Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 1, Abgabe 16.4.

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass dann auch durch

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine Metrik auf X gegeben ist.

Aufgabe 2

(i) Zeigen Sie, dass $C^0([a, b])$ vollständig bezüglich der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $C^1([a, b])$ nicht vollständig bezüglich der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik ist.

Aufgabe 3

Auf $C^0([a, b])$ ist durch $\|f\|_{L^1} := \int_a^b |f(x)|\, dx$ die L^1-Norm gegeben. Untersuchen Sie, ob die L^1-Norm zur Supremumsnorm äquivalent ist.

Aufgabe 4

Zu $p \in (1, \infty]$ ist ℓ^p der Raum aller reellen Zahlenfolgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ bzw. $\sup_{k\geq 1} |x_k| < \infty$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$ bzw. $\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\geq 1} |x_k|$ eine Norm auf ℓ^p definiert wird.

(ii) Zeigen Sie, dass ℓ^p bezüglich $\|\cdot\|_{\ell^p}$ vollständig ist.

Aufgabenpunkte: Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe maximal 8 Punkte. Von Zeit zu Zeit wird es freiwillige Bonusaufgaben geben, die durch '*' gekennzeichnet sind und zusätzliche Punkte geben.

Genereller Hinweis: Resultate aus Analysis I können natürlich benutzt werden.