Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 10

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Für welche Werte von a, b, c ist das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccccccc} ax & + & 2y & + & z & = & 1 \\ bx & + & y & + & z & = & 0 \\ cx & + & 3y & - & z & = & 0 \end{array}\right)$$

eindeutig lösbar? Berechnen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von a, b und c. Verwenden Sie dazu die Cramersche Regel.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Messpunkte $(t_i; y_i)$ für $i = 1, \dots, 5$:

$$(1; -27), (2; -144), (3; -227), (4; -192), (5; 69).$$

Stellen Sie die überbestimmten Gleichungssysteme für die unbekannten Parameter a und b auf, wenn folgenden Beziehungen zwischen den y und den t gelten:

(a) $y = a$ (b) $y = a + b \cdot t$

Bestimmen Sie zu (a) und (b) jeweils die Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 3

Mit der Wassertiefe ändert sich der Druck, der auf einen im Wasser befindlichen Körper wirkt. Es wird ein Experiment durchgeführt, um den vermuteten Zusammenhang

$$P = \alpha + \beta \cdot d$$

zwischen Wassertiefe d und Druck P zu überprüfen. Es wurden folgende Messwerte aufgenommen:

Wassertiefe	1	3	5	7	9
Druck	2	4	5,5	8,5	10

(a) Bestimmen Sie die Parameter α und β nach der Methode der kleinsten Quadrate.

(b) Ermitteln Sie mit diesen Werten den Druck in einer Tiefe von 15 Metern.

Aufgabe 4

Lösen Sie das folgende Gleichungssytem

$$\begin{pmatrix} 2x & + & -3y & + & z & = & 4 \\ -6x & + & 10y & + & -3z & = & 2 \\ 1x & + & -1,5y & + & 1z & = & 1 \end{pmatrix}$$

(a) nach dem Gauß-Verfahren und

(b) nach der Cramerschen Regel.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Der Elektriker Herr Matse untersucht eine Schaltung, in der drei elektrische Ströme durch jeweils drei Widerstände fließen. An jeder Leitung liegt eine bestimmte Spannung an. Die Zusammenhänge zwischen Strom, Spannung und Widerstand lassen sich durch ein lineares Gleichungssystem mit einer Widerstandsmatrix R und einem Quellspannungsvektor U darstellen:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der Stromvektor I, der das Gleichungssystem

$$R \cdot I = U$$

erfüllt.
Herr Matse hat drei Auszubildende, die jeweils für eine der drei Stromleitungen zuständig sind. Jede*r soll den Strom berechnen, der durch die jeweils zugewiesene Leitung fließt. Bestimmen Sie mithilfe der Cramerschen Regel die drei Ströme und erklären Sie, warum sich diese Methode in diesem Fall besonders gut eignet.

Aufgabe 6

Gegeben seien die Messpunkte $(t_i; y_i)$ für $i = 1, \dots, 3$:

$$(3;7), (2;4), (5;9).$$

Stellen Sie das überbestimmte Gleichungssystem für die unbekannten Parameter a und b auf, wenn folgende Beziehung zwischen den y und den t gilt:

$$y = a + b \cdot t$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 7

Ermitteln Sie das Ausgleichspolynom zweiten Grades zu den Punkten

$$(-2;10), (-1;3), (1;5), (2;12).$$

Stellen Sie die Normalgleichung auf und lösen Sie diese. Fertigen Sie eine Skizze der Punkte und der Lösungskurve an.

Aufgabe 8

Eine Messreihe ergibt zu den Zeiten $t = 1, 2, 3, 4, 5$ in Sekunden folgende Temperaturwerte:

t Sekunden	1	2	3	4	5
$y(t)°C$	$0,9$	$5,8$	$11,4$	$12,1$	$12,9$

Stellen Sie das überbestimmte Gleichungssystem für die unbekannten Parameter a und b auf und bestimmen Sie diese nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn folgende Beziehung zwischen y und t gilt:

$$y(t) = a \cdot t + b \cdot \sin\left(-t \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$