FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN,
FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

M.Hollstein, A.Kleefeld, H.Schäfer

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
bzw. “ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Stochastik, SoSe 2022, am 06.07.2022

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Unterschrift: ______________________

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)		(6)
Aufgabe 2)		(6)
Aufgabe 3)		(6)
Aufgabe 4)		(6)
Aufgabe 5)		(6)
Aufgabe 6)		(6)
Aufgabe 7)		(6)
Aufgabe 8)		(6)

Gesamtpunkte: ____ Note: ____

1. Aufgabe **6 Punkte**

Ein neues automatisches Prüfsystem für Solarmodule arbeitet sehr sicher: 95% der defekten Module werden erkannt. Eine Einstufung eines funktionierenden Moduls als defekt passiert nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,2\%$. Aus einer umfangreichen Prozessanalyse kann man abschätzen, dass sich unter einer Million gefertigten Modulen nur ein defektes befindet.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Prüfsystem bei einem Solarmodul als Testergebnis "defekt" meldet?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer "defekt"-Meldung das Modul auch tatsächlich defekt ist?

2. Aufgabe **6 Punkte**

In einer Pilotanlage wird flüssiger Wasserstoff in 1-Liter Kryo-Behälter abgefüllt. Die Abfüllmenge X variiert dabei etwas: Sie sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $1,01$ Liter und der Standardabweichung $0,01$ Liter. Die Behältergröße Y variiert unabhängig davon ebenfalls gemäß einer Normalverteilung: Der Erwartungswert ist $1,06$ Liter, die Standardabweichung ist $0,02$ Liter.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einer Störung, da das Volumen des Kryo-Behälters zu klein für die abzufüllende Menge ist?

3. Aufgabe **6 Punkte**

Eine stetige Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot (x-3) & \text{für } 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an.
(Falls Sie c in Teil a nicht bestimmen konnten, lassen Sie c als Parameter stehen.)

c) Sind die Ereignisse $\{-3 < X < 4\}$ und $\{X < 3,1\}$ stochastisch unabhängig?
Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe **6 Punkte**

Mit beginnender Unsicherheit bei der Energieversorgung sind Wärmepumpen heiß begehrt. Der Anlagenbauer "Nofrozenfeet" verlost seine noch vorhandenen Lagerbestände, da er keinen Kunden bevorzugen möchte. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Interessent bei dieser Verlosung ein Gerät bekommt, beträgt 10^{-5}. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 Geräte in

a) Hamburg b) München

vergeben werden. Zur Vereinfachung nehmen Sie an, dass in Hamburg 200.000 und in München $1.500.000$ Personen an der Verlosung teilnehmen. Benutzen Sie bei Teilaufgabe a) die Approximation über die Poisson-Verteilung. Überprüfen Sie, ob in Teil b) die Approximation mit der Normalverteilung anwendbar ist und verwenden Sie diese ggf. zur Berechnung.

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung lautet: $P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$

5. Aufgabe **6 Punkte**

Gymnasiallehrer Stochastikus benötigt für seinen Mathematik-Kurs standardnormalverteilte Zufallszahlen. Ihm stehen jedoch nur gleichverteilte Zufallszahlen, d.h. Realisationen unabhängiger, über dem Intervall $[0; 1]$ gleichverteilter Zufallsvariablen zur Verfügung. Aus je 12 dieser gleichverteilten Zufallszahlen $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ erzeugt er eine Zufallszahl folgendermaßen:

$$Y = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$$

Kann Stochastikus davon ausgehen, dass Y approximativ standardnormalverteilt ist?

(Begründen Sie Ihre Antwort mittels einer Rechnung!).

6. Aufgabe **6 Punkte**

Die zufällig verteilte Lebensdauer X eines Systems aus Dachziegeln, Solarmodulen und Wechselrichtern wird durch die folgende Dichte beschrieben:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta \cdot \left(1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \cdot e^{-\theta\cdot(x+2\sqrt[3]{x})} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei Messungen unter Stressbedingungen für die Lebensdauer des Systems ergaben sich die folgenden Werte (in w.E.):

$$82,2; \quad 94,0; \quad 122,5; \quad 95,8; \quad 106,4$$

Geben Sie die Likelihood-Funktion an und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für θ.

7. Aufgabe **6 Punkte**

Ein Hersteller von Nahrungsergänzungsmitteln produziert ein Präparat auf pflanzlicher Basis, in dem produktionsbedingt neben dem Wirkstoff ein gewisser Prozentsatz an Verunreinigungen enthalten ist. Es ist aus langjähriger Erfahrung bekannt, dass der Verunreinigungsprozentsatz als normalverteilt angesehen werden kann. Eine durchschnittliche Verunreinigung von $2,5\%$ gilt noch als akzeptabel. Aus einer Zufallsstichprobe von 9 Proben aus der Produktion ergab sich eine mittlere Verunreinigung von $2,61\%$.

a) Sie können davon ausgehen, dass die Standardabweichung der Verunreinigung in der Produktion mit $0,2\%$ bekannt ist. Berechnen Sie zum Vertrauensniveau von 95% ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die mittlere Konzentration der Verunreinigung.

b) Nehmen Sie an, dass die Standardabweichung der Verunreinigung unbekannt ist und über die Standardabweichung der Stichprobe, die $0,2\%$ ergeben hat, geschätzt wird. Berechnen Sie ein einseitig nach oben abgegrenztes Konfidenzintervall für die mittlere Verunreinigung zum Vertrauensniveau 99%.

8. Aufgabe **6 Punkte**

Eine Autohändlerin, der sich auf den Vertrieb von Elektroautos spezialisiert hat, schätzt aufgrund einer Marktanalyse, dass die wöchentlich verkaufte Anzahl X eines bestimmten Autos in seiner Filiale durch die Wahrscheinlichkeiten aus der folgenden Tabelle gegeben ist:

verkaufte Autos	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,3$	$0,1$

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der wöchentlichen Absatzmenge.

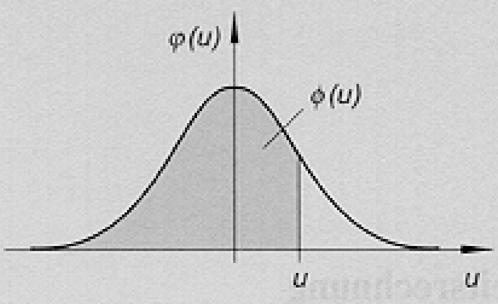
b) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion.

c) Ein Kollege der Autohändlerin will die Annahmen aus a) überprüfen und ermittelt in 8 Wochen die folgenden Verkaufszahlen des jeweiligen Autos:

$$0; \quad 2; \quad 2; \quad 1; \quad 0; \quad 2; \quad 3; \quad 2$$

Berechnen Sie arithmetisches Mittel, Modalwert, Median und Stichprobenvarianz der Daten.

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung



Schrittweite: $\Delta u = 0{,}01$

Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \qquad (u > 0)$$

Für $u \geqslant 4$ ist $\phi(u) \approx 1$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5639	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8398
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Quantile der t-Verteilung

	p				
f	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,707	31,820	63,654
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576