Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 1
Abgabefrist 17.10.2024

Aufgabe 1.1 (Summenformeln, 8 Punkte)

Zeigen Sie

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 1.2 (Fibonacci-Zahlen, 8 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Fibonacci-Zahlen $F_n, n \geq 0$ eingeführt. Sie sind rekursiv definiert durch $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Zeigen Sie

a) $F_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$.

Hinweis: Sie wissen aus der Vorlesung, dass $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

b) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ mit $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

Hinweis: a und b sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$.

Aufgabe 1.3 (Geometrische Reihe, $8 + 4^*$ Punkte)

In dieser Aufgabe nutzen wir die Konvention $0^0 = 1$.

a) Beweisen Sie für reelle Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}.$$

b) *Bonus:* Beweisen Sie, ohne Induktion zu benutzen, die folgende Aussage aus der Vorlesung: Für alle $n \geq 1$ und $x \neq 1$ gilt $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Aufgabe 1.4 (Ein Operator auf $\mathbb{R}$, 8 Punkte)

In $\mathbb{R}$ sei für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, eine Operation $*$ durch $x * y := x + y + \frac{xy}{\lambda}$ erklärt. Zeigen Sie, dass dadurch eine kommutative und assoziative Operation definiert ist. Bestimmen Sie das Einselement und bestimmen Sie, welche Zahlen eine Inverse haben.

Aufgabe 1.5 (Ungleichungen, 8 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

a) $|3 - 2x| < 5$,

b) $\frac{x+4}{x-2} < x$,

c) $|\frac{x+4}{x-2}| < x$,

d) $x(2 - x) > 1 + |x|$.

Aufgabe 1.6 ($\mathbb{F}_2$, 4^* **Punkte)**

Die Menge $K = \{u, g\}$ mit Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{array}{c|cc} + & \text{g} & \text{u} \\ \hline \text{g} & \text{g} & \text{u} \\ \text{u} & \text{u} & \text{g} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & \text{g} & \text{u} \\ \hline \text{g} & \text{g} & \text{g} \\ \text{u} & \text{g} & \text{u} \end{array}$$

ist ein Körper.

a) Geben Sie 0 und 1 Element des Körper an.

b) Zeigen Sie, dass $(K, +, \cdot)$ sich nicht anordnen lässt, d.h. dass es keine Teilmenge positiver Zahlen $P \subset K$ gibt, sodass die Anordnungsaxiome (A1) und (A2) erfüllt sind.

---

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 2
Abgabefrist 24.10.2024

Aufgabe 2.1 (Wachstum der Fakultät, 8 Punkte)

Zeigen Sie

a) $\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ für $k \in \{2, \dots, m\}$ und $m < n$.

b) $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. *Hinweis: Binomischer Lehrsatz, Teil a) und geometrische Summenformel.*

c) $\Pi_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

d) $3\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis: b) und c) benutzen!*

Aufgabe 2.2 (Rechenregeln für Suprema, 8 Punkte)

Zeigen Sie für nichtleere beschränkte Mengen A und B reeller Zahlen:

$$\begin{aligned} \sup(A+B) &= \sup A + \sup B, & \inf(A+B) &= \inf A + \inf B, \\ \sup(A-B) &= \sup A - \inf B, & \inf(A-B) &= \inf A - \sup B, \\ \sup \lambda A &= \lambda \sup A, & &\text{falls } \lambda > 0, \\ \sup \lambda A &= \lambda \inf A, & &\text{falls } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}, \qquad \lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Hinweis: Sie dürfen die Aussage $\sup A = -\inf(-A)$ *als gegeben nutzen. Diese wird in der Saalübung gezeigt.*

Aufgabe 2.3 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 8 Punkte)

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für beliebige reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Wann gilt Gleichheit?

Hinweis: Nutzen Sie, dass $0 \leq \sum_{i=1}^{m}(x_i - \lambda y_i)^2$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt und wählen Sie* λ *optimal.*

Aufgabe 2.4 ($\mathbb{C}$, 8 Punkte)

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3+i}{4+i}, \qquad (1 - \sqrt{3}i)^3.$$

b) Skizzieren Sie die Mengen

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 1 + i| < 2\}, \qquad \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \geq |z - i|\}.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 2.5 (Rechnen in $\mathbb{C}$, 8 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 1$. Zeigen Sie:

a) $\bar{z} = z^{-1}$ genau dann, wenn $|z| = 1$.

b) $|z-a|^2 = |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2$.

c) Falls $|z| = 1$, dann $\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = 1$.

d) Berechnen Sie die Inverse von $z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Bemerkung: Die Funktion $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ist eine Möbiustransformation, d.h. eine Funktion f der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 2.6 (Möbiustransformation, 8^* Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| \neq 1$. Es sei $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe und $v, w \in B$. Bestimmen Sie eine Möbiustransformation, die B bijektiv auf sich selbst abbildet und

a) den Punkt v auf 0;

b) den Punkt v auf w.

Hinweis: Aufgabe 2.5!
Bemerkung: Es ist möglich zu zeigen, dass diese Abbildungen eindeutig sind.

---

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 3
Abgabefrist 31.10.2024

Aufgabe 3.1 (Bestimmung von Grenzwerten, 8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\frac{n^2+n+1}{n+1}, \qquad \frac{n+1}{n^2+n+1}, \qquad \frac{4n^3+n^2+1}{2n^3-100n-3}, \qquad \frac{2^n n^2+3^n n}{3^n(2n+1)+n^7}.$$

Aufgabe 3.2 (Teilfogen von Teilfolgen, 6 Punkte)

a) Es sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge, die nicht gegen Null konvergiert. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert und eine Teilfolge (a_{n_k}), so dass $|a_{n_k}| \geq \varepsilon$ für alle $k \geq 1$ gilt.

b) Es sei (b_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ für die gilt: Jede Teilfolge (b_{n_k}) von (b_n) hat eine weitere Teilfolge, die gegen Null konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch (b_n) eine Nullfolge ist.
Hinweis: Widerspruchsbeweis!

Aufgabe 3.3 (Eine rekursive Folge, 8 Punkte)

Sei $a_1 > 0$ und die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definiert durch $a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{2a_n}$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass

a) $a_n \geq \sqrt{3}$ für alle $n \geq 2$,

b) $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \geq 2$,

c) (a_n) konvergiert.

d) Bestimmen Sie den Grenzwert a von (a_n).

e) Zeigen Sie: Es existiert $C > 0$ sodass $|a - a_{n+1}| \leq C|a - a_n|^2$. (Quadratische Konvergenz des Fehlers)

Aufgabe 3.4 ($\sqrt[n]{n}$, 10 Punkte)

Sei (a_n) eine reelle Folge.

a) Zeigen Sie: aus $a_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$.
Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $a^{1/n} \to 1$ für jede reelle Zahl $a > 0$.

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ gilt.

c) Für welche $L > 0$ gilt folgende Implikation? Aus $a_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = L$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - L^n = 0$. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.5 (Cauchyfolgen, 8 Punkte)

a) Es sei $\theta \in (0,1)$ und $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \theta |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.
Hinweis: Dreiecksungleichung, geometrische Summenformel.

Bitte wenden.

b) Es sei durch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ eine reelle Folge definiert. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 3.6 (Aussagenlogik, 8^* Punkte)

Auf die Frage, was es heißt, dass eine Folge a_n nicht konvergiert, geben zwei Studierende die folgenden Antworten:

(i) Es existiert eine positive reelle Zahl ε, so dass für jede reelle Zahl l ein N existiert, so dass $|a_n - l| \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

(ii) Es existiert eine reelle Zahl l, so dass für alle positiven reellen Zahlen ε ein N existiert und ein $n \geq N$, so dass $|a_n - l| \geq \varepsilon$.

a) Formulieren Sie die jeweiligen Negierungen der Antworten i) und ii). Die Negierungen dürfen kein logisches „Nicht" beinhalten. Nutzen Sie dafür die folgende Äquivalenz. Seien $\Gamma, \Theta \subset \Omega$ Mengen, dann gilt

$$\neg\Big(\forall\gamma \in \Gamma \colon \gamma \in \Theta\Big) \iff \Big(\exists\gamma \in \Gamma \colon \gamma \in \Theta^{\mathsf{c}}\Big).$$

b) Entscheiden Sie für jede der folgenden Folgen, ob jeweils i) oder ii) wahr oder falsch sind.

$$(-1)^n, \qquad (-1)^n n, \qquad a_n = \begin{cases} n & : n \text{ gerade} \\ 0 & : n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} n & : n \text{ gerade} \\ 2n & : n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

c) Ist eine oder beide der Aussagen i) oder ii) äquivalent zur Nicht-Konvergenz einer Folge? Belegen Sie Ihre Antwort gegebenenfalls durch ein Gegenbeispiel.

---

* Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 4
Abgabefrist 07.11.2024

Aufgabe 4.1 (Monotone Teilfolgen, 8 Punkte)

Zeigen Sie: Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

Aufgabe 4.2 (Cauchy-Kriterium, 8 Punkte)

Es sei (a_n) eine reelle monoton fallende Folge und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiere. Zeigen Sie, dass dann (na_n) eine Nullfolge ist.

Aufgabe 4.3 (Berechnung von Reihen, 8 Punkte)

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{5^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Aufgabe 4.4 (Konvergenz von Reihen, 8 Punkte)

Für welche der folgenden (a_n) konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

$$\frac{n^4+1}{2^n}, \qquad \frac{n+2^n}{n2^n}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}, \qquad \frac{n!}{n^n}$$

Aufgabe 4.5 (Eulersche Zahl, 8 Punkte)

a) Sei $n \geq 1$. Vergleichen Sie mit der geometrischen Reihe, um zu zeigen, dass $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$ konvergiert und dass die Summe kleiner als $\frac{1}{n}$ ist.

b) Sei $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Warum konvergiert die Reihe? Zeigen Sie, dass $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n(n!)}$.

c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert, und der Grenzwert auch mit e bezeichnet. Zeigen Sie, dass in der Tat

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Hinweis: Zeigen Sie $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 4.6 (Verdichtung, 8^* Punkte)

a) Sei $a_n \geq 0$ eine monoton fallende Folge und $2 \leq l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ genau dann, wenn } \sum_{n=1}^{\infty} l^n a_{l^n} < \infty.$$

Bitte wenden.

b) Konvergiert die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

wenn man alle Zahlen k, die die Ziffer 9 enthalten, herausstreicht? Beweisen Sie ihre Antwort.

c) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log(n) \cdot \log(\log(n)) \cdot \ldots \cdot [\underbrace{\log\log\ldots\log}_{2024 \text{ mal}}(n)]^{\alpha}},$$

wobei m so groß ist, dass

$$\underbrace{\log\log\ldots\log}_{2024 \text{ mal}}(m) \geq 1.$$

Sie können annehmen, dass der log zur Basis 2 ist.

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 5
Abgabefrist 14.11.2024

Aufgabe 5.1 (Konvergenzradius bestimmen, 8 Punkte)

Bestimmen Sie die Zahl $R \in [0, \infty]$, für die die folgenden reellen Reihen für $|x| < R$ konvergieren und für $|x| > R$ divergieren.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2024} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n!}.$$

Bestimmen Sie ebenfalls, ob die Reihen für $x = R$ und $x = -R$ konvergieren.

Aufgabe 5.2 (Beschreibungen des Konvergenzradius, 8 Punkte)

Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definieren wir

1) $R_1 := \sup\{|z| : z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \text{ konvergiert}\}$
2) $R_2 := \sup\{|z| : z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\}$
3) $R_3 := \sup\{|z| : z \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0\}$

Zeigen Sie, dass $R_1 \leq R_2 \leq R_3 \leq R_1$, und kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 5.3 (Rechenregeln für die Exponentialfunktion, 8 Punkte)

Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$:

a) $\exp(z)\exp(w) = \exp(z + w)$ und $\exp(mz) = \big(\exp(z)\big)^m$ für $m \in \mathbb{N}$.
b) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ und $\sin(z + w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$.
c) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$, $\cos(2z) = 2\cos^2(z) - 1$ und $\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1+\cos z}{2}$.

Aufgabe 5.4 (Offene Mengen, 8 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $U_\lambda \subset \mathbb{C}$, eine beliebige Familie offener Mengen (d.h. Λ ist nicht notwendigerweise abzählbar oder endlich). Dann ist die Vereinigung $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ offen in $\mathbb{C}$.
b) Sei $\{U_i\}_{i=1}^n$, $U_i \subset \mathbb{C}$, eine endliche Familie offener Mengen. Dann ist der Schnitt $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen in $\mathbb{C}$.
c) Die Vereinigung einer endlichen Familie abgeschlossener Mengen in $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen.
d) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen in $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen.

Bitte wenden.

Aufgabe 5.5 (Topologie einer Menge, 8 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$A := \left\{ \frac{1}{n} + i; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C}; 0 < |\operatorname{Re} z| < 1; 0 < |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Bestimmen Sie die inneren Punkte, die Randpunkte, die Häufungspunkte und die isolierten Punkte von A.

Aufgabe 5.6 (Produktdarstellung der Riemannsche Zeta-Funktion, 8* Punkte)

Es sei (p_k) die Folge der Primzahlen und J_N die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu $\{p_1, \dots, p_N\}$ gehören (mit der Konvention, dass $1 \in J_N$). Zeigen Sie: Für jedes (rationale) $s > 0$ konvergiert die Reihe über $(n^{-s}), n \in J_N$ absolut und hat den Wert

$$P_N := \sum_{n \in J_N} n^{-s} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}.$$

Im Fall $s > 1$ folgern Sie daraus die Eulersche Produktdarstellung:

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} := \lim_{N \to \infty} P_N.$$

* Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 6
Abgabefrist 21.11.2024

Aufgabe 6.1 (Grenzwerte von Funktionen, 8 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte für $x \in \mathbb{R}$:

a)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6},$$

b)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},$$

Hinweis: Zeigen Sie $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ *as* $x \to \infty$.

c)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}, \text{ wobei } n, m \in \mathbb{N},$$

d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

Hinweis: Restgliedabschätzung.

Aufgabe 6.2 (Bijektionen, 8 Punkte)

a) Die Funktion g sei durch

$$g(x) = \frac{x}{1-|x|} \qquad \text{für } x \in (-1,1)$$

gegeben. Bestimmen Sie den Wertebereich $g((-1,1))$ von g und zeigen Sie, dass g bijektiv auf den Wertebereich abbildet. Bestimmen Sie die Inverse g^{-1}.

b) Für welche reellen Zahlen a und b ist die Funktion $f(x) = ax+b$ zu sich selbst invers? Illustrieren Sie Ihre Antwort mit einer Skizze.

Aufgabe 6.3 (Stetigkeit via Topologie, 8 Punkte)

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie: Eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. wenn für alle offenen $U \subset \mathbb{K}$ gilt: $f^{-1}(U)$ ist offen.

Hinweis: Es ist $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{K} : f(x) \in U\}$.

Aufgabe 6.4 (Wahr oder Falsch, 8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel die folgenden Aussagen für Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ wobei $M \subset \mathbb{R}$.

a) Wenn $|f|$ stetig in $x_0 \in M$ ist, dann ist auch f stetig in x_0.

b) Wenn f und g stetig in $x_0 \in M$ sind, dann ist auch $\max(f,g)$ stetig in x_0.
Hinweis: Es gilt $\max(f,g)(x) := \max(f(x),g(x)) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)(x)$.

c) Wenn fg stetig in $x_0 \in M$ ist, dann sind auch f und g stetig in x_0.

Aufgabe 6.5 (Lipschitz-stetig, 8 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen ist Lipschitz-stetig?

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad x \in \mathbb{R}, x \geq 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbb{R}, x > 0$

Geben Sie im Fall, dass die Funktion nicht Lipschitz-stetig ist, geeigenete, möglichst große, Intervalle an, so dass die Funktion auf diesen Intervallen Lipschitz-stetig ist. Geben Sie jeweils auch die optimale Lipschitz-Konstante explizit an.

Aufgabe 6.6 (Unterhalbstetigkeit, 8^* Punkte)

Ein Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ heißt unterhalbstetig, wenn für jede Folge $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x_0 \in M$ gilt: $f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.

a) Zeigen Sie, dass, falls M kompakt und f unterhalbstetig ist, ein $x_0 \in K$ existiert, so dass $f(x_0) = \inf_K f$ gilt. (Also nimmt auch eine unterhalbstetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Infimum an.)

b) Geben Sie eine Funktion an, die unterhalbstetig ist, aber nicht stetig.

---

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 7
Abgabefrist 28.11.2024

Aufgabe 7.1 (Grenzwerte von Funktionen, 8 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n}e^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{-1/n}\ln x = 0.$$

Aufgabe 7.2 (Stetigkeit, 8 Punkte)

a) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ und $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass falls f in $x = 0$ stetig ist, dann auch auf ganz $\mathbb{R}$.
Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass $\liminf\limits_{y\to x} f(y) \geq f(x) \geq \limsup\limits_{y\to x} f(y)$ *ist, wobei*

$$\limsup_{y\to x} f(y) := \sup\left\{ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \,\middle|\, x_n \to x \textit{ und } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \textit{ existiert}\right\}$$

und

$$\liminf_{y\to x} f(y) := \inf\left\{ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \,\middle|\, x_n \to x \textit{ und } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \textit{ existiert}\right\}.$$

b) Geben Sie ein Beispiel einer nicht stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(x+y) \leq f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 7.3 (Stetigkeitsmodul, 8 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig auf I und für $\delta > 0$ sei

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I, |x-y| < \delta\}$$

der sogenannte Stetigkeitsmodul von f. Zeigen Sie, dass $\omega : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und monoton wachsend ist und dass $\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0$ gilt.

b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass f höchstens linear wachsen kann, d.h. es gibt eine Konstante $L > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x)| \leq L(1+|x|)$ gilt.
Hinweis: Sei z.B. $x > 0$. *Zerlegen Sie das Intervall* $[0, x]$ *in Teilintervalle einer festen Länge, z.B.* 1. *Um* $|f(x) - f(0)|$ *abzuschätzen, benutzen Sie die Dreiecksungleichung und* ω *aus Teil a).*

Aufgabe 7.4 (Punktweise Konvergenz, 8 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die folgenden reellwertigen Funktionenfolgen punktweise auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ konvergieren und geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an.

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{1+|x|^n}, \qquad g_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Funktionenfolge $h_n(x) = nx(1-x^2)^n$ punktweise?

Bitte wenden.

Aufgabe 7.5 (Gleichmäßige Konvergenz, 8 Punkte)

a) Welche der folgenden in $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ punktweise konvergenten Funktionenfolgen sind gleichmäßig konvergent?

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \qquad g_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

b) Konvergiert die Folge $h_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ punktweise, bzw. gleichmäßig auf $[0,1]$?

Aufgabe 7.6 (Cantorfunktion, 8^* Punkte)

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir induktiv die Funktionen $f_k \colon [0,1] \to [0,1]$ via

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x, \\ f_{k+1} &= \begin{cases} \frac{1}{2} f_k(3x) & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_k(3(x - \frac{2}{3})) & \text{für } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Berechnen und skizzieren Sie f_0, f_1 und f_2. Zeigen Sie außerdem, dass f_k für alle k stetig und monoton steigend ist.

b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$|f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Hinweis: Induktion.

c) Zeigen Sie, dass eine stetige und monotone Funktion $f \colon [0,1] \to [0,1]$ existiert mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, sodass

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $f_k(x)$ cauchy und die Konvergenz $f_k \to f$ gleichmäßig ist.

---

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 8
Abgabefrist 05.12.2024

Aufgabe 8.1 (Stetigkeit von Reihen, 8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich stetig sind.

a)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

b)

$$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 - n^2}.$$

Aufgabe 8.2 (Gleichmäßige Konvergenz und Verknüpfung, 8 Punkte)

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gleichmäßig stetig, sowie die Funktionenfolge $f_n : I \to \mathbb{R}$, gleichmäßig konvergent. Zeigen Sie: Dann konvergiert auch $g_n := F \circ f_n$ gleichmäßig.

b) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen (aber nicht gleichmäßig stetigen) Funktion F und einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge (f_n) an, für die $g_n := F \circ f_n$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 8.3 (Hyperbelfunktionen, 8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktionen sinh und tanh auf ganz $\mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion besitzen. Diese heißen arsinh (Areasinus hyperbolicus) und artanh (Areatangens hyperbolicus). Bestimmen sie jeweils den Definitionsbereich D und zeigen Sie, dass auf D die folgenden Formeln erfüllt sind:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Aufgabe 8.4 (Ableitungen Berechnen, 8 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f_1(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$

b) $f_2(x) = x^x, \quad x \in \mathbb{R}_+,$

c) $f_3(x) = \tanh(x), \quad x \in \mathbb{R},$

d) $f_4(x) = \operatorname{arsinh}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

Bitte wenden.

Aufgabe 8.5 (Eine C^∞ Funktion, 8 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \;:\; x > 0, \\ 0 \;:\; x \leq 0 \end{cases} \quad .$$

Zeigen Sie: $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Hinweis: Zeigen Sie für positive x, dass $f^{(n)}$ die Form $e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^{2n}} P_n(x)$ hat, wobei P_n ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Aufgabe 8.6 (Ein Folgenraum, 8^* Punkte)

Wir definieren auf dem reellen Vektorraum

$$L := \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;:\; \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| < \infty \right\}$$

zwei Normen durch

$$||a||_1 := \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| \quad \text{und} \quad ||a||_2 := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

a) Zeigen Sie, dass $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ Normen auf L sind.

b) Sei $(a^n) \subset L$ eine Folge in L und $a \in L$. Zeigen Sie, dass aus

$$\lim_{n\to\infty} ||a^n - a||_1 = 0 \text{ bereits } \lim_{n\to\infty} ||a^n - a||_2 = 0 \text{ folgt.}$$

c) Geben Sie ein Beispiel an, sodass

$$\lim_{n\to\infty} ||a^n - a||_2 = 0 \text{ aber } \lim_{n\to\infty} ||a^n - a||_1 \neq 0.$$

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 9
Abgabefrist 12.12.2024

Aufgabe 9.1 (Quadrat, 8 Punkte)

Zeigen Sie: Unter allen Rechtecken desselben Flächeninhalts hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Aufgabe 9.2 (Oszillationen, 8 Punkte)

Für reelle Zahlen a und b sei eine Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin\left(\frac{1}{|x|^b}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f in allen $x \neq 0$ differenzierbar ist. Für welche a, b ist f auch in $x = 0$ differenzierbar? Wann ist in diesem Fall die Ableitung stetig oder wenigstens beschränkt in einer Umgebung von 0?

Hinweis: Für $b < 0$ können Sie die intuitive Aussage: „$\sin(x)$ verhält sich wie x nahe der Null“ durch die Restgliedabschätzung rigoros machen.

Aufgabe 9.3 (Potenzreihen differenzieren, 8 Punkte)

a) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie: f ist in $(-R, R)$ differenzierbar.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Reihe $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ebenfalls Konvergenzradius R hat. Schätzen Sie dann die Differenz zwischen $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und g ab, indem sie die Summation nach dem N-ten Glied abbrechen. Nutzen Sie den Schrankensatz um die Summanden von $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n x^n - a_n x_0^n}{x-x_0}$ zu kontrollieren.

b) Zeigen Sie: Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Aufgabe 9.4 (Eine Funktionengleichung, 8[*] Punkte)

Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x)^5 + f(x) + x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Inverse von f.

---

[*] Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 10
Abgabefrist 19.12.2024

Aufgabe 10.1 (Ein hinreichendes Kriterium, 8 Punkte)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (a, b), zweimal differenzierbar in $x \in (a, b)$ und es gelte

$$f'(x) = 0 \quad \text{und } f''(x) > 0.$$

Zeigen Sie, dass f in x ein echtes lokales Minimum besitzt, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$f(x) < f(y) \text{ für alle } y \in B_\varepsilon(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend in $[x - \varepsilon, x]$ und streng monoton wachsend in $[x, x + \varepsilon]$ ist.

Aufgabe 10.2 (Fixpunkt, 8 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq \theta < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und durch $x_{n+1} := f(x_n)$ induktiv eine Folge in $\mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, dass (x_n) konvergiert und der Grenzwert $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ ein Fixpunkt von f ist, d.h. $f(x_*) = x_*$.
Hinweis: Schätzen Sie zunaechst $|x_{n+1} - x_{n+2}|$ gegen $|x_n - x_{n+1}|$ ab.

Aufgabe 10.3 (de L'Hospital, 8 Punkte)

Berechnen Sie mit der Regel von de L'Hospital die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ für $a \in \mathbb{R}$,

b) $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ für $a, b > 0$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{1-\cos x}$,

e) $\lim\limits_{x\searrow 0} e^{\frac{1}{x}}(1 - e^x)$,

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(1+x^2)}{(\log(x))^2}$.

Aufgabe 10.4 (Tangentenkriterium, 8 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn der Graph von f oberhalb jeder Tangente an den Graph von f liegt, d.h.

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x) \text{ für alle } x, y \in (a, b).$$

Aufgabe 10.5 (Differentialgleichungen, 8^* Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Zeigen Sie, dass

a) aus $f'(x) = af(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass f von der Form $f(x) = Ce^{ax}$ ist, wobei $C \in \mathbb{R}$ ist.

b) aus $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass f von der Form $f(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ ist, wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Betrachten Sie geeignete Linearkombinationen von f und f' und wenden Sie Teil a) an.

Bitte wenden.

c) aus $f''(x) + f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass f von der Form $f(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$ ist, wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Zur Differenz zweier Lösungen $g(x) = f(x) - \Big(f'(0)\sin(x) + f(0)\cos(x)\Big)$, *betrachten Sie* $g(x)^2 + g'(x)^2$.

---

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 11
Abgabefrist 09.01.2024

Aufgabe 11.1 (Monoton und Beschränkt ist Integrierbar, 8 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede monotone und beschränkte Funktion über $[a, b]$ integrierbar ist.

Aufgabe 11.2 (Integral durch Zwischensumme Berechnen, 8 Punkte)

Zeigen Sie durch Approximation mit geeigneten Zwischensummen, dass

a) $\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$,

b) $\int_1^a \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(a)$.

Hinweis: Wählen Sie geeignete Zerlegungen. Eine äquidistante Zerlegung eignet sich nicht für die b).

Aufgabe 11.3 (L^p-Norm, 8 Punkte)

Zu $f \in \mathcal{R}([a, b])$ und $p \in [1, \infty)$ definieren wir die L^p-Norm über

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p([a,b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Außerdem sei

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty([a,b])} := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Zu $p \geq 1$ definieren wir den dualen Exponenten $p' = \frac{p}{p-1}$,wobei $p' = \infty$ falls $p = 1$.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Ungleichungen für beschränkte integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gelten:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \qquad \text{und} \qquad \|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Hinweis: Wenden Sie Hölder- bzw. Minkowski-Ungleichung auf eine Zwischensummenapproximation des Integrals an.

b) Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{R}([a, b])$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq |b - a|^{1/2} \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Aufgabe 11.4 (Mittelwertsätze, 8 Punkte)

Leiten Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung her. Ist auch die umgekehrte Herleitung möglich?

Aufgabe 11.5 (Konvexität, 8^* Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für jede konvexe Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right),$$

für alle $x, y \in I$.

b) Jede stetige Funktion, die a) erfüllt ist konvex.
Hinweis: Sie können benutzen, dass jedes $\lambda \in (0,1)$ eine Darstellung der Form $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n 2^{-n}$ mit $\lambda_n = 0$ oder $\lambda_n = 1$ hat.

---

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 12
Abgabefrist 16.01.2024
Das Blatt wird korrigiert und in den Tutorien besprochen. Die
Inhalte sind prüfungsrelevant. Es werden allerdings keine Punkte mehr für die Klausurzulassung vergeben.

Aufgabe 12.1 (Substitution)

a) Es sei $f \in C^1([a,b])$ und f habe keine Nullstelle in $[a,b]$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_a^b f'(x)|f(x)|^s \,\mathrm{d}x \qquad \text{für } s \neq -1.$$

b) Berechnen Sie $\int_0^1 x(1+x^2)^n \,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12.2 (Integrale Berechnen)

a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}} \,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Hyperbelfunktionen beachten.

b) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

$$\int t^3 \arctan(t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad \int \sinh(t)\cos(t) \,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 12.3 (Riemann-Lebesgue)

Sei $f \in C^1([a,b])$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx) \,\mathrm{d}x = 0$$

gilt.

Aufgabe 12.4 (Alternative Definition des Logarithmus*)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Logarithmus nicht als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion sondern als Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ einzuführen. Wir definieren die Funktion $L\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ via

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie ohne Benutzung des Logarithmus:

a) L ist differenzierbar mit $L'(x) = \frac{1}{x}$;

b) L wächst streng monoton und ist konkav;

c) $L(xy) = L(x) + L(y)$;

d) $L(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

---

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Analysis I

Wintersemester 2024/25, Übungsblatt 13
Abgabefrist 23.01.2024
Das Blatt wird korrigiert und in den Tutorien der letzten Vorlesungswoche besprochen. Die Inhalte sind prüfungsrelevant. Es werden allerdings keine Punkte mehr für die Klausurzulassung vergeben.

Aufgabe 13.1 (Uneigentliche Integrale)

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^\infty \ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x. \qquad \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

Aufgabe 13.2 (Vertauschung)

Betrachten Sie die folgenden Funktionenfolgen:

a) $f_n(x) = nx^n(x-1)$,

b) $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$,

c) $f_n(x) = n^2xe^{-nx^2}$

Entscheiden Sie jeweils:

i) Konvergiert (f_n) gleichmäßig auf $[0,1]$?

ii) Gilt

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

Aufgabe 13.3 (Riemannsche Summen)

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Reihen

a) $a_n := \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ und

b) $a_n := \sum\limits_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$.

Aufgabe 13.4 (Reihendarstellung des Logarithmus)

Wir definieren die Polynome $f_n(y) = \sum\limits_{k=0}^n (-y)^k$. Zeigen Sie, dass für $|x|<1$ gilt

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(y)\,\mathrm{d}y$$

und folgern Sie die Reihendarstellung des Logarithmus, d.h.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \text{ für } |x|<1.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 13.5 (Taylorpolynome)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ von $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung an der Entwicklungsstelle $x_0 = \pi$ von $f(x) = e^{\sin x}$.

Aufgabe 13.6 (Eine Identität*)

Zeigen Sie: Ist $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \to L$ für $x \searrow 0$ und konvergiert $\int_r^\infty \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x$ für jedes $r > 0$, so gilt für beliebige $0 < a < b$:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x = L \ln \frac{b}{a}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\int_r^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x = \int_{ar}^{br} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

*Freiwillige Aufgabe.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Probeklausur

Analysis I

Alle Aussagen und Beweisschritte sind hinreichend zu begründen. Es sind nicht nur die Lösungen, sondern auch die Lösungswege anzugeben. Dabei können Sie Resultate aus der Vorlesung und den Übungsblättern nutzen, sofern Sie diese klar zitieren. Sie dürfen also (beispielsweise) eine Gleichheit nicht mit „Gilt nach Vorlesung“ begründen, sondern sollten stattdessen „Gilt nach Satz von Rolle“ schreiben. Die Bearbeitungszeit ist auf 120 Minuten ausgelegt.

Zur Bearbeitung der Aufgaben sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt. Insbesondere elektronische Hilfsmittel wie Taschenrechner, Handys und elektronische Wörterbücher sind verboten. Für ausländische Studierende sind Wörterbücher in Buchform erlaubt.

Aufgabe 1

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die inneren Punkte, Randpunkte und Häufungspunkte der durch

$$W := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \big|x^2 + y^2\big| \leq 1\big\} \setminus \big\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\big\}$$

gegebenen Menge.

Hier müssen Sie keinen Lösungsweg angeben, es genügt die Punkte richtig zu identifizieren.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt, dass auch $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = a$.

Aufgabe 4

a) Die Folge a_n sei gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-3)^{\frac{n}{2}}}{4^{\frac{n}{2}}} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n^4 - 4n^3\right) z^n$$

gegebenen Potenzreihe mit $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der folgenden Funktionenfolgen $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

a)

$$f_n(x) = e^{-nx}$$

b)

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \left(\dfrac{1}{n} - x\right) & \text{falls } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Aufgabe 6

a) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert, so dass $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ gilt.

b) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass f in a differenzierbar und g in a stetig (aber nicht notwendigerweise differenzierbar) ist. Ferner sei $f(a) = 0$. Zeigen Sie, dass fg in a differenzierbar ist, und berechnen Sie $(fg)'(a)$.

Aufgabe 7

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (aber nicht notwendigerweise stetig differenzierbar). Sei $x_1 < x_2 \in (a, b)$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_1) < c < f'(x_2)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ existiert, sodass

$$f'(x_0) = c.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $f(x) - cx$ ein lokales Minimum hat.

Aufgabe 8

a) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, f ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in (a,b)$ gilt

$$\Big(f'(x) - f'(y)\Big)(x-y) \geq 0.$$

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ |x| & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

i) f ist konvex.

ii) f ist konkav.

Prof. Dr. Barbara Niethammer
Lorena Pohl
Jens Scholten

Probeklausur

Analysis I

Alle Aussagen und Beweisschritte sind hinreichend zu begründen. Es sind nicht nur die Lösungen, sondern auch die Lösungswege anzugeben. Dabei können Sie Resultate aus der Vorlesung und den Übungsblättern nutzen, sofern Sie diese klar zitieren. Sie dürfen also (beispielsweise) eine Gleichheit nicht mit „Gilt nach Vorlesung“ begründen, sondern sollten stattdessen „Gilt nach Satz von Rolle“ schreiben. Die Bearbeitungszeit ist auf 120 Minuten ausgelegt.

Zur Bearbeitung der Aufgaben sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt. Insbesondere elektronische Hilfsmittel wie Taschenrechner, Handys und elektronische Wörterbücher sind verboten. Für ausländische Studierende sind Wörterbücher in Buchform erlaubt.

Aufgabe 1

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Lösung:

Induktionsanfang, $n = 1$: $\frac{1}{2} = \frac{2!-1}{2!}$ ist wahr.
Indukionsschritt, $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)! - n - 2}{(n+2)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)! - 1}{(n+2)!}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die inneren Punkte, Randpunkte und Häufungspunkte der durch

$$W := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left|x^2 + y^2\right| \leq 1\right\} \setminus \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1]\right\}$$

gegebenen Menge.

Hier müssen Sie keinen Lösungsweg angeben, es genügt die Punkte richtig zu identifizieren.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{innere Punkte } &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left|x^2 + y^2\right| < 1\right\} \setminus \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1]\right\} \\
\text{Randpunkte } &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left|x^2 + y^2\right| = 1\right\} \cup \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1]\right\} \\
\text{Häufungspunkte } &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left|x^2 + y^2\right| \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt, dass auch $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = a$.

Lösung:

Sei $s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ und $\epsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Daraus folgt für $n > N$

$$\begin{aligned} |s_n - a| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - a\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i - a| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1} |a_i - a| + \frac{1}{n}\sum_{i=N}^{n} |a_i - a| \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N-1} |a_i - a| + \frac{n-N}{2n}\epsilon. \end{aligned}$$

Sei nun $M \geq N$ so, dass $M > \frac{2\sum_{i=1}^{N-1}|a_i - a|}{\epsilon}$. Dann folgt für alle $n \geq M$

$$|s_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Somit gilt $s_n \to a$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 4

a) Die Folge a_n sei gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-3)^{\frac{n}{2}}}{4^{\frac{n}{2}}} & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n^4 - 4n^3\right) z^n$$

gegebenen Potenzreihe mit $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) Es gilt $|a_n| \leq \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^n$, was als geometrischer Reihe konvergiert, also ist die Reihe absolut konvergent.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{\text{umsortieren}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \overset{\text{def. von } a_n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \overset{\text{geo. Reihe}}{=} \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$$

b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 - 4(n+1)^3}{n^4 - 4n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 - 4\frac{(n+1)^3}{n^4}}{1 - 4\frac{n^3}{n^4}} = 1 =: q.$$

Damit gilt laut der Eulerformel für den Konvergenzradius $R = 1/q = 1$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der folgenden Funktionenfolgen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

a)

$$f_n(x) = e^{-nx}$$

b)

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \left(\frac{1}{n} - x\right) & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Lösung:

a) Wir sehen sofort $f_n(0) = 1 \to 1$. Und für $0 < x \leq 1$ gilt $e^{-nx} \to 0$ für $n \to \infty$. Also haben wir

$$f_n(x) \to \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Da die Grenzfunktion nicht stetig ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

b) Es gilt $f_n(0) = 0$ und für $x > 0$ ist $f_n(0) = 0$ für alle $n > \frac{1}{x}$. Also konvergiert f_n punktweise gegen die 0. Allerdings ist

$$f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4},$$

also kann die Konvergenz wieder nicht gleichmäßig sein.

Aufgabe 6

a) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert, so dass $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ gilt.

b) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass f in a differenzierbar und g in a stetig (aber nicht notwendigerweise differenzierbar) ist. Ferner sei $f(a) = 0$. Zeigen Sie, dass fg in a differenzierbar ist, und berechnen Sie $(fg)'(a)$.

Lösung:

a) Definiere $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ via $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$. Dann gilt $g(0) = -g(1)$ und g ist stetig. Entweder ist nun $g(0) = 0$ und damit $c = 0$ oder der Zwischenwertsatz gibt ein $c \in (0, \frac{1}{2})$ mit $g(c) = 0$, was die gewünschte Stelle ist.

b) Es gilt wegen $f(a) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} g(a+h) \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = g(a)f'(a), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Stetigkeit von g und die Differenzierbarkeit von f in a benutzen. Somit ist fg in a differenzierbar mit der Ableitung $(fg)'(a) = g(a)f'(a)$.

Aufgabe 7

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (aber nicht notwendigerweise stetig differenzierbar). Sei $x_1 < x_2 \in (a, b)$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_1) < c < f'(x_2)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ existiert, sodass

$$f'(x_0) = c.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $f(x) - cx$ ein lokales Minimum hat.

Lösung:

Sei

$$g(x) = f(x) - cx.$$

Da f differenzierbar ist, ist es stetig und somit auch $g(x)$. Damit existiert ein $x_0 \in [x_1, x_2]$, sodass $g(x_0) = \min_{x \in [x_1, x_2]} g(x)$. Außerdem gilt $g'(x_1) < 0$ und $g'(x_2) > 0$. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$g(x_1) > g(x) \text{ für alle } x \in (x_1, x_1 + \varepsilon) \text{ und } g(x_2) > g(x) \text{ für alle } x \in (x_2 - \varepsilon, x_2).$$

Also ist $x_0 \in (x_1, x_2)$ und damit $g'(x_0) = 0$, was $f'(x_0) = c$ impliziert.

Aufgabe 8

a) Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, f ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in (a,b)$ gilt

$$\Big(f'(x) - f'(y)\Big)(x-y) \geq 0.$$

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ |x| & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

i) f ist konvex.

ii) f ist konkav.

Lösung:

a) Nach dem Konvexitätskriterium für differenzierbare Funktionen gilt: f ist konvex genau dann, wenn f' monoton steigend ist.

Fall 1: $x > y$. $\Big(f'(x) - f'(y)\Big)(x-y) \geq 0 \iff f'(x) \geq f'(y)$

Fall 2: $x < y$. $\Big(f'(x) - f'(y)\Big)(x-y) \geq 0 \iff f'(x) \leq f'(y)$

Also gilt die Ungleichung genau dann, wenn f' monoton steigend ist.

b) Es gilt $f''(x) = 2$ für $x > 0$. Damit ist f auf keinen Fall konkav. Jedoch ist es auch nicht konvex, denn es gilt

$$\frac{1}{2}\Big(f(1/4) + f(-1/4)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 1\Big) < 0 = f(0).$$