Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Übung - Blatt 7

Dieses Übungsblatt wird am 10.12.2025 in der Globalübung besprochen.

Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis **Mittwoch, 10.12.2025, um 14:00 Uhr** im Moodle-Raum hoch. Geben Sie bitte in **Gruppen von 2-3 Studierenden** ab und schreiben Sie *alle* Namen und Matrikelnummern auf Ihre Abgabe. Wir würden uns wünschen, dass mindestens zwei der Abgabepartner jeweils einen Teil der Abgabe aufschreiben

Bitte achten Sie bei Ihrer Abgabe besonders auf die formale Korrektheit Ihrer Lösung. Es gibt pro Aufgabe einen Punkt für das formal korrekte Aufschreiben Ihrer Lösung, markiert mit einem *.

Aufgabe 1 (4+5+1*=10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle linksinverse Matrizen von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 3},$$

d.h. alle Matrix $B \in \mathbb{F}_3^{3\times 4}$ mit $BA = I_3$.

(b) Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{F}_2 \, \mathbb{F}_3\}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}$$

mit $a \in K$. Für welche $a \in K$ ist A invertierbar? Geben Sie für diese a jeweils A^{-1} an.

Geben Sie bei Verwendung des Gauß-Algorithmus in jedem Schritt die verwendeten elementaren Umformungsmatrizen an.

Aufgabe 2 (7+2+1*=10 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$

(a) Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) $g = \mathrm{ggT}(a, b)$

(2) Die Zahl g ist der kleinste positive Wert von $L(x, y) := ax + by$, wenn x und y alle ganzen Zahlen durchlaufen, d.h.
$$g = \min\{L(x, y) := ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}, ax + by > 0\}.$$

(3) Die Zahl g ist ein gemeinsamer Teiler von a und b, der größer oder gleich jedem gemeinsamen Teiler von a und b ist, d.h.
$$g = \max\{h \in \mathbb{Z} \mid h \text{ teilt } a \text{ und } b\}$$

(b) Folgern Sie, dass für $m \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{ggT}(ma, mb) = m \cdot \mathrm{ggT}(a, b)$.