# Grundlagen der Analysis und Analysis I

für Mathematik-Fachbachelor, Mathematik-Lehramt und Wirtschaftsmathematik

Maria G. Westdickenberg

5. Januar 2026

Anmerkungen, Anregungen und Korrekturen bitte über Moodle im Forum
`Skript: Korrekturen und Anregungen`
ankündigen.

Acknowledgements

This is a first version of a Skript for Grundlagen der Analysis and Analysis 1 at the RWTH. Many thanks go out in advance to all of the students who will be asking and answering questions during the winter term 2025-26. Questions enrich the instruction.

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

In der Analysis geht es um Strukturen, die unendlich groß oder unendlich klein werden. Gibt es eine Singularität? Wenn ja, mit welcher Rate divergiert es? Gibt es einen Grenzwert? Falls ja, mit welcher Rate konvergiert es?

Konkret werden wir uns hauptsächlich mit reellen Funktionen einer reellen Variablen beschäftigen. Funktionen oder Abbildungen kennen Sie aus der Schule. Ihr Vorwissen über Funktionen und vielem mehr wird Ihnen sehr helfen. Aber am Anfang kann Ihnen Ihr Vorwissem im Wege stehen: Weshalb müssen wir jetzt *zeigen*, was wir bisher für offensichtlich gehalten haben? Wie ausführlich muss man begründen? Was bringt das "tiefere Verständnis", das wir hier entwickeln wollen? Solche Fragen muss man für sich am Anfang beantworten. Unser Ziel ist, so wenig wie möglich anzunehmen und eine Struktur aufzubauen, woraus alles Weitere folgt. Wenn wir in der Schule mit schönen Legogebäuden gespielt haben, legen wir an der Universität fest, welche Legosteine wir überhaupt brauchen und dann wie wir mit den elementaren Steinen jede wunderbare Struktur aufbauen können. Am Ende des Semesters wissen wir nicht nur, wie man jedes "Gebäude" der Analysis 1 baut, sondern auch, wie man weiter in der Analysis lesen, lernen und forschen würde. Wir erwerben dieses Semester eine Basis, auf der alles Weitere in der Analysis aufbaut.

Wie mit jeder Sprache muss man am Anfang viele Vokabeln und viele Regeln lernen. Dies kostet Energie. Aber es ist unabdingbar für unsere weitere Arbeit. Einerseits sollten Sie bereit sein, einiges auswendig zu lernen. Andererseits ist es so: Wenn man einen Begriff wirklich *verstanden* hat, dann kommt einem die Definition natürlich vor, ohne dass man sich mühsam die Worte aus dem Gedächtnis zusammensuchen muss. Dies kommt mit der Zeit.

Stellen Sie viele Fragen! Lösen Sie viele Aufgaben! Reden Sie mit Ihren Kommiliton:innen über Mathematik! Über das, was noch unklar ist. Über das, was frustrierend ist. Über das, was schön oder faszinierend ist. Lernen Sie die Sprache.

**Hinweise für Erfolg**: Wir zitieren aus dem Skript von Einsiedler und Wieser [1]:

> Man kann Mathematik nicht durch Zusehen erlernen; genauso wenig wie Sie Tennis oder Skifahren erlernen können, in dem Sie sich alle verfügbaren Turniere oder Weltmeisterschaften im Fernsehen anschauen. Vielmehr sollten Sie Mathematik wie eine Sprache erlernen und eine Sprache bringt man sich bei, in dem man sie benützt. Besprechen Sie mit Kollegen die Themen der Vorlesungen. Erklären Sie sich gegenseitig die Beweise aus der Vorlesung oder die Lösung der Übungsbeispiele. Vor allem aber sollten Sie so viele Übungen wie nur möglich lösen; nur so können Sie sich sicher sein, dass Sie die Themen gemeistert haben.
>
> Wir erwarten von Ihnen, dass Sie in kleinen Gruppen an den Übungen arbeiten. Dies hat den Vorteil, dass durch die Diskussionen in der Gruppe die Objekte der Vorlesungen lebendiger werden. Sie sollten jedoch sicherstellen, dass Sie die Lösungen komplett verstehen, erklären können, und ähnliche Probleme anschliessend selbstständig lösen können. Schieben Sie das Bearbeitung der Übungsaufgaben nicht auf. Insbesondere bauen sich

die Themen der Vorlesung stetig von Kapitel zu Kapitel auf, und die aktive und hartnäckige Bearbeitung der Übungen wird Ihnen auch helfen, die aktuellen und zukünftigen Themen der Vorlesung besser zu verstehen.

Stellen Sie so viele Fragen, wie nur möglich und stellen Sie sie dann, wenn sie auftauchen.

“Wer fragt, ist ein Narr für eine Minute. Wer nicht fragt, ist ein Narr sein Leben lang.” (Konfuzius)

Wahrscheinlich haben viele Ihrer Kolleg:innen die gleiche Frage oder haben das Problem noch gar nicht bemerkt. Dem Dozierenden oder dem Hilfsassistenten wird so ermöglicht, gleichzeitig bei vielen ein Problem zu beheben und Probleme bei den Studierenden zu erkennen, wo sie oder er dachte, dass keine vorhanden seien. Des Weiteren will das gute Formulieren von Fragen geübt sein.

Schließlich zitieren wir aus dem Vorwort des Skriptes von Rolf Leis [4]:

Das Fach Mathematik gilt als schwer. Selbst gute Schüler haben oft anfangs große Schwierigkeiten an der Universität. Da möchte ich Ihnen Mut machen. Wenn Sie bereit sind, hart zu arbeiten, sollten Sie unbedingt durchhalten. Sie werden reichlich belohnt werden. Schulkenntnisse werden hier nicht vorausgesetzt, wir fangen also im Prinzip neu an. Leider ist die Schulmathematik doch recht verschieden von der Mathematik, wie wir sie hier lehren. Das hat verschiedene Gründe... Vielleicht hängt das eben damit zusammen, daß Mathematik als so schwer gilt. Ich möchte zwei Punkte dafür hervorheben, damit Sie sich von Anfang an darauf einstellen können.

1. Von vielen Menschen wird das, was Mathematik zur Mathematik macht, als unnatürlich, unmenschlich und unvollziehbar angesehen; ja, man lacht vielleicht über den Mathematiker. Wesentliche Merkmale der Mathematik sind Helle und Schärfe der Begriffsbildungen, die pedantische Sorgfalt im Umgang mit Definitionen (nicht zu viel — nicht zu wenig darf gesagt werden), die Strenge der Beweise (nur mit Mitteln der Logik, nicht aus der Anschauung) und schließlich die abstrakte Natur der mathematischen Objekte. All dies steht natürlich im großen Gegensatz zum täglichen Leben, wo man jemanden vielleicht überredet, ihn einschüchtert oder besticht. Denken Sie nur daran, wie im politischen Raum Entscheidungen fallen. Und die meisten Bürger finden das normal. So hat Nietsche einmal den denkenden Menschen als kranken Affen bezeichnet. Diese mathematische Haltung ist für Sie ungewohnt, und Sie müssen sie erst lernen — oft mit großer Anstrengung. Das macht den Einstieg schwer.

...

2. Als zweiten wichtigen Punkt betone ich, daß ein Mathematiker viel Fantasie benötigt. Nur richtig zu schließen genügt nicht, man muß auch Ideen haben und sehen können, wohin die Reise wohl geht. Der berühmte Mathematiker David Hilbert (1862–1943) soll einmal auf die Frage, was aus einem seiner Schüler geworden sei, geantwortet haben: *Er ist Schriftsteller geworden, er hatte zu wenig Fantasie.* Mathematik ist eine hohe Kunst, und Sie sollten sich auch etwas als Künstler fühlen. Ich sage das nicht zum Spaß.

Also diese Polarität, einerseits fast pedantisch genau sein — und andererseits viel Fantasie haben, macht Mathematik schwer, denke ich. Aber noch einmal, ich möchte Ihnen Mut machen. Mit Fleiß läßt sich vieles lernen im Leben, zumindest bis zum Diplom. Aber hart arbeiten werden Sie müssen; von Anfang an, ohne Unterbrechung, jede einzelne Vorlesungsstunde sollten Sie sofort nacharbeiten.

# Kapitel 1

# Grundlagen der Analysis

Ein logisches, klares und vollständiges Argument zu erschaffen, ist die wichtigste Kompetenz, die wir dieses Semester lernen werden (und die in der Klausur erprobt wird). Es ist wichtig, dass Sie bis zum Ende des Semesters wissen, dass $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist. Es ist **noch wichtiger**, dass Sie in der Lage sind, dies mathematisch zu zeigen (beweisen).

## 1.1 Aussagenlogik

Eine mathematische Aussage ist ein Satz, der als wahr oder falsch bewertet werden kann.

$$\begin{aligned} & 5 > 2 && \text{(wahr)} \\ & 2 > 5 && \text{(falsch)} \\ \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt} \quad & x \geq 2 \Rightarrow x + 1 \geq 2 && \text{(wahr).} \end{aligned}$$

Wir werden mit Aussagen arbeiten, Aussagen umformen und aus Aussagen neue Aussagen folgern.

**Definition 1.1.1: Negation**

Wir schreiben $\neg p$ für die Negation der Aussage $p$, das heißt, die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn $p$ falsch ist.

**Beispiel 1.1.2.** *Wenn $p$ die Aussage ist, dass $x \geq 1$, dann ist $\neg p$ die Aussage, dass $x < 1$.*

In einer *Wahrheitstabelle* oder *Wahrheitstafel* listet man die Möglichkeiten auf:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| W | F |
| F | W |

Wir werden Aussagen oft mit **"und"** verknüpfen.

**Definition 1.1.3: Und-Operation**

Die Aussage "sowohl $p$ als auch $q$" wird durch $p \wedge q$ notiert, obwohl wir Worte präferieren werden, also einfach "$p$ und $q$".

Mit Worten können wir die logische Argumentation meist besser verstehen. (Mathematik ist eine Sprache...)

**Beispiel 1.1.4.** 3 *ist ungerade und* $5 < 7$ *kann notiert werden als*

$$3 \textit{ ist ungerade} \qquad \wedge \qquad 5 < 7.$$

Wieder können wir die Möglichkeiten auflisten:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | F |
| F | F | F |

Wir werden auch Aussagen mit **"oder"** verknüpfen. *In der Mathematik ist dies ein einschließendes Oder*!

**Definition 1.1.5: Oder-Operation**

Die Aussage "es gilt $p$ oder $q$" wird als $p \vee q$ notiert; wieder präferieren wir Worte: "$p$ oder $q$".

**Beispiel 1.1.6.** *Wenn* $x > 1$ *oder* $x > 2$, *dann ist* $x^2 > 1$.

**Beispiel 1.1.7.** *Wenn* $x \in \mathbb{N} \ \vee x \in \mathbb{Z}$, *dann ist* $x \in \mathbb{R}$.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | W |
| F | W | W |
| F | F | F |

*Wenn man ein ausschließendes Oder andeuten möchte, muss man das mit "entweder…oder" tun.*

**Beispiel 1.1.8.** *Für jede reelle Zahl* $x$ *gilt entweder* $x \leq 0$ *oder* $x > 0$.

Die Negation kann man mit "und" und "oder" kombinieren. Die Verneinung von $p \wedge q$ ist, dass $\neg p$ oder $\neg q$. Die Verneinung von $p \vee q$ ist, dass sowohl $\neg p$ als auch $\neg q$.

**Beispiel 1.1.9.** *Ich behaupte, dass ich logisch und geduldig bin. Meine Schwester verneint diese Aussage. Sie hat damit behauptet, dass ich nicht logisch oder nicht geduldig (oder beides nicht) bin.*

*Mein Bruder behauptet, dass er klug oder lustig ist. Meine Schwester verneint diese Aussage. Sie hat damit behauptet, dass er sowohl nicht klug als auch nicht lustig ist.*

Wir werden ständig mit *Implikationen* zu tun haben:

**Definition 1.1.10: "wenn, dann"-Aussagen: $p \Rightarrow q$**

Wir bezeichnen mit $p \Rightarrow q$ die Implikation "wenn $p$, dann $q$".

**Beispiel 1.1.11.** *Beispiele von "wenn, dann" Aussagen sind:*

- *Wenn es regnet, dann bringe ich einen Schirm mit.*
- *Wenn* $x \geq 1$, *dann ist* $x$ *positiv.*

**Beispiel 1.1.12.** *Wenn* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) > 0$, *dann hat* $f$ *in* $x_0$ *eine Minimalstelle.*

Zu beachten ist, dass eine Implikation wahr ist, wenn die erste Aussage falsch ist.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| W | W | W |
| W | F | F |
| F | W | W |
| F | F | W |

Wenn man sowohl $p \Rightarrow q$ als auch $q \Rightarrow p$ hat, dann hat man $p$ genau dann, wenn $q$.

**Definition 1.1.13: Genau dann, wenn, $p \Leftrightarrow q$**

Wenn $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$, dann schreiben wir

$$p \Leftrightarrow q$$

und sagen, $p$ genau dann, wenn $q$.

**Beispiel 1.1.14.**

*p: $n \in \mathbb{N}$ ist eine Quadratzahl,* *q: für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.*

*Hier gilt $p \Leftrightarrow q$.*

Obwohl Doppelpfeile von Studierenden sehr beliebt sind, soll man beachten, dass man bei einer Doppelimplikation *zwei Aussagen* zu zeigen/begründen hat. Wenn man nur eine Richtung für einen Beweis braucht, sollte man sich fragen, ob man wirklich beides zeigen möchte.

Die *Reihenfolge* wird bei Bedarf mit Klammern klargestellt. “$p \vee q \wedge r$” ist unklar aber $(p \vee q) \wedge r$ oder $p \vee (q \wedge r)$ sind eindeutig. Wir verwenden allerdings die Prioritätsregel, dass Negation Vorrang hat. So ist $\neg p \vee q$ als $(\neg p) \vee q$ und $\neg p \Rightarrow q$ als $(\neg p) \Rightarrow q$ zu verstehen.

In unseren Beweisen werden wir oft Kontraposition verwenden.

**Definition 1.1.15: Umkehrung und Kontraposition**

Die Umkehrung der Aussage $p \Rightarrow q$ ist $q \Rightarrow p$. Die Kontraposition der Aussage $p \Rightarrow q$ ist “wenn nicht $q$, dann nicht $p$” und wird bezeichnet mit

$$\neg q \Rightarrow \neg p.$$

Wichtig für uns ist die Tatsache:

**Lemma 1.1.16**

Die Aussage $p \Rightarrow q$ ist logisch äquivalent zu

$$\neg q \Rightarrow \neg p.$$

Das heißt, $p \Rightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn $\neg q \Rightarrow \neg p$ wahr ist.

*Beweis.* Wir zeigen dies mit einer Wahrheitstafel:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg q \Rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | F | F | W |
| W | F | F | F | W | F |
| F | W | W | W | F | W |
| F | F | W | W | W | W |

□

**Beispiel 1.1.17.** *Wir betrachten die Aussage: "Wenn $x > 2$, dann ist $x^2 > 4$."*

*Die Umkehrung ist: "Wenn $x^2 > 4$, dann ist $x > 2$." Die Kontraposition der ursprünlichen Aussage ist: "Wenn $x^2 \leq 4$, dann ist $x \leq 2$."*

*In diesem Beispiel ist die erste Aussage wahr. Die Umkehrung ist nicht wahr (ein Gegenbeispiel ist $x = -3$). Die Kontraposition ist wahr.*

**Übung 1.1.18**

Ist die Umkehrung einer Aussage logisch äquivalent zur Aussage?

Aus unseren Aussagen werden wir weitere Aussagen *folgern*.

**Lemma 1.1.19: $n$ und $n^2$ beide gerade oder beide ungerade**

Sei $n \in \mathbb{Z}$. $n$ is gerade genau dann, wenn $n^2$ gerade ist.

**Schulverbindung 1.1.20**

Als Erstes nehmen Sie wahr, dass man die Definition von "gerade" wissen muss, um anfangen zu können. Haben Sie "gerade" in der Schule für $n \in \mathbb{N}$ oder für $n \in \mathbb{Z}$ definiert? Wir werden manchmal Definitionen brauchen, die Sie in der Schule nicht präzise oder nicht in der Allgemeinheit, die wir brauchen, formuliert haben. Kein Grund zur Panik. Man fragt sich einfach, was die Definition ist. Haben wir sie in der Vorlesung eingeführt? Wenn nicht, zählt diese Definition als "Allgemeinwissen"? Wenn Sie unsicher sind oder es unterschiedliche Definitionen gibt, fragt man in der Vorlesung, Globalübung oder Kleingruppenübung nach. Selbst die kleinsten Definitionen (z.B. "positiv") sind wichtig!

*Beweis.* Wir schreiben den Beweis sehr ausführlich, um die Logik klarzulegen. Zunächst zeigen wir die "Hinrichtung" $n$ gerade impliziert $n^2$ gerade. Wenn $n$ gerade ist, dann gibt es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$n = 2k \text{ (warum?)}, \qquad \text{woraus folgt} \qquad n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

und von der rechten Seite erkennen wir, dass 2 Teiler von $n^2$ ist und $n^2$ somit gerade.

Jetzt betrachten wir die Rückrichtung oder Umkehrung: $n^2$ gerade impliziert, dass $n$ gerade. Dies beweisen wir mittels Kontraposition, d.h., wir zeigen:

$$n \text{ nicht gerade impliziert, dass } n^2 \text{ nicht gerade.}$$

Wenn $n$ nicht gerade ist, dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$n = 2k - 1 \text{ (warum?)}.$$

Wir berechnen dann

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1.$$

Somit ist 2 kein Teiler von $n^2$ (warum?), also ist $n^2$ ungerade. □

**Bemerkung.** *Im Beweis haben wir mehr als ein Mal verwendet, dass Vor- und Nachfolger gerader Zahlen ungerade sind. Wo?*

Manchmal werden wir Aussagen verneinen:

**Lemma 1.1.21: Negation/Verneinung von "wenn"-Aussagen**

Die Verneinung oder Negation der Aussage $p \Rightarrow q$ ist äquivalent zu $p$ **und nicht** $q$.

Wir können das Lemma durch ein Beispiel beleuchten: Wir betrachten die Aussage: Wenn ich eine Millionen Euro hätte, dann würde ich nicht arbeiten. Damit diese Aussage falsch ist, müsste ich eine Millionen Euro haben und immer noch arbeiten. Also muss die erste ["wenn"] Aussage wahr sein und die zweite ["dann"] falsch. $p$ und nicht $q$.

*Beweis.* Wir begründen die Aussage des Lemmas mit einer Wahrheitstafel:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg(p \Rightarrow q)$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | F | F | F |
| W | F | F | W | W | W |
| F | W | W | F | F | F |
| F | F | W | F | W | F |

□

Beachten Sie, dass die Negation **nicht** logisch äquivalent zur ursprünglichen Aussage ist!

**Beispiel 1.1.22.** *Sei $z \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Aussage, wenn $z$ gerade ist, dann ist $z/2$ eine ganze Zahl. Damit diese Aussage falsch ist, müsste $z$ gerade sein und $z/2$ keine ganze Zahl.*

**Negation mit "für alle" und "es existiert"**: Oft werden wir Aussagen verneinen, die mit All- und Existenzquantoren kombiniert sind.

**Definition 1.1.23: Allquantor, Existenzquantor**

Der Allquantor wird mit $\forall$ bezeichnet und als "für alle" ausgesprochen. Der Existenzquantor wird mit $\exists$ bezeichnet und als "es existiert" oder "es gibt" ausgeprochen.

**Beispiel 1.1.24.** *Die Aussage*

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon x^2 > 1 \qquad \textit{gilt} \qquad x > 1$$

*ist falsch. Die Aussagen*

$$\exists x \in \mathbb{R}, \textit{ so dass } x \textit{ keine rationale Zahl ist}$$

*und*

$$\forall \textit{ Polynome } p(\cdot) \textit{ mit Grad Eins } \exists x_0 \in \mathbb{R} \textit{ so dass } p(x_0) = 0$$

*sind wahr.*

**Beispiel 1.1.25.** *Für alle ganzen Zahlen $z$ gilt: entweder ist $z > 1$ oder $z < 0$. Dies können wir in eine Implikation umformulieren: Wenn $z$ eine ganze Zahl ist, dann gilt entweder $z > 1$ oder $z < 0$. Die Negation (p und nicht q) wäre: Es existiert eine ganze Zahl $z$, so dass beide oder keins von beiden gelten. Für $z = 1$ gilt keins von beiden. Also ist die Negation wahr und die ursprüngliche Aussage falsch.*

**Bemerkung.** *Wir hätten auch $z = 0$ als Gegenbeispiel nehmen können. Uns genügt aber schon ein einziges Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen (d.h. die Negation der Aussage als wahr zu erkennen).*

Weil eine mathematische Aussage entweder wahr oder falsch ist, nervt es Mathematiker:innen, wenn Schulbuchaufgaben eine Aussage als "wahr, falsch oder manchmal wahr" bezeichnen. Wenn wir uns die Aussage anschauen:

Die Seitenlängen $a \leq b \leq c$ eines Dreiecks erfüllen

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1.1.1}$$

sagen manche Schulbücher, dass diese Aussage "manchmal wahr" ist. An der Uni ist es anders. Wir verstehen die Aussage als:

Für jedes Dreieck gilt, dass die Seitenlängen $a \leq b \leq c$ die Gleichung (1.1.1) erfüllen.

Diese Aussage ist **falsch**. Dies zeigt man, indem man die Existenz eines Dreiecks zeigt, für das die Seitenlängen die Gleichung (1.1.1) nicht erfüllen. Eine natürliche Folgefrage wäre, ob es eine Klasse von Dreiecken gibt, für die die Gleichung gilt. Die Antwort ist ja, und dies hat uns unser Freund Pythagoras beigebracht. Zwei wahre Aussagen sind:

(1) Es existieren Dreiecke für die die Seitenlängen Gleichung (1.1.1) erfüllen.

(2) Für alle rechtwinkeligen Dreiecke erfüllen die Seitenlängen (1.1.1).

Sehr wichtig ist, dass man die **Reihenfolge** der Quantoren nicht vertauschen kann!

"Es existiert ein Polynom $p(\cdot)$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $p(x) = 1$."

hat eine andere Bedeutung als:

"Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Polynom $p(\cdot)$, so dass $p(x) = 1$."

Wenn die Existenz eines Objekts mit beispielsweise zwei Eigenschaften verneint wird, dann gilt, dass für alle Objekte mit der ersten Eigenschaft die zweite Eigenschaft nicht erfüllt ist.

**Beispiel 1.1.26.** *Aussage: Es existiert eine ganze Zahl $z$, so dass $z$ ungerade und $z^2$ gerade ist.*

*Negation: Für alle $z \in \mathbb{Z}$ mit $z$ ungerade gilt $z^2$ ungerade. (Dies ist wahr und wurde oben in Lemma 1.1.19 gezeigt. Also ist die erste Aussage falsch.)*

**Zusammenfassung**

| Aussage | Negation |
|---|---|
| $p$ oder $q$ | $\neg p$ und $\neg q$ |
| $p$ und $q$ | $\neg p$ oder $\neg q$ |
| $p \Rightarrow q$ | $p$ und $\neg q$ |
| für alle $x$, $p(x)$ | es existiert $x$, so dass nicht $p(x)$ |
| es existiert $x$, so dass $p(x)$ | für alle $x$ gilt nicht $p(x)$ |

Sei $\emptyset$ die “leere Menge”, d.h., die Menge, die keine Elemente enthält. Die Aussage, “Es existiert $x \in \emptyset$, so dass $p$” ist für jede Aussage $p$ falsch (denn es gibt keine Elemente in der leeren Menge). Wir führen die Regel ein: Die Aussage, “Für alle $x \in \emptyset$ gilt $p$” ist für jede Aussage $p$ wahr.

## 1.2 Beweistechniken

Wir werden dieses Semester vieles beweisen! Dies bedeutet nicht mehr und nicht weniger als, dass wir mathematisch zeigen, was wahr ist. Zum Beispiel werden wir (1.3.2) und (1.3.3) unten direkt beweisen. Das heißt, wir nehmen die gegebenen Annahmen und schließen daraus, was folgt. Direkte Beweise sind vorteilhaft, weil sie meist einfach zu lesen/verstehen sind.

Man kann auch indirekt argumentieren. Eine Art von indirektem Beweis ist durch Kontraposition, und dies haben wir oben schon eingeführt. Um $p \Rightarrow q$ zu zeigen, nimmt ein Beweis durch Kontraposition an, dass $\neg q$ wahr ist und folgert daraus, dass $\neg p$ gilt.

**Beispiel 1.2.1.** *Zu zeigen: Wenn das Produkt von zwei positiven reellen Zahlen größer als* 100 *ist, dann ist mindestens eine der beiden Zahlen größer als* 10.

*Beweis.* Wir nennen die zwei Zahlen $x$ und $y$. Wir beweisen die Aussage nicht direkt, sondern in dem wir die Kontraposition zeigen. Die Kontraposition lautet, wenn zwei positive Zahlen beide höchstens 10 sind, so ist das Produkt höchstens 100. Wir nehmen also zur Kontraposition an, dass

$$0 < x \leq 10 \quad \text{und} \quad 0 < y \leq 10.$$

Dann folgern wir:

$$\begin{aligned} x\,y &\leq 10\,y && (\text{weil } y \geq 0 \text{ und } x \leq 10) \\ &\leq 10 \cdot 10 && (\text{weil } y \leq 10) \\ &= 100. \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass das Produkt nicht größer 100 ist. Somit ist der Beweis zu Ende. $\square$

Eine zweite Form von indirektem Beweis ist der Beweis durch Widerspruch. Diese Art von Beweis ist bei Studierenden sehr beliebt. Allerdings sind direkte Beweise in der Regel “besser”. Aber Beweise durch Widerspruch sind manchmal kürzer oder sonst vorteilhaft, also soll man auch mit diesem Typ von Beweis arbeiten können. Hier verneint man die Aussage und zeigt, dass man einen Widerspruch erhält.

**Beispiel 1.2.2.** *Zu zeigen: Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

*Beweis.* Wir nehmen zum Widerspruch an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Wir können sie dann auflisten als

$$1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Jetzt definieren wir die Zahl

$$q := 1 + p_1 \cdot p_2 \cdots p_n.$$

Diese Zahl $q$ ist größer als $p_n$, also nach Annahme ist sie keine Primzahl. Dann muss eine Primzahl $p_j \in \{p_1, \dots, p_n\}$ die Zahl $q$ teilen. Aber Division von $q$ durch $p_j$ liefert Rest 1 (eine Zahl, die durch kein $p_j > 1$ teilbar ist), so dass $p_j$ die Zahl $q$ doch nicht dividiert. Durch diesen Widerspruch erhalten wir, dass es keine größte Primzahl gibt. □

Wenn man durch Widerspruch zeigen möchte, dass $q$ aus $p$ folgt, nimmt man an, dass $p$ und nicht $q$ gilt. Zu zeigen ist, dass dies zu einem Widerspruch führt.

**Beispiel 1.2.3.** *Für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt, wenn $x$ und $y$ ungerade sind, dann gibt es kein $z \in \mathbb{Z}$, so dass*

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1.2.1}$$

*Beweis.* Seien also $x$ und $y$ ganze Zahlen und ungerade. Es gibt also $j, k \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$x = 2j + 1, \qquad y = 2k + 1.$$

Wir nehmen zum Widerspruch an, dass es $z \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass (1.2.1) gilt. Wir haben in Lemma 1.1.19 gezeigt, dass aus $x$ ungerade, $x^2$ ungerade folgt und das Gleiche für $y$. Wegen (1.2.1) ist dann $z^2$ gerade (Summe zweier ungerader Zahlen) und somit $z$ gerade. Also existiert $\ell \in \mathbb{Z}$, so dass

$$z = 2\ell.$$

Aus den Darstellungen für $x$, $y$ und $z$ und der Gleichung (1.2.1) folgt

$$(2j + 1)^2 + (2k + 1)^2 = (2\ell)^2.$$

Wir vereinfachen dies auf

$$4j^2 + 2x + 4(k^2 + k) = 4\ell^2.$$

Division durch 2 liefert

$$2j^2 + x + 2(k^2 + k) = 2\ell^2,$$

oder

$$x = 2\ell^2 - 2j^2 - 2(k^2 + k).$$

Aber dann ist die linke Seite eine ungerade Zahl und die rechte Seite eine gerade Zahl. Also erhalten wir einen Widerspruch. □

### 1.2.1 Wohlordnungsprinzip und die vollständige Induktion

Aus Zeitgründen verzichten wir auf eine axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen. Wir schauen uns die axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen in Abschnitt 2.1 an. Für den Moment nehmen wir $\mathbb{N}$ als

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

und wir postulieren:

**Axiom**

**(W)** **Wohlordnungsprinzip:** Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen besitzt ein Minimum.

Ein Axiom ist etwas, dass wir *annehmen*. Wir werden (W) verwenden, wenn wir die "Dichtheit" von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ beweisen. Außerdem ist dieses Axiom die Grundlage des Prinzips der vollständigen Induktion.

Die vollständige Induktion ist ein sehr nützliches Hilfsmittel für Beweise, und wir werden sie sehr oft anwenden. (Übrigens ist die vollständige Induktion ein beliebtes Klausurthema.)

**Theorem 1.2.4: Prinzip der vollständigen Induktion**

Es sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Menge mit den zwei Eigenschaften:

$$\text{(i) } 1 \in A \qquad \text{(ii) für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } n \in A \Rightarrow n+1 \in A.$$

Dann gilt $A = \mathbb{N}$.

*Beweis.* Angenommen die Aussage ist falsch, dann ist die Menge

$$E := \mathbb{N} \setminus A = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A\} \neq \emptyset.$$

Dann besitzt $E$ nach (W) ein Minimum, das wir $m$ nennen. Nach (i) ist $m \neq 1$. Nach $m \in E$ und $m > 1$ ist nach (ii) $m - 1 \in E$. (Warum? Wäre $m - 1$ in $A$, so würde (ii) implizieren, dass $m \in A$.) Aber $m - 1 < m$ und $m - 1 \in E$ widerspricht, dass $m$ das Mimimum von $E$ ist. □

**Bemerkung.** *Man kann den Kern des Arguments auch so formulieren: Da (ii) gilt, gilt auch die Kontraposition, also:*

$$n + 1 \notin A \quad \Longrightarrow \quad n \notin A.$$

*Jetzt führen wir eine Index-Verschiebung durch: für $m := n + 1$ erhalten wir*

$$m \notin A \quad \Longrightarrow \quad m - 1 \notin A.$$

**Bemerkung.** *Falls $n_0 \in A$ und (ii) aus dem Theorem für $n \geq n_0$ gilt, dann enthält $A$ alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.*

**Beispiel 1.2.5.** *Zeigen Sie, dass*

$$1^3 + 2^3 + ... + N^3 = \frac{N^2 \cdot (N+1)^2}{4} \tag{1.2.2}$$

*für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt.*

*Beweis.* Schritt 1: („Base case“ oder Induktionsanfang.) Für $N = 1$ gilt

$$1^3 = 1 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}.$$

Also ist (1.2.2) für $N = 1$ wahr.

Schritt 2: (Induktionsschritt.) Wir nehmen an, dass (1.2.2) für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Unsere Arbeit: Wir müssen zeigen, dass (1.2.2) auch für $n + 1$ gilt. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad \text{nach Annahme} \\ &= (n+1)^2 \cdot \left( \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} \right) \\ &= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

also erfüllt $n+1$ die Gleichung (1.2.2). Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt (1.2.2) für jedes $N \in \mathbb{N}$. □

**Bemerkung.** *Wir haben eben gezeigt, dass die Folge*

$$a_1 = 1^3 \qquad a_2 = 1^3 + 2^3 \qquad a_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \qquad \dots$$

*entweder durch die rekursive Definition*

$$a_1 = 1^3, \quad a_n = a_{n-1} + n^3$$

*oder durch die explizite Definition*

$$a_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

*definiert werden kann.*

Wir wenden das Prinzip der vollständigen Induktion jetzt an, um die binomische Formel zu beweisen. Zunächst erinnern wir an die Binomialkoeffizienten.

**Definition 1.2.6**

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Fakultät als $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ und $0! := 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ sind die Binomialkoeffizienten definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Außerdem setzen wir $\binom{0}{0} := 1$.

**Lemma 1.2.7**

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, 2, ..., n\}$ gilt die rekursive Formel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

*Beweis.* Aus den Definitionen folgt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{n!k}{(n-k+1)!k!}, \\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!}, \\ \Rightarrow \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!(k+n-k+1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

□

**Notation 1.2.8: Potenz ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), Summe, Produkt**

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x^0 := 1, \qquad x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ mal}}.$$

Für $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + x_2 + ... + x_n,$$

sowie

$$\prod_{k=1}^{n} x_k := x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n.$$

**Theorem 1.2.9: Binomische Formel**

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

*Beweis.* Wir verwenden die vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist die Formel klar. (mini-Übung!)

Also nehmen wir an, dass die Formel für irgendein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt für $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \overset{\text{I.A.}}{=} (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \qquad \text{(warum?)} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)x^{n-(k-1)}y^k + y^{n+1} \qquad \text{(warum?)} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n-(k-1)}y^k + y^{n+1} \qquad \text{(warum?)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n-(k-1)}y^k.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Formel für $n+1$ gezeigt. Es folgt aus dem Prinzip der vollständigen Induktion, dass die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Wir erinnern an das Pascalsche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\multicolumn{9}{l}{\ldots (usw.)}
\end{array} \tag{1.2.3}$$

in dem die Binomialkoeffizienten $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$ in gleicher Reihenfolge vorkommen. Lemma 1.2.7 drückt aus, dass der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ genau das $(k+1)$-te Element der $(n+1)$-ten Reihe des Dreiecks ist.

**Schulverbindung 1.2.10**

Als Sie in Ihrer Schulzeit Integrale behandelt haben, haben Sie Formeln wie:

$$(1)\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (2)\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (3)\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

verwendet aber wahrscheinlich nicht bewiesen. Zeigen Sie jetzt, dass diese Formeln für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

## 1.3 Mengen und Mengenschreibweise

Wir werden sehr oft mit Mengen arbeiten. Eine Menge $A$ ist eine Zusammenfassung von Objekten (für uns, oft von Zahlen, aber manchmal auch von Funktionen oder Gleichungen). Die Objekte, die zu einer Menge $A$ gehören, heißen Elemente von $A$. Wenn $x$ ein Element von $A$ ist, schreiben wir

$$x \in A.$$

Wir sagen, dass $A$ das Element $x$ enthält, dass $x$ in $A$ enthalten ist, oder, dass $x$ zu $A$ gehört. Wenn $x$ nicht zu $A$ gehört, schreiben wir

$$x \notin A.$$

Für jedes Objekt $x$ gilt entweder $x \in A$ oder $x \notin A$.

**Bemerkung.** *Es gibt für Elemente keine Vielfachheiten, z.B. gilt*

$$\{1,1\} = \{1\}, \qquad \{1,\, 2\} \cup \{2\} = \{1,2\} \qquad \textit{oder allgemein} \qquad \{x,y\} = \{x\} \textit{ wenn } x = y.$$

**Notation 1.3.1**

Beachten Sie, dass wir Mengen mit geschweiften Klammern notieren.

Die Menge, die keine Elemente enthält, wird leere Menge genannt und mit $\emptyset$ bezeichnet.
Eine Möglichkeit, eine Menge zu definieren, ist die Elemente in der Menge einfach aufzulisten:

**Beispiel 1.3.2.** $A = \{1,3,5\}$ *oder* $B = \{0,1,5,-1\}$.

Wir werden diese Form "Auflistung" nennen.
Alternativ kann man Mengen definieren, indem man eine definierende Eigenschaft angibt.

**Beispiel 1.3.3.** *Die Menge aller natürlichen Zahlen $x$, die die Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$ erfüllen.*

$$\{x \colon x \in \mathbb{N} \textit{ und } x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

*Der Doppelpunkt : zeigt an, dass danach die definierende Eigenschaft folgt und wir meist mit "so dass" vorgelesen.*

Vier Mengen, die Sie schon kennen und mit denen wir oft arbeiten werden, sind

- die natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$,
- die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,...\}$,
- die rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \colon x = \frac{p}{q} \text{ mit } p,q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\right\}, \tag{1.3.1}$$

- die reellen Zahlen: (Darstellung als Dezimalzahl)

$$\mathbb{R} = \left\{x \colon x = m,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \text{ mit } m \in \mathbb{Z} \text{ und } \alpha_i \in \{0,1,\dots,9\}\right\}.$$

**Beispiel 1.3.4.** $0,5$ *ist eine rationale Zahl und eine reelle Zahl.* $2$ *gehört zu* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$.

**Übung 1.3.5**

Geben Sie die Menge

$$\{x \in \mathbb{N} \colon 1 < x^2 + 1 \leq 11\}$$

in der Form einer Auflistung an (d.h., in der Form $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ wobei $\emptyset$ auch erlaubt ist).

**Bemerkung.** *Die Darstellung einer reellen Zahl als Dezimalzahl ist nicht eindeutig, zum Beispiel sind* $1,000\ldots$ *und* $0,999\ldots$ *dieselbe Zahl, nämlich* $1$.

Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze (rationale, reelle) Zahl. Das führt uns zu folgender

**Definition 1.3.6: Teilmenge**

Wenn *jedes* Element von $A$ auch ein Element von $B$ ist, dann sagen wir, <u>$A$ ist in $B$ enthalten</u> oder <u>$A$ ist eine Teilmenge von $B$</u>. Wir schreiben

$$A \subseteq B.$$

**Bemerkung.** *Nützlich ist: $A$ ist eine Teilmenge von $B$, falls gilt*

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x \in B.$$

*Hierbei bedeutet $\Longrightarrow$ "impliziert" oder "zieht nach sich."*

**Beispiel 1.3.7.** *Betrachte die beiden Mengen*

$$A = \{x \colon x^2 - x - 6 < 0 \textit{ und } x \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}.$$

*Wir werden zeigen, dass $A \subseteq B$. Wenn $x \in A$ ist, dann gilt (Nachrechnen)*

$$\begin{aligned} & x^2 - x - 6 < 0 \textit{ und } x \in \mathbb{N} \\ \Longleftrightarrow\ & (x+2)(x-3) < 0 \textit{ und } x \in \mathbb{N} \\ \Longleftrightarrow\ & \quad -2 < x < 3 \textit{ und } x \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

*also ist $x = 1$ oder $x = 2$. In beiden Fällen gilt auch $x \in B$. Also ist $A \subseteq B$.*
*Hierbei bedeutet $\Longleftrightarrow$ "genau dann, wenn" oder "ist äquivalent zu."*

Im Beispiel oben ist $A \subseteq B$ und $A$ ist „kleiner als“ $B$ in dem Sinne, dass $A$ weniger Elemente enthält. Das Intervall $(0,1) \subseteq [0,1]$ ist auch „kleiner als“ $[0,1]$ in einem gewissen Sinn, aber beide Mengen enthalten unendlich viele Elemente. Der Begriff, den wir hier formulieren möchten, ist der Begriff einer echten Teilmenge.

**Definition 1.3.8: Gleichheit und echte Teilmenge**

Wenn $A$ und $B$ genau die gleichen Elemente besitzen, dann sagen wir, dass <u>$A$ und $B$ gleich sind</u>. Wir schreiben $A = B$. Wenn $A \subseteq B$ und $B$ ein Element enthält, das nicht in $A$ ist, dann sagen wir, dass <u>$A$ eine echte Teilmenge von $B$ ist</u> und wir schreiben

$$A \subsetneq B.$$

**Bemerkung** (Notation). *Manche Mathematiker schreiben $A \subset B$ für $A$ ist eine Teilmenge von $B$. Manche Mathematiker schreiben $A \subset B$ für $A$ ist eine echte Teilmenge von $B$. Wie immer in der Mathematik muss man die Notation präzise definieren und konsequent benutzen. In diesem Kurs benutzen wir die Notation aus Definition 1.3.6 und 1.3.8.*

**Beispiel 1.3.9** (Gleichheit). *Zeigen Sie, dass*

$$C := \{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z}, \ \textit{so dass } x^2 + y^2 < 2x + 8\}$$

*gleich der Menge $B$ ist, die wir im obigen Beispiel definiert haben. Wir bemerken, dass $C$ die Menge aller Zahlen beschreibt, die die $x$-Koordinate eines Paares ganzer Zahlen ist, das in einem offenen Kreis mit dem Radius 3 und dem Ursprung $(1, 0)$ liegt. Tatsächlich gilt*

$$\begin{array}{rrlll} \Leftrightarrow & x^2 + y^2 & < 2x + 8 & \textit{und } x \in \mathbb{Z} & \textit{und } y \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + y^2 & < 9 & \textit{und } x \in \mathbb{Z} & \textit{und } y \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

*Hier wählen wir nun $y = 0$, da wir so den größtmöglichen Bereich für $x$ bekommen:*

$$\begin{array}{rrll} & (x-1)^2 & < 9 & \textit{und } x \in \mathbb{Z}, \\ \Leftrightarrow & -2 & < x < 4 & \textit{und } x \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

*Also ist $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, wie zu zeigen war.*

Um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen, ist die folgende Bemerkung oft sehr nützlich.

**Bemerkung** (Beweisen). *Es gilt*

$$A = B \textit{ genau dann, wenn } A \subseteq B \textit{ und } B \subseteq A. \tag{1.3.2}$$

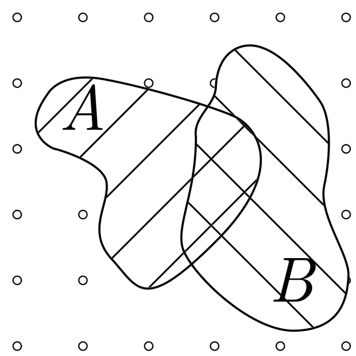
*Beweis.* Für jedes $x$ besteht nur genau eine der folgenden vier Möglichkeiten

*(i)* $x \in A$ und $x \in B$,

*(ii)* $x \in A$ und $x \notin B$,

*(iii)* $x \notin A$ und $x \in B$,

*(iv)* $x \notin A$ und $x \notin B$.




Wir bemerken, dass

$$\begin{array}{rcl} A \subseteq B & \Leftrightarrow & \nexists x, \text{ so dass (ii) gilt,} \\ \text{und } B \subseteq A & \Leftrightarrow & \nexists x, \text{ so dass (iii) gilt.} \end{array}$$

Also gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ genau dann, wenn jedes $x$ (i) oder (iv) erfüllt, was $A = B$ entspricht. □

Wenn wir beweisen möchten, dass zwei Mengen gleich sind, ist es oft am einfachsten (1.3.2) in zwei Schritten zu beweisen. Dies üben wir unten, nachdem wir uns an die Begriffe von Vereinigung und Schnitt erinnert haben.

**Definition 1.3.10: Vereinigung und Schnitt**

Die Vereinigung von $A$ und $B$ ist

$$\{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} =: A \cup B.$$

Der Schnitt von $A$ und $B$ ist

$$\{x : x \in A \text{ und } x \in B\} =: A \cap B.$$

**Bemerkung.** *Im vorigen Beweis entspricht $A \cup B$ den Mengen aus (i), (ii) und (iii). $A \cap B$ entspricht der Menge aus (i).*

**Beispiel 1.3.11.** *Zeigen Sie, dass*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1.3.3}$$

*Lösung.*

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } x \in A \cap (B \cup C). \\
\Rightarrow\quad & x \in A \text{ und } x \in B \cup C \\
\Rightarrow\quad & x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\
\Rightarrow\quad & (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\
\Rightarrow\quad & x \in A \cap B \text{ oder } x \in A \cap C \\
\Rightarrow\quad & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1.3.4}$$

Andersherum gilt

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \\
\Rightarrow\quad & x \in A \cap B \text{ oder } x \in A \cap C \\
\Rightarrow\quad & (x \in A \text{ und } x \in B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \in C) \\
\Rightarrow\quad & x \in A \text{ und } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\
\Rightarrow\quad & x \in A \text{ und } x \in B \cup C \\
\Rightarrow\quad & x \in A \cap (B \cup C).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C). \tag{1.3.5}$$

Aus (1.3.4) und (1.3.5) schließen wir (1.3.3). □

Wenn Sie den Beweis nicht nur gelesen sondern auch verstanden haben, sollten Sie in der Lage sein, folgende Aufgaben zu lösen:

**Übung 1.3.12**

Zeigen Sie

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Zwei weitere Mengenoperationen, die wir verwenden werden, sind das (relative) Komplement und die symmetrische Differenz.

**Definition 1.3.13: Komplement und symmetrische Differenz**

Das (relative) Komplement von $B$ in $A$ ist

$$\{x \in A : x \notin B\} =: A \setminus B.$$

Wenn die Menge $A$ vom Kontext klar ist, schreiben wir das Komplement als

$$B^{\complement} := \{x \in A \colon x \notin B\}.$$

Die symmetrische Differenz ist

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

**Beispiel 1.3.14.** *Für $A = [1, 3]$ ist $A^{\complement} = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. Für $B = [0, 2]$ ist $A \triangle B = [0, 1) \cup (2, 3]$.*

**Übung 1.3.15**

Zeigen Sie, dass

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

**Übung 1.3.16: DeMorgansche Gesetze**

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \\ A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C), \end{aligned}$$

Vereinigung und Schnitt können analog für mehr als zwei (beliebig viele) Mengen definiert werden. Ebenso lassen sich die DeMorganschen Gesetze verallgemeinern.

**Definition 1.3.17: beliebige Vereinigungen und Schnitte**

Sei $\mathcal{A}$ eine Kollektion von Mengen. Die Vereinigung der Mengen in $\mathcal{A}$ ist

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \colon \exists A \in \mathcal{A} \text{ s.d. } x \in A\}.$$

Falls $\mathcal{A}$ nichtleer ist, so definieren wir den Schnitt über alle Mengen in $\mathcal{A}$ als

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x\colon \text{für alle } A \in \mathcal{A} \text{ gilt } x \in A\}.$$

Falls $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$, so schreiben wir auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A,$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A.$$

**Beispiele 1.3.18.** *Es gilt:*

① $\bigcup_{n\geq 1}(-n,n) = \mathbb{R}$,

② $\bigcap_{n\geq 1}(-n,n) = (-1,1)$,

③ $\bigcup_{n\geq 1}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = (-1,1)$,

④ $\bigcap_{n\geq 1}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \{0\}$.

**Übung 1.3.19**

Bestimmen Sie

$$\bigcap_{n\geq 1}(-1,n),$$
$$\bigcup_{n\geq 1}(-1,n),$$
$$\bigcap_{n\geq 1}\left(-1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right).$$

**Definition 1.3.20: kartesische Produkt**

Seien $A, B$ Mengen. Das kartesische Produkt $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare $(x,y)$ mit $x \in A, y \in B$.

**Beispiel 1.3.21.**

$$A := \{1,3\}, \quad B := \{2,4\}, \qquad A \times B = \{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)\}$$

**Beispiel 1.3.22.**

$$A := (1,2), \quad B := (3,4), \qquad A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x \in (1,2),\, y \in (3,4)\}$$

**Sternchenübung 1.3.23: Schnitte von Rechtecken** [1]

Seien $X, Y$ Mengen und $A, A'$ Teilmengen von $X$, $B, B'$ Teilmengen von $Y$. Zeigen Sie die Formel

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Überzeugen Sie sich davon, dass es keine ähnliche Formel für die Vereinigung gibt.

Ab und zu werden wir die Potenzmenge erwähnen möchten.

**Definition 1.3.24: Potenzmenge**

Für eine Menge $A$ ist die Potenzmenge von $A$, bezeichnet mit $\mathcal{P}(A)$, die Menge aller Teilmengen von $A$:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \colon B \text{ ist eine Menge und } B \subseteq A\}.$$

Über die "naive" Mengenlehre im Gegensatz zur axiomatischen Mengenlehre, das Russell-Paradox und sonstige Feinheiten/Schwierigkeiten/... werden wir nicht sprechen.

## 1.4 Abbildungen

Funktionen sind von zentraler Bedeutung in der Analysis. Wie immer wird es wichtig sein

- unsere Intuition und unser grundlegendes Wissen hier anzuwenden, um Verständnis für die Situation aufzubauen, *und*
- zwischen heuristischen Argumenten und rigorosen Aussagen zu unterscheiden.

**Schulverbindung 1.4.1**

Sie kennen viele Funktionen aus der Schule, z.B.,

$$\begin{aligned} x(t) &= h - \frac{g}{2}t^2 \quad h, g \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= x + 1, \\ y(\theta) &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Was ist eine Funktion?

### 1.4.1 Definition und erste Eigenschaften

Es ist oft nützlich, eine Funktion informell als eine "Regel" zu betrachten, die für jedes Element im Definitionsbereich (Definition folgt unten) ein eindeutiges Element im Wertebereich (Definition folgt unten) assoziiert:

$$\text{zu } x \qquad \text{wird} \qquad y = f(x) \text{ eindeutig assoziiert.}$$

Jedoch ist "Regel" kein mathematischer Begriff, so dass wir so "Funktion" immer noch nicht mathematisch definiert haben. Eine Definition erreichen wir mit Hilfe des kartesischen Produkts 1.3.20.

**Definition 1.4.2**

Eine Teilmenge $f \subseteq A \times B$ wird Funktion genannt, wenn gilt:

$$(x,y) \in f \text{ und } (x,y') \in f \qquad \Longrightarrow \qquad y = y'.$$

Das heißt, zu jedem $x \in A$ gibt es höchstens ein $y \in B$ mit $(x,y) \in f$.
Wir definieren den Definitionsbereich $\mathcal{D}(f)$ von $f$ als

$$\mathcal{D}(f) \coloneqq \{x \in A \colon \text{es existiert ein } y \in B \text{ mit } (x,y) \in f\},$$

und das Bild (auch den Wertebereich genannt) $\mathcal{W}(f)$ von $f$ als

$$\mathcal{W}(f) \coloneqq \{y \in B \colon \text{es existiert ein } x \in A \text{ mit } (x,y) \in f\}.$$

Die Menge $B$ wird Zielbereich genannt.
Analog ist für $E \subseteq \mathcal{D}(f)$ das Bild von $E$ (unter $f$) die Menge

$$f(E) = \{y \in B \colon \exists x \in E \text{ s.d. } (x,y) \in f\}.$$

Anstelle von $(x,y) \in f$ benutzen wir die eingängigere Schreibweise

$$f : \mathcal{D}(f) \to B, \qquad x \mapsto f(x)$$

und nennen $y = f(x)$ das Bild von $x$ (unter $f$) bzw. $x$ ein Urbild von $y$.
Für Teilmengen $U \subseteq B$ definieren wir das Urbild $f^{-1}(U)$ von $U$ unter $f$ als

$$f^{-1}(U) \coloneqq \{x \in A \colon (x,y) \in f \text{ und } y \in U\} \qquad \text{oder} \qquad f^{-1}(U) \coloneqq \{x \in \mathcal{D}(f) \colon f(x) \in U\}.$$

Wenn $A$ und $B$ Mengen reeller Zahlen sind, dann heißt $f$ eine reelle Funktion oder eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen.

Wenn nicht anders angegeben, arbeiten wir mit reellwertigen Funktionen einer reellen Variablen, also $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{W}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Oft wird der Definitionsbereich nicht explizit angegeben, z.B.

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad h(x) = \sqrt{x^2 - 4}.$$

**In diesem Fall nehmen wir den Definitionsbereich immer so groß wie möglich**, z.B.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \\
&\mathcal{D}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}, \\
&\mathcal{D}(h) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ oder } x \leq -2\} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty).
\end{aligned}$$

Mit Definition 1.4.2 haben wir "Funktion" rigoros definiert. Nichtsdestotrotz behalten wir unser intuitives Verständnis von $f$ als Regel, die jedem $x \in \mathcal{D}(f)$ ein eindeutiges $y \in \mathcal{W}(f)$ zuordnet. Achtung! Obwohl das Bild von $x \in \mathcal{D}(f)$ eindeutig bestimmt ist, kann ein Wert $y \in \mathcal{W}(f)$ mehr als ein Urbild haben. Beispiel: $f(x) = x^2, y = 4$.

**Notation 1.4.3**

Beachten Sie, dass wir zwischen $f$ (einer Funktion) und $f(x)$ (einem Punkt im Wertebereich) unterscheiden! Außerdem benutzen wir $x$ und $y$ für die Variablen der horizontalen und vertikalen

Achsen – und dies hat grundsätzlich nichts mit $f$ zu tun! Jedoch geben wir Funktionen oft in der abgekürzten Form $f(x) = x^2$ an, die verstanden werden soll als $f : x \mapsto x^2$.

**Bemerkung.** *Manche Bücher verwenden "Wertebereich" für den Zielbereich. Aus diesem Grund werden wir, insbesondere am Anfang, den Namen **Bild** bevorzugen. Beachten Sie, dass das Bild eine echte Teilmenge des Zielbereichs sein kann, also $\mathcal{W}(f) \subsetneq B$. Zum Beispiel ist für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ der Zielbereich $\mathbb{R}$ aber das Bild $[0, \infty)$.*

**Bemerkung.** *Beachten Sie, dass das Urbild immer definiert ist (kann leer sein). (Keine Funktion auf $\mathbb{R}$ sondern auf Mengen.) Es ist zu unterscheiden von der **Umkehrfunktion**, die wir in Definition 1.4.31 definieren werden!!!*

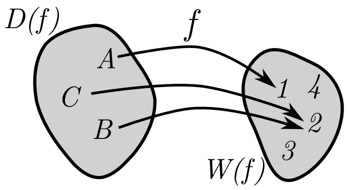



Abbildung 1.1: Illustration einer Funktion. Hierbei gilt beispielsweise $f(A) = 1$, $f(B) = f(C) = 2$, $f^{-1}(\{1\}) = \{A\}$, $f^{-1}(\{2\}) = \{B, C\}$, $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{A, B, C\}$.

**Schulverbindung 1.4.4: Funktionen in der Schule**

In der Schule haben Sie eventuell gesagt, "Eine Zuordnung, bei der jedem $x$-Wert **genau ein** $y$-Wert zugeordnet wird, nennen wir eine Funktion." Vergleichen Sie dies mit unserer Definition.

Jedes Mal, dass Sie einen neuen Begriff kennenlernen, müssen Sie sich Beispiele anschauen, bis Sie sicher sind, dass Sie den neuen Begriff verstanden haben. Als Beispiel machen wir für Sie explizit:

**Übung 1.4.5**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^4 + 2$. Was ist das Urbild von $\{18\}$? Von $\{3\}$? Von $\{2\}$? Von $\{2, 18\}$? Was ist der Definitionsbereich von $f$? Das Bild? Der Zielbereich?

Auch unabdingbar ist die Bereitschaft, sich Beispiele auszudenken. Wieder machen wir den Vorschlag explizit mit:

**Übung 1.4.6**

Geben Sie in jeder Teilaufgabe eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass die gegebene Eigenschaft gilt.

1. Das Bild von $f$ ist $\mathbb{R}$.

2. Das Bild von $f$ ist $(-\infty, -1]$.

3. $f^{-1}(\{1\}) = \{0, 2\}$ und das Bild von $f$ ist $[0, \infty)$.

④ $f^{-1}(\{1\}) = \{0, 2\}$ und das Bild von $f$ ist $(0, \infty)$.

**Lemma 1.4.7: Rechenregeln**

Sei $f : A \longrightarrow B$ gegeben. Für alle $U \subseteq A$, $V \subseteq A$ gilt

1. $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$,
2. $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$,
3. $f(A \setminus U) \supseteq f(A) \setminus f(U)$.

Für alle $U \subseteq B$, $V \subseteq B$ gilt

1. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$,
2. $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$,
3. $f^{-1}(B \setminus U) = A \setminus f^{-1}(U)$.

Den Beweis lassen wir als Übung.

**Bemerkung.** *Selbstverständlich müssen Sie nicht* ***jede Aussage*** *zeigen. Erwartet wird, dass Sie sich jede Aussage anschauen, sich fragen, ob Sie die Aussagen glauben, und* ***einige Aussagen*** *zeigen, um sicher zu sein, dass Sie in der Lage sind, dies zu tun. Wenn Sie* ***keine Aussage*** *zeigen, machen Sie sich "verletzbar".*

Jede oben stehende Aussage könnte eine Klausurabgabe sein. Verständnis kann auch geprüft werden, in dem wir fragen:

**Übung 1.4.8**

Geben Sie ein Beispiel an, um zu zeigen, dass $f(U \cap V)$ eine echte Teilmenge von $f(U) \cap f(V)$ sein kann.

Wenn Sie etwas konkret machen möchten, können Sie ein bisschen Code schreiben. Der ausgezeichneter Mathematiker Percy Deift sagte eines Tages, "Never try to solve a problem until you first put it on a computer. If you can't put it on a computer, it may not be a good problem." Zur Veranschaulichung und Vertiefung von relevanten Inhalten werden wir ab und zu mit Julia über Jupyter-Notebooks arbeiten.

**Einige Hilfsquellen für Julia und Jupyter:**

Als *Launcher* für Jupyter Notebook verwenden wir den *Anaconda Navigator*. Hier finden Sie eine Anleitung für den Download:
`https://docs.anaconda.com/anaconda/navigator/install/`

Wir müssen zunächst *Julia* separat downloaden und installieren:
`https://julialang.org/downloads/`
Wie man Juypter Notebooks mit Julia verbindet, findet man unter
`https://www.geeksforgeeks.org/add-julia-kernel-to-jupyter/`
Eine kurze Einführung in Julia finden Sie unter
`https://www.freecodecamp.org/news/learn-julia-programming-language/`

**Julia-code 1.4.9**

Ein kleines Julia-code zur Bestimmung des Urbildes des Punktes $y$ für eine gegebene Funktion $f$ ist:

```
function urbild(f,y) #gegeben ist die Funktion f und den Punkt y
   F=Set([]) #mit F gleich der leeren Menge initialisieren
   n=length(f) #Laenge des gegebenen Vektors f
     for i=1:n #durch jede Komponente von f gehen
       if f[i]==y #ueberpruefe, ob  f(i)=y; beachte "=="
         F=union(F,Set([i])) # falls f(i)=y, fuege i zu F hinzu
       end
     end
   return F
end
```

Falls Sie sich mit Jupyter und Julia anfreunden wollen, finden Sie ein kleines Notebook "urbild.ipynb" im Moodle-Lernraum.

**Übung 1.4.10**

Was liefert der obige code für $f(n) := -n^2 + 4n - 1$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, wenn

① $y = 3$,

② $y = 2$.

Wenn wir uns in Ana 1 einarbeiten wollen, wollen wir bereit sein, kreativ und hemdsärmelig abstrakte Begriffe konkret zu machen.

**Übung 1.4.11**

Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ an, für die gilt $f^{-1}(\{2\}) = \{1, 5\}$.

Get your hands dirty. Put away your calculator. Write things down. Draw pictures. Argue thoughtfully with each other.

**Beispiel 1.4.12** (Gauß-Klammer). *Die* Gauß-Klammer *(oder auf englisch, "floor function") bezeichnen wir mit*

$$\lfloor x \rfloor$$

*und ist so definiert, so dass zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$ ist. Also ist*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

*Der Definitionsbereich ist (wie gesagt)* $\mathbb{R}$. *Das Bild ist* $\mathbb{Z}$. *Was ist das Urbild von* $\{3\}$*? Antwort:* $[3,4)$.

*Viele Mathematiker:innen verwenden die Notation* $[x]$ *für die Gauß-Klammer, aber wir bevorzugen unsere Notation, weil man somit direkt die Notation*

$$\lceil x \rceil$$

*versteht; diese bezeichnet die Funktion (auf englisch, "ceiling function"), die zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *die kleinste ganze Zahl* $\geq x$ *assoziiert. Was ist der Definitionsbereich? Das Bild? Das Urbild von* $\{3\}$*?*

**Beispiel 1.4.13.** *Wir werden später die Funktion* $x \mapsto x^\alpha$ *für alle* $x > 0$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ***definieren*** *und zeigen, dass mit der Definition gilt*

$$x^0 = 1, \qquad x^\alpha \geq 0, \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \tag{1.4.1}$$

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n-Mal} \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}. \tag{1.4.2}$$

*Allerdings wollen wir jetzt schon mit der Funktion* $x^\alpha$ *arbeiten können, also nehmen wir an, dass es eine Funktion mit den Eigenschaften gibt. Für* $m \in \mathbb{N}$ *schreiben wir auch* $\sqrt[m]{x}$ *für* $x^{1/m}$.

**Schulverbindung 1.4.14**

An der Schule (und sonst im Leben) haben Sie oft genug $\sqrt{2}$ betrachtet. Eventuell haben Sie sogar an der Schule gezeigt, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Aber woher wissen Sie, dass es überhaupt eine reelle Zahl gibt, so dass das Quadrat davon 2 ist? Dies haben Sie wahrscheinlich bisher für offensichtlich gehalten. Aber können Sie auch *zeigen*, dass es eine solche Zahl gibt? Dies werden wir später in Lemma 2.1.27 schaffen, aber nicht ohne Bemühungen. Trivial ist die Existenz nicht.

**Übung 1.4.15: Vorgreifen...**

Was sind der Definitionsbereich und das Bild der folgenden Funktionen?

① $f = \{(x, x^3) : x \in \mathbb{R}\}$ oder $f(x) = x^3$,

② $f = \{(x, x^{1/2}) \colon x \geq 0\}$ oder $f(x) = \sqrt{x}$,

③ $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

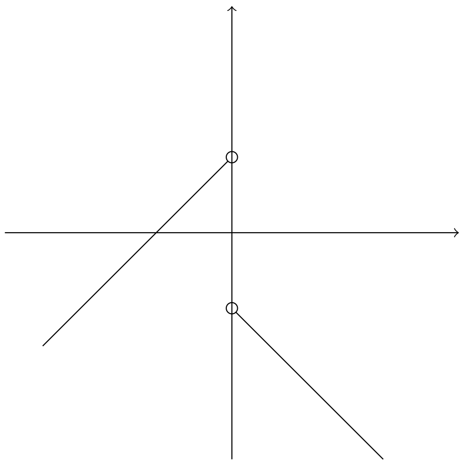
④ $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 5 & x = 0 \\ x^2 & x > 0. \end{cases}$

**Schulverbindung 1.4.16**

Manchmal wird der Definitionsbereich ignoriert oder für eine unnötige "Floskel" gehalten, aber der Definitionsbereich ist wichtig! Später in Abschnitt 5.3 werden wir beispielsweise festlegen wollen, ob $x \mapsto \frac{1}{x}$ stetig ist. Die Antwort ist ja, und dafür muss man den Definitionbereich in Betracht ziehen. (Übrigens gibt es den Begriff "Definitionslücke" in der Analysis nicht.)

Es ist oft nützlich den Graphen einer Funktion anzuschauen.

**Beispiel 1.4.17.** $f(x) = \begin{cases} 1+x & x<0 \\ -1-x & x>0. \end{cases}$



Vom Graphen erkennt man

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad \mathcal{W}(f) = (-\infty, 1).$$

(Achtung! Hier haben wir den Graphen benutzt um zu erkennen, dass $\mathcal{W}(f) = (-\infty, 1)$. Wenn nach einem Beweis oder einer Begründung gefragt wird, reicht es nicht aus, ein Bild zu malen. Trotzdem hilft das Bild uns zu wissen, was genau wir zeigen wollen!)

**Beispiel 1.4.18.** *Finden Sie den Definitionsbereich von $f(x) := \sqrt{-x^3+2x-1}$.*
*Die Nullstellen von $p(x) := -x^3+2x-1$ sind*

$$x_1 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

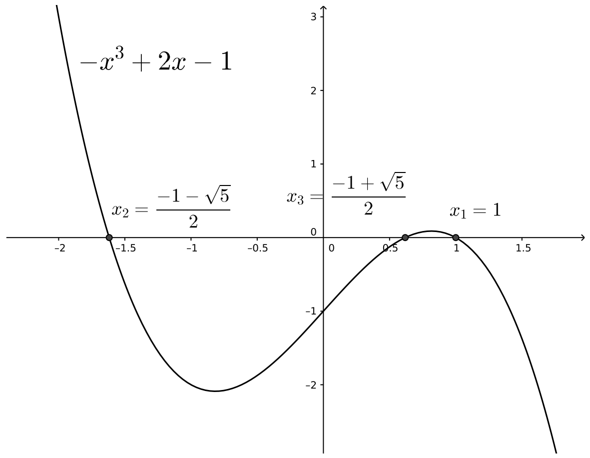
*Wir schreiben das Polynom in faktorisierter Form*

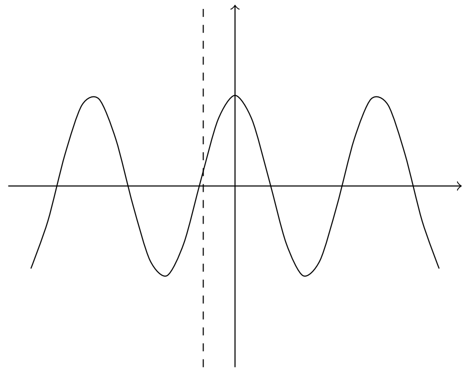
$$-x^3+2x-1 = -(x-1)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

*um abzulesen, wo das Polynom positiv ist. Da der Definitionsbereich der Wurzel $[0,\infty)$ ist, ist der Definitionsbereich von $f$ genau die Menge, wo $p$ nichtnegativ ist:*

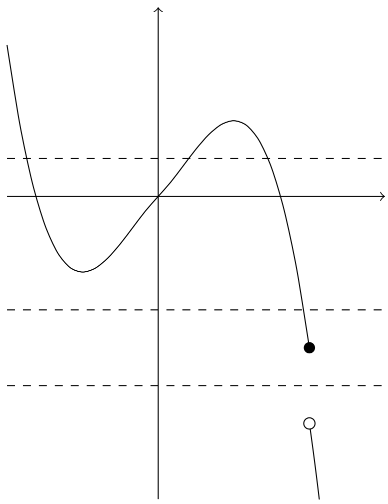
$$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right].$$

**Bemerkung.** *(1) Keine vertikale Linie berührt den Graph einer Funktion mehr als einmal.*



*(2) Eine horizontale Linie kann den Graph einer Funktion mehr als einmal berühren.*



Was bedeutet es, wenn *eine waagerechte Linie $y = b$ den Graph einer Funktion $f$ genau einmal* berührt? Dass $b$ nur ein Urbild hat, d. h., dass es nur ein $x \in \mathcal{D}(f)$ gibt, so dass $f(x) = b$.
Was bedeutet es, wenn *jede waagerechte Linie den Graph einer Funktion $f$ nicht mehr als einmal berührt*? Dass für jeden Wert $y \in \mathcal{W}(f)$ es nur ein $x \in \mathcal{D}(f)$ gibt, so dass $f(x) = y$.
Was bedeutet es, wenn *jede waagerechte Linie den Graph einer Funktion $f$ mindestens einmal berührt*? Dass der Wertebereich der Funktion ganz $\mathbb{R}$ ist.

Erinnerung: Graphen helfen uns enorm, die Eigenschaften einer Funktion zu bemerken. Wenn allerdings nach einem Beweis gefragt wird, müssen wir analytisch argumentieren.

**Beispiel 1.4.19.** *Finden Sie den Wertebereich $\mathcal{W}(f)$ von $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$.*

*Lösung.* [1]Der Wertebereich ist $(0, \infty)$. Dies begründen wir wie folgt. Zunächst bemerken wir, dass

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4\}.$$

Für alle $x \in \mathcal{D}(f)$ ist $(x-4)^2 > 0$, und damit auch

$$f(x) = \frac{1}{(x-4)^2} > 0,$$

so dass $\mathcal{W}(f) \subseteq (0, \infty)$. Andererseits können wir für alle

$$y_0 \in (0, \infty)$$

setzen:

$$x_0 := \frac{1}{\sqrt{y_0}} + 4.$$

Dann ist $x_0 > 4$, so dass $x \in \mathcal{D}(f)$, und es gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{(x_0-4)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y_0}}\right)^2} = y_0.$$

Also gilt $\mathcal{W}(f) \supseteq (0, \infty)$. (Man hätte auch

$$\tilde{x}_0 = -\frac{1}{\sqrt{y_0}} + 4,$$

das Urbild auf dem erstem Ast von $f$, wählen können.) $\square$

[1] Wir erinnern uns an die Definition 1.3.8, wo wir gesehen haben, wie man die Gleichheit zweier Mengen zeigt.

**Definition 1.4.20: injektiv**

Eine Funktion $f$ heißt injektiv (oder eins zu eins), wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Das heißt, bei Gleichheit der Bilder müssen die Urbilder auch gleich sein.

Ein beliebtes Beispiel einer nicht injektiven Funktion ist $f(x) = x^2$.

Mit Injektivität verbunden ist die Eigenschaft der Surjektivität.

**Definition 1.4.21: surjektiv, bijektiv**

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt surjektiv (von X nach Y), wenn gilt:

$$\text{für jedes } y \in Y \text{ existiert } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

Eine reelle Funktion $f$ heißt surjektiv auf $A$, wenn gilt:

$$\text{für jedes } y \in A \text{ existiert } x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

Wenn $f$ sowohl surjektiv als auch injektiv ist, dann sagen wir, dass $f$ bijektiv ist.

Man merkt: $f : X \to Y$ ist surjektiv genau dann, wenn $\mathcal{W}(f) = Y$. Jede Funktion ist surjektiv auf ihrem Bild.

**Beispiel 1.4.22.** *Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht surjektiv auf $\mathbb{R}$, jedoch ist sie surjektiv auf $[0, \infty)$.*

**Beispiel 1.4.23.** *Ist $f(x) = -x^4$ surjektiv?*
*Nein, weil wir implizit $f$ als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ verstehen, und $f$ nicht auf $\mathbb{R}$ surjektiv ist.*

1. *Ist $f$ surjektiv auf $(-\infty, 0]$? Ja.*
2. *Ist $f$ surjektiv auf $(-\infty, 0)$? Ja.*
3. *Ist $f$ surjektiv auf $(-\infty, 1)$? Nein.*

**Übung 1.4.24**

Ist $f(x) = x^2 - 1$ surjektiv? Surjektiv auf $(0, \infty)$? Auf $(-1, \infty)$? Auf $[-1, \infty)$?

Eine kurze Zusammenfassung ist: Eine Funktion $f : X \to Y$ ist

(1) injektiv, wenn kein $y \in Y$ mehr als ein Urbild in $X$ hat (bspw. $x^2$ auf $(0, \infty)$),

(2) surjektiv, wenn jedes $y \in Y$ mindestens ein Urbild in $X$ hat (bspw. $x^3$ oder $x^3 - x$), und

(3) bijektiv, wenn jedes $y \in Y$ genau ein Urbild in $X$ hat (bspw. $x$ oder $x^3$).

**Übung 1.4.25**

Geben Sie das größtmögliche Intervall $I$ an, so dass $0 \in I$ und $f(x) = x^2 - x$ injektiv auf $I$ ist. Was ist das Bild von $f$ auf $I$?

Wir betrachten jetzt ein paar andere mögliche Eigenschaften einer Funktion.

**Definition 1.4.26**

Eine reelle Funktion $f$ heißt gerade, wenn gilt

(1) für jedes $x \in \mathcal{D}(f)$ ist auch $-x \in \mathcal{D}(f)$, und

(2) für jedes $x \in \mathcal{D}(f)$ ist $f(x) = f(-x)$.

Analog heißt die Funktion heißt ungerade, wenn gilt

(1) für jedes $x \in \mathcal{D}(f)$ ist auch $-x \in \mathcal{D}(f)$, und

(2) für jedes $x \in \mathcal{D}(f)$ ist $f(x) = -f(-x)$.

**Beispiel 1.4.27.** *Die Funktion $f(x) = x^2$ ist gerade. Die Funktion $f(x) = x$ ist ungerade. Allgemein ist $f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$, gerade und $f(x) = x^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$, ungerade.*

**Beispiel 1.4.28.** $\sin(x)$ *ist ungerade.* $\cos(x)$ *ist gerade.*

**Übung 1.4.29**

Zeigen Sie: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann in der Form $f = g + h$ geschrieben werden, wobei $g$ gerade und $h$ ungerade ist.

**Übung 1.4.30**

Geben Sie an, ob folgende Funktionen gerade, ungerade oder keins von beiden sind: $\tan(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\exp(x^2)$.

Damit wir in Kapitel 3 über den Logarithmus sprechen können, führen wir schließlich ein:

**Definition 1.4.31**

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Gibt es eine Funktion $g : Y \to X$ mit

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in X \tag{1.4.3}$$
$$\text{und} \quad f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in Y, \tag{1.4.4}$$

dann nennen wir $g$ die Umkehrfunktion von $f$. Wir schreiben

$$g(y) = f^{-1}(y)$$

und sagen, dass $f$ eine Umkehrfunktion besitzt, oder, dass $f$ invertierbar ist.

**Bemerkung.** *Beachten Sie, dass dasselbe Symbol $f^{-1}$ auch für das Urbild einer Menge benutzt wird; siehe Definition 1.4.2. Ein Wert $f^{-1}(y)$ der Umkehrfunktion ist auch von*

$$(f(y))^{-1} = \frac{1}{f(y)}$$

*zu unterscheiden! Die Unterschiede in der Notation sind subtil. Auf den Kontext achten!!!*

**Beispiel 1.4.32.** *Sei $f : (-\infty, \infty) \to [0, \infty)$ durch $f(x) = x^2$ definiert. Diese Funktion ist nicht invertierbar aber*

$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}, \qquad (f(4))^{-1} = \frac{1}{16}.$$

*Sei $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ durch $f(x) = x^2$ definiert. Diese Funktion ist invertierbar und*

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}.$$

*Was ist der Definitionsbereich von $f^{-1}$? Das Bild?*

Es gibt viele Eigenschaften von Abbildungen, die wir untersuchen werden! Wenn wir in Abschnitt 5.1 zurück zu Funktionen kommen, werden wir uns Fragen stellen wie

- Ist die Funktion monoton?
- Ist die Funktion beschränkt?
- Welche Funktionen sind invertierbar?

## 1.5 Exkurs: Relationen (nicht klausurrelevant)

Verwandt mit Abbildungen (und noch grundlegender) sind *Relationen*. Aus Zeitgründen verzichten wir auf einer Diskussion von Relationen in der Vorlesung, aber für die, die sich dafür interessieren:

**Definition 1.5.1: Relation**

Seien $A, B$ Mengen. Eine Relation ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.

**Beispiel 1.5.2.** *Also ist eine Funktion von $X$ in $Y$ eine Relation, und zwar eine Relation der Art, dass es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$.*

**Übung 1.5.3**

Sei $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{a, b, c\}$. Sei $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a)\}$. Dann ist $R$ eine Relation aber keine Funktion. Finden Sie $S \subseteq R$, so dass $S$ eine Funktion ist. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Von besonderem Interesse sind Relationen mit den folgenden Eigenschaften.

**Definition 1.5.4**

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ kann folgende Eigenschaften besitzen. Gilt $(a, b) \in R$, dann schreiben wir $a \sim b$.

1. $a \sim a$ (Reflexivität)
2. $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$ (Transitivität)
3. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (dann heißt die Relation symmetrisch)
   ODER wenn dies nicht der Fall ist aber $(a \sim b) \wedge (b \sim a) \Rightarrow a = b$ (dann heißt die Relation antisymmetrisch).

Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation. Eine Ordnung ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation.

Anstatt $(a, b) \in A \times A$ schreiben wir meist $a, b \in A$.

**Beispiel 1.5.5.** *So ist Gleichheit von reellen Zahlen eine Äquivalenz.*

**Beispiel 1.5.6.** *Sei für $a, b \in \mathbb{N}$ die Relation $a \geq b$ definiert durch:*

$$a \geq b \quad := \quad (a = b) \;\vee\; (\exists c \in \mathbb{N} \; s.d. \; a = b + c).$$

*Mit dieser Relation ist $\mathbb{N}$ "vollständig geordnet". Das heißt, für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a \geq b$ oder $b \geq a$.*

**Übung 1.5.7**

Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $R \coloneqq \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Bestätigen Sie, dass $R$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

**Beispiel 1.5.8.** *Sei $A = \{1, 2, 3\}$ und $R \coloneqq \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. Dann ist $R$ nicht reflexiv ($(1, 1) \notin R$) und nicht symmetrisch ($(1, 2) \in R$ aber $(2, 1) \notin R$). $R$ ist allerdings transitiv: Das einzige Paar $(x, y), (y, z)$, für das $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ ist $(1, 2)$, $(2, 3)$ und wir bestätigen, dass tatsächlich $(1, 3) \in R$, wie notwendig für Transitivität.*

## 1.6 Mächtigkeit und andere Beweistechniken

Wie können wir über die "Größe" einer Menge sprechen? Für eine endliche Menge können wir einfach die Anzahl von Elementen als Größe nehmen. Als Beispiel sagen wir für die Menge

$$A = \{5, 13, 17, 53\}$$

dass $A$ die Größe von 4 hat, bezeichnet durch

$$|A| = 4.$$

Für Mengen mit unendlich vielen Elementen ist es komplizierter. Es gibt "viel mehr" reelle als rationale Zahlen. Wir wollen den Begriff der Größe verallgemeinern in einer Art, die konsistent mit dem Begriff für endliche Mengen ist. Um die Idee zu motivieren, können wir das obige Beispiel ausführlicher machen, indem wir erklären, dass 4 die Größe ist, weil wir anordnen können:

$$5 =: a_1, \quad 13 =: a_2, \quad 17 =: a_3, \quad 53 =: a_4.$$

Wir können die Elemente aufzählen, in dem wir das Element 5 "das Erste" nennen, das Element 13 "das Zweite", und so weiter.

**Definition 1.6.1: endliche Mengen**

Wenn eine Menge $A$ nur $n \in \mathbb{N}$ Elemente besitzt, so nennen wir sie <u>endlich</u> und die <u>Mächtigkeit</u> ist $n$, bezeichnet mit $|A| = n$.

**Schubfach-Prinzip von Dirichlet (erste Version)** Eine Form des sogenannten Schubfach-Prinzips besagt: Wenn man $n + 1$ Kugeln in $n$ Schubladen (Schubfächer) sortiert, dann hat eine Schublade mehr als eine Kugel. Mathematisch präziser: Wenn $g : A \to B$ und $|A| = n + 1$, $|B| = n$, dann existiert ein $b \in B$ mit $|g^{-1}(\{b\})| \geq 2$.

**Schulverbindung 1.6.2**

Wir haben rationale Zahlen in (1.3.1) definiert. Sie haben schon seit der 9. Klasse mit irrationalen Zahlen gearbeitet und höchstwahrscheinlich behauptet:

> Eine rationale Zahl ist eine Zahl, die eine abbrechende oder periodische Dezimalzahldarstellung besitzt.

Sei

$$\tilde{\mathbb{Q}} \coloneqq \{x \in (0, 1) \colon x \text{ besitzt eine abbrechende oder periodische Dezimalzahldarstellung}\}.$$

Verwenden Sie das Schubfach-Prinzip und den Algorithmus der schriftlichen Division um zu zeigen, dass $\Big(\mathbb{Q} \cap (0,1)\Big) \subseteq \tilde{\mathbb{Q}}$.

Für die Zukunft bemerken wir, dass man das Prinzip auch in einer anderen Form ausdrucken kann.

**Schubfach-Prinzip von Dirichlet (zweite Version)** Das sogenannte Schubfach-Prinzip besagt anschaulich: wenn ich unendlich viele Kugeln in endlich viele Schubladen einsortiere, dann habe ich einer Schublade unendlich viele Kugeln. Mathematisch präziser: Ist eine Funktion $g : \mathbb{N} \to A$ gegeben mit $A$ endlich, so gibt es ein $a \in A$ mit unendlichem $g^{-1}(\{a\})$.

**Übung 1.6.3**

Zeigen Sie das Prinzip.

Jetzt kehren wir zurück zur Frage der "Größe" von Mengen mit unendlich vielen Elementen. Wir haben das Gefühl, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ "größer" ist als $\mathbb{Q}$. Können wir dies mathematisch formulieren? Dies scheint eine nichttriviale Frage zu sein. Also treten wir zurück und machen eins nach dem anderen.

Wir denken zurück an endliche Mengen. Können wir die Elemente einer unendlichen Menge immer noch wie für endliche Mengen "aufzählen"? Mit $\mathbb{N}$ kommen wir mit einer naiven Aufzählung klar:

$$a_1 := 1, \quad a_2 := 2, \quad a_3 := 3, \quad \ldots a_n := n, \ldots$$

Und wie ist es mit der Größe? Auf dem ersten Blick scheint $\mathbb{Z}$ "doppelt so gross" wie $\mathbb{N}$ zu sein, aber auch $\mathbb{Z}$ lässt sich aufzählen, beispielsweise mit

$$a_1 := 0, \quad a_2 := 1, \quad a_3 := -1, \quad a_4 := 2, \quad a_5 := -2, usw.$$

Dies führt zu einer Definition.

**Definition 1.6.4: abzählbar, uberabzählbar, höchstens abzählbar**

Wir nennen eine Menge $A$ abzählbar unendlich oder abzählbar, wenn es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $A$ gibt. Wenn $A$ unendlich viele Elemente enthält und nicht abzählbar ist, dann nennen wir $A$ überabzählbar. Wenn $A$ endlich oder abzählbar ist, dann nennen wir $A$ höchstens abzählbar.

**Beispiel 1.6.5.** *Man kann zeigen, dass die folgenden Mengen abzählbar sind:*

- $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$,
- $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,
- $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$,
- $\mathbb{Q}$,
- $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

**Bemerkung.** *Beachte, dass es möglich ist, dass für zwei Mengen $A$, $B$ gilt*

$$A \subsetneq B \qquad \text{aber} \qquad A \text{ und } B \text{ haben die gleiche Mächtigkeit.}$$

*Zum Beispiel haben die natürlichen Zahlen und die geraden natürlichen Zahlen die gleiche Mächtigkeit. Wie wir in Theorem 1.6.7 bestätigen werden, haben $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ auch die gleiche Mächtigkeit.*

**Theorem 1.6.6.** *Es seien $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ abzählbare Mengen. Dann ist*

$$M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

*abzählbar.*

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & & & & \end{array}$$

Abbildung 1.2: Veranschaulichung des Cantorschen Diagonalverfahrens für $\mathbb{Q}$ abzählbar

*Beweis.* Wir führen das **Cantorsches Diagonalverfahren** ein. Ordne jede Menge $A_n$ in der Form $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots$ und betrachte

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots,$$

wobei das Bild 1.2 deutlich macht, weshalb wir es ein Diagonalverfahren nennen. Wir zählen die Elemente auf, wobei wir ein Element überspringen, falls es schon aufgetaucht ist. Somit ist $M$ höchstens abzählbar. Wegen $A_1 \subseteq M$ ist $M$ unendlich, also ist $M$ abzählbar. □

**Theorem 1.6.7.** $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

*Beweis.* Wir verwenden das Cantorsche Diagonalverfahren mit den Mengen

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}, \\ A_2 &= \left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}, \\ A_3 &= \left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots\right\} \\ &\vdots \\ A_n &= \left\{0, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wieder zählen wir wiederholte Elemente nicht. So erhalten wir eine Aufzählung der Elemente in $\mathbb{Q}$. Zusätlich ist $\mathbb{Q}$ unendlich, denn sie enthält die unendliche Menge $A_1 = \mathbb{Z}$. Also ist $\mathbb{Q}$

abzählbar. □

**Übung 1.6.8**

$\mathbb{Q} \cap (0,1)$ ist abzählbar.

Beachten Sie, dass *Beschränktheit* und *Mächtigkeit* sehr verschiedene Begriffe sind. $\mathbb{Q}$ ist unbeschränkt aber abzählbar. Das Interval $(0,1)$ ist beschränkt aber

**Theorem 1.6.9.** *Das Intervall $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

**Beweisidee:** Wir nehmen an, dass es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass das Bild $(0,1)$ ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat $f(n)$ eine Dezimalzahldarstellung. Wir wollen alle Nachkommastellen ändern und eine neue Dezimalzahl erstellen, die von allen $f(n)$ unterschiedlich ist. Wir müssen nur Dezimalzahlen vermeiden, die in 9-periodisch terminieren (weil beispielsweise $0,49999\ldots = 0,5$).

$$
\begin{array}{llllll}
f(1) & = 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \; \ldots \\
f(2) & = 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \; \ldots \\
f(3) & = 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \; \ldots \\
f(4) & = 0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \; \ldots \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

Abbildung 1.3: Veranschaulichung des Cantorschen Diagonalverfahrens für $(0,1)$ überabzählbar

*Beweis.* Angenommen es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to (0,1)$, so dass für jedes $y \in (0,1)$ gilt $f(n) = y$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Dezimalzahldarstellungen $f(1), f(2), \ldots$ (siehe Abbildung 1.3) (wobei wir eine abbrechende Darstellung, falls möglich, nehmen). Keine Darstellung terminiert mit 9-periodisch. Wir setzen $x = 0, b_1\, b_2 \ldots$, wobei

$$
b_k := \begin{cases} a_{kk} + 1 & a_{kk} \leq 5 \\ a_{kk} - 1 & a_{kk} > 5. \end{cases}
$$

Somit terminiert $x$ auch nicht in 9'n, es gilt $x \in (0,1)$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
x \neq f(n), \qquad \text{denn} \qquad a_{nn} - b_n = \pm 1.
$$

Dies widerlegt, dass $\mathrm{Bild}(f) = (0,1)$. □

Wir geben ohne Beweis mit:

**Theorem 1.6.10.** *Wenn $A \subseteq B$ und $B$ ist höchstens abzählbar, dann ist $A$ höchstens abzählbar. Wenn $A \subseteq B$ und $A$ ist überabzählbar, dann ist $B$ überabzählbar.*

### Übung 1.6.11: "Sternchen"

Schreiben Sie einen konstruktiven Beweis der ersten Aussage. Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Widerspruch.

### Übung 1.6.12

Vergleichen Sie die Mächtigkeit von $[0,1]$ und $\mathbb{Q}$.

## 1.7 Kleiner Exkurs zu Ungleichungen

Es kann sein, dass Sie in der Vergangenheit öfter mit Gleichungen gearbeitet haben, als mit Ungleichungen. Aber elementare Ungleichungen sind für uns ein wichtiger Bestandteil des Hintergrunds. Also schauen wir uns hier kurz ein paar Beispiele an.

**Beispiel 1.7.1.** *Aufgabe: Listen Sie alle Elemente in der Menge*

$$\{n \in \mathbb{N} \colon n^2 - n \leq 2\}$$

*auf.*

*Eventuell sieht das Problem familärer aus, wenn wir uns fragen, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung*

$$x^2 - x \leq 2$$

*gilt. Wir formen dies um in*

$$x^2 - x - 2 \leq 0.$$

*Für solche Gleichungen wollen wir die Nullstellen bestimmen der Funktion auf der linken Seite. Hier lesen wir ab*

$$(x-2)(x+1) = 0 \qquad g.d.w \qquad x = 2 \text{ oder } x = -1.$$

*Da das Vorzeichen der quadratischen Funktion $f(x) := (x-2)(x+1)$ nur dort ändern kann, können wir das Vorzeichen auf $(-\infty, -1)$ und $(-1, 2)$ und $(2, \infty)$ mit einem Testpunkt bestimmen. Wir erhalten:*

$$\begin{aligned} f(-10) &= (-12)(-9) > 0 && \Rightarrow f(x) > 0 \text{ auf } (-\infty, -1), \\ f(0) &= -2(1) < 0 && \Rightarrow f(x) < 0 \text{ auf } (-1, 2), \\ f(5) &= (3)(6) > 0 && \Rightarrow f(x) < 0 \text{ auf } (2, \infty). \end{aligned}$$

*Wir kehren zurück zur Ausgangsfrage und wollen* natürliche Zahlen *bestimmen, so dass $f(n) \leq 0$, also ist die Antwort:*

$$\mathbb{N} \cap [-1, 2] = \{1, 2\}.$$

Selbstverständlich müssen die Nullstellen keine ganzen Zahlen sein.

**Beispiel 1.7.2.** *Aufgabe: Bringen Sie die Menge*

$$\{n \in \mathbb{N} \colon n^2 + 1 \geq 3n\}$$

*in eine aufzählende Schreibweise.*

*Wenn wir analog fortfahren, landen wir bei der Gleichung*

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

*mit Nullstellen*

$$x_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

*Wenn Sie solche Ausdrücke immer nur mit dem Taschenrechner behandelt haben, müssen Sie jetzt anfangen, darüber ohne Taschenrechner nachdenken zu können. Aus $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ folgern wir*

$$x_- < \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

*Aus* $\sqrt{5} \in (2,3)$ *folgern wir*

$$\frac{5}{2} = \frac{3}{2} + 1 < x_+ < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3.$$

*Wieder testen wir, um festzulegen:*

$$f(x) \begin{cases} < 0 & x \in (x_-, x_+) \\ > 0 & x < x_- \text{ oder } x > x_+ \end{cases}.$$

*Wir suchen* $n \in \mathbb{N}$ *s.d.* $f(n) > 0$. *Es gibt keine natürliche Zahlen kleiner gleich* $x_-$. *Also sind die einzigen Elemente der Menge natürliche Zahlen größer gleich* $x_+$, *also*

$$\{3, 4, 5, \ldots\}.$$

**Übung 1.7.3**

Bringen Sie jede der folgenden Mengen in eine aufzählende Schreibweise:

1. $\{n \in \mathbb{N} \colon n^2 - 10 < -4n\}$
2. $\{z \in \mathbb{Z} \colon z^2 - 10 < -4z\}$
3. $\{n \in \mathbb{N} \colon \exp(n) < 2n + 2 - n^2\}$.

## 1.8 Weitere Aufgaben

### 1.8.1 Standardaufgaben

① Zeigen Sie, dass $\neg(p \wedge q)$ logisch äquivalent zu $(\neg p) \vee (\neg q)$ ist.

② Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln um Tautologien handelt. (Eine Tautologie ist ein Aussage, die für jeden Wahrheitswert der auftretenden Variablen stets wahr ist).

(a) $p \vee (\neg p)$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten)
(b) $\neg(p \wedge (\neg p))$ (Satz vom Widerspruch)
(c) $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$ (Satz von der doppelten Verneinung)
(d) $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ und $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$ (Sätze von De Morgan)
(e) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ (Abtrennungsregel)
(f) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow (\neg p)$ (Widerlegungsregel)
(g) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (Kettenschlussregel)

③ Zeigen Sie das (aussagenlogische) Distributivgesetz, also für Aussagen $p$, $q$ und $r$:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

④ (a) Bestimmen Sie, welche der folgenden Sätze die Verneinung der Aussage

**„Es ist nicht alles Gold, was glänzt.“**

darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung logisch nachvollziehbar!

i. Einiges Gold glänzt nicht.
ii. Einiges, was glänzt, ist nicht Gold.
iii. Alles, was glänzt, ist Gold.
iv. Alles Gold glänzt nicht.

(b) Es gibt drei Verdächtige für den Diebstahl eines Lutschers im Süßwarenladen: $a$, $b$ und $c$. Genau einer von ihnen hat den Lutscher gestohlen. Beim Verhör sagen sie Folgendes aus:

- Aussage von $a$: Ich war es nicht. Außerdem war ich gar nicht am Tatort.
- Aussage von $b$: Ich war es nicht. Außer mir war auch noch $c$ am Tatort.
- Aussage von $c$: Ich war es nicht. Der Dieb ist $a$. $b$ war nicht am Tatort.

Finden Sie unter der Annahme, dass die Unschuldigen die Wahrheit gesagt haben, den Dieb!

5 Schreiben Sie in Symbolschreibweise:

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n$ gibt es eine reelle Zahl $x$, die größer als $n$ ist.
(b) Das Quadrat aller reellen Zahlen, die zwischen $-1$ und 1 liegen, ist kleiner als 1.
(c) Es gibt eine reelle Zahl $x$, die kleiner als alle natürlichen Zahlen $n$ ist.
(d) Für alle positiven reellen Zahlen $C$ gibt es eine natürliche Zahl $n_0$ mit folgender Eigenschaft: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt $n^2 > C$.
(e) Schreiben Sie die logische Negation der Aussagen aus a) bis d) auf.

6 (a) Schreiben Sie die folgende Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen:

i. $\displaystyle\sum_{k=-4}^{2} b_k$
ii. $\displaystyle\sum_{k=-8}^{-3} c_{-k}$
iii. $\displaystyle\prod_{\ell=1}^{4} \ell^j$
iv. $\displaystyle\sum_{j=2}^{4} \prod_{k=1}^{3} (jk+1)$

(b) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:
i. $x^9 + 3x^{14} + 9x^{19} + 27x^{24} + 81x^{29} + 243x^{34} + 729x^{39}$
ii. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36}$
iii. $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 2a_1^2 + 6a_2^2 + 10a_3^2 + 4a_1^3 + 12a_2^3 + 20a_3^3 + 8a_1^4 + 24a_2^4 + 40a_3^4$

7 Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+2)}{(k+1)^3} = \frac{n+2}{2(n+1)^2}$,
(b) $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

8 Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

.

9. Zeigen Sie: für $a \geq 3$ gilt $a^n \geq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

10. Zeigen Sie: $n! > 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

11. (Vollständige Induktion mit offener rechter Seite) Finden Sie geschlossene Ausdrücke für die folgenden Summen und beweisen Sie Ihre Vermutungen mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

    (a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \quad = \quad ?$

    (b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = -1 + 4 - 9 + \ldots \pm n^2 \quad = \quad ?$

12. Bringen Sie die folgenden Mengen in eine aufzählende Schreibweise, d.h. schreiben Sie die Mengen als $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Wir lassen $M = \emptyset$ als mögliche Lösung zu.

    (a) $M_1 = \{x \in \mathbb{N} : 42 - \sqrt{42} \leq x \leq 42\}$,
    (b) $M_2 = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 42\}$,
    (c) $M_3 = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 42\}$,
    (d) $M_4 = M_3 \cap \{x \in \mathbb{N} : x \text{ gerade}\}$,
    (e) $M_5 = \{x \in \mathbb{N} : 6x \leq x + 42\}$,
    (f) $M_6 = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 42 \wedge (x = 5k \text{ für ein } k \in \mathbb{N})\}$,
    (g) $M_7 = \{1, 1, 34, 17, 42\} \cap \{10, 42, 5, 2\}$,
    (h) $M_8 = \{42\} \cup M_2$.

13. Bringen Sie die folgende Menge in eine aufzählende Schreibweise, d.h. schreiben Sie die Menge als $M = \{N_1, \ldots, N_n\}$. Wir lassen $M = \emptyset$ als mögliche Lösung zu.

$$M = \{m \in \mathbb{N} : \{N \in \mathbb{N} : N^2 + 2N = m\} = \{8\}\}.$$

14. Schreiben Sie die folgenden Mengen als $M = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$, wobei $p(n)$ eine Aussage über $n \in \mathbb{N}$ ist.

    (a) $M_1 = \{42, 84, 126\}$,
    (b) $M_2 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42\}$,
    (c) $M_3 = \{1, 2, 3\}$.

15. (a) Seien $A, B, U$ Mengen mit $A, B \subseteq U$. Zeigen Sie, dass $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
    (b) Seien $A, B$ Mengen. Was ist der Unterschied zwischen $A \cap B^{\complement}$ und $A \setminus B$?

16. (a) Seien $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ und $C = \{1, 2, 3, 4\}$.
    Man bilde die folgenden Mengen:
    i. $A \cup B$,
    ii. $A \cap B$,
    iii. $(A \cup B) \cap C$,
    iv. $(A \cap B) \cup C$,
    v. $C \setminus B$,
    vi. $A \setminus B$.

    (b) Gegeben seien die Funktionen $f_i : D_i \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ i = 1, 2$.

i. Sei $D_1 = \mathbb{N}$. Ist $f_1$ surjektiv? Injektiv? Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}([-\pi/2, 5])$ und schreiben Sie $f_1$ als Menge (siehe Definition 1.4.2).

ii. Sei $D_2 = [-1, 1]$. Ist $f_2$ surjektiv? Injektiv? Bestimmen Sie $f([-1, 1])$, $f^{-1}(\mathbb{Z})$.

iii. Vergrößern Sie $D_2$, sodass $f_2$ surjektiv auf $[0, \infty)$ wird.

(c) Welche der folgenden reellen Funktionen sind injektiv? Untersuchen Sie auch, was passiert, wenn man den Definitionsbereich verkleinert oder – falls möglich – vergrößert.

i. $f\colon \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{2 - 3\,|x|}$,

ii. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := 3x^5 - 7$,

iii. $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

17 Es seien $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y := \{1, 2\}$. Wieviele Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ gibt es? Wieviele sind injektiv? Wieviele sind surjektiv?

18 Es sei $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \frac{1}{x}$ gegeben. Finden Sie eine Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von $f$, die bijektiv ist.

19 Bestimmen Sie ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Falls die Funktion nicht bijektiv ist, finden Sie eine Teilmenge $E$ des Definitionsbereichs, so dass die Einschränkung $f_{|E} : E \to f(E)$ bijektiv ist.

(a) $f_1 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$.

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \to \sin(x)$.

(f) $f_6 : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $n \mapsto \{n\}$.

20 Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung für $X, Y$ Mengen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) $f^{-1}(\{y\})$ besitzt höchstens ein Element für alle $y \in Y$.

(ii) Es gilt

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

für alle $x_1, x_2 \in X$.

21 Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(a) Es sei $g \circ f$ surjektiv. Folgt daraus, dass $f$ surjektiv ist (oder dass $g$ surjektiv ist)?

(b) Es sei jetzt $g \circ f$ injektiv. Folgt daraus, dass $f$ injektiv ist (oder dass $g$ injektiv ist)?

22 Seien $A, B, C, E, F$ nichtleere Mengen mit $C \subseteq E$, $A, B \subseteq F$ und $f\colon E \to F$ eine Funktion. Es bezeichne $f^{-1}(A)$ wieder das Urbild einer Menge $A$ unter $f$. Zeigen Sie:

(a) $A \subseteq B \implies f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Gilt die Rückrichtung?

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

23 Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = 2n.$$

Bestimmen Sie für $m \in \mathbb{N}$ das Urbild $f^{-1}(\{1, \ldots, m\})$ und die Anzahl der Urbildelemente!

24 (a) Es seien die folgenden vier Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ gegeben:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{1, 2, 3\}, \\ M_2 &= \{2n \,:\, n \in \mathbb{N}\}, \\ M_3 &= \{p \in \mathbb{N} \,:\, p \text{ ist eine Primzahl}\}, \\ M_4 &= \{1\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie

i. $M_1 \cup M_2,\ M_1 \cup M_4,\ M_1 \cap M_2,\ M_1 \cap M_3,\ M_2 \cap M_3$ und $M_3 \cap M_4$.

ii. $\mathbb{N} \setminus M_2,\ M_2 \setminus M_1,\ M_3 \setminus M_1$ und $M_4 \setminus M_1$.

(b) Bestimmen Sie $A \times B$ für $A = \{1, 2, 5\}$ und $B = \{c, g, j\}$, wobei $c, g, j \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden sind. Vereinfachen Sie $A \times B$ falls $c = g = 4$ und $j \neq 4$.

(c) Ist

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} n + 7 & , \quad \text{falls } \sqrt{|n|} \in \mathbb{N} \\ -1 & , \quad \text{falls } n \leq 0 \\ 1 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Funktion?

(d) Zeigen Sie, dass

$$f\colon [-1, 1] \longrightarrow \left[0\,,\, \frac{3}{2}\right]\,,\ f(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} + x & \text{für } \quad 0 < x \leq 1\,, \end{cases}$$

surjektiv und nicht injektiv ist.

25 Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Menge aller Abbildungen $f : \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ ist überabzählbar.

### 1.8.2 "Sternchenaufgaben"

1. Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

   (a) Beweisen Sie: $g$ surjektiv $\Longleftrightarrow \exists k : Z \to Y$ mit $g \circ k = id_Z$.

   (b) Sei $X \neq \emptyset$. Beweisen Sie: $f$ injektiv $\Longleftrightarrow \exists h : Y \to X$ mit $h \circ f = id_X$.

2. Zeigen Sie, dass für alle Mengen $A, B, C$ folgende Identitäten gelten:

   (a) $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$,

   (b) $A \Delta A = \emptyset$,

   (c) $A \Delta B = B \Delta A$,

(d) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$. *Hinweis: Bringen Sie $A\Delta(B\Delta C)$ in eine Form, die symmetrisch in $A, B$ und $C$ ist.*

*Bemerkung: Die Aussagen gelten insbesondere für alle Teilmengen einer gegebenen Menge $\Omega$. Bezeichnen wir nun die Menge aller Teilmengen von $\Omega$ als $\mathcal{P}(\Omega)$, dann haben Sie in dieser Aufgabe gezeigt, dass $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$ eine "kommutative Gruppe" ist. Dieses Konzept lernt man in der Vorlesung zur linearen Algebra kennen.*

3. Es seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $I \neq \emptyset$ eine Menge. Zeigen Sie: $\forall i \in I : A_i \subseteq X \implies f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Kann auf der rechten Seite die Inklusion $\subseteq$ durch Gleichheit $=$ ersetzt werden?

4. Es sei $A$ eine höchstens abzählbare Menge.

   (a) Beweisen Sie, dass jede Teilmenge $B$ von $A$ auch höchstens abzählbar ist.

   (b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{E}_n(A) := \{B \subseteq A \mid \#B \leq n\}$. Hierbei bezeichne $\#B$ die Anzahl der Elemente in $B$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}_n(A)$ höchstens abzählbar ist.

   (c) Ist die Menge $\mathcal{E}(A)$ aller endlichen Teilmengen von $A$ höchstens abzählbar? Begründen Sie ihre Antwort.

## 1.9 Beispielaufgaben Klausur (Grundlagen der Analysis)

Die **Klausur zu Analysis 1** besteht aus Kurzantwortfragen und Langantwortfragen. Bei Kurzantwortfragen zählt nur die Antwort. Bei Langantwortfragen werden auch Begründungen und Arbeitsschritte bewertet. Bei Langantwortfragen soll man darauf achten, immer anzugeben, welche Annahmen Sie benutzen und ggf. welche Theoreme/Resultate.

Die **Klausur zu Grundlagen besteht ausschließlich aus Kurzantwortfragen**. Trotzdem geben wir schon in diesem Teilabschnitt Beispiele von beiden Varianten an, damit Sie ein erstes Gefühl für beide Aufgabenarten bekommen.

Wir haben jetzt schon relativ viel Stoff behandelt! Machen Sie eine Liste von allen *Definitionen*, die Sie gelernt haben und wissen sollten. Machen Sie eine Liste von allen *Resultaten* (Theoreme, Lemmata,...). Machen Sie eine Liste von Aufgabentypen, von "Tricks".

Eine mögliche Herangehensweise für Beweisaufgaben wäre:

1. alle Annahmen/Zutaten identifizieren,

2. die zu beweisender Aussage mathematisch formulieren, ggf. umformulieren,

3. eventuell eine Skizze machen,

4. mögliche Theoreme/Werkzeuge auflisten,

5. Geht es um einen Beweis durch vollständige Induktion?

6. (wenn nicht:) Ist ein direkter Beweis möglich? Was können Sie direkt aus den Annahmen folgern? Was würde die zu beweisender Aussage implizieren? Können Sie Ihre Schlussfolgerungen damit verbinden?

7. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Ist die Kontraposition einfacher zu zeigen?

8. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Wie würde die Verneinung für einen Beweis durch Widerspruch aussehen?
9. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Gibt es ein einfaches Beispiel, das das Ganze motiviert/beleuchtet? Können Sie eine leicht vereinfachte Aussage zeigen?
10. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Neu anfangen!

### 1.9.1 Kurzantwortfragen

Folgende Fragen werden nur als richtig/falsch bewertet.

1. Geben Sie die Negation an:

   Für alle $x \in I$ existiert ein $y \in B$ so dass $f(x) = y$.

2. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild von $f(x) \coloneqq 2 - \sqrt{x^2 + x - 6}$.

3. Sei
$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 3 \geq 2\}.$$
   Geben Sie $A \cap \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus A$ als "Auflistung" an (d.h., in der Form $A \cap \mathbb{N} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ wobei $\emptyset$ auch erlaubt ist).

4. Geben Sie die Mächtigkeit von $(-2, 3)$ an.

5. Entscheiden Sie ob folgende Aussage wahr ist. Wenn nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

6. Entscheiden Sie ob folgende Aussage wahr ist. Wenn nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

7. Geben Sie die Definition von injektiv an.

8. Bestimmen Sie das größtmögliche Intervall $I$ mit $0 \in I$, so dass $f(x) = -x^2 + 4x$ injektiv auf $I$ ist.

9. Was ist das Bild von $f(x) = -x^3 + 5x - 2$?

10. Betrachte $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Was ist das Urbild von $\{2\}$? Von $\{0\}$?

11. Ergänzen Sie: Wir wollen zeigen, dass $p \Rightarrow q$. Also **nehmen wir zum Widerspruch an...**.

12. Ergänzen Sie: Wir wollen zeigen, dass $p \Rightarrow q$. Wir werden dies mit Kontraposition zeigen. Also **nehmen wir an...**.

13. Berechnen Sie für die Intervalle $A = [-7, 10]$ und $B = (0, 5]$: $A \triangle B$. Geben Sie Ihre Antwort in Intervallnotation an.

14. Geben Sie die (ergänzte) dritte Reihe folgender Wahrheitstafel an:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge q$ | $p \Rightarrow \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | | | |
| W | F | | | | |
| F | W | | | | |
| F | F | | | | |

### 1.9.2 Langantwortfragen

Lösungen zu den folgenden Aufgaben wären Zeile für Zeile korrigiert. Zwischenschritte müssen begründet werden. Die Argumentation wird bewertet.

**Übung 1.9.1**

① Vervollständigen Sie die folgende Wahrheitstafel:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | W | | | | |
| W | F | | | | |
| F | W | | | | |
| F | F | | | | |

② Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen, ob folgende Aussagen wahr sind:

(a) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \vee r))$

(b) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

**Übung 1.9.2**

Zeigen Sie, dass

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

**Übung 1.9.3**

Zeigen Sie die folgenden Distributivgesetze.

① Seien $p$, $q$ und $r$ Aussagen. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge r \quad &\Leftrightarrow \quad (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \\ (p \wedge q) \vee r \quad &\Leftrightarrow \quad (p \vee r) \wedge (q \vee r). \end{aligned}$$

② Seien $A$, $B$ und $C$ Mengen. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

**Übung 1.9.4**

Zeigen Sie, dass

1.
$$\sum_{k=1}^{n} (3k-1)(3k+2) = 3n^3 + 6n^2 + n$$

2.
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k^2(k+2)}{(k+1)^3} = \frac{n+2}{2(n+1)^2}.$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Übung 1.9.5**

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$ gilt:
$$2^n > n^2.$$

**Übung 1.9.6**

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
$$4^n + 15n - 1 \qquad \text{durch 9 teilbar.}$$
(Hier bedeutet "durch 9 teilbar", dass es eine ganze Zahl $k$ gibt, so dass $4^n + 15n - 1 = 9k$.)

**Übung 1.9.7**

1. Geben Sie die Definition von *injektiv* an.
2. Ist $f(x) = \sqrt{x}$ injektiv?
3. Finden Sie die größtmögliche Menge, auf der $f$ aus Teil 2 surjektiv ist.

**Übung 1.9.8**

Seien Sei $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, wobei $X$, $Y$, $Z$ Mengen sind. Zeigen Sie die folgende Implikation
$$g \circ f \text{ ist injektiv } \Rightarrow f \text{ ist injektiv }.$$
Gilt auch die Umkehrung?

Hinweise und Anmerkungen: Nehmen Sie Kurzantwortfrage 4 als Hinweis, dass es wichtig ist, die Definitionen zu kennen. Wie Sie sehen, können manche Teilaufgaben als Kurzantwort- oder Langantwort-Aufgaben auftauchen. Bei der einen reicht nur die Antwort; bei der anderen muss man jeden Schritt begründen. Übung 1.9.2 ist ein Hinweis, dass man die Skriptübungen tatsächlich lösen sollte; sie können tatsächlich als Klausurfrage auftauchen. Übung 1.9.3 deutet an, dass es neben dem Lösen der Aufgaben auch wichtig ist, den *den Lösungsweg* verstanden/verinnerlicht zu haben. Außerdem deutet sie darauf hin, dass man *die Struktur der Mathematik* erkennen möchte. Kennt man das Distributivgesetz zu logischen Aussagen, dann ist das Distributivgesetz für Mengen keine Überraschung. Je mehr Aufgaben man löst, desto mehr entwickelt man *Intuition*. Des Weiteren steht Übung 1.9.3 als Beispiel, wie manche Aufgaben als Basis für spätere Entwicklungen dienen.

Oft entwickeln wir in den Aufgaben Werkzeuge, die wir später verwenden werden. Überspringen Sie bitte keine Aufgaben! Sie haben nicht unbedingt Zeit, jede Aufgabe zu bearbeiten, aber lesen Sie bitte jede. Fragen Sie sich, ob Sie in der Lage wären, diese zu lösen. Wie würden Sie anfangen? Was wird in der Aufgabe überhaupt untersucht? Wäre das eine schwierige oder eine leichte Aufgabe?

Bei Übung 1.9.4 ist der Hauptpunkt, dass man erkennen soll, wann man an die vollständige Induktion denken soll. Von Übung 1.9.7 lernen Sie, dass man (a) in der Lage sein soll, Definitionen, Theoreme und sonstige Resultate korrekt und vollständig wiederzugeben, und (b) Definitionen oft *implizit* gebraucht wie in Teil (3.), um Teilaufgaben zu lösen.

Zudem bemerkt die vorsichtige Leserin bzw. der vorsichtiger Leser, dass wir in Beispiel 1.2.5 einen Teil von Übung 1.2.10 schon gelöst haben! Dies kommt vor. Beispiele sind nicht zu überspringen, sondern Zeile für Zeile zu verstehen und zu verinnerlichen. Mathematik ist wie ein Lied. Manches wiederholt sich.

# Kapitel 2

# Die reellen Zahlen

Das waren die Grundlagen.

Bevor wir uns mit reellwertigen Funktionen einer reellen Variablen beschäftigen, wollen wir zuerst klären, was die reellen Zahlen eigentlich sind. Konkret wollen wir uns fragen:

- Was müssen wir annehmen?
- Was können wir daraus folgern?

Die Annahmen, auf denen alles weitere basiert, sind die *Axiome*. Obwohl wir in den Grundlagen schon mit vielen Objekten (Mengen, Funktionen) gearbeitet haben, sollte man den aktuellen Abschnitt als den rigorosen Anfang betrachten. Nachdem Sie die Axiome und deren Folgerungen kennengelernt haben, können Sie zurückschauen und sich fragen, wo und wie wir sie im ersten Kapitel implizit verwendet haben.

## 2.1 Eine axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen

Obwohl $\mathbb{Q}$ manche angenehme Eigenschaften hat, ist die Menge zu klein. Beispielsweise existiert $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$ nicht (Lemma 2.1.12 unten). Also wollen wir eine größere Menge definieren, die $\mathbb{Q}$ enthält und sinnvoll ergänzt. Diese Menge wird die Menge der reellen Zahlen sein.

In diesem Abschnitt schauen wir uns die reellen Zahlen aus einer axiomatischen Perspektive an. Insbesondere listen wir die Axiome der reellen Zahlen auf. Diese Axiome sind die Eigenschaften der reellen Zahlen, die wir als wahr annehmen. Dann fragen wir uns, welche weitere Eigenschaften von $\mathbb{R}$ wir daraus schließen können. Wir trennen die Axiome wie folgt

*(i)* algebraische Axiome (beschreiben die Grundrechenarten $+, \cdot$)

*(ii)* Anordnungsaxiome (beschreiben $<$ (abgeleitet $>$))

*(iii)* das Vollständigkeitsaxiom (subtil, beschreibt den Unterschied wie $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$).

### 2.1.1 Die algebraischen Axiome von $\mathbb{R}$

Die Menge der reellen Zahlen ist ein Körper, das heißt:

**Axiom**

$\mathbb{R}$ zusammen mit Addition (bezeichnet mit $+$) und Multiplikation (bezeichnet mit $\cdot$) erfüllt die folgenden Eigenschaften:

**(G)** **(Geschlossenheit)**
$a + b \in \mathbb{R}$ und $a \cdot b \in \mathbb{R}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

**(A1)** **(Kommutativgesetz der Addition)**
$a + b = b + a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

**(A2)** **(Assoziativgesetz der Addition)**
$a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**(A3)** **(Existenz eines neutralen Elements der Addition)**
Es existiert eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt: $a + 0 = a$.

**(A4)** **(Existenz eines inversen Elements der Addition)**
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert eine reelle Zahl $b$, so dass gilt: $a + b = 0$.

**(M1)** **(Kommutativgesetz der Multiplikation)**
$a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

**(M2)** **(Assoziativgesetz der Multiplikation)**
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**(M3)** **(Existenz eines neutralen Elements der Multiplikation)**
Es existiert eine von 0 verschiedene Zahl $1 \in \mathbb{R}$ , so dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:
$$a \cdot 1 = a.$$

**(M4)** **(Existenz eines inversen Elements der Multiplikation)**
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ existiert eine reelle Zahl $b$, so dass gilt:
$$a \cdot b = 1.$$

**(D)** **(Distributivgesetz)**
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

**Bemerkung.** *Ein* ***Körper*** *ist eine Menge zusammen mit einer Addition $+$ und einer Multiplikation $\cdot$, so dass (G), (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) gelten. Welche der Körpereigenschaften erfüllen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (mit $+, \cdot$ aus $\mathbb{R}$)?*

**Bemerkung** $(\cdot)$**.** *In der Regel schreiben wir „$ab$“ anstatt „$a \cdot b$“.*

**Bemerkung** (Reihenfolge)**.** *Multiplizieren wird vor Addition ausgeführt, in dem Sinne, dass wir $a \cdot b + a \cdot c$ oder $ab + ac$ als $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ interpretieren.*

Ein Hauptziel ist jetzt zu verstehen, wie wir aus den 10 oben genannten Axiomen Folgerungen ziehen. Zum Beispiel haben wir nicht *angenommen*, dass das neutrale Element der Addition und das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt sind. Anstattdessen beweisen wir jetzt, dass Eindeutigkeit aus den algebraischen Axiomen folgt. Ähnlich folgt, dass das zu $a$ inverse Element der Addition und das zu $a$ inverse Element der Multiplikation eindeutig sind.

**Lemma 2.1.1: Eindeutigkeit**

Es gilt Folgendes.

*(i)* Das neutrale Element der Addition und das neutrale Element der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.

*(ii)* Wenn für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $a + b = 0$ und $a + c = 0$, dann ist $b = c$.

*(iii)* Wenn für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gilt $a \cdot b = 1$ und $a \cdot c = 1$, dann gilt $b = c$.

**Bemerkung.** *Angesichts der Eindeutigkeit ergibt es Sinn, dem inversen Element einen Namen zu geben:*

- *das zu $a$ inverse Element der Addition wird mit $-a$ bezeichnet, und*
- *das zu $a$ inverse Element der Multiplikation wird mit $a^{-1}$ oder $\frac{1}{a}$ bezeichnet.*

*Ab jetzt definieren wir Subtraktion und Division durch*

- $a - b := a + (-b)$,
- $\dfrac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$.

*Beweis von Lemma 2.1.1.* zu *(i)*: Wir nehmen an, dass für $0$, $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$a + 0 = a \quad \text{und} \quad a + x = a \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt insbesondere

$$0 + x = 0.$$

Aus (A1) und (A3) folgt $x = 0$. Damit haben wir die Eindeutigkeit bestätigt.

Analog, wenn für $1 \neq 0$, $x \neq 0$ gilt

$$a \cdot 1 = a \quad \text{und} \quad a \cdot x = a \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R},$$

dann gilt insbesondere

$$1 \cdot x = 1.$$

Aus (M1) und (M3) folgt $x = 1$.

zu *(ii)*: Angenommen, es gilt für irgendeine $b$, $c \in \mathbb{R}$:

$$a + b = 0 \text{ und } a + c = 0. \tag{2.1.1}$$

Also gilt

$$\begin{array}{rrcl}
 & a + b & = & a + c \\
\Rightarrow & b + (a + b) & = & b + (a + c) \\
\overset{(2.1.1),(A2)}{\Rightarrow} & b + 0 & = & (b + a) + c \\
\overset{(A3),\,(A1)}{\Rightarrow} & b & = & (a + b) + c \\
 & & \overset{(2.1.1)}{=} & 0 + c \\
 & & \overset{(A1)}{=} & c + 0 \\
 & & \overset{(A3)}{=} & c.
\end{array}$$

zu *(iii)*: Übung

□

**Bemerkung.** *Wir werden Eindeutigkeit sehr oft (wenn nicht immer) durch diese Methode beweisen. (Man nimmt an, man hat zwei Elemente/Lösungen/... und zeigt, dass sie gleich sind.)*

Aus den algebraischen Axiomen kann man außerdem auf die üblichen algebraischen Regeln der reellen Zahlen schließen, zum Beispiel:

**Lemma 2.1.2: einige abgeleitete Regeln**

Es gilt

*(i)* $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$

*(ii)* $-a = (-1) \cdot a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

*(iii)* $-(-a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

*(iv)* $(-1)^2 = 1$

*(v)* $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ für alle $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

*Beweis.* zu *(i)*: Es gilt für alle $a$, $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rrcl} & a \cdot (b+0) & \overset{\text{(D)}}{=} & a \cdot b + a \cdot 0 \\ \overset{\text{(A3)}}{\Rightarrow} & a \cdot b & = & a \cdot b + a \cdot 0 \\ \overset{\text{(A4), (A1), (A2), (A3)}}{\Rightarrow} & 0 & = & a \cdot 0. \end{array}$$

zu *(ii)*: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} a + (-a) & = & 0 \\ & \overset{(i)}{=} & (1-1) \cdot a \\ & \overset{\text{(D)}}{=} & 1 \cdot a + (-1) \cdot a \\ & \overset{\text{(M3)}}{=} & a + (-1) \cdot a. \end{array}$$

Wir addieren beiden Seiten auf $-a$ und erhalten

$$\begin{array}{rrcl} & -a + a + (-a) & = & -a + a + (-1) \cdot a \\ \overset{\text{(A1)}}{\Rightarrow} & -a & = & (-1) \cdot a. \end{array}$$

zu *(iii)*: Es gilt $a+(-a) = 0$ und mit (A1) auch $(-a)+a = 0$. Außerdem gilt $(-a)+(-(-a)) = 0$. Mit Lemma 2.1.1 *(ii)* folgt $-(-a) = a$.

zu *(iv)*: Mit *(ii)* für $a = -1$ folgt $-(-1) = (-1)^2$, andererseits folgt aus *(iii)* für $a = 1$, dass $-(-1) = 1$.

zu *(v)*: Sei $a \neq 0$ gegeben. Angesichts Lemma 2.1.1 reicht es aus, wenn wir $a^{-1} \cdot a = 1$ zeigen. Dies folgt aus

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

und (M1).

□

Die übliche Schwierigkeit für Studierende ist, den Anfang bei einem solchen Beweis zu finden. Die Aussagen dieses Abschnitts erscheinen so offensichtlich, dass es schwierig sein kann, die Aussagen zu zeigen. Was wir in diesem Abschnitt *trainieren* (welche Annahmen, was zu zeigen ist, wie man logisch folgert) ist allerdings enorm wichtig. Es lohnt sich, die Zeit zu investieren!

**Übung 2.1.3**

Zeigen Sie direkt mit Hilfe der Körperaxiome, dass für alle reellen Zahlen $a, b$ gilt

① $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

② $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ oder } b = 0)$,

③ $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

Sehr „praktisch“ ist die Folgerung, dass wir Gleichungen der Form

$$a + x = b \qquad \text{oder} \qquad a \cdot x = b$$

lösen können.

**Lemma 2.1.4: Existenz von Lösungen**

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ gegeben.

*(i)* Es existiert genau eine reelle Zahl $x$, so dass

$$a + x = b.$$

*(ii)* Wenn $a \neq 0$, dann existiert genau eine reelle Zahl $x$, so dass

$$a \cdot x = b. \tag{2.1.2}$$

**Bemerkung.** *Das „genau“ oben sagt uns, dass wir beweisen müssen, dass die Lösung eindeutig definiert ist. Wir werden in einem Schritt Existenz einer Lösung zeigen und in einem zweiten Schritt Eindeutigkeit der Lösung zeigen.*

*Beweis von Lemma 2.1.4.* zu (i): Übung.

zu (ii): Schritt 1: Hier zeigen wir, dass es mindestens eine Zahl $x$ gibt, so dass $a \cdot x = b$. Der natürliche „Kandidat“ ist $x := a^{-1} \cdot b$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot (a^{-1} \cdot b) \\ &\overset{\text{(M2)}}{=} (a \cdot a^{-1}) \cdot b \\ &\overset{\text{(M4)}}{=} 1 \cdot b \\ &\overset{\text{(M1)}}{=} b \cdot 1 \\ &\overset{\text{(M3)}}{=} b. \end{aligned}$$

Also löst $x$ die Gleichung (2.1.2).

Schritt 2: Angenommen, $x$ und $\tilde{x}$ sind zwei Lösungen von (2.1.2). Wir möchten zeigen, dass

$x = \tilde{x}$. Aus $a \cdot x = b$ und $a \cdot \tilde{x} = b$ erhalten wir

$$\begin{array}{rrcl} & a \cdot x & = & a \cdot \tilde{x} \\ \Rightarrow & (a \cdot x) \cdot a^{-1} & = & (a \cdot \tilde{x}) \cdot a^{-1} \\ \overset{(M1)}{\Rightarrow} & (x \cdot a) \cdot a^{-1} & = & (\tilde{x} \cdot a) \cdot a^{-1} \\ \overset{(M2)}{\Rightarrow} & x \cdot (a \cdot a^{-1}) & = & \tilde{x} \cdot (a \cdot a^{-1}) \\ \overset{(M4)}{\Rightarrow} & x \cdot 1 & = & \tilde{x} \cdot 1 \\ \overset{(M3)}{\Rightarrow} & x & = & \tilde{x}. \end{array}$$

□

### 2.1.2 Exkurs: Die komplexen Zahlen

Es gibt auch die komplexen Zahlen. Eine komplexe Zahl kann als ein geordnetes Paar $(x, y)$ reeller Zahlen mit folgender Addition und Multiplikation dargestellt werden:

- Addition: $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- Multiplikation: $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Der Körper der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

**Bemerkung.** *Die Verknüpfungszeichen $\oplus, \odot$ sind so gewählt um deutlich zu machen, dass es sich nicht um die aus $\mathbb{R}$ bekannte Addition bzw. Multiplikation handelt. Im Allgemeinen werden die Verknüpfungen aber ebenfalls mit $+, \cdot$ bezeichnet.*

<u>Behauptung</u>: $\mathbb{C}$ erfüllt (G), (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D).

**Beispiel 2.1.5.** *Was ist das neutrale Element der Addition? Was ist das neutrale Element der Multiplikation?*

*Lösung.* $(0, 0)$ und $(1, 0)$. Man überprüft, dass

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (0, 0) &= (x + 0, y + 0) \\ &\overset{\text{(A3) für } \mathbb{R}}{=} (x, y), \end{aligned}$$

und, dass

$$\begin{aligned} (x, y) \odot (1, 0) &= (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &\overset{\text{(M3) für } \mathbb{R}, \text{ Lemma 2.1.2 } (i)}{=} (x - 0, 0 + y) \\ &\overset{\text{(A3) für } \mathbb{R}}{=} (x, y). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung.** *Die algebraischen Axiome der reellen Zahlen werden benutzt um zu zeigen, dass $\mathbb{C}$ (G), (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) erfüllt. Das heißt, wir nehmen die Eigenschaften für $\mathbb{R}$ an, aber wir <u>zeigen</u>, dass $\mathbb{C}$ die Eigenschaften erfüllt.*

Sie können selbst die verschiedenen Aussagen für $\mathbb{C}$ untersuchen. Als Beispiel zeigen wir, dass

$$(x_1, y_1) \odot ((x_2, y_2) \odot (x_3, y_3)) = ((x_1, y_1) \odot (x_2, y_2)) \odot (x_3, y_3).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \odot ((x_2, y_2) \odot (x_3, y_3)) &= (x_1, y_1) \odot (x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3, x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_2) \\
&\overset{\text{(D) aus } \mathbb{R}}{=} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot y_2 \cdot y_3 - (y_1 \cdot x_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_3 \cdot y_2), \\
&\qquad x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 + x_1 \cdot x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot x_3 \cdot y_1 - y_2 \cdot y_3 \cdot y_1) \\
&\overset{\text{Lemma 2.1.2 \textit{(ii)}}}{=} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot y_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot x_3 \cdot y_2, \\
&\qquad x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 + x_1 \cdot x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot x_3 \cdot y_1 - y_2 \cdot y_3 \cdot y_1) \\
&\overset{\text{(A1), (M1) aus } \mathbb{R}}{=} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot y_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 \cdot y_3, \\
&\qquad x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot x_2 \cdot y_1)
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
((x_1, y_1) \odot (x_2, y_2)) \odot (x_3, y_3) &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \odot (x_3, y_3) \\
&\overset{\text{(D) aus } \mathbb{R}}{=} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot x_3 - (x_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_3), \\
&\qquad x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot x_2 \cdot y_1) \\
&\overset{\text{Lemma 2.1.2 \textit{(ii)}}}{=} (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot y_2 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 \cdot y_3, \\
&\qquad x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot x_2 \cdot y_1)
\end{aligned}$$

Beide Seiten sind also gleich.

Wenn man

$$\begin{aligned}
(1, 0) &=: \mathbf{1} \text{ reelle Einheit} \\
(0, 1) &=: \mathbf{i} \text{ imaginäre Einheit}
\end{aligned}$$

definiert, dann kann man eine komplexe Zahl $z = (x, y)$ als

$$z = x + \mathbf{i}y$$

schreiben. Da $(0, 1) \odot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$, gilt die Regel

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}.$$

**Definition 2.1.6**

Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ nennen wir $x$ den Realteil und $y$ den Imaginärteil der Zahl. Wir schreiben dafür

$$x = \Re(z), \qquad y = \Im(z).$$

Die zu $z$ komplex konjugierte Zahl ist $x - \mathbf{i}y$ und wird so bezeichnet:

$$\bar{z}.$$

Man bemerkt:

$$z + \bar{z} = 2\,\Re(z), \qquad z - \bar{z} = 2\Im(z)\mathbf{i}.$$

Wichtige Bemerkung: Da $\mathbb{C}$ (G), (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) erfüllt, erhalten wir „umsonst“, dass die Lemmata 2.1.1 - 2.1.4 auch für $\mathbb{C}$ gelten. Das gilt allgemein für alle Sätze, die aus den Axiomen folgen. Darin liegt der Vorteil, eine saubere, elementare Struktur zu erkennen und zu benutzen.

### 2.1.3 Die Anordnungsaxiome von $\mathbb{R}$

In der Analysis sind *Ungleichungen* genauso wichtig wie Gleichungen. Um mit Ungleichungen arbeiten zu können, brauchen wir die *Anordnungsaxiome*.

**Axiom**

Für alle $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ gilt:

**(O1)** **(Trichotomie)**
Eine und nur eine der folgenden Aussagen ist wahr:

$$a < b, \qquad b < a, \qquad a = b.$$

**(O2)** **(Transitivität)**
Wenn $a < b$ und $b < c$ ist, so gilt $a < c$.

**(O3)** **(Monotoniegesetz der Addition)**
Wenn $a < b$ ist, so gilt $a + c < b + c \quad$ für alle $c \in \mathbb{R}$

**(O4)** **(Monotoniegesetz der Multiplikation)**
Wenn $a < b$ ist, so gilt $a \cdot c < b \cdot c \quad$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c$.

**Notation 2.1.7**

Für $a < b$ schreiben wir auch $b > a$. Wenn $a < b$ oder $a = b$, schreiben wir $a \leq b$. Analog schreiben wir $a \geq b$, wenn $a > b$ oder $a = b$.

**Notation 2.1.8**

Gilt für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, dass $a > 0$ (bzw. $a < 0$), dann nennen wir $a$ positiv (bzw. negativ). Ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ (bzw. $a \leq 0$) nennen wir nichtnegativ (bzw. nichtpositiv).

Wieder haben wir einen Begriff (“positiv”), der nicht immer gleich definiert wird. Ob ein Buch positiv als $> 0$ oder $\geq 0$ definiert, muss man überprüfen. Manche sagen “streng positiv” um klarzulegen, dass die strenge Ungleichheit gemeint ist.

Wie mit den algebraischen Axiomen, kann man sich fragen, welche Folgerungen man aus den Anordnungsaxiomen schließen kann. Wir erhalten folgende Informationen:

**Lemma 2.1.9: einige abgeleitete Regeln**

Für reelle Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ gilt:

*(i)* $a < 0,\ b < 0 \quad \Rightarrow \quad a + b < 0,$
$a > 0,\ b > 0 \quad \Rightarrow a + b > 0,$

$$a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a > 0.$$

*(ii)* $a \cdot b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a > 0 \text{ und } b > 0)$ oder $(a < 0 \text{ und } b < 0)$,
$a \cdot b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a < 0 \text{ und } b > 0)$ oder $(a > 0 \text{ und } b < 0)$.

*(iii)* $a \cdot a > 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Insbesondere gilt $0 < 1$.

*(iv)* $a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1} < 0$.

*Beweis von Lemma 2.1.9.*

zu *(i)*: zu $a < 0,\ b < 0 \quad \Rightarrow \quad a + b < 0$: Aus $a < 0$ und Monotonie der Addition folgt $a + b < b$. Zusammen mir $b < 0$ und Transitivität folgt $a + b < 0$.

zu $a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a > 0$: Die Aussage zerfällt in:

$$a < 0 \Rightarrow -a > 0 \qquad \text{und} \qquad -a > 0 \Rightarrow a < 0.$$

Wir zeigen die erste Implikation und lassen die zweite als Übung. Aus $a < 0$ und Monotonie der Addition folgt

$$a - a < -a \qquad \Rightarrow \qquad 0 < -a.$$

zu $a > 0,\ b > 0 \quad \Rightarrow \quad a + b > 0$: Aus $a > 0$, $b > 0$ und was wir gerade gezeigt haben, folgt

$$-a < 0, \quad -b < 0.$$

Von oben folgt

$$-a + (-b) < 0. \tag{2.1.3}$$

Aus Übung 2.1.3 gilt

$$-(a + b) = -a + (-b) \overset{(2.1.3)}{<} 0,$$

so dass wir (siehe oben) $a + b > 0$ bestätigt haben.

zu *(ii)*: Wieder zeigen wir die erste Aussage und lassen die zweite als Übung.

(Rückrichtung) Zu zeigen ist: Wenn $a$, $b$ beide positiv oder beide negativ sind, dann ist das Produkt $a \cdot b$ positiv.

<u>Fall 1</u>: $a > 0$ und $b > 0$.

Da $b > 0$ ist, schließen wir aus $0 < a$ und (O4), dass

$$\begin{aligned} & 0 \cdot b &<& \quad a \cdot b \\ \overset{\text{(M1), Lemma 2.1.2 } (i)}{\Rightarrow} \quad & 0 &<& \quad a \cdot b. \end{aligned}$$

<u>Fall 2</u>: $a < 0$ und $b < 0$.

Jetzt können wir (O4) nicht direkt anwenden, da $b$ nicht positiv ist. Nach *(i)* ist das zu $b$ inverse Element der Addition doch positiv. Also erhalten wir aus $a < 0$ und (O4), dass

$$a \cdot (-b) < 0 \cdot (-b) = 0. \tag{2.1.4}$$

Andererseits besagt Übung 2.1.3, dass $a \cdot (-b)$ das zu $a \cdot b$ inverse Element der Addition ist. Zusammen mit (2.1.4) schließen wir $-(a \cdot b) < 0$, woraus folgt (wie oben), dass $a \cdot b > 0$.

Also impliziert ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$), dass $a \cdot b > 0$.

(Hinrichtung) Hier ist zu zeigen, dass $a \cdot b > 0$ impliziert ($a > 0$ und $b > 0$) oder ($a < 0$ und $b < 0$).

Nach (O1) gibt es neun Fälle:
entweder $a > 0$ und $b > 0$
oder $a > 0$ und $b = 0$
oder $a > 0$ und $b < 0$
oder $a = 0$ und $b > 0$
oder $a = 0$ und $b = 0$
oder $a = 0$ und $b < 0$
oder $a < 0$ und $b > 0$
oder $a < 0$ und $b = 0$
oder $a < 0$ und $b < 0$.

Nach Übung 2.1.3 ist $a = 0$ oder $b = 0$ ausgeschlossen.

Wenn $a > 0$ und $b < 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = b \cdot a &\overset{(O4)}{<} 0 \cdot a \\ &\overset{(M1)}{=} a \cdot 0 \\ &\overset{\text{Lemma 2.1.2 } (i)}{=} 0. \end{aligned}$$

Analog, wenn $a < 0$ und $b > 0$. Also bleiben nur die Möglichkeiten $a, b > 0$ oder $a, b < 0$.

zu *(iii)*: Wenn $a > 0$, dann folgt die Behauptung aus (O4). Wenn $a < 0$, dann ist $(-a) > 0$, so dass

$$\begin{aligned} 0 < (-a)(-a) &= (-1)a(-a) && \text{(nach Übung 2.1.3)} \\ &= (-1)^2 a^2 && \text{(nach Übung 2.1.3)} \\ &= a^2. && \text{(nach Lemma 2.1.2)} \end{aligned}$$

zu *(iv)*: Übung. □

## Übung 2.1.10

Vervollständigen Sie den Beweis zu *(ii)*, und zeigen Sie *(iv)*.

## Übung 2.1.11

Seien $a$, $b$, $c$, $d$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass

1. $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a - b < 0$.
2. $a < b \quad \Leftrightarrow \quad -a > -b$.
3. $a < b$ und $c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$.
4. Falls $a, b \geq 0$, dann gilt: $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2$.

**Bemerkung.** *Eine Anordnung mit den Eigenschaften (O1)-(O4) kann es für die komplexen Zahlen nicht geben, denn Lemma 2.1.9* (iii) *würde implizieren*

$$z^2 > 0 \qquad \textit{für alle } \ z \in \mathbb{C} \textit{ mit } z \neq 0,$$

*insbesondere*

$$\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}^2 > 0 \tag{2.1.5}$$

$$-\boldsymbol{1} = \boldsymbol{i}^2 > 0, \tag{2.1.6}$$

*aber nach Lemma 2.1.9 impliziert (2.1.6), dass*

$$\boldsymbol{1} < 0, \tag{2.1.7}$$

*und (2.1.5) und (2.1.7) widerspricht (O1).*

### 2.1.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Jetzt kommen wir zum tieferen Teil. Die Frage ist, ob die reellen Zahlen oder z.B. die rationalen Zahlen „vollständig“ sind. Was soll das heißen?

Grob gesagt möchte man wissen, ob es „Löcher“ in der Menge gibt oder, im Gegenteil, ob es an jeder Stelle, wo man eine reelle/rationale Zahl „erwartet“, auch immer eine reelle/rationale Zahl gibt.

Das Vollständigkeitsaxiom (ein Axiom, also eine Annahme!) sagt, dass die reellen Zahlen in der Tat vollständig sind. Man würde vielleicht hoffen, dass wir dies beweisen könnten. Aber wir müssen es stattdessen annehmen.

Zuerst bemerken wir, dass die rationalen Zahlen Löcher haben. Besser gesagt: Es gibt Punkte auf der Zahlengerade, die keiner rationalen Zahl entsprechen.

**Lemma 2.1.12: $\mathbb{Q}$ nicht vollständig**

Es gibt kein $r \in \mathbb{Q}$, so dass $r^2 = 2$ gilt.

Wir schreiben einen indirekten Beweis.

*Beweis.* Angenommen, $r \in \mathbb{Q}$ erfüllt $r^2 = 2$. Dann existieren $p, q \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{p^2}{q^2} = 2. \qquad \text{(Warum?)}$$

Also gilt

$$p^2 = 2q^2. \tag{2.1.8}$$

Wir dürfen annehmen (warum?), dass $p$ und $q$ keine gemeinsamen Faktoren in ihren Primfaktorzerlegungen haben. Nach (2.1.8) ist $p^2$ gerade. Wenn $p \in \mathbb{N}$ ist und $p^2$ gerade ist, dann ist $p$ gerade. (Warum?) Aber dann impliziert (2.1.8), dass $q^2$ gerade ist mit $p^2 = 4 \cdot s^2, s \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \cdot s^2 = q^2$. Wir schließen daraus, dass $q$ gerade ist, was widerspricht, dass $p$ und $q$ keine gemeinsamen Faktoren haben. $\square$

**Übung 2.1.13**

Gibt es eine rationale Zahl $r$, so dass

$$r^2 = 3? \qquad r^2 = 4? \qquad r^2 = 42? \qquad r^2 = 49?$$

**Übung 2.1.14: "Sternchen"**

Bestimmen Sie, für welche natürlichen Zahlen $n$ es eine rationale Zahl $r$ gibt, so dass $r^2 = n$. (Nachdem wir die Quadratwurzel für alle $x \in \mathbb{R}$ eingeführt haben, werden wir dies so formulieren: Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?)

Um das Vollständigkeitsaxiom von $\mathbb{R}$ zu formulieren, brauchen wir ein paar zusätzliche Begriffe.

**Definition 2.1.15: Beschränktheit einer Menge**

Die nichtleere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$x \leq s \qquad \text{für alle } x \in A.$$

Dann nennen wir $s$ eine obere Schranke von $A$. Falls es keine solche Zahl gibt, dann sagen wir, dass $A$ nach oben unbeschränkt ist.

Die Menge $A$ heißt nach unten beschränkt, falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$x \geq s \qquad \text{für alle } x \in A.$$

Dann nennen wir $s$ eine untere Schranke von $A$. Falls es keine solche Zahl gibt, dann sagen wir, dass $A$ nach unten unbeschränkt ist.

Wenn $A$ eine obere **und** eine untere Schranke besitzt, dann sagen wir, dass $A$ beschränkt ist.

Wenn $A$ nach oben **oder** nach unten unbeschränkt ist, dann sagen wir, dass $A$ unbeschränkt ist.

**Bemerkung.** *Nach der Definition ist jede Menge beschränkt oder unbeschränkt.*

**Beispiel 2.1.16.** *Sind die folgenden Mengen nach oben/unten beschränkt? Wenn ja, was ist eine obere/untere Schranke der Menge?*

1. $\{1, 2, 5, 9\}$
2. $(0, 5]$
3. $(-\infty, 9) \cup (8, 10)$
4. $\mathbb{Q}$
5. $\left\{x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Man merkt, dass die obere Schranke einer (beschränkten) Menge nicht eindeutig definiert ist. Z.B. ist 6 eine obere Schranke von $(0, 5]$, aber das Gleiche gilt auch für 5 und 7. In der Tat gilt: wenn $s$ eine obere Schranke von einer Menge $A$ ist, dann gilt das auch für

$$s + n \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Trotzdem glaubt man, dass es eine „beste" obere Schranke einer Menge gibt (z.B. bzgl. $(0, 5]$ scheint 5 „besser" als 6 oder 7 zu sein). Diese Intuition führt zu folgender Definition:

**Definition 2.1.17: Supremum/Infimum einer Menge**

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Dann heißt $s \in \mathbb{R}$ die kleinste obere Schranke von $A$ oder das Supremum von $A$, wenn gilt:

*(i)* $x \leq s$ für alle $x \in A$,

*(ii)* $x \leq s'$ für alle $x \in A \quad \Longrightarrow \quad s' \geq s$.

Wir schreiben
$$s = \sup A.$$

Analog: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer und nach unten beschränkt. Dann heißt $s \in \mathbb{R}$ die größte untere Schranke von $A$ oder das Infimum von $A$, wenn gilt:

*(i')* $x \geq s$ für alle $x \in A$,

*(ii')* $x \geq s'$ für alle $x \in A \quad \Longrightarrow \quad s' \leq s$.

Wir schreiben
$$s = \inf A.$$

Wenn die nichtleere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt bzw. nicht nach unten beschränkt ist, dann ist
$$\sup A := +\infty \quad \text{bzw.} \quad \inf A := -\infty.$$

Für die leere Menge definieren wir außerdem
$$\sup \emptyset := -\infty \quad \text{und} \quad \inf \emptyset := +\infty.$$

**Bemerkung.** (i) *und* (ii) *besagen, dass $s$ eine obere Schranke von $A$ ist und dass alle anderen oberen Schranken größer gleich $s$ sind.*

**Bemerkung** (Eindeutigkeit)**.** *Seien $s_1, s_2$ Suprema von $A$. Da $s_1$ Supremum von $A$ ist und $s_2$ eine obere Schranke von $A$, folgt aus der Definition, dass $s_2 \geq s_1$. Analog ist $s_2$ Supremum und $s_1$ obere Schranke, so dass $s_1 \geq s_2$. Aus der Kombination der Ungleichungen folgt die Gleichheit $s_1 = s_2$.*

**Übung 2.1.18**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Supremum oder ein Infimum haben und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte. Begründen Sie Ihre Antworten.

1. $X_1 := \mathbb{Q} \cap [0, 1)$
2. $X_2 := \{3^{-k} \colon k \in \mathbb{N}\}$
3. $X_3 := \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0\}$

Wenn wir mit Suprema arbeiten, hilft es manchmal die folgende alternative Charakterisierung zu benutzen.

**Lemma 2.1.19: alternative Charakterisierung des Supremums**

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge. Genau dann ist eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ das Supremum von $A$

(also $s = \sup A$), wenn gilt:

*(i)'* Es existiert kein $x \in A$, so dass $s < x$, und

*(ii)'* Wenn für ein $s' \in \mathbb{R}$ gilt $s' < s$, dann existiert ein $x \in A$, so dass $x > s'$.

*Beweis.* „$\Leftarrow$“ Angenommen, $s$ erfüllt *(i)'* und *(ii)'*. Nach *(i)'* ist $s$ eine obere Schranke von $A$. Nach *(ii)'* gilt: wenn $s' < s$ ist, dann ist $s'$ keine obere Schranke von $A$. (Also gilt *(ii)* in Definition 2.1.17). Damit ist die Rückrichtung bewiesen.

„$\Rightarrow$“ Angenommen $s = \sup A$. *(i)'* folgt aus *(i)* aus Definition 2.1.17. Wir formulieren *(ii)* aus Definition 2.1.17 als

$$\text{wenn } s' \text{erfüllt, dass } s' \geq x \text{ für für alle } x \in A, \text{ dann gilt } s' \geq s.$$

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$\text{wenn } s' < s, \text{ dann existiert ein } x \in A, \text{ so dass } x > s'.$$

Also haben wir *(ii)'* gezeigt. □

Wir betrachten jetzt die Mengen

$$A = (0, 5], \quad B = (0, 5). \tag{2.1.9}$$

$A$ und $B$ sind nach oben beschränkt und haben beide das Supremum 5. Ein wichtiger Unterschied ist, dass $A$ sein Supremum **enthält**.

**Definition 2.1.20: Maximum/Minimum einer Menge**

Wenn das Supremum einer Menge $A$ zu $A$ gehört (also $\sup A \in A$), dann nennen wir es das Maximum von $A$. Wenn das Infimum einer Menge $A$ zu $A$ gehört (also $\inf A \in A$), dann nennen wir es das Minimum von $A$.

Also besitzt die Menge $B$ in (2.1.9) kein Maximum. Analog besitzen beide Mengen kein Minimum.

Man könnte enttäuscht sein, dass die nach oben beschränkte Menge $(0, 5)$ kein Maximum besitzt. Wichtig ist, dass jede nach oben beschränkte (nichtleere) Menge ein Supremum besitzt. (Glauben Sie, dass das gilt?) Dies ist unser letztes Axiom über $\mathbb{R}$.

**Axiom**

**(V) Vollständigkeitsaxiom:** Jede nach oben beschränkte, nichtleere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke (ein Supremum) $s \in \mathbb{R}$.

**Bemerkung.** *Vorsicht!!! Hier bedeutet "$A$ besitzt $s$" **nicht**, dass $s$ zu $A$ gehört! Das Axiom sagt nur, dass eine **reelle** Zahl $s$ existiert, die das Supremum von $A$ ist.*

Es reicht aus, dies für das Supremum anzunehmen, weil die analoge Aussage für das Infimum daraus folgt, wie wir im folgenden Lemma zeigen.

**Lemma 2.1.21**

Jede nach unten beschränkte nichtleere Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine größte untere Schranke (ein Infimum) $\sigma \in \mathbb{R}$.

*Beweis.* Sei $B$ eine nach unten beschränkte nichtleere Menge. Wir definieren $A := \{-\tilde{x} : \tilde{x} \in B\}$. Dann gilt $A \neq \emptyset$ und $A$ ist nach oben beschränkt.

⌈ Da $B$ nach unten beschränkt ist, existiert eine Zahl $m \in \mathbb{R}$, so dass $\tilde{x} \geq m$ für alle $\tilde{x} \in B$.
Es gilt $-\tilde{x} \leq -m$ für alle $\tilde{x} \in B$
$\Rightarrow x \leq -m$ für alle $x \in A$.
⌊ $\Rightarrow A$ ist nach oben beschränkt.

Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert das Supremum von $A$. Das heißt, es existiert ein $s \in \mathbb{R}$, so dass

$$x \leq s \quad \text{für alle } x \in A, \tag{2.1.10}$$
$$\text{und, wenn } x \leq \tilde{s} \quad \text{für alle } x \in A, \text{ dann gilt } \tilde{s} \geq s. \tag{2.1.11}$$

Wir zeigen jetzt, dass
$$\sigma := -s \tag{2.1.12}$$
das Infimum von $B$ ist. Als erstes bemerken wir, dass für jedes $\tilde{x} \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= -x && \text{für ein } x \in A \\ &\overset{(2.1.10)}{\geq} -s \\ &\overset{(2.1.12)}{=} \sigma. \end{aligned}$$

Also ist $\sigma$ eine untere Schranke von $B$. Dennoch bemerken wir, dass, wenn $\tilde{x} \geq \tilde{\sigma}$ für alle $\tilde{x} \in B$ und ein $\tilde{\sigma} \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} & \tilde{\sigma} \leq -x && \text{für alle } x \in A \\ \Rightarrow\ & -\tilde{\sigma} \geq x && \text{für alle } x \in A \\ \Rightarrow\ & -\tilde{\sigma} \geq s \overset{(2.1.12)}{=} -\sigma, && \text{weil } s = \sup A \\ \Rightarrow\ & \tilde{\sigma} \leq \sigma. \end{aligned}$$

Also ist $\sigma$ in der Tat das Infimum von $B$. □

Obwohl man enttäuscht sein kann, dass $B := (0, 5)$ sein Supremum nicht enthält, ist die gute Nachricht, dass wir das Supremum mit Elementen der Menge $B$ **so gut wie gewünscht approximieren können**. Oft reicht uns eine gute Approximation.

**Theorem 2.1.22: Approximationseigenschaft des Supremums**

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere nach oben beschränkte Menge und $s = \sup A$. Dann gibt es zu jedem $y < s$ ein $x \in A$, so dass gilt
$$y < x \leq s. \tag{2.1.13}$$

*Beweis.* Wenn $s \in A$ ist, wählen wir $x = s$ und dann gilt (2.1.13) für jedes $y < s$.

Jetzt betrachten wir den Fall $s \notin A$. Wenn (2.1.13) falsch wäre, würde $y_* \in \mathbb{R}$ existieren mit $y_* < s$, so dass $y_* \geq x$ für alle $x \in A$. Dies widerspricht, dass $s$ die kleinste obere Schranke von $A$ ist. □

Wichtig sind auch die folgenden Folgerungen:

**Lemma 2.1.23**

Die Menge $\mathbb{N}$ besitzt keine obere Schranke.

**Korollar 2.1.24: Satz von Archimedes**

Für jedes Paar positiver, reeller Zahlen $x$, $y$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$nx > y.$$

**Korollar 2.1.25: Satz von Eudoxos**

Für jede positive reelle Zahl $x$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n} < x.$$

*Beweis zu Lemma 2.1.23.* Wir nehmen an, es gäbe eine obere Schranke $\tilde{s} \in \mathbb{R}$. Nach (V) gibt es dann eine kleinste obere Schranke $s \in \mathbb{R}$. Nach Satz 2.1.22 existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$s - 1 < n \leq s.$$

Dies impliziert $n+1 > s$. Außerdem gilt $n+1 \in \mathbb{N}$. Dies widerspricht, dass $s$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. □

Wie folgt Korollar 2.1.24 aus Lemma 2.1.23? Wenn die Aussage in Korollar 2.1.24 nicht gelte, gäbe es ein Paar positiver, reeller Zahlen $x, y$, so dass $n \leq \frac{y}{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also wäre $\frac{y}{x}$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Wie folgt Korollar 2.1.25 aus Korollar 2.1.24?

Mit Korollar 2.1.25 können wir jetzt die folgende Behauptung aus den Grundlagen (Beispiel 1.3.18) rigoros begründen:

$$\bigcap_{n \geq 1} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}.$$

Wir werden Korollar 2.1.25 sehr oft benutzen, z.B., wenn wir Folgen konstruieren. Korollar 2.1.24 kann man anwenden, um die folgende wichtige Tatsache zu beweisen.

**Theorem 2.1.26: Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$**

Für jedes Paar $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass

$$a < q < b.$$

Satz 2.1.26 drückt aus, dass auch wenn $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist, es „genügend“ rationale Zahlen gibt, so dass wir jede reelle Zahl beliebig gut approximieren können. (Nehmen Sie $x \in \mathbb{R}$. Es existiert eine rationale Zahl $q_1 \in [x - 1/10, x]$, eine rationale Zahl $q_2 \in [x - 1/100, x]$, und so weiter. Das beantwortet die Frage, ob es Löcher gibt. Diese Eigenschaft wendet man jedes Mal an, wenn man $\pi$ zum Beispiel durch eine rationale Zahl mit gewünschter Präzision approximiert.

*Beweisidee.* Als Beispiel betrachen wir $x = 1/4$ und $y = 1/3$. Wir wollen eine rationale Zahl $q = m/n$ finden, so dass

$$\frac{1}{4} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}.$$

Es gibt kein $m$ mit der gewünschten Eigenschaft für $n \leq 6$, weil die Brüche $p/n$ zu weit auseinander liegen. Aber für $n$ groß genug (schon für $n = 7$ für dieses Beispiel), liegen manche Brüche der Form $p/n$ im offenen Intervall $(1/4, 1/3)$. Im Allgemeinen **muss** eine Zahl $p/n$ im Intervall $(x, y)$ liegen, solange

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Jetzt fangen wir mit dem eigentlichen Beweis an. □

*Beweis von Theorem 2.1.26.* Aus $b - a > 0$ folgt mit dem Satz von Eudoxos, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Wir unterscheiden dazwischen, ob $b > 0$ oder $b \leq 0$.

Fall 1: $b > 0$. Wir betrachten die Menge

$$E = \{k \in \mathbb{N} \colon b \leq k/n\}.$$

Mit dem Satz von Archimedes ist diese Menge nichtleer (warum?). Wegen der Wohlordnung der natürlichen Zahlen, besitzt $E$ somit ein kleinstes Element, das wir $k_0$ nennen. Wir definieren jetzt

$$m := k_0 - 1, \qquad q := \frac{m}{n}.$$

Da $m < k_0$, gilt $m \notin E$. Also ist $m \leq 0$ oder $b > m/n = q$. In beiden Fällen erhalten wir $q < b$. Andererseits folgt aus $k_0 \in E$, dass $b \leq k_0/n$ und somit

$$a = b - (b - a) < \frac{k_0}{n} - \frac{1}{n} = \frac{k_0 - 1}{n} = q.$$

Fall 2: $b \leq 0$. Jetzt wählen wir (mit dem Satz von Archimedes) $k \in \mathbb{N}$, so dass $k + b > 0$. Mit Fall 1 erhalten wir $r \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$k + a < r < k + b.$$

Mit $q := r - k$ erhalten wir eine rationale Zahl $q$, die $a < q < b$ erfüllt. □

Jetzt benutzen wir (V) um zu beweisen, dass “$\sqrt{2}$ existiert”.

**Lemma 2.1.27**

Es gibt genau eine positive reelle Zahl $r$, so dass

$$r^2 = 2.$$

Wir schreiben $r = \sqrt{2}$.

Beweisidee: Wir werden $r$ als Infimum einer geeigneten Menge definieren. Dann werden wir $r^2 > 2$ und $r^2 < 2$ ausschließen. Aus (O1) wird folgen, dass $r^2 = 2$ gilt. Überlegen Sie sich: Was würde passieren, wenn $r^2$ echt größer als 2 wäre? Wenn es echt kleiner als 2 wäre? Im ersten Fall werden wir zeigen, dass es ein $x$ in der Menge gibt, s.d. $x < r$ (widerspricht, dass $r$ eine untere Schranke der Menge ist). Im zweiten Fall werden wir zeigen, dass es eine untere Schranke der Menge gibt, die größer als $r$ ist (Widerspruch zum zweiten Teil der Definition von Infimum).

*Beweis.* Eindeutigkeit ist einfach. Angenommen es gäbe $r$, $s$ beide positiv, so dass $r^2 = s^2 = 2$. Dann ist

$$0 = r^2 - s^2 = (r - s)(r + s).$$

Aus $r + s > 0$ und Übung 2.1.3 folgern wir $0 = r - s$, also $r = s$.

Existenz ist umständlicher. Sei $A := \left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 > 2\right\}$. Da $2 \in A$ gilt, ist $A$ nicht leer. Da 0 eine untere Schranke von $A$ ist, existiert nach (V) eine größte untere Schranke. Wir nennen diese Zahl $r$. Es ist klar, dass $r \geq 0$ und auch, dass $r > 0$ gilt. Jetzt möchten wir zeigen, dass

$$r^2 = 2.$$

<u>Fall 1</u>: Angenommen, $r^2 > 2$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $r^2 = 2 + \varepsilon$. Wir definieren

$$\tilde{\varepsilon} := \min\left\{r, \frac{\varepsilon}{r}\right\}. \tag{2.1.14}$$

Dann ist $\tilde{\varepsilon} > 0$. Wir definieren

$$x := r - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}.$$

Man merkt, dass

$$x > 0 \qquad (\text{weil } r - \tilde{\varepsilon}/2 \geq r/2 > 0) \tag{2.1.15}$$

$$x < r \qquad (\text{weil } \tilde{\varepsilon} > 0). \tag{2.1.16}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(r - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right)^2 = r^2 - \tilde{\varepsilon}r + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4} \\ &> r^2 - \tilde{\varepsilon}r \qquad (\text{weil } \tilde{\varepsilon} > 0) \\ &= 2 + \varepsilon - \tilde{\varepsilon}r \qquad (\text{Definition von } \varepsilon) \\ &\overset{(2.1.14)}{\geq} 2 + \varepsilon - \varepsilon \qquad (\text{weil } \tilde{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{r}) \\ &= 2. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Nach (2.1.15) und (2.1.17) erhalten wir $x \in A$. Dann widerspricht (2.1.16), dass $r$ eine untere Schranke von $A$ ist.

Fall 2: Angenommen, $r^2 < 2$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= 2 - r^2, && (2.1.18) \\ \tilde{\varepsilon} &:= \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2r}, 1\right\}, && (2.1.19) \\ x &:= r + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}. \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{\varepsilon} > 0$ und $x > r$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(r + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right)^2 \\ &= r^2 + r\tilde{\varepsilon} + \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{4} \\ &\overset{(2.1.19)}{\leq} r^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\overset{(2.1.18)}{=} 2 - \varepsilon + \frac{3\varepsilon}{4} \\ &< 2. \end{aligned}$$

Also ist $x < y$ für alle $y \in A$. Aber dann ist $x$ eine untere Schranke von $A$, und $x > r$ widerspricht, dass $r$ die größte untere Schranke von $A$ ist. □

**Übung 2.1.28**

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

① Zeigen Sie, dass $\lfloor x \rfloor$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist.

② Sei $A$ eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\sup(\lfloor A \rfloor) = \lfloor \sup(A) \rfloor$ nicht gilt. Hierbei ist $\lfloor A \rfloor = \{\lfloor a \rfloor | a \in A\}$.

Wir sind jetzt endlich in der Lage zu zeigen, dass es für jedes $x \in [0, \infty)$ eine nichtnegative, reelle Zahl gibt, deren Quadrat gleich $x$ ist. Diese Zahl nennen wir $\sqrt{x}$.

**Lemma 2.1.29**

Für jedes $x \in [0, \infty)$ gibt es genau ein $r \in [0, \infty)$, so dass $r$ die Gleichung $r^2 = x$ löst.

**Definition 2.1.30**

Wenn für $x \in [0, \infty)$ die Zahl $r \in [0, \infty)$ die Gleichung $r^2 = x$ löst, dann nennen wir $r$ die Wurzel von $x$ und wir schreiben $r =: \sqrt{x}$.
Wir nennen die Abbildung $x \mapsto \sqrt{x}$ die Wurzelfunktion.

**Definition 2.1.31**

Zahlen in $\mathbb{R}$, die nicht rational sind, nennen wir irrational. Wir notieren sie mit

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad \text{oder} \qquad \mathbb{Q}^{\complement}.$$

**Schulverbindung 2.1.32**

Beachten Sie, dass diese Funktion eindeutig definiert ist. Für $x > 0$ gibt es zusätzlich zu $\sqrt{x}$ eine andere Zahl $(-\sqrt{x})$ mit der Eigenschaft, dass das Quadrat $x$ ergibt. Dies ist unproblematisch. Es wird leider manchmal an der Schule behauptet, dass beispielsweise $\sqrt{16} = \pm 4$. Dies ist falsch.

### 2.1.5 Einige Übungsaufgaben

**Übung 2.1.33**

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere beschränkte Teilmengen. Die Menge $A + B \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert als

$$A + B := \{c \in \mathbb{R} \colon \exists a \in A, \exists b \in B : c = a + b\}$$

. Zeigen Sie die Gleichheit

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

**Übung 2.1.34**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ ein Supremum oder ein Infimum haben und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte. Begründen Sie ihre Antworten.

① $Y_1 := \left\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\right\}$.

② $Y_2 := \left\{\frac{n}{2^n} | n \in \mathbb{N}\right\}$.

③ $Y_3 := \left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^m - \frac{5}{n} | m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

**Übung 2.1.35**

Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir $A \cdot B := \{c \in \mathbb{R} \colon \exists a \in A, \exists b \in B : c = ab\} \subseteq \mathbb{R}$.

① Es seien $A, B \subseteq (0, \infty)$ nicht-leere beschränkte Teilmengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B) \text{ und } \inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B).$$

② Geben Sie Beispiele von nicht-leeren beschränkten Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an mit

$$\sup(A \cdot B) > \sup(A) \cdot \sup(B) \text{ bzw. } \inf(A \cdot B) < \inf(A) \cdot \inf(B).$$

## Übung 2.1.36

Sei $A$ eine nichtleere Menge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, unter Annahme von $\inf(A) > 0$ und mit der Definition $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$, die Aussage

$$\sup(A^{-1}) = \big(\inf(A)\big)^{-1}.$$

## Übung 2.1.37

1. Zeigen Sie, dass für jede positive Zahl $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{n} < x$.
2. Zeigen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen $x, y$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $nx > y$ gilt.

## Übung 2.1.38

Sind die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt? Finden Sie (sofern existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

1. $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$,
2. $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x \leq 0\}$,
3. $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{2}\}$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ ist,
4. $M_4 := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 1\}$.

## Übung 2.1.39

1. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige, nichtleere, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie $-\sup(X) = \inf(-X)$, wobei die Menge $-X$ definiert ist durch $-X := \{-x : x \in X\}$.
2. Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen mit $M \cup N = \mathbb{R}$, so dass $x < y$ für alle $x \in M$ und alle $y \in N$ gilt. Zeigen Sie, dass $M$ nach oben und $N$ nach unten beschränkt ist und, dass $\sup(M) = \inf(N)$ gilt.

## Übung 2.1.40

Es bezeichne $\max\{a, b\}$ das größte Element $x \in \{a, b\}$ der Menge (d.h. $x \geq a$ und $x \geq b$) und analog für $\min\{a, b\}$. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Teilmengen. Zeigen Sie:

1. Die Menge $A \cup B$ ist beschränkt und es gilt

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\} \text{ sowie } \inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}.$$

② Sei zusätzlich $A \cap B \neq \emptyset$. Die Menge $A \cap B$ ist beschränkt und es gilt

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\} \text{ sowie } \max\{\inf(A), \inf(B)\} \leq \inf(A \cap B).$$

Kann hierbei Gleichheit auftreten?

## 2.2 Absolutbetrag und Abstand

Sie kennen den Betrag oder Absolutbetrag aus der Schule, und wir haben ihn schon in den Grundlagen betrachtet. Wir schauen uns jetzt die Eigenschaften des Absolutbetrags und des Abstands genauer an, erstens, weil wir diese Eigenschaften sehr oft benutzen werden und zweitens, um die Struktur, die wir später in $\mathbb{R}^n$ und in allgemeineren Vektorräumen erkennen werden, besser zu verstehen.

In den Grundlagen haben wir den Betrag durch

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

definiert. Bevor wir jetzt mit Ungleichungen loslegen, legen Sie für sich bitte fest, wie Mengen wie

① $\{x \in \mathbb{R} \colon |x - 2| \leq 6\}$,

② $\{x \in \mathbb{R} \colon |x + 1| > 2\}$

aussehen. Wie schreiben Sie $-2 \leq x - 1 \leq 2$ mit Betrag? Wie schreiben Sie $|x+3| \leq 4$ ohne Betrag? Und $|x - a| \leq b$? Wir wollen ein Gefühl für den Betrag in $\mathbb{R}$ mitnehmen.

Jetzt fragen wir uns, ob es eine Definition des Betrags gibt, die sich natürlich verallgemeinern lässt. Tatsächlich können wir ihn wie folgt definieren:

**Definition 2.2.1: Absolutbetrag**

Für eine reelle Zahl $x$ definieren wir den Absolutbetrag $|x|$ durch

$$|x| := \sqrt{x \cdot x}. \tag{2.2.2}$$

**Bemerkung.** *Wegen $x \cdot x \geq 0$ ist (2.2.2) für alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.*

**Bemerkung.** *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt analog*

$$|z| := \sqrt{z \odot \overline{z}},$$

*wobei $\odot$ die Multiplikation der komplexen Zahlen darstellt. Man bemerkt, dass für $z = x + iy$ gilt*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Bemerkung.** *Wie haben Sie in der Schule für $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ das Objekt $|\underline{x}|$ definiert?*

**Bemerkung.** *Man merkt, dass (2.2.1) und (2.2.2) die gleiche Funktion darstellen.*

**Theorem 2.2.2: Der Absolutbetrag ist "eine Norm".**

Der Absolutbetrag hat die folgenden Eigenschaften:

- Positive Definitheit:

$$|x| \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \qquad |x| = 0 \iff x = 0. \tag{2.2.3}$$

- Homogenität:
$$|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x| \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } x \in \mathbb{R}. \tag{2.2.4}$$

- Dreiecksungleichung:
$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.2.5}$$

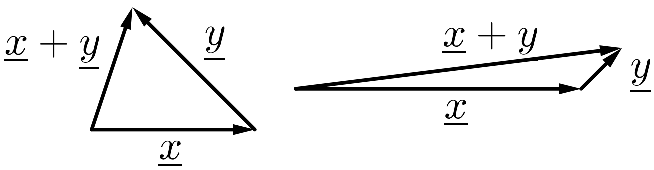



Abbildung 2.1: Wo der Name Dreiecksungleichung herkommt, merkt man in einer Dimension nicht. Wir werden später zeigen, dass sie auch in $\mathbb{R}^2$ gilt, wo man doch den Sinne des Namens versteht. Das obige Bild stellt die Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^2$ dar.

**Übung 2.2.3**

Wann ist $|x + y| = |x| + |y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$?

**Bemerkung.** *Im Allgemeinen definieren die Eigenschaften* (2.2.3)-(2.2.5) *eine sogenannte* ***Norm****.*

**Bemerkung.** *Später sehen wir, dass in* $\mathbb{R}^n$ $\sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$ *den Begriff "Betrag" auf* $\mathbb{R}^n$ *sinnvoll fortsetzt. Allgemein werden wir später sagen: Ein Skalarprodukt induziert eine Norm.*

*Beweis von Theorem 2.2.2.*

zu (2.2.3): Nach Lemma 2.1.2 und Definition 2.1.30 gilt $|x| = 0$ für $x = 0$. Sei also $x \neq 0$. Nach Lemma 2.1.9 *(iii)* ist

$$x \cdot x > 0 \qquad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Nach Lemma 2.1.29 und Definition 2.1.30 ist $\sqrt{x \cdot x}$ wohldefiniert und positiv für alle $x \neq 0$.

zu (2.2.4): Wir betrachten nacheinander die drei Möglichkeiten

$$\alpha \cdot x = 0, \quad \alpha \cdot x > 0, \quad \alpha \cdot x < 0.$$

Wenn $\alpha \cdot x = 0$, dann gilt
$$|\alpha \cdot x| = 0. \tag{2.2.6}$$

Andererseits ist $\alpha \cdot x = 0$ genau dann, wenn

$$\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0,$$

also gilt
$$|\alpha| \cdot |x| = 0 \overset{(2.2.6)}{=} |\alpha \cdot x|.$$
Wenn $\alpha \cdot x > 0$, dann gilt
$$|\alpha \cdot x| = \alpha \cdot x. \tag{2.2.7}$$
Außerdem haben $\alpha$ und $x$ das gleiche Vorzeichen (Lemma 2.1.9). Es folgt, dass

entweder $\alpha < 0$ und $x < 0$ oder $\alpha > 0$ und $x > 0$

gelten muss, so dass

$|\alpha| = -\alpha$ und $|x| = -x$ oder $|\alpha| = \alpha$ und $|x| = x$,

und damit in beiden Fällen
$$|\alpha| \cdot |x| = \alpha \cdot x \overset{(2.2.7)}{=} |\alpha \cdot x|.$$
Der Fall $\alpha \cdot x < 0$ funktioniert genauso.

zu (2.2.5): Aus $|x+y| = \sqrt{(x+y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$ erhalten wir
$$|x+y|^2 = x^2 + 2xy + y^2. \tag{2.2.8}$$
Andererseits ist
$$\begin{aligned} (|x| + |y|)^2 &= |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 \\ &= x^2 + 2|x| \cdot |y| + y^2. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$
Da $x \cdot y \leq |x| \cdot |y|$ ist, folgt (2.2.5) aus (2.2.8) und (2.2.9). □

Die Dreiecksungleichung ist eine sehr wichtige Ungleichung und wird sehr oft (in $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ und anderen Räumen...) angewendet. Ein Fehler, der manchmal vorkommt, ist aus $x < y$ und dem Monotoniegesetz der Addition zu behaupten, dass
$$|x+z| < |y+z|.$$
Ein Gegenbeispiel ist $x = -10, y = 1, z = 2$. Allerdings gelten folgende Ungleichungen:

**Korollar 2.2.4**

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$$\begin{aligned} |x-y| &\geq |x| - |y|, \\ \big||x| - |y|\big| &\leq |x-y| \qquad \text{(umgekehrte Dreiecksungleichung).} \end{aligned}$$

*Beweis.* Die erste Ungleichung folgt aus (2.2.5) angewendet auf $\tilde{x} = y, \quad \tilde{y} = x - y$, so dass
$$|\tilde{x} + \tilde{y}| \leq |\tilde{x}| + |\tilde{y}| \qquad \Rightarrow \qquad |x| \leq |y| + |x-y|.$$
Für die zweite Ungleichung kombinieren wir
$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

und

$$|y| - |x| \leq |x - y| \Rightarrow |x| - |y| \geq -|x - y|$$

um zu schließen

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$$

was der umgekehrten Dreiecksungleichung entspricht. □

Wir *benutzen den Absolutbetrag um "Abstand" zu definieren.*

**Bemerkung.** *Später werden wir sagen: Eine Norm induziert eine Metrik.*

**Definition 2.2.5**

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist der Abstand $d(x, y)$ zwischen $x$ und $y$ definiert als

$$d(x, y) = |x - y|.$$

**Bemerkung.** *Für $z, w \in \mathbb{C}$ definiert man $d(z, w) = |z - w|$, wobei $|\cdot|$ der Absolutbetrag in $\mathbb{C}$ ist.*

**Theorem 2.2.6: Unser Abstand ist "eine Metrik".**

Es gilt

- Positive Definitheit:

$$d(x, y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y. \tag{2.2.10}$$

- Symmetrie:

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.2.11}$$

- Dreiecksungleichung:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.2.12}$$

*Beweis.* (2.2.10) folgt aus der Definition und positive Definitheit des Betrags.
(2.2.11) folgt aus Homogenität des Betrags und $(-1)^2 = 1$.
(2.2.12) entspricht der Dreiecksungleichung. □

**Übung 2.2.7**

① Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|u + v| + |u - v| \geq |u| + |v|$ gilt.

② Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ gilt $\frac{1}{|x-2|} > \frac{2}{1+|x-3|}$? Begründen Sie ihre Antwort.

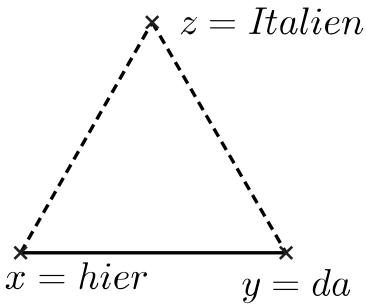



Abbildung 2.2: Wenn man von hier nach da reisen muss und einen schönen Zwischenaufenthalt in Italien möchte, kann es die Reise nur länger machen.

**Übung 2.2.8**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Ungleichungen erfüllt? Begründen Sie ihre Antworten.

① $|3 - |4 - x|| \leq 1$.

② $\frac{x}{1+|x|} < 4x^2$

**Übung 2.2.9**

Zeigen Sie, dass

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

alle Eigenschaften aus Theorem 2.2.6 erfüllt.

**Übung 2.2.10: Beispiel einer Metrik**

Sei $M = [1, \infty)$ und $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Zeigen Sie, dass $d$ alle Eigenschaften aus Theorem 2.2.6 erfüllt.

## 2.3 Einige elementare Ungleichungen

Obwohl man es in den ersten Vorlesungen kaum erkennt, können die meisten angewandten Probleme *nicht exakt gelöst werden.* Anstatt die genaue Lösung einer algebraischen Gleichung oder einer Differentialgleichung in der Hand zu haben, werden wir damit zufrieden sein müssen, eine Approximation der Lösung zu haben. Sehr oft werden wir auch komplizierte Probleme durch einfachere Probleme ersetzen. Um zu beurteilen, ob eine Approximation (einer Lösung oder eines Problems) gut ist oder nicht, werden wir Restterme abschätzen müssen. In diesem Abschnitt, schauen wir uns die ersten elementaren Ungleichungen an. Wir werden immer wieder zu diesen Ungleichungen zurückkehren.

**Lemma 2.3.1**

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt Folgendes:

*(i)* $x < y + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ genau dann, wenn $x \le y$.

*(ii)* $|x| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

**Übung 2.3.2: wichtig!**

Beweisen Sie das Lemma.

Wichtig ist auch, dass das Lemma 2.3.1 nicht aussagt, dass $x < y+\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ impliziert $x < y$.

Als Nächstes betrachten wir die Bernoullische Ungleichung. Diese Ungleichung ersetzt $(1+x)^n$ ($n$ Multiplikationen) durch $1 + nx$ (eine Multiplikation).

**Theorem 2.3.3: Bernoullische Ungleichung**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \ge 1 + nx. \tag{2.3.1}$$

Falls zusätzlich $x \neq 0$, dann ist

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{für alle } n > 1. \tag{2.3.2}$$

Ob (und wann) (2.3.1) oder (2.3.2) eine gute Approximation ist oder nicht, können Sie sich überlegen.

*Beweis.* Offensichtlich ist, dass:

- (2.3.1) für $x = 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie
- (2.3.1) für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n = 1$ gilt.

Da für $n > 1$ (2.3.2) stärker ist als (2.3.1), reicht es aus zu zeigen, dass (2.3.2) für $x \neq 0, n > 1$ gilt. Wir benutzen vollständige Induktion.

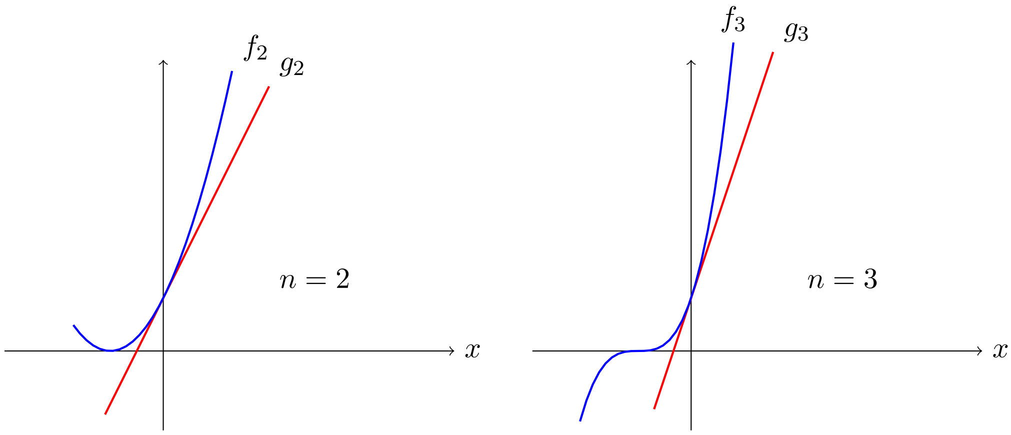
Schritt 1: („Base case“ oder Induktionsanfang.) ($n = 2$) Für $x > -1, x \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}(1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\ &> 1 + 2x \qquad \text{weil } x \neq 0,\end{aligned}$$

also gilt (2.3.2) für $n = 2$.

Schritt 2: (Induktionsschritt.) („$N \Rightarrow N+1$“) Sei $x > -1, x \neq 0$ gegeben. Wir nehmen an,

Abbildung 2.3: Die Funktionen, die wir in der Bernoulli Ungleichung für $n = 2, 3$ vergleichen




dass (2.3.2) für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{N+1} &= (1+x)(1+x)^N \\ &> (1+x)(1+Nx) && \text{nach Annahme und, weil } 1+x>0 \\ &= 1+Nx+x+Nx^2 \\ &> 1+(N+1)x && \text{weil } x \neq 0 \text{ (und } N \neq 0). \end{aligned}$$

Also gilt (2.3.2) für $N+1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion (Theorem 1.2.4) gilt (2.3.2) für alle $n \geq 2$. □

**Visualisierung (vorgreifen, Ergänzung, nicht klausurrelevant)** In der Bernoulli Ungleichung vergleicht man zwei Funktionen:

$$f_n(x) = (1+x)^n \qquad \text{und} \qquad g_n(x) = 1 + nx.$$

Sehen Sie z.B. den Fall $n = 2$ und $n = 3$ in Abbildung 2.3. Das Verhalten der Funktionen hängt davon ab, ob $n$ gerade oder ungerade ist. Für $n$ **gerade** bleibt der Graph von $f_n$ für alle $x$ oberhalb von dem von $g_n$. (Dies folgt aus der Konvexität von $f$ für $n$ gerade.) Für $n$ **ungerade** gibt es einen Punkt $x_n < -2$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} f_n(x) &\geq g_n(x) && \text{für alle } x \geq x_n, \\ f_n(x) &< g_n(x) && \text{für alle } x < x_n. \end{aligned}$$

(Dies hängt damit zusammen, dass die Steigung von $f_n$ größer ist als die von $g_n$ ist für $x$ negativ und groß in Betrag.) Tatsächlich liegt dieser Punkt näher und näher an $-2$, je größer $n$ ist. Später werden wir dies mit Hilfe von

$$\lim_{n \uparrow \infty} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \infty \qquad \text{für } x < -2$$

folgern können.

**Übung 2.3.4**

Sie leihen sich von Ihren Eltern 1000 € und kaufen dafür Aktien. Sie sind sicher, dass die Aktien irgendwann steigen werden. Aber in den ersten Jahren verlieren sie 2 % an Wert pro Jahr.

Wenn Sie mehr als 500 € verlieren, kriegen Sie Ärger. Sie fragen sich, wie lange Sie das noch durchhalten können. Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung an, um eine untere Schranke (ohne Taschenrechner, Handy, usw.) zu finden.

Es wird oft nützlich sein, ein Produkt durch eine Summe zu ersetzen. Das erste Ergebnis in dieser Richtung ist folgendes:

**Lemma 2.3.5: Elementare Youngsche Ungleichung**

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2. \tag{2.3.3}$$

Es folgt

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \quad \text{für alle } x, y \geq 0, \tag{2.3.4}$$

$$xy \leq \frac{\varepsilon}{2}x^2 + \frac{1}{2\varepsilon}y^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon > 0. \tag{2.3.5}$$

*Beweis.* Die Ungleichung (2.3.3) folgt aus

$$(x-y)^2 \geq 0. \tag{2.3.6}$$

Wenn man (2.3.3) mit $\tilde{x} = \sqrt{x}, \tilde{y} = \sqrt{y}$ betrachtet, erhält man (2.3.4). Für (2.3.5) betrachtet man (2.3.3) mit $\tilde{x} = \sqrt{\varepsilon}x, \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}y$. □

Frage: Wir schauen uns (2.3.4) genauer an. Der Ausdruck

$$\frac{x+y}{2}$$

auf der rechten Seite ist das arithmetische Mittel von $x$ und $y$. Auf der linken Seite ist

$$\sqrt{xy}$$

das sogenannte geometrische Mittel von $x$ und $y$. Also drückt (2.3.4) aus, dass das geometrische Mittel zweier reeller Zahlen kleiner dem arithmetischen Mittel der Zahlen ist. (Wann gilt Gleichheit?) Man kann sich fragen, ob es eine Verallgemeinerung dieser Tatsache gibt. Dafür führen wir ein:

**Definition 2.3.6: $n$-te Wurzel**

Seit $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Falls es eine nichtnegative reelle Zahl $r$ gibt, so dass

$$r^n = a$$

gilt, nennen wir $r$ die $n$-te Wurzel von $a$ und schreiben dafür

$$r = \sqrt[n]{a}.$$

**Bemerkung.** *Beachten Sie bitte, dass wir somit für die $n$-te Wurzel Funktion $\sqrt[n]{\cdot}$ den Definitionsbereich $[0, \infty)$ und Zielbereich $[0, \infty)$ festgelegt haben.*

Seien nun $n$ positive reelle Zahlen $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ gegeben. Man erhält:

**Theorem 2.3.7**

Es seien positive reellen Zahlen $x_1, ..., x_n$ für $n \geq 2$ gegeben. Dann gilt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{2.3.7}$$

Außerdem gilt in (2.3.7) Gleichheit genau dann, wenn

$$x_1 = x_2 = ... = x_n. \tag{2.3.8}$$

**Bemerkung.** *Man kann die zweite Aussage auch als Optimierungsproblem formulieren. Sei die Summe $x_1 + x_2 + ... + x_n$ gegeben. (Dies ist die Bedingung des Optimierungsproblems.) Man möchte das größte Produkt*

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \text{ (die Zielfunktion des Optimierungsproblems)}$$

*erhalten. Was sollte man für $x_1, x_2, ..., x_n$ wählen?* (2.3.8) *drückt aus, dass die eindeutige Lösung des Problems*

$$x_1 = x_2 = ... = x_n$$

*ist.*

*Beweis von Theorem 2.3.7.* Wir benutzen vollständige Induktion. Der Fall $n = 2$ wurde in (2.3.4) bestätigt und (2.3.8) für $n = 2$ folgt aus (2.3.6). Es bleibt zu zeigen, dass, wenn die Aussage für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt die Aussage auch für $N + 1$. Zunächst bemerken wir, daß aus

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{N+1}$$

(2.3.7) mit Gleichheit folgt. Also reicht es aus, wenn wir (2.3.7) mit echter Ungleichheit für $x_1, \ldots, x_{N+1}$ nicht alle gleich zeigen.

Also seien $x_1, \ldots, x_{N+1}$ nicht alle gleich gegeben. Dann gilt

$$\min\{x_1, \ldots, x_{N+1}\} < \underbrace{\frac{x_1 + \ldots + x_{N+1}}{N+1}}_{=:S} < \max\{x_1, \ldots, x_{N+1}\}. \tag{2.3.9}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) nehmen wir an, daß

$$x_N = \min\{x_1, \ldots, x_{N+1}\}, \qquad x_{N+1} = \max\{x_1, \ldots, x_{N+1}\},$$

so daß (2.3.9) die Form

$$x_N < S < x_{N+1} \tag{2.3.10}$$

annimmt. Jetzt möchten wir die Induktionsannahme anwenden. Dazu bemerken wir, daß

$$\begin{aligned} N\,S = (N+1)S - S &= x_1 + \ldots + x_{N+1} - S \\ &= x_1 + \ldots + x_{N-1} + y, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

wobei $y := x_N + x_{N+1} - S$ definiert ist. Man merkt, dass $y > 0$ aus (2.3.10) folgt. Der Vorteil in (2.3.11) ist, daß wir auf der rechten Seite die Summe von $N$ Zahlen haben. Des weiteren ist nach (2.3.11) das arithmetische Mittel dieser $N$ Zahlen $S$, so dass die Induktionsannahme für diese $N$ Zahlen liefert

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{N-1} \cdot y \leq S^N. \tag{2.3.12}$$

Aus (2.3.12) schließen wir, dass

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{N-1} \cdot y \cdot S \leq S^{N+1}. \tag{2.3.13}$$

Jetzt reicht es aus, wenn wir

$$y \cdot S > x_N \cdot x_{N+1}$$

zeigen. Wir rechnen

$$y \cdot S = (x_N + x_{N+1} - S)S = (S - x_N)(x_{N+1} - S) + x_N\, x_{N+1} \overset{(2.3.10)}{>} x_N\, x_{N+1}.$$

□

Auch wenn wir kompliziertere Probleme im Laufe des Semesters behandeln, soll man nie vergessen, fundiert darüber nachzudenken, ob die Antwort – und die Aufgabenstellung – sinnvoll sind!

**Schulverbindung 2.3.8**

Es wurde 2012 im Spiegel über angewandte Probleme in der Schule berichtet. 97 Schul-kindern wurde folgendes Problem präsentiert:

> Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?

76 der 97 befragten Kinder rechneten ein Ergebnis aus. (Was ist die falsche und populäre Antwort? Jeder erkennt sie: 36 Jahre.)

Unsere Aufgaben sind fortgeschrittener, aber es ist für uns genauso wichtig, nichts auszurechnen, bevor wir uns die Logik überlegt haben.

**Beispiel 2.3.9.** *Die Orte $A$ und $D$ seien 100 km voneinander entfernt. Die Strecke von $A$ nach $D$ wurde mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 60$ km/h zurückgelegt, die von $D$ nach $A$ mit $v_2 = 40$ km/h. Was ist die Durchschnittsgeschwindigkeit?*

(Was ist die falsche und populäre Antwort? 50 km/h.)

**Bemerkung.** *Hier ist die einzige nichttriviale Frage: Was ist die Definition von Durchschnittsgeschwindigkeit?*

*Lösung.* 200 km wurden gereist. Für die erste Strecke wurde

$$T_1 = \frac{100 \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = \frac{10}{6} \text{ h}$$

gebraucht, und für die zweite Strecke wurde

$$T_2 = \frac{100 \text{ km}}{40 \text{ km/h}} = \frac{10}{4} \text{ h}$$

gebraucht. Also hat die Reise insgesamt

$$T = T_1 + T_2 = \frac{25}{6} \text{ h}$$

gedauert. Die Durchschnittsgeschwindigkeit war also

$$\frac{200 \text{ km}}{\frac{25}{6} \text{ h}} = 48 \text{ km/h}.$$

□

**Bemerkung.** *Man kann es auch so formulieren: Aus* 60 *und* 40 *erhält man* 48*, indem man*

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{60}\right)} \ km/h$$

*ausrechnet. Für $n$ gegebene positive Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ heißt*

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)}$$

*das harmonische Mittel. Man kann zeigen (Übung!), dass*

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

## 2.4 Ein klein bisschen Topologie: reelle Punktmengen

**Definition 2.4.1: innerer Punkt, Innere**

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt innerer Punkt von $A$, wenn $\exists \varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$. Das Innere $A^\circ$ einer Menge $A$ ist die Menge aller inneren Punkte von $A$.

**Beispiel 2.4.2.** *Für $[0,1)$ ist jedes $x \in (0,1)$ ein innerer Punkt. 0 ist kein innerer Punkt. Das Innere ist $(0,1)$. Wir bestätigen dies:*

*Wir wollen als Erstes für ein beliebiges $x_0 \in (0,1)$ zeigen, dass $x_0$ ein innerer Punkt ist. Da einerseits $x_0 > 0$ und andererseits $1 - x_0 > 0$ können wir $\varepsilon > 0$ definieren durch*

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{|x_0|, |x_0 - 1|\} = \frac{1}{2}\min\{x_0, 1 - x_0\}.$$

*Dann folgt für alle $y$ mit $|y - x_0| \leq \varepsilon$, dass*

$$y \geq x_0 - |y - x_0| \geq x_0 - \varepsilon \geq \frac{1}{2}x_0 > 0,$$
$$y \leq x_0 + |y - x_0| \leq x_0 + \varepsilon \leq x_0 + \frac{1}{2}(1 - x_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_0 < 1.$$

*Damit haben wir* $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (0,1)$ *bestätigt.*

*Da* $x_0$ *ein beliebiger Punkt in* $(0,1)$ *war, haben wir auch gezeigt, dass das Innere das gesamte Intervall* $(0,1)$ *enthält. Das Innere ist per Definition eine Teilmenge von* $[0,1)$ *also bleibt es nur zu zeigen, dass* $0$ *kein innerer Punkt ist. Dies ist elementar, denn für jedes* $\varepsilon > 0$ *mit* $\varepsilon < 1$ *und für den "Ball"* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *um die Null gibt es einen Punkt (bspw.* $-\varepsilon/2$*), der nicht in* $(0,1)$ *liegt.*

**Beispiel 2.4.3.** *Für* $A := (0,1)$ *ist die Menge* $A$ *gleich dem Inneren* $A^\circ$*.*

**Übung 2.4.4**

Zeigen Sie: Das Innere von $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$.

**Definition 2.4.5: offen**

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt offen, wenn $A$ nur aus inneren Punkten besteht.

**Übung 2.4.6**

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Zeigen Sie:

1. $(a,b)$ ist offen,
2. $(a,b]$ ist nicht offen,
3. $\mathbb{R}$ ist offen,
4. $\emptyset$ ist offen.

**Definition 2.4.7: Häufungspunkt einer Menge**

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $A$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ es einen Punkt

$$x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \text{gibt mit} \quad x_1 \in A \text{ und } x_1 \neq x_0.$$

**Beispiel 2.4.8.** *So ist jedes* $x \in (0,1)$ *ein Häufungspunkt der Menge* $(0,1)$*, aber* $x = 0$ *und* $x = 1$ *sind auch Häufungspunkte von* $(0,1)$*. Für* $A := \{-1\} \cup (0,1)$ *ist* $-1$ ***kein*** *Häufungspunkt von* $A$*.*

**Übung 2.4.9**

Für eine beliebige Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ bezeichne $\mathrm{HP}(C)$ die Menge der Häufungspunkte von $C$. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{HP}(A) + \mathrm{HP}(B) \subseteq \mathrm{HP}(A+B)$$

gilt. Wie üblich ist die Menge $A + B \subseteq \mathbb{R}$ definiert als $A + B := \{c \in \mathbb{R} \colon \exists a \in A, \exists b \in B : c = a + b\}$. Widerlegen Sie die Gleichheit mit einem Gegenbeispiel.

**Definition 2.4.10: isolierter Punkt**

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in A$ heißt isolierter Punkt von $A$, wenn $\exists \varepsilon > 0$, so dass

$$\Big((x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\Big) \cap A = \emptyset.$$

**Beispiel 2.4.11.** *Also ist $-1$ isolierter Punkt von $A := \{-1\} \cup (0, 1)$. Isolierter Punkte einer Menge sind nie Häufungspunkte der Menge.*

**Definition 2.4.12: abgeschlossen**

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

**Übung 2.4.13**

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Zeigen Sie:

1. $[a, b]$ ist abgeschlossen,
2. $(a, b]$ ist nicht abgeschlossen,
3. $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen,
4. $\emptyset$ ist abgeschlossen.

**Theorem 2.4.14.** *Eine Menge ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Komplement offen ist.*

*Beweis.* Übung. □

Angesichts des Theorems wird oft die alternative Definition verwendet: $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist. Mit der Definition würde man zeigen wollen, dass jede abgeschlossene Menge alle ihrer Häufungspunkte enthält.

Aus jeder Menge können wir eine abgeschlossene Menge natürlich definieren, indem wir zu der Menge alle Häufungspunkte hinzutun:

**Definition 2.4.15: Abschluss**

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Die Menge $A \cup \{\text{alle Häufungspunkte von } A\}$ heißt Abschluss von $A$ und wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Die offenen Intervalle sind Mengen der Form

$$(a, b) \quad \text{oder} \quad (a, \infty) \quad \text{oder} \quad (-\infty, b) \quad \text{oder} \quad (-\infty, \infty).$$

Die abgeschlossenen Intervalle sind Mengen der Form

$$[a, b] \quad \text{oder} \quad [a, \infty) \quad \text{oder} \quad (-\infty, b] \quad \text{oder} \quad (-\infty, \infty).$$

Die Intervalle sind offene Intervalle, abgeschlossene Intervalle oder Mengen der Form

$$[a, b) \quad \text{oder} \quad (a, b].$$

**Definition 2.4.16: Randpunkt**

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Randpunkt von $A$, bezeichnet $x_0 \in \partial A$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ das Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ einen Punkt aus $A$ und einen Punkt aus $\mathbb{R} \setminus A$ enthält.

**Beispiel 2.4.17.** *Die Randpunkte von* $(-1, 1)$ *sind* $\pm 1$*. Die Randpunkte von* $[-1, 1]$ *sind auch* $\pm 1$*.* $\mathbb{R}$ *besitzt keine Randpunkte.*

**Übung 2.4.18: "Sternchen"**

Was sind die Randpunkte von $\mathbb{Q}$? Von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Ein Intervall mit Randpunkten $a, b \in \mathbb{R}$ wird "degeneriert" genannt, wenn $a = b$. So ist ein degeneriertes, offenes Intervall die leere Menge und ein degeneriertes, abgeschlossenes Intervall die Menge $\{a\}$.

**Definition 2.4.19: kompakt**

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beispiel 2.4.20.** *Beispiele von kompakten Mengen in* $\mathbb{R}$ *sind:*

- $[-1, 1]$
- $[-1, 1] \cup \{5\}$
- $[-1, 1] \cup [3, 4]$
- $\mathbb{N} \cap [-100, 100]$.

*Beispiele von Mengen in* $\mathbb{R}$*, die nicht kompakt sind, sind:*

- $(-1, 1)$
- $\mathbb{R}$
- $[0, 10] \setminus \{5\}$
- $\mathbb{N}$.

Eine letzte Definition, die wir für die Zukunft einführen wollen, ist:

**Definition 2.4.21: Umgebung**

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt die Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ Umgebung (von $x$), wenn $U$ eine offene Menge $V$ mit $x \in V$ enthält.

**Beispiel 2.4.22.** *Sei* $x = 1$*. Dann sind beispielsweise*

1. $(0, 2)$
2. $(-10, 10)$
3. $\mathbb{R}$
4. $[0, 3]$

*jeweils Umgebungen von* 1.

**Übung 2.4.23**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ offen, abgeschlossen oder keins von beiden sind und beweisen Sie ihre Behauptung. Die Begriffe offen und abgeschlossen sind in $\mathbb{C}$ wie im Reellen definiert, wobei in der Definition von Offenheit das Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ durch die offene Kreisscheibe $B_\varepsilon(x) = \{w \in \mathbb{C} : |w-x|_\mathbb{C} < \varepsilon\}$ ersetzt wird ($|\cdot|_\mathbb{C}$ bezeiche den komplexen Betrag). Wir erinnern weiter für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ an den Realteil $\mathrm{Re}(z) = x \in \mathbb{R}$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = y \in \mathbb{R}$ von $z$.

1. $M_1 := (a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, fest,
2. $M_2 := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,
3. $M_3 := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$,
4. $M_4 := \mathbb{Q}$.

*Hinweise:*

1. *Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Falls sie eine dieser Eigenschaften also für eine der Mengen nachweisen, müssen sie die andere nicht mehr widerlegen.*
2. *Zeigen Sie in (iii) zunächst, dass $|z|_\mathbb{C} \geq |\mathrm{Re}(z)|$ und $|z|_\mathbb{C} \geq |\mathrm{Im}(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt und, dass $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$ sowie $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.*

### 2.4.1 Exkurs: Cantor-Menge (nicht klausurrelevant)

Man kann zeigen, dass jede offene Menge in $\mathbb{R}$ als Vereinigung abzählbar vieler offenen Intervalle geschrieben werden kann. Abgeschlossene Mengen können hingegen sehr kompliziert sein. Wir schauen uns kurz ein Beispiel an.

Die Cantor-Menge ist leicht zu konstruieren. Man nimmt $[0, 1]$, zerlegt es in die drei gleichgroße Teilintervalle und verwerft das mittlere, offene Teilintervall. Dann wiederholt man dies, so dass:

$$\begin{aligned}
C_0 &= [0, 1], \\
C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\
C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],
\end{aligned}$$

und so weiter. Die Cantor-Menge $C$ ist definiert als

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Sie ist abgeschlossen (und beschränkt und somit in $\mathbb{R}$ kompakt). Außerdem ist sie im folgenden Sinne “klein”: Da $C_n$ mit $2^n$ Teilintervallen der Länge $1/3^n$ überdeckt werden kann und $(2/3)^n \to 0$ für $n \to \infty$ (nächster Abschnitt), ist das “Maß” (hier nicht definiert) von $C$ Null. Trotzdem ist $C$ im folgenden Sinne “gross”: Man kann zeigen, dass $C$ überabzählbar ist. Dies führen wir nicht detailliert durch, aber man bestätige, dass die Punkte in $C$ genau die Zahlen in $[0, 1]$ sind mit nur Nullen und Zweien in ihrer Darstellung zur Basis 3 (auch „ternäre“ Entwicklung genannt). Man konstruiere eine injektive Abbildung von $A$ in $C$, wobei $A$ die Zahlen sind, deren Darstellung zur Basis 2 nicht in Nullen endet. $A$ ist überabzählbar (irrationale Zahlen in $[0,1]$ sind in $A$ enthalten) und somit ist auch $C$ überabzählbar. Es gibt verschiedene Arten zu messen/beurteilen "wie groß" eine Menge ist!

Man kann weiter über die Cantor-Menge staunen. Das Innere ist leer. Trotzdem ist kein Punkt isoliert. Sie ist eine interessante Menge. Aber für uns dient sie hauptsächlich als Erinnerung daran, dass es *viel kompliziertere Mengen als Intervalle* gibt und dass man sogar in einer Dimension vorsichtig sein soll.

## 2.5 Weitere Aufgaben

Wir haben in diesem Kapitel *viel* gelernt und getan. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Themen und Fähigkeiten:

- Mit den algebraischen Axiomen und Ordnungsaxiomen einfache Tatsachen zeigen.
- Elementares Verständnis von $\mathbb{C}$.
- Vollständigkeitsaxiom und seine Folgerungen.
- Supremum, Infimum, Maximum, Minimum einer Menge.
- $\mathbb{Q}$ nicht vollständig, Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.
- Existenz von $\sqrt{2}$.
- Absolutbetrag, Abstand, Dreiecksungleichung.
- Elementare Ungleichungen insb. Lemma 2.3.1, Bernoulli'sche und Young'sche Ungleichungen.
- Elementare topologische Begriffe in $\mathbb{R}$ wie offen, abgeschlossen, Innere, Rand, Häufungspunkt.

### 2.5.1 Standardaufgaben

Zusätzlich zu den Übungsaufgaben und die Aufgaben, die im Kapitel eingebettet sind, bieten wir hier:

1. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $d > 0$. Zeigen Sie:
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

2. Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $xyz > 0$. Zeigen Sie, dass
$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$
Für welche $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $xyz > 0$ gilt Gleichheit?

3. Sind die folgenden Teilmengen Mengen reeller Zahlen beschränkt? Finden Sie (sofern existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.
   (a) $M_1 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n},\, n, m \in \mathbb{N}\right\}$,
   (b) $M_2 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$,

(c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$,
(d) $M_4 := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq 1 \text{ und } \frac{1}{1-x} < 1 + 2x\right\}$.

4. Das Gleiche für

(a) $Y_1 := \left\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\right\}$,
(b) $Y_2 := \left\{\frac{n}{2^n} | n \in \mathbb{N}\right\}$,
(c) $Y_3 := \left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^m - \frac{5}{n} | m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

5. Sind die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt? Finden Sie (sofern existent) Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$,
(b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x \leq 0\}$,
(c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{2}\}$, wobei $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ ist,
(d) $M_4 := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 1\}$.

6. Es seien $A$ und $B$ nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \subseteq B$. Zeigen Sie, dass $\sup(A) \leq \sup(B)$ gilt.
Zeigen Sie weiter, dass die Gleichheit gilt, falls für alle $b \in B$ ein $a \in A$ existiert sodass $b \leq a$ erfüllt ist.
Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung nicht gilt.

7. Seien $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie den Operator $\sqrt[n]{\cdot}$ wie in Definition 2.3.6.

(a) Zeigen Sie $\sqrt[n]{a^n} = a$.
(b) Zeigen Sie
$$a \leq b \Rightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}.$$

8. Seien $A,\ B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass dann die Menge
$$C := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$
ein Supremum hat und, dass gilt: $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$.

9. Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir $A \cdot B := \{c \in \mathbb{R}\colon\ \exists a \in A, \exists b \in B : c = ab\} \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Es seien $A, B \subseteq (0, \infty)$ nicht-leere beschränkte Teilmengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:
$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B) \text{ und } \inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B).$$
(b) Geben Sie Beispiele von nicht-leeren beschränkten Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an mit
$$\sup(A \cdot B) > \sup(A) \cdot \sup(B) \text{ bzw. } \inf(A \cdot B) < \inf(A) \cdot \inf(B).$$

10. Seien $A, B$ nicht leere, nach oben beschränkte Mengen positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Sei $\inf(A) > 0$ und $A^{-1} := \{a^{-1}\ : a \in A\}$. Dann gilt $\sup(A^{-1}) = \inf(A)^{-1}$.
(b) Sei $\inf(B) > 0$ und $A/B := \{a/b\ : a \in A,\ b \in B\}$. Dann gilt $\sup(A/B) = \sup(A)/\inf(B)$.

11 Man gebe, falls möglich, eine obere und eine untere Schranke an und bestimme, im Falle ihrer Existenz, $\sup M_i$, $\inf M_i$, $\max M_i$, $\min M_i$ für $i = 1, 2$.

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in N : \left(x = \dfrac{n+1}{n}\right) \vee (x = 2^{-n})\}$

(b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \wedge \dfrac{1-x}{x+2} \in \mathbb{N}\}$

12 Es seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen $a_n$, $b_n$ gegeben. Angenommen, sie sind *beschränkt*, in dem Sinne, dass es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leq K$, $|b_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \sup\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$

(b) $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} + \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{a_n + b_n : n \in \mathbb{N}\}$

(c) Finden Sie zu (a) und (b) Beispiele in denen keine Gleichheit gilt.

13 Bestimmen Sie für die Menge

$$M = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \middle| m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

falls existent, Supremum, Infimum, Maximum sowie Minimum.

14 Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen und bestimmen Sie, wann Gleichheit gilt:

(a) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$.

(b) $xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{4\varepsilon}$.

15 (a) Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existiert mit $r \in (a, b)$. *Hinweis*: Verwenden Sie z.B. Tutoraufgabe 1 auf Blatt 3.

(b) Ein $a \in \mathbb{R}$ heisst *algebraisch*, wenn ein nichtkonstantes Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ existiert mit ganzzahligen Koeffizienten $b_k \in \mathbb{Z}\ \forall k = 0, \ldots, n$, sodass $p(a) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist.

16 Betrachte eine Sammlung von Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften: (i) $I_{n+1} \subseteq I_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ und (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

(a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $r \in \mathbb{R}$ existiert mit $r \in I_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Hinweis*: Betrachten Sie dazu $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Konstruieren Sie für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ und Eigenschaften (a) und (b) wie oben, sodass $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

17 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen, abgeschlossen oder beschränkt?

(a) $M_1 := (1, 3] \setminus \{2, 3\}$

(b) $M_2 := \{x_1, \ldots, x_k\}$ für $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ und ein $k \in \mathbb{N}$.

(c) $M_3 := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

### 2.5.2 "Sternchenaufgaben"

① Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die folgende Ungleichung gilt:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

*Hinweis:* Geben Sie z.B. einen Beweis durch vollständige Induktion unter Benutzung der Bernoulli-Ungleichung.

② Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Größe eine natürliche Zahl darstellt:

$$\frac{2^{4n} - (-1)^n}{17}.$$

③ Sei $\{a_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt (d.h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}$ so dass $|a_{m,n}| \leq K$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(a) $\sup\{\sup\{a_{m,n} : n \in \mathbb{N}\} : m \in \mathbb{N}\} = \sup\{a_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\sup\{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\sup\{\inf\{a_{m,n} : n \in \mathbb{N}\} : m \in \mathbb{N}\} = \inf\{\sup\{a_{m,n} : m \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\}$.

④ Zeigen Sie für Mengen in $\mathbb{R}$:

(a) Der Schnitt von zwei offenen Mengen ist offen.

(b) Jede Vereinigung von offenen Mengen ist offen.

(c) Die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

(d) Jeder Schnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

⑤ (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge und $x \in U$. Zeigen Sie, dass $U$ genau dann eine Umgebung von $x$ ist, wenn ein $\delta > 0$ gibt, so dass $(x - \delta, x + \delta) \subseteq U$ ist.

(b) Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge und sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Umgebungen von $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine Umgebung von $x$ ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Umgebungen von $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i=1}^n U_i$ eine Umgebung von $x$ ist.

(d) Sei $U$ eine Umgebung von 0. Zeigen Sie, dass dann $x + U$ eine Umgebung von $x$ ist.

⑥ Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Menge.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind

i. $A$ enthält alle ihre Häufungspunkte.

ii. Für alle $x \notin A$ ist $\mathbb{R} \setminus A$ eine Umgebung von $x$.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind

i. $x \in A$ oder $x$ ist Häufungspunkt von $A$.

ii. $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{|a - x| \mid a \in A\} = 0$

Die Menge der Punkte, die (i) und (ii) erfüllen, bilden den Abschluss $\overline{A}$ von $A$.

⑦ Zeigen Sie:

(a) Wenn $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und offen ist, dann gilt $\sup(A) \notin A$ und $\inf(A) \notin A$.

(b) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind die einzigen Mengen in $\mathbb{R}$, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

⑧ Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende äquivalent:

*(i)* $A$ ist offen,

*(ii)* jedes $x \in A$ ist ein innerer Punkt von $A$,

*(iii)* $A$ ist eine Umgebung jedes $x \in A$.

⑨ Eine nichtleere Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn sie die Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen ist.

# Kapitel 3

# Zahlenfolgen

"A definition or theorem is not just a static statement, it is a weapon for deducing truth."

Charles Wells, 2016

In diesem Kapitel fangen wir an, mit Grenzwerten zu arbeiten. Grenzwerte sind das Herz der Analysis. Die Ableitung ist ein Grenzwert. Das Integral ist ein Grenzwert. Manchmal werden wir erfreulicherweise einen Grenzwert erkennen können. Oft werden wir mit der subtileren Frage konfrontiert: Können wir argumentieren, dass ein Grenzwert *existiert*, **obwohl wir den Wert nicht erkennen/ablesen können**?

## 3.1 Motivation

In Lambacher-Schweizer [2] werden Grenzwerte und Ableitungen auf Seite 78 eingeführt durch das Beispiel des Differenzenquotienten der Funktion $f(t) = 5t^2$ in $t_0 = 1$:

$$\frac{5(1+h)^2 - 5(1^2)}{h} = \frac{10h + 5h^2}{h} = 10 + 5h.$$

Es wird erklärt [2]: "Wenn $h$ gegen 0 strebt, also immer kleiner wird, strebt $10+5h$ gegen 10. Dieser Wert heißt **Grenzwert** des Differenzenquotienten."

Wenn wir für $g(x) = |x|$ den Differenzenquotienten

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} \overset{h \geq 0}{=} \frac{h-0}{h} = 1$$

für $h > 0$ betrachten, erhalten wir identisch 1. Heißt das, dass der Differenzenquotient gegen 1 "strebt"? Können wir "streben" mathematisch präzise machen? Was passiert, wenn wir den Grenzwert nicht ablesen können, etwa für

$$a(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad b(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$?

Grenzwerte existieren nicht nur für Differenzenquotienten, und bevor wir Grenzwerte von Differenzenquotienten (in Analysis II) anschauen, wollen wir das Konzept "Grenzwert" – getrennt von Differenenquotienten – verstehen. Was ist mit "streben" gemeint? Dass $10 + 5h$ näher und näher an 10 liegt, je kleiner wir $h$ machen, ist richtig. Wie können wir feststellen, ob beispielsweise

$$\sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x}}$$

nach einem Wert "strebt" für $x$ klein?

Um wieder auf sicheren Boden zu gelangen, müssen wir "Grenzwert" mathematisch präzise machen. Wir fangen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen an. Als wir in den Grundlagen die Dezimalzahl $0,\overline{9}$ angeschaut haben, haben wir schon mit Zahlenfolgen und deren Grenzwerten gearbeitet. Für die Folge

$$a_1 = 0,9, \qquad a_2 = 0,99 \qquad a_3 = 0,999 \qquad \text{u.s.w.}$$

haben wir behauptet, $a_n \to 1$ für $n \to \infty$. Bald werden wir dies präzise machen und zeigen können.

## 3.2 Mathematische Einleitung

Was ist eine Zahlenfolge? Wir schreiben sie oft als

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Wie präzisieren wir dies? Eine Zahlenfolge ist *eine Funktion auf* $\mathbb{N}$ *(oder auf einer unendlichen Teilmenge davon) in* $\mathbb{R}$.

**Definition 3.2.1: Folge**

Eine auf $\mathbb{N}$ oder auf einer unendlichen Teilmenge von $\mathbb{N}$ definierte reellwertige Funktion heißt Zahlenfolge oder Folge. Statt $n \mapsto f(n)$ schreiben wir für das Bild $f(n)$ von $n$ meistens $a_n$. Für $a_1, a_2, a_3, ...$ schreiben wir auch $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ oder $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ . Die Werte $a_n$ heißen Folgenglieder.

Wichtig ist, die Notation $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (eine Folge) nicht mit der Notation $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (eine Menge) zu verwechseln!

Wie in der Definition gesagt, ist es unerheblich, dass die Nummerierung mit 1 beginnt. Zum Beispiel ist $a_5, a_7, a_{12}, ...$ eine Folge. Wie wir schon bemerkt haben, können Folgen explizit oder rekursiv definiert werden. Als Beispiel betrachten wir die Folge

$$a_n := (-1)^n \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{(eine explizit definierte Folge)}$$

und die Folge

$$a_1 = 2,\ a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \quad \text{(eine rekursiv definierte Folge).}$$

Zwei wichtige Eigenschaften (für Folgen und später für allgemeine Funktionen) sind Monotonie und Beschränktheit. Wir fangen mit *Monotonie* an.

**Definition 3.2.2: Monotonie einer Folge**

Eine Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, wenn

$$n > m \qquad \Rightarrow \qquad a_n \geq a_m.$$

Wenn die strenge Ungleichheit gilt, heißt die Folge zusätzlich streng monoton wachsend. Analog definiert man monoton fallend und streng monoton fallend. Wenn eine Folge monoton wachsend oder monoton fallend ist, wird sie auch monoton genannt. Analog für streng monoton.

Beschränktheit (vergleiche mit Definition 2.1.15) nimmt die Form:

**Definition 3.2.3: Beschränktheit einer Folge**

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $m$ gibt, die eine untere Schranke des Bildes ist, d.h. falls gilt:

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist } m \leq a_n.$$

Analog für nach oben beschränkt. Ist die Folge sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so nennen wir sie beschränkt.

Die Folge mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend. Die Folge mit $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht monoton.

**Beispiel 3.2.4.** *Ein Ball fällt aus der Höhe $h$ auf einen Tisch und springt bis zur Höhe $0,9h$ zurück und immer so weiter. Bestimme die jeweiligen Sprunghöhen und den Gesamtweg, den der Ball bis zum $N$-ten Auftreffen zurückgelegt hat. Man erhält*

$$a_n = (0,9)^n h, \quad n = 1, 2, \dots$$

*für die Sprunghöhe nach dem $n$-ten Auftreffen und*

$$b_1 = h, \quad b_n = b_{n-1} + 2 \cdot (0,9)^n h, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

*für die Länge des Gesamtwegs bis zum $n$-ten Auftreffen. Wir bemerken Folgendes:*

- *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist streng monoton fallend, nach oben durch $h$ beschränkt, nach unten durch $0$ beschränkt.*
- *$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist streng monoton wachsend und nach unten durch $h$ beschränkt. Ist $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ auch nach oben beschränkt? Ja, wie wir jetzt zeigen werden.*

**Lemma 3.2.5: Geometrische Reihe**

Definiere $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} r^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir nennen die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die *geometrische Reihe* und Folgendes stellen wir in Abhängigkeit von $r$ fest:

- Für $r \geq 1$ ist die Folge nach oben unbeschränkt.
- Für $r \in (0, 1)$ ist die Folge beschränkt und es gilt

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \tag{3.2.1}$$

*Beweis.* Für $r \geq 1$ ist $s_n \geq \sum\limits_{k=0}^{n} 1^k$, also reicht es aus, wenn wir zeigen, dass $\sum\limits_{k=0}^{n} 1^k$ nach oben unbeschränkt ist. Da $\sum\limits_{k=0}^{n} 1^k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ mal}} = n + 1$, folgt dies aus der Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$.

Für $r \in (0, 1)$ rechnen wir aus

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + r + \dots + r^n, \\ r s_n &= \quad\;\; r + \dots + r^n + r^{n+1}, \end{aligned}$$

so dass

$$(1-r)s_n = 1 - r^{n+1}.$$

Dies entspricht (3.2.1). Aus den Ungleichungen $1 - r^{n+1} < 1$ und $1 - r > 0$ folgt außerdem

$$s_n < \frac{1}{1-r},$$

sodass $s_n$ nach oben beschränkt ist. (Wichtig ist, dass die rechte Seite unabhängig von $n$ ist.) Aus (3.2.1) und $r^{n+1} \leq r$ für $r \in (0,1)$ schließen wir, dass

$$s_n \geq \frac{1-r}{1-r} = 1,$$

so dass $s_n$ nach unten durch 1 beschränkt ist. Also ist $s_n$ beschränkt. □

Frage: Was passiert, wenn $r \in (-1, 0)$?

Die geometrische Reihe taucht in vielen Anwendungen auf. Für $r > 0$ ist die Folge $s_n$ monoton. Monotone Folgen sind einfacher als nicht monotone Folgen, aber wir betrachten jetzt die nicht monotonen Folgen:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2n},$$
$$g_n = (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^n \cdot h.$$

Man bemerkt sowohl für $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ als auch für $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, dass die Folgenglieder sich immer mehr der Zahl $x = 0$ nähern. Diese Beispiele sind einfach wegen der Homogenität des Absolutbetrags (siehe Theorem 2.2.2) und der Form der Folgen. Z.B. erhält man

$$|a_n| = |(-1)^n| \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}.$$

Den Begriff "gegen 0 zu streben" oder "sich 0 anzunähern" formulieren wir mathematisch wie folgt:

**Definition 3.2.6: Nullfolge**

Eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ reeller Zahlen heißt Nullfolge, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ in $\mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Wir sagen, die Folge hat den Grenzwert Null (oder: konvergiert gegen Null), und schreiben

$$a_n \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

**Notation 3.2.7**

Wenn man

$$a_n \uparrow 0 \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \downarrow 0$$

schreibt, bedeutet es, dass $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ monoton wachsend bzw. monoton fallend sind und dabei für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Alternativ findet man die Notation

$$a_n \nearrow 0 \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \searrow 0.$$

**Bemerkung.** *Nach der Definition ist $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge genau dann, wenn $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist.*

**Bemerkung.** *Es ist wichtig, dass man $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen darf. $\varepsilon > 0$ spielt die Rolle einer Fehlertoleranz. Diese ist der Input und wird gegeben. Zurückgeliefert wird ein passender Output $N$, so dass der Fehler für alle Folgenglieder nach dem $N$ten Folgenglied kleiner gleich der Toleranz ist. Im Allgemeinen muss $N$ sehr groß gewählt werden, wenn $\varepsilon$ sehr klein ist.*

**Beispiel 3.2.8.** *$c_n = 200\left(\frac{9}{10}\right)^n, \varepsilon = 10^{-4}$. Dann ist $|c_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq 138$. Also können wir $N = 138$ wählen.*

**Beispiel 3.2.9.**

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{4}, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = 0, \quad a_9 = 0, \quad a_{10} = \frac{1}{4}, \ \ldots$$

*Egal wie groß $N \in \mathbb{N}$ ist, gibt es ein $n \geq N$, so dass $a_n = \frac{1}{4}$ ist. Also ist $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ keine Nullfolge.*

**Bemerkung.** *Ob eine Folge eine Nullfolge ist, hat **nur mit dem Verhalten für große** $n$ zu tun.*

$$b_n = \begin{cases} 10000 \cdot 5^n & n = 1, 2, \ldots, 500 \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n & n \geq 501 \end{cases}$$

*ist eine Nullfolge. Dass eine Folge eine Nullfolge ist, bedeutet insbesondere nicht, dass alle Folgenglieder „klein sind“, sondern nur, dass sie für $n$ groß genug klein sind.*

**Übung 3.2.10**

Für die Folge mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$: Wie groß muss $N = N(\varepsilon)$ zu $\varepsilon = 0,1$ sein? Woher wissen Sie, dass für alle $n \geq N$ die notwendige Bedingung erfüllt wird? Gleiche Frage für $\varepsilon = 0,6$. Finden Sie das kleinstmögliche $N$.

**Julia-code 3.2.11**

Wie so oft, helfen Visualisierungen uns, ein Gefühl für das Verhalten einer Folge zu bekommen. Wir schauen uns die ersten Folgenglieder der Folge $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ mit Julia an. Wir schreiben folgenden Code:

```
using SymPy
using Plots
x=[n for n=1:40]
y=[sqrt(n+1)-sqrt(n) for n=1:40]
plot(x,y,seriestype=:scatter,color=:blue,label="c_n")
```

Der Output ist:

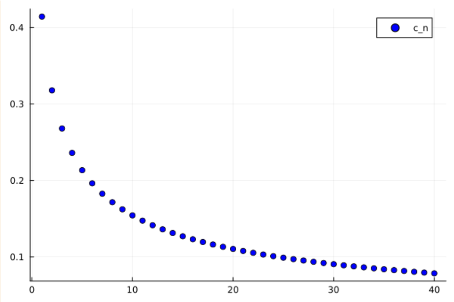



Abbildung 3.1: Die ersten 40 Folgenglieder

Es sieht aus, als ob $c_n$ eine Nullfolge ist.

**Beispiel 3.2.12.** *Bestimmen Sie, ob die folgenden Folgen gegen Null konvergieren oder nicht:*

1. $a_n = \frac{1}{n}$
2. $b_n = b + (-1)^n b + \frac{1}{n}, \quad b \in \mathbb{R}$
3. $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

*Lösung.* Zu 1: Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig klein) gegeben. Wir definieren

$$N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil,$$

wobei für $x \in \mathbb{R}$ $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer gleich $x$ bezeichnet. Da $\varepsilon > 0$, ist $N \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{für alle}\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N,$$

so dass

$$\frac{1}{n} \leq \varepsilon \quad \text{für alle}\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N,$$

wie gewünscht.

Zu 2: Für $b = 0$ haben wir schon in 1 gezeigt, dass $\{b_n\}$ eine Nullfolge ist. Wir zeigen jetzt für $b \neq 0$, dass $\{b_n\}$ keine Nullfolge ist. Für $n$ gerade ist

$$b_n = 2b + \frac{1}{n}.$$

Wenn $b > 0$, dann setzen wir $\varepsilon := 2b$. Dann ist

$$|b_n| = b_n = 2b + \frac{1}{n} > \varepsilon \quad \text{für alle gerade } n \in \mathbb{N}.$$

Wenn $b < 0$, dann setzen wir $\varepsilon := |b|$ Für

$$n \geq \frac{1}{|b|} \tag{3.2.2}$$

und gerade gilt dann

$$|b_n| = \left|2b + \frac{1}{n}\right| = \left|-2b - \frac{1}{n}\right| \overset{(3.2.2)}{=} 2|b| - \frac{1}{n} \overset{(3.2.2)}{\geq} |b| \geq \varepsilon.$$

Zu ③: Oben haben wir mit Julia darauf hingewiesen, dass $c_n$ eine Nullfolge sein könnte. Aber warum? Die „Idee“ ist, dass

$$\sqrt{n+1} \approx \sqrt{n} \quad \text{für } n \text{ groß},$$

so dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ klein ist (für $n$ groß). Diese Idee müssen wir irgendwie präzise machen. Der „Trick“, der hier nützlich ist, ist das Erweitern mit Eins:

$$\begin{aligned} 0 \leq c_n &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$. Dann ist

$$c_n \overset{(3.2.3)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Also ist $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. □

## Übung 3.2.13

Entscheiden Sie, ob eine Nullfolge gegeben ist, wenn die Folgenglieder sind:

① $\frac{1}{\sqrt{n}}$

② $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

③ $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

④ $\frac{\sin(n)}{n}$

⑤ $(-1)^n(1-\frac{1}{n})$.

Wie wir schon gesehen haben, hilft es oft, mit einer einfacheren Folge zu vergleichen.

## Theorem 3.2.14: Vergleichskriterium für Nullfolgen

Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Zahlenfolgen mit

$$|b_n| \leq |a_n| \tag{3.2.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, die größer als eine feste Zahl $N_0$ sind. Wenn $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann gilt auch $b_n \to 0$ für $n \to \infty$.

*Beweis.* Leichte Übung. □

**Definition 3.2.15: Majorante**

Wenn (3.2.4) gilt, dann nennen wir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Majorante von $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Man sagt, dass $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ majorisiert.

**Beispiel 3.2.16.** *Zeigen Sie, dass* $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ *für* $0 < |\alpha| < 1$ *eine Nullfolge ist.*

*Lösung.* Wir wenden die Bernoullische Ungleichung an. Da $|\alpha| \in (0,1)$, ist

$$\frac{1}{|\alpha|} = 1 + h$$

für ein geeignetes $h > 0$. Es folgt

$$|\alpha|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{nh}.$$

Da $\left\{\frac{1}{nh}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, ist auch $\{|\alpha|^n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge und somit auch $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Nullfolgen besitzen folgende Eigenschaften:

**Theorem 3.2.17: Eigenschaften von Nullfolgen**

Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Nullfolgen und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt

*(i)* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt,

*(ii)* $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist eine Nullfolge,

*(iii)* $\left\{\sqrt{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge,

*(iv)* $\{a_n \cdot c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge.

*Beweis.* Zu *(i)*: Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n| \leq 1 \quad \text{for all}\, n \geq N.$$

Wir setzen

$$C := \max_{1 \leq n \leq N} \{|a_n|\}_{n=1}^{\infty} = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|\}$$

und definieren

$$\tilde{C} := \max\{C, 1\}.$$

Dann ist $|a_n| \leq \tilde{C} \quad \text{for all}\, n \in \mathbb{N}$.

Zu *(ii)*: Nach der Dreiecksungleichung und der Homogenität des Absolutbetrags gilt

$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha||a_n| + |\beta||b_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.5}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$. (Warum?) Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Nullfolgen sind, existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \quad \text{für alle } n \geq N_1, \qquad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \quad \text{für alle } n \geq N_2. \tag{3.2.6}$$

Aus (3.2.5) und (3.2.6) folgt

$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Zu *(iii)*: Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n| < \varepsilon^2 \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Zu *(iv)*: Nach Annahme existiert $M \in \mathbb{R}$, so dass

$$|c_n| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach *(ii)* ist $\{M|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. Da $|a_n \cdot c_n| \leq M|a_n|$, schließen wir mit Theorem 3.2.14, dass $\{a_n \cdot c_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. □

Fall *(iv)* oben ist der einfache Fall. Sehr oft werden wir Folgenglieder der Form

$$a_n \cdot c_n$$

betrachten, wobei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine unbeschränkte Folge ist. Die Frage ist die Rate: verschwindet $a_n$ schneller oder wächst $c_n$ schneller? Als Beispiel betrachten wir die Folge mit Folgengliedern

$$n\alpha^n, \quad |\alpha| < 1.$$

Die „intuitive“ Antwort ist, dass diese Folge gegen Null konvergiert, weil „exponentielles Abfallen lineares Wachsen schlägt“. Jetzt begründen wir diese Behauptung. Die Idee ist folgende: Als wir oben gezeigt haben, dass $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen 0 konvergiert, haben wir die Abschätzung

$$|\alpha|^n \leq \frac{1}{hn} \qquad \text{für ein } h > 0$$

angewendet. Hier reicht diese Abschätzung nicht aus, weil wir daraus nur

$$|n\alpha^n| \leq \frac{1}{h}$$

erhalten. Wegen $\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} > 1$ können wir $\tilde{h}$ durch

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} = 1 + \tilde{h}$$

definieren und erhalten somit eine bessere Rate, wie wir jetzt zeigen.

*Beweis.* Sei $\tilde{h}$ durch

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} = 1 + \tilde{h}$$

definiert. Dann ist $\tilde{h} > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned} |n\alpha^n| = n|\alpha|^n &= n \cdot \frac{1}{(1+\tilde{h})^n} \cdot \frac{1}{(1+\tilde{h})^n} \\ &\leq n \cdot \frac{1}{1+n\tilde{h}} \cdot \frac{1}{1+n\tilde{h}} \qquad \text{(Bernoullische Ungleichung)} \\ &\leq n \cdot \frac{1}{(n\tilde{h})^2} = \frac{1}{n(\tilde{h})^2}, \end{aligned}$$

also ist $\{n\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. □

Frage: Können Sie eine noch bessere Rate des Abfallens von $\{\alpha^n\}$ erhalten? Inwiefern?

**Beispiel 3.2.18.** *Sei $x \in \mathbb{R}$. Ist die Folge mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$ eine Nullfolge?*

*Lösung.* Ja, Abfallen durch Fakultät schlägt exponentielles Wachstum. Dies machen wir präzise wie folgt: Wir schreiben

$$\frac{x^n}{n!} = \underbrace{\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{m}}_{=:C_m} \cdot \underbrace{\frac{x}{m+1} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n}}_{n-m \text{ Terme}}, \tag{3.2.7}$$

wobei $C_m < \infty$ für $m$ groß aber fest (endlich) gilt. Wir wählen $m \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass

$$\left|\frac{x}{m}\right| < \frac{1}{2}. \tag{3.2.8}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \overset{(3.2.7)}{\leq} C_m \cdot \left|\frac{x}{m}\right|^{n-m} &\overset{(3.2.8)}{\leq} C_m \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-m} \\ &= C_m 2^m \left(\tfrac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Für $m$ fest ist $C_m \cdot 2^m$ eine feste Zahl. Da $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, ist auch $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge. (Nach Theorem 3.2.17 *(ii)* und Theorem 3.2.14.) □

**Bemerkung.** *Die Formulierung „m groß aber fest“ bedeutet, dass wir zwar je nach x m sehr groß wählen müssen – aber dieses so gewählte m muss nicht mehr im Laufe des Beweises geändert werden und kann somit im Folgendem auch als etwas Festes, Gegebenes betrachtet werden. Daher ist oft die Reihenfolge in Beweisen wichtig. In diesem ist x gegeben und dann wählen wir unser m. Danach ist es nicht mehr möglich x zu ändern, der Beweis müsste dann wieder von vorne betrachtet werden.*

**Übung 3.2.19**

Untersuchen Sie, ob eine Nullfolge gegeben ist:

$$① \ a_n = \frac{n^3}{n!}, \qquad ② \ a_n = \frac{x^n}{n^2} \text{ für } x \in [-1,1], \qquad ③ \ a_n = \frac{x^n}{n^2} \text{ für } x > 1.$$

## 3.3 Allgemeine Konvergenz und Divergenz

Jetzt verallgemeinern wir von Nullfolgen auf allgemeine, konvergente Folgen.

**Definition 3.3.1: allgemeine Konvergenz**

Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt konvergent mit Grenzwert $a$, oder $a_n$ konvergiert gegen $a$, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft, dass die Folge $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann heißt $a$ der Grenzwert der Folge und wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad \text{für } n \to \infty.$$

**Notation 3.3.2**

Analog zur Notation für Nullfolgen schreibt man

$$a_n \uparrow a \quad \text{oder} \quad a_n \nearrow a \qquad \text{bzw.} \qquad a_n \downarrow a \quad \text{oder} \quad a_n \searrow a,$$

wenn $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ für $n \to \infty$ monoton wachsend bzw. monoton fallend gegen $a$ konvergiert.

**Definition 3.3.3**

Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Ansonsten heißt die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergent.

**Übung 3.3.4**

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

$$\text{(a) } a_n = \frac{2n^2 - 3n}{n^2 + 1}, \qquad \text{(b) } a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2 + 5}$$

**Übung 3.3.5**

Zeigen Sie, dass $0,\overline{9} = 1$.

Wie kann eine Folge *nicht konvergieren*? Man betrachte

$$a_n = n, \qquad b_n = (-1)^n \cdot n, \qquad c_n = (-1)^n.$$

Alle drei bilden divergente Folgen, aber das Verhalten ist sehr verschieden. Mit Julia plotten wir:

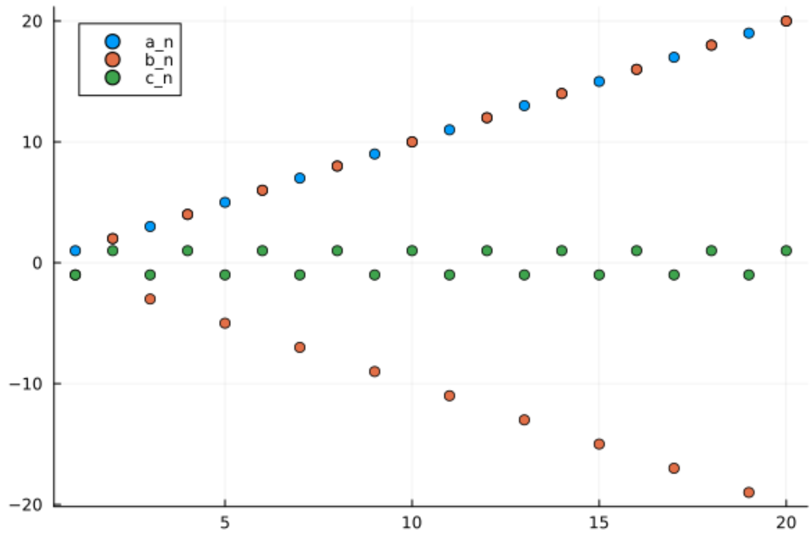



Abbildung 3.2: Die ersten 20 Folgenglieder von $a_n$, $b_n$ und $c_n$

Um über den Unterschied reden zu können, führen wir folgende Definition ein:

**Definition 3.3.6: bestimmte, unbestimmte Divergenz**

Wir sagen, dass $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen Unendlich divergiert, wenn es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $N = N(M)$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$a_n \geq M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$a_n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Analog für $a_n \to -\infty$. Wenn $a_n \to \infty$ oder $a_n \to -\infty$, dann sagen wir, dass die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bestimmt divergent ist. Wenn $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergent, aber nicht bestimmt divergent ist, dann sagen wir, dass die Folge unbestimmt divergent ist.

Die Folge $a_n$ von oben ist eine bestimmt divergente Folge, die gegen Unendlich divergiert. Außerdem ist $a_n$ nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Die Folge $b_n$ von oben ist unbestimmt divergent und sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt. Die Folge $c_n$ ist unbestimmt divergent und beschränkt. Ein weiteres Beispiel ist:

$$\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{(1 + (-1)^n)n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Diese Folge ist unbestimmt divergent, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt.

**Bemerkung.** *Achtung! Bemerken Sie, dass*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

***nicht impliziert**, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist (weil Unendlich keine reelle Zahl ist; sehen Sie Definition 3.3.3).*

**Übung 3.3.7**

Konvergieren die angegebenen Folgen? Begründen Sie ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Falls die Folge divergiert, entscheiden Sie, ob sie bestimmt divergiert.

1. $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$
2. $b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
3. $c_n := \frac{n^2+3n+1}{4n^2+(-1)^n}$
4. $d_n := \frac{n^2+3n+1}{4(-1)^n n^2+1}$
5. $e_n := \frac{n^7}{2^n}$.

Im Fall von Konvergenz, hat man angenehme Eigenschaften, wie Eindeutigkeit in Theorem 3.3.8 oder die weiteren Eigenschaften aus Theorem 3.3.12 unten.

**Theorem 3.3.8: Grenzwert eindeutig bestimmt**

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.


*Beweis.* Wir nehmen an, dass $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent ist mit den Grenzwerten $a$ und $\tilde{a}$, wobei $a \neq \tilde{a}$ gilt. Wir definieren

$$\varepsilon := \frac{1}{2}|a - \tilde{a}|.$$

Da $a_n \to a$ konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| \le \varepsilon \quad \text{für alle } \; n \ge N.$$

Aus der Dreiecksungleichung erhält man

$$\begin{aligned} |a_n - \tilde{a}| &\ge |a - \tilde{a}| - |a_n - a| \\ &\ge 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \qquad \text{für alle } \; n \ge N, \end{aligned}$$

was widerspricht, dass $a_n \to \tilde{a}$ für $n \to \infty$. $\square$

### Übung 3.3.9

Schreiben Sie einen direkten Beweis von Theorem 3.3.8.

Man erhält die folgenden Verallgemeinerungen der Sätze 3.2.14 und 3.2.17.

### Theorem 3.3.10: Vergleichskriterium

Es seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ Zahlenfolgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n \geq N,$$

für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

*(i)* Wenn $a_n \to a, b_n \to b, c_n \to c$ für $n \to \infty$, dann ist

$$a \leq b \leq c.$$

*(ii)* (Sandwichkriterium oder Squeeze Theorem) Wenn $a_n \to a$ und $c_n \to a$ für $n \to \infty$ (gleiche Grenzwerte für $a_n$ und $c_n$), dann ist die Folge $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent und

$$b_n \to a \quad \text{für } n \to \infty.$$

**Bemerkung.** *Theorem 3.3.10* (ii) *wird das „Sandwich“-Kriterium genannt, weil $b_n$ zwischen zwei Folgen eingeschlossen ist, wie der Käse zwischen zwei Brotscheiben.*

### Übung 3.3.11

Untersuchen Sie auf Konvergenz: $a_n = 2^{-n}\cos(n^3 - 2n^2 + 7)$.

### Theorem 3.3.12: Eigenschaften konvergenter Folgen

Es seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergente Zahlenfolgen mit Grenzwerten $a$ bzw. $b$. Weiter sei $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt

*(i)* Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt.

*(ii)* Die Folge $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen $\alpha a + \beta b$.

*(iii)* Die Folge $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen $|a|$ und $\{\sqrt{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen $\sqrt{|a|}$.

*(iv)* Die Folge $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen $a \cdot b$.

*(v)* Die Folge $\{a_n \cdot c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt.

*(vi)* Wenn $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \neq 0$, dann gilt

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a} \quad \text{für } n \to \infty.$$

**Übung 3.3.13**

Beweisen Sie das Theorem. (Hinweis: Die Ideen wurden schon im Abschnitt 3.2 eingeführt.)

**Bemerkung.** *Theorem 3.3.12* (v) *ist scharf in dem Sinne: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt impliziert nicht, dass $\{a_n \cdot c_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Beispiel: $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $c_n = (-1)^n$. Die Ausnahme - wie in Theorem 3.2.17 gesehen - ist, wenn $a_n \to 0$.*

Wir schauen uns jetzt weitere Möglichkeiten an, wie Theorem 3.3.12 in den Übungsaufgaben vorkommen könnte.

**Beispiele 3.3.14.** *Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.*

1

$$a_n = \frac{5n^3 + 3n - 2}{2n^3 - n},$$

2

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n}{2n+5},$$

3

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n n^2,$$

4

$$a_n = \sqrt[n]{x}, \quad x > 0, \tag{3.3.1}$$

5

$$a_n = \sqrt[n]{n}. \tag{3.3.2}$$

*Lösung.* zu 1: Für solche rationale Funktionen von $n$ dividieren wir durch die größte Potenz von $n$ um die Folgenglieder in die folgende Form zu bringen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + 3n - 2}{2n^3 - n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{5 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^3}}{2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{5}{2},
\end{aligned}$$

wobei wir Theorem 3.3.12 *(ii)*, *(iv)* und *(vi)* angewendet haben.

zu 2: Wir wenden Theorem 3.3.12 *(iv)* an.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n}{2n+5} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+5}\\ &= 0\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{5}{n}}\\ &= 0\cdot\frac{1}{2}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Wenn man in einer ähnlichen Situation einen Ausdruck der Form „$0\cdot\infty$“ oder „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ erhält, muss man einen anderen Weg nehmen.

zu 3: Die oben angewendete Methode ergibt „$0\cdot\infty$“. Das Abfallen von $\frac{1}{2^n}$ ist „stärker“ als das Wachsen von $n^2$. Wir können dies deutlich machen, wenn wir zeigen, dass

$$2^n > n^3 \text{ für } n \text{ groß genug,} \tag{3.3.3}$$

also für $n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Wenn (3.3.3) gilt, dann ist

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n n^2 \leq \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \quad \text{für } n \geq N.$$

Aus dem Vergleichskriterium für Nullfolgen und $\frac{1}{n}\to 0$ für $n\to\infty$ erhalten wir, dass $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ eine Nullfolge ist. Um (3.3.3) zu zeigen, benutzen wir vollständige Induktion. Für $n = 10$ ist (3.3.3) wahr. Wir nehmen an, dass (3.3.3) für ein $N \geq 10$ gilt und müssen zeigen, dass

$$2^{N+1} > (N+1)^3. \tag{3.3.4}$$

Wir rechnen

$$2^{N+1} = 2\cdot 2^N \overset{\text{Annahme}}{>} 2\cdot N^3.$$

Also gilt (3.3.4) genau dann, wenn

$$N^3 > 3N^2 + 3N + 1.$$

Dies folgt aus den drei Relationen (die leicht nachzuweisen sind)

$$\begin{aligned} 3N+1 &< 4N && \text{für N>1,} && (3.3.5)\\ 3N^2+4N &< 4N^2 && \text{für N>4,} && (3.3.6)\\ N^3 &> 4N^2 && \text{für N>4.} && (3.3.7)\end{aligned}$$

Man erhält

$$N^3 \overset{(3.3.7)}{>} 4N^2 \overset{(3.3.6)}{>} 3N^2+4N \overset{(3.3.5)}{>} 3N^2+3N+1.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt (3.3.3) für alle $n \geq 10$.

zu 4: Hier werden wir das Vergleichskriterium anwenden. Wir fangen mit $x \geq 1$ an. Nützlich ist, wenn man

$$\sqrt[n]{x} = (1 + (\sqrt[n]{x} - 1)) = 1 + y_n$$

mit $y_n \geq 0$ für $x \geq 1$ schreibt. Also schreiben wir

$$\begin{aligned} x = (\sqrt[n]{x})^n &= (1 + (\sqrt[n]{x} - 1))^n = (1 + y_n)^n \\ &\geq 1 + ny_n = 1 + n(\sqrt[n]{x} - 1) \geq n(\sqrt[n]{x} - 1) \qquad \text{(Bernoulli)}. \end{aligned}$$

Aus $x \geq n(\sqrt[n]{x} - 1)$ schließen wir

$$1 \leq \sqrt[n]{x} \leq 1 + \frac{x}{n}.$$

Das Vergleichskriterium ergibt

$$\sqrt[n]{x} \to 1 \text{ für } n \to \infty \text{ für } x > 1.$$

Für $x \in (0, 1)$ schreiben wir

$$\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y}}, \quad y > 1,$$

und wenden Theorem 3.3.12 an. (Der Grenzwert des Quotienten ist der Quotient der Grenzwerte.)

**Übung 3.3.15**

Zeigen Sie 5.

□

Die vorherigen Beispiele waren alle schön in dem Sinne, dass wir den Grenzwert identifizieren konnten. Manchmal kann man das nicht tun. Gibt es Kriterien um zu verstehen, ob eine Folge konvergiert, *ohne den Grenzwert zu wissen*? Wir haben gesehen, dass konvergente Folgen beschränkt sind. Gilt die Umkehrung? Sind beschränkte Folgen konvergent? Das einfache Beispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Monotonie ist anscheinend auch nicht ausreichend, da $a_n = n$ nicht konvergiert. Wenn man allerdings **Beschränktheit und Monotonie** kombiniert, hat man ein hinreichendes Kriterium gefunden.

**Theorem 3.3.16: Mon + Besch ⇒ Konvergenz**

Eine monotone Zahlenfolge, die beschränkt ist, konvergiert.

Anders gesagt, wenn eine Folge divergiert, müssen die Mitglieder beliebig groß im Absolutbetrag werden oder oszillieren.

**Bemerkung.** *Meist wenden wir den Satz direkt in folgender Form an: Eine monoton wachsende Zahlenfolge, die nach oben beschränkt ist, sowie eine monoton fallende Zahlenfolge, die nach unten beschränkt ist, konvergiert.*

*Beweis von Theorem 3.3.16.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (warum?) können wir annehmen, dass $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton wachsend ist. Wir definieren

$$a := \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, ist $a < \infty$. Außerdem gilt $a_n \leq a \quad \text{für alle} \; n \in \mathbb{N}$ (weil $a$ eine obere Schranke ist) und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_N > a - \varepsilon$$

(Approximations-Eigenschaft des Supremums). Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton wachsend ist, gilt

$$a_n \geq a_N > a - \varepsilon \quad \text{für alle} \; n \geq N.$$

Also haben wir insgesamt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq a \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Nach der Definition von Konvergenz haben wir

$$a_n \to a \quad \text{für } n \to \infty$$

gezeigt. □

Woran scheitert der Beweis, wenn $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nicht monoton ist?

**Bemerkung.** *Wir lockern unsere Definition von Folgen auf, um Folgen der Form $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ mit $m \in \{0, -1, -2, \ldots\}$ zu erlauben.*

**Schulverbindung 3.3.17: Nachgreifen/Vorgreifen**

Nennen Sie zwei Beispiele aus der Schule, in denen man einen Grenzwert einer Folge bestimmt. Wieviel muss man über Grenzwerte verstehen, um präzise begründen zu können, welchen Grenzwert man erreicht? Geben Sie eine Definition eines Grenzwerts, die Sie angemessen für die Schule halten, und eine Version, die Sie für mathematisch präzise halten. Vergleichen Sie sie auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede. (Hinweis: ein klassisches Beispiel stammt aus $\int_0^2 x\,dx$.)

## 3.4 Bolzano-Weierstraß

In diesem Abschnitt entwickeln wir ein tieferes Verständnis für Zahlenfolgen und kommen insbesondere zum Satz von Bolzano-Weierstraß. Dieses Werkzeug benötigen wir später, um das Verhalten von stetigen Funktionen zu analysieren.

Grob gesagt werden wir jetzt ausdrücken, dass, obwohl eine beschränkte Folge nicht konvergieren muss, die Folge unendlich oft nah an (mindestens) einen Punkt kommt. Als motivierendes Beispiel betrachten wir

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

die viel „Zeit“ in einer Umgebung von $-1$ und viel „Zeit“ in einer Umgebung von $+1$ verbringt. Die Folge konvergiert nicht, aber $\pm 1$ sind besondere Punkte. Um über solche Ideen reden zu können, brauchen wir eine neue Definition. Vergleichen Sie mit Definition 2.4.7 (Häufungspunkt einer Menge)!

**Definition 3.4.1: Häufungswert einer Folge**

Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Zahlenfolge. Dann heißt $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungswert der Folge, wenn jede Umgebung von $x_0$ unendlich viele Folgenglieder enthält.

**Beispiele 3.4.2.** ① $-1$ *und* $+1$ *sind Häufungswerte von* $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

② *Die Folge mit* $a_n = n$ *besitzt keine Häufungswerte.*

③ *Der einzige Häufungswert von* $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* $0$.

④ *Die Folge mit* $a_{2k-1} = 5$, $a_{2k} = -2$ *besitzt zwei Häufungswerte,* $-2$ *und* $5$.

Beachte, dass bspw. $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ **keine** Häufungspunkte während $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **zwei** Häufungswerte besitzt! Im Beispiel oben bemerkt man, dass, obwohl $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ nicht konvergiert, die Folge der Folgenglieder mit geradem Index

$$(-1)^{2n} + \frac{1}{2n}$$

doch konvergiert.
Wir möchten über ähnliches Verhalten für allgemeine Folgen sprechen können. Dies führt zu:

**Definition 3.4.3: Teilfolge**

Es seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Zahlenfolge und $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt

$$\{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots,\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$$

eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Also sind

$$\left\{(-1)^{2n} + \frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{und} \quad \left\{(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

konvergente Teilfolgen von $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Als weiteres Beispiel betrachten wir

$$\left\{\cos\left(\frac{(-1)^n + 1}{2}\pi\right)\right\}_{n=1}^{\infty},$$

die divergiert aber zwei konvergente (und zwar konstante) Teilfolgen besitzt.

**Theorem 3.4.4: Häufungswert $\Leftrightarrow$ konvergente Teilfolge**

Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hat $x_0$ als Häufungswert genau dann, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen $x_0$ konvergiert.

*Beweis.* (Hinrichtung): Wir nehmen zunächst an, dass $x_0$ ein Häufungswert der Folge ist. Dann enthält $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ ein Folgenglied $x_N$, $N \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$n_1 := N.$$

Analog existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ ein $N(k) \in \mathbb{N}$, so dass $N(k) > N(k-1)$ und

$$x_{N(k)} \in \big(x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}\big).$$

Wir setzen

$$n_k = N(k).$$

Für die so definierte Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ gilt

$$|x_{n_k} - x_0| \leq \frac{1}{k},$$

also konvergiert die Teilfolge gegen $x_0$.

(Rückrichtung): Wenn eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ gegen $x_0$ konvergiert, dann gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_{n_k} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{für alle} \ \ k \geq K.$$

Also enthält jede Umgebung unendlich viele Folgenglieder. □

Man kann auch durch Teilfolgen ein neues Konvergenz-Kriterium einführen:

**Theorem 3.4.5**

Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn jede Teilfolge konvergiert.

*Beweis.* Übung. □

**Bemerkung.** *Bemerken Sie, dass Konvergenz jeder Teilfolge einer Folge impliziert, dass jede Teilfolge den gleichen Grenzwert hat.*

Die Folge $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, die keinen Häufungswert besitzt, hat einen Mindestabstand von eins zwischen zwei beliebigen Folgengliedern. Kann eine beschränkte Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ keinen Häufungswert besitzen? Können Folgenglieder alle voneinander weglaufen? Der Satz von Bolzano-Weierstraß sagt uns, dass die Antwort nein ist.

**Theorem 3.4.6: Bolzano-Weierstraß**

Eine beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungswert.

Äquivalent: Eine beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge (cf., Theorem 3.4.4).

Dieser wichtige Satz entspricht einer essenziellen „Kompaktheits-Eigenschaft“ von $\mathbb{R}$. Um Theorem 3.4.6 zu beweisen, benutzen wir das Prinzip der Intervallschachtelung.

**Definition 3.4.7: Intervallschachtelung**

Eine Folge von kompakten Intervallen $[a_n, b_n]$ (mit $a_n \leq b_n$ reelle Zahlen) heißt Intervallschachtelung, falls gilt

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq ... \supseteq [a_n, b_n] \supseteq ...$$

**Lemma 3.4.8**

Für eine Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ gibt es ein Intervall $[a, b]$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = [a, b], \tag{3.4.1}$$

wobei $a \leq b$.Falls $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann ist $a = b$, so dass

$$[a, b] = [a, a] = \{a\}.$$

*Beweis.* Die Folge $\{a_n\}$ ist monoton steigend und nach oben durch $b_1$ beschränkt. Nach Theorem 3.3.16, existiert $a \in \mathbb{R}$, so dass $a_n \uparrow a$. Analog existiert $b \in \mathbb{R}$, so dass $b_n \downarrow b$. Aus der monotonen Konvergenz folgt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \subseteq [a, b].$$

Andererseits folgt aus dem Vergleichskriterium, dass $a \leq b$, und mit

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \quad \text{für alle } n \quad \text{schließen wir} \quad [a, b] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Sollte zusätzlich $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$, so erhält man mit Theorem 3.3.12, dass

$$0 = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a.$$

□

**Bemerkung.** *Das Lemma gilt nicht, wenn*

- *die Intervalle nicht abgeschlossen sind. Gegenbeispiel:* $I_n = (0, \frac{1}{n})$,
- *die Intervalle nicht beschränkt sind. Gegenbeispiel:* $I_n = [n, \infty)$.

*Beweis von Theorem 3.4.6.* Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge. Dann gibt es reelle Zahlen $a < b$, so dass

$$x_n \in [a, b] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir zerlegen $[a, b]$ in

$$A := \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad B := \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ unendlich viele Folgenglieder hat, muss $A$ oder $B$ unendlich viele Folgenglieder enthalten. Wenn $A$ unendlich viele Folgenglieder enthält, definieren wir $a_1$, $b_1$ durch

$$[a_1, b_1] = A,$$

sonst setzen wir

$$[a_1, b_1] = B.$$

Analog betrachten wir

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right],$$

und wie oben definieren wir $a_2$, $b_2$ so, dass $[a_2, b_2]$ unendlich viele Folgenglieder enthält. Die so konstruierte Folge $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Intervallschachtelung mit

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ enthält $[a_n, b_n]$ unendlich viele Folgenglieder von $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Aus Lemma 3.4.8 folgt, dass eine reelle Zahl $x_0$ existiert mit

$$\{x_0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Außerdem ist $x_0$ ein Häufungswert der Folge, weil jede Umgebung von $x_0$ ein Intervall $[a_n, b_n]$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$ enthält (warum?) und deshalb auch unendlich viele Folgenglieder von $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ enthält. $\square$

**Übung 3.4.10**

Beweisen Sie folgendes Lemma:

**Lemma 3.4.10**

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Die Folge konvergiert genau dann, wenn sie nur einen einzigen Häufungswert besitzt.

Zeigen Sie zusätzlich: Ohne die Annahme, dass die Folge beschränkt ist, gilt die Aussage nicht.

## 3.5 Cauchyfolgen

Es war anfangs sehr bequem, mit dem Grenzwert “$a$” einer Folge arbeiten zu können. Im obigen Abschnitt haben wir Möglichkeiten entdeckt, Konvergenz zu beweisen, ohne den Grenwert nennen zu können. Wie können wir sonst auf Konvergenz schließen, wenn wir den Grenzwert nicht kennen? Ein sehr wichtiges Werkzeug sind die sogenannten Cauchyfolgen.

**Definition 3.5.1: Cauchyfolge**

Eine Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ wird Cauchyfolge genannt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N. \tag{3.5.1}$$

Achtung! **Nicht ausreichend** ist die Bedingung

$$|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N. \tag{3.5.2}$$

Ein Gegenbeispiel ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt

$$a_n \to \infty \qquad \text{für } n \to \infty$$

obwohl

$$|a_n - a_{n+1}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ \leq \ \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Das $m$ in (3.5.1) muss **beliebig groß** gewählt werden können, unabhängig von $n$.

Die Verbindung mit Konvergenz legen wir jetzt fest in Theorem 3.5.2.

**Theorem 3.5.2: Cauchy $\Leftrightarrow$ konvergent**

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge genau dann, wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

*Beweis.* Als Erstes nehmen wir an, dass die Folge konvergiert und zeigen, dass sie Cauchy ist. Sei $a$ der Grenzwert. Konvergenz bedeutet, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $n$, $m \geq N$ mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < 2\varepsilon.$$

Zu $\tilde{\varepsilon} > 0$ gegeben setzen wir $\varepsilon := \tilde{\varepsilon}/2$ und erhalten somit (3.5.1).

Jetzt nehmen wir an, dass die Folge eine Cauchyfolge ist. Wir schließen daraus, dass die Folge beschränkt ist. Tatsächlich gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_m - a_N| \leq 1$ für alle $m \geq N$. Dann ist

$$|a_m| \leq 1 + |a_N| \qquad \text{für alle } m \geq N,$$

und die Gesamtfolge ist beschränkt durch

$$\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert ein Häufungswert $a$. Es reicht aus, wenn wir ausschließen, dass es einen anderen Häufungswert $b \neq a$ gibt (warum?). Aber in diesem Fall ist $\varepsilon := |a - b|$ positiv und weil die Folge Cauchy ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Da $a$ ein Häufungswert ist, gibt es ein $n_a \geq N$ so dass $|a_{n_a} - a| \leq \varepsilon/4$ und ebenso gibt es zu $b$ ein $n_b \geq N$, so dass $|a_{n_b} - b| \leq \varepsilon/4$. Aber dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|a - b| = |a - a_{n_a} + a_{n_a} - a_{n_b} + a_{n_b} - b| \leq |a - a_{n_a}| + |a_{n_a} - a_{n_b}| + |a_{n_b} - b| \leq \frac{3}{4}\varepsilon.$$

Aus diesem Widerspruch folgern wir, dass $a$ der eindeutige Häufungswert ist. □

**Lemma 3.5.3**

Wenn für eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$|a_n - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{3.5.3}$$

dann konvergiert die Folge.

*Beweis.* Übung! □

**Bemerkung.** *Vergleichen Sie* (3.5.2) *und* (3.5.3).

**Übung 3.5.4**

Zeigen Sie, dass die Folge mit $a_n = \log(n)$ bestimmt divergiert aber (3.5.2) erfüllt. (Siehe Abschnitt 3.6 für die Definition der Logarithmus-Funktion.)

## 3.6 Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

Wir benutzen Zahlenfolgen um die Exponentialfunktion zu definieren. Wir werden zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{3.6.1}$$

existiert. Diesen Grenzwert (als Funktion von $x$) definieren wir die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Eulersche Zahl $e$ durch:

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.6.2}$$

Nachdem wir gezeigt haben, dass der Grenzwert in (3.6.1) existiert, werden wir bestätigen, dass die in (3.6.2) definierte Funktion die erwarteten Eigenschaften (z.B. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$) hat. In (3.6.2) ist es wichtig zu bemerken, dass das Kleinwerden von $1 + \frac{1}{n}$ im Wettbewerb mit dem Größerwerden der Potenz steht. Obwohl $1 + \frac{1}{n} \to 1$ für $n \to \infty$, ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq 1^n = 1.$$

Es gilt $1 + \frac{1}{n} \downarrow 1$ und $(1 + \alpha)^n \uparrow \infty$ für alle $\alpha > 0$. In (3.6.2) muss man zwei konkurrierende Limiten gleichzeitig betrachten.

**Theorem 3.6.1: Exponentialfunktion**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

*Beweis.* Wir definieren
$$e_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Das Ziel ist zu zeigen, dass $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist für $N$ groß genug. Als Erstes zeigen wir, dass $\frac{e_{n+1}}{e_n} \geq 1$ für $n$ groß genug. Wir bemerken, dass $e_n > 0$ für $n > -x$. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ &= (1+h)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right),\end{aligned}$$

wobei wir
$$h := \frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} - 1$$

gesetzt haben. Für $n > -x$ gilt $1+\frac{x}{n} > 0$ und $h > -1$. In diesem Fall ergibt die Bernoulli-Ungleichung

$$\begin{aligned}\frac{e_{n+1}}{e_n} &\geq (1+(n+1)h)\left(1+\frac{x}{n}\right)\\ &= \frac{n}{n+x}\cdot\frac{n+x}{n}\\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\left\lceil\; 1+(n+1)h = 1+(n+1)\tfrac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)} - n - 1 = \tfrac{n}{n+x}. \;\right\rfloor$$

Wir brauchen noch eine obere Schranke. Da $e_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ monoton wachsend ist für $n > -x$, ist $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ monoton wachsend für $n > x$ und deshalb ist

$$b_n := \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

monoton fallend für $n > x$. Insbesondere schließen wir daraus:

$$\{b_n \colon n > x\} \text{ ist nach oben beschränkt.} \tag{3.6.3}$$

Außerdem erhält man direkt

$$\frac{e_n}{b_n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1 \qquad \text{für } n > |x|. \tag{3.6.4}$$

Aus (3.6.3) und(3.6.4) folgt es, dass $e_n$ für $n > |x|$ nach oben beschränkt ist. Es folgt nach Theorem 3.3.16, dass $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. □

Frage: Was können Sie über die folgenden Grenzwerte sagen?

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{g(n)}$

**Übung 3.6.2**

Als alternativer Beweis, dass $e_{n+1} > e_n$ für $n$ groß genug, kann man die Ungleichung zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel, auch AGM-Ungleichung genannt, verwenden; siehe Theorem 2.3.7. Verwenden Sie die AGM-Ungleichung für ein Produkt von $(n+1)$ Faktoren, um zu zeigen, dass für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq -x$, $x \neq 0$, gilt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Jetzt bemerken wir, dass $\exp(\cdot)$ sich „wie eine Potenz" verhält.

**Theorem 3.6.3: Eigenschaften von $\exp(\cdot)$**

Für $\exp(x)$ gilt

*(i)* $\exp(0) = 1$,

*(ii)* $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,

*(iii)* $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

*(iv)* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Als Hilfsmittel für den Beweis benutzen wir:

**Lemma 3.6.4**

Für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\, b^{k-1}.$$

Den Beweis des Lemmas lassen wir als Übung.

*Beweis von Theorem 3.6.3.* *(i)* ist klar. *(iv)* folgt aus *(i)* und *(ii)*. (Wie?)
zu *(iii)*: Nach *(iv)* reicht es zu zeigen, dass $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$. Nach der Bernoulli-Ungleichung gilt

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x > 0 \quad \text{für } x \geq 0.$$

zu *(ii)*: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Nach Theorem 3.3.10 gilt

$$\begin{aligned}|\exp(x+y) - \exp(x)\exp(y)| &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(1 + \frac{x+y}{n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right) \right. \\ &\qquad \left. \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-k} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)^{k-1} \right|, \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

wobei wir Lemma 3.6.4 angewendet haben. Der erste Term auf der rechten Seite ist

$$1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n} - \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right) = -\frac{xy}{n^2}. \tag{3.6.6}$$

Andererseits gilt für jeden Term in der Summe

$$\begin{aligned} &\left| \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-k} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)^{k-1} \right| \\ \leq &\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{n-k} \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^{n-k} \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{k-1} \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^{k-1} \\ = &\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^{n-1} \\ \leq &\frac{1}{\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)\left(1 + \frac{|y|}{n}\right)} \exp(|x|)\exp(|y|) \\ \leq &\exp(|x|)\exp(|y|), \end{aligned} \tag{3.6.7}$$

wobei wir uns in der vorletzten Gleichung an die Monotonie der Konvergenz gegen $\exp(\cdot)$ erinnert haben. Die Dreiecksungleichung zusammen mit (3.6.5), (3.6.6) und (3.6.7) ergibt

$$|\exp(x+y) - \exp(x)\cdot\exp(y)| \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{xy}{n^2} \cdot n \cdot \exp(|x|)\exp(|y|) \right| = 0.$$

□

Da $e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$ für $e = \exp(1)$ schon definiert ist, möchten wir jetzt

$$\exp(x) \qquad \text{und} \qquad e^x \qquad \text{für } x \in \mathbb{Q}$$

miteinander vergleichen.

**Lemma 3.6.5**

Sei $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl. Dann gilt

$$\exp(x) = e^x. \tag{3.6.8}$$

Da (3.6.8) für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt, ergibt die folgende Definition Sinn.

**Definition 3.6.6**

Wir definieren

$$e^x := \exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Mit Lemma 3.6.5 und Definition 3.6.6 gilt

$$e^x = \exp(x) \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}.$$

*Beweis von Lemma 3.6.5.* Für $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} e^p &= (\exp(1))^p \\ &= \underbrace{\exp(1) \cdot \exp(1) \cdot \ldots \cdot \exp(1)}_{p \text{ mal}} \\ &= \exp(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{p \text{ mal}}) \qquad \text{(nach Theorem 3.6.3 } \textit{(ii)}\text{)} \\ &= \exp(p). \end{aligned}$$

Für $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ reicht es zu zeigen, dass $(e^x)^q = (\exp(x))^q$ ist (wobei wir $e^x$ und $\exp(x)$ positiv verwenden). Da $xq \in \mathbb{N}$ ist, folgt aus dem vorherigen Schritt, dass

$$\begin{aligned} (e^x)^q = e^{xq} &= \exp(xq) \\ &= \exp(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{q \text{ Summanden}}) \\ &= (\exp(x))^q, \end{aligned} \tag{3.6.9}$$

wo wir Theorem 3.6.3 *(ii)* nochmals angewendet haben. Für $x = -\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\begin{aligned} e^x = \frac{1}{e^{\frac{p}{q}}} \overset{(3.6.9)}{=} \frac{1}{\exp\left(\frac{p}{q}\right)} &= \frac{1}{\exp(-x)} \\ &= \exp(x) \quad \text{(nach Theorem 3.6.3 } \textit{(iv)}\text{)}. \end{aligned}$$

□

Als Nächstes stellen wir einige Wachstumseigenschaften der Exponentialfunktion fest.

**Theorem 3.6.7**

Es gilt:

*(i)* $\exp(\cdot)$ ist streng monoton wachsend:

$$\exp(x) < \exp(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x < y.$$

*(ii)* $1 + x$ ist eine untere Schranke:

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{3.6.10}$$

*(iii)* $\exp(\cdot)$ kann in einer Umgebung von Null durch

$$|\exp(x) - 1| \leq \frac{|x|}{1 - |x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1$$

dominiert werden.

*(iv)* Für $x$ groß wächst $\exp(x)$ schneller als jedes Polynom:

$$\exp(x) > x^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x > 4n^2.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty.$$

*Beweis.* zu *(ii)*: Für $x \leq -1$ ist $1 + x \leq 0$. Mit $\exp(x) > 0$ (nach Theorem 3.6.3) ist (3.6.10) erfüllt. Nach dem Beweis vom Theorem 3.6.1 ist für $x > -1$ die Folge mit den Folgengliedern

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

monoton wachsend. Es folgt aus der Bernoulliungleichung

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \exp(x).$$

zu *(i)*: Seien $x < y$ gegeben. Es gilt

$$\frac{\exp(x)}{\exp(y)} = \frac{1}{\exp(y - x)} \overset{(ii)}{\leq} \frac{1}{1 + y - x} < 1.$$

zu *(iii)*: Für $x \in (-1, 0)$ müssen wir

$$1 - e^x \leq \frac{-x}{1 + x}$$

zeigen, was äquivalent zu

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1+x}$$

ist. Dies erhalten wir aus

$$e^x \overset{(ii)}{\geq} 1 + x \geq \frac{1+2x}{1+x} = 1 + \frac{x}{1+x}.$$

Für $x \in [0,1)$ müssen wir

$$e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}$$

zeigen, also

$$e^x \leq 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Wir erinnern an folgende Tatsache aus dem Beweis von Theorem 3.6.1: Für $n > x$ gilt

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \overset{(3.6.4)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\big(1 - \frac{x}{n}\big)^n} \leq \frac{1}{1-x}, \tag{3.6.11}$$

wobei wir die Monotonie von $\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}$ für die letzte Ungleichung benutzt haben.
zu *(iv)*: Für $x > 4n^2$ ist $\sqrt{x} > 2n$, so dass

$$\frac{x}{2n} > \sqrt{x}. \tag{3.6.12}$$

Es folgt

$$e^x > \Big(1 + \frac{x}{2n}\Big)^{2n} \overset{(3.6.12)}{>} (1 + \sqrt{x})^{2n} > (\sqrt{x})^{2n} = x^n,$$

womit die Ungleichung in *(iv)* gezeigt ist. Es bleibt uns zu zeigen, dass die Grenzwerte die angegebenen sind. Aus $e^x \geq x + 1 > x$ erhält man

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} e^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Andererseits gibt es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > M$. Man erhält

$$e^n \overset{(i)}{\geq} e^N > N > M \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Nach Definition 3.3.6 gilt $\lim\limits_{n\to\infty} e^n = \infty$. □

Theorem 3.6.3 *(iii)* sagt, dass

$$\mathcal{W}(\exp(\cdot)) \subseteq (0, \infty). \tag{3.6.13}$$

Theorem 3.6.7 *(iv)* macht es plausibel, dass $\mathcal{W}(\exp(\cdot)) = (0, \infty)$. Da wir noch nicht Grenzwerte und Stetigkeit reeller Funktionen definiert haben, brauchen wir einen fundamentaleren Beweis. Wir wenden uns an das Vollständigkeitsaxiom.

**Theorem 3.6.8**

Der Wertebereich der Exponentialfunktion ist $(0, \infty)$.

*Beweis.* Angesichts (3.6.13) müssen wir nur zeigen, dass $(0, \infty) \subseteq \mathcal{W}(\exp(\cdot))$. Sei $y \in (0, \infty)$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\exp(x) = y$. Wir definieren

$$M := \{x \in \mathbb{R} : e^x < y\}.$$

Wegen $\lim\limits_{n \to \infty} e^{-n} = 0$ ist $M$ nicht leer. Ferner ist $M$ nach oben durch $y$ beschränkt, da

$$x < 1 + x \leq e^x \leq y \qquad \text{für alle } \; x \in M.$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom besitzt $M$ ein Supremum $s$. Wir behaupten, dass

$$e^s = y.$$

Da $s$ das Supremum von $M$ ist, gibt es in der Tat zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in M$, so dass

$$s - \frac{1}{n} \leq x_n \leq s \tag{3.6.14}$$

(Approximation des Supremums). Außerdem ist $s + \frac{1}{n} \notin M$, weil $s$ eine obere Schranke von $M$ ist. Also erhalten wir aus der Monotonie der Exponentialfunktion, dass

$$e^s e^{-\frac{1}{n}} = e^{s - \frac{1}{n}} \overset{(3.6.14)}{\leq} e^{x_n} < y \leq e^{s + \frac{1}{n}} = e^s e^{\frac{1}{n}},$$

wobei die vorletzte Ungleichung aus $x_n \in M$ und die letzte Ungleichung aus $s + \frac{1}{n} \notin M$ folgen. Aus $\sqrt[n]{e} \to 1$ (Sehen Sie das Beispiel in (3.3.1)) und dem Sandwichkriterium folgt

$$y = e^s.$$

□

Die Exponentialfunktion taucht bei vielen Anwendungen auf. Sie ist auch wichtig für gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$f'(x) - f(x) = 0 \qquad \text{oder} \qquad f''(x) - c^2 f(x) = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Exponentialfunktion erlaubt uns, die Hyperbelfunktionen zu definieren.

**Definition 3.6.9**

Für alle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir:

Sinus Hyperbolicus

$$\sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2},$$

Kosinus Hyperbolicus

$$\cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2},$$

Tangens Hyperbolicus

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Da $\exp(\cdot)$ streng monoton wachsend ist, ist sie injektiv. Also besitzt $\exp(\cdot)$ auf $\mathcal{W}(\exp(\cdot))$ eine Umkehrfunktion. Diese Funktion ist auch wichtig für Anwendungen und wird Logarithmus genannt.

**Definition 3.6.10: Logarithmus**

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt Logarithmus und wird mit $\log(\cdot)$ bezeichnet.

Aus der Definition folgt:

**Theorem 3.6.11**

Für den Logarithmus gilt

$$\mathcal{D}(\log(\cdot)) = (0, \infty), \quad \mathcal{W}(\log(\cdot)) = \mathbb{R}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \exp(\log(y)) &= y \quad \text{für alle } y > 0, \\ \log(\exp(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und darüberhinaus ist

$$\log(x) < \log(y) \quad \text{für alle } x, y \text{ mit } 0 < x < y.$$

Für den Logarithmus erhalten wir die erwarteten Eigenschaften und Abschätzungen, die wir im nächsten Theorem sammeln.

**Theorem 3.6.12: Eigenschaften**

Für $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gilt Folgendes:

*(i)* Für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \log(x) + \log(y), \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) &= \log(x) - \log(y). \end{aligned}$$

*(ii)* Für alle $x \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\log(x^n) = n \log(x).$$

*(iii)* Für alle $x > -1$ ist

$$\log(1 + x) \leq x.$$

*(iv)* Zu jedem $c > 0$ gibt es ein $M = M(c)$, so dass

$$\log(x) < cx \quad \text{für alle } x \in (0, \infty) \text{ mit } x > M.$$

**Bemerkung.** (iv) *drückt aus, dass der Logarithmus langsamer als jede lineare Funktion wächst.*

*Beweis.* Der Beweis basiert auf der Eigenschaft der Exponentialfunktion.
zu (*(i)*): Wir definieren $u \coloneqq \log(x)$, $v \coloneqq \log(y)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\log(xy) &= \log(\exp(u) \cdot \exp(v)) \\
&= \log(\exp(u + v)) \\
&= u + v \\
&= \log(x) + \log(y).
\end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{x}{y}\right) &= \log(xy^{-1}) \\
&= \log(\exp(u)(\exp(v))^{-1}) \\
&= \log(\exp(u)\exp(-v)) \\
&= \log(\exp(u - v)) \\
&= u - v \\
&= \log(x) - \log(y).
\end{aligned}$$

zu (*(ii)*): Man nehme $\log(x^n) = \log(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ mal}})$ und wende (*(i)*) an.
zu (*(iii)*): Dies folgt aus $1 + x \leq \exp(x)$.
zu (*(iv)*): Dies sollte aus dem Wachsen von $\exp(\cdot)$ folgen. Aus $\exp(x) > x^n$ für $x > 4n^2$ schließen wir

$$x > \log(x^n) = n\log(x),$$

so dass

$$\log(x) < \frac{x}{n} \text{ für } x > 4n^2.$$

Für $c > 0$ gegeben wählen wir $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{N} < c$ und wir setzen $M = 4N^2$. □

Mit Hilfe der Exponentialfunktion und des Logarithmus können wir endlich die allgemeine Potenz (vergleiche Notation 1.2.8) definieren:

**Definition 3.6.13**

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^x \coloneqq \exp\big(x\log(a)\big).$$

Die Umkehrfunktion wird der Logarithmus zur Basis $a$ genannt.

Man erhält die erwarteten Eigenschaften:

**Theorem 3.6.14**

Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

*(i)* $(ab)^x = a^x b^x$,

*(ii)* $(a^x)^y = a^{xy}$,

*(iii)* $a^x a^y = a^{x+y}$.

*Beweis.* Übung. □

### 3.6.1 Highlights

Dieser Exkurs über die Exponentialfunktion und den Logarithmus ist sehr lang und detailliert. Für diejenigen, die weniger Zeit investieren wollen, listen wir auf, was essenziell ist:

- Die Definition der Exponentialfunktion als Grenzwert soll man verstanden haben und ausnutzen können.
- Die Definition des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion soll man verstanden haben und ausnutzen können.
- Den Definitionsbereich und den Wertebereich der beiden Funktionen soll man wissen und bestätigen können (inklusive Bild der Exponentialfunktion).
- Man soll *die Aussagen* der Lemmas und Theoreme insb. die Wachstumseigenschaften aus Theorem 3.6.7 und 3.6.12 kennen. Beispielsweise soll man in der Lage sein,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{\exp(n)} \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n} \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 \exp(\frac{1}{n}) - 1}$$

  mit Hilfe der Aussagen zu bestimmen.
- Alle Aufgaben aus den Übungsblättern soll man durchführen können und verstanden haben.

Wir werden im Kapitel über Funktionen weiter mit beiden Funktionen arbeiten und dadurch unsere Fähigkeiten verstärken (und diese Liste ergänzen).

## 3.7 Limsup und Liminf

Wir kehren jetzt zurück zu $a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ aus Übung 3.3.7. In folgender Abbildung zeigen wir die ersten 40 Folgenglieder.

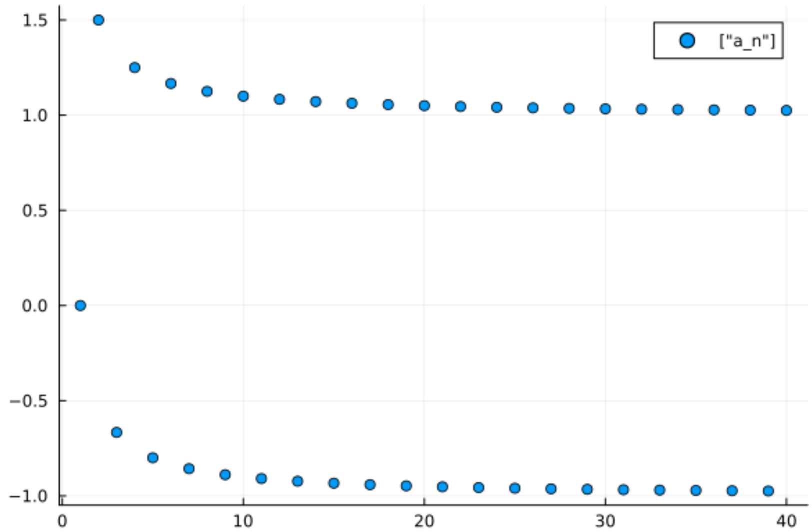



Abbildung 3.3: Die ersten 40 Folgenglieder von $a_n$

Die Zahlen 1 und $-1$ scheinen wichtig zu sein. Wir erkennen sie als Häufungswerte, aber mehr ist wahr: Die ungeraden Folgenglieder sind immer größer als $-1$ aber näher und näher an $-1$, je größer $n$. Es gilt

$$a_{2k+1} \downarrow -1 = \inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Für die geraden Folgenglieder ist es anders: Sie konvergieren gegen 1, aber

$$\sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} = \frac{3}{2}.$$

Wir wollen beschreiben können, dass die größten Werte der Folgenglieder näher und näher an 1 liegen, für $n$ groß – und die kleinsten Werte, näher und näher an $-1$. Die Idee "wie groß/klein sind die Folgenglieder für $n$ groß" packen wir in folgende Definition:

**Definition 3.7.1: limsup, liminf**

Sei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Zahlenfolge und definiere die Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_n := \sup \underbrace{\{a_k \colon k \geq n\}}_{\text{eine Menge}}, \qquad y_n := \inf \underbrace{\{a_k \colon k \geq n\}}_{\text{auch eine Menge}}.$$

Der Limes superior $a^*$ bzw. Limes inferior $a_*$ ist definiert durch

$$a^* = \limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad a_* = \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Bemerkung.** *Es wird auch die Notation*

$$a^* = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \qquad bzw \qquad a_* = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

*verwendet.*

**Übung 3.7.2**

Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

und, dass Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt. Zeigen Sie zusätzlich, dass Gleichheit doch gilt, wenn eine der Folgen konvergiert.

## 3.8 Weitere Aufgaben

### 3.8.1 Standardaufgaben

Zusätzlich zu den Übungsaufgaben und die Aufgaben, die im Kapitel eingebettet sind, bieten wir hier:

1. Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Aussagen, ob sie äquivalent ist zur Konvergenz $a_n \to a$.
   (a) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$ für alle $n \geq n_0$.
   (b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.
   (c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
   (d) Für alle $\varepsilon \geq 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
   (e) Für alle $\varepsilon \geq 0$ und alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq n_0$ mit $|a_n - a| \leq \varepsilon$.
   (f) Es gibt ein $c > 0$, sodass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a| < c\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

2. Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:
   (a) $a_n := \frac{10n^4 - n^2 - 4n + 20}{4 + 5n - 2n^4}$,
   (b) $a_n := \frac{4n^2 + 3n}{(n-2)^2}$ für $n \geq 3$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ beliebig,
   (c) $a_n := \sum_{k=0}^{n} q^k$ für ein $q \in (-1, 1)$,
   (d) $a_n := \sqrt{n + a} - \sqrt{n + b}$ für $a, b > 0$.

3. Es sei $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert $c \in \mathbb{R}$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Folge $s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$ auch gegen $c$ konvergiert.
   (b) Finden Sie eine *divergente* Folge reeller Zahlen $\gamma_i > 0$, sodass $\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ gegen 0 konvergiert.

4. (a) Es seien $k \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Folge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

   $$e_n := \frac{n^k}{q^n}.$$

   Überprüfen Sie die Folge $(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz in Abhängigkeit von $k$ und $q$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.
   (b) Konvergiert die Folge $f_k := 2^{-k}\binom{2k}{k}$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

⑤ Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(a)
$$\gamma_n := (1 - n^{1/n})^n$$

(b)
$$\delta_n := \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right)^{n+1}}$$

*Hinweis*: Es könnte hilfreich sein, die Ungleichung von Bernoulli zu verwenden.

⑥ Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(i) Wenn eine Folge konvergent ist, dann ist sie monoton und beschränkt.
(ii) Ein Folge konvergiert, wenn sie monoton und beschränkt ist.
(iii) Eine nicht monotone Folge kann nicht konvergieren.
(iv) Eine unbeschränkte Folge kann nicht konvergieren.
(v) Wenn eine Folge konvergiert, dann hat sie einen eindeutigen Häufungswert.
(vi) Eine Folge konvergiert, wenn sie einen eindeutigen Häufungswert hat.

⑦ Es sei die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$.

(a) Es sei $a_1 \in [0, \frac{1}{2}]$. Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge monoton wächst.
(b) Beweisen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, wenn $a_1 > \frac{1}{2}$.
*Hinweis*: Beweisen Sie, dass $a_n \geq a_1 + (n-1)c$ gilt mit $c := (a_1 - \frac{1}{2})^2$.

⑧ Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit und bestimmen Sie ihre Häufungswerte:

(a) $a_n = \frac{2+n+n^2}{n(n+1)}$
(b) $b_n = \frac{2+n+n^2}{n+1}$
(c) $c_n = \frac{1}{1+(-3)^n}$
(d) $d_n = \frac{1+(-3)^n}{1+3^n}$

⑨ Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und Beschränktheit und bestimmen Sie ihre Häufungswerte:

(a) $a_n = \frac{1+12n+4n^2}{n(n+3)}$
(b) $b_n = 5 - \frac{6+n^2}{n}$
(c) $c_n = \frac{2+3^n}{2+3^n+(-3)^n}$

⑩ Es sei eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert via $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n$ monoton wachsend ist.
(b) Beweisen Sie, dass $a_n$ von oben beschränkt ist (z.B. durch 3).

(c) Zeigen Sie, dass $a_n$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(11) Beweisen Sie:

**Theorem 3.8.1.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Wenn $\sup(A) \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $a_n \to \sup(A)$ für $n \to \infty$.*

### 3.8.2 "Sternchenaufgaben"

(1) Bestimmen Sie lim sup und lim inf für die untenstehenden Folgen

(a) $u_n = (-1)^n n + n$.

(b)

$$x_n := \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{3n^2+4}{n^2+n+3} & n \text{ gerade} \\ \frac{4n^2+1}{2n^2-1} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(2) Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen von nicht-negativen reellen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right)$$

(b) Beweisen Sie, dass in (i) im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(c) Zeigen Sie, dass in (i) Gleichheit gilt, wenn eine der Folgen konvergiert.

(3) Es sei $b > 0$. Für $0 < x_0 < \frac{1}{b}$, definiere rekursiv eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $x_{n+1} := 2x_n - bx_n^2$.
*Hinweis*: Es ist $x_{n+1} = \frac{1}{b} - \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \sqrt{b}x_n\right)^2$.

(a) Beweisen Sie, dass $x_{n+1} \leq \frac{1}{b}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (i) via Induktion, dass $x_n \geq 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
*Hinweis*: Beweisen Sie zuerst, dass $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton ist.

(4) Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+1}) = 0$. Es bezeichne $s := \limsup_n x_n$ und $i := \liminf_n x_n$.
Beweisen Sie, dass die Menge der Häufungswerte von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Intervall $[i, s] \subset \mathbb{R}$ übereinstimmt.

(5) (a) Es sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\liminf_n \frac{z_{n+1}}{z_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{z_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{z_n} \leq \limsup_n \frac{z_{n+1}}{z_n}.$$

*Hinweis*: Wenn $q < \liminf_n \frac{z_{n+1}}{z_n}$, dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{z_{n+1}}{z_n} \geq q \;\forall n \geq N_0$.

(b) Es sei $a_n := \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. Bestimmen Sie den Grenzwert von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
*Hinweis:* Verwenden Sie (i) mit $z_n = \frac{n!}{n^n}$.

# Kapitel 4

# Zwischenmeldung: Klausur zu Ana 1

Wir haben uns in letzter Zeit mit vielen Themen der Analysis beschäftigt! Wir können uns jetzt schon fragen, wie Klausuraufgaben aussehen könnten. Unten listen wir ein paar Beispiele auf. Eine sehr gute Vorbereitungsmethode ist, selbst Beispielaufgaben zu erstellen (und diese auf Zeit zu lösen). Das Erstellen kann man auch im Team machen. Wenn Sie dies jetzt schon für den Stoff von Kapitel 2 und Kapitel 3 tun, haben Sie am Ende der Vorlesungszeit einen enormen Vorsprung.

## 4.1 Klausurthemen

Die **Klausur zu Analysis 1** besteht aus Kurzantwortfragen und Langantwortfragen. Bei Kurzantwortfragen zählt nur die Antwort. Bei Langantwortfragen werden auch Begründungen und Arbeitsschritte bewertet. Bei Langantwortfragen soll man darauf achten, immer anzugeben, welche Annahmen Sie benutzen und ggf. welche Theoreme/Resultate.

Machen Sie eine Liste von allen *Definitionen*, die Sie gelernt haben und wissen sollten. Machen Sie eine Liste von allen *Resultaten* (Theoreme, Lemmata,...). Machen Sie eine Liste von Aufgabentypen, von "Tricks".

Eine mögliche Herangehensweise für Beweisaufgaben bleibt:

1. alle Annahmen/Zutaten identifizieren,
2. die zu beweisender Aussage mathematisch formulieren, ggf. umformulieren,
3. eventuell eine Skizze machen,
4. mögliche Theoreme/Werkzeuge auflisten,
5. Geht es um einen Beweis durch vollständige Induktion?
6. (wenn nicht:) Ist ein direkter Beweis möglich? Was können Sie direkt aus den Annahmen folgern? Was würde die zu beweisender Aussage implizieren? Können Sie Ihre Schlussfolgerungen damit verbinden?
7. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Ist die Kontraposition einfacher zu zeigen?
8. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Wie würde die Verneinung für einen Beweis durch Widerspruch aussehen?
9. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Gibt es ein einfaches Beispiel, das das Ganze motiviert/beleuchtet? Können Sie eine leicht vereinfachte Aussage zeigen?
10. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Neu anfangen!

### 4.1.1 Kurzantwortfragen

Folgende Fragen werden nur als richtig/falsch bewertet.

① Bestimmen Sie den Rand von $A := (0,3) \setminus 2$.

② Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von $A := (0,3) \setminus 2$.

③ Entscheiden Sie, ob folgende Menge offen, abgeschlossen, beide oder keins von beiden ist: $B := \{1 - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$.

④ Bestimmen Sie das Infimum und, falls existent, das Minimum von $C := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$.

⑤ Wie ist das Supremum einer nicht leeren Menge in $\mathbb{R}$ definiert?

⑥ Im Beweis der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ haben wir für $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ argumentiert, dass

$$E = \{k \in \mathbb{N} \colon b \leq k/n\}$$

nicht leer ist. Woraus folgt das?

⑦ Im Beweis der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ haben wir für $b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ argumentiert, dass

$$E = \{k \in \mathbb{N} \colon b \leq k/n\}$$

ein kleinstes Element besitzt. Woraus folgt das?

⑧ Entscheiden Sie, ob die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bestimmt divergiert oder unbestimmt divergiert, wenn

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

⑨ Entscheiden Sie, ob die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bestimmt divergiert oder unbestimmt divergiert, wenn

$$a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

⑩ Entscheiden Sie, ob die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bestimmt divergiert oder unbestimmt divergiert, wenn

$$a_n = \sqrt[n]{n}.$$

⑪ Entscheiden Sie, ob die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, bestimmt divergiert oder unbestimmt divergiert, wenn

$$a_n = \sqrt[n]{n} \cdot (-1)^n$$

⑫ Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Bemerkung.** *Diese Liste ist auf keinen Fall erschöpfend und soll nur den Geschmack von möglichen Kurzantwortfragen geben.*

### 4.1.2 Langantwortfragen

Im zweiten Teil bekommen Sie einige Aufgaben, wobei Sie Ihre Lösungen ausführlich begründen sollen. Definitionen oder Theoreme/Lemmas können abgefragt werden. Es kann Beweisaufgaben oder Rechenaufgaben (oder Kombinationen davon) geben. Als Beispiel:

1. (a) Geben Sie die Definition des Supremums einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ an.
   (b) Formulieren Sie die Approximationseigenschaft des Supremums.
   (c) Beweisen Sie den Satz aus (b).
   (d) Finden Sie das Supremum jeder der folgenden Mengen:
      (i) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon (x-2)^2 - 1 < x - 1\}$,
      (ii) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x-4| \geq 6\}$,
      (iii) $C = \{n \in \mathbb{N} \colon 2^n < 3n + 1\}$.

# Kapitel 5

# Reelle Abbildungen

Wir haben uns reelle Abbildungen in Abschnitt 1.4 angeschaut. Jetzt untersuchen wir sie genauer. Insbesondere zielen wir auf Grenzwerte und Stetigkeit.

## 5.1 Weitere elementare Eigenschaften reeller Funktionen

Vieles, das wir für Zahlenfolgen (Funktionen auf $\mathbb{N}$) entwickelt haben, können wir auf Funktionen auf $\mathbb{R}$ verallgemeinern. Analog zu Definition 3.2.2 formulieren wir:

**Definition 5.1.1: Monotonie einer reellen Funktion**

Wir nennen eine Funktion $f$ von $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn für alle $x, y \in \mathcal{D}(f)$ die folgende Implikation gilt:

$$\begin{array}{rccc} & x < y & \implies & f(x) \leq f(y) \\ (\quad \text{bzw.} & x < y & \implies & f(x) \geq f(y) \quad ). \end{array}$$

Wenn $f$ monoton wachsend oder monoton fallend ist, dann nennen wir $f$ monoton.

Die Funktion $f$ ist streng monoton wachsend, wenn für alle $x, y \in \mathcal{D}(f)$ gilt:

$$x < y \qquad \implies \qquad f(x) < f(y),$$

und analog für streng monoton fallend. Wenn $f$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist, dann nennen wir $f$ streng monoton.

Achtung! Nach der Definition ist $f(x) \equiv 2$ monoton wachsend! Das gleiche gilt bspw. für

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq -1 \\ 0 & -1 < x \leq 1 \\ x-1 & x > 1. \end{cases}$$

Achtung! Beachten Sie, dass $f(x) = x^3$ monoton wachsend—und sogar streng monoton wachsend ist. Ein beliebter Fehler ist, wegen $f'(0) = 0$ zu behaupten, $f$ sei nicht streng monoton wachsend. Hier ist der logische Fehler, dass man eine hinreichende mit einer notwendigen Bedingung verwechselt. Wir benutzen die Definition! Ist $x < y$, so ist $x^3 < y^3$. (Warum?)

Analog zu Definition 3.2.3 formulieren wir:

**Definition 5.1.2: Beschränktheit einer reellen Funktion**

Eine Funktion $f$ von $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $m$ gibt, die eine untere Schranke für $\mathcal{W}(f)$ ist. Das heißt, falls gilt:

$$\text{für alle } x \in \mathcal{D}(f) \text{ haben wir } f(x) \geq m.$$

Analog für nach oben beschränkt. Ist $f$ sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt, so nennen wir $f$ beschränkt.

Diese Eigenschaft ist wichtig, zum Beispiel für Optimierungsprobleme. Für $f(x) = x^3$ besitzt das Problem

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

keine Lösung. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so existiert das Infimum

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

(Warum?) Aber Vorsicht: Dies bedeutet **nicht**, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

**Beispiel 5.1.3.** *Es gilt*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} \tanh(x) = -1 \qquad \textit{und} \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}} \exp(x) = 0$$

*aber es gibt kein* $x_* \in \mathbb{R}$*, so dass* $\tanh(x_*) = -1$ *und ebenso kein* $x_* \in \mathbb{R}$*, so dass* $\exp(x_*) = 0$.

**Übung 5.1.4**

Zeigen Sie, dass

1. Summe und Produkt beschränkter Funktionen beschränkt sind;
2. Summe und Produkt streng monoton wachsender positiver Funktionen streng monoton wachsend sind.

**Übung 5.1.5**

Zeigen Sie anhand der Definition, dass die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{x}{1 + x^2}$$

streng monoton wachsend ist.

### 5.1.1 Zurück zur Umkehrfunktion

Oft interessieren wir uns für die sogenannte Umkehrfunktion einer Funktion. Wir erinnern an Definition 1.4.31.

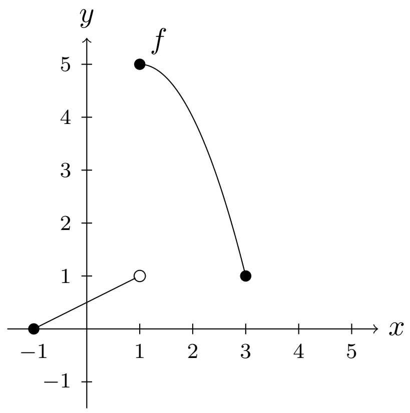
**Beispiel 5.1.6.** *Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen. Wenn ja, finden Sie die Umkehrfunktion. Wenn nein, finden Sie das größte Intervall $I \subseteq \mathcal{D}(f)$, so dass $f$ auf $I$ eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie diese Funktion an.*

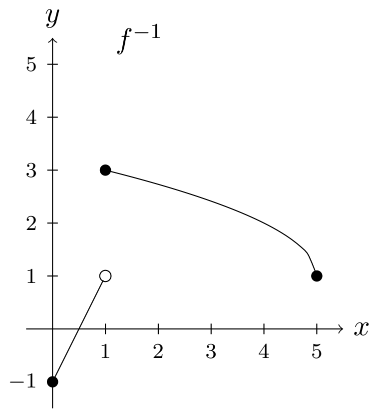
① $f(x) = x^2$ *besitzt keine Umkehrfunktion, aber* $g(x) = x^2, x \in [0, \infty)$ *besitzt die Umkehrfunktion*

$$g^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, \infty).$$

*Üblicher wäre zu schreiben* $g^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \in [0, \infty)$, *aber dies macht natürlich keinen Unterschied. Analog besitzt* $g(x) = x^2, x \in (-\infty, 0]$ *die Umkehrfunktion* $g^{-1}(x) = -\sqrt{x}, x \in [0, \infty)$.

② $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & -1 \le x < 1 \\ -x^2 + 2x + 4 & 1 \le x \le 3. \end{cases}$




*Auf* $[-1, 1)$ *gilt*

$$y = \frac{1}{2}(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 1.$$

*Auf* $[1, 3]$ *gilt*

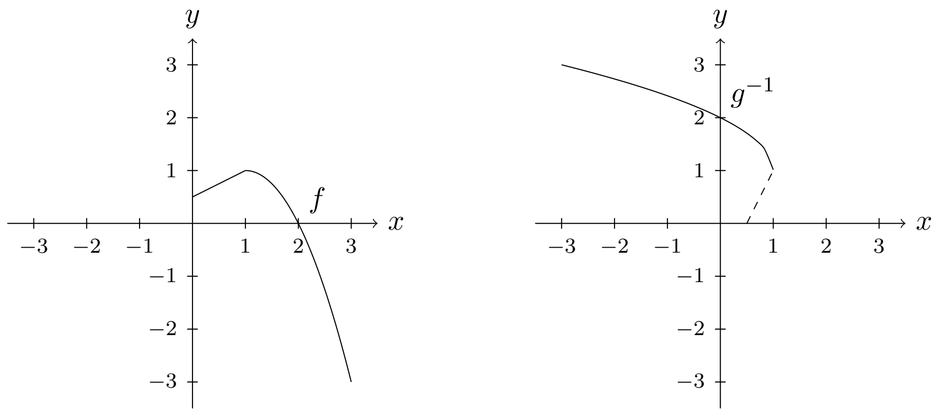
$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 2x - 4) \\ &= -[(x-1)^2 - 5] \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= -y + 5 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{5-y} + 1 \quad \textit{weil } x \ge 1 \textit{ ist).} \end{aligned}$$

*Also ist die Umkehrfunktion*

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \in [0, 1) \\ \sqrt{5-x} + 1 & x \in [1, 5]. \end{cases}$$

*Dieses Beispiel zeigt, dass eine Funktion nicht monoton sein muss, um eine Umkehrfunktion zu besitzen.*

③ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 2x & 1 \le x \le 3. \end{cases}$




*$f$ besitzt keine Umkehrfunktion, aber $g(x) = -x^2 + 2x, x \in [1, 3]$ besitzt die Umkehrfunktion $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-x}, x \in [-3, 1]$.*

Man stellt sich die allgemeine Frage: Welche Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion?

**Theorem 5.1.7: invertierbar $\Leftrightarrow$ bijektiv**

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : X \to Y$ besitzt eine Umkehrfunktion $g : Y \to X$ genau dann, wenn $f$ von $X$ nach $Y$ bijektiv ist. Außerdem ist die Umkehrfunktion eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Schritt 1: Bijektivität ist hinreichend. Wenn $f : X \to Y$ bijektiv ist, dann wählen wir für jedes $y \in Y$ das eindeutig bestimmte $x \in X$, so dass $f(x) = y$, und wir definieren $g(y) := x$. Die Funktion $g : Y \to X$ so definiert ist eine Umkehrfunktion von $f$, da für jedes $x \in X$ gilt $g(f(x)) = g(y) = x$ und für jedes $y \in Y$ gilt $f(g(y)) = f(x) = y$.

Schritt 2: Bijektivität ist notwendig. Wir nehmen an, dass $f : X \to Y$ eine Umkehrfunktion $g : Y \to X$ besitzt und zeigen, dass $f$ dann bijektiv ist. Wenn für $x, \tilde{x} \in X$ gilt $f(x) = f(\tilde{x})$, dann ergibt (1.4.3), dass

$$x = g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) = \tilde{x}.$$

Also ist $f$ injektiv. Jetzt betrachten wir ein beliebiges $y \in Y$. Wir definieren $x \in X$ durch $x := g(y)$. Dann gilt nach (1.4.4)

$$f(x) = f(g(y)) = y.$$

Also ist $f$ surjektiv.

Schritt 3: Eindeutigkeit der Umkehrfunktion. Um die Eindeutigkeit zu bestätigen, nehmen wir an, dass es für $f : X \to Y$ zwei Funktionen $g, \tilde{g}$ gibt, die (1.4.3) und (1.4.4) erfüllen. Wir betrachten $y \in Y$. Nach dem Argument oben ist $f$ surjektiv, also gibt es ein $x \in X$, so dass $y = f(x)$. Aus (1.4.3) schließen wir

$$g(y) = g(f(x)) = x = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(y).$$

Also gilt $g = \tilde{g}$ auf $Y$. □

**Bemerkung.** *Angesichts der Eindeutigkeit reden wir von* **der** *Umkehrfunktion einer Funktion.*

*Wenn wir uns fragen, ob eine gegebene Funktion $f$ invertierbar ist, ohne, dass der Zielbereich explizit genannt wird, dann gehen wir davon aus, dass $Y = \mathcal{W}(f)$ gemeint wird. z.B. sagen wir, dass* $\tanh$ *invertierbar ist, weil* $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ *invertierbar ist. (Aber* $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist nicht invertierbar.)*

Mit der Definition 1.4.2 und nach Theorem 5.1.7 wäre eine äquivalente Definition von Umkehrfunktion:

**Definition 2.1.2'.** *Sei $f : X \to Y$ eine injektive Funktion. Dann nennt man*

$$g = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in f\}$$

*die Umkehrfunktion von $f$. Die Funktion $g$ ist injektiv und*

$$\mathcal{D}(g) = \mathcal{W}(f), \quad \mathcal{W}(g) = \mathcal{D}(f).$$

Wie das triviale Beispiel $f(x) \equiv 2$ zeigt, impliziert $f$ monoton **nicht**, dass $f^{-1}$ existiert. Strenge Monotonie reicht jedoch aus.

**Theorem 5.1.8**

Eine streng monotone Funktion besitzt eine Umkehrfunktion auf ihrem Bild.

*Beweis.* Sei $f$ eine streng monotone Funktion. Wie jede Funktion ist $f$ surjektiv auf $\mathcal{W}(f)$. Wir müssen also nur überprüfen, ob $f$ injektiv ist. Da $f$ streng monoton ist, impliziert

$$x_1 < x_2 \quad \text{oder} \quad x_1 > x_2,$$

dass

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{oder} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Also gilt $f(x_1) = f(x_2)$ genau dann, wenn

$$x_1 = x_2.$$

Nach Theorem 5.1.7 besitzt $f$ eine Umkehrfunktion. □

**Übung 5.1.9**

Berechnen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) := \exp(x) - \exp(-x)$.
(Hinweis: Finden und lösen Sie eine quadratische Gleichung in $s = \exp(x)$. Denken Sie darüber nach, welche Lösung sinnvoll ist.)

### 5.1.2 Neue Funktionen aus Alten

Seien $f$ und $g$ reelle Funktionen. Sei $A = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Dann ist die Summe definiert als

$$f + g : A \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

Analog definiert man

$$\begin{aligned} f-g:&A\to\mathbb{R}, \quad (f-g)(x) := f(x)-g(x) \\ \text{und } f\cdot g:\ &A\to\mathbb{R}, \quad (f\cdot g)(x) \ := f(x)\cdot g(x). \end{aligned}$$

Auf $A' = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ definiert man

$$\frac{f}{g} : A' \to \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Definition 5.1.10: Verkettung**

Die Verkettung oder Zusammensetzung von $f$ und $g$ ist definiert als

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für alle } \ x \in \mathcal{D}(f) \text{ mit } f(x) \in \mathcal{D}(g).$$

(Also wie immer: Für alle $x$, für die die Funktion wohldefiniert ist.)

Beispiele der Zusammensetzung:

1. Sei $E$ potentielle Energie als Funktion von $h$:

$$E(h) = mgh, \quad m, g \in \mathbb{R}^+.$$

Sei $h$ die Höhe eines fallenden Körpers zum Zeitpunkt $t$:

$$h(t) = h_0 - \frac{g}{2}t^2, \quad h_0 \in \mathbb{R}^+, t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right].$$

Dann ist die potentielle Energie des Körpers als Funktion von $t$ gegeben durch die Zusammensetzung:

$$(E\circ h)(t) = mg\left(h_0 - \frac{g}{2}t^2\right), \quad t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right].$$

2. Sei $d = d(t)$ die Verschiebung eines Teilchens als Funktion von $t$, wobei $t$ Zeit in Minuten ist. Sei $t(s) = \frac{s}{60}$. Dann ist $D(s) = d \circ t(s) = d\left(\frac{s}{60}\right)$ die Verschiebung als Funktion von $s$, wobei $s$ Zeit in Sekunden ist.

3. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist

$$g\circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Hier ist $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ und

$$\mathcal{D}(g\circ f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

Man bemerkt, dass $-2$ und $2$ nicht zu $\mathcal{D}(g\circ f)$ gehören, weil $f(-2)$ und $f(2)$ nicht zu $\mathcal{D}(g)$ gehören.

Manchmal wollen wir die Restriktion oder eine Fortsetzung betrachten:

**Definition 5.1.11: Restriktion und Fortsetzung**

Es sei $f : A \to B$ und $C \subsetneq A$. Dann ist

$$g := f_{|C} \colon C \to B, \qquad \text{mit} \quad x \mapsto f(x)$$

die Restriktion von $f$ auf $C$. Umgekehrt seien $f : A \to B$ und $g : C \to B$ mit $A \subsetneq C$ und $g_{|A} = f$. Dann heißt $g$ Fortsetzung von $f$.

Die Fortsetzung einer Funktion ist natürlich nicht eindeutig definiert.

**Beispiel 5.1.12.** *Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nicht injektiv aber $f_{|[0,\infty)}$ ist injektiv. Die Funktion $\sqrt{x}$ ist nur auf $[0, \infty)$ definiert, aber*

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

*ist eine Forsetzung von $\sqrt{x}$. Die Fortsetzung $g$ is stetig aber nicht differenzierbar in $0$. Eine andere Fortsetzung von $\sqrt{x}$ ist die Funktion $\sqrt{|x|}$. Diese Funktion ist auch stetig aber nicht differenzierbar; außerdem hat sie als gerade Funktion eine angenehme Symmetrie.*

**Beispiel 5.1.13.** *Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Eine Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ ist*

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 5 & x = 0. \end{cases}$$

**Übung 5.1.14**

1. Seien $A, B, C$ nichtleere Mengen und $f \colon A \to B,\ g \colon B \to C$ zwei Funktionen.
   (a) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist injektiv $\implies$ $f$ ist injektiv.
   (b) Zeigen Sie: $g \circ f$ ist surjektiv $\implies$ $g$ ist surjektiv.

2. Welche der folgenden reellen Funktionen sind injektiv? Untersuchen Sie auch, was passiert, wenn man den Definitionsbereich verkleinert.
   (a) $f \colon \left[\frac{2}{3}, \infty\right) \to \mathbb{R},\ f(x) := \sqrt{3\,|x| - 2}$,
   (b) $f \colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$.

## 5.2 Grenzwerte von Funktionen

Bis jetzt haben wir den **Grenzwert einer Zahlenfolge für $n \to \infty$** definiert. In diesem Abschnitt möchten wir verstehen, was der **Grenzwert einer Funktion in einem Punkt** ist.

### 5.2.1 Motivation

Welches Hintergrundswissen und welche Intuition bringen wir mit?

**Schulverbindung 5.2.1**

In [2, 3] finden wir Aussagen wie

- $$\lim_{h\to 0}(10+5h)=10,$$
- $$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x}-\frac{40}{x^2})=1,$$
- $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x^4\right)=\infty.$$

Wie sind solche Grenzwerte definiert?

Im zweiten und dritten Ausdruck können wir tatsächlich ähnlich wie für Folgen argumentieren ("$N$ groß genug" mit "$x$ groß genug" ersetzen). Im ersten Grenzwert ist die Situation etwas anders, weil wir jetzt $h$ klein betrachten. Aber die Idee ist klar: $10+h$ soll nah an 10 liegen, wenn $h$ klein ist. Wie machen wir dies mathematisch präzise? Bevor wir dies tun, müssen wir für $f(h)=10+h$ dringend die Behauptung $f(h)\approx 10$ für $h\approx 0$ von der Tatsache $f(0)=10$ ENTKOPPELN. Dies erleuchten wir durch ein weiteres Beispiel:

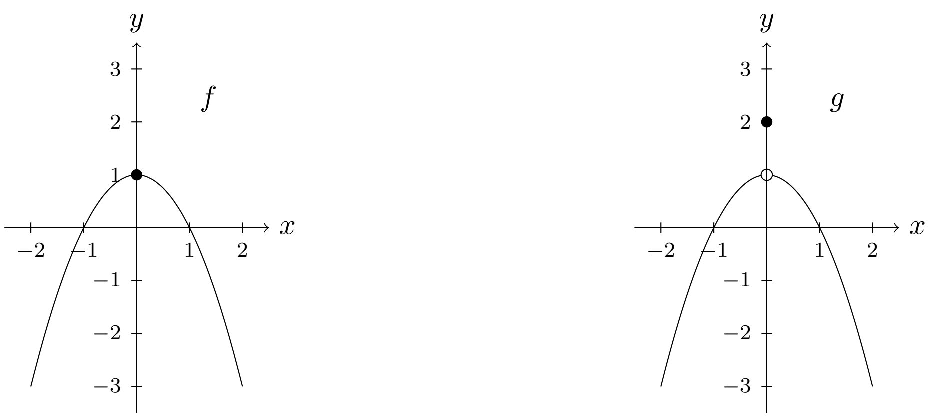



Abbildung 5.3: Beide Funktionen haben den Grenzwert 1 in $x=0$.

In Abbildung 5.3 haben beide Funktionen den Grenzwert 1 in $x=0$. Dies kann man „sehen“, indem man eine beliebige Folge $x_n\to 0$ mit $x_n\neq 0$ betrachtet und sich überlegt, was mit den Funktionswerten

$$f(x_n)\qquad\text{bzw.}\qquad g(x_n)$$

passiert. Die relevante (aber impräzise) Frage ist:

Wohin „gehen“ die Funktionswerte, wenn $x$ gegen Null „geht“?

Klar ist, dass **der Grenzwert für $x\to 0$ nichts mit dem Funktionswert im Punkt Null zu tun hat**.

Bei der obigen Diskussion war es wichtig, dass wir nicht nur **eine Nullfolge** hätten betrachten können, sondern **jede Nullfolge**. Anders ist es in Abbildung 5.4: Wenn

$$x_n\to 0\quad\text{für } n\to\infty\qquad\text{und}\qquad x_n>0\quad\text{für alle } n\in\mathbb{N},$$

dann „geht“ $h(x_n)$ gegen 2. Wenn man allerdings eine Folge betrachtet, so dass

$$x_n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty \qquad \text{und} \qquad x_n < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

dann “geht” $h(x_n)$ gegen 1. Was wäre dann der Grenzwert? Es ist noch schlimmer: Man könnte eine Nullfolge wählen, wobei die Folgenglieder zwischen positiven und negativen Werten oszillieren. Was passiert dann mit den Funktionswerten?

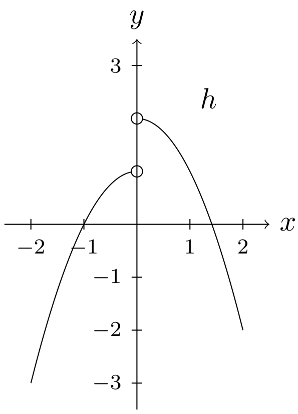



Abbildung 5.4: Einige Nullfolgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ haben $h(x_n) \to 1$, andere Nullfolgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ haben $h(x_n) \to 2$. Die Funktion $h$ besitzt keinen Grenzwert in 0.

### 5.2.2 Mathematische Einleitung

Wir erinnern an Definition 2.4.21 (“Umgebung”). Weil der Grenzwert an einem Punkt $x_0$ nichts mit dem Funktionswert in $x_0$ zu tun hat, wollen wir jetzt mit punktierten Umgebungen arbeiten:

**Definition 5.2.2: punktierte Umgebung, punktierter Ball**

Wenn $U$ eine Umgebung von $x_0$ ist, dann heißt $\dot{U} := U \setminus \{x_0\}$ punktierte Umgebung von $x_0$. Für $\delta > 0$ definieren wir den punktierten $\delta$-Ball um $x_0$ durch

$$\dot{B}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

**Definition 5.2.3: Grenzwert einer Funktion in einem Punkt**

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $x_0$ ein Häufungspunkt von $D$. Sei $L \in \mathbb{R}$. Wir nennen $L$ den Grenzwert von $f$ in $x_0$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle

$$x \in D \cap \dot{B}_\delta(x_0) \qquad \text{gilt} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dies wird bezeichnet

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{in } D}} f(x) = L \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to L \text{ für } x \to x_0 \text{ in } D.$$

Dies vereinfacht sich, in dem Fall, dass $f$ auf einer punktierten Umgebung von $x_0$ definiert ist. Dies ist oft der Fall, für Funktionen, die wir betrachten werden. Wenn es reelle Zahlen $a, b$ mit $a < x_0 < b$

gibt, so dass $f$ auf $(a, b)$ definiert ist, dann hat $f$ den Grenzwert $L$ in $x_0$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$x \in \dot{B}_\delta(x_0) \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Wenn es Ihnen lieber ist, können Sie anstatt den Ball mit Betrag arbeiten. Dann heißt es:

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Bemerkung.** *Es reicht aus, Punkte nah an $x_0$ zu betrachten. Deshalb sagt man, dass es eine „lokale Eigenschaft“ ist, den Grenzwert $L$ an der Stelle $x_0$ zu haben.*

**Bemerkung.** *Den Grenzwert $L$ in $x_0$ zu haben, hat nichts mit dem Funktionswert $f(x_0)$ zu tun! $f$ muss nicht mal in $x_0$ definiert sein. Auch wenn $f$ in $x_0$ definiert ist, muss $f(x_0)$ nicht gleich $L$ sein. Sehen Sie sich $g$ in Abbildung 5.3 oben an.*

**Bemerkung.** *Es ist unabdingbar, dass in Definition 5.2.3* punktierte *Umgebungen betrachtet werden! Die Folge $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1/3, x_4 = 0, x_5 = 1/5, x_6 = 0, \ldots$ ist eine Nullfolge, aber für die Funktion $g$ aus Abbildung 5.3 konvergiert $g(x_n)$ nicht, obwohl $g$ in Null den Grenzwert* 1 *besitzt.*

**Bemerkung.** *Hier spielt $\varepsilon > 0$ die Rolle einer Fehlertoleranz. $\delta > 0$ ist der Parameter, den wir anpassen können, damit $f(x)$ $\varepsilon$-nah an $L$ liegt. Wenn $\varepsilon$ sehr klein ist („der schwierige Fall“), dann muss $\delta$ vielleicht auch sehr klein gewählt werden.*

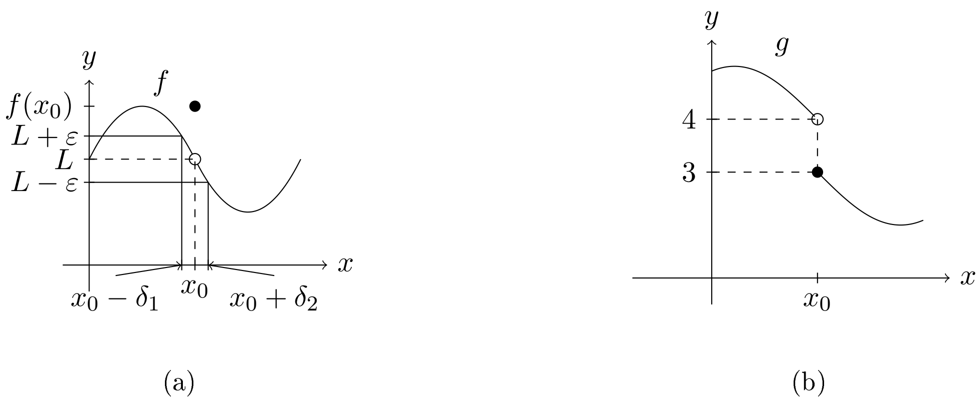



Abbildung 5.5

Ein Beispiel, das die neue Definition verdeutlicht, ist in Abbildung 5.5 links skizziert. Für $\varepsilon > 0$ beliebig klein gegeben, wählt man $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit $x \neq x_0$ ist $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Der Graph einer Funktion, die das Kriterium in der Definition nicht erfüllt, ist in Abbildung 5.5 rechts skizziert. Es gibt kein $L \in \mathbb{R}$, so dass zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ es ein $\delta > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Wenn $L \leq 3,5$, dann gilt für $x < x_0$ (egal wie nah $x$ an $x_0$ liegt) $f(x) \geq L + \frac{1}{2}$. Wenn $L \geq 3,5$, dann gilt für $x > x_0$ (egal wie nah $x$ an $x_0$ liegt) $f(x) \leq L - \frac{1}{2}$.

**Beispiel 5.2.4.** *Sei $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$. Es gilt $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$. Um dies zu zeigen, betrachten wir $|f(x) - 4|$. Wir schätzen ab:*

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)|. \tag{5.2.1}$$

*Einerseits können wir $|x-2|$ klein machen, indem wir $x$ nah an 2 wählen (gut!). Andererseits ist $|x+2|$ nicht so furchtbar groß, z.B. gilt*

$$|x+2| \leq |x|+2 \leq 5 \quad \text{wenn } |x-2| \leq 1, \tag{5.2.2}$$

*wobei wir (mehrmals) die Dreiecksungleichung verwendet haben. Ersetzen von* (5.2.2) *in* (5.2.1) *ergibt*

$$|f(x)-4| \leq 5|x-2|,$$

*so dass wir $|f(x)-4| < \varepsilon$ haben, solange wir zusätzlich zu $|x-2| \leq 1$ auch $|x-2| < \varepsilon/5$ wählen. Wir können also $\delta := \min\{1, \varepsilon/5\}$ setzen.*

**Übung 5.2.5: Der einfachste mögliche Fall**

Beweisen Sie, dass $f(x) := 2x$ den Grenzwert 2 in $x_0 = 1$ hat. Vergleichen Sie das größtmögliche $\delta$ zu einem gegebenem $\varepsilon > 0$ mit dem größtmöglichen $\delta_g$ für $g(x) := 3x$ (und das gleiche $\varepsilon$).

**Übung 5.2.6: Level 2**

Sei $f(x) := x^2 + x - 3$. Beweisen Sie, dass $f(x) \to -1$ für $x \to 1$.

**Übung 5.2.7: Level 3**

Sei

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}.$$

Beweisen Sie, dass $g$ einen Grenzwert für $x \to 1$ hat und bestimmen Sie den Grenzwert. (Hinweis: Als Erstes bemerkt man, dass $g$ in 1 nicht definiert ist. Dies ist allerdings keine Ursache, da dies nichts mit der Definition eines Grenzwerts zu tun hat. Als Nächstes bemerkt man, dass man für $x \neq 1$ aber nah an 1 eine äquivalente Darstellung von $g$ finden kann (kürzen).)

Unsere Überlegungen im vorherigen Teilabschnitt legen nahe, dass man Grenzwerte von Funktionen anhand Grenzwerte von Folgen verstehen kann. Tatsächlich kann man zeigen:

**Theorem 5.2.8: Grenzwert einer Funktion anhand Grenzwerte von Folgen**

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $\mathcal{D}(f)$ und $L \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$L = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ \text{in } \mathcal{D}(f)}} f(x)$$

genau dann, wenn $f(x_n) \to L$ für $n \to \infty$ für jede Folge mit $x_n \in \mathcal{D}(f) \setminus \{x_0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Wieder vereinfacht sich die Aussage, wenn $f$ auf einer punktierten Umgebung von $x_0$ definiert ist: Dann gilt

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

genau dann, wenn $f(x_n) \to L$ für $n \to \infty$ für jede Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

*Beweis.* Übung □

Das Theorem werden wir oft "konstruktiv nutzen", um zu beweisen, dass eine Funktion keinen Grenzwert in einem Punkt $x_0$ hat. Zum Beispiel erhalten wir sofort, dass die Funktion $h$, die in Abbildung 5.4 skizziert ist, keinen Grenzwert in Null hat, weil für positive Nullfolgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und negative Nullfolgen $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die Folgen $\{h(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{h(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ verschiedene Grenzwerte besitzen.

**Beispiel 5.2.9.** *Die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

*hat keinen Grenzwert für $x \to 0$. Tatsächlich gilt für*

$$x_n := \frac{2}{(4n+1)\pi}, \qquad y_n := \frac{1}{n\pi},$$

*dass $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ für $n \to \infty$ aber*

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = 1, \qquad f(y_n) = 0$$

*für alle $n \in \mathbb{N}$.*

**Übung 5.2.10**

Zeigen Sie:

① Die Funktion $g(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ besitzt in 0 keinen Grenzwert.

② Für $h(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

③ Die Funktion $m(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ besitzt in 0 keinen Grenzwert.

Wie bei Folgen möchte man wissen, ob man neue Grenzwerte aus Alten schließen kann. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Funktionen auf punktieren Umgebungen des Punkts definiert sind. (Die Verallgemeinerung ist direkt.) Aus Theorem 3.3.12 für Folgen erhalten wir:

**Theorem 5.2.11**

Seien $f$, $g$ auf einer punktierten Umgebung von $x_0$ definiert. Wenn für $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = z_0,$$

dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha y_0 + \beta z_0 \qquad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{5.2.3}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = y_0 \cdot z_0, \tag{5.2.4}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{y_0}{z_0}, \qquad \text{sofern } z_0 \neq 0 \text{ ist.} \tag{5.2.5}$$

Man kann den Satz auch direkt mit Definition 5.2.3 zeigen.

**Bemerkung.** *Aus* (5.2.3) *und* (5.2.4) *erhalten wir, dass für jedes Polynom $p$ gilt*

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0).$$

Wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, und wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{5.2.6}$$

betrachten, dann fragen wir uns:

- Ist $L = 0$? Wenn nicht, dann divergiert der Quotient in (5.2.6).
- Wenn $L = 0$ gilt, dann gibt es eine Methode um den Grenzwert des Quotienten analysieren zu können. (Wie immer ist die entscheidende Frage, mit welcher Rate $f$ und $g$ in $x_0$ verschwinden.)

**Übung 5.2.12**

Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

**Beispiel 5.2.13.** *Sei*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

*wobei $p$, $q$ Polynome sind und $x_0$ eine Nullstelle von beiden ist. Sei $x_0$*

*eine $m$-fache Nullstelle von $q$ und*
*eine $n$-fache Nullstelle von $p$.*

*Dann gilt*

- $\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$, *wenn $n > m$,*
- $\lim_{x \to x_0} R(x)$ *existiert und gehört zu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn $n = m$,*
- $\lim_{x \to x_0} R(x)$ *existiert nicht (als reelle Zahl), wenn $n < m$.*

*Dies zeigt man, indem man*

$$p(x) = (x - x_0)^n \tilde{p}(x), \quad q(x) = (x - x_0)^m \tilde{q}(x)$$

*mit $\tilde{p}(x_0)$, $\tilde{q}(x_0) \neq 0$ schreibt und gemeinsame Faktoren von $(x - x_0)$ kürzt.*

**Beispiel 5.2.14.** *Für* $x_0 = 1$ *und*

$$h(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*benutzen wir Lemma 3.6.4, um* $h$ *als*

$$h(x) = \frac{(x-1)\sum\limits_{k=1}^{n} x^{n-k}}{(x-1)}$$

*darzustellen. Kürzen durch* $(x-1)$ *ergibt*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} h(x) &= \lim_{x\to 1} \sum_{k=1}^{n} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to 1} x^{n-k} \qquad (5.2.7) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= n, \end{aligned}$$

*wobei wir in* (5.2.7) *Theorem 3.3.12 angewendet haben.*

Jetzt bearbeiten wir ein Beispiel, das nicht polynomiell ist.

**Beispiel 5.2.15.** *Besitzt* $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ *einen Grenzwert in* $x = 0$*? Nenner und Zähler verschwinden in* $x = 0$*. Wir haben in Theorem 3.6.7 gesehen, dass die Exponentialfunktion in einer Umgebung von* 0 *linear wächst, also erwarten wir einen von Null verschiedenen Grenzwert. Aus Theorem 3.6.7* (iii) *erhalten wir*

$$\left|\frac{e^x - 1}{x}\right| \le \frac{1}{1 - |x|}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\}. \tag{5.2.8}$$

*Andererseits haben wir*

$$\left|\frac{e^x - 1}{x}\right| = \frac{e^x - 1}{x} \overset{(3.6.10)}{\ge} 1 \qquad x \in (0, 1), \tag{5.2.9}$$

$$\text{und} \qquad \left|\frac{e^x - 1}{x}\right| = \frac{1 - e^x}{-x} \ge \frac{1}{1 - x} \quad x \in (-1, 0), \tag{5.2.10}$$

*wobei wir* (3.6.11) *für die letzte Ungleichung benutzt haben. Zusammen implizieren* (5.2.9) *und* (5.2.10)*, dass*

$$\left|\frac{e^x - 1}{x}\right| \ge \frac{1}{1 + |x|}. \tag{5.2.11}$$

*Insgesamt ergeben* (5.2.8) *und* (5.2.11)

$$\frac{1}{1 + |x|} \le \left|\frac{e^x - 1}{x}\right| \le \frac{1}{1 - |x|}, \quad x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \tag{5.2.12}$$

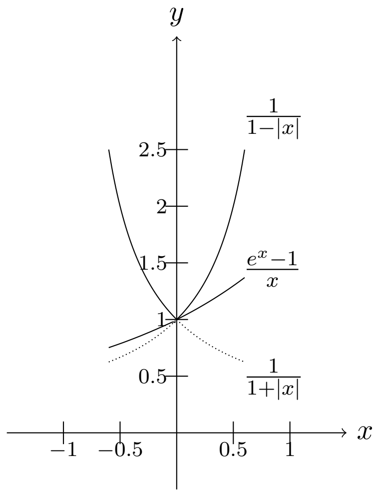



Abbildung 5.6: Visuelle Darstellung von Gleichung (5.2.12).

*und da für jede Nullfolge* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-|x_n|} = 1,$$

*schließen wir aus dem Sandwich-Kriterium für Folgen, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{x_n}-1}{x_n} \right| = 1$$

*für jede Nullfolge* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mit* $x_n \neq 0$. *Aus Definition 5.2.3 und* $\exp(x) > 1$ *für* $x > 0$, $\exp(x) < 1$ *für* $x < 0$ *schließen wir*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{5.2.13}$$

Wir haben eben gesehen, dass das Sandwich-Kriterium für Folgen benutzt werden kann, um den Grenzwert einer Funktion zu identifizieren. Dies formulieren wir in einen Satz um.

**Theorem 5.2.16: Sandwich-Kriterium oder Squeeze Theorem für Funktionen**

Es seien $f, g, h$ in einer punktierten Umgebung von $x_0$ definiert. Wenn in einer punktierten Umgebung von $x_0$ gilt

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \qquad \text{und ferner gilt} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L,$$

dann ist

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L.$$

**Übung 5.2.17**

Schreiben Sie den Beweis. (Hinweis: Sie können das Sandwich-Kriterium für Folgen verwenden – oder auch direkt mit Definition 5.2.3 argumentieren.)

**Übung 5.2.18**

Finden Sie zu $f(x) := 5x + 1$ den Grenzwert $L$ in $x_0 = 2$. Bestimmen Sie zu $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ein $\delta > 0$, so dass $0 < |x - x_0| \leq \delta$ impliziert, dass $|f(x) - L| \leq \varepsilon$. Finden Sie eine quadratische Funktion $g$ mit dem gleichen Grenzwert in $x_0 = 2$. Bestimmen Sie, ob zum gegebenen $\varepsilon$ man für $f$ oder $g$ ein kleineres $\delta$ brauchen würde.

**Übung 5.2.19**

Finden Sie zu

$$f(x) := \begin{cases} 5x+1 & x \neq 2 \\ 27 & x = 2 \end{cases}$$

den Grenzwert $L$ in $x_0 = 2$. Bestimmen Sie zu $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ein $\delta > 0$, so dass $0 < |x - x_0| \leq \delta$ impliziert, dass $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

### 5.2.3 Einseitige und uneigentliche Grenzwerte

Wir fangen mit einseitigen Grenzwerten an. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, dass die Funktion auf einem Interval $(x_0 - \delta, x_0)$ oder einem Intervall $(x_0, x_0 + \delta)$ definiert ist.

**Definition 5.2.20: Einseitige Grenzwerte**

Sei $L \in \mathbb{R}$ und $f$ auf einem offenen, nichtleeren Intervall $(a, x_0)$ definiert. Wir nennen $L$ den linksseitigen Grenzwert von $f$ in $x_0$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \qquad \text{gilt} \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Dies wird bezeichnet mit

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to L \text{ für } x \uparrow x_0.$$

Sei $R \in \mathbb{R}$ und $f$ auf einem offenen, nichtleeren Intervall $(x_0, x_0 + b)$ definiert. Wir nennen $R$ den rechtsseitigen Grenzwert von $f$ in $x_0$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \qquad \text{gilt} \qquad |f(x) - R| < \varepsilon.$$

Dies wird bezeichnet mit

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = R \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to R \text{ für } x \downarrow x_0.$$

In Abbildung 5.4 oben nimmt man wahr, dass

$$\lim_{x \uparrow 0} h(x) = 1, \qquad \lim_{x \downarrow 0} h(x) = 2.$$

In Abbildung 5.5 bemerkt man

$$\lim_{x \uparrow x_0} g(x) = 4, \qquad \lim_{x \downarrow x_0} g(x) = 3.$$

**Übung 5.2.21**

Beweisen Sie, dass für $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^2$ gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0.$$

In allen Beispielen, bei denen die Funktion einen Grenzwert in einem Punkt $x_0$ hatte, waren die linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwerte gleich. Dies ist kein Zufall, und man kann auch folgendes Lemma formulieren:

**Lemma 5.2.22**

Seien $a < x_0 < b$ reelle Zahlen und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gegeben. $f$ besitzt in $x_0$ einen Grenzwert genau dann, wenn der linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte existieren und gleich sind. D.h.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \text{ und } \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = L.$$

*Beweis.* Die Hinrichtung ist einfacher, und wir lassen sie als Übung.

Wir zeigen die Rückrichtung. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da der linksseitige Grenzwert existiert, gibt es ein $\delta_\ell > 0$, so dass

$$x \in (x_0 - \delta_\ell, x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.2.14}$$

Weil der rechtsseitige Grenzwert existiert, gibt es ein $\delta_r > 0$, so dass

$$x \in (x_0, x_0 + \delta_r) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{5.2.15}$$

Als Minimum zweier positiven Zahlen ist $\delta := \min\{\delta_\ell, \delta_r\}$ ebenso positiv und aus (5.2.14) und (5.2.15) schließen wir auf:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

□

Wie für Folgen möchte man auch über „Divergenz gegen Unendlich“ oder „Verhalten von $f$ für $x$ gegen Unendlich” sprechen können. Dazu führen wir die folgenden Definitionen ein.

**Definition 5.2.23: Uneigentliche Grenzwerte für $x \to x_0$**

Sei $f$ auf einer punktierten Umgebung von $x_0$ definiert. Wir sagen, dass $f$ gegen Unendlich divergiert für $x \to x_0$ und schreiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty),$$

wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$f(x) \geq M \qquad \text{für alle } \ 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Analog für Divergenz gegen $-\infty$ und einseitige Divergenz gegen $\pm\infty$.

**Beispiel 5.2.24.** *Wir erhalten Divergenz gegen $\pm\infty$ in Null für $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ und $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

*Für $x \mapsto \frac{1}{x}$ erhalten wir nur einseitige Grenzwerte:*

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \textit{aber} \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

**Übung 5.2.25**

Beweisen Sie direkt anhand der Definition, dass

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} = \infty.$$

In 5.2.1 oben haben wir zwei Grenzwerte "für $x \to \infty$" gesehen? Wie macht man diesen Begriff präzise?

**Definition 5.2.26: Eigentliche Grenzwerte für $x \to \pm\infty$**

Sei $f$ auf $(a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ definiert. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$x \geq M \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Analog definiert man $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$.

**Übung 5.2.27**

Beweisen Sie anhand der Definition, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1.$$

Divergenz gegen Unendlich für $x \to \pm\infty$ ist auch eine Möglichkeit.

**Definition 5.2.28: Uneigentliche Grenzwerte für $x \to \pm\infty$**

Sei $f$ auf $(a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ definiert. Wir sagen, dass <u>$f$ gegen Unendlich divergiert</u> und schreiben

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

wenn zu jedem $K \in \mathbb{R}$ es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$x \geq M \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > K.$$

Analog für

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Beachten Sie die "Permanenz" ("nicht nur groß werden, sondern auch groß bleiben"). Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{N} \\ \sin(x) & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

divergiert nicht gegen Unendlich für $x \to \infty$ – obwohl die Funktion nach oben unbeschränkt ist. Ebenso ist die Funktion $g(x) = x\sin(x)$ eine unbeschränkte Funktion, die nicht gegen Unendlich divergiert für $x \to \infty$.

Wie für eigentliche Grenzwerte in $x_0 \in \mathbb{R}$ kann man sich fragen, ob für diese uneigentlichen Grenzwerte der Grenzwert einer Summe die Summe der Grenzwerten ist, und das Gleiche für Produkte und Quotienten. Ein Vergleichskriterium kann man sich auch überlegen. Zum Beispiel impliziert

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}$$

und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = y_0$, dass

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = y_0.$$

Können Sie ein analoges Kriterium finden, das

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

impliziert?

**Übung 5.2.29**

Formulieren Sie einen Satz wie Theorem 5.2.11 für uneigentliche Grenzwerte.

**Übung 5.2.30**

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}.$$

## 5.3 Stetigkeit

Jetzt können wir Stetigkeit einer Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ leicht definieren. Dies bedeutet nichts Anderes als:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ \text{ existiert,} \qquad f(x_0) \ \text{ ist definiert,} \qquad \text{und sie sind gleich.}$$

Während die Existenz des Grenzwerts in $x_0$ nichts mit dem Funktionswert zu tun hat, spielt dieser Wert für Stetigkeit eine wichtige Rolle. Stetige Funktionen sind „gut“ in dem Sinne, dass sie sich so verhalten, wie man erwartet. Wir werden mehrere wichtige Sätze über stetige Funktionen beweisen können.

**Definition 5.3.1: Stetigkeit in $x_0$, $f$ auf einer Umgebung von $x_0$ definiert; “Definition 1”**

Sei $f$ auf einer Umgebung von $x_0$ definiert. $f$ ist <u>in $x_0$ stetig</u>, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert und es gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Diese Definition ist etwas zu restriktiv. Was passiert, wenn wir für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Stetigkeit in $a$ prüfen wollen? Was passiert, wenn $\mathcal{D}(f)$ einen isolierten Punkt $x_*$ enthält? Ist $f$ in $x_*$ stetig, wenn wir den Grenzwert in $x_0$ nicht definieren können?

**Definition 5.3.2: Stetigkeit in $x_0$, allgemeine Version; "Definition 2"**

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben und $x_0 \in D$. $f$ ist in $x_0$ stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit} \qquad |x - x_0| < \delta.$$

Überprüfen Sie, dass Definition 5.3.1 und Definition 5.3.2 äquivalent sind, wenn $f$ auf einer Umgebung von $x_0$ definiert ist.

**Schulverbindung 5.3.3**

Insbesondere ist Stetigkeit in einem Punkt **nur für Punkte im Definitionsbereich definiert!** Dies ist manchmal an der Schule nicht klar gemacht.

**Beispiele 5.3.4.** ① *Die Funktion $f(x) = x^2$ ist in $x = 4$ stetig. $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, also können wir Definition 5.3.1 verwenden. Es gilt: (i) $f(4) = 16$, und (ii):*

$$|f(x) - 16| = |x^2 - 16| = |x + 4||x - 4| \leq 5\,\delta \qquad \textit{wenn } |x - 4| \leq 1 \textit{ und } |x - 4| \leq \delta.$$

*Zu einem gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \min\{1, \varepsilon/10\}$ und erhalten $|f(x) - 16| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Also gilt*

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 16 = f(4),$$

*und $f$ ist stetig in 4.*

② *Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ ist in $x_0 = 0$ stetig. Hier ist $g$ auf keiner Umgebung von 0 definiert, also müssen wir Definition 5.3.2 verwenden. Zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ müssen wir $\delta > 0$ finden, so dass alle $x \in \mathcal{D}(g)$ mit $|x - 0| = |x| < \delta$ erfüllen $|g(x) - g(0)| = \sqrt{x} \leq \varepsilon$. Da $\mathcal{D}(g) = [0, \infty)$, vereinfacht sich dies auf*

$$0 \leq x < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x} < \varepsilon. \tag{5.3.1}$$

*Mit der Wahl $\delta := \varepsilon^2$ sehen wir, dass (5.3.1) erfüllt ist.*

③ *Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = n$ ist in $n_0 = 1$ stetig. Hierzu müssen wir Definition 5.3.2 verwenden. Für $\delta < 1$ ist $x_0 = 1$ der einzige Punkt in $D$, der $|x - x_0| < \delta$ erfüllt. Somit ist $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle solcher Punkte erfüllt.*

④ *Die Funktion*

$$t(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$

*ist in $x_0 = 0$ nicht stetig. $t$ ist auf einer Umgebung von 0 definiert, so dass wir Definition 5.3.1 verwenden können. Es gilt $\lim_{x \to 0} t(x) = 0$ aber $t(0) = 5$. In jedem anderen Punkt ($x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$) ist $t$ stetig.*

⑤ *Die Funktion $h(x) = \lfloor x \rfloor$ ist in $x_0 = 1$ nicht stetig. $h$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so dass wir Definition 5.3.1 verwenden können. 1 ist im Definitionsbereich und $h(1) = 1$, aber der Grenzwert in 1 existiert nicht. Der rechtsseitige Grenzwert in $x_0$ ist 1 (weil $h(x) = 1$ für alle $x \in [1, 2)$) und der linksseitige Grenzwert ist 0 (weil $h(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1)$).*

⑥ *Die Funktion* $1/x^2$ *ist in* $x_0 = 0$ *nicht stetig – weil* $0$ *nicht im Definitionsbereich liegt. (Stetigkeit in einem Punkt ist nur für Punkte im Definitionsbereich definiert.)*

⑦ *Die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$

*ist in* $x_0 = 0$ *nicht stetig, weil* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *nicht existiert (Divergenz gegen Unendlich ist keine Konvergenz) und dann auch nicht gleich dem Funktionswert ist.*

⑧ *Die Funktion*

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 5 & x > 0 \end{cases}$$

*ist in* $x_0 = 0$ *nicht stetig, weil Null nicht im Definitionsbereich liegt.*

Sehr oft fragen wir uns, ob eine gegebene Funktion "stetig" ist.

**Definition 5.3.5: stetige Funktion**

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn $f$ in jedem Punkt in $D$ stetig ist.

**Beispiel 5.3.6.** *Die ersten drei Funktionen aus dem obigen Beispiel sind stetig. Die restlichen sind nicht stetig.*

Wie für Grenzwerte, gibt es in einer Dimension auch den Begriff von "einseitiger Stetigkeit".

**Definition 5.3.7: linksstetig, rechtsstetig**

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. $f$ heißt linksstetig in $x_0$, wenn $f$ auf $D \cap (-\infty, x_0]$ stetig ist. Analog ist $f$ rechtsstetig in $x_0$, wenn $f$ auf $D \cap [x_0, \infty)$ stetig ist.

**Beispiel 5.3.8.** *Die Funktion* $h(x) = \lfloor x \rfloor$ *ist in* $x_0 = 1$ *rechtsstetig, weil*

$$\lim_{x \downarrow 1} h(x) = 1 = h(1).$$

**Bemerkung.** *Wenn* $x_0$ *im Inneren des Definitionsbereichs einer Funktion* $f$ *liegt, dann ist* $f$ *in* $x_0$ *genau dann stetig, wenn* $f$ *in* $x_0$ *linksseitig und rechtsseitig stetig ist, also:*

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Theorem 5.3.9**

Die Exponentialfunktion ist stetig.

*Beweis.* Es reicht aus, wenn wir für einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ Stetigkeit in $x_0$ zeigen. Wir zeigen die rechtsseitige Stetigkeit. Die linksseitige Stetigkeit folgt analog. Seien also $x_0 \in \mathbb{R}$ und $x > x_0$. Zu zeigen ist, dass

$$\lim_{x \downarrow x_0} \exp(x) = \exp(x_0). \tag{5.3.2}$$

Wir betrachten die Differenz:

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = \exp(x) - \exp(x_0),$$

wobei wir für die Gleichheit die Monotonie von $\exp(\cdot)$ verwendet haben. Wir definieren $h > 0$ durch $h := x - x_0$, so dass

$$\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0 + h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)\exp(h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)(\exp(h) - 1),$$

wobei wir für die zweite Gleichheit die elementare Eigenschaft $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$ verwendet haben. Also werden wir (5.3.2) gezeigt haben, wenn wir zeigen, dass

$$\lim_{h \downarrow 0} \exp(h) - 1 = 0.$$

Dafür erinnern wir an die Abschätzung (iii) aus Theorem 3.6.7:

$$\exp(h) - 1 \leq \frac{1}{1-h} - 1 = \frac{h}{1-h}. \tag{5.3.3}$$

Mit $1 - h \geq \frac{1}{2}$ für $h \in (0, 1/2)$ schließen wir auf

$$\lim_{h \downarrow 0} \exp(h) - 1 \overset{(5.3.3)}{\leq} \lim_{h \downarrow 0}(2h) = 0.$$

□

Es kann nützlich sein, folgende Äquivalenz zu benutzen.

**Theorem 5.3.10: Charakterisierung durch Folgen**

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a, b)$. $f$ ist in $x_0$ stetig genau dann, wenn für alle Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in (a, b)\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

*Beweis.* Übung. □

**Beispiel 5.3.11.** *Stetigkeit freut uns, weil wir mehr Rechenwege zur Verfügung haben. Als Beispiel: Wir können Stetigkeit von* $\exp(\cdot)$ *verwenden, um den Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}}$ *jetzt als*

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \exp(\log(3^{\frac{1}{n}})) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\log(3)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(3)\right) = 1$$

*zu berechnen. Wo haben wir Stetigkeit verwendet?*

**Übung 5.3.12**

Was passiert, wenn Sie diese Idee mit $n^{1/n}$ anwenden?

**Theorem 5.3.13**

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind $f + g$, $fg$ und $\alpha f$ (für alle $\alpha \in \mathbb{R}$) stetige Funktionen. Außerdem ist $f/g$ stetig in jedem $x \in D$, für die $g(x) \neq 0$ gilt.

*Beweis.* Übung. (Hinweis: Theorem 5.3.10 verwenden.) □

**Übung 5.3.14**

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann sind $|f|$ und $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ stetige Funktionen. Insbesondere ist $f^+ := \max\{f(x), 0\}$ stetig.

**Übung 5.3.15**

Jedes Polynom ist stetig.

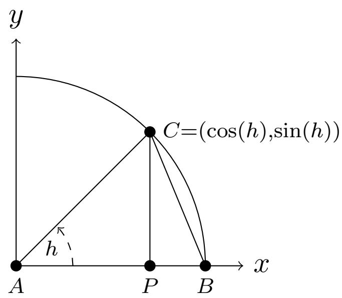



Abbildung 5.7: geometrische Darstellung von Sinus und Cosinus

**Beispiel 5.3.16.** *Als Ausnahme, geben wir einen geometrischen Beweis, dass Sinus in Null stetig ist. Betrachte* $\sin(h)$*, wobei* $h$ *der Winkel im Einheitskreis ist (siehe Anhang). (Später werden wir eine analytische Definition von Sinus und Cosinus einführen.) In Abbildung 5.7 sehen Sie den Einheitskreis mit Winkel* $h$ *skizziert. Aus Geometrie wissen wir, dass die* ***Bogenlänge*** $BC$ *gleich* $h$ *ist. Diese Länge ist größer gleich die Länge der Gerade* $\overline{BC}$ *(für den Beweis verweisen wir auf Variationsrechnung), die wiederum größer gleich die Länge* $\overline{PC} = \sin(h)$ *ist. Zusammenfassend haben wir*

$$0 \leq \sin(h) \leq h \qquad \textit{und somit} \qquad \lim_{h \downarrow 0} \sin(h) = 0 = \sin(0).$$

*Da Sinus eine ungerade Funktion ist, verbessert sich dies auf*

$$\lim_{h \to 0} \sin(h) = 0 = \sin(0).$$

**Übung 5.3.17**

Folgern Sie aus dem Beispiel: $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

**Übung 5.3.18**

Zeigen Sie: Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in (c,d)$ und $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ in $y_0$ stetig, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(y_0).$$

Dies drückt aus, dass wir den Grenzübergang mit der Auswertung der Funktion vertauschen können, wenn $g$ stetig in $y_0$ ist. Geben Sie ein Gegenbeispiel an in dem Fall, dass $g$ in $y_0$ nicht stetig ist.

Die letzte Übung ist eng mit dem folgenden Satz verbunden.

**Theorem 5.3.19**

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$. Wenn $f$ in $a \in A$ stetig ist und $g$ in $f(a) \in B$ stetig ist, dann ist $g \circ f$ in $a$ stetig.

*Beweis.* Übung. (Hinweis: Wieder ist es bequem, dies mit Hilfe von Folgen zu zeigen.) □

**Übung 5.3.20**

Verwenden Sie den Satz, um

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

zu berechnen. (In der Klausur, wäre wahrscheinlich nur nach dem Grenzwert gefragt, ohne den Hinweis, welchen Satz bzw. welche Eigenschaft zu verwenden. Sie müssten dann erwähnen, was Sie dabei verwenden, inklusive zwei Mal Stetigkeit.)

**Übung 5.3.21**

Bestätigen Sie die folgenden Tatsachen.

- Eine rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ ist auf ihrem Definitionsbereich stetig.
- Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

  ist nirgendwo stetig.

- Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ (vollständig gekürzt)} \end{cases}$$

ist in jedem $x \in \mathbb{Q}$ *nicht stetig* und in jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *stetig*.

- Die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$$

ist in $x = 1$ nicht stetig. Wir können $g$ aber stetig machen, wenn wir $g(1)$ als 0 statt 5 definieren.

- Die Funktion $\frac{1}{x^2}$ ist in $x = 0$ nicht stetig, und dies können wir nicht „reparieren".

Die letzten Beispiele zeigen, dass es unterschiedliche Weisen gibt, in denen Stetigkeit fehlen kann. Wir möchten zwischen diesen Typen unterscheiden können.

**Definition 5.3.22: stetige Fortsetzung**

Wenn auf einer punktierten Umgebung $\dot{U}$ von $x_0$, $f : \dot{U} \to \mathbb{R}$ stetig ist und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert (als reelle Zahl), dann heißt $f$ in $x_0$ stetig ergänzbar. Die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \dot{U} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

ist auf $\dot{U} \cup \{x_0\}$ stetig und heißt die stetige Ergänzung oder die stetige Fortsetzung von $f$.

**Definition 5.3.23: hebbare Unstetigkeit**

Wenn für $x_0 \in (a, b)$ die Funktion $f$ auf $(a, b) \setminus \{x_0\}$ definiert ist und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und

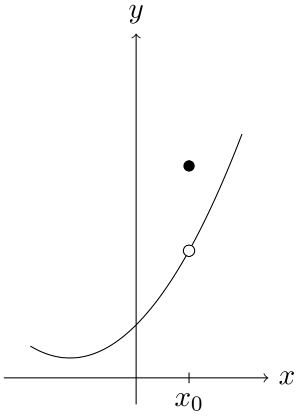
- $f$ in $x_0$ nicht definiert ist oder
- $f$ in $x_0$ definiert ist aber $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

dann sagen wir, $f$ habe in $x_0$ eine hebbare Unstetigkeit.

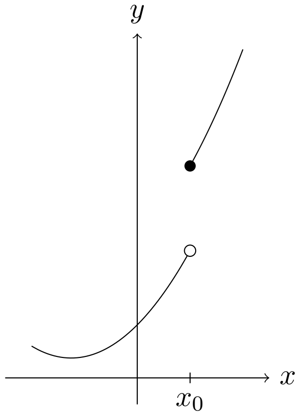
**Bemerkung.** *Wir sollten die Stetigkeit von $g$ zu schätzen wissen. Fehlt sie, dann kann die Zusammensetzung viel schlimmer sein, als die ursprünglichen Funktionen. Zum Beispiel kann die Zusammensetzung $g \circ f$ nirgendwo stetig sein, obwohl $f$ nur auf $\mathbb{Q}$ nicht stetig ist und $g$ nur in einem Punkt nicht stetig ist. Ein Beispiel ist:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ (vollständig gekürzt)} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

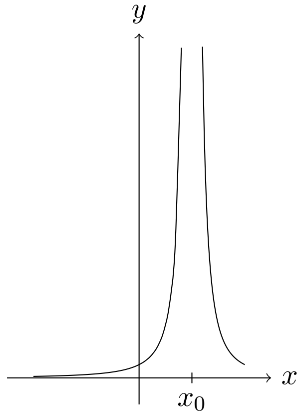
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$




(a) hebbare Unstetigkeit




(b) nicht hebbare Unstetigkeit




(c) nicht hebbare Unstetigkeit

*Die Zusammensetzung*

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

*ist nirgendwo stetig.*

**Übung 5.3.24**

Finden Sie alle Konstanten $c$, so dass $g$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - c^2 & x < 4 \\ cx + 20 & x \geq 4. \end{cases}$$

**Übung 5.3.25**

Finden Sie Konstanten $c$ und $d$, so dass $h$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$h(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ cx^2 + d & 1 \leq x \leq 2 \\ 4x & x > 2. \end{cases}$$

**Übung 5.3.26**

Bestimmen Sie ob für den gegebenen Punkt $a$ die Funktion $f$ eine hebbare Unstetigkeit in $a$ hat. Falls ja, dann finden Sie die stetige Fortsetzung.

1. $a = 7$,

$$f(x) = \frac{x-7}{|x-7|}.$$

② $a = 9$,

$$f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{9-x}.$$

**Übung 5.3.27: Beispielaufgabe Klausur: Stetigkeit einer einfachen Funktion in einem Punkt beweisen**

Beweisen Sie anhand der Definition, dass $p(x) = x^3 - 2x^2$ in $x_0 = 2$ stetig ist.

**Übung 5.3.28: Beispielaufgabe Klausur: Parameter bestimmen, damit eine stetige Ergänzung existiert**

Bestimmen Sie alle Konstanten $c$, so dass $g$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist, wenn gilt:

$$g(x) = \begin{cases} c - x & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3 & x > 1. \end{cases}$$

**Übung 5.3.29: Beispielaufgabe Klausur: entscheiden, ob eine stetige Fortsetzung existiert**

Entscheiden Sie für die Funktion

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{-x^2 - x + 6}$$

ob eine stetige Fortsetzung existiert. Falls ja, bestimmen Sie die stetige Fortsetzung. Falls nicht, erklären Sie, weshalb dies nicht möglich ist.

### 5.3.1 Exkurs: Alternativen zu hebbaren Unstetigkeiten (nicht klausurrelevant)

Wir betrachten eine punktierte Umgebung $\dot{U} := U \setminus \{x_0\}$. Was kann "schiefgehen", so dass eine Funktion $f : \dot{U} \to \mathbb{R}$ keine stetige Fortsetzung auf $U$ hat? Welche andere Arten von Verhalten gibt es? Man kann weiter zwischen einer Sprungstelle, Polstelle und einer Oszillation unterscheiden.

$f$ hat in $x_0$ eine Sprungstelle, wenn beide einseitigen Grenzwerte existieren (als reelle Zahlen) aber verschieden sind:

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\uparrow x_0} f(x) \neq \lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$

So hat die Funktion, die für $x < 0$ gleich Null und für $x > 0$ gleich 1 ist, eine Sprungstelle in Null.

$f$ hat in $x_0$ eine Polstelle, wenn

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \infty && \text{oder} \\
&\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = -\infty && \text{oder} \\
&\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = -\infty && \text{oder} \\
&\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \infty.
\end{aligned}$$

So haben $1/x$ und $1/x^2$ Polstellen in Null.

Wir reden von Oszillationen von $f$ für $x$ gegen $x_0$, wenn es reelle Zahlen $L \neq M$ gibt, so dass es in jeder punktierten Umgebung von $x_0$ Punkte $x_-$, $y_- < x_0$ und $x_+$, $y_+ > x_0$ gibt, mit

$$f(x_-) = f(x_+) = L \qquad \text{und} \qquad f(y_-) = f(y_+) = M.$$

So hat $f(x) = \sin(1/x)$ keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ wegen Oszillationen für $x$ gegen Null.

Polstellen und Oszillationen können auch nur von einer Seite auftreten.

## 5.4 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir schauen uns jetzt weitere Eigenschaften stetiger Funktionen an. Wir erinnern an unsere Konvention:

**Wenn nicht anders angegeben, sind $a, b$ reelle Zahlen mit $a < b$.**

Wir haben häufig bemerkt, dass eine Funktion sein Supremum und Infimum nicht annehmen muss (z.B. $f(x) = x$ auf $(0, 1)$ oder $\tanh(x)$ auf $\mathbb{R}$). Der nächste Satz sagt uns, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen doch ihr Supremum und ihr Infimum annehmen. (Dies ist später z.B. für Optimierungsprobleme und den Mittelwertsatz wichtig.)

**Theorem 5.4.1: Satz über die Extremwerte**

Wenn $f$ auf $[a, b]$ stetig ist, existieren Punkte $x_m$, $x_M \in [a, b]$, so dass

$$f(x_m) = \inf_{[a,b]} f, \qquad f(x_M) = \sup_{[a,b]} f.$$

**Bemerkung.** *Der Satz ist nicht „konstruktiv“: Er sagt uns nicht, was $x_m$, $x_M$ sind, oder wie wir die Zahlen finden oder approximieren können.*

Als Hilfslemma führen wir ein:

**Lemma 5.4.2: stetig+kompakt $\Rightarrow$ beschränkt**

Eine auf $[a, b]$ definierte Funktion, die stetig ist, ist beschränkt.

**Bemerkung.** *Wir erinnern daran, dass ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt heißt. In Theorem 5.4.1 ist Kompaktheit sehr wichtig.*

- *Wenn $f$ stetig auf einem unbeschränkten Intervall ist, gilt die Aussage nicht. Gegenbeispiel: $f(x) = x$ auf $[0, \infty)$.*
- *Wenn $f$ stetig auf einem nicht abgeschlossenen Intervall ist, gilt die Aussage nicht. Gegenbeispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$.*

**Bemerkung.** *In Theorem 5.4.1 ist auch Stetigkeit wichtig.*
*Erstes Gegenbeispiel:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

*Hier ist $f$ auf $[-1,1]$ definiert, aber nicht beschränkt und nimmt das Supremum nicht an.*
*Zweites Gegenbeispiel:*

$$g(x) = \begin{cases} q, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ (vollständig gekürzt)} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

*Auch hier ist $g$ auf $[0,1]$ definiert, aber nicht beschränkt und nimmt das Supremum nicht an.*
*Drittes Gegenbeispiel: Die Funktion*

$$h(x) := \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

*ist auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ definiert und beschränkt aber nicht stetig und nimmt das Supremum nicht an.*

*Beweis von Lemma 5.4.2.* Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir werden zeigen, dass $f$ nach oben beschränkt ist. Analog zeigt man, dass $f$ nach unten beschränkt ist.

Wenn $f$ nicht nach oben beschränkt wäre, würde es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ geben, so dass

$$f(x_n) \geq n. \tag{5.4.1}$$

Da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ mit Grenzwert $x_0 \in \mathbb{R}$. Aus

$$a \leq x_{n_k} \leq b \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

folgt, dass

$$a \leq x_0 \leq b,$$

also $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. Da $f$ stetig ist, gilt

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(5.4.1)}{=} \infty.$$

Dies widerspricht, dass $x_0 \in \mathcal{D}(f)$. □

*Beweis von Theorem 5.4.1.* Seien

$$m := \inf_{[a,b]} f, \quad M := \sup_{[a,b]} f.$$

Lemma 5.4.2 sagt, dass $m$, $M \in \mathbb{R}$. Nach der Approximations-Eigenschaft des Supremums existiert eine Folge $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ und eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, so dass

$$x_n \in [a,b] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad y_n = f(x_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = M. \tag{5.4.2}$$

Angesichts

$$a \leq x_n \leq b$$

existieren nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ und ein Grenzwert $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$x_{n_k} \to x_0 \text{ für } k \to \infty \quad \text{und} \quad a \le x_0 \le b.$$

Stetigkeit von $f$ liefert

$$f(x_0) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \overset{(5.4.2)}{=} M.$$

Analog für das Infimum. □

## Definition 5.4.3

Wenn für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(x_m) = \inf_{x\in A} f(x) =: m, \qquad f(x_M) = \sup_{x\in A} f(x) =: M,$$

werden wir $x_m$ die Minimalstelle und $m$ den Minimalwert nennen, $x_M$ und $M$ Maximalstelle und Maximalwert.
Wenn $x_*$ eine Minimalstelle oder Maximalstelle ist, nennen wir $x_*$ Extremstelle und $y_* := f(x_*)$ Extremwert.
(Man soll nur "Minimum", "Maximum" und "Extremum" verwenden, wenn vom Kontext klar ist, welches gemeint ist.)

## Übung 5.4.4

Begründen Sie folgende Behauptung:

> Ich baue ein rechteckiges Gehege. Dafür habe ich 100m Zaun zur Verfügung. Es gibt ein größtmögliches Gehege, das ich einrichten kann.

Der nächste Satz liefert Existenz von Lösungen der Gleichung

$$f(x) = y.$$

## Theorem 5.4.5: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Seien

$$m := \min_{[a,b]} f, \qquad M := \max_{[a,b]} f.$$

Dann gibt es zu jedem $y \in [m, M]$ mindestens ein $x \in [a, b]$, so dass

$$f(x) = y.$$

**Bemerkung.** *Also ist* $f([a, b]) = [m, M]$.

**Bemerkung.** *Obwohl die Aussage des Satzes nicht konstruktiv ist, geben wir einen konstrukiven Beweis an.*

### Übung 5.4.6

Wissen Sie noch, wieviel Mühe es gekostet hat, zu zeigen, dass $\mathcal{W}(\exp(\cdot)) = (0, \infty)$ gilt? Geben Sie eine Abkürzung mit Hilfe des Zwischenwertsatzes an. Vergessen Sie nicht, Stetigkeit zu verwenden.

**Bemerkung.** *Eine leichte Folgerung ist, dass, wenn*

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

*gilt, $f$ eine Nullstelle auf $(a, b)$ besitzt. Insbesondere besitzt jedes Polynom $(2n-1)$-ten Grades mindestens eine (reelle) Nullstelle. (Hierbei ist $n \in \mathbb{N}$.)*

**Bemerkung.** *Wenn $f$ nicht stetig ist, gilt der Satz nicht! Gegenbeispiel:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [1, 2] \\ x^2 - 2, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

*Dann ist*

$$\min_{[0,2]} f = -2, \quad \max_{[0,2]} f = 5,$$

*aber es gibt z.B. kein $x \in [0, 2]$, so dass*

$$f(x) = 1.$$

### Übung 5.4.7

Begründen Sie, dass es kein $x \in [0, 2]$ gibt, so dass für die obige Funktion gilt $f(x) = 1$.

### Übung 5.4.8

Betrachten Sie

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{x}{2} & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $f$ nicht stetig auf $[0, 2]$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $f$ nicht jeden Wert zwischen $f(0)$ und $f(2)$ annimmt.

*Beweis von Theorem 5.4.5.* Wenn $m = M$ ist, dann ist $f$ konstant:

$$f(x) = m \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Also nehmen wir an, dass $m < M$. Dass es $x_m$, $x_M$ gibt mit $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$, folgt aus dem Satz über die Extremwerte. Also nehmen wir o.B.d.A. an, dass

$$y \in (m, M). \tag{5.4.3}$$

Wir definieren

$$g(x) \coloneqq f(x) - y.$$

Nach (5.4.3) gilt

$$g(x_m) < 0, \quad g(x_M) > 0. \tag{5.4.4}$$

Es reicht aus zu zeigen, dass es ein $\bar{x}$ zwischen $x_m$ und $x_M$ gibt, so dass

$$g(\bar{x}) = 0.$$

Wenn $x_m < x_M$, definieren wir

$$a_1 \coloneqq x_m, \quad b_1 \coloneqq x_M,$$

ansonsten umgekehrt $a_1 \coloneqq x_M$, $b_1 \coloneqq x_m$. In beiden Fällen impliziert (5.4.4), dass

$$g(a_1) \cdot g(b_1) < 0.$$

Jetzt betrachten wir

$$c \coloneqq \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Es gilt entweder

$$g(c) = 0 \quad \text{oder} \quad g(c) \cdot g(b_1) > 0 \quad \text{oder} \quad g(c) \cdot g(b_1) < 0.$$

Im ersten Fall setzen wir $\bar{x} \coloneqq c$. Im zweiten Fall definieren wir

$$a_2 \coloneqq a_1, \quad b_2 \coloneqq c,$$

und im dritten Fall definieren wir

$$a_2 \coloneqq c, \quad b_2 \coloneqq b_1.$$

Falls für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $g(c) = 0$, dann haben wir die gewünschte Nullstelle $\bar{x}$ gefunden. Ansonsten haben wir eine Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ definiert, wobei

$$g(a_n) \cdot g(b_n) < 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{5.4.5}$$

Da $b_n - a_n \leq |b - a|/2^{n-1}$ ist, gilt nach Lemma 3.4.8

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: \bar{x}$$

für ein $\bar{x} \in [a, b]$. Da $g$ stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} g(b_n).$$

Aus (5.4.5) schließen wir

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} g(a_n)g(b_n) = g(\bar{x})^2,$$

so dass

$$g(\bar{x}) = 0.$$

□

**Übung 5.4.9**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie die Aussage:

> Für jedes Polynom $(2n-1)$-ten Grades ist der Wertebereich ganz $\mathbb{R}$.

**Übung 5.4.10**

Zeigen Sie, dass $p(x) = x^2 + x - 1$ zwei reelle Nullstellen $x_\pm$ hat und bestimmen Sie ganze Zahlen $s_\pm$, so dass gilt

$$x_- \in (s_-, s_- + 1), \qquad x_+ \in (s_+, s_+ + 1).$$

**Übung 5.4.11**

Zeigen Sie, dass eine positive Lösung der Gleichung

$$\cos(x) = \exp(x) - 1$$

existiert.

**Übung 5.4.12**

Zeigen Sie, dass

$$\sin(x) = \exp(-x)$$

eine Lösung besitzt.

**Übung 5.4.13**

Zeigen Sie, dass

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \exp(-x)$$

eine Lösung $x_* \in (0, 2\pi)$ besitzt.

**Übung 5.4.14**

Für die Funktion $f$ gegeben durch
$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x},$$
zeigen Sie, dass es einen Punkt $x_*$ gibt, so dass $f(x_*) = 10$.

**Übung 5.4.15**

Verwenden Sie den Zwischenwertsatz, um zu zeigen, dass es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $r^2 = 2$.

**Übung 5.4.16**

Sie gehen am Montag vom Marktplatz zum Hauptgebäude. Sie verlassen den Marktplatz um 10 Uhr und kommen am Hauptgebäude um $10:24$ Uhr an. Am Dienstag nehmen Sie den gleichen Pfad vom Hauptgebäude um 10 Uhr zum Marktplatz und kommen um $10:24$ Uhr an. Beweisen Sie, dass es einen Punkt entlang des Pfades gibt, wo Sie zum genau gleichen Zeitpunkt an beiden Tagen waren.

Schließlich bemerken wir, dass eine Umkehrfunktion Stetigkeit von der ursprünglichen Funktion erbt. (Vergleichen Sie mit Nummer 2 aus Beispiel 5.1.6.)

**Theorem 5.4.17**

Es sei $f$ eine streng monotone und stetige Funktion auf einem nichtleeren Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ ebenfalls streng monoton und stetig.

**Korollar 5.4.18**

Die Funktion $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ gegeben durch $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ ist stetig.

**Korollar 5.4.19**

Die Funktion auf $(0, \infty)$ gegeben durch $x \mapsto \log(x)$ ist stetig.

*Beweis von Theorem 5.4.17.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f$ streng monoton **wachsend** ist. Nach Theorem 5.1.7 existiert auf $f(I)$ die Umkehrfunktion $f^{-1}$.

Schritt 1: Zunächst werden wir zeigen, dass $f(I)$ ein Intervall ist. Wir definieren
$$c := \inf_I f, \qquad d := \sup_I f,$$
wobei $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $d \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Beachten Sie, dass
$$(-\infty, c) \cap f(I) = \emptyset, \qquad (d, \infty) \cap f(I) = \emptyset. \tag{5.4.6}$$

Nach Definition von Infimum und Supremum wissen wir, dass es für alle $p \in (c,d)$ Punkte $x_-$, $x_+ \in (a,b)$ gibt, mit

$$f(x_-) < p < f(x_+).$$

Aus Stetigkeit von $f$ folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in (a,b)$ gibt mit $f(x) = p$. Da $p \in (c,d)$ beliebig war, haben wir gezeigt:

$$(c,d) \subseteq f(I).$$

Zusammen mit (5.4.6) bleiben nur die Möglichkeiten: $f(I)$ ist ein Interval und zwar ist

$$(c,d) \qquad \text{oder} \qquad [c,d] \qquad \text{oder} \qquad (c,d] \qquad \text{oder} \qquad [c,d).$$

Schritt 2: Wir definieren $J := f(I)$ und prüfen Stetigkeit auf $J$. Wir fangen mit Stetigkeit in einem inneren Punkt $y_0 \in (c,d)$ an. Sei $x_0 \in (a,b)$ definiert durch $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass $\varepsilon > 0$ klein genug ist, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a,b)$. Wir bezeichnen

$$f(x_0 - \varepsilon) =: y_-, \qquad f(x_0 + \varepsilon) =: y_+.$$

Die Monotonie von $f$ liefert $y_- < y_0 < y_+$ und $f$ bildet $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ injektiv auf $[y_-, y_+]$ ab. Sei

$$\delta := \min\{y_0 - y_-, y_+ - y_0\}.$$

Dann gilt

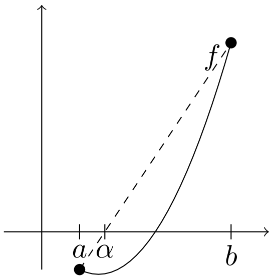
$$f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subseteq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, entspricht dies genau Stetigkeit von $f^{-1}$ in $y_0$. Da $y_0$ ein beliebiger Punkt in $(c,d)$ war, haben wir somit Stetigkeit von $f^{-1}$ auf $(c,d)$ gezeigt. Falls $J$ den Randpunkt $c$ enthält, verläuft der Beweis ähnlich mit $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ durch $[a, a+\varepsilon]$ ersetzt, wobei $a := \inf I$; bzw. wenn $d \in J$ ist, betrachtet man $[b - \varepsilon, b]$ für $b := \sup I$. $\square$

Wie allgemein ist Theorem 5.4.17? Gibt es stetige Bijektionen, die nicht streng monoton sind?

### 5.4.1 Methode zur Nullstellenbestimmung (nur begrenzt klausurrelevant)

Wie erwähnt, enthält der Beweis von Theorem 5.4.5 einen Algorithmus, durch den man den Punkt $\bar{x}$ finden kann. Das so genannte Bisektionsverfahren ist eine zuverlässige Methode, Nullstellen zu finden, aber leider ist die Konvergenz sehr langsam. Im Bisektionsverfahren nimmt man immer den Mittelpunkt $c = \frac{a_n + b_n}{2}$ um das neue Intervall zu definieren, egal wie sich $f$ verhält. Eine andere Möglichkeit wäre es, mehr Infomation über die Funktion $f$ zu benutzen, um ein neues Intervall zu finden.




Stellen Sie sich vor: Wir suchen eine Nullstelle $\bar{x}$ von $f$. Wir betrachten die Sekante $l$, die $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ miteinander verbindet. Wenn $f$ „fast linear" wäre, also $f(x) \approx l(x)$ (in irgendeinem Sinne), dann wäre es schlau, $\bar{x}$ durch die Nullstelle $\alpha$ von $l$ zu approximieren. Diese Idee führt zur Sekantenmethode.
Die Sekantenmethode: Gegeben seien $a$, $b \in \mathbb{R}$ mit

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Man definiere

$$\alpha \coloneqq a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b) - f(a)}.$$

Wenn $f(\alpha) \neq 0$ ist, dann fährt man wie folgt fort:
Wenn $f(a) \cdot f(\alpha) < 0$ ist , dann setze man

$$a_1 = a, \quad b_1 = \alpha,$$

sonst

$$a_1 = \alpha, \quad b_1 = b.$$

Dann iteriert man mit

$$\alpha_{n+1} = a_n - f(a_n) \cdot \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)}.$$

Die Sekantenmethode ist schneller als das Bisektionsverfahren und ist relativ zuverlässig, insbesondere wenn man ungefähr weiß, wo die Lösung liegt.

**Übung 5.4.20**

Betrachten Sie die Gleichung $f(x) = x^2 - 2 = 0$ auf $[1, 2]$.

1. Finden Sie die nächsten zwei Intervalle, die Sie mit dem Bisektionsverfahren erhalten.
2. Finden Sie die nächsten zwei Werte $\alpha_1$ und $\alpha_2$ und Intervalle, die Sie mit der Sekantenmethode erhalten.
3. Welche Methode liefert eine bessere Approximation nach zwei Schritten?

Noch schneller ist das so gennante Newtonverfahren. Wir können die Methode genauer besprechen, wenn wir die Ableitung definiert haben. Die grobe Idee ist, dass die Newtonsche Methode eine Folge $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ erzeugt mit

$$\alpha_n = \varphi(\alpha_{n-1}),$$

für eine stetige Funktion $\varphi$. Man hofft, dass

$\alpha_n$ für $n \to \infty$ gegen $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Dann ist $\bar{\alpha}$ die gesuchte Nullstelle. Wenn $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, dann löst $\bar{\alpha}$ die Gleichung

$$\bar{\alpha} = \varphi(\bar{\alpha}).$$

Also ist $\bar{\alpha}$ ein „Fixpunkt“ von $\varphi$.

**Bemerkung.** *Man kann an konkreten Beispielen sehen, dass im Allgemeinen die Rate des Newtonverfahrens besser ist.*

**Definition 5.4.21**

Ein Fixpunkt einer Funktion $\varphi$ ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$x = \varphi(x).$$

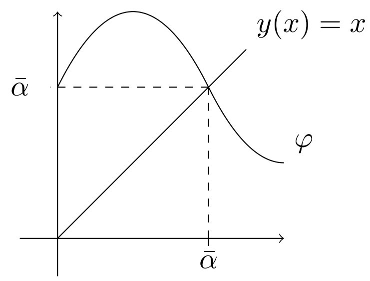



Abbildung 5.9: Der Fixpunkt $\bar{\alpha}$ ist der Schnittpunkt zweier Graphen: dem von $\varphi$ und dem von $y(x) = x$.

**Beispiel 5.4.22.** *Die Funktion $f(x) = x + 1$ hat keine Fixpunkte. Die Funktion $f(x) = x^2$ hat zwei Fixpunkte, $x = 0$ und $x = 1$. Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist ein Fixpunkt der Funktion $f(x) = x$.*

Der letzte Satz dieses Abschnitts liefert Existenz eines Fixpunkts einer stetigen Funktion.

**Theorem 5.4.23**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\mathcal{W}(f) \subseteq [a, b]$. Dann besitzt $f$ mindestens einen Fixpunkt.

*Beweis.* Wenn $f(a) = a$ bzw. $f(b) = b$, dann ist $a$ bzw. $b$ ein Fixpunkt. Wenn nicht, dann ist $f(a) \in (a, b]$ und $f(b) \in [a, b)$. Also gilt für $\tilde{f}(x) := f(x) - x$, dass

$$\tilde{f}(a) > 0, \quad \tilde{f}(b) < 0. \tag{5.4.7}$$

Die Funktion $\tilde{f}$ ist stetig auf $[a, b]$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\bar{x} \in [a, b]$ mit $\tilde{f}(\bar{x}) = 0$. (Wegen (5.4.7) ist $\bar{x} \in (a, b)$.) Der Punkt $\bar{x}$ ist ein Fixpunkt von $f$. $\square$

Fixpunkte sind oft wichtig für numerische Verfahren (z.B. für Runge-Kutta Methoden) und sind auch für die Theorie wichtig (z.B. um zu zeigen, dass Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen existieren).

## 5.5 Gleichmäßige Stetigkeit

Wir erinnern an unsere Konvention:

**Wenn nicht anders angegeben, sind $a, b$ reelle Zahlen mit $a < b$.**

Wir führen jetzt einen Begriff ein, der **stärker** als Stetigkeit ist.

**Definition 5.5.1**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer. Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

War dies nicht die Definition von *Stetigkeit*? Was ist der Unterschied?

In der Definiton oben hängt $\delta$ nur von $\varepsilon$ ab. Dass $f$ auf $\mathcal{D}(f)$ stetig ist, bedeutet, dass $f$ in jedem Punkt $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ stetig ist. Das heißt, für jedes $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ und jedes $\varepsilon > 0$, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{impliziert} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(f).$$

Hier hängt $\delta$ sowohl von $\varepsilon$ als auch von $x_0$ ab.

**Beispiel 5.5.2.** *Um den Unterschied besser zu verstehen, schauen wir uns ein Beispiel an. Sei $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$ gegeben. Die Funktion $f$ ist stetig. Aber was passiert mit $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ für $x$ nah an $0$?*

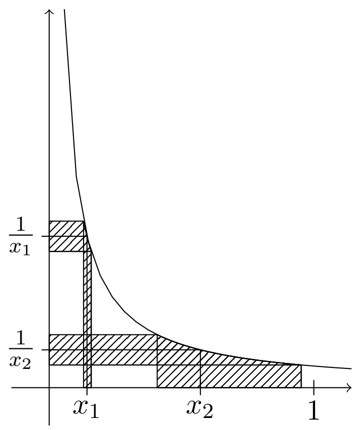



Abbildung 5.10: Für $x_1$ nah an 0 ist $\delta = \delta(\varepsilon, x_1)$ viel kleiner als $\delta = \delta(\varepsilon, x_2)$ für $x_2$ nah an 1.

*Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $x_0 \in (0, 1)$. Wir suchen ein Kriterium, damit*

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

*ist. Es gilt*

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| < \varepsilon,$$

*wenn*

$$x \geq \frac{x_0}{2} \quad \textit{und} \quad |x - x_0| < \frac{x_0^2 \varepsilon}{2}.$$

*Da aus* $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$ *die Ungleichung* $x \geq x_0 - |x - x_0| \geq \frac{x_0}{2}$ *folgt, reicht es aus, wenn wir*

$$\delta = \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right\}$$

*wählen. Man merkt, dass* $\delta$ *von* $x_0$ *abhängt. Jetzt zeigen wir, dass* $f$ *in der Tat nicht gleichmäßig stetig ist. Sei* $\varepsilon = 1$. *Wenn* $f$ *gleichmäßig stetig wäre, würde es ein* $\delta > 0$ *geben, so dass*

$$|x - y| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < 1.$$

*Insbesondere würde aus*

$$|x - y| < \min\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\} =: \tilde{\delta}$$

*die Ungleichung*

$$|f(x) - f(y)| < 1$$

*folgen. Aber für* $x = \tilde{\delta}$, $y = \frac{\tilde{\delta}}{2}$ *gilt*

$$|x - y| = \frac{\tilde{\delta}}{2} < \tilde{\delta}$$

*und*

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\tilde{\delta}} - \frac{2}{\tilde{\delta}}\right| = \frac{1}{\tilde{\delta}} \geq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

*Durch diesen Widerspruch erhalten wir, dass* $f$ *nicht gleichmäßig stetig ist.*

Im letzten Beispiel haben wir die Struktur der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ benutzt, um einen direkten Beweis zu geben. Jetzt schauen wir uns ein Beispiel an, in dem die Funktion komplizierter ist.

**Beispiel 5.5.3.** *Die Funktion* $\log(\cdot) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist nicht gleichmäßig stetig. Dies zeigen wir mit einem Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass es für* $\varepsilon = 1$ *ein* $\delta > 0$ *gäbe, so dass*

$$|\log(x) - \log(y)| < 1 \quad \textit{für alle } x, y \in (0, 1] \quad \textit{mit} \quad |x - y| < \delta. \tag{5.5.1}$$

*(Hier betrachten wir nur* $|x| < 1$, *weil das Verhalten in einer Umgebung von Null das Problem ist.) O.B.d.A. dürfen wir annehmen (warum?), dass*

$$\delta < 1. \tag{5.5.2}$$

*Wir wählen* $x_0 > 0$ *mit*

$$x_0 < \delta, \quad |\log(x_0)| > \frac{3}{\delta}. \tag{5.5.3}$$

*Dies ist möglich, weil*

$$\lim_{x \downarrow 0} |\log(x)| = \infty.$$

*Allerdings gilt*

$$\begin{aligned}|\log(x_0)| &= |\log(x_0) - \log(1)| \\ &\leq |\log(x_0) - \log(\delta)| + |\log(\delta) - \log(2\delta)| + \ldots + |\log(N\delta) - \log(1)|,\end{aligned} \tag{5.5.4}$$

*wobei* $N = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$ *(die größte ganze Zahl kleiner gleich* $\frac{1}{\delta}$*) und wir die Dreiecksungleichung angewendet haben. Aus* (5.5.1) *und* (5.5.4) *schließen wir*

$$|\log(x_0)| \leq N + 1 \leq \frac{1}{\delta} + 1 \overset{(5.5.2)}{<} \frac{2}{\delta}, \tag{5.5.5}$$

*da die Vorraussetzung* $|x - y| < \delta$ *aus* (5.5.1) *für alle Summanden in* (5.5.4) *erfüllt ist. Die Ungleichung* (5.5.5) *widerspricht* (5.5.3). *Mit diesem Widerspruch haben wir gezeigt, dass* $\log(\cdot)$ *auf* $(0, \infty)$ *nicht gleichmäßig stetig ist. Noch genauer haben wir mit dem Beweis gezeigt, dass* $\log(\cdot)$ *auf* $(0, 1]$ *nicht gleichmäßig stetig ist.*

**Übung 5.5.4**

Zeigen Sie, dass

1. $x^2$ auf $(0, 1)$ gleichmäßig stetig ist.
2. $x^2$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Wir haben eben zwei Beispiele gesehen, bei denen eine nichtbeschränkte, stetige Funktion auf einem offenen Interval nicht gleichmäßig stetig ist. Állgemein gilt:

**Theorem 5.5.5**

Wenn $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, dann ist $f$ beschränkt.

**Bemerkung.** *Wieder erinnern wir daran, dass* $a, b$ *reelle Zahlen sind. Sonst wäre* $\log(\cdot)$ *auf* $(1, \infty)$ *ein Gegenbeispiel. (Sehen Sie Übung 5.5.7 unten.)*

**Übung 5.5.6**

Beweisen Sie das Theorem. Andererseits geben Sie ein Beispiel an, in dem eine auf $(a, b)$ stetige und beschränkte Funktion nicht gleichmäßig stetig ist.
(Hinweis zum Beweis: Eventuell wollen Sie eine Folge $\{x_n\}$ einführen wie wir im Beweis von Lemma 5.4.2. Falls Sie eine konvergente Teilfolge finden mit $x_{n_k} \to x_0 \in (a, b)$, dann sind Sie tatsächlich im Setting des alten Beweises. Der Fall $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ wäre hier neu. Das ist der neue Aspekt.)

**Übung 5.5.7**

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen gleichmäßig stetig sind:

- $\log(x)$ auf $(1, \infty)$,
- $x^2$ auf $(0, L)$ für $L > 0$,

- $1/(x^2+1)$ auf $\mathbb{R}$.

Um schätzen zu wissen, wie hilfreich gleichmäßige Stetigkeit ist, zeigen wir:

**Lemma 5.5.8**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Wenn eine Folge mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Cauchy ist, dann ist die Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchy.

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ bestimmt, so dass für alle $x_1$, $x_2 \in D$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ die Abschätzung $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ folgt. Zu diesem $\delta > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ bestimmt, so dass $|x_n - x_m| < \delta$ für alle $n$, $m \geq N$. Dann folgt $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n$, $m \geq N$. $\square$

Der einfachste Weg, auf gleichmäßige Stetigkeit zu schließen, ist: Wenn $f$ auf $[a, b]$ stetig ist, dann ist $f$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Die Idee ist, dass es in diesem Fall ein „schlimmstes $\delta$" gibt.

**Theorem 5.5.9**

Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

*Beweis.* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir nehmen für den Widerspruch an, dass $f$ nicht gleichmäßig stetig ist. Dann existiert $\varepsilon_0 > 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n$, $y_n \in [a, b]$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{5.5.6}$$

Da $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt sind, besitzen sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß konvergente Teilfolgen

$$x_{n_k} \to x, \quad y_{n_k} \to y \quad \text{für } k \to \infty,$$

wobei $x$, $y \in [a, b]$. Außerdem impliziert $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, dass

$$x = y.$$

Da $f$ stetig ist, gilt für $k \to \infty$

$$f(x_{n_k}) \to f(x), \quad f(y_{n_k}) \to f(x). \tag{5.5.7}$$

Aber dann erhalten wir aus dem Vergleichskriterium und dem Satz über den Grenzwert einer Summe von zwei konvergenten Folgen den Widerspruch, dass

$$\varepsilon_0 \overset{(5.5.6)}{\leq} \lim_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) \overset{(5.5.7)}{=} f(x) - f(x) = 0.$$

$\square$

Angesichts Theorem 5.5.9 ist $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig, obwohl der Graph sehr steil ist für $x$ klein ($f'(x) \to \infty$ für $x \downarrow 0$).

Auf (nichtleeren) beschränkten, abgeschlossenen Intervallen sind alle stetige Funktionen gleichmäßig stetig. Wie sieht es auf beschränkten, offenen Intervallen aus? Was ist der Unterschied zwischen

$$\sqrt{x}, \quad \frac{1}{x}, \quad x, \quad \text{oder } \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{auf } (0,1)?$$

Welche sind gleichmäßig stetig?

**Übung 5.5.10**

Untersuchen Sie auf gleichmäßige Stetigkeit auf $(0,1)$:

1. $$x^2 \log(x),$$
2. $$\frac{1}{\sqrt{x}},$$
3. $$x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$
4. $$x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

(Hinweis: Suchen Sie eine Verbindung mit der Existenz einer stetigen Fortsetzung.)

**Theorem 5.5.11**

Eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn es eine stetige Fortsetzung von $f$ auf $[a,b]$ gibt.

# Kapitel 6

# Reihen

Wir kennen die „Sigma-Notation“

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3.$$

In diesem Abschnitt stellen wir uns die Frage, was mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{6.0.1}$$

gemeint wird. Natürlich können wir nicht unendlich viele Terme addieren (man hat nicht genug Zeit dafür). Stattdessen addiert man zunächst $n$ Terme und dann $n+1$ Terme usw. und man hofft, dass man „eine gute Approximation erhält“, wenn man genügend Terme addiert hat. Wie können wir das präzise machen? Genau gesagt, betrachten wir

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 \\ s_2 &:= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &:= a_1 + ... + a_n \end{aligned}$$

und überprüfen, ob die Folge $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

*Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.*

Wenn dies der Fall ist, dann benutzen wir die Notation (6.0.1) *für den Grenzwert.* Wenn der Grenzwert nicht (als reelle Zahl) existiert, dann sprechen wir von Divergenz der Reihe. Im nächsten Abschnitt schauen wir uns solche sogenannte Reihen an und sammeln hinreichende Konvergenzkriterien.

Oft werden wir nur *Existenz des Grenzwerts* zeigen und nicht den Grenzwert konkret bestimmen können. Allerdings erinnern wir an das schöne Beispiel aus unserer Kindheit:

$$\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Dabei sind $0,3,\ 0,33,\ 0,333,\ldots$ bekannte Approximationen des Grenzwerts $1/3$.

## 6.1 Mathematische Einleitung, erste Beispiele und Aussagen

**Definition 6.1.1**

Sei $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ eine Zahlenfolge. Dann wird

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

die $n$-te Partialsumme (oder $n$-te Teilsumme) genannt und $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ heißt die Folge der Partialsummen (oder Teilsummen). Man nennt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n$$

eine (unendliche) Reihe. Wenn $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ (gegen $s \in \mathbb{R}$) konvergiert, dann sagen wir, dass die Reihe (gegen $s$) konvergiert. Wir nennen $s$ den Wert (oder die Summe) der Reihe und schreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Wenn $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ divergiert, dann sagen wir, dass die Reihe divergiert. Zusätzlich sagen wir

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ (die Reihe divergiert gegen $\infty$),
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ (die Reihe divergiert gegen $-\infty$) bzw.
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist unbestimmt divergent,

wenn $s_n \to \infty$, $s_n \to -\infty$ bzw. $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ unbestimmt divergent ist.

Wir nennen $a_k$ die Koeffizienten der Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$.

Der Einfachheit halber haben wir oben mit $k = 1$ angefangen. Analog definiert man für allgemeines $z \in \mathbb{Z}$ die Reihe

$$\sum_{k=z}^{\infty} a_k.$$

**Beispiele 6.1.2.**

① *Wir haben in Lemma 3.2.5 gesehen, dass die $n$-te Partialsumme*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} r^k$$

*die Gleichung*

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \textit{für } r \in (0, 1) \tag{6.1.1}$$

*erfüllt. Aus* (6.1.1)*, Definition 6.1.1 und* $r^{n+1} \to 0$ *für* $r \in (0,1)$ *und* $n \to \infty$ *schließen wir, dass die (unendliche) geometrische Reihe konvergiert und erfüllt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \textit{für } r \in (0,1).$$

② *Wir betrachten die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n. \tag{6.1.2}$$

*Wir bemerken*

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0$$

*und im Allgemeinen*

$$s_{2k+1} = -1, \quad s_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

*Also divergiert die Reihe* (6.1.2)*.*

**Übung 6.1.3**

Was passiert mit der geometrischen Reihe für $r \geq 1$? Für $r < -1$?

**Übung 6.1.4: Konvergenzbegriff**

Es sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Zeigen Sie, dass für jedes $K \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum\limits_{k=K+1}^{\infty} a_k$ konvergiert und dass $\lim\limits_{K\to\infty} \sum\limits_{k=K+1}^{\infty} a_k = 0$.

Neben der geometrischen Reihe ist eine andere sehr angenehme Art von Reihen eine *Teleskopsumme*.

**Theorem 6.1.5**

Wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist, dann ist die Reihe (Teleskopsumme)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

*Beweis.* Wieder erinnern wir daran, dass die "Summe" anhand der Partialsummen definiert ist. Für die $n$-te Partialsumme $s_n$ gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

Aus Konvergenz von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und dem Satz über konvergenten Folgen (Theorem 3.3.12) folgt das Ergebnis. □

**Übung 6.1.6**

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

konvergent ist und berechnen Sie den Wert.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Die geometrische Reihe und Teleskopsummen sind Ausnahmen, für die wir den Grenzwert konkret bestimmen können. Da wir sehr oft den Wert einer konvergenten Reihe nicht explizit berechnen können, werden wir öfter das *Cauchysche Kriterium* für Konvergenz einer Folge verwenden. Wir erinnern an Definition 3.5.1 und Theorem 3.5.2. Dies können wir für Reihen wie folgt umformulieren:

**Theorem 6.1.7: Cauchysches Kriterium für Reihen**

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+j} a_k\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N,\ j \in \mathbb{N}. \tag{6.1.3}$$

**Korollar 6.1.8: Divergenzkriterium**

Eine notwendige Bedingung für Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{6.1.4}$$

*Beweis.* Dies folgt aus (6.1.3) mit $j = 1$. □

Es ist wichtig zu merken, dass (6.1.4) **keine hinreichende Bedingung** (beliebter Fehler) für Konvergenz der Reihe ist! Die berühmte harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

erfüllt (6.1.4) und divergiert gegen Unendlich. Dies kann man zeigen, indem man

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^K+1} + \dots + \frac{1}{2^{K+1}}\right)}_{\geq 2^K\cdot\frac{1}{2^{K+1}}}$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{K}{2}$$

rechnet. Mit vollständiger Induktion bestätigt man

$$\sum_{k=1}^{2^{K+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{3+K}{2}.$$

Da die Folge der Partialsummen monoton wachsend ist und eine Teilfolge besitzt, die gegen Unendlich divergiert, divergiert die harmonische Reihe gegen Unendlich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \tag{6.1.5}$$

Also ist es für Konvergenz notwendig aber **nicht hinreichend**, dass die Koeffizienten einer Reihe eine Nullfolge bilden. Wie Sie vielleicht raten würden, ist es hinreichend, wenn die Terme <u>schnell genug</u> verschwinden. Wir werden zum Beispiel sehen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \tag{6.1.6}$$

und sogar, dass

$$\text{für jedes } \alpha > 0 \qquad \text{gilt} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} < \infty.$$

(Dies beweisen wir später mit dem sogenannten Cauchyschen Verdichtungssatz in Übung 6.3.8.)

**Übung 6.1.9**

Bestimmen Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit

$$a_k = \frac{1}{3^k} - \frac{1}{k}$$

konvergiert oder divergiert.

Aus Theorem 3.3.12 folgt:

**Theorem 6.1.10**

Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

**Übung 6.1.11**

Bestimmen Sie den Wert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}.$$

(Hinweis: Wenn Sie ein Theorem verwenden wollen, müssen Sie als Erstes überprüfen, ob die Voraussetzungen gelten!)

Unsere ersten allgemeinen Konvergenzkriterien sind für Reihen *mit nichtnegativen Koeffizienten.*

**Theorem 6.1.12: Vergleichskriterium**

Angenommen es existiert $K \in \mathbb{N}$, so dass $0 \le a_k \le b_k$ für alle $k \ge K$.

- Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$, dann gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$.

*Beweis.* Da die Koeffizienten nichtnegativ sind, sind die Partialsummen monoton wachsend. Somit konvergieren die Reihe genau dann, wenn die Partialsummen (nach oben) beschränkt sind. Die erste Aussage liefert Existenz einer Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \le C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt natürlich auch

$$b_K + b_{K+1} + \ldots b_n \le C \qquad \text{für alle } n > K,$$

wobei wir wieder Nichtnegativität verwendet haben. Für alle $n > K$ gilt mit der Voraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots a_{K-1} + \sum_{k=K}^{n} a_k \le a_1 + \ldots a_{K-1} + \sum_{k=K}^{n} b_k \le a_1 + \ldots a_{K-1} + C.$$

Da die rechte Seite von $n$ unabhängig ist, haben wir somit die gewünschte Beschränktheit nach oben gezeigt.

Um die zweite Aussage zu zeigen, müssen wir beweisen: Für jedes $M \in \mathbb{R}$ existiert ein

$N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \geq M \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Da wir die ersten $K-1$ Koeffizienten nicht anhand der Reihe mit Koeffizienten $a_k$ abschätzen können, definieren wir

$$A := \sum_{k=1}^{K-1} a_k.$$

Wegen Divergenz von $\sum a_k$ gegen Unendlich, existiert zu $A$ und der Konstante $M$ von oben ein $N_a \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq M + A \qquad \text{für alle } n \geq N_a.$$

Wir bemerken, dass $N_a \geq K$. Aber dann gilt für $n \geq N_a$:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=K}^{n} b_k \geq \sum_{k=K}^{n} a_k \geq M + A - \sum_{k=1}^{K-1} a_k = M.$$

□

**Übung 6.1.13**

Bestimmen Sie, ob folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2k^2 + 4k + 3}.$$

(Hinweis: Als erster Schritt, folgern Sie aus Konvergenz der Reihe mit Koeffizienten $(k(k+1))^{-1}$ Konvergenz der Reihe mit Koeffizienten $k^{-2}$.) (Fun fact: Euler zeigte $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6!$)

Unser zweites Ergebnis für Reihen mit nichtnegativen Koeffizienten ist subtiler und mächtiger:

**Theorem 6.1.14: Limes-Vergleichskriterium**

Angenommen es existiert $K \in \mathbb{N}$, so dass $a_k \geq 0$, $b_k > 0$ für $k \geq K$ und weiter gelte

$$L := \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} \quad \text{existiert (als reelle Zahl oder im Sinne von bestimmer Divergenz gegen } \infty).$$

Dann gilt:

*(i)* Wenn $0 < L < \infty$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

*(ii)* Wenn $L = 0$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

*(iii)* Wenn $L = \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

*Beweis.* Im Fall $L \in (0, \infty)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{L}{2} b_k < a_k < \frac{3L}{2} b_k.$$

Dann folgt die Aussage aus dem Vergleichskriterium und Theorem 6.1.10.

Im Fall $L = 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_k \leq b_k$ für $k \geq N$, und die Aussage folgt aus dem Vergleichskriterium. Im Fall $L = \infty$ gilt

$$\frac{b_k}{a_k} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

und die Aussage folgt wie im zweiten Fall. □

**Übung 6.1.15**

Angenommen $a_k \to 0$ für $k \to \infty$. Beweisen Sie: $\sum_{k=1}^{\infty} \sin |a_k|$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

**Übung 6.1.16**

Überprüfen Sie die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n^2+1}{7+10n+4n^3}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}$

## 6.2 Bedingte Konvergenz

Im Allgemeinen sind Reihen mit Vorzeichenwechsel der Koeffizienten komplizierter. Es ist nützlich zwischen Reihen zu unterscheiden, die „nur mit Hilfe des Vorzeichens“ konvergieren oder nicht.

**Definition 6.2.1**

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergiert, so heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent.

**Bemerkung.** *Wenn eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Die Umkehrung ist falsch.*

*Beweis.* Absolute Konvergenz heißt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n,\, m \geq N.$$

Für das gegebene $N$ gilt dann

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n,\, m \geq N.$$

□

Dass die Umkehrung falsch ist – also, dass bedingt konvergente Reihen existieren – bestätigen wir mit folgendem Beispiel.

**Beispiel 6.2.2.** *Man betrachte die alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

*Um Konvergenz dieser Reihe zu überprüfen, reicht es aus*

$$\sum_{k=n+1}^{n+j} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = (-1)^{n+2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \ldots + \frac{(-1)^{j-1}}{n+j} \right)$$

*für $n$ groß und beliebiges $j \in \mathbb{N}$ abzuschätzen. Sei*

$$f(n,j) := \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{j-1}}{n+j}.$$

*Wenn $j$ ungerade ist, so gilt*

$$\frac{1}{n+j} \leq f(n,j) \leq \frac{1}{n+1}. \tag{6.2.1}$$

*Wenn $j$ gerade ist, so gilt*

$$0 \leq f(n,j) \leq \frac{1}{n+1}. \tag{6.2.2}$$

*Aus* (6.2.1) *und* (6.2.2) *folgt*

$$|f(n,j)| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N},$$

*so dass für $\varepsilon > 0$ beliebig klein und $N$ groß genug gilt*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+j} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N,\, j \in \mathbb{N}.$$

*Wir fassen zusammen:*

- *die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert gegen Unendlich.*
- *die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergiert.*

Analog beweist man das folgende wichtige Kriterium für alternierende Reihen.

**Theorem 6.2.3: Leibniz-Kriterium**

Sei $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k.$$

*Beweis.* Übung. □

**Bemerkung.** *Wenn eine Reihe absolut konvergent ist, dann erhält man den gleichen Wert, wenn man die Summanden umordnet. Andererseits, wenn eine Reihe bedingt konvergent ist, dann kann man jede reelle Zahl als Summe erhalten mit einer geeigneten Umordnung!*

**Übung 6.2.4**

Überprüfen Sie auf Konvergenz:

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 3k}{4k-1}$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3}{4k-1}$$

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^2}{k^3+1}$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$$

monoton fallend auf $[\sqrt[3]{2},\infty)$ ist.

**Übung 6.2.6**

Beweisen Sie die folgende *Fehlerabschätzung* für alternierende Reihen:

**Theorem 6.2.6.** *Wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge positiver Zahlen ist und*

$$s:=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k,$$

*dann gilt*

$$|s-s_n|\le a_{n+1}\quad \textit{für alle } n\in\mathbb{N},$$

*wobei $s_n$ die $n$-te Partialsumme der Reihe bezeichnet.*

Verwenden Sie Ihr Theorem, um $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ korrekt bis zu drei Nachkommastellen zu berechnen. (Für diese Teilaufgabe können Sie einen Taschenrechner verwenden.)

## 6.3 Weitere Konvergenzkriterien

Falls für eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, kann man versuchen, daraus Konvergenz/Divergenz der Reihe zu folgern. (Man möchte, dass $a_k$ schnell verschwindet—also ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ klein der gute Fall.)

**Theorem 6.3.1: Quotientenkriterium**

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq K \in \mathbb{N}$. Wenn

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \longrightarrow \alpha \quad \text{für } k \to \infty,$$

dann gilt

- $\alpha < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
- $\alpha > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Wenn $\alpha = 1$, dann liefert der Satz KEINE AUSSAGE. Beachte tatsächlich, dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to 1$ für

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (divergent),
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (konvergent).

*Beweis.* Idee: Wenn $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to \alpha$ und $\alpha < 1$, dann hat man ein bisschen „Spielraum“ zwischen $\alpha$ und 1. Insbesondere gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$|a_{N+1}| \leq (\alpha + \varepsilon)|a_N| \quad \text{für } N \text{ groß genug.}$$

Wenn wir $\varepsilon := \frac{1-\alpha}{2}$ wählen, erhalten wir

$$|a_{N+1}| \leq \beta |a_N| \quad \text{für } N \text{ groß } (\beta := \frac{\alpha+1}{2} < 1).$$

Iteration liefert

$$\begin{aligned} |a_{N+2}| &\leq \beta^2 |a_N| \\ &\vdots \\ |a_m| &\leq \beta^{m-N}|a_N| \quad \text{für } m \geq N \\ &= \beta^m \cdot \underbrace{\beta^{-N}|a_N|}_{\text{feste Zahl}}. \end{aligned}$$

Aus Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta^m \quad \text{für } \beta \in (0,1)$$

und dem Vergleichskriterium folgern wir absolute Konvergenz der ursprünglichen Reihe.

Der Beweis der Divergenz im Fall $\alpha > 1$ ist ähnlich und wird als Übung gelassen. □

Das Quotientenkriterium ist oft nützlich, wenn die Terme der Reihe ein Produkt oder eine Fakultät enthalten.

**Beispiel 6.3.2.** *Man betrachte*

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

*Es gilt*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k}\right| = \frac{2}{k+1} \to 0 \quad \textit{für } k \to \infty.$$

*Nach dem Quotientenkriterium ist $S$ absolut konvergent.*

**Bemerkung.** *Das Quotientenkriterium ist hinreichend, aber nicht notwendig. Zum Beispiel*

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}} \tag{6.3.1}$$

*konvergiert* $\left(\textit{nach Vergleich mit } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^{k-1}}\right)$, *obwohl*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \begin{cases} \frac{3}{2} & \textit{für } k \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{6} & \textit{für } k \textit{ gerade.} \end{cases}$$

### Übung 6.3.3

Entscheiden Sie, was das Quotientenkriterium über Konvergenz/Divergenz liefert:

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

② 

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$$

③ 

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Das nächste Kriterium, das wir uns anschauen, ist das Wurzelkriterium. Dieses Kriterium ist allgemeiner, und man kann es zum Beispiel auch für das Analysieren der Reihe in (6.3.1) anwenden (siehe unten).

**Theorem 6.3.4: Wurzelkriterium**

Wenn für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gilt

$$\alpha := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

dann folgt

- $\alpha < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.
- $\alpha > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Wie das Quotientenkriterium liefert auch das Wurzelkriterium für $\alpha = 1$ keine Aussage. Man bemerkt:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1,$$

aber wir erinnern an (6.1.5) und (6.1.6).

Beweisidee Die Idee ist—wie für das Quotientenkriterium—mit der geometrischen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta^k$ für geeignetes $\beta$ zu vergleichen. Wieder bieten die Fälle $\alpha < 1$ und $\alpha > 1$ hinreichenden „Spielraum“ an.

*Beweis.* Sei $\alpha < 1$. Aus der Voraussetzung folgern wir Existenz $\varepsilon > 0$, $K \in \mathbb{N}$ und $\beta := \alpha + \varepsilon$ mit $\beta < 1$, so dass

$$|a_k| \leq \beta^k \quad \text{für alle } k \geq K.$$

Mit Konvergenz der geometrischen Reihe mit $b_k := \beta^k$ und dem Vergleichskriterium erhalten wir Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Sei $\alpha > 1$. Dann gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} > 1 \quad \text{für unendlich viele } k \in \mathbb{N},$$

und somit auch

$$|a_k| > 1 \quad \text{für unendlich viele } k \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Divergenzkriterium folgt die Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. □

**Beispiele 6.3.5.**

① *Für die Reihe in* (6.3.1) *berechnen wir*

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt[k]{2+(-1)^k}}{2^{\frac{k-1}{k}}} \leq \frac{\sqrt[k]{3}}{2 \cdot 2^{-\frac{1}{k}}} \to \frac{1}{2} < 1.$$

*Das Wurzelkriterium impliziert, dass $S$ absolut konvergent ist.*

② *Wir betrachten*

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k+1}{2k+3} \right)^k .$$

*Für diese Reihe passt das Wurzelkriterium besonders gut, da die Terme in der Form einer Potenz von $k$ sind. Man berechnet*

$$\sqrt[k]{\left( \frac{k+1}{2k+3} \right)^k} = \frac{k+1}{2k+3} \to \frac{1}{2}.$$

*Das Wurzelkriterium impliziert, dass $S$ absolut konvergiert.*

**Übung 6.3.6**

Entscheiden Sie, was das Wurzelkriterium über Konvergenz/Divergenz liefert:

①
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

②
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+3}{3n+2} \right)^n$$

③
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^n}$$

④
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\arctan n)^n}.$$

(Hier ist arctan die Umkehrfunktion von Tangens auf $(-\pi/2, \pi/2)$.)

Ein noch stärkeres Werkzeug ist das sogenannte Cauchysche Verdichtungsprinzip, das die Idee benutzt, mit der wir Divergenz der harmonischen Reihe gezeigt haben. Wir geben das Prinzip an und dann stellen wir die Beweisidee durch das Beispiel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ dar.

**Theorem 6.3.7: Cauchyscher Verdichtungssatz**

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit positiven, monoton fallenden Gliedern. Dann hat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dasselbe Konvergenzverhalten wie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Beweisidee Wir demonstrieren die Beweisidee anhand des Beispiels

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für $\alpha < 1$ divergiert die Reihe gegen Unendlich nach Vergleich mit der harmonischen Reihe (siehe (6.1.5)). Für $\alpha > 1$ benutzen wir ein analoges Argument, um Konvergenz von $S$ zu zeigen. Wir sammeln die Terme der Partialsumme bis $2^{K+1} - 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{K+1}-1)^\alpha} \\
=&1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^K)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{K+1}-1)^\alpha}\right) \\
\le&1 + 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} + 4 \cdot \frac{1}{4^\alpha} + \dots + 2^K \frac{1}{(2^K)^\alpha} \\
=&\sum_{k=0}^{K} 2^k \cdot \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{(\underbrace{2^{\alpha-1}}_{>1})^k}.
\end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k}, \quad q > 1$$

konvergent und insbesondere nach oben beschränkt ist. Da die Folge der Partialsummen monoton wachsend ist und eine nach oben beschränkte Teilfolge besitzt, ist die Folge selbst nach oben beschränkt. Nach Theorem 3.3.16 konvergiert die Folge der Partialsummen (also konvergiert die Reihe $S$).

Wir fassen zusammen: Für eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit positiven Termen $a_k \ge 0$ gilt,

- wenn $a_k \ge \frac{c}{k}$ für ein $c > 0$, dann divergiert die Reihe. Also reicht das Verschwinden der Terme nicht für Konvergenz der Reihe aus.
- wenn $a_k \le \frac{c}{k^{1+\varepsilon}}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$, dann konvergiert die Reihe. Also reicht algebraisches Verschwinden der Terme mit Rate echt größer als Eins für Konvergenz der Reihe aus.

*Beweis von Theorem 6.3.7.* Die Aussage folgt aus der Monotonie der Partialsummen und den

Abschätzungen

$$a_1 + (a_2 + a_3) + ... + a_{2^{K+1}-1} \leq a_1 + 2a_2 + ... + 2^K a_{2^K}$$

$$a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + a_{2^K} \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + ... + 2^{K-1} a_{2^K} = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K} 2^k a_{2^k}.$$

□

**Übung 6.3.8**

Verwenden Sie den Satz, um Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$$

für beliebiges $\alpha > 0$ zu zeigen.

Schließlich stellen wir uns die Frage, ob die Rate

$$a_k = \frac{1}{k \log(k)}$$

hinreichend für Konvergenz der zugehörigen Reihe ist. Bemerken Sie, dass für $k$ groß gilt

$$k < k \log(k) < k^{1+\alpha} \quad \text{für alle } \alpha > 0.$$

Also verschwindet $a_k$ schneller als die Terme der (divergenten) harmonischen Reihe, aber langsamer als die Terme der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}}$ für jedes $\alpha > 0$. Um Konvergenz von

$$S := \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log(k)}$$

zu überprüfen, wenden wir den Cauchyschen Verdichtungssatz an. Die Terme sind positiv und monoton fallend. Da

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log(2^k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(2)}, \end{aligned}$$

schließen wir aus Theorem 6.3.7 und Divergenz der harmonischen Reihe, dass $S$ gegen Unendlich divergiert. Bemerken Sie, dass weder das Quotientenkriterium noch das Wurzelkriterium eine Aussage für $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log(k)}$ liefert.

**Bemerkung.** *Deutlich komplizierter als Reihen reeller Zahlen sind Reihen von Funktionen! In Analysis II schauen wir uns sogenannte Potenzreihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \textit{oder} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

*an. Noch schlimmer (interessanter?) sind allgemeine Reihen der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k,x).$$

*Also können wir es zu schätzen wissen, dass wir es aktuell mit Reihen reeller Zahlen noch relativ einfach haben.*

## 6.4 Eine Reihe von Beispielen

Wenn man (beispielsweise in der Klausur) eine Reihe begegnet, ohne gerade ein neues Werkzeug eingeführt zu haben, besteht die Frage, mit welchen Kriterien/Tests man anfangen soll... NACHDEM Sie vertraut mit den obenstehenden Aufgaben sind, wird es empfohlen, sich mit der folgenden Liste zu beschäftigen. Eine grobe Orientierung können Sie auch dem Zusatzblatt "Hinweise für Reihen" aus dem Lernraum entnehmen.

Bestimmen Sie, ob folgende Reihen konvergent (absolut oder bedingt) oder divergent (bestimmt oder unbestimmt) sind.

①

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

②

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^4}{n+n^2}$$

③

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{n+n^4}$$

④

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+n^2}{n^4-n}$$

⑤

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$$

⑥

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$$

⑦

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$$

⑧

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$$

(9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

(10)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+n}}$$

(11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$$

(12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

(13)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$$

(14)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{1+n^2}$$

(15)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^2}$$

(16)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{5^n\, n!}$$

**Übung 6.4.1**

Berechnen Sie den Wert.

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

## Übung 6.4.2

Für welches $p$ konvergieren folgende Reihen?

①
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

②
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

③
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^p}{n}$$

Sie dürfen ohne Beweis für $p > 0$ verwenden, dass

$$\frac{(\log n)^p}{n}$$

für $n$ groß genug monoton fallend ist.

## Übung 6.4.3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+5}+6n^{10}}{7^n+12n^{15}}$

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{-n}\binom{2n}{n}$

## Übung 6.4.4

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{k+1}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2+k}{k^4+1}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+k}{3k^2+1}\right)^k$

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$

## Übung 6.4.5

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen über reelle Reihen:

① Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt die von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

② Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ folgt die von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

## Übung 6.4.6

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wird definiert durch die rekursive Formel

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2+\cos(n)}{\sqrt{n}} a_n.$$

Konvergiert die Reihe?

## Übung 6.4.7

Für welche der folgenden Reihen liefert das Quotientenkriterium keine Aussage?

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \qquad ② \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad ③ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad ④ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$$

## Übung 6.4.8

Für welche natürliche Zahlen $k$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

konvergent?

## Übung 6.4.9

Beweisen Sie Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

# Kapitel 7

# Klausur

Die Klausur zu Analysis 1 besteht aus Kurzantwortfragen und Langantwortfragen. Bei Kurzantwortfragen zählt nur die Antwort. Bei Langantwortfragen werden auch Begründungen und Arbeitsschritte bewertet. Bei Langantwortfragen soll man darauf achten, immer anzugeben, welche Annahmen Sie benutzen und ggf. welche Theoreme/Resultate.

Machen Sie eine Liste von allen *Definitionen*, die Sie gelernt haben und wissen sollten. Machen Sie eine Liste von allen *Resultaten* (Theoreme, Lemmata,...). Machen Sie eine Liste von Aufgabentypen, von "Tricks".

Eine mögliche Herangehensweise für Beweisaufgaben wäre:

1. alle Annahmen/Zutaten identifizieren,
2. die zu beweisender Aussage mathematisch formulieren, ggf. umformulieren,
3. eventuell eine Skizze machen,
4. mögliche Theoreme/Werkzeuge auflisten,
5. Geht es um einen Beweis durch vollständige Induktion?
6. (wenn nicht:) Ist ein direkter Beweis möglich? Was können Sie direkt aus den Annahmen folgern? Was würde die zu beweisender Aussage implizieren? Können Sie Ihre Schlussfolgerungen damit verbinden?
7. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Ist die Kontraposition einfacher zu zeigen?
8. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Wie würde die Verneinung für einen Beweis durch Widerspruch aussehen?
9. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Gibt es ein einfaches Beispiel, das das Ganze motiviert/beleuchtet? Können Sie eine leicht vereinfachte Aussage zeigen?
10. (wenn Sie den Weg nicht sehen:) Neu anfangen!

Wir sammeln hier ein paar übliche Fragen und Antworten über die Klausur.

1. *Sind die Übungsaufgaben auf dem Niveau der Klausur?*

   Das Niveau der Aufgaben ist im Allgemeinen mit dem Niveau der Klausur vergleichbar. Es gibt aber ein paar Unterschiede. Einige Übungsaufgaben sind so gewählt, dass Sie gewisse Rechentechniken und Herangehensweisen durch die Aufgabe gut "trainieren". Manchmal sind die Aufgaben vom Umfang länger oder man braucht für die Lösung eine neue/kreative Idee. Manche sind gewählt, damit wir später in der Vorlesung auf dem Stoff aufbauen können.

Klausuraufgaben unterscheiden sich zu Übungsaufgaben folgendermaßen. Sie sollen uns vor allem einen Überblick über Ihre Kenntnisse und Fähigkeiten geben. Oft verbinden sie Stoff aus mehreren Abschnitten miteinander. Klausuraufgaben können auf Grund der zeitlichen Einschränkung während der Prüfung keinen langen Umfang haben und in der Regel braucht man kaum neue/kreative Ideen; viel wahrscheinlicher ist es, dass Sie einen "Trick" oder eine Methode oder eine Herangehensweise aus dem Skript oder aus den Übungsaufgaben verwenden sollen. In diesem Kapitel geben wir Ihnen ein paar "klausurähnliche Aufgaben". Sie sind Beispiele, die die Art und den Umfang einer Klausuraufgabe andeuten. Eine SEHR GUTE Methode, sich auf die Klausur vorzubereiten, ist es, sich selbst klausurähnliche Aufgaben auszudenken. Falls Sie uns Beispiele zeigen möchten, mit der Frage, ob Sie ungefähr richtig liegen, können Sie sie uns gerne mitteilen.

2. *Reicht es für die Klausur aus, wenn ich die Übungsaufgaben lösen kann?*

   NEIN. Wenn dies hinreichend wäre, könnten wir Ihnen einfach zu Beginn des Semesters alle Übungsblätter zur Verfügung stellen und uns nie wieder treffen. Trotzdem ist das Lösen der Übungsaufgaben ein wichtiger Bestandteil zur Klausurvorbereitung. Wenn Sie also große Schwierigkeiten mit den Aufgaben haben, ist dies ein schlechtes Zeichen für die Klausur. Unten in (3) und (4) finden Sie ein paar Ratschläge, was Sie in diesem Fall tun können. Wenn Sie mit den Aufgaben gut klarkommen, ist dies schon mal ein gutes Zeichen. ABER Sie müssen berücksichtigen, dass die Übungsaufgaben *nur eine beliebige Auswahl aller möglichen Aufgaben* sind. Wir können vorbereitend nicht eine Aufgabe zu jedem Teil der Vorlesung stellen. Selbst wenn wir das könnten, wäre dies nicht der Punkt: In einer Prüfung zeigt man, dass man den Stoff der Veranstaltung gelernt und verstanden hat, indem man neue Aufgaben (mit bekannten Methoden und Werkzeugen) bearbeiten kann. *Nur die Lösungen zu den Übungen durchzugehen ist keine gute Vorbereitungsmethode*; man kann Mathematik nicht durchs Lesen alleine lernen.

   Sie werden den Stoff von Ana I meistern, in dem Sie "aktives Lesen/Zuhören" üben. Dies bedeutet, dass Sie das Skript lesen und dabei aktiv mitdenken. Jedes Mal, wenn Sie etwas neues lesen/hören, stellen Sie sich Fragen, um zu klären, ob Sie die Inhalte tatsächlich verstanden haben. Wenn eine Übung/Frage gestellt wird, dann lösen Sie sie oder stellen Sie mindestens fest, dass Sie wissen, wie Sie sie lösen würden. Wenn es für Sie NICHT klar ist, dann besprechen Sie den Punkt mit Ihren Kommiliton:innen, mit den Tutor:innen, im Forum oder mit uns.

   Wenn wir die Klausur erstellen, dann gehen wir davon aus, dass Sie sowohl die gestellten Übungsaufgaben als AUCH den Stoff der Vorlesung und des Skriptes gemeistert haben.

3. *Wie bereite ich mich auf der Klausur vor? Oder: Wie kann ich mir sicher sein, dass ich die Klausur bestehen werde?*

   Lösen Sie die Übungsaufgaben während des gesamten Semesters. Lesen Sie das Skript aktiv. Sprechen Sie mit Ihren Kommiliton:innen über die Aufgaben und über den Stoff der Vorlesung. Tauschen Sie sich mit den Tutoren der Kleingruppenübungen aus. Auch wenn Sie denken, Sie kommen alleine mit dem Stoff klar, werden Sie ein *viel tieferes und breiteres Verständnis entwickeln, wenn Sie regelmäßig über den Stoff reden.* Stellen Sie sich selbst Fragen zu jedem Thema der Vorlesung und beantworten Sie sich diese. Holen Sie Feedback zu Ihren Lösungen, durch die Korrektur, im Austausch mit den Tutoren oder durch uns.

   Haben Sie bemerkt, dass wir keine Definitionen oder Theoreme in den Übungsblättern abfragen (weil das nicht zielführend wäre), aber in der Klausur erwarten, dass Sie die Definitionen und Resultate kennen und wiedergeben können!? Das bedeutet allerdings nicht, dass wir in der Klausur fragen, "Was war Theorem 1.4.2?". Stattdessen wäre eine mögliche Frage, "Geben Sie die Dreiecksungleichung für reelle Zahlen an und geben Sie einen Beweis dafür."

Mathematik lernt man, in den man übt. Man bearbeitet neue Aufgaben. Manchmal sitzt man (länger) vor einem leeren Blatt und weiß nicht, wie man anfangen soll. Man macht sich eine Skizze, um eine erste Idee zu entwickeln. Man schreibt sich auf, was man gegeben hat und was man zeigen möchte. Und dann versucht man irgendetwas. Es funktioniert nicht. Man fängt neu an. Man freut sich, eine Lösung gefunden zu haben. Später entdeckt man eine Lücke im Beweis. Man füllt die Lücke. Versuchen und nochmals versuchen. Wenn Sie während des Semesters viele dieser Herausforderungen überwunden haben, ist die Wahrscheinlichkeit sehr hoch, dass Sie in der Klausur erfolgreich sein werden.

Mathematik lernt man wie ein Lied. Erst hört man zu. Dann versucht man selbst zu singen. Dann wiederholt man den Text, bis man das Lied auswendig gelernt hat. Gehen Sie zurück zum ersten Kapitel. Kennen Sie das Lied noch? Sehen Sie, wie die Strophen zusammenhängen? Als wir mit $\mathbb{C}$ gearbeitet haben, konnten wir Ergebnisse, die wir für $\mathbb{R}$ gezeigt haben, "übertragen". Ähnlich ist es, wenn wir uns die allgemeine Konvergenz von Folgen anschauen. Wir werden die Beweismethodiken, die wir für Nullfolgen gemacht haben, übertragen können. Mathematik ist Struktur. Struktur erkennen, untersuchen und ausnutzen.

4. *Ich finde den Stoff schwierig; was kann ich tun?*

   Falls Sie keine Lerngruppe haben (keine reine *Abgabengruppe* sondern tatsächlich eine *Lerngruppe*), dann finden Sie eine. Falls Sie dabei Hilfe benötigen, dann können wir Ihnen helfen. Kommunikation über die großen Ideen und kleinen Details der Vorlesung ist essentiell. Falls Sie schon eine Lerngruppe haben, es Ihnen aber nicht sehr hilft, sich dort auszutauschen, dann schauen Sie, ob eine andere Gruppe für Sie hilfreicher ist. Stellen Sie in der KGÜ und Globalübung Fragen und sprechen mit anderen Kommiliton:innen. Jedes Gespräch bringt etwas.

   Versuchen Sie insbesondere Ihre Fragen zu formulieren und bringen Sie diese mit in die Kleingruppenübungen oder in die Übung. Falls Sie keine konkreten Fragen formulieren können, kommen Sie trotzdem und fragen Sie, "Können Sie mir helfen, XYZ besser zu verstehen?" Das ganze Analysis Team ist daran interessiert, Ihnen zu helfen, erfolgreich zu werden.

   Manchmal helfen zusätzliche Internet-Videos oder eine private Nachhilfe. Jedoch ist das Analysis Team genau auf dieser Vorlesung (und auf die zukünftige Klausur) spezialisiert.

   Falls Sie Lücken in Ihrem Hintergrundswissen haben oder Schwierigkeiten mit dem Stoff vom Anfang des Semesters haben, werden Sie aktiv! Kommen Sie zu uns oder suchen Sie sich die Hilfe, die Sie brauchen. Je früher man aktiv wird, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass man Probleme lösen/vermeiden kann. Wenn man Schwierig-keiten nicht als solche anerkennt, hat man meist später ernste Probleme. Andererseits, FREUEN SIE SICH, jedes Mal, dass Sie eine konkrete Frage identifizieren können! "Wie man von dieser Zeile auf die nächste kommt, ist mir nicht klar..." Erst wenn Sie die Lücke identifiziert haben, können Sie sie füllen.

5. *Ist in der Klausur ein Formelblatt erlaubt?*

   Sie dürfen kein eigenes Formelblatt, keinen Taschenrechner und keine sonstigen Hilfsmittel zur Klausur mitbringen. Es wird ein von uns erstelltes Formelblatt geben; siehe unten für ein solches Beispiel. Falls Sie während des Semesters Formeln haben, die Sie gerne auf das Formelblatt aufnehmen möchten, können Sie diese gerne im Forum "Feedback und Ergänzungswünsche" melden. Eben WEIL es kein selbst erstelltes Formelblatt geben wird, ist es sehr wichtig, dass Sie vor allem während des Semesters versuchen, die Übungen ohne Hilfsmittel zu lösen.

## 7.1 Struktur der Klausur und Beispielaufgaben

Es gibt zwei Teile.

**Teil I**

In diesem Teil gibt es $6 - 10$ Aufgaben, die jeweils 2 Punkte wert sind.

| **Frage** | **Antwort** |
|---|---|
| Richtig oder falsch: Für alle $a$, $b > 0$ gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$. | |
| Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$, die weder injektiv noch surjektiv ist. | |
| Richtig oder falsch: Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \leq 1 + nx$. | |
| Bestimmen Sie: $\sup\{1 + \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. | |
| Richtig oder falsch: Jede monotone Funktion besitzt eine Umkehrfunktion auf ihrem Wertebereich. | |
| Geben Sie ein Gegenbeispiel folgender Aussage: Wenn $f$ stetig und invertierbar ist, dann ist $f$ monoton. | |
| Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar. Geben Sie ein Kriterium an $D$ an, damit folgende Aussage wahr ist: Wenn $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und invertierbar ist, dann ist $f$ monoton. | |
| Bestimmen Sie den Rand der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$: $(0,3) \setminus \{2\} \cup [5,\infty)$. | |

**TEIL II**

Im zweiten Teil bekommen Sie 3 Aufgaben, die ungefähr 30 Punkte wert sind. Sie müssen Ihre Lösungen begründen. Wir geben hier ein paar Beispiele an.

1. (a) Geben Sie die Definition des Supremums einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ an.
   (b) Formulieren Sie die Approximationseigenschaft des Supremums.
   (c) Beweisen Sie den Satz aus (b).
   (d) Finden Sie das Supremum jeder der folgenden Mengen:
      (i) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon (x-2)^2 - 1 < x - 1\}$,
      (ii) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon |x-4| \geq 6\}$,
      (iii) $C = \{n \in \mathbb{N} \colon 2^n < 3n + 1\}$.

2. Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^3 - 4x^2 + x + 6$.
   (a) Ist $f$ gerade, ungerade oder keines von beiden?
   (b) Zeigen Sie, dass $f$ in $x = -1$ eine Nullstelle besitzt.
   (c) Schreiben Sie $f$ als Produkt von drei reellen Linearfaktoren.
   (d) Kann jedes Polynom dritten Grades als Produkt von drei reellen Linearfaktoren geschrieben werden? Wenn ja, begründen Sie warum. Wenn nicht, dann geben Sie ein geeignetes Gegenbeispiel an.
   (e) Finden Sie das größte Teilintervall von $(-\infty, 5)$, auf dem $p(x) := x^2 - x - 2$ invertierbar ist und geben Sie die Umkehrfunktion, ihren Definitionsbereich und ihren Wertebereich an.

3. In dieser Aufgabe schauen wir uns den Logarithmus genauer an.
   (a) Geben Sie die Definition von gleichmäßiger Stetigkeit an.
   (b) Beweisen Sie, dass $\log(\cdot)$ auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.
   (c) Gegeben sei folgende Tatsache: Zu jedem $c > 0$ gibt es ein $M = M(c)$, so dass
   $$\log(x) < cx \quad \text{für alle } x \in (0, \infty) \text{ mit } x > M.$$
   Folgern Sie daraus, dass
   $$\log(k) \leq \sqrt{k}$$
   für $k \in \mathbb{N}$ groß genug.
   (d) Verwenden Sie diese Information um zu beweisen, dass die Reihe
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k^2 + k} \sqrt{\frac{\log k}{k}}$$
   konvergiert.

Ein paar Bemerkungen:

1. Bemerken Sie, dass in 1(d) Punkte **für die Begründung** gegeben werden. Wenn Sie keine Begründung schreiben, bekommen Sie diese Punkte nicht.
2. Bemerken Sie, dass in 2(a), Sie die Definitionen von gerade und ungerade angeben müssen, um die Frage zu beantworten, obwohl nicht explizit danach gefragt wurde.
3. Wir skalieren auf 100 und addieren die Bonuspunkte dazu. (Erwerben Sie bspw. 60 von 96 möglichen Klausurpunkten und haben Sie 4 Bonuspunkte erworben, so haben Sie $60/96 * 100 + 4 = 66,5$ Punkte insgesamt erworben.)

## 7.2 Formelblatt

**Beispielhafte Formelsammlung.**

1. Identitäten:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \sec^2(x), \quad \cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$

2. Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

3. Doppelwinkel:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta), \quad \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta), \quad \tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

4. Halbwinkel:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}, \quad \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

5. Young'sche Ungleichung

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

6. Binomische Formeln:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \qquad x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}\, y^{k-1}.$$

7. **nicht** Teilsumme der geometrischen Reihe, Bernoulli Ungleichung, Definition von $e$

# Appendices

# Anhang A

# Notation

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | die natürlichen Zahlen, also $\{1, 2, 3, \ldots\}$ |
| ab und zu schreiben wir $\mathbb{N}_0$ | für $\mathbb{N} \cup \{0\}$, also $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ |
| $\mathbb{Z}$ | die ganzen Zahlen, also $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ |
| $\mathbb{R}$ | die reellen Zahlen |
| $\mathbb{Q}$ | die rationalen Zahlen |
| $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Q}^{\complement}$ | die irrationalen Zahlen |
| $x \in A$ | $x$ ist ein Element von $A$ |
| $x \notin A$ | $x$ ist kein Element von $A$ |
| $A \subseteq B$ | $A$ ist eine Teilmenge von $B$<br>d.h. jedes Element von $A$ ist auch in $B$. $A = B$ ist möglich |
| $A \subsetneq B$ | $A$ ist eine echte Teilmenge von $B$<br>$A \subseteq B$ aber $B$ enthält Elemente, die $A$ nicht enthält |
| $p$ oder $q$ | das einschließende Oder,<br>das heißt, es kann beides gleichzeitig gültig sein.<br>nur "entweder oder" ist ausschließend. |
| $x : x < 1$ | $x$ so dass die Bedingung $x < 1$ nach dem : gilt<br>statt : kann man auch \| verwenden |
| $(a, b)$ | alle Zahlen zwischen $a$ und $b$ wobei $a$ und $b$ ausgeschlossen sind, also $a < x < b$ |
| $[a, b]$ | alle Zahlen zwischen $a$ und $b$ "inklusive", also $a \leq x \leq b$ |
| $\mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}_{>0}$ | die positiven reellen Zahlen<br>$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ |
| $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | manche schreiben dies für die nichtnegativen reellen Zahlen $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.<br>wir bevorzugen $[0, \infty)$ |
| genau dann, wenn | Die Aussage gilt in beide Richtungen |
| $\underline{x}$ | bezeichnet den Vektor $\vec{x}$ |
| $\underline{\underline{A}}$ | bezeichnet die Matrix $A$ |
| $(\underline{x}, \underline{y})$ | bezeichnet das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ |
| $g \circ f$ | $g$ verkettet mit $f$<br>$g(f(\cdot))$ |
| $\lfloor x \rfloor$ | Abrundungsklammern,<br>$x$ wird auf eine natürliche Zahl abgerundet ("floor") |
| $\lceil x \rceil$ | Aufrundungsklammern,<br>$x$ wird auf eine natürliche Zahl aufgerundet ("ceiling") |
| $f : X \to Y$ | $f$ bildet $X$ auf eine Teilmenge von $Y$ ab |
| o.B.d.A. | ohne Beschränkung der Allgemeinheit |

# Anhang B

# Polynome und rationale Funktionen

In der Schule haben Sie viel Zeit mit Polynomen verbracht. (Manchmal haben Sie sie “ganzrationale Funktionen” genannt. Wir nennen sie ausschließlich “Polynome”.)

**Definition B.0.1**

Für $n = 0, 1, 2, \dots$ heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (reelles) Polynom vom Grad $n$, wenn es reelle Zahlen $a_0, ..., a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Zahlen $a_0, ..., a_n$ heißen Koeffizienten von $f$.

Wir schreiben oft $p_n(x)$ für ein Polynom, wobei $n$ den Grad des Polynoms bezeichnet.

Wir bemerken, dass konstante Funktionen, die nicht gleich Null sind, Polynome nullten Grades sind. Das Nullpolynom $f \equiv 0$ ist auch ein Polynom, aber das Grad des Nullpolynoms ist nicht Null, da $a_0 = 0$ ausgeschlossen wurde. Es ist (aus technischen Gründen) bequem zu definieren:

**Definition B.0.2**

Wir definieren den Grad des Nullpolynoms als $-\infty$. Wenn wir also für $n = 0, 1, \dots$ von Polynomen Grad $n$ und weniger reden, ist das Nullpolynom immer mit dabei.

**Theorem B.0.3**

Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Das heißt: Ein Polynom ist durch seine Koeffizienten bestimmt.

*Beweis.* Seien

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

zwei Polynome vom Grad $n$. Die Tatsache, dass $p_n(x) = q_n(x)$, wenn $a_k = b_k$ für alle $k = 0, .., n$ ist klar. Für die umgekehrte Richtung müssen wir zeigen, dass

$$p_n(x) = q_n(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{B.0.1}$$

impliziert, dass

$$a_k = b_k \quad \text{für alle } \ k = 0, .., n \tag{B.0.2}$$

gilt. Zunächst setzen wir $x = 0$ in (B.0.1) und erhalten

$$a_0 = b_0. \tag{B.0.3}$$

Wir benutzen (B.0.3) in (B.0.1) um zu schließen, dass

$$p_n(x) - a_0 = q_n(x) - b_0 \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R},$$

also

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R}.$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dividieren wir durch $x$ und erhalten

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1 = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + ... + b_1 \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{B.0.4}$$

Wir behaupten, dass $a_1 = b_1$ aus (B.0.4) folgt. Wir können aber nicht wie mit (B.0.3) argumentieren, da $x = 0$ in (B.0.4) nicht erlaubt ist. Stattdessen finden wir eine obere Schranke für $|a_1 - b_1|$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
|a_1 - b_1| &\overset{(B.0.4)}{\leq} |a_n x^{n-1} + ... + a_2 x - b_n x^{n-1} - ... - b_2 x| \\
&\leq \big|\big((|a_n| + |b_n|)x^{n-2} + ... + |a_2| + |b_2|\big)\,|x|\big| \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
&\leq \big||a_n| + |b_n| + ... + |a_2| + |b_2|\big|\,|x| \quad \text{für alle } \ x \in (-1, 1) \setminus \{0\} \\
&\leq C|x| \quad \text{für alle } \ x \in (-1, 1) \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

für ein $C < \infty$. Da wir $|x|$ beliebig klein wählen können, erhalten wir aus Lemma 2.3.1, dass

$$|a_1 - b_1| = 0, \quad \text{also} \quad a_1 = b_1.$$

Die Gleichheit der übrigen Koeffizienten zeigt man genauso. □

Was macht man mit Polynomen? Übliche Fragen sind bspw. folgende:

(1) Was sind die Nullstellen des Polynoms, d.h., für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $p_n(x) = 0$?

(2) Wie kann man das Polynom in Faktoren zerlegen?

(3) Wie kann man eine komplizierte Funktion durch Polynome approximieren? (Polynome sind glatt und relativ einfach - also gäbe es einen Vorteil daran...)

Wir fangen mit Nullstellen an.

**Definition B.0.4**

Eine reelle Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Nullstelle von $p_n(x)$, falls gilt

$$p_n(x_0) = 0.$$

Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *m*-fache Nullstelle des Polynoms $p_n(x)$, wenn es ein Polynom $q_{n-m}$ vom Grad

$n - m$ gibt mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$p_n(x) = (x - x_0)^m q_{n-m}(x),$$

und $q_{n-m}(x_0) \neq 0$. Man nennt $m$ die Vielfachheit oder die Multiplizität der Nullstelle $x_0$. Man nennt $x - x_0$ einen Linearfaktor des Polynoms.

**Beispiele B.0.5.**

① *$p(x) = x^2 - 4$ hat zwei einfache Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.*

② *$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$ hat eine einfache Nullstelle $x_1 = 0$ und eine zweifache Nullstelle $x_2 = 2$.*

③ *$p(x) = x^2 + 1$ kann nicht in Linearfaktoren zerlegt werden und besitzt keine reellen Nullstellen.*

Das "Problem", das wir im dritten Beispiel entdeckt haben, ist das einzige Problem, das vorkommt. Diese Tatsache machen wir in der untenstehenden Bemerkung genauer.

**Definition B.0.6**

Ein Polynom mit der quadratischen Form

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad \text{mit } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

das man nicht in der Form $a_2(x - x_1)(x - x_2)$ mit reellen Zahlen $x_1, x_2$ schreiben kann, wird ein irreduzibles quadratisches Polynom genannt.

**Bemerkung** (Zerlegung eines Polynoms)**.** *Was kann man im Allgemeinen über die Zerlegung eines Polynoms sagen?*

*(1) Der Fundamentalsatz der Algebra [Gauß] sagt, dass jedes Polynom $n$-ten Grades mit reellen Koeffizienten in $n$ Linearfaktoren mit komplexen Zahlen zerlegt werden kann:*

$$p_n(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n), \quad z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}.$$

*(2) Wenn $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des reellen Polynoms $p_n$ ist, dann ist auch $\overline{z}$, die zu $z$ konjugierte komplexe Zahl, eine Nullstelle von $p_n$. (Aus $p_n(z) = 0$ erhält man $p_n(\overline{z}) = 0$.)*

*(3) Es folgt, dass irreduzible Polynome das einzige potenzielle Problem sind im folgenden Sinn:*

> *Jedes reelle Polynom $n$-ten Grades $p_n(x)$ kann als Produkt von Linearfaktoren mit reellen Nullstellen und gegebenenfalls irreduziblen quadratischen Polynomen geschrieben werden.*

*(Um dies aus den vorherigen Punkten zu schließen, beachten Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$*

$$(x - z)(x - \overline{z})$$

*ein reelles Polynom in $x$ ist.)*

Der Fundamentalsatz der Algebra impliziert **nicht**, dass es leicht ist, die Nullstellen zu finden! Sie kennen die Lösungsformel für quadratische Gleichungen: Das Polynom

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

hat die Nullstellen

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Formel für kubische Polynome ist viel komplizierter. Für Polynome des Grades 5 und größer kann es keine geschlossene Formel geben [Abel-Ruffini, Galois].

Trotzdem schaffen wir es, die Nullstellen in nett ausgewählten Beispielen zu finden.

**Beispiel B.0.7.** *Finden Sie alle komplexen Nullstellen von* $x^3 + 3x^2 + x - 5$*. Man findet durch Ausprobieren schnell die Nullstelle* $x_1 = 1$*, sodass man durch Polynomdivision*

$$(x^3 + 3x^2 + x - 5) : (x - 1) = x^2 + 4x + 5$$

*auf die Faktorisierung* $(x-1)(x^2+4x+5)$ *kommt. Nun findet man leicht die zusätzlichen Nullstellen* $x_2 = -2 + \sqrt{(-1)} = -2 + i$ *und* $x_3 = -2 - i$*. Daraus ergibt sich die Zerlegung in Linearfaktoren:*

$$x^3 + 3x^2 + x - 5 = (x - 1)(x - (-2 + i))(x - (-2 - i)) = (x - 1)(x + 2 - i)(x + 2 + i).$$

**Definition B.0.8**

Seien $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome von Grad $n$ bzw. $m$. Dann heißt

$$R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

eine rationale Funktion. Der Definitionsbereich von $R$ ist $\{x \in \mathbb{R} \colon q_m(x) \neq 0\}$.

Jetzt suchen wir eine äquivalente Darstellung von $R$ in dem Fall $m < n$.

**Theorem B.0.9**

Sei $R(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$, wobei $p_n$ und $q_m$ Polynome vom Grad $n$ bzw. $m$ sind und $n \geq m$. Dann gibt es Polynome $s_{n-m}$ und $t_k$, so dass für alle $x \in \mathcal{D}(R)$ gilt

$$R(x) = s_{n-m}(x) + \frac{t_k(x)}{q_m(x)}. \tag{B.0.5}$$

Die Funktion $t_k$ ist entweder identisch Null oder ein Polynom vom Grad $k < m$.

*Beweis.* Der übliche Divisions-Algorithmus ergibt

$$\begin{aligned}\frac{p_n(x)}{q_m(x)} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \\ &= \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{t_{n-1}(x)}{q_m(x)}, \end{aligned} \tag{B.0.6}$$

wobei

$$t_{n-1}(x) = p_n(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q_m(x)$$

vom Grad kleiner gleich $n-1$ ist, weil der n-te Term verschwindet. Dies wiederholt man, bis der Grad des Zählerpolynoms in (B.0.6) kleiner gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist (also, maximal $n-m+1$ mal). □

**Beispiel B.0.10.** *Schreiben Sie*

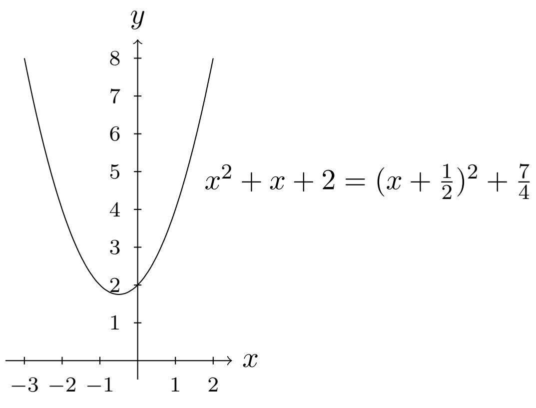
$$R(x) = \frac{x^3 + x}{x - 1}$$

*in der Form* (B.0.5). *Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.*

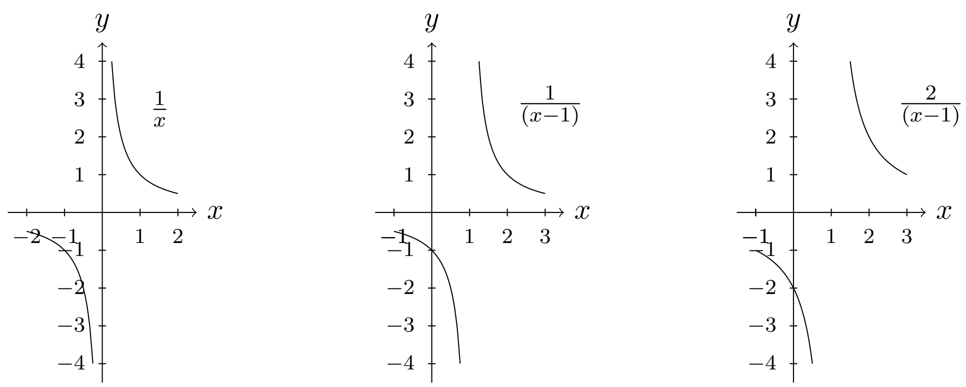
*Lösung.* Man erhält

$$R(x) = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}.$$

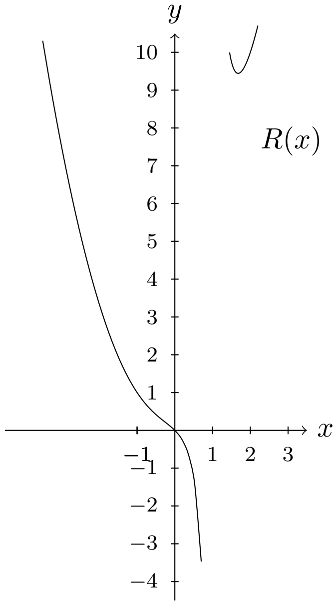
Für die Parabel zeichnet man




Für den Restterm zeichnet man in Schritten:




Die Summe ergibt:




Man erkennt $\mathcal{D}(R) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\mathcal{W}(R) = \mathbb{R}$.

$\square$

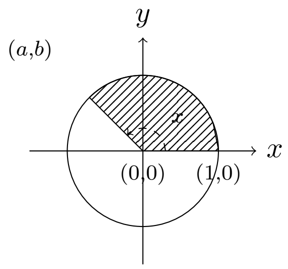
# Anhang C

# Trigonometrische Funktionen

Wir erinnern an die Funktionen

$$\sin(x) = b, \quad \cos(x) = a, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

wobei $(a, b)$ ein Punkt des Einheitskreises ist und $x$ der Winkel gegen den Uhrzeigersinn zwischen der $x$-Achse und dem Segment von $(0, 0)$ bis $(a, b)$ ist.




Wir werden ab und zu die folgenden Eigenschaften brauchen:

- $\sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1,$
- $|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1,$
- sin ist ungerade, cos ist gerade,
- sin und cos sind periodisch mit Periode $2\pi$,
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$
- $\cos(x) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$
- $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$
- $0 < x\cos(x) < \sin(x) < x$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

Es ist klar, dass Sinus, Cosinus und Tangens nicht invertierbar sind. Die übliche Konvention ist, die Restriktionen auf $[-\pi/2, \pi/2]$ bzw. $[0, \pi]$ bzw. $(-\pi/2, \pi/2)$ umzukehren: Zum Beispiel definiert man Arkussinus und Arkuscosinus,

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2] \qquad \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

als die Umkehrfunktionen von $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ bzw. $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.

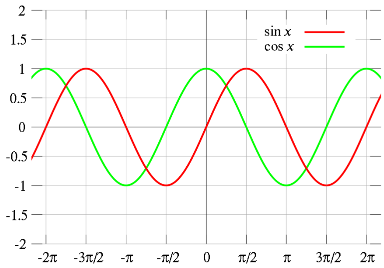



Abbildung C.1: ©Wikibooks, `https://en.wikibooks.org/wiki/Trigonometry/Graphs_of_Sine_and_Cosine_Functions`

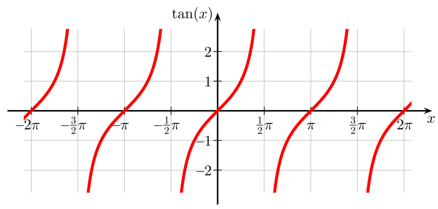



Abbildung C.2: ©Wikipedia, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4032238`

# Anhang D

# Ausgewählte Lösungen zu den Übungen

## D.1 Die reellen Zahlen

### D.1.1 Eine axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen

*Beweis von Lemma 2.1.4 (i).* Der Beweis für (i) ist analog zu dem für (ii):

Schritt 1: Hier zeigen wir, dass es mindestens eine Zahl $x$ gibt, so dass

$$a + x = b. \tag{D.1.1}$$

Der natürliche „Kandidat" ist $x := -a + b$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} a + x &= a + (-a + b) \\ &\overset{(A2)}{=} (a - a) + b \\ &\overset{(A4)}{=} 0 + b \\ &\overset{(A1)}{=} b + 0 \\ &\overset{(A3)}{=} b. \end{aligned}$$

Also löst $x$ die Gleichung (D.1.1).

Schritt 2: Hier zeigen wir, dass es maximal eine solche Zahl gibt. Angenommen, $x$ und $\tilde{x}$ sind zwei Lösungen von (D.1.1).

$$\begin{array}{rrcl} & a + x &=& a + \tilde{x} \\ \Rightarrow & (a + x) - a &=& a + \tilde{x} - a \\ \overset{(A1)}{\Rightarrow} & (x + a) - a &=& (\tilde{x} + a) - a \\ \overset{(A2)}{\Rightarrow} & x + (a - a) &=& \tilde{x} + (a - a) \\ \overset{(A4)}{\Rightarrow} & x + 0 &=& \tilde{x} + 0 \\ \overset{(A3)}{\Rightarrow} & x &=& \tilde{x}. \end{array}$$

□

### D.1.2 Einige Elementare Ungleichungen

*Lösung zur Übung 2.3.4.* Bei 2% Wertverlust im Jahr hat man nach $n$ Jahren mit einem Anfangskapital von 1000 €

$$1000 \cdot (1-0.02)^n \overset{\text{Theorem 2.3.3}}{\geq} 1000 \cdot (1 - n \cdot 0.02) = 1000 - 20 \cdot n$$

Unser Kapital soll auf jeden Fall nicht weniger als 500 € betragen, also immer größer gleich 500 € sein.

$$1000 - 20 \cdot n \geq 500 \Leftrightarrow n \leq 25$$

Also halten wir einen jährlichen Werteverlust von 2% mindestens 25 Jahren durch. Da nun hier das $n$ sehr groß ist, können wir uns denken, dass die Approximation keine besonders gute Approximation ist. Tatsächlich ergibt eine genaue Rechnung $n \geq \log(0{,}5)/\log(0{,}98) \approx 34$. □

## D.2 Allgemeine Konvergenz und Divergenz

*Lösung zur Übung 3.3.13.*
Zu *(i)*: Aus der Definition 3.3.1 folgt sofort, dass $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist, die nach Theorem 3.2.17 beschränkt ist. Das heißt, es existieren $s$ und $\sigma$ in $\mathbb{R}$, so dass

$$\sigma \ \leq a_n - a \leq s \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt die Beschränktheit:

$$\sigma + a \ \leq \ a_n \ \leq \ s + a \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu *(ii)*: Der Beweis ist ähnlich. Nach Theorem 3.2.17 ist

$$\{\alpha\,(a_n - a) + \beta\,(b_n - b)\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)\}_{n=1}^{\infty}$$

eine Nullfolge. Nach Definition 3.3.1 ist somit $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert $\alpha a + \beta b$.
Zu *(iii)*: Für den Grenzwert von $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ nutzen wir die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$$

um zu schließen, dass $\{|a_n| - |a|\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so folgt aus der Vorraussetzung, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und damit ist

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n > N.$$

Also ist $\{|a_n| - |a|\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge, wie zu zeigen war.
Für den Grenzwert von $\{\sqrt{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ und $a = 0$ haben wir die Relation schon in 3.2.17 gezeigt. Sei also $a \neq 0$. Wie eben, sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $N$ sodass $|a_n - a| < \sqrt{|a|} \cdot \varepsilon$ für alle $n > N$, was nach Vorraussetzung möglich ist. Damit ist

$$\left|\sqrt{|a_n|} - \sqrt{|a|}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{|a_n|} - \sqrt{|a|}\right)\left(\sqrt{|a_n|} + \sqrt{|a|}\right)}{\sqrt{|a_n|} + \sqrt{|a|}}\right| = \left|\frac{|a_n| - |a|}{\sqrt{|a_n|} + \sqrt{|a|}}\right| < \epsilon.$$

Die Division durch $\sqrt{|a_n|} + \sqrt{|a|}$ ist erlaubt, weil $|a| > 0$. Im letzten Schritt haben wir $\sqrt{|a_n|}$ weggestrichen, da es positiv ist. Somit wird der Gesamtausdruck größer, wenn wir einen Term aus dem Nenner wegstreichen.
Zu *(iv)*: Nach *(i)* ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Also existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schätzen ab:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \leq C|b_n - b| + |a_n - a||b|.$$

Mit *(ii)* erhalten wir, dass $C|b_n - b| + |a_n - a||b|$ eine Nullfolge ist. Mit dem Vergleichskriterium für Nullfolgen ist $\{a_n b_n - ab\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Nullfolge, wie zu zeigen war.

Zu *(v)*: Wie oben existiert $C$ so dass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung existiert $C_1 \in \mathbb{R}$ mit $|c_n| \leq C_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Homogenität folgern wir

$$|a_n c_n| = |a_n||c_n| \leq C\,C_1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu *(vi)*: Die Konvergenz zeigen wir wie bei den Beweisen zu *(iii)*. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \min\{\frac{a^2}{2} \cdot \epsilon, \frac{|a|}{2}\}$ für alle $n > N$. Mit $|a_n| \geq |a| - |a_n - a| \geq |a|/2$ folgern wir

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a \cdot a_n}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a|\,|a_n|} \leq \left|\frac{2(a - a_n)}{a^2}\right| < \epsilon.$$

□

*Lösung zur Übung 3.3.15.* Wir setzen

$$x_n \coloneqq \sqrt[n]{n}.$$

Aus

$$(x_n)^n = n$$

folgt $x_n > 1$ für $n > 1$. Also können wir $x_n = 1 + h_n$ mit $h_n > 0$ für $n > 1$ schreiben. Dann ist in der Gleichung

$$n = (1 + h_n)^n$$

jeder Term in der binomischen Erweiterung der rechten Seite positiv. Insbesondere gilt

$$n > \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Aus

$$0 < h_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

und dem “squeeze theorem” folgt $h_n^2 \to 0$. Mit Theorem 3.2.17, Teil *(iii)* verbessert sich dies auf

$$h_n \to 0 \qquad \text{und somit} \qquad \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

# D.3 Grenzwerte und Stetigkeit reeller Funktionen

## D.3.1 Grenzwerte von Funktionen

*Lösung von Übung 5.3.27 in der Art einer Prüfungsaufgabe.* Beweisen Sie anhand der Definition, dass $p(x) = x^3 - 2x^2$ in $x_0 = 2$ stetig ist.
Die Funktion $p$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also können wir mit Definition 1 oder Definition 2 arbeiten. Wir entscheiden uns für Definition 1. Es gilt $p(2) = 0$. Um die Kriterien aus Definition 1 gezeigt zu haben, müssen wir nur zeigen, dass der Grenzwert in 2 existiert und gleich Null ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $0 < |x - 2| < \delta$ impliziert: $|p(x) - p(2)| = |p(x)| < \varepsilon$. Wir berechnen:

$$|p(x)| = |x^3 - 2x^2| = x^2|x - 2|. \tag{D.3.1}$$

Mit der Einschränkung $\delta < 1$ folgt aus $0 < |x - 2| < \delta$, dass $|x| \leq 3$ und somit

$$x^2 \leq 9. \tag{D.3.2}$$

Wählen wir zusätzlich $\delta \leq \varepsilon/9$, erhalten wir aus (D.3.1) und (D.3.2):

$$|p(x)| < 9 \cdot \frac{\varepsilon}{9} = \varepsilon \qquad \text{für alle } x \text{ mit } \ 0 < |x - 2| < \delta.$$

Zusammenfassend haben wir mit $\delta := \min\{1, \varepsilon/9\}$ die gewünschte Abschätzung gezeigt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir somit Existenz des Grenzwerts und

$$\lim_{x \to 2} p(x) = 0 = p(2)$$

gezeigt. $p$ ist nach Definition 1 in $x_0 = 2$ stetig. □

*Lösung von Übung 5.3.28 in der Art einer Prüfungsaufgabe.* Bestimmen Sie alle Konstanten $c$, so dass $g$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist, wenn gilt:

$$g(x) = \begin{cases} c - x & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3 & x > 1. \end{cases}$$

Die Restriktion von $g$ auf $(-\infty, 1)$ ist ein Polynom (ersten Grades) und somit stetig auf $(-\infty, 1)$. Ebenso ist die Restriktion von $g$ auf $(1, \infty)$ ein Polynom (zweiten Grades) und somit stetig auf $(1, \infty)$. Also müssen wir nur noch Stetigkeit in $x_0 = 1$ sichern. Behauptung: Der rechtsseitige Grenzwert existiert und ist

$$\lim_{x \downarrow 1} g(x) = 2. \tag{D.3.3}$$

Um dies zu zeigen, müssen wir zu $\varepsilon > 0$ gegeben ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x \in (1, 1+\delta)$ gilt $|g(x) - 2| < \varepsilon$. Wir berechnen

$$|g(x) - 2| = |x^2 - 2x + 3 - 2| = |x^2 - 2x + 1| = |x - 1|^2. \tag{D.3.4}$$

Wir wählen $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ und erhalten aus (D.3.4) $|g(x) - 2| < \varepsilon$ für alle $x$ aus $(1, 1+\delta)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, haben wir somit (D.3.3) bestätigt. Damit $g$ in 1 stetig ist, muss dann

$$\lim_{x \uparrow 1} g(x) = g(1) = 2 \tag{D.3.5}$$

gelten, weil dann der Grenzwert von $g$ in 1 existiert und ist gleich dem Funktionswert (damit ist Definition 1 erfüllt). Wenn $c \neq 3$, dann ist $g(1) \neq 2$ und $g$ ist nicht in 1 stetig. (Bemerkung: außerdem folgt mit

$$|g(x) - 2| = |c - x - 2| = |x + 2 - c| = |x - 1 + 3 - c| \geq |3 - c| - |x - 1|,$$

dass $g(x) \not\to 2$ für $x \uparrow 1$.) Wenn $c = 3$, dann folgt mit

$$|g(x) - 2| = |c - x - 2| = |x + 2 - c| = |x - 1|,$$

dass $g(x) \to 2$ für $x \uparrow 1$. Weiter gilt $g(1) = 2$. Also haben wir (D.3.5) für $c = 3$ gezeigt. Zusammenfassend ist $c = 3$ die einzige Konstante, für die $g$ stetig ist. $\square$

# Literaturverzeichnis


[1] Manfred Einsiedler and Andreas Wieser, *Analysis I und II: Vorlesungsskript 2021/2022* (March 5, 2022), `https://people.math.ethz.ch/~einsiedl/Analysis-Skript.pdf`.

[2] *Lambacher Schweizer: Mathematik Einführungsphase, Nordrhein-Westfalen*, Ernst Klett Verlag, 2024.

[3] *Lambacher Schweizer: Mathematik Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs, Nordrhein-Westfalen*, Ernst Klett Verlag, 2015.

[4] Rolf Leis, *Infinitesimalrechnung I: Vorlesungsskript 1992/1993* (1993), `https://www.iam.uni-bonn.de/fileadmin/user_upload/leis/Infini-I.pdf`.