Ana I-2: Reelle Zahlen und Vollständigkeit

Folgende Begriffe, Konzepte und Sätze sollten am Ende des Sheets verstanden sein:

- Supremum und Infimum
- Maximum und Minimum
- Vollständigkeit
- Reelle Zahlen
- Wurzel
- Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$
- Cantor-Menge

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen garantiert uns, dass eine nach unten beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum in $\mathbb{R}$ besitzt. Es ist hingegen mitunter nicht einfach, zu entscheiden, ob sogar ein Minimum vorliegt. Ein Beispiel, bei dem kein Minimum vorliegt, haben Sie in der Vorlesung mit $A := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x^2 > 2\}$ betrachtet. Ähnlich sieht man z. B., dass $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ (das kann in der nachfolgenden Aufgabe hilfreich sein und darf ohne weiteren Beweis verwendet werden). Wir schauen uns jetzt ein weiteres Beispiel an.

Aufgabe 1 *** Wir betrachten erneut die Fibonacci-Zahlen vom Sheet Ana I-1, d. h. $f_1 := f_2 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und betrachten die Menge

$$M := \left\{ \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

- a) `[Julia]` Berechnen Sie $\frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}$ für $n \in \{1, \ldots, 20\}$.
- b) Begründen Sie, dass M ein Infimum $c \in \mathbb{R}$ besitzt.
- c) `[Julia]` Berechnen Sie $\left(2 \cdot \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} - 1\right)^2$ für $n \in \{1, \ldots, 20\}$ und stellen Sie daraufhin eine Vermutung über den Wert von c auf.
- d) Beweisen Sie Ihre Vermutung aus Teilaufgabe c).
- e) Besitzt M ein Minimum?

LÖSUNG AUFGABE 1

Im Folgenden wollen wir uns etwas genauer mit Wurzeln befassen.

Aufgabe 2 *** Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$, für die $\sqrt{x-2} = x - 8$ gilt, und zwar

- a) `[Julia]` mit Julia,
- b) per Hand.

LÖSUNG AUFGABE 2

In [7]:
```julia
# a)
using SymPy
```

Wir kommen nun zur Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen - im Gegensatz zur Teilmenge der rationalen Zahlen.

Aufgabe 3 *** Im Vorlesungsskript finden Sie mittels der Cantorschen Diagonalverfahren Argumente dahingehend, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar und $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. Erklären Sie diese Cantorschen Diagonalverfahren. *Hinweis: Es reicht, wenn Sie diese Aufgabe mündlich bearbeiten. Kurze Notizen können jedoch hilfreich sein. In jedem Fall wird auf mathematische Präzision Wert gelegt.*

LÖSUNG AUFGABE 3

Wir wollen uns im Folgenden noch mit der Cantor-Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ beschäftigen. Zunächst beschreiben wir deren Konstruktion informell: Man startet mit dem Einheitsintervall $A_0 := [0,1]$ und entfernt daraus das „mittlere Drittel'' (wobei die Randpunkte jeweils nicht mit entfernt werden). Das Resultat A_1 besteht folglich aus den Teilintervallen $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ und $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Nun entfernt man aus diesen beiden Teilintervallen jeweils das mittlere Drittel und fährt immer weiter so fort. Für festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ besteht A_n also aus 2^n paarweise disjunkten abgeschlossenen Teilintervallen der Länge 3^{-n}, und A_{n+1} geht aus A_n hervor, indem aus jedem dieser Teilintervalle das mittlere Drittel entfernt wird. Das, was „übrig bleibt'', ist die Cantor-Menge. Nun mathematisch präzise: Zu $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A_{n+1} := \frac{1}{3}(A_n \cup (2 + A_n))$ (zur Notation - für $X \subseteq \mathbb{R}$ und $a, t \in \mathbb{R}$ ist definiert $aX := \{ax : x \in X\}$, $t + X := \{t + x : x \in X\}$). Dann $\mathcal{C} := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

Aufgabe 4 ***

- a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ überabzählbar ist. *Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe eine surjektive Abbildung $c : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$. Sei I_1 ein Teilintervall von A_1 mit $c(1) \notin I_1$, und sei zu $n \in \mathbb{N}$ die Menge I_{n+1} ein Teilintervall von $I_n \cap A_{n+1}$ mit $c(n+1) \notin I_{n+1}$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ und leiten Sie daraus einen Widerspruch ab.*
- b) Folgern Sie ohne Verwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.
- c) Besitzt $\mathcal{C}$ Elemente, die kein Randpunkt eines Teilintervalls einer der Mengen A_n sind?

Ergänzende Bemerkung: Eine Visualisierung der Cantor-Menge (genauer gesagt der Obermengen A_n) finden Sie auf der Mathswell-Website unter folgendem Link: https://

mathswell.com/cantor-set/#explorer

LÖSUNG AUFGABE 4