RWTH Institut für Mathematik
Prof. Dr. Michael Westdickenberg Tel.: +49 241 80-94569
Templergraben 55 Sekr.: +49 241 80-94921
52062 Aachen mwest@instmath.rwth-aachen.de
Raum 110/111 https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

Teil A

Aufgabe A34
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$1.\ \int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,dx, \qquad 2.\ \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx.$$

Lösung

1.
$$\int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$$

Berechne zunächst die Nullstellen des Nenners:
$x = 1$ ist Nullstelle: $1+1-1-1 = 0\checkmark$

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ x^3 \ + x^2 \ - x - 1\big) : \big(x-1\big) = x^2+2x+1 = (x+1)^2 \\
\underline{-\,x^3 \ + x^2} \\
\qquad\quad 2x^2 \ - x \\
\qquad \underline{-\,2x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad x - 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\,x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx, \quad x \neq 1,\ x \neq -1$$

Zerlege nun den Bruch mittels Partialbruchzerlegung und wähle folgenden Ansatz:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

für $A, B, C \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} x &= A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) \\ &= x^2(A+B) + x(2A+C) + (A-B-C) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} A+B=0 &\quad\Rightarrow\quad -A = B \\ 2A+C=1 &\quad\Rightarrow\quad C = 1-2A \\ A-B-C=0 &\quad\Rightarrow\quad A+A-1+2A = 0 \\ &\quad\Rightarrow\quad A = \frac{1}{4},\ B = -\frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx &= \int \left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}\right] dx \\ &= \int \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\right] dx \\ &= \frac{1}{4}\cdot\log|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\log|x+1| + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+1}\right) + c \\ &= \frac{1}{4}\cdot\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + c,\ \text{für } c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Zerlege den Bruch $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und wähle dazu den Ansatz

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

für $A, B, C \in \mathbb{R}$. Es gilt dann

$$x+1 = A(x^2+4) + Bx(x-1) + C(x-1) = x^2(A+B) + x(C-B) + 4A - C.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}&0 = A+B \Leftrightarrow A = -B \\ &1 = C-B \Leftrightarrow B = C-1 \\ &1 = 4A - C \Leftrightarrow 1 = -4C + 4 - C = -5C + 4 \Leftrightarrow -3 = -5C \Leftrightarrow C = \frac{3}{5} \\ \Rightarrow &B = -\frac{2}{5} \Rightarrow A = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{2}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{5}\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{5}\frac{1}{x^2+4}.$$

Nun ist es möglich das Integral zu berechnen.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{2}{5}\frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{2}{5}\frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{3}{5}\frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{2}{5}\log|x-1| + c - \frac{2}{5}\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy_{|y=x^2+4} + \frac{3}{5}\frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{2}{5}\log|x-1| - \frac{1}{5}\log|x^2+4| + c + \frac{3\cdot 2}{20}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy_{|y=\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{5}\log\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+4}\right) + \frac{3}{10}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c\end{aligned}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe A35

1. Geben Sie eine rekursive Formel zur Berechnung von $\int x^n \cos(x)\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$ an.
2. Berechnen Sie $\int x^s \log(x)\mathrm{d}x$ für jedes $s \in \mathbb{R}$. Beachten Sie hierbei, dass der Fall $s = -1$ getrennt zu behandeln ist.
3. Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \exp(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x$ für $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lösung

1. Sei $C \in \mathbb{R}$ beliebige Konstante. Wir wissen, dass $\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$. Für $n = 1$ erhalten wir per Substitution:
$$F_1 := \int x\cos(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C$$
Für $n = 2$ erhalten wir:
$$\begin{aligned} F_2 := &\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x = x^2\sin(x) - \int 2x\sin(x)\mathrm{d}x \\ =&x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - \int 2\cos(x)\mathrm{d}x = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C \end{aligned}$$
Für $n > 2$ erhalten wir:
$$\begin{aligned} F_n := &\int x^n\cos(x)\mathrm{d}x = x^n\sin(x) - \int nx^{n-1}\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - \int n(n-1)x^{n-2}\cos(x)\mathrm{d}x = x^n\sin(x) + nx^{n-1}\cos(x) - n(n-1)F_{n-2} \end{aligned}$$

2. Für $s = -1$ erhalten wir $\int x^{-1}\log(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(\log(x)^2)'\mathrm{d}x = \frac{\log(x)^2}{2} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $s \neq -1$ erhalten wir $\int x^s\log(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1+s}x^{s+1}\log(x) - \int \frac{1}{1+s}x^s\mathrm{d}x = \frac{1}{1+s}x^{s+1}\log(x) - \frac{1}{(1+s)^2}x^{s+1}$.

3.
$$\begin{aligned} \int \exp(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\exp(ax)\sin(bx) - \frac{b}{a}\int \exp(ax)\cos(bx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\exp(ax)\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\exp(ax)\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int \exp(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow (1 + \frac{b^2}{a^2})\int \exp(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\exp(ax)\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\exp(ax)\cos(bx) + C \\ \Leftrightarrow \int \exp(ax)\sin(bx)\mathrm{d}x &= \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}\exp(ax)\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\exp(ax)\cos(bx) + C\right) \end{aligned}$$
für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe A36

(i) (Halbwinkelmethode) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\mathrm{d}x$ mit der Substitution $u = \tan(\frac{x}{2})$. Zeigen dafür zuerst die Identitäten:
$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

(ii) Berechnen Sie mit der Halbwinkelmethode $\int \frac{1}{-2\,+\,2\sin(x)}\mathrm{d}x \qquad \left(0 \leq |x| < \frac{\pi}{2}\right)$.

(iii) Berechnen Sie $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\mathrm{d}x$.

(iv) Berechnen Sie $\int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$

Lösung

(i) Zuerst zeigen wir die Identitäten:

$$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = 2sin(x/2)cos(x/2) = sin(x)$$

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = cos(x)$$

Die letzten Gleichungen folgen aus trigeometrischen Formel. Nun betrachten wir das unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)}\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1-u^2(x)}{1+u^2(x)}}{2+\frac{2u(x)}{1+u^2(x)}}\mathrm{d}x = \int \frac{1-u^2(x)}{2(1+u(x)+u^2(x))}\mathrm{d}x = \int \frac{1-u^2}{1+u+u^2}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &\overset{\text{PBZ}}{=} \int \frac{1+2u}{1+u+u^2} - \frac{2u}{1+u^2}du = \log|1+u+u^2| - \log|1+u^2| + C \\ &= \log|1+\frac{u}{1+u^2}| + C = \log|1+\frac{1}{2}\sin(x)| + C\end{aligned}$$

mit $C \in \mathbb{R}$ beliebige Konstante.

(ii)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{-2+2\sin(x)}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Halbwinkelm. } y=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{-2+2\frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{-1-y^2+2y}\,\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{-1}{(y-1)^2}\,\mathrm{d}y \overset{\text{Sub. } y-1=z}{=} \int \frac{-1}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{y} + c,\ c \in \mathbb{R} \\ &\overset{\text{Resub. } z=y-1}{=} \frac{1}{y-1} + c \overset{\text{Resub. } y=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1} + c\end{aligned}$$

(iii) Trigonometrische Substitution.
Integrand der Form $R\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$, $x \in [-1,1]$. $x = \sin(y)$, $\mathrm{d}x = \cos(y)\,\mathrm{d}y$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \frac{\sin(y)}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\cos(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(y)\sin^2(y)\,\mathrm{d}y \overset{\text{PI}}{=} \left[-\cos(y)\sin^2(y)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(y)2\sin(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}}\underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \cos(0)\underbrace{\sin^2(0)}_{=0} - \left[\frac{2}{3}\cos^3(y)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3}{8} - \frac{2}{3}\underbrace{\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2^3}} + \frac{2}{3}\cos(0)^3 \\ &= \frac{5}{24}\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad \text{ und setze } \quad x = \sinh(t), \text{ dann} \\
I &= \int \frac{\sinh(t)+1}{\cosh(t)} \cdot \cosh(t)\,dt = \cosh(t) + t + c \\
&= \sqrt{1+\sinh^2(t)} + t + c = \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh}(x) + c, \text{ für } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aufgabe A37

Bestimmen Sie:

(a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x} \log(\log(x))\,\mathrm{d}x$, **(b)** $\displaystyle\int_1^2 5x^4 \log(x)\,\mathrm{d}x$, **(c)** $\displaystyle\int_1^2 2x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Lösung

(a) Hier sind sowohl PI als auch Substitution möglich:

- Mittels Substitution: Setze $g(x) = \log(x)$, dann gilt $g'(x) = \frac{1}{x}$ und folglich:

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{1}{x} \log(\log(x))\,\mathrm{d}x &= \int_e^{e^2} g'(x) \log(g(x))\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subst}}{=} \int_{g(e)}^{g(e^2)} \log(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 1 \cdot \log(y)\mathrm{d}y \overset{\text{PI}}{=} \Big[y\log(y)\Big]_1^2 - \int_1^2 y \cdot \frac{1}{y}\mathrm{d}y \\
&= 2\log(2) - 1\log(1) - \Big[2-1\Big] = 2\log(2) - 1
\end{aligned}$$

- Mittels Partieller Integration: Setze $f(x) = \log\Big(\log(x)\Big)$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{1}{x} \log\Big(\log(x)\Big)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{PI}}{=} \Big[\log(x)\cdot\log\Big(\log(x)\Big)\Big]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \log(x)\,\frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \log\left(e^2\right)\cdot\log\Big(\log\left(e^2\right)\Big) - \log(e)\cdot\log\Big(\log(e)\Big) - \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\log(2) - 1\log(1) - \Big[\log(x)\Big]_e^{e^2} = 2\log(2) - [2-1] = 2\log(2) - 1
\end{aligned}$$

(b) Mittels Partieller Integration: Setze $f(x) = \log(x)$ und $g'(x) = 5x^4$:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 5x^4 \log(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x^5 \cdot \log(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 x^5 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 32\log(2) - 1\log(1) - \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2 = 32\log(2) - \frac{1}{5}\cdot 32 + \frac{1}{5}\cdot 1 = 32\log(2) - \frac{31}{5}
\end{aligned}$$

(c) Mittels Partieller Integration: Setze $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ und $g'(x) = 2x$:

$$\int_1^2 2x \ \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \ = \ \left[x^2 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \ 4\log\left(\frac{3}{2}\right) - \log(2) + \int_1^2 \frac{x}{x+1} \mathrm{d}x$$

Wir behandeln das letzte Integral durch geschicktes Umschreiben

$$\int_1^2 \frac{x}{x+1} \mathrm{d}x \ = \ \int_1^2 \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x \ = \ \int_1^2 1 \ \mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x$$

$$= \ 2 - 1 - \big[\log(2+1) - \log(1+1)\big] \ = \ 1 - \log(3) + \log(2)$$

und erhalten damit den Wert des ursprünglichen Integrals:

$$\int_1^2 2x \ \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \ = \ 4\log(3) - 4\log(2) - \log(2) + 1 - \log(3) + \log(2)$$

$$= \ 3\log(3) - 4\log(2) + 1$$

Teil B

Aufgabe B33 [3+3 = 6 Punkte]

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

$$1.\ \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx, \qquad 2.\ \int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx.$$

Lösung

1.
$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx = \int 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}\,dx = x + 3\cdot \int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx, \quad x \neq 2,\, x \neq 3$$

Zerlege den Bruch mittels Partialbruchzerlegung und wähle dazu den Ansatz ($A, B \in \mathbb{R}$):

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(x-3) + B(x-2) = x(A+B) - 3A - 2B.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ -3A-2B &=& 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} A &=& -B \\ 1 &=& -3A+2A = -A \end{array} \quad \Rightarrow \quad A=-1,\ B=1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx = x + 3\cdot \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = x + 3\cdot \log|x-3| - 3\cdot \log|x-2| + c$$
$$= x + 3\cdot \log\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c, \text{ für } c \in \mathbb{R}.$$

2. Zerlege den Bruch mit Partialbruchzerlegung und wähle dazu folgenden Ansatz

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}, \text{ für } A, B, C \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow 1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = x^2(A+B) + x(2A+B+C) + A$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{array}{rcl} 1 = A && \\ 0 = A+B & \Rightarrow & B = -1 \\ 0 = 2A+B+C & \Rightarrow & C = -2A-B = -2+1 = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \log|x| - \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$
$$= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + c, \text{ für } c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe B34 [3+3+3 = 9 Punkte]

Bestimmen Sie

(i) $\displaystyle\int \frac{t}{1\,+\,\cos(t)}\,\mathrm{d}t \quad \Big(|t| < \pi\Big)$,

(ii) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1\,-\,x}{1\,+\,x}}\,\mathrm{d}x \quad \Big(|x| < 1\Big)$,

(iii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

Lösung

(i) Partielle Integration: zunächst Stammfunktion von $\frac{1}{1+\cos(t)}$ mit Halbwinkelmethode:

$$\int \frac{1}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{1+y^2+1-y^2}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}y = y = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{1+\cos(t)}\,\mathrm{d}t &= t\tan\left(\frac{t}{2}\right) - \int \tan\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = t\tan\left(\frac{t}{2}\right) - \int \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t \\ &= t\tan\left(\frac{t}{2}\right) - 2\int \frac{\sin(z)}{\cos(z)}\,\mathrm{d}z = t\tan\left(\frac{t}{2}\right) + 2\ln\left(|\cos(z)|\right) \\ &= t\tan\left(\frac{t}{2}\right) + 2\ln\left(\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right)\end{aligned}$$

(ii) Umformen und dann trigonometrische Substitution.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1+x}}\,\mathrm{d} = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(II)}}{=} \int \frac{\cos(y)}{1+\sin(y)}\cdot\cos(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{1-\sin^2(y)}{1+\sin(y)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{(1-\sin(y))\,(1+\sin(y))}{1+\sin(y)}\,\mathrm{d}y \int 1\,\mathrm{d}y - \int \sin(y)\,\mathrm{d}y \\ &= y + \cos(y) = \arcsin(x) + \cos(\arcsin(x))\end{aligned}$$

(iii)

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Setze $x = \sinh(t)$, $dx = \cosh(t)\,dt$

$$\begin{aligned}&= \int \frac{\sinh^2(t)}{\underbrace{\sqrt{1+\sinh^2(t)}}_{=\cosh(t)}}\cdot\cosh(t)\,dt = \int \sinh^2(t)\,dt \\ &= \int \frac{1}{4}(e^t - e^{-t})^2\,dt = \frac{1}{4}\int e^{2t} - 2 + e^{-2t}\,dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t} - 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) + c = \frac{1}{4}\sinh(2t) - \frac{1}{2}t + c \\ &= \frac{1}{4}2\sinh(t)\cosh(t) - \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{2}\sinh(t)\sqrt{1+\sinh^2(t)} - \frac{1}{2}t + c\end{aligned}$$

Rücksubstitution: $t = \operatorname{arsinh}(x)$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arsinh}(x)\right) + c,\ \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe B35 [4*3 = 12 Punkte]

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion:

1. $f_1(x) := \arctan(x)$, 2. $f_2(x) := \sin^2(x)$, 3. $f_3(x) := \frac{1}{\sin^2(x)}$ 4. $f_4(x) := \frac{1}{x\log(x)}$

Lösung

1. $f(x) = \arctan(x)$. Ist F Stammfunktion von f, so gilt

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \\
&= \int 1 \cdot \arctan(x)\,dx + c \\
&\overset{\text{PI}}{=} x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx + c \qquad \text{mit} \begin{bmatrix} u(x) = \arctan(x), & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = 1, & v(x) = x \end{bmatrix} \\
&= x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + c \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \log(1+x^2) + c
\end{aligned}$$

2. $g(x) = \sin^2(x)$. Ist G Stammfunktion von g, so gilt

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int \sin^2(x)\,dx + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \\
&\overset{\text{PI}}{=} -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx + c \qquad \text{mit} \begin{bmatrix} u(x) = \sin(x), & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \sin(x), & v(x) - \cos(x) \end{bmatrix} \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))\,dx + c \\
&= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx + c
\end{aligned}$$

Also folgt:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \;\Rightarrow\; G(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + c$$

3. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx &= \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)}\,dx \\
&= \int \frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)}\,dx \underset{dy = 1+y^2\,dx}{\overset{y = tan(x)}{=}} \int \frac{1+y^2}{y^2} \cdot \frac{dy}{1+y^2} \\
&= \int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{\tan(x)} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4. $f(x) = \frac{1}{x\log(x)}$. Ist F Stammfunktion von f, so gilt

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \\
&= \int \frac{1}{x \cdot \log(x)}\,dx + c \\
&= \int \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x}\,dx + c \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt + c \,{}_{|t=\log(x)} && \text{wobei } t = \phi(x) = \log(x) \Rightarrow \ \phi'(x) = \frac{1}{x} \\
&= \log|t| + c \,{}_{|t=\log(x)} \\
&= \log|\log(x)| + c
\end{aligned}$$

Aufgabe B36 [4*3 = 12 Punkte]

Berechnen Sie die bestimmten Integrale

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^7}{x^4+2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx$

Lösung

(i)
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x^3 \cdot \sin(x)\,dx &\overset{\text{PI}}{=} x^3 \cdot (-\cos(x))\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 3x^2(-\cos(x))\,dx \qquad \text{mit} \begin{bmatrix} u(x) = x^3, & u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = \sin(x), & v(x) = -\cos(x) \end{bmatrix} \\
&= \pi^3 + 3\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos(x)\,dx \\
&\overset{\text{PI}}{=} \pi^3 + 3\left(\underbrace{x^2 \cdot \sin(x)\big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin(x)\,dx\right) \qquad \text{mit} \begin{bmatrix} u(x) = x^2, & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \cos(x), & v(x) = \sin(x) \end{bmatrix} \\
&= \pi^3 - 6 \cdot \int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx \\
&\overset{\text{PI}}{=} \pi^3 - 6\left(x(-\cos(x))\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\,dx\right) \qquad \text{mit} \begin{bmatrix} u(x) = x, & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin(x), & v(x) = -\cos(x) \end{bmatrix} \\
&= \pi^3 - 6\left[\pi + \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx\right] = \pi^3 - 6\pi
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,dx &\overset{\text{PI}}{=} x \cdot \arcsin(x)\big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \text{mit} \begin{bmatrix} u(x) = \arcsin(x), & u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v'(x) = 1, & v(x) = x \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\int_1^{3/4} t^{-\frac{1}{2}}\,dt \qquad \text{wobei } t = f(x) = 1 - x^2 \ \Rightarrow \ f'(x) = -2x \\
&= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\int_{3/4}^{1} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t}\big|_{3/4}^{1} = \frac{\pi}{12} - 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{x^7}{x^4+2}\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{x^4}{x^4+2}\cdot 4x^3\,dx \\
&= \int_2^{18} \frac{1}{4}\cdot\frac{t-2}{t}\,dt \qquad \begin{array}{l}\text{wobei } t=f(x)=x^4+2\\ \text{und } f'(x)=4x^3\end{array} \\
&= \frac{1}{4}\int_2^{18} 1-\frac{2}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left[t-2\log(t)\right]_2^{18} \\
&= 4-\frac{1}{2}\left[\log(18)-\log(2)\right] \\
&= 4-\frac{1}{2}\log(9) = 4-\log(3)
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx &= \int_1^2 \log(t)\,dt \\
&\qquad \begin{array}{l}\text{wobei } t=f(x)=\log(x)\\ \text{und } f'(x)=\frac{1}{x}\end{array} \\
&\overset{\text{PI}}{=} t\cdot\log(t)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot t\,dt \\
&\qquad \text{mit} \begin{bmatrix} u(t)=\log(t), & u'(t)=\dfrac{1}{t} \\ v'(t)=1, & v(t)=t \end{bmatrix} \\
&= 2\cdot\log(2) - 1\cdot\log(1) - \int_1^2 1\,dt \\
&= 2\cdot\log(2) - t\Big|_1^2 = 2\cdot\log(2)-1
\end{aligned}$$