June 19, 2025

LINEARE ALGEBRA 2 (SKRIPT, SS 25)

JAN SCHRÖER

Contents

Einleitung

Ich freue mich über Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Tippfehler, unklare oder zu knappe Beweise oder fehlende Beispiele.

Danksagung: Für Verbesserungsvorschläge und/oder fleissige Fehlersuche bedanke ich mich bei Julian Meffert und Christoph Wiggers.

Farben. Wir benutzen

blaue Boxen, um Aussagen hervorzuheben,

grüne Boxen, um Definitionen hervorzuheben,

magenta Boxen, um Vermutungen und Probleme hervorzuheben,

graue Boxen, um andere Dinge hervorzuheben.

Abschnitte mit **roten Überschriften** wurden in der Vorlesung nicht behandelt und sind nicht Teil der Prüfungen. Trotzdem sollten Sie diese Abschnitte ansehen.

Konventionen. Der Buchstabe K bezeichnet immer einen Körper, und (falls nicht anders erwähnt) sind alle Vektorräume über K definiert. Desweiteren benutzen wir dieselben Notationen wie im Skript zur LA 1.

Inhalte.

- §1 Klassifikation von Matrizen bis auf Ähnlichkeit: Verallgemeinerte Eigenräume und Haupträume. Jordan-Blöcke, Jordan-Ketten, Jordan-Normalform, Jordan-Zerlegung. Satz von Frobenius. Determinantenteiler und Invariantenteiler. Smith-Normalform, Frobenius-Normalform, Weierstraß-Normalform.
- §2 Komplexe Zahlen: Definition(en) des Körpers der komplexen Zahlen. Rechenregeln. Trigonometrische Funktionen. Polarkoordinaten.
- §3 Euklidische und unitäre Vektorräume: Wir wollen Geometrie in bestimmten Vektorräumen betreiben, d.h. wir führen Begriffe ein wie *Länge* eines Vektors, *Abstand* zwischen zwei Vektoren, und *Winkel* zwischen zwei Vektoren. Dazu benötigen wir *Skalarprodukte*, welche als Bilinearformen mit gewissen Zusatzeigenschaften definiert sind. Orthogonalräume. Orthogonal-

und Orthonormalbasen. Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren. Isometrien. Klassifikation euklidischer und unitärer Vektorräume bis auf Isometrie. Orthogonale und unitäre Gruppe.

- §4 Metrische Vektorräume: Körper mit Involution. Metrische Vektorräume (als Verallgemeinerung von euklidischen und unitären Vektorräumen). Koordinatenmatrizen und Basiswechsel für Metriken. Orthogonale Summen in metrischen Vektorräumen. Reguläre metrische Vektorräume. Isometrien von metrischen Vektorräumen. Hyperbolische Ebenen.
- §5 Symplektische Vektorräume: Klassifikation symplektischer Vektorräume bis auf Isometrie.
- §6 Symmetrische Vektorräume: Existenz von Orthogonalbasen für symmetrische Vektorräume. Wittscher Kürzungssatz. Relationensatz für symmetrische Vektorräume. Klassifikation symmetrischer Vektorräume bis auf Isometrie für einige Spezialfälle (für K quadratisch abgeschlossen, für $K = \mathbb{R}$ (Sylvesterscher Trägheitssatz)). Spiegelungen. Orthogonale Gruppen sind Spiegelungsgruppen.
- §**??** Adjungierte Homomorphismen und Spektralsätze: Adjungierte Homomorphismen. Normale Endomorphismen. Selbstadjungierte Endomorphismen. Unitärer und euklidischer Spektralsatz.
- §**??** Quadratische Formen: Quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen. Quadriken.
- §**??** Tensorprodukte: Tensorprodukte von Vektorräumen. Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts.

1. Klassifikation von Matrizen bis auf Ähnlichkeit

Das Ziel dieses Kapitels ist zu entscheiden, wann zwei Matrizen $A, B \in K^{n,n}$ ähnlich sind, d.h. wann ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit

$$S^{-1}AS = B.$$

Die Vorgehensweise in den Abschnitten über Determinantenteiler und deren Anwendung lehnt sich stark an die Bücher von Egbert Brieskorn und Falko Lorenz sowie an Christoph Schweigerts Skript zur Linearen Algebra an.

1.1. Verallgemeinerte Eigenräume und Haupträume.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$, und sei $\lambda \in K$. Für $k \geq 0$ ist

$$\mathrm{Eig}^k(f, \lambda) := \mathrm{Kern}\left((f - \lambda \mathrm{id}_V)^k\right)$$

der **k-te verallgemeinerte Eigenraum von f zu λ**.

Wir schreiben meist $\mathrm{Kern}(f - \lambda\mathrm{id}_V)^k$ statt $\mathrm{Kern}\left((f - \lambda\mathrm{id}_V)^k\right)$.

Lemma 1.1. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$, und sei $\lambda \in K$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Eig}^0(f, \lambda) = 0$*;*

(ii) $\mathrm{Eig}^1(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f, \lambda)$*;*

(iii) $\mathrm{Eig}^k(f, \lambda) \subseteq \mathrm{Eig}^{k+1}(f, \lambda)$ *für alle* $k \geq 0$*;*

(iv) $\mathrm{Eig}^k(f, \lambda)$ *ist f-invariant für alle* $k \geq 0$.

Beweis. (i),(ii),(iii): Klar.

(iv): Sei $v \in \mathrm{Eig}^k(f, \lambda) = \mathrm{Kern}(f - \lambda\mathrm{id}_V)^k$. Dann gilt

$$(f - \lambda\mathrm{id}_V)^k(f(v)) = ((f - \lambda\mathrm{id}_V)^k \circ f)(v) = (f \circ (f - \lambda\mathrm{id}_V)^k)(v) = 0.$$

Mit andere Worten, es gilt $f(v) \in \mathrm{Kern}(f - \lambda\mathrm{id}_V)^k$. □

Lemma 1.2. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$, und sei B eine geordnete Basis von V. Für jedes $\lambda \in K$ induziert die Koordinatenabbildung einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Eig}^k(f, \lambda) \to \mathrm{Eig}^k(\mathbf{c}_{B,B}(f), \lambda).$$

Beweis. Setze $A := \mathbf{c}_{B,B}(f)$ und setze $g := (f - \lambda\mathrm{id}_V)$. Für $v \in V$ gilt

$$\mathbf{c}_{B,B}(g^k)(\mathbf{c}_B(v)) = (A - \lambda E_n)^k(\mathbf{c}_B(v)) = \mathbf{c}_B(g^k(v)).$$

Es folgt, dass $v \in \mathrm{Eig}^k(f, \lambda)$ genau dann wenn $g^k(v) = 0$ genau dann wenn $(A - \lambda E_n)^k(\mathbf{c}_B(v)) = 0$. Also induziert die Einschränkung von $\mathbf{c}_B$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Eig}^k(f, \lambda) \to \mathrm{Eig}^k(\mathbf{c}_{B,B}(f), \lambda).$$

□

Korollar 1.3. *Seien $A, B \in K^{n,n}$ ähnliche Matrizen. Für jedes $k \geq 1$ und $\lambda \in K$ gilt dann*
$$\mathrm{Eig}^k(A, \lambda) \cong \mathrm{Eig}^k(B, \lambda).$$

Beweis. Für eine geeignete geordnete Basis C von K^n gilt $B = \mathbf{c}_{C,C}(A)$. Nun folgt die Behauptung direkt aus Lemma 1.2. □

Wir fixieren folgende Dinge für den Rest des Abschnitts 1.1

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Angenommen das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_f$ von f zerfällt über K in Linearfaktoren, d.h.
$$\mathcal{X}_f = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_r)^{n_r},$$
wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ paarweise verschieden sind und $n_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq r$. Das Minimalpolynom μ_f ist dann von der Form
$$\mu_f = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$
mit $1 \leq m_i \leq n_i$ für $1 \leq i \leq r$. Ferner gilt $n = n_1 + \cdots + n_r$.

Der **Hauptraum** von f zum Eigenwert λ_i ist definiert als
$$\mathrm{Haupt}(f, \lambda_i) := \mathrm{Eig}^{m_i}(f, \lambda_i) := \mathrm{Kern}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}$$

Lemma 1.4. *Sei $H := \mathrm{Haupt}(f, \lambda_i)$, und sei $f_H \colon H \to H$ die Einschränkungsabbildung. Dann gilt*
$$\mu_{f_H} = (X - \lambda_i)^{k_i}$$
für ein $1 \leq k_i \leq m_i$. Insbesondere hat f_H nur den Eigenwert λ_i.

Beweis. Aus der Definition von H folgt, dass $(f_H - \lambda_i \mathrm{id}_H)^{m_i} = 0$. Dann ist μ_{f_H} ein Teiler dieses Polynoms. □

Bemerkung: Wie wir später sehen werden gilt im vorherigen Lemma sogar $k_i = m_i$.

Satz 1.5. *Für $V, f, \mathcal{X}_f, \mu_f$ wie oben gilt*
$$V = \mathrm{Haupt}(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Haupt}(f, \lambda_r).$$

Beweis. Für $1 \leq i \leq r$ sei
$$p_i := \mu_f / (X - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_j} \in K[X].$$

Wegen

$$\underbrace{(f-\lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i} p_i(f)}_{=\mu_f(f)}(V) = 0$$

gilt $(p_i(f))(V) \subseteq \mathrm{Haupt}(f, \lambda_i)$.

Es gilt $\mathrm{ggT}(p_1, \ldots, p_r) = 1$. Nach dem Satz von Bézout gibt es dann $q_1, \ldots, q_r \in K[X]$ mit

$$1 = p_1 q_1 + \cdots + p_r q_r.$$

Für $v \in V$ gilt also

$$v = \left(\sum_{i=1}^{r} p_i(f) q_i(f)\right)(v) = \sum_{i=1}^{r} \left(p_i(f) q_i(f)\right)(v) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{p_i(f)(q_i(f)(v))}_{\in \mathrm{Haupt}(f,\lambda_i)}.$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$V = \mathrm{Haupt}(f, \lambda_1) + \cdots + \mathrm{Haupt}(f, \lambda_r).$$

Sei $0 = u_1 + \cdots + u_r$ mit $u_i \in \mathrm{Haupt}(f, \lambda_i)$ für $1 \le i \le r$. Da $(X - \lambda_j)^{m_j} \mid p_i$ für alle $j \neq i$ gilt

$$p_{ij} := p_i / (X - \lambda_j)^{m_j} \in K[X].$$

Da $K[X]$ kommutativ ist, erhalten wir für $j \neq i$ die Gleichung

$$p_i(f)(u_j) = (p_{ij}(f) \circ (f - \lambda_j \mathrm{id}_V)^{m_j})(u_j) = 0.$$

Wir erhalten

$$0 = p_i(f)\left(\sum_{j=1}^{r} u_j\right) = \sum_{j=1}^{r} p_i(f)(u_j) = p_i(f)(u_i).$$

Es gilt $\mathrm{ggT}(p_i, (X - \lambda_i)^{m_i}) = 1$. Wiederum nach dem Satz von Bézout gibt es also $a, b \in K[X]$ mit

$$1 = a p_i + b (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Es folgt

$$u_i = a(f)(\underbrace{p_i(f)(u_i)}_{=0}) + b(f)(\underbrace{(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(u_i)}_{=0}) = 0.$$

Also gilt

$$V = \mathrm{Haupt}(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Haupt}(f, \lambda_r).$$

□

Erinnerung: Sei $g \in \mathrm{End}(V)$. Für jedes $k \geq 0$ gilt $\mathrm{Kern}(g)^k \subseteq \mathrm{Kern}(g)^{k+1}$. Falls $\mathrm{Kern}(g)^k = \mathrm{Kern}(g)^{k+1}$, so zeigt man leicht, dass $\mathrm{Kern}(g)^{k+1} = \mathrm{Kern}(g)^{k+2}$.

Lemma 1.6. *Für $V, f, \mathcal{X}_f, \mu_f$ wie oben gilt:*

(i) *Es gilt*
$$\operatorname{Kern}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i} = \operatorname{Kern}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i+1};$$

(ii) *Es gibt ein $v \in V$ mit*
$$(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i - 1}(v) \neq 0 \qquad \textit{und} \quad (f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(v) = 0.$$

Beweis. (i): Sei $u \in \operatorname{Kern}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i+1}$. Dann ist u von der Form $u = u_1 + \cdots + u_r$ mit $u_j \in \operatorname{Haupt}(f, \lambda_j)$ für $1 \leq j \leq r$. Dann gilt
$$(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(u) = \sum_{j \neq i} \underbrace{(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(u_j)}_{\in \operatorname{Haupt}(f, \lambda_j)}.$$

Nun wenden wir auf diese Gleichung $(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)$ an und erhalten
$$0 = \sum_{j \neq i} \underbrace{(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i+1}(u_j)}_{\in \operatorname{Haupt}(f, \lambda_j)}.$$

Wegen Satz 1.5 ist dann $(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i+1}(u_j) = 0$ für alle $j \neq i$. Mit anderen Worten, $(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)(u_j) \in \operatorname{Haupt}(f, \lambda_i)$ für alle $j \neq i$. Es folgt
$$(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}(u_j) \in \operatorname{Haupt}(f, \lambda_i) \cap \operatorname{Haupt}(f, \lambda_j) = 0$$
für $j \neq i$. Wir haben also gezeigt, dass $u \in \operatorname{Kern}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i}$.

(ii): Sei p_i definiert wie zuvor. Es gilt also
$$\mu_f(f) = (f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i} p_i(f) = 0.$$

Aus der Definition des Minimalpolynoms μ_f folgt, dass
$$(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i - 1} p_i(f) \neq 0.$$

Es gibt also ein $w \in V$ mit $(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{m_i-1}(p_i(f)(w)) \neq 0$. Mit $v := p_i(f)(w)$ gilt dann (ii). □

Korollar 1.7. *Seien $V, f, \mathcal{X}_f, \mu_f$ wie oben, und sei $1 \leq i \leq r$. Für $k \geq 0$ sei*
$$V_k := \operatorname{Kern}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^k$$
der k-te verallgemeinerte Eigenraum von f zum Eigenwert λ_i. Dann gilt
$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m_i - 1} \subset V_{m_i} = V_{m_i+1} = \cdots$$

Mit den obigen Ergebnissen können wir uns nun auf die Suche nach einer Normalform (bezüglich Ähnlichkeit) für unseren Endomorphismus f machen, indem wir uns auf die Einschränkungsabbildungen $f_H \colon H \to H$ mit $H = \operatorname{Haupt}(f, \lambda_i)$ beschränken.

Den folgenden Satz haben wir nicht in der Vorlesung behandelt. Er ist nicht Teil der Prüfungen.

Der folgende Satz liefert eine gewisse Eindeutigkeit der Hauptraumzerlegung. Wir benötigen diese Aussage im weiteren Verlauf nicht, wollen sie aber der Vollständigkeit halber erwähnen.

Satz 1.8. *Für $V, f, \mathcal{X}_f, \mu_f$ wie oben sei*
$$V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_r,$$
so dass gilt:

(i) *H_i ist f-invariant für alle i;*

(ii) *Die Einschränkungsabbildung $f_{H_i} : H_i \to H_i$ hat nur den Eigenwert λ_i.*

Dann gilt
$$H_i = \mathrm{Haupt}(f, \lambda_i)$$
für alle i.

Beweis. Sei $u \in H_i$. Dann gilt $u = u_1 + \cdots + u_r$, wobei $u_j \in \mathrm{Haupt}(f, \lambda_j)$ für $1 \leq j \leq r$, siehe Satz 1.5. Es gilt $\mu_{f_{H_i}} = (X - \lambda_i)^{s_i}$ für ein $s_i \geq 1$. Es gilt also
$$0 = (f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{s_i}(u) = \sum_{j=1}^{r} \underbrace{(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{s_i}(u_j)}_{\in \mathrm{Haupt}(f, \lambda_j)}.$$
Mit Satz 1.5 folgt, dass die Summanden alle gleich 0 sind. Es folgt, dass $u_j \in \mathrm{Haupt}(f, \lambda_i)$, da man nach Lemma 1.6 $s_i \leq m_i$ annehmen kann. Damit ist aber $u_j = 0$ für alle $j \neq i$, da $\mathrm{Haupt}(f, \lambda_i) \cap \mathrm{Haupt}(f, \lambda_j) = 0$ für $j \neq i$. Es gilt also $u = u_i \in \mathrm{Haupt}(f, \lambda_i)$ und damit $H_i \subseteq \mathrm{Haupt}(f, \lambda_i)$. Die Gleichheit folgt nun mit einem offensichtlichen Dimensionsargument. □

1.2. **Jordan-Normalform.**

Für $n \geq 1$ und $\lambda \in K$ sei
$$J(\lambda, n) := (a_{ij}) \in K^{n,n}$$
mit
$$a_{ij} := \begin{cases} \lambda & : \text{ falls } i = j, \\ 1 & : \text{ falls } i + 1 = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$
Also ist $J(\lambda, n)$ von der Form
$$J(\lambda, n) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Die Matrix $J(\lambda, n)$ nennt man **Jordan-Block** der Größe n zum Eigenwert λ.

– – – – – Ende Vorlesung 29 (31.01.) – – – – –

Sei nun $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim(V) = n$. Ein V-Vektorsystem $(v_1, \ldots, v_t)$ ist eine **Jordan-Kette** der Länge t für f zum Eigenwert λ, falls gilt:

(i) $v_1 \neq 0$;

(ii) $(f - \lambda \mathrm{id}_V)(v_1) = 0$;

(iii) $(f - \lambda \mathrm{id}_V)(v_{k+1}) = v_k$ für $1 \leq k \leq t-1$.

Lemma 1.9. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim(V) = n$. Sei $(v_1, \ldots, v_t)$ eine Jordan-Kette für f zum Eigenwert λ. Dann gilt:*

(i) *$U := \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_t)$ ist f-invariant;*

(ii) *$(v_1, \ldots, v_t)$ ist linear unabhängig.*

(iii) *Sei $f_U \colon U \to U$ die Einschränkungsabbildung, und sei $B := (v_1, \ldots, v_t)$. Dann gilt*

$$\mathbf{c}_{B,B}(f_U) = J(\lambda, t).$$

Beweis. (i): Der Unterraum $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_t)$ ist nach Konstruktion $(f - \lambda \mathrm{id}_V)$-invariant, also ist er nach [LA 1, Lemma 12.23(ii)] auch f-invariant.

(ii): Wir beweisen mit Induktion über k, dass $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig ist. Für $k = 1$ ist dies richtig, da $v_1 \neq 0$. Sei die Aussage also richtig für k. Nach Konstruktion gilt $(f - \lambda \mathrm{id}_V)^k(\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k)) = 0$. Wegen $(f - \lambda \mathrm{id}_V)^k(v_{k+1}) = v_1 \neq 0$, folgt $v_{k+1} \notin \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k)$. Also ist $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$ linear unabhängig.

(iii): Es gilt

$$(f - \lambda \mathrm{id}_V)(v_k) = f(v_k) - \lambda v_k = \begin{cases} 0 & : \text{ falls } k = 1, \\ v_{k-1} & : \text{ falls } 2 \leq k \leq t. \end{cases}$$

Dies ist äquivalent zu

$$f(v_k) = \begin{cases} \lambda v_1 & : \text{ falls } k = 1, \\ v_{k-1} + \lambda v_k & : \text{ falls } 2 \leq k \leq t. \end{cases}$$

Mit anderen Worten, es gilt $\mathbf{c}_{B,B}(f_U) = J(\lambda, t)$. □

Satz 1.10 (Jordan-Normalform)**.** *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$, so dass $\mathcal{X}_f$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine Basis B von V, welche sich als disjunkte Vereinigung von Jordan-Ketten schreiben lässt, d.h.*

$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} J(\mu_1, t_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J(\mu_s, t_s) \end{pmatrix}.$$

(Die μ_i sind nicht notwendig paarweise verschieden.) Zudem sind die Paare (μ_i, t_i) bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

In Satz 1.10 setzen wir
$$\mathrm{JNF}(f) := \mathbf{c}_{B,B}(f)$$
und nennen diese Matrix die **Jordan-Normalform** von f.

Der Satz besagt, dass dies (bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke) wohldefiniert ist.

Wir sagen, dass eine Matrix $A \in K^{n,n}$ **in Jordan-Normalform ist**, falls A von der Form
$$A = \begin{pmatrix} J(\mu_1, t_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J(\mu_s, t_s) \end{pmatrix}$$
ist.

1.3. **Beweis des Satzes von Jordan.** Zum Beweis von Satz 1.10 können wir uns auf die Haupträume von f einschränken. Wir nehmen also ohne Einschränkung an, dass $\mathcal{X}_f = (X - \lambda)^n$ und $\mu_f = (X - \lambda)^m$. Insbesondere hat f nur einen Eigenwert. Für $k \geq 0$ sei
$$V_k := \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}_V)^k$$
der k-te verallgemeinerte Eigenraum von f zum Eigenwert λ. Nach Korollar 1.7 gilt dann
$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = V_{m+1} = \cdots$$
Nach Definition gilt $V_1 = \mathrm{Eig}(f, \lambda)$. Desweiteren gilt $V = V_m$.

Zur Abkürzung schreiben wir im Folgenden
$$g := f - \lambda \mathrm{id}_V.$$

Für $k \geq 1$ gilt offenbar $g(V_k) \subseteq V_{k-1}$.

Wir wollen Satz 1.10 mit absteigender Induktion über $1 \leq k \leq m$ beweisen. Induktionsanfang: Sei U_m ein Komplementärraum von V_{m-1} in V_m, d.h.
$$V_m = V_{m-1} \oplus U_m.$$
Zudem sei C_m eine Basis von U_m.

Angenommen wir haben bereits Unterräume $U_m, \ldots, U_k$ von V konstruiert mit Basen $C_m, \ldots, C_k$, so dass
$$V_k = V_{k-1} \oplus U_k \oplus g(U_{k+1}) \oplus \cdots \oplus g^{m-k}(U_m).$$
(Die Existenz dieser direkten Summenzerlegung von V_k ist unsere Induktionsannahme. Im Induktionsschritt konstruieren wir nun eine entsprechende Zerlegung von V_{k-1}.) Setze
$$S_k := U_k \oplus g(U_{k+1}) \oplus \cdots \oplus g^{m-k}(U_m).$$

Wegen $g(V_{k-1}) \subseteq V_{k-2} \subseteq V_{k-1}$ und $g(V_k) \subseteq V_{k-1}$ gilt

$$g(V_k) = g(V_{k-1}) + g(U_k) + g^2(U_{k+1}) + \cdots + g^{m-(k-1)}(U_m) \tag{1}$$
$$\subseteq V_{k-2} + g(U_k) + \cdots + g^{m-(k-1)}(U_m) \subseteq V_{k-1}. \tag{2}$$

Behauptung: Die Summe in (2) ist eine direkte Summe.

Beweis: Sei

$$0 = v_{k-2} + g(u_k) + g^2(u_{k+1}) + \cdots + g^{m-(k-1)}(u_m)$$

mit $v_{k-2} \in V_{k-2}$ und $u_i \in U_i$ für $k \leq i \leq m$. Wir wenden g^{k-2} an und erhalten

$$0 = g^{k-1}\left(u_k + g(u_{k+1}) + \cdots + g^{m-k}(u_m)\right),$$

also $u_k + g(u_{k+1}) + \cdots + g^{m-k}(u_m) \in V_{k-1}$. Nach der Induktionsannahme (nämlich $V_k = V_{k-1} \oplus U_k \oplus g(U_{k+1}) \oplus \cdots \oplus g^{m-k}(U_m)$) gilt dann

$$u_k + g(u_{k+1}) + \cdots + g^{m-k}(u_m) = 0$$

und dass alle Vektoren in dieser Summe gleich 0 sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Sei U_{k-1} nun ein Komplementärraum von

$$V_{k-2} \oplus g(U_k) \oplus g^2(U_{k+1}) \oplus \cdots \oplus g^{m-(k-1)}(U_m) = V_{k-2} \oplus g(S_k)$$

in V_{k-1}. Es gilt also

$$V_{k-1} = V_{k-2} \oplus U_{k-1} \oplus g(U_k) \oplus g^2(U_{k+1}) \oplus \cdots \oplus g^{m-(k-1)}(U_m).$$

Wähle eine Basis C_{k-1} von U_{k-1}, und setze

$$S_{k-1} := U_{k-1} \oplus g(U_k) \oplus g^2(U_{k+1}) \oplus \cdots \oplus g^{m-(k-1)}(U_m).$$

Damit haben wir den Induktionsschritt abgeschlossen.

Die Situation sieht also so aus:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V_m} &= \mathbf{V_{m-1}} \oplus U_m,\\
\mathbf{V_{m-1}} &= \mathbf{V_{m-2}} \oplus U_{m-1} \oplus g(U_m),\\
\mathbf{V_{m-2}} &= \mathbf{V_{m-3}} \oplus U_{m-2} \oplus g(U_{m-1}) \oplus g^2(U_m),\\
\mathbf{V_{m-3}} &= V_{m-4} \oplus U_{m-3} \oplus g(U_{m-2}) \oplus g^2(U_{m-1}) \oplus g^3(U_m),\\
&\cdots\\
V_1 &= V_0 \oplus U_1 \oplus g(U_2) \oplus \cdots \oplus g^{m-1}(U_m),\\
V_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Für $1 \leq k \leq m$ gilt

$$\begin{aligned}
V_k &= V_{k-1} \oplus S_k,\\
V_{k-1} &= V_{k-2} \oplus U_{k-1} \oplus g(S_k),\\
S_{k-1} &= U_{k-1} \oplus g(S_k).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $S_m = U_m$ und $V_1 = S_1$.

Zusammenfassung: Wir haben den Vektorraum V wie folgt in eine direkte Summe von Unterräumen zerlegt:

$$\begin{array}{rcccccccc} V = V_m = U_m & \oplus & g(U_m) & \oplus & g^2(U_m) & \oplus \cdots & \oplus & g^{m-1}(U_m) \\ & \oplus & U_{m-1} & \oplus & g(U_{m-1}) & \oplus \cdots & \oplus & g^{m-2}(U_{m-1}) \\ & & & \oplus & U_{m-2} & \oplus \cdots & \oplus & g^{m-3}(U_{m-2}) \\ & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \oplus\ U_2 & \oplus & g(U_2) \\ & & & & & & \oplus & U_1 \end{array}$$

Wir nennen die direkte Summe

$$V = \bigoplus_{k=1}^{m} \bigoplus_{j=0}^{k-1} g^j(U_k)$$

eine **Jordan-Zerlegung** von V.

S_k ist die direkte Summe der Unterräume in der $(m-k+1)$-ten Spalte, und

$$V_k = S_k \oplus S_{k-1} \oplus \cdots \oplus S_1$$

ist die direkte Summe der Unterräume in den rechten k Spalten.

Lemma 1.11. *Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $U \cap V_1 = 0$. Dann ist die Einschränkungsabbildung*

$$g_U : U \to V$$

injektiv. Insbesondere gilt: Ist C eine Basis von U, so ist $g(C)$ eine Basis von $g(U)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Für $2 \leq k \leq m$ gilt

$$S_k \cap V_1 = 0.$$

Wegen Lemma 1.11 ist dann die Einschränkungsabbildung $g_{S_k} : S_k \to V$ injektiv. Es folgt, dass

$$S_k \cong g(S_k).$$

Für jedes $1 \leq k \leq m$ hat also jeder Vektorraum in der direkten Summe

$$U_k \oplus g(U_k) \oplus \cdots \oplus g^{k-1}(U_k)$$

(= die $(m-k+1)$-te Zeile) der obigen Jordan-Zerlegung) dieselbe Dimension.

Korollar 1.12. *Die disjunkte Vereinigung*

$$\bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=0}^{k-1} g^j(C_k)$$

eine Basis von V.

Für $1 \leq k \leq m$ liefert die $(m-k+1)$-te Zeile der obigen Zerlegung also genau $\dim(U_k)$ Jordan-Ketten der Länge k.

Damit ist der erste Teil des Satzes von Jordan bewiesen. Es fehlt noch der Beweis der Eindeutigkeit.

Lemma 1.13. *Für alle $1 \leq k \leq m$ gilt:*

(i) $\dim(U_k) = \dim(V_k) - \dim(V_{k-1}) - \sum_{j=k+1}^{m} \dim(U_j)$;

(ii) $\dim(U_k) = 2\dim(V_k) - \dim(V_{k-1}) - \dim(V_{k+1})$.

Beweis. (i): Dies folgt direkt aus der obigen Summenzerlegung von V.

(ii): Die Aussage folgt via Induktion aus (i). □

− − − − − Ende Vorlesung 1 (08.04.) − − − − −

Lemma 1.14. *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} J(\mu_1, t_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J(\mu_s, t_s) \end{pmatrix} \in K^{n,n},$$

wobei $\mu_i \in K$ und $t_i \geq 1$ für alle $1 \leq i \leq s$, und sei $\lambda \in K$. Dann gilt:

(i) *Für $k \geq 0$ gilt*

$$\dim \mathrm{Eig}^k(A, \lambda) = \sum_{i=1}^{s} \delta_{\lambda,\mu_i} \min\{k, t_i\},$$

wobei

$$\delta_{\lambda,\mu_i} := \begin{cases} 1 & : \textit{falls } \lambda = \mu_i, \\ 0 & : \textit{sonst.} \end{cases}$$

(ii) *Für $k \geq 1$ gilt*

$$\dim \mathrm{Eig}^k(A, \lambda) - \dim \mathrm{Eig}^{k-1}(A, \lambda) = |\{1 \leq i \leq s \mid \mu_i = \lambda \textit{ und } t_i \geq k\}|;$$

(iii) *Für $k \geq 1$ gilt*

$$2\dim \mathrm{Eig}^k(A, \lambda) - \dim \mathrm{Eig}^{k-1}(A, \lambda) - \dim \mathrm{Eig}^{k+1}(A, \lambda) = |\{1 \leq i \leq s \mid \mu_i = \lambda \textit{ und } t_i = k\}|.$$

Beweis. (i): Für $\lambda, \mu \in K$ und $t \geq 1$ ist

$$J(\mu, t) - \lambda E_t$$

invertierbar genau dann wenn $\lambda \neq \mu$. In diesem Fall ist natürlich auch

$$(J(\mu, t) - \lambda E_t)^k$$

invertierbar für alle $k \geq 0$. Andererseits gilt

$$J(\lambda, t) - \lambda E_t = J(0, t).$$

Für $k \geq 0$ gilt dann offenbar

$$\dim \operatorname{Kern}(J(0,t)^k) = \min\{k, t\}.$$

Dies impliziert die Aussage, da

$$(A - \lambda E_n)^k = \begin{pmatrix} (J(\mu_1, t_1) - \lambda E_{t_1})^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (J(\mu_s, t_s) - \lambda E_{t_s})^k \end{pmatrix}.$$

(ii): Für $1 \leq i \leq s$ gilt

$$\min\{k, t_i\} - \min\{k-1, t_i\} = \begin{cases} 0 & : \text{ falls } t_i \leq k-1, \\ 1 & : \text{ falls } t_i \geq k. \end{cases}$$

Nun folgt die Aussage aus (i).

(iii): Dies folgt direkt aus (ii). □

Korollar 1.15. *Es sind äquivalent:*

(i)

$$\begin{pmatrix} J(\mu_1, t_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J(\mu_s, t_s) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} J(\mu'_1, t'_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J(\mu'_{s'}, t'_{s'}) \end{pmatrix}.$$

(ii) *Es gilt $s = s'$, und es gibt ein $\sigma \in S_s$ mit $(\mu_i, t_i) = (\mu'_{\sigma(i)}, t'_{\sigma(i)})$ für $1 \leq i \leq s$.*

Beweis. Kombiniere Lemma 1.2, Korollar 1.3, Lemma 1.14 und [La 1, Lemma 12.24]. □

Insbesondere hat jedes $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$, so dass $\mathcal{X}_f$ über K in Linearfaktoren zerfällt, eine bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke eindeutig bestimmte Jordan-Normalform.

(Für ein solches f haben wir gezeigt, dass es eine Basis B von V gibt, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(f)$ in Jordan-Normalform ist. Die Eindeutigkeit folgt aus dem obigen Korollar.)

Bemerkung: Bezüglich der Jordan-Normalform von $A \in K^{n,n}$ gibt es zwei fundamentale Fragestellungen:

(i) Bestimme $\mathrm{JNF}(A)$;

(ii) Finde eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von K^n, welche aus einer disjunkten Vereinigung von Jordan-Ketten besteht. Mit

$$S := [b_1 | \cdots | b_n] = \mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})$$

gilt dann

$$S^{-1}AS = \mathrm{JNF}(A).$$

Für (i) müssen wir die Eigenwerte von A und die Dimensionen der zugehörigen verallgemeinerten Eigenräume kennen. Dies reicht zur Bestimmung von $\mathrm{JNF}(A)$.

Die Konstruktion der Basis in (ii) ist deutlich aufwendiger, da wir wie im Beweis von Satz 1.10 die Komplementärräume $U_1, \dots, U_m$ samt zugehöriger Basen konstruieren müssen. (Für die Konstruktion von Basen von Komplementärräumen verweisen wir auf den Algorithmus aus Abschnitt 7.10.5 im LA 1 Skript.)

Zusammenfassung: Sei $A \in K^{n,n}$, so dass $\mathcal{X}_A$ über K in Linearfaktoren zerfällt, d.h. das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_A$ ist von der Form

$$\mathcal{X}_A = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_r)^{n_r},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von A sind, $n_1, \dots, n_r \geq 1$ und $n_1 + \cdots + n_r = n$. Dann ist das Minimalpolynom μ_A von der Form

$$\mu_A = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r},$$

wobei $m_1, \dots, m_r \geq 1$.

(i) Sei $\lambda \in K$. Dann gibt es in $\mathrm{JNF}(A)$ einen Jordan-Block der Form $J(\lambda, k)$ für ein $k \geq 1$ genau dann wenn λ ein Eigenwert von A ist.

(ii) Es gibt genau $\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ Jordan-Blöcke zum Eigenwert λ_i in $\mathrm{JNF}(A)$.

(iii) Für $k \geq 1$ ist die Anzahl der Jordan-Blöcke der Form $J(\lambda_i, k)$ in $\mathrm{JNF}(A)$ gleich

$$2 \dim \mathrm{Eig}^k(A, \lambda_i) - \dim \mathrm{Eig}^{k-1}(A, \lambda_i) - \dim \mathrm{Eig}^{k+1}(A, \lambda_i).$$

(iv) Es gibt einen Jordan-Block der Form $J(\lambda_i, m_i)$ in $\mathrm{JNF}(A)$ und jeder andere Jordan-Block zum Eigenwert λ_i hat höchstens die Größe m_i.

(v) Es gibt genau

$$\dim \mathrm{Eig}^{m_i}(A, \lambda_i) - \dim \mathrm{Eig}^{m_i - 1}(A, \lambda_i)$$

Jordan-Blöcke der Form $J(\lambda_i, m_i)$ in $\mathrm{JNF}(A)$.

(vi) Es gilt $\dim \mathrm{Haupt}(A, \lambda_i) = n_i$.

(vii) Die Summe der Größen der Jordan-Blöcke zum Eigenwert λ_i in $\mathrm{JNF}(A)$ ist gleich n_i.

1.4. **Beispiele (Jordan-Normalform).**

1.4.1. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Es gilt $\mathcal{X}_A = (X-1)^4$. Wir erhalten

$$A - E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-E_4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und $(A - E_4)^3 = 0$.

Es gilt also $\dim(V_1) = 2$, $\dim(V_2) = 3$ und $\dim(V_3) = 4$. Es folgt

$$\begin{aligned} \dim(U_1) &= 2\dim(V_1) - \dim(V_0) - \dim(V_2) = 4 - 0 - 3 = 1, \\ \dim(U_2) &= 2\dim(V_2) - \dim(V_1) - \dim(V_3) = 6 - 2 - 4 = 0, \\ \dim(U_3) &= 2\dim(V_3) - \dim(V_2) - \dim(V_4) = 8 - 3 - 4 = 1. \end{aligned}$$

Die Jordan-Normalform von A ist also

$$\mathrm{JNF}(A) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1.4.2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6,6}.$$

Dann gilt $\mathcal{X}_A = (X-1)^6$. Wir suchen nun eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = \mathrm{JNF}(A)$.

Dazu bestimmen wir zunächst Basen der verallgemeinerten Eigenräume

$$V_k := \mathrm{Kern}(A - 1 \cdot E_6)^k$$

für $k \geq 1$.

Es gilt

$$A - E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A-E_6)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und $(A - E_6)^3 = 0$.

Wie immer sei $E = (e_1, \ldots, e_6)$ die geordnete Standardbasis von $\mathbb{R}^6$. Man zeigt nun leicht, dass $V_3 = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_6)$, $V_2 = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots, e_5)$ und

$$V_1 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Die angegebenen Erzeugendensysteme sind jeweils Basen. Setze

$$g := A - E_6.$$

Wir brauchen nun einen Unterraum U_3 mit

$$V_3 = V_2 \oplus U_3.$$

Wir wählen $U_3 := \mathrm{Lin}(e_6)$.

Im nächsten Schritt brauchen wir einen Unterraum U_2 mit

$$V_2 = V_1 \oplus U_2 \oplus g(U_3) = V_1 \oplus U_2 \oplus \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Wir wählen $U_2 := \mathrm{Lin}(e_1)$.

Schließlich müssen wir einen Unterraum U_1 finden mit

$$V_1 = U_1 \oplus g(U_2) \oplus g^2(U_3) = U_1 \oplus \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \oplus \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Wir wählen

$$U_1 := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Die Vektorräume U_1, U_2 und U_3 liefern nun die Jordan-Ketten $(e_1 + e_4)$,

$$(g(e_1), e_1) = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1), \qquad (g^2(e_6), g(e_6), e_6) = (\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_6).$$

Sei nun

$$B := (g^2(e_6), g(e_6), e_6, g(e_1), e_1, e_1 + e_4).$$

Dies ist eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^6$. (Wir haben eine Reihenfolge der drei konstruierten Jordan-Ketten gewählt.)

Wir erhalten

$$S := \mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^6}) = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$\mathrm{JNF}(A) = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Dann gilt $\mathcal{X}_A = (X-1)^3$ und

$$\mathrm{JNF}(A) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1.4.4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,5}.$$

Dann gilt $\mathcal{X}_A = X^4(X-1)$ und

$$\mathrm{JNF}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.5. Hier sind noch zwei beliebte Fehler bei der Bestimmung der Jordan-Normalform und der zugehörigen Basiswechselmatrix:

(i) Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Sei $(v_1, \ldots, v_t)$ ein Jordan-Kette für f zum Eigenwert λ, und sei $U := \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_t)$. Für die Einschränkungsabbildung $f_U \colon U \to U$ und $B := (v_1, \ldots, v_t)$ gilt dann

$$\mathbf{c}_{B,B}(f_U) = J(\lambda, t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wählen wir nun die Basis $C := (v_t, \ldots, v_1)$ von U (d.h. wir drehen die Reihenfolge der Vektoren in der Jordan-Kette um) , so erhalten wir

$$\mathbf{c}_{C,C}(f_U) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(ii) Beim Beweis der Jordan-Normalform in Abschnitt 1.3 benutzen wir die Abbildung

$$g := f - \lambda \mathrm{id}_V.$$

Arbeitet man stattdessen fälschlicherweise mit $g = \lambda \mathrm{id}_V - f$, so erhalten wir statt der Jordan-Blöcke

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Blöcke der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1.5. **Warum ist die Jordan-Normalform wichtig?** Jordan [Jo] wollte Systeme linearer Differentialgleichungen lösen. Dabei muss das **Exponential**

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ berechnet werden, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. (Man muss an dieser Stelle zunächst zeigen, dass die obige Reihe konvergiert.) Die Berechnung von $\exp(A)$ erfolgt über die Jordan-Normalform. Dies ist wichtig für das theoretische Verständnis aber auch für das konkrete Lösen von Systemen linearer Differentialgleichungen. Da man in der Regel keinen Zugriff auf die Eigenwerte einer Matrix A hat, wurden zudem zahlreiche numerische Verfahren zur Bestimmung oder Approximation von $\exp(A)$ entwickelt.

Zur Geschichte der Jordan-Normalform sei auf die Doktorarbeit von Frédéric Brechenmacher [Br] verwiesen, welcher diesem schönen Thema immerhin 729 Seiten gewidmet hat. Dort wird auch die Auseinandersetzung mit Kronecker beleuchtet.

Konkrete Anwendungen von linearen Differentialgleichungen und der Jordan-Normalform finden sich u.a. in der Regelungstechnik (welche zur Ingenieurwissenschaft gehört), siehe z.B. [Wo].

Auch für den Beweis der Perron-Frobenius Sätze (welche zahlreiche Anwendungen haben) wird die Jordan-Normalform verwendet.

Abgesehen von den zahlreichen Anwendungen ist die Neugier ein wesentlicher Motor der Wissenschaft. Die Frage nach Anwendungen wird manchmal erst später oder auch gar nicht gestellt. Wir sind durch unser Studium linearer Abbildung recht natürlich zum Normalformenproblem für Endomorphismen gelangt. Der Ehrgeiz, dieses Normalformenproblem zu lösen, ist Teil der menschlichen Natur. Fast alle Mathematikstudent*innen stimmen an dieser Stelle zu, dass wir es mit einem interessanten Problem zu tun haben, welches zudem eine sehr schöne Lösung hat. Hier spielt also auch die Ästhetik eine große Rolle.

Das Verstehen des Normalformenproblems und seiner Lösung(en) ist eine respektable intellektuelle Leistung. Die dazu benötigte Fähigkeit, strukturiert zu denken und sich sicher in abstrakten Denkgebäuden zu bewegen, ist in unserer komplexen Welt sehr gefragt und spielt oft eine größere Rolle als die erlernten mathematischen Inhalte.

1.6. **Satz von Frobenius.**

Sei $\mathrm{GL}_n(K[X])$ die Menge aller $A \in K[X]^{n,n}$, so dass es ein $C \in K[X]^{n,n}$ gibt mit $AC = CA = E_n$.

Proposition 1.16. *Für $A \in K[X]^{n,n}$ sind äquivalent:*

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(K[X])$;

(ii) $\det(A) \in K^\times$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K[X])$, d.h. es gibt ein $C \in K[X]^{n,n}$ mit $AC = CA = E_n$. Es folgt, dass

$$\det(A)\det(C) = 1.$$

Die Polynome $\det(A), \det(C) \in K[X]$ haben also beide Grad 0. Mit anderen Worten $\det(A) \in K^\times$.

(ii) $\implies$ (i): Sei $A = (a_{ij}) \in K[X]^{n,n}$ mit $\det(A) \in K^\times$. Definiere $B = (b_{ij}) \in K[X]^{n,n}$ durch

$$b_{ij} := (-1)^{i+j}\det(A_{ji}).$$

Ähnlich wie im Beweis von [Skript LA1, Lemma 12.14] (Cramersche Regel) rechnet man nun leicht nach, dass

$$\frac{1}{\det(A)}AB = \frac{1}{\det(A)}BA = E_n.$$

Es gilt also

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}B.$$

□

Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+X & -X \\ X & 1-X \end{pmatrix} \in K[X]^{2,2}$$

ist invertierbar, da $\det(A) = 1 \in K^\times$. Wir erhalten

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-X & X \\ -X & 1+X \end{pmatrix}.$$

$A, B \in K[X]^{n,n}$ sind **äquivalent**, falls es $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ gibt mit

$$PAQ^{-1} = B.$$

Wir schreiben dann

$$A \sim B.$$

Erinnerung:

Für $A \in K^{n,n}$ ist $M_X(A) := XE_n - A \in K[X]^{n,n}$ die **charakteristische Matrix** von A.

Satz 1.17 (Frobenius)**.** *Seien $A, B \in K^{n,n}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A und B sind ähnlich (über K);*

(ii) *$M_X(A)$ und $M_X(B)$ sind äquivalent (über $K[X]$).*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Angenommen A und B sind ähnlich, d.h. es gibt ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^{-1}AS = B$. Es folgt, dass

$$S^{-1}(XE_n - A)S = XE_n - S^{-1}AS = XE_n - B.$$

(ii) $\implies$ (i): Seien $M_X(A)$ und $M_X(B)$ äquivalent, d.h. es gibt invertierbare Matrizen $P(X), Q(X) \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ mit

$$P(X)M_X(B) = M_X(A)Q(X). \tag{3}$$

Wir können $P(X)$ und $Q(X)$ schreiben als

$$P(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i P_i \quad \text{und} \quad Q(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i Q_i$$

wobei $P_i, Q_i \in K^{n,n}$. Gleichung (3) entspricht dann der Gleichung

$$\left(\sum_{i=0}^{m} X^i P_i\right)(XE_n - B) = (XE_n - A)\left(\sum_{i=0}^{m} X^i Q_i\right).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{m} X^{i+1}P_i - \sum_{i=0}^{m} X^i P_i B = \sum_{i=0}^{m} X^{i+1}Q_i - \sum_{i=0}^{m} X^i A Q_i. \tag{4}$$

Durch Vergleich von Termen gleichen Grades in X erhalten wir

$$P_{i-1} - P_i B = Q_{i-1} - AQ_i \tag{5}$$

für $1 \le i \le m$ und

$$P_0 B = AQ_0 \quad \text{und} \quad P_m = Q_m. \tag{6}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} A^i P_{i-1} - \sum_{i=1}^{m} A^i P_i B &= \sum_{i=1}^{m} A^i Q_{i-1} - \sum_{i=1}^{m} A^{i+1} Q_i \\
&= AQ_0 - A^{m+1}Q_m \\
&= P_0 B - A^{m+1} P_m.
\end{aligned}$$

(Die erste Gleichheit entsteht durch Multiplizieren der Gleichung (5) von links mit A^i und anschließendem Summieren. Die dritte Gleichheit folgt wegen (6).)

Aus den obigen Gleichungen folgt

$$A\left(\sum_{i=0}^{m} A^i P_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{m} A^i P_i\right) B = 0. \tag{7}$$

Setze

$$S := \left(\sum_{i=0}^{m} A^i P_i\right) \in K^{n,n}. \tag{8}$$

Es bleibt zu zeigen, dass S invertierbar ist.

Nach Voraussetzung gibt es eine Matrix $R(X) \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ mit

$$P(X)R(X) = E_n. \tag{9}$$

Wir schreiben $R(X)$ als

$$R(X) = \sum_{i=0}^{m} X^i R_i$$

wobei $R_i \in K^{n,n}$ für alle i. Setze

$$T := \sum_{j=0}^{m} B^j R_j \in K^{n,n}.$$

Wir rechnen

$$ST = \sum_{j=0}^{m} SB^j R_j = \sum_{j=0}^{m} A^j SR_j = \sum_{i,j=0}^{m} A^{i+j} P_i R_j = A^0 E_n = E_n.$$

Die erste Gleichheit benutzt nur die Definition von T, die zweite folgt wegen (7), für die dritte wird (8) verwendet. Die vierte Gleichheit folgt schließlich aus der Identität (9) und Einsetzen von A, denn es gilt

$$P(X)R(X) = \left(\sum_{i=0}^{m} X^i P_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} X^j R_j\right) = \sum_{i,j=0}^{m} X^{i+j} P_i R_j = X^0 E_n = E_n.$$

□

1.7. **Determinantenteiler.**

Sei $A \in K[X]^{n,n}$. Für $1 \leq k \leq n$ entsteht eine **$(k \times k)$-Teilmatrix** von A durch Streichen von $n-k$ Spalten und $n-k$ Zeilen. Die Determinanten der $(k \times k)$-Teilmatrizen heißen **k-Minoren**.

Sei $1 \leq k \leq n$. Sind alle k-Minoren von A gleich 0, so setze $d_k(A) := 0$. Andernfalls sei

$$d_k(A) := \mathrm{ggT}\left(\{k\text{-Minoren } p \text{ von } A \text{ mit } p \neq 0\}\right).$$

Wir nennen $d_k(A)$ dann den k-ten **Determinantenteiler** von A. Außerdem setzen wir $d_0(A) := 1$.

Proposition 1.18. *Sei $A \in K[X]^{n,n}$. Sei $1 \leq k \leq n$ mit $d_{k-1}(A) \neq 0$, so gilt $d_{k-1}(A) \mid d_k(A)$.*

Beweis. Sei $d_{k-1}(A) \neq 0$. Die Entwicklung eines k-Minors nach einer Zeile zeigt: Jeder k-Minor ist eine Linearkombination (mit Koeffizienten in $K[X]$) von $(k-1)$-Minoren. Also teilt $d_{k-1}(A)$ jeden k-Minor. Es folgt sofort, dass $d_{k-1}(A) \mid d_k(A)$. □

Lemma 1.19. *Für $1 \leq k \leq n$ gilt:*

(i) *Sei $A \in K[X]^{n,n}$. Ist $d_{k-1}(A) = 0$, so folgt auch $d_k(A) = 0$;*

(ii) *Für $A \in K^{n,n}$ gilt $d_n(M_X(A)) = \mathcal{X}_A$;*

(iii) *Für $A \in K^{n,n}$ gilt $d_k(M_X(A)) \neq 0$.*

Beweis. (i): Sei $d_{k-1}(A) = 0$. Also sind alle $(k-1)$-Minoren von A gleich 0. Wir wissen, dass jeder k-Minor eine Linearkombination (mit Koeffizienten in $K[X]$) von $(k-1)$-Minoren ist. Hieraus folgt die Behauptung.

(ii): Dies folgt direkt aus den Definitionen.

(iii): Dies folgt direkt aus (i) und (ii). □

Von besonderem Interesse für uns sind die Determinantenteiler $d_k(M_X(A))$ für $A \in K^{n,n}$.

Beispiele:

(i) Für
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{2,2}$$
gilt $d_1(M_X(A)) = X - \lambda$ und $d_2(M_X(A)) = (X-\lambda)^2$.

(ii) Für
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{2,2}$$
gilt $d_1(M_X(A)) = 1$ und $d_2(M_X(A)) = (X-\lambda)^2$.

(iii) Für
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in K^{2,2}$$
mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt $d_1(M_X(A)) = 1$ und $d_2(M_X(A)) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.

(iv) Für
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$$
gilt $d_1(M_X(A)) = 1$, $d_2(M_X(A)) = X+1$ und $d_3(M_X(A)) = (X-2)(X+1)^2$.

Für $A \in K[X]^{n,n}$ sei
$$\rho(A) := \max\{0 \leq k \leq n \mid d_k(A) \neq 0\}.$$

Lemma 1.20. *Seien $A, B \in K[X]^{n,n}$. Dann gilt*

(i) $d_k(A) \mid d_k(AB)$ *für* $1 \leq k \leq \rho(A)$;

(ii) $d_k(B) \mid d_k(AB)$ *für* $1 \leq k \leq \rho(B)$;

(iii) $\rho(AB) \leq \rho(A)$ *und* $\rho(AB) \leq \rho(B)$.

Beweis. Die Zeilen von AB sind $K[X]$-Linearkombinationen der Zeilen von B. Mit den Rechenregeln für Determinanten folgt, dass die k-Minoren von AB $K[X]$-Linearkombinationen der k-Minoren von B sind (Übungsaufgabe). Es folgt $\rho(AB) \leq \rho(B)$ und $d_k(B) \mid d_k(AB)$ für $1 \leq k \leq \rho(B)$. Umgekehrt sind die Spalten von AB $K[X]$-Linearkombinationen der Spalten von A. Ähnlich wie zuvor erhalten wir $\rho(AB) \leq \rho(A)$ und $d_k(A) \mid d_k(AB)$ für $1 \leq k \leq \rho(A)$. □

– – – – – **Ende Vorlesung 2 (11.04.)** – – – – –

Lemma 1.21. *Seien $A, B \in K[X]^{n,n}$ mit $A \sim B$. Dann gilt*
$$d_k(A) = d_k(B)$$
für $1 \leq k \leq n$. Insbesondere gilt $\rho(A) = \rho(B)$.

Beweis. Wegen $A \sim B$ gibt es $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K[X])$ mit
$$PAQ^{-1} = B.$$
Wegen Lemma 1.20 gilt dann
$$\rho(B) = \rho(PAQ^{-1}) \leq \rho(PA) \leq \rho(A)$$
und
$$d_k(A) \mid d_k(PA) \mid d_k(PAQ^{-1}) = d_k(B)$$
für $1 \leq k \leq \rho(A)$. Da auch $B \sim A$ gilt, erhalten wir auf dieselbe Weise $d_k(B) \mid d_k(A)$ für $1 \leq k \leq \rho(B)$ und $\rho(A) \leq \rho(B)$. Es folgt $\rho(A) = \rho(B)$ und $d_k(A) = d_k(B)$ für alle $1 \leq k \leq n$. □

1.8. **Invariantenteiler.**

Sei $A \in K[X]^{n,n}$, und seien $d_1(A), \dots, d_n(A)$ die Determinantenteiler von A. Für $1 \leq k \leq \rho(A)$ sei
$$c_k(A) := \frac{d_k(A)}{d_{k-1}(A)} \in K[X]$$
der k-te **Invariantenteiler** von A. Für $\rho(A) + 1 \leq k \leq n$ setze $c_k(A) := 0$.

Lemma 1.22. *Für $A \in K[X]^{n,n}$ gilt*

$$\begin{aligned} d_1(A) &= c_1(A), \\ d_2(A) &= c_1(A)c_2(A), \\ &\dots \\ d_n(A) &= c_1(A)c_2(A)\cdots c_n(A). \end{aligned}$$

Für $A, B \in K[X]^{n,n}$ sind also äquivalent:

(i) $d_k(A) = d_k(B)$ *für alle* $1 \le k \le n$;

(ii) $c_k(A) = c_k(B)$ *für alle* $1 \le k \le n$.

Beweis. Klar. □

Sei $A \in K^{n,n}$. Für $1 \le k \le n$ definieren wir

$$d_k(A) := d_k(M_X(A)) \quad \text{und} \quad c_k(A) := c_k(M_X(A)).$$

Korollar 1.23. *Für $A \in K^{n,n}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{grad}(c_k(A)) = n.$$

Proposition 1.24. *Seien $A, B \in K^{n,n}$. Sind A und B ähnlich, so folgt*

$$d_k(A) = d_k(B) \quad \text{und} \quad c_k(A) = c_k(B)$$

für alle $1 \le k \le n$.

Beweis. Nach Satz 1.17 folgt aus der Ähnlichkeit von A und B, dass $M_X(A) \sim M_X(B)$. (Hier wird nur die beinahe triviale Richtung (i) $\Longrightarrow$ (ii) des zitierten Satzes verwendet.) Nun wenden wir Lemma 1.21 an und erhalten

$$d_k(A) = d_k(M_X(A)) = d_k(M_X(B)) = d_k(B)$$

für alle $1 \le k \le n$. Wegen Lemma 1.22 gilt dann auch

$$c_k(A) = c_k(B)$$

für alle $1 \le k \le n$. □

Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$, und sei B eine Basis von V. Dann ist

$$d_k(f) := d_k(\mathbf{c}_{B,B}(f)) \in K[X] \quad \text{und} \quad c_k(f) := c_k(\mathbf{c}_{B,B}(f)) \in K[X]$$

der k-te **Determinantenteiler** bzw. **Invariantenteiler** von f.

Wegen Proposition 1.24 ist dies wohldefiniert.

1.9. **Smith-Normalform.** Sei $A \in K[X]^{n,n}$.

Wir definieren drei Typen von Transformationen der Matrix A:

(1) Addition des a-fachen einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte von A, wobei $a \in K[X]$.

(2) Vertauschen zweier Zeilen bzw. Spalten.

(3) Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem $a \in K^\times$.

Den drei Transformationen kann man ähnlich wie in LA 1 drei Typen von Elementarmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K[X])$ zuordnen, so dass die Transformation jeweils durch Multiplikation mit einer Elementarmatrix realisiert werden kann.

Satz 1.25. *Für $A \in K[X]^{n,n}$ gilt:*

(i) *A lässt sich durch Transformationen vom Typ (1), (2) und (3) in eine Diagonalmatrix der Form*

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} c_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_m & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right) \in K[X]^{n,n}$$

überführen, so dass gilt:

(a) *$c_{k-1} \mid c_k$ gilt für alle $2 \leq k \leq m$;*

(b) *Die Polynome $c_1, \dots, c_m$ sind normiert.*

Insbesondere gilt $A \sim C$.

(ii) *Es gilt $\rho(A) = m$ und*

$$c_k(A) = c_k$$

für $1 \leq k \leq m$ und $c_k(A) = 0$ für $m+1 \leq k \leq n$.

Korollar 1.26. *Für $A \in K[X]^{n,n}$ gilt*

$$A \sim \begin{pmatrix} c_1(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_n(A) \end{pmatrix}.$$

Beweis von Satz 1.25. (i): Für $A = 0$ sind wir fertig.

Schritt 1: Also sei $A = (a_{ij}) \neq 0$. Durch Transformationen vom Typ (2) können wir erreichen, dass

$$a_{11} \neq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{grad}(a_{11}) \leq \mathrm{grad}(a_{ij})$$

für alle i, j mit $a_{ij} \neq 0$. Setze $\min(A) := \operatorname{grad}(a_{11})$.

Schritt 2: Durch Transformationen vom Typ (1) können wir alle a_{1k} und a_{k1} mit $k \neq 1$ wie folgt zum Verschwinden bringen: Sei etwa $a_{k1} \neq 0$ mit $k \neq 1$. Teilen mit Rest liefert ein $q \in K[X]$ mit $a_{k1} = qa_{11} + r$ und

$$\operatorname{grad}(r) = \operatorname{grad}(a_{k1} - qa_{11}) < \operatorname{grad}(a_{11}).$$

Wir addieren nun das $(-q)$-fache der ersten Zeile zur k-ten Zeile und erhalten eine Matrix $A' = (a'_{ij})$ mit

$$\operatorname{grad}(a'_{k1}) < \operatorname{grad}(a_{11}).$$

Falls $a'_{k1} \neq 0$ gehen wir zurück zu Schritt 1. Dieser liefert dann eine Matrix $A'' \neq 0$ mit $\min(A'') < \min(A)$. Analog verfahren wir mit den Einträgen a_{1k} von A mit $k \neq 1$ und $a_{1k} \neq 0$. Falls $a'_{k1} = a'_{1k} = 0$ für alle $k \neq 1$, so ist Schritt 2 abgeschlossen. Wir erhalten eine Matrix

$$D = (d_{ij}) = \left(\begin{array}{c|ccc} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

mit $d_{11} \neq 0$ und $\operatorname{grad}(d_{11}) \leq \operatorname{grad}(d_{ij})$ für alle $d_{ij} \neq 0$.

Schritt 3: Wir wollen erreichen, dass $d_{11} \mid d_{ij}$ für alle i, j. Sei etwa d_{st} nicht durch d_{11} teilbar. Teilen mit Rest liefert ein Element $q \in K[X]$ mit $d_{st} = qd_{11} + r$,

$$\operatorname{grad}(r) = \operatorname{grad}(d_{st} - qd_{11}) < \operatorname{grad}(d_{11})$$

und $r = d_{st} - qd_{11} \neq 0$. Nun verfahren wir wie folgt. Addiere die erste Zeile von D zur s-ten Zeile. Addiere das $(-q)$-fache der ersten Spalte der so entstandenen Matrix zur t-ten Spalte. Wir erhalten eine Matrix $D' = (d'_{ij})$ mit $d'_{st} = d_{st} - qd_{11} \neq 0$ und

$$\operatorname{grad}(d'_{st}) < \operatorname{grad}(d_{11}).$$

Nun fangen wir wieder mit Schritt 1 an.

Wir fahren induktiv fort und erhalten eine Matrix $D = (d_{ij})$ der obigen Form mit $d_{11} \mid d_{ij}$ für alle i, j. Mit einer Typ (3) Transformation können wir d_{11} normieren. Nun folgt (i) per Induktion. (Das Anwenden von Transformationen vom Typ (1), (2) und (3) auf den gesternten Teil der Matrix D ändert nichts an dem Umstand, dass alle Einträge dieses Teils durch d_{11} teilbar sind.)

Da Transformationen vom Typ (1), (2) und (3) der Multiplikation von entsprechenden (invertierbaren) Elementarmatrizen von rechts oder links entsprechen, sehen wir, dass A und C äquivalent sind.

(ii): Sei C wie in (i). Wegen der Beziehung $c_{i-1} \mid c_i$ für $2 \leq i \leq m$ erhalten wir

$$d_k(C) = c_1 \cdots c_k$$

für $1 \leq k \leq m$. (Hier wird verwendet, dass die k-Minoren von Diagonalmatrizen genau die Produkte von jeweils k Einträgen auf der Diagonalen sind. Der Beweis dieser Aussage ist eine Übungsaufgabe.) Zudem gilt offenbar $d_k(C) = 0$ für $m+1 \leq$

$k \leq n$. Da A und C äquivalent sind, impliziert Lemma 1.21, dass $d_k(A) = d_k(C)$ für alle $1 \leq k \leq n$. Aus Lemma 1.22 folgt dann

$$c_k(A) = c_k(C) = c_k$$

für $1 \leq k \leq m$ und $c_k(A) = c_k(C) = 0$ für $m + 1 \leq k \leq n$. $\square$

Korollar 1.27. *Sei $A \in K[X]^{n,n}$. Für $2 \leq k \leq \rho(A)$ gilt $c_{k-1}(A) \mid c_k(A)$.*

Für $A \in K[X]^{n,n}$ ist die **Smith-Normalform** von A definiert als

$$\mathrm{SNF}(A) := \begin{pmatrix} c_1(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_n(A) \end{pmatrix}.$$

Korollar 1.28. *Für $A \in K[X]^{n,n}$ gilt*

$$A \sim \mathrm{SNF}(A).$$

Der Beweis von Satz 1.25 liefert einen Algorithmus, der uns die Berechnung aller Determinanten- und Invariantenteiler einer Matrix in $K[X]^{n,n}$ erlaubt.

Für $A \in K^{n,n}$ definieren wir

$$\mathrm{SNF}(A) := \mathrm{SNF}(M_X(A)).$$

Die Matrix

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} c_1(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_n(A) \end{pmatrix}$$

nennt man dann die **Smith-Normalform** von A.

Bemerkung: Für $A \in K^{n,n}$ gilt $c_k(A) \neq 0$ für alle $1 \leq k \leq n$, d.h. $\rho(M_X(A)) = n$.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Für eine geordnete Basis B von V sei dann

$$\mathrm{SNF}(f) := \mathrm{SNF}(\mathbf{c}_{B,B}(f))$$

die **Smith-Normalform** von f.

Mit den üblichen Argumenten sehen wir, dass dies wohldefiniert ist.

Satz 1.29. *Seien $A, B \in K^{n,n}$. Dann sind äquivalent:*
(i) *A und B sind ähnlich in $K^{n,n}$;*
(ii) *$M_X(A)$ und $M_X(B)$ sind äquivalent in $K[X]^{n,n}$;*
(iii) *$c_k(A) = c_k(B)$ für alle $1 \le k \le n$;*
(iv) *$d_k(A) = d_k(B)$ für alle $1 \le k \le n$;*
(v) *$\mathrm{SNF}(A) = \mathrm{SNF}(B)$.*

Beweis. (i) $\iff$ (ii): Dies ist die Aussage von Satz 1.17.

(iii) $\iff$ (iv): Dies ist Teil von Lemma 1.22.

(i) $\implies$ (iv): Dies ist die Aussage von Proposition 1.24.

(iii) $\implies$ (ii): Wir benutzen Satz 1.25 und erhalten
$$M_X(A) \sim \mathrm{SNF}(A) = \mathrm{SNF}(B) \sim M_X(B).$$

(iii) $\iff$ (v): Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Für einen Körper K sei $\overline{K}$ der **algebraische Abschluss** von K, d.h. $\overline{K}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $K \subseteq \overline{K}$, und $\overline{K}$ ist minimal mit dieser Eigenschaft.

Es gilt zum Beispiel $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$.

Wir können dann jedes $A \in K^{n,n}$ auch als Matrix in $\overline{K}^{n,n}$ auffassen.

Dass es immer einen algebraischen Abschluss gibt, und dass dieser in gewissem Sinne eindeutig ist, werden wir in der Vorlesung *Einführung in die Algebra* beweisen.

Satz 1.30. *Seien $A, B \in K^{n,n}$. Dann sind äquivalent:*
(i) *A und B sind ähnlich in $K^{n,n}$;*
(ii) *$d_k(A) = d_k(B)$ für alle $1 \le k \le n$;*
(iii) *A und B sind ähnlich in $\overline{K}^{n,n}$;*
(iv) *A und B haben die gleiche Jordan-Normalform in $\overline{K}^{n,n}$.*

Beweis. (i) $\iff$ (ii): Dies ist Teil von Satz 1.29.

(ii) $\iff$ (iii): Dies ist wiederum ein Teil von Satz 1.29, da die Determinantenteiler $d_k(A)$ und $d_k(B)$ nicht davon abhängen, ob wir A und B als Matrizen in $K^{n,n}$ oder in $\overline{K}^{n,n}$ auffassen.

(iii) $\iff$ (iv): Dies entspricht dem Satz 1.10 von Jordan. $\square$

– – – – – Ende Vorlesung 3 (15.04.) – – – – –

1.10. **Frobenius-Normalform.** Erinnerung:

Für ein normiertes Polynom
$$p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$
in $K[X]$ vom Grad $n \geq 1$ ist
$$B(p) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$
die **Begleitmatrix** von p. Für $p = 1$ ist $B(p)$ nach Definition die leere Matrix.

Nach [Skript LA 1, Satz 12.16] gilt
$$d_n(B(p)) := \det(M_X(B(p))) := \chi_{B(p)} = p.$$

Lemma 1.31. *Sei $p \in K[X]$ normiert vom Grad $n \geq 1$. Dann gilt*
$$\mathrm{SNF}(B(p)) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & p \end{pmatrix} \in K[X]^{n,n}.$$

Beweis. Sei
$$p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$
Dann ist
$$M_X(B(p)) = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{pmatrix} \in K[X]^{n,n}.$$
Es gilt $d_n(B(p)) := \det(M_X(B(p))) := \mathcal{X}_{B(p)} = p$. Streichen wir die erste Zeile und die letzte Spalte von $M_X(B(p))$, so erhalten wir die Matrix
$$\begin{pmatrix} -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & X \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in K[X]^{n-1,n-1}.$$
Es folgt sofort, dass $d_1(B(p)) = \cdots = d_{n-1}(B(p)) = 1$. Damit gilt dann $c_1(B(p)) = \cdots = c_{n-1}(B(p)) = 1$ und $c_n(B(p)) = p$. $\square$

Für normierte Polynome $p_1, \dots, p_t \in K[X]$ setze

$$B(p_1, \dots, p_t) := \begin{pmatrix} B(p_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B(p_t) \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.32. *Seien $p_1, \dots, p_t \in K[X]$ normierte Polynome, so dass $p_{i-1} \mid p_i$ für alle $2 \leq i \leq t$. Dann gilt*

$$\mathrm{SNF}(B(p_1, \dots, p_t)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & p_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p_t \end{pmatrix} \in K[X]^{n,n},$$

wobei $n = \mathrm{grad}(p_1) + \cdots + \mathrm{grad}(p_t)$. Insbesondere gilt $c_{n-t+i}(B(p_1, \dots, p_t)) = p_i$ für $1 \leq i \leq t$ und $c_i(B(p_1, \dots, p_t)) = 1$ für $1 \leq i \leq n - t$.

Beweis. Nach Definition ist $M_X(B(p_1, \dots, p_t))$ von der Form

$$M_X(B(p_1, \dots, p_t)) = \begin{pmatrix} M_X(B(p_1)) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_X(B(p_t)) \end{pmatrix}.$$

Wir können dann mittels elementarer Zeilen- und Spaltenumformungen die einzelnen Blöcke $M_X(B(p_i))$ in Smith-Normalform bringen. Hier verwenden wir Lemma 1.31. Durch Zeilen und Spaltenvertauschungen ist dann $M_X(B(p_1, \dots, p_t))$ äquivalent zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & p_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & p_t \end{pmatrix} \in K[X]^{n,n}.$$

Wegen $p_{i-1} \mid p_i$ für $2 \leq i \leq t$ folgt dann, dass die obige Matrix die Smith-Normalform von $M_X(B(p_1, \dots, p_t))$ ist. □

Satz 1.33 (Frobenius-Normalform)**.** *Sei $A \in K^{n,n}$. Dann gibt es normierte Polynome $p_1, \dots, p_n \in K[X]$ mit $p_{i-1} \mid p_i$ für $2 \leq i \leq n$, so dass*

$$A \approx B(p_1, \dots, p_n).$$

Es gilt dann $p_i = c_i(A)$ für $1 \leq i \leq n$.

Beweis. Existenz: Wir wissen, dass

$$M_X(A) \sim \begin{pmatrix} c_1(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_n(A) \end{pmatrix} \sim M_X(B(c_1(A), \dots, c_n(A))).$$

(Die zweite Äquivalenz folgt aus Lemma 1.32.) Es folgt nun aus Satz 1.17, dass $A \approx B(c_1(A), \dots, c_n(A))$.

Eindeutigkeit: Angenommen

$$A \approx B(p_1, \dots, p_n),$$

wobei $p_1, \dots, p_n \in K[X]$ normierte Polynome sind mit $p_{i-1} \mid p_i$ für $2 \leq i \leq n$. (Es folgt $n = \mathrm{grad}(p_1) + \cdots + \mathrm{grad}(p_n)$.) Es gilt dann $M_X(A) \sim M_X(B(p_1, \dots, p_n))$, siehe Satz 1.17. Nach Satz 1.25 und Lemma 1.32 (für $t = n$) folgt nun

$$\mathrm{SNF}(A) = \mathrm{SNF}(B(p_1, \dots, p_n)) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}.$$

Also gilt $c_i(A) = p_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. □

Die Matrix $B(c_1(A), \dots, c_n(A))$ in Satz 1.33 ist die **Frobenius-Normalform** von A und wird mit $\mathrm{FNF}(A)$ bezeichnet. Oft wird $\mathrm{FNF}(A)$ auch **rationale Normalform** von A genannt.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Für eine geordnete Basis B von V sei dann

$$\mathrm{FNF}(f) := \mathrm{FNF}(\mathbf{c}_{B,B}(f))$$

die **Frobenius-Normalform** von f.

Mit den üblichen Argumenten sehen wir, dass dies wohldefiniert ist.

– – – – – Ende Vorlesung 4 (22.04.) – – – – –

Korollar 1.34. *Die Abbildung*

$$K^{n,n} \to K[X]^n$$
$$A \mapsto (c_1(A), \dots, c_n(A))$$

induziert eine bijective Abbildung von der Menge der Konjugationsklassen von $K^{n,n}$ zur Menge aller $(p_1, \dots, p_n) \in K[X]^n$, so dass alle p_i normiert sind, $p_{i-1} \mid p_i$ für $2 \leq i \leq n$ und

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}(p_i) = n.$$

1.11. **Weierstraß-Normalform.**

Lemma 1.35. *Seien $p_1, \dots, p_t \in K[X]$ normiert mit $\operatorname{ggT}(p_i, p_j) = 1$ für alle $i \neq j$. Setze $p := p_1 \cdots p_t$. Dann gilt*

$$B(p) \approx B(p_1, \dots, p_t).$$

Beweis. Sei $n = \operatorname{grad}(p)$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\operatorname{grad}(p_i) \geq 1$ für alle $1 \leq i \leq t$. Nach Lemma 1.31 gilt

$$\operatorname{SNF}(B(p)) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & p \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$d_k(B(p)) = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } 1 \leq k \leq n-1, \\ p & : \text{ falls } k = n. \end{cases}$$

Ferner gilt $d_n(B(p_1, \dots, p_t)) = \mathcal{X}_{B(p_1,\dots,p_t)} = p$. Für $1 \leq i \leq t$ sei

$$h_i := \prod_{\substack{1 \leq k \leq t \\ k \neq i}} p_k.$$

Man überlegt nun leicht, dass h_i ein $(n-1)$-Minor von $M_X(B(p_1, \dots, p_t))$ ist. Da die Polynome $p_1, \dots, p_t$ paarweise teilerfremd sind, gilt

$$\operatorname{ggT}(h_1, \dots, h_t) = 1.$$

Es folgt, dass $d_{n-1}(B(p_1, \dots, p_t)) = 1$. Damit gilt auch $d_k(B(p_1, \dots, p_t)) = 1$ für $1 \leq k \leq n-2$. Die Matrizen $B(p)$ und $B(p_1, \dots, p_t)$ haben also die gleichen Determinantenteiler und sind daher nach Satz 1.29 ähnlich. □

Satz 1.36 (Weierstraß-Normalform)**.** *Sei $A \in K^{n,n}$. Dann gibt es bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmte normierte Polynome $h_1, \dots, h_m \in K[X]$ mit $h_i = p_i^{m_i}$, p_i irreduzibel und normiert und $m_i \geq 1$ für alle i, so dass*

$$A \approx B(h_1, \dots, h_m).$$

Beweis. Existenz: Seien $g_1, \dots, g_t$ die Invariantenteiler von A mit $\operatorname{grad}(g_i) \geq 1$ für alle i. Wir können annehmen, dass $g_{i-1} \mid g_i$ für $2 \leq i \leq t$. Satz 1.33 impliziert dann

$$A \approx B(g_1, \dots, g_t) = \begin{pmatrix} B(g_1) & & \\ & \ddots & \\ & & B(g_t) \end{pmatrix} = \operatorname{FNF}(A).$$

Für jedes $1 \leq i \leq t$ sei

$$g_i = h_{i1} \cdots h_{is_i},$$

so dass die h_{ij} paarweise teilerfremd sind und dass jedes h_{ij} Potenz eines irreduziblen normierten Polynoms ist. Nun wenden wir Lemma 1.35 an und erhalten

$$B(g_i) \approx B(h_{i1}, \dots, h_{is_i}).$$

Hieraus folgt sofort

$$B(g_1, \dots, g_t) \approx B(h_{11}, \dots, h_{1s_1}, \dots, h_{t1}, \dots, h_{ts_t}).$$

Damit ist die Existenzaussage des Satzes bewiesen.

Eindeutigkeit: Seien $h_1, \dots, h_m \in K[X]$ normiert mit $h_i = q_i^{m_i}$, q_i irreduzibel und normiert und $m_i \geq 1$ für alle i, so dass

$$A \approx B(h_1, \dots, h_m).$$

Seien $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschieden, so dass $\{p_1, \dots, p_r\} = \{q_1, \dots, q_m\}$. Nach Umordnen der Blöcke (dies lässt die Ähnlichkeitsklasse gleich) gilt dann

$$A \approx B(h_1, \dots, h_m) \approx B(p_1^{m_{11}}, \dots, p_1^{m_{1n_1}}, p_2^{m_{21}}, \dots, p_2^{m_{2n_2}}, \dots, p_r^{m_{r1}}, \dots, p_r^{m_{rn_r}}),$$

wobei

$$m_{k1} \geq m_{k2} \geq \cdots \geq m_{kn_k} \geq 1$$

für $1 \leq k \leq r$.

Für $1 \leq k \leq n$ setze

$$f_{n-k+1} := p_1^{m_{1k}} p_2^{m_{2k}} \cdots p_r^{m_{rk}}$$

wobei $m_{ij} := 0$ für alle $j > n_i$. Wegen Lemma 1.35 folgt

$$B(f_{n-k+1}) \approx B(p_1^{m_{1k}}, \dots, p_r^{m_{rk}}).$$

Also ist

$$B(f_1, \dots, f_n) \approx B(p_1^{m_{11}}, \dots, p_1^{m_{1n_1}}, p_2^{m_{21}}, \dots, p_2^{m_{2n_2}}, \dots, p_r^{m_{r1}}, \dots, p_r^{m_{rn_r}}) \approx A.$$

Es gilt offenbar $f_{i-1} \mid f_i$ für $2 \leq i \leq n$. Aus Lemma 1.32 folgt nun

$$\mathrm{SNF}(B(f_1, \dots, f_n)) = \begin{pmatrix} f_1 & & \\ & \ddots & \\ & & f_n \end{pmatrix}$$

und $f_i = c_i(A)$ für $1 \leq i \leq n$. Mit anderen Worten, die Invariantenteiler $c_i(A)$ legen bereits die Polynome $p_1, \dots, p_r$, die Multiplizitäten m_{ij} und damit auch die Polynome $h_1, \dots, h_m$ fest. Dies beweist die Eindeutigkeitsaussage. □

Korollar 1.37. *Angenommen*

$$B(p_1^{m_1}, \dots, p_r^{m_r}) \approx B(q_1^{n_1}, \dots, q_s^{n_s}),$$

wobei die p_i und q_j irreduzible normierte Polynome in $K[X]$ sind und $m_i, n_j \geq 1$ für alle i, j. Dann gilt $r = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_r$ mit

$$p_i = q_{\sigma(i)} \quad \text{und} \quad m_i = n_{\sigma(i)}$$

für alle i.

Beweis. Dies folgt aus dem Beweis von Satz 1.36. □

Korollar 1.38. *Sei $A \in K^{n,n}$. Seien $p_1, \dots, p_r$ paarweise verschiedene irreduzible normierte Polynome in $K[X]$, so dass*

$$c_k(A) = p_1^{c_{1k}} \cdots p_r^{c_{rk}}$$

wobei $c_{ik} \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq k \leq n$. Dann gilt

$$\mathrm{WNF}(A) = B(p_1^{c_{11}}, \dots, p_1^{c_{1n}}, p_2^{c_{21}}, \dots, p_2^{c_{2n}}, \dots, p_r^{c_{r1}}, \dots, p_r^{c_{rn}}).$$

Die Primfaktorzerlegung der Elementarteiler $c_k(A)$ liefert also die Weierstraß-Normalform.

Die Matrix $B(h_1, \dots, h_m)$ in Satz 1.36 ist die **Weierstraß-Normalform** von A und wird mit WNF(A) bezeichnet. Die Polynome $h_1, \dots, h_m$ nennt man auch **Weierstraß-Elementarteiler** von A.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Für eine geordnete Basis B von V sei dann

$$\mathrm{WNF}(f) := \mathrm{WNF}(\mathbf{c}_{B,B}(f))$$

die **Weierstraß-Normalform** von f.

Mit den üblichen Argumenten sehen wir, dass dies wohldefiniert ist.

1.12. Beispiele (Smith-, Frobenius- und Weierstraß-Normalform).

1.12.1. Für $\lambda \in K$ sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Dann gilt

$$M_X(A) = \begin{pmatrix} X-\lambda & 0 \\ 0 & X-\lambda \end{pmatrix} = \mathrm{SNF}(A),$$

d.h. $c_1(A) = c_2(A) = X - \lambda$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1.12.2. Für $\lambda \in K$ sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Hier sind einige Umformungsschritte auf dem Weg von A nach SNF(A):

$$M_X(A) = \begin{pmatrix} X-\lambda & -1 \\ 0 & X-\lambda \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & X-\lambda \\ X-\lambda & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -(X-\lambda) \\ X-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -(X-\lambda) \\ 0 & (X-\lambda)^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (X-\lambda)^2 \end{pmatrix} = \mathrm{SNF}(A).$$

Es gilt also $c_1(A) = 1$ und $c_2(A) = (X-\lambda)^2$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

1.12.3. Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ in K sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{FNF}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1\lambda_2 \\ 1 & \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

1.12.4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Wir erhalten

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{FNF}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $K = \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

da X^2+1 irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$ ist. Für $K = \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

da $X^2+1 = (X+i)(X-i)$ in $\mathbb{C}[X]$ gilt.

1.12.5. Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$$

gilt

$$M_X(A) = \begin{pmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{3,3}$$

und

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3-7X^2+15X-9 \end{pmatrix},$$

wobei $X^3 - 7X^2 + 15X - 9 = (X-1)(X-3)^2$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hier sind einige Umformungsschritte auf dem Weg von A nach $\mathrm{SNF}(A)$:

$$\begin{pmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & X-2 & 1 \\ X-2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & X-2 & 1 \\ 0 & -X^2+4X-3 & -X+1 \\ 0 & 2X-6 & X-1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2X-6 & X-1 \\ 0 & -X^2+4X-3 & -X+1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 2X-6 \\ 0 & -X+1 & -X^2+4X-3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 2X-6 \\ 0 & 0 & -X^2+6X-9 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & -4 \\ 0 & 0 & -X^2+6X-9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & X-1 \\ 0 & -X^2+6X-9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & X-1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\left(X^3-7X^2+15X-9\right) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3-7X^2+15X-9 \end{pmatrix}.$$

1.12.6. Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3,3}.$$

gilt

$$M_X(A) = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2[X]^{3,3}$$

und

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2+X \end{pmatrix},$$

wobei $X^2 + X = (X+1)X$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier sind einige Umformungsschritte auf dem Weg von A nach $\mathrm{SNF}(A)$:

$$\begin{pmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X+1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & X+1 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & X+1 \\ 0 & 0 & X^2+X \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2+X \end{pmatrix}.$$

1.12.7. Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}.$$

gilt

$$M_X(A) = \begin{pmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{3,3}$$

und

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2-X-2 \end{pmatrix},$$

wobei $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.12.8. Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4,4}$$

gilt

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^3-4X^2+5X-2 \end{pmatrix},$$

wobei $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.12.9. Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$$

gilt

$$\mathrm{SNF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3 - 3X - 2 \end{pmatrix},$$

wobei $X^3 - 3X - 2 = (X-2)(X+1)^2$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{WNF}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.12.10. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{Q}^{2,2}$ gilt

$$\mathrm{SNF}(A) = \mathrm{SNF}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 - 2X + 1 \end{pmatrix},$$

wobei $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Wir erhalten

$$\mathrm{FNF}(A) = \mathrm{FNF}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{WNF}(A) = \mathrm{WNF}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.13. **Von der Weierstraß-Normalform zur Jordan-Normalform.** Die Weierstraß-Normalform liefert einen neue Herleitung der Jordan-Normalform und ihrer Eindeutigkeit (bis auf die Reihenfolge der Jordan-Blöcke). Dies folgt direkt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 1.39. *Für $\lambda \in K$ und $n \geq 1$ setze*

$$p := (X - \lambda)^n.$$

Dann gilt

$$B(p) \approx J(\lambda, n).$$

– – – – – Ende Vorlesung 5 (25.04.) – – – – –

Beweis. Wir wissen bereits, dass $d_1(B(p)) = \cdots = d_{n-1}(B(p)) = 1$ und $d_n(B(p)) = p$. Nach Definition gilt

$$M_X(J(\lambda, n)) = \begin{pmatrix} X - \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X - \lambda \end{pmatrix} \in K[X]^{n,n}.$$

Offenbar ist dann $d_n(J(\lambda, n)) = p$. Streichen wir die erste Spalte und die letzte Zeile von $M_X(J(\lambda, n))$, so erhalten wir eine Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ X-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X-\lambda & -1 \end{pmatrix} \in K[X]^{n-1,n-1}$$

deren Determinante gleich $(-1)^{n-1}$ ist. Es folgt, dass $d_{n-1}(J(\lambda, n)) = 1$ und damit auch $d_k(J(\lambda, n)) = 1$ für $1 \leq k \leq n-2$. Also haben $B(p)$ und $J(\lambda, n)$ die gleichen Determinantenteiler und sind dann nach Satz 1.29 ähnlich. $\square$

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine **Partition** von n ist ein Tupel $(p_1, \ldots, p_t)$ natürlicher Zahlen mit

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_t \geq 1 \quad \text{und} \quad p_1 + p_2 + \cdots + p_t = n.$$

Sei $\mathcal{P}_n$ die Menge der Partitionen von n.

Wir wollen die Invariantenteiler von Jordan-Normalformen bestimmen. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{X}_f$ über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Es gilt also

$$\mathcal{X}_f = (X-\lambda_1)^{n_1} \cdots (X-\lambda_r)^{n_r}$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von f sind.

Für jedes $1 \leq i \leq r$ sei

$$p(\lambda_i) := (m_{i1}, \ldots, m_{is_i}) \in \mathcal{P}_{n_i},$$

so dass

$$\mathrm{WNF}(f) = B((X-\lambda_1)^{m_{11}}, \ldots, (X-\lambda_1)^{m_{1s_1}}, \ldots, (X-\lambda_r)^{m_{r1}}, \ldots, (X-\lambda_r)^{m_{rs_r}}).$$

Die Partition $p(\lambda_i)$ ist die **Jordan-Partition** von f zum Eigenwert λ_i.

Wegen Lemma 1.39 gilt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{WNF}(f) &\approx \begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_{11}) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J(\lambda_1, m_{1s_1}) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J(\lambda_r, m_{r1}) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J(\lambda_r, m_{rs_r}) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{JNF}(f).\end{aligned}$$

Die obigen Überlegungen liefern eine neue Herleitung der Jordan-Normalform eines Endomorphismus. Im Gegensatz zu unserem ersten Beweis erhalten wir hier kein Verfahren für die Konstruktion einer Basiswechselmatrix.

Für $1 \leq k \leq n$ sei nun

$$p_{n-k+1} := (X - \lambda_1)^{m_{1k}}(X - \lambda_2)^{m_{2k}} \cdots (X - \lambda_r)^{m_{rk}}$$

wobei $m_{ij} := 0$ für alle $j > s_i$.

Es gilt offenbar $p_{i-1} \mid p_i$ für $2 \leq i \leq n$. Lemma 1.32 impliziert nun

$$\mathrm{SNF}(B(p_1, \dots, p_n)) = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p_n \end{pmatrix}.$$

Wegen Lemma 1.35 gilt

$$B(p_{n-k+1}) \approx B((X - \lambda_1)^{m_{1k}}, (X - \lambda_2)^{m_{2k}}, \cdots, (X - \lambda_r)^{m_{rk}}).$$

Insgesamt erhalten wir

$$B(p_1, \dots, p_n) \approx \mathrm{WNF}(f) \approx \mathrm{JNF}(f).$$

Insbesondere gilt

$$c_k(f) = p_k$$

für $1 \leq k \leq n$.

Beispiel: Für $\lambda \neq \mu$ in K sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & & & & & \\ & \lambda & & & & & & & & \\ & & \lambda & 1 & & & & & & \\ & & & \lambda & & & & & & \\ & & & & \lambda & & & & & \\ & & & & & \lambda & & & & \\ & & & & & & \lambda & & & \\ & & & & & & & \mu & 1 & \\ & & & & & & & & \mu & \\ & & & & & & & & & \mu \end{pmatrix} \in K^{10,10}.$$

Dann sind $p(\lambda) = (2, 2, 1, 1, 1)$ und $p(\mu) = (2, 1)$ die zugehörigen Jordan-Partitionen. Es gilt dann

$$c_i(A) = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } 1 \leq i \leq 5, \\ (X - \lambda) & : \text{ falls } i = 6, 7, 8, \\ (X - \lambda)^2(X - \mu) & : \text{ falls } i = 9, \\ (X - \lambda)^2(X - \mu)^2 & : \text{ falls } i = 10. \end{cases}$$

1.14. **Bemerkungen über Normalformen.** Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$.

- Die Jordan-Normalform $\mathrm{JNF}(f)$ ist nur definiert, falls $\mathcal{X}_f$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Nachteile: Wir müssen die Linearfaktoren von $\mathcal{X}_f$ kennen, um $\mathrm{JNF}(f)$ berechnen zu können, und $\mathrm{JNF}(f)$ ist nur bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig. Zudem ist $\mathrm{JNF}(f)$ *numerisch instabil*.

- Die Weierstraß-Normalform $\mathrm{WNF}(f)$ ist in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung von $\mathrm{JNF}(f)$, d.h. zerfällt $\mathcal{X}_f$ über K in Linearfaktoren, so gibt es einen direkten Beweis, dass $\mathrm{WNF}(f)$ und $\mathrm{JNF}(f)$ ähnlich sind. Vorteil gegenüber $\mathrm{JNF}(f)$: $\mathrm{WNF}(f)$ ist immer definiert. Nachteile (genau wie bei $\mathrm{JNF}(f)$): Wir müssen die Primfaktoren der Invariantenteiler $c_k(f)$ kennen, um $\mathrm{WNF}(f)$ berechnen zu können, und $\mathrm{WNF}(f)$ ist nur bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig.
- Die Smith-Normalform $\mathrm{SNF}(f)$ ist immer definiert, und wir können sie immer algorithmisch berechnen (Polynomdivision). Zudem ist sie *numerisch stabil*.
- Die Frobenius-Normalform $\mathrm{FNF}(f)$ erhält man direkt aus $\mathrm{SNF}(f)$, und umgekehrt.
- Die Weierstrass-Normalform $\mathrm{WNF}(f)$ kann man als Verfeinerung von $\mathrm{FNF}(f)$ ansehen, jedoch mit den oben beschriebenen Nachteilen.
- Alle genannten Normalformen (sofern sie denn definiert sind) sagen uns, ob zwei gegebene Endomorphismen ähnlich sind oder nicht.

1.15. **Konjugationsklassen.**

Für $A \in K^{n,n}$ sei
$$[A] := \{S^{-1}AS \mid S \in \mathrm{GL}_n(K)\}$$
die **Konjugationsklasse** oder auch **Ähnlichkeitsklasse** von A.

Lemma 1.40. *Für $A, B \in K^{n,n}$ sind äquivalent:*

(i) $[A] = [B]$*;*

(ii) $[A] \cap [B] \neq \varnothing$*;*

(iii) $A \approx B$.

Beweis. Routine. □

Korollar 1.41. *$K^{n,n}$ ist die disjunkte Vereinigung aller Konjugationsklassen.*

Korollar 1.42. $\mathrm{GL}_n(K)$ *ist die disjunkte Vereinigung aller Konjugationsklassen $[A]$ mit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.*

Beweis. Für $A \in K^{n,n}$ prüft man leicht, dass $[A] \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann wenn $[A] \cap \mathrm{GL}_n(K) \neq \varnothing$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Wie zuvor bezeichnet $\mathcal{P}_m$ die Menge der Partitionen von m.

Satz 1.43. *Die Konjugationsklassen in $K^{n,n}$ sind durch die disjunkte Vereinigung*

$$\bigcup_{(p_1,\ldots,p_t)\in\mathcal{P}_n} K^{p_1}$$

parametrisiert.

Beweis. Wir verwenden die Parametrisierung der Konjugationsklassen durch Smith-Normalformen. Für $A \in K^{n,n}$ betrachten wir

$$c(A) := (c_1(A), \ldots, c_n(A)).$$

Sei $t := \min\{1 \leq i \leq n \mid \mathrm{grad}(c_i(A)) \geq 1\}$. Dann ist

$$p(c(A)) := (\mathrm{grad}(c_n(A)), \ldots, \mathrm{grad}(c_t(A)))$$

eine Partition von n.

Für ein $p = (p_1, \ldots, p_t) \in \mathcal{P}_n$ ist die Menge aller $c(A)$ mit $p(c(A)) = p$ parametrisiert durch K^{p_1}. Hier verwenden wir folgende Eigenschaften von $c(A)$:

(i) Es gilt
$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}(c_i(A)) = n;$$
(ii) $c_i(A)$ ist normiert für alle i;
(iii) $c_{i-1}(A) \mid c_i(A)$ für $2 \leq i \leq n$.

Die Ausarbeiten der Einzelheiten ist eine Übungsaufgabe. □

Für $n \geq 1$ sei

$$\mathcal{X}\colon K^{n,n} \to K^n$$
$$A \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}),$$

wobei $\mathcal{X}_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$. Wir nennen $\mathcal{X}$ die **charakteristische Abbildung**.

Wir bilden also jede Matrix auf die Koeffizienten ihres charakteristischen Polynoms ab.

Für $a \in K^n$ sei

$$\mathcal{X}^{-1}(a) := \{A \in K^{n,n} \mid \mathcal{X}(A) = a\}$$

eine **Faser** von $\mathcal{X}$.

Einen ersten Eindruck von den schönen geometrischen Eigenschaften der Abbildung $\mathcal{X}$ und ihrer Fasern vermittelt Brieskorns Buch [B2].

Proposition 1.44. *Sei* $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in K^n$*, und sei* $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$*. Wir können* f *schreiben als*

$$f = f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_r^{n_r}$$

mit paarweise verschiedenen irreduziblen und normierten Polynomen $f_1, \dots, f_r \in K[X]$ *und* $n_1, \dots, n_r \geq 1$*. Dann besteht* $\chi^{-1}(a)$ *aus genau*

$$c_f := |\mathcal{P}_{n_1}| \cdot |\mathcal{P}_{n_2}| \cdots |\mathcal{P}_{n_r}|$$

Konjugationsklassen.

Beweis. Bis auf die Reihenfolge der Blöcke $B(p_i^{m_i})$ gibt es genau c_f Weierstraß-Normalformen

$$B(p_1^{m_1}, p_2^{m_2} \dots, p_s^{m_s}),$$

so dass $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s} = f$. (Hier verwenden wir die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von f.) □

Korollar 1.45. *Jede Faser* $\mathcal{X}^{-1}(a)$ *ist eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Konjugationsklassen.*

1.16. **Konjugationsklassen in $K^{2,2}$.** Wir diskutieren nun den Fall $n = 2$ etwas genauer.

1.16.1. Sei $A \in K^{2,2}$. Die möglichen Smith-Normalformen von $M_X(A)$ sind

$$\begin{pmatrix} X-a & 0 \\ 0 & X-a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X^2 + a_1X + a_0 \end{pmatrix},$$

wobei $a, a_0, a_1 \in K$. Die zugehörigen Frobenius-Normalformen sind dann

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Die Konjugationsklassen in $K^{2,2}$ sind also parametrisiert durch die disjunkte Vereinigung

$$K \cup (K \times K).$$

Ist K endlich, so gibt es also genau

$$|K| + |K|^2$$

Konjugationsklassen in $K^{2,2}$.

1.16.2. Die Konjugationsklassen $[A]$ in $K^{2,2}$, so dass $\mathcal{X}_A$ über K in Linearfaktoren zerfällt, entsprechen genau den verschiedenen Jordan-Normalformen in $K^{2,2}$, nämlich

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gilt offenbar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

ansonsten liegen die obigen Matrizen in paarweise verschiedenen Konjugationsklassen.

Die genannten Konjugationsklassen sind also parametrisiert durch die disjunkte Vereinigung

$$K \cup (K \times K)/\sim$$

wobei $\sim$ definiert ist durch $(\lambda_1, \lambda_2) \sim (\lambda_2, \lambda_1)$.

Ist K endlich, so gibt es also genau

$$2|K| + \frac{|K|^2 - |K|}{2} = \frac{|K|^2 + 3|K|}{2}$$

Konjugationsklassen $[A]$ in $K^{2,2}$, so dass $\mathcal{X}_A$ über K in Linearfaktoren zerfällt.

1.16.3. Ist K algebraisch abgeschlossen, so sind die Konjugationsklassen in $K^{2,2}$ also sowohl durch $K \cup (K \times K)$ also auch durch $K \cup (K \times K)/\sim$ parametrisiert. Da K in diesem Fall nicht endlich ist, so liegt an dieser Stelle kein Widerspruch vor.

1.17. Zyklische Vektorräume.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist V f-**zyklisch**, falls es ein $v \in V$ gibt, so dass

$$V = \mathrm{Lin}(\{f^k(v) \mid k \geq 0\}).$$

In diesem Fall nennen wir v einen f-**zyklischen Vektor**.

Satz 1.46. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Dann sind äquivalent:*

(i) *V ist f-zyklisch;*

(ii) *Es gibt eine geordnete Basis B von V, so dass*

$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = B(p)$$

für ein normiertes Polynom $p \in K[X]$. Zudem gilt dann $p = \mathcal{X}_f$.

Beweis. Für $V = 0$ ist der Satz offenbar richtig. Wir nehmen also $V \neq 0$ an.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei V f-zyklisch, und sei v ein f-zyklischer Vektor. Dann gilt $v \neq 0$. Es gibt dann ein $m \geq 0$, so dass $B := (v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v))$ linear unabhängig und $(v, f(v), \ldots, f^m(v))$ linear abhängig ist. Es gibt dann also $a_0, \ldots, a_{m-1} \in K$ mit

$$f^m(v) + a_{m-1} f^{m-1}(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0 v = 0.$$

Es folgt, dass $U := \mathrm{Lin}(B)$ f-invariant ist und dass $f^k(v) \in U$ für alle $k \geq 0$. Also gilt $U = V$, $m = n$ und B ist eine geordnete Basis von V. Es ist nun leicht zu sehen, dass

$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = B(p)$$

wobei

$$p := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0.$$

Nach [Skript LA 1, Satz 12.16] ist dann $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{B(p)} = p$. Angenommen $B(p) \approx B(q)$, wobei $q \in K[X]$ normiert ist. Wegen Lemma 1.31 gilt dann $p = q$.

(ii) $\implies$ (i): Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis B von V, so dass

$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = B(p)$$

für ein normiertes Polynom $p \in K[X]$. Dann ist $v := b_1$ offenbar ein f-zyklischer Vektor und damit V ein f-zyklischer Vektorraum. □

Korollar 1.47. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Angenommen V ist f-zyklisch. Dann gilt $\mu_f = \mathcal{X}_f$.*

Beweis. Für $V = 0$ ist die Aussage klar. Sei also $V \neq 0$. Sei v ein f-zyklischer Vektor. Dann ist $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ linear unabhängig. Also kann es kein Polynom $p \neq 0$ in $K[X]$ geben mit $\mathrm{grad}(p) \leq n-1$ und $p(f)(v) = 0$. Es folgt, dass $\mu_f = \mathcal{X}_f$. □

Korollar 1.48. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Dann gilt $\mu_f = c_n(f)$.*

Beweis. Sei B eine geordnete Basis von V, und setze $A := \mathbf{c}_{B,B}(f)$. Dann gilt

$$A \approx B(c_1(A), \ldots, c_n(A)),$$

siehe Satz 1.33. Zur Abkürzung sei $A' := B(c_1(A), \ldots, c_n(A))$ und $A'_i := B(c_i(A))$. Aus Korollar 1.47 folgt, dass $\mu_{A'_i} = \mathcal{X}_{A'_i} = c_i(A)$ für $1 \leq i \leq n$. Für jedes Polynom $p \in K[X]$ gilt

$$p(A') = \begin{pmatrix} p(A'_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p(A'_n) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $p(A') = 0$ genau dann wenn $p(A'_i) = 0$ für alle i genau dann wenn $\mu_{A'_i} \mid p$ für alle i genau dann wenn $c_i(A) \mid p$ für alle i.

Wegen $c_i(A) \mid c_{i+1}(A)$ für $1 \leq i \leq n-1$ ist dies äquivalent zu $c_n(A) \mid p$. Das normierte Polynom p minimalen Grades mit $c_n(A) \mid p$ ist natürlich $c_n(A)$. Es folgt, dass $\mu_f = c_n(A) = c_n(f)$. □

Korollar 1.49. *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Dann gilt*
$$\mu_f \mid \mathcal{X}_f \mid \mu_f^n.$$

Beweis. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\mu_f \mid \mathcal{X}_f$. Nach Korollar 1.48 gilt $\mu_f = c_n(f)$. Wir wissen auch, dass $\mathcal{X}_f = d_n(f) = c_1(f) \cdots c_n(f)$. Wegen $c_i(f) \mid c_{i+1}(f)$ für $1 \leq i \leq n-1$ folgt dann, dass $\mathcal{X}_f \mid \mu_f^n$. □

Korollar 1.50. *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Angenommen $\mu_f = \mathcal{X}_f$. Dann ist V f-zyklisch.*

Beweis. Wir wissen nach Korollar 1.48, dass $c_n(f) = \mu_f$. Kombiniert mit unserer Annahme $\mu_f = \mathcal{X}_f$ folgt
$$\operatorname{SNF}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_n(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{X}_f \end{pmatrix} = \operatorname{SNF}(B(\mathcal{X}_f)).$$
Es gibt also eine geordnete Basis B von V mit $\mathbf{c}_{B,B}(f) = B(\mathcal{X}_f)$. Also ist V f-zyklisch nach Satz 1.46. □

Zusammenfassend haben wir also gezeigt:

Satz 1.51. *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Dann sind äquivalent:*

(i) *V ist f-zyklisch;*

(ii) *Es gibt eine geordnete Basis B von V, so dass*
$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = B(p)$$
für ein normiertes Polynom $p \in K[X]$. Zudem gilt dann $p = \mathcal{X}_f$;

(iii) *$\mu_f = \mathcal{X}_f$.*

Wir nehmen zusätzlich an, dass $\mathcal{X}_f$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Dann sind die obigen Aussagen äquivalent zu:

(iv) *Zu jedem Eigenwert λ von f gibt es genau einen Jordan-Block in $\operatorname{JNF}(f)$.*

(Den Beweis von (iii) $\iff$ (iv) überlassen wir dem Leser als einfache Übungsaufgabe.)

Korollar 1.52. *Sei $\mathcal{X} \colon K^{n,n} \to K^n$ die charakteristische Abbildung. Für jedes $a \in K^n$ gibt es genau eine Konjugationsklasse $[A] \subseteq \mathcal{X}^{-1}(a)$ mit $\mu_A = \mathcal{X}_A$.*

1.18. **Übungsaufgaben.**

1.18.1. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit V endlich-dimensional und $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$. Wie sieht die Jordan-Normalform von f aus?

1.18.2. Bestimmen Sie alle $J(\lambda, n)$-invarianten Unterräume von K^n.

1.18.3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5,5}.$$

Finden Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$, so dass

$$S^{-1}AS = \mathrm{JNF}(A).$$

1.18.4. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform und das Minimalpolynom von

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$.

1.18.5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A, und finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist.

1.18.6. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6,6}.$$

(i) Bestimmen Sie die Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume von A.

(ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

(iii) Finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist.

Hinweis: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ sind die einzigen Eigenwerte von A.

1.18.7. Sei $K = \mathbb{R}$, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$.

(i) Sei $\chi_f = X^9 - X^8 + X^7 - X^6$. Welche Möglichkeiten gibt es dann für das Minimalpolynom μ_f?

(ii) Sei $\chi_f = X^8 - X^7$, und sei $\dim \mathrm{Kern}(f^1) = 3$, $\dim \mathrm{Kern}(f^2) = 5$, $\dim \mathrm{Kern}(f^3) = 6$ und $\dim \mathrm{Kern}(f^4) = \dim \mathrm{Kern}(f^5) = 7$. Wie sieht die Jordan-Normalform von f aus?

(iii) Sei $\chi_f = (X-1)(X-2)^4(X-3)^3$, und sei $\dim \mathrm{Kern}(f - 2\mathrm{id}_V) = 1$ und $\dim \mathrm{Kern}(f - 3\mathrm{id}_V) = 1$. Wie sieht die Jordan-Normalform von f aus?

(iv) Sei $n = 8$, und sei $\mu_f = (X-1)^3(X-2)^2(X-3)$. Dann gibt es 8 mögliche Jordan-Normalformen von f. Welche?

1.18.8. Sei $A \in K^{n,n}$. Zeigen Sie, dass A und A^T ähnlich sind.

1.18.9. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wann sind A und A^{-1} ähnlich?

1.18.10. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n \geq 1$.

(i) Sei $0 \neq v \in V$, und sei $p \in K[X]$ mit $p(f)(v) = 0$. Zeigen Sie: p und χ_f sind nicht teilerfremd.

(ii) Zeigen Sie: Ist χ_f irreduzibel, und ist $0 \neq v \in V$, so ist $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ eine Basis von V, und 0 und V sind die einzigen f-invarianten Unterräume von V.

1.18.11. Sei K ein endlicher Körper. Wieviele Konjugationsklassen gibt es in $K^{3,3}$ und $\mathrm{GL}_3(K)$?

1.18.12. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Angenommen f ist nilpotent, d.h. $f^N = 0$ für ein $N > 0$. Sei μ_f das Minimalpolynom, und sei χ_f das charakteristische Polynom von f.

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von f.

(ii) Wie sieht χ_f aus?

(iii) Ist f trigonalisierbar?

(iv) Konstruieren Sie ein nilpotentes $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mu_f \neq \chi_f$.

(v) Konstruieren Sie ein nilpotentes $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mu_f = \chi_f$.

1.18.13. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Zeigen Sie: Es gibt eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t,$$

so dass V_i f-invariant und f_{V_i}-zyklisch ist für alle $1 \leq i \leq t$, wobei $f_{V_i} \colon V_i \to V_i$ die Einschränkungsabbildung ist.

1.18.14. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) < \infty$, so dass $\mathcal{X}_f$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass es ein diagonalisierbares $f_d \in \mathrm{End}(V)$ und ein nilpotentes $f_n \in \mathrm{End}(V)$ gibt mit

$$f = f_n + f_d \quad \text{und} \quad f_n \circ f_d = f_d \circ f_n.$$

Zudem sind f_n und f_d eindeutig bestimmt.

Die Zerlegung $f = f_n + f_d$ nennt man **Jordan-Chevalley-Zerlegung** von f.

1.18.15.

$f \in \mathrm{GL}(V)$ ist **unipotent**, falls $f - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist.

Sei $f \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\dim(V) < \infty$, so dass $\mathcal{X}_f$ über K in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass es ein diagonalisierbares $f_d \in \mathrm{GL}(V)$ und ein unipotentes $f_u \in \mathrm{GL}(V)$ gibt mit

$$f = f_d \circ f_u = f_u \circ f_d.$$

Zudem sind f_d und f_u eindeutig bestimmt.

1.18.16. Für $1 \leq k \leq n$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \in K[X]^{n,n}$$

eine Diagonalmatrix. Bestimmen Sie die k-Minoren von A.

1.18.17. Seien $A \in K^{n,n}$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass die k-Minoren von $SM_X(A)$ K-Linearkombinationen der k-Minoren von $M_X(A)$ sind.

1.18.18. Finden Sie normierte Polynome $p_1, p_2 \in K[X]$ vom Grad mindestens 1, so dass $B(p_1, p_2)$ und $B(p_1 p_2)$ nicht ähnlich sind.

1.18.19.

(i) Sei $K = \mathbb{F}_3$. Wieviele Konjugationsklassen gibt es in $K^{3,3}$? Welche davon bestehen aus invertierbaren bzw. diagonalisierbaren Matrizen? Für welche Konjugationsklassen zerfällt das charakteristische Polynom über K in Linearfaktoren? Wie sieht jeweils die zugehörigen Smith-Normalform aus?

(ii) Die Fragen wie (i), aber für $K = \mathbb{F}_2$ und $K^{4,4}$.

1.18.20. Diskutieren Sie die Unterschiede, Vorteile und Nachteile der verschiedenen Normalformen von Endomorphismen.

2. Komplexe Zahlen

2.1. Komplexe Zahlen.

2.1.1. *Definition.*

Wir definieren nun den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen**. Als zugrunde liegende Menge nehmen wir
$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
Für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ sei
$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &:= (a+c, b+d),\\ (a,b)\cdot(c,d) &:= (ac-bd, ad+bc).\end{aligned}$$

Man prüft nun leicht, dass $\mathbb{C}$ zusammen mit den oben definierten Operationen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

Das Einselement 1 von $\mathbb{C}$ ist $(1,0)$, und das Nullelement 0 von $\mathbb{C}$ ist $(0,0)$.

Abkürzend schreibt man auch $i := (0,1)$ und $a+bi$ statt (a,b).

Es gilt dann
$$i^2 = -1 \quad \text{und} \quad a+bi = (a,0)+(b,0)i.$$

Für $z = a+bi$ seien $\mathrm{Re}(z) := a$ und $\mathrm{Im}(z) := b$ der **Realteil** bzw. der **Imaginärteil** von z.

Für $z = a+bi \in \mathbb{C}$ sei
$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}$$
der **Betrag** von z.

Stellt man sich z in der Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vor, so ist $|z|$ einfach die *Länge* von z.

2.1.2. *Komplexe Zahlen als relle Matrizen.* Ordnet man nun $(a,b) \in \mathbb{C}$ die Matrix
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$
zu, so entspricht die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ genau der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}^{2,2}$. Nämlich für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ erhalten wir
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$
und
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}.$$

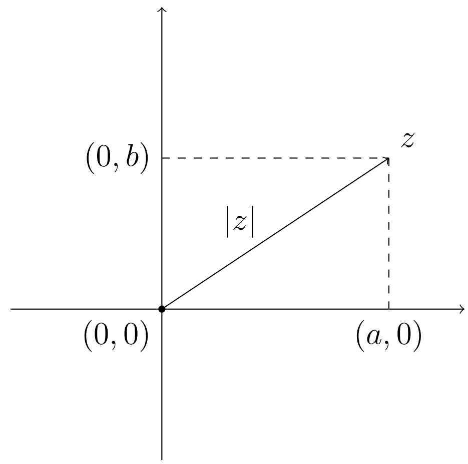

FIGURE 1. Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi$.

2.1.3. *Komplexe Zahlen als reller Vektorraum.*

Lemma 2.1. $\mathbb{C}$ *ist ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum mit Basis* $\{1, i\}$.

Beweis. Die Skalarmultiplikation auf $\mathbb{C}$ ist gegeben durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (a, z) &\mapsto (a, 0) \cdot z. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Addition des Körpers $\mathbb{C}$ erhalten wir damit eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{C}$. Man sieht nun leicht, dass $\{1, i\}$ linear unabhängig ist und $\mathbb{C}$ erzeugt. □

Wir fassen zuweilen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf vermöge der Einbettung $a \mapsto (a, 0)$.

Der Betrag von $a \in \mathbb{R}$ ist dann

$$|a| = \begin{cases} a & : \text{ falls } a \geq 0, \\ -a & : \text{ falls } a < 0. \end{cases}$$

2.1.4. *Komplexe Konjugation.*

Wir definieren die **komplexe Konjugation**

$$\bar{\cdot} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

durch $(a, b) \mapsto \overline{(a, b)} := (a, -b)$.

Wir fassen zuweilen $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf vermöge der Einbettung $a \mapsto (a, 0)$. In diesem Sinne können wir die komplexe Konjugation auf $a \in \mathbb{R}$ anwenden und erhalten dabei $\overline{a} = a$.

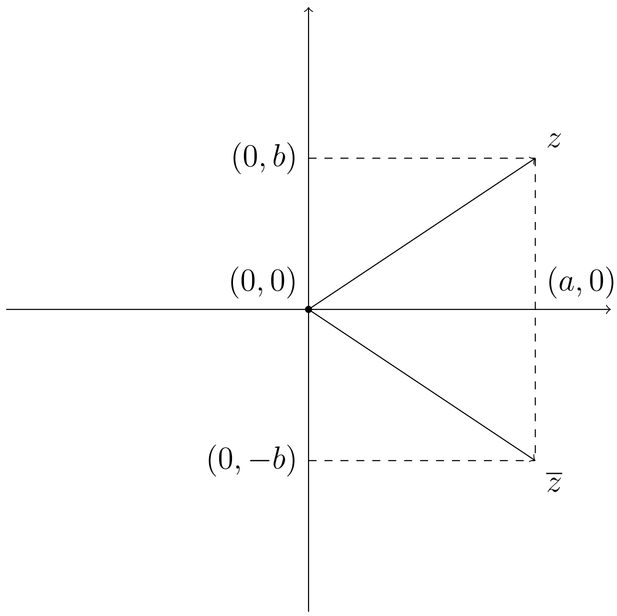

FIGURE 2. Komplexe Konjugation von $z = (a,b) = a + bi \in \mathbb{C}$.

2.1.5. *Rechenregeln.*

(i) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(ii) Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt $z + \overline{z} = 2a$ und $z - \overline{z} = 2bi$.

(iii) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| = |\overline{z}|$.

(iv) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(v) Für $z = a + bi$ gilt
$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

(vi) Für $z = (a,b) \in \mathbb{C}^\times$ gilt
$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a,-b).$$
In Matrixschreibweise
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

2.2. **Trigonometrische Funktionen.**

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir
$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Sei
$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
die Umkehrfunktion der bijektiven Einschränkungsabbildung
$$\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1],$$
und sei
$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$
die Umkehrfunktion der bijektiven Einschränkungsabbildung
$$\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1].$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \cos(-x) &= \cos(x), & \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \\ & & 1 &= \sin^2(x) + \cos^2(x). \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ setze
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann
$$\exp(ix) = \cos(x) + \sin(x)i.$$

Die Menge
$$\mathbb{S}^1 := \{\exp(ix) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\exp(ix) \mid x \in [0, 2\pi)\}$$
ist der *Einheitskreis* in $\mathbb{R}^2$, d.h. alles Elemente in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit *Abstand* 1 von $(0,0)$. (Zum Abstandsbegriff kommen wir später.)

Die Funktionen $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\exp(i-)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind **2π-periodisch**, d.h. für $f \in \{\sin, \cos, \exp(i-)\}$ gilt
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

2.3. **Polarkoordinaten.** Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}^\times$. Setze $r := |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es gibt dann ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit
$$z = r\exp(i\alpha),$$

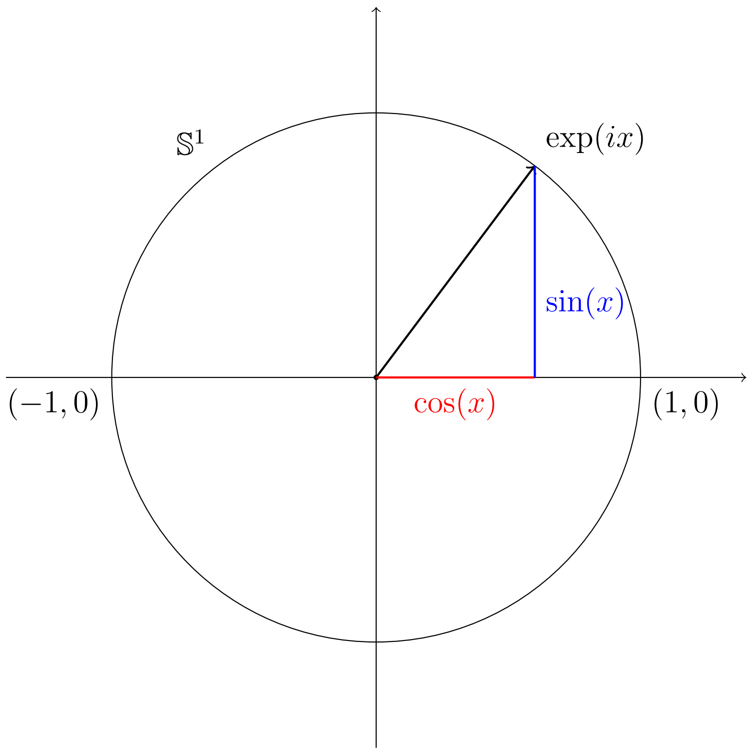

FIGURE 3. Die komplexe Zahl $\exp(ix) = \cos(x) + \sin(x)i$.

d.h. wir erhalten z indem wir den Vektor $(r, 0) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel α drehen. Es gilt dann

$$a = r\cos(\alpha), \qquad b = r\sin(\alpha).$$

Die Zuordnung $(a, b) \mapsto (r, \alpha)$ definiert eine Bijektion

$$\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi)$$

wobei $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$.

Das Paar (r, α) ist dann die **Polarkoordinate** von $z = a+bi$. Als Konvention hat $0 \in \mathbb{C}$ die Polarkoordinate $(0, 0)$.

Für $r, s > 0$ und $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ gelten die Regeln

$$r\exp(i\alpha)\cdot s\exp(i\beta) = rs\cdot \exp(i(\alpha+\beta)),$$
$$(r\exp(i\alpha))^{-1} = r^{-1}\exp(i(-\alpha)).$$

2.4. **Warum komplexe Zahlen?** Sei $K[X]$ der Polynomring in einer Variablen X mit Koeffizienten in K. Die Elemente in $K[X]$ sind also Ausdrücke der Form

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

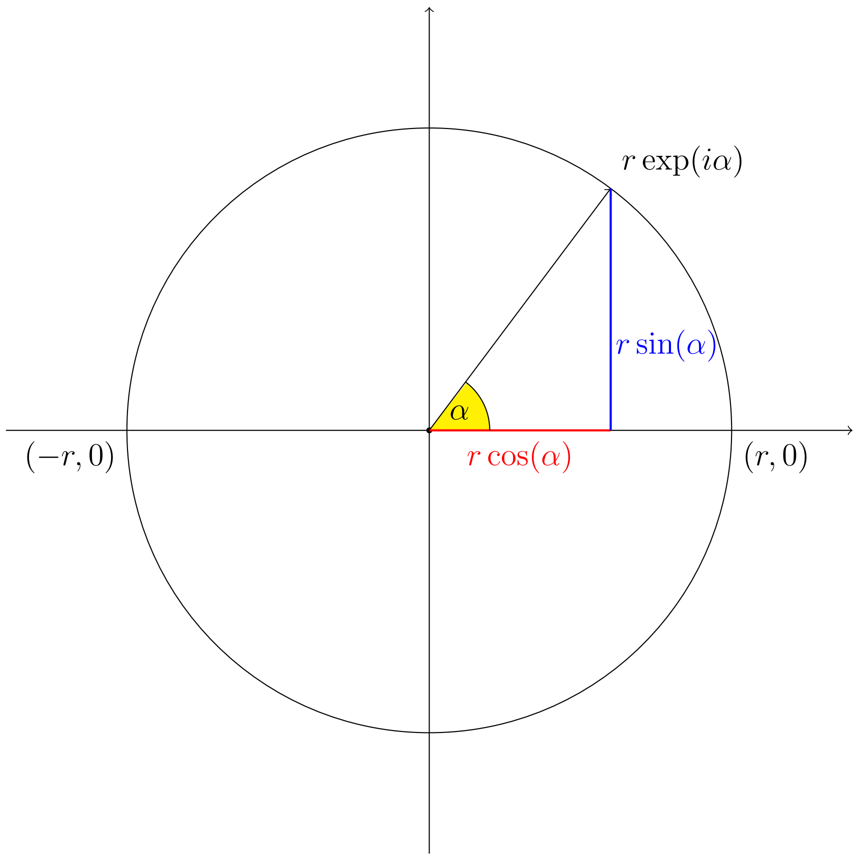

FIGURE 4. Die komplexe Zahl $r\exp(i\alpha)$.

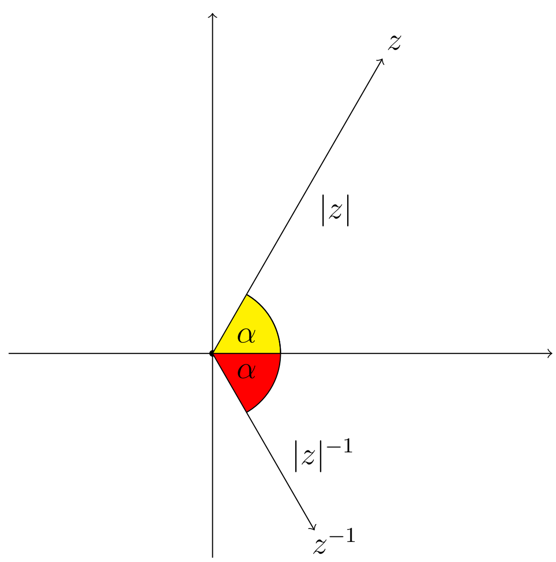

FIGURE 5. Das Inverse einer komplexen Zahl.

wobei $a_0, \ldots, a_n \in K$. (Später werden wir $K[X]$ genauer definieren und untersuchen.)

Satz 2.2 (Fundamentalsatz der Algebra (Gauß 1799 in seiner Doktorarbeit))**.** *Sei*

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

ein Polynom in $\mathbb{C}[X]$ *mit* $n \geq 1$ *und* $a_n \neq 0$*. Dann gibt es* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *mit*

$$f = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\cdots(X - \lambda_n).$$

Mit anderen Worten: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ in $\mathbb{C}[X]$ hat mindestens eine Nullstelle.

Den Beweis des Fundamentalsatzes werden wir in der Vorlesung Einführung in die Algebra besprechen.

2.5. Quaternionen.

Die **Quaternionen** $\mathbb{H}$ haben $\mathbb{R}^4$ als zugrunde liegende Menge. Die **Addition** ist komponentenweise definiert durch

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$

und die **Multiplikation** ist definiert als

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (&a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2,\\ &a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2,\\ &a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2,\\ &a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2).\end{aligned}$$

Damit wird $\mathbb{H}$ zu einem **Schiefkörper**, d.h. $\mathbb{H}$ ist ein Ring, so dass jedes Element in $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ invertierbar ist. Also ist $\mathbb{H}$ beinahe ein Körper. Es fehlt nur die Kommutativität der Multiplikation.

Das Einselement in $\mathbb{H}$ ist $1 := e_1$. Setze $i := e_2$, $j := e_3$ und $k := e_4$. Also lässt sich jedes $x \in \mathbb{H}$ eindeutig schreiben als

$$x = a + bi + cj + dk$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die **Konjugation** $\bar{\cdot}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ist definiert durch

$$\overline{a + bi + cj + dk} := a - bi - cj - dk.$$

Es gilt die multiplikative Regel

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Man kann die Multiplikation in $\mathbb{H}$ auch mit Hilfe nur dieser Regel definieren. (Achtung: Die *Variablen* i, j und k kommutieren nicht.) Die Quaternionen wurden 1843 von Hamilton entdeckt, daher die Bezeichnung $\mathbb{H}$.

Der Unterring
$$\{a+bi \in \mathbb{H} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
ist isomorph zum Körper $\mathbb{C}$.

Die Quaternionen kann man als Unterring von $\mathbb{C}^{2,2}$ beschreiben. Hierbei entspricht $(a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ der Matrix
$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}.$$
Dies sind also die Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} v & w \\ -\overline{w} & \overline{v} \end{pmatrix}$$
wobei $v, w \in \mathbb{C}$. Die Multiplikation von $\mathbb{H}$ entspricht dann der Matrixmultiplikation.

Man kann Lineare Algebra auch über Schiefkörpern betreiben. Vieles bleibt dann richtig. Einige Ergebnisse und Beweise müssen aber modifiziert werden.

3. **Euklidische und unitäre Vektorräume**

3.1. **Bilinearformen.** Sei V ein K-Vektorraum.

Eine **Bilinearform auf V** ist eine Abbildung
$$s\colon V \times V \to K$$
mit
(i) $s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w)$,
(ii) $s(av, w) = as(v, w)$,
(iii) $s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2)$,
(iv) $s(v, aw) = as(v, w)$

für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $a \in K$.

Mit anderen Worten, eine Abbildung $s\colon V \times V \to K$ ist bilinear genau dann wenn gilt: Für alle $v, w \in V$ sind die Abbildungen
$$\begin{aligned} s(v, -)\colon V &\to K \\ u &\mapsto s(v, u) \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} s(-, w)\colon V &\to K \\ u &\mapsto s(u, w) \end{aligned}$$
K-linear.

Eine Bilinearform s auf V ist **symmetrisch**, falls
$$s(v,w) = s(w,v)$$
für alle $v, w \in V$.

Beispiele:

(i) Für einen beliebigen Körper K ist
$$s\colon K^n \times K^n \to K, \quad (v,w) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$
eine symmetrische Bilinearform.

(ii) Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$. Dann ist
$$s_A\colon K^n \times K^n \to K, \quad (v,w) \mapsto v^T A w$$
eine Bilinearform. (Wir schreiben die Elemente in K^n als Spaltenvektoren, d.h. v^T ist eine $(1 \times n)$-Matrix, und w ist eine $(n \times 1)$-Matrix. Also ist $v^T A w$ eine (1×1)-Matrix. Wir identifizieren dann $K^{1,1}$ und K.)

Eine Matrix $A \in K^{n,n}$ ist **symmetrisch**, falls $A = A^T$.

Lemma 3.1. *Sei $A \in K^{n,n}$. Die Bilinearform s_A ist symmetrisch genau dann wenn A symmetrisch ist.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung: Man kann analog und allgemeiner auch Bilinearformen
$$s\colon V \times W \to K$$
definieren, wobei V und W K-Vektorräume sind. Für unsere Zwecke reicht aber die obige Definition.

3.2. **Euklidische Vektorräume.** Sei $s\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

Für $K = \mathbb{R}$ (oder einen Teilkörper $K \subseteq \mathbb{R}$) ist s **positiv definit**, falls
$$s(v,v) > 0$$
für alle $0 \neq v \in V$.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform s heißt **Skalarprodukt auf V**.

Man schreibt oft $\langle v, w\rangle$ statt $s(v,w)$.

Ein Paar (V, s) ist ein **euklidischer Vektorraum**, falls V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und s ein Skalarprodukt auf V ist.

Beispiele:

(i) Die Abbildung

$$s^n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

ist ein Skalarprodukt, welches wir das **Standardskalarprodukt auf** $\mathbb{R}^n$ nennen.

(ii) Ein Beispiel aus der Analysis: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$, und sei

$$s : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dies ist ein Skalarprodukt auf V. Die Dimension von V ist ∞.

Wir werden Skalarprodukte benutzen, um Länge, Abstand und Winkel von Vektoren zu definieren. Wir werden auch lineare Abbildungen $f : V \to V$ studieren, welche Längen, Abstände und Winkel erhalten.

Beispiel: Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

die Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn. Unter der Identifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt also

$$D_\alpha(r \exp(i\beta)) = r \exp(i(\alpha + \beta))$$

für alle $(r, \alpha) \in \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi)$. (Dass die obige Matrix eine solche Drehung beschreibt, ist eine einfache Übungsaufgabe.) Dann ist D_α ein Homomorphismus, welcher (bezüglich des Standardskalarprodukts s^2) Längen, Abstände und Winkel erhält. Eine genauere Erklärung folgt später.

3.3. **Sesquilinearformen und unitäre Vektorräume.** Sei V ein K-Vektorraum.

Sei $K = \mathbb{C}$. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} s\colon V \times V &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

ist eine **Sesquilinearform**, falls

(i) $s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w)$,

(ii) $s(av, w) = as(v, w)$,

(iii) $s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2)$,

(iv) $s(v, aw) = \overline{a}s(v, w)$

für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $a \in K$.

Das Wort *sesquilinear* bedeutet *anderthalbfachlinear*. Da *bilinear* auch nur *zweilinear* meint, macht diese Terminologie also einigermaßen Sinn.

Eine Sesquilinearform $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ ist **hermitesch**, falls

$$s(v, w) = \overline{s(w, v)}$$

für alle $v, w \in V$.

Eine hermitesche Sesquilinearform $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ ist **positiv definit**, falls

$$s(v, v) > 0$$

für alle $0 \neq v \in V$. (Beachte, dass $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$, da die Form nach Voraussetzung hermitesch ist.)

Eine positive definite hermitesche Sesquilinearform auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V nennt man auch **Skalarprodukt** auf V. In diesem Fall ist das Paar (V, s) ein **unitärer Vektorraum**.

Wie zuvor bei Bilinearformen, schreibt man bei Sesquilinearformen auch oft $\langle v, w \rangle$ statt $s(v, w)$.

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ erhalten $\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ indem wir auf jeden Eintrag von A die komplexe Konjugation anwenden.

Beispiele:

(i) Die Abbildung

$$s^n\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Wir nennen s^n das **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{C}^n$.

(ii) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dann ist

$$s_A \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$
$$(v, w) \mapsto v^T A \overline{w}$$

eine Sesquilinearform.

(iii) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}.$$

Es gilt offenbar $A = \overline{A}^T$. Dann ist $s_A \colon (v, w) \mapsto v^T A \overline{w}$ ein Skalarprodukt.

Lemma 3.2. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Die Sesquilinearform s_A ist hermitesch genau dann wenn $A = \overline{A}^T$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Problem 3.3. *Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $A = \overline{A}^T$. Wann ist die symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Sesquilinearform s_A positiv definit?*

Diese Frage wird im Abschnitt 3.4 beantwortet.

3.4. **Sylvester Kriterium für positive Definitheit.** Für $n \geq 1$ sei $[1, n] := \{1, \dots, n\}$.

Sei $A \in K^{n,n}$, und seien I und J Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ mit $k := |I| = |J| \geq 1$. Sei

$$A_{I,J} \in K^{k,k}$$

die Matrix, welche aus A durch das Streichen aller i-ten Zeilen und j-ten Spalten mit $i \in [1, n] \setminus I$ und $j \in [1, n] \setminus J$ hervorgeht.

In diesem Fall ist

$$d_{I,J}(A) := \det(A_{I,J}).$$

ein **k-Minor** von A.

Beispiel: Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

und $I = \{1, 3\}$ und $J = \{1, 4\}$. Dann ist

$$A_{I,J} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

und $d_{I,J}(A) = 14$.

Die folgende Rechenregel für Determinanten benötigen wir für den Beweis des nächsten Satzes.

Lemma 3.4. *Für $1 \leq s < n$ sei*
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$
wobei $A \in K^{s,s}$ invertierbar ist. Dann gilt
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Beweis. Es gilt
$$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$
Damit folgt die Behauptung aus der Kästchenformel **??**. □

Satz 3.5 (Sylvester Kriterium)**.** *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $A = \overline{A}^T$ sind äquivalent:*

(i) *Die symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Sesquilinearform*
$$s_A \colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$
ist positiv definit;

(ii) *Für alle $1 \leq s \leq n$ gilt $d_{I_s,I_s}(A) > 0$ wobei $I_s := [1, s]$.*

Beweis. Für $1 \leq s \leq n$ sei $A_s := A_{I_s,I_s}$. Dann ist A von der Form
$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \overline{v} \\ v^T & d \end{pmatrix}$$
wobei $v \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $d \in \mathbb{K}$. Falls A_{n-1} invertierbar ist, so gilt nach Lemma 3.4, dass
$$\det(A) = \det(A_{n-1})\det(d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v}).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei s_A positiv definit, und sei $1 \leq s \leq n$. Für
$$x \in K^s \qquad \text{sei} \qquad x' := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n.$$

Falls $x \neq 0$ so gilt
$$x^T A_s \overline{x} = x'^T A \overline{x'} > 0.$$

Also ist s_{A_s} positiv definit. Insbesondere ist A_s invertierbar. (Angenommen A_s ist nicht invertierbar. Dann gibt es ein $x \neq 0$ mit $A_s\overline{x} = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $x^T A_s \overline{x} > 0$.) Es folgt

$$\begin{aligned}(-v^T A_{n-1}^{-1}, 1) \begin{pmatrix} A_{n-1} & \overline{v} \\ v^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\overline{-v^T A_{n-1}^{-1}}\right)^T \\ 1 \end{pmatrix} &= (0, d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v}) \begin{pmatrix} \left(\overline{-v^T A_{n-1}^{-1}}\right)^T \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v} > 0.\end{aligned}$$

Für $s = 1$ gilt offenbar $\det(A_s) > 0$. Wir nehmen nun an, dass $\det(A_s) > 0$ für alle $1 \leq s \leq n-1$. Lemma 3.4 zusammen mit der Induktionsannahme $\det(A_{n-1}) > 0$ impliziert nun

$$\det(A) = \det(A_{n-1}) \det(d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v}) > 0.$$

(ii) $\implies$ (i): Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $n \geq 2$. Sei

$$x' = \begin{pmatrix} x \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

wobei $x \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $x_n \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x'^T A\overline{x'} &= (x^T A_{n-1} + x_n v^T, x^T\overline{v} + x_n d) \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \\ &= x^T A_{n-1}\overline{x} + x_n v^T \overline{x} + x^T \overline{v x_n} + d|x_n|^2. \end{aligned}$$

Sei nun $c := x_n \overline{A_{n-1}^{-1}} v \in \mathbb{K}^{n-1}$. Eine einfache Rechnung liefert

$$\begin{aligned}(x^T + c^T) A_{n-1} \overline{(x+c)} + |x_n|^2 (d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v}) &= x^T A_{n-1}\overline{x} + x_n v^T \overline{x} + x^T \overline{v x_n} + d|x_n|^2 \\ &= x'^T A \overline{x'}.\end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme ist $s_{A_{n-1}}$ positiv definit. Für $x + c \neq 0$ gilt also $(x^T + c^T)A_{n-1}\overline{(x+c)} > 0$. Wegen $\det(A) > 0$ und $\det(A_{n-1}) > 0$ folgt aus Lemma 3.4, dass $d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v} > 0$. Eine einfache Fallunterscheidung impliziert nun, dass $x'^T A\overline{x'} > 0$ falls $x' \neq 0$. Mit anderen Worten, s_A ist positiv definit. □

Beispiele:

(i) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

erfüllt $A = A^T$ und ist positiv definit. (Es gilt $\det(A_{I_1,I_1}) = 1$ und $\det(A_{I_2,I_2}) = 2$.)

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$

erfüllt $A = \overline{A}^T$ und ist positiv definit. (Es gilt $\det(A_{I_1,I_1}) = \det(A_{I_2,I_2}) = 1$.)

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

erfüllt $A = A^T$ und ist nicht positiv definit. (Es gilt $\det(A_{I_2,I_2}) = -3$.)

3.5. **Norm und Metrik.** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$$

so dass für alle $a \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$ gilt:

(N1) $\|av\| = |a|\,\|v\|$;

(N2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$;

(N3) $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v = 0$.

Die Ungleichung in (N2) heißt **Dreiecksungleichung**.

Normen werden für die Definition der Länge von Vektoren benutzt.

Lemma 3.6. *Für eine Norm $\|\cdot\|$ auf V gilt $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.*

Beweis. Für $v \in V$ gilt

$$0 = 0\|v\| = |0|\,\|v\| = \|0v\| = \|v - v\| \leq \|v\| + \|-v\| = \|v\| + \|v\| = 2\|v\|.$$

□

– – – – – Ende Vorlesung 6 (29.04.) – – – – –

Eine **Metrik** auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$d \colon M \times M \to \mathbb{R}$$

so dass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(M1) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

(M3) $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$.

Die Ungleichung in (M2) heißt ebenfalls **Dreiecksungleichung**.

Metriken werden für die Definition des Abstands zweier Vektoren benutzt.

Lemma 3.7. *Für eine Metrik d auf einer Menge M gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in M \times M$.*

Beweis. Für $(x, y) \in M \times M$ gilt
$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$
□

Lemma 3.8. *Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann definiert*
$$d(v, w) := \|v - w\|$$
eine Metrik auf V.

Beweis. (i): Für $v, w \in V$ gilt
$$d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \, \|w - v\| = d(w, v).$$

(ii): Für $u, v, w \in V$ gilt
$$d(u, w) = \|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w).$$

(iii): Für $u, v \in V$ gilt $d(u, v) = \|u - v\| = 0$ genau dann wenn $u - v = 0$ genau dann wenn $u = v$. □

Beispiel: Nicht jede Metrik ist durch eine Norm gegeben. Für $V = \mathbb{R}^n$ sei
$$d\colon V \times V \to \mathbb{R}$$
definiert durch
$$d(v, w) := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } v \neq w, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$
Wegen $d(v, w) \leq 1$ für alle (v, w), kann d nicht durch eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben sein. (Wegen $\|v\| > 0$ für alle $0 \neq v \in V$ und $\|av\| = |a| \, \|v\|$ für alle $a \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ ist die Funktion $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt.)

3.6. **Länge und Abstand.** Für den Rest des Abschnitts sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Sei $v \in V$. Die **Länge** von v ist definiert als
$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Für $v, w \in V$ ist der **Abstand** von v und w definiert durch
$$d(v, w) := \|v - w\| = \|w - v\|.$$

Beispiel: Bezüglich des Standardskalarprodukts s^2 auf $\mathbb{R}^2$ und
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
gilt $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Lemma 3.9 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Für alle $v, w \in V$ gilt*
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Beweis. Für $w = 0$ gilt
$$0 = \langle v, 0\rangle = \|v\| \cdot \|0\|$$
Sei $w \neq 0$. Es folgt, dass $\langle w, w\rangle > 0$. Für $a \in \mathbb{K}$ gilt dann
$$0 \leq \langle v - aw, v - aw\rangle = \langle v, v\rangle - a\langle w, v\rangle - \overline{a}\langle v, w\rangle + a\overline{a}\langle w, w\rangle.$$

Wir setzen
$$a := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$
ein und erhalten
$$0 \leq \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle} - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} + \frac{\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle}.$$
Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit $\langle w, w\rangle$ gilt dann
$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle\langle w, v\rangle &= \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle} \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2. \end{aligned}$$
(Für die letzte Gleichheit haben wir verwendet, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ gilt.) Also haben wir bewiesen, dass
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$
□

Lemma 3.10. *Für alle $a \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$ gilt:*
(i) $\|av\| = |a|\,\|v\|$;
(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$;
(iii) $\|v\| = 0$ *genau dann wenn* $v = 0$.

Insbesondere ist die Längenabbildung $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, und die Abstandsabbildung d ist eine Metrik auf V.

Beweis. (i): Für $a \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt
$$\|av\| = \sqrt{\langle av, av\rangle} = \sqrt{a\overline{a}\langle v, v\rangle} = |a|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |a|\,\|v\|.$$

(ii): Für $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v,w\rangle) \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

(Für die letzte Ungleichung haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwendet.) Also gilt

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

(iii): Da s positiv definit ist, gilt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = 0$$

genau dann wenn $v = 0$. □

Beispiel: Nicht jede Norm ist durch ein Skalarprodukt gegeben. Sei $V = \mathbb{R}^n$, und sei

$$\|\cdot\|_{\max} \colon V \to \mathbb{R}$$

definiert durch $\|(x_1, \ldots, x_n)^T\| := \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$. Dies ist eine Norm auf V. Für $x = e_1$ und $y = e_2$ gilt dann

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{\max} &= 1, & \|x-y\|_{\max} &= 1, \\ \|x\|_{\max} &= 1, & \|y\|_{\max} &= 1.\end{aligned}$$

Also gilt die Parallelogrammgleichung nicht bezüglich $\|\cdot\|_{\max}$, vgl. Abschnitt 3.8.2.

3.7. **Winkel.** Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum.

Für $v, w \in V$ folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

(Für $v = 0$ oder $w = 0$ behandeln wir den Ausdruck

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

als 0. Wir teilen hier nicht durch 0, sondern haben nur die Notation vereinfacht!)

Es gibt also genau ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Der **Winkel** zwischen v und w ist definiert als

$$\mathrm{Winkel}(v,w) := \alpha := \arccos\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\right) \in [0,\pi].$$

Lemma 3.11. *Es gilt*

$$\langle v,w\rangle = 0 \iff \cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Für $\langle v,w\rangle = 0$ gilt offenbar $\cos(\alpha) = 0$. Sein nun $\langle v,w\rangle \neq 0$. Es folgt $\|v\| > 0$ und $\|w\| > 0$. Also gilt $\cos(\alpha) \neq 0$. Dies beweist die erste Äquivalenz. Die zweite Äquivalenz ist eine der Eigenschaften von cos. □

Man kann auch Winkel für Vektoren in unitären Vektorräumen definieren. Die Definition ist dann aber weniger überzeugend als im euklidischen Fall. Wichtiger als der Begriff des Winkels ist in dieser Vorlesung der der Orthogonalität.

Sei nun (V,s) wieder euklidisch oder unitär. Für $v,w \in V$ schreiben wir

$$v \perp w$$

falls $\langle v,w\rangle = 0$, und wir sagen dann **v und w sind orthogonal**.

Es gilt offenbar $v \perp w$ genau dann wenn $w \perp v$.

Übersicht: Sei (V,s) euklidisch oder unitär, d.h.

$$\begin{aligned} s\colon V\times V &\to \mathbb{K} \\ (v,w) &\mapsto \langle v,w\rangle \end{aligned}$$

ist ein Skalarprodukt mit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd}
(V,s) \text{ euklidisch/unitär} \arrow[r, mapsto, squiggly] \arrow[d, mapsto, squiggly] & \begin{array}{c}\text{Orthogonalität}\\ v\perp w \iff \langle v,w\rangle = 0\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Länge}\\ \|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}\end{array} \arrow[r, mapsto, squiggly] \arrow[d, mapsto, squiggly] & \begin{array}{c}\text{Abstand}\\ d(v,w) := \|v-w\|\end{array} \arrow[d, mapsto, squiggly] \\
\text{Norm } \|\cdot\| \text{ auf } V \arrow[r, mapsto, squiggly] & \text{Metrik } d \text{ auf } V
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(V,s) \text{ euklidisch} \arrow[d, mapsto, squiggly] \\
\text{Winkel}(v,w) := \arccos\left(\dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\right)
\end{tikzcd}$$

3.8. **Klassische Sätze der Elementargeometrie.**

Warnung: Die roten Pfeile in den folgenden drei Bildern sind mit Vorsicht zu genießen. Sie entstehen durch paralleles Verschieben der Vektoren, welcher als Label der roten Pfeile dienen.

3.8.1. *Satz des Pythagoras.*

Satz 3.12. *Sei (V,s) euklidisch oder unitär. Für $v,w\in V$ gilt*

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2+\|w\|^2+\langle v,w\rangle+\langle w,v\rangle.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle \\ &= \|v\|^2+\|w\|^2+\langle v,w\rangle+\langle w,v\rangle. \end{aligned}$$

$\square$

Für $v\perp w$ ist der obige Satz die (moderne Version) des Satzes von Pythagoras.

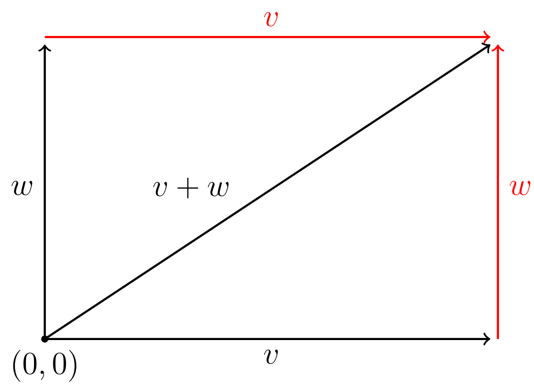

FIGURE 6. Satz des Pythagoras: $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ falls $v \perp w$.

3.8.2. *Parallelogrammgleichung.*

Satz 3.13. *Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Für $v, w \in V$ gilt*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle \\
&= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&\quad + \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\
&= 2(\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle) \\
&= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).
\end{aligned}$$

□

Der obige Satz entspricht der klassischen Parallelogrammgleichung, welche besagt, dass die Summe der Quadrate der Längen der vier Seiten eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden Diagonalen ist.

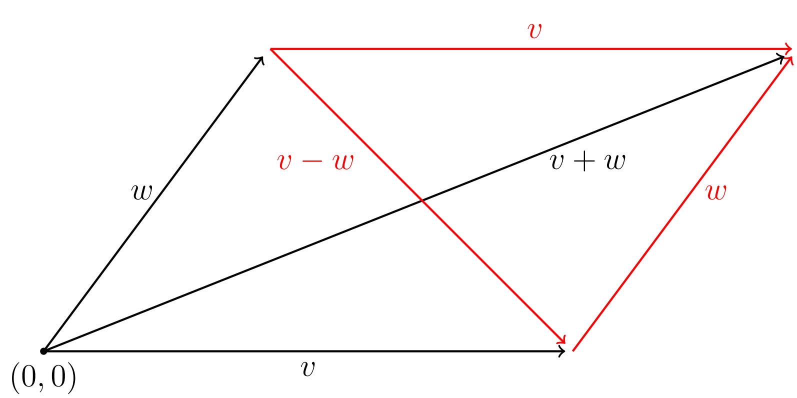

FIGURE 7. Parallelogrammgleichung: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

3.8.3. *Satz des Thales.*

Satz 3.14. *Sei (V, s) euklidisch. Seien $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\| > 0$. Dann gilt*
$$(v - w) \perp (-v - w).$$

Beweis. Wegen $\|v\| = \|w\|$ gilt $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle$. (Hier haben wir verwendet, dass s positiv definit ist.) Da s symmetrisch ist, gilt $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$. Wir erhalten
$$\langle v - w, -v - w\rangle = -\langle v, v\rangle - \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle = 0.$$
Mit anderen Worten, $(v - w) \perp (-v - w)$. □

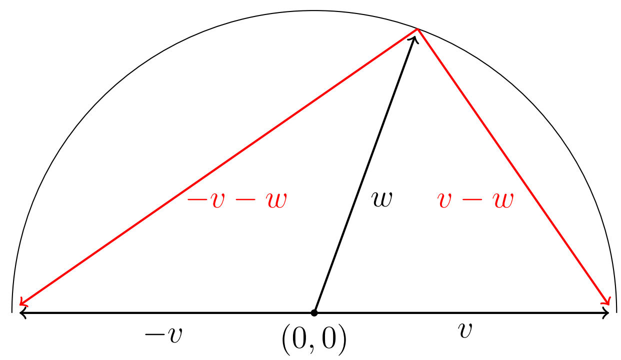

Figure 8. Satz des Thales: $(v - w) \perp (-v - w)$.

3.9. **Orthogonalräume und Orthogonalbasen.** Im gesamten Abschnitt sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine Teilmenge M von V ist **orthogonal**, falls $v \perp w$ für alle $v \neq w$ in M.

Die Menge M ist **orthonormal**, falls M orthogonal ist und $\langle v, v\rangle = 1$ für alle $v \in M$.

Beispiele:

(i) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^3, s^3)$. Dann ist $\{-e_1, e_2, e_3\}$ orthonormal, und $\{2e_1, e_2, e_3\}$ ist orthogonal aber nicht orthonormal.

(ii) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^2, s_A)$ wobei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(Dann ist s ein Skalarprodukt auf V.) Es gilt $\langle e_1, e_1\rangle = 2$, $\langle e_2, e_2\rangle = 1$ und $\langle e_1, e_2\rangle = -1$. Insbesondere ist $\{e_1, e_2\}$ nicht orthogonal. Andererseits ist
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

orthonormal.

Lemma 3.15. *Sei $v \neq 0$ in V. Setze*

$$w := \frac{1}{\|v\|} \cdot v.$$

Dann gilt $\|w\| = 1$.

Beweis. Es gilt

$$\|w\| = \|\frac{1}{\|v\|} \cdot v\| = |\frac{1}{\|v\|}| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1.$$

□

Lemma 3.16. *Für $v \in V$ gilt $\|v\| = 1$ genau dann wenn $\langle v, v\rangle = 1$.*

Beweis. Aus $\langle v, v\rangle = 1$ folgt natürlich sofort, dass $\|v\| = 1$. Sei umgekehrt $\|v\| = 1$. Wegen $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ gilt dann $\langle v, v\rangle \in \{\pm 1\}$. Da unser Skalarprodukt s positiv definit ist, erhalten wir $\langle v, v\rangle = 1$. □

– – – – – Ende Vorlesung 7 (02.05.) – – – – –

Lemma 3.17. *Sei M eine orthogonale Teilmenge von V. Dann ist $M \setminus \{0\}$ linear unabhängig.*

Beweis. Seien $v_1, \dots, v_m$ paarweise verschieden in $M \setminus \{0\}$. Angenommen

$$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$

mit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$. Für $1 \leq k \leq m$ gilt

$$0 = \langle 0, v_k\rangle = \langle a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m, v_k\rangle = a_k \langle v_k, v_k\rangle.$$

Wegen $\langle v_k, v_k\rangle > 0$ folgt dann, dass $a_k = 0$. Also ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear unabhängig.

□

Für $M \subseteq V$ sei

$$M^\perp := \{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}.$$

Dies ist ein Unterraum von V, der **Orthogonalraum von M in V**.

Für $v \in V$ schreiben wir auch $v^\perp$ statt $\{v\}^\perp$.

Beispiele:

(i) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^3, s^3)$. Dann gilt $e_2^\perp = \mathrm{Lin}(e_1, e_3)$ und $\{e_1, e_2\}^\perp = \mathrm{Lin}(e_3)$.

(ii) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^2, s^2)$. Dann gilt
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp} = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Lemma 3.18. *Sei* $\dim(V) = n$, *und* $0 \neq v \in V$. *Dann gilt* $\dim(v^{\perp}) = n - 1$.

Beweis. Es gilt $v^{\perp} = \operatorname{Kern}(f_v)$, wobei f_v definiert ist durch
$$\begin{aligned} f_v \colon V &\to \mathbb{K} \\ u &\mapsto \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$
Die Abbildung f_v ist $\mathbb{K}$-linear und $f_v \neq 0$, weil $v \neq 0$ und $\langle v, v \rangle > 0$. Folglich ist
$$n = \dim \operatorname{Bild}(f_v) + \dim \operatorname{Kern}(f_v) = 1 + \dim \operatorname{Kern}(f_v).$$
□

Sei W ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Unterräume U von W mit
$$\dim(U) = \dim(W) - 1$$
heißen **Hyperebenen**.

Lemma 3.19. *Sei* $M \subseteq V$. *Dann gilt* $M^{\perp} = (\operatorname{Lin}(M))^{\perp}$.

Beweis. Die Inklusion $(\operatorname{Lin}(M))^{\perp} \subseteq M^{\perp}$ gilt offensichtlich.

Umgekehrt seien $v_1, \ldots, v_m \in M$ und $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$. Für alle $w \in M^{\perp}$ gilt dann
$$\langle a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m, w \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle v_i, w \rangle = 0.$$
Also $M^{\perp} \subseteq (\operatorname{Lin}(M))^{\perp}$. □

Korollar 3.20. *Sei* U *ein Unterraum von* V, *und sei* B *eine Basis von* U. *Dann gilt*
$$U^{\perp} = B^{\perp} = \bigcap_{b \in B} b^{\perp}.$$

Beweis. Die erste Gleichheit folgt aus Lemma 3.19 und dem Umstand, dass B ein EZS von U ist. Die zweite Gleichheit folgt direkt aus den Definitionen. □

Für Unterräume U und W von V schreiben wir
$$V = U \perp W$$
falls $V = U \oplus W$ und $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

Satz 3.21. *Sei* $\dim(V) = n$, *und sei* U *ein Unterraum von* V *mit* $\dim(U) = k$. *Dann gilt*

$$V = U \perp U^\perp.$$

Insbesondere gilt $\dim(U^\perp) = n - k$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\dim(U^\perp) \geq n-k$. Sei $\{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis von U. Dann gilt

$$U^\perp = b_1^\perp \cap b_2^\perp \cap \cdots \cap b_k^\perp,$$

siehe Korollar 3.20. Wir wissen durch Lemma 3.18, dass $\dim(b_i^\perp) = n-1$ für alle i. Mit der Dimensionsformel für Unterräume und Induktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim(U^\perp) &= \dim(b_1^\perp) + \dim(b_2^\perp \cap \cdots \cap b_k^\perp) - \dim(b_1^\perp + (b_2^\perp \cap \cdots \cap b_k^\perp)) \\ &\geq (n-1) + (n-(k-1)) - n \\ &= n-k. \end{aligned}$$

Sei nun $v \in U \cap U^\perp$. Dann ist $\langle v, v \rangle = 0$, und somit $v = 0$. Also $U \cap U^\perp = 0$. Es gilt

$$\dim(U \oplus U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp) \geq k + (n-k) = n$$

Also $V = U \oplus U^\perp$. Offensichtlich gilt $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in U^\perp$. □

Korollar 3.22. *Seien* U *und* W *Unterräume von* V *mit*

$$V = U \perp W.$$

Dann gilt $W = U^\perp$.

Beweis. Es gilt offenbar $W \subseteq U^\perp$. Für $v \in U^\perp$ gilt $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Es folgt $u = v - w \in U^\perp$. Wir erhalten $u \in U \cap U^\perp = 0$ und daher $v = w \in W$. □

Für $\dim(V) < \infty$ und einen Unterraum U von V ist $U^\perp$ das **orthogonale Komplement von U in V**.

Ohne die Annahme $\dim(V) < \infty$ ist Satz 3.21 im Allgemeinen falsch.

Beispiel: Sei $V = \ell^2$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, so dass die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

konvergiert. Dann definiert

$$s(a,b) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i.$$

ein Skalarprodult $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Der Raum (V, s) ist ein unendlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Er ist sogar ein *Hilbert-Raum*. Sei nun U der Unterraum aller Folgen $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ in V, so dass nur endlich viele Einträge von a ungleich 0 sind. Es gilt dann $V \neq U$ und $U^\perp = 0$.

Seien W_1 und W_2 Unterräume eines K-Vektorraums W mit $W = W_1 \oplus W_2$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon W &\to W_1 \\ w_1 + w_2 &\mapsto w_1 \end{aligned}$$

mit $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ wohldefiniert und linear. Die Abbildung f heißt **Projektion von W auf W_1 mit Kern W_2**.

Sei nun wieder $\dim(V) = n$, und sei U ein Unterraum von V. Also gilt $V = U \perp U^\perp$. Dann sei

$$p_U\colon V \to U$$

die Projektion von V auf U mit Kern $U^\perp$. Wir nennen p_U die **orthogonale Projektion von V auf U**.

Lemma 3.23. *Sei* $\dim(V) = n$, *und sei* U *ein Unterraum von* V. *Für* $v, v' \in V$ *sind äquivalent:*

(i) $p_U(v) = v'$;

(ii) $v' \in U$ *und* $v - v' \in U^\perp$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $p_U(v) = v'$. Es gilt dann nach Definition, dass $v' \in U$. Wegen $V = U \oplus U^\perp$ gibt es ferner ein (eindeutig bestimmtes) $v'' \in U^\perp$ mit $v = v' + v''$. (Wir benutzen hier die Definition von p_U.) Folglich gilt $v - v' = v'' \in U^\perp$.

(ii) $\implies$ (i): Angenommen $v' \in U$ und $v - v' \in U^\perp$. Dann ist $v = v' + (v - v')$. Also gilt $p_U(v) = v'$. $\square$

Lemma 3.24. *Sei* $\dim(V) < \infty$, *und sei* U *ein Unterraum von* V, *und sei* $v \in V$. *Dann gilt:*

(i) $d(p_U(v), v) \leq d(u, v)$ *für alle* $u \in U$;

(ii) *Sei* $u \in U$ *mit* $d(p_U(v), v) = d(u, v)$. *Dann gilt* $u = p_U(v)$.

Beweis. (i): Wegen $V = U \perp U^\perp$ gibt es ein $v'' \in U^\perp$ mit $v = p_U(v) + v''$. Für alle $u \in U$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|(p_U(v) - u) + v''\|^2 \\ &= \|p_U(v) - u\|^2 + \|v''\|^2 \geq \|v''\|^2 \\ &= \|v - p_U(v)\|^2 \end{aligned}$$

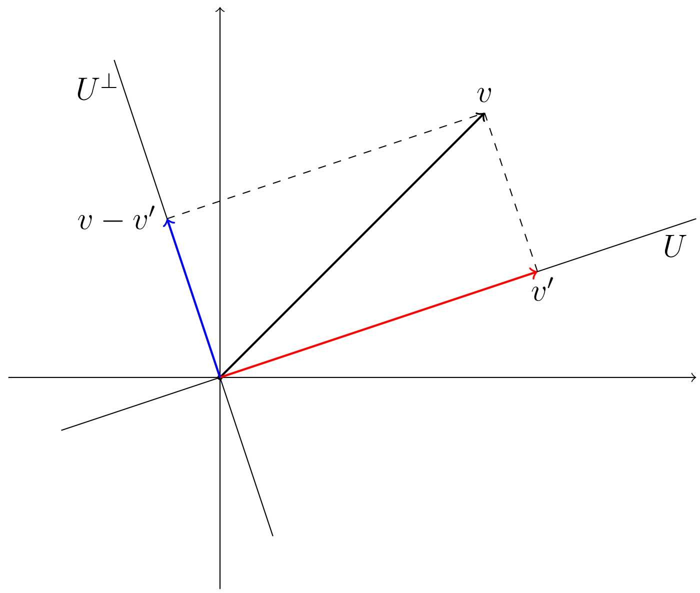

FIGURE 9. Orthogonale Projektion $p_U(v) = v'$ für $(V, s) = (\mathbb{R}^2, s^2)$.

(Für die zweite Gleichheit haben wir $\langle p_U(v) - u, v'' \rangle = 0$ verwendet. Dies gilt weil $p_U(v) - u \in U$ und $v'' \in U^\perp$.) Also gilt

$$d(u, v) = \|v - u\| \geq \|v - p_U(v)\| = d(p_U(v), v).$$

(ii): Sei $u \in U$ mit $d(u, v) = d(p_U(v), v)$. Dann gilt

$$\|v - u\|^2 = \|v - p_U(v)\|^2.$$

Nach der Ungleichung oben folgt dann $\|p_U(v) - u\|^2 = 0$ und damit $\|p_U(v) - u\| = 0$. Dies impliziert $u = p_U(v)$. $\square$

Mit anderen Worten, $p_U(v)$ ist der eindeutig bestimmte Vektor in U, welcher den minimalen Abstand zu v hat.

Eine Basis B von V ist eine **Orthogonalbasis** (abgekürzt **OGB**) von (V, s), falls B orthogonal ist, und B ist eine **Orthonormalbasis** (abgekürzt **ONB**) von (V, s), falls B orthonormal ist.

Für einen Unterraum U von V sei $s_U : U \times U \to \mathbb{K}$ die Einschränkung von s auf $U \times U$.

Dann ist (U, s_U) wiederum ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Lemma 3.25. *Sei* $\dim(V) < \infty$*, und sei* U *ein Unterraum von* V*. Sei* B *eine Orthonormalbasis von* (U, s_U)*. Für alle* $v \in V$ *gilt dann*

$$p_U(v) = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b.$$

Beweis. Setze

$$v' := \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b.$$

Dann ist $v' \in U$. Für jedes $c \in B$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle v - v', c \rangle &= \langle v, c \rangle - \langle v', c \rangle \\
&= \langle v, c \rangle - \langle \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b, c \rangle \\
&= \langle v, c \rangle - \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle \langle b, c \rangle \\
&= \langle v, c \rangle - \langle v, c \rangle \langle c, c \rangle \\
&= \langle v, c \rangle - \langle v, c \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist $v - v' \in U^\perp$, und wegen $v = v' + (v - v')$ folgt $p_U(v) = v'$, siehe Lemma 3.23. □

Satz 3.26 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)**.** *Sei* $\dim(V) = n$*, und sei* $(b_1, \ldots, b_n)$ *eine geordnete Basis von* V*. Für* $1 \leq i \leq n$ *sei*

$$V_i := \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_i).$$

Es gilt also

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V.$$

Dann gibt es eine geordnete Orthonormalbasis $(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_n)$ *von* (V, s) *mit* $\widehat{b}_i \in V_i$ *für* $1 \leq i \leq n$*. Insbesondere gilt*

$$V_i = \mathrm{Lin}(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_i).$$

Die $\widehat{b}_i$ *sind (bis auf einen Skalar vom Betrag* 1*) eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei

$$\widehat{b}_1 := \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1.$$

Nach Lemma 3.15 gilt $\|\widehat{b}_1\| = 1$.

Induktionsannahme: Es gibt eine geordnete Orthonormalbasis $(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_i)$ von (V_i, s_{V_i}) mit $\widehat{b}_j \in V_j$ für alle $1 \leq j \leq i$.

Sei $i < n$, und sei $p_{V_i} \colon V_{i+1} \to V_i$ die orthogonale Projektion von V_{i+1} auf V_i.

Definiere
$$\widetilde{b}_{i+1} := b_{i+1} - p_{V_i}(b_{i+1}).$$
Wegen $p_{V_i}(b_{i+1}) \in \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_i)$ und $b_{i+1} \notin \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_i)$ gilt $\widetilde{b}_{i+1} \neq 0$. Weiterhin gilt $\widetilde{b}_{i+1} \in V_i^{\perp}$, siehe Lemma 3.23. (Der Unterraum $V_i^{\perp}$ ist hier das orthogonale Komplement von V_i in V_{i+1}.) Es folgt $\langle \widetilde{b}_{i+1}, \widehat{b}_j \rangle = 0$ für alle $1 \leq j \leq i$. Setze
$$\widehat{b}_{i+1} := \frac{1}{\|\widetilde{b}_{i+1}\|} \cdot \widetilde{b}_{i+1}.$$
Die Vektoren $\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_{i+1}$ liegen in V_{i+1}, sind paarweise verschieden, haben Länge 1, und sind paarweise orthogonal. Also ist $(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_i, \widehat{b}_{i+1})$ eine geordnete Orthonormalbasis von $(V_{i+1}, s_{V_{i+1}})$.

Die Eindeutigkeit von $\widehat{b}_{i+1}$ (bis auf einen Skalar vom Betrag 1) folgt aus
$$\|\widehat{b}_{i+1}\| = 1, \quad \widehat{b}_{i+1} \in V_i^{\perp}, \quad \text{und} \quad \dim(V_i^{\perp}) = 1.$$
Denn in einem 1-dimensionalen Unterraum $U \subseteq V$ gibt es bis auf einen Skalar vom Betrag 1 nur einen Vektor u mit $\|u\| = 1$. (Sei $b \in U$ mit $\langle b, b \rangle = 1$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{K}$ mit $u = ab$. Es folgt $1 = \|u\| = \|ab\| = |a|\,\|b\| = |a|$.) $\square$

Bemerkung: Für den weiter oben definierten unendlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $V = \ell^2$ gibt es keine Orthogonal- oder Orthonormalbasis in unserem Sinne. Es gibt jedoch eine maximale orthonormale Teilmenge B von V, so dass $\mathrm{Lin}(B)$ *dicht* in V ist. Eine genauere Untersuchung von *Folgenräumen* wie ℓ^2 findet in der Funktionalanalysis statt.

– – – – – Ende Vorlesung 8 (06.05.) – – – – –

Beispiel: Wir betrachten $(\mathbb{R}^3, s^3)$. Seien
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Dann ist (b_1, b_2, b_3) eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$. Es gilt
$$\widehat{b}_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
und nach Lemma 3.25 gilt
$$\begin{aligned} \widetilde{b}_2 &= b_2 - p_{V_1}(b_2) = b_2 - \langle b_2, \widehat{b}_1 \rangle \widehat{b}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\widehat{b_2} := \frac{1}{\|\widetilde{b_2}\|}\widetilde{b_2} = \frac{3}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im dritten Schritt erhalten wir

$$\widetilde{b_3} = b_3 - p_{V_2}(b_3) = b_3 - \langle b_3, \widehat{b_1}\rangle \widehat{b_1} - \langle b_3, \widehat{b_2}\rangle \widehat{b_2}.$$

Es folgt

$$\widehat{b_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe: Betrachten Sie die geordnete Basis (b_2, b_3, b_1). Wie sieht die zugehörige Orthonormalbasis aus?

Bemerkung: Sei (V, s) wie oben euklidisch oder unitär. Ist V unendlich-dimensional, so können wir Satz 3.26 nicht anwenden. Ist nun aber U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V, so können wir mit Satz 3.26 zumindest eine Orthonormalbasis von (U, s_U) konstruieren.

3.10. **Orthogonale und unitäre Homomorphismen.** In diesem Abschnitt seien (V, s_V) und (W, s_W) beide euklidische oder beide unitäre $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Ein Homomorphismus $f\colon V \to W$ ist **metrisch**, falls

$$\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$$

für alle $v, v' \in V$.

Im euklidischen Fall nennt man einen solchen metrischen Homomorphismus f auch **orthogonal**, und im unitären Fall nennt man f auch **unitär**.

Lemma 3.27. *Seien $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to U$ metrische Homomorphismen. Dann ist $g \circ f\colon V \to U$ metrisch.*

Beweis. Für $v, v' \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle (g\circ f)(v), (g\circ f)(v')\rangle &= \langle g(f(v)), g(f(v'))\rangle \\ &= \langle f(v), f(v')\rangle \\ &= \langle v, v'\rangle.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit verwendet, dass g metrisch ist, und die dritte Gleichheit benutzt, dass f metrisch ist. □

Ein bijektiver metrischer Homomorphismus $f\colon V \to W$ ist eine **Isometrie**. Wir sagen dann auch, dass (V, s_V) und (W, s_W) **isometrisch** sind und schreiben

$$(V, s_V) \cong (W, s_W).$$

Lemma 3.28. *Sei $f\colon V \to W$ eine Isometrie. Dann ist $f^{-1}\colon W \to V$ eine Isometrie.*

Beweis. Für $w, w' \in W$ gilt

$$\begin{aligned}\langle w, w'\rangle &= \langle (f \circ f^{-1})(w), (f \circ f^{-1})(w')\rangle \\ &= \langle f(f^{-1}(w)), f(f^{-1}(w'))\rangle \\ &= \langle f^{-1}(w), f^{-1}(w')\rangle.\end{aligned}$$

Für die dritte Gleichheit haben wir verwendet, dass f metrisch ist. □

Sei

$$\mathrm{GL}(V, s_V) := \{f\colon V \to V \mid f \text{ ist eine Isometrie}\}$$

die **Isometriegruppe** von (V, s_V).

Lemma 3.29. $\mathrm{GL}(V, s_V)$ *ist eine Untergruppe von* $\mathrm{GL}(V)$.

Beweis. Dies folgt aus den Lemmata 3.27 und 3.28. □

Sei nun $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Wir definieren:

(i) f ist **längentreu**, falls
$$\|f(v)\| = \|v\|$$
für alle $v \in V$;

(ii) f ist **distanztreu**, falls
$$\|f(v) - f(v')\| = \|v - v'\|$$
für alle $v, v' \in V$.

(iii) f ist **orthogonaltreu**, falls für alle $v, v' \in V$ mit $v \perp v'$ auch $f(v) \perp f(v')$ gilt.

(iv) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist f **winkeltreu**, falls
$$\mathrm{Winkel}(f(v), f(v')) = \mathrm{Winkel}(v, v')$$
für alle $v, v' \in V$.

Satz 3.30. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist metrisch;*

(ii) *f ist längentreu;*

(iii) *f ist distanztreu.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei f metrisch. Für $v \in V$ gilt

$$\|f(v)\| = \sqrt{\langle f(v), f(v)\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\|.$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Definition von $\|\cdot\|$. Für die zweite Gleichung haben wir verwendet, dass f metrisch ist.

(ii) $\implies$ (iii): Sei f längentreu. Für $v, v' \in V$ gilt dann

$$d(f(v), f(v')) = \|f(v) - f(v')\| = \|f(v - v')\| = \|v - v'\| = d(v, v').$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der Linearität von f, und für die dritte Gleichheit verwenden wir, dass f längentreu ist.

(iii) $\implies$ (ii): Sei f distanztreu. Für $v \in V$ gilt dann

$$\|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| = d(f(v), f(0)) = d(v, 0) = \|v - 0\| = \|v\|.$$

(iii) $\implies$ (i): Sei also f distanztreu. Dann gilt für alle $v, v' \in V$

$$\begin{aligned}\langle f(v), f(v')\rangle + \langle f(v'), f(v)\rangle &= \langle f(v), f(v)\rangle + \langle f(v'), f(v')\rangle - \langle f(v) - f(v'), f(v) - f(v')\rangle \\ &= \|f(v)\|^2 + \|f(v')\|^2 - \|f(v) - f(v')\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \|v'\|^2 - \|v - v'\|^2 \\ &= \langle v, v\rangle + \langle v', v'\rangle - \langle v - v', v - v'\rangle \\ &= \langle v, v'\rangle + \langle v', v\rangle.\end{aligned}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt bereits $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$. Sei nun also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die obige Rechnung zeigt, dass die Realteile von $\langle f(v), f(v')\rangle$ und $\langle v, v'\rangle$ übereinstimmen. (Für $z \in \mathbb{K}$ gilt $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.) Nach der obigen Rechnung gilt für alle $v, v' \in V$

$$\begin{aligned}i(\langle f(v), f(v')\rangle - \langle f(v'), f(v)\rangle) &= \langle f(iv), f(v')\rangle + \langle f(v'), f(iv)\rangle \\ &= \langle iv, v'\rangle + \langle v', iv\rangle \\ &= i(\langle v, v'\rangle - \langle v', v\rangle).\end{aligned}$$

Es gilt also $\langle f(v), f(v')\rangle - \langle f(v'), f(v)\rangle = \langle v, v'\rangle - \langle v', v\rangle$. Also haben wir gezeigt, dass die Imaginärteile von $\langle f(v), f(v')\rangle$ und $\langle v, v'\rangle$ übereinstimmen. (Für $z \in \mathbb{K}$ gilt $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$.) Ingesamt gilt also $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$. Mit anderen Worten, f ist metrisch. □

Lemma 3.31. *Sei $f\colon V \to W$ ein distanztreuer Homomorphismus. Dann ist f injektiv.*

Beweis. Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Wir erhalten

$$0 = \|0\| = \|f(v) - f(v')\| = \|v - v'\|.$$

Also gilt $v = v'$. □

Satz 3.32. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus mit $f \neq 0$, und sei $\dim(V) = n$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt ein $a \in \mathbb{K}$, so dass af metrisch ist;*

(ii) *f ist orthogonaltreu.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $n \geq 1$.

(i) $\implies$ (ii): Angenommen af ist metrisch. Es folgt $a \neq 0$. Seien $v, v' \in V$ mit $v \perp v'$. Dann gilt

$$a\overline{a}\langle f(v), f(v')\rangle = \langle af(v), af(v')\rangle = \langle (af)(v), (af)(v')\rangle = \langle v, v'\rangle = 0.$$

Also ist f orthogonaltreu.

(ii) $\implies$ (i): Sei nun f orthogonaltreu. Nach dem Satz von Gram-Schmidt 3.26 gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V. Wegen

$$\langle b_i, b_j\rangle = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt dann

$$\langle b_i - b_j, -b_i - b_j\rangle = -\langle b_i, b_i\rangle - \langle b_i, b_j\rangle + \langle b_j, b_i\rangle + \langle b_j, b_j\rangle = -\langle b_i, b_i\rangle + \langle b_j, b_j\rangle = 0.$$

Da f orthogonaltreu ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(b_i - b_j), f(-b_i - b_j)\rangle \\ &= -\langle f(b_i), f(b_i)\rangle - \langle f(b_i), f(b_j)\rangle + \langle f(b_j), f(b_i)\rangle + \langle f(b_j), f(b_j)\rangle \\ &= -\langle f(b_i), f(b_i)\rangle + \langle f(b_j), f(b_j)\rangle. \end{aligned}$$

Also gilt $\langle f(b_i), f(b_i)\rangle = \langle f(b_j), f(b_j)\rangle$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Ist nun $\langle f(b_i), f(b_i)\rangle = 0$, so gilt $f = 0$. Widerspruch. Wir wissen also, dass $\langle f(b_i), f(b_i)\rangle \neq 0$ und setzen

$$a := \|f(b_i)\|^{-1}.$$

Dann gilt $a \in \mathbb{R}$. Für

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \text{und} \quad v' = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$$

in V gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle (af)(v), (af)(v') \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a\bar{a} a_i \overline{\mu_j} \langle f(b_i), f(b_j) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a\bar{a} a_i \overline{\mu_i} \langle f(b_i), f(b_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a\bar{a} a_i \overline{\mu_i} (a^{-1})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{\mu_i} \\
&= \langle v, v' \rangle.
\end{aligned}$$

Also ist af metrisch. □

Bemerkungen:

(i) Im Beweis von Satz 3.32 haben wir für die Richtung (ii) $\implies$ (i) verwendet, dass V endlich-dimensional ist. (Andernfalls gäbe es nicht notwendigerweise eine Orthonormalbasis.) Übungsaufgabe: Im euklidischen Fall benötigt man diese Annahme nicht. (Stattdessen kann dann die Symmetrie des Skalarprodukts genutzt werden.)

(ii) Übungsaufgabe: Für den euklidischen Fall ist Bedingung (i) in Satz 3.32 äquivalent zur Winkeltreue von f.

Lemma 3.33. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist jeder metrische Homomorphismus $f\colon V \to W$ winkeltreu.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{Winkel}(f(v), f(v')) &= \arccos\left(\frac{\langle f(v), f(v') \rangle}{\|f(v)\| \cdot \|f(v')\|} \right) \\
&= \arccos\left(\frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \cdot \|v'\|} \right) \\
&= \text{Winkel}(v, v').
\end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichheit folgen aus der Definition des Winkels. Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass f metrisch und längentreu ist. □

Die Umkehrung der obigen Aussage gilt i. Allg. nicht:

Beispiel: Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^2, s^2)$. Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

die Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn, und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) aD_α ist metrisch genau dann wenn $a = \pm 1$.

(ii) aD_α ist winkeltreu genau dann wenn $a \neq 0$.

(iii) aD_α ist orthogonaltreu.

Übersicht: Seien V und W beide euklidisch oder beide unitär, und sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $f \neq 0$. Zudem sei $\dim(V) < \infty$.

$$\begin{tikzcd}
f \text{ metrisch} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathbb{K}=\mathbb{R}"'] & f \text{ orthogonaltreu} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\mathbb{K}=\mathbb{R}"] & af \text{ metrisch für ein } a \in \mathbb{K} \arrow[d, Rightarrow] \\
f \text{ distanztreu} \arrow[d, Leftrightarrow] & f \text{ winkeltreu} & f \text{ injektiv} \\
f \text{ längentreu} & &
\end{tikzcd}$$

3.11. **Orthogonale und unitäre Gruppen.**

Sei (V, s) euklidisch. Dann ist

$$\mathrm{O}(V, s) := \mathrm{GL}(V, s)$$

die **orthogonale Gruppe von (V, s)**.

Sei (V, s) unitär. Dann ist

$$\mathrm{U}(V, s) := \mathrm{GL}(V, s)$$

die **unitäre Gruppe von (V, s)**.

Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Falls $\dim(V) < \infty$, so gilt

$$\mathrm{GL}(V, s) = \{f \colon V \to V \mid f \text{ ist metrisch}\}.$$

Dies folgt aus Satz 3.30, Lemma 3.31 und der schon bewiesenen Aussage, dass Monomorphismen zwischen gleichdimensionalen, endlich-dimensionalen Vektorräumen Isomorphismen sind.

Definiere

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, s^n) \quad \text{und} \quad \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) := \mathrm{U}(\mathbb{C}^n, s^n).$$

Satz 3.34. *Es gilt*

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\},$$

$$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}.$$

Beweis. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und $A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;

(ii) Bezüglich s^n gilt $\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{K}^n$;

(iii) Bezüglich s^n gilt $\langle A(e_i), A(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ für alle $1 \leq i, j \leq n$;

(iv) Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$(a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \cdot \begin{pmatrix} \overline{a_{1j}} \\ \vdots \\ \overline{a_{nj}} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst;} \end{cases}$$

(v) $A^{-1} = \overline{A}^T$.

Für (ii) $\iff$ (iii) verwenden wir, dass s^n eine Bilinearform bzw. eine Sesquilinearform ist. Die Äquivalenzen (i) $\iff$ (ii) und (iii) $\iff$ (iv) folgen direkt aus den Definitionen. Nach der Definition des Matrixprodukts ist Bedingung (iv) äquivalent zur Gleichung $A^T\overline{A} = E_n$. Dies ist offenbar äquivalent zu $\overline{A}^T A = E_n$ und damit zu $A^{-1} = \overline{A}^T$. Also gilt (iv) $\iff$ (v). $\square$

– – – – – Ende Vorlesung 9 (09.05.) – – – – –

Korollar 3.35. *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n, s^n)$.*

(ii) *Die Spalten von A bilden eine geordnete Orthonormalbasis von $(\mathbb{K}^n, s^n)$.*

(iii) *Die Zeilen von A bilden eine geordnete Orthonormalbasis von $(\mathbb{K}^n, s^n)$.*

Beweis. In (i), (ii) und (iii) ist die Matrix A invertierbar. (Die Spalten bzw. Zeilen von A bilden eine Basis von $\mathbb{K}^n$ genau dann wenn A invertierbar ist.)

(i) $\iff$ (ii): Nach Satz 3.34 gilt (i) genau dann wenn $A^{-1} = \overline{A}^T$ genau dann wenn $A^T\overline{A} = E_n$.

Sei nun $C = (c_{ij}) = A^T\overline{A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (i\text{-te Zeile von } A^T) \cdot (j\text{-te Spalte von } \overline{A}) \\ &= (i\text{-te Spalte von } A)^T \cdot (j\text{-te Spalte von } \overline{A}) \\ &= \langle A(e_i), A(e_j)\rangle. \end{aligned}$$

Also gilt $C = E_n$ genau dann wenn die Spalten von A eine geordnete Orthonormalbasis von $(\mathbb{K}^n, s^n)$ bilden.

(i) $\iff$ (iii): Es gilt $A^T\overline{A} = E_n$ genau dann wenn $\overline{A}A^T = E_n$ genau dann wenn $A\overline{A}^T = E_n$. Nun verfährt man ähnlich zum Beweis von (i) $\iff$ (ii). $\square$

3.12. **Beispiele:** $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ **und** $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$.

3.12.1. Es gilt

$$\mathrm{O}_1(\mathbb{R}) = \{(-1), (1)\}.$$

Dies folgt direkt aus der Definition.

3.12.2. Wir wissen, dass

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ genau dann wenn

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1, \\ c^2 + d^2 &= 1, \\ ac + bd &= 0. \end{aligned}$$

Sei zuerst $a = 0$. Dann folgt $b^2 = 1$ und damit $b \in \{-1, 1\}$. Wegen $ac+bd = 0$ gilt dann $d = 0$, und $c^2 + d^2 = 1$ impliziert nun $c \in \{-1, 1\}$. Damit gilt also $a = d = 0$ und $c = b$ oder $c = -b$.

Nun betrachten wir den Fall $a \neq 0$. Es gilt dann

$$c = -\frac{bd}{a},$$

und damit

$$c^2 + d^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) d^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) d^2 = \frac{d^2}{a^2} = 1.$$

Hieraus folgt $d = a$ oder $d = -a$. Wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$ gilt dann $c = b$ oder $c = -b$. Für den Fall $d = a$ gilt $a(c + b) = 0$, d.h. $c = -b$. Aus $d = -a$ folgt $a(c - b) = 0$, d.h. $c = b$.

Also ist

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos(\alpha)$ und $b = \sin(\alpha)$. Mit

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{D_\alpha,\ S_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Erinnerung:

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Formeln

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Diese Regeln liefern die folgende Beschreibung der Abbildungen D_α und S_α.

Für

$$v = \begin{pmatrix} r\cos(\beta) \\ r\sin(\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt

$$D_\alpha(v) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\beta) - r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ r\sin(\alpha)\cos(\beta) + r\cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Also beschreibt D_α die Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn.

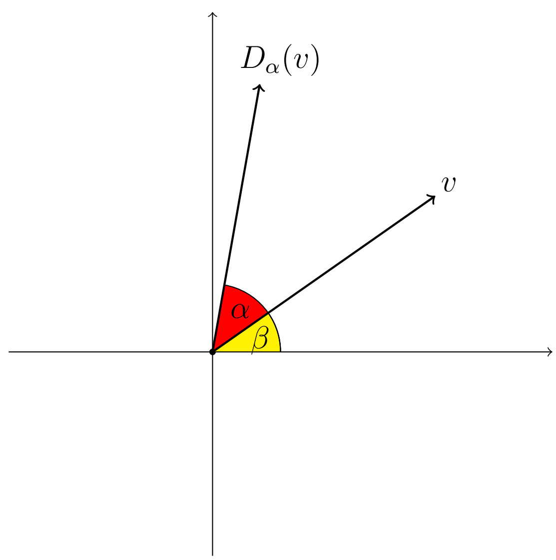

FIGURE 10. Drehung $D_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Für

$$v = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha/2+\beta) \\ r\sin(\alpha/2+\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt

$$S_\alpha(v) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\alpha/2+\beta) + r\sin(\alpha)\sin(\alpha/2+\beta) \\ r\sin(\alpha)\cos(\alpha/2+\beta) - r\cos(\alpha)\sin(\alpha/2+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha/2-\beta) \\ r\sin(\alpha/2-\beta) \end{pmatrix}.$$

(Wir haben die obigen Formeln für $x = \alpha$ und $y = -\alpha/2 - \beta$ verwendet.)

Also beschreibt S_α die Spiegelung an der Geraden mit Winkel $\alpha/2$ zur x-Achse.

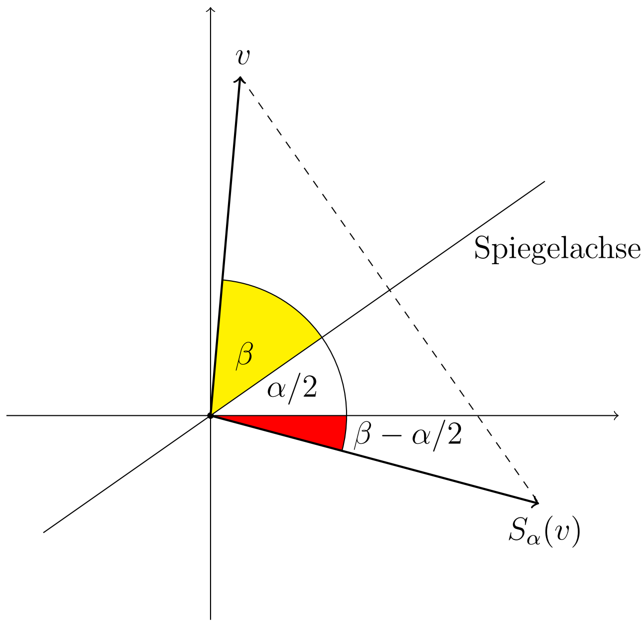

FIGURE 11. Spiegelung $S_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Sei

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \{D_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Dies ist eine Untergruppe von $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, welche man **spezielle orthogonale Gruppe** oder auch **Drehgruppe** nennt.

3.12.3. Nach Definition gilt

$$\mathrm{U}_1(\mathbb{C}) = \{(z) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \mid z^{-1} = \overline{z}\}.$$

Man prüft nun leicht, dass

$$\mathrm{U}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Deswegen nennt man $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ auch **Kreisgruppe**.

Die Gruppe $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ ist isomorph zur Drehgruppe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

3.13. **Klassifikation euklidischer und unitärer Vektorräume.** Ziel des Abschnitts ist die Klassifikation euklidischer und unitärer Vektorräume bis auf Isometrie.

Proposition 3.36. *Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei B eine geordnete Basis von V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *B ist eine Orthonormalbasis von (V, s);*

(ii) *Der Isomorphismus*
$$\mathbf{c}_B \colon V \to \mathbb{K}^n$$
ist eine Isometrie. (Hier fassen wir $\mathbb{K}^n$ als euklidischen bzw. unitären Vektorraum auf, indem wir das Standardskalarprodukt s^n verwenden.)

Beweis. Im Folgenden sei $B = (b_1, \dots, b_n)$. Nach Definition gilt $\mathbf{c}_B(b_i) = e_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Insbesondere ist $\mathbf{c}_B$ ein Isomorphismus. Es gilt
$$\langle \mathbf{c}_B(b_i), \mathbf{c}_B(b_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

(i) $\implies$ (ii): Sei B eine Orthonormalbasis von (V, s). Dann gilt
$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$
Also ist $\mathbf{c}_B$ eine Isometrie, wegen $\langle \mathbf{c}_B(b_i), \mathbf{c}_B(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle$ für alle i, j.

(ii) $\implies$ (i): Sei umgekehrt $\mathbf{c}_B$ eine Isometrie, also
$$\langle \mathbf{c}_B(b_i), \mathbf{c}_B(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle$$
für alle i, j. Dann folgt $\langle e_i, e_j \rangle = \langle b_i, b_j \rangle$ für alle i, j. Also ist B orthonormal. □

Korollar 3.37. *Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann gilt*
$$(V, s) \cong (\mathbb{K}^n, s^n).$$

Beweis. Nach Gram-Schmidt gibt es eine Orthonormalbasis von (V, s). Nun folgt die Aussage aus Proposition 3.36. □

Satz 3.38. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, welche beide euklidisch oder beide unitär sind. Dann sind äquivalent:*

(i) *$(V, s_V) \cong (W, s_W)$;*

(ii) *$\dim(V) = \dim(W)$.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Jede Isometrie $f \colon V \to W$ ist ein Isomorphismus. Es folgt, dass $\dim(V) = \dim(W)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Angenommen $\dim(V) = \dim(W) = n$. Wähle Orthonormalbasen B und C von (V, s_V) bzw. (W, s_W). (Diese existieren nach Gram-Schmidt.) Proposition 3.36 liefert Isometrien

$$V \xrightarrow{\mathbf{c}_B} \mathbb{K}^n \xleftarrow{\mathbf{c}_C} W.$$

Dann ist $\mathbf{c}_C^{-1} \circ \mathbf{c}_B \colon V \to W$ ebenfalls eine Isometrie. $\square$

3.14. **Klassifikation von Isometriegruppen.** Ziel des Abschnitts ist die Klassifikation orthogonaler und unitärer Gruppen bis auf Isomorphie.

Lemma 3.39. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) $\mathbb{K}$-Vektorräume, welche beide euklidisch oder beide unitär sind, und sei $\dim(V) = \dim(W) = n$. Seien B und C geordnete Orthonormalbasen von (V, s_V) bzw. (W, s_W). Für $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ sei $A := \mathbf{c}_{B,C}(f) \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f \colon V \to W$ ist eine Isometrie;*

(ii) *$A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n, s^n)$.*

Beweis. Wir wissen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wegen Proposition 3.36 sind $\mathbf{c}_B$ und $\mathbf{c}_C$ Isometrien. Wir wissen auch, dass Kompositionen von Isometrien wieder Isometrien sind, siehe Lemma 3.28. Wegen

$$f = \mathbf{c}_C^{-1} \circ A \circ \mathbf{c}_B \quad \text{und} \quad A = \mathbf{c}_C \circ f \circ \mathbf{c}_B^{-1}$$

ist also f eine Isometrie genau dann wenn A eine Isometrie ist. $\square$

Satz 3.40. *Sei (V, s) euklidisch oder unitär mit $\dim(V) = n$, und sei B eine geordnete Orthonormalbasis von (V, s). Die Einschränkung des Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) &\to \mathbb{K}^{n,n} \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f) \end{aligned}$$

induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(V, s) &\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f) \end{aligned} \qquad \textit{bzw.} \qquad \begin{aligned} \mathrm{U}(V, s) &\to \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f). \end{aligned}$$

Beweis. Wir wissen, dass

$$\mathbf{c}_{B,B} \colon \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathbb{K}^{n,n}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen ist, und dass zusätzlich gilt

$$\mathbf{c}_{B,B}(f \circ g) = \mathbf{c}_{B,B}(f)\mathbf{c}_{B,B}(g)$$

für alle $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Nun folgt die Aussage direkt aus Lemma 3.39 (mit $W = V$ und $C = B$). □

3.15. **Bewegungen in euklidischen Vektorräumen.** Seien (V, s_V) und (W, s_W) endlich-dimensionale euklidische Vektorräume.

Eine (nicht notwendigerweise lineare) Abbildung $F\colon V \to W$ heißt **Bewegung**, falls
$$\|F(v) - F(v')\| = \|v - v'\|$$
für alle $v, v' \in V$. In diesem Fall nennen wir F auch **distanztreu**.

Satz 3.41. *Sei $F\colon V \to W$ eine (nicht notwendigerweise lineare) Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) *F ist eine Bewegung;*

(ii) *Es gibt einen metrischen Homomorphismus $f\colon V \to W$ und ein $w \in W$ mit*
$$F(v) = f(v) + w$$
für alle $v \in V$.

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Für alle $v, v' \in V$ gilt
$$\begin{aligned}\|F(v) - F(v')\| &= \|(f(v) + w) - (f(v') + w)\|\\ &= \|f(v) - f(v')\|\\ &= \|f(v - v')\|\\ &= \|v - v'\|.\end{aligned}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $F\colon V \to W$ eine Bewegung. Definiere
$$f(v) := F(v) - F(0)$$
für alle $v \in V$. Dann gilt $f(0) = F(0) - F(0) = 0$. Außerdem gilt für alle $v \in V$
$$\|f(v)\| = \|F(v) - F(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|.$$
Also ist f längentreu.

Für alle $v, v' \in V$ gilt
$$\begin{aligned}\|f(v) - f(v')\| &= \|(F(v) - F(0)) - (F(v') - F(0))\|\\ &= \|F(v) - F(v')\|\\ &= \|v - v'\|.\end{aligned}$$
Das heißt, f ist distanztreu.

Die folgende Argumentation findet sich nahezu identisch im Beweis von Satz 3.30.

Für alle $v, v' \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle f(v), f(v')\rangle + \langle f(v'), f(v)\rangle &= \langle f(v), f(v)\rangle + \langle f(v'), f(v')\rangle - \langle f(v) - f(v'), f(v) - f(v')\rangle \\ &= \|f(v)\|^2 + \|f(v')\|^2 - \|f(v) - f(v')\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \|v'\|^2 - \|v - v'\|^2 \\ &= \langle v, v\rangle + \langle v', v'\rangle - \langle v - v', v - v'\rangle \\ &= \langle v, v'\rangle + \langle v', v\rangle.\end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass die Realteile von $\langle f(v), f(v')\rangle$ und $\langle v, v'\rangle$ übereinstimmen. (Für $z \in \mathbb{K}$ gilt $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.) Nach der obigen Rechnung gilt für alle $v, v' \in V$

$$\begin{aligned}i(\langle f(v), f(v')\rangle - \langle f(v'), f(v)\rangle) &= \langle f(iv), f(v')\rangle + \langle f(v'), f(iv)\rangle \\ &= \langle iv, v'\rangle + \langle v', iv\rangle \\ &= i(\langle v, v'\rangle - \langle v', v\rangle).\end{aligned}$$

Es gilt also $\langle f(v), f(v')\rangle - \langle f(v'), f(v)\rangle = \langle v, v'\rangle - \langle v', v\rangle$. Also haben wir gezeigt, dass die Imaginärteile von $\langle f(v), f(v')\rangle$ und $\langle v, v'\rangle$ übereinstimmen. (Für $z \in \mathbb{K}$ gilt $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$.) Ingesamt gilt also $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$.

Wir benutzen nun die gerade bewiesene Eigenschaft $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$, um zu zeigen, dass f ein Homomorphismus ist.

Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und $v, v' \in V$ zeigt man nun durch eine kurze Rechnung, dass

$$\langle f(av + bv') - af(v) - bf(v'), f(av + bv') - af(v) - bf(v')\rangle = 0.$$

(Es gilt

$$\begin{aligned}&\langle f(av + bv') - af(v) - bf(y), f(av + bv') - af(v) - bf(v')\rangle \\ &= \langle f(av + bv'), f(av + bv')\rangle - \langle f(av + bv'), af(v)\rangle - \cdots \\ &= \langle av + bv', av + bv'\rangle - \langle av + bv', av\rangle - \cdots \\ &= 0.)\end{aligned}$$

Also ist f linear. □

Korollar 3.42. *Die Zuordnung*

$$(f, w) \mapsto [F\colon v \mapsto f(v) + w]$$

definiert eine bijektive Abbildung

$$\{\textit{metrische Homomorphismen } V \to W\} \times W \to \{\textit{Bewegungen } V \to W\}.$$

Beweis. Man prüfe, dass das Paar (f, w) in Satz 3.41(ii) eindeutig durch F bestimmt ist. □

Lemma 3.43. *Sei $F\colon V \to W$ eine Bewegung. Dann ist F ein metrischer Homomorphismus genau dann wenn $F(0) = 0$.*

Beweis. Ist F ein metrischer Homomorphismus, so ist F per Definition linear. Also gilt $F(0) = 0$.

Sei nun $F(0) = 0$, und sei $f\colon V \to W$ definiert durch $f(v) := F(v) - F(0)$ für alle $v \in V$. Nach dem Beweis von Satz 3.41 ist dann f ein metrischer Homomorphismus. Wegen $F(0) = 0$ gilt $F = f$. □

Lemma 3.44. *Seien $F\colon V \to W$ und $G\colon W \to U$ Bewegungen. Dann ist $G \circ F\colon V \to U$ eine Bewegung.*

Beweis. Für alle $v, v' \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\|(G \circ F)(v) - (G \circ F)(v')\| &= \|G(F(v)) - G(F(v'))\| \\ &= \|F(v) - F(v')\| \\ &= \|v - v'\|.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.45. *Sei $F\colon V \to W$ eine bijektive Bewegung. Dann ist $F^{-1}\colon W \to V$ eine Bewegung.*

Beweis. Nach Satz 3.41 gibt es eine metrische Abbildung $f\colon V \to W$ und ein $w \in W$ mit $F(v) = f(x) + w$ für alle $v \in V$. Da F bijektiv ist, ist f auch bijektiv. Wir definieren $H\colon W \to V$ durch

$$v \mapsto f^{-1}(v) - f^{-1}(w).$$

Damit ist H eine Bewegung, und es gilt

$$\begin{aligned}(F \circ H)(x) &= F(H(x)) \\ &= F(f^{-1}(x) - f^{-1}(a)) \\ &= f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(a)) + a \\ &= x.\end{aligned}$$

Also ist $H = F^{-1}$. □

Sei

$$\mathrm{B}(V, s_V) := \{f\colon V \to V \mid f \text{ ist eine bijektive Bewegung}\}$$

die **Bewegungsgruppe** von (V, s_V).

Korollar 3.46. $\mathrm{B}(V, s_V)$ *ist eine Gruppe (bzgl. der Komposition von Abbildungen).*

Sei $\dim(V) < \infty$. Dann gilt
$$\mathrm{B}(V, s) = \{f : V \to V \mid f \text{ ist eine Bewegung}\}.$$

Für den Beweis verwendet man u.a. Satz 3.41.

$\mathrm{GL}(V, s)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{B}(V, s)$.

3.16. Volumen in euklidischen Vektorräumen.

3.16.1. *Volumen von Parallelotopen.*

Lemma 3.47. *Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ ein V-Vektorsystem. Dann gibt es Vektoren $b, c \in V$, so dass gilt:*

(i) $v_1 = b + c$;

(ii) $b \perp \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$;

(iii) $c \in \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$.

Beweis. Setze $U := \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$. Wir wissen, dass $V = U \perp U^\perp$. Es gilt dann $v_1 = b + c$ mit $b \in U^\perp$ und $c \in U$. □

Für ein linear unabhängiges V-Vektorsystem $v = (v_1, \ldots, v_m)$ mit $m \geq 1$ ist
$$P(v) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \mid 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$$
das von v aufgespannte **Parallelotop**.

Sei $(\mathbb{R}^n, s^n)$ der n-dimensionale euklidische Vektorraum mit Standardskalarprodukt s^n.

Das **Volumen** von $P(v)$ ist dann wie folgt induktiv definiert: Für $m = 1$ sei $\mathrm{Vol}(P(v)) := \|v_1\|$. Sei nun $m \geq 2$. Sei $v' := (v_2, \ldots, v_m)$, und sei $P' := P(v')$. Nach Lemma 3.47 können wir v_1 als $v_1 = b + c$ schreiben, so dass $b \perp \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$ und $c \in \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$. Dann sei
$$\mathrm{Vol}(P) := \|b\| \cdot \mathrm{Vol}(P')$$
das **Volumen** von $P(v)$.

Beispiel: Es gilt
$$\mathrm{Vol}(P(e_1, \ldots, e_n)) = 1.$$

Sei
$$A(v) := [v_1 | \cdots | v_m] \in \mathbb{R}^{n,m}$$

die Matrix mit $A(v)(e_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq m$. Es gilt dann

$$A^T A = (\langle v_i, v_j \rangle) \in \mathbb{R}^{m,m}.$$

Der folgende Satz besagt unter anderem, dass das Volumen von $P(v)$ nicht von der Anordnung der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ abhängt.

Satz 3.48. *Es gilt*

$$\mathrm{Vol}(P(v)) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über m. Sei zuerst $m = 1$. Dann ist

$$A^T A = v_1^T v_1 = \|v_1\|^2.$$

Also gilt

$$\mathrm{Vol}(P(v)) = \|v_1\| = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Sei $m \geq 2$, und sei $U := \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$. Nach Lemma 3.47 gilt $v_1 = b + c$ mit $b \in U^\perp$ und $c \in U$. Sei

$$A' := [b|v_2|\cdots|v_m].$$

Dann gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_s$ vom Typ (I), so dass

$$A = A' T_1 \cdots T_s.$$

Wir erhalten

$$\det(A^T A) = \det(T_s^T \cdots T_1^T (A')^T A' T_1 \cdots T_s) = \det((A')^T A).$$

Sei

$$D := [v_2|\cdots|v_m].$$

Dann gilt

$$(A')^T A' = \begin{pmatrix} b^T \\ D^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^T b & b^T D \\ D^T b & D^T D \end{pmatrix}$$

Wegen $b \perp v_i$ für alle $2 \leq i \leq m$ gilt $b^T D = 0$ und $D^T b = 0$. Also ist

$$\det((A')^T A') = b^T b \cdot \det(D^T D).$$

Sei $P := P(v_1, \ldots, v_m)$ und $P' := P(v_2, \ldots, v_m)$. Nach Induktion gilt $\mathrm{Vol}(P')^2 = \det(D^T D)$. Es folgt dann

$$\mathrm{Vol}(P) = \|b\| \cdot \mathrm{Vol}(P') = \sqrt{b^T b} \cdot \sqrt{\det(D^T D)} = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

□

In der Maßtheorie wird der Volumenbegriff weiterentwickelt, so dass man ihn auf kompliziertere Mengen anwenden kann. Maßtheorie ist eine der Grundlagen für Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

3.16.2. *Volumenfunktionen.* Für $n \geq 1$ sei

$$V_n := \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ ist eine kompakte Teilmenge}\}.$$

(Hier fassen wir $\mathbb{R}^n$ wie üblich als euklidischen Vektorraum auf. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **kompakt**, falls U abgeschlossen und beschränkt ist.)

Eine Abbildung

$$\mathrm{Vol}_n \colon V_n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ist eine **Volumenfunktion**, falls gilt:

(i) $\mathrm{Vol}_n(P(e_1, \ldots, e_n)) = 1$;

(ii) Aus $X \subseteq Y$ folgt $\mathrm{Vol}_n(X) \leq \mathrm{Vol}_n(Y)$;

(iii) Für alle $X, Y \in V_n$ gilt

$$\mathrm{Vol}_n(X \cup Y) = \mathrm{Vol}_n(X) + \mathrm{Vol}_n(Y) - \mathrm{Vol}_n(X \cap Y).$$

(iv) Sei

$$\begin{aligned} F \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto b + A(v) \end{aligned}$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Für alle $X \in V_n$ gilt

$$\mathrm{Vol}_n(F(X)) = |\det(A)| \cdot \mathrm{Vol}_n(X).$$

Für Fragen über die Existenz und Eindeutigkeit von Volumenfunktionen verweisen wir auf die Maßtheorie.

Sei nun $\mathrm{Vol}_n \colon V_n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine solche Volumenfunktion. Für eine geordnete Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ gilt dann

$$A(P(e_1, \ldots, e_n)) = P(v_1, \ldots, v_n)$$

wobei $A := [v_1 | \cdots | v_n] \in \mathbb{R}^{n,n}$. Es gilt dann also

$$\mathrm{Vol}_n(P(v)) = |\det(A)| = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

3.16.3. *Volumen von messbaren Mengen.* Sei S eine *messbare* Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Beispiele von messbaren Mengen sind Parallelotope und Simplexe. Für messbare Mengen S kann man ein sinnvolles Volumen $\mathrm{Vol}(S)$ definieren. Dies geschieht in der Maßtheorie und ist nicht ganz einfach.

Satz 3.49. *Für einen Homomorphismus*

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

eine messbare Teilmenge S von $\mathbb{R}^n$ und eine Koordinatenmatrix

$$A = \mathbf{c}_{B,C}(f)$$

gilt

$$\mathrm{Vol}(f(S)) = \sqrt{\det(A^T A)} \cdot \mathrm{Vol}(S).$$

3.16.4. *Volumen von Simplexen.*

Für ein V-Vektorsystem $v = (v_0, \dots, v_n)$ in $\mathbb{R}^n$, so dass $(v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0)$ linear unabhängig ist, sei

$$C(v) := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i v_i \mid \sum_{i=0}^{n} a_i = 1,\ a_i \geq 0 \right\}$$

das von v aufgespannte **Simplex**. Man sagt auch, dass $C(v)$ die **konvexe Hülle** von v ist.

Beispiel: Für $n \geq 0$ ist das **Einheitssimplex** $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ definiert als

$$\Delta^n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1,\ a_i \geq 0 \right\}.$$

Man prüft dann leicht, dass

$$\Delta^n = C(0, e_1, \dots, e_n).$$

Proposition 3.50. *Sei* $\mathrm{Vol}_n \colon V_n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *eine Volumenfunktion. Mit* v *wie oben sei*

$$B := [v_1 - v_0 | \cdots | v_n - v_0] \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{Vol}_n(C(v)) = \frac{1}{n!} \cdot |\det(B)|.$$

3.17. **Übungsaufgaben.**

3.17.1. Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $\|\cdot\|$ die dazugehörige Norm. Zeigen Sie: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$$

für alle $v, w \in V$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2 \right)$$

für alle $v, w \in V$. Die obigen Formeln heißen Polarisierungsformeln.

3.17.2.

Für $C = (c_{ij}) \in K^{n,n}$ sei

$$\mathrm{Spur}(C) := \sum_{k=1}^{n} c_{kk}$$

die **Spur** von C.

Sei $V := K^{n,n}$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$s\colon V \times V \to K, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$$

ist eine reguläre symmetrische Bilinearform. (Ein Bilinearform s ist **regulär**, falls $s(v, -) \neq 0$ und $s(-, w) \neq 0$ für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$.)

3.17.3. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Zeigen Sie:

(i)
$$s_A\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v^T A w$$
ist ein Skalarprodukt, d.h. $(\mathbb{R}^3, s_A)$ ist ein euklidischer Vektorraum.

(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Winkel}(e_i, e_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq 3$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^3$ sind.

3.17.4. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen, und sei V der Unterraum aller beschränkten reellen Folgen.

(i) Zeigen Sie:
$$\langle f, g \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^2}$$
definiert ein Skalarprodukt auf V.

(ii) Sei $U \subset V$ der Unterraum aller konvergenten Folgen. Zeigen Sie, dass
$$U^{\perp} = 0$$
wobei
$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$
Insbesondere gilt also
$$V \neq U \oplus U^{\perp}.$$

3.17.5. Sei

$$s^2\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

das Standardskalarprodukt. Beschreiben Sie alle metrischen Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$.

3.17.6. Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$ mit $\langle u - w, v - w \rangle = 0$. Zeigen Sie:

$$\|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 = \|u - v\|^2.$$

Zeichnen Sie ein passendes Bild zu dieser Aussage.

3.17.7. Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Zeigen Sie: Für $v, w \in V$ sind äquivalent:

(i) $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$;

(ii) (v, w) ist linear abhängig.

3.17.8. Sei (V, s) ein n-dimensionaler euklidscher Vektorraum, und sei $f\colon V \to V$ ein Isomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) f ist orthogonaltreu;

(ii) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so daß af längentreu ist.

4. Metrische Vektorräume

4.1. Vier wichtige Klassen von Bilinear- und Sesquilinearformen. Sei V ein K-Vektorraum, und sei

$$\begin{aligned} s\colon V \times V &\to K \\ (v,w) &\mapsto \langle v,w\rangle \end{aligned}$$

eine Bilinearform (siehe Abschnitt 3.1).

(S)
s ist **symmetrisch**, falls

$$\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$$

für alle $v,w \in V$.

(SS)
s ist **schiefsymmetrisch**, falls

$$\langle v,w\rangle = -\langle w,v\rangle$$

für alle $v,w \in V$.

Sei $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation. Für einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V sei

$$\begin{aligned} s\colon V \times V &\to \mathbb{C} \\ (v,w) &\mapsto \langle v,w\rangle \end{aligned}$$

eine Sesquilinearform (siehe Abschnitt 3.3).

(H)
s ist **hermitesch**, falls

$$\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$$

für alle $v,w \in V$.

(SH)
s ist **schiefhermitesch**, falls

$$\langle v,w\rangle = -\overline{\langle w,v\rangle}$$

für alle $v,w \in V$.

Alle vier oben genannten Klassen von Bilinearformen bzw. Sesquilinearformen spielen in vielen Bereichen der Mathematik und Physik eine wichtige Rolle. Statt sie nun einzeln zu untersuchen, werden wir (etwas umständlich) Körper mit Involutionen und zugehörige metrische Vektorräume einführen, um die vier Klassen (und nicht nur diese) einheitlich behandeln zu können. Ich habe diesen Zugang aus dem Vorlesungsskript von Ina Kersten [K] gelernt. Er stammt ursprünglich aus einer Arbeit von Lenz und Witt [LW].

4.2. **Körper mit Involution.**

Eine Abbildung
$$\overline{\cdot}\colon K \to K$$
ist eine **Involution**, falls gilt:

(i) $\overline{\overline{a}} = a$ für alle $a \in K$;

(ii) $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ für alle $a, b \in K$;

(iii) $\overline{abc} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ für alle $a, b, c \in K$.

– – – – – **Ende Vorlesung 10 (13.05.)** – – – – –

Lemma 4.1. *Sei* $\overline{\cdot}\colon K \to K$ *eine Involution. Dann gilt:*

(i) $\overline{\cdot}$ *ist bijektiv;*

(ii) $\overline{0} = 0$*;*

(iii) *Für* $a \in K^\times$ *gilt* $\overline{a} \in K^\times$*;*

(iv) $\overline{1} \in \{-1, 1\}$*;*

(v) *Falls* $\overline{1} = 1$*, so gilt* $\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$*. Falls* $\overline{1} = -1$*, so gilt* $\overline{ab} = -\,\overline{a} \cdot \overline{b}$*.*

Beweis. (i): Wegen $\overline{\overline{a}} = a$ gilt $\overline{\cdot} \circ \overline{\cdot} = \mathrm{id}_K$. Also ist $\overline{\cdot}$ injektiv und surjektiv.

(ii): Es gilt $\overline{a} = \overline{a+0} = \overline{a} + \overline{0}$. Daraus folgt $\overline{0} = 0$.

(iii): Dies folgt aus (ii) und der Bijektivität von $\overline{\cdot}$.

(iv): Es gilt $\overline{1} = \overline{1 \cdot 1 \cdot 1} = \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \overline{1}$. Dies impliziert $\overline{1}^2 = 1$ und damit $\overline{1} \in \{-1, 1\}$.

(v): Dies folgt aus (iv) und der Gleichung $\overline{ab} = \overline{1ab} = \overline{1} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}$. □

Beispiele: Die folgenden Abbildungen sind Involutionen.

(H) Sei $K = \mathbb{C}$, und sei
$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ a + bi &\mapsto a - bi \end{aligned}$$
die komplex Konjugation. (Fasst man $\mathbb{C}$ als reelle Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf, so ist dies die Spiegelung an der *reellen Achse*.)

(S) Sei K ein beliebiger Körper, und sei
$$\overline{\cdot} = \mathrm{id}_K\colon K \to K.$$

(SH) Sei $K = \mathbb{C}$, und sei
$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ a + bi &\mapsto -a + bi. \end{aligned}$$

(Fasst man $\mathbb{C}$ als reelle Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf, so ist dies die Spiegelung an der *imaginären Achse*.)

(SS) Sei K ein beliebiger Körper, und sei

$$\bar{\cdot} = -\mathrm{id}_K \colon K \to K.$$

Für $a \in K$ sei

$$a^* := \overline{1} \cdot \overline{a},$$

und für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ seien

$$\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in K^{m,n} \quad \text{und} \quad A^* := (a^*_{ij}) = \overline{1} \cdot \overline{A} \in K^{m,n}.$$

Wegen Lemma 4.1(iv) gilt dann $1^* = 1$.

Lemma 4.2. *Sei K ein Körper mit Involution $\bar{\cdot} \colon K \to K$. Dann gilt:*

(i) *Für $A \in K^{p,q}$ und $B \in K^{q,r}$ gilt $(AB)^* = A^*B^*$;*

(ii) *Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Beweis. Ein einfache Rechnung. □

4.3. **Metrische Vektorräume.** Sei V ein K-Vektorraum mit Involution $\bar{\cdot} \colon K \to K$.

Eine Abbildung

$$s \colon V \times V \to K$$

ist eine **Sesquilinearform**, falls gilt:

(i) $s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w)$ für alle $v_1, v_2, w \in V$;

(ii) $s(av, w) = as(v, w)$ für alle $v, w \in V$ und $a \in K$;

(iii) $s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2)$ für alle $v, w_1, w_2 \in V$;

(iv) $s(v, aw) = \overline{1} \cdot \overline{a} \cdot s(v, w) = a^*\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und $a \in K$.

Wir schreiben oft $\langle v, w\rangle$ statt $s(v, w)$.

Eine Abbildung

$$\begin{aligned} s \colon V \times V &\to K \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

ist eine **Metrik**, falls gilt:

(i) $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$ für alle $v_1, v_2, w \in V$;

(ii) $\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ und $a \in K$;

(iii) $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$ für alle $v, w \in V$.

In diesem Fall ist (V, s) ein **metrischer Vektorraum**.

Nach diesen Definitionen machen die Begriffe *Sesquilinearform* und *Metrik* nur Sinn, wenn man vorher eine Involution $\bar{\cdot}$ des Körpers K festgelegt hat.

Lemma 4.3. *Sei $s\colon V \times V \to K$ eine Metrik. Dann gilt:*

(i) $\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$ *für alle* $v, w_1, w_2 \in V$*;*

(ii) $\langle v, aw \rangle = a^* \langle v, w \rangle$ *für alle* $v, w \in V$ *und* $a \in K$*.*

Insbesondere ist s eine Sesquilinearform.

Beweis. (i): Für $v, w_1, w_2 \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle v, w_1 + w_2 \rangle &= \overline{\langle w_1 + w_2, v \rangle} = \overline{\langle w_1, v \rangle + \langle w_2, v \rangle} \\ &= \overline{\langle w_1, v \rangle} + \overline{\langle w_2, v \rangle} = \overline{\overline{\langle v, w_1 \rangle}} + \overline{\overline{\langle v, w_2 \rangle}} \\ &= \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle.\end{aligned}$$

(ii): Für $v, w \in V$ und $a \in K$ gilt

$$\langle v, aw \rangle = \overline{\langle aw, v \rangle} = \overline{a \langle w, v \rangle} = \overline{1a \langle w, v \rangle} = \overline{1} \cdot \overline{a} \cdot \overline{\langle w, v \rangle} = a^* \langle v, w \rangle.$$

□

Seien (V, s_V) und (W, s_W) metrische K-Vektorräume (beide bzgl. derselben Involution $\bar{\cdot}$). Dann ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ **metrisch**, falls

$$\langle f(v), f(v') \rangle = \langle v, v' \rangle$$

für alle $v, v' \in V$. Ist f zusätzlich ein Isomorphismus, so nennen wir f eine **Isometrie**. In diesem Fall heißen (V, s_V) und (W, s_W) **isometrisch**. Wir schreiben dann

$$(V, s_V) \cong (W, s_W).$$

Eine Metrik s auf einem Vektorraum V sorgt für einen gewissen Grad von Geometrie in V. In dieser Allgemeinheit können wir nicht mehr von Längen, Abständen oder Winkeln reden. Der Begriff der Orthogonalität von Vektoren spielt aber nach wie vor eine große Rolle. Die Idee ist nun wiederum, dass isometrische Vektorräume dieselbe Geometrie haben.

Ziele:

(i) Klassifikation metrischer Vektorräume bis auf Isometrie.

(ii) Konstruktion von Normalformen für Koordinatenmatrizen von Metriken.

Diese beiden Fragestellungen sind eng miteinander verknüpft. Ob dies jeweils einfach, schwierig oder unmöglich ist, hängt vom Körper K und von der Wahl der Involution $\bar{\cdot}$ ab.

Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum.

Für einen Unterraum U von V sei

$$s_U \colon U \times U \to K$$

die Einschränkung von s auf $U \times U$.

Dann ist (U, s_U) wieder ein metrischer Vektorraum.

Dies kann man für induktive Beweise verwendet.

Eine Metrik $s \colon V \times V \to K$ ist

(H) **hermitesch**, falls $\overline{1} = 1$;

(S) **symmetrisch**, falls $\overline{a} = a$ für alle $a \in K$, d.h. $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$.

(SH) **schiefhermitesch**, falls $\overline{1} = -1$;

(SS) **schiefsymmetrisch**, falls $\overline{a} = -a$ für alle $a \in K$, d.h. $\bar{\cdot} = -\mathrm{id}_K$.

In diesen Fällen heißt dann (V, s) ein **hermitescher, symmetrischer, schiefhermitescher bzw. schiefsymmetrischer Vektorraum**.

Schiefsymmetrische Metriken oder Vektorräume werden auch **symplektisch** genannt.

Bemerkungen:

- Eine Metrik ist entweder hermitesch oder schiefhermitesch.
- Metriken vom Typ (S) und (SS) sind Spezialfälle vom Typ (H) bzw. (SH).
- Die zuvor studierten Skalarprodukte sind Beispiele von Metriken:

Ein metrischer Vektorraum (V, s) ist ein euklidischer Vektorraum genau dann wenn $K = \mathbb{R}$, $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$, und $s(v, v) > 0$ für alle $0 \neq v \in V$. Insbesondere ist s vom Typ (S).

Ein metrischer Vektorraum (V, s) ist ein unitärer Vektorraum genau dann wenn $K = \mathbb{C}$, $\bar{\cdot}$ ist die komplexe Konjugation, und $s(v, v) > 0$ für alle $0 \neq v \in V$. Insbesondere ist s vom Typ (H) (aber nicht vom Typ (S)).

Für eine Metrik $s\colon V \times V \to K$ ergibt sich also folgende Hierarchie:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{hermitesch (H)} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] & \text{schiefhermitesch (SH)} \arrow[d, dash] \\
\text{unitär} & \text{symmetrisch (S)} \arrow[d, dash] & \text{schiefsymmetrisch (SS)} \\
 & \text{euklidisch} &
\end{tikzcd}$$

Lemma 4.4. *Sei $s\colon V \times V \to K$ eine Metrik mit $s \neq 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) *s ist eine Bilinearform;*

(ii) *s ist vom Typ* (S) *oder* (SS).

Beweis. Es gibt ein $(v, w) \in V \times V$ mit $\langle v, w\rangle \neq 0$. Für alle $a \in K$ gilt dann

$$\langle v, aw\rangle = \overline{1} \cdot \overline{a} \cdot \langle v, w\rangle.$$

Damit ist s eine Bilinearform genau dann wenn $\overline{1} \cdot \overline{a} = a$ für alle $a \in K$. Nach Lemma 4.1(iv) ist dies der Fall genau dann wenn s vom Typ (S) oder (SS) ist. $\square$

Wir werden zuerst die allgemeine Theorie von metrischen Vektorräumen entwickeln und uns danach auf die Fälle (S) und (SS) konzentrieren.

Beispiele:

(H) Sei $K = \mathbb{C}$, und sei

$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ a + bi &\mapsto a - bi \end{aligned}$$

die komplexe Konjugation. Für $V = \mathbb{C}^2$ definiert

$$\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rangle := v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2}$$

eine Metrik $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ vom Typ (H).

(S) Sei $\overline{\cdot} = \mathrm{id}_K$. Für $V = K^2$ definiert

$$\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rangle := v_1 w_1 - v_2 w_2$$

eine Metrik $s\colon V \times V \to K$ vom Typ (S).

(SH) Sei $K = \mathbb{C}$, und sei

$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ a + bi &\mapsto -a + bi. \end{aligned}$$

Für $V = \mathbb{C}^2$ definiert

$$\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rangle := v_1\overline{w_2} - v_2\overline{w_1}$$

eine Metrik $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ vom Typ (SH).

(SS) Sei $\bar{\cdot} = -\mathrm{id}_K$, und sei $V = K^2$. Dann definiert

$$\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rangle := v_1 w_2 - v_2 w_1$$

eine Metrik $s\colon V \times V \to K$ vom Typ (SS).

4.4. **Koordinatenmatrizen und Basiswechsel für Metriken.** Sei K ein Körper mit Involution $\bar{\cdot}\colon K \to K$, und sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Für eine Sesquilinearform

$$s\colon V \times V \to K$$

und eine geordnete Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V sei

$$\mathbf{c}_B(s) := (a_{ij}) \in K^{n,n}$$

definiert durch

$$a_{ij} := \langle b_i, b_j \rangle$$

für $1 \leq i, j \leq n$. Dann ist $\mathbf{c}_B(s)$ die **Koordinatenmatrix** von s bzgl. B. Man nennt $\mathbf{c}_B(s)$ auch die **Gramsche Matrix** von s bzgl. B.

Ist die obige Sesquilinearform $s\colon V \times V \to K$ eine Metrik, so gilt

$$\overline{a_{ij}} = a_{ji}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$, d.h. $A^T = \overline{A}$, wobei $A := (a_{ij}) = \mathbf{c}_B(s)$.

Wir betrachten $\mathbf{c}_B(s)$ fast ausschließlich für Metriken und nur selten für allgemeine Sesquilinearformen.

Satz 4.5. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit* $\dim(V) = n$*, und sei B eine geordnete Basis von V. Für alle $v, w \in V$ gilt*

$$\langle v, w \rangle = \mathbf{c}_B(v)^T \mathbf{c}_B(s) \mathbf{c}_B(w)^*.$$

Beweis. Für $v, w \in V$ seien

$$\mathbf{c}_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{c}_B(w) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{c}_B(s)\begin{pmatrix}\mu_1^*\\ \vdots\\ \mu_n^*\end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i\mu_j^*\langle b_i, b_j\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \lambda_i b_i, \mu_j b_j\rangle\\
&= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, \sum_{j=1}^n \mu_j b_j\rangle\\
&= \langle v, w\rangle.
\end{aligned}
$$

□

Sei K ein Körper mit Involution $\bar{\cdot}$. Sei $A \in K^{n,n}$ mit

$$A^T = \overline{A}.$$

Wir definieren

$$
\begin{aligned}
s_A \colon K^n \times K^n &\to K\\
(v, w) &\mapsto \langle v, w\rangle := v^T A w^*.
\end{aligned}
$$

Lemma 4.6. *(K^n, s_A) ist ein metrischer Vektorraum.*

Beweis. Für $v_1, v_2, w \in V$ gilt offenbar

$$\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle,$$

und für $v, w \in V$ und $a \in K$ prüfen wir ebenso leicht, dass

$$\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle.$$

Seien

$$v = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

in K^n. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\overline{\langle v, w\rangle} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i\mu_j^* a_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i} \cdot \overline{\mu_j^*} \cdot \overline{a_{ij}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i} \cdot \overline{\mu_j^*} \cdot a_{ji}\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_i} \cdot \overline{1} \cdot \mu_j \cdot a_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mu_j \lambda_i^* a_{ji} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)A\begin{pmatrix}\lambda_1^*\\ \vdots\\ \lambda_n^*\end{pmatrix} = \langle w, v\rangle.
\end{aligned}
$$

Für die vierte Gleichheit haben wir verwendet, dass

$$\overline{\mu_j^*} = \overline{\overline{1} \cdot \overline{\mu_j}} = \overline{1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{\mu_j}} = \overline{1} \cdot 1 \cdot \mu_j = \overline{1} \cdot \mu_j.$$

Also ist s_A eine Metrik. □

– – – – – Ende Vorlesung 11 (16.05.) – – – – –

Satz 4.7. *Sei K ein Körper mit Involution $\bar{\cdot}$, und sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Für jede geordnete Basis B von V ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \eta\colon \{s \in \mathrm{Abb}(V \times V, K) \mid s \textit{ ist eine Metrik}\} &\to \{A \in K^{n,n} \mid A^T = \overline{A}\} \\ s &\mapsto \mathbf{c}_B(s) \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Beweis. Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Für eine Metrik $s\colon V \times V \to K$ sei

$$A = \mathbf{c}_B(s) \in K^{n,n}.$$

Wir wissen bereits, dass $A^T = \overline{A}$. Für Metriken $s, s'\colon V \times V \to K$ gilt $s = s'$ genau dann wenn $s(b_i, b_j) = s'(b_i, b_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Es folgt, dass η injektiv ist.

Sei nun $A \in K^{n,n}$ mit $A^T = \overline{A}$. Behauptung: Die Abbildung

$$\begin{aligned} s\colon V \times V &\to K \\ (v, w) &\mapsto \mathbf{c}_B(v)^T A \mathbf{c}_B(w)^* \end{aligned}$$

ist eine Metrik mit $\mathbf{c}_B(s) = A$. Beweis: Sei

$$\begin{aligned} f\colon V \times V &\to K^n \times K^n \\ (v, w) &\mapsto (\mathbf{c}_B(v), \mathbf{c}_B(w)). \end{aligned}$$

Wir wissen, dass f ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "s"'] & K^n \times K^n \arrow[r, "s_A"] & K \end{tikzcd}$$

kommutiert. Man kann nun Lemma 4.6 verwenden, um zu zeigen, dass s eine Metrik ist. Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$s(b_i, b_j) = \mathbf{c}_B(b_i)^T A \mathbf{c}_B(b_j)^* = e_i^T A e_j^* = ei^T A e_j = a_{ij}.$$

Mit anderen Worten, es gilt $\mathbf{c}_B(s) = A$. Also ist η surjektiv. □

Satz 4.8. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und seien B und C geordnete Basen von V. Dann gilt*

$$\mathbf{c}_C(s) = \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^T \mathbf{c}_B(s) \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^*.$$

Beweis. Setze

$$S = (s_{ij}) := \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V).$$

Für $v, w \in V$ seien

$$\mathbf{c}_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_B(w) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_C(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_C(w) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Nach Definition gilt

$$S(\mathbf{c}_C(v)) = \mathbf{c}_B(v)$$

für alle $v \in V$. Wir erhalten

$$S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}\beta_1 + \cdots + s_{1n}\beta_n \\ \vdots \\ s_{n1}\beta_1 + \cdots + s_{nn}\beta_n \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = \overline{1} \cdot \begin{pmatrix} \overline{s_{11} 1 \beta_1} + \cdots + \overline{s_{1n} 1 \beta_n} \\ \vdots \\ \overline{s_{n1} 1 \beta_1} + \cdots + \overline{s_{nn} 1 \beta_n} \end{pmatrix} = \overline{1} \cdot \overline{S} \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} = S^* \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix}.$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{c}_B(s) \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \vdots \\ \mu_n^* \end{pmatrix} = \left(S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)^T \mathbf{c}_B(s) S^* \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) S^T \mathbf{c}_B(s) S^* \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die erste Gleichheit haben wir Satz 4.5 verwendet. Unter Verwendung der Basis C sagt Satz 4.5, dass

$$\langle v, w \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\mathbf{c}_C(s) \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix}.$$

Nun können wir mit den Vektoren $v = c_i$ und $w = c_j$ arbeiten, um die Matrizen $\mathbf{c}_C(s)$ und $S^T \mathbf{c}_B(s) S^*$ zu vergleichen. Wir erhalten die gewünschte Gleichheit

$$\mathbf{c}_C(s) = S^T \mathbf{c}_B(s) S^*.$$

□

Beispiel: Sei $K = \mathbb{C}$, und sei $\bar{\cdot}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $a + bi \mapsto -a + bi$. Dann ist

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C} \\ \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) &\mapsto v_1 \overline{w_2} - v_2 \overline{w_1} \end{aligned}$$

eine Metrik vom Typ (SH). (Es ist klar, dass $s(-,w)$ linear ist für alle $w \in \mathbb{C}^2$. Eine leichte Rechnung zeigt, dass $s(v,w) = \overline{s(w,v)}$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^2$. Also ist s eine Metrik. Wegen $\overline{1} = -1$ ist s schiefhermitesch.) Seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dies sind geordnete Basen von $\mathbb{C}^2$. Eine leichte Rechnung liefert

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_C(s) = \begin{pmatrix} 2i & i+1 \\ i-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S := \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & i+1 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann wie erwartet

$$S^T \mathbf{c}_B(s) S^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & i+1 \\ i-1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{c}_C(s).$$

Die folgende Definition ist durch Satz 4.8 motiviert.

Sei $\overline{\cdot}\colon K \to K$ eine Involution. Matrizen $A, A' \in K^{n,n}$ sind **kongruent** (bzgl. $\overline{\cdot}$), falls es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$A' = S^T A S^*.$$

Wir schreiben dann

$$A \equiv A'.$$

Lemma 4.9. *$\equiv$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $K^{n,n}$.*

Beweis. Man verwende die Rechenregeln in Lemma 4.2. □

Für $A \in K^{n,n}$ sei

$$[A]_\equiv := \{A' \in K^{n,n} \mid A \equiv A'\}$$

die zugehörige **Kongruenzklasse**.

Lemma 4.10. *Sei (V, s) ein metrischer K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei B eine geordnete Basis von V. Dann gilt*

$$\begin{aligned}[\mathbf{c}_B(s)]_\equiv &:= \{S^T \mathbf{c}_B(s) S^* \mid S \in \mathrm{GL}_n(K)\} \\ &= \{\mathbf{c}_C(s) \mid C \text{ ist eine geordnete Basis von } V\}.\end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.8 und [LA 1, Lemma 8.18(i)]. □

Lemma 4.11. *Sei $\overline{\cdot}\colon K \to K$ eine Involution, und seien $A, A' \in K^{n,n}$ mit $A \equiv A'$ (bzgl. $\overline{\cdot}$). Dann gilt* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A')$.

Beweis. Eine einfache Übungsaufgabe. □

Sei $\bar{\cdot}\colon K \to K$ eine Involution, und sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$. Dann heißt A

(H) **hermitesch**, falls $A^T = \overline{A}$ und $\overline{1} = 1$;

(S) **symmetrisch**, falls $A^T = A$ und $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$;

(SH) **schiefhermitesch**, falls $A^T = \overline{A}$ und $\overline{1} = -1$;

(SS) **schiefsymmetrisch**, falls $A^T = -A$ und $\bar{\cdot} = -\mathrm{id}_K$.

In allen vier Fällen gilt also insbesondere

$$A^T = \overline{A}.$$

Nach diesen Definitionen machen die Begriffe *symmetrische*, *schiefsymmetrische*, *hermitesche* bzw. *schiefhermitesche Matrix* und *kongruent* nur Sinn, wenn man vorher eine Involution $\bar{\cdot}$ des Körpers K festgelegt hat.

Lemma 4.12. *Sei K ein Körper mit Involution $\bar{\cdot}$, und sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Sei*

$$s\colon V \times V \to K$$

eine Sesquilinearform. Für jede geordnete Basis B von V gilt:

(H) *s ist eine hermitesche Metrik $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist hermitesch;*

(S) *s ist eine symmetrische Metrik $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist symmetrisch;*

(SH) *s ist eine schiefhermitesche Metrik $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist schiefhermitesch;*

(SS) *s ist eine schiefsymmetrische Metrik $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist schiefsymmetrisch.*

Beweis. Eine leichte Übungsausgabe. □

4.5. **Orthogonale Summen.** Sei (V, s) ein metrischer K-Vektorraum.

Wir nennen $v, w \in V$ **orthogonal**, falls

$$\langle v, w\rangle = 0.$$

In diesem Fall schreiben wir $v \perp w$.

Aus den Definitionen folgt sofort, dass $v \perp w$ genau dann wenn $w \perp v$.

Die Metrik s ist **orthogonal trivial**, falls $v \perp w$ für alle $v, w \in V$.

Dies ist äquivalent zu $s = 0$.

Für Unterräume $U_1, \dots, U_t$ von V sei
$$U := U_1 + \cdots + U_t.$$
Dies ist eine **orthogonale Summe**, falls gilt:

(i) $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_t$;

(ii) $u_i \perp u_j$ für alle $u_i \in U_i$ und $u_j \in U_j$ mit $i \neq j$.

In diesem Fall schreiben wir
$$U = U_1 \perp \cdots \perp U_t.$$

Ein Unterraum U von V ist **orthogonal unzerlegbar**, falls aus $U = U_1 \perp U_2$ folgt, dass $U_1 = 0$ oder $U_2 = 0$.

Lemma 4.13. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann gibt es eine orthogonale Summe*
$$V = U_1 \perp \cdots \perp U_t$$
mit U_i orthogonal unzerlegbar für alle $1 \leq i \leq t$.

Beweis. Dies folgt aus einer einfachen Induktion über $\dim(V)$. □

Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Eine geordnete Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V ist eine **Orthogonalbasis** (abgekürzt **OGB**) bzw. **Orthonormalbasis** (abgekürzt **ONB**), falls $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ bzw.
$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die nächsten drei Lemmata folgen direkt aus den Definitionen.

Lemma 4.14. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Für eine geordnete Basis B von V sind äquivalent:*

(i) *B ist eine OGB;*

(ii) *$\mathbf{c}_B(s)$ ist eine Diagonalmatrix.*

Lemma 4.15. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine OGB von V;*

(ii) *V ist eine orthogonale Summe von 1-dimensionalen Unterräumen.*

Lemma 4.16. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Für eine geordnete Basis B von V sind äquivalent:*

(i) *B ist eine ONB;*

(ii) *$\mathbf{c}_B(s) = E_n$.*

In diesem Fall gilt $\overline{1} = 1$.

– – – – – Ende Vorlesung 12 (20.05.) – – – – –

Beispiele:

(i) Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann gibt es wegen Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis B von V.

(ii) Sei $\dim(V) = n \geq 1$, und sei $s\colon V \times V \to K$ definiert durch $s(v, w) = 0$ für alle $v, w \in V$. Dann ist (V, s) ein metrischer K-Vektorraum, und jede Basis von V ist eine Orthogonalbasis. Andererseits gibt es offenbar keine Orthonormalbasis von V.

(iii) Sei $\bar{\cdot} = -\mathrm{id}_K$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (K^2, s_A) ein schiefsymmetrischer metrischer K-Vektorraum. Es gilt dann $s_A(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Man zeigt nun leicht, dass K^2 orthogonal unzerlegbar ist.

4.6. **Reguläre metrische Vektorräume.** Sei (V, s) ein metrischer K-Vektorraum.

Für einen Unterraum U von V sei

$$U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \text{ für alle } u \in U\} = \bigcap_{u \in U} \mathrm{Kern}(\langle -, u \rangle)$$

der zu U orthogonale Unterraum.

Sei

$$\mathrm{Rad}(V) := V^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ für alle } u \in V\}$$

das **Radikal** von V.

Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Dann ist (K^2, s_A) ein symmetrischer K-Vektorraum. Es gilt $\mathrm{Rad}(K^2) = \mathrm{Lin}(e_1)$.

Der metrische Vektorraum (V, s) und die Metrik s heißen **regulär** (oder auch **nicht-ausgeartet**, **nicht-entartet**, **nicht-degeneriert**), falls

$$\operatorname{Rad}(V) = 0.$$

Andernfalls heißt (V, s) **singulär** (oder auch **ausgeartet**, **entartet**, **degeneriert**).

Sei U ein Unterraum von V. Wir definieren dann

$$\operatorname{Rad}(U) := \{u \in U \mid u \perp v \text{ für alle } v \in U\} = U \cap U^{\perp}.$$

Der soeben definierte Unterraum $\operatorname{Rad}(U)$ ist dann das Radikal des metrischen Vektorraums (U, s_U).

Lemma 4.17. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum. Für $V = U \oplus \operatorname{Rad}(V)$ gilt:*

(i) $V = U \perp \operatorname{Rad}(V)$*;*

(ii) $s_{\operatorname{Rad}(V)} = 0$*;*

(iii) s_U *ist regulär.*

Beweis. (i): Für $u \in U$ und $v \in \operatorname{Rad}(V)$ gilt $u \perp v$. Aus $V = U \oplus \operatorname{Rad}(V)$ folgt also $V = U \perp \operatorname{Rad}(V)$.

(ii): Es gilt $v \perp w$ für alle $v, w \in \operatorname{Rad}(V)$.

(iii) Wir müssen zeigen, dass $\operatorname{Rad}(U) = 0$. Sei $u \in \operatorname{Rad}(U) \subseteq U$, und sei $v \in V$. Dann gilt $v = u' + v'$ für geeignete $u' \in U$ und $v' \in \operatorname{Rad}(V)$. Es folgt

$$\langle u, v \rangle = \langle u, u' + v' \rangle = \langle u, u' \rangle + \langle u, v' \rangle.$$

Wegen $u \in \operatorname{Rad}(U)$ gilt $\langle u, u' \rangle = 0$, und wegen $v' \in \operatorname{Rad}(V)$ gilt $\langle u, v' \rangle = 0$. Wir erhalten also $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$, d.h. $u \in \operatorname{Rad}(V)$. Wegen $U \cap \operatorname{Rad}(V) = 0$ folgt $u = 0$.

□

Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum.

Wir definieren einen neuen Vektorraum $\overline{V}$ wie folgt: Die zugrundeliegende Menge von $\overline{V}$ ist V, und auch die Addition

$$+\colon \overline{V} \times \overline{V} \to \overline{V}$$

bleibt unverändert. Die Skalarmultiplikation ist definiert als

$$\begin{aligned} \bullet\colon K \times \overline{V} &\to \overline{V} \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \bullet v := \overline{1} \cdot \overline{\lambda}\, v = \lambda^* v. \end{aligned}$$

Man zeigt nun leicht, dass $\overline{V}$ zusammen mit den obigen Abbildungen ein K-Vektorraum ist.

Satz 4.18. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Sei B eine geordnete Basis von V. Dann sind äquivalent:*

(i) *s ist regulär;*

(ii) $\mathbf{c}_B(s) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Beweis. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$, und sei $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ die zugehörige geordnete duale Basis von $\mathrm{Hom}(V, K)$. Definiere

$$f\colon \overline{V} \to \mathrm{Hom}(V, K)$$

durch $v \mapsto [\langle -, v\rangle\colon w \mapsto \langle w, v\rangle]$. Für $v_1, v_2 \in \overline{V}$, $w \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \bullet v_1 + \lambda_2 \bullet v_2)(w) &= \langle w, \overline{1} \cdot \overline{\lambda_1}\, v_1 + \overline{1} \cdot \overline{\lambda_2}\, v_2\rangle \\ &= \overline{1} \cdot \overline{\overline{1} \cdot \overline{\lambda_1}} \langle w, v_1\rangle + \overline{1} \cdot \overline{\overline{1} \cdot \overline{\lambda_2}} \langle w, v_2\rangle \\ &= \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \lambda_1 \langle w, v_1\rangle + \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \lambda_2 \langle w, v_2\rangle \\ &= \lambda_1 \langle w, v_1\rangle + \lambda_2 \langle w, v_2\rangle \\ &= \lambda_1 f(v_1)(w) + \lambda_2 f(v_2)(w). \end{aligned}$$

Also ist f ein Homomorphismus.

Für $1 \leq i, j \leq n$ sei $a_{ij} \in K$ definiert durch

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i^*.$$

Es gilt dann $\mathbf{c}_{B,B^*}(f) = (a_{ij})$. Für $1 \leq j, k \leq n$ folgt

$$\langle b_k, b_j\rangle = f(b_j)(b_k) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i^*(b_k) = a_{kj}.$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\mathbf{c}_B(s) = \mathbf{c}_{B,B^*}(f).$$

Somit ist $\mathbf{c}_B(s) \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann wenn f ein Isomorphismus ist. Es gilt nun

$$\mathrm{Rad}(V) = \{v \in V \mid \langle w, v\rangle = 0 \text{ für alle } w \in V\} = \mathrm{Kern}(f).$$

Also ist f ein Isomorphismus genau dann wenn $\mathrm{Rad}(V) = 0$. □

Beispiel: Sei (V, s) ein 2-dimensionaler symmetrischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

für eine geeignete geordnete Basis $B = (b_1, b_2)$ von V. Da $\mathbf{c}_B(s)$ invertierbar ist, ist (V, s) regulär. Für $0 \neq v \in V$ können dann alle drei Fälle $\langle v, v\rangle > 0$, $\langle v, v\rangle < 0$ und $\langle v, v\rangle = 0$ auftreten. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_1\rangle &> 0, \\ \langle b_2, b_2\rangle &< 0, \\ \langle b_1 + b_2, b_1 + b_2\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Korollar 4.19. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann gibt es eine geordnete Basis B von V mit*

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $A' \in \mathrm{GL}_r(K)$ und $r = n - \dim \mathrm{Rad}(V)$.

Beweis. Sei $V = U \perp \mathrm{Rad}(V)$ wie in Lemma 4.17. Seien $B' = (b_1, \ldots, b_r)$ und $(b_{r+1}, \ldots, b_n)$ geordnete Basen von U bzw. $\mathrm{Rad}(V)$, und setze

$$B := (b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n).$$

Dann ist $\mathbf{c}_B(s)$ von der Form

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für eine geeignete Matrix $A' \in K^{r,r}$. Es gilt dann offenbar

$$\mathbf{c}_{B'}(s_U) = A'.$$

Nach Lemma 4.17 ist s_U regulär. Also folgt aus Satz 4.18, dass $A' \in \mathrm{GL}_r(K)$. Nach Konstruktion gilt $r = n - \dim \mathrm{Rad}(V)$. □

Lemma 4.20. *Sei U ein Unterraum von V. Dann ist die Einschränkungsabbildung*

$$\begin{aligned} e_U \colon V^* &\to U^* \\ f &\mapsto f_U \end{aligned}$$

K-linear und surjektiv.

Beweis. Sei $g \in U^*$, und sei W ein Komplementärraum von U in V, d.h. $V = U \oplus W$. Definiere $f \colon U \oplus W \to K$ durch $f(u + w) := g(u)$, wobei $u \in U$ und $w \in W$. Dann ist $f \in V^*$, und es gilt offensichtlich $f_U = g$. Also haben wir die Surjektivität von e_U gezeigt. Die Linearität ist offensichtlich. □

Satz 4.21 (Zerlegungssatz für reguläre Metriken)**.** *Sei (V, s) ein regulärer metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei U ein Unterraum von V. Dann gilt:*

(i) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$;

(ii) *Ist s_U regulär, so gilt:*
   (a) $V = U \perp U^\perp$;
   (b) $s_{U^\perp}$ *ist regulär.*

– – – – – Ende Vorlesung 13 (23.05.) – – – – –

Beweis. (i): Sei
$$f : \overline{V} \to \mathrm{Hom}(V, K)$$
mit $v \mapsto \langle -, v\rangle$ die schon im Beweis von Satz 4.18 betrachtete Abbildung. Wir wissen, dass f ein Isomorphismus ist genau dann wenn $\mathrm{Rad}(V) = 0$. Wegen der Regularität von V ist dies der Fall.

Sei U ein Unterraum von V, und sei
$$f' := e_U \circ f : \overline{V} \to \mathrm{Hom}(U, K)$$
wobei $e_U : V^* \to U^*$ die Einschränkungsabbildung ist. Nach Lemma 4.20 ist e_U surjektiv. Also ist auch f' surjektiv.

Wir erhalten
$$\dim \mathrm{Bild}(f') = \dim \mathrm{Hom}(U, K) = \dim(U).$$
Es gilt
$$\mathrm{Kern}(f') = \{v \in \overline{V} \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\} = U^\perp.$$
Dies liefert die Dimensionsformel
$$\dim(\overline{V}) = \dim(V) = \dim \mathrm{Bild}(f') + \dim \mathrm{Kern}(f') = \dim(U) + \dim(U^\perp).$$

(ii) (a): Sei nun U ein Unterraum von V, so dass s_U regulär ist. Es folgt, dass
$$0 = \mathrm{Rad}(U) := U \cap U^\perp.$$
Zusammen mit (i) erhalten wir also $V = U \oplus U^\perp$. Nach Definition von $U^\perp$ folgt dann $V = U \perp U^\perp$.

(ii) (b): Wir wollen zeigen, dass $\mathrm{Rad}(U^\perp) = 0$. Sei $v \in \mathrm{Rad}(U^\perp)$, d.h. $v \perp w$ für alle $w \in U^\perp$. Wegen $v \in U^\perp$ gilt dann auch $v \perp u$ für alle $u \in U$. Wegen $V = U + U^\perp$ folgt dann $\langle v, u + w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle = 0$ für alle $u \in U$ und $w \in U^\perp$, d.h. $v \in \mathrm{Rad}(V) = 0$. □

Korollar 4.22. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei U ein Unterraum von V, so dass s_U regulär ist. Dann gilt*
$$V = U \perp U^\perp.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

4.7. **Isometrien von metrischen Vektorräumen.**

Lemma 4.23. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) metrische Vektorräume bzgl. derselben Involution $\bar{\cdot}$. Angenommen s_V ist regulär. Dann ist jede metrische Abbildung $f\colon V \to W$ injektiv.*

Beweis. Sei $v \neq 0$ in V. Dann gibt es ein $v' \in V$ mit $s_V(v, v') \neq 0$. (Ansonsten hätten wir $v \in \mathrm{Rad}(V)$. Widerspruch.) Es gilt dann

$$s_W(f(v), f(v')) = s_V(v, v') \neq 0.$$

Also haben wir gezeigt, dass $f(v) \neq 0$. □

Proposition 4.24. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) metrische K-Vektorräume bzgl. derselben Involution $\bar{\cdot}\colon K \to K$. Sei $V = V' \oplus \mathrm{Rad}(V)$ und $W = W' \oplus \mathrm{Rad}(W)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $(V, s_V) \cong (W, s_W)$.

(ii) $(V', s_{V'}) \cong (W', s_{W'})$ *und* $\mathrm{Rad}(V) \cong \mathrm{Rad}(W)$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $f\colon V \to W$ eine Isometrie.

Behauptung 1: Durch Einschränkung von f erhalten wir eine Isometrie $\mathrm{Rad}(V) \to \mathrm{Rad}(W)$.

Beweis: Für $v \in V$ gilt $\langle -, v\rangle = 0$ genau dann wenn $\langle -, f(v)\rangle = 0$. (Hier benutzen wir, dass f eine Isometrie ist.)

Sei $\iota_{V'}\colon V' \to V$ die Inklusion, und sei $\pi_{W'}\colon W \to W'$ die Projektion mit Kern $\mathrm{Rad}(W)$. Sei $f' := \pi_{W'} \circ f \circ \iota_{V'}\colon V' \to W'$.

Behauptung 2: f' ist eine Isometrie.

Beweis: Für $i = 1, 2$ sei $v_i \in V'$ und sei $f(v_i) = w_i' + w_i''$ mit $w_i' \in W'$ und $w_i'' \in \mathrm{Rad}(W)$. Es folgt $(\pi_{W'} \circ f)(v_i) = w_i'$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= \langle f(v_1), f(v_2)\rangle = \langle w_1' + w_1'', w_2' + w_2''\rangle \\ &= \langle w_1', w_2'\rangle = \langle (\pi_{W'} \circ f)(v_1), (\pi_{W'} \circ f)(v_2)\rangle = \langle f'(v_1), f'(v_2)\rangle.\end{aligned}$$

(Für die dritte Gleichheit haben wir verwendet, dass $w_i'' \in \mathrm{Rad}(W)$. Für die fünfte Gleichung benutzen wir, dass $\iota_{V'}(v_i) = v_i$.) Also ist f' eine metrische Abbildung.

Da $s_{V'}$ nach Lemma 4.17(iii) regulär ist, ist f' injektiv.

Sei $w' \in W'$. Dann gibt es ein $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in \mathrm{Rad}(V)$ mit $f(v) = f(v') + f(v'') = w'$. Wegen $f(v'') \in \mathrm{Rad}(W)$ gilt dann $f(v'') = 0$ und daher $v'' = 0$. Also ist f' surjektiv.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Die Annahme (ii) impliziert die Existenz von Isometrien $f'\colon V' \to W'$ und $f''\colon \mathrm{Rad}(V) \to \mathrm{Rad}(W)$. (Als Metriken verwenden wir die Einschränkungen von s_V und s_W.) Wir erhalten eine Isometrie $f\colon V \to W$, welche definiert ist durch $v' + v'' \mapsto f'(v') + f''(v'')$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in \mathrm{Rad}(V)$. □

Der folgende Satz liefert ein häufig anwendbares Kriterium für die Isometrie von metrischen Vektorräumen.

Satz 4.25. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) endlich-dimensionale metrische K-Vektorräume bzgl. derselben Involution $\bar{\cdot}\colon K \to K$. Dann sind äquivalent:*

(i) $(V, s_V) \cong (W, s_W)$.

(ii) *Es gibt geordnete Basen B und C von V bzw. W mit*
$$\mathbf{c}_B(s_V) = \mathbf{c}_C(s_W).$$

(iii) *Es gibt geordnete Basen B und C von V bzw. W mit*
$$\mathbf{c}_B(s_V) \equiv \mathbf{c}_C(s_W).$$

(iv) *Für alle geordneten Basen B und C von V bzw. W gilt*
$$\mathbf{c}_B(s_V) \equiv \mathbf{c}_C(s_W).$$

Beweis. Wegen Lemma 4.10 sind (ii), (iii) und (iv) äquivalent.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus, und sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann ist $C := (f(b_1), \ldots, f(b_n))$ eine geordnete Basis von W.

Für alle $v, v' \in V$ gilt
$$s_V(v, v') = \mathbf{c}_B(v)^T \mathbf{c}_B(s_V) \mathbf{c}_B(v')^*,$$
$$s_W(f(v), f(v')) = \mathbf{c}_C(f(v))^T \mathbf{c}_C(s_W) \mathbf{c}_C(f(v'))^*.$$
Hier haben wir Satz 4.5 verwendet.

Nach Konstruktion gilt $\mathbf{c}_C(f(v)) = \mathbf{c}_B(v)$ und $\mathbf{c}_C(f(v')) = \mathbf{c}_B(v')$, d.h.
$$s_W(f(v), f(v')) = \mathbf{c}_B(v)^T \mathbf{c}_C(s_W) \mathbf{c}_B(v')^*.$$

Ist f nun eine Isometrie, so folgt
$$\mathbf{c}_B(v)^T \mathbf{c}_B(s_V) \mathbf{c}_B(v')^* = \mathbf{c}_B(v)^T \mathbf{c}_C(s_W) \mathbf{c}_B(v')^*$$
für alle $v, v' \in V$. Dies impliziert $\mathbf{c}_B(s_V) = \mathbf{c}_C(s_W)$. (Hierfür setzt man in die obige Gleichung $v = b_i$ und $v' = b_j$ für alle $1 \le i, j \le n$ ein.)

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wir nehmen nun an, dass es Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $C = (c_1, \ldots, c_m)$ von V bzw. W gibt mit
$$\mathbf{c}_B(s_V) = \mathbf{c}_C(s_W).$$

Es folgt sofort $m = n$. Wir definieren einen Isomorphismus $f\colon V \to W$ durch $f(b_i) = c_i$ für $1 \le i \le n$. Wie zuvor gilt dann $\mathbf{c}_C(f(v)) = \mathbf{c}_B(v)$ für alle $v \in V$. Wir erhalten

$$\mathbf{c}_B(v)^T \mathbf{c}_B(s_V)\mathbf{c}_B(v')^* = \mathbf{c}_C(f(v))^T \mathbf{c}_C(s_W)\mathbf{c}_C(f(v'))^*$$

und damit $s_V(v, v') = s_W(f(v), f(v'))$ für alle $v, v' \in V$. Mit anderen Worten, f ist eine Isometrie. □

Sei (V, s_V) ein metrischer K-Vektorraum. Die **Isometrieklasse** von (V, s_V) besteht dann aus allen metrischen K-Vektorräumen (W, s_W) mit

$$(V, s_V) \cong (W, s_W).$$

(Dies ist keine Menge, sondern eine *Klasse*. Für die mengentheoretischen Feinheiten verweisen wir auf die Mengenlehre.)

Korollar 4.26. *Sei* $\bar{\cdot}\colon K \to K$ *eine Involution, und sei* V *ein* K*-Vektorraum mit* $\dim(V) = n$. *Sei* B *eine geordnete Basis* B *von* V. *Dann induziert die Abbildung* $(V, s) \mapsto [\mathbf{c}_B(s)]_\equiv$ *eine Bijektion zwischen*

$$\{\textit{Isometrieklassen } n\textit{-dimensionaler metrischer } K\textit{-Vektorräume (bzgl. } \bar{\cdot})\}$$

und

$$\left\{\textit{Kongruenzklassen in } \{A \in K^{n,n} \mid \overline{A} = A^T\}\right\}.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.25 kombiniert mit Lemma 4.10. □

4.8. Isometriegruppen metrischer Vektorräume.

Für einen metrischen Vektorraum (V, s) sei

$$\mathrm{GL}(V, s) := \{f\colon V \to V \mid f \text{ ist eine Isometrie}\}$$

die **Isometriegruppe** von (V, s).

Dies ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$.

Lemma 4.27. *Sei* (V, s) *ein metrischer Vektorraum mit* $\dim(V) = n$, *und sei* $B = (b_1, \ldots, b_n)$ *eine geordnete Basis von* V. *Sei* $f\colon V \to V$ *ein Isomorphismus, und sei* $C := (f(b_1), \ldots, f(b_n))$. *Dann gilt:*

(i) $\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{c}_{B,B}(f)$;

(ii) *Es sind äquivalent:*
   (a) $f \in \mathrm{GL}(V, s)$;
   (b) $\mathbf{c}_B(s) = \mathbf{c}_C(s)$.

Beweis. (i): Für $1 \leq i \leq n$ gilt

$$\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)(e_i) = \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)(\mathbf{c}_C(f(b_i))) = \mathbf{c}_B(f(b_i))$$

und

$$\mathbf{c}_{B,B}(f)(e_i) = \mathbf{c}_{B,B}(f)(\mathbf{c}_B(b_i)) = \mathbf{c}_B(f(b_i)).$$

(ii): Für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$s(b_i, b_j) = e_i^T \mathbf{c}_B(s) e_j \quad \text{und} \quad s(f(b_i), f(b_j)) = e_i^T \mathbf{c}_C(s) e_j.$$

Damit gilt (a) $\iff$ (b). □

Wir wollen zeigen, dass die Isometriegruppen von metrischen Vektorräumen isomorph zu gewissen Matrixgruppen sind.

– – – – – Ende Vorlesung 14 (27.05.) – – – – –

Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Für eine geordnete Basis B von V sei

$$\mathrm{GL}_n(K, \mathbf{c}_B(s)) := \left\{ A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^T \mathbf{c}_B(s) A^* = \mathbf{c}_B(s) \right\}.$$

Man zeigt dann leicht, dass $\mathrm{GL}_n(K, \mathbf{c}_B(s))$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Satz 4.28. *Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei B eine geordnete Basis von V. Der Gruppenisomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V) &\to \mathrm{GL}_n(K) \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f) \end{aligned}$$

induziert via Einschränkung einen Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}(V, s) \to \mathrm{GL}_n(K, \mathbf{c}_B(s)).$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass für $f \in \mathrm{GL}(V)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f \in \mathrm{GL}(V, s)$;
(ii) $\mathbf{c}_{B,B}(f)^T \mathbf{c}_B(s) \mathbf{c}_{B,B}(f)^* = \mathbf{c}_B(s)$.

Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$, und sei $f \in \mathrm{GL}(V)$. Setze $C := (f(b_1), \ldots, f(b_n))$. Wir benutzen Lemma 4.27(i) und erhalten $\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{c}_{B,B}(f)$. Es gilt

$$\mathbf{c}_C(s) = \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^T \mathbf{c}_B(s) \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^*.$$

Nach Lemma 4.27(ii) ist f eine Isometrie genau dann wenn $\mathbf{c}_B(s) = \mathbf{c}_C(s)$. Damit folgt die Behauptung. □

4.9. **Isometriegruppen und Radikale metrischer Vektorräume.** Sei (V,s) ein metrischer Vektorraum mit $\dim(V)=n$, und sei

$$V = U \perp \mathrm{Rad}(V).$$

Wir wissen durch Lemma 4.17, dass s_U regulär ist.

Behauptung: Für eine Beschreibung der Isometriegruppe $\mathrm{GL}(V,s)$ reicht es, die Isometriegruppe $\mathrm{GL}(U,s_U)$ zu kennen.

Dazu sei $B=(b_1,\dots,b_n)$ eine geordnete Basis von V, so dass $B_U := (b_1,\dots,b_r)$ eine geordnete Basis von U und $(b_{r+1},\dots,b_n)$ eine geordnete Basis von $\mathrm{Rad}(V)$ ist. Wir wissen, dass

$$\mathrm{GL}(V,s) \cong \mathrm{GL}_n(K,\mathbf{c}_B(s)) \quad \text{und} \quad \mathrm{GL}(U,s_U) \cong \mathrm{GL}_n(K,\mathbf{c}_{B_U}(s_U)).$$

Lemma 4.29. *Die Isometriegruppe $\mathrm{GL}_n(K,\mathbf{c}_B(s))$ besteht aus allen Matrizen der Form*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

mit $A \in \mathrm{GL}_r(K,\mathbf{c}_{B_U}(s_U))$, $C \in K^{n-r,r}$, $D \in \mathrm{GL}_{n-r}(K)$.

Beweis. Sei

$$P := \mathbf{c}_{B_U}(s_U) \in K^{r,r}.$$

Es gilt also

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann besteht $\mathrm{GL}_n(K,\mathbf{c}_B(s))$ aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K)$$

mit $A \in K^{r,r}$ und $D \in K^{n-r,n-r}$, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^TPA^* & A^TPB^* \\ B^TPA^* & B^TPB^* \end{pmatrix}.$$

Da s_U ist regulär ist, ist P invertierbar. Aus $P = A^TPA^*$ folgt nun, dass A injektiv und surjektiv und damit ebenfalls invertierbar ist. Nun impliziert die Gleichung $0 = A^TPB^*$, dass $B=0$ gilt. Da

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

invertierbar ist mit $B=0$, wissen wir, dass D invertierbar sein muss. □

Wir können das obige Ergebnis auch matrizenfrei formulieren: Hierzu muss man zuerst zeigen, dass für eine direkte Summe $V = V_1 \oplus V_2$ jedes $f \in \mathrm{End}(V)$ als (eindeutig durch f bestimmte) Matrix

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann mit $f_{ij} \in \mathrm{Hom}(V_i, V_j)$ für $1 \leq i, j \leq 2$. Die Komposition von Endomorphismen in $\mathrm{End}(V)$ entspricht dann der Multiplikation solcher Matrizen, i.e.

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} \circ g_{11} + f_{12} \circ g_{21} & f_{11} \circ g_{12} + f_{12} \circ g_{22} \\ f_{21} \circ g_{11} + f_{22} \circ g_{21} & f_{21} \circ g_{12} + f_{22} \circ g_{22} \end{pmatrix}.$$

Zurück zu (V, s). Wir verwenden nun die direkte Summe $V = U \perp \mathrm{Rad}(V)$.

Die Isometriegruppe $\mathrm{GL}(V, s)$ besteht dann nach dem oben gezeigten aus allen Endomorphismen

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(V),$$

so dass gilt

$$f_{11} \in \mathrm{GL}(U, s_U), \quad f_{12} = 0, \quad f_{21} \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Rad}(V)), \quad f_{22} \in \mathrm{GL}(\mathrm{Rad}(V)).$$

4.10. **Beispiele von Isometriegruppen.**

4.10.1. *Triviale metrische Vektorräume.* Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum mit $s = 0$. Dann gilt $\mathbf{c}_B(s) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V, s) \cong \mathrm{GL}_n(K, 0) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^T 0 A^* = 0\} \\ &= \mathrm{GL}_n(K). \end{aligned}$$

Dann ist $\mathrm{GL}_n(K)$ die **allgemeine lineare Gruppe** vom Grad n.

4.10.2. *Euklidische Vektorräume.* Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Nach Satz 3.26 hat V ein Orthonormalbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Es gilt dann also

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1: & \text{falls } i = j, \\ 0: & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit anderen Worten,

$$\mathbf{c}_B(s) = E_n.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V, s) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}, E_n) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A^* = E_n\} \\ &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = E_n\} \\ &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\} \\ &= \mathrm{O}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Man nennt $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ die **orthogonale Gruppe** vom Grad n.

Die Beispiele $\mathrm{O}_1(\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ haben wir bereits in Abschnitt 3.12 ausführlich diskutiert.

4.10.3. *Unitäre Vektorräume.* Sei (V, s) ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Die zugehörige Involution von $\mathbb{C}$ ist dann nach Definition die komplexe Konjugation. Wie schon im euklidischen Fall liefert Satz 3.26 eine Orthonormalbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V, und wir erhalten

$$\mathbf{c}_B(s) = E_n.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(V, s) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}, E_n) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^T A^* = E_n\} \\
&= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^T \overline{A} = E_n\} \\
&= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\} \\
&= \mathrm{U}_n(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Man nennt $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ die **unitäre Gruppe** vom Grad n.

Das Beispiel $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ haben wir bereits in Abschnitt 3.12 diskutiert.

4.10.4. Sei (V, s) ein metrischer K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Angenommen es gibt eine Orthonormalbasis B von V. Es gilt dann $\mathbf{c}_B(s) = E_n$ und daher auch $\overline{1} = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(V, s) \cong \mathrm{GL}_n(K, E_n) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^T A^* = E_n\} \\
&= \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^T \overline{A} = E_n\} \\
&= \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}.
\end{aligned}$$

Dies verallgemeiert den Fall von euklidischen und unitären Vektorräumen.

4.10.5. Seien $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$, $V = K^2$, und $s = s_A \colon V \times V \to K$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist s eine Metrik vom Typ (S). Es gilt

$$\mathrm{GL}(V, s) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K) \mid ab = cd,\ a^2 - c^2 = 1 = d^2 - b^2 \right\}.$$

4.10.6. Seien $1+1\neq 0$, $\bar{\cdot}=\mathrm{id}_K$, $V=K^2$, und $s=s_A\colon V\times V\to K$, wobei
$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$
Dann ist s eine Metrik vom Typ (S). Es gilt
$$\mathrm{GL}(V,s)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(K)\mid ad+bc=1,\ ac=0=bd\right\}.$$
Diese Isometriegruppe ist isomorph zur Isometriegruppe im vorherigen Abschnitt 4.10.5, da
$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

4.10.7. Seien $\bar{\cdot}=-\mathrm{id}_K$, $V=K^2$, und $s=s_A\colon V\times V\to K$, wobei
$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$
Dann ist s eine Metrik vom Typ (SS). Es gilt
$$\mathrm{GL}(V,s)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(K)\mid\det(A)=1\right\}=\mathrm{SL}_2(K).$$

4.11. **Hyperbolische Ebenen.** Sei (V,s) ein metrischer Vektorraum.

$v\in V$ ist **isotrop**, falls $\langle v,v\rangle=0$. Andernfalls ist v **anisotrop**.

Ein Unterraum $U\subseteq V$ heißt **isotrop**, falls es einen isotropen Vektor $u\in U$ mit $u\neq 0$ gibt. Andernfalls ist U **anisotrop**.

Der Unterraum U ist **total isotrop**, falls jedes $u\in U$ isotrop ist.

Beispiele:

(i) Der Unterraum $\mathrm{Rad}(V)$ ist total isotrop.

(ii) Sei $v\in V$ isotrop. Dann ist $\mathrm{Lin}(v)$ total isotrop.

Sei (V,s) ein metrischer Vektorraum, und seien $v,w\in V$. Dann ist
$$H(v,w):=\mathrm{Lin}(v,w)$$
eine **hyperbolische Ebene**, falls gilt

(i) v und w sind isotrop;

(ii) $\langle v,w\rangle=1$.

In diesem Fall nennen wir den metrischen Vektorraum (H,s_H) ebenfalls **hyperbolische Ebene**.

Für eine hyperbolische Ebene $H = H(v, w)$ gilt $\dim(H) = 2$. Außerdem ist $B = (v, w)$ ein geordnete Basis von H. Es gilt dann

$$\mathbf{c}_B(s_H) = \begin{pmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \overline{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist invertierbar, d.h. s_H ist regulär.

Lemma 4.30. *Seien (H, s_H) und $(H', s_{H'})$ hyperbolische Ebenen (über demselben Körper K mit derselben Involution $\bar{\cdot}$). Dann sind (H, s_H) und $(H', s_{H'})$ isometrisch.*

Beweis. Für jede hyperbolische Ebene H gibt es eine geordnete Basis B von H, so dass

$$\mathbf{c}_B(s_H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \overline{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun folge die Aussage aus Satz 4.25. □

Beispiel: Sei $K = \mathbb{R}$ mit Involution $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$, und sei $V = \mathbb{R}^2$. Sei

$$s = s_A \colon V \times V \to K$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (V, s) ein regulärer symmetrischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

in V gilt

$$\langle v, v\rangle = v_1^2 - v_2^2.$$

Für $r \in \mathbb{R}$ sei

$$H_r := \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = r\}.$$

Für $r \neq 0$ ist H_r eine Hyperbel, und H_0 ist die Vereinigung der beiden Winkelhalbierenden.

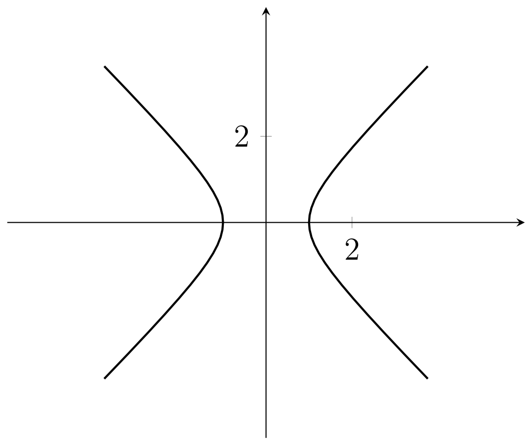

FIGURE 12. Hyperbel H_r für $r = 1$.

Für die geordnete Standardbasis $E = (e_1, e_2)$ von V gilt

$$\mathbf{c}_E(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun

$$b_1 := \frac{1}{2}(e_1 + e_2) \quad \text{und} \quad b_2 := e_1 - e_2.$$

Dann ist $B = (b_1, b_2)$ eine geordnete Basis von V mit

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zudem gilt

$$\langle b_1, b_1 \rangle = \langle b_2, b_2 \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle b_1, b_2 \rangle = 1.$$

Also ist V eine hyperbolische Ebene.

Sei $U := \mathrm{Lin}(b_1)$. Dann gilt:

(i) (U, s_U) ist nicht regulär.
(ii) $\mathrm{Rad}(U) = U = U^\perp$;
(iii) $V \neq U + U^\perp$.

4.12. **Koordinaten über Koordinaten – Ein Überblick.**

4.12.1. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, und seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Bases von V bzw. W.

Die **Koordinatenabbildung**

$$\mathbf{c}_B \colon V \to K^n$$

schickt einen Vektor $v = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ aus V (wobei $a_1, \ldots, a_n \in K$) auf seinen **Koordinatenvektor**

$$\mathbf{c}_B(v) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis B.

Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $1 \leq i \leq n$ ist die i-te Spalte der **Koordinatenmatrix**

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) \in K^{m,n}$$

definiert als $\mathbf{c}_C(f(b_i))$.

Für $v \in V$ gilt

$$\mathbf{c}_{B,C}(f)(\mathbf{c}_B(v)) = \mathbf{c}_C(f(v)).$$

Die Abbildung

$$\operatorname{Hom}(V, W) \xrightarrow{\mathbf{c}_{B,C}(-)} K^{m,n}$$

ist ein Isomorphismus.

Seien B und B' Basen von V. Dann ist

$$\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V) \in K^{n,n}$$

die **Basiswechselmatrix** von B' nach B.

Für $v \in V$ gilt

$$\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V)(\mathbf{c}_{B'}(v)) = \mathbf{c}_B(v).$$

Es gilt $\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}_n(K)$ und

$$\mathbf{c}_{B,B'}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V)^{-1}.$$

Für jede Basis B von V gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &= \{\mathbf{c}_{B,B'}(\mathrm{id}_V) \mid B' \text{ ist eine Basis von } V\} \\ &= \{\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V) \mid B' \text{ ist eine Basis von } V\}. \end{aligned}$$

Seien B und B' Basen von V, und seien C und C' Basen von W. Die **Basiswechselformel** lautet

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f) = \mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_W)\mathbf{c}_{B,C}(f)\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V).$$

Dies führt zum Begriff **Äquivalenz** von Matrizen in $K^{m,n}$:

Seien $A, B \in K^{m,n}$. Dann gilt $A \sim B$, falls es $T \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = T^{-1}AS.$$

4.12.2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, seien B und C Basen von V, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

Die **Basiswechselformel** lautet

$$\mathbf{c}_{C,C}(f) = \mathbf{c}_{B,C}(\mathrm{id}_V)\mathbf{c}_{B,B}(f)\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^{-1}\mathbf{c}_{B,B}(f)\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V).$$

Dies führt zum Begriff **Ähnlichkeit** von Matrizen in $K^{n,n}$:

Seien $A, B \in K^{n,n}$. Dann gilt $A \approx B$, falls es ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = S^{-1}AS.$$

4.12.3. Sei $\bar{\cdot}\colon K \to K$ eine Involution, und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und seien B und C Basen von V.

Sei $s\colon V \times V \to K$ eine Metrik. (In der Definition wird dabei die obige Involution verwendet.) Dann ist die **Koordinatenmatrix**

$$\mathbf{c}_B(s) := (a_{ij}) \in K^{n,n}$$

definiert durch

$$a_{ij} := s(b_i, b_j).$$

Für $v, v' \in V$ gilt

$$s(v, v') = \mathbf{c}_B(v)^T\mathbf{c}_B(s)\mathbf{c}_B(v')^*.$$

Für jede Basis B ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\{s \in \mathrm{Abb}(V \times V, K) \mid s \text{ ist eine Metrik}\} &\to \{A \in K^{n,n} \mid A^T = \overline{A}\}\\ s &\mapsto \mathbf{c}_B(s)\end{aligned}$$

eine Bijektion.

Die Metrik s ist regulär genau dann wenn $\mathbf{c}_B(s) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Die **Basiswechselformel** lautet
$$\mathbf{c}_C(s) = \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^T \mathbf{c}_B(s) \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^*.$$

Dies führt zum Begriff **Kongruenz** von Matrizen in $\{A \in K^{n,n} \mid A^T = \overline{A}\}$:

Seien $A, B \in K^{n,n}$, wobei wir $A^T = \overline{A}$ und $B^T = \overline{B}$ annehmen. Dann gilt $A \equiv B$, falls es ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit
$$B = S^T A S^*.$$

4.12.4.

Im folgenden kommutativen Diagramm stehen die vertikalen Pfeile für Inklusionen. Alle horizontalen Pfeile sind Isomorphismen (von K-Algebren bzw. von Gruppen).

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(V) \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,B}(-)"] & K^{n,n} \\
\mathrm{GL}(V) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{GL}_n(K) \arrow[u] \\
\mathrm{GL}(V,s) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{GL}_n(K, \mathbf{c}_B(s)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Nach Definition gilt
$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(V,s) &:= \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid s(f(v), f(w)) = s(v,w) \text{ für alle } v, w \in V\}, \\
\mathrm{GL}_n(K, \mathbf{c}_B(s)) &:= \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^T \mathbf{c}_B(s) A^* = \mathbf{c}_B(s)\}.
\end{aligned}$$

Dies sind die **Isometriegruppen** der metrischen Vektorräume (V, s) bzw. (K^n, s_A), wobei $A := \mathbf{c}_B(s)$.

4.12.5.

Normalformenproblem für Endomorphismen f, i.e. finde eine Basis B, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(f)$ eine einfache Form hat.

Antworten und Teilantworten: Diagonalisierbarkeit, Jordan-Normalform, Smith-Normalform, Frobenius-Normalform, Weierstraß-Normalform.

Normalformenproblem für Metriken s, i.e. finde eine Basis B, so dass $\mathbf{c}_B(s)$ eine einfache Form hat.

Vollständige Antworten gibt es für euklidische, unitäre und symplektische Vektorräume. Für symmetrische Vektorräume gibt es Teilantworten.

Ein weiteres wichtiges Problem ist die Beschreibung der Isometriegruppen $\mathrm{GL}(V,s) \cong \mathrm{GL}_n(K, \mathbf{c}_B(s))$. Dabei hilft es, wenn $\mathbf{c}_B(s)$ möglichst einfach ist.

4.13. **Übungsaufgaben.**

4.13.1. Sei (V,s) ein metrischer Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V. Zeigen Sie:

(i) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
(ii) Aus $U \subseteq W$ folgt $W^\perp \subseteq U^\perp$.

4.13.2. Sei (V,s) ein n-dimensionaler metrischer Vektorraum, und sei B eine geordnete Basis von V. Zeigen Sie: Es gilt

$$\mathrm{Rad}(V) = \mathbf{c}_B^{-1}\left(\mathrm{Kern}(\mathbf{c}_B(s)^T)\right),$$

wobei $\mathbf{c}_B \colon V \to K^n$ die Koordinatenabbildung ist. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass i. Allg.

$$\mathrm{Rad}(V) \neq \mathbf{c}_B^{-1}\left(\mathrm{Kern}(\mathbf{c}_B(s))\right).$$

4.13.3. Seien $A \in \mathrm{GL}_r(K)$ und $A' \in \mathrm{GL}_s(K)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $A \equiv A'$;
(ii) Es gilt
$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
wobei wir annehmen, dass beide Matrizen in $K^{n,n}$ sind.

In diesem Fall gilt $r = s$.

4.13.4. Sei $A \in K^{n,n}$ symmetrisch oder schiefsymmetrisch. Zeigen Sie: Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$S^T A S = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $A' \in \mathrm{GL}_r(K)$ mit $r = \mathrm{Rang}(A)$.

4.13.5. Sei $s\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(v, w) \mapsto 3v_1w_2 + 4v_1w_3 - 3v_2w_1 - v_2w_3 - 4v_3w_1 + v_3w_2.$$

(i) Zeigen Sie, dass s bezüglich einer geeigneten Involution eine Metrik ist.
(ii) Zu welchem der Typen (H), (S), (SH), (SS) gehört s?
(iii) Berechnen Sie die Koordinatenmatrizen $\mathbf{c}_B(s)$ und $\mathbf{c}_C(s)$ und die zugehörige Basiswechselmatrix, wobei

$$B = (e_1, e_2, e_3) \qquad \text{und} \qquad C = (e_3, e_2, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}).$$

5. Symplektische Vektorräume

5.1. Klassifikation symplektischer Vektorräume.

Sei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein **symplektischer K-Vektorraum** (auch **schiefsymmetrischer K-Vektorraum** genannt), d.h. (V, s) ist ein metrischer K-Vektorraum vom Typ (SS) mit der zusätzlichen Annahme $1+1 \neq 0$.

Es gilt also $\bar{\cdot} = -\mathrm{id}_K$ und

$$\langle v, w\rangle = -\langle w, v\rangle$$

für alle $v, w \in V$. Insbesondere ist s eine schiefsymmetrische Bilinearform, siehe Lemma 4.4.

Lemma 5.1. *Sei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein symplektischer K-Vektorraum. Dann gilt*

$$\langle v, v\rangle = 0$$

für alle $v \in V$.

Beweis. Für $v \in V$ gilt

$$\langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle,$$

weil s symplektisch ist. Es folgt $2\langle v, v\rangle = 0$. Da $2 = 1 + 1 \neq 0$ folgt dann $\langle v, v\rangle = 0$. □

Satz 5.2. *Sei* $1+1 \neq 0$ *in* K, *und sei* (V, s) *ein* n-*dimensionaler symplektischer* K-*Vektorraum. Dann gilt:*

(i) *Es gibt* $m, r \geq 0$ *mit* $n = 2m + r$ *und eine orthogonale Zerlegung*

$$V = H_1 \perp \cdots \perp H_m \perp R_1 \perp \cdots \perp R_r$$

wobei die H_i *hyperbolische Ebenen und die* R_j *isotrope Geraden sind.*

(ii) *Es gibt eine geordnete Basis* B *von* V, *so dass*

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n,n}.$$

(iii) *Es gilt*

$$\mathrm{Rad}(V) = R_1 \perp \cdots \perp R_r.$$

(iv) *Für endlich-dimensionale symplektische* K-*Vektorräume* (V, s_V) *und* (W, s_W) *sind äquivalent:*

(a) (V, s_V) *und* (W, s_W) *sind isometrisch;*

(b) $\dim(V) = \dim(W)$ *und* $\dim \mathrm{Rad}(V) = \dim \mathrm{Rad}(W)$.

Beweis. (i): Sei U ein orthogonal unzerlegbarer Unterraum von V.

1. Fall: $s_U = 0$. Falls nun $U = U_1 \oplus U_2$, so folgt sofort $U = U_1 \perp U_2$. Da U aber orthogonal unzerlegbar ist, gilt demnach $\dim(U) = 1$.

2. Fall: $s_U \neq 0$. Dann gibt es Vektoren $v', w \in U$ mit

$$\langle v', w \rangle = \lambda \neq 0.$$

Für $v := \lambda^{-1} v'$ gilt dann

$$\langle v, w \rangle = \langle \lambda^{-1} v', w \rangle = \lambda^{-1} \langle v', w \rangle = 1.$$

Beide Vektoren v und w sind isotrop, da (V, s) symplektisch ist, siehe Lemma 5.1. Der metrische Vektorraum (U, s_U) ist regulär, da ansonsten eine Zerlegung

$$U = U' \perp \mathrm{Rad}(U)$$

existiert mit $U' \neq 0$ und $\mathrm{Rad}(U) \neq 0$, ein Widerspruch zur orthogonalen Unzerlegbarkeit von U. Der Unterraum $H := \mathrm{Lin}(v, w)$ von U ist eine hyperbolische Ebene. Insbesondere ist (H, s_H) regulär. Nach Satz 4.21 gilt

$$U = H \perp H^{\perp}.$$

Die orthogonale Unzerlegbarkeit impliziert nun $U = H$.

Sei nun

$$V = U_1 \perp \cdots \perp U_t$$

eine orthogonale Zerlegung mit orthogonal unzerlegbaren Unterräumen U_i. (Eine solche Zerlegung existiert nach Lemma 4.13.) Ist $s_{U_i} = 0$, so gilt $\dim(U_i) = 1$ und U_i ist eine isotrope Gerade. Für $s_{U_i} \neq 0$ ist U_i wie oben bewiesen eine hyperbolische Ebene. Damit ist (i) bewiesen.

(ii): Sei
$$V = H_1 \perp \cdots \perp H_m \perp R_1 \perp \cdots \perp R_r$$
die orthogonale Zerlegung von (i). Für $1 \leq i \leq m$ sei $B_i = (b_i, c_i)$ eine geordnete Basis von H_i mit $\langle b_i, b_i \rangle = \langle c_i, c_i \rangle = 0$ und $\langle b_i, c_i \rangle = 1$. Eine solche Basis existiert nach dem obigen Beweis von (i). Es gilt dann $\langle c_i, b_i \rangle = -1$. Für $1 \leq k \leq r$ wähle ein $0 \neq d_k \in R_k$. Setze
$$B := (b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_r).$$
Dann ist $\mathbf{c}_B(s)$ von der geforderten Form. Dies beweist (ii).

(iii): Es gilt offenbar $R_1 \perp \cdots \perp R_r \subseteq \mathrm{Rad}(V)$. Wegen
$$\mathrm{Rad}(V) \cong \mathrm{Kern}(\mathbf{c}_B(s)^T)$$
und $\mathrm{Rang}(\mathbf{c}_B(s)^T) = 2m$ gilt dann $R_1 \perp \cdots \perp R_r = \mathrm{Rad}(V)$. Damit ist (iii) bewiesen.

(iv): Dies folgt aus (ii), (iii) und Satz 4.25. □

Die Matrix in Satz 5.2(ii) ist die **symplektische Normalform** der Metrik s.

Für eine schiefsymmetrische Matrix $A \in K^{n,n}$ ist die **symplektische Normalform** von A nach Definition die symplektische Normalform der Metrik s_A. (Hier nehmen wir ebenfalls $1 + 1 \neq 0$ an.)

Korollar 5.3. *Sei (V, s) ein n-dimensionaler regulärer symplektischer Vektorraum. Dann ist n gerade.*

– – – – – **Ende Vorlesung 15 (30.05.)** – – – – –

5.2. **Isometriegruppen symplektischer Vektorräume.**

Sei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein regulärer symplektischer K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. In diesem Fall ist
$$\mathrm{Sp}(V, s) := \mathrm{GL}(V, s)$$
eine **symplektische Gruppe**.

Nach Satz 5.2(ii) ist n gerade, und es gibt eine geordnete Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V mit
$$\mathbf{c}_B(s) = I_n := \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}$$
wobei $m = n/2$.

Man nennt $\mathrm{Sp}_n(K) := \mathrm{GL}_n(K, I_n)$ die **symplektische Gruppe** vom Grad n über K.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(V,s) \cong \mathrm{Sp}_n(K) &= \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^T I_n A^* = I_n\}\\ &= \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A^T I_n A = I_n\}.\end{aligned}$$

Beispiel: Für $n = 2$ ergibt eine einfache Rechnung, dass

$$\mathrm{Sp}_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2,2} \mid ad - bc = 1 \right\} = \mathrm{SL}_2(K).$$

5.3. **Übungsaufgaben.**

5.3.1. Sei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein endlich-dimensionaler symplektischer K-Vektorraum. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher die symplektische Normalform von s berechnet.

5.3.2. Sei $1+1 \neq 0$ in K, und sei $A \in K^{n,n}$ eine schiefsymmetrische Matrix. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ berechnet, so dass

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Es gilt dann automatisch $\mathrm{Rang}(A) = 2m$.)

5.3.3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Finden Sie ein $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass $S^T A S$ die symplektische Normalform von A ist.

6. **Symmetrische Vektorräume**

6.1. **Orthogonalbasen für symmetrische Vektorräume.**

Sei (V, s) ein **symmetrischer K-Vektorraum**, d.h. (V, s) ist ein metrischer K-Vektorraum vom Typ (S).

Es gilt also $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$ und

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$. Insbesondere ist s eine symmetrische Bilinearform, siehe Lemma 4.4.

Für einen regulären symmetrischen Vektorraum (V, s) sei

$$\mathrm{O}(V, s) := \mathrm{GL}(V, s).$$

Wir nennen $\mathrm{O}(V, s)$ eine **orthogonale Gruppe**.

Lemma 6.1. *Sei $1 + 1 \neq 0$, und sei (V, s) ein symmetrischer K-Vektorraum mit $s \neq 0$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\langle v, v\rangle \neq 0$,*

Beweis. Angenommen $\langle v, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Für $v, w \in V$ gilt dann

$$0 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle.$$

Wegen $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle = 0$ und der Symmetrie von s folgt

$$2\langle v, w\rangle = 0.$$

Da $1+1 \neq 0$, erhalten wir $\langle v, w\rangle = 0$. Mit anderen Worten, $s = 0$. Widerspruch. □

Satz 6.2. *Sei $1+1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein n-dimensionaler symmetrischer K-Vektorraum. Dann gilt:*

(i) *Es gibt $m, r \geq 0$ mit $n = m + r$ und eine orthogonale Zerlegung*
$$V = U_1 \perp \cdots \perp U_m \perp R_1 \perp \cdots \perp R_r$$
wobei die U_i anisotrope Geraden und die R_j isotrope Geraden sind.

(ii) *Es gibt eine geordnete Orthogonalbasis B von V, so dass*
$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$
mit $a_i \in K^\times$ für alle $1 \leq i \leq m$.

(iii) *Es gilt*
$$\mathrm{Rad}(V) = R_1 \perp \cdots \perp R_r.$$

Beweis. (i): Sei U ein orthogonal unzerlegbarer Unterraum von V.

1. Fall: $s_U = 0$. Wie im Beweis von Satz 5.2 zeigt man, dass dann $\dim(U) = 1$ gilt.

2. Fall: $s_U \neq 0$. Es gilt $U = U' \perp \mathrm{Rad}(U)$ für einen geeigneten Unterraum U' von V. Da U orthogonal unzerlegbar ist, und da $s_U \neq 0$ gilt, folgt $U = U'$. Insbesondere ist s_U regulär nach Lemma 4.17. Nach Lemma 6.1 gibt es ein $u \in U$ mit $\langle u, u\rangle \neq 0$.

Sei $W := \mathrm{Lin}(u)$. Dann ist (W, s_W) regulär. Satz 4.21 impliziert nun

$$U = W \perp W^\perp.$$

Da U orthogonal unzerlegbar ist, folgt $W^\perp = 0$ und damit $U = W$ und $\dim(U) = 1$.

Sei nun

$$V = U_1 \perp \cdots \perp U_t$$

eine orthogonale Zerlegung mit orthogonal unzerlegbaren Unterräumen U_i, siehe Lemma 4.13. Ist $s_{U_i} = 0$, so ist U_i isotrop und $\dim(U_i) = 1$. Für $s_{U_i} \neq 0$ ist U_i anisotrop und $\dim(U_i) = 1$. Also ist (i) bewiesen.

(ii): Sei

$$V = U_1 \perp \cdots \perp U_m \perp R_1 \perp \cdots \perp R_r$$

eine orthogonale Zerlegung wie in (i). Für $1 \leq i \leq m$ wähle ein $0 \neq b_i \in U_i$, und für $1 \leq j \leq r$ sei $0 \neq c_j \in R_j$. Setze

$$B := (b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_r).$$

Dann ist $\mathbf{c}_B(s)$ von der gewünschten Form.

(iii): Es gilt offenbar $R_1 \perp \cdots \perp R_r \subseteq \mathrm{Rad}(V)$. Wegen

$$\mathrm{Rad}(V) \cong \mathrm{Kern}(\mathbf{c}_B(s)^T)$$

und $\mathrm{Rang}(\mathbf{c}_B(s)^T) = m$ folgt dann $R_1 \perp \cdots \perp R_r = \mathrm{Rad}(V)$. □

Beispiel: Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 6.2 nur unter der Voraussetzung $1 + 1 \neq 0$ gilt. Angenommen $\mathrm{char}(K) = 2$, i.e. $1 + 1 = 0$ in K. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Für

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in K^2$$

gilt dann

$$s_A(v, v) = v^T A v = 2v_1v_2 = 0.$$

(Die dritte Gleichheit gilt wegen $2 := 1 + 1 = 0$.) Es folgt, dass es keine OGB von K^2 gibt. (Angenommen $B = (b_1, b_2)$ ist eine OGB von K^2. Dann gilt

$$\mathbf{c}_B(s_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $s_A \neq 0$.)

Bemerkung: Lemma 6.1 liefert einen Algorithmus, welcher in der Situation von Satz 6.2 eine Orthogonalbasis von V berechnet. Für $s = 0$ ist jede Basis eine Orthogonalbasis. Andernfalls wählt man ein $b_1 \in V$ mit $\langle b_1, b_1\rangle \neq 0$. Dann gilt

$$V = \operatorname{Lin}(b_1) \perp \operatorname{Lin}(b_1)^{\perp}.$$

(Man spaltet das Radikal ab und verwendet dann den Zerlegungssatz für reguläre Matriken.) Nun fährt man induktiv fort.

Bemerkung: Im Gegensatz zu symplektischen Vektorräumen (vgl. Satz 5.2(iii)) gestaltet sich die Klassifikation von symmetrischen Vektorräumen bis auf Isometrie schwierig. Wir werden hier nur einige Fälle behandeln können. Zum Beispiel erhalten wir für $K = \mathbb{R}$ eine vollständige Antwort.

Eine Umformulierung des Klassifikationsproblems für endlich-dimensionale symmetrische Vektorräume lautet unter Zuhilfenahme von Satz 6.2 wie folgt:

Problem 6.3. *Sei K ein Körper, und seien*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrizen in $K^{n,n}$. Wann gilt

$$A \equiv B\ ?$$

Mit anderen Worten, wann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$B = S^T A S\ ?$$

6.2. **Spezialfall: K quadratisch abgeschlossen.**

Ein Körper K ist **quadratisch abgeschlossen**, falls

$$K = \{a^2 \mid a \in K\}.$$

Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn alle Polynome der Form $X^2 - b$ mit $b \in K$ über K in Linearfaktoren zerfallen.

Beispiele:

(i) Alle algebraisch abgeschlossenen Körper sind auch quadratisch abgechlossen.

(ii) $K = \mathbb{F}_2$ ist quadratisch abgeschlossen.

(iii) $K = \mathbb{F}_3$ ist nicht quadratisch abgeschlossen, da in diesem Fall

$$\{a^2 \mid a \in K\} = \{0^2, 1^2, 2^2\} = \{0, 1\}$$

gilt.

(iv) $K = \mathbb{R}$ ist nicht quadratisch abgeschlossen, da in diesem Fall

$$\{a^2 \mid a \in \mathbb{R}\} = \{b \in \mathbb{R} \mid b \geq 0\}$$

gilt.

Sei nun $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein n-dimensionaler symmetrischer K-Vektorraum. Nach Satz 6.2 gibt es eine geordnete Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V mit

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

wobei $a_i \in K^\times$ für $1 \leq i \leq m$.

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass K quadratisch abgeschlossen ist. Dann gibt es für jedes $1 \leq i \leq m$ ein $d_i \in K$ mit $d_i^2 = a_i$. Setze nun

$$C := (c_1, \ldots, c_n) := (d_1^{-1} b_1, \ldots, d_m^{-1} b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n).$$

Dann gilt

$$\langle c_i, c_i \rangle = \begin{cases} \langle d_i^{-1} b_i, d_i^{-1} b_i \rangle = (d_i^{-1})^2 a_i = 1 & : \text{ falls } 1 \leq i \leq m, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Ferner gilt $\langle c_i, c_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$. Wir erhalten

$$\mathbf{c}_C(s) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n,n}.$$

Dies beweist dann zugleich den folgenden Klassifikationssatz.

Satz 6.4. *Sei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei K quadratisch abgeschlossen. Seien (V, s_V) und (W, s_W) endlich-dimensionale symmetrische K-Vektorräume. Dann sind äquivalent:*

(i) $(V, s_V) \cong (W, s_W)$;

(ii) $\dim(V) = \dim(W)$ *und* $\dim \operatorname{Rad}(V) = \dim \operatorname{Rad}(W)$.

Korollar 6.5. *Sei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei K quadratisch abgeschlossen. Sei (V, s) ein n-dimensionaler regulärer symmetrischer K-Vektorraum. Dann hat (V, s) eine Orthonormalbasis.*

An dieser Stelle sehen wir, welch große Rolle der Körper K bei der Untersuchung von symmetrischen Vektorräumen spielt. Hier führt der Weg direkt in die Zahlentheorie.

– – – – – Ende Vorlesung 16 (03.06.) – – – – –

6.3. **Wittscher Kürzungssatz.** Sei $1+1 \neq 0$ in K, und sei (V,s) ein regulärer symmetrischer Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Für $A, B \in K^{n,n}$ gilt dann $A \equiv B$ genau dann wenn es ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit

$$B = S^T A S.$$

Für $i = 1,2$ und $n_i \geq 1$ mit $n_1 + n_2 = n$ seien $A_i, B_i \in K^{n_i,n_i}$ mit $A_1 \equiv B_1$ und $A_2 \equiv B_2$. Dann folgt sofort, dass

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Der Wittsche Kürzungssatz befasst sich in gewissem Sinne mit der umgekehrten (schwierigeren) Fragestellung.

Lemma 6.6. *Seien*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

kongruente Diagonalmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ *mit* $a \in K^\times$. *Dann sind* A *und* B *kongruent.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Matrix

$$S = \begin{pmatrix} c & v^T \\ u & C \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K)$$

mit $c \in K$, $u, v \in K^{n-1}$ und $C \in K^{n-1,n-1}$, so dass

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} S.$$

Es gilt dann

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 a + u^T A u & cav^T + u^T A C \\ cav + C^T A u & avv^T + C^T A C \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten daraus

$$(1-c^2)a = u^T A u, \qquad -cav = C^T A u, \qquad C^T A C = B - avv^T.$$

Gesucht ist eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ mit $P^T A P = B$. Unser Ansatz für P ist

$$P := C + Q$$

für ein $Q \in K^{n-1,n-1}$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} P^T A P &= C^T A C + C^T A Q + Q^T A C + Q^T A Q \\ &= B - avv^T + C^T A Q + Q^T A C + Q^T A Q. \end{aligned}$$

Wir müssen also erreichen, dass

$$C^T A Q + Q^T A C + Q^T A Q = avv^T.$$

Dazu versuchen wir

$$Q := \lambda u v^T.$$

Einsetzen liefert
$$\lambda C^T A u v^T + \lambda v u^T A C + \lambda^2 v v^T u^T A u = a v v^T.$$
(Man beachte, dass $Q^T A Q = \lambda^2 v(u^T A u) v^T = \lambda^2 v v^T (u^T A u)$.) Wegen $-cav^T = u^T A^T C = u^T A C$ (hier haben wir $A = A^T$ verwendet) und $u^T A u = (1-c^2)a$ folgt durch Einsetzen und Umformen, dass
$$a\left(-2c\lambda + (1-c^2)\lambda^2\right) v v^T = a v v^T.$$
Falls $c = 1$, so wählen wir $\lambda := -1/2$, sonst setzen wir $\lambda := (1-c)^{-1}$. Damit erreichen wir, dass
$$P^T A P = B.$$
Da B invertierbar ist, ist P es auch. □

Satz 6.7 (Wittscher Kürzungssatz). *Seien*
$$A = \begin{pmatrix} A'' & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} B'' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$
Diagonalmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ *mit* $A'', B'' \in \mathrm{GL}_d(K)$ *und* $A', B' \in \mathrm{GL}_{n-d}(K)$. *Gilt*
$$A \equiv B \quad \text{und} \quad A'' \equiv B''$$
so folgt $A' \equiv B'$.

Beweis. Sei $d = 1$. Dann ist $A'' = (a)$ und $B'' = (c^2 a)$ mit $a, c \in K^\times$. Wegen
$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 a & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = B$$
gilt dann
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} = A \equiv B \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$
Mit Lemma 6.6 folgt nun die Behauptung für $d = 1$.

Angenommen der Satz gilt für $d-1$. Da B'' zu A'' kongruent ist, finden wir eine invertierbare Matrix $S'' \in \mathrm{GL}_d(K)$ mit $(S'')^T B'' S'' = A''$. Es folgt
$$\begin{pmatrix} S'' & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} B'' & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'' & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} = A.$$
Wir erhalten
$$\begin{pmatrix} B'' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} = B \equiv A \equiv \begin{pmatrix} B'' & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}.$$
Sei
$$B'' = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_d \end{pmatrix}.$$
Dann folgt aus der Induktionsannahme, dass
$$\begin{pmatrix} b_d & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_d & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}.$$

Mit Lemma 6.6 folgt dann die Kongruenz von A' und B'. □

Lemma 6.8. *Sei $1+1 \neq 0$, und seien $A, B \in K^{n,n}$ mit $A \equiv B$. Dann gibt es ein $s \in K^\times$ mit*

$$\det(B) = s^2 \det(A).$$

Beweis. Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$B = S^T A S.$$

Es folgt

$$\det(B) = \det(S)^2 \det(A).$$

□

Für die Klassifikation von symmetrischen Vektorräumen reicht es, Diagonalmatrizen zu betrachten.

Seien $a_1, \dots, a_n \in K$. Zur Abkürzung schreiben wir

$$[a_1, \dots, a_n]$$

statt

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Die Beweise der folgende beiden Lemmata sind eine einfache Übungsaufgabe.

Lemma 6.9. *Für $1 \leq i < j \leq n$ gilt*

$$[a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n] \equiv [a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n].$$

(Hier werden der i-te und der j-te Eintrag vertauscht.)

Lemma 6.10. *Für $1 \leq i \leq n$ und $c \in K^\times$ gilt*

$$[a_1, \dots, a_i, \dots, a_n] \equiv [a_1, \dots, c^2 a_i, \dots, a_n].$$

(Hier wird der i-te Eintrag mit c^2 multipliziert.)

Lemma 6.11 (Wittsche Relation)**.** *Sei $1+1 \neq 0$. Für $a, b \in K^\times$ mit $a+b \neq 0$ gilt*

$$[a, b] \equiv [a+b, (a+b)ab].$$

Beweis. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $s_A(e_1+e_2, e_1+e_2) = a+b \neq 0$. Ähnlich wie im Beweis von Satz 6.2 gibt es dann eine Basis $C = (e_1+e_2, c_2)$ von K^2 mit

$$\mathbf{c}_C(s_A) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

für ein $t \in K^\times$.

Es folgt aus Lemma 6.8, dass es ein $s \in K^\times$ gibt mit

$$(a+b)t = s^2 ab.$$

Mit

$$c := s(a+b)^{-1} \in K^\times$$

gilt dann

$$t = c^2(a+b)ab.$$

Wir erhalten

$$[a,b] \equiv [a+b, t] = [a+b, c^2(a+b)ab] \equiv [a+b, (a+b)ab].$$

□

Sei $[a_1, \ldots, a_n] \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wir haben drei Typen von Transformationen betrachtet, welche die Kongruenzklasse erhalten:

(1) Vertauschen zweier Einträge:
$$[a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n] \equiv [a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n].$$

(2) Multiplikation eines Eintrags mit einem Quadrat:
$$[a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n] \equiv [a_1, \ldots, c^2 a_i, \ldots, a_n]$$
für ein $c \in K^\times$.

(3) Anwenden einer Wittschen Relation:
$$[a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n] \equiv [a_1, \ldots, a_i+a_j, \ldots, (a_i+a_j)a_ia_j, \ldots, a_n]$$
falls $a_i + a_j \neq 0$.

Der folgende schöne Satz liefert leider keinen Algorithmus, welcher entscheidet, ob zwei Diagonalmatrizen kongruent sind oder nicht.

Satz 6.12 (Relationensatz für symmetrische Vektorräume). *Sei $1+1 \neq 0$ in K. Für*

$$[a_1, \ldots, a_n], [b_1, \ldots, b_n] \in \mathrm{GL}_n(K)$$

sind äquivalent:

(i) $[a_1, \ldots, a_n] \equiv [b_1, \ldots, b_n]$*;*

(ii) $[a_1, \ldots, a_n]$ *kann durch Transformationen vom Typ* (1), (2) *und* (3) *in* $[b_1, \ldots, b_n]$ *überführt werden.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Es gibt ein $S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_n \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} S.$$

Es gilt also

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} s_{i1}^2 a_i.$$

Durch Anwendung von Transformationen vom Typ (1) und (2) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$b_1 = a_1 + \cdots + a_k$$

mit $a_1 + \cdots + a_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq k$.

Durch Umformungen vom Typ (3) erhalten wir

$$[a_1, \ldots, a_n] \equiv [a_1 + \cdots + a_k, a_2', \ldots, a_n'] = [b_1, a_2', \ldots, a_n'].$$

Wegen

$$[a_1, \ldots, a_n] \equiv [b_1, \ldots, b_n]$$

gilt dann also

$$[b_1, a_2', \ldots, a_n'] \equiv [b_1, b_2, \ldots, b_n].$$

Der Wittsche Kürzungssatz 6.7 impliziert

$$[a_2', \ldots, a_n'] \equiv [b_2, \ldots, b_n].$$

Via Induktion können wir diese Matrizen durch Transformationen vom Typ (1), (2) und (3) ineinander überführen. (Der Induktionsanfang $n = 1$ ist beinahe trivial.)

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Dies haben wir bereits vorher bewiesen. □

– – – – – Ende Vorlesung 17 (06.06.) – – – – –

6.4. Spezialfall: $K = \mathbb{R}$ (Sylvesterscher Trägheitssatz).

Satz 6.13 (Sylvesterscher Trägheitssatz)**.** *Sei (V, s) ein n-dimensionaler symmetrischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann gibt es eine geordnete Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V und ein eindeutig bestimmtes Tripel*

$$(r^+, r^-, r^0) \in \mathbb{N}^3$$

mit $r^+ + r^- + r^0 = n$, so dass

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} E_{r^+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r^-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann $r^0 = \dim \mathrm{Rad}(V)$.

Beweis. Es gibt eine geordnete Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V, so dass

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq m$ und $n - m = \dim \mathrm{Rad}(V)$, siehe Satz 6.2. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $a_1 \geq \dots \geq a_m$. Für $a_i > 0$ gibt es ein $c_i \in \mathbb{R}$ mit $c_i^2 = a_i$, und für $a_i < 0$ gibt es ein $c_i \in \mathbb{R}$ mit $c_i^2 = -a_i$. (Dies folgt jeweils aus dem Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$.) Sei nun

$$C = (c_1^{-1} b_1, \dots, c_m^{-1} b_m, b_{m+1}, \dots, b_n).$$

Dann gilt

$$\mathbf{c}_C(s) = \begin{pmatrix} E_{r^+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r^-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r^+ = |\{1 \leq i \leq m \mid a_i > 0\}|$ und $r^- = |\{1 \leq i \leq m \mid a_i < 0\}|$. Mit $r^0 = \dim \mathrm{Rad}(V)$ ist damit die Existenz des Tripels (r^+, r^-, r^0) bewiesen.

Nun zur Eindeutigkeit: Angenommen

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & -E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{s'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{n,n}$ wobei $r, s, r', s' \geq 0$. Da kongruente Matrizen den gleichen Rang haben, gilt offenbar $r + s = r' + s'$. Es folgt dann

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & -E_{s'} \end{pmatrix}.$$

Ohne Einschränkung können wir $s \leq s'$ annehmen. Der Wittsche Kürzungssatz 6.7 impliziert nun

$$E_r \equiv \begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & -E_{s'-s} \end{pmatrix}.$$

(Da das Vertauschen von Einträgen eine Kongruenztransformation ist, können wir hier natürlich *von unten* statt wie üblich *von oben* kürzen.) Die Matrix E_r ist positiv definit, eine Eigenschaft, die unter Kongruenz erhalten bleibt. (Für den Beweis benutzt man folgende Überlegung: Seien $A, B \in R^{n,n}$ mit $B = S^T A S$ für ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Für $v \in V$ gilt dann $v^T B v = v^T (S^T A S) v = (Sv)^T A (Sv)$.) Für $s < s'$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_{r'} & 0 \\ 0 & -E_{s'-s} \end{pmatrix}$$

offenbar nicht positiv definit. Widerspruch. Also gilt $s = s'$ und damit auch $r = r'$. $\square$

In der Situtation des obigen Satzes definieren wir

$$\text{Signatur}(V,s) := (r^+, r^-, r^0),$$
$$\text{Isotropieindex}(V,s) := \min\{r^+, r^-\},$$
$$\text{Trägheitsindex}(V,s) := r^-.$$

Korollar 6.14. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) endlich-dimensionale symmetrische $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann sind äquivalent:*

(i) $(V, s_V) \cong (W, s_W)$;

(ii) $\text{Signatur}(V, s_V) = \text{Signatur}(W, s_W)$.

Bemerkungen:

(i) Es gilt offenbar

$$\text{Signatur}(V,s) = (n, 0, 0)$$

genau dann wenn (V,s) ein euklidischer Vektorraum ist.

(ii) Sei (V,s) ein n-dimensionaler symmetrischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist (V,s) regulär genau dann wenn

$$\text{Signatur}(V,s) = (r^+, r^-, 0).$$

(Es gilt dann $r^+ + r^- = n$.) Die Isometriegruppe $\text{GL}(V,s)$ ist isomorph zu

$$\text{O}_{(r_+,r_-)}(\mathbb{R}) := \left\{ A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^T \begin{pmatrix} E_{r^+} & 0 \\ 0 & -E_{r^-} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} E_{r^+} & 0 \\ 0 & -E_{r^-} \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii)

Für den Fall

$$\text{Signatur}(V,s) = (3, 1, 0)$$

nennt man (V,s) einen **Minkowski-Raum**. Die zugehörige Isometriegruppe $\text{O}_{(3,1)}(\mathbb{R})$ heißt **Lorentz-Gruppe**.

Beide spielen eine zentrale Rolle in Einsteins spezieller Relativitätstheorie. (Man stellt sich (V,s) als einen 3-dimensionalen euklidischen Vektorraum kombiniert mit einer Zeitkoordinate vor.)

6.5. Spezialfall: K endlich.

Sei (V,s) ein regulärer symmetrischer K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Sei B eine geordnete Basis von V, und sei $A := \mathbf{c}_B(s)$. Sei $\text{Disk}(V,s)$ die Restklasse von $\det(A)$ in $K^*/(K^*)^2$. Man nennt $\text{Disk}(V,s)$ die **Diskriminante** von (V,s).

Die Definition der Diskriminante hängt nicht von der Wahl der Basis B ab.

Bemerkung: Für K endlich gilt

$$|K^*/(K^*)^2| = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathrm{char}(K) = 2, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[Siehe Chapter I, Theorem 4 in Serre's Buch *A course in Arithmetic*].

Satz 6.15. *Sei K ein endlicher Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei (V, s) ein symmetrischer K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $V = V' \perp \mathrm{Rad}(V)$. Dann gilt:*

(i) *Es gibt eine geordnete Basis B von V, so dass*

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} E_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r = \dim(V')$ und $a \in K^*$ mit $a(K^*)^2 = \mathrm{Disk}(V', s_{V'})$.

(iv) *Seien (V, s_V) und (W, s_W) endlich-dimensionale symmetrische K-Vektorräume, und seien $V = V' \perp \mathrm{Rad}(V)$ und $W = W' \perp \mathrm{Rad}(W)$. Dann sind äquivalent:*
  (a) *(V, s_V) und (W, s_W) sind isometrisch;*
  (b) *$\dim(V) = \dim(W)$, $\dim \mathrm{Rad}(V) = \dim \mathrm{Rad}(W)$ und $\mathrm{Disk}(s_{V'}) = \mathrm{Disk}(s_{W'})$.*

Der Beweis ist mit den von uns bereits entwickelten Methoden nicht sehr schwierig, wird aber aus Zeitgründen weggelassen. [Siehe Chapter IV, Proposition 5 in Serres Buch *A course in Arithmetic*].

6.6. **Spezialfall: $K = \mathbb{Q}$ (Satz von Hasse-Minkowski).** Dank des Satzes von Hasse-Minkowski kann man auch alle Isometrieklassen von symmetrischen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen klassifizieren. Dies ist jedoch deutlich komplizierter als für den Fall $K = \mathbb{R}$ und sprengt den Rahmen einer Vorlesung über Lineare Algebra und ist stattdessen Gegenstand der Zahlentheorie. (Man muss symmetrische Bilinarformen über den Körpern $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen betrachten (wobei p alle Primzahlen durchläuft) und kann für diese dann verschiedene Invarianten definieren.)

6.7. **Spiegelungen und orthogonale Gruppen.** Sei $1+1 \neq 0$ in K, und sei (V, s) ein regulärer symmetrischer Vektorraum mit $n = \dim(V) \geq 1$. Wie zuvor sei

$$\mathrm{O}(V, s) := \mathrm{GL}(V, s)$$

die Isometriegruppe von (V, s).

Einen $(n-1)$-dimensionalen Unterraum eines n-dimensionalen Vektorraums nennt man eine **Hyperebene**.

Sei $v \in V$ mit $\langle v, v\rangle \neq 0$, und setze $H := v^{\perp}$. (Ein solches v gibt es.) Satz 4.21 sagt, dass
$$V = \mathrm{Lin}(v) \perp H.$$
Insbesondere ist H eine Hyperebene.
Die Abbildung
$$\begin{aligned} \sigma_v \colon V &\to V \\ w &\mapsto w - 2\frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v \end{aligned}$$
ist dann die **Spiegelung an der zu v orthogonalen Hyperebene H**. Wir sagen auch σ_v ist die **Spiegelung an der Hyperebene H**.

Es folgt leicht aus der Definition, dass $\sigma_v \colon V \to V$ linear ist.

Mit $U := H$ gilt $U^{\perp} = \mathrm{Lin}(v)$ und $V = U \perp U^{\perp}$. Wir können nun ähnlich wie zuvor die **orthogonale Projektion**
$$p_U \colon V \to U$$
mit $\mathrm{Kern}(p_U) = U^{\perp}$ definieren. Für $w \in V$ gilt $w = av + w'$ für eindeutig bestimmte $a \in K$ und $w' \in H$. Nach Definition erhalten wir $p_U(w) = w'$. Es gilt dann
$$\begin{aligned} \sigma_v(w) &:= w - 2\frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = w - 2\frac{\langle av + w', v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = w - 2\frac{\langle av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = w - 2av \\ &= w - 2(w - w') = -w + 2w' = -w + 2p_U(w). \end{aligned}$$
(Für die dritte Gleichheit haben wir $\langle w', v\rangle = 0$ benutzt.) Das folgende Bild illustriert diese Überlegungen.

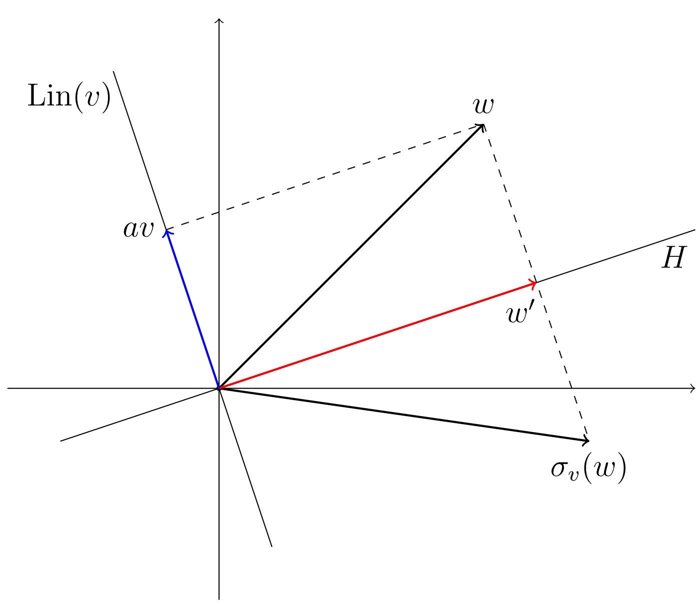

FIGURE 13. Spiegelung $\sigma_v \colon V \to V$ an der Hyperebene H.

Lemma 6.16. *Es gilt*

(i) *Es gilt* $\sigma_v(h) = h$ *für alle* $h \in H$*;*

(ii) $\sigma_v(v) = -v$*;*

(iii) $\sigma_v \circ \sigma_v = \mathrm{id}_V$*;*

(iv) σ *ist eine Isometrie von* (V, s)*;*

(v) *Es gibt eine Basis* $B = (b_1, \dots, b_n)$ *von* V *mit*

$$\mathbf{c}_{B,B}(\sigma_v) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix};$$

(vi) $\det(\sigma_v) = -1$.

Beweis. (i): Für $h \in H$ gilt nach Definition $\langle h, v \rangle = 0$. Also ist

$$\sigma_v(h) = h - 2\frac{\langle h, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = h.$$

(ii): Es gilt

$$\sigma_v(v) = v - 2\frac{\langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = v - 2v = -v.$$

(iii): Dies folgt direkt aus (i) und (ii).

(iv): Für $w, w' \in V$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \sigma_v(w), \sigma_v(w') \rangle &= \langle w - 2\frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, w' - 2\frac{\langle w', v \rangle}{\langle v, v \rangle} v \rangle \\ &= \langle w, w' \rangle - 4\frac{\langle w, v \rangle \langle w', v \rangle}{\langle v, v \rangle} + 4\frac{\langle w, v \rangle \langle w', v \rangle}{\langle v, v \rangle^2} \langle v, v \rangle \\ &= \langle w, w' \rangle. \end{aligned}$$

Also ist σ_v eine Isometrie von (V, s).

(v): Sei $B := (b_1, b_2, \dots, b_n)$ wobei $(b_2, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von $H := v^\perp$ ist und $b_1 = v$. Dann hat $\mathbf{c}_{B,B}(\sigma_v)$ die gewünschte Form.

(vi): Dies folgt direkt aus (v). $\square$

Lemma 6.17. *Sei $v \in V$ anisotrop und $f \in \mathrm{O}(V, s)$. Setze*

$$v_1 := f(v) - v \quad \text{und} \quad v_2 := f(v) + v.$$

Dann gilt:

(i) *Ist v_1 anisotrop, so gilt $(\sigma_{v_1} \circ f)(v) = v$;*

(ii) *Ist v_1 isotrop, so ist v_2 anisotrop und es gilt $(\sigma_v \circ \sigma_{v_2} \circ f)(v) = v$.*

Beweis. (i): Es gilt

$$\sigma_{v_1}(f(v)) = f(v) - 2\frac{\langle f(v), v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

und

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_1\rangle &= \langle f(v), f(v)\rangle - 2\langle f(v), v\rangle + \langle v, v\rangle = 2\langle v, v\rangle - 2\langle f(v), v\rangle = -2\langle v_1, v\rangle,\\ \langle f(v), v_1\rangle &= \langle f(v), f(v)\rangle - \langle f(v), v\rangle = \langle v, v\rangle - \langle f(v), v\rangle = -\langle v_1, v\rangle.\end{aligned}$$

Setzen wir diese Gleichungen in die erste Gleichung ein, erhalten wir

$$\sigma_{v_1}(f(v)) = f(v) - v_1 = v.$$

(ii): Da v_1 isotrop ist, gilt $\langle v, v\rangle = \langle v, f(v)\rangle$. Es gilt

$$\langle v_2, v_2\rangle = 2\langle v, v\rangle + 2\langle v, f(v)\rangle = 2\langle v, v_2\rangle = 4\langle v, v\rangle \neq 0$$

und

$$\langle f(v), v_2\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle + \langle f(v), v\rangle = \langle v, v\rangle + \langle f(v), v\rangle = \langle v_2, v\rangle.$$

Hieraus folgt

$$\sigma_{v_2}(f(v)) = f(v) - 2\frac{\langle f(v), v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = f(v) - v_2 = -v.$$

Wir erhalten

$$(\sigma_v \circ \sigma_{v_2})(f(v)) = \sigma_v(-v) = v.$$

□

Lemma 6.18. *Seien $v, w \in V$ mit $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle$ und $\langle v - w, v - w\rangle \neq 0$. Dann gilt*

$$\sigma_{v-w}(v) = w.$$

Beweis. Wegen $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle$ folgt

$$\frac{2\langle v, v - w\rangle}{\langle v - w, v - w\rangle} = 1.$$

Wir erhalten

$$\sigma_{v-w}(v) = v - \frac{2\langle v, v - w\rangle}{\langle v - w, v - w\rangle}(v - w) = v - (v - w) = w.$$

□

Satz 6.19 (Orthogonale Gruppen sind Spiegelungsgruppen)**.** *Sei* $f \in \mathrm{O}(V, s)$ *mit* $f \neq \mathrm{id}_V$*. Dann ist* f *Produkt von höchstens* $2n$ *Spiegelungen.*

– – – – – Ende Vorlesung 18 (17.06.) – – – – –

7. Historische Notizen

In diesem Abschnitt werden einige Mathematiker erwähnt, die wesentlich zur Entwicklung der Linearen Algebra im weitesten Sinne beigetragen haben. Zumindest stichwortartig werden auch einige ihrer damit zusammenhängenden Leistungen genannt. Natürlich haben sie auch noch vieles andere entdeckt und sich auch mit Physik, Astronomie, Philosophie und anderen schönen Dingen beschäftigt.

7.1. Mathematiker.

- **(Einige) Babylonier** (2000 v. Chr.): LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten.

- Lehrbuch **Jiu Zhang Suanshu** (Neun Kapitel der Rechenkunst), Kapitel 8 (China, etwa 200 v. Chr.): Lösungsverfahren für LGS, welches in etwa dem Gauß-Algorithmus für n Gleichungen mit n Unbekannten entspricht und auch *Fangcheng Algorithmus* (Rechteck-Anordnung Algorithmus) genannt wird.

- **François Georges René Bruhat** (∗1929 Paris; †2007 Paris): Lie-Gruppen und algebraischen Gruppen. Bruhat-Zerlegung.

- **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (∗1845 Sankt Petersburg; †1918 Halle an der Saale): Mengenlehre. Schüler von Weierstraß.

- **Élie Joseph Cartan** (∗1869 Dolomieu; †1951 Paris): Satz von Cartan-Dieudonné.

- **Henri Paul Cartan** (∗1904 Nancy; †2008 Paris): Gründungsmitglied von Nicolas Bourbaki.

- **Augustin Louis Cauchy** (∗1789 Paris; †1857 Sceaux): Multiplikationsvorschrift für Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$.

- **Arthur Cayley** (∗1821 Richmond upon Thames; †1895 Cambridge): Systematische Untersuchung von Matrizen als algebraische Objekte. Ringstruktur auf $M_n(\mathbb{R})$ und $M_n(\mathbb{C})$. Den Begriff *Ring* gab es aber noch nicht.

- **Gabriel Cramer** (∗1704 Genf; †1752 Bagnols-sur-Cèze): Lösungsformel (unter Verwendung von Determinanten) für LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten. Bis ins 18. Jhd. wurden nur solche LGS untersucht.

- **René Descartes** (∗1596 La Haye en Touraine (heutiger Name: Descartes); †1650 Stockholm): Kartesische Koordinaten. Grundlage für die algebraische Behandlung von Vektoren.

- **Jean Alexandre Eugène Dieudonné** (∗1906 Lille; †1992 Paris): Satz von Cartan-Dieudonné. Gründungsmitglied von Nicolas Bourbaki.

- **Ferdinand Gotthold Max Eisenstein** (∗1823 Berlin; †1852 Berlin): Bemerkung über die Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation. Determinantenkriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen.

- **Abraham Halevi Fraenkel** (∗1891 München; †1965 Jerusalem): Axiome der Mengenlehre.

- **Ferdinand Georg Frobenius** (∗1849 Berlin; †1917 Charlottenburg (heute Teil von Berlin)): Vollständiger Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton. Definiert den *Rang* einer Matrix. Satz von Frobenius (zur Ähnlichkeit von Matrizen). Frobenius-Normalform.

- **Carl Friedrich Gauß** (∗1777 Braunschweig; †1855 Göttingen): Verwendung des Gauß-Algorithmus, dessen Entdeckung Gauß aber nicht für sich beansprucht. Lösen von beliebigen LGS, jedoch ohne die Verwendung von Matrizen. Einführung von Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen. Die Komposition solcher Abbildungen führte zur (indirekten) Definition des Matrizenprodukts. Fundamentalsatz der Algebra.

- **Kurt Friedrich Gödel** (∗1906 Brünn; †1978 Princeton): Unvollständigkeitssätze.

- **Hermann Günter Graßmann** (∗1809 Stettin; †1877 Stettin): Ausdehnungslehre (1844). Ein ganz wichtiges Werk, auch über die Grundlagen der Linearen Algebra, welches aber niemand gelesen hat. Da auch Graßmanns anderen Arbeiten ignoriert wurden, ist er schließlich Sprachwissenschaftler geworden. Heutzutage gelten Graßmanns mathematischen Einsichten als bahnbrechend.

- **William Rowan Hamilton** (∗1805 Dublin; †1865 Dunsink): Studium komplexer Zahlen und Quaternionen. Erste Schritte in Richtung eines abstrakten Vektorraumbegriffs.

- **Helmut Hasse** (∗1898 Kassel; †1979 Ahrensburg): Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}$.

- **Charles Hermite** (∗1822 Dieuze, Lothringen; †1901 Paris): Transzendenz der Eulerschen Zahl e (1873).

- **Camille Jordan** (∗1838 Lyon; †1922 Paris): Jordan-Normalform von Endomorphismen (1870).

- **Leopold Kronecker** (∗1823 Liegnitz; †1891 Berlin): (Beinahe vollständige) Klassifikation von Paaren von Homomorphismen modulo Basiswechsel (1874).

- **Pierre-Simon (Marquis de) Laplace** ($*$1749 Beaumont-en-Auge, Normandie; †1827 Paris).

- **Gottfried Wilhelm Leibniz** ($*$1646 Leipzig; †1716 Hannover): Lösungstheorie für LGS. Determinanten für n Gleichungen und n Unbekannte für $n = 2, 3$.

- **Carl Louis Ferdinand von Lindemann** ($*$1852 Hannover; †1939 München): Transzendenz der Kreiszahl π (1882).

- **Hermann Minkowski** ($*$1864 Aleksotas, Russisches Kaiserreich, heute Litauen; †1909 Göttingen): Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}$. Erkannte, dass die spezielle Relativitätstheorie im nach ihm benannten Minkowski-Raum betrachtet werden kann. Hörte Vorlesungen bei Kronecker und Weierstraß. Assistenzprofessor in Bonn.

- **Guiseppe Peano** ($*$1858 Cuneo; †1932 Turin): Axiomatische Definition reeller Vektorräume.

- **Oskar Perron** ($*$1880 Frankenthal; †1975 München): Schrieb einige sehr schöne Lehrbücher, z.B. über Kettenbrüche. Wichtige Beiträge zur Matrizentheorie (z.B. Satz von Perron-Frobenius).

- **Leonardo da Pisa**, auch **Fibonacci** genannt ($*$1170 Pisa; † zwischen 1240-1250 Pisa): Verfasste das Rechenbuch *Liber abbaci* (1202), in welchem die Fibonacci Folge vorkommt.

- **Henry John Stephen Smith** ($*$1826 Dublin; †1883 Oxford): Beiträge zur Zahlentheorie und Matrixtheorie. Smith-Normalform.

- **James Joseph Sylvester** ($*$1814 London; †1897 London): Führt den Begriff *Matrix* ein. Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{R}$ (Sylvesterscher Trägheitssatz).

- **Alexandre-Théophile Vandermonde** ($*$1735 Paris; †1796 Paris): Vandermonde Determinante.

- **Bartel Leendert van der Waerden** ($*$1903 Amsterdam; †1996 Zürich): Verfasst 1930 das Buch *Moderne Algebra*, in dem er K-Vektorräume über beliebigen Körpern als Spezialfall von Moduln über Ringen einführt.

- **Joseph Wedderburn** ($*$1882 Forfar (Schottland); †1948 Princeton): Matrizen über beliebigen Körpern.

- **Karl Theodor Wilhelm Weierstraß** ($*$1815 Ostenfelde; †1897 Berlin): Weierstraß-Normalform von Endomorphismen (1868). Von 1834-1838 hat Weierstraß in Bonn Rechtswissenschaft und Finanzwesen studiert.

- **Ernst Witt** (∗1911 auf Alsen, Deutsches Reich, heute Dänemark; †1991 Hamburg): Quadratische Formen über beliebigen Körpern. Wittscher Kürzungssatz.

- **Hans Julius Zassenhaus** (∗1912 Koblenz; †1991 Columbus, Ohio): Zassenhaus-Algorithmus zur Berechnung von Basen von Summen und Durchschnitten von Unterräumen von Vektorräumen. (Hierzu gibt es aber keinen Literaturnachweis.)

- **Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo** (∗1871 Berlin; †1953 Freiburg im Breisgau): Axiome der Mengenlehre.

- **Max August Zorn** (∗1906 Krefeld; †1993 Bloomington): Zornsches Lemma.

7.2. **Zitate.**

- Neil deGrasse Tyson (1958-): The universe is under no obligation to make sense to you.
- Leopold Kronecker, Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen (1874). Als Schlussbemerkung schreibt Kronecker:

  Die vorstehenden Entwickelungen zeigen, dass in der Jordan'schen Abhandlung die Lösung des ersten Problems nicht eigentlich neu ist, während die des zweiten sich als gänzlich verfehlt und die des dritten als durchaus unzulänglich begründet erwiesen hat. Nimmt man hinzu, dass eben dieses dritte Problem in Wahrheit die beiden ersten als besondere Fälle umfasst, dass ferner dessen vollständige Lösung einestheils unmittelbar aus der Weierstrass'schen Arbeit vom Jahre 1868 folgt und anderntheils mit leichter Mühe aus den Bemerkungen entnommen werden kann, welche ich damals daran angeschlossen habe, so ist wahrlich hinreichender Grund vorhanden, Hrn. Jordan *seine Resultate*, soweit sie eben richtig sind, streitig zu machen. Aber nicht um dieses untergeordneten Zweckes willen bin ich hier und in meiner früheren Mittheilung auf die Jordan'schen Arbeiten näher eingegangen; es galt vielmehr die wirkliche Bedeutung der darin enthaltenen Methoden und Resultate zu ermitteln und ihre Beziehungen zu den vorher bekannten aufzuklären. Es war also nicht die Feststellung der Priorität, sondern die Feststellung der Wahrheit der eigentliche Zweck meiner Ausführungen, aber sie erfüllen nebenher auch die Bestimmung, es im Voraus zu rechtfertigen, wenn ich mich künftig der Rücksichtnahme auf die bezüglichen Jordan'schen Publicationen enthalte.
- Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799):

  Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht. Es ist fast mit der Mathematik wie mit der Theologie. So wie die letzteren Beflissenen, zumal wenn sie in Ämtern stehen, Anspruch auf einen besonderen Kredit von Heiligkeit und eine nähere Verwandtschaft mit Gott machen, obgleich sehr viele darunter wahre Taugenichtse sind, so verlangt sehr oft der so genannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die größten Plunderköpfe gibt, die man finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine, als des Denkens sind.

- Friedrich Wille (1935-1992): Beweisen muß ich diesen Käs', sonst ist die Arbeit unseriös.
- Aus einem Matheforum: Der Sonntag ist eigentlich zu spät, um einen Vortrag für Montag vorzubereiten.

References

[AW] William Adkins, Steven Weintraub, Algebra. An approach via module theory. Graduate Texts in Mathematics. 136. New York: Springer-Verlag. x, 526 pp. (1992).

[Bo] Bosch, Lineare Algebra.

[Br] Frédéric Brechenmacher, Histoire du Theoreme de Jordan de la decomposition de matricielle (1870-1930). Formes de représentations et méthodes de décompositions. Doktorarbeit. 2006.

[B1] Egbert Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie. I. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983. viii+636 pp.

[B2] Egbert Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie. II. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985. xiv+534 pp.
Zwei sehr schöne Bücher mit viel Anschauungsmaterial und historischen Anmerkungen.

[C] Carla Cederbaum (Hrsg.) et al, Ein Moment für Mensch und Mathematik: Mit Interviews von Albrecht Beutelspacher, Günter M. Ziegler u.a. Freiburger Verlag, 2007. 200 pp.

[F] Gerd Fischer, Lineare Algebra. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1979. vi+248 pp.
Ein häufig verwendetes Standardwerk.

[Gab] Peter Gabriel, Matrizen, Geometrie, lineare Algebra. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. xii+634 pp.
Ein sehr interessantes Buch. Hier wird die Lineare Algebra (fast) nur mit Matrizen entwickelt. Dies führt zu der Frage: Warum brauchen wir eigentlich Vektorräume, wenn scheinbar alles auch mit Matrizen machbar ist? Eine wirklich gute Antwort findet man eher außerhalb der Linearen Algebra.

[Gan] Felix Gantmacher, Matrizentheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986. 654 pp.
Enthält viele schöne Anwendungen der Linearen Algebra. Nicht immer gut geschrieben.

[H] Bettina Heintz, Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Springer-Verlag, Vienna, 2000. 318 pp.

[Hu] Bertram Huppert, Angewandte Lineare Algebra. De Gruyter. 654 pp.

[J] Klaus Jänich, Lineare Algebra. Springer-Verlag, 2008. xii+270 pp.
Sehr schön und didaktisch geschrieben. Empfehlenswert. Manche Kollegen halten die zahlreichen Jänich Bücher für nicht anspruchsvoll genug.

[Jo] Camille Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. 1870.
Hier wird die Jordan-Normalform entdeckt. Natürlich auf Französisch!

[K] Ina Kersten, Analytische Geometrie und Lineare Algebra. Vorlesungsskript. 2002. 255 pp.

Einige Teile meiner Vorlesung stammen aus dieser Vorlesungsmitschrift, vor allem beim Kapitel über metrische Vektorräume habe ich vieles übernommen aber auch einiges verändert. Es gibt Parallelen zur Herangehensweise in Brieskorns o.g. Büchern.

[Ko] Max Koecher, Lineare Algebra und analytische Geometrie. Springer-Verlag, Berlin, 1983. xi+286 pp.

[K] Leopold Kronecker, Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen. 1874. 63 pp.
Pflichtlektüre! Kronecker wettert in dem Artikel ausführlich gegen Jordan.

[LW] Hanfried Lenz, Ernst Witt, Euklidische Kongruenzsätze in metrischen Vektorräumen, 1957. In: Ernst Witt: Gesammelte Abhandlungen, 27–32. Springer, 1998.

[L1] Falko Lorenz, Lineare Algebra. I. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1992. x+226 pp.

[L2] Falko Lorenz, Lineare Algebra. II. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1992. viii+195 pp.
Band I ist besser geschrieben als Band II. Jedoch enthält Band II viele schöne Ergebnisse, welche in vielen anderen Büchern über Lineare Algebra nicht zu finden sind.

[P] Victor Prasolov, Problems and theorems in linear algebra. Translations of Mathematical Monographs. 134. Providence, RI: AMS. xviii, 225 pp. (1994).

[S] John Stillwell, Naive Lie theory. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008. xiv+217 pp.

[W] Karl Weierstraß, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. 1868. 37 pp.
Eine Arbeit zur Klassifikation von Paaren von quadratischen Formen mit Hilfe von Determinanten und Elementarteilern. Muss jeder gelesen haben!

[Wo] Jörg Wollnack, Regelungstechnik I und II. Vorlesungsskripte.

Index

Jan Schröer
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Endenicher Allee 60
53115 Bonn
Germany

Email address: `schroer@math.uni-bonn.de`