

IT CENTER DER RWTH AACHEN

Dr. Th. Eifert

MATSE AUSBILDUNG
Probeklausur Analysis 1 am 02.11.2023

Name: _____

Vorname: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe 1)	<input type="text"/>	(10)
Aufgabe 2)	<input type="text"/>	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe

10 Punkte

Zeigen Sie die Konvergenz der rekursiven Folge und berechnen Sie den Grenzwert zu

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \sqrt{8a_n - 15} \\a_0 &= 4\end{aligned}$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie den Grenzwert von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3k-1}{k^2(k+1)}$$

Hinweis: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

IT CENTER DER RWTH AACHEN

Dr. Th. Eifert, Y. Albrecht M.Sc. nach Aufgaben von Ch. Schelthoff

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Probeklausur Analysis 1 am 19.01.2024

Name: _____

Vorname: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe	1)	(10)
Aufgabe	2)	(10)
Aufgabe	3)	(10)
Aufgabe	4)	(10)
Aufgabe	5)	(10)
Aufgabe	6)	(10)
Aufgabe	7)	(10)
Aufgabe	8)	(10)
Aufgabe	9)	(10)
Aufgabe	10)	(10)
Aufgabe	11)	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe**10 Punkte**

Ersetzen Sie c , so dass die Funktion stetig wird:

$$f(x) = \begin{cases} e \cdot (x^2 + 22x + 10) & \text{für } x \leq 1 \\ -3e^x - 6e^{x^2} + e \cdot c & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

2. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\sqrt[k]{1849} - \sqrt[k+1]{1849} \right)$$

Hinweis: $\sqrt{1849} = 43$

3. Aufgabe**10 Punkte**

Wie lautet der Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{49}{6^n}$$

4. Aufgabe**10 Punkte**

a) Wo hat die Funktion

$$f(x) = 21 \cdot (x - 43)^2 \cdot e^{x-42} + 21e^{x-42}$$

eine waagerechte Tangente ?

b) Wie lautet dort der Funktionswert ?

5. Aufgabe**10 Punkte**

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge a_n . Wie lautet der Grenzwert der Folge?

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2 \cdot \sqrt{10 \cdot a_n + 21} \\ a_0 &= 6 \end{aligned}$$

6. Aufgabe**10 Punkte**

Wie lauten Limes inferior und Limes Superior der Folge

$$a_n = 6 \cdot \frac{7n^2 - 3n + 2 \cdot (-1)^n}{n^2}$$

7. Aufgabe**10 Punkte**

Wie lautet im Term

$$\frac{1}{2}(x+2)^7$$

der Vorfaktor zu x^5 ?

8. Aufgabe**10 Punkte**

Finden Sie zu $x_0 = 20$ auf dem Intervall

$$[18, 22]$$

die bestmögliche Lipschitz-Konstante zur lokal Lipschitz-stetigen Funktion

$$f(x) = x^2$$

9. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie den Grenzwert von

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^4}{4 \cosh(x) - 4 - 2x^2}$$

10. Aufgabe**10 Punkte**

Sie haben bei einer Iteration

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

einer Lipschitz-stetigen Funktion $f(x)$ mit $L = 0,9$.

Die Funktion erfülle

$$f(0) = 0,835$$

Wieviele Iterationen sind nötig, um den Grenzwert auf 0,1 anzunähern?

Hinweis:

$$\begin{aligned} 0,9^{41} \cdot 8,35 &= 0,111 \\ 0,9^{42} \cdot 8,35 &= 0,09997 \end{aligned}$$

bzw.:

$$\frac{\ln(0,1) - \ln(8,35)}{\ln(0,9)} = 41,997$$

11. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi 84e^x \cdot \frac{\sin(x)}{e^\pi + 1} dx$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Analysis 1, SoSe 2020, am 17.07.2020

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe	1)	(10)
Aufgabe	2)	(10)
Aufgabe	3)	(10)
Aufgabe	4)	(10)
Aufgabe	5)	(10)
Aufgabe	6)	(10)
Aufgabe	7)	(10)
Aufgabe	8)	(10)
Aufgabe	9)	(10)
Aufgabe	10)	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe**10 Punkte**

Bestimmen Sie die Werte der folgenden uneigentlichen Integrale, sofern diese existieren:

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

b)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2. Aufgabe**10 Punkte**

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{1 - \cos x}$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right)$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Die Funktion $f(x) = \sin x$ mit $x \in [0, \pi]$ wird um die x -Achse rotiert. Berechnen Sie das Rotationsvolumen.

4. Aufgabe**10 Punkte**

Zeigen Sie Konvergenz der folgenden rekursiv definierten Funktionen und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \sqrt{6 \cdot a_n + 7} \\a_0 &= 0\end{aligned}$$

5. Aufgabe**10 Punkte**

Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$$

b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2 - 1}$$

6. Aufgabe**10 Punkte**Bestimmen Sie a und b so dass die Funktion $f(x)$ stetig wird zu

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{für } x > 1 \\ ax + b & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

7. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie zur Funktion $f(x) = \cos(x - 1) \cdot \frac{1}{x}$ und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ die Taylorreihenentwicklung bis zum quadratischen Term.

Bestimmen Sie anschließend den Wert des Taylorpolynoms für $x = 2$.

8. Aufgabe

10 Punkte

Man zerlege eine gegeben Zahl $c > 0$ so in zwei positive Faktoren, dass ihr Summe minimal wird.

9. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int \frac{1}{\sinh x - \cosh x} dx$$

b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 2}} dx$$

10. Aufgabe

10 Punkte

Skizzieren Sie die Fläche im ersten Quadranten (d.h. positive x -Achse und positive y -Achse), die von den Kurven $y = x$, $y = \frac{x}{4}$ und $y = \frac{9}{x}$ eingeschlossen wird und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Analysis 1, SoSe 2020, am 17.07.2020

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe	1)	(10)
Aufgabe	2)	(10)
Aufgabe	3)	(10)
Aufgabe	4)	(10)
Aufgabe	5)	(10)
Aufgabe	6)	(10)
Aufgabe	7)	(10)
Aufgabe	8)	(10)
Aufgabe	9)	(10)
Aufgabe	10)	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe**10 Punkte**

Bestimmen Sie die Werte der folgenden uneigentlichen Integrale, sofern diese existieren:

a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

b)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2. Aufgabe**10 Punkte**

a) Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{1 - \cos x}$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x^3} \right)$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Die Funktion $f(x) = \sin x$ mit $x \in [0, \pi]$ wird um die x -Achse rotiert. Berechnen Sie das Rotationsvolumen.

4. Aufgabe**10 Punkte**

Zeigen Sie Konvergenz der folgenden rekursiv definierten Funktionen und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \sqrt{6 \cdot a_n + 7} \\a_0 &= 0\end{aligned}$$

5. Aufgabe**10 Punkte**

Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$$

b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2 - 1}$$

6. Aufgabe**10 Punkte**Bestimmen Sie a und b so dass die Funktion $f(x)$ stetig wird zu

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{für } x > 1 \\ ax + b & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

7. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie zur Funktion $f(x) = \cos(x - 1) \cdot \frac{1}{x}$ und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ die Taylorreihenentwicklung bis zum quadratischen Term.

Bestimmen Sie anschließend den Wert des Taylorpolynoms für $x = 2$.

8. Aufgabe

10 Punkte

Man zerlege eine gegeben Zahl $c > 0$ so in zwei positive Faktoren, dass ihr Summe minimal wird.

9. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int \frac{1}{\sinh x - \cosh x} dx$$

b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 2}} dx$$

10. Aufgabe

10 Punkte

Skizzieren Sie die Fläche im ersten Quadranten (d.h. positive x -Achse und positive y -Achse), die von den Kurven $y = x$, $y = \frac{x}{4}$ und $y = \frac{9}{x}$ eingeschlossen wird und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. T. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG „Angewandte Mathematik und Informatik“
MATSE AUSBILDUNG

Klausur Analysis 1, SS 2020, am 29.09.2020

Hilfsmittel: 1 Blatt (DIN A4) handschriftliche Formeln

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe	1)	(10)
Aufgabe	2)	(10)
Aufgabe	3)	(10)
Aufgabe	4)	(10)
Aufgabe	5)	(10)
Aufgabe	6)	(10)
Aufgabe	7)	(10)
Aufgabe	8)	(10)
Aufgabe	9)	(10)
Aufgabe	10)	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe**10 Punkte**

Gibt es ein kubisches Polynom

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

mit $P(0) = 5$ (d.h. man bestimme reelle Zahlen a, b und c), sodass $P(x)$ in $x_1 = -1$ ein lokales Maximum und in $x_2 = 3$ ein lokales Minimum besitzt?

2. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie die Taylorreihenentwicklung 2. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{\pi}{8}$ der Funktion

$$f(x) = \ln(\cos(2x))$$

3. Aufgabe**10 Punkte**

Aus einem Draht von 72 cm soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden. Wie groß müssen die Kantenlängen x und y des Quaders gemacht werden, wenn sein Volumen möglichst groß werden soll? Welches Volumen kann maximal erzielt werden?

4. Aufgabe**10 Punkte**

Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}$$

5. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$$

b)

$$\int e^x \cos(x) dx$$

6. Aufgabe**10 Punkte**

Prüfen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert S .

7. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{1 - \cos x}$$

b)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x^{\sqrt{x}})$$

8. Aufgabe**10 Punkte**

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n^2 + 2) \\a_0 &= 0\end{aligned}$$

und berechnen Sie den Grenzwert.

9. Aufgabe

10 Punkte

Man berechne

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx$$

10. Aufgabe**10 Punkte**

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab. Geben Sie dazu immer die reellen Werte für x an, für die die Funktion abgeleitet werden kann.

a)

$$f(x) = x^{\cos(x^3)}$$

b)

$$g(x) = \frac{x^3}{(\ln(-x))^2 - 9}$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG
„ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG
Klausur Analysis 1, WiSe 2020/21, am 16.03.2021

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe	1)	(10)
Aufgabe	2)	(10)
Aufgabe	3)	(10)
Aufgabe	4)	(10)
Aufgabe	5)	(10)
Aufgabe	6)	(10)
Aufgabe	7)	(10)
Aufgabe	8)	(10)
Aufgabe	9)	(10)
Aufgabe	10)	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe**10 Punkte**

Zeigen Sie die Konvergenz der rekursiv definierten Folge

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_{n+1} &= \sqrt{4a_n - 3} \end{aligned}$$

und geben Sie den Grenzwert an.

2. Aufgabe**10 Punkte**

Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}}$$

b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

3. Aufgabe**10 Punkte**Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion $f(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

4. Aufgabe**10 Punkte**Aus einem massiven zylinderförmigen Körper mit dem Durchmesser d soll ein Körper mit Rechteckquerschnitt so herausgeschnitten werden, dass das Maß für den Widerstand bei Belastung $\frac{b \cdot h^2}{6}$, maximal ist. Wie groß sind dann Höhe h und Breite b des Rechtecks?**5. Aufgabe****10 Punkte**

Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$$

6. Aufgabe**10 Punkte**Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $f(x) = \ln(2 \cdot x^3)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.**7. Aufgabe****10 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) dx$$

b)

$$\int 5x \cdot \cosh(x) dx$$

8. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-1)^2 \cdot (x-2)} dx$$

9. Aufgabe**10 Punkte**Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, das durch Rotation der Funktion $y = -x^3 + 1$ im Bereich $[-1, 1]$ um die x -Achse entsteht.**10. Aufgabe****10 Punkte**

Berechnen Sie

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx$$

b)

$$\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG „ANGEWANDTE MATHEMATIK UND
INFORMATIK“
MATSE AUSBILDUNG

Klausur Analysis 1, SoSe 2021, am 14.07.2021

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe	1)	(10)
Aufgabe	2)	(10)
Aufgabe	3)	(10)
Aufgabe	4)	(10)
Aufgabe	5)	(10)
Aufgabe	6)	(10)
Aufgabe	7)	(10)
Aufgabe	8)	(10)
Aufgabe	9)	(10)
Aufgabe	10)	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie zur Funktion $f(x) = \cos(x-1) \cdot \frac{1}{x}$ und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ die Taylorreihenentwicklung bis zum quadratischen Term.

2. Aufgabe**10 Punkte**

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3x+5}$$

in eine Potenzreihe um $x_0 = 1$, in dem Sie die Funktion in eine geometrische Reihe überführen. Für welche x konvergiert die Reihe? Betrachten Sie auch die Randstellen.

3. Aufgabe**10 Punkte**

Gibt es reelle Zahlen a, b und c , so dass

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

die folgenden Eigenschaften hat:

- a) $P(0) = 5$
- b) $P(x)$ hat in $x_1 = -1$ ein lokales Maximum
- c) $P(x)$ hat in $x_2 = 3$ ein lokales Minimum

4. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{x \cos(x) - x}{\sin(x) - x} \right)$$

5. Aufgabe**10 Punkte**

Prüfen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert S .

6. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\int x \ln(\sqrt{x}) dx$$

b)

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx$$

7. Aufgabe**10 Punkte**

Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 5}{3^{k+1}}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$

8. Aufgabe**10 Punkte**

Für die Folge

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

bestimme man den Grenzwert a und gebe ein $n_0(\varepsilon)$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$ ist**9. Aufgabe****10 Punkte**

Man berechne

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx$$

10. Aufgabe**10 Punkte**Leiten Sie die folgenden Funktionen ab. Geben Sie dazu immer die Werte für x an, für die die Funktion abgeleitet werden kann.

a)

$$f(x) = x^{\cos(x^3)}$$

b)

$$g(x) = \frac{x^3}{(\ln(-x))^2 - 9}$$

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
IT CENTER DER RWTH AACHEN

Prof. Dr. C. Schelthoff, Prof. Dr. M. Hollstein, Dr. Th. Eifert

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG

Klausur Analysis 1, SoSe 2021, am 17.09.2021

Hilfsmittel: 1 Blatt (DIN A 4) handschriftliche Formeln

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

		max. Punktzahl
Aufgabe	1)	(10)
Aufgabe	2)	(10)
Aufgabe	3)	(10)
Aufgabe	4)	(10)
Aufgabe	5)	(10)
Aufgabe	6)	(10)
Aufgabe	7)	(10)
Aufgabe	8)	(10)
Aufgabe	9)	(10)
Aufgabe	10)	(10)
Gesamtpunkte:		Note:

1. Aufgabe**10 Punkte**

Untersuchen Sie auf Konvergenz:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}$$

2. Aufgabe**10 Punkte**

Zeigen Sie Konvergenz der folgenden rekursiv definierten Folge und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{6 \cdot a_n + 7} \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

3. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie zur Funktion

$$\frac{2}{3+4x}$$

die Potenzreihe um $x_0 = 1$.**4. Aufgabe****10 Punkte**Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion $f(x)$ im Punkt $x_0 = 3$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x^2-2x-3} & \text{für } x > 3 \\ \frac{1}{4} & \text{für } x = 3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

5. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(2x)}{\sinh^2(x)}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \right)$$

6. Aufgabe**10 Punkte**Berechnen Sie den Näherungswert von $\sqrt[3]{e}$, indem drei Glieder der Entwicklung der Funktion $f(x) = e^x$ in eine Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ genommen werden.

7. Aufgabe**10 Punkte**

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, das durch Rotation der Funktion $y = -x^2 + 1$ von $x_l = -1$ bis $x_r = 1$ um die x -Achse entsteht.

8. Aufgabe**10 Punkte**

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab. Geben Sie dazu immer die reellen Werte für x an, für die die Funktion abgeleitet werden kann.

a)

$$f(x) = x^{\cos(x^3)}$$

b)

$$g(x) = \frac{x^3}{(\ln(-x))^2 - 9}$$

9. Aufgabe**10 Punkte**

Berechnen Sie

$$\int \frac{x^3 + 9x^2 + 12x - 16}{x^2 + 2x - 3} dx$$

10. Aufgabe**10 Punkte**

Sei g eine integrierbare Funktion mit Stammfunktion G , a eine differenzierbare Funktion und b eine reelle Konstante.

a) Leiten Sie die Funktion

$$F(t) = \int_{a(t)}^b g(z) dz$$

nach t ab.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a) die Ableitung nach t von der Funktion

$$F(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^1 e^{-z^2} dz$$