$\boxed{2.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 25

****

(Abgabe: 25.04.)

Aufgabe H5. Für $1 \leq k \leq n$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} \in K[X]^{n,n}$$

eine Diagonalmatrix. Bestimmen Sie die k-Minoren von A.

Aufgabe H6. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit V endlich-dimensional und $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$. Wie sieht die Jordan-Normalform von f aus?

Aufgabe H7. Sei $K = \mathbb{Q}$, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$.

(i) Sei $\chi_f = X^9 - X^8 + X^7 - X^6$. Welche Möglichkeiten gibt es dann für das Minimalpolynom μ_f?

(ii) Sei $\chi_f = X^8 - X^7$, und sei $\dim \mathrm{Kern}(f^1) = 3$, $\dim \mathrm{Kern}(f^2) = 5$, $\dim \mathrm{Kern}(f^3) = 6$ und $\dim \mathrm{Kern}(f^4) = \dim \mathrm{Kern}(f^5) = 7$. Wie sieht die Jordan-Normalform von f aus?

(iii) Sei $\chi_f = (X-1)(X-2)^4(X-3)^3$, und sei $\dim \mathrm{Kern}(f - 2\mathrm{id}_V) = 1$ und $\dim \mathrm{Kern}(f - 3\mathrm{id}_V) = 1$. Wie sieht die Jordan-Normalform von f aus?

(iv) Sei $n = 8$, und sei $\mu_f = (X-1)^3(X-2)^2(X-3)$. Dann gibt es 8 mögliche Jordan-Normalformen von f. Welche?

Aufgabe H8.

(i) Sei $K = \mathbb{F}_3$. Wieviele Konjugationsklassen gibt es in $K^{3,3}$? Welche davon bestehen aus invertierbaren bzw. diagonalisierbaren Matrizen? Für welche Konjugationsklassen zerfällt das charakteristische Polynom über K in Linearfaktoren? Wie sieht jeweils die zugehörigen Smith-Normalform aus?

(ii) Die Fragen wie (i), aber für $K = \mathbb{F}_2$ und $K^{4,4}$.

****