

## Lineare Algebra I

### Tutorium - Blatt 5

---

Das Blatt wird vom 20.11.2025 bis zum 25.11.2025 in den Tutorien besprochen.

---

#### Aufgabe 1 (Vektorräume: Satz 3.13)

Zeigen Sie, dass für einen Körper  $K$  und eine Menge  $M \neq \emptyset$  die Menge  $K^M$  mit den folgenden Verknüpfungen ein  $K$ -Vektorraum ist:

$$\begin{aligned} f + g: M \rightarrow K: m \mapsto f(m) + g(m) \\ k \cdot f: M \rightarrow K: m \mapsto k \cdot f(m) \end{aligned}$$

für alle  $f, g \in K^M$  und  $k \in K$ .

#### Aufgabe 2 (Polynomdivision: Satz 3.23)

Dividieren Sie  $f$  mit Rest durch  $g$ , wobei

$$f := x^7 + x^6 + 2x^4 + 2 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x] \quad \text{und} \quad g := x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x].$$

#### Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und 2 Variablen jeweils alle Lösungen in  $\mathbb{Q}$ :

(a)

$$\begin{array}{rcl} -4x_1 &+& 2x_2 = -1 \\ 7x_1 &-& x_2 = 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} -5x_1 &+& x_2 = -1 \\ 10x_1 &-& 2x_2 = 0 \end{array}$$

#### Aufgabe 4 (Lineare Abbildung: Lemma 4.10)

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $A \in K^{m \times n}$ . Zeigen Sie, dass die von  $A$  induzierte Abbildung

$$\varphi_A: K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}: v \mapsto Av$$

eine lineare Abbildung ist.