Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Übung - Blatt 5

Dieses Übungsblatt wird am 26.11.2025 in der Globalübung besprochen.

Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis **Mittwoch, 26.11.2025, um 14:00 Uhr** im Moodle-Raum hoch. Geben Sie bitte in Gruppen von 2 Studierenden ab und schreiben Sie *alle* Namen und Matrikelnummern auf Ihre Abgabe.

Bitte achten Sie bei Ihrer Abgabe besonders auf die formale Korrektheit Ihrer Lösung. Es gibt pro Aufgabe einen Punkt für das formal korrekte Aufschreiben Ihrer Lösung, markiert mit einem *.

Definition (Integritätsbereich)
Einen kommutativen Ring mit 1, etwa $(R, +, \cdot)$, für den zusätzlich gilt, dass für alle $a, b \in R$ aus $a \cdot b = 0$ bereits $a = 0$ oder $b = 0$ folgt (genannt Nullteilerfreiheit), nennen wir *Integritätsbereich.*

Aufgabe 1 (5+4+1* = 10 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich. Auf $R \times (R \setminus \{0\})$ ist durch

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 y_2 = y_1 x_2$$

eine Äquivalenzrelation gegeben. Sei $M/\sim := \{[(x, y)] \mid x \in R, y \in R \setminus \{0\}\}$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Zeigen Sie:

(a) Die Addition und die Multiplikation

$$[(x_1, y_1)] + [(x_2, y_2)] := [(x_1 y_2 + y_1 x_2, y_1 y_2)]$$
$$[(x_1, y_1)] \cdot [(x_2, y_2)] := [(x_1 x_2, y_1 y_2)]$$

in $M/\sim$ sind wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Vertreter.

(b) $(M/\sim, +, \cdot)$ ist ein Körper (der *Quotientenkörper* von R).
Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz müssen nicht gezeigt werden.

Aufgabe 2 (4+1+2+2+1*=10 Punkte)
Sei K ein Körper. Wir betrachten die Abbildung

$$(.)' \colon K[X] \to K[X] \colon p := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto p' := \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1},$$

die einem Polynom $p \in K[X]$ seine formale Ableitung $p' \in K[X]$ zuordnet.

(a) Zeigen Sie, dass $(\cdot)'$ ein K-Homomorphismus zwischen den K-Vektorräumen $K[X]$ ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, ob $(\cdot)'$ injektiv ist.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie im Falle $K = \mathbb{R}$, ob $(\cdot)'$ surjektiv ist.

(d) Beweisen oder widerlegen Sie im Falle $K = \mathbb{F}_2$, ob $(\cdot)'$ surjektiv ist.