

## Aufgaben zur Veranstaltung

### Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

---

## Übungsblatt 2

### Präsenzaufgaben

#### Aufgabe 1

Ein lineare Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 4x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2 - x_3)^\top.$$

- Zeigen Sie, dass  $f$  ein Isomorphismus ist.
- Bestimmen Sie die Umkehrabbildung  $f^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ .

#### Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Bild, den Rang, den Kern und die Dimension des Kerns der linearen Abbildung  $f(x) = A \cdot x, f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

#### Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Rang, den Kern und das Bild der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung in Abhängigkeit von  $a$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 4

Die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  werde definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_4 \\ 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie die Abbildungsmatrix von  $f$  an.
- Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von  $\text{Bild}(f)$ .
- Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von  $\ker(f)$ .

## Hausaufgaben

### Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Rang der zu den folgenden Matrizen gehörenden linearen Abbildungen:

$$(a) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(b) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 6

Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Der Ausdruck  $\lambda x$  kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

- (a)  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$
- (b)  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen?

### Aufgabe 7

Sei

$$F \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $F$ .
- (b) Bestimmen Sie  $\ker(F)$  und dessen Dimension.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel  $\dim(\text{Bild}(F))$ .
- (d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

### Aufgabe 8

Sei  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Die Abbildung

$$S : x \rightarrow x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|^2} v$$

heißt *Spiegelung* an der Hyperebene  $\langle x, v \rangle = 0$ . Hierbei stehen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für das Standardskalarprodukt und  $\|\cdot\|$  für die euklidische Norm.

- (a) Verifizieren Sie durch eine Skizze im Fall  $n = 2$ , dass es sich in der Tat bei  $S$  um eine Spiegelung handelt (Was sind Hyperebenen im Fall  $n = 2$ ?).
- (b) Zeigen Sie:  $S$  ist linear.
- (c) Das *dyadische Produkt*  $d(v, w)$  zweier Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  ist definiert als die Matrix  $A$  mit den Komponenten  $a_{ij} = v_i w_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Sei weiter  $f(x) := Ax$ . Zeigen Sie: Ist  $v \neq 0$  und  $w \neq 0$ , dann folgt  $\text{rg}(f) = 1$ .
- (d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von  $S$ . Verwenden Sie dazu das dyadische Produkt.
- (e) Ist  $S$  ein Isomorphismus? Wenn ja, bestimmen Sie die Umkehrabbildung. Andernfalls bestimmen Sie  $\ker(S)$  und  $\text{Bild}(S)$ !