Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

5. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen in der Vorlesung erfolgt aufgrund des Dies Academicus ausnahmsweise nächsten Dienstag, 13.5. Abgaben, die Online abgegeben werden können wie üblich bis Mittwoch, 14.5., bis 10:15 bearbeitet werden.

---

1. (Unabhängigkeit I) (8 Punkte) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) A und $\emptyset$ sowie A und Ω sind stochastisch unabhängig.

b) Es gelte $A \subset B$. Dann folgt:

$$A \text{ und } B \text{ sind stochastisch unabhängig} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \text{ oder } \mathbb{P}(B) = 1.$$

c) Es gelte $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ und $A \cap B = \emptyset$. Dann folgt:

$$\mathbb{P}(A^C|B) = \mathbb{P}(A|B^C) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.$$

2. (Unabhängigkeit II) (8 Punkte)

a) In einer Urne befinden sich $n, n \geq 2$, weiße Kugeln und n schwarze. Wir ziehen nacheinander zwei Kugeln, **ohne** die erste Kugel wieder zurückzulegen. Das Ereignis B tritt ein, wenn die erste Kugel weiß ist, während A im Fall, dass die zweite Kugel schwarz ist, eintritt. Sind A und B stochastisch abhängig oder unabhängig voneinander? Begründen Sie Ihre Antwort! Was passiert für $n \to \infty$?

b) Beim zweimaligen Würfeln seien die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 wie folgt definiert. A_1 tritt genau dann ein, wenn der erste Wurf gerade ist, A_2 falls der zweite Wurf ungerade ist und A_3 im Fall, dass die beiden Würfe unterschiedliche Parität besitzen. Stellen Sie die Ereignisse als Mengen in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum dar und überprüfen Sie, ob die Ereignisse paarweise stochastisch unabhängig bzw. (vollständig) unabhängig sind.

3. (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung) (8 Punkte) Unter der Gedächtnislosigkeit einer diskreten Zufallsvariablen X versteht man die Eigenschaft

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

für alle $s, t \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung.

4. (Polyas Urnenmodell) (8 Punkte) Eine Urne enthält zur Zeit $n = 0$ je eine rote und eine schwarze Kugel. Vor jedem Zeitpunkt $n = 1, 2, 3, \ldots$ wird eine zufällig ausgewählte Kugel entnommen und zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Sei $R_n(\omega)$ die Anzahl der roten Kugeln zur Zeit n. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen R_n

a) für die Fälle $n = 1, 2$ und 3,

b) für den allgemeinen Fall.

5. (Irrfahrten und Wahlauszählungen) (8 Punkte) Seien X_i $(i \in \mathbb{N})$ unabhängige und auf $\{-1, +1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die symmetrische Irrfahrt $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ auf $\mathbb{Z}$. Für $\lambda \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_\lambda(\omega) \ = \ \min\{n \in \mathbb{N} : S_n(\omega) = \lambda\}.$$

Für $\lambda \neq 0$ ist T_λ der *Zeitpunkt des ersten Besuchs* in λ, und T_0 ist die *erste Rückkehrzeit zum Startpunkt*. In der Vorlesung wurde mithilfe des Reflektionsprinzips gezeigt, dass für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen gelten:

$$\mathbb{P}[T_\lambda \leq n] \ = \ \mathbb{P}[S_n \geq \lambda] + \mathbb{P}[S_n > \lambda], \tag{1}$$

$$\mathbb{P}[T_\lambda = n] \ = \ \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}[S_{n-1} = \lambda - 1] - \mathbb{P}[S_{n-1} = \lambda + 1]\right) \tag{2}$$

a) Zeigen Sie für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[T_0 > n \text{ und } S_n = \lambda] \ = \ \mathbb{P}[T_\lambda = n] \ = \ \frac{\lambda}{n}\,\mathbb{P}[S_n = \lambda].$$

b) Bei einer Wahl erhält Kandidat A α Stimmen und Kandidat B β Stimmen, wobei $\beta < \alpha$. Angenommen, die Stimmen werden in „völlig zufälliger" Reihenfolge ausgezählt. Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass A während der Stimmenauszählung stets in Führung liegt, beträgt $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.