

## Lineare Algebra I

### Tutorium - Blatt 7

---

Das Blatt wird vom 04.12.2025 bis zum 09.12.2025 in den Tutorien besprochen.

---

#### Aufgabe 1 (LGS mit Variablen)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} & - & 3y & + & (a-1)z = 5 \\ 20x & + & 10y & + & 30z = 10 \\ (a+2)x & + & 5y & + & 7z = 20 \end{array}$$

über einem Körper  $K$ , wobei  $a \in K$  ist.

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems für  $K = \mathbb{Q}$ .
- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems für die Körper  $K = \mathbb{F}_p$  mit  $p \in \{2, 3, 5\}$ .

#### Aufgabe 2 (Inverse einer Matrix)

Berechnen Sie alle rechtsinversen Matrizen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2 \times 4},$$

d.h. alle Matrizen  $B \in \mathbb{F}_2^{4 \times 2}$  mit  $AB = I_2$ .

#### Aufgabe 3 (Euklidischer Algorithmus)

Berechnen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus den ggT(735, 504) sowie Bézout-Koeffizienten  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  sodass  $ggT(735, 504) = \alpha \cdot 735 + \beta \cdot 504$ .

#### Aufgabe 4 (Einheiten im Restklassenring)

Wir betrachten den Restklassenring  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  genau dann multiplikativ invertierbar ist, wenn  $ggT(x, n) = 1$ .
- (b) Bestimmen Sie alle Einheiten (d.h. multiplikativ invertierbaren Elemente) in  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ .
- (c) Prüfen Sie, ob  $\bar{135}$  in  $\mathbb{Z}/296\mathbb{Z}$  multiplikativ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls das Inverse.