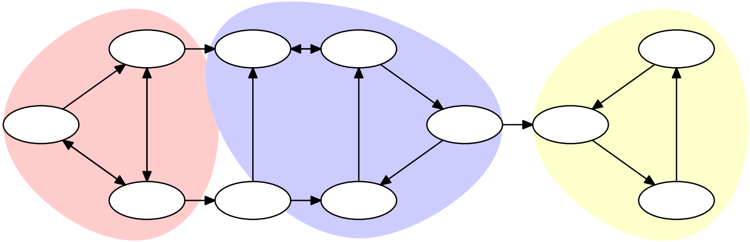
Übersicht

s-t Connectivity

Gegeben: Knoten s und t in gerichtetem Graph

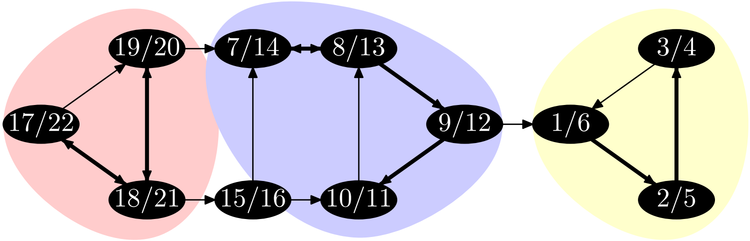
Frage: Ist t von s erreichbar (durch einen gerichteten Pfad)?



s-t Connectivity

Führe eine DFS aus, starte bei s.

Pfad von s nach t $\iff$ $f(t) < f(s)$.

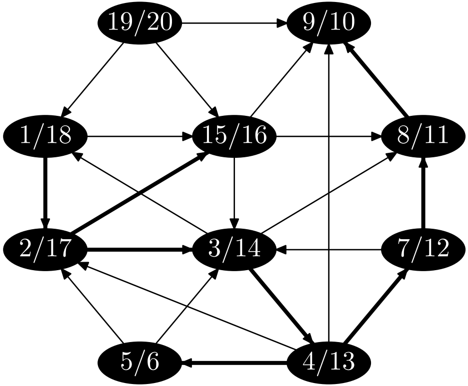


Beweis: Wenn s schwarz wird, sind alle von s erreichbaren Knoten schwarz.

s-t Connectivity

Theorem

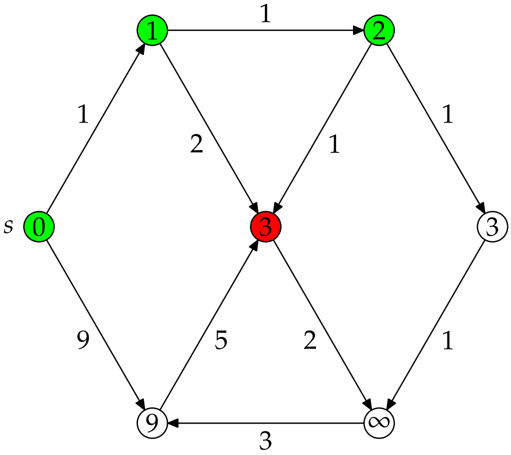
Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und $s \in V$.
Wir können in linearer Zeit alle von s erreichbaren Knoten finden.



Single Source Shortest Paths

Gegeben ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantengewichten $length : E \to \mathbf{Q}$ und ein Knoten $s \in V$, finde die kürzesten Wege von s zu allen Knoten.

- Wir lösen das Problem mit dynamischer Programmierung.
- Menge F von Knoten, deren Abstand bekannt ist.
- Anfangs ist $F = \{s\}$.
- F wird in jeder Iteration größer.
- Invariante: Kein Knoten $v \notin F$ hat kleineren Abstand zu s als jeder Knoten in F.



- Grüne Knoten: F
- Roter Knoten aktiv, relaxiert seine Nachbarn
- Weiße Knoten enthalten Abstand zu s über grüne Knoten.

Korrektheit

Lemma

- *Jeder grüne Knoten enthält den Abstand von s.*
- *Jeder weiße Knoten enthält Abstand von s über grüne Knoten.*

Beweis.

Sei v einer weißer Knoten, dessen Beschriftung minimal ist.
Betrachte einen kürzesten Pfad von s nach v und den ersten weißen Knoten u auf diesem Pfad.
Es gilt $u = v$, da der Abstand von s zu u mindestens so groß ist wie der Abstand von s zu v.
Wenn ein Knoten grün wird, garantiert die Relaxation, daß die zweite Bedingung weiter gilt. □

Der Algorithmus von Dijkstra

Algorithmus

procedure Dijkstra(s) :
$Q := V - \{ s \}$;
for v in Q **do** $d[v] := \infty$**od**;
$d[s] := 0$;
while $Q \neq \emptyset$**do**
  choose v in Q with minimal d[v];
  $Q := Q - \{ v \}$;
  forall u adjacent **to** v **do**
    $d[u] := \min \{ d[u], d[v] + \text{length}(v, u) \}$
  od
od

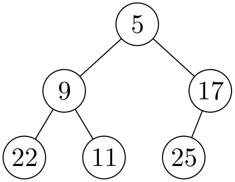
Wie implementieren wir Q?

Der Algorithmus von Dijkstra – Beispiel

Priority Queues (Prioritätswarteschlangen)

Operationen einer Prioritätswarteschlange Q:

1. Einfügen von x mit Gewicht w (insert)
2. Finden und Entfernen eines Elements mit minimalem Gewicht (extract-min)
3. Das Gewicht eines Elements x auf w verringern (decrease-weight)



Heap: alle Operationen in $O(\log n)$ Schritten
(n ist die aktuelle Anzahl von Elementen im Heap)

Algorithmus von Dijkstra – Laufzeit

Theorem

Der Algorithmus von Dijkstra berechnet die Abstände von s zu allen anderen Knoten in $O((|V| + |E|) \log |V|)$ Schritten.

Beweis.

Es werden $|V|$ Einfügeoperationen, $|V|$ extract-mins und $|E|$ decrease-keys ausgeführt. Verwenden wir einen Heap für die Prioritätswarteschlange, ergibt sich die verlangte Laufzeit. □

Ein Fibonacci-Heap benötigt für ein Einfügen und extract-min $O(\log n)$ und für decrease-key nur $O(1)$ amortisierte Zeit.

Dijkstra: $O(|V| \log |V| + |E|)$

Java

```
public static⟨V⟩ Map⟨V, Double⟩ dijkstra(Graph⟨V⟩ G, V s,
        Map⟨Edge⟨V⟩, Double⟩ length, Map⟨V, V⟩ pred) {
  Map⟨V, Double⟩ dist = new HashMap⟨V, Double⟩();
  PriorityQueue⟨V, Double⟩ queue = new SplayPriorityQueue⟨V, Double⟩();
  for(V u : G.allNodes()) dist.put(u, Double.MAX_VALUE);
  dist.put(s, 0.0); queue.insert(s, 0.0);
  while(!queue.isEmpty()) {
    V u = queue.extractMin();
    for(V v : G.neighbors(u)) {
      Double l = length.get(G.edge(u, v));
      if(l == null) continue;
      double d = dist.get(u) + l;
      if(d < dist.get(v)) {
        queue.decreaseKey(v, d);
        dist.put(v, d);
        if(pred ≠ null) pred.put(v, u);
      }
    }
  }
```

Spezialfall DAG

Können wir kürzeste Pfade in DAGs schneller finden?

Theorem

Kürzeste Pfade von einem Knoten s in einem DAG können in linearer Zeit gefunden werden.

Beweis.

Relaxiere Knoten in topologischer Reihenfolge.

Laufzeit: $O(|V| + |E|)$.
Korrektheit: Jeder Knoten, der relaxiert, kennt zu diesem Zeitpunkt seinen echten Abstand. $\square$

Frage: Sind negative Gewichte hier erlaubt?