Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
21. November 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Grenzwertsätze

Poisson-Verteilung

- Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft in einem Fußballspiel mindestens ein Tor schießt
- Welche Verteilung hat $X \hat{=}$ "Anzahl der Tore"?
- Sei Y_1 der Indikator, dass in 90 Minuten ein Tor geschossen wird
  - Welche Verteilung hat Y_1? $\rightarrow Ber(p) = Bin(1, p)$
- Seien $Y_{2,i}$ Indikatoren, dass in der i-ten Halbzeit ein Tor geschossen wird $(i = 1, 2)$
  - Welche Verteilungen haben je $Y_{2,1}$ und $Y_{2,2}$? $\rightarrow Bin(1, \frac{p}{2})$
  - Welche Verteilung hat $Y_2 = Y_{2,1} + Y_{2,2}$? $\rightarrow Bin(2, \frac{p}{2})$
- Seien $Y_{3,i}$ Indikatoren, dass in der i-ten halben Stunde ein Tor geschossen wird $(i = 1, 2, 3)$
  - Welche Verteilungen haben $Y_{3,1}, Y_{3,2}, Y_{3,3}$? $\rightarrow Bin(1, \frac{p}{3})$
  - Welche Verteilung hat $Y_3 = Y_{3,1} + Y_{3,2} + Y_{3,3}$? $\rightarrow Bin(3, \frac{p}{3})$

Poisson-Verteilung

- Seien $Y_{n,i}$ Indikatoren, dass in den i-ten $\frac{90}{n}$ Minuten ein Tor geschossen wird ($i = 1, \ldots, n$), z.B.
  - $n = 6$: jeweils in 15 Minuten
  - $n = 18$: jeweils in 5 Minuten
  - $n = 90$: jeweils in 1 Minute
  - $n = 180$: jeweils in 30 Sekunden
  - $n = 540$: jeweils in 10 Sekunden
  - $n = 5400$: jeweils in 1 Sekunde
  - $\ldots$
- Welche Verteilungen haben $Y_{n,i}, i = 1, \ldots n$? $\rightarrow Bin(1, \frac{p}{n})$
- Welche Verteilung hat $Y_n = \sum_{i=1}^n Y_{i,n}$? $\rightarrow Bin(n, \frac{p}{n})$

Poisson-Verteilung

> Was wissen wir über die Verteilung?

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{p}{n}\right)^k\left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n-k}$$

> > $\mathbb{E}[Y_n] = n \cdot \frac{p}{n} = p$
> > $\text{var}(Y_n) = n \cdot \frac{p}{n} \cdot \left(1 - \frac{p}{n}\right) = p\left(1 - \frac{p}{n}\right)$

> Für große Werte von n, ist die Berechnung von $\mathbb{P}(Y_n = k)$ aufwändig, aber

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\tfrac{p}{n}\right)^k\left(1 - \tfrac{p}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}p^k\left(1 - \tfrac{p}{n}\right)^n\left(1 - \tfrac{p}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-k+1}{n}\frac{1}{(1-\frac{p}{n})^k}\frac{p^k}{k!}\left(1 - \tfrac{p}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-p}\frac{p^k}{k!}\end{aligned}$$

Poisson-Verteilung

- Für festes $k = 0, \ldots, n$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = e^{-p}\frac{p^k}{k!}$
- D.h. für n groß, können wir $Bin(n, \frac{p}{n})$ durch die Poisson-Verteilung approximieren
- Warum? Weil $e^{-p}\frac{p^k}{k!}$ leichter zu berechnen ist als

$$\binom{n}{k}\left(\frac{p}{n}\right)^k\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-k}$$

- Die Anzahl der Tore in einem Spiel ist etwa Poisson-verteilt
- Wie gut ist die Approximation?
  - Okay, falls $n \geq 20,\ p \leq 0.05$
  - Gut, falls $n \geq 100,\ np \leq 10$
- Für $X \sim Pois(\lambda)$ für $\lambda > 0$ gilt $\mathbb{E}[X] = \mathrm{var}(X) = \lambda$
- Für $X \sim Pois(\lambda), Y \sim Pois(\mu)$ unabh. gilt $X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$

Poisson-Verteilung

Beispiel 123

- In der Saison 2023/2024 hat Fortuna Düsseldorf durchschnittlich $\lambda_2 = \frac{72}{34}$ Tore pro Spiel geschossen
- Der 1. FC Köln hat in der Saison durchschnittlich $\lambda_2 = \frac{28}{34}$ Tore pro Spiel geschossen
- Beim Spiel Düsseldorf gegen Köln sei X_1 die Anzahl der Düsseldorfer und X_2 die Anzahl der Kölner Tore
- $X_1 \sim Pois(\frac{72}{34}), X_2 \sim Pois(\frac{28}{34})$
- Angenommen X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig

Der 1. FC Köln ist in die 2. Bundesliga abgestiegen, Fortuna Düsseldorf ist nicht in die Bundesliga aufgestiegen

Poisson-Verteilung

Beispiel 124

Für X_1, X_2 unabhängig gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) &= \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j) \\ &= e^{-72/34-28/34}\frac{(72/34)^i}{i!}\frac{(28/34)^j}{j!}\end{aligned}$$

X_2 \ X_1	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0.053	0.112	0.118	0.084	0.044	0.019	0.007	...
1	0.043	0.092	0.098	0.069	0.036	0.015	0.005	...
2	0.018	0.038	0.040	0.028	0.015	0.006	0.002	...
3	0.005	0.010	0.011	0.008	0.004	0.002	0.001	...
...	...							

Poisson-Verteilung

Übung 71

Ein Detektor misst für eine Probe von radioaktivem Uran eine Zerfallsrate von 3 Atomen pro Sekunde.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau 4 Zerfälle in einem Zeitraum von 2 Sekunden.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für weniger als 2 Zerfälle in einem Zeitraum von 2 Sekunden.

Gesetz der großen Zahlen

- Sei X_i die Augenzahl beim n-fachen Würfelwurf
- Offensichtlich: $\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n\to\infty} \infty$
- Außerdem:

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 3.5n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

und

$$\mathrm{var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) = \tfrac{35}{12}n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- Das ist wenig hilfreich

Gesetz der großen Zahlen

- Interessanter: Was passiert mit $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$?
- Für den Erwartungswert gilt

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\Big] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 3.5$$

- Für die Varianz gilt

$$\mathrm{var}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{var}(X_i) = \tfrac{35}{12}\tfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

- Der Durchschnitt "konvergiert" für $n \to \infty$ gegen den Erwartungswert
- Aber was bedeutet Konvergenz für Zufallsvariablen?

Gesetz der großen Zahlen

- Was bedeutet Konvergenz für Zufallsvariablen?
- Falls wir immer eine 6 würfeln, ist $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 6$
- Aber die Wahrscheinlichkeit dafür geht gegen 0
- Genauer: Nach der Chebychev Ungleichung gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\big(|\bar{X}_n - 3.5| > \varepsilon\big) \leq \frac{\mathsf{var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{35}{12n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

- Die Konvergenz gilt nicht nur beim Würfeln!

Gesetz der großen Zahlen

Satz 33: (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit endlicher Varianz σ^2. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Beweis: Analog zur Berechnung für den Würfelwurf, nur mit var$(X_i) = \sigma^2$ statt var$(X_i) = \frac{35}{12}$.

Notation: $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$
$\bar{X}_n$ konvergiert *in Wahrscheinlichkeit* gegen $\mathbb{E}[X_1]$

Gesetz der großen Zahlen

> Das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon\big) = 0$$

> Eine stärkere Aussage ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |\bar{X}_m - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon\}\right) = 0$$

> Diese Aussage ist äquivalent zu

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \bar{X}_n(\omega) = \mathbb{E}[X_1]\}) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mathbb{E}[X_1]) = 1$$

> **Notation:** $\bar{X}_n \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1]$

> $\bar{X}_n$ konvergiert *fast sicher* (f.s.) gegen $\mathbb{E}[X_1]$

Gesetz der großen Zahlen

Satz 34: (Starkes Gesetz der großen Zahlen)

Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Dann gilt

$$\bar{X}_n \xrightarrow{f.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

Beweis: Satz 14.8 in [Dehling and Haupt, 2006]

Gesetz der großen Zahlen

Übung 72: (Münzwurf)

Sei X_i der Indikator für "Kopf" beim i-ten Wurf eines mehrfachen Münzwurfs und $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Gegen welchen Wert konvergiert $\bar{X}_n$?
2. Welche Schlussfolgerung können wir über die Münze ziehen, falls $\bar{X}_n = 0.4$ für
   - $n = 10$,
   - $n = 100$,
   - $n = 1000$?

Zentraler Grenzwertsatz

- Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger standardnormalverteilter Zufallsvariablen
- Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt: $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$
- Außerdem gilt

$$\mathbb{E}\Big[\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = 0$$

$$\mathsf{var}\Big(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{var}(X_i) = \tfrac{1}{n}$$

- Also ist $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$
- Was passiert, wenn wir anders skalieren?

Zentraler Grenzwertsatz

> Wir betrachten $\sqrt{n}\bar{X}_n$

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = 0$$

$$\mathsf{var}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{var}(X_i) = 1$$

> Also ist $\sqrt{n}\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(0,1)$

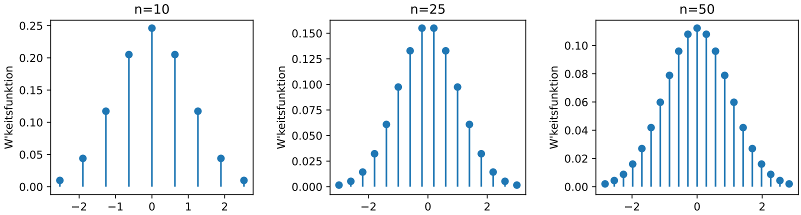
> Was passiert bei anderen Verteilungen mit $\sqrt{n}\bar{X}_n$?

Zentraler Grenzwertsatz

> Sei $X_1, X_2, \dots \sim Ber(p)$ eine Folge unabh. Zufallsvariablen

> Es gilt $\mathbb{E}[X_i] = p$ und $\mathrm{var}(X_i) = p(1-p)$

> Wie sieht die Verteilung von $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ aus?

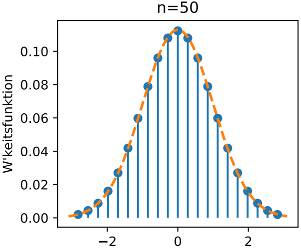


Zentraler Grenzwertsatz

> Sei $X_1, X_2, \dots \sim Ber(p)$ eine Folge unabh. Zufallsvariablen

> Es gilt $\mathbb{E}[X_i] = p$ und $\text{var}(X_i) = p(1-p)$

> Wie sieht die Verteilung von $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\text{var}(X_1)}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}$ aus?



> Auch für andere Verteilungen nähert sich $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\text{var}(X_1)}}$ der Standardnormalverteilung

Zentraler Grenzwertsatz

Satz 35: (Zentraler Grenzwertsatz)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$, sodass $0 < \sigma^2 < \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x),$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Notation: $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$

Zentraler Grenzwertsatz

Beispiel 125

- Sei X_i die Augenzahl beim n-fachen Würfelwurf
- Definiere $\hat{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ die durchschnittliche Augenzahl
- Wie groß müssen wir n wählen, damit $\hat{X}_n$ mit 95% Wahrscheinlichkeit zwischen 3.49 und 3.51 liegt?
- Was schätzen Sie?
- Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(3.49 \leq \bar{X}_n \leq 3.51) &= \mathbb{P}\Big(-\sqrt{n}\frac{0.01}{\sqrt{35/12}} \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - 3.5}{\sqrt{35/12}} \leq \sqrt{n}\frac{0.01}{\sqrt{35/12}}\Big) \\
&\approx \Phi(\sqrt{n}\frac{0.01}{\sqrt{35/12}}) - \Phi(-\sqrt{n}\frac{0.01}{\sqrt{35/12}}) \\
&= 2\Phi(\sqrt{n}\frac{0.01}{\sqrt{35/12}}) - 1
\end{aligned}
$$

Zentraler Grenzwertsatz

Beispiel 126

- Es gilt $\mathbb{P}(3.49 \leq \bar{X}_n \leq 3.51) \approx 2\Phi\Big(\sqrt{n}\frac{0.01}{\sqrt{35/12}}\Big) - 1$
- Die rechte Seite ist 0.95 genau dann, wenn
$$\Phi(0.01\sqrt{\tfrac{12}{35}n}) = 0.975$$
also, wenn
$$0.01\sqrt{\tfrac{12}{35}n} = q_{0.975} = 1.96$$
wobei $q_{0.975}$ das 97.5%-Quantil von $\mathcal{N}(0,1)$ bezeichnet
- Damit muss gelten
$$n = \tfrac{35}{12} \cdot 196^2 \approx 112\,000$$
- Wir müssen etwa $112\,000$ mal würfeln, damit $\bar{X}_n$ mit hoher Wahrscheinlichkeit zwischen 3.49 und 3.51 liegt

Zentraler Grenzwertsatz

Übung 73

Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass eine unverfälschte Münze bei $n = 10\,000$ Würfen zwischen $4\,900$ und $5\,100$ Mal "Kopf" zeigt.

Zentraler Grenzwertsatz

Satz 36: (Satz von Moivre-Laplace)

Sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Folge unabhängiger, bernoulli-verteilter Zufallsvariablen mit $X_i \sim Ber(p)$ für ein $p \in (0,1)$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, die Anzahl der Erfolge. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Notation: $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$

> Es gilt $\mathbb{E}[X_i] = p$ und $\text{var}(X_i) = p(1-p)$.

> Wir wissen bereits: $S_n \sim Bin(n,p)$.

> Der Satz von Moivre-Laplace ist ein Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes.

Zentraler Grenzwertsatz

Warum beschäftigen wir uns mit dem Spezialfall?

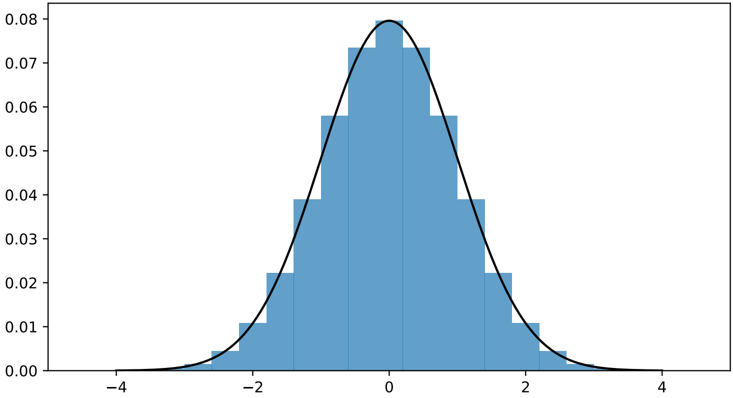
- **Faustregel**: Die Approximation ist "brauchbar", falls $np(1-p) \geq 9$.
- Grundsätzlich gilt:

$$\mathbb{P}(k \leq S_n \leq \ell) = \mathbb{P}\bigg(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\ell-np}{\sqrt{np(1-p)}}\bigg)$$
$$\approx \Phi\bigg(\frac{\ell-np}{\sqrt{np(1-p)}}\bigg) - \Phi\bigg(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\bigg)$$

- **Stetigkeitskorrektur**: Da $S_n \in \mathbb{N}_0$, gilt allerdings auch

$$\mathbb{P}(k \leq S_n \leq \ell) = \mathbb{P}(k - \tfrac{1}{2} \leq S_n \leq \ell + \tfrac{1}{2})$$
$$= \mathbb{P}\bigg(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\ell+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\bigg)$$
$$\approx \Phi\bigg(\frac{\ell+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\bigg) - \Phi\bigg(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\bigg)$$

Stetigkeitskorrektur



Stetigkeitskorrektur

Beispiel 127

Wir werfen eine unverfälschte Münze $n = 100$ Mal. Wie wahrscheinlich ist es, dass 45 bis 55 mal Kopf geworfen wird?

> Sei S die Anzahl der Würfe mit "Kopf". $p = \frac{1}{2}$.

> Es gilt: $E[S] = np = 50$ und $\text{var}(S) = np(1-p) = 25$

> Wahre Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(45 \le S_n \le 55) \approx 0.7287$

> Mit dem ZGWS gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(45 \le S_n \le 55) &\approx \Phi\left(\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right) - \Phi\left(\frac{45-50}{\sqrt{25}}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.6827 \end{aligned}$$

> Faustregel? $np(1-p) = 25 \ge 9$, wir können Stetigkeitskorrektur nutzen.

Stetigkeitskorrektur

Beispiel 127

Wir werfen eine unverfälschte Münze $n = 100$ Mal. Wie wahrscheinlich ist es, dass 45 bis 55 mal Kopf geworfen wird?

- Sei S die Anzahl der Würfe mit "Kopf". $p = \frac{1}{2}$.
- Es gilt: $E[S] = np = 50$ und var$(S) = np(1-p) = 25$
- Wahre Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(45 \le S_n \le 55) \approx 0.7287$
- Mit dem ZGWS gilt: $\mathbb{P}(45 \le S_n \le 55) \approx 0.6827$
- Faustregel? $np(1-p) = 25 \ge 9$, wir können Stetigkeitskorrektur nutzen.
- Mit Stetigkeitskorrektur gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(45 - \tfrac{1}{2} \le S_n \le 55 + \tfrac{1}{2}) &\approx \Phi\left(\frac{55.5-50}{\sqrt{25}}\right) - \Phi\left(\frac{44.5-50}{\sqrt{25}}\right) \\ &= \Phi(1.1) - \Phi(-1.1) \approx 0.7287\end{aligned}$$

Stetigkeitskorrektur

- Die Stetigkeitskorrektur liefert oft bessere Ergebnisse, aber nicht immer!
- Beispiel:
  - $S \sim Bin(1000, \frac{1}{4})$
  - $\mathbb{E}[S] = np = 250, \mathsf{var}(S) = np(1-p) = 187.5$
  - Wahre Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(0 \leq S \leq 210) = 0.0016760$
  - Faustregel: $np(1-p) = 187.5 > 9 \implies$ Stetigkeitskorrektur anwendbar
  - $\mathbb{P}(0 \leq S \leq 210) \approx \Phi(-2.9212) - \Phi(-18.257) \approx 0.0017435$
  - $\mathbb{P}(-0.5 \leq S \leq 210.5) \approx \Phi(-2.8847) - \Phi(-18.294) \approx 0.0019591$

Zentraler Grenzwertsatz

Übung 74

Berechnen Sie approximativ **mit Stetigkeitskorrektur** die Wahrscheinlichkeit, dass eine unverfälschte Münze bei $n = 10\,000$ Würfen zwischen $4\,900$ und $5\,100$ Mal “Kopf” zeigt.
Vergleichen Sie Ihre Ergebnis mit dem Ergebnis aus Übung 73 (ohne Stetigkeitskorrektur).

Literatur I

Bundesministerium für Gesundheit (2024).
Infektionsradar.
https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.