$\boxed{1.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 25

****

Anwesenheitsaufgaben Tutorium (für die Woche 14.04. - 18.04.)

Aufgabe A1. Sei $K = \mathbb{F}_p$ (Körper mit p Elementen), und sei $n \geq 1$. Wieviele invertierbare Matrizen gibt es in $K^{n,n}$?

Aufgabe A2. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n \geq 1$. Angenommen f ist nilpotent, d.h. $f^N = 0$ für ein $N > 0$. Sei μ_f das Minimalpolynom, und sei χ_f das charakteristische Polynom von f.

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von f.

(ii) Bestimmen Sie χ_f.

(iii) Ist f trigonalisierbar?

(iv) Konstruieren Sie eine nilpotente Matrix $0 \neq A \in \mathbb{Q}^{3,3}$ mit $\mu_A \neq \chi_A$.

(v) Konstruieren Sie eine nilpotente Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3,3}$ mit $\mu_A = \chi_A$.

Aufgabe A3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}.$$

(i) Für welche $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ist A diagonalisierbar?

(ii) Für die Fälle, in denen dies der Fall ist: Finden Sie eine Matrix $S \in \mathbb{Q}^{3,3}$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

****

Hausaufgaben (Abgabe: 18.04.)

Aufgabe H1. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 2a-6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

trigonalisierbar bzw. diagonalisierbar? Finden Sie gegebenenfalls eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix bzw. Diagonalmatrix ist.

Aufgabe H2. Sei $J(\lambda, n) = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i+1, \\ \lambda & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $J(\lambda, n)$-invarianten Unterräume von K^n.

Aufgabe H3. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$
Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A, und finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe H4. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6,6}.$$

(i) Bestimmen Sie die Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume von A.

(ii) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

(iii) Finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist.

Hinweis: $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ sind die einzigen Eigenwerte von A.

****

Regeln:

- Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Nach Absprache mit Ihrem/r Tutor*in. Deadline: Freitags 14:00 oder nach Absprache mit Ihrem/r Tutor*in.
- Zulässig sind Einzelabgaben und Abgaben in Zweiergruppen. Jedes Mitglied einer Zweiergruppe muss jede der bearbeiteten Aufgaben im Tutorium präsentieren können.
- Auf der ersten Seite sollen deutlich lesbar Ihre Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe stehen.
- Für jede gelöste Hausaufgabe gibt es 4 Punkte.
- Wer mindestens 50% der Punkte erzielt und aktiv am Tutorium teilnimmt, wird zur Klausur zugelassen.