FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
24. Oktober 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Erwartungswert & Varianz

Glücksspiel

Beispiel 70: (Würfelwurf)

- Einfaches Glücksspiel: Sie würfeln einmal und erhalten die Augenzahl in Euro als Gewinn
- Welchen Einsatz wären Sie bereit zu zahlen?
  - 1 Euro?
  - 6 Euro?
  - 2 Euro?
  - 5 Euro?
  - 3 Euro?
  - 4 Euro?
- Andere Frage: Was ist der erwartete mittlere Gewinn, wenn wir das Spiel oft wiederholen?
- Was ist ein “fairer” Einsatz? Wann ist “Gewinn - Einsatz” im Durchschnitt 0?

Erwartungswert

Definition 30

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine diskrete Zufallsvariable. Der *Erwartungswert* von X *existiert*, falls

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir den *Erwartungswert* als

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

Warum definieren wir erst die Existenz des Erwartungswerts? $\rightarrow$ Damit der Erwartungswert nicht von der Reihenfolge der Summation abhängt!

Erwartungswert

Beispiel 71: (Würfelwurf)

Sei X die Augenzahl beim Würfelwurf, dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Erwartungswert

Beispiel 72: (Spanische Weihnachtslotterie)

Bei der spanischen Weihnachtslotterie werden Lose mit 5-stelliger Losnummer (00000 bis 99999) für 200 EUR verkauft. Was ist der Erwartungswert für den Gewinn X?

Anzahl	Gewinn in EUR
1	4 000 000
1	1 250 000
1	500 000
2	200 000
8	60 000
1 794	1 000
10 000	200

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \\ &= 4\,000\,000 \cdot \tfrac{1}{100\,000} + 1\,250\,000 \cdot \tfrac{1}{100\,000} \\ &\quad + 500\,000 \cdot \tfrac{1}{100\,000} + 200\,000 \cdot \tfrac{2}{100\,000} \\ &\quad + 60\,000 \cdot \tfrac{8}{100\,000} + 1\,000 \cdot \tfrac{1\,794}{100\,000} \\ &\quad + 200 \cdot \tfrac{10\,000}{100\,000} + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 104.24\end{aligned}$$

Erwartungswert

Beispiel 72: (Spanische Weihnachtslotterie)

Bei der spanischen Weihnachtslotterie werden Lose mit 5-stelliger Losnummer (00000 bis 99999) für 200 EUR verkauft. Was ist der Erwartungswert für den Nettogewinn Y, d.h. "Gewinn - Einsatz"?

Anzahl	Gewinn in EUR
1	4 000 000
1	1 250 000
1	500 000
2	200 000
8	60 000
1 794	1 000
10 000	200

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}(Y = y) \\
&= 3\,999\,800 \cdot \tfrac{1}{100\,000} + 1\,249\,800 \cdot \tfrac{1}{100\,000} \\
&\quad + (499\,800 \cdot \tfrac{1}{100\,000} + (199\,800 \cdot \tfrac{2}{100\,000} \\
&\quad + 59\,800 \cdot \tfrac{8}{100\,000} + 800 \cdot \tfrac{1\,794}{100\,000} \\
&\quad + 0 \cdot \tfrac{10\,000}{100\,000} + (-200) \cdot \mathbb{P}(X = 0) \\
&= -95.76
\end{aligned}$$

Ist die Lotterie "fair"?

Erwartungswert

Beispiel 73: (LOTTO 6aus49)

"Bei LOTTO 6aus49 gibt es insgesamt neun Gewinnklassen – und nur in Gewinnklasse 9 (2 Richtige + Superzahl) gibt es eine feste Quote von 6,00 €. In den anderen Gewinnklassen 8 (3 Richtige) bis 1 (6 Richtige + Superzahl) hängt die Gewinnquote von der Anzahl der Gewinne in der jeweiligen Gewinnklasse und dem Ausschüttungsanteil ab." - vgl. `https://www.lotto.de/lotto-6aus49/spielregeln`

- Sei X der Gewinn beim LOTTO 6aus49. Was ist $\mathbb{E}[X]$?
- A-priori nicht berechenbar (wir wissen nicht wie viele "Gewinne es in der jeweiligen Gewinnklasse" gibt)
- Gewinnausschüttung: 50% des Einsatz
- Es kann gezeigt werden, dass $\mathbb{E}[X] = 0.5 \cdot$ Einsatz
- Für den Nettogewinn Y gilt $\mathbb{E}[Y] = -0.5 \cdot$ Einsatz
- Bei welcher Lotterie ist der erwartete Nettogewinn höher? Bei der spanischen Weihnachtslotterie oder LOTTO 6aus49?

Erwartungswert

Übung 40

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \subset \mathcal{A}$ ein Ereignis und $\mathbb{1}_A$ die zugehörige Indikatorfunktion, d.h.

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

Erwartungswert

Beispiel 74: (Gleichverteilung)

Sei X eine gleich verteilte Zufallsvariable in $\{1, \ldots, N\}$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}$ für $k = 1, \ldots, N$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{N} k \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

Allgemeiner: Falls X gleich verteilt ist und beliebige Werte $\{x_k\}_{k=1}^N$ annehmen kann, ist $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$ der Mittelwert der möglichen Werte

Erwartungswert

Beispiel 75: (Bernoulli-Verteilung)

Sei $X \sim \text{Ber}(p)$ eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit $p \in (0,1)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Übung 41

Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn (pro Euro Einsatz) beim Roulette, wenn Sie

1. auf rote Zahlen setzen (18 von 37, Auszahlung: 2 Euro),
2. auf die erste Spalte setzen (12 von 37, Auszahlung: 3 Euro),
3. auf 6 Zahlen setzen (6 von 37, Auszahlung: 6 Euro),
4. auf 4 Zahlen setzen (4 von 37, Auszahlung: 9 Euro)

Welche Strategie ist beim Roulette optimal?

Erwartungswert

Beispiel 76: (Zweifacher Würfelwurf)

Die Verteilung der Augensumme X beim zweifachen Würfelwurf ist gegeben durch

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Für den Erwartungswert folgt

$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

Erwartungswert

Übung 42: (Dreifacher Münzwurf)

Wir werfen 3-mal mit einer fairen Münze ($p = 1/2$) und bezeichnen mit X die Anzahl der Würfe, bei denen Zahl geworfen wurde. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Erwartungswert

Beispiel 77: (Binomialverteilung)

Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \text{komplizierte Rechnung...} = np$$

Später: Triviale Rechnung!

Optional 2

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{(n-1)-i}$$

$$= np(p + (1-p))^{n-1} = np$$

Erwartungswert

Beispiel 78: (Geometrische Verteilung)

Sei X geometrisch verteilt, d.h. $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $p \in (0,1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} np(1-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p(1-p)^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p(1-p)^{n+1} - p\frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \frac{1}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^n - 1 = \frac{1}{1-p} \sum_{n=0}^{\infty} np(1-p)^n - 1 \\
&= \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[X] - 1
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p}$.

Erwartungswert

- Die Berechnung von Erwartungswerten kann schnell kompliziert werden
  - z.B. für die Binomialverteilung
- Oft möchten wir den Erwartungswert zu einer Transformation $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Zufallsvariablen X berechnen, d.h. $\mathbb{E}[Y]$ für $Y = u(X)$
  - z.B. für $Y = X^2$ oder $Y = \exp(X)$
- Per Definition müssen wir die Verteilung von Y kennen, um

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y)$$

  berechnen zu können
- **Aber:** $Y(\Omega)$ und $\mathbb{P}(Y = y)$ hängen in gleicher Weise von u ab

Erwartungswert

- Sei $X \sim \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,6\}}$ die Augenzahl beim Würfelwurf und $Y = X^2$. Dann gilt:
  - $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$
  - $Y(\Omega) = \{x^2 : x \in X(\Omega)\} = \{1, 4, \dots, 36\}$
  - $\mathbb{P}(Y = y) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(X = x)$ für alle $y \in Y(\Omega), x \in X(\Omega)$
  - Allgemein: $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X^2 = y) = \mathbb{P}(X = x(y))$ für $x(y) \in X(\Omega)$ sodass $x^2(y) = y$
  - Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot \frac{1}{6} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \cdot \frac{1}{6} = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x).\end{aligned}$$

- Wir können $\mathbb{E}[Y]$ also berechnen ohne $\mathbb{P}(Y = y)$ zu kennen

Erwartungswert

Satz 11: (Transformationsformel für den Erwartungswert)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W'keitsraum, X eine diskrete Zufallsvariable und $u : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $\sum_{x \in X(\Omega)} |u(x)|p(x) < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}[u(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Beispiel 79

Sei X die Augenzahl beim Würfeln, dann gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6} \approx 15.17.$$

Wir haben die Transformationsformel bereits benutzt, um den "Nettogewinn" der spanischen Weihnachtslotterie zu berechnen (gegeben waren die W'keiten der Gewinne X und wir haben den Nettogewinn definiert als $Y = X - 200$).

Erwartungswert

Optional 3: (Beweis Transformationsformel)

Definiere $Y = u(X)$. Dann gilt $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(u(X) = y) = \sum_{x\in\Omega: u(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$. Mit der Definition von $\mathbb{E}[Y]$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y \sum_{x\in\Omega: u(x)=y} \mathbb{P}(X = x)\\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{x\in\Omega: u(x)=y} u(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x).\end{aligned}$$

Erwartungswert

Satz 12: (Dreiecksungleichung für den Erwartungswert)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine diskrete Zufallsvariable, deren Erwartungswert existiert. Dann gilt

$$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|].$$

Beweis: Mit $u(x) = |x|$ folgt aus der Transformationsformel und der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[X]| &= \left| \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \right| \leq \sum_{x \in X(\Omega)} |x\mathbb{P}(X = x)| \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} |x|\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}[|X|].\end{aligned}$$

Erwartungswert

Satz 13: (Eigenschaften des Erwartungswerts)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X und Y Zufallsvariablen, deren Erwartungswerte existieren. Dann gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$
2. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
3. $\mathbb{E}[b] = b$
4. $X \leq Y \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$

> 1. und 2. werden oft als "Linearität des Erwartungswerts" bezeichnet

> Beweis folgt direkt aus der Definition bzw. der Transformationsformel (außer für 2.)

Erwartungswert

Optional 4: (Beweis: Eigenschaften des Erwartungswerts)

1. $\mathbb{E}[\alpha X] = \sum_{x \in X(\Omega)} \alpha x \mathbb{P}(X = x) = \alpha \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \alpha \mathbb{E}[X]$
2. Aussagen (und Beweis) ergeben erst Sinn, wenn wir über gemeinsame Verteilungen von Zufallsvariablen definiert haben.
3. $b(\omega) = b$ ist eine konstante Zufallsvariable und es gilt $\mathbb{E}[b] = b \cdot 1 = b$.
4. $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}[Y]$.

Erwartungswert

Beispiel 80

Wir ziehen 10 mal **mit** Zurücklegen aus einer Urne mit 5 roten und 15 weißen Kugeln. Wie viele rote Kugeln ziehen wir durchschnittlich?

- Sei X die Anzahl der roten Kugeln
- Gesucht ist $\mathbb{E}[X]$
- Sei X_i die Anzahl der roten Kugeln in der i. Ziehung
- $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{4})$ mit $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{4}$
- Es gilt
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{E}[X_i] = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2.5$$
- Durchschnittlich ziehen wir 2.5 rote Kugeln.
- **Alternativ:** $X \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{4})$ und wir wissen $\mathbb{E}[X] = np = 2.5$

Erwartungswert

Wir können den Erwartungswert der Binomialverteilung einfacher berechnen als bisher!

- Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$
- Gesucht ist $\mathbb{E}[X]$
- Sei X_i der Indikator für einen Erfolg im i. Experiment
- Dann gilt $X_i \sim \text{Ber}(p)$ und weiter

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Erwartungswert

Beispiel 81

Wie viele Personen haben heute Geburtstag?

> Angenommen im Raum sind $n = 100$ Personen

> $X =$ “Anzahl Personen, die heute Geburtstag haben”

> $X \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{365})$

> Dann ist die “erwartete Anzahl von Personen, die Geburtstag haben”

$$\mathbb{E}[X] = np = 100 \cdot \frac{1}{365} \approx 0.274$$

Erwartungswert

Übung 43

Sei X die Summe der Augenzahlen beim 10-fachen Würfelwurf. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Erwartungswert

Übung 44

Eine Maschine fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5% je Tag aus. Sei X die Lebensdauer der Maschine in Tagen. $X = 0$ bedeutet beispielsweise, dass die Maschine bereits am ersten Tag kaputt geht. Bestimmen Sie die erwartete Lebensdauer der Maschine.

Glücksspiel

Beispiel 82

- $>$ Es wird ein Glücksspiel angeboten, bei dem Sie einen Einsatz von 100 Euro zahlen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% einen Gewinn in Höhe von 10 000 Euro erhalten.
- $>$ Sie haben die Wahl zwischen zwei Optionen: entweder Sie nehmen am Glücksspiel teil oder nicht.
- $>$ Für den Gewinn X beim Glücksspiel gilt

$$\mathbb{E}[X] = 0.99 \cdot (-100) + 0.01 \cdot (10\,000 - 100) = 0.$$

- $>$ Wenn Sie nicht mitspielen gilt für Ihren Gewinn Y: $\mathbb{E}[Y] = 0$.
- $>$ Für welche Option entscheiden Sie sich? Warum?

Der Erwartungswert reicht nicht aus, um Entscheidungen unter Unsicherheit zu treffen. Wir möchten auch den “Grad des Zufalls” berücksichtigen!

Varianz

Definition 31

Sei X eine Zufallsvariable, für die $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$ existiert. Dann definieren wir die *Varianz* von X als

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Die Wurzel der Varianz heißt *Standardabweichung*.

Achtung: Bisher haben wir den Erwartungswert nur für diskrete Zufallsvariablen definiert. Wir definieren den Erwartungswert später für allgemeine Verteilungen und erhalten damit auch die Definition für die Varianz.

Varianz

Beispiel 83: (Würfelwurf)

- Sei X die Augenzahl beim Würfelwurf
- Es gilt $\mathbb{E}[X] = 3.5$
- Für die Varianz folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= (1-3.5)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (2-3.5)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + \cdots + (6-3.5)^2 \cdot \tfrac{1}{6} \\ &= \tfrac{1}{6}\big((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + \cdots + (2.5)^2\big) = \tfrac{35}{12} \approx 2.917\end{aligned}$$

Varianz

Beispiel 84: (Fortsetzung von Beispiel 82)

- Option 1:
  - Einsatz: 100
  - Gewinn Y: $10\,000X$ für $X \sim \text{Ber}(\frac{1}{100})$
- Option 2:
  - Einsatz: 0
  - Gewinn Z: 0
- Es gilt $\mathbb{E}[Y - 100] = 0$ und $\mathbb{E}[Z] = 0$
- $\text{var}(Z) = \mathbb{E}[(0 - \mathbb{E}[Z])^2] = 0$
- $\text{var}(Y - 100) = 9\,900^2 \cdot \frac{1}{100} + (-100)^2 \cdot \frac{99}{100} = 990\,000$
- Die Varianz von Option 2 ist kleiner als die Varianz von Option 1
- Interpretation: Das "Risiko" von Option 2 ist kleiner

Varianz

Beispiel 85: (Zweifacher Würfelwurf)

Sei X die Augensumme beim zweifachen Würfelwurf. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = 7$ und

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$k - \mathbb{E}[X]$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$(k - \mathbb{E}[X])^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Die Varianz ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(X) &= \sum_{k=2}^{12} (k - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}(X = k) \\ &= 25 \cdot \frac{1}{36} + 16 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 25 \cdot \frac{1}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6} \approx 5.83\end{aligned}$$

Varianz

Beispiel 86: (Gleichverteilung)

Sei $X \sim \mathcal{U}_{\{1,2,\dots,N\}}$, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}$ für $k = 1, \dots, N$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$. Für die Varianz folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \sum_{k=1}^{N} (k - \mathbb{E}[X])^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Big(k - \frac{N+1}{2}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k^2 - 2k \frac{N+1}{2} + \Big(\frac{N+1}{2}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k^2 - 2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k \frac{N+1}{2} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (\frac{N+1}{2})^2 \\
&= \frac{1}{N} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N+1}{N} \frac{N(N+1)}{2} + \Big(\frac{N+1}{2}\Big)^2 = \frac{N^2-1}{12}
\end{aligned}$$

Allgemeiner: Falls X gleich verteilt ist mit beliebigen Werten $\{x_k\}_{k=1}^N$, ist $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x}_N)^2$, wobei $\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k$.

Varianz

Beispiel 87: (Bernoulli-Verteilung)

Sei $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit $p \in (0,1)$. Der Erwartungswert ist $\mathbb{E}[X] = p$. Für die Varianz folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= (0-p)^2\mathbb{P}(X=0) + (1-p)^2\mathbb{P}(X=1) \\ &= p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p(1-p).\end{aligned}$$

Varianz

Übung 45

Bestimmen Sie die Varianz des Gewinns (pro Euro Einsatz) beim Roulette, wenn Sie

1. auf rote Zahlen setzen (18 von 37, Auszahlung: 2 Euro),
2. auf die erste Spalte setzen (12 von 37, Auszahlung: 3 Euro),
3. auf 6 Zahlen setzen (6 von 37, Auszahlung: 6 Euro),
4. auf 4 Zahlen setzen (4 von 37, Auszahlung: 9 Euro)

Welche Strategie ist beim Roulette optimal?

> Das Ausrechnen von Varianzen ist aufwendig
> Wir brauchen Rechenregeln!

Varianz

Satz 14: (Eigenschaften der Varianz)

Sei X eine (diskrete) Zufallsvariable, für die die Varianz existiert. Dann gilt

1. $\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \mathrm{var}(X)$, für $a, b \in \mathbb{R}$
2. $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
3. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[(X - a)^2] = \mathrm{var}(X) + (\mathbb{E}[X] - a)^2$$

   und insbesondere $\mathbb{E}[(X - a)^2] \geq \mathrm{var}(X)$. Gleichheit gilt genau dann wenn $a = \mathbb{E}[X]$.

Die Eigenschaften gelten auch für nicht-diskrete Zufallsvariablen (wir haben den Erwartungswert in diesem Fall aber noch nicht definiert).

Varianz

Beweis: (Eigenschaften der Varianz)

1. Für den Erwartungswert gilt $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$, also

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(aX + b) &= \mathbb{E}\Big[\big(aX + b - (a\mathbb{E}[X] + b)\big)^2\Big] \\ &= a^2\mathbb{E}\Big[\big(X - \mathbb{E}[X]\big)^2\Big] = a^2\mathsf{var}(X).\end{aligned}$$

2. Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt:

$$\begin{aligned}\mathsf{var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}\big[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X])^2\big] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

3. Vgl. Satz 5.12 in [Dehling and Haupt, 2006]

Varianz

Beispiel 88: (Binomialverteilung)

Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Der Erwartungswert ist $\mathbb{E}[X] = np$. Für die Varianz folgt $\mathrm{var}(X) = np(1-p)$.

Beispiel 89: (Geometrische Verteilung)

Sei X geometrisch verteilt, d.h. $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $p \in (0,1)$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p}$ und $\mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Varianz

Optional 5: (Binomialverteilung - Fortsetzung)

Für $k \in \{2, \dots, n\}$ und $n \geq 2$ gilt

$$k(k-1)\binom{n}{k} = \frac{k(k-1)n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-k)!} = n\cdot(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + \mathbb{E}[X] \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} p^i (1-p)^{(n-2)-i} + \mathbb{E}[X] = n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

Also gilt $\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$

Varianz

Optional 6: (Geometrische Verteilung - Fortsetzung)

Zunächst gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p(1-p)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(1-p)^n = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 p(1-p)^{k+1}$$

$$= (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 2k + 1) p(1-p)^k$$

$$= (1-p) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(1-p)^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k + \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k \right)$$

$$= (1-p)(\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X] + 1) = (1-p)(\mathbb{E}[X^2] + 2\tfrac{1-p}{p} + 1).$$

Daraus folgt $\mathbb{E}[X^2] = 2\frac{(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} = \frac{2-p}{p}\frac{1-p}{p}$ und für die Varianz

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2-p}{p}\frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Varianz

Übung 46: (Dreifacher Münzwurf)

Wir werfen 3-mal mit einer fairen Münze ($p = 1/2$) und bezeichnen mit X die Anzahl der Würfe, bei denen Zahl geworfen wurde. Bestimmen Sie die Varianz von X.

Übersicht

Verteilung	$X(\Omega)$	W'keitsfunktion	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{var}(X)$
Bernoulli	$\{0,1\}$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Gleich	$\{1,2,\dots,n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomial	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Hypergeom.	$\{0,1,\dots,n\}$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Geom.	$\mathbb{N}_0$	$p(1-p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\mathbb{N}_0$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ

Varianz

Beispiel 90

Urnenmodell: 5 rote, 15 weiße Kugeln, 10-faches Ziehen **ohne** Zurücklegen, $X =$ "Anzahl rote Kugeln"

> X ist hypergeometrisch verteilt mit Parametern
> > $N = 20$
> > $M = 5$
> > $n = 10$

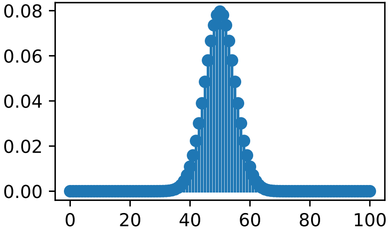
> $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{15}{10-k}}{\binom{20}{10}}$

> $\mathbb{E}[X] = \frac{nM}{N} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$

> $\text{var}(X) = n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1} = 10 \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{150}{152}$

Momente

Sei $X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$ für ein großes n



> Wie wahrscheinlich sind extrem große bzw. extrem kleine Werte?

> Oft können wir die Wahrscheinlichkeit für extreme Ereignisse durch die *Momente* einer Verteilung abschätzen

Definition 32

Für eine Zufallsvariable X definieren wir das k. Moment als $\mathbb{E}[X^k]$.

Momente

Satz 15: (Markov-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable, $a \in \mathbb{R}$ und $h : D \to [0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion mit $h(a) > 0$ und $X(\Omega) \subset D$, dann gilt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(a)}.$$

Spezialfall: Für $Y = |X|$, $a > 0$ und $h(x) = x$ folgt

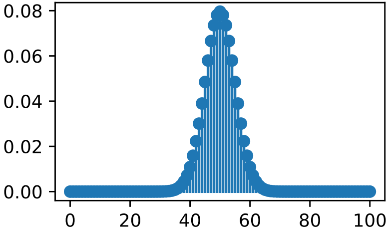
$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}.$$

Beweis:

$$h(a)\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}[h(a)\mathbb{1}_{X \geq a}] \leq \mathbb{E}[h(X)\mathbb{1}_{X \geq a}] \leq \mathbb{E}[h(X)].$$

Momente

Sei $X \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{2})$



Dann gilt $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[X] = np = 50$ und

$$\mathbb{P}(X \geq 75) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{75} = \frac{2}{3}$$

> Die Abschätzung ist ziemlich grob

> Und was ist mit kleinen Werten?

Momente

Satz 16: (Chebychev-Ungleichung)

Sei X eine Zufallsvariable mit existierender Varianz und $a > 0$. Dann gilt

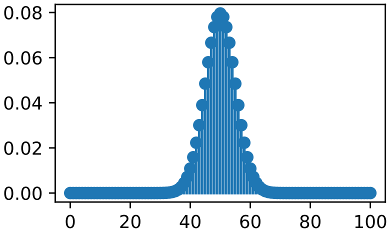
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathsf{var}(X)}{a^2}.$$

Beweis: Wende Markov-Ungleichung mit $h(x) = x^2$ auf die Zufallsvariable $|X - \mathbb{E}[X]|$ an:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^2]}{a^2} = \frac{\mathsf{var}(X)}{a^2}.$$

Momente

Sei $X \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{2})$



Dann gilt $\mathbb{E}[X] = np = 50$, $\text{var}(X) = np(1-p) = 25$ und

$$\mathbb{P}(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{\text{var}(X)}{25^2} = \frac{1}{25}$$

> Die Abschätzung ist deutlich besser

> Abschätzung: sowohl Abweichungen nach oben, als auch nach unten

Momente

Beispiel 91

- Eine Maschine fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5% je Tag aus.
- Sei X die Lebensdauer der Maschine in Tagen ($X = 0$ bedeutet beispielsweise, dass die Maschine bereits am ersten Tag kaputt geht).
- Dann gilt
  - $\mathbb{P}(X = n) = 0.005 \cdot 0.995^n$
  - $\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p} = \frac{0.995}{0.005} = 199$
  - $\mathsf{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.995}{0.005^2} = 39800$
  - $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1-p}{p^2} + (\frac{1-p}{p})^2 = 79401$
- Wie wahrscheinlich ist es, dass die Maschine zwei Jahre (≈ 730 Tage) oder länger nicht ausfällt?

Momente

Beispiel 91: (Fortsetzung)

- Wie wahrscheinlich ist es, dass die Maschine 730 Tage oder länger nicht ausfällt?
- Grobe Abschätzung: Markov Ungleichung für $h(x) = x$:
$$\mathbb{P}(X \geq 730) \leq \tfrac{199}{730} \approx 27.26\%$$
- Feinere Abschätzung: Markov Ungleichung für $h(x) = x^2$:
$$\mathbb{P}(X \geq 730) \leq \tfrac{\mathbb{E}[X^2]}{730^2} \approx 14.90\%$$
- Exakte Berechnung:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 730) = 1 - \mathbb{P}(X < 730) = 1 - \sum_{n=0}^{729} \mathbb{P}(X = n)\\ = 1 - \sum_{n=0}^{729} p(1-p)^n = 1 - p\tfrac{1-(1-p)^{730}}{1-(1-p)}\\ = (1-p)^{730} = 0.995^{730} \approx 2.58\%\end{aligned}$$

Literatur I

Bundesministerium für Gesundheit (2024).
Infektionsradar.
https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
Springer-Verlag.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES