

## Übungsblatt 4

## Analysis I

WiSe 2025/2026

### A-Teil für die Kleingruppenübung

#### Aufgabe A 12. (Arithmetik)

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass

- (a)  $a(-b) = -(ab) = (-a)b$ ,
- (b)  $(-a) + (-b) = -(a + b)$ ,
- (c)  $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ .

#### Aufgabe A 13.

Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$ . Zeigen Sie, dass

$$ab = 1 = ac \Rightarrow b = c.$$

#### Aufgabe A 14. (Eigenschaften der Anordnung)

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Anordnung auf  $\mathbb{R}$ : Für  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gelten

- (a)  $x \neq 0 \implies x^2 > 0$
- (b)  $0 < x \implies 0 < x^{-1}$ ,
- (c)  $0 < x < y \implies y^{-1} < x^{-1}$ ,
- (d)  $xy < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$ ,
- (e)  $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$ ,
- (f)  $x < y \Leftrightarrow -x > -y$ ,
- (g)  $|-x| = |x|$ , wobei  $|\cdot|$  den Absolutbetrag bezeichnet.

#### Aufgabe A 15. (Rechenregeln für Potenzen)

Seien  $x \in \mathbb{R}$  sowie  $n, m \in \mathbb{N}_0$ .

Zeigen Sie

- (a)  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ ,
- (b)  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ .

## B-Teil für die Abgabe

### Aufgabe B 13. (6 Punkte)

Wir beschäftigen uns mit Wurzeln und der Frage, wann diese rational sind, anhand von zwei Beispielen:

(a) Ist  $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}$ ?

*Hinweis: 13 ist eine Primzahl.*

(b) Ist  $\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$ ?

### Aufgabe B 14. (8 Punkte)

Bestimmen Sie für die Menge

$$M = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

falls existent, Supremum, Infimum, Maximum sowie Minimum.

### Aufgabe B 15. (Charakterisierung Infimum, 7 Punkte)

Formulieren Sie Theorem (2.1.22) zu einer analogen Aussage über das Infimum einer Menge um und beweisen Sie diese.

### Aufgabe B 16. (Anordnung und $\mathbb{C}$ , 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Körper  $\mathbb{C}$  nicht angeordnet werden kann.

### ★-Aufgabe. (2 Zusatzpunkte)

Wir greifen die Diskussion der Beispiele aus dem B-Teil auf:

Bestimmen Sie genau diejenigen positiven reellen Zahlen  $r$ , für die  $\sqrt{r} \in \mathbb{Q}$ !

Das heißt, finden Sie alle diese Zahlen und beweisen Sie Ihre Behauptung.

**Diese Aufgabe ist eine reine Zusatzaufgabe für diejenigen von Ihnen, die etwas tiefer einsteigen wollen. Die Punkte der \*-Aufgabe zählen nicht zu der maximal erreichbaren Punktzahl aller Blätter. Es sind also in diesem Sinne Bonuspunkte für die Klausurzulassung.**