Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 13. 01. 2026

Übungsblatt 12 — Analysis I — WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 44.

Begründen Sie ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, konvergent aber nicht absolut konvergent oder divergent ist, wobei die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben sei durch

(a) $a_k = (-1)^k \frac{k}{k+1}$,

(b) $a_k = \frac{(-1)^k k^2 + k}{k^4+1}$,

(c) $a_k = \frac{k+4}{k^2-3k+1}$,

(d) $a_k = (-1)^k \frac{k+a}{k^2+bk+c}$, für $a, b, c > 0$,

(e) $a_k = \frac{3^k k!}{k^k}$,

(f) $a_k = \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}}$.

Aufgabe A 45.

Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Beweisen Sie, dass es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

absolut konvergent ist.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 48. (2+2+3+2+2+2+4+3 Punkte)

Begründen Sie ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, konvergent aber nicht absolut konvergent oder divergent ist, wobei die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben sei durch

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$,

(b) $a_n = (\sqrt[n]{a}-1)^n$ für ein $a > 0$,

(c) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$,

(d) $a_n = \left(\dfrac{n^2+n}{3n^2+1}\right)^{n}$,

(e) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(f) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(g) $a_n = \dfrac{4^{n+5}+6n^{10}}{7^n+12n^{15}}$,

(h) $a_n = 5^{-n}\dbinom{2n}{n}$.

Aufgabe B 49. (9 Punkte)

Berechnen Sie den Wert der beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n+1) - \arctan(n).$$

Aufgabe B 50. (3+3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen über reelle Reihen:

(a) Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt die von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

(b) Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ folgt die von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Aufgabe B 51. (5+5+5 Punkte)

Bestimmen Sie alle p, sodass die folgenden Reihen konvergieren:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^p}{n}$$

Sie dürfen ohne Beweis für $p > 0$ verwenden, dass

$$\frac{(\log n)^p}{n}$$

für n groß genug monoton fallend ist.