Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Tutorium - Blatt 9

Das Blatt wird vom 18.12.2025 bis zum 23.12.2025 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (Teilvektorräume)
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Jeder Teilraum enthält das neutrale Element, d.h. für $U \leq V$ folgt $0 \in U$.

(b) Sind $U, T \leq V$ Teilräume, so ist auch ihr Durchschnitt $U \cap T \leq V$ ein Teilraum.

(c) Sind $U, T \leq V$ Teilräume, so ist auch ihre Summe $U + T := \{u + t \mid u \in U, t \in T\} \leq V$ ein Teilraum.

Aufgabe 2 (Monomorphismen)
Sei $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ gilt.

Aufgabe 3 (Lineare Abbildung)
Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten für $A \in K^{n\times n}$ die Abbildung

$$\pi_A : K^{n\times n} \to K^{n\times n}, \quad B \mapsto [B, A] := BA - AB.$$

a) Beweisen Sie, dass π_A für jedes $A \in K^{n\times n}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie den Kern von π_{I_n}.

c) Für welche A ist π_A ein Isomorphismus?

Aufgabe 4 (Linearkombinationen)
Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a+2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3-a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig?
Sei nun $a = 0$. Begründen Sie, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet und stellen Sie den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

als Linearkombination in dieser Basis dar.

Aufgabe 5 (Lineare Abhängigkeit)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $x_1, \dots, x_n, x, y \in V$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Vektoren $x, y \in V \setminus \{0\}$ sind genau dann linear abhängig, wenn $x = ky$ für ein $k \in K$.

(b) Falls $y \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, so sind $y, x_1, \dots, x_n$ linear abhängig.

(c) Die Rückrichtung in (b) ist im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 6 (Basis)
Wir definieren

$$\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \sin(x),\\
&f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \cos(x),\\
&f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto x \quad \text{und}\\
&f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto 1.
\end{aligned}$$

Weiter definieren wir den Vektorraum $V \coloneqq \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ eine Basis von V ist.