

Übungsblatt 13

16./17.06.2025

1. **(Präsentation der Lösung)** Ein Punkt bewegt sich mit $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix}$ in einem ortsabhängiges Kraftfeld gegeben durch $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y^2 \end{pmatrix}$.
- a) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = 3$.
 - b) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

2. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei die Kurve $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral im Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + x \cdot z \\ z + x \cdot y \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve.

3. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} z^3 + \alpha x \cdot y \\ x^2 \\ \beta x \cdot z^2 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die reellen Konstanten α und β so, dass \vec{v} ein Gradientenfeld ist.
 - b) Berechnen Sie für diesen Fall die zugehörige Potentialfunktion.
4. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben Sie das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4x \cdot y \\ 2x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie - falls sie existiert - die Potentialfunktion.
- b) Berechnen Sie die Arbeit entlang des Weges $\vec{X} = (t, t^2)^T$ von $\vec{X}_A = (0, 0)^T$ bis $\vec{X}_E = (1, 1)^T$.

5. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_A x \cdot y \, dA$$

über dem Integrationsgebiet A gegeben durch die Ungleichungen

$$-2 \leq y \leq 2, \quad x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

- a) in kartesischen Koordinaten. b) mithilfe der Polarkoordinaten.

6. Berechnen Sie folgendes Integral unter Verwendung der Polarkoordinaten

$$\int_A \left(3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4 \right) \cdot x \, dA$$

für den halben Kreisring A , dessen Mittelpunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems liegt, den inneren Radius 2 und den äußeren Radius 3 besitzt, und durch $x \geq 0$ bestimmt ist.