

## Übungsblatt 11

02./03.06.2025

1. Sind die folgenden Funktionen im Punkt  $(0, 0)$  stetig?

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Lassen sich folgende Funktionen im Nullpunkt stetig ergänzen und, wenn ja, wie?

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{x^3 + 2yx^2 + xy^2 + 2y^3}{x + 2y}$$

3. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie die Tangentialebene der Funktion

$$f(x, y) = x \cdot \ln(y) \cdot e^{x \cdot y} + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$

in vektorieller und analytischer Form.

4. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben seien

$$f(x, y, z) = x^2 \cdot y + (2x + y^2)^2 - x \cdot y \cdot z^3, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

- a) den Gradienten von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- b) die Gleichung für die Tangentialebene von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- c) die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  in Richtung des Vektors  $\vec{a}$ .
- d) die Richtung an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$ , in der die Richtungsableitung von  $f$  maximal wird, und den Wert in dieser Richtung.

5. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 \cdot y - y^3 \cdot x + 1$$

im Punkt

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. **(Präsentation der Lösung)** Differenzieren Sie implizit

a)  $(x^2 + y^2)^2 - 2x \cdot (x^2 + y^2) = y^2$     b)  $y^3 - 2x \cdot y^2 = \frac{1}{x}$

7. **(Präsentation der Lösung)** Betrachten Sie die Strömungsgeschwindigkeitsvektoren an den Raumkoordinaten  $(x, y, z)$ .

a) Sei zunächst ein Fluss mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass ein solches Feld quellen- und wirbelfrei ist.

b) Sei nun das Feld mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit parallel zur  $x$ -Achse für  $x > 0$  gemäß

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie nun, dass dieses Feld Quellen hat, jedoch wirbelfrei ist.