FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
2. Oktober 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit

Laplace-Modell: Sei $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$, dann haben alle Elementarereignisse die selbe Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{d}.$$

Gegenbeispiel: Anzahl "Kopf" beim zweifachen Münzwurf ist kein Laplace-Experiment

- $\Omega = \{0, 1, 2\}$
- $\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{1\})$

Wahrscheinlichkeit

Manche Modelle können wir auf Laplace-Modelle zurückführen, z.B. den zweifachen Münzwurf

- $\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$
- Die Elementarereignisse zu "Anzahl Kopf" lassen sich dann darstellen als Ereignisse von Ω

Es gibt aber auch Modelle, die sich **nicht** auf ein Laplace-Modell zurückführen lassen

- Gegeben sei eine *gezinkte* Münze mit

$$\mathbb{P}(\text{Kopf}) = p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\text{Zahl}) = 1 - p$$

Wie können wir *Wahrscheinlichkeiten* verallgemeinern?

Potenzmenge

Definition 11

Sei A eine Menge. Die Potenzmenge von A ist die Menge aller Teilmengen:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$$

Beispiel 27

Sei $A = \{0, 1\}$, dann ist

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Sei $B = \{0, 1, 2\}$, dann ist

$$\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

σ-Algebra

Definition 12

Sei Ω eine nicht-leere Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Menge von Teilmengen von Ω. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, falls

(σ1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(σ2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

(σ3) $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

σ-Algebra

Beispiel 28

Sei Ω eine nicht-leere Menge. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra.

Beweis: Wir müssen $(\sigma 1)$–$(\sigma 3)$ zeigen
$(\sigma 1)$ $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$$(\sigma 2)$ $A \in \mathcal{P}(\Omega) \implies A^c \in \mathcal{P}(\Omega)$$(\sigma 3)$
$A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{P}(\Omega) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$

σ-Algebra

Proposition 1

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, dann gilt:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$

Beweis:

1.2.3.

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\sigma 1) & \Omega \in \mathcal{A} \\ (\sigma 2) & A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A} \\ (\sigma 3) & A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A} \\ & \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \end{array}}$$

Übungen

Übung 14

Zeigen Sie, dass $\{\varnothing, \{1, 2, 3\}\}$ eine σ-Algebra ist.

Übung 15

Zeigen Sie, dass $\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$ **keine** σ-Algebra ist.

Übung 16

Überprüfen Sie, ob $\{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ eine σ-Algebra ist.

Wahrscheinlichkeit

Definition 13

Sei Ω eine nicht-leere Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (*W'maß*, *Wahrscheinlichkeitsverteilung*), falls gilt:

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (Normiertheit)

(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ (σ-Additivität)

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist ein *Wahrscheinlichkeitsraum* (W-Raum). Für eine Menge $A \in \mathcal{A}$, ist $\mathbb{P}(A)$ die *Wahrscheinlichkeit von* A.

Die Bedingungen (A1), (A2) und (A3) werden als Kolmogorow-Axiome bezeichnet.

Wahrscheinlichkeit

Proposition 2

Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_d\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ definiert als $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ für $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Beweis: (A1)(A2)(A3)

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Wahrscheinlichkeit

Definition 14

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \color{red}{\mathcal{P}(\Omega)}, \mathbb{P})$ heißt *diskret*, falls Ω endlich oder abzählbar unendlich ist. In diesem Fall gilt $\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$ für $I = \{1, \ldots, n\}$ bzw. $I = \mathbb{N}$.
Für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{i \in I : \omega_i \in A} \{\omega_i\}\Bigg) = \sum_{i \in I : \omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I : \omega_i \in A} p(\omega_i),$$

wobei die Funktion $p(\omega_i) := \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ als *Wahrscheinlichkeitsfunktion* bezeichnet wird.

Andersrum: Für Ω endlich oder abzählbar unendlich, definiert jede Funktion $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $p(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.
Beweis? Zeige Axiome (A1)–(A3)

Wahrscheinlichkeit

Beispiel 29

Die folgende Tabelle definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

ω	1	2	3	4	5
$p(\omega)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Beispiel 30

Die Funktion $p(i) = (\frac{1}{2})^i$ definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega = \mathbb{N}$.

Wahrscheinlichkeit

Beispiel 31

Für welches c definiert $p : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ ein W'maß?

ω	1	2	3	4
$p(\omega)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	c

Übungen

Übung 17

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen p_1, p_2, p_3 von $\{1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsfunktionen sind:

i	1	2	3	4	5	6
$p_1(i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$
$p_2(i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
$p_3(i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Übungen

Übung 18

Gegeben seien die Abbildungen p_1, p_2 von $\{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$:

i	1	2	3	4
$p_1(i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	c
$p_2(i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Wie muss c gewählt werden, damit p_1 eine W'funktion ist?
2. p_2 ist kein W'maß, weil

$$p_2(1) + p_2(2) + p_2(3) + p_2(4) \neq 1.$$

   Wie können Sie ein W'maß $\tilde{p}_2$ definieren, bei dem die Einzelwahrscheinlichkeiten die selben Verhältnisse haben, wie bei p_2?

Wahrscheinlichkeit

Satz 4: Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt:

(a) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

(b) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt:
$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

(c) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(e) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(f) $A \subset B$: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

(g) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$

(h) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$

(i) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Behauptung: $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
Beweis:

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Behauptung: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Beweis:

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Behauptung: $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$
Beweis:

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Behauptung: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Beweis:

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Behauptung: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$
Beweis:

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Eigenschaften (e), (f), (g), (i)
Beweis: Übung

(A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
(A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
$\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Übungen

Übung 19

Es seien A und B zwei Ereignisse in einem W-Raum mit $\mathbb{P}(A) = 0.4, \mathbb{P}(B) = 0.3$, und $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.6$. Wie groß ist $\mathbb{P}(A \cap B)$?

Übung 20

Beweisen Sie Eigenschaften (e), (f), (g) und (i) von Satz 4 (Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen).

Wahrscheinlichkeit

Beispiel 32

Wir werfen einen Würfel n-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens eine 6 zu würfeln?

- $\Omega = \big\{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, 6\}\big\}$
- $\mathbb{P} \mathrel{\hat{=}}$ Gleichverteilung auf Ω
- $A = \big\{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \text{ mindestens ein } \omega_i = 6\big\}$
- Gesucht: $\mathbb{P}(A)$

Beachte: $A^c = \big\{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, 2, \dots, \mathbf{5}\}\big\}$
Also gilt

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^n}{6^n} = 1 - \big(\frac{5}{6}\big)^n$$

Siebformel

Für Mengen A, B gilt: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Grafische Herleitung:

Siebformel

Für Mengen A, B, C gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Grafische Herleitung:

Siebformel

Für Mengen A, B, C gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

Beweis ($n = 3$): Anwendung von Siebformel für $n = 2$ ergibt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) =& \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\ =& \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Siebformel

Satz 5: Siebformel oder Inklusions-/Exklusionsformel

Für Mengen $A_1, \dots, A_n$ gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

Beweis per Induktion - analog zum Beweis für $n = 3$ aus $n = 2$.

Siebformel

Beispiel 33

Für A_1, A_2, A_3, A_4 gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \\
&+ \big[\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4)\big] \\
&- \big[\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\
&\qquad + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)\big] \\
&+ \big[\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\
&\qquad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)\big] \\
&- \big[\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)\big]
\end{aligned}$$

Wofür ist die Siebformel gut?

Siebformel

Beispiel 34

In einer Übungsgruppe mit n Personen, sollen Studierende ihre Lösungen gegenseitig bewerten ("Peer Review"). Alle Lösungen werden in eine Urne gelegt und die Studierenden ziehen nacheinander eine Lösung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person ihre eigene Lösung bewertet?

Modell:

> $\Omega = Per_n^n(oW)$ ("Menge der Permutation von $\{1, \ldots, n\}$)

> $\mathbb{P} \mathrel{\hat{=}}$ Gleichverteilung auf Ω

> $A \mathrel{\hat{=}}$ "die Permutation hat einen Fixpunkt"

> Gesucht: $\mathbb{P}(A)$

> Wir wissen bereits: $|\Omega| = n!$

Siebformel

Beispiel - Fortsetzung

- Definiere
$$A_j = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega : a_j = j\}$$
(Menge der Permutationen, bei denen j ein Fixpunkt ist)
- Dann gilt: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^n A_j) = ?$ (Siebformel!)
- Aufgrund der Gleichverteilung gilt:
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|}{|\Omega|} = \frac{|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|}{n!}$$
- Beachte: $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ entspricht allen Permutationen mit Fixpunkten $a_{i_1} = i_1, \ldots, a_{i_k} = i_k$
  - Wie viele solcher Permutationen gibt es?
  - Wir können $n-k$ Elemente frei wählen, also $(n-k)!$

Siebformel

Beispiel - Fortsetzung

- Es gilt:

$$S_k := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \frac{(n-k)!}{n!}$$

- **Die Summanden hängen nicht von den Indizes ab!**
- Wie viele Summanden gibt es? So viele wie es sortierte Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ in $\{1, \ldots, n\}$ gibt: $|Kom_k^n(oW)| = \binom{n}{k}$
- Also gilt $S_k = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$
- Mit der Siebformel erhalten wir:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$$

Siebformel

Beispiel - Fortsetzung $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$

- Wie groß ist also die Wahrscheinlichkeit, dass min. eine Person die eigene Lösung zieht?
- $n = 2$: $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$
- $n = 3$: $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$
- $n = 4$: $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} = \frac{5}{8}$
- Für $n \to \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} 1 - e^{-1} \approx 0.6321\end{aligned}$$

Siebformel

Beispiel - Fortsetzung $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$

> Wie groß ist also die Wahrscheinlichkeit, dass min. eine Person die eigene Lösung zieht?

n	2	3	4	5	6	...	$n \to \infty$
$\mathbb{P}(A)$	0.5	0.6667	0.625	0.6333	0.6319	...	0.6321

> Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die eigene Lösung zieht, liegt bei $n \geq 6$ Personen bei etwa 63.2%

Übungen

Übung 21

Sie fahren mit dem Zug von Jülich nach Aachen und wieder zurück. 60% der Züge, die von Jülich nach Aachen fahren sind pünktlich, wohingegen 30% der Züge von Aachen nach Jülich eine Verspätung haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens auf einer Strecke eine Verspätung haben beträgt 45%.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind Sie bei beiden Fahrten pünktlich?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das Sie sowohl auf der Hin- als auch der Rückfahrt eine Verspätung haben?

Übungen

Übung 22

In einer Umfrage wurden 1000 Studierende befragt welche elektronischen Geräte sie besitzen mit folgendem Ergebnis:

- 690 Studierende besitzen ein Smartphone
- 740 Studierende besitzen einen Laptop
- 510 Studierende besitzen ein Tablet
- 620 Studierende besitzen sowohl ein Smartphone als auch einen Laptop
- 510 Studierende besitzen sowohl ein Smartphone als auch ein Tablet
- 460 Studierende besitzen sowohl einen Laptop als auch ein Tablet
- 380 Studierende besitzen alle drei Geräte

Wie viele Studierende besitzen keines der drei Geräte?

Literatur I

Bundesministerium für Gesundheit (2024).
Infektionsradar.
https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES