RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111
Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

12. Übung

Abgabetermin B-Teil 07.07.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **07.07.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II" in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 05.07.2022 und am 06.07.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A51

1. Bestimmen Sie durch Anwendung der Kettenregel die Ableitung der Funktion $F \circ G$, wobei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben sind durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + zy \\ xz \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G(u,v) = \begin{pmatrix} v\mathrm{e}^u \\ u - v \\ uv \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie durch Anwendung der Kettenregel die Ableitung der Funktion $F \circ G \circ H$, wobei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben sind durch

$$F(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}, \quad G(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ u+v \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe A52

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3.$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und charakterisieren Sie diese nach lokalen Maxima und lokalen Minima. Sind die lokalen Extremstellen auch globale Extremstellen?

Aufgabe A53

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \left(y - x^2\right)\left(y - 2x^2\right).$$

Zeigen Sie, dass f auf jeder Geraden durch $(0,0)$ ein lokales Minimum in $(0,0)$ hat. Zeigen Sie außerdem, dass f in $(0,0)$ kein lokales Minimum hat.

Teil B

Aufgabe B54 [4+4=8 Punkte]

1. Bestimmen Sie die Ableitung von $F \circ G$, wobei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben sind durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x) - z \\ x\mathrm{e}^y \end{pmatrix}, \quad G(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 \\ uv + v^3 \\ u^2 + v \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie die Ableitung von $F \circ G \circ H$, wobei $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ und $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ gegeben sind durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad G(u_1,u_2,u_3,u_4) = u_1\mathrm{e}^{u_2^2}, \quad H(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ t^2 \\ 7 \\ s \end{pmatrix}$$

Aufgabe B55 [8 Punkte]
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + (1-x)^3y^2$$

nur einen kritischen Punkt hat, in welchem f ein lokales Minimum hat. Hat f in diesem Punkt auch sein globales Minimum?

Aufgabe B56 [7 Punkte]
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + xy.$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und charakterisieren Sie diese nach lokalen Maxima und lokalen Minima.

Aufgabe B57 [5 Punkte]
Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Funktionen. Wir definieren die *Länge von* γ als $\mathcal{L}(\gamma) := \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$. Sei $\Gamma := \gamma([0,1])$, $x = \gamma(0)$, und $y = \gamma(1)$. Beweisen Sie, dass

$$|F(x) - F(y)| \leq \sup_{\xi \in \Gamma} \|\nabla F(\xi)\|_2 \, \mathcal{L}(\gamma).$$

Aufgabe B58 [8 Punkte]
Bestimmen Sie von der Funktion

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2+y^2}, \; x^2 + y^2 \leq 1$$

das Maximum und das Minimum.