

Aufgaben zur Veranstaltung Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 2

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Ein lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 4x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3)^\top.$$

- (a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.
- (b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $f^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Bild, den Rang, den Kern und die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $f(x) = A \cdot x$, $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung in Abhängigkeit von a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ werde definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von f an.
- (b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\text{Bild}(f)$.
- (c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $\ker(f)$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Rang der zu den folgenden Matrizen gehörenden linearen Abbildungen:

$$(a) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (b) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

$$(a) \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$$

$$(b) \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen?

Aufgabe 7

Sei

$$F \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von F .
- (b) Bestimmen Sie $\ker(F)$ und dessen Dimension.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel $\dim(\text{Bild}(F))$.
- (d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

Aufgabe 8

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Die Abbildung

$$S : x \rightarrow x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene $\langle x, v \rangle = 0$. Hierbei stehen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt und $\| \cdot \|$ für die euklidische Norm.

- (a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall $n = 2$, dass es sich in der Tat bei S um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall $n = 2$?).
- (b) Zeigen Sie: S ist linear.
- (c) Das *dyadische Produkt* $d(v, w)$ zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als die Matrix A mit den Komponenten $a_{ij} = v_i w_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Sei weiter $f(x) := Ax$. Zeigen Sie: Ist $v \neq 0$ und $w \neq 0$, dann folgt $\text{rg}(f) = 1$.
- (d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von S . Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.
- (e) Ist S ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie $\ker(S)$ und $\text{Bild}(S)$!