RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

10. Übung

Abgabetermin B-Teil 23.06.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **23.06.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II“ in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 21.06.2022 und am 22.06.2022** gestellt werden.

Approximationsverfahren für Anfangswertprobleme. Wir betrachten jeweils das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x(0) = \bar{x}$$

und finden approximative Lösungen x_N, $N \in \mathbb{N}$ wie folgt:
Eulerscher Polygonzug: $x_N(0) := \bar{x}$ und

$$x_N(t) := x_N(\frac{k-1}{N}) + (t - \frac{k-1}{N}) f(x_N(\frac{k-1}{N})) \quad \text{für alle } t \in (\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}],\ N \in \mathbb{N}$$

Rekursive Methode: $x_0(t) := \bar{x}$ und

$$x_k(t) := \bar{x} + \int_0^t f(x_{k-1}(s))\,\mathrm{d}s \quad \text{für alle } t \geq 0,\ k = 1, \dots, N.$$

Teil A

Aufgabe A43
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t), \quad x(0) = 1.$$

Berechnen Sie die ersten beiden Approximationen x_1, x_2 nach dem Schema von *Euler* von x.

Aufgabe A44
Sei $\alpha > 1$. Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz und dessen Beweis, um zu zeigen, dass die durch

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n + \alpha} \quad \text{für } n \geq 2$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ konvergent ist.

Aufgabe A45
Sei X ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass X genau dann überdeckungskompakt ist, wenn jede offene Überdeckung von X bestehend aus offenen Bällen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe A46
Beweisen Sie, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|_{\mathbb{C}} < 2\}$ nicht kompakt ist, indem Sie eine offene Überdeckung angeben, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

Teil B

Aufgabe B43 [6 Punkte]

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = x(t), \quad x(0) = 1.$$

Berechnen Sie die ersten 4 *rekursiven* Approximationen $x_0, \dots, x_3$ von x.

Aufgabe B44 [6 Punkte]

Für das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

gibt es genau eine Lösung x, falls f Lipschitz-stetig ist. Diese Aussage benutzend, aber ohne auf die explizit bekannte Lösung des Problems einzugehen, soll gezeigt werden, dass alle Lösungen des Problems

$$x'(t) = x(t), \quad x(t_0) = \alpha$$

strikt positiv sind für alle Wahlen von $\alpha > 0$.

Aufgabe B45 [6 Punkte]

Beweisen Sie, dass es für jedes $g \in C([0,1])$ ein $f \in C([0,1])$ mit

$$f(x) - \int_0^x \mathrm{e}^{-y} f(y) \, \mathrm{d}y = g(x)$$

gibt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ *ausgestattet mit der Supremumsnorm, also* $\big(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$*, ein vollständiger metrischer Raum ist (siehe Proposition 10.73).*

Aufgabe B46 [3+3=6 Punkte]

(i) Finden Sie einen nicht-vollständigen metrischen Raum X und eine Lipschitz-Kontraktion $T : X \to X$, die keinen Fixpunkt besitzt

(ii) Finden Sie einen vollständigen metrischen Raum (X, d) und eine Isometrie (das heißt eine Abbildung $T : X \to X$ mit $d(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$), die keinen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: In beiden Fällen kann X *als geeignete Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *gewählt werden*

Aufgabe B47 [4 Punkte]

Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^d$ nicht kompakt ist, indem Sie eine offene Überdeckung angeben, die keine offene Teilüberdeckung enthält.

Aufgabe B48 [4+6 Punkte]

Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Teilmenge, sodass $A \cap K = \emptyset$. Beweisen Sie, dass es offene Mengen U, V gibt mit $U \cap V = \emptyset$, $K \subset U$ und $A \subset V$.

(i) Zeigen Sie die Aussage zuerst für den Fall $K = \{x_0\}$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Verwenden Sie die Überdeckungskompaktheit von K und Teil (i), um die allgemeine Aussage zu beweisen.

Hinweis: Der Schnitt endlich vieler offener Teilmengen ist offen.