Datenstrukturen und Algorithmen, SS 2024
Prof. Dr. P. Rossmanith
D. Cloerkes, M. Gehnen, D. Mock, N. Speetzen

Abgabe: 21.06.2024

Übungsblatt 09

Aufgabe T31

An einer fiktiven Universität werden Abschlussarbeiten nicht unbedingt von den Professor*innen bewertet, die die Arbeit ausgegeben haben, sondern alle Arbeiten werden auf die Professorenschaft verteilt. Die Verteilung soll so erfolgen, dass diese Rahmenbedingungen erfüllt sind:

- Jeder muss höchstens k Arbeiten bewerten.
- Jede Arbeit wird von genau einem bewertet.
- Es gibt eine Tabelle, welche besagt welche Professor*innen fachlich für jede Arbeit geeignet sind. Eine Arbeit darf nur von einer geeigneten Person bewertet werden.

Entwerfen Sie einen schnellen Algorithmus, der auf Flüssen basiert und eine geeignete Verteilung berechnen kann. Als Eingabe erhält er die Zahl k und die Tabelle der fachlichen Einigungen. Die Anzahl der Knoten sollte dabei nicht von k abhängen.

Erklären Sie kurz, wie ihr Algorithmus funktioniert und warum er korrekt ist. Geben Sie darüber hinaus kurz eine Interpretation eines Flusses auf dem Flussnetzwerk an an.

Hinweis: Sie müssen keinen Algorithmus angeben, der ein Flussproblem lösen kann. Ihre Aufgabe ist es vielmehr, ein Algorithmus anzugeben, der eine Instanz eines Flussproblems erzeugt (welches dann mit einem Algorithmus aus der Vorlesung gelöst werden kann).

Aufgabe T32

Das niederländische Fritten-Franchise „Vet Druipend“ hat die Stadt Heinsberg erschlossen, dabei jedoch den Markt übersättigt: An vielen Straßenkreuzungen stehen schon mehrere Pommesmobile, in einigen Straßen macht sich „Vet Druipend“ also schon selbst Konkurrenz! Das soll sich nun ändern: Künftig werden anstatt Kreuzungen einzelne Straßen von jeweils nur noch einem Mobil bedient. Aus Kostengründen soll diese Umstrukturierung geschehen, indem Mobile von den Kreuzungen in anliegende Straßen geschoben werden—natürlich soll weiterhin ganz Heinsberg bedient werden, es muss also jede Straße abgedeckt werden (Mobile, die bei dieser Maßnahme übrigbleiben, werden von „Vet Druipend“ abgestoßen).

Vereinfachen wir das Problem zu einem Graphenproblem. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit einer Knotenbeschriftung $p\colon V \to \mathbb{N}_0$. Jeder Knoten $v \in V$ kann bis zu $p(v)$ benachbarte Kanten abdecken. Gefragt ist, ob alle Kanten des Graphen so abgedeckt werden können. Formal suchen wir eine Funktion $g\colon E \to V$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $g(e) = v \Rightarrow e$ ist inzident zu v
2. $|g^{-1}(v)| \leq p(v)$ für alle $v \in V$

Beschreiben Sie, wie das obige Problem als ganzzahliges Flussproblem modelliert werden kann. Genauer soll der maximale, ganzzahlige Fluss betraglich genau dann der Anzahl der Kanten entsprechen, falls eine solche Funktion g existiert.

In diesem Beispiel gibt es 38 Frittenmobile auf 19 Kreuzungen, welche auf die angrenzenden 38 Straßen verschoben werden sollen. Knapp, nicht wahr? Geht es dennoch? (Dieses Beispiel ist nicht Teil der Aufgabe)

T33 optional, falls noch genug Zeit ist:

Aufgabe T33

Gegeben ist ein ungerichteter Graph G mit n Knoten und m Kanten. Er ist durch Adjazenzlisten repräsentiert. Wir nennen einen ungerichteten Graphen *zusammenhängend*, wenn alle Knoten paarweise durch einen Pfad verbunden sind.

a) Wie kann man in linearer Zeit, also in $O(n + m)$ Schritten, feststellen, ob G zusammenhängend ist?

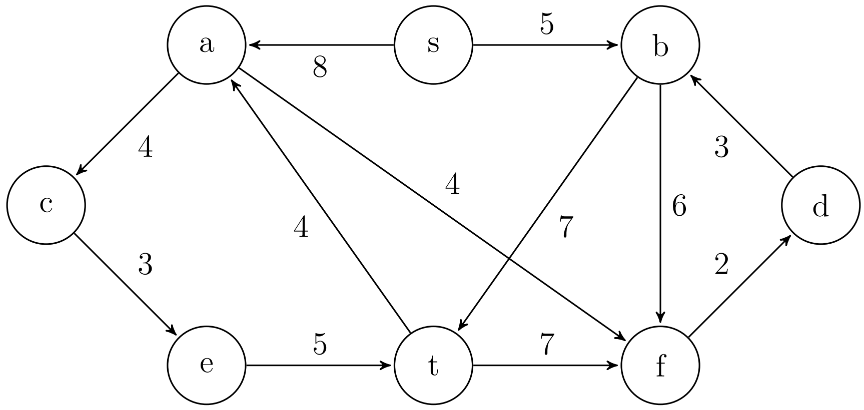
b) Wir nennen einen Graphen G *dreifach kanten-zusammenhängend,* wenn G zusammenhängend bleibt, selbst wenn man zwei beliebige Kanten entfernt. Zeichnen Sie zwei Graphen: links einen Graphen, der zusammenhängend, aber nicht dreifach kanten-zusammenhängend ist und rechts einen Graphen, der dreifach kanten-zusammenhängend ist.

c) Den dreifachen Kanten-Zusammenhang eines Graphen kann man feststellen, indem man für alle $O(m^2)$ Kantenpaare testet, ob der Graph zusammenhängend ist, nachdem man das Kantenpaar entfernt hat. Die Laufzeit dieses einfachen Verfahrens ist $O(m^2(n+m))$.

   Entwerfen Sie ein Verfahren, welches dieselbe Aufgabe in $O(n^2(n + m))$ Schritten löst. Beschreiben Sie es ausreichend ausführlich und begründen Sie kurz seine Korrektheit und Laufzeit.

Aufgabe H29 (10 Punkte)
Beweisen Sie den dritten Punkt von Lemma A für Flüsse: $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ für $X, Y, Z \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$, falls f ein Fluss für $G = (V, E)$ ist.

Aufgabe H30 (14 Punkte)
Betrachten Sie das folgende Flussnetzwerk:



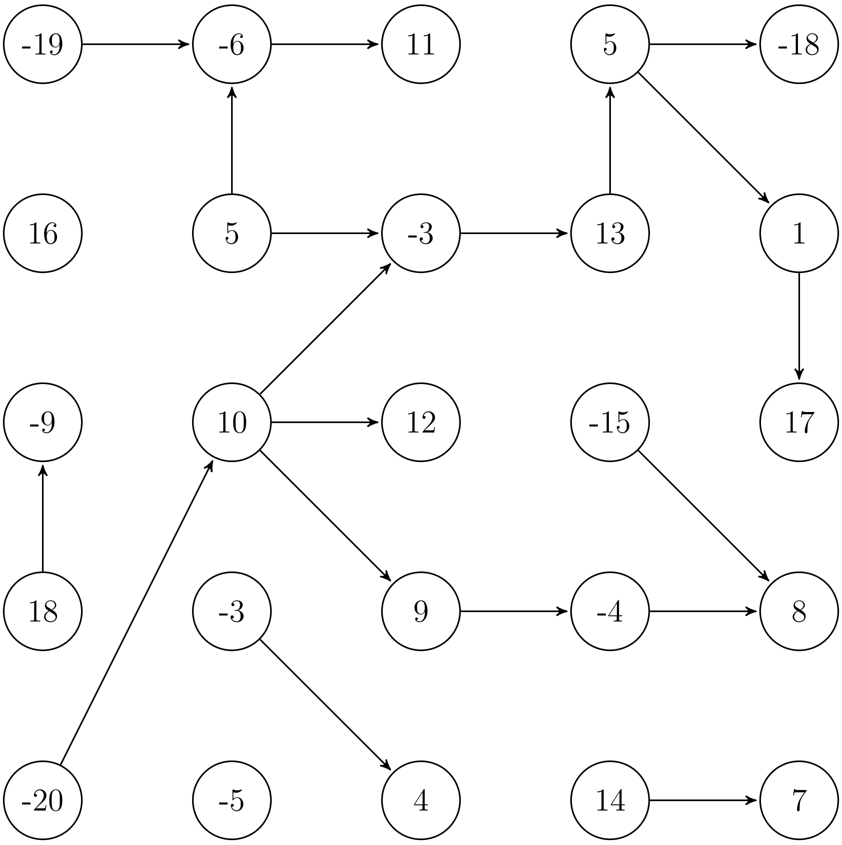
a) Berechnen Sie einen maximalen Fluss und geben Sie ihn an. Wie groß ist sein Wert?

b) Finden Sie zwei verschiedene minimale Schnitte und geben Sie beide an.

Aufgabe H31 (16 Punkte)
Im Informatikstudium gibt es eine große Auswahl an Wahlpflichtfächern, sodass einem Studierenden die Idee kam, die optimalen Wahlpflichtfächer algorithmisch herauszufinden. Hierbei ist jedem Kurs $k_i \in K$ jeweils ein Spaßfaktor $s_i \in \mathbb{Z}$ zugeordnet, wobei $s_i > 0$ für positiven Spaß steht und Kurse mit negativen Werten $s_i < 0$ lieber zu vermeiden sind.
Leider können viele Kurse erst besucht werden, falls bestimmte vorausgesetzte Kurse bereits vorher besucht wurden. Diese Abhängigkeiten sind als Paare (i, j) gegeben, wobei hier Kurs k_i vor Kurs k_j belegt werden muss. Dies kann dazu führen, dass das Besuchen mancher Kurse sinnvoll ist, auch wenn sie keinen Spaß machen, weil der Spaß späterer Kurse das Leiden ausgleicht. Ziel ist es nun, eine beliebige Menge an Kursen auszuwählen, sodass der aufsummierte Spaßfaktor der Auswahl maximal ist.
In dem folgenden Graphen ist ein Beispiel für Spaßfaktoren und Kursabhängigkeiten gegeben. Die Spaßfaktoren s_i stehen in den zugehörigen Knoten und die Abhängigkeiten (i, j) werden durch gerichtete Kanten $e_{i,j}$ dargestellt.
Entwerfen Sie einen effizienten Algorithmus, mit dem sich die optimale Auswahl an Kursen berechnen lässt und begründen Sie dessen Korrektheit. Hierbei geht es primär darum, dieses Problem so zu modellieren, dass aus der Vorlesung bekannte Algorithmen für Flüsse oder Schnitte angewendet werden können. Ihre Lösung sollte nicht nur für das genannte Beispiel funktionieren, sondern sich auf beliebige Graphen dieser Art übertragen lassen, damit alle Studierenden verschiedenster Studiengänge maximal viel Spaß haben können. Geben Sie zudem für das untere Beispiel die optimale Auswahl an.

Hinweise:

- Wir gehen hier davon aus, dass beliebig viele Kurse gewählt werden können, solange die Abhängigkeiten erfüllt sind.
- Ein minimaler s-t Schnitt kreuzt niemals Kanten von S nach T mit unendlich großem Kantengewicht (falls mindestens ein anderer Schnitt existiert).


-19
-6
11
5
-18
16
5
-3
13
1
-9
10
12
-15
17
18
-3
9
-4
8
-20
-5
4
14
7