Kapitel 6

Struktur endlich erzeugter Vektorräume

6.1 Vektorräume

Lernziele

- Rechnen in einigen konkreten Vektorräumen,
- direkte Summen von Vektorräumen, Teilräume,
- Interpretation für lineare Gleichungssysteme.

In der Schule haben Sie bereits Vektoren kennengelernt. In vielen dieser Anwendungen wurde im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum, also in dem Raum unserer Anschauung, gerechnet. Dies ist eine wichtige Anwendung der linearen Algebra, aber dennoch sehr speziell. In vielen Bereichen der Mathematik, Physik, Informatik, Ingenieurwissenschaften und anderen Gebieten benötigen wir eine viel allgemeinere und flexiblere Definition eines Vektorraums. Wir werden sehen, dass lineare Abbildungen eng mit Vektorräumen verknüpft sind.

Definition 6.1

Ist V ein K-Vektorraum, so heißt eine Teilmenge $T \subseteq V$ ein **Teil(vektor)raum** oder **Unter(vektor)raum** von V, falls T ein K-Vektorraum bezüglich der Addition und skalaren Multiplikation in V ist. Schreibweise: $T \leq V$.

Beispiel 6.2

Bei der Übertragung von Nachrichten benutzt man sogenannte **lineare Codes**, welche einfach $\mathbb{F}_2$-Teilräume von $\mathbb{F}_2^n$ sind. n heißt dann die Länge des Codes. Die Idee ist, die Codes so zu konstruieren, daß sie geringfügige Fehler, in denen nur wenige Bits verändert sind, erkennen und möglichst auch korrigieren. Seien u, v und w die Zeilen der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, daß der sogenannte **Hammingcode**

$$\{au + bv + cw \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2\}$$

ein linearer Code der Länge 7 ist, welcher 8 verschiedene Folgen übertragen kann: Die 0-Folge und 7 Folgen mit vier Einsen und drei Nullen. Beachte: Jede 01-Folge der Länge 7 mit vier Einsen und drei Nullen, die nicht zum Code gehört, muß sich an mindestens zwei Stellen von den Elementen des Codes unterscheiden.

Der folgende Satz hilft uns schnell zu erkennen, ob eine Teilmenge eines Vektorraums auch ein Teilraum ist.

Satz 6.3: Teilraumkriterium

Sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ eine Teilmenge von V. W ist ein Teilraum von V genau dann, wenn $W \neq \varnothing$ und für alle $v, w \in W$ und alle $a \in K$ auch $v + aw \in W$.

Beweis. "$\Rightarrow$". Sei W ein Teilraum von V. Dann ist $0 \in W$ und somit ist $W \neq \varnothing$. Weiter sind nach den Vektorraumaxiomen $v, aw \in W$ und somit auch $v + aw \in W$.

"$\Leftarrow$". Da $W \neq \varnothing$ existiert ein $w \in W$. Da K ein Körper ist, ist $-1 \in K$ und nach Annahme ist somit $w + (-1)w = w - w = 0 \in W$. Wenn wir $a = 1$ oder $v = 0$ wählen, so können wir sofort sehen, dass eine Addition und eine skalare Multiplikation auf W definiert sind. Weiter ist mit $w \in W$ auch $(-1)w = 0 + (-1)w \in W$. Alle anderen

Axiome werden vom Vektorraum V geerbt. q. e. d.

Hier ist eine Methode, wie man aus zwei K-Vektorräumen einen weiteren machen kann, ähnlich wie man aus zwei Mengen das kartesische Produkt bildet.

Beispiel 6.4

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Auf dem kartesischen Produkt $V \times W$ definieren wir durch

$$+ : (V \times W) \times (V \times W) \to (V \times W) : ((v,w),(v',w')) \mapsto (v+v', w+w')$$

eine (komponentenweise) Addition und durch

$$K \times (V \times W) \to (V \times W) : (a,(v,w)) \mapsto (av, aw)$$

eine (komponentenweise) skalare Multiplikation. Man verifiziert nun leicht, daß $(V \times W, +, .)$ wieder ein Vektorraum über K ist. (Übung). Er wird mit $V \oplus W$ bezeichnet und heißt die **(äußere) direkte Summe** von V und W. Wenn wir betonen wollen, daß wir die äußere direkte Summe meinen, schreiben wir auch $V \oplus_a W$.

Bei der äußeren direkten Summe hatten wir ein Verfahren kennengelernt, aus zwei Vektorräumen einen größeren Vektorraum zusammenzusetzen. Da wir nun wissen was ein Teilraum ist, können wir uns fragen, ob ein gegebener Vektorraum auf diese Art zusammengesetzt ist. Man beachte hierzu: $\{0\} \oplus_a W \leq V \oplus_a W$ und $V \oplus_a \{0\} \leq V \oplus_a W$.

Definition 6.5

Sei V ein K-Vektorraum mit zwei Teilräumen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \leq V$. Falls jedes $v \in V$ in eindeutiger Weise als $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in \mathcal{U}_1, u_2 \in \mathcal{U}_2$ geschrieben werden kann, heißt V die **innere direkte Summe** von $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$. Man schreibt $V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ oder $V = \mathcal{U}_1 \oplus_i \mathcal{U}_2$, wenn man betonen will, daß die innere direkte Summe gemeint ist.

Teilräume übernehmen bei Vektorräumen offensichtlich die Rolle, die

Teilmengen bei Mengen gespielt haben. Was übernimmt die Rolle der Abbildungen?

Definition 6.6

Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt **linear** (oder ein K-**Homomorphismus**), falls für alle $u, v \in V$ und alle $a, b \in K$ gilt

$$\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

Ist φ noch zusätzlich bijektiv, injektiv bzw. surjektiv, so heißt φ ein **Isomorphismus**, **Monomorphismus** bzw. **Epimorphismus**; ist $V = W$, so heißt φ auch **Endomorphismus**. Bijektive Endomorphismen heißen **Automorphismen**. K-Vektorräume V, W zwischen denen ein Isomorphismus existiert, heißen **isomorph**, in Zeichen: $V \cong W$.

Beispiel 6.7

Ist V ein K-Vektorraum mit $v_1, \ldots, v_n \in V$, dann ist

$$\lambda : K^n \to V : a \mapsto a_1v_1 + \cdots a_nv_n$$

eine lineare Abbildung. $\lambda(a)$ heißt auch **Linearkombination** der v_i mit Koeffizienten a_i.

Übung: Verifiziere in Beispiel 6.8, daß Vektorräume und lineare Abbildungen vorliegen.

Beispiel 6.8

Folgende Abbildungen $\varphi : D \to W$ sind linear:
1) Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix über dem Körper K. Sei $D = K^{n\times 1}, W = K^{m\times 1}$ und $\varphi := \varphi_A : D \to W : s \mapsto As$ die durch A induzierte lineare Abbildung.
2) Sei $K = \mathbb{R}$, D die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ und W die Menge der stetigen Funktionen und φ die Ableitung:

$$\varphi : f \mapsto f' := \text{ 1. Ableitung von } f$$

3) Sei $D = W$ die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und φ das Integral:

$$\varphi : f \mapsto If \text{ mit } If(x) := \int_0^x f(u)du$$

4) Sei $D = W = K^{\mathbb{N}}$, K ein beliebiger Körper und φ einer der beiden Schiebeoperatoren

$$\varphi : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (a_2, a_3, \ldots)$$

oder

$$\varphi : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (0, a_1, a_2, \ldots),$$

5) Sei $D = W = K^{\mathbb{N}}$, K ein beliebiger Körper und φ der Differenzenoperator

$$\varphi : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots)$$

oder sein Inverser, der Summenoperator

$$\varphi : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots)$$

(welcher im Falle $K = \mathbb{R}$ wiederum verwandt ist mit dem Arithmetisches-Mittel-Operator

$$\varphi : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \ldots).$$

6) (Vergl. Analysisvorl.) Sei D die Menge der konvergenten reellen Folgen, $K = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$ und φ ist der Grenzwertoperator

$$\varphi : (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Der folgende Satz zeigt uns, dass eine lineare Abbildung gleich zwei Teilräume definiert, einen Teilraum vom Definitionsbereich und einen vom Wertebereich.

Satz 6.9

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann gilt:
1) $\mathrm{Kern}(\varphi) := \varphi^{-1}(\{0\}) \leq V$. Wir nennen $\mathrm{Kern}(\varphi)$ den **Kern** von φ.
2) $\mathrm{Bild}(\varphi) \leq W$.

Beweis. 1) $0 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, also $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq \emptyset$. Seien $u, v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $a, b \in K$. Da φ linear ist, gilt

$$\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v) = a0 + b0 = 0,$$

also ist $au + bv \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Damit ist gezeigt, dass $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein Teilraum von V ist.
2) $0 = \varphi(0) \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, also $\mathrm{Bild}(\varphi) \neq \emptyset$. Sind $w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(\varphi)$ und $a, b \in K$, dann existieren $v_1, v_2 \in V$ mit $w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2)$. Da φ linear ist, gilt

$$aw_1 + bw_2 = a\varphi(v_1) + b\varphi(v_2) = \varphi(av_1 + bv_2) \in \mathrm{Bild}(\varphi).$$

Damit ist gezeigt, dass auch $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ein Teilraum von W ist. q. e. d.

Beispiel 6.10

Sei $V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ die (innere) direkte Summe der beiden Teilräume $\mathcal{U}_i$.
1) $\pi_i : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_i : u_1 + u_2 \mapsto u_i$ ist eine surjektive lineare Abbildung (Epimorphismus), welche wir die **Projektion** auf $\mathcal{U}_i$ (bezüglich der Zerlegung $V = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$) nennen. Es gilt

$$\mathrm{Kern}(\pi_1) = \mathcal{U}_2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Kern}(\pi_2) = \mathcal{U}_1.$$

2) $\iota_i : \mathcal{U}_i \to V : u_i \mapsto u_i$ ist eine injektive lineare Abbildung (Monomorphismus), die Einbettung von $\mathcal{U}_i$ in V. Es gilt: $\mathrm{Bild}(\iota_i) = \mathcal{U}_i$ für $i = 1, 2$. Man beachte:

$$\pi_i \circ \iota_i = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_i} \qquad \text{für } i = 1, 2$$

Weiter: $\pi_2 \circ \iota_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ ist die Nullabbildung.

Wir wollen unsere neuen Einsichten auf lineare Gleichungssysteme anwenden.

Satz 6.11

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix und $b \in K^{m\times 1}$ eine Spalte. Das lineare Gleichungssystem

$$(*) \qquad Ax = b$$

sei lösbar, d. h. $b \in \mathrm{Bild}(\varphi_A)$. Dann gilt:
1) Die Lösungsmenge des sogenannten **zugehörigen homogenen Systems**, also

$$(*_0) \qquad Ax = 0$$

ist nie leer, sondern ein Teilraum von $K^{n\times 1}$, nämlich $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$.
2) Ist $w \in K^{n\times 1}$ eine Lösung von $(*)$, so durchläuft $w + v$ mit $v \in \mathrm{Kern}(\varphi_A)$ (d. h. v Lösung von $(*_0)$) alle Lösungen von $(*)$.

Beweis. 1) Die Lösungsmenge von $(*_0)$ ist gleich $\mathrm{Kern}(\varphi_A)$. Die Behauptung folgt aus 6.9.
2) Da w eine Lösung von $(*)$ ist, ist $Aw = b$. Sei nun $v \in \mathrm{Kern}(\varphi_A)$, d.h. $Av = 0$, so ist $A(w + v) = Aw + Av = b$.
Behauptung: w, w' Lösungen von $(*)$, so existiert ein $v \in \mathrm{Kern}(\varphi_A)$ mit $w' = w + v$. Bew.: Wähle $v = w' - w$. Dann ist $Av = A(w' - w) = Aw' - Aw = b - b = 0$ und also ist $v \in \mathrm{Kern}(\varphi_A)$.
q. e. d.

6.2 Erzeugen von Teilräumen

Lernziele

- Erzeugnisse als Schnitte von Teilräumen,
- der kleinste umfassende Teilraum einer Menge,
- Erzeugnisse als Menge von Linearkombinationen, endliche Erzeugendensysteme, minimale Erzeugendensysteme.

Da Teilräume eins Vektorraums auch Teilmengen des Vektorraums sind, fragen wir uns nun, ob Schnitte und Vereinigungen von Teilräume wieder Teilräume bilden. Zunächst einmal folgende desillusionierende Übungsaufgabe.

Übung: Sei V ein K-Vektorraum mit Teilräumen $T_1, T_2 \leq V$. Man zeige: $T_1 \cup T_2 \leq V$ genau dann, wenn $T_1 \subseteq T_2$ oder $T_2 \subseteq T_1$.

Beim Durchschnitt sieht es schon besser aus.

Satz 6.12

Sei $\mathcal{T} \neq \emptyset$ eine Menge von Teilräumen W von V. Dann gilt:

$$\bigcap_{W \in \mathcal{T}} W \leq V.$$

Beweis. $\bigcap_{W\in\mathcal{T}} W \neq \emptyset$ denn $0 \in W$ für alle $W \in \mathcal{T}$ also gilt: $0 \in \bigcap_{W\in\mathcal{T}} W$. Seien $u, v \in \bigcap_{W\in\mathcal{T}} W$ und $a, b \in K$. Dann gilt $u, v \in W$ für alle $W \in \mathcal{T}$. Daher gilt

$$au + bv \in W \text{ für alle } W \in \mathcal{T} \qquad \text{also } au + bv \in \bigcap_{W\in\mathcal{T}} W.$$

q. e. d.

Beispiel 6.13

Gegeben sei ein homogenes lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen. Dann ist der Lösungsraum der Schnitt der Lösungsräume der einzelnen Gleichungen.

Was ist nun der angemessene Ersatz für die Vereinigung? Wir gehen diese Frage etwas allgemeiner an, indem wir fragen: Wie kann man aus einer Teilmenge eines K-Vektorraums einen Teilraum machen? Gibt es z. B. einen kleinsten Teilraum, der diese Menge enthält?

Definition 6.14

Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$.
1) Das **Erzeugnis** (Vektorraumerzeugnis) $\langle M \rangle$ von M ist der Schnitt aller Teilräume von V, die M enthalten. ("Der kleinste Teilraum von V, der M enthält.")

$$\langle M \rangle := \bigcap_{\substack{W \leq V \\ M \subseteq W}} W$$

2) Eine **Linearkombination** von Elementen aus M ist ein Vektor $v \in V$, für den ein $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ und $u_1, u_2, \ldots, u_n \in M$ existieren mit $v = a_1u_1 + \ldots + a_nu_n$. Ist $M = \emptyset$ so ist der Nullvektor 0 die einzige Linearkombination von Vektoren aus M. Die Menge aller Linearkombinationen von M bezeichnen wir mit $\mathcal{LK}(M)$.

Der nächste Satz zeigt uns, dass der kleinste Teilraum von V, der eine Teilmenge M von V enthält gerade die Menge aller möglichen Linearkombinationen aus M ist.

Satz 6.15

Sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann gilt

$$\langle M \rangle = \mathcal{LK}(M).$$

<u>Beweis.</u> Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{LK}(M) \leq V$.
Bew.: $0 \in \mathcal{LK}(M)$, also $\mathcal{LK}(M) \neq \emptyset$. Seien $v, w \in \mathcal{LK}(M)$ und $c \in K$. Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in K$ und Vektoren

$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in M$ mit $v = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m$ und $w = b_1y_1 + \ldots + b_ny_n$. Also ist auch

$$v + cw = a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + cb_1y_1 + \ldots + cb_ny_n \in \mathcal{LK}(M).$$

Nach dem Teilraumkriterium 6.3 ist damit $\mathcal{LK}(M)$ ein Teilraum von V, der die Menge M enthält. Laut Definition von $\langle M\rangle$ ist also $\langle M\rangle \leq \mathcal{LK}(M)$.

Nun gilt aber für jeden Teilraum $W \leq V$ mit $M \subseteq W$, dass $\mathcal{LK}(M) \subseteq W$, denn jeder Teilraum enthält die Linearkombinationen jeder seiner Teilmengen. Also gilt dies insbesondere für den Teilraum $W = \langle M\rangle$ und somit ist $\mathcal{LK}(M) \leq \langle M\rangle$. Damit ist der Satz bewiesen. q. e. d.

Beispiel 6.16

1) Seien $T_1, T_2 \leq V$. Dann definiert man als Ersatz für die Vereinigung die **Summe** der beiden Teilräume:

$$T_1 + T_2 := \langle T_1 \cup T_2\rangle$$

Manchmal schreiben wir auch $\langle T_1, T_2\rangle$ statt $\langle T_1 \cup T_2\rangle$. Wie ist nun der Zusammenhang mit der direkten Summe? Klar:

$$\varphi : T_1 \oplus_a T_2 \to V : (u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$$

ist eine lineare Abbildung mit $\text{Bild}(\varphi) = T_1 + T_2$ und $\text{Kern}(\varphi) = \{(u, -u) | u \in T_1 \cap T_2\}$. Insbesondere $T_1 + T_2 = T_1 \oplus_i T_2$ genau dann, wenn $T_1 \cap T_2 = \{0\}$.
2) $M = \{v\} \subseteq V$. Dann ist $\langle v\rangle := \langle M\rangle = \{av \mid a \in K\}$.

Wir interessieren uns in dieser Vorlesung in erster Linie für endlich erzeugte Vektorräume.

Definition 6.17

Ein K-Vektorraum V heißt **endlich erzeugt**, falls eine endliche Teilmenge $M \subseteq V$ mit $V = \langle M\rangle$ existiert. M heißt auch **Erzeugendensystem** von V.

Beispiel 6.18

1) $V := K^{n\times 1}$ ist endlich erzeugt, denn die Spalten $e_1, \dots, e_n$ der Einheitsmatrix bilden ein Erzeugendensystem:

$$\langle e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = V$$

denn

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n.$$

2) $K[X]$ ist als K-Vektorraum nicht endlich erzeugt, denn für jede endliche Teilmenge $M \subseteq K[X]$ sind die Grade der Polynome in $\langle M \rangle$ beschränkt durch das Maximum der Grade der Polynome in M, d.h. also $\langle M \rangle \neq K[X]$.

3) Ist V endlich erzeugter K-Vektorraum und $\varphi : V \to W$ ein Epimorphismus, d. h. eine surjektive lineare Abbildung, so ist auch W endlich erzeugt, denn Erzeugendensysteme gehen bei Epimorphismen in Erzeugendensysteme über.

4) Sind V, W endlich erzeugte K-Vektorräume, so ist auch $V \oplus W$ endlich erzeugt.

Es drängt sich die Frage nach **minimal**en Erzeugendensystemen auf, also solchen, bei denen echte Teilmengen notwendigerweise nur noch echte Teilräume erzeugen. M ist also ein minimales Erzeugendensystem für V falls für alle $v \in M$ gilt, dass $\langle M \backslash \{v\} \rangle \neq V$. Folgende Bemerkung ist sofort klar, aber absolut grundlegend.

Bemerkung 6.19

Ist $M \subseteq V$ ein minimales Erzeugendensystem, so gilt $v \notin \langle M - \{v\} \rangle$ für alle $v \in M$.

Diese Beobachtung führt uns im nächsten Abschnitt zur Definition der linearen Unabhängigkeit.

Bemerkung 6.20

Ein endlich erzeugter K-Vektorraum ist epimorphes Bild von K^n, wo n die Anzahl der Erzeuger ist.

Beweis. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ Erzeugendensystem des K-Vektorraumes V mit $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$. Dann ist

$$\lambda_X : K^n \to V : a \mapsto a_1 X_1 + \cdots a_n X_n$$

ein Epimorphismus. q. e. d.

Es wird sich zeigen, daß λ_X sogar ein Isomorphismus ist, wenn die v_i ein minimales Erzeugendensystem bilden.

6.3 Lineare Unabhängigkeit

Lernziele

- Eindeutigkeitsfragen bei Linearkombinationen,
- lineare Unabhängigkeit von Folgen von Vektoren,
- Reduktion eines Erzeugendensystems auf ein linear unabhängiges Erzeugendensystem,
- Charakterisierung von Basen.

Wie aus dem Beweis der letzten Bemerkung bereits ersichtlich, ist es für viele Zwecke günstiger, mit Folgen statt mit Mengen von Vektoren zu arbeiten, wenn man über Erzeugen, Linearkombinationen etc. spricht. Alles was im letzten Abschnitt über endliche Erzeugendensysteme gemacht wurde, kann man auch mit endlichen Folgen von Vektoren machen, indem man die Begriffsbildungen auf das Bild der Folge bezieht.

Definition 6.21

Die Folge $(v_1, \ldots, v_n)$ mit $v_i \in V$ heißt **linear unabhängig**, falls aus $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ mit $a_i \in K$ folgt, dass $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Anderenfalls heißt sie **linear abhängig**. Eine endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von n Elementen von V heißt linear unabhängig oder linear abhängig, wenn die Folge $(v_1, \ldots, v_n)$ die entsprechende Eigenschaft hat. Eine unendliche Teilmenge $X \subseteq V$ heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von X linear unabhängig ist.

Bemerkung 6.22

Seien $v_1, \ldots, v_n \in V^n$, wo V ein K-Vektorraum ist. Folgende Aussagen sind äquivalent:
1) Aus $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$ mit $a_i \in K$ folgt $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.
2) Für die lineare Abbildung

$$\lambda_v : K^n \to V : a \mapsto a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$$

gilt $\mathrm{Kern}(\lambda_v) = \{0\}$.
3) Für jedes $w \in \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ gibt es eindeutige $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$.

Übung: Zeige: Der Begriff lineare Unabhängigkeit von endlichen Mengen ist ein wohldefinierter Begriff. (Hinweis: Was passiert bei Umordnungen?)

Übung: Man formuliere 6.22 für lineare Abhängigkeit statt Unabhängigkeit.

Bemerkung 6.23

Sei $\varnothing \neq M \subseteq V$. Dann ist M genau dann linear abhängig, falls ein $v \in M$ existiert mit $v \in \langle M \backslash \{v\}\rangle$.

<u>Beweis.</u> Sei M linear abhängig. Dann existiert eine Folge $X = (v_1, \ldots, v_n) \in M^n$ und $a \in K^n$ mit $a \neq 0$ mit $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$. OBdA sei $a_1 \neq 0$. Dann ist $a_1v_1 = -a_2v_2 - \cdots - a_nv_n \in \langle M \backslash \{v_1\}\rangle$.

Die Rückrichtung ist klar. q. e. d.

Man beachte, über die Größe von $\mathrm{Kern}(\lambda_v)$ liefert 6.22 2) auch eine Vorstellung, wie sehr X linear abhängig ist. Man könnte die Elemente von $\mathrm{Kern}(\lambda_X)$ als “lineare Abhängigkeiten” von X bezeichnen. Lineare Unabhängigkeit liegt vor, wenn man nur die triviale lineare Abhängigkeit hat.

Beispiel 6.24

Sei V ein K-Vektorraum.

1) $M = \{v\}$ ist linear unabhängig.

2) $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ ist linear abhängig. M ist kein minimales Erzeugendensystem von $V = \langle M\rangle$, denn $V = \langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$.

3) $(e_1, \ldots, e_n) \in (K^{n\times 1})^n$, vgl. Beispiel 6.18 1), ist linear unabhängig. (Meistens sagt man etwas lockerer, “$e_1, \ldots, e_n$ sind linear unabhängig”.)

4) Ist $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, $\psi : V \to W$ linear und $\psi \circ X = (\psi(v_1), \ldots, \psi(v_n)) \in W^n$ linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig.
Beweis: Sei $a \in K^n$ mit $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$, dann ist auch $a_1\psi(v_1) + \ldots + a_n\psi(v_n) = 0$, also $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

5) $(\sin, \cos) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$ sind linear unabhängig. Denn
$$\mu : \langle\sin, \cos\rangle \to \mathbb{R}^2 : f \mapsto (f(0), f(\frac{\pi}{2}))$$
ist linear und $(\mu(\sin) = (0, 1), \mu(\cos) = (1, 0))$ ist linear unabhängig.

6) $(\sin\circ\sin, \cos\circ\cos, \kappa_1) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^3$ sind linear abhängig, wo $\kappa_1; \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$, denn nach Pythagoras
$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

7) Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist $B = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ linear unabhängig. Um dies zu sehen, seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mit $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$. Dies liefert ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Gaussalgorithmus liefert uns:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to_{Add(2,3,2),Add(3,1,1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to_{Ver(2,3,2),Add(3,2,-3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to_{Mul(3,-\frac{1}{5}),Add(2,3,-3),Add(1,3,-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daran erkennen wir, dass $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ die einzige Lösung des Gleichungssystems ist.

Die Begriffe “erzeugen” und “linear unabhängig” verhalten sich unter bestimmten Aspekten dual zueinander. In diesem Sinne bearbeite man die folgende Aufgabe.

Übung: Sei $M \subseteq V$ endlich. Man zeige;
Gilt $\langle M\rangle = V$ und $M \subseteq N \subseteq V$, so gilt $\langle N\rangle = V$.
Ist M linear unabhängig und $N \subseteq M$, so ist N linear unabhängig.

Ein weiteres Indiz für dieses duale Verhalten, war das Zusammenspiel mit linearen Abbildungen: Erzeugendensysteme werden durch lineare Abbildungen auf Erzeugendensysteme des Bildes abgebildet. Linear unabhängige Vektoren im Bild, kommen von linear unabhängigen Vektoren im Urbild, vgl. 6.24 2). So wie wir bei den Erzeugendensystemen nach minimalen gefragt haben, bietet sich hier also die Frage nach den maximal linear unabhängigen Systemen an.

Definition 6.25

Sei V ein K-Vektorraum und $B = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$. B heißt **Basis** von V, falls B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

Satz 6.26

Sei V ein K-Vektorraum und $B = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$. Folgende Aussagen sind äquivalent:
1) B ist eine Basis von V.
2) B ist maximal linear unabhängig in V, d.h. B ist linear unabhängig und $(v_1, \dots, v_n, w)$ ist linear abhängig für jedes $w \in V$.
3) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

Beweis. "1 $\Rightarrow$ 2": Daß B linear unabhängig ist, ist nach 1) klar. Sei also $w \in V$. Beh.: $(v_1, \dots, v_n, w)$ ist linear abhängig. Aber wir wissen nach 6.22 (3), daß $w \in \mathcal{LK}(B)$, d.h. es existiert ein $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ mit $w = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, d.h. $(a_1 \dots, a_n, -1)$ ist eine "lineare Abhängigkeit" von $(v_1, \dots, v_n, w)$.
"2 $\Rightarrow$ 3" 1. Beh.: B ist Erzeugendensystem. Sei $w \in V$. Dann ist $(v_1, \dots, v_n, w)$ linear abhängig, während B linear unabhängig ist. Wir haben also ein $a \in K^{n+1}$ mit $a \neq 0$ und $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + a_{n+1}w = 0$, wobei aber $a_{n+1} \neq 0$ sein muß, da sonst $(a_1, \dots, a_n) = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit von W. Also folgt

$$w = \frac{-a_1}{a_{n+1}}v_1 + \dots + \frac{-a_n}{a_{n+1}}v_n$$

d.h. B ist Erzeugendensystem. Wir zeigen nun, dass B ein minimales Erzeugendensystem ist, d.h. daß keiner der Vektoren von B zum Erzeugen überflüssig ist. Angenommen $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ist ein Erzeugendensystem für W. Dann existieren $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in K^{n-1}$ mit $v_n = a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1}$. Insbesondere ist $0 = a_1v_1 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1} - v_n$ ein Linearkombination der 0 mit Koeffizienten, die nicht alle 0 sind. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $(v_1, \dots, v_n, w)$ linear unabhängig sind.

"$3 \Rightarrow 1$": Angenommen B ist linear abhängig. Dann existiert ein $w \in B$ mit $w \in \langle B \backslash \{w\} \rangle$. Also ist $\langle B \rangle = \langle B \backslash \{w\} \rangle$. Daher ist B kein minimales Erzeugendensystem. q. e. d.

Korrolar 6.27

$B = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$. B ist genau dann Basis von V, falls

$$\lambda = \lambda_B : K^n \to V : a \mapsto a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

ein Isomorphismus ist, d.h. zu jedem $w \in V$ existiert genau ein $a \in K^n$ mit $w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.

Beispiel 6.28

1. Sei K ein Körper und $e_1, \ldots, e_n$ die Spalten der Einheitsmatrix $I_n \in K^{n \times n}$. Dann ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von K^n.
2. Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Dann sind die Monome $\{1, X, X^2, \ldots\}$ eine Basis von $K[X]$.
3. Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 1} = V$ und $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \notin \langle v \rangle$. Dann ist $B = \{v, w\}$ eine Basis von V. Wir zeigen, dass $\langle B \rangle = V$. Sei $u = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in V$. Da $w \notin \langle v \rangle$, ist $b \neq 0$. Also ist
$$u = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (c - \frac{da}{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{d}{b} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Zwar haben wir jetzt eine schöne Charakterisierung von Basen, aber es drängt sich eine quälende Frage auf: Haben je zwei Basen dieselbe Anzahl von Vektoren? Dies wollen wir im nächsten Abschnitt beantworten.

6.4 Der Steinitzsche Austauschsatz

Lernziele

- Beweis und Anwendungen des Austauschsatzes,
- Wohldefiniertheit der Dimension,
- diverse Dimensionsformeln.

Nach unserer Charakterisierung von Basen von endlich erzeugten Vektorräumen gibt es zwei mögliche Strategien, eine Basis zu konstruieren:
1) Man beginnt mit einem endlichen Erzeugendensystem und läßt der Reihe nach Vektoren weg, die im Erzeugnis der übrigen liegen, also linear abhängig sind von den übrigen, bis man ein minimales Erzeugendensystem hat, welches dann auch automatisch linear unabhängig ist.
2) Man beginnt mit einem linear unabhängigen System und fügt der Reihe nach Vektoren hinzu, so daß das erweiterte System wieder linear unabhängig ist. Wenn dieser Vorgang terminiert hat man ein maximal linear unabhängiges System.
Bei dem ersten Prozeß, ist klar, daß man eine Basis bekommt; allerdings weiß man nicht ob zwei Basen immer gleich viele Elemente enthalten. Bei dem zweiten Prozeß ist nicht einmal klar, daß er terminiert. Aus diesem Dilemma führt der Steinitzsche Austauschsatz heraus, welcher der erste tiefere Struktursatz über endlich erzeugte Vektorräume ist, den wir in dieser Vorlesung kennenlernen.

Satz 6.29: Steinitzscher Austauschsatz

Sei V ein K-Vektorraum und $X = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ ein Erzeugendensystem von V, d.h. $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, und sei $Y = (w_1, \ldots, w_s) \in V^s$ linear unabhängig. Dann gilt $s \leq n$ und nach geeigneter Umordnung der v_i ist $(w_1, \ldots, w_s, v_{s+1}, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über s, der Anzahl der linear unabhängigen Vektoren.

Induktionsanfang: Sei $s = 1$. Da $w_1 \in V = \langle X \rangle$, folgt: Es existiert ein $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ mit

$$w_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n.$$

Da (w_1) linear unabhängig ist, d.h. $w_1 \neq 0$ ist $a \neq 0$. Also existiert ein $i \in \underline{n}$ mit $a_i \neq 0$. Nach Permutation der v_j können wir annehmen, daß $i = 1$ ist, also $a_1 \neq 0$. Also folgt

$$v_1 = \frac{1}{a_1} w_1 - \frac{a_2}{a_1} v_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} v_n.$$

Also $v_1 \in \langle w_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, d.h. $V = \langle w_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.
Induktionsannahme: Die Behauptung gilt für $s-1$ bzw. für $(w_1, \ldots, w_{s-1})$, also $s - 1 \leq n$ und $(w_1, \ldots, w_{s-1}, v_s, \ldots v_n)$ erzeugt V.
Induktionsschritt: Wir haben $w_s \in V = \langle w_1, \ldots, w_{s-1}, v_s, \ldots v_n \rangle$ also existiert ein $a \in K^n$ mit

$$w_s = a_1 w_1 + \cdots + a_{s-1} w_{s-1} + a_s v_s + \cdots + a_n v_n.$$

Da Y linear unabhängig ist, ist $w_s \neq 0$, also $a \neq 0$. Wäre $a_s = \cdots = a_n = 0$, so wäre Y linear abhängig. Also existiert ein i mit $s \leq i \leq n$ mit $a_i \neq 0$. Wir schließen $s \leq n$. Nach Umnummerierung der v_i können wir wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) annehmen, daß $i = s$ gilt. Wie oben bekommen wir wieder $v_s \in \langle w_1, \ldots, w_s, v_{s+1}, \ldots v_n \rangle$ und folgern $V = \langle w_1, \ldots, w_s, v_{s+1}, \ldots v_n \rangle$.
q. e. d.

(Man beachte: Die beiden oBdA-Annahmen sind lockere Umschreibung der Tatsache, daß wir an diesen Stellen eine Permutation der v_i vornehmen müssen.)

Korrolar 6.30

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann existiert ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so daß jede Basis von V aus genau n Vektoren besteht.

<u>Beweis.</u> Der Fall des Nullvektorraumes ist klar. Sei also $V \neq \{0\}$. Wegen der endlichen Erzeugbarkeit existieren ein $s \in \mathbb{N}$ und ein

Erzeugendensystem $X \in V^s$. Durch Weglassen von Vektoren können wir erreichen, daß X linear unabhängiges Erzeugendensystem ist, also oBdA X linear unabhängig. Ist $Y \in V^n$ linear unabhängig, so folgt aus dem Satz von Steinitz $n \leq s$. Ist Y zudem ein Erzeugendensystem, also eine Basis, so folgt wiederum aus dem Satz von Steinitz 6.29 $s \leq n$, also $s = n$. q. e. d.

Definition 6.31

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so daß jede Basis von V aus genau n Vektoren besteht. Dann heißt n die **Dimension** von V. Notation: $\operatorname{Dim} V = n$. Falls V nicht endlich erzeugbar ist, also kein endliches Erzeugendensystem hat, schreiben wir $\operatorname{Dim} V = \infty$.

Beispiel 6.32

1) $\operatorname{Dim}\{0\} = 0$.
2) $\operatorname{Dim} K^n = n$, denn die Standardbasis

$$\mathcal{S} := ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$$

ist offensichtlich eine Basis aus n Elementen. Entsprechend gilt

$$\operatorname{Dim} K^{n\times 1} = \operatorname{Dim} K^{1\times n} = n.$$

3) Allgemeiner haben wir für beliebige (insbesondere endliche) Mengen M

$$\operatorname{Dim} K^M = |M|$$

denn im endlichen Fall bilden die charakteristischen Funktionen der einelementigen Teilmengen von M (in irgendeiner Anordnung) eine Basis. Hierbei ist die charakteristische Funktion der einelementigen Teilmenge $\{m\}$ von M definiert als:

$$f_{\{m\}} : M \to K : x \mapsto \begin{cases} 1 & x = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Fall $M = \emptyset$ setzt man am einfachsten $K^M := \{0\}$. Ist M unendlich, so sind die charakteristischen Funktionen der einelementigen

Teilmengen von M immer noch linear unabhängig (aber sicher keine Basis mehr), weshalb man dann $\operatorname{Dim} K^M = \infty$ hat.

Übung: Ist V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\varphi : V \to W$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen, so ist $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} W$.

Einfach, allerdings wichtig, sind die folgenden Folgerungen:

Korrolar 6.33

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum .
1) (Basisergänzungssatz) Ist $X = (w_1, \ldots, w_\ell) \in V^\ell$ linear unabhängig, so kann man X zu einer Basis von V ergänzen, d.h. es gilt $\ell \leq \operatorname{Dim} V =: n$ und es existiert eine Basis $Y = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ mit $v_i = w_i$ für $1 \leq i \leq \ell$.
2) Ist $T \leq V$, so gilt $\operatorname{Dim} T \leq \operatorname{Dim} V$ mit Gleichheit genau dann, wenn $T = V$.

Beweis. 1) Direkt aus dem Satz von Steinitz.
2) Linear unabhängige Vektoren aus T sind auch linear unabhängig in V. Also ist die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus T beschränkt durch $\operatorname{Dim} V$. Diese Maximalzahl ist aber $\operatorname{Dim} T$.
q. e. d.

6.5 Faktorräume

Definition 6.34

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf V heißt **verträglich** mit der Vektorraumstruktur oder **lineare Kongruenz**, falls aus $v \sim v'$ und $u \sim u'$ für $v, v', u, u' \in V$ und $a, b \in K$ folgt $av + bu \sim av' + bu'$. Sei $v \in V$. Dann heißt die Äquivalenzklasse

$$[v] := \{u \in V \mid u \sim v\}$$

auch die **Kongruenzklasse** von v.

Beispiel 6.35

Ist $\varphi : V \to W$ linear und $\sim_\varphi =$ “Bildgleichheit bez. φ”, so ist $\sim_\varphi$ eine lineare Kongruenz.

Lemma 6.36

Ist $U \leq V$ ein Teilraum von V. Definiere $\sim_U \subseteq V \times V$ durch: $v \sim_U w$ genau dann, wenn $v - w \in U$. Dann ist $\sim_U$ eine lineare Kongruenz.

Beweis. Wir lassen es als Übung zu zeigen, dass $\sim_U$ w eine Äquivalenzrelation auf V definiert.

Seien $v, v', w, w' \in V$ mit $v \sim_U v'$ und $w \sim_u w'$. Dann existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $v - v' = u_1$ und $w - w' = u_2$.

Seien nun $a, b \in K$. Dann ist $av + bw = a(v' + u_1) + b(w' + u_2) = av' + bw' + (au_1 + bu_2)$. Also ist $(av + bw) - (av' + bw') = au_1 + bu_2 \in U$ und somit $av + bw \sim_U av' + bw'$. q. e. d.

Das vorherige Lemma hat gezeigt, dass wir eine lineare Kongruenz $\sim_U$ mit Hilfe eines Teilraums U von V erhalten. Das nächste Lemma zeigt nun, dass jede beliebige lineare Kongruenz $\sim$ auf V auch als eine lineare Kongruenz bezüglich eines geeigneten Teilraums aufgefasst werden kann.

Lemma 6.37

Ist $\sim$ eine lineare Kongruenz auf dem K-Vektorraum V, so gilt:

1) Die **Kongruenzklasse** $U := [0]$ des Nullelementes ist ein Teilraum von V;

2) $\sim = \sim_U$, wobei $\sim_U$ die Kongruenz aus 6.35 ist.

3) Die Kongruenzklasse $[v]$ von $v \in V$ ist gegeben durch

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}.$$

Beweis. 1) $[0] \neq \emptyset$, da $0 \in [0]$. Sind $v, w \in [0]$ und $a, b \in K$, dann folgt $v \sim 0$ und $w \sim 0$, also wegen der Verträglichkeit $av + bw \sim a0 + b0 = 0$,

d. h. $av + bw \in [0]$. Also ist $[0]$ nach dem Teilraumkriterium 6.3 ein Teilraum.
2) Sei $U := [0]$. Seien $v, w \in V$. Dann gilt $v \sim w$ genau dann, wenn $v - w \sim w - w = 0$, was genau dann der Fall ist, wenn $v - w \in U$. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $v \sim_U w$.
3) $w \in v + U$ ist äquivalent zu $w = v + u$ für ein $u \sim 0$. Dies bedeutet wegen der Verträglichkeit $w \sim v$, d. h. $w \in [v]$. q. e. d.

Definition 6.38

Sei $U \leq V$ ein Unterraum des K-Vektorraumes V und $\sim := \sim_U$ die zugehörige lineare Kongruenz. Die Menge $V/\sim$ der Kongruenzklassen wird mit V/U (lies V modulo U oder V nach U) bezeichnet. Die Elemente von V/U heißen auch **Restklassen** nach U und V/U heißt auch **Faktorraum**, **Quotientenraum** oder **Restklassenraum** von V nach U.

Der nachfolgende Satz erklärt, warum wir V/U einen **Raum** nennen.

Satz 6.39

Sei $U \leq V$ ein Unterraum des K-Vektorraumes V und $\sim := \sim_U$ die zugehörige Kongruenz.
1) V/U wird mit der wohldefinierten Addition

$$(v + U) + (w + U) := (v + w) + U \text{ für alle } v, w \in V$$

und Multiplikation

$$a(v + U) := av + U \text{ für alle } v \in V, a \in K$$

zu einem K-Vektorraum.
2) Die Abbildung

$$\nu : V \to V/U : v \mapsto v + U$$

ist eine lineare Abbildung, genannt der **natürliche Epimorphismus** von V auf V/U. Es gilt $\text{Kern}(\nu) = U$.

Beweis. 1) Wir müssen zeigen, daß die Definition wohldefiniert, d.h. **vertreterunabhängig** ist. Angenommen $v' + U = v + U$ und $w' + U = w + U$, so ist zu zeigen $(v' + w') + U = (v + w) + U$. Offenbar existieren $u_1, u_2 \in U$ mit $v' = v + u_1, w' = w + u_2$, also $(v' + w') - (v + w) = u_1 + u_2 \in U$, d. h. $(v' + w') + U = (v + w) + U$. Wohldefiniertheit von $a(v + U)$: Sei also $v' + U = v + U$, dann ist $v' - v \in U$, also auch $av' - av = a(v' - v) \in U$, also $av + U = av' + U$. Jetzt müssen die Vektorraumaxiome überprüft werden. Z. B. das Assoziativgesetz für V impliziert die Assoziativität der Addition von V/U und $U = 0 + U$ ist das Nullelement von V/U. Den Rest lassen wir als Übung.
2) $\nu(av + bw) = (av + bw) + U = a(v + U) + b(w + U) = a\nu(v) + b\nu(w)$ für alle $a, b \in K, v, w \in V$. Damit ist ν linear; daß ν surjektiv ist, ist klar und ebenso, daß $\mathrm{Kern}(\nu) = U$. q. e. d.

Bemerkung 6.40

Dieser Satz sagt also insbesondere, daß jeder Teilraum eines Vektorraumes Kern eines geeigneten Homomorphismus ist.

6.6 Homomorphiesatz

Wir erinnern an dieser Stelle an den Homomorphiesatz 2.37 von Mengen. Er besagt, dass vom Prinzip her Äquivalenzrelationen, Partitionen und Abbildungen sehr ähnliche Konzepte sind.

Jetzt ist alles für den Homomorphiesatz für Vektorräume vorbereitet.

Satz 6.41: Homomorphiesatz

Sei $\psi : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Dann faktorisiert ψ in die Komposition des natürlichen Epimorphismus $\nu = \nu_\psi : V \to V/\operatorname{Kern}(\psi)$ und des Monomorphismus $\overline{\psi} : V/\operatorname{Kern}(\psi) \to W : v + \operatorname{Kern}(\psi) \mapsto \psi(v)$, also $\psi = \overline{\psi} \circ \nu$. D.h. wir haben das **kommutative Diagramm** linearer Abbildungen

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\nu_\psi"'] & & W \\ & V/\operatorname{Kern}(\psi) \arrow[ur, "\overline{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Abbildung $\nu := \nu_\psi$ ist bereits in Satz 6.39 eingeführt worden, wobei wir als Teilraum $\mathcal{U} := \operatorname{Kern}(\psi)$ wählen. Also wissen wir bereits, dass ν eine lineare Abbildung ist, die ein Epimorphismus von V auf V/U ist und dass $\operatorname{Kern}(\nu) = U$.

Damit können wir nun zeigen, dass die beiden Bildgleichheitsäquivalenzrelationen $\sim_\phi$ und $\sim_\nu$ gleich sind: Seien $v_1, v_2 \in V$. Dann gilt $\psi(v_1) = \psi(v_2)$ genau dann, wenn $v_1 - v_2 \in \operatorname{Kern}(\psi) = U = \operatorname{Kern}(\nu)$, was also äquivalent ist zu $\nu(v_1) = \nu(v_2)$. Damit ist gezeigt:

$$v_1 \sim_\phi v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 \sim_\nu v_2.$$

Die Wohldefiniertheit von $\overline{\psi}$ zeigen wir wie folgt: Seien also $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 + \operatorname{Kern}(\psi) = v_2 + \operatorname{Kern}(\psi)$. Somit ist $v_2 = v_1 + u$ mit $u \in \operatorname{Kern}(\psi) = U$. Also gilt

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(v_1 + \operatorname{Kern}(\psi)) &= \psi(v_1) = \psi(v_1) + 0 = \psi(v_1) + \psi(u) \\ &= \psi(v_1 + u) = \psi(v_2)\overline{\psi}(v_2 + \operatorname{Kern}(\psi)). \end{aligned}$$

Die Injektivität von $\overline{\psi}$ zeigen wir wie folgt: Angenommen $v_1, v_2 \in V$ mit $\overline{\psi}(v_1 + \operatorname{Kern}(\psi)) = \overline{\psi}(v_2 + \operatorname{Kern}(\psi))$. Dann ist $\psi(v_1) = \psi(v_2)$ d.h. $v_1 \sim_\psi v_2$, also $v_1 - v_2 \in \operatorname{Kern}\psi$. Damit ist $v_2 = v_1 + u$ für ein $u \in \operatorname{Kern}\psi$ und somit $v_2 + \operatorname{Kern}(\psi)) = v_1 + u + \operatorname{Kern}(\psi)) = v_1 + \operatorname{Kern}(\psi))$. Die Linearität von ν hatten wir schon in 6.39 gesehen, die von $\overline{\psi}$ folgt unmittelbar aus der von Linearität von ψ. q. e. d.

Bemerkung 6.42

Man beachte, daß $\overline{\psi}$ einen Isomorphismus von $V/\operatorname{Kern}(\psi)$ auf $\operatorname{Bild}(\psi)$ induziert, so daß wir bis auf Isomorphie alle epimorphen Bilder von V kennen, wenn wir alle Teilräume von ψ kennen. Insbesondere können wir uns als Kürzel auch

$$V/\operatorname{Kern}(\psi) \cong \operatorname{Bild}(\psi)$$

merken.

In diesem Licht betrachten wir die folgende Konsequenz des Gaussschen Algorithmus.

Satz 6.43

Sei K ein Körper und $0_{m\times n} \neq A \in K^{m\times n}$. Die induzierte lineare Abbildung $\varphi_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ kann in eine surjektive lineare Abbildung φ_G für ein $G \in K^{r\times n}$ mit $r \in \mathbb{N}$ und eine injektive lineare Abbildung φ_B mit $B \in K^{m\times r}$ faktorisiert werden:

$$\varphi_A = \varphi_B \circ \varphi_G \qquad \text{oder} \qquad A = BG$$

Beweis. Wähle G als die Matrix, die aus der strikten Stufenform zu der zu A gehörigen Matrix durch Streichen der Nullzeilen hervorgeht. Die Zeilenzahl von G sei also r. Seien $s(i) := St_i(G)$ die Stufenindizes von G. Definiere $B \in K^{m\times r}$ dadurch, daß die j-te Spalte von B gleich der $s(j)$-ten Spalte von A ist: $B_{-,j} := A_{-,s(j)}$.
Es gilt $BG = A$, denn so wie die Koeffizienten der i-ten Spalte von G uns sagen, mit welchen Koeffizienten sich die Spalte $G_{-,i}$ aus der Standardbasis linearkombiniert, so sagt sie uns auch, mit welchen Koeffizienten die entsprechende Spalte $A_{-,i}$ aus den Stufenindexspalten $A_{-,s(i)}$ von A linearkombiniert werden, denn diese entsprechen den Stufenindexspalten von G, welche ja die Standardbasis von $K^{r\times 1}$ bilden.
Es gilt: φ_G ist surjektiv. Dies ist klar, da die Standardbasisspalten von

$K^{r\times 1}$ unter den Spalten von G vorkommen.
Es gilt: Bildgleichheit bezüglich φ_A und φ_G sind identisch. Nach Konstruktion des Gaussschen Algorithmus gilt, dass sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht ändert, also:

$$\varphi_A^{-1}(\{0_m\}) = \varphi_G^{-1}(\{0_r\}).$$

Also $S, T \in K^{n\times 1}$ mit $AS = AT$ ist äquivalent mit $A(S-T) = 0_m$, also auch mit $GS = GT$.
Es gilt: φ_B ist injektiv. Dies folgt sofort aus dem letzten Schritt: Sei $X \in K^{r\times 1}$ mit $BX = 0_m$. Da φ_G surjektiv ist, existiert ein $Y \in K^{n\times 1}$ mit $GY = X$. Man hat $AY(= BX) = 0_m$, also nach dem letzten Schritt $X = GY = 0_r$. q. e. d.

Hier ist ein kleines numerisches Beispiel.

Beispiel 6.44

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung ist gut, wenn man die Faser über der Nullspalte bestimmen will. Transponiert man die entsprechende Darstellung der transponierten Matrix, bekommt man eine Faktorisierung, die gut ist, um festzustellen, ob eine Spalte im Bild liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Angeregt durch diese Betrachtungen wollen wir jetzt das folgende Problem betrachten: Gegeben eine Matrix $A \in K^{m\times n}$. Produziere einen Entscheidungsmechanismus, der für jede Spalte $b \in K^{m\times 1}$ (schnell) entscheidet, ob $b \in \text{Bild}(\varphi_A)$ gilt, d. h., ob $Ax = b$ lösbar ist, und welcher im positiven Fall eine Lösung angibt. Wir begnügen uns mit einem Beispiel:

Beispiel 6.45

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Dann ergänzen wir A durch die Einheitsmatrix als rechte Seite und machen die elementaren Umformungen aus dem ersten Teil des GAUSSalgorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 5 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} G & R \\ \hline 0_{2\times 5} & S \end{array}\right)$$

Also haben wir die Faktorisierung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (A_{-,1}, A_{-3})\, G$$

Wenn jetzt die Spalte B mit den Koordinaten a, b, c, d als rechte Seite des linearen Gleichungssystems mit Matrix A vorgegeben wird, wird man an Hand der rechten Seite oben die GAUSSumformungen nachvollziehen:

$$\left(\frac{R}{S}\right) B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,a + 2\,b \\ 2\,a - b \\ a - 2\,b + c \\ 2\,a - 3\,b + d \end{pmatrix}$$

Damit das System lösbar ist, müssen also die letzten zwei Komponenten Null sein:

$$SB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2\,b + c \\ 2\,a - 3\,b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ist dies der Fall, so ist das Gleichungssystem $AX = B$ äquivalent zu $GX = RB$ und eine Lösung läßt sich direkt ablesen, wenn man die üblicherweise zu wählenden Parameter alle gleich Null setzt:

$$((I_5)_{-,1}, (I_5)_{-,3})\, RB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,a + 2\,b \\ 0 \\ 2\,a - b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übung: Verifiziere und erkläre alle Behauptungen des letzten Beispiels.

Was sagt uns der Homomorphiesatz über lineare Gleichungssysteme?

Beispiel 6.46

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix und $\varphi := \varphi_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1} : x \mapsto Ax$ die induzierte lineare Abbildung. Dann sagt uns der Homomorphiesatz und die vorangegangenen Überlegungen:
1) Diejenigen $b \in K^{m\times 1}$, für die $Ax = b$ lösbar ist, bilden einen Teilraum, nämlich $\mathrm{Bild}(\varphi)$ von $K^{m\times 1}$.

2) Dieser Teilraum Bild(φ) ist isomorph zu $K^{m\times 1}/\operatorname{Kern}(\varphi)$.
3) Die Lösungsmenge von $Ax = b$ für $b \in$ Bild(φ) ist eine Restklasse nach Kern(φ) und wird unter dem Isomorphismus $\overline{\varphi}$ von $K^{n\times 1}/\operatorname{Kern}(\varphi)$ auf Bild(φ) auf b abgebildet. Insbesondere bildet die Gesamtheit aller (nicht leerer) Lösungsmengen für variierendes $b \in$ Bild(φ) einen Vektorraum.
4) Je größer der Kern von φ, für desto weniger rechte Seiten b ist das Gleichungssystem lösbar. (Diese Tatsache werden wir später noch quantitativ untersuchen.)

Was sagt uns der Homomorphiesatz über direkte Summen?

Beispiel 6.47

Wir setzen die Diskussion von 6.10 fort. $\pi_1 : T_1 \oplus T_2 \to T_1 : v_1 + v_2 \mapsto v_1$ ist eine surjektive lineare Abbildung (Epimorphismus) mit $\operatorname{Kern}(\pi_1) = T_2$ und der Homomorphiesatz sagt

$$(T_1 \oplus T_2)/T_2 \cong T_1.$$

Insbesondere ist T_1 ein Vertretersystem für die Restklassen von $T_1 \oplus T_2$ nach T_2.

Korrolar 6.48

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum .
Ist $T \leq V$ mit Basis $(v_1, \ldots, v_\ell)$ und $(v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_k)$ eine Basis von V, so ist $(w_1 + T, \ldots, w_k + T)$ eine Basis von V/T. Insbesondere gilt:

$$\boxed{\operatorname{Dim} V/T = \operatorname{Dim} V - \operatorname{Dim} T.}$$

Beweis. Daß $(w_1 + T, \ldots, w_k + T)$ ein Erzeugendensystem von V/T ist, ist klar. Wir zeigen lineare Unabhängigkeit: Sei $a = (1_1, \ldots, a_k) \in K^k$ mit

$$a_1(w_1 + T) + \ldots + a_k(w_k + T) = 0 + T$$

d.h. $a_1w_1 + \ldots + a_kw_k \in T$. Also existiert $b \in K^\ell$ mit

$$a_1w_1 + \ldots + a_kw_k = b_1v_1 + \ldots + b_\ell v_\ell$$

d.h.

$$a_1w_1 + \ldots + a_kw_k - b_1v_1 - \ldots - b_\ell v_\ell = 0.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basis $(v_1, \ldots, v_\ell, w_1, \ldots, w_k)$ von V schließen wir, daß $a_1 = \cdots a_k = 0$ (und $b_1 = \cdots = b_\ell = 0$) gilt, d.h. $(w_1 + T, \ldots, w_k + T)$ ist linear unabhängig.
q. e. d.

Desweiteren können wir den Homomorphiesatz um eine quantitative Aussage erweitern.

Korrolar 6.49

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\alpha : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\boxed{\operatorname{Dim} \operatorname{Bild}(\alpha) + \operatorname{Dim} \operatorname{Kern}(\alpha) = \operatorname{Dim} V.}$$

Beweis. Da $\operatorname{Bild}(\alpha)$ und $V/\operatorname{Kern}(\alpha)$ isomorph sind nach dem Homomorphiesatz, haben beide gleiche Dimension und die Behauptung folgt aus 6.48. q. e. d.

Wir schließen diesen Abschnitt mit der berühmten GRASSMANNidentität.

Korrolar 6.50: Grassmann-Identität

Sei V ein K-Vektorraum mit endlich erzeugten Teilräumen $T_1, T_2 \leq V$. Dann gilt:

$$\operatorname{Dim}(T_1 + T_2) + \operatorname{Dim}(T_1 \cap T_2) = \operatorname{Dim} T_1 + \operatorname{Dim} T_2.$$

Beweis. Offenbar ist

$$\alpha : T_1 \oplus_a T_2 \to V : (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

linear mit $\mathrm{Bild}(\alpha) = T_1 + T_2$ und $\mathrm{Kern}(\alpha)$ isomorph zu $T_1 \cap T_2$. Die Behauptung folgt jetzt aus 6.49. q. e. d.

Beispiel 6.51

Sei $\mathrm{Dim}(V) = 3$ und

$$\begin{aligned} G(V) &:= \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq V, \mathrm{Dim}(\mathcal{U}) = 2\} \\ P(V) &:= \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \leq V, \mathrm{Dim}(\mathcal{U}) = 1\}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in G(V), \quad \mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2 \text{ impliziert } \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in P(V),$$

und

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in P(V), \quad \mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2 \text{ impliziert } \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \in G(V).$$

Interpretation: Nennt man die Elemente von $G(V)$ Geraden und die von $P(V)$ Punkte, so lesen wir hieraus ab: Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt und zwei Punkte legen eine Gerade fest, auf der sie liegen. Man spricht von einem Modell der **projektiven Ebene**, die aber nicht mehr zum Gegenstand dieser Vorlesung gehören.

Zusammenfassung

Sie sollten nun mit den folgenden Begriffen gut vertraut sein:

- Vektorräume und verschiedene Beispiele von Vektorräumen und wie man in diesen rechnet. Sie sollten in der Lage sein, mehrere solcher Beispiele anzugeben.

- Erzeugendensysteme, Lineare Unabhängigkeit, Basen von Vektorräumen, einschliesslich wie man diese findet und wie man zeigt, dass ein Tupel von Vektoren linear unabhängig ist oder eine Basis bildet. Dimension eines Vektorraums. Die Aussage des Satzes von Steinitz.

- Teilräume und wie man zeigt, dass eine Teilmenge eines Vektorraums ein Teilraum ist. Direkte Summen von Teilräumen, der Unterschied zwischen innerer und äusserer direkten Summe, lineare Kongruenzen und der Zusammenhang zu Teilräumen.

- Faktorräume und wie man in diesen rechnet. Der Begriff der Wohldefiniertheit.
- Lineare Abbildungen, wie man beweist, dass eine Abbildung linear ist, die Aussage des Homomorphiesatz, Anwendungen des Satzes, Grassmann Identität.
- Interpretation für lineare Gleichungssysteme.