Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 11

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist ein **nicht** lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccc} xy^2 & + & yz^2 & + & zx^2 = 1 \\ \ln(x) & + & x^2y & + & xz^2 = 1 \end{array}$$

Linearisiert man um den Punkt (a)$(x, y, z) = (1, 0, 1)$ bzw. (b)$(x, y, z) = (1, 1, 0)$, so ergeben sich die unterbestimmten linearen Gleichungssysteme.

(a) $\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & + & z = 3 \\ 2x & + & y & + & 2z = 4 \end{array}$ (b) $\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & + & z = 3 \\ 3x & + & y & & = 4 \end{array}$

Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinsten Norm der unterbestimmten linearen Gleichungssysteme.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Orthogonalmatrix ist.

(b) Bestimmen Sie anschließend die inverse Matrix A^{-1}. Dies ist mit den speziellen Eigenschaften von A einfach. Was kann man außerdem über den Wert von $\det(A)$ sagen?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung, deren Abbildungsmatrix orthogonal ist, den Winkel zwischen Vektoren unverändert lässt. Zeigen Sie zunächst am Beispiel

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = Ax,$$

dass gilt:

$$\measuredangle(x, y) = \measuredangle(Ax, Ay)$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der Orthogonalmatrizen eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bildet.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Die Punkte $A(6/0/0), B(2/1/3)$ und $C(-2/-2/2)$ liegen in einer Ebene E.

(a) Stellen Sie die Hessesche Normalform der Ebene auf. Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Ursprung?

(b) Welcher Punkt in der Ebene hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? Stellen Sie dazu das zugehörige unterbestimmte LGS auf und finden Sie die Lösung mit Hilfe der verallgemeinerten Inverse.

Aufgabe 6

Sei für einen Winkel α $c = \cos\alpha$ und $s = \sin\alpha$ und für einen weiteren Winkel β $\hat{c} = \cos\beta$ sowie $\hat{s} = \sin\beta$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \hat{c} & 0 & \hat{s} \\ s\hat{s} & c & -s\hat{c} \\ c\hat{s} & -s & -c\hat{c} \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

Aufgabe 7

Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ innerhalb der x–z–Ebene um einen Winkel ϕ. Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ an der x–Achse.

(a) Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.

(b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.

(c) Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

Aufgabe 8

(a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2\frac{uu^\top}{u^\top u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$–Einheitsmatrix.
Hinweis: Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n.

(b) Verifizieren Sie das Ergebnis für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.