Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
26. September 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Kombinatorik

Multiplikationsregel

Gegeben seien Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

- Wie viele Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $1 \leq i \leq n$ gibt es?
- Anders: Wie groß ist $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n|$?

Beispiel 15

Für $A_1 = \{1, 2, 3\}$ und $A_2 = \{a, b\}$ gibt es 6 Möglichkeiten

$$A_1 \times A_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}.$$

Es gilt

$$|A_1 \times A_2| = 6 = 3 \cdot 2 = |A_1| \cdot |A_2|$$

- Allgemein gilt:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Multiplikationsregel

Allgemeiner gilt die folgende Regel

Satz 1: Multiplikationsregel

Aus den Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ werden geordnete Tupel der Form $(a_1, \ldots, a_n)$ gebildet, sodass $a_i \in A_i$ für $1 \leq i \leq n$.

Gibt es	m_1	Möglichkeiten für a_1,
gibt es nach der Wahl von a_1	m_2	Möglichkeiten für a_2,
$\vdots$		
gibt es nach der Wahl von a_{n-2}	m_{n-1}	Möglichkeiten für a_{n-1},
gibt es nach der Wahl von a_{n-1}	m_n	Möglichkeiten für a_n,

dann ergibt sich die Anzahl m der möglichen Tupel zu:

$$m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ \ldots \ \cdot m_n.$$

Beweis per Induktion über n.

Multiplikationsregel

Beispiel 16

Wie viele Möglichkeiten für die ersten drei Plätze gibt es bei einem Pferderennen mit 6 Pferden?

- Für den 1. Platz gibt es 6 Kandidaten.
- Für den 2. Platz gibt es 5 Kandidaten.
- Für den 3. Platz gibt es 4 Kandidaten.

Damit gibt es 120 Möglichkeiten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Pferderennen mit 6 Pferden die ersten 3 Plätze richtig vorherzusagen?

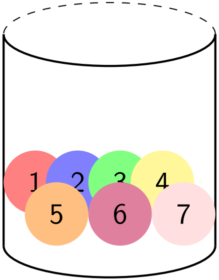
Urnenmodell

Die meisten Laplace-Modelle lassen sich auf das *Urnenmodell* zurückführen:

Gegeben sei eine Urne mit n Kugeln. Die Kugeln seien von 1 bis n durchnummeriert. Wir ziehen k Kugeln aus der Urne mit n Kugeln.

Dabei haben wir die Möglichkeiten

- Ziehen mit/ohne Zurücklegen
- Ziehen mit/ohne Beachtung der Reihenfolge



Urnenmodell

Wir ziehen k Kugeln aus der Urne mit n Kugeln.
Es ergeben sich vier Kombinationen

	Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Mit Beachtung der Reihenfolge	(gleichzeitiges) mehrfaches Würfeln	Pferderennen
Ohne Beachtung der Reihenfolge	Aufteilen von k Objekten auf n Objekte (mehrfach)*	Lotto (6-aus-49)

* Einsatz k EUR auf n Zahlen beim Roulette

- Mit welchem Urnenmodell kann die Top 3 eines Pferderennen beschrieben werden?
- Mit welchem Urnenmodell kann die Wahl eines Passworts beschrieben werden?

Fakultät

Wie viele Möglichkeiten k Elemente aus n zu ziehen gibt es?

> Es kommt darauf an: Mit/ohne Zurücklegen? Mit/ohne Beachtung der Reihenfolge?

Definition 8

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Fakultät ("n Fakultät") ist definiert als

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

und für $n = 0$ ist $0! = 1$.

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten n Elemente aus n zu ziehen gibt es?

Beispiel 17

Permutationen: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen von 1 bis n umzusortieren?

Urnenmodell: Wir ziehen n Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln **ohne** Zurücklegen und **mit Beachtung** der Reihenfolge.

Für die erste Kugel haben wir n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$, für die dritte $n-2$, ..., für die n-te 1.Mit der Multiplikationsregel gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ mögliche Permutationen.

Es gibt $n!$ viele Möglichkeiten n Elemente aus n zu ziehen (ohne zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge).

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **ohne** Zurücklegen und **mit** Beachtung der Reihenfolge?

> 1 Element: n Möglichkeiten

> 2 Elemente: $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten

> 3 Elemente: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Möglichkeiten

> ...

> k Elemente: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten. Beachte

$$
\begin{aligned}
& n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\
& = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **ohne** Zurücklegen und **mit** Beachtung der Reihenfolge? $\frac{n!}{(n-k)!}$

Beispiel 18

Sei $n = 3, k = 2$, dann gibt es

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$

2-Tupel, nämlich

$$(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)$$

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **ohne** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge?

> Ohne Beachtung der Reihenfolge entsprechen $(1, 2)$ und $(2, 1)$ jeweils $\{1, 2\}$.

> Allgemeiner: alle Permutationen eines Tupels $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ entsprechen der Menge $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$

> Wie viele Permutationen gibt es?
>
> > So viele wie es Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, k\}$ gibt
> >
> > Also: $k!$

> Es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ viele k-Tupel, davon entsprechen jeweils $k!$ viele der selben Menge, also gibt es $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ unterschiedliche Mengen.

Binomialkoeffizient

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **ohne** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge? $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Definition 9

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Der Binomialkoeffizient (“n über k”) ist definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

> Warum?

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **ohne** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge? $\binom{n}{k}$

Beispiel 19

Sei $n = 3, k = 2$, dann gibt es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3$$

2-elementige Teilmengen

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$$

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **mit** Zurücklegen und **mit** Beachtung der Reihenfolge?

> Einfach!

> Für das erste Element gibt es n Möglichkeiten

> Für das zweite Element gibt es n Möglichkeiten

> $\ldots$

> Für das k-te Element gibt es n Möglichkeiten

Nach der Multiplikationsregel gibt es $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^k$ Möglichkeiten

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **mit** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge?

> Komisches Modell: Wir müssen nacheinander ziehen (zurücklegen), aber Reihenfolge spielt keine Rolle

> Achtung: Reihenfolge spielt keine Rolle, d.h. wir müssen nur angeben wie oft jedes Element $\{1, 2, \dots, n\}$ gezogen wurde

> Repräsentation: $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, wobei k_i angibt wie oft i gezogen wurde

  > Es muss gelten: $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$

> Alternative Repräsentation durch Striche und Punkte:

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **mit** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge?

- > Mit alternativer Repräsentation: Jede Möglichkeit besteht aus k Punkten und $n-1$ Strichen, also $k+n-1$ Zeichen.
- > Jedes n-Tupel $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ ist eindeutig festgelegt durch die Position der Striche
- > Wie viele Möglichkeiten gibt es $n-1$ Striche auf $k+n-1$ Positionen aufzuteilen? $\binom{k+n-1}{n-1}$
- > Gemäß der Symmetrie gilt

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

- > Also gibt es $\binom{k+n-1}{k}$ Möglichkeiten k aus n Elementen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen

Urnenmodell

Wie viele Möglichkeiten gibt es k Elemente aus n zu ziehen **mit** Zurücklegen und **ohne** Beachtung der Reihenfolge? $\binom{k+n-1}{k}$

Beispiel 20

Sei $n = 3, k = 2$, dann gibt es

$$\binom{k+n-1}{k} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Möglichkeiten für (k_1, k_2, k_3)

$$(2,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,2,0),(0,1,1),(0,0,2)$$

Notation

Sei $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Wir definieren die folgenden Mengen:

> *k-Permutationen*
>> k-Permutation aus M mit Wiederholung
$$Per_k^n(mW) = \{(a_1, \dots, a_k) | 1 \leq a_j \leq n \text{ für } j = 1, \dots, k\}$$
>> k-Permutation aus M ohne Wiederholung
$$Per_k^n(oW) = \{(a_1, \dots, a_k) | a_i \neq a_j \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq k\}$$

> *k-Kombinationen*
>> k-Kombination aus M mit Wiederholung
$$Kom_k^n(mW) = \{(a_1, \dots, a_k) | 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n\}$$
>> k-Kombination aus M ohne Wiederholung
$$Kom_k^n(oW) = \{(a_1, \dots, a_k) | 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n\}$$

Urnenmodell

Wie hängen diese Mengen mit dem Urnenmodell zusammen?

	Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Mit Beachtung der Reihenfolge	$Per_k^n(mW)$	$Per_k^n(oW)$
Ohne Beachtung der Reihenfolge	$Kom_k^n(mW)$	$Kom_k^n(oW)$

Wie groß sind die Mengen jeweils?

Urnenmodell

Wie groß sind die Mengen jeweils?

	Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Mit Beachtung der Reihenfolge	$\lvert Per_k^n(mW)\rvert = n^k$	$\lvert Per_k^n(oW)\rvert = \frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Beachtung der Reihenfolge	$\lvert Kom_k^n(mW)\rvert = \binom{k+n-1}{k}$	$\lvert Kom_k^n(oW)\rvert = \binom{n}{k}$

Beweis: Vergleiche Herleitungen zum Urnenmodell

Übungen

Übung 7

Beschreiben Sie für das Ziehen von 2 Kugeln aus einer Urne mit 4 Kugeln die Ergebnisräume $Per_k^n(mW), Per_k^n(oW), Kom_k^n(mW)$ und $Kom_k^n(oW)$. Bestimmen Sie die Mächtigkeiten dieser Mengen.

Übung 8

Wir werfen einen Würfel 3 Mal.

1. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur gerade Zahlen geworfen werden?
2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, das die höchste Augenzahl k ist, für $k = 1, \ldots, 6$?

Urnenmodell - ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Satz 2: Binomischer Lehrsatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis:

> Schreibe: $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$

> Ausmultiplizieren: Wähle k Terme, aus denen wir x nehmen

> Es bleiben $n-k$ Terme mit y

> Daraus ergeben sich Terme der Form $x^k y^{n-k}$

> Anzahl der Terme entspricht Anzahl der Möglichkeiten k aus n Elementen zu wählen (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge), also $\binom{n}{k}$ $\square$

Binomialkoeffizient

Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Urnenmodell - ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Satz 2: Binomischer Lehrsatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beispiel 21

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} xy + \binom{2}{2} y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Übungen

Übung 9

Beweisen Sie die folgenden Gleichungen für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

1. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$
2. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^j = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 1 \\ 1 & \text{für } n = 0. \end{cases}$
3. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Übung 10

Sei A eine Menge mit n Elementen. Dann gibt es $\binom{n}{k}$ viele Teilmengen von A mit k Elementen. Warum?

Urnenmodell - ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel 22

Wie viele Möglichkeiten für die Top 3 der Bundesliga gibt es?
Beachte: $n = 18$ und $k = 3$. Es gibt

$$|Per_3^{18}(oW)| = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!} = 4896$$

Möglichkeiten.

Urnenmodell - mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

Beispiel 23

Wie viele Möglichkeiten für eine PIN mit 4 bis 6 Ziffern gibt es? Beachte: $n = 10$ ($\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$) und $k = 4, 5, 6$. Es gibt

$$\begin{aligned}&|Per_4^{10}(mW)| + |Per_5^{10}(mW)| + |Per_6^{10}(mW)| \\ &= 10^4 + 10^5 + 10^6 = 111000\end{aligned}$$

Möglichkeiten.

Urnenmodell - mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Euro auf 37 Zahlen beim Roulette aufzuteilen? (Mindesteinsatz: 1 Euro pro Zahl)

> **Achtung:** Es können mehrere Euro auf eine Zahl gesetzt werden ("Ziehen mit Zurücklegen")

> **Beachte:** $n = 37$ ($\{0, 1, 2, \ldots, 36\}$) und $k = 10$. Es gibt

$$\begin{aligned} |Kom_{10}^{37}(mW)| &= \binom{k+n-1}{k} \\ &= \binom{10+37-1}{10} = \frac{46!}{36!10!} = 4\,076\,350\,421 \end{aligned}$$

Möglichkeiten.

Fächermodell

Gegeben seien n Fächer. Die Fächer seien von 1 bis n durchnummeriert. Es sollen k Teilchen auf die n Fächer verteilt werden.
Dabei haben wir die Möglichkeiten

- Mehrfachbesetzung (nicht) möglich
- Die Teilchen sind (nicht) unterscheidbar

Beispiel:

Fächermodell

Wie hängen Fächer- und Urnenmodell zusammen?

> Ziehe "Fachnummer" aus Urne

> Teilchen unterscheidbar: Mit Beachtung der Reihenfolge

> Mehrfachbesetzung möglich: Mit Zurücklegen

Es ergeben sich vier Kombinationen

	Teilchen unterscheidbar	Teilchen nicht unterscheidbar
Mehrfach möglich	Mit Zurücklegen Mit Reihenfolge	Mit Zurücklegen Ohne Reihenfolge
Mehrfach nicht möglich	Ohne Zurücklegen Mit Reihenfolge	Ohne Zurücklegen Ohne Reihenfolge

> Mit diesem Modell macht "Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge" mehr Sinn

Fächermodell

Beispiel 24

Angenommen zu einer Wahl treten 5 Kandidaten an und es gibt k Wahlberechtigte. Welches Fächermodell liegt vor? Wie viele Wahlergebnisse sind möglich (genauer: wie viele Möglichkeiten haben die Wähler ihre Stimmen aufzuteilen)?

Übungen

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Übung 11

In den Aufzug eines Hauses mit 10 Etagen steigen im Erdgeschoss 7 Personen ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Etage 2 oder mehr Personen aussteigen?

Übung 12

Eine Firma erhält wöchentlich 10 Briefe, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit von Montag bis Freitag ankommen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es die Briefe auf die Wochentage zu verteilen?

Geburtstagsproblem

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Personen in einer Gruppe der Größe k am selben Tag Geburtstag haben?
Annahmen: Kein Schaltjahr, gleiche Wahrscheinlichkeit je Tag ($\frac{1}{365}$).

> Jede Person hat an einem Tag i in $\{1, 2, \ldots, 365\}$ Geburtstag

> Wir haben den Ergebnisraum

$$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_\nu \leq 365, \nu = 1, \ldots, k\}$$

> Ereignis A: "Mindestens 2 Personen haben am selben Tag Geburtstag"

> **Trick**: Betrachte A^c: "Alle Personen haben an unterschiedlichen Tagen Geburtstag"

Geburtstagsproblem

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Personen in einer Gruppe der Größe k am selben Tag Geburtstag haben?
Annahmen: Kein Schaltjahr, gleiche Wahrscheinlichkeit je Tag ($\frac{1}{365}$).

- A^c: "Alle Personen haben an unterschiedlichen Tagen Geburtstag"
- Ω entspricht Ziehen mit Zurücklegen, A^c entspricht Ziehen ohne Zurücklegen
- Es gilt:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-k)!}}{365^k}$$

k	10	20	30	40	50
$\mathbb{P}(A)$	0.117	0.411	0.706	0.891	0.970

Übungen

Übung 13

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe aus n Personen mindestens 2 am selben Tag Geburtstag haben? Wie groß muss n sein, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens 50% beträgt?

Multinomialkoeffizient

Beispiel 25

Es haben sich 100 Studierende für die Klausur zur Analysis I angemeldet. Die Klausur soll in drei Räumen stattfinden, die jeweils Platz für 50, 30 und 20 Personen bieten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Studierenden auf die 3 Räume aufzuteilen?

> Raum 1: Ziehe 50 (von 100) Studierende ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge: $\binom{100}{50}$

> Raum 2: Ziehe 30 (von 50) Studierende ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge: $\binom{50}{30}$

> Raum 3: Ziehe 20 (von 20) Studierende ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge: $\binom{20}{20} = 1$

> Möglichkeiten (Multiplikationsregel):

$$\binom{100}{50} \cdot \binom{50}{30} \cdot \binom{20}{20} = \frac{100!}{50!50!} \frac{50!}{30!20!} = \frac{100!}{50!30!20!} =: \binom{100}{50, 30, 20}$$

Multinomialkoeffizient

Definition 10

Seien $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{N}$ und $n := k_1 + \cdots + k_p$ $n \in \mathbb{N}$. Der *Multinomialkoeffizient* ist definiert als

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_p} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_p!}.$$

> Für $p = 2$ erhalten wir den Binomialkoeffizienten: $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ und $n = k_1 + k_2$

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2!} = \frac{n!}{k_1!(n - k_1!)} = \binom{n}{k_1}.$$

> Mit dem Multinomialkoeffizienten können wir n Objekte auf p Kisten/Fächer aufteilen mit vorgegebenen Anzahlen $k_1, \dots, k_p$.

Multinomialkoeffizient

Beispiel 26

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben "STATISTIK" anzuordnen?

S	T	A	I	K	Σ
2	3	1	2	1	10

$$\binom{10}{2,3,1,2,1} = \frac{10!}{2!3!1!2!1!} = \frac{10!}{4!} = 151\,200$$

Satz 3: Multinomialsatz

Seien $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(x_1 + \cdots + x_p)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_p=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_p} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_p^{k_p}.$$

Literatur I

- Bundesministerium für Gesundheit (2024).
  Infektionsradar.
  https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
  Abgerufen: 2024-10-15.

- Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
  Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
  Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES