Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 12

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die QR-Zerlegung zu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2

Bei welchen Werten a, b hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte?

(b) einen (doppelten) reellen Eigenwert?

(c) keinen reellen Eigenwert?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie auch eventuelle komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Ein komplexes Gleichungssystem können Sie wie ein reelles Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen.

Aufgabe 4

Wie lautet die QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} ?$$

Lösen Sie anschließend mit dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (1, 2)^\top$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & & & . & & . \\ . & & & & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist. Zeigen Sie außerdem, dass $|det(A)| = 1$.

Aufgabe 7

Gegeben sind

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t & 2t-1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

Zeigen Sie, dass der Vektor x_t Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? Bestimmen Sie auch den zweiten Eigenwert.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$