

Lineare Algebra I

Tutorium - Blatt 5

Das Blatt wird vom 20.11.2025 bis zum 25.11.2025 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Vektorräume: Satz 3.13)

Zeigen Sie, dass für einen Körper K und eine Menge $M \neq \emptyset$ die Menge K^M mit den folgenden Verknüpfungen ein K -Vektorraum ist:

$$f + g: M \rightarrow K: m \mapsto f(m) + g(m)$$

$$k \cdot f: M \rightarrow K: m \mapsto k \cdot f(m)$$

für alle $f, g \in K^M$ und $k \in K$.

Aufgabe 2 (Polynomdivision: Satz 3.23)

Dividieren Sie f mit Rest durch g , wobei

$$f := x^7 + x^6 + 2x^4 + 2 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x] \quad \text{und} \quad g := x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x].$$

Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und 2 Variablen jeweils alle Lösungen in \mathbb{Q} :

(a)

$$\begin{array}{rrcr} -4x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \\ 7x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrcr} -5x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ 10x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 4 (Lineare Abbildung: Lemma 4.10)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass die von A induzierte Abbildung

$$\varphi_A: K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}: v \mapsto Av$$

eine lineare Abbildung ist.