Klausur zur Stochastik am 01.02.13

1. Aufgabe:

Durch eine Indiskretion hat Matse-Azubi Karl die Information bekommen, dass der zerstreute Stochastik-Dozent Hirte die nächste Klausur als Multiple-Choice Klausur mit je 6 Antwortmöglichkeiten auf jede der 8 Aufgaben stellen will. Bei den 6 Antwortmöglichkeiten pro Aufgabe ist nur eine Lösung richtig. Aufgrund der geringen Vorbereitungszeit schätzt Karl die Wahrscheinlichkeit, für eine Aufgabe die richtige Antwort zu kennen, nur auf 0,45. Wenn er die richtige Antwort kennt, wird er auch mit absoluter Sicherheit die richtige Antwort ankreuzen. Um seine Chancen zu steigern, beschließt er, bei den Aufgaben, deren Antwort er nicht kennt, einen fairen Würfel zu werfen und die gewürfelte Augenzahl als Antwort zu wählen.

a) Wie hoch ist bei diesem Vorgehen die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Antwort bei einer Klausuraufgabe?
b) Stochastik-Dozent Hirte freut sich bei der Korrektur der Klausur von Karl über eine richtige Antwort. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Karl die richtige Antwort gewusst und nicht „erwürfelt" hat?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Karl die Klausur bestehen, weil er von den 8 gestellten Aufgaben genau 4 richtig beantwortet hat, was zum Bestehen der Klausur ausreicht?

2. Aufgabe:

In einem Schmelzofen sollen flüssiges Gold und festes Kupfer getrennt werden. Dazu muss der Ofen auf jeden Fall eine Temperatur von weniger als 1083°C haben, da dies der Schmelzpunkt von Kupfer ist. Das Gold soll schmelzen, dafür muss der Schmelzpunkt von 1064°C für Gold überschritten werden. Die Messwerte einer Temperatursonde haben sich als normalverteilt mit der tatsächlichen Temperatur als Erwartungswert und der Varianz 25°C^2 erwiesen.

a) Die Sonde zeigt bei einer Messung eine Temperatur von 1073°C an. Bestimmen Sie ein auf diesem einen Messwert basierendes zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall für die tatsächliche Temperatur. Beurteilen Sie anhand dieses Konfidenzintervalls die Arbeitsweise des Verfahrens (Gold bzw. Kupfer schmilzt bzw. schmilzt nicht, Verfahren arbeitet einwandfrei bzw. nicht einwandfrei) mit einer statistischen Sicherheit von 95% (d.h. die Aussage soll mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 richtig sein).
b) Welche Bedingung muss die Länge eines Konfidenzintervalls erfüllen, damit prinzipiell bei entsprechenden Daten aus dem Konfidenzintervall auf die einwandfreie Arbeitsweise des Verfahrens geschlossen werden kann? Wie viele Temperaturmessungen sind erforderlich, damit ein 95%-Konfidenzintervall diese Bedingung erfüllt?

3. Aufgabe:

Bei der Reinigung eines Kühlschrankes im Haushalt lässt sich eine leichte Verstellung des Thermostates nie ganz vermeiden. Wir fassen die sich nach der Reinigung einstellende Temperatur als eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 3°C und Varianz 9°C^2 auf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Temperatur den als kritisch angesehenen Wert von 9°C übersteigt?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Gefrierpunkt von 0°C unterschritten wird?
c) Welche Temperatur wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht überschritten?

4. Aufgabe:

Ein Gerät bestehe aus zwei Einzelteilen E_1 und E_2. Die Zufallsvariable X_1 bzw. X_2 beschreibe die Anzahl der Reparaturen, die innerhalb eines Jahres an E_1 bzw. E_2 vorgenommen werden müssen. X_1 und X_2 seien unabhängig. Die Verteilungen seien wie folgt gegeben:

i	0	1	2
$P(X_1 = i)$	0,1	0,6	0,3

i	0	1	2	3
$P(X_2 = i)$	0,1	0,3	0,5	0,1

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss das Gerät höchstens einmal pro Jahr repariert werden?
b) Es seien $Y_1 = 3X_1$ die jährlichen Betriebskosten von E_1, $Y_2 = 2X_2 + 1$ die jährlichen Betriebskosten von E_2 und $Z = Y_1 + Y_2$ die jährlichen Betriebskosten des ganzen Gerätes (einschließlich Reparaturkosten). Man berechne den Erwartungswert von Z.
c) Wie groß ist die Varianz von Y_1?

5. Aufgabe:

a) Bestimmen Sie den Parameter c so, dass

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

gemeinsame Dichte der 2 Zufallsvariablen X, Y sein kann.
b) Bestimmen Sie die marginale Dichte von X.
c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

6. Aufgabe:

Nach der Vererbungslehre sollten die Bluttypen MM, NM und NN in einer sehr großen Population mit den Wahrscheinlichkeiten $\theta^2, 2\theta(1-\theta)$ und $(1-\theta)^2$ auftreten. In einer zufälligen Stichprobe vom Umfang n aus der Population sind x_1, x_2 und x_3 die absoluten Häufigkeiten dieser 3 Typen. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\theta}$ für θ.

7. Aufgabe:

Herr Huber und Frau Schulz besorgen für eine Reisegruppe Karten für einen Theaterabend. An beide werden 12 Karten jeweils zur Hälfte verteilt, darunter 4 für das Parkett und 8 für die zweite Reihe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Huber höchstens eine Karte für das Parkett in Händen hält?

8. Aufgabe:

Als Anerkennung für den Steuerzahler beschließt der Bundesfinanzminister, vor seinem Ministerium ein Denkmal für den „Unbekannten Steuerzahler" zu errichten. Dieses soll aus einem Stapel von 100.000 aufeinanderliegenden 1€-Münzen bestehen. Die 1€-Münzen haben eine nur leicht variierende Dicke X mit Erwartungswert $E[X] = 1{,}5\text{mm}$ und Standardabweichung $\sigma_X = 0{,}2\text{mm}$. Die Dicken der Münzen sind unabhängig voneinander.

a) Man gebe für die Höhe $H = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100.000}$ der 100.000 €-Säule Erwartungswert μ_H und Standardabweichung σ_H an. (Die Zufallsvariable X_i liefere die Dicke der i-ten Münze.)
b) Mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung gebe man ein möglichst kleines Intervall $[\mu_H - c, \mu_H + c]$ mit $P(\mu_H - c < H < \mu_H + c) \ge 0{,}9$ an.
c) Im Hinblick auf die Flugsicherheit berechne man die Höhe h_{max}, die mit 99,99% Wahrscheinlichkeit von H nicht überschritten wird. (Zentraler Grenzwertsatz!)