Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

4. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung. Das vorliegende vierte Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 7.5., 10:15 Uhr abzugeben.

---

1. (Bandrika 1) (8 Punkte) Sie haben sich im Nationalpark von Bandrika verlaufen. Von den Besuchern im Park sind zwei Drittel Touristen. Fragen nach der Richtung werden von diesen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ richtig beantwortet. Dabei sind Antworten auf wiederholte Fragen unabhängig, auch wenn die Frage und die Person dieselben sind. Wenn man hingegen einen Bandrikaner oder eine Bandrikanerin fragt, ist die Antwort immer falsch.

a) Sie fragen eine Person, ob sich der Ausgang in Richtung Osten oder Westen befindet. Als Antwort erhalten Sie Osten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies richtig ist?

b) Sie fragen dieselbe Person nochmals und bekommen dieselbe Antwort. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, nun die richtige Antwort erhalten zu haben, $\frac{1}{2}$ beträgt.

c) Ein drittes Mal wird die geduldige Person von Ihnen gefragt, doch die Antwort ist wieder Osten. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort stimmt?

d) Zeigen Sie für den Fall, dass die dritte Antwort Westen wäre, dass die Richtung Osten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ zutrifft.

2. (Modellieren mit bedingten Wahrscheinlichkeiten) (8 Punkte)

a) Auf einer Ausstellung sind von zwölf Gemälden zehn Originale und zwei Fälschungen. Ein Besucher wählt zufällig ein Bild aus, befragt aber, bevor er es kauft, eine Expertin nach deren Meinung. Diese gibt in neun von zehn Fällen eine richtige Beurteilung ab, unbeeinflusst davon, ob das vorgelegte Bild ein Original oder eine Fälschung ist. Die Expertin urteilt, dass das Bild eine Fälschung sei. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Original?

b) Der Besucher gibt das Bild zurück und wählt ein anderes. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses ein Original?

c) Eine Fabrik stellt Lampen her, von denen jedes Fabrikat genau einen Lichtschalter besitzt. Dieser Schalter wird von zwei Firmen, A und B, bezogen, wobei 60% aller Schalter von A und 40% aller Schalter von B stammen. Erfahrungsgemäß sind 5% aller A-Schalter und 2% aller B-Schalter defekt. Die Endkontrolle der Fabrik akzeptiert jeden intakten Schalter und fälschlicherweise auch 5% aller defekten Schalter. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät in den Verkauf gelangt und einen defekten Schalter besitzt.

3. (Runs beim Münzwurf II) (8 Punkte) Seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ unabhängige Münzwürfe mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ für "Zahl" und Wahrscheinlichkeit $q := 1-p$ für "Kopf".

a) Geben Sie explizit einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, auf dem die Zufallsvariablen realisiert werden können.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit Z_i ein neuer Run beginnt, vgl. Aufgabe 4 vom 2. Übungsblatt.

c) Folgern Sie: Für die Anzahl Y aller Runs gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 1 + 2pq(n-1).$$

4. (Totale Wahrscheinlichkeit/Markovketten) (8 Punkte) Ringo besitzt ein Fahrzeug, welches alle 2 Jahre durch ein Neues ersetzt wird, es sei denn es ist im ersten Jahr über 1000 km gefahren. Dann wird es direkt nach dem betreffenden Jahr durch ein Neues ersetzt. Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Auto mehr als 1000 km fährt bei einem festen Wert, p, liegt. Die Entscheidung, ob das Auto ersetzt wird, wird stets am Ende des Jahres getroffen.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Problem an.

b) Sei nun $p = 0.4$ gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Auto am Ende des Jahres $k \geq 0$ durch ein Neues ersetzt? Was passiert im Grenzwert $k \to \infty$?

5. (Zufallspermutationen) (8 Punkte) Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

a) Eine aufsteigende Teilfolge einer Permutation $\omega \in \mathcal{S}_n$ ist durch eine Sequenz

$$\omega(i_1) < \omega(i_2) < \ldots < \omega(i_k)$$

mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ gegeben. Sei $N(\omega)$ die Anzahl der aufsteigenden Teilfolgen der Permutation ω. Zeigen Sie, dass für eine (gleichverteilte) Zufallspermutation aus $\mathcal{S}_n$ gilt:

$$\mathbb{E}[N] \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\binom{n}{k}.$$

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Zufallspermutation aus $\mathcal{S}_n$ erzeugt.