Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 15. 12. 2025

Übungsblatt 10 Analysis I WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 35.

Zeigen Sie mit dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium für Grenzwerte (5.2.3):

(a) Die durch $g(x) = \begin{cases} -2x, & x > 0 \\ -x+1 & x \leq 0 \end{cases}$ definierte Funktion besitzt in 0 keinen Grenzwert.

(b) Für die durch $h(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ definierte Funktion gilt $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

(c) Die durch $m(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ definierte Funktion besitzt in 0 keinen Grenzwert.

Aufgabe A 36.

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x)$$

nicht existiert.
Folgern Sie mit der selben Methode, dass

$$\lim_{x\to 0} \cos(\tfrac{1}{x})$$

nicht existiert.

Aufgabe A 37.

Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

falls existent.

Für diejenigen, die schon fertig sind und noch mehr lernen / üben wollen:

Aufgabe A 38.

Finden Sie zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := 5x + 1,$$

den Grenzwert L in $x_0 = 2$.
Bestimmen Sie ferner zu $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ein $\delta > 0$, so dass $0 < |x - x_0| < \delta$ impliziert, dass $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Finden Sie nun eine quadratische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem gleichen Grenzwert in $x_0 = 2$.
Untersuchen Sie, ob zum gegebenen ε das geeignete $\tilde{\delta}$ größer sein dürfte oder kleiner sein müsste als das zu f gefundene δ.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 39. (6 Punkte)

Zeigen Sie mit dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium für Grenzwerte (5.2.3): Die durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ 2 - x^2 & x > 0 \end{cases}$$

definierte Funktion besitzt in 0 keinen Grenzwert.

Aufgabe B 40. (4+4 Punkte)

(a) Beweisen Sie direkt anhand der Definition, dass

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} = \infty.$$

(b) Beweisen Sie anhand der Definition, dass

$$\lim_{x \to \infty} \tanh(x) = 1.$$

Aufgabe B 41. (3+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie das Sandwich-Theorem:
Seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Es gelte

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

für alle $x \in D$ und

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{in } D}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{in } D}} h(x) =: L \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{in } D}} g(x) = L.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Aufgabe B 42. (4 Punkte)

Seien $f : D \to M, g : M \to \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Es gelte $L \in M$,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{in } D}} f(x) = L,$$

und g sei in L stetig.
Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{in } D}} (g \circ f)(x) = g(L).$$

$\star$-Aufgabe. (5 Zusatzpunkte)

Wir wollen das Beispiel nach Definition 5.3.22 besser verstehen: Die Funktion f ist gegeben durch

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ wobei } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

wobei $\frac{p}{q}$ als vollständig gekürzt zu verstehen ist.
Zeigen Sie: f ist stetig in allen $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig in allen $x_0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.
Hinweis: Arbeiten Sie für den Nachweis der Stetigkeit in $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ mit $0 < \delta = \delta_k < \inf \left\{ \left| x_0 - \frac{p}{k} \right| : p \in \mathbb{Z} \right\}$ für $k \in \mathbb{N}$; dazu müssen Sie $\inf \left\{ \left| x_0 - \frac{p}{k} \right| : p \in \mathbb{Z} \right\} > 0$ zeigen (Tipp: $\varepsilon-$Charakterisierung des Infimums und B29 über Folgen in den ganzen Zahlen).

Diese Aufgabe ist eine reine Zusatzaufgabe für diejenigen von Ihnen, die etwas tiefer einsteigen wollen. Die Punkte der $*$-Aufgabe zählen nicht zu der maximal erreichbaren Punktzahl aller Blätter. Es sind also in diesem Sinne Bonuspunkte für die Klausurzulassung.