

9. Übung

Abgabetermin B-Teil 16.06.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **16.06.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II“ in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:

Name, Vorname:

Name, Vorname:

Name, Vorname:

Name, Vorname:

Matrikelnummern:

Erreichte Punkte:

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 14.06.2022 und am 15.06.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A38

Gegeben sei ein nicht-leeres Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, Zahlen $x, x_0 \in (a, b)$ und eine $(n+1)$ -mal differenzierbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion

$$F : t \in (a, b) \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k,$$

durch $t \in (a, b) \mapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$ gegeben ist.

2. Wenden Sie den Mittelwertsatz (Theorem 8.29) auf die obige Funktion F an, um die Formel $R_{x_0, n}^f(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_C)(x - \xi_C)^n (x - x_0)$ für das Restglied nach Cauchy zu beweisen.
3. Verwenden Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 8.28) für obiges F und die Funktion $g : t \mapsto (x-t)^{n+1}$, um die Formel $R_{x_0, n}^f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_L)(x - x_0)^{n+1}$ für das Restglied nach Lagrange zu beweisen.

Aufgabe A39

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \int_0^x \log(t + \sqrt{1+t^2}) dt.$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Taylor'schen Formel, dass

$$-\frac{1}{24}x^4 \leq f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe A40

Man bestimme das Taylorpolynom n -ten Grades $T_n(x)$ um $x_0 = 0$ für $f(x) := \log(1+x)$ und beweise mit Hilfe des Restgliedes in Integralform, dass für alle $x \in (-1, 1)$ gilt

$$T_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x).$$

Aufgabe A41

Beweisen Sie das folgende Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale.

Seien $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $b > a$ Riemann-integrierbar. Für alle $x \in [a, \infty)$ gelte $g(x) \geq 0$ und $|f(x)| \leq g(x)$. Falls das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g(x) dx$ existiert, dann existiert auch

$$\int_a^\infty f(x) dx.$$

Aufgabe A42

Untersuchen Sie, für welche reellen Konstanten α, β das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx.$$

Teil B**Aufgabe B37**

[9 Punkte]

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \int_0^x \arctan(\sin(t)) dt.$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Taylor'schen Formel, dass

$$-\frac{1}{2}x^3 \leq f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0 \quad \text{für } x \in (0, \pi).$$

Aufgabe B38

[9 Punkte]

Man bestimme das Taylorpolynom n -ten Grades $T_n(x; x_0)$ um $x_0 = 0$ für $f(x) := \sqrt{1+x}$ und beweise mit Hilfe des Restgliedes in Integralform, dass für alle $x \in (-1, 1)$ gilt

$$T_n(x; 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Aufgabe B39

[7 Punkte]

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-1)^3} dx, \quad \int_1^5 \frac{1}{(x-1)^3} dx,$$

divergieren, aber der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^3} dx + \int_{1+\varepsilon}^5 \frac{1}{(x-1)^3} dx \right).$$

Aufgabe B40

[4+5=9 Punkte]

(i) Verwenden Sie Satz 9.35, um den p -Test in Beispiel 7.17 zu erhalten.(ii) Imitieren Sie des Weiteren die Methodik im Beweis von Satz 9.35 (Skript), um zu zeigen, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| \log(N) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right| \leq 1.$$

Aufgabe B41

[5 Punkte]

Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende Integral konvergiert:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\log(x))^\alpha} dx$$

Aufgabe B42

[10* Punkte]

Bonusaufgabe. Sei $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Für welche p existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x \sin(x^p) dx?$$

Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{b_k} x \sin(x^p) dx$$

für eine geeignete Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und interpretieren Sie das Integral als Reihe. Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz (Leibniz-Kriterium).