

## Aufgaben zur Veranstaltung

### Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik

---

## Übungsblatt 5 - Wiederholungsaufgaben

### Selbstlernaufgaben

#### Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe der folgenden Schritte die Abbildungsmatrix  $A_s$  zu der linearen Abbildung  $f_s$ , die einen Vektor innerhalb des  $\mathbb{R}^2$  an der y-Achse spiegelt.

(a) Bestimmen Sie für

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f_s(v_1)$  und  $f_s(v_2)$ , also die Spiegelung der kanonischen Einheitsvektoren im  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Stellen Sie damit die Abbildungsmatrix  $A_s$  zu  $f_s$  auf.

#### Aufgabe 2

Stellen Sie die beiden Abbildungsmatrizen zu der linearen Abbildung  $f : P_2 \rightarrow P_3$  mit  $f(p(x)) = p(x) \cdot x$  auf. Benutzen Sie dabei für den Definitionsbereich und für den Wertebereich die folgenden Basen:

(a)  $B_{P_2} = (1, x, x^2)$     $B_{P_3} = (1, x, x^2, x^3)$

(b)  $B_{P_2}^* = (8x^2, 4x, 2)$     $B_{P_3}^* = (1, x, x^2, x^3 + 1)$

#### Aufgabe 3

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine lineare Abbildung. Finden Sie zu  $f$  eine Matrix  $A$ , so dass

$$f(x) = A \cdot x, \quad \text{Kern}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad f \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie müsste man den Zielbereich wählen, damit die Abbildung surjektiv ist?

#### Aufgabe 4

Für welche reellen Zahlen  $a$  ist die folgende Matrix  $A$  invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Hausaufgaben

### Aufgabe 5

Geben sind die folgenden Abbildungen

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$
- (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$
- (c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$

sowie die Mengen  $A = [0; 5]$  und  $B = [-5; 0]$ .

Bestimmen Sie jeweils  $f(0), f^{-1}(0), f(A), f^{-1}(A), f(B), f^{-1}(B)$ .

### Aufgabe 6

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Aufgabe 7

Die Abbildung  $f : A \rightarrow B$ , wobei  $A = \mathbb{Z}$  und  $B = \mathbb{Z}$  sind, sei folgendermaßen definiert:

$$f(a) = a \bmod 17.$$

- (a) Handelt es sich um eine lineare Abbildung?
- (b) Bestimmen Sie  $f^{-1}(0)$ ?
- (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung weder surjektiv noch injektiv ist.
- (d) Welche Möglichkeiten gibt es,  $A$  und  $B$  zu wählen, damit die Abbildung bijektiv ist?

### Aufgabe 8

Gesucht ist eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit Abbildungsmatrix  $A$ . Geben Sie im Folgenden jeweils eine Abbildungsmatrix an, sodass  $f$  die angegebenen Eigenschaften besitzt oder begründen Sie warum dies nicht möglich ist.

(a)  $\text{Kern}(f) = \{0\} \quad \text{Bild}(f) = \mathbb{R}^3$

(b)  $\text{Kern}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Bild}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

(c)  $\text{Kern}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Bild}(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$