RWTH Institut für Mathematik
Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111
Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

11. Übung

Abgabetermin B-Teil 30.06.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **30.06.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II" in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 28.06.2022 und am 29.06.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A47
Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Beweisen Sie, dass für jede Zusammenhängende Menge A, die Menge $f(A)$ ebenfalls zusammenhängend ist

Aufgabe A48
Berechnen Sie ∇f für die folgenden Funktionen f:

1. $f(x, y) = x^2 y^2 \sin\left(e^{x^2 y^2}\right)$,
2. $f(x) = a \cdot x \cdot e^{b \cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe A49
Berechnen Sie im Punkt $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Richtungsableitung der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ für die Richtungen $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe A50
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Zeigen Sie: f ist in $(0, 0)$ stetig.
2. Zeigen Sie: f ist in $(0, 0)$ in alle Richtungen $v = (\alpha, \beta)$ differenzierbar.
3. Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar? Bitte begründen Sie Ihre Aussage.

Teil B

Aufgabe B49 [4+5+3=12 Punkte]

(i) Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Beweisen Sie unter Verwendung der Definition der Überdeckungskompaktheit, dass für jede überdeckungskompakte Menge K, die Menge $f(K)$ ebenfalls überdeckungskompakt ist.

(ii) Seien K ein kompakter metrischer Raum, Y ein metrischer Raum, und $f : K \to Y$ stetig und bijektiv. Beweisen Sie, dass f^{-1} stetig ist.

(iii) Seien X ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge, und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass f auf K Minimum und Maximum annimmt.

Hinweis: Teil (i) ist sehr nützlich für Teil (ii) und Teil (iii).

Aufgabe B50 [1+2+3+2=8 Punkte]

Sei $d \geq 1$ und seien $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$. Wir möchten in folgenden Schritten zeigen, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent sind, also dass zwei Konstanten C' und C existieren, sodass $C' \|x\|' \leq \|x\| \leq C \|x\|'$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt.

(i) Erklären Sie, wieso Sie annehmen können, dass $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$ die Einsnorm ist.

(ii) Finden Sie eine Konstante $C > 0$ mit $\|x\| \leq C \|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Schließen Sie daraus auch, dass $\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine bezüglich der euklidischen Metrik d_2 stetige Abbildung ist.

(iii) Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_1 = 1\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf A ein Minimum annimmt.

(iv) Verwenden Sie (iii) um eine Konstante $C' > 0$ mit $C' \|x\|_1 \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ zu finden und schließen Sie damit auf die zu beweisende Aussage.

Aufgabe B51 [3+3=6 Punkte]

Berechnen Sie ∇f für folgende Funktionen f:

1. $f(x, y, z) = (x^y)^z$, $x > 0$, $y, z \in \mathbb{R}$,
2. $f(x) = \|x\|^2 e^{\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische 2-Norm bezeichne.

Aufgabe B52 [3+3+3=9 Punkte]

Bestimmen Sie die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen im Punkt $\underline{x}_0$ in Richtung $\underline{v}$:

1. $f(x, y) = (x + y)e^{xy}$, $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
2. $f(x, y) = (x + y)^{1/x}$, für $x > 0$, $x + y > 0$, $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
3. $f(x, y) = x^y$, für $x > 0$, $\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, mit $\|\underline{v}\| = 1$.

Aufgabe B53 [2+2+3=7 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1. Zeigen Sie: f ist in $(0,0)$ stetig.
2. Zeigen Sie: f ist in $(0,0)$ in alle Richtungen $\underline{v} = (\alpha, \beta)$ differenzierbar.
3. Ist f in $(0,0)$ differenzierbar? Bitte begründen Sie Ihre Aussage.