Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
17. Oktober 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Zufallsvariablen

Zufallsvariablen

Beispiel 57: (Bernoulli-Versuchsschema)

- Für ein Bernoulli-Experiment gilt $\mathbb{P}(\{1\}) = p$ und $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$ für ein $p \in (0, 1)$.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge in n unabhängigen Experimenten?
- Definiere $A_k \mathrel{\hat{=}}$ "k Erfolge", für $k = 1, \ldots, n$
- Wir wissen bereits: $\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Aber: Wir müssen n Ereignisse $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ definieren
- Geht das einfacher?
  - Ja. Definiere $X \mathrel{\hat{=}}$ "Anzahl der Erfolge"
  - Dann gilt $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X = k)$
  - Andere Notation für die selbe Wahrscheinlichkeit
  - 1 (zufällige) Variable statt n Ereignisse

Zufallsvariablen

Definition 20

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt messbar, falls für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt
$$f^{-1}\big((-\infty, z]\big) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \le z\} \in \mathcal{A}. \qquad (1)$$
2. Eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine *Zufallsvariable* (ZV).

> Die Funktionen, mit denen wir arbeiten sind messbar (vgl. Maßtheorie).

> Für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume mit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ist $\{\omega : X(\omega) \le z\} \subset \Omega$ immer in $\mathcal{P}(\Omega)$.

> In diesem Fall ist jede Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable.

Zufallsvariablen

Beispiel 58: (Zweifacher Würfelwurf)

- $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$
- $X = \omega_1 + \omega_2 =$ "Summe der Augenzahlen"
- $\mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{36}$
- $\mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36}$

- Was soll $\mathbb{P}(X = k)$ überhaupt bedeuten?
- $\mathbb{P}(X = k)$ ist eine Kurzschreibweise für

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\})$$

- Anschaulich: Ereignis, dass X den Wert k annimmt

Zufallsvariablen

Beispiel 59: (Spanische Weihnachtslotterie)

Bei der spanischen Weihnachtslotterie werden Lose mit 5-stelliger Losnummer (00000 bis 99999) für 200 EUR verkauft. Es werden folgende Gewinne ausgeschüttet:

Anzahl	Gewinn in EUR
1	4 000 000
1	1 250 000
1	500 000
2	200 000
8	60 000
1 794	1 000
10 000	200

> $\Omega = \{00000, \ldots, 99999\}$

> $X =$ Gewinn in Euro

> $\mathbb{P}(X = 200) = \frac{1}{10}$

> $\mathbb{P}(X > 200) = \frac{1807}{100000}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 200) \\ - \mathbb{P}(X > 200)\end{aligned}$$

Zufallsvariablen

Übung 34

Sei X die Augenzahl beim einfachen Würfelwurf. Bestimmen Sie die Wertebereiche der Zufallsvariablen $Y := X^2$ und $Z := -X$.

Zufallsvariablen

Bemerkung 6

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X, Y Zufallsvariablen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die folgenden Funktionen Zufallsvariablen

> $X + Y$
> $X - Y$
> $X \cdot Y$
> $\max(X, Y)$
> $\min(X + Y)$
> αX
> ...

Die Funktionen sind wie gewöhnlich definiert, z.B. $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Zufallsvariablen

Bemerkung 7

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y Zufallsvariablen. Eine wichtige Form von Ereignissen sind $\{X = k\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$, für $k \in \mathbb{R}$. Andere wichtige Ereignisse sind bspw.

> $\{X \leq k\}$
> $\{X < k\}$
> $\{X \geq k\}$
> $\{X \leq Y\}$
> $\{X \neq Y\}$
> $\{X - 2Y > 0\}$
> ...

Notation: Wenn wir Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse angeben, lassen wir die Klammern "{" und "}" weg, z.B. $\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\})$

Zufallsvariablen

Bemerkung 8

- Oft interessieren wir uns nur für die Werte von Zufallsvariablen, der W'raum rückt in den Hintergrund
- In Zukunft betrachten wir vor allem Zufallsvariablen
- Was ist mit Ereignissen?
  - Jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$ lässt sich als Zufallsvariable darstellen
  - Für $A \in \mathcal{A}$ definiere die *Indikatorfunktion* von A

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - Dann gilt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1)$
- Rechenregeln für Indikatorfunktionen: Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_A \quad \text{und} \quad \mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_A.$$

Verteilung

Beispiel 60: (Augenzahl beim zweifacher Würfelwurf)

> $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$

> $X = \omega_1 + \omega_2 =$ "Summe der Augenzahlen"

> Es ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

> $\mathbb{P}(X = k)$ definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega' = \{2, 3, \ldots, 12\}$

Verteilung

Definition 21

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X$ auf $\mathbb{R}$, dass durch

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}), \text{ für } A \subset \mathbb{R}$$

definiert wird, wird als *Verteilung* von X bezeichnet.
Notation: Für $\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\})$ schreiben wir kurz $\mathbb{P}(X \in A)$.

Warum ist $\mathbb{P}_X(A)$ überhaupt ein Wahrscheinlichkeitsmaß?

$>$ Eigenschaften werden direkt von $\mathbb{P}$ "vererbt"

Genauer gesagt, muss A in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sein, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die kleinste σ-Algebra bezeichnet, die alle offenen Mengen in $\mathbb{R}$ enthält

Verteilung

Beispiel 61

Wie viele Personen haben heute Geburtstag?

> Angenommen im Raum sind $n = 100$ Personen
> $X =$ "Anzahl Personen, die heute Geburtstag haben"
> Folge von Bernoulli-Experimenten mit $p = \frac{1}{365}$
  > Annahme: Niemand hat am 29. Februar Geburtstag
> Wir wissen bereits

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{100}{k} (\tfrac{1}{365})^k (\tfrac{364}{365})^{100-k}$$

> $\Omega' = \{0, 1, 2, \ldots, 100\} \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega') \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$
> Für $A \in \mathcal{A}'$: $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k \in A} \mathbb{P}(X = k)$
> W'keit, dass heute 2 bis 5 Personen Geburtstag haben, beträgt

$$\sum_{k=2}^{5} \binom{100}{k} (\tfrac{1}{365})^k (\tfrac{364}{365})^{100-k} \approx 3.11\%$$

Verteilung

Übung 35

Wir werfen 3-mal mit einer fairen Münze ($\mathbb{P}(\{K\}) = \mathbb{P}(\{Z\}) = 1/2$) und bezeichnen mit X die Anzahl der Würfe, bei denen Zahl geworfen wurde. Bestimmen Sie den Wertebereich B von X und die Verteilung von X auf B, d.h. für $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k)$ für alle $k \in B$.

Verteilungsfunktion

Oft interessieren uns Ereignisse der Form $\{X \leq k\}$, z.B. die Wahrscheinlichkeit für k oder weniger Erfolge in n unabhängigen Bernoulli-Experimenten.

Definition 22

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbb{P}_X$. Die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\})$$

wird als *Verteilungsfunktion* von X bezeichnet.

Bemerkung 9

Andersrum gilt: Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ wird eindeutig von F_X festgelegt. (Beweis mit Hilfe von Maßtheorie)

Verteilungsfunktion

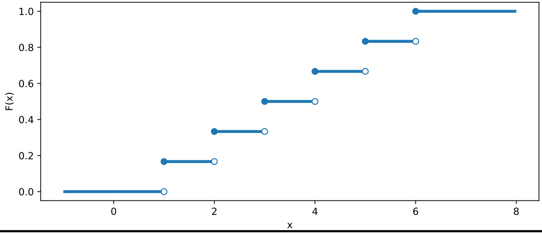
Beispiel 62: (Würfelwurf)

> Sei X die Augenzahl beim einfachen Würfelwurf.

> Es gilt $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$ für $k = 1, 2, \ldots, 6$.

> Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{i}{6} & \text{für } i \leq x < i+1 \\ 1 & \text{für } x \geq 6 \end{cases}$$



Verteilungsfunktion

Bemerkung 10

Sei F_X die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. F_X ist monoton wachsend.
2. F_X ist rechtsseitig stetig, d.h. $\lim_{h \searrow 0} F_X(x+h) = F_X(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

Bemerkung 11

Jede Funktion mit den Eigenschaften ist eine Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion

Optional 1

Beweisidee: (vgl. Satz 8.5 in [Dehling and Haupt, 2006])

1. Für $s \leq t$ gilt $\{X \leq s\} \subset \{X \leq t\}$, also $F_X(s) = \mathbb{P}(X \leq s) \leq \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t)$
2. Nach 1. ist F monoton wachsend. Also existiert $F(x+) = \lim_{y \searrow x} F(y)$. Weiter gilt für jede Folge $y_n \searrow x$, dass $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(x+)$. Es gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq y_n\} = \{X \leq x\}$ und aus der Stetigkeit von W'maßen folgt $\lim_{n\to\infty} F(y_n) = F(x)$, also $F(x+) = F(x)$.
3. Analog zu 2. folgt für $y_n \to -\infty$, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq y_n\} = \varnothing$ und deshalb $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
   Für $y_n \to \infty$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq y_n\} = \Omega$ und (analog zu 1. und 2.) folgt $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

Verteilungsfunktion

Definition 23

Eine Zufallsvariable heißt *diskret*, falls sie nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen kann.

Formal: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist diskret, falls $X(\Omega)$ endlich oder abzählbar unendlich ist.

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen mit möglichen Werten $\{x_i\}_{i \in I}$, für $I \subset \mathbb{N}$, wird durch ihre *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $\mathbb{P}(X = x_i)$ bestimmt.

Verteilungsfunktion

Übung 36

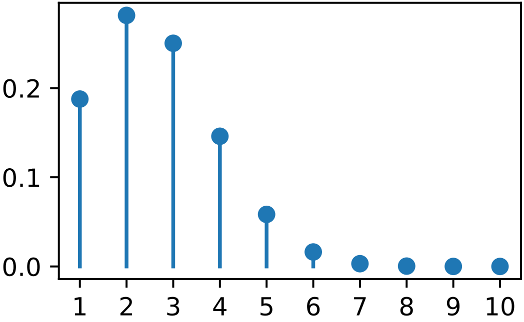
1. Wir würfeln zweimal mit einem fairen Würfel und bezeichnen mit X das Minimum der beiden Augenzahlen. Bestimmen Sie den Wertebereich $\{x_i\}_{i\in I}$ und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X, d.h. $\mathbb{P}(X = x_i)$ für $i \in I$.
2. Wir ziehen zweimal aus einer Urne mit 5 nummerierten Kugeln (von 1 bis 5) ohne Zurücklegen und bezeichnen mit X das Minimum der beiden Zahlen. Bestimmen Sie den Wertebereich und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

Verteilungsfunktion

Die Verteilung von diskreten Zufallsvariablen kann mit einem *Stabdiagramm* visualisiert werden:

> x-Achse: Wertebereich

> y-Achse: Wahrscheinlichkeiten



Bernoulli-Verteilung

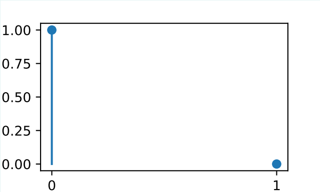
Definition 24

Eine Zufallsvariable $X \in \{0, 1\}$ mit $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ für ein $p \in (0, 1)$ ist *Bernoulli-verteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *Bernoulli-Verteilung*.
Notation: $X \sim \text{Ber}(p)$, alternativ auch: $\mathcal{B}(p)$.

Beispiel 63

Münzwurf: $p = \frac{1}{2}$

Lotto: $p = \binom{49}{6}^{-1}$



(Diskrete) Gleichverteilung

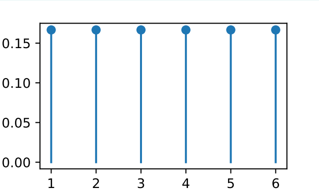
Definition 25

Eine Zufallsvariable $X \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$ ist *gleich verteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *(diskrete) Gleichverteilung*.

Notation: $X \sim \mathcal{U}_{\{1,2,\ldots,n\}}$.

Beispiel 64

Würfelwurf



Binomialverteilung

Definition 26

Eine Zufallsvariable $X \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit

$$\mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

für ein $p \in (0,1)$ und $i = 0, 1, \dots, n$ ist *binomialverteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *Binomialverteilung*.

Notation: $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Beispiel 65

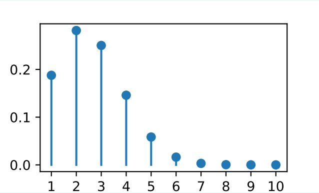
Urnenmodell:

> 5 rote Kugeln

> 15 weiße Kugeln

> 10-faches Ziehen mit Zurücklegen

> $X =$ "Anzahl rote Kugeln"

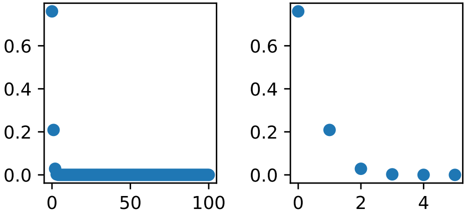


Binomialverteilung

Beispiel 66

Wie viele Personen haben heute Geburtstag?

- Angenommen im Raum sind $n = 100$ Personen
- $X =$ "Anzahl Personen, die heute Geburtstag haben"
- $p = \frac{1}{365}$ (Annahme: Niemand hat am 29.02. Geburtstag)
- $X \sim \text{Bin}(100, \frac{1}{365})$



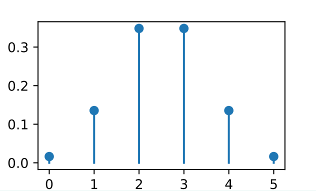
Hypergeometrische Verteilung

Beispiel 67

Urnenmodell: 5 rote, 15 weiße Kugeln, 10-faches Ziehen **ohne** Zurücklegen, $X =$ "Anzahl rote Kugeln"

- Was ist die Verteilung von X? D.h. was ist $\mathbb{P}(X = k)$?
- Insgesamt: $\binom{20}{10}$ Möglichkeiten 10 aus 20 Kugeln zu ziehen
- Rote Kugeln: $\binom{5}{k}$ Möglichkeiten k aus 5 roten Kugeln zu ziehen (für $k = 0, \ldots, 5$)
- Weiße Kugeln: $\binom{15}{10-k}$ Möglichkeiten $10 - k$ aus 15 weißen Kugeln zu ziehen (für $k = 0, \ldots, 5$)
- Also gilt

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{15}{10-k}}{\binom{20}{10}}$$



Hypergeometrische Verteilung

Definition 27

Sei $N, M, n \in \mathbb{N}$ mit $M \leq N$ und $n \leq N$. Eine Zufallsvariable $X \in \Omega = \{\max(0, n + M - N), \ldots, \min(n, M)\}$ mit

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

für $i \in \Omega$ ist *hypergeometrisch verteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *hypergeometrische Verteilung*.

Interpretation:

- N: Anzahl der der Elemente in Grundgesamtheit
- M: Anzahl der Elemente mit bestimmter Eigenschaft in Grundmenge
- n: Elemente in einer Stichprobe

Die Verteilung gibt Auskunft über Anzahl der “Erfolge” (Elemente mit bestimmter Eigenschaft in Stichprobe)

Hypergeometrische Verteilung

Beispiel 68

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für k richtige im Lotto (6 aus 49)?

- $N = 49$: Anzahl aller Zahlen
- $M = 6$: Anzahl der getippten Zahlen
- $n = 6$: Anzahl der gezogenen Zahlen
- Also: X hypergeometrisch verteilt mit Parametern $49, 6, 6$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{49-6}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

k	$\mathbb{P}(X = k)$
0	43.60%
1	41.30%
2	13.24%
3	1.77%
4	0.10%
5	$1.84 \cdot 10^{-3}\%$
6	$7.15 \cdot 10^{-6}\%$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Geometrische Verteilung

Wie lange müssen wir bei einer Folge von Bernoulli-Experimenten auf den ersten Erfolg warten?

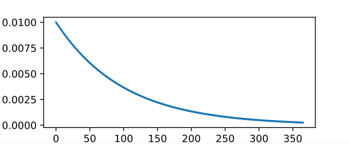
Definition 28

Eine Zufallsvariable $X \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^n$ für ein $p \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist *geometrisch verteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *geometrische Verteilung*.

Beispiel 69

Eine Maschine fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% je Tag aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine n Tage funktioniert und am $n+1$. Tag ausfällt?

> $\mathbb{P}(X = n) = 0.01 \cdot 0.99^n$

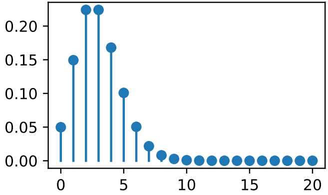


Poisson Verteilung

Für große Werte von n, wird es sehr aufwändig die exakte Binomialverteilung zu bestimmen. Wir sehen später, dass die Binomialverteilung (für große Werte von n) durch die Poisson-Verteilung approximiert werden kann.

Definition 29

Eine Zufallsvariable $X \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, für ein $\lambda > 0$, ist *Poisson-verteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *Poisson-Verteilung*.



Verteilungen

Übung 37

In einer Gruppe mit $n = 20$ Personen wollen wir den 1. Tag im Jahr herausfinden, an dem eine Person Geburtstag hat. Stellen Sie eine Formel auf, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die erste Person am k. Tag des Jahres Geburtstag hat.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst für einen beliebigen Tag die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person an diesem Tag Geburtstag hat.

Annahme: Niemand hat am 29. Februar Geburtstag.

Zusätzliche Übungen

Übung 38: (Optional)

Ist die Annahme “Niemand hat am 29. Februar Geburtstag” realistisch?

Sei X die Anzahl der Personen in einer Gruppe, die am 29.02. Geburtstag haben. Stellen Sie eine explizite Formel für die Verteilung von X auf. Bestimmen Sie explizite Werte für $n = 100$ bzw. $n = 1000$ und $k = 0, 1, 2$.

Übung 39: (Optional)

Aus einer Urne mit 2 roten und 3 weißen Kugeln ziehen wir 3 Kugeln ohne Zurücklegen. Sei X die Anzahl der gezogenen, roten Kugeln. Bestimmen Sie den Wertebereich und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

Literatur I

Bundesministerium für Gesundheit (2024).
Infektionsradar.
https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.