RWTH Institut für Mathematik

Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

7. Übung

Abgabetermin B-Teil 26.05.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **26.05.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II“ in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 24.05.2022 und am 25.05.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A30
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ mit $x_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$, sowie $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

(i) Seien weiterhin Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f(\xi_k), & x \in (x_{k-1}, x_k), k \in \{1, \ldots, n\} \\ f(x), & x = x_k, k \in \{0, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergieren.

(ii) Seien u_n und o_n gegeben durch $u_n(x) = \inf_{y\in[x_{k-1},x_k]} f(y)$ und $o_n(x) = \sup_{y\in[x_{k-1},x_k]} f(y)$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$, sowie $u_n(x) = o_n(x) = f(x)$ für $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$. Beweisen Sie, dass u_n und o_n gleichmäßig gegen f konvergieren.

Aufgabe A31
Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Aufgabe A32
Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass das sogenannte partikuläre Integral

$$x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

eine stetige reellwertige Funktion auf $[a, b]$ definiert. Ist diese Funktion auch gleichmässig oder Lipschitz-stetig?

Aufgabe A33
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Funktion f ist Riemann-integrierbar;

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren Riemann-integrierbare Funktionen $f_{+,\varepsilon}, f_{-,\varepsilon} : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f_{+,\varepsilon} \geq f \geq f_{-,\varepsilon}$ und $\int_a^b (f_{+,\varepsilon} - f_{-,\varepsilon})\, \mathrm{d}x < \varepsilon$.

Teil B

Aufgabe B28 [14 Punkte]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ mit $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, sowie $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Seien weiterhin Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f(\xi_k), & x \in (x_{k-1}, x_k), k \in \{1, \dots, n\} \\ f(x), & x = x_k, k \in \{0, \dots, n\}. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, also dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe B29 [4 Punkte]
Sei $p > 0$. Berechnen Sie deren Grenzwert für $n \to \infty$ von

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}.$$

Aufgabe B30 [6 Punkte]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ mit $a < b$ und $f \geq 0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

(ii) Es gilt $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe B31 [7 Punkte]
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe B32 [4+5=9 Punkte]
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die punkteweise gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(i) Beweisen Sie, dass f nicht Riemann-integrabel sein muss.

(ii) Es gelte nun zusätzlich, dass die Funktionen f_n stetig sind und dass f Riemann-integrabel ist. Beweisen Sie, dass $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ nicht gelten muss.