

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN,
FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

M.Hollstein, A.Kleefeld, H.Schäfer

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
bzw. „ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG

Klausur Stochastik, WS 2019/2020, am 07.02.2020

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

max. Punktzahl

Aufgabe 1) (6)

Aufgabe 2) (6)

Aufgabe 3) (6)

Aufgabe 4) (6)

Aufgabe 5) (6)

Aufgabe 6) (6)

Aufgabe 7) (6)

Aufgabe 8) (6)

Gesamtpunkte:

Note:

1. Aufgabe**6 Punkte**

Die Marketing-Abteilung eines Betriebes hat durch eine Umfrage festgestellt, dass eine Werbung in einer Zeitung von ihren Lesern mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,04$ gelesen wird. Ein Leser, der eine solche Werbung tatsächlich liest, kauft mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,98$ den angepriesenen Gegenstand dennoch nicht. Ein Leser, der die Werbung nicht liest, kauft mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,99$ das beworbene Produkt nicht.

- a) Erstellen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum für diese Aufgabenstellung.
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft der Zeitungsleser das Produkt?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Käufer des Produkts die Werbung gelesen?

2. Aufgabe**6 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot (3 + x) & \text{für } -3 \leq x \leq 0 \\ a \cdot (3 - x) & \text{für } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- a) Für welchen Wert von a kann $f(x)$ zur Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X werden?
- b) Geben Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ von X an.
- c) Berechnen Sie die Varianz von X .

Tipp: Überlegen Sie sich gut (ohne Rechnung!), welchen Wert der Erwartungswert von X hat; Begründung!

3. Aufgabe**6 Punkte**

Die Modellierung von Großschäden im Industrie-, Feuer- und Rückversicherungsbereich erfolgt häufig mit Hilfe einer "Pareto-Verteilung" mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot b \cdot (1 + bx)^{-(a+1)} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit $a, b > 0$. Der Parameter b ist bereits durch Voruntersuchungen bestimmt worden und kann daher als bekannt vorausgesetzt werden. Bestimmen Sie für den noch fehlenden Parameter a einen Maximum-Likelihood-Schätzwert zu einer Stichprobe X_1, \dots, X_n .

4. Aufgabe**6 Punkte**

Beim Spiel "Mensch ärgere dich nicht" darf die Spielfigur zu Beginn des Spiels das "Haus" verlassen, wenn man eine 6 würfelt. Dazu hat man maximal drei Versuche pro Runde, solange noch alle Figuren im "Haus" sind.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das vollbesetzte "Haus" bei einer Runde mit einer Spielfigur zu verlassen?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler erst in der dritten Runde sein "Haus" verlassen kann?
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 4 Spielern in der ersten Runde genau drei das "Haus" verlassen können?

5. Aufgabe**6 Punkte**

Zwei Typen zylindrischer Metallstücke, deren Längen mit einem Mittelwert von 3 bzw. 1,5 mm und einer Standardabweichung von 0,2 bzw. 0,1 mm normalverteilt sind, werden maschinell hergestellt. In einen Behälter der Länge 26 mm sollen 4 längere und 9 kürzere Zylinder der Länge nach hintereinander gelegt werden. Wenn diese Zylinder rein zufällig aus der Produktion ausgewählt werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass diese nicht in den Behälter passen, weil die Gesamtlänge zu groß ist?

6. Aufgabe**6 Punkte**

Für eine lukrative Nebeneinnahme gründen einige Matse-Azubis die "IT-Center-Pizza-Manufaktur". An ihrem Pizzastand werden im Wintersemester in der Mittagspause Pizzen in 3 Größen zu 4 Euro (klein), 6 Euro (mittel) bzw. 8 Euro (groß) verkauft. Nach einiger Zeit wird Bilanz gezogen: Von den verkauften Portionen waren 40% klein, 20% mittel und 40% groß.

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Preises einer verkauften Pizza, wenn der Verkauf so weitergeht.
- b) Während einer hektischen Mittagsstunde werden 320 Pizzen verkauft. Unter der Annahme, dass die Käufer voneinander unabhängige Kaufentscheidungen treffen, bestimmen Sie mittels des Zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamteinnahme 1.952 Euro übersteigt (ohne Stetigkeitskorrektur).

7. Aufgabe**6 Punkte**

X_1, X_2, \dots, X_n seien unabhängige, auf dem Intervall $[0; \theta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen mit $\theta > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$T_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{2}{n} \cdot (X_1 + \dots + X_n)$$

für alle natürlichen Zahlen n ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter θ ist.

b) Bestimmen Sie die Varianz von T_n .

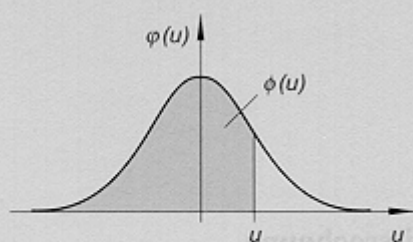
8. Aufgabe**6 Punkte**

Bei einer Untersuchung der Lebensdauern von 16 wiederaufladbaren Batterien, die in Elektrofahrzeugen eingesetzt werden sollen, ergaben sich (in Jahren) die folgenden Zeiten bis zum ersten Ausfall:

0,14	0,27	0,43	0,68	0,81	1,14	1,45	1,82
2,36	2,53	2,90	3,45	4,51	5,12	5,68	7,84

- Bilden Sie die Lebensdauerklassen $(0; 1]$; $(1; 2]$; $(2; 3]$; $(3; 5]$; $(5; 8]$ und berechnen Sie mit den gegebenen Daten die absoluten und relativen Häufigkeiten. Zeichnen Sie ein Histogramm.
- Bestimmen Sie aus den Urwerten den Median und das 80%-Quantil.
- Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion basierend auf den klassierten Daten.

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung



Schrittweite: $\Delta u = 0,01$

Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \quad (u > 0)$$

Für $u \geq 4$ ist $\phi(u) \approx 1$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8398
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

