$\boxed{1.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Anwesenheitsaufgaben Tutorium (für die Woche 14.10. - 18.10.)

Aufgabe A1. Seien X und Y Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $X \subseteq Y$;

(ii) $X \cap Y = X$;

(iii) $X \cup Y = Y$;

(iv) $X \setminus Y = \varnothing$.

Aufgabe A2. Zeigen Sie: Für all $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe A3. Sei $n \geq 1$. Wieviele bijektive Abbildungen

$$\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

gibt es? (Mit Beweis) Finden Sie das minimale n mit der Eigenschaft: Es existieren bijektive Abbildungen

$$f, g \colon \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

mit $f \circ g \neq g \circ f$.

Aufgabe A4. Sei K ein Körper, und seien $a, b \in K$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt nur ein Einselement in K;

(ii) $(-a)b = -(ab)$.

(Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome $(A1), \dots, (A4)$, $(M1), \dots, (M4)$, (D) Sie benutzen.)

****

Hausaufgaben (Abgabe: 18.10.)

Aufgabe H1. Seien A, B, X, Y Mengen, und sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Geben Sie für jede der folgenden Behauptungen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

(i) Für alle Teilmengen Y_1 und Y_2 von Y gilt $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(ii) Für alle Teilmengen X_1 und X_2 von X gilt $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

(iii) Für alle $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ gilt $f(X' \cap f^{-1}(Y')) = f(X') \cap Y'$.

(iv) $(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$.

(v) $(A \times X) \cup (B \times Y) = (A \cup B) \times (X \cup Y)$.

Aufgabe H2. Sei $X \neq \varnothing$ eine endliche Menge und sei $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Es existiert ein $m \geq 1$ mit der Eigenschaft: Es gibt ein $x \in X$ mit $f^m(x) = x$. ($f^m = f \circ \cdots \circ f$ ist die m-fache Komposition von f.)

Aufgabe H3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(i) Zu jedem $a \in K$ gibt es nur ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$;

Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

(ii) Falls $ab = 0$, so gilt $a = 0$ oder $b = 0$, d.h. K ist **nullteilerfrei**;

(iii) $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$ falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$;

(iv) $(-a)(-b) = ab$;

(v) $-(-a) = a$.

(Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome $(A1), \dots, (A4)$, $(M1), \dots, (M4)$, (D) Sie benutzen.)

Aufgabe H4. Sei K ein Körper, und sei $K^\times := K \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Es gibt keine bijektive Abbildung $e\colon K \to K^\times$ mit $e(a + b) = e(a)e(b)$ für alle $a, b \in K$. (Sie dürfen verwenden, dass das Polynom $X^2 - 1$ in K nur die Nullstellen 1 und -1 hat. Den Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ (d.h. $1 + 1 = 0$) sollte man getrennt betrachten.)

****

Regeln:

- Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Nach Absprache mit Ihrem/r Tutor*in. Deadline: Freitags 14:00 oder nach Absprache mit Ihrem/r Tutor*in.
- Zulässig sind Einzelabgaben und Abgaben in Zweiergruppen. Jedes Mitglied einer Zweiergruppe muss jede der bearbeiteten Aufgaben im Tutorium präsentieren können.
- Auf der ersten Seite sollen deutlich lesbar Ihre Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe stehen.
- Für jede gelöste Hausaufgabe gibt es 4 Punkte.
- Wer mindestens 50% der Punkte erzielt und aktiv am Tutorium teilnimmt, wird zur Klausur zugelassen.

$\boxed{2.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 25.10.)

Aufgabe H5. Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. (Die Abbildungen $+$ und $\cdot$ sind definiert wie in der Vorlesung.)

Aufgabe H6. Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Für alle $a \in K$ und $v, w \in V$ gilt:

(i) $0v = 0$;

(ii) $a0 = 0$;

(iii) $(-1)v = -v$;

(iv) $av = 0$ genau dann wenn $a = 0$ oder $v = 0$.

Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome (A1),...,(A4),(SM1),...,(SM4) Sie benutzen. Welche 0 ist jeweils gemeint? Die 0 aus K oder die 0 aus V?

Aufgabe H7. Zeigen Sie: Axiom (A2) in der Definition eines Vektorraums folgt bereits aus den anderen Axiomen.

Aufgabe H8. Seien U_1, U_2, W Unterräume eines Vektorraums V.

(i) Prüfen Sie, ob folgende Aussagen gelten:

$$(U_1 + U_2) \cap W = (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W),$$
$$(U_1 \cap U_2) + W = (U_1 + W) \cap (U_2 + W).$$

(ii) Zeigen Sie: Falls $U_1 \subseteq U_2$, so gilt

$$U_2 \cap (W + U_1) = (U_2 \cap W) + U_1.$$

(iii) Finden Sie einen Vektorraum V und Unterräume U_1, U_2, W von V mit

$$U_2 \cap (W + U_1) \neq (U_2 \cap W) + U_1.$$

****

$\boxed{3.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 01.11.)

Aufgabe H9. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Ist U ein Unterraum von W, so ist das Urbild $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V. Umgekehr sei U eine Teilmenge von W, so dass $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V ist. Ist dann U ein Unterraum von W?

Aufgabe H10. Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit $f^2 = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie: Falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so gilt $V = \mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V) \oplus \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V)$.

Aufgabe H11. Für Matrizen $A, B \in K^{n,n}$ sei $[A,B] := AB - BA$ der **Kommutator** von A und B. Für $n \geq 2$ und $\lambda \in K$ sei $J(n,\lambda) \in K^{n,n}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in K^{n,n}$ mit $[A, J(n,\lambda)] = 0$.

Aufgabe H12. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m,n}$. Die **Transponierte** $A^T = (b_{ji}) \in K^{n,m}$ von A ist dann definiert durch $b_{ji} := a_{ij}$ für $1 \leq j \leq n$ und $1 \leq i \leq m$. Zeigen Sie: Für $A \in K^{l,m}$ und $B \in K^{m,n}$ gilt $(AB)^T = B^T A^T$.

****

$\boxed{4.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 08.11.)

Aufgabe H13. Seien $A, B \in M_4(\mathbb{Q})$ definiert wie folgt:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie AB und BA.

Aufgabe H14. Sei $K = \mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie alle $A \in K^{2,2}$ mit $A^2 = 0$.

Aufgabe H15. Sei $K = \mathbb{Q}$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in K^{2,3}.$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(A)$.

Aufgabe H16. Sei $f\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - a_3 \\ a_3 - 2a_4 \\ 3a_1 - a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

für alle $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie die zugehörige Matrix $A_f \in \mathbb{Q}^{3,4}$ (hier benutzen wir die Notation aus der Vorlesung).

****

$\boxed{5.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 15.11.)

Aufgabe H17. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(A) = 0$ genau dann wenn $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe H18. Falls möglich, bestimmen Sie die Inversen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4,4}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{11}^{3,3}.$$

Aufgabe H19. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

invertierbar?

Aufgabe H20. Diese Aufgabe soll zum allgemeinen geometrischen Verständnis von linearen Abbildung beitragen und bezieht sich nicht direkt auf die aktuell behandelten Vorlesungsinhalte. Im Folgenden wollen wir 14 Typen von *diskreten dynamischen Systemen* untersuchen.

Sei $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ eine der im Folgenden aufgelisteten Matrizen. Untersuchen Sie für ausgesuchte Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ wie die **Bahn**

$$\mathcal{O}(v) := \{A^n(v) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

von v aussieht, und benutzen Sie dies, um die 14 Fälle den 14 Bildern auf der folgenden Seite zuzuordnen.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Wir unterscheiden 5 Fälle:

$$\begin{aligned} \text{Fall 1}: &\quad \lambda_1 > \lambda_2 > 1, \\ \text{Fall 2}: &\quad \lambda_1 > 1 = \lambda_2, \\ \text{Fall 3}: &\quad \lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0, \\ \text{Fall 4}: &\quad \lambda_1 = 1 > \lambda_2 > 0, \\ \text{Fall 5}: &\quad 1 > \lambda_1 > \lambda_2 > 0. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\text{Fall 6}: \quad \lambda > 1, \qquad \text{Fall 7}: \quad \lambda = 1,$$
$$\text{Fall 8}: \quad \lambda < 1.$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\text{Fall 9}: \quad \lambda > 1, \qquad \text{Fall 10}: \quad \lambda = 1,$$
$$\text{Fall 11}: \quad \lambda < 1.$$

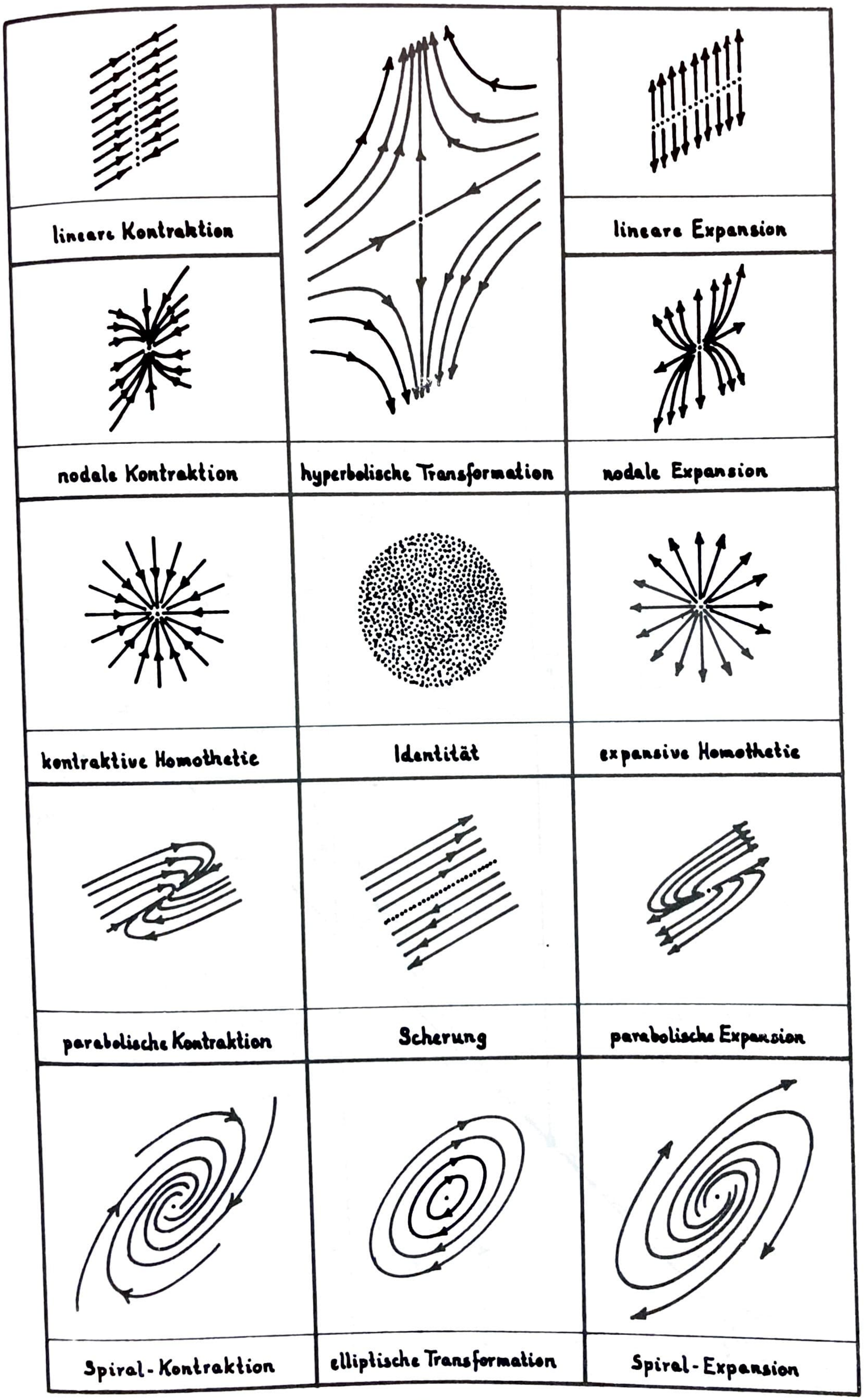
Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit $b \neq 0$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\text{Fall 12}: \quad \sqrt{a^2 + b^2} > 1,$$
$$\text{Fall 13}: \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 1,$$
$$\text{Fall 14}: \quad \sqrt{a^2 + b^2} < 1.$$

****


lineare Kontraktion
lineare Expansion
nodale Kontraktion
hyperbolische Transformation
nodale Expansion
kontraktive Homothetie
Identität
expansive Homothetie
parabolische Kontraktion
Scherung
parabolische Expansion
Spiral-Kontraktion
elliptische Transformation
Spiral-Expansion

Figur 9

$\boxed{6.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 22.11.)

Aufgabe H21. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 1 \\ X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 + X_3 &= 1 \end{aligned}$$

über dem Körper

(i) $K = \mathbb{Q}$,

(ii) $K = \mathbb{F}_2$.

Aufgabe H22. Für welche $a \in \mathbb{Q}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} X_1 + aX_2 &= 1 \\ (a-1)X_1 - 6X_2 &= 1 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Q}$

(i) eindeutig lösbar,

(ii) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar,

(iii) nicht lösbar?

Aufgabe H23. Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem, wobei $A \in K^{m,n}$. Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(i) Sei $m = n$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar genau dann wenn A invertierbar ist.

(ii) Sei $m > n$. Dann ist $Ax = b$ nicht eindeutig lösbar.

(iii) $Ax = 0$ ist immer lösbar.

(iv) Sei $m < n$. Dann ist $Ax = 0$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Aufgabe H24. Sei V ein Vektorraum, und sei $M \subseteq V$. Ferner seien U und W Unterräume von V. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Lin}(M)$ ist gleich dem Durchschnitt aller Unterräume U von V mit $M \subseteq U$;

(ii) $M = \mathrm{Lin}(M)$ genau dann wenn M ein Unterraum von V ist;

(iii) $\mathrm{Lin}(U \cap W) = U \cap W$;

(iv) $\mathrm{Lin}(U \cup W) = U + W$.

Seien M_1 und M_2 Teilmengen von V. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(v) $\mathrm{Lin}(M_1 \cap M_2) = \mathrm{Lin}(M_1) \cap \mathrm{Lin}(M_2)$;

(vi) $\mathrm{Lin}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{Lin}(M_1) + \mathrm{Lin}(M_2)$.

****

$\boxed{7.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 29.11.)

Aufgabe H25. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ ein linear unabhängiges Vektorsystem. Zeigen Sie:

(i) $(v_1, \dots, v_n, v_1 + \cdots + v_n)$ ist linear abhängig.

(ii) Jede n-elementige Teilmenge von $\{v_1, \dots, v_n, v_1 + \cdots + v_n\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe H26. Sei $B \subseteq V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) B ist eine Basis von V.

(ii) B ist ein **minimales EZS** von V, d.h. für alle $b \in B$ gilt
$$\operatorname{Lin}(B \setminus \{b\}) \neq \operatorname{Lin}(B) = V.$$

(iii) B ist eine **maximale linear unabhängige Teilmenge** von V, d.h. B ist linear unabhängig und $B \cup \{w\}$ ist linear abhängig für alle $w \in V \setminus B$.

Aufgabe H27. Sei $f\colon V \to W$ eine Isomorphismus von Vektorräumen, und sei B Teilmenge von V. Zeigen Sie: B ist eine Basis von V genau dann wenn $f(B)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe H28.

(i) Zeigen Sie: Die Anzahl der Elemente eines endlichen Körpers K ist immer eine Primzahlpotenz. (Hinweis: Betrachten Sie den kleinsten Teilkörper von K, welcher das Einselement enthält.)

(ii) Konstruieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit genau 27 Lösungen.

(iii) Zeigen Sie: Es gibt kein lineares Gleichungssystem mit genau 28 Lösungen.

****

$\boxed{8.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 06.12.)

Aufgabe H29. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Sei $m := \dim(V) - \dim(U) \geq 1$. Zeigen Sie: Es gibt $f_1, \ldots, f_m$ im Dualraum V^*, so dass

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Kern}(f_i).$$

Aufgabe H30. Seien V und W Vektorräume mit $\dim(V), \dim(W) < \infty$, und sei U ein Unterraum von V mit $\dim(W) \geq \dim(V) - \dim(U)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $\mathrm{Kern}(f) = U$.

Spezialfall: Sei U ein Unterraum von K^n. Dann gibt es ein $A \in K^{n,n}$, so dass $U = \mathcal{L}(A, 0)$.

Aufgabe H31. Seien $U_1, \ldots, U_n$ endlich-dimensionale Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i) - \sum_{i=2}^{n} \dim((U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i).$$

Aufgabe H32. Zeigen Sie, dass der Zassenhaus-Algorithmus (siehe Abschnitt 7.10.6 des Skripts) das gewünschte Ergebnis liefert. Konstruieren Sie ein aussagekräftiges Beispiel, welches nicht identisch mit dem Beispiel auf der Wikipedia Seite ist.

****

$\boxed{9.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 13.12.)

Aufgabe H33. Seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dann ist B eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^2$, und C ist eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^3$. Sei $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ der Homomorphismus mit

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $f(v)$ wobei $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe H34. Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Basen von K-Vektorräumen V bzw. W. Wir wissen, dass

$$D := (f_{(b_1,c_1)}, \dots, f_{(b_n,c_1)}, f_{(b_1,c_2)}, \dots f_{(b_n,c_2)}, \dots, f_{(b_1,c_m)}, \dots, f_{(b_n,c_m)})$$

eine geordnete Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$ ist. Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ sei $B_{ij} \in K^{m,n}$ die Matrix mit einer Eins an der Stelle (i, j) und Nullen sonst. Dann ist

$$E := (B_{11}, \dots, B_{1n}, B_{21}, \dots, B_{2n}, \dots, B_{m1}, \dots, B_{mn})$$

eine geordnete Basis von $K^{m,n}$. Wir wissen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(V,W) \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}"] \arrow[d, "\mathbf{c}_D"] & K^{m,n} \arrow[d, "\mathbf{c}_E"] \\
K^{mn} \arrow[r, "\mathbf{c}_{D,E}(\mathbf{c}_{B,C})"] & K^{mn}
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Bestimmen Sie $\mathbf{c}_{D,E}(\mathbf{c}_{B,C})$.

Aufgabe H35. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, und sei

$$f\colon M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$$

definiert durch $f(X) := AX - XA$.

(i) Zeigen Sie, dass f $\mathbb{Q}$-linear ist.

(ii) Konstruieren Sie Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

(iii) Wählen Sie eine geordnete Basis B von $M_2(\mathbb{Q})$, und berechnen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{B,B}(f)$.

Aufgabe H36. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, und seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $C = (c_1, \ldots, c_m)$ geordnetet Basen von V bzw. W. Sei $A = \mathbf{c}_{B,C}(f)$. Seien $B^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ und $C^* = (c_1^*, \ldots, c_m^*)$ die entsprechenden geordneten dualen Basen der Dualräume V^* bzw. W^*, und sei

$$f^* \colon W^* \to V^*$$

definiert durch $g \mapsto g \circ f$. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{C^*,B^*}(f^*)$.

****

$\boxed{10.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 20.12.)

Aufgabe H37. Beweisen Sie Lemma 8.18.

Aufgabe H38. Zeigen Sie: Zu jeder Matrix $A \in K^{m,n}$ gibt es eine Matrix $B \in K^{n,m}$ mit
$$ABA = A \quad \text{und} \quad BAB = B.$$
(Wählen Sie gute Basen...)

Aufgabe H39. Für $K = \mathbb{F}_3$ und $K = \mathbb{Q}$, sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in K^{2,2}$.

Seien
$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
Basen von K^2. Bestimmen Sie die Matrizen in der Gleichung
$$\mathbf{c}_{C,C}(A) = \mathbf{c}_{B,C}(\mathrm{id}_{K^2})\mathbf{c}_{B,B}(A)\mathbf{c}_{C,B}(\mathrm{id}_{K^2}).$$

Aufgabe H40.

(i) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $f^2 = \mathrm{id}_V$;

(b) Es gibt eine geordnete Basis B von V und $r, s \in \mathbb{N}$ mit
$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_s \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Für eine Basis B von V betrachte die Vektoren $b+f(b)$ und $b-f(b)$ wobei $b \in B$.)

(ii) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass in (i) die Voraussetzung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ benötigt wird.

****

$\boxed{11.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 10.01.)

Aufgabe H41. Bestimmen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4,4}$$

mit Hilfe des verfeinerten Gauß-Algorithmus (d.h. man verwende nur elementare Zeilenumformungen vom Typ I) und mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Welcher Algorithmus ist i.A. schneller?

Aufgabe H42. Seien $a, b \in K$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in K^{n,n}.$$

Zeigen Sie: $\det(A) = (b-a)^{n-1}(b+(n-1)a)$.

Aufgabe H43. Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n,n}$$

die zugehörige **Vandermonde Matrix**. Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Aufgabe H44. Für welche $a \in \mathbb{Q}$ ist die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4-a & -1 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ -9 & 3 & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$$

gleich 0?

****

$\boxed{13.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 24/25

****

Hausaufgaben (Abgabe: 24.01.)

Aufgabe H49. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ mit $n \geq 1$ und $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$. Zeigen Sie: $\dim \operatorname{Eig}(A, 0) = 1$ genau dann wenn $a_{i,i+1} \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n-1$.

Aufgabe H50. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir definieren $\phi\colon V \to V$ durch $\phi(f)(x) := f(-x)$ für alle $f \in V$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: ϕ ist ein Endomorphismus von V, und es gilt $V = \operatorname{Eig}(\phi, 1) \oplus \operatorname{Eig}(\phi, -1)$.

Aufgabe H51. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(ii) Finden Sie die Eigenwerte von A in $\mathbb{R}$.

(iii) Finden Sie Basen der Eigenräume von A.

(iv) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe H52. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Ist A diagonalisierbar? Falls ja, so finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Ist S eindeutig bestimmt?

****