$\boxed{6.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 25

****

(Abgabe: 23.05.)

Aufgabe H21. Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Zeigen Sie: Für $v, w \in V$ sind äquivalent:

(i) $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$;

(ii) (v, w) ist linear abhängig.

Aufgabe H22. Sei $V := K^{n,n}$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$s\colon V \times V \to K, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$$

ist eine reguläre symmetrische Bilinearform. (Ein Bilinearform s ist **regulär**, falls $s(v, -) \neq 0$ und $s(-, w) \neq 0$ für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$.)

Aufgabe H23. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie alle Unterräume $U \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $s_A(v, u) = 0$ für alle $u \in U$ und alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe H24. Sei (V, s) ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit $\dim(V) = n$, und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von V. Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V, so dass $(b_1, \ldots, b_k)$ eine Basis von U ist. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher eine Basis von $U^\perp$ liefert.

****