Datenstrukturen und Algorithmen, SS 2024
Prof. Dr. P. Rossmanith
D. Cloerkes, M. Gehnen, D. Mock, N. Speetzen

Abgabe: 05.07.2024

Übungsblatt 11

Aufgabe T37

Wiederholen Sie die folgenden Konzepte (jeweils bezogen auf die euklidische Ebene):

a) Euklidische Ebene

b) Punkt

c) Segment

d) Polygon

Aufgabe T38

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge an Punkten im n-dimensionalen Raum. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Punkte $x, y \in X$ ($x \neq y$) findet, sodass deren euklidische Distanz $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ minimal ist. Ihr Algorithmus sollte höchstens eine Laufzeit von $O(n \cdot |X|^2)$ haben.

Aufgabe T39

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für zwei gegebenen Polygone entscheidet, ob eines im anderen enthalten ist. Die Polygone sind gegeben als Tupel von Punkten in der Reihenfolge, in der sie auch durch die Kanten des Polygons verbunden werden. Die Laufzeit des Algorithmus soll $O(n \log n)$ betragen, wobei n die Anzahl der Punkte ist, die die Polygone definieren.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass Sie (etwa durch Befragung eines Orakels) in konstanter Zeit einen Punkt ermitteln können, der von einem gegebenen Eckpunkt eines Polygons erreichbar ist, ohne einen Eckpunkt des anderen Polygons zu durchlaufen.

Aufgabe T40

Zeigen sie, dass ein ungerichteter Graph mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens einen Grad von $(n-1)/2$ besitzt, zusammenhängend sein muss.

Aufgabe H35 (10 Punkte)

Geben Sie eine Folge von Union- und Find-Operationen an, die zu einem Baum der Höhe vier führt (vier Knoten übereinander). Verwenden Sie dabei sowohl die Rangheuristik als auch Pfadkompression.

Nehmen Sie an, dass bei der Operation $union(A, B)$ der Baum B in A eingehängt wird, falls beide gleichen Rang haben. Geben Sie das Zwischenergebniss nach jeder Operation an.

Aufgabe H36 (15 Punkte)

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene Menge von n Kreisen mit gleichem Radius den kleinsten umschreibenden Kreis berechnet, also den kleinsten Kreis, in dem alle gegebenen Kreise enthalten sind. Die Laufzeit des Algorithmus soll in $O(n)$ liegen. Sie dürfen selbst bestimmen, mittels welcher (eindeutiger) Informationen die Kreise gegeben sein sollen. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Hinweis: Es gibt Algorithmen, die den kleinsten umschreibenden Kreis für eine gegebene Menge von Punkten berechnen.

Aufgabe H37 (15 Punkte)

Gegeben sei eine einfach verkettete Liste mit n Elementen, deren Länge sie nicht kennen. Entwerfen Sie einen Algorithmus, mit dem sich testen lässt, ob die Liste einen Kreis enthält. Zeigen Sie die Korrektheit ihres Algorithmus. Wie ist seine Laufzeit? Ist dieses auch in Zeit $O(n)$ möglich?