RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
**Prof. Dr. Michael Westdickenberg**
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111
Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

# Teil A

## Aufgabe A51

1. Bestimmen Sie durch Anwendung der Kettenregel die Ableitung der Funktion $F\circ G$, wobei $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ und $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ gegeben sind durch

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix}3x^2+zy\\ xz\\ 1\end{pmatrix},\quad G(u,v)=\begin{pmatrix}v\mathrm{e}^u\\ u-v\\ uv\end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie durch Anwendung der Kettenregel die Ableitung der Funktion $F\circ G\circ H$, wobei $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, und $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ gegeben sind durch

$$F(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2},\quad G(u,v)=\begin{pmatrix}uv\\ u+v\end{pmatrix},\quad H(t)=\begin{pmatrix}t\\ t^3\end{pmatrix}$$

## Lösung

1. Es gilt

$$DF(x,y,z)=\begin{pmatrix}6x & z & y\\ z & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad DG(u,v)=\begin{pmatrix}v\mathrm{e}^u & \mathrm{e}^u\\ 1 & -1\\ v & u\end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned}D(F\circ G)(u,v)=DF(G(u,v))\circ DG(u,v)&=\begin{pmatrix}6v\mathrm{e}^u & uv & u-v\\ uv & 0 & v\mathrm{e}^u\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\mathrm{e}^u & \mathrm{e}^u\\ 1 & -1\\ v & u\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}6v^2\mathrm{e}^{2u}+2uv-v^2 & 6v\mathrm{e}^{2u}-2vu+u^2\\ uv^2\mathrm{e}^u+v^2\mathrm{e}^u & 2uv\mathrm{e}^u\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$DF(x,y)=\begin{pmatrix}2x\mathrm{e}^{x^2+y^2} & 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}\end{pmatrix},\quad DG(u,v)=\begin{pmatrix}v & u\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad DH(t)=H'(t)=\begin{pmatrix}1\\ 3t^2\end{pmatrix}$$

und weiter

$$G\circ H(t)=\begin{pmatrix}t^4\\ t+t^3\end{pmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned}(F\circ G\circ H)'(t)=D\big(F\circ G\circ H\big)(t)&=DF\big(G\circ H(t)\big)\circ DG(H(t))\circ DH(t)\\ &=\begin{pmatrix}2t^4\mathrm{e}^{t^8+(t+t^3)^2} & 2(t+t^3)\mathrm{e}^{t^8+(t+t^3)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^3 & t\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3t^2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2t^4\mathrm{e}^{t^8+(t+t^3)^2} & 2(t+t^3)\mathrm{e}^{t^8+(t+t^3)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^3+3t^3\\ 1+3t^2\end{pmatrix}\\ &=\mathrm{e}^{t^8+(t+t^3)^2}\big(2t^4\cdot 4t^3+2(t+t^3)(1+3t^2)\big)\end{aligned}$$

**Aufgabe A52**
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3.$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und charakterisieren Sie diese nach lokalen Maxima und lokalen Minima. Sind die lokalen Extremstellen auch globale Extremstellen?

**Lösung**
Wir definieren zunächst die Hesse-Matrix:
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, so ist die Hesse-Matrix von $f$ im Punkt $\underline{x}$ definiert als:

$$\mathrm{Hess}_f(\underline{x}) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}) \right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\underline{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Nun zur Aufgabe:
Die Funktion $f$ ist partiell differenzierbar als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 12y, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -12x + 24y^2$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist die Funktion stetig partiell differenzierbar und damit total differenzierbar. Dann ist der Gradient gegeben durch: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2-12y \\ -12x+24y^2 \end{pmatrix}$
Um die kritischen Punkte zu finden, löse $\nabla f(x,y) = \underline{0}$: $\nabla f(x,y) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x^2-12y=0 \\ -12x+24y^2=0 \end{matrix}$
Aus der ersten Gleichung folgt $y = \frac{1}{4}x^2$. Dies in die 2. Gleichung eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} & 0 = -12x + 24y^2 = -12x + 24\left(\tfrac{1}{4}x^2\right)^2 = -12x + \tfrac{3}{2}x^4 = -8x + x^4 = x\left(x^3 - 8\right) \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \lor x^3 - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \lor x = 2 \end{aligned}$$

Mit $y = \frac{1}{4}x^2$ liefert dies folgende kritische Punkte: $(x_1, y_1) = (0,0)$, $(x_2, y_2) = (2,1)$
Da die partiellen Ableitungen wiederum partiell differenzierbar sind, berechne die Hesse-Matrix, um die Art der kritischen Punkte zu bestimmen: $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -12$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 48y$
Also gilt: $\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}$.
In $(0,0)$ erhalten wir: $\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$.
Es gilt: $\det(\mathrm{Hess}_f(0,0)) = -144 < 0$, also liegt ein Sattelpunkt vor.
In $(2,1)$ erhalten wir: $\mathrm{Hess}_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$
Es gilt: $\det(\mathrm{Hess}_f(2,1)) = 12 \cdot 48 - 144 = 432 > 0$ und $\frac{\partial^2 f(2,1)}{\partial x^2} = 12 > 0$, also liegt eine Minimalstelle vor. (Siehe auch Satz 11.33).
Weiter gilt für alle festen $y \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \to -\infty} f(x,y) = -\infty$ und $\lim_{x \to \infty} f(x,y) = \infty$. Also existieren keine globalen Extremstellen.

**Aufgabe A53**
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \left(y - x^2\right)\left(y - 2x^2\right).$$

Zeigen Sie, dass $f$ auf jeder Geraden durch $(0,0)$ ein lokales Minimum in $(0,0)$ hat. Zeigen Sie außerdem, dass $f$ in $(0,0)$ kein lokales Minimum hat.

**Lösung**
Geraden durch den Nullpunkt sind von der Form $\{t\underline{v} \;:\; t \in \mathbb{R}\}$, wobei $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $||\underline{v}|| = 1$.

$$g(t) := f(t\underline{v}) = f(tv_1, tv_2) = \left(tv_2 - t^2v_1^2\right)\left(tv_2 - 2t^2v_1^2\right) = 2t^4v_1^4 - 3t^3v_1^2v_2 + t^2v_2^2$$

Zeige, dass $g$ ein lokales Minimum im Punkt $t_0 = 0$ hat.

$$g'(t) = 8v_1^4t^3 - 9v_1^2v_2t^2 + 2v_2^2t \qquad \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$g''(t) = 24v_1^4t^2 - 18v_1^2v_2t + 2v_2^2 \qquad \Rightarrow g''(0) = 2v_2^2 > 0, \text{ falls } v_2 \neq 0$$

Falls $v_2 = 0$, gilt $g(t) = f(tv_1, 0) = 2(tv_1)^4$ und $g$ hat offensichtlich in 0 ein lokales Minimum.
Da $\underline{v}$ beliebig war, hat $f$ auf jeder Geraden durch $(0,0)$ in $(0,0)$ ein lokales Minimum.
Betrachte nun

$$\begin{aligned} f(x, mx^2) &= \left(mx^2 - x^2\right)\left(mx^2 - 2x^2\right) \\ &= \underbrace{x^4}_{>0}(m-1)(m-2) \qquad \text{für } x \neq 0 \end{aligned}$$

Es gilt

$$(m-1)(m-2) > 0 \text{ für } m > 2 \vee m < 1 \quad \text{und} \quad (m-1)(m-2) < 0 \text{ für } m \in (1,2)$$

Also gilt für $m \in (1,2)$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stets: $f(x, mx^2) < 0$.
Da aber $f(0,0) = 0$ kann $(0,0)$ kein lokales Minimum sein.
Da für $m > 2$ oder $m < 1$ und $x \in \mathbb{R}$ stets $f(x, mx^2) > 0$ gilt kann $(0,0)$ auch kein lokales Maximum sein.
<u>Bemerkung</u>
Hier gilt

$$\mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

also $\det\left(\mathrm{Hess}_f(0,0)\right) = 0$, also ist über die Hesse-Matrix keine Aussage möglich!

# Teil B

**Aufgabe B54** [4+4=8 Punkte]

1. Bestimmen Sie die Ableitung von $F \circ G$, wobei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben sind durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x) - z \\ x\mathrm{e}^y \end{pmatrix}, \quad G(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 \\ uv + v^3 \\ u^2 + v \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie die Ableitung von $F \circ G \circ H$, wobei $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ und $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ gegeben sind durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad G(u_1,u_2,u_3,u_4) = u_1 \mathrm{e}^{u_2^2}, \quad H(s,t) = \begin{pmatrix} st \\ t^2 \\ 7 \\ s \end{pmatrix}$$

**Lösung**

1. Es gilt

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 & -1 \\ \mathrm{e}^y & x\mathrm{e}^y & 0 \end{pmatrix}, \quad DG(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ v & u+3v^2 \\ 2u & 1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} D(F \circ G)(u,v) &= DF\big(G(u,v)\big) \circ DG(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(v^2) & 0 & -1 \\ \mathrm{e}^{uv+v^3} & v^2\mathrm{e}^{uv+v^3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ v & u+3v^2 \\ 2u & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2u & -2v\sin(v^2) - 1 \\ v^3\mathrm{e}^{uv+v^3} & \mathrm{e}^{uv+v^3}(2v + v^2u + 3v^4) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Es gilt

$$DF(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}, \quad DG(u_1,u_2,u_3,u_4) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{u_2^2} & 2u_1u_2\mathrm{e}^{u_2^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{u_2^2}\begin{pmatrix} 1 & 2u_1u_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$DH(s,t) = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 2t \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G \circ H(s,t) = st\mathrm{e}^{t^4}.$$

Also

$$\begin{aligned} D\big(F \circ G \circ H\big)(s,t) &= DF\big((G \circ H)(s,t)\big) \circ DG\big(H(s,t)\big) \circ DH(s,t) \\ &= \begin{pmatrix} 2st\mathrm{e}^{t^4} \\ 3s^2t^2\mathrm{e}^{2t^4} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t^4} \begin{pmatrix} 1 & 2st^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 2t \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t^4} \begin{pmatrix} 2st \\ 3s^2t^2\mathrm{e}^{t^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & s + 4st^4 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t^4} \begin{pmatrix} 2st^2 & 2s^2t + 8s^2t^5 \\ 3s^2t^3\mathrm{e}^{t^4} & 3s^2t^2(s+4st^4)\mathrm{e}^{t^4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Aufgabe B55** [8 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$$

nur einen kritischen Punkt hat, in welchem $f$ ein lokales Minimum hat. Hat $f$ in diesem Punkt auch sein globales Minimum?

**Lösung**

Die Funktion $f$ ist partiell differenzierbar als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 3(1-x)^2 y^2$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2(1-x)^3 y$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist die Funktion stetig partiell differenzierbar und damit total differenzierbar. Dann ist der Gradient gegeben durch:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 3(1-x)^2 y^2 \\ 2(1-x)^3 y \end{pmatrix}.$$

Um die kritischen Punkte zu finden, löse $\nabla f(x,y) = 0$:

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{matrix} 2x - 3(1-x)^2 y^2 = 0 \\ 2(1-x)^3 y = 0 \end{matrix}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 1$ oder $y = 0$. Wir setzten nun $x = 1$ in die erste Gleichung ein und erhalten:

$$2 \cdot 1 - 3(1-1)^2 y^2 = 2 \neq 0$$

Also muss $y = 0$ gelten. Dies in die erste Gleichung eingesetzt liefert $x = 0$, also ist der einzige kritische Punkt $(0,0)$.

Da die partiellen Ableitungen wiederum partiell differenzierbar sind, berechne die Hesse-Matrix, um die Art der kritischen Punkte zu bestimmen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 + 6(1-x)y^2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -6(1-x)^2 y, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2(1-x)^3$$

Also gilt:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 6(1-x)y^2 & -6(1-x)^2 y \\ -6(1-x)^2 y & 2(1-x)^3 \end{pmatrix}.$$

In $(0,0)$ erhalten wir:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\det(H_f(0,0)) = 4 > 0$ und $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2 > 0$, also liegt eine Minimalstelle vor. (vgl. Satz 11.33)

Zeige nun, dass in $f(0,0)=0$ nicht das globale Minimum ist. Es gilt für $y=1$:

$$f(x,1)=x^2+(1-x)^3 \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$$

Also kann $(0,0)$ nicht das globale Minimum sein.

**Aufgabe B56** [7 Punkte]

Die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y)=x^2+xy.$$

Bestimmen Sie alle Extremstellen und charakterisieren Sie diese nach lokalen Maxima und lokalen Minima.

**Lösung**

Die Funktion $f$ ist partiell differenzierbar als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+y$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist die Funktion stetig partiell differenzierbar und damit total differenzierbar. Dann ist der Gradient gegeben durch:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x+2y & 2x\end{pmatrix}$$

Um die kritischen Punkte zu finden, löse $\nabla f(x,y)=\underline{0}$:

$$\nabla f(x,y)=\underline{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix}2x+y=0\\ x=0\end{matrix} \;\Leftrightarrow\; x=y=0$$

Also ist nur $(0,0)$ ein kritischer Punkt.

Da die partiellen Ableitungen wiederum partiell differenzierbar sind, berechne die Hesse-Matrix, um die Art der kritischen Punkte zu bestimmen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0$$

Also gilt: (Definition Hessematrix $\to$ siehe A-Teil)

$$\mathrm{Hess}_f(x,y)\equiv\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=\mathrm{Hess}_f(0,0)$$

Es gilt: $\det\left(\mathrm{Hess}_f(0,0)\right)=-1<0$, also liegt ein Sattelpunkt vor.

**Aufgabe B57** [5 Punkte]

Seien $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ und $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Funktionen. Wir definieren die *Länge von* $\gamma$ als $\mathcal{L}(\gamma):=\int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$. Sei $\Gamma:=\gamma([0,1])$, $x=\gamma(0)$, und $y=\gamma(1)$. Beweisen Sie, dass

$$|F(x)-F(y)|\leq \sup_{\xi\in\Gamma}\|\nabla F(\xi)\|_2\,\mathcal{L}(\gamma).$$

**Lösung**

**Aufgabe B58** [8 Punkte]

Bestimmen Sie von der Funktion

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \leq 1$$

das Maximum und das Minimum.

**Lösung**

$f$ ist als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2+y^2} + (x+y)e^{x^2+y^2} \cdot 2x = (1+2x(x+y))e^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{x^2+y^2} + (x+y)e^{x^2+y^2} \cdot 2y = (1+2y(x+y))e^{x^2+y^2}$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist die Funktion stetig partiell differenzierbar und damit total differenzierbar. Dann ist der Gradient gegeben durch:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2x(x+y) & 1+2y(x+y) \end{pmatrix} e^{x^2+y^2}$$

Suche kritische Punkte von $f$:

$$\begin{aligned}(1+2x(x+y))e^{x^2+y^2} \stackrel{!}{=} 0 &\Leftrightarrow\ 1+2x(x+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow\ x+y = -\frac{1}{2x} \quad (x \neq 0,\ \text{denn sonst } 1 \stackrel{!}{=} 0) \\ &\Leftrightarrow\ y = -\frac{1}{2x} - x\end{aligned}$$

Dann:

$$1+2y(x+y) \stackrel{!}{=} 0 \ \Leftrightarrow\ 1+2\left(-\frac{1}{2x} - x\right)\left(-\frac{1}{2x}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1+\frac{1}{2x^2}+1 = 0$$

Das kann aber kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllen! $f$ hat also keine kritischen Punkte in $\mathbb{R}^2$, also insbesondere auch nicht in

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 < 1\right\}.$$

Da $\overline{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 \leq 1\}$ kompakt ist, nimmt $f$ dort aber sein Minimum und Maximum an. Das heißt, Minimal- und Maxistelle von $f$ liegen in $\partial M$.

$\partial M$ kann man wie folgt parametrisieren: $t \in [0, 2\pi]$, $t \in \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

In $\partial M$ ist also:

$$f(t) = (\cos(t) + \sin(t))e^1$$
$$f'(t) = (-\sin(t) + \cos(t))e^1$$

Also kritische Punkte:

$$\begin{aligned}&f'(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(t) = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4},\ t_2 = \frac{5\pi}{4} \\ &f(t_1) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)e = e \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}e \\ &f(t_2) = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)e = e \cdot 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}e\end{aligned}$$

Also ist $t_2$ Minimalstelle, $t_1$ Maximalstelle von $f$ in $\overline{M}$. Das Minimum von $f$ in $\overline{M}$ ist somit $f(t_2) = -\sqrt{2}$, das Maximum $f(t_1) = \sqrt{2}$.

B57

Es gilt $F \circ \gamma \in C^1([0,1])$ und somit

$$|F(y) - F(x)| = |F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))|$$

Fundamentalsatz
$$= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t)\, dt \right|$$

Kettenregel
$$= \left| \int_0^1 DF(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 < \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \right|$$

Dreiecksungleichung
$$\leq \int_0^1 | < \nabla F(\gamma(t)), \gamma'(t) > | \, dt$$

Cauchy-Schwarz
$$\leq \int_0^1 \|\nabla F(\gamma(t))\|_2 \, \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

$$\leq \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla F(\gamma(t))\|_2 \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

$$= \sup_{\xi \in \Gamma} \|\nabla F(\xi)\|_2 \cdot \mathcal{L}(\gamma) .$$