Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1

(i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und die Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ definiert über $x_{n+1} := \cos(x_n)$. Zeigen Sie, dass diese Folge für jedes beliebige x_0 konvergiert.

(ii) Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $F\colon X \to X$ sei stark kontrahierend mit Kontraktionskonstante $\gamma \in (0,1)$. Es sei $x_0 \in X$, $x_{n+1} := F(x_n)$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x_1, x_0) \\ d(x_{n+1}, x) &\leq \frac{\gamma}{1-\gamma} d(x_{n+1}, x_n) \\ d(x_{n+1}, x) &\leq \gamma d(x_n, x)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $M \subset X$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge. Seien $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}, \alpha_n > 0$ so, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ konvergiert. Für die Abbildung $A\colon M \to M$ gelte

$$\|A^n x - A^n y\| \leq \alpha_n \|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in M, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: A hat genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in M$, dieser ist Grenzwert der Folge $x_n := A^n x_0$ für beliebiges $x_0 \in M$, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \Big(\sum_{k\geq n} \alpha_k\Big) \|x_1 - x_0\|.$$

Aufgabe 3

Für $I = [0,1]$ sei $C^0(I)$ der Raum der stetigen Funktionen auf I versehen mit der Maximumsnorm. Weiter sei $k\colon I \times I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $z \in C^0(I)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zu $u \in C^0(I)$ sei definiert

$$(Tu)(x) := z(x) + \lambda \int_0^1 k(x,y)\, u(y)\, dy, \qquad x \in I,$$

Zeigen Sie

(i) $T\colon C^0(I) \to C^0(I)$ ist wohldefiniert, d.h. für $u \in C^0(I)$ ist $Tu \in C^0(I)$

(ii) T ist affin-linear, d.h. $Tu = Au + b$ für eine lineare Abbildung $A\colon C^0(I) \to C^0(I)$ und ein Element $b \in C^0(I)$.

(iii) $T\colon C^0(I) \to C^0(I)$ ist stetig.

(iv) Falls $|\lambda|\|k\|_\infty < 1$ gilt, dann gibt es genau ein $u \in C^0(I)$ mit

$$u(x) = z(x) + \lambda \int_0^1 k(x,y) u(y)\, dy.$$

Aufgabe 4

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f(0) = 0$ und $\partial_1 f(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass Umgebungen U und V von $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\phi\colon U \to V$ existieren, so dass $f(\phi(x)) = x_1$ für alle $x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$ gilt.