Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 6, Abgabe 21.5.

Aufgabe 1

(i) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ existieren, dass aber f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

(ii) Zu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wie in (i) sei $g(x,y) := yf(x,y)$. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von g in $(0,0)$ existieren und gleich Null sind, dass aber g in $(0,0)$ nicht (total) differenzierbar ist.

Aufgabe 2

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, so dass $\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt. Außerdem gelte $f(x,0) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.
Hinweis: Vergleichen Sie $f(x,y)$ mit $f(x+y,0)$.

Aufgabe 3

Eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ heißt positiv homogen vom Grade $k \in \mathbb{R}$, falls $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ für alle $\lambda > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$ positiv homogen vom Grade null ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für Funktionen $f \in C^1(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, die positiv homogen vom Grade $k \in \mathbb{R}$ sind, die Relation

$$\langle \nabla f(x), x\rangle = kf(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ gilt.

(iii) Zeigen Sie die Umkehrung von Teil b), d.h. falls $\langle \nabla f(x), x\rangle = kf(x)$ für ein $k \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dann ist f positiv homogen vom Grade k.

Hinweis: Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Funktion $g(\lambda) := f(\lambda x)$ her.

Aufgabe 4

(i) Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $|B| < 1$, wobei $|\cdot|$ die Frobeniusnorm (siehe unten) bezeichnet. Zeigen Sie, dass die *Neumannsche Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ konvergiert und gleich $(\mathrm{Id} - B)^{-1}$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\big(\sum_{k=0}^{n} B^k\big)\big(\mathrm{Id} - B\big)$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Menge U der invertierbaren $n \times n$ Matrizen eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$ ist.
Hinweis: Fixieren Sie $A \in U$ und zeigen Sie mit Hilfe von Teil (i), dass für alle $H \in M_n(\mathbb{R})$ mit $|H|$ hinreichend klein die Identität $(A + H)^{-1} = (\mathrm{Id} + A^{-1}H)^{-1}A^{-1}$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Inversenabbildung $I : U \to U$, $I(A) = A^{-1}$ differenzierbar ist, und dass $dI(A)H = -A^{-1}HA^{-1}$ für alle $A \in U$ und alle $H \in M_n(\mathbb{R})$ gilt.

Bemerkung: Zu $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ist die Frobeniusnorm gegeben durch $|A| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$. Es gilt $|BA| \leq |B|\,|A|$, $|AA^T| \leq |A|^2$, $|A^k| \leq |A|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und $M_n(\mathbb{R})$ ist vollständig bezüglich der Frobeniusnorm.

Aufgabe 5*

Sei $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Determinantenfunktion und $\operatorname{cof} X$ die Matrix der Kofaktoren von X (siehe unten). Zeigen Sie, dass

$$d \det(X)A = \operatorname{tr}\big((\operatorname{cof} X)^T A\big)$$

gilt und dass falls X^{-1} existiert, es gilt

$$d \det(X)A = \det(X) \operatorname{tr}\big(X^{-1}A\big),$$

also insbesondere $d \det(\mathrm{Id})A = \operatorname{tr} A$.

Hinweis: Sei $X_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ die Matrix, die man aus X erhält, wenn man die i-te Reihe und die j-te Spalte herausstreicht. Dann ist $(\operatorname{cof} X)_{ij} := (-1)^{i+j} \det X_{i,j}$. Insbesondere hängt $(\operatorname{cof} X)_{ij}$ nicht von x_{ik} und x_{kj} für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ ab. Es gilt $\det(X)\,\mathrm{Id} = X^T \operatorname{cof} X$, d.h. $\det(X) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(\operatorname{cof} X)_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, n$.