Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 10, Abgabe 25.6.

Aufgabe 1

(i) Sei M eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n \backslash M$. Sei $x_0 \in M$ ein Punkt auf M mit minimaler Distanz zu p. Zeigen Sie, dass die Linie durch p und x_0 senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{x_0}M$ in x_0 steht.

(ii) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Bestimmen Sie die kürzeste Distanz vom Ursprung in $\mathbb{R}^3$ zu der Ebene

$$E := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax + by + cz + d = 0\big\}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass falls $x + y + z = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dann gilt $5/9 \leq x^3 + y^3 + z^3 \leq 1$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader größten Volumens, der enthalten ist in dem Ellipsoid

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\Big\}.$$

Aufgabe 4

(i) Benutzen Sie den Satz zu Lagrange-Multiplikatoren, um die Young'sche Ungleichung zu beweisen: Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y \geq 0$, dass $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$. Wann gilt Gleichheit?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g\colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$ auf der Menge $M_c := \{x, y \geq 0 \,|\, xy = c\}$, wobei $c > 0$ fest ist. Bestimmen Sie eine Bedingung für ein lokales Minimum von g auf M_c. Dann lassen Sie c alle Werte in $\mathbb{R}_+$ durchlaufen.

(ii) Leiten Sie die Höldersche Ungleichung von der Young'schen Ungleichung ab: Falls $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt

$$\big|\langle x, y\rangle\big| = \Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{1/q}.$$