RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. Michael Westdickenberg Tel.: +49 241 80-94569
Templergraben 55 Sekr.: +49 241 80-94921
52062 Aachen mwest@instmath.rwth-aachen.de
Raum 110/111 https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

Teil A

Aufgabe A1

(a) (i) Zeigen Sie unter Verwendung der Additionsformel (6.4) und der Inversionsformel (6.6):

$$\forall a > 0\, \forall n \in \mathbb{Z}\, \forall m \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \exp\left(\log(a)\frac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{a^n}.$$

Bemerkung: Dies zeigt, dass die Definition $a^x := \exp(\log(a)x)$ *die Definition 3.70 erweitert und daher die Schreibweise* a^x *nicht überladen ist. Dies rechtfertigt auch die Schreibweise* $\exp(x) = \mathrm{e}^x$*, wobei* $\mathrm{e} := \exp(1)$.

(ii) Folgern Sie aus (i) und den Rechenregeln für rationale Potenzen 3.71, dass:

$$\forall a, b > 0\, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } a^{xy} = (a^x)^y,\ a^{x+y} = a^x a^y,\ (ab)^x = a^x b^x.$$

(b) (i) Folgern Sie aus der Additionsformel (6.4):

$$\forall x, y > 0 \text{ gilt: } \log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

(ii) Zeigen Sie:

$$\forall a > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \log(a^x) = x\log(a).$$

Lösung

(a) (i) Die Additionsformel lautet:

$$(6.4)\ \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ gilt: } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\exp((n+1)z) = \exp(nz)\exp(z)$$

und mittels vollständiger Induktion erhalten wir

$$\exp(nz) = \exp(z)^n.$$

Aus der Inversionsformel folgt dann

$$\exp(-nz) = \exp(nz)^{-1} = (\exp(z)^n)^{-1} = \exp(z)^{-n}.$$

Also gilt die Gleichung für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\left(\exp\left(\frac{z}{m}\right)\right)^m = \exp\left(\frac{z}{m}m\right) = \exp(z)$$
$$\Rightarrow \exp\left(\frac{z}{m}\right) = \sqrt[m]{\exp(z)}.$$

Insgesamt folgt

$$\exp(z\frac{n}{m}) = \exp(nz)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\exp(z)^n}.$$

(ii) Wegen 3.71 gelten die Rechenregeln für alle $a, b > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{Q}$. Die Funktion exp ist als konvergente Potenzreihe stetig und somit ist auch $x \mapsto a^x$. Sei $q \in \mathbb{Q}$ fest. Dann sind

$$x \mapsto a^{xq} \quad \text{und} \quad x \mapsto (a^x)^q$$

stetig als Komposition stetiger Funktionen. Insbesondere ist

$$f_q : \mathbb{R} \ni x \mapsto a^{xq} - (a^x)^q$$

stetig. Da $f_q(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{Q}$ gilt und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, folgt $f_q = 0$ und somit $a^{xq} = (a^x)^q$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $q \in \mathbb{Q}$. Fixiere nun $x \in \mathbb{R}$ und betrachte nun die Abbildung

$$g_x : \mathbb{R} \ni y \mapsto a^{xy} - (a^x)^y.$$

Diese ist stetig und verschwindet auf $\mathbb{Q}$. Damit ist $g_x = 0$ und es folgt $a^{xy} = (a^x)^y$. Die verbleibenden Formeln werden analog bewiesen.

(b) (i) Es gilt wegen $\exp(\log(x)) = x$:

$$\begin{aligned}\exp(\log(xy)) = xy = \exp(\log(x))\exp(\log(y)) &\overset{(6.4)}{=} \exp(\log(x) + \log(y)) \\ &\Rightarrow \log(xy) = \log(x) + \log(y)\end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\exp(x \log(a)) = a^x \Rightarrow x\log(a) = \log(\exp(x\log(a))) = \log(a^{ax}).$$

Aufgabe A2
Zeigen Sie die Formel

$$\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Lösung
Wir schreiben das ganze in Exponentialdarstellung:

$$\begin{aligned}\sin(z) - \sin(w) &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz) - \exp(iw) + \exp(-iw)}{2i} \\ &= \frac{\exp(i(2z+0w)/2) - \exp(-i(2z+0w)/2) - \exp(i(0z+2w)/2) + \exp(i(0z-2w)/2)}{2i} \\ &= 2\frac{(\exp(i(z+w)/2) + \exp(-i(z+w)/2))(\exp(i(z-w)/2) - \exp(-i(z-w)/2))}{2 \cdot 2i} \\ &= 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe A3
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^5 - n^5}{(n+1)^6 - n^6}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(3+\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n - 4\sqrt{n}}}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$

(v) $\lim_{x\to 0} \log(x)$

(vi) $\lim_{x\to\infty} \log(x)$

Lösung

(i) *Idee:* Der Zählergrad von a_n ist 4, der Nennergrad 5. Damit konvergiert die Folge gegen Null.
Genauer: Für den Nenner gilt mit dem binomischen Lehrsatz, dass

$$(n+1)^6 - n^6 = \sum_{k=0}^{6}\left[\binom{6}{k} n^{6-k} 1^k\right] - n^6 = n^6 + 6n^5 + \sum_{k=2}^{6}\left[\underbrace{\binom{6}{k}}_{\geq 0}\underbrace{n^{6-k}}_{\geq 0}\right] - n^6 \geq n^5.$$

Dann gilt: $a_n \leq \dfrac{(n+3)^5 - n^5}{n^5} = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^5 - 1 =: b_n$.
Nun gilt $\lim_{n\to\infty} 1 + 3/n = 1$ und als mehrmaliges Produkt mit sich selbst $\lim_{n\to\infty}(1+3/n)^5 = 1$. Folglich ist $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Da außerdem $a_n \geq 0$ muss auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten.

(ii) Wir formen um: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{n}^2 + 5\sqrt{n} + 6}{8n - 4\sqrt{n}}} = \sqrt{\dfrac{n - \frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{11}{2}\sqrt{n} + 6}{8n - 4\sqrt{n}}} = \sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{\frac{11}{2}\sqrt{n} + 6}{8n - 4\sqrt{n}}}$.
Außerdem gilt für $n \geq 36$, dass $0 \leq \dfrac{\frac{11}{2}\sqrt{n} + 6}{8n - 4\sqrt{n}} \leq \dfrac{\frac{11}{2}\sqrt{n} + \sqrt{n}}{8n - 4n} = \dfrac{\frac{13}{2}\sqrt{n}}{4n} = \dfrac{13}{8}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ für $n \to \infty$.
Folglich konvergiert die Folge mit Grenzwert $\sqrt{\frac{1}{8}}$.

(iii) Es gilt für $x \geq 0$, dass

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq x$$

und daher folgt aus dem Vergleichskriterium, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$.

(iv) Wir verwenden die Substitutionsregel für Grenzwerte:

$$\left(\lim_{y\to y_0} f(y) = a \wedge \lim_{x\to x_0} \phi(x) = y_0\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(\phi(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y).$$

Es gilt $\mathrm{e}^y \geq y$ und daher $0 < \mathrm{e}^{-y} \leq \frac{1}{y}$ für alle $y > 0$. Es folgt $\lim_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = 0$. Außerdem ist $\lim_{x\to-\infty} -x = \infty$. Es folgt mit $f(y) = \mathrm{e}^{-y}$ und $\phi(x) = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-(-x)} = \lim_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y} = 0.$$

(v) Sei $M \in \mathbb{N}$ beliebig. Da exp streng monoton steigend ist gilt für alle $x > 0$, dass

$$\log(x) \leq -M \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\log(x)} \leq \mathrm{e}^{-M} \Leftrightarrow x \leq \mathrm{e}^{-M}.$$

Also gilt für alle $x \in (0, \mathrm{e}^{-M})$, dass $\log(x) \leq -M$. Also ist $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$.

(vi) Sei $M \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für alle $x > 0$, dass

$$\log(x) \geq M \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\log(x)} \geq \mathrm{e}^M \Leftrightarrow x \geq \mathrm{e}^M.$$

Also gilt für alle $x \geq \mathrm{e}^M$, dass $\log(x) \geq M$ ist. Also ist $\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty$.

Aufgabe A4
Sei (a_n) eine Zahlenfolge in $\mathbb{C}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $z_0 \in \mathbb{R}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$?

Lösung

Wir wissen, dass für alle $|z| \in [0, R)$ die Potenzreihe konvergiert. Wir definieren $(x - x_0) := z$, dann erhalten wir, dass für $x \in B_R(x_0)$ die Reihe konvergiert. (Falls die erste Potenzreihe für eine Teilmenge des Randes konvergiert, dann konvergiert auch die zweite Potenzreihe am verschobenen Rand).

Aufgabe A5

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die folgenden Potenzreihen konvergent sind:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^n (x-5)^n \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} x^n,\ b \geq 0.$$

Lösung

(a) Für $x = 5$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (\log(n))^n (x-5)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n))^n 0^n = 0$. Sei also $x \neq 0$.
Für $n > e^{1/|x-5|}$ ist $|x-5| \log(n) > 1$, d.h. $a_n := (\log(n)(x-5))^n$ ist keine Nullfolge und die Reihe ist somit divergent.

(b) Für $x = 0$ gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} 0^n = 0$. Sei also $x \neq 0$.
Quotientenkriterium: $a_n := \frac{1}{1+b^n} x^n$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \underbrace{\frac{1+b^n}{1+b^{n+1}}}_{=:\, c_n}$$

<u>1.Fall:</u> $b \leq 1$: Es gilt $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, d.h. die Reihe ist konvergent für $|x| < 1$, und divergent für $|x| > 1$.
Betrachte noch die Fälle $x = 1, x = -1$:

<u>$x = 1$:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n}$.

Für die Folge $d_n := \frac{1}{1+b^n}$ gilt $d_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{für } b < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } b = 1 \end{cases}$,
d.h. für $b \leq 1$ ist d_n keine Nullfolge und die Reihe ist damit divergent.

<u>$x = -1$:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d_n$.

Die Folge d_n ist keine Nullfolge (s.o.) und damit ist die Folge $\widetilde{d}_n := (-1)^n d_n$ unbestimmt divergent. Folglich ist die Reihe divergent.

<u>2.Fall:</u> $b > 1$: Es gilt $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b}$, d.h. die Reihe ist konvergent für $|x| < b$, und divergent für $|x| > b$.
Betrachte noch die Fälle $x = b, x = -b$:

<u>$x = b$:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{1+b^n}$.

Für die Folge $e_n := \frac{b^n}{1+b^n}$ gilt $e_n = \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, d.h. für $b > 1$ ist e_n keine Nullfolge und die Reihe ist damit divergent.

<u>$x = -1$:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+b^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n}{1+b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e_n$.

Die Folge e_n ist keine Nullfolge (s.o.) und damit ist die Folge $\widetilde{e}_n := (-1)^n e_n$ unbestimmt divergent. Folglich ist die Reihe divergent.

Teil B

Aufgabe B1 [4+2 Punkte]

Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktionenfolge stetiger Funktionen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion. Sei $z_0 \in D$ und $z_n \in D$ eine Folge mit $z_n \to z_0$ für $n \to \infty$.

(i) Zeigen Sie $f_n(z_n) \to f(z_0)$ für $n \to \infty$ unter der Annahme, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert für $n \to \infty$.

(ii) Finden Sie ein Beispiel wo zwar f_n punktweise gegen f konvergiert für $n \to \infty$, aber $f_n(z_n)$ nicht gegen $f(z_0)$ konvergiert für $n \to \infty$.

Lösung

(i) Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da f_n gleichmässig konvergiert gegen f, existiert ein $N \in N$, so dass $n \geq N \Rightarrow (\forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/4)$ (somit insbesondere für $x = z_n$). Weiterhin existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $|f_N(z_n) - f_N(z_0)| < \epsilon/4$, da f_N stetig ist. Somit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned}
&|f_n(z_n) - f(z_0)| \leq |f_n(z_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - f(z_0)| \\
&\leq |f_n(z_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - f_N(z_n)| + |f_N(z_n) - f(z_0)| \\
&\leq |f_n(z_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - f_N(z_n)| + |f_N(z_n) - f_N(z_0)| + |f_N(z_n) - f(z_0)| \\
&< 4\frac{\epsilon}{4} = \epsilon
\end{aligned}$$

für alle $n \geq \max\{N, M\}$.

(ii) Sei $f_n : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere $(x_n)_n = (1 - \frac{1}{n})$. Dann konvergiert $(f_n(x_n))_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ gegen $\frac{1}{e}$ für $\to \infty$.

Aufgabe B2 [8 Punkte]

Für $z \in \mathbb{C}$ seien

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Zeigen Sie die Additionsformeln

$$\begin{aligned}
\sinh(z + w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w), \\
\cosh(z + w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)
\end{aligned}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und finden und beweisen Sie eine Additionsformel für $\tanh(z + w)$ in Abhängigkeit von $\tanh(z), \tanh(w)$, wo es definiert ist. Zeigen Sie weiterhin

$$\begin{aligned}
\cosh^2(z) - \sinh^2(z) &= 1, \\
\cosh(z) + \sinh(z) &= e^z.
\end{aligned}$$

Lösung

$$
\begin{aligned}
\sinh(z+w) &= \frac{\exp(z+w)-\exp(-z-w)}{2}\\
=&\frac{1}{4}[\exp(z+w)+\exp(z-w)-\exp(-z+w)\\
&-\exp(-z-w)+\exp(z+w)-\exp(z-w)+\exp(-z+w)-\exp(-z-w)]\\
=&\frac{1}{4}[(\exp(z)-\exp(-z))(\exp(w)+\exp(-w))+(\exp(z)+\exp(-z))(\exp(w)-\exp(-w))]\\
=&\sinh(z)\cosh(w)+\cosh(z)\sinh(w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cosh(z+w) &= \frac{\exp(z+w)+\exp(-z-w)}{2}\\
=&\frac{1}{4}[\exp(z+w)+\exp(z-w)+\exp(-z+w)\\
&+\exp(-z-w)+\exp(z+w)-\exp(z-w)-\exp(-z+w)+\exp(-z-w)]\\
=&\frac{1}{4}[(\exp(z)+\exp(-z))(\exp(w)+\exp(-w))\\
&+(\exp(z)-\exp(-z))(\exp(w)-\exp(-w))]=\cosh(z)\cosh(w)+\sinh(z)\sinh(w)
\end{aligned}
$$

Nun gilt für tanh:
$\tanh(z+w)=\frac{\sinh(z+w)}{\cosh(z+w)}=\frac{\sinh(z)\cosh(w)+\cosh(z)\sinh(w)}{\cosh(z)\cosh(w)+\sinh(z)\sinh(w)}=\frac{\tanh(z)+\tanh(w)}{1+\tanh(z)\tanh(w)}$.

$$
\begin{aligned}
\cosh^2(z)-\sinh^2(z) &= \left(\frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}\right)^2-\left(\frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}\right)^2\\
&=\frac{\exp(2z)+2\exp(-2z)}{4}-\frac{\exp(2z)-2+\exp(-2z)}{4}=1.\\
\cosh(z)+\sinh(z) &=\frac{\exp(z)+\exp(-z)+\exp(z)-\exp(-z)}{2}=\exp(z)
\end{aligned}
$$

Aufgabe B3 [6x3=18 Punkte]

Seien $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\cdot 10^n-3\cdot 10^{2n-1}}{3\cdot 10^{n-1}+2\cdot 10^{2n+1}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}|x|^\alpha \mathrm{e}^x$,

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|^\alpha \mathrm{e}^x$,

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\log(x)|x|^\beta$,

(vi) $\lim\limits_{x\to\infty}\log(x)|x|^\beta$.

Lösung

(i) *Idee:* Für große $n\in\mathbb{N}$ verhält sich der Zähler wie n, der Nenner wie $n^{3/4}$. Also verhält sich der gesamte Ausdruck wie $n^{1/4}$ und ist damit (bestimmt) divergent (gegen $+\infty$).
Genauer: Für $n>4$ ist $n^2>4n$ und damit $n>2\sqrt{n}$, d.h. $\sqrt{n}<n/2$.
Für den Zähler folgt damit $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\geq\sqrt{n^2}-\sqrt{n}>n-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n$.
Für $n>2$ ist $n^2>2$, so dass für den Nenner gilt:

$$\sqrt[4]{n^3+2n}=n^{1/4}\cdot\sqrt[4]{n^2+2}<n^{1/4}\cdot\sqrt[4]{2n^2}=n^{1/4}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot n^{1/2}=\sqrt[4]{2}\cdot n^{3/4}<2n^{3/4}.$$

Bezeichne die Folgenglieder mit b_n. Insgesamt gilt dann: $b_n>\frac{n/2}{2\cdot n^{3/4}}=\frac{1}{4}\cdot n^{1/4}\to\infty,\quad$ für $n\to\infty$.
Folglich ist b_n divergent.

(ii) *Idee:* Bezeichne die Folgenglieder mit d_n. Der Zähler verhält sich für große $n \in \mathbb{N}$ wie $-3 \cdot 10^{2n-1}$, der Nenner wie $2 \cdot 10^{2n+1}$. Der Bruch verhält sich damit insgesamt wie $\frac{-3}{200}$ und konvergiert dementsprechend gegen diesen Wert.
Genauer: Es gilt $d_n = \dfrac{10^{2n-1}}{10^{2n-1}} \cdot \dfrac{4 \cdot 10^{1-n} - 3}{3 \cdot 10^{-n} + 2 \cdot 10^2} = \dfrac{40 \cdot 10^{-n} - 3}{3 \cdot 10^{-n} + 200}$.
Da $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$, folgt mit den Grenzwertsätzen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \dfrac{40 \cdot 0 - 3}{3 \cdot 0 + 200} = -\dfrac{3}{200}$.

(iii) Sei $\mathbb{N} \ni k_0 \geq |\alpha| + 1$. Es gilt $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{k_0}}{k_0!}$. Damit folgt für alle $x \geq 1$, dass

$$|x|^\alpha \mathrm{e}^x \geq \frac{1}{k_0!}|x|^\alpha x^{|\alpha|+1} \geq \frac{1}{k_0!}x.$$

Also folgt $\lim\limits_{x\to\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^x = \infty$.

(iv) Sei $\mathbb{N} \ni k_0 \geq |\alpha| + 1$. Es gilt $\mathrm{e}^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \geq \frac{y^{k_0}}{k_0!}$. Damit folgt für alle $y \geq 1$, dass

$$|y|^\alpha \mathrm{e}^{-y} = |y|^\alpha \frac{1}{\mathrm{e}^y} \leq |y|^\alpha \frac{k_0!}{y^{k_0}} \leq k_0!|y|^{\alpha - k_0} \leq k_0!|y|^{-1}.$$

Also folgt $\lim\limits_{y\to\infty} |y|^\alpha \mathrm{e}^{-y} = 0$. Wegen $\lim_{x\to-\infty} -x = \infty$ erhalten wir mittels Substitution $y(x) = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty} |-x|^\alpha \mathrm{e}^{-(-x)} = \lim_{y\to\infty} |y|^\alpha \mathrm{e}^{-y} = 0.$$

(v) Falls $\beta \leq 0$, dann gilt $|x|^\beta \geq 1$ für alle $x \leq 1$. Da $\log(x) \leq 0$ für $x \leq 1$, folgt

$$\log(x)|x|^\beta \leq \log(x).$$

Da $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$, muss somit auch $\lim_{x\to 0} \log(x)|x|^\beta = -\infty$ gelten.
Sei von nun an $\beta > 0$. Mit $y(x) = \log(x)$ und $z(y) = \beta y$ erhalten wir

$$\log(x)|x|^\beta = \log(x)|\mathrm{e}^{\log(x)}|^\beta = y(x)\mathrm{e}^{y(x)\beta} = \frac{z(y(x))}{\beta}\mathrm{e}^{z(y(x))}.$$

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = -\infty$, $\lim\limits_{y\to-\infty} z(y) = -\infty$ und $\lim\limits_{z\to-\infty} z\mathrm{e}^z = 0$. Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \log(x)|x|^\beta = \lim_{y\to-\infty} y\mathrm{e}^{\beta y} = \frac{1}{\beta} \lim_{z\to-\infty} z\mathrm{e}^z = 0.$$

(vi) Falls $\beta \geq 0$, dann gilt $|x|^\beta \geq 1$ für alle $x \geq 1$. Es folgt $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x)|x|^\beta = \infty$.
Sei von nun an $\beta < 0$. Mit $y(x) = \log(x)$ und $z(y) = \beta y$ erhalten wir

$$\log(x)|x|^\beta = \log(x)|\mathrm{e}^{\log(x)}|^\beta = y(x)\mathrm{e}^{y(x)\beta} = \frac{z(y(x))}{\beta}\mathrm{e}^{z(y(x))}.$$

Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$, $\lim\limits_{y\to\infty} z(y) = -\infty$ und $\lim\limits_{z\to-\infty} z\mathrm{e}^z = 0$. Es folgt

$$\lim_{x\to\infty} \log(x)|x|^\beta = \lim_{y\to\infty} y\mathrm{e}^{\beta y} = \frac{1}{\beta} \lim_{z\to-\infty} z\mathrm{e}^z = 0.$$

Aufgabe B4 [4+4 Punkte]

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die folgende Potenzreihe konvergent ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-\sqrt{k^2+1})(x+2)^k.$$

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\arcsin(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}.$$

Lösung

(a) Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-\sqrt{k^2+1})x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{(k+\sqrt{k^2+1})}x^k$$

Quotientenkriterium: $a_k := \frac{-1}{(k+\sqrt{k^2+1})}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{k+\sqrt{k^2+1}}{k+1+\sqrt{(k+1)^2+1}}\\ &= \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}}{1+\frac{1}{k}+\sqrt{1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}}} \to 1, \quad k\to\infty.\end{aligned}$$

Damit ist der Konvergenzradius 1 und $\sum_{k=1}^{\infty}(k-\sqrt{k^2+1})x^k$ konvergent für $|x|<1$ und divergent für $|x|>1$.

Betrachte noch die Fälle $x=1, x=-1$: $\underline{x=1}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{(k+\sqrt{k^2+1})}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{(k+\sqrt{k^2+1})}$$

Vergleichskriterium: $\frac{1}{(k+\sqrt{k^2+1})} > \frac{1}{(k+\sqrt{2}k)} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})k}$
Weil die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergiert, ist nach dem Vergleichskriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{k+\sqrt{k^2+1}}$ divergent.

$\underline{x=-1}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{(k+\sqrt{k^2+1})}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{(k+\sqrt{k^2+1})}(-1)^k$$

Leibniz-Kriterium: $\frac{1}{(k+\sqrt{k^2+1})}$ ist monoton fallende Nullfolge, also ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{(k+\sqrt{k^2+1})}(-1)^k$ konvergent nach dem Leibniz-Kriterium.

Insgesamt: $\sum_{k=1}^{\infty}(k-\sqrt{k^2+1})x^k$ ist konvergent für $|x|<1$, $x=-1$ und divergent für $|x|>1$, $x=1$.

(b) Da die Reihe „Lücken“ hat, kommen wir mir der Formel für den Konvergenzradius (Satz 7.3) ohne Weiteres nicht weiter. Aber wir können einfach das Quotientenkriterium (6.10 Satz) benutzen. Für

$x = 0$ ist die Reihe konvergent und für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{(2(k+1))!}{(k+1)!(2(k+1)-(k+1))!} \frac{x^{2(k+1)+1}}{4^{k+1}(2(k+1)+1)} \frac{k!(2k-k)!}{(2k)!} \frac{4^k(2k+1)}{x^{2k+1}} \\
&= \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)(k+1)} \frac{x^2}{4} \frac{2k+1}{2k+3} \\
&= \frac{(2+\frac{2}{k})(2+\frac{1}{k})}{(1+\frac{1}{k})(1+\frac{1}{k})} \frac{x^2}{4} \frac{2+\frac{1}{k}}{2+\frac{3}{k}} \\
&\to \frac{2 \cdot 2x^2}{4} = x^2.
\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Damit ist der Konvergenzradius der Reihe 1.