# Residualnetzwerke

„Netzwerk minus Fluß = Residualnetzwerk“

## Definition

Gegeben ist ein Netzwerk $G = (V, E)$ und ein Fluß $f$. Das Residualnetzwerk $G_f = (V, E_f)$ zu $G$ und $f$ ist definiert vermöge

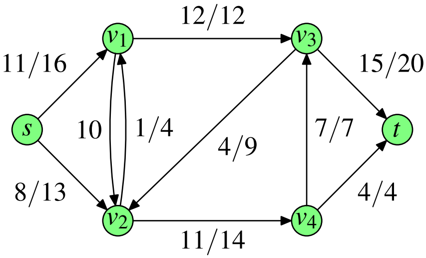
$$E_f = \{\, (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \,\},$$

wobei

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v).$$

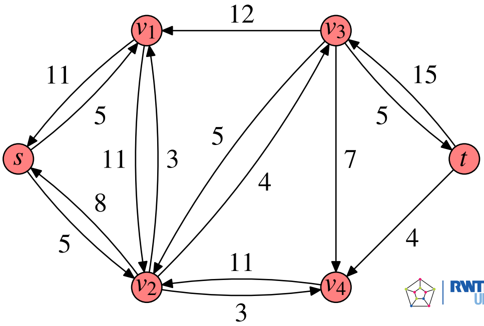
$c_f$ ist die Restkapazität.
Das $s$-$t$-Netzwerk $G_f$ hat die Kapazitäten $c_f$.

# Beispiel




$s$-$t$-Netzwerk $G$ mit Fluß $f$

Residualnetzwerk $G_f$

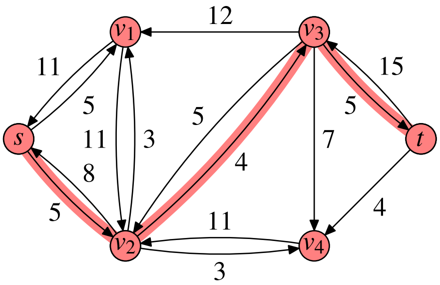


# Augmentierende Pfade

Ein $s$-$t$-Pfad $p$ in $G_f$ heißt augmentierender Pfad.

$c_f(p) = \min\{\, c_f(u,v) \mid (u,v) \text{ ist auf } p \,\}$ heißt Restkapazität von $p$.

Beispiel:




Die Restkapazität dieses Pfades ist 4.

# Die Ford–Fulkerson–Methode

## Algorithmus

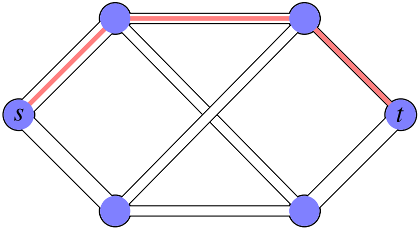
Initialisiere Fluß $f$ zu 0
**while** es gibt einen augmentierenden Pfad $p$
  **do** augmentiere $f$ entlang $p$
**return** $f$

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u,v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v,u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Augmentiere $f$ entlang $p$: $f := f + f_p$

$f_p$ ist ein Fluß in $G_f$

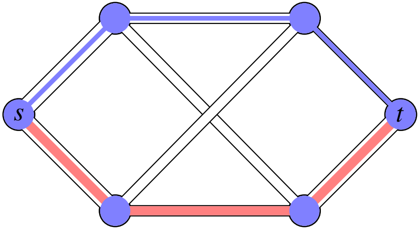
# Die Ford–Fulkerson–Methode




Anfangs ist der Fluß 0.

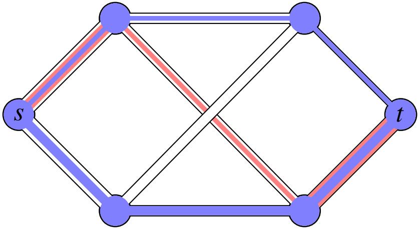
Der augmentierende Pfad ist rot eingezeichnet.

# Die Ford–Fulkerson–Methode



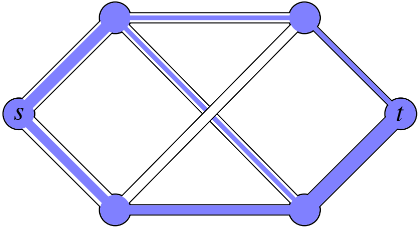

Der augmentierende Pfad hat Kapazität 5.

# Die Ford–Fulkerson–Methode




Der augmentierende Pfad hat Kapazität 3.

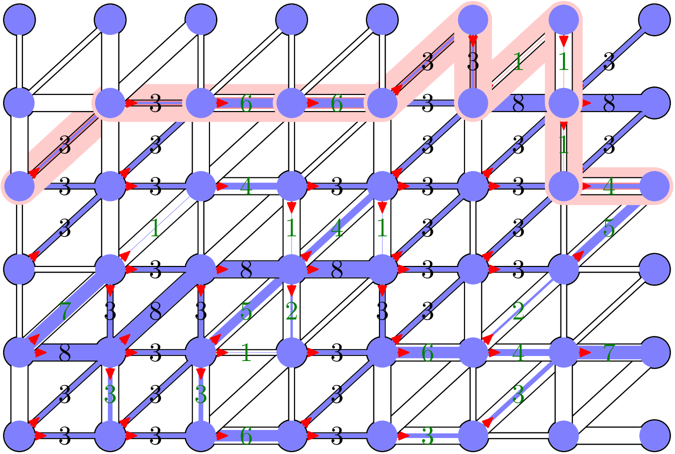
# Die Ford–Fulkerson–Methode




Jetzt gibt es keinen augmentierenden Pfad mehr.

Der Fluß ist maximal.

# Beispiel



# Korrektheit

## Lemma B

Sei $G = (V, E)$ ein $s$-$t$-Netzwerk und $f$ ein Fluß in $G$.

Sei $f'$ ein Fluß in $G_f$.

Dann ist $f + f'$ ein Fluß in $G$.

**Konsequenz:**
Die Ford–Fulkerson–Methode berechnet einen Fluß.

## Beweis.

Wir müssen zeigen, daß $f + f'$ zulässig, symmetrisch und flußerhaltend ist. $\square$

# Beweis (Symmetrie)

$$
\begin{aligned}
(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v) \\
&= -f(v,u)-f'(v,u) \\
&= -(f(v,u)+f'(v,u)) \\
&= -(f+f')(v,u)
\end{aligned}
$$

# Beweis (Flußerhaltung)

Sei $u \in V - \{s, t\}$.

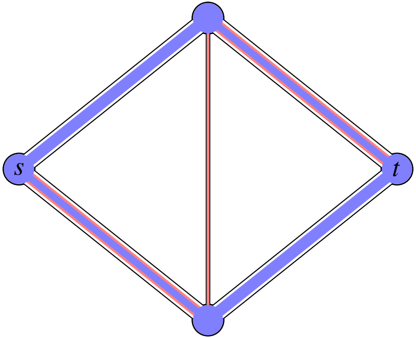
$$\begin{aligned} (f + f')(u, V) &= f(u, V) + f'(u, V) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

# Beweis (Zulässigkeit)

$$
\begin{aligned}
(f + f')(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) \\
&\leq f(u, v) + c_f(u, v) \\
&= f(u, v) + (c(u, v) - f(u, v)) \\
&= c(u, v)
\end{aligned}
$$

Der Beweis verwendet, daß $f'$ ein Fluß in $G_f$ ist, aber nicht, daß $f$ ein Fluß in $G$ ist.

# Laufzeit der Ford–Fulkerson–Methode




Die Laufzeit kann beliebig schlecht sein.

# Laufzeit der Ford–Fulkerson–Methode

Ein Flußproblem ist integral, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.

**Theorem**

*Die Ford–Fulkerson–Methode benötigt nur $O(f^*)$ Iterationen, um ein integrales Flußproblem zu lösen, falls der Wert eines maximalen Flusses $f^*$ ist.*

**Beweis.**

In jeder Iteration wird der Wert des Flusses um $c_f(p) \geq 1$ erhöht. Er ist anfangs 0 und am Ende $f^*$. $\square$

**Korollar**

Bei rationalen Kapazitäten terminiert die Ford–Fulkerson–Methode.