Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Übung - Blatt 6

Dieses Übungsblatt wird am 02.12.2025 in der Globalübung besprochen.

Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis **Mittwoch, 02.12.2025, um 14:00 Uhr** im Moodle-Raum hoch. Geben Sie bitte in **Gruppen von 2-3 Studierenden** ab und schreiben Sie *alle* Namen und Matrikelnummern auf Ihre Abgabe. Wir würden uns wünschen, dass mindestens zwei der Abgabepartner jeweils einen Teil der Abgabe aufschreiben

Bitte achten Sie bei Ihrer Abgabe besonders auf die formale Korrektheit Ihrer Lösung. Es gibt pro Aufgabe einen Punkt für das formal korrekte Aufschreiben Ihrer Lösung, markiert mit einem *.

Aufgabe 1 (4+5+1* = 10 Punkte)
Seien R ein kommutativer Ring und $m, n \in \mathbb{N}$. Analog zu den Matrizen $K^{m\times n}$ über einem Körper K können wir auch die Matrizen $R^{m\times n}$ mit Einträgen aus R definieren. Sei nun $A \in R^{m\times n}$.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) Die Matrix A ist rechts-invertierbar, d.h. es gibt eine Matrix $B \in R^{n\times m}$ mit $AB = I_m$.
   (ii) Die Abbildung $f : R^{n\times 1} \to R^{m\times 1}$, $x \mapsto Ax$ ist surjektiv.
   (iii) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für alle $b \in R^{m\times 1}$ mindestens eine Lösung.

(b) Die scheinbar analogen Aussagen
   (i) Die Matrix A ist links-invertierbar, d.h. es gibt eine Matrix $B \in R^{n\times m}$ mit $BA = I_n$.
   (ii) Die Abbildung $f : R^{n\times 1} \to R^{m\times 1}$, $x \mapsto Ax$ ist injektiv.
   (iii) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ hat für alle $b \in R^{m\times 1}$ höchstens eine Lösung.

   sind im Allgemeinen **nicht** äquivalent.

   Zeigen Sie, dass "(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)" gilt und geben Sie ein Gegenbeispiel zu "(i) $\Leftarrow$ (ii)".

Aufgabe 2 (4+5+1* = 10 Punkte)
Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus aus der Vorlesung, um die Lösungsmenge der angegebenen linearen Gleichungssysteme zu bestimmen. Bitte geben Sie in jedem Schritt die verwendete elementare Umformungsmatrix an.

(a) $(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -8 & -2 & -8 & -5 \end{array}\right) \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$

(b) $(B|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ (Bitte beachten Sie, dass hier im Körper $\mathbb{F}_2$ gerechnet werden soll).