Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 3

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Man weiß $f(e_1) = (0,1,1)^\top$, $f(e_2)$ ist die Spiegelung von $f(e_1)$ an 0, und $f((1,1,1)^\top) = e_1$. Wie lautet die Abbildungsmatrix?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie

(a) den Kern

(b) die Dimension des Kerns

(c) den Rang

(d) das Bild

der linearen Abbildung $f(x) = A \cdot x, f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $f(x) = A_t x$ mit

$$A_t = \begin{pmatrix} 4t & -2 & 2 \\ -2 & t & -1 \\ 2 & -1 & t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Mengen $M_n = \{t \in \mathbb{R} | rg(A_t) = n\}$ für $n = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4

Es sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Geben Sie eine Basis und die Dimension von $\mathrm{Bild}(T)$ an.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Geben Sie die Abbildungsmatrizen der folgenden linearen Abbildungen an.

(a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ (b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Rang der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 7

Es sei P^n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und

$$f : \begin{cases} P^n \to P^{n-1} & : n \in \mathbb{N} \\ P^0 \to P^0 & : n = 0, \end{cases}, \quad f(p) = p' \;.$$

Es ist also f die Abbildung, die einem Polynom seine Ableitungsfunktion zuordnet.

(a) Zeigen Sie: f ist linear.

(b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(f)$ und $\ker(f)$.

Aufgabe 8

Berechnen Sie in Abhängigkeit von x

(a) den Kern

(b) die Dimension des Kerns

(c) den Rang

(d) das Bild der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$