FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2013, am 11.07.2013

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $det(A)$, $det(A^T)$, $det(2 \cdot A)$ und $det(A^2)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Prüfen Sie, ob die Matrix A eine Orthogonalmatrix ist.

b) Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 3

Es wird erwartet, dass die Rechenzeit $T(n)$ eines bestimmten Programmes exponentiell mit der Eingabegröße n ansteigt, so dass

$$T(n) = \tilde{a} \cdot \exp(b \cdot n).$$

Mit Hilfe einer Logarithmierung kann aus dem exponentiellen ein lineares Problem erzeugt werden:

$$L(n) := \ln(T(n)) = \underbrace{\ln(\tilde{a})}_{a} + b \cdot n.$$

Bestimmen Sie Schätzwerte für die Parameter a und b mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Lineare Regression) und der folgenden Beobachtungen:

Problemgröße n	0	1	2
Rechenzeit $T(n)$ [s]	$\exp(0)$	$\exp(1)$	$\exp(3)$
log. Rechenzeit $L(n)$ [s]	0	1	3

Bestimmen Sie auch den rücktransformierten Schätzwert für $\tilde{a}$.

Aufgabe 4

Ein Biologiestudent arbeitet an einer Studie über eine Käferart. Die Käfer entwickeln sich in drei Stadien: Als Ei, als Larve und als ausgewachsener Käfer. Man weiß nun, dass sich aus einer gegebenen Population $(a_E, a_L, a_K)^T$ nach einem bestimmten Zeitabschnitt die Population

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix}$$

entwickelt. Dabei bezeichnet $(a_E, a_L, a_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer zu Beginn und $(e_E, e_L, e_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer am Ende des Zeitabschnitts.

Der Biologiestudent hat nun am Ende des Zeitabschnitts

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

erhalten.

Leider sind ihm die Daten $(a_E, a_L, a_K)^T$ des vorherigen Zeitabschnitts abhanden gekommen. Helfen Sie dem Biologiestudenten und berechnen Sie die Population $(a_E, a_L, a_K)^T$.

Aufgabe 5

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x - y - 2z &= -1 \\ 3x + y + \alpha z &= 11 \end{aligned}$$

keine Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

Aufgabe 6

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten Sie das *arithmetische Mittel*

$$M((a,b)^T) = \frac{1}{2}(a+b).$$

a) Zeigen Sie: $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix! Wählen Sie dazu Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ und geben Sie diese mit an.

c) Bestimmen Sie den Kern von M.

d) Definieren Sie für eine beliebige Abbildung f die Begriffe "surjektiv" und "injektiv"!

e) Ist die Abbildung M injektiv und surjektiv?

Aufgabe 7

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spiegelt Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ an der y-Achse.

a) Fertigen Sie eine Skizze an und verdeutlichen Sie darin den Vektor $(1, 2)^T$ und seine Abbildung.

b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix zu f auf.

c) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_1 der Vektoren, die auf ihr 1-faches, also auf sich selbst, abgebildet werden.

d) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_{-1} der Vektoren, die auf ihr (-1)-faches abgebildet werden.

e) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die beiden Zahlen 1 und -1?

f) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die Elemente der beiden Mengen $M_1 \setminus \{0\}$ und $M_{-1} \setminus \{0\}$?

Aufgabe 8

Untersuchen Sie die Möglichkeit einer Zerlegung der Form $A = B^2$ positiv definiter symmetrischer Matrizen A anhand der folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass
$$A_+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
positiv definit ist.

b) Diagonalisieren Sie A_+.

c) Zeigen Sie, dass für A_+ die Zerlegung $A_+ = {B_+}^2$ möglich ist, indem Sie B_+ bestimmen.

d) Beweisen Sie: Jede positiv definite symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat eine Zerlegung $A = B^2$. Konstruieren Sie eine solche Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Musterlösung

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2013, am 11.07.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $det(A)$, $det(A^T)$, $det(2 \cdot A)$ und $det(A^2)$.

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,(0-6-6-(-4+0-2))$$

$$= -2\,(-12+6)$$

$$= -2 \cdot (-6)$$

$$= 12 \qquad 3$$

$$\det(A^T) = \det(A) = 12 \qquad 3$$

$$\det(2 \cdot A) = 2^4 \cdot \det(A) = 16 \cdot 12 = 192 \qquad 3$$

$$\det(A^2) = (\det(A))^2 = 12^2 = 144 \qquad 3$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Prüfen Sie, ob die Matrix A eine Orthogonalmatrix ist.

b) Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix A^{-1}.

a)

$$A A^T = A^T \cdot A = E$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

8

ODER:

$$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad \& \quad \|\vec{a}_i\|_2 = 1$$

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \|\vec{a}_1\|_2 = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \|\vec{a}_2\|_2 = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$\langle \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \|\vec{a}_3\|_2 = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

8

$\Rightarrow$ A ist eine Orthogonalmatrix

b) Da A Orthogonalmatrix, gilt $A^{-1} = A^T$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es wird erwartet, dass die Rechenzeit $T(n)$ eines bestimmten Programmes exponentiell mit der Eingabegröße n ansteigt, so dass

$$T(n) = \tilde{a} \cdot \exp(b \cdot n).$$

Mit Hilfe einer Logarithmierung kann aus dem exponentiellen ein lineares Problem erzeugt werden:

$$L(n) := \ln(T(n)) = \underbrace{\ln(\tilde{a})}_{a} + b \cdot n.$$

Bestimmen Sie Schätzwerte für die Parameter a und b mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Lineare Regression) und der folgenden Beobachtungen:

Problemgröße n	0	1	2
Rechenzeit $T(n)$ [s]	exp(0)	exp(1)	exp(3)
log. Rechenzeit $L(n)$ [s]	0	1	3

Bestimmen Sie auch den rücktransformierten Schätzwert für $\tilde{a}$.

$L(0) = a + b \cdot 0 = a = 0$

$L(1) = a + b \cdot 1 = a + b = 1$

$L(2) = a + b \cdot 2 = a + 2b = 3$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2

Normalgleichung:

$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 2

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 1

$A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ 1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{array}\right) -\mathrm{I}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) :2$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) -3\mathrm{II}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) :3$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

4

$$\Rightarrow L(n) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2}n$$

$$a = \ln(\hat{a})$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} = e^{a} = e^{-1/6} = \frac{1}{e^{1/6}}$$

2

$$\Rightarrow T(n) = \frac{1}{e^{1/6}} \cdot \exp\left(\frac{3}{2}n\right)$$

Aufgabe 4

Ein Biologiestudent arbeitet an einer Studie über eine Käferart. Die Käfer entwickeln sich in drei Stadien: Als Ei, als Larve und als ausgewachsener Käfer. Man weiß nun, dass sich aus einer gegebenen Population $(a_E, a_L, a_K)^T$ nach einem bestimmten Zeitabschnitt die Population

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix}$$

entwickelt. Dabei bezeichnet $(a_E, a_L, a_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer zu Beginn und $(e_E, e_L, e_K)^T$ die Anzahl der Eier, Larven und ausgewachsenen Käfer am Ende des Zeitschritts.

Der Biologiestudent hat nun am Ende des Zeitschritts

$$\begin{pmatrix} e_E \\ e_L \\ e_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

erhalten. Leider sind ihm die Daten $(a_E, a_L, a_K)^T$ des vorherigen Zeitabschnitts abhanden gekommen. Helfen Sie dem Biologiestudenten und berechnen Sie die ~~Anfangs~~Population $(a_E, a_L, a_K)^T$.

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix}$$

6

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 50 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 50 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} :0{,}4 = \frac{2}{5} \;/\cdot \frac{5}{2} \\ :0{,}9 = \frac{9}{10} \;/\cdot \frac{10}{9} \\ :50 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/50 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 10/9 \\ 1/50 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 32 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/2 \cdot 32 \\ 10/9 \cdot 18 \\ 1/50 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 16 \\ 10 \cdot 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 6$$

ODER:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} :50 \\ :0{,}4 = 2/5 \;/\cdot 5/2 \\ :0{,}9 = 9/10 \;/\cdot 10/9 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 32 \cdot 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \cdot 10/9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_E \\ a_L \\ a_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 6$$

Aufgabe 5

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x - \ y - 2z &= -1 \\ 3x + \ y + \alpha z &= 11 \end{aligned}$$

keine Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

i)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -8 & -17 \\ 0 & -5 & \alpha-9 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ -\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 4 \end{array}\right)$$ 6

$\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ 2

Für $\alpha = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \text{ ↯}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung 1

(ii) Für $\alpha = 2$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow z = 4$

$\Rightarrow 5y = 17 - 8z = 17 - 8 \cdot 4 = 17 - 32 = -15$

$\Leftrightarrow y = -3$

$\Rightarrow x = 8 - 3z - 2y = 8 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3)$

$= 8 - 12 + 6 = 14 - 12 = 2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 4

Aufgabe 6

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten Sie das *arithmetische Mittel*

$$M((a,b)^T) = \frac{1}{2}(a+b).$$

a) Zeigen Sie: $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix! Wählen Sie dazu Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ und geben Sie diese mit an.

c) Bestimmen Sie den Kern von M.

d) Definieren Sie für eine beliebige Abbildung f ~~zwischen beliebigen Vektorräumen~~ die Begriffe "surjektiv" und "injektiv"!

e) Ist die Abbildung M injektiv und surjektiv?

a) Additivität: $M(\vec{x}+\vec{y}) \overset{!}{=} M(\vec{x}) + M(\vec{y})$

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$M(\vec{x}+\vec{y}) = M\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}((x_1+y_1)+(x_2+y_2))$$

$$= \frac{1}{2}((x_1+x_2)+(y_1+y_2))$$

$$= \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{2}(y_1+y_2)$$

$$= M\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + M\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= M(\vec{x}) + M(\vec{y}) \quad ✓ \quad 1$$

Homogenität: $M(\lambda\vec{x}) \overset{!}{=} \lambda M(\vec{x})$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$M(\lambda\vec{x}) = M\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(\lambda x_1 + \lambda x_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda(x_1+x_2) = \lambda \cdot M\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda M(\vec{x})$$

$\Rightarrow$ M ist eine lineare Abbildung 1

b) Basis im $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (kanonische Basis) 1

Basis im $\mathbb{R}$: $\{1\}$ 1

$M\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$

$M\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2

c) $A\vec{x} = 0$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \quad \cdot 2$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array} \quad - \text{II}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}$$

Kern (M) / Kern (A)

$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ 3

d) Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt surjektiv, falls $f(V) = W$, d.h. für jedes $y \in W$ gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = y$. 1

Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt injektiv oder eineindeutig, falls $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$ bzw. $u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$ ist. 1

e)

Abbildung f ist nicht injektiv, da $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u} \neq \vec{v}$, aber $f(\vec{u}) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$ und $f(\vec{v}) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$ somit $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$. $\lightning$ 1

Abbildung f ist surjektiv, da jeder Wert aus dem Wertebereich von einem oder mehreren Werten aus dem Definitionsbereich erreicht wird. 1

Aufgabe 7

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spiegelt Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ an der y-Achse.

a) Fertigen Sie eine Skizze an und verdeutlichen Sie darin den Vektor $(1, 2)^T$ und seine Abbildung.

b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix zu f auf.

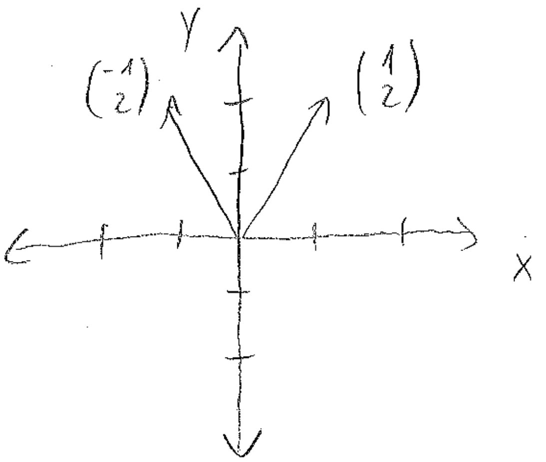
c) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_1 der Vektoren, die auf ihr 1-faches, also auf sich selbst, abgebildet werden.

d) Bestimmen Sie grafisch oder rechnerisch die Menge M_{-1} der Vektoren, die auf ihr (-1)-faches abgebildet werden.

e) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die beiden Zahlen 1 und -1?

f) Wie nennt man in diesem Zusammenhang die Elemente der beiden Mengen ~~M_1 und M_{-1}~~? $M_1 \setminus \{0\}$ und $M_2 \setminus \{0\}$?

a)



3

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

c)

$$A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x}_1 = \vec{x}_1$$

$$\Leftrightarrow (A - E)\vec{x}_1 = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : (-2) \qquad \Rightarrow \vec{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \qquad \Rightarrow M_1 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

d) $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 = -1 \cdot \vec{x}_2 = -\vec{x}_2$

$\Leftrightarrow (A+E)\vec{x}_2 = \vec{0}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) :2 \qquad \Rightarrow \vec{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow M_2 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \beta \in \mathbb{R} \right\}$ 3

e) Die Zahlen 1 und -1 sind die Eigenwerte der Matrix. 1

f) Die Mengen M_1 und M_{-1} sind die Mengen der Eigenvektoren zum jeweiligen Eigenwert.

1

Aufgabe 8

Untersuchen Sie die Möglichkeit einer Zerlegung der Form $A = B^2$ positiv definiter symmetrischer Matrizen A anhand der folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass

$$A_+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

b) Diagonalisieren Sie A_+.

c) Zeigen Sie, dass für A_+ die Zerlegung $A_+ = {B_+}^2$ möglich ist, indem Sie B_+ bestimmen.

d) Beweisen Sie: Jede positiv definite symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat eine Zerlegung $A = B^2$. Konstruieren Sie eine solche Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) $\det(a_{11}) = \det(2) = 2 > 0$

$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

$\Rightarrow A_+$ ist positiv definit 3

b) $A_+ = Q D Q^{-1}$

bzw. $A_+ = Q D Q^T$ (Q Orthogonalmatrix)

Q: Spaltenvektoren sind (normierte) Eigenvektoren

D: Diagonalelemente sind Eigenwerte (auf die Reihenfolge achten!) 1

$\det(A - \lambda E) = 0$ (bzw. $\det(\lambda E - A) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)^2 - 1$ $= (\lambda-2)^2 - 1$)

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 1$$
$$\Rightarrow 2-\lambda = \pm 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \vee \lambda_2 = 1$$

2

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ +I \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) + II$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_2 = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{array}\right) -II$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \beta \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_2 = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

Q & D

1

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A_+ = B^2 = QDQ^T$$
$$= Q\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T$$
$$= Q\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T \cdot Q\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T$$
$$\Rightarrow B = Q\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}Q^T$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\\sqrt{3}&\sqrt{3}\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}&-1+\sqrt{3}\\-1+\sqrt{3}&1+\sqrt{3}\end{pmatrix} \quad 2$$

d)

A ist symmetrisch

$\Rightarrow$ Basis aus Eigenvektoren, $A = QDQ^T$

A positiv definit

$\Rightarrow$ alle Eigenwerte positiv und > 0

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \begin{pmatrix}\sqrt{1}&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}$$
$$A = QDQ^T$$
$$= Q\cdot\sqrt{D}\cdot\sqrt{D}\cdot Q^T = Q\sqrt{D}Q^T \cdot Q\sqrt{D}Q^T = B^2$$
$$\Rightarrow B = Q\sqrt{D}Q^T \quad 2$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, WS 2013/2014, am 24.09.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(12)
Aufgabe 6)		(12)
Aufgabe 7)		(12)
Aufgabe 8)		(16)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen A, B positiv definit bzw. negativ definit?

Aufgabe 2

a) Wann ist eine quadratische Matrix orthogonal?

b) Ergänzen Sie in der Matrix A die fehlenden Elemente so, dass eine orthogonale Matrix entsteht. Es ist nur eine Lösung gesucht.

$$A = \begin{pmatrix} . & . & 1/\sqrt{2} \\ . & . & 1/\sqrt{2} \\ . & 0 & . \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

In einem Tierpark befinden sich vier Vogelkäfige an den Positionen

$$(1,1)^T, (2,0)^T, (3,1)^T \quad \text{und} \quad (6,2)^T.$$

Ein neuer Fußweg soll nun so angelegt werden, sodass kurze Abstände der Käfige zum Fußweg entstehen. Der Tierpark hat sich für einen geraden Fußweg der Form $y = ax + b$ entschieden.

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y$ auf, das dieses Ausgleichsproblem beschreibt.

b) Lösen Sie das Minimierungsproblem

$$\|A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - y\| \longrightarrow min$$

mit der Methode der kleinsten Quadrate und geben Sie an, ob dieser ideale Fußweg so überhaupt angelegt werden kann oder ob er durch einen der Käfige führt.

Aufgabe 4

Gegeben ist folgende Matrix mit $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Werte $t \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix invertierbar ist.

b) Berechnen Sie für diese Werte t die inverse Matrix A_t^{-1}.

Aufgabe 5

Berechnen Sie mithilfe der Diagonalisierung C^8 bei gegebener Matrix C mit $c_{ij} \in \mathbb{C}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(X) = AX - XA$ eine lineare Abbildung, wobei X eine Matrix mit reellen Koeffizienten ist und folgende Gestalt hat:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die komponentenweise Darstellung von f an.

b) Bestimmen Sie den Kern von f.

c) Bestimmen Sie das Bild von f.

Aufgabe 7

Sei $\mathcal{P} = span(B)$ mit $B = \{1, x, x^2\}$ sowie $B' = \{(1-x)^2, 2x(1-x), x^2\ \}$.

a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von $\mathcal{P}$ bildet.

b) Geben Sie die Matrix des Basiswechsels von B' nach B an.

c) Geben Sie ebenfalls die Matrix des Basiswechsels von B nach B' an.

Aufgabe 8

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			f sei eine lineare Abbildung. Dann gilt $f(0) = 0$.
2			A, B sind reguläre Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$, dann gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3			Orthogonale Matrizen haben auf jeden Fall einen Eigenwert gleich Null.
4			Für die Determinante einer quadratischen Matrix gilt: $det(A + B) = det(A) + det(B)$.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra II, SS 2014, am 04.07.2014, 09.15 - 11.15 Uhr

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch:

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ die kanonische Basis ist.

(a) Man bestimme die Abbildungsmatrix A.

(b) Bestimmen Sie $Kern(A)$.

(c) Man berechne $Rang(A)$ nach der Dimensionsformel.

(d) Bestimmen Sie das $Bild(A)$.

Aufgabe 2
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für das lineare Gleichungssytem für $a = 3$ und $b = -9$.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

- genau eine Lösung,
- keine Lösung,
- unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 3
Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind.

(b) Wie lauten die Eigenwerte?

(c) Ist die Matrix A positiv definit, negativ definit oder indefinit? Begründen Sie Ihre Behauptung.

(d) Diagonalisieren Sie A.

(e) Berechnen Sie A^{1001}.

Aufgabe 4

Über der ansonsten ereignisarmen Hocheifel wird eines Nachts ein Ufo mehrfach gesehen. Trägt man die Stellen, an denen das Ufo gesichtet wurde, in das Koordinatensystem einer Landkarte ein, liegen folgende Daten vor:

Zeit der Sichtung	Koordinaten
03.07.2014, 22:00 Uhr	$(-2, 2)$
03.07.2014, 23:00 Uhr	$(2, 0)$
03.07.2014, 24:00 Uhr	$(2, -4)$
04.07.2014, 01:00 Uhr	$(8, 0)$

Die Flughöhe des Ufos war nicht zu ermitteln und soll hier komplett ignoriert werden. Der Flugsicherung ist klar, dass die vorliegenden Ortsangaben ungenau sein müssen und unterstellt, dass sich das Ufo mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Linie bewegt. Bestimmen Sie den vermuteten Flugweg mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

Der Flugweg $\vec{s}(t)$ werde durch

$$\vec{s}(t) = \vec{a} + t\,\vec{b}, \quad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

modelliert.

(a) Betrachten Sie die x- und die y-Komponente des Weges **getrennt voneinander** und bestimmen Sie die jeweiligen Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Stellen Sie dazu die Normalgleichungssysteme auf und lösen Sie diese.

(b) Bei welchen Koordinaten wird die Flugsicherung das Ufo am 04.07.2014 um 2:30 Uhr erwarten?

Aufgabe 5

(a) Definieren Sie den Begriff “orthogonale Matrix”.

(b) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal und eine obere Dreicksmatrix, d.h. alle Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen sind 0. Zeigen Sie:

- Q ist eine Diagonalmatrix.
- Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind 1 oder -1.

(Tipp: Überlegen Sie zunächst, was bei $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ passiert.)

Aufgabe 6
Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - b_2 a_2 - \cdots - b_n a_n$$

Aufgabe 7
Der Vektor $\vec{x}$ habe die Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis.

(a) Gegeben ist folgende Basis $\mathfrak{A}$:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathfrak{A}$ um eine Basis des $\mathbb{R}^3$ handelt.
- Welche Koordinaten hat der oben gegebene Vektor bezüglich der Basis $\mathfrak{A}$?

(b) Die Basis $\mathfrak{B}$ ist gegeben durch

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie aus der Koordinatendarstellung $(\vec{x})_{\mathfrak{A}}$ mit Hilfe der Transformationsmatrix die Koordinatendarstellung $(\vec{x})_{\mathfrak{B}}$.

Aufgabe 8
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$A^k = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \forall k \geq k_0$$

.

(a) Ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent? Welche Eigenwerte hat M?

(b) Zeigen Sie: Jede nilpotente Matrix A hat den Eigenwert 0.

(c) Zeigen Sie: Jede nilpotente Matrix A hat nur den Eigenwert 0. (Tipp: Was wäre, wenn es noch andere Eigenwerte gäbe?)

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2014, am 16.09.2014

Name: ________________

Vorname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Unterschrift: ________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ existieren

a) keine Lösung

b) unendlich viele Lösungen

c) eine eindeutige Lösung ?

Aufgabe 2

Ein Hammerwerfer im Punkt (0,0) läßt seinen Hammer mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn im Ring kreisen. Zu einem festgelegten Zeitpunkt befindet sich der Hammer im Punkt (1,0). Die lineare Abbildung f mit zugehöriger Abbildungsmatrix A beschreibt jeweils eine Vierteldrehung.

a) Wo befindet sich der Hammer nach einer Vierteldrehung?

b) Stellen Sie A auf.

c) Ist f linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

In Wirklichkeit bewegt sich der Hammerwerfer zusätzlich zu der Drehung um den Vektor

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

pro Vierteldrehung. Gehen Sie zur Vereinfachung davon aus, dass zuerst die Drehung und dann die Bewegung durchgeführt wird.

d) Ist die Abbildung aus Drehung und Bewegung linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Wo befindet sich der Hammer nach einer halben Drehung und der zugehörigen Bewegung?

   Tipp: Bedenken Sie dabei, dass die zweite Drehung um den dann aktuellen Standort des Hammerwerfers und nicht um den Punkt (0,0) erfolgt.

Aufgabe 3

Sei $A = (a_{ij})$ eine 3×3-Matrix und $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} a_{31} + a_{32} + a_{33} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: f ist eine lineare Abbildung.

b) Zeigen Sie: f ist surjektiv.

c) Bestimmen Sie die Dimension von Kern(f) und Bild(f).

Aufgabe 4

Der Kapitän eines Motorbootes benutzt zur Orientierung das Koordinatensystem K. Eine Achse zeigt in Richtung Osten, die andere in Richtung Norden, der Ursprung befindet sich im Ausgangshafen. Die Einheit auf beiden Achsen ist je eine Seemeile (sm). Das Motorboot ist mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1 sm/h zwei Stunden in Richtung Norden und eine Stunde in Richtung Osten gefahren und dann vor Anker gegangen. Ein Segelboot, das im selben Hafen startet, muss aufgrund des Windes kreuzen und kann in sm gemessen pro Stunde die Strecke

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

bewältigen, alle anderen Kurse spielen aufgrund des Kreuzens keine Rolle. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden das Koordinatensystem K', in dem der Skipper des Segelbootes seine Koordinaten betrachtet. Sein Ursprung liegt ebenfalls im Hafen.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von K nach K'.

b) Der Skipper möchte zum Motorboot segeln. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten des Motorbootes im Koordinatensystem K'.

c) Welche Koordinaten in K hat eine Boje, die in K' die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat

Aufgabe 5

Eine besondere Art einer Meeresschildkröte ist vom Aussterben bedroht. Ein Grund von vielen besteht darin, dass weite Strände für den Massentourismus baulich erschlossen wurden, an denen die Schildkröten vorher ihre Eier ablegten. Aber die Tourismusindustrie will jetzt Projekte fördern, um die Restbestände zu schützen.
Die Population lässt sich ganz schwierig beobachten, da die Meeresschildkröten nachts ihre Eier am Strand ablegen und anschliessend die Nester zuscharren. Die kleinen Schildkröten schlüpfen nach ca. zwei Monaten. Wenn sie geschlechtsreif sind, also nach ca. 20 Jahren, kommen sie an diesen Strand zurück.
Die Schildkröten pflanzen sich nicht jedes Jahr fort. Wir betrachten eine Population, die zu Beobachtungsbeginn, also nach der Eiablage, aus

- 60000 Eiern (E_0)
- 24000 Jungschildkröten (J_0)
- 300 geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten (W_0)

besteht.
Die jährliche Entwicklung dieser Population lässt sich durch folgende Matrix beschreiben:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0.05 & 0.89 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Die jeweils folgende Generation ergibt sich also aus $\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ J_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ W_n \end{pmatrix}$.

a) Erläutern Sie die Bedeutung des Matrixelementes an der Stelle (3,2) in dieser Modellmatrix M.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Eier, der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Schildkröten nach einem Jahr nach Beobachtungsbeginn.

c) Zeigen Sie, dass es keine Population $\vec{x}$ gibt, die nach einem Jahr unverändert bleibt, d.h. es gibt kein $\vec{x} \neq 0$ mit $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Hinweis: Das Rechnen kann durch die Nutzung von Brüchen vereinfacht werden.

Aufgabe 6

Über $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei folgendes bekannt:

- $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
- Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$.

Bestimmen Sie A.

Hinweis: Beschreiben Sie einen systematischen Lösungsweg. Die alleinige Angabe einer Lösung genügt nicht.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Orthogonalmatrix ist.

b) Geben Sie die inverse Matrix B^{-1} an.

c) Geben Sie $\det(B^2)$ an.

Aufgabe 8

Seien A, B reelle $n \times n$-Matrizen.

a) Definieren Sie Eigenvektor und Eigenwert.

b) Beweisen Sie: Ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert λ und ist $Bv \neq 0$, dann ist Bv Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

c) Zeigen Sie: AB und BA haben die gleichen Eigenwerte.

Probeklausur

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ existieren

a) keine Lösung

b) unendlich viele Lösungen

c) eine eindeutige Lösung ?

Aufgabe 2

Ein Hammerwerfer im Punkt (0,0) läßt seinen Hammer mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn im Ring kreisen. Zu einem festgelegten Zeitpunkt befindet sich der Hammer im Punkt (1,0). Die lineare Abbildung f mit zugehöriger Abbildungsmatrix A beschreibt jeweils eine Vierteldrehung.

a) Wo befindet sich der Hammer nach einer Vierteldrehung?

b) Stellen Sie A auf.

c) Ist f linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

In Wirklichkeit bewegt sich der Hammerwerfer zusätzlich zu der Drehung um den Vektor

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

pro Vierteldrehung. Gehen Sie zur Vereinfachung davon aus, dass zuerst die Drehung und dann die Bewegung durchgeführt wird.

d) Ist die Abbildung aus Drehung und Bewegung linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Wo befindet sich der Hammer nach einer halben Drehung und der zugehörigen Bewegung?

Tipp: Bedenken Sie dabei, dass die zweite Drehung um den dann aktuellen Standort des Hammerwerfers und nicht um den Punkt (0,0) erfolgt.

Aufgabe 3

Sei $A = (a_{ij})$ eine 3×3-Matrix und $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} a_{31}+a_{32}+a_{33} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{11}+a_{12}+a_{13} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: f ist eine lineare Abbildung.

b) Zeigen Sie: f ist surjektiv.

c) Bestimmen Sie die Dimension von Kern(f) und Bild(f).

Aufgabe 4

Der Kapitän eines Motorbootes benutzt zur Orientierung das Koordinatensystem K. Eine Achse zeigt in Richtung Osten, die andere in Richtung Norden, der Ursprung befindet sich im Ausgangshafen. Die Einheit auf beiden Achsen ist je eine Seemeile (sm). Das Motorboot ist mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1 sm/h zwei Stunden in Richtung Norden und eine Stunde in Richtung Osten gefahren und dann vor Anker gegangen. Ein Segelboot, das im selben Hafen startet, muss aufgrund des Windes kreuzen und kann in sm gemessen pro Stunde die Strecke

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

bewältigen, alle anderen Kurse spielen aufgrund des Kreuzens keine Rolle. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden das Koordinatensystem K', in dem der Skipper des Segelbootes seine Koordinaten betrachtet. Sein Ursprung liegt ebenfalls im Hafen.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von K nach K'.

b) Der Skipper möchte zum Motorboot segeln. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten des Motorbootes im Koordinatensystem K'.

c) Welche Koordinaten in K hat eine Boje, die in K' die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat

Aufgabe 5

Eine besondere Art einer Meeresschildkröte ist vom Aussterben bedroht. Ein Grund von vielen besteht darin, dass weite Strände für den Massentourismus baulich erschlossen wurden, an denen die Schildkröten vorher ihre Eier ablegten. Aber die Tourismusindustrie will jetzt Projekte fördern, um die Restbestände zu schützen.
Die Population lässt sich ganz schwierig beobachten, da die Meeresschildkröten nachts ihre Eier am Strand ablegen und anschliessend die Nester zuscharren. Die kleinen Schildkröten schlüpfen nach ca. zwei Monaten. Wenn sie geschlechtsreif sind, also nach ca. 20 Jahren, kommen sie an diesen Strand zurück.
Die Schildkröten pflanzen sich nicht jedes Jahr fort. Wir betrachten eine Population, die zu Beobachtungsbeginn, also nach der Eiablage, aus

- 60000 Eiern (E_0)
- 24000 Jungschildkröten (J_0)
- 300 geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten (W_0)

besteht.
Die jährliche Entwicklung dieser Population lässt sich durch folgende Matrix beschreiben:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0.05 & 0.89 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Die jeweils folgende Generation ergibt sich also aus $\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ J_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ W_n \end{pmatrix}$.

a) Erläutern Sie die Bedeutung des Matrixelementes an der Stelle (3,2) in dieser Modellmatrix M.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Eier, der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Schildkröten nach einem Jahr nach Beobachtungsbeginn.

c) Zeigen Sie, dass es keine Population $\vec{x}$ gibt, die nach einem Jahr unverändert bleibt, d.h. es gibt kein $\vec{x} \neq 0$ mit $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Hinweis: Das Rechnen kann durch die Nutzung von Brüchen vereinfacht werden.

Aufgabe 6

Über $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei folgendes bekannt:

- $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
- Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$.

Bestimmen Sie A.

Hinweis: Beschreiben Sie einen systematischen Lösungsweg. Die alleinige Angabe einer Lösung genügt nicht.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Orthogonalmatrix ist.

b) Geben Sie die inverse Matrix B^{-1} an.

c) Geben Sie $\det(B^2)$ an.

Aufgabe 8

Seien A, B reelle $n \times n$-Matrizen.

a) Definieren Sie Eigenvektor und Eigenwert.

b) Beweisen Sie: Ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert λ und ist $Bv \neq 0$, dann ist Bv Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

c) Zeigen Sie: AB und BA haben die gleichen Eigenwerte.

Musterlösung

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2014, am 16.09.2014

Name: __________

Vorname: __________

Matr.-Nr.: __________

Unterschrift: __________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ existieren

a) keine Lösung

b) unendlich viele Lösungen

c) eine eindeutige Lösung ?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & \lambda & 2\alpha \end{array}\right) \quad \cdot(-2)\ + \qquad \cdot(-1)\ +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 & 2\alpha-3 \end{array}\right) \quad + \qquad \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 2\alpha-4 \end{array}\right)$$

7

Für $\lambda \neq 2$: eindeutige Lösung

Für $\lambda = 2 \wedge \alpha = 2$: unendlich viele Lösungen

Für $\lambda = 2 \wedge \alpha \neq 2$: keine Lösung

5

Aufgabe 2

Ein Hammerwerfer im Punkt (0,0) läßt seinen Hammer mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn im Ring kreisen. Zu einem festgelegten Zeitpunkt befindet sich der Hammer im Punkt (1,0). Die lineare Abbildung f mit zugehöriger Abbildungsmatrix A beschreibt jeweils eine Vierteldrehung.

a) Wo befindet sich der Hammer nach einer Vierteldrehung?

b) Stellen Sie A auf.

c) Ist f linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

In Wirklichkeit bewegt sich der Hammerwerfer zusätzlich zu der Drehung um den Vektor

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

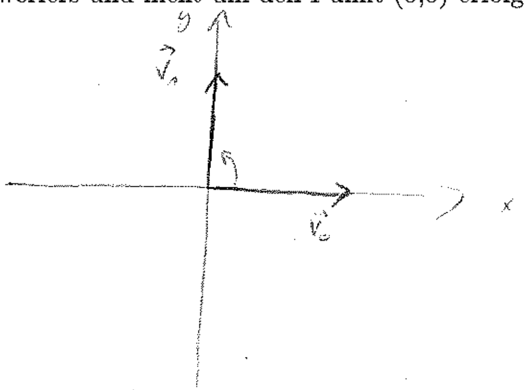
pro Vierteldrehung. Gehen Sie zur Vereinfachung davon aus, dass zuerst die Drehung und dann die Bewegung durchgeführt wird.

d) Ist die Abbildung aus Drehung und Bewegung linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Wo befindet sich der Hammer nach einer halben Drehung und der zugehörigen Bewegung?

Tipp: Bedenken Sie dabei, dass die zweite Drehung um den dann aktuellen Standort des Hammerwerfers und nicht um den Punkt (0,0) erfolgt.

a)



$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2

b) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3

c) $f(\vec{v}) = f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$

$f(\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} -v_2 - w_2 \\ v_1 + w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$

$f(\lambda \vec{v}) = \begin{pmatrix} -\lambda v_2 \\ \lambda v_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \lambda f(\vec{v})$ 2

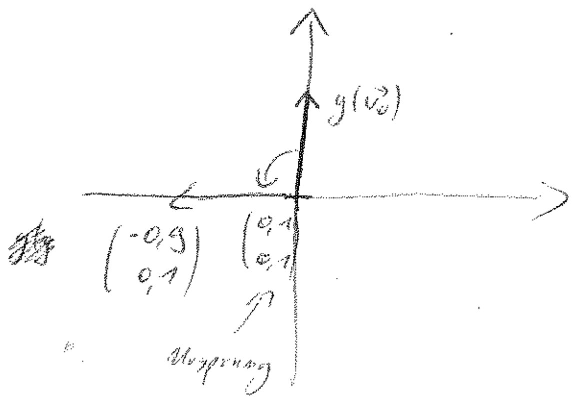
d) $g(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

$g(\lambda \vec{v}) = g\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda v_2 \\ \lambda v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

$\neq \begin{pmatrix} -\lambda v_2 \\ \lambda v_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot g(\vec{v})$ 2

e) $g(\vec{v_0}) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,1 \end{pmatrix}$

$g(g(\vec{v_0})) = g\begin{pmatrix} 0,1 \\ 1,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,9 \\ 0,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ 3



Aufgabe 3

Sei $A = (a_{ij})$ eine 3×3-Matrix und $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} a_{31}+a_{32}+a_{33} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{11}+a_{12}+a_{13} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: f ist eine lineare Abbildung.

b) Zeigen Sie: f ist surjektiv.

c) Bestimmen Sie die Dimension von Kern(f) und Bild(f).

a) $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(A+\lambda B) = f\begin{pmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot\begin{pmatrix} a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot\left(\begin{pmatrix} a_{31}+a_{32}+a_{33} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{11}+a_{12}+a_{13} \end{pmatrix}\right) + \lambda\cdot 2\left(\begin{pmatrix} b_{31}+b_{32}+b_{33} \\ b_{21}+b_{22}+b_{23} \\ b_{11}+b_{12}+b_{13} \end{pmatrix}\right)$$

5

$$= f(A) + \lambda\cdot f(B)$$

✓

b) Wähle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bel.

dann existiert für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ein A mit $f(A) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

wähle $A = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3

c) Aus b) folgt:

$\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 3$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) - \dim(\mathrm{Bild}(f))$

$= 9 - 3$

$= 6$

4

Aufgabe 4

Der Kapitän eines Motorbootes benutzt zur Orientierung das Koordinatensystem K. Eine Achse zeigt in Richtung Osten, die andere in Richtung Norden, der Ursprung befindet sich im Ausgangshafen. Die Einheit auf beiden Achsen ist je eine Seemeile (sm). Das Motorboot ist mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1 sm/h zwei Stunden in Richtung Norden und eine Stunde in Richtung Osten gefahren und dann vor Anker gegangen. Ein Segelboot, das im selben Hafen startet, muss aufgrund des Windes kreuzen und kann in sm gemessen pro Stunde die Strecke

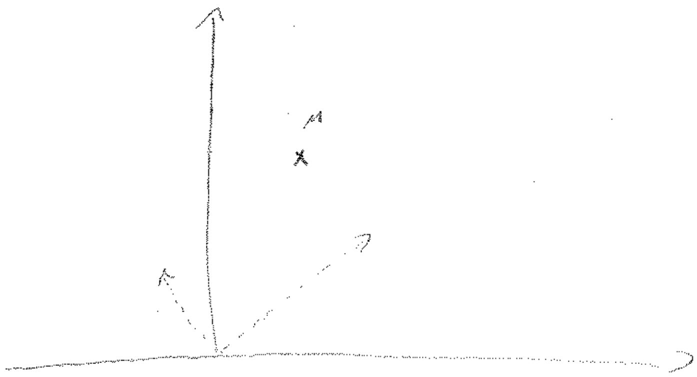
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

bewältigen, alle anderen Kurse spielen aufgrund des Kreuzens keine Rolle. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden das Koordinatensystem K', in dem der Skipper des Segelbootes seine Koordinaten betrachtet. Sein Ursprung liegt ebenfalls im Hafen.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von K nach K'.

b) Der Skipper möchte zum Motorboot segeln. Bestimmen Sie dazu die Koordinaten des Motorbootes im Koordinatensystem K'.

c) Welche Koordinaten in K hat eine Boje, die in K' die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ hat



a) $T^{K'}_{K} = (\vec{a}, \vec{b}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{K}_{K'} = \left(T^{K'}_{K}\right)^{-1} = \frac{1}{-1/2 - 3/2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 1/4 \end{pmatrix}$ 6 b)

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} + 1/2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{3}$$

Probe:

$$\left(\sqrt{3} - 1/2\right) \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 1/2\right) \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

c)

$$\vec{b} = T^{K'}_{K} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3/2 + 5\sqrt{3} \\ \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + 5 \end{pmatrix} \qquad \boxed{3}$$

Aufgabe 5

Eine besondere Art einer Meeresschildkröte ist vom Aussterben bedroht. Ein Grund von vielen besteht darin, dass weite Strände für den Massentourismus baulich erschlossen wurden, an denen die Schildkröten vorher ihre Eier ablegten. Aber die Tourismusindustrie will jetzt Projekte fördern, um die Restbestände zu schützen.
Die Population lässt sich ganz schwierig beobachten, da die Meeresschildkröten nachts ihre Eier am Strand ablegen und anschliessend die Nester zuscharren. Die kleinen Schildkröten schlüpfen nach ca. zwei Monaten. Wenn sie geschlechtsreif sind, also nach ca. 20 Jahren, kommen sie an diesen Strand zurück.
Die Schildkröten pflanzen sich nicht jedes Jahr fort. Wir betrachten eine Population, die zu Beobachtungsbeginn, also nach der Eiablage, aus

- 60000 Eiern (E_0)
- 24000 Jungschildkröten (J_0)
- 300 geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten (W_0)

besteht.
Die jährliche Entwicklung dieser Population lässt sich durch folgende Matrix beschreiben:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0.05 & 0.89 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0.95 \end{pmatrix}$$

Die jeweils folgende Generation ergibt sich also aus $\begin{pmatrix} E_{n+1} \\ J_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} E_n \\ J_n \\ W_n \end{pmatrix}$.

a) Erläutern Sie die Bedeutung des Matrixelementes an der Stelle (3,2) in dieser Modellmatrix M.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Eier, der Jungschildkröten und der geschlechtsreifen Schildkröten nach einem Jahr nach Beobachtungsbeginn.

c) Zeigen Sie, dass es keine Population $\vec{x}$ gibt, die nach einem Jahr unverändert bleibt, d.h. es gibt kein $\vec{x} \neq 0$ mit $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Hinweis: Das Rechnen kann durch die Nutzung von Brüchen vereinfacht werden.

a) m_{32} gibt an, dass pro Jahr 0,5 ‰ der Jungschildkröten zu geschlechtsreifen weiblichen Schildkröten heranreifen

3

b)

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ J_1 \\ W_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ J_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0{,}05 & 0{,}89 & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60.000 \\ 24.000 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 60.000 \\ 3000 + 24.000 - 2.400 - 240 \\ 12 + 300 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60.000 \\ 24.360 \\ 297 \end{pmatrix}$$

5

c) zz: $\nexists$ Eigenwert 1

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 200 \\ 0{,}05 & 0{,}89-\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}0005 & 0{,}95-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda)(0{,}89-\lambda)(0{,}95-\lambda) + 0{,}005$$

$$p(1) = (-1) \cdot (-0{,}11)(-0{,}05) + 0{,}005$$

$$= -0{,}0055 + 0{,}005$$

$$= -0{,}0005 \neq 0$$

5

Aufgabe 6

Über $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei folgendes bekannt:

- $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
- Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$.

Bestimmen Sie A.

Hinweis: Beschreiben Sie einen systematischen Lösungsweg. Die alleinige Angabe einer Lösung genügt nicht.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

I) $$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \boxed{3}$$

II) $$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b = 0 \quad \boxed{3} \quad \overset{I)}{\Rightarrow} \quad a = 2$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad \boxed{2}$$

III) $$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(d-\lambda) = 2d - (2+d)\lambda + \lambda^2$$

$$\overset{!}{=} \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\Leftrightarrow d = -1 \quad \boxed{3} \quad \overset{I)}{\Rightarrow} \quad c = -6$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{2}$$

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Orthogonalmatrix ist.

b) Geben Sie die inverse Matrix B^{-1} an.

c) Geben Sie $\det(B^2)$ an.

a) $B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ ✓ 7

b) $B^{-1} = B^T$ (siehe oben) 3

c) $\det(B^2) = \det(B \cdot B)$

$= \det(B) \cdot \det(B)$

$= (\det(B))^2$

$= \underbrace{|\det(B)|}_{1}{}^2$

$= 1$ 3

Aufgabe 8

Seien A, B reelle $n \times n$-Matrizen.

a) Definieren Sie Eigenvektor und Eigenwert.

b) Beweisen Sie: Ist v ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert λ und ist $Bv \neq 0$, dann ist Bv Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ.

c) Zeigen Sie: AB und BA haben die gleichen Eigenwerte.

a) $\vec{v}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, falls

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

4

b) $AB \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \wedge \quad B \cdot \vec{v} \neq 0$

$$\Leftrightarrow B \cdot A \left(B \cdot \vec{v}\right) = B \cdot \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \left(B \cdot \vec{v}\right)$$

4

c) $AB \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow B \cdot A \cdot \underbrace{B \cdot \vec{v}}_{\vec{w}} = B \cdot \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$$

alle EW von AB sind auch EW von BA

und

$$B \cdot A \cdot \vec{w} = \mu \cdot \vec{w}$$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot \underbrace{A \cdot \vec{w}}_{\vec{v}} = A \cdot \mu \cdot \vec{w} = \mu \cdot A \cdot \vec{w} = \mu \cdot \vec{v}$$

alle EW von B·A sind auch EW von A.

5

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2015, am 10.07.2015

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matr.-Nr.: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ {x_1}^2 - {x_2}^2 \end{pmatrix}$$

nicht linear ist.

b) Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 2 \cdot x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

i) Stellen Sie die Abbildungsmatrix A auf.

ii) Berechnen Sie $Kern(A), Bild(A)$ und $Rang(A)$.

iii) Geben Sie eine Basis von $Bild(A)$ an.

Aufgabe 2

Bei der TCO-Betrachtung (Total Cost of Ownership) werden die Gesamtkosten der Programmierung, also insbesondere auch die Arbeitszeit der Programmierer, bestimmt. Für die Frage, ob sich die Weiterentwicklung eines bereits bestehendes Programm finanziell lohnt, sollen die Gesamtkosten $K(n)$ in Abhängigkeit der Anzahl der Entwickler n beleuchtet werden. Zwischen beiden Größen wird ein linearer Zusammenhang

$$K(n) = c + d \cdot n$$

angenommen. Bestimmen Sie anhand der folgenden Beobachtungswerte des Programms die besten Schätzer für c und d nach der Methode der kleinsten Quadrate.

# Programmierer n	0	1	2
Gesamtkosten $K(n)$	10	4	4

Hinweis: 0 Programmierer bedeutet, dass das Programm nicht weiterentwickelt wird.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Matrizen:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $det(U) = -1$ und $det(V) = 4$.

b) Bestimmen Sie $det(U^T)$ und $det(U^2)$.

c) Bestimmen Sie $det(-2 \cdot V)$.

d) Bestimmen Sie $det(U^{17} \cdot V)$.

e) Berechnen Sie $det(U + V)$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie eine Vermutung für A^n auf.

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 5

Eine Matrix A besitzt die einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix A.

Aufgabe 6

Bei einer Autorennsimulation werden zur Transformation die drei symmetrischen Matrizen $G, T, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ genutzt. Ihnen fällt auf, dass

- $\langle x, Gx\rangle = {x_1}^2 - 4 \cdot x_1 x_2 + 5 \cdot {x_2}^2$,
- T die Eigenwerte -1 und 3 hat und
- $det(A) = 2$ sowie die Komponente a_{11} in der ersten Zeile und ersten Spalte gleich 1 ist.

a) Untersuchen Sie, welche der genannten Matrizen positiv definit, negativ definit bzw. indefinit ist und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Untersuchen Sie jeweils für G, T und A, ob die Matrizen damit eindeutig bestimmt sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7

a) Definieren Sie den Begriff "Lineare Abbildung".

Sei $\mathcal{P}_k$ die Menge aller reellen Polynome vom Höchstgrad k und $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wird $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathcal{P}_{m+n}$ definiert durch

$$f(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^{i+j} .$$

b) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

c) Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.

d) Zeigen Sie, dass f für $n, m \geq 2$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 8

a) Definieren Sie die Begriffe "Eigenwert" und "Eigenvektor".

b) Sei die reelle quadratische Matrix A zerlegt in $A = USV^T$ mit einer Diagonalmatrix S und zwei orthogonalen Matrizen U und V.

- Zeigen Sie, dass die Spalten von U die Eigenvektoren von AA^T und die Spalten von V die Eigenvektoren von A^TA bilden.
- Zeigen Sie dabei auch, dass die Eigenwerte sowohl von AA^T als auch A^TA die Quadrate der Hauptdiagonalelemente von S sind.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2015, am 10.07.2015

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ {x_1}^2 - {x_2}^2 \end{pmatrix}$$

nicht linear ist.

keine Angabe

b) Gegeben ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 2 \cdot x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

i) Stellen Sie die Abbildungsmatrix A auf.

Ergebnis:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Berechnen Sie $Kern(A), Bild(A)$ und $Rang(A)$.

Ergebnis: (für ker(A) auch andere Vektoren denkbar)

$$ker(A) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), Bild(A) = \mathbb{R}^2, rg(A) = 2$$

iii) Geben Sie eine Basis von $Bild(A)$ an.

Ergebnis: beliebige Basis des $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 2

Bei der TCO-Betrachtung (Total Cost of Ownership) werden die Gesamtkosten der Programmierung, also insbesondere auch die Arbeitszeit der Programmierer, bestimmt. Für die Frage, ob sich die Weiterentwicklung eines bereits bestehendes Programm finanziell lohnt, sollen die Gesamtkosten $K(n)$ in Abhängigkeit der Anzahl der Entwickler n beleuchtet werden. Zwischen beiden Größen wird ein linearer Zusammenhang

$$K(n) = c + d \cdot n$$

angenommen. Bestimmen Sie anhand der folgenden Beobachtungswerte des Programms die besten Schätzer für c und d nach der Methode der kleinsten Quadrate.

# Programmierer n	0	1	2
Gesamtkosten $K(n)$	10	4	4

Hinweis: 0 Programmierer bedeutet, dass das Programm nicht weiterentwickelt wird.

Ergebnis: $K(n) = 9 - 3n$

Aufgabe 3

Gegeben seien die Matrizen:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $det(U) = -1$ und $det(V) = 4$.

keine Angabe

b) Bestimmen Sie $det(U^T)$ und $det(U^2)$.

Ergebnis: $det(U^T) = -1, det(U^2) = 1$

c) Bestimmen Sie $det(-2 \cdot V)$.

Ergebnis: $det(-2 \cdot V) = -32$

d) Bestimmen Sie $det(U^{17} \cdot V)$.

Ergebnis: $det(U^{17} \cdot V) = -4$

e) Berechnen Sie $det(U + V)$.

Ergebnis: $det(U + V) = 10$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie eine Vermutung für A^n auf.

Ergebnis:

$$A^n = \begin{cases} A, & n \quad ungerade \\ E, & n \quad gerade \end{cases}$$

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung.

keine Angabe

Aufgabe 5

Eine Matrix A besitzt die einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Matrix A.

Ergebnis:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Bei einer Autorennsimulation werden zur Transformation die drei symmetrischen Matrizen $G, T, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ genutzt. Ihnen fällt auf, dass

- $\langle x, Gx\rangle = {x_1}^2 - 4 \cdot x_1 x_2 + 5 \cdot {x_2}^2$,
- T die Eigenwerte -1 und 3 hat und
- $det(A) = 2$ sowie die Komponente a_{11} in der ersten Zeile und ersten Spalte gleich 1 ist.

a) Untersuchen Sie, welche der genannten Matrizen positiv definit, negativ definit bzw. indefinit ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnis: G, A sind positiv definit; T ist indefinit

b) Untersuchen Sie jeweils für G, T und A, ob die Matrizen damit eindeutig bestimmt sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Ergebnis: nur G ist eindeutig festgelegt

Aufgabe 7

a) Definieren Sie den Begriff “Lineare Abbildung”.

Sei $\mathcal{P}_k$ die Menge aller reellen Polynome vom Höchstgrad k und $\mathbb{R}^{m\times n}$ die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen. Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wird $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathcal{P}_{m+n}$ definiert durch

$$f(A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^{i+j} .$$

b) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

c) Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.

d) Zeigen Sie, dass f für $n, m \geq 2$ nicht injektiv ist.

keine Angabe

Aufgabe 8

a) Definieren Sie die Begriffe “Eigenwert” und “Eigenvektor”.

b) Sei die reelle quadratische Matrix A zerlegt in $A = USV^T$ mit einer Diagonalmatrix S und zwei orthogonalen Matrizen U und V.

- Zeigen Sie, dass die Spalten von U die Eigenvektoren von AA^T und die Spalten von V die Eigenvektoren von A^TA bilden.
- Zeigen Sie dabei auch, dass die Eigenwerte sowohl von AA^T als auch A^TA die Quadrate der Hauptdiagonalelemente von S sind.

keine Angabe

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2015, am 22.09.2015
keine Hilfsmittel

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von α:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 12 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bei einem Laborexperiment sind folgende zeitabhängigen Werte ermittelt worden.

t	0	1	3	4
h(t)	5	4	2	7

Es wird folgender Zusammenhang zwischen t und $h(t)$ vermutet:

$$h(t) = a + b \cdot (t-2)^2$$

a) Stellen Sie die vier Gleichungen auf, die sich durch die Tabelle ergeben.

b) Schreiben Sie das angegebene lineare Gleichungssystem in Matrix/Vektorschreibweise mit einer $4x2$-Matrix.

c) Untersuchen Sie, ob das lineare Gleichungssystem lösbar ist.
Wenn ja, geben Sie die Lösung an.

d) Falls es nicht lösbar ist, stellen Sie die Normalengleichung auf.
Und ermitteln Sie die Werte für a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Aufgabe 3

Sei
$$S = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$
mit $t \in \mathbb{R}$ fest. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt:
$$S^n = \begin{pmatrix} t^n & n \cdot t^{n-1} & \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot t^{n-2} \\ 0 & t^n & n \cdot t^{n-1} \\ 0 & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

b) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine Orthogonalmatrix U, so dass gilt: $U^T AU = D$

Aufgabe 5

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soll einen Vektor um 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$ <u>im</u> Uhrzeigersinn drehen.
Die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soll einen Vektor an der x-Achse spiegeln.
Die lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soll den Wert der x-Komponente unverändert lassen und die y-Komponente verdreifachen.

a) Bestimmen Sie F, die zu f gehörige Abbildungsmatrix.

b) Bestimmen Sie G, die zu g gehörige Abbildungsmatrix.

c) Bestimmen Sie H, die zu h gehörige Abbildungsmatrix.

d) Bestimmen Sie J, die zu $g \circ f$ gehörige Abbildungsmatrix. Die Abbildung dreht also erst und spiegelt dann.

e) Untersuchen Sie die Matrizen J und H auf Orthogonalität.

f) Bestimmen Sie J^{-1}.

Aufgabe 6

Bei der MATSE-Stahl AG werden die Metallelemente mit Hilfe zweier Schwerlastkräne bewegt. Da die Schwerlastkräne auf unterschiedlichen Schienen rollen, werden die Koordinaten der zu bewegenden Lasten auch in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben, deren Ursprung jeweils im Punkt (0,0) liegt. Das Koordinatensystem von Kran A wird durch die Basisvektoren

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

gebildet, während die Basisvektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

das Koordinatensystem von Kran B aufspannen. Die vertikale Richtung kann hier ignoriert werden, da die Lasten selbstverständlich grundsätzlich in senkrechter Richtung aufgenommen werden.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Last L mit den kanonischen Koordinaten (7, 1) in den Koordinatensystemen A und B.

b) Stellen Sie die Transformationsmatrix T_E^A auf, die A-Koordinaten in kanonische Koordinaten transformiert.

c) Stellen Sie die Transformationsmatrix T_A^E auf, die kanonische Koordinaten in A-Koordinaten transformiert.

d) Stellen Sie die Transformationsmatrix T_A^B auf, die B-Koordinaten in A-Koordinaten transformiert.

Aufgabe 7

Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix.

a) Definieren Sie für A den Begriff "positiv definit".

b) Sei nun A symmetrisch und positiv definit ("spd") und B eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix.
Zeigen Sie, dass dann $B^T AB$ und BAB^T spd sind.

Tipps:

- Weisen Sie beide Eigenschaften, also Symmetrie und Definitheit, separat nach.
- Es gilt $\langle x, y \rangle = x^T y$.

c) Die Aussage aus b) gilt nicht für beliebige quadratische Matrizen B.
Finden Sie eine Matrix B, für die die Aussage in b) nicht zutrifft.

Aufgabe 8

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt in V.

a) Definieren Sie den Begriff "Orthogonalsystem" in einem euklidischen Vektorraum.

Seien $v_1, ..., v_n \in V$.
Die "Gramsche Matrix" sei definiert durch

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_n \rangle \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie, dass die Matrix G symmetrisch ist.

c) Beweisen Sie:

$$v_1, ..., v_n \text{ sind linear unabhängig} \Rightarrow G \text{ ist invertierbar.}$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur **Lineare Algebra 2**, SS 2016, am 14.07.2016
keine Hilfsmittel

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{10} \\ \pi & 0 & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie das von dem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & (\gamma - 2)x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ & & 2x_2 & & & - & 4x_4 & = & 2 \end{array}$$

a) Für welche γ existiert eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $\gamma = 2$.

Aufgabe 3

Sei

$$D = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix positiv definit ist.

b) Zeigen Sie, dass es kein $c \in \mathbb{R}$ gibt, für das D negativ definit ist.

Aufgabe 4

Badmintonbälle verschiedener Hersteller wurden auf ihre Haltbarkeit getestet. Verglichen wurden Preis und Anzahl der Spiele, die ein Turnierspieler mit einem Ball bestreiten kann. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle:

	Adas	Buma	Dlop	Had
Preis (x_i) in EUR	2	3	5	6
Anzahl Spiele (y_i)	1,5	2,5	4	4

Ermitteln Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die unbekannten Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ der Ausgleichsgeraden

$$y_i = a + bx_i.$$

Beginnen Sie, indem Sie zunächst das gesamte Gleichungssystem aufstellen.

Aufgabe 5

a) Definieren Sie die Linearität einer Abbildung.

b) Definieren Sie das Bild, den Kern und den Rang einer linearen Abbildung.

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die *Spur* von A festgelegt durch

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $tr : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \to tr(A)$ ist linear.

d) Bestimmen Sie $rg(tr)$ und $\dim(ker(tr))$.

Aufgabe 6

In einem Seegebiet werden im Wesentlichen nur zwei unterschiedliche Strömungen beobachtet. Die Richtungen dieser Strömungen

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden das von den Meeresbiologen genutzte Koordinatensystem B, wobei die Länge der Vektoren die Geschwindigkeit der Strömungen (in km pro Stunde) angibt.
Der Zoll, der in dem Gebiet patroulliert, benutzt dagegen ein einfaches kanonisches Koordinatensystem K mit gleichem Ursprung.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von K nach B.

b) Welche Koordinaten in B hat eine Markierung, die in K die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat?

c) An welcher Stelle in K befindet sich eine Gummiente, die zunächst 2 Stunden in Richtung b_1 und anschließend nach einem Strömungswechsel 3 Stunden in Richtung b_2 getrieben wurde?

Aufgabe 7

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Diagonalisieren Sie A.

c) Berechnen Sie A^k allgemein.

d) Berechnen Sie

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots .$$

Aufgabe 8

a) Definieren Sie die Begriffe Eigenwert einer Matrix sowie algebraische und geometrische Vielfachheit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $\bar{A} = A^T$ gilt; hierbei bedeutet $\bar{A}$ die (elementweise) komplexe Konjugation. Seien nun $z \in \mathbb{C}^n$ und A hermitesch.

b) Zeigen Sie: $\langle z, Az \rangle \in \mathbb{R}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ steht, d.h.

$$\langle a, b \rangle = a^T \cdot \bar{b}.$$

c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sein müssen.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur **Lineare Algebra 2**, SS 2016, am 14.07.2016
keine Hilfsmittel

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{10} \\ \pi & 0 & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{10} \\ \pi & 0 & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{pmatrix} = 1$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie das von dem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & + & (\gamma-2)x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ & & 2x_2 & & & - & 4x_4 & = & 2 \end{array}$$

a) Für welche γ existiert eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung.

Ergebnis: Für $\gamma \neq 2$ ist die Lösung mit

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eindeutig.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $\gamma = 2$.

Ergebnis: (auch andere Vektoren denkbar)

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3

Sei

$$D = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Untersuchen Sie, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Matrix positiv definit ist.

Ergebnis: für $c > 2 + \sqrt{5}$

b) Zeigen Sie, dass es kein $c \in \mathbb{R}$ gibt, für das D negativ definit ist.

keine Angabe

Aufgabe 4

Badmintonbälle verschiedener Hersteller wurden auf ihre Haltbarkeit getestet. Verglichen wurden Preis und Anzahl der Spiele, die ein Turnierspieler mit einem Ball bestreiten kann. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle:

	Adas	Buma	Dlop	Had
Preis (x_i) in EUR	2	3	5	6
Anzahl Spiele (y_i)	1,5	2,5	4	4

Ermitteln Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die unbekannten Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ der Ausgleichsgeraden

$$y_i = a + bx_i.$$

Beginnen Sie, indem Sie zunächst das gesamte Gleichungssystem aufstellen.

Ergebnis: $a = \frac{2}{5} \wedge b = \frac{13}{20}$

Aufgabe 5

a) Definieren Sie die Linearität einer Abbildung.

b) Definieren Sie das Bild, den Kern und den Rang einer linearen Abbildung.

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die *Spur* von A festgelegt durch

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, .$$

c) Zeigen Sie: Die Abbildung $tr : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \to tr(A)$ ist linear.

zu a) - c) keine Angabe

d) Bestimmen Sie $rg(tr)$ und $\dim(ker(tr))$.

Ergebnis: $rg(tr) = 1, dim(ker(tr)) = n^2 - 1$

Aufgabe 6

In einem Seegebiet werden im Wesentlichen nur zwei unterschiedliche Strömungen beobachtet. Die Richtungen dieser Strömungen

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden das von den Meeresbiologen genutzte Koordinatensystem B, wobei die Länge der Vektoren die Geschwindigkeit der Strömungen (in km pro Stunde) angibt.
Der Zoll, der in dem Gebiet patroulliert, benutzt dagegen ein einfaches kanonisches Koordinatensystem K mit gleichem Ursprung.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von K nach B.

Ergebnis:

$$T_B^K = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Welche Koordinaten in B hat eine Markierung, die in K die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat?

Ergebnis:

$$K_B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c) An welcher Stelle in K befindet sich eine Gummiente, die zunächst 2 Stunden in Richtung b_1 und anschließend nach einem Strömungswechsel 3 Stunden in Richtung b_2 getrieben wurde?

Ergebnis: Die Ente befindet sich an der Stelle

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Ergebnis: (Eigenvektoren müssen nicht normiert sein)

$$\lambda_1 = 1 \; mit \; v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2 \; mit \; v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Diagonalisieren Sie A.

Ergebnis:

$$A = QDQ^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie A^k allgemein.

Ergebnis:

$$A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2^k & 1-2^k \\ 1-2^k & 1+2^k \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \ldots.$$

Ergebnis:

$$e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e+e^2 & e-e^2 \\ e-e^2 & e+e^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

a) Definieren Sie die Begriffe Eigenwert einer Matrix sowie algebraische und geometrische Vielfachheit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $\bar{A} = A^T$ gilt; hierbei bedeutet $\bar{A}$ die (elementweise) komplexe Konjugation. Seien nun $z \in \mathbb{C}^n$ und A hermitesch.

b) Zeigen Sie: $\langle z, Az \rangle \in \mathbb{R}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ steht, d.h.

$$\langle a, b \rangle = a^T \cdot \bar{b}.$$

c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sein müssen.

keine Angabe

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur **Lineare Algebra 2**, SS 2016, am 14.07.2016
keine Hilfsmittel

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{10} \\ \pi & 0 & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu a)

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \sqrt{6} & 1 & \sqrt{7} & \sqrt{8} & \sqrt{10} \\ \pi & 0 & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. 2. Spalte}}{=} +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & \sqrt{\pi} \\ \pi & e & 0 & \pi^e \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \pi^{-1} & 0 & e^2\pi \end{vmatrix} \underset{\text{Entw. 3. Zeile}}{=} +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ \pi & e & 0 \\ 0 & \pi^{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

2 2

$$\underset{\text{Entw. 3. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} \pi & e \\ 0 & \pi^{-1} \end{vmatrix} = \pi \cdot \pi^{-1} = \underline{\underline{1}}$$

1 1

zu b)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. Schritt Gauß-Elimination 2

2. Zeile$_{\text{Neu}}$ = 2. Zeile + $\frac{1}{2}$ 1. Zeile

$$\underset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} 2 \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} 2\left[\left(6+0+0\right)-\left(0+\tfrac{3}{2}+2\right)\right]$$

$$= 2\left[\frac{12}{2} - \frac{7}{2}\right] = 2 \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{5}}$$

1 2 1

Aufgabe 2

Sei

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Besser schreiben $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

4 a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

2 b) Diagonalisieren Sie A.

3 c) Berechnen Sie A^k allgemein.

3 d) Berechnen Sie

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots.$$

a) $p(\lambda) = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Eigenwerte: $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1}$ 1

$\underline{\underline{\lambda_2 = 2}}$ 1

EV zu $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}$ 1

EV zu $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$ 1

b) $A = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$

$= Q \cdot D \cdot Q^T = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$ 2

c) $A^k = Q \cdot D^k \cdot Q^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 1^k \\ 2^k & -2^k \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1^k + 2^k & 1^k - 2^k \\ 1^k - 2^k & 1^k + 2^k \end{pmatrix}$ 3

d) $e^A = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 1^k + 2^k & 1^k - 2^k \\ 1^k - 2^k & 1^k + 2^k \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^2 & e - e^2 \\ e - e^2 & e + e^2 \end{pmatrix}}}$ 3

Aufgabe 3

Betrachten Sie das von dem Parameter γ abhängige Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrr} 3x_1+ & 6x_2+ & 6x_3+ & 6x_4 = & 3 \\ & x_2+ & 4x_3+ & (\gamma-2)x_4 = & 1 \\ & 2x_2+ & 4x_3- & 2x_4 = & 2 \\ & 2x_2 & - & 4x_4 = & 2 \end{array}$$

a) Für welche γ existiert eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $\gamma = 2$.

~~Gauß-Elimination~~ + $\boxed{\text{Vereinfachung}}$ + Tausch

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & \gamma-2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z2\to Z4 \\ Z2\to Z3 \\ +\text{Skalieren}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & \gamma-2 & 1 \end{array}\right)$$ 2

Gauß
$$\xrightarrow[\substack{3.\text{Zeile} = 3.\text{Zeile}-2.\text{Zeile} \\ 4.\text{Zeile} = 4.\text{Zeile}-2.\text{Zeile}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \gamma-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{4.\text{Zeile} = 4.\text{Zeile} \\ +3.\text{Zeile}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2 & 0 \end{array}\right)$$ 2 2

a) Für $\gamma \neq 2$ existiert eine eindeutige Lsg. 1

Sie lautet: $x_4 = 0$ $x_3 = 0$ $x_2 = 1$ $x_1 = -1$ 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 1

b) Für $\gamma = 2$ gibt es unendlich viele Lösungen: 1

$x_4 = 2\mu$ $-2x_3 = 2\mu$ $\Rightarrow x_3 = -\mu$

$x_2 = 1 - 2(-\mu) + 2\mu = 1 + 4\mu$

$x_1 = 1 - 2(1+4\mu) + 2\mu - 4\mu$
$= -1 - 10\mu$ 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$ 1

Aufgabe 4

In einem Seegebiet werden im Wesentlichen nur zwei unterschiedliche Strömungen beobachtet. Die Richtungen dieser Strömungen

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden das von den Meeresbiologen genutzte Koordinatensystem S, wobei die Länge der Vektoren die Geschwindigkeit der Strömungen (in km pro Stunde) angibt.
Der Zoll, der in dem Gebiet patrolliert, benutzt dagegen ein einfaches kanonisches Koordinatensystem S' mit gleichem Ursprung.

a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix von S' nach S.

b) Welche Koordinaten in S hat eine Markierung, die in S' die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat

c) An welcher Stelle befindet sich eine Gummiente, die zunächst 2 Stunden in Richtung b_1 und anschließend nach einem Strömungswechsel 3 Stunden in Richtung b_2 getrieben wurde.

5 a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $S' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T_S^{S'} = (S)^{-1} \cdot S' = S^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}$

4 b) $K_S(2,3) = T_S^{S'} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}}}$

3 c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, für welche c die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv definit und für welche c die Matrix D negativ definit ist. Zeigen Sie ggf., dass es keine solchen c gibt.

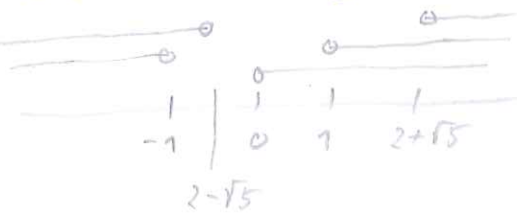
1. Hauptunterdeterminante : c 1
2. HUD : c^2-1 1 D ist symmetrisch! 1
3. HUD : c^2-4c-1 1

1

Bedingung pos. def: $c>0 \wedge c^2-1>0 \wedge (c>2+\sqrt{5} \vee c<2-\sqrt{5})$

4

$\Leftrightarrow c>0 \wedge (c>1 \vee c<-1) \wedge (c>2+\sqrt{5} \vee c<2-\sqrt{5})$



$\Leftrightarrow (c>1) \wedge (c>2+\sqrt{5} \vee c<2-\sqrt{5})$

$\Leftrightarrow c>2+\sqrt{5}$

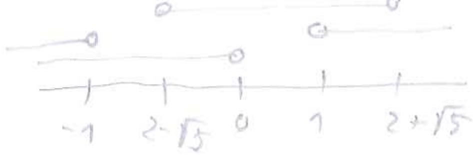
Für $c>2+\sqrt{5}$ ist D pos. def.

Bedingung neg. def: $c<0 \wedge c^2-1>0 \wedge (2-\sqrt{5}<c<2+\sqrt{5})$

4

$\Leftrightarrow c<0 \wedge (c>1 \vee c<-1) \wedge (2-\sqrt{5}<c<2+\sqrt{5})$

$\Leftrightarrow (c<-1) \wedge (2-\sqrt{5}<c<2+\sqrt{5})$



$\Rightarrow \emptyset$

Für kein c ist D neg. def.

Aufgabe 6

Badmintonbälle verschiedener Hersteller wurden auf ihre Haltbarkeit getestet. Verglichen wurden Preis und Anzahl der Spiele, die ein Turnierspieler mit einem Ball bestreiten kann. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle:

	Adas	Buma	Dlop	Had
Preis (x_i) in EUR	2	3	5	6
Anzahl Spiele (y_i)	1,5	2,5	4	4

Ermitteln Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die unbekannten Parameter a und b der Ausgleichsgerade

$$y_i = a + bx_i.$$

Beginnen Sie, indem Sie zunächst das gesamte Gleichungssystem aufstellen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad 1 \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad 1 \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

LGS: $A\vec{z} = \vec{q}$ 1

$$A^T A \vec{z} = A^T \vec{q}$$ 1

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{pmatrix} \quad 2$$

$$A^T \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{109}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 54{,}5 \end{pmatrix} \quad 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{109}{2} \end{pmatrix} \quad 1$$

2

$$\xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow b = \frac{13}{20} \quad 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}\left(12 - 16 \cdot \frac{13}{20}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{60}{5} - \frac{52}{5}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \quad 1$$

$$\underline{\underline{\vec{z} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{13}{20} \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0.65 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

2 a) Definieren Sie die Linearität einer Abbildung.

3 b) Definieren Sie das Bild, den Kern und den Rang einer linearen Abbildung.

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei die *Spur* von A festgelegt durch

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4 c) Zeigen Sie: Die Abbildung $tr : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, A \to tr(A)$ ist linear.

4 d) Bestimmen Sie $rg(tr)$ und $\dim(ker(tr))$.

a) Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt linear, falls gilt

2 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Additivität) $\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in K$

$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (Homogenität)

[V und W sind K-Vektorräume, K ist Körper]

b) $\tilde{X} \subseteq X$. Das Bild $f(\tilde{X})$ von $\tilde{X}$ bzgl. f ist

1 $$f(\tilde{X}) := \{ f(x) \mid x \in \tilde{X} \} \subseteq Y$$

Kern einer linearen Abbildung $f: V \to W$ ist

1 $$ker(f) := f^{-1}(0)$$

1 $f: V \to W$ linear. Dann ist Rang von f

$$rg(f) := \dim(Bild(f))$$

c) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2 $$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + tr(B)$$

2 $$tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda\, tr(A)$$

d) $rg(tr) = 1$ 2 $\underset{\text{Dim-Formel}}{\Rightarrow}$ $\dim(ker(tr)) = n^2 - 1$ 2

Aufgabe 8

4 a) Definieren Sie die Begriffe Eigenwert einer Matrix sowie algebraische und geometrische Vielfachheit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *hermitesch*, wenn $\bar{A} = A^T$ gilt; hierbei bedeutet $\bar{A}$ die (elementweise) komplexe Konjugation.

3 b) Sei $z \in \mathbb{C}^n$ und A hermitesch. Zeigen Sie: $\langle z, Az \rangle \in \mathbb{R}$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ steht, d.h.

$$\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \bar{b_i}.$$

3 c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sein müssen.

3 d) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander stehen müssen.

a) Sei A eine Matrix $(A \in M(n \times n, K))$ gegeben.

Ex. $\vec{x} \neq 0$ mit $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

(2) ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert.

Hat ein Eigenwert λ_i die Vielfachheit, dann heißt diese

(1) algebraische Vielfachheit.

Jeder Eigenwert besitzt eine Anzahl g_i von linear unabhängigen

(1) Eigenvektoren, g_i nennt man geometrische Vielfachheit von λ_i.

b) Es gilt $\langle z, Az \rangle = z^T \overline{Az} = z^T \bar{A} \bar{z} = z^T A^T \bar{z} = (Az)^T \bar{z} = \langle Az, z \rangle$ $(*)$

(3) Es sei $s = \langle z, Az \rangle$, dann ist Imaginärteil von $s \Rightarrow \frac{s - \bar{s}}{2i} = \frac{\langle z, Az \rangle - \overline{\langle z, Az \rangle}}{2i}$

$= \frac{\langle z, Az \rangle - \langle Az, z \rangle}{2i} \overset{(*)}{=} 0 \Rightarrow s$ ist reell.

c) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW, d.h. $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$ mit $\vec{x} \neq 0$.

(3) $\lambda \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle \underset{(*)}{=} \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \lambda \vec{x} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$

$\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$

Da $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$ nach Voraussetzung, muss $\lambda = \bar{\lambda}$ sein $\Rightarrow$ λ ist reell

(3) d) Es sei λ_1 und λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ EW von A und $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ zugehörige EVen.

$\langle x_2, Ax_1 \rangle = \lambda_1 \langle x_2, x_1 \rangle$ und $\langle x_1, Ax_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle$ | Es gilt $\langle x_2, Ax_1 \rangle = \langle Ax_2, x_1 \rangle$

$\langle x_2, x_1 \rangle = \overline{\langle x_1, x_2 \rangle}$, x_1, x_2 reell

$\Rightarrow \lambda_1 \langle x_2, x_1 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle \Rightarrow (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) \langle x_2, x_1 \rangle = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 2, SS 2016, am 13.09.2016
keine Hilfsmittel

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

a.) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung nicht linear ist:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

b.) Gegeben ist die lineare Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

i.) Stellen Sie die Abbildungsmatrix A auf.

ii.) Berechnen Sie $Kern(f)$.

iii.) Bestimmen Sie mithilfe der Dimensionsformel $Rang(f)$.

iv.) Bestimmen Sie $Bild(f)$.

v.) Benennen Sie eine Basis von $Bild(f)$.

Aufgabe 2

Ein Versuchsaufbau, der die Eingangsgröße x mit der Ausgangsgröße y vergleicht, hat per Doppelmessverfahren folgende Messwerte ergeben:

x	0	0	1	1	2	2
y	0	1	1	2	2	3

Bekannt ist, dass zwischen x und y ein linearer Zusammenhang

$$y = m \cdot x + b$$

besteht. Nun sollen für m und b die besten Schätzungen nach der Methode der kleinsten Quadrate anhand folgender Schritte bestimmt werden.

a.) Skizzieren Sie die Werte in einem Graphen.

b.) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem, das sich aus den Beobachtungen ergibt, auf.

c.) Raten Sie anhand der Beobachtungen, welche Werte sich für m und b ergeben.

d.) Berechnen Sie m und b nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Aufgabe 3

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *normal*, wenn gilt:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A$$

a.) Anni und Berta:

$$Anni = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$Berta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

unterhalten sich.

i) Berta sagt: "Ich bin *normal*! " Weisen Sie das nach.

ii) Anni möchte auch *normal* sein. Was bedeutet das für das x in Anni?

b.) Die beiden meinen:
Vorsicht!!! Dieter ist nicht *normal*!!!!

$$Dieter = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Haben sie Recht? (mit Begründung)

Aufgabe 4

Gegeben ist die symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.
Sie besitzt den Eigenwert 2 und es gilt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a.) Berechnen Sie A.

b.) Geben Sie einen Eigenvektor von A zum Eigenwert 2 an.

Aufgabe 5

a.) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Ein Eigenwert von A lautet -1.

b.) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(im Reellen) nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a.) Was bewirken die linearen Abbildungen Ax, Bx und Cx für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ geometrisch?

b.) Berechnen Sie AB und AC.

c.) Bestimmen Sie $(AB)^{-1}$ oder alternativ $(AC)^{-1}$.

d.) Bestimmen Sie die Determinante von $(ABBA)^{17}$ und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7

Sei $f(x) = A \cdot x$ eine lineare Abbildung.
Geben Sie ein Beispiel für eine lineare Abbildung an, sodass gilt

$$dim(Kern(f)) = 3 \text{ und } rg(f) = 2.$$

(mit Erläuterungen)

Aufgabe 8

a) Die lineare Abbildung g spiegelt einen Vektor innerhalb des $\mathbb{R}^2$ zunächst an der Geraden $y = 1$. Anschließend wird von der y-Komponenten 2 abgezogen.

  i.) Skizzieren Sie diese Abbildung mit einem Beispielvektor.

  ii.) Stellen Sie (mit dem üblichen Verfahren) die zugehörige Abbildungsmatrix auf und zeigen Sie, dass g linear ist.

  iii.) Wie kann man g einfacher als oben angegeben beschreiben?

b) Sei P_2 die Menge der Polynome mit dem maximalen Grad 2.
Finden Sie ein Beispiel für eine Abbildung $h : P_2 \to P_2$, die nicht linear ist.

Klausur **Lineare Algebra 2**, SS 2021, am 13.07.2021

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

keine Hilfsmittel

Aufgabe 1 (3+5+4 Punkte)

Wir betrachten allgemein das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Begründen Sie, warum für die Lösbarkeit $b \in L(a_1, \ldots, a_n)$ gelten muss.

Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$ und für $\alpha = -1$ die eindeutige Lösung für x_2, die zweite Komponente des Lösungsvektors.

Aufgabe 2 (6+6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität, Injektivität und Surjektivität.

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (2+3+ (3+1+1+2) Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 \\ 5x_1 & - & x_2 & & & + & 5x_4 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Geben Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A an.

b) Geben Sie allgemein die Dimensionsformel an.

c) Bestimmen Sie ...

- den Kern $\ker(f)$ von f.
- die Dimension des Kerns $\ker(f)$.
- die Dimension des Bildes von f.
- eine Basis für das Bild von f.

Aufgabe 4 (3+3+3+3 Punkte)

Fonds fassen unterschiedliche Aktien zusammen. Die MATSE-Bank hat folgende vier Fonds F_1, F_2, G_1, G_2 im Angebot, die Aktien der Firmen X und Y in unterschiedlichen Verhältnissen zusammenfassen:

	F_1	F_2	G_1	G_2
X	3	5	2	3
Y	1	2	1	1

,

d.h. ein Paket des Fonds F_1 besteht also beispielsweise aus drei Aktien der Firma X und einer Aktie der Firma Y.

a) Frau Löser möchte ihre Fonds F_1 und F_2 wieder in Aktien umwandeln. Wie viele Aktien von X und Y besitzt Sie, wenn Sie 1 Paket F_1 und 2 Pakete F_2 besitzt?

b) Bestimmen Sie die Matrix L, mit der Frau Löser nach der Bauart

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

aus der Anzahl f_1 ihrer Pakete des Fonds F_1 und der Anzahl f_2 ihrer Pakete des Fonds F_2 berechnen kann, wie viele Aktien x sie von X und wie viele Aktien y sie von Y hat.

c) Herr Bauer möchte seine x Aktien der Firma X und seine y Aktien der Firma Y in Pakete f_1 und f_2 der Fonds F_1 bzw. F_2 umwandeln. Bestimmen Sie die Matrix B nach der Bauart

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

d) Es soll auch ein Wechsel von den Fonds F_1 und F_2 zu den Fonds G_1 und G_2 möglich sein. Die Gesamtanzahl der Aktien der Firmen X und Y soll dabei erhalten bleiben. Bestimmen Sie für die MATSE-Bank die Transformationsmatrix T_G^F nach der Bauart

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = T_G^F \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

die die Anzahlen f_1 und f_2 der Pakete der Fonds F_1 bzw. F_2 in die Anzahlen g_1 und g_2 der Pakete der Fonds G_1 und G_2 transformiert.

Aufgabe 5 (8+3+2 Punkte)

Die Firma AMI-Straßenbau arbeitet an der Fertigstellung einer Bundesstraße. Der Baufortschritt ist dabei der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Zeit t in Tagen	2	3	4
Baufortschritt $B(t)$ in 100 m	3	6	6

a) Schätzen Sie die Parameter c und g der Ausgleichsgerade $B(t) = c + g \cdot t$ anhand der Tabelle mit der Methode der kleinsten Quadrate.

b) Fertigen Sie eine Skizze der Punkte und der Ausgleichsgerade an.

c) Schätzen Sie mit Hilfe der Ausgleichsgeraden, nach wie vielen (ganzzahligen) Tagen die 1 km lange Straße fertig gestellt wird.

Aufgabe 6 (4+9 Punkte)

a) Definieren Sie für eine symmetrische Matrix M die Begriffe positive Definitheit, positive Semidefinitheit und Indefinitheit.

b) Untersuchen Sie folgende Matrizen auf positive Definitheit, negative Definitheit bzw. Indefinitheit:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (4+5+4 Punkte)

Gegeben sei eine $n \times n$-Matrix A mit reellen Einträgen.

a) Existiert eine eine reelle 2×2-Matrix, die weder über $\mathbb{C}$ noch über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist? Wenn ja, geben Sie eine solche an und weisen Sie die zu erfüllende Eigenschaft nach. Wenn nicht, begründen Sie Ihre Antwort.

b) Existiert eine eine reelle 2×2-Matrix, die zwar über $\mathbb{C}$, nicht aber über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist? Wenn ja, geben Sie eine solche an und weisen Sie die zu erfüllende Eigenschaft nach. Wenn nicht, begründen Sie Ihre Antwort.

c) Existiert eine eine reelle 2×2-Matrix an, die zwar nicht über $\mathbb{C}$, wohl aber über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist? Wenn ja, geben Sie eine solche an und weisen Sie die zu erfüllende Eigenschaft nach. Wenn nicht, begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 (6+7 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^T Ax \,.$$

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heißt *Hauptachse* von f, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(y) = \lambda \|y\|^2 \quad \forall y = \alpha x$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $\| \cdot \|$ die euklidische Norm.
Zeigen Sie:

a) x ist Eigenvektor von $A \Rightarrow x$ ist Hauptachse von f, und das zur Hauptachse gehörende λ ist der Eigenwert von A zum Eigenvektor x.

b) Es gilt

$$\min_{\|x\|=1} f(x) = \lambda_{\min}, \quad \max_{\|x\|=1} f(x) = \lambda_{\max},$$

wobei $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ den minimalen bzw. maximalen Eigenwert von A bezeichnen.

Hinweis: Falls Sie A diagonalisieren, begründen Sie auch, warum Ihre Diagonalisierung möglich ist.

LA 2 13.7.2021

1 a) Für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gilt $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$. 1

3/3 Das LGS ist lösbar, wenn also
$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b$ gilt (für die Koeffizienten $x_i \in \mathbb{R}$ $\forall i$). 1

Die lineare Hülle von $a_1, \dots, a_n$ ist definiert
als $L(a_1, \dots, a_n) = \{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid x_i \in \mathbb{R} \}$. Also 1
muss gelten $b \in L(a_1, \dots, a_n)$ für die Lösbarkeit.

b) LGS eindeutig lösbar falls $\det(A) \neq 0$.

5/5
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{1}{=} +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

Ent. 1. Zeile

$$= 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix}}_{\alpha - 2} - 4(-1 + \alpha - 2 - 2\alpha)$$

Ent. 3. Spalte 1 1

Sarrus

$$= \alpha - 2 - 4(-3 - \alpha)$$
$$= 5\alpha + 10 \quad 1 \quad \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -2$$

1

LGS ist eindeutig lösbar falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

c) Cramersche Regel $\alpha = -1$

4/4

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix}0&-1&1&4\\-1&2&1&1\\1&\beta&-2&0\\2&-1&1&0\end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix}0&0&1&4\\-1&0&1&1\\1&1&-2&0\\2&-1&1&0\end{vmatrix}}_{5 \text{ nach b)}}} \underset{\text{Ent. 4. Spalte}}{=} \frac{-4\begin{vmatrix}-1&2&1\\1&\beta&-2\\2&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&\beta&-2\\2&-1&1\end{vmatrix}}{5} \quad 1$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{5}\Big(-4\underbrace{[-\beta-8-1-2\beta+2-2]}_{-3\beta-9 \quad 1}+\underbrace{[4-1-2\beta+1]}_{4-2\beta \quad 1}\Big)$$

$$= \frac{1}{5}(12\beta+36+4-2\beta) = \frac{1}{5}(10\beta+40)$$

$$= \underline{\underline{2\beta+8}} \quad 1$$

2)

12/12

$$f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 + x_2^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Die Funktion ist nicht surjektiv, da keine negative Werte angenommen werden können. 2

Die Funktion ist nicht injektiv, da z.B. 2
gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, aber $f_1(\vec{x}) = 1 = f_1(\vec{y})$.

Die Funktion ist nicht linear, da 2

$$\underbrace{f_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{1} + \underbrace{f_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1} \neq \underbrace{f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{2\sqrt{2}}$$

d.h. f_1 erfüllt nicht die Additivität.

b) f_2 ist linear, da gilt

$$f_2(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = (x_1 + \lambda y_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 + \lambda y_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[x_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \lambda\left[y_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= f_2(\vec{x}) + \lambda f_2(\vec{y}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$$

mit $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$, $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$ 2

$V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^3$. Da gilt $\underbrace{\dim(V)}_{2} < \underbrace{\dim(W)}_{3}$,

kann f nicht surjektiv sein. 2

Nach Dimensionsformel:

$$\dim(\ker(f)) + \underbrace{rg(f)}_{} = \underbrace{\dim(V)}_{2}$$

auch 2, da $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ l.u.

also $\dim(\ker(f))=0$, d.h.

$\ker(f)=\{0\} \Rightarrow f_2$ ist injektiv 1

3) a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 2

b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 3

$\dim(\ker(f)) + rg(f) = n$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ +

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 6 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\cdot(-3)$ +

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

wähle $a, c \in \mathbb{R}$ bel.

$\Rightarrow d = c - 2a$

$\Rightarrow b = 2d + 3c - a$

$= 2c - 4a + 3c - a$

$= 5c - 5a$

$\Rightarrow \ker(f) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, c \in \mathbb{R} \right\}$ 3

$\Rightarrow \dim(\ker(f)) = 2$ 1

$\Rightarrow rg(f) = \dim(Bild(f)) = 4 - 2 = 2$ 1

Basis des Bildes:

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ 2

4) a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5

b) $L = \begin{pmatrix} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3

c) $B = L^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2

d) $T_G^F = T_G^E \cdot T_E^F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

2

5) LGS:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c \\ g \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\begin{pmatrix} c' \\ g' \end{pmatrix} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T b$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 29 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 48 \end{pmatrix}$$

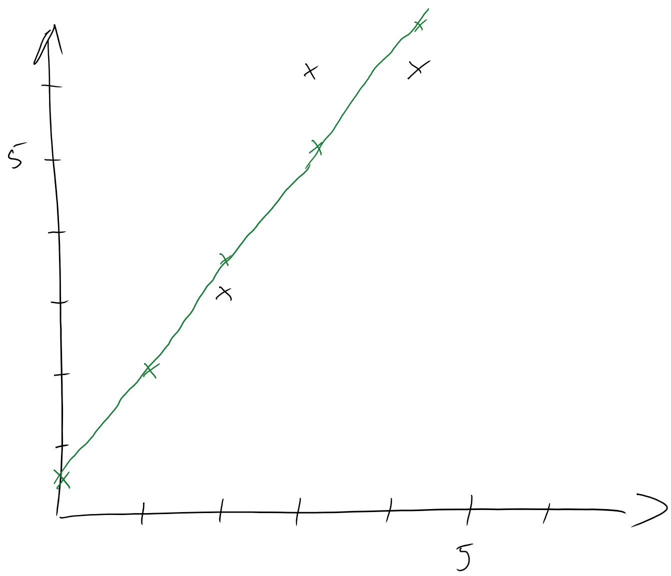
$$= \frac{1}{87-81} \begin{pmatrix} 29 & -9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 435 - 432 \\ -135 + 144 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

8

b)



3

c) $B(t) \overset{!}{=} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} t \overset{!}{=} 10$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} t = \frac{19}{2}$

$\Leftrightarrow \quad t = \frac{19}{3} > 6$

2

Nach 7 Tagen ist die Straße fertig.

LA 2, Juli 2021

A6

a) M heißt positiv definit genau dann, wenn $\langle x, Mx\rangle > 0 \; \forall x \neq 0$

1

" positiv semidefinit " , $\langle x, Mx\rangle \geq 0 \; \forall x \neq 0$

1

M heißt indefinit genau dann, wenn es $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\langle x, Mx\rangle > 0$ und $\langle y, My\rangle < 0$.

2

b) i) $D_1 = |2| \quad > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad > 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 15 \end{vmatrix} = 2\cdot 15 - 2\cdot2 - 2\cdot2 - (+4) \quad -8 - 15$

$= 30 - 8 - 4 - 8 - 15 = -5 < 0$

3

$\Rightarrow$ A indefinit

ii) $D_1 = |1| = 1 \quad > 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 0 + 0 - 6 - 0 - 20 = 4 \quad > 0$

$\Rightarrow$ B positiv definit

3

iii) $D_1 = -3 \quad < 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 12 \quad > 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -24 + 0 + 0 - (-4) - 4\cdot(-3) - 0$

$= -20 + 12 = -8 \quad < 0$

$\Rightarrow$ C negativ definit

3

LA2, Juli 2021

A7 a) ja: wähle $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 4

Da A obere Dreiecksgestalt besitzt, kann man die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen ablesen. A besitzt den doppelten EW 1.

berechne Eig(A; 1).

$$(A - E)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Eig}(A;1)) = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2.$$

Da 1 der einzige EW ist, kann es weder in $\mathbb{R}$ noch in $\mathbb{C}$ eine Basis aus Eigenvektoren geben $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar.

b) ja: Wähle eine Drehmatrix (Winkel $\neq 0$) in $\mathbb{R}^2$, z.B. 5

$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um 90°)

$\chi_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i \Rightarrow$ B nicht diagonalisierbar in $\mathbb{R}$. Da aber die beiden Eigenwerte einfach sind, entspricht (in $\mathbb{C}^2$) die geometrische Vielfachheit jeweils der algebraischen $\Rightarrow$ B diagbar in $\mathbb{C}$.

c) nein: Sonst $\exists\, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $V \in Gl_2(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: 4

$C = V^{-1} D V$. Wg. $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ gilt $V, D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, also C diagbar über $\mathbb{C}$ $\lightning$.

Aufgabe 8

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^T A x\,.$$

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ heißt *Hauptachse* von f, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(y) = \lambda\|y\|^2 \quad \forall y = \alpha x$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Hierbei wie im Folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.
Zeigen Sie:

a) x ist Eigenvektor von $A \Rightarrow x$ ist Hauptachse von f, und das zur Hauptachse gehörende λ ist der Eigenwert zu x.

7

b) Es gilt

$$\min_{\|x\|=1} f(x) = \lambda_{\min}, \quad \max_{\|x\|=1} f(x) = \lambda_{\max},$$

6

wobei $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ den minimalen bzw. maximalen Eigenwert von A bezeichnen.

Hinweis: Falls Sie A diagonalisieren, begründen Sie auch, warum Ihre Diagonalisierung möglich ist.

A ist diagonalisierbar in der Form $A = Q D Q^T$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ und orthogonalem $Q = (q_1, \dots, q_n)$, da $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist.
Hier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die reellen Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren $q_1, \dots, q_n$. (2)

a) Es sei $x = q_i \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ beliebiger Eigenvektor von A mit zugehörigem Eigenwert $\lambda = \lambda_i$. (1)
Mit der Setzung $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt auch

(1) $Ay = \lambda y \quad (*)$

Also

$$\lambda \|y\|^2 \overset{(1)}{=} \lambda\, y^T y \overset{(1)}{=} y^T(\lambda y) \underset{(*)}{\overset{(1)}{=}} y^T A y \underset{\text{Def}}{\overset{(1)}{=}} f(y).$$

D.h. $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ist Hauptachse von f mit $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor x. (1)

b) Es sei $x = \sum_{i=1}^n c_i q_i$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1, \dots, n$ (Jedes Element x läßt sich als Linearkombination der q_i darstellen, da $Q = [q_1, \dots, q_n]$ ONB ist)

$$\|x\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$$
$$\uparrow$$
$$q_i^T q_j = \delta_{ij}$$

Es gilt $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, da $q_i \neq 0$ und mindestens ein $c_i \neq 0$.

Es gilt also für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = x^T A x = \langle x, Ax \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} c_i q_i , \sum_{i=1}^{n} c_i A q_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} c_i q_i , \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i q_i \rangle$$

$$= \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_n c_n^2$$

$q_i^T q_j = \delta_{ij}$ 2

Also für beliebiges $y = \frac{x}{\|x\|}$ $(\|y\| = 1)$

$$f(y) = \frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_n c_n^2}{\|x\|^2} \geq \frac{\lambda_{min} \cancel{(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)}}{\cancel{(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)}} = \lambda_{min}$$

1

und analog

$$f(y) = \frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \dots + \lambda_n c_n^2}{\|x\|^2} \leq \frac{\lambda_{max} \cancel{(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)}}{\cancel{(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)}} = \lambda_{max}$$

1

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II 23.9.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Liegt der Punkt P auf der Geraden g?. Begründen Sie Ihre Antwort. 2
b) Geben Sie die allgemeine Gleichung der Verbindungsgeraden zwischen P und g an. 2
c) Wie lautet die Gleichung des Lotvektors von P auf g? 8

Aufgabe 2 : Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist. 12

b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^{\perp}$? 3

Aufgabe 3 : Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $B = A^4$ und zeige durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$B_n = A^{4n} = \begin{pmatrix} (-2i)^n & 0 \\ 0 & (-2i)^n \end{pmatrix} \quad \forall \in \mathbb{N}.$$

10

Aufgabe 4 : Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 8 \\ 5 & 14 & 21 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. 10

b) Welchen Wert hat die Determinante von A und welchen Rang hat die Matrix A? (Begründung!) 3

Aufgabe 5: Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die inverse Matrix A^{-1}, falls sie existiert. 10

Aufgabe 6: Gegeben ist die $n \times n$ - Dreidiagonalmatrix A_n durch

$$a_{k,k} = a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = 1,$$

$$a_{i,k} = 0 \text{ sonst.}$$

a) Man berechne $\det(A_n)$ für n=1,2,3,4. 3
b) Man zeige, dass gilt

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) \quad \forall\, n \geq 3$$

und folgere daraus eine Beziehung zwischen $\det(A_{n+1})$ und $\det(A_{n-2})$. 10
c) Bestimmen Sie damit und mit Teil a) die Werte von $\det A_n$ für $n = 5, ..., 10$. 3

Aufgabe 7: Man bestimme sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Vor Beginn der Rechnung sollten folgende Fragen beantwortet werden:
i) Was folgt für die Eigenwerte aus dem Rang der Matrix A ?
ii) Ist $\vec{x} = (1,1,1)^T$ ein Eigenvektor von A? 12

Aufgabe 8: Zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B heissen äquivalent $(A \sim B)$, falls eine invertierbare Diagonalmatrix D existiert, die von A und B abhängt, so dass gilt $A = D \cdot B$. Man zeige, dass diese Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist d.h. dass gilt:

$$A \sim A;$$

$$A \sim B \rightarrow B \sim A;$$

$$A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C.$$

12

Summe der Punkte: **100**

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II 09.07.2004

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind 4 Punkte A, B, C, D und ein Vektor $\vec{n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme die Gleichung der Ebene durch die 3 Punkte A, B und C. 4

b) Man bestimme die Gleichung der Ebene durch den Punkt D senkrecht zu $\vec{n}$. 3

c) Man bestimme die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen aus a) und b) und ihren kürzesten Abstand vom Nullpunkt. 7

Aufgabe 2: Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

a) Man bestimme die Lösung für $c = 4$ und $d = 2$. 4
Für welche Werte von c und d hat das Gleichungssystem:

b) eine eindeutige Lösung, 3

c) keine Lösung, 3

d) unendlich viele Lösungen ? 4

Aufgabe 3 : Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimmen Sie daraus ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist. 13

Aufgabe 4: Gegeben sind 2 (Spalten-)Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$. und $< u, v >$ ihr Standard-Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = u \cdot v^T$ gilt

$$A^n = < u, v >^{(n-1)} \cdot A \qquad \forall\, n \,\in\, \mathbb{N}$$

13

Aufgabe 5: Gegeben ist die Menge der Matrizen

$$M = \left\{ A; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man zeige, dass M eine kommutative Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bildet. 12

Aufgabe 6: Gegeben ist die Einheitsmatrix $E \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ und die zwei Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die inverse Matrix von $E + u \cdot v^T$ gilt

$$(E + u \cdot v^T)^{-1} = E - \frac{1}{\alpha} u \cdot v^T \text{ mit } \alpha = 1 + \langle u, v \rangle.$$

9

Aufgabe 7: Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Was kann über die Lage der Eigenwerte dieser Matrix auf Grund der Eigenschaften der Matrix B (evtl. Symmetrie, Positiv-Definitheit, Orthogonalität) gesagt werden? Welche der folgenden Werte ist Eigenwert von B: 1, 1/2, 0, -1, 1+i? Ist der Vektor $(1, 0, 0, 1)$ Eigenvektor? 13

Aufgabe 8: Man bestimme die inverse Matrix von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

falls sie existiert. (Probe!) 12

Summe der Punkte: **100**

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II 4.7.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind 2 Punkte A, B, und zwei Vektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme die Gleichungen der beiden Ebenen E_1 durch den Punkte A senkrecht zu $\vec{n_1}$ und E_2 durch den Punkt B senkrecht zu $\vec{n_2}$. 4

b) Man bestimme die Gleichung der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen. 6

c) Man bestimme den kürzesten Abstand der Schnittgeraden vom Nullpunkt. 4

Aufgabe 2 : Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Man stelle fest, ob die Vektoren linear unabhängig sind. 4
b) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist. 8

Aufgabe 3 : Gegeben ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man zeige durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$C^{\,n} = \begin{pmatrix} 1 & 3(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \forall \in \mathbb{N}.$$

10

Aufgabe 4 : Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Was folgt daraus für den Wert der Determinante von A? 6

b) Man bestimme eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$. 5

c) Wie lautet die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems $Ax = b$? 3

Aufgabe 5a: Unter welchen Voraussetzugen bildet die Menge der Matrizen

$$M = \{A = \begin{pmatrix} a1 & a2 \\ 0 & a3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3\}$$

eine (evtl. nicht-kommutative) Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation? 10

Aufgabe 6: Gegeben ist die $n \times n$ - Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Die Matrix A hat auf der 1. und der letzten Zeile und der Hauptdiagonalen nur Einsen bis auf das Element a_{nn}, für das gilt $a_{nn} = 0$.)
a) Man berechne $\det(A_4)$; 4
b) Man zeige, dass gilt $\det(A_n) = -1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. 9

Aufgabe 7: a) Man zeige, dass die Matrix $A = u \cdot v^T, \quad u, v \in \mathbb{R}^n$, den Eigenwert $< u, v >$ mit dem zugehörigen Eigenvektor u besitzt. 4
b) Wie groß ist $rg(A)$, falls $\vec{u} \neq \vec{0} \; \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ und was folgt daraus für einen weiteren Eigenwert der Matrix A? 4
c) Man bestimme sämtliche Eigenwerte der Matrix $A = u \cdot v^T$ für

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7

Aufgabe 8: Gegeben ist die 1×2 - Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Man berechne die Matrix

$$B(x) = A^T A + x^2 E_2$$

und die inverse Matrix $B(x)^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. 6

b) Weiter bestimme man

$$A^+ = \lim_{x \to 0} (B(x)^{-1} A^T) \qquad \text{und die Matrix} \qquad AA^+.$$

6

Summe der Punkte: **100**

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. P. Jansen, ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Aufgaben zur Linearen Algebra I und II 7.7.2006

Punkte

1. Peter, Paul und Mary kaufen beim Bäcker ein:
   Peter kauft 1 Brötchen, 2 Hörnchen und 1 Graubrot und bezahlt 5 EURO
   Paul kauft 3 Brötchen,1 Hörnchen und ebenfalls ein Graubrot und bezahlt 4,80 EURO und
   Mary kauft 2 Hörnchen, 1 Graubrot und 1 Baguette für 7 EURO.
   Die Freunde versuchen später die Einzelpreise zu rekonstruieren. Helfen Sie ihnen durch einen mathematischen Ansatz. Ermitteln Sie die allgemeine Lösungsmenge und darin die möglichen Preise (Intervalle!) für jeden Artikel.

2. Die Ebene E geht durch den Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und schneidet die (x,y)-Ebene in der Geraden $x + y = 48$.
   Wie lautet die Gleichung der Ebene in Normalenform.

3. Bestimmen Sie α so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^2+3 \\ 3\alpha+6 \end{pmatrix}$ Element des Vektorraums $span(\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

4. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix}$$

orthogonal.

5. Ein Draht sei straff zwischen zwei Punkten gespannt, die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Koordinaten (10,10,10) bzw. (10,20,30) haben. Wie weit ist der Punkt mit den Koordinaten (0,10,10) von dem Draht entfernt?

6. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$; zeigen Sie , dass dann $a + b + c$ Eigenwert von A ist.

7. Man bestimme den Abstand der Geraden

$$G1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $G2$, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ geht.

8. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ auf; berechnen Sie eine Orthonormalbasis, die den gleichen Raum aufspannt.

9. Sei $S = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ fest. Man stelle eine Vermutung für S^n auf und beweise diese mit vollständiger Induktion.

10. Man bestimme den Rang der Matrix A in Abhängigkeit des Parameters a, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 & a \\ 1 & 2 & -a^2 - 3a & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Gilt für allgemeine quadratische Matrizen gleicher Dimension die Gleichung

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \quad ?$$

Geben Sie einen Beweis oder ein möglichst einfaches Gegenbeispiel an.

12. Ermitteln Sie das Ausgleichspolynom zweiten Grades zu den Punkten

$$(-2, 10) \quad (-1, 3) \quad (1, 5) \quad (2, 12)$$

Stellen Sie die Normalgleichungen auf und lösen Sie diese. Fertigen Sie eine Skizze der Punkte und der Lösungskurve.

13. Was kann man über die Eigenwerte und Eigenvektoren von B sagen, wenn $B = A + 7I$ ist und man die Eigenwerte und Eigenvektoren von A kennt?

14. Eine Matrix A besitzt die einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

    Berechnen Sie die Matrix A.

15. Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 11x + 10y &= 3 \\ 7x + 12y &= 5 \end{aligned}$$

(a) mit dem Gauß-Verfahren,

(b) mit der Cramerschen Regel,

(c) mit Matrixinversion.

16. Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von α:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 12 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \phi \in \mathbb{R}\}$$

eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet. Hinweis: Benutzen Sie die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)) \end{aligned}$$

18. Gegeben sind die 4 Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Wie lautet eine Gleichung der Ebene, in der alle vier Punkte liegen? Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine implizite (parameterlose) Darstellung an.

(b) Bestimmen Sie den kleinsten Abstand der Ebene zum Nullpunkt.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II 15.3.2007

1.) Bestimmen Sie a so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2+3 \\ 3a+6 \end{pmatrix}$ ein Element des Vektorraums $<\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}>$ ist .

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a^2+3 \\ 3a+6 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|c} 2 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & a^2+3 \\ 3 & 2 & 3a+6 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2-2 \\ \text{-1} & 0 & \text{3a+4} \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2-2 \\ 0 & 0 & a^2+3a+2 \end{array}$$

Die Lösbarkeitsbedingung ist: $a^2+3a+2=0$. Nach der p-q-Formel folgt: $a_1=-1$ und $a_2=-2$.

2.) Berechnen Sie die Inverse zu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Führen Sie eine Probe durch.

Lösung:

$$
\begin{array}{cccc|cccc|l}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \text{—-(I)} \\
1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{—-(I)-(II)} \\
1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & \text{—-(I)-(II)-(III)} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \text{—}\div 2 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \text{—}\div 4 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -1 & 1 & \text{—}\div 8 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \\
\hline
\end{array}
$$

3.) Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung f.
$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$
f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 \\ x_3 + x_4 + x_5 \end{pmatrix}
$$

4.) Eine Matrix A besitzt die Eigenwerte λ_1=1 und λ_2=2. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie die Matrix A.

5.) Sei A= $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Stellen Sie eine Vermutung für A^n auf und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

6.) Ein Textilgeschäft hatte folgende Lieferungen:
Bei der ersten Lieferung wurden für 1 Hose, 1 T-Shirt, 1 Bluse und 1 Rock 230 Euro bezahlt, bei der zweiten Lieferung für 2 T-Shirts, 1 Bluse und 2 Röcke 220 Euro . Bei einer dritten Lieferung kosteten 3 Hosen, 2 T-Shirts und 1 Bluse 340 Euro.
Ermitteln Sie die allgemeine Lösungsmenge des Gleichungssystems. In welchen Grenzen kann der freie Parameter λ variieren? In welchem Bereich liegt der mögliche Preis für eine Hose?

7.) Bestimmen Sie die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, die mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ haben.

Um welches geometrische Gebilde handelt es sich?

8.) Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel dafür an, dass die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen keine Gruppen sind:

- $\mathbb{Z}$ und Subtraktion
- $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und Addition
- $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und Multiplikation

9.) Gegeben sind folgende 4 Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Untersuchen Sie diese Vektoren auf lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit.

(b) Bilden diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

10.) Der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ ist gegeben durch

$$P_n = \{p; p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ , \ a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$$

Ferner sei

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$$

ein Skalarprodukt auf P_n gegeben ist.

Klausur zur Linearen Algebra

Jansen + Pflug, 13.07.2007

Zeit: 120 Minuten, 10 P. pro Aufgabe

1. $\langle u, v\rangle$ bezeichne das Standard-Skalarprodukt zu 2 Spaltenvektoren $u, v \in \mathbb{R}^m$.

   (a) Begründen Sie kurz, wieso $\langle u, v\rangle = u^T v = v^T u$ gilt.

   (b) Berechnen Sie für u= $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und v= $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Skalarprodukt.

   (c) Berechnen Sie $A = uv^T$.

   (d) Zeigen Sie allgemein, dass für $A = uv^T$ gilt: $A^2 = \langle u, v\rangle A$.

   (e) Beweisen Sie allgemein, dass für eine Matrix $A = uv^T$, wobei u und v beliebige m-dimensionale Vektoren sind, gilt:

   $$A^n = \langle u, v\rangle^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (Hinweis: nicht elementweise ausmultiplizieren, sondern 'geschickt klammern')

2. Bestimmen Sie die reellen Zahlen a, für die das lineare Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & a & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   - genau eine Lösung
   - keine Lösung

   besitzt. Geben Sie auch die Lösungsmengen an.
   Begründen Sie, warum es nicht unendlich viele Lösungen geben kann.

3. Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

   $$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{5} \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

   parallel zur Ebene

   $$E : 2x - \sqrt{5}y + tz = 10\,;\ x, y, z \in \mathbb{R}$$

   Bestimmen Sie für diese Fälle jeweils den Abstand der Geraden von der Ebene E.

4. (a) Wann ist eine quadratische Matrix orthogonal?

(b) Weisen Sie nach, dass folgende Matrix orthogonal ist:

$$\begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi)cos(\vartheta) & sin(\varphi)sin(\vartheta) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi)cos(\vartheta) & -cos(\varphi)sin(\vartheta) \\ 0 & sin(\vartheta) & cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der quadratischen Orthogonalmatrizen O(n) abgeschlossen bezüglich der Matrix-Multiplikation ist.

5. Man löse das überbestimmte Gleichungssystem nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$-2x + y = 3$$

$$x - 2y = 4$$

$$2x + 2y = 2$$

6. Weisen Sie nach, dass folgende Matrizen nur reelle Eigenwerte besitzen:

(a) $\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$, mit $a, c, d \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix}$, $i^2 = -1; a, b, c, d \in \mathbb{R}$

7. Man bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

8. Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$$

9. Die drei Freunde Tim, Tom und Jerry haben in einem ausländischen Spirituosen- und Tabakgeschäft eingekauft. Beim Zoll stellen sie fest, dass sie keine Kassenzettel erhalten haben; allerdings wissen sie noch die Endsummen:
Jerry kaufte 1 Flasche Tequilla, 3 Flaschen Wein und 30 Päckchen Zigaretten und bezahlte 90 Dollar.
Tom kaufte keinen Tequilla, 2 Flaschen Wein und 20 Päckchen Zigaretten und bezahlte 50 Dollar
und Tim kaufte jeweils 1 Flasche Tequilla und Wein sowie 10 Päckchen Zigaretten und bezahlte 40 Dollar .
Wieviel Dollar kosten die Artikel einzeln jeweils höchstens?

10. Ein Hochhaus-Fallschirmspringer (Base Jumper) springt von einem 21 Meter hohen Hochhaus in nordöstliche Richtung. Seine Flugbahn beschreibt eine Gerade. Seine Geschwindigkeit ist konstant; pro Sekunde fliegt der Fallschirmspringer $\sqrt{2}$ Meter in Richtung Nordost und 2 Meter in die Tiefe.
    Das Podest, auf dem der Fallschirmspringer landen will, hat einen Radius von 3 Metern und ist 1 Meter hoch. Die Mitte des Podests befindet sich von der Hausecke, von der der Artist springt, gesehen, 11 Meter in östlicher und 10 Meter in nördlicher Richtung.

    - Führen Sie ein geeignetes kartesisches Koordinatensytem ein.
    - Bestimmen Sie darin die Koordinaten der wesentlichen Punkte:
        - Absprungstelle
        - Mittelpunkt des Podests und
        - Landepunkt auf dem Podest.
    - Welche Strecke legt der Artist im Flug zurück?
    - Wie lange dauert der Flug?
    - Wie groß ist die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers?

P. Jansen, FZ Jülich, H.J. Pflug, RZ/RWTH

Klausur zur Linearen Algebra II

7.7.2008

1. Für welche Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}^3 = I \quad ?$$

(I: Einheitsmatrix).

2. a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

<u>Hinweis:</u> Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n.

b) Verifizieren Sie das Ergebnis für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Anna, Berta und Carla kaufen im Schmuckbedarfsgroßhandel Perlen unterschiedlicher Qualität. Es gibt drei verschiedene Sorten, welche Ober- und Untergrenzen für die Einzelpreise ergeben sich?
   Anna kauft jeweils 10 Perlen jeder Qualität und bezahlt 50 Euro. Berta nimmt auch 30 Perlen, aber nur von Qualität 1 und 2. Sie nimmt jeweils gleich viele und bezahlt 60 Euro. Carla bezahlt per Kreditkarte ihre 60 Perlen für 110 Euro. Sie wählt 25 von Sorte 1, 25 von Sorte 2 und 10 von Sorte 3.

4. Für welche reellen Zahlen a ist die folgende Matrix A invertierbar,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie $Kern(A)$, $Kern(A^2)$ und $Kern(A^3)$ an.
b) Formulieren Sie eine Behauptung, welche der folgenden Beziehungen $=, \neq, \subset$ oder $\subseteq$ zwischen $Kern(A)$ und $Kern(A^2)$ besteht.
c) Beweisen Sie die Behauptung aus b) für beliebige quadratische Matrizen A.

6. Bestimmen Sie zu den drei Punkten in der Ebene $P = (1, 1), Q = (0, 4)$ und $R = (2, 1)$ den größten Kreis, dessen Inneres keinen der drei Punkte enthält, und den kleinsten, der alle drei Punkte enthält, wenn der Mittelpunkt
   - im Koordinatenursprung
   - im Schwerpunkt der drei Punkte, also (1,2), liegt.

7. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ existieren
a) keine Lösung
b) unendlich viele Lösungen
c) eine eindeutige Lösung ?

8. Man berechne alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert TDT^{-1}) ? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix T lauten?

9. Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden.

   Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zuücklegt.

   Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x- bzw. y-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}.$$

   Machen Sie zuerst eine Skizze.
   Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (xz)-Ebene liegt.
   Wo liegt der Austrittspunkt?
   Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

10. a) Man zeige durch vollständige Induktion, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , x \in \mathbb{R}$$

gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & \sum\limits_{k=1}^{n-1} x^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , n \in \mathbb{N}.$$

b) Man gebe auch A^{-1} an $(x \neq 0)$.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II 16.3.2009

1.) Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 1 \\ -2x & + & 2y & = & -4 \end{array}$$

(a) mit dem Gauß-Verfahren

(b) mit der Cramerschen Regel

(c) mit Matrixinversion

2.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 8 & b \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Werte a und b derart, dass A die Eigenwerte -1 und 5 hat. Wie lautet der Eigenvektor zum Eigenwert -1?

3.) Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der folgenden Matrix in Abhängigkeit von α:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & \alpha & 7 \end{pmatrix}$$

4.) Für welche Werte von a und b sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 7 \\ b \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

5.) In welcher Höhe h muss ein Ball abgeworfen werden, so dass er nach einem Aufprall auf dem Boden in genau $\sqrt{20}$m ein Ziel in der Höhe 5m trifft. Dabei sollen die horizontalen Koordinaten des Abwurf- und des Zielpunktes genau 5m auseinander liegen.
Die Erdanziehung soll hier vernachlässigt werden.

h

$\sqrt{20}$ m

4 m

5 m

6.) Zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}^2$, wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$, erfüllen die Eigenschaft $x \sim y$, falls gilt:

$$x_1 + y_2 = x_2 + y_1.$$

Zeigen Sie, dass die Eigenschaft $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

7.) Die Kugel K hat den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Radius 5. Zeigen Sie, dass die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf der Kugel liegen. Berechnen Sie den Cosinus des Winkel, den die Tangentialebenen der Kugel in den Punkten A und B einschließen.

8.) Die Matrix A_n sei definiert als:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass

$$det(A_n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} b_i c_i$$

für alle $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

9.) Eine Katze startet ihre nächtliche Erkundungstour im Ursprung eines Koordinatensystems und läuft zunächst 200 m in Richtung (3, 4). Dann trifft sie senkrecht auf eine Hecke. Eine Maus sitzt hinter der Hecke auf Position (140, 170), wobei die Koordinaten in m angegeben sind. Bis auf welche Entfernung kann sich die Katze im Schutz der Hecke, d.h. durch Bewegung entlang der Hecke, an die Maus heranschleichen?

10.) Bestimmen Sie die Menge der Vektoren, die sich als Kreuzprodukt

$$\vec{v} \times \left(\vec{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ergeben, wobei die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

beliebige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ mit der mittleren Komponente 0 sind. Um welche geometrische Figur handelt es sich?

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 9.7.2009

1.) Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Gleichung der Ebene E, in der alle 3 Punkte liegen.

(b) Es sei U die Menge aller Punkte, die von A und B den gleichen Abstand haben. Geben Sie eine Gleichung für U an. Um welches geometrische Gebilde handelt es sich?

(c) Berechnen Sie die Schnittmenge von U und E.

2.) Heinz wandert zu seinem Freund Jupp, der von ihm aus 10 km in Richtung (3, 4) wohnt. Er läuft in der richtigen Richtung los, doch auf der Hälfte der Strecke schaut er auf seinen defekten Kompass und ändert seinen Weg in Richtung (2,1). Da er sich unsicher ist, versucht er laufend das Haus von Jupp zu erspähen. Leider herrscht leichter Nebel und die Sichtweite beträgt nur 2 km. Wird Heinz das Haus von Jupp sehen oder läuft er an ihm vorbei? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit $det(A) = 2$. Berechnen Sie für beliebige $c \in \mathbb{R}$ und $1 \leq k \leq n$ die folgenden Determinanten:

(a) $det(B)$, wobei

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } j \neq k \\ c \cdot a_{ij} & \text{falls } j = k \end{cases},$$

d.h. B entspricht der Matrix A, nur die k-te Spalte wurde mit einer Konstanten c multipliziert.

(b) $det(c \cdot A)$

(c) $det(A^{-1})$

(d) $det(A \cdot A^T)$

(e) $det(C)$, wobei

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } j \neq 1 \text{ und } j \neq 3 \\ a_{i3} & \text{falls } j = 1 \\ a_{i1} & \text{falls } j = 3 \end{cases},$$

d.h. C entspricht der Matrix A, nur die erste und dritte Spalte sind vertauscht.

4.) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Bilden sie eine Basis des gesamten Raumes V? Wenn nicht, ergänzen Sie zu einer Basis. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a)

$$V = \mathbb{R}^2, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$V = \mathbb{R}^3, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$V = \mathbb{R}^3, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5.) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2} \cdot ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ derart, dass $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$, wobei $\vec{x}$ parallel zu $\vec{b}$ und $\vec{y}$ orthogonal zu $\vec{b}$ ist, d.h. $\vec{x} || \vec{b}$ und $\vec{y} \perp \vec{b}$.

7.) Sei

$$f\left(\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w - 2x + 3z \\ -w + 3x - 2y - 4z \\ -x + 2y + z \\ w - 4y + z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für die obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

(b) Man bestimme den Kern von f und seine Dimension.

(c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\text{Bild}(f))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

8.) Die Bevölkerung eines Landes kann man grob in die drei Klassen Oberschicht (OS), Mittelschicht (MS) und Unterschicht (US) einteilen.
Für eine Modellrechnung nimmt man an, dass sich in einem bestimmten Land derzeit 10% der Bevölkerung in der Oberschicht, 60% in der Mittelschicht und 30% in der Unterschicht befinden.
Um die Entwicklung der Bevölkerung nach 30 Jahren darzustellen, kann man vereinfacht folgende Übergangsmatrix annehmen:

	OS	MS	US
OS	55%	10%	5%
MS	40%	70%	15%
US	5%	20%	80%

d.h. z.B., dass sich 15% der Menschen der Unterschicht nach 30 Jahren in der Mittelschicht befinden.

(a) Bestimmen Sie die Bevölkerungsverteilung von 4000 (repräsentativ ausgewählten) Menschen nach 30 Jahren.

(b) Wie lautet der Ansatz für folgende Fragestellung:
Wie ist die momentane Verteilung der Bevölkerungsschichten unter der Annahme, dass nach 30 Jahren 420 Leute der OS, 2520 Leute der MS und 1260 Leute der US angehören ?
<u>Hinweis:</u> Das Ergebnis von Teil (b) muss nicht berechnet werden, nur Ansatz aufschreiben .

9.) Bei einem wissenschaftlichen Experiment sind zu den äquidistanten Zeiten $t = 0$ min. bis $t = 3$ min. die folgenden Werte des Druckes gemessen worden:

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 5$$

Welche Werte ergeben sich für die Parameter, wenn das Modell
$Druck = a + b * Zeit$
zugrunde gelegt wird ? Man benutze die Methode der kleinsten Quadrate.
Was ergibt sich, wenn der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ sicher ist, also ohne Messfehler ist ?

10.) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, b \neq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $a + b$ Eigenwert von A ist.

(b) Berechnen Sie den zum Eigenwert $a + b$ gehörigen normierten Eigenvektor von A.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 19.3.2010

1.) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4t \\ 1 & 2 & 2 & 4t \\ t & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

und geben Sie an, für welche Werte von t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

2.) Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2_{\geq} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ e^{x+y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Abbildung nicht linear ist.

(b) Treffen Sie begründete Aussagen über die Injektivität und die Surjektivität von f. Ist die Abbildung invertierbar?

3.) Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a den Kern, die Dimension des Kerns, sowie den Rang der Matrix.

(b) Geben Sie ebenfalls in Abhängigkeit von a den Bildraum der Matrix an.

5.) Ein Flughafenbetreiber möchte eine neue Start- und Landebahn bauen. Damit Flugzeuge dort starten und landen dürfen, muss ein Abstand von 10 der Flugbahn der Flugzeuge von dem in der Nähe liegenden Wohngebiet eingehalten werden. Das Wohngebiet liegt bei den Koordinaten $A = (1, 1, 0)^T$. Die Flugzeuge starten am Punkt $B = (11, 21, 0)^T$ und fliegen in Richtung $\vec{r} = (-1, -2, 5)^T$. Zeigen Sie durch Abschätzung, dass der Abstand der Flugbahn vom Wohngebiet groß genug ist und der Flughafenbetreiber die Start- und Landebahn genehmigt bekommt.

6.) Sei V ein Vektorraum und seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V mit $V = U_1 \cup U_2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

(ii) Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$.

(iii) Die Vektoren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ sind stets linear unabhängig.

Beweisen Sie diese Aussage durch die folgenden Teilbeweise:

(a) Zeigen Sie (i)$\Rightarrow$(ii) durch Annahme zweier verschiedener Darstellungen.

(b) Zeigen Sie (ii)$\Rightarrow$(iii).

(c) Zeigen Sie (iii)$\Rightarrow$(i).

7.) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}^n$ und $a, b \in V$. Zeigen Sie, indem Sie **alle** Axiome überprüfen, dass durch

$$\langle a, b\rangle = \delta_a(b) := \begin{cases} 1 & \text{für } a = b \\ 0 & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

kein Skalarprodukt auf V definiert ist.

8.) Gegeben sei die Ebene

$$E_2 : \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

in Parameterdarstellung.

(a) Stellen Sie E_2 in Hesse-Normalform dar.

(b) Bestimmen Sie die Schnittgerade g zwischen E_2 und

$$E_1 : \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

9.) In einer gering bevölkerten Gegend stehen vier Häuser an den Positionen $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

(a) Eine Straßenbaugesellschaft möchte eine gerade Straße so bauen, dass der Abstand von den Häusern zur Straße insgesamt minimal wird. Die Straße kann in der Form $y = ax + b$ dargestellt werden. Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = y$ auf, dass dieses Ausgleichsproblem beschreibt.

(b) Lösen Sie das Minimierungsproblem

$$||A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - y|| \to min$$

mit der Methode der kleinsten Quadrate und geben Sie an, ob diese ideale Straße direkt durch eines der Häuser führt.

10.) (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 3\end{pmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie die Korrektheit Ihres Ergebnisses.

Klausur zur Linearen Algebra 14.07.2010

1.) In einem Berghang steht ein 20 Meter hoher Turm mit einem Funksender auf der Spitze, dessen Reichweite in alle Richtungen 100 Meter beträgt. Der Berghang hat eine gleichmäßige Steigung von 50 % (entspricht 45° zur horizontalen Fläche) und ist ein Südhang, d.h. die Talsohle liegt im Süden, der Gipfel im Norden.

(a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Berghang.

(b) Berechnen Sie für jede der vier Himmelsrichtungen den Punkt ($\in \mathbb{R}^3$) auf dem Hangboden, an dem man den Sender gerade noch empfangen kann.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!

2.) Die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & -1 & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 5 & \beta \end{array}\right)$$

Für welche α und β hat das System

- keine Lösung?
- eine eindeutige Lösung?
- unendlich viele Lösungen?

3.) Gegeben sei die Ebene E_1 in Normalform

$$E_1 \ : \ x + 2y + 3z = 5$$

(a) Wandeln Sie die Ebenengleichung in eine Parameterdarstellung um.

(b) Geben Sie eine äquivalente Parameterdarstellung mit orthonormierten Richtungsvektoren an.

4.) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie A^k für $k = 1..3$.

(b) Stellen Sie eine Vermutung auf für A^n und beweisen Sie diese.

5.) Man zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist auf drei Arten:

(a) Definition: $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0} : \vec{x}^T A \vec{x} > 0$

(b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(c) Alle Hauptabschnittsdeterminanten sind positiv.

6.) In einer Schachtel befinden sich 13 Münzen mit einem Gesamtwert von 3,50€. Es handelt sich dabei um 10ct-, 20ct- und/oder 50ct-Münzen. Wieviele Münzen jeder Sorte befinden sich in der Schachtel. Geben Sie alle möglichen Stückelungen an.
Hinweis: Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem auf!

7.) Sei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und J_n die $n \times n$-Matrix mit lauter Einsen. Zeigen Sie, dass die Inverse zu $(I_n - J_n)$ gleich $I_n - \dfrac{1}{n-1} J_n$ ist, indem Sie den Ansatz $AA^{-1} = I$ verwenden.

8.) Die Firmen ASol, BSol und CSol führen eine völlig neuartige Solaranlage auf dem Markt ein. Zu Beginn besitzt ASol 40%, BSol 20% und CSol 40% Marktanteil. Während des ersten Jahres verliert ASol 10% seiner Kunden an CSol, BSol gibt 20% seiner Kunden an ASol und 10% an CSol ab, und CSol verliert jeweils 10% an ASol und BSol. Während der folgenden Jahre verändern sich die Marktanteile stets nach demselben Schema.

(a) Welche Marktanteile besitzen die drei Firmen am Ende des ersten bzw. zweiten Jahres?

(b) Nach einigen Jahren haben sich die Marktanteile eingependelt und verändern sich nicht mehr. Alle drei Unternehmen genießen ihren großen wirtschaftlichen Erfolg. Wie lautet der Name des Marktführers? Begründen Sie Ihre Antwort!

Klausur zur Linearen Algebra 11.03.2011

1.) Die 3 Badmintonklubs A, B und C einer Stadt bringen zu jedem ihrer Spiele immer gleich viele Zuschauer mit. Sie wollen anhand folgender Aussage eines Reporters die Anzahl der Zuschauer jeder Mannschaft ermitteln:

„Bei dem Spiel A gegen B kamen 200 Zuschauer, das Spiel B gegen C sahen 700 Zuschauer und beim Hin- und Rückspiel von A gegen C kamen zusammen 600 Zuschauer.“

Warum kann diese Aussage des Reporters nicht stimmen?

2.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Nennen Sie zwei Bedingungen, die invertierbare Matrizen immer erfüllen.

(b) Berechnen Sie A^{-1}.

(c) Berechnen Sie $\det(A), \det(A^T), \det(A^{-1})$ und $\det((A^{-1})^T)$.

(d) Ist A eine Orthogonalmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) Ein Rasensprenger mit der Reichweite $15m$ bewässert genau den (kleineren der beiden) Sektor(en) zwischen einer Sonnen- und einer Ringelblume, die vom Rasensprenger aus gesehen an den Stellen

$$S = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad R = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wachsen, wobei die Größen in m angegeben sind.

(a) Wo müsste eine Blume stehen, die genau in der Mitte des Sektors platziert ist. Dabei genügt die Angabe einer Richtung, die genaue Position ist irrelevant.

(b) Wird versehentlich auch der wasserscheue Kaktus an der Stelle

$$K = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

bewässert?

Eine Skizze ist zwar hilfreich, kann aber nicht als Lösung gewertet werden.

4.) Gegeben sei eine Abbildung mit der zugehörigen Matrix A.

(a) Wie lauten die Fachbegriffe zu folgenden Beschreibungen:

i. Die Menge der Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden

ii. Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- oder Spaltenvektoren

iii. Die Menge der Vektoren, auf die abgebildet werden kann

(b) Berechnen Sie in Abhängigkeit des Parameters b die drei Ausprägungen der Begriffe aus Teil (a) zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}.$$

5.) Eine Zahnradbahn fährt mit einer konstanter Geschwindigkeit von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro Zeiteinheit, d.h. dass die Bahn pro Zeiteinheit zwei Längeneinheiten in x-Richtung, zwei Längeneinheiten in y-Richtung und eine Längeneinheit in z-Richtung zurücklegt. Die z-Richtung gibt dabei die Höhe an.

(a) Wie groß ist die Steigung der Trasse der Zahnradbahn? Drücken Sie dabei die Steigung in %, also als Höhenunterscheid pro 100 Längeneinheiten in der x-y-Ebene, aus!

(b) Ein Beobachter steht auf einem Berg, der sich von der jetzigen Position der Bahn aus gesehen genau an der Stelle

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

befindet. Wie lange muss der Beobachter warten, bis die Zahnradbahn den kürzesten Abstand zu ihm hat?

6.) Es sei V der Vektorraum der auf dem Intervall $[a, b]$ definierten Funktionen mit den Unterräumen

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{f(x) \mid f(a) = 0\} \\ \text{und} \quad U_2 &:= \{f(x) \mid f'(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass $U_1 \cup U_2$ keinen Unterraum bildet.

Tipp: Erstellen Sie ein Gegenbeispiel mit Hilfe der Vektoren

$$\begin{aligned} u_1 &\in U_1 \quad \subset U_1 \cup U_2 \\ \text{und} \quad u_2 &\in U_2 \quad \subset U_1 \cup U_2, \end{aligned}$$

wobei $u_1 \notin U_2$ und $u_2 \notin U_1$.

7.) Gegeben sei die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_a in Abhängigkeit von a.

(b) Bestimmen Sie a in der Art, dass A_a die Eigenwerte -1 und 2 besitzt.

(c) Bestimmen Sie die zu den beiden Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren.

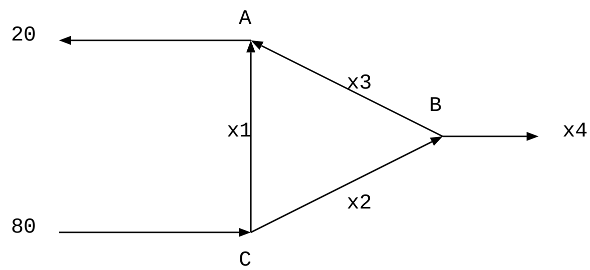
8.) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist eine Matrix $M_n := (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 + a^2 & \text{für } i = j \\ a & \text{für } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\det(M_n) = \sum_{i=0}^{n} (a^2)^i.$$

1.) Der abgebildete Ausschnitt aus einem Autobahnnetz stellt den Verkehrsfluss in die angegebenen Richtungen dar. Die Zahlen bzw. x-Werte ($x_1 ... x_4$) beziffern die Anzahl der Autos pro Minute, die diese Strecke befahren.



(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung für den Verkehrsfluss (Anzahl Autos pro Minute).

(b) Wie sieht der maximale Wert für x_3 aus, wenn der Verkehr in die vorgegebenen Richtungen fließen muss ?

2.) Die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $t \in \mathbb{R}$ sei:

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & t \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & (1-t)^2 & 0 \end{array}\right)$$

Für welche t hat das System

- eine eindeutige Lösung?
- unendlich viele Lösungen?
- keine Lösung?

(Mit Angabe der Lösungen)

3.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, ohne die Inverse zu berechnen.

(b) Berechnen Sie A^{-1}.

(c) Ist die Matrix symmetrisch?

(d) Handelt es sich um eine Orthogonalmatrix?

(e) Ist die Matrix positiv definit?

Begründen Sie ihre Aussage jeweils kurz.

4.) Während des Studiums der Biologie wird die Entwicklung einer Fliegenart von Generation zu Generation experimentell untersucht. Dazu benötigen die Studenten die Hilfe der MATSE Studenten. Sie sollen die im Versuch zu erwartenden Populationen anhand einiger Randbedingungen berechnen. Bei den Fliegen unterscheidet man drei Altersstufen:
Jungtiere (Altersstufe 1), heranwachsende Tiere (Altersstufe 2) und die erwachsenen Tiere (Altersstufe 3).
Im Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ wird jeweils die Anzahl der Fliegen der entsprechenden Altersstufe durch die Variablen a_1, a_2, a_3 angegeben. Der Vektor $\vec{a}$ beschreibt also die Verteilung der Altersstufen in der Population.
Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt, wie sich die Fliegen von Generation zu Generation entwickeln, d.h. mit $M \cdot \vec{a}$ berechnet sich die Verteilung der nachfolgenden Generation.

(a) Erläutern Sie kurz, welche Bedeutung die Matrixelemente v_1 und v_2 haben.

(b) Seien $v_1 = \frac{2}{3}$ und $v_2 = 4$.
Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
Die momentane Population ist $a_1 = 600$, $a_2 = 240$ und $a_3 = 120$. Was haben die Biologiestudenten als Nachfolgepopulation zu erwarten?

(c) Für $v_1 = \frac{2}{3}$ und $v_2 = 4$ sei die Nachfolgepopulation $a1 = 900$, $a2 = 330$, $a3 = 90$. Wie lautete die Vorgängerpopulation?

(d) Falls $v_1 = 1$ ist, bei welchem Wert für v_2 gibt es Populationen, die von Generation zu Generation gleich bleiben?
Welche Verteilung auf die Altersstufen ergibt sich in diesem Fall, wenn die Gesamtpopulation 1200 Tiere beträgt?

5.) Ein Birkenbaum hat in 2 m Höhe einen Ast, der gerade in Richtung $(-3, 2, 2)^T$ wächst, wobei die dritte Komponente die Höhe angibt. Auf dem unebenen Gelände steht von dem Birkenbaum aus gesehen an der Stelle $(-3, 8, -2)^T$ eine Linde, die einen Ast in 3 m Höhe besitzt. Dieser Ast wächst genau in die Richtung $(1, -2, 2)^T$.

(a) An welcher Stelle muss eine Spinne mit dem Bau eines Netzes beginnen, wenn sie von dem beschriebenen Ast des Birkenbaums einen möglichst kurzen Faden zu dem beschriebenen Ast der Linde spinnen möchte?

(b) Wie lang muss dieser Faden sein?

6.) Sei $\mathcal{S}$ der von den Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Teilraum von $\mathbb{R}^4$.

a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ von $\mathcal{S}$.

b) Zerlegen Sie den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gemäß $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in \mathcal{S}$, $\vec{z} \in \mathcal{S}^{\perp}$, und berechnen Sie $\vec{y}$ und $\vec{z}$.

7.) Sei $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und
$\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$.

a) Finden Sie einen Vektor $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, so dass $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ eine zweite Orthonormalbasis ist. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

b) Betrachten Sie einen beliebigen Vektor $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \xi_1\vec{v}_1 + \xi_2\vec{v}_2$ und bestimmen Sie die Matrix M (Transformationsmatrix, Übergangsmatrix), die den Basiswechsel gemäß

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreibt.

c) Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ sei $\vec{y} = L(\vec{x})$ der Vektor, den man aus $\vec{x}$ durch Spiegelung an der durch $\vec{v}_1$ bestimmten Achse erhält (machen Sie eine geeignete Skizze);
$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung (das ist offensichtlich, Sie brauchen das nicht zu begründen). Wie lautet die Matrix von L bzgl. der Basis $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?

8.) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

lässt sich überführen in folgende Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeilenstufenform:

(a) dim(Kern(A)), dim(Bild(A))

(b) eine Basis des Kerns, eine Basis des Bildes sowie eine Basis des Zeilenraumes (Lineare Hülle der Zeilenvektoren) von A

Aufgabe 1

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen einen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ auf.
Berechnen Sie eine Orthonormalbasis, die den gleichen Raum aufspannt.

Aufgabe 2

Es sei

$$A_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

eine von $t \in \mathbb{R}$ abhängige Menge dreier Vektoren.

(a) Für welche t bildet A_t eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis A_3.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Dimension der Linearen Hülle von

$$A_2 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} \right\}$$

.

Aufgabe 3

Gegeben sind die beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.
Bestimmen Sie die Matrix A, die diese Eigenvektoren und Eigenwerte besitzt.

Hinweis: Eine Möglichkeit zur Lösung ist das Aufstellen eines linearen Gleichungsssstems mit den Koeffizienten der gesuchten Matrix als Unbekannte.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgenden reellen Funktionen:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x^{13} - x^{11} + 2 \\ g_2(x) &= -x^{13} + 1 \\ g_3(x) &= 2 \cdot x^{13} + x^{11} \\ g_4(x) &= e^x \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{g_1, g_2, g_3\}$ linear unabhängig sind.

(b) Für welchen Vektorraum bilden $\{g_1, g_2, g_3\}$ eine Basis?

(c) Untersuchen Sie $\{g_2, g_3, g_4\}$ auf lineare Unabhängikeit.

Aufgabe 5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \cdot b \\ 0 & b+1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $M_k = \{(a,b) | a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, rg(A) = k\}$ für $k = 0, 1, 2$.
Bestimmen Sie jeweils die Menge der Parameter (a, b), für die der Rang von A gleich k ist, also M_0, M_1, M_2.

(b) Bestimmen Sie für die drei Fälle M_0, M_1, M_2 jeweils den Kern und das Bild der Abbildung A.

Aufgabe 6

(a) Geben Sie die allgemeine Definition für ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ an.

(b) Handelt es sich im folgenden Fall um ein Skalarprodukt? (Begründung!)

$$V = \mathbb{R}^4, \langle v, w \rangle := v^T A w$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v, w \in V$$

Aufgabe 7

Gegeben ist $c, t \in \mathbb{R}$ und die folgende Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie

- $det(A_t)$
- $det(A_t^5)$
- $det(c \cdot A_t)$

Hinweis: Für beliebige Matrizen A und B und deren diagonale Zusammensetzung mit Hilfe von Nullmatrizen, gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B).$$

(b) Bestimmen Sie außerdem

- $det(A_t^{-1})$
- $det((A_t^{-1})^5)$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Ausdrücke definiert?

Aufgabe 8

Am Himmel wird ein unbekanntes Flugobjekt beobachtet. Es scheint sich entlang der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu bewegen.

Das Ufo überquert eine Hochspannungsleitung, die durch die Punkte $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ verläuft.

(a) Stellen Sie die Geradengleichung der Hochspannungsleitung auf.

(b) Berechnen Sie den Punkt auf der Flugbahn des Ufos und den Punkt auf der Geraden der Hochspannungsleitung, zwischen denen der minimale Abstand angenommen wird.

(c) Berechnen Sie den minimalen Abstand des Ufos von der Hochspannungsleitung.

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH, Prof. Dr. S. Pawelke ZAM/FZJ, FH Abt. Jülich

Klausur zur Linearen Algebra I und II 23.9.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Liegt der Punkt P auf der Geraden g?. Begründen Sie Ihre Antwort. 2

b) Geben Sie die allgemeine Gleichung der Verbindungsgeraden zwischen P und g an. 2

c) Wie lautet die Gleichung des Lotvektors von P auf g? 8

Aufgabe 2 : Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist. 12

b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^{\perp}$? 3

Aufgabe 3 : Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $B = A^4$ und zeige durch vollständige Induktion, dass gilt:

$$B_n = A^{4n} = \begin{pmatrix} (-2i)^n & 0 \\ 0 & (-2i)^n \end{pmatrix} \quad \forall \in \mathbb{N}.$$

10

Aufgabe 4 : Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 8 \\ 5 & 14 & 21 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$. 10

b) Welchen Wert hat die Determinante von A und welchen Rang hat die Matrix A? (Begründung!) 3

Aufgabe 5: Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimme die inverse Matrix A^{-1}, falls sie existiert. 10

Aufgabe 6: Gegeben ist die $n \times n$ - Dreidiagonalmatrix A_n durch

$$a_{k,k} = a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = 1,$$

$$a_{i,k} = 0 \text{ sonst.}$$

a) Man berechne $\det(A_n)$ für n=1,2,3,4. 3

b) Man zeige, dass gilt

$$\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2}) \quad \forall\, n \geq 3$$

und folgere daraus eine Beziehung zwischen $\det(A_{n+1})$ und $\det(A_{n-2})$. 10

c) Bestimmen Sie damit und mit Teil a) die Werte von $\det A_n$ für $n = 5, ..., 10$. 3

Aufgabe 7: Man bestimme sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Vor Beginn der Rechnung sollten folgende Fragen beantwortet werden:
i) Was folgt für die Eigenwerte aus dem Rang der Matrix A ?
ii) Ist $\vec{x} = (1,1,1)^T$ ein Eigenvektor von A? 12

Aufgabe 8: Zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B heissen äquivalent $(A \sim B)$, falls eine invertierbare Diagonalmatrix D existiert, die von A und B abhängt, so dass gilt $A = D \cdot B$. Man zeige, dass diese Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist d.h. dass gilt:

$$A \sim A;$$

$$A \sim B \rightarrow B \sim A;$$

$$A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C.$$

12

Summe der Punkte: **100**

1. Man bestimme die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Führen Sie eine Probe durch.

2. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie die Richtigkeit folgender Formel:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & (n-1)(\frac{n}{2}+1)+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Bei der letzten Lieferung ergab sich folgendes:
   100 Bleistifte, 20 Pakete Kopierpapier und 10 Ordner kosteten 100 Euro. 50 Bleistifte, 10 Pakete Kopierpapier und 20 Ordner kosteten 140 Euro. Sie möchten jetzt 200 Bleistifte und 5 Ordner bestellen. Mit welchem Preis müssen Sie höchstens rechnen, wenn Ihr Lieferant unveränderte Festpreise hat?

4. Gegeben ist
   $A_t = \begin{pmatrix} 1-2t & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
   Man zeige, dass der Vektor $\vec{x}_t$ Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?
   Man bestimme den zweiten Eigenwert und den dazu gehörigen Eigenvektor.

5. Bestimmen Sie in $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & . & . \\ . & 0 & . \end{pmatrix}$

   die fehlende Elemente, sodass A orthogonal ist, also die Spalten und Zeilen orthonormal sind.
   Es ist nur eine Lösung gesucht.

6. Man schraffiere den Bereich der (x, y) Ebene, der gegeben ist durch
   $x + y \geq 4$,
   $\frac{1}{2}x + y \leq 6, \; x \geq 0, \; y \geq 0.$
   Bestimmen Sie die eingeschlossene Fläche. Wieviel m^3 Teer benötigt man für die Tragdeckschicht einer Straße, die eine Dicke von 8 cm hat, wenn die obigen Angaben in Metern gemessen sind?

7. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die vier verschiedenen (evtl. komplexen) Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

8. Ein Draht sei straff zwischen Punkten gespannt, die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Koordinaten $(10, 10, 10)$ bzw. $(10, 20, 30)$ haben. Wie lang ist der Draht? Wie weit ist der Punkt mit den Koordinaten $(0, 10, 10)$ von dem Draht entfernt (Rechnung oder Begründung)?

9. Sei
$$F\left(\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{c} 2x+y \\ x-y+z \\ 4x-y+2z \end{array}\right)$$

   (a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

   (b) Man bestimme Kern von F und seine Dimension.

   (c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\text{Bild}(F))$.

   (d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

10. Für die Matrizen in $M := \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ zeige man:

    (a) M ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.

    (b) Die Multiplikation ist kommutativ.

    (c) Für jede Matrix aus M (außer der Nullmatrix) gibt es ein inverses Element, das ebenfalls in M liegt.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II 20.9.2007

1.) Sie sitzen auf einer Bank in einem Park. 3 m östlich und 5 m nördlich von Ihnen befindet sich die Mitte eines 1 m dicken Baumes. Können Sie den herrenlosen 500 Euro-Schein sehen, der 5 m östlich und 12 m nördlich von Ihnen auf dem Rasen liegt? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie Ihre Antwort.

2.) Für welche reellen Werte von α ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) invertierbar,

(b) symmetrisch,

(c) positiv definit,

(d) orthogonal (orthogonale Spalten),

(e) eine Dreiecksmatrix.

3.) Berechnen Sie die folgenden Determinante:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

falls sie existiert.

5.) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.) Gegeben sind im $\mathbb{R}^2$ die Geraden

$$G_1 : 4x + 3y = 15 \quad \text{ und } G_2 : 12x - 5y = 13$$

Bestimmen Sie einen der 4 Punkte P_1 bis P_4, die von G_1 den Abstand 3 und von G_2 den Abstand 6 haben.

7.) Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

(a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$

(c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

8.) Eine Pyramide hat die Ecken $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (-1, -1, 0)$ und $D = (0, 1, 2)$. Wie groß ist jeweils der Cosinus des Winkels zwischen der Grundfläche (ABC) und der Seitenfläche (ABD) ?

9.) Bestimmen Sie zur Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

die Menge

$$M_3 = \{t \in \mathbb{R} \mid rg(A_t) = 3\}$$

10.) Zeigen Sie, dass für eine komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1$$

gilt, dass A^{4n} eine reelle Matrix ist für $n \in \mathbb{N}$.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 24.9.2008

1.) Zeigen Sie, dass für alle Orthogonalmatrizen A gilt $|det(A)| = 1$.
Tipp: Starten Sie mit der Berechnung von $det(A \cdot A^T)$.

2.) Das abgebildete Haus hat die Ausmaße: 10 m in x-Richtung, 4 m in y-Richtung und zwischen 4 und 8 m in z-Richtung (siehe Abbildung). Genau in der Mitte seines Daches steht eine 1 m hohe Antenne. Auf das Haus fällt (paralleles) Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{v} = (1, -1, -3)$.

(a) Berechnen Sie Anfangs- und Endpunkt der Antenne. Der Koordinatenursprung liegt in der linken unteren Hausecke.

(b) Berechnen Sie den Schattenpunkt der Antennenspitze auf der Dachoberfläche.

(c) Wie lang ist der Schatten der Antenne auf dem Dach?

8 m

4 m

4 m

10 m

3.) Zeigen Sie, dass die Wahrheitswerte w und f mit der XOR-Verknüfung

XOR	w	f
w	f	w
f	w	f

eine Gruppe bilden.

4.) Sei

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ -3x+z \\ -x+2y+5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

(b) Man bestimme Kern von F und seine Dimension.

(c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\mathrm{Bild}(F))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

5.) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.) Gegeben seien zwei Punkte $P = (3, 3, 2)$ und $Q = (0, 2, -2)$ und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch den Punkt P in Richtung von $\vec{a}$ und der Geraden g_2 durch den Punkt Q in Richtung von $\vec{b}$.

(b) Schneiden sich die beiden Geraden? Sind sie parallel? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

(c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden Geraden.

7.) Für welche reellen Zahlen a ist die folgende Matrix A invertierbar,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

8.) Gegeben ist
$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & -1-t \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
Man zeige, dass der Vektor $\vec{x}_t$ Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?
Man bestimme auch den zweiten Eigenwert.

9.) Orthonormieren Sie nach dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10.) Welche der folgenden Funktionen sind linear abhängig bzw. linear unabhängig?

(a) $f_1(x) = 3 + 2x + x^2$, $f_2(x) = -2 + x + x^2$, $f_3(x) = -7 + x^2$

(b) $f_1(x) = 1 + 2x + x^2$, $f_2(x) = -3 + 5x + 4x^2$, $f_3(x) = -2 + 8x + 5x^2$

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 23.9.2009

1.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die ersten fünf Potenzen der Matrix A.
b) Was fällt Ihnen auf? Leiten Sie daraus eine Regel ab.
c) Beweisen Sie die Regel exemplarisch für $A^{4n+1} (n \in \mathbb{N}_0)$ mittels vollständiger Induktion.

2.) Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen lineare Abbildungen sind und geben Sie gegebenenfalls die Abbildungsmatrix an.

a) $f(x, y, z) = (3x + 7y - z, 2 - y - z, x + y - 3z)$
b) $f(x, y, z) = (x^2 + y + z, x - y + z, 3x + 2y - z)$
c) $f(x, y, z) = (x + 5y + z, 3x - y + 2z, 6x + 5y - 7z)$

3.) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem Ax=b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1+\alpha \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) keine Lösung besitzt,
b) genau eine Lösung besitzt
c) unendlich viele Lösungen besitzt.
d) Für den Fall, dass es eindeutig lösbar ist (Lösung hängt gegebenenfalls noch von α ab), soll diese auch angegeben werden.

4.) Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, welche Dimension der von den Vekoren $\vec{a} = (\alpha - 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha, -1, 1)$, $\vec{c} = (\alpha + 1, -2, \alpha + 1)$ aufgespannte Untervektorraum hat, und geben Sie jeweils eine Basis des von ihnen aufgespannten Untervektorraumes an.

5.) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

6.) Bestimmen Sie - wenn möglich - die Inverse der Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Man bestimme den Kern von A und seine Dimension.

(b) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\text{Bild}(A))$.

(c) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

8.) Eine Mobilfunkantenne muss wegen der stürmischen Lage auf einem Berg mit Seilen stabilisiert werden. Die Spitze der Antenne hat die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die Seile werden an den Punkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befestigt.

(a) Berechnen Sie die Ebene, in der die Punkte A,B,C liegen, in Hessescher Normalform.

(b) Der Fuß der Mobilfunkantenne liegt in der gleichen Ebene wie die Endpunkte der Seile. Die Antenne steht genau in z-Richtung. Bestimmen Sie die Höhe der Antenne (1 LE = 10 m).

9.) Mit der Wassertiefe ändert sich der Druck, der auf einem im Wasser befindlichen Körper wirkt. Es wird ein Experiment durchgeführt, um den vermuteten Zusammenhang (Druck $= \alpha + \beta \cdot$Wassertiefe) zwischen Wassertiefe und Druck zu überprüfen. Es wurden folgende Messwerte aufgenommen.

Wassertiefe	Druck		
1	2		
3	4		
5	5.5		
7	8.5		
9	10		

a) Bestimmen Sie die Parameter α und β nach der Methode der kleinsten Quadrate.

b) Ermitteln Sie mit diesen Werten den Druck in einer Tiefe von 15 Metern.

10.) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' des Punktes

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

an der Geraden g (siehe Zeichnung):

$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A

A'

g

Klausur zur Linearen Algebra 23.09.2010

1.) Sei eine Matrix A gegeben, mit $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie A^k für $k = 1..4$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (2^n - 1)a & 2^n \end{pmatrix}$$

2.) Gegeben ist die Menge von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind.

(b) Orthonormieren Sie die Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

3.) Gegeben sei folgender Ausdruck:

$$AA^T B^{-1}(\vec{a} \times \vec{b})$$

(a) Geben Sie jeweils den Typ $n \times m$ von A, B, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so genau wie möglich an. Sind alle Typen eindeutig? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Begründen Sie, ob Sie die Determinante des Ausdrucks bestimmen können.

4.) Ihnen sind die Datenpunkte $(0,2), (1,3), (2,1)$ und $(3,3)$ gegeben. Finden Sie eine passende Ausgleichsgerade mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

5.) In einem Land gibt es drei wöchentlich erscheinende Computer-Zeitschriften Z_1, Z_2, Z_3. 70% der Käufer von Z_1 bleiben bei Z_1, 50% der Käufer von Z_2 bleiben bei Z_2 und 60% der Käufer von Z_3 bleiben bei Z_3. Die weitere Verteilung der Käuferanteile wird wie folgt beobachtet:
20% der Käufer von Z_1 wechseln zu Z_2, 20% der Käufer von Z_2 wechseln zu Z_3 und 10% der Käufer von Z_3 wechseln zu Z_1.

(a) Stellen Sie das Kaufverhalten in einem Diagramm dar und erzeugen Sie die zugehörige Übergangsmatrix.

(b) Zu Beginn der Untersuchung liegen die Käuferanteile bei 30% für Z_1, 40% für Z_2 und 30% für Z_3. Welche Käuferanteile haben die Zeitschriften nach einer Woche?

6.) Bei einer militärischen Übung soll der Kurs eines U-Boots bestimmt werden. Zwei Schiffe orten hierzu das U-Boot.
Das Schiff A peilt von der Position $(0|0|0)$ das U-Boot in der Richtung $\vec{x}_A = (6|\,9|\,-\frac{1}{2})$ an. Zur gleichen Zeit meldet das Schiff B (Position $(0|4|0)$) die Richtung $\vec{x}_B = (3|\,4|\,\,-\frac{1}{4})$.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des U-Boots bei dieser Peilung.

(b) Vier Minuten später ergibt eine zweite Peilung der beiden Schiffe die U-Boot-Koordinaten $(23|36|-\frac{9}{4})$. (Alle Angaben in Kilometern.)

i. Befindet sich das U-Boot auf einer Steig- oder Sinkfahrt?

ii. Geben Sie eine Geradengleichung für die U-Boot-Bewegung an.

iii. Mit welcher Geschwindigkeit (in Kilometern pro Stunde) bewegt sich das U-Boot?

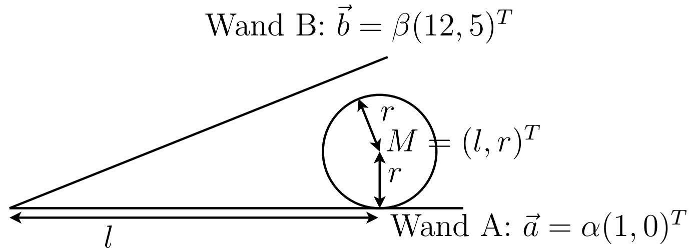
7.) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Matrix A_t gegeben, mit

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_t in Abhängigkeit von t.

(b) Für welche Werte von t besitzt A_t jeweils keinen, genau einen, zwei verschiedene Eigenwerte?

8.) Eine Kugel mit Radius r wird so weit wie möglich in den Winkel einer spitzen Raumecke geschoben. Dies erfolgt in mehreren Zwischenschritten.



(a) Nehmen Sie an, die Kugel liegt dicht an der Wand A, aber noch nicht genau in der Ecke. Der Abstand zwischen dem Berührungspunkt zur Wand A und der Raumecke sei l. Der Kugelmittelpunkt ist demnach $M = (l, r)^T$ (siehe Skizze). Berechnen Sie den Abstand x zwischen Kugeloberfläche und der Wand B in Abhängigkeit von r und l.

(b) Die Kugel wird jetzt entlang der Wand A so weit wie möglich in die Ecke geschoben. Welche Bedingung muss anschließend für x gelten?

(c) Es sei r=3 cm. Wie groß ist l, wenn die Kugel beide Wände berührt?

Klausur zur Linearen Algebra 23.09.2011

1.) Die drei Skifahrer A, B und C an den Positionen

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

fahren Ski auf einer ebenen Piste. A fährt in Richtung $(-3, 0, -1)^T$ den Berg hinab, während B in Richtung $(3, 4, -1)$ fährt. Dabei prallen die beiden unglücklicherweise zusammen.

(a) Zeigen Sie, dass A und B auch bei der Abfahrt auf der Piste bleiben und ein Snowboardfahrer D, der in Richtung $(1, 1, -1)^T$ talwärts fährt, auf einer anderen Piste unterwegs sein muss.

(b) Welche Koordinaten hat der Punkt, an dem der Zusammenprall zwischen A und B stattfindet?

(c) Berechnen Sie den Cosinus des Winkel, unter dem A und B zusammenprallen.

2.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ die Abbildung

$$f(x_1, x_2, x_3) = a \cdot x_2 + (b-1) \cdot x_3$$

(a) Welche Werte kann der Rang der Abbildungsmatrix zu f annehmen? Bestimmen Sie für beide Fälle die Menge der Paare (a, b) mit dem jeweiligen Rang.

(b) Bestimmen Sie für beide Fälle jeweils den Kern und das Bild der Abbildung f.

(c) Sei nun $g : V \to V$ eine lineare Abbildung innerhalb eines beliebigen Vektorraum V. Gilt die allgemeine Aussage:

$$\text{Kern}(g) \quad \cup \quad \text{Bild}(g) \quad = \quad V \quad ?$$

Beweisen Sie Ihre Aussage.

3.) Gegeben sei der euklidische Raum des $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2.$$

(a) Beweisen Sie, dass das gegebene Skalarprodukt positiv definit ist, d.h. dass

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

gilt.

(b) Über welche Eigenschaften neben der positiven Definitheit ist ein Skalarprodukt definiert? Der Nachweis der Eigenschaften für das hier gegebene Skalarprodukt ist <u>nicht</u> erforderlich.

(c) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. des gegebenen Skalarproduktes. Verwenden Sie dazu die Standardnorm bzgl. des gegebenen Skalarproduktes.

4.) Die stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ bilden bekanntlich einen Vektorraum $C[0,1]$ über den reellen Zahlen. Seien nun folgende Vektoren aus diesem Vektorraum gegeben:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x+1 \\ f_2(x) &= x-2 \\ f_3(x) &= x^2-1 \\ f_4(x) &= e^x \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis des Unterraums P_2 der Polynome vom Grad kleinergleich 2 bilden.

(b) Untersuchen Sie die drei Funktionen $\{f_1, f_2, f_4\}$ auf Lineare Unabhängigkeit.

(c) Welche Dimension hat der Vektorraum $C[0,1]$? Bilden die Funktionen $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ somit eine Basis von $C[0,1]$?

5.) Die Determinante der folgenden Matrix A_1 ist:

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = d.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $\det(A_1)$ die Determinaten der folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $c, d \in \mathbb{R}$:

(a) $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} & c \cdot a_{33} & c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(b) $A_3 = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + a_{41} & a_{12} + a_{42} & a_{13} + a_{43} & a_{14} + a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(c) $A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(d) $A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} + c \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + c \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + c \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + c \cdot a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(e) $A_6 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} + c \cdot a_{31} & a_{12} + c \cdot a_{32} & a_{13} + c \cdot a_{33} & a_{14} + c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(f) $A_7 = (A_1)^{-1}$

6.) Welche Bedingung für a, b und c muss erfüllt sein, damit das folgende Gleichungssystem (mindestens) eine Lösung hat?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{aligned}$$

Kann das System genau eine Lösung haben?
Geben Sie auch die Lösungen des Gleichungssystems an.

7.) Es seien S und T die folgenden Teilräume des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \,\middle|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}, \\ T &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 2x_4 \right\}. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Dimension sowie eine Basis von S bzw. T an.

(b) Geben Sie die Dimension sowie eine Basis von $S \cap T$ an.

8.) Betrachten Sie den vierdimensionalen Vektorraum P_3 aller reellen Polynome vom Grad kleinergleich 3 und die lineare Abbildung

$$D\colon P_3 \to P_3,$$
$$D(p) = p''.$$

(a) Finden Sie den Kern und das Bild von D.

(b) Ist D injektiv bzw. surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear oder nicht linear sind.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x \\ 2y + x \\ x - y \end{pmatrix}$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ x + 1 \end{pmatrix}$

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ xy \end{pmatrix}$

Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$x_2 - 2x_3 = a \quad \wedge \quad 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = b \quad \wedge \quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

(a) Berechnen Sie für $a = b = 0$ die Lösungsmenge unter Verwendung des Gauß-Algorithmus.

(b) Untersuchen Sie, ob das lineare Gleichungssystem für $a = 2 \wedge b = 1$ lösbar ist.

(c) Wie hängt b von a ab, wenn das lineare Gleichungssystem lösbar ist? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 3

Aus einem schmalen Spalt zwischen zwei Punkten $W_1(2/2/2)$ und $W_2(3/3/3)$ fließt Wasser senkrecht - also in z-Richtung - nach unten auf eine ebene Felsplatte, auf der die Punkte $F_1(6/0/0)$, $F_2(3/0/1)$ und $F_3(3/3/-1)$ liegen.

(a) Zwischen welchen Punkten trifft das Wasser auf die Felsplatte?

(b) Berechnen Sie die Richtung, in der das Wasser auf der Felsplatte abfließt.
(Hinweis: Berechnen Sie die Schnittgerade der Felsplatte mit der x-y-Ebene und finden Sie einen Vektor, der senkrecht auf diese Schnittgerade ist, aber in der Felsplattenebene liegt.)

Aufgabe 4

Gegeben seien die drei Einheitsvektoren der kanonischen Basis $\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$. Außerdem sind folgende Vektoren $\vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{v}_3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Stellen Sie die drei Einheitsvektoren der kanonischen Basis $\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3$ in der Basis $\mathfrak{B} = \{\vec{v}_1,\, \vec{v}_2,\, \vec{v}_3\}$ dar.

Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^n für $n = 2, 3$.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Gegeben sei die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Betrachten Sie die folgenden Abbildungen

(i) T_1 : die Spiegelung an der x-Achse

(ii) T_2 : die Drehung um $60°$ im mathematisch positiven Drehsinn

(iii) $T_3 := T_2 \circ T_1$: die Hintereinanderausführung von Spiegelung und Drehung

Stellen Sie jeweils die zugehörigen Abbildungsmatrizen A_1, A_2, A_3 auf.

Hinweise:

- In den Spalten einer Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Einheitsvektoren.
- $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos 60° = \frac{1}{2}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A_3. (Rechnen Sie oder argumentieren Sie mit einer Skizze.)

(c) Wie lautet die Abbildungsmatrix A_3' der linearen Abbildung T_3 bezüglich der Basis aus Eigenvektoren?

Aufgabe 7

Bei der Untersuchung einer Bewegung gemäß

$$y(t) = a + b \cdot \frac{t^2}{2}$$

liefern drei Messungen zu den Zeiten $t = 0, 1, 2$ in Sekunden für die y-Koordinate die Werte $y = 1, -2, 2$ in Metern.

Stellen Sie das Normalgleichungssystem zur Bestimmung der Parameter a und b auf und bestimmen Sie damit die Bestwerte von a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate (Lineare Regression).

Aufgabe 8

Sei $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n und T die durch

$$(Tp)(x) := \int_0^x p(t)dt, x \in \mathbb{R}$$

definierte lineare Abbildung $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(a) Aus welchen Polynomen besteht das Bild von T?

(b) Geben Sie eine Basis des Bildes von T an.

(c) Zeigen Sie, dass T injektiv ist.

(d) Wie lautet die Umkehrabbildung $T^{-1}\colon \mathrm{Bild}(T) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Aufgabe 9

Testen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			Für jede Orthogonalmatrix A gilt: $A^{-1} = A$.
2			Die Methode der Determinantenentwicklung nach Laplace ist eine rekursive Methode zur Berechnung von Determinanten.
3			Abbildungsmatrizen zu Spiegelungs- und Drehabbildungen sind typische Orthogonalmatrizen.
4			Die rechte Seite jeder Normalform von Hyperebenen gibt den Abstand der Hyperebene zum Ursprung an.
5			Für beliebige quadratische Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
6			Auf jedem reellen Vektorraum ist ein Skalarprodukt definiert.
7			Durch Multiplikation einer Matrix mit einem ihrer Eigenvektoren erhält man immer den Eigenvektor selber.
8			Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind immer reell.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, für falsche wird ein Punkt abgezogen! Nicht angekreuzte Behauptungen geben 0 Punkte. Negative Gesamtpunkte werden als 0 Punkte gezählt.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra, WS 2012/13, am 04.02.2013

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

1. Gegeben ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass es sich bei B um eine Basis handelt.

   (b) Wandeln Sie B in der angegebenen Reihenfolge mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens in eine Orthonormalbasis um.

2. Zu Beginn des neuen Schuljahres kaufen Peter, Renate und Sarah im gleichen Schreibwarengeschäft ihre Hefte für das neue Schuljahr. Renate bezahlt für 1 großes, 3 mittlere und 1 kleines Heft 4,27 €. Peter bezahlt für 3 große, 5 mittlere und 2 kleine Hefte 8,75 €. Sarah bezahlt für 2 große, 2 mittlere und 1 kleines Heft 4,48 €.

   (a) Kann man aus diesen Angaben ermitteln, wieviel große, mittlere und kleine Hefte kosten?

   (b) Thomas braucht 4 große, 8 mittlere und 3 kleine Hefte. Er behauptet, dass er aus den Angaben der anderen errechnen kann, wieviel er zu zahlen hat. Wieviel muss er für seinen Einkauf ausgeben?

3. Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind.

$$U_1 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2, a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

$$U_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \leq 0\}$$

4. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 3x + y$

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 2, y + 2)$

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

   Begründen Sie ihre Aussage.

5. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to P_2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + (a_1 + a_2)$$

erzeugt ein Polynom zweiten Grades aus einem Vektor aus $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix und geben Sie die dabei verwendeten Basen aus beiden Räumen an.

(b) f ist nicht surjektiv. Zeigen Sie das anhand eines Gegenbeispiels.

(c) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(d) Geben Sie das Bild der Abbildung an.

6. Eine neue Skipiste soll entworfen werden. Dazu liegen folgende Angaben vor:

   - Die linke Seite der Piste ist u.a. durch zwei Grenzpunkte an den Stellen $A = (3; 2; 0)$ sowie $B = (0; 3; 2)$ abgegrenzt.
   - Die rechte Seite der Skipiste wird durch die Punktemenge $C_k = (1 + 3k; 2 - k; 4 - 2k)$ modelliert.
   - Auf dem Hang, auf dem die Piste geplant wird, befindet sich bereits eine Seilbahn, die durch die Punktemenge $S_r = (-2r; 3 + r; 4)$ beschrieben wird.

   (a) Zeigen Sie, dass die beiden Grenzen der Skipiste parallel verlaufen, aber nicht identisch sind.

   (b) Stellen Sie die Ebenengleichung, durch welche die Skipiste beschrieben wird, in Normalenform auf.

   (c) Um Unfälle zu vermeiden, muss noch eine rote Wartelinie simuliert werden. Diese soll rechtwinklig zur Skipiste von Grenzpunkt A zu einem bestimmten Grenzpunkt auf der anderen Pistenbegrenzung verlaufen. Bestimmen Sie diesen Punkt.

   (d) Die Seilbahn schwebt in gleichmäßiger Höhe über der Piste. Bestimmen Sie diese Höhe.

7. Bezüglich der Standardbasen E im $\mathbb{R}^2$ sei folgende Abbildungsmatrix gegeben:

$$M_E^E = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom.

   (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte.

   (c) Bestimmen Sie die Menge B der Eigenvektoren zu den gefundenen Eigenwerten.

   (d) Da B eine Basis bildet, kann man die Abbildungsmatrix auf einfache Art und Weise auch bzgl. der Basis B der Eigenvektoren darstellen. Bestimmen Sie diese Abbildungsmatrix M_B^B.

8. Die Messdaten für $i = 1, 2, 3, 4$ sind in der folgenden Tabelle dargestellt und sollen durch eine Funktion der Form

$$f(x) = a_1 + a_2 x \quad \text{wobei} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

x_i	0	1	2	3
y_i	-1	0	3	6

(a) Stellen Sie das (überbestimmte) lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Unbekannten a_1 und a_2 auf und zeigen Sie, dass dieses nicht lösbar ist.

(b) Da keine exakte Lösung existiert, bestimmen sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die Funktion f so, dass die Messdaten möglichst gut approximiert werden. Formulieren Sie die Normalgleichung und bestimmen Sie die gesuchten Parameter als Lösung dieser Gleichung. Geben Sie die errechnete Funktion f explizit an.