$\boxed{4.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 25

****

(Abgabe: 09.05.)

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann ist V f-**zyklisch**, falls es ein $v \in V$ gibt, so dass

$$V = \mathrm{Lin}(\{f^k(v) \mid k \geq 0\}).$$

Aufgabe H13. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) V ist f-zyklisch;

(ii) Es gibt eine geordnete Basis B von V, so dass

$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = B(p)$$

für ein normiertes Polynom $p \in K[X]$.

Aufgabe H14. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) = n \geq 1$.

(i) Sei $0 \neq v \in V$, und sei $p \in K[X]$ mit $p(f)(v) = 0$. Zeigen Sie: p und χ_f sind nicht teilerfremd.

(ii) Zeigen Sie: Ist χ_f irreduzibel, und ist $0 \neq v \in V$, so ist $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ eine Basis von V, und 0 und V sind die einzigen f-invarianten Unterräume von V.

Aufgabe H15. Zeigen Sie: Die Konjugationsklassen in $K^{n,n}$ sind durch die disjunkte Vereinigung

$$\bigcup_{(p_1,\ldots,p_t)\in\mathcal{P}_n} K^{p_1}$$

parametrisiert.

Aufgabe H16. Klassifizieren Sie alle $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, so dass die Bilinearform s_A ein Skalarprodukt ist.

****