Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

10. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung. Das vorliegende zehnte Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 25.6., 10:15 Uhr abzugeben.

---

1. (Zeilensummen- und Spaltensummennorm) (10 Punkte) Die (ℓ_p, ℓ_p)-Operatornorm einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist für $p \in [1, \infty]$ gegeben durch

$$\|A\|_p \;:=\; \|A\|_{p,p} \;=\; \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|_p}{\|v\|_p}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\|A\|_\infty \;=\; \max_{1\leq i\leq d} \sum_{j=1}^d |a_{ij}|$,

b) $\|A\|_1 \;=\; \max_{1\leq j\leq d} \sum_{i=1}^d |a_{ij}|$.

2. (Erweiterung des Banachschen Fixpunktsatzes) (12 Punkte)

a) Sei $\Phi : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ gegeben durch

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-y} \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass Φ bezüglich der Maximumsnorm $\|\,.\,\|_\infty$ keine Kontraktion ist, $\Phi \circ \Phi$ hingegen schon. *Hinweis: Betrachten Sie* $\|D(\Phi\circ\Phi)\|_\infty$.

b) Allgemein sei nun $M \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, $\Phi : M \to \mathbb{R}^d$ eine Abbildung mit $\Phi(M) \subseteq M$, und $\Phi^m(x) = (\Phi \circ \cdots \circ \Phi)(x)$ die m-fache Verkettung. Zeigen Sie:

Existieren ein $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, und ein $L \in (0, 1)$ mit

$$\|\Phi^m(x) - \Phi^m(y)\|_p \;\leq\; L\,\|x - y\|_p \qquad \text{für alle } x, y \in M,$$

dann hat Φ genau einen Fixpunkt $x^* \in M$, und die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} \;=\; \Phi(x^{(k)})$$

konvergiert für jeden Startwert $x^{(0)} \in M$ gegen x^*.

c) Beweisen Sie eine Fehlerabschätzung für den Approximationsfehler nach n Schritten. Welche Abschätzung erhalten Sie im Beispiel aus a)?

3. (Konvergenz des Newton-Verfahrens) (12 Punkte)

a) Diskutieren Sie die Konvergenz des Newton-Verfahrens für die Funktion

$$f(x) \;=\; x\,\mathrm{e}^{-x}$$

für alle (zulässigen) positiven Startwerte x_0.

b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, sowie $f'(x) > 0$ und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren mit Startwert $x_0 = b$ monoton gegen die einzige Nullstelle x^* von f in $[a,b]$ konvergiert.

4. (Anwendung des Newton-Verfahrens) (6 Punkte) Sei

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$$

Finden Sie einen Startwert $x^{(0)}$, sodass das Newtonverfahren angewandt auf f nicht konvergiert.