RWTH Institut für Mathematik
**Prof. Dr. Michael Westdickenberg**
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

# 5. Übung

## Abgabetermin B-Teil 12.05.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **12.05.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II“ in RWTHmoodle hochgeladen werden.

| | |
|---|---|
| Kleingruppe: | |
| Name, Vorname: | |
| Name, Vorname: | |
| Name, Vorname: | |
| Name, Vorname: | |
| Matrikelnummern: | |
| Erreichte Punkte: | |

**Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.**

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 10.05.2022 und am 11.05.2022** gestellt werden.

# Teil A

**Aufgabe A20**
Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen $x_0 \in [a, b]$ ist ein Punkt, so dass $f$ auf $[a, b] \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist und angenommen der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass $f$ bei $x_0$ differenzierbar ist und dass $f'$ bei $x_0$ stetig ist.

**Aufgabe A21**
Beweisen Sie, dass jede konvexe Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig ist. Geben Sie ein Beispiel einer konvexen Funktion $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ an, die nicht stetig ist.

**Aufgabe A22**

(i) Seien $f_1$, $f_2$ zwei konvexe Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $f_1 + f_2$ konvex ist.

(ii) Sei $I$ eine Indexmenge und sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von konvexen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $\sup_{i \in I} f_i(x) < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Beweisen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ konvex ist.

**Aufgabe A23**
Beweisen Sie für alle $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $a, b \geq 0$ die *Young'sche Ungleichung*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Zeigen Sie, dass Gleichheit gilt, genau dann wenn $a^p = b^q$ gilt.

**Aufgabe A24**
Beweisen Sie die Ungleichung

$$x + \frac{ab}{x} < b + a \qquad \big(0 < a < x < b\big).$$

**Aufgabe A25**
Benutzen Sie Obersummen und Untersummen um $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \; dx$ zu berechnen.
*Hinweis:* Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

# Teil B

**Aufgabe B18** [2 Punkte]
Zeigen Sie anhand eines Beispiels die Notwendigkeit der Voraussetzung im Mittelwertsatz, dass der Definitionsbereich $D$ der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

**Aufgabe B19** [6 Punkte]
Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a < b$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie die Formel:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

für alle $x \in I$.

**Aufgabe B20** [6+4 = 10 Punkte]

(i) Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $(f_k)_{k=1}^m$ eine Familie konvexer Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf\{f_1(x_1) + \cdots + f_m(x_m) \mid x_k \in \mathbb{R}, x_1 + \cdots + x_m = x\}$$

konvex ist.

(ii) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend. Beweisen Sie, dass $\phi \circ f$ konvex ist.

**Aufgabe B21** [3+3+1 = 7 Punkte]

(i) Sei $I$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

  (a) Wenn $f$ in $x_0 \in I$ ein lokales Minimum annimmt, dann ist es auch ein globales Minimum.

  (b) Wenn $f$ in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum annimmt, ist $f$ in einer Umgebung von $x_0$ konstant.

(ii) Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe und stetige Funktion. Beweisen Sie, dass $g$ ihr Supremum auf dem Rand des Intervalls annimmt.

**Aufgabe B22** [6 Punkte]
Zeigen Sie die Ungleichung

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k$$

für das harmonische, das arithmetische und das geometrische Mittel von $x_1, .., x_n \in \mathbb{R}_{>0}$.
*Hinweis: Jensen's Ungleichung.*

**Aufgabe B23** [6 Punkte]
Sei $b > 0$. Benutzen Sie Obersummen und Untersummen um

$$\int_0^b x^3 \, dx$$

zu berechnen. *Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$ und $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$.