Aufgaben   Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Wie viele 2-elementige Teilmengen besitzt die Menge $\{a,\ b,\ c,\ d\}$?
   Gebe diese Teilmengen an.

2. Wie viele 3-Tupel können aus den Elementen der Menge $\{0,\ 1\}$ gebildet werden?
   Gebe diese 3-Tupel an.

3. In einer Urne befinden sich 4 nummerierte Kugeln.
   Auf wie viele Arten können 3 Kugeln mit einem Griff gezogen werden? Gebe diese Arten an.

4. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass von 5 Straßenlaternen genau 3 leuchten?

5. In einer Urne befinden sich 4 nummerierte Kugeln. Folgendes Experiment wird 3mal wiederholt: Eine Kugel wird gezogen, die Nummer notiert, die gezogene Kugel wird wieder in die Urne gelegt.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) die Kugeln in der Reihenfolge 1, 2, 3 gezogen werden,
   b) unter den gezogenen Kugeln sich die Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3 befinden?

6. Wie viele 0-1-Folgen der Länge 10 gibt es mit genau
   a) einer 1,
   b) zwei Einsen,
   c) drei Einsen?

7. Vier Läufer nehmen an einem Wettlauf teil.
   Wie viele Einlauf-Möglichkeiten gibt es, wenn alle zu unterschiedlichen Zeiten eintreffen?

8. Lehrer A. will von seinen 15 Schülern 3 gleichzeitig mündlich prüfen.
   a) Wie viele Möglichkeiten hat er?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Schüler K., unter den Dreien zu sein, falls die Schüler durch Zufall bestimmt werden?

9. In einem Test sollen 5 Fragen mit ja oder nein beantwortet werden.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Beantwortung
   a) keine Antwort richtig ist,
   b) genau eine Antwort richtig ist,
   c) genau zwei Antworten richtig sind,
   d) höchstens drei Antworten richtig sind?

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit dreimaligem Würfeln
    a) die Zahlenfolgen (1, 2, 3) oder (4, 5, 6) zu werfen,
    b) keine 6 zu werfen,
    c) mindestens eine 6 zu werfen?

11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 5maligem Münzwurf genau 4mal Kopf zu werfen?

Aufgaben Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung Lösungen

1. Wie viele 2-elementige Teilmengen besitzt die Menge $\{a,\ b,\ c,\ d\}$? $\binom{4}{2}$

2. Wie viele 3-Tupel können aus den Elementen der Menge $\{0,\ 1\}$ gebildet werden? 2^3

3. In einer Urne befinden sich 4 nummerierte Kugeln.
Auf wie viele Arten können 3 Kugeln mit einem Griff gezogen werden? $\binom{4}{3}$

4. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass von 5 Straßenlaternen genau 3 leuchten? $\binom{5}{3}$

5. In einer Urne befinden sich 4 nummerierte Kugeln. Folgendes Experiment wird 3mal wiederholt:
Eine Kugel wird gezogen, die Nummer notiert, die gezogene Kugel wird wieder in die Urne gelegt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Kugeln in der Reihenfolge 1, 2, 3 gezogen werden, $\frac{1}{4^3}$

b) unter den gezogenen Kugeln sich die Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3 befinden? $\frac{3!}{4^3}$

6. Wie viele 0-1-Folgen der Länge 10 gibt es mit genau

a) einer 1, $\binom{10}{1}$

b) zwei Einsen, $\binom{10}{2}$

c) drei Einsen? $\binom{10}{3}$

7. Vier Läufer nehmen an einem Wettlauf teil.
Wie viele Einlauf-Möglichkeiten gibt es, wenn alle zu unterschiedlichen Zeiten eintreffen? $4!$

8. Lehrer A. will von seinen 15 Schülern 3 gleichzeitig mündlich prüfen.

a) Wie viele Möglichkeiten hat er? $\binom{15}{3}$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den Schüler K.,
unter den Dreien zu sein, falls die Schüler durch Zufall bestimmt werden? $\dfrac{\binom{14}{2}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{1}{5}$

9. In einem Test sollen 5 Fragen mit ja oder nein beantwortet werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Beantwortung

a) keine Antwort richtig ist, $\frac{1}{2^5}$

b) genau eine Antwort richtig ist, $\frac{5}{2^5}$

c) genau zwei Antworten richtig sind, $\dfrac{\binom{5}{2}}{2^5}$

d) höchstens drei Antworten richtig sind? $\dfrac{1 + 5 + \binom{5}{2} + \binom{5}{3}}{2^5}$

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit dreimaligem Würfeln

a) die Zahlenfolgen (1, 2, 3) oder (4, 5, 6) zu werfen, $\frac{2}{6^3}$

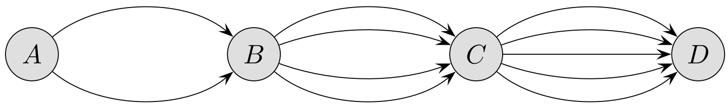
b) keine 6 zu werfen, $\frac{5^3}{6^3}$

c) mindestens eine 6 zu werfen? $1 - \frac{5^3}{6^3}$

11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim 5maligem Münzwurf genau 4mal Kopf zu werfen? $\dfrac{\binom{5}{4}}{2^5}$

Aufgaben zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Wie viele Wege führen von A nach D?



2. Frau M. hat 14 Kleider, 9 Hüte und 6 Paar Schuhe. Auf wie viele Arten kann sie sich kleiden, wenn sie ein Kleid, einen Hut und ein Paar Schuhe tragen will?

3. Wie viele verschiedene Tippreihen gibt es bei der Elferwette beim Fußballtoto? (11 Tipps: jeweils Spiel unentschieden, verloren oder gewonnen)

4. In einer Urne befinden sich n verschiedene Kugeln. Man zieht eine Kugel zufällig und legt sie wieder zurück. Der Vorgang wird k-mal wiederholt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für das gesamte Experiment?

5. An einem Pferderennen nehmen 20 Pferde teil.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung der ersten 3 Plätze? (Dreierwette)

6. Herr M. will seine 5 Kinder für ein Gruppenfoto in einer Reihe anordnen.
Wie viele Möglichkeiten hat er?

7. Auf wie viele Arten kann man 5 Hotelgäste in 10 Einzelzimmer unterbringen? (2 Lösungen, warum?)

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen mindestens 2 im gleichen Monat (am gleichen Tag) Geburtstag haben? Ab wieviel Personen ist diese Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$?

9. Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Lotto 6 aus 49?

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in 10 Würfen mit einer Münze genau 5 mal Kopf zu erzielen?

11. Auf wie viele Arten kann man aus 6 Frauen und 8 Männern einen Ausschuss aus 3 Frauen und 4 Männern bilden?

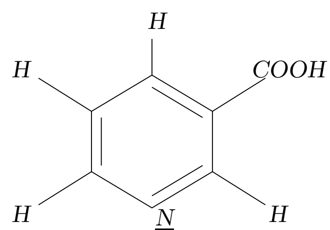
12. In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man jede an- und ausschalten kann.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass
a) genau 5 Lampen brennen,
b) mindestens 5 Lampen brennen?

13. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Spieler beim Skatspiel
a) genau 3 Buben,
b) mindestens 3 Buben erhält? (32 Karten, davon 4 Buben, jeder Spieler erhält 10 Karten)

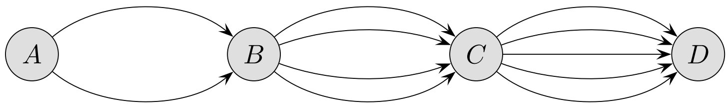
14. In einer Urne befinden sich 11 weiße und 15 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 willkürlich herausgegriffenen Kugeln 5 weiße befinden?

15. In einer Kiste sind 50 Apfelsinen, davon sind 10 verdorben. Der Händler entnimmt der Kiste 20 Apfelsinen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das unter den 20 Früchten a) 3 b) 4 c) 3, 4 oder 5 verdorben sind?

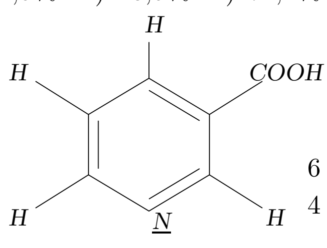
16. Bei einem Nicotinsäure-Molekül sind die 4 Wasserstoffatome substitutionsfähig. Wie viele Derivate entstehen, falls
a) zwei Wasserstoffatome durch zwei Chloratome,
b) drei Wasserstoffatome durch drei Chloratome ersetzt werden?



Aufgaben zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung Ergebnisse



1. Wie viele Wege führen von A nach D?
   $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$
2. Frau M. hat 14 Kleider, 9 Hüte und 6 Paar Schuhe. Auf wie viele Arten kann sie sich kleiden, wenn sie ein Kleid, einen Hut und ein Paar Schuhe tragen will? $6 \cdot 9 \cdot 14 = 756$
3. Wie viele verschiedene Tippreihen gibt es bei der Elferwette beim Fußballtoto? (11 Tipps: jeweils Spiel unentschieden, verloren oder gewonnen) $3^{11} = 177147$
4. In einer Urne befinden sich n verschiedene Kugeln. Man zieht eine Kugel zufällig und legt sie wieder zurück. Der Vorgang wird k-mal wiederholt.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es für das gesamte Experiment? n^k
5. An einem Pferderennen nehmen 20 Pferde teil.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung der ersten 3 Plätze? (Dreierwette) $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$
6. Herr M. will seine 5 Kinder für ein Gruppenfoto in einer Reihe anordnen.
   Wie viele Möglichkeiten hat er? $5!$
7. Auf wie viele Arten kann man 5 Hotelgäste in 10 Einzelzimmer unterbringen? (2 Lösungen, warum?)
   a) mit b) ohne Unterscheidung der Gäste a) 30240 b) 252
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen mindestens 2 im gleichen Monat (am gleichen Tag) Geburtstag haben? Ab wieviel Personen ist diese Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$?
   siehe Blatt Gegenwahrscheinlichkeit $n = 5$ (23)
9. Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Lotto 6 aus 49? $\binom{49}{6} = 13983816$
10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in 10 Würfen mit einer Münze genau 5 mal Kopf zu erzielen?
    24,6 %
11. Auf wie viele Arten kann man aus 6 Frauen und 8 Männern einen Ausschuss aus 3 Frauen und 4 Männern bilden? 1400
12. In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man jede an- und ausschalten kann.
    Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass
    a) genau 5 Lampen brennen, 56
    b) mindestens 5 Lampen brennen? 93
13. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Spieler beim Skatspiel
    a) genau 3 Buben, 7,3 %
    b) mindestens 3 Buben erhält? (32 Karten, davon 4 Buben, jeder Spieler erhält 10 Karten)
    7,9 %
14. In einer Urne befinden sich 11 weiße und 15 schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 willkürlich herausgegriffenen Kugeln 5 weiße befinden? 26,1 %
15. In einer Kiste sind 50 Apfelsinen, davon sind 10 verdorben. Der Händler entnimmt der Kiste 20 Apfelsinen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das unter den 20 Früchten a) 3 b) 4 c) 3, 4 oder 5 verdorben sind? a) 22,6 % b) 28,0 % c) 72,1 %



16. Bei einem Nicotinsäure-Molekül sind die 4 Wasserstoffatome substitutionsfähig. Wie viele Derivate entstehen, falls
    a) zwei Wasserstoffatome durch zwei Chloratome, 6
    b) drei Wasserstoffatome durch drei Chloratome ersetzt werden? 4

Kombinatorik

Aufgabe 1.
Berechnen Sie

(a) $\dfrac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2}$,

(b) $\dbinom{n}{k} : \dbinom{n+1}{k} \qquad (0 \le k \le n)$,

(c) $\dbinom{n}{k} : \dbinom{n}{k+1} \qquad (0 \le k \le n-1)$.

Lösung: Die Aufgabe wird durch algebraische Umformungen gelöst. Dabei werden die Definitionen von Fakultät und Binomialkoeffizient verwendet.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2} &= \frac{(n-1)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n} \cdot (n+1) = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

Im Rechenschritt von der ersten zur zweiten Zeile wird gekürzt. Dabei wird verwendet, daß $n! = (n-1)! \cdot n$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ ist, was unmittelbar aus der Definition der Fakultät folgt.

Die Umformungen innerhalb der ersten und der zweiten Zeile sind einfache Bruchrechnung.

(b) Ausschreiben der Binomialkoeffizienten, Division durch einen Bruch als Multiplikation mit dem Kehrbruch schreiben, sowie anschließendes Kürzen unter Beachtung der Eigenschaften der Fakultät gibt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} \\ &= \frac{n!\,(n+1-k)!\,k!}{(n-k)!\,k!\,(n+1)!} \\ &= \frac{n+1-k}{n+1} = 1 - \frac{k}{n+1}\,.\end{aligned}$$

(c) Analog zum vorherigen Teil der Aufgabe folgt durch Umschreiben und algebraische Umformungen

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(n-k)!\,k!\,n!} \\ &= \frac{k+1}{n-k}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Vier verschiedene Mathematikbücher, sechs verschiedene Informatikbücher und zwei verschiedene Physikbücher sollen auf einem Regal angeordnet werden. Wie viele verschiedene Anordnungen sind möglich, wenn

(a) die Bücher aus einem Fachgebiet alle zusammenstehen sollen;

(b) nur die Mathematikbücher zusammenstehen sollen?

Lösung:

(a) Die Anzahl der Permutationen (Anordnungsmöglichkeiten) für die vier Mathematikbücher ist 4!. Entsprechend gibt es für die Informatikbücher 6! Permutationen und für die Physikbücher 2!. Nun können aber auch die drei Büchergruppen untereinander vertauscht werden, d. h. es können zum Beispiel alle Mathematikbücher am Anfang stehen, dann kommen die Informatik- und dann die Physikbücher; oder aber die Informatikbücher stehen am Anfang u.s.w. Die Anzahl der Permutationen für die drei Büchergruppen beträgt 3!.

Insgesamt erhält man

$$4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 24 \cdot 720 \cdot 2 \cdot 6 = 207360$$

Möglichkeiten der Anordnung.

(b) Die vier Mathematikbücher können auf 4! Arten angeordnet werden. Die Informatik- und Physikbücher können in beliebiger Reihenfolge stehen. Aber auch die Gruppe der vier Mathematikbücher kann an unterschiedlichen Positionen sein: sie kann am Anfang vor allen Informatik- und Physikbüchern kommen, es kann ein Informatikbuch vor der Gruppe der vier Mathematikbücher stehen, zwei Informatikbücher können vor der Gruppe stehen u.s.w.

Wir haben also neun Objekte, die unterschiedlich angeordnet werden können: acht Bücher (sechs zur Informatik, zwei zur Physik) und eine Büchergruppe. Neun Objeklte kann man aber auf 9! Arten anordnen.

Insgesamt ergeben sich

$$4! \cdot 9! = 24 \cdot 362880 = 8709120$$

Möglichkeiten der Anordnung.

Aufgabe 3.
Es nehmen 600 Personen mit jeweils einem Los an einer Lotterie teil, bei der drei Preise ausgespielt werden: 1000 Euro, 500 Euro und 100 Euro. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für den Ausgang der Verlosung?

Lösung: Hier haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 600“, denn es soll natürlich ausgeschlossen werden, daß eine Person zwei oder gar alle drei Preise bekommt. Bei der Ziehung der drei Preisträger spielt die Reihenfolge eine Rolle, da sich die drei Preise unterscheiden. Also geht es darum, „3 aus 600 mit Berücksichtigung der Reihenfolge“ zu bestimmen. Das ist eine Variation ohne Wiederholung. Es ergibt sich

$$v(600,3) = \frac{600!}{(600-3)!} = 600 \cdot 599 \cdot 598 = 214921200.$$

Zunächst hat man 600 Möglichkeiten (Personen, die gezogen werden können). Nachdem Person 1 bestimmt ist, hat man noch 599 Möglichkeiten. Schließlich bleiben noch 598 Möglichkeiten für die letzte Ziehung. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt der drei Zahlen.

Arbeitet man mit der Formel

$$v(600,3) = \frac{600!}{(600-3)!} = \frac{600!}{(597)!},$$

so kommt man ohne Umformung, d.h. ohne Kürzen, nicht weiter, da die Fakultäten zu groß für Taschenrechner sind. (Gute Mathematik-Software wertet solche Ausdrücke richtig aus. Testen Sie das bei Gelegenheit.)

Aufgabe 4.
Ein Computersystem sei durch ein Passwort geschützt, das aus 8 Zeichen besteht.

(a) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein. Wie viele Passwörter sind möglich?

(b) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein, wobei unter den 8 Zeichen mindestens eine Ziffer und mindestens ein Buchstabe vorkommen muß. Wie viele Passwörter sind möglich?

(c) Um wieviel Prozent reduziert sich die Anzahl der Passwörter in (b) gegenüber denen, die in (a) möglich sind?

Hinweis: Es wird nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden.

Lösung: Es stehen 36 unterschiedliche Zeichen zur Verfügung.

(a) Aus den 36 Zeichen werden 8 ausgewählt, wobei es keinerlei Einschränkungen gibt. Ein Zeichen kann also mehrfach vorkommen. Da die Reihenfolge eine Rolle spielt, haben wir eine Variation mit Wiederholung, so daß

$$\underbrace{36 \cdot \ldots \cdot 36}_{\text{8 Faktoren}} = 36^8 \approx 2,82 \cdot 10^{12}$$

Passwörter möglich sind.

(b) Hier gibt es einen geschickten kurzen Lösungsweg, bei dem man mit der Anzahl der nicht erlaubten Wörter arbeitet. Versucht man die erlaubten Wörter zu zählen, kommt man erst nach einer längeren Überlegung zum Ziel.

1. Weg: Erlaubt sind alle Passwörter aus Teil (a) ohne diejenigen, bei denen nur Buchstaben vorkommen (das sind 26^8) und ohne diejenigen, bei denen nur Zahlen vorkommen (das sind 10^8). Also sind

$$36^8 - 26^8 - 10^8 \approx 2,61 \cdot 10^{12}$$

Passwörter zulässig.

2. Weg: Die Anzahl der Buchstaben in einem Passwort ist mindestens 1 und höchstens 7.

Passwörter mit genau einem Buchstaben: Für den Buchstaben gibt es 26 Möglichkeiten. Für die sieben Ziffern gibt es 10^7 Möglichkeiten. Ferner ist noch zu unterscheiden, an welcher Stelle der Buchstabe steht. Es gibt $26 \cdot 10^7$ Passwörter, bei denen der Buchstabe an der 1. Position ist, ebenso $26 \cdot 10^7$ Passwörter mit dem Buchstaben an der 2. Position u.s.w. Also gibt es insgesamt $8 \cdot 26 \cdot 10^7$ Passwörter mit genau einem Buchstaben.

Passwörter mit genau zwei Buchstaben: Für die beiden Buchstaben gibt es 26^2 und für die sechs Ziffern 10^6 Möglichkeiten. Aber wieviele unterschiedliche Fälle gibt es aufgrund der verschiedenen Positionen der beiden Buchstaben? Hier hilft eine Überlegung analog zum Zahlenlotto; wir ziehen 2 aus 8 Positionen ohne Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge und ohne Wiederholung der Position. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{8}{2}$$

liefert die Anzahl der möglichen Ziehungen bzw. der möglichen Buchstabenpositionen. Es gibt somit

$$\binom{8}{2} 26^2\, 10^6$$

Passwörter mit genau zwei Buchstaben.

Entsprechend überlegt man sich, daß es

$$\binom{8}{3} 26^3\, 10^5$$

Passwörter mit genau drei Buchstaben gibt u.s.w.

Addiert man alle erlaubten Fälle, so ergibt sich als Gesamtzahl der erlaubten

Passwörter

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{7} \binom{8}{k} 26^k\, 10^{8-k} && (1)\\
= \ & \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 26^k\, 10^{8-k} - \binom{8}{0} 26^0\, 10^8 - \binom{8}{8} 26^8\, 10^0 && (2)\\
= \ & (26+10)^8 - 10^8 - 26^8 && (3)\\
= \ & 36^8 - 10^8 - 26^8. && (4)
\end{aligned}
$$

In (1) werden die Fälle „genau ein Buchstabe“, ..., „genau sieben Buchstaben“ addiert. In (2) wird statt von $k = 1$ von $k = 0$ an summiert; damit die Gleichung stimmt, wird der Summand für $k = 0$ nach der Summation subtrahiert. Entsprechend für $k = 8$. Auf den Ausdruck (3) kommt man ausgehend von (2) mit der binomischen Formel. In (4) erhält man dann das selbe Ergebnis wie bei dem ersten Rechenweg.

(c) Aus der Gleichung

$$\frac{2,61 \cdot 10^{12}}{2,82 \cdot 10^{12}} = \frac{x}{100}$$

folgt

$$x = \frac{261}{2,82} \approx 92,6.$$

Die Anzahl der Passwörter reduziert sich um circa $7,4\%$.

Aufgabe 5.
In einer Klausur wird eine Multiple-Choice-Aufgabe mit 6 Antwortmöglichkeiten gestellt. Wieviel unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, 3 Antworten anzukreuzen?

Lösung: In welcher Reihenfolge die Antworten angekreuzt werden spielt keine Rolle und ist ja auch gar nicht feststellbar. Also haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 6 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“. Das entspricht der Situation beim Zahlenlotto 6 aus 49 und ist eine Kombination (die Reihenfolge ist egal) ohne Wiederholung (keine Antwort wird mehrfach angekreuzt). Es ergeben sich

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 6.
Ein portables Gerät zur Messung von Luftschadstoffen kann mit bis zu vier Zusatzmodulen (Drucker für Meßwerteprotokoll, Positionsbestimmung über Satelliten, Datenübertragung per Funk, Statistik-Software) ausgerüstet werden, die unabhängig voneinander eingebaut werden können, d.h. beliebig miteinander kombinierbar sind. Wieviele verschiedene Ausstattungsvarianten gibt es (einschließlich der Basisversion ohne Zusatzmodule)?

Lösung: Wir betrachten zwei Lösungswege.

1. Weg: Aus den vier Zusatzmodulen kann entweder keines, oder genau eines, oder genau zwei, oder genau drei oder genau vier ausgewählt und eingebaut werden. Also werden aus 4 unterschiedlichen Elementen k herausgegriffen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt, da es egal ist, welches Zusatzgerät zuerst und welches danach eingebaut wird.

Wir haben also eine Situation entsprechend dem Zahlenlotto, wir ziehen statt 6 aus 49 jetzt k aus 4. Es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung; die Anzahl der Möglichkeiten wird mit Binomialkoeffizienten berechnet. Wollen wir z. B. zwei Zusatzmodule einbauen, so ist die Anzahl unserer Wahlmöglichkeiten gleich dem Wert des Binomialkoeffizienten

$$\binom{4}{2}.$$

Die Gesamtzahl der Ausstattungsvarianten ist die Summe der Möglichkeiten bei keinem Zusatzmodul, genau einem Zusatzmodul u.s.w., also

$$\underbrace{\binom{4}{0}}_{\text{Grundgerät}} + \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{ein Zusatzmodul}} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16.$$

2. Weg: Für jedes der Zusatzmodule gibt es zwei Möglichkeiten: entweder es ist eingebaut oder es ist nicht eingebaut. Die Anzahl der Ausstattungsvarianten ist damit

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$$

Man könnte den „Ausstattungszustand“ eines Gerätes auch mit einer Zeichenkette aus vier Bits beschreiben: ein Bit ist gesetzt, wenn das entsprechende Modul vorhanden ist. Zum Beispiel würde dann die Zeichenkette $(1, 0, 1, 1)$ bedeuten, daß die Module 1, 3 und 4 vorhanden sind und Modul 2 fehlt. Bei 4 Bits gibt es aber $2^4 = 16$ Kodierungsmöglichkeiten, also gibt es 16 Konfigurationen für das Meßgerät.

Aufgabe 7.

In einer Cafeteria kann man 5 verschiedene Sorten von belegten Brötchen bekommen, von jeder Sorte sind 6 Stück vorhanden. Ein Student will für eine Arbeitsgruppe, die sich auf eine Mathematikprüfung vorbereitet, 3 belegte Brötchen kaufen. Dabei ist es egal, welche Sorten er nimmt, und in welcher Reihenfolge die Brötchen eingepackt werden. Wieviele verschiedene Zusammenstellungen sind möglich?

Lösung: Da die Reihenfolge egal ist, handelt es sich um eine Kombination. Weil es außerdem keine Rolle spielt, welche Sorten von Brötchen genommen werden, darf eine Sorte auch mehrfach vorkommen, d.h. Wiederholung ist erlaubt.

Wir haben also eine Kombination mit Wiederholung. Da 3 Brötchen aus 5 Sorten herausgegriffen werden, ist es eine Kombination dritter Ordnung von fünf Elementen mit Wiederholung.

Somit müssen wir die Formel

$$c^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

mit $k=3$ und $n=5$ verwenden. Der erste Binomialkoeffizient liefert

$$c^*(5,3) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

Das selbe Ergebnis muß auch der zweite Binomialkoeffizient liefern; die Berechnung ist deshalb eigentlich überflüssig, wird der Deutlichkeit halber aber trotzdem noch zusätzlich angegeben:

$$c^*(5,3) = \binom{5+3-1}{5-1} = \binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35.$$

Also gibt es für den Einkauf der Brötchen insgesamt 35 verschiedene Zusammenstellungen.

Um die Situation zusätzlich zu veranschaulichen, verwenden wir ein Bild, das auch bei der Herleitung der allgemeinen Formel die zentrale Rolle spielt.

Es gibt fünf Sorten von Brötchen. Wir stellen uns vor, daß diese in fünf Fächern nebeneinander liegen, so daß wir zwischen den Fächern vier Abtrennungen brauchen.

$$\ldots | \ldots | \ldots | \ldots | \ldots$$

Die drei Brötchen, die wir herausgreifen, kennzeichnen wir durch drei Sterne, zum Beispiel

$$| \; * \; * \; | \qquad | \; * \; |$$

oder

$$* \; | \qquad | \; * \; | \; * \; |$$

oder auf eine andere Art, und wir fragen: Wieviele solcher Möglichkeiten gibt es?

Die beiden Bilder legen die Antwort nahe: Es gibt soviele Möglichkeiten, wie es Anordnungen der vier Striche und drei Sterne gibt.

Stellen wir uns sieben Plätze vor, auf die wir die Striche und Sterne verteilen. Dann ist klar, daß es reicht, die Plätze für die Striche festzulegen; der Rest sind dann automatisch die Plätze für die Sterne. Wir müssen also vier aus sieben ohne Wiederholung herausgreifen. Oder wir legen die Plätze für die Sterne fest und müssen drei aus sieben ohne Wiederholung herausgreifen. Beides liefert das selbe Ergebnis

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35.$$

Aufgabe 8.

In einem Gerät sind versehentlich 8 Steckverbindungen geöffnet worden, wodurch 5 rote und 3 blaue Drähte unterbrochen sind. Jeder der 8 Drähte hat eine spezielle Funktion, d.h. jeder Stecker gehört eindeutig in eine der Buchsen, wobei zu einem roten Stecker eine der roten Buchsen und zu einem blauen Stecker eine der blauen Buchsen gehört.

Wieviel Möglichkeiten gibt es, die 8 Steckverbindungen zu schließen, wenn nur die farbliche Zusammengehörigkeit eingehalten wird?

Lösung: Wir ordnen die Buchsen in einer beliebigen Reihenfolge an und halten diese dann fest. Stellen Sie sich zum Beispiel vor, daß Sie die Drähte nebeneinanderlegen, links die roten und rechts die blauen.

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 5}_{\text{rot}} \quad \underbrace{6 \quad 7 \quad 8}_{\text{blau}}$$

Sind die Buchsen in einer festen Reihenfolge, dann reduziert sich die Aufgabe auf das Durchprobieren aller Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der roten Stecker und aller Permutationen der blauen Stecker, wobei jede rote Permutation mit jeder blauen kombiniert werden kann.

Für die 5 roten Stecker gibt es 5! Permutationen, für die blauen 3!. Insgesamt haben wir damit

$$5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$$

Möglichkeiten.

Aufgabe 9.
Ein DNA-Strang besteht aus hintereinander aufgereihten Nukleotidmolekülen. Es gibt vier verschiedene Nukleotide. Wieviel verschiedene DNA-Stränge der Länge 260 sind möglich? Stellen Sie das Ergebnis in der Zehnerpotenz-Schreibweise dar.

Lösung: Bei einem DNA-Strang ist die Reihenfolge der Nukleotidmoleküle wesentlich. Ferner kann das gleiche Molekül mehrfach auftreten. Dies ist eine Variation mit Wiederholung. Es ergeben sich

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{\text{260 Faktoren}} = 4^{260}$$

Möglichkeiten.

Bei der Umformung in eine Zehnerpotenz muß das x mit

$$10^x = 4^{260}$$

bestimmt werden. Eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Exponenten steht, wird durch Logarithmieren gelöst. Es folgt

$$\log_{10} 10^x = x = \log_{10} 4^{260} = 260 \log_{10} 4.$$

also ist

$$x \approx 0,60206 \cdot 260 = 156,536.$$

Damit ergibt sich

$$4^{260} \approx 10^{156,536} = 10^{156} \cdot 10^{0,536} \approx 3,436 \cdot 10^{156} \approx 10^{156}.$$

Bei der Rundung auf eine Zehnerpotenz mit ganzzahligem Exponenten ist ein interessantes Detail zu beachten: Man darf nicht $156,536$ auf 157 aufrunden. Vielmehr darf erst am Schluß gerundet werden; es ergibt sich dann 156 als Exponent. Das erscheint zunächst verblüffend, kann aber anschaulich mit der Krümmung der Kurve von $y = 10^x$ erklärt werden. (Die Kurve ist konvex; deshalb wird die Mitte des Intervalls $[0;1]$ nicht auf die Mitte des Intervalls [1;10] abgebildet.)

Aufgabe 10.
Wie groß muß die Mindestlänge eines DNA-Strangs, d.h. die Mindestanzahl hintereinander aufgereihter Nukleotide sein, damit mindestens 10^{100} unterschiedliche Kodierungen möglich sind?

Lösung: Besteht ein DNA-Strang aus x Nukleotiden, sind 4^x Kodierungen möglich. Wir lösen also die Gleichung

$$4^x = 10^{100}.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist dann $\lceil x \rceil$, der nächstgrößere ganzzahlige Wert. Logarithmieren der Gleichung liefert

$$\log_{10} 4^x = \log_{10} 10^{100} = 100.$$

Mit dem Logarithmengesetz $\log(a^b) = b \log(a)$ (für $a > 0$) folgt

$$x \log_{10} 4 = 100,$$

und daraus

$$x = \frac{100}{\log_{10} 4} \approx 166,096.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist also $\lceil 166,096 \rceil = 167$.

Aufgabe 11.
Zur Kennzeichnung der verschiedenen Varianten eines elektronischen Bauteils soll ein Code benutzt werden, der aus 4 nebeneinanderliegenden verschiedenfarbigen Balken besteht, die auf das Bauteil aufgedruckt werden. Der erste Balken ist immer schwarz, für die anderen werden die Farben Rot, Grün, Gelb, Braun, Orange, Cyan, Magenta und Blau verwendet.

Wieviel Codierungen sind möglich, wenn keine Farbe mehrfach vorkommen darf?

Lösung: Abgesehen von Schwarz haben wir 8 Farben zur Auswahl. Bei der ersten Färbung gibt es dann 8 Wahlmöglichkeiten, bei der zweiten nur noch 7, da eine Farbe bereits verwendet wurde. Schließlich haben wir bei der dritten Färbung noch 6 Möglichkeiten, da zwei der 8 Farben schon benutzt wurden und nicht mehr verwendet werden dürfen. Insgesamt gibt es damit

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Kodierungen.

Mit anderen Worten: Wir haben eine Variation dritter Ordnung von acht Elementen ohne Wiederholung

$$v(n, k) = v(8, 3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Aufgabe 12.
Wieviele Gruppen können aus 7 Männern und 5 Frauen gebildet werden, wobei die Gruppen sich zusammensetzen aus

(a) 3 Männern und 5 Frauen;

(b) 5 Personen, von denen mindestens 3 Männer sind?

Lösung:

(a) Aus einer Gruppe von 7 Männern werden 3 ausgewählt. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Gehören Donald, Linus und Bill zum Klub, dann ist es egal, ob zuerst Donald, dann Bill und zuletzt Linus Mitglied wurde oder erst Bill, dann Linus und schließlich Donald. Das ist die Situation des Zahlenlottos, es wird gezogen, und die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle. Also gibt es bei den Männern

$$\binom{7}{3}$$

Möglichkeiten. Alle 5 Frauen müssen Mitglieder der Gruppe sein, hier gibt es keine Auswahl. Will man das unbedingt mit einem Binomialkoeffizienten schreiben, hat man

$$\binom{5}{5} = 1.$$

Insgesamt gibt es also

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 = 35$$

Möglichkeiten für die Zusammensetzung der Gruppe.

(b) „Mindestens 3 Männer“ heißt bei einer Gesamtzahl von 5 Personen: entweder genau 3 Männer, oder genau 4 Männer, oder genau 5 Männer.

Sind genau 3 Männer in der Gruppe, gibt es

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 350$$

Möglichkeiten für die Zusammensetzung.

Bei genau 4 Männern haben wir

$$\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 = 175$$

unterschiedliche Gruppen.

Schließlich gibt es bei genau 5 Männern

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{0} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

Gruppen.

Die Gesamtzahl der Gruppen ergibt sich als Summe

$$350 + 175 + 21 = 546.$$

Aufgabe 13.
Es sollen 5 Männer und 4 Frauen in einer Reihe sitzen, und zwar so, daß die Frauen die geraden Plätze einnehmen. Wie viele solcher Anordnungen sind möglich?

Lösung: Die Anzahl der Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der Frauen ist 4!. Die Anzahl der Permutationen der Männer ist 5!.

Jede Anordnung der Frauen ist mit jeder Anordnung der Männer kombinierbar. Also gibt es insgesamt

$$4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$$

Anordnungen.

Da die Plätze der Frauen und der Männer festgelegt sind, gibt es keine weiteren Möglichkeiten durch einen Platztausch der Frauen und Männer untereinander.

Aufgabe 14.
In einem Gremium einer Hochschule haben die Studierenden 4 Sitze. Bei der Wahl zu diesem Gremium kandidieren aus jedem der 9 Fachbereiche mindestens 4 Studierende, so daß ein Ergebnis möglich ist, bei dem alle studentischen Mitglieder aus nur einem Fachbereich kommen. Numerieren wir die Fachbereiche von 1 bis 9, können z.B. alle aus FB 6 oder alle aus FB 8 sein. Es können aber auch zwei aus FB 7, einer aus FB 3 und einer aus FB 1 sein.

Wieviele verschiedene solcher Verteilungen der 4 Sitze auf die 9 Fachbereiche sind insgesamt möglich?

Lösung: Die Reihenfolge bzw. die Stimmenzahl, mit der die vier studentischen Mitglieder des Gremiums gewählt wurden, spielt für unsere Betrachtung keine Rolle. Es kommt nur darauf an, ob man Mitglied ist oder nicht. Sind z.B. drei der Studierenden aus FB 7 und einer aus FB 4, ist es egal, wer mit den meisten Stimmen gewählt wurde. Wir haben also eine Kombination.

Da aus jedem Fachbereich genügend Personen kandidieren, könnten die Sitze komplett mit Mitgliedern jedes beliebigen Fachbereichs besetzt werden. Es sind also bei den Zugehörigkeiten zu den Fachbereichen uneingeschränkt Wiederholungen möglich. Also haben wir eine Kombination mit Wiederholung.

Wir wählen aus der Menge M der Fachbereiche aus, M hat $n = 9$ Elemente. Da wir $k = 4$ Personen auswählen, gibt es

$$c^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

also

$$c^*(9,4) = \binom{9+4-1}{4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

Möglichkeiten, nämlich die Anzahl der Kombinationen 4. Ordnung von 9 Elementen mit Wiederholung.

Aufgabe 15.
Ein Ausschuß der Fachhochschule soll aus 10 Studierenden bestehen, wobei 4 Studierende aus dem Fachbereich KMUB, 3 Studierende aus dem FB E1 und ebenfalls 3 Studierende aus dem FB MNI sein sollen.

Es stellen sich 6 KMUB-, 8 E1-, und 5 MNI-Studierende zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses gibt es?

Lösung: Für KMUB werden 4 Personen aus 6 ausgewählt, für E1 sind es 3 Personen aus 8 und für MNI werden 3 Personen aus 5 bestimmt. Bei der Auswahl kommt es nicht auf die Reihenfolge an, nur die Mitgliedschaft in dem Gremium ist relevant. Also wird die Anzahl der Möglichkeiten jeweils mit einem Binomialkoeffizienten berechnet.

Da jede Auswahl des einen Fachbereichs mit jeder Auswahl der anderen Fachbereiche verknüpft werden kann, müssen die drei Binomialkoeffizienten miteinander multipliziert werden. Insgesamt gibt es damit

$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{KMUB}} \cdot \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{E1}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{MNI}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 15 \cdot 56 \cdot 10 = 8400$$

Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses.

Aufgabe 16.
Wieviel vierstellige Zahlen können mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 8 und 9 gebildet werden, wenn keine dieser Ziffern mehr als einmal in jeder Zahl auftreten darf?

Lösung: Wir haben sechs unterschiedliche Ziffern, aus denen vier gezogen werden sollen; die Reihenfolge ist dabei zu beachten, da $1357 \neq 7315$ ist. Also haben wir eine Variation (Reihenfolge beachten) ohne Wiederholung (keine Ziffer mehrfach).

Bei der 1. Ziehung gibt es 6 Möglichkeiten, bei der 2. Ziehung 5 Möglichkeiten u.s.w. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Aufgaben zur Kombinatorik

1. Bei einer Fußballwette muss man für 9 Spiele eines Spieltages vorhersagen, ob die Heimmannschaft oder die Gastmannschaft gewinnt oder ob die Mannschaften unentschieden spielen. Wie viele Möglichkeiten gibt es den Wettzettel auszufüllen?

2. Bei einem Pferderennen gehen 10 Pferde an den Start. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung der ersten 3 Plätze?

3. Bei einem Tennisturnier haben sich 10 Spieler gemeldet.
   a) Es soll jeder Spieler gegen jeden spielen. Wie viele Spiele kommen zu Stande?
   b) Es soll zwei Vorrundengruppen mit 5 Spielern geben, in der Jeder gegen jeden spielt. In einem Halbfinale spielt der Gruppensieger der einen Gruppe gegen den Gruppenzweiten der anderen Gruppe. Die Sieger der Halbfinals spielen in einem Finale gegeneinander. Wie viele Spiele gibt es jetzt?

4. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Lottozahlen bei „6 aus 49“, wenn
   a) die Reihenfolge der gezogenen Kugeln egal ist und die Kugeln nicht zurückgelegt werden?
   b) die Reihenfolge wichtig ist und die Kugeln nicht zurückgelegt werden?
   c) die Reihenfolge interessant ist und die Kugeln zurückgelegt werden?
   d) die Reihenfolge nicht wichtig ist und die Kugeln zurückgelegt werden?

5. Bei einem Zahlenschloss eines Aktenkoffers kann man 3 verschiedene Ziffern wählen. Wie viele mögliche Zahlenkombinationen gibt es?

6. Bei einer Pressekonferenz sollen auf 20 Plätze 10 Broschüren verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn
   a) es die gleichen Broschüren sind
      i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
      ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?
   b) die Broschüren unterschiedlich sind
      i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
      ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?

7. Eine Klasse besitzt 24 Schüler, darunter 14 Mädchen und 10 Jungen.
   a) Es werden 5 Freikarten für das Kino angeboten. Wie viele Möglichkeiten gibt es die nummerierten Sitzplatzkarten auf die Schüler zu verteilen?
   b) Bei einer Mannschaftswahl im Sport sollen 2 Schüler frei wählen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Mannschaften beliebig gewählt werden können?
   c) Bei einer Klassenarbeit gibt es drei Einsen, neun Zweien, sieben Dreien, vier Vieren und eine Fünf. Wie viele Möglichkeiten gibt es dieses Resultat auf die Schüler „aufzuteilen“?

8. Für eine Grundschulklasse bereitet die Lehrerin 2 Rechtecke vor, die die Schüler ausmalen sollen. Jeder Schüler hat 7 verschiedene Farben zur Auswahl. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, wenn
   a) die Rechtecke verschiedenfarbig sein sollen?
   b) die Einschränkung a) nicht gilt?

9. Ein Tannenbaum soll zu Weihnachten bunte Lämpchen bekommen. Dazu soll eine Lichterkette mit 5 gelben, 3 roten, 4 blauen und 2 grünen Lämpchen zusammengestellt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
   a) es keine Einschränkungen gibt?
   b) die Reihe mit 2 gelben Lampen beginnen und aufhören soll?
   c) Die Lämpchen gleicher Farbe nebeneinander sein sollen?
   d) Die 3 roten Lämpchen nebeneinander stehen sollen?

10. Wie viele Möglichkeiten gibt es die Buchstaben der folgenden Wörter zu vertauschen?
    (1: beliebig, 2: nur Konsonanten & Vokale werden betrachtet)
    a) BUTTERBROT
    b) FLUSSSCHIFFFAHRT
    c) VOLLMILCHSCHOKOLADENVERPACKUNG

11. Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Personen (7 Männer, 3 Frauen)
    a) an einem runden Tisch
    b) an einer langen Bank
    zu verteilen, wenn man
    1) die Personen beliebig anordnen kann
    2) die Frauen nebeneinander sitzen sollen
    3) die Männer nebeneinander sitzen sollen
    4) nur die Verteilung Frauen-Männer eine Rolle spielt

Lösungen:

1. 3^9

2. $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$

3.
   a) $10 \cdot 9 : 2 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
   b) $2 \cdot (4 + 3 + 2 + 1) + 2 + 1$

4.
   a) $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!}$
   b) $\frac{49!}{43!} = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$
   c) 49^6
   d) $\frac{49^6}{6!}$

5. 10^3

6.
   a)
      i. $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!}$
      ii. $\frac{20^{10}}{10!}$
   b)
      i. $\frac{20!}{10!}$
      ii. 20^{10}

7.
   a) $\frac{24!}{19!}$
   b) $\frac{22!}{11! \cdot 11!} = \binom{22}{11}$
   c) $\frac{24!}{3! \cdot 9! \cdot 7! \cdot 4!}$

8.
   a) $7 \cdot 6 = \frac{7!}{5!}$
   b) 7^2

9.
   a) $\frac{14!}{5! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!}$
   b) $\frac{10!}{3! \cdot 4! \cdot 2!}$
   c) $4!$
   d) $\frac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 2!}$

10.
   a) 1: $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!}$ 2: $\frac{10!}{7! \cdot 3!} = \binom{10}{7}$
   b) 1: $\frac{16!}{4! \cdot 3! \cdot 2!}$ 2: $\frac{16!}{13! \cdot 3!} = \binom{16}{13}$
   c) 1: $\frac{30!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$ 2: $\frac{30!}{21! \cdot 9!} = \binom{30}{21}$

11. 1) a: $\frac{10!}{10} = 9!$ b: $10!$
   2) a: $3! \cdot 7!$ b: $3! \cdot 7! \cdot 8$
   3) a: $3! \cdot 7!$ b: $3! \cdot 7! \cdot 4$
   4) a: $\frac{10!}{7! \cdot 3! \cdot 10} = \binom{10}{7} : 10$ b: $\frac{10!}{7! \cdot 3!} = \binom{10}{7}$

Kombinatorik

1. **Lottoprobleme**
   Beim Schweizer Zahlenlotto werden aus den Zahlen 1, ... , 45 sechs Zahlen gezogen.
   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man einen Sechser, wenn man auf alle möglichen Kombinationen bestehend aus lauter geraden Zahlen setzt?
   (b) Herr Kluge hat auf die Zahlen 1,2,3,4,5,6 und Frau Kluge auf die Zahlen 7,8,9,10,11,12 gesetzt. In der Tagesschau hören die beiden gerade noch, dass bei der Lottoziehung nur Zahlen im ersten Dutzend gezogen wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Familie Kluge einen Sechser?

2. **Examen**
   In einem Examen müssen genau 12 von 15 Fragen beantwortet werden. Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es, wenn mindestens 3 der ersten 5 Fragen beantworten werden müssen?

3. **ADRIANA**
   Wie viele unterschiedliche Wörter (auch sinnlose) mit genau 3 der 7 Buchstaben von ADRIANA können gebildet werden?

4. **Mut zur Lücke**
   Für eine Abschlussprüfung müssen die Kandidaten 120 Themen lernen. Nach dem Prinzip *'Mut zur Lücke'* hat Thomas nur 70 Themen vorbereitet. Für die Prüfung werden 3 der 120 Themen ausgelost. In wie vielen dieser Auslosungen befinden sich mindestens 2 von den von Thomas vorbereiteten Themen?

5. **Ziegelsteine**
   Für eine Gartenmauer total 42 Ziegelsteine benötigt. Im Baumarkt stehen drei verschiedene Sorten zur Verfügung. Auf wie viele verschiedene Arten kann beim Kauf die Auswahl der Steine getroffen werden?

6. **Binomialkoeffizienten**
   (a) Wie lautet die ausmultiplizierte Form von $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5$?
   (b) Was lässt sich für die untenstehende Summe vermuten?
   $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdots \pm \binom{n}{n}$$
   (c) Wie lautet der Koeffizient von p^8 in der ausmultiplizierten Darstellung von $(p-2)^{17}$.

7. **Binomialkoeffizienten**
   (a) Der untenstehende Ausdruck ist soweit als möglich zu vereinfachen:
   $$\frac{2}{(n+1)!} + \frac{3}{(n-1)!}$$
   (b) Es soll gezeigt werden:
   $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
   Diese Beziehung kann vom Taschenrechner benutzt werden, um Binomialkoeffizienten effizient zu berechnen. Wie könnte ein auf dieser Beziehung basierendes Verfahren zur Berechnung von Binomialkoeffizienten aussehen?

8. **Pascal's Dreieck**
   Durch Überlegungen im Pascal-Dreieck soll gezeigt werden, dass die folgende Beziehung gilt:
   $$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

9. **Zufallswanderung**
   Ein Teilchen bewegt sich auf der Zahlenachse wie folgt: Es startet im Nullpunkt und springt in jeder Sekunde mit Wahrscheinlichkeit 0.9 entweder um eine Einheit nach links in die negative oder mit Wahrscheinlichkeit 0.1 nach rechts in die positive Richtung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Teilchen nach 10 Sekunden bei der Marke +6 ?

10. **Eindimensionale Irrfahrten**
    Ein Teilchen bewegt sich auf der Zahlenachse wie folgt: Es startet im Nullpunkt und springt jede Sekunde mit Wahrscheinlichkeit 0.92 eine Einheit nach rechts bzw. mit der Wahrscheinlichkeit 0.08 eine Einheit nach links.

    (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen nach n Sekunden bei der Marke $n-2$ ist? Für welchen Wert von n ist diese Wahrscheinlichkeit am grössten?

    (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen nach n Sekunden bei der Marke $n-4$ ist? Für welchen Wert von n ist diese Wahrscheinlichkeit am grössten?

11. **Internet-Provider**
    Ein Internet-Provider hat grosse Probleme mit dem Support, den er seinen Kunden anbietet. Es wäre schon ein gewaltiger Fortschritt, wenn im Schnitt jede zweite Kundenanfrage befriedigend beantwortet werden könnte. Angenommen, dieses hochgesteckte Ziel könnte erreicht werden. Wie gross wäre dann die Wahrscheinlichkeit, dass

    (a) von 10 Anfragen acht

    (b) von 20 Anfragen mindestens drei

    (c) von 50 Anfragen genau die Hälfte

    korrekt beantwortet werden könnten?

12. **Fehlererkennende Codes**
    Bei der seriellen Übertragung von digitalen Daten wird über einen Datenkanal pro Zeiteinheit ein Bit (0 oder 1) übertragen. Aufgrund verschiedener Störfaktoren muss damit gerechnet werden, dass ein Bit mit einer gewissen Fehlerwahrscheinlichkeit p falsch übertragen wird. Durch Hinzufügen von Redundanz versucht man solche Fehler in der Übertragung nach Möglichkeit zu erkennen. Bei der folgenden Codierung handelt es sich um einen sog. *One-Error-Detecting-Code*, d. h. einen Code, welcher erkennt, wenn von einem übertragenen Byte (= 8 Bits) ein Bit falsch übertragen wurde:

    > Je 7 Bits werden durch ein sog. Prüfbit oder Parity Bit so ergänzt, dass die Anzahl der übertragenen 1 gerade ist.
    >
    > Beispiel: Die 7 Bits 1011011 werden durch das Prüfbit 1 ergänzt und das Byte 10110111 übertragen. Die 7 Bits 1011010 werden durch das Prüfbit 0 ergänzt und das Byte 10110100 übertragen. Wird nun eines der acht Bits falsch übertragen, ist die Anzahl der vorkommenden 1 nicht mehr gerade und man weiss aufgrund des Parity Checks, dass ein Übertragungsfehler vorliegt. In diesem Fall kann die Übertragung der Daten nochmals erfolgen.

    Dieser fehlererkennende Code hat aber Grenzen. Beispielsweise werden zwei falsch übertragene Bits in einem Byte nicht erkannt und das Byte als richtig eingestuft. Für kleine Fehlerwahrscheinlichkeiten p handelt es sich aber durchwegs um einen effizienten Code. Im folgenden gehen wir von $p = 0.001$ aus, ein Wert der für PTT-Leitungen etc. realistisch ist.

    (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Byte richtig übertragen?

    (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden 5 oder mehr Bits eines Bytes falsch übertragen?

    (c) Der Parity Check sagt für ein übertragenes Byte "ok". Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde das Byte tatsächlich richtig übertragen?

    (d) Wird bei der Übertragung eines Bytes ein Fehler bemerkt, muss das Byte nochmals übertragen werden. Wieviele Male muss im Durchschnitt ein Byte übertragen werden, bis die Übertragung als fehlerfrei deklariert wird?

13. **Blumenvasen**
12 verschiedene Blumen müssen auf drei verschiedene Vasen verteilt werden. Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn...
    (a) ...eine oder zwei der Vasen leer bleiben dürfen?
    (b) ...in jeder der Vase genau 4 Blumen sein sollen?
14. **Anzahl Teiler einer Zahl**
Wieviele gerade und wieviele ungerade Teiler hat die Zahl 2880?
15. **Mastermind mini**
Eine einfache Version von Mastermind verlangt eine Farbkombination der Länge 4. Es stehen 6 Farben zur Verfügung.
    (a) Wieviele Farbkombinationen existieren, wenn die gleiche Farbe nicht mehrmals vorkommen darf?
    (b) Wieviele Farbkombinationen existieren, wenn die gleiche Farbe mehrmals wiederholt werden darf?
16. **Eidgenössische Arbeitsgruppe**
In einer Arbeitsgruppe sind 5 Obwaldner, 10 Luzerner und 6 Urner Vertreter. Aus dieser Arbeitsgruppe soll nun ein Ausschuss von 2 Personen gebildet werden, wobei die beiden Personen aus verschiedenen Kantonen stammen sollen. Auf wie viele Arten ist dies möglich?
17. **Münzwurfserie**
Mit einer 1 Euro-Münze wird eine 10er Serie geworfen (d.h. die Münze wird 10 Mal geworfen und die Resultate der Reihe nach aufgeschrieben).
    (a) Wie viele verschieden 10er Serien sind möglich?
    (b) Wie viele 10er Serien gibt es, bei denen 'Zahl' mindestens 8 Mal vorkommt?
18. **Gruppenbild mit Zwillingen**
Die Familie Burch hat 6 Kinder, darunter 2 Paare eineiiger Zwillinge (nicht unterscheidbar). Wie viele Möglichkeiten hat die Familie (Eltern und Kinder) sich für ein Familienfoto in einer Reihe aufzustellen?
19. **Ururur....**
Wie viele Ururgrosseltern haben insgesamt alle Ururgrosseltern eines Menschen?
20. **Beleuchtung**
Für die Beleuchtung einer Bühne stehen 8 Scheinwerfer zur Verfügung, die alle unabhängig voneinander ein- und ausgeschaltet werden können.
    (a) Wie viele Beleuchtungsarten mit genau 4 Scheinwerfern gibt es?
    (b) Wie viele Beleuchtungsarten mit höchstens 6 Scheinwerfern gibt es?
21. **Die Klasse 4f**
Die Klasse 4f besteht aus 11 Schülerinnen und 7 Schülern. Auf wie viele Arten kann ein 3-köpfiger Ausschuss aus der Klasse gebildet werden, wenn...
    (a) ...keine weiteren Vorgaben existieren?
    (b) ...die Klassensprecherin Gaby im Ausschuss sein muss?
    (c) ...mindestens eine Schülerin im Ausschuss sein muss?
22. **Aquarium**
Ein grosses Aquarium mit 28 verschiedenen Fischen soll vollständig in 3 kleinere Aquarien aufgeteilt werden. Die neuen Aquarien fassen 4, 10 und 14 Fische.
    (a) Auf wie viele verschiedene Arten können die Fische aufgeteilt werden ?
    (b) Auf wie viele verschiedene Arten können die Fische aufgeteilt werden, wenn es sich um 28 Clownfische handelt, die voneinander nicht zu unterscheiden sind?

23. **Intercityzug**
Ein Intercity-Zug besteht aus 5 Wagen 1. Klasse, aus 7 Wagen 2. Klasse, aus einem Bistro-Wagen und zwei Gepäckwagen. Beachte: Jeder Bahnwagen hat eine eindeutige Identifikationsnummer.
Auf wie viele verschiedene Arten kann der Zug zusammengestellt werden, wenn...

    (a) ...die Wagen beliebig angeordnet sein dürfen?
    (b) ...die Wagen der gleichen Klasse einen Block bilden müssen, der Bistrowagen sich zwischen den 1. und den 2. Klassewagen befinden muss und die Gepäckwagen (nebeneinander) den Anfang oder das Ende des Zuges bilden?

24. **Froschhüpfen**
Ein Frosch muss entlang einer Strecke von 12 Feldern hüpfen. Er startet auf dem ersten Feld und hüpft zufällig jeweils ein oder 2 Felder weiter. Auf wie viele (Hüpf-)Arten kann er auf das Feld 12 gelangen?

25. **Computer zusammenbauen**
Ein Computerhändler baut seine Computer selber zusammen. In jeden Computer muss er einen Prozesser, eine Festplatte und ein CD-Laufwerk einbauen. Es stehen ihm fünf verschiedene Prozessortypen, drei verschieden grosse Festplatten und zwei Arten von CD-Laufwerken zur Verfügung. In seinem Verkaufslokal hatte er von jeder möglichen Konfiguration einen PC aufgestellt. Leider wurden ihm vergangene Nacht eine Anzahl der Computer gestohlen. Am Morgen findet er noch 20 Computer im Ladenlokal. Wie viele Computer wurden ihm gestohlen?

Lösung zu: Kombinatorik

1. **Lottoprobleme**

   (a) $\frac{\binom{22}{6}}{\binom{45}{6}} \approx 0.009$

   (b) $\frac{2}{\binom{12}{6}} \approx 0.002$

2. **Examen**
   445 Auswahlmöglichkeiten
   $\left(\begin{array}{c}5\\3\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}10\\9\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}5\\4\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}10\\8\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}5\\5\end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c}10\\7\end{array}\right) = 445$

3. **ADRIANA**
   73 Wörter.
   1 mit 3A, 12 mit 2A, 36 mit 1A und 24 ohne A

4. **Mut zur Lücke**
   175'490 Möglichkeiten.
   $\left(\begin{array}{c}70\\2\end{array}\right) \cdot 50 + \left(\begin{array}{c}70\\3\end{array}\right) = 175'490$

5. **Ziegelsteine**
   946 Möglichkeiten.
   Kombinationen mit Wiederholungen: $\binom{3+42-1}{42} = \binom{44}{42} = 946$

6. **Binomialkoeffizienten**

   (a) Pascal-Dreieck liefert
   $$x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$$

   (b) Berechnung für einige Werte lässt vermuten, dass der Ausdruck immer 0 ist. Der Ausdruck ist die ausmultiplizierte Form von $(1-1)^n$.

   (c) $-12446720p^8$.

7. **Binomialkoeffizienten**

   (a) $\frac{3n^2+3n+2}{(n+1)!}$

   (b) Betrachtung am Pascal-Dreieck beweist die Formel.

8. **Pascal's Dreieck**
   Im Pascal-Dreieck sieht man aufgrund des Bildungsgesetzes
   $$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+1+1}{1}$$
   Diese Überlegung lässt sich leicht verallgemeinern.

9. **Zufallswanderung**
   8 Schritte nach rechts, 2 Schritte nach links:
   $$\binom{10}{8} 0.1^8 0.9^2 \approx 3.645 \cdot 10^{-7}$$

10. **Eindimensionale Irrfahrten**

   (a) Marke $n-2$: genau ein Schritt nach links
   $\binom{n}{1} 0.92^{n-1} \cdot 0.08 = 0.08 \cdot n \cdot 0.92^{n-1}$
   12 Schritte

   (b) Analoges Vorgehen liefert $0.0032 \cdot n(n-1) \cdot 0.92^{n-2}$
   24 oder 25 Schritte.

11. **Internet-Provider**

   (a) $\binom{10}{8} 0.5^{10}$

   (b) $1 - \binom{20}{2} 0.5^{10} - \binom{20}{1} 0.5^{10} - \binom{20}{0} 0.5^{10}$

   (c) $\binom{50}{25} 0.5^{25}$

12. **Fehlererkennende Codes**
   Mit $p = 0.001, q = 0.999$ folgt

   (a) $q^8 \approx 0.992$

   (b) $\binom{8}{0} p^8 + \binom{8}{1} p^7 q + \binom{8}{2} p^6 q^2 + \binom{8}{3} p^5 q^3 \approx 6 \cdot 10^{-14}$

   (c) $\frac{q^8}{q^8 + \binom{8}{2} q^6 p^2 + \binom{8}{4} q^4 p^4 + \binom{8}{6} q^2 p^6 + p^8}$

   (d) $1 \cdot q^8 + 2\left(1 - q^8\right) q^8 + 2\left(1 - q^8\right)^2 q^8 + \ldots$

13. **Blumenvasen**

   (a) $3^{12} = 531441$

   (b) $\left(\begin{array}{c} 12 \\ 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 8 \\ 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array}\right) = 34650$

14. **Anzahl Teiler einer Zahl**
   Primfaktorzerlegung
   $$2880 = 2^6 3^2 5$$
   36 gerade Teiler, 6 ungerade Teiler.

15. **Mastermind mini**

   (a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

   (b) $6^4 = 1296$

16. **Eidgenössische Arbeitsgruppe**
   $5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 10 = 140$

17. **Münzwurfserie**

   (a) 2^{10}

   (b) $\left(\begin{array}{c} 10 \\ 8 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} 10 \\ 9 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} 10 \\ 10 \end{array}\right) = 45 + 10 + 1 = 56$

18. **Gruppenbild mit Zwillingen**
   $\frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10080$

19. **Ururur....**
Jeder Mensch hat 16 UrUrgrosseltern. Somit haben alle Ururgrosseltern eines Menschen zusammen $16 \cdot 16 = 256$ Ururgrosseltern.

20. **Beleuchtung**

(a) $\binom{8}{4} = 70$

(b) $2^8 - \binom{8}{8} - \binom{8}{7} = 256 - 1 - 8 = 247$
Alle möglichen Beleuchtungsarten, minus jene mit allen oder 7 Scheinwerfern.

21. **Die Klasse 4f**

(a) $\binom{18}{3} = 816$

(b) $\binom{17}{2} = 136$

(c) Alle möglichen Kombinationen minus jene, bei denen keine Schülerin dabei ist.
$816 - \binom{7}{3} = 781$

22. **Aquarium**

(a) $\binom{28}{4} \cdot \binom{24}{10} \cdot \binom{14}{14} = 20'475 \cdot 1'961'256 \cdot 1 = 40'156'716'600$

(b) 1

23. **Intercityzug**

(a) 15!

(b) $5! \cdot 7! \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4'838'400$
$5!$ = Anordnungen aller 1. Klasse-Wagen unter sich
$7!$ = Anordnungen aller 2. Klasse-Wagen unter sich
2 = 1. Kl. vor 2. Kl. oder umgekehrt
1 = Bistrowagen muss in der Mitte sein
2 = Gepäckwagen vorne oder hinten
2 = Anordnungen der Gepäckwagen unter sich.

24. **Froschhüpfen**

$$\begin{array}{llrlcrcr}
0 \times 2er & 11 \times 1er & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 11 & \Rightarrow & & 1 & = & 1 \\
1 \times 2er & 9 \times 1er & 2+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 11 & \Rightarrow & & \binom{10}{1} & = & 10 \\
2 \times 2er & 7 \times 1er & 2+2+1+1+1+1+1+1+1 = 11 & \Rightarrow & & \binom{9}{2} & = & 36 \\
3 \times 2er & 5 \times 1er & 2+2+2+1+1+1+1+1 = 11 & \Rightarrow & & \binom{8}{3} & = & 56 \\
4 \times 2er & 3 \times 1er & 2+2+2+2+1+1+1 = 11 & \Rightarrow & & \binom{7}{4} & = & 35 \\
5 \times 2er & 1 \times 1er & 2+2+2+2+2+1 = 11 & \Rightarrow & & \binom{6}{5} & = & 16
\end{array}$$

Total sind 144 Arten möglich.

25. **Computer zusammenbauen**
$5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ verschiedene Modelle. Da noch 20 vorhanden sind, sind somit 10 Computer gestohlen worden.

AUFGABEN ZUR KOMBINATORIK (1)

1. Zum Würfeln wird ein Tetraeder benutzt, das auf seinen vier Seiten mit 1, 2, 3 und 4 beschriftet ist. Als Ergebnis zählt diejenige Augenzahl, die auf der Grundfläche steht. Das Tetraeder wird fünfmal hintereinander geworfen.
   Wie viele verschiedene Ergebnisse gibt es, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) fünfmal dieselbe Augenzahl auftreten soll,
   c) die erste und die letzte Augenzahl übereinstimmen sollen,
   d) die Augenzahl 1 genau einmal auftreten soll,
   e) die Augenzahl 1 mindestens einmal auftreten soll,
   f) die Augenzahl 1 genau zweimal auftreten soll,
   g) die Augenzahl 1 höchstens zweimal auftreten soll ?

2. In einer Urne befinden sich zehn rote, sieben schwarze und drei weiße Kugeln. Es werden nacheinander ohne Zurücklegen vier Kugeln gezogen.
   Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) alle Kugeln rot sein sollen,
   c) alle Kugeln dieselbe Farbe haben sollen,
   d) die erste Kugel rot sein soll,
   e) nur die erste Kugel rot sein soll,
   f) genau eine Kugel rot sein soll,
   g) höchstens eine Kugel rot sein soll,
   h) mindestens eine Kugel rot sein soll,
   i) genau drei Kugeln nicht rot sein sollen,
   k) höchstens drei Kugeln nicht rot sein sollen ?

3. Ein Professor gibt vor einer Prüfung einen Fragenkatalog mit 50 Fragen heraus, von denen dann fünf dem Prüfling vorgelegt werden. Der Student Fifty bereitet sich auf 25 der Fragen vor.
   Auf wie viele verschiedene Arten können ihm die Fragen vorgelegt werden, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) sich darunter genau zwei vorbereitete Fragen befinden sollen,
   c) sich darunter höchstens zwei vorbereitete Fragen befinden sollen,
   d) sich darunter mindestens zwei vorbereitete Fragen befinden sollen ?

4. Bei einer Prüfung werden dem Prüfling 20 Fragen vorgelegt, von denen er zehn bearbeiten muss. Auf wie viele verschiedene Arten kann er seine Auswahl treffen, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) er die ersten drei Aufgaben bearbeiten muss,
   c) er mindestens zwei der ersten drei Aufgaben bearbeiten muss,
   d) er sowohl aus der ersten (1 –10) als auch aus der zweiten (11 – 20) Hälfte der Aufgaben je mindestens vier bearbeiten muss ?

5. Bei einer Prüfung mit 15 Fragen sind zu jeder Frage vier Antworten gegeben, von denen nur jeweils eine richtig ist. Der Kollegiat Hope kreuzt willkürlich je eine Antwort an.
   Wie viele verschiedene Möglichkeiten des „Kreuzmusters hat er, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) er die beiden ersten Fragen doch richtig beantworten kann,
   c) er genau eine der beiden ersten Fragen doch richtig beantworten kann,
   d) er genau drei der ersten fünf Fragen doch richtig beantworten kann,

Rasch, K12

AUFGABEN ZUR KOMBINATORIK (2)

1. Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 3, 5, 7 und 9 bilden, wenn jede Ziffer höchstens einmal auftauchen darf und
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) die Zahlen durch 5 teilbar sein sollen,
   c) die Zahlen kleiner als 700 sein sollen ?

2. Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 3, 5, 7 und 9 bilden, wenn jede Ziffer beliebig oft auftauchen darf und
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) die Zahlen durch 5 teilbar sein sollen,
   c) die Zahlen kleiner als 700 sein sollen ?

3. Wie viele verschiedene zehnstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 5 und 7 bilden, wenn die 2 einmal, die 3 zweimal, die 5 dreimal und die 7 viermal vorkommen sollen und
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) die Zahlen gerade sein sollen,
   c) die Zahlen mit 757 beginnen sollen ?

4. Durch Umstellen des Wortes ***MEERENGE*** lassen sich neue Wörter (sie müssen keinen Sinn ergeben) bilden. Wie viele verschiedene "Wörter" gibt es, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) die "Wörter" mit E beginnen und enden sollen,
   c) die "Wörter" mit E beginnen und mit N enden sollen,
   d) in den "Wörtern" die vier E nebeneinander stehen sollen ?

5. Mit einem Würfel werden siebenstellige Zahlen erwürfelt (1. Wurf Millionenstelle, 2. Wurf Hunterttausenderstelle, ...). Wie viele verschiedene Zahlen gibt es, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) die Zahlen gerade sein sollen,
   c) die Zahlen mit 6 beginnen und enden sollen,
   d) nur genau die Einerstelle mit 6 besetzt sein soll,
   e) die 6 in der Zahl genau einmal auftreten soll,
   f) die 6 in der Zahl mindestens einmal auftreten soll ?

6. Eine Familie hat die Söhne Anton, Bernhard und Christian und die Töchter Daniela und Eva. Es wird jeden Tag aus allen fünf Kindern ausgelost, wer den Familienhund für einen Tag zu betreuen hat. Wie viele verschiedene "Betreuerlisten" sind innerhalb einer Woche möglich, wenn
   a) keine weiteren Bedingungen vorliegen,
   b) Daniela das Glück hat, nie dran zu kommen,
   c) nur die Söhne drankommen,
   d) Anton nur am ersten und zweiten Tag drankommt,
   e) den Pechvogel Bernhard das Los viermal in einer Woche trifft,
   f) die Töchter nur je einmal und zwar an zwei aufeinanderfolgenden Tagen drankommen ?

Rasch, K12

Aufgaben zur Kombinatorik (3)

1. Sie haben neun verschiedene Farben.
   Auf wie viele Arten können Sie die sieben Felder färben, wenn
   a) keine Einschränkung besteht,
   b) jedes Feld eine andere Farbe haben soll,
   c) benachbarte Felder verschieden gefärbt sein sollen,
   d) die beiden Felder links und rechts außen rot sein sollen,
   e) drei nebeneinander liegende Felder rot, die übrigen beliebig aber nicht rot gefärbt sein sollen ?

2. Bei einer Geburtstagsparty mit fünf Mädchen und drei Buben erhält jedes Kind ein Stück Kuchen. Zur Auswahl stehen Apfelkuchen, Erdbeertorte, Käsesahne, Marmorkuchen und Sahnetorte. Berechnen Sie für jede beschriebene Situation die Anzahl der Möglichkeiten.
   a) Die Kinder stehen Schlange vor dem Buffet.
   b) Die Buben stehen zuvorderst in der Schlange.
   c) Jedes Kind wählt ein Stück Kuchen.
   d) Oskar und Peter wählen sicher Erdbeertorte, die anderen nach Belieben.
   e) Anna, Beate und Christa müssen immer die gleiche Sorte haben.
   f) Jedes Kind in der Reihe wählt grundsätzlich etwas anderes als sein Vorgänger.
   g) Norbert, Doro und Esther mögen Apfelkuchen nicht.
   h) Für ein Spiel werden fünf Kinder ausgelost.
   i) Vier Kinder spielen „Schwarzer Peter“. Die Gruppe ist aus Mädchen und Buben gemischt zusammengesetzt.
   k) Fünf Kinder spielen „Blinde Kuh“, eines der fünf ist die „Blinde Kuh“.

3. Die Klassen 5A (zwölf Mädchen, neun Buben) und 5B (acht Mädchen, sechzehn Buben) sind im Landschulheim. Berechnen Sie für jede beschriebene Situation die Anzahl der Möglichkeiten.
   a) Eine Dreiergruppe muss einkaufen gehen.
   b) Eine Dreiergruppe muss einkaufen gehen, die Gruppe soll aber nicht nur aus Mädchen oder nur aus Buben bestehen.
   c) Für verschiedene Aufträge werden vier Kinder gesucht.
   d) Es werden gemischte Zweiergruppe Mädchen/Bube gebildet.
   e) Es werden gemischte Zweiergruppe Mädchen/Bube gebildet, Mädchen und Bube sollen aber aus verschiedenen Klassen sein.

LÖSUNGEN

1. a) $4^5 = \underline{\mathbf{1024}}$, b) $1^4 \cdot 4 = \underline{\mathbf{4}}$, c) $4^4 = \underline{\mathbf{256}}$, d) $\binom{5}{1} \cdot 3^4 = \underline{\mathbf{405}}$,

   e) $4^5 - 3^5 = \underline{\mathbf{781}}$, f) $\binom{5}{2} \cdot 3^3 = \underline{\mathbf{270}}$, g) $\binom{5}{0} \cdot 3^5 + \binom{5}{1} \cdot 3^4 + \binom{5}{2} \cdot 3^3 = \underline{\mathbf{918}}$

2. a) $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = \underline{\mathbf{116\,280}}$, b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{\mathbf{5\,040}}$,

   c) $\frac{10!}{(10-4)!} + \frac{7!}{(7-4)!} + 0 = \underline{\mathbf{5\,880}}$, d) $10 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = \underline{\mathbf{58\,140}}$,

   e) $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \underline{\mathbf{7\,200}}$, f) $\binom{4}{1} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = \underline{\mathbf{28\,800}}$,

   g) $\frac{10!}{(10-4)!} + \binom{4}{1} \cdot 10 \cdot \frac{10!}{(10-3)!} = \underline{\mathbf{33\,840}}$,

   h) $\frac{20!}{(20-4)!} - \frac{10!}{(10-4)!} = \underline{\mathbf{111\,240}}$, i) $\binom{4}{3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 = \underline{\mathbf{28\,800}}$,

   k) "höchstens drei nicht rot" = "mindestens eine rot" $\Rightarrow$ siehe h)

3. a) $\binom{50}{5} = \underline{\mathbf{2\,118\,760}}$, b) $\binom{25}{2}\binom{25}{3} = \underline{\mathbf{690\,000}}$,

   c) $\binom{25}{0}\binom{25}{5} + \binom{25}{1}\binom{25}{4} + \binom{25}{2}\binom{25}{3} = \underline{\mathbf{1\,059\,380}}$,

   d) $\binom{50}{5} - \left[\binom{25}{0}\binom{25}{5} + \binom{25}{1}\binom{25}{4}\right] = \underline{\mathbf{1\,749\,380}}$,

4. a) $\binom{20}{10} = \underline{\mathbf{184\,756}}$, b) $\binom{3}{3}\binom{17}{7} = \underline{\mathbf{19\,448}}$,

   c) $\binom{3}{2}\binom{17}{8} + \binom{3}{3}\binom{17}{7} = \underline{\mathbf{92\,378}}$,

   d) $\binom{10}{4}\binom{10}{6} + \binom{10}{5}\binom{10}{5} + \binom{10}{6}\binom{10}{4} = \underline{\mathbf{151\,704}}$,

5. a) $4^{15} = \underline{\mathbf{1\,073\,741\,824}}$, b) $1 \cdot 1 \cdot 4^{13} = \underline{\mathbf{67\,108\,864}}$,

   c) $\binom{2}{1} \cdot 1 \cdot 4^{14} = \underline{\mathbf{536\,870\,912}}$, d) $\binom{5}{3} \cdot 1^3 \cdot 4^{12} = \underline{\mathbf{167\,772\,160}}$

LÖSUNGEN

1. a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{\mathbf{60}}$, b) $4 \cdot 3 \cdot 1 = \underline{\mathbf{12}}$ (letzte Ziffer muss 5 sein) ,

   c) $3 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{\mathbf{36}}$ (erste Ziffer kann 1, 3 oder 5 sein)

2. a) $5^3 = \underline{\mathbf{125}}$, b) $5^2 \cdot 1 = \underline{\mathbf{25}}$ (letzte Ziffer muss 5 sein),

   c) $3 \cdot 5^2 = \underline{\mathbf{75}}$ (erste Ziffer kann 1,3 oder 5 sein)

3. a) $\binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = \underline{\mathbf{12\,600}}$, b) $\binom{9}{2}\binom{7}{3}\binom{4}{4} \cdot 1 = \underline{\mathbf{1\,260}}$,

   c) $\binom{7}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \underline{\mathbf{630}}$

4. a) $\binom{8}{4}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \underline{\mathbf{1\,680}}$, b) $\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \underline{\mathbf{360}}$,

   c) $\binom{6}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \underline{\mathbf{120}}$

   d) $5 \cdot 4! = \underline{\mathbf{120}}$ (5 mögliche Positionen der vier E,
   4! für die Umstellmöglichkeiten von M, R, N und G)

5. a) $6^7 = \underline{\mathbf{279\,936}}$, b) $6^6 \cdot 3 = \underline{\mathbf{139\,968}}$, c) $1 \cdot 6^5 \cdot 1 = \underline{\mathbf{7\,776}}$,

   d) $5^6 \cdot 1 = \underline{\mathbf{15\,625}}$, e) $7 \cdot (5^6 \cdot 1) = \underline{\mathbf{109\,375}}$,

   f) Es gibt 5^7 verschiedene Zahlen ohne eine einzige Sechs . $\Rightarrow$ $6^7 - 5^7 = \underline{\mathbf{201\,811}}$

6. a) $5^7 = \underline{\mathbf{78\,125}}$, b) $4^7 = \underline{\mathbf{16\,384}}$, c) $3^7 = \underline{\mathbf{2\,187}}$, d) $1 \cdot 1 \cdot 4^5 = \underline{\mathbf{1\,024}}$,

   e) Die vier "Pechtage" heraussuchen; für sie kommt nur Bernhard in Frage; die restlichen 3 Tage je eines der restlichen vier Geschwister:

   $$\binom{7}{4} \cdot 1^4 \cdot 4^3 = \underline{\mathbf{2\,240}}$$

   f) 6 : Möglichkeiten für zwei aufeinanderfolgende Tage,
   2! : Verteilung der Töchter,
   3^5 : je einer der Söhne für die restlichen fünf Tage
   $\Rightarrow$ $6 \cdot 2! \cdot 3^5 = \underline{\mathbf{2\,916}}$

Rasch, K12

Aufgaben zur Kombinatorik (3) - LÖSUNGEN

1. a) $9^7 = 4\,782\,969$

   b) $\dfrac{9!}{2!} = 181\,440$

   c) $9 \cdot 8^6 = 2\,359\,296$

   d) $1 \cdot 9^5 \cdot 1 = 59\,049$

   e) $5 \cdot 8^4 = 20\,480$ (Drei nebeneinanderliegende Felder kann man auf fünf Arten auswählen !)

2. a) $8\,! = 40\,320$

   b) $3! \cdot 5! = 720$

   c) $5^8 = 390\,625$

   d) $1 \cdot 1 \cdot 5^6 = 15\,625$

   e) $5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5^5 = 15\,625$

   f) $5 \cdot 4^7 = 81\,920$

   g) $4^3 \cdot 5^5 = 200\,000$

   h) $\binom{8}{5} = 56$

   i) $\binom{8}{4} - \binom{5}{4} = 70 - 5 = 65$ (alle möglichen Gruppen – reine Mädchengruppe)

   j) $\binom{8}{5} \cdot 5 = 280$

3. a) $\binom{45}{3} = 14\,190$

   b) $\binom{45}{3} - \binom{25}{3} - \binom{20}{3} = 14\,190 - 2\,300 - 1\,140 = 10\,750$

   (alle möglichen Gruppen – reine Bubengruppe - reine Mädchengruppe)

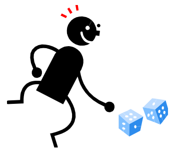
   c) $45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 = 3\,575\,880$

   d) $20 \cdot 25 = 500$

   e) $12 \cdot 16 + 8 \cdot 9 = 192 + 72 = 264$

Aufgabenblatt Kombinatorik II — Aufgaben

Aufgaben zu den Abzählregeln



1 Es wird gleichzeitig mit vier Würfeln gewürfelt.
Wie viele mögliche Ergebnisse hat das Zufallsexperiment?
(Lös. : 1296 Möglichkeiten)

2 Auf wie viele verschiedene Arten können 9 Personen um einen runden Tisch Platz nehmen,
a) wenn die Sessel nummeriert sind?
b) wenn man nur daran interessiert ist, wer neben wen sitzt (d.h. wenn die räumliche Anordnung egal ist)?
(Lös. : a)362880; b) 40320)

3 Bei einem Pferderennen laufen 8 Pferde.
Wie viele Möglichkeiten für den Zieleinlauf gibt es
a) für alle acht Plätze **b)** für die ersten drei Plätze?
(Lös. : a) 40320 b) 336)

4 Du kannst zu einem Geburtstagsessen 5 Personen aus einem Kreis von 20 Personen einladen.
Wie viele Möglichkeiten hast Du?
(Lös. : 15504)

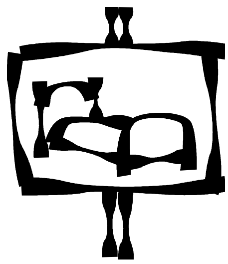
5 Drei Briefe kann man auf 6 Briefumschläge verteilen.
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn in jeden Umschlag genau ein Brief gelegt wird?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Briefe beliebig in die Briefumschläge gelegt werden dürften?
c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn in jeden Briefumschlag höchstens 2 Briefe dürfen?
(Lös. : a) 120 b) 216 c) 210)

6 Einem Skatspiel werden drei Karten mit Zurücklegen entnommen.
Wie viele Möglichkeiten der Entnahme gibt es?
(Lös. : 32768)

...und ab hier – Aufgaben mit Wahrscheinlichkeit

7 Auf zwei Parkhäuser werden 50 Autos verteilt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einem Parkhaus 25 Autos zu finden?
(Lös. : P = 0,112)

8 Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten. In einer Runde von skatspielenden Jungs der 11. Klasse bekommt Karten – Ede als Erster 3 Karten ausgegeben.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es drei Herzkarten?
(Lös. : P = 0,0113)



9 5 Personen sollen auf 7 Zimmer verteilt werden.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für:
a) In jedem Zimmer befindet sich höchstens eine Person.
b)* In genau einem Zimmer befinden sich 2 Personen.
In allen anderen Zimmern befindet sich jeweils eine Person.
(Lös. : P_a = 0,1499 P_b= 0,499)

10 Aus 6 heterosexuellen Pärchen werden zufällig 2 Personen ausgewählt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein verheiratetes Paar ausgewählt wird?
(Lös. : P = 0,091)

11 Bei einer Probe zu einer Fahrprüfung werden aus 20 vorgegebenen Fragen vom Fahrlehrer 10 Fragen zufällig ausgewählt.
Berechne Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
a) 2 Prüflinge haben an verschiedenen Tagen dieselben Fragen.
b) 2 Prüflinge haben an verschiedenen Tagen 8 (7) gleiche Fragen.
(Lös. : $P_a = 5{,}41\cdot 10^{-6}$ / P_b = 0,01096 und 0,0779)

12 Berechne die Wahrscheinlichkeit.
a) Bei vier Würfen mit einem Würfel fällt mindestens eine 6.
b) Bei 24 Würfen mit zwei Würfeln fällt mindestens ein 6 - er Pasch.
(Lös. : P_a = 0,5177 P_b = 0,4914)

Aufgabenblatt Kombinatorik I — Aufgaben

1 Aus einem Kurs von 13 Schülern werden 5 Schülern ausgewählt und als Abordnung zu einer Besprechung des Schulfestes geschickt.
Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

2 Für das Elfmeterschießen muss der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz benennen.
Wie viele Möglichkeiten hat er bei

a) der Bestimmung der Kandidaten?

b) der Bestimmung der Reihenfolge der Schützen, nachdem die Kandidaten gewählt wurden?

3 An der Fußball-WM 2014 nehmen 32 Nationen teil. Wenn wir annehmen, dass alle Mannschaften gleich stark sind (und Deutschland doch nicht in der Vorrunde rausfliegt)
Wie viele Möglichkeiten gibt es

a) für die Teilnehmer des Halbfinales (= Runde der letzten 4)?

b) für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?

4 Ein Autokennzeichen wird gebildet aus:

- mindestens 1, maximal 2 Buchstaben des Alphabets (insgesamt 26 Buchstaben) und
- einer Zahl bestehend aus mindestens 2, maximal 3 Ziffern (ohne die "0" an erster Stelle)

Wie viele Möglichkeiten für die Vergabe von Autokennzeichen gibt es, wenn

a) ein Buchstabe auch mehrmals erscheinen darf?

b) ein Buchstabe maximal einmal erscheinen darf?

5 Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten zur Bildung eines Passwortes für meinen „Gesichtsbuch-Account" gibt es, wenn folgendes im Passwort enthalten sein soll:

- genau zwei, unterschiedlichen Buchstaben des Alphabets (insgesamt 26 Buchstaben, Groß – und Kleinschreibung ohne Bedeutung) und
- einer Zahl bestehend aus mindestens 2, maximal 4 Ziffern ("0" an erster Stelle möglich)?

6 Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste in 10 freien Einzelzimmern unterbringen?

7 Ein Restaurant bietet 5 verschiedene Suppen, 10 verschiedene Hauptgerichte und 6 verschiedene Nachspeisen an. Moritz ist in jedem Fall eine Suppe, ein Hauptgericht und eine Nachspeise. Julian hat heute wenig Hunger und hat sich entschieden höchstens eine Suppe, höchstens ein Hauptgericht und höchstens eine Nachspeise zu konsumieren. (Außerdem muss er immer etwas Anderes machen ....)
Wie viele verschiedene Menüzusammenstellungen gibt es unter diesen Voraussetzungen für Moritz und Julian?

8 Vor einem Bankschalter stehen sieben Personen und warten in einer Schlange.

a) Wie viele verschiedene Anordnungen innerhalb der Schlange sind möglich?

Wenig später öffnet der Nachbarschalter. Daraufhin wechseln vier Personen zum zweiten Schalter.

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, vier von den sieben Personen in einer neuen Schlange (vor dem zweiten Schalter) anzuordnen?

9 Ein Zahlenschloss besitzt fünf Ringe, die jeweils die Ziffern 0, ..., 9 tragen.

a) Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlencodes sind möglich?

b) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil a), wenn in dem Zahlencode jede Ziffer nur einmal vorkommen darf, d.h. der Zahlencode aus fünf verschiedenen Ziffern bestehen soll?

c) Wie ändert sich die Anzahl aus Teil a), wenn der Zahlencode nur aus gleichen Ziffern bestehen soll?

Aufgabenblatt Kombinatorik I — ausführliche Lösungen

zu 1 $\binom{13}{5} = 1287$

zu 2 a) $\binom{11}{5} = 462$ b) $5! = 120$

zu 3 a) $\binom{32}{4} = 35960$ b) $\frac{32!}{(32-4)!} = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 863040$

zu 4 **(a)**

$$26 \cdot 9 \cdot 10 + 26 \cdot 9 \cdot 10^2 + 26^2 \cdot 9 \cdot 10 + 26^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 694.980$$

(b)

$$26 \cdot 9 \cdot 10 + 26 \cdot 9 \cdot 10^2 + 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 + 26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10^2 = 669.240$$

zu 5

$$26 \cdot 25 \cdot (10^2 + 10^3 + 10^4) = 7.215.000$$

zu 6 $\frac{10!}{(10-7)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$

zu 7 Moritz: $5 \cdot 10 \cdot 6 = 300$

Julian: $\left(\binom{5}{0} + \binom{5}{1}\right) \cdot \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{1}\right) \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1}\right) = 462$

zu 8 a) $7! = 5040$ b) $\binom{7}{4} \cdot 4! = 840$

zu 9 a) $10^5 = 100000$ b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ c) 10

Aufgaben zur Kombinatorik

Aufgabe 1
An einer Feier nehmen 20 Personen teil. Plötzlich geht das Bier aus. Um hinreichenden Nachschub zu besorgen, werden 3 Leute ausgewählt, weil 3 Personen notwendig sind, um das neue Fass zu transportieren. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, 3 Leute zum Bierholen zu schicken?

Aufgabe 2
Sie stehen an der Kasse und müssen genau 4.50 Euro bezahlen. In ihrem Geldbeutel befinden sich drei 1-Euromünzen und drei 50 Cent- Münzen. Sie nehmen die Münzen nacheinander heraus und legen sie vor der Kasse ab. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, die Münzen der Reihe nach anzuordnen?

Aufgabe 3
Sie gehen mit 3 Kommilitonen in die Mensa. Dort stehen 5 verschiedene Menues zur Auswahl. Während sich die Kommilitonen bereits auf die Plätze setzen, erhalten Sie den Auftrag, für sich und für die 3 Kommilitonen jeweils irgendein Essen zu besorgen, weil es sich in allen Fällen um die Spezies "Allesfresser" handelt und jedem egal ist, was er ißt. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es insgesamt, die Menu's auszuwählen.

Aufgabe 4
Sie wollen 3 Wochen Urlaub machen und zwar jede Woche in einem anderen Land. Sie haben sich entschieden, ihren Urlaub im Reisebüro X zu buchen und erhalten dort die Auskunft, Sie könnten jederzeit in 25 Ländern Urlaub machen, müßten sich dann aber festlegen. Wieviele Möglichkeiten es gibt, Ihren Urlaub in drei Ländern **zu buchen**. Eine der Möglichkeiten wäre etwa: Zuerst nach Spanien, dann nach Frankreich und zuletzt nach Italien.

Aufgabe 5
Ein Entwicklungspsychologe will herausfinden, ob ein Kind den Größenbegriff versteht. Dazu legt er dem Kind nach Zufall 6 unterschiedlich große Figuren vor und fordert es auf: "Stell die Figuren auf den Tisch und ordne Sie nach ihrer Höhe!" Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Figuren der Höhe nach in eine Reihenfolge zu bringen?

Aufgabe 6
Sie haben in einem Kaufhaus 8 verschiedene Kleidungsstücke für jeweils 50 DM ausgesucht, können aber nur 5 bezahlen. Sie entscheiden sich deshalb dafür, 3 Kleidungsstücke nicht zu kaufen. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 3 Kleidungsstücke auszusortieren?

Aufgabe 7
Eine Prüfung bestehe aus 10 Multiple-Choice-Aufgaben mit jeweils 5 Alternativen. Wieviele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, die Alternativen aller Aufgaben anzukreuzen ?

Lösungen

1) Es wird nur ein Teil aller Personen ausgewählt. Die Reihenfolge ist nicht relevant. Es gibt keine Wiederholung, da jeder pro Fall nur einmal ausgewählt werden kann.

Teilmenge, Reihenfolge irrelevant, keine Wiederholung. Es handelt sich also um eine **Kombination ohne Wiederholung.**

Formel: $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ n=20; k=3 $\frac{20!}{3! \cdot (20-3)!} = 1140$

2) Es werden alle Münzen gebraucht und es gibt Widerholungen, mehrer 1 Euro Münzen und 50-Cent Münzen benutzt werden.

Gesamtmenge, mit Wiederholung. Es handelt sich also um eine **Permutation mit Wiederholungen.**

Formel: $\frac{n!}{i_1! \cdot i_2!}$ n=6; i_1=3; i_2=3 $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

3) Es wird nur ein Teil aller Menues gebraucht. Jedes Menue kann auch mehrmals auf dem Tisch stehen, es gibt also Widerholungen. Die Reihenfolge spielt aber keine Rolle.

Teilmenge, Reihenfolge irrelevant, mit Wiederholung. Es handelt sich also um eine **Kombination mit Wiederholung.**

Formel: $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$ n=5; k=4 $\frac{(5+4-1)!}{(5-1)! \cdot 4!} = 70$

4) Es wird nur ein Teil der 25 Länder besucht. Zudem ist die Reihenfolge relevant, da es wichtig ist zu entscheiden in welchem Land die Reise beginnt. Es gibt keine Wiederholung, da jedes Land nur einmal besucht wird.

Teilmenge, Reihenfolge relevant, ohne Wiederholung. Es handelt sich also um eine **Variation ohne Wiederholung.**

Formel: $\frac{n!}{(n-k)!}$ n=25; k=3 $\frac{25!}{(25-3)!} = 13800$

5) Es wird jeweils die Gesamtmenge verwendet. Es gibt aber keine Wiederholung, da jede Figur jeweils nur einmal gebracht wird.

Gesamtmenge, ohne Wiederholung. Es handelt sich also um eine **Permutation ohne Wiederholung.**

Formel: n! n=6 6!=720

6) Es handelt sich um eine Teilmenge, da man 3 von 8 nicht kaufen kann. Die Reihenfolge ist irrelevant, da es egal ist ob ich Kleidungsstück 5 zuerst aussortiert wird oder erst später. Es gibt keine Wiederholung, da jedes Kleidungsstück pro Fall nur einmal aussortiert werden kann.

Teilmenge, Reihenfolge irrelevant, keine Wiederholung. Es handelt sich also um eine **Kombination ohne Wiederholung.**

Formel: $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ n=8; k=3 $\frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = 56$

7) Es handelt sich um eine Teilmenge, da bei jeder Aufgabe nur eine Alternative angekreuzt werden darf. Die Reihenfolge ist relevant, da es entscheidend ist, welche Alternative bei welcher Aufgabe angekreuzt wird. Es gibt zudem Wiederholungen.

Teilmenge, Reihenfolge relevant, mit Wiederholungen. Es handelt sich also um eine **Variation mit Widerholung.**

Formel: n^k n=5; k=10 n^k=9765625