

Hausaufgabenblatt 06

1. In der Wahrscheinlichkeitstheorie spielt die Gaußsche Glockenkurve $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ bei der Untersuchung normalverteilter Zufallsvariablen eine wichtige Rolle. Jedoch ist das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

analytisch nicht lösbar, da die Funktion $e^{-\frac{x^2}{2}}$ keine Stammfunktion besitzt. Um das uneigentliche Integral doch zu lösen, berechnen Sie die Lösung des uneigentlichen Doppelintegrals

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

und ziehen Sie anschließend aus dem berechneten Ergebnis die Wurzel.

2. Gegeben sei die Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$$

mit der Dichte $\rho(x, y, z) = 1$.

- Berechnen Sie die Masse der Halbkugel.
 - Berechnen Sie anschließend den Schwerpunkt der Halbkugel.
3. Beim Reaktorunglück von Tschernobyl wurde eine Menge von etwa 400g radioaktiven Jod 131 freigesetzt. Dieses Jod 131 hat eine so genannte Halbwertszeit von 8 Tagen, d.h. in jeweils 8 Tagen halbiert sich die Menge des noch vorhandenen radioaktiven Materials Jod 131.
 - Wie kann man die Menge $M = M(t)$ des radioaktiven Jod 131 als Funktion der Zeit t angeben?
 - Welcher Prozentsatz der ursprünglich vorhandenen Menge $M_0 = 400\text{g}$ war nach einem Tag bzw. nach 30 Tagen noch vorhanden?
 - Wie lange musste man etwa warten, bis von den 400g Jod 131 nur noch 1 Milligramm vorhanden war?

4. In einem Zoo bricht unter einer Affenart eine Krankheit aus, für die nur sie anfällig ist. Als dem Personal die Krankheit auffällt, sind bereits 4 Affen der 204 Affen infiziert, nach 4 Wochen sind bereits 24 Affen erkrankt.
- Ermittle anhand der gegebenen Werte eine Funktionsgleichung, mit der sich die Ausbreitung der Krankheit unter den Affen beschreiben lässt.
 - Wann wird die Hälfte der Affen erkrankt sein?
 - Nach 3 Monaten glaubt ein Arzt, ein Gegenmittel gefunden zu haben. Aus Vorsicht injiziert er es zunächst nur 10% der noch gesunden Affen. Wie vielen Affen wird das Medikament verabreicht?
5. Seit Jahrtausenden wird Sauerteig zur Herstellung von Brotteig verwendet. Dabei werden gezielt Bakterien im Teig vermehrt. Für einen bestimmten Vermehrungsprozess werden 1g Mehl etwa 100 Bakterien zugesetzt. Nach 4 Stunden sind etwa 3.500 Bakterien vorhanden. Die Sättigungsgrenze liegt bei etwa 7.000 Bakterien.
- Ermitteln Sie für die Anzahl $y(t)$ der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden einen geeigneten Funktionsterm.
 - Wie viele Bakterien sind in einem 8 Stunden gereiften Sauerteig vorhanden?