Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 03 — 07./08.04.2025

1. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben seien die Funktion $f(x,y) = x \cdot y^2 - (2x+3y)^2$, der Punkt $(x_0, y_0) = (2, -2)$ und der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

   a) den Gradienten von f an der Stelle (x_0, y_0).

   b) die Gleichung für die Tangentialebene von f an der Stelle (x_0, y_0).

   c) die Richtungsableitung von f an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

   d) die Richtung an der Stelle (x_0, y_0), in der die Richtungsableitung von f maximal wird, und den Wert in dieser Richtung.

   e) die Richtung an der Stelle (x_0, y_0), für die die Richtungsableitung Null ist.

2. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie die Ableitung von $f \circ \vec{g}$ sowohl mit Hilfe der Kettenregel als auch durch Einsetzen von $\vec{g}$ in f und Ableiten nach t

   a) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ und $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ \sin(t) + 2 \end{pmatrix}$

   b) $f(x,y) = \sin^2(x \cdot y)$ und $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan(t) \\ \ln(t) \end{pmatrix}$

3. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie durch implizite Differentiation den Anstieg der Tangente im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ an dem Kreis

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

   für $x_0 = 4$ und $y_0 = y(x_0) > 0$.

4. **(Präsentation der Lösung)** Für das Vektorfeld

$$\vec{v} = \frac{y \cdot z}{x} \cdot \vec{e}_1 + \frac{x \cdot z}{y} \cdot \vec{e}_2 + \frac{x \cdot y}{z} \cdot \vec{e}_3$$

   mit $x, y, z > 0$ berechnen Sie

   a) $div\ \vec{v}$ b) $rot\ \vec{v}$ c) $div\ rot\ \vec{v}$ d) $rot\ rot\ \vec{v}$

5. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie die potentiellen Extremstellen folgender Funktionen:

   a) $f(x,y,z) = (y - x^2)^2 - x^2 + y^2 + (1-x) \cdot z^2$

   b) $u(x,y,z) = x^2 \cdot (x+1) + y^2 \cdot (3z+1) + z^2 \cdot (z+1)$