Hausaufgabe 12 **Ausgabe: 16.12.2025**
Stochastik, WiSe 2025/2026 **Abgabe: 05.01.2026**

Prof. Dr. Florian Heinrichs, Yvonne Albrecht, Johannes Dreßen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Aufgabe 1 An einem Bankschalter werden an n verschiedenen Freitagen die Wartezeiten X_i mit $i = 1, \ldots, n$ in Minuten beobachtet. Unter der Annahme, dass die X_i exponential-verteilt sind mit der Dichtefunktion

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} \cdot e^{-\frac{x}{m}} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

schätzen Sie den Wert m mit der Maximum-Likelihood-Schätzmethode.

Aufgabe 2 Eine Zufallsvariable habe die Ausprägungen "Erfolg" mit einer Wahrscheinlichkeit von a und "Misserfolg" mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - a$. In einer Versuchsreihe von vier Versuchen wurde die Zahl der Misserfolge vor dem ersten Erfolg gemessen:

Versuch	1	2	3	4
Misserfolge	2	0	1	3

(a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2 und 3 Misserfolge.

(b) Geben Sie auf Grundlage der oben angegebenen Stichprobe eine Maximum-Likelihood-Schätzung für a.

Aufgabe 3 Messungen des systolischen Blutdrucks bei $n = 10$ Personen ergaben folgende Werte in mmHg:

124, 145, 112, 124, 136, 129, 125, 131, 142, 114

Unter der Annahme, dass der Blutdruck normalverteilt ist, bestimmen Sie jeweils zum Niveau 90%

(a) ein einseitig nach oben begrenztes Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ.

(b) ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die Standardabweichung σ.

Aufgabe 4 Die von einer Maschine für einen bestimmten Arbeitsgang benötigte Zeit sei eine Zufallsvariable X, für deren Dichtefunktion eine Abhängigkeit von einem Parameter $\vartheta \in [0; 2]$ die Gestalt

$$f(x; \vartheta) = \begin{cases} \vartheta + 2 \cdot (1 - \vartheta) \cdot x & \text{für } x \in [0{,}1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unterstellt wird. Zu X liege eine einfache Stichprobe $x_1,,,,,x_n$ vor.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_i)$ und $\mathbb{E}(X_i^2)$.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Schätzfunktionen

(1) $\hat{T}_n(X) = 4 - \frac{6}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$

(2) $\hat{R}_n(X) = 3 - \frac{6}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

erwartungstreu für ϑ sind.

(c) Wie müssen die Zahlen α und β gewählt werden, damit die Schätzfunktion

$$\hat{U}_n(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha X_i + \beta X_i^2\right)$$

erwartungstreu für ϑ ist?