RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

2. Übung

Abgabetermin B-Teil 21.04.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **21.04.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II" in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 19.04.2022 und am 20.04.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A6

(a) Werwenden Sie [Skript, Satz 7.72], um die Kreisgleichung $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ zu beweisen.

(b) (i) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\sin(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$

(iii) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$

Aufgabe A7

Folgendes Resultat müssen Sie nicht zeigen. **Partialbruchzerlegung:** Seien p, q Polynome mit $\deg(p) < \deg(q)$. Weiterhin habe q die Form

$$q(x) = \Big(\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^{\alpha_i}\Big)\Big(\prod_{k=1}^{m}(x^2 + b_k x + c_k)^{\beta_k}\Big)$$

wobei $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_k\}_{k=1}^m, \{c_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{\beta_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{N}$ und die quadratischen Polynome keine reelle Nullstellen besitzen. Dann existieren Koeffizienten A_{ij_i}, B_{kl_k} und C_{kl_k} mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq j_i \leq \alpha_i$ und $1 \leq l_k \leq \beta_k$, sodass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_i=1}^{\alpha_i}\frac{A_{ij_i}}{(x - a_i)^{j_i}}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l_k=1}^{\beta_k}\frac{B_{kl_k}x + C_{kl_k}}{(x^2 + b_k x + c_k)^{l_k}}\right).$$

(i) Zeigen Sie, dass $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{A_1}{x + 3} + \dfrac{A_2}{x - 1}$

(ii) Geben Sie die Partialbruchdarstellung von $\dfrac{1}{x^2(x - 1)}$ an.

Aufgabe A8

Sei $(f_n)_n$ eine komplexwertige Funktionenfolge auf einer Menge X und f eine weitere komplexwertige Funktion auf X.

(i) Angenommen $X = X_1 \cup X_2$ für zwei Teilmengen, $f_{n|X_1}$ strebt gleichmässig gegen $f_{|X_1}$ für $n \to \infty$ und $f_{n|X_2}$ strebt gleichmässig gegen $f_{|X_2}$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann auch f_n gleichmässig gegen f strebt für $n \to \infty$

(ii) Zeigen Sie dass sich Teil (i) im Allgemeinen nicht für unendliche Vereinigungen $X = \cup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ verallgemeinern lässt.

Aufgabe A9

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktionenfolge, die für $n \to \infty$ gleichmässig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ strebt. Angenommen f_n ist gleichmässig stetig für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f ebenso gleichmässig stetig ist.

(ii) Sei $(f_n)_n$ eine Funktionenfolge auf einer Menge X. Zeigen Sie, dass der Grenzwert f einer Funktionenfolge eindeutig bestimmt ist, falls er existiert.

Teil B

Aufgabe B5 [7+4=11 Punkte]

(a) Seien

$$D := D_{\text{Polar}} := \{z = x + \mathrm{i}y \mid x \in \mathbb{R},\ y \in [0, 2\pi)\} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\exp|_D : D \to \mathbb{C}^\times$ bijektiv und stetig ist, und dass die Umkehrfunktion an jeder Stelle $z \in (0, \infty)$ unstetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$ genau dann gilt, wenn $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Aufgabe B6 [7+3=10 Punkte]

(i) Sei $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Zeigen Sie, dass die Nullstellen des Polynoms $z^n - w$ (die n-ten Wurzeln von w) gerade gegeben sind durch

$$z = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}} \quad \text{mit } k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

(ii) Zeigen Sie für alle $n \geq 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}} = 0.$$

Aufgabe B7 [4+4=8 Punkte]

Geben Sie die Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen an

(i) $\dfrac{4x - 1}{(x^2 + 1)(x - 2)}$

(ii) $\dfrac{x}{(x - 4)^2(x^2 + 1)^2}$

Aufgabe B8 [4+2+5=11 Punkte]

Sei $(f_n)_n$ eine komplexwertige Funktionenfolge auf einer Menge X und f eine weitere komplexwertige Funktion auf X.

(i) Zeigen Sie, dass f_n genau dann gleichmässig gegen f konvergiert, wenn

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

für $n \to \infty$.

(ii) Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ gleichmässig für $n \to \infty$ auch $f_n \to f$ punktweise für $n \to \infty$ impliziert.

(iii) Zeigen Sie, dass $(f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n)_n$ punktweise, aber nicht gleichmässig konvergiert.