

Übungsblatt 4

Analysis I

WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 12. (Arithmetik)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

- (a) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$,
- (b) $(-a) + (-b) = -(a + b)$,
- (c) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

Aufgabe A 13.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$ab = 1 = ac \Rightarrow b = c.$$

Aufgabe A 14. (Eigenschaften der Anordnung)

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Anordnung auf \mathbb{R} : Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gelten

- (a) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$
- (b) $0 < x \implies 0 < x^{-1}$,
- (c) $0 < x < y \implies y^{-1} < x^{-1}$,
- (d) $xy < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$,
- (e) $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$,
- (f) $x < y \Leftrightarrow -x > -y$,
- (g) $|-x| = |x|$, wobei $|\cdot|$ den Absolutbetrag bezeichnet.

Aufgabe A 15. (Rechnenregeln für Potenzen)

Seien $x \in \mathbb{R}$ sowie $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie

- (a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,
- (b) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 13. (6 Punkte)

Wir beschäftigen uns mit Wurzeln und der Frage, wann diese rational sind, anhand von zwei Beispielen:

- (a) Ist $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}$?

Hinweis: 13 ist eine Primzahl.

- (b) Ist $\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$?

Aufgabe B 14. (8 Punkte)

Bestimmen Sie für die Menge

$$M = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

falls existent, Supremum, Infimum, Maximum sowie Minimum.

Aufgabe B 15. (Charakterisierung Infimum, 7 Punkte)

Formulieren Sie Theorem (2.1.22) zu einer analogen Aussage über das Infimum einer Menge um und beweisen Sie diese.

Aufgabe B 16. (Anordnung und \mathbb{C} , 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Körper \mathbb{C} nicht angeordnet werden kann.

*-Aufgabe. (2 Zusatzpunkte)

Wir greifen die Diskussion der Beispiele aus dem B-Teil auf:

Bestimmen Sie genau diejenigen positiven reellen Zahlen r , für die $\sqrt{r} \in \mathbb{Q}$!

Das heißt, finden Sie alle diese Zahlen und beweisen Sie Ihre Behauptung.

Diese Aufgabe ist eine reine Zusatzaufgabe für diejenigen von Ihnen, die etwas tiefer einsteigen wollen. Die Punkte der *-Aufgabe zählen nicht zu der maximal erreichbaren Punktzahl aller Blätter. Es sind also in diesem Sinne Bonuspunkte für die Klausurzulassung.