RWTH Institut für Mathematik
Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

1. Übung

Abgabetermin B-Teil 14.04.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **14.04.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II" in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:

Name, Vorname:

Name, Vorname:

Name, Vorname:

Name, Vorname:

Matrikelnummern:

Erreichte Punkte:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 12.04.2022 und am 13.04.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A1

(a) (i) Zeigen Sie unter Verwendung der Additionsformel (6.4) und der Inversionsformel (6.6):

$$\forall a > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}\, \forall m \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \exp\left(\log(a)\frac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{a^n}.$$

Bemerkung: Dies zeigt, dass die Definition $a^x := \exp(\log(a)x)$ die Definition 3.70 erweitert und daher die Schreibweise a^x nicht überladen ist. Dies rechtfertigt auch die Schreibweise $\exp(x) = \mathrm{e}^x$, wobei $\mathrm{e} := \exp(1)$.

(ii) Folgern Sie aus (i) und den Rechenregeln für rationale Potenzen 3.71, dass:

$$\forall a, b > 0\, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } a^{xy} = (a^x)^y,\ a^{x+y} = a^x a^y,\ (ab)^x = a^x b^x.$$

(b) (i) Folgern Sie aus der Additionsformel (6.4):

$$\forall x, y > 0 \text{ gilt: } \log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

(ii) Zeigen Sie:

$$\forall a > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \log(a^x) = x \log(a).$$

Aufgabe A2

Zeigen Sie die Formel

$$\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe A3

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^5 - n^5}{(n+1)^6 - n^6}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{(3+\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n - 4\sqrt{n}}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x$

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \log(x)$

(vi) $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x)$

Aufgabe A4

Sei (a_n) eine Zahlenfolge in $\mathbb{C}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $z_0 \in \mathbb{R}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$?

Aufgabe A5

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die folgenden Potenzreihen konvergent sind:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^n (x-5)^n \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} x^n,\ b \geq 0.$$

Teil B

Aufgabe B1 [4+2 Punkte]

Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion. Sei $z_0 \in D$ und $z_n \in D$ eine Folge mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$.

(i) Zeigen Sie $f_n(z_n) \to f(z_0)$ für $n \to \infty$ unter der Annahme, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert für $n \to \infty$.

(ii) Finden Sie ein Beispiel wo zwar f_n punktweise gegen f konvergiert für $n \to \infty$, aber $f_n(z_n)$ nicht gegen $f(z_0)$ konvergiert für $n \to \infty$.

Aufgabe B2 [8 Punkte]

Für $z \in \mathbb{C}$ seien

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Zeigen Sie die Additionsformeln

$$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w),$$
$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und finden und beweisen Sie eine Additionsformel für $\tanh(z+w)$ in Abhängigkeit von $\tanh(z), \tanh(w)$, wo es definiert ist. Zeigen Sie weiterhin

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1,$$
$$\cosh(z) + \sinh(z) = e^z.$$

Aufgabe B3 [6x3=18 Punkte]

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n-1}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n+1}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^x$,

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^x$,

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \log(x)|x|^\beta$,

(vi) $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x)|x|^\beta$.

Aufgabe B4 [4+4 Punkte]

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die folgende Potenzreihe konvergent ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k - \sqrt{k^2+1})(x+2)^k.$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\arcsin(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}.$$