Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 07. 11. 2025

Übungsblatt 5 — Analysis I — WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 16.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Supremum oder ein Infimum haben und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $X_1 := \mathbb{Q} \cap [0, 1)$

(b) $X_2 := \{3^{-k} \colon k \in \mathbb{N}\}$

(c) $X_3 := \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0\}$

Aufgabe A 17.

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Teilmengen. Die Menge $A + B \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert als

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} | \exists a \in A, \exists b \in B : c = a + b\}$$

Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Aufgabe A 18. (a) Zeigen Sie, dass für jede positive Zahl $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{n} < x$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $nx > y$ gilt.

Aufgabe A 19.

Für $n \in \mathbb{N}$, seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Nehmen Sie an dass es existiert $K \in \mathbb{R}$ sodass $|a_n| < K$ und $|b_n| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \sup\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$

(b) $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$

(c) Finden Sie zu (a) und (b) Beispiele in denen keine Gleichheit gilt.

(d) Finden Sie eine sinnvolle Bedingung unter der

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cdot \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \sup\{a_n \cdot b_n : n \in \mathbb{N}\}$$

gilt und zeigen Sie diese Aussage.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 17. (3+1 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\lfloor x \rfloor$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert.

(b) Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\sup(\lfloor A \rfloor) = \lfloor \sup(A) \rfloor$ nicht gilt. Hierbei ist $\lfloor A \rfloor = \{\lfloor a \rfloor | a \in A\}$.

Aufgabe B 18. (2+2+3 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Supremum oder ein Infimum haben und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $Y_1 := \left\{ \frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N} \right\}$.

(b) $Y_2 := \left\{ \frac{n}{2^n} | n \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) $Y_3 := \left\{ \left(\frac{-1}{3}\right)^m - \frac{5}{n} | m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe B 19. (Supremum und Infimum treffen Arithmetik, 3+3 Punkte)

Seien A, B nichtleere, nach oben beschränkte Mengen positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Für $AB := \{ab \ : a \in A, \ b \in B\}$ gilt $\sup(AB) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

(b) Sei $\inf(B) > 0$ und $A/B := \{a/b \ : a \in A, \ b \in B\}$. Dann gilt $\sup(A/B) = \sup(A)/\inf(B)$.

Aufgabe B 20. (Infimum und Supremum bei zweifacher Abhängigkeit, 4+2 Punkte)

Für $n, m \in \mathbb{N}$, seien $a_{n,m} \in \mathbb{R}$. Nehmen Sie an dass es existiert $K \in \mathbb{R}$ sodass $|a_{n,m}| < K$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(a) $\sup\{\sup\{a_{m,n} : n \in \mathbb{N}\} : m \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\sup\{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\}$,

(∗-b) $\sup\{\inf\{a_{m,n} : n \in \mathbb{N}\} : m \in \mathbb{N}\} = \inf\{\sup\{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\}$.

Die Punkte der ∗-Aufgabe zählen nicht zu der maximal erreichbaren Punktzahl aller Blätter. Es sind also in diesem Sinne Bonuspunkte für die Klausurzulassung.