Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH

Klausur zur Linearen Algebra I 29.06.2005

Punkte

1) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden

$$g1 : \vec{x} = (2, -3, -1) + \lambda(1, 0, 2); \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g2 : \vec{x} = (-3, 3, 1) + \mu(2, 2, 1); \quad \mu \in \mathbb{R}$$

windschief sind. 9

2) In der Ebene $E : 2x - y + z - 3 = 0$ liegen die Punkte $P_1 = (0, a, 2)$ und $P_2 = (1, 0, b)$.

a) Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten von P_1 und P_2.
b) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E an.
c) Ermitteln Sie die in der Ebene E liegende Gerade g, die die Verbindungs-strcke $\overline{P_1 P_2}$ in deren Mittelpukt P_m senkrecht schneidet (Skizze!). 18

3) Für welche Werte des Parameters a hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 1 \\ 2x & + & 3y & + & az & = 3 \\ x & + & ay & + & 3z & = 2 \end{array}$$

a) keine Lösung; b) unendlich viele Lösungen c) eine eindeutige Lösung?

15

4) Unter welcher Bedingung liegen vier Punkte in einer Ebene? 8

5) Berechnen Sie die Norm der folgenden 2 Vektoren des Vektorraums P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 bzgl. des Skalaprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx.$$

a) $4x^2 + 6x + 3$
b) $-4x^2 + 10x + 2$ 13

6) Für Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ aus $\mathbb{R}$ ist folgende Multiplikation definiert:

$$X \circ Y = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Bildet die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bzgl. der Operation $\circ$ eine Gruppe?
Wie lauten das neutrale und das inverse Element? 12

7) Untersuchen Sie die Funktionen $\{sinx,\ \ sin^2x,\ \ sin2x\}$ auf ihre lineare Unabhängigkeit auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. 10

8) Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ an, die senkrecht auf dem Vektor $\vec{a} = (-2, 1, 2, -3)$ stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$. 15

Summe der Punkte: **100**

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH Jülich

Aufgaben zur Linearen Algebra I 6.7.2006

1. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

2. Es sei Pol_n der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n mit reellen Koeffizienten.

   (a) Zeigen Sie, dass $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ eine Basis des Pol_3 ist.

   (b) Berechnen Sie die Darstellung des Polynoms $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in Pol_3$ in der Basis B.

3. Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ darauf, ob sie Skalarprodukte sind.

   (a) $f(x, y) = 4x_1y_1 - 4x_1y_3$

   (b) $f(x, y) = 7x_1y_1 + 6x_2y_2 + 2x_3y_3 + 1$

4. Gegeben ist die Pyramide PQRS mit den Ecken

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist die Höhe der Pyramide über der Grundfläche (PQR)?

5. Was folgt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus folgenden Aussagen?

   (a) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **und** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

   (b) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$.

   (c) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

6. Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

(b) Bestimmen Sie aus V nach dem Gram-Schmidtschen Verfahren ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

7. Für welche Werte des reellen Parameters p hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & pz & = & 1 \\ x & + & py & + & z & = & p \\ px & + & y & + & z & = & p^2 \end{array}$$

(a) eine eindeutige Lösung?

(b) unendliche viele Lösungen?

(c) keine Lösung?

Geben Sie im Fall (b) die Lösungen an.

8. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{8} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie den Vektor $\vec{a}$ als Summe

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

dar, wobei $\vec{a}_1 \| \vec{b}$ und $\vec{a}_2 \perp \vec{b}$ gelten muss.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 28.6.2007

1.) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' des Punktes

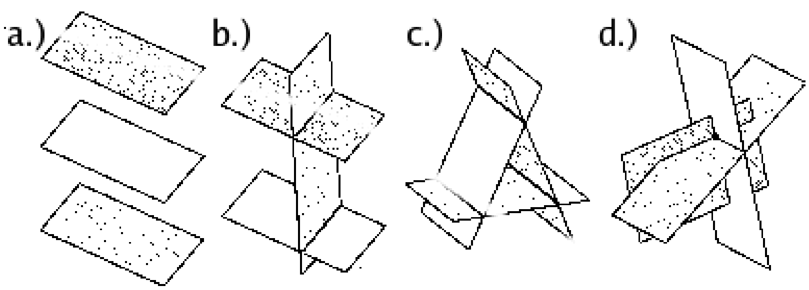
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

an der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \oplus y := x + y - xy$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, \oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.

3.) Die folgende Zeichnung verdeutlicht 4 mögliche Lagen dreier Ebenen zueinander. Geben Sie für jeden Fall jeweils ein Beispiel von 3 parameterlosen Gleichungen an.



4.) Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ an, die senkrecht auf dem Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

stehen. Orthonormieren Sie die beiden Vektoren.

5.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y - tz = 9; \quad x, y, z \in \mathbb{R}?$$

Bestimmen Sie für diese Fälle jeweils den Abstand der Geraden g von der Ebenen E.

6.) Bestimmen Sie die Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad i)\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad ii)\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

falls es überhaupt Lösungen gibt.

7.) Wo liegen alle Punkte, deren Entfernungen von $F = (-2, -1)$ gleich sind den Abständen von der Geraden $x_1 + 8 = 0$. Geben Sie sowohl die Gleichung als auch den Namen und die Lage der geometrischen Form an.

8.) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_1(x) = (x+1)^{-2},\ f_2(x) = x^2 - x + 1,\ f_3(x) = \frac{2^x}{3}$$

im Intervall $[0, 4]$ linear unabhängig sind.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 27.6.2008

1.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ bildet

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -x^2 + 2x + 3 \\ p_2(x) &= 2x^2 + x + 3 \\ p_3(x) &= tx^2 + x + t \end{aligned}$$

eine Basis von P_2 (des Raums der Polynome vom Grad ≤ 2)?

2.) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ keine, genau eine oder mehrere Lösungen?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}.$$

3.) (a) Geben Sie die Gruppenaxiome an.

(b) Zeigen Sie, dass $G = \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \oplus y = (x + y)^2$ keine Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $G = \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \oplus y = x^2 + y^2$ keine Gruppe ist.

4.) Schneiden Sie den Kegel $z^2 = x^2+y^2$ mit der Ebene $z = 2x+3$. Geben Sie die Kegelschnittgleichung an. Um welche Art von Kegelschnitt handelt es sich? Begründen Sie Ihr Ergebnis. Wo liegt der Mittelpunkt des Kegelschnitts?

5.) Eine Gerade

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

schneidet die beiden Ebenen $E_1 : x + y - 2z = 2$ und $E_2 : 2x - y + z = -1$. Berechnen Sie die Entfernung der beiden Schnittpunkte.

6.) Geben Sie zwei Vektoren an, die senkrecht auf dem Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sowie senkrecht aufeinander stehen. Geben Sie genau an, durch welche Überlegungen Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind.

7.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Iterationsvorschrift $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n \times \vec{b} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\vec{x}_{n+4} = \vec{x}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8.) Folgende Regeln gelten für das Kreuz- bzw. für das Spatprodukt:

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

(d) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle$

Beweisen Sie mit den Regeln (a)-(d):

(a) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

(b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

(c) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

9.) Sie stehen auf einer Wiese. 10 m westlich von Ihnen steht ein Zaunpfahl. Ein weiterer Zaunpfahl steht 20 m südlich von Ihnen. Zwischen beiden Pfählen ist ein Elektrozaun gespannt. Sie gehen 10 Schritte nach Süden und weitere 6 Schritte nach Osten. Ihre Aufgabe ist es jetzt, soviele Schritte wie möglich mit verbundenden Augen nach Westen zu gehen, ohne sich einen Elektroschock zu holen. Wieviele Schritte trauen Sie sich (1 Schritt = 1 m)? Begründen Sie Ihre Ergebnis.

10.) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h mit folgenden Eigenschaften:

- h steht senkrecht zur Geraden
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- h liegt in der Ebene $E : x + y = 4$.
- Der Punkt
$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ y_0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
liegt auf der Geraden h (y_0 beliebig).

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 24.06.2009

1.) Gegeben seien

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ b \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ a \\ 19 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$

(a) schneidet die Gerade g die Ebene E

(b) liegt die Gerade g in der Ebene E

(c) verläuft die Gerade g parallel zur Ebene E

2.) Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie - falls möglich - mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt aus V eine Orthonormalbasis von U.

(b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^\perp$?

3.) 4 Freunde Anton, Berta, Christoph und Daniela unterhalten sich über die Preise in der Bäckerei. Anton sagt, dass 7 Brote genau so viel kosten wie 8 Brötchen und 6 Stücke Kuchen. Berta hat für 5 Brote und 10 Brötchen so viel bezahlt wie der Kunde vor ihr für 9 Stücke Kuchen. Christoph hat nur ein Brot gekauft, hätte aber für 60 Cent weniger auch 2 Brötchen kaufen können. Daniela behauptet, sie habe für 9 Brötchen und ein Stück Kuchen 4 EUR bezahlt.

(a) Bestimmen Sie anhand der Aussagen von Anton, Berta und Christoph die Preise für Brot, Brötchen und Kuchen.

(b) Überprüfen Sie die Behauptung von Daniela anhand der unter (a) berechneten Werte.

4.) Ein Fahrradfahrer fährt 5 km in Richtung Norden und danach $2\sqrt{2}$ km in Richtung Nordosten. Nach einer kurzen Pause fährt er 4 km in Richtung Westen. Dort muss er einen Berg umfahren, indem er zuerst 3 km Richtung Süden fährt, um anschließend wieder $\sqrt{2}$ km nach Nordwesten zu fahren. Sein Ziel liegt $6\sqrt{2}$ km nordwestlich von seinem Startpunkt.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Wie viele km ist der Radfahrer bisher insgesamt gefahren?

(c) Wie weit ist er noch von seinem Ziel entfernt (Luftlinie)?

5.) Sind die 3 Funktionen $1, \cos(x), \sin(\pi + x)$ linear unabhängig für $x \in [0, 2\pi[$?

6.) Sei

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y + 4z \\ 3x + 7z \\ -6y + 5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für die obige Abbildung die Abbildungsmatrix an

(b) Man bestimme den Kern von f und seine Dimension

(c) Man bestimme die Dimension des Bildes von f

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an

7.) Gegeben seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Basis der Vektoren

(b) Erweitern Sie die Vektoren um einen Vektor v_5, so dass ihre lineare Hülle der $\mathbb{R}^3$ ist

8.) Der lineare Raum der Polynome vom Grade $\leq n$ ist gegeben durch

$$P_n = \{p; p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$$

ein Skalarprodukt auf P_n gegeben ist.

9.) (a) Benennen Sie die Gruppenaxiome.

(b) Ist $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

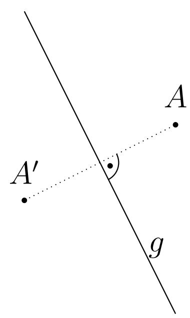
eine abelsche (d.h. kommutative) Gruppe? Beweisen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe der Gruppenaxiome.

10.) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' des Punktes

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an der Geraden g (siehe Zeichnung):

$$g : X = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Werte für λ, die die Gleichung

$$det(A - \lambda E) = 0$$

erfüllen (E ist die Einheitsmatrix).

(b) Lösen Sie für jedes in (a) erhaltene λ_i das Gleichungssystem

$$A - \lambda_i E = 0$$

und geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

2.) (a) Zeigen Sie, dass die drei Geraden

$$g_1 \;:\; \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

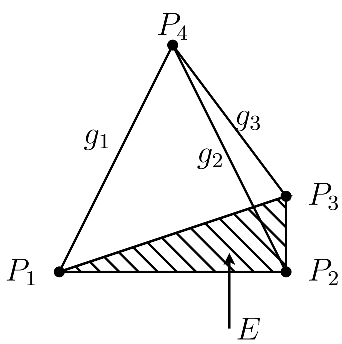
$$g_2 \;:\; \vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$g_3 \;:\; \vec{c} = \begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

zusammen mit der Ebene

$$E \;:\; x + z = 0$$

einen Tetraeder bilden (siehe Skizze).



(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 bis P_4.

3.) Für welche Werte von t hat das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ tx & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & tz & = & 1 \end{array} \right\}$$

(a) keine, (b) genau eine und (c) unendlich viele Lösungen?

4.) (a) Zeigen Sie, dass die Menge M: $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x_1 \neq 0; x_2 \neq 0\}$ mit der Verknüpfung

$$x \circ y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

eine Gruppe bildet.

(b) Welche Axiome sind verletzt, wenn man statt M die Menge $\mathbb{R}^2$ betrachtet?

5.) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2,\ \ f_2(x) = \frac{1}{1-x} \text{ und } f_3(x) = x^3$$

auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ linear unabhängig sind.

6.) Es sei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor und $\vec{e}$ ein Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass gilt: $\|\vec{a}\| \geq |\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle|$.

Tipp: $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle \vec{e}$ ist die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{e}$. Benutzen Sie den Satz des Pythagoras.

7.) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in der angegebenen Reihenfolge nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

8.) Gegeben seien die Ebenen A bis D:

$$\begin{aligned}
A:\vec{x} &= \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 2 \end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 2 \end{pmatrix}\\
B:\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}\\
C:\vec{x} &= \begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 3 \end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 3 \end{pmatrix}\\
D:\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} -3\\ -1\\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(a) Zwei dieser Ebenen sind identisch. Welche? Begründen Sie Ihre Aussage.

(b) Geben Sie die parameterlose Darstellung der unter (a) gefunden Ebene an.

(c) Berechnen Sie die Schnittgeraden mit den anderen beiden Ebenen, falls sie existieren.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra I, SS 2013, am 05.07.2013

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(14)
Aufgabe 2)		(14)
Aufgabe 3)		(14)
Aufgabe 4)		(14)
Aufgabe 5)		(14)
Aufgabe 6)		(14)
Aufgabe 7)		(16)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Ein Zauberkünstler “verblüfft“mit einem Rechentrick:
Er beauftragt einen Zuschauer damit, sich 3 beliebige Zahlen auszudenken und verdeckt auf einem Blatt aufzuschreiben.
Der Zauberer will auf Anhieb die 3 gedachten Zahlen erraten, wenn man ihm nur die 3 Summen von jeweils 2 gedachten Zahlen nennt. Der Zuschauer nennt als Summen die Zahlen 6, 11 und 15. Welches sind in diesem Fall die gedachten Zahlen ?

Aufgabe 2

V ist der von den folgenden Vektoren aufgespannte Vektorraum:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen b so, dass $\begin{pmatrix} 3b+6 \\ b^2+3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Element des Vektorraums V ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Menge $G = \mathbb{Q}_{>0}$ mitsamt der zugehörigen Verknüpfung

$$a \odot b := \frac{a \cdot b}{2}$$

eine Gruppe bildet.

Aufgabe 4

Eine sturmgefährdete Fichte an einem gleichmäßig geneigten Hang soll mit Seilen an den Punkten A und B befestigt werden. Zur Berechnung dient ein kartesisches Koordinatensystem $(x, y, z)^T$, wobei z die relative Höhe zum Fuß der Fichte ist. Die Fichte wächst total gerade, also nur in z-Richtung.
Eine Einheit entspricht einem Meter. In diesem Koordinatensystem steht die Fichte am Punkt $P = (1, 4, 0)^T$ auf dem Boden. Die Befestigungspunkte liegen bei $A = (4, 6, -1)^T$ und $B = (2, 2, 1)^T$. Die Seile werden in 5 m Höhe an der Fichte befestigt.

a) Fertigen Sie eine Skizze an.

b) Welche Länge haben die beiden Seile?

c) Sind die jeweiligen Winkel zwischen den Seilen und der Hangebene größer als 30°?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\forall\ n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Betrachtet wird der Vektorraum $\mathbb{C}^3$ mit folgendem Skalarprodukt

$$< \vec{a}, \vec{b} >= \sum_{k=1}^{3} a_k \cdot \overline{b_k}, \;\; \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$$

Gegeben ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie zwei Vektoren aus $\mathbb{C}^3$, sodass zusammen mit dem gegebenenen Vektor eine orthogonale Basis des $\mathbb{C}^3$ entsteht.

Hinweise: $i^2 = -1$, $\overline{b_k}$ ist die konjugiert komplexe Zahl zu b_k.

Aufgabe 7

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			Gegeben seien zwei Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.
2			Jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.
3			Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ heißen orthonormal, wenn $\vec{b}^T \cdot \vec{a} = 0$ und $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ gilt.
4			Vier Punkte aus dem $\mathbb{R}^3$ liegen immer in einer Ebene.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 1, WS 2013/2014, am 20.09.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(12)
Aufgabe 6)		(12)
Aufgabe 7)		(12)
Aufgabe 8)		(16)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

- genau eine Lösung,
- keine Lösung oder
- unendlich viele Lösungen?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems für $a = 3$ und $b = -9$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie jeweils, ob die folgenden Menge von Vektoren linear unabhängig sind und ob sie eine Basis des angegebenen Vektorraums bilden.

a)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Vektorraum} \quad \mathbb{R}^2$$

b)
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Vektorraum} \quad \mathbb{R}^3$$

c)
$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{im Vektorraum} \quad \mathbb{R}^3$$

Aufgabe 3

Sei

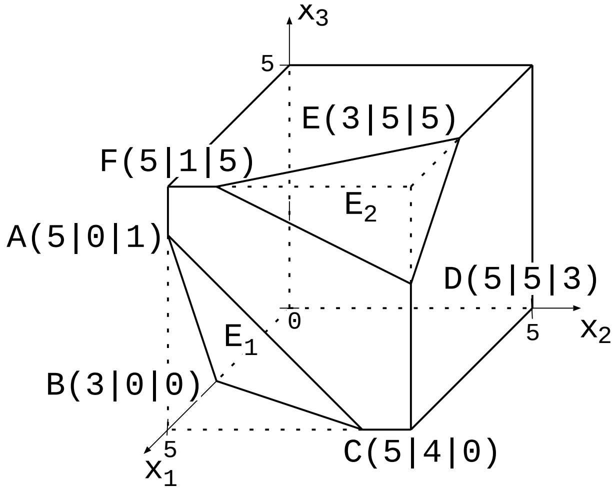
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass gilt:

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k^2 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall\ k \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 4

Bei dem folgenden Würfel wurden zwei Ecken abgeschnitten. Die Schnittflächen legen zwei Ebenen fest.



a) Berechnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen.

b) Wie ist der Abstand dieser Schnittgerade zum Nullpunkt?

Aufgabe 5

Die Menge der quadratischen Matrizen mit reellen Koeffizienten $\mathbb{R}^{n\times n}$ bildet einen Vektorraum bzgl. der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar.
Sei nun $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Menge von quadratischen Matrizen und

$$V = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n\times n} | AX = XA, \; \forall A \in M \right\}.$$

a) Wie lautet die Definition eines Untervektorraumes?

b) Zeigen Sie: V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 6

Ein Wanderer auf der Sophienhöhe lässt sich zur Mittagspause auf einer Bank nieder. Von dort hat er einen wunderbaren Überblick über Jülich. Nach ein paar Minuten beobachtet er am Himmel ein AWACS Flugzeug und ein Verkehrsflugzeug. Er bekommt einen Schrecken, weil es für ihn so ausschaut, als ob das Verkehrsflugzeug genau auf die Flugbahn der AWACS Maschine zusteuert.
Im Nachhinein lässt sich feststellen, dass das Verkehrsflugzeug die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 28 \\ -20 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 25 \\ -18 \\ 14 \end{pmatrix}$$

durchflogen hat. Der Tower in Geilenkirchen kennt einen Punkt der AWACS Flugbahn $(1, 3, 40)^T$ und die geradlinige Richtung der Flugbahn $(3, 4, 0)^T$.
Untersuchen Sie, ob der Wanderer Grund zur Besorgnis hatte, indem Sie bestimmen, wie nah sich die beiden Flugzeuge auf ihren Flugbahnen tatsächlich minimal gekommen sein können.

Aufgabe 7

Sei V ein Vektorraum und $v \in V$ ein fest gewähltes Element. Wir betrachten die Translation (Verschiebung) φ_v eines Vektors um v, also $\varphi_v(x) = x + v, x \in V$.

a) i) Sei M eine nichtleere Menge, zwischen deren Elementen eine Verknüfung „$\circ$“ definiert ist. Nennen Sie die Bedingungen unter denen das Paar $(M, \circ)$ eine Gruppe bildet.

   ii) Zeigen Sie: Die Menge $G = \{\varphi_v, v \in V\}$ bildet bzgl. der Verkettung (Hintereinanderausführung) $\circ$ eine Gruppe.

b) i) Sei W ein beliebiger Vektorraum und $g : W \to W$ eine beliebige Abbildung. Welche Bedingungen muss g erfüllen, damit g eine lineare Abbildung ist?

   ii) Sei $v \neq 0$ fest. Beweisen oder widerlegen Sie: φ_v ist eine lineare Abbildung auf V.

Aufgabe 8

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ heißen orthogonal, wenn $\vec{b}^T \cdot \vec{a} = 0$ gilt.
2			Neben dem Assoziativgesetz gilt in Gruppen immer das Kommutativgesetz. Hinweis: Betrachten Sie dazu die folgenden zwei Gruppen: $a \oplus b = a + b$ auf $\mathbb{Z}$ und $A \odot B = A \cdot B$ auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$
3			Dreiecksmatrizen können symmetrisch sein.
4			Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ haben immer den Abstand 0 zueinander.

Klausur **Lineare Algebra 1**, SS 2021, am 15.07.2021

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

keine Hilfsmittel

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für welchen Wert für t sind a, b und c linear abhängig?

Aufgabe 2 (6+6 Punkte)

In $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die letzte Koordinate x_3 von d so, dass d in der Ebene liegt, die die zu den Ortsvektoren a, b und c zugehörigen Punkte enthält.

b) Liegt d auf dem Rand des Dreiecks abc?

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Schwimmer Thorsten möchte zu einer Insel schwimmen, die von seinem Standort aus 10 km entfernt in Richtung $(4, 3)^T$ liegt. Er schwimmt in diese Richtung los, merkt jedoch nicht, dass er nach der Hälfte der Strecke in eine Strömung gerät und deshalb ab dann mit der Richtung $(2, 1)^T$ weiter schwimmt.
Wie weit schwimmt Thorsten an der Insel vorbei und an welcher Stelle ist er der Insel am nächsten?

Aufgabe 4 (4+4+4 Punkte)

Die Eifeler Wanderfreunde möchten eine Wandertour machen. Um zur Spitze des Mount Matse im Punkt $M = (4, -4, 6)$ zu gelangen, nutzen Sie zunächst den geradlinigen Weg w, der durch die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(5, 5, 5)$ verläuft. An dem Kreuzungspunkt K auf w, der M am nächsten ist, kreuzt der gradlinige Pfad p den Weg w. Von K ist es auf dem Pfad p genau gleich weit zu M in die eine Richtung wie zum Dorf D im Tal in die andere Richtung.

a) In welcher Ebene liegen sowohl w, p, M, K als auch D?

b) Berechnen Sie den Punkt K.

c) Berechnen Sie die Koordinaten von D.

Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze an!

Aufgabe 5 (4+4+2+3 Punkte)

Die drei Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide sollen in den folgenden Ebenen liegen:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} E_1: & & & 3y & - & z & = & 0 \\ E_2: & 9x & + & 12y & - & 10z & = & 0 \\ E_3: & 9x & - & 3y & + & 10z & = & 45 \end{array}.$$

Die Grundfläche liegt auf Nullniveau, also $z = 0$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitze.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die auf der Kante zwischen E_1 und E_2 liegen.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten für einen der drei Eckpunkte der Grundfläche. Welchen der drei Punkte Sie wählen, steht Ihnen frei.

d) Die Statiker raten dazu, auf der Höhe $z = 2$ ein Stahlband um die Pyramide zu legen. Welche Länge muss das Stahlband haben?

Aufgabe 6 (3+(3+2+3+2) Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: $V \setminus U$ ist niemals ein Untervektorraum von V.

b) Bei welchen der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ handelt es sich um Untervektorräume? Belegen Sie Ihre Aussage durch Beweis oder Gegenbeispiel.
Im Fall eines Untervektorraums geben Sie seine Dimension und eine Basis an.

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x_2 \text{ und } x_1 \geq x_2\} \\ U_2 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\} \\ U_3 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 1\} \\ U_4 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < x_2 \text{ und } x_1 > x_2\} \end{array}$$

Aufgabe 7 (8+5 Punkte)

a) Wir bezeichnen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $a_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ und einen weiteren Vektor $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ definiert man einen neuen Vektor $a.x$ durch

$$a.x := \begin{pmatrix} a_1^2 x_1 \\ \vdots \\ a_n^2 x_n \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $\langle x, y \rangle_a := \langle a.x, a.y \rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

b) Wir betrachten den Spezialfall $n = 2$. Geben Sie alle Vektoren a an, für die die Vektoren $(1,1)^T$ und $(1,-1)^T$ bezogen auf $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 8 (4+4+5 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum.

a) Definieren Sie die lineare Unabhängigkeit von Vektoren.

b) Definieren Sie die Dimension eines Vektorraums.

c) Sei nun $\dim(V) = 2$ und Vektoren $x, y, z \in V$ gegeben mit $x - y - z = 0$.
Zeigen Sie: Sind x und y linear unabhängig, so bilden je zwei dieser Vektoren eine Basis von V.

Klausur **Lineare Algebra 1**, SS 2021, am 20.09.2021

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

keine Hilfsmittel

Aufgabe 1 (10+2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Orthonormalisieren Sie die Vektoren a, b, c in der angegebenen Reihenfolge mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

b) Begründen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

Aufgabe 2 (7+3+2 Punkte)

Eine Eisenbahngesellschaft betreibt drei Strecken A, B und C.

- Auf Strecke A kostet ein Ticket pro Person 5 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 4 EUR geschätzt.
- Auf Strecke B kostet ein Ticket pro Person 6 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 5 EUR geschätzt.
- Auf Strecke C kostet ein Ticket pro Person 3 EUR und die Kosten pro Fahrgast werden auf 5 EUR geschätzt.

Im vorherigen Jahr hatte die Eisenbahngesellschaft Ticketeinnahmen in Höhe von 30 Mio. Euro und Kosten in Höhe von 27 Mio. Euro.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und lösen es in allgemeiner Form, also für uneingeschränkte reelle Werte der Unbekannten.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrgäste auf den Strecken A und B in dem Wissen, dass der Staat den Betrieb auf Strecke C mit genau 1 Mio. Fahrgästen zur Bedingung für den Gesamtbetrieb ausgeschrieben hat.

c) Kann der Gewinn (Ticketeinnahmen - Kosten) durch eine Umverteilung auf den Strecken A und B bei unveränderter Gesamtanzahl aller Fahrgäste und genau 1 Mio. Fahrgästen auf Strecke C noch gesteigert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (2+4+4+2 Punkte)

Auf der Suche nach den Elektrokabeln in ihrem Altbau hat Erika folgende Kabel gefunden:

- Kabel A beginnt im Punkt (0,0,0) und geht von dort mit der Richtung $(3, -1, 1)^T$ weiter.
- Kabel B beginnt im Punkt (1,-1,1) und geht von dort mit der Richtung $(4, -1, 1)^T$ weiter.

Da zwischen den Kabeln eine Verbindung besteht, müssen die beiden an ihrem Schnittpunkt verbunden sein.

a) Zeigen Sie, dass die Kabel nicht parallel verlaufen.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Kabel.

c) An welcher Stelle muss eine Lampe an Position (5,-1,6) an Kabel A angeschlossen werden, wenn das Kabel zwischen der Lampe und Kabel A möglichst kurz sein soll.

d) Wie lang ist dann das Kabel zwischen der Lampe und Kabel A?

Aufgabe 4 (8+4 Punkte)

Es seien $(x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Handelt es sich bei den folgenden Abbildungen um Skalarprodukte?

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_1(x, y) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2(x, y) = x_1^2 + 2x_2y_1 + y_1^2$

Wenn es sich um ein Skalarprodukt handelt, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 5 (3+4+3+3 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$?

a) $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

b) $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x\}$

c) $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

d) $U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}$

Wenn es sich um einen Untervektorraum handelt, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ seien linear unabhängig. Zeigen Sie: Dann sind die Vektoren

$$v_1 + v_2, \quad v_2 + v_3, \quad -v_3$$

linear unabhängig.

Aufgabe 7 (3+3+3+4 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, K ein Körper.

a) Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit.

b) Definieren Sie den Begriff eines Erzeugendensystems von V.

c) Beweisen oder widerlegen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel: "Jedes Tupel linear unabhängiger Vektoren ist eine Basis."

d) Bekanntermaßen handelt es sich bei $\mathbb{R}^{2\times 2}$, der Menge aller reellen 2×2-Matrizen, zusammen mit der üblichen Addition von Matrizen und der üblichen Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar um einen reellen Vektorraum. Gegeben seien nun die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass es sich bei (A, B, C, D) um eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ handelt.

Aufgabe 8 (3+3+5+2 Punkte)

Sei V ein endlich erzeugter unitärer Vektorraum und U ein Untervektorraum von V.

a) Definieren Sie die orthogonale Projektion eines Vektors v auf U.

b) Wir betrachten den Vektorraum $V := L(1, x^2 - 1/3\pi^2, \sin x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx, \quad f, g \in V.$$

Sie dürfen voraussetzen, dass es sich hierbei tatsächlich um ein Skalarprodukt auf V handelt. Es steht in obiger Definition $L(\cdots)$ für die lineare Hülle. Zeigen Sie: $(1, x^2 - 1/3\pi^2)$ ist eine Orthogonalbasis von $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$.

c) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $\sin x$ auf $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$.

d) Berechnen Sie das orthogonale Komplement von $L(1, x^2 - 1/3\pi^2)$ in V, also $(L(1, x^2 - 1/3\pi^2))^{\perp}$.

FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe/RWTH Aachen WS 2004/05 Punkte

Klausur zu "Lineare Algebra 1"

1) Gegeben sind die 2 Punkte $A = (1, 1, 3)$ und $B = (3, -1, 4)$. Man bestimme die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte und den kürzesten Abstand dieser Geraden vom Nullpunkt. 9

2) a) Bestimmen Sie die Normalform der Ebene E, die durch die Punkte

$$P_1 = (1, 1, 0), \qquad P_2 = (1, 0, 4), \qquad P_3 = (2, 1, 5)$$

bestimmt ist. 6

b) Wie groß ist der Abstand des Punktes $Q = (-8, 8, 11)$ von der Ebene? 5

c) In welchem Punkt schneidet die Gerade, die durch Q senkrecht zur Ebene verläuft, die Ebene aus Teil a) ? 5

3) a) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 4 \\ x & - & 3y & = & -5 \\ 5x & + & y & = & 7 \end{array} \right\},$$

falls eine Lösung existiert. 5

b) Man stelle das lineare Gleichungssystem aus Teil a) als Vektorgleichung mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}?$$

dar. Welche Bedeutung hat dann in diesem Beispiel die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit dieser Vektoren? 4

c) Welche Bedeutung hat dabei die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}?$$

3

d) Wie ändern sich die Ergebnisse in a), b) und c), wenn man die Zahl 7 durch eine 6 ersetzt? 3

4) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n \times \vec{b} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass gilt 13

$$\vec{x}_{n+4} = \vec{x}_n \quad \forall\, n \,\in\, \mathbb{N}.$$

5) Man berechne $r_5(3^{17})$, den Rest $\in \mathbb{N}$ bei der Division von 3^{17} durch 5. 10

6) Ist $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche (d.h. kommutative) Gruppe ? 11

7) Man stelle fest, ob die Menge der Funktionen

$$\{\sin x,\ \cos x,\ \sin^2 x\}$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$ linear unabhängig ist. 12

8) Die folgenden 3 Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

spannen einen dreidimensionalen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf: Man bilde daraus eine Orthonormalbasis von U. Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^{\perp}$? 14

—-

100

Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH

Klausur zur Linearen Algebra I 23.9.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind 2 Punkte $A = (1, 1, 3)$ und $B = (3, -1, 4)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte und den kürzesten Abstand dieser Geraden vom Nullpunkt. 12

Aufgabe 2: Gegeben Sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie A^n an. Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren linear unabhängig sind.
b) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

Aufgabe 5: Für welches $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem *keine, genau eine* und *mehrere* Lösugen? Geben Sie gegebenenfalls sämtliche Lösungen an. 12

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = a \end{array} \right\}$$

Aufgabe 6: Der lineare Raum der Polynome vom Gerade $\leq n$ ist gegeben durch

$$P_n = \{p; p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$$

ein Skalarprodukt auf P_n gegeben ist.

Aufgabe 7:

a) Welche (geometrische) Bedingung muss eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ erfüllen, um Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ zu sein. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Benutzen Sie zwei Geraden aus a), um folgenden Satz zu widerlegen: Die Vereinigungsmenge zweier Unterräume ist wieder ein Unterraum.

Aufgabe 8:
Sind die Funktionen

$$f_1(x) = \sqrt{x}; \qquad f_2(x) = 2^x; \qquad f_3(x) = \frac{1}{x+1}$$

im Intervall $[0, 4]$ linear unabhängig?

Summe der Punkte: **100**

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 26.1.2006

1.) Ein Eskimo startet eine Wanderung an einem bestimmten Ort in Grönland. Er geht 10 km in südliche Richtung und anschließend $10 \cdot \sqrt{2}$ km in südwestliche Richtung. Danach wandert er 10 km nach Osten. Wieviel km ist er jetzt etwa von seinem Iglu entfernt?

2.) Berechnen Sie die Schnittgerade sowie den Winkel der beiden Ebenen E_i, wobei

- $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- E_2 gegeben ist durch die drei Punkte $P_1 = (2,1,2)$, $P_2 = (0,0,7)$, $P_3 = (3,0,3)$.

3.) Berechnen Sie in Abhängigkeit des Parameters k die kleinstmögliche Entfernung zwischen zwei Flugobjekten, deren geradlinige Flugbahnen folgendermaßen gegeben sind:

1.) Abflugpunkt $P = (10, 10, 5)$, Flugrichtung $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$.

2.) Abflugpunkt $P = (0, 8, 15)$, Endpunkt $E = (0, 0, 7)$.

4.) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$$

Was bedeutet diese Gleichung geometrisch?

5.) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises: $x^2+y^2+5x-7y+\frac{5}{2}=0$. Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, die den Mittelpunkt (3,4) und die Halbachsen $a=2$ und $b=1$ hat.

6.) Zeigen Sie, dass die folgende Rechenvorschrift die Voraussetzungen für ein Skalarprodukt erfüllt:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 - a_1b_3 - a_3b_1$$

7.) Orthonormieren Sie die Vektoren nach Gram-Schmidt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.) $\mathbb{Z}$ bezeichne die ganzen Zahlen und $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition eine Gruppe bildet.

(b) $\mathbb{Z}$ mit folgender Addition keine Gruppe bildet: $a \circ b := \mathrm{mod}(a + b, n)$.

(c) $\mathbb{Z}_n$ mit folgender Addition eine Gruppe bildet: $a \circ b := \mathrm{mod}(a + b, n)$.

(d) $\mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$ mit der folgenden Multiplikation keine Gruppe bildet:
$a \circ b := \mathrm{mod}(a \cdot b, n)$.

9.) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig bzw. linear abhängig? Geben Sie jeweils den aufgespannten Unterraum an.

10.) Geben Sie eine Basis des Teilraums der Polynome an, der von

$$\begin{aligned}p_1(x) &= 1 + 2x + 3x^2\\ p_2(x) &= 2 + x - x^2\\ p_3(x) &= 1 - x - 4x^2\end{aligned}$$

aufgespannt wird. Sind $p_4(x) = 7 + 5x$ bzw. $p_5(x) = 1 + x$ Elemente des Teilraums?

1. Gegeben sind die 3 Punkte $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (3, 2, 2)$ und ein Vektor
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Man bestimme die Gleichung der Ebene durch den Punkt A, die senkrecht zum Vektor $\vec{n}$ steht. Ausserdem bestimme man die Gleichung der Geraden durch die Punkte B und C. Man bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

2. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 4 \\ x & - & 3y & = & -5 \\ 5x & + & y & = & 7 \end{array} \right\}$$

falls eine Lösung existiert. Welche Bedeutung hat in diesem Beispiel der Wert der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

für die Lösbarkeit des Gleichungssystem? Wie ändert sich die Lösung dieses Gleichungssystems, wenn man die Zahl 7 durch eine 6 ersetzt?

3. Ist $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche (d.h.kommutative) Gruppe?

4. Man bezeichnet zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ als parallel ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), wenn eine reelle Zahl $\alpha \neq 0$ existiert mit $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$. Man zeige, dass die Relation $\parallel$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^n$ ist.

5. Gegeben sind die Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Außerdem gilt:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n \times \vec{b} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass gilt

$$\vec{x}_{n+4} = \vec{x}_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

6. Bilden die 3 Vektoren

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   eine Basis im $\mathbb{R}^3$? Man bilde daraus gegebenenfalls eine Orthonormalbasis nach dem Gram-Schmidt-Verfahren.

7. Untersuchen sie die Funktionen $\{\sin x,\ \sin^2 x,\ \sin 2x\}$ auf ihre lineare Unabhängigkeit auf dem Interval $[0, 2\pi]$.
   Tipp: $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. Man betrachte die Menge $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome. Für $p,\ q \in \mathbb{R}[X]$ sei
$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$$
definiert. Zeigen Sie, dass hier für alle $p, q, r \in \mathbb{R}[X]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Vorrausetzungen für ein Skalarprodukt erfüllt sind.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 26.1.2007

1.) Ein Ballonfahrer steigt mit seinem Ballon 300 m auf und driftet dabei 400 m nach Westen. Anschließend dreht der Wind, der Ballon fliegt 1200 m nach Süden und behält dabei seine Höhe. Das Sprechfunkgerät des Ballonfahrers reicht 1500 m weit. Kann er seine Ausgangsstation noch erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.) Sind die beiden Geraden

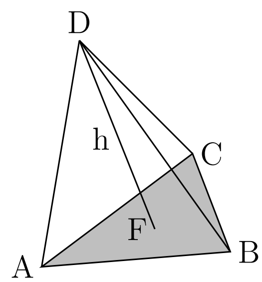
$$
\begin{aligned}
g_1 \quad &: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
g_2 \quad &: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

windschief? Berechnen Sie gegebenenfalls den minimalen Abstand zwischen beiden Geraden.

3.) Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Dreieck ABC und die Spitze D. Die Gerade h geht durch D und ist senkrecht zur Grundfläche. Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

den Fußpunkt F von h und die Höhe der Pyramide.



4.) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

nach dem Verfahren von Gram-Schmidt, falls das möglich ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis. Bildet Ihr Resultat

(a) eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$?

(b) eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$?

(c) ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^4$?

5.) Bildet der Raum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit der Verknüpfung

$$a \circ b = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}$$

eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort. Schränken Sie gegebenenfalls die Menge $\mathbb{R}^3$ so ein, dass ihre Elemente mit der Verknüpfung $a \circ b$ eine Gruppe bilden.

6.) Die Folge $\vec{x}_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= \begin{pmatrix} b \\ c-a \\ -b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \\ \vec{x}_{n+1} &= \vec{x}_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Glieder dieser Folge sich durch

$$\vec{x}_n = \begin{cases} (-2)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} b \\ c-a \\ -b \end{pmatrix}; & n \text{ gerade} \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} c-a \\ -2b \\ a-c \end{pmatrix}; & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnen lassen.

7.) Im zweidimensionalen komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^2$ ist das Standardskalarprodukt folgendermaßen definiert

$$< \vec{v}, \vec{w} >=< \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} >:= v_1\overline{w_1} + v_2\overline{w_2}$$

Berechnen Sie zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2i \\ 3i \end{pmatrix}$ die Normen der beiden Vektoren, das Skalarprodukt der beiden Vektoren und $< \vec{v}, \overline{\vec{w}} >$.

8.) Zeigen Sie jeweils durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ keine Skalarprodukte sind:

$$f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1$$

$$f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + 2$$

$$f_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + 2x_2y_1$$

$$f_4(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 - x_2y_2$$

$$f_5(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 + x_2$$

9.) Sei W die lineare Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^4$. $W^\perp$ ist das orthogonale Komplement zu W. Schreiben Sie $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Summe $w = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

10.) Für welche Werte von a sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -a \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

linear abhängig? Liegt in diesen Fällen der Vektor

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in dem durch $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_3$ aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 7.2.2008

1.) Orthonormieren Sie nach dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.) Gegeben sind die Geradenschar $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7$.

(a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die zugehörigen Geraden g_a parallel zur Ebene E sind.

(b) Zeigen Sie, dass keine Gerade der Geradenschar g_a orthogonal zu E ist.

(c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_2, die die Geraden g_{-1} und g_1 enthält.

3.) Untersuchen Sie, ob die ganzen Zahlen mit folgender Verknüpfung eine Gruppe bilden:

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - 1$$

4.) Durch welche der folgenden Gleichungen werden Skalarprodukte im $\mathbb{R}^2$ definiert?
(Beweise!)

(a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1^2 + x_2 y_1 y_2$

(b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2$

5.) Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6.) Wie lautet die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$, die durch den Punkt $P = (1, 1)$ geht und deren kürzeste Abstände zu den Punkten $Q_1 = (1, 2)$ und $Q_2 = (-2, -1)$ gleich groß sind? Fertigen Sie eine Skizze an. Die Angabe einer der beiden möglichen Lösungen ist ausreichend.

7.) Es sei P[0,1] der reelle lineare Raum der auf dem Intervall [0,1] definierten Polynome. Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome linear abhängig sind:
$p_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - x$, $p_2(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x$, $p_3(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

Welche Dimension hat der von diesen Polynomen aufgespannte Teilraum? (mit Erläuterung!)
Normieren Sie $p_4(x) = 3x^2 + 2$ bzgl. des Skalarprodukts

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \vec{b_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2-t \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Für welches t bilden $\vec{a_t}, \vec{b_t}$ und $\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Berechnen Sie die Koordinaten von $\vec{d}$ bzgl. der Basisvektoren $\vec{a_3}, \vec{b_3}, \vec{c}$ mit $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.) Gegeben sind zwei Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ durch
$U_1 = L(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$ und $U_2 = L(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

(a) Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 verschieden sind.

(b) Ermitteln Sie eine Basis der Schnittmenge $U_1 \cap U_2$.

10.) Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt M(2,-5,3) und dem Radius r=4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Punkte innerhalb dieser Kugel, außerhalb dieser Kugel oder auf der Kugeloberfläche liegen.
$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 18.9.2007

1.) Eine Ebene verläuft durch die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Ebenengleichung auf. Welche der folgenden Punkte liegen in der Ebene? Begründen Sie Ihre Anwort.

$$D = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.) Zeigen Sie, dass durch die Funktion

$$\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rangle = 2u_1v_1 + 6u_2v_2 + 3u_3v_3$$

ein Skalarprodukt gegeben ist.

3.) Es seien die Funktionen f_1, f_2, f_3 auf $\mathbb{R}$ durch

$$f_1 := e^x, \quad f_2 := \sin x, \quad f_3 := x$$

definiert. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

4.) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ *keine, genau eine* oder *mehrere* Lösungen. Geben Sie gegebenenfalls sämtliche Lösungen an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha \\ 2 & 3 - \alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\alpha - 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

5.) Für Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ aus $(a, b), a \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist folgende Verknüpfung definiert:

$$X \circ Y = (x_1 + y_1, x_2 \cdot y_2).$$

Bildet die Menge $V = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R};\ y \neq 0\}$ bezüglich der Operation $\circ$ eine Gruppe? Wie lautet das neutrale und das inverse Element?

6.) Gegeben seien zwei Punkte $P = (2, 1, 5)$ und $Q = (-1, 0, 1)$ und die Vektoren $\vec{a} = (1, -1, 3)$ und $\vec{b} = (0, 1, 2)$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch den Punkt P in Richtung von $\vec{a}$ und der Geraden g_2 durch den Punkt Q in Richtung von $\vec{b}$.

(b) Schneiden sich die beiden Geraden? Sind sie parallel? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

(c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden Geraden.

7.) In der durch $x = 0$ gegebenen (y-z-)Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt eine Wand. Darin befindet sich ein Fenster, dessen Eckpunkte die Koordinaten

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

bilden. Sonnenlicht fällt in Richtung des Vektors

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch das Fenster. Welche Eckpunkte hat der durch das Fenster verursachte Lichtfleck auf dem Boden, der in der Ebene $z = 0$ liegt.

8.) Die folgenden 3 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ stehen senkrecht aufeinander:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht.

9.) Bestimmen Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden der beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

10.) Zwei Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ heißen äquivalent ($\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$), falls gilt:

$$B - A = D - C$$

. Zeigen Sie, dass diese Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 09.02.2009

1.) Ein Gebäude in Form einer Pyramide hat die Eckpunkte O(0,0,0), A(6,8,0), B(0,8,0) und die Spitze S(2,4,8).
Von der Ecke B verläuft zum Punkt P(4,6,4) ein Stahlträger.

(a) Zeigen Sie, dass P in der Ebene E_{OAS}, die die Pyramidenseite OAS enthält, liegt.

(b) Überprüfen Sie, ob der Stahlträger senkrecht auf die Ebene E_{OAS} trifft.

2.) Eine Gerade f gehe durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine zweite Gerade g gehe durch die Punkte

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden, falls ein solcher existiert.

(b) Es seien $\vec{d_f}$ und $\vec{d_g}$ die kürzesten Abstandsvektoren der jeweiligen Geraden vom Nullpunkt. Trifft $\vec{d_f}$ bzw. $\vec{d_g}$ auf den Schnittpunkt der beiden Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) (a) Definieren Sie den Begriff Gruppe!

(b) Gegeben sind die Menge $M = \{a, b\}$ und die Verknüpfung * mit:

*	a	b
a	a	b
b	b	b

Überprüfen Sie, ob es sich bei (M,*) um eine abelsche Gruppe handelt.

4.) Man zeige, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und orthonormiere sie.

5.) Man berechne die (orthogonale) Projektion von

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf die Ebene, die durch $U = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ gegeben ist.

6.) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Gibt es ein t, für das diese 3 Vektoren orthogonal zueinander werden?

7.) Man zeige, dass für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ durch

$f(x, y) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$

eine symmetrische Bilinearform gegeben ist (d.h. dass alle Axiome des Skalarprodukts abzüglich der positiven Definitheit erfüllt sind).

8.) Die Vektoren $\vec{v}_{2n}$ sind definiert durch

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{2n} = (\vec{v}_{2(n-1)} \times \vec{a}) \times \vec{a}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\vec{v_{2n}} = (-1)^n 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

9.) Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Begründen Sie bei den anderen die Nicht-Linearität.

(a) $f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

(b) $f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

(c) $f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$

(d) $f_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Geben Sie für die lineare Abbildung die zugehörige Abbildungsmatrix an und bestimmen Sie den Kern.

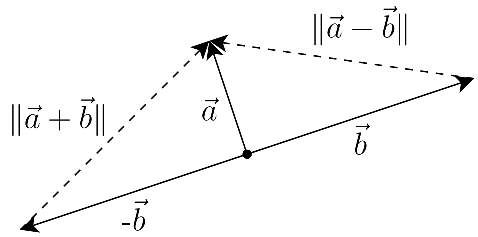
10.) Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 fliegen auf einem geraden Kurs. F_1 durchfliegt die Punkte $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 40 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 40 \end{pmatrix}$. F_2 durchfliegt die Punkte $C = \begin{pmatrix} 28 \\ -20 \\ 11 \end{pmatrix}$ bzw. $D = \begin{pmatrix} 25 \\ -18 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Die Koordinaten sind in Einheiten von 100 m.

Wie weit ist ein Flugzeug auf der Flugbahn von F_1 mindestens von einem Flugzeug auf der Flugbahn von F_2 entfernt?

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 22.9.2008

1.) Gegeben sind $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ Es gilt das geometrische Gesetz, dass $\vec{a}$ genau dann senkrecht zu $\vec{b}$ ist, falls $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$.



Zeigen Sie mit Hilfe des obenstehenden Gesetzes:

$\vec{a}$ ist genau dann senkrecht zu $\vec{b}$, falls $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.

2.) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \oplus y := x + y - 2xy$. Ist $(\mathbb{R}, \oplus)$ eine Gruppe?

3.) Geben Sie zwei Vektoren an, die senkrecht auf dem Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sowie senkrecht aufeinander stehen. Geben Sie genau an, durch welche Überlegungen Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind.

4.) In der durch $y = 0$ gegebenen (x-z-)Ebene im $\mathbb{R}^3$ liegt eine Wand. Darin befindet sich ein Fenster, dessen Eckpunkte die Koordinaten

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

bilden. Sonnenlicht fällt in Richtung des Vektors

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

durch das Fenster. Welche Eckpunkte hat der durch das Fenster verursachte Lichtfleck auf dem Boden, der in der Ebene $z = 0$ liegt.

5.) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels der beiden Ebenen E_1 und E_2, wobei

- $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- E_2 gegeben ist durch die drei Punkte $P_1 = (1,3,2)$, $P_2 = (2,1,2)$, $P_3 = (4,1,6)$.

6.) Zeigen Sie jeweils durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ keine Skalarprodukte sind:

$$f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_2 y_2$$

$$f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_3 y_3 + x_2 y_2 + 2$$

$$f_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1 y_2 + 2 x_2 y_3$$

$$f_4(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$f_5(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1 + x_2 + x_3$$

7.) Es sei P[0,1] der reelle lineare Raum der auf dem Intervall [0,1] definierten Polynome. Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome linear abhängig sind:
$p_1(x) = x^4 - 2x^2 + x$, $p_2(x) = -3x^4 + x^2 - x$, $p_3(x) = -2x^4 - 6x^2 + 2x$

Welche Dimension hat der von diesen Polynomen aufgespannte Teilraum? (mit Erläuterung!)

8.) Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für
$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9.) Sei W die lineare Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^4$. $W^\perp$ ist das orthogonale Komplement zu W. Schreiben Sie $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Summe $w = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

10.) Es seien die Funktionen f_1, f_2, f_3 auf $\mathbb{R}$ durch

$$f_1 := 2^x, \quad f_2 := x, \quad f_3 := x^2$$

definiert. Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem a.) keine, b.) genau eine oder c.) unendlich viele Lösungen? Es ist der Gauss-Algorithmus zu benutzen!

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 1 \\ -x + 4y + (3t^2 - 1)z &= (t - 1) \end{aligned}$$

2.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Geben Sie an für welche Werte von t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $\vec{x} = (2, 1, 1)^T$ erhalten.

(c) Können Sie auch eine Linearkombination für die Fälle von t angeben, bei denen die Spaltenvektoren keine Basis bilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) Ein Bauherr möchte sein Haus mit einem Spitzdach oder Satteldach versehen. Leider baut er das Haus genau unter einer 14 Meter hohen Brücke, also muss er darauf achten, dass das Dach einen Mindestabstand von zwei Metern zur Brücke hat. Das Dach beginnt in einer Höhe von 6 Metern und in einem gedachten Koordinatensystem gibt der Bauherr die Koordinaten des Daches, das er sich vorstellt, wiefolgt an:

> „Die eine Dachfläche liegt in einer Ebene, die durch die Punkte $(0, 0, 6)$ und $(10, 0, 6)$, sowie den Richtungsvektor $(0, 1, 1)$ beschrieben wird. Die zweite Dachfläche liegt in einer Ebene, die durch die Punkte $(10, 5, 11)$ und $(0, 10, 6)$ und den Richtungsvektor $(1, 0, 0)$ beschrieben wird.“

Die dritte Koordinate bezeichnet dabei die Höhe über dem Boden. Wie groß ist der kleinste Abstand des Daches von der Brücke, und kann der Bauherr sein Dach unter Berücksichtigung des einzuhaltenden Abstands zur Brücke so bauen?

4.) Geben Sie sämtliche Gruppenaxiome an und überprüfen Sie, ob jede dieser Eigenschaften für die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = a + \frac{b}{2}, \;\; a, b \in \mathbb{R}$$

erfüllt sind.

Bildet die Menge $\mathbb{R}$ mit dieser Verknüpfung $\circ$ eine kommutative Gruppe?

Bildet die Menge $\mathbb{R}$ mit dieser Verknüpfung $\circ$ überhaupt eine Gruppe?

5.) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in der angegebenen Reihenfolge nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

6.) Zeigen Sie, dass für $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ durch

$$< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

7.) Gegeben sei die folgende Ebene in Parameterdarstellung

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Stellen Sie die Hesse-Normalform zu dieser Ebene auf.

(b) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung, sowie den Abstand des Punktes $P = (2, 2, 2)$ zur Ebene.

8.) Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{a}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind gegeben durch

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_{n+1} = (\vec{a}_n \times \vec{b}) \times \vec{b}$$

Man berechne die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, gebe eine explizite Formel für $\vec{a}_n$ an und beweise sie durch vollständige Induktion.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 30. September 2009

1.) Der Lousberg soll durch einen Tunnel durchquerbar gemacht werden. Zwei Teams von Bauarbeitern bohren sich durch den Tunnel. Das eine Team beginnt in 80 Meter Höhe bei den x-y- Koordinaten (-30m,40m) an und gräbt sich in Richtung (1,-1,0) vor. Das zweite Team hat Probleme mit ihrer Software zur Ermittlung der richtigen Richtung. Es fängt an den x-y-z-Koordinaten (40m,-30m,140m) an zu graben. Leider kommt es von der richtigen Grabrichtung (-1,1,-2) ab und gräbt stattdessen von Beginn an in Richtung (-1,2,-2).

   a) Wo hätten sich die beiden Team getroffen, wenn alles normal verlaufen wäre?

   b) In welche Richtung muss das zweite Team weiter graben, damit sie den Treffpunkt noch erreichen, obwohl sie bereits 30m entlang der falschen Richtung (-1,2,-2) gegraben haben?

2.) Bestimme den Abstand des Punktes $\boldsymbol{P}(5, 10, 3)$ von der Ebene E_1, die durch den Punkt $Q_1(1, 1, 1)$ sowie der Geraden G $: \vec{x} = (4, 3, 5) + \mu(3, 0, 4)$ bestimmt wird.

3.) Gegeben sind die beiden Geraden g_1 und g_2.

g_1: Die Punkte (-1,1,1) und (1,0,1) liegen auf der Geraden.

g_2: $\vec{x} = (2,2,2) + \alpha \cdot (-1,0,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Welche Lagebeziehung haben sie zueinander?
b) Bestimmen Sie den kleinsten Abstand (der natürlich auch 0 sein kann) der beiden Geraden!

4.) Ist für p_1,$p_2 \in \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ Menge der Polynome über $\mathbb{R}$) durch

$$\langle p_1, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} p_1(x) \cdot p_2(x) dx$$

ein Skalarprodukt definiert?

5.) Überprüfen Sie ***alle*** Eigenschaften, ob die Verknüpfung $\oplus$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ b_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ eine Gruppe bildet und begründen Sie anschließend, warum es sich um eine Gruppe handelt oder nicht.

6.) Bestimme eine Orthogonal-Basis für die lineare Hülle der Vektoren $\vec{a} = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1, 0)$ und $\vec{c} = (1, 1, 0, 0)$.

7.) Sind die drei Funktionen über $\mathbb{R}$ linear unabhängig?

a) $p_1(x) = x^2 - x + 7$

b) $p_2(x) = 3x^2 + 18$

c) $p_3(x) = x - 1$

8.) Gegeben sind die beiden Untervektorräume $U_1 = \langle(1,0,1,0),(2,3,-1,4)\rangle$ und $U_2 = \langle(1,-3,4,-3),(0,0,0,-2)\rangle$.

a) Überprüfen Sie, ob der Vektor $\vec{a} = (0,0,1,1)$ in U_1 oder in U_2 liegt.

b) Spannt der Untervektorraum, der aus der Vereinigung $U_1 \cup U_2$ der beiden Untervektorräume U_1 und U_2 entsteht den ganzen $\mathbb{R}^4$ auf?

c) Vervollständigen Sie gegebenenfalls $U_1 \cup U_2$ zu einem ***minimalen*** Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$

9.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b_t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ bilden die drei Vektoren $\vec{a_t}, \vec{b_t}$ und $\vec{c}$ ***keine*** Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Berechnen sie die Koordinaten von $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der drei Basisvektoren zu $t = 0$.

10.) Gegeben ist der Kegelschnitt $x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12$.

a) Um welchen Typ Kegekschnitt handelt es sich?

b) Skizzieren Sie den Kegelschnitt in einem geeigneten Koordinatensystem.

c) Welcher Typ Kegelschnitt entsteht, wenn das Vorzeichen den y^2-Terms auf „Minus“ geändert wird.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Ein Himmelskörper H_1 bewegt sich auf einer Kreisbahn in einer Ebene, die senkrecht zur Richtung $(1,1,1)^T$ liegt und in der sich der Ursprung eines Koordinatensystems befindet.
Der Himmelskörper H_2 bewegt sich auf einer Kreisbahn um einen Fixstern in $(2,1,1)^T$. Die Ebene seiner Kreisbahn ist senkrecht zur Richtung $(1,-1,1)^T$.

(a) Bestimmen Sie die Menge der Punkte, an denen H_1 und H_2 potentiell zusammenstoßen könnten.

(b) Welchen Radius muss die Kreisbahn von H_2 mindestens haben, damit ein Zusammenstoß möglich ist?

2.) Ein Laser, der sich im Ursprung eines Koordinatensystems befindet, soll ein Loch in ein Blech brennen. Das Blech, dessen Dicke vernachlässigt werden kann, ist unter anderem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

fixiert. Dabei entsteht ein Loch im Blech an der Stelle $(5, 4, 3)^T$.

(a) Unter welchem Winkel trifft der Laserstrahl auf das Blech?

(b) Wie weit steht der Laser von dem Blech entfernt?

3.) Untersuchen Sie jeweils, ob die 3 angegeben Funktionen in den angegebenen Intervallen linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = \cos(x), f_3(x) = \sin(x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(b) $g_1(x) = x^2 + 1, g_2(x) = x - 2, g_3(x) = 2x^2 + x$ im Bereich der reellen Zahlen

4.) Sei

$$M_c := \{f(x) \mid f'(17) = c\}$$

die Menge der Funktionen mit Tangentensteigung c an der Stelle $x = 17$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge M_c allgemein keinen Unterraum des Vektorraums der differenzierbaren Funktionen bildet.

(b) Für welches spezielle c bildet M_c jedoch sehr wohl einen Unterraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

5.) Orthonormieren Sie die folgenden 3 Vektoren mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Achten Sie dabei darauf, dass unter der Menge der Vektoren der zu erzeugenden Orthonormalbasis eine Teilmenge existiert, die die gleiche Lineare Hülle erzeugt wie die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

6.) Testen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			n oder mehr linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis eines n-dimensionalen Vektorraums.
2			Ein Erzeugendensystem ist automatisch eine Basis.
3			Die Definition des Kreuz- bzw- Vektorproduktes bezieht sich ausschließlich auf den $\mathbb{R}^3$.
4			Die Größe eines Winkels zwischen Vektoren hängt vom verwendeten Skalarprodukt ab.
5			Für die Definition eines Vektorraums benötigt man die Definition eines Körpers.
6			Die reellen Zahlen bilden bzgl. der Division eine Gruppe.
7			Die Relation $\vec{x} \sim \vec{y} :=$ „$\vec{x}$ und $\vec{y}$ schließen einen Winkel von $60°$ ein“ bildet eine Äquivalenzrelation.
8			Normalformen gibt es nur für Hyperebenen.
9			Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist eindeutig durch ihren Normalenvektor beschrieben.
10			Die Norm des Vektorprodukts zweier Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ gibt den Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Paralellogramms an.

Richtige Antworten geben 1,5 Punkte, für falsche wird ein Punkt abgezogen! Nicht angekreuzte Behauptungen geben 0 Punkte. Negative Gesamtpunkte werden als 0 Punkte gezählt.

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren
a) keine Lösung
b) unendlich viele Lösungen
c) eine eindeutige Lösung ?

2.) a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right\},$$

falls eine Lösung existiert.

b) Was bedeutet die Lösung, wenn man das Gleichungssystem wie folgt spatenweise interpretiert:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie eine Skizze an.

c) Was bedeutet die Lösung, wenn man die beiden Zeilen des Gleichungssytems als Geraden in einer Ebene interpretiert? Fertigen Sie eine Skizze an.

3.) a) Bestimmen Sie die Normalform der Ebene E, die durch die Punkte

$$P_1 = (1, 1, 0), \qquad P_2 = (1, 0, 4), \qquad P_3 = (2, 1, 5)$$

bestimmt ist.

b) Wie groß ist der Abstand des Punktes $Q = (-8, 8, 11)$ von der Ebene E?

c) In welchem Punkt schneidet die Gerade, die durch Q senkrecht zur Ebene E verläuft, die Ebene E?

4.) Gegeben sei die Gerade

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine zweite Gerade g_2 an, deren Richtungsvektor senkrecht auf dem Richtungsvektor von g_1 steht und deren kürzester Abstand zu g_1 den Betrag 1 hat.

5.) Für Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ aus $(a, b), a, b \in \mathbb{R}^2$ ist folgende Verknüpfung definiert:

$$X \circ Y = (x_1 + y_1, x_2).$$

Bildet die Menge $V = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ bezüglich der Operation $\circ$ eine Gruppe? Bennenen und überprüfen Sie alle Gruppenaxiome.

6.) Sie sitzen auf einer Bank in einem Park. 2 m östlich und 2 m nördlich von Ihnen befindet sich die Mitte eines 1 m dicken Baumes. Können Sie den herrenlosen 500 Euro-Schein sehen, der 3 m östlich und 4 m nördlich von Ihnen auf dem Rasen liegt? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie Ihre Antwort.

7.) Ein Ballonfahrer steigt mit seinem Ballon 300 m auf und driftet dabei 500 m nach Westen. Anschließend dreht der Wind, der Ballon fliegt 1000 m nach Süden und stigt dabei nochmals 200 m auf. Das Sprechfunkgerät des Ballonfahrers reicht 1300 m weit. Kann er seine Ausgangsstation noch erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

8.) Die folgenden 3 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ stehen senkrecht aufeinander:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht.

Probeklausur zur Linearen Algebra I

22.01.2013

Zeit: 120 Minuten, 10 P. pro Aufgabe

1. Man betrachte die Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
und bestimme die orthogonale Projektion des Vektors
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
auf den von v_1, v_2 aufgespannten Unterrraum.

2. Geben Sie sämtliche Gruppenaxiome an und überprüfen Sie, ob die ganzen Zahlen mit der folgenden Verknüpfung eine Gruppe bilden:
$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + 1$$

3. Die Matrix A lautet
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Stellen Sie eine Vermutung für A^n auf und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

4. Wir betrachten den Vektorraum
$C([0, 2\pi]) := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R};$ f ist stetig auf $[0, 2\pi]\}$
mit dem Skalarprodukt
$$< f, g >:= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$
Zeigen Sie, dass die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ orthonormal bezüglich $< .,. >$ auf $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ sind.
Hinweis:
$\int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(-sin(x)cos(x) + x) + C$
$\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(sin(x)cos(x) + x) + C$

5. Gegeben sind zwei Geraden:
$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\ \vec{v}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Geben Sie einen möglichen Vektor $\vec{v}$ an, damit
   (a) g und h sich in S(-4,0,-1) schneiden
   (b) g und h windschief sind
   (c) g und h sich orthogonal schneiden

   Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

6. Gegeben ist die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie (ohne Aufgabenteil b zu lösen), dass M eine Menge linear unabhängiger Vektoren ist.

   (b) Orthonormieren Sie M nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

   (c) Woran kann man beim Verfahren von Gram-Schmidt linear abhängige Eingabevektoren erkennen?

7. Mit Hilfe eines Lasers soll ein Schlitz in ein Blech geschnitten werden. Der Laser befindet sich an Position $L(3/5/3)$ und ist auf die Startposition $A(0/2/0)$ des Schlitzes ausgerichtet. Im Folgenden wird der Laser inderart gedreht, dass er einen geraden Schnitt von A zum Punkt $B(6/5/6)$ bewirkt.

   (a) Bestimmen Sie Cosinus des Winkels ϕ, um den der Laser auf seinem Weg zwischen A und B insgesamt geschwenkt wird.

   (b) Berechnen Sie die minimale Länge des Laserstrahls vom Laser bis zum Blech während des Schnitts.

8. Herbert, Manfred und Gertrud unterhalten sich über Preise von Schrauben, Dübeln und Nägeln.
   Dabei sagt Herbert, dass er für 6 Schrauben und 36 Nägel 1,20 € mehr bezahlt hat als für 12 Dübel.
   Manfred hat für 20 Schrauben das gleiche bezahlt wie für 40 Dübel.
   Gertrud hingegen hat für 30 Nägel und 7 Schrauben den gleichen Preis bezahlt wie für 20 Dübel.
   Bestimmen Sie anhand der Aussagen die Stückpreise für die Schrauben, Dübel und Nägel.

9. Testen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			U mit $U \neq \emptyset$ bildet einen Untervektorraum von V, wenn U bezüglich der (vektoriellen) Addition und (skalaren) Multiplikation abgeschlossen ist.
2			Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen kann nur gebildet werden, wenn die Zeilenzahl von A mit der Spaltenzahl von B übereinstimmt.
3			Ist V ein Vektorraum, M eine Teilmenge linear unabhängiger Vektoren und E ein Erzeugendensystem von V, dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.
4			Bei einer Orthonormalbasis sind alle Vektoren normiert und paarweise orthogonal.
5			Jedes Orthonormalsystem bildet eine Basis.
6			Ein komplexer Vektorraum mit definiertem Skalarprodukt wird als unitärer Vektorraum bezeichnet.

   Richtige Antworten geben 2 Punkte, für falsche wird ein Punkt abgezogen! Nicht angekreuzte Behauptungen geben 0 Punkte. Negative Gesamtpunkte werden als 0 Punkte gezählt.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra I, WS 2012/13, am 04.02.2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

1. Gegeben ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei B um eine Basis handelt.

(b) Wandeln Sie B in der angegebenen Reihenfolge mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens in eine Orthonormalbasis um.

2. Zu Beginn des neuen Schuljahres kaufen Peter, Renate und Sarah im gleichen Schreibwarengeschäft ihre Hefte für das neue Schuljahr. Renate bezahlt für 1 großes, 3 mittlere und 1 kleines Heft 4,27 €. Peter bezahlt für 3 große, 5 mittlere und 2 kleine Hefte 8,75 €. Sarah bezahlt für 2 große, 2 mittlere und 1 kleines Heft 4,48 €.

   (a) Kann man aus diesen Angaben ermitteln, wieviel große, mittlere und kleine Hefte kosten?

   (b) Thomas braucht 4 große, 8 mittlere und 3 kleine Hefte. Er behauptet, dass er aus den Angaben der anderen errechnen kann, wieviel er zu zahlen hat. Wieviel muss er für seinen Einkauf ausgeben?

3. Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind.

$$U_1 = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2, a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

$$U_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) \leq 0\}$$

4. Sei für $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ die quadratische Matrix A_n rekursiv definiert durch

$$A_n = \left(\begin{array}{c|ccc} n & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad A_1 = (1)$$

und $\vec{e}_n$ rekursiv definiert durch $\vec{e}_n = (1, \vec{e}_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = (1)$.
Man zeige durch vollständige Induktion über n:

$$A_n \vec{e}_n = (2n-1, 2n-3, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$$

5. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem keine, genau eine und mehrere Lösungen?
   Geben Sie alle Lösungen an.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & a \cdot z & = & 14 + b \\ & & y & + & a \cdot z & = & b + 2 \\ 2x & + & 2y & + & a \cdot z & = & 11 + b \end{array}$$

6. Eine neue Skipiste soll entworfen werden. Dazu liegen folgende Angaben vor:

   - Die linke Seite der Piste ist u.a. durch zwei Grenzpunkte an den Stellen $A = (3; 2; 0)$ sowie $B = (0; 3; 2)$ abgegrenzt.
   - Die rechte Seite der Skipiste wird durch die Punktemenge $C_k = (1 + 3k; 2 - k; 4 - 2k)$ modelliert.
   - Auf dem Hang, auf dem die Piste geplant wird, befindet sich bereits eine Seilbahn, die durch die Punktemenge $S_r = (-2r; 3 + r; 4)$ beschrieben wird.

   (a) Zeigen Sie, dass die beiden Grenzen der Skipiste parallel verlaufen, aber nicht identisch sind.

   (b) Stellen Sie die Ebenengleichung, durch welche die Skipiste beschrieben wird, in Normalenform auf.

   (c) Um Unfälle zu vermeiden, muss noch eine rote Wartelinie simuliert werden. Diese soll rechtwinklig zur Skipiste von Grenzpunkt A zu einem bestimmten Grenzpunkt auf der anderen Pistenbegrenzung verlaufen. Bestimmen Sie diesen Punkt.

   (d) Die Seilbahn schwebt in gleichmäßiger Höhe über der Piste. Bestimmen Sie diese Höhe.

7. Betrachten Sie die folgenden Mengen M_i in den angegebenen euklidischen Räumen V_i:

(i)
$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, V_1 = \mathbb{R}^2 \text{ mit Standardskalarprodukt}$$

(ii)
$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}, V_2 = \mathbb{R}^3 \text{ mit Standardskalarprodukt}$$

(iii)
$$M_3 = \left\{ \ln(x), \ln(x^5) \right\}, V_3 = C[1,2], \langle f, g \rangle = \int_1^2 f(x) \cdot g(x)\, dx$$

(iv)
$$M_4 = \left\{ 1, x + \frac{1}{2} \right\}, V_4 = C[-1,0], \langle f, g \rangle = \int_{-1}^0 f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Hinweis: Mit $C[a,b]$ ist der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ gemeint.

Untersuchen Sie jeweils, ob es sich um ein linear unabhängiges System, ein Erzeugendensystem (ES), eine Basis, ein Orthogonal- (OGS) und/oder ein Orthonormalsystem (ONS) handelt.
Kennzeichnen Sie Zutreffendes mit „X" und nicht Zutreffendes mit „-". Achtung: Leere Kästchen werden sowohl für Zutreffendes als auch für nicht Zutreffendes als falsche Antwort von Ihnen bewertet.

	lin. unabh.	ES	Basis	OGS	ONS
M_1					
M_2					
M_3					
M_4					

Begründen Sie im Fall (iv) Ihre Antwort.

8. (a) Begründen Sie, warum die folgenden Abbildungen f_1, f_2 von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nicht die Eigenschaften eines Skalarproduktes haben:

$$f_1(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

$$f_2(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2$$

(b) Begründen Sie, warum die folgende Abbildung f_3 von $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ nicht die Eigenschaft eines Skalarproduktes hat:

$$f_3(\vec{x}, \vec{y}) = Re(x_1) \cdot Im(y_1) + Im(x_2) \cdot Re(y_2)$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 1, WS 2013/2014, am 28.01.2014

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Auf einem Plakat wirbt eine Kaufhauskette aus Köln mit folgenden drei Angeboten in ihren drei Filialen:

In der Filiale A gibt es 1 Paar Sportschuhe Mike und 2 Paar Socken Adidies für 90 EUR.

In der Filiale B gibt es 2 Paar Sportschuhe Mike, 5 Paar Socken Adidies und 1 T-Shirt Gepard für 220 EUR.

In der Filiale C gibt es 1 Paar Socken Adidies und 1 T-Shirt Gepard. Der zugehörige Preis x ist aber nicht mehr lesbar.

Sie nehmen an, dass die den Angeboten zugrundeliegenden Einzelpreise der Artikel in allen Filialen identisch sind.

a) Berechnen Sie x.

b) Warum können Sie die den Angeboten zugrundeliegenden Einzelpreise der Artikel nicht ermitteln?

Aufgabe 2

In der Jülicher Zuckerfabrik werden die angelieferten Rüben von Anhängern abgekippt. Die Anhänger fahren dabei auf eine Plattform, die sich in der Ebene

$$E : z = 0$$

befindet. Anschließend wird die Plattform mitsamt Traktor und Anhänger gekippt, so dass die Rüben vom Anhänger in einen Auffangbehälter fallen können. Über der Plattform befindet sich ein ebenfalls ebenes Dach, das in der Ebene

$$E_d : 2x + 6z = 2 + 4 \cdot \sqrt{10}$$

liegt.

a) Zeigen Sie, dass die Plattform um den Winkel $\alpha \approx 18,4°$ gekippt ist, wenn sie während des Kippvorgangs in der Ebene
$$E_k : x + 3z = 1$$
liegt.

Hinweis: $\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

b) Zeigen Sie, dass das Dach parallel zur gekippten Plattform aus a) ist.

c) Zur Untersuchung, welche Anhänger hier abgeladen werden können, soll nun der Abstand des Daches zur gekippten Plattform bestimmt werden. Bestimmen Sie diesen Abstand.

Aufgabe 3

Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie nach dem Verfahren von Gram-Schmidt daraus (in der angegebenen Reihenfolge) eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 4

Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Auf dem Weg nach Aachen muss Kaiser Karl in der gebirgigen Eifel auch Serpentinen durchqueren. Eine bestimmte Strecke besteht dabei aus einem geraden Teilstück zwischen den Punkten

$$A = (1, 6, 4) \quad \text{und} \quad B = (-7, 0, 2),$$

einem ebenfalls geraden Teilstück zwischen den Punkten

$$C = (4, 3, 1) \quad \text{und} \quad D = (0, 0, 0)$$

(und einer steilen Kurve zwischen den Punkten B und C).

a) Bestimmen Sie eine Ebenengleichung des ebenen Hangs, auf dem sich beide Teilstücke befinden, d.h. die Ebene, in der sich A, B, C, D befinden.

b) An welcher Stelle P der Strecke zwischen A und B muss Karl von seiner Sänfte springen, wenn er von P aus die (unwegsame) Abkürzung direkt den Hang hinunter zum Punkt D nimmt und diese Abkürzung möglichst kurz sein soll?
Hinweis: Die Aufgabe lässt sich z.B. durch Aufstellen einer Hilfsebene lösen.

Aufgabe 6

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ lässt sich bekanntlich als eindeutige Linearkombination der Basisvektoren darstellen. Wie lautet die Linearkombination der drei Basisvektoren aus a), die den Vektor $(0, 11, -2)^T$ ergibt?

Aufgabe 7

a) Definieren Sie den Begriff "Abelsche Gruppe". (Es reicht nicht aus, die einzelnen Eigenschaften nur zu benennen, sie sollen ausformuliert werden.)

b) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen ungleich 0. Man definiert für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}$ das *Hadamard-Produkt* (nach Jaques Hadamard, 1865-1963) durch

$$A \star B := (a_{ij} \cdot b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$

also als komponentenweises Produkt von A und B. Anwendungen existieren z. B. in der Bildkompression.
Zeigen Sie: $(\mathcal{M}, \star)$ bildet eine Abelsche Gruppe.

Aufgabe 8

a) Definieren Sie den Begriff “Vektorraum”. (Es reicht nicht aus, die einzelnen Eigenschaften nur zu benennen, sie sollen ausformuliert werden.)

b) Es ist bekannt, dass die Menge $\mathcal{C}[a, b]$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ einen Vektorraum bilden. Sind folgende Mengen Untervektorräume? Wenn ja, beweisen Sie dies; wenn nicht, widerlegen Sie dies durch ein geeignetes Gegenbeispiel.

   i) $U_1 = \{f \in \mathcal{C}[a, b] \mid \int_a^b f(x)\,dx = 0\}$

   ii) $U_2 = \{f \in \mathcal{C}[a, b] \mid f(a) \cdot f(b) = 0\}$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, P. Jansen, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 1, WS 2014/15, am 04.02.2015

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(12)
Aufgabe 6)		(15)
Aufgabe 7)		(12)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Parallelogramm mit den Punkten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) den Umfang des Parallelogramms

Ergebnis: $U = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{6}$

b) die Mittelpunkte der Seiten

Ergebnis: $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Ergebnis: $F = \sqrt{35} \approx 5,92$

Aufgabe 2

Die vier MATSE Auszubildenden Jan, Jörg, Jens und Julia kaufen regelmäßig in derselben Bäckerei ein. Keiner der vier weiß aber, wieviel dort ein Muffin, ein Baguette oder ein Croissant kostet. Aber sie haben durch ihre Einkäufe die folgenden Informationen:
Jan hat beobachtet, dass er für 7 Baguette genausoviel bezahlt hat wie der Kunde vor ihm für 8 Muffins und 6 Croissant. Jörg kann berichten, dass er einmal 5 Baguette und 10 Muffins gekauft hat, ein andermal 9 Croissant und beide Male exakt dasselbe bezahlt hat. Julia sagt: „Ich wollte mir gestern morgen eigentlich ein Baguette kaufen. Da mir aber 60 Cent für ein Baguette fehlten, habe ich stattdessen 2 Muffins gekauft. Dafür hat mein Geld genau gereicht."

a) Legt man die Einkäufe von Jan, Jörg und Julia zugrunde, wieviel kostet dann ein Muffin, ein Baguette, ein Croissant?

   Ergebnis: Muffin = 0,30 €, Baguette = 1,20 €, Croissant = 1,00 €

b) Jens behauptet, er habe heute morgen 9 Muffins gekauft und ein Croissant und dafür 4 Euro bezahlt.
   Hat Jens Recht mit seiner Behauptung, wenn man die in (a) berechneten Preise zugrunde legt? Wenn nicht, wieviel hat Jens tatsächlich bezahlt?

   Ergebnis: Jens liegt falsch. Er hat 3,70 € bezahlt.

Aufgabe 3

Folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Kein Ergebnis anzugeben!

b) Wieso handelt es sich nicht um eine Orthonormalbasis?

Kein Ergebnis anzugeben!

c) Bilden Sie eine Orthonormalbasis des von diesen Vektoren aufgespannten Raumes. Wenden Sie dazu das Verfahren von Gram-Schmidt auf die Vektoren in der angegebenen Reihenfolge an.

Ergebnis: $\vec{w}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Welche der folgenden Mengen U sind Untervektorräume des jeweiligen Vektorraums V?

a) $V = \mathbb{R}^3$ und
U ist die Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Ergebnis: U ist ein Untervektorraum von V

b) $V = \mathcal{C}[-1, 1]$ und
U ist die Menge der ungeraden Funktionen im selben Intervall, also $U = \{f \in V | f(-x) = -f(x) \,\forall\, x \in [-1, 1]\}$

Ergebnis: U ist ein Untervektorraum von V

c) $V = \mathbb{R}^4$ und
$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T | x_i$ ist für alle i eine ganze gerade Zahl $\}$

Ergebnis: U ist kein Untervektorraum von V

Begründen Sie Ihre Antworten durch einen Beweis bzw. durch ein Gegenbeispiel.

Keine Ergebnisse anzugeben!

Aufgabe 5

Bei der infrastrukturellen Erschließung von Matsestan sollen die Orte A mit Koordinaten $(0,0)$ und B mit Koordinaten $(11,2)$ mit einer Eisenbahnlinie verbunden werden. Aufgrund des unwegsamen Umlandes von A kann dort nur in Richtung $(4,3)$ gebaut werden, während bei B in eine beliebige Richtung gebaut werden kann. Zur Zeitersparnis soll dabei von beiden Seiten aus gleichzeitig mit dem Bau je einer geraden Teilstrecke begonnen werden, die sich dann am Schnittpunkt treffen.

a) Beschreiben Sie die von A ausgehende Teilstrecke der Bahnlinie als Geradengleichung.

   kein Ergebnis anzugeben.

b) In welche Richtung muss der Bau in B erfolgen, falls die von B ausgehende Teilstrecke möglichst kurz sein soll? Wie lang ist diese Teilstrecke dann?

   Ergebnis: $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit 5 LE

c) Welche Richtung muss die in B begonnene Teilstrecke besitzen, falls beide Teilstrecken gleich lang sein sollen? An welcher Stelle treffen sich in diesem Fall die beiden Teilstrecken?

   Ergebnis: Von B muss in Richtung $\begin{pmatrix} -6 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$ gebaut werden mit dem Schnittpunkt $S = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Welche Aussagen sind richtig, welche falsch?
Geben Sie jeweils ein Beispiel bzw. ein Gegenbeispiel an.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			$\forall a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt: $(a \times b) \times b = a$
2			Vektorräume haben grundsätzlich eine endliche Dimension.
3			In euklidischen Vektorräumen existiert grundsätzlich ein Skalarprodukt.
4			$\forall a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt: $$\|a_b\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\},$$ wobei a_b die orthogonale Projektion von a auf b ist.
5			Für jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in einem Vektorraum V über einem Körper $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt: $$\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$$

Keine Ergebnisse anzugeben!

Aufgabe 7

a) Definieren Sie den Begriff “Lineare Unabhängigkeit”.

Keine Ergebnisse anzugeben!

b) Sei V ein reeller Vektorraum mit $dim(V) = n \geq 3$ und die Vektoren $v_1, \dots v_n$ linear unabhängig. Man finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + \lambda v_1$$

linear unabhängig sind.

Keine Ergebnisse anzugeben!

Aufgabe 8

a) Definieren Sie den Begriff "Gruppe". (Es reicht nicht aus, die einzelnen Eigenschaften nur zu benennen, sie sollen ausformuliert werden.)

Keine Ergebnisse anzugeben!

b) Wir betrachten die Menge aller bijektiven Abbildungen innerhalb einer Menge G, also

$$\tilde{G} := \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ bijektiv}\}$$

Wie lauten die Bedingungen, die eine Gruppe definieren (siehe (a)), konkret im Fall der Menge $\tilde{G}$ und der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Kandidat für eine Verknüpfung?

Keine Ergebnisse anzugeben!

c) Zeigen Sie: $\tilde{G}$ ist eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen.

Keine Ergebnisse anzugeben!

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, A. Kleefeld, B. Wienke

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK"
MATSE AUSBILDUNG
Klausur **Lineare Algebra 1**, WS 2020/21, am 18.03.2021

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Unterschrift: ____________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(6+5+1)
Aufgabe 2)		(7+5)
Aufgabe 3)		(3+3+3+3)
Aufgabe 4)		(9+3)
Aufgabe 5)		(5+4+4)
Aufgabe 6)		(1+7+5)
Aufgabe 7)		(6+7)
Aufgabe 8)		(10+3)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sollen eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

a) Bestimmen Sie alle möglichen $a \in \mathbb{R}$, die das oben genannte Kriterium erfüllen.

b) Bestimmen Sie die Mengen M_{12}, M_{13} und M_{23} mit

$$M_{ij} := \{a \in \mathbb{R} \quad | \quad b_i \perp b_j\}.$$

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ bilden die drei Vektoren demnach eine Orthogonalbasis?

Aufgabe 2

Beim Blick in den Kühlschrank findet Kunigunde für die eingeladenen Gäste folgende Zutaten: 1,5 kg Kartoffeln, 900 g Fleisch und 5 Eier.

- Für Gericht A benötigt sie pro Portion 100 g Kartoffeln, 200 g Fleisch und ein Ei.
- Für Gericht B benötigt sie pro Portion 500 g Kartoffeln und 100 g Fleisch.
- Für Gericht C benötigt sie pro Portion 200 g Kartoffeln, 200 g Fleisch und 2 Eier.

a) Bestimmen Sie, wie viele Portionen sie jeweils zubereiten kann, falls sie alle ihre Vorräte exakt aufbrauchen möchte und nicht unbedingt ganze Portionen braucht.

b) Welche Möglichkeiten hat sie, falls sie stattdessen möglichst viele, aber nur ganze Portionen zubereiten will, jedes Gericht mindestens einmal zubereitet werden soll und ihre Vorräte nicht aufgebraucht werden müssen?

Aufgabe 3

Ein Roboterarm, der am Montagepunkt $P(4,3)$ montiert ist, soll Gegenstände auf ein Förderband auf der Geraden

$$f : x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

legen. Bestimmen Sie für die folgenden Fälle jeweils

- an welchem Punkt G der Roboterarm den Gegenstand auf das Förderband legt
- welchen Abstand er vom Montagepunkt zu G überwinden muss,
- den Winkel zwischen seiner Bewegungsrichtung und der Laufrichtung des Förderbandes

wenn er

a) den waagerechten Weg, also parallel zur x-Achse,

b) den senkrechten Weg, also parallel zur y-Achse,

c) den kürzesten Weg bzw.

d) den Weg in Richtung des Vektors $v = (2,1)^T$

wählt.

Hinweise:

- Eine Skizze kann hilfreich sein.
- $\arccos(\frac{1}{\sqrt{10}}) \approx 72°$

Aufgabe 4

Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Wenden Sie das Orthonormierungsverfahren nach Gram-Schmidt in der angegebenen Reihenfolge auf die drei Vektoren an.

b) Welche Dimension hat der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

Eine gleichseitige 4-seitige Pyramide besteht bekanntlich aus 4 gleichen Seiten sowie einer Grundfläche. Es sei bekannt:

- Die Seite S_1 liegt in der Ebene $2x - 4y + z = 0$.
- Eine andere Seite S_2 liegt in der Ebene $4x + 2y - z = 0$.
- Eine dritte Seite S_3 beinhaltet die Punkte $A(4, 2, 0), B(2, 6, 0)$ und $C(1, 3, 10)$.

a) Zeigen Sie, dass die Schnittgerade von S_1 und S_3 genau durch die Punkte A und C verläuft.

b) Berechnen Sie die Spitze der Pyramide.

c) Berechnen Sie die Oberfläche, d.h. die Fläche aller 4 Seiten und der Grundfläche, unter der Annahme, dass A, B und C genau die Ecken von S_3 bilden.

Aufgabe 6

a) Seien $a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) $a \times b$ an.

b) Bekanntermaßen besitzen Geraden in $\mathbb{R}^3$ keine Darstellung in Normalform, weil die Richtung eines Normalenvektors zu einer Geraden nicht bestimmt ist. Sie besitzen aber sehr wohl eine parameterfreie Darstellung. Zu $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$ sei

$$G := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0) \times v = 0\} .$$

Beweisen Sie: G ist eine Gerade mit Richtungsvektor v und Aufpunkt x_0.

c) Sei g eine Gerade mit Richtungsvektor v und Aufpunkt x_0 und d ihr Abstand zum Nullpunkt. Beweisen Sie für die euklidische Norm $\|\cdot\|$:

$$d = \frac{\|x_0 \times v\|}{\|v\|}$$

Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Aufgabe 7

a) Sei $V = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{R}$. Für $a, b \in V$ sei definiert:

$$a \oplus b := \max\{a - b, b - a\}.$$

Untersuchen Sie, ob V mit $\oplus$ und der üblichen Multiplikation reeller Zahlen "$\cdot$" einen Vektorraum über K bildet. Belegen Sie Ihre Aussage durch einen Beweis bzw. durch ein Gegenbeispiel.

b) Sei für V und K wie oben jetzt

$$a \oplus b := \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p}.$$

Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass für kein $p \in \mathbb{N}$ das Tripel $(V, \oplus, \cdot)$ mit der üblichen Multiplikation reeller Zahlen "$\cdot$" einen Vektorraum über K bilden kann.

Aufgabe 8

a) Wir betrachten den euklidischen Vektorraum P_2 der Polynome vom Höchstgrad 2 auf dem Intervall $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

(dass es sich hierbei um ein Skalarprodukt handelt, muss nicht gezeigt werden).

Sei nun $M = \{x-1, x+1\}$. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $M^\perp$ in P_2, indem Sie dessen Dimension sowie eine zugehörige Basis angeben. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

b) Sei $v \in M^\perp$ beliebig. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von v auf den Untervektorraum $L(x-1, x+1)$ (mit L ist die lineare Hülle gemeint) und begründen Sie Ihr Ergebnis.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

M. Grajewski, I. Gutheil, B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Lineare Algebra 1, WS 2015/16, am 29.01.2016

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(12)
Aufgabe 2)		(12)
Aufgabe 3)		(12)
Aufgabe 4)		(12)
Aufgabe 5)		(13)
Aufgabe 6)		(13)
Aufgabe 7)		(13)
Aufgabe 8)		(13)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Projektionsvektor von a auf b.

b) Fertigen Sie eine Skizze an.

c) Berechnen Sie den Vektor v, der durch **Spiegelung** von a an b entsteht.

Aufgabe 2

Betrachten Sie das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$$

Konstruieren Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren aus $(1, x^3)$ ein Orthonormalsystem.

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome 4. Grades.
Gegeben sei das Tripel $M = (1, x^2, x^4) \subset V$.

a) Liegt $p(x) = (x-1)(x+1)$ in der Linearen Hülle von M? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von M einen Untervektorraum von V bildet.

c) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf Lineare Unabhängigkeit:

$$p_1(x) = 3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$p_2(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$$
$$p_3(x) = 4x^4 + 3x^2 + 2$$

Aufgabe 4

Mit Hilfe der sogenannten Kreuzpeilung können Seeleute in Küstennähe ihre Position bestimmen. Dabei wird jeweils die Richtung zu zwei vom Schiff aus sichtbaren und in der Karte eingezeichneten Zielen ermittelt. Die Position ergibt sich dann durch den Schnittpunkt der beiden Geraden, die sich aus der Position des Ziels und der vom Schiff aus angepeilten Richtung ergibt.

a) Bestimmen Sie die Position des Schiffs, wenn der Leuchtturm an der Position $L = (19, 0)^T$ vom Schiff aus in Richtung $(1, -1)^T$ und die Boje an der Position $B = (18, 9)^T$ vom Schiff aus in Richtung $(3, 1)^T$ gesichtet werden.

b) Für die Genauigkeit der Kreuzpeilung spielt der Winkel der beiden in a) genannten angepeilten Richtungen eine wesentliche Rolle. Bestimmen Sie den Cosinus dieses Winkels.

c) Untersuchen Sie, ob sich das Schiff vom Leuchtturm weiter entfernt oder sich diesem nähert, falls es von der in a) bestimmten Position die Richtung $(1, 2)^T$ einschlägt.

Aufgabe 5

Ein Asteroid wird am Tag 1 an der Position $(500, 500, -1100)^T$ und am Tag 2 an der Position $(300, 300, -300)^T$ beobachtet. Die Koordinaten sind bzgl. eines Koordinatensystems mit dem Erdmittelpunkt als Ursprung und in der Einheit 1000 km angegeben.

a) Beschreiben Sie die Flugbahn des Asteroiden unter der Annahme, dass es sich um eine Gerade handelt.

b) Wie weit fliegt der Asteroid unter selbiger Annahme an der Erdoberfläche vorbei? Nutzen Sie für die Näherungsrechnung einen Erdradius von 6000 km.

c) Zeigen Sie, dass der Asteroid durch die Anziehungskraft der Erde abgelenkt wurde, wenn er am Tag 3 an der Position $(100, 50, 400)^T$ beobachtet wird.

Aufgabe 6

Eine große Gruppe der MATSE Auszubildenden möchte während der Sommerpause eine mehrtägige Reise an die Nordsee unternehmen. Drei Leute der Gruppe sind ausgewählt, die Verpflegung in Form von vier verschiedenartigen Lunchpaketen zusammenzustellen. Da sie sehr auf gesunde Ernährung bedacht sind, soll der Vitaminbedarf der Urlauber gedeckt werden können.
Sie haben den Vitamingehalt der einzelnen Lunchpakete (in der Einheit E) sowie den exakten Vitaminbedarf der Gruppe berechnet. Daraus wurde folgende Tabelle erstellt.

	Lunchpaket 1	Lunchpaket 2	Lunchpaket 3	Lunchpaket 4	Bedarf
Vitamin A	1	2	3	1	128
Vitamin B	3	3	0	4	192
Vitamin C	4	5	4	2	320

a) Stellen Sie aus der obigen Tabelle das zugehörige lineare Gleichungssystem auf.

b) Wieviele der einzelnen Lunchpakete müssen gekauft werden? Geben Sie die vollständige Lösungsmenge an. Hinweis: Beachten Sie bei der Berechnung der Lösungsmenge, dass nur **ganze** Lunchpakete mitgenommen werden können.

Aufgabe 7

Sei V ein unitärer Vektorraum mit $dim(V) = n$.

a) Definieren Sie den Begriff "Untervektorraum".

b) Definieren Sie den Begriff "orthogonales Komplement einer Menge".

c) Zeigen Sie: Es existiert eine Folge von Untervektorräumen $V_1, \ldots, V_n$, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen: Für alle k mit $1 \leq k \leq n-1$ gilt

   i) $dim(V_k) = k$

   ii) $V_k \subset V_{k+1}$

   iii) $V_k^\perp \supset V_{k+1}^\perp$

   Hinweis: Betrachten Sie eine beliebige Orthonormalbasis von V (Warum gibt es die immer?).

Aufgabe 8

a) Definieren Sie den Begriff "Abelsche Gruppe". Die bloße Angabe von Schlagworten genügt hierzu nicht.

b) Geben Sie zwei verschiedene Beispiele abelscher Gruppen an. Nennen Sie dazu sowohl die Menge als auch die Verknüpfung. Sie brauchen für Ihre Beispiele nicht zu beweisen, dass es sich tatsächlich um Abelsche Gruppen handelt.

c) Beweisen Sie: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, und es gelte für alle $x \in G : x \circ x = e$. Dann ist G abelsch.
Hinweis: Erweitern Sie geeignet von links und rechts mit e.

FH AACHEN STANDORTE KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH,
IT CENTER DER RWTH AACHEN UNIVERSITY

Jacqueline Gottowik

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG

Probeklausur Lineare Algebra 1

WS 2024/2025
am 06.11.2024
keine Hilfsmittel

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		**10** (5+5)
Aufgabe 2)		**10** (2+3+3+2)
Gesamtpunkte:	Note:	

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Für welche λ ist das folgende Gleichungssystem unlösbar, eindeutig lösbar bzw. lösbar mit unendlich vielen Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ -3x & & & + & 2\lambda z & = & \lambda \end{array}$$

b) Bestimmen Sie für $\lambda = 2$ die Lösungsmenge.

Es ist der Gauß-Algorithmus zu benutzen.

Aufgabe 2 (2+3+3+2 Punkte)

a) Berechnen Sie den Kosinus des Winkel zwischen den Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gegeben seien zwei beliebige Vektoren $a, b \neq 0$. $p_a(b)$ bezeichne die orthogonale Projektion von b auf a.

b) Skizzieren Sie für ein beliebiges Beispiel den Vektor $p_b(p_a(b))$.

c) Zeigen Sie, dass für ein beliebiges Skalarprodukt und eine daraus induzierte Norm gilt:

$$p_b(p_a(b)) = \frac{(\langle a, b\rangle)^2}{\|a\|^2 \cdot \|b\|^2} \cdot b$$

d) Wie kann man $p_b(p_a(b))$ mit Hilfe des Winkels zwischen a und b ausdrücken?