Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Tutorium - Blatt 8

Das Blatt wird vom 11.12.2025 bis zum 16.12.2025 in den Tutorien besprochen.

Definition (Euklidscher Ring)
Ein Integritätsbereich R (Nullteilerfreiheit, siehe Blatt 5) heißt *euklidscher Ring*, falls eine Bewertungsfunktion $\beta : R \to \mathbb{N}_0$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- $\beta(0) = 0$,
- für alle $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existieren $q, r \in R$ mit $a = q \cdot b + r$, sodass $\beta(r) < \beta(b)$ und
- für alle $a, b \in R \setminus \{0\}$ gilt $\beta(a \cdot b) \geq \beta(a)$.

Beispiele für euklidsche Ringe sind:

- die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Bewertungsfunktion $|\cdot|$.
- Polynomringe $K[X]$ über einem Körper K mit der Bewertungsfunktion

$$\beta(p) := \begin{cases} 0, & p \text{ ist das Nullpolynom} \\ \deg(p) + 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 1
Es sei R ein euklidscher Ring mit Bewertungsfunktion β. Dann heißt für $(a, b) \in (R \times R) \setminus \{(0, 0)\}$ ein Element $r \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler (ggT) von a und b, wenn

- $r \mid a$ und $r \mid b$
- Für alle $s \in R$ mit $s \mid a$ und $s \mid b$ gilt $\beta(s) \leq \beta(r)$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) Es kann der euklidsche Algorithmus angewendet werden, um einen ggT und seine Bézout-Koeffizienten zu berechnen.

(b) Der ggT ist eindeutig bis auf Multiplikation mit Einheiten in R.

Definition (Primelemente und irreduzible Elemente)
Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Dann heißt $p \in R \setminus R^*$

- *irreduzibel*, wenn aus $p = a \cdot b$ folgt, dass $a \in R^*$ oder $b \in R^*$.
- *prim*, wenn $p \neq 0$ und aus $p \mid a \cdot b$ folgt, dass $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei R ein Integritätsbereich. Dann ist jedes Primelement irreduzibel.

(b) Es sei R ein euklidscher Ring. Dann ist jedes irreduzible Element auch ein Primelement.

Aufgabe 3
Nun sei $f := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ vom Grad n (insbesondere $a_n \neq 0$). Ein Element $c \in K$ heißt *Nullstelle* von f, wenn $f(c) := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot c^i = 0 \in K$ ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $c \in K$ ist eine Nullstelle von f genau dann, wenn $(X - c)$ ein Teiler von f ist.

(b) f hat höchstens n Nullstellen in K.

Aufgabe 4

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und A, B und C Teilräume von V. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Vereinigung $A \cup B$ ist ein Teilraum von V genau dann, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$.

(b) Ist $C \subseteq A$, dann gilt $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

(c) Ohne die Bedingung $C \subseteq A$ gilt die Aussage $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ im Allgemeinen nicht.