Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

8. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung. Das vorliegende achte Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 04.6., 10:15 Uhr abzugeben.

---

1. (Konvergenz von Markovketten) (10 Punkte)
Für einen Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$, betrachte die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{bzw.} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle zu P und Q gehörigen invarianten Verteilungen.

b) Betrachten Sie nun die Startverteilungen $\delta_1(x) \coloneqq \mathbb{1}_{\{1\}}(x), \delta_2(x) \coloneqq \mathbb{1}_{\{2\}}(x), \delta_3(x) \coloneqq \mathbb{1}_{\{3\}}(x)$. Untersuchen Sie die Asymptotik der Verteilungen der Markovketten mit Übergangsmatrix P bzw. Q und Startverteilungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.
Bemerkung: Deterministische Einpunktverteilung wie δ_x werden auch Dirac-Verteilungen genannt.

2. (Hinreichend, nicht notwendig) (6 Punkte)

a) Geben Sie eine nicht irreduzible Übergangsmatrix Q an, sodass eine Q-invariante Verteilung μ existiert und für alle Startverteilungen ν gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d_{TV}(\nu Q^n, \mu) = 0$$

b) Geben Sie eine Übergangsmatrix R und eine R-invariante Verteilung μ an, sodass μ nicht die detailed-balance Bedingung bezüglich R erfüllt.

3. (Simulationsverfahren) (8 Punkte) Sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable auf $S = \{1, \dots, N\}$. Sei Y eine Zufallsvariable auf S mit Massenfunktion

$$\mu(k) = \mathbb{P}[Y = k] = \frac{1}{N}(1 + g(k))$$

für $k \in S$. Dabei ist $g : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion für die $|g(k)| \leq \gamma < 1$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und alle $k \in S$ gilt. Weiterhin gelte $\sum_{k\in S} g(k) = 0$.

a) Betrachten Sie das direkte Verfahren zur Erzeugung von Stichproben von Y. Finden Sie Konstanten c_1 und c_2 (abhängig von γ und N), sodass für die erwartete Anzahl Schritte des Algorithmus (also die Anzahl Vergleiche) τ gilt, dass

$$c_1 N \leq \tau \leq c_2 N.$$

b) Entwickeln Sie ein Acceptance-Rejection Verfahren, dass Stichproben von X verwendet, um Stichproben von Y zu erzeugen. Zeigen Sie, dass die erwartete Anzahl Vorschläge zur Erzeugung einer Stichprobe unabhängig von N beschränkt ist.

4. (Zufällige Summen mit zufälliger Summandenzahl) (10 Punkte) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $N : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert m_1 und Varianz v_1. Zeigen Sie:

a) Für den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$ einer (diskreten) reellwertigen Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}[Y] \;=\; \sum_{k:\mathbb{P}[N=k]\neq 0} \mathbb{E}[Y|N=k] \cdot \mathbb{P}[N=k]\;.$$

Hinweis: Die bedingte Erwartung gegeben $N = k$ ist der Erwartungswert bzgl. der bedingten Verteilung, d.h. $\mathbb{E}[Y|N=k] \;=\; \sum_{a\in Y(\Omega)} a \cdot \mathbb{P}[Y=a|N=k]$.

b) Sind $X_1, X_2, \ldots$ unkorrelierte und von N unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit festem Erwartungswert m_2 und Varianz v_2, dann hat die zufällige Summe

$$S_N(\omega) \;:=\; X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

den Erwartungswert $\mathbb{E}[S_N] = m_1 m_2$ und die Varianz $\mathrm{Var}[S_N] = m_1 v_2 + m_2^2 v_1$.

5. (Simulation der geometrischen Verteilung) (6 Punkte) Geben Sie ein direktes Verfahren an, dass in einem Schritt (also ohne Verwendung einer while-Schleife) aus einer Stichprobe u der Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$ eine Stichprobe g der geometrischen Verteilung mit Parameter $p \in (0, 1)$ erzeugt.