Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 0

Hausaufgaben

Aufgabe 1

Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem a) keine, b) genau eine oder c) unendlich viele Lösungen? Es ist der Gauß-Algorithmus zu benutzen!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 4y & + & (3t^2-1)z & = & (t-1) \end{array}$$

Aufgabe 2

Eine Getränkefirma hat 2 Orangensaftsorten im Angebot. Die Sorte „fruchtig“ besteht aus 70% Orangensaft, 10% Zucker und 20% Wasser. Die Sorte „mild“ besteht aus 50% Orangensaft, 20% Zucker und 30% Wasser. Die Firma will eine neue Sorte „light“ einführen, die aus 22% Orangensaft, 7% Zucker und 71% Wasser besteht. Diese Sorte möchte die Firma aus den Sorten A und B mischen, wobei sie beliebig mit Wasser verdünnen kann. Welche Anteile muß die Firma verwenden?

Aufgabe 3

Hannes isst gerne Fast Food. Um sich einigermaßen gesund zu ernähren, sollte er in einer Mahlzeit 110 g Eiweiß, 130 g Kohlenhydrate und 60 g Fett zu sich nehmen. Seine Fast-Food-Kette behauptet, ihre Pommes enthielten 30% Eiweiß, 30% Kohlenhydrate und 40% Fett, ihre Burger 50% Eiweiß, 30% Kohlenhydrate und 20% Fett und ihre Apfeltasche 20% Eiweiß, 70% Kohlenhydrate und 10% Fett. Wieviel Pommes, Burger und Apfeltaschen (jeweils in g) muss Hannes essen, damit er langfristig gesund bleibt?

Aufgabe 4

Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & & & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & & & = & 8 \\ & & y & + & 2z & + & u & = & 12 \\ & & & & z & + & 2u & = & 11 \end{array} \right\}$$

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 1

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & -x_2 & + & ax_3 & = & b \end{array}\right\}$$

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ existiert keine bzw. eine bzw. unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $a = \frac{2}{5}$ und $b = \frac{12}{5}$.

Aufgabe 2

Es sei $\|\cdot\|$ die Norm, die von dem Skalarprodukt $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ induziert wird.
Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren a und b gilt:

(a) $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$

(b) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

(c) $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$

Aufgabe 3

Eine Wanderin startet ihre Tour an ihrem Zelt in Norwegen. Sie geht 10 km in südliche Richtung und anschließend $10 \cdot \sqrt{2}$ km in südwestliche Richtung. Danach wandert sie 10 km nach Osten. Wie viele Kilometer ist sie jetzt etwa von ihrem Zelt entfernt?

Aufgabe 4

Berechnen Sie den euklidischen Abstand der Punkte von

(a) $A = (-1; 2)$ und $B = (3; 4)$

(b) $C = (1; 2; 3)$ und $D = (3; -3; 5)$

voneinander.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Weisen Sie nach, ob es sich bei den angegebenen Abbildungen $< x, y >$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um Skalarprodukte handelt.

(a) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_1$

(b) $< x, y >= \sum_{i=1}^{3} e^{x_iy_i}$

(c) $< x, y >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Aufgabe 6

Welcher Punkt hat von den Punkten $A = (0, 1)$, $B = (0, 7)$ und $C = (4, 9)$ den gleichen euklidischen Abstand? Tipp: P sei der gesuchte Punkt. Es muss für die zugehörigen Ortsvektoren gelten:

$$\|p - a\| = \|p - b\| = \|p - c\|$$

Aufgabe 7

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt und $\|\cdot\| = (\langle \cdot, \cdot \rangle)^{1/2}$ die daraus abgeleitete Norm. Welche der folgenden Gleichungen bzw. Aussagen sind für beliebige Vektoren a, b, c richtig? Hierbei sei $a^2 := \langle a, a \rangle$. Beweisen Sie die jeweilige Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel!

(a) $\langle a, b \rangle \langle b, a \rangle = 2\langle b, a \rangle$

(b) $\langle a, c \rangle a = a^2 c$

(c) $b = \sqrt{b^2}$

(d) $\langle a + b, a - b \rangle = a^2 - b^2$

(e) $\dfrac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b = a$

(f) $\langle a, b \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass durch $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 - u_3v_2 + u_4v_4$ für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2024/2025

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 2

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Zerlegung des Vektors $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in die Richtungen der Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ wobei $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b \perp a$, so dass gilt: $d = \alpha a + \beta b$
Versuchen Sie auf ein lineares Gleichungssystem zu verzichten. (Zeichnerische und rechnerische Lösung!).

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren

(a) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

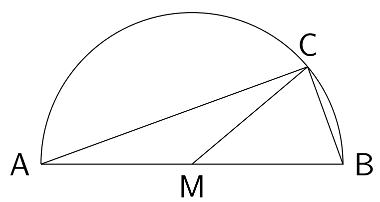
Aufgabe 3

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Punkte Eckpunkte eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sein können, d.h. ob 2 der Verbindungslinien gleich lang sind und einen rechten Winkel bilden.

$$P_1 = (1, 1 + \sqrt{3}), \quad P_2 = (2 + \sqrt{3}, 2), \quad P_3 = (3, 1 - \sqrt{3})$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass jedes Dreieck A,B,C, das wie in der Skizze dargestellt konstruiert wurde, rechtwinklig ist. (Satz des Thales)
Dabei liegt der Punkt C auf dem Halbkreis über A und B.



Hinweis: Sie erkennen am Skalarprodukt zweier Vektoren, ob die Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für einen Vektor a gilt für das euklidische Skalarprodukt und die euklidische Norm $\langle a, a \rangle = \|a\|^2$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

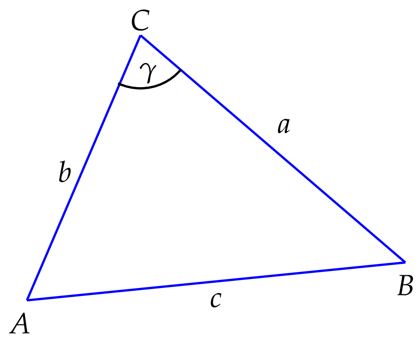
Durch 4 Punkte A, B, C und D ist ein beliebiges Viereck gegeben. Zeigen Sie: Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$, dann sind diese Strecken parallel (Skizze!). Dies gilt auch, wenn A, B, C und D in $\mathbb{R}^3$ und auch nicht in einer Ebene liegen.

Aufgabe 6

Zeigen Sie: In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c gilt der Kosinussatz:

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(\gamma),$$

wobei γ der Innenwinkel des Dreiecks zwischen den durch a und b dargestellten Seiten ist.



Aufgabe 7

Wir betrachten nun das Standardskalarprodukt.

(a) Wie kann man $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ als Skalarprodukt des Vektors $a = (a_1, ..., a_n)$ mit einem Vektor b darstellen? Wie muss dieser Vektor b aussehen?

(b) Beweisen Sie, dass gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \|a\|_1 \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\|a\|_2$$

Hinweis: Benutzen Sie Teil a) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Aufgabe 8

Die drei Freunde Anton, Bernd und Christoph wollen eine gemeinsame Wanderung durchführen. Da sie aus verschiedenen Richtungen anreisen, treffen sie auf 3 verschiedenen Parkplätzen A, B und C ein. Nach Gesprächen mit ihren Handys über den gemeinsamen Treffpunkt macht Christoph folgenden Vorschlag: Da jeder den Standort des anderen kennt, kennt er die genaue Richtung zwischen seinem Standort und den anderen. Jeder geht auf geradem Weg genau auf der mittleren Richtung zwischen den beiden Zielen.
Christoph behauptet, dann würden sie sich alle drei in einem gemeinsamen Punkt treffen. Ist diese Behauptung richtig?

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 3

Selbstlernaufgaben

In den folgenden Aufgaben sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt.

Aufgabe 1

Berechnen Sie $a \times b$ für die Vektoren

(a) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie außerdem für die Teile a) und b) $b \times a$, $-b \times a$, $a \times a$, $\langle a \times b, b \rangle$, $\langle a \times b, a \rangle$ und $(a \times b) \times b$. In welche Richtung zeigt der letzte Vektor?

Aufgabe 2

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Man beweise die Graßmannsche Identität

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c.$$

Aufgabe 3

Gegeben sind 2 Punkte $A = (a_x, a_y)$ und $B = (b_x, b_y)$ im $\mathbb{R}^2$. Sie sind zusammen mit dem Nullpunkt die Eckpunkte eines Dreiecks. Geben Sie eine Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks an.

Tipp: Betrachten Sie die Punkte im dreidimensionalen Raum (die 3. Koordinate ist Null!) und benutzen Sie das Vektorprodukt.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden Punkte alle auf einer Geraden liegen.

$A_1 = (1; 3)$, $A_2 = (-2; 4)$, $A_3 = (10; 0)$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie für die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Produkte

$$\langle a \times b, c \rangle \quad \text{und} \quad \langle a, b \times c \rangle.$$

Aufgabe 6

Die Vektoren $v_n \in \mathbb{R}^3$ sind definiert durch

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_n = v_{n-1} \times a, \text{ wobei } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$v_{2n} = (-1)^n \cdot 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass das Volumen eines Tetraeders, der von drei nicht in einer Ebene liegenden Vektoren a,$b, c \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, durch

$$V = \tfrac{1}{6} \left| \langle a \times b, c \rangle \right|$$

gegeben ist.
Tipp: Sie können im Beweis verwenden, dass für das Volumen V einer Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h gilt: $V = \frac{1}{3} G\, h$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte

(a) $A = (-2; 1)$ und $B = (2; 2)$

(b) $A = (1; 2; 3)$ und $B = (3; 1; 2)$

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 4

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie die Parameterform der Ebene durch die drei Punkte $A = (1; 2; 3)$, $B = (2; 4; 1)$ und $C = (3; -1; 0)$. Liegt der Punkt $D = (1; -5; 4)$ in der Ebene?

(b) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf dieser Ebene steht und damit eine parameterfreie Ebenengleichung.

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch die 3 Punkte

$$A = (0; 2; 0), B = (-1; 3; 1), C = (-1; -1; -2)$$

(b) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $P = (\alpha; 3; -1)$ in der Ebene liegt.

(c) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand dieser Ebene vom Nullpunkt.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen

(a) $3x_1 + 4x_3 = 7 \quad$ und $\quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad$ und $\quad -6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 1$

Aufgabe 4

Eine Mobilfunkantenne muss wegen der stürmischen Lage auf einem Berg mit Seilen stabilisiert werden. Die Spitze der Antenne hat die Koordinaten

$$P = (p_x;\ p_y;\ p_z) = (2,5\ ;\ 1,5\ ;\ 12)\,.$$

Die Seile werden an den Punkten

$$A = (1;\ 1;\ 1)\,, \quad B = (1;\ 2;\ -1)\,, \quad C = (4;\ 2;\ 1)$$

befestigt.

(a) Berechnen Sie die Ebene, in der die Punkte A, B, C liegen, in Hessescher Normalform.

(b) Der Fuß der Mobilfunkantenne liegt in der gleichen Ebene wie die Endpunkte der Seile. Die Antenne steht genau in z-Richtung. Bestimmen Sie die Höhe der Antenne (1 LE $=$ 10 m).

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Ein Gebäude in Form einer Pyramide hat die Eckpunkte $O = (0; 0; 0)$, $A = (6; 8; 0)$, $B = (0; 8; 0)$ und die Spitze $S = (2; 4; 8)$. Von der Ecke B verläuft zum Punkt $P = (4; 6; 4)$ ein Stahlträger.

(a) Zeigen Sie, dass P in der Ebene E_{OAS}, die die Pyramidenseite OAS enthält, liegt.

(b) Überprüfen Sie, ob der Stahlträger senkrecht auf die Ebene E_{OAS} trifft.

Aufgabe 6

Gegeben sind die zwei Punkte $P = (1; 2; 3)$ und $Q = (-1; 1; 2)$ und die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g_1 bzw. g_2 durch den Punkt P in Richtung von a bzw. durch Q in Richtung von b.

(b) Sind die Geraden windschief (d.h. sind sie weder parallel noch haben sie einen Schnittpunkt)?

(c) Falls das der Fall ist, bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht.

Aufgabe 7

Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x_1 - x_2 + t \cdot x_3 = 9, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}?$$

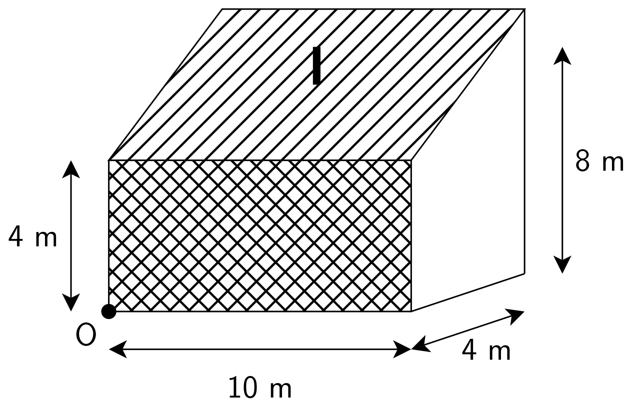
Aufgabe 8

Das abgebildete Haus hat die Ausmaße: 10m in x-Richtung, 4m in y-Richtung und zwischen 4m und 8m in z-Richtung (siehe Abbildung). Genau in der Mitte seines Daches steht eine 1m hohe Antenne. Auf das Haus fällt (paralleles) Sonnenlicht in Richtung des Vektors $v = (1, -1, -3)^\top$. Der Koordinatenursprung O liegt vorne in der linken unteren Hausecke.

(a) Berechnen Sie Anfangs- und Endpunkt der Antenne.

(b) Berechnen Sie den Schattenpunkt der Antennenspitze auf der Dachoberfläche.

(c) Wie lang ist der Schatten der Antenne auf dem Dach?


I
4 m
8 m
O
10 m
4 m

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2024/2025

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 5

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Ein Flugzeug benötigt bei Gegenwind bis zum Abheben 500 m und startet dann in Richtung $(3;1)$. Bei Rückenwind hebt das Flugzeug erst nach 750 m ab und startet in Richtung $(4;1)$. Am Ende der 1 km langen Startbahn steht ein 10 m hoher Beleuchtungsmast. Wie groß ist der Mindestabstand des Mastes zu der Flugbahn bei Gegen- bzw. Rückenwind?

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Determinanten durch Anwendung der Regeln, so dass die Rechnung einfach wird:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ a & b & c \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie mit Hilfe einer Determinanten, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben. Bestimmen Sie anschließend die Schnittmenge.

$$E_1 : x_1 + x_3 = 4, \qquad E_2 : 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \qquad E_3 : 2x_2 + x_3 = 11$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Welche Abstände haben die Punkte $Q = (7; 4; 5)$ und $R = (-4; -6; -3)$ von der Ebene

$$\langle x, n\rangle = \langle p, n\rangle \quad \text{mit} \quad p = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie im $\mathbb{R}^3$ durch Rückführung auf das Spatprodukt und (gegebenenfalls) komponentenweises Ausmultiplizieren:

(a) **D1**. $\det(a, b, c) = \det(c, a, b) = \det(b, c, a)$

(b) **D2**. $\det(a, b, c) = -\det(b, a, c)$

(c) **D3**. $\det(a, a, c) = 0$

Aufgabe 7

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren a und b aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Aufgabe 8

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + \alpha x_3 &= 11 \end{aligned}$$

keine eindeutige Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 6

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Bilden Sie eine Gruppe aus nur zwei Elementen 0 und 1. Dabei soll 0 das neutrale Element sein. Welche Ergebnisse müssen die 4 Operationen

$$\begin{array}{ccc} 0 & \circ & 0 \\ 0 & \circ & 1 \\ 1 & \circ & 0 \\ 1 & \circ & 1 \end{array}$$

haben? Begründen Sie die Ergebnisse mit den Gruppenaxiomen.

Aufgabe 2

Für $x = (x_1, x_2)^T$ und $y = (y_1, y_2)^T$ aus $\mathbb{R}^2$ ist folgende Multiplikation definiert:

$$x \circ y = \begin{pmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob die Menge $\mathbb{R}^2$ mit der gegebenen Abbildung $\circ$ eine Gruppe bildet. Geben Sie ggf. eine möglichst große Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ an, sodass M mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe bildet.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die dreidimensionalen Vektoren mit der Addition und dem Vektorprodukt keinen Körper bilden.

Aufgabe 4

Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge, soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden. Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zurücklegt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x_1- bzw. x_2-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

Machen Sie zuerst eine Skizze. Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (x_1x_3)-Ebene liegt. Wo liegt der Austrittspunkt? Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

In einem Berghang steht ein 20 Meter hoher Turm mit einem Funksender auf der Spitze, dessen Reichweite in alle Richtungen 100 Meter beträgt. Der Berghang hat eine gleichmäßige Steigung von 100 % (entspricht $45°$ zur horizontalen Fläche) und ist ein Südhang, d.h. die Talsohle liegt im Süden, der Gipfel im Norden.

(a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Berghang.

(b) Berechnen Sie für jede der vier Himmelsrichtungen den Punkt, an dem man den Sender gerade noch empfangen kann.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!

Aufgabe 6

Sei $M := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, und für zwei Vektoren $a, b \in M$ weiter $p_b(a)$ die orthogonale Projektion von a auf b bezogen auf das Standardskalarprodukt. Wir setzen $a \circ b := p_b(a)$.
Bildet $(M, \circ)$ eine Gruppe? Bildet $(M, \circ)$ sogar eine abelsche Gruppe?

Aufgabe 7

In $\mathbb{R}^3$ ist folgende Abbildung definiert:

$$a \circ b = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Hat $\circ$ ein neutrales Element?

(b) Welche Vektoren $a \in \mathbb{R}^3$ besitzen bzgl. $\circ$ ein inverses Element?

(c) Gibt es eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ mit mehr als einem Element, die mit $\circ$ eine (eventuell nicht kommutative) Gruppe bildet?

Aufgabe 8

Auf $\mathbb{R}^n$ sei die Verknüpfung $\oplus : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\oplus(x, y) := (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T,$$

$\forall\ x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n\ \forall\ y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, \oplus)$ eine kommutative Gruppe bildet.

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2024/2025

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 7

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bildet die Menge $\mathbb{R}^3$ bzgl. der folgenden Verknüpfungen einen Vektorraum?

(a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \cdot x_1 \\ 2\alpha \cdot x_2 \\ 2\alpha \cdot x_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = x_2\}$

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$

(c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^+$ aller echt positiven reellen Zahlen mit den Verknüpfungen $x \oplus y := xy$ und $\lambda \odot x := x^\lambda, x, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, ein reeller Vektorraum ist.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\langle a, x \rangle = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Gegeben sind zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Sind U_1, U_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$?

(a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \det(a, b, x) = 0\}$

(b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \det(a, b, x) = 1\}$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A := \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in \ \mathbb{R} \, \forall \, i = 1, 2, \ j = 1, 2, 3\}$$

mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (s. Skript S.76 Beispiel 3.25) einen reellen Vektorraum bilden.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die lineare Hülle von

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in Normalform. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} 2c^2 - \frac{3}{c} \\ 6c \\ \frac{1}{4c} - 2c^2 \end{pmatrix}$$

Element des von a und b aufgespannten Untervektorraums ist.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die lineare Hülle der Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Raum $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2024/2025

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 8

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Sind (a, b, c) linear unabhängig?

(b) Wie lautet das Ergebnis, wenn man c durch $d = (-1,\ 1,\ 1)^\top$ ersetzt?

(c) Sind die Vektoren (a, b, c, f) linear unabhängig mit $f = (1,\ 3,\ 5)^\top$?

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren in $\mathcal{C}[-\infty, \infty]$ linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = 6, \quad f_2(x) = 3 \cdot \sin x, \quad f_3(x) = 2 \cdot \cos x$

(b) $f_1(x) = (3 - x)^2, \quad f_2(x) = x^2 + 6x, \quad f_3(x) = 5$

(c) $f_1(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x$

Aufgabe 3

Prüfen Sie die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^{nxn}$ auf linear (Un-)Abhängigkeit.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Es sei (v_1, v_2) eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ auch die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Schreiben Sie das Polynom $v = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1 = t^2 - 2t + 5$, $e_2 = 2t^2 - 3t$ und $e_3 = t + 3$.

Aufgabe 7

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = x^2 + x, \qquad f_2(x) = x^2 - x - 2, \qquad f_3(x) = \alpha \cdot e^x + 1.$$

Bei welchem α funktioniert das übliche Verfahren zum Beweis der linearen Unabhängigkeit mit den Punkten $x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ nicht? Zeigen Sie anschließend, dass das Verfahren mit eben diesem α und den Punkten x_1, x_2 und $x_4 = 2$ sehr wohl funktioniert.

Aufgabe 8

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Geben Sie an, für welche t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $x = (2,\ 1,\ 1)^\top$ erhalten.

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 9

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Der Vektor x habe die Koordinaten $(1, 2, 3)^T$ bezüglich der kanonischen Basis. Welche Koordinaten hat er bezüglich der Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Zeigen Sie zuerst, dass es sich um eine Basis handelt.

Aufgabe 2

$M = \{f, g, h, i\}$ sei eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V mit $dim(V) \geq 4$. Wie muss α gewählt werden, damit $\{f+g, g+h, h+i, i+\alpha \cdot f\}$ linear unabhängig sind?

Aufgabe 3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie eine Basis des Untervektorraums U an.

(b) Ergänzen Sie diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Weiter sind die folgenden Vektoren w_1, w_2, w_3 gegeben:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie jeden der 3 Vektoren aus des Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ so gegen einen Vektor aus der Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$ aus, dass wieder eine Basis im $\mathbb{R}^3$ entsteht.

Hinweis: Dabei soll jeweils aus der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ genau ein Vektor ausgetauscht werden.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Stellen Sie (möglichst einfach) fest, ob folgende Tupel von Vektoren ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis im $\mathbb{R}^n$ bilden. Stellen Sie ggf. fest, ob es eine Teilmenge der Vektoren gibt, die eine Basis bildet. Geben Sie jeweils die Dimension des aufgespannten Unterraums an.

(a) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ (b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (d) $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 6

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β, γ ergibt sich eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale lineare Hülle $L(a, b, c)$?

Aufgabe 7

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils eine Begründung an!

(a) Für jede Menge $E \subset V$, V ist Vektorraum und E Erzeugendensystem, gilt $\exists B \subset E$ sodass B Basis von V.

(b) $\{p_1, p_2, p_3\}$ ist Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, daraus folgt, dass (p_1, p_2) eine Basis der $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ erkennt man immer daran, dass diese gleich viele Nullkomponenten besitzen.

(d) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Falls $a \times b \neq 0$ ist $\{a, b, a \times b\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$.

(e) Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus einem Vektorraum V sind genau dann linear unabhängig, wenn man sie nur trivial zur 0 linear kombinieren kann.

Aufgabe 8

Gegeben seien zwei Vektoren $a,\ b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) a und b sind linear unabhängig.

(b) Es existiert ein Indexpaar $i \neq j$ mit $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$.

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2024/2025

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 10

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass das Tupel (f_0, f_1, f_2), gegeben durch

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = (x - x_0), \quad f_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

eine Basis im Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 bilden.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom möglichst niedrigen Grades, das an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und durch die folgenden Punkte verläuft:

$$A = (-2/3), \quad B = (-1/2), \quad C = (2/5).$$

Stellen Sie das Polynom auch in seiner Faktorzerlegung dar.

Aufgabe 3

Gegeben sei $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in P_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(x)$ bezüglich der Basis $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

Aufgabe 4

Sind die Polynome

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 7$$
$$f_2(x) = -3x^2 + x + 4$$
$$f_3(x) = -6x^2 + 13x - 5$$

linear unabhängig?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen. Seien $U, V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch $\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$ **kein** Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert wird.

Aufgabe 6

Gegeben seien vier Punkte in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1;\, \alpha - 2), \quad (-1;\, 2 - \alpha), \quad (-2;\, 25 - 8\alpha), \quad \left(\frac{1}{2};\, \frac{\alpha - 5}{8}\right)$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α ein Interpolationspolynom möglichst geringen Grades. Geben Sie den Grad des Polynoms in Abhängigkeit von α an.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(a) Geben Sie an, für welche t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $x = (2,\ 1,\ 1)^\top$ erhalten.

Aufgabe 8

Gegeben sei die Basis $B = (1, x^2, x^4)$ eines Untervektorraums V von P_4.

(a) Zeigen Sie, dass alle Polynome in V achsensymmetrisch sind.

(b) Zeigen Sie: Jedes Polynom in P_4 ist darstellbar als Summe eines achsensymmetrischen und eines punktsymmetrischen Polynoms.

(c) Zeigen Sie: Bei der Menge der punktsymmetrischen Polynome in P_4 handelt es sich um einen Untervektorraum von V. Welche Dimension hat er?

(d) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$-x^4 + 2x^2 - 1$$
$$4x^4 + 3x^2 + 2$$

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2024/25

Jacqueline Gottowik

Übungsblatt 11 - Weihnachtsspecial

Aufgabe 1

In der Weihanchtsbäckerei laufen die Vorbereitungen auf Hochtouren. Die fleißigen Weihnachtselfen backen wie in jedem Jahr drei verschiedene Plätzchensorten. Die Rezepte dieser sind aber nur der Backelfe bekannt und sie hält diese streng geheim. Weihnachtselfe Willi versucht seit Jahren die Rezepte herauszufinden und kennt von zwei der drei Rezepten zumindest schon die unterschiedlichen Verhältnisse der drei Grundzutaten. Beim dritten Rezept kommt er einfach nicht an den Anteil von Zucker.

- Plätzchen 1: 3 Einheiten Mehl, 3 Einheiten Margarine, 3 Einheit Zucker
- Plätzchen 2: 1 Einheiten Mehl, 3 Einheiten Margarine, 5 Einheiten Zucker
- Plätzchen 3: 3 Einheiten Mehl, 4 Einheiten Margarine, a Einheit Zucker

Willi findet den Einkaufszettel vom letzten Jahr und kann diesem entnehmen, dass im letzten Jahr insgesamt 26 Einheiten Mehl, 39 Einheiten Margarine und 49 Einheiten Zucker gekauft wurden. Bis auf 3 Einheiten Zucker - so hat er beobachtet - wurde auch alles restlos verbacken. Als die Backelfe auf der Weihnachtsfeier ausgelassen feiert, sieht Willi seine Chance. Er fragt sie nach dem Anteil von Zucker für Plätzchensorte 3. Backelfe Berta lacht und sagt: "So einfach mache ich es dir nicht. Es braucht entweder 3 oder 5 Einheiten Zucker für Plätzchensorte 3. Das musst du nun selbst herausfinden." Helfen Sie Willi und finden Sie heraus, welche Aussage für a stimmt. Wie viele Einheiten der Plätzchen $p = (p_1, p_2, p_3)^T$ wurden im letzten Jahr gebacken? Setzen Sie daraus den Punkt $W_1 = (p_2; a)$ zusammen und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Setzen Sie aus den beiden Lösungen den Punkt $W_2{=}(-det(a); det(b))$ zusammen und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungen x der Gleichung $a \times x = b$ für $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Stellen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit eines Parameters als Geradengleichung dar und berechnen Sie daraus eine konkrete Lösung, für die $x_3 = 8$ gilt. Erstellen Sie daraus den Punkt $W_3 = (x_1; x_2)$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 4

Gesucht sind die Koordinaten $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(v) = (k_1, k_2)^T$ des Polynoms v bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (2x+2, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{C} = (3x+4, 4x+3)$ seien $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}(v) = \left(-1, 2\right)^T$. Berechnen Sie daraus den Punkt $W_4 = (k_1 - 0,5; k_2)$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 5

Der Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ habe die Koordinaten $(5, 5, 10)^T$ bezüglich der kanonischen Basis. Welche Koordinaten hat er bezüglich der Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Zeigen Sie zuerst, dass es sich um eine Basis handelt. Basteln Sie dann den Punkt $W_5 = (-x_1; x_3)$ aus den berechneten Koordinaten.

Aufgabe 6

Es seien $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ Polynome aus dem Raum P_2 mit $b_i, a_i \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$ ein Skalarprodukt auf P_2 definiert ist.

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

   (a) $p(x) = -1 + 5x + 2x^2$ und $q(x) = 2 + 4x - 9x^2$

   (b) $p(x) = -x^2 + x + 2$ und $q(x) = 2x^2 - 2x - 4$

   (c) $p(x) = 3x + 3$ und $q(x) = x + 1$

Der Winkel ist wie bei den Vektoren aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei das hier gegebene Skalarprodukt und die daraus induzierte Norm zu verwenden sind. Erstellen Sie aus den berechneten Winkeln den Punkt $W_6 = (cos(\alpha_b); cos(\alpha_c))$ und tragen Sie ihn im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie den $cos(\alpha)$ zwischen den Ebenen

(a) $3x_1 + 4x_3 = 7$ und $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $-6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 1$

Berechnen Sie den Punkt $W_7 = (\frac{21 cos(\alpha_a)}{2}, cos(\alpha_b))$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 8

Berechenen Sie die orthogoale Projektion $p_c(d)$ von d auf c.

$$c = \begin{pmatrix} 8i \\ 6i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} (5/2 - i) \\ (5 + 4/3 * i) \end{pmatrix}.$$

Erhalten Sie aus $p_c(d)$ den Punkt $W_8 := p_c(d)$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 9

Gegeben sind drei Punkte in Abhängigkeit eines Parameters $\beta \in \mathbb{R}$.

$$(-2; \beta - 2), (-1; \beta - 1), (1, 1 + \beta)$$

(a) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom $p(x)$ möglichst geringen Grades in Abhängigkeit von β und geben Sie dieses an.

(b) Weiter seien folgende Polynome gegeben:

$$q(x) = -\beta x^2 + \beta$$
$$r(x) = -\beta x^2 + (\beta - 1)x$$

Sind die Polynome p,q und r linear abhängig?

Sei nun $\beta = 2$. Tragen Sie den Punkt $W_9 = (p(1); p(3))$ im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 10

Welche Abstände haben die Punkte $Q = (7; 4; 5)$ und $R = (-4; -6; -3)$ von der Ebene

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle \quad \text{mit} \quad p = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Berechnen Sie aus den Abständen den Punkt $W_{10} = (d_q; \frac{-3d_r}{20})$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

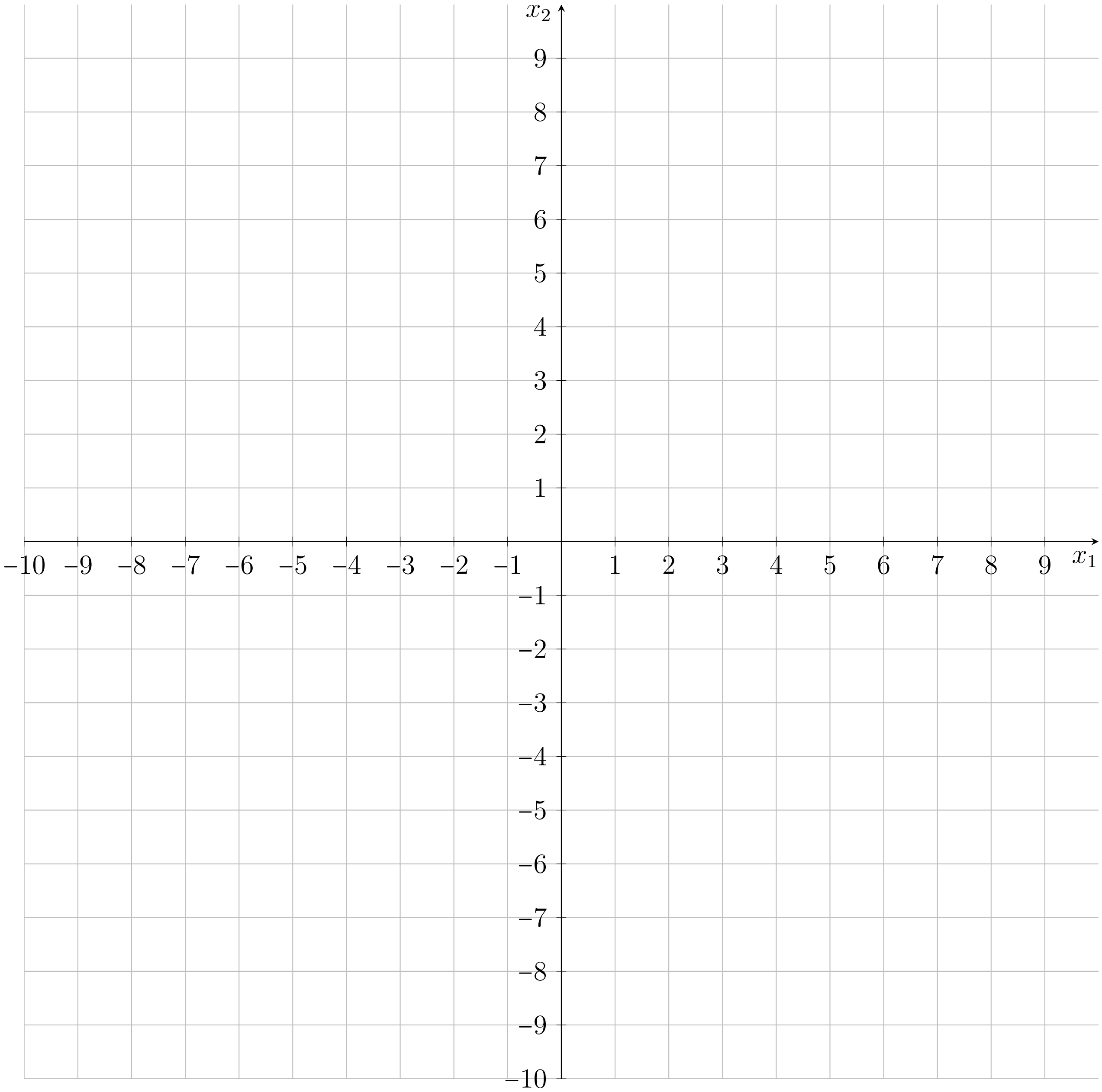
Aufgabe 11

(a) Untersuchen Sie die Funktionen $\{1, \sin(x), \sin(2x)\}$ auf lineare Unabhängigkeit im Intervall $[0, 2\pi]$.

(b) Stellen Sie fest, ob die Menge der Funktionen $\{f(t), g(t), h(t)\} = \{e^t, t, t^2\}$ in $C[0, 2]$ linear unabhängig ist.

Die Teilaugaben a und b liefern 1 als Ergebnis, wenn die Funktionen linear unabhängig sind, sonst ist das Ergebnis 0. Berechnen Sie draus den Punkt $W_{11} = (a; b)$.

Lösung



Prüfen Sie die folgenden 11 Aussagen, um herauszufinden, in welcher Reihenfolge die Punkte verbunden werden sollen.

- Sei V ein K-Vektorraum mit den Verknüpfungen $\oplus$,$\odot$. v und w sind Elemente von V und k ist ein Element des zugehörigen Körpers K. $v \odot w$ ist eindeutig definiert.
  Ja: W_8 Nein: W_2

- Ist für den Vektorraum V: dim(V)=n, dann muss die Basis aus genau n Vektoren bestehen.
  Ja: W_{10} Nein: W_1

- Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann ist die reelle Zahl 0 in jedem Untervektorraum von V enthalten.
  Ja: W_7 Nein: W_3

- Es existiert für n=17 ein Polynom n-ten Grades mit genau 17 reellen Nullstellen.
  Ja: W_7 Nein: W_2

- Seien x, y, z Vektoren aus einem K-Vektorraum. Jede Linearkombination von x, y liegt in $L(x, y, z)$.
  Ja: W_8 Nein: W_4

- Falls die beiden Vektoren $(f(3), g(3))$ und $(f(7), g(7))$ linear unabhängig sind, dann sind die Funktionen f und g linear unabhängig.
  Ja: W_1 Nein: W_3

- Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und a Elemente aus G. Gilt für das Neutralelement n immer: $a \circ n = n \circ a$?
  Ja: W_9 Nein: W_8

- Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.
  Ja: W_5 Nein: W_{11}

- Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und a Elemente aus G. Ist das inverse Element i für alle Elemente a aus G gleich?
  Ja: W_1 Nein: W_4

- Falls die beiden Vektoren $(f(3), g(3))$ und $(f(7), g(7))$ linear abhängig sind, dann sind die Funktionen f und g linear abhängig.
  Ja: W_{10} Nein: W_6

- Sind (v, w) und (x, y) Basen von V, dann ist auch (v, y) eine Basis.
  Ja: W_9 Nein: W_{11}

- Im Vektorraum P_n der Polynome n-ten Grades gilt: dim(P_n) = n.
  Ja: W_1 Nein: W_2

Frohe Weihnachten! ☺

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1
Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 12

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -5 \\ \alpha \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie müssen die reellen Parameter α und β gewählt werden, damit die Vektoren a, b und c ein Orthogonalsystem bilden? Bestimmen Sie für diesen Fall die orthogonale Projektion des Vektors v auf den durch die Vektoren a, b und c aufgespannten Unterraum!

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Vektorraum V und M ein endliches Tupel von Vektoren aus V. Untersuchen Sie die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus M“, „M bildet eine Basis“, „M bildet ein Erzeugendensystem“, „M bildet eine Orthogonalbasis und „M bildet ein Orthonormalsystem“. Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen?

		impliziert die Eigenschaft				
	Eigenschaften	lin. unabh.	Basis	ES	OGB	ONS
	linear unabhängig					
	Basis					
	Erzeugendensystem (ES)					
	Orthogonalbasis (OGB)					
	Orthonormalsystem (ONS)					

Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)^\top, \quad y = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)^\top, \quad z = (0, 0, 1)^\top$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt bilden.

Aufgabe 4

Es sei W der Unterraum des $\mathbb{R}^5$, der durch $u = (1, 2, 3, -1, 2)^\top$ und $v = (2, 4, 7, 2, -1)^\top$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Betrachten Sie $\mathcal{C}[0,\pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

und $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Zeigen Sie, dass f_k und f_ℓ für $k \neq \ell$ orthogonal sind.

Hinweis:

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \dfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}; & |a| \neq |b| \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4a}\sin(2ax) \quad ; & a = b \end{cases}$$

Aufgabe 6

Sei W die lineare Hülle der Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement zu W ist $W^\perp$. Schreiben Sie

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als Summe $w = (w_1 + w_2)$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^\perp$ zu L, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Welche Dimension besitzt $L^\perp$?

Aufgabe 8

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und U ein Untervektorraum. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\dim(V) < \infty$, so gilt

$$V = U \oplus U^\perp$$

(b) Für zwei Untervektorräume U_1, U_2 gilt

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

(c) Für zwei Untervektorräume U_1, U_2 mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt

$$U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$$

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 13

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bilden die drei Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bilden Sie daraus ggf. eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 2

Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren b, c an, die senkrecht auf dem Vektor

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren a, b und c.

Aufgabe 3

Geben Sie eine orthonormale Basis des Unterraums W von $\mathbb{C}^3$ an, der durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.

Hinweis: $\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w}$

Aufgabe 4

Betrachten Sie auf P_2 das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, \mathrm{d}x$$

Konstruieren Sie aus der Basis $(1, x, x^2)$ eine Orthonormalbasis.

Freiwillige Hausaufgaben (keine Abgabe!)

Aufgabe 5

Gegeben sind folgende 3 Vektoren in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt aus (v_1, v_2, v_3) ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

Aufgabe 6

Es sei $\mathcal{B} = (1, x, x^3)$ eine Basis des Unterraums $U \subset P_3$. Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt. Verwenden Sie folgendes Skalarprodukt:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ an.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2, 3, 1)$ auf die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene durch den Nullpunkt. Klären Sie zunächst, wie die Bestapproximation in der analytischen Geometrie genannt wird. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von V zur Ebene.

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2024/2025

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 13

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren b, c an, die senkrecht auf dem Vektor

$$a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren a, b und c.

Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{B} = (1, x, x^3)$ eine Basis des Unterraums $U \subset P_3$. Orthonormalisieren Sie $\mathcal{B}$ mit dem Verfahren von Gram-Schmidt. Verwenden Sie folgendes Skalarprodukt:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ an.

Aufgabe 3

Betrachten Sie auf P_2 das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) \,\mathrm{d}x$$

Konstruieren Sie aus der Basis $(1, x, x^2)$ eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 4

Gegeben sind folgende 3 Vektoren in $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt aus (v_1, v_2, v_3) ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

Aufgaben aus der Vorlesung

Aufgabe 5

Bilden die drei Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bilden Sie daraus ggf. eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 6

Geben Sie eine orthonormale Basis des Unterraums W von $\mathbb{C}^3$ an, der durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.

Hinweis: $\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w}$

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2, 3, 1)$ auf die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene durch den Nullpunkt. Klären Sie zunächst, wie die Bestapproximation in der analytischen Geometrie genannt wird. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von V zur Ebene.

Aufgabe 8

Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Bestimmen Sie aus V eine Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist.

(b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^\perp$?

Übungsblatt 2 — 12.10.2020

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Wieviele und welche Lösungen haben die folgenden Gleichungssysteme? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an!

(a) $\left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 + 3x_2 & = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 & = 3 \end{array} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 + 4x_2 & = 10 \\ 3x_1 + 6x_2 & = 15 \end{array} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{array}{rl} 4x_1 - 2x_2 & = 5 \\ -6x_1 + 3x_2 & = 1 \end{array} \right\}$

Aufgabe 2

Vervollständigen Sie die folgenden chemischen Reaktionsgleichungen, indem Sie für $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ möglichst kleine natürliche Zahlen wählen:

(a) $x_1\mathrm{Na_2B_4O_7} + x_2\mathrm{HCl} + x_3\mathrm{H_2O} \to y_1\mathrm{H_3BO_3} + y_2\mathrm{NaCl}$

(b) $x_1\mathrm{KMnO_4} + x_2\mathrm{H_2SO_4} + x_3\mathrm{KBr} \to y_1\mathrm{K_2SO_4} + y_2\mathrm{Br_2} + y_3\mathrm{MnSO_4} + y_4\mathrm{H_2O}$

Aufgabe 3

Wieviel 15%ige Schwefelsäure muss man mit wieviel 25%iger Schwefelsäure mischen, um 10 Liter 18%ige Säure zu erhalten?

Aufgabe 4

Ein Student schreibt eine LA-Klausur. Es gibt 4 Aufgaben zu je 25 Punkten. Bei 50 Punkten ist die Klausur bestanden. 2 Monate später fragt er den Professor nach seiner Punktzahl. Der sadistische Professor antwortet:

- Ihre Punktzahl bei Aufgabe A ist doppelt so hoch wie bei Aufgabe D.
- Bei Aufgabe B haben Sie einen Punkt mehr erhalten als Sie bei A verloren haben.
- In Aufgabe C haben Sie so viele Punkte erhalten wie in den Aufgaben B und D zusammen.
- Ihre Aufgaben A und C sind so gut, dass Sie aus B und D nur noch 16 Punkte zum Bestehen brauchen.

Hat der Student seine Klausur bestanden?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A^T = A$ gilt und heißt *antisymmetrisch*, wenn gilt $A^T = -A$.
Zeigen Sie: Jede quadratische Matrix ist die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix.
Tipp: Was gilt für die Symmetrie von $A + A^T$ und $A - A^T$?

Aufgabe 6

Aus drei Legierungen Leg 1 bis Leg 3 mit den im linken Teil der Tabelle angegebenen Zusammensetzungen sollen neue Legierungen (rechter Teil der Tabelle) hergestellt werden. Prüfen Sie, ob dies möglich und sinnvoll ist, und geben Sie gegebenenfalls die Anteile der einzelnen Legierungen 1 - 3 an, die für die Stoffe a) bzw. b) benötigt werden. Verwenden Sie den Gauß'schen Algorithmus.

Stoff	Leg 1	Leg 2	Leg 3	Stoff	a)	b)
Zink	20%	0%	10%	Zink	15%	1%
Zinn	0%	20%	10%	Zinn	5%	17%
Kupfer	80%	80%	80%	Kupfer	80%	82%

Aufgabe 7

Ein Unternehmer legt folgende Umsatzermittlungstabelle dem Finanzamt vor:

	Menge Produkt 1	Menge Produkt 2	Umsatz (Euro)
Januar	10	20	70
Februar	20	10	80
März	15	15	50

(a) Begründen Sie, warum der Beamte an der Korrektheit der Zahlen zweifelt.

(b) Korrigieren Sie den Umsatz im März so, dass das Finanzamt nicht misstrauisch wird.

Aufgabe 8

Wieviele und welche Lösungen haben die folgenden Gleichungssysteme? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an!

(a) $$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 - 3\,x_2 + \quad x_3 &= 4 \\ -6x_1 + 10x_2 - 3x_3 &= 2 \\ x_1 - \frac{3}{2}\,x_2 + \quad x_3 &= 1 \end{array}\right\}$$

(b) $$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 4x_1 - 3x_2 + \quad x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + \quad x_4 &= 1 \end{array}\right\}$$

Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Ruth Partzsch

Übungsblatt 1

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Mark züchtet Hühner und Kaninchen. Seine Tiere haben zusammen vierzig Augen und zweiundsechzig Beine. Wie viele Kaninchen und Hühner besitzt Mark? Verwenden Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystem das (i) Einsetzungs-, (ii) Gleichsetzungs- und (iii) Additionsverfahren.

Aufgabe 2

Wir betrachten k Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel seien und von denen keine drei durch einen Punkt gehen sollen. Diese Geraden zerteilen die Ebene in verschiedene Gebiete. Wie viele Gebiete sind es?

(a) Fertigen Sie mindestens zwei Skizzen an, die der obigen Situation entsprechen.

(b) Erstellen Sie eine Tabelle für $k = 2, 3, 4$ und tragen Sie die Anzahl der Gebiete ein!

(c) Versuchen Sie, ein Muster zu erkennen und stellen Sie eine Formel für die Anzahl der Gebiete in Abhängigkeit von k auf.

(d) Beweisen Sie die Richtigkeit der von Ihnen aufgestellten Formel.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle dreistelligen positiven Zahlen mit der Quersumme 12, bei denen die erste Ziffer doppelt so groß wie die letzte ist.

Aufgabe 4

Eine Getränkefirma hat 2 Orangensaftsorten im Angebot. Die Sorte „fruchtig“ besteht aus 70% Orangensaft, 10% Zucker und 20% Wasser. Die Sorte „mild“ besteht aus 50% Orangensaft, 20% Zucker und 30% Wasser. Die Firma will eine neue Sorte „light“ einführen, die aus 22% Orangensaft, 7% Zucker und 71% Wasser besteht. Diese Sorte möchte die Firma aus den Sorten A und B mischen, wobei sie beliebig mit Wasser verdünnen kann. Welche Anteile muß die Firma verwenden?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Aus einem Weißweinfaß (75 Liter) wird eine Kelle voll Weißwein (0,2 Liter) in ein Rotweinfaß (50 Liter) gekippt und gleichmäßig verrührt. Von dem verdünnten Rotwein wird anschließend eine Kelle voll in den Weißwein zurückgegossen. Ist nun mehr Rotwein im Weißweinfaß oder mehr Weißwein im Rotweinfaß?

Aufgabe 6

Mit wie vielen Nullen endet die Zahl $1000! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 1000$?

Aufgabe 7

Hannes isst gerne Fast Food. Um sich einigermaßen gesund zu ernähren, sollte er in einer Mahlzeit 110 g Eiweiß, 130 g Kohlenhydrate und 60 g Fett zu sich nehmen. Seine Fast-Food-Kette behauptet, ihre Pommes enthielten 30% Eiweiß, 30% Kohlenhydrate und 40% Fett, ihre Burger 50% Eiweiß, 30% Kohlenhydrate und 20% Fett und ihre Apfeltasche 20% Eiweiß, 70% Kohlenhydrate und 10% Fett. Wieviel Pommes, Burger und Apfeltaschen (jeweils in g) muss Hannes essen, damit er langfristig gesund bleibt?

Aufgabe 8

Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & & & & & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & & & = & 8 \\ & & y & + & 2z & + & u & = & 12 \\ & & & & z & + & 2u & = & 11 \end{array} \right\}$$