Hausaufgabenblatt 11

1. Berechnen Sie die Gradienten der folgenden Funktionen
   a) $f(x,y) = x^2 \cdot y^2 + 4x^2 \cdot y - 2x \cdot y^2 + 4x^2 - 8x \cdot y + y^2 - 8x + 4y + 4$
   b) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sqrt{x_2 - x_3^2} + x_2^2 \ln(x_3) - e^{x_1 \cdot x_2}$
   c) $k(r_1, r_2) = r_1^3 - 3r_1^2 + 3r_2^2 - 36r_2 + 100$

2. Sei
$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$$
   Bestimmen Sie im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ die Tangentialebene.

3. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = e^{x-1} \cdot y^2$ und der Punkt $(x_0, y_0) = (1,3)$.
   a) Wie lautet die Richtungsableitung im Punkt (x_0, y_0) in Richtung der Vektoren
      i. $\vec{w}_1 = \binom{1}{1}$ ii. $\vec{w}_2 = \binom{1}{0}$ iii. $\vec{w}_3 = \binom{0}{1}$
   b) In welcher Richtung wird die Steigung maximal und wo minimal? Welche Werte nimmt die Steigung in diesen Richtungen an?

4. a) Eine Funktion habe in einer Richtung $\vec{v}$ eine Steigung von D_v. Wie groß wird die Steigung in Richtung $-\vec{v}$?
   b) Gegeben sei nun die Funktion
$$f(x,y) = x \cdot \ln(y) \cdot e^{xy} + 1$$
$$\text{mit} \quad (x_0, y_0) = (1,1) \qquad \text{und die Richtung} \quad \vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
      i. Wie groß wird die Steigung der Funktion f im Punkt (x_0, y_0) in Richtung $\vec{v}$?
      ii. Welches ist die größte mögliche Steigung?
      iii. Bestimmen Sie die Tangentialebene.

5. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{f}$ mit:
$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x^2 + 5a \cdot y + 3y \cdot z \\ 5x + 3a \cdot x \cdot z - 2 \\ 2x \cdot y + a \cdot x \cdot y - 4z \end{pmatrix}$$
   a) Berechnen Sie die Rotation.
   b) Für welche Werte von a ist das Feld wirbelfrei?

6. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2.Grades in $(0,0)$ für $f(x,y) = e^y \cdot \sin(x + 2y)$.