3. März 2022

LINEARE ALGEBRA (SKRIPT, WS 21/22 UND SS 22)

JAN SCHRÖER

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Was ist Mathematik? Frei nach Gertrude Stein:

„Mathematik ist Mathematik ist Mathematik.“

Etwas konkreter und weniger mäandernd: Mathematik ist keine Naturwissenschaft und auch keine Geisteswissenschaft sondern eine Strukturwissenschaft. (Auch die Informatik sollte man so nennen.) Aufbauend auf wenigen mengentheoretischen Grundannahmen (Axiomen) ist die Mathematik ein sich ständig weiterentwickelndes Denkgebäude, welches trotz seiner Losgelöstheit von der uns umgebenden Welt zum Verständnis eben dieser Welt beiträgt. Umgekehrt motiviert das Verstehenwollen unserer Welt die in der Mathematik untersuchten Fragestellungen.

Eine allgemein anerkannte Definition des Begriffs *Mathematik* gibt es laut Wikipedia nicht.

Was ist Lineare Algebra? In der Linearen Algebra geht es um das Studium linearer Strukturen. Von zentraler Bedeutung sind lineare Gleichungssysteme, Vektorräume, lineare Abbildungen $f\colon V \to W$, Bilinearformen $s\colon V \times W \to K$ und quadratische Formen $q\colon V \to K$, wobei V und W Vektorräume über einem Körper K sind. Wir werden diese abstrakten Abbildungen durch Koordinatenmatrizen beschreiben und dabei durch Wechsel des Koordinatensystems möglichst schöne Normalformen suchen. Das Rechnen mit Matrizen spielt bei all dem eine große Rolle.

Lineare Algebra – eine Standardvorlesung? Viele Bücher vermitteln (vielleicht ungewollt) den falschen Eindruck, dass es sich bei der Linearen Algebra um ein kanonisches und in sich abgeschlossenes Gebiet der Mathematik handelt. Selbst im ersten Semester ist es jedoch recht einfach, offene und aktuelle Forschungsfragen der Linearen Algebra zu formulieren. Zudem gibt es eine große Zahl wunderschöner klassischer Resultate der Linearen Algebra, welche in den Grundvorlesungen oft keinen Platz finden, z.B. Kroneckers Arbeiten über Paare von Bilinearformen oder die Theorie total positiver Matrizen. Eine Vorlesung über Lineare Algebra kann also immer nur eine Einführung in die Lineare Algebra sein, welche unweigerlich durch die Auswahl der behandelten Themen geprägt ist.

Anmerkungen zum Skript. Die deutlich kürzere Vorgängerversion dieses Skripts basiert auf meiner Vorlesung Lineare Algebra 1, welche ich im WS 10/11 an der Universität Bonn gehalten habe. Die damalige Vorlesungsmitschrift und Latex-Fassung stammen von Adrian Seyboldt und Marvin Teichmann.

Nichts in diesem Skript ist neu. Ich habe mich an zahlreichen Büchern und Skripten orientiert und dabei lediglich wohlbekannte Dinge neu gemischt.

Im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise werde ich Bilinearformen und euklidische Vektorräume bereits in der Linearen Algebra 1 ansprechen. Wir wollen uns so zumindest einen ersten Eindruck vom geometrischen Universum verschaffen, welches sich hinter den manchmal etwas trockenen Matrizen verbirgt. In euklidischen

Vektorräumen kann man Begriffe wie *Länge*, *Abstand* und *Winkel* von Vektoren definieren und dann z.B. eine moderne Version der klassischen euklidischen Geometrie entwickeln. Der Preis für dieses Vorgehen ist die sehr späte Betrachtung von Eigenwerten und Eigenvektoren, welche erst in der Linearen Algebra 2 stattfindet.

Ich freue mich über Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Tippfehler, unklare oder zu knappe Beweise oder fehlende Beispiele.

Danksagung: Für Verbesserungsvorschläge und/oder fleissige Fehlersuche bedanke ich mich bei David Aretz, Kaniuar Bacho, Friedrich-Wilhelm Beckert, Leo Diedering, Martin Drees, Tobias Grabosch, Philipp Grzywaczyk, Carolin Hartung, Gustavo Jasso, Christian Kremer, Sebastian Meyer, Tien Nguyen Thanh, Ragna Oeynhausen, Luca Poensgen, Pascal Steincke, Jendrik Stelzner, Florian Tecklenburg, Franz Wagner, Karl Welzel, Johann Wochner, Erik Wöller und einigen anderen Studierenden und Tutoren.

Farben. Wir benutzen

blaue Boxen, um Aussagen hervorzuheben,

grüne Boxen, um Definitionen hervorzuheben,

magenta Boxen, um Vermutungen und Probleme hervorzuheben,

graue Boxen, um andere Dinge hervorzuheben.

Abschnitte mit **roten Überschriften** wurden in der Vorlesung nicht behandelt und sind nicht Teil der Prüfungen. Trotzdem sollten Sie diese Abschnitte ansehen.

Inhalte.

- §1 Grundlagen : Mengen, Beweise, Abbildungen: Definition einer Menge. Kartesisches Produkt von Mengen. Ein paar Zeilen zur elementaren Aussagenlogik. Elementare Beweistechniken (Induktionsbeweis, Beweis durch Widerspruch). Abbildungen zwischen Mengen.
- §2 Körper: Körper sind abstrakte Rechenbereiche (Beispiele aus der Schule: die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$). In der Linearen Algebra sind die meisten Objekte *über einem Körper definiert* (z.B. Vektorräume).

Elementare Eigenschaften von Körpern. Ringe. Beispiele endlicher Ringe und Körper.

- §3 Vektorräume: Vektorräume sind elementare Objekte, die in der gesamten Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Wichtige Beispiele: Die Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ und der 3-dimensionale Raum $\mathbb{R}^3$, welcher oft als erstes Modell des uns umgebenden Raums verwendet wird. Diskussion von Beispielen. Unterräume.
- §4 Lineare Abbildungen: Lineare Abbildungen $f\colon V \to W$ zwischen K-Vektor-räumen stehen im Zentrum der Linearen Algebra. Per Definition respektiert f die Vektorraumstrukturen von V und W. Beispiele. Elementare Eigenschaften. Kern und Bild linearer Abbildungen. Affine Geraden.
- §5 Matrizenrechnung: Addition und Multiplikation von Matrizen. Die Menge $K^{m,n}$ aller $(m \times n)$-Matrizen ist ein K-Vektorraum, und $K^{n,n}$ ist eine K-Algebra. Matrizen als lineare Abbildungen. (Später wird sich zeigen, dass grob gesprochen jede lineare Abbildung einer Matrixabbildung entspricht.) Reduzierte Zeilenstufenform. Gauß-Algorithmus. Invertierbare Matrizen.
- §6 Lineare Gleichungssysteme: Definition linearer Gleichungssysteme $Ax = b$. Lösungsmenge von $Ax = b$ gleich $v+\mathrm{Kern}(A)$, wobei v irgendeine Lösung ist. Berechnung eines solchen v und von $\mathrm{Kern}(A)$ durch den Gauß-Algorithmus. Für $b = 0$ ist $\mathrm{Kern}(A)$ die Lösungsmenge.
- §7 Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension: In diesem Abschnitt geht es um die Beschreibung von Vektorräumen bis auf Isomorphie mit Hilfe von Basen. Basis-Austauschsatz. Dimensionsbegriff für Vektorräume. Basis-Ergänzungssatz. Komplementärräume. Dimensionsformel für Unterräume. Dimensionsformel für Homomorphismen. Zornsches Lemma. Existenz von Basen für beliebige Vektorräume. Dimensionsbegriff für beliebige Vektorräume.
- §8 Koordinatenabbildungen und Basiswechsel: Koordinatenvektoren. Koordinatenmatrizen von Homomorphismen. Verhalten von Koordinatenvektoren und Koordinatenmatrizen unter Basiswechsel. Ein ganz wichtiges Kapitel, welches erstmals zu tiefergehenden Problemstellungen führt.
- §9 Normalformenprobleme: Formulierung verschiedener Normalformenprobleme (simultane Äquivalenz von n Homomorphismen, simultane Ähnlichkeit von n Endomorphismen, n-Unterraum Problem).
- §10 Komplexe Zahlen: Definition(en) des Körpers der komplexen Zahlen. Rechenregeln. Trigonometrische Funktionen. Polarkoordinaten.
- §11 Euklidische und unitäre Vektorräume: Wir wollen Geometrie in bestimmten Vektorräumen betreiben, d.h. wir führen Begriffe ein wie *Länge* eines Vektors, *Abstand* zwischen zwei Vektoren, und *Winkel* zwischen zwei Vektoren. Dazu benötigen wir *Skalarprodukte*, welche als Bilinearformen mit gewissen Zusatzeigenschaften definiert sind. Orthogonalräume. Orthogonal- und Orthonormalbasen. Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren. Isometrien. Klassifikation euklidischer und unitärer Vektorräume bis auf Isometrie. Orthogonale und unitäre Gruppe.

- §12 Determinanten: Hier wird jeder Matrix $A \in K^{n,n}$ ihre *Determinante* $\det(A) \in K$ zugeordnet. Die Determinante ist eine wichtige Invariante von A. So gilt z.B. $\det(A) \neq 0$ genau dann wenn A invertierbar ist. Laplacescher Entwicklungssatz. Rechenregeln für Determinanten. Cramersche Regeln. Leibnizsche Determinantenformel. Sylvester Kriterium für positive Definitheit. Charakteristisches Polynom von Matrizen und Endomorphismen.
- §?? Polynomringe und Teilbarkeit: Ein kurzer Ausflug in die Algebra. Polynome sind eine der wichtigsten Brücken zwischen Linearer Algebra und Algebra. Nullstellen von Polynomen. Teilbarkeit in Polynomringen.
- §?? Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit:
- §?? Klassifikation von Matrizen bis auf Ähnlichkeit:
- §?? Quotientenräume und Tensorprodukte:
- §?? Metrische Vektorräume:
- §?? Symplektische Vektorräume:
- §?? Symmetrische Vektorräume:
- §?? Adjungierte Homomorphismen und Spektralsätze:
- §?? Quadratische Formen:

1. **Grundlagen: Mengen, Beweise, Abbildungen**

1.1. **Mengen.** Was man unter einer *Menge* versteht, lernt man bei den Logikern und Mengentheoretikern. Wir arbeiten mit der folgenden (etwas vagen aber für unsere Zwecke ausreichenden) Definition:

> Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten (welche dann **Elemente** von M genannt werden) zu einem neuen Objekt.

Beispiele:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen (nach unserer Konvention gehört 0 dazu);
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, die Menge der ganzen Zahlen;
- $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 1\}$, die Menge der rationalen Zahlen (Vorsicht: Es gilt z.B. $1/2 = 2/4$, etc.);
- $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen;
- $\mathbb{C}$, die Menge der komplexen Zahlen;
- Ganz wichtig: $\varnothing$, die **leere Menge**, welche per Definition keine Elemente enthält.

Hier sind einige häufig verwendete Symbole:

$\{\ \}$	Mengenklammern,
$\mid$	steht oft für *mit der Eigenschaft*,
$,$	steht oft für *und*,
$\in$	*ist Element von*,
$\notin$	*ist nicht Element von*,
$\lvert M \rvert$	*die Anzahl der Elemente der Menge M*,
$=$	*gleich*,
$\neq$	*ungleich*,
$\leq$	*kleiner gleich*,
$<$	*echt kleiner*, d.h. kleiner gleich, aber nicht gleich,
$\geq$	*größer gleich*,
$>$	*echt größer*, d.h. größer gleich, aber nicht gleich,
$\exists$	*es existiert ein/eine*,
$\forall$	*für alle*.

Die Symbole $\exists$ und $\forall$ verwenden wir nicht im Skript, wohl aber in der Vorlesung.

Für $n \geq 0$ ist eine Menge M n-**elementig**, falls $|M| = n$.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\{21,35\} &= \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \le x \le 40,\ x \text{ ist teilbar durch } 7,\ x \notin \{7,14,28\}\},\\ \mathbb{N} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \ge 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist nicht negativ}\},\\ \{1,2,3\} &= \{2,1,3\} = \{1,1,3,2,2,1\}.\end{aligned}$$

Für Teilmengen verwenden wir diese Symbole:

$A \subseteq B$ *A ist Teilmenge von B*, d.h. es gilt $x \in B$ für alle $x \in A$,
$A \subset B$ *A ist echte Teilmenge von B*, d.h. $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Für jede Menge M gilt $\varnothing \subseteq M$.

Die Aussage $\varnothing \in M$ gilt aber in der Regel nicht.

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Auch $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ist natürlich richtig.

Wir benutzen oft das Symbol $:=$ im Sinne von *Die linke Seite ist definiert als das, was auf der rechten Seite steht.*

Für Mengen A und B seien

$$\begin{aligned}A \cap B &:= \{x \mid x \in A, x \in B\}, \text{ der } \textbf{Durchschnitt} \text{ von } A \text{ und } B,\\ A \cup B &:= \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}, \text{ die } \textbf{Vereinigung} \text{ von } A \text{ und } B,\\ A \setminus B &:= \{x \mid x \in A, x \notin B\}, \text{ die } \textbf{Mengendifferenz} \text{ von } A \text{ und } B,\\ \mathcal{P}(A) &:= \{U \mid U \text{ ist Teilmenge von } A\}, \text{ die } \textbf{Potenzmenge} \text{ von } A.\end{aligned}$$

Sei I eine Menge, und für jedes $i \in I$ sei A_i eine Menge. Dann ist

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}$$

der **Durchschnitt** und

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}$$

die **Vereinigung** der Mengen A_i.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\{1,2\} \cup \{2,3\} &= \{1,2,3\},\\ \{1,2\} \setminus \{1,3\} &= \{2\},\\ \varnothing \cup \{1,2\} &= \{1,2\},\\ \{\varnothing\} \cup \{1,2\} &= \{\varnothing,1,2\},\\ \{\varnothing,\{1,2,3\}\} &\text{ enthält zwei Elemente},\\ \{\varnothing,1,2,3\} &\text{ enthält vier Elemente}.\end{aligned}$$

Ein **Paar** (oder **2-Tupel**) besteht aus der Angabe eines ersten Elements a und eines zweiten Elements b. Paare werden als (a, b) geschrieben.

Es gilt $(a, b) = (b, a)$ genau dann wenn $a = b$.

Beachte: $(a, a) \neq \{a, a\} = \{a\}$.

Das **Kartesische Produkt** zweier Mengen A und B ist definiert als
$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Für Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definieren wir das **Kartesische Produkt**
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$
dessen Elemente **n-Tupel** genannt werden.

Oft schreiben wir auch
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
statt $(a_1, \ldots, a_n)$.

Sei A eine Menge, und sei $n \geq 1$. Dann ist
$$A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}}$$
das **n-fache Kartesische Produkt von A.**

Beispiel: Für Mengen A, B, C sind die Elemente in $A \times B \times C$ 3-Tupel, während die Elemente in $(A \times B) \times C$ 2-Tupel der Form $((a, b), c)$ sind.

1.2. **Beweise.**

1.2.1. *Logik.* Seien A, B und C Aussagen. Wir verwenden folgende Symbole:

$A \implies B$: A *impliziert* B, d.h. aus A folgt B,

$A \iff B$: A *genau dann wenn* B, d.h. es gilt $A \implies B$ und $B \implies A$,

$\neg A$: *nicht* A.

Wir sagen oft **A und B sind äquivalent** und meinen damit $A \iff B$.

Wir benutzen oft die folgenden zwei Regeln:

Aus $A \implies B \implies C$ folgt $A \implies C$.

Es gilt $A \implies B$ genau dann wenn $\neg B \implies \neg A$.

Beispiel: Wenn es regnet, dann ist die Straße nass. Diese Aussage ist äquivalent zu: Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht.

1.2.2. *Beweis durch Induktion.* Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $A(n)$ eine Aussage. Wir wollen zeigen, dass $A(n)$ für alle n richtig ist. Beweisstrategie:

Induktionsanfang: Wir zeigen, dass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $A(n)$ richtig ist. Mit dieser Annahme beweisen wir, dass auch $A(n+1)$ richtig ist.

Beispiele:

(i) Wir behaupten, dass für jedes $n \geq 1$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$
Dies ist unsere Aussage $A(n)$.
Induktionsanfang: $n = 1$: $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$. ok.
Induktionsschritt: Angenommen $A(n)$ gilt. Wir rechnen
$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$
(Für das zweite Gleichheitszeichen haben wir die Induktionsannahme verwendet.) Also gilt $A(n+1)$.

(ii) Ein falscher Induktionsbeweis: Wir behaupten, dass für jedes $n \geq 1$ gilt: 7 teilt 10^n. Dies ist unsere Aussage $A(n)$.
Angenommen $A(n)$ gilt, d.h. $10^n = 7a$ für ein $a \geq 1$ in $\mathbb{N}$. Dann gilt
$$10^{n+1} = 10 \cdot 10^n = 10 \cdot 7 \cdot a.$$
Also gilt $A(n+1)$.
Es fehlt aber der Induktionsanfang: $A(1)$ ist nämlich falsch.

1.2.3. *Beweis durch Widerspruch.* Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $\sqrt{2} = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \geq 1$. Wir können annehmen, dass a und b teilerfremd sind.

Quadrieren auf beiden Seiten liefert
$$2 = \frac{a^2}{b^2}.$$
Dies ist äquivalent zu $2b^2 = a^2$. Also ist a durch 2 teilbar. Insbesondere ist a^2 durch $2 \cdot 2$ teilbar, und damit ist auch $2b^2$ durch $2 \cdot 2$ teilbar. Es folgt, dass b^2 und damit auch b durch 2 teilbar ist. Widerspruch zur Teilerfremdheit von a und b.

Warnung: Wir haben stillschweigend einige Teilbarkeitsaussagen über natürliche Zahlen verwendet.

1.2.4. *Gleichheit von zwei Mengen.* Seien A und B Mengen. Um zu beweisen, dass $A = B$ gilt, muss man $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zeigen. Anfänger*innen machen hier oft Fehler und zeigen nur eine der beiden Aussagen.

1.3. Abbildungen.

Seien X und Y Mengen. Eine **Abbildung** f von X nach Y ist eine Vorschrift, durch die jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zugeordnet wird.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Die Menge aller Abbildungen $X \to Y$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$.

Beispiele:

(i)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

bedeutet, dass $x \in \mathbb{Z}$ auf $x^2 \in \mathbb{N}$ abgebildet wird.

(ii) Sei X eine Menge, als **Identität** von X bezeichnet man die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X\colon X &\to X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Es gilt also $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen, dann ist

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

die **Komposition** von f und g.

Wir schreiben auch gf statt $g \circ f$.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

- f ist **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- f ist **surjektiv**, falls für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$;
- f ist **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. (In diesem Fall nennt man f auch eine **Bijektion**.)

Ist $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so sei $f^{-1}\colon Y \to X$ die **Umkehrabbildung** von f welche definiert ist durch $f^{-1}(f(x)) := x$ für alle $x \in X$. (Es gilt dann $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.)

Beispiele:

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \{1,2,3\} &\to \{1,2\} \\ 1 &\mapsto 1, \\ 2 &\mapsto 1, \\ 3 &\mapsto 2 \end{aligned}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \{1,2\} &\to \{1,2,3\} \\ 1 &\mapsto 3, \\ 2 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x - 41 \end{aligned}$$

ist bijektiv.

(iv) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(v) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 2n &\mapsto n \\ (2n+1) &\mapsto n \end{aligned}$$

$(n \in \mathbb{Z})$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(vi) Seien X und Y endliche Mengen, welche gleich viele Elemente enthalten. Dann ist eine Abbildung $f\colon X \to Y$ injektiv genau dann wenn f surjektiv ist.

(vii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \{\text{Menschen in Bonn}\} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto \text{Alter}(x) \end{aligned}$$

ist weder injektiv noch surjektiv.

(viii) Für $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ definiere

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q}^2 &\to \mathbb{Q}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + by, cx + dy). \end{aligned}$$

Die Abbildung f ist bijektiv genau dann wenn $ad - bc \neq 0$. Außerdem gilt: f ist injektiv genau dann wenn f surjektiv ist. Beweis: Später!

– – – – – **Ende Vorlesung 1** – – – – –

(ix) Seien M und I Mengen.

Dann sei

$$M^I := \text{Abb}(I, M)$$

die Menge aller Abbildungen $I \to M$.

Für $I = \{1, \dots, n\}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} M^I &\to M^n \\ f &\mapsto (f(1), \dots, f(n)) \end{aligned}$$

bijektiv.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Für Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ sei

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

das **Bild** von A unter f, und sei

$$f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$$

das **Urbild** von B unter f. Das **Bild** von f ist $f(X)$. Es gilt immer $f^{-1}(Y) = X$.

Für $y \in Y$ schreibt man auch $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$.

Warnung: Die Schreibweise $f^{-1}(B)$ bedeutet nicht, dass es eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ gibt.

Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

der **Graph** von f.

Seien X und Y Mengen, und sei $\Gamma \subseteq X \times Y$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften

(i) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in \Gamma$;

(ii) Falls $(x, y_1), (x, y_2) \in \Gamma$, so gilt $y_1 = y_2$.

In diesem Fall definieren wir eine Abbildung $f_\Gamma\colon X \to Y$ durch $f_\Gamma(x) := y$ für jedes $(x,y) \in \Gamma$. Es gilt dann offensichtlich $\Gamma(f_\Gamma) = \Gamma$.

1.4. **Übungsaufgaben.**

1.4.1. Seien X und Y Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $X \subseteq Y$;
(ii) $X \cap Y = X$;
(iii) $X \cup Y = Y$;
(iv) $X \setminus Y = \varnothing$.

1.4.2. Sei $X \neq \varnothing$ eine endliche Menge und sei $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Es existiert ein $m \geq 1$ mit der Eigenschaft: Es gibt ein $x \in X$ mit $f^m(x) = x$. ($f^m = f \circ \cdots \circ f$ ist die m-fache Komposition von f.)

1.4.3. Sei $n \geq 1$. Wieviele bijektive Abbildungen

$$\{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,n\}$$

gibt es? Finden Sie das minimale n mit der Eigenschaft: Es existieren bijektive Abbildungen

$$f,g\colon \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,n\}$$

mit $f \circ g \neq g \circ f$.

1.4.4. Zeigen Sie: Für all $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. **Körper**

2.1. **Körperaxiome.**

Ein **Körper** ist eine Menge K zusammen mit zwei Abbildungen

$$+\colon K \times K \to K \qquad \text{und} \qquad \cdot\colon K \times K \to K$$
$$(a,b) \mapsto a+b \qquad\qquad (a,b) \mapsto a \cdot b$$

so dass folgende Regeln (Axiome) gelten:

(A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in K$ (**Assoziativität der Addition**);

(A2) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ (**Kommutativität der Addition**);

(A3) Es existiert ein Element $0 = 0_K \in K$ mit $a + 0 = a$ für alle $a \in K$ (Existenz eines **Nullelements**);

(A4) Zu jedem $a \in K$ gibt es ein $-a \in K$ mit $a + (-a) = 0$ (Existenz eines **additiven Inversen**);

(M1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (**Assoziativität der Multiplikation**);

(M2) $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$ (**Kommutativität der Multiplikation**);

(M3) Es existiert ein Element $1 = 1_K \in K$ mit $1 \neq 0$ und $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$ (Existenz eines **Einselements**);

(M4) Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein $a^{-1} \in K$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$ (Existenz eines **multiplikativen Inversen**);

(D) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in K$ (**Distributivität**).

Die Abbildungen $+$ und $\cdot$ heißen **Addition** bzw. **Multiplikation**.

Der Ausdruck $a + b$ steht lediglich für $+((a, b))$, und $a \cdot b$ steht für $\cdot((a, b))$. Mit der Schreibweise $+((a, b))$ statt $a + b$ lautet die Assoziativität (A1) folgendermaßen:

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$+((a, +((b, c)))) = +((+((a, b)), c)).$$

Um Klammern zu sparen, legen wir fest: *Punktrechnung vor Strichrechnung*. Z.B. in (D) können wir dann schreiben $a \cdot c + b \cdot c$, ohne dass Verwirrung entsteht.

Sei K ein Körper. Für $a, b \in K$ mit $b \neq 0$ sei

$$\frac{a}{b} := a/b := a \cdot b^{-1}.$$

Für $a, b \in K$ sei $a - b := a + (-b)$ und $ab := a \cdot b$.

Wir definieren $K^\times := K \setminus \{0\}$.

Man schreibt manchmal auch $(K, +, \cdot)$ statt K.

2.2. **Beispiele von Körpern.**

(i) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit den üblichen Abbildungen $+$ und $\cdot$ sind Körper.

(ii) $\mathbb{C}$, der Körper der komplexen Zahlen (wird später definiert).

(iii) $\mathbb{Z}$ mit den üblichen Abbildungen $+$ und $\cdot$ ist kein Körper. (Nur (M4) ist nicht erfüllt.)

(iv) Sei $K := \{a, b\}$ wobei $+$ und $\cdot$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} a+a&=a, & a\cdot a&=a,\\ a+b&=b, & a\cdot b&=a,\\ b+a&=b, & b\cdot a&=a,\\ b+b&=a, & b\cdot b&=b. \end{aligned}$$

Dann ist K ein Körper. Das Element a ist die 0 von K, und b ist die 1 von K.

(v) Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$, und definiere

$$+ \colon K \times K \to K \quad \text{und} \quad \cdot \colon K \times K \to K$$

durch

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

und

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) := (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

(Dies entspricht der üblichen Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$.) Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Die meisten Axiome sind offensichtlich, nur bei (M4) muss man etwas nachdenken: Ein Element $a + b\sqrt{2}$ in $K^\times$ hat sicherlich ein Inverses in $\mathbb{R}$, man muss aber hier zeigen, dass dieses Inverse auch in K liegt. Behauptung:

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

Dies folgt aus der Rechnung

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} \cdot \frac{a - b\sqrt{2}}{a - b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$

(Da $\sqrt{2}$ nicht rational ist, gilt $a^2 - 2b^2 \neq 0$.)

2.3. **Rechenregeln in Körpern.**

Lemma 2.1. *Es gilt $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in K$*

Beweis. Es gilt

$$a(b + c) = (b + c)a = ba + ca = ab + ac.$$

(Hierbei haben wir der Reihe nach (M2), (D) und schließlich wieder (M2) angewendet.) □

Lemma 2.2. *Sei K ein Körper, dann gibt es nur ein Nullelement in K.*

Beweis. Seien $0'$ und $0''$ Nullelemente in K. Dann gilt

$$0'' = 0'' + 0' = 0' + 0'' = 0'.$$

(Für die erste Gleichheit verwenden wir, dass $0'$ ein Nullelement ist, für die zweite Gleichheit benutzen wir (A2). Die dritte Gleichheit folgt, weil auch $0''$ ein Nullelement ist.) □

Lemma 2.3. *Für alle $a \in K$ gilt $0a = 0$.*

Beweis. Sei $a \in K$. Dann gilt

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a.$$

(Hier haben wir (A3) und dann (D) angewendet.) Also folgt

$$0 = 0a + (-(0a)) = (0a + 0a) + (-(0a)) = 0a + (0a + (-(0a))) = 0a + 0 = 0a.$$

Also haben wir gezeigt, dass $0a = 0$ gilt. (Wir haben der Reihe nach (A4), die obige Gleichung $0a = 0a + 0a$, (A1), (A4) und schließlich (A3) angewendet.) □

In den Übungsaufgaben werden wir weitere Rechenregeln kennenlernen.

2.4. **Charakteristik eines Körpers.** Sei K ein Körper. Für $a \in K$ und $0 \neq m \in \mathbb{N}$ sei

$$m \cdot a := \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ mal}}$$

Sei $\mathrm{char}(K) := 0$, falls $m \cdot 1_K \neq 0_K$ für alle $0 \neq m \in \mathbb{N}$, und andernfalls sei $\mathrm{char}(K) := \min\{0 \neq m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1_K = 0_K\}$. Wir nennen $\mathrm{char}(K)$ die **Charakteristik** von K.

Lemma 2.4. *Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$, dann ist p eine Primzahl.*

Beweis. Angenommen es gibt $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ mit $p_1, p_2 \geq 2$ und $p = p_1p_2$. Nach der Definition von $\mathrm{char}(K)$ folgt $p_1 \cdot 1_K \neq 0$ und $p_2 \cdot 1_K \neq 0$. Es gilt

$$(p_1 \cdot 1_K) \cdot (p_2 \cdot 1_K) = (p_1p_2) \cdot 1_K = p \cdot 1_K = 0_K.$$

Wegen der Nullteilerfreiheit von K (Übungsaufgabe) gilt $p_1 \cdot 1_K = 0_K$ oder $p_2 \cdot 1_K = 0_K$. Widerspruch. □

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 2** – – – – – – – – – – –

2.5. Die Ringe $\mathbb{Z}_m$.

Ein **Ring** ist eine Menge R zusammen mit zwei Abbildungen

$$+ \colon R \times R \to R \qquad \text{und} \qquad \cdot \colon R \times R \to R$$
$$(a,b) \mapsto a+b \qquad\qquad (a,b) \mapsto a \cdot b$$

so dass folgende Regeln (Axiome) gelten:

(A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in R$ (**Assoziativität der Addition**);

(A2) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in R$ (**Kommutativität der Addition**);

(A3) Es existiert ein Element $0 = 0_R \in R$ mit $a + 0 = a$ für alle $a \in R$ (Existenz eines **Nullelements**);

(A4) Zu jedem $a \in R$ gibt es ein $-a \in R$ mit $a + (-a) = 0$ (Existenz eines **additiven Inversen**);

(R1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$ (**Assoziativität der Multiplikation**);

(R2) Es existiert ein Element $1 = 1_R \in R$ mit $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ für alle $a \in R$ (Existenz eines **Einselements**);

(D) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ und $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ für alle $a, b, c \in R$ (**Distributivität**).

Die Abbildungen $+$ und $\cdot$ heißen **Addition** bzw. **Multiplikation**.

Ein Ring R heißt **kommutativ**, falls zusätzlich $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$ gilt.

Bemerkung: In einem Ring R wird nicht verlangt, dass $0_R \neq 1_R$. Im Fall $0_R = 1_R$ gilt jedoch automatisch $R = \{0_R\}$.

Für einen Ring $(R, +, \cdot)$ sei $ab := a \cdot b$ für alle $a, b \in R$. Außerdem folgen wir wieder der klammersparenden Konvention *Punktrechnung vor Strichrechnung*.

Lemma 2.5. *Seien $a, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$. Dann existieren eindeutig bestimmte Elemente $r, q \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq r < m$ und $a = q \cdot m + r$. Setze $r_m(a) := r$.*

Beweis. Es gibt ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{N}$ mit $qm \leq a \leq (q+1)m - 1$. Mit $r := a - qm$ folgt dann die Behauptung. □

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, und sei

$$\mathbb{Z}_m := \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}.$$

Für $a, b \in \mathbb{Z}_m$ sei $a + b := r_m(a + b)$ und $a \cdot b := r_m(a \cdot b)$. (Auf der rechten Seite von $:=$ bezeichnen $+$ und $\cdot$ die Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{Z}$.)

Lemma 2.6. $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Ring.*

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Lemma 2.7. $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ *ist ein Körper genau dann wenn m eine Primzahl ist.*

Beweis. Angenommen $\mathbb{Z}_m$ ist ein Körper. Dann gilt $\mathrm{char}(\mathbb{Z}_m) = m$. Nach Lemma 2.4 ist m eine Primzahl.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass m eine Primzahl ist. Wir zeigen zuerst, dass dann $\mathbb{Z}_m$ nullteilerfrei ist:

Seien $a, b \in \mathbb{Z}_m$ mit $a \cdot b = 0$, also $r_m(a \cdot b) = 0$. Dann ist $a \cdot b$ durch m teilbar. Da m eine Primzahl ist, folgt: m teilt a oder m teilt b. Damit ist aber $a = 0$ oder $b = 0$, da $0 \leq a, b \leq m - 1$. Also haben wir gezeigt, dass $\mathbb{Z}_m$ nullteilerfrei ist.

Sei nun $a \in \mathbb{Z}_m$ mit $a \neq 0$. Definiere eine Abbildung

$$\begin{aligned} \rho_a \colon \mathbb{Z}_m &\to \mathbb{Z}_m \\ x &\mapsto x \cdot a. \end{aligned}$$

Dann ist ρ_a injektiv: Sei $\rho_a(x) = \rho_a(y)$. Also $xa = ya$. Es folgt, dass $(x - y)a = 0$. Wegen der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}_m$ gilt dann $x - y = 0$. Damit ist aber $x = y$.

Da $\mathbb{Z}_m$ eine endliche Menge ist, ist ρ_a auch surjektiv. Also sind die Elemente $0a, 1a, \ldots, (m-1)a$ paarweise verschieden. Insbesondere gilt: Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}_m$ mit $xa = 1$. Daraus folgt aber Axiom (M4). Mit Lemma 2.6 ist $\mathbb{Z}_m$ also ein Körper. $\square$

Ist p eine Primzahl, so schreiben wir auch $\mathbb{F}_p$ statt $\mathbb{Z}_p$.

2.6. **Übungsaufgaben.**

2.6.1. Sei K ein Körper, und seien $a, b, c, d \in K$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt nur ein Einselement in K;
(ii) $(-a)b = -(ab)$;
(iii) Sei $ab = 0$. Dann gilt $a = 0$ oder $b = 0$, d.h. K ist **nullteilerfrei**;
(iv) Zu jedem $a \in K$ gibt es nur ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$;
(v) $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$, falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$;
(vi) $(-a)(-b) = ab$;
(vii) $-(-a) = a$.

2.6.2. Sei K ein Körper, und sei $K^\times := K \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Es gibt keine bijektive Abbildung $e\colon K \to K^\times$ mit $e(a+b) = e(a)e(b)$ für alle $a, b \in K$. (Den Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ sollte man getrennt betrachten.)

2.6.3. Für jede Primzahl p haben wir einen Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen konstruiert. Sei nun $K := \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$. Mit Hilfe der Addition und Multiplikation des Körpers $\mathbb{F}_3$ definieren wir Abbildungen

$$\begin{aligned} +\colon K \times K &\to K \\ ((a,b),(c,d)) &\mapsto (a+c, b+d) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot\colon K \times K &\to K \\ ((a,b),(c,d)) &\mapsto (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist (welchen wir mit $\mathbb{F}_9$ bezeichnen).

(ii) Für $(a, b) \neq 0$, wie sieht $(a, b)^{-1}$ aus?

(iii) Finden Sie alle Elemente in $\mathbb{F}_9$, welche die Gleichung $X^2 = -1$ lösen.

3. Vektorräume

3.1. Vektorraumaxiome.

Sei K ein Körper.

Ein **Vektorraum über K** (oder **K-Vektorraum**) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\to V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon K \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto a \cdot v \end{aligned}$$

so dass folgende Regeln (Axiome) gelten:

(A1) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ (**Assoziativität der Addition**);

(A2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ für alle $v_1, v_2 \in V$ (**Kommutativität der Addition**);

(A3) Es existiert ein Element $0 = 0_V \in V$ mit $v + 0 = v$ für alle $v \in V$ (Existenz eines **Nullelements**);

(A4) Zu jedem $v \in V$ gibt es ein $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$ (Existenz eines **additiven Inversen**);

(SM1) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ für alle $a, b, \in K$ und $v \in V$;

(SM2) $1_K \cdot v = v$ für alle $v \in V$;

(SM3) $a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$ für alle $a \in K$ und $v_1, v_2 \in V$;

(SM4) $(a + b) \cdot v = (a \cdot v) + (b \cdot v)$ für alle $a, b \in K$ und $v \in V$.

Die Abbildungen $+$ und $\cdot$ heißen **Addition** bzw. **Skalarmultiplikation**.

Wir schreiben auch $(V, +, \cdot)$ statt V.

Sei V ein K-Vektorraum. Für $v_1, v_2 \in V$ sei $v_1 - v_2 := v_1 + (-v_2)$. Für $a \in K$ und $v \in V$ sei $av := a \cdot v$. Zudem gilt wie immer unsere Konvention *Punktrechnung vor Strichrechnung*.

Die Elemente von V heißen **Vektoren**. Die Elemente von K nennt man **Skalare**.

Das Nullelement 0_V von V heißt **Nullvektor** oder **die 0 von V**.

Ähnlich wie für Körper kann man nun zahlreiche Rechenregeln für Vektorräume formulieren und beweisen.

Zum Beispiel gilt für alle $a \in K$ und $v \in V$

$$0v = 0, \qquad (-1)v = -v, \qquad a0 = 0.$$

3.2. Beispiele von Vektorräumen.

(i) Der **Nullvektorraum** $V := \{0\}$ über K (man schreibt dann einfach $V = 0$), wobei Addition und Skalarmultiplikation nur auf eine Weise definiert werden können.

(ii) Sei K ein Körper. Dann ist K ein K-Vektorraum, wobei Addition und Skalarmultiplikation durch die Addition und Multiplikation von K gegeben sind.

(iii) Sei K ein Körper. Für $n \geq 1$ sei $V := K^n$, das n-fache Kartesische Produkt von K. Wir schreiben die Elemente von K^n oft als Spalten

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in K$. Wir definieren

$$+ \colon V \times V \to V \quad \text{durch} \quad \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und

$$\cdot \colon K \times V \to V \quad \text{durch} \quad \left(a, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} ab_1 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Im $\mathbb{R}^2$ können wir die Addition und Skalarmultiplikation wie folgt visualisieren:

(iv) Ein ganz wichtiges Beispiel: Sei K ein Körper, und sei I eine Menge mit $I \neq \varnothing$.

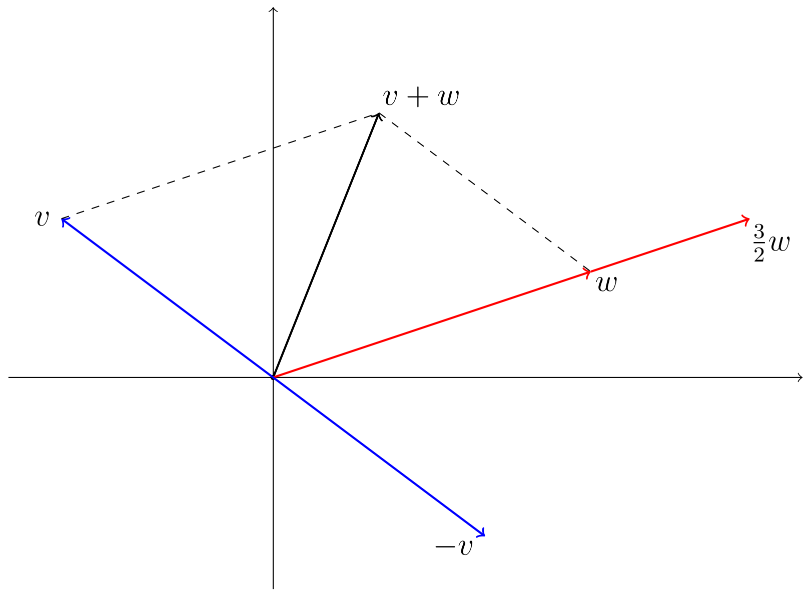


ABBILDUNG 1. Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$.

Setze $V := K^I := \mathrm{Abb}(I, K)$, wobei

$$+\colon V \times V \to V \quad \text{und} \quad \cdot\colon K \times V \to V$$
$$(f, g) \mapsto f + g \qquad\qquad (a, f) \mapsto af$$

definiert sind durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (af)(x) := a(f(x))$$

für alle $a \in K$, $f, g \in V$ und $x \in I$.

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

(v) Ein noch wichtigeres Beispiel: Sei K ein Körper, und sei $I \neq \varnothing$ eine Menge. Dann ist

$$K^{(I)} := \{f \in K^I \mid f(x) \neq 0 \ \text{ für nur endlich viele } x \in I\}$$

ein K-Vektorraum, wobei wir die Addition und Skalarmultiplikation von K^I benutzen.

Konventionen: $K^0 := 0$ und $K^\varnothing := K^{(\varnothing)} := 0$.

(vi) Sei $(L, +, \cdot)$ ein Körper, und sei K eine Teilmenge von L, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:
(a) $0, 1 \in K$;
(b) $a + b \in K$ für alle $a, b \in K$;
(c) $a \cdot b \in K$ für alle $a, b \in K$;
(d) $-a \in K$ für alle $a \in K$;
(e) $a^{-1} \in K$ für alle $a \in K \setminus \{0\}$.

Durch Einschränkung erhalten wir Abbildungen

$$+ : K \times K \to K \qquad \text{und} \qquad \cdot : K \times K \to K.$$

(Dies ist durch (b) und (c) garantiert.) Nun prüft man leicht, dass $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist. Wir nennen K einen **Teilkörper von L**. Die Menge L ist dann ein K-Vektorraum, wobei die Skalarmultiplikation $\cdot\colon K \times L \to L$ durch Einschränkung der Multiplikation $\cdot\colon L \times L \to L$ definiert ist. Zum Beispiel ist der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, und $\mathbb{R}$ ist auch ein $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-Vektorraum.

(vii) Seien V und W K-Vektorräume. Dann ist $V \times W$ wieder ein K-Vektorraum mit

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

und

$$a(v, w) := (av, aw)$$

für alle $a \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$ und $w, w_1, w_2 \in W$.

Den K-Vektorraum $V \times W$ bezeichnet man auch mit $V \oplus W$, und nennt ihn die **(externe) direkte Summe** von V und W.

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 3** – – – – – – – – – – –

3.3. **Unterräume.** Sei V ein K-Vektorraum.

Eine Teilmenge U von V, heißt **Unterraum** von V, falls gilt:

(i) $U \neq \varnothing$;

(ii) $u_1 + u_2 \in U$ für alle $u_1, u_2 \in U$;

(iii) $au \in U$ für alle $a \in K$ und $u \in U$.

Lemma 3.1. *Sei U ein Unterraum von V. Durch Einschränkung der Addition und Skalarmultiplikation von V erhalten wir Abbildungen $+\colon U \times U \to U$ und $\cdot\colon K \times U \to U$. Dann ist U zusammen mit diesen Abbildungen wieder ein K-Vektorraum.*

Beweis. Sei $u \in U$. Es folgt $0u = 0 \in U$ und $(-1)u = -u \in U$. Also gelten die Regeln (A3) und (A4). Alle anderen Regeln sind offensichtlich. $\square$

Beispiele:

(i) Die Teilmengen V und $\{0\}$ sind Unterräume von V. (Statt $\{0\}$ schreibt man oft einfach 0.)

(ii) Sei $v \in V$. Dann ist

$$U_v := Kv := \{av \mid a \in K\}$$

der kleinste Unterraum von V welcher v enthält.

Ist $v \neq 0$, so nennt man U_v die durch v verlaufende **Gerade**.

(iii) Für jede Menge I ist $K^{(I)}$ ein Unterraum von K^I.

(iv) Sei $I = [a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Dann ist

$$C^0(I) := \{\text{stetige Funktionen } I \to \mathbb{R}\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^I$.

(v) Die Elemente des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sind gerade die in der Analysis behandelten reellen Folgen. Die Teilmenge der konvergenten reellen Folgen ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Dann ist $U_1 \cap U_2$ der **Durchschnitt** von U_1 und U_2, und

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

ist die **Summe** von U_1 und U_2. Gilt zudem $U_1 \cap U_2 = 0$, so schreiben wir $U_1 \oplus U_2 := U_1 + U_2$ und nennen $U_1 \oplus U_2$ die **(interne) direkte Summe** von U_1 und U_2.

Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ und die Summe $U_1 + U_2$ sind Unterräume von V.

Sei I eine Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei U_i ein Unterraum von V. Die **Summe**

$$\sum_{i \in I} U_i$$

der Unterräume U_i ist die Menge aller $v \in V$, für die es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ und $u_j \in U_j$ mit $j \in J$ gibt, so dass

$$v = \sum_{j \in J} u_j.$$

Dieses ist eine **(interne) direkte Summe**, falls

$$U_j \cap \left(\sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i \right) = 0$$

für alle $j \in I$. In diesem Fall schreiben wir

$$\bigoplus_{i \in I} U_i := \sum_{i \in I} U_i.$$

Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ und die Summe $\sum_{i \in I} U_i$ sind Unterräume von V.

3.4. **Übungsaufgaben.**

3.4.1. Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Für alle $a \in K$ und $v \in V$ gilt:

(i) $0v = 0$;

(ii) $a0 = 0$;

(iii) $(-1)v = -v$;

(iv) $av = 0$ genau dann wenn $a = 0$ oder $v = 0$.

3.4.2. Zeigen Sie: Axiom (A2) in der Definition eines Vektorraums folgt bereits aus den anderen Axiomen.

3.4.3. Seien U_1, U_2, W Unterräume eines Vektorraums V.

(i) Prüfen Sie, ob folgende Aussagen gelten:

$$(U_1 + U_2) \cap W = (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W),$$
$$(U_1 \cap U_2) + W = (U_1 + W) \cap (U_2 + W).$$

(ii) Zeigen Sie: Falls $U_1 \subseteq U_2$, so gilt $U_2 \cap (W + U_1) = (U_2 \cap W) + U_1$.

(iii) Finden Sie ein Beispiel, so dass $U_2 \cap (W + U_1) \neq (U_2 \cap W) + U_1$.

3.4.4. Sei V ein K-Vektorraum, und sei I eine Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei U_i ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i \in I} U_i = \bigcap_{\substack{U \text{ ist Unterraum von } V \\ \text{mit } U_i \subseteq U \text{ für alle } i \in I}} U.$$

4. **Lineare Abbildungen**

4.1. **Definition einer linearen Abbildung.** Seien V und W K-Vektorräume.

Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **linear** (oder **K-linear**), falls folgende Regeln gelten:

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$;

(ii) $f(av) = af(v)$ für alle $a \in K$ und $v \in V$.

Man nennt f dann einen **Homomorphismus**. Ist $V = W$ so ist f ein **Endomorphismus**.

Wir definieren

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{f \in \mathrm{Abb}(V, W) \mid f \text{ ist ein Homomorphismus}\},$$
$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V).$$

Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus.

- f ist ein **Monomorphismus**, falls f injektiv ist;
- f ist ein **Epimorphismus**, falls f surjektiv ist;
- f ist ein **Isomorphismus**, falls f bijektiv ist.

Zwei K-Vektorräume V und W heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus $f\colon V \to W$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $V \cong W$.

Lemma 4.1. *Seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ ist linear genau dann wenn für alle $a_1, a_2 \in K$ und $v_1, v_2 \in V$*

$$f(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2)$$

gilt.

Beweis. Übungsaufgabe. □

4.2. **Beispiele von linearen Abbildungen.**

(i) Seien V und W K-Vektorräume. Die **Nullabbildung** $f\colon V \to W$, welche definiert ist durch $f(v) := 0$ für alle $v \in V$, ist linear. Schreibweise: $f = 0$.

(ii) Sei V ein K-Vektorraum. Die **Identität** $f\colon V \to V$, welche definiert ist durch $f(v) := v$ für alle $v \in V$, ist linear. Schreibweise: $f = \mathrm{id}_V$.

(iii) Sei V ein K-Vektorraum, und sei $a \in K$. Dann sei $f_a\colon V \to V$ definiert durch $f_a(v) := av$ für alle $v \in V$. Die Abbildung f_a ist linear.

(iv) Für jede lineare Abbildung $f\colon K \to K$ gibt es ein $a \in K$ mit $f = f_a$.

(v) Die Graphen der linearen Abbildungen $f\colon K \to K$ sind genau die Geraden $U_v \subseteq K^2$, wobei $v = (a, b)$ mit $a \neq 0$.

(vi) Sei K ein Körper, und sei $(a, b, c, d) \in K^4$. Die Abbildung $f\colon K^2 \to K^2$, welche definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

ist linear.

(vii) Die Abbildung $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, welche definiert ist durch $f(x) := x^2$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, ist nicht linear.

Warnung: In der Linearen Algebra gibt es viele verschiedene Nullen. Zum Beispiel, seien V und W K-Vektorräume. Dann gibt es je eine Null in K, V, W, und es gibt die Nullabbildung $0\colon V \to W$.

4.3. **Erste Eigenschaften linearer Abbildungen.**

Lemma 4.2. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gilt $f(0) = 0$.*

Beweis. Erster Beweis, in dem wir nur die Axiome (A1) bis (A4) verwenden: Es gilt $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. (Hier haben wir das Vektorraumaxiom (A3) und dann die Linearität von f verwendet.) Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) - f(0) = (f(0) + f(0)) - f(0) \\ &= f(0) + (f(0) - f(0)) = f(0) + 0 = f(0). \end{aligned}$$

(Hier haben wir der Reihe nach (A4), die vorherige Gleichung $f(0) = f(0) + f(0)$, (A1), wieder (A4) und schließlich (A3) verwendet.)

Zweiter Beweis: Für die Nullen $0_K \in K$, $0_V \in V$ und $0_W \in W$ gilt unter Verwendung der Linearität von f und der Rechenregel $0v = 0$ in Vektorräumen, dass

$$f(0_V) = f(0_K 0_V) = 0_K f(0_V) = 0_W.$$

□

Lemma 4.3. *Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Klar ist, dass f^{-1} existiert. Jedes $w \in W$ ist von der Form $f(v) = w$ für ein eindeutig bestimmtes v. Für $v, v_1, v_2 \in V$ und a $\in K$ gilt

$$f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = f^{-1}(f(v_1)) + f^{-1}(f(v_2))$$

und

$$f^{-1}(a(f(v))) = f^{-1}(f(av)) = av = a(f^{-1}(f(v))).$$

Also ist f^{-1} linear. □

Lemma 4.4. *Seien $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ Homomorphismen. Dann ist die Komposition $g \circ f\colon U \to W$ auch ein Homomorphismus.*

Beweis. Für alle $a_1, a_2 \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a_1 v_1 + a_2 v_2) &= g(f(a_1 v_1 + a_2 v_2)) \\ &= g(a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)) \\ &= a_1 g(f(v_1)) + a_2 g(f(v_2)) \\ &= a_1 (g \circ f)(v_1) + a_2 (g \circ f)(v_2). \end{aligned}$$

(Hier haben wir der Reihe nach die Definition der Komposition von Abbildungen, die Linearität von f, die Linearität von g, und wieder die Definition der Komposition verwendet.) □

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 4** – – – – – – – – – – –

Lemma 4.5. *Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $a \in K$ definiere Abbildungen*

$$\begin{aligned} f+g\colon V &\to W \\ v &\mapsto f(v)+g(v) \end{aligned} \qquad \textit{und} \qquad \begin{aligned} af\colon V &\to W \\ v &\mapsto a(f(v)). \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathrm{Hom}(V, W), +, \cdot)$ ein K-Vektorraum.

Beweis. Zuerst muss man zeigen, dass $f + g$ und af wieder in $\mathrm{Hom}(V, W)$ liegen. (Eine leichte Übungsaufgabe.) Die Axiome (A1), (A2) und (A3) sind ebenfalls leicht zu prüfen. (Die Nullabbildung $0\colon V \to W$ ist der Nullvektor.) Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definiere

$$\begin{aligned} -f\colon V &\to W \\ v &\mapsto -(f(v)) \end{aligned}$$

Man prüft leicht, dass $-f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Es folgt dann

$$(f + (-f))(v) = f(v) + (-(f(v))) = 0$$

für alle $v \in V$. Also gilt (A4) in $\mathrm{Hom}(V, W)$. Seien $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $a \in K$ und $v \in V$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (a(f+g))(v) &= a((f+g)(v)) = a(f(v)+g(v)) = a(f(v)) + a(g(v)) \\ &= (af)(v) + (ag)(v) = (af+ag)(v), \end{aligned}$$

d.h. $a(f + g) = af + ag$. (Für die dritte Gleichheit haben wir (SM3) in W angewendet.) Also gilt (SM3) in $\mathrm{Hom}(V, W)$. Die restlichen Axiome überprüft man auf ähnliche Weise. □

Lemma 4.6. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus.*

(i) *Existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$, so ist f ein Monomorphismus.*

(ii) *Existiert ein Homomorphismus $g\colon W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$, so ist f ein Epimorphismus.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung: Die Umkehrung der beiden Aussagen in Lemma 4.6 gilt auch. Beweis: Später!

4.4. **Lineare Abbildungen und affine Geraden.** Sei V ein K-Vektorraum. Sei U ein Unterraum von V, und sei $v \in V$. Definiere

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}.$$

Dies ist die **Restklasse von v modulo U**. Per Definition ist $v + U$ eine Teilmenge von V.

Für $v \in V$ sei wie zuvor

$$U_v := \{av \mid a \in K\}.$$

Für $v, w \in V$ sei

$$L_{v,w} := \{u_{v,w}(a) := av + (1-a)w \mid a \in K\}.$$

Für $a = 1$ und $a = 0$ erhalten wir $v \in L_{v,w}$ bzw. $w \in L_{v,w}$.

Für $v \neq w$ ist $L_{v,w}$ die durch v und w verlaufende **affine Gerade**.

Für $v = w$ gilt $L_{v,w} = \{v\}$ und $U_{v-w} = \{0\}$.

In der Regel ist $L_{v,w}$ kein Unterraum von V.

Es gilt aber

$$L_{v,w} = w + U_{v-w}.$$

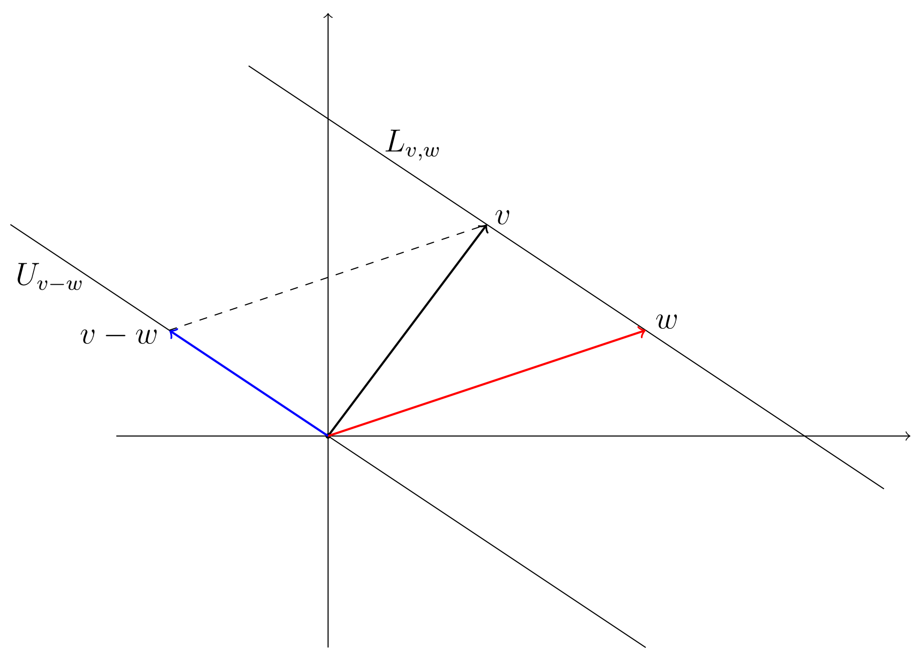


Abbildung 2. Affine Gerade $L_{v,w}$ im $\mathbb{R}^2$.

Für einen Homomorphismus $f\colon V \to W$ gilt nun

$$f(av + (1-a)w) = af(v) + (1-a)f(w).$$

Mit anderen Worten, durch Einschränkung erhalten wir Abbildungen

$$\begin{aligned} f_{v,w} \colon L_{v,w} &\to L_{f(v),f(w)} \\ u_{v,w}(a) &\mapsto u_{f(v),f(w)}(a) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{v-w} \colon U_{v-w} &\to U_{f(v)-f(w)} \\ a(v-w) &\mapsto a(f(v)-f(w)) \end{aligned}$$

wobei $a \in K$.

Bemerkungen:

(i) Für $v \neq w$ mit $f(v) \neq f(w)$ sind $f_{v,w}$ und f_{v-w} beide bijektiv. In diesem Fall werden die beiden *parallelen* affinen Geraden U_{v-w} und $L_{v,w}$ auf die *parallelen* affinen Geraden $U_{f(v)-f(w)}$ und $L_{f(v),f(w)}$ abgebildet.

(ii) Für $v \neq w$ kann $f(v) = f(w)$ gelten. In diesem Fall gilt $L_{f(v),f(w)} = \{f(v)\}$ und $U_{f(v)-f(w)} = 0$.

4.5. **Kern und Bild.** Sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann ist

$$\mathrm{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

der **Kern** von f, und

$$\mathrm{Bild}(f) := \{f(v) \mid v \in V\}$$

ist das **Bild** von f.

Es folgt direkt aus der Definition, dass

$$\mathrm{Kern}(f) = f^{-1}(0).$$

Lemma 4.7. *Sei $f \colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Kern}(f)$ *ist ein Unterraum von V;*

(ii) $\mathrm{Bild}(f)$ *ist ein Unterraum von W;*

(iii) $\mathrm{Kern}(f) = 0 \iff f$ *ist injektiv;*

(iv) $\mathrm{Bild}(f) = W \iff f$ *ist surjektiv.*

Beweis. (i): Es gilt $\mathrm{Kern}(f) \neq \varnothing$, da $f(0) = 0$. Seien $a \in K$ und $v, v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0.$$

Also $v_1 + v_2 \in \mathrm{Kern}(f)$. Außerdem gilt

$$f(av) = af(v) = a0 = 0,$$

d.h. $av \in \mathrm{Kern}(f)$. Es folgt, dass $\mathrm{Kern}(f)$ ein Unterraum von V ist.

(ii): Es gilt $\mathrm{Bild}(f) \neq \varnothing$, da $f(0) = 0$. Seien $a \in K$ und $w, w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(f)$. Es gibt also $v, v_1, v_2 \in V$ mit $f(v) = w$, $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Dann gilt

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2.$$

Also $w_1 + w_2 \in \mathrm{Bild}(f)$. Außerdem gilt

$$f(av) = af(v) = aw,$$

d.h. $aw \in \mathrm{Bild}(f)$. Es folgt, dass $\mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von W ist.

(iii): Sei f injektiv, und sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f(v) = f(0) = 0.$$

Wegen der Injektivität von f folgt $v = 0$. Also $\mathrm{Kern}(f) = 0$.

Für die Umkehrung nehmen wir an, dass f nicht injektiv ist. Es gibt also $v_1 \neq v_2$ in V mit $f(v_1) = f(v_2)$. Es folgt $f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0$. Also gilt $0 \neq v_1 - v_2 \in \mathrm{Kern}(f)$.

(iv): Klar. □

Lemma 4.8. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphimus, und sei $b \in \mathrm{Bild}(f)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f^{-1}(b)$ ein Unterraum von V;*

(ii) $b = 0$.

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $b = 0$. Dann gilt $f^{-1}(b) = \mathrm{Kern}(f)$. Also ist $f^{-1}(b)$ nach Lemma 4.7 ein Unterraum von V.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Angenommen $b \neq 0$. Dann gilt $0 \notin f^{-1}(b)$, da $f(0) = 0$. Also ist $f^{-1}(b)$ kein Unterraum von V. □

Lemma 4.9. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus, und seien $b \in \mathrm{Bild}(f)$ und $v \in f^{-1}(b)$. Dann gilt*

$$f^{-1}(b) = v + f^{-1}(0).$$

Beweis. Sei $x \in v + f^{-1}(0)$, also $x = v + u$ mit $u \in f^{-1}(0)$. Dann gilt

$$f(x) = f(v + u) = f(v) + f(u) = b + 0 = b.$$

Also $x \in f^{-1}(b)$.

Sei umgekehrt $x \in f^{-1}(b)$. Es gilt $x = (v - v) + x = v + (-v + x)$ und $f(-v) = f((-1)v) = -f(v) = -b$. Es folgt

$$f(-v + x) = f(-v) + f(x) = -b + b = 0$$

und daher $x = v + (-v + x) \in v + f^{-1}(0)$. □

Lemma 4.9 ist wichtig für das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

4.6. **Übungsaufgaben.**

4.6.1. Sei $K = \mathbb{Q}$, und seien V und W Vektorräume über K. Zeigen Sie: Eine Abbildung $f\colon V \to W$ ist linear genau dann wenn $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

4.6.2. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit $f^2 = f$. Zeigen Sie: $V = \mathrm{Bild}(f) \oplus \mathrm{Kern}(f)$.

4.6.3. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit $f^2 = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie: Falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so gilt $V = \mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V) \oplus \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V)$.

4.6.4. Sei f ein Endomorphismus eines Vektorraums V. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Kern}(f^n) \subseteq \mathrm{Kern}(f^{n+1})$ für alle $n \geq 0$. (Hier ist f^n die n-fache Hintereinanderschaltung von f, wobei wir $f^0 := \mathrm{id}_V$ setzen.)

(ii) Falls $\mathrm{Kern}(f^n) = \mathrm{Kern}(f^{n+1})$ für ein $n \geq 0$, so gilt auch $\mathrm{Kern}(f^{n+1}) = \mathrm{Kern}(f^{n+2})$.

(iii) Formulieren und beweisen Sie die entsprechenden Aussagen für $\mathrm{Bild}(f^n)$.

5. **Matrizenrechnung**

5.1. **Definition einer Matrix.** Zur Erinnerung: Sei K ein Körper, und sei $n \geq 1$. Dann ist K^n die Menge aller n-Tupel der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in K$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Seien $m, n \geq 1$.

Informelle Definition:

Eine $(m \times n)$**-Matrix** (mit Einträgen in K) ist eine Anordnung von Elementen $a_{ij} \in K$, wobei $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Mit $K^{m,n}$ bezeichnen wir die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen. Das m-Tupel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

ist die j**-te Spalte** von A, und $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ ist die i**-te Zeile** von A. Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ sei $A_{ij} := a_{ij}$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$$

ist eine (2×3)-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$.

Formale Definition:

Für $s \geq 1$ sei $I_s := \{1, 2, \dots s\}$. Setze

$$K^{m,n} := K^{I_m \times I_n} = \mathrm{Abb}(I_m \times I_n, K).$$

Die Elemente von $K^{m,n}$ nennen wir $(m \times n)$-**Matrizen** (mit Einträgen in K).

Eine Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

entspricht der Abbildung $f\colon I_m \times I_n \to K$, welche definiert ist durch $f((i,j)) := a_{ij}$ für $(i,j) \in I_m \times I_n$.

Wir arbeiten mit der informellen Definition. Es ist aber recht einfach, alle Beweise und Aussagen mit der formalen Definition durchzuführen.

Statt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

schreibt man auch

$$A = (a_{ij}) \in K^{m,n}.$$

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j. Wir schreiben dann $A = 0$ oder $A = 0_{m,n}$ und nennen dies die **Nullmatrix** in $K^{m,n}$.

Sei $I_0 := \varnothing$. Für $m = 0$ und/oder $n = 0$ enthält

$$K^{m,n} := K^{I_m \times I_n} = K^{\varnothing}$$

genau ein Element, genannt die **leere Matrix** oder auch **Nullmatrix**, welches wir wieder mit 0 oder $0_{m,n}$ bezeichnen.

Für $m, n \geq 0$ sei

$$M_{m,n}(K) := K^{m,n} \quad \text{und} \quad M_n(K) := K^{n,n}.$$

– – – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 5** – – – – – – – – – – – –

5.2. **Operationen auf Matrizen.** Seien $m, n \geq 1$, und seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen in $K^{m,n}$.

Wir definieren die **Summe** von A und B durch

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

und nennen die Abbildung

$$\begin{aligned} +\colon K^{m,n} \times K^{m,n} &\to K^{m,n} \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

Addition von Matrizen.

Seien $m, n \geq 1$, und seien $a \in K$ und $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$.

Wir definieren die **Skalarmultiplikation** von a und A durch

$$a \cdot A := aA := (aa_{ij}) = \begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \dots & aa_{1n} \\ aa_{21} & aa_{22} & \dots & aa_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ aa_{m1} & aa_{m2} & \dots & aa_{mn} \end{pmatrix}$$

und nennen die Abbildung

$$\begin{aligned}\cdot\colon K \times K^{m,n} &\to K^{m,n}\\ (a,A) &\mapsto aA\end{aligned}$$

Skalarmultiplikation für Matrizen.

Lemma 5.1. *$(K^{m,n},+,\cdot)$ ist ein K-Vektorraum.*

Beweis. Routine! □

Die Null in $(K^{m,n},+,\cdot)$ ist die Nullmatrix $0_{m,n}$. Falls $m=0$ oder $n=0$, so sei $K^{m,n}$ der Nullvektorraum (dessen einziges Element $0_{m,n}$ ist).

Seien $m,n,p \geq 1$, und seien $A=(a_{ij}) \in K^{m,n}$ und $B=(b_{jk}) \in K^{n,p}$ Matrizen. Wir definieren das **Produkt** oder die **Multiplikation** von A und B durch

$$A \cdot B := AB := (c_{ik}) \in K^{m,p},$$

wobei

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned}\cdot\colon K^{m,n} \times K^{n,p} &\to K^{m,p}\\ (A,B) &\mapsto AB.\end{aligned}$$

Bemerkung: In der obigen Definition der Matrixmultiplikation gilt

$$c_{ik} = (a_{i1},\ldots,a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k}\\ \vdots \\ b_{nk}\end{pmatrix}.$$

Beispiele:

(i) $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,

(iii) $(a_1,\ldots,a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_jb_j\right)$,

(iv) Sei $K = \mathbb{Q}$. Dann gilt $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3. **Rechenregeln für Matrizen.**

5.3.1. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$, $B = (b_{jk}) \in K^{n,p}$ und $C = (c_{kl}) \in K^{p,q}$. Dann gilt

$$A(BC) = (AB)C.$$

Beweis. Nach der Definition der Matrixmultiplikation gilt

$$A(BC) = A \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right)_{jl} \right) = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{il} \right)$$

und

$$(AB)C = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{ik} \right) \cdot C = \left(\left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{il} \right).$$

□

5.3.2. Für alle $A \in K^{m,n}$ und $B, C \in K^{n,p}$ gilt

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Beweis. Es gilt

$$[A(B + C)]_{ik} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} + c_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} + c_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

und

$$[AB + AC]_{ik} = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} + (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}.$$

Nun wenden wir die Distributivität (D) in K an. □

Für alle $A, B \in K^{m,n}$ und $C \in K^{n,p}$ gilt

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Dies beweist man ähnlich wie die vorherige Rechenregel.

5.3.3. Für $n \geq 1$ sei

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n,n}.$$

Also $E_n = (a_{ij})$ wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für $n = 0$ sei E_0 die Nullmatrix.

Für alle $A \in K^{m,n}$ gilt

$$E_m A = A = A E_n.$$

Die Matrix E_n heißt **Einheitsmatrix** in $K^{n,n}$.

5.3.4. Für alle $a \in K$, $A \in K^{m,n}$ und $B \in K^{n,p}$ gilt

$$a(AB) = (aA)B = A(aB).$$

Dies folgt wieder aus einer einfachen Rechnung unter Verwendung der Definitionen der Skalarmultiplikation für Matrizen und der Matrixmultiplikation.

5.3.5.

Lemma 5.2. $(M_n(K), +, \cdot)$ *ist ein Ring.*

Beweis. Die Axiome (A1) bis (A4) der Definition eines Rings folgen aus den Axiomen (A1) bis (A4) für den Körper K, da die Addition von Matrizen komponentenweise definiert ist. Die Assoziativität der Multiplikation (R1) haben wir bereits oben bewiesen. Wegen $E_n A = A E_n = A$ für alle $A \in M_n(K)$, gilt auch (R2). Die Distributivität (D) für Ringe haben wir ebenfalls schon gezeigt. □

Die Beispiele in Abschnitt 5.2 zeigen, dass der Ring $M_2(K)$ nicht kommutativ und nicht nullteilerfrei ist.

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ zusammen mit einer Abbildung $*\colon K \times R \to R$, $(a, r) \mapsto a * r$ heißt **K-Algebra**, falls gilt:

(AL1) $(R, +, *)$ ist ein K-Vektorraum;

(AL2) $a * (r \cdot s) = (a * r) \cdot s = r \cdot (a * s)$ für alle $a \in K$ und $r, s \in R$.

Wir schreiben auch ar statt $a * r$ und rs statt $r \cdot s$.

Lemma 5.3. *$M_n(K)$ ist eine K-Algebra wobei $+$ die Addition von Matrizen, $\cdot$ die Multiplikation von Matrizen und $*$ die Skalarmultiplikation von Matrizen ist.*

Beweis. Die Gültigkeit der Axiome ist entweder offensichtlich, oder wir haben sie bereits vorher überprüft. □

5.4. **Matrizen als lineare Abbildungen.**

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. Wir definieren eine Abbildung, die wir ebenfalls mit A bezeichnen, wie folgt:

$$\begin{aligned} A \colon K^n &\to K^m \\ v &\mapsto A(v) := A \cdot v \end{aligned}$$

wobei $A \cdot v$ das Produkt der $(m \times n)$-Matrix A mit der $(n \times 1)$-Matrix v bezeichnet. (Hier haben wir also K^n und $K^{n,1}$ identifiziert.) Wir nennen $A \colon K^n \to K^m$ eine **Matrixabbildung**.

Lemma 5.4. *Die Abbildung $A \colon K^n \to K^m$ ist K-linear.*

Beweis. Seien $A \in K^{m,n}$ und $v_1, v_2 \in K^n$. Dann gilt

$$A(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2) = A \cdot v_1 + A \cdot v_2 = A(v_1) + A(v_2).$$

(Dies ist die Distributivität der Matrixmultiplikation.) Für $a \in K$ und $v \in K^n$ gilt

$$A(av) = A \cdot (av) = a(A \cdot v) = a(A(v)).$$

(Dies ist die Rechenregel aus Abschnitt 5.3.4.) Also ist A K-linear. □

Matrixabbildungen liefern viele neue Beispiele linearer Abbildungen.

Beispiele:

(i) Die Einheitsmatrix E_n liefert die Identität $\mathrm{id}_{K^n} \colon K^n \to K^n$.

(ii) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$ liefert die Abbildung

$$\begin{aligned} A \colon K^2 &\to K^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anschauung: Für $K = \mathbb{R}$ dreht A jeden Vektor in $\mathbb{R}^2$ um $90°$ im Uhrzeigersinn.

(iii) Beispiel (vi) in Abschnitt 4.2 ist die Matrixabbildung

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : K^2 \to K^2.$$

Im folgenden Lemma ist $A \cdot B$ die Multiplikation der Matrizen A und B, während $A \circ B$ die Komposition der Matrixabbildungen A und B bezeichnet.

Lemma 5.5. *Seien $A \in K^{m,n}$ und $B \in K^{n,p}$. Dann gilt*

$$A \cdot B = A \circ B.$$

Beweis. Für $v \in K^p$ gilt

$$(A \cdot B)(v) = (A \cdot B) \cdot v = A \cdot (B \cdot v) = A(B(v)) = (A \circ B)(v).$$

□

5.5. **Die Standardbasis von K^n.** Sei $n \geq 1$. Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$e_i^{(n)} := e_i := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n \qquad \text{wobei } a_j := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Lemma 5.6. *Für jedes $v \in K^n$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit*

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Beweis. Existenz: Es gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Eindeutigkeit: Aus

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{i=1}^n b_i e_i$$

folgt

$$\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) e_i = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix} = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a_i = b_i$ für alle i. □

Wir nennen $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ die **Standardbasis** von K^n.

Die allgemeine Definition von Basen von K-Vektorräumen kommt später.

– – – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 6** – – – – – – – – – – – –

Lemma 5.7. *Für $f, g \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ gilt $f = g$ genau dann wenn $f(e_i) = g(e_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis. Sei $v \in K^n$. Nach Lemma 5.6 ist v von der Form

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Für $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ gilt dann

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(e_i).$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

5.6. $K^{m,n}$ und $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$.

Satz 5.8. *Für $m, n \geq 0$ gilt*

$$K^{m,n} \cong \mathrm{Hom}(K^n, K^m).$$

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} \eta \colon K^{m,n} &\to \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \\ A &\mapsto \eta(A) \end{aligned}$$

definiert durch

$$(\eta(A))(v) := A(v) = A \cdot v$$

für alle $v \in K^n$.

(a): $\eta(A)$ ist K-linear: Nach Definition ist $\eta(A)$ die durch A gegebene Matrixabbildung und daher K-linear.

(b): η ist K-linear: Für $a_1, a_2 \in K$, $A_1, A_2 \in K^{m,n}$ und $v \in K^n$ gilt

$$\begin{aligned} (\eta(a_1 A_1 + a_2 A_2))(v) &= (a_1 A_1 + a_2 A_2) \cdot v \\ &= a_1(A_1 \cdot v) + a_2(A_2 \cdot v) \\ &= a_1((\eta(A_1))(v)) + a_2((\eta(A_2))(v)) \\ &= (a_1(\eta(A_1)) + a_2(\eta(A_2)))(v). \end{aligned}$$

(c): η ist ein Monomorphismus: Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. Für $1 \leq j \leq n$ gilt

$$A(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

die j-te Spalte von A. Also gilt: Falls $A \neq B \in K^{m,n}$, so folgt $\eta(A) \neq \eta(B)$. Also ist η injektiv.

(d): η ist ein Epimorphismus: Sei $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. Definiere $A_f := (a_{ij}) \in K^{m,n}$ durch

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} := f(e_j).$$

Dann gilt $\eta(A_f) = f$, weil $A_f(e_j) = f(e_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$. (Hier benutzen wir Lemma 5.7.) Also ist η surjektiv. □

Korollar 5.9. *Alle Abbildungen in* $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ *sind Matrixabbildungen.*

Für $m = 0$ oder $n = 0$ gilt $\mathrm{Hom}(K^n, K^m) = \{0\}$, wobei 0 die Nullabbildung $K^n \to K^m$ ist.

In Zukunft unterscheiden wir oft nicht mehr zwischen $K^{m,n}$ und $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. Statt $\eta(A)$ wie im Beweis von Satz 5.8 schreiben wir einfach nur A und meinen damit sowohl die Matrix in $K^{m,n}$ als auch die Matrixabbildung $A \colon K^n \to K^m$.

5.7. Elementarmatrizen und Zeilen- und Spaltenumformungen.

Für $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$ und $a \in K$ definieren wir eine Matrix

$$T_{ij}^{(m)}(a) := T_{ij}(a) = (t_{pq}) \in K^{m,m}$$

durch

$$t_{pq} := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } p = q, \\ a & : \text{ falls } (p,q) = (i,j), \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Beispiel:

$$T_{25}^{(6)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & a & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_{52}^{(6)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & a & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $1 \le i \le m$ und $b \in K^\times$ sei
$$D_i^{(m)}(b) := D_i(b) = (d_{pq}) \in K^{m,m}$$
definiert durch
$$d_{pq} := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } p = q \neq i, \\ b & : \text{ falls } p = q = i, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Beispiel:

$$D_3^{(6)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & b & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $1 \le i \neq j \le m$ sei
$$E_{ij}^{(m)} := E_{ij} = (e_{pq}) \in K^{m,m}$$
definiert durch
$$e_{pq} := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i \neq p = q \neq j, \\ 1 & : \text{ falls } (p,q) = (i,j), \\ 1 & : \text{ falls } (p,q) = (j,i), \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $E_{ij}^{(m)} = E_{ji}^{(m)}$.

Beispiel:

$$E_{14}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ 1 & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

In den obigen Beispielen stehen an den freien Stellen der Matrizen jeweils Nullen, welche wir der Übersichtlichkeit halber weggelassen haben.

Matrizen der Form $T_{ij}^{(m)}(a)$, $D_i^{(m)}(a)$, $E_{ij}^{(m)}$ nennt man **Elementarmatrizen vom Typ (I), (II) bzw. (III)**.

Lemma 5.10. *Die Matrixabbildungen* $T_{ij}^{(m)}(a), D_i^{(m)}(b)$ *und* $E_{ij}^{(m)}$ *sind für* $a \in K$ *und* $b \in K^\times$ *Isomorphismen.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(m)}(a) \cdot T_{ij}^{(m)}(-a) = E_m &= T_{ij}^{(m)}(-a) \cdot T_{ij}^{(m)}(a), \\ D_i^{(m)}(b) \cdot D_i^{(m)}(b^{-1}) = E_m &= D_i^{(m)}(b^{-1}) \cdot D_i^{(m)}(b), \\ E_{ij}^{(m)} \cdot E_{ij}^{(m)} &= E_m. \end{aligned}$$

Nun wenden wir Lemma 4.6 an. □

Lemma 5.11. *Seien* $A \in K^{m,n}$, $a \in K$ *und* $b \in K^\times$.

(i) $T_{ij}^{(m)}(a) \cdot A$ *entsteht aus* A, *indem man zur* i*-ten Zeile von* A *das* a*-fache der* j*-ten Zeile addiert;*

(ii) $D_i^{(m)}(b) \cdot A$ *entsteht aus* A, *indem man die* i*-te Zeile von* A *mit* b *multipliziert;*

(iii) $E_{ij}^{(m)} \cdot A$ *entsteht aus* A *durch Vertauschen der* i*-ten und* j*-ten Zeile.*

Beweis. Eine einfache Rechnung. □

Die drei im vorherigen Lemma beschriebenen Umformungen von A nennt man **Zeilenoperationen vom Typ (I), (II) bzw. (III)**.

Lemma 5.12. *Zeilenoperationen vom Typ (III) kann man durch Hintereinanderschaltung von Typ (I) und Typ (II) Operationen erhalten.*

Beweis. Es gilt

$$E_{ij}^{(m)} = D_i^{(m)}(-1) \cdot T_{ij}^{(m)}(1) \cdot T_{ji}^{(m)}(-1) \cdot T_{ij}^{(m)}(1).$$

□

Analog definieren wir Operation auf den Spalten. Sei $A \in K^{m,n}$. Dann sind $A \cdot T_{ij}^{(n)}(a)$, $A \cdot D_j^{(n)}(b)$ und $A \cdot E_{ij}^{(n)}$ die **elementaren Spaltenoperationen vom Typ (I), (II) bzw. (III)**.

5.8. **Reduzierte Zeilenstufenform und Gauß-Algorithmus.**

5.8.1. *Reduzierte Zeilenstufenform.*

Eine Matrix $B = (b_{ij}) \in K^{m,n}$ ist in **reduzierter Zeilenstufenform**, falls gilt: $B = 0$, oder es existieren ein $1 \le r \le \min(m, n)$ und $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für $1 \le k \le r$ gilt $b_{kj} = 0$ für alle $j < j_k$.
(In Worten: Die ersten $j_k - 1$ Einträge der k-ten Zeile sind gleich 0.)

(ii) Für $1 \le k \le r$ gilt $b_{ij_k} = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = k, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$
(In Worten: Der k-te Eintrag der j_k-ten Spalte ist 1, alle anderen Einträge der j_k-ten Spalte sind gleich 0.)

(iii) Für $r + 1 \le k \le m$ gilt $b_{kj} = 0$ für alle $1 \le j \le n$.
(In Worten: Für $r + 1 \le k \le m$ sind alle Einträge in der k-ten Zeile gleich 0.)

Sei

$$\mathcal{I}(B) := \begin{cases} \{j_1, \dots, j_r\} & : \text{ falls } B \neq 0, \\ \varnothing & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Elemente in $\mathcal{I}(B)$ nennt man **Zeilenstufenindizes**. Sei

$$\mathcal{K}(B) := \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{I}(B).$$

Eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist also von der Form

$$
\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & j_1 & & j_2 & & j_3 & & & j_r & n & \\
\hline
0 \ \cdots \ 0 & 1 & \star\cdots\star & 0 & \star\cdots\star & 0 & \star\cdots\star & & 0 & \star \ \cdots \ \star & 1 \\
 & & & 1 & \star\cdots\star & 0 & \star\cdots\star & \cdots & 0 & \star \ \cdots \ \star & 2 \\
 & & & & & 1 & \star\cdots\star & & 0 & \star \ \cdots \ \star & 3 \\
 & & & & & & & & 0 & \star \ \cdots \ \star & 4 \\
 & & & 0 & & & & & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & \star \ \cdots \ \star & r-1 \\
 & & & & & & & & 1 & \star \ \cdots \ \star & r \\
\hline
 & & & & & & & & & & r+1 \\
 & & & 0 & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & m
\end{array}
$$

Die Sterne stehen für beliebige Elemente aus K.

Es gilt $\mathcal{I}(B) = \varnothing$ genau dann wenn $B = 0$. Es gilt $\mathcal{K}(B) = \varnothing$ genau dann wenn $B = E_n$ oder B ist von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b_{13} & b_{14} & 0 & b_{16} & 0 & 0 & b_{19} & b_{1,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{26} & 0 & 0 & b_{29} & b_{2,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{39} & b_{3,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{49} & b_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{6,10}$$

ist in reduzierter Zeilenstufenform, wobei $r = 4$, $\mathcal{I}(B) = \{j_1, j_2, j_3, j_4\} = \{2, 5, 7, 8\}$ und $\mathcal{K}(B) = \{1, 3, 4, 6, 9, 10\}$.

5.8.2. *Der Gauß-Algorithmus.*

Satz 5.13. *Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. Dann gibt es Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_t$ mit $B := T_t \cdots T_2 T_1 A$ ist in reduzierter Zeilenstufenform.*

Wir nennen B dann eine **reduzierte Zeilenstufenform von A**.

Beweis. Falls $A = 0$, so ist A bereits in reduzierter Zeilenstufenform und der Algorithmus stoppt.

Sei also $A \neq 0$ und setze $A^{(0)} = (a_{ij}^{(0)}) := A$.

Sei

$$j_1 := \min\{1 \leq s \leq n \mid \text{es gibt ein } 1 \leq p \leq m \text{ mit } a_{ps}^{(0)} \neq 0\}.$$

Wähle ein $1 \leq p \leq m$ mit $a_{pj_1}^{(0)} \neq 0$.

Setze

$$C^{(0)} = (c_{ij}^{(0)}) := D_1((a_{pj_1}^{(0)})^{-1}) E_{1p} A^{(0)}$$

und

$$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) := T_{m1}(-c_{mj_1}^{(0)}) \cdots T_{21}(-c_{2j_1}^{(0)}) C^{(0)}.$$

Wir definieren induktiv Matrizen $A^{(k)}$ und natürliche Zahlen $j_1 < \cdots < j_k$ wie folgt:

Angenommen $A^{(k-1)} = (a_{ij}^{(k-1)})$ und $j_1 < \cdots < j_{k-1}$ sind bereits definiert für ein $k \geq 2$. Sei

$$j_k := \min\{j_{k-1} + 1 \leq s \leq n \mid \text{es gibt ein } k \leq p \leq m \text{ mit } a_{ps}^{(k-1)} \neq 0\}.$$

Wenn ein solches j_k nicht existiert, so ist $A^{(k-1)}$ bereits in reduzierter Zeilenstufenform und der Algorithmus stoppt.

Angenommen j_k existiert. Wähle ein $k \leq p \leq m$ mit $a_{pj_k}^{(k-1)} \neq 0$.

Setze

$$C^{(k-1)} = (c_{ij}^{(k-1)}) := D_k((a_{pj_k}^{(k-1)})^{-1})E_{kp}A^{(k-1)}$$

und

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) := T_{mk}(-c_{mj_k}^{(k-1)}) \cdots T_{k+1k}(-c_{k+1j_k}^{(k-1)})T_{k-1k}(-c_{k-1j_k}^{(k-1)}) \cdots T_{1k}(-c_{1j_k}^{(k-1)})C^{(k-1)}.$$

Beachte: Für $k \geq 1$ ist die $(k \times n)$-Matrix, welche aus den ersten k Zeilen von $A^{(k)}$ besteht, in reduzierter Zeilenstufenform. Zudem ist die $(m \times j_k)$-Matrix, welche aus den ersten j_k Spalten von $A^{(k)}$ besteht, in reduzierter Zeilenstufenform.

Nach spätestens $k = \min(m, n)$ Schritten ist $A^{(k)}$ also in reduzierter Zeilenstufenform. Die Behauptung folgt daher via Induktion. □

Das im Beweis von Satz 5.13 angegebene Verfahren, welches eine Matrix A in eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform überführt, nennt man **Gauß-Algorithmus**.

Später werden wir zeigen, dass es von einer gegebenen Matrix A nur eine reduzierte Zeilenstufenform gibt.

Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,4}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert schrittweise die folgenden Matrizen:

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{31}(-1)E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_2(1/2)T_{31}(-1)E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T_{32}(2)D_2(1/2)T_{31}(-1)E_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

– – – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 7** – – – – – – – – – – – –

5.9. **Kerne von Matrixabbildungen.**

Sei $B = (b_{ij}) \in K^{m,n}$ in reduzierter Zeilenstufenform. Für $\mathcal{I}(B) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ und $j \in \mathcal{K}(B)$ definiere

$$L_j^B := \begin{pmatrix} \ell_{1j} \\ \vdots \\ \ell_{nj} \end{pmatrix} \in K^n$$

durch

$$\ell_{kj} := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } k = j, \\ -b_{sj} & : \text{ falls } k = j_s \text{ für ein } 1 \leq s \leq r \text{ mit } j_s < j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Beispiel: Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b_{13} & b_{14} & 0 & b_{16} & 0 & 0 & b_{19} & b_{1,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{26} & 0 & 0 & b_{29} & b_{2,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{39} & b_{3,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{49} & b_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{6,10}$$

ist in reduzierter Zeilenstufenform, und $\mathcal{I}(B) = \{2, 5, 7, 8\}$. Hier sind die Vektoren L_j^B, wobei $j \in \mathcal{K}(B) = \{1, 3, 4, 6, 9, 10\}$:

$$L_1^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L_3^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_{13} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L_4^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_{14} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L_6^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_{16} \\ 0 \\ 0 \\ -b_{26} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L_9^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_{19} \\ 0 \\ 0 \\ -b_{29} \\ 0 \\ -b_{39} \\ -b_{49} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L_{10}^B = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_{1,10} \\ 0 \\ 0 \\ -b_{2,10} \\ 0 \\ -b_{3,10} \\ -b_{4,10} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie wir wissen, kann man jede Matrix $A \in K^{m,n}$ als Matrixabbildung $A\colon K^n \to K^m$ auffassen, welche definiert ist durch $A(v) := A \cdot v$.

Satz 5.14. *Sei $B \in K^{m,n}$ in reduzierter Zeilenstufenform.*

(i) *Es gilt*

$$\operatorname{Kern}(B) = \left\{ \sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B \mid a_j \in K \right\}.$$

(Falls $\mathcal{K}(B) = \varnothing$, so gilt $\operatorname{Kern}(B) = 0$.)

(ii) *Angenommen*

$$\sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B = \sum_{j \in \mathcal{K}(B)} b_j L_j^B$$

mit $a_j, b_j \in K$. Dann gilt $a_j = b_j$ für alle $j \in \mathcal{K}(B)$.

(In fortgeschrittener Sprache ausgedrückt: Die Menge $\left\{L_j^B \mid j \in \mathcal{K}(B)\right\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Kern}(B)$.)

Beweis. Sei B in reduzierter Zeilenstufenform mit $\mathcal{I}(B) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ und $\mathcal{K}(B) = \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{I}(B)$.

Für

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

sei

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} := B(a).$$

Wir sehen sofort, dass $c_k = 0$ für alle $r+1 \leq k \leq m$. (Nur die ersten r Zeilen von B sind ungleich 0.) Für $1 \leq s \leq r$ gilt

$$c_s = (0, \dots, 0, 1, b_{s,j_s+1}, \dots, b_{sn}) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_{j_s} + \sum_{j=j_s+1}^{n} b_{sj} a_j = a_{j_s} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(B) \\ j > j_s}} b_{sj} a_j.$$

Für die dritte Gleichheit haben wir verwendet, dass $b_{sj_k} = 0$ für alle $1 \leq k \leq r$ mit $k \neq s$. Es gilt also $B(a) = 0$ genau dann wenn

$$a_{j_s} = \sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(B) \\ j > j_s}} -b_{sj} a_j$$

für $1 \leq s \leq r$.

In diesem Fall gilt

$$a = \sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B.$$

Begründung: Für $j \in \mathcal{K}(B)$ ist der j-te Eintrag von

$$\sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B$$

gleich a_j, siehe die Definition der Vektoren L_j^B. Für j_s mit $1 \leq s \leq r$ folgt (wiederum aus der Definition der L_j^B), dass der j_s-te Eintrag von

$$\sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B$$

gleich

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{K}(B) \\ j > j_s}} -b_{sj} a_j$$

ist.

Umgekehrt liegt jedes L_j^B und damit auch jede Summe der Form

$$\sum_{j \in \mathcal{K}(B)} a_j L_j^B$$

in $\mathrm{Kern}(B)$. Damit ist (i) bewiesen.

Sei nun

$$\sum_{j\in\mathcal{K}(B)} a_j L_j^B = \sum_{j\in\mathcal{K}(B)} b_j L_j^B$$

mit $a_j, b_j \in K$. Nach der Definition der L_j^B gilt dann $a_j = b_j$ für alle $j \in \mathcal{K}(B)$. Also gilt (ii). □

Lemma 5.15. *Sei $A \in K^{m,n}$, und sei $T \in K^{m,m}$ eine Elementarmatrix. Dann gilt* $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(TA)$.

Beweis. Die zu T gehörige Matrixabbildung ist ein Isomorphismus. Also gilt $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(TA)$. □

Korollar 5.16. *Sei $A \in K^{m,n}$, und sei B eine reduzierte Zeilenstufenform von A. Dann gilt* $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(B)$.

Der Gauß-Algorithmus liefert also ein explizites Verfahren zur Konstruktion einer *Basis* von $\mathrm{Kern}(A)$.

Satz 5.17. *Sei $A \in K^{m,n}$, und sei B eine reduzierte Zeilenstufenform von A. Seien $\mathcal{I}(B) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ und $\mathcal{K}(B) = \{i_1 < \ldots < i_{n-r}\}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} f\colon K^{n-r} &\to \mathrm{Kern}(A) \\ \sum_{k=1}^{n-r} a_k e_k &\mapsto \sum_{k=1}^{n-r} a_k L_{i_k}^B \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis. Die Linearität von f folgt beinahe direkt aus der Definition. Lemma 5.6 und Satz 5.14 implizieren dann sofort, dass f bijektiv ist. □

5.10. **Bilder von Matrixabbildungen.**

Lemma 5.18. *Sei $A \in K^{m,n}$, und sei $\{e_1, \ldots e_n\}$ die Standardbasis von K^n. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j A(e_j) \mid a_j \in K \right\}.$$

Beweis. Sei $w \in \mathrm{Bild}(A)$. Dann gibt es ein

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

mit $A(v) = w$. Es gilt

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j.$$

Also gilt

$$w = A(v) = A\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j A(e_j).$$

Wir haben also gezeigt, dass

$$\mathrm{Bild}(A) \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j A(e_j) \mid a_j \in K \right\}.$$

Umgekehrt gilt offenbar für jedes $1 \leq j \leq n$, dass $A(e_j) \in \mathrm{Bild}(A)$. Da $\mathrm{Bild}(A)$ ein Unterraum ist, folgt damit auch

$$\sum_{j=1}^{n} a_j A(e_j) \in \mathrm{Bild}(A)$$

für alle $a_j \in K$. □

Eine Matrix $B \in K^{m,n}$ ist in **reduzierter Spaltenstufenform**, falls die transponierte Matrix B^T in reduzierter Zeilenstufenform ist.

Für $A \in K^{m,n}$ gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t \in K^{n,n}$, so dass $T_t \cdots T_1 A^T$ in reduzierter Zeilenstufenform ist. Es folgt dann, dass $A T_1^T \cdots T_t^T$ in reduzierter Spaltenstufenform ist. (Die transponierte Matrix T^T einer Elementarmatrix T ist wiederum eine Elementarmatrix.)

Satz 5.19. *Sei $B \in K^{m,n}$ in reduzierter Spaltenstufenform, und sei $r = |\mathcal{I}(B^T)|$.*

(i) *Es gilt*

$$\mathrm{Bild}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^{r} a_j B(e_j) \mid a_j \in K \right\}.$$

(ii) *Angenommen*

$$\sum_{j=1}^{r} a_j B(e_j) = \sum_{j=1}^{r} b_j B(e_j)$$

mit $a_j, b_j \in K$. Dann gilt $a_j = b_j$ für alle $1 \leq j \leq r$.

(In fortgeschrittener Sprache ausgedrückt: Die Menge $\{B(e_j) \mid 1 \leq j \leq r\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$*.)*

Beweis. (i) Für $r+1 \leq j \leq m$ ist die j-te Spalte von B gleich 0, d.h. $B(e_j) = 0$ für alle $r+1 \leq j \leq m$. Nun folgt (i) aus Lemma 5.18.

(ii) Sei $\mathcal{I}(B^T) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$. Für $1 \leq s \leq r$ in $\mathcal{I}(B^T)$ ist der j_s-te Eintrag von $\sum_{j=1}^{r} a_j B(e_j)$ gleich a_j. Daraus folgt (ii). □

Lemma 5.20. *Sei $A \in K^{m,n}$, und sei $T \in K^{n,n}$ eine Elementarmatrix. Dann gilt* $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(AT)$*.*

Beweis. Die zu T gehörige Matrixabbildung ist ein Isomorphismus. Also gilt $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(AT)$. □

Korollar 5.21. *Sei $A \in K^{m,n}$, und sei B eine reduzierte Spaltenstufenform von A. Dann gilt* $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(B)$*.*

Der Gauß-Algorithmus liefert also auch ein explizites Verfahren zur Konstruktion einer *Basis* von $\mathrm{Bild}(A)$.

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 8** – – – – – – – – – – –

5.11. **Invertierbare Matrizen.** Sei R ein Ring.

Ein Element $r \in R$ ist **links-invertierbar**, falls es ein $s \in R$ gibt mit $sr = 1$, und r ist **rechts-invertierbar**, falls es ein $s \in R$ gibt, mit $rs = 1$. Man nennt r **invertierbar**, falls r sowohl rechts- als auch links-invertierbar ist.

Lemma 5.22. *Sei R ein Ring, und sei $r \in R$ invertierbar. Dann gilt:*

(i) *Es gibt genau ein Element $r^{-1} \in R$ mit $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$;*
(ii) *Falls $rs = 1$ für ein $s \in R$, so gilt $s = r^{-1}$;*
(iii) *Falls $sr = 1$ für ein $s \in R$, so gilt $s = r^{-1}$;*
(iv) *r^{-1} ist invertierbar mit $(r^{-1})^{-1} = r$.*

Beweis. Da r invertierbar ist, gibt es $s, t \in R$ mit $rs = 1$ und $tr = 1$. Es gilt dann

$$s = 1s = (tr)s = t(rs) = t1 = t.$$

Setze $r^{-1} := s$.

Angenommen $rp = 1$ für ein $p \in R$. Dann gilt
$$p = 1p = (r^{-1}r)p = r^{-1}(rp) = r^{-1}1 = r^{-1}.$$

Angenommen $qr = 1$ für ein $q \in R$. Dann gilt
$$q = q1 = q(rr^{-1}) = (qr)r^{-1} = 1r^{-1} = r^{-1}.$$

Damit sind (i), (ii) und (iii) bewiesen. Teil (iv) folgt direkt aus (i). □

Im vorherigen Lemma heißt r^{-1} das **Inverse** von r. (Damit ist dann umgekehrt auch r das Inverse von r^{-1}.)

Satz 5.23. *Sei $A \in K^{m,n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A ist ein Isomorphismus;*

(ii) *$m = n$ und es gibt Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$ mit $T_t \cdots T_1 A = E_n$;*

(iii) *$m = n$ und es gibt Elementarmatrizen $T_1, \ldots T_t$ mit $AT_1 \cdots T_t = E_m$;*

(iv) *$m = n$ und A ist invertierbar;*

(v) *$m = n$ und E_n ist die reduzierte Zeilenstufenform von A.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei A ein Isomorphismus. Nach Satz 5.13 gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$ so dass $B := T_t \cdots T_1 A$ in reduzierter Zeilenstufenform ist. Sei $r := |\mathcal{I}(B)|$ die Anzahl der Zeilenstufenindizes. Es folgt $r = n$, da sonst $\mathcal{K}(B) \neq \varnothing$ und damit $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(B) \neq 0$. Widerspruch. Also folgt $B = E_n$ oder B ist von der Form
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
Da aber A und die Elementarmatrizen Isomorphismen sind, ist auch $B = T_t \cdots T_1 A$ ein Isomorphismus und damit ein Epimorphismus. Angenommen $m \neq n$. Dann ist $m > n$ und die Standardbasisvektoren $e_{n+1}, \cdots, e_m$ aus K^m sind nicht in $\mathrm{Bild}(B)$. Widerspruch. Folglich ist $m = n$ und $B = E_n$. Insbesondere gilt: E_n ist die einzige reduzierte Zeilenstufenform von A.

(ii) $\iff$ (iii): Für Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $T_t \cdots T_1 A = E_n$;

(b) $A = T_1^{-1} \cdots T_t^{-1}$;

(c) $AT_t \cdots T_1 = E_n$.

Beweis: Wir benutzen, dass Elementarmatrizen invertierbar sind.

(a) $\implies$ (b): Multipliziere die Gleichung (a) von Links mit $T_1^{-1} \cdots T_t^{-1}$.

(b) $\implies$ (a): Multipliziere die Gleichung (b) von Links mit $T_t \cdots T_1$.

Die Äquivalenz (b) $\iff$ (c) wird ähnlich bewiesen.

(ii) $\implies$ (iv): Aus (ii) folgt auch (iii), d.h. es gibt Matrizen $B, C \in M_n(K)$ mit $AB = CA = E_n$.

(iv) $\implies$ (i): Da A invertierbar ist, gibt es $B, C \in M_n(K)$ mit $AB = CA = E_n$. Aus $AB = E_n$ folgt, dass A ein Epimorphismus ist. Aus $CA = E_n$ folgt, dass A ein Monomorphismus ist. Also ist A ein Isomorphismus.

(ii) $\iff$ (v): Dies folgt direkt aus den Definitionen und aus der im Beweis von (i) $\implies$ (ii) gezeigten Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform. □

Korollar 5.24. *Für $m, n \geq 0$ gilt*

$$K^m \cong K^n \iff m = n.$$

Korollar 5.25 (Praktische Berechnung von A^{-1})**.** *Sei $A \in M_n(K)$ invertierbar. Der Gauß-Algorithmus liefert Elementarmatrizen $T_1, \dots T_t$ mit $T_t \cdots T_1 A = E_n$. Dann gilt $A^{-1} = T_t \cdots T_1$ und $A = T_1^{-1} \cdots T_t^{-1}$.*

Für $n \geq 1$ ist

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{A \in M_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$$

die **allgemeine lineare Gruppe** vom Grad n.

Korollar 5.26. *Jedes $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist Produkt von Elementarmatrizen vom Typ (I) und (II).*

Korollar 5.27. *Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Satz 5.28. *Für $A \in M_n(K)$ sind äquivalent:*

(i) *A ist ein Isomorphismus;*

(ii) *A ist ein Monomorphismus;*

(iii) *A ist ein Epimorphismus.*

Beweis. Aus (i) folgt per Definition auch (ii) und (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei nun $A \in M_n(K)$ ein Monomorphismus. Seien $T_1, \dots, T_t$ Elementarmatrizen, so dass $B = T_t \cdots T_1 A$ eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist. Da $T_t \cdots T_1$ ein Isomorphismus ist und A ein Monomorphismus, ist auch B ein Monomorphismus. Es folgt also $\mathcal{K}(B) = \varnothing$. Wegen $m = n$ gilt dann $B = E_n$. Nach Satz 5.23 ist A dann ein Isomorphismus.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Wie zuvor seien $T_1, \dots, T_t$ Elementarmatrizen, so dass $B = T_t \cdots T_1 A$ eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist. Da $T_t \cdots T_1$ ein Isomorphismus ist und A ein Epimorphismus, ist auch B ein Epimorphismus. Wegen $m = n$ und Lemma 5.18 folgt dann, dass $|\mathcal{I}(B)| = n$ und daher $B = E_n$ gilt. (Falls $|\mathcal{I}(B)| < n$, so ist offenbar $e_n \notin \mathrm{Bild}(B)$. Widerspruch.) Nun impliziert Satz 5.23, dass A ein Isomorphismus ist. $\square$

Seien $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{m,l}$ Matrizen. Definiere

$$[A|B] := C = (c_{ij}) \in K^{m,n+l}$$

durch $c_{ij} := a_{ij}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$, und $c_{i,n+k} := b_{ik}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq k \leq l$. Also ist C eine $(m \times (n + l))$-Matrix, deren linker $(m \times n)$-Block A ist, und deren rechter $(m \times l)$-Block B ist.

Hier ist ein kleiner Trick zur praktischen Berechnung des Inversen einer Matrix: Sei $A \in K^{n,n}$ invertierbar. Sei

$$C := [A|E_n] \in K^{n,2n}.$$

Wie oben schon erwähnt, liefert der Gauß-Algorithmus Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_t$ mit $T_t \cdots T_1 A = E_n$. Es gilt dann $A^{-1} = T_t \cdots T_1$. Es folgt, dass

$$T_t \cdots T_1 C = [E_n|A^{-1}].$$

Die Matrix $[E_n|A^{-1}]$ ist dann die reduzierte Zeilenstufenform von C. Statt also zuerst den Gauß-Algorithmus auf A anzuwenden und dann das Produkt $T_t \cdots T_1$ auszurechnen, ist es einfacher, den Gauß-Algorithmus direkt auf die Matrix $C = [A|E_n]$ anzuwenden.

5.12. **Beispiele.**

5.12.1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert schrittweise die folgenden Matrizen:

$$\begin{aligned}
D_1(1/2)A &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
T_{21}(-1)D_1(1/2)A &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
D_2(2/5)T_{21}(-1)D_1(1/2)A &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
T_{32}(1)D_2(2/5)T_{21}(-1)D_1(1/2)A &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \\
D_3(5)T_{32}(1)D_2(2/5)T_{21}(-1)D_1(1/2)A &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
T_{23}(4/5)D_3(5)T_{32}(1)D_2(2/5)T_{21}(-1)D_1(1/2)A &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
T_{12}(1/2)T_{23}(4/5)D_3(5)T_{32}(1)D_2(2/5)T_{21}(-1)D_1(1/2)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$A^{-1} = T_{12}(1/2)T_{23}(4/5)D_3(5)T_{32}(1)D_2(2/5)T_{21}(-1)D_1(1/2).$$

Um diese Matrizenmultiplikation nicht ausrechnen zu müssen, wenden wir (wie oben schon beschrieben) den folgenden Trick an: Wir bilden eine (3×6)-Matrix $C := [A|E_3]$, deren linker (3×3)-Block gleich A ist, und deren rechter (3×3)-Block gleich E_3 ist. Dann ist

$$T_{12}(1/2)T_{23}(4/5)D_3(5)T_{32}(1)D_2(2/5)T_{21}(-1)D_1(1/2)C = [E_3|A^{-1}].$$

Sei also

$$C = [A|E_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathbb{Q}^{3,6}.$$

Der Gauß-Algorithmus (mit den gleichen Operationen wie oben) liefert schrittweise die folgenden Matrizen:

$$C = [A|E_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/5 & 2/5 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) = [E_3|A^{-1}].$$

Also gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.12.2. *Invertierbare* (2×2)*-Matrizen.*

Proposition 5.29. *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Dann ist A invertierbar genau dann wenn $ad - bc \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

– – – – – – – – – – – Ende Vorlesung 9 – – – – – – – – – – –

Beweis. Fall 1: $a = 0$ und $c = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. A ist nicht invertierbar.

Fall 2: $a \neq 0$. Wir wenden den Gauß-Algorithmus an und erhalten

$$D_1(a^{-1})A = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$T_{21}(-c)D_1(a^{-1})A = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & d - a^{-1}bc \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass $d - a^{-1}bc \neq 0$ genau dann wenn $ad - bc \neq 0$.

Fall 2(i): $a \neq 0$ und $ad - bc = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & d - a^{-1}bc \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. $T_{21}(-c)D_1(a^{-1})A$ und somit auch A sind nicht invertierbar.

Fall 2(ii): $a \neq 0$ und $ad - bc \neq 0$. In diesem Fall setzen wir den Gauß-Algorithmus fort und erhalten

$$T_{12}(-a^{-1}b)D_2((d - a^{-1}bc)^{-1})T_{21}(-c)D_1(a^{-1})A = E_2.$$

Also ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = T_{12}(-a^{-1}b)D_2((d - a^{-1}bc)^{-1})T_{21}(-c)D_1(a^{-1}) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(Die zweite Gleichheit erhält man durch Multiplikation der vier angegebenen Elementarmatrizen.) Es folgt also, dass A im Fall 2 genau im Fall $ad - bc \neq 0$ invertierbar ist.

Fall 3: $a = 0$ und $c \neq 0$. Es gilt offenbar, dass A invertierbar ist genau dann wenn

$$E_{12}A = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Nach den Betrachtung im Fall 2 ist nun $E_{12}A$ invertierbar genau dann wenn $cb - da \neq 0$, eine Bedingung, welche offensichtlich äquivalent ist zu $ad - bc \neq 0$.

Kombinieren wir alle 3 Fälle, so sehen wir, dass A invertierbar ist genau dann wenn $ad - bc \neq 0$.

Nun rechnet man leicht nach, dass die im Fall 2 angegebene Matrix auch im Fall $a = 0$, $c \neq 0$ und $ad - bc \neq 0$ das Inverse von A ist. □

5.13. Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform.

Satz 5.30. *Sei $A \in K^{m,n}$. Dann gibt es genau eine reduzierte Zeilenstufenform B von A.*

Beweis. Die Existenz von B ist bereits durch den Gauß-Algorithmus bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass B eindeutig ist: Seien also $B = (b_{ij})$ und $B' = (b'_{ij})$ reduzierte Zeilenstufenformen einer Matrix $A \in K^{m,n}$. Zu zeigen: $B = B'$.

Es gilt $\mathcal{I}(B) = \varnothing$ genau dann wenn $B = 0$ genau dann wenn $\mathrm{Kern}(B) = K^n$. Wegen $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B')$ gilt also: $\mathcal{I}(B) = \varnothing$ genau dann wenn $\mathcal{I}(B') = \varnothing$. In diesem Fall folgt sofort $B = B' = 0$.

Wir nehmen also an, dass $\mathcal{I}(B)$ und $\mathcal{I}(B')$ beide nicht-leer sind, d.h. $\mathcal{I}(B) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$ und $\mathcal{I}(B') = \{j'_1 < \cdots < j'_t\}$ mit $r, t \geq 1$. Wir wissen, dass $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B')$ und $\mathrm{Kern}(B) \cong K^{n-r}$ und $\mathrm{Kern}(B') \cong K^{n-t}$. Also $K^{n-r} \cong K^{n-t}$. Es folgt $r = t$. (Siehe den Abschnitt 5.11 über invertierbare Matrizen.)

Schritt 1: Angenommen $j_1 < j'_1$. Dann gilt $B'(e_{j_1}) = 0$ und $B(e_{j_1}) = e_1 \neq 0$. Widerspruch zu $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B')$. Also haben wir gezeigt: $j_1 = j'_1$. Der Fall $j_1 > j'_1$ wird analog behandelt.

Schritt 2: Sei nun $p > j_1$ mit der Eigenschaft: Für $1 \leq k \leq p-1$ ist die k-te Spalte von B gleich der k-ten Spalte von B'. Wir werden zeigen, dass dann auch die p-te Spalte von B gleich der p-ten Spalte von B' ist. (Damit hätten wir dann per Induktion bewiesen, dass $B = B'$ gilt.)

Sei $1 \leq s-1 \leq r$ maximal mit $j_1 < \cdots < j_{s-1} < p$.

Für $1 \leq k \leq p-1$ gilt dann also $b_{ik} = 0$ (und damit auch $b'_{ik} = 0$) für alle $s \leq i \leq m$. Desweiteren folgt, dass $j_k = j'_k$ für alle $1 \leq k \leq s-1$. Gilt $s-1 < r$, so folgt $p \leq j_s$ und $p \leq j'_s$. (Angenommen $j'_s < p$. Dann erhalten wir $B'(e_{j'_s}) = e_s$, Widerspruch zu $b_{sj'_s} = 0$.)

Fall (a): $p \notin \mathcal{I}(B)$ und $p \notin \mathcal{I}(B')$. Seien $B = (b_{ij})$ und $B' = (b'_{ij})$. Dann gilt

$$B(L_p^B) = \begin{pmatrix} -b_{1p} + b_{1p} \\ -b_{2p} + b_{2p} \\ \vdots \\ -b_{s-1p} + b_{s-1p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

und wegen $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B')$ gilt

$$B'(L_p^B) = \begin{pmatrix} -b_{1p} + b'_{1p} \\ -b_{2p} + b'_{2p} \\ \vdots \\ -b_{s-1p} + b'_{s-1p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Beachte: Es gilt $b_{ip} = b'_{ip} = 0$ für alle $s \leq i \leq m$. Es folgt also $b_{ip} = b'_{ip}$ für alle $1 \leq i \leq m$, d.h. die p-ten Spalten von B und B' sind gleich.

Fall (b): Sei $s - 1 < r$ und $p = j_s = j'_s$. Dann sind die p-ten Spalten von B und B' gleich e_s, stimmen also überein.

Fall (c): Sei $s - 1 < r$ und $p = j_s < j'_s$. Es folgt $B'(L_p^{B'}) = 0$, aber für

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} := B(L_p^{B'})$$

gilt $c_s = 1 \neq 0$. Widerspruch zu $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(B')$.

Fall (d): Sei $s - 1 < r$ und $p = j'_s < j_s$. Dieser Fall wird analog zu Fall (c) behandelt.

Damit ist der Satz von der Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform bewiesen. □

5.14. **Übungsaufgaben.**

5.14.1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m,n}.$$

Die **Transponierte** A^T von A ist dann definiert durch

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n,m},$$

d.h. der Eintrag a_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A wird zum Eintrag in der j-ten Zeile und i-ten Spalte von A^T.

Zeigen Sie: Für $A \in K^{l,m}$ und $B \in K^{m,n}$ gilt

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

5.14.2. Sei $A \in K^{m,n}$, und sei A^T die Transponierte von A. Zeigen Sie:

(i) A ist ein Monomorphismus genau dann wenn A^T ein Epimorphismus ist.
(ii) A ist ein Epimorphismus genau dann wenn A^T ein Monomorphismus ist.
(iii) A ist ein Isomorphismus genau dann wenn A^T ein Isomorphismus ist.

5.14.3. Sei $A \in M_n(K)$ invertierbar. Zeigen Sie: Es existieren Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$ vom Typ (I) (also $T_k \in \{T_{ij}^{(n)}(a) \mid 1 \leq i,j \leq n, i \neq j, a \in K\}$ für alle $1 \leq k \leq t$) mit

$$T_t \cdots T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix}$$

für ein $d \in K^\times$.

5.14.4. Für $a, b \in \mathbb{Q}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -b & 1 & -a \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}.$$

Für welche a, b ist A invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls das Inverse von A.

5.14.5. Diese Aufgabe soll zum allgemeinen geometrischen Verständnis von linearen Abbildung beitragen und bezieht sich nicht direkt auf die aktuell behandelten Vorlesungsinhalte. Im Folgenden wollen wir 14 Typen von *diskreten dynamischen Systemen* untersuchen. Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$ eine der im Folgenden aufgelisteten Matrizen. Skizzieren Sie für ausgesuchte Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ wie die **Bahn**

$$\mathcal{O}(v) := \{A^n(v) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

von v aussieht. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Wir unterscheiden 5 Fälle:

$$\begin{aligned} \text{Nodale Expansion}: &\quad \lambda_1 > \lambda_2 > 1, \\ \text{Lineare Expansion}: &\quad \lambda_1 > 1 = \lambda_2, \\ \text{Hyperbolische Transformation}: &\quad \lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0, \\ \text{Lineare Kontraktion}: &\quad \lambda_1 = 1 > \lambda_2 > 0, \\ \text{Nodale Kontraktion}: &\quad 1 > \lambda_1 > \lambda_2 > 0. \end{aligned}$$

Sei
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Wir unterscheiden 3 Fälle:
$$\text{Expansive Homothetie}: \quad \lambda > 1, \qquad \text{Identität}: \quad \lambda = 1,$$
$$\text{Kontraktive Homothetie}: \quad \lambda < 1.$$
Sei
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Wir unterscheiden 3 Fälle:
$$\text{Parabolische Expansion}: \quad \lambda > 1, \qquad \text{Scherung}: \quad \lambda = 1,$$
$$\text{Parabolische Kontraktion}: \quad \lambda < 1.$$
Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
mit $b \neq 0$. Wir unterscheiden 3 Fälle:
$$\text{Spiralische Expansion}: \quad \sqrt{a^2+b^2} > 1,$$
$$\text{Elliptische Transformation}: \quad \sqrt{a^2+b^2} = 1,$$
$$\text{Spiralische Kontraktion}: \quad \sqrt{a^2+b^2} < 1.$$

Hinweis: Gehen Sie in die Bibliothek, und blättern Sie in Brieskorns *Lineare Algebra und Analytische Geometrie.*

6. Lineare Gleichungssysteme

6.1. Definition eines Linearen Gleichungssystems.

Ein **Lineares Gleichungssystem (LGS)** besteht aus m Gleichungen der Form
$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n &= b_m \end{aligned}$$
wobei $X_1, \ldots, X_n$ **Variablen** oder **Unbekannte** genannt werden und a_{ij} und b_i Elemente aus K sind.

Im Folgenden bezeichnen wir das obige LGS mit $(\star)$.

Eine Kurzschreibweise für $(\star)$ ist $Ax = b$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die **Koeffizientenmatrix** von $(\star)$ und

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ist.

Ein Vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ist eine **Lösung** von $(\star)$, falls gilt

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n &= b_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n &= b_m \end{aligned}$$

Die **Lösungsmenge** des linearen Gleichungssystems $(\star)$ ist definiert als

$$\mathcal{L}(A, b) := \{v \in K^n \mid v \text{ ist Lösung von } (\star)\}.$$

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ heißt **homogen**, falls $b = 0$ und **inhomogen**, falls $b \neq 0$. Die Matrix

$$[A|b] := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} \in K^{m,n+1}$$

ist die **erweiterte Koeffizientenmatrix** von $(\star)$.

Lemma 6.1. *Es gilt*

$$\mathcal{L}(A, b) = \{v \in K^n \mid A(v) = b\} = A^{-1}(b).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

$$\text{Ein Gleichungssystem } Ax = b \text{ ist } \begin{cases} \textbf{lösbar} & : \text{ falls } \mathcal{L}(A,b) \neq \varnothing, \\ \textbf{eindeutig lösbar} & : \text{ falls } |\mathcal{L}(A,b)| = 1, \\ \textbf{unlösbar} & : \text{ falls } \mathcal{L}(A,b) = \varnothing. \end{cases}$$

6.2. **Lösungsverfahren.** Sei $T \in K^{m,m}$ eine Elementarmatrix, und sei $[A|b] \in K^{m,n+1}$ definiert wie zuvor. Sei

$$[A'|b'] := \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix} := T \cdot [A|b].$$

Lemma 6.2. *Es gilt* $\mathcal{L}(A', b') = \mathcal{L}(A, b)$.

Beweis. Sei

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

in K^n. Für alle $i \neq j$ und $\lambda \in K^\times$ sind äquivalent:

(i)
$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + \lambda a_{jk}) v_k = b_i + \lambda b_j \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k = b_j;$$

(ii)
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k = b_i \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k = b_j.$$

Für Elementarmatrizen $T = T_{ij}(\lambda)$ vom Typ (I) gilt das Lemma also.

Im Fall von Elementarmatrizen $T = D_i(\lambda)$ vom Typ (II) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k = b_i \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda a_{ik} v_k = \lambda b_i.$$

□

Sei $[A|b]$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems. Wegen Satz 5.13 und Lemma 6.2 können wir annehmen, dass A bereits in reduzierter Zeilenstufenform ist.

Satz 6.3. *Sei* $[A|b] \in K^{m,n+1}$ *eine erweiterte Koeffizientenmatrix mit* A *in reduzierter Zeilenstufenform mit* $\mathcal{I}(A) = \{j_1 < \cdots < j_r\}$*. Dann gilt*

(i) *Falls* $b_k \neq 0$ *für ein* $r+1 \leq k \leq m$ *so gilt* $\mathcal{L}(A,b) = \varnothing$*;*

(ii) *Angenommen* $0 = b_{r+1} = \cdots = b_m$*. Sei*
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
in K^n *definiert durch*
$$v_k := \begin{cases} b_s & : \text{ falls } k = j_s \text{ für ein } 1 \leq s \leq r, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$
Dann gilt
$$\mathcal{L}(A,b) = v + \mathcal{L}(A,0) = v + \mathrm{Kern}(A).$$

Beweis. (i): Sei $w \in K^n$ und
$$\begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_m' \end{pmatrix} := A(w).$$
Dann gilt $0 = w_{r+1}' = \cdots = w_m'$, da für $r+1 \leq k \leq m$ die k-te Zeile von A gleich 0 ist.

(ii): Angenommen $0 = b_{r+1} = \cdots = b_m$. Sei v definiert wie oben. Dann gilt $A(v) = b$. Nun folgt (ii) aus Lemma 4.9. □

Korollar 6.4. *Sei* $A \in K^{m,n}$ *in reduzierter Zeilenstufenform mit* $|\mathcal{I}(A)| = r$*, und sei* $b \in K^m$*. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *ist lösbar;*

(ii) $0 = b_{r+1} = \cdots = b_m$.

Korollar 6.5. *Sei* $A \in K^{m,n}$ *in reduzierter Zeilenstufenform mit* $|\mathcal{I}(A)| = r$*, und sei* $b \in K^m$*. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *ist eindeutig lösbar;*

(ii) $0 = b_{r+1} = \cdots = b_m$ *und* $\mathrm{Kern}(A) = 0$.

6.3. **Beispiele.**

6.3.1. Sei $K = \mathbb{Q}$, und sei

$$[A|b] := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -4 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Der Gauß-Algorithmus liefert

$$[B|c] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 & 3 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei B in reduzierter Zeilenstufenform ist. An der letzten Spalte von $[B|c]$ sieht man bereits, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist. Es gilt

$$\mathcal{I}(B) = \{1, 3, 6, 7\}, \quad \mathcal{K}(B) = \{2, 4, 5\}$$

und

$$L_2^B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L_4^B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L_5^B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Lösung benötigen wir noch den Kern der Matrix B: Es gilt

$$\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern}(A) = \mathcal{L}(A, 0) = \left\{ a_2 L_2^B + a_4 L_4^B + a_5 L_5^B \mid a_2, a_4, a_5 \in K \right\}$$

Für

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^7$$

gilt dann $Bv = c$ und damit auch $Av = b$. Also gilt

$$\mathcal{L}(A, b) = v + \mathcal{L}(A, 0).$$

6.3.2. Für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2,3}.$$

Wir wollen das LGS $Ax = 0$ lösen.

Fall 1: $b-ca \neq 0$. In diesem Fall ist die reduzierte Zeilenstufenform von A gleich

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b-a(a-cb)/(b-ca) \\ 0 & 1 & (a-cb)/(b-ca) \end{pmatrix}.$$

Als *Basis* von Kern(A) erhalten wir

$$L_3^B = \begin{pmatrix} -b+a(a-cb)/(b-ca) \\ -(a-cb)/(b-ca) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fall 2: $b-ca = 0$ und $a-cb \neq 0$. In diesem Fall ist die reduzierte Zeilenstufenform von A gleich

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als *Basis* von Kern(A) erhalten wir

$$L_2^B = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fall 3: $b-ca = 0$ und $a-cb = 0$. In diesem Fall ist die reduzierte Zeilenstufenform von A gleich

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Als *Basis* von Kern(A) erhalten wir

$$L_2^B = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L_3^B = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.4. **Übungsaufgaben.**

6.4.1. Für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2,3}.$$

Für welche

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$$

ist das LGS $Ax = d$ lösbar?

6.4.2. Für welche $a \in \mathbb{Q}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_1 + aX_2 &= 1 \\ (a-1)X_1 - 6X_2 &= 1 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Q}$

(i) eindeutig lösbar,
(ii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar,
(iii) nicht lösbar?

6.4.3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 \phantom{{}+X_3} &= 1 \\ X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 \phantom{{}+X_2} + X_3 &= 1 \end{aligned}$$

über dem Körper

(i) $K = \mathbb{Q}$,
(ii) $K = \mathbb{F}_2$.

6.4.4. Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem, wobei $A \in K^{m,n}$. Beweisen Sie:

(i) Sei $m = n$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar genau dann wenn A invertierbar ist.
(ii) $Ax = 0$ ist immer lösbar.
(iii) Sei $m < n$. Dann ist $Ax = 0$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

7. Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

7.1. **Linearkombinationen und lineare Hüllen.** Sei V ein K-Vektorraum.

Seien $v_1, \dots, v_m \in V$. Dann ist $v \in V$ eine **Linearkombination von $v_1, \dots, v_m$**, falls es $a_1, \dots, a_m \in K$ gibt mit

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m.$$

Beispiele:

(i) $0 \in V$ ist eine Linearkombination von $v_1, \dots v_m$, da $0 = 0v_1 + \cdots + 0v_m$.
(ii) Jedes $v \in K^n$ ist Linearkombination der Standardbasisvektoren $e_1, \dots e_n$ von K^n.

(iii) Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{Q}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ &= 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3. \end{aligned}$$

Linearkombinationen müssen also nicht immer eindeutig sein.

(iv) Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ und $b \in K^m$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar genau dann wenn b Linearkombination der Spalten $A(e_1), \dots, A(e_n)$ von A ist.

– – – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 10** – – – – – – – – – – – –

Sei M eine Teilmenge von V mit $M \neq \varnothing$. Dann ist $v \in V$ **Linearkombination von Vektoren aus M**, falls es endlich viele $v_1, \dots, v_m \in M$ gibt, so dass v Linearkombination von $v_1, \dots, v_m$ ist. Die **lineare Hülle** von M ist

$$\mathrm{Lin}(M) := \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M\}.$$

Sei $\mathrm{Lin}(\varnothing) := \{0\}$ die lineare Hülle von $M = \varnothing$.

Statt $\mathrm{Lin}(\{v_1, \dots, v_m\})$ schreiben wir auch $\mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_m)$.

Zur Erinnerung: Für eine Menge I ist $K^{(I)}$ der K-Vektorraum aller Abbildungen $f\colon I \to K$, so dass $f(x) \neq 0$ für nur endlich viele Elemente $x \in I$.

Für $M \subseteq V$ und $f \in K^{(M)}$ sei

$$\sum_{u \in M} f(u)u := \sum_{u \in f^{-1}(K^\times)} f(u)u.$$

(Die Summe auf der rechten Seite ist endlich, da $f \in K^{(M)}$.)

Lemma 7.1. *Sei $M \subseteq V$ und $v \in V$. Dann sind äquivalent:*

(i) $v \in \mathrm{Lin}(M)$;

(ii) *Es gibt ein $f \in K^{(M)}$ mit*

$$v = \sum_{u \in M} f(u)u.$$

(Wir setzen $\sum_{u \in M} f(u)u := 0$, falls $M = \varnothing$.)

Beweis. Für $M = \varnothing$ ist das Lemma richtig. Sei also $M \neq \varnothing$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Für $v \in \mathrm{Lin}(M)$ gibt es $a_1, \ldots a_m \in K$ und paarweise verschiedene $v_1, \ldots, v_m \in M$ mit $v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$. Definiere $f \in K^{(M)}$ durch

$$f(u) := \begin{cases} a_i & : \text{ falls } u = v_i \text{ für ein } 1 \leq i \leq m, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$v = \sum_{u \in M} f(u)u.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei umgekehrt

$$v = \sum_{u \in M} f(u)u$$

wobei $f \in K^{(M)}$. Dann gibt es endlich viele paarweise verschiedene $v_1, \ldots, v_m \in M$ mit $f(u) = 0$ für alle $u \in M \backslash \{v_1, \ldots, v_m\}$. Setze $a_i := f(v_i)$ für $1 \leq i \leq m$. Dann ist $v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$. Also $v \in \mathrm{Lin}(M)$. □

Lemma 7.2. *Sei $M \subseteq V$. Dann ist $\mathrm{Lin}(M)$ ein Unterraum von V.*

Beweis. Es gilt $\mathrm{Lin}(M) \neq \varnothing$, da $0 \in \mathrm{Lin}(M)$. Für $a \in K$ und $f \in K^{(M)}$ gilt

$$a \sum_{u \in M} f(u)u = \sum_{u \in M} (af)(u)u.$$

Wegen $af \in K^{(M)}$ ist diese Summe in $\mathrm{Lin}(M)$. Für $f, g \in K^{(M)}$ gilt

$$\sum_{u \in M} f(u)u + \sum_{u \in M} g(u)u = \sum_{u \in M} (f+g)(u)u.$$

Diese Summe ist wiederum in $\mathrm{Lin}(M)$. □

Sei U ein Unterraum von V. Eine Teilmenge M von V **erzeugt** U, falls

$$U = \mathrm{Lin}(M).$$

In diesem Fall nennt man M ein **Erzeugendensystem (EZS)** von U.

Ein Vektorraum V ist **endlich erzeugt**, falls

$$V = \mathrm{Lin}(M)$$

für eine endliche Teilmenge M von V.

Beispiele:

(i) K^n ist endlich erzeugt, da $K^n = \mathrm{Lin}(e_1, \ldots e_n)$.

(ii) Wegen $\mathrm{Lin}(\varnothing) = \{0\}$ ist die leere Menge $\varnothing$ ein Erzeugendensystem von $V = \{0\}$.

(iii) Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist ein EZS von $\mathbb{Q}^2$, aber

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

ist kein EZS von $\mathbb{Q}^2$.

Lemma 7.3. *Sei I eine unendliche Menge. Dann ist $K^{(I)}$ nicht endlich erzeugt.*

Beweis. Angenommen $K^{(I)} = \mathrm{Lin}(f_1, \dots f_n)$. Sei

$$J := \{x \in I \mid f_k(x) \neq 0 \text{ für ein } 1 \leq k \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} f_k^{-1}(K^\times).$$

Die Menge J ist endlich. Sei nun $y \in I \backslash J$. Ein solches y existiert, da I unendlich ist. Damit gibt es aber ein $g \in K^{(I)}$ mit $g(y) \neq 0$, und folglich ist $g \notin \mathrm{Lin}(f_1, \dots f_n)$. Widerspruch. □

7.2. **Lineare (Un)abhängigkeit.** Sei V ein K-Vektorraum.

Ein n-Tupel der Form $(v_1, \dots v_n)$ mit $n \geq 1$ und $v_k \in V$ für $1 \leq k \leq n$ nennen wir ein **V-Vektorsystem** oder einfach **Vektorsystem**.

Ein Vektorsystem $(v_1, \dots, v_n)$ heißt **linear abhängig**, falls es $a_1, \dots, a_n \in K$ gibt, welche nicht alle gleich 0 sind, mit

$$0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n.$$

Andernfalls ist $(v_1, \dots, v_n)$ **linear unabhängig**.

Eine Teilmenge $M \subseteq V$ mit $M \neq \varnothing$ heißt **linear unabhängig**, falls alle Vektorsysteme $(v_1, \dots v_n)$, $n \geq 1$, mit paarweise verschiedenen Vektoren $v_1, \dots v_n$ aus M linear unabhängig sind.

Wir nennen auch die leere Menge $\varnothing$ linear unabhängig.

Eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist **linear abhängig**, falls sie nicht linear unabhängig ist.

Lemma 7.4. *Sei $M \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

(i) *M ist linear abhängig;*

(ii) *Es gibt ein $f \in K^{(M)}$ mit $f \neq 0$, so dass*

$$0 = \sum_{u \in M} f(u)u.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Beispiele:

(i) Sei $v \in V$. Dann ist $\{v\}$ genau dann linear unabhängig wenn $v \neq 0$.

(ii) Sei $v \in V$. Dann ist (v, v) linear abhängig.

(iii) Seien $v_1, v_2 \in V$. Dann ist (v_1, v_2) linear abhängig genau dann wenn es $a_1, a_2 \in K$ gibt, die nicht beide gleich 0 sind, mit $0 = a_1v_1 + a_2v_2$. Gilt $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$, so ist (v_1, v_2) linear abhängig genau dann wenn $U_{v_1} = U_{v_2}$. (Erinnerung: $U_{v_i} := \{av_i \mid a \in K\}$.)

(iv) Falls $M \subseteq V$ mit $0 \in M$ dann ist M linear abhängig, da $0 = 1 \cdot 0$.

(v) Falls $w \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_n)$ wobei $v_1, \dots, v_n \in V$, so ist $(v_1, \dots v_n, w)$ linear abhängig.

(vi) Seien $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasisvektoren aus K^n. Dann ist jede Teilmenge von $\{e_1, \dots, e_n\}$ linear unabhängig.

(vii) Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^2$$

ist linear abhängig, weil

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 7.5. *Folgende Aussagen gelten:*

(i) *Sei $(v_1, \dots v_n, w)$ ein linear abhängiges V-Vektorsystem. Ist $(v_1, \dots v_n)$ linear unabhängig, so gilt $w \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots v_n)$.*

(ii) *Sei $M \cup \{w\} \subseteq V$ linear abhängig. Ist M linear unabhängig, so gilt $w \in \mathrm{Lin}(M)$.*

Beweis. (i): Sei $(v_1, \dots, v_n, w)$ linear abhängig, und sei $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig. Da $(v_1, \dots, v_n, w)$ linear abhängig ist, gibt es $a_0, \dots, a_n \in K$, welche nicht alle gleich 0 sind, mit $0 = a_0w + a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. Angenommen $a_0 = 0$. Dann folgt

$0 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Da $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, folgt $0 = a_1 = \cdots = a_n$. Widerspruch. Also gilt $a_0 \neq 0$ und $w = -a_0^{-1}a_1v_1 - \cdots - a_0^{-1}a_nv_n \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots v_n)$.

(ii): Sei $M \cup \{w\}$ linear abhängig, und sei M linear unabhängig. Es gibt paarweise verschiedene $v_1, \dots, v_m \in M \cup \{w\}$ und $a_1, \dots a_m \in K$, welche nicht alle gleich 0 sind, mit $0 = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$. Es folgt, dass $w = v_i$ für ein $1 \leq i \leq m$. Nun verfahren wir ähnlich wie im Beweis von (i). □

Korollar 7.6. *Sei $M \subseteq V$ linear unabhängig, und sei $w \in V$ mit $w \notin \mathrm{Lin}(M)$. Dann ist $M \cup \{w\}$ linear unabhängig.*

Lemma 7.7. *Sei V nicht endlich erzeugt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine n-elementige Teilmenge N_n von V mit N_n ist linear unabhängig und*

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots$$

Beweis. Die Menge $N_0 := \varnothing$ ist linear unabhängig und 0-elementig. Sei $N_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ schon konstruiert. Da V nicht endlich erzeugt ist, gibt es ein $v_{k+1} \in V$ mit $v_{k+1} \notin \mathrm{Lin}(N_k)$. Dann folgt mit Korollar 7.6, dass $N_{k+1} := \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ linear unabhängig ist. Nach Konstruktion enthält N_{k+1} genau $k + 1$ Elemente. □

Lemma 7.8 (Schranken-Lemma)**.** *Angenommen es gibt ein n-elementiges EZS von V. Dann ist jede $(n+1)$-elementige Teilmenge von V linear abhängig.*

Beweis. Sei $V = \{0\}$. Dann ist $\varnothing$ ein 0-elementiges EZS von V, und jede $(0 + 1)$-elementige Teilmenge (also $\{0\}$) von V ist linear abhängig.

Sei also $V \neq \{0\}$, und sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein n-elementiges EZS von V. Ferner sei $\{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ eine $(n + 1)$-elementige Teilmenge von V.

Dann gibt es Elemente $a_{ij} \in K$ mit

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i \tag{1}$$

für $1 \leq j \leq n + 1$. Es ist zu zeigen, dass es Elemente $l_1, \dots, l_{n+1} \in K$ gibt, welche nicht alle gleich 0 sind, mit

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_jw_j = 0,$$

damit wäre $\{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ dann linear abhängig.

Aus Gleichung (1) folgt

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_j w_j = \sum_{j=1}^{n+1} l_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} l_j a_{ij} \right) v_i. \tag{2}$$

Wir suchen ein

$$0 \neq x = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n+1} \end{pmatrix} \in K^{n+1}$$

so dass

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_j a_{ij} = 0$$

für alle $1 \leq i \leq n$.

Dieses x erhalten wir wie folgt: Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n+1}X_{n+1} &= 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n+1}X_{n+1} &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{nn+1}X_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

hat nach Übungsaufgabe 6.4.4(iii) eine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n+1} \end{pmatrix} \in K^{n+1}.$$

mit $x \neq 0$. Für dieses x gilt dann $l_1 w_1 + \cdots + l_{n+1} w_{n+1} = 0$. (Hier haben wir Gleichung (2) verwendet.) □

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 11** – – – – – – – – – – –

7.3. **Basen.** Sei V ein K-Vektorraum.

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt **Basis** von V, falls gilt:

(B1) B ist ein Erzeugendensystem von V;

(B2) B ist linear unabhängig.

Beispiele:

(i) Die leere Menge $\varnothing$ ist eine (die einzige) Basis von $V = \{0\}$.

(ii) Die Menge $\{e_1, \ldots, e_n\}$ der Standardbasisvektoren von K^n ist eine Basis von K^n.

Wir nennen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die **Standardbasis von K^n**.

(iii) Sei I eine Menge mit $I \neq \varnothing$. Für $i \in I$ sei $e_i \in K^{(I)}$ definiert durch

$$e_i(j) := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\{e_i \mid i \in I\}$ eine Basis von $K^{(I)}$. (Beweis: Übungsaufgabe.)

Wir nennen $\{e_i \mid i \in I\}$ die **Standardbasis von $K^{(I)}$**.

(iv) Sei B die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix $A \in K^{m,n}$. Dann ist

$$\left\{L_j^B \mid j \in \mathcal{K}(B)\right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(B)$.

(v) Sei B die reduzierter Spaltenstufenform einer Matrix $A \in K^{m.n}$ und sei $r = |\mathcal{I}(B^T)|$. Dann ist

$$\{B(e_i) \mid 1 \leq i \leq r\}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Bild}(B)$.

Satz 7.9. *Sei $B \subseteq V$ eine Basis. Dann gilt $V \cong K^{(B)}$.*

Beweis. Definiere eine Abbildung

$$\mu_B \colon K^{(B)} \to V$$
$$f \mapsto \sum_{b \in B} f(b)b.$$

Wir zeigen nun, dass μ_B ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist:

(i) μ_B ist linear: Für alle $f, g \in K^{(B)}$ und $a \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_B(f+g) &= \sum_{b \in B} (f+g)(b)b \\ &= \sum_{b \in B} (f(b)+g(b))b \\ &= \sum_{b \in B} f(b)b + \sum_{b \in B} g(b)b \\ &= \mu_B(f) + \mu_B(g) \end{aligned}$$

und

$$\mu_B(af) = \sum_{b \in B} (af)(b)b = a \sum_{b \in B} f(b)b = a\mu_B(f).$$

(ii) μ_B ist injektiv: Sei $\mu_B(f) = \mu_B(g)$ wobei $f, g \in K^{(B)}$. Mit anderen Worten,

$$\sum_{b \in B} f(b)b = \sum_{b \in B} g(b)b.$$

Es folgt

$$0 = \sum_{b \in B} (f(b) - g(b))b.$$

Da B linear unabhängig ist, gilt $f(b) = g(b)$ für alle $b \in B$. Also haben wir $f = g$ gezeigt.

(iii) μ_B ist surjektiv: Sei $v \in V$. Dann gibt es paarweise verschiedene $b_1, \dots, b_n \in B$ und $a_1, \dots, a_n \in K$ mit $v = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. Wir definieren $h_v \in K^{(B)}$ durch

$$h_v(b) := \begin{cases} a_i & : \text{ falls } b = b_i \text{ für ein } 1 \leq i \leq n, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nach der Definition von μ_B gilt $\mu_B(h_v) = v$. □

Korollar 7.10. *Sei $B \subseteq V$ eine Basis. Dann gibt es für jedes $v \in V$ genau eine Abbildung $f \in K^{(B)}$ mit*

$$v = \sum_{b \in B} f(b)b.$$

Problem 7.11. *Es bleiben noch einige Fragen offen, die wir im Folgenden klären wollen:*

(i) *Besitzt jeder Vektorraum eine Basis?*

(ii) *Haben je zwei Basen eines Vektorraums gleich viele Elemente?*

(iii) *Wie kann man alle Basen beschreiben?*

Satz 7.12. *Sei $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

(i) *B ist eine Basis von V.*

(ii) *B ist ein* **minimales EZS** *von V, d.h. für alle $b \in B$ gilt*

$$\mathrm{Lin}(B \backslash \{b\}) \neq \mathrm{Lin}(B) = V.$$

(iii) *B ist eine* **maximale linear unabhängige Teilmenge** *von V, d.h. B ist linear unabhängig und $B \cup \{w\}$ ist linear abhängig für alle $w \in V \backslash B$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Lemma 7.13. *Seien V und W K-Vektorräume, und sei $B \subseteq V$ eine Basis. Dann gilt:*

(i) *Für $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt $f = g$ genau dann wenn $f(b) = g(b)$ für alle $b \in B$.*

(ii) *Für jedes $b \in B$ sei w_b ein beliebiger Vektor aus W. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $f(b) = w_b$ für alle $b \in B$.*

Beweis. (i): Sei $f(b) = g(b)$ für alle $b \in B$. Für jedes $v \in V$ gibt es $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $b_1, \ldots b_n \in B$ mit $v = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. Aus der Linearität von f und g folgt

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(b_i) = g(v).$$

Also gilt $f = g$. Umgekehrt folgt aus $f = g$ natürlich $f(b) = g(b)$ für alle $b \in B$.

(ii): Für jedes $b \in B$ wähle ein $w_b \in W$. Definiere $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ durch

$$f\left(\sum_{b \in B} h(b) b\right) := \sum_{b \in B} h(b) w_b$$

für alle $h \in K^{(B)}$. Dabei ist f wohldefiniert, da es zu jedem $v \in V$ genau ein $h_v \in K^{(B)}$ gibt mit

$$v = \sum_{b \in B} h_v(b) b.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass f linear ist. Nach (i) ist f eindeutig bestimmt. □

7.4. **Basen für** $\mathrm{Hom}(V, W)$**.** Seien V und W K-Vektorräume, und seien $B \subset V$ und $C \subset W$ Basen. Für $(b, c) \in B \times C$ definieren wir eine lineare Abbildung $f_{(b,c)} \colon V \to W$ durch

$$f_{(b,c)}(b') := \begin{cases} c & : \text{ falls } b' = b, \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $b' \in B$. (Wir verwenden hier Lemma 7.13.)

Satz 7.14. *Seien V, W K-Vektorräume, und seien $B \subset V$ und $C \subset W$ Basen. Dann gilt*

(i) *Die Menge*

$$\mathcal{E}_{B,C} := \{f_{(b,c)} \mid (b, c) \in B \times C\} \subset \mathrm{Hom}(V, W)$$

ist linear unabhängig.

(ii) *$\mathcal{E}_{B,C}$ ist eine Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$ genau dann wenn gilt: B ist endlich oder (B ist unendlich und $W = \{0\}$).*

Beweis. (i): Angenommen $\mathcal{E}_{B,C}$ ist linear abhängig. Dann gibt es paarweise verschiedene $f_{(b_1,c_1)}, \dots, f_{(b_n,c_n)}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, welche nicht alle gleich 0 sind, mit

$$f := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_{(b_i,c_i)} = 0.$$

Für $1 \le j \le n$ gilt

$$f(b_j) = \sum_{k \in I_j} \lambda_k c_k = 0$$

wobei $I_j := \{1 \le s \le n \mid b_s = b_j\}$. Sei $1 \le j \le n$. Dann sind die Vektoren c_k mit $k \in I_j$ paarweise verschieden, da $f_{(b_1,c_1)}, \dots, f_{(b_n,c_n)}$ paarweise verschieden sind. Damit ist aber $\lambda_k = 0$ für alle $k \in I_j$. Da $\{1, \dots, n\} = I_1 \cup \dots \cup I_n$, folgt $\lambda_k = 0$ für alle $1 \le k \le n$. Widerspruch. Also haben wir gezeigt, dass $\mathcal{E}_{B,C}$ linear unabhängig ist.

(ii): Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Für $b \in B$ definiere $w_b := f(b)$. Dann gilt

$$w_b = \sum_{c \in C} h_b(c) c$$

für ein eindeutig bestimmtes $h_b \in K^{(C)}$. Ist B endlich, so sei

$$g := \sum_{b \in B} \sum_{c \in C} h_b(c) f_{(b,c)}.$$

(Bei unendlichem B wäre die Summe auf der rechten Seite nicht definiert.) Für $b \in B$ gilt dann

$$g(b) = \sum_{c \in C} h_b(c) c = w_b = f(b).$$

Also gilt $f = g$ und $f \in \mathrm{Lin}(\mathcal{E}_{B,C})$. Für endliches B ist $\mathcal{E}_{B,C}$ also ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Hom}(V, W)$, und mit (i) ist $\mathcal{E}_{B,C}$ in diesem Fall eine Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Angenommen B ist nicht endlich. Sei $0 \ne w \in W$. Definiere $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ durch $F(b) := w$ für alle $b \in B$. (Wir verwenden hier Lemma 7.13(ii).) Für jedes $f \in \mathrm{Lin}(\mathcal{E}_{B,C})$ gilt aber, dass die Menge $\{b \in B \mid f(b) \ne 0\}$ endlich ist. Also haben wir gezeigt, dass $F \notin \mathrm{Lin}(\mathcal{E}_{B,C})$.

Ist $W = \{0\}$, so ist $\mathcal{E}_{B,C}$ die leere Menge und daher eine Basis des Nullvektorraums $\mathrm{Hom}(V, 0)$. □

Lemma 7.15. *Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus, und sei B eine Teilmenge von V. Dann sind äquivalent:*

(i) *B ist eine Basis von V;*

(ii) *$f(B)$ ist eine Basis von W.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

7.5. **Basen für Dualräume.** Sei V ein K-Vektorraum.

Dann ist
$$V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$$
der **Dualraum** von V.

Sei nun B eine Basis von V. Für jedes $b \in B$ definiere $b^* \in V^*$ durch
$$b^*(b') := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } b' = b, \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$
für alle $b' \in B$.

Lemma 7.16. *Sei V ein K-Vektorraum, und sei B eine endliche Basis von V. Dann ist*
$$B^* := \{b^* \mid b \in B\}$$
eine Basis von V^*.

Beweis. Sei $C := \{1\} \subset K$. Dann ist C eine Basis des K-Vektorraums K. Nach Definition folgt dann $B^* = \mathcal{E}_{B,C}$. Damit folgt die Aussage aus Satz 7.14. $\square$

Die Basis B^* ist die zu B **duale Basis** von V^*.

– – – – – – – – – – – Ende Vorlesung 12 – – – – – – – – – – –

7.6. **Basis-Austauschsatz.**

Lemma 7.17 (Basis-Austauschlemma)**.** *Sei B eine Basis eines Vektorraums V, und sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $(B \setminus \{b\}) \cup \{v\}$ ist eine Basis von V.*

Beweis. Es gibt paarweise verschiedene $b_1, \ldots, b_m \in B$ und $a_1, \ldots, a_m \in K^\times$ mit
$$v = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m.$$
Setze $B' := (B \setminus \{b_1\}) \cup \{v\}$. Es ist klar, dass B' ein EZS von V ist. Angenommen B' ist linear abhängig. Dann gibt es paarweise verschiedene Vektoren $b_1', \ldots, b_n' \in B'$ und $a_1', \ldots, a_n' \in K^\times$ mit
$$0 = a_1' b_1' + \cdots + a_n' b_n'.$$
Angenommen $b_i' \neq v$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann erhalten wir einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $B \setminus \{b_1\}$. Wir können also annehmen, dass $b_1' = v$ gilt.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= a_1'(a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m) + a_2' b_2' + \cdots + a_n' b_n' \\ &= a_1' a_1 b_1 + \sum_{b \in B \setminus \{b_1\}} f(b) b \end{aligned}$$

für ein $f \in K^{(B \setminus \{b_1\})}$. (Beachte: $b_k' \in B \setminus \{b_1\}$ für alle $2 \leq k \leq n$.) Da $a_1' a_1 \neq 0$, ist dies ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von B. $\square$

Satz 7.18 (Basis-Austauschsatz)**.** *Sei B eine Basis eines Vektorraums V, und sei $\{v_1, \ldots, v_r\}$ eine r-elementige linear unabhängige Teilmenge von V. Dann gibt es eine r-elementige Teilmenge $\{b_1, \ldots, b_r\} \subset B$ mit: $(B \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}) \cup \{v_1, \ldots, v_r\}$ ist eine Basis von V.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion über r. Für $r = 1$ ist dies das Austauschlemma 7.17.

Sei die Aussage für $r \geq 1$ bereits bewiesen, und sei $\{v_1, \ldots, v_{r+1}\}$ eine $(r+1)$-elementige linear unabhängige Teilmenge von V.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine r-elementige Teilmenge $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq B$, so dass $B' := (B \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}) \cup \{v_1, \ldots, v_r\}$ eine Basis von V ist. Setze $B^\circ := B \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}$. Dann gilt

$$v_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i + \sum_{b \in B^\circ} f(b) b$$

für ein $f \in K^{(B^\circ)}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}\}$ gilt dann $f \neq 0$. Sei nun $b \in B^\circ$ mit $f(b) \neq 0$. Dann ist $(B' \setminus \{b\}) \cup \{v_{r+1}\}$ nach dem Beweis des Austauschlemmas 7.17 wieder eine Basis von V. $\square$

7.7. Basen für endlich erzeugte Vektorräume.

Lemma 7.19. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Sei M ein Erzeugendensystem von V, und sei $N \subseteq M$ mit N linear unabhängig, dann gibt es eine endliche Basis B von V mit $N \subseteq B \subseteq M$.*

Beweis. Sei M ein Erzeugendensystem von V, und sei N eine linear unabhängige Teilmenge von M. Da V endlich erzeugt ist, folgt aus dem Schranken-Lemma 7.8, dass N eine endliche Menge ist.

Falls $\mathrm{Lin}(N) = V$, so erfüllt $B := N$ die Behauptung.

Sei also $\mathrm{Lin}(N) \neq V$. Dann gibt es ein $x \in M \setminus \mathrm{Lin}(N)$. Aus Korollar 7.6 folgt, dass $N \cup \{x\}$ linear unabhängig ist. Damit ist

$$N \subset N \cup \{x\} \subseteq M.$$

Nach dem Schranken-Lemma 7.8 bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, und wir erhalten eine endliche Basis B von V mit $N \subseteq B \subseteq M$. □

Korollar 7.20. *Sei V endlich erzeugt. Dann enthält jedes Erzeugendensystem von V eine Basis von V.*

Satz 7.21. *Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann gilt:*

(i) *V hat eine endliche Basis.*

(ii) *Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente.*

Beweis. (i): In Lemma 7.19 wähle $N := \varnothing$ und $M := V$.

(ii): Sei B eine n-elementige Basis von V. Mit dem Schranken-Lemma 7.8 folgt: Jede $(n+1)$-elementige Teilmenge von V ist linear abhängig. Sei nun C eine andere Basis von V. Dann folgt $|C| \leq |B|$. Vertauschen der Rolle von B und C liefert $|B| \leq |C|$. Also ist $|B| = |C| = n$. □

Sei V endlich erzeugt, und sei B eine n-elementige Basis von V. Dann sei

$$\dim(V) := n$$

die **Dimension** von V. (Wegen Satz 7.21(ii) ist dies wohldefiniert.) In diesem Fall heißt V **endlich-dimensional** oder (genauer) **n-dimensional**.

Sei V nicht endlich erzeugt. Dann ist V **unendlich-dimensional**, und wir schreiben

$$\dim(V) = \infty.$$

Später werden wir auch die Dimensionen von unendlich-dimensionalen Vektorräumen unterscheiden.

Einen 1-dimensionalen Unterraum eines Vektorraums V nennen wir **Gerade** in V, und einen 2-dimensionalen Unterraum nennen wir **Ebene**.

Beispiel: Sei I eine Menge. Dann gilt

$$\dim(K^{(I)}) = \begin{cases} |I| & : \text{ falls } I \text{ endlich,} \\ \infty & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für $n \geq 0$ gilt also insbesondere $\dim(K^n) = n$.

Satz 7.22. *Sei V endlich-dimensional, und sei W ein Unterraum von V. Dann gilt:*

(i) *W ist endlich-dimensional und* $\dim(W) \leq \dim(V)$.

(ii) *$W = V$ genau dann wenn* $\dim(W) = \dim(V)$.

(iii) *Jede Basis von W lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.*

Beweis. (i): Ähnlich wie in Lemma 7.7 definieren wir eine aufsteigende Kette

$$N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_k \subset W$$

von linear unabhängigen Teilmengen N_j von W mit $|N_j| = j$ für $1 \leq j \leq k$. Dieses Verfahren bricht nach dem Schrankenlemma 7.8 nach endlich vielen Schritten ab, weil V endlich-dimensional ist. Also hat W eine endliche Basis und $\dim(W) \leq \dim(V)$. (Erinnerung: Setze $N_0 := \varnothing$. Sei N_j schon definiert für ein $j \geq 0$. Angenommen $\mathrm{Lin}(N_j) = W$ dann folgt die Behauptung. Sei also $\mathrm{Lin}(N_j) \neq W$, und sei $x \in W \setminus \mathrm{Lin}(N_j)$. Mit Korollar 7.6 folgt, dass $N_{j+1} := N_j \cup \{x\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von W ist mit $|N_{j+1}| = j + 1$.)

(ii): Sei $\dim(W) = \dim(V) = n$. Dann gibt es eine Basis $B \subset W$ mit $|B| = n$. Angenommen $W = \mathrm{Lin}(B) \neq V$. Dann gibt es ein $x \in V \setminus \mathrm{Lin}(B)$, und wegen Korollar 7.6 ist $B \cup \{x\}$ eine $(n+1)$-elementige linear unabhängige Teilmenge von V. Dies ist ein Widerspruch zum Schranken-Lemma 7.8.

(iii): Sei N eine Basis von W, und sei $M := V$. Dann wenden wir Lemma 7.19 an. □

Die Aussage Satz 7.22(iii) ist auch unter dem Namen **Basis-Ergänzungssatz** bekannt.

Sei V ein Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Ein Unterraum W von V heißt **Komplementärraum zu U in V**, falls

$$V = U \oplus W.$$

Der Unterraum W ist in der Regel nicht eindeutig durch U bestimmt.

Lemma 7.23. *Sei V endlich-dimensional. Zu jedem Unterraum U von V gibt es einen Komplementärraum W in V.*

Beweis. Wegen Satz 7.21 und Satz 7.22 wissen wir, dass es eine Basis B' von U gibt. Mit $N := B'$ und $M := V$ können wir nun Lemma 7.19 anwenden und erhalten eine Basis B von V mit $B' \subseteq B \subseteq V$. Setze $B'' := B \setminus B'$ und $W := \mathrm{Lin}(B'')$. Wir wollen zeigen, dass dann $V = U \oplus W$ gilt:

Wegen $B \subseteq U + W$ gilt $V = U + W$.

Sei $B' = \{b'_1, \dots, b'_r\}$ r-elementig und $B'' = \{b''_1, \dots b''_s\}$ s-elementig. Angenommen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i b'_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda''_j b''_j$$

für $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r, \lambda''_1, \dots, \lambda''_s \in K$. Damit ist

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i b'_i - \sum_{j=1}^{s} \lambda''_j b''_j.$$

Folglich gilt $\lambda'_i = \lambda''_j = 0$ für alle i und j, da $(b'_1, \dots, b'_r, b''_1, \dots, b''_s)$ linear unabhängig ist. Wir haben also gezeigt, dass $U \cap W = 0$. □

7.8. **Dimensionsformeln.**

Satz 7.24 (Dimensionsformel für Unterräume)**.** *Seien U und W endlich-dimensionale Unterräume von V. Dann gilt*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Beweis. Sei $m := \dim(U \cap W)$, $\dim(U) = m + r$ und $\dim(W) = m + s$.

Sei $\{a_1, \dots, a_m\}$ eine Basis von $U \cap W$. Ergänze $\{a_1, \dots, a_m\}$ zu einer Basis $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r\}$ von U und zu einer Basis $\{a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_s\}$ von W. (Hier verwenden wir Satz 7.22(iii).)

Es ist jetzt zu zeigen, dass $\dim(U + W) = m + r + s$. Setze

$$B := \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s\} \subset V.$$

Wir zeigen, dass B eine $(m + r + s)$-elementige Basis von $U + W$ ist:

B ist ein Erzeugendensystem von $U + W$. (Die ist offensichtlich, denn B enthält ein EZS von U und ein EZS von W.)

Es bleibt zu zeigen, dass $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_s)$ linear unabhängig ist: Sei also

$$0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i}_{a} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \mu_i b_i}_{b} + \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \nu_i c_i}_{c}.$$

Wir wissen, dass $a \in U \cap W$, $b \in U$ und $c \in W$. Folglich gilt

$$b = -a - c \in U \cap W.$$

(Es gilt $-a \in U \cap W$ und $c \in W$, also $b \in W$.) Nach Definition ist b Linearkombination von $b_1, \dots, b_r$, und wegen $b \in U \cap W$ ist b auch Linearkombination von $a_1, \dots, a_m$. Da jedoch $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_r)$ linear unabhängig ist, folgt $\mu_i = 0$ für alle i und damit $b = 0$.

Analog zeigt man, dass $\nu_i = 0$ für alle i. Somit ist $a = 0$ und daher $\lambda_i = 0$ für alle i. □

Korollar 7.25. *Sei V endlich-dimensional. Seien U und W Unterräume mit $V = U \oplus W$. Dann gilt*

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W).$$

Beweis. Nach Satz 7.24 gilt $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Aus $V = U \oplus W$ folgt $V = U + W$ und $U \cap W = 0$. □

Satz 7.26 (Dimensionsformel für Homomorphismen)**.** *Sei V endlich-dimensional, und sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Kern}(f)$ *und* $\mathrm{Bild}(f)$ *sind endlich-dimensional.*

(ii) $\dim(V) = \dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f)$.

– – – – – – – – – – –– **Ende Vorlesung 13** – – – – – – – – – – ––

Beweis. Wir wissen, dass $\mathrm{Kern}(f)$ ein Unterraum von V ist. Da V endlich-dimensional ist, folgt mit Satz 7.22(i), dass $\mathrm{Kern}(f)$ endlich-dimensional ist.

Nach Lemma 7.23 gibt es einen Komplementärraum U zu $\mathrm{Kern}(f)$ in V. Also gilt $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus U$, und ist U nach Satz 7.22(i) endlich-dimensional.

Sei $g \colon U \to W$ die Einschränkung von f auf U, d.h. $g(u) := f(u)$ für alle $u \in U$. Es gilt $\mathrm{Kern}(g) = 0$ und $\mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Bild}(f)$. (Für jedes $v \in V$ gibt es $v_1 \in \mathrm{Kern}(f)$ und $v_2 \in U$ mit $v = v_1 + v_2$. Also $f(v) = g(v_2)$.) Damit ist

$$\begin{aligned} \tilde{g} \colon U &\to \mathrm{Bild}(f) \\ u &\mapsto g(u) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. (Denn $\tilde{g}$ ist injektiv und surjektiv.) Folglich ist $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim(U)$. Insbesondere ist $\mathrm{Bild}(f)$ endlich-dimensional. Nach Korollar 7.25 folgt

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f).$$

□

Korollar 7.27. *Seien V und W endlich-dimensional mit $\dim(V) = \dim(W)$, und sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist ein Isomorphismus;*

(ii) *f ist ein Monomorphismus;*

(iii) *f ist ein Epimorphismus.*

Beweis. Wegen

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f)$$

und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt $\mathrm{Kern}(f) = 0$ genau dann wenn $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim(W)$ genau dann wenn $\mathrm{Bild}(f) = W$. Also gilt (ii) $\iff$ (iii). Alle anderen Implikationen folgen nun aus den Definitionen. $\square$

7.9. **Rang von Vektorsystemen, Homomorphismen und Matrizen.**

Für ein Vektorsystem $(v_1, \ldots, v_m)$ sei

$$\mathrm{Rang}(v_1, \ldots, v_m) := \dim \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_m)$$

der **Rang** von $(v_1, \ldots, v_m)$.

Elementare Umformungen (vom Typ (I), (II) und (III)) eines Vektorsystems $(v_1, \ldots, v_m)$ sind wie folgt definiert:

(I) Sei $1 \leq i \neq j \leq m$ und $\lambda \in K$

$$(v_1, \ldots, v_m) \mapsto (v_1, \ldots, \underbrace{v_i + \lambda v_j}_{i\text{-ter Vektor}}, \ldots, v_m);$$

(II) Sei $1 \leq i \leq m$ und $\lambda \in K^\times$.

$$(v_1, \ldots, v_m) \mapsto (v_1, \ldots, \underbrace{\lambda v_i}_{i}, \ldots, v_m);$$

(III) Sei $1 \leq i < j \leq m$

$$(v_1, \ldots, v_m) \mapsto (v_1, \ldots, \underbrace{v_j}_{i}, \ldots, \underbrace{v_i}_{j}, \ldots, v_m).$$

Lemma 7.28. *Elementare Umformungen lassen den Rang eines Vektorsystems unverändert.*

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. $\square$

Für einen Homomorphismus $f\colon V \to W$ sei

$$\mathrm{Rang}(f) := \dim \mathrm{Bild}(f)$$

der **Rang** von f.

Sei $A \in K^{m,n}$. Wir können A als Homomorphismus $A\colon K^n \to K^m$ auffassen.

Dann sei

$$\mathrm{Rang}(A) := \dim \mathrm{Bild}(A)$$

der **Rang** von A.

Der **Zeilenrang** einer Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$ ist definiert als

$$\text{Zeilenrang}(A) := \text{Rang}((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots (a_{m1}, \dots, a_{mn})).$$

(Die Zeilen von A werden hier als Vektoren in K^n aufgefasst.) Der **Spaltenrang** von A ist definiert als

$$\text{Spaltenrang}(A) := \text{Rang}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\right).$$

Lemma 7.29. *Sei $A \in K^{m,n}$. Dann gilt:*

(i) *Für jede Elementarmatrix $T \in K^{m,m}$ gilt*
$$\text{Zeilenrang}(TA) = \text{Zeilenrang}(A);$$

(ii) *Für jede Elementarmatrix $T \in K^{n,n}$ gilt*
$$\text{Spaltenrang}(AT) = \text{Spaltenrang}(A).$$

Beweis. Dies folgt aus den Definitionen und Lemma 7.28. □

Lemma 7.30. *Sei $A \in K^{m,n}$. Dann gilt* $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Rang}(A)$.

Beweis. Es gilt $\text{Bild}(A) = \text{Lin}(A(e_1), \dots, A(e_n))$, wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von K^n ist. Also

$$\begin{aligned} \text{Rang}(A) &= \dim \text{Bild}(A) \\ &= \dim \text{Lin}(A(e_1), \dots, A(e_n)) \\ &= \text{Spaltenrang}(A). \end{aligned}$$

□

Satz 7.31. *Sei $A \in K^{m,n}$. Dann gilt* $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in vier Schritten:

(a): Sei B die reduzierte Zeilenstufenform von A. Es gibt also Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_t$ mit $B = T_t \cdots T_1 A$. Nach Lemma 7.29 folgt dann $\text{Zeilenrang}(B) = \text{Zeilenrang}(A)$.

(b): Sei $r = |\mathcal{I}(B)|$ die Anzahl der Zeilenstufenindizes. Es gilt dann offensichtlich $\text{Zeilenrang}(B) = r$. Mit (a) folgt also $\text{Zeilenrang}(A) = r$.

(c): Wir wissen, dass

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Kern}(B) \cong K^{n-r}.$$

Nach Satz 7.26 gilt also

$$n = \dim(K^n) = \dim \operatorname{Kern}(A) + \dim \operatorname{Bild}(A) = (n-r) + \dim \operatorname{Bild}(A).$$

Es folgt

$$\operatorname{Spaltenrang}(A) = \dim \operatorname{Bild}(A) = r.$$

(d): Aus (b) und (c) folgt direkt $\operatorname{Zeilenrang}(A) = \operatorname{Spaltenrang}(A) = r$. □

Korollar 7.32. *Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen lassen den Rang einer Matrix A unverändert.*

7.10. **Algorithmen zum Thema Rang und Basis.**

7.10.1. **Rang einer Matrix.** Sei $A \in K^{m,n}$, und sei B die reduzierte Zeilenstufenform von A. Dann gilt

$$\operatorname{Rang}(A) = |\mathcal{I}(B)|.$$

Die Matrix B berechnen wir mit dem Gauß-Algorithmus.

7.10.2. **Vektoren als Linearkombination schreiben.** Sei $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis von K^m, und sei $v \in K^m$. Wir wollen v als Linearkombination von Basisvektoren schreiben.

Sei $A \in K^{m,m}$ die Matrix mit den Spalten $A(e_i) = b_i$ für $1 \leq i \leq m$. Das LGS $Ax = v$ hat dann genau eine Lösung. (Die Spalten von A sind linear unabhängig, d.h. $\operatorname{Bild}(A)$ ist m-dimensional. Damit ist A ein Isomorphismus.) Sei also

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in K^m$$

die Lösung von $Ax = v$. Dann gilt

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m.$$

Allgemeiner, sei $(b_1, \ldots, b_n)$ ein V-Vektorsystem mit $V = K^m$, und sei $v \in K^m$. Sei $A \in K^{m,n}$ die Matrix mit den Spalten $A(e_i) = b_i$ für $1 \leq i \leq n$. Das LGS $Ax = v$ ist lösbar genau dann wenn v eine Linearkombination von $b_1, \ldots, b_n$ ist.

7.10.3. **Lösbarkeit von LGS.** Sei $A \in K^{m,n}$ und $b \in K^m$. Dann ist $Ax = b$ lösbar genau dann wenn

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}([A|b]).$$

Beweis: Übungsaufgabe.

7.10.4. **Praktische Anwendung des Basis-Austauschsatzes.** Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von K^n, und sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine r-elementige linear unabhängige Teilmenge von V. Wir wollen eine r-elementige Teilmenge $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ finden, so dass

$$(B \setminus \{b_{i_1}, \dots, b_{i_r}\}) \cup \{v_1, \dots, v_r\}$$

wieder eine Basis von K^n ist.

Wie in Abschnitt 7.10.2 beschrieben, konstruieren wir $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v_1 = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Dann gibt es ein $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_{i_1} \neq 0$. Nach dem Austauschlemma ist dann

$$B(1) := (B \setminus \{b_{i_1}\}) \cup \{v_1\}$$

eine Basis von V.

Für $1 \leq k \leq r - 1$ sei nun

$$B(k) := (B \setminus \{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\}) \cup \{v_1, \dots, v_k\}$$

bereits konstruiert. Wir schreiben v_{k+1} als Linearkombination

$$v_{k+1} = \sum_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j v_j.$$

Wie im Beweis des Austauschsatzes beschrieben, gibt es dann ein $i_{k+1} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $\lambda_{i_{k+1}} \neq 0$. Dann ist

$$B(k+1) := (B \setminus \{b_{i_1}, \dots, b_{i_{k+1}}\}) \cup \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$$

eine Basis von K^n.

7.10.5. **Basis eines Komplementärraums.** Sei $B = (b_1, \dots, b_m)$ ein linear unabhängiges V-Vektorsystem. Für V-Vektorsysteme $(u_1, \dots, u_r)$ und $(w_1, \dots, w_s)$ setze

$$U := \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_r) \quad \text{und} \quad W := \mathrm{Lin}(w_1, \dots, w_s).$$

Es gilt dann offenbar

$$U + W = \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s).$$

Wir nehmen an, dass U und W Unterräume von $\mathrm{Lin}(B)$ sind. Insbesondere gibt es also Skalare a_{ij} und c_{ij} mit

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j \quad \text{und} \quad w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_j$$

für $1 \leq i \leq r$ bzw. $1 \leq i \leq s$. Wir erhalten die Matrix

$$\left(\frac{A}{C}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rm} \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sm} \end{array}\right) \in K^{r+s,m}$$

wobei $A := (a_{ij}) \in K^{r,m}$ und $C := (c_{ij}) \in K^{s,m}$.

Im ersten Schritt konstruieren wir eine Basis von U. Sei

$$A' = (a'_{ij}) = \left(\begin{array}{ccc} a'_{11} & \cdots & a'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{p1} & \cdots & a'_{pm} \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \in K^{r,m}$$

die reduzierte Zeilenstufenform von A, wobei $(a'_{p1}, \dots, a'_{pm}) \neq 0$. (Diese erhalten wir wie üblich durch elementare Zeilenumformungen.) Dann ist

$$B_U := \left\{ \sum_{j=1}^{m} a'_{ij} b_j \mid 1 \leq i \leq p \right\}$$

eine p-elementige Basis von U.

Seien $j_1 < \cdots < j_p$ die Zeilenstufenindizes von A'. Im zweiten Schritt addieren wir nun passende Vielfache der Zeilen von A' zu den Zeilen von C und erhalten so eine Matrix $C' = (c'_{ij}) \in K^{s,m}$ der Form

$$\begin{array}{ccccccc} & j_1 & & j_2 & & j_p & \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\star \cdots \star} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\star \cdots \star} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\star \cdots \star} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\star \cdots \star} \\ \multicolumn{1}{|c|}{\vdots} & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} \\ \multicolumn{1}{|c|}{\star \cdots \star} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\star \cdots \star} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\star \cdots \star} & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{1}{c|}{\star \cdots \star} \\ \hline \end{array}$$

Sei nun

$$C'' = (c''_{ij}) = \left(\begin{array}{ccc} c''_{11} & \cdots & c''_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c''_{q1} & \cdots & c''_{qm} \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \in K^{s,m}$$

die reduzierte Zeilenstufenform von C', wobei $(c''_{q1}, \dots, c''_{pm}) \neq 0$. Setze

$$B_{U'} := \left\{ \sum_{j=1}^{m} c''_{ij} b_j \mid 1 \leq i \leq q \right\}$$

und $U' := \mathrm{Lin}(B_{U'})$. Dann ist $B_{U'}$ eine q-elementige Basis von U', und es gilt

$$U + W = U \oplus U'.$$

In den Anwendungen wird oft der Spezialfall $V = K^m$ und $B = (e_1, \dots, e_m)$ betrachtet.

7.10.6. **Basen von $U+W$ und $U \cap W$.** Sei $B = (b_1, \dots, b_m)$ ein linear unabhängiges V-Vektorsystem. Für V-Vektorsysteme $(u_1, \dots, u_r)$ und $(w_1, \dots, w_s)$ setze

$$U := \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_r) \quad \text{und} \quad W := \mathrm{Lin}(w_1, \dots, w_s).$$

Es gilt dann offenbar

$$U + W = \mathrm{Lin}(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s).$$

Wir nehmen an, dass U und W Unterräume von $\mathrm{Lin}(B)$ sind.

Wir wollen Basen von $U + W$ und $U \cap W$ konstruieren. Eine Basis von $U + W$ haben wir bereits in Abschnitt 7.10.5 konstruiert, jedoch gibt es den folgenden sehr schönen **Zassenhaus-Algorithmus**, welcher gleichzeitige Basen von $U + W$ und $U \cap W$ liefert.

Es gibt Skalare a_{ij} und c_{ij} mit

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j \quad \text{und} \quad w_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_j$$

für $1 \le i \le r$ bzw. $1 \le i \le s$. Anders als in Abschnitt 7.10.5 betrachten wir diesmal die Matrix

$$D := \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline C & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rm} & a_{r1} & \cdots & a_{rm} \\ \hline c_{11} & \cdots & c_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sm} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \in K^{r+s,2m}$$

wobei $A := (a_{ij}) \in K^{r,m}$ und $C := (c_{ij}) \in K^{s,m}$. Sei nun

$$D' := \left(\begin{array}{ccc|ccc} s_{11} & \cdots & s_{1m} & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{p1} & \cdots & s_{pm} & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{q1} & \cdots & d_{qm} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \in K^{r+s,2m}$$

die reduzierte Zeilenstufenform von D, wobei $(s_{p1}, \dots, s_{pm}) \neq 0$ und $(d_{q1}, \dots, d_{qm}) \neq 0$.

Setze

$$s_i := \sum_{j=1}^{m} s_{ij} b_j \quad \text{und} \quad d_i := \sum_{j=1}^{m} d_{ij} b_j$$

mit $1 \le i \le p$ bzw. $1 \le i \le q$. Dann ist $\{s_1, \ldots, s_p\}$ eine p-elementige Basis der Summe $U+W$, und $\{d_1, \ldots, d_q\}$ ist eine q-elementige Basis des Durchschnitts $U \cap W$.

Beweis: Übungsaufgabe.

In den Anwendungen wird auch hier oft der Spezialfall $V = K^m$ und $B = (e_1, \ldots, e_m)$ betrachtet.

Beispiel: Dies Beispiel stammt von der Wikipedia Seite zum Zassenhaus-Algorithmus. Wir befinden uns in der Situation $V = K^4$ und $B = (e_1, \ldots, e_4)$. Seien

$$U = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad W = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Unterräume von $\mathbb{Q}^4$. Wir erhalten

$$D = \begin{pmatrix} A & A \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die reduzierte Zeilenstufenform von D ist von der Form

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & -1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $U + W$, und

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis von $U \cap W$.

7.11. **Relationen, Halbordnungen und Zornsches Lemma.**

Seien M und N Mengen. Eine **Relation** zwischen M und N ist eine Teilmenge R von $M \times N$. Falls $M = N$, so sagt man R ist eine **Relation auf** M.

Mögliche Eigenschaften von Relationen auf M:

(Re1) $(x, x) \in R$ für alle $x \in M$ (**Reflexivität**);

(Re2) $(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$ für alle $x, y \in M$ (**Symmetrie**);

(Re3) Für alle $x, y \in M$ gilt: Falls $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ dann ist $x = y$ (**Antisymmetrie**);

(Re4) Für alle $x, y, z \in M$ gilt: Falls $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ dann ist auch $(x, z) \in R$ (**Transitivität**).

Eine Relation R auf M ist eine **Äquivalenzrelation** auf M, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Eine Menge S zusammen mit einer Relation R auf S heißt **Halbordnung**, falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Wir schreiben dann oft $(S, \leq)$ statt (S, R) und $x \leq y$ statt $(x, y) \in R$.

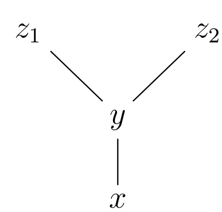
Beispiele:

(i) $(\mathbb{N}, \leq)$ ist mit der üblichen Ordnung auf $\mathbb{N}$ eine Halbordnung.

(ii) Sei $S := \{x, y, z_1, z_2\}$ und

$$R := \{(x, x), (x, y), (x, z_1), (x, z_2), (y, y), (y, z_1), (y, z_2), (z_1, z_1), (z_2, z_2)\}.$$

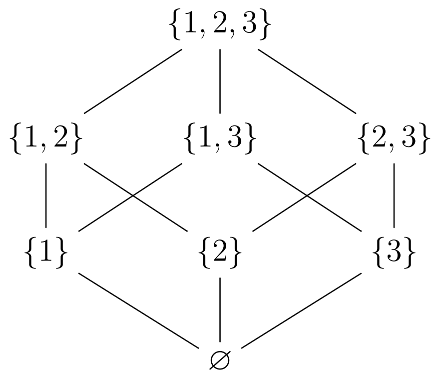
Dann ist (S, R) eine Halbordnung. Hier ist eine Visualisierung von (S, R):



– – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 14** – – – – – – – – – –

(iii) Sei M eine Menge, und sei $S := \mathcal{P}(M) = \{U \mid U \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Setze $R := \{(U, V) \mid U, V \in \mathcal{P}(M) \,\text{und}\, U \subseteq V\}$. Dann ist (S, R) eine

Halbordnung. Hier ist eine Visualisierung von (S, R) für $M = \{1, 2, 3\}$:



Sei $(S, \leq)$ eine Halbordnung. Eine Teilmenge T von S ist eine **Kette in S**, falls für alle $t_1, t_2 \in T$ gilt:

$$t_1 \leq t_2 \quad \text{oder} \quad t_2 \leq t_1.$$

Sei $(S, \leq)$ eine Halbordnung und $T \subseteq S$ eine Kette. Ein $s \in S$ ist eine **obere Schranke von T**, falls $t \leq s$ für alle $t \in T$.

Ein Element $s \in S$ ist **maximal**, falls gilt: Für alle $t \in S$ mit $s \leq t$ gilt $s = t$.

Wir formulieren nun das Zornsche Lemma. Für den Beweis benötigt man das Auswahlaxiom.

Lemma 7.33 (Zornsches Lemma)**.** *Sei $(S, \leq)$ eine Halbordnung mit $S \neq \varnothing$. Gibt es für jede Kette in S eine obere Schranke, so enthält S ein maximales Element.*

7.12. Basen für beliebige Vektorräume.

Satz 7.34. *Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:*

(i) *Sei M ein Erzeugendensystem von V, und sei N eine linear unabhängige Teilmenge von M. Dann gibt es eine Basis B von V mit $N \subseteq B \subseteq M$.*

(ii) *V hat eine Basis.*

Beweis. Es ist klar, dass (ii) aus (i) folgt. (Sei $N := \varnothing$ und $M := V$. Dann wenden wir (i) an.)

Wir beweisen nun (i): Sei M ein EZS von V, und sei $N \subseteq M$ linear unabhängig. Mit S_N bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen U von M mit den beiden Eigenschaften

(a) U ist linear unabhängig;

(b) $N \subseteq U$.

Es gilt: $S_N \neq \varnothing$, da $N \in S_N$. Es ist klar, dass S_N zusammen mit $\subseteq$ eine Halbordnung ist. Sei nun T eine nicht-leere Kette in S_N. Dann ist

$$Y := \bigcup_{X \in T} X$$

eine obere Schranke von T in S_N: Es ist klar, dass $N \subseteq Y \subseteq M$. Es bleibt zu zeigen: Y ist linear unabhängig. Angenommen Y ist linear abhängig. Dann gibt es paarweise verschiedene Elemente $y_1, \ldots, y_n \in Y$ und $a_1, \ldots, a_n \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, mit

$$0 = a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n.$$

Für jedes y_j gibt es ein $X_j \in T$ mit $y_j \in X_j$. Da T eine Kette ist, gibt es ein k mit $X_j \subseteq X_k$ für alle $1 \leq j \leq n$. Also gilt $y_1, \ldots, y_n \in X_k$. Da X_k linear unabhängig ist, erhalten wir einen Widerspruch. Wir haben also gezeigt, dass Y eine obere Schranke von T in S_N ist.

Mit dem Zornschen Lemma folgt nun, dass es ein maximales Element B in S_N gibt. Wir zeigen, dass B eine Basis von V ist: Wir wissen, dass B linear unabhängig ist. Es bleibt also noch zu zeigen, dass B ein Erzeugendensystem von V ist. Für jedes $x \in M \backslash B$ ist $B \cup \{x\}$ linear abhängig. (Dies folgt aus der Maximalität von B.) Also gilt $x \in \operatorname{Lin}(B)$ und somit $M \subseteq \operatorname{Lin}(B)$. Es folgt die Behauptung. □

Seien M und N Mengen. Dann sind M und N sind **gleichmächtig**, falls es eine bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ gibt. In diesem Fall schreiben wir

$$|M| = |N|.$$

Das Symbol $|M|$ nennen wir auch die **Kardinalität von M**.

An dieser Stelle müssten wir eigentlich Ordinalzahlen einführen. Die Kardinalität von M wäre dann eine solche.

Für Mengen M, N und P gilt offensichtlich:

- $|M| = |M|$;
- $|M| = |N| \iff |N| = |M|$;
- $(|M| = |N| \text{ und } |N| = |P|) \implies |M| = |P|$.

Für Mengen M und N schreiben wir $|M| \leq |N|$, falls es eine injektive Abbildung $f\colon M \to N$ gibt.

Wir schreiben $|M| < |N|$, falls $|M| \leq |N|$ und $|M| \neq |N|$.

Für Mengen M, N und P gilt offensichtlich:

- $|M| \leq |M|$;

- $(|M| \leq |N| \text{ und } |N| \leq |P|) \implies |M| \leq |P|$.

Die folgenden drei Sätze werden wir nicht beweisen. Es sei aber erwähnt, dass hier wieder das Zornsche Lemma verwendet werden muss.

Satz 7.35. *Seien M und N Mengen. Dann gilt $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$.*

Satz 7.36 (Bernsteinscher Äquivalenzsatz)**.** *Seien M und N Mengen mit $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$. Dann gilt $|M| = |N|$.*

Satz 7.37. *Sei M eine unendliche Menge. Dann gilt*

$$|M \times M| = |M|.$$

Seien $M_1, \ldots, M_t$ Mengen. Das **Maximum** von $M_1, \ldots, M_t$ ist definiert als

$$\max\{|M_1|, \ldots, |M_t|\} := |M_s|,$$

falls $|M_i| \leq |M_s|$ für alle $1 \leq i \leq t$. (Dass es ein solches s gibt, folgt aus Satz 7.35.)

Korollar 7.38. *Seien M und N nicht-leere Mengen, von denen mindestens eine unendlich ist. Dann gilt*

$$|M \times N| = \max\{|M|, |N|\}.$$

Korollar 7.39. *Sei M eine unendliche Menge, und sei I eine Menge. Für jedes $i \in I$ sei N_i eine Menge. Angenommen $|I| \leq |M|$ und $|N_i| \leq |M|$ für alle $i \in I$. Dann gilt*

$$\left|\bigcup_{i \in I} N_i\right| \leq |I \times M| = |M|.$$

Korollar 7.40. *Sei V ein K-Vektorraum, sei M ein unendliches Erzeugendensystem von V. Dann enthält jedes Erzeugendensystem N von V ein Erzeugendensystem P von V mit $|P| \leq |M|$.*

Beweis. Zu jedem $x \in M$ gibt es eine endliche Teilmenge $N_x \subseteq N$ mit $x \in \operatorname{Lin}(N_x)$. Folglich ist

$$P := \bigcup_{x \in M} N_x$$

ein Erzeugendensystem von V. Es gilt dann natürlich $|M| \leq |M|$ und $|N_x| \leq |M|$ für alle $x \in M$. Nach Korollar 7.39 folgt $|P| \leq |M \times M| = |M|$. $\square$

Satz 7.41. *Sei V ein K-Vektorraum, und seien B und C Basen von V. Dann gilt $|B| = |C|$.*

Beweis. Für endliches B oder endliches C haben wir den Satz bereits bewiesen.

Seien also B und C unendlich. Die Basis C ist ein minimales Erzeugendensystem von V. Nach Korollar 7.40 ist also $|C| \leq |B|$. Analog erhalten wir $|B| \leq |C|$. Mit Satz 7.36 folgt $|B| = |C|$. □

Sei V ein K-Vektorraum, und sei B eine Basis von V. Dann ist

$$\dim(V) := |B|$$

die **Dimension** von V.

Nach Satz 7.41 ist dies wohldefiniert.

Satz 7.42. *Seien I und J Mengen. Dann sind äquivalent:*

(i) $K^{(I)} \cong K^{(J)}$;

(ii) $|I| = |J|$.

Beweis. Für endliches I oder endliches J haben wir den Satz schon bewiesen. Seien also I und J unendlich.

Für $L \in \{I, J\}$ und $p \in L$ definieren wir $e_p^L \in K^{(L)}$ durch

$$e_p^L(q) := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } p = q, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Also sind $B_I := \{e_i^I \mid i \in I\}$ und $B_J := \{e_j^J \mid j \in J\}$ die Standardbasen von $K^{(I)}$ bzw. $K^{(J)}$.

(i) $\implies$ (ii): Angenommen es gibt einen Isomorphismus $f\colon K^{(I)} \to K^{(J)}$. Nach Lemma 7.15 ist dann $f(B_I)$ eine Basis von $K^{(J)}$. Es gilt $|B_I| = |f(B_I)|$. Mit Satz 7.41 folgt dann $|B_I| = |f(B_I)| = |B_J|$ und schließlich $|I| = |B_I| = |B_J| = |J|$.

(ii) $\implies$ (i): Wir wählen eine Bijektion $\eta\colon I \to J$ und definieren einen Homomorphismus $f\colon K^{(I)} \to K^{(J)}$ durch

$$f(e_i^I) := e_{\eta(i)}^J.$$

Da η bijektiv ist, ist f ein Isomorphismus. □

Diese Ergebnisse fassen wir in folgendem Satz zusammen:

Satz 7.43. *Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:*

(i) *Es existiert eine Basis von V;*

(ii) $V \cong K^{(B)}$ *für jede Basis B von V;*

(iii) $\dim(V) = |B| = |C|$ *für alle Basen B und C von V.*

Satz 7.44 (Cantor 1874)**.** $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Korollar 7.45. $\dim(K^{(\mathbb{N})}) < \dim(K^{(\mathbb{R})})$.

Satz 7.46 (Cantor 1890)**.** *Sei M eine Menge, und sei $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Dann gilt*

$$|M| < |\mathcal{P}(M)|\,.$$

Für $K = \mathbb{F}_2$ gilt $\left|K^M\right| = |\mathcal{P}(M)|$.

Sei I eine endliche Menge. Dann gilt $K^I = K^{(I)}$ und $\dim(K^I) = |I|$. Für unendliches I sieht die Situation wie folgt aus:

Satz 7.47 (Erdös und Kaplansky)**.** *Sei I eine unendliche Menge. Dann gilt*

$$\dim(K^I) = \left|K^I\right|.$$

Korollar 7.48. *Sei I eine unendliche Menge. Dann gilt*

$$K^I \cong K^{(K^I)}.$$

Sei K ein Körper mit $|K| \leq |\mathbb{R}|$. Satz 7.47 zusammen mit dem Beweis von Satz 7.44 impliziert

$$\dim(K^{\mathbb{N}}) = \left|K^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|\,.$$

7.13. Blick in den Abgrund: Die Kontinuumshypothese.

Die **Kontinuumshypothese (KH)** besagt, dass es keine Menge M gibt mit

$$|\mathbb{N}| < |M| < |\mathbb{R}|\,.$$

Beispiel: Für $K = \mathbb{F}_2$ können wir $K^{\mathbb{N}}$ als den K-Vektorraum aller 0-1-Folgen auffassen. Die Kontinuumshypothese sagt nun: Sei U ein unendlich-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$. Dann gilt: $U \cong \mathbb{F}_2^{(\mathbb{N})}$ oder $U \cong \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{F}_2^{(\mathbb{R})}$, d.h. bis auf Isomorphie gibt es nur zwei Arten von unendlich-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$.

Mit (ZF) bezeichnen wir die Zermelo-Fraenkel-Axiome und mit (ZFC) die Zermelo-Fraenkel-Axiome zusammen mit dem Auswahlaxiom. Dieses Axiomensystem stammt aus dem Jahr 1921.

Die Axiome (ZFC) bilden einen bewährten und akzeptierten axiomatischer Rahmen für die gesamte Mathematik. Der allgemeinen Akzeptanz gingen aber viele leidenschaftliche Streitereien voraus, siehe zum Beispiel die erbitterte Kontroverse zwischen Cantor und Kronecker.

Hier sind zumindest die Namen der (ZFC) Axiome. Exemplarisch haben wir einige Axiome ausformuliert:

- (ZF1) Extentionalitätsaxiom;
- (ZF2) Leermengenaxiom: Es gibt eine Menge $\varnothing$, die keine Elemente enthält.
- (ZF3) Paarmengenaxiom;
- (ZF4) Vereinigungsaxiom: Für jede Menge M gibt es eine Menge N, die genau die Elemente der Elemente von M als Elemente enthält.
- (ZF5) Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine Menge M, die die leere Menge $\varnothing$ und mit jedem Element x auch die Menge $x \cup \{x\}$ enthält.
- (ZF6) Potenzmengenaxiom: Für jede Menge M gibt es eine Menge $\mathcal{P}(M)$, deren Elemente genau die Teilmengen von M sind.
- (ZF7) Fundierungsaxiom;
- (ZF8) Aussonderungsaxiom;
- (ZF9) Ersetzungsaxiom;
- (C) Auswahlaxiom: Ist M eine Menge von paarweise disjunkten nicht-leeren Mengen, dann gibt es eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element von M enthält.

Nimmt man die Axiome (ZF1) bis (ZF9) als gegeben an, so ist das Auswahlaxiom (C) äquivalent zum Zornschen Lemma.

Satz 7.49 (Gödelscher Unvollständigkeitssatz 1931)**.** *Es gibt innerhalb des Axiomensystems (ZFC) keinen Beweis für die Widerspruchsfreiheit von (ZFC).*

Tröstlich ist an dieser Stelle, dass viele schlaue Mathematiker*innen seit beinahe 100 Jahren auf dem Fundament der (ZFC) Axiome arbeiten und bisher keinen Widerspruch entdeckt haben.

Satz 7.50 (Gödel 1938)**.** *Falls (ZFC) widerspruchsfrei ist, so ist auch (ZFC) zusammen mit der Kontinuumshypothese (KH) widerspruchsfrei.*

Satz 7.51 (Cohen 1966)**.** *Falls (ZFC) widerspruchsfrei ist, so ist auch (ZFC) zusammen mit der Negation der Kontinuumshypothese (KH) widerspruchsfrei.*

Wir erhalten also zwei mathematische Universen:

(i) (ZFC) und (KH);

(ii) (ZFC) und (nicht KH).

Sie dürfen sich nun aussuchen, in welchem Universum Sie Mathematik betreiben möchten. Große Auswirkungen auf Ihr weiteres Leben wird diese Entscheidung nicht haben. Ausnahme: Sie spezialisieren sich Richtung Logik und Mengenlehre...

7.14. **Übungsaufgaben.**

7.14.1. Sei V ein Vektorraum, und sei $M \subseteq V$. Ferner seien U und W Unterräume von V. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Lin}(M)$ ist gleich dem Durchschnitt aller Unterräume U von V mit $M \subseteq U$;

(ii) $M = \mathrm{Lin}(M)$ genau dann wenn M ein Unterraum von V ist;

(iii) $\mathrm{Lin}(U \cap W) = U \cap W$;

(iv) $\mathrm{Lin}(U \cup W) = U + W$.

Seien M_1 und M_2 Teilmengen von V. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(v) $\mathrm{Lin}(M_1 \cap M_2) = \mathrm{Lin}(M_1) \cap \mathrm{Lin}(M_2)$;

(vi) $\mathrm{Lin}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{Lin}(M_1) + \mathrm{Lin}(M_2)$.

7.14.2. Untersuchen Sie, ob das $\mathbb{Q}^3$-Vektorsystem (u, v, w) linear abhängig ist, wobei u, v, w wie folgt definiert sind. Falls ja, stellen Sie den Nullvektor als eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren u, v, w dar.

(i)

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7.14.3. Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt mit $|K| = p^n$. (Hinweis: Betrachten Sie den kleinsten Teilkörper von K, welcher das Einselement enthält.)

7.14.4.

(i) Konstruieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit genau 27 Lösungen.

(ii) Zeigen Sie: Es gibt kein lineares Gleichungssystem mit genau 28 Lösungen.

7.14.5. Seien V und W Vektorräume mit $\dim(V), \dim(W) < \infty$, und sei U ein Unterraum von V mit $\dim(W) \geq \dim(V) - \dim(U)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $\mathrm{Kern}(f) = U$.

Spezialfall: Sei U ein Unterraum von K^n. Dann gibt es ein $A \in K^{n,n}$, so dass $U = \mathcal{L}(A, 0)$.

7.14.6. Seien $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Vektoren in K^n.

Zeigen Sie: Das Vektorsystem (v, w) ist linear unabhängig genau dann wenn $a_i b_j \neq a_j b_i$ für mindestens ein Paar (i, j).

7.14.7. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein V-Vektorsystem mit $v_k \neq 0$ für alle $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie: Es sind äquivalent:

(i) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig;

(ii) $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \mathrm{Lin}(v_{k+1}, \ldots, v_n) = \{0\}$ für alle $1 \leq k \leq n-1$.

7.14.8. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein linear unabhängiges Vektorsystem. Zeigen Sie:

(i) $(v_1, \ldots, v_n, v_1 + \cdots + v_n)$ ist linear abhängig.

(ii) Jede n-elementige Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n, v_1 + \cdots + v_n\}$ ist linear unabhängig.

7.14.9. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Sei $m := \dim(V) - \dim(U) \geq 1$. Zeigen Sie: Es gibt $f_1, \ldots, f_m$ im Dualraum V^*, so dass

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Kern}(f_i).$$

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 15** – – – – – – – – – – –

8. Koordinatenabbildungen und Basiswechsel

8.1. **Koordinatenabbildungen.** Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Ein V-Vektorsystem $(b_1, \ldots, b_n)$ heißt **geordnete Basis** von V, falls $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine n-elementige Basis von V ist.

Wenn es keine Gefahr von Missverständnissen gibt, so nennen wir eine geordnete Basis manchmal einfach nur **Basis**.

Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V, und sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von K^n. Sei
$$\mathbf{c}_B \colon V \to K^n$$
der Homomorphismus welcher definiert ist durch $\mathbf{c}_B(b_j) := e_j$ für $1 \leq j \leq n$. Der Homomorphismus $\mathbf{c}_B$ heißt **Koordinatenabbildung von V (bzgl. B)**. Für $v \in V$ ist $\mathbf{c}_B(v)$ der **Koordinatenvektor von v (bzgl. B).**

Lemma 8.1. *$\mathbf{c}_B \colon V \to K^n$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Seien $v, v' \in V$ mit
$$\mathbf{c}_B(v) = \mathbf{c}_B(v') = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
Dann gilt $v = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = v'$. Also ist $\mathbf{c}_B$ ein Monomorphismus.

Sei
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n.$$
Definiere $v \in V$ durch $v := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. Dann gilt
$$\mathbf{c}_B(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$
Also ist $\mathbf{c}_B$ ein Epimorphismus. (Da $\dim(V) = \dim(K^n)$ hätten wir hier alternativ auch mit Korollar 7.27 argumentieren können.) $\square$

Beispiele:

(i) Sei $V = K^3$, und sei $E := (e_1, e_2, e_3)$ die geordnete Standardbasis von V. Dann ist

$$\mathbf{c}_E \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

für alle $a_1, a_2, a_3 \in K$.

(ii) Sei $V = K^3$, $B = (e_3, e_1 + e_3, e_2)$ und $\mathbf{c}_B \colon K^3 \to K^3$. Dann gilt z.B.

$$\mathbf{c}_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, und seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Basis von V bzw. W. Definiere eine Abbildung

$$\mathbf{c}_{B,C} \colon \operatorname{Hom}(V, W) \to K^{m,n}$$

durch

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei die a_{ij} definiert sind durch

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$$

d.h. die j-te Spalte von $\mathbf{c}_{B,C}(f)$ ist gleich $\mathbf{c}_C(f(b_j))$. Die Matrix $\mathbf{c}_{B,C}(f)$ ist die **Koordinatenmatrix von f bzgl. B und C**.

Proposition 8.2. *Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit V und W endlich-dimensional. Dann gibt es geordnete Basen B und C von V bzw. W mit*

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r = \dim \operatorname{Bild}(f)$.

Beweis. Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Sei $\dim \operatorname{Kern}(f) = n - r$. Wir wählen eine Basis $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ von $\operatorname{Kern}(f)$ und setzen sie zu einer Basis $B = (b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ von V fort. Dann ist $(c_1, \dots, c_r)$ mit $c_j := f(b_j)$ für $1 \leq j \leq r$ eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$. Wir setzen sie zu einer Basis $C = (c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_m)$ von W fort. Dann gilt

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

wobei die Nullen jeweils für Nullmatrizen der passenden Größe stehen. $\square$

Satz 8.3. *Die Abbildung*

$$\mathbf{c}_{B,C}\colon \operatorname{Hom}(V,W) \to K^{m,n}$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. (a): $\mathbf{c}_{B,C}$ ist wohldefiniert: Da B und C Basen sind und die a_{ij} für ein gegebenes f eindeutig bestimmt sind, ist $\mathbf{c}_{B,C}$ wohldefiniert.

(b): $\mathbf{c}_{B,C}$ ist linear: Seien $f, f' \in \operatorname{Hom}(V,W)$ und $\lambda, \lambda' \in K$, und seien

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \quad \text{und} \quad f'(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij} c_i.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{B,C}(\lambda f + \lambda' f') &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \lambda' a'_{11} & \dots & \lambda a_{1n} + \lambda' a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} + \lambda' a'_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} + \lambda' a'_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m1} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \lambda \mathbf{c}_{B,C}(f) + \lambda' \mathbf{c}_{B,C}(f').
\end{aligned}$$

(c): $\mathbf{c}_{B,C}$ ist ein Monomorphismus: Angenommen

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \mathbf{c}_{B,C}(f') = (a_{ij}) \in K^{m,n}.$$

Dann gilt

$$f(b_j) = f'(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Folglich ist $f = f'$.

(d): $\mathbf{c}_{B,C}$ ist ein Epimorphismus: Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. Sei $f_A \in \operatorname{Hom}(V,W)$ definiert durch

$$f_A(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i.$$

Dann ist $\mathbf{c}_{B,C}(f_A) = A$. □

Beispiel: Sei $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^2)$ definiert durch

$$f \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 \end{pmatrix}.$$

Seien weiter $B := (e_1, e_2, e_3)$ und $C := (e_1, e_2)$. Dann gilt

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1e_1 + 0e_2,$$
$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1e_1 + 1e_2,$$
$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0e_1 + 1e_2.$$

Wir erhalten

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seien nun $B' := (e_3, e_1 + e_2, e_2)$ und $C' := (e_1 + e_2, e_2 - e_1)$. Dann gilt

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2) + \frac{1}{2}(e_2 - e_1),$$
$$f(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}(e_1 + e_2) - \frac{1}{2}(e_2 - e_1),$$
$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1(e_1 + e_2) + 0(e_2 - e_1).$$

Also

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problem 8.4. *Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathbf{c}_{B,C}(f)$ und $\mathbf{c}_{B',C'}(f)$?*

Lemma 8.5. *Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $C = (c_1, \ldots, c_m)$ geordnete Basen von K-Vektorräumen V bzw. W. Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] \\ K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"] & K^m \end{tikzcd}$$

kommutativ, d.h. es gilt $\mathbf{c}_C \circ f = \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_B$. Für $v \in V$ gilt also

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\mathbf{c}_B"'] & f(v) \arrow[d, mapsto, "\mathbf{c}_C"] \\ \mathbf{c}_B(v) \arrow[r, mapsto, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"] & \mathbf{c}_C(f(v)). \end{tikzcd}$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$$

für $1 \leq j \leq n$. Also gilt

$$(\mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_B)(b_j) = (\mathbf{c}_{B,C}(f))(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \mathbf{c}_C(f(b_j)).$$

Also ist $(\mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_B)(b_j) = (\mathbf{c}_C \circ f)(b_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$ und somit $\mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_C \circ f$. □

Korollar 8.6. *Es gilt*

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \mathbf{c}_C \circ f \circ \mathbf{c}_B^{-1} \quad \textit{und} \quad f = \mathbf{c}_C^{-1} \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_B.$$

Beweis. $\mathbf{c}_B$ und $\mathbf{c}_C$ sind Isomorphismen. □

Seien die geordneten Basen B und C definiert wie oben. Erinnerung: Für $(b,c) \in B \times C$ ist $f_{(b,c)} \in \mathrm{Hom}(V,W)$ definiert durch

$$f_{(b,c)}(b') := \begin{cases} c & : \text{ falls } b' = b, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Lemma 8.7. *Sei* $\mathbf{c}_{B,C}(f) = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. *Dann gilt*

$$f = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} f_{(b_j,c_i)}.$$

Beweis. Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} f_{(b_j,c_i)} \right)(b_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} f_{(b_k,c_i)}(b_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_i = f(b_k).$$

□

Wir wissen, dass

$$D := (f_{(b_1,c_1)}, \dots, f_{(b_n,c_1)}, f_{(b_1,c_2)}, \dots f_{(b_n,c_2)}, \dots, f_{(b_1,c_m)}, \dots, f_{(b_n,c_m)})$$

eine geordnete Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist.

Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ sei $B_{ij} \in K^{m,n}$ die Matrix mit einer Eins an der Stelle (i, j) und Nullen sonst. Dann ist

$$E := (B_{11}, \ldots, B_{1n}, B_{21}, \ldots, B_{2n}, \ldots, B_{m1}, \ldots, B_{mn})$$

eine geordnete Basis von $K^{m,n}$.

Wir wissen bereits, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(V,W) \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}"] \arrow[d, "\mathbf{c}_D"] & K^{m,n} \arrow[d, "\mathbf{c}_E"] \\
K^{mn} \arrow[r, "\mathbf{c}_{D,E}(\mathbf{c}_{B,C})"] & K^{mn}
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Lemma 8.8. $\mathbf{c}_{D,E}(\mathbf{c}_{B,C}) = E_{mn}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Lemma 8.9. *Seien B, C, D geordnete Basen von endlich-dimensionalen K-Vektor-räumen U, V bzw. W, und seien $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt*

$$\mathbf{c}_{C,D}(g) \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) = \mathbf{c}_{B,D}(g \circ f).$$

Beweis. Seien $l = \dim(U)$, $m = \dim(V)$ und $n = \dim(W)$. Wir betrachten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"] & V \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_D"] \\
K^l \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{c}_{B,D}(g \circ f)"'] & K^m \arrow[r, "\mathbf{c}_{C,D}(g)"] & K^n
\end{tikzcd}$$

Wir wissen bereits, dass

$$\mathbf{c}_C \circ f = \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_B,$$
$$\mathbf{c}_D \circ g = \mathbf{c}_{C,D}(g) \circ \mathbf{c}_C,$$
$$\mathbf{c}_D \circ (g \circ f) = \mathbf{c}_{B,D}(g \circ f) \circ \mathbf{c}_B.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{C,D}(g) \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) &= (\mathbf{c}_D \circ g \circ \mathbf{c}_C^{-1}) \circ (\mathbf{c}_C \circ f \circ \mathbf{c}_B^{-1}) \\ &= \mathbf{c}_D \circ (g \circ f) \circ \mathbf{c}_B^{-1} \\ &= \mathbf{c}_{B,D}(g \circ f).\end{aligned}$$

□

Korollar 8.10. *Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus mit $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, und seien B und C geordnete Basen von V bzw. W. Dann ist*

$$(\mathbf{c}_{B,C}(f))^{-1} = \mathbf{c}_{C,B}(f^{-1}).$$

Wir schreiben dann auch $\mathbf{c}_{B,C}(f)^{-1}$ statt $(\mathbf{c}_{B,C}(f))^{-1}$.

Beweis. Sei $n = \dim(V) = \dim(W)$. Wir wissen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"] & W \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] & V \arrow[d, "\mathbf{c}_B"] \\ K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"] & K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{C,B}(f^{-1})"] & K^n \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Also gilt

$$E_n = \mathbf{c}_{B,B}(\mathrm{id}_V) = \mathbf{c}_{B,B}(f^{-1} \circ f) = \mathbf{c}_{C,B}(f^{-1}) \circ \mathbf{c}_{B,C}(f),$$

und damit $\mathbf{c}_{B,C}(f)^{-1} = \mathbf{c}_{C,B}(f^{-1})$. □

8.2. Basiswechsel.

Satz 8.11. *Seien B und B' geordnete Basen von V, und seien C und C' geordnete Basen von W, wobei $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V"] \arrow[ddd, "\mathbf{c}_{B'}"'] & & & W \arrow[ddd, "\mathbf{c}_{C'}"] \\
& V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"'] & W \arrow[ur, "\mathrm{id}_W"'] \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] & \\
& K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"] & K^m \arrow[dr, "\mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_W)"'] & \\
K^n \arrow[ur, "\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V)"] \arrow[rrr, "\mathbf{c}_{B',C'}(f)"'] & & & K^m
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Also gilt

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f) = \mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_W) \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V).$$

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 16** – – – – – – – – – – –

Beweis. Die Kommutativitäten

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_B \circ \mathrm{id}_V &= \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V) \circ \mathbf{c}_{B'}, \\
\mathbf{c}_{C'} \circ \mathrm{id}_W &= \mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_W) \circ \mathbf{c}_C, \\
\mathbf{c}_C \circ f &= \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_B, \\
\mathbf{c}_{C'} \circ f &= \mathbf{c}_{B',C'}(f) \circ \mathbf{c}_{B'}
\end{aligned}$$

sind uns bereits bekannt. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{B',C'}(f) &= \mathbf{c}_{C'} \circ f \circ \mathbf{c}_{B'}^{-1} \\
&= (\mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_W) \circ \mathbf{c}_C) \circ f \circ (\mathbf{c}_B^{-1} \circ \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V)) \\
&= \mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_W) \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V).
\end{aligned}$$

□

Die Matrix $\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V)$ aus dem obigen Satz nennen wir **Basiswechselmatrix von B' nach B**.

Korollar 8.12. *Es gilt*

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f) = \mathbf{c}_{C',C}(\mathrm{id}_W)^{-1} \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V).$$

Beweis. Wende Korollar 8.10 an. □

Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ geordnete Basen von V. Sei $S = (s_{ij}) \in K^{n,n}$ definiert durch

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i.$$

Lemma 8.13. *Es gilt*

(i) $\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V) = S$;

(ii) $(\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V))\,(\mathbf{c}_{B'}(v)) = \mathbf{c}_B(v)$ *für alle* $v \in V$.

Beweis. (i) folgt direkt aus der Definition der Koordinatenmatrix, und (ii) folgt aus Lemma 8.5 mit $f = \mathrm{id}_V$. □

8.3. **Berechnung der Basiswechselmatrix.** Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ geordnete Basen von K^n, und sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,2n}$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} := \begin{cases} b_j & : \ 1 \leq j \leq n \\ b'_{j-n} & : \ n+1 \leq j \leq 2n. \end{cases}$$

Also

$$A = [b_1 | \ldots | b_n | b'_1 | \ldots | b'_n].$$

Sei $\tilde{A}$ die reduzierte Zeilenstufenform von A. Dann gilt

$$\tilde{A} = \left[E_n | S \right]$$

mit $S = (s_{ij}) \in K^{n,n}$. Die Matrix A definiert ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$. Wir wissen, dass $\mathcal{L}(A, 0) = \mathcal{L}(\tilde{A}, 0)$. Eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$ ist

$$\left\{ L_{n+j}^{\tilde{A}} \mid 1 \leq j \leq n \right\}$$

mit

$$L_{n+j}^{\tilde{A}} = (-s_{1j}, \ldots, -s_{nj}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$$

wobei die 1 an der $(n+j)$-ten Stelle steht. Es gilt $A(L_{n+j}^{\tilde{A}}) = 0$, d.h.

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i.$$

Also $S = \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V)$.

Beispiel: Seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

geordnete Basen von $\mathbb{Q}^2$. Setze

$$A := \left[b_1|b_2|b_1'|b_2'\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

die reduzierte Zeilenstufenform von A. Also gilt

$$\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^2}) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Sei $f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$ definiert durch

$$f\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_3 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Seien $B = (e_1, e_2, e_3)$ und $C = (e_1, e_2)$ die geordneten Standardbasen von $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^2$. Dann ist

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seien

$$B' = (b_1', b_2', b_3') = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

und

$$C' = (c_1', c_2') = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^2}) = \mathbf{c}_{C',C}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^2})^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_{B',C'}(f) &= \mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^2})\mathbf{c}_{B,C}(f)\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3}) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt dann zum Beispiel

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten,

$$f(b_1') = -4c_1' + 1c_2'$$

also

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$$

8.4. **Basiswechsel für Endomorphismen.**

Korollar 8.14. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) < \infty$, und seien B und C geordnete Basen von V. Dann gilt*

$$\mathbf{c}_{C,C}(f) = \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)^{-1} \circ \mathbf{c}_{B,B}(f) \circ \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V).$$

Also gilt für $S := \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)$

$$\mathbf{c}_{C,C}(f) = S^{-1}\mathbf{c}_{B,B}(f)S.$$

Problem 8.15. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) < \infty$. Finde eine geordnete Basis B von V, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(f)$ möglichst schön ist.*

Anwendung: Gegeben sei $A \in K^{n,n}$. Für große $m \in \mathbb{N}$ möchten wir A^m berechnen. Sei $E = (e_1, \dots, e_n)$ die geordnete Standardbasis von K^n. Für jede geordnete Basis B von K^n und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{B,B}(A)^m &= \left(\mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})^{-1}\mathbf{c}_{E,E}(A)\mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})\right)^m\\ &= \mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})^{-1}(\mathbf{c}_{E,E}(A))^m\mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})\\ &= \mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})^{-1}A^m\mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n}).\end{aligned}$$

(Beachte, dass $A = \mathbf{c}_{E,E}(A)$.) Findet man nun eine Basis B, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(A)$ viele Nullen hat, z.B.

$$\mathbf{c}_{B,B}(A) = \begin{pmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix},$$

so ist es nun einfach,

$$A^m = \mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})\mathbf{c}_{B,B}(A)^m\mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{K^n})^{-1}$$

zu berechnen.

Beispiel: Wir definieren natürliche Zahlen f_n für $n \geq 0$ durch

$$f_n := \begin{cases}0 & : \text{ falls } n = 0,\\ 1 & : \text{ falls } n = 1,\\ f_{n-1} + f_{n-2} & : \text{ falls } n \geq 2.\end{cases}$$

Wir erhalten die **Fibonacci-Folge** $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt offensichtlich

$$A^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

für alle $n \geq 1$. (Beweis durch Induktion.) Sei

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \right).$$

Dies ist eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$. (Warum wir gerade mit dieser Basis arbeiten, werden wir in einem späteren Kapitel erfahren.) Wir erhalten

$$\mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \\ -1+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\mathbf{c}_{B,B}(A) = \mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^{-1} A \mathbf{c}_{B,E}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Eine einfache Rechnung liefert nun die **Binet-Formel**

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

– – – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 17** – – – – – – – – – – – –

8.5. **Geordnete Basen und Isomorphismen.** Seien V und W K-Vektorräume.

Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{Iso}_K(V,W) &:= \{ f \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid f \text{ ist ein Isomorphismus} \}, \\ \mathrm{GL}(V) &:= \mathrm{Iso}_K(V,V). \end{aligned}$$

Dann ist $\mathrm{GL}(V)$ die **allgemeine lineare Gruppe** von V.

Erinnerung: Für $n \geq 0$ ist

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{ A \in M_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar} \}.$$

Es gilt dann $\mathrm{GL}_n(K) = \mathrm{GL}(K^n)$. (Hier identifizieren wir (wie schon oft) eine Matrix $A \in M_n(K)$ mit der zugehörigen Matrixabbildung $A \colon K^n \to K^n$.)

Lemma 8.16. *Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_?\colon \{\textit{geordnete Basen von } V\} &\to \mathrm{Iso}_K(V, K^n) \\ B &\mapsto \mathbf{c}_B \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V, und sei $E = (e_1, \ldots, e_n)$ die geordnete Standardbasis von K^n. Nach der Definition von $\mathbf{c}_B$ ist $\mathbf{c}_B(b_j) = e_j$ für $1 \le j \le n$. Wir wissen, dass $\mathbf{c}_B$ ein Isomorphismus ist. Also ist $\mathbf{c}_B^{-1}(e_j) = b_j$ für $1 \le j \le n$.

Sei $B \ne B'$. Dann ist $\mathbf{c}_B^{-1} \ne \mathbf{c}_{B'}^{-1}$. Es folgt $\mathbf{c}_B \ne \mathbf{c}_{B'}$. Also ist $\mathbf{c}_?$ injektiv.

Sei nun $f \in \mathrm{Iso}_K(V, K^n)$. Definiere $B = (b_1, \ldots, b_n)$ durch $b_j := f^{-1}(e_j)$ für $1 \le j \le n$. Also ist B eine geordnete Basis von V. Wegen $\mathbf{c}_B(b_j) = e_j = f(b_j)$ gilt $f = \mathbf{c}_B$. Also ist $\mathbf{c}_?$ surjektiv und damit bijektiv. □

Lemma 8.17. *Seien B und C geordnete Basen von V bzw. W, und sei $n = \dim(V) = \dim(W)$. Dann ist*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{B,C}\colon \mathrm{Iso}_K(V, W) &\to \mathrm{GL}_n(K) \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,C}(f) \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, und seien B und C wie oben. Wir wissen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] \\ K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"] & K^m \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, und dass $\mathbf{c}_B$ und $\mathbf{c}_C$ Isomorphismen sind. Also ist f ein Isomorphismus genau dann wenn $\mathbf{c}_{B,C}(f)$ ein Isomorphismus ist. Dann benutzen wir Satz 8.3 □

Lemma 8.18. *Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus mit $\dim(V) = \dim(W) = n$. Dann gilt:*

(i) *Sei C eine geordnete Basis von W. Dann ist*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{?,C}(f)\colon \{\textit{geordnete Basen von } V\} &\to \mathrm{GL}_n(K) \\ B &\mapsto \mathbf{c}_{B,C}(f) \end{aligned}$$

bijektiv.

(ii) *Sei B geordnete Basis von V. Dann ist*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{B,?}(f)\colon \{\textit{geordnete Basen von } W\} &\to \mathrm{GL}_n(K) \\ C &\mapsto \mathbf{c}_{B,C}(f) \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. Wir beweisen nur (i), der Beweis von (ii) sieht ähnlich aus. Fixiere $f\colon V \to W$, einen Isomorphismus, und sei C wie oben. Wir wissen bereits, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] \\ K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"'] & K^n \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} \{\text{geordnete Basen von } V\} & \xrightarrow{\mathbf{c}_?} & \mathrm{Iso}_K(V, K^n) & \xrightarrow{\mu} & \mathrm{GL}_n(K) \\ B & \longmapsto & \mathbf{c}_B & \longmapsto & \mathbf{c}_C \circ f \circ \mathbf{c}_B^{-1} = \mathbf{c}_{B,C}(f) \end{array}$$

Nach Lemma 8.16 ist $\mathbf{c}_?$ bijektiv. Also ist μ genau dann bijektiv, wenn $\mathbf{c}_{?,C}(f) = \mu \circ \mathbf{c}_?$ bijektiv ist. Dies ist aber der Fall:

Sei $\mathbf{c}_{B_1} \neq \mathbf{c}_{B_2}$. Da $\mathbf{c}_C \circ f$ ein Isomorphismus ist, ist also auch

$$(\mathbf{c}_C \circ f) \circ \mathbf{c}_{B_1}^{-1} \neq (\mathbf{c}_C \circ f) \circ \mathbf{c}_{B_2}^{-1}.$$

Also ist μ injektiv.

Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Nach Lemma 8.16 gibt es ein B mit $\mathbf{c}_B = A^{-1} \circ \mathbf{c}_C \circ f$, also ist $\mathbf{c}_B^{-1} = f^{-1} \circ \mathbf{c}_C^{-1} \circ A$. Dann gilt

$$A = (\mathbf{c}_C \circ f \circ f^{-1} \circ \mathbf{c}_C^{-1}) \circ A = \mathbf{c}_C \circ f \circ (f^{-1} \circ \mathbf{c}_C^{-1} \circ A) = \mathbf{c}_C \circ f \circ \mathbf{c}_B^{-1} = \mu(\mathbf{c}_B).$$

Also ist μ surjektiv und damit bijektiv. □

8.6. **Übungsaufgaben.**

8.6.1. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, und sei

$$f\colon M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$$

definiert durch $f(X) := AX - XA$.

(i) Zeigen Sie, dass f $\mathbb{Q}$-linear ist.

(ii) Konstruieren Sie Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

(iii) Wählen Sie eine geordnete Basis B von $M_2(\mathbb{Q})$, und berechnen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{B,B}(f)$.

8.6.2. Seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dann ist B eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^2$, und C ist eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^3$. Sei $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ der Homomorphismus mit

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $f(v)$ für $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

8.6.3. Sei $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ der Endomorphismus, welcher definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - b \\ a + b \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$.

(i) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{B,B}(f)$ von f bezüglich der geordneten Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{Q}^2$.

(ii) Bestimmen Sie die Koordiantenmatrix $\mathbf{c}_{C,C}(f)$ von f bezüglich der geordneten Basis

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{Q}^2$.

(iii) Konstruieren Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ (und auch S^{-1}) mit

$$S^{-1}\mathbf{c}_{B,B}(f)S = \mathbf{c}_{C,C}(f).$$

8.6.4. Sei B geordnete Basis eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(f) = \lambda E_n$ mit $\lambda \in K$. Zeigen Sie: $\mathbf{c}_{B',B'}(f) = \lambda E_n$ für alle geordneten Basen B' von V.

8.6.5.

(i) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (a) $f^2 = \mathrm{id}_V$;
   (b) Es gibt eine geordnete Basis B von V und $r, s \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_s \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass in (i) die Voraussetzung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ benötigt wird.

8.6.6. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, und seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnetet Basen von V bzw. W. Sei $A = \mathbf{c}_{B,C}(f)$. Seien $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ und $C^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$ die entsprechenden geordneten dualen Basen der Dualräume V^* bzw. W^*, und sei

$$f^* \colon W^* \to V^*$$

definiert durch $g \mapsto g \circ f$. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{C^*,B^*}(f^*)$.

9. Normalformenprobleme

9.1. **Äquivalenzklassen.** Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Für $x \in M$ ist

$$[x] := \{y \in M \mid (x, y) \in R\}$$

die **Äquivalenzklasse von x in M**.

Für jede Äquivalenzklasse $[x] \subseteq M$ suchen wir einen schönen Repräsentanten y (mit $[x] = [y]$), und nennen dann y die (oder besser: eine) **Normalform von x** (bzgl. R).

Es gilt:
- $[x] \neq \varnothing$;
- $[x] \cap [y] = \varnothing$, falls $[x] \neq [y]$;
- $[x] = [y] \iff (x, y) \in R$;
- M ist disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen.

Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Eine **R-Invariantenabbildung** in eine Menge I ist eine Abbildung

$$\eta\colon M \to I$$

mit $\eta(x) = \eta(y)$ für alle $x, y \in M$ mit $[x] = [y]$. (In der Literatur wird man den Begriff *Invariantenabbildung* in dieser Form nicht finden. In dieser allgemeinen Form ist die Begriffsbildung auch nicht sehr sinnvoll.)

Eine R-Invariantenabbildung $\eta\colon M \to I$ ist **perfekt**, falls $\eta(x) = \eta(y)$ genau dann wenn $[x] = [y]$.

Idealerweise möchte man für $x \in M$ das Element $\eta(x)$ auch berechnen können.

9.2. Äquivalenz von Matrizen.

Seien $A, A' \in K^{m,n}$. Dann sind A und A' **äquivalent**, falls es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_m(K)$ gibt mit

$$A' = T^{-1}AS.$$

In diesem Fall schreiben wir $A \sim A'$.

Lemma 9.1. *$\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation R auf $K^{m,n}$ mit*

$$R = \{(A, A') \mid A \text{ und } A' \text{ sind äquivalent}\}.$$

Beweis. (i) Reflexivität: Wegen $A = E_m^{-1}AE_n$ gilt $A \sim A$.

(ii) Symmetrie: Es gilt $A' = T^{-1}AS \iff A = (T^{-1})^{-1}A'(S^{-1})$, d.h. $A \sim A'$ genau dann wenn $A' \sim A$.

(iii) Transitivität: Seien $A' = T^{-1}AS$ und $A'' = T'^{-1}A'S'$. Dann gilt $A'' = T'^{-1}T^{-1}ASS' = (TT')^{-1}A(SS')$. □

Satz 9.2. *Seien $A, A' \in K^{m,n}$, und seien V und W Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $A \sim A'$;

(ii) $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A')$;

(iii) *Es gibt geordnete Basen B und B' von K^n und C und C' von K^m mit $\mathbf{c}_{B,C}(A) = \mathbf{c}_{B',C'}(A')$;*

(iv) *Es gibt ein $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und geordnete Basen B und B' von V und C und C' von W mit $\mathbf{c}_{B,C}(f) = A$ und $\mathbf{c}_{B',C'}(f) = A'$.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Angenommen $A \sim A'$. Dann existieren invertierbare Matrizen T und S mit $A' = T^{-1}AS$. Die Matrixabbildungen T^{-1} und S sind Isomorphismen, also gilt $\operatorname{Bild}(A') \cong \operatorname{Bild}(A)$. (Die Abbildung $v \mapsto T^{-1}(v)$ für $v \in \operatorname{Bild}(A)$ definiert einen Isomorphismus $\operatorname{Bild}(A) \to \operatorname{Bild}(A')$.) Es folgt $\dim \operatorname{Bild}(A) = \dim \operatorname{Bild}(A')$ und daher $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A')$.

(ii) $\implies$ (iii): Sei $r = \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A')$. Wähle eine geordnete Basis $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ von $\operatorname{Kern}(A)$. Setze $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ zu einer geordneten Basis

$$B = (b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$$

von K^n fort. Sei $U := \operatorname{Lin}(b_1, \dots, b_r)$. Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} A\colon U &\to \operatorname{Bild}(A) \\ u &\mapsto A(u) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Sei weiter $c_j := A(b_j)$ für $1 \le j \le r$ und setze $(c_1, \dots, c_r)$ zu einer Basis

$$C = (c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_m)$$

von K^m fort. Dann gilt

$$\mathbf{c}_{B,C}(A) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r = \operatorname{Rang}(A).$$

Genauso zeigen wir, dass Basen B' und C' existieren mit

$$\mathbf{c}_{B',C'}(A') = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) $\implies$ (i): Seien B, B' und C, C' geordnete Basen von K^n bzw. K^m mit $\mathbf{c}_{B,C}(A) = \mathbf{c}_{B',C'}(A)$. Für die geordneten Standardbasen $E^{(n)}$ und $E^{(m)}$ von K^n bzw. K^m gilt dann

$$A = \mathbf{c}_{E^{(n)},E^{(m)}}(A) = \mathbf{c}_{C,E^{(m)}}(\operatorname{id}_{K^m})\mathbf{c}_{B,C}(A)\mathbf{c}_{E^{(n)},B}(\operatorname{id}_{K^n})$$

und

$$A' = \mathbf{c}_{E^{(n)},E^{(m)}}(A') = \mathbf{c}_{C',E^{(m)}}(\operatorname{id}_{K^m})\mathbf{c}_{B',C'}(A')\mathbf{c}_{E^{(n)},B'}(\operatorname{id}_{K^n}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A' &= \mathbf{c}_{C',E^{(m)}}(\operatorname{id}_{K^m})\mathbf{c}_{B',C'}(A')\mathbf{c}_{E^{(n)},B'}(\operatorname{id}_{K^n}) \\ &= \mathbf{c}_{C',E^{(m)}}(\operatorname{id}_{K^m})\mathbf{c}_{B,C}(A)\mathbf{c}_{E^{(n)},B'}(\operatorname{id}_{K^n}) \\ &= \mathbf{c}_{C',E^{(m)}}(\operatorname{id}_{K^m})(\mathbf{c}_{E^{(m)},C}(\operatorname{id}_{K^m})A\mathbf{c}_{B,E^{(n)}}(\operatorname{id}_{K^n}))\mathbf{c}_{E^{(n)},B'}(\operatorname{id}_{K^n}) \end{aligned}$$

und daher $A \sim A'$.

(i) $\implies$ (iv): Sei $A \sim A'$. Also gibt es invertierbare Matrizen T und S mit $A' = T^{-1}AS$. Seien B und C geordnete Basen von V bzw. W. Nach Satz 8.3 gibt es ein $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $\mathbf{c}_{B,C}(f) = A$. Nach Lemma 8.18 existieren geordnete Basen B' und C' mit $T^{-1} = \mathbf{c}_{C,C'}(\operatorname{id}_W)$ und $S = \mathbf{c}_{B',B}(\operatorname{id}_V)$. Also

$$A' = T^{-1}AS = \mathbf{c}_{C,C'}(\operatorname{id}_W)\mathbf{c}_{B,C}(f)\mathbf{c}_{B',B}(\operatorname{id}_V) = \mathbf{c}_{B',C'}(f).$$

(iv) $\implies$ (i): Angenommen es gibt B, B', C, C' und f mit $A = \mathbf{c}_{B,C}(f)$ und $A' = \mathbf{c}_{B',C'}(f)$. Dann ist

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f) = \mathbf{c}_{C,C'}(\mathrm{id}_W)\mathbf{c}_{B,C}(f)\mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id}_V)$$

und somit $A \sim A'$. □

−−−−−−−−−−−− **Ende Vorlesung 18** −−−−−−−−−−−−

Korollar 9.3. *Es gilt*

$$K^{m,n} = \bigcup_{0 \leq r \leq \min(m,n)} [E_r^{m,n}]$$

wobei

$$E_r^{m,n} := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

und

$$[E_r^{m,n}] := \{A \in K^{m,n} \mid A \sim E_r^{m,n}\} = \{A \in K^{m,n} \mid \mathrm{Rang}(A) = r\}.$$

Beweis. Dies folgt aus dem Beweis von Satz 9.2 (ii) $\implies$ (iii). □

Sei $A \in K^{m,n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = r$. Dann heißt

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m,n}$$

Normalform von A bzgl. Äquivalenz von Matrizen.

9.3. Äquivalenz von Homomorphismen.

Seien $f, f' \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit V und W endlich-dimensional. Dann sind f und f' **äquivalent** (Schreibweise: $f \sim f'$), falls es $s \in \mathrm{GL}(V)$ und $t \in \mathrm{GL}(W)$ gibt mit

$$f' = t^{-1} \circ f \circ s.$$

Satz 9.4. *Seien* $f, f' \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *mit* $\dim(V) = n$ *und* $\dim(W) = m$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \sim f'$;

(ii) $\mathrm{Rang}(f) = \mathrm{Rang}(f')$;

(iii) *Es gibt geordnete Basen* B *und* B' *von* V *und* C *und* C' *von* W *mit* $\mathbf{c}_{B,C}(f) = \mathbf{c}_{B',C'}(f')$;

(iv) $\mathbf{c}_{B,C}(f) \sim \mathbf{c}_{B',C'}(f')$ *für alle geordneten Basen* B *und* B' *von* V *und* C *und* C' *von* W;

(v) *Es gibt geordnete Basen* B *und* B' *von* V *und* C *und* C' *von* W *mit* $\mathbf{c}_{B,C}(f) \sim \mathbf{c}_{B',C'}(f')$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{B'}"] \arrow[rrr, bend left, "f'"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"] & W \arrow[r, "t^{-1}"] \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_{C'}"] \\
K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{B',B}(s)"] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{c}_{B',C'}(f')"'] & K^n \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}(f)"] & K^m \arrow[r, "\mathbf{c}_{C,C'}(t^{-1})"] & K^m.
\end{tikzcd}$$

Die inneren drei Quadrate des Diagramms sind kommutativ, und ebenso gilt

$$\mathbf{c}_{C'} \circ f' = \mathbf{c}_{B',C'}(f') \circ \mathbf{c}_{B'}.$$

(i) $\Longrightarrow$ (iv): Angenommen $f' = t^{-1} \circ f \circ s$ mit $s \in \mathrm{GL}(V)$ und $t \in \mathrm{GL}(W)$. Nach Lemma 8.9 gilt dann für alle geordneten Basen B und B' von V und C und C' von W, dass

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f') = \mathbf{c}_{B',C'}(t^{-1} \circ f \circ s) = \mathbf{c}_{C,C'}(t^{-1}) \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_{B',B}(s).$$

(iv) $\Longrightarrow$ (v): Trivial.

(v) $\Longrightarrow$ (i): Wir nehmen an, dass

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) \sim \mathbf{c}_{B',C'}(f')$$

wobei B und B' geordnete Basen von V und C und C' geordnete Basen von W sind. Also gibt es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit

$$\mathbf{c}_{B',C'}(f') = T^{-1}\mathbf{c}_{B,C}(f)S.$$

Nach Lemma 8.17 gibt es $s \in \mathrm{GL}(V)$ und $t \in \mathrm{GL}(W)$ mit $S = \mathbf{c}_{B',B}(s)$ und $T = \mathbf{c}_{C',C}(t)$.

Es gilt also
$$\mathbf{c}_{B',C'}(f') = \mathbf{c}_{C,C'}(t^{-1}) \circ \mathbf{c}_{B,C}(f) \circ \mathbf{c}_{B',B}(s).$$
Lemma 8.9 impliziert dann
$$\mathbf{c}_{B',C'}(f') = \mathbf{c}_{B',C'}(t^{-1} \circ f \circ s).$$
Satz 8.3 sagt nun, dass $f' = t^{-1} \circ f \circ s$.

Die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii) und (iii) wird ähnlich bewiesen wie Satz 9.2. □

Korollar 9.5. *Es gilt*
$$\operatorname{Hom}(V,W) = \bigcup_{0 \leq r \leq \min(\dim(V),\dim(W))} [H_r]$$
wobei
$$[H_r] := \{f \in \operatorname{Hom}(V,W) \mid \operatorname{Rang}(f) = r\}.$$
Jedes $[H_r]$ ist eine Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenz von Homomorphismen.

Korollar 9.6. *Für $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ gilt*
$$\{\mathbf{c}_{B,C}(f) \mid B \text{ und } C \text{ geordnete Basen von } V \text{ bzw. } W\} = [E_r^{m,n}]$$
wobei $r = \operatorname{Rang}(f)$.

Beweis. Es gibt Basen B und C, so dass $\mathbf{c}_{B,C}(f) = E_r^{m,n}$, siehe Proposition 8.2. Wegen Satz 9.4(iv) angewendet auf $f = f'$ gilt die Inklusion „$\subseteq$“. Sei nun $A' \sim E_r^{m,n}$. Wir verfahren wie im Beweis von (i) $\Longrightarrow$ (iv) in Satz 9.2 und erhalten Basen B' und C' mit $\mathbf{c}_{B',C'}(f) = A'$. Also gilt die andere Inklusion „$\supseteq$“. □

9.4. Ähnlichkeit von Matrizen.

Seien $A, A' \in K^{n,n}$. Dann sind A und A' **ähnlich**, falls es eine invertierbare Matrix S gibt mit
$$A' = S^{-1}AS.$$
Schreibweise: $A \approx A'$.

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $K^{n,n}$.

Es gilt
$$A \approx A' \implies A \sim A'.$$
Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Beispiel: Für $A, A' \in K^{1,1}$ gilt $A \approx A'$ genau dann wenn $A = A'$.

Satz 9.7. *Seien $A, A' \in K^{n,n}$, und sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Dann sind äquivalent:*

(i) $A \approx A'$;

(ii) *Es existieren geordnete Basen B und B' von K^n mit $\mathbf{c}_{B,B}(A) = \mathbf{c}_{B',B'}(A')$;*

(iii) *Es gibt ein $f \in \mathrm{End}(V)$ und geordnete Basen B und B' von V mit $\mathbf{c}_{B,B}(f) = A$ und $\mathbf{c}_{B',B'}(f) = A'$.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Angenommen es gibt ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A' = S^{-1}AS$. Sei $B' := E^{(n)}$ die geordnete Standardbasis von K^n, und sei $\mathrm{id} := \mathrm{id}_{K^n}$. Es gibt dann eine geordnete Basis B von K^n mit $\mathbf{c}_{B,B'}(\mathrm{id}) = S$, siehe Lemma 8.18. Es folgt

$$\mathbf{c}_{B',B'}(A') = A' = S^{-1}AS = \mathbf{c}_{B',B}(\mathrm{id})\mathbf{c}_{B',B'}(A)\mathbf{c}_{B,B'}(\mathrm{id}) = \mathbf{c}_{B,B}(A).$$

Beim Rest des Beweises verfährt man ähnlich wie im Beweis von Satz 9.2. □

Problem 9.8. (i) *Wann sind zwei Matrizen $A, A' \in K^{n,n}$ ähnlich?*

(ii) *Suche eine Normalform bzgl. Ähnlichkeit von Matrizen.*

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ ist eine **Diagonalmatrix**, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$, d.h. A is von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Problem 9.9. *Für welche Matrizen $A \in K^{n,n}$ gibt es eine Basis B, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(A)$ eine Diagonalmatrix ist?*

Für Lösungen der obigen Probleme müssen wir auf die Lineare Algebra 2 warten.

Proposition 9.10. *Für*

$$\eta\colon K^{m,n} \to \mathbb{N}$$
$$A \mapsto \mathrm{Rang}(A)$$

gilt:

(i) *η ist eine perfekte R-Invariantenabbildung für $R = \sim$;*

(ii) *Sei $m = n$. Dann ist η eine R-Invariantenabbildung für $R = \approx$. Für $n \geq 2$ ist η nicht perfekt. Für $n = 1$ ist η perfekt genau dann wenn $|K| = 2$.*

9.5. Ähnlichkeit von Endomorphismen.

Seien $f, f' \in \mathrm{End}(V)$ mit V endlich-dimensional. Dann sind f und f' **ähnlich**, falls es ein $s \in \mathrm{GL}(V)$ gibt mit
$$f' = s^{-1} \circ f \circ s.$$
Schreibweise: $f \approx f'$.

Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{End}(V)$.

Satz 9.11. *Seien $f, f' \in \mathrm{End}(V)$ mit V endlich-dimensional. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f \approx f'$;*

(ii) *Es gibt geordnete Basen B und B' von V mit $\mathbf{c}_{B,B}(f) = \mathbf{c}_{B',B'}(f')$;*

(iii) *$\mathbf{c}_{B,B}(f) \approx \mathbf{c}_{B',B'}(f')$ für alle geordneten Basen B und B' von V.*

(iv) *Es gibt geordnete Basen B und B' von V mit $\mathbf{c}_{B,B}(f) \approx \mathbf{c}_{B',B'}(f')$.*

Beweis. Man verfährt ähnlich wie im Beweis von Satz 9.4. □

9.6. **Ist in der Linearen Algebra schon alles erforscht?** Dieser Abschnitt gibt einen Dialog zwischen Günter Ziegler (Professor an der FU Berlin, Arbeitsgebiet: Diskrete Geometrie) und Claus Michael Ringel (Professor an der Universität Bielefeld, Arbeitsgebiet: Darstellungstheorie) wieder. Ich habe ihn von Ringels Webseite kopiert (und dabei Umlaute eingefügt und Tippfehler korrigiert).

Ausgang des Dialogs ist folgendes Zitat:

Frage: Ist in der Mathematik eigentlich nicht schon alles erforscht?

Antwort: In der Linearen Algebra von endlich-dimensionalen Vektorräumen ist in der Tat alles erforscht.

(Günter Ziegler, in einem Interview für das Buch *Ein Moment für Mensch und Mathematik*. Ziegler war zu diesem Zeitpunkt (2007) Vorsitzender der Deutschen Mathematiker Vereinigung.)

Email vom 20. April 2007:

Sehr geehrter Herr Ringel,

ein Freund aus Bonn hat mich auf das Zitat von mir hingewiesen, das Sie so prominent auf http://www.math.uni-bielefeld.de/∼sek/ gesetzt haben... Das war natürlich in der Interview-Eile von mir zu kurz gegriffen und hätte viel eher heißen sollen „Nicht einmal in der Linearen Algebra von endlich-dimensionalen Vektorräumen ist alles erforscht.“ (mea culpa! ich weiß das besser...) und ist ansonsten auch aus dem Kontext gegriffen.

Wenn Sie's aber weiter einfach so als „Stein des Anstoßes“ auf der Homepage halten wollen (und dafür eignet es sich ja gut): gerne!

Mit herzlichen Grüßen,

Ihr Günter M. Ziegler

---

20. April 2007:

Lieber Herr Ziegler,

ich hatte eigentlich vor, mich bei Ihnen zu melden um nachzufragen, wie Sie auf eine derartige Formulierung gekommen sind, habe dies aber aus Zeitgründen immer wieder verschoben. Nun sind Sie mir zuvorgekommen. Ich war ziemlich entsetzt, als ich den genannten Satz las - aber auch den darauf folgenden, doch spielt für unsere Arbeitsgruppe zuerst einmal nur der zitierte Satz eine Rolle: wir wären ja arbeitslos, wenn Sie recht gehabt hätten. Und das betrifft auch viele andere Arbeitsgruppen (man denke nur an das Klassifikationsproblem für Vektorbündel über projektiven Räumen, aber auch an Teile der numerischen linearen Algebra, usw).

Leider vermitteln fast alle Bücher zur LA (und möglicherweise auch die entsprechenden Vorlesungen?) den völlig irreführenden Eindruck, dass es sich hier um eine abgeschlossene Theorie handelt - und das, obwohl nicht einmal das Wissen Kroneckers (Klassifikation der Matrizenbüschel, sehr wichtig für das Lösen von Differentialgleichungen, siehe Gantmacher) oder Dedekinds (Struktur des freien modularen Verbands in 3 Erzeugenden) vermittelt wird, geschweige denn das, was etwa Gelfand und Ponomarev in den 60er Jahren erreicht haben (Paare sich annullierender Operatoren, Lösung des Vierunterraumproblems,...).

Gabriel hat schon vor langer Zeit betont, dass man die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume sich so vorstellen sollte: Objekte sind die natürlichen Zahlen, Morphismen sind die $(n \times m)$-Matrizen (in der Sprache der Kategorientheorie: das „Gerüst“); in dieser Weise ist die LA etwas, was man heute gerne „Kategorifizierung der natürlichen Zahlen“ nennt, und damit eine nicht-kommutative Version der natürlichen Zahlen. Dieser Gesichtspunkt ist bisher noch gar nicht ausgereizt, bildet aber einen Ausgangspunkt für viele Aspekte der „nicht-kommutativen Geometrie“ (man denke nur an die Quantenzahlen, definiert durch Gauß-Polynome, und viele andere q-Phänomene).

Selbst Ihre Neuformulierung: „Nicht einmal in der Linearen Algebra von endlich-dimensionalen Vektorräumen ist alles erforscht.“ erscheint mir viel zu schwach! Im Gegensatz etwa zur Zahlentheorie, wo schon durch Euler und spätestens Gauß ziemlich alle elementaren Fragen abschließend behandelt wurden, gibt es zum Beispiel in der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren (und was ist dies anderes als LA?) Unmengen an ganz einfach formulierbaren, aber völlig unerforschten Fragen, an denen sich auch schon ein Student die Zähne ausbeißen kann... Um wenigstens ein Beispiel explizit zu erwähnen, möchte ich auf die (Einleitung zur) Arbeit *Invariant subspaces of nilpotent operators* verweisen, die im Crelle Journal erscheinen wird (arXiv math.RT/0608666).

Gruß,

Ihr C.M. Ringel

---

21. April 2007:

Lieber Herr Ringel,

meines Erachtens ist das eine Debatte, die man durchaus mal öffentlich führen sollte — und Ihre Antwort ist ja schon ein halber Beitrag etwa für die DMV-Mitteilungen ... weswegen ich auch Cc an den Herausgeber, Herrn Schulze-Pillot, anfüge. Ich will selbst auch lesen/lernen: Die Einleitung (ersten 10 Seiten) Ihrer Arbeit sind auf dem Weg zum Laserdrucker...

Ich selbst habe die Lineare Algebra ja nach dem Buch von Fischer gelernt und auch gelehrt - da sieht die Lineare Algebra eben sehr (zu sehr) „abgeschlossen“ aus. Insofern finde ich den Hinweis und die Illustration dazu(!), dass das eben nicht so ist, schon sehr wichtig. Das muss und sollte konkret sein („abstrakt“ ist natürlich keine Theorie, die die natürlichen Zahlen enthält, je „abgeschlossen“).

Wollen Sie sich der Herausforderung mal stellen? Ich glaube, das wäre wichtig.

Ich würde mich auch gerne mal in Ruhe mit Ihnen darüber unterhalten. (Im Moment bin ich leider mit Mathematikjahr etc. sehr eingespannt.) Noch ein Vorschlag: Wären Sie bereit, im Kolloquium der Berlin Mathematical School http://www.math-berlin.de/bms-fridays/ im Herbst mal vorzutragen, etwa über „Basic and not so basic linear Algebra“? Wir könnten eine Diskussion daran anschließen....

Herzliche Grüße,

Ihr Günter M. Ziegler

---

23. April 2007:

Lieber Herr Ziegler,

On Sat, 21 Apr 2007, Günter M. Ziegler wrote:

„Wollen Sie sich der Herausforderung mal stellen?“

Natürlich!

Gruß,

Ihr C.M. Ringel

---

23. April 2007:

Lieber Herr Ringel,

„erscheint mir viel zu schwach! Im Gegensatz etwa zur Zahlentheorie, wo schon durch Euler und spätestens Gauß ziemlich alle elementaren Fragen abschließend behandelt wurden, ... “ (Anm. JS: Zitat aus Ringels Email.)

damit treten Sie jetzt aber bei mir recht heftig in den Fettnapf. Ich verzichte auf eine Auflistung der durch Gauß und Euler noch nicht abschließend behandelten elementaren zahlentheoretischen Fragen (ich muss gleich in die Vorlesung) und versichere nur pauschal, dass es da auch noch vieles zu beantworten gibt.

Wahrscheinlich ist so ziemlich jeder Versuch, ein (fremdes) mathematisches Gebiet als „abgeschlossen“ zu markieren, zum Scheitern verurteilt.

Ansonsten sehe ich der öffentlichen Debatte gerne entgegen, die Mitteilungen können inhaltliche Debatten gut gebrauchen!

Herzlichen Gruß,

Ihr Rainer Schulze-Pillot

9.7. **Normalformenprobleme aus der Forschung.**

9.7.1. **Simultane Äquivalenz von Homomorphismen.** Gegeben seien $r \geq 1$ und ein Paar $V = (V_1, V_2)$ von Vektorräumen. Sei

$$\mathcal{H}_r(V) := \{(f_1, \ldots, f_r) \mid f_i \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2),\ 1 \leq i \leq r\}.$$

$$V_1 \overset{f_1}{\underset{f_r}{\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\cdots}}}} V_2$$

Setze

$$G(V) := \operatorname{GL}(V_1) \times \operatorname{GL}(V_2).$$

Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \eta\colon G(V) \times \mathcal{H}_r(V) &\to \mathcal{H}_r(V) \\ ((g_1, g_2), (f_1, \ldots, f_r)) &\mapsto (g_2^{-1} f_1 g_1, \ldots, g_2^{-1} f_r g_1). \end{aligned}$$

Die **Bahn** von $f = (f_1, \dots, f_r)$ ist

$$\mathcal{O}(f) := \{\eta(g, f) \mid g \in G(V)\}.$$

Problem 9.12. *Klassifiziere die Bahnen in $\mathcal{H}_r(V)$.*

Angenommen wird sind im Spezialfall $V_1 = K^n$, $V_2 = K^m$ und $r = 1$:

$$K^n \xrightarrow{f_1} K^m$$

Dann entspricht Problem 9.12 genau dem Klassifikationsproblem von Matrizen in $K^{m,n}$ bis auf Äquivalenz.

Stand der Forschung:

(i) $r = 1$: Gelöst (elementare Lineare Algebra). Endlich viele Bahnen, falls $\dim(V_1), \dim(V_2) < \infty$. (Es gibt genau $1 + \min\{\dim(V_1), \dim(V_2)\}$ Bahnen.)

(ii) $r = 2$: Gelöst für $\dim(V_1), \dim(V_2) < \infty$ (Kronecker 1874). Unendlich viele Bahnen, falls K unendlich ist und $V_i \neq 0$ für $i = 1, 2$.

(iii) $r \geq 3$: Eine Lösung ist nicht bekannt und (in einem mathematisch präzisen Sinne) i.A. unmöglich. Es gibt jedoch viele interessante Teillösungen und andere mit dem Klassifikationsproblem zusammenhängende Fragestellungen. Aktuelles Forschungsthema.

9.7.2. **Simultane Ähnlichkeit von Endomorphismen.** Gegeben seien $r \geq 1$ und ein Vektorraum V. Sei

$$\mathcal{E}_r(V) := \{(f_1, \dots, f_r) \mid f_i \in \operatorname{End}(V),\ 1 \leq i \leq r\}.$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[loop left, "f_1"] \arrow[loop right, "f_r"] \end{tikzcd}$$

Setze

$$G(V) := \operatorname{GL}(V).$$

Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \eta\colon G(V) \times \mathcal{E}_r(V) &\to \mathcal{E}_r(V) \\ (g, (f_1, \dots, f_r)) &\mapsto (g^{-1} f_1 g, \dots, g^{-1} f_r g). \end{aligned}$$

Die **Bahn** von $f = (f_1, \dots, f_r)$ ist

$$\mathcal{O}(f) := \{\eta(g, f) \mid g \in G(V)\}.$$

Problem 9.13. *Klassifiziere die Bahnen in $\mathcal{E}_r(V)$.*

Angenommen wird sind im Spezialfall $V = K^n$ und $r = 1$:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[loop above, "f_1"] \end{tikzcd}$$

Dann entspricht Problem 9.13 genau dem Klassifikationsproblem von Matrizen in $K^{n,n}$ bis auf Ähnlichkeit.

Stand der Forschung:

(i) $r = 1$: Gelöst für $\dim(V) < \infty$ (Jordan und Weierstraß). Unendlich viele Bahnen, falls K unendlich ist und $V \neq 0$. Dieses Problem werden wir in der Linearen Algebra 2 behandeln.

(ii) $r \geq 2$: Eine Lösung ist i.A. unmöglich. Aktuelles Forschungsthema.

9.7.3. **Das n-Unterraum Problem.** Gegeben seien $n \geq 1$ und ein $(n+1)$-Tupel $V = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ von Vektorräumen. Sei

$$\mathcal{U}_n(V) := \{(f_1, \ldots, f_n) \mid f_i \in \operatorname{Hom}(V_i, V_0),\ f_i \text{ injektiv},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[dr, "f_1"'] & \cdots & V_n \arrow[dl, "f_n"] \\ & V_0 & \end{tikzcd}$$

Setze

$$G(V) := \mathrm{GL}(V_0) \times \mathrm{GL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(V_n).$$

Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \eta\colon G(V) \times \mathcal{U}_n(V) &\to \mathcal{U}_n(V) \\ ((g_0, \ldots, g_n), (f_1, \ldots, f_n)) &\mapsto (g_0^{-1} f_1 g_1, \ldots, g_0^{-1} f_n g_n). \end{aligned}$$

Die **Bahn** von $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ist

$$\mathcal{O}(f) := \{\eta(g, f) \mid g \in G(V)\}.$$

Problem 9.14. *Klassifiziere die Bahnen in $\mathcal{U}_n(V)$.*

Eine **n-Unterraumkonfiguration** ist ein $(n+1)$-Tupel $(V, V_1, \ldots, V_n)$, wobei V ein K-Vektorraum und $V_1, \ldots, V_n$ Unterräume von V sind.

Zwei n-Unterraumkonfigurationen $(V, V_1, \ldots, V_n)$ und $(W, W_1, \ldots, W_n)$ sind **isomorph**, falls es einen Isomorphismus

$$f\colon V \to W$$

gibt mit $f(V_i) = W_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Problem 9.15. *Klassifiziere die n-Unterraumkonfigurationen bis auf Isomorphie.*

Problem 9.14 ist äquivalent zu Problem 9.15. Genauer, für $V = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ induziert die Abbildung

$$(f_1, \ldots, f_n) \mapsto (V_0, \mathrm{Bild}(f_1), \ldots, \mathrm{Bild}(f_n))$$

eine Bijektion zwischen der Menge alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{U}_n(V)$ und der Menge der Isomorphieklassen von n-Unterraumkonfigurationen $(W, W_1, \ldots, W_n)$ mit $\dim(W) = \dim(V_0)$ und $\dim(W_i) = \dim(V_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

Stand der Forschung:

(i) $n = 1, 2, 3$: Gelöst (elementare Lineare Algebra, wobei der Fall $n = 3$ nicht ganz einfach ist). Endlich viele Bahnen, falls $\dim(V_0) < \infty$.

(ii) $n = 4$: Gelöst für $\dim(V_0) < \infty$ (Gelfand und Ponomarev 1970). Unendlich viele Bahnen, falls K unendlich ist und $\dim(V_0) \geq 2$ und $\dim(V_i) \geq 1$ für alle $1 \leq i \leq 4$.

(iii) $n \geq 5$: Eine Lösung ist i.A. unmöglich. Aktuelles Forschungsthema.

9.8. Übungsaufgaben.

9.8.1. *Simultane Äquivalenz von Homomorphismen.* Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{H}_2(V)$ für

$$V = (K, K).$$

9.8.2. *Simultane Ähnlichkeit von Endomorphismen.* Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{E}_2(V)$ für

$$V = K.$$

9.8.3. *Das n-Unterraum Problem.* (i) Für alle $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1 + n_2$, klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{U}_2(V)$ für

$$V = (K^n, K^{n_1}, K^{n_2}).$$

(ii) Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{U}_3(V)$ für

$$V = (K^2, K, K, K).$$

(iii) Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{U}_4(V)$ für

$$V = (K^2, K, K, K, K).$$

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 19** – – – – – – – – – – –

9.9. **Kleine Aufgabensammlung (05.01.22).** Dieser Abschnitt wird laufend erweitert.

9.9.1. Bestimmen Sie die reduzierte ZSF von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2,3},$$

und bestimmen Sie Kern(A).

9.9.2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3} \quad \text{und sei} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das LGS $Ax = b$.

9.9.3. Für $a \in \mathbb{Q}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3} \quad \text{und sei} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche a ist $Ax = b$

(i) eindeutig lösbar,
(ii) unlösbar,
(iii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

9.9.4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}.$$

Konstruieren Sie Basen von Kern(A) und Bild(A).

9.9.5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Bestimmen Sie Kern(A) und Bild(A) für $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_5$.

9.9.6. Sei $V := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Definiere $f\colon V \to V$ durch

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_0 + x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots).$$

(i) Konstruieren Sie eine Basis von Kern(f).
(ii) Beschreiben Sie das Bild von f.

9.9.7. Bestimmen Sie die Inversen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 2 & -8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{2,2}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{2,2}.$$

9.9.8. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A^{17} = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $E_n - A$ invertierbar ist.

(ii) Sei $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar. Ist dann $B - A$ invertierbar? (Beweis oder Gegenbeispiel)

9.9.9. Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $A \neq E_2$ und $A^5 = E_2$.

9.9.10. Sei

$$V := \{f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^3) \mid (0, 2, -3, 0, 1) \in \mathrm{Kern}(f)\}.$$

Zeigen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^3)$ ist, und geben Sie eine Basis von V an.

9.9.11. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\mathrm{Rang}(f) = r$. Setze

$$U := \{g \in \mathrm{End}(V) \mid gf = 0\} \quad \text{und} \quad W := \{g \in \mathrm{End}(V) \mid fg = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass U und W Unterräume von $\mathrm{End}(V)$ sind, und bestimmen Sie deren Dimension.

9.9.12. Seien V und W K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ sei $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ die entsprechende duale Abbildung. Bestimmen Sie $\dim \mathrm{Kern}(f) - \dim \mathrm{Kern}(f^*)$.

9.9.13. Seien $f\colon K^3 \to K^2$ und $g\colon K^2 \to K^3$ Homomorphismen

(i) Zeigen Sie, dass $gf\colon K^3 \to K^3$ kein Isomorphismus ist.

(ii) Finden Sie ein Beispiel, so dass $fg\colon K^2 \to K^2$ ein Isomorphismus ist.

9.9.14. Seien $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ geordnete Basen von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen V bzw. W. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definiert durch

$$b_1 \mapsto c_1 - c_2, \quad b_2 \mapsto c_2 - c_3, \quad b_3 \mapsto c_2, \quad b_4 \mapsto c_1 + c_2 + 2c_3.$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$.

9.9.15. Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Finden Sie Basen B und C von $\mathbb{R}^2$, so dass
$$\mathbf{c}_{B,C}(A) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$
Für $a = d = 0$ und $b = c = -2$ finden Sie eine Basis B, so dass
$$\mathbf{c}_{B,B}(A) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$
(Hinweis für den zweiten Teil der Aufgabe: Es gibt Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $A(v) = 2v$ und $A(w) = -2w$.)

9.9.16. Sei $V := K^{2,2}$, und sei
$$\begin{aligned} f\colon V &\to V \\ A &\mapsto A^T \end{aligned}$$
wobei A^T die Transponierte von A ist. (Man prüft leicht, dass f linear ist.) Sei
$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$
Dies ist eine Basis von V. Bestimmen Sie $\mathbf{c}_{B,B}(f)$.

10. Komplexe Zahlen

10.1. Komplexe Zahlen.

10.1.1. *Definition.*

Wir definieren nun den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen**. Als zugrunde liegende Menge nehmen wir
$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
Für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ sei
$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Man prüft nun leicht, dass $\mathbb{C}$ zusammen mit den oben definierten Operationen $+$ und $\cdot$ ein Körper ist.

Das Einselement 1 von $\mathbb{C}$ ist $(1, 0)$, und das Nullelement 0 von $\mathbb{C}$ ist $(0, 0)$.

Abkürzend schreibt man auch $i := (0, 1)$ und $a + bi$ statt (a, b).

Es gilt dann
$$i^2 = -1 \quad \text{und} \quad a + bi = (a, 0) + (b, 0)i.$$

Für $z = a + bi$ seien $\mathrm{Re}(z) := a$ und $\mathrm{Im}(z) := b$ der **Realteil** bzw. der **Imaginärteil** von z.

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ sei
$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$
der **Betrag** von z.

Stellt man sich z in der Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vor, so ist $|z|$ einfach die *Länge* von z.

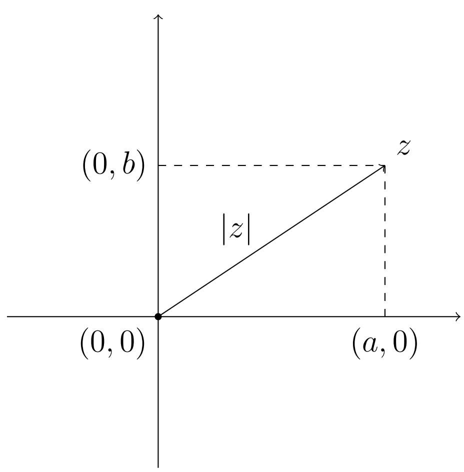


Abbildung 3. Betrag einer komplexen Zahl $z = a + bi$.

10.1.2. *Komplexe Zahlen als relle Matrizen.* Ordnet man nun $(a, b) \in \mathbb{C}$ die Matrix
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$
zu, so entspricht die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ genau der Addition und Multiplikation in $M_2(\mathbb{R})$. Nämlich für $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ erhalten wir
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix}$$
und
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

10.1.3. *Komplexe Zahlen als reller Vektorraum.*

Lemma 10.1. $\mathbb{C}$ *ist ein* $\mathbb{R}$*-Vektorraum mit Basis* $\{1, i\}$.

Beweis. Die Skalarmultiplikation auf $\mathbb{C}$ ist gegeben durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (a, z) &\mapsto (a, 0) \cdot z. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Addition des Körpers $\mathbb{C}$ erhalten wir damit eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur auf $\mathbb{C}$. Man sieht nun leicht, dass $\{1, i\}$ linear unabhängig ist und $\mathbb{C}$ erzeugt. $\square$

Wir fassen zuweilen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf vermöge der Einbettung $a \mapsto (a, 0)$.

Der Betrag von $a \in \mathbb{R}$ ist dann

$$|a| = \begin{cases} a & : \text{ falls } a \geq 0, \\ -a & : \text{ falls } a < 0. \end{cases}$$

10.1.4. *Komplexe Konjugation.*

Wir definieren die **komplexe Konjugation**

$$\overline{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

durch $(a, b) \mapsto \overline{(a, b)} := (a, -b)$.

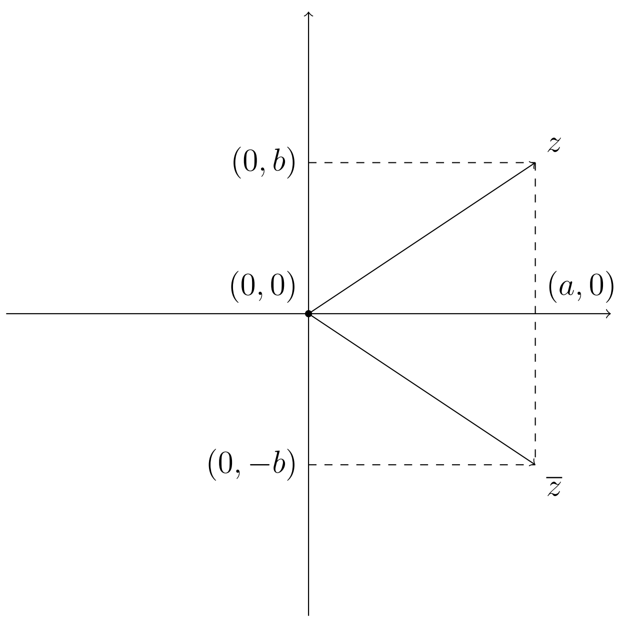


Abbildung 4. Komplexe Konjugation von $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$.

10.1.5. *Rechenregeln.*

(i) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(ii) Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ gilt $z + \overline{z} = 2a$ und $z - \overline{z} = 2bi$.

(iii) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| = |\overline{z}|$.

(iv) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(v) Für $z = a + bi$ gilt
$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

(vi) Für $z = (a, b) \in \mathbb{C}^\times$ gilt
$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a, -b).$$
In Matrixschreibweise
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

10.2. **Trigonometrische Funktionen.**

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir
$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Sei
$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
die Umkehrfunktion der bijektiven Einschränkungsabbildung
$$\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1],$$
und sei
$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$
die Umkehrfunktion der bijektiven Einschränkungsabbildung
$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1].$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), & \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\ \cos(-x) &= \cos(x), & \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \\ & & 1 &= \sin^2(x) + \cos^2(x). \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ setze
$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann
$$\exp(ix) = \cos(x) + \sin(x)i.$$

Die Menge
$$\mathbb{S}^1 := \{\exp(ix) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{\exp(ix) \mid x \in [0, 2\pi)\}$$
ist der *Einheitskreis* in $\mathbb{R}^2$, d.h. alles Elemente in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit *Abstand* 1 von $(0,0)$. (Zum Abstandsbegriff kommen wir später.)

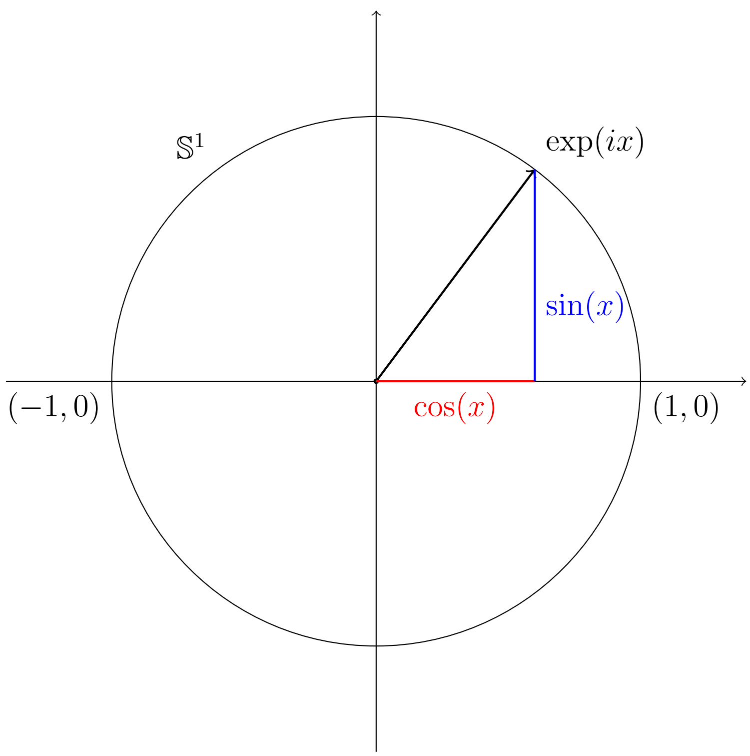


Abbildung 5. Die komplexe Zahl $\exp(ix) = \cos(x) + \sin(x)i$.

Die Funktionen $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\exp(i-)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind **2π-periodisch**, d.h. für $f \in \{\sin, \cos, \exp(i-)\}$ gilt
$$f(x + 2\pi) = f(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

10.3. **Polarkoordinaten.** Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}^\times$. Setze $r := |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es gibt dann ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit

$$z = r\exp(i\alpha),$$

d.h. wir erhalten z indem wir den Vektor $(r, 0) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel α drehen. Es gilt dann

$$a = r\cos(\alpha), \qquad b = r\sin(\alpha).$$

Die Zuordnung $(a, b) \mapsto (r, \alpha)$ definiert eine Bijektion

$$\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi)$$

wobei $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$.

Das Paar (r, α) ist dann die **Polarkoordinate** von $z = a + bi$. Als Konvention hat $0 \in \mathbb{C}$ die Polarkoordinate $(0, 0)$.

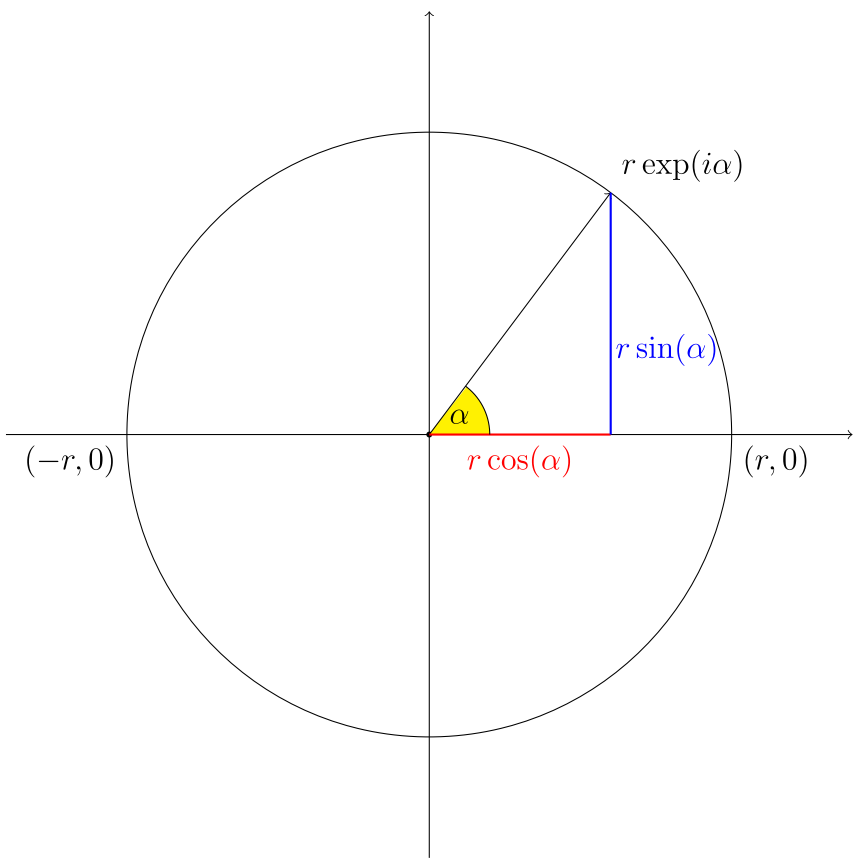


ABBILDUNG 6. Die komplexe Zahl $r\exp(i\alpha)$.

Für $r, s > 0$ und $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ gelten die Regeln

$$r\exp(i\alpha) \cdot s\exp(i\beta) = rs \cdot \exp(i(\alpha+\beta)),$$
$$(r\exp(i\alpha))^{-1} = r^{-1}\exp(i(-\alpha)).$$

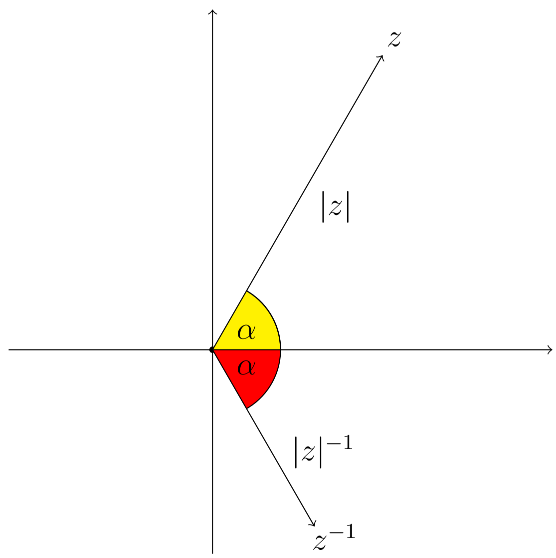


Abbildung 7. Das Inverse einer komplexen Zahl.

10.4. **Warum komplexe Zahlen?** Sei $K[X]$ der Polynomring in einer Variablen X mit Koeffizienten in K. Die Elemente in $K[X]$ sind also Ausdrücke der Form

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

wobei $a_0, \dots, a_n \in K$. (Später werden wir $K[X]$ genauer definieren und untersuchen.)

Satz 10.2 (Fundamentalsatz der Algebra (Gauß 1799 in seiner Doktorarbeit))**.** *Sei*

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

ein Polynom in $\mathbb{C}[X]$ mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n).$$

Mit anderen Worten: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ in $\mathbb{C}[X]$ hat mindestens eine Nullstelle.

Den Beweis des Fundamentalsatzes werden wir in der Vorlesung *Einführung in die Algebra* besprechen.

10.5. **Quaternionen.**

Die **Quaternionen** $\mathbb{H}$ haben $\mathbb{R}^4$ als zugrunde liegende Menge. Die **Addition** ist komponentenweise definiert durch

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2),$$

und die **Multiplikation** ist definiert als

$$\begin{aligned}(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (&a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2,\\ &a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2,\\ &a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2,\\ &a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2).\end{aligned}$$

Damit wird $\mathbb{H}$ zu einem **Schiefkörper**, d.h. $\mathbb{H}$ ist ein Ring, so dass jedes Element in $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ invertierbar ist. Also ist $\mathbb{H}$ beinahe ein Körper. Es fehlt nur die Kommutativität der Multiplikation.

Das Einselement in $\mathbb{H}$ ist $1 := e_1$. Setze $i := e_2$, $j := e_3$ und $k := e_4$. Also lässt sich jedes $x \in \mathbb{H}$ eindeutig schreiben als

$$x = a + bi + cj + dk$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die **Konjugation** $\bar{\cdot} \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ist definiert durch

$$\overline{a + bi + cj + dk} := a - bi - cj - dk.$$

Es gilt die multiplikative Regel

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Man kann die Multiplikation in $\mathbb{H}$ auch mit Hilfe nur dieser Regel definieren. (Achtung: Die „Variablen“ i, j und k kommutieren nicht.) Die Quaternionen wurden 1843 von Hamilton entdeckt, daher die Bezeichnung $\mathbb{H}$.

Der Unterring

$$\{a + bi \in \mathbb{H} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

ist isomorph zum Körper $\mathbb{C}$.

Die Quaternionen kann man als Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ beschreiben. Hierbei entspricht $(a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Dies sind also die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} v & w \\ -\overline{w} & \overline{v} \end{pmatrix}$$

wobei $v, w \in \mathbb{C}$. Die Multiplikation von $\mathbb{H}$ entspricht dann der Matrixmultiplikation.

Man kann Lineare Algebra auch über Schiefkörpern betreiben. Vieles bleibt dann richtig. Einige Ergebnisse und Beweise müssen aber modifiziert werden.

11. **Euklidische und unitäre Vektorräume**

11.1. **Bilinearformen.** Sei V ein K-Vektorraum.

Eine **Bilinearform auf V** ist eine Abbildung

$$s \colon V \times V \to K$$

mit

(i) $s(v_1 + v_2, w) = s(v_1, w) + s(v_2, w)$,

(ii) $s(\lambda v, w) = \lambda s(v, w)$,

(iii) $s(v, w_1 + w_2) = s(v, w_1) + s(v, w_2)$,

(iv) $s(v, \lambda w) = \lambda s(v, w)$

für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in K$.

Mit anderen Worten, eine Abbildung $s \colon V \times V \to K$ ist bilinear genau dann wenn gilt: Für alle $v, w \in V$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} s(v, -) \colon V &\to K \\ u &\mapsto s(v, u) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s(-, w) \colon V &\to K \\ u &\mapsto s(u, w) \end{aligned}$$

K-linear.

Eine Bilinearform s auf V ist **symmetrisch**, falls

$$s(v, w) = s(w, v)$$

für alle $v, w \in V$.

Beispiele:

(i) Für einen beliebigen Körper K ist

$$s \colon K^n \times K^n \to K, \quad (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

eine symmetrische Bilinearform.

(ii) Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$. Dann ist

$$s_A \colon K^n \times K^n \to K, \quad (v, w) \mapsto v^T A w$$

eine Bilinearform. (Wir schreiben die Elemente in K^n als Spaltenvektoren, d.h. v^T ist eine $(1 \times n)$-Matrix, und w ist eine $(n \times 1)$-Matrix. Also ist $v^T A w$ eine (1×1)-Matrix. Wir identifizieren dann $K^{1,1}$ und K.)

Eine Matrix $A \in K^{n,n}$ ist **symmetrisch**, falls $A = A^T$.

Lemma 11.1. *Sei $A \in K^{n,n}$. Die Bilinearform s_A ist symmetrisch genau dann wenn A symmetrisch ist.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung: Man kann analog und allgemeiner auch Bilinearformen

$$s\colon V \times W \to K$$

definieren, wobei V und W K-Vektorräume sind. Für unsere Zwecke reicht aber die obige Definition.

11.2. **Euklidische Vektorräume.** Sei $s\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

Für $K = \mathbb{R}$ (oder einen Teilkörper $K \subseteq \mathbb{R}$) ist s **positiv definit**, falls

$$s(v, v) > 0$$

für alle $0 \neq v \in V$.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform s heißt **Skalarprodukt auf** V.

Man schreibt dann oft $\langle v, w \rangle$ statt $s(v, w)$.

Ein Paar (V, s) ist ein **euklidischer Vektorraum**, falls V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und s ein Skalarprodukt auf V ist.

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 20** – – – – – – – – – – –

Beispiele:

(i) Die Abbildung

$$s^n\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

ist ein Skalarprodukt, welches wir das **Standardskalarprodukt auf** $\mathbb{R}^n$ nennen.

(ii) Ein Beispiel aus der Analysis: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$, und sei

$$s\colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dies ist ein Skalarprodukt auf V. Die Dimension von V ist ∞.

Wir werden Skalarprodukte benutzen, um Länge, Abstand und Winkel von Vektoren zu definieren. Wir werden auch lineare Abbildungen $f\colon V \to V$ studieren, welche Längen, Abstände und Winkel erhalten.

Beispiel: Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

die Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn. Unter der Identifizierung $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gilt also

$$D_\alpha(r\exp(i\beta)) = r\exp(i(\alpha+\beta))$$

für alle $(r, \alpha) \in \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi)$. (Dass die obige Matrix eine solche Drehung beschreibt, ist eine einfache Übungsaufgabe.) Dann ist D_α ein Homomorphismus, welcher (bezüglich des Standardskalarprodukts s^2) Längen, Abstände und Winkel erhält. Eine genauere Erklärung folgt später.

11.3. **Sesquilinearformen und unitäre Vektorräume.**

Sei nun $K = \mathbb{C}$. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} s\colon V \times V &\to \mathbb{C} \\ (v,w) &\mapsto \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

ist eine **Sesquilinearform**, falls

(i) $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$,

(ii) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$,

(iii) $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$,

(iv) $\langle v, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle$

für alle $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in K$.

Eine Sesquilinearform $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ ist **hermitesch**, falls

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$$

für alle $v, w \in V$.

Eine hermitesche Sesquilinearform $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ ist **positiv definit**, falls

$$\langle v, v\rangle > 0$$

für alle $0 \neq v \in V$. (Beachte, dass $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$, da die Form nach Voraussetzung hermitesch ist.)

Eine positive definite hermitesche Sesquilinearform auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V nennt man auch **Skalarprodukt** auf V. In diesem Fall ist das Paar (V, s) ein **unitärer Vektorraum**.

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ erhalten wir $\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ indem wir auf jeden Eintrag von A die komplexe Konjugation anwenden.

Beispiele:

(i) Die Abbildung

$$s^n\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (v, w) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{w_i}$$

ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Wir nennen s^n das **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{C}^n$.

(ii) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dann ist

$$\begin{aligned} s_A\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto v^T A \overline{w} \end{aligned}$$

eine Sesquilinearform.

(iii) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}.$$

Es gilt offenbar $A = \overline{A}^T$. Dann ist $s_A\colon (v, w) \mapsto v^T A \overline{w}$ ein Skalarprodukt.

Lemma 11.2. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Die Sesquilinearform s_A ist hermitesch genau dann wenn $A = \overline{A}^T$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Problem 11.3. *Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $A = \overline{A}^T$. Wann ist die symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Sesquilinearform s_A positiv definit?*

Wir werden diese Frage später mit Hilfe von Determinanten beantworten.

11.4. **Norm und Metrik.** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$$

so dass für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$ gilt:

(N1) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$;

(N2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$;

(N3) $\|v\| = 0$ genau dann wenn $v = 0$.

Die Ungleichung in (N2) heißt **Dreiecksungleichung**.

Normen werden für die Definition der Länge von Vektoren benutzt.

Lemma 11.4. *Für eine Norm $\|\cdot\|$ auf V gilt $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.*

Beweis. Für $v \in V$ gilt

$$0 = 0\|v\| = |0| \, \|v\| = \|0v\| = \|v - v\| \leq \|v\| + \|-v\| = \|v\| + \|v\| = 2\|v\|.$$

□

Eine **Metrik** auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$d \colon M \times M \to \mathbb{R}$$

so dass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(M1) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

(M3) $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$.

Die Ungleichung in (M2) heißt ebenfalls **Dreiecksungleichung**.

Metriken werden für die Definition des Abstands zweier Vektoren benutzt.

Lemma 11.5. *Für eine Metrik d auf einer Menge M gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in M \times M$.*

Beweis. Für $(x, y) \in M \times M$ gilt

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

$\square$

Lemma 11.6. *Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann definiert*

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

eine Metrik auf V.

Beweis. (i): Für $v, w \in V$ gilt

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \, \|w - v\| = d(w, v).$$

(ii): Für $u, v, w \in V$ gilt

$$d(u, w) = \|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w).$$

(iii): Für $u, v \in V$ gilt $d(u, v) = \|u - v\| = 0$ genau dann wenn $u - v = 0$ genau dann wenn $u = v$. $\square$

Beispiel: Nicht jede Metrik ist durch eine Norm gegeben. Für $V = \mathbb{R}^n$ sei

$$d \colon V \times V \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$d(v, w) := \begin{cases} 1 & : \text{ falls } v \neq w, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wegen $d(v, w) \leq 1$ für alle (v, w), kann d nicht durch eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben sein. (Wegen $\|v\| > 0$ für alle $0 \neq v \in V$ und $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ ist die Funktion $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt.)

11.5. **Länge und Abstand.** Für den Rest des Abschnitts sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Wie schon zuvor erwähnt, fassen wir zuweilen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf vermöge der Einbettung $a \mapsto (a, 0)$. In diesem Sinne können wir die komplexe Konjugation auf $a \in \mathbb{R}$ anwenden und erhalten dabei $\overline{a} = a$.

Sei $v \in V$. Die **Länge** von v ist definiert als

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Für $v, w \in V$ ist der **Abstand** von v und w definiert durch

$$d(v, w) := \|v - w\| = \|w - v\|.$$

Beispiel: Bezüglich des Standardskalarprodukts s^2 auf $\mathbb{R}^2$ und $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Lemma 11.7 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Für alle $v, w \in V$ gilt*
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Beweis. Für $w = 0$ gilt
$$0 = \langle v, 0\rangle = \|v\| \cdot \|0\|$$
Sei $w \neq 0$. Es folgt, dass $\langle w, w\rangle > 0$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt dann
$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle = \langle v, v\rangle - \lambda\langle w, v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$$

Wir setzen
$$\lambda := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$$
ein und erhalten
$$0 \leq \langle v, v\rangle - \frac{\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle} - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} + \frac{\langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle}}{\langle w, w\rangle}.$$
Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit $\langle w, w\rangle$ gilt dann
$$\begin{aligned} 0 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle\langle w, v\rangle &= \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle\overline{\langle v, w\rangle} \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2. \end{aligned}$$
(Für die letzte Gleichheit haben wir verwendet, dass für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ gilt.) Also haben wir bewiesen, dass
$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$
□

Lemma 11.8. *Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$ gilt:*
(i) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$;
(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$;
(iii) $\|v\| = 0$ *genau dann wenn* $v = 0$.
Insbesondere ist die Längenabbildung $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, und die Abstandsabbildung d ist eine Metrik auf V.

Beweis. (i): Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt
$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\,\|v\|.$$

(ii): Für $v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v,w\rangle) \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

(Für die letzte Ungleichung haben wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwendet.) Also gilt

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

(iii): Da s positiv definit ist, gilt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = 0$$

genau dann wenn $v = 0$. □

Beispiel: Nicht jede Norm ist durch ein Skalarprodukt gegeben. Sei $V = \mathbb{R}^n$, und sei

$$\|\cdot\|_{\max} \colon V \to \mathbb{R}$$

definiert durch $\|(x_1, \ldots, x_n)^T\| := \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$. Dies ist eine Norm auf V. Für $x = e_1$ und $y = e_2$ gilt dann

$$\|x+y\|_{\max} = 1, \qquad \|x-y\|_{\max} = 1,$$
$$\|x\|_{\max} = 1, \qquad \|y\|_{\max} = 1.$$

Also gilt die Parallelogrammgleichung nicht bezüglich $\|\cdot\|_{\max}$, vgl. Abschnitt 11.7.2.

11.6. **Winkel.** Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum.

Für $v, w \in V$ folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

(Für $v = 0$ oder $w = 0$ behandeln wir den Ausdruck

$$\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

als 0. Wir teilen hier nicht durch 0, sondern haben nur die Notation vereinfacht!)

Es gibt also genau ein $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Der **Winkel** zwischen v und w ist definiert als

$$\text{Winkel}(v,w) := \alpha := \arccos\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\right) \in [0,\pi].$$

Lemma 11.9. *Es gilt*

$$\langle v,w\rangle = 0 \iff \cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Für $\langle v,w\rangle = 0$ gilt offenbar $\cos(\alpha) = 0$. Sein nun $\langle v,w\rangle \neq 0$. Es folgt $\|v\| > 0$ und $\|w\| > 0$. Also gilt $\cos(\alpha) \neq 0$. Dies beweist die erste Äquivalenz. Die zweite Äquivalenz ist eine der Eigenschaften von cos. $\square$

Man kann auch Winkel für Vektoren in unitären Vektorräumen definieren. Die Definition ist dann aber weniger überzeugend als im euklidischen Fall. Wichtiger als der Begriff des Winkels ist in dieser Vorlesung der der Orthogonalität.

Sei nun (V,s) wieder euklidisch oder unitär. Für $v,w \in V$ schreiben wir

$$v \perp w$$

falls $\langle v,w\rangle = 0$, und wir sagen dann v **und** w **sind orthogonal**.

Es gilt offenbar $v \perp w$ genau dann wenn $w \perp v$.

– – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 21** – – – – – – – – – –

Übersicht: Sei (V, s) euklidisch oder unitär, d.h.

$$\begin{aligned} s\colon V \times V &\to \mathbb{K} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

ist ein Skalarprodukt mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$\begin{tikzcd}
(V, s) \text{ euklidisch/unitär} \arrow[r, mapsto, squiggly] \arrow[d, mapsto, squiggly] & \begin{array}{c}\text{Orthogonalität}\\ v \perp w \iff \langle v, w\rangle = 0\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Länge}\\ \|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}\end{array} \arrow[r, mapsto, squiggly] \arrow[d, mapsto, squiggly] & \begin{array}{c}\text{Abstand}\\ d(v, w) := \|v - w\|\end{array} \arrow[d, mapsto, squiggly] \\
\text{Norm } \|\cdot\| \text{ auf } V \arrow[r, mapsto, squiggly] & \text{Metrik } d \text{ auf } V
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(V, s) \text{ euklidisch} \arrow[d, mapsto, squiggly] \\
\text{Winkel}(v, w) := \arccos\left(\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}\right)
\end{tikzcd}$$

11.7. **Klassische Sätze der Elementargeometrie.**

Warnung: Die roten Pfeile in den folgenden drei Bildern sind mit Vorsicht zu genießen. Sie entstehen durch paralleles Verschieben der Vektoren, welcher als Label der roten Pfeile dienen.

11.7.1. *Satz des Pythagoras.*

Satz 11.10. *Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Für $v, w \in V$ gilt*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle. \end{aligned}$$

□

Für $v \perp w$ ist der obige Satz die (moderne Version) des Satzes von Pythagoras.

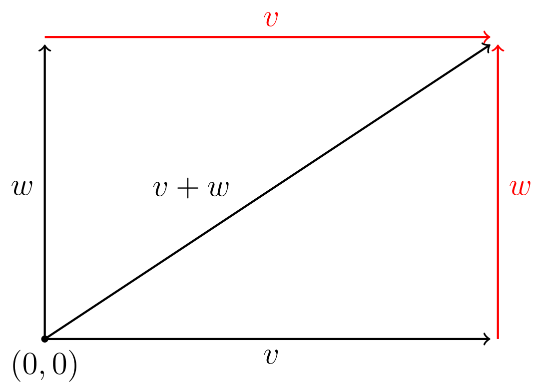


ABBILDUNG 8. Satz des Pythagoras: $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ falls $v \perp w$.

11.7.2. *Parallelogrammgleichung.*

Satz 11.11. *Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Für $v, w \in V$ gilt*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ &\quad + \langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ &= 2(\langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle) \\ &= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2). \end{aligned}$$

□

Der obige Satz entspricht der klassischen Parallelogrammgleichung, welche besagt, dass die Summe der Quadrate der Längen der vier Seiten eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden Diagonalen ist.

11.7.3. *Satz des Thales.*

Satz 11.12. *Sei (V, s) euklidisch. Seien $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\| > 0$. Dann gilt*

$$(v-w) \perp (-v-w).$$

Beweis. Wegen $\|v\| = \|w\|$ gilt $\langle v,v\rangle = \langle w,w\rangle$. (Hier haben wir verwendet, dass s positiv definit ist.) Da s symmetrisch ist, gilt $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$. Wir erhalten

$$\langle v-w, -v-w\rangle = -\langle v,v\rangle - \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle = 0.$$

Mit anderen Worten, $(v-w) \perp (-v-w)$. □

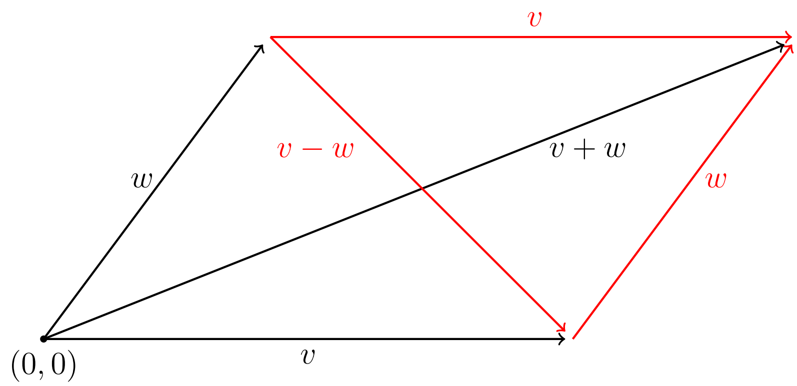


Abbildung 9. Parallelogrammgleichung: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

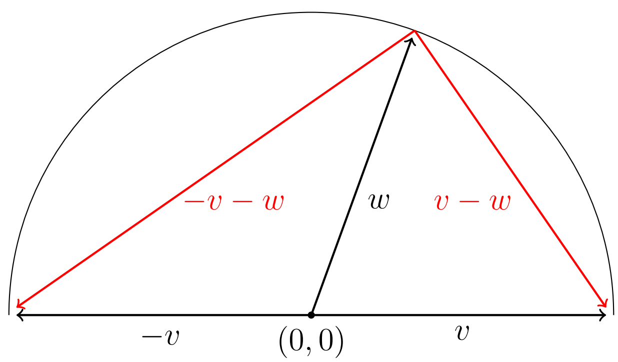


Abbildung 10. Satz des Thales: $(v-w) \perp (-v-w)$.

11.8. **Orthogonalräume und Orthogonalbasen.** Im gesamten Abschnitt sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine Teilmenge M von V ist **orthogonal**, falls $v \perp w$ für alle $v \neq w$ in M.

Die Menge M ist **orthonormal**, falls M orthogonal ist und $\langle v, v \rangle = 1$ für alle $v \in M$.

Beispiele:

(i) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^3, s^3)$. Dann ist $\{-e_1, e_2, e_3\}$ orthonormal, und $\{2e_1, e_2, e_3\}$ ist orthogonal aber nicht orthonormal.

(ii) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^2, s_A)$ wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Dann ist s ein Skalarprodukt auf V.) Es gilt $\langle e_1, e_1\rangle = 2$, $\langle e_2, e_2\rangle = 1$ und $\langle e_1, e_2\rangle = -1$. Insbesondere ist $\{e_1, e_2\}$ nicht orthogonal. Andererseits ist

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

orthonormal.

Lemma 11.13. *Sei $v \neq 0$ in V. Setze*

$$w := \frac{1}{\|v\|} \cdot v.$$

Dann gilt $\|w\| = 1$.

Beweis. Es gilt

$$\|w\| = \|\frac{1}{\|v\|} \cdot v\| = |\frac{1}{\|v\|}| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1.$$

□

Lemma 11.14. *Für $v \in V$ gilt $\|v\| = 1$ genau dann wenn $\langle v, v\rangle = 1$.*

Beweis. Aus $\langle v, v\rangle = 1$ folgt natürlich sofort, dass $\|v\| = 1$. Sei umgekehrt $\|v\| = 1$. Wegen $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ gilt dann $\langle v, v\rangle \in \{\pm 1\}$. Da unser Skalarprodukt s positiv definit ist, erhalten wir $\langle v, v\rangle = 1$. □

Lemma 11.15. *Sei M eine orthogonale Teilmenge von V. Dann ist $M \setminus \{0\}$ linear unabhängig.*

Beweis. Seien $v_1, \dots, v_m$ paarweise verschieden in $M \setminus \{0\}$. Angenommen

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$. Für $1 \leq k \leq m$ gilt

$$0 = \langle 0, v_k\rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m, v_k\rangle = \lambda_k \langle v_k, v_k\rangle.$$

Wegen $\langle v_k, v_k\rangle > 0$ folgt dann, dass $\lambda_k = 0$. Also ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ linear unabhängig. □

Für $M \subseteq V$ sei

$$M^\perp := \{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}.$$

Dies ist ein Unterraum von V, der **Orthogonalraum von M in V**.

Für $v \in V$ schreiben wir auch $v^\perp$ statt $\{v\}^\perp$.

Beispiele:

(i) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^3, s^3)$. Dann gilt $e_2^\perp = \mathrm{Lin}(e_1, e_3)$ und $\{e_1, e_2\}^\perp = \mathrm{Lin}(e_3)$.

(ii) Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^2, s^2)$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Lemma 11.16. *Sei* $\dim(V) = n$, *und* $0 \neq v \in V$. *Dann gilt* $\dim(v^\perp) = n - 1$.

Beweis. Es gilt $v^\perp = \mathrm{Kern}(f_v)$, wobei f_v definiert ist durch

$$\begin{aligned} f_v\colon V &\to \mathbb{K} \\ u &\mapsto \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Die Abbildung f_v ist $\mathbb{K}$-linear und $f_v \neq 0$, weil $v \neq 0$ und $\langle v, v \rangle > 0$. Folglich ist

$$n = \dim \mathrm{Bild}(f_v) + \dim \mathrm{Kern}(f_v) = 1 + \dim \mathrm{Kern}(f_v).$$

□

Sei W ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Unterräume U von W mit

$$\dim(U) = \dim(W) - 1$$

heißen **Hyperebenen**.

Lemma 11.17. *Sei* $M \subseteq V$. *Dann gilt* $M^\perp = (\mathrm{Lin}(M))^\perp$.

Beweis. Die Inklusion $(\mathrm{Lin}(M))^\perp \subseteq M^\perp$ gilt offensichtlich.

Umgekehrt seien $v_1, \ldots, v_m \in M$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$. Für alle $w \in M^\perp$ gilt dann

$$\langle \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m, w \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v_i, w \rangle = 0.$$

Also $M^\perp \subseteq (\mathrm{Lin}(M))^\perp$. □

Korollar 11.18. *Sei* U *ein Unterraum von* V, *und sei* B *eine Basis von* U. *Dann gilt*

$$U^\perp = B^\perp = \bigcap_{b \in B} b^\perp.$$

Beweis. Die erste Gleichheit folgt aus Lemma 11.17 und dem Umstand, dass B ein EZS von U ist. Die zweite Gleichheit folgt direkt aus den Definitionen. □

Für Unterräume U und W von V schreiben wir

$$V = U \perp W$$

falls $V = U \oplus W$ und $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

Satz 11.19. *Sei* $\dim(V) = n$*, und sei* U *ein Unterraum von* V *mit* $\dim(U) = k$*. Dann gilt*

$$V = U \perp U^\perp.$$

Insbesondere gilt $\dim(U^\perp) = n - k$*.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\dim(U^\perp) \geq n - k$. Sei $\{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis von U. Dann gilt

$$U^\perp = b_1^\perp \cap b_2^\perp \cap \cdots \cap b_k^\perp,$$

siehe Korollar 11.18. Wir wissen durch Lemma 11.16, dass $\dim(b_i^\perp) = n - 1$ für alle i. Mit der Dimensionsformel für Unterräume und Induktion erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dim(U^\perp) &= \dim(b_1^\perp) + \dim(b_2^\perp \cap \cdots \cap b_k^\perp) - \dim(b_1^\perp + (b_2^\perp \cap \cdots \cap b_k^\perp)) \\
&\geq (n-1) + (n - (k-1)) - n \\
&= n - k.
\end{aligned}$$

Sei nun $v \in U \cap U^\perp$. Dann ist $\langle v, v \rangle = 0$, und somit $v = 0$. Also $U \cap U^\perp = 0$. Es gilt

$$\dim(U \oplus U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp) \geq k + (n - k) = n$$

Also $V = U \oplus U^\perp$. Offensichtlich gilt $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in U^\perp$. □

Der Unterraum $U^\perp$ heißt **orthogonales Komplement von U in V**.

Sei W ein K-Vektorraum mit $W = W_1 \oplus W_2$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
f \colon W &\to W_1 \\
w_1 + w_2 &\mapsto w_1
\end{aligned}$$

für $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ wohldefiniert und linear. Die Abbildung f heißt **Projektion von W auf W_1 mit Kern W_2**.

Sei nun wieder $\dim(V) = n$, und sei U ein Unterraum von V. Also gilt $V = U \oplus U^\perp$.

Dann sei

$$p_U : V \to U$$

die Projektion von V auf U mit Kern $U^\perp$. Wir nennen p_U die **orthogonale Projektion von V auf U**.

Lemma 11.20. *Sei* $\dim(V) = n$, *und sei* U *ein Unterraum von* V*. Für* $v, v' \in V$ *sind äquivalent:*

(i) $p_U(v) = v'$;

(ii) $v' \in U$ *und* $v - v' \in U^\perp$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $p_U(v) = v'$. Es gilt dann nach Definition, dass $v' \in U$. Wegen $V = U \oplus U^\perp$ gibt es ferner ein (eindeutig bestimmtes) $v'' \in U^\perp$ mit $v = v' + v''$. (Wir benutzen hier die Definition von p_U.) Folglich gilt $v - v' = v'' \in U^\perp$.

(ii) $\implies$ (i): Angenommen $v' \in U$ und $v - v' \in U^\perp$. Dann ist $v = v' + (v - v')$. Also gilt $p_U(v) = v'$. $\square$

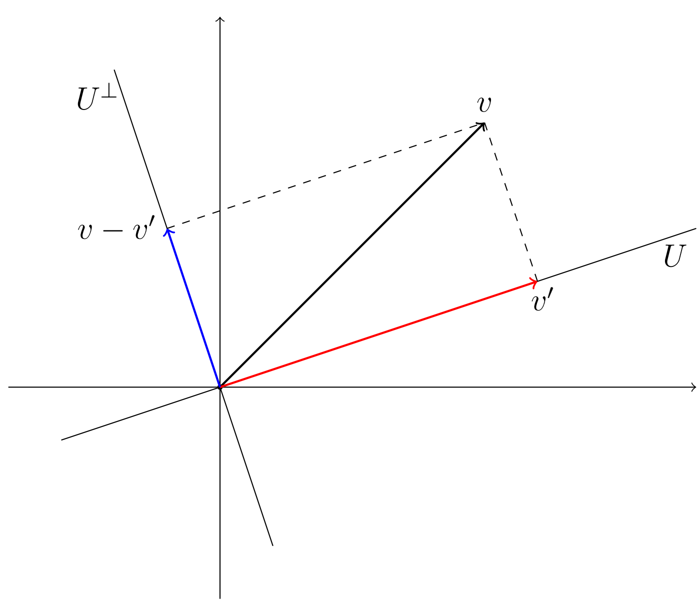


Abbildung 11. Orthogonale Projektion $p_U(v) = v'$.

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 22** – – – – – – – – – – –

Lemma 11.21. *Sei* $\dim(V) < \infty$*, und sei* U *ein Unterraum von* V*, und sei* $v \in V$*. Dann gilt:*

(i) $d(p_U(v), v) \leq d(u, v)$ *für alle* $u \in U$*;*

(ii) *Sei* $u \in U$ *mit* $d(p_U(v), v) = d(u, v)$*. Dann gilt* $u = p_U(v)$*.*

Beweis. (i): Wegen $V = U \perp U^\perp$ gibt es ein $v'' \in U^\perp$ mit $v = p_U(v) + v''$. Für alle $u \in U$ gilt dann

$$\begin{aligned}\|v-u\|^2 &= \|(p_U(v)-u)+v''\|^2 \\ &= \|p_U(v)-u\|^2 + \|v''\|^2 \geq \|v''\|^2 \\ &= \|v - p_U(v)\|^2\end{aligned}$$

(Für die zweite Gleichheit haben wir $\langle p_U(v) - u, v'' \rangle = 0$ verwendet. Dies gilt weil $p_U(v) - u \in U$ und $v'' \in U^\perp$.) Also gilt

$$d(u, v) = \|v - u\| \geq \|v - p_U(v)\| = d(p_U(v), v).$$

(ii): Sei $u \in U$ mit $d(u, v) = d(p_U(v), v)$. Dann gilt

$$\|v - u\|^2 = \|v - p_U(v)\|^2.$$

Nach der Ungleichung oben folgt dann $\|p_U(v) - u\|^2 = 0$ und damit $\|p_U(v) - u\| = 0$. Dies impliziert $u = p_U(v)$. ☐

Mit anderen Worten, $p_U(v)$ ist der (eindeutig bestimmte) Vektor in U, welcher den minimalen Abstand zu v hat.

Eine Basis B von V ist eine **Orthogonalbasis** von (V, s), falls B orthogonal ist, und B ist eine **Orthonormalbasis** von (V, s), falls B orthonormal ist.

Für einen Unterraum U von V sei $s_U \colon U \times U \to \mathbb{K}$ die Einschränkung von s auf $U \times U$. Dann ist (U, s_U) wiederum ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Lemma 11.22. *Sei* $\dim(V) < \infty$*, und sei* U *ein Unterraum von* V*. Sei* B *eine Orthonormalbasis von* (U, s_U)*. Für alle* $v \in V$ *gilt dann*

$$p_U(v) = \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b.$$

Beweis. Setze

$$v' := \sum_{b \in B} \langle v, b \rangle b.$$

Dann ist $v' \in U$. Für jedes $b \in B$ gilt dann

$$\begin{aligned}\langle v - v', b\rangle &= \langle v, b\rangle - \langle v', b\rangle \\ &= \langle v, b\rangle - \langle \sum_{c\in B} \langle v, c\rangle c, b\rangle \\ &= \langle v, b\rangle - \sum_{c\in B} \langle v, c\rangle \langle c, b\rangle \\ &= \langle v, b\rangle - \langle v, b\rangle\langle b, b\rangle \\ &= \langle v, b\rangle - \langle v, b\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Also ist $v - v' \in U^\perp$, und wegen $v = v' + (v - v')$ folgt $p_U(v) = v'$, siehe Lemma 11.20. □

Satz 11.23 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)**.** *Sei* $\dim(V) = n$*, und sei* $(b_1, \ldots, b_n)$ *eine geordnete Basis von* V*. Für* $1 \leq i \leq n$ *sei*

$$V_i := \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_i).$$

Es gilt also

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V.$$

Dann gibt es eine geordnete Orthonormalbasis $(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_n)$ *von* (V, s) *mit* $\widehat{b}_i \in V_i$ *für* $1 \leq i \leq n$*. Insbesondere gilt*

$$V_i = \mathrm{Lin}(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_i).$$

Die $\widehat{b}_i$ *sind (bis auf einen Skalar vom Betrag* 1*) eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei

$$\widehat{b}_1 := \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1.$$

Nach Lemma 11.13 gilt $\|\widehat{b}_1\| = 1$.

Induktionsannahme: Es gibt eine geordnete Orthonormalbasis $(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_i)$ von (V_i, s_{V_i}) mit $\widehat{b}_j \in V_j$ für alle $1 \leq j \leq i$.

Sei $i < n$, und sei $p_{V_i} \colon V_{i+1} \to V_i$ die orthogonale Projektion von V_{i+1} auf V_i.

Definiere

$$\widetilde{b}_{i+1} := b_{i+1} - p_{V_i}(b_{i+1}).$$

Wegen $p_{V_i}(b_{i+1}) \in \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_i)$ und $b_{i+1} \notin \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_i)$ gilt $\widetilde{b}_{i+1} \neq 0$. Weiterhin gilt $\widetilde{b}_{i+1} \in V_i^\perp$, siehe Lemma 11.20. (Der Unterraum $V_i^\perp$ ist hier das orthogonale Komplement von V_i in V_{i+1}.) Es folgt $\langle \widetilde{b}_{i+1}, \widehat{b}_j\rangle = 0$ für alle $1 \leq j \leq i$. Setze

$$\widehat{b}_{i+1} := \frac{1}{\|\widetilde{b}_{i+1}\|} \cdot \widetilde{b}_{i+1}.$$

Die Vektoren $\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_{i+1}$ liegen in V_{i+1}, sind paarweise verschieden, haben Länge 1, und sind paarweise orthogonal. Also ist $(\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_i, \widehat{b}_{i+1})$ eine geordnete Orthonormalbasis von $(V_{i+1}, s_{V_{i+1}})$.

Die Eindeutigkeit von $\widehat{b}_{i+1}$ (bis auf einen Skalar vom Betrag 1) folgt aus

$$\|\widehat{b}_{i+1}\| = 1, \quad \widehat{b}_{i+1} \in V_i^\perp, \quad \text{und} \quad \dim(V_i^\perp) = 1.$$

Denn in einem 1-dimensionalen Unterraum $U \subseteq V$ gibt es (bis auf einen Skalar vom Betrag 1) nur einen Vektor u mit $\|u\| = 1$. $\square$

Beispiel: Wir betrachten $(\mathbb{R}^3, s^3)$. Seien

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (b_1, b_2, b_3) eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\widehat{b}_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und nach Lemma 11.22 gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_2 &= b_2 - p_{V_1}(b_2) = b_2 - \langle b_2, \widehat{b}_1 \rangle \widehat{b}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\widehat{b}_2 := \frac{1}{\|\widetilde{b}_2\|} \widetilde{b}_2 = \frac{3}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im dritten Schritt erhalten wir

$$\widetilde{b}_3 = b_3 - p_{V_2}(b_3) = b_3 - \langle b_3, \widehat{b}_1 \rangle \widehat{b}_1 - \langle b_3, \widehat{b}_2 \rangle \widehat{b}_2.$$

Es folgt

$$\widehat{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe: Betrachten Sie die geordnete Basis (b_2, b_3, b_1). Wie sieht die zugehörige Orthonormalbasis aus?

Bemerkung: Sei (V, s) wie oben euklidisch oder unitär. Ist V unendlich dimensional, so können wir Satz 11.23 nicht anwenden. Ist nun aber U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V, so können wir mit Satz 11.23 zumindest eine Orthonormalbasis von (U, s_U) konstruieren.

11.9. **Orthogonale und unitäre Homomorphismen.** In diesem Abschnitt seien (V, s_V) und (W, s_W) beide euklidische oder beide unitäre $\mathbb{K}$-Vektorräume.

Ein Homomorphismus $f \colon V \to W$ ist **metrisch**, falls
$$\langle f(v), f(v') \rangle = \langle v, v' \rangle$$
für alle $v, v' \in V$.

Im euklidischen Fall nennt man einen solchen metrischen Homomorphismus f auch **orthogonal**, und im unitären Fall nennt man f auch **unitär**.

Lemma 11.24. *Seien $f \colon V \to W$ und $g \colon W \to U$ metrische Homomorphismen. Dann ist $g \circ f \colon V \to U$ metrisch.*

Beweis. Für $v, v' \in V$ gilt
$$\begin{aligned} \langle (g \circ f)(v), (g \circ f)(v') \rangle &= \langle g(f(v)), g(f(v')) \rangle \\ &= \langle f(v), f(v') \rangle \\ &= \langle v, v' \rangle. \end{aligned}$$
Die zweite Gleichheit verwendet, dass g metrisch ist, und die dritte Gleichheit benutzt, dass f metrisch ist. □

Ein bijektiver metrischer Homomorphismus $f \colon V \to W$ ist eine **Isometrie**. Wir sagen dann auch, dass (V, s_V) und (W, s_W) **isometrisch** sind und schreiben
$$(V, s_V) \cong (W, s_W).$$

Lemma 11.25. *Sei $f \colon V \to W$ eine Isometrie. Dann ist $f^{-1} \colon W \to V$ eine Isometrie.*

Beweis. Für $w, w' \in W$ gilt
$$\begin{aligned} \langle w, w' \rangle &= \langle (f \circ f^{-1})(w), (f \circ f^{-1})(w') \rangle \\ &= \langle f(f^{-1}(w)), f(f^{-1}(w')) \rangle \\ &= \langle f^{-1}(w), f^{-1}(w') \rangle. \end{aligned}$$
Für die dritte Gleichheit haben wir verwendet, dass f metrisch ist. □

Sei
$$\mathrm{GL}(V, s_V) := \{f\colon V \to V \mid f \text{ ist eine Isometrie}\}$$
die **Isometriegruppe** von (V, s_V).

Sei nun $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Wir definieren:

(i) f ist **längentreu**, falls
$$\|f(v)\| = \|v\|$$
für alle $v \in V$;

(ii) f ist **distanztreu**, falls
$$\|f(v) - f(v')\| = \|v - v'\|$$
für alle $v, v' \in V$.

(iii) f ist **orthogonaltreu**, falls für alle $v, v' \in V$ mit $v \perp v'$ auch $f(v) \perp f(v')$ gilt.

(iv) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist f **winkeltreu**, falls
$$\mathrm{Winkel}(f(v), f(v')) = \mathrm{Winkel}(v, v')$$
für alle $v, v' \in V$.

Satz 11.26. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist metrisch;*

(ii) *f ist längentreu;*

(iii) *f ist distanztreu.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei f metrisch. Für $v \in V$ gilt
$$\|f(v)\| = \sqrt{\langle f(v), f(v)\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\|.$$
Die erste Gleichheit folgt aus der Definition von $\|\cdot\|$. Für die zweite Gleichung haben wir verwendet, dass f metrisch ist.

(ii) $\implies$ (iii): Sei f längentreu. Für $v, v' \in V$ gilt dann
$$d(f(v), f(v')) = \|f(v) - f(v')\| = \|f(v - v')\| = \|v - v'\| = d(v, v').$$
Die zweite Gleichheit folgt aus der Linearität von f, und für die dritte Gleichheit verwenden wir, dass f längentreu ist.

(iii) $\implies$ (ii): Sei f distanztreu. Für $v \in V$ gilt dann
$$\|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|.$$

(iii) $\implies$ (i): Sei also f distanztreu. Dann gilt für alle $v, v' \in V$

$$\begin{aligned}
\langle f(v), f(v')\rangle + \langle f(v'), f(v)\rangle &= \langle f(v), f(v)\rangle + \langle f(v'), f(v')\rangle - \langle f(v) - f(v'), f(v) - f(v')\rangle \\
&= \|f(v)\|^2 + \|f(v')\|^2 - \|f(v) - f(v')\|^2 \\
&= \|v\|^2 + \|v'\|^2 - \|v - v'\|^2 \\
&= \langle v, v\rangle + \langle v', v'\rangle - \langle v - v', v - v'\rangle \\
&= \langle v, v'\rangle + \langle v', v\rangle.
\end{aligned}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt bereits $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$. Sei nun also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die obige Rechnung zeigt, dass die Realteile von $\langle f(v), f(v')\rangle$ und $\langle v, v'\rangle$ übereinstimmen. (Für $z \in \mathbb{K}$ gilt $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.) Nach der obigen Rechnung gilt für alle $v, v' \in V$

$$\begin{aligned}
i(\langle f(v), f(v')\rangle - \langle f(v'), f(v)\rangle) &= \langle f(iv), f(v')\rangle + \langle f(v'), f(iv)\rangle \\
&= \langle iv, v'\rangle + \langle v', iv\rangle \\
&= i(\langle v, v'\rangle - \langle v', v\rangle).
\end{aligned}$$

Es gilt also $\langle f(v), f(v')\rangle - \langle f(v'), f(v)\rangle = \langle v, v'\rangle - \langle v', v\rangle$. Also haben wir gezeigt, dass die Imaginärteile von $\langle f(v), f(v')\rangle$ und $\langle v, v'\rangle$ übereinstimmen. (Für $z \in \mathbb{K}$ gilt $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$.) Ingesamt gilt also $\langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$. Mit anderen Worten, f ist metrisch. □

– – – – – – – – – – – Ende Vorlesung 23 – – – – – – – – – – –

Lemma 11.27. *Sei $f\colon V \to W$ ein distanztreuer Homomorphismus. Dann ist f injektiv.*

Beweis. Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Wir erhalten

$$0 = \|0\| = \|f(v) - f(v')\| = \|v - v'\|.$$

Also gilt $v = v'$. □

Satz 11.28. *Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus mit $f \neq 0$, und sei $\dim(V) = n$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{K}$, so dass λf metrisch ist;*

(ii) *f ist orthogonaltreu.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $n \geq 1$.

(i) $\implies$ (ii): Angenommen λf ist metrisch. Es folgt $\lambda \neq 0$. Seien $v, v' \in V$ mit $v \perp v'$. Dann gilt

$$\lambda\overline{\lambda}\langle f(v), f(v')\rangle = \langle \lambda f(v), \lambda f(v')\rangle = \langle (\lambda f)(v), (\lambda f)(v')\rangle = \langle v, v'\rangle = 0.$$

Also ist f orthogonaltreu.

(ii) $\implies$ (i): Sei nun f orthogonaltreu. Nach dem Satz von Gram-Schmidt 11.23 gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ von V. Wegen

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt dann

$$\langle b_i - b_j, -b_i - b_j \rangle = -\langle b_i, b_i \rangle - \langle b_i, b_j \rangle + \langle b_j, b_i \rangle + \langle b_j, b_j \rangle = -\langle b_i, b_i \rangle + \langle b_j, b_j \rangle = 0.$$

Da f orthogonaltreu ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(b_i - b_j), f(-b_i - b_j) \rangle \\ &= -\langle f(b_i), f(b_i) \rangle - \langle f(b_i), f(b_j) \rangle + \langle f(b_j), f(b_i) \rangle + \langle f(b_j), f(b_j) \rangle \\ &= -\langle f(b_i), f(b_i) \rangle + \langle f(b_j), f(b_j) \rangle. \end{aligned}$$

Also gilt $\langle f(b_i), f(b_i) \rangle = \langle f(b_j), f(b_j) \rangle$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Ist nun $\langle f(b_i), f(b_i) \rangle = 0$, so gilt $f = 0$. Widerspruch. Wir wissen also, dass $\langle f(b_i), f(b_i) \rangle \neq 0$ und setzen

$$\lambda := \|f(b_i)\|^{-1}.$$

Dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$. Für

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \quad \text{und} \quad v' = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$$

in V gilt dann

$$\begin{aligned} \langle (\lambda f)(v), (\lambda f)(v') \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda \bar{\lambda} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle f(b_i), f(b_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda \bar{\lambda} \lambda_i \overline{\mu_i} \langle f(b_i), f(b_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda \bar{\lambda} \lambda_i \overline{\mu_i} (\lambda^{-1})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\mu_i} \\ &= \langle v, v' \rangle. \end{aligned}$$

Also ist λf metrisch. □

Bemerkungen:

(i) Im Beweis von Satz 11.28 haben wir für die Richtung (ii) $\implies$ (i) verwendet, dass V endlich-dimensional ist. (Andernfalls gäbe es nicht notwendigerweise eine Orthonormalbasis.) Übungsaufgabe: Im euklidischen Fall benötigt man diese Annahme nicht. (Stattdessen kann dann die Symmetrie des Skalarprodukts genutzt werden.)

(ii) Übungsaufgabe: Für den euklidischen Fall ist Bedingung (i) in Satz 11.28 äquivalent zur Winkeltreue von f.

Lemma 11.29. *Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist jeder metrische Homomorphismus $f\colon V \to W$ winkeltreu.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Winkel}(f(v), f(v')) &= \arccos\left(\frac{\langle f(v), f(v')\rangle}{\|f(v)\| \cdot \|f(v')\|}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{\langle v, v'\rangle}{\|v\| \cdot \|v'\|}\right)\\
&= \operatorname{Winkel}(v, v').
\end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichheit folgen aus der Definition des Winkels. Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass f metrisch und längentreu ist. □

Die Umkehrung der obigen Aussage gilt i.A. nicht:

Beispiel: Sei $(V, s) = (\mathbb{R}^2, s^2)$. Für $\alpha \in [0, 2\pi)$ sei

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

die Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) λD_α ist metrisch genau dann wenn $\lambda = \pm 1$.

(ii) λD_α ist winkeltreu genau dann wenn $\lambda \neq 0$.

(iii) λD_α ist orthogonaltreu.

Übersicht: Seien (V, s) und W beide euklidisch oder beide unitär, und sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $f \neq 0$. Zudem sei $\dim(V) < \infty$.

$$\begin{tikzcd}
f \text{ metrisch} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathbb{K}=\mathbb{R}"'] & f \text{ orthogonaltreu} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow, "\mathbb{K}=\mathbb{R}"] & \lambda f \text{ metrisch für ein } \lambda \in \mathbb{R}^\times \arrow[d, Rightarrow] \\
f \text{ distanztreu} \arrow[d, Leftrightarrow] & f \text{ winkeltreu} & f \text{ injektiv} \\
f \text{ längentreu} & &
\end{tikzcd}$$

11.10. **Gruppen.**

Eine Menge G zusammen mit einer Abbildung

$$\begin{aligned} *\colon G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

ist eine **Gruppe**, falls gilt:

(G1) $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in G$ (**Assoziativität**);

(G2) Es gibt ein Element $1 \in G$ mit $a1 = 1a = a$ für alle $a \in G$ (**Existenz eines Einselements**);

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ mit $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (**Existenz eines Inversen**).

Das Einselement einer Gruppe G wird auch mit 1_G bezeichnet. Eine Gruppe $(G, *)$ ist **abelsch** oder **kommutativ**, falls $ab = ba$ für alle $a, b \in G$. Man schreibt dann auch $a + b$ statt ab. Das Einselement 1 wird dann oft als 0 geschrieben.

Beispiele:

(i) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann sind $(K, +)$ und $(K^\times, \cdot)$ abelsche Gruppen.

(ii) Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Dann ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe.

(iii) Für $n \geq 1$ sei $I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dann ist

$$S_n := \{f \in \mathrm{Abb}(I_n, I_n) \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

die **symmetrische Gruppe (vom Grad n)**, wobei $*$ die Komposition von Abbildungen ist.

Die Elemente in S_n heißen **Permutationen**.

Es gilt

$$|S_n| = n!.$$

(Beweis durch Induktion.)

(iv) $\mathrm{GL}(V)$ ist (mit der Komposition) eine Gruppe.

(v) Für einen euklidischen oder unitären Vektorraum (V, s) ist $\mathrm{GL}(V, s)$ eine Gruppe. (Dies folgt aus den Lemmata 11.24 und 11.25.)

Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge U von G ist eine **Untergruppe**, falls gilt:

(i) $U \neq \varnothing$;

(ii) Für alle $g, h \in U$ gilt $gh \in U$;

(iii) Die Menge U zusammen mit der Einschränkung $U \times U \to U$, $(g,h) \mapsto gh$ ist eine Gruppe. (Für die Existenz dieser Einschränkungsabbildung benötigen wir Bedingung (ii).)

Lemma 11.30. *Sei G eine Gruppe, und sei U eine Teilmenge von G, so dass gilt:*

(i) $U \neq \varnothing$;

(ii) *Für alle $g, h \in U$ gilt $gh \in U$.*

Dann ist U eine Untergruppe genau dann wenn für jedes $u \in U$ auch $u^{-1} \in U$ gilt.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiele:

(i) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Dann ist $\{1_G\}$ eine Untergruppe.

(ii) Für einen euklidischen oder unitären Vektorraum (V, s) ist $\mathrm{GL}(V, s)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$.

Seien G und H Gruppen. Eine Abbildung

$$\eta\colon G \to H$$

ist ein **Gruppenhomomorphismus**, falls

$$\eta(ab) = \eta(a)\eta(b)$$

für alle $a, b \in G$ ist.

Man zeigt dann leicht, dass $\eta(1_G) = 1_H$. Einen bijektiven Gruppenhomomorphismus $\eta\colon G \to H$ nennt man **Gruppenisomorphismus**. In diesem Fall schreiben wir

$$G \cong H.$$

Lemma 11.31. *Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und sei B eine geordnete Basis von V. Dann ist*

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathrm{GL}(V) &\to \mathrm{GL}_n(K) \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Für $f, g \in \mathrm{End}(V)$ gilt

$$\mathbf{c}_{B,B}(f \circ g) = \mathbf{c}_{B,B}(f)\mathbf{c}_{B,B}(g).$$

Die Bijektivität von $\mathbf{c}_{B,B}\colon \mathrm{End}(V) \to K^{n,n}$ haben wir bereits bewiesen. Wir wissen auch, dass $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Isomorphismus ist genau dann wenn $\mathbf{c}_{B,B}(f)$ invertierbar ist. □

Sei $\eta\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist

$$\mathrm{Kern}(\eta) := \{g \in G \mid \eta(g) = 1_H\}$$

der **Kern von η**.

Es ist dann leicht zu zeigen, dass $\mathrm{Kern}(\eta)$ eine Untergruppe von G ist. Aber: In der Regel ist nicht jede Untergruppe der Kern eines Gruppenhomomorphismus.

11.11. **Orthogonale und unitäre Gruppen.**

Sei (V, s) euklidisch. Dann ist

$$\mathrm{O}(V, s) := \mathrm{GL}(V, s)$$

die **orthogonale Gruppe von (V, s)**.

Sei (V, s) unitär. Dann ist

$$\mathrm{U}(V, s) := \mathrm{GL}(V, s)$$

die **unitäre Gruppe von (V, s)**.

– – – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 24** – – – – – – – – – – – –

Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Falls $\dim(V) < \infty$, so gilt

$$\mathrm{GL}(V, s) = \{f\colon V \to V \mid f \text{ ist metrisch}\}.$$

Dies folgt aus Satz 11.26, Lemma 11.27 und der schon bewiesenen Aussage, dass Monomorphismen zwischen gleichdimensionalen, endlich-dimensionalen Vektorräumen Isomorphismen sind.

Definiere

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, s^n) \quad \text{und} \quad \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) := \mathrm{U}(\mathbb{C}^n, s^n).$$

Satz 11.32. *Es gilt*

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\},$$
$$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}.$$

Beweis. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und $A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;

(ii) Bezüglich s^n gilt $\langle A(v), A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{K}^n$;

(iii) Bezüglich s^n gilt $\langle A(e_i), A(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ für alle $1 \leq i, j \leq n$;

(iv) Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt

$$(a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \cdot \begin{pmatrix} \overline{a_{1j}} \\ \vdots \\ \overline{a_{nj}} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst;} \end{cases}$$

(v) $A^{-1} = \overline{A}^T$.

Für (ii) $\iff$ (iii) verwenden wir, dass s^n eine Bilinearform bzw. eine Sesquilinearform ist. Die Äquivalenzen (i) $\iff$ (ii) und (iii) $\iff$ (iv) folgen direkt aus den Definitionen. Nach der Definition des Matrixprodukts ist Bedingung (iv) äquivalent zur Gleichung $A^T\overline{A} = E_n$. Dies ist offenbar äquivalent zu $\overline{A}^T A = E_n$ und damit zu $A^{-1} = \overline{A}^T$. Also gilt (iv) $\iff$ (v). □

Korollar 11.33. *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n, s^n)$.

(ii) *Die Spalten von A bilden eine geordnete Orthonormalbasis von $(\mathbb{K}^n, s^n)$.*

(iii) *Die Zeilen von A bilden eine geordnete Orthonormalbasis von $(\mathbb{K}^n, s^n)$.*

Beweis. In (i), (ii) und (iii) ist die Matrix A invertierbar. (Die Spalten bzw. Zeilen von A bilden eine Basis von $\mathbb{K}^n$ genau dann wenn A invertierbar ist.)

(i) $\iff$ (ii): Nach Satz 11.32 gilt (i) genau dann wenn $A^{-1} = \overline{A}^T$ genau dann wenn $A^T\overline{A} = E_n$.

Sei nun $C = (c_{ij}) = A^T\overline{A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (i\text{-te Zeile von } A^T) \cdot (j\text{-te Spalte von } \overline{A}) \\ &= (i\text{-te Spalte von } A)^T \cdot (j\text{-te Spalte von } \overline{A}) \\ &= \langle A(e_i), A(e_j)\rangle. \end{aligned}$$

Also gilt $C = E_n$ genau dann wenn die Spalten von A eine geordnete Orthonormalbasis von $(\mathbb{K}^n, s^n)$ bilden.

(i) $\iff$ (iii): Dies ist ähnlich zum Beweis von (i) $\iff$ (ii). □

11.12. **Beispiele:** $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ **und** $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$**.**

11.12.1. Es gilt

$$\mathrm{O}_1(\mathbb{R}) = \{(-1), (1)\}.$$

Dies folgt direkt aus der Definition.

11.12.2. Wir wissen, dass

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ genau dann wenn

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1, \\ c^2 + d^2 &= 1, \\ ac + bd &= 0. \end{aligned}$$

Sei zuerst $a = 0$. Dann folgt $b^2 = 1$ und damit $b \in \{-1, 1\}$. Wegen $ac + bd = 0$ gilt dann $d = 0$, und $c^2 + d^2 = 1$ impliziert nun $c \in \{-1, 1\}$. Damit gilt also $a = d = 0$ und $c = b$ oder $c = -b$.

Nun betrachten wir den Fall $a \neq 0$. Es gilt dann

$$c = -\frac{bd}{a},$$

und damit

$$c^2 + d^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) d^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) d^2 = \frac{d^2}{a^2} = 1.$$

Hieraus folgt $d = a$ oder $d = -a$. Wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $c^2 + d^2 = 1$ gilt dann $c = b$ oder $c = -b$. Für den Fall $d = a$ gilt $a(c + b) = 0$, d.h. $c = -b$. Aus $d = -a$ folgt $a(c - b) = 0$, d.h. $c = b$.

Also ist

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos(\alpha)$ und $b = \sin(\alpha)$. Mit

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \{D_\alpha,\ S_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

Erinnerung: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Formeln

$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Diese Regeln liefern die folgende Beschreibung der Abbildungen D_α und S_α.

Für

$$v = \begin{pmatrix} r\cos(\beta) \\ r\sin(\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt

$$D_\alpha(v) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\beta) - r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ r\sin(\alpha)\cos(\beta) + r\cos(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\beta) \\ r\sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Also beschreibt D_α die Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn.

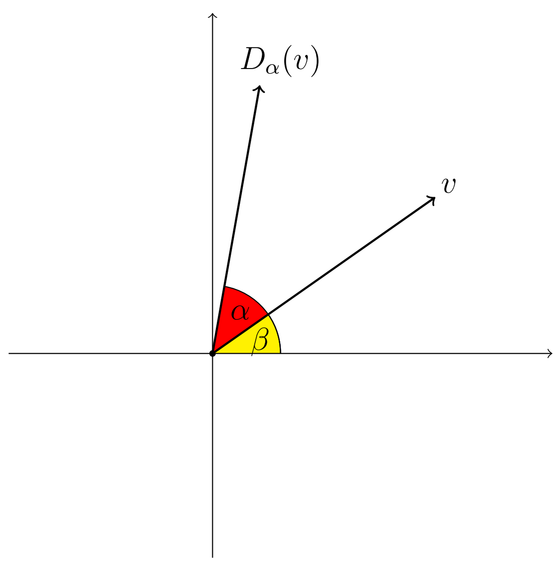


Abbildung 12. Drehung $D_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Für

$$v = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha/2+\beta) \\ r\sin(\alpha/2+\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt

$$S_\alpha(v) = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\alpha/2+\beta) + r\sin(\alpha)\sin(\alpha/2+\beta) \\ r\sin(\alpha)\cos(\alpha/2+\beta) - r\cos(\alpha)\sin(\alpha/2+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha/2-\beta) \\ r\sin(\alpha/2-\beta) \end{pmatrix}.$$

(Wir haben die obigen Formeln für $x = \alpha$ und $y = -\alpha/2 - \beta$ verwendet.)

Also beschreibt S_α die Spiegelung an der Geraden mit Winkel $\alpha/2$ zur x-Achse.

Sei

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \{D_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

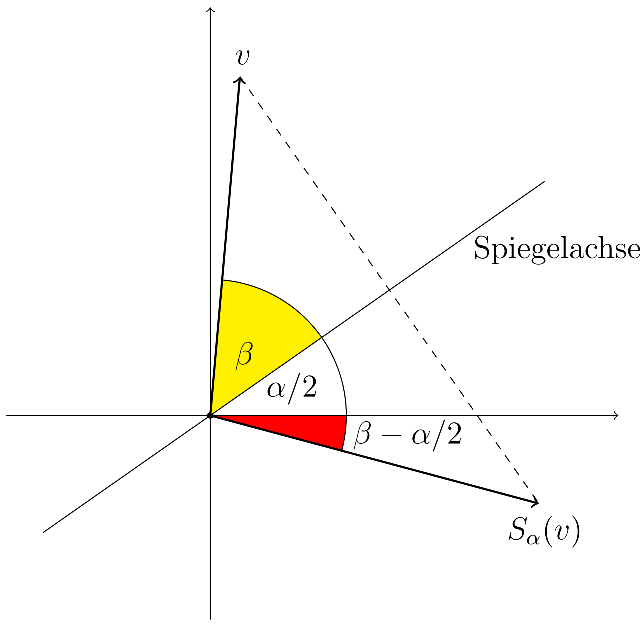


ABBILDUNG 13. Spiegelung $S_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Dann ist $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, welche man **spezielle orthogonale Gruppe** oder auch **Drehgruppe** nennt.

11.12.3. Nach Definition gilt

$$\mathrm{U}_1(\mathbb{C}) = \{(z) \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \mid z^{-1} = \overline{z}\}.$$

Man prüft nun leicht, dass

$$\mathrm{U}_1(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \mathbb{S}^1.$$

Deswegen nennt man $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ auch **Kreisgruppe**.

Die Gruppe $\mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ ist isomorph zur Drehgruppe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

11.13. **Klassifikation euklidischer und unitärer Vektorräume.** Ziel des Abschnitts ist die Klassifikation euklidischer und unitärer Vektorräume bis auf Isometrie.

Proposition 11.34. *Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei B eine geordnete Basis von V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *B ist eine Orthonormalbasis von (V, s);*

(ii) *Der Isomorphismus*
$$\mathbf{c}_B \colon V \to \mathbb{K}^n$$
ist eine Isometrie. (Hier fassen wir $\mathbb{K}^n$ als euklidischen bzw. unitären Vektorraum auf, indem wir das Standardskalarprodukt s^n verwenden.)

Beweis. Im Folgenden sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Nach Definition gilt $\mathbf{c}_B(b_i) = e_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Insbesondere ist $\mathbf{c}_B$ ein Isomorphismus. Es gilt

$$\langle \mathbf{c}_B(b_i), \mathbf{c}_B(b_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei B eine Orthonormalbasis von (V, s). Dann gilt

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & : \text{ falls } i = j, \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Also ist $\mathbf{c}_B$ eine Isometrie, wegen $\langle \mathbf{c}_B(b_i), \mathbf{c}_B(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle$ für alle i, j.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei umgekehrt $\mathbf{c}_B$ eine Isometrie, also

$$\langle \mathbf{c}_B(b_i), \mathbf{c}_B(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle$$

für alle i, j. Dann folgt $\langle e_i, e_j \rangle = \langle b_i, b_j \rangle$ für alle i, j. Also ist B orthonormal. □

Korollar 11.35. *Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Dann gilt*
$$(V, s) \cong (\mathbb{K}^n, s^n).$$

Satz 11.36. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, welche beide euklidisch oder beide unitär sind. Dann sind äquivalent:*

(i) *$(V, s_V) \cong (W, s_W)$;*

(ii) *$\dim(V) = \dim(W)$.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Jede Isometrie $f \colon V \to W$ ist ein Isomorphismus. Es folgt, dass $\dim(V) = \dim(W)$.

(ii) $\implies$ (i): Angenommen $\dim(V) = \dim(W) = n$. Wähle Orthonormalbasen B und C von (V, s_V) bzw. (W, s_W). (Diese existieren nach Gram-Schmidt.) Proposition 11.34 liefert Isometrien

$$V \xrightarrow{\mathbf{c}_B} \mathbb{K}^n \xleftarrow{\mathbf{c}_C} W.$$

Dann ist $\mathbf{c}_C^{-1} \circ \mathbf{c}_B \colon V \to W$ ebenfalls eine Isometrie. □

11.14. **Klassifikation von Isometriegruppen.** Ziel des Abschnitts ist die Klassifikation orthogonaler und unitärer Gruppen bis auf Isomorphie.

Lemma 11.37. *Seien (V, s_V) und (W, s_W) $\mathbb{K}$-Vektorräume, welche beide euklidisch oder beide unitär sind, und sei $\dim(V) = \dim(W) = n$. Seien B und C geordnete Orthonormalbasen von (V, s_V) bzw. (W, s_W). Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ sei $A := \mathbf{c}_{B,C}(f) \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f \colon V \to W$ ist eine Isometrie;*

(ii) *$A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n, s^n)$.*

Beweis. Wir wissen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_B"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_C"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

kommutiert. Wegen Proposition 11.34 sind $\mathbf{c}_B$ und $\mathbf{c}_C$ Isometrien. Wir wissen auch, dass Kompositionen von Isometrien wieder Isometrien sind, siehe Lemma 11.25. Wegen

$$f = \mathbf{c}_C^{-1} \circ A \circ \mathbf{c}_B \quad \text{und} \quad A = \mathbf{c}_C \circ f \circ \mathbf{c}_B^{-1}$$

ist also f eine Isometrie genau dann wenn A eine Isometrie ist. □

Satz 11.38. *Sei (V, s) euklidisch oder unitär mit $\dim(V) = n$, und sei B eine geordnete Orthonormalbasis von (V, s). Die Einschränkung des Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) &\to \mathbb{K}^{n,n} \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f) \end{aligned}$$

induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(V, s) &\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f) \end{aligned} \qquad \textit{bzw.} \qquad \begin{aligned} \mathrm{U}(V, s) &\to \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \\ f &\mapsto \mathbf{c}_{B,B}(f). \end{aligned}$$

Beweis. Wir wissen, dass

$$\mathbf{c}_{B,B} \colon \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathbb{K}^{n,n}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen ist, und dass zusätzlich gilt

$$\mathbf{c}_{B,B}(f \circ g) = \mathbf{c}_{B,B}(f)\mathbf{c}_{B,B}(g)$$

für alle $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Nun folgt die Aussage direkt aus Lemma 11.37 (mit $W = V$ und $C = B$). $\square$

11.15. Übungsaufgaben.

11.15.1. Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $\|\cdot\|$ die dazugehörige Norm. Zeigen Sie: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$

für alle $v, w \in V$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2\right)$$

für alle $v, w \in V$. Die obigen Formeln heißen Polarisierungsformeln.

11.15.2.

Für $C = (c_{ij}) \in K^{n,n}$ sei

$$\mathrm{Spur}(C) := \sum_{k=1}^{n} c_{kk}$$

die **Spur** von C.

Sei $V := K^{n,n}$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$s\colon V \times V \to K, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$$

ist eine reguläre symmetrische Bilinearform. (Ein Bilinearform s ist **regulär**, falls $s(v, -) \neq 0$ und $s(-, w) \neq 0$ für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$.)

11.15.3. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Zeigen Sie:

(i)
$$s_A\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v^T A w$$
ist ein Skalarprodukt, d.h. $(\mathbb{R}^3, s_A)$ ist ein euklidischer Vektorraum.

(ii) Bestimmen Sie Winkel(e_i, e_j) für alle $1 \leq i, j \leq 3$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^3$ sind.

11.15.4. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen, und sei V der Unterraum aller beschränkten reellen Folgen.

(i) Zeigen Sie:
$$\langle f, g\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^2}$$
definiert ein Skalarprodukt auf V.

(ii) Sei $U \subset V$ der Unterraum aller konvergenten Folgen. Zeigen Sie, dass
$$U^{\perp} = 0$$
wobei
$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$
Insbesondere gilt also
$$V \neq U \oplus U^{\perp}.$$

11.15.5. Sei (V, s) euklidisch oder unitär, und seien U und W Unterräume von V mit
$$V = U \perp W.$$
Zeigen Sie, dass $W = U^{\perp}$.

11.15.6. Sei
$$s^2 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
das Standardskalarprodukt. Beschreiben Sie alle metrischen Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$.

11.15.7. Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$ mit $\langle u - w, v - w\rangle = 0$. Zeigen Sie:
$$\|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 = \|u - v\|^2.$$
Zeichnen Sie ein passendes Bild zu dieser Aussage.

11.15.8. Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Zeigen Sie: Für $v, w \in V$ sind äquivalent:

(i) $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$;

(ii) $\{v, w\}$ ist linear abhängig.

11.15.9. Sei (V, s) ein n-dimensionaler euklidscher Vektorraum, und sei $f \colon V \to V$ ein Isomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) f ist orthogonaltreu;

(ii) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß λf längentreu ist.

12. Determinanten

12.1. Determinantenfunktionen.

Sei K ein Körper, und sei $n \geq 0$. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \det\colon K^{n,n} &\to K \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

heißt **Determinantenfunktion**, falls gilt:

(D1) det ist linear in jeder Zeile;

(D2) Falls $\mathrm{Rang}(A) < n$, so ist $\det(A) = 0$;

(D3) $\det(E_n) = 1$.

Den Wert $\det(A)$ nennen wir auch die **Determinante** von A.

Für den Fall $n = 0$ gibt es genau eine Determinantenfunktion

$$\det\colon K^{0,0} \to K$$

welche definiert ist durch $\det(E_0) := 1$.

Zur Bedingung (D1): Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$. Seien $A' = (a'_{ij})$ und $A'' = (a''_{ij})$ ebenfalls in $K^{n,n}$, so dass es ein $1 \leq k \leq n$ gibt mit

$$a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$$

für alle $1 \leq j \leq n$, und $a_{ij} = a'_{ij} = a''_{ij}$, falls $i \neq k$. Dann gilt

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1} & \dots & a'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{k1} & \dots & a''_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}. \end{pmatrix}$$

Ferner gelte folgende Regel: Sei $A' = (a'_{ij}) \in K^{n,n}$, so dass es ein $1 \leq k \leq n$ und ein $\lambda \in K$ gibt mit

$$a_{kj} = \lambda a'_{kj}$$

für alle $1 \leq j \leq n$, und $a_{ij} = a'_{ij}$, falls $i \neq k$. Dann gilt

$$\det(A) = \lambda \det(A').$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1} & \dots & a'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}. \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen: Sei $\det\colon K^{n,n} \to K$ eine Determinantenfunktion.

(i) Nach (D1) gilt
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$
für alle $\lambda \in K$ und $A \in K^{n,n}$.

(ii) Für $n \geq 2$ ist det nicht linear, sondern *multilinear*. Man vergleiche (D1) mit der Definition einer bilinearen Abbildung.

– – – – – – – – – – – Ende Vorlesung 25 – – – – – – – – – – –

Lemma 12.1. *Sei* $\det\colon K^{n,n} \to K$ *eine Determinantenfunktion. Sei* $A \in K^{n,n}$*, und sei* $T \in K^{n,n}$ *eine Elementarmatrix. Dann gilt:*

(i) $\det(TA) = \det(A)$*, falls* T *vom Typ (I) ist;*

(ii) $\det(TA) = \lambda \det(A)$*, falls* $T = D_k(\lambda)$ *vom Typ (II) ist;*

(iii) $\det(TA) = -\det(A)$*, falls* T *vom Typ (III) ist.*

Beweis. (i): Sei $T = T_{st}(\lambda)$ eine Elementarmatrix vom Typ (I). Sei $A = A' = (a_{ij}) \in K^{n,n}$, und sei $A'' = (a''_{ij})$ definiert durch $a''_{sj} = \lambda a_{tj}$ für $1 \leq j \leq n$, und $a''_{ij} = a_{ij}$, falls $i \neq s$. Nach Regel (D1) folgt
$$\det(TA) = \det(A') + \det(A'').$$
Da nun die s-te Zeile von A'' ein Vielfaches der t-ten Zeile von A'' ist, gilt $\mathrm{Rang}(A'') < n$. Regel (D2) liefert dann $\det(A'') = 0$. Also haben wir $\det(TA) = \det(A)$ gezeigt.

(ii): Dies ist Teil der Regel (D1).

(iii): Für $i \neq j$ gilt
$$E_{ij} = D_i(-1) \cdot T_{ij}(1) \cdot T_{ji}(-1) \cdot T_{ij}(1).$$
Mit (i) und (ii) erhalten wir also
$$\begin{aligned}\det(E_{ij}A) &= \det(D_i(-1) \cdot T_{ij}(1) \cdot T_{ji}(-1) \cdot T_{ij}(1)A) \\ &= -1 \cdot \det(T_{ij}(1) \cdot T_{ji}(-1) \cdot T_{ij}(1)A) \\ &= -1 \cdot \det(A).\end{aligned}$$
□

Lemma 12.2. *Für* $n \geq 1$ *gilt:*

(i) *Sei* $A \in K^{n,n}$ *invertierbar. Dann gibt es Elementarmatrizen* $T_1, \ldots, T_t$ *vom Typ (I) und ein* $d \in K^\times$ *mit*
$$T_t \cdots T_1 A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = D_n(d).$$

(ii) *Sei* $\det\colon K^{n,n} \to K$ *eine Determinantenfunktion. Für* A *wie in (i) gilt dann* $\det(A) = d$.

(iii) *Es gibt höchstens eine Determinantenfunktion* $\det\colon K^{n,n} \to K$.

Beweis. (i): Dies entspricht Übungsaufgabe 5.14.3.

(ii): Mit A wie in (i) folgt aus Lemma 12.1(i) und (iii), dass

$$\det(A) = \det(T_t \cdots T_1 A) = \det(D_n(d)) = d \det(E_n) = d.$$

(iii): Sei $\det\colon K^{n,n} \to K$ eine Determinantenfunktion. Für nicht invertierbare $A \in K^{n,n}$ gilt $\det(A) = 0$. Für A wie in (i) folgt $\det(A) = \det(D_n(d)) = d$. Also kann es nur eine Determinantenfunktion geben. □

Korollar 12.3. *Sei* $\det\colon K^{n,n} \to K$ *eine Determinantenfunktion. Für* $A \in K^{n,n}$ *sind äquivalent:*

(i) *A ist invertierbar;*

(ii) $\det(A) \neq 0$.

Der folgende Satz beantwortet die Frage nach der Existenz von Determinantenfunktionen und liefert zudem eine Formel für die Berechnung von Determinanten.

Satz 12.4 (Laplacescher Entwicklungssatz)**.** *Für jedes $n \geq 0$ gibt es eine Determinantenfunktion*

$$\det\colon K^{n,n} \to K.$$

Für $n \geq 1$, $A \in K^{n,n}$ und $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}). \tag{3}$$

(Nach Definition entsteht $A_{ij} \in K^{n-1,n-1}$ aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.)

Beweis. Den Fall $n = 0$ haben wir schon behandelt. Sei also $n \geq 1$.

Wir beweisen die Existenz von det und die Gleichung (3) durch Induktion.

Sei $n = 1$, und sei $A = (a_{11}) \in K^{1,1}$. Wir definieren $\det(A) := a_{11}$. Man prüft nun leicht, dass (D1), (D2) und (D3) gelten. Ferner gilt

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(E_0) = a_{11}.$$

Sei nun $n > 1$, und der Satz sei richtig für $n - 1$. Für $A \in K^{n,n}$ definieren wir $\det(A)$ durch die Gleichung (3). Es ist zu zeigen, dass die so definierte Abbildung $\det\colon K^{n,n} \to K$ die Bedingungen (D1), (D2) und (D3) erfüllt.

(D1): Zu zeigen: det ist linear in jeder Zeile.

Sei $1 \leq k \leq n$, und seien $A' = (a'_{ij})$ und $A'' = (a''_{ij})$ in $K^{n,n}$ mit $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$ für alle $1 \leq j \leq n$ und $a_{ij} = a'_{ij} = a''_{ij}$ für alle $i \neq k$. Es ist zu zeigen, dass

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

Durch Verwendung der Induktionsannahme erhalten wir

$$a_{ij}\det(A_{ij}) = \begin{cases} (a'_{kj} + a''_{kj})\det(A_{kj}) & : \text{ falls } i = k, \\ a_{ij}(\det(A'_{ij}) + \det(A''_{ij})) & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Einsetzen in (3) liefert nun die Gleichung

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ij} \det(A'_{ij}) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a''_{ij} \det(A''_{ij}) \right) \\ &= \det(A') + \det(A''). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $A'_{kj} = A''_{kj} = A_{kj}$ für alle j.

Sei $1 \leq k \leq n$ und $\lambda \in K$. Dann zeigt man durch Einsetzen in (3) und Induktion, dass

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det(A).$$

(D3): Sei $A = (a_{ij}) = E_n$. Zu zeigen: $\det(E_n) = 1$.

Für $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det(E_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = (-1)^{j+j} \cdot 1 \cdot \det(E_{n-1}),$$

und nach der Induktionsannahme ist dies 1.

Für den Beweis von (D2) benötigen wir folgende Aussage: Für $1 \leq k \leq n-1$ gilt $\det(E_{k,k+1}A) = -\det(A)$. Dies zeigt man wiederum mit der Formel (3) und Induktion. Die Einzelheiten verbleiben als Übungsaufgabe.

(D2): Sei

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

mit $\mathrm{Rang}(A) < n$, wobei $z_1, \dots, z_n$ die Zeilen von A sind. Wir müssen zeigen, dass $\det(A) = 0$. Wir können annehmen, dass $z_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. (Andernfalls folgt bereits aus (D1), dass $\det(A) = 0$.)

Es gibt eine Zeile z_k und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_k = 0$, so dass

$$z_k = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s z_s$$

Wegen (D1) folgt dann

$$\det(A) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_s \\ \vdots \\ z_s \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

wobei in den Matrizen auf der rechten Seite die k-te Zeile und die s-te Zeile beide gleich z_s sind.

Sei $B = (b_{ij}) \in K^{n,n}$, und seien die k-te und s-te Zeile von B gleich, wobei $k \neq s$. Wir können annehmen, dass $k < s$. Wir müssen zeigen, dass $\det(B) = 0$. Mit den obigen Überlegungen folgt dann die Regel (D2).

Für $i \notin \{k, s\}$ gilt nach der Induktionsvoraussetzung $\det(B_{ij}) = 0$ für alle j, da $\operatorname{Rang}(B_{ij}) < n$. Aus der Definition von $\det(B)$ folgt dann

$$\begin{aligned} \det(B) &= (-1)^{k+j} b_{kj} \det(B_{kj}) + (-1)^{s+j} b_{sj} \det(B_{sj}), \\ &= (-1)^j b_{sj} \left((-1)^k \det(B_{kj}) + (-1)^s \det(B_{sj})\right) \end{aligned}$$

(Wir haben benutzt, dass $b_{kj} = b_{sj}$.)

Für $s = k + 1$ ist $B_{kj} = B_{sj}$ und $(-1)^k + (-1)^s = 0$, also auch $\det(B) = 0$.

Sei also $s > k + 1$. Wir können B_{sj} durch $s - k - 1$ Zeilenvertauschungen von benachbarten Zeilen in B_{kj} überführen. Genauer: Es gilt

$$B_{kj} = E_{s-2,s-1} \cdots E_{k+1,k+2} E_{k,k+1} B_{sj}.$$

Wir erhalten

$$\det(B_{kj}) = \det(E_{s-2,s-1} \cdots E_{k+1,k+2} E_{k,k+1} B_{sj}) = (-1)^{s-k-1} \det(B_{sj})$$

und damit

$$\begin{aligned} (-1)^k \det(B_{kj}) + (-1)^s \det(B_{sj}) &= (-1)^k (-1)^{s-k-1} \det(B_{sj}) + (-1)^s \det(B_{sj}) \\ &= \left((-1)^{s-1} + (-1)^s\right) \det(B_{sj}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $\det\colon K^{n,n} \to K$ eine Determinantenfunktion. □

Für die Formel in Satz 12.4 sagen wir auch, dass wir **die Determinante von A nach der j-ten Spalte entwickeln**.

Bemerkung (zum Beweis des Laplaceschen Entwicklungssatzes): Nach dem Beweis der Eigenschaften (D1) und (D3) können wir nicht einfach auf die in Lemma 12.1 genannten Rechenregeln zurückgreifen, da der Beweis des Lemmas auf allen drei Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) basiert.

Beispiele:

(i) Für $A = (a_{11}) \in K^{1,1}$ gilt $\det(A) = a_{11}$.

(ii) Sei
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$
Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt
$$\det(A) = (-1)^2 a_{11} \det(a_{22}) + (-1)^3 a_{21} \det(a_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(iii) Sei
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$
Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt
$$\det(A) = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

(iv) Sei
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$
Entwicklung nach der zweiten Spalte ergibt
$$\det(A) = -a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{32} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

12.2. **Rechenregeln für Determinanten.**

Lemma 12.5 (Multiplikativität). *Für $A, B \in K^{n,n}$ gilt*
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Beweis. Angenommen A oder B ist nicht invertierbar. Dann ist auch AB nicht invertierbar, und es gilt
$$\det(A)\det(B) = 0 = \det(AB).$$
Seien nun A und B beide invertierbar. Dann gibt es Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_t$ vom Typ (I) und $d \in K^\times$ mit
$$T_t \cdots T_1 A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = D_n(d).$$

Insbesondere gilt $\det(A) = d$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(T_t \cdots T_1 AB)\\ &= \det(D_n(d)B)\\ &= d\det(B)\\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

(Die erste Gleichheit gilt wegen Lemma 12.1(i), und die dritte folgt aus Lemma 12.1(ii).) □

– – – – – – – – – – – – Ende Vorlesung 26 – – – – – – – – – – – –

Korollar 12.6. *Für $A_1, \ldots, A_m \in K^{n,n}$ gilt*

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_n) = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_m).$$

Lemma 12.7. *Sei $T \in K^{n,n}$ eine Elementarmatrix. Dann gilt*

$$\det(T) = \begin{cases} 1 & : T \text{ ist vom Typ (I)},\\ \lambda & : T = D_k(\lambda) \text{ ist vom Typ (II)}, .\\ -1 & : T \text{ ist vom Typ (III)}.\end{cases}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wir haben nun also mehrere Wege für die Berechnung der Determinante einer Matrix $A \in K^{n,n}$. Erstens können wir die rekursive Formel im Laplaceschen Entwicklungssatz verwenden. (Dies ist jedoch sehr rechenintensiv.) Zweitens seien $T_1, \ldots, T_t$ Elementarmatrizen, so dass die Determinante von $B := T_t \cdots T_1 A$ leicht zu berechnen ist (z.B. $B = E_n$ oder $B = D_n(d)$ oder allgemeiner B ist eine obere oder untere Dreiecksmatrix (siehe unten)). Dann gilt

$$\det(A) = \frac{\det(B)}{\det(T_1)\cdots\det(T_t)}.$$

Lemma 12.8. *Sei A invertierbar. Dann gilt*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Beweis. Es gilt

$$1 = \det(E_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

□

Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in K^{2,2}$$

wobei $K = \mathbb{F}_7$. Dann ist $\det(A) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 0$. Mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Q}$ ist $\det(A) = 7 \neq 0$.

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ ist eine **obere Dreiecksmatrix**, falls

$$a_{ij} = 0$$

für alle $i > j$, d.h. A ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Lemma 12.9. *Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann gilt*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Beweis. Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}).$$

Nun ist A_{11} von der Form

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt die Aussage per Induktion. □

Lemma 12.10 (Kästchenformel)**.** *Sei $A \in K^{n,n}$ eine Matrix der Form*

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & * & * & * \\ 0 & B_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & B_m \end{pmatrix},$$

wobei die $B_i \in K^{n_i,n_i}$ quadratische Matrizen sind. Dann gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{m} \det(B_i).$$

Beweis. Es gibt Elementarmatrizen $T_1^{(i)}, \dots, T_{t_i}^{(i)} \in K^{n_i,n_i}$, so dass
$$C_i := T_{t_i}^{(i)} \cdots T_1^{(i)} B_i$$
eine obere Dreieckmatrix ist. Sei $t := \max\{t_1, \dots, t_m\}$. Wir erhalten Matrizen $T_1, \dots, T_t$ der Form
$$T_k = \begin{pmatrix} T_k^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & T_k^{(m)} \end{pmatrix},$$
so dass
$$T_t \cdots T_1 A = \begin{pmatrix} C_1 & * & * & * \\ 0 & C_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & C_m \end{pmatrix}$$
eine obere Dreiecksmatrix ist. (Hier sei $T_k^{(s)} := E_{n_s}$ für alle $k > t_s$.) Jedes T_k ist offenbar ein Produkt von m Elementarmatrizen. Dann sind äquivalent:

(a) $\det(B_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq m$;

(b) $\det(C_i) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq m$;

(c) $\det(A) \neq 0$.

(Dabei haben wir die Lemmata 12.1 und 12.9 verwendet.) Sei also jedes B_i invertierbar. Dann können wir annehmen, dass alle Elementarmatrizen $T_k^{(s)}$ vom Typ (I) oder gleich einer Einheitsmatrix sind. Nun folgt die Aussage aus den Lemmata 12.1(i) und 12.9. □

Beispiel: Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 2 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{7,7}$$
hat die Determinante
$$\det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-1) = 3.$$

Lemma 12.11. *Für $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ gilt*
$$\det(A^T) = \det(A).$$

Beweis. Falls A nicht invertierbar ist, dann ist auch A^T nicht invertierbar (wegen $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^T)$). Also ist $\det(A) = \det(A^T) = 0$.

Sei A invertierbar. Dann gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$ vom Typ (I) und $d \in K^\times$ mit
$$T_t \cdots T_1 A = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = D_n(d)$$
Aus Lemma 12.1 folgt dann, dass $\det(A) = d$. Also gilt
$$A = T_1^{-1} \cdots T_t^{-1} D_n(d)$$
und daher
$$A^T = D_n(d)(T_t^{-1})^T \cdots (T_1^{-1})^T.$$
Da die $(T_i^{-1})^T$ wieder Elementarmatrizen vom Typ (I) sind, erhalten wir
$$\det(A^T) = \det(D_n(d)) \cdot \prod_{i=1}^{t} \det((T_i^{-1})^T) = d = \det(A).$$
□

Als Korollar erhalten wir direkt eine Kästchenformel für Matrizen der Form
$$A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & B_2 & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & * & B_m \end{pmatrix}.$$

Korollar 12.12 (Entwicklung nach der j-ten Zeile)**.** *Für alle $1 \leq j \leq n$ gilt*
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A_{ji}).$$

Beweis. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$, $A^T = (a_{ij}^T)$ wobei $a_{ij}^T = a_{ji}$ für alle i, j. Mit $(A^T)_{ij} = (A_{ji})^T$ folgt
$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}^T \det((A^T)_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det((A_{ji})^T) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A_{ji}). \end{aligned}$$
□

Korollar 12.13. *Die Determinantenfunktion* $\det\colon K^{n,n} \to K$ *ist linear in jeder Spalte.*

Lemma 12.14 (Cramersche Regel für das Invertieren von Matrizen)**.** *Sei* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$*, und sei* $B = (b_{ij}) \in K^{n,n}$ *definiert durch*

$$b_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ji}).$$

Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass

$$AB = \det(A) \cdot E_n.$$

Sei $C = (c_{ij}) := AB$. Dann gilt für $1 \leq i, j \leq n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \det(A_{jk}) = \det(A').$$

Hierbei entsteht $A' = (a'_{ks})$ aus A durch Ersetzen der j-ten Zeile durch die i-te Zeile. Es gilt also $(A')_{jk} = A_{jk}$ und $a'_{jk} = a_{ik}$ für alle k. Die obige Formel entspricht also der Entwicklung von $\det(A')$ nach der j-ten Zeile. Für $i \neq j$ hat A' zwei gleiche Zeilen, d.h. in diesem Fall gilt $\det(A') = 0$. Es folgt

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & : \text{ falls } i \neq j, \\ \det(A) & : \text{ falls } i = j. \end{cases}$$

□

Satz 12.15 (Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme)**.** *Sei* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$*, und seien* $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$ *und* $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ *in* K^n *mit* $A(v) = b$*. Dann gilt*

$$v_1 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\ldots$$

$$v_n = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Für $1 \leq i \leq n$ sei $s_i := Ae_i$ die i-te Spalte von A. Es gilt also

$$v_1 s_1 + v_2 s_2 + \cdots + v_n s_n = b.$$

Für $1 \leq i \leq n$ erhalten wir die Gleichung

$$v_1 s_1 + \cdots + (v_i s_i - b) + \cdots + v_n s_n = 0.$$

Das K^n-Vektorsystem $(s_1, \ldots, s_{i-1}, v_i s_i - b, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ ist somit linear abhängig. Sei

$$B_i := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & (v_i a_{1i} - b_1) & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & (v_i a_{ni} - b_n) & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Da der Spaltenrang von B_i kleiner n ist, gilt $\det(B_i) = 0$. Mit der Linearität von det in der i-ten Spalte folgt

$$\det(B_i) = v_i \det(A) - \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

□

Die Cramersche Regel für (eindeutig lösbare) LGS ist für das praktische Berechnen der Lösung in der Regel nicht geeignet. Sie demonstriert aber erneut die Bedeutung des Determinantenbegriffs.

– – – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 27** – – – – – – – – – – – –

12.3. **Permutationen und Permutationsmatrizen.** Erinnerung:

Für $n \geq 1$ ist

$$S_n := \{f \in \operatorname{Abb}(I_n, I_n) \mid f \text{ ist bijektiv}\},$$

wobei $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, die **symmetrische Gruppe** vom Grad n.

Die Identität 1_{S_n} in S_n bezeichnen wir auch einfach mit 1. Die Elemente in S_n heißen **Permutationen**.

Mit Induktion zeigt man leicht, dass $|S_n| = n!$.

Für $1 \leq i, j \leq n$ sei $\sigma_{i,j} \in S_n$ definiert durch

$$\sigma_{i,j}(k) := \begin{cases} j & : \text{ falls } k = i, \\ i & : \text{ falls } k = j, \\ k & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\sigma_{i,j} \circ \sigma_{i,j} = 1 \quad \text{und} \quad \sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}.$$

Eine Abbildung der Form $\sigma_{i,j}$ mit $i \neq j$ heißt **Transposition**.

Lemma 12.16. *Jedes $\sigma \in S_n$ ist Produkt von höchstens $n-1$ Transpositionen.*

Beweis. Ein Produkt über die leere Menge ist nach Konvention immer gleich 1. Also ist $1 \in S_n$ Produkt von 0 Transpositionen. Die Aussage ist damit richtig für S_1. Sei also $n \geq 2$. Sei $\sigma \in S_n$, und sei $i := \sigma(n)$. Dann gilt $\sigma = \sigma_{i,n} \circ \tau$, wobei $\tau := \sigma_{i,n} \circ \sigma$. Es gilt

$$\tau \in S_n(n) := \{f \in S_n \mid f(n) = n\} \cong S_{n-1}.$$

Es folgt per Induktion, dass τ Produkt von höchstens $n-2$ Transpositionen aus $S_n(n)$ ist. $\square$

Sei $\sigma \in S_n$. Die zugehörige **Permutationsmatrix** $P_\sigma \in K^{n,n}$ ist definiert durch

$$P_\sigma(e_i) := e_{\sigma(i)}$$

für alle $1 \leq i \leq n$.

Beispiel: Sei $\sigma\colon 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1 \in S_3$. Wir erhalten

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 12.17. *Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt*

$$P_\sigma \cdot P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}.$$

Beweis. Es gilt

$$(P_\sigma \cdot P_\tau)(e_i) = P_\sigma(P_\tau(e_i)) = P_\sigma(e_{\tau(i)}) = e_{(\sigma\circ\tau)(i)} = P_{\sigma\circ\tau}(e_i).$$

$\square$

Sei

$$P_n := \{P_\sigma \mid \sigma \in S_n\}.$$

Nach dem obigen Lemma ist jede Permutationsmatrix P_σ invertierbar mit

$$P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}.$$

Es gilt also $P_n \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$.

Korollar 12.18. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \eta\colon S_n &\to P_n \\ \sigma &\mapsto P_\sigma \end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere ist P_n eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$, und sei $\sigma \in S_n$. Wir definieren eine Matrix $A_\sigma \in K^{n,n}$ durch

$$\begin{aligned} A_\sigma \colon K^n &\to K^n \\ e_i &\mapsto A(e_{\sigma(i)}) \end{aligned}$$

Die i-te Spalte von A_σ ist also

$$A_\sigma(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1\sigma(i)} \\ a_{2\sigma(i)} \\ \vdots \\ a_{n\sigma(i)} \end{pmatrix}.$$

Lemma 12.19. *Es gilt:*

(i) $A_\sigma = AP_\sigma$;
(ii) $\det(A_\sigma) = \det(A)\det(P_\sigma)$.

Beweis. (i): Es gilt

$$(AP_\sigma)(e_i) = A(e_{\sigma(i)}) = A_\sigma(e_i).$$

(ii): Hier wenden wir die Multiplikationsregel für Determinanten an. □

Lemma 12.20. *Sei $\sigma \in S_n$, und sei $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_r$ wobei $\tau_1, \dots, \tau_r$ Transpositionen sind. Dann gilt*

$$\det(P_\sigma) = \prod_{k=1}^{r} \det(P_{\tau_k}) = (-1)^r.$$

Beweis. Für alle $i \neq j$ ist $P_{\sigma_{i,j}} = E_{ij}$ eine Elementarmatrix vom Typ (III), und entsteht aus E_n durch Vertauschen der Zeilen i und j. Es gilt also

$$\det(P_{\sigma_{i,j}}) = -\det(E_n) = -1.$$

□

Korollar 12.21. *Es gilt*

$$P_n = \{T \in \mathrm{GL}_n(K) \mid T \textit{ ist Produkt von Elementarmatrizen vom Typ (III)}\}.$$

Im vorherigen Lemma und Korollar ist das Produkt über der leeren Menge wie immer gleich 1.

Sei $\sigma \in S_n$. Dann heißt σ **gerade**, falls $\det(P_\sigma) = 1$, und **ungerade**, falls $\det(P_\sigma) = -1$. Setze

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \det(P_\sigma).$$

Die Permutation σ ist also genau dann gerade, wenn σ Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist.

Lemma 12.22. *Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt:*

(i) $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$

(ii) $\operatorname{sgn}(1_{S_n}) = 1$

(iii) $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$

Beweis. (i): Klar.

(ii): Sei $1 = 1_{S_n}$ die Identität in S_n. Dann gilt $P_1 = E_n$. Wir erhalten $\det(P_1) = 1$.

(iii): Sei $\sigma = \sigma_{i_1,j_1}\sigma_{i_2,j_2}\cdots\sigma_{i_t,j_t}$. Dann gilt $\sigma^{-1} = \sigma_{i_t,j_t}\cdots\sigma_{i_1,j_1}$. □

Für $1 \leq i \leq n-1$ sei $\sigma_i := \sigma_{i,i+1} \in S_n$. Dann gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= 1_{S_n} && \text{für alle } 1 \leq i \leq n-1, \\ \sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i && \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ mit } |i-j| \geq 2, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} && \text{für alle } 1 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

Dies sind die *definierenden Relationen* von S_n.

Lemma 12.23. *Jedes $\sigma \in S_n$ ist Produkt von Transpositionen der Form σ_i mit $1 \leq i \leq n-1$.*

Beweis. Für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i.$$

Nun folgt die Aussage aus Lemma 12.16. □

12.4. **Leibnizsche Determinantenformel.**

Satz 12.24 (Leibnizsche Determinantenformeln). *Für $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ gilt*

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Beweis. Die j-te Spalte von A ist

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Für $B \in K^{n,n}$ und $1 \leq i, j \leq n$ sei $B[i,j]$ die Matrix, welche wir aus B erhalten, indem wir die i-te Spalte von B durch e_j ersetzen.

Die Entwicklung von $\det(A)$ nach der ersten Spalte liefert die Formel

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \det(A[1, i_1]).$$

(Dies sehen wir, indem wir auch $\det(A[1, i_1])$ nach der ersten Spalte entwickeln und dann die Formeln vergleichen.)

Durch Entwicklung von $\det(A[1, i_1])$ nach der zweiten Spalte erhalten wir

$$\det(A[1, i_1]) = \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} \det\left((A[1, i_1])[2, i_2]\right).$$

Wir fahren induktiv fort und erhalten

$$\det(A) = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in I^n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(P_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)}),$$

wobei $I = \{1, 2, \ldots n\}$ und $P_{(i_1, \ldots, i_n)}$ ist die Matrix mit $P_{(i_1, \ldots, i_n)}(e_j) = e_{i_j}$ für $1 \leq j \leq n$.

Falls $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, so gilt $P_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} = P_\sigma$ wobei $\sigma(j) := i_j$ für $1 \leq j \leq n$. Falls $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, so erhalten wir $\det(P_{(i_1, \ldots, i_n)}) = 0$, da mindestens zwei Spalten gleich sind.

Es gilt also

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Da $A^T = (a^T_{ij})$ mit $a^T_{ij} := a_{ji}$ für alle i, j, folgt

$$\begin{aligned}\det(A) = \det(A^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a^T_{\sigma(1)1} \cdots a^T_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

□

Beispiele:

(i) Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

gilt $\det(A) = \operatorname{sgn}(1) a_{11} a_{22} + \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{21} a_{12}$.

(ii) Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned}\det(A) = {} & \operatorname{sgn}(1) a_{11} a_{22} a_{33} + \operatorname{sgn}(\sigma_1) a_{21} a_{12} a_{33} \\ & + \operatorname{sgn}(\sigma_2) a_{11} a_{32} a_{23} + \operatorname{sgn}(\sigma_1\sigma_2) a_{21} a_{32} a_{13} \\ & + \operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1) a_{31} a_{12} a_{23} + \operatorname{sgn}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) a_{31} a_{22} a_{13}.\end{aligned}$$

12.5. **Sylvester Kriterium für positive Definitheit.** Für $n \geq 1$ sei $[1, n] := \{1, \ldots, n\}$. Sei $A \in K^{n,n}$, und seien I und J Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit $k := |I| = |J| \geq 1$. Sei $A_{I,J} \in K^{k,k}$ die Matrix, welche aus A durch das Streichen aller i-ten Zeilen und j-ten Spalten mit $i \in [1, n] \setminus I$ und $j \in [1, n] \setminus J$ hervorgeht.

Der **Minor** $d_{I,J}(A)$ von A ist definiert als

$$d_{I,J}(A) := \det(A_{I,J}).$$

Beispiel: Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

und $I = \{1, 3\}$ und $J = \{1, 4\}$. Dann ist

$$A_{I,J} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

und $d_{I,J}(A) = 14$.

Die folgende Rechenregel für Determinanten benötigen wir für den Beweis des nächsten Satzes.

Lemma 12.25. *Für $1 \leq s < n$ sei*
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$
wobei $A \in K^{s,s}$ invertierbar ist. Dann gilt
$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

Beweis. Es gilt
$$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ -CA^{-1} & E_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$
Damit folgt die Behauptung aus der Kästchenformel 12.10. □

Satz 12.26 (Sylvester Kriterium). *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $A = \overline{A}^T$ sind äquivalent:*

(i) *Die symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Sesquilinearform*
$$s_A \colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$
ist positiv definit;

(ii) *Für alle $1 \leq s \leq n$ gilt $d_{I_s,I_s}(A) > 0$ wobei $I_s := [1, s]$.*

— — — — — — — — — — — — **Ende Vorlesung 28** — — — — — — — — — — — —

Beweis. Für $1 \leq s \leq n$ sei $A_s := A_{I_s,I_s}$. Dann ist A von der Form
$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \overline{v} \\ v^T & d \end{pmatrix}$$
wobei $v \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $d \in \mathbb{K}$. Falls A_{n-1} invertierbar ist, so gilt nach Lemma 12.25, dass
$$\det(A) = \det(A_{n-1})\det(d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v}).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei s_A positiv definit, und sei $1 \leq s \leq n$. Für
$$x \in K^s \qquad \text{sei} \qquad x' := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n.$$
Falls $x \neq 0$ so gilt
$$x^T A_s \overline{x} = x'^T A \overline{x'} > 0.$$
Also ist s_{A_s} positiv definit. Insbesondere ist A_s invertierbar. (Angenommen A_s ist nicht invertierbar. Dann gibt es ein $x \neq 0$ mit $A_s\overline{x} = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu

$x^T A_s \overline{x} > 0$.) Es folgt

$$\begin{aligned}(-v^T A_{n-1}^{-1}, 1)\begin{pmatrix} A_{n-1} & \overline{v} \\ v^T & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\overline{-v^T A_{n-1}^{-1}}\right)^T \\ 1\end{pmatrix} &= (0, d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v})\begin{pmatrix}\left(\overline{-v^T A_{n-1}^{-1}}\right)^T \\ 1\end{pmatrix} \\ &= d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v} > 0.\end{aligned}$$

Für $s = 1$ gilt offenbar $\det(A_s) > 0$. Wir nehmen nun an, dass $\det(A_s) > 0$ für alle $1 \leq s \leq n-1$. Lemma 12.25 zusammen mit der Induktionsannahme $\det(A_{n-1}) > 0$ impliziert nun

$$\det(A) = \det(A_{n-1})\det(d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v}) > 0.$$

(ii) $\implies$ (i): Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich. Sei also $n \geq 2$. Sei

$$x' = \begin{pmatrix} x \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

wobei $x \in \mathbb{K}^{n-1}$ und $x_n \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x'^T A \overline{x'} &= (x^T A_{n-1} + x_n v^T, x^T \overline{v} + x_n d)\begin{pmatrix}\overline{x} \\ \overline{x_n}\end{pmatrix} \\ &= x^T A_{n-1}\overline{x} + x_n v^T \overline{x} + x^T \overline{v x_n} + d|x_n|^2.\end{aligned}$$

Sei nun $c := x_n \overline{A_{n-1}^{-1}} v \in \mathbb{K}^{n-1}$. Eine einfache Rechnung liefert

$$\begin{aligned}(x^T + c^T)A_{n-1}\overline{(x+c)} + |x_n|^2(d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v}) &= x^T A_{n-1}\overline{x} + x_n v^T \overline{x} + x^T \overline{v x_n} + d|x_n|^2 \\ &= x'^T A \overline{x'}.\end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme ist $s_{A_{n-1}}$ positiv definit. Für $x + c \neq 0$ gilt also $(x^T + c^T)A_{n-1}\overline{(x+c)} > 0$. Wegen $\det(A) > 0$ und $\det(A_{n-1}) > 0$ folgt aus Lemma 12.25, dass $d - v^T A_{n-1}^{-1}\overline{v} > 0$. Eine einfache Fallunterscheidung impliziert nun, dass $x'^T A \overline{x'} > 0$ falls $x' \neq 0$. Mit anderen Worten, s_A ist positiv definit. □

Beispiele:

(i) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

erfüllt $A = A^T$ und ist positiv definit. (Es gilt $\det(A_{I_1,I_1}) = 1$ und $\det(A_{I_2,I_2}) = 2$.)

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$

erfüllt $A = \overline{A}^T$ und ist positiv definit. (Es gilt $\det(A_{I_1,I_1}) = \det(A_{I_2,I_2}) = 1$.)

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

erfüllt $A = A^T$ und ist nicht positiv definit. (Es gilt $\det(A_{I_2,I_2}) = -3$.)

12.6. **Determinanten und Volumen.** Erinnerung:

Lemma 12.27. *Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ ein V-Vektorsystem. Dann gibt es Vektoren $b, c \in V$, so dass gilt:*

(i) $v_1 = b + c$;
(ii) $b \perp \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$;
(iii) $c \in \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$.

Beweis. Setze $U := \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$. Wir wissen, dass $V = U \perp U^\perp$. Es gilt dann $v_1 = b + c$ mit $b \in U^\perp$ und $c \in U$. □

Sei $(\mathbb{R}^n, s^n)$ der n-dimensionale euklidische Vektorraum mit Standardskalarprodukt s^n.

Für ein linear unabhängiges V-Vektorsystem $v = (v_1, \ldots, v_m)$ mit $m \geq 1$ ist

$$P(v) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

das von v aufgespannte **Parallelotop**.

Das **Volumen** von $P(v)$ ist dann wie folgt induktiv definiert: Für $m = 1$ sei $\mathrm{Vol}(P(v)) = \|v_1\|$. Sei nun $m \geq 2$. Sei $v' := (v_2, \ldots, v_m)$, und sei $P' := P(v')$. Nach Lemma 12.27 können wir v_1 als $v_1 = b + c$ schreiben, so dass $b \perp \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$ und $c \in \mathrm{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$. Dann sei

$$\mathrm{Vol}(P) := \|b\| \cdot \mathrm{Vol}(P')$$

das **Volumen** von $P(v)$.

Beispiel: Es gilt

$$\mathrm{Vol}(P(e_1, \ldots, e_n)) = 1.$$

Sei

$$A(v) := [v_1 | \cdots | v_m] \in \mathbb{R}^{n,m}$$

die Matrix mit $A(v)(e_i) = v_i$ für $1 \leq i \leq m$. Es gilt dann

$$A^T A = (\langle v_i, v_j \rangle) \in \mathbb{R}^{m,m}.$$

Der folgende Satz besagt unter anderem, dass das Volumen von $P(v)$ nicht von der Anordnung der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ abhängt.

Satz 12.28. *Es gilt*
$$\operatorname{Vol}(P(v)) = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über m. Sei zuerst $m = 1$. Dann ist
$$A^T A = v_1^T v_1 = \|v_1\|^2.$$
Also gilt
$$\operatorname{Vol}(P(v)) = \|v_1\| = \sqrt{\det(A^T A)}.$$

Sei $m \geq 2$, und sei $U := \operatorname{Lin}(v_2, \ldots, v_m)$. Nach Lemma 12.27 gilt $v_1 = b + c$ mit $b \in U^\perp$ und $c \in U$. Sei
$$A' := [b|v_2| \cdots |v_m].$$
Dann gibt es Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_s$ vom Typ (I), so dass
$$A = A' T_1 \cdots T_s.$$
Wir erhalten
$$\det(A^T A) = \det(T_s^T \cdots T_1^T (A')^T A' T_1 \cdots T_s) = \det((A')^T A).$$
Sei
$$D := [v_2| \cdots |v_m].$$
Dann gilt
$$(A')^T A' = \begin{pmatrix} b^T \\ D^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^T b & b^T D \\ D^T b & D^T D \end{pmatrix}$$
Wegen $b \perp v_i$ für alle $2 \leq i \leq m$ gilt $b^T D = 0$ und $D^T b = 0$. Also ist
$$\det((A')^T A') = b^T b \cdot \det(D^T D).$$

Sei $P := P(v_1, \ldots, v_m)$ und $P' := P(v_2, \ldots, v_m)$. Nach Induktion gilt $\operatorname{Vol}(P')^2 = \det(D^T D)$. Es folgt dann
$$\operatorname{Vol}(P) = \|b\| \cdot \operatorname{Vol}(P') = \sqrt{b^T b} \cdot \sqrt{\det(D^T D)} = \sqrt{\det(A^T A)}.$$
□

In der Maßtheorie wird der Volumenbegriff weiterentwickelt, so dass man ihn auf kompliziertere Mengen anwenden kann. Maßtheorie ist eine der Grundlagen für Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

12.7. **Determinanten von Endomorphismen.**

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei B eine geordnete Basis von V. Für $f \in \operatorname{End}(V)$ ist

$$\det(f) := \det(\mathbf{c}_{B,B}(f))$$

die **Determinante** von f.

Dies ist wohldefiniert, d.h. $\det(f)$ hängt nicht von B ab.

Nämlich, sei C eine weitere geordnete Basis von V. Es folgt

$$\mathbf{c}_{C,C}(f) = \mathbf{c}_{B,C}(\mathrm{id}_V)\mathbf{c}_{B,B}(f)\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)$$

und $\mathbf{c}_{B,C}(\mathrm{id}_V) = (\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V))^{-1}$. Sei $S := \mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_V)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{c}_{C,C}(f)) &= \det(S^{-1}\mathbf{c}_{B,B}(f)S)\\ &= \det(S^{-1})\det(\mathbf{c}_{B,B}(f))\det(S)\\ &= \det(\mathbf{c}_{B,B}(f)).\end{aligned}$$

Lemma 12.29. *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Für $f, g \in \operatorname{End}(V)$ gilt dann*

(i) $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = \det(f)\det(g)$;

(ii) *Falls f ein Isomorphismus ist, so gilt* $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$;

(iii) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$;

(iv) *f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn* $\det(f) \neq 0$.

Beweis. Routine! □

12.8. **Charakteristische Polynome.**

Sei R ein kommutativer nullteilerfreier Ring (z.B. der Polynomring $K[X]$).

Definiere $R^{n,n}$ analog zur Definition von $K^{n,n}$, und setze

$$\begin{aligned}\det\colon R^{n,n} &\to R\\ A = (a_{ij}) &\mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.\end{aligned}$$

Mit dieser Definition können wir alle Rechenregeln für Determinanten analog beweisen. Einzige Ausnahme: Die Aussage

$$A \in K^{n,n} \text{ ist invertierbar} \iff \det(A) \neq 0$$

wird ersetzt durch

$$A \in R^{n,n} \text{ ist invertierbar} \iff \det(A) \text{ ist invertierbar in } R.$$

Die obige Verallgemeinerung der Determinante brauchen wir für folgende Definition:

Das **charakteristische Polynom** von $A \in K^{n,n}$ ist definiert als

$$\mathcal{X}_A := \det(XE_n - A)$$

wobei wir $XE_n - A$ als Matrix in $K[X]^{n,n}$ auffassen. Wir nennen

$$M_X(A) := XE_n - A$$

die **charakteristische Matrix** von A.

Beispiel: Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K^{2,2}$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A &= \det\left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & X - a_{22} \end{pmatrix}\right) \\ &= (X - a_{11})(X - a_{22}) - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Proposition 12.30. *Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom.*

Beweis. Seien A und $B \in K^{n,n}$ ähnlich. Dann gibt es nach Definition ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^{-1}AS = B$. Wegen $XE_n = S^{-1}(XE_n)S$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_B &= \det(XE_n - B) = \det(S^{-1}XE_nS - S^{-1}AS) \\ &= \det(S^{-1}(XE_n - A)S) = \det(S^{-1})\det(XE_n - A)\det(S) \\ &= \det(XE_n - A) = \mathcal{X}_A. \end{aligned}$$

□

Korollar 12.31. *Seien $A, B \in K^{n,n}$ mit $\mathcal{X}_A \neq \mathcal{X}_B$. Dann sind A und B nicht ähnlich.*

Beispiele:

(i) Für $\lambda \in K$ sei $A_\lambda := (\lambda) \in K^{1,1}$. Dann gilt $\mathcal{X}_A = X - \lambda$. Für $\lambda \neq \mu$ sind A_λ und A_μ also nicht ähnlich. (Eine Aussage, welche natürlich auch so klar ist.)

(ii) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind A und B nicht ähnlich, weil $S^{-1}AS = A$ für alle $S \in \mathrm{GL}_2(K)$. Jedoch gilt $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X-1)(X-1)$.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Sei B eine geordnete Basis von V, und sei $A := \mathbf{c}_{B,B}(f)$. Dann ist $\mathcal{X}_f := \mathcal{X}_A$ das **charakteristische Polynom** von f.

Dies ist nach Proposition 12.30 wohldefiniert, d.h. $\mathcal{X}_f$ hängt nicht von der Wahl von B ab.

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) < \infty$ gegeben. Wählen wir eine geordnete Basis B von V, so gilt für $A := \mathbf{c}_{B,B}(f)$, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(f) &= \mathrm{Rang}(A), \\ \det(f) &= \det(A), \\ \mathcal{X}_f &= \mathcal{X}_A. \end{aligned}$$

Wir verwenden diese Invarianten, um f zu studieren. Als weitere Invarianten von f werden wir später auch die Teiler des Polynoms $\mathcal{X}_f$ betrachten.

Beispiel: Sei

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und sei $B = (e_1, e_2)$. Dann ist

$$A := \mathbf{c}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\mathcal{X}_f = X^2 + 1$. Die Nullstellen von $\mathcal{X}_f$ in $\mathbb{C}$ sind $\{i, -i\}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die geordnete Basis

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{C}^2$ erhalten wir

$$\mathbf{c}_{C,C}(f) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen von $\mathcal{X}_f$ haben uns also geholfen, eine geordnete Basis C zu finden, bezüglich welcher die Koordinatenmatrix von f eine Diagonalmatrix ist.

Hier deutet sich bereits das Wechselspiel zwischen Linearer Algebra und Algebra an. Polynome sind offenbar nicht-lineare Objekte und sind eigentlich Gegenstand der Algebra. Man benötigt jedoch ein gewisses Verständnis der Polynome $\mathcal{X}_f$, um tiefere Aussagen über das lineare Objekt f zu beweisen.

12.9. **Übungsaufgaben.**

12.9.1. Zeigen Sie:

(i) In Lemma 12.23 benötigt man höchstens
$$\frac{n(n-1)}{2}$$
Transpositionen.

(ii) Für $\sigma \in S_n$ gilt
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

12.9.2. Bestimmen Sie die Determinante von
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$
mit Hilfe des verfeinerten Gauß-Algorithmus (d.h. man verwende nur elementare Zeilenumformungen vom Typ (I)) und mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Welcher Algorithmus ist i.A. schneller?

12.9.3. Seien $a, b \in K$, und sei
$$A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in K^{n,n}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\det(A) = (b-a)^{n-1}(b + (n-1)a).$$

12.9.4. Seien $a_1, \dots, a_n \in K$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

die zugehörige **Vandermonde Matrix**. Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

12.9.5. Beweisen Sie die **Sarrus Regel**: Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in K^{3,3}$$

gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

12.9.6. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4-a & -1 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ -9 & 3 & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

gleich 0?

12.9.7. Für $a \in \mathbb{R}$ bestimmen Sie die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

12.9.8. Lesen Sie die Wikipedia Artikel zu Wronski Determinante, Pfaffsche Determinante, Vandermonde Determinante, Gramsche Determinante und Funktionaldeterminante.

– – – – – – – – – – – **Ende Vorlesung 29** – – – – – – – – – – –

– – – – – – – – – – – **Ende Lineare Algebra 1** – – – – – – – – – – –

– – – – – – – – – – – **Beginn Lineare Algebra 2** – – – – – – – – – – –

13. **Historische Notizen**

In diesem Abschnitt werden einige Mathematiker erwähnt, die wesentlich zur Entwicklung der Linearen Algebra im weitesten Sinne beigetragen haben. Zumindest stichwortartig werden auch einige ihrer damit zusammenhängenden Leistungen genannt. Natürlich haben sie auch noch vieles andere entdeckt und sich auch mit Physik, Astronomie, Philosophie und anderen schönen Dingen beschäftigt.

13.1. **Mathematiker.**

- **(Einige) Babylonier** (2000 v. Chr.): LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten.

- Lehrbuch **Jiu Zhang Suanshu** (Neun Kapitel der Rechenkunst), Kapitel 8 (China, etwa 200 v. Chr.): Lösungsverfahren für LGS, welches in etwa dem Gauß-Algorithmus für n Gleichungen mit n Unbekannten entspricht und auch *Fangcheng Algorithmus* (Rechteck-Anordnung Algorithmus) genannt wird.

- **François Georges René Bruhat** (∗1929 Paris; †2007 Paris): Lie-Gruppen und algebraischen Gruppen. Bruhat-Zerlegung.

- **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (∗1845 Sankt Petersburg; †1918 Halle an der Saale): Mengenlehre. Schüler von Weierstraß.

- **Élie Joseph Cartan** (∗1869 Dolomieu; †1951 Paris): Satz von Cartan-Dieudonné.

- **Henri Paul Cartan** (∗1904 Nancy; †2008 Paris): Gründungsmitglied von Nicolas Bourbaki.

- **Augustin Louis Cauchy** (∗1789 Paris; †1857 Sceaux): Multiplikationsvorschrift für Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$.

- **Arthur Cayley** (∗1821 Richmond upon Thames; †1895 Cambridge): Systematische Untersuchung von Matrizen als algebraische Objekte. Ringstruktur auf $M_n(\mathbb{R})$ und $M_n(\mathbb{C})$. Den Begriff *Ring* gab es aber noch nicht.

- **Gabriel Cramer** (∗1704 Genf; †1752 Bagnols-sur-Cèze): Lösungsformel (unter Verwendung von Determinanten) für LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten. Bis ins 18. Jhd. wurden nur solche LGS untersucht.

- **René Descartes** (∗1596 La Haye en Touraine (heutiger Name: Descartes); †1650 Stockholm): Kartesische Koordinaten. Grundlage für die algebraische Behandlung von Vektoren.

- **Jean Alexandre Eugène Dieudonné** ($*$1906 Lille; †1992 Paris): Satz von Cartan-Dieudonné. Gründungsmitglied von Nicolas Bourbaki.

- **Ferdinand Gotthold Max Eisenstein** ($*$1823 Berlin; †1852 Berlin): Bemerkung über die Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation. Determinantenkriterium für die Invertierbarkeit von Matrizen.

- **Abraham Halevi Fraenkel** ($*$1891 München; †1965 Jerusalem): Axiome der Mengenlehre.

- **Ferdinand Georg Frobenius** ($*$1849 Berlin; †1917 Charlottenburg (heute Teil von Berlin)): Vollständiger Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton. Definiert den *Rang* einer Matrix. Satz von Frobenius (zur Ähnlichkeit von Matrizen). Frobenius-Normalform.

- **Carl Friedrich Gauß** ($*$1777 Braunschweig; †1855 Göttingen): Verwendung des Gauß-Algorithmus, dessen Entdeckung Gauß aber nicht für sich beansprucht. Lösen von beliebigen LGS, jedoch ohne die Verwendung von Matrizen. Einführung von Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen. Die Komposition solcher Abbildungen führte zur (indirekten) Definition des Matrizenprodukts. Fundamentalsatz der Algebra.

- **Kurt Friedrich Gödel** ($*$1906 Brünn; †1978 Princeton): Unvollständigkeitssätze.

- **Hermann Günter Graßmann** ($*$1809 Stettin; †1877 Stettin): Ausdehnungslehre (1844). Ein ganz wichtiges Werk, auch über die Grundlagen der Linearen Algebra, welches aber niemand gelesen hat. Da auch Graßmanns anderen Arbeiten ignoriert wurden, ist er schließlich Sprachwissenschaftler geworden. Heutzutage gelten Graßmanns mathematischen Einsichten als bahnbrechend.

- **William Rowan Hamilton** ($*$1805 Dublin; †1865 Dunsink): Studium komplexer Zahlen und Quaternionen. Erste Schritte in Richtung eines abstrakten Vektorraumbegriffs.

- **Helmut Hasse** ($*$1898 Kassel; †1979 Ahrensburg): Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}$.

- **Charles Hermite** ($*$1822 Dieuze, Lothringen; †1901 Paris): Transzendenz der Eulerschen Zahl e (1873).

- **Camille Jordan** ($*$1838 Lyon; †1922 Paris): Jordan-Normalform von Endomorphismen (1870).

- **Leopold Kronecker** (∗1823 Liegnitz; †1891 Berlin): (Beinahe vollständige) Klassifikation von Paaren von Homomorphismen modulo Basiswechsel (1874).

- **Pierre-Simon (Marquis de) Laplace** (∗1749 Beaumont-en-Auge, Normandie; †1827 Paris).

- **Gottfried Wilhelm Leibniz** (∗1646 Leipzig; †1716 Hannover): Lösungstheorie für LGS. Determinanten für n Gleichungen und n Unbekannte für $n = 2, 3$.

- **Carl Louis Ferdinand von Lindemann** (∗1852 Hannover; †1939 München): Transzendenz der Kreiszahl π (1882).

- **Hermann Minkowski** (∗1864 Aleksotas, Russisches Kaiserreich, heute Litauen; †1909 Göttingen): Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{Q}$. Erkannte, dass die spezielle Relativitätstheorie im nach ihm benannten Minkowski-Raum betrachtet werden kann. Hörte Vorlesungen bei Kronecker und Weierstraß. Assistenzprofessor in Bonn.

- **Guiseppe Peano** (∗1858 Cuneo; †1932 Turin): Axiomatische Definition reeller Vektorräume.

- **Oskar Perron** (∗1880 Frankenthal; †1975 München): Schrieb einige sehr schöne Lehrbücher, z.B. über Kettenbrüche. Wichtige Beiträge zur Matrizentheorie (z.B. Satz von Perron-Frobenius).

- **Leonardo da Pisa**, auch **Fibonacci** genannt (∗1170 Pisa; † zwischen 1240-1250 Pisa): Verfasste das Rechenbuch *Liber abbaci* (1202), in welchem die Fibonacci Folge vorkommt.

- **Henry John Stephen Smith** (∗1826 Dublin; †1883 Oxford): Beiträge zur Zahlentheorie und Matrixtheorie. Smith-Normalform.

- **James Joseph Sylvester** (∗1814 London; †1897 London): Führt den Begriff *Matrix* ein. Klassifikation quadratischer Formen über $\mathbb{R}$ (Sylvesterscher Trägheitssatz).

- **Alexandre-Théophile Vandermonde** (∗1735 Paris; †1796 Paris): Vandermonde Determinante.

- **Bartel Leendert van der Waerden** (∗1903 Amsterdam; †1996 Zürich): Verfasst 1930 das Buch *Moderne Algebra*, in dem er K-Vektorräume über beliebigen Körpern als Spezialfall von Moduln über Ringen einführt.

- **Joseph Wedderburn** (∗1882 Forfar (Schottland); †1948 Princeton): Matrizen über beliebigen Körpern.

- **Karl Theodor Wilhelm Weierstraß** (∗1815 Ostenfelde; †1897 Berlin): Weierstraß-Normalform von Endomorphismen (1868). Von 1834-1838 hat Weierstraß in Bonn Rechtswissenschaft und Finanzwesen studiert.

- **Ernst Witt** (∗1911 auf Alsen, Deutsches Reich, heute Dänemark; †1991 Hamburg): Quadratische Formen über beliebigen Körpern. Wittscher Kürzungssatz.

- **Hans Julius Zassenhaus** (∗1912 Koblenz; †1991 Columbus, Ohio): Zassenhaus-Algorithmus zur Berechnung von Basen von Summen und Durchschnitten von Unterräumen von Vektorräumen. (Hierzu gibt es aber keinen Literaturnachweis.)

- **Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo** (∗1871 Berlin; †1953 Freiburg im Breisgau): Axiome der Mengenlehre.

- **Max August Zorn** (∗1906 Krefeld; †1993 Bloomington): Zornsches Lemma.

13.2. **Zitate.**

- Neil deGrasse Tyson (1958-): The universe is under no obligation to make sense to you.
- Leopold Kronecker, Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen (1874). Als Schlussbemerkung schreibt Kronecker:
  Die vorstehenden Entwickelungen zeigen, dass in der Jordan'schen Abhandlung die Lösung des ersten Problems nicht eigentlich neu ist, während die des zweiten sich als gänzlich verfehlt und die des dritten als durchaus unzulänglich begründet erwiesen hat. Nimmt man hinzu, dass eben dieses dritte Problem in Wahrheit die beiden ersten als besondere Fälle umfasst, dass ferner dessen vollständige Lösung einestheils unmittelbar aus der Weierstrass'schen Arbeit vom Jahre 1868 folgt und anderntheils mit leichter Mühe aus den Bemerkungen entnommen werden kann, welche ich damals daran angeschlossen habe, so ist wahrlich hinreichender Grund vorhanden, Hrn. Jordan „seine Resultate", soweit sie eben richtig sind, streitig zu machen. Aber nicht um dieses untergeordneten Zweckes willen bin ich hier und in meiner früheren Mittheilung auf die Jordan'schen Arbeiten näher eingegangen; es galt vielmehr die wirkliche Bedeutung der darin enthaltenen Methoden und Resultate zu ermitteln und ihre Beziehungen zu den vorher bekannten aufzuklären. Es war also nicht die Feststellung der Priorität, sondern die Feststellung der Wahrheit der eigentliche Zweck meiner Ausführungen, aber sie erfüllen nebenher auch die Bestimmung, es im Voraus zu rechtfertigen, wenn ich mich künftig der Rücksichtnahme auf die bezüglichen Jordan'schen Publicationen enthalte.

- Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799):
  Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht. Es ist fast mit der Mathematik wie mit der Theologie. So wie die letzteren Beflissenen, zumal wenn sie in Ämtern stehen, Anspruch auf einen besonderen Kredit von Heiligkeit und eine nähere Verwandtschaft mit Gott machen, obgleich sehr viele darunter wahre Taugenichtse sind, so verlangt sehr oft der so genannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die größten Plunderköpfe gibt, die man finden kann, untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert, wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine, als des Denkens sind.
- Friedrich Wille (1935-1992): Beweisen muß ich diesen Käs', sonst ist die Arbeit unseriös.
- Aus einem Matheforum: Der Sonntag ist eigentlich zu spät, um einen Vortrag für Montag vorzubereiten.

Literatur

[Bo] Bosch, Lineare Algebra.

[Br] Frédéric Brechenmacher, Histoire du Theoreme de Jordan de la decomposition de matricielle (1870-1930). Formes de représentations et méthodes de décompositions. Doktorarbeit. 2006.

[B1] Egbert Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie. I. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983. viii+636 pp.

[B2] Egbert Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie. II. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985. xiv+534 pp.
Zwei sehr schöne Bücher mit viel Anschauungsmaterial und historischen Anmerkungen.

[C] Carla Cederbaum (Hrsg.) et al, Ein Moment für Mensch und Mathematik: Mit Interviews von Albrecht Beutelspacher, Günter M. Ziegler u.a. Freiburger Verlag, 2007. 200 pp.

[F] Gerd Fischer, Lineare Algebra. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1979. vi+248 pp.
Ein häufig verwendetes Standardwerk.

[Gab] Peter Gabriel, Matrizen, Geometrie, lineare Algebra. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. xii+634 pp.
Ein sehr interessantes Buch. Hier wird die Lineare Algebra (fast) nur mit Matrizen entwickelt. Dies führt zu der Frage: Warum brauchen wir eigentlich Vektorräume, wenn scheinbar alles auch mit Matrizen machbar ist? Eine wirklich gute Antwort findet man eher außerhalb der Linearen Algebra.

[Gan] Felix Gantmacher, Matrizentheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986. 654 pp.
Enthält viele schöne Anwendungen der Linearen Algebra. Nicht immer gut geschrieben.

[H] Bettina Heintz, Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Springer-Verlag, Vienna, 2000. 318 pp.

[Hu] Bertram Huppert, Angewandte Lineare Algebra. De Gruyter. 654 pp.

[J] Klaus Jänich, Lineare Algebra. Springer-Verlag, 2008. xii+270 pp.
Sehr schön und didaktisch geschrieben. Empfehlenswert. Manche Kollegen halten die zahlreichen Jänich Bücher für nicht anspruchsvoll genug.

[Jo] Camille Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. 1870.
Hier wird die Jordan-Normalform entdeckt. Natürlich auf Französisch!

[K] Ina Kersten, Analytische Geometrie und Lineare Algebra. Vorlesungsskript. 2002. 255 pp.
Einige Teile meiner Vorlesung stammen aus dieser Vorlesungsmitschrift, vor allem beim Kapitel über metrische Vektorräume habe ich vieles übernommen aber auch einiges verändert. Es gibt Parallelen zur Herangehensweise in Brieskorns o.g. Büchern.

[Ko] Max Koecher, Lineare Algebra und analytische Geometrie. Springer-Verlag, Berlin, 1983. xi+286 pp.

[K] Leopold Kronecker, Über Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen. 1874. 63 pp.
Pflichtlektüre! Kronecker wettert in dem Artikel ausführlich gegen Jordan.

[LW] Hanfried Lenz, Ernst Witt, Euklidische Kongruenzsätze in metrischen Vektorräumen, 1957. In: Ernst Witt: Gesammelte Abhandlungen, 27–32. Springer, 1998.

[L1] Falko Lorenz, Lineare Algebra. I. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1992. x+226 pp.

[L2] Falko Lorenz, Lineare Algebra. II. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1992. viii+195 pp.
Band I ist besser geschrieben als Band II. Jedoch enthält Band II viele schöne Ergebnisse, welche in vielen anderen Büchern über Lineare Algebra nicht zu finden sind.

[S] John Stillwell, Naive Lie theory. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008. xiv+217 pp.

[W] Karl Weierstraß, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. 1868. 37 pp.
Eine Arbeit zur Klassifikation von Paaren von quadratischen Formen mit Hilfe von Determinanten und Elementarteilern. Muss jeder gelesen haben!

[Wo] Jörg Wollnack, Regelungstechnik I und II. Vorlesungsskripte.

Index

Jan Schröer
Mathematisches Institut
Universität Bonn
Endenicher Allee 60
53115 Bonn
Germany

E-mail address: schroer@math.uni-bonn.de