Übungsblatt 12 **16.12.2025**

Stochastik, WiSe 2025/2026

Prof. Dr. Florian Heinrichs, Yvonne Albrecht, Johannes Dreßen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Aufgabe 1 Die Zufallsgröße X besitzt die Verteilungsdichte

$$f(x;\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} \cdot (1-x)^{\frac{1}{\vartheta}-1}, \quad 0 \leq x < 1; 0 < \vartheta < \infty$$

Aufgrund einer Stichprobe vom Umfang n der Zufallsgröße X bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung für ϑ.

Aufgabe 2 Um Aufschluss über den - als normalverteilt vorausgesetzten - Wasserverbrauch X im Kochwaschprogramm bei einem neu entwickelten Waschmaschinenmodell zu gewinnen, wurden 10 Probeläufe durchgeführt. Dabei erhielt man für die Stichprobenvarianz $s^2 = \frac{6{,}25}{9}\ l^2$ und den mittleren Wasserverbrauch $\overline{x} = 102{,}4\ l$.

(a) Für die Standardabweichung von X wird (aufgrund der Erfahrungen mit den bisherigen Modellen desselben Herstellers) der Wert $\sigma = 0{,}7\ l$ als bekannt angenommen. Führen Sie für diesen Fall eine Intervallschätzung für $\mathbb{E}[X]$ zum Konfidenzniveau 0,99 durch.

(b) Wie hoch ist bei einem Vertrauensniveau 0,99 der mittlere Wasserverbauch höchstens, wenn die Varianz unbekannt ist?

Aufgabe 3 Eine Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit unbekanntem Parameter $a \neq 0$. a soll mit der Funktion

$$F(X_1, \cdots, X_n) = \frac{2}{n} \cdot (X_1 + \cdots + X_n)$$

geschätzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass $F(X_1, \cdots, X_n)$ erwartungstreu für a ist.

(b) Geht die Varianz von $F(X_1, \cdots, X_n)$ im Grenzwert gegen 0?

Aufgabe 4 Von fünf Schweinen liegen Messwerte der Speckdichte Y (in mm) und des Gewichts X (in kg) vor.

Schwein Nr.	1	2	3	4	5
Gewicht	105	108	115	122	125
Speckdichte	10,4	11,5	12,2	11,9	14

(a) Berechnen Sie den Mittelwert des Gewichts sowie der Speckdichte der Schweine.

(b) Bestimmen Sie nun die Regressionsgerade nach der in der Vorlesung besprochenen Methode.