Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 24. 11. 2025

Übungsblatt 7 — Analysis I — WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 24.

Welche der folgenden Mengen sind offen, welche abgeschlossen? Bestimmen Sie außerdem die Häufungspunkte, den Abschluss und den Rand der Mengen.

(a) $A = \emptyset$,

(b) $A = (1, 3] \setminus \{1, 3\}$.

Aufgabe A 25.

Ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, falls

(a) $a_n = \frac{n^3}{n!}$,

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

(c) $a_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$?

Aufgabe A 26.

Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a?$$

(a) $\forall \varepsilon \geq 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \leq \varepsilon$,

(b) $\exists c > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < c\varepsilon$.

Aufgabe A 27.

Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels die folgenden Aussagen:

(a) Falls $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Falls $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist auch $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 25. (3+3+3 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind offen, welche abgeschlossen? Bestimmen Sie außerdem die Häufungspunkte, den Abschluss und den Rand der Mengen.

(a) $A = \mathbb{R}$,

(b) $B = (0, 1) \cup \{-1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $C = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Aufgabe B 26. (2+3 Punkte)

Wir untersuchen die für $x \in \mathbb{R}$ durch $a_n = \frac{x^n}{n^2}$ definierte Folge.

(a) Was für ein Verhalten stellen Sie für $x \in [-1, 1]$ fest?

(b) Was für ein Verhalten stellen Sie für $x > 1$ fest?

Aufgabe B 27. (2+2 Punkte)

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen und beweisen Sie deren Konvergenz, wobei

(a) $\{a_n\}_{n=3}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ mit $a_n := \frac{4n^2+3n}{(n-2)^2}$,

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $b_n := \sum_{k=0}^{n} q^k$ für ein $q \in (-1, 1)$.

Aufgabe B 28. (5 Punkte)

Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Hinweis: $n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n$.

Aufgabe B 29. (Konvergente Folgen ganzer Zahlen, 3 Punkte)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge ganzer Zahlen in $\mathbb{R}$.

Beweisen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für große $n \in \mathbb{N}$ konstant wird, d.h.

$$\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon a_n = a,$$

und folgern Sie, dass $a \in \mathbb{Z}$.