

7. Übungsaufgaben LA II, SS 25

(Abgabe: 30.05.)

Aufgabe H25. Sei $s: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(v, w) \mapsto 3v_1w_2 + 4v_1w_3 - 3v_2w_1 - v_2w_3 - 4v_3w_1 + v_3w_2.$$

- (i) Zeigen Sie, dass s bezüglich einer geeigneten Involution eine Metrik ist.
- (ii) Zu welchem der Typen (H), (S), (SH), (SS) gehört s ?
- (iii) Berechnen Sie die Koordinatenmatrizen $\mathbf{c}_B(s)$ und $\mathbf{c}_C(s)$ und die zugehörige Basiswechselmatrix, wobei

$$B = (e_1, e_2, e_3) \quad \text{und} \quad C = (e_3, e_2, \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}).$$

Aufgabe H26. Sei (V, s) ein metrischer Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V . Zeigen Sie:

- (i) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
- (ii) Aus $U \subseteq W$ folgt $W^\perp \subseteq U^\perp$.

Aufgabe H27. Sei (V, s) ein n -dimensionaler metrischer Vektorraum, und sei B eine geordnete Basis von V . Zeigen Sie: Es gilt

$$\text{Rad}(V) = \mathbf{c}_B^{-1}(\text{Kern}(\mathbf{c}_B(s)^T)),$$

wobei $\mathbf{c}_B: V \rightarrow K^n$ die Koordinatenabbildung ist. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass i. Allg.

$$\text{Rad}(V) \neq \mathbf{c}_B^{-1}(\text{Kern}(\mathbf{c}_B(s))).$$

Aufgabe H28. Seien (V, s_V) und (W, s_W) metrische Vektorräume (bzgl. derselben Involution \cdot). Sei $f: V \rightarrow W$ eine Isometrie.

- (i) Zeigen Sie, dass wir via Einschränkung eine Isometrie

$$\text{Rad}(V) \rightarrow \text{Rad}(W)$$

erhalten.

- (ii) Sei nun $V = V' \oplus \text{Rad}(V)$ und $W = W' \oplus \text{Rad}(W)$. (Wir wissen dann schon, dass beide Summen orthogonale Summen sind.) Durch Einschränkung von s_V und s_W erhalten wir metrische Vektorräume $(V', s_{V'})$ bzw. $(W', s_{W'})$. Zeigen Sie, dass $(V', s_{V'}) \cong (W', s_{W'})$.
