Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 00

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob f injektiv oder surjektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

   a) $f_1(x) = x$ b) $f_2(x) = -3x + 5$ c) $f_3(x) = x^2$

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen, die Polstellen, die Asymptoten und die graphische Darstellung der folgenden Funktionen:

   a) $f_1(x) = \dfrac{1-x}{3+x}$ b) $f_2(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   c) $f_3(x) = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+1)}$ d) $f_4(x) = \dfrac{(x-1)^2\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+1)}$

3. Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlgung folgender Funktionen/ Polynome ($x \in \mathbb{R}$):

   a) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 5$ b) $g(x) = x^5 + 5x^4 - 13x^3 + 7x^2$

4. Zerlegen Sie, falls möglich, die folgenden Funktionen ($x \in \mathbb{R}$) in ihre Partialbrüche.

   a) $g_1(x) = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-3}$ b) $g_2(x) = \dfrac{(x-1)^2\cdot(x+2)}{(x-3)^2\cdot(x+1)}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden (Un-)Gleichungen mit $x \in \mathbb{R}$.

   a) $-x\cdot(5+x) < -4 - (3-x)\cdot x$ b) $\sqrt{x+1} + x = 5$
   c) $|x+1| - |2x-6| \leq 10$ d) $2x^2 - 4x - 7 = 0$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 01

1. Geben Sie eine explizite Beschreibung für die folgenden Folgen an:

   a) $a_{n+1} = a_n - 3$ mit $a_0 = 2$

   b) $a_{n+1} = 0,8 \cdot a_n$ mit $a_0 = 20$

   c) $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ mit $a_0 = 0$

   d) $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ mit $a_0 = 0$

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

3. Bestimmen Sie den Wert der gegebenen Reihen

   a) $\sum_{i=1}^{5} (2i^2 + 3)$

   b) $\sum_{i=1}^{6} (8i^2 + 4i - 2)$

4. Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Gleichung:

$$(k+1) \cdot \binom{n}{k+1} + k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n}{k} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$$

Hausaufgabenblatt 02

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$$

2. Bestimmen Sie von folgenden Mengen alle Häufungspunkte und Limes Superior und Limes Inferior, falls diese existieren:

   a)
   $$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N} \right\}$$

   b)
   $$B = \left\{ \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n\pi - \pi\right) | n \in \mathbb{N} \right\}$$

   c)
   $$C = [-3; 1]$$

   d)
   $$D = [1; 2] \cup [3; 4] \cup \{5\}$$

   e)
   $$E = ([-3; 4] \cup [8; 10]) \cap [4; 8]$$

3. Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und begründen Sie anhand der Definition.

   a) $a_n = n^3 - 3n^2$ b) $a_n = n^2 \cdot 2^{-n}$

4. Untersuchen Sie die folgenden Folgen mit $n \in \mathbb{N}$ auf Monotonie und begründen Sie anhand der Definition.

   a) $a_n = \dfrac{3n - 5}{3n - 10}$ b) $a_n = 2n^2 - 6n + 10$

5. Gegeben seien die folgenden Folgen:

   i) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$ ii) $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$
   iii) $c_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n^3+2}{n^3}$

   a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen.
   b) Sind die Folgen konvergent?

Hausaufgabenblatt 03

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der angegebenen Folgen:

   a) $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)^n \quad k \in \mathbb{Z}$
   b) $c_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+k} \quad k \in \mathbb{Z}$
   c) $d_n = \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^{3n}$
   d) $e_n = 4 \cdot \left(\dfrac{n^2-4}{n^2-2n}\right)^{\frac{n}{2}}$

   Hinweis: Erinnern Sie sich an die eulersche Zahl.

2. Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $\forall n \in \mathbb{N}_0$ mit dem Monotonieprinzip und berechnen Sie den Grenzwert.
   $$a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 3} + 1 \quad \text{mit} \quad a_0 = 6$$

3. Bestimmen Sie die Summen der folgenden Reihen - falls sie existieren:

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ b) $\sum_{k=-3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+3}$

4. Gegeben sei folgende gebrochen rationale Funktion
   $$f(x) = \frac{3x^2 + 13x + 12}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$
   Faktorisieren Sie den Nenner und führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

5. Berechnen Sie den Wert der Reihe

   a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k - 6}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k!}$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 04

1. Konvergieren oder divergieren die folgenden Reihen?

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-3\sin(k^2)}{5k^4}$ b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(3+\sin(7k))^k}{(6+\sin(7k))^k}$

2. Entscheiden Sie, ob die gegebene Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{9n}\right)^n$$

3. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^n}{(n!)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{3+(-1)^{k+1}}{2k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k^4+3k^2+1}}$

5. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen divergieren.

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+1}{4k-1}$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$

   c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k(k+1)} - k\right)$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$

   e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+e^{-k}}{10k-e^{-2k}}$ f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k-1}{2^k+1}$

Hausaufgabenblatt 05

1. a) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$

   b) Berechnen Sie die Werte für c_0, c_1, c_2 und c_3.

2. Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^k}{k^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k \cdot x^k}{2^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^{k+1}}$

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot 5^n \cdot (x-2)^n$$

4. Entwickeln Sie die folgende Funktion in eine Potenzreihe um Null:

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 5}{2x - 1}\,, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

   Hinweis: Kürzen Sie zuerst.

5. a) Bestimmen Sie die Potenzreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

   b) Geben Sie den zugehörigen Konvergenzbereich an (die Grenzen müssen untersucht werden!).

Hausaufgabenblatt 06

1. Untersuchen Sie, ob die Funktion f an der angegebenen Stelle x_0 stetig ist:

   a) $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$

   b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$

2. Bestimmen Sie a und b so, dass die folgende Funktion $f(x)$ stetig wird

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x < 0 \\ ax + b & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 5x - 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

3. Zeigen Sie die Stetigkeit (mit der ε - δ-Definition) von:

   a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

4. Untersuchen Sie auf Stetigkeit bzw. stetige Ergänzbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

5. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion auf dem Intervall $[1, 2]$ gleichmäßig stetig ist:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Hausaufgabenblatt 07

1. Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$
   a) Zeigen Sie, dass die Funktion auf dem Intervall $[2, 5]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt.
   b) Mit dem Startpunkt $x_0 = 3$ berechnen Sie mit der a-priori-Abschätzung die notwendige Anzahl Iterationen, um den Fixpunkt mit der Genauigkeit $\varepsilon = \frac{1}{1.000}$ zu berechnen.
   c) Mit demselben Startpunkt und derselben verlangten Genauigkeit, berechnen Sie die Iterationen, bis mit der a-posteriori Abschätzung die Genauigkeit erreicht ist.

   Sie dürfen die Monotonie der Funktion ausnutzen.

2. Fassen Sie falls möglich folgende Terme zu einem Term zusammen.
   a) $3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y) - \frac{1}{3}\ln(z)$
   b) $\log_a(5) + \log_a(3+b) - 1$
   c) $\frac{1}{2}\lg(x+y) - 3\lg(x^2-y^2) - (x-y)\cdot\lg(x-y)$

3. Gegeben ist die Funktion
$$f(x) = 3x^2 + x - 2$$
   a) Berechne die Ableitungsfunktion von f mit Hilfe des Differenzenquotienten an der Stelle $x = x_0$.
   b) Welcher Punkt von f besitzt eine Tangente mit der Steigung 7?
   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente aus b).

4. Berechnen Sie die Ableitungen von
   a) $y = \left(\frac{2x-3}{4x-5}\right)^7$
   b) $y = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$
   c) $y = \cos^2(\tan x)$
   d) $y = \sin(\arccos \frac{1}{x})$
   e) $y = \operatorname{arsinh}\frac{1}{1-x}$
   f) $y = \frac{2^{\sqrt{x}} + \left(\sqrt{3}\right)^{2-x}}{\sqrt{x}}$
   g) $y = x^{\log e} + (\log e)^x$
   h) $y = \operatorname{artanh}(\cosh x)$
   i) $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+2x}+1}$

5. Bestimmen Sie die 1.Ableitung der angegebenen Funktionen.

   a) $h_1(x) = 4x^4 \cdot 4^x$

   b) $h_2(x) = 3x^4 \cdot \sin(x)$

   c) $h_3(x) = (\ln(x))^2 \cdot e^x$

   d) $h_4(x) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{x}}$

   e) $h_5(x) = (5x - 3)^5$

   f) $h_6(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 3x)^5}$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 08

1. Berechnen Sie jeweils die Ableitung:

   a) $y = \sin^3(\sqrt{x^2+1})$
   b) $f(x) = \sqrt{x}\, e^{\sqrt[3]{x}}$
   c) $f(x) = \frac{x\cos x + \sin x}{x \sin x + \cos x}$
   d) $f(x) = \sqrt{\tan 2x}$
   e) $f(x) = x^n \cdot n^n \quad (n \in \mathbb{N})$
   f) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$
   g) $f(x) = \ln \ln x$
   h) $f(x) = \mathsf{artanh}(1 + x^2)$

2. Wie lautet die 1.Ableitung der gegeben Funktionen:

   a) $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{3x^2}$
   b) $f(x) = \frac{(2x+3)^{-1}}{1+x^2}$
   c) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$
   d) $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$
   e) $f(x) = e^{e^x}$
   f) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{1+(2x)^2}\right)$

3. Wie lautet die 1.Ableitung folgender Funktionen?

   a) $g_1(x) = \dfrac{3x^2+4}{2x}$
   b) $g_2(x) = \dfrac{7x^2+3x+1}{x^2+x}$
   c) $g_3(x) = \left(3x^4 - \dfrac{2}{x} + 7\right)^4$
   d) $g_4(x) = \dfrac{1}{3}x^6 + x + \sqrt{x}$
   e) $g_5(x) = 8x^2 - x + 2 + 6\sqrt[3]{x^4}$
   f) $g_6(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

4. Bestimmen Sie die 1.Ableitung folgender Funktionen:

   a) $f_1(x) = 5x^3 + 7x^2 - 4x + 9$
   b) $f_2(x) = 4x^3 - \sqrt{4x}$
   c) $f_3(x) = \dfrac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-3} - 3x^{-4}$
   d) $f_4(x) = e^x \cdot x^2 + 3x^5$
   e) $f_5(x) = 2x \cdot \ln(x) + \ln(x^3)$
   f) $f_6(x) = \left(e^{-x} + 4^x\right)^2$

5. Gegeben sei folgende Funktion

   $$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$$

   Besitzt die Funktion potentielle Extremstellen?

Hausaufgabenblatt 09

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgende Ungleichung:

$$e^x \geq 1 + x \quad \forall\, x \in [0, \infty[$$

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan(2x)}{\sin 3x} \right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{3x+\sin(x)}{x} \right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \cot(x))$

e) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{\log_5(x)-1}{x-5} \right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\ln(e^x+1)}{x} \right)$

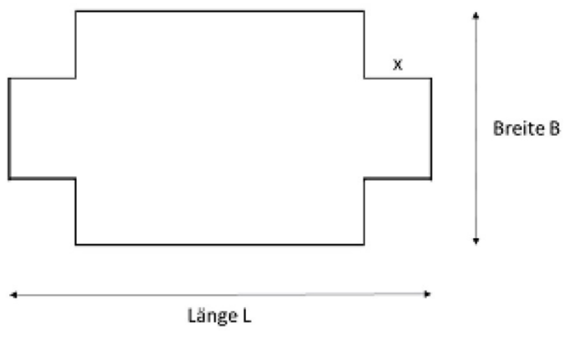
3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggfls. die Koordinaten.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1$

4. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3.Grades für die Funktionen um den gegebenen Entwicklungspunkt:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 = 1$ b) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+e^x}$ $x_0 = 0$

5. Aus einem rechteckigen Blech der Länge $L = 16$ cm und der Breite $B = 6$ cm soll ein quaderförmiger, oben offener Behälter mit möglichst großem Fassungsvermögen geformt werden. Hierzu soll aus jeder Ecke ein gleich großes Quadrat der Kantenlänge x ausgeschnitten werden und der Rest zu einem Behälter zusammengebogen werden.



Wie lang muß die Kantenlänge x der ausgeschnittenen Quadrate werden?

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 10

1. Berechnen Sie die Integrale:

   a) $\int 8x^3 \, dx$ b) $\int (x^6 - 3x^5 + 7x^3) \, dx$

   c) $\int \left(\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{4}x \right) \, dx$ d) $\int \sqrt{x} \, dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partieller Integration.

   a) $\int x^2 \cdot e^{-3x} \, dx$ b) $\int x \cdot \sin(3x) \, dx$

   c) $\int \sqrt{x} \cdot (x^2 - 4) \, dx$

3. Berechnen Sie die Integrale mithilfe der Substitution.

   a) $\int e^{x^2} \cdot x \, dx$ b) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \, dx$

   c) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 1} \, dx$ d) $\int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 7} \, dx$

4. Bestimmen Sie die Stammfunktion und berechnen Sie ggfls. das bestimmte Integral der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $C = [a, b]$.

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ mit $C = \left[\sqrt{5}; \sqrt{10}\right]$
   b) $f(x) = \sin^2(x)$
   c) $f(x) = \ln(x)$ mit $C = [1; e]$
   d) $f(x) = \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}$ mit $C = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

   Hinweis: Verwenden Sie bei c) ggfls. die partielle Integration.

5. Berechnen Sie die Integrale:

   a) $\int \frac{1}{1 - x^2} \, dx$ b) $\int \frac{(x^2 + 1)^2 + x}{x \cdot (x^2 + 1)} \, dx$

   c) $\int \frac{1}{x \cdot (x + 1)} \, dx$

Hausaufgaben zur Veranstaltung **Ausgabe: 18.12.2024**
Analysis 1, WiSe 2024/2025 **Abgabe: 07.01.2025**

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Hausaufgabenblatt 11

1. Berechnen Sie die Fläche, die im 1. Quadranten von den Funktionen

$$f(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 1 - x^2$$

eingeschlossen wird.

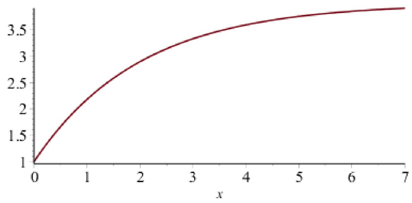
2. Wie groß ist der Flächeninhalt, der von den Funktionen

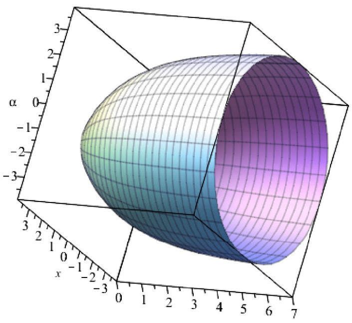
$$f(x) = -0,25x^4 + 4, \qquad g(x) = -2x - 4 \qquad \text{und} \qquad h(x) = 2x - 4$$

im Intervall $[-2,5; 2,5]$ eingeschlossen wird?

3. Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphen der Wurzelfunktion um die $x-$Achse im Intervall $[0; 5]$ entsteht.

4. Bestimmen Sie das Volumen, das entsteht, wenn man die Funktion $f(x) = 4 - 3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ im Intervall $[0, 6]$ um die x-Achse rotieren läßt.





5. Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hospital, ohne die Integrale zu berechnen:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\int\limits_0^x \sin(t^3)\, dt}{x^4} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\int\limits_0^{x^2} \sin(t)\, dt}{x^4} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\int\limits_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt}{e^{3x^2} - e^3} \right)$

6. Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} e^x \, dx$ b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{1}{2} x^{-5} \, dx$ c) $\displaystyle\int\limits_{3}^{\infty} \frac{4+x}{x^3} \, dx$

Hausaufgabenblatt 12

1. Berechnen Sie

   a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x-1}\,dx$

2. Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz.

   a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}\,dx$

3. Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{3x^4+5x^2+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+5x-1}\,dx$

4. Untersuchen Sie mit dem Integralkriterium die Konvergenz der folgenden Reihen:

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\sqrt{n}+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-n}$

5. Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Integrale:

   a) $\displaystyle\int_0^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+1}\,dx$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 01 09./10.10.2024

1. Geben Sie eine rekursive Beschreibung für die folgenden Folgen an:

   a) $a_n = 3n + 2$

   b) $a_n = n^2 - 2n$

   c) $a_n = 3^{-n}$

   d) $a_n = \frac{n}{n+1}$

2. Beweisen Sie mithilfe vollständiger Induktion

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3. Berechnen Sie die folgenden Reihen:

   a) $\sum_{i=2}^{7}(2 - i)$ b) $\sum_{i=0}^{4}(i + 1)^2$ c) $\sum_{i=3}^{8}\left(10 - \frac{i}{2}\right)$

4. Beweisen Sie folgende Aussage durch vollständige Induktion

$$\sum_{m=0}^{k}\binom{n+m}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}$$

Übungsblatt 02 16./17.10.2024

1. Zeigen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes, dass
$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist.

2. Bestimmen Sie von folgenden Mengen Infimum, Supremum, Minimum und Maximum, falls diese existieren:

   a)
   $$A = \left\{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$$

   b)
   $$B = \left\{n + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) | n \in \mathbb{N}\right\}$$

   c)
   $$C = \left\{n \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) | n \in \mathbb{N}\right\}$$

   d)
   $$D = \{1, 2, 4, -3, 10, -4, -1, 12\}$$

3. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die folgenden Folgen ($n \in \mathbb{N}$) auf Monotonie und begründen Sie anhand der Definition.

   a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt{n^2 - n}$

4. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und begründen Sie anhand der Definition.

   a) $a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ b) $a_n = -(n+1)$

5. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die gegebenen Folgen auf Konvergenz mit den gegebenen Grenzwerten und geben Sie ein n_0 in Abhängigkeit von ε an:

   a) $a_n = \frac{1}{n^3}$, $a = 0$

   b) $b_n = \frac{n^2}{2n^2-2}$, $b = \frac{1}{2}$

   c) $c_n = n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, $c = 1$

Aufgaben zur Veranstaltung
Analysis 1, WiSe 2024/2025

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 03 — 23./24.10.2024

1. Berechnen Sie die Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3n}-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot n}\right)$
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}\right)$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+1}-n\right)$
   d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\right)$

2. Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

   a) $a_n=\binom{n}{5}$
   b) $a_n=\frac{n+3}{n^2+3n-5}$
   c) $a_n=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^p}\ ,\quad p\in\mathbb{N}$
   d) $a_n=3n-\sqrt{9n^2+1}$

3. Berechnen Sie die Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}$
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7+3n}{3n}\right)^{-n}$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^{5n}$
   d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{7n^2}\right)^{n}$

4. **(Präsentation der Lösung)** Konvergieren oder divergieren die folgenden rekursiven Folgen ($n\in\mathbb{N}_0$)? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   a) $a_{n+1}=\sqrt{4a_n-3}$ mit $a_0=3$
   b) $a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\cdot a_n$ mit $a_0=1$

5. **(Präsentation der Lösung)** Welche rationale Zahl wird dargestellt durch

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}+\frac{2}{3^{k+1}}\right)$
   b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{2^k}$

6. **(Präsentation der Lösung)** Vereinfachen Sie folgende gebrochen rationale Funktion ($x\in\mathbb{R}$), indem Sie die Funktion als Summe ihrer Partialbrüche darstellen.

$$f(x)=\frac{2x^3-14x^2-4x+94}{x^3-5x^2-2x+24}$$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 04 — 30./31.10.2024

1. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie mittels Abschätzen eine konvergente Majorante oder divergente Minorante finden.

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3 - 4k^2 + 3k + 42}{7 - 12k + 3k^2 + 7k^4}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos^2(k) + 4k^3 - 5k + 9}{\sqrt{k} + 4k^5 - \sin(k^2)}$

2. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die gegebenen Reihen mithilfe des Wurzelkriteriums auf Konvergenz:

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln(n)}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^2 + k - 1}{k^2 - k + 1}\right)^{3k}$

3. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die gegebenen Reihen mithilfe des Quotientenkriteriums auf Konvergenz:

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{(2k+3)!}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot (2k+1)!}{k^{2k}}$

4. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie auf Konvergenz :

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+(-1)^k}{k^2}$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-k)^k}{k^2}$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-3)^k \sin \frac{1}{5^k}$

   Hinweis : $\sin(x) < x$ für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

5. **(Präsentation der Lösung)** Folgende Reihen sind auf Konvergenz zu untersuchen.

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)^k}{k^k \cdot 10^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$

   c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5 - 3k \cdot \sin(3k)}{k^3 - \cos(k)}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{k^2 - 3k + 1}{2k^2 + k + 1}$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 05 06./07.11.2024

1. **(Präsentation der Lösung)** Für welche x konvergiert die Reihe? (Ränder nicht vergessen)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-4}{n} \right)^n (x+1)^n$$

2. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

   a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot x^k}{3^k}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^k}{1+3^k}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k \cdot x^k$

3. **(Präsentation der Lösung)** Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{3-x}$$

   in einer Potenzreihe um den Punkt $x_0 = 2$.

4. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie die Potenzreihe und Konvergenzradius der Funktion

$$g(x) = \frac{4}{2x-5} \qquad \text{mit} \qquad x \neq \frac{5}{2}$$

   um die Entwicklungspunkte

   a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = 1$ c) $x_0 = -1$

Aufgaben zur Veranstaltung
Analysis 1, WiSe 2024/2025

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 06 — 13./14.11.2024

1. Während der Vorlesung wurden folgende Zusammenhänge besprochen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \tag{2}$$

Wo ist der Unterschied zwischen (2) und folgenden Ausdrücken (3) und (4)?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \tag{3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \tag{4}$$

Wo ist der Unterschied zwischen (1) und folgenden Ausdrücken (5) und (6)?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^x}{x!} \; x \in \mathbb{N} \tag{6}$$

2. **(Präsentation der Lösung)** Zeigen Sie für $x_0 > 0$ die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

   a) mit dem Folgenkriterium.
   b) mit dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium.
   c) Berechnen Sie für das $\varepsilon - \delta-$Kriterium zu $x_0 = 4$ jeweils die $\delta-$Werte für
      i. $\varepsilon = 1$ und ii. $\varepsilon = \frac{1}{8}$

Hinweis: Beschränken Sie bei b) δ so, dass $x > \frac{1}{2}x_0$ bleibt.

3. Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Folgen die Unstetigkeit in $x_0 = 2$ der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} & \text{für } x \leq 2 \\ x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

4. **(Präsentation der Lösung)** Zeigen Sie die Stetigkeit mit dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ im Intervall $(1;5)$

5. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig ergänzbar sind:

   a)
   $$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < -1 \\ 4x-1 & \text{für } x > -1 \end{cases} \quad \text{und} \quad x_0 = -1$$

   b)
   $$f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad x_0 = 0$$

   c)
   $$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \quad \text{und} \quad x_0 = 1$$

6. **(Präsentation der Lösung)** Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion auf dem Intervall $[-1,1]$ gleichmäßig stetig ist
   $$f(x) = \frac{x}{4-x^2}$$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 07 — 20./21.11.2024

1. Gegeben seien die Funktionen und der Punkt x_0

   i) $f_1(x) = 3 - 2x^2$, mit $x_0 = 1$ ii) $f_2(x) = x^2 + 2x$, mit $x_0 = 1$

   a) Überprüfen Sie, ob die gegebenen Funktionen $f_i(x)$ lokal Lipschitz-Stetig um den Punkt x_0 sind.
   b) Wie lauten die Lipschitz-Konstante L und die zugehörigen Geradengleichungen, zwischen denen die Funktion liegt, falls $\delta = 1$ ist?

2. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

   a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ mindestens eine Nullstelle im Intervall $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ besitzt.
   b) Welche Auswirkung hat die Vergrößerung des zu untersuchenden Intervall auf $\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$? Was bedeutet dies für die Nullstellensuche?
   c) Wie viele Nullstellen kann ein Polynom $n-$ten Gerades maximal haben?

3. **(Präsentation der Lösung)** Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich

   a) $\ln(e^7)$ b) $e^{3\cdot\ln(5)}$
   c) $\ln\left(\frac{3}{a}\right) + \ln(6a)$ d) $7 \cdot \ln(b^3) - \ln(b^{21})$
   e) $(e^b)^{\ln(2)}$

4. **(Präsentation der Lösung)** Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion $f(x) = 2x^4 - 5x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$.

5. **(Präsentation der Lösung)** Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

   a) $f(x) = (3\ln(x))^{2x}$ b) $f(x) = (\sin(x))^{\ln(x)}$
   c) $f(x) = x^{x^{\frac{1}{2}}}$ d) $f(x) = a^x \cdot x^a \quad (a \in \mathbb{R})$
   e) $f(x) = (\arctan(x))^x$

   Hinweis: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$

Aufgaben zur Veranstaltung
Analysis 1, WiSe 2024/2025

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 08 — 27./28.11.2024

1. Berechnen Sie die Ableitungen von

   a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
   b) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$
   c) $f(x) = \cos^{10}(x)$
   d) $f(x) = \sinh(\cosh(\sinh(x)))$

   Hinweis: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$

2. Berechnen Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen:

   a) $f(x) = (x^2 + 2x)^5$
   b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
   c) $f(x) = \sin^2(2x)$
   d) $f(x) = e^{e^{e^x}}$
   e) $f(x) = \ln(\ln(\sin(x)))$
   f) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x^2-4x+3}$
   g) $f(x) = x^3\ln(x^2)$
   h) $f(x) = \ln(\cot(x))$
   i) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$
   j) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$
   k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan(x))$
   l) $f(x) = x^{\cos(x)}$
   m) $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

3. **(Präsentation der Lösung)** Bilden Sie jeweils die 1.Ableitung:

   a) $f(x) = \dfrac{(3+4x^2)^5}{(2x^3+1)^{13}\cdot\sqrt{1+x^2}}$
   b) $g(x) = e^{3x}\cdot(\ln(x))^{-\frac{3}{x}}$
   c) $h(x) = \log_3\left(\dfrac{1+x^2}{2+x^3}\right)$
   d) $k(x) = (10^x + \log_{10}(x))^2$

4. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie jeweils die 1.Ableitung

   a) $f_1(x) = (x^2 + 2x)^3$
   b) $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3}}$
   c) $f_3(x) = \dfrac{\sin(3x)}{1+\sqrt{x}}$
   d) $f_4(x) = 2^{(x^x)}$
   e) $f_5(x) = x^{(2^x)}$
   f) $f_6(x) = x^{(x^2)}$
   g) $f_7(x) = \sqrt{1+\sin^2(2x+\pi)}$
   h) $f_8(x) = \arctan\left(\left(e^{2x}-2\right)^2\right)$

5. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie die potentiellen Extrema der folgenden Funktionen

   a) $f(x) = x^4 - 2x^2$
   b) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 09 — 04./05.12.2024

Das folgende Übungsblatt enthält mehr Aufgaben, als vermutlich innerhalb der Übungszeit bearbeitet werden können.

1. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei die Funktion
$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2 \cdot \ln(x^3 + \sqrt{2 - x^2})$$
Zeigen Sie durch Anwendung des Mittelwertsatzes: $\exists\ y \in\ ]0,1[$ mit $f'(y) = \ln(2)$

2. Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf Monotonie im entsprechenden Intervall.
   a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad [0;\infty)$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1;1)$
   c) $f(x) = (x^2 - 7x + 12)^{-1} \qquad (3;5]$

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte, falls diese existieren
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{e^x}\right)$
   b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)$
   c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}\right)$
   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 9} - (x-3)\right)$

4. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie die Grenzwerte:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\sinh(x) - x}{x^3}\right)$
   b) $\lim\limits_{x\to 0} \left((\cos(x) - 1)^{x^2}\right)$

5. **(Präsentation der Lösung)** Ein Patient bekommt ein Medikament verabreicht. Die Wirkstoffmenge im Blut wird beschrieben durch:
$$f(t) = 10 \cdot (e^{-0{,}5t} - e^{-t})$$
mit t in Stunden nach Verabreichung und $f(t)$ in Milligramm. Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffmenge am schnellsten ab?

6. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom dritten Grades der folgenden Funktionen um die angegebenen Entwicklungspunkte.
   a) $f(x) = \sin(x), \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$
   b) $g(x) = \dfrac{1}{1-x}, \qquad x_0 = 0$
   c) $h(x) = \ln(x+1), \qquad x_0 = 0$

7. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei folgende Funktion
$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$
Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima der Funktion.

Übungsblatt 10 11./12.12.2024

1. Berechnen Sie die Integrale:

   a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

   c) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int \sqrt{1+2x}\,dx$

2. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partieller Integration.

   a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2\cdot\ln(x)\,dx$

3. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion F.

   a) $f(x) = x^2 + \sqrt{4x} + 7\sinh(5x)$
   b) $f(x) = \sinh(-x)\cdot\cosh(-x)$
   c) $f(x) = \sinh(x)\cdot\ln(-\cosh(x))$
   d) $f(x) = (x-2)\cdot(x-4)$
   e) $f(x) = 4x\cdot\cos(x^2)$

   Hinweis: Es gilt $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ und $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

4. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie die Integrale mithilfe der Substitution und Partieller Integration.

   a) $\displaystyle\int e^{x^2}\cdot x\,dx$ b) $\displaystyle\int x^2\cdot\ln(x)\,dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx$ d) $\displaystyle\int x\cdot\sin(3x)\,dx$

5. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2+x+4}{x^2-2x+1}$$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 11 — 18./19.12.2024

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Fläche eines Halbkreises mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $r = 4$.

   Hinweis: Führen Sie ggfls. eine Substitution durch, sodass Sie $\sqrt{16 \sin^2(z)}$ erhalten.

2. Bestimmen Sie die Fläche zwischen den beiden gegebenen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

   a) $f(x) = (x-1)^2 - 4$ und $g(x) = -(x+1)^2 + 4$
   b) $f(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = \cos(2x)$ mit $x \in \left[\frac{\pi}{8}; \frac{5}{8}\pi\right]$

3. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie die Flächen, die zwischen folgenden Kurven liegen:

   a) $f(x) = 6 - x$ und $g(x) = \frac{5}{x}$
   b) $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x}{16}$ und $h(x) = \frac{1}{x}$ im 1.Quadranten

4. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei die Funktion

   $$f(x) = e^x$$

   a) Bestimmen Sie den Funktionswert der folgenden Funktion an der Stelle 2 mithilfe des Taylorpolynoms zweiten Grades um den Punkt $x_0 = 0$.
   b) Bestimmen Sie das entsprechende Restglied in Integraldarstellung.

5. **(Präsentation der Lösung)** In einem Computerspiel werden Gegenstände mithilfe einer Schleuder auf feste Ziele geschossen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Gegenstände zur Verfügung. Die Wurfparabel eines bestimmten Gegenstands kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

   $$f(x) = -0,1x^2 + 0,9x + 1 \text{ mit } x \geq 0$$

   Dabei ist x die horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE) und $f(x)$ die Höhe des Gegenstands über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE. Der Gegenstand trifft das Ziel nicht und prallt auf den Boden auf.

   a) Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Gegenstand auf dem Boden aufprallt.
   b) Der Weg, den der Gegenstand vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden zurücklegt, entspricht der Länge der Kurve zwischen diesen Punkten. Berechnen Sie den von dem Gegenstand zurückgelegten Weg vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden.

6. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \int\limits_0^x \frac{1}{t+e^{-1}} \, dt \right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \int\limits_0^x \frac{t+1}{t^2+2} \, dt \right)$

7. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Integrale und berechnen deren Wert, wenn sie konvergent sind:

a) $\int\limits_0^\infty e^{-x} \, dx$

b) $\int\limits_0^\infty \cos(x) \, dx$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 12 08./09.01.2025

1. Gegeben sei das folgende Integral

$$\int_0^2 -\frac{1}{(x-1)^4} dx$$

   a) Gibt es in diesem Integral positive Funktionswerte? Was bedeutet das für die Flächenmaßzahl?
   b) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe der Stammfunktion.
   c) Ist das Ergebnis sinnvoll?
   d) Berechnen Sie das Integral unter Berücksichtigung von c).

2. Überprüfen Sie, ob die uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie, wenn möglich, deren Wert. Auftretende Grenzwerte können mit L'Hospital bestimmt werden.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \ln(x)\, dx$

3. Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3x^2+4x+7}{x^4+2x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+4x+7}{x^4+2x^2}\, dx$

   Tipp: Schreiben Sie in b) den Nenner als $x^2 \cdot (x^2+2)$ und nutzen die Integralgrenzen zum richtigen Abschätzen aus.

4. Untersuchen Sie mithilfe des Integralkriteriums, ob die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$$

5. Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Integrale:

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 13 — 15./16.01.2025

Das folgende Übungsblatt enthält mehr Aufgaben, als vermutlich innerhalb der Übungszeit bearbeitet werden können. Wir empfehlen, die Übungszeit dafür zu nutzen, um Fragen zu diesen Aufgaben zu klären.

1. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei die Folge

$$a_n = \frac{5n^2 + n - 5}{7n^2 - 5n + 4}$$

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge und geben Sie ein n_0 in Abhängigkeit von ε an.

2. **(Präsentation der Lösung)** Zeigen Sie, dass die Folge $(n \in \mathbb{N}_0)$

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 4} \quad \text{mit} \quad a_0 = 2,6$$

konvergent ist und bestimmen Sie deren Grenzwert.

3. **(Präsentation der Lösung)** Berechnen Sie den Wert der gegebenen Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{3^{2k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(k-1)\cdot(k+2)}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$

4. **(Präsentation der Lösung)** Untersuchen Sie mit Hilfe des Minoranten-/Majorantenkriteriums auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{k^2+5k-1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(k) + \sin^2(k)}{3k^2}$

5. **(Präsentation der Lösung)** Folgende Reihen sind auf Konvergenz zu untersuchen:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k^2}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{14}{5k}\right)^k \cdot k!$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\cdot(-1)^k}{2+3^k}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin(k))^3}{2k^2+\cos(k)}$

6. **(Präsentation der Lösung)** Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x^2 - 3x + 2}$$

a) Entwickeln Sie die Funktion in eine Potenzreihe um Null.

b) Wo konvergiert die Reihe?

Hinweis: Verwenden Sie die Partialbruchzerlegung.

7. **(Präsentation der Lösung)** Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion $f(x)$ stetig ist

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & \text{für } x < 2 \\ a^2 \cdot (x + 2) & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Dr. Thomas Eifert, Ilayda Sevimli, Thomas Janissen — FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Übungsblatt 14 — 22./23.01.2025

Das folgende Übungsblatt enthält mehr Aufgaben, als vermutlich innerhalb der Übungszeit bearbeitet werden können. Beginnen Sie mit den Aufgaben, die Ihnen am schwersten fallen, und nutzen Sie die Übung und das Tutorium für Fragen.

1. Haben folgende Funktionen potentielle Extremstellen?

   a) $f(x) = 3x^2 + 6x$ b) $g(x) = 6x^3 - 9x^2$

2. Welchen Grenzwert, falls dieser existiert, besitzen die gegebenen Ausdrücke?

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{3x^3+4x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\ln\left(x-\frac{\pi}{4}+1\right)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(1+x)\cdot e^{-x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^{\frac{2}{x}}\right)$

3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^3-4x^2+8}{x-2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(3x)}{7x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)$

   e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}\right)$

4. Zeigen Sie mit dem Satz von Rolle, dass das Polynom

   $$p(x) = x^3 + a\cdot x + b \qquad \text{für} \qquad a > 0$$

   keine zwei reellen Nullstellen besitzen kann.

5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggfls. die Koordinaten.

   a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1$ b) $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$

6. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2.Grades der gegebenen Funktionen im Punkt x_0.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-2)}, \qquad x_0 = e+2$

   b) $f(x) = 2x^2\cdot e^{-x}, \qquad x_0 = \ln(2)$

   c) $f(x) = \sin^2(x)\cdot\cos^2(x), \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

7. a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3.Grades für die Funktion $g(x) = \ln(x\cdot e^{-2x})$ an der Stelle $x_0 = 1$.

   b) Berechnen Sie $g(1,25)$ näherungsweise mittels des Taylorpolynoms.

8. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit Seitenlänge a der Grundfläche und Höhe h soll ein möglichst großes Volumen bei vorgegebener Oberfläche haben. Bestimmen Sie bei einer Oberfläche (inkl. quadratischer Grundfläche der Pyramide) von $400cm^2$

   a) die Höhe und die Länge der Grundseite der Pyramide.

   b) das zugehörige maximale Pyramindenvolumen.

   Tipp: Beim Auflösen und Einsetzen entsteht ein Produkt aus zwei Termen, multiplizieren Sie erst aus und leiten dann ab.

9. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe einer geeigneten Integrationsmethode:

   a) $\int \frac{\ln(x)}{x^3}\, dx$ b) $\int x^2 \cdot \sqrt{x^3+1}\, dx$

   c) $\int x^2 \cdot e^{-3x}\, dx$ d) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\, dx$

10. Berechnen Sie die bestimmten Integrale

    a) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} (x-1) \cdot e^{3x}\, dx$

    b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin(x)} \cdot \cos(x)\, dx$

    c) $\int\limits_{0}^{1} x \cdot e^{2+3x^2}\, dx$

11. Berechnen Sie die folgenden Integrale mithilfe der Partialbruchzerlegung.

    a) $\int \frac{1}{x \cdot (x-1)}\, dx$ b) $\int \frac{1}{x^4-1}\, dx$

12. Berechnen Sie im angegebenen Intervall die Länge der Kurve folgender Funktion:

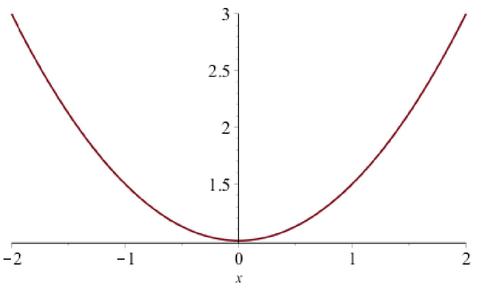
$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot (2x+1)^{\frac{3}{2}}, \qquad [0;4]$$

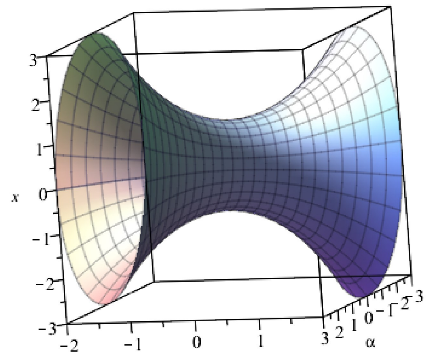
13. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^3$

    a) das Volumen und b) die Mantelfläche

    des zugehörigen Rotationskörpers im Intervall $[0, 3]$.

14. Bestimmen Sie das Volumen, das entsteht, wenn man die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ im Intervall $[-2, 2]$ um die x-Achse rotieren läßt.





15. Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}\, dx$$

16. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{8}{4-x^2}\, dx$

Übungsblatt xx — 16.12.2024

1.) Welches sind min, max, sup, inf, limsup und liminf der Menge

$$A = \{(1 + (-1)^n) \cdot (1 + \frac{1}{n})\}$$

2.) Berechnen Sie die ersten 6 Folgenterme und min, max, sup, inf, limsup und liminf der Folge

$$a_n = (1 + (-1)^n) \cdot (1 + \frac{1}{n})$$

3.) Berechnen Sie einen Grenzwert a und ein n_0, so dass die Folge

$$\frac{-n^2 + 2n + 10}{4n^2 - 10n + 100}$$

stets innerhalb der $\varepsilon-$Umgebung von a liegt.
Wie groß wird n_0 für $\varepsilon = 0,1$ und $\varepsilon = 0,001$?

4.) Zeigen Sie die Konvergenz der Folgen und berechnen Sie ein $n_0(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0,1$

a)

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$$

b)

$$a_n = \frac{n^3 + \sqrt{n} - \frac{1}{n}}{3n^3 + n^2 - 2\sqrt{n} + 1}$$

5.) Berechnen Sie

$$a) \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-3}$$

$$b) \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{20n}$$

$$c) \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

$$d) \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

6.) Berechnen Sie den Grenzwert von

$$a_n = \sqrt[n]{6^n + 7^n}$$

7.) Zeigen Sie die Konvergenz von

$$a_n = \frac{i \cdot n}{i + n}$$

8.) Zeigen Sie ohne Induktion und ohne Kenntnis des Grenzwertes die Konvergenz der Folge

$$a_n = \frac{n^2 - n + 2}{n^2}$$

9.) Wir haben gesehen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton wachsend und konvergent mit

$$0 < a_n < e = \lim_{n \to \infty} a_n$$

und

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

ist monoton wachsend und konvergent mit

$$0 < b_n < \frac{1}{e} = \lim_{n \to \infty} b_n$$

Ermitteln Sie hieraus eine Möglichkeit, die Zahl e zu approximieren. Geben Sie eine Tabelle aus, in der Sie a_n für $n = 10, 100, 10000$ berechnen und ein Intervall in dem dann e liegt. Geben Sie auch die Intervallbreite (Genauigkeit) an. Wie lautet somit e gerundet auf 3 Nachkommastellen? Berechnen Sie nun für n=10000 nun den Mittelwert aus a_n und $\frac{1}{b_n}$. Wie genau ist dieser Wert im Vergleich zum exakten Wert $e = 2,71828183...$

10.) Zeigen Sie: Für zwei positive monoton fallende Folgen a_n und b_n ist auch $c_n = a_n \cdot b_n$ und $d_n = a_n + b_n$ eine positive monoton fallende Folge.

11.) Zeigen Sie die Konvergenz/Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2(n)}$$

12.) Zeigen Sie Konvergenz/Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2(n)}$$

Konvergiert die Reihe auch absolut? Wieviele Summanden wären bei Konvergenz nötig, um den Grenzwert auf 0,1 genau zu berechnen? Wie lautet somit die Näherung für den Grenzwert?

13.) Berechnen Sie den Wert der Reihe

a)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k}{\left(k^2-1\right)^2}$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k^2-3k+\frac{5}{4}}$$

14.) Konvergieren oder divergieren die folgenden Reihen

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt{n}+2n}$$

b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^3-100n-1}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$$

e)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\ln n)^2}$$

f)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

h)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

15.) Überführen Sie

$$f(x)=\frac{3}{2+4x}$$

in eine Potenzreihe um $x_0=1$. Wo wird diese Reihe konvergieren? Liegt Konvergenz für $x=0$ vor? Berechnen Sie in diesem Fall den Funktionswert über die Potenzreihe und über $f(x)$.

16.) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}}(x-2)^n$$

17.) Zeigen Sie für $x_0 > 0$ die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

mit dem Folgenkriterium und dem $\varepsilon - \delta-$Kriterium.

Berechnen Sie für das $\varepsilon - \delta-$Kriterium zu $x_0 = 4$ jeweils für die Werte $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{8}$ die $\delta-$Werte. Wie groß ist die maximale Abweichung der Funktionswerte zu $f(x_0)$ im δ-Intervall?

Hinweis: Beschränken Sie δ so, dass $x > \frac{x_0}{2}$ bleibt.

18.) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

19.) Ermitteln Sie die Funktionswerte für $\cos(\frac{\pi}{4})$ und $\sin(\frac{\pi}{4})$. ausgehend von

$$\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$$

20.) Zeigen Sie $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmässig stetig in $[0, \infty)$. Hinweis: $\delta = \varepsilon^2$

21.) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\sinh(h)}{h} &= 1 \\ \lim_{h\to 0} \frac{\cosh(h)-1}{h} &= 0 \end{aligned}$$

22.) Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die Ableitung von $f(x) = \cosh(x)$ und $g(x) = \sinh(x)$. Berechnen Sie diese anschließend mit Hilfe der Definition über die Exponentialfunktion.

23.) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{arccosh}(y)$

24.) Differenzieren Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Funktion

$$f(x) = \frac{12}{2x+3}$$

25.) Zeigen Sie :

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

26.) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Stetigkeit, Monotonie, lokale Extrema, Krümmung und Wendestellen zu

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + x & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 + x & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

27.) Berechnen Sie

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - 1}{\cos(x) - 1}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\ln(x)}$$

28.) Berechnen Sie zur Funktion

$$f(x) = \ln x \cdot e^{x-1}$$

die Taylorreihe bis zum quadratischen Term in $x_0 = 1$

29.) Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\int \sin(3x)\cos(5x)dx$$

b)

$$\int_{0{,}01}^{\pi^2/16} \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

c)

$$\int \frac{2x - 13x^2 + 9x^3 - 4x^4 + 2x^5 + 9}{(x^2+4)(x-1)^2}dx$$

30.) Zeigen Sie durch die Umkehrung der Quotientenregel:

$$\int u\frac{v'}{v^2}dx = \int \frac{u'}{v}dx - \frac{u}{v}$$

Lösen Sie hiermit das Integral

$$\int \frac{2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}dx \left(= \int x\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx \right)$$