Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Anke Kreuzer

Übungsblatt 13

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist. Berechnen Sie außerdem die komplexen Eigenwerte. Zeigen Sie dann, dass der Betrag der Eigenwerte von A tatsächlich 1 ist.

Aufgabe 2

Eine Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Matrix A.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mittels der Diagonalisierung A^8 für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: $\lambda = 0$ ist Eigenwert der Matrix A genau dann, wenn gilt: $\det(A) = 0$.

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Gibt es einen Fixpunkt (d.h. existiert ein Vektor x mit $Ax = x$)?

(c) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine Orthogonalmatrix U, so dass gilt: $U^\top AU = D$.

Hausaufgaben

Aufgabe 6

Gesucht ist die Matrix A mit den Eigenwerten 2 und 3 und den zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

Aufgabe 7

Sei $A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.

(b) Geben Sie eine geometrische Interpretation für die lineare Abbildung, die durch A beschrieben wird.

(c) Bestimmen Sie A^4 unter Ausnutzung des Ergebnisses von (b).

Aufgabe 8

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\2 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} .$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert VDV^{-1})? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix V lauten?

Aufgabe 9

Zeigen Sie:

(a) Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn kein Eigenwert gleich 0 ist.

(b) Das charakteristische Polynom einer 2×2-Matrix lässt sich schreiben als

$$\lambda^2 - \mathrm{spur}(A)\lambda + \det(A).$$

(c) A symmetrisch $\Rightarrow$ alle Eigenwerte sind reell. Gilt die Umkehrung?