Klausur Stochastik 14.09.15

Aufgabe 1

a) In einem Regal stehen 5 französische, sieben spanische und elf englische Bücher. Auf wieviele Arten lassen sich zwei Bücher in verschiedenen Sprachen auswählen?

b) Ein Zug besteht aus 4 ununterscheidbaren Wagen der 1. Klasse, 7 ununterscheidbaren Wagen der 2. Klasse, 1 Speisewagen und 2 ununterscheidbaren Gepäckwagen. Wie viele Wagenfolgen sind möglich, wenn die Wagen beliebig eingereiht werden dürfen?

c) Ein Krankenpfleger muss 5 Tage die Woche arbeiten, er möchte aber entweder Samstag oder Sonntag frei haben. Wie viele Möglichkeiten hat er, seine Arbeitstage auf die Woche zu verteilen?

Aufgabe 2

Eine Fabrik stellt ein Gerät her, welches einen elektronischen Schalter enthält. Dieser Schalter wird von zwei Firmen A und B bezogen, wobei 60% aller Schalter von A und 40% aller Schalter von B stammen. Erfahrungsgemäß sind 5% aller A-Schalter und 2% aller B-Schalter defekt. Die Endkontrolle der Fabrik akzeptiert jeden intakten Schalter und fälschlicherweise auch 5% aller defekten Schalter.

a) Erstellen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein Gerät mit defektem Schalter in den Verkauf?
c) Sie reklamieren, da der Schalter an Ihrem Gerät nicht funktioniert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er vom Zulieferer A?

Aufgabe 3

Ein Würfel mit sechs Seiten wurde so gefälscht, dass die Wahrscheinlichkeit, die Augenzahl i zu würfeln, proportional zu i ist (z.B. ist die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 6 doppelt so groß wie für die Augenzahl 3).

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Zufallsvariable „Augenzahl beim einfachen Wurf"
b) Stellen Sie die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable von a) grafisch dar.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Augenzahl für den einfachen Würfelwurf.

Aufgabe 4

Gegeben sei die folgende Funktion

$$g(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 & für\ 1 < x < 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Konstante c, so dass die Funktion g eine Dichtefunktion ist.

Die Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion g.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte annimmt, die kleiner gleich 1.5 sind.

Aufgabe 5

Der Auslastungsgrad (pro Tag) eines in einer Anwaltskanzlei stehenden Druckers sei eine Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \vartheta \cdot x^{\vartheta-1} & f\text{ür } 0 < x \leq 1 \\ 0 & sonst \end{Bmatrix}, \vartheta > 0$$

Die an n Arbeitstagen beobachteten Auslastungsgrade $x_1, x_2, \dots, x_n$ seien als Realisierung einer einfachen Stichprobe auffassbar.

a) Erstellen Sie die Likelihood-Funktion $f(\vartheta; x_1, \dots, x_n)$.

b) Ermitteln Sie die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für ϑ.

Aufgabe 6

An der Salatbar einer Mensa kostet der Salat 1 Euro pro 100 g. Der Salat wird gewogen und der Betrag zwecks leichterer Bezahlbarkeit auf ein Vielfaches von 50 Cent auf- oder abgerundet. Somit ist der Rundungsfehler X_i beim i –ten Salatessen stetig gleichverteilt auf dem Intervall $[-0.25; 0.25]$. Die Rundungsfehler $X_1, X_2, .., X_{192}$ können hierbei als unabhängige Zufallsvariablen angesehen werden.
Wie hoch ist das Risiko, dass der Student nach 192-maligem Salatessen durch die Rundung einen Nachteil von mehr als 3 Euro hat, wenn er das Salatgewicht nicht vorher abschätzt? (Hinweis: Zentraler Grenzwertsatz)

Aufgabe 7

In einer Anlage werden Milchflaschen und die dazugehörigen Deckel hergestellt. Der Durchmesser der runden Milchflaschenöffnung X sei normalverteilt mit Erwartungswert 2 cm und Varianz $\sigma^2 = 0.04^2\ cm^2$. Die Größe des Deckels Y variiert unabhängig vom Durchmesser der Milchflaschenöffnung und kann als normalverteilt mit Erwartungswert 2 cm und Varianz $\tau^2 = 0.03^2 cm^2$ angenommen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passt ein Deckel nicht auf die Öffnung, wenn eine maximale Abweichung von Öffnung und Deckel von $\pm 0.1\ cm$ als passend gilt?

Aufgabe 8

Zur Überprüfung der Klebekraft eines neuen Alleskleber wurden die Werte 299, 300, 302, 305, 307, 311 gemessen. Die Messwerte können als Stichprobe einer (μ, σ^2) –normalverteilten Grundgesamtheit betrachtet werden mit bekanntem $\sigma = 19$. Man teste die Hypothese $\mu = 300$ gegen die Alternative $\mu \neq 300$ bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 10\%$.