Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Tutorium - Blatt 10

Das Blatt wird vom 08.01.2025 bis zum 13.01.2025 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1
Es seien V, W zwei Vektorräume über dem selben Körper und $\varphi : V \to W$ ein Vektorraumhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Wenn φ ein Monomorphismus ist (d.h. injektiv), dann gilt $\operatorname{Dim} V \leq \operatorname{Dim} W$.

(b) Wenn φ ein Epimorphismus ist (d.h. surjektiv), dann gilt $\operatorname{Dim} V \geq \operatorname{Dim} W$.

(c) Wenn φ ein Isomorphismus ist (d.h. bijektiv), dann gilt $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} W$

Aufgabe 2
Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Zeigen Sie:

(a) $V/\{0\} \cong V$

(b) Für $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $V/\langle v_1, \dots, v_k\rangle \cong \langle v_{k+1}, \dots, v_n\rangle$.

Aufgabe 3
Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Seien $z_1, \dots, z_n \in K^{1\times n}$ die Zeilen von A. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $(z_1, \dots, z_n)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4
Sei K ein Körper, $V = K^{2\times 2}$ und $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in R, a = -d\}$.

(a) Was ist $\operatorname{Dim}(V/U)$?

(b) Geben Sie eine Menge von Vertretern für die Äquivalenzklassen in V/U an.

Nun sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $U = \{f : R \to R \mid f(0) = 0\}$.

(c) Was ist $\operatorname{Dim}(V/U)$?

(d) Geben Sie eine Menge von Vertretern für die Äquivalenzklassen in V/U an.