Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

# Lineare Algebra I
## Übung - Blatt 10

Dieses Übungsblatt wird am 14.01.2025 in der Globalübung besprochen.

Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis **Mittwoch, 14.01.2025, um 14:00 Uhr** im Moodle-Raum hoch. Geben Sie bitte in **Gruppen von 2-3 Studierenden** ab und schreiben Sie *alle* Namen und Matrikelnummern auf Ihre Abgabe. Wir würden uns wünschen, dass mindestens zwei der Abgabepartner jeweils einen Teil der Abgabe aufschreiben

Bitte achten Sie bei Ihrer Abgabe besonders auf die formale Korrektheit Ihrer Lösung. Es gibt pro Aufgabe einen Punkt für das formal korrekte Aufschreiben Ihrer Lösung, markiert mit einem *.

**Aufgabe 1 (1+1+4+1+2+1* Punkte)**
Es sei $K$ ein Körper und $p, q \in K[X]$ zwei Polynome. Dann ist $pK[X] := \{p \cdot f \mid f \in K[X]\}$ ein Teilraum von $K[X]$. Weiter sei $V := K[X]/pK[X]$ und $m_q : V \to V; a \mapsto q \cdot a + pK[X]$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von $V$.

(b) Zeigen Sie, dass $m_q$ ein Endomorphismus von $V$ ist.

(c) Beschreiben Sie den Kern und das Bild von $m_q$ mithilfe des ggT von $p$ und $q$.

(d) Bestimmen Sie die Fälle, in denen $m_q$ bijektiv ist.

(e) Es sei $q(X) := X^3 + 2X + 3 \in \mathbb{F}_5[X]$ und $p(X) := X^4 + 2X^3 + 4X^2 + X + 3 \in \mathbb{F}_5[X]$. Bestimmen Sie eine $\mathbb{F}_5$-Basis von $\mathrm{Bild}(m_q)$ und $\mathrm{Kern}(m_q)$.

**Aufgabe 2 (1+4+1+3+1* Punkte)**
Sei $K$ ein Körper und $V, U, T$ $K$-Vektorräume mit $T \subseteq U \subseteq V$. Zeigen Sie:

(a) $U/T$ ist ein Untervektorraum von $V/T$.

(b) Der Faktorraum von $V/T$ nach $U/T$ und der Vektorraum $V/U$ sind isomorph, d.h.

$$(V/T)/(U/T) \cong V/U.$$

Nun seien $V, W$ $K$-Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $U \leq \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\Psi : V/U \to W, v + U \mapsto \varphi(v)$ eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

(d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Kern}(\Psi) \cong \mathrm{Kern}(\varphi)/U$ ist.