RWTH Institut für Mathematik
Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

3. Übung

Abgabetermin B-Teil 28.04.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **28.04.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II“ in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 26.04.2022 und am 27.04.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A10
Zeigen Sie mittels Definition, dass $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ in allen $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe A11
Es sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x) := x^2 f(x)$. Zeigen Sie, dass g in $x_0 = 0$ differenzierbar ist.

Aufgabe A12
Ist die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := |x|^3$ im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitung in x_0.

Aufgabe A13
Zeigen Sie, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \sin(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \cos(x)$$

nicht existieren.

Aufgabe A14
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig im Punkte $x = 0$, dort aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe A15
Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen f, g, und h, die definiert sind durch

$$f(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = \tan(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$h(x) = \tan\Big(1 + \sin^2\left(e^{3x}\right)\Big) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Teil B

Aufgabe B9 [6+4 Punkte]

1. Zeigen Sie
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1,\ \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$$

2. Verwenden Sie die Additiontheoreme um zu zeigen, dass Sinus und Kosinus differenzierbare Funktionen sind und die Ableitungsregeln
$$\sin'(x):=(\sin(x))'=\cos(x),\ \cos'(x):=(\cos(x))'=-\sin(x)$$
für alle $x\in\mathbb{R}$.

Aufgabe B10 [2+2 Punkte]

1. Es sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x)=\sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung mittels der Definition.

2. Sei $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ stetig und $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x):=xg(x)$. Zeigen Sie, dass f im Punkt $x_0=0$ differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung an.

Aufgabe B11 [10 Punkte]
Sei $n\in\mathbb{N}$. Untersuchen Sie, für welche Wahl der Parameter a, $b\in\mathbb{R}$ die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x):=\begin{cases} x^n & \text{für } x\le 1,\\ ax+b & \text{für } x>1,\end{cases}$$
differenzierbar ist. *Hinweis:* $a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k$.

Aufgabe B12 [8 Punkte]
Für welche Werte von $p\in\mathbb{R}$ ist die Funktion
$$f:(-1,1)\to\mathbb{R}, x\mapsto\begin{cases}|x|^p\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$
stetig differenzierbar? Wie lautet die Ableitung in diesen Fällen?

Aufgabe B13 [6 Punkte]
Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:
$$f_1(x)=\log\bigl(1+\sin^2(e^{3x})\bigr)\quad\text{für}\quad x\in\mathbb{R},$$
$$f_2(x)=x\log\left(\frac{x^2}{4}\right)\quad\text{für}\quad x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$
$$f_3(x)=\frac{x^3-3x}{(x^2+2x-1)^2}\quad\text{mit}\quad x\neq -1\pm\sqrt{2}.$$

Hinweis: $\log'(x)=\frac{1}{x}$ *für* $x>0$.