FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Punl

Klausur zur Analysis II, 02.07.2002

1) Man berechne das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

2) Existieren die uneigentlichen Integrale

$$a) \int_1^\infty \frac{x^2+x+1}{x^3+2x+2} dx; \quad , \quad b) \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx?$$

3) Man berechne die Länge der durch $\{(x,y) \mid x = t, y = t^{3/2}, 0 \leq t \leq 3\}$ gegebenen Kurve.

4) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} xy\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

5) Durch

$$z = f(x,y) = \frac{x}{x^2+2y+1}$$

ist eine Funktion von 2 reellen Variablen x und y gegeben. Man bestimme die Änderung $\frac{dz}{dt}$ an der Stelle $(x,y) = (1,2)$, wenn dort $\frac{dx}{dt} = 2$ und $\frac{dy}{dt} = 3$ ist.

6) Gibt es eine Funktion f, so dass gilt

$$grad\ f(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\ln y + \sqrt{y} + \frac{2x}{1+x^2} \\ \frac{x^2}{y} + \frac{x}{2\sqrt{y}} + 1 \end{pmatrix}, \quad y > 0\ ?$$

Man berechne sie gegebenenfalls.

b

7) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 - y^2 + \arctan(x \cdot y).$$

Man berechne

a) Das totale Differential von f im Punkt (1,0);

b) Die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt (1,0).

c) Die Richtungsableitung von f im Punkt (1,0) in Richtung des Vektors $(1,3)^T$.

8) Man bestimme relative Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2\exp\left((x-1)^2 - (y-2)^2\right).$$

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y(1) = 3,$$

und skizziere die Lösungskurve.

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x \cdot y' - y = x$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(1) = 2$ erfüllt.

Summe der Punkte

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 3: 3 Punkte

Man zeige , dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \\ \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

(Hinweis: Polarkoordinaten)

Lösung :

$$f(r,\varphi) = \frac{r^3\Big(\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\Big)}{r^2} = r\Big(\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\Big)$$

$$|f(r,\varphi) - 0| = r|\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)| \leq r \cdot \Big(|\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)| + |\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)|\Big)$$

$$\leq 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 4: 3 Punkte

a) Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion
$f(x, y, z) = e^{3x} + x^2 z - z(x + y)$ im Punkt $(0, 1, 2)$ auf.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung :

$f(x, y, z) = e^{3x} + x^2 z - z(x + y)$

$f(0, 1, 2,) = 1 - 2 = -1$

$f_x = 3e^{3x} + 2xz - z \implies f_x(0, 1, 2) = 3 - 2 = 1$

$f_y = -z \implies f_y(0, 1, 2) = -2$

$f_z = x^2 - (x + y) \implies f_z(0, 1, 2) = -1$

a) $w + 1 = 1 \cdot x - 2(y - 1) - 1(z - 2)$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{12}$, $\dfrac{\partial f}{\partial a} = (+1, -2, -2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 6: 3 Punkte

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int\int_G (x+y)^3 dxdy$

$G := \{(x, y)\ :\ 0 \le x \le 2\ ,\ -x \le y \le x\}$.

Lösung :

$$\int\int_G (x+y)^3 dxdy = \int_0^2 \Big(\int_{-x}^{x} (x+y)^3 dy \Big) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{(x+y)^4}{4} \Big|_{-x}^{x} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (x+x)^4 = \frac{16}{4} \int_0^2 x^4 dx$$

$$= 4 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{4}{5} \cdot 32 = \frac{128}{5}$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $F(x,y)$ mit

$$F_x(x,y) = y - 3e^{-3x} \quad \text{und} \quad F_y(x,y) = x + 7\cos(7y)$$

Wenn ja, soll sie berechnet werden.

Lösung :

$F_{xy} = 1 \quad F_{yx} = 1$

$$F = \int (y - 3e^{-3x})\,dx = yx + e^{-3x} + C(y)$$

$$F_y = x + C'(y) = x + 7\cos(7y) \implies \quad C'(y) = 7\cos(7y) \implies$$

$$C(y) = \sin(7y) + C \implies$$

$$F = xy + e^{-3x} + \sin(7y) + C$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 8: 3 Punkte

Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = 7x^2 - y + xy + y^2$$

relative Minima, Maxima und Sattelpunkte?

Lösung :

$f = 7x^2 - y + xy + y^2$

$f_x = 14x + y = 0 \implies \quad y = -14x$

$f_y = -1 + x + 2y = 0 \implies \quad -1 + x - 28x = 0 \implies \quad -27x = 1 \implies \quad x = -\frac{1}{27}$

$y = -14x = -14\left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{14}{27}$

$f_{xx} = 14\,, \quad f_{yy} = 2\,, \quad f_{xy} = 1 \implies \quad H = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad \det H = 27 > 0 \quad \text{Min}$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$xy' = 6y + x^3 \qquad y(1) = 1\ .$$

Lösung :

$xy' = 6y + x^3\ , \quad y(1) = 1$

Homogene Lösung:

$$x\frac{dy}{dx} = 6y \implies \frac{dy}{y} = \frac{6}{x}dx \implies \int\frac{dy}{y} = 6\int\frac{dy}{x} \implies$$

$$\ln|y| = 6\ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx^6| \implies$$

$$y_h = Cx^6$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p = C(x)\cdot x^6 \implies y_p' = C'x^6 + 6Cx^5$$

$$\left.\begin{array}{l} xy_p' = C'x^7 + 6Cx^6 \\ 6y + x^3 = 6Cx^6 + x^3 \end{array}\right\} \implies C'x^7 + 6Cx^6 = 6Cx^6 + x^3 \implies$$

$$C'(x) = x^{-4} \implies C(x) = -\frac{1}{3}x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$$

$$y_p = C(x)x^6 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}x^6 = -\frac{1}{3}x^{-3}$$

$$y = y_h + y_p = Cx^6 - \frac{1}{3}x^3$$

Anfangs Bedingung $y(1) = 1$

$$1 = y(1) = C\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 1 \implies C = \frac{4}{3}\ , \quad y = \frac{4}{3}x^6 - \frac{1}{3}x^3$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 10: 3 Punkte

Lösen Sie die Folgende DGL $y' = 3y - 3x + 1$ mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ durch Potenzreihenansatz $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ und Koeffizientenvergleich.

Lösung :

$$y' = 3y - 3x + 1\ , \quad y(0) = 2 \qquad (*)$$

$$y := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

$$2 = y(0) = \alpha_0$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k x^{k-1} \overset{l=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)a_{l+1}x^l$$

Aus $(*)$ $\Longrightarrow$

$$\int_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k = 3\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3x + 1$$

$$k = 0 \implies \quad a_1 = 3a_0 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$k = 1 \implies \quad 2a_2 = 3a_1 - 3 = 3(a_1 - 1) = 3 \cdot 6 = 18$$

$$k \geq 2 \implies \quad (k+1)a_{k+1} = 3a_k \implies \quad a_{k+1} = \frac{3}{k+1}a_k$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 3: 3 Punkte

Man zeige , dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \\ \dfrac{x^3 - y^5}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

Lösung :

Setzt man für x und y Polarkoordinaten ein, so gilt:

$x = r\cos(\varphi)$, $\qquad y = r\sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} f(r,\varphi) \quad &= \frac{r^3 \cdot \cos^3(\varphi) - r^5 \cdot \sin^5(\varphi)}{r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi)} = \frac{r^3 \cdot \Big(\cos^3(\varphi) - r^2 \cdot \sin^5(\varphi)\Big)}{r^2 \cdot \Big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\Big)} \\ &= r \cdot \Big(\cos^3(\varphi) - r^2 \cdot \sin^5(\varphi)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(r,\varphi) - 0| \quad &= \Big|r \cdot (\cos^3(\varphi) - r^2 \sin^5(\varphi))\Big| \leq r|\cos^3(\varphi) - r^2 \sin^5(\varphi)| \\ &\leq \; r \cdot \Big(|\cos^3(\varphi)| + r^2 \cdot |\sin^5(\varphi)|\Big) \; \leq \; r \cdot (1 + r^2) \; \xrightarrow[r \to 0]{} \; 0 \end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 4: 3 Punkte

a) Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$ im Punkt $(1,4)$ auf.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt (1,4) in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung :

$f(1,4) = 1 + 32 - 4 = 29$

$f_x = 2x - y \implies f_x(1,4) = 2 - 4 = -2$

$f_y = 4y - x \implies f_y(1,4) = 16 - 1 = 15$

a) Gleichung der Tangentialebene:

$z - f(1,4) = f_x \cdot (x-1) + f_y \cdot (y-4)$

$z - 29 = -2 \cdot (x-1) + 15 \cdot (y-4)$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies |\vec{a}| = \sqrt{5} \implies \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = (-2, 15) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-2+30}{\sqrt{5}} = \frac{28}{\sqrt{5}}$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 5: 3 Punkte

Für die Funktion $f(x,y) = x^3 + 2xy$ berechnen Sie das Taylorpolynom 2−ten Grades an der Stelle $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$.

Lösung :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\Big(f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) \end{aligned}$$

$f(1,2) = 1 + 4 = 5$

$f_x = 3x^2 + 2y \quad \Longrightarrow \quad f_x(1,2) = 3 + 4 = 7$

$f_y = 2x \quad \Longrightarrow \quad f_y(1,2) = 2$

$f_{xx} = 6x \quad \Longrightarrow \quad f_{xx}(1,2) = 6$

$f_{yy} = 0$

$f_{xy} = 2$

Taylorpolynom:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 5 + 7(x-1) + 2(y-2) + \frac{1}{2}\Big[6(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2)\Big] \\ &= 5 + 7(x-1) + 2(y-2) + 3(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \end{aligned}$$

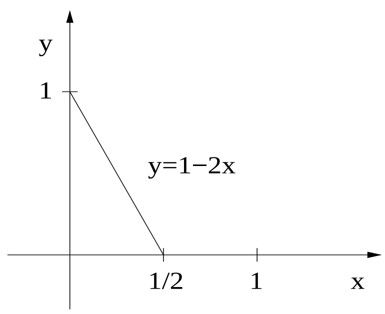
Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 6: 3 Punkte

Skizzieren Sie das Gebiet $G := \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ 2x + y \leq 1\}$

und berechnen Sie das Integral $\int\int_G (x^2 - 3y^2)\,dxdy$

Lösung :



$$\begin{aligned}
\int\int_G (x^2 - 3y^2)\,dxdy &= \int_0^{1/2} \left(\int_0^{1-2x} (x^2 - 3y^2)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^{1/2} \left((x^2 y - y^3) \Big|_0^{1-2x} \right) dx \\
&= \int_0^{1/2} (x^2(1-2x) - (1-2x)^3)\,dx \\
&= \int_0^{1/2} ((x^2 - 2x^3) - (1-2x)^3)\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^4 \right]_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{4 - 3 - 12}{12} = -\frac{11}{96}
\end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $F(x,y)$ mit

$$F_x(x,y) = 2xy - e^{x+2y} + 1 \text{ und } F_y(x,y) = x^2 - 2e^{x+2y} - 2y^2$$

Wenn ja, soll sie berechnet werden.

Lösung :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy - e^{x+2y} + 1) = 2x - 2e^{x+2y} \\ A_2 &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2e^{x+2y} - 2y^2) = 2x - 2e^{x+2y} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad A_1 = A_2 \Longrightarrow$$

Es existiert eine Stammfunktion F.

Es gilt:

$$F(x,y) = \int (2xy - e^{x+2y} + 1)\,dx = x^2 y - e^{x+2y} + x + C(y) \Longrightarrow$$

$$F_y = x^2 - 2e^{x+2y} + C'(y) \stackrel{!}{=} x^2 - 2e^{x+2y} - 2y^2 \Longrightarrow$$

$$C'(y) = -2y^2 \Longrightarrow \quad C(y) = -\frac{2}{3}y^3 \Longrightarrow$$

$$F(x,y) = x^2 y - e^{x+2y} + x - \frac{2}{3}y^3 + C$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 8: 3 Punkte

Für welche reellen k besitzt die Funktion $f(x,y) = kx^3 + y^2 - 2kxy + k$ relative Extrema?

Lösung :

a) $k \neq 0$

$$f_x = 3kx^2 - 2ky = k(3x^2 - 2y) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (*)$$

$$f_y = 2y - 2kx = 2(y - kx) \stackrel{!}{=} 0 \implies y = kx \qquad (**)$$

$(**)$ in $(*)$ eingesetzt ergibt:

$$3x^2 - 2kx \stackrel{!}{=} 0 \implies x(3x - 2k) = 0 \implies x = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2k}{3} \end{cases} \implies y = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2k^2}{3} \end{cases}$$

Kritische Punkte: $(0,0)$, $(\frac{2k}{3} , \frac{2k^2}{3})$

$f_{xx} = 6kx$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -2k$

	$(0,0)$	$(\frac{2k}{3} , \frac{2k^2}{3})$
f_{xx}	0	$4k^2$
f_{yy}	2	2
f_{xy}	$-2k$	$-2k$
H	$\begin{pmatrix} 0 & -2k \\ -2k & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4k^2 & -2k \\ -2k & 2 \end{pmatrix}$
$\det(H)$	$-4k^2 < 0$	$4k^2 > 0$
	SP	*Min*

b) $k = 0 \implies f(x,y) = y^2 \geq 0$

$f_x = 0$, $f_y = 2y \stackrel{!}{=} 0 \implies y = 0 \implies$ Kritische Punkte $(x , 0)$.

Die Funktion hat an der Stelle $(x , 0)$ kein relatives Minimum,

weil $f(x \pm \varepsilon , 0) = f(x , 0) = y^2$ gilt.

Aus a) und b) folgt:

Die Funktion f hat für $k \neq 0$ relative Extrema nämlich Minima.

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$y' - 4y = xe^{4x} \ , \quad y(0) = 3.$$

Lösung :

Homogene Lösung:

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \implies \quad \frac{dy}{y} = 4dx \implies \quad \int \frac{dy}{y} = 4\int dx \implies$$

$$\ln|y| = 4x + C \implies \quad |y| = e^{4x+c} = e^C \cdot e^{4x} = \tilde{C}e^{4x} \implies$$

$$y_h = C \cdot e^{4x} \ , \quad C \in \mathbb{R}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p := C(x)e^{4x} \implies \quad y_p' = C'e^{4x} + 4Ce^{4x} \implies$$

$$C'e^{4x} + 4Ce^{4x} - 4Ce^{4x} = xe^{4x}$$

$$C'(x) = x \implies \quad C(x) = \frac{x^2}{2} \implies \quad y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{4x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{4x} + \frac{x^2}{2}e^{4x}$$

Aus der Anfangsbedingung folgt:

$$3 = y(0) = C \implies \quad y = 3e^{4x} + \frac{x^2}{2}e^{4x} = (3 + \frac{x^2}{2})e^{4x}$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 10: 3 Punkte

Lösen Sie die Folgende DGL $y' = xy + 1$ mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots$ und Koeffizientenvergleich. Bestimmen Sie die Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten a_k und berechnen Sie die ersten 8 Glieder a_0 bis a_7 der Potenzreihe.

Lösung :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \implies \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $2 = y(0) = a_0$

Einsetzen von y und y' in der DGL ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} + 1$$

Indextransformation: $l = k - 1$ bzw. $j = k + 1$ ergibt:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) a_{l+1} x^l = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} x^j + 1 \implies$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k - 1 = 0 \implies$$

$$(a_1 - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) a_{k+1} - a_{k-1}\right] x^k = 0 \implies$$

$a_1 = 0\ , \quad a_1 = 1$

$$(k+1) a_{k+1} - a_{k-1} = 0 \implies \quad a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{k+1}\ , \qquad k \geq 1$$

Für $k = 0, 1, \ldots, 7$ gilt:

$$a_0 = 2\ , \quad a_1 = 1\ , \quad a_2 = \frac{a_0}{2} = 1\ , \quad a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}\ , \quad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{15}\ , \quad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{1}{24}\ , \quad a_7 = \frac{a_5}{5} = \frac{1}{7 \cdot 15} = \frac{1}{105}$$

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 4: 3 Punkte

Zeigen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2+3y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig?

Lösung :

Wir setzen Polarkoordinaten ein. Dann gilt

$x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} r^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) \cdot \dfrac{r^2\cos^2(\varphi) + 3r^2\sin^2(\varphi)}{r^2(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))} & , \quad r \neq 0 \\ 0 & , \quad r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(r,\varphi) - 0| &= |r^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) \cdot (\cos^2(\varphi) + 3\sin^2(\varphi))| \\ &\leq r^2 |\sin(\varphi)| \cdot |\cos(\varphi)| \cdot \Big(|\cos^2(\varphi)| + 3|\sin^2(\varphi)|\Big) \leq 4r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Die Funktion ist im Nullpunkt stetig.

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 5: 3 Punkte

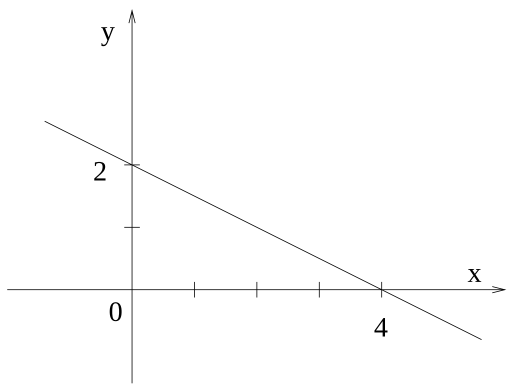
Skizzieren Sie das Gebiet

$$G = \{(x,y) \mid x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1\}$$

und berechnen Sie

$$\int\int_G xydxdy$$

Lösung :



$G = \left\{(x,y) \,\middle|\, x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1\right\}$

Aus $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1$ folgt: $\frac{x}{2} + y \leq 2 \implies \quad y \leq 2 - \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}
\int\int_G xydxdy &= \int_0^4 \left(\int_0^{2-\frac{x}{2}} xydy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(xy^2 \Big|_0^{2-\frac{x}{2}}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 x\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x\left(4 - 2x + \frac{x^2}{4}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{16}\right) \Big|_0^4 \\
&= \frac{1}{2}\left(32 - \frac{128}{3} + 16\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 6: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $f(x,y)$, so dass gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{2x+y} - 3e^{-3x} \\ \dfrac{1}{2x+y} + 2y \end{pmatrix}$$

Man berechne Sie gegebenfalls.

Lösung :

Mit $g_1 := \dfrac{2}{2x+y} - 3e^{-3x}$ und $g_2 := \dfrac{1}{2x+y} + 2y$ gilt:

$\dfrac{\partial g_1}{\partial y} = -\dfrac{2}{(2x+y)^2} = \dfrac{\partial g_2}{\partial x}$, d.h. es existiert eine Funktion f.

Es gilt:

$f_x = \dfrac{2}{2x+y} - 3e^{-3x} \implies \quad f = \displaystyle\int \left(\dfrac{2}{2x+y} - 3e^{-3x} \right) dx = \ln(2x+y) + e^{-3x} + C(y) \implies$

$f_y = \dfrac{1}{2x+y} + C'(y) = \dfrac{1}{2x+y} + 2y \implies$

$C'(y) = 2y \implies \quad C(y) = y^2 + C \implies$

$f(x,y) = \ln(2x+y) + e^{-3x} + y^2 + C$

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 2x^3 + y^2 + y + \sin(x \cdot y)$$

Man berechne:

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(1, 0)$

b) Die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 0)$ in Richtung des Vektors $(1, 3)^T$

Lösung :

$f_x = 6x^2 + y\cos(x \cdot y) \implies f_x(1, 0) = 6$

$f_y = 2y + 1 + x\cos(x \cdot y) \implies f_y(1, 0) = 2$

a) $f(1, 0) = 2$

Gleichung der Tangentialebene

$z - f(1, 0) = f_x(1, 0) \cdot (x - 1) + f_y(1, 0) \cdot (y - 0) \implies$

$z - 2 = 6(x - 1) + 2y$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = (\bigtriangledown f \cdot \vec{a}) = (6, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 8: 3 Punkte

Man bestimme die relativen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = (x^2-2)y - xy^2$$

Lösung :

$$f_x = 2xy - y^2 = y(2x-y) \stackrel{!}{=} 0 \implies y = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases}$$

$$f_y = (x^2-2) - 2xy \stackrel{!}{=} 0$$

Ist $y = 0 \implies x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$

Ist $y = 2x \implies x^2 - 2 - 4x^2 = 0 \implies -3x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = -\dfrac{2}{3} \implies$ Keine Lösung

Kritische Punkte $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$

$f_{xx} = 2y$, $f_{yy} = -2x$, $f_{xy} = 2x - 2y$

	$(-\sqrt{2},0)$	$(\sqrt{2},0)$
f_{xx}	0	0
f_{yy}	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
f_{xy}	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
H	$\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$
$\det(H)$	-8	-8
	Sattepunkt	Sattelpunkt

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x}{e^y} \qquad y(0) = 1$$

und skizziere die Lösungskurve.

Lösung :

Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{e^y} \implies e^y\,dy = xdx \implies \int e^y\,dy = \int xdx \implies$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C \implies y = \ln(\frac{x^2}{2} + C)$$

Aus $1 = y(0) = \ln(C) \implies C = e^1 = e \implies$

Lösung des AWP $y = \ln(\frac{x^2}{2} + e)$

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 10: 3 Punkte

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - 2y = x + 1$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(1) = -\frac{5}{4}$ erfüllt.

Lösung :

Lineare DGL

a) Homogene Lösung

$$y' - 2y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = 2y \implies \frac{dy}{y} = 2\,dx \implies \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \implies$$

$$\ln|y| = 2x + \tilde{C} \implies |y| = e^{2x+\tilde{C}} = e^{\tilde{C}} \cdot e^{2x} \implies$$

$$y_h = C \cdot e^{2x}$$

b) Partikuläre Lösung

$$y_p = C(x) \cdot e^{2x} \implies y_p' = C'(x) \cdot e^{2x} + C \cdot e^{2x} \implies$$

$$C' \cdot e^{2x} + 2c \cdot e^{2x} - 2C \cdot e^{2x} = x + 1 \implies$$

$$C' = (x+1)e^{-2x} \implies$$

$$\begin{aligned} C &= \int (x+1)e^{-2x}\,dx = -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \implies \\ y_p &= C \cdot e^{2x} = -\left(\frac{x+1}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-2x} \cdot e^{2x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

c) Allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{-2x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)$$

d) Anfangsbedingung $y(1) = -\frac{5}{4}$

$$-\frac{5}{4} = y(1) = C \cdot e^{-2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = C \cdot e^{-2} - \frac{5}{4} \implies C \cdot e^{-2} = 0 \implies C = 0$$

Lösung des AWP : $y = -\frac{x}{2} - \frac{3}{4}$

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 4: 3 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

Lösung:

Setzt man Polarkoordinaten ein, so gilt:

$x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r^2$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{r^5\cos^5(\varphi) - 2r^5\sin^5(\varphi)}{r^4} & , \quad r \neq 0 \\ 0 & , \quad r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(r,\varphi) - 0| &= \left| \frac{r^5\cos^5(\varphi) - 2r^5\sin^5(\varphi)}{r^4} \right| = r|\cos^5(\varphi) - 2\sin^5(\varphi)| \\ &\leq r(|\cos^5(\varphi)| + 2|\sin^5(\varphi)|) \leq r(1+2) = 3r \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Die Funktion ist im Nullpunkt stetig.

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 5: 3 Punkte

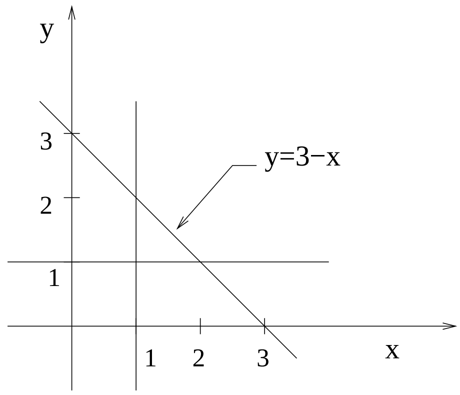
Skizzieren Sie das Gebiet

$$G = \{(x,y) \mid x \geq 1\ ,\ y \geq 1\ ,\ x + y \leq 3\}$$

und berechnen Sie

$$\int\int_G (x+y)^{\frac{1}{2}}\, dxdy$$

Lösung:



$$\begin{aligned}
\int\int_G (x+y)^{\frac{1}{2}}\, dxdy &= \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} (x+y)^{\frac{1}{2}}\, dy \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \int_1^2 (x+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{3-x} dx \\
&= \frac{2}{3} \int_1^2 \left((x+3-x)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \int_1^2 (\sqrt{27} - (x+1)^{\frac{3}{2}})\, dx \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{27}x - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{27} - \frac{2}{5}(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}}) \right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{2}{3} \left(\sqrt{27} - \frac{2}{5}(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2}) \right) \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{27} - \frac{36}{15}\sqrt{3} + \frac{16}{15}\sqrt{2} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{27} - \frac{12}{5}\sqrt{3} + \frac{16}{15}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 6: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $f(x, y)$, so dass gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + y \cdot \cos(x \cdot y) \\ 2y + 1 + x \cdot \cos(x \cdot y) \end{pmatrix}$$

Man berechne Sie gegebenfalls.

Lösung:

Mit $f_1(x, y) = 6x^2 + y\cos(x \cdot y)$

$f_2(x, y) = 2y + 1 + x\cos(x \cdot y)$

gilt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \cos(x \cdot y) - xy\sin(x \cdot y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Es gibt eine Funktion $f(x, y)$.

Berechnung von $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int (6x^2 + y\cos(x \cdot y))\,dx + C(y) \\ &= 2x^3 + \sin(x \cdot y) + C(y) \quad \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\cos(x \cdot y) + C'(y) \overset{!}{=} 2y + 1 + x\cos(x \cdot y) \Longrightarrow$$

$$C'(y) = 2y + 1 \Longrightarrow \quad C(y) = y^2 + y + C \Longrightarrow$$

$$f(x, y) = 2x^3 + \sin(x \cdot y) + y^2 + y + C$$

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 + \frac{y^2}{x} + y$$

Man berechne:

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(1,2)$

b) Die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,2)$ in Richtung des Vektors $(3,4)^T$

Lösung:

$$f_x = 6x^2 - \frac{y^2}{x^2} \implies f_x(1,2) = 6 - 4 = 2$$

$$f_y = \frac{2y}{x} + 1 \implies f_y(1,2) = 4 + 1 = 5$$

a) $f(1,2) = 2 + 4 + 2 = 8$

Gleichung der Tangentialebene:

$$z - f(1,2) = f_x(1,2) \cdot (x-1) + f_y(1,2) \cdot (y-2) \implies$$

$$z - 8 = 2 \cdot (x-1) + 5 \cdot (y-2)$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \left(\triangledown f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) = (2,5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6+20}{5} = \frac{26}{5}$$

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 8: 3 Punkte

Man bestimme die relativen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

Lösung:

$f_x = 3x^2 - 3 = 0 \implies \quad x^2 = 1 \implies \quad x = \pm 1$

$f_y = 3y^2 - 12 = 0 \implies \quad y^2 = 4 \implies \quad y = \pm 2$

Kritische Punkte : $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,-2)$

$f_{xx} = 6x$, $\quad f_{yy} = 6y$, $\quad f_{xy} = 0$

	$(1,2)$	$(-1,2)$	$(1,-2)$	$(-1,-2)$
f_{xx}	6	-6	6	-6
f_{yy}	12	12	-12	-12
f_{xy}	0	0	0	0
H	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$
$\det(H)$	$72 > 0$	$-72 < 0$	$-72 < 0$	$72 > 0$
	Min	*SP*	*SP*	*Max*

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$(x^2+1)\cdot y' = 2x+1 \ , \qquad y(0)=0$$

Lösung:

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = 2x+1 \implies \quad dy = \frac{2x+1}{x^2+1}dx \implies$$

$$\int dy = \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx \implies$$

$$y = \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C$$

Anfangsbedingung :

$$0 = y(0) = \ln(1) + \arctan(0) + C = C \implies \quad C = 0$$

$$y = \ln(x^2+1) + \arctan(x)$$

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 10: 3 Punkte

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = x$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ erfüllt.

Lösung:

a) Homogene Lösung

$$y' - y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = y \implies \frac{dy}{y} = dx \implies \int \frac{dy}{y} = \int dx \implies$$

$$\ln|y| = x + \tilde{C} \implies |y| = e^{x+\tilde{C}} = e^{\tilde{C}} \cdot e^x \implies$$

$$y_h = C \cdot e^x \,, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Partikuläre Lösung

$$y_p = C(x) \cdot e^x \implies y_p' = C' \cdot e^x + C \cdot e^x \implies$$

$$C' \cdot e^x + C \cdot e^x - C \cdot e^x = x \implies C' = x \cdot e^{-x} \implies$$

$$C = \int x \cdot e^{-x}\, dx$$

Mit $u = x \implies u' = 1\,, \quad v' = e^{-x} \implies v = -e^{-x} \implies$

$$C = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -(x+1) \cdot e^{-x}$$

$$y_p = C \cdot e^x = -(x+1) \cdot e^{-x} \cdot e^x = -(x+1)$$

c) $y = y_h + y_p = C \cdot e^x - (x+1)$

d) Anfangsbedingung

$$2 = y(0) = C - 1 \implies C = 3 \implies y = 3 \cdot e^x - (x+1)$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 3: 10 Punkte

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Lösung :

Wir setzen Polarkoordinaten ein. Es gilt :

$x = r \cdot \cos(\varphi)\,, \qquad y = r \cdot \sin(\varphi)\,, \qquad x^2 + y^2 = r^2 \cdot \big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big) = r^2$

$$\begin{aligned} \Big| f(x,y) - f(0,0) \Big| &= \left| \frac{x^6 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x^6 y|}{x^2+y^2} \\ &= \frac{|r^6 \cdot \cos^6(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\varphi)|}{r^2} = r^5 \cdot |\cos^6(\varphi) \cdot \sin(\varphi)| \\ &\leq r^5 \cdot |\cos^6(\varphi)| \cdot |\sin(\varphi)| \\ &\leq r^5 \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben seien die Funktion $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\,, \quad x,y,z \neq 0\,,$

der Punkt $P = (2,1,4)$ und der Vektor $\vec{a} = (-1,1,2)^T$

a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene von f an dem Punkt P

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an dem Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Lösung :

$$f_x = -\frac{1}{x^2} \implies f_x(P) = -\frac{1}{4}$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} \implies f_y(P) = -1$$

$$f_z = -\frac{1}{z^2} \implies f_z(P) = -\frac{1}{16}$$

a) $f(P) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{2+4+1}{4} = \frac{7}{4}$

Gleichung der Tangentialebene :

$$w - f(P) = f_x(P)\cdot(x-x_0) + f_y(P)\cdot(y-y_0) + f_z(P)\cdot(z-z_0) \implies$$

$$w - \frac{7}{4} = -\frac{1}{4}\cdot(x+1) - (y-1) - \frac{1}{16}\cdot(z-4)$$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \triangledown f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{16}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2-8-1}{8} = -\frac{7}{8}$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 5: 10 Punkte

Berechnen Sie die Extrema und Sattelpunkte der Funktion :

$$f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{1}{y} + xy \ , \quad x \neq 0 \ , \quad y \neq 0 \ .$$

Lösung :

$$f_x = -\frac{8}{x^2} + y \ \overset{!}{=} \ 0 \implies \quad y = \frac{8}{x^2} \implies \quad \frac{1}{y} = \frac{x^2}{8}$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} + x \ \overset{!}{=} \ 0 \implies \quad -\frac{x^4}{64} + x = 0 \implies$$

$$x \cdot \left(-\frac{x^3}{64} + 1\right) = 0 \implies \quad x = \begin{cases} 0 & \text{keine Lösung} \\ x^3 = 64 = 2^6 \implies & x = 2^2 = 4 \end{cases}$$

$$x = 4 \implies \quad y = \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2} \implies \quad \text{Kritischer Punkt : } \left(4 \ , \ \frac{1}{2}\right)$$

$$f_{xx} = \frac{16}{x^3} \implies \quad f_{xx}(4, \frac{1}{2}) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$f_{yy} = \frac{2}{y^3} \implies \quad f_{yy}(4, \frac{1}{2}) = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$$

$$f_{xy} = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} \implies \quad \det(H) = 4 - 1 = 3 > 0 \implies \quad \text{Minimum.}$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 6: 10 Punkte

Hat das Vektorfeld

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy \\ \sin(3x+y) - e^{-y} + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

eine Stammfunktion ? Falls ja , leiten Sie diese her.

Lösung :

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy \\ \sin(3x+y) - e^{-y} + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial y} = 3\cos(3x+y) + x = \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial x} \implies \qquad \text{Es existiert eine Stammfunktion } \; F(x,y)$$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int (3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy)\,dx \\ &= -\cos(3x+y) + e^{-x} + \frac{x^2 y}{2} + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= \sin(3x+y) + \frac{x^2}{2} + C'(y) = \sin(3x+y) - e^{-y} + \frac{x^2}{2} \\ &\implies C'(y) = -e^{-y} \\ &\implies C(y) = e^{-y} + C \end{aligned}$$

$$F(x,y) = -\cos(3x+y) + e^{-x} + e^{-y} + \frac{x^2 y}{2} + C$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 7: 10 Punkte

Skizzieren Sie die Fläche $G \subset \mathbb{R}^2$ zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 und Mittelpunkt $(0,0)$. Integrieren Sie nun die Funktion

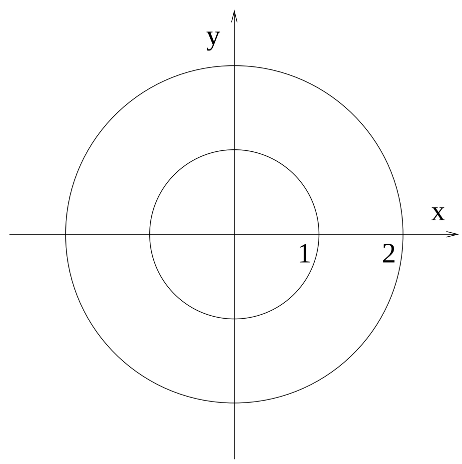
$$\frac{1}{(x^2+y^2)^3}$$

über diese Fläche.

Hinweis : Rechnen Sie zuerst $\frac{1}{(x^2+y^2)^3}$ in Polarkoordinaten um.

Lösung :

$x = r \cdot \cos(\varphi) \quad , \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$



$$\begin{aligned}
\iint\limits_{G} \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\, dx\, dy &= \iint\limits_{1 \le x^2+y^2 \le 4} \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\, dx\, dy \\
&= \iint\limits_{\substack{1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi}} \frac{1}{r^6} \cdot r\, dr\, d\varphi \\
&= \left(\int_1^2 \frac{1}{r^5}\, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi \right) \\
&= \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r^4} \Big|_1^2 \right) \cdot \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) \cdot 2\pi \\
&= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{16} \right) \cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15\pi}{32}
\end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 8: 10 Punkte

Lösen Sie die DGL

$$y' = \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

durch die Substitution $\qquad z = \frac{y}{x}$.

Lösung :

$$y' = \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

Substitution : $\quad z = \frac{y}{x}\,, \quad y = z \cdot x\,, \qquad y' = z' \cdot x + z$

$$\Longrightarrow \quad z' \cdot x + z = \frac{1}{\cos(z)} + z \qquad \text{(DGL)}$$

$$\Longrightarrow \quad z' \cdot x = \frac{1}{\cos(z)} \qquad (\text{ TdV }) \qquad x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos(z)}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx \;= \int \cos(z)\,dz \;\Longrightarrow\quad \ln|x| + C = \sin(z)$$

$$z = \arcsin(\ln|x| + C) = \arcsin(\ln|\widetilde{C}x|)\,, \quad \left[C = \ln|\widetilde{C}| \;\Longrightarrow\quad \widetilde{C} = e^C\right]$$

$$\Longrightarrow \quad y = z \cdot x = x \cdot \arcsin(\ln|\widetilde{C}x|)$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 9: 10 Punkte

Lösen Sie das AWP : $y' - 2y = 4x \ , \qquad y(0) = 6 \ .$

Lösung :

$y' - 2y = 4x \ , \quad y(0) = 6$

Homogene Lösung

$$y' = 2y \ , \quad \frac{dy}{dx} = 2y \implies \int \frac{1}{y}\, dy = \int 2\, dx \implies$$

$$\ln|y| = 2x + C \implies |y| = e^{2x+C} = e^C \cdot e^{2x} \implies y = \widetilde{C} \cdot e^{2x}$$

Partielle Lösung

$$y_p = C(x)e^{2x}$$

$$y_p' = C'e^{2x} + 2Ce^{2x}$$

$$C'e^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = 4x \implies C'e^{2x} = 4x \implies C' = 4xe^{-2x}$$

$$u' = e^{-2x} \ , \qquad u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$v = 4x \ , \quad v' = 4$$

$$\begin{aligned} C(x) = \int \underbrace{4x}_{v}\,\underbrace{e^{-2x}}_{u'}\, dx &= uv - \int uv'\, dx \\ &= -2xe^{-2x} + \int e^{-2x}\, dx \\ &= -2xe^{-2x} - (e^{-2x}) \\ &= -2xe^{-2x} - e^{-2x} \end{aligned}$$

$$y_p = C(x)e^{2x} = -2x - 1$$

Gesamte Lösung

$$y = y_h + y_p = Ce^{2x} - 2x - 1 \ , \qquad \text{AWP} : 6 = C - 1 \implies C = 7$$

$$y = 7e^{2x} - 2x - 1$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 10: 10 Punkte

Lösen Sie das AWP : $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.

Lösung :

$y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$

$$D^2 - 4D + 5 = 0 \implies D_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

$$y = C_1 e^{2x} \sin(x) + C_2 e^{2x} \cos(x)$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} \sin(x) + C_1 e^{2x} \cos(x) + 2C_2 e^{2x} \cos(x) - C_2 e^{2x} \sin(x)$$

$$2 = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 \implies C_2 = 2$$

$$13 = 2C_1 \sin(0) + C_1 \cos(0) + 2C_2 \cos(0) - C_2 \sin(0) = C_1 + 2C_2 = C_1 + 4 \implies C_1 = 9$$

$$y = 9e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cos(x)$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 3: 10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Lösung 1 :

Polarkoordinaten $\quad x = r\cos(\varphi) \quad , \quad y = r\sin(\varphi)$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{r\cos(\varphi)\ r^2\ \sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)} \right| \Rightarrow$$

$$= \frac{r^3}{r^2} \left|\cos(\varphi)\ \sin^2(\varphi)\right| \ \leq\ r|\cos\varphi| \cdot |\sin^2(\varphi)| \ \leq\ r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Lösung 2 :

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| \ \leq\ \left| \frac{xy^2}{y^2} \right| = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben sind die Funktion $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2 - xyz$, der Punkt P =(1,-1,2) und der Vektor $\vec{a} = (3, 1, -1)^T$

a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion im Punkt P.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Lösung :

Zu a) + b)

$f_x = 2(x + 2y + 3z) - yz \quad \Rightarrow \quad f_x(P) = 2 \cdot 5 + 2 = 12$

$f_x = 2(x + 2y + 3z)2 - xz \quad \Rightarrow \quad f_y(P) = 2 \cdot 5 \cdot 2 - 2 = 18$

$f_x = 2(x + 2y + 3z)3 - xy \quad \Rightarrow \quad f_z(P) = 2 \cdot 5 \cdot 3 + 1 = 31$

a) $f_y(P) = 5^2 + 2 = 27$

$w - f(P) = f_x(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0) \quad \Rightarrow$

$w - 31 = 12(x - 1) + 18(y + 1) + 31(z - 2)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f(P) \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (12, 18, 31) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{11}} = \dfrac{36 + 18 - 31}{\sqrt{11}} = \dfrac{23}{\sqrt{11}}$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 5: 10 Punkte

Hat die Funktion

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 6x \\ x - 3y \end{pmatrix}$$

eine Stammfunktion (Potentialfunktion)? Wenn ja, berechnen Sie diese.

Lösung :

$f_{1,y} = 1 = f_{2,x} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}$ hat eine Stammfunktion ϕ

$$\phi = \int (y + 6x)\, dx = xy + 3x^2 + C(y)$$

$$\phi_y = x + C'(y) = x - 3y \quad \Rightarrow \quad C'(y) = -3y \quad \Rightarrow \quad C(y) = -\frac{3}{2}y^2 + C \quad \Rightarrow$$

$$\phi = xy + 3x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 6: 10 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die quadratische Annäherung der Funktion

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$$

an der Stelle $x_0 = y_0 = 1$.

Lösung

Quadratisches Taylor-Polynom $T_2(x,y)$

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = f(P) &+ f_x(P)(x-x_0) + f_y(P)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(P)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(P)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(P)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

$x_0 = y_0 = 1$

$f(1,1) = \ln(2)$

$$f_x = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2} \Rightarrow f_x(1,1) = \frac{2}{2} = 1 \quad , \quad f_y = \frac{2yx^2}{1+x^2y^2} \Rightarrow f_y(1,1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$f_{xx} = \frac{2y^2(1+x^2y^2) - 2xy^2(2xy^2)}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow f_{xx}(1,1) = \frac{2\cdot 2 - 2\cdot 2}{2^2} = 0$$

$$f_{xy} = \frac{4xy(1+x^2y^2) - 2xy^2(2x^2y)}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = \frac{4\cdot 2 - 2\cdot 2}{2^2} = 1$$

$$f_{yy} = \frac{2x^2(1+x^2y^2) - 2yx^2(2x^2y)}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow f_{yy}(1,1) = \frac{2\cdot 2 - 2\cdot 2}{2^2} = 0$$

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \ln(2) + (x-1) + (y-1) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1(x-1)(y-1) \\ &= \ln(2) + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) \end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 7: 10 Punkte

Bei der Aufladung eines Plattenkondensators ist die Ladungsänderung proportional zur freien Kapazität, d.h. zur Differenz zum Maximalladezustand Q_{max} . Der zeitliche Verlauf $Q(t)$ wird also beschrieben durch die DGL

$$Q'(t) = K \cdot (Q_{max} - Q(t))$$

a) Lösen Sie die DGL

b) Wie ist der zeitliche Verlauf bei einem zu Beginn ungeladenen Kondensator ($Q(0) = 0$)?

Lösung :

K und Q_{max} sind bekannte Konstanten.

a) $Q'(t) = K(Q_{\max} - Q(t)) \;\Rightarrow\; \dfrac{dQ}{Q_{\max} - Q(t)} = K\,dt \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dQ}{Q_{\max} - Q(t)} = K \int dt$

$$\left.\begin{array}{l} -\ln|Q_{\max} - Q| = Kt + C \;\Rightarrow \\ \ln|Q_{\max} - Q| = -Kt - C \;\Rightarrow \end{array}\right\} |Q_{\max} - Q| = e^{-Kt-C} = e^{-C}e^{-Kt} = \tilde{C}e^{-Kt} \;\Rightarrow$$

$$Q_{\max} - Q = \tilde{\tilde{C}}e^{-Kt} \;\Rightarrow\; Q(t) = Q_{\max} - \tilde{\tilde{C}}e^{-Kt}$$

b) $0 = Q(0) = Q_{\max} - \tilde{\tilde{C}} \;\Rightarrow\; \tilde{\tilde{C}} = Q_{\max} \;\Rightarrow\; Q(t) = Q_{\max}(1 - e^{-Kt})$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 8: 10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y + 2e^x \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösung :

a) Homogen DGL $\quad y' = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow$

$\ln|y| = x + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{x+C} = e^C \cdot e^x = \tilde{C} \cdot e^x \quad \Rightarrow$

$y_h = C \cdot e^x$

b) Partikuläre Lösung

$y_p = C(x)e^x \quad \Rightarrow \quad y_p' = C'e^x + Ce^x \quad \Rightarrow$

$C'e^x + Ce^x = Ce^x + 2e^x \quad \Rightarrow \quad C' = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2x$

$y_p = C(x)e^x = 2xe^x$

c) $y = y_h + y_p = Ce^x + 2xe^x$

d) AB : $1 = y(0) = C \quad \Rightarrow \quad y = e^x + 2xe^x = (1 + 2x)e^x$

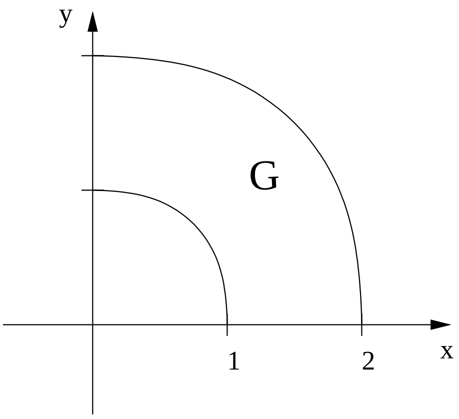
Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 9: 10 Punkte

Wir betrachten den Kreisring für positive x- und y-Koordinaten zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 (also denjenigen Punkten der Ebene im ersten Quadranten, die einen Abstand zwischen 1 und 2 zum Ursprung haben.)

Diese Fläche hat die Flächeninhalt $F = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Skizzieren Sie zunächst diesen Bereich. Berechnen Sie nun die Schwerpunktskoordinaten dieser Fläche $x_s = \frac{1}{F} \iint\limits_G x\, dx\, dy$, $y_s = \frac{1}{F} \iint\limits_G y\, dx\, dy$, indem Sie Polarkoordinaten einsetzen.

Lösung :



$$x_s = \frac{1}{F} \iint\limits_G x\, dx\, dy = \frac{1}{F} \iint r\cos(\varphi) r\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{F} \left(\int_1^2 r^2\, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \right)$$

$$= \frac{1}{F} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \ (\sin\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{F} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{9\pi}$$

$$x_y = \frac{1}{F} \iint\limits_G y\, dx\, dy = \frac{1}{F} \iint\limits_G r\sin(\varphi) r\, dr\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{F} \left(\int_1^2 r^2\, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \right)$$

$$= \frac{1}{F} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \ (-\cos\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{F} \cdot \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{9\pi}$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 10: 10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem, d.h. berechnen Sie $y(x)$ zu

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 6y &= 12x + 16 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösung :

a) Homogene Lösung:

$$D^2 + 5D + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

b) Partikuläre Lösung:

Ansatz : $y_p = a_1 x + a_0 \quad , \quad y_p' = a_1 \quad , \quad y_p'' = 0 \quad \Rightarrow$

$5a_1 + 6(a_1 x + a_0) = 12x + 16 \quad \Rightarrow$

$6a_1 x + (5a_1 + 6a_0) = 12x + 16 \quad \Rightarrow$

$6a_1 = 12 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$

$5a_1 + 6a_0 = 16 \quad \Rightarrow \quad 6a_0 = 16 - 5a_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1$

$\Rightarrow \quad y_p = 2x + 1$

c) $y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + 2x + 1$

d) AB

$y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + 2x + 1$

$y' = -3C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{-2x} + 2$

$$\left.\begin{aligned} y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 0 \\ y(0) = -3C_1 - 2C_2 + 2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad -3C_1 - 2C_2 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$y = e^{-3x} - e^{-2x} + 2x + 1$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 3: 10 Punkte

Ein Kuchen mit einer Anfangstemperatur von 20 Grad wird in einem Backofen mit einer konstanten Temperatur von 180 Grad erhitzt. Dabei ist die Änderung der Kuchentemperatur proportional zum Unterschied konstanten Umgebungstemperatur des Backoffens,also

$$T'(t) = K \cdot (180 - T(t))$$

Nach 2 Minuten hat der Kuchen die Temperatur von 60 Grad

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

b) Bestimmen Sie den Wert von K aus der letzten Bedingung .

Lösung 3 :

Teil a

$$T'(t) = K(180 - T(t)) \;\Rightarrow\; \frac{dT}{180 - T} = K\,dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dT}{180 - T} = K \int dt \;\Rightarrow$$

$$\ln|180 - T| = K \cdot t + C \;\Rightarrow\; |180 - T| = e^{Kt+C} = e^C \cdot e^{Kt} = \tilde{C} \cdot e^{Kt}$$

$$180 - T = \tilde{\tilde{C}} e^{Kt} \;\Rightarrow\; T(t) = 180 - \tilde{\tilde{C}} e^{Kt}$$

AB: $20 = T(0) = 180 - \tilde{\tilde{C}} \;\Rightarrow\; \tilde{\tilde{C}} = 180 - 20 = 160 \;\Rightarrow\; T(t) = 180 - 160e^{Kt}$

Teil b

$$60 = T(2) = 180 - 160e^{2K} \;\Rightarrow$$

$$6 = 18 - 16e^{2K} \;\Rightarrow\; 16e^{2K} = 18 - 6 = 12 \;\Rightarrow\; e^{2K} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow$$

$$2K = \ln(\frac{3}{4}) \;\Rightarrow\; K = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}\ln(\frac{4}{3}) \;\Rightarrow$$

$$T(t) = 180 - 160e^{-\frac{1}{2}\ln(\frac{4}{3})t}$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 5: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

auf lokale Extrema.

Lösung 5 :

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \quad x = 0 \\ f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \quad y = 0 \end{array}\right\} \text{Kritischer Punkt : (0,0)}$$

$$f_{xx} = 2\,\frac{(x^2+y^2+1) - x(2x)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2(y^2 - x^2 + 1)}{(x^2+y^2+1)^2} \ \Rightarrow \ f_{xx}(0,0) = 2$$

$$f_{yy} = 2\,\frac{x^2+y^2+1 - y(2y)}{(x^2+y+^2+1)^2} = 2\frac{x^2 - y^2 + 1}{(x^2+y^2+1)^2} \ \Rightarrow \ f_{yy}(0,0) = 2$$

$$f_{xy} = -2\,\frac{2y}{(x^2+y^2+1)} \ \Rightarrow \ f_{xy} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \det(H) = 4 > 0 \\ f_{xx}(0,0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Min$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 6: 10 Punkte

Wir betrachten als zweidimensionalen Integrationsbereich B den Kreisring zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 , also alle Punkte die einen euklidischen Abstand zwischen 1 und 2 vom Ursprung haben. Wie groß ist das Integral über diesen Beriech der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Lösung 6 :

$$\mathrm{I} = \iint_g \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} \quad \text{mit} \quad x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ dxdy = r\,dr\,d\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r\,drd\varphi}{r^2} = \left(\int_1^2 \frac{1}{r}\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \Big(\ln|r|\Big)_1^2 2\pi = (\ln(2) - \ln(1))2\pi = 2\pi\ln(2)$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 7: 10 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x}}{y} \cdot z^2$$

der Punkt $P := (1,1,1)$ und der Vektor $\vec{a} = (1,0,-1)^T$.

Berechnen Sie :

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle P

b) Die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Lösung 7 :

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x}y} z^2 \;\Rightarrow\; f_x(P) = \frac{1}{2}$$

$$f_y = -\frac{\sqrt{x}}{y^2} z^2 \;\Rightarrow\; f_y(P) = -1$$

$$f_z = \frac{\sqrt{x}}{y} 2z \;\Rightarrow\; f_z(P) = 2$$

a) $f(P) = \dfrac{\sqrt{1}\cdot 1}{1} = 1$

Gleichung der Tangentialebene

$$w - f(P) = f_x(P)(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f_z(z - z_0) \;, \quad P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$w - 1 = \frac{1}{2}(x-1) - 1(y-1) + 2(z-1)$$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} := \left(\triangledown f(P) \cdot \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} \right) = \left(\frac{1}{2}, -1, 2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{2} - 2)\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 8: 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung folgender Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \quad \text{mit } \; y(1) = 2 \text{ durch Substitution mit } z = \frac{y}{x}$$

Lösung 8 :

$y = z \cdot x \;\Rightarrow\; y' = z' \cdot x + z$

Aus $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; z' \cdot x + z = z - \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; z' = -\frac{1}{x^2}$

$z = \frac{1}{x} + C \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{1}{x} + C \;\Rightarrow\; y = 1 + Cx$

Anfangsbedingung

$2 = y(1) = 1 + C \;\Rightarrow\; C = 1 \;\Rightarrow\; y = 1 + x$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 9:

10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem, d.h. berechnen Sie $y(x)$ zu

$$\begin{aligned} y'' + 4y' - 5y &= -10 \\ y(0) &= 8 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

a) Homogene Lösung

$$D^2 + 4D - 5 = 0 \;\Rightarrow\; D_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$$

b) Partikuläre Lösug

$$y_p = C \;\Rightarrow\; y_p' = y_p'' = 0 \;\Rightarrow\; 5C = 10 \;\Rightarrow\; C = 2 \;\Rightarrow\; y_p = 2$$

c) $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + 2$

d) Anfangsbedingung

$$y' = C_1 e^x - 5C_2 e^{-5x}$$

$$\begin{array}{ccccc} 8 & = & y(0) & = & C_1 + C_2 + 2 \\ 0 & = & y'(0) & = & C_1 - 5C_2 \\ \hline 8 & & & = & 6C_2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 6 = 6C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 1 \end{array}$$

Aus $0 = C_1 - 5C_2 \Rightarrow C_1 = 5C_2 = 5$

Also gilt :

$$y = 5e^x + e^{-5x} + 2$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 10: 10 Punkte

Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$, zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

x_k	-1	0	1	3
y_k	3	1	0	-2

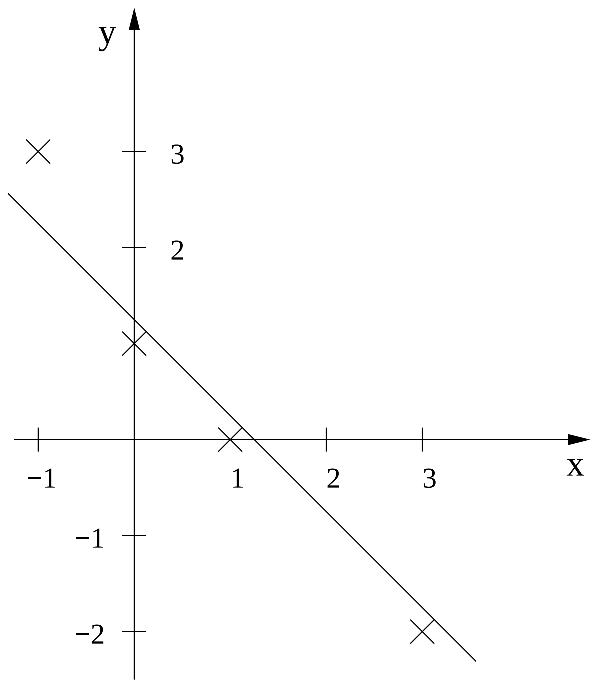
Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = a + bx$, die die Punkte (x_k, y_k) , $k = 1, 2, 3, 4$ approximiert. Skizzieren Sie die gegebene Punkte und die Ausgleichungsgerade.

Lösung 10 :

	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
	-1	3	1	-3
	0	1	0	0
	1	0	1	0
	3	-2	9	-6
$\sum$	3	2	11	-9

a und b erfüllen der GLS: $\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_k y_k \\ \sum y_k \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{7}{5} , \ b = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{5} - \frac{6}{5} x$$



Klausur Analysis IIa, SS 2007, 05.07.2007

Prof. Schelthoff, Dipl. Math. Mayiopoulos

Aufgabe 4: 10 Punkte

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $y = e^{2x+y}$ an der Stelle (Entwicklungspunkt) $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

Aufgabe 5: 10 Punkte

Berechnen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 10x^2 + 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 6: 10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + 0.5 \cdot x \cdot y + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 7: 10 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y,z) = 6 \cdot \ln(x \cdot y \cdot z) + x \cdot (y - z) \ ,$$

der Punkt $P := (3,1,2)$ und der Vektor $\vec{a} = (-1,1,2)^T$.

Berechnen Sie :

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle P

b) Die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Aufgabe 8: 10 Punkte

Die Fläche eines rechtwinkligen Dreieck ist gegeben durch $F(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{2}$,

wobei a und b die beiden senkrecht stehende Seiten des Dreiecks sind.

a) Berechnen Sie das Totale Differential von F an der Stelle $(a,b) = (2,4)$

b) Wie groß ist der maximale Berechnungsfehler, wenn a mit ± 0.02 und b mit ± 0.03 schwanken.

Aufgabe 9: 10 Punkte

Man bestimme die Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4x + 9y + 10$$

Aufgabe 10: 10 Punkte

Gegeben sind die Punkte

x_k	y_k
-2	4
0	2
1	-2
3	-4

Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$, die die Punkte (x_k, y_k) , $k = 1,2,3,4$ approximiert. Skizzieren Sie die gegebene Punkte und die Ausgleichungsgerade.

Klausur Analysis IIb - WS 2007/08, 31.01.2008

Prof. S. Pawelke , Dr. T. Streit

Aufgabe 1: 4 Punkte

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = \sin(2x+y) + x^2$ um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Aufgabe 2: 3 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{f}$ mit $\vec{f} := \begin{pmatrix} y \cdot z^2 \\ x \cdot z^2 \\ 2x \cdot y \cdot z \end{pmatrix}$

Berechnen Sie:

1. $\mathit{div}\, \vec{f}$
2. $\mathit{rot}\, \vec{f}$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei

$$\vec{v}(x,y) := \begin{pmatrix} \cos(x)e^{3y} + 2xy + \frac{1}{x} \\ 3\sin(x)e^{3y} + x^2 + 3 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, warum ein Potential f von $\vec{v}$ existiert. Bestimmen Sie dieses Potential (vollständiger Lösungsweg ist anzugeben).

Aufgabe 4: 4 Punkte

Berechnen Sie $\iint\limits_G (x + \cos(y))\, dx\, dy$, wobei G das Gebiet ist, welches durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi - x$ eingeschlossen wird. Skizzieren Sie G.

Aufgabe 5: 3 Punkte

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = 2x + xy$$

Geben Sie auch alle konstanten Lösungen an.

h w

Aufgabe 6: 4 Punkte

Lösen Sie die Differentialgleichung:

$$y' = -3y + e^x$$

Aufgabe 7: 4 Punkte

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mittels Potenzreihenansatz:

$$y' = 2y + x\ , \quad y(0) = 1$$

Berechnen Sie die konkreten Werte für die ersten vier Koeffizienten und geben Sie die allgemeine Rekursionsformel für die restlichen Koeffizienten an.

Aufgabe 8: 4 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' - 4y' - 5y = 0\ ,\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 1$.

Summe: 30 Punkte

Klausur Analysis II, SS 2006, 03.07.2006

Prof. Pawelke, Dipl. Math. Mayiopoulos

Aufgabe 4: 3 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 5: 4 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y,z) = x^3(2y+1)^2 z - (x^3+y^2+z)^2 ,$$

der Punkt $P := (1,2,3)$ und der Vektor $\vec{a} = (1,-2,2)^T$.

Berechnen Sie :

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle P

b) Die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Aufgabe 6: 4 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y) = ye^x \sin(\pi \cdot x \cdot y) + 10 \text{ und der Punkt } \quad P := (x_0, y_0) := (3,2) .$$

Berechnen Sie :

a) Das totale Differential von f an der Stelle P

b) Eine Schranke für $\left|\dfrac{\triangle f}{f(3,2)}\right|$, wenn x_0 und y_0 um 0.001 schwanken

Aufgabe 7: 4 Punkte

Man bestimme die Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$$

Aufgabe 8: 4 Punkte

Gegeben sind die Punkte

k	x_k	y_k
1	1	3
2	3	6
3	4	10
4	5	12
5	7	14

Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$, die die Punkte (x_k, y_k) , $k = 1,2,3,4,5$ approximiert.

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Klausur zur Analysis II, 02.07.2002

4) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} xy\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

5) Durch

$$z = f(x,y) = \frac{x}{x^2+2y+1}$$

ist eine Funktion von 2 reellen Variablen x und y gegeben. Man bestimme die Änderung $\frac{dz}{dt}$ an der Stelle $(x,y) = (1,2)$, wenn dort $\frac{dx}{dt} = 2$ und $\frac{dy}{dt} = 3$ ist.

6) Gibt es eine Funktion f, so dass gilt

$$grad\, f(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\ln y + \sqrt{y} + \frac{2x}{1+x^2} \\ \frac{x^2}{y} + \frac{x}{2\sqrt{y}} + 1 \end{pmatrix}, \quad y > 0\ ?$$

Man berechne sie gegebenenfalls.

7) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 - y^2 + \arctan(x \cdot y).$$

Man berechne

a) Das totale Differential von f im Punkt (1,0);

b) Die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt (1,0).

c) Die Richtungsableitung von f im Punkt (1,0) in Richtung des Vektors $(1,3)^T$.

8) Man bestimme relative Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2\exp\left((x-1)^2 - (y-2)^2\right).$$

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{x}{y}, \qquad y(1) = 3,$$

und skizziere die Lösungskurve.

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x \cdot y' - y = x$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(1) = 2$ erfüllt.

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Klausur zur Analysis II, 30.09.2002

4) Ist die Funktion

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x}{y^2+|x|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ?

5) Durch

$$z = f(x,y) = e^{x+y} \cos x$$

ist eine Funktion von 2 reellen Variablen x und y gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial z}{\partial r}$ und $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$, wenn $x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ und $y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$ gilt.

6) Gibt es eine Funktion f, so dass gilt

$$grad\, f(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x} + y\cos(xy) \\ 2y + x\cos(xy) \end{pmatrix} ?$$

Man berechne sie gegebenenfalls.

7) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - y + x^3y^2.$$

Man berechne

a) das totale Differential von f im Punkt (1,-1); 1

b) die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt (1,-1); 1

c) die Richtungsableitung von f im Punkt (1,-1) in Richtung des Vektors $(3,4)^T$. 1

8) Man bestimme relative Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2x^7 + 7y^2 - 14xy.$$

3

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x^2}{y^3}, \qquad y(3) = 2.$$

3

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x \cdot y' + y = 1$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(2) = 2$ erfüllt. 3

Summe der Punkte: 30

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Punkte

Klausur zur Analysis II, 18.07.2003

1) Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

3

2) Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{x^3+\sin x}{x^3+x^2+x+1}\,dx\ ?$$

3

3) Man berechne die Länge der durch $\{(x,y) \mid x=t^2,\ y=\frac{4}{5}\cdot t^{5/2},\ 0\le t\le 3\}$ gegebenen Kurve. 3

4) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{array}\right\}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist. 3

5) Durch

$$f(x,y,z)=x\cdot y^3+(x-y)^2+z\cdot(x+y)$$

ist eine Funktion von 3 reellen Variablen x, y und z gegeben, ausserdem ein Punkt $P=(2,2,3)$ und ein Vektor $\vec{a}=(1,2,-2)^T$. 3

Man berechne

a) das totale Differential der Funktion f im Punkte P;

b) die Gleichung der Tangentialebene an f im Punkt P;

c) die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

6) Hat die vektorwertige Funktion

$$\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x^2+7\cos(x+2y) \\ e^y+14\cos(x+2y) \end{pmatrix},$$

eine Potentialfunktion? Man berechne sie gegebenenfalls. 3

7) Man bestimme die relativen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 + 6y^2 + 10.$$

3

8) Man berechne näherungsweise die Änderung $\triangle z$ von

$$z = f(x,y) = \frac{y}{x^2},$$

wenn $x = 1$ und $y = 2$ um $\triangle x = -0,1$ und $\triangle y = 0,2$ verändert werden.

Welche Beziehung muss allgemein zwischen $\triangle x$ und $\triangle y$ für dieses $f(x,y)$ gelten, damit $\triangle z \approx 0$ gilt ? 3

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' + x^3 y = x^3, \qquad y(0) = 3.$$

3

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 2, y'(0) = 1$ erfüllt. 3

Summe der Punkte: 30

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Punkte

Klausur zur Analysis II, 30.09.2003

1) Man zeige, dass gilt:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Hinweis: Es gilt $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = x(xe^{-\frac{x^2}{2}})$ und die Stammfunktion von $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ kann leicht berechnet werden. 3

2) Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{x^2}{x^3-1}\,dx\ ?$$

3

3) Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ um die y-Achse entsteht ein Rotationskörper. Man berechne sein Volumen. 3

4) Man untersuche, ob die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{x^2+y^2},\quad (x,y) \neq (0,0)$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ergänzbar ist. 3

5) Durch

$$f(x,y) = x^2 \cdot e^y - y^2 \cdot \ln x$$

ist eine Funktion von 2 reellen Variablen x und y gegeben. Im Punkte $P_0 = (x_0, y_0) = (1,0)$ bestimme man: 3

a) den Gradienten der Funktion f;

b) die Gleichung der Tangentialebene an f;

c) die Richtung mit der Steigung Null.

6) Hat die vektorwertige Funktion

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{y} + \dfrac{2x}{1+x^2} \\[2ex] -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{1}{y} \end{pmatrix}$$

eine Potentialfunktion? Man berechne sie gegebenenfalls. 3

7) Man bestimme die relativen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2y^3 - 3y^2 - x.$$

3

8) Zwischen den reellen positiven Variablen x, y und z bestehe die Gleichung

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Man bestimme die Näherungsformel für die Änderung $\triangle z$ von z wenn sich x bzw. y um $\triangle x$ bzw. $\triangle y$ ändern.

Was gilt für die relative Änderung $\frac{\triangle z}{z}$, wenn $\frac{\triangle x}{x} = \frac{\triangle y}{y} = c$ ist? 3

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = x \cdot e^{-y}, \qquad y(0) = 1.$$

3

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 0, y'(0) = 3$ erfüllt. 3

Summe der Punkte: **30**

Klausur zur Analysis II

Jansen + Mayiopoulos, FH Aachen-Jülich, 15.7.2004
Zeit: 120 Minuten, Jede der 10 Aufgaben : 3 Punkte, bestanden mit 15 Punkten

---

1. Man betrachte die Schar von Funktionen
$$F_c(x) = c \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4+t^2} dt \quad .$$
Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} F_c(x) = 1$?

2. Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^3+\cos(x)}{x^4-1} dx$?

3. Man zeige, dass die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$
für festes y stetig in x ist (und umgekehrt), aber (als Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$) nicht stetig ist.

4. Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ im Punkt (3,4) auf.
Vergleichen Sie den Wert der Ebene mit dem Wert der Funktion in den Punkten (2.9 , 4.2) und (2 , 2). Warum ist die erste Differenz wesentlich kleiner als die zweite ?
Bilden Sie das Taylorpolynom 2ten Grades von $f(x,y)$ um den Punkt (3,4) .

5. Ein Tetraeder habe die Ecken (0,0,0) , (2,0,0), (0,3,0) und (0,0,4).
Bestimmen Sie den Punkt im $\mathbb{R}^3$, für den die Summe der Quadrate der Abstände von den Ecken minimal ist.

6. Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y,z) = x + z$ über dem Bereich $B := \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq y, 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

7. Gibt es eine Funktion F(x,y) mit
a) $F_x(x,y) = 2x + cos(x+2y)$ und $F_y(x,y) = e^{-y} + 2cos(x+2y)$
b) $F_x(x,y) = xy$ und $F_y(x,y) = 2xy$
Wenn ja, soll sie berechnet werden.

8. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$
relative Minima und Maxima?

9. Man löse das Anfangswertproblem
$$xy' - y = x^4 \, , \, y(1) = 2 \quad .$$

10. Lösen Sie die folgende DGL $y' + y = 3$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ durch Potenzreihenansatz $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$ und Koeffizientenvergleich.

FH Jülich, FZJ/ZAM, ReZe der RWTH Aachen, K. Bach, S.Pawelke

Punkte

Klausur zur Analysis II,Teil 2, 1.2.2007

1) Für das Vektorfeld

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 \\ x^3+y^3+z^3 \end{pmatrix}$$

berechne man

a) $div \vec{f}$ 1

b) $rot \vec{f}$ 1

c) $div(rot(\vec{f}))$. 1

2) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2+1} + 2\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} \\ \arctan(x) - \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } x, y > 0$$

Gibt es eine Funktion $f(x,y)$, so dass gilt

$$\vec{V}(x,y) = grad\, f(x,y) \quad ?$$

Man berechne Sie gegebenenfalls. 3

3) Skizzieren Sie das Gebiet G in der (x,y) - Ebene, das durch die Geraden $y = 1-x$, $y = 1+x$ und die x-Achse eingeschlossen wird, und berechnen Sie

$$\int_G \int e^{x+y}\, dx\, dy$$

4

4) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' - 2x = \frac{2xy}{5+x^2}$ 4

5) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = -2x \cdot (y^2 - y), \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

Ist die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert? (Begründung!) 4

6) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^2 + \frac{y}{x}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der Substitution $z = \frac{y}{x}$. 4

b.w.

7) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = -xy, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

durch Potenzreihenansatz, indem man eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihe angibt und die ersten vier Koeffizienten der Reihe berechnet.

4

8) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

4

Summe der Punkte: 30

Klausur Analysis II, SS 2010, 09.07.2010

Prof. Schelthoff, Dr. Voß

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2}\, dx$$

Aufgabe 2: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals

$$\int_3^\infty \frac{3x^2-2\cos(x)}{x^3-1+\sin(x)}\, dx$$

Aufgabe 3: 10 Punkte

Erläutern Sie: Was ist die Richtungsableitung? Welche Rolle spielt dabei der Gradient? Welchen maximalen und minimalen Wert kann diese Richtungsableitung annehmen ?

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 y} \\ \frac{\alpha x+1}{y} - \frac{1}{y^2 x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_{>0}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter α in der Funktion $f(x,y)$ so, dass die Funktion eine Stammfunktion (Potential) besitzt. Berechnen Sie für dieses α diese Stammfunktion.

b) Berechnen Sie zu $f(x,y)$ mit dem in Teil a) berechneten Wert von α die Divergenz von f im Punkt (2,2).

Aufgabe 5: 10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren. Welcher Punkt der Geraden $y = 5x + 7$ hat den kleinsten quadratischen Abstand zum Punkt (2,0) ? (Den Abstand selber brauchen Sie nicht auszurechnen)

Aufgabe 6: 10 Punkte

Wir betrachten als zweidimensionalen Integrationsbereich B den Kreisring zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 mit positiven Koordinaten ($x \geq 0, y \geq 0$), also alle Punkte im ersten Quadranten, die einen euklidischen Abstand zwischen 1 und 2 vom Ursprung haben. Wie groß ist das Integral über diesen Bereich der Funktion

$$f(x,y) = x \cdot y$$

Aufgabe 7: 10 Punkte

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2-ter Ordnung (bis zum quadratischen Term) an der Stelle $x_0 = 0, y_0 = 1$ der Funktion

$$f(x,y) = \ln(y + e^x)$$

Aufgabe 8: 10 Punkte

Die DGL des ungestörten harmonischen Oszillators ohne Resonanz lautet

$$y''(t) + w_0^2 \cdot y(t) = K \cdot \cos(w_1 t)$$

mit $w_0, w_1, \in \mathbb{R}^+ . w_0 \neq w_1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL. Was passiert falls sich w_1 dem Wert w_0 annähert?

Aufgabe 9: 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y' = \sqrt{y + x + 1} - 1$ durch Substitution

b) $y' + 3y = 6 \cdot e^{-2x}$, mit $y(0) = 2$

Aufgabe 10: 10 Punkte

Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

x_k	-1	0	1	4
y_k	5	4	2	0

Aufgabe 5: 10 Punkte

Bei dem Kauf des Grundstückes stellt sich heraus, dass nur die Grundstücksfläche mit 1800 m^2 fest ist, dass aber die genauen rechteckigen Abmaße verhandelbar sind. Eine Seite des rechteckigen Grundstückes grenzt an einen Fluss. Da kleine Kinder auf dem Grundstück spielen können sollen, ist der Gartenzaum, der das ganze Grundstück umranden soll, an der Flussseite dreimal so teuer wie an den übrigen Seiten. Alle anderen Kosten hingegen bleiben gleich.
Berechnen Sie die optimalen Grundstücksabmessungen (das Grundstück muss rechteckig sein!) für ein möglichst billigen Gartenzaun mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Hinweis : Sollten Sie diese Methode nicht anwenden können, dürfen Sie die Extremwertaufgabe auch über die normale Einsetzungsmethode lösen, erhalten dann aber maximal 7 Punkte.

Aufgabe 7: 10 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, und passen diese an die gegebenen Anfangsbedingungen an.

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^x, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -2$$

Aufgabe 9: 10 Punkte

Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu den folgenden Messwerten und zeichnen Sie die Messwerte und die Ausgleichsgerade in ein Koordinatensystem ein.

x_k	-3	-1	1	3
y_k	-3	0	4	6

Tabelle 1: Tabelle der Messwerte

Aufgabe 10: 10 Punkte

Berechnen Sie das Doppelintegral der Funktion $f(x, y) = 3x^2$ über der Fläche, die durch die x-Achse und die beiden Geraden $g_1(x) = x + 1$ und $g_2(x) = -x + 5$ begrenzt wird. Fertigen Sie auch eine Skizze des Integrationsbereiches an!

Aufgabe 8: 10 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

a) $4x^2y' = 4y^2+x^2$ Hinweis : Isolieren Sie y' und lösen Sie mittels geeigneter Substitution.

b) $y' - 2y = 4x$, mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 6: 10 Punkte

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2-ter Ordnung (einschließlich aller quadratischen Terme) an der Stelle $x_0 = -1$ $y_0 = \pi$ der Funktion

$$f(x, y) = \ln(x \cdot \cos(y))$$

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben ist das Vektorfeld $f(x,y,z)$ im $\mathbb{R}^3$ mit :

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ 2yx + z\cos(zy) \\ y\cos(yz) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie wenn möglich :

a) Die Divergenz des Vektorfeldes f im Punkt $P(1,1,0)$.

b) Die Rotation des Vektorfeldes f im Punkt $P(1,1,0)$.

c) Die skalare Stammfunktion F von f, sodass $\nabla F = f$ gilt.

Aufgabe 3: 10 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 + y^2)$, der Punkt $P(1,0)$, sowie die Richtung $\vec{a} = (1,1)^t$.

a) Geben Sie im Punkt P den Gradienten an.

b) Welche anschauliche Bedeutung hat der Gradient einer Funktion in dem Punkt P.

c) Geben Sie die Richtungsableitung in Richtung des Vektors $\vec{a}$ im Punkt P an.

d) Gibt es eine Richtung, in der der Betrag der Steigung im Punke P Null ist.

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Punkte

Klausur zur Analysis II, 30.09.2002

1) Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty \sin(x) e^{-x} dx.$$

3

2) Existieren die uneigentlichen Integrale

$$a) \int_1^\infty \frac{x^3+x+1}{x^5+7x+2} dx; \qquad b) \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} \cos(x) dx \quad ?$$

3

3) Man berechne das Volumen, das durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x}$ um die x-Achse von $x = 0$ bis $x = 5$ entsteht. 3

4) Ist die Funktion

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{x}{y^2+|x|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ? 3

5) Durch

$$z = f(x,y) = e^{x+y} \cos x$$

ist eine Funktion von 2 reellen Variablen x und y gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial z}{\partial r}$ und $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$, wenn $x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$ und $y = y(r,\varphi) = r \sin\varphi$ gilt. 3

6) Gibt es eine Funktion f, so dass gilt

$$grad\ f(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x} + y\cos(xy) \\ 2y + x\cos(xy) \end{pmatrix} ?$$

Man berechne sie gegebenenfalls. 3

b.w.

7) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 3x^2 - y + x^3y^2.$$

Man berechne

a) das totale Differential von f im Punkt (1,-1); 1

b) die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt (1,-1); 1

c) die Richtungsableitung von f im Punkt (1,-1) in Richtung des Vektors $(3,4)^T$. 1

8) Man bestimme relative Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2x^7 + 7y^2 - 14xy.$$

3

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x^2}{y^3}, \qquad y(3) = 2.$$

3

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x \cdot y' + y = 1$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(2) = 2$ erfüllt. 3

Summe der Punkte: 30

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Punkte

Klausur zur Analysis II, 18.07.2003

1) Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

3

2) Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{x^3 + \sin x}{x^3 + x^2 + x + 1}\, dx\ ?$$

3

3) Man berechne die Länge der durch $\{(x, y) \mid x = t^2,\ y = \frac{4}{5} \cdot t^{5/2},\ 0 \leq t \leq 3\}$ gegebenen Kurve. 3

4) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{array} \right\}$$

im Punkt $(0, 0)$ stetig ist. 3

5) Durch

$$f(x, y, z) = x \cdot y^3 + (x - y)^2 + z \cdot (x + y)$$

ist eine Funktion von 3 reellen Variablen x, y und z gegeben, ausserdem ein Punkt $P = (2, 2, 3)$ und ein Vektor $\vec{a} = (1, 2, -2)^T$. 3

Man berechne

a) das totale Differential der Funktion f im Punkte P;

b) die Gleichung der Tangentialebene an f im Punkt P;

c) die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

6) Hat die vektorwertige Funktion

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 7\cos(x + 2y) \\ e^y + 14\cos(x + 2y) \end{pmatrix},$$

eine Potentialfunktion? Man berechne sie gegebenenfalls. 3

7) Man bestimme die relativen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 + 6y^2 + 10.$$

3

8) Man berechne näherungsweise die Änderung $\triangle z$ von

$$z = f(x,y) = \frac{y}{x^2},$$

wenn $x = 1$ und $y = 2$ um $\triangle x = -0,1$ und $\triangle y = 0,2$ verändert werden.

Welche Beziehung muss allgemein zwischen $\triangle x$ und $\triangle y$ für dieses $f(x,y)$ gelten, damit $\triangle z \approx 0$ gilt ? 3

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' + x^3 y = x^3, \qquad y(0) = 3.$$

3

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 2, y'(0) = 1$ erfüllt. 3

Summe der Punkte: 30

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe der RWTH Aachen, S.Pawelke, P. Mayiopoulos

Punkte

Klausur zur Analysis II, 30.09.2003

1) Man zeige, dass gilt:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Hinweis: Es gilt $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = x(xe^{-\frac{x^2}{2}})$ und die Stammfunktion von $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ kann leicht berechnet werden. 3

2) Existiert das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty \frac{x^2}{x^3-1}\,dx\ ?$$

3

3) Durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{x},\ 0 \leq x \leq 4$ um die y-Achse entsteht ein Rotationskörper. Man berechne sein Volumen. 3

4) Man untersuche, ob die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{x^2+y^2},\ (x,y) \neq (0,0)$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ergänzbar ist. 3

5) Durch

$$f(x,y) = x^2 \cdot e^y - y^2 \cdot \ln x$$

ist eine Funktion von 2 reellen Variablen x und y gegeben. Im Punkte $P_0 = (x_0, y_0) = (1,0)$ bestimme man: 3

a) den Gradienten der Funktion f;

b) die Gleichung der Tangentialebene an f;

c) die Richtung mit der Steigung Null.

6) Hat die vektorwertige Funktion

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} + \frac{2x}{1+x^2} \\[2ex] -\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

eine Potentialfunktion? Man berechne sie gegebenenfalls. 3

7) Man bestimme die relativen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2y^3 - 3y^2 - x.$$

3

8) Zwischen den reellen positiven Variablen x, y und z bestehe die Gleichung

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Man bestimme die Näherungsformel für die Änderung $\triangle z$ von z wenn sich x bzw. y um $\triangle x$ bzw. $\triangle y$ ändern.

Was gilt für die relative Änderung $\frac{\triangle z}{z}$, wenn $\frac{\triangle x}{x} = \frac{\triangle y}{y} = c$ ist? 3

9) Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = x \cdot e^{-y}, \qquad y(0) = 1.$$

3

10) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 0, y'(0) = 3$ erfüllt. 3

Summe der Punkte: **30**

Klausur zur Analysis II

Jansen + Mayiopoulos, FH Aachen-Jülich, 15.7.2004
Zeit: 120 Minuten, Jede der 10 Aufgaben : 3 Punkte, bestanden mit 15 Punkten

---

1. Man betrachte die Schar von Funktionen
$$F_c(x) = c \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4+t^2} dt \quad .$$
Für welches $c \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} F_c(x) = 1$?

2. Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^3 + \cos(x)}{x^4 - 1} dx$?

3. Man zeige, dass die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$
für festes y stetig in x ist (und umgekehrt), aber (als Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$) nicht stetig ist.

4. Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ im Punkt (3,4) auf.
Vergleichen Sie den Wert der Ebene mit dem Wert der Funktion in den Punkten (2.9 , 4.2) und (2 , 2). Warum ist die erste Differenz wesentlich kleiner als die zweite ?
Bilden Sie das Taylorpolynom 2ten Grades von $f(x,y)$ um den Punkt (3,4) .

5. Ein Tetraeder habe die Ecken (0,0,0) , (2,0,0), (0,3,0) und (0,0,4).
Bestimmen Sie den Punkt im $\mathbb{R}^3$, für den die Summe der Quadrate der Abstände von den Ecken minimal ist.

6. Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y,z) = x + z$ über dem Bereich $B := \{(x,y,z) : 0 \le z \le y, 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$.

7. Gibt es eine Funktion F(x,y) mit
a) $F_x(x,y) = 2x + cos(x+2y)$ und $F_y(x,y) = e^{-y} + 2cos(x+2y)$
b) $F_x(x,y) = xy$ und $F_y(x,y) = 2xy$
Wenn ja, soll sie berechnet werden.

8. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$
relative Minima und Maxima?

9. Man löse das Anfangswertproblem
$$xy' - y = x^4 \, , \, y(1) = 2 \quad .$$

10. Lösen Sie die folgende DGL $y' + y = 3$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$ durch Potenzreihenansatz $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$ und Koeffizientenvergleich.

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 1: 3 Punkte

Man berechne das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\, dx$$

(Hinweis: Quadratische Ergänzung)

Lösung :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{(x^2 - 2x + 1) + 4}\, dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{(x-1)^2 + 4}\, dx = \frac{1}{4} \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2 + 1}\, dx$$

$$= \frac{2}{4} \lim_{R\to\infty} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \Big|_1^R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 2: 3 Punkte

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3-\sin(x)}{x^2+5}\,dx$?

Lösung :

$$\left|\int_2^\infty \frac{3-\sin(x)}{x^2+5}\,dx\right| \le \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{|3-\sin(x)|}{x^2+5}\,dx$$

$$\le \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{4}{x^2}\,dx = 4 \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_2^R = 4 \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\right) = 2$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 3: 3 Punkte

Man zeige , dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \\ \dfrac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

(Hinweis: Polarkoordinaten)

Lösung :

$$f(r,\varphi) = \frac{r^3\Big(\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\Big)}{r^2} = r\Big(\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)\Big)$$

$$|f(r,\varphi) - 0| = r|\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin^2(\varphi)| \leq \; r \cdot \Big(|\cos^2(\varphi)\sin(\varphi)| + |\cos(\varphi)\sin^2(\varphi)|\Big)$$

$$\leq \; 2r \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 4: 3 Punkte

a) Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion

$f(x, y, z) = e^{3x} + x^2 z - z(x + y)$ im Punkt $(0, 1, 2)$ auf.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung :

$f(x, y, z) = e^{3x} + x^2 z - z(x + y)$

$f(0, 1, 2,) = 1 - 2 = -1$

$f_x = 3e^{3x} + 2xz - z \implies f_x(0, 1, 2) = 3 - 2 = 1$

$f_y = -z \implies f_y(0, 1, 2) = -2$

$f_z = x^2 - (x + y) \implies f_z(0, 1, 2) = -1$

a) $w + 1 = 1 \cdot x - 2(y - 1) - 1(z - 2)$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{12}$, $\dfrac{\partial f}{\partial a} = (+1, -2, -2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 5: 3 Punkte

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Kurve

$y = \sin(x)$ von $x = \pi$ um die x-Achse entsteht.

Lösung :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2x))\,dx = \frac{\pi}{2}\Big(x - \frac{\sin(2x)}{2}\Big)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot (\pi) = \frac{\pi^2}{2}$$

Aufgabe 6: 3 Punkte

Berechnen Sie das Integral $\int\int_G (x+y)^3\,dxdy$

$G := \{(x,y) \;:\; 0 \le x \le 2\,,\; -x \le y \le x\}.$

Lösung :

$$\int\int_G (x+y)^3\,dxdy = \int_0^2 \Big(\int_{-x}^{x} (x+y)^3\,dy\Big)\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{(x+y)^4}{4}\Big|_{-x}^{x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (x+x)^4 = \frac{16}{4}\int_0^2 x^4\,dx$$

$$= 4\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{4}{5}\cdot 32 = \frac{128}{5}$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $F(x,y)$ mit

$$F_x(x,y) = y - 3e^{-3x} \quad \text{und} \quad F_y(x,y) = x + 7\cos(7y)$$

Wenn ja, soll sie berechnet werden.

Lösung :

$F_{xy} = 1 \qquad F_{yx} = 1$

$F = \int (y - 3e^{-3x})\,dx = yx + e^{-3x} + C(y)$

$F_y = x + C'(y) = x + 7\cos(7y) \implies \quad C'(y) = 7\cos(7y) \implies$

$C(y) = \sin(7y) + C \implies$

$F = xy + e^{-3x} + \sin(7y) + C$

Aufgabe 8: 3 Punkte

Man untersuche die Funktion

$$f(x,y) = 7x^2 - y + xy + y^2$$

relative Minima, Maxima und Sattelpunkte?

Lösung :

$f = 7x^2 - y + xy + y^2$

$f_x = 14x + y = 0 \implies \quad y = -14x$

$f_y = -1 + x + 2y = 0 \implies \quad -1 + x - 28x = 0 \implies \quad -27x = 1 \implies \quad x = -\dfrac{1}{27}$

$y = -14x = -14\Big(-\dfrac{1}{27}\Big) = \dfrac{14}{27}$

$f_{xx} = 14\,, \quad f_{yy} = 2\,, \quad f_{xy} = 1 \implies \quad H = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\,, \quad \det H = 27 > 0 \quad \text{Min}$

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$xy' = 6y + x^3 \qquad y(1) = 1\ .$$

Lösung :

$xy' = 6y + x^3\ , \quad y(1) = 1$

Homogene Lösung:

$$x\frac{dy}{dx} = 6y \implies \frac{dy}{y} = \frac{6}{x}dx \implies \int\frac{dy}{y} = 6\int\frac{dy}{x} \implies$$

$$\ln|y| = 6\ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx^6| \implies$$

$$y_h = Cx^6$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p = C(x)\cdot x^6 \implies y_p' = C'x^6 + 6Cx^5$$

$$\left.\begin{array}{l} xy_p' = C'x^7 + 6Cx^6 \\ 6y + x^3 = 6Cx^6 + x^3 \end{array}\right\} \implies C'x^7 + 6Cx^6 = 6Cx^6 + x^3 \implies$$

$$C'(x) = x^{-4} \implies C(x) = -\frac{1}{3}x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$$

$$y_p = C(x)x^6 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}x^6 = -\frac{1}{3}x^{-3}$$

$$y = y_h + y_p = Cx^6 - \frac{1}{3}x^3$$

Anfangs Bedingung $y(1) = 1$

$$1 = y(1) = C\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 1 \implies C = \frac{4}{3}\ , \quad y = \frac{4}{3}x^6 - \frac{1}{3}x^3$$

Klausur Analysis II, WS 2004/05 , 14.03.2005

Aufgabe 10: 3 Punkte

Lösen Sie die Folgende DGL $y' = 3y - 3x + 1$ mit dem Anfangswert $y(0) = 2$
durch Potenzreihenansatz $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ und Koeffizientenvergleich.

Lösung :

$$y' = 3y - 3x + 1\ , \quad y(0) = 2 \qquad (*)$$

$$y := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$$

$$2 = y(0) = \alpha_0$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k x^{k-1} \overset{l=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)a_{l+1}x^l$$

Aus $(*)$ $\Longrightarrow$

$$\int_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k = 3\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3x + 1$$

$$k = 0 \implies \quad a_1 = 3a_0 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$k = 1 \implies \quad 2a_2 = 3a_1 - 3 = 3(a_1 - 1) = 3 \cdot 6 = 18$$

$$k \geq 2 \implies \quad (k+1)a_{k+1} = 3a_k \implies \quad a_{k+1} = \frac{3}{k+1}a_k$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 1: 3 Punkte

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Kurve
$y = \dfrac{10}{1+x}$ von $x = 0$ bis $x = \infty$ umd die x-Achse ensteht.

(Hinweis : $V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$)

Lösung :

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^\infty \frac{10^2}{(1+x)^2} dx = 100\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{(1+x)^2} \\ &= 100\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{1+x} \right) \Big|_0^R = 100\pi \cdot \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{1+R} + 1 \right) = 100\pi \end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 2: 3 Punkte

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^4+\cos(x)}{x^5-1}\,dx$?

Lösung :

$$\int_2^\infty \frac{x^4+\cos(x)}{x^5-1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{x^4+\cos(x)}{x^5-1}$$

$$\begin{aligned}\int_2^R \frac{x^4+\cos(x)}{x^5-1}\,dx \quad &\geq \int_2^R \frac{x^4-1}{x^5-1}\,dx > \int_2^R \frac{x^4-1}{x^5}\,dx \\ &= \int_2^R \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^5}\right)dx = \left(\ln(x)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4}\right)\Big|_2^R \\ &= \ln(R)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{R^4}-\ln(2)-\frac{1}{64} \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty\end{aligned}$$

D.h. das Integral existiert nicht!

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 3: 3 Punkte

Man zeige , dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = y = 0 \\ \dfrac{x^3 - y^5}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

Lösung :

Setzt man für x und y Polarkoordinaten ein, so gilt:

$x = r\cos(\varphi)$, $\qquad y = r\sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} f(r,\varphi) &= \frac{r^3 \cdot \cos^3(\varphi) - r^5 \cdot \sin^5(\varphi)}{r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi)} = \frac{r^3 \cdot \Big(\cos^3(\varphi) - r^2 \cdot \sin^5(\varphi)\Big)}{r^2 \cdot \Big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\Big)} \\ &= r \cdot \Big(\cos^3(\varphi) - r^2 \cdot \sin^5(\varphi)\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(r,\varphi) - 0| &= \Big|r \cdot (\cos^3(\varphi) - r^2 \sin^5(\varphi))\Big| \leq r|\cos^3(\varphi) - r^2 \sin^5(\varphi)| \\ &\leq r \cdot \Big(|\cos^3(\varphi)| + r^2 \cdot |\sin^5(\varphi)|\Big) \leq r \cdot (1 + r^2) \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: 3 Punkte

a) Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$ im Punkt $(1,4)$ auf.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt (1,4) in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung :

$f(1,4) = 1 + 32 - 4 = 29$

$f_x = 2x - y \implies f_x(1,4) = 2 - 4 = -2$

$f_y = 4y - x \implies f_y(1,4) = 16 - 1 = 15$

a) Gleichung der Tangentialebene:

$z - f(1,4) = f_x \cdot (x-1) + f_y \cdot (y-4)$

$z - 29 = -2 \cdot (x-1) + 15 \cdot (y-4)$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies |\vec{a}| = \sqrt{5} \implies \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = (-2, 15) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-2+30}{\sqrt{5}} = \frac{28}{\sqrt{5}}$$

Klausur Analysis II, SS 2005 , 15.07.2005

Aufgabe 5: 3 Punkte

Für die Funktion $f(x,y) = x^3 + 2xy$ berechnen Sie das Taylorpolynom 2−ten Grades an der Stelle $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$.

Lösung :

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)
\end{aligned}
$$

$f(1,2) = 1 + 4 = 5$

$f_x = 3x^2 + 2y \implies f_x(1,2) = 3 + 4 = 7$

$f_y = 2x \implies f_y(1,2) = 2$

$f_{xx} = 6x \implies f_{xx}(1,2) = 6$

$f_{yy} = 0$

$f_{xy} = 2$

Taylorpolynom:

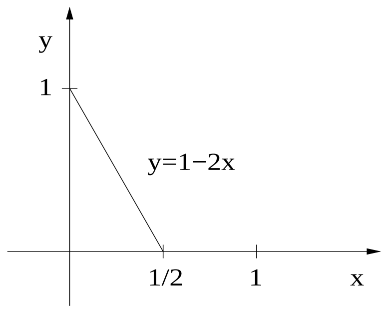
$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 5 + 7(x-1) + 2(y-2) + \frac{1}{2}\left[6(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2)\right] \\
&= 5 + 7(x-1) + 2(y-2) + 3(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6: 3 Punkte

Skizzieren Sie das Gebiet $G := \{(x, y) \mid x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ 2x + y \leq 1\}$

und berechnen Sie das Integral $\int\int_G (x^2 - 3y^2)\, dxdy$

Lösung :



$$\int\int_G (x^2 - 3y^2)\, dxdy = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{1-2x} (x^2 - 3y^2)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left((x^2 y - y^3) \Big|_0^{1-2x} \right) dx$$

$$= \int_0^{1/2} (x^2(1-2x) - (1-2x)^3)\, dx$$

$$= \int_0^{1/2} ((x^2 - 2x^3) - (1-2x)^3)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(1-2x)^4 \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{4 - 3 - 12}{12} = -\frac{11}{96}$$

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $F(x,y)$ mit

$$F_x(x,y) = 2xy - e^{x+2y} + 1 \text{ und } F_y(x,y) = x^2 - 2e^{x+2y} - 2y^2$$

Wenn ja, soll sie berechnet werden.

Lösung :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy - e^{x+2y} + 1) = 2x - 2e^{x+2y} \\ A_2 &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 2e^{x+2y} - 2y^2) = 2x - 2e^{x+2y} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad A_1 = A_2 \Longrightarrow$$

Es existiert eine Stammfunktion F.

Es gilt:

$$F(x,y) = \int (2xy - e^{x+2y} + 1)\,dx = x^2y - e^{x+2y} + x + C(y) \Longrightarrow$$

$$F_y = x^2 - 2e^{x+2y} + C'(y) \stackrel{!}{=} x^2 - 2e^{x+2y} - 2y^2 \Longrightarrow$$

$$C'(y) = -2y^2 \Longrightarrow \quad C(y) = -\frac{2}{3}y^3 \Longrightarrow$$

$$F(x,y) = x^2y - e^{x+2y} + x - \frac{2}{3}y^3 + C$$

Aufgabe 8: 3 Punkte

Für welche reellen k besitzt die Funktion $f(x,y) = kx^3 + y^2 - 2kxy + k$ relative Extrema?

Lösung :

a) $k \neq 0$

$$f_x = 3kx^2 - 2ky = k(3x^2 - 2y) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (*)$$

$$f_y = 2y - 2kx = 2(y - kx) \stackrel{!}{=} 0 \implies y = kx \qquad (**)$$

$(**)$ in $(*)$ eingesetzt ergibt:

$$3x^2 - 2kx \stackrel{!}{=} 0 \implies x(3x - 2k) = 0 \implies x = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2k}{3} \end{cases} \implies y = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2k^2}{3} \end{cases}$$

Kritische Punkte: $(0,0)$, $(\frac{2k}{3}, \frac{2k^2}{3})$

$f_{xx} = 6kx$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -2k$

	$(0,0)$	$(\frac{2k}{3}, \frac{2k^2}{3})$
f_{xx}	0	$4k^2$
f_{yy}	2	2
f_{xy}	$-2k$	$-2k$
H	$\begin{pmatrix} 0 & -2k \\ -2k & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4k^2 & -2k \\ -2k & 2 \end{pmatrix}$
$\det(H)$	$-4k^2 < 0$	$4k^2 > 0$
	SP	*Min*

b) $k = 0 \implies f(x,y) = y^2 \geq 0$

$f_x = 0$, $f_y = 2y \stackrel{!}{=} 0 \implies y = 0 \implies$ Kritische Punkte $(x\ ,\ 0)$.

Die Funktion hat an der Stelle $(x\ ,\ 0)$ kein relatives Minimum,

weil $f(x \pm \varepsilon\ ,\ 0) = f(x\ ,\ 0) = y^2$ gilt.

Aus a) und b) folgt:

Die Funktion f hat für $k \neq 0$ relative Extrema nämlich Minima.

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$y' - 4y = xe^{4x} \ , \quad y(0) = 3.$$

Lösung :

Homogene Lösung:

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \implies \frac{dy}{y} = 4dx \implies \int \frac{dy}{y} = 4 \int dx \implies$$

$$\ln|y| = 4x + C \implies |y| = e^{4x+c} = e^C \cdot e^{4x} = \tilde{C}e^{4x} \implies$$

$$y_h = C \cdot e^{4x} \ , \quad C \in \mathbb{R}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p := C(x)e^{4x} \implies y_p' = C'e^{4x} + 4Ce^{4x} \implies$$

$$C'e^{4x} + 4Ce^{4x} - 4Ce^{4x} = xe^{4x}$$

$$C'(x) = x \implies C(x) = \frac{x^2}{2} \implies y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{4x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{4x} + \frac{x^2}{2}e^{4x}$$

Aus der Anfangsbedingung folgt:

$$3 = y(0) = C \implies y = 3e^{4x} + \frac{x^2}{2}e^{4x} = (3 + \frac{x^2}{2})e^{4x}$$

Aufgabe 10: 3 Punkte

Lösen Sie die Folgende DGL $y' = xy + 1$ mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots$ und Koeffizientenvergleich. Bestimmen Sie die Rekursionsformel zur Berechnung der Koeffizienten a_k und berechnen Sie die ersten 8 Glieder a_0 bis a_7 der Potenzreihe.

Lösung :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \implies \quad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Aus der Anfangsbedingung folgt $2 = y(0) = a_0$

Einsetzen von y und y' in der DGL ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} + 1$$

Indextransformation: $l = k - 1$ bzw. $j = k + 1$ ergibt:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) a_{l+1} x^l = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1} x^j + 1 \implies$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k - 1 = 0 \implies$$

$$(a_1 - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) a_{k+1} - a_{k-1}\right] x^k = 0 \implies$$

$$a_1 = 0 \,, \quad a_1 = 1$$

$$(k+1) a_{k+1} - a_{k-1} = 0 \implies \quad a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{k+1} \,, \qquad k \geq 1$$

Für $k = 0, 1, \ldots, 7$ gilt:

$$a_0 = 2 \,, \quad a_1 = 1 \,, \quad a_2 = \frac{a_0}{2} = 1 \,, \quad a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3} \,, \quad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{15} \,, \quad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{1}{24} \,, \quad a_7 = \frac{a_5}{5} = \frac{1}{7 \cdot 15} = \frac{1}{105}$$

Klausur Analysis II, WS 2005/06, 21.09.2005

Aufgabe 1: 3 Punkte

Man berechne das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx\ .$$

Lösung :

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$$

Partielle Integration : $u = \ln(x) \implies u' = \frac{1}{x}$

$$v' = \frac{1}{x^3} \implies v = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^R \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(x)}{x^2}\Big|_1^R - \int_1^R \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(R)}{R^2} + \frac{1}{2}\int_1^R \frac{1}{x^3}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(R)}{R^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}\Big|_1^R \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(R)}{R^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{R^2} + \frac{1}{4} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: 3 Punkte

Existiert das uneigentliche Integral?

$$\int_2^\infty \frac{x^2+x+1}{x^3-2x-2}\,dx$$

Lösung :

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{x^2+x+1}{x^3-2x-2}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{x^2+x+1}{x^3-2x-2} > \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{x^2}{x^3}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \ln(x)\,\Big|_2^R = \lim_{R\to\infty}(\ln(R)-\ln(2)) = \infty\end{aligned}$$

Das Integral ist divergent.

Aufgabe 3: 3 Punkte

Man berechne die Länge der durch $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0,5]$ gegebenen Kurve

Lösung :

$$L = \int_0^5 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} \implies y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \implies (y')^2 = \frac{9}{4}x \implies$$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^5 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 \\
&= \frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}\cdot 5\right)-1\right] = \frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{343}{8}-1\right) \\
&= \frac{8}{27}\cdot\frac{335}{8} = \frac{335}{27}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: 3 Punkte

Zeigen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2+3y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig?

Lösung :

Wir setzen Polarkoordinaten ein. Dann gilt

$x = r\cos(\varphi)$, $\quad y = r\sin(\varphi)$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} r^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) \cdot \dfrac{r^2\cos^2(\varphi) + 3r^2\sin^2(\varphi)}{r^2(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))} & , \quad r \neq 0 \\ 0 & , \quad r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(r,\varphi) - 0| &= |r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\cdot(\cos^2(\varphi) + 3\sin^2(\varphi))| \\ &\leq r^2|\sin(\varphi)|\cdot|\cos(\varphi)|\cdot\Big(|\cos^2(\varphi)| + 3|\sin^2(\varphi)|\Big) \leq 4r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Die Funktion ist im Nullpunkt stetig.

Aufgabe 5: 3 Punkte

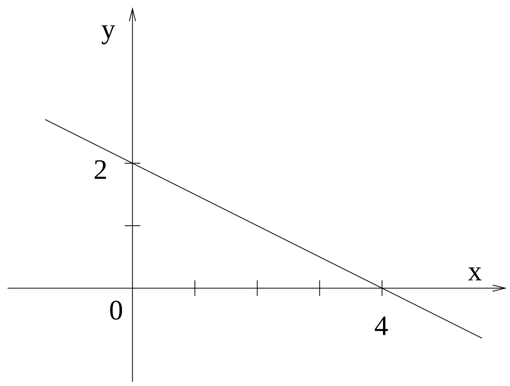
Skizzieren Sie das Gebiet

$$G = \{(x,y) \mid x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1\}$$

und berechnen Sie

$$\int\int_G xydxdy$$

Lösung :



$$G = \left\{(x,y) \;\middle|\; x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1\right\}$$

Aus $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1$ folgt: $\frac{x}{2} + y \leq 2 \implies \quad y \leq 2 - \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}
\int\int_G xydxdy &= \int_0^4 \left(\int_0^{2-\frac{x}{2}} xydy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(xy^2 \Big|_0^{2-\frac{x}{2}}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 x\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x\left(4 - 2x + \frac{x^2}{4}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{16}\right) \Big|_0^4 \\
&= \frac{1}{2}\left(32 - \frac{128}{3} + 16\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $f(x,y)$, so dass gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{2x+y} - 3e^{-3x} \\ \dfrac{1}{2x+y} + 2y \end{pmatrix}$$

Man berechne Sie gegebenfalls.

Lösung :

Mit $g_1 := \dfrac{2}{2x+y} - 3e^{-3x}$ und $g_2 := \dfrac{1}{2x+y} + 2y$ gilt:

$\dfrac{\partial g_1}{\partial y} = -\dfrac{2}{(2x+y)^2} = \dfrac{\partial g_2}{\partial x}$, d.h. es existiert eine Funktion f.

Es gilt:

$$f_x = \frac{2}{2x+y} - 3e^{-3x} \implies f = \int \left(\frac{2}{2x+y} - 3e^{-3x} \right) dx = \ln(2x+y) + e^{-3x} + C(y) \implies$$

$$f_y = \frac{1}{2x+y} + C'(y) = \frac{1}{2x+y} + 2y \implies$$

$$C'(y) = 2y \implies \quad C(y) = y^2 + C \implies$$

$$f(x,y) = \ln(2x+y) + e^{-3x} + y^2 + C$$

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 + y^2 + y + \sin(x \cdot y)$$

Man berechne:

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(1,0)$

b) Die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,0)$ in Richtung des Vektors $(1,3)^T$

Lösung :

$f_x = 6x^2 + y\cos(x \cdot y) \implies \quad f_x(1,0) = 6$

$f_y = 2y + 1 + x\cos(x \cdot y) \implies \quad f_y(1,0) = 2$

a) $f(1,0) = 2$

Gleichung der Tangentialebene

$z - f(1,0) = f_x(1,0) \cdot (x-1) + f_y(1,0) \cdot (y-0) \implies$

$z - 2 = 6(x-1) + 2y$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = (\triangledown f \cdot \vec{a}) = (6,2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

Aufgabe 8: 3 Punkte

Man bestimme die relativen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = (x^2-2)y - xy^2$$

Lösung :

$$f_x = 2xy - y^2 = y(2x-y) \overset{!}{=} 0 \implies y = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases}$$

$$f_y = (x^2-2) - 2xy \overset{!}{=} 0$$

Ist $y = 0 \implies x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$

Ist $y = 2x \implies x^2 - 2 - 4x^2 = 0 \implies -3x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = -\frac{2}{3} \implies$ Keine Lösung

Kritische Punkte $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$

$f_{xx} = 2y$, $f_{yy} = -2x$, $f_{xy} = 2x - 2y$

	$(-\sqrt{2},0)$	$(\sqrt{2},0)$
f_{xx}	0	0
f_{yy}	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
f_{xy}	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
H	$\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$
$\det(H)$	-8	-8
	Sattepunkt	Sattelpunkt

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x}{e^y} \qquad y(0) = 1$$

und skizziere die Lösungskurve.

Lösung :

Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{e^y} \implies \quad e^y\,dy = xdx \implies \quad \int e^y\,dy = \int xdx \implies$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C \implies \quad y = \ln(\frac{x^2}{2} + C)$$

Aus $\quad 1 = y(0) = \ln(C) \implies \quad C = e^1 = e \implies$

Lösung des AWP $\quad y = \ln(\frac{x^2}{2} + e)$

Aufgabe 10: 3 Punkte

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - 2y = x + 1$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(1) = -\dfrac{5}{4}$ erfüllt.

Lösung :

Lineare DGL

a) Homogene Lösung

$$y' - 2y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = 2y \implies \frac{dy}{y} = 2dx \implies \int \frac{dy}{y} = 2\int dx \implies$$

$$\ln|y| = 2x + \tilde{C} \implies |y| = e^{2x+\tilde{C}} = e^{\tilde{C}} \cdot e^{2x} \implies$$

$$y_h = C \cdot e^{2x}$$

b) Partikuläre Lösung

$$y_p = C(x) \cdot e^{2x} \implies y_p' = C'(x) \cdot e^{2x} + C \cdot e^{2x} \implies$$

$$C' \cdot e^{2x} + 2c \cdot e^{2x} - 2C \cdot e^{2x} = x + 1 \implies$$

$$C' = (x+1)e^{-2x} \implies$$

$$\begin{aligned} C &= \int (x+1)e^{-2x}\,dx = -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} \implies \\ y_p &= C \cdot e^{2x} = -\left(\frac{x+1}{2} + \frac{1}{4}\right) e^{-2x} \cdot e^{2x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

c) Allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = C \cdot e^{-2x} - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)$$

d) Anfangsbedingung $y(1) = -\dfrac{5}{4}$

$$-\frac{5}{4} = y(1) = C \cdot e^{-2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = C \cdot e^{-2} - \frac{5}{4} \implies C \cdot e^{-2} = 0 \implies C = 0$$

Lösung des AWP : $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 1: 3 Punkte

Man berechne das Integral

$$\int_0^\infty xe^{-3x}\,dx\ .$$

Lösung:

$$I = \int_0^\infty xe^{-3x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int xe^{-3x}\,dx$$

Mit $u = x \implies u' = 1\,,\quad v' = e^{-3x} \implies v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$ folgt:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{3}xe^{-3x}\,\Big|_0^R + \frac{1}{3}\int_0^R e^{-3x}\,dx\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{3}Re^{-3R} - \frac{1}{9}e^{-3x}\,\Big|_0^R\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{3}Re^{-3R} - \frac{1}{9}e^{-3R} + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: 3 Punkte

Existiert das uneigentliche Integral?

$$\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{x^4+1}\,dx$$

Lösung:

Es gilt:

$$\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{x^4+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^4+1}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^2+x+1}{x^4+1}\,dx = I_1 + I_2$$

I_1 ist endlich

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^\infty \frac{x^2+x+1}{x^4+1}\,dx < \int_1^\infty \frac{3x^2}{x^4} = 3\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= 3 \cdot \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = 3 \cdot \lim_{\to\infty} (-\frac{1}{x})\Big|_1^R = 3 \cdot \lim_{R\to\infty} (-\frac{1}{R}+1) = 3 < \infty \end{aligned}$$

Das Integral ist konvergent.

Aufgabe 3: 3 Punkte

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Kurve
$y = (1+x)^{-\frac{3}{2}}$ von $x = 0$ bis $x = \infty$ um die x-Achse ensteht.

Hinweis : $V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$

Lösung:

$y^2 = (1+x)^{-3}$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_0^\infty (1+x)^{-3} \, dx = \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R (1+x)^{-3} \, dx \\
&= \pi \cdot \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{(1+R)^2} + 1 \right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: 3 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

Lösung:

Setzt man Polarkoordinaten ein, so gilt:

$$x = r\cos(\varphi)\ , \quad y = r\sin(\varphi)\ , \quad x^2 + y^2 = r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = r^2$$

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{r^5\cos^5(\varphi) - 2r^5\sin^5(\varphi)}{r^4} & , \quad r \neq 0 \\ 0 & , \quad r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(r,\varphi) - 0| &= \left| \frac{r^5\cos^5(\varphi) - 2r^5\sin^5(\varphi)}{r^4} \right| = r|\cos^5(\varphi) - 2\sin^5(\varphi)| \\ &\leq r(|\cos^5(\varphi)| + 2|\sin^5(\varphi)|) \leq r(1+2) = 3r \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Die Funktion ist im Nullpunkt stetig.

Aufgabe 5: 3 Punkte

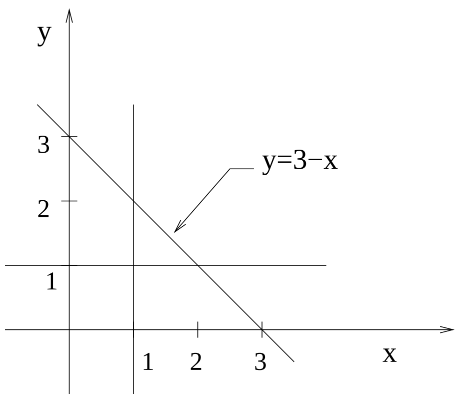
Skizzieren Sie das Gebiet

$$G = \{(x,y) \mid x \geq 1\ ,\ y \geq 1\ ,\ x+y \leq 3\}$$

und berechnen Sie

$$\int\int_G (x+y)^{\frac{1}{2}}\, dxdy$$

Lösung:



$$\begin{aligned}
\int\int_G (x+y)^{\frac{1}{2}}\, dxdy &= \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} (x+y)^{\frac{1}{2}}\, dy\right) dx \\
&= \frac{2}{3}\int_1^2 (x+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{3-x} dx \\
&= \frac{2}{3}\int_1^2 \left((x+3-x)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}}\right) dx \\
&= \frac{2}{3}\int_1^2 (\sqrt{27} - (x+1)^{\frac{3}{2}}) dx \\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{27}x - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{27} - \frac{2}{5}(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}})\right) \Big|_1^2 \\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{27} - \frac{2}{5}(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2})\right) \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{27} - \frac{36}{15}\sqrt{3} + \frac{16}{15}\sqrt{2} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{27} - \frac{12}{5}\sqrt{3} + \frac{16}{15}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: 3 Punkte

Gibt es eine Funktion $f(x, y)$, so dass gilt

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + y \cdot \cos(x \cdot y) \\ \\ 2y + 1 + x \cdot \cos(x \cdot y) \end{pmatrix}$$

Man berechne Sie gegebenfalls.

Lösung:

Mit $\quad f_1(x, y) = 6x^2 + y \cos(x \cdot y)$

$\qquad f_2(x, y) = 2y + 1 + x \cos(x \cdot y)$

gilt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \cos(x \cdot y) - xy \sin(x \cdot y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Es gibt eine Funktion $f(x, y)$.

Berechnung von $f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int (6x^2 + y \cos(x \cdot y))\, dx + C(y) \\ &= 2x^3 + \sin(x \cdot y) + C(y) \quad \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(x \cdot y) + C'(y) \stackrel{!}{=} 2y + 1 + x \cos(x \cdot y) \Longrightarrow$$

$$C'(y) = 2y + 1 \Longrightarrow \quad C(y) = y^2 + y + C \Longrightarrow$$

$$f(x, y) = 2x^3 + \sin(x \cdot y) + y^2 + y + C$$

Aufgabe 7: 3 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2x^3 + \frac{y^2}{x} + y$$

Man berechne:

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(1,2)$

b) Die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,2)$ in Richtung des Vektors $(3,4)^T$

Lösung:

$$f_x = 6x^2 - \frac{y^2}{x^2} \implies f_x(1,2) = 6 - 4 = 2$$

$$f_y = \frac{2y}{x} + 1 \implies f_y(1,2) = 4 + 1 = 5$$

a) $f(1,2) = 2 + 4 + 2 = 8$

Gleichung der Tangentialebene:

$$z - f(1,2) = f_x(1,2) \cdot (x-1) + f_y(1,2) \cdot (y-2) \implies$$

$$z - 8 = 2 \cdot (x-1) + 5 \cdot (y-2)$$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \left(\triangledown f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) = (2,5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6+20}{5} = \frac{26}{5}$$

Aufgabe 8: 3 Punkte

Man bestimme die relativen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

Lösung:

$f_x = 3x^2 - 3 = 0 \implies \quad x^2 = 1 \implies \quad x = \pm 1$

$f_y = 3y^2 - 12 = 0 \implies \quad y^2 = 4 \implies \quad y = \pm 2$

Kritische Punkte : $(1,2)\ ,\ (-1,2)\ ,\ (1,-2)\ ,\ (-1,-2)$

$f_{xx} = 6x\ , \quad f_{yy} = 6y\ , \quad f_{xy} = 0$

	$(1,2)$	$(-1,2)$	$(1,-2)$	$(-1,-2)$
f_{xx}	6	-6	6	-6
f_{yy}	12	12	-12	-12
f_{xy}	0	0	0	0
H	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$
$\det(H)$	$72 > 0$	$-72 < 0$	$-72 < 0$	$72 > 0$
	Min	*SP*	*SP*	*Max*

Aufgabe 9: 3 Punkte

Man löse das Anfangswertproblem

$$(x^2+1)\cdot y' = 2x+1 \quad , \qquad y(0)=0$$

Lösung:

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = 2x+1 \implies \quad dy = \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx \implies$$

$$\int dy = \int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \implies$$

$$y = \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C$$

Anfangsbedingung :

$$0 = y(0) = \ln(1) + \arctan(0) + C = C \implies \quad C=0$$

$$y = \ln(x^2+1) + \arctan(x)$$

Klausur Analysis II, WS 2005/2006, 13.03.2006

Aufgabe 10: 3 Punkte

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = x$$

und die Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ erfüllt.

Lösung:

a) Homogene Lösung

$$y' - y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = y \implies \frac{dy}{y} = dx \implies \int \frac{dy}{y} = \int dx \implies$$

$$\ln|y| = x + \tilde{C} \implies |y| = e^{x+\tilde{C}} = e^{\tilde{C}} \cdot e^x \implies$$

$$y_h = C \cdot e^x\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Partikuläre Lösung

$$y_p = C(x) \cdot e^x \implies y_p' = C' \cdot e^x + C \cdot e^x \implies$$

$$C' \cdot e^x + C \cdot e^x - C \cdot e^x = x \implies C' = x \cdot e^{-x} \implies$$

$$C = \int x \cdot e^{-x}\, dx$$

Mit $u = x \implies u' = 1\,, \quad v' = e^{-x} \implies v = -e^{-x} \implies$

$$C = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -(x+1) \cdot e^{-x}$$

$$y_p = C \cdot e^x = -(x+1) \cdot e^{-x} \cdot e^x = -(x+1)$$

c) $y = y_h + y_p = C \cdot e^x - (x+1)$

d) Anfangsbedingung

$$2 = y(0) = C - 1 \implies C = 3 \implies y = 3 \cdot e^x - (x+1)$$

Klausur Analysis II, SS 2006, 03.07.2006

Prof. Pawelke, Dipl. Math. Mayiopoulos

Aufgabe 1: 4 Punkte

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\,dx$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz der Integralen

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^4-4}{x^6+6}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x\sqrt{x}}\,dx$

Aufgabe 3: 3 Punkte

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Kurve

$y = \frac{2}{7}\cdot x^{\frac{3}{2}}$ von $x=0$ bis $x=7$ um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 4: 3 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 5: 4 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y,z) = x^3(2y+1)^2z - (x^3+y^2+z)^2 \; ,$$

der Punkt $P := (1,2,3)$ und der Vektor $\vec{a} = (1,-2,2)^T$.

Berechnen Sie :

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle P

b) Die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Aufgabe 6: 4 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y) = ye^x \sin(\pi \cdot x \cdot y) + 10 \text{ und der Punkt } \quad P := (x_0, y_0) := (3,2) \,.$$

Berechnen Sie :

a) Das totale Differential von f an der Stelle P

b) Eine Schranke für $\left|\frac{\triangle f}{f(3,2)}\right|$, wenn x_0 und y_0 um 0.001 schwanken

Aufgabe 7: 4 Punkte

Man bestimme die Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3xy$$

Aufgabe 8: 4 Punkte

Gegeben sind die Punkte

k	x_k	y_k
1	1	3
2	3	6
3	4	10
4	5	12
5	7	14

Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$, die die Punkte (x_k, y_k) , $k = 1,2,3,4,5$ approximiert.

FH Jülich, FZJ/ZAM, ReZe der RWTH Aachen, K. Bach, S.Pawelke

Punkte

Klausur zur Analysis II,Teil 2, 1.2.2007

1) Für das Vektorfeld

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2 \\ x^3+y^3+z^3 \end{pmatrix}$$

berechne man

a) $div\vec{f}$ 1

b) $rot\vec{f}$ 1

c) $div(rot(\vec{f}))$. 1

2) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2+1} + 2\,\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} \\ \arctan(x) - \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} \quad \text{mit } x,y>0$$

Gibt es eine Funktion $f(x,y)$, so dass gilt

$$\vec{V}(x,y) = grad\, f(x,y) \quad ?$$

Man berechne Sie gegebenenfalls. 3

3) Skizzieren Sie das Gebiet G in der (x,y) - Ebene, das durch die Geraden $y = 1-x$, $y = 1+x$ und die x-Achse eingeschlossen wird, und berechnen Sie

$$\int_G\int e^{x+y}\,dx\,dy$$

4

4) Lösen Sie die Differentialgleichung $y' - 2x = \frac{2xy}{5+x^2}$ 4

5) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = -2x\cdot(y^2-y), \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

Ist die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert? (Begründung!) 4

6) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^2 + \frac{y}{x}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der Substitution $z = \frac{y}{x}$. 4

b.w.

7) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = -xy, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

durch Potenzreihenansatz, indem man eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihe angibt und die ersten vier Koeffizienten der Reihe berechnet.

4

8) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

4

Summe der Punkte: 30

Klausur Analysis IIa, SS 2007, 05.07.2007

Prof. Schelthoff, Dipl. Math. Mayiopoulos

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\int_1^\infty (x+2)e^{-3x}\,dx$$

Aufgabe 2: 10 Punkte

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Aufgabe 3: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz der Integrale

$$\int_1^\infty \frac{x+3}{x^3+3x+3}\,dx$$

Aufgabe 4: 10 Punkte

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $y = e^{2x+y}$

an der Stelle (Entwicklungspunkt) $(x_0, y_0) = (2,1)$.

Aufgabe 5: 10 Punkte

Berechnen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 10x^2 + 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 6: 10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+0.5\cdot x\cdot y+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Aufgabe 7: 10 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y,z) = 6 \cdot \ln(x \cdot y \cdot z) + x \cdot (y - z) \ ,$$

der Punkt $P := (3,1,2)$ und der Vektor $\vec{a} = (-1,1,2)^T$.

Berechnen Sie :

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle P

b) Die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Aufgabe 8: 10 Punkte

Die Fläche eines rechtwinkligen Dreieck ist gegeben durch $F(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{2}$,

wobei a und b die beiden senkrecht stehende Seiten des Dreiecks sind.

a) Berechnen Sie das Totale Differential von F an der Stelle $(a,b) = (2,4)$

b) Wie groß ist der maximale Berechnungsfehler, wenn a mit ± 0.02 und b mit ± 0.03 schwanken.

Aufgabe 9: 10 Punkte

Man bestimme die Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4x + 9y + 10$$

Aufgabe 10: 10 Punkte

Gegeben sind die Punkte

x_k	y_k
-2	4
0	2
1	-2
3	-4

Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$, die die Punkte (x_k, y_k) , $k = 1,2,3,4$ approximiert. Skizzieren Sie die gegebene Punkte und die Ausgleichungsgerade.

Klausur Analysis IIb - WS 2007/08, 31.01.2008

Prof. S. Pawelke , Dr. T. Streit

Aufgabe 1: 4 Punkte

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $f(x,y) = \sin(2x+y) + x^2$ um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Aufgabe 2: 3 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{f}$ mit $\vec{f} := \begin{pmatrix} y \cdot z^2 \\ x \cdot z^2 \\ 2x \cdot y \cdot z \end{pmatrix}$

Berechnen Sie:

1. $div\,\vec{f}$
2. $rot\,\vec{f}$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei

$$\vec{v}(x,y) := \begin{pmatrix} \cos(x)e^{3y} + 2xy + \frac{1}{x} \\ 3\sin(x)e^{3y} + x^2 + 3 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, warum ein Potential f von $\vec{v}$ existiert. Bestimmen Sie dieses Potential (vollständiger Lösungsweg ist anzugeben).

Aufgabe 4: 4 Punkte

Berechnen Sie $\iint\limits_G (x + \cos(y))\, dx\, dy$, wobei G das Gebiet ist, welches durch die Geraden $x = 0,\ y = 0,\ y = \pi - x$ eingeschlossen wird. Skizzieren Sie G.

Aufgabe 5: 3 Punkte

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = 2x + xy$$

Geben Sie auch alle konstanten Lösungen an.

Aufgabe 6: 4 Punkte

Lösen Sie die Differentialgleichung:

$$y' = -3y + e^x$$

Aufgabe 7: 4 Punkte

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mittels Potenzreihenansatz:

$$y' = 2y + x\ , \quad y(0) = 1$$

Berechnen Sie die konkreten Werte für die ersten vier Koeffizienten und geben Sie die allgemeine Rekursionsformel für die restlichen Koeffizienten an.

Aufgabe 8: 4 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' - 4y' - 5y = 0\ ,\ y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 1$.

Summe: 30 Punkte

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie das Integral

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\big(\ln(x)\big)^3}$$

Lösung :

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\cdot(\ln(x))^3} = \lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{dx}{x\cdot(\ln(x))^3}$$

Transformation :

$$z = \ln(x) \implies \quad dz = \frac{1}{x}\,dx$$

Für $\quad x = e \implies \quad z = 1$

Für $\quad x = R \implies \quad z = \ln(R)$

Es gilt also :

$$\begin{aligned}
\int_e^R \frac{dx}{x\cdot(\ln(x))^3} &= \int_1^{\ln(R)} \frac{dz}{z^3} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}\Bigg|_1^{\ln(R)} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(\ln(R))^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{(\ln(R))^2}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals

$$\int_2^\infty \frac{x - \sin(x^2)}{x^4 - 4}\, dx$$

Lösung :

$$\int_2^\infty \frac{x - \sin(x^2)}{x^4 - 4}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{x - \sin(x^2)}{x^4 - 4}\, dx$$

Es gilt : $(R \geq 2)$

$$0 \leq \int_2^R \frac{x - \sin(x^2)}{x^4 - 4}\, dx$$

und

$$\begin{aligned}
\int_2^R \frac{x - \sin(x^2)}{x^4 - 4}\, dx \quad &< \quad \int_2^R \frac{x+1}{x^4 - 4}\, dx \;<\; \int_2^R \frac{2x}{x^4 - 4}\, dx \\
&= \quad \int_2^R \frac{2x}{\frac{x^4}{2} + (\frac{x^4}{4} - 4)}\, dx \;<\; \int_2^R \frac{2x}{\frac{x^4}{2}}\, dx \;=\; 4 \cdot \int_2^R \frac{1}{x^3} \\
&= \quad -\frac{1}{x}\bigg|_2^R = -2 \cdot \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{R^2} \quad \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{2} \;<\; \infty
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: 10 Punkte

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Lösung :

Wir setzen Polarkoordinaten ein. Es gilt :

$x = r \cdot \cos(\varphi)\,, \qquad y = r \cdot \sin(\varphi)\,, \qquad x^2 + y^2 = r^2 \cdot \big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big) = r^2$

$$\begin{aligned} \Big| f(x,y) - f(0,0) \Big| &= \left| \frac{x^6 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x^6 y|}{x^2+y^2} \\ &= \frac{|r^6 \cdot \cos^6(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\varphi)|}{r^2} = r^5 \cdot |\cos^6(\varphi) \cdot \sin(\varphi)| \\ &\leq r^5 \cdot |\cos^6(\varphi)| \cdot |\sin(\varphi)| \\ &\leq r^5 \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben seien die Funktion $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\,, \quad x,y,z \neq 0\,,$

der Punkt $P = (2,1,4)$ und der Vektor $\vec{a} = (-1,1,2)^T$

a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene von f an dem Punkt P

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an dem Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Lösung :

$$f_x = -\frac{1}{x^2} \implies f_x(P) = -\frac{1}{4}$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} \implies f_y(P) = -1$$

$$f_z = -\frac{1}{z^2} \implies f_z(P) = -\frac{1}{16}$$

a) $f(P) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{2+4+1}{4} = \frac{7}{4}$

Gleichung der Tangentialebene :

$$w - f(P) = f_x(P)\cdot(x-x_0) + f_y(P)\cdot(y-y_0) + f_z(P)\cdot(z-z_0) \implies$$

$$w - \frac{7}{4} = -\frac{1}{4}\cdot(x+1) - (y-1) - \frac{1}{16}\cdot(z-4)$$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \bigtriangledown f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{16}\right)\cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2-8-1}{8} = -\frac{7}{8}$$

Aufgabe 5: 10 Punkte

Berechnen Sie die Extrema und Sattelpunkte der Funktion :

$$f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{1}{y} + xy\ , \quad x \neq 0\ , \quad y \neq 0\ .$$

Lösung :

$$f_x = -\frac{8}{x^2} + y \stackrel{!}{=} 0 \implies \quad y = \frac{8}{x^2} \implies \quad \frac{1}{y} = \frac{x^2}{8}$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} + x \stackrel{!}{=} 0 \implies \quad -\frac{x^4}{64} + x = 0 \implies$$

$$x \cdot \left(-\frac{x^3}{64} + 1\right) = 0 \implies \quad x = \begin{cases} 0 & \text{keine Lösung} \\ x^3 = 64 = 2^6 \implies & x = 2^2 = 4 \end{cases}$$

$$x = 4 \implies \quad y = \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2} \implies \quad \text{Kritischer Punkt : } \left(4\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$f_{xx} = \frac{16}{x^3} \implies \quad f_{xx}(4, \frac{1}{2}) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$f_{yy} = \frac{2}{y^3} \implies \quad f_{yy}(4, \frac{1}{2}) = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$$

$$f_{xy} = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} \implies \quad \det(H) = 4 - 1 = 3 > 0 \implies \quad \text{Minimum.}$$

Aufgabe 6: 10 Punkte

Hat das Vektorfeld

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy \\ \sin(3x+y) - e^{-y} + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

eine Stammfunktion ? Falls ja , leiten Sie diese her.

Lösung :

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy \\ \sin(3x+y) - e^{-y} + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{f_1}}{\partial y} = 3\cos(3x+y) + x = \frac{\partial \vec{f_2}}{\partial x} \implies \qquad \text{Es existiert eine Stammfunktion } \ F(x,y)$$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int (3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy)\, dx \\ &= -\cos(3x+y) + e^{-x} + \frac{x^2 y}{2} + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(x,y) \quad &= \quad \sin(3x+y) + \frac{x^2}{2} + C'(y) = \sin(3x+y) - e^{-y} + \frac{x^2}{2} \\ &\implies \quad C'(y) = -e^{-y} \\ &\implies \quad C(y) = e^{-y} + C \end{aligned}$$

$$F(x,y) = -\cos(3x+y) + e^{-x} + e^{-y} + \frac{x^2 y}{2} + C$$

Aufgabe 7: 10 Punkte

Skizzieren Sie die Fläche $G \subset \mathbb{R}^2$ zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 und Mittelpunkt $(0,0)$. Integrieren Sie nun die Funktion

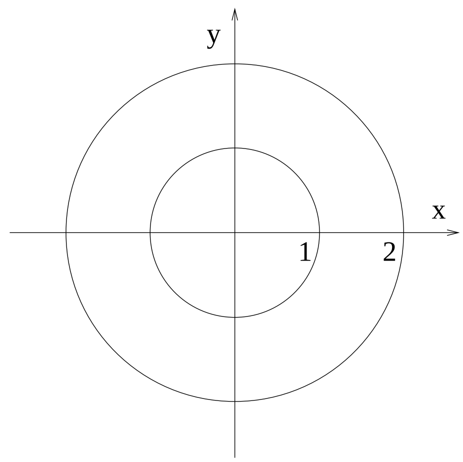
$$\frac{1}{(x^2+y^2)^3}$$

über diese Fläche.

Hinweis : Rechnen Sie zuerst $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^3}$ in Polarkoordinaten um.

Lösung :

$x = r \cdot \cos(\varphi) \quad , \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$



$$\begin{aligned}
\iint\limits_G \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy &= \iint\limits_{1 \le x^2+y^2 \le 4} \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\substack{1 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi}} \frac{1}{r^6} \cdot r\,dr\,d\varphi \\
&= \left(\int_1^2 \frac{1}{r^5}\,dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right) \\
&= \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r^4}\,\Bigg|_1^2\right) \cdot \left(\varphi\,\Bigg|_0^{2\pi}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) \cdot 2\pi \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15\pi}{32}
\end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2008, 03.07.2008

Aufgabe 8: 10 Punkte

Lösen Sie die DGL

$$y' = \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

durch die Substitution $\quad z = \dfrac{y}{x}$.

Lösung :

$$y' = \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

Substitution : $\quad z = \dfrac{y}{x}\ , \quad y = z \cdot x\ , \qquad y' = z' \cdot x + z$

$$\Longrightarrow \quad z' \cdot x + z = \frac{1}{\cos(z)} + z \qquad \text{(DGL)}$$

$$\Longrightarrow \quad z' \cdot x = \frac{1}{\cos(z)} \qquad (\text{ TdV }) \qquad x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos(z)}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx \ = \int \cos(z)\,dz \ \Longrightarrow \quad \ln|x| + C = \sin(z)$$

$$z = \arcsin(\ln|x| + C) = \arcsin(\ln|\widetilde{C}x|)\ , \quad \left[C = \ln|\widetilde{C}| \ \Longrightarrow \quad \widetilde{C} = e^{C}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad y = z \cdot x = x \cdot \arcsin(\ln|\widetilde{C}x|)$$

Aufgabe 9: 10 Punkte

Lösen Sie das AWP : $y' - 2y = 4x \ , \qquad y(0) = 6 \ .$

Lösung :

$y' - 2y = 4x \ , \quad y(0) = 6$

Homogene Lösung

$$y' = 2y \ , \quad \frac{dy}{dx} = 2y \implies \int \frac{1}{y}\, dy = \int 2\, dx \implies$$

$$\ln|y| = 2x + C \implies |y| = e^{2x+C} = e^C \cdot e^{2x} \implies y = \widetilde{C} \cdot e^{2x}$$

Partielle Lösung

$y_p = C(x)e^{2x}$

$y_p' = C'e^{2x} + 2Ce^{2x}$

$C'e^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = 4x \implies C'e^{2x} = 4x \implies C' = 4xe^{-2x}$

$u' = e^{-2x} \ , \qquad u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$v = 4x \ , \quad v' = 4$

$$\begin{aligned} C(x) = \int \underbrace{4x}_{v}\underbrace{e^{-2x}}_{u'}\, dx &= uv - \int uv'\, dx \\ &= -2xe^{-2x} + \int e^{-2x}\, dx \\ &= -2xe^{-2x} - (e^{-2x}) \\ &= -2xe^{-2x} - e^{-2x} \end{aligned}$$

$y_p = C(x)e^{2x} = -2x - 1$

Gesamte Lösung

$y = y_h + y_p = Ce^{2x} - 2x - 1 \ , \qquad \text{AWP} : 6 = C - 1 \implies C = 7$

$y = 7e^{2x} - 2x - 1$

Aufgabe 10: 10 Punkte

Lösen Sie das AWP : $y'' - 4y' + 5y = 0\ ,\qquad y(0) = 2\ ,\quad y'(0) = 13\ .$

Lösung :

$y'' - 4y' + 5y = 0\ ,\quad y(0) = 2\ ,\quad y'(0) = 13$

$D^2 - 4D + 5 = 0 \implies \quad D_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$

$y = C_1 e^{2x} \sin(x) + C_2 e^{2x} \cos(x)$

$y' = 2C_1 e^{2x} \sin(x) + C_1 e^{2x} \cos(x) + 2C_2 e^{2x} \cos(x) - C_2 e^{2x} \sin(x)$

$2 = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 \implies \quad C_2 = 2$

$13 = 2C_1 \sin(0) + C_1 \cos(0) + 2C_2 \cos(0) - C_2 \sin(0) = C_1 + 2C_2 = C_1 + 4 \implies \quad C_1 = 9$

$y = 9e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cos(x)$

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie das Integral

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\big(\ln(x)\big)^3}$$

Lösung :

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\cdot(\ln(x))^3} = \lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{dx}{x\cdot(\ln(x))^3}$$

Transformation :

$$z = \ln(x) \implies \quad dz = \frac{1}{x}\,dx$$

Für $\quad x = e \implies \quad z = 1$

Für $\quad x = R \implies \quad z = \ln(R)$

Es gilt also :

$$\begin{aligned} \int_e^R \frac{dx}{x\cdot(\ln(x))^3} &= \int_1^{\ln(R)} \frac{dz}{z^3} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}\bigg|_1^{\ln(R)} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(\ln(R))^2}-1\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{(\ln(R))^2}\right) \quad \xrightarrow[R\to\infty]{} \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals

$$\int_2^\infty \frac{x-\sin(x^2)}{x^4-4}\,dx$$

Lösung :

$$\int_2^\infty \frac{x-\sin(x^2)}{x^4-4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{x-\sin(x^2)}{x^4-4}\,dx$$

Es gilt : $(R \geq 2)$

$$0 \leq \int_2^R \frac{x-\sin(x^2)}{x^4-4}\,dx$$

und

$$\begin{aligned}
\int_2^R \frac{x-\sin(x^2)}{x^4-4}\,dx &< \int_2^R \frac{x+1}{x^4-4}\,dx < \int_2^R \frac{2x}{x^4-4}\,dx \\
&= \int_2^R \frac{2x}{\frac{x^4}{2}+(\frac{x^4}{4}-4)}\,dx < \int_2^R \frac{2x}{\frac{x^4}{2}}\,dx = 4\cdot\int_2^R \frac{1}{x^3} \\
&= -\frac{1}{x}\Big|_2^R = -2\cdot\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{2}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{1}{2} < \infty
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: 10 Punkte

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Lösung :

Wir setzen Polarkoordinaten ein. Es gilt :

$x = r \cdot \cos(\varphi)\,, \qquad y = r \cdot \sin(\varphi)\,, \qquad x^2 + y^2 = r^2 \cdot \big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big) = r^2$

$$\begin{aligned} \Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| &= \left|\frac{x^6 y}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x^6 y|}{x^2+y^2} \\ &= \frac{|r^6 \cdot \cos^6(\varphi) \cdot r \cdot \sin(\varphi)|}{r^2} = r^5 \cdot |\cos^6(\varphi) \cdot \sin(\varphi)| \\ &\leq r^5 \cdot |\cos^6(\varphi)| \cdot |\sin(\varphi)| \\ &\leq r^5 \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben seien die Funktion $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\,, \quad x,y,z \neq 0\,,$

der Punkt $P = (2,1,4)$ und der Vektor $\vec{a} = (-1,1,2)^T$

a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene von f an dem Punkt P

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an dem Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Lösung :

$$f_x = -\frac{1}{x^2} \implies f_x(P) = -\frac{1}{4}$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} \implies f_y(P) = -1$$

$$f_z = -\frac{1}{z^2} \implies f_z(P) = -\frac{1}{16}$$

a) $f(P) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{2+4+1}{4} = \frac{7}{4}$

Gleichung der Tangentialebene :

$$w - f(P) = f_x(P)\cdot(x-x_0) + f_y(P)\cdot(y-y_0) + f_z(P)\cdot(z-z_0) \implies$$

$$w - \frac{7}{4} = -\frac{1}{4}\cdot(x+1) - (y-1) - \frac{1}{16}\cdot(z-4)$$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \bigtriangledown f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(-\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{16}\right)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2-8-1}{8} = -\frac{7}{8}$$

Aufgabe 5: 10 Punkte

Berechnen Sie die Extrema und Sattelpunkte der Funktion :

$$f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{1}{y} + xy\ , \quad x \neq 0\ , \quad y \neq 0\ .$$

Lösung :

$$f_x = -\frac{8}{x^2} + y \overset{!}{=} 0 \implies y = \frac{8}{x^2} \implies \frac{1}{y} = \frac{x^2}{8}$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} + x \overset{!}{=} 0 \implies -\frac{x^4}{64} + x = 0 \implies$$

$$x \cdot \left(-\frac{x^3}{64} + 1\right) = 0 \implies x = \begin{cases} 0 & \text{keine Lösung} \\ x^3 = 64 = 2^6 \implies & x = 2^2 = 4 \end{cases}$$

$$x = 4 \implies y = \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2} \implies \text{Kritischer Punkt : } \left(4\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

$$f_{xx} = \frac{16}{x^3} \implies f_{xx}(4, \frac{1}{2}) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$f_{yy} = \frac{2}{y^3} \implies f_{yy}(4, \frac{1}{2}) = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16$$

$$f_{xy} = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} \implies \det(H) = 4 - 1 = 3 > 0 \implies \text{Minimum.}$$

Aufgabe 6: 10 Punkte

Hat das Vektorfeld

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy \\ \sin(3x+y) - e^{-y} + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

eine Stammfunktion ? Falls ja , leiten Sie diese her.

Lösung :

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy \\ \sin(3x+y) - e^{-y} + \dfrac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial y} = 3\cos(3x+y) + x = \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial x} \implies \qquad \text{Es existiert eine Stammfunktion } F(x,y)$$

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int (3\sin(3x+y) - e^{-x} + xy)\, dx \\ &= -\cos(3x+y) + e^{-x} + \frac{x^2 y}{2} + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= \sin(3x+y) + \frac{x^2}{2} + C'(y) = \sin(3x+y) - e^{-y} + \frac{x^2}{2} \\ &\implies C'(y) = -e^{-y} \\ &\implies C(y) = e^{-y} + C \end{aligned}$$

$$F(x,y) = -\cos(3x+y) + e^{-x} + e^{-y} + \frac{x^2 y}{2} + C$$

Aufgabe 7: 10 Punkte

Skizzieren Sie die Fläche $G \subset \mathbb{R}^2$ zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 und Mittelpunkt $(0,0)$. Integrieren Sie nun die Funktion

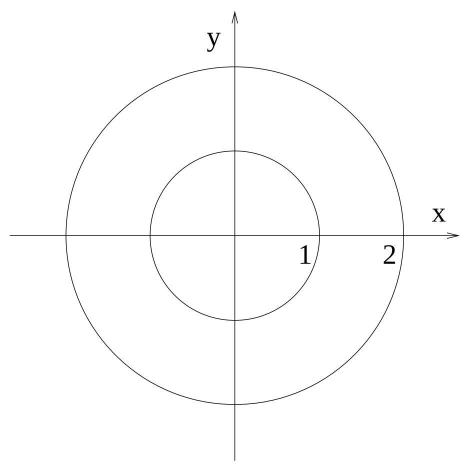
$$\frac{1}{(x^2+y^2)^3}$$

über diese Fläche.

Hinweis : Rechnen Sie zuerst $\frac{1}{(x^2+y^2)^3}$ in Polarkoordinaten um.

Lösung :

$x = r\cdot\cos(\varphi) \quad , \quad y = r\cdot\sin(\varphi)$



$$\begin{aligned}
\iint\limits_G \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy &= \iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4} \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy \\
&= \iint\limits_{\substack{1\le r\le 2\\ 0\le\varphi\le 2\pi}} \frac{1}{r^6}\cdot r\,dr\,d\varphi \\
&= \left(\int_1^2 \frac{1}{r^5}\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right) \\
&= \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{r^4}\Bigg|_1^2\right)\cdot\left(\varphi\,\Bigg|_0^{2\pi}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)\cdot 2\pi \\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{15}{16} = \frac{15\pi}{32}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: 10 Punkte

Lösen Sie die DGL

$$y' = \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

durch die Substitution $\quad z = \dfrac{y}{x}$.

Lösung :

$$y' = \frac{1}{\cos(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

Substitution : $\quad z = \dfrac{y}{x}\ , \quad y = z \cdot x\ , \qquad y' = z' \cdot x + z$

$$\Longrightarrow \quad z' \cdot x + z = \frac{1}{\cos(z)} + z \qquad \text{(DGL)}$$

$$\Longrightarrow \quad z' \cdot x = \frac{1}{\cos(z)} \qquad (\text{ TdV }) \qquad x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\cos(z)}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx \; = \int \cos(z)\, dz \implies \quad \ln|x| + C = \sin(z)$$

$$z = \arcsin(\ln|x| + C) = \arcsin(\ln|\widetilde{C}x|)\ , \quad \left[C = \ln|\widetilde{C}| \implies \quad \widetilde{C} = e^C \right]$$

$$\Longrightarrow \quad y = z \cdot x = x \cdot \arcsin(\ln|\widetilde{C}x|)$$

Aufgabe 9: 10 Punkte

Lösen Sie das AWP : $y' - 2y = 4x \ , \qquad y(0) = 6 \ .$

Lösung :

$y' - 2y = 4x \ , \quad y(0) = 6$

Homogene Lösung

$$y' = 2y \ , \quad \frac{dy}{dx} = 2y \implies \int \frac{1}{y}\,dy = \int 2\,dx \implies$$

$$\ln|y| = 2x + C \implies |y| = e^{2x+C} = e^C \cdot e^{2x} \implies y = \widetilde{C} \cdot e^{2x}$$

Partielle Lösung

$y_p = C(x)e^{2x}$

$y_p' = C'e^{2x} + 2Ce^{2x}$

$C'e^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = 4x \implies C'e^{2x} = 4x \implies C' = 4xe^{-2x}$

$u' = e^{-2x} \ , \qquad u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$v = 4x \ , \quad v' = 4$

$$\begin{aligned} C(x) = \int \underbrace{4x}_{v}\underbrace{e^{-2x}}_{u'}\,dx &= uv - \int uv'\,dx \\ &= -2xe^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx \\ &= -2xe^{-2x} - (e^{-2x}) \\ &= -2xe^{-2x} - e^{-2x} \end{aligned}$$

$y_p = C(x)e^{2x} = -2x - 1$

Gesamte Lösung

$y = y_h + y_p = Ce^{2x} - 2x - 1 \ , \qquad \text{AWP} : 6 = C - 1 \implies C = 7$

$y = 7e^{2x} - 2x - 1$

Aufgabe 10: 10 Punkte

Lösen Sie das AWP : $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.

Lösung :

$y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$

$$D^2 - 4D + 5 = 0 \implies D_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$$

$$y = C_1 e^{2x} \sin(x) + C_2 e^{2x} \cos(x)$$

$$y' = 2C_1 e^{2x} \sin(x) + C_1 e^{2x} \cos(x) + 2C_2 e^{2x} \cos(x) - C_2 e^{2x} \sin(x)$$

$$2 = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 \implies C_2 = 2$$

$$13 = 2C_1 \sin(0) + C_1 \cos(0) + 2C_2 \cos(0) - C_2 \sin(0) = C_1 + 2C_2 = C_1 + 4 \implies C_1 = 9$$

$$y = 9e^{2x} \sin(x) + 2e^{2x} \cos(x)$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Prof. Schelthoff, Dipl. Math. Mayiopoulos

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{x}{3}+1}}\,dx$

Hinweis : Substitution

Lösung 1 :

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{x}{3}+1}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{e^{\frac{x}{3}+1}}\,dx$$

$$\begin{aligned}
\text{Substitution : }\quad & z = \frac{x}{3}+1 \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{3}\,dx \\
& \text{Für } x = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \\
& \text{Für } x = R \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R}{3}+1
\end{aligned}$$

$$\int_0^R \frac{1}{e^{\frac{x}{3}+1}}\,dx = 3\int_1^{\frac{R}{3}+1} \frac{1}{e^z}\,dz = 3\int_1^{\frac{R}{3}+1} e^{-z}\,dz = -3e^{-z}\Big|_1^{\frac{R}{3}+1}$$

$$= -3e^{-(\frac{R}{3}+1)} + 3e^{-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{3}{e}$$

Lösung 2 :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{x}{3}+1}}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{e^{\frac{x}{3}+1}}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} -3e^{-(\frac{x}{3}+1)}\Big|_0^R \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(-3e^{-(\frac{R}{3}+1)} + 3e^{1}\right) = \frac{3}{e}
\end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 2: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz der Integrale

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Lösung :

a) $$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_1^R \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \le \int_1^R e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^R = -e^{-R}+1 \xrightarrow[R\to\infty]{} 1 < \infty$$

Das Integral ist konvergenz.

b $$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx \le \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 \quad \Rightarrow = 2-2\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2 < \infty$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 3: 10 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig ist.

Lösung 1 :

Polarkoordinaten $\quad x = r\cos(\varphi) \quad , \quad y = r\sin(\varphi)$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{r\cos(\varphi)\ r^2\ \sin^2(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)}\right| \Rightarrow$$

$$= \frac{r^3}{r^2}\left|\cos(\varphi)\ \sin^2(\varphi)\right| \ \leq \ r|\cos\varphi| \cdot |\sin^2(\varphi)| \ \leq \ r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Lösung 2 :

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| \ \leq \ \left|\frac{xy^2}{y^2}\right| = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben sind die Funktion $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2 - xyz$, der Punkt P =(1,-1,2) und der Vektor $\vec{a} = (3, 1, -1)^T$

a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Funktion im Punkt P.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Lösung :

Zu a) + b)

$f_x = 2(x + 2y + 3z) - yz \quad \Rightarrow \quad f_x(P) = 2 \cdot 5 + 2 = 12$

$f_x = 2(x + 2y + 3z)2 - xz \quad \Rightarrow \quad f_y(P) = 2 \cdot 5 \cdot 2 - 2 = 18$

$f_x = 2(x + 2y + 3z)3 - xy \quad \Rightarrow \quad f_z(P) = 2 \cdot 5 \cdot 3 + 1 = 31$

a) $f_y(P) = 5^2 + 2 = 27$

$w - f(P) = f_x(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0) \quad \Rightarrow$

$w - 31 = 12(x - 1) + 18(y + 1) + 31(z - 2)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f(P) \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (12, 18, 31) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{11}} = \dfrac{36 + 18 - 31}{\sqrt{11}} = \dfrac{23}{\sqrt{11}}$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 5: 10 Punkte

Hat die Funktion

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 6x \\ x - 3y \end{pmatrix}$$

eine Stammfunktion (Potentialfunktion)? Wenn ja, berechnen Sie diese.

Lösung :

$f_{1,y} = 1 = f_{2,x} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}$ hat eine Stammfunktion ϕ

$$\phi = \int (y + 6x)\, dx = xy + 3x^2 + C(y)$$

$$\phi_y = x + C'(y) = x - 3y \quad \Rightarrow \quad C'(y) = -3y \quad \Rightarrow \quad C(y) = -\frac{3}{2}y^2 + C \quad \Rightarrow$$

$$\phi = xy + 3x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 6: 10 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung die quadratische Annäherung der Funktion

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$$

an der Stelle $x_0 = y_0 = 1$.

Lösung

Quadratisches Taylor-Polynom $T_2(x,y)$

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = {} & f(P) + f_x(P)(x-x_0) + f_y(P)(y-y_0) \\ & + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(P)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(P)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(P)(y-y_0)^2\right] \end{aligned}$$

$x_0 = y_0 = 1$

$f(1,1) = \ln(2)$

$$f_x = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2} \Rightarrow f_x(1,1) = \frac{2}{2} = 1 \quad , \quad f_y = \frac{2yx^2}{1+x^2y^2} \Rightarrow f_y(1,1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$f_{xx} = \frac{2y^2(1+x^2y^2) - 2xy^2(2xy^2)}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow f_{xx}(1,1) = \frac{2\cdot 2 - 2\cdot 2}{2^2} = 0$$

$$f_{xy} = \frac{4xy(1+x^2y^2) - 2xy^2(2x^2y)}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = \frac{4\cdot 2 - 2\cdot 2}{2^2} = 1$$

$$f_{yy} = \frac{2x^2(1+x^2y^2) - 2yx^2(2x^2y)}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow f_{yy}(1,1) = \frac{2\cdot 2 - 2\cdot 2}{2^2} = 0$$

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= \ln(2) + (x-1) + (y-1) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1(x-1)(y-1) \\ &= \ln(2) + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1) \end{aligned}$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 7: 10 Punkte

Bei der Aufladung eines Plattenkondensators ist die Ladungsänderung proportional zur freien Kapazität, d.h. zur Differenz zum Maximalladezustand Q_{max} . Der zeitliche Verlauf $Q(t)$ wird also beschrieben durch die DGL

$$Q'(t) = K \cdot (Q_{max} - Q(t))$$

a) Lösen Sie die DGL

b) Wie ist der zeitliche Verlauf bei einem zu Beginn ungeladenen Kondensator ($Q(0) = 0$)?

Lösung :

K und Q_{max} sind bekannte Konstanten.

a) $Q'(t) = K(Q_{\max} - Q(t)) \Rightarrow \dfrac{dQ}{Q_{\max} - Q(t)} = K\,dt \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dQ}{Q_{\max} - Q(t)} = K \int dt$

$$\left.\begin{array}{l} -\ln|Q_{\max} - Q| = Kt + C \Rightarrow \\ \ln|Q_{\max} - Q| = -Kt - C \Rightarrow \end{array}\right\} |Q_{\max} - Q| = e^{-Kt-C} = e^{-C}e^{-Kt} = \tilde{C}e^{-Kt} \Rightarrow$$

$$Q_{\max} - Q = \tilde{\tilde{C}}e^{-Kt} \Rightarrow Q(t) = Q_{\max} - \tilde{\tilde{C}}e^{-Kt}$$

b) $0 = Q(0) = Q_{\max} - \tilde{\tilde{C}} \Rightarrow \tilde{\tilde{C}} = Q_{\max} \Rightarrow Q(t) = Q_{\max}(1 - e^{-Kt})$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 8: 10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y + 2e^x \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösung :

a) Homogen DGL $\quad y' = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow$

$\ln|y| = x + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{x+C} = e^C \cdot e^x = \tilde{C} \cdot e^x \quad \Rightarrow$

$y_h = C \cdot e^x$

b) Partikuläre Lösung

$y_p = C(x)e^x \quad \Rightarrow \quad y_p' = C'e^x + Ce^x \quad \Rightarrow$

$C'e^x + Ce^x = Ce^x + 2e^x \quad \Rightarrow \quad C' = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2x$

$y_p = C(x)e^x = 2xe^x$

c) $y = y_h + y_p = Ce^x + 2xe^x$

d) AB : $1 = y(0) = C \quad \Rightarrow \quad y = e^x + 2xe^x = (1 + 2x)e^x$

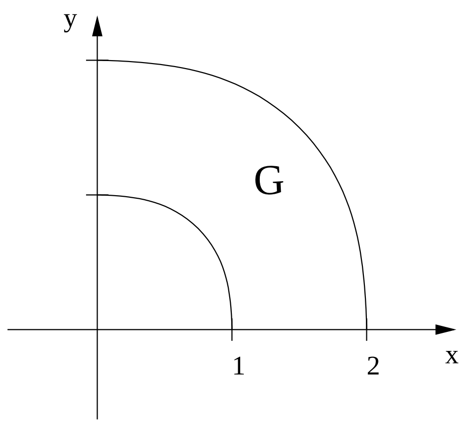
Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 9: 10 Punkte

Wir betrachten den Kreisring für positive x- und y-Koordinaten zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 (also denjenigen Punkten der Ebene im ersten Quadranten, die einen Abstand zwischen 1 und 2 zum Ursprung haben.)

Diese Fläche hat die Flächeninhalt $F = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} - \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Skizzieren Sie zunächst diesen Bereich. Berechnen Sie nun die Schwerpunktskoordinaten dieser Fläche $x_s = \frac{1}{F} \iint\limits_G x \, dx \, dy$, $y_s = \frac{1}{F} \iint\limits_G y \, dx \, dy$, indem Sie Polarkoordinaten einsetzen.

Lösung :



$$x_s = \frac{1}{F} \iint\limits_G x \, dx \, dy = \frac{1}{F} \iint r\cos(\varphi) r \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{F} \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \right)$$

$$= \frac{1}{F} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \ (\sin\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{F} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{9\pi}$$

$$x_y = \frac{1}{F} \iint\limits_G y \, dx \, dy = \frac{1}{F} \iint\limits_G r\sin(\varphi) r \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{F} \left(\int_1^2 r^2 \, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \right)$$

$$= \frac{1}{F} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \ (-\cos\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{F} \cdot \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{9\pi}$$

Klausur Analysis II, SS 2009, 13.07.2009

Aufgabe 10: 10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem, d.h. berechnen Sie $y(x)$ zu

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 6y &= 12x + 16 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösung :

a) Homogene Lösung:

$$D^2 + 5D + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -2 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

b) Partikuläre Lösung:

Ansatz : $\quad y_p = a_1 x + a_0 \quad , \quad y_p' = a_1 \quad , \quad y_p'' = 0 \quad \Rightarrow$

$5a_1 + 6(a_1 x + a_0) = 12x + 16 \quad \Rightarrow$

$6a_1 x + (5a_1 + 6a_0) = 12x + 16 \quad \Rightarrow$

$6a_1 = 12 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$

$5a_1 + 6a_0 = 16 \quad \Rightarrow \quad 6a_0 = 16 - 5a_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1$

$\Rightarrow \quad y_p = 2x + 1$

c) $y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + 2x + 1$

d) AB

$y = y_h + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + 2x + 1$

$y' = -3C_1 e^{-3x} - 2C_2 e^{-2x} + 2$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + 1 = 1 && \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 0 \\ y(0) &= -3C_1 - 2C_2 + 2 = 1 && \Rightarrow \quad -3C_1 - 2C_2 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$y = e^{-3x} - e^{-2x} + 2x + 1$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Prof. Schelthoff , Dipl.Math. Mayiopoulos

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_3^\infty \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx$$

Lösung 1 :

$$\int_3^\infty \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_3^\infty \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx$$

Mit $\quad y = \dfrac{x}{3} \;\Rightarrow\quad x = 3y \;\Rightarrow\; dx = 3dy \;\Rightarrow$

$$\int_3^R \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1}\,dx = 3\int_1^{\frac{R}{3}} \frac{1}{y^2+1}\,dy$$

$$= 3\arctan(y)\Big|_1^{\frac{R}{3}} = 3\left(\arctan(\frac{R}{3}) - \arctan(1)\right)$$

$$= 3\left(\arctan(\frac{R}{3}) - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} \quad 3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 2: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals

$$\int_2^\infty \frac{5x^2 - 2x\cos(x)}{x^3 - 1}\, dx$$

Lösung 2 :

$$\int_2^\infty \frac{5x^2 - 2x\cos(x)}{x^3 - 1}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{5x^2 - 2x\cos(x)}{x^3 - 1}\, dx$$

$$\int_2^R \frac{5x^2 - 2x\cos(x)}{x^3 - 1} > \int_2^R \frac{5x^2 - 2x}{x^3 - 1}\, dx > \int_2^R \frac{5x^2 - 2x^2}{x^3 - 1}\, dx = 3\int_2^R \frac{x^2}{x^3 - 1}\, dx > 3\int_2^R \frac{x^2}{x^3}\, dx$$

$$= 3\int_2^R \frac{1}{x}\, dx = 3\left(\ln|x|\right)\Big|_2^R = 3(\ln(R) - \ln(2)) \xrightarrow[R\to\infty]{} \infty$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 3: 10 Punkte

Ein Kuchen mit einer Anfangstemperatur von 20 Grad wird in einem Backofen mit einer konstanten Temperatur von 180 Grad erhitzt. Dabei ist die Änderung der Kuchentemperatur proportional zum Unterschied konstanten Umgebungstemperatur des Backoffens,also

$$T'(t) = K \cdot (180 - T(t))$$

Nach 2 Minuten hat der Kuchen die Temperatur von 60 Grad

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

b) Bestimmen Sie den Wert von K aus der letzten Bedingung .

Lösung 3 :

Teil a

$$T'(t) = K(180 - T(t)) \;\Rightarrow\; \frac{dT}{180 - T} = K\,dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dT}{180 - T} = K \int dt \;\Rightarrow$$

$$\ln|180 - T| = K \cdot t + C \;\Rightarrow\; |180 - T| = e^{Kt+C} = e^C \cdot e^{Kt} = \tilde{C} \cdot e^{Kt}$$

$$180 - T = \tilde{\tilde{C}} e^{Kt} \;\Rightarrow\; T(t) = 180 - \tilde{\tilde{C}} e^{Kt}$$

AB: $20 = T(0) = 180 - \tilde{\tilde{C}} \;\Rightarrow\; \tilde{\tilde{C}} = 180 - 20 = 160 \;\Rightarrow\; T(t) = 180 - 160e^{Kt}$

Teil b

$$60 = T(2) = 180 - 160e^{2K} \;\Rightarrow$$

$$6 = 18 - 16e^{2K} \;\Rightarrow\; 16e^{2K} = 18 - 6 = 12 \;\Rightarrow\; e^{2K} = \frac{3}{4} \;\Rightarrow$$

$$2K = \ln(\frac{3}{4}) \;\Rightarrow\; K = \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}\ln(\frac{4}{3}) \;\Rightarrow$$

$$T(t) = 180 - 160e^{-\frac{1}{2}\ln(\frac{4}{3})t}$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 4: 10 Punkte

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Kurve

$y = \frac{1}{x}$ und $x = 1$ bis $x = 5$ und die x-Achse entsteht.

Lösung 4 :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_1^5 \frac{1}{x^2} \, dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^5 = \pi \left(-\frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{4}{5}\pi$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 5: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

auf lokale Extrema.

Lösung 5 :

$$\left.\begin{array}{l} f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \\ f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \end{array}\right\} \text{Kritischer Punkt : (0,0)}$$

$$f_{xx} = 2\,\frac{(x^2+y^2+1) - x(2x)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2(y^2-x^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \;\Rightarrow\; f_{xx}(0,0) = 2$$

$$f_{yy} = 2\,\frac{x^2+y^2+1-y(2y)}{(x^2+y+^2+1)^2} = 2\frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2} \;\Rightarrow\; f_{yy}(0,0) = 2$$

$$f_{xy} = -2\,\frac{2y}{(x^2+y^2+1)} \;\Rightarrow\; f_{xy} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{c} \det(H) = 4 > 0 \\ f_{xx}(0,0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Min$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 6: 10 Punkte

Wir betrachten als zweidimensionalen Integrationsbereich B den Kreisring zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 , also alle Punkte die einen euklidischen Abstand zwischen 1 und 2 vom Ursprung haben. Wie groß ist das Integral über diesen Beriech der Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Lösung 6 :

$$\mathrm{I} = \iint_g \frac{dx\, dy}{x^2 + y^2} \quad \text{mit} \quad x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ dxdy = r\, dr\, d\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r\, drd\varphi}{r^2} = \left(\int_1^2 \frac{1}{r}\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \Big(\ln|r| \Big)_1^2 2\pi = (\ln(2) - \ln(1))2\pi = 2\pi \ln(2)$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 7: 10 Punkte

Gegeben seien die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x}}{y} \cdot z^2$$

der Punkt $P := (1,1,1)$ und der Vektor $\vec{a} = (1,0,-1)^T$.

Berechnen Sie :

a) Die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle P

b) Die Richtungsableitung von f an der Stelle P in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

Lösung 7 :

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x}y} z^2 \;\Rightarrow\; f_x(P) = \frac{1}{2}$$

$$f_y = -\frac{\sqrt{x}}{y^2} z^2 \;\Rightarrow\; f_y(P) = -1$$

$$f_z = \frac{\sqrt{x}}{y} 2z \;\Rightarrow\; f_z(P) = 2$$

a) $f(P) = \dfrac{\sqrt{1} \cdot 1}{1} = 1$

Gleichung der Tangentialebene

$$w - f(P) = f_x(P)(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f_z(z - z_0)\ , \quad P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$w - 1 = \frac{1}{2}(x-1) - 1(y-1) + 2(z-1)$$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} := \left(\triangledown f(P) \cdot \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} \right) = \left(\frac{1}{2}, -1, 2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{2} - 2)\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 8: 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung folgender Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \quad \text{mit} \;\; y(1) = 2 \text{ durch Substitution mit } z = \frac{y}{x}$$

Lösung 8 :

$y = z \cdot x \;\Rightarrow\;\; y' = z' \cdot x + z$

Aus $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \;\;\Rightarrow\;\; z' \cdot x + z = z - \frac{1}{x} \;\;\Rightarrow\;\; z' = -\frac{1}{x^2}$

$z = \frac{1}{x} + C \;\Rightarrow\;\; \frac{y}{x} = \frac{1}{x} + C \;\Rightarrow\;\; y = 1 + Cx$

Anfangsbedingung

$2 = y(1) = 1 + C \;\Rightarrow\;\; C = 1 \;\Rightarrow\;\; y = 1 + x$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 9: 10 Punkte

Lösen Sie das Anfangswertproblem, d.h. berechnen Sie $y(x)$ zu

$$\begin{aligned} y'' + 4y' - 5y &= -10 \\ y(0) &= 8 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

a) Homogene Lösung

$D^2 + 4D - 5 = 0 \;\Rightarrow\; D_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$

b) Partikuläre Lösug

$y_p = C \;\Rightarrow\; y_p' = y_p'' = 0 \;\Rightarrow\; 5C = 10 \;\Rightarrow\; C = 2 \;\Rightarrow\; y_p = 2$

c) $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} + 2$

d) Anfangsbedingung

$y' = C_1 e^x - 5C_2 e^{-5x}$

$$\begin{array}{ccccc} 8 & = & y(0) & = & C_1 + C_2 + 2 \\ 0 & = & y'(0) & = & C_1 - 5C_2 \\ \hline 8 & & & = & 6C_2 + 2 \end{array} \quad \Rightarrow\; 6 = 6C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 1$$

Aus $0 = C_1 - 5C_2 \Rightarrow\; C_1 = 5C_2 = 5$

Also gilt :

$y = 5e^x + e^{-5x} + 2$

Klausur Analysis II - WS 2009/10, 30.09.2009

Aufgabe 10: 10 Punkte

Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$, zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

x_k	-1	0	1	3
y_k	3	1	0	-2

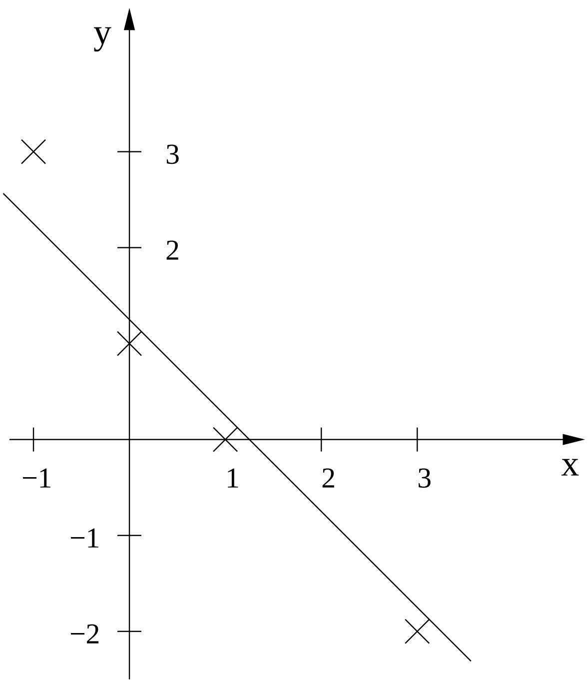
Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = a + bx$, die die Punkte (x_k, y_k) , $k = 1, 2, 3, 4$ approximiert. Skizzieren Sie die gegebene Punkte und die Ausgleichungsgerade.

Lösung 10 :

	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
	-1	3	1	-3
	0	1	0	0
	1	0	1	0
	3	-2	9	-6
$\sum$	3	2	11	-9

a und b erfüllen der GLS: $\begin{pmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_k y_k \\ \sum y_k \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{7}{5} \,,\ b = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{7}{5} - \frac{6}{5}x$$



Klausur Analysis II, SS 2010, 09.07.2010

Prof. Schelthoff, Dr. Voß

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2}\, dx$$

Aufgabe 2: 10 Punkte

Untersuchen Sie die Konvergenz des Integrals

$$\int_3^\infty \frac{3x^2-2\cos(x)}{x^3-1+\sin(x)}\, dx$$

Aufgabe 3: 10 Punkte

Erläutern Sie: Was ist die Richtungsableitung? Welche Rolle spielt dabei der Gradient? Welchen maximalen und minimalen Wert kann diese Richtungsableitung annehmen ?

Aufgabe 4: 10 Punkte

Gegeben ist das Vektorfeld

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2y} \\ \frac{\alpha x+1}{y} - \frac{1}{y^2x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_{>0}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter α in der Funktion $f(x,y)$ so, dass die Funktion eine Stammfunktion (Potential) besitzt. Berechnen Sie für dieses α diese Stammfunktion.

b) Berechnen Sie zu $f(x,y)$ mit dem in Teil a) berechneten Wert von α die Divergenz von f im Punkt (2,2).

Aufgabe 5: 10 Punkte

Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren. Welcher Punkt der Geraden $y = 5x + 7$ hat den kleinsten quadratischen Abstand zum Punkt (2,0) ? (Den Abstand selber brauchen Sie nicht auszurechnen)

Aufgabe 6: 10 Punkte

Wir betrachten als zweidimensionalen Integrationsbereich B den Kreisring zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 mit positiven Koordinaten ($x \geq 0, y \geq 0$), also alle Punkte im ersten Quadranten, die einen euklidischen Abstand zwischen 1 und 2 vom Ursprung haben. Wie groß ist das Integral über diesen Bereich der Funktion

$$f(x,y) = x \cdot y$$

Aufgabe 7: 10 Punkte

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2-ter Ordnung (bis zum quadratischen Term) an der Stelle $x_0 = 0, y_0 = 1$ der Funktion

$$f(x,y) = \ln(y + e^x)$$

Aufgabe 8: 10 Punkte

Die DGL des ungestörten harmonischen Oszillators ohne Resonanz lautet

$$y''(t) + w_0^2 \cdot y(t) = K \cdot \cos(w_1 t)$$

mit $w_0, w_1, \in \mathbb{R}^+ . w_0 \neq w_1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL. Was passiert falls sich w_1 dem Wert w_0 annähert?

Aufgabe 9: 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y' = \sqrt{y + x + 1} - 1$ durch Substitution

b) $y' + 3y = 6 \cdot e^{-2x}$, mit $y(0) = 2$

Aufgabe 10: 10 Punkte

Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

x_k	-1	0	1	4
y_k	5	4	2	0

Klausur Analysis II, WS 2010/11, Oktober 20010

Prof. Schelthoff , Dr. Voß

Aufgabe 1: 10 Punkte

Berechnen Sie das uneigentliche Integral.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx$$

Aufgabe 3: 10 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 + y^2)$, der Punkt $P(1,0)$, sowie die Richtung $\vec{a} = (1,1)^t$.

a) Geben Sie im Punkt P den Gradienten an.

b) Welche anschauliche Bedeutung hat der Gradient einer Funktion in dem Punkt P.

c) Geben Sie die Richtungsableitung in Richtung des Vektors $\vec{a}$ im Punkt P an.

d) Gibt es eine Richtung, in der der Betrag der Steigung im Punke P Null ist.

Aufgabe 5: 10 Punkte

Bei dem Kauf des Grundstückes stellt sich heraus, dass nur die Grundstücksfläche mit 1800 m^2 fest ist, dass aber die genauen rechteckigen Abmaße verhandelbar sind. Eine Seite des rechteckigen Grundstückes grenzt an einen Fluss. Da kleine Kinder auf dem Grundstück spielen können sollen, ist der Gartenzaum, der das ganze Grundstück umranden soll, an der Flussseite dreimal so teuer wie an den übrigen Seiten. Alle anderen Kosten hingegen bleiben gleich.
Berechnen Sie die optimalen Grundstücksabmessungen (das Grundstück muss rechteckig sein!) für ein möglichst billigen Gartenzaun mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren.

Hinweis : Sollten Sie diese Methode nicht anwenden können, dürfen Sie die Extremwertaufgabe auch über die normale Einsetzungsmethode lösen, erhalten dann aber maximal 7 Punkte.

Aufgabe 7: 10 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung, und passen diese an die gegebenen Anfangsbedingungen an.

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^x, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = -2$$

Aufgabe 9: 10 Punkte

Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu den folgenden Messwerten und zeichnen Sie die Messwerte und die Ausgleichsgerade in ein Koordinatensystem ein.

x_k	-3	-1	1	3
y_k	-3	0	4	6

Tabelle 1: Tabelle der Messwerte

Analysis II - Test

SS 14 - Prof. Schelthoff

1. Berechnen Sie zur Messreihe

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_i	2	0	6	4

die Ausgleichsfunktion der Gestalt

$$g(x) = a + b \cdot \frac{1}{x}$$

2. Berechnen Sie eine Richtung (der Länge 1), in der die Höhenlinie verläuft, d.h. in der die Richtungsableitung Null wird, der Funktion

$$f(x, y) = x^2(2y - 1) + 2e^y$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

3. Berechnen Sie mit dem Verfahren der Lagrange'schen Multiplikatoren die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x \cdot (1 - y)$$

unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 5$

4. Berechnen Sie zur Funktion $f(x, y) = e^{x-y-2}$ die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term in $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

5. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ für } (0, 0) \end{array} \right\}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

a) Verwenden Sie dabei die Methode über Folgen in kartesischen Koordinaten.

b) Verwenden Sie die Methode der Polarkoordnaten.

6. a) Berechnen Sie zu

$$f(x, y) = e^{x-1} \cdot y^2$$

den Gradienten als Funktion und im Punkt $x_0 = 1, y_0 = 3$

b) Berechnen Sie zur obigen Funktion die Tangentialebene im Punkt $x_0 = 1, y_0 = 3$ in kartesischer Form, also

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

und vektorieller Form

$$T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

7. Berechnen Sie

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy + z^2, \\ x(t) &= t^2, \\ y(t) &= \frac{1}{t} \\ z(t) &= 5t \end{aligned}$$

den Wert

$$\frac{df}{dt}$$

a) indem Sie zunächst in die Funktion einsetzen und dann differenzieren
b) über die Kettenregel im $\mathbb{R}^n$

8.a) Zeichnen Sie den Pfad

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

für den Zeitabschnitt von $t = 0$ bis $t = 2$.

b) Bestimmen Sie rechnerisch den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{X}'(t)$$

und zeichnen diesen zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$ in den Graphen ein.

c) Wie lautet die Arbeit entlang dieses Weges, wenn ein Kraftfeld der Größe

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \cdot y \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$

überwunden werden muss?

d) Existiert eine Potentialfunktion? Falls ja, berechnen Sie die Arbeit über diese Funktion.

9. Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy + zy^2 + 1 \\ 3 \\ xyz \end{pmatrix}$$

Analysis II - Test

SS 14 - Prof. Schelthoff

1. Berechnen Sie zur Messreihe

x_i	-1	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_i	2	0	6	4

die Ausgleichsfunktion der Gestalt

$$g(x) = a + b \cdot \frac{1}{x}$$

Lösung:

$f(x_i)$	-1	-2	2	1
y_i	2	0	6	4

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ \sum f(x_i) &= 0 \\ \sum f^2(x_i) &= 10 \\ \sum y_i f(x_i) &= 14 \\ \sum y_i &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & | & 12 \\ 0 & 10 & | & 14 \end{pmatrix}$$

Damit

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 1,4 \end{aligned}$$

Ausgleichsfunktion

$$y = 3 + 1,4 \cdot \frac{1}{x}$$

2. Berechnen Sie eine Richtung (der Länge 1), in der die Höhenlinie verläuft, d.h. in der die Richtungsableitung Null wird, der Funktion

$$f(x, y) = x^2(2y - 1) + 2e^y$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \begin{pmatrix} 2x(2y-1) \\ 2x^2 + 2e^y \end{pmatrix} \\ \operatorname{grad} f(1,0) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Höhenlinie verläuft senkrecht zum Gradienten, also

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ & mit \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} &= 0 \\ -2a + 4b &= 0 \\ a &= 2b \end{aligned}$$

Wähle z.B. b=1:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normieren des Vektors ergibt

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Berechnen Sie mit dem Verfahren der Lagrange'schen Multiplikatoren die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x \cdot (1-y)$$

unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 5$

Lösung:
Lagrange Funktion:

$$L(x,y,\lambda) = x \cdot (1-y) + \lambda(2 \cdot x + y - 5)$$

Kandidaten:

$$\begin{aligned} L_x &= 1 - y + 2\lambda = 0 \Rightarrow y = 1 + 2\lambda \\ L_y &= -x + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = x \\ L_\lambda &= 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 1 + 2\lambda - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 1, x = 1, y = 3 \end{aligned}$$

geränderte Hesse Matrix:

$$L_{xx} = 0, L_{yy} = 0, L_{xy} = -1, g_x = 2, g_y = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H = -2 - 2 = -4 < 0$$

Also lokales Minimum mit dem Wert

$$f(1,3) = -2$$

4. Berechnen Sie zur Funktion $f(x,y) = e^{x-y-2}$ die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term in $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

Lösung:

$$\begin{array}{cc}
f(x,y) = e^{x-y-2} & f(1,1) = e^{-2} \\
f_x(x,y) = e^{x-y-2} & f_x(1,1) = e^{-2} \\
f_y(x,y) = -e^{x-y-2} & f_y(1,1) = -e^{-2} \\
f_{xx}(x,y) = e^{x-y-2} & f_{xx}(1,1) = e^{-2} \\
f_{xy}(x,y) = -e^{x-y-2} & f_{xy}(1,1) = -e^{-2} \\
f_{yy}(x,y) = e^{x-y-2} & f_{yy}(1,1) = e^{-2}
\end{array}$$

$$f_2(x,y) = e^{-2} + e^{-2}(x-1) - e^{-2}(y-1) + \frac{e^{-2}}{2}(x-1)^2 - e^{-2}(x-1)(y-1) + \frac{e^{-2}}{2}(y-1)^2$$

5. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ für } (0,0) \end{array} \right\}$$

auf Stetigkeit im Ursprung.

a) Verwenden Sie dabei die Methode über Folgen in kartesischen Koordinaten.

b) Verwenden Sie die Methode der Polarkoordnaten.

Lösung:

a) Betrachte

$$x_n = \frac{1}{n} = y_n$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n| + |y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \neq 0 = f(0,0)\end{aligned}$$

also ist die Funktion nicht stetig.

b) Sei nun

$$\begin{aligned}x_n &= r_n \cos\varphi_n \\ y_n &= r_n \sin\varphi_n\end{aligned}$$

Damit wir gegen den Ursprung konvergieren, muss gelten

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

und es ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|r_n \cos\varphi_n| + |r_n \sin\varphi_n|}{r_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} |\cos\varphi_n| + |\sin\varphi_n| = h(\varphi_n)\end{aligned}$$

Nähert man sich z.B. auf der x-Achse, d.h.

$$\varphi_n = 0$$

so wird

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 1$$

(obiges Bsp in kart. Koordinaten erhalten wir mit $\varphi_n = \frac{\pi}{4}$ und erhalten auch hier

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \left|\cos\frac{\pi}{4}\right| + \left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

6. a) Berechnen Sie zu

$$f(x,y) = e^{x-1} \cdot y^2$$

den Gradienten als Funktion und im Punkt $x_0 = 1, y_0 = 3$

b) Berechnen Sie zur obigen Funktion die Tangentialebene im Punkt $x_0 = 1, y_0 = 3$ in kartesischer Form, also

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

und vektorieller Form

$$T = \left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right) + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

Lösung:
a)

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} e^{x-1} \cdot y^2 \\ e^{x-1} \cdot 2y \end{pmatrix}$$

In $x_0 = 1, y_0 = 3$

$$\operatorname{grad} f(1,3) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} T(x,y) & = & 9 + 9 \cdot (x-1) + 6 \cdot (y-3) \\ T & = & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 9 \end{array} \right) + \lambda \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 9 \end{array} \right) + \mu \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 6 \end{array} \right) \end{array}$$

7. Berechnen Sie

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & xy + z^2, \\ x(t) & = & t^2, \\ y(t) & = & \frac{1}{t} \\ z(t) & = & 5t \end{array}$$

den Wert

$$\frac{df}{dt}$$

a) indem Sie zunächst in die Funktion einsetzen und dann differenzieren
b) über die Kettenregel im $\mathbb{R}^n$

Lösung:
a)

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & xy + z^2 \\ & = & t^2 \frac{1}{t} + 25t^2 = t + 25t^2 \end{array}$$

$$\frac{df}{dt} = 1 + 50t$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= y \cdot 2t + x \cdot \frac{-1}{t^2} + 2z \cdot 5 \\
&= \frac{1}{t} \cdot 2t + t^2 \cdot \frac{-1}{t^2} + 10t \cdot 5 \\
&= 2 - 1 + 50t = 1 + 50t
\end{aligned}$$

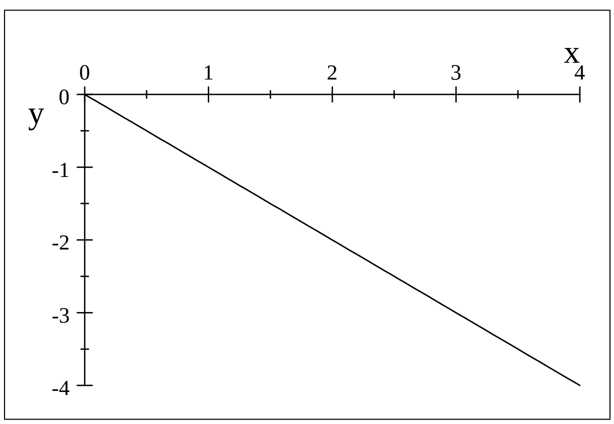
8.
a) Zeichnen Sie den Pfad

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

für den Zeitabschnitt von $t = 0$ bis $t = 2$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\vec{X}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{X}(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\vec{X}(2) &= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



b) Bestimmen Sie rechnerisch den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{X}'(t)$$

und zeichnen diesen zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2$ in den Graphen ein.

Lösung:

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{X}'(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{X}'(1) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \vec{X}'(2) &= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Wie lautet die Arbeit entlang dieses Weges, wenn ein Kraftfeld der Größe

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cdot y \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$

überwunden werden muss?

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{X}(t)) &= \vec{F}(x = t^2, y = -t^2) \\ &= \begin{pmatrix} 2t^2 \cdot (-t^2) \\ t^4 - t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t^4 \\ t^4 - t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{t=0}^{2} \begin{pmatrix} -2t^4 \\ t^4 - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{t=0}^{2} -4t^5 - 2t^5 + 2t^3 dt \\ &= \left[-\frac{2}{3}t^6 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{1}{2}t^4 \right]_{t=0}^{2} \\ &= -64 + 8 = -56 \end{aligned}$$

d) Existiert eine Potentialfunktion? Falls ja, berechnen Sie die Arbeit über diese Funktion.

Lösung:

$$\frac{\partial}{\partial y} 2xy = 2x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y)$$

also existiert ein Potential.

Es ist:

$$\begin{aligned}
V(x,y) &= \int 2xydx = x^2y + c(y) \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= x^2 + c'(y) = x^2 + y \\
c'(y) &= y \\
c(y) &= \frac{1}{2}y^2 + c \\
V(x,y) &= x^2y + \frac{1}{2}y^2
\end{aligned}$$

Damit ist das Potential

$$\begin{aligned}
V(0,0) &= 0 \\
V(4,-4) &= -64 + 8 = -56
\end{aligned}$$

9. Berechnen Sie den Gradienten, die Divergenz und die Rotation des Vektorfeldes

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy + zy^2 + 1 \\ 3 \\ xyz \end{pmatrix}$$

Mit der Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ist

$$J = \begin{pmatrix} y & x + 2zy & y^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

und damit ist der Gradient die Diagonale, also

$$\text{grad}\, \vec{f} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}$$

Die Divergenz ist die Summe der Gradientenkomponenten, also

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{f} \quad : &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} f_3(x,y,z) \\
&= y + xy
\end{aligned}
$$

und schliesslich die Rotation

$$
\begin{aligned}
rot\ \vec{f} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_3(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial z} f_2(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x} f_3(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y,z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} xz \\ y^2 - yz \\ -x - 2zy \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Probeklausur Analysis 2 am 16.06.2020

Name: ____________________

Vorname: ____________________

			max. Punktzahl
Aufgabe	1)		(10)
Aufgabe	2)		(10)
Aufgabe	3)		(10)
Aufgabe	4)		(10)
Aufgabe	5)		(10)
Aufgabe	6)		(10)
Aufgabe	7)		(10)
Aufgabe	8)		(10)
Aufgabe	9)		(10)
Aufgabe	10)		(10)
Aufgabe	11)		(10)
Gesamtpunkte:		Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung

$$2y^2dx + 2xydy = 0$$

2. Aufgabe **10 Punkte**

Untersuchen Sie auf stetige Ergänzbarkeit im Ursprung

a)
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

b)
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

3. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie für die Funktion
$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$$
im Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$ die Steigung in Richtung $(-1,1)$.
In welcher Richtung ist die Steigung in $\vec{x}_0$ jeweils minimal/ maximal/ gleich Null?
Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion in $\vec{x}_0$ an.

4. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$

5. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

a)
$$y' = -\frac{x}{y} \text{ mit } y(1) = 3$$

b)
$$y' + \frac{1}{2x} \cdot y = \sqrt{x} \cdot \sin x \text{ mit } y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$$

6. Aufgabe **10 Punkte**

Welches Volumen hat der Körper, der von den folgenden Flächen begrenzt wird?

$$x = 0,\ x = 2\pi,\ y = 0,\ y = 1,\ z = y,\ z = y^3$$

7. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei der Bereich $B : 0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 3 - 2x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt.

8. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die lokalen Minimal- und Maximalstellen der Funktion

$$f(x, y) = 2xy(x + y - 6)$$

und geben Sie die zugehörigen Funktionswerte an.

9. Aufgabe **10 Punkte**

Für die durch

$$ye^{y^2} + x^3 - 3x + 2 = 0$$

implizit gegebene Funktion berechne man die erste Ableitung. An welchen Stellen $x > 0$ ist die Ableitung der implizit gegebenen Funktion Null?

10. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K \vec{v} d\vec{X}$ für $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $\vec{X}$, der das Geradenstück von (0,1) nach (1,0) darstellt.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Analysis 2, SS XX, am Probeklausur

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

			max. Punktzahl
Aufgabe	1)		(10)
Aufgabe	2)		(10)
Aufgabe	3)		(10)
Aufgabe	4)		(10)
Aufgabe	5)		(10)
Aufgabe	6)		(10)
Aufgabe	7)		(10)
Aufgabe	8)		(10)
Aufgabe	9)		(10)
Aufgabe	10)		(10)
Gesamtpunkte:		Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung

$$2y^2dx + 2xydy = 0$$

Lösung
Ist DGL exakt?

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 2y^2 \Rightarrow p_y = 4y \\ q(x,y) &= 2xy \Rightarrow q_x = 2y \end{aligned}$$

DGL ist nicht exakt.

$$\begin{aligned} \frac{p_y - q_x}{q} &= \frac{4y-2y}{2xy} = \frac{1}{x} \\ m' &= \frac{1}{x} \cdot m \\ \int \frac{1}{m} dm &= \int \frac{1}{x} dx \\ \ln m &= \ln x + C \\ m(x) &= x \cdot C_0 \end{aligned}$$

Wähle $C_0 = 1$.
Nun ist die DGL

$$2xy^2dx + 2x^2ydy = 0$$

exakt. $F(x,y) = x^2y^2$ ist eine mehrdimensionale Stammfunktion.

$$F(x,y) = x^2y^2 = C \Leftrightarrow y = \frac{C_0}{x}$$

Bewertung

2. Aufgabe **10 Punkte**

Untersuchen Sie auf stetige Ergänzbarkeit im Ursprung

a)

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

b)

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Lösung

zu a) Polarkoordinaten:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}$$

und damit bei Annäherung an den Ursprung

$$F = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} \overset{L'H}{=} \lim_{r\to 0} 2\sqrt{r^2+1} = 2$$

Es existiert also ein winkelunabhängiger Grenzwert, die Funktion ist somit stetig ergänzbar.
zu b) Wähle den Weg entlang der x-Achse, also $y=0$:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Wähle nun den Weg entlang der y-Achse, also $x=0$:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Entlang der beiden Wege existieren daher im Ursprung zwei unterschiedliche Grenzwerte; somit ist die Funktion nicht stetig ergänzbar.
Bewertung

a	5
b	5

3. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie für die Funktion
$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$$
im Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$ die Steigung in Richtung $(-1,1)$.
In welcher Richtung ist die Steigung in $\vec{x}_0$ jeweils minimal/ maximal/ gleich Null?
Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion in $\vec{x}_0$ an.
Lösung

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \left(\frac{-2xy}{(1+x^2)^2}, \frac{1}{1+x^2} \right) \\ \operatorname{grad} f(1,2) &= \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Steigung in geg. Richtung
$$D = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$
Für die Richtung der max. Steigung: Richtung des Gradienten, also
$$\vec{v} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{5}}$$
Richtung der min. Steigung, also des größten Gefälles: $-D$
Richtung der Steigung gleich Null: $\perp D$, also z.B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
Tangentialebene
$$T(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) = 1 - (x-1) + 0.5(y-2)$$

Bewertung

Steigung in geg. Richtung	2
Richtung des Gradienten	3
min./max. Steigung / Null	2
Tangentialebene	3

4. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$

Lösung

Homogene DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Lösungen der Char. Gl.

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2$$

Allgemeine Lsg. der homogenen DGL:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Lösung der part. Gl.

$$\begin{aligned} y_p &= b_0 + b_1 x \\ y_p' &= b_1 \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}$$

eingesetzt

$$0 - 3b_1 + 2(b_0 + b_1 x) = 2x + 1$$
$$2b_1 x + (2b_0 - 3b_1) = 2x + 1$$

KoeffVergleich

$$b_1 = 1, \qquad b_0 = 2$$

und damit

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 2$$

Bewertung

homogene DGL	4
partikuläre DGL	4
richtiges Ergebnis	2

5. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

a)
$$y' = -\frac{x}{y} \text{ mit } y(1) = 3$$

b)
$$y' + \frac{1}{2x} \cdot y = \sqrt{x} \cdot \sin x \text{ mit } y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$$

Lösung

zu a)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y^2 = 2C - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2C - x^2}$$

Aus der Anfangsbedingung

$$y(1) = 3 > 0 \Rightarrow y = +\sqrt{2C - x^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{2C - 1} \Rightarrow 9 = 2C - 1 \Rightarrow 2C = 10 \Rightarrow C = 5$$

und damit

$$y = \sqrt{10 - x^2}$$

zu b)
Homogene DGL:

$$y' + \frac{1}{2x}y = 0, x > 0$$

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln x, x > 0 \Rightarrow y_h = c\frac{1}{\sqrt{x}}, c \in \mathbb{R}$$

Variation der Konstanten mit Ansatz

$$y_s = c(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$c'(x) = \sqrt{x}\sin x e^{\frac{1}{2}\ln x} = x\sin x \Rightarrow c(x) = \sin x - x\cos x$$

und damit

$$y_s = (\sin x - x\cos x)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y_=(\sin x - x\cos x)\frac{1}{\sqrt{x}} + c\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Einsetzen von $x = \pi$ und $y = 2\sqrt{\pi}$ ergibt

$$2\sqrt{\pi} = \frac{c}{\sqrt{\pi}} + \pi\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow c = \pi$$

und damit

$$y_=(\sin x - x\cos x)\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

Bewertung

a	4
b	6

6. Aufgabe **10 Punkte**

Welches Volumen hat der Körper, der von den folgenden Flächen begrenzt wird?

$$x = 0,\; x = 2\pi,\; y = 0,\; y = 1,\; z = y,\; z = y^3$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1}\int_{z=y^3}^{y} 1 dzdydx &= \int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1} [z]_{z=y^3}^{y} dydx = \int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1} y - y^3 dydx \\
&= \int_{x=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_{y=0}^{1} dx \\
&= \int_{x=0}^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} dx = \int_{x=0}^{2\pi} \frac{1}{4} dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Bewertung

richtiges Dreifachintegral	3
je inneres Integral (3 mal)	2
Endergebnis	1

7. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei der Bereich $B : 0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 3 - 2x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt.

Lösung

Flächeninhalt (Trapez):

$$A = (3 + 1) * 0.5 * 1 = 2$$

Schwerpunktberchnung (x_S, y_S)

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{3-2x} x dy dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} [xy]_{y=0}^{3-2x} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} 3x - 2x^2 dx = \frac{5}{12} \\ y_S &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{3-2x} y dy dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{y=0}^{3-2x} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2} \left(9 - 12x + 4x^2\right) dx = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

Bewertung

Flächeninhalt	2
x_S	4
y_S	4

8. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die lokalen Minimal- und Maximalstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2xy(x+y-6)$$

und geben Sie die zugehörigen Funktionswerte an.

Lösung

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2xy(x+y-6) = 2x^2y + 2xy^2 - 12xy \\ f_x(x,y) &= 4xy + 2y^2 - 12y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ oder } x = -\frac{1}{2}y + 3 \\ f_y(x,y) &= 2x^2 + 4xy - 12x \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 6 - 2y \end{aligned}$$

Kandidaten: $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,6)$, $(2,2)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x+4y-12 \\ 4x+4y-12 & 4x \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} detH(x,y) &= 16xy - (4x+4y-12) \\ detH(0,0) &= -12 < 0 \Rightarrow \text{ Sattelpunkt} \\ detH(6,0) &= -144 < 0 \Rightarrow \text{ Sattelpunkt} \\ detH(0,6) &= -144 < 0 \Rightarrow \text{ Sattelpunkt} \\ detH(2,2) &= 48 > 0 \Rightarrow \text{ Extremalstelle} \\ f_xx(2,2) = 8 &> 0 \Rightarrow Minimalstelle \end{aligned}$$

Funktionswert:

$$f(2,2) = -16$$

Bewertung

4 Kandidaten	4
Hesse-Matrix	2
Determinante der Hesse-Matrix	1
Richtige Auswertung in Kandidaten und richtige Folgerung	2
Funktionswerte	1

9. Aufgabe **10 Punkte**

Für die durch

$$ye^{y^2} + x^3 - 3x + 2 = 0$$

implizit gegebene Funktion berechne man die erste Ableitung. An welchen Stellen $x > 0$ ist die Ableitung der implizit gegebenen Funktion Null?

Lösung

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 - 3}{e^{y^2} + ye^{y^2}2y} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ bzw. } x_2 = -1$$

Da nur die positive Lösung betrachtet werden soll: $x_1 = 1$

Bewertung

richtige Ableitung	8
Ableitung gleich 0	2

10. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K \vec{v} d\vec{X}$ für $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $\vec{X}$, der das Geradenstück von (0,1) nach (1,0) darstellt.

Lösung

Für $0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \\ \int_K \vec{v} d\vec{X} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1-t)^2 + t^2 dt = \int_0^1 1 - 2t + 2t^2 dt = 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Bewertung

Kurvendarstellung	3
Ableitung der Kurve	2
Kurvenpunkte richtig in Vektorfeld eingesetzt	2
Rest	3

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Analysis 2, SoSe 2020, am 10.07.2020

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(10)
Aufgabe 2)		(10)
Aufgabe 3)		(10)
Aufgabe 4)		(10)
Aufgabe 5)		(10)
Aufgabe 6)		(10)
Aufgabe 7)		(10)
Aufgabe 8)		(10)
Aufgabe 9)		(10)
Aufgabe 10)		(10)
Gesamtpunkte:	Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$$

Ist diese exakt? Lösen Sie die Differentialgleichung anschliessend.

2. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie das Anfangwertproblem

$$\begin{aligned} y' - 4y &= 8e^{4x} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

3. Aufgabe **10 Punkte**

Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Lagrange die Punkte auf der Parabel $y = x^2$, deren Abstand zum Punkt $(0, 4)$ minimal sind.
Hinweise: Minimieren Sie zweckmäßigerweise den quadratischen Abstand. Bei der Untersuchung der kritischen/stationären Punkte können Sie die Symmetrie ausnutzen.

4. Aufgabe **10 Punkte**

Wir betrachten den Bereich $B = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
a) Skizzieren Sie B.
b) Über diesen Bereich wird die Funktion $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ integriert. Wie gross ist das Integral?

5. Aufgabe **10 Punkte**

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{yx\sqrt{x}}{\left(x+y^2\right)^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

auf stetige Ergänzbarkeit im Ursprung.

6. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y &= 0 \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 12 \end{aligned}$$

7. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei das Vektorfeld/ Kraftfeld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy - y^2 \\ x^2 - 2xy - y^2 \end{pmatrix}$$

a) Überprüfen Sie, ob Kurvenintegrale in $\vec{F}$ wegunabhängig sind.

b) Ermitteln Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion.

c) Berechnen Sie die Arbeit zwischen den Punkten $A = (0,1)$ zu $E = (1,0)$ über die Potentialfunktion oder als Wert des Kurvenintegrals über ein Geradenstück von A nach E.

8. Aufgabe **10 Punkte**

Man berechne die lokalen Minimal- und Maximalstellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \text{ falls } x \neq 0, y \neq 0$$

9. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei die implizit gegebene Funktion $y(x)$:

$$x^4 + y^5 - 2xy = 0.$$

Wie groß ist die Steigung und wie lautet die Tangentengleichung im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$, falls dieser die obige Gleichung erfüllt?

10. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 2)$ in Richtung eines normierten Vektors, der mit der positiven $x-$Achse einen Winkel von $\alpha = 45$ Grad bildet. Welchen Wert erhält man für $\beta = 225$ Grad?

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK"
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Analysis 2, SS 2020, am 24.09.2020

Name: ________________

Vorname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Unterschrift: ________________

			max. Punktzahl
Aufgabe	1)		(10)
Aufgabe	2)		(10)
Aufgabe	3)		(10)
Aufgabe	4)		(10)
Aufgabe	5)		(10)
Aufgabe	6)		(10)
Aufgabe	7)		(10)
Aufgabe	8)		(10)
Aufgabe	9)		(10)
Aufgabe	10)		(10)
Gesamtpunkte:		Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{xy + 2}$$

im Punkt

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in Richtung des Vektors

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe **10 Punkte**

Für ein Unternehmen, das zwei Güter in den Mengen x und y herstellt, gilt die Gewinnfunktion

$$f(x,y) = 14x + 28y - x^2 - 2y^2 + xy$$

Man bestimme den Produktionsplan (d.h. man berechne (x,y)) mit dem höchsten Gewinn.

3. Aufgabe **10 Punkte**

Man untersuche, ob die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{2x-y} \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig ist.

4. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' = 4y' - 4y + 8x + 4$$

5. Aufgabe **10 Punkte**

Wir betrachten als Integrationsbereich

$$B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Die zu integrierende Funktion sei

$$f(x, y) = x \cdot y^2$$

Berechnen Sie

$$\int \int_B f(x, y) dy dx$$

6. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie zur vektoriellen Funktion

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\sin x \cdot \sqrt{z} \\ z^2 x \\ 5 \end{pmatrix}$$

die Divergenz und die Rotation.

7. Aufgabe **10 Punkte**

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y' = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ durch Substitution mit $z = \frac{y}{x}$

b) $y' + xy = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

8. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Man berechne den Wert des Kurvenintegrals längs der Kurve K

$$K : t \to \begin{pmatrix} t \\ t^2 - t \end{pmatrix}$$

mit $t \in [1,2]$.

9. Aufgabe **10 Punkte**

Welche Punkte (x_0, y_0) auf dem Einheitskreis, d.h. $x_0^2 + y_0^2 = 1$ haben das größte bzw. kleinste Produkt der Koordinaten, also ein lokales Extremum der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

10. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = y \cdot \sin^2 x + x - \frac{\pi}{2}$$

Berechnen Sie die Tangentialebene an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}, y = 1$

Analysis 2, 24.09.20

1)

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{xy+2}} \cdot y \\ \frac{1}{2\sqrt{xy+2}} \cdot x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} := \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = \langle \operatorname{grad} f(1,2), \vec{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

2)

$$f(x,y) = 14x + 28y - x^2 - 2y^2 + xy$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 14 - 2x + y = 0 \\ f_y(x,y) &= 28 - 4y + x = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 12 \\ y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

$$f_{xx}(x,y) = -2$$

$$f_{xy}(x,y) = 1 \qquad H(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$f_{yy}(x,y) = -4$$

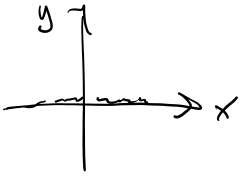
$\det H(x,y) = 8 - 1 = 7 > 0 \Rightarrow$ Extremalstelle

$f_{xx}(12,10) = -2 < 0 \Rightarrow$ lok. Maximalstelle

9 7

f_{xx} [illegible]

3) $y = 0$



$$f(x,0) = \frac{0}{2x} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$x = 0$

$$f(0,y) = \frac{y}{0-y} = -\frac{y}{y} = -1 \xrightarrow[y \to 0]{} -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Da die Limiten nicht gleich sind ist die Funktion unstetig im Ursprung

4) $y'' - 4y' + 4y = 8x + 4$

$\underline{y_h = ?}$

$$s^2 - 4s + 4 = 0$$

$$s_{1/2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{4-4} = 2$$

$$y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x}$$

$\underline{y_p = ?}$

$$y_p = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$y_p' = \beta_1$$

$$y_p'' = 0$$

in DGL: $0 - 4(\beta_1) + 4(\beta_0 + \beta_1 x) = 8x + 4$

$$\Leftrightarrow (-4\beta_1 + 4\beta_0) + 4\beta_1 x = 8x + 4$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4\beta_1 + 4\beta_0 = 4 \\ \ldots \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8 + 4\beta_0 = 4 \Leftrightarrow \beta_0 = 3 \\ \ldots \end{array} \right\}$$

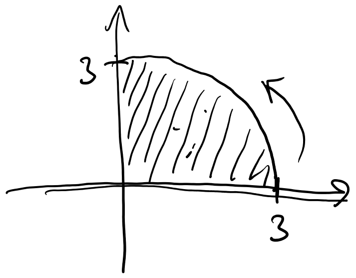
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4p_1 + 4p_0 = 4 \\ 4p_1 \quad = 8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} [illegible] \\ p_1 = 2 \end{array}\right\}$$

$$y_p = 3 + 2x$$

$$\underline{y = y_h + y_p}$$

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{2x} + 3 + 2x$$

5)



$$0 \le r \le 3$$
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{r=0}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r \cdot \cos\varphi \cdot r^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot r \, d\varphi \, dr =$$

$$\int_{r=0}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r^4 \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi \, d\varphi \, dr =$$

NR: $\int \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi \, d\varphi = \int \cancel{\cos\varphi} \cdot u^2 \cdot \frac{1}{\cancel{\cos\varphi}} \, du$

$$u = \sin\varphi$$
$$\frac{du}{d\varphi} = \cos\varphi$$
$$\frac{1}{\cos\varphi} du = d\varphi$$

$$= \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 + C$$
$$= \frac{1}{3} \sin^3\varphi + C$$

$$\int_{r=0}^{3} \left[r^4 \cdot \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} dr =$$

$$\int_{r=0}^{3} r^4 \cdot \frac{1}{3} \, dr = \left[\frac{1}{5} r^5 \cdot \frac{1}{3} \right]_{r=0}^{3} = \frac{1}{15} 3^5 = \frac{1}{5} 3^4$$
$$= \frac{81}{5}$$

6)

$$\operatorname{div} \vec{f}(x,y,z) = y \quad \cos x \sqrt{z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 2zx \\ y \cdot \sin x \frac{1}{2\sqrt{z}} - 0 \\ z^2 - \sin x \cdot \sqrt{z} \end{pmatrix}$$

7)

a) $y' = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \qquad z = \frac{y}{x}$

$$z = \frac{y}{x} \quad ; \; y = z \cdot x \quad ; \; y' = z' \cdot x + z$$

$$z' \cdot x \cancel{+ z} = 2\sqrt{z} \cancel{+ z}$$

$$z' = \frac{2}{x} \cdot \sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} \cdot \sqrt{z}$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\sqrt{z} = \ln|x| + C$$

$$z = (\ln|x| + C)^2$$

$$y = z \cdot x = (\ln|x| + C)^2 \cdot x$$

b) $y' + \underbrace{x}^{f(x)} \cdot y = \underbrace{x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{g(x)}$

$$y(x) = e^{-\int f(x)\,dx} \cdot \left(C + \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx} \, dx \right)$$

$$y(x) = e^{-\int x\,dx} \cdot \left(C + \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{\int x\,dx} \, dx \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(C + \int x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \, dx \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(C + \int x\,dx \right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(C + \frac{1}{2}x^2 \right)$$

8) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$

$$\vec{F}(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} t^2 - (t^2-t)^2 \\ 2t(t^2-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{t^2} - t^4 + 2t^3 \cancel{- t^2} \\ 2t^3 - 2t^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_K \vec{F}\, d\vec{x} = \int_1^2 \begin{pmatrix} -t^4 + 2t^3 \\ 2t^3 - 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_1^2 -t^4 + 2t^3 + (2t^3 - 2t^2) \cdot (2t-1)\, dt =$$

$$= \int_1^2 \underline{-t^4} + 2t^3 + \underline{4t^4} - 4t^3 - 2t^3 + 2t^2\, dt$$

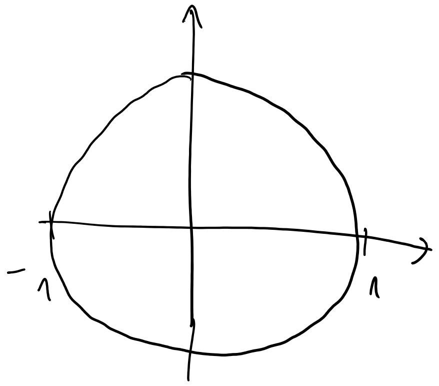
$$= \int^2 3t^4 - 4t^3 + 2t^2\, dt$$

$$= \int_1^2 3t^4 - 4t^3 + 2t^2 \, dt$$

$$= \left[\frac{3}{5}t^5 - \frac{4}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_1^2 = \frac{3}{5}\cdot 2^5 - 2^4 + \frac{2}{3}2^3$$

$$- \left(\frac{3}{5} - 1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{124}{15}$$

g)



$f(x,y) = x \cdot y$ min / max

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$L(x,y,\lambda) = x \cdot y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

1) $L_x(x,y,\lambda) = y + 2x\lambda = 0 \iff \lambda = -\frac{y}{2x}$

2) $L_y(x,y,\lambda) = x + 2y\lambda = 0 \iff \lambda = -\frac{x}{2y}$

3) $L_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

1) = 2) : $\frac{-y}{2x} = -\frac{x}{2y} \iff 2y^2 = 2x^2 \iff x^2 = y^2$

in 3) $x^2 + x^2 - 1 = 0 \iff 2x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

① $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$

② $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

③ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

④ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)$

$L_{xx} = 2\lambda$ $\qquad$ $L_{x\lambda} = 2x$

$L_{xy} = 1$ $\qquad$ $L_{y\lambda} = 2y$

$L_{yy} = 2\lambda$

$$H = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \\ 2x & 2y \end{matrix}$$

$$\det H = 4xy + 4xy - 8x^2\lambda - 8y^2\lambda$$

① $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\right)$

$$8 \cdot \frac{1}{2} - \frac{8}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \cancel{\frac{4}{2}} - \cancel{\frac{4}{2}} = \frac{8}{2} > 0$$

lok. Max $\qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$

② $\det H > 0 \Rightarrow$ lok. Max $\qquad f(\dots) = \frac{1}{2}$

③ $\det H < 0 \Rightarrow$ lok Min $\qquad f(\dots) = -\frac{1}{2}$

④ $< 0 \Rightarrow$ lok Min $\qquad f(\dots) = -\frac{1}{2}$

10)

$f(x,y) = y \cdot \sin^2 x + x - \frac{\pi}{2}$

$f_x(x,y) = y \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 1$

$f_y(x,y) = \sin^2 x$

$f(\frac{\pi}{2}, 1) = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 1$

$f_x(\frac{\pi}{2}, 1) = 1$

$f_y(\frac{\pi}{2}, 1) = 1$

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$= 1 + 1\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + 1\cdot(y-1)$$

$$= 1 + x - \frac{\pi}{2} + y - 1 = \underline{x + y - \frac{\pi}{2}}$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG „ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“

MATSE AUSBILDUNG

Klausur Analysis 2, WS 2021, am 25.03.2021

Hilfsmittel: 2 Seiten (DIN A 4) handschriftliche Formeln

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

			max. Punktzahl
Aufgabe	1)		(10)
Aufgabe	2)		(10)
Aufgabe	3)		(10)
Aufgabe	4)		(10)
Aufgabe	5)		(10)
Aufgabe	6)		(10)
Aufgabe	7)		(10)
Aufgabe	8)		(10)
Aufgabe	9)		(10)
Aufgabe	10)		(10)
Gesamtpunkte:		Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie das Taylorpolynom 1. Grades der Funktion

$$f(x,y) = x^2 \cdot \sin(x \cdot y) + 2$$

an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und $y_0 = \pi$.

2. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie x-Koordinate des Schwerpunkts des Gebiets, das durch die x-Achse und die Funktionen $y = 2 - x$ und $y = \sqrt{x}$ begrenzt wird.
Hinweis: Die Berechnung der y-Koordinate des Schwerpunktes ist nicht gefordert!

3. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x \qquad \text{mit } x \neq 0$$

4. Aufgabe **10 Punkte**

Ist die Funktion

$$y = \begin{cases} x \cdot \frac{y^2-x}{y^2+x^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig?

5. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^4 \cdot \cos x + y \text{ mit } y(0) = \frac{1}{2}$$

6. Aufgabe **10 Punkte**

a) Man löse die Differentialgleichung

$$y' = e^x \sqrt{y}$$

Bestimmen Sie eine nicht-triviale Lösung.

b) Man löse die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2\cos x$$

7. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $f(x,y) = x^2y^3 + 4$ und $\vec{v}(x,y) = \mathrm{grad} f(x,y)$. Man bestimme

a)

$$\vec{v}(x,y)$$

b) Man bestimme die Richtungsableitung von $f(x,y)$ in $P(2,1)$ in Richtung $\vec{a} = (-1,1)$.

c) Geben Sie eine Richtung des stärksten Anstiegs im Punkt $P(2,1)$ an. Wie groß ist der Anstieg?

8. Aufgabe **10 Punkte**

Man berechne die lokalen Minimal- und Maximalstellen der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 4x$$

9. Aufgabe **10 Punkte**

Der Graph von $y = \sin x$ beschreibt eine Kurve K in der $xy-$Ebene: $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Man berechne das Kurvenintegral$\int_K \vec{v} d\vec{X}$ für $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(x) + y \\ \sin(x) + x + 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe einer Potentialfunktion (im Falle der Existenz).

10. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie das Integral

$$\int\int_B (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)^2} dy dx$$

über dem Gebiet

$$B = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Berechnen Sie anschließend den Limes für $R \to \infty$.

Ana 2
März 21

1) $f(x,y) = x^2 \cdot \sin(x \cdot y) + 2$ | $f(1,\pi) = 2$

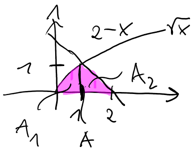
$f_x(x,y) = 2x \cdot \sin(x \cdot y) + x^2 \cdot \cos(x \cdot y) \cdot y$ | $f_x(1,\pi) = -\pi$

$f_y(x,y) = x^3 \cdot \cos(x \cdot y)$ | $f_y(1,\pi) = -1$

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$T_1(x,y) = 2 - \pi(x-1) - (y - \pi)$$
$$\left(= 2 - \pi x + \pi - y + \pi = 2 + 2\pi - \pi x - y\right)$$

2) $$x_S = \frac{1}{|A|} \iint_A x \, dA$$



$$|A| = \iint_A 1 \, dA$$
$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \, dx + \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{2-x} 1 \, dy \, dx$$
$$= \int_{x=0}^{1} \sqrt{x} \, dx + \int_{x=1}^{2} 2 - x \, dx$$
$$= \frac{2}{3} + \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{x=1}^{2}$$
$$= \frac{2}{3} + 4 - 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

$$x_S = \frac{6}{7} \underbrace{\iint_A x \, dA}_{\text{Intervall.}} = \frac{6}{7}\left(\iint_{A_1} x \, dA_1 + \iint_{A_2} x \, dA_2\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} x \, dy \, dx + \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{2-x} x \, dy \, dx\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(\int_{x=0}^{1} \left[x y\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx + \int_{x=1}^{2} \left[x y\right]_{y=0}^{2-x} dx\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(\int_{x=0}^{1} x^{3/2} \, dx + \int_{x=1}^{2} x(2-x) \, dx\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(\left[\frac{1}{1+3/2} x^{3/2+1}\right]_{x=0}^{1} + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=1}^{2}\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(\frac{2}{5} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{7}\left(3 - \frac{7}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{6}{7}\left(\frac{45 - 35 + 6}{15}\right) = \frac{\cancel{6}^{2}}{7} \cdot \frac{16}{\cancel{15}_{5}}$$

$$= \frac{32}{35}$$

$$\left(\text{Alternative: } x_S = \frac{1}{|A|} \cdot \int_{y=0}^{1} \int_{x=y^2}^{2-y} x \, dx \, dy \right)$$

3) $$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} \cdot y = \underbrace{\sin x}_{g(x)}$$

$$y = e^{-\int f(x)\,dx} \cdot \left(C + \int g(x)\, e^{\int f(x)\,dx} dx \right)$$

$$= e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} \cdot \left(C + \int \sin x \; e^{\int \frac{1}{x}\,dx} dx \right)$$

$$= e^{-\ln|x|} \cdot \left(C + \int \sin x \; e^{\ln|x|} dx \right)$$

$$= e^{\ln\left(|x|^{-1}\right)} \cdot \left(C + \int \sin x \cdot |x| \, dx \right)$$

NR: $\int \sin x \cdot |x| \, dx$

Fall 1: $x \geq 0$

$$\int \underbrace{\sin x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} \, dx = -\cos x \cdot x + \int \cos x \, dx$$

$$\left[\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -\cos x \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \sin x \end{array} \right.$$

$$-\cos x \cdot x + \sin x \quad + C$$

Fall 2 : $x < 0$

$$-\int \sin x \cdot x \, dx = -(-\cos x \cdot x + \sin x)$$

$$= \frac{1}{|x|} \cdot \left(C + \frac{x}{|x|} (-\cos x \cdot x + \sin x) \right)$$

$$= \frac{1}{|x|} \cdot C + \frac{x}{x^2} (-\cos x \cdot x + \sin x)$$

$$= \frac{1}{|x|} \cdot C - \cos x + \frac{\sin x}{x}$$

4) $y = 0$

$$x \cdot \frac{0 - x}{0 + x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1 \xrightarrow[x \to 0]{} -1 \neq 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow$ Funktion ist unstetig

5) $y' - y = y^4 \cdot \cos x$

Subst. (Bernoulli) : $u = y^{1-4} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{u}} = u^{-1/3}$$

$$y' = -\frac{1}{3} u^{-4/3} \cdot u'$$

$$-\frac{1}{3} u^{-4/3} u' - u^{-1/3} = u^{-4/3} \cdot \cos x \quad \Big| \cdot (-3)$$

$$u^{-4/3} \cdot u' + 3 u^{-1/3} = -3 u^{-4/3} \cdot \cos x \quad \Big| \cdot u^{4/3}$$

$$u' + \boxed{3} u = -3 \cdot \cos x$$

$u_h = ?$

$$u_h = C \cdot e^{-\int f(x)\,dx} = C e^{-3x}$$

$u_p = ?$

$$u_p = c_0 \cdot \sin x + c_1 \cdot \cos x$$

$$u_p' = c_0 \cdot \cos x - c_1 \cdot \sin x$$

$$c_0 \cdot \cos x - c_1 \cdot \sin x + \underline{3}\, c_0 \cdot \sin x + \underline{3}\, c_1 \cdot \cos x = -3 \cos x$$

$$(c_0 + 3c_1) \cdot \cos x + (3c_0 - c_1) \cdot \sin x = -3 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_0 + 3c_1 = -3 \\ 3c_0 - c_1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_0 = -\frac{3}{10} \\ c_1 = -\frac{9}{10} \end{array} \right\}$$

$$u = u_h + u_p = C \cdot e^{-3x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{9}{10} \cos x$$

Rüc: $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{C \cdot e^{-3x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{9}{10} \cos x}}$

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{C - \frac{9}{10}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{C - \frac{9}{10}} = 2$$

$$\Leftrightarrow C - \frac{9}{10} = 8$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{80+9}{10} = \frac{89}{10}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{89}{10} \cdot e^{-3x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{9}{10} \cos x}}$$

6a) $y' = e^x \cdot \sqrt{y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \sqrt{y}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \int e^x\, dx$$

$$\frac{1}{1+(-\frac{1}{2})} \cdot y^{-1/2+1} = e^x + C$$

$$2\sqrt{y} = e^x + C$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(e^x + C)$$

$$y = \frac{1}{4}(e^x + C)^2$$

6b) $\underline{y'' - 3y' + 2y = 2\cos x}$ $\quad r = 0$, $t = 1$ $\quad i$

$\underline{y_h = ?}$

$$s^2 - 3s + 2 = 0$$

$$s_{1/2} = -\frac{(-3)}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$s_1 = 2$ und $s_2 = 1$

$$y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x$$

$\underline{y_p = ?}$

Ansatz: $y_p = c_0 \cdot \sin x + c_1 \cdot \cos x$ (keine Resonanz)

$$y_p' = c_0 \cdot \cos x + c_1 \cdot (-\sin x)$$

$$y_p'' = -c_0 \cdot \sin x - c_1 \cdot \cos x$$

y_p

y_p

$$y_p'' = -c_0 \cdot \sin x - c_1 \cdot \cos x$$

$$-c_0 \cdot \sin x - c_1 \cdot \cos x - 3\,(c_0 \cdot \cos x - c_1 \sin x) + 2 \cdot (c_0 \cdot \sin x + c_1 \cdot \cos x) = 2 \cdot \cos x$$

$$(-c_0 + 3c_1 + 2c_0) \cdot \sin x + (-c_1 - 3c_0 + 2c_1) \cos x = 2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_0 + 3c_1 = 0 \\ c_1 - 3c_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = -3c_1 \\ c_1 + 9c_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = -\frac{3}{5} \\ c_1 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{3}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$$

$$\underline{y = y_h + y_p}$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{x} - \frac{3}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$$

7) a) $$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x\,y^3 \\ x^2\,3y^2 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{v} := \frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{v}} f(2,1) = \left\langle \operatorname{grad} f(2,1), \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-4 + 12) = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{2}$$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \text{grad} f(2,1)$ Richtung des stärksten Anstiegs

$$\left(\frac{1}{\sqrt{16+144}} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{160}} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \vec{w} \text{ normiert} \right)$$

$$D_{\vec{w}} f(2,1) = \langle \text{grad} f(2,1), \vec{w} \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{160}} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{160}} \cdot (16+144) = \frac{160}{\sqrt{160}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{160}}}$$

8) 1) $f_x(x,y) = 2x + y + 4 = 0 \iff y = -2x - 4$

2) $f_y(x,y) = 2y + x = 0$

1) in 2) $\quad 2(-2x-4) + x = 0$

$\iff -4x - 8 + x = 0$

$\iff -3x = 8 \iff x = -\frac{8}{3}$

in 1) $\quad y = \frac{4}{3}$

Kandidaten: $\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$f_{xx}(x,y) = \underline{2} > 0$

$f_{xy}(x,y) = 1$

$f_{yy}(x,y) = 2$

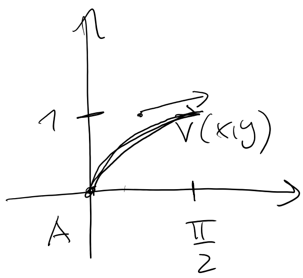
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H(x,y) = 4 - 1 = 3 > 0$$

$\Rightarrow$ Extremalstelle

Da $f_{xx}\left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2 > 0$ handelt es sich um eine Minimal-

Stelle.

9)



$A = (0,0)$

$E = (\frac{\pi}{2}, 1)$

$$\operatorname{grad} V(x,y) = \vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{y\cos(x) + y} \\ \boxed{\sin(x) + x + 2} \end{pmatrix}$$

Integrabilitätsbed.: $\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cos(x) + y\right) = \cos(x) + 1$

$\qquad \qquad ||$ ✓

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(x) + x + 2\right) = \cos(x) + 1$

$\Rightarrow$ es existiert eine Potentialfkt

$$V(x,y) = \int y\cos(x) + y \, dx = y\sin x + y \cdot x + c(y)$$

$$V_y(x,y) = \sin x + x + c'(y) = \sin x + x + 2$$

$$c'(y) = 2$$

$$c(y) = 2y + c$$

$$V(x,y) = y \cdot \sin x + y \cdot x + 2y + c$$

$$\int_K \vec{v} \, d\vec{x} = V(\vec{E}) - V(\vec{A}) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2 - (0)$$

$$= \underline{\underline{3 + \frac{\pi}{2}}}$$

10) $\iint (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)^2} \, dx\, dy$

10)
$$\iint_B (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \underbrace{(r\cdot\cos\varphi)^2+(r\cdot\sin\varphi)^2}_{r^2}\, e^{-r^4}\, \boxed{\cdot r}\; dr\, d\varphi$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{R} e^{-r^4}\cdot r^3\; dr\right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{u=0}^{-R^4} e^{u}\cdot \cancel{r^3}\cdot\left(-\frac{1}{4\cancel{r^3}}\right) du\right) d\varphi$$

NR: $u = -r^4$

$$\frac{du}{dr} = -4r^3$$

$$du = -4r^3\, dr$$

$$-\frac{1}{4r^3}\, du = dr$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)\int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-R^4}-1 \quad d\varphi$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)\Big[\left(e^{-R^4}-1\right)\varphi\Big]_{\varphi=0}^{2\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{\cancel{4}_{\,2}}\right)\Big[\left(e^{-R^4}-1\right)\cancel{2}\pi\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\, e^{-R^4}\pi + \frac{1}{2}\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG „ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Analysis 2, SoSe 2021, am 16.07.2021

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

			max. Punktzahl
Aufgabe	1)		(10)
Aufgabe	2)		(10)
Aufgabe	3)		(10)
Aufgabe	4)		(10)
Aufgabe	5)		(10)
Aufgabe	6)		(10)
Aufgabe	7)		(10)
Aufgabe	8)		(10)
Aufgabe	9)		(10)
Aufgabe	10)		(10)
Gesamtpunkte:		Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie das Taylorpolynom 1. Grades der Funktion

$$f(x,y) = y^2 \cdot \cos(x \cdot y) + 1$$

an der Entwicklungsstelle $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ und $y_0 = 1$.

2. Aufgabe **10 Punkte**

Betrachten Sie die implizit gegebene Funktion $y(x)$

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

Welche Tangentengleichung liegt im Punkt $(x_0, y_0) = (3,3)$ vor, sofern dieser die Gleichung erfüllt?

3. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die Punkte auf dem Kreis $x^2+y^2 = 4$ mit minimalem oder maximalem quadrierten euklidischen Abstand zum Punkt $P_0 = (1,0)$ mit dem Lagrange-Verfahren.
Bestimmen Sie die Art der gefundenen Kandidaten mit der geänderten Hesse-Matrix.
Hinweis: Die Rangbedingung muss nicht überprüft werden. Diese wurde an den Studienorten Jülich und Aachen eingeführt.

4. Aufgabe **10 Punkte**

Ist die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2-x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig?

5. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - y = y^2 \cdot \sin x$$

Hinweis: Bernoulli-DGL

6. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2ye^x + y + (2e^x + x) \cdot y' = 0$$

7. Aufgabe **10 Punkte**

Sei

$$f(x,y) = e^x \cdot \left(2x + y^2\right)$$

a) Man berechne die Richtungsableitung von $f(x,y)$ im Punkt (1,1) in Richtung des Vektors $\vec{a} = (2,1)$
b) Man berechne die lokalen Extremwerte von $f(x,y)$.

8. Aufgabe **10 Punkte**

Man löse die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

9. Aufgabe **10 Punkte**

Der Graph von $y = \sin x$ beschreibt eine Kurve K in der $xy-$Ebene: $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Man berechne den Wert des Kurvenintegrals $\int_K \vec{v} d\vec{X}$ für $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(x) + y \\ \sin(x) + x + 2 \end{pmatrix}$

10. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie das Volumen, welches unterhalb der Oberfläche

$$\frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

entsteht, wenn man als Integrationsgebiet die Kreisschreibe des $\mathbb{R}^2$ mit Zentrum (0,0) und Radius $R_0 > 0$ wählt.
Hinweis: Polarkoordinaten

Analysis 2 Klausur vom 16. 07. 22

1) $f_x = -y^3 \cdot \sin(xy)$

$f_y = 2y\cos(xy) + y^2 \cdot (-\sin(xy) \cdot x)$

$f(x,y) = y^2 \cdot \cos(x \cdot y) + 1$

$x_0 = \frac{\pi}{2} \quad y_0 = 1$

$f_x = -\sin(-\frac{\pi}{2}) = 1$

$f_y = 2\cos(-\frac{\pi}{2}) + (-\sin(-\frac{\pi}{2}) \cdot (-\frac{\pi}{2})) = -\frac{\pi}{2}$

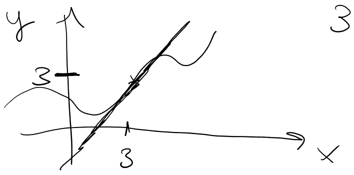
$f(-\frac{\pi}{2}, 1) = \cos(-\frac{\pi}{2}) + 1$
$= 1$

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y-y_0)$$

$$= 1 + (x + \frac{\pi}{2}) + (-\frac{\pi}{2})(y-1)$$

$$= 1 + x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y + \frac{\pi}{2} = 1 + x + \pi - \frac{\pi}{2}y$$

2)



$3^3 + 3^3 - 6 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 \cdot 2 - 2 \cdot 3^3 = 0$ ✓

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$x_0 = 3$

$$t(x) = f'(3)(x-3) + 3 = \underline{(-1)(x-3) + 3} = 6 - x$$

$$f'(3) = -\frac{F_x(3,3)}{F_y(3,3)} = -\frac{9}{9} = -1$$

$F_x(x,y) = 3x^2 - 6y$

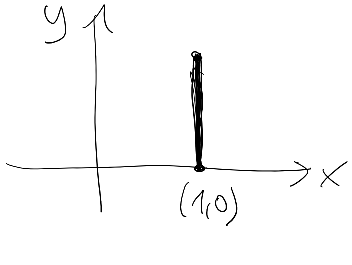
$F_y(x,y) = 3y^2 - 6x$

$F_x(3,3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3$
$= 27 - 18 = 9$

$F_y(3,3) = 3 \cdot 9 - 6 \cdot 3$
$= 27 - 18 = 9$

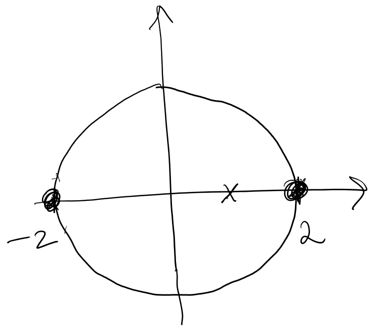
3) $$\|\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\|^2 = \|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\|^2$$

$$= \|\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}\|^2 = \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}\right)^2$$



$$= (x-1)^2 + y^2$$

min / max



NB: $x^2+y^2-4=0$

$$L(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(x^2+y^2-4) \cancel{=0}$$

1) $L_x = 2(x-1) + \lambda 2x = 0$

2) $L_y = 2y + 2y\lambda = 0 \iff 2y(1+\lambda)=0 \iff y=0$ ✓

$(\lambda = -1)$

Punkt erfüllt die 3 Gleichungen nicht deshalb ignorieren

3) $L_\lambda = x^2+y^2-4 = 0$

in 3): $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$

in 1): $\underbrace{2(2-1)}_{2} + \lambda \cdot \underbrace{2\cdot 2}_{=4} = 0 \iff \lambda = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$K_1(2, 0, -\frac{1}{2})$

$K_2(-2, 0, -\frac{3}{2})$

in 1) $\underbrace{2(\underbrace{-2-1}_{-3})}_{-6} + \lambda(-4) = 0 \iff \lambda = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$L_{xx} = 2+2\lambda$

$L_{yy} = 2+2\lambda$

$L_{xy} = 0$

$g_x = 2x$

$g_y = 2y$

$$\det H = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2+2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \\ 2x & 2y \end{matrix}$$

$$= -4x^2(2+2\lambda) - (2y)^2(2+2\lambda)$$

$K_1(2, 0, -\frac{1}{2})$:

$$\det H = -4\cdot 2^2(2+\cancel{2}\cdot(-\tfrac{1}{\cancel{2}})) - 0$$

$$= -4\cdot 2^2(2-1) = -16 < 0$$

$\Rightarrow$ Minimalstelle

$K_2(-2,0,-\frac{3}{2})$:

$$\det H = -4 \cdot 2^2 \left(2 + \cancel{2} \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{4}}\right)\right)$$

$$= -16\,(2-3) = +16 > 0$$

$\Rightarrow$ Maximalstelle

4) $x=0$: $f(x=0,y) = \frac{y^2}{y^2} = 1 \xrightarrow[y \to 0]{} 1 \neq \underset{f(0,0)}{\underset{\shortparallel}{0}}$

$\Rightarrow$ Funktion ist unstetig.

5) $\boxed{u = y^{1-\alpha}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{u(x)^2} \cdot u'(x)$$

$$-\frac{1}{u^2} \cdot u' - u^{-1} = \frac{1}{u^2} \cdot \sin(x) \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{u^2} \cdot u' + u^{-1} = -\frac{1}{u^2} \cdot \sin(x) \quad \Big| \cdot u^2$$

$$u' + \boxed{1}\, u = -\sin(x)$$

$\underline{u_h = ?}$

$$u_h = C \cdot e^{-\int f(x)dx} = e^{-x} \cdot C$$

$\underline{u_p = ?}$

$$u_p = c_0 \cdot \sin x + c_1 \cdot \cos x$$

$$u_p' = c_0 \cdot \cos x + c_1 \cdot (-\sin x)$$

in DGL:

$$u_p' + u_p = c_0 \cdot \cos x - c_1 \cdot \sin x + c_0 \cdot \sin x + c_1 \cdot \cos x$$

$$= -\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad (c_0 - c_1) \sin x + (c_0 + c_1) \cos x = -\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 - c_1 = -1 \\ c_0 + c_1 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} c_0 = -\frac{1}{2} \\ c_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad u_p = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$u = u_h + u_p = C \cdot e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

Rücksub. $y = \frac{1}{u} = \dfrac{1}{C \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} \cos x}$

b) exakte DGL

$$\underbrace{2ye^{x} + y}_{= p(x,y)} + \underbrace{(2e^{x} + x)}_{= q(x,y)} \cdot y' = 0$$

$$p_y(x,y) = 2e^x + 1$$
$$\| \Rightarrow \text{exakt}$$
$$q_x(x,y) = 2e^x + 1$$

$$V(x,y) = \int p(x,y)\,dx = \int 2ye^x + y\,d\cancel{x}$$

$$= 2ye^x + yx + c(y)$$

$$V_y(x,y) = 2e^x + x + c'(y) = 2e^x + x$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c(y) = C$$

$$\Rightarrow V(x,y) = 2ye^x + yx + C$$

$$2ye^x + yx = C^*$$

$$y(2e^x + x) = C^*$$

$$y = \frac{C^*}{2e^x + x}$$

---

7)
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{v} := \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x(2x+y^2) + e^x \cdot 2 \\ e^x \cdot 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} e(3) + 2e \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e \\ \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f(1,1) = \begin{pmatrix} e(3) + 2e \\ e \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e \\ 2e \end{pmatrix}$$

$$D_{\vec v} f(1,1) = \langle \text{grad } f(1,1), \vec v \rangle$$

$$= \langle \begin{pmatrix} 5e \\ 2e \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(10e + 2e\right) = \frac{12e}{\sqrt5}$$

b)

1) $f_x = e^x(2x + y^2 + 2) = 0$

2) $f_y = 2e^x y = 0 \iff y = 0$

2) in 1) : $e^x(2x+2) = 0 \iff 2x+2 = 0$

$\iff x = -1$

$K(-1, 0)$

$$f_{xx} = e^x(2x + y^2 + 2) + e^x(2)$$
$$= e^x(2x + y^2 + 4)$$

$$f_{yy} = 2e^x$$
$$f_{xy} = 2e^x y = f_{yx}$$

$$H^{(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x(2x + y^2 + 4) & 2e^x y \\ 2e^x y & 2e^x \end{pmatrix}$$

$$H(-1,0) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{1}{e} \cdot 2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}$$

$$\det H(-1,0) = \frac{4}{e^2} > 0 \Rightarrow \text{lok. Extremalstelle}$$

$$f_{xx}(-1,0) = \frac{2}{e} > 0 \underset{\text{ins}}{\Rightarrow} \text{lok. Minimalstelle}$$

8) $\underline{y'} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$y(x) = z(x) \cdot x$$

$$y'(x) = z'(x) \cdot x + z(x) \cdot 1$$

$$z' \cdot x \cancel{+ z} = 2 \cdot \sqrt{z} \cancel{+ z}$$

$$z' \cdot x = 2 \cdot \sqrt{z} \quad | : x$$

$$z' = \underbrace{2 \cdot \sqrt{z}}_{g(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 \cdot \sqrt{z} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{z}} \, dz = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\sqrt{z} = \ln|x| + C$$

$$z = (\ln|x| + C)^2$$

Rück. $y = z \cdot x = (\ln|x| + c)^2 \cdot x$

g) $\int_K \vec{v}\, d\vec{x} = \int_0^{\pi/2} \vec{v}(x(t)) \circ x'(t)\, dt$

NR.:

$\vec{v}(x(t)) = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) + \sin(t) \\ \sin(t) + t + 2 \end{pmatrix}$

$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix}$

$= \int_0^{\pi/2} (\sin(t)\cos(t) + \sin(t)) \cdot 1 + (\sin(t) + t + 2) \cdot \cos(t)\, dt$

$= \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \sin(t)\cos(t) + \sin(t) + \underline{t \cdot \cos(t)} + 2\cos(t)\, dt$

NR

$\int \underset{u}{\sin(t)} \underset{v'}{\cos(t)}\, dt = \sin^2(t) - \int \cos(t) \cdot \sin(t)\, dt$

$u(\cancel{t}) = \sin(t) \qquad v(t) = \sin(t)$

$u'(t) = \cos(t) \qquad v'(t) = \cos(t)$

$\Leftrightarrow \int \sin(t)\cos(t)\, dt = \frac{1}{2}\sin^2(t) + C$

$\int \underset{u}{t} \cdot \underset{v'}{\cos(t)}\, dt = t \cdot \sin(t) - \int 1 \cdot \sin(t)\, dt$

$u(t) = t \qquad v(t) = \sin(t)$

$u(t) = t \qquad v'(t) = \sin(t)$

$u'(t) = 1 \qquad v(t) = -\cos t$

$= t \cdot \sin(t) + \cos(t) + C$

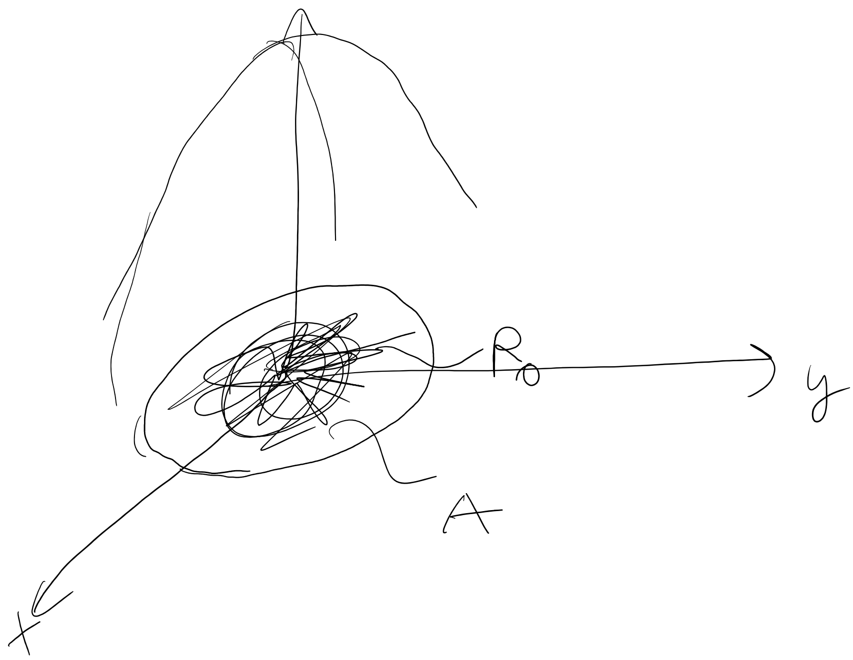
$KI = 2\left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{\pi/2} + \left[-\cos(t)\right]_0^{\pi/2} +$

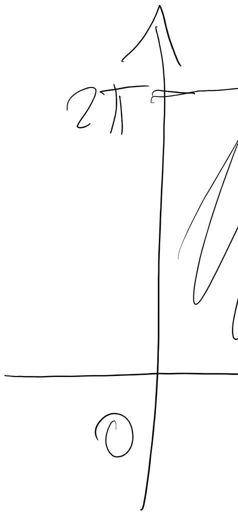
$\left[t \cdot \sin(t) + \cos(t)\right]_0^{\pi/2} + 2\left[\sin(t)\right]_0^{\pi/2}$

$= 1 + 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 - 1 + 2 \cdot 1$

$= \underline{3 + \frac{\pi}{2}}$

10)





$$\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\, dx\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} \frac{1}{\qquad} \cdot r\, d$$

$r\, d\varphi =$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R_0}\frac{1}{\left(r^2\cdot\cos^2\varphi+r^2\cdot\sin^2\varphi+1\right)^2}\cdot \underline{r}\ d$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R_0}\frac{\cancel{r}}{\left(r^2+1\right)^2}\,dr\,d\varphi$$

NR: $\displaystyle\int\frac{r}{(r^2+1)^2}\,\underline{dr}=\int\frac{\cancel{r}}{u^2}$

$u=r^2+1$ $\qquad = \frac{1}{2}\int$

$\frac{du}{dr}=2r$ $\qquad = \frac{1}{2}\big(-$

$dr=\underline{\frac{1}{2r}\,du}$ $\qquad = -\frac{1}{2}\cdot$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2+1}\right]_{r=0}^{R_0}d\varphi=$$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{R_0^2+1}+\frac{1}{2}\cdot d\varphi=$$

$$\Big[\ \ldots\ 1\ \ldots\ 1\ \Big)\ \Big]^{2\pi}$$

$r \, d\varphi =$

$\frac{1}{2\cancel{r}} du$

$u^{-2} du$

$\frac{1}{u}) + C$

$\frac{1}{r^2+1} + C$

$$\left[\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{R_0^2+1}+\frac{1}{2}\right)\cdot\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} =$$

$$\left(\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\frac{1}{R_0^2+1}+\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot\cancel{2}\pi = \pi - \frac{\pi}{R_0^2+\ldots}$$

$$= \left(- \frac{1}{k_b^2 + 1} + 1 \right) \pi$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG „ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“

MATSE AUSBILDUNG

Klausur Analysis 2, SS 2021, am 10.09.2021

Hilfsmittel: 2 Seiten (DIN A 4) handschriftliche Formeln

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(10)
Aufgabe 2)		(10)
Aufgabe 3)		(10)
Aufgabe 4)		(10)
Aufgabe 5)		(10)
Aufgabe 6)		(10)
Aufgabe 7)		(10)
Aufgabe 8)		(10)
Aufgabe 9)		(10)
Aufgabe 10)		(10)
Gesamtpunkte:	Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die Lösung folgender Differentialgleichung

$$y' = x^2 + y + \frac{y}{x}$$

durch Substitution $z = \frac{y}{x}$

2. Aufgabe **10 Punkte**

Ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

im Ursprung stetig ergänzbar?

3. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = 4x^2y^3 - \pi^4 \cos(x + y)$$

und der Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

(a) Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt (x_0, y_0).

(b) bestimmen Sie dir Richtungsableitung von f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung des Vektors

$$\vec{w} = \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$$

4. Aufgabe **10 Punkte**

(a) Skizzieren Sie den in Polarkoordinaten gegebenen Integrationsbereich für $\varphi = \pi$ bis 2π und für $r = 1$ bis 4.

(b) Berechnen Sie anschließend das Integral über diesen Integrationsbereich, in dem Sie als Integranden $f(x, y) = x^2 + x + y^2$ verwenden und diesen aus kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten überführen.

5. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

(a) $y'' - 4y' + 9y = -1$

(b) $y' = y^2 \cdot x$

6. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie $a > 0$ und $b > 0$, so dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ minimiert wird unter der Nebenbedingung, dass $ab - 1 = 0$ ist. Verwenden Sie dazu die Methode von Lagrange!

7. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{(1+y)^2} \\ \dfrac{1-x^2}{(1+y)^3} \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Wert des Kurvenintegrals $\int_X \vec{F} d\vec{X}$ für alle Kurven $\vec{X}$, die die beiden Punkte $A = (0,0)$ und $B = (1,1)$ miteinander verbinden und die Gerade $y = -1$ nicht schneiden, von der speziellen Wahl des Verbindungsweges $\vec{X}$ unabhängig ist, d.h. $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld und es existiert eine Potentialfunktion.

(b) Berechnen Sie den Wert dieses Kurvenintegrals.

8. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben ist $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - yz^3 - 8y \\ x^2z + 3xz^2 - 8x \\ xy - xyz^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\operatorname{rot}(\vec{v}(x,y,z))$.

9. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die Ableitung $y'(1)$ der implizit gegebenen Funktion y

$$yx^2 + \frac{x}{y} + x + y - 4 = 0$$

an der Stelle $(1,1)$.

10. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^4 \cdot \cos x + y \text{ mit } y(0) = \frac{1}{2}$$

Klausur Analysis 2 vom 10.09.21

1) $y' = x^2 + y + \frac{y}{x}$

$z(x) = \frac{y(x)}{x}$

$y = z(x) \cdot x$

$y' = z' \cdot x + z \cdot 1$

$z' \cdot x \cancel{+ z} = x^2 + z \cdot x \cancel{+ z}$

$z' = x + z$

$\boxed{z' - z = x}$

$z_h(x) = C \cdot e^{-\int f(x)\,dx} = C \cdot e^{\int 1\,dx} = C \cdot e^{x}$

$z_p = ?$

$z_p = ax + b$

$z_p' = a$

$a - (ax + b) = x$

$(a - b) \boxed{-a} x = \boxed{1} x + 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 1 \Leftrightarrow b = -1 \\ a = -1 \end{cases}$

$z_p = -x - 1$

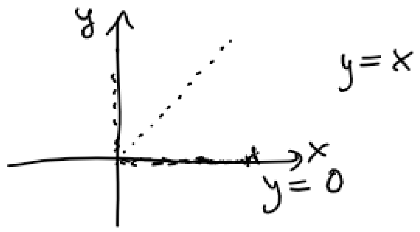
$z = z_h + z_p = C \cdot e^{x} - x - 1$

$z = \frac{y}{x}$

$y = z \cdot x$

$\Rightarrow y = z \cdot x = C \cdot x \cdot e^{x} - x^2 - x$

2)



$$f(x,0) = \frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^4} = \frac{0}{x^2} = 0$$

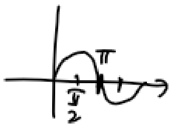
$$x = y^2$$

$$f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{y^4 + y^4} = \frac{\cancel{y^4}}{2\cancel{y^4}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist unstetig.

3) a) $$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8xy^3 + \pi^4 \sin(x+y) \\ 4x^2 \cdot 3y^2 + \pi^4 \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \pi^3 + \pi^4 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)}_{-1} \\ 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 3 \cdot \pi^2 + \pi^4 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)}_{-1} \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} 3\pi^4 \\ 2\pi^4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} := \frac{\operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)}{\left\| \operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(3\pi^4)^2 + (2\pi^4)^2}} \begin{pmatrix} 3\pi^4 \\ 2\pi^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ \ \pi^8 \ \ }} \begin{pmatrix} 3\pi^4 \\ 2\pi^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13\pi^8}} \begin{pmatrix} 3\pi^4 \\ 2\pi^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\pi^4} \cdot \begin{pmatrix} 3\pi^4 \\ 2\pi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{v} = \frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{4}\pi^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{2}\pi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

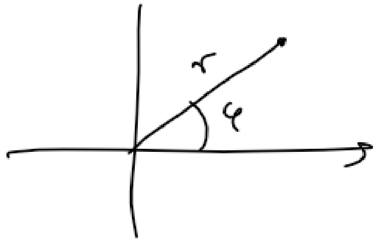
$$D_{\vec{v}} f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \left\langle \operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \vec{v} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 3\pi^4 \\ 2\pi^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{2}}\pi^4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \pi^4$$

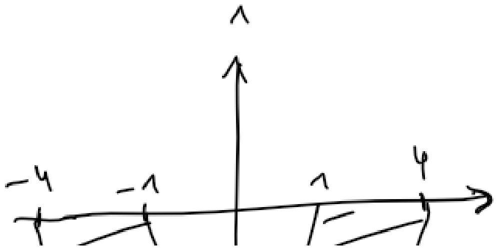
$$= -\pi^4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

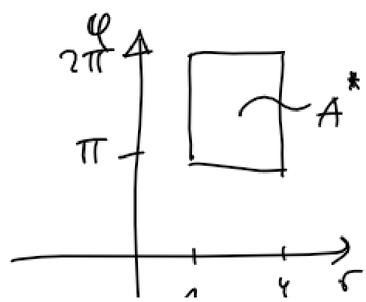
4)

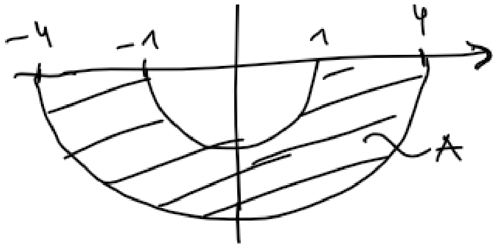


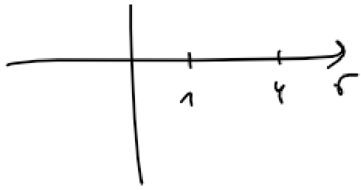
φ,

a)









b) $\iint_A x^2 + x + y^2 \, dx\, dy =$

$$\int_{\varphi=\pi}^{2\pi} \int_{r=1}^{4} \left[(r \cdot \cos\varphi)^2 + r \cdot \cos\varphi + (r \cdot \sin\varphi)^2 \right] \cdot r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} \int_{r=1}^{4} r^3 + r^2 \cdot \cos\varphi \, dr \, d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos\varphi \right]_{r=1}^{4} d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} 64 + \frac{64}{3} \cdot \cos\varphi - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} 63{,}75 + 21 \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$\left[63{,}75\, \varphi + 21 \sin\varphi \right]_{\varphi=\pi}^{2\pi}$$

$$63{,}75 \cdot 2\pi + 21 \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} - \left(63{,}75 \cdot \pi + 21 \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \right)$$

$$- 63{,}75\pi = \frac{255}{4}\pi$$

5)

a) $y'' - 4y' + 9y = -1$

$\underline{y_h = ?}$

$s^2 - 4s + 9 = 0$

$s_{1,2} = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{4 - 9} = \underline{2} \pm i \cdot \underline{\sqrt{5}}$

$y_h = C_1 \cdot \sin(\sqrt{5}x) \cdot e^{2x} +$
$C_2 \cos(\sqrt{5}x) \cdot e^{2x}$

$\underline{y_p = ?}$

$$\left.\begin{array}{l} y_p = c_0 \\ y_p' = 0 \\ y_p'' = 0 \end{array}\right\} \text{in DGL} \quad \begin{array}{rl} & 0 - 4 \cdot 0 + 9c_0 = -1 \\ \Leftrightarrow & 9c_0 = -1 \\ \Leftrightarrow & c_0 = -\frac{1}{9} \end{array}$$

$y_p = -\frac{1}{9}$

$\underline{y = ?}$

$y = y_h + y_p = e^{2x}\left(C_1 \cdot \sin(\sqrt{5}x) + C_2 \cdot \cos(\sqrt{5}x)\right)$
$+ \left(-\frac{1}{9}\right)$

b) $y' = \underbrace{y^2}\cdot\underbrace{x}$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 - C$$

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - C}$$

---

6) Minimieren: $f(a,b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

NB : $ab - 1 \underline{\underline{= 0}}$

$$L(a,b,\lambda) = \underline{\underline{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}} + \lambda \cdot \underline{\underline{(ab-1)}}$$

1) $L_a(a,b,\lambda) = \underbrace{-\frac{1}{a^2}} + \lambda \cdot b = 0$ $\quad\Big|\quad -a^{-2}$

2) $L_b(a,b,\lambda) = -\frac{1}{b^2} + \lambda a = 0$ $\quad\Big|\quad 2a^{-3}$

3) $L_\lambda(a,b,\lambda) = ab - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \lambda = \frac{1}{a^2 b} \\ 2) & \lambda = \frac{1}{a b^2} \end{array}\right\} \; 1) = 2)$$

$$\frac{1}{a^2 b} = \frac{1}{a b^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{a^2 b}{a b^2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a = b$$

$^2\ \ 1 \Leftrightarrow a = 1$ oder

in 3) $a \cdot a - 1 = 0 \iff a^2 = 1 \iff a_1 = 1$ oder $a_2 = -1$

$(1, 1, 1)$

$(-1, -1, -1)$

laut Aufgabenstellung nicht relev.

	$(1,1,1)$	$(-1,-1,-1)$
$L_{aa}(a,b,\lambda) = \frac{2}{a^3}$	2	-2
$L_{bb}(a,b,\lambda) = \frac{2}{b^3}$	2	-2
$L_{ab}(a,b,\lambda) = \lambda$	1	-1
$L_{\lambda a}(a,b,\lambda) = b$	1	-1
$L_{\lambda b}(a,b,\lambda) = a$	1	-1

zu $(1,1,1)$:

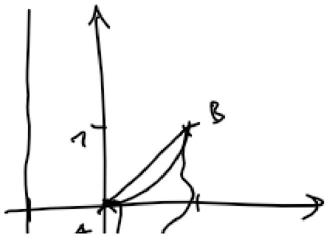
$$\det H(1,1,1) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right.$$

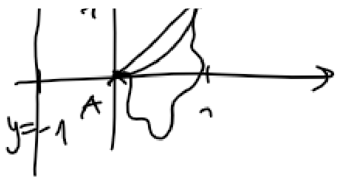
$$= 1 + 1 - 2 - 2 = -2 < 0$$

Minimum

$\det H(-1, -1, -1))$

7)





a) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{(1+y)^2}\right) = \frac{x}{(1+y)^3}\cdot(-2)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x^2}{(1+y)^3}\right) = \frac{-2x}{(1+y)^3}$

Integrabilitätsbedingung ist erfüllt $\Leftrightarrow$ $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld.

b) Potentialfunktion

$V(x,y) = \int \frac{x}{(1+y)^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{(1+y)^2} + c(y)$

$V_y(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}}x^2\cdot(\cancel{-2})\cdot\frac{1}{(1+y)^3} + c'(y) \overset{!}{=} \frac{1-x^2}{(1+y)^3}$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{(1+y)^3} + c'(y) = \frac{1-x^2}{(1+y)^3}$

$\Leftrightarrow c'(y) = \frac{1}{(1+y)^3}$

$\Leftrightarrow c(y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+y)^2}$

$\Rightarrow V(x,y) = \frac{x^2}{2(1+y)^2} - \frac{1}{2(1+y)^2}$

$= \frac{x^2-1}{2(1+y)^2}$

$-1 \quad -1$

$$2(1+y)^{-}$$

$$V(1,1) - V(0,0) = 0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

8)
$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz - yz^3 - 8y \\ x^2 z + 3xz^2 - 8x \\ xy - xyz^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - xz^2 - (x^2 + 3x\,2z) \\ (x - 3yz^2)_{-8} - (y - yz^2) \\ (2xz + 3z^2) - (-z^3 - 8) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - xz^2 - x^2 - 6xz \\ x \underline{-3yz^2} - y \underline{+yz^2} \\ 2xz + 3z^2 + z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - xz^2 - x^2 - 6xz \\ x - y - 2yz^2 \\ 2xz + 3z^2 + z^3 \end{pmatrix}$$

$F(x,y)$

9) $\overbrace{y(x)\,x^2 + \frac{x}{y(x)} + x + y(x) - 4}^{+\,x,y} = 0$

$y'(x) = ?$

$\underline{y'(x)} = - \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

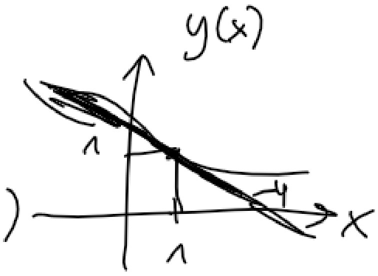
$(1,1) \qquad F(1,1) = 0$

$F(1,1) = 1 \cdot 1^2 + \frac{1}{1} + 1 + 1 - 4 = 0$ ✓

$F_x(x,y) = y \cdot 2x + \frac{1}{y} + 1$ | $(1,1)$: $2 + 1 + 1 = 4$

$F_y(x,y) = x^2 + \frac{x}{y^2} \cdot (-1) + 1$ | $1 + 1 \cdot (-1) + 1 = 1$

$\Rightarrow y'(1) = - \frac{4}{1} = -4$



$\Big(t(x) = (-4) \cdot (x - x_0) + y(x_0)$

$= (-4) \cdot (x - 1) + 1$

$= -4x + 5 \Big)$

10) $y' = y \cdot \cos$

$\underline{y'} - \underline{y} = y^4 \cdot \cos x$

Bernoulli $\quad u = y^{1-4} = y^{-3}$

$\underline{y} = \sqrt[-3]{u} = u^{-1/3}$

$u' = -\frac{1}{3} \cdot u^{-1/3-1} \cdot u'$

$$y' = -\frac{1}{3} \cdot u^{-1/3-1} \cdot u'$$

$$y' = -\frac{1}{3} \cdot u^{-4/3} \cdot u'$$

$$-\frac{1}{3} \cdot u^{-4/3} \cdot u' - u^{-1/3} = u^{-4/3} \cdot \cos x \quad \Big| \cdot u^{4/3}$$

$$-\frac{1}{3} \cdot u' - u = \cos x \quad \Big| \cdot (-3)$$

$$\rightarrow \boxed{u' + 3u = (-3) \cdot \cos x}$$

$\underline{u_h = ?}$

$$u_h = C \cdot e^{-\int f(x)dx} = C \cdot e^{-3x}$$

$\underline{u_p = ?}$

$$u_p = c_0 \cdot \cos x + c_1 \cdot \sin x$$

$$u_p' = -c_0 \sin x + c_1 \cdot \cos x$$

$$\underline{-c_0 \sin x} + c_1 \cdot \cos x + 3 \cdot c_0 \cos x \; \underline{+ 3c_1 \cdot \sin x} = (-3) \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c_1 - c_0 = 0 \\ 3c_0 + c_1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = -\frac{9}{10} \\ c_1 = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$u_p = -\frac{3}{10} \cdot \sin x - \frac{9}{10} \cos x$$

$\underline{u = ?}$

$$u = u_h + u_p = C \cdot e^{-3x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{9}{10} \cdot \cos x$$

Rücks: $y = u^{-1/3}$

$$y = \left(C \cdot e^{-3x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{9}{10} \cdot \cos x \right)^{-1/3}$$

$-1/3$

$$y = \left(C \cdot e \;\ldots\; \frac{\;}{10} \;\ldots\; \right)$$

$$y(0) = \left(C - \frac{3}{10} \cdot 0 - \frac{9}{10} \cdot 1 \right)^{-1/3}$$

$$\left(C - \frac{9}{10} \right)^{-1/3} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad C = \frac{89}{10}$$

$$y(x) = \left(\frac{89}{10} \cdot e^{-3x} - \frac{3}{10} \sin x - \frac{9}{10} \cdot \cos x \right)^{-1/3}$$

IT CENTER DER RWTH AACHEN

Dr. Th. Eifert, Y. Albrecht M.Sc.

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Probeklausur Analysis 2 am 11.06.2024

Name: ______________________

Vorname: ______________________

			max. Punktzahl
Aufgabe	1)		(10)
Aufgabe	2)		(10)
Aufgabe	3)		(10)
Aufgabe	4)		(10)
Aufgabe	5)		(10)
Aufgabe	6)		(10)
Aufgabe	7)		(10)
Aufgabe	8)		(10)
Aufgabe	9)		(10)
Aufgabe	10)		(10)
Gesamtpunkte:		Note:	

1. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie mit der Methode von Lagrange Punkte auf der Kurve $x^2 - y^2 = 1$ mit dem geringsten quadratischen euklidischen Abstand zum Punkt $P_0 = (0, 1)$.

Lösung

euklidischer Abstand:

$$f(x,y) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Nebenbedingung:

$$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 1 = 0$$

Prüfen der Rangbedingung:

$$\operatorname{grad} g(x,x) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle Punkte auf der Kurve}$$

Für die Suche nach dem Minimum:

$$Min(f(x_m, y_m)) \Leftrightarrow Min(f^2(x_m, y_m))$$

Damit muss die Lagrange-Gl. gelöst werden:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
L_x &= 2x + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = -1 \\
L_y &= 2(y-1) - 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 2y - 2 + 2y = 0 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\
L_\lambda &= x^2 - y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^2 = y^2 + 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{y^2+1} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ oder } x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Damit lauten der Kandidaten $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

Aufstellen der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned}
L_{xx} &= 2 + 2\lambda \\
L_{yy} &= 2 - 2\lambda \\
L_{xy} &= 0 \\
L_{x\lambda} &= 2x \\
L_{y\lambda} &= -2y
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
H_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 4 & -2\frac{1}{2} \\ 2\frac{\sqrt{5}}{2} & -2\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
det(H) &= -20 < 0
\end{aligned}$$

Somit stellt der erste gefundene Kandidat ein Minimum des gesuchten Abstands dar. Der Abstand der beiden Punkte beträgt

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 4 & -2\frac{1}{2} \\ -2\frac{\sqrt{5}}{2} & -2\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
det(H) &= -20 < 0
\end{aligned}$$

Somit stellt der zweite gefundene Kandidat ebenfalls ein Minimum des gesuchten Abstands dar. Der Abstand der beiden Punkte beträgt auch $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Bewertung

Lagrange-Funktion	2
Kandidaten ermitteln	4
Auswertung mittels Hesse-Matrix und richtige Folgerung	4

2. Aufgabe **10 Punkte**

Untersuchen Sie auf stetige Ergänzbarkeit im Ursprung

a)
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

b)
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Lösung

zu a) Polarkoordinaten:
$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}$$
und damit bei Annäherung an den Ursprung
$$F = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} \overset{L'H}{=} \lim_{r\to 0} 2\sqrt{r^2+1} = 2$$
Es existiert also ein winkelunabhängiger Grenzwert, die Funktion ist somit stetig ergänzbar.
zu b) Wähle den Weg entlang der x-Achse, also $y=0$:
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$
Wähle nun den Weg entlang der y-Achse, also $x=0$:
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$
Entlang der beiden Wege existieren daher im Ursprung zwei unterschiedliche Grenzwerte; somit ist die Funktion nicht stetig ergänzbar.

ODER

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2\left(\sin^2(x)-\cos^2(x)\right)}{r^2} = \left(\sin^2(x)-\cos^2(x)\right)$$
Der Grenzwert ist also winkelabhängig; damit ist die Funktion nicht stetig ergänzbar.
Bewertung

a	5
b	5

3. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie für die Funktion
$$f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$$
im Punkt $\vec{x}_0 = (1,2)$ die Steigung in Richtung $(-1,1)$.
In welcher Richtung ist die Steigung in $\vec{x}_0$ jeweils minimal/ maximal/ gleich Null?
Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion in $\vec{x}_0$ an.
Lösung

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(x,y) &= \left(\frac{-2xy}{(1+x^2)^2}, \frac{1}{1+x^2}\right) \\ \mathrm{grad} f(1,2) &= \left(-1, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Steigung in geg. Richtung

$$D = \left(-1, \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Für die Richtung der max. Steigung: Richtung des Gradienten, also

$$\vec{v} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2}} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Richtung der min. Steigung, also des größten Gefälles: $-D$
Richtung der Steigung gleich Null: $\perp D$, also muss das Skalarprodukt zwischen diesem Vektor $\vec{w}$ und dem Gradienten $= 0$ sein:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} &= \left(-x + \frac{1}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \\ x &= \frac{1}{2} \\ \text{und mit der Norm} & \\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} &= \sqrt{\frac{5}{4}} \\ \text{ist die Steigung gleich Null in der Richtung} & \\ & \sqrt{\frac{4}{5}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tangentialebene

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Bewertung

Steigung in geg. Richtung	2
Richtung des Gradienten	3
min./max. Steigung / Null	2
Tangentialebene	3

4. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$$

Lösung

Homogene DGL

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Lösungen der Char. Gl.

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2$$

Allgemeine Lsg. der homogenen DGL:

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Lösung der part. Gl.

$$\begin{aligned} y_p &= b_0 + b_1 x \\ y_p' &= b_1 \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}$$

eingesetzt

$$\begin{aligned} 0 - 3b_1 + 2(b_0 + b_1 x) &= 2x + 1 \\ 2b_1 x + (2b_0 - 3b_1) = 2x + 1 & \end{aligned}$$

KoeffVergleich

$$b_1 = 1, \qquad b_0 = 2$$

und damit

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 2$$

Bewertung

homogene DGL	4
partikuläre DGL	4
richtiges Ergebnis	2

5. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

a)

$$y' = -\frac{x}{y} \text{ mit } y(1) = 3$$

b)

$$y' + \frac{1}{2x} \cdot y = \sqrt{x} \cdot \sin x \text{ mit } y(\pi) = 2\sqrt{\pi}$$

Lösung

zu a)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y^2 = 2C - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2C - x^2}$$

Aus der Anfangsbedingung

$$y(1) = 3 > 0 \Rightarrow y = +\sqrt{2C - x^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{2C - 1} \Rightarrow 9 = 2C - 1 \Rightarrow 2C = 10 \Rightarrow C = 5$$

und damit

$$y = \sqrt{10 - x^2}$$

zu b)
Homogene DGL:

$$y' + \frac{1}{2x}y = 0, x > 0$$

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln x, x > 0 \Rightarrow y_h = c\frac{1}{\sqrt{x}}, c \in \mathbb{R}$$

Variation der Konstanten mit Ansatz

$$y = c(x)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$c'(x) = x\sin x \Rightarrow c(x) = \sin x - x\cos x + C$$

und damit

$$y = (\sin x - x\cos x + C)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Einsetzen von $x = \pi$ und $y = 2\sqrt{\pi}$ ergibt

$$2\sqrt{\pi} = \frac{c}{\sqrt{\pi}} + \pi\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow c = \pi$$

und damit

$$y = (\sin x - x\cos x)\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

Bewertung

a	4
b	6

6. Aufgabe **10 Punkte**

Welches Volumen hat der Körper, der von den folgenden Flächen begrenzt wird?

$$x = 0,\ x = 2\pi,\ y = 0,\ y = 1,\ z = y,\ z = y^3$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1}\int_{z=y^3}^{y} 1dzdydx &= \int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1} [z]_{z=y^3}^{y}dydx = \int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{1} y - y^3dydx \\
&= \int_{x=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_{y=0}^{1}dx \\
&= \int_{x=0}^{2\pi}\frac{1}{2} - \frac{1}{4}dx = \int_{x=0}^{2\pi}\frac{1}{4}dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Bewertung

richtiges Dreifachintegral	3
je inneres Integral (3 mal)	2
Endergebnis	1

7. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei der Bereich $B: 0 \leq x \leq 1$ und $0 \leq y \leq 3 - 2x$. Berechnen Sie den Schwerpunkt.

Lösung

Flächeninhalt (Trapez):

$$A = (3+1) * 0.5 * 1 = 2$$

Schwerpunktberchnung (x_S, y_S)

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{3-2x} x dy dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} [xy]_{y=0}^{3-2x} dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} 3x - 2x^2 dx = \frac{5}{12} \\ y_S &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{3-2x} y dy dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{3-2x} dx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{1} \frac{1}{2}\left(9 - 12x + 4x^2\right) dx = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

Bewertung

Flächeninhalt	2
x_S	4
y_S	4

8. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie die lokalen Minimal- und Maximalstellen der Funktion

$$f(x,y) = 2xy(x + y - 6)$$

und geben Sie die zugehörigen Funktionswerte an.

Lösung

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2xy(x+y-6) = 2x^2y + 2xy^2 - 12xy \\ f_x(x,y) &= 4xy + 2y^2 - 12y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ oder } x = -\frac{1}{2}y + 3 \\ f_y(x,y) &= 2x^2 + 4xy - 12x \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 6 - 2y \end{aligned}$$

Kandidaten: $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,6)$, $(2,2)$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x + 4y - 12 \\ 4x + 4y - 12 & 4x \end{pmatrix}$$

Determinante der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} detH(x,y) &= 16xy - (4x + 4y - 12)^2 \\ detH(0,0) &= -144 < 0 \Rightarrow \text{ indefinit} \\ detH(6,0) &= -144 < 0 \Rightarrow \text{ indefinit} \\ detH(0,6) &= -144 < 0 \Rightarrow \text{ indefinit} \\ detH(2,2) &= 48 > 0 \Rightarrow \text{mit} f_{xx}(2,2) = 4 \cdot 2 > 0 \Rightarrow \text{ pos. definit, Minimalstelle} \end{aligned}$$

Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(6,0) &= 0 \\ f(0,6) &= 0 \\ f(2,2) &= -16 \end{aligned}$$

Bewertung

4 Kandidaten	4
Hesse-Matrix	2
Determinante der Hesse-Matrix	1
Richtige Auswertung in Kandidaten und richtige Folgerung	2
Funktionswerte	1

9. Aufgabe **10 Punkte**

Für die durch

$$ye^{y^2} + x^3 - 3x + 2 = 0$$

implizit gegebene Funktion berechne man die erste Ableitung. An welchen Stellen $x > 0$ ist die Ableitung der implizit gegebenen Funktion Null?

Lösung

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2-3}{e^{y^2} + ye^{y^2}2y} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ bzw. } x_2 = -1$$

Da nur die positive Lösung betrachtet werden soll: $x_1 = 1$

Bewertung

richtige Ableitung	8
Ableitung gleich 0	2

10. Aufgabe **10 Punkte**

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K \vec{v}d\vec{X}$ für $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $\vec{X}$, der das Geradenstück von (0,1) nach (1,0) darstellt.

Lösung

Für $0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \\ \int_K \vec{v}d\vec{X} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1-t)^2 + t^2 dt = \int_0^1 1 - 2t + 2t^2 dt = 1 - 1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Bewertung

Kurvendarstellung	3
Ableitung der Kurve	2
Kurvenpunkte richtig in Vektorfeld eingesetzt	2
Rest	3