Hausaufgaben zur Veranstaltung **Ausgabe: 16.06.2025**
Analysis 2, SoSe 2025 **Abgabe: 22.06.2025**

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 13

1. Der Weg einer parametrischen Funktion werde für den Zeitraum $t \in [0;1]$ beschrieben durch die beiden Wege

   a) $\vec{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$

   Auf diesem Weg sei ein Kraftfeld gegeben durch:

   $$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \cdot y + e^x \\ x^2 - \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie entlang dieser Wege die zu leistende Arbeit.

2. Gegeben sei das Vektorfeld

   $$\vec{F}_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + \alpha x \cdot y \\ e^{x+y} + x^2 \end{pmatrix}$$

   mit einem freien Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie den Parameter α derart, dass $\vec{F}_\alpha$ ein Potential besitzt. Bestimmen Sie dieses Potential.

   b) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ und $\vec{X}(t) = (t^2; t^3)^T$, $t \in [0;1]$ die zu leistende Arbeit.

   Hinweis: Klammern Sie in b) bei der Integration den Faktor $e^{t^2+t^3}$ aus.

3. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   a) Bestimmen Sie $\int_K \vec{F}\, d\vec{X}$ entlang folgender Kurven:

      i. $K_1 : \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \le t \le 2\pi$

      ii. K_2 : geradlinige Verbindung von $(1,0,0)^T$ nach $(1,0,2\pi)^T$

   b) Ist das Kurvenintegral wegunabhängig? Bestimmen Sie ggfls. die Potentialfunktion.

4. Berechnen Sie das Volumen unterhalb der Funktion

   $$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

   über das folgende Integrationsgebiet

   $$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}.$$

5. Berechnen Sie das folgende Doppelintegral im Integrationsbereich A mithilfe der Polarkoordinaten

   $$\int_A \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA$$

   mit $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4, y \ge |x|\}$$