

Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
17. Oktober 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Wiederholung: Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeit

- > Wahrscheinlichkeitsraum → was ist das?
 - > $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
 - > Ω : Ergebnismenge (Ergebnisraum)
 - > \mathcal{A} : σ -Algebra der Ereignisse
 - > \mathbb{P} : Wahrscheinlichkeitsmaß → was ist das?
 - > Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften
 - > (A1) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$
 - > (A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 - > (A3) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt
 $\implies \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$
 - > Welche Eigenschaften haben Wahrscheinlichkeitsmaße?
 - > $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
 - > $P(A^c) = 1 - P(A)$
 - > Siebformel ($n=2$): $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
 - > $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
 - > ...

Wahrscheinlichkeit

- > Was ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum?
 - > $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, wobei Ω endlich oder abzählbar unendlich
- > Wie können wir $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume definieren?
 - > Über eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 - > $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
 - > $p(\omega) \geq 0$
 - > Für $A \subset \Omega$ definiere: $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$
- > Welche diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße kennen wir?
 - > Bernoulli W'maß: $\mathbb{P}(\{1\}) = p, \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$ für $p \in (0, 1)$
 - > Laplace W'maß: $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ für $\omega \in \Omega$
 - > Wie können wir die Laplace Wahrscheinlichkeit explizit berechnen? → Kombinatorik

Kombinatorik

- > Was ist das Urnenmodell?
 - > Gegeben sei eine Urne mit n Kugeln (nummeriert: 1 bis n)
 - > Wir ziehen k Kugeln aus der Urne → wie können wir ziehen?
 - > Ziehen mit/ohne Zurücklegen
 - > Ziehen mit/ohne Beachtung der Reihenfolge
- > Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils k aus n Kugeln mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen?

	Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Mit Beachtung der Reihenfolge	$ Per_k^n(mW) = n^k$	$ Per_k^n(oW) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Ohne Beachtung der Reihenfolge	$ Kom_k^n(mW) = \binom{k+n-1}{k}$	$ Kom_k^n(oW) = \binom{n}{k}$

Unabhängigkeit

- > Wann sind zwei Ereignisse A und B unabhängig? $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- > Drei Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind unabhängig, wenn $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$? **Nein!**
 - > Es muss auch $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ für $i \neq j$ gelten!
- > Wenn Ereignisse B und C aus Blöcken unabhängiger Ereignisse A_1, \dots, A_k und A_{k+1}, \dots, A_n zusammengesetzt sind (durch Vereinigung, Schnitt oder Komplementbildung), dann sind auch B und C unabhängig
 - > Beispiel: Wir würfeln 4-mal. Die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \{1, 2, \dots, 6\}^4 : \max(\omega_1, \omega_2) = 4\} \\ &\hat{=} \text{"Das Maximum der ersten beiden Augenzahlen ist 4"} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{\omega \in \{1, 2, \dots, 6\}^4 : \max(\omega_3, \omega_4) = 2\} \\ &\hat{=} \text{"Das Maximum der letzten beiden Augenzahlen ist 2"} \end{aligned}$$

sind unabhängig

Unabhängigkeit

- > Für zwei unabhängige (diskrete) Experimente mit W'räumen $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ ist der gemeinsame W'r Raum gegeben durch:
 - > $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
 - > $\mathcal{P}(\Omega)$
 - > $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\})$
- > Für $A_1 \subset \Omega_1$ und $A_2 \subset \Omega_2$ gilt
 - > $\mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2) = \mathbb{P}_1(A_1)$
 - > $\mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$
 - > $A_1 \times \Omega_2$ und $\Omega_1 \times A_2$ sind voneinander unabhängig
- > Beispiel: Zweifacher Münzwurf
$$A_1 = \{\omega \in \{Z, K\}^2 : \omega_1 = Z\} \hat{=} \text{"Zahl im ersten Wurf"}$$
$$A_2 = \{\omega \in \{Z, K\}^2 : \omega_2 = Z\} \hat{=} \text{"Zahl im zweiten Wurf"}$$

A_1 und A_2 sind unabhängig und es gilt

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}_1(\{Z\}) = \frac{1}{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- > Wie können wir für zwei Ereignisse A, B die Informationen von A über B messen?
 - > Bedingte Wahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$
 - > $B \mapsto \mathbb{P}(B|A)$ definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß
- > Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
 - > Für B_1, \dots, B_n paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ und $\mathbb{P}(B_i) > 0$ gilt $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$
 - > $n = 2$: Für B mit $\mathbb{P}(B) \in (0, 1)$ gilt
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$
- > Satz von Bayes
 - > Für B_1, \dots, B_n paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ und $\mathbb{P}(B_i) > 0$ gilt $\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$
 - > $n = 2$: Für B mit $\mathbb{P}(B) \in (0, 1)$ gilt
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$$

Literatur I

 Bundesministerium für Gesundheit (2024).

Infektionsradar.

https:

//infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

 Dehling, H. and Haupt, B. (2006).

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

Springer-Verlag.

Literatur II

 Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).

Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.

Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

 Henze, N. et al. (1997).

Stochastik für Einsteiger, volume 4.

Springer.