Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
7. November 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Mehrdimensionale Verteilungen

Würfelwurf

- Gegeben seien zwei Zufallsvariablen $X, Y \sim \mathcal{U}_{\{1,2,\ldots,6\}}$
- Es gilt jeweils $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{6}$ für $i = 1, \ldots, 6$
- Was ist die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$?
- Falls X, Y die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf sind?
- Falls X, Y die Augenzahl beim einfachen Würfelwurf ist?
- Die einzelnen Verteilungen von X und Y definieren **nicht** die gemeinsame Verteilung

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$

Gemeinsame Verteilung

- Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
- Dann ist $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar
  - Messbarkeit (in $\mathbb{R}$): $X_i^{-1}\big((-\infty, z]\big) \in \mathcal{A}$ für alle $z \in \mathbb{R}$
- Alternativ: $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $X(\omega) = \big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$
- Man kann zeigen (Maßtheorie), dass X messbar ist
  - Messbarkeit (in $\mathbb{R}^n$): $X^{-1}(R) \in \mathcal{A}$ mit $R = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ für beliebige $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$
- Daraus folgt (Maßtheorie) für beliebige* Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$, dass $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$
- Damit ist $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$ für $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert

---

*Genauer gesagt, für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die kleinste σ-Algebra bezeichnet, die alle offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ enthält

Gemeinsame Verteilung

Definition 40

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dann ist $\mathbb{P}_X$ (bzw. $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}$), definiert als

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in A),\ A \subset \mathbb{R}^n$$

die *gemeinsame Verteilung* von $X_1, \ldots, X_n$.
Der Vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ wird als *Zufallsvektor* bezeichnet.

> Im Folgenden betrachten wir zunächst diskrete Zufallsvariablen
> Später auch stetige Zufallsvariablen
> Wie bisher gelten ähnliche Aussagen für diskrete und stetige Aussagen (wobei Summen durch Integrale ersetzt werden)

Genauer: $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, wobei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die kleinste σ-Algebra bezeichnet, die alle offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ enthält

Gemeinsame Verteilung

Definition 41

Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen. Die Funktion p_X, definiert als

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

für $x \in X(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ ist die *gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion* von $X_1, \ldots, X_n$ bzw. des Zufallsvektors X.

Gemeinsame Verteilung

Bemerkung 14

> Wie bisher wird die Verteilung $\mathbb{P}_X$ eindeutig durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion p_X beschrieben:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(A) &= \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in A\big) \\ &= \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \sum_{x \in A} p(x)\end{aligned}$$

> Weiter gilt für Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$p(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in X(\Omega)} p(x_1, \dots, x_n) = 1$$

Gemeinsame Verteilung

Beispiel 96

- Seien X, Y die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf
- Die gemeinsame W'keitsfunktion ist $p_{X,Y}\big((i,j)\big) = \frac{1}{36}$ für $i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}$
- Seien X, Y die Augenzahl beim einfachen Würfelwurf
- Die gemeinsame W'keitsfunktion ist

$$p_{X,Y}\big((i,j)\big) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gemeinsame Verteilung

Übung 57: (Zweifacher Münzwurf)

Beim zweifachen Münzwurf sei X der Indikator, dass im 1. Wurf Kopf geworfen wurde und Y die Anzahl der Würfe, bei denen Kopf geworfen wurde. Bestimmen Sie zunächst die einzelnen Verteilungen von X und Y. Bestimmen Sie anschließend die gemeinsame Verteilung von X und Y.

Gemeinsame Verteilung

Beispiel 97

X und Y seien Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Verteilungen

Y \ X	1	2	3
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

> Was ist $\mathbb{P}(X = 1, Y = 4)$? $\frac{1}{8}$

> Was ist $\mathbb{P}(X = 3)$?

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

> Was ist $\mathbb{P}(Y = 4)$? $\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{7}{12}$

Gemeinsame Verteilung

- Seien X, Y zwei diskrete Zufallsvariablen
- Allgemein gilt

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

und

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

- $\mathbb{P}(X = x)$ und $\mathbb{P}(Y = y)$ heißen *marginale Verteilungen* (auch Randverteilungen oder Marginalverteilungen).

Gemeinsame Verteilung

Beispiel 97: Fortsetzung

X und Y seien Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Verteilungen. Wie sehen die Randverteilungen aus?

X / Y	1	2	3	$\mathbb{P}(Y = y)$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{12}$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	1

Randverteilung

Definition 42

Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen und $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Die gemeinsame Verteilung von $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ ist eine k-dimensionale *Randverteilung* von $X_1, \dots, X_n$.
Für **diskrete** Zufallsvariablen ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ die *marginale* Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Beispiel 98

Seien X, Y, Z Zufallsvariablen.

> $\mathbb{P}_{X,Y}$ ist eine 2-dimensionale Randverteilung von $\mathbb{P}_{X,Y,Z}$.

> Falls X, Y, Z diskret mit gemeinsamer W'keitsfunktion $p_{X,Y,Z}$, so ist $p_{X,Y}$ eine marginale W'keitsfunktion.

Randverteilung

Satz 19

Seien $X_1, \dots, X_n$ **diskrete** Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x_1, \dots, x_n)$ und $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Für die marginale Wahrscheinlichkeitsfunktion von $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ gilt

$$p_{i_1,\dots,i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \sum_{x_{j_1},\dots,x_{j_{n-k}}} p(x_1, \dots, x_n),$$

wobei $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

Beispiel 99

Seien X, Y, Z diskrete Zufallsvariablen. Dann gilt

$$p_{X,Y}(x, y) = \sum_z p_{X,Y,Z}(x, y, z).$$

Randverteilung

Beispiel 100: (Würfelwurf)

Seien X_1, X_2 die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf und $Y = X_1 + X_2$. Die gemeinsame Verteilung von X_1 und Y ist gegeben durch:

X_1 \ Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\mathbb{P}(X_1 = x)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Randverteilung

Übung 58: (Würfelwurf)

Seien X_1, X_2 die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf, $Y = X_1 + X_2$ und $Z = \max(X_1, X_2)$. Bestimmen Sie die gemeinsame und anschließend die marginalen Verteilungen von Y und Z.

Y / Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1												
2												
3												
4												
5												
6												

Erwartungswert

- Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen
- Sei $u : \mathbb{R}^n \to R$ eine Funktion
- $Y = u(X_1, \ldots, X_n)$ ist eine diskrete Zufallsvariable (in $\mathbb{R}$)
- Beispiel:
  - X_1, X_2 sind Augenzahlen beim (unabhängigen) Würfeln von zwei Würfeln
  - $Y = X_1 + X_2$
- Was ist der Erwartungswert von Y?

Erwartungswert

Für $n = 1$ und $Y = u(X_1)$ gilt die Transformationsformel

$$\mathbb{E}[u(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Allgemeiner gilt folgender Satz.

Satz 20: (Transformationsformel für den Erwartungswert)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion p und $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt, falls der Erwartungswert existiert,

$$\mathbb{E}[u(X_1, \ldots, X_n)] = \sum_{(x_1,\ldots,x_n) \in X(\Omega)} u(x_1, \ldots, x_n)p(x_1, \ldots, x_n).$$

Erwartungswert

Beispiel 101

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion p. Mit $u(x, y) = x$ folgt aus der Transformationsformel

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} xp(x, y).$$

Erwartungswert

Beispiel 102

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion p. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Beweis: Sei $u(x,y) = x + y$. Nach der Transformationsformel gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} (x+y)p(x,y) \\
&= \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} xp(x,y) + \sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)} yp(x,y) \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

Gemeinsame Verteilung

Beispiel 103

X und Y seien Zufallsvariablen mit folgender gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion p

X / Y	1	2	3
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$

Was ist $\mathbb{E}[XY]$?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \sum_{(x,y)} xyp(x,y)\\ &= 1\cdot 3\cdot \tfrac{1}{6} + 2\cdot 3\cdot 0 + 3\cdot 3\cdot \tfrac{1}{4} + 1\cdot 4\cdot \tfrac{1}{8} + 2\cdot 4\cdot \tfrac{1}{3} + 3\cdot 4\cdot \tfrac{1}{8}\\ &= \tfrac{89}{12} \approx 7.42\end{aligned}$$

Gemeinsame Verteilung

Übung 59: (Zweifacher Münzwurf)

Beim zweifachen Münzwurf sei X der Indikator, dass im 1. Wurf Kopf geworfen wurde und Y die Anzahl der Würfe, bei denen Kopf geworfen wurde. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[XY]$.

Stetige Verteilungen

> Wie im diskreten Fall, reichen für stetige Zufallsvariablen die einzelnen Verteilungen nicht aus, um die gemeinsame Verteilung zu beschreiben

> Wenn wir Wahrscheinlichkeitsfunktionen durch Dichten und Summen durch Integrale ersetzen, gelten die meisten der bisherigen Resultate

Definition 43

Eine integrierbare* Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ heißt *gemeinsame (Wahrscheinlichkeits-) Dichte* der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, wenn für alle Rechtecke $R = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in R\big) = \int_R f(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

---

*Integrierbar bedeutet eigentlich *Lebesgue-integrierbar*. Für die meisten wichtigen Funktionen stimmen Lebesgue-Integral und das "normale" (Riemann-)Integral überein.

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES FH AACHEN

Stetige Verteilungen

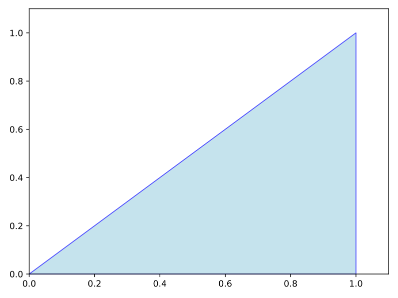
Beispiel 104

Sei

$$\Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

und

$$f(x, y) = 2 \cdot \mathbb{1}_\Delta(x, y)$$



die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y. Was ist die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(X \leq \tfrac{2}{3}, Y \leq \tfrac{1}{2})?$$

Stetige Verteilungen

Beispiel 104

$\mathbb{P}(X \leq \frac{2}{3}, Y \leq \frac{1}{2})$

$$= \int_0^{2/3} \int_0^{1/2} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

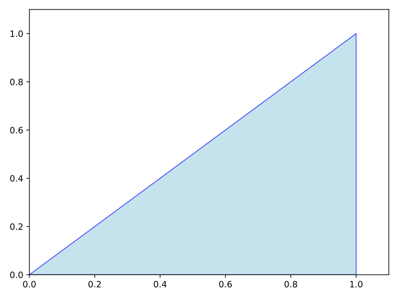
$$= 2 \int_0^{2/3} \int_0^{1/2} \mathbb{1}_\Delta(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= 2 \int_0^{2/3} \int_0^{\min(x,1/2)} 1 \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$= 2 \int_0^{2/3} \min\left(x, \tfrac{1}{2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= 2 \left(\int_0^{1/2} x \mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2/3} \tfrac{1}{2} \mathrm{d}x \right)$$

$$= 2 \left(\tfrac{1}{8} + \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} \right) \tfrac{1}{2} \right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{12}$$

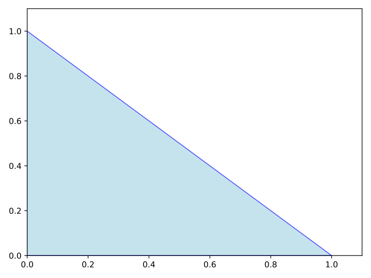


Stetige Verteilungen

Optional

Beispiel 105

Sei $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x + y \leq 1\}$ und $f(x,y) = 2\mathbb{1}_A(x,y)$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y. Was ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq \frac{2}{3}, Y \leq \frac{1}{2})$?



Stetige Verteilungen

Optional

Beispiel 105

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq \tfrac{2}{3}, Y \leq \tfrac{1}{2}) &= \int_0^{1/2} \int_0^{2/3} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^{1/2} \int_0^{2/3} \mathbb{1}_A(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^{1/3} \int_0^{2/3} \mathbb{1}_A(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + 2 \int_{1/3}^{1/2} \int_0^{2/3} \mathbb{1}_A(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^{1/3} \int_0^{2/3} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y + 2 \int_{1/3}^{1/2} \int_0^{1-y} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^{1/3} \frac{2}{3} \mathrm{d}y + 2 \int_{1/3}^{1/2} 1 - y \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{4}{9} + 2 \Big[y - \tfrac{y^2}{2} \Big]_{1/3}^{1/2} = \tfrac{4}{9} + \tfrac{7}{36} = \tfrac{23}{36}
\end{aligned}
$$

Stetige Gleichverteilungen

Definition 44

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge. Zufallsvariablen $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ mit gemeinsamer Dichte $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|I|}\mathbb{1}_I(x_1, \ldots, x_n)$ heißen *gleich verteilt*, wobei $|I|$ das Volumen der Menge I bezeichnet. Die Verteilung $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n}$ heißt *Gleichverteilung*.
Notation: $X \sim \mathcal{U}_I$.

Stetige Gleichverteilungen

Übung 60

Sei $(X,Y) \sim \mathcal{U}_{[0,1]^2}$, d.h. $f(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

> $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{2}{3})$
> $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2}, Y \leq \frac{2}{3})$
> $\mathbb{P}(X < \frac{1}{2}, Y \leq \frac{2}{3})$

Stetige Verteilungen

Bemerkung 15

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x_1, \ldots, x_n)$. Für jede messbare* Menge $R \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}\big((X_1, \ldots, X_n) \in R\big) = \int_R f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

*die "normalen" Mengen, mit denen wir arbeiten, sind messbar. Mehr Details: Maßtheorie

Verteilungsfunktion

Definition 45

Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen. Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n),$$

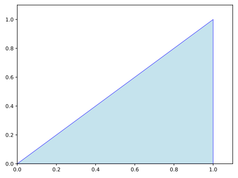
heißt *gemeinsame Verteilungsfunktion* von $X_1, \dots, X_n$.

Verteilungsfunktion

Beispiel 106: (Fortsetzung)

Sei $\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$ und $f(x,y) = 2 \cdot \mathbb{1}_\Delta(x,y)$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y. Was ist die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x,y)$ für $x, y \in [0,1]$?

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = \int_0^x \int_0^y f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^x \int_0^y \mathbb{1}_\Delta(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^x \int_0^{\min(t,y)} 1\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 2\int_0^x \min(t,y)\mathrm{d}t \\
&= 2\Big(\int_0^{\min(x,y)} t\mathrm{d}t + \int_{\min(x,y)}^x y\mathrm{d}t\Big) \\
&= \big(\min(x,y)\big)^2 + 2(x-y)y\mathbb{1}_{x \ge y}(x,y)
\end{aligned}$$



Stetige Verteilung

Satz 21

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, \ldots, x_n).$$

Die Dichte von X_1 ist gegeben durch

$$f_{X_1}(x_1) = \int f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Für Zufallsvariablen X, Y mit gemeinsamer Dichte $f(x, y)$ gilt

$$f_X(x) = \int f(x, y) \mathrm{d}y.$$

Stetige Verteilung

Beispiel 107: (Fortsetzung)

Sei
$$\Delta = \{(x, y) \in [0,1]^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$
und $f(x, y) = 2 \cdot \mathbb{1}_\Delta(x, y)$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y. Was ist die Dichte von X?

> Für $x \notin [0,1]$ gilt $f(x, y) = 0$, also auch
$$f_X(x) = \int f(x, y)\mathrm{d}y = \int 0\mathrm{d}y = 0.$$

> Sei $x \in [0,1]$, dann gilt
$$f_X(x) = \int f(x, y)\mathrm{d}y = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_\Delta(x, y)\mathrm{d}y = 2\int_0^x 1\mathrm{d}y = 2x$$

Stetige Gleichverteilungen

Übung 61

Sei $(X,Y) \sim \mathcal{U}_{[0,1]^2}$, d.h. $f(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Berechnen Sie jeweils die Dichte von X und Y.

Stetige Verteilung

Analog zu den eindimensionalen bzw. diskreten Versionen des Transformationsformel für Erwartungswerte, gibt es auch eine mehrdimensionale, stetige Version.

Satz 22: (Transformationsformel für den Erwartungswert)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

und $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann gilt

$$\mathbb{E}[u(X_1, \ldots, X_n)] = \int u(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Stetige Verteilung

Bemerkung 16

Seien X, Y Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x,y)$. Wir erhalten als direkte Folgerung der Transformationsformel

$$\mathbb{E}[X] = \int x f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Weiter gilt mit $u(x,y) = x + y$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X+Y] &= \int (x+y) f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int x f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \int y f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

Stetige Verteilung

Beispiel 108: (Fortsetzung)

Sei

$$\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

und $f(x,y) = 2 \cdot \mathbb{1}_\Delta(x,y)$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y. Was ist $\mathbb{E}[XY]$?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int xyf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \int_0^x xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 x \int_0^x y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\tfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

Stetige Gleichverteilungen

Übung 62

Sei $(X,Y) \sim \mathcal{U}_{[0,1]^2}$, d.h. $f(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[XY]$.

Gemeinsame Verteilung

Bemerkung 17

- Für stetige Zufallsvariablen, werden Berechnung schnell kompliziert
- Es gibt eine Transformationsformel für gemeinsame Dichten
- Mit diesem Satz kann die Verteilung der Summe zweier Zufallsvariablen explizit berechnet werden
- Besonders wichtig ist die mehrdimensionale Normalverteilung
- Die mehrdimensionale Normalverteilung hat einige gute Eigenschaften und vereinfacht viele Berechnungen

Würfelwurf

- Die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf sind (physikalisch) unabhängig
- Wir haben bereits gesehen, dass entsprechende **Ereignisse** stochastisch unabhängig sind
  - Die Ereignisse E_1, E_2 jeweils im 1. und 2. Wurf eine 6 zu würfeln sind stochastisch unabhängig:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2).$$

- Gilt ähnliches auch für Zufallsvariablen?
  - Seien X_1, X_2 jeweils die Augenzahl beim 1. und 2. Wurf eines Würfels
  - Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig?
  - Was bedeutet stochastische Unabhängigkeit für Zufallsvariablen?

Unabhängigkeit

Definition 46

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind *stochastisch unabhängig*, falls für alle Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \ldots, X_n \in I_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in I_k).$$

> Die Definition wirkt schwächer als die Definition der Unabhängigkeit für Ereignisse - dort wird gefordert, dass die Wahrscheinlichkeiten für beliebige Teilmengen der Ereignisse "faktorisieren".

> Tatsächlich folgt aber eine entsprechende Aussage, wenn wir $I_k = \mathbb{R}$ für Indizes $k \in \{1, \ldots, n\}$ wählen.

> Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle Intervalle $I_1, \ldots, I_n$ die Ereignisse $\{X_1 \in I_1\}, \ldots, \{X_n \in I_n\}$ unabhängig sind (vgl. Lemma 6.11 [Dehling and Haupt, 2006]).

Diskrete Zufallsvariablen

Satz 23

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion $p_{X,Y}(x,y)$ und marginalen Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p_X(x)$ und $p_Y(y)$. X und Y sind genau dann unabhängig, wenn

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y).$$

Beweis: Satz 6.12 in [Dehling and Haupt, 2006] (Aussage dort ist etwas stärker).

Diskrete Zufallsvariablen

Beispiel 109: (Würfelwurf)

> Seien X_1, X_2 die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf

> Sei $Y = X_1 + X_2$

> X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig:

  > $\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = \ell)$

> X_1 und Y sind stochastisch abhängig:

  > $\mathbb{P}(X_1 = 1, Y = 12) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(Y = 12)$

Stetige Zufallsvariablen

Satz 24

Seien X, Y stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ und marginalen Dichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$. X und Y sind genau dann unabhängig, wenn

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Beweis: Satz 9.11 in [Dehling and Haupt, 2006] (Aussage dort ist etwas stärker).

Stetige Zufallsvariablen

Beispiel 110: (Fortsetzung)

Sei $\Delta = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ und $(X, Y) \sim \mathcal{U}_\Delta$. Die Zufallsvariablen sind abhängig, denn

$$f_X(x) = \int f(x, y)\mathrm{d}y = 2\int_0^x 1\mathrm{d}y = 2x$$

$$f_Y(y) = \int f(x, y)\mathrm{d}x = 2\int_y^1 1\mathrm{d}y = 2(1 - y)$$

$$f(x, y) = 2 \cdot \mathbb{1}_\Delta(x, y) \neq 4x(1 - y) = f_X(x)f_Y(y)$$

z.B. $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = 0 \neq \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}(1 - \frac{3}{4}) = f_X(\frac{1}{2})f_Y(\frac{3}{4})$

Stetige Zufallsvariablen

Beispiel 111: (Fortsetzung)

Seien $(X, Y) \sim \mathcal{U}_{[0,1]^2}$. Die Zufallsvariablen sind unabhängig, denn

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\\
f_X(x) &= \int \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)\mathrm{d}y = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^1 1\mathrm{d}y = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\\
f_Y(y) &= \cdots = \mathbb{1}_{[0,1]}(y).
\end{aligned}
$$

Unabhängigkeit

Bemerkung 18

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen und

$$f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Dann sind auch $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängige Zufallsvariablen.

Unabhängigkeit

Satz 25

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit

> gemeinsamer W'keitsfunktion p (falls X, Y diskret) oder

> gemeinsamer Dichte f (falls X, Y stetig),

dann gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Beweis: Mit der Transformationsformel und $u(x, y) = xy$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \sum_{x,y} xyp(x, y) \\ &= \sum_{x,y} xyp_X(x)p_Y(y) \\ &= \left(\sum_x xp_X(x)\right)\left(\sum_y yp_Y(y)\right) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

Unabhängigkeit

Satz 25

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit

> gemeinsamer W'keitsfunktion p (falls X, Y diskret) oder
> gemeinsamer Dichte f (falls X, Y stetig),

dann gilt $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Beweis: Mit der Transformationsformel und $u(x,y) = xy$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int xyf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \left(\int xf_X(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int yf_Y(y)\mathrm{d}y\right) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

Unabhängigkeit

Beispiel 112

Seien X, Y die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf und $Z = XY$. Dann gilt $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 3.5 \cdot 3.5 = \frac{49}{4} = 12.25$.

Unabhängigkeit

Satz 26

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i).$$

Beweis: Für $i \neq j$ gilt aufgrund der Unabhängigkeit und Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] = \mathbb{E}[X_i - \mathbb{E}[X_i]]\mathbb{E}[X_j - \mathbb{E}[X_j]] = 0.$$

Unabhängigkeit

Beweis (Fortsetzung):
Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathsf{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])^2 + \sum_{i\neq j} (X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])\right] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2] + \sum_{i\neq j} \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] \\
&= \sum_{i=1}^n \mathsf{var}(X_i)
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit

Beispiel 113

Sei Z die Summe der Augenzahlen beim 12-fachen Würfelwurf. Was ist var(Z)?

> Sei X_i die Augenzahl beim einfachen Würfeln

> Es gilt var$(X_i) = \frac{35}{12}$

> Die Würfe $X_1, \dots, X_{12}$ sind unabhängig

> Also gilt var$(Z) = \sum_{i=1}^{12}$ var$(X_i) = 35$

Würfelwurf

- Seien X_1, X_2 die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf
- Sei $Y = X_1 + X_2$
- Welche Information beinhaltet X_1 über X_2?
  - Keine: X_1 und X_2 sind unabhängig
- Welche Information beinhaltet X_1 über Y?
  - Zufallsvariablen sind abhängig
  - Wie können wir den "Informationsgehalt" messen?
  - Bedingte Verteilung
  - $\mathbb{P}(Y = 12 | X_1 = 1) = 0 \neq \frac{1}{36} = \mathbb{P}(Y = 12)$

Bedingte Verteilung

Definition 47

Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen und $x \in \mathbb{R}$ sodass $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Die Abbildung

$$A \mapsto \mathbb{P}(Y \in A | X = x),$$

für $A \subset \mathbb{R}$ messbar, definiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ und heißt *bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$*.
Die entsprechende *bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion von Y gegeben $X = x$* wird definiert durch

$$p_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y = y | X = x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}.$$

Bedingte Verteilung

Bemerkung 19

- Durch die Forderung $\mathbb{P}(X = x) > 0$ wird es schwierig die bedingte Verteilung für stetige Zufallsvariablen zu definieren
- Allgemeiner können X und Y Zufallsvektoren (in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$) sein
- Die bedingte Verteilung wird vollständig durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion beschrieben

$$\mathbb{P}(Y \in A | X = x) = \sum_{y \in A} \mathbb{P}(Y = y | X = x) = \sum_{y \in A} p_{Y|X}(y|x)$$

Bedingte Verteilung

Beispiel 114: (Würfelwurf)

Seien X_1, X_2 die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf und $Y = X_1 + X_2$. Wir kennen bereits die gemeinsame Verteilung von X_1 und Y:

Y / X_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\mathbb{P}(X_1 = x)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

Bedingte Verteilung

Beispiel 115: (Würfelwurf)

Seien X_1, X_2 die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf und $Y = X_1 + X_2$. Für die bedingte Verteilung von Y bedingt auf X_1 gilt (Zeile i, Spalte j: $\mathbb{P}(Y = j|X = i)$):

Y / X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bedingte Verteilung

Übung 63: (Zweifacher Münzwurf)

Beim zweifachen Münzwurf sei X der Indikator, dass im 1. Wurf Kopf geworfen wurde und Y die Anzahl der Würfe, bei denen Kopf geworfen wurde. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von Y bedingt auf X.

Bedingte Verteilung

Beispiel 116

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim Bin(n,p)$ und $Y \sim Bin(m,p)$. Für die bedingte Verteilung von X bedingt auf $X+Y=j$ gilt

$$\begin{aligned}
p_{X|X+Y}(i|j) &= \mathbb{P}(X=i|X+Y=j) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=i, X+Y=j)}{\mathbb{P}(X+Y=j)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=i, Y=j-i)}{\mathbb{P}(X+Y=j)} \\
&= \frac{\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{j-i}p^{j-i}(1-p)^{m-j+i}}{\binom{m+n}{j}p^j(1-p)^{m+n-j}} = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j-i}}{\binom{m+n}{j}}
\end{aligned}$$

Bedingte Verteilung

Beispiel 116: (Fortsetzung)

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim Bin(n,p)$ und $Y \sim Bin(m,p)$. Für die bedingte Verteilung von X bedingt auf $X+Y=j$ gilt

$$p_{X|X+Y}(i|j) = \frac{\binom{n}{i}\binom{m}{j-i}}{\binom{m+n}{j}}$$

Welche Verteilung hat X bedingt auf $X+Y=j$?

- Hypergeometrische Verteilung mit Parametern $(n+m), n$ und j
- Interpretation:
  - $n+m$: Anzahl Experimente
  - j: Anzahl Erfolge
  - X: Ziehe zufällig n aus $n+m$ Experimenten
  - $p_{X|X+Y}(i|j)$: Wahrscheinlichkeit für i Erfolge in Stichprobe

Bedingte Verteilung

> Seien X_1, X_2 die Augenzahlen beim zweifachen Würfelwurf
> Was ist $\mathbb{P}(X_1 = i | X_2 = j)$?
> X_1 und X_2 sind unabhängig
> X_2 sollte keine Informationen über X_1 beinhalten
> Also:

$$\mathbb{P}(X_1 = i | X_2 = j) = \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{6}$$

Bedingte Verteilung

Für unabhängige Ereignisse A, B gilt $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Für Zufallsvariablen gilt ein analoges Resultat.

Satz 27

Zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$ nicht von x abhängt.

Beweis: X, Y unabhängig $\iff p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$, also

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} = \frac{p_X(x)p_Y(y)}{p_X(x)} = p_Y(y).$$

Andererseits, falls $p_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y = y|X = x)$ nicht von x abhängt, gilt $p_{Y|X}(y|x) = \mathbb{P}(Y = y) = p_Y(y)$. Damit folgt $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_X(x)p_Y(y)$.

Bedingte Verteilung

- Für stetige Zufallsvariablen gilt $\mathbb{P}(X = x) = 0$
- Wie können wir in diesem Fall die bedingte Verteilung definieren?
- Beim Übergang von diskreten zu stetigen Zufallsvariablen ersetzen wir:
  - Summen durch Integrale
  - Wahrscheinlichkeitsfunktionen durch Dichten

Bedingte Verteilung

Definition 48

Seien X, Y stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f(x,y)$. Die *bedingte Dichte* $f(y|x)$ von Y bedingt auf $X = x$ ist definiert als

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} & \text{für } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{für } f_X(x) = 0. \end{cases}$$

Die *bedingte Verteilung* von Y gegeben $X = x$ ist die Verteilung mit Dichte $f(y|x)$, d.h. für $A \subset \mathbb{R}$ messbar

$$\mathbb{P}(Y \in A | X = x) = \int_A f(y|x) \mathrm{d}y.$$

Bedingte Verteilung

Beispiel 117

Sei

$$\Delta = \{(x,y) \in [0,1]^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

und $f(x,y) = 2 \cdot \mathbb{1}_\Delta(x,y)$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y. Was ist die bedingte Verteilung $\mathbb{P}(Y \leq y | X = \frac{1}{2})$?

- Für $y < 0$ gilt $\mathbb{P}(Y \leq y | X = \frac{1}{2}) = 0$, da $f(x,y) = 0$
- Sei $y \geq 0$. Für $x \in [0,1]$ gilt $f_X(x) = 2x$, also $f_X(\frac{1}{2}) = 1$

$$\mathbb{P}(Y \leq y | X = \tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|\tfrac{1}{2}) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{y} \frac{2\mathbb{1}_\Delta(1/2,t)}{f_X(1/2)} \mathrm{d}t$$

$$= 2\int_0^y \mathbb{1}_{[0,1/2]}(t) \mathrm{d}t = 2\int_0^{\min(y,1/2)} 1 \mathrm{d}t = 2\min(y, 1/2)$$

Bedingte Verteilung

Übung 64

Sei $(X, Y) \sim \mathcal{U}_{[0,1]^2}$, d.h. $f(x, y) = \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x, y)$. Was ist die bedingte Verteilung $\mathbb{P}(Y \leq y | X = \frac{1}{2})$?

Literatur I

- Bundesministerium für Gesundheit (2024).
  Infektionsradar.
  https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
  Abgerufen: 2024-10-15.

- Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
  Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
  Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.