Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 0, Bearbeitung in Präsenz in der ersten Übung

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraumes der Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

(i) Die Menge der lipschitzstetigen Funktionen.

(ii) Die Polynome vom Grad $\leq n$.

(iii) Die Menge der monoton wachsenden Funktionen.

(iv) Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$, also die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sodass Punkte $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ existieren für die gilt, dass f in jedem Teilintervall (x_{i-1}, x_i) konstant ist.

Aufgabe 2

Es sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem reellen Vektorraum V gegeben.

(i) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

(ii) Zeigen Sie, dass für $u \in V$ durch $\|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2}$ eine Norm auf V definiert wird.

Aufgabe 3

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $B(M, \mathbb{R}^d)$ der Klasse der beschränkten Funktionen $f : M \to \mathbb{R}^d$.

(i) Zeigen Sie, dass durch die in der Vorlesung definierte Supremumsnorm tatsächlich eine Norm auf $B(M, \mathbb{R}^d)$ definiert ist.

(ii) Sei $g \in B(M, \mathbb{R}^d)$ mit $g(x) > 0$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_g := \sup_{x \in M} \{g(x)|f(x)|\}$$

eine Norm auf $B(M, \mathbb{R}^d)$ definiert.

(iii) Bestimmen Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium an g, sodass $\|f\|_g$ zu $\|f\|_\infty$ auf $B(M, \mathbb{R}^d)$ äquivalent ist.

Aufgabe 4

Sei $(X, d))$ ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie:

(i) $M \setminus \partial M$ is offen.

(ii) $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist abgeschlossen.

(iii) ∂M ist abgeschlossen.