

## Teil A

### Aufgabe A10

Zeigen Sie mittels Definition, dass  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$  in allen  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### Lösung

Sei  $0 < |h| < \delta$  und  $\exists \epsilon < 1$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^{n-1-k} x^k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k \left[ \sum_{i=0}^{n-1-k} x^{n-1-k-i} h^i \right] - nx^{n-1} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k [x^{n-1-k} + \sum_{i=1}^{n-1-k} x^{n-1-k-i} h^i] - nx^{n-1} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1-k} x^{n-1-k-i} h^i \right| \leq |h| \left| \sum_{i=1}^{n-1-k} x^{n-1-k-i} \right| < C\delta \leq \epsilon, \end{aligned}$$

d.h. für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ ,  $\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} \right| < \epsilon$  für  $0 < |h| < \delta$ . Somit existiert die Ableitung für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto nx^{n-1}$ .

### Aufgabe A11

Es sei  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Die Funktion  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $g(x) := x^2 f(x)$ . Zeigen Sie, dass  $g$  in  $x_0 = 0$  differenzierbar ist.

### Lösung

$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) = x^2 f(x)$ .

Zeige:  $\exists a \in \mathbb{R}$  mit

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}, \quad \text{da } g(0) = 0.$$

Dann ist  $g$  in  $x_0 = 0$  differenzierbar mit  $g'(0) = a$ .

Laut Voraussetzung ( $f$  beschränkt auf  $[-1, 1]$ ) gibt es ein  $c > 0$  mit

$$|f(x)| \leq c \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Dann gilt für  $|x| \leq 1$ :

$$\left| \frac{1}{x} \cdot g(x) \right| = \left| \frac{1}{x} \cdot x^2 \cdot f(x) \right| = |x| \cdot \underbrace{|f(x)|}_{\leq c} \leq |x| \cdot c \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Also folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0 = g'(0).$$

### Aufgabe A12

Ist die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g(x) := |x|^3$  im Punkt  $x_0 = 0$  differenzierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Ableitung in  $x_0$ .

**Lösung**

Bem.:  $g$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

Rechtsseitige Ableitung in  $x_0 = 0$ :

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \searrow 0} x^2 = 0.$$

Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|^3 - 0}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} -\frac{x^3}{x} = \lim_{x \nearrow 0} -x^2 = 0 = \lim_{x \nearrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.$$

Also ist  $g$  in  $x_0 = 0$  differenzierbar mit  $g'(0) = 0$ .

(Obwohl  $f(x) = |x|$  in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar ist, ist  $g = h \circ f$  ( $h(x) = x^3$ ) in  $x_0 = 0$  differenzierbar!)

**Aufgabe A13**

Zeigen Sie, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$$

nicht existieren.

**Lösung**

Wähle  $x_n := 2\pi n$  und  $y_n := 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(y_n) = 1.$$

Also existiert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$  nicht.

**Aufgabe A14**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig im Punkte  $x = 0$ , dort aber nicht differenzierbar ist.

**Lösung**

1) Stetigkeit in  $x_0 = 0$ :

Sei  $\varepsilon > 0$  und wähle  $\delta := \varepsilon > 0$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < \delta$ :

$$|g(x) - g(0)| = \left| x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = |x| \cdot \underbrace{\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}_{\leq 1} \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

2) Differenzierbarkeit in  $x_0 = 0$ :

Für alle  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt

$$\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$$

existiert aber nicht. Daher ist  $g$  in 0 nicht differenzierbar, nach 1) aber stetig.

**Aufgabe A15**

Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktionen  $f$ ,  $g$ , und  $h$ , die definiert sind durch

$$f(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = \tan(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$h(x) = \tan\left(1 + \sin^2(e^{3x})\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Lösung**

Benutze Summen- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(5x^4 + 2x)(x^2 + 1) - (x^5 + x^2)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x^6 + 2x^3 + 5x^4 + 2x - 2x^6 - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^6 + 5x^4 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(3x^5 + 5x^3 + 2)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Benutze Summen- und Quotientenregel und Aufgabe B9:

$$g'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)^2 + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} (= 1 + \tan^2(x))$$

Mittels Kettenregel folgt:

$$h'(x) = [1 + \tan^2(1 + \sin^2(e^{3x}))] \cdot \underbrace{2 \sin(e^{3x})}_{(1+\sin^2)'}, \underbrace{\cos(e^{3x})}_{\sin'}, \underbrace{3e^{3x}}_{e'}$$

**Teil B****Aufgabe B9**

[6+4 Punkte]

1. Zeigen Sie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

2. Verwenden Sie die Additionstheoreme um zu zeigen, dass Sinus und Kosinus differenzierbare Funktionen sind und die Ableitungsregeln

$$\sin'(x) := (\sin(x))' = \cos(x), \quad \cos'(x) := (\cos(x))' = -\sin(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lösung**

1. Es gilt

$$\frac{\sin(h)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{(2k+1)!} = 1 + h \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k-1}}{(2k+1)!} \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} 1$$

wegen

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k-1}}{(2k+1)!} \right| \stackrel{|h| \leq 1}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos(h) - 1}{h} \right| &= \left| \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{(2k)!} \right| \stackrel{|h| \leq 1}{\leq} |h| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \leq |h| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} \\ &\leq |h| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} 0. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h} = \cos(x) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} = -\sin(x) \end{aligned}$$

**Aufgabe B10**

[2+2 Punkte]

- Es sei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung mittels der Definition.
- Sei  $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := xg(x)$ . Zeigen Sie, dass  $f$  im Punkt  $x_0 = 0$  differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung an.

**Lösung**

1.  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sqrt{x}$

Für  $x_0 > 0$  und  $x \neq x_0$  gilt:

$$x - x_0 = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$$

Damit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0) \end{aligned}$$

Also ist  $f(x) = \sqrt{x}$  in  $x_0 > 0$  differenzierbar mit  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ .

2.  $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $f(x) = x \cdot g(x)$ .

Zeige:  $f$  ist in  $x_0 = 0$  differenzierbar.

Dazu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \stackrel{g \text{ stetig}}{=} g(0) \end{aligned}$$

Also:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = g(0)$  existiert, also ist  $f$  in  $x_0 = 0$  differenzierbar mit

$$f'(0) = g(0).$$

**Aufgabe B11**

[10 Punkte]

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Untersuchen Sie, für welche Wahl der Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^n & \text{für } x \leq 1, \\ ax + b & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

differenzierbar ist. Hinweis:  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$ .

**Lösung**

Zunächst: Stetigkeit (das ist notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit!):

Auf  $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$  ist die Funktion  $f$  stetig als Verkettung stetiger Funktionen, untersuche noch  $x_0 = 1$ .

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} ax + b = a + b \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} x^n = 1$$

Damit  $f$  im Punkt  $x_0 = 1$  stetig ist, müssen die beiden Grenzwerte gleich sein, also

$$1 = a + b$$

gelten. Es sei also im Folgenden  $1 = a + b$ , damit  $f$  stetig ist.

Jetzt zur Differenzierbarkeit:

Auf  $(-\infty, 1)$  ist  $f(x) = x^n$  differenzierbar mit  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ .

Auf  $(1, \infty)$  ist  $f(x) = ax + b$  differenzierbar mit  $f'(x) = a$ .

Untersuche also noch  $x_0 = 1$ :

- Rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(1)=a+b}{=} \lim_{x \searrow 1} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{ax - a}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a$$

- Linksseitige Ableitung:

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \nearrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \sum_{k=1}^n x^{n-k} 1^{k-1}}{\cancel{x-1}} = \sum_{k=1}^n 1^{n-k} = n$$

Hierbei folgt (\*) aus dem Hinweis und Indexverschiebung. Damit gilt:

$$\lim_{x \searrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow a = n$$

Insgesamt:  $f$  ist differenzierbar für  $a = n$  und  $b = 1 - n$ , also:

$$f(x) = \begin{cases} x^n & , \quad x \leq 1 \\ nx + 1 - n & , \quad x > 1 \end{cases}$$

### Aufgabe B12

[8 Punkte]

Für welche Werte von  $p \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} |x|^p \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar? Wie lautet die Ableitung in diesen Fällen?

### Lösung

Für  $x \neq 0$  gilt  $f(x) = |x|^p \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ . Mittels Kettenregel und  $\frac{d}{dx}|x| = \text{sign}(x)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= p \text{sign}(x)|x|^{p-1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + |x|^p \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) (-2) \frac{1}{x^3} \\ &= p \text{sign}(x)|x|^{p-1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\text{sign}(x)|x|^{p-3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \text{sign}(x)|x|^{p-3} \left( p|x|^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \end{aligned}$$

Also ist  $f$  stetig differenzierbar auf  $(-1, 1) \setminus \{0\}$ .

Betrachte nun  $x_0 = 0$ . Für  $p < 3$  ist  $|x|^{p-3}$  unbeschränkt bei  $x_0 = 0$  und somit kann  $f'$  nicht stetig bei 0 sein.

Für  $p = 3$  ist  $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  nicht konvergent und somit kann  $f'$  nicht stetig bei 0 sein.

Für  $p > 3$  gilt

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{|x|^p}{x}}_{=\text{sign}(x)|x|^{p-1}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\leq 1} = 0$$

Weiterhin gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{p-3} = 0$ . Da die Terme

$$\left( p|x|^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

beschränkt sind, gilt somit  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ .

Also ist  $f$  stetig differenzierbar für  $p > 3$  und nicht stetig differenzierbar für  $p \leq 3$ .

### Aufgabe B13

[6 Punkte]

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \log(1 + \sin^2(e^{3x})) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = x \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_3(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x^2 + 2x - 1)^2} \quad \text{mit } x \neq -1 \pm \sqrt{2}.$$

Hinweis:  $\log'(x) = \frac{1}{x}$  für  $x > 0$ .

### Lösung

- $f_1(x) = \log(1 + \sin^2(e^{3x})), \quad x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_1'(x) &\stackrel{\text{(KR)}}{=} \frac{1}{1 + \sin^2(e^{3x})} \cdot (1 + \sin^2(e^{3x}))' \\ &\stackrel{\text{(KR)}}{=} \frac{1}{1 + \sin^2(e^{3x})} \cdot 2 \sin(e^{3x}) \cdot (\sin(e^{3x}))' \\ &\stackrel{\text{(KR)}}{=} \frac{2 \sin(e^{3x}) \cdot \cos(e^{3x}) \cdot 3e^{3x}}{1 + \sin^2(e^{3x})} = \frac{3 \sin(2e^{3x}) \cdot e^{3x}}{1 + \sin^2(e^{3x})} \end{aligned}$$

- $f_2(x) = x \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad x \neq 0$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \left[ 2x \log\left(\frac{x}{2}\right) \right]' \\ &\stackrel{\text{PR}}{=} 2 \log\left(\frac{x}{2}\right) + 2x \cdot \left[ \log\left(\frac{x}{2}\right) \right]' \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} 2 \log\left(\frac{x}{2}\right) + 2x \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2 \log\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \end{aligned}$$

- $f_3(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x^2 + 2x - 1)^2}$

$$\begin{aligned} f_3'(x) &\stackrel{\text{(QR)}}{=} \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 2x - 1)^2 - (x^3 - 3x) \cdot [(x^2 + 2x - 1)^2]'}{(x^2 + 2x - 1)^4} \\ &\stackrel{\text{(KR)}}{=} \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 2x - 1)^2 - (x^3 - 3x) \cdot 2 \cdot (x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x - 1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 2x - 1) - (x^3 - 3x) \cdot 2 \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x - 1)^3} \\ &= \frac{3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 3x^2 - 6x + 3 - 4x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 12x}{(x^2 + 2x - 1)^3} \\ &= \frac{-x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 6x + 3}{(x^2 + 2x - 1)^3} \end{aligned}$$