Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

9. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung nach der vorlesungsfreien Zeit über Pfingsten. Das vorliegende achte Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 18.6., 10:15 Uhr abzugeben. Auf diesem Blatt gibt es Bonusaufgaben, die mit (*) markiert sind. Diese zählen nicht zur Maximalpunktzahl für die Klausurzulassung.

---

1. (Heron–Verfahren) (10 Punkte) Zur Berechnung der Quadratwurzel von positiven Zahlen benutzten wohl schon die Babylonier, spätestens aber der Alexandriner *Heron* (etwa 1. Jh. n. Chr.), das folgende Verfahren: Für beliebige reelle Startwerte $x^{(0)} > 0$ und reelles $a > 0$ setze

$$x^{(n+1)} \;=\; \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{a}{x^{(n)}}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $x^{(n)}$ für $x^{(0)} > \sqrt{a}$ monoton fallend und durch $\sqrt{a}$ nach unten beschränkt ist. Folgern Sie, daß die Folge in diesem Fall gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Was passiert für Startwerte $x^{(0)} \in (0, \sqrt{a})$?

b) Zeigen Sie weiter, dass das *Heron Verfahren* sogar quadratisch konvergiert, d.h. es existiert eine Konstante $C \in (0, \infty)$ mit

$$\left|x^{(n+1)} - \sqrt{a}\right| \;\leq\; C \cdot \left|x^{(n)} - \sqrt{a}\right|^2 .$$

c) Führen Sie vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{2}$ aus. Wählen Sie dazu $x^{(0)} = 2$, und stellen Sie erst $x^{(4)}$ als Dezimalzahl dar. Schätzen Sie den Fehler ab.

2. (Fixpunktiteration mit Rundungsfehlern) (8 Punkte)
Sei $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, welche die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit einer Kontraktionskonstanten $L < 1$ erfülle. Bei der numerischen Implementation führen in der Regel Rundungsfehler dazu, dass die Fixpunktiteration $x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)})$ nicht exakt ausgewertet werden kann. Statt $\phi(x)$ betrachten wir daher den gestörten Funktionswert $\phi(x) + r(x)$, wobei eine positive Konstante δ existiere mit $|r(x)| \leq \delta \;\forall x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass für die durch

$$\tilde{x}^{(0)} \;=\; x^{(0)}, \qquad \tilde{x}^{(k)} \;=\; \phi(\tilde{x}^{(k-1)}) + r(\tilde{x}^{(k-1)})$$

definierte gestörte Folge gilt:

$$|\tilde{x}^{(k)} - x^*| \;\le\; \frac{\delta}{1-L} + L^k \left(|x^{(0)} - x^*| - \frac{\delta}{1-L} \right) \qquad \text{für alle } k \ge 0,$$

wobei x^* der eindeutige Fixpunkt von ϕ ist.

3. (Banachscher Fixpunktsatz) (10+4* Punkte) Sei C_0 die Menge der stetigen Funktionen von $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ nach $\mathbb{R}$. Definiere d auf C_0 als die durch die Maximumsnorm induzierte Metrik, d.h.

$$d(f,g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)| \quad \text{für alle} \quad f, g \in C_0.$$

Betrachte weiterhin die Abbildung $T : C_0 \to C_0$, die durch

$$T(f)(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{x+t}{2}\right) dt$$

definiert ist.

a) Zeigen Sie, dass T wohldefiniert ist, d.h., dass aus $f \in C_0$ folgt, dass $T(f) \in C_0$, und dass f beim Berechnen von $T(f)$ nur im Intervall I ausgewertet wird.

b) Zeigen Sie, dass C_0 zusammen mit der Metrik d ein vollständiger Raum ist. *Hinweis:* Es dürfen aus der Analysis bekannte Aussagen ohne Beweis verwendet werden.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung T eine Kontraktion von C_0 nach C_0 bezüglich der Metrik d ist.

d) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Funktion $f \in C_0$ gibt, so dass

$$f(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{x+t}{2}\right) dt.$$

e)* Betrachten Sie die Folge f_n in C_0, die durch $f_0(x) = 0$ und $f_n = T(f_{n-1})$ für $n \ge 1$ definiert ist. Geben Sie explizite Ausdrücke für die f_n an. (*Ansatz:* $f_n(x) = a_n x + b_n$.) Was ist der Grenzwert der Folge f_n (bezüglich der Metrik d)? Wie hängt der Grenzwert von unserer Wahl von f_0 ab?

f)* Geben Sie die Funktion aus Aufgabenteil d) explizit an.

4. (Konvergenzordnung von Iterationsverfahren) (12 Punkte)

a) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine p-mal stetig differenzierbare Funktion, $p \ge 2$, mit Fixpunkt x^*.

Zeigen Sie: Gilt $\frac{d^n \phi}{dx^n}(x^*) = 0$ für $n = 1, 2, \ldots, p-1$, dann existiert eine Umgebung U von x^*, so dass die Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ für alle $x^{(0)} \in U$ mit Ordnung p gegen x^* konvergiert.

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei drei mal stetig differenzierbar mit einfacher Nullstelle ξ. Folgern Sie aus *Aufgabenteil* (*a*)), dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte aus einer Umgebung von ξ quadratisch gegen ξ konvergiert.

Zeigen Sie weiter, dass das Iterationsverfahren

$$y^{(n)} \;=\; x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \qquad x^{(n+1)} \;=\; y^{(n)} - \frac{f(y^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

lokal gegen ξ konvergiert, und mindestens die Konvergenzordnung 3 besitzt, falls $f \in C^4(\mathbb{R})$ ist.

5. (Exakte Konvergenzordnung) * (6* Punkte) Sei $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert **superlinear mit exakter Ordnung** $p > 1$, falls es $c, C \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt:

$$c \cdot \varepsilon_k^p \leq \varepsilon_{k+1} \leq C \cdot \varepsilon_k^p \quad \text{für alle } k \geq n$$

a) Geben Sie ein $p > 1$ und eine Nullfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, welche superlinear mit Ordnung p, aber für kein $q > 1$ mit exakter Ordnung q konvergiert.

b) Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, welche superlinear mit exakter Ordnung $p > 1$ konvergiert. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\varepsilon_{n+1})}{\log(\varepsilon_n)}.$$

c) Folgern Sie, dass die exakte superlineare Konvergenzordnung einer Folge eindeutig ist, falls sie existiert.

6. (Unabhängigkeit und Zahlentheorie) * (10* Punkte)
Sei $s > 1$. Die *Riemannsche Zeta-Funktion* ist definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und Verteilung

$$\mathbb{P}[X = n] \;=\; \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

Sei E_m das Ereignis „X ist teilbar durch m“. Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{P}[E_m] = m^{-s}$;

b) Die Ereignisse E_p, wobei p eine Primzahl ist, sind unabhängig;

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}\big[\bigcap_{p \text{ Primzahl}} E_p^c\big]$, und folgern Sie die *Eulersche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big).$$

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass X durch keine Quadratzahl außer 1 teilbar ist, beträgt $1/\zeta(2s)$;