

Lineare Algebra I

Tutorium - Blatt 7

Das Blatt wird vom 04.12.2025 bis zum 09.12.2025 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1 (LGS mit Variablen)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrrcl} & & - & 3y & + & (a-1)z & = & 5 \\ 20x & + & 10y & + & 30z & = & 10 \\ (a+2)x & + & 5y & + & 7z & = & 20 \end{array}$$

über einem Körper K , wobei $a \in K$ ist.

- (a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems für $K = \mathbb{Q}$.
- (b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems für die Körper $K = \mathbb{F}_p$ mit $p \in \{2, 3, 5\}$.

Aufgabe 2 (Inverse einer Matrix)

Berechnen Sie alle rechtsinversen Matrizen von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2 \times 4},$$

d.h. alle Matrizen $B \in \mathbb{F}_2^{4 \times 2}$ mit $AB = I_2$.

Aufgabe 3 (Euklidischer Algorithmus)

Berechnen Sie mithilfe des Euklidischen Algorithmus den ggT(735, 504) sowie Bézout-Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ sodass $\text{ggT}(735, 504) = \alpha \cdot 735 + \beta \cdot 504$.

Aufgabe 4 (Einheiten im Restklassenring)

Wir betrachten den Restklassenring $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann multiplikativ invertierbar ist, wenn $\text{ggT}(x, n) = 1$.
- (b) Bestimmen Sie alle Einheiten (d.h. multiplikativ invertierbaren Elemente) in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
- (c) Prüfen Sie, ob $\overline{135}$ in $\mathbb{Z}/296\mathbb{Z}$ multiplikativ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls das Inverse.