Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
21. November 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Wiederholung: Zufallsvariablen

Zufallsvariable

> Was ist eine Zufallsvariable? $\rightarrow$ Messbare Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
>> $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ W'raum, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ kleinste σ-Algebra in $\mathbb{R}$, die alle offenen Mengen enthält
>> Messbar: $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

> Was ist die Verteilung einer Zufallsvariablen?
>> $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ für $A \subset \mathbb{R}$

> Was ist die Verteilungsfunktion einer ZV? $\rightarrow F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$
>> F_X ist monoton wachsend
>> $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
>> $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Zufallsvariable

- Wann ist X diskret bzw. stetig?
  - Diskret: endlich viele Werte, definiert durch $p_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$ für $\{x_i\}_{i \in I}, I \subset \mathbb{N}$
  - Stetig: es gibt eine integrierbare Funktion $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ s.d. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) \mathrm{d}x$
- Wie heißen p_X bzw. f_X? $\to$ Wahrscheinlichkeitsfunktion (p_X) und Dichte (f_X)
  - $p_X(x) \geq 0, \sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = 1$
  - $f_X(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \mathrm{d}x = 1$

Erwartungswert

- Wie kann der Erwartungswert einer ZV interpretiert werden?
  - Durchschnitt bei (unendlich) vielen Wiederholungen
- Wie ist der Erwartungswert definiert?
  - Diskret: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x)$
  - Stetig: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$
- Rechenregeln: $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y + c] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y] + c$
- Was ist die Varianz einer Zufallsvariablen?
  - $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$
  - $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
  - $\mathrm{var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathrm{var}(X)$
- Was ist die Kovarianz von zwei Zufallsvariablen?
  - $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$
  - $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
  - $\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{var}(X)$
  - X, Y unabh. $\implies$ $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$

Wichtige Verteilungen

Verteilung	$X(\Omega)$	W'keitsfunktion	$\mathbb{E}[X]$	var(X)
Bernoulli	$\{0,1\}$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Gleich	$\{1,2,\dots,n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Binomial	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Hypergeom.	$\{0,1,\dots,n\}$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Geom.	$\mathbb{N}_0$	$p(1-p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	$\mathbb{N}_0$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ

Wichtige Verteilungen

Verteilung	Dichte	$\mathbb{E}[X]$	var(X)
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$	μ	σ^2
$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
χ^2_n	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{n/2-1}\exp(-x/2)$	n	$2n$

Normalverteilung

> $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
> Wie kommen wir zur Standardnormalverteilung? $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
> Warum interessiert uns $\mathcal{N}(0,1)$?
>   > Wir kennen $\Phi(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ für $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
>   > Was heißt "kennen"? $\rightarrow$ Werte in Tabelle

Tabelle der Standardnormalverteilung (Verteilungsfunktion)

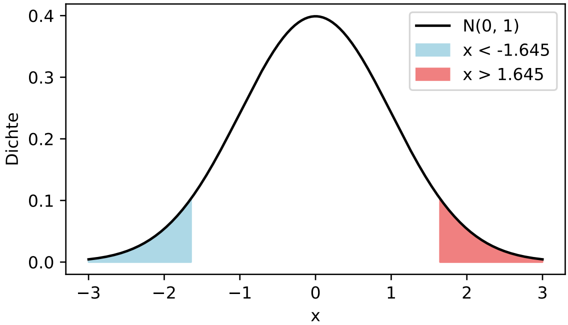
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Normalverteilung

> Es gilt: $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

> Seien $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängig. Welche Verteilung hat $X_1 + X_2$? $\rightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

> Sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ wie finden wir q_α sodass $\mathbb{P}(X \leq q_\alpha) = \alpha$? Wie heißt q_α?



Mehrdimensionale Verteilungen

- Seien $X, Y \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, welche Verteilung hat (X,Y)? $\rightarrow$ nicht klar festgelegt
- Was ist die gemeinsame Verteilung von zwei Zufallsvariablen?
  - $\mathbb{P}_{X,Y}(A) = \mathbb{P}((X,Y) \in A)$ für $A \subset \mathbb{R}^2$
  - Gemeinsame W'keitsfunktion: $p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$
  - Gemeinsame Dichte: $f_{X,Y}(x,y)$ sodass $\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}s$
- Was ist eine Randverteilung?
  - diskret: z.B. Verteilung von X, $p_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} f_{X,Y}(x,y)$
  - stetig: z.B. Verteilung von X, $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y) \mathrm{d}y$

Mehrdimensionale Verteilungen

- Wann sind X und Y unabhängig?
  - $\mathbb{P}(X \in I_1, Y \in I_2) = \mathbb{P}(X \in I_1)\mathbb{P}(Y \in I_2)$ für alle Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$
  - diskret: $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$
  - stetig: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- Wie ist die bedingte Verteilung von X bedingt auf $Y = y$ definiert?
  - diskret: $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
  - stetig: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, falls $f_Y(y) > 0$, $f_{X|Y}(x|y) = 0$ sonst

Grenzwertsätze

- Was bedeutet $Bin(n, \frac{p}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} Pois(p)$?
  - Sei $Y_n \sim Bin(n, \frac{p}{n})$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = e^{-p}\frac{p^k}{k!}$
- Was sagt das Gesetz der großen Zahlen? $\to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}[X_1]$
  - Genauer (schwaches Gesetz der großen Zahlen):

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

- Was besagt der zentrale Grenzwertsatz?
  - Der Mittelwert von Zufallsvariablen konvergiert gegen die Standardnormalverteilung
  - Genauer: $\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x)$
- Was versteht man unter der "Stetigkeitskorrektur"?

$$\mathbb{P}(k \leq S_n \leq \ell) \approx \Phi\left(\frac{\ell + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

- Wann ist der zentrale Grenzwertsatz für Bernoulli-verteilte ZV anwendbar (Faustregel)? $\to$ Falls $np(1-p) \geq 9$

Literatur I

Bundesministerium für Gesundheit (2024).
Infektionsradar.
https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.