B schließt einen Kreis in $G[A]$. Diesen Kreis gibt es nicht in $G[B]$. Das heißt, dass dieser Kreis in $G[A]$ mit (u, v) eine Kante enthält die nicht in B ist für jede Kante aus B. Daraus folgt, dass A mindestens so groß wie B ist (Widerspruch). Es ist also möglich eine weitere Kante aus B in A einzufügen so dass $A \in \mathcal{F}$ erhalten bleibt.