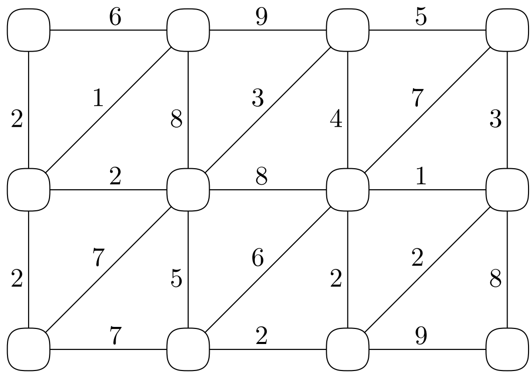
**Datenstrukturen und Algorithmen, SS 2024**
Prof. Dr. P. Rossmanith
D. Cloerkes, M. Gehnen, D. Mock, N. Speetzen

Abgabe: 28.06.2024

# Übungsblatt 10

## Aufgabe T34

Finden Sie jeweils einen minimalen Spannbaum mithilfe der Algorithmen von Kruskal und Prim für folgenden Graphen:




## Aufgabe T35

Betrachten Sie die folgenden Strukturen. Handelt es sich jeweils um einen Matroid?

a) Ein Sudoku, wobei die Grundmenge hier Tripel von drei Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 9\}$ sind. Eine Menge von Tripeln ist dann unabhängig, wenn sie die Sudoku-Eigenschaften erfüllt: Jede Zelle (identifiziert durch Zeilen- und Spaltenindex an den ersten beiden Stellen des Tripels) taucht höchstens einmal in der Menge auf. Weder in einer Zeile, noch in einer Spalte oder einem Block dürfen zwei Zellen derselben Ziffer (im dritten Element des Tripels) zugeordnet sein.

b) Graphen mit höchstens zehn Zusammenhangskomponenten, wobei die Grundmenge die Menge der Kanten ist. Die Menge der Knoten ist für alle unabhängigen Kantenmengen gleich.

c) Paarweise teilerfremde Zahlen, wobei die Grundmenge eine Menge natürlicher Zahlen ist.

d) Matching in einem bipartiten Graphen, wobei die Grundmenge die Menge der Kanten ist. Die Menge der Knoten ist für alle unabhängigen Kantenmengen gleich.

## Aufgabe T36

Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen kantengewichteten Graphen $G = (V, E)$ den schwersten zusammenhängenden Untergraphen berechnet, der höchstens einen Kreis enthält. Die Laufzeit soll in $O((|V| + |E|) \cdot \log |E|)$ liegen. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

**Aufgabe H32** (15 Punkte)

Die Produktionsaufträge $J_1, J_2, \ldots, J_n$ eines Unternehmens benötigen verschiedene Maschinen $M_1, M_2, \ldots, M_m$, wobei ein Auftrag auch mehrere Maschinen belegen kann. Ein Auftrag bringt natürlich einen gewissen Geldbetrag ein. Die Maschinen können entweder gekauft werden — diese Kosten entstehen dann nur einmal und jede weitere Nutzung ist Kostenfrei — oder gemietet werden. Letzteres kostet pro Auftrag einen gewissen Betrag (dieser Betrag variiert also von Auftrag zu Auftrag!). Die dritte Tabelle enthält die Mietkosten der Maschinen für die jeweiligen Aufträge, eine leere Zelle bedeutet, dass diese Maschine für diesen Auftrag nicht benötigt wird, ansonsten benötigt man *alle* anderen Maschinen für diesen Auftrag. Zum Beispiel kostet Auftrag $J_1$ auf der Maschine $M_1$ 30 Geldeinheiten (vorausgesetzt, $M_1$ wurde nicht gekauft).

Für so ein Szenario mit gegebenen Aufträgen, Maschinen und Kosten soll eine gewinnmaximierende Menge von Aufträgen mit entsprechender Zuteilung von Maschinen berechnet werden. Beschreiben Sie ein allgemeines Verfahren, um dieses Problem möglichst effizient zu lösen. Begründen Sie, wieso Ihr Verfahren korrekt funktioniert.

Benutzen Sie Ihr Verfahren, um eine optimale Lösung für das gegebene Szenario zu berechnen.

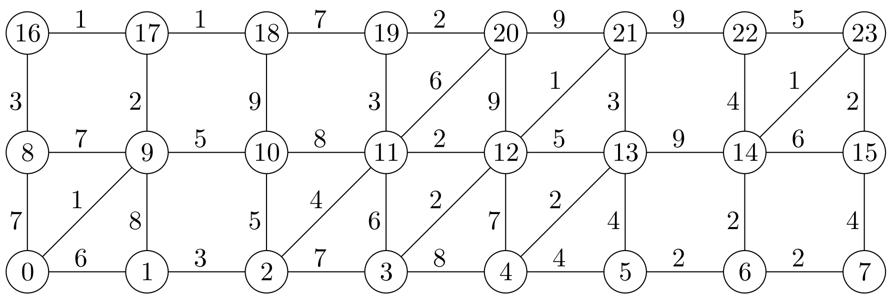
| Auftrag | Zahlung |
|---|---|
| $J_1$ | 80 |
| $J_2$ | 80 |
| $J_3$ | 120 |

| Maschine | Kaufpreis |
|---|---|
| $M_1$ | 62 |
| $M_2$ | 80 |
| $M_3$ | 100 |
| $M_4$ | 32 |

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $J_1$ | 30 | | 50 | |
| $J_2$ | | 60 | 22 | |
| $J_3$ | 30 | 30 | 30 | 30 |

**Aufgabe H33** (10 Punkte)

Finden Sie einen minimalen Spannbaum mithilfe des Algorithmus von Kruskal, Prim oder Borůvka[1] für folgenden Graphen. Es reicht aus, wenn Sie den resultierenden, minimalen Spannbaum angeben.




**Aufgabe H34** (15 Punkte)

Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$. Mit $G[F]$ bezeichnen wir den von der Kantenmenge $F \subseteq E$ induzierten Untergraphen. Dieser hat als Knoten alle Knoten des Graphen $G$ und als Kantenmenge genau $F$.

Es sei $\mathcal{F} = \{\, F \subseteq E \mid G[F] \text{ ist kreisfrei und hat mindestens drei Komponenten} \,\}$. Beweisen Sie, dass $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid ist.

[1] `https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/500114/Boruvka_01-0000-6_1.pdf`