Lehrgebiet
Theoretische
Informatik

Probeklausur 0
Datenstrukturen und Algorithmen

11.07.2024

VORNAME: .... NAME: ....

MATRIKELNUMMER: .... STUDIENGANG: ....

Hinweise:

- Als einziges Hilfsmittel ist ein *unkommentiertes* Wörterbuch für Deutsch-Deutsch bzw. Deutsch-Englisch zugelassen. Dieses wird von der Aufsicht während der Klausur kontrolliert.
- Mit der Unterschrift erklären Sie, dass Sie sich gesundheitlich in der Lage fühlen, diese Klausur mitzuschreiben.
- Jedes Lösungsblatt ist mit Name und Matrikelnummer zu versehen.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen zu einer Aufgabe, falls vorhanden, in die dafür vorgesehene Box. Falls der Platz nicht ausreicht, kennzeichnen Sie bitte deutlich, wo die Lösung zu finden ist.
- Bitte schreiben Sie deutlich. Unleserliches wird nicht korrigiert und nicht gewertet.
- Schmierblätter werden mit abgegeben; streichen Sie diese durch oder machen Sie sie anderweitig als Schmierblätter kenntlich. Es kann nur ein Lösungsversuch pro Aufgabe gewertet werden. Im Zweifel wird das Falsche gewertet.
- Bitte verwenden Sie einen dokumentenechten Stift mit blauer oder schwarzer Tinte und verwenden Sie keinen Tintenkiller, Tipp-Ex("White-out") oder Ähnliches. Benutzen Sie nur das zur Verfügung gestellte Papier. Entfernen Sie nicht die Heftklammern.
- Sie haben 90 Minuten zur Bearbeitung der Klausur.
- Bewahren Sie Ihre Taschen vor sich (nach Möglichkeit in der Reihe vor Ihnen) auf dem Boden, halten Sie diese während der gesamten Klausur geschlossen. Ein Zugriff (auch auf die geschlossene) Tasche kann als Täuschungsversuch gewertet werden.
- Sie dürfen sich innerhalb der Klausuraufgaben auf Ergebnisse aus der Vorlesung und Ergebnisse aus den Übungsaufgaben beziehen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass Sie eine gesamte Aufgabe alleine mit "Wurde bereits in der Vorlesung gezeigt" o.Ä. beantworten dürfen.

Ich versichere, die Klausur selbstständig bearbeitet zu haben. Mir ist bekannt, dass die Klausur bei einem Täuschungsversuch mit „nicht bestanden" bewertet wird.

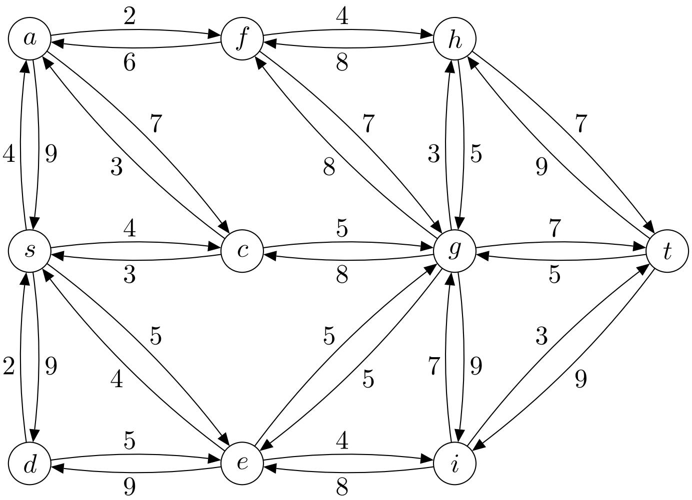
....
(Unterschrift)

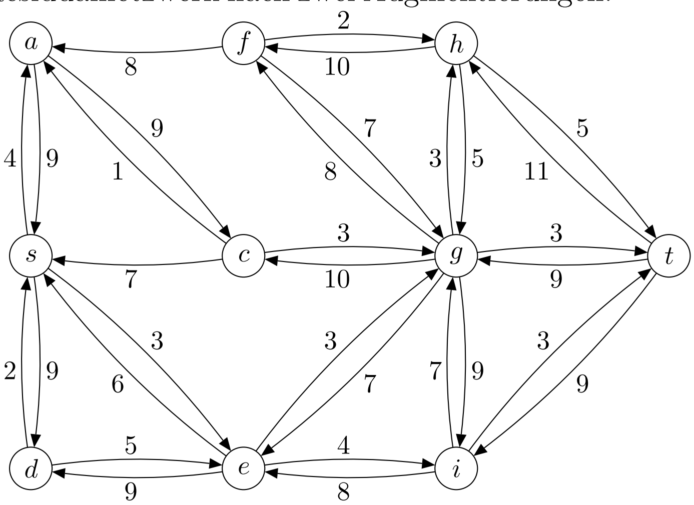
Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	25	18	25	22	90
erreicht					

Note: ....

Aufgabe K1 (6+4+11+4 Punkte)

Sie finden links ein Flussnetzwerk und rechts das Residualnetzwerk nach zwei Augmentierungen:

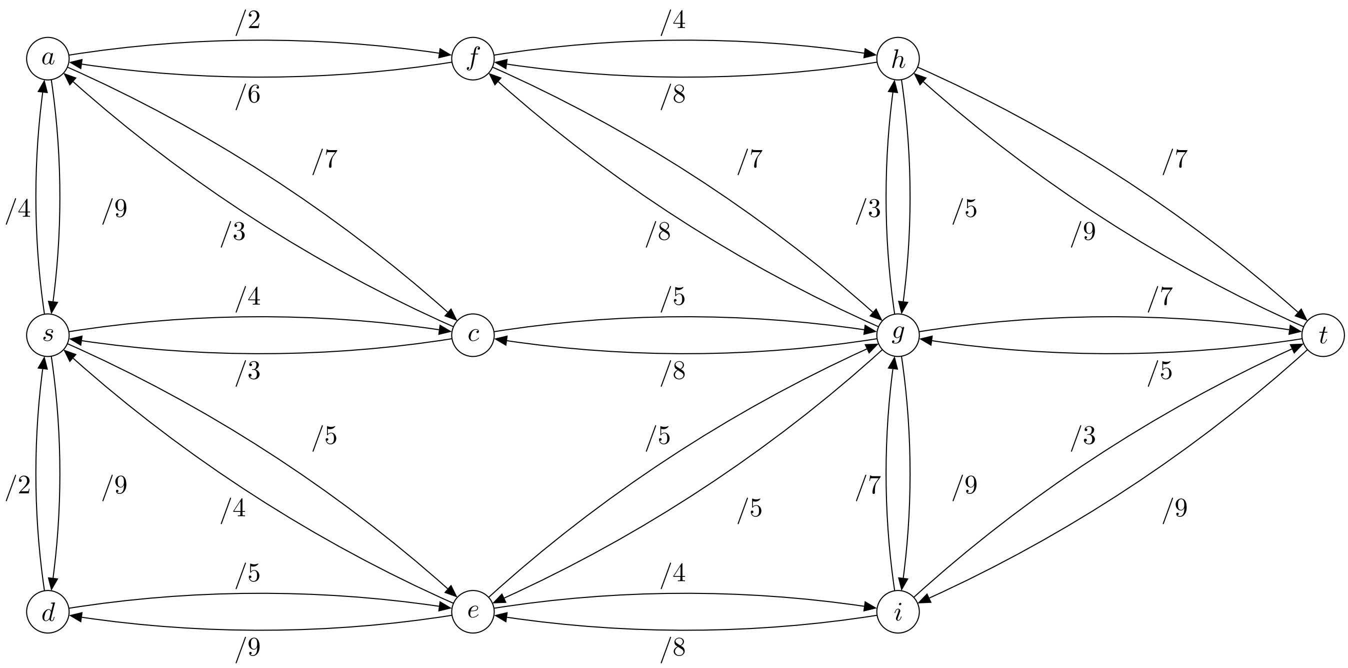




a) Geben Sie die beiden augmentierenden Pfade an, indem Sie die zugehörigen Knoten in der entsprechenden Reihenfolge eintragen.

b) Was ist der Wert des Flusses, der zu dem obigen Residualnetzwerk gehört?

c) Finden Sie einen maximalen Fluss zu dem Flussnetzwerk links und zeichnen Sie ihn hier ein (keine Nullen, nur positive Werte). Im Anhang dieser Klausur sind einige Kopien der unten stehenden Grafik, die sie als Schmierpapier verwenden können.



d) Geben Sie einen Schnitt (S, T) an, dessen Kapazität minimal ist:

$S = \Big\{ \boxed{} \Big\}, T = \Big\{ \boxed{} \Big\}$. Die Kapazität ist $\boxed{}$.

Aufgabe K2 (18 Punkte)
Ein Gemischtwarenladen will durch einen besonderen Rabatt die Umsätze steigern. Der Laden bietet eine Menge von Artikeln $p_1, \ldots, p_n$ mit Preis $c_1, \ldots, c_n$ in Cent an. Wer an der Kasse zwei Artikel p_i und p_j mit $i \neq j$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zum Kauf vorlegt, deren Gesamtpreis $c_i + c_j$ auf 11, 33, 55, 77 oder 99 Cent endet, erhält zusätzlich einen Gutschein. Dabei kann jede Person jeden Artikel nur einmal kaufen und nur einmal nutzen, um einen Gutschein zu erhalten.
Entwerfen Sie einen Algorithmus der eine Menge von Paaren an Artikeln findet, sodass jeder Artikel nur einmal in einem Paar vorkommt und die erhaltenen Gutscheine maximiert werden. Geben Sie außerdem an, warum ihr Algorithmus korrekt ist.

Aufgabe K3 (10+15 Punkte)

a) Gegeben sei eine beliebige, endliche Menge X.

   Es sei $\mathcal{X} = \{I \in 2^X \mid |I| \bmod 2 = 0\}$.

   Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(X, \mathcal{X})$ ein Matroid ist.

b) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$. Mit $G[F]$ bezeichnen wir den von der Kantenmenge $F \subseteq E$ induzierten Untergraphen. Dieser hat als Knoten alle Knoten des Graphen G und als Kantenmenge genau F.

   Es sei $\mathcal{F} = \{\, F \subseteq E \mid G[F] \text{ ist kreisfrei und hat mindestens drei Komponenten} \,\}$.

   Beweisen oder widerlegen Sie, dass $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid ist.

Aufgabe K4 (13+9 Punkte)
In einem Hotel in Mexiko kommen und gehen Gäste. Ihre Aufgabe ist es einen Überblick über die belegten Zimmer zu behalten. Ankommende Gäste können sich eine Zimmernummer wünschen, ansonsten belegen sie das *erste freie Zimmer*. Ein Gast kann jederzeit gehen; dabei teilt er seine Zimmernummer mit. (Es ist sichergestellt, dass ein Gast nie nach einem besetzen Raum fragt.) Es gibt also die drei Anfragen:

- `checkin i` bedeutet, dass Zimmer `i` belegt wird.
- `checkout i` bedeutet, dass Zimmer `i` frei wird.
- `checkin mex` bedeutet, dass das erste freie Zimmer belegt wird. Dabei soll die vergebene Zimmernummer ausgegeben werden.

(a) Gehen Sie davon aus, dass Sie die Anzahl der Anfragen n schon zu Beginn wissen. Geben Sie einen Algorithmus an, der jede Anfrage in Zeit $O(\log n)$ bearbeitet wird und anfangs einmal $O(n \log n)$ Zeit zum Initialisieren braucht.

(b) *Wir empfehlen, diese Teilaufgabe erst dann zu bearbeiten, wenn Sie bereits mit der Bearbeitung der restlichen Klausur fertig sind.* Lösen Sie nun das gleiche Problem wie in Teilaufgabe (a), aber *ohne* von Beginn an zu wissen, welchen Wert n hat.

Ein Beispiel für $n = 8$:
```
checkin 2
checkin mex
checkin 3
checkin 20 checkin mex
checkout 4
checkout 2
checkin mex
```
Die Ausgabe für die drei `checkin mex` Anfragen sind dann 1, 4 und 2.