Zusammenfassung der Vorlesung

Analysis I
Einführung in die Differential- und Integralrechnung

Barbara Niethammer
Universität Bonn
Wintersemester 2024/5

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung. Deshalb kann diese Zusammenfassung ein Lehrbuch *nicht* ersetzen.

Folgende Bücher werden als Ergänzung zur Vorlesung empfohlen:

- K. Königsberger, Analysis 1+2, Springer
- S. Hildebrandt, Analysis 1+2, Springer
- O. Forster, Analysis 1, Springer

Dieses Skript basiert auf den oben genannten Büchern, sowie weiteren Quellen, die nicht immer im Einzelnen genannt sind.

Tippfehler und Korrekturen bitte an `niethammer@iam.uni-bonn.de`.

Inhaltsverzeichnis

1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion **4**
1.1 Vollständige Induktion . . . 4
1.2 Fakultät und Binomialkoeffizient . . . 6

2 Reelle Zahlen **8**
2.1 Körperaxiome von $\mathbb{R}$. . . . 8
2.2 Anordnungsaxiome von $\mathbb{R}$ . . . 10
2.3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ . . . 12
2.4 $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar . . . 15

3 Komplexe Zahlen **16**
3.1 Definition, Körperstruktur, Rechenregeln . . . 16
3.2 Die komplexe Zahlenebene . . . 17

4 Folgen **19**
4.1 Folgen, Konvergenz . . . 19
4.2 Rechenregeln . . . 22
4.3 Monotone Folgen . . . 24
4.4 Der Satz von Bolzano-Weierstraß . . . 25
4.5 Cauchy-Folgen . . . 27

5 Reihen **28**
5.1 Konvergente Reihen . . . 28
5.2 Konvergenzkriterien . . . 29
5.3 Absolute Konvergenz . . . 31
5.4 Umordnung von Reihen . . . 32
5.5 Potenzreihen . . . 33
5.6 Multiplikation von Reihen . . . 36
5.7 Exponentialfunktion und Verwandte . . . 37
5.7.1 Exponentialreihe . . . 37
5.7.2 Trigonometrische Funktionen . . . 38
5.7.3 Hyperbolische Funktionen . . . 38

6 Funktionen und Grenzwerte **39**
6.1 Funktionen . . . 39
6.2 Einige topologische Begriffe . . . 39
6.3 Grenzwerte von Funktionen . . . 42

7 Stetigkeit **45**
7.1 Stetigkeit . . . 45
7.2 Der Zwischenwertsatz . . . 48
7.3 Exponentialfunktion und Logarithmus . . . 49
7.4 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen . . . 50
7.5 Gleichmäßige Stetigkeit . . . 51
7.6 Punktweise/gleichmäßige Konvergenz . . . 51

7.7 Gleichmäßig konvergente Reihen . . . 54
7.8 Sinus und Cosinus . . . 55

8 Differenzierbare Funktionen **57**
8.1 Die Ableitung . . . 57
8.2 Kleiner Einschub: Funktionenräume und Normen . . . 59
8.3 Höhere Ableitungen . . . 60
8.4 Rechenregeln . . . 61
8.5 Mittelwertsatz und Folgerungen . . . 63
8.6 Konvexität . . . 67
8.7 Fundamentale Ungleichungen . . . 70

9 Das eindimensionale Riemann-Integral **72**
9.1 Integrierbare Funktionen . . . 72
9.2 Eigenschaften des Integrals . . . 75
9.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . 77
9.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 78
9.5 Partielle Integration . . . 79
9.6 Substitutionsregel . . . 80
9.7 Uneigentliche Integrale I (unbeschränktes Integrationsgebiet) . . . 82
9.8 Uneigentliche Integrale II (unbeschränkte Funktionen) . . . 85
9.9 Riemannsches Integralkriterium . . . 87
9.10 Vertauschungssätze . . . 87

10 Lokale Approximation von Funktionen **89**
10.1 Approximation mit Taylorpolynomen . . . 89
10.2 Taylorreihen . . . 92

11 Gewöhnliche Differentialgleichungen **93**
11.1 Einfache Beispiele . . . 94
11.2 Differentialgleichungen erster Ordnung . . . 97
11.3 Elementare Lösungsmethoden . . . 97
11.3.1 f ist unabhängig von y . . . 97
11.3.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen . . . 98

1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{1, 2, \cdots\} && \text{natürliche Zahlen}\\
\mathbb{N}_0 &:= \{0, 1, 2, \cdots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} && \\
\mathbb{Z} &:= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, \cdots\} && \text{ganze Zahlen}\\
\mathbb{Q} &:= \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}\,;\, q \in \mathbb{N}\right\} && \text{rationale Zahlen}
\end{aligned}$$

In den folgenden Kapiteln werden wir zudem die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einführen.

1.1 Vollständige Induktion

Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.

Prinzip der vollständigen Induktion:
Wenn die beiden folgenden Aussagen wahr sind, dann sind alle $A(n)$ wahr.

(IA) (Induktionsannahme) : $A(1)$ is wahr.
(IS) (Induktionsschritt) : Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: falls $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Beispiele:

1.) (Gaußsche Summenformel)
Behauptung: Für alle $n \in N$ gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
(Abkürzende Schreibweise: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.)

Beweis. Wir benutzen das Prinzip der vollständigen Induktion:
(IA): Für $n = 1$ ist die Aussage richtig.
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$: Wir nehmen an, es gelte $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.$$

□

Bemerkung: Gauß[1] bewies diese Formel auf andere Weise: Er beobachtete, dass

$$1 + 2 + \cdots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51)\Big(= \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{für } n = 100\Big)$$

[1] Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

2.) (Geometrische Summenformel)

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq 1$ gilt

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis wieder über vollständige Induktion:

(IA): Für $n = 1$ ist die Aussage richtig.

(IS): $n \rightsquigarrow n+1$: Wir nehmen an, es gelte $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Dann folgt

$$\sum_{i=0}^{n+1} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

□

Bemerkung: Die geometrische Summenformel läßt sich auch direkt beweisen (vgl. Übungsblatt 1)

(Offensichtliche) Variante: Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Wenn die beiden folgenden Aussagen wahr sind, dann sind alle $A(n)$ für $n \geq n_0$ wahr.

(IA) (Induktionsannahme) : $A(n_0)$ is wahr.

(IS) (Induktionsschritt) : Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, gilt: falls $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Beispiel: Für alle $n \geq 5$ gilt $n^2 < 2^n$.

Beweis. **(IA):** $n_0 = 5$: $2^5 = 32 > 25 = n^2$.

(IS): $n \rightsquigarrow n+1 : 2^{n+1} = 2^n 2 > 2n^2 > (n+1)^2$ falls $n \geq 5$. □

Rekursive Definition/Konstruktion über vollständige Induktion:

Jedem $n \in \mathbb{N}$ soll ein Wert $f(n)$ zugeordnet werden.

Schritt 1: Angabe von $f(1)$

Schritt 2: Vorschrift, wie $f(n+1)$ aus $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ gewonnen wird.

Beispiel: (Fibonacci Zahlen)

Frage: Wie viele Kaninchen entstehen im Lauf eines Jahres aus einem Paar?

Wir machen hierzu folgende Modellannahmen:

- Jedes Paar erzeugt jeden Monat ein neues Paar.
- Jedes Paar wird im zweiten Monat zeugunsfähig.
- Todesfälle treten nicht auf.

Damit erhalten wir
1. Monat: ein neugeborenes Paar N
2. Monat: ein zeugungsfähiges Paar Z
3. Monat: 1N + 1Z
4. Monat: 1N + 2Z
5. Monat: 2N + 3Z ....

Fibonacci [2] Zahlen: Sei F_n die Anzahl zeugungsfähiger Paare im Monat $n+1$. Dann gilt $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
Bemerkung: In den Übungsaufgaben werden verschiedene Formeln zu den Fibonacci-Zahlen besprochen.

1.2 Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition 1.1 (n-Fakultät)**.** *Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1)n!$, also $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n =: \Pi_{i=1}^n i$.*

Satz 1.2 (Kombinatorische Interpretation der Fakultät)**.** *Die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Elementen ist $n!$.*

Beweis. Wir führen den Beweis über vollständige Induktion.
(IA): $n = 1$. Die Aussage ist offensichtlich korrekt.
(IS): $n \rightsquigarrow n+1$: M sei eine Menge mit $n+1$ Elementen. Zur Auswahl des ersten Elements gibt es $n+1$ Möglichkeiten. Nach Induktionsannahme gibt es für die Anordnung der restlichen n Elemente $n!$ Möglichkeiten. Also ergeben sich insgesamt $(n+1)n! = (n+1)!$ Möglichkeiten. □

Definition 1.3 (Binomialkoeffizient)**.** *Zu $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definieren wir*

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Bemerkung: Wir können diese Definition sinnvoll erweitern, indem wir $\binom{n}{k} = 0$ setzen, falls $k < 0$ oder $k > n$ ist.

Satz 1.4 (Kombinatorische Interpretation)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$. Dann hat jede n-elementige Menge $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen.*

Beweis. Falls $k = 0$, dann ist die leere Menge die einzige Möglichkeit. Falls $k > 0$ ist, dann gibt es zur Auswahl von k Elementen $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ Möglichkeiten. Da die Anordnung irrelevant ist, müssen wir diese Zahl noch durch die Anzahl der Anordnungen teilen. □

[2] "Fibonacci" (Leonardo da Pisa, 1170-1240), Kaufmann; brachte indische Rechenkunst nach Europa; einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters.

Satz 1.5 (Rekursionsformel)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis. Falls $k = 0$, so gilt

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n = \binom{n+1}{1}.$$

Falls $k > 0$, dann rechnen wir

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} n(n-1)\cdots(n-k+1)\big(k+1+n-k\big) = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

□

Pascalsches Dreieck [3]

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Satz 1.6 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige Zahlen a und b gilt*

$$\big(a+b\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir schreiben

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{-mal}}$$

und überlegen uns, dass es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt, k-mal a und $(n-k)$-mal b zu erhalten. □

Bemerkung: Der Beweis läßt sich auch über Induktion führen.

[3] Blaise Pascal (1623-1662)

2 Reelle Zahlen

Motivation:
$\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bezüglich Addition, aber nicht abgeschlossen bezüglich Subtraktion.
$\mathbb{Z}$ is abgeschlossen bezüglich Multiplikation, aber nicht abgeschlossen bezüglich Division.
$\mathbb{Q}$ ist nicht "vollständig".

Beispiel: Die Diagonale des Einheitsquadrats hat Länge $\sqrt{2}$.
Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage über einen Widerspruch. Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h es gibt $p, q \in \mathbb{N}$, die teilerfremd sind, so dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ gilt. Dann gilt $p^2 = 2q^2$, somit ist p^2 gerade und damit auch p und q^2. Dies ergibt einen Widerspruch zur Annahme, dass p und q teilerfremd sind. □

Dies bedeutet also, dass $\mathbb{Q}$ "Löcher" hat. Diese sollen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht mehr haben. Eine Charakterisierung von $\mathbb{R}$ ist durch folgendes Beispiel motiviert. Es sei

$$M := \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < \sqrt{2}\}\,.$$

Frage: Gibt es in M ein größtes Element?
Antwort: Nein, denn zu beliebigem $q \in \mathbb{N}$ können wir das größte $p \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} < \sqrt{2}$ wählen. Insbesondere gilt dann $\frac{p+1}{q} > \sqrt{2}$, d.h. $\sqrt{2}$ ist in einem Intervall der Länge $\frac{1}{q}$ eingeschlossen. Da q beliebig groß sein kann, kann dieses Interval beliebig klein ein.

$\mathbb{R}$ ist gegenüber $\mathbb{Q}$ dadurch ausgezeichnet, dass jede nach oben beschränkte Menge ein sogenanntes Supremum besitzt, d.h. es gibt eine kleinste Zahl in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass alle Elemente der Menge kleiner oder gleich sind. Das Supremum muss selbst nicht in der Menge liegen.

Wir führen $\mathbb{R}$ im folgenden axiomatisch ein, d.h. wir nehmen die Existenz an und postulieren Axiome (gültig anerkannte Aussagen). Aus diesen leiten wir weiter Eigenschaften von $\mathbb{R}$ her.

[7.10.2024]

[9.10.2024]

2.1 Körperaxiome von $\mathbb{R}$.

Auf $\mathbb{R}$ sind die folgenden Operationen definiert:

Addition: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, (a, b) \mapsto a + b.$
Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, (a, b) \mapsto ab.$

Körperaxiome:
(K1) Kommutativgesetz: $a + b = b + a\,, \qquad ab = ba$
(K2) Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)\,, \qquad (ab)c = a(bc)$

(K3) Distributivgesetz: $a(b+c) = ab + ac$

(K4) Existenz des neutralen Elements:

- Es existiert eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.
- Es existiert eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, so dass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

(K5) Existenz des inversen Elements:

- Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $(-a) \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$.
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ existiert ein $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

Schreibweise: $(-a) = -a$, $a + (-b) = a - b$, $ab^{-1} = \frac{a}{b}$

Bemerkung: Neutrales und inverses Element sind jeweils eindeutig bestimmt. Sei zum Beispiel $\tilde{0}$ ein weiteres neutrales Element bezüglich der Addition, es gelte also $\tilde{0} + x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt auch $\tilde{0} + 0 = 0$, andererseits aber auch $0 + \tilde{0} = \tilde{0}$. Da nach $(K1)$ gilt, dass $0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0$, folgt $\tilde{0} = 0$.

Aus den Körperaxiomen lassen sich die bekannten Rechenregeln ableiten. Wir geben im folgenden zwei Beispiele.

Beispiele:

1) Zu $a, b, \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a + x = b$, nämlich $x = b - a$.

   Beweis. Sei $x = b - a$. Wir zeigen zuerst, dass dieses x die Gleichung löst. Dies folgt aus

$$a + b - a \underbrace{=}_{(K1)} a + ((-a) + b) \underbrace{=}_{(K2)} (a + (-a)) + b \underbrace{=}_{(K5)} 0 + b \underbrace{=}_{(K4)} b\,.$$

   x ist eindeutig bestimmt, denn sei y eine Zahl mit $a + y = b$, dann gilt

$$y \underbrace{=}_{(K5)} y + (-a + a) \underbrace{=}_{(K1)} (-a + a) + y \underbrace{=}_{(K2)} (-a) + (a + y) = (-a) + b \underbrace{=}_{(K1)} b - a\,.$$

$\square$

2) Zu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $ax = b$, nämlich $x = a^{-1}b$.
   Der Beweis ist analog zum Beweis von 1).

2.2 Anordnungsaxiome von $\mathbb{R}$

Anordnungsaxiome:
(A1): Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a > 0\,, \qquad a = 0\,, \qquad -a > 0\,.$$

(A2): Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a + b > 0$ und $ab > 0$.

Wir nennen die Teilmenge der Zahlen $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ die positiven Zahlen $\mathbb{R}_+$.

Bemerkung: Falls $a > 0$, so ist $-a < 0$. [Annahme: $-a > 0$, dann folgt $0 = a - a > 0$, ein Widerspruch. Falls $-a = 0$, dann folgt $a = 0$, was ebenfalls einen Widerspruch ergibt.]

Weitere Bezeichnungen:

- Falls $-a > 0$, so heißt a negativ.
- $a > b$ (bzw. $a < b$), falls $a - b > 0$ (bzw. $b - a > 0$).
- $a \geq b$ falls $a - b > 0$ oder falls $a = b$.

Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen:

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt genau eine der Aussagen

$$a > b\,, \qquad a = b\,, \qquad a < b\,.$$

[Dies sehen wir, indem wir (A1) auf $b - a$ anwenden.]

(ii) Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität).
[(A2) auf $a - b$ und $b - c$ anwenden]

(iii) Aus $a > b$ folgt

(a) $a + c > b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.
[$a + c - (b + c) = a - b > 0$]

(b) $ac > bc$ für alle $c > 0$, bzw. $ac < bc$ für alle $c < 0$.
[$ac - bc = (a - b)c > 0$, wobei die zweite Ungleichung aus (A2) folgt.]

(c) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ falls $b > 0$.
[Annahme: $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$; da $ab > 0$, folgt $ab(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) \geq 0$, also $b - a \geq 0$, ein Widerspruch.]

(iv) Aus $a > b$ und $\alpha > \beta$ folgt $a + \alpha > b + \beta$. Falls $b > 0, \beta > 0$, dann folgt auch $a\alpha > b\beta$.
[Die Aussagen folgen aus $(iii)(a)$ und $(iii)(b)$.]

(v) zu $a \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^2 := a \cdot a$. Es gilt $a^2 > 0$ für $a \neq 0$ und insbesondere $1^2 = 1 > 0$. Daraus folgt auch, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ positiv ist.
[Falls $a > 0$, so gilt nach $(A2)$, dass $a^2 > 0$. Falls $a < 0$, dann ist $-a > 0$ und $a^2 = (-a)(-a) > 0$.]

Lemma 2.1 (Bernoullische [4] Ungleichung). *Sei $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann gilt*

$$\big(1 + x\big)^n > 1 + nx\,. \tag{2.1}$$

Bemerkung: Die Voraussetzungen $x \neq 0$ und $n \geq 2$ sind nur für die strikte Ungleichung nötig.

Beweis. Wir beweisen Lemma 2.1 über vollständige Induktion:
(IA): $n = 2$**:**

$$\big(1 + x\big)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x \qquad \text{da } x^2 > 0\,.$$

(IS): $n \rightsquigarrow n + 1$**:**

$$\begin{aligned}\big(1 + x\big)^{n+1} &= \big(1 + x\big)^n\big(1 + x\big) > \big(1 + nx\big)\big(1 + x\big)\\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x\,.\end{aligned}$$

□

Definition 2.2 (Absolutbetrag). *Zu $x \in \mathbb{R}$ sei*

$$|x| = \begin{cases} x & : \quad \textit{falls } x \geq 0 \\ -x & : \quad \textit{falls } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ heißt der Absolutbetrag von x.

Lemma 2.3. *Es gelten die folgenden Rechenregeln.*

$$\begin{array}{lll} (i) & |ab| = |a||b| & \\ (ii) & |a + b| \leq |a| + |b| & (\textit{Dreiecksungleichung}) \\ (iii) & |a - b| \geq \big||a| - |b|\big| & \end{array}$$

Beweis. (ii) Es gilt

$$\begin{aligned} a \leq |a|\,,\ b \leq |b| \quad &\Rightarrow \quad a + b \leq |a| + |b| \\ -a \leq |a|\,,\ -b \leq |b| \quad &\Rightarrow \quad -(a + b) \leq |a| + |b| \end{aligned}$$

und damit insgesamt $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(iii) Es gilt

$$|a| = |a + b - b| = |a - b + b| \overset{(ii)}{\leq} |a - b| + |b|$$

und somit $|a| - |b| \leq |a - b|$. Wiederholen wir dasselbe Argument für b, so erhalten wir $|b| - |a| \leq |a - b|$ und damit insgesamt $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

□

Die Körper- und Anordnungsaxiome sind auch von den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt. Das folgende Vollständigkeitsaxiom unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$. Es gibt verschiedene äquivalente Formulierungen des Vollständigkeitsaxioms.

[4] Jacob Bernoulli (1655-1705)

2.3 Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Vollständigkeitsaxiom: (nach Dedekind[5])

(V): Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke in $\mathbb{R}$, genannt das Supremum von M. Wir bezeichnen dieses mit $\sup M$.

In dieser Definition sind noch einige Begriffe zu klären:

Definition 2.4. *[Beschränkte Menge; obere (untere) Schranke] $M \subset \mathbb{R}$ sei eine nichtleere Menge. M heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq k$ $(x \geq k)$ für alle $x \in M$ gilt. Solch ein k heißt obere (untere) Schranke von M.*
M heißt beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiel:

$$M = \left\{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Wir sehen

- M ist nach oben durch alle $k \geq 1$ beschränkt.
- M ist nach unten durch alle $k \leq 0$ beschränkt.
- M besitzt ein kleinstes Element 0.
- M besitzt kein größtes Element.
- Die kleinste obere Schranke ist 1.

Definition 2.5. *[Supremum/Infimum] Eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von M, falls sie die kleinste obere (größte untere) Schranke von M ist, d.h.*

(i) k is oberere (untere) Schranke von M.

(ii) Es gibt kein $k' < k$ $(k' > k)$, das obere (untere) Schranke ist.

Wir bezeichnen das Supremum mit $\sup M$, das Infimum mit $\inf M$.

Bemerkung: Das folgende gilt entsprechend auch für das Infimum.

- Nicht jede Menge hat ein endliches Supremum, z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{N}$.
- Es gibt höchstens ein Supremum.
- $\sup M$ muss nicht in M liegen, wie man an obigem Beispiel sieht.

Definition 2.6. *[Maximum/Minimum] $m \in M$ heißt Maximum/Minimum von M, falls $x \leq m$ $(x \geq m)$ für alle $x \in M$ gilt. Falls M ein Maximum (Minimum) besitzt, so gilt $\sup M = \max M$ $(\inf M = \min M)$, wobei $\max M, \min M$, das Maximum (Minimum) von M bezeichnet.*

Achtung: In der Definition ist entscheidend, dass m ein Element von M ist.

[5] Richard Dedekind (1831-1916)

Beispiele:

(i) Für
$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}, \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 1\}$$
gilt $\sup M_1 = \sup M_2 = 1$, $\inf M_1 = \inf M_2 = 0$, $\max M_2 = 1$ und $\max M_1$, $\min M_1$ sowie $\min M_2$ existieren nicht.

(ii) Für
$$M_3 = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$
gilt $\sup M_3 = \max M_3 = \frac{3}{2}$, $\inf M_3 = -1$ und ein Minimum existiert nicht.

Konvention: Falls M nicht nach oben (unten) beschränkt ist, so definieren wir $\sup M := \infty$ ($\inf M := -\infty$).

Satz 2.7. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer.*

a) Falls $\sup M < \infty$, dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit $\sup M - \varepsilon < x$.

b) Falls $\sup M = \infty$, dann existiert für alle $k > 0$ ein $x \in M$ mit $x > k$.

Beweis. a) Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $x \leq \sup M - \varepsilon$ für alle $x \in M$ gilt. Damit ist $\sup M - \varepsilon$ eine obere Schranke, was ein Widerspruch zur Definition des Supremums ist.

b) Die Aussage gilt nach Definition.

□

[9.10.2024]

[14.10.2024]

Wir werden nun noch eine äquivalente Formulierung zu (V) kennenlernen. Dazu definieren wir für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a \leq x \leq b\}$	<u>abgeschlossenes</u> Intervall
$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a < x < b\}$	<u>offenes</u> Intervall
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a \leq x < b\}$	(nach rechts) <u>halboffenes</u> Intervall
$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, a < x \leq b\}$	(nach links) <u>halboffenes</u> Intervall

Weiterhin sei $|b - a|$ die Länge dieser Intervalle.

Definition 2.8 (Intervallschachtelung)**.** *Es sei (I_n) eine Folge abgeschlossener Intervalle mit Länge $|I_n|$, $n \in \mathbb{N}$. (I_n) heißt <u>Intervallschachtelung</u>, falls*

(1) $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(2) $|I_n| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert I_n mit $|I_n| < \varepsilon$.

Satz 2.9 (Intervallschachtelungsprinzip)**. (IVP):** *Zu jeder Intervallschachtelung existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \cap_{n\geq 1} I_n$.*

Beweis. Mit $I_n = [a_n, b_n]$ folgt $a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_1$. Sei $M := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist M nicht leer und b_n ist eine obere Schranke für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (V) gilt, dass $a := \sup M$ existiert. Außerdem gilt $a_n \leq a \leq b_n$ für alle n und somit $a \in \cap_{n\geq 1} I_n$. □

Wir haben also gesehen, dass das Intervallschachtelungsprinzip (IVP) aus dem Vollständigkeitsaxiom (V) folgt. Ebenso kann man zeigen, dass umgekehrt (V) aus (IVP) zusammen dem Archimedische Axiom folgt (siehe z.B. Königsberger, Kapitel 2.3). Das Archimedische Axiom besagt, dass zu jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n > x$ ist. Es läßt sich aus (V) herleiten.

Satz 2.10 (Existenz von Wurzeln)**.** *Für jedes $c \geq 0$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mit $x^2 = c$. x heißt Wurzel (oder auch Quadratwurzel) von c.*

Bezeichnung: $\sqrt{c}$ oder $c^{1/2}$.

Beweis. **Eindeutigkeit:** Wir nehmen an, es existieren $x_1 \neq x_2$ mit $x_1^2 = x_2^2 = c$. Dann gilt $0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ und somit $x_1 = x_2$ oder $x_1 = x_2 = 0$.

Existenz: Wir definieren $M := \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \geq 0\,,\, z^2 \leq c\}$. Dann gilt

a) $M \neq \varnothing$, da $0 \in M$.

b) M ist nach oben beschränkt durch $1 + c$, denn nach (2.1) gilt

$$(1 + c)^2 \geq 1 + 2c > c \geq z^2\,.$$

c) **Behauptung:** $x := \sup M$ erfüllt $x^2 = c$.

   i) Wir nehmen an, dass $x^2 < c$ gilt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x + \varepsilon)^2 < c$ (z.B. $\varepsilon = \min\left(1, \frac{c-x^2}{2x+1}\right)$). Somit gilt $x + \varepsilon \in M$ und wir erhalten einen Widerspruch.

   ii) Wir nehmen an, dass $x^2 > c$ gilt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x - \varepsilon)^2 > c$. Somit gilt $z^2 < (x - \varepsilon)^2$ für alle $z \in M$, also $z < x - \varepsilon$ für alle $z \in M$, was wiederum einen Widerspruch ergibt.

□

Auf ähnliche Weise kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 2.11. *Für jedes $c \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $x^n = c$. x heißt die n-te Wurzel von c.*

Bezeichnung: $c^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{c}$.

Bemerkung: Der Beweis der Existenz einer Wurzel ist nicht konstruktiv. Wir werden später in einer Übungsaufgabe im Kapitel über Folgen ein konstruktives Verfahren zur Wurzelberechnung kennenlernen. Im Kapitel über stetige Funktionen werden wir einen eleganten Beweis über den Zwischenwertsatz sehen.

2.4 $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

Wir müssen zunächst einige Begriffe einführen.

Definition 2.12. *Seien M und N beliebige Mengen, sowie $f: M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f*

i) <u>injektiv</u>, falls $f(x_1) = f(x_2)$ impliziert, dass $x_1 = x_2$.

ii) <u>surjektiv</u>, falls $f(M) = N$, d.h. zu jedem $y \in N$ existiert ein $x \in M$ mit $f(x) = y$.

iii) <u>bijektiv</u>, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele: $M = N = \mathbb{R}$

(i) $f(x) = \tanh(x)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(ii) $f(x) = x(x^2 - 1)$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(iii) $f(x) = x^3$ ist bijektiv.

Definition 2.13. *Zwei Mengen M und N heißen <u>gleichmächtig</u>, falls es eine bijektive Abbildung $f: M \to N$ gibt.*

Definition 2.14. *Eine Menge M heißt <u>abzählbar</u>, falls sie die leere Menge ist, endlich oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Andernfalls heißt sie nichtabzählbar.*

Beispiele:

(i) $f: \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$: $f(n) = n + 1$. Damit sind $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig.

(ii) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$: $f(0) = 0$, $f(n) = 2n - 1$, $f(-n) = 2n$. Damit ist $\mathbb{Z}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}_0$ und damit zu $\mathbb{N}$.

(iii) Q ist abzählbar. Ein Beispiel einer Bijektion auf $\mathbb{N}$ ist das folgende:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\dots & -3 & -2 & \leftarrow & -1\,(5) & & 0\,(1) & \rightarrow & 1\,(2) & & 2 & 3 & \dots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & & & \\
\dots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2}\,(4) & \leftarrow & 0 & \leftarrow & \frac{1}{2}\,(3) & & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \\
\dots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots
\end{array}$$

Wir gehen entlang des eingezeichneten Weges, und nehmen nur die teilerfremden Zahlen in die Aufzählung mit auf. Damit erhalten wir die Folge $0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -\frac{2}{3} \dots$

Satz 2.15 (Satz von Cantor[6]). $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Wir nehmen an, es existiert eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = x_n$. Wir konstruieren folgende Intervallschachtelung: $I_0 = [0,1]$, I_1 sei eines der drei Intervalle $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$, das x_1 nicht enthält. Analog wählen wir I_2 etc. Nach (IVP) existiert $x \in \cap_{n\geq 1} I_n$. Nach Konstruktion ist x ein Punkt, der in der Folge (x_n) nicht vorkommt, wir erhalten also einen Widerspruch. □

3 Komplexe Zahlen

Wir wollen nun den Körper $\mathbb{R}$ so erweitern, dass die Gleichung $z^2 = -1$ lösbar ist.

3.1 Definition, Körperstruktur, Rechenregeln

Definition 3.1 (Komplexe Zahl als Paar reeller Zahlen). *Eine komplexe Zahl $z = (x,y)$ ist eine Element aus $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. In dieser Menge sind Addition und Multiplikation folgender maßen definiert:*

$$(A) \qquad (x,y) + (u,v) := (x+u, y+v) \tag{3.1}$$

$$(M) \qquad (x,y)(u,v) := (xu - yv, yu + xv) \tag{3.2}$$

Satz 3.2 (Körperstruktur von $\mathbb{C}$). *Die Menge der komplexen Zahlen mit (A) und (M) ist ein Körper, der mit $\mathbb{C}$ bezeichnet wird.*
Das neutrale Element bzgl. (A) ist $(0,0)$.
Das neutrale Element bzgl. (M) ist $(1,0)$.
Das inverse Element zu (x,y) bzgl. (A) ist $(-x,-y)$.
Das inverse Element zu (x,y) bzgl. (M) ist $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

Beweis. Nachrechnen. □

$\mathbb{R}$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$: Ein Element $x \in \mathbb{R}$ wird in $\mathbb{C}$ mittels $(x,0)$ eingebettet. Der Unterkörper ist abgeschlossen bzgl. (A) und (M).

Imaginäre Einheit: $\mathrm{i} := (0,1)$. i und $-\mathrm{i}$ lösen $z^2 = -1$.

Darstellung einer komplexen Zahl: $z = x + \mathrm{i}y$

Real- und Imaginärteil von $z = x + \mathrm{i}y$: $\quad \operatorname{Re} z = x\,, \qquad \operatorname{Im} z = y$

Konjugation: zu $z \in \mathbb{C}$ sei $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$.
Man berechnet leicht

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w} \\
\overline{z}\,\overline{w} &= \overline{zw} \\
z + \overline{z} &= 2\operatorname{Re} z \\
z - \overline{z} &= 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z \\
\overline{z} &= z \qquad \text{genau dann wenn } z \in \mathbb{R} \\
\overline{z} &= -z \qquad \text{genau dann wenn } z = 0 + \mathrm{i}y
\end{aligned}$$

[6] Georg Cantor (1845-1918)

Betrag einer komplexen Zahl:

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Damit gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Satz 3.3. *Es gilt*

$$|z| > 0 \qquad \text{für } z \neq 0 \tag{3.3}$$
$$\left|\overline{z}\right| = |z| \tag{3.4}$$
$$\left|\operatorname{Re} z\right| \leq |z|\,, \qquad \left|\operatorname{Im} z\right| \leq |z| \tag{3.5}$$
$$|zw| = |z||w| \tag{3.6}$$
$$|z+w| \leq |z| + |w| \qquad \textit{(Dreiecksungleichung)} \tag{3.7}$$

Beweis. (3.3)-(3.5) sind klar. Zu (3.6) berechnen wir

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$$

und (3.7) folgt aus

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= \big(z+w\big)\big(\overline{z}+\overline{w}\big) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \underbrace{w\overline{z}}_{=\overline{\overline{w}z}} \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} + 2\operatorname{Re} z\overline{w} \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = \big(|z|+|w|\big)^2\,. \end{aligned}$$

□

[14.10.2024]

[16.10.2024]

3.2 Die komplexe Zahlenebene

Darstellung in der Ebene: $z = x + \mathrm{i}y$ wird durch $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dargestellt.
Damit entspricht die Addition zweier komplexer Zahlen der Addition zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und die Konjugation entpricht der Spiegelung an der reellen Achse.

Um die Multiplikation zu veranschaulichen, ist es hilfreich, sogenannte <u>Polarkoordinaten</u> einzuführen. Wir schreiben dazu

$$z = \big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)\,,$$

wobei $r = |z|$ und φ den Winkel mit der x-Achse bezeichnet. Letzterer ist nur bis auf Addition von $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, definiert.

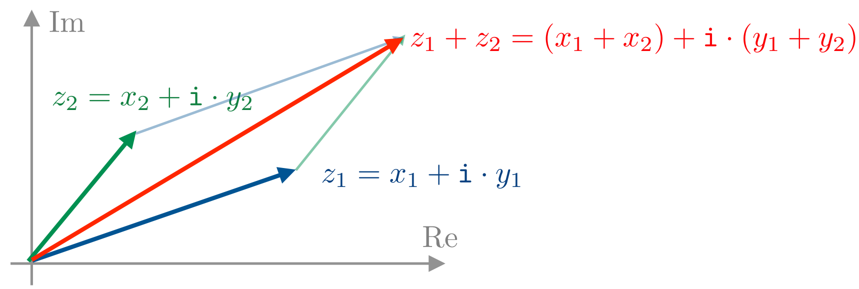


Abbildung 1: Addition zweier komplexer Zahlen

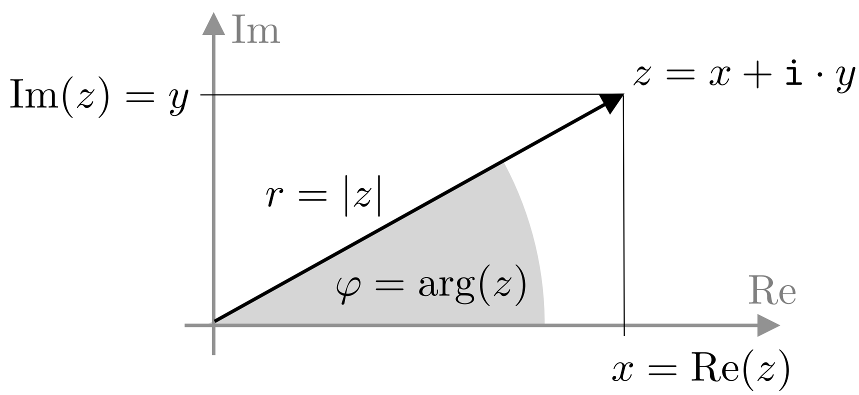


Abbildung 2: Polarkoordinaten

Falls $z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ und $w = (s\cos\psi, s\sin\psi)$, mit $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$, dann gilt

$$\begin{aligned} zw &= \big(rs(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi), rs(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\big) \\ &= \big(rs\cos(\varphi+\psi), rs\sin(\varphi+\psi)\big)\,, \end{aligned}$$

wobei wir die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus benutzt haben. (Diese werden später noch bewiesen). D.h. beim Produkt zweier komplexer Zahlen werden die Längen multipliziert und die Winkel addiert.

Beispiele:

1) $\mathrm{i} = (0,1) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
   Die Multiplikation mit i entpricht einer Drehung um 90^o (gegen den Uhrzeigersinn).

2) Die Multiplikation mit $1+\mathrm{i}$ entspricht einer Drehung um 45^o und Multiplikation der Länge mit $\sqrt{2}$.

Einheitswurzeln:

Die $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$ werden n-te Einheitswurzeln genannt. Da $|z|^n = |z^n|$, liegen die Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n Einheitswurzeln, nämlich

$$\cos\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big), \qquad k = 0, \cdots, n-1\,.$$

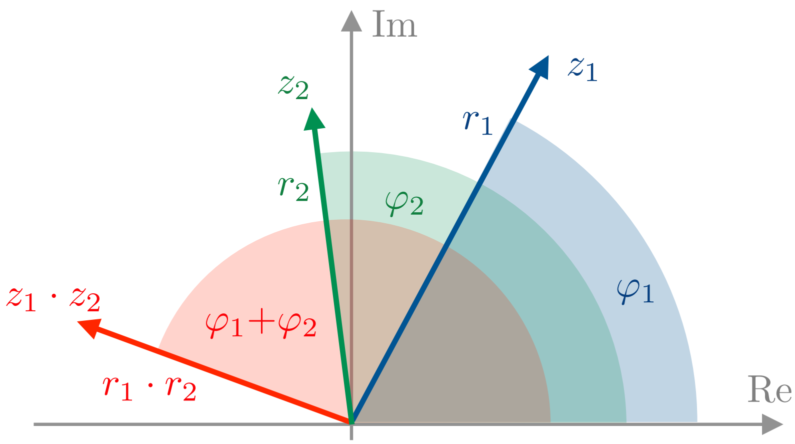


Abbildung 3: Multiplikation

Beispiele:

1) Die Quadratwurzeln von 1 sind 1 und -1.
2) Die Lösungen von $z^4 = 1$ sind $1, \mathrm{i}, -1$ und $-\mathrm{i}$.

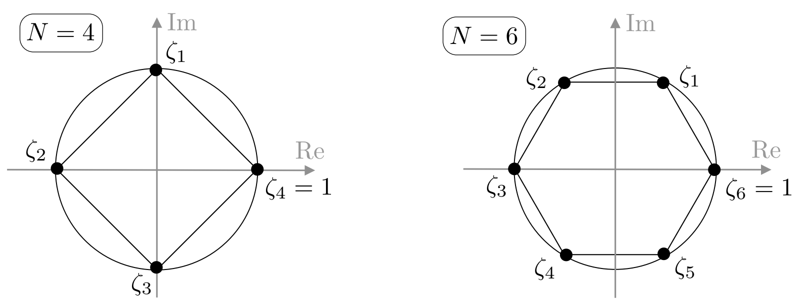


Abbildung 4: Einheitswurzeln

4 Folgen

4.1 Folgen, Konvergenz

Definition 4.1 (Folge in $\mathbb{C}, \mathbb{R}$)**.** *Eine Folge komplexer (reeller) Zahlen ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$.*

Schreibweise: Falls $a_n = f(n)$, so schreibt man (a_n) oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 4.2 (Konvergenz von Folgen)**.** *a) Eine Folge in $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ heißt <u>konvergent</u>, falls es ein $a \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ gibt, so dass folgendes gilt: zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass*

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ gilt.}$$

a heißt <u>Grenzwert</u> oder <u>Limes</u> der Folge (a_n).
Schreibweise: *$a_n \to a$ (für $n \to \infty$) oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

b) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

c) **Spezialfall:** *Falls $a_n \to 0$, so heißt (a_n) Nullfolge.*

Definition 4.3 (ε-Umgebung, offene ε-Kugel)**.** *Wir nennen*

$$B_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$$

auch ε-Umgebung von a. (Entsprechend $I_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$.)

Definition 4.4 ("fast alle")**.** *Gegeben sei eine Aussage $\mathbb{A}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, dass $\mathbb{A}(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\mathbb{A}(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr ist.*

Bemerkung: Damit konvergiert eine Folge (a_n) gegen a, falls jede ε-Umgebung von a fast alle, d.h. alle bis auf endliche viele, a_n enthält.

Beispiele:

(i) $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ (Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle hierzu $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ bzw. $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$.)

(ii) $\frac{n}{n+1} \to 1$. (Es gilt $|\frac{n}{n+1} - 1| = \frac{1}{n+1} \to 0$.)

(iii) Es sei $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, d.h. $s = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Potenzfunktion für $x \geq 0$ via

$$x^s := \sqrt[q]{x^p}\,.$$

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$.

[Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^{1/s}}$. Damit gilt $\frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n_0^s} < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.]

(iv) Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Beweis. **1. Fall:** Sei $a \geq 1$ und $x_n := a^{\frac{1}{n}} - 1$. Damit gilt mit (2.1) dass $a = \left(1 + x_n\right)^n \geq 1 + n x_n$. Also folgt $|x_n| \leq \frac{a}{n}$ und somit $x_n \to 0$.
2. Fall: Sei $a < 1$. Wir werden sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

gilt. Damit folgt $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. □

(v) Sei $q \in \mathbb{C}$ und $|q| < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0\,.$$

Beweis. Sei $x := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$. Dann gilt $\frac{1}{|q|^n} > 1 + nx > \frac{1}{\varepsilon}$ falls $n > \frac{1}{\varepsilon x}$. $\square$

(vi) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0\,,$$

d.h. z^n wächst schneller als jede Potenz von n.

Beweis. Es sei $x := |z| - 1$ und $n > 2k$, d.h. $n - k > \frac{n}{2}$. Damit gilt

$$\left(1+x\right)^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!} x^{k+1} > \left(\frac{n}{2}\right)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\,,$$

also

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \frac{1}{n} \qquad \text{für } n > 2k\,.$$

Mit $C_k := \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}}$ erhalten wir also

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \varepsilon \qquad \text{für } n > \frac{C_k}{\varepsilon}\,.$$

$\square$

Satz 4.5 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir nehmen an, es existieren zwei verschiedene Grenzwerte a und a', also $|a - a'| > 0$. Es sei $\varepsilon < \frac{1}{2}|a - a'|$. Dann existiert n_1, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Außerdem existiert ein n_2, so dass $|a_n - a'| < \varepsilon$ für $n \geq n_2$ gilt. Sei $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Dann gilt

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_0\,,$$

ein Widerspruch. $\square$

[16.10.2024]

[21.10.2024]

Definition 4.6 (Beschränkte Folge)**.** *Eine Folge (a_n) heißt <u>beschränkt</u>, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Satz 4.7. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit gilt $|a_n| \leq 1 + |a|$ für alle $n \geq n_0$. Wir können nun $M := \max\left(1 + |a|, |a_1|, \cdots, |a_{n_0-1}|\right)$ wählen. $\square$

Achtung: Die Umkehrung des Satzes ist nicht richtig, wie das Beispiel der Folge $a_n = (-1)^n$ zeigt. Wir werden allerdings später sehen, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt (siehe den Satz von Bolzano-Weierstraß).

4.2 Rechenregeln

Satz 4.8 (Regel I)**.** *Es seien* (a_n) *und* (b_n) *Folgen mit* $a_n \to a$ *und* $b_n \to b$*. Dann gilt*

a) $a_n + b_n \to a + b$

b) $a_n b_n \to ab$

c) Falls $b \neq 0$*, so gilt* $b_n \neq 0$ *für fast alle* n *und* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$*.*

Beweis. a) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Sei $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_1$.
Sei $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_2$.
Sei $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Dann gilt

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_0\,.$$

b) Es gilt

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|\,.$$

Nach Satz 4.7 gilt $|a_n| \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$. Wähle nun zu $\varepsilon > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n \geq n_1$ gilt, und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ für $n \geq n_2$ gilt. Mit $n_0 := \max(n_1, n_2)$ gilt also $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

c) Wegen *b*) ist nur zu zeigen $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

Wähle zunächst $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $|b - b_n| < \frac{1}{2}|b|$ für $n \geq n_1$ gilt. Damit folgt

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| \geq \frac{1}{2}|b|\,. \tag{4.1}$$

Wir berechnen

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{bb_n}\right| \leq \frac{1}{|b||b_n|}|b_n - b|$$

und es folgt mit (4.1)

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b - b_n|\,.$$

Wähle nun $n_0 \geq n_1$ so, dass $|b - b_n| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$ gilt. Dann folgt $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

□

Beispiele:

(1)

$$\frac{4n^3 - 7n^2 + 20}{3n^3 + 5n + 100} = \frac{4 - \frac{7}{n} + \frac{20}{n^3}}{3 + \frac{5}{n^2} + \frac{100}{n^3}} \to \frac{4}{3}\,.$$

(2) Es gilt $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \to \frac{1}{2}$.
Dies folgt aus $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}$.

Satz 4.9 (Regel II). *Falls $a_n \to a$, dann gilt*

a) $|a_n| \to |a|$

b) $\overline{a_n} \to \overline{a}$

c) $\operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$

d) $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$

Der Beweis von Satz 4.9 ist eine Übungsaufgabe.

Satz 4.10 (Regel III: Vergleichsprinzip für reelle Folgen). *Es seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen. Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$, sowie $a_n \le b_n$ für fast alle n. Dann gilt $a \le b$.*

Beweis. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n < b + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge n_0$$

gilt. Damit folgt $a - b < 2\varepsilon$ und somit, da ε beliebig klein ist, $a \le b$. □

Achtung: Im allgemeinen folgt aus $a_n < b_n$ nicht, dass $a < b$ gilt. Ein Beispiel ist $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Korollar 4.11. *Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n \in [\alpha, \beta]$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $a_n \to a$, dann gilt $a \in [\alpha, \beta]$.*

Satz 4.12 (Regel IV: Einschlussregel für reelle Folgen; Sandwichprinzip). *Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to a$ und $a_n \le c_n \le b_n$ für fast alle n. Dann gilt $c_n \to a$.*

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$c_n \ge a_n > a - \varepsilon \quad \text{und} \quad c_n \le b_n < a + \varepsilon$$

für $n \ge n_0$ gilt. Damit folgt $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge n_0$. □

Beispiele:

(1) $a_n = \frac{\sin(n)^2}{n(2+\cos n)} \to 0$. $[a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}]$

(2) Sei $a, b \ge 0$. Dann gilt

$$\left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}} \to \max(a, b)\,.$$

Beweis. Sei $b \ge a$. Dann gilt $b \le \left(a^n + b^n\right)^{\frac{1}{n}} \le 2^{\frac{1}{n}} b$. Da $2^{\frac{1}{n}} \to 1$, folgt die Behauptung. □

Definition 4.13 (Asymptotische Gleicheit). *Zwei Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) heißen asymptotisch äquivalent, falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to 1$.*

Schreibweise: $a_n \sim b_n$.

Bemerkung: Diese Konzept wird in der Praxis vor allem für reelle Folgen verwendet.

Beispiele:

1) $n^2 \sim n^2 + n$, d.h. Folgen können auch divergent sein.

2) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^2}$

Definition 4.14. *Wir definieren*

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}.$$

Definition 4.15. *Wir sagen* $(a_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ *divergiert bestimmt gegen* ∞ *($-\infty$), falls es zu jedem* $k \in \mathbb{R}$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $a_n \geq k$ *($a_n \leq k$) für alle* $n \geq n_0$ *gilt.*

Schreibweise: $a_n \to \infty$ ($a_n \to -\infty$)

Weitere Bezeichnungen: Etwas salopper sagen wir auch: (a_n) konvergiert gegen ∞ ($-\infty$).

Beispiel: Mit $a_n = a^n$ für $a > 1$ gilt $a_n \to \infty$.

4.3 Monotone Folgen

In diesem Kapitel betrachten wir nur reelle Folgen.

Definition 4.16 (monoton wachsende/fallende Folge)**.** $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *heißt* *monoton wachsend (fallend), falls* $a_n \leq a_{n+1}$ *($a_n \geq a_{n+1}$) für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*
Im Falle strikter Ungleichung heißt (a_n) *streng monoton wachsend (fallend).*

Satz 4.17. *Jede beschränkte monotone Folge konvergiert:*

i) eine wachsende gegen $\sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

ii) eine fallende gegen $\inf\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Wir beweisen i): Sei $a := \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0, so dass $a \geq a_{n_0} > a - \varepsilon$ gilt. Damit gilt $a \geq a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. □

Beispiel: (Eulersche[7] Zahl)
$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Damit gilt $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $I_n := [a_n, b_n]$. Wir zeigen, dass (I_n) eine Intervallschachtelung definiert.

i) a_n wächst streng monoton, denn es gilt $a_{n-1} < a_n$ genau dann wenn

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n} < \frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{(n-1)^n}{n^n} = \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n .$$

Die letzte Ungleichung gilt nach (2.1), denn

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} .$$

ii) Ähnlich zeigt man, dass (b_n) streng monoton fällt: Es gilt $b_n < b_{n-1}$ genau dann wenn

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n .$$

Nun gilt aber

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} ,$$

wobei die zweite Ungleichung aus (2.1) folgt. Damit gilt $b_n < b_{n-1}$.

iii) Wir berechnen

$$|I_n| = b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{a_n}{n} < \frac{b_1}{n} \to 0 .$$

Also existiert $e \in \bigcap_{n\ge 1} I_n$, die sogenannte Eulersche Zahl.

Bemerkung: Aus Übungsaufgabe 2.1 folgt, dass $e \in (2,3)$.

[21.10.2024]

[23.10.2024]

4.4 Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition 4.18 (Häufungspunkt)**.** *Zu $(a_n) \subset \mathbb{C}$ heißt $h \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt von (a_n), falls jede ε-Umgebung von h unendlich viele Folgeglieder enthält.*

Beispiele:

(i) $a_n = (-1)^n$: Häufungspunkte sind 1 und -1.

(ii) $a_n = \mathrm{i}^n$: Häufungpunkte sind $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$.

(iii) Falls $a_n \to a$, so ist a einziger Häufungspunkt von (a_n).

Definition 4.19 (Teilfolge)**.** *Ist (a_n) eine Folge und $n_1 < n_2 < \cdots$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n).*

[7] Leonard Euler (1707-1783)

Beispiel: $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz 4.20 (Häufungspunkt ist Grenzwert einer Teilfolge)**.** *$h \in \mathbb{C}$ ist genau dann Häufungspunkt von (a_n), falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.*

Beweis. Sei h Häufungspunkt von (a_n). Dann sei n_1 so, dass $a_{n_1} \in B_1(h)$ gilt, $n_2 > n_1$ so, dass $a_{n_2} \in B_{1/2}(h)$ etc. Damit gilt $a_{n_k} \to h$. Die Umkehrung folgt nach Definition. □

Satz 4.21 (Bolzano-Weierstraß, reelle Version)**.** [8] *Die Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann hat (a_n) eine konvergente Teilfolge. Genauer: (a_n) hat einen größten Häufungspunkt h^* und einen kleinsten Häufungspunkt h_*. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $h_* - \varepsilon < a_n < h^* + \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bezeichnungen:

$$h^* =: \limsup_{n\to\infty} a_n =: \overline{lim}_{n\to\infty} a_n \qquad \text{(Limes superior)}$$
$$h_* =: \liminf_{n\to\infty} a_n =: \underline{lim}_{n\to\infty} a_n \qquad \text{(Limes inferior)}$$

Beispiele:

(1) $a_n = 1 + (-1)^n$: $\quad \limsup a_n = 2\,;\ \liminf a_n = 0$.

(2) $a_n = (-1)^n\left(2 + \frac{3}{n}\right)$: $\quad \limsup a_n = 2\,;\ \liminf a_n = -2$.

(3) $a_n = (-1)^n n$: $\quad (a_n)$ unbeschränkt.

(4) $a_n = \frac{n+(-1)^n 2n+1}{n}$: $\quad \limsup a_n = 3\,;\ \liminf a_n = 1$.

Beweis. (von Satz 4.21) Wir führen den Beweis für h^* mittels Intervallschachtelung. Diese soll folgende Eigenschaften besitzen:

i) $a_n \in [A_k, B_k] =: I_k$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

ii) $a_n \le B_k$ für fast alle n.

iii) $|I_k| \le 2^{1-k}|I_1|$.

Dazu sei $[A_1, B_1]$ ein Intervall, das alle a_n enthält. Gegeben I_k konstruieren wir I_{k+1} wie folgt: sei M der Mittelpunkt von I_k. Dann sei

$$I_{k+1} = \begin{cases} [A_k, M] & : \quad \text{falls } a_n \le M \text{ für fast alle } n \\ [M, B_k] & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Damit existiert $h^* \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Es ist noch zu zeigen, dass h^* Häufungspunkt von (a_n) ist und dass $a_n < h^* + \varepsilon$ für fast alle n gilt.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $I_k \subset (h^* - \varepsilon, h^* + \varepsilon)$. Nach i) enthält $B_\varepsilon(h^*)$ unendlich viele a_n, also ist h^* Häufungspunkt. Nach ii) gilt $a_n \le B_k < h^* + \varepsilon$ für fast alle n. □

[8] Bernard Bolzano (1781-1848); Karl Weierstraß (1815-1897)

Korollar 4.22. $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *konvergiert genau dann, wenn* $\limsup a_n = \liminf a_n$ *gilt.*

Beweis. Falls $h^* = h_*$, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass $a_n \in B_\varepsilon(h^*)$ für fast alle n. □

Satz 4.23 (Bolzano-Weierstraß, komplexe Version)**.** *Jede beschränkte Folge in* $\mathbb{C}$ *hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Da (a_n) beschränkt ist, so sind auch die Folgen $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$ beschränkt. Nach Satz 4.21 hat $(\operatorname{Re} a_n)$ eine konvergente Teilfolge mit $\operatorname{Re} a_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$. Dann hat $(\operatorname{Im} a_{n_k})$ eine weitere konvergente Teilfolge mit $\operatorname{Im} a_{n_j} \to y \in \mathbb{R}$. Also gilt $a_{n_j} \to x + \mathrm{i}y$. □

4.5 Cauchy-Folgen

Wir führen nun ein weiteres nützliches Kriterium für die Konvergenz einer Folge ein.

Definition 4.24 (Cauchy-Folge)**.** $(a_n) \subset \mathbb{C}$ *heißt* <u>*Cauchy-Folge*</u>*, falls es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $|a_m - a_n| < \varepsilon$ *für alle* $n, m \geq n_0$ *gilt.*

Satz 4.25 (Cauchy-Kriterium)**.** [9]
(a_n) *konvergiert genau dann, wenn* (a_n) *eine Cauchy-Folge ist.*

Bemerkungen:

(1) Das Cauchy-Kriterium ist ein ausgesprochen wichtiges Hilfsmittel, denn mit ihm kann zum Beispiel die Konvergenz einer Folge ohne explizite Kenntnis des Grenzwertes nachgewiesen werden.

(2) Das Cauchy-Kriterium zusammen mit dem Archimedischen Axiom ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom. Genauer: wir hätten statt des Vollständigkeitsaxioms auch fordern können, dass das Archimedische Axiom gilt und dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ hat. Daraus läßt sich dann das Vollständigkeitsaxiom herleiten.

Beweis. Es gelte $a_n \to a$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit folgt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq n_0 \,.$$

Sei nun (a_n) eine Cauchy-Folge. Dann ist (a_n) beschränkt, denn sei n_0 so groß, dass $|a_n - a_m| \leq 1$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt, dann folgt $|a_n| \leq \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n_0}|)$ für alle n.
Nach Satz 4.21 hat (a_n) einen Häufungspunkt h. Da (a_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Da h Häufungspunkt ist, existiert $n_1 \geq n_0$, so dass $|a_{n_1} - h| < \frac{\varepsilon}{2}$. Damit erhalten wird

$$|a_n - h| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - h| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \,.$$

□

[9] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Beispiel: Sei $a_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Dann gilt $a_{n+m} - a_n = \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{1}{i} \geq \frac{m}{n+m} \to 1$ für $m \to \infty$. Also konvergiert (a_n) nicht.

5 Reihen

5.1 Konvergente Reihen

Definition 5.1 (konvergente Reihe)**.** *Zu einer Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ definiert man eine neue Folge*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Solch eine Folge heißt Reihe mit Gliedern a_k. Die s_n heißen Partialsummen. Die Reihe heißt konvergent, falls die Folge der Partialsummen (s_n) konvergiert. Falls $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, dann schreiben wir $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bemerkungen:

(i) Die Bezeichnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wird sowohl für die Folge (s_n), als auch für den Wert $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ verwendet.

(ii) Analog definiert man $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $k_0 \in \mathbb{Z}$.

(iii) Ist der Summationsbereich klar, oder spielt keine Rolle, dann schreibt man auch $\sum_k a_k$ oder $\sum a_k$.

Beispiele:

(i) Harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Wir haben gesehen $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$.

(ii) Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \,, \qquad z \in \mathbb{C}\,, z \neq 1$$

Wir wissen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \,.$$

Falls $|z| < 1$ folgt also $s_n \to \frac{1}{1-z}$.

(iii) Um den Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ zu berechnen, benutzen wir die Partialbruchzerlegung, d.h. wir schreiben $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Damit folgt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \,.$$

5.2 Konvergenzkriterien

Satz 5.2 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** *$\sum a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, so dass $|a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$ für alle $m > n \geq n_0$ gilt.*

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen. □

Bemerkungen:

(i) Satz 5.2 ergibt eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, nämlich, dass (a_n) eine Nullfolge sein muss. Diese Bedingung ist allerdings nicht hinreichend! Ein Gegenbeispiel ist die harmonische Reihe.

(ii) Eine Änderung endlich vieler Glieder der Reihe ändert nicht das Konvergenzverhalten der Reihe, wohl aber ihren Wert.

Es ist oft nützlich, wenn man eine Reihe mit einer bekannten Reihe vergleichen kann.

Satz 5.3 (Majorantenkriterium)**.** *Ist $|a_k| \leq |b_k|$ und konvergiert $\sum |b_k|$, so konvergiert auch $\sum a_k$ und es gilt $\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k|$. Divergiert $\sum a_k$, so auch $\sum |b_k|$.*
$\sum |b_k|$ heißt Majorante für $\sum a_k$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\sum |b_k|$ konvergiert. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt, dass $|b_{n+1}| + \cdots + |b_m| < \varepsilon$ gilt. Also folgt auch $|a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |b_{n+1}| + \cdots + |b_m| < \varepsilon$. Nach Satz 5.2 konvergiert $\sum a_k$.
Aus der Dreiecksungleichung folgt $|s_n| = \left|\sum_{k=k_0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=k_0}^{n} |b_k|$, also $\left|\sum a_k\right| \leq \sum |b_k|$ nach Satz 4.10.
Die zweite Aussage folgt aus der ersten. □

Beispiele:

(i) Es gelte $|a_k| \leq 1$ für alle k. Dann konvergiert $\sum a_k z^k$ für alle $|z| < 1$, nach Vergleich mit der geometrischen Reihe.

(ii) Sei $a \in [0, 1)$. Dann divergiert $\sum \frac{1}{k^a}$ nach Vergleich mit der harmonischen Reihe.

Satz 5.4 (Monotoniekriterium)**.** *Es sei $\sum a_n$ eine reelle (!) Reihe mit $a_n \geq 0$. $\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Partialsummen beschränkt sind.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist (s_n) eine monoton wachsende beschränkte Folge. Diese konvergiert nach Satz 4.17. □

Beispiel: (Die Riemannsche Zetafunktion) [10]
Sei $s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \begin{cases} \text{konvergiert} & : \quad \text{für } s > 1 \\ \text{divergiert} & : \quad \text{für } s \leq 1 \end{cases} .$$

Beweis. (i) Falls $s \leq 1$ ist, so können wir mit der harmonischen Reihe vergleichen.

(ii) Falls $s > 1$ ist, so wählen wir zu $n \in \mathbb{N}$ ein n_0 so dass $n \leq 2^{n_0} - 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned} s_n \leq s_{2^{n_0}-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{(n_0-1)s}} + \cdots + \frac{1}{(2^{n_0}-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{2^2}{2^{2s}} + \cdots + \frac{2^{n_0-1}}{2^{(n_0-1)s}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{2(s-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{(n_0-1)(s-1)}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} . \end{aligned}$$

Also ist (s_n) beschränkt und monoton wachsend und konvergiert somit.

□

Satz 5.5 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)**.** *Sei (a_n) eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_n (-1)^n a_n$.*
Für den Grenzwert gilt $|s - s_n| \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es gilt

$$s_k - s_{k-2} = (-1)^k (a_k - a_{k-1}) .$$

Da $a_k - a_{k-1} \leq 0$, folgt $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots$ und $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$. Für gerades k gilt außerdem $s_{k-1} \leq s_k$, da $s_k = s_{k-1} + (-1)^k a_k$. Wir erhalten also eine Intervallschachtelung

$$[s_1, s_2] \supset [s_3, s_4] \supset [s_5, s_6] \cdots \qquad \text{mit } |[s_{k-1}, s_k]| = a_k \to 0 .$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert ein $s \in \bigcap_{k\geq 1} [s_{k-1}, s_k]$ und $s_k \to s$.
Die Fehlerabschätzung folgt aus den Eigenschaften $s \in [s_k, s_{k+1}]$ und $|s_{k+1} - s_k| = a_{k+1}$. □

Beispiele:

(i) **Leibnizreihe:**[11]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \qquad \text{konvergiert.}$$

Wir werden später sehen, dass der Wert der Reihe $\frac{\pi}{4}$ ist.

[10] Bernhard Riemann (1826-1866)
[11] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

(ii) **alternierende harmonische Reihe:**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} \qquad \text{konvergiert.}$$

Wir werden später sehen, dass der Wert der Reihe $\ln 2$ ist.

Bemerkung: Es glten die folgenden Rechenregeln für konvergente Reihen: falls $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ und $c \in \mathbb{C}$, dann gilt $\sum (a_n + b_n) = a + b$, $\sum c a_n = ca$ und $\sum \overline{a}_n = \overline{a}$.

5.3 Absolute Konvergenz

Definition 5.6 (absolute Konvergenz)**.** *Eine Reihe $\sum a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum |a_n|$ konvergiert.*

Bemerkungen:

(i) Aus absoluter Konvergenz folgt nach dem Majorantenkriterium Konvergenz.

(ii) $\sum |a_k|$ konvergiert genau dann, wenn $s_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ beschränkt ist. Dies folgt aus dem Monotoniekriterium.

Satz 5.7 (Quotientenkriterium)**.** *Sei $a_n \neq 0$ für fast alle n.*

(i) Falls es ein $q \in [0, 1)$ gibt mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für fast alle n, dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

(ii) Falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n gilt, dann divergiert $\sum a_n$.

Beweis. (i) Nach Voraussetzung existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für alle $n \geq n_0$. Damit folgt $|a_n| \leq q^{n-n_0} |a_{n_0}|$ und daraus

$$\sum_{n \geq n_0} |a_n| \leq \sum_{n \geq n_0} |a_{n_0}| \frac{q^n}{q^{n_0}} = \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \sum_{n \geq n_0} q^n \leq \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \frac{1}{1-q} .$$

(ii) Nach Voraussetzung existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| \geq |a_{n_0}|$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $|a_n|$ keine Nullfolge.

□

Satz 5.8 (Wurzelkriterium)**.** *(i) Falls es ein $q \in [0, 1)$ gibt, so dass $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q$ für fast alle n gilt, dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.*

(ii) Falls $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$ für unendlich viele n gilt, dann divergiert $\sum a_n$.

Beweis. (i) $C \sum q^n$ ist Majorante.

(ii) $|a_n|$ ist keine Nullfolge.

□

Beispiel: $\sum n^p z^n$ konvergiert absolut für alle $|z| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$. Dies folgt aus dem Wurzelkriterium, da

$$\left(n^p|z|^n\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{p}{n}}|z| \to |z| < 1\,.$$

Bemerkung: Äquivalent wird das Wurzelkriterium auch oft folgendermaßen definiert:

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1\,.$$

Bemerkung: Aus Übungsaufgabe 3.4 wissen wir, dass falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L$, so auch $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to L$. Ebenso gilt, dass falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für fast alle n gilt, dann auch $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q < 1$. Dies folgt aus $|a_n| \leq |a_{n_0}| q^{n-n_0}$, was impliziert $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq |a_{n_0}|^{\frac{1}{n}} q^{1-\frac{n_0}{n}} \to q$.
Also gilt, dass falls das Quotientenkriterium erfüllt ist, auch das Wurzelkriterium erfüllt ist. Die Umkehrung gilt allerdings nicht. Ein Beispiel hierfür ist die Reihe $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots..$

Fazit: Das Wurzelkriterium ist allgemeiner, aber das Quotientenkriterium ist in der Praxis oft einfacher nachzuprüfen.

Achtung! Falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ oder $|a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ für fast alle n gilt, so kann i.a. nicht auf absolute Konvergenz geschlossen werden.

Beispiel: $\sum_n \frac{1}{n}$ konvergiert nicht, aber $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

[28.10.2024]

[30.10.2024]

5.4 Umordnung von Reihen

Frage: Kann man die Elemente einer Reihe beliebig umordnen, ohne dass sich das Konvergenzverhalten ändert? In anderen Worten: Falls $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist und falls $\sum a_n$ konvergiert, konvergiert dann auch $\sum a_{\sigma(n)}$?

Gegenbeispiel: Wir betrachten die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Diese konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, aber sie konvergiert nicht absolut.
Wir zeigen im folgenden, dass es eine bijektive Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt (solch ein σ heißt auch Umordnung), so dass $s_m = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{\sigma(k)-1}\frac{1}{\sigma(k)}$ unbeschränkt ist. Betrachte dazu jeweils Glieder ungerader Ordnung von $\frac{1}{2^n+1}$ bis $\frac{1}{2^{n+1}-1}$. Für jedes n gilt

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}\,.$$

Wir ordnen nun die alternierende harmonische Reihe folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\
&+\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\Big)-\frac{1}{6} && (n=2)\\
&+\Big(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{15}\Big)-\frac{1}{8} && (n=3)\\
&+\cdots+\\
&+\Big(\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\Big)-\frac{1}{2n+2}\geq\frac{1}{4}-\frac{1}{2n+2}\geq\frac{1}{8},.
\end{aligned}$$

Also gilt $s_m\to\infty$.

Es gilt jedoch der folgende Satz.

Satz 5.9 (Umordnungssatz)**.** *$\sum a_n$ sei absolut konvergent. Dann konvergiert jede Umordnung gegen denselben Grenzwert und konvergiert auch absolut.*

Beweis. Sei $s=\sum_{n=1}^\infty a_n$ und σ eine Umordnung. Wir zeigen $\sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)}\to s$. Der Beweis der absoluten Konvergenz erfolgt analog.
Zu $\varepsilon>0$ wählen wir n_0 so, dass $\sum_{k=n_0+1}^\infty|a_k|<\frac{\varepsilon}{2}$, woraus folgt

$$\Big|s-\sum_{k=1}^{n_0}a_k\Big|=\Big|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_k\Big|\leq\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|a_k|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sei N so groß, dass $\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(N)\}\supset\{1,2,\cdots,n_0\}$. Dann gilt für alle $m>N$, dass

$$\Big|\sum_{k=1}^{m}a_{\sigma(k)}-s\Big|\leq\underbrace{\Big|\sum_{k=1}^{m}a_{\sigma(k)}-\sum_{k=1}^{n_0}a_k\Big|}_{\leq\sum_{k=n_0+1}^\infty|a_k|}+\Big|\sum_{k=1}^{n_0}a_k-s\Big|<\varepsilon\,.$$

□

5.5 Potenzreihen

Definition 5.10 (Potenzreihe)**.** *Eine Reihe der Form $P(z)=\sum_{k=0}^\infty a_kz^k$, mit $a_k,z\in\mathbb{C}$, heißt <u>Potenzreihe in z</u>.*
Falls $a_k\neq0$ für nur endlich viele k gilt, so heißt P <u>Polynom</u>.

Satz 5.11. *Sei $z_0\neq0$ und $P(z_0)=\sum a_kz_0^k$ konvergent. Dann konvergiert $P(z)$ für alle z mit $|z|<|z_0|$ absolut.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $a_kz_0^k$ eine Nullfolge. Damit existiert ein $C\in\mathbb{R}$, so dass $|a_kz_0^k|\leq C$ für alle k gilt. Es gilt $q:=\frac{|z|}{|z_0|}<1$ und damit $|a_kz^k|\leq Cq^k$ für alle k. Aus dem Majorantenkriterium folgt die Konvergenz. □

Definition 5.12 (Konvergenzradius)**.** *Zu $P(z)=\sum a_kz^k$ heißt $R:=\sup\{r\in\mathbb{R}\,|\,P(r)$ konvergiert $\}\in[0,\infty]$ der <u>Konvergenzradius</u> von P. $B_R(0)\subset\mathbb{C}$ heißt <u>Konvergenzkreis</u> zu P.*

Beispiel: Die geometrische Reihe hat Konvergenzradius $R = 1$.

Satz 5.13 (Konvergenz im Konvergenzkreis)**.** *Sei P eine Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius.*

(i) $P(z)$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$.

(ii) $P(z)$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Beweis. (i) Falls $|z| < R$, so existiert nach Definition $r \in (|z|, R]$, so dass $P(r)$ konvergiert. Also folgt nach Satz 5.11 die Behauptung.

(ii) Wäre $P(z)$ konvergent, dann auch für ein $r \in (R, |z|)$. Dies ergibt einen Widerspruch zur Definition von R.

□

Achtung! Für z mit $|z| = R$ kann im allgemeinen keine Aussage getroffen werden.

Beispiele:

(i) $\sum z^n$ hat Konvergenzradius 1 und divergiert für $|z| = 1$.

(ii) $\sum \frac{z^n}{n}$ hat Konvergenzradius 1 und konvergiert für $z = -1$, aber divergiert für $z = 1$.

(iii) $\sum \frac{z^n}{n^2}$ hat Konvergenzradius 1 und konvergiert für $|z| = 1$.

Satz 5.14 (Formeln für den Konvergenzradius)**.** *Ist $P(z)$ eine Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius, so gilt*

(i)

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit} \quad L := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \in [0, \infty]. \quad \textit{(Cauchy-Hadamard)}$$

(ii) Falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergiert, so gilt

$$R = \frac{1}{q} \quad \text{mit} \quad q := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, \infty]. \quad \textit{(Euler)}$$

(Wir vereinbaren $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$.)

Beweis. (i) Sei $L < \infty$; es gilt $\left|a_n z^n\right|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}}|z|$. Falls $|z| < \frac{1}{L}$, so gilt $|z|(1 + 2\varepsilon) < \frac{1}{L}$ für ein $\varepsilon > 0$. Außerdem existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n|^{\frac{1}{n}} < L(1 + \varepsilon)$ für $n \geq n_0$ gilt. Damit folgt

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| < \frac{1 + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} < 1$$

für alle $n \geq n_0$ und nach dem Wurzelkriterium konvergiert $P(z)$ absolut.

Sei $L > 0$ und $|z| > \frac{1}{L}$. Damit gilt auch $|z| > \frac{1}{L-\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gilt für eine Teilfolge (n_k), dass $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > L - \varepsilon$ für $n_k \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Damit gilt $|a_{n_k} z^{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \geq 1$ für $n_k \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Nach dem Wurzelkriterium divergiert $P(z)$.

(ii) Sei $|z| < \frac{1}{q}$. Dann gilt

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{z^{n+1}}{z^n}\Big| = |z|\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| \to |z|q < 1\,.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert $P(z)$ absolut.

Sei $|z| > \frac{1}{q}$. Dann gilt

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{z^{n+1}}{z^n}\Big| \to |z|q > 1 \qquad \text{also} \qquad \Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{z^{n+1}}{z^n}\Big| \geq 1 \qquad \text{für } n \geq n_0$$

für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Nach dem Quotientenkriterium divergiert $P(z)$.

□

Beispiele:

(i) Die Reihen $\sum a_n z^n$ und $\sum n a_n z^n$ haben denselben Konvergenzradius. Dies folgt aus Satz 5.14 und $n^{\frac{1}{n}} \to 1$.

(ii) Die Lückenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!} = z + z + z^2 + z^6 + z^{24} + \cdots$$

also $a_1 = 2$ und für $n \geq 2$ gilt $a_n = 1$ falls $n = k!$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ sonst. Damit gilt $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, also $R = 1$ nach dem Cauchy-Hadamard-Kriterium. Das Euler-Kriterium ist hier nicht anwendbar.

Satz 5.15 (Restgliedabschätzung)**.** *Es sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $R_n(z) \coloneqq \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ das Restglied der Ordnung n. Dann gilt für $r \in (0, R)$, dass*

$$|R_n(z)| \leq C_{n,r}|z|^n \qquad \textit{für alle } |z| \leq r\,.$$

Beweis. Falls $|z| \leq r$, dann gilt

$$|R_n(z)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||z|^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| r^{k-n}|z|^n = |z|^n \underbrace{\frac{1}{r^n}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|r^k}_{=:C_{n,r}}$$

□

Satz 5.16. *Sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Nicht alle a_n seien null. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $P(z) \neq 0$ für alle z mit $0 < |z| < \varepsilon$, d.h. die Nullstellen einer Potenzreihe häufen sich nicht bei null.*

Beweis. Sei N der kleinste Index mit $a_N \neq 0$.
Sei $r \in (0, R)$, $|z| \le r$ und $C_{N+1} := \frac{1}{r^{N+1}} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| r^k < \infty$. Damit gilt $P(z) = a_N z^N + R_{N+1}(z)$ und $|R_{N+1}(z)| \le C_{N+1}|z|^{N+1}$. Falls $P(z) = 0$, dann folgt $|a_N||z|^N \le C_{N+1}|z|^{N+1}$, also entweder $z = 0$ oder $|z| \ge \frac{|a_N|}{C_{N+1}}$. □

Satz 5.17 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Es seien* $P(z) = \sum a_k z^k$ *und* $Q(z) = \sum b_k z^k$ *Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius. Falls eine Nullfolge* (z_n) *existiert mit* $z_n \neq 0$ *und* $P(z_n) = Q(z_n)$ *für alle* n*, dann folgt* $P(z) = Q(z)$ *für alle* z*, d.h* $a_k = b_k$ *für alle* k*.*

Beweis. Der Beweis folgt aus Satz 5.16 angewendet auf $\sum (a_k - b_k) z^k$. □

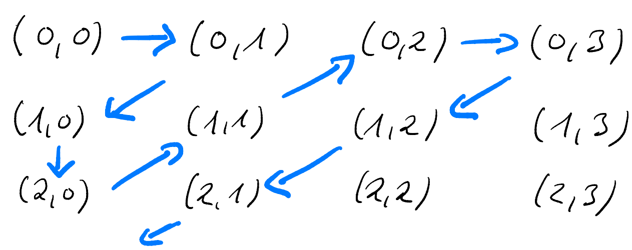
[30.10.2024]

[4.11.2024]

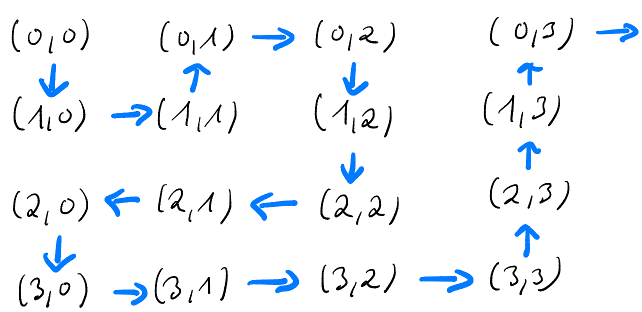
5.6 Multiplikation von Reihen

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Abzählung von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Bsp. 1



Bsp. 2



Zu zwei Reihen $\sum a_i$, $\sum b_j$ sei $c_n = a_i b_j$ falls $\sigma(n) = (i, j)$, $\sum c_n$ heißt Produktreihe.

Satz 5.18 (Produkt absolut konvergenter Reihen)**.** $\sum a_i$, $\sum b_j$ *seien absolut konvergent. Dann konvergiert jede Produktreihe absolut und es gilt*

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \,.$$

Insbesondere gilt die *Cauchysche Produktformel*

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \qquad \textit{(vgl. Beispiel 1)}\,.$$

Beweis. (i) Abschätzung der Partialsummen:

$$s_N := \sum_{i,j=0}^{N} |a_i b_j| \le \Big(\sum_{i=0}^{N} |a_i|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\Big) \le \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\Big)\,.$$

Für jede Produktreihe gilt also

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \le \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\Big)$$

und damit ist jede Produktreihe und jede Umordnung absolut konvergent.

(ii) Berechnung des Wertes: Sei σ wie in Beispiel 2. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} c_k = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} b_j\Big) \qquad \text{für alle } n \ge 1$$

und damit die Behauptung.

□

Beispiel: Sei $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $|w| < 1$. Dann sind $\sum z^k$, $\sum w^k$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} z^k w^l = \frac{1}{(1-z)(1-w)}\,.$$

Korollar 5.19. *Die Reihen* $\sum a_n z^n$ *und* $\sum b_n z^n$ *seien in* $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$ *absolut konvergent. Dann konvergiert auch* $\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\Big) z^n$ *absolut in* $B_r(0)$ *und es gilt*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\Big) z^n\,.$$

5.7 Exponentialfunktion und Verwandte

5.7.1 Exponentialreihe

$$e^z = \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist $R = \infty$, denn

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

Es gilt $e^z e^w = e^{z+w}$ (Übungsaufgabe).

5.7.2 Trigonometrische Funktionen

Wir definieren Sinus und Cosinus via

$$\sin z := \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Es gilt

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,, \tag{5.1}$$

sowie (Übungsaufgabe)

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1\,, \quad \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z \sin w\,, \quad \sin(z+w) = \cos z \sin w + \cos w \sin z\,.$$

Weiter definieren wir Tangens und Cotangens als

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \text{für } z \text{ mit } \cos z \neq 0\,,$$
$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \text{für } z \text{ mit } \sin z \neq 0\,.$$

Sinus und Cosinus auf $\mathbb{R}$: Falls $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\left|e^{\mathrm{i}x}\right|^2 = e^{\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}x} = 1\,, \qquad \text{also } e^{\mathrm{i}x} \in S_1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}.$$

Wir erinnern uns, dass $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \overline{z}\right)$ und $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$ gilt. Also folgt

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{\mathrm{i}x} \qquad \text{und} \qquad \sin x = \operatorname{Im} e^{\mathrm{i}x}$$

sowie die Eulersche Formel

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \tag{5.2}$$

Bemerkung: In $\mathbb{C}$ sind Sinus und Cosinus nicht beschränkt. Zum Beispiel gilt für $y \in \mathbb{R}$

$$|\cos(\mathrm{i}y)| = \frac{1}{2}\left|e^{-y} + e^{y}\right| \to \infty \qquad \text{für} \qquad y \to \pm\infty$$

und ähnlich $|\sin(\mathrm{i}y)| \to \infty$ für $y \to \pm\infty$.

5.7.3 Hyperbolische Funktionen

$$\sinh z := \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{(Sinus hyperbolicus)}$$
$$\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{(Cosinus hyperbolicus)}$$
$$\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \text{für } z \text{ mit } \cosh z \neq 0 \quad \text{(Tangens hyperbolicus)}$$
$$\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z} \qquad \text{für } z \text{ mit } \sinh z \neq 0 \quad \text{(Cotangens hyperbolicus)}$$

Man rechnet leicht die folgenden Formeln nach:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,, \qquad \sinh(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sin z\,, \qquad \cosh(\mathrm{i}z) = \cos z\,, \qquad e^{z} = \cosh z + \sinh z\,.$$

6 Funktionen und Grenzwerte

6.1 Funktionen

Definition 6.1. *Sei $D \subset \mathbb{C}$. Unter einer reell- (bzw. komplex-) wertigen Funktion auf D verstehen wir eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}\,(bzw.\ \mathbb{C})$. D heißt Definitionsbereich von f, $f(D)$ heißt Wertebereich von f und*

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R}\,(bzw.\mathbb{C})\,|\,y = f(x)\}$$

heißt Graph von f.

Bemerkung: Im folgenden ist $I \subset \mathbb{R}$ immer ein Intervall.

Rechenregeln: Es gilt $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (für $g(x) \neq 0$), $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$, $\big(\operatorname{Re} f\big)(x) = \operatorname{Re} f(x)$ etc..

Zusammensetzung von Funktionen:
Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$, $g\colon Y \to \mathbb{C}$, $f(D) \subset Y$. Dann ist

$$\big(g \circ f\big)(x) := g\big(f(x)\big)$$

Umkehrfunktion: Falls $f\colon D \subset \mathbb{C} \to N := f(D) \subset \mathbb{C}$ injektiv ist, dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $g\colon N \to D$, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_D$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gilt, d.h.

$$f\big(g(y)\big) = y \quad \text{für alle } y \in N \qquad \text{und} \qquad g\big(f(x)\big) = x \quad \text{für alle } x \in D\,.$$

Die Funktion g heißt Inverse oder Umkehrfunktion zu f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Beispiele:

(i) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^3$. Dann ist $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = y^{1/3}$.

(ii) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{i}z$. Dann ist $f^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f^{-1}(w) = -\mathrm{i}w$.

Definition 6.2. $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt*

a) streng monoton wachsend (fallend), falls $f(x) > f(y)$ $(f(x) < f(y))$ für alle $x > y$ gilt.

b) monoton wachsend (fallend), falls $f(x) \geq f(y)$ $(f(x) \leq f(y))$ für alle $x \geq y$ gilt.

6.2 Einige topologische Begriffe

Definition 6.3 (offene Menge)**.** *Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) heißt offen in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$), falls es zu jedem $x \in \Omega$ eine ε-Kugel um x gibt, die ganz in Ω enthalten ist.*

Beispiel: $B_r(x_0) \subset \mathbb{C}$ ist offen in $\mathbb{C}$.

Beweis. Sei $x \in B_r(x_0)$, also $|x - x_0| < r$. Sei $\rho := r - |x - x_0| > 0$. Sei nun $\hat{x} \in B_\rho(x)$. Dann gilt $|\hat{x} - x_0| \le |\hat{x} - x| + |x - x_0| < \rho + |x - x_0| < r$. Es gilt also $B_\rho(x) \subset B_r(x_0)$. □

Analog zeigt man, dass (a, b) offen in $\mathbb{R}$ ist (aber nicht in $\mathbb{C}$).

Definition 6.4 (abgeschlossene Menge)**.** *Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) heißt abgeschlossen, falls für jede Folge $(x_n) \subset A$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $x_0 \in A$.*

Beispiel:

$$\overline{B_r(x_0)} := \{x \in \mathbb{C} \,|\, |x - x_0| \le r\} \quad \text{ist abgeschlossen.}$$

Beweis. Sei $(x_n) \subset \overline{B_r(x_0)}$ mit $x_n \to \hat{x}$. Wir müssen zeigen, dass $\hat{x} \in \overline{B_r(x_0)}$. Es gilt

$$|\hat{x} - x_0| \le |\hat{x} - x_n| + |x_n - x_0| \le |\hat{x} - x_n| + r.$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ sei n_0 so, dass $|\hat{x} - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$ gilt. Damit folgt

$$|\hat{x} - x_0| \le r + \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus $|\hat{x} - x_0| \le r$. □

Analog zeige man, dass $[a, b]$ abgeschlossen ist.

[4.11.2024]

[6.11.2024]

Definition 6.5 (Komplement)**.** *Zu $M \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) ist das Komplement M^c definiert durch $M^c := \{x \in \mathbb{C}\,(\text{bzw. } \mathbb{R}) \,|\, x \notin M\}$.*

Satz 6.6. *a) Falls $\Omega \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) offen in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) ist, dann ist $\Omega^c \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) abgeschlossen.*

b) Falls $A \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) abgeschlossen ist, dann ist A^c offen in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$.)

Beweis. a) Wir nehmen an, dass Ω^c nicht abgeschlossen ist. Dann existiert eine Folge $(x_n) \subset \Omega^c$ mit $x_n \to x_0$, aber $x_0 \notin \Omega^c$. Also ist $x_0 \in \Omega$. Damit existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$. Andererseits gilt $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$ für hinreichend große n, ein Widerspruch.

b) Wir nehmen an, dass A^c nicht offen ist. Dann existiert ein $x_0 \in A^c$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass $B_\varepsilon(x_0) \not\subset A^c$ gilt. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap A$ mit $x_n \to x_0$. Also $x_0 \in A$, ein Widerspruch.

□

Korollar 6.7. *$M \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) ist abgeschlossen, genau dann wenn M^c offen in $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) ist.*

Satz 6.8. *i) Die Vereinigung einer beliebigen Familie (=Menge) offener Mengen ist offen.*

ii) Der Schnitt einer endlichen Familie offener Mengen ist offen.

iii) Die Vereinigung einer endlichen Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

iv) Der Schnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. Übungsaufgabe □

Bemerkungen:

(i) $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ und $\varnothing$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

(ii) $[a, b)$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Definition 6.9. *Es sei $M \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$), $x_0 \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$). x_0 heißt*

a) innerer Punkt von M, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x_0) \subset M$.

b) Randpunkt von M, wenn in jeder ε-Kugel um x_0 sowohl ein Punkt aus M, als auch ein Punkt aus M^c liegt.
Bemerkung: x_0 kann, muss aber nicht in M liegen.

c) Häufungspunkt von M, wenn in jeder ε-Kugel um x_0 ein von x_0 verschiedener Punkt (und damit unendlich viele Punkte) von M liegt.

d) isolierter Punkt von M, falls $x_0 \in M$, aber kein Häufungspunkt ist.

Beispiel: $M = (-3, 4) \cup \{15\} \subset \mathbb{R}$.
Die inneren Punkte von M sind $x \in (-3, 4)$, die Randpunkte $\{-3, 4, 15\}$, die Häufungspunkte $x \in [-3, 4]$ und 15 ist ein isolierter Punkt.

Definition 6.10. *Es sei $M \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$)*

a) Das Innere von M, genannt M° ist die Menge der inneren Punkte von M.

b) Der Rand von M, genannt ∂M, ist die Menge der Randpunkte von M.

c) Der Abschluss von M, ist $\overline{M} := M \cup \partial M$

d) Der Durchmesser von M ist $diam M := \sup\{|x - y| \mid x, y \in M\}$.

Beispiel: Sei $M = B_r(x_0)$. Dann ist $M^\circ = M$, $\partial M = \{x \mid |x - x_0| = r\}$, $\overline{M} = \overline{B_r(x_0)}$, $\mathrm{diam} M = 2r$.

Definition 6.11 (kompakte Menge)**.** *$K \subset \mathbb{C}$ heißt kompakt, falls es zu jeder Folge $(x_n) \subset K$ eine Teilfolge gibt, die gegen ein Element aus K konvergiert.*

Satz 6.12. *$K \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Es sei K kompakt. Aus der Definition folgt, dass K abgeschlossen ist. Wir nehmen an, dass K nicht beschränkt ist. Dann existiert eine Folge $(x_n) \subset K$ mit $|x_n| > n$. Eine solche Folge hat keine konvergente Teilfolge, ein Widerspruch.
Sei nun $(x_n) \subset K$. Da K beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß, Satz 4.21, eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Da K abgeschlossen ist, gilt $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$. Damit ist K kompakt. □

Definition 6.13 (dichte Menge)**.** *$S \subset M \subset \mathbb{C}$ heißt dicht in M, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in S \cap B_\varepsilon(x_0)$ gibt.*

Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

6.3 Grenzwerte von Funktionen

Im folgenden sei $M \subset \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) eine nichtleere Menge und x_0 ein Häufungspunkt von M.

Definition 6.14 (Grenzwert)**.** *Es sei $f\colon M \to \mathbb{C}$. Wir sagen $f(x)$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ für x gegen x_0, falls für alle Folgen $(x_n) \subset M$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to a$.*
Schreibweise:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \qquad \textit{oder} \qquad f(x) \to a \ \textit{ für } x \to x_0.$$

Bemerkungen:

(i) Zwei äquivalente Formulierungen sind die folgenden

a) **ε-δ-Kriterium:** Es gilt, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Beweis. Dass aus dem ε-δ-Kriterium Konvergenz folgt, gilt nach Definition.
Nehmen wir nun umgekehrt an, dass das ε-δ-Kriterium nicht gilt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ gilt: $|f(x) - a| \geq \varepsilon$ für ein x mit $|x - x_0| < \delta$. Damit existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$. Also $x_n \to x_0$, aber $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$, ein Widerspruch. □

b) **Cauchy-Kriterium:** $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so das $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in B_\delta(x_0)$ gilt.

(ii) Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Beispiele:

1) $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ (Restgliedabschätzung)

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Restgliedabschätzung)

3)
$$f\colon \big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\big)\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\,, \quad (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

In diesem Beispiel existiert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht, denn, z.B., es gilt $\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 0$, aber $\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = 1$.

4)
$$f\colon \big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\big)\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}\,, \quad (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

In diesem Beispiel gilt $|f(x,y)| \le 2|y|$, also $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

[6.11.2024]

[11.11.2024]

Satz 6.15 (Majorante und Einschließkriterium). *(i) Falls $f\colon M\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g\colon M\to[0,\infty)$ und $|f(x)|\le Kg(x)$ für ein $K\in\mathbb{R}_+$ und alle $x\in M$, dann gilt: falls $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$, so folgt $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

(ii) Falls $f,g\colon M\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $f\le g$ (d.h. $f(x)\le g(x)$ für alle $x\in M$), dann folgt aus $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, dass $a\le b$.

(iii) Es seien $f,g,h\colon M\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ und $g\le f\le h$. Falls $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a$, dann folgt $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Der Beweis von Satz 6.15 ist eine Übungsaufgabe.

Definition 6.16 (rechtsseitiger Grenzwert). *Es sei $M\subset\mathbb{R}$, $f\colon M\to\mathbb{C}$. Wir sagen $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = b$, falls für alle Folgen (x_n) mit $x_n > x_0$ und $x_n\to x_0$ gilt, dass $f(x_n)\to b$.*

Schreibweisen:

$$f(x)\to b \text{ für } x\to x_0+0\,, \quad \lim_{x\searrow x_0} f(x) = b \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = b\,.$$

Entsprechend wird der linksseitige Grenzwert definiert mit den Schreibweisen

$$f(x)\to b \text{ für } x\to x_0-0\,, \quad \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = b \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = b\,.$$

Bemerkung: Es sei $I\subset\mathbb{R}$, $x_0\in I^\circ$ und $f\colon I\backslash\{x_0\}\to\mathbb{C}$. Dann gilt, dass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, falls links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind.

Beispiele:

1)
$$f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}\,,\qquad f(x)=\begin{cases}1 & : \quad x>0\\ -1 & : \quad x<0\end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{x\searrow 0} f(x)=1$ und $\lim_{x\nearrow 0} f(x)=-1$.

2) $x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$. Dann gilt $\lim_{x\searrow 0} f(x)=0$.

Definition 6.17 (Grenzwert bei ∞)**.** *Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Wir sagen $f(x)$ konvergiert gegen $a\in\mathbb{C}$ für $x\to\infty$, falls für alle $\varepsilon>0$ ein $k\in\mathbb{R}_+$ existiert, so dass $|f(x)-a|<\varepsilon$ für alle $x>k$ gilt.*

Schreibweisen:
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=a \qquad \text{oder} \qquad f(x)\to a \text{ für } x\to\infty\,.$$
Entsprechend definieren wir den Grenzwert bei $-\infty$ und schreiben $\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$.

Beispiele:

1)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^s}=0\,,\qquad s\in\mathbb{Q}\,,s>0$$

2)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+4}=\frac{2}{3}$$

3) Für $a>0$ gilt
$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\to 0 \qquad \text{für } x\to\infty$$
Dies folgt aus
$$0<\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\le\frac{a}{\sqrt{x}}\to 0\,.$$

4) Die Zackenfunktion: (Konstruktion über periodische Fortsetzung)
$$g(x)=\begin{cases}2x & : \quad 0\le x<\frac{1}{2}\\ 2-2x & : \quad \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}\,,\qquad g(x+l)=g(x) \text{ für alle } l\in\mathbb{Z}\,,x\in[0,1)\,.$$
Der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existiert nicht, denn $\sup_{x,y\ge k}|g(x)-g(y)|=1$ für alle $k\in\mathbb{R}_+$.

Definition 6.18 (Uneigentlicher Grenzwert)**.** *Es sei $f:M\backslash\{x_0\}\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $B_r(x_0)\backslash\{x_0\}\subset M$ für ein $r>0$. Wir sagen $f(x)$ konvergiert gegen ∞ (bzw. $-\infty$) für $x\to x_0$, falls es zu jedem $k>0$ ein $\delta>0$ gibt, so dass $f(x)\ge k$ (bzw. $f(x)\le -k$) für alle x mit $|x-x_0|<\delta$ gilt.*

Schreibweisen:
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\ (-\infty) \qquad \text{oder} \qquad f(x)\to\infty\ (-\infty) \quad \text{für } x\to x_0$$

Beispiel: $M = \mathbb{R}\backslash\{0\} : \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$

Entsprechend definieren wir (Übungsaufgabe)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\,(-\infty)\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,(-\infty)$$

Satz 6.19. *Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei monoton. Dann existiert in jedem $x_0 \in [a,b]$ der einseitige Grenzwert.*
Falls z.B. f monoton wachsend ist, so gilt $f(a) \le \lim_{x\searrow a} f(x)$, $f(b) \ge \lim_{x\nearrow b} f(x)$ und für $x_0 \in (a,b)$

$$\sup_{a\le x<x_0} f(x) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\searrow x_0} f(x) = \inf_{x_0<x\le b} f(x)\,.$$

Der Beweis des Satzes ist eine Übungsaufgabe.

7 Stetigkeit

Im folgenden sei $D \subset \mathbb{R}$ oder $D \subset \mathbb{C}$ der Definitionsbereich einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ oder $f\colon D \to \mathbb{R}$,

7.1 Stetigkeit

Definition 7.1. *Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt.}$$

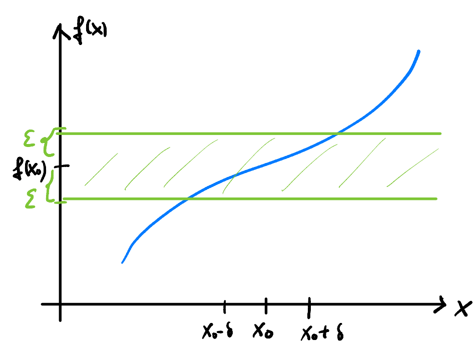
f heißt stetig in D, falls f in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Geometrische Interpretation im Fall $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Zu jedem beliebig schmalen Streifen

$$S_\varepsilon = \{(x,y)\,|\,f(x_0) - \varepsilon < y < f(x_0) + \varepsilon\}$$

gibt es ein Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, so dass der Graph von f über $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ganz in S_ε liegt.



Bemerkungen:

1) Falls x_0 ein isolierter Punkt ist, so ist jedes f in x_0 stetig.
2) **Folgenstetigkeit:** $f\colon D \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, falls $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für alle $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0$ gilt.

Beispiele:

1) Zu $a \in \mathbb{C}$ sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert via $f(x) = ax$.

   Behauptung: f ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

   [Es gilt $|f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0|$, zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta \leq \frac{\varepsilon}{|a|}$.]

2) $f(x) = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

   Beweis. Es gilt
   $$\left|x^2 - x_0^2\right| = \left|(x - x_0)(x + x_0)\right| \leq \left(|x| + |x_0|\right)\left|x - x_0\right|.$$
   Falls $x \in B_\delta(x_0)$, dann folgt $|x| \leq \delta + |x_0|$. Damit gilt
   $$\left|x^2 - x_0^2\right| \leq \delta\left(\delta + 2|x_0|\right) \qquad \text{falls } |x - x_0| < \delta .$$
   Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und gegebenem x_0 wähle also $\delta(\delta + 2|x_0|) < \varepsilon$, z.B. $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|})$.
   Je größer $|x_0|$, umso kleiner müssen wir also zu gegebenem ε das δ wählen. □

3) Die Funktion $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.

   Beweis. Sei $x_0 \in [0, \infty)$ gegeben und $x > x_0$. Dann gilt $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} < \sqrt{x - x_0}$ und somit auch $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| < \sqrt{x - x_0}$. Damit gilt $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$, falls $|x - x_0| < \varepsilon^2 =: \delta$. Den Fall $x < x_0$ behandelt man analog. □

4)
   $$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases} \tag{7.1}$$
   ist nicht stetig in $x_0 = 0$, denn für alle $\delta > 0$ gilt $|f(x) - f(0)| = 1$ für alle $x \in B_\delta(0)$, $x \neq 0$.

5) Jedes Polynom ist stetig.

Rechenregeln: Falls f, g stetig in x_0 sind, dann sind auch

1) $\alpha f + \beta g$ stetig in x_0 für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$),

2) fg stetig in x_0,

3) $\frac{f}{g}$ stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$.

Den Beweis kann man z.B. über den Begriff der Folgenstetigkeit führen. (Übungsaufgabe)

Hinweis zu 3): Zu gegebenem x_0 gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|g(x)| \geq \frac{1}{2}|g(x_0)|$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt.
Sei dazu $\varepsilon := \frac{1}{2}|g(x_0)| > 0$. Sei $\delta > 0$ so, dass $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ für $x \in B_\delta(x_0)$ gilt. Dann gilt für $x \in B_\delta(x_0)$ auch
$$|g(x)| = |g(x_0) + g(x) - g(x_0)| \geq |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| \geq |g(x_0)| - \varepsilon = \frac{1}{2}|g(x_0)|.$$

Satz 7.2 (Stetigkeit der Komposition). *Sei* $f\colon D \to \mathbb{C}$, $g\colon E \to \mathbb{C}$ *und* $f(D) \subset E$. *Sei* f *in* $x_0 \in D$ *stetig und* g *in* $f(x_0) \in E$ *stetig. Dann ist auch* $h = g \circ f$ *in* x_0 *stetig.*

Beweis. Sei $(x_n) \subset D$ mit $x_n \to x_0$. Dann gilt nach Voraussetzung $f(x_n) \to f(x_0)$ und $g\big(f(x_n)\big) \to g\big(f(x_0)\big)$. Also gilt $h(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = h(x_0)$. □

Satz 7.3 (Stetigkeit der Inversen). *Es sei* $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt*, $f\colon K \to \mathbb{C}$ *stetig und auf* $f(K)$ *invertierbar. Dann ist auch* $f^{-1}\colon f(K) \to \mathbb{C}$ *stetig.*

Beweis. Sei $(y_n) \subset f(K)$ eine Folge mit $y_n \to y_0$. Sei $x_n := f^{-1}(y_n)$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Es ist zu zeigen, dass $x_n \to x_0$ gilt. Wir nehmen an, dass dies nicht gilt. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to z_0 \in K$, $z_0 \neq x_0$. Da f stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) \to f(z_0)$. Da $z_0 \neq x_0$ und f injektiv ist, folgt $f(z_0) \neq f(x_0) = y_0$, also $y_{n_k} \not\to y_0$, ein Widerspruch. □

Definition 7.4 (Homöomorphismus). *Eine bijektive, stetige Abbildung* $f\colon D \subset \mathbb{C} \to f(D) \subset \mathbb{C}$ *heißt Homöomorphismus, falls* f^{-1} *stetig ist.*

Bemerkung: Satz 7.3 besagt also, dass eine injektive, stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ ein Homöomorphismus von K auf $f(K)$ ist.

Gegenbeispiel: (falls K nicht kompakt ist)

$$f\colon [0,1) \to \mathcal{S}^1 \subset \mathbb{C}, \qquad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

f ist stetig und invertierbar, aber die Inverse ist nicht stetig in $(1,0)$. Dazu betrachten wir zum Beispiel eine Folge $(x_n, y_n) \in \mathcal{S}^1$, gegeben durch $(x_n, y_n) = (\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}, -\frac{1}{n})$. Dann gilt $(x_n, y_n) \to (1,0)$, aber $f^{-1}(x_n, y_n) \to 1 \neq f^{-1}(1,0) = 0$.

Bemerkung: Die Inverse kann explizit angegeben werden, wenn man die Existenz der Inversen des Cosinus auf $[0,\pi]$, genannt Arcuscosinus, $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$,voraussetzt (siehe das folgende Kapitel 7.8). Damit

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arccos x & : \ y \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{2\pi} \arccos x & : \ y < 0 \end{cases} .$$

Definition 7.5 (Lipschitz-stetig). [12] $f\colon D \to \mathbb{C}$ *heißt Lipschitz-stetig auf* D*, falls es eine Konstante* $L > 0$ *gibt, so dass*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \textit{für alle } x, y \in D \textit{ gilt.}$$

Eine solche Zahl L *nennt man Lipschitz-Konstante von* f.
Falls $L < 1$ *ist, so heißt* f *auch Kontraktion.*

Bemerkung: Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig. [Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.]

[12] Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Beispiele:

1) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{C}$ mit $L = |a|$.

2) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \operatorname{Re} z$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{C}$ mit $L = 1$.

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$, aber auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $L = 2\max(|a|, |b|)$.

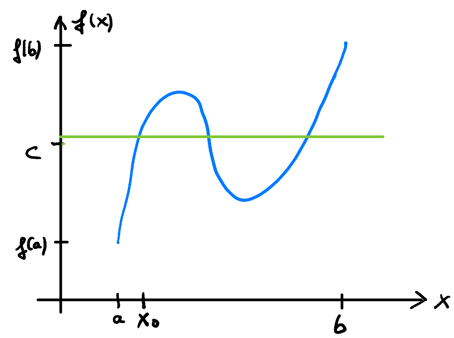
7.2 Der Zwischenwertsatz

In diesem Kapitel ist $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Satz 7.6 (Zwischenwertsatz)**.** *$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Es gelte oBdA $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.*

Beweis. Es sei

$$M := \{x \mid a < x \leq b \mid f(x) \geq c\}$$



M ist nichtleer, da $b \in M$, und beschränkt. Sei $x_0 := \inf M$. Dann existiert $(x_n) \subset M$, $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to f(x_0)$. Da $f(x_n) \geq c$, folgt $f(x_0) \geq c$. Wir nehmen an, dass $f(x_0) > c$ gilt. Dann existiert aufgrund der Stetigkeit von f ein $x \in (a, x_0)$ mit $f(x) > c$, ein Widerspruch zur Definition von x_0. □

Korollar 7.7 (Existenz von Wurzeln)**.** *Jedes Polynom der Form $P(x) = x^n - \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, hat eine positive Nullstelle.*

Beweis. Es gilt $P(0) = -\alpha < 0$ und $P(1 + \alpha) = (1 + \alpha)^n - \alpha \geq 1 + n\alpha - \alpha > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x_0 \in (0, 1 + \alpha)$ mit $P(x_0) = 0$. □

Korollar 7.8 (Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $[f(a), f(b)] \subset [a, b]$ besitzt mindestens einen <u>Fixpunkt</u>, d.h. ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.*

Beweis. Die Funktion $g(x) := f(x) - x$ ist stetig. Es gilt $g(a) \geq 0$ und $g(b) \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) = 0$. □

7.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wir werden später noch beweisen, dass exp stetig ist und nehmen dies für den Moment an.

Satz 7.9. *(i)* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

(ii) $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ist bijektiv.*

Beweis. (i) Es gilt $e^{x+h} = e^x e^h$ und $e^h = 1 + h + \cdots > 1$ für $h > 0$. Also gilt $e^{x+h} > e^x$ falls $h > 0$.

(ii) Es ist zu zeigen, dass für alle $y \in \mathbb{R}_+$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $e^x = y$. Es gilt $e^0 = 1$, sowie $e^y > y$ für $y > 1$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $x \in [0, y]$ mit $e^x = y$. Sei $y \in (0,1)$. Dann existiert ein x mit $e^x = \frac{1}{y}$, also $e^{-x} = y$.

□

Natürlicher Logarithmus: Aus obigem Satz folgt, dass exp eine Umkehrfunktion besitzt, der sogenannte natürliche Logarithmus, $\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Es gilt also

$$x = e^y \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad y = \ln x.$$

Weiterhin gilt

(i)

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Dies folgt aus

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}.$$

(ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dies folgt aus

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \to 1 \qquad \text{für } x \to 0.$$

(iii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Sei dazu (x_n) eine Nullfolge, also $y_n = \ln(1 + x_n) \to 0$. Dann gilt $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = \frac{y_n}{e^{y_n} - 1} \to 1$.

Potenzfunktion: Wir definieren für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in (0, \infty)$

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

Damit gilt

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta, \quad \ln x^\alpha = \alpha \ln x.$$

[13.11.2024]

[18.11.2024]

7.4 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Satz 7.10 (Bild kompakter Mengen unter stetigen Funktionen ist kompakt)**.** *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.*

Beweis. Sei $(y_n) \subset f(K)$, also existiert $x_n \in K$ mit $f(x_n) = y_n$. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) und $x_0 \in K$ mit $x_{n_k} \to x_0$. Da f stetig ist gilt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) = y_0$, also $y_0 \in f(K)$. □

Satz 7.11 (Reellwertige stetige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen Infimum und Supremum an)**.** *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $\underline{x} \in K$, $\overline{x} \in K$, so dass*

$$\inf_K f(x) = f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\overline{x}) = \sup_K f(x)$$

für alle $x \in K$ gilt.

Beweis. Nach Satz 7.10 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Daher existiert $\overline{m} = \sup_{x\in K} f(x) < \infty$ und $\underline{m} = \inf_{x\in K} f(x) > -\infty$. Dann existieren (x_n), $(y_n) \subset K$ mit $f(x_n) \to \overline{m}$ und $f(y_n) \to \underline{m}$. Da K kompakt ist, existieren Teilfolgen (x_{n_k}), (y_{n_k}) und $\overline{x}, \underline{x}$ mit $x_{n_k} \to \overline{x}$, $y_{n_k} \to \underline{x}$. Da f stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) \to f(\overline{x})$, $f(y_{n_k}) \to f(\underline{x})$, also $\overline{m} = f(\overline{x})$ und $\underline{m} = f(\underline{x})$. □

Bemerkung: Man überlegt sich leicht, dass keine der Voraussetzungen (K abgeschlossen, K beschränkt, f stetig) weggelassen werden kann.

Definition 7.12 (Distanzfunktion)**.** *Zu $M \subset \mathbb{C}$, $M \neq \varnothing$, definieren wir die Distanzfunktion*

$$dist(x, M) \coloneqq \inf\{|x-a| \,|\, a \in M\}\,.$$

Satz 7.13. *Die Distanzfunktion ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$, d.h. es gilt*

$$\big|dist(x,M) - dist(y,M)\big| \le |x-y| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{C}\,.$$

Beweis. Es seien $x, y \in \mathbb{C}$ gegeben. Es gilt $|x-a| \le |x-y| + |y-a|$ für alle $a \in M$. Nach Definition gilt $\operatorname{dist}(x,M) \le |x-a|$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $a \in M$ so, das $|y-a| \le \operatorname{dist}(y,M) + \varepsilon$. Damit gilt $\operatorname{dist}(x,M) \le |x-y| + \operatorname{dist}(y,M) + \varepsilon$. Analog zeigt man $\operatorname{dist}(y,M) \le |x-y| + \operatorname{dist}(x,M) + \varepsilon$, also folgt die Behauptung. □

Bemerkung: Falls M kompakt ist, so folgt aus Satz 7.11, dass $\operatorname{dist}(x,M) = \min\{|x-a|\,|, a \in M\}$.

Definition 7.14 (Abstand von Mengen)**.** *Es seien $A, B \subset \mathbb{C}$ nichtleere Mengen. Der Abstand von A zu B ist definiert als*

$$dist(A,B) = \inf\{dist(x,B) \,|\, x \in A\}\,.$$

Bemerkungen:

1) Falls A und B kompakt sind, dann existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $\operatorname{dist}(A,B) = |a-b|$.

2) Ein Gegenbeispiel falls A, B nicht kompakt sind ist das folgende. Es seien

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z \le 0\} \qquad \text{und} \qquad B = \left\{z = (x,y) \,|\, y \ge \frac{1}{1+x^2}\right\}.$$

Dann gilt $\operatorname{dist}(A,B) = 0$, aber das Infimum wird nicht angenommen.

7.5 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition 7.15 (gleichmäßig stetig)**.** *Eine Funktion $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt, falls $|x - y| < \delta$.*

Bemerkungen:

1) Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig. Insbesondere kann zu $\varepsilon > 0$ das δ unabhängig von $x_0 \in D$ gewählt werden.

2) Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig: zu gegebenem $\varepsilon > 0$ können wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ wählen.

3) Die Funktion $f\colon (0,1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

   Beweis. Zu zeigen ist, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $\delta > 0$ Punkte $x, y \in (0,1]$ existieren mit $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $x \in (0, \frac{1}{2}]$ und $y = 2x$. Dann gilt $|y - x| = x$, $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2x} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$. □

Satz 7.16. *Jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist dort gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch ist. Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ Punkte $x, y \in K$ existieren mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$. Wähle zu $\delta = \frac{1}{n}$ Punkte x_n, y_n mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Da K kompakt ist, existieren Teilfolgen $(x_{n_k}), (y_{n_k})$ mit $x_{n_k} \to x_0$ und $y_{n_k} \to x_0$, $x_0 \in K$. Da f stetig ist folgt $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$, ein Widerspruch. □

Bemerkungen:

1) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $[a, 1]$ gleichmäßig stetig für alle $a > 0$.

2) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist nach Satz 7.16 gleichmäßig stetig, aber sie ist nicht Lipschitz-stetig. Denn da
$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$
gilt, müsste $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq L$ für eine Konstante $L \geq 0$ für alle $x \in [0,1], y \in (0,1]$ gelten, was aber nicht möglich ist.

7.6 Punktweise/gleichmäßige Konvergenz

Im folgenden sei $D \subset \mathbb{C}$ und (f_n) eine Funktionenfolge $f_n\colon D \to \mathbb{C}$.

Definition 7.17 (Punktweise Konvergenz)**.** *Wir sagen (f_n) konvergiert punktweise auf D, falls $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in D$ existiert. Die Funktion f, definiert über $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, heißt punktweiser Limes von (f_n).*

Problem: Unter punktweiser Konvergenz gehen oft gute Eigenschaften, wie z.B. Stetigkeit, verloren.

Standardbeispiel: $D = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 1 \\ 0 & : \quad x \in [0,1) \end{cases} .$$

Wir können also im allgemeinen Grenzprozesse nicht vertauschen. Hier zum Beispiel gilt

$$1 = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1} f_n(x) \neq \lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 .$$

Ein strengerer Konvergenzbegriff vermeidet dieses Problem.

Merkregel: Zwei Grenzprozesse können vertauscht werden, wenn einer gleichmäßig im anderen ist.

Definition 7.18 (Gleichmäßige Konvergenz)**.** *Wir sagen (f_n) konvergiert gleichmäßig auf D gegen $f\colon D \to \mathbb{C}$, falls*

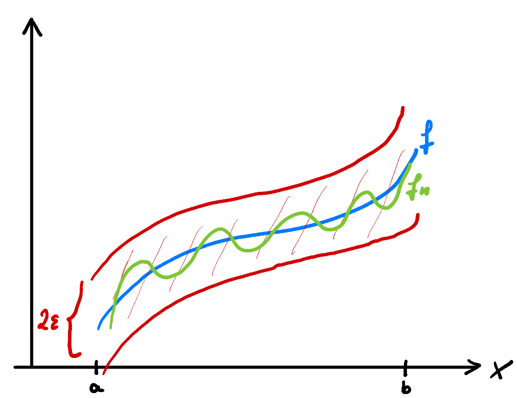
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 ,$$

d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in D$ und für alle $n \geq n_0$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Schreibweise: $f_n \to f$ *glm. (auf D).*

Geometrische Interpretation:
(im Fall $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n\colon D \to \mathbb{R}$)

Für gegebenes $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ der Graph von f_n ganz in einem ε-Streifen um den Graphen von f liegt.



Weitere Notation:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)| \qquad \text{(Supremumsnorm)}$$

[Für die Supremumsnorm gilt die Dreiecksungleichung $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, denn $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, also auch $\sup_{x\in D} |f(x)+g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.]

Mit der Notation der Supremumsnorm gilt also $f_n \to f$ glm., falls $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Bemerkung: Im Standardbeispiel gilt $\|f_n - f\|_\infty = 1$ und damit $f_n \not\to f$ glm.. Allerdings gilt $f_n \to 0$ glm. auf $[0,a]$ für alle $a < 1$.

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz, aber die Umkehrung gilt offensichtlich nicht.

Wir verdeutlichen den Unterschied nochmals, indem wir die Konvergenz mit Quantoren beschreiben.

Punktweise Konvergenz:

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Gleichmäßige Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

[18.11.2024]

[20.11.2024]

Weiteres Beispiel:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & : \quad x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad x \in (0,1] \end{cases} .$$

Sei $x \in (0, \frac{1}{n}]$. Es gilt $0 \leq f_{n_0}(x) < \varepsilon$ genau dann, wenn $1 - n_0 x < \varepsilon$, also falls $n_0 > \frac{1-\varepsilon}{x}$. Wir sehen, dass n_0 immer größer gewählt werden muss, je kleiner x ist.
Es gilt also:

- (f_n) konvergiert nicht glm. gegen f auf $[0,1]$,
- aber (f_n) konvergiert glm. gegen $f = 0$ auf $[a,1]$ für alle $a > 0$.

Satz 7.19 (Cauchy-Kriterium)**.** *(f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig auf D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass*

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \textit{für alle } n, m \geq n_0 \textit{ gilt.}$$

Beweis. "⇒": Zu $\varepsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit folgt

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f_m - f\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \geq n_0\,.$$

"⇐": Nach Voraussetzung existiert für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt.

1) (Identifiziere Limes) Es gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D\,, \quad \text{für alle } n, m \geq n_0, \tag{7.2}$$

also ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge und es existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

2) (Konvergenz ist gleichmäßig)
Wir nehmen in (7.2) den Grenzwert $m \to \infty$ und erhalten $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ und $n \geq n_0$, was gerade bedeutet, dass $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ für $n \geq n_0$ gilt.

□

Satz 7.20 (Vertauschungssatz; glm. Limes stetiger Funktionen ist stetig)**.** *(f_n) konvergiere glm. gegen eine Funktion f. Falls alle (f_n) stetig sind, so ist auch f stetig.*

Beweis. Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$ gilt. f_{n_0} ist stetig. Daher existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $|x - x_0| < \delta$ gilt. Damit erhalten wir

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$. □

Achtung: Falls f_n stetig, $f_n \to f$ punktweise und f stetig, dann folgt im allgemeinen nicht, dass $f_n \to f$ glm.. Ein Beispiel ist

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{3}{n}, 1] \\ nx - 1 & : \quad x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 3 - nx & : \quad x \in [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}] \end{cases}$$

Es gilt $f_n \to 0$ punktweise, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da $\|f_n\|_\infty = 1$.

Wir zitieren noch ohne Beweis:

Satz 7.21 (Weierstraßscher Approximationssatz)**.** *Es sei $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine Folge von Polynomen (p_n), so dass $p_n \to f$ glm..*

7.7 Gleichmäßig konvergente Reihen

Definition 7.22. *Zu einer Folge (f_n) mit $f_n\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ betrachten wir für $x \in D$ die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,.$$

Die Reihe heißt gleichmäßig konvergent, falls die Folge der Partialsummen $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ gleichmäßig auf D konvergiert.

Satz 7.23 (Majorantenkriterium)**.** *$\sum f_k$ konvergiert gleichmäßig, falls $\sum_k \|f_k\|_\infty < \infty$.*

Beweis. Wir benutzen das Cauchy-Kriterium: für $n > m$ gilt

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_\infty\,.$$

Nach Voraussetzung existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Damit folgt $\|s_n - s_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. □

Satz 7.24 (Anwendung auf Potenzreihen)**.** *Sei* $\sum a_k z^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$*. Dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig in* $\overline{B_r(0)}$ *für alle* $r \in (0, R)$*.*

Beweis. Mit $f_k(z) := a_k z^k$ gilt $\|f_k\|_\infty = \sup_{z\in\overline{B_r(0)}} |f_k(z)| \le |a_k| r^k$. Nach Satz 5.13 gilt $\sum |a_k| r^k < \infty$, also konvergiert nach Satz 7.23 die Potenzreihe gleichmäßig in $\overline{B_r(0)}$. □

Korollar 7.25. *Eine Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzkreises stetig.*

Beispiele: $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$ etc. sind auf ganz $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) stetig.

[20.11.2024]

[25.11.2024]

7.8 Sinus und Cosinus

Erinnerung:

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Satz 7.26 (Nullstelle des Cosinus)**.** *Der Cosinus hat im Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle. Diese bezeichnen wir mit* $\frac{\pi}{2}$*. Es gilt* $\sin\frac{\pi}{2} = 1$*.*

Beweis. 1) (Einschlusskriterium) **Behauptung:** Für $x \in (0,2]$ gilt

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \text{und} \qquad 0 < x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x\,.$$

Beweis.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{k\ge 2} (-1)^k a_k \qquad \text{mit } a_k = \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Es gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1 \qquad \text{für } |x| \le 2 \text{ und } k \ge 1\,.$$

Also ist (a_k) eine streng monoton fallende Folge für $|x| \le 2$. Da a_k auch eine Nullfolge ist, gilt daher für die alternierende Reihe

$$s_1 < s_3 < \cdots < s < \cdots < s_4 < s_2 < s_0 \qquad \text{wobei } s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k\,.$$

Es folgt also $s_2 > s > s_1$, was gerade dem ersten Teil der Behauptung entspricht. Der zweite Teil folgt analog, wobei hier die Aussage gerade $s_1 < s < s_0$ entspricht. □

2) **Behauptung:** Der Cosinus fällt in $[0,2]$ monoton.

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass gilt

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}\,.$$

Sei nun $x, y \in [0,2]$ und $x > y$. Dann gilt $0 < \frac{x-y}{2} < \frac{x+y}{2} < 2$. Aus Schritt 1, Teil 2, folgt $\sin\frac{x-y}{2} > 0$ und $\sin\frac{x+y}{2} > 0$, also $\cos x < \cos y$. □

3) **Behauptung:** Der Cosinus hat in $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

   Beweis. Es gilt $\cos 0 = 1$, $\cos 2 < 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0$. Da der Cosinus stetig ist, hat er nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[0,2]$. Da der Cosinus im Intervall $[0,2]$ streng monoton fallend ist, hat er höchstens eine Nullstelle. □

4) Es gilt $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und nach Schritt 1 gilt $\sin\frac{\pi}{2} > 0$.

□

Satz 7.27. *Die Exponentialfunktion hat Periode* $2\pi\mathrm{i}$*, Sinus und Cosinus haben die reelle Periode* 2π*.*

Beweis. Nach Satz 7.26 gilt $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$, also $e^{z+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}e^z$. Daraus folgt $e^{z+\mathrm{i}\pi} = -e^z$ und schließlich $e^{z+2\pi\mathrm{i}} = e^z$.
Aus den Additionstheoremen

$$\cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\sin w\,, \qquad \sin(z+w) = \sin z\cos w + \sin w\cos z$$

folgt zunächst $\cos\pi = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos 2\pi = 1$ etc., sowie $\sin\pi = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$ etc.. Dies wiederum impliziert $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\cos(z+\pi) = -\cos z$ und $\cos(z+2\pi) = \cos z$. Analog folgt $\sin(z+2\pi) = \sin z$. □

Korollar 7.28. *Es gilt* $e^z = 1$ *genau dann, wenn* $z = 2k\pi\mathrm{i}$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Umkehrfunktionen:

A) **Tangens und Arcustangens:** Es sei $x \in \mathbb{R}$

   - $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ ist definiert für alle $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
   - Da der Sinus streng monoton wachsend auf $(0, \frac{\pi}{2})$ ist, und der Cosinus streng monoton fallend, folgt, dass tan streng monoton wachsend auf $(0, \frac{\pi}{2})$ ist.
   - Es gilt $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, also folgt $\tan(-x) = -\tan x$
   - Es folgt $\tan x \to \pm\infty$ für $x \to \pm\frac{\pi}{2}$, also ist der Tangens bijektiv als Funktion von $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nach $\mathbb{R}$ und es existiert eine Umkehrfunktion, der sogenannte Arcustangens, $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

B) **Arcuscosinus und Arcussinus:**

- $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist stetig und streng monoton fallend, also bijektiv.
- $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist stetig und streng monoton wachsend, also bijektiv.
- Die Umkehrfunktionen werden Arccuscosinus, $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$, und Arcussinus, $\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, genannt.

Satz 7.29 (Polarkoordinaten)**.** *Jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung der Form $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. φ ist für $z = 0$ beliebig und für $z \neq 0$ bis auf Addition von $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt. (r, φ) heißen Polarkoordinaten von z.*

Beweis. Es sei $z \neq 0$ und $\frac{z}{|z|} = a + \mathrm{i}b$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Mit $\alpha := \arccos a \in (0, \pi)$ setzen wir $\varphi = \alpha$, falls $b \geq 0$, ansonsten $\varphi = 2\pi - \alpha$. Damit gilt $a + \mathrm{i}b = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = e^{\mathrm{i}\varphi}$. Falls $z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi} = |z|e^{\mathrm{i}\psi}$, dann folgt $1 = e^{\mathrm{i}(\varphi - \psi)}$, also $\varphi - \psi = 2\pi k$. □

8 Differenzierbare Funktionen

Ab jetzt $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei I ein offenes Intervall ist, d.h. von der Form (a, b), wobei $a = -\infty$ und $b = \infty$ möglich ist.

8.1 Die Ableitung

Definition 8.1 (Ableitung)**.** *$f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

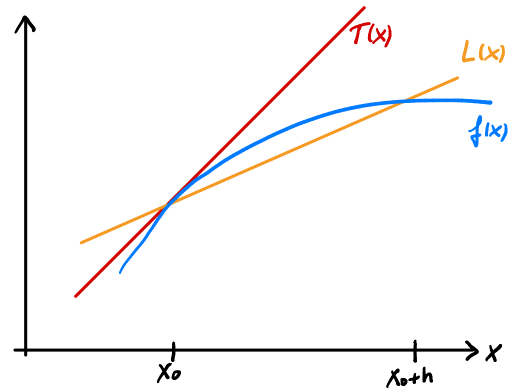
existiert. Er heißt Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Weitere Schreibweisen: *$\dot{f}(x_0)$, $Df(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$.*
f heißt in I differenzierbar, falls $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in I$ existiert.

Bemerkung: Analog definiert man die Ableitung einer Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$. Es gilt, dass $f\colon I \to \mathbb{C}$ in x_0 differenzierbar ist, genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in x_0 differenzierbar sind.

Geometrische Interpretation:

$$L(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) =: f(x_0) + \Delta_h f(x_0)(x - x_0)$$

L ist die Sekante, die $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ verbindet. $\Delta_h f(x_0)$ ist der Differenzenquotient von f in x_0. Ist f in x_0 differenzierbar, so konvergiert für $h \to 0$ die Steigung der Sekante, $\Delta_h f(x_0)$, gegen $f'(x_0)$. Die Gerade $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die Tangente des Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.



Beispiele:

1. $f(x) = C$, dann $f'(x) = 0$. $f(x) = x$, dann $f'(x) = 1$.

2. $f(x) = x^n$. Es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$, denn

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \to n x_0^{n-1} \qquad \text{für } x \to x_0\,.$$

3. $f(x) = e^{Cx}$. Es gilt $f'(x) = Ce^{Cx}$, $x \in \mathbb{R}$, denn

$$\frac{e^{C(x+h)} - e^{Cx}}{h} = e^{Cx}\frac{e^{Ch} - 1}{h} \to Ce^{Cx}\,, \qquad \text{da } \frac{e^{Ch} - 1}{h} \to C \text{ für } h \to 0.$$

4. $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{x}$, denn

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \to \frac{1}{x}\,, \qquad \text{da } \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \to 1 \text{ für } h \to 0\,.$$

   (Bem.: für die Grenzwerte der Exponentialfunktion und des Logarithmus siehe Kapitel 7.3.)

5. $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. Dies folgt aus $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \to 1$ für $h \to 0, h > 0$, aber $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \to -1$ für $h \to 0, h < 0$.

[25.11.2024]

[27.11.2024]

Satz 8.2 (Äquivalente Formulierungen)**.** *Für $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ sind äquivalent*

a) f ist in x_0 differenzierbar.

b) *Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0 .$$

In anderen Worten: es existiert eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(h) = ah$, so dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{h} = 0 .$$

L heißt Differential von f in x_0 und wird auch mit $df(x_0)$ bezeichnet.

c) *Es gibt eine in x_0 stetige Funktion $\varphi: I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \qquad \textit{für alle } x \in I \textit{ gilt.}$$

Beweis.

- a) $\Rightarrow$ b): Die Aussage folgt mit $a = f'(x_0)$.
- b) $\Rightarrow$ c): Die Aussage folgt mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & : \quad x \neq x_0 \\ a & : \quad x = x_0 \end{cases} .$$

  Nach $b)$ ist φ stetig in x_0.
- c) $\Rightarrow$ a): Es gilt $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und nach Voraussetzung existiert der Limes $x \to x_0$.

□

Bemerkungen:

1) a und φ sind eindeutig bestimmt.
2) Ist f in x_0 differenzierbar, dann folgt aus Satz 8.2 c), dass f auch stetig in x_0 ist. Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel $f(x) = |x|$ zeigt.

8.2 Kleiner Einschub: Funktionenräume und Normen

Für $D \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}(D) := \{f \mid f: D \to \mathbb{R}\}$$

den reellen Vektorraum der Funktionen auf D, mit

$$B(D) := \{f \in \mathcal{F}(D) \mid f \text{ beschränkt auf } D\}$$

den Vektorraum der beschränkten Funktionen auf D und mit

$$C^0(D) := \{f \in \mathcal{F}(D) \mid f \text{ stetig auf } D\}$$

den Vektorraum der stetigen Funktionen auf D. Eine weitere Bezeichnung für $C^0(D)$ ist $C(D)$.

Definition 8.3 (Norm)**.** *Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf V, falls für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \|u\| &\geq 0 \quad \textit{und} \quad \|u\| = 0 \textit{ genau dann, wenn } u = 0 && \textit{(positive Definitheit)} \\ \|\lambda u\| &= |\lambda| \|u\| && \textit{(Homogenität)} \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\| && \textit{(Dreiecksungleichung)} . \end{aligned}$$

Beispiel: Die Supremumsnorm ist eine Norm auf $B(D)$

Bemerkung: Falls D kompakt ist, z.B. $D = [a,b]$, dann sind stetige Funktionen auf D auch beschränkt. Dann ist die Supremumsnorm auch eine Norm auf $C^0(D)$.

8.3 Höhere Ableitungen

Definition 8.4 (Höhere Ableitungen)**.** *1) $f: I \to \mathbb{R}$ sei in I differenzierbar mit Ableitung f'. Ist $f': I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so nennen wir die Ableitung $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f.*

Weitere Schreibweisen sind $\ddot{f}, D^2 f$ und $\frac{d^2}{dx^2} f$.

2) Rekursiv definiert man die n-te Ableitung von f, falls $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist, über

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)', \quad f^{(0)} = f\,.$$

Weitere Schreibweisen sind $D^n f$, $\frac{d^n}{dx^n} f$.

3) Falls $f^{(1)}, \cdots, f^{(n)}$ existieren, so heißt f n-mal differenzierbar.

Definition 8.5 (stetig differenzierbar)**.** *1) $f: I \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, falls f auf I differenzierbar ist und $f': I \to \mathbb{R}$ stetig ist.*

2) $f: I \to \mathbb{R}$ heißt n-mal stetig differenzierbar, falls $f^{(0)}, \cdots, f^{(n)}$ existieren und stetig sind.

Bezeichnung: $f \in C^n(I)$

3) Wir sagen $f \in C^\infty(I)$, falls f beliebig oft differenzierbar ist.

Beispiel: $f(x) = e^{Cx}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

Im folgenden wollen wir auch Funktionenräume der Form $C^n([a,b])$ für $n \geq 1$ definieren. Dies ist nicht direkt möglich, da wir die Ableitung auf offenen Intervallen definiert haben.

Definition 8.6. *Wir sagen, eine Funktion $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ist stetig fortsetzbar auf $[a,b]$, falls der rechtsseitige Grenzwert von $f(x)$ in a, sowie der linksseitige Grenzwert in b existieren. Wir setzen dann f fort via $f(a) := \lim_{x \searrow a} f(x)$ und $f(b) := \lim_{x \nearrow b} f(x)$ und erhalten eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Wir bezeichnen nun mit

$$C^n([a,b]) := \{f \in C^n((a,b)) \,|\, f, f', \cdots, f^{(n)} \text{ sind stetig fortsetzbar auf } [a,b]\}\,.$$

Falls aber f z.B. stetig auf $[a,b]$ ist und die Ableitung f' auf (a,b) existiert, aber nicht stetig fortsetzbar ist, dann schreiben wir $f \in C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$. Ein Beispiel ist $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,1]$.

8.4 Rechenregeln

Satz 8.7. *$f, g : I \to \mathbb{R}$ seien in $x \in I$ differenzierbar. Dann sind auch $f+g, (gf)$ und $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ in x differenzierbar mit*

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *(Produktregel)*

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(Quotientenregel)*

Beweis. Wir erhalten die Formeln aus den folgenden Schreibweisen für den Differenzenquotienten:

a)

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

b)

$$\frac{1}{h}\Big(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\Big) = \frac{1}{h}\Big(f(x+h) - f(x)\Big)g(x+h) + \frac{1}{h}\Big(g(x+h) - g(x)\Big)f(x)$$

c)

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{h}\frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)g(x) - \big(g(x+h) - g(x)\big)f(x)}{g(x+h)g(x)}$$

□

Beispiele:

1) $f(x) = x^{-n}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-(n+1)}$$

2)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,, \qquad p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

3)

$$\cos' x = -\sin x\,, \quad \sin' x = \cos x$$

Dies folgt zB aus $\cos' x = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}\right)' = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right) = -\sin x$.

Satz 8.8 (Kettenregel)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$, $g : J \to \mathbb{R}$. f sei in $x_0 \in I$ differenzierbar und g sei in $y_0 = f(x_0) \in J$ differenzierbar. Dann ist auch $h = g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$h'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)\,.$$

Beweis. Aus Satz 8.2, Teil c), folgt

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \varphi(x)(x - x_0)\,, \qquad \varphi \text{ in } x_0 \text{ stetig },\ \varphi(x_0) = f'(x_0)\,,\\ g(y) - g(y_0) &= \psi(y)(y - y_0)\,, \qquad \psi \text{ in } y_0 \text{ stetig },\ \psi(y_0) = g'(y_0)\,. \end{aligned}$$

Also folgt

$$g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = \underbrace{\psi\big(f(x)\big)}_{\to g'(f(x_0))}\ \underbrace{\varphi(x)}_{\to f'(x_0)}\ (x - x_0)$$

□

Beispiele:

1) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}, x > 0$. Dann gilt $f'(x) = ax^{a-1}$, denn

$$f(x) = e^{a \ln x}\,, \qquad \text{also } f'(x) = e^{a \ln x}(a \ln x)' = e^{a \ln x}\frac{a}{x} = ax^{a-1}\,.$$

2) $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f > 0$, f differenzierbar. Dann ist f^n differenzierbar, mit $\big(f^n\big)' = nf^{n-1}f'$.

[27.11.2024]

[2.12.204]

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

f ist in $x = 0$ stetig, da $|f(x) - f(0)| = |x^2 \sin \frac{1}{x}| \le C|x|^2 \to 0$ für $x \to 0$. Weiterhin ist aufgrund der Produkt- und Kettenregel f für alle $x \neq 0$ differenzierbar mit $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. Zudem gilt

$$\Big|\frac{f(0+h) - f(0)}{h}\Big| = \Big|h \sin \frac{1}{h}\Big| \le |h| \to 0 \text{ für } h \to 0,$$

also konvergiert der Differenzenquotient in $x = 0$ gegen null, also gilt $f'(0) = 0$. Allerdings ist die Ableitung nicht stetig in $x = 0$, da $\lim_{x \to 0}\big(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\big)$ nicht existiert.
Dies ist also ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{R}$, deren Ableitung nicht stetig ist.

Satz 8.9 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *$f\colon I \to \mathbb{R}$ sei eine stetige und streng monotone Funktion und damit invertierbar. g sei die Umkehrfunktion. Ist f in $y_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(y_0) \neq 0$, dann ist g in $x_0 = f(y_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(g(x_0))}\,.$$

Bemerkung: Sei $I = (a, b)$. Aufgrund der Monotonie und des Zwischenwertsatzes ist $f(I)$ wieder ein Intervall. Für beliebig kleines $\delta > 0$ sei $I_\delta := [a + \delta, b - \delta]$. (Falls z.B. $b = \infty$, betrachten wir stattdessen $[a + \delta, \frac{1}{\delta}]$.) Nach Satz 7.3 ist die Umkehrfunktion g auf $f([a + \delta, b - \delta])$ stetig. Da $\delta > 0$ beliebig ist, ist g auf ganz $f(I)$ stetig.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine in y_0 stetige Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f(y) - f(y_0) = \varphi(y)(y - y_0)$, $\varphi(y_0) = f'(y_0)$. Da f streng monoton ist und $f'(y_0) \neq 0$, gilt $\varphi(y) \neq 0$ für $y \in I$. Mit $x = f(y)$, also $y = g(x)$, folgt

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{\varphi(g(x))}(x - x_0)\,, \quad \varphi(g(x)) \text{ ist in } x_0 \text{ stetig und } \varphi(g(x_0)) = f'(y_0)\,.$$

□

Bemerkung: Die Formel für die Ableitung der Inversen erhält man auch aus der Identität $x = f(g(x))$ und der Kettenregel.

Beispiel: Es gilt für $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, dass $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Mit $\tan(\arctan y) = y$ folgt $\tan'(\arctan y) \arctan' y = 1$, also $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

8.5 Mittelwertsatz und Folgerungen

Definition 8.10 (Lokales und globales Minimum/Maximum)**.** *$f\colon D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein*

i) globales Minimum (Maximum), falls $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) für alle $x \in D$ gilt.

ii) lokales Minimum (Maximum), falls es eine Umgebung $B_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$) für alle $x \in D \cap B_\varepsilon(x_0)$ gilt.

Bezeichnungen: Lokale/globale Minima oder Maxima heißen auch Extrema und die Stellen $x_0 \in D$, an denen das Extremum von f angenommen wird, heißen Extremalstellen, bzw. auch Minimum- bzw. Maximumstellen von f. Die Stelle x_0 eines lokalen Minimums (Maximums) von f wird auch lokaler Minimierer (Maximierer) von f genannt.

Satz 8.11 (Notwendiges Kriterium für Extrema)**.** *$f\colon D \to \mathbb{R}$ besitze in einem inneren Punkt $x_0 \in D^\circ$ ein lokales Extremum und f sei in x_0 differenzierbar. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Sei x_0 z.B. ein lokales Maximum. Dann gilt für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und alle $x \in B_\varepsilon(x_0)$, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{für } x > x_0\,, \quad \text{also } f'(x_0) \leq 0\,,$$
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{für } x < x_0\,, \quad \text{also } f'(x_0) \geq 0\,,$$

und somit $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkungen:

1) Wir bezeichnen mit

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'_-(x_0)\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'_+(x_0)$$

die linksseitige (bzw. rechtsseitige) Ableitung von f in x_0.

Falls $f'(x_0)$ existiert, so gilt $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

2) Satz 8.11 gilt nicht, falls x_0 Randpunkt ist. Falls aber z.B. x_0 rechter Randpunkt ist und f dort eine lokales Maximum hat, dann gilt $f'_-(x_0) \geq 0$.

3) Die Umkehrung von Satz 8.11 gilt nicht, wie man an dem Beispiel $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$ sieht.

Definition 8.12 (Stationärer/kritischer Punkt)**.** *Falls $f\colon I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 stationärer oder kritischer Punkt.*

Beispiel: $f(x) = (1 - x^2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $f'(x) = -4x(1 - x^2)$, also hat f die kritischen Punkte $x_0 = 0$ und $x_{1/2} = \pm 1$. Da $f \geq 0$ ist und $f(x_{1/2}) = 0$, folgt, dass f in $x_{1/2}$ globale Minima hat. In $x_0 = 0$ hat f ein lokales Maximum, aber kein globales, da $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$.

Satz 8.13 (Mittelwertsatz)**.** *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(x_0)\,. \tag{8.1}$$

Bemerkung: Ein Spezialfall ist der Satz von Rolle: Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis. 1) Beweis des Satzes von Rolle: Da f stetig ist nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an. Entweder ist f konstant, dann gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, oder f ist nicht konstant, dann existiert mindestens eine Extremalstelle $x_0 \in (a,b)$ und nach Satz 8.11 gilt $f'(x_0) = 0$.

2) Den allgemeinen Fall führen wir auf den Satz von Rolle zurück. Wir definieren dazu

$$F(x) \coloneqq f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,.$$

Damit gilt $F(a) = F(b)$ und es existiert nach dem Satz von Rolle ein $x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = 0$. Die Behauptung folgt nun, da $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

□

Bemerkung: Eine andere Formulierung des Mittelwertsatzes ist die folgende: f erfülle die Voraussetzungen von Satz 8.13. Sei $h \neq 0$ und $x \in [a,b]$, $x + h \in [a,b]$. Dann existiert ein $\theta \in (0,1)$, so dass

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \theta h)h \qquad \text{gilt.}$$

Korollar 8.14 (Schrankensatz)**.** *f sei stetig auf $[a,b]$ und in (a,b) differenzierbar und es gebe ein $L > 0$, so dass $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (a,b)$ gilt. Dann folgt*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in [a,b]\,,$$

d.h. eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung ist Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $a \leq y < x \leq b$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y). \tag{8.2}$$

Daraus folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|.$$

□

[2.12.204]

[9.12.2024]

Korollar 8.15. *f sei in (a, b) differenzierbar. Dann gilt*

1) *Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f konstant auf (a, b).*

2) *Falls $f'(x) > 0$ (bzw. < 0) für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist f streng monoton wachsend (fallend) auf (a, b).*

3) *Es gilt $f'(x) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f monoton wachsend (fallend) auf (a, b) ist.*

4) *Falls $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in (a, b)$ gilt, dann hat f in x_0 ein*

   a) *Minimum, falls $f' \leq 0$ in (a, x_0) und $f' \geq 0$ in (x_0, b)*

   b) *Maximum, falls $f' \geq 0$ in (a, x_0) und $f' \leq 0$ in (x_0, b)*

Beweis. 1) Sei $c = f(x_0)$ für ein $x_0 \in (a, b)$ und $x \in (a, b)$ ein anderer Punkt. Nach dem Mittelwertsatz gilt $f(x) = f(x_0) = c$.

2) Sei $a \leq y < x \leq b$. Dann existiert $\xi \in (x, y)$ so dass (8.2) gilt. Da $f'(\xi) > 0$ (bzw. < 0) gilt, folgt $f(x) > f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$).

3) "$\Rightarrow$" folgt wie 2), die andere Richtung folgt aus der Definition der Ableitung über den Differenzenquotienten.

4) folgt aus 3)

□

Satz 8.16 (Charakterisierung der Exponentialfunktion:)**.** *$f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und erfülle $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$. Dann gilt $f(x) = Ce^x$ für ein $C \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir definieren $g(x) := f(x)e^{-x}$, womit gilt $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$. Nach Korollar 8.15, Teil 1), folgt $g(x) = C$ für alle $x \in I$. □

Satz 8.17 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.** *$f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und differenzierbar in (a,b). Es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt $g(b) \neq g(a)$ und es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis. Hier ist zunächst zu beachten, dass wir nicht einfach (8.1) auf f und g anwenden können, da man damit nur $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$ erhält, wobei im allgemeinen $\xi_1 \neq \xi_2$ gilt.
Es gilt $g(a) \neq g(b)$, da es ansonsten nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a,b)$ gibt mit $g'(\xi) = 0$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist.
Wir können also die folgende Funktion definieren

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) .$$

Damit gilt $F(b) = F(a)$, also existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 8.18 (L'Hospitalsche Regel)**.** *$f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Falls entweder*

a) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \searrow a$

oder

b) $f(x) \to \pm\infty$ und $g(x) \to \pm\infty$ für $x \searrow a$

dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{falls } \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existiert.}$$

Entsprechendes gilt für $x \nearrow b$, $x \to \pm\infty$.

Beweis. a) Da $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, ist g streng monoton und daher insbesondere $g(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$. Wir können f und g stetig in $x = a$ durch $f(a) = g(a) = 0$ fortsetzen. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Falls $x \to a$, dann auch $\xi \to a$.

b) Sei $A := \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass

$$\Big|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\Big| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in (a, a+\delta).$$

Aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt, dass für $x, y \in (a, a+\delta)$ mit $x \neq y$ gilt

$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - A\Big| < \varepsilon .$$

Wir schreiben nun

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}} .$$

Es gilt $\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} \to 1$ für festes y und $x \to a$. Damit gilt

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\Big| < \varepsilon \qquad \text{für } x, y \in (a, a+\tilde{\delta}) \,,$$

wobei $\tilde{\delta}$ hinreichend klein ist, und es folgt

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - A\Big| < 2\varepsilon \qquad \text{für alle } x \in (a, a+\min(\delta, \tilde{\delta})) \,.$$

Den Fall $x \nearrow b$ behandelt man analog und den Fall $x \to \infty$ kann man mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ auf den Fall $y \searrow 0$ zurückführen. □

Beispiele:

1)

$$\lim_{x\searrow 0} x \ln x = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

2)

$$\lim_{x\searrow 0}\Big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\searrow 0} \frac{x-\sin x}{x \sin x} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{x\searrow 0} \frac{1-\cos x}{x\cos x + \sin x} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0$$

3)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\big(1+e^x\big)}{\sqrt{1+x^2}} \underbrace{=}_{\text{L'Hospital}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = 1$$

Es ist manchmal hilfreich zu wissen, dass man eine Funktion als Ableitung einer anderen Funktion schreiben kann. Wir führen dazu folgende Definition ein.

Definition 8.19. *Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.*

Aus Korollar 8.15 1) folgt, dass falls F_1, F_2 Stammfunktionen zu f sind, so gilt $F_1 = F_2 + const$. Im Kapitel zur Integration werden wir effiziente Methoden zur Berechnung von Stammfunktionen kennenlernen.

8.6 Konvexität

Konvexe Funktionen spielen eine zentrale Rolle in der Analysis. Wir werden sehen, dass eine zweifach differenzierbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ist, wenn die zweite Ableitung in ganz I nicht negativ ist, d.h. wenn die Ableitung monoton wachsend ist. Konvexität ist aber auch für nicht differenzierbare Funktionen definiert. Im folgenden sei $D \subset \mathbb{R}$ ein, nicht notwendigerweise offenes, Intervall.

Definition 8.20 (konvexe Funktion)**.** *Eine Funktion* $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *heißt* *konvex (konkav)* *auf* D*, falls für alle* $x,y\in D$ *und* $\lambda\in(0,1)$ *gilt*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\overset{(\geq)}{\leq}\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\,, \tag{8.3}$$

d.h. die Sekante durch zwei Punkte des Graphen von f *liegt immer oberhalb (unterhalb) des Graphen von* f*.*
Gilt die Ungleichung strikt für alle $x\neq y$*, so heißt* f *strikt konvex (konkav).*

Bemerkung: Eine konvexe Funktion muss nicht differenzierbar sein, wie das Beispiel $f(x)=|x|$ zeigt.

Satz 8.21 (Äquivalente Formulierung der Konvexität über Differenzenquotienten)**.** $f\colon D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *is genau dann konvex, wenn für alle Tripel* $x,y,z\in D$ *mit* $x<y<z$ *gilt*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\,, \tag{8.4}$$

bzw.

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\,. \tag{8.5}$$

Beweis. Nach (8.3) ist f konvex genau dann, wenn für alle $x,z\in D$, $\lambda\in(0,1)$ gilt

$$f(\lambda x+(1-\lambda)z)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(z)\,. \tag{8.6}$$

Wir setzen nun $y=\lambda x+(1-\lambda)z$, also $\lambda=\frac{z-y}{z-x}$ und $1-\lambda=\frac{y-x}{z-x}$. Also gilt (8.6) genau dann, wenn

$$f(y)\leq\frac{z-y}{z-x}f(x)+\frac{y-x}{z-x}f(z)\,, \tag{8.7}$$

also genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &(z-x)f(y)\leq(z-y)f(x)+(y-x)f(z)\\ \iff\quad &(z-y)(f(y)-f(x))\leq(y-x)(f(z)-f(y)) \end{aligned}$$

was gerade (8.4) entspricht.
Ebenso ist (8.7) äquivalent zu

$$f(y)-f(x)\leq\frac{y-x}{z-x}\big(f(z)-f(x)\big)\qquad\iff\qquad\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,,$$

welches der ersten Ungleichung in (8.5) entspricht.
Weiterhin ist (8.7) äquivalent zu

$$f(y)-f(z)\leq\frac{z-y}{z-x}f(x)+\Big(\frac{y-x}{z-x}-1\Big)f(z)=\frac{z-y}{z-x}f(x)+\frac{y-z}{z-x}f(z)$$

und wir erhalten die Äquivalenz zur zweiten Ungleichung in (8.5). □

Bemerkungen:

(i) f ist genau dann strikt konvex, wenn in (8.4) bzw. (8.5) strikte Ungleichungen gelten.

(ii) Aus Satz (8.21) folgt insbesondere, dass eine konvexe Funktion im Inneren ihres Definitionsbereichs stetig ist (Übungsaufgabe).

Satz 8.22 (Konvexitätskriterium für differenzierbare Funktionen)**.** *$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. f ist genau dann in (a,b) (strikt) konvex, falls f' in (a,b) (streng) monoton wächst.*

Beweis. f sei (strikt) konvex. Dann gilt für $x < \tilde{y} < y < \hat{y} < z$ aufgrund von (8.4) und (8.5), dass

$$\frac{f(\tilde{y}) - f(x)}{\tilde{y} - x} \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \overset{(<)}{\le} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \le \frac{f(z) - f(\hat{y})}{z - \hat{y}} .$$

Nur führen wir die Limiten $\tilde{y} \to x$ und $\hat{y} \to z$ durch und erhalten

$$f'(x) \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \overset{(<)}{\le} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \le f'(z) \qquad \text{für alle } x < z\,;\ x, z \in (a,b)\,, \tag{8.8}$$

also die (strenge) Monotonie von f'.
Sei nun f' (streng) monoton wachsend in (a,b) und $a \le x < y < z \le b$. Nach dem Mittelwertsatz existieren $\xi_1 \in (x,y)$ und $\xi_2 \in (y,z)$ so dass

$$f'(\xi_1) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \text{und} \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

gilt. Da $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$ (bzw. $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$) nach Voraussetzung gilt, ist also (8.4) erfüllt. □

Korollar 8.23. *$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist.*
Falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, dann ist f strikt konvex.

Bemerkung: Die Umkehrung der zweiten Aussage gilt nicht, wie das Beispiel $f(x) = x^4$ zeigt.

Beweis. a) Es gilt nach Korollar 8.15 3), dass $f'' \ge 0$ genau dann, wenn f' monoton wachsend ist, also nach Satz 8.22 genau dann, wenn f konvex ist.

b) Falls $f'' > 0$ gilt, so ist nach Korollar 8.15 2) f' streng monoton wachsend, also f nach Satz 8.22 strikt konvex.

□

Beispiele:

1) e^x ist strikt konvex auf $\mathbb{R}$, $\ln x$ ist strikt konkav aus $\mathbb{R}_+$.

2)

$$x^p \text{ ist strikt } = \begin{cases} \text{konvex auf } \mathbb{R}_+ & : \quad \text{falls } p > 1 \text{ oder } p < 0 \\ \text{konkav auf } \mathbb{R}_+ & : \quad \text{falls } p \in (0,1) \end{cases}$$

8.7 Fundamentale Ungleichungen

Satz 8.24 (Jensensche Ungleichung). *$f: D \to \mathbb{R}$ sei konvex, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und $x_1, \cdots, x_n \in D$ seien beliebig. Dann gilt*

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\,. \tag{8.9}$$

Falls f strikt konvex ist, so gilt "=" nur, falls $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Entsprechendes gilt für konkaves f mit " $\geq$".

Beweis. Wir führen den Beweis über Induktion. Für $n = 2$ ist die Aussage gerade (8.3). Wir nehmen nun an, die Ungleichung gilt für n und wollen auf den Fall $n+1$ schließen. Dazu sei $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und $x := \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\lambda}$. Dann gilt nach (8.3) und der Induktionsannahme

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\Big) \leq \lambda f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)\,.$$

□

Korollar 8.25 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel). *Es seien $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in (0,1)$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann gilt*

$$\Pi_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\,,$$

also insbesondere

$$\Big(\Pi_{i=1}^n x_i\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\,.$$

Gleichheit gilt, falls $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Beweis. Da ln strikt konkav ist, folgt aus (8.9), dass

$$\ln\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln x_i$$

und Gleichheit gilt nur, falls $x_1 = x_2 = \cdots x_n$. Also folgt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \exp\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln x_i\Big) = \exp\Big(\sum_{i=1}^n \ln x_i^{\lambda_i}\Big) = \Pi_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}\,.$$

□

Definition 8.26 (p-Norm). *Zu $p \in [1, \infty)$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Für $p = 2$ nennen wir diese Norm die euklidische Norm. Sie wird üblicherweise auch mit $|x| := \|x\|_2$ bezeichnet.

Bemerkung: Wir sehen, dass $\|\cdot\|_p$ homogen und positiv definit ist. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Minkowski-Ungleichung (siehe Korollar 8.28 unten). Also ist durch $\|\cdot\|_p$ tatsächlich eine Norm definiert.

Korollar 8.27 (Hölder-Ungleichung)**.** [13] *Sei $p > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt die Hölder-Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_{p'} \tag{8.10}$$

Für $p = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Beweis. OBdA seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$, Nach Korollar 8.25 gilt

$$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \le \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} \,,$$

also

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_{p'} \underbrace{\left(\frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1} |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} \right)}_{=1} = \|x\|_p \|y\|_{p'} \,.$$

□

Korollar 8.28 (Minkowski-Ungleichung)**.** [14]
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Für $p \ge 1$ gilt

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \,.$$

Beweis. Für $p = 1$ folgt die Ungleichung aus der Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion. Sei also $p > 1$. Sei $s_i := |x_i + y_i|^{p-1}$, $s = (s_1, \dots, s_n)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann gilt

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| s_i \le \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| s_i + |y_i| s_i \big) \overset{(8.10)}{\le} \|x\|_p \|s\|_{p'} + \|y\|_p \|s\|_{p'} \,.$$

Da $p' = \frac{p}{p-1}$ ist, folgt $s_i^{p'} = |x_i + y_i|^p$, also $\|s\|_{p'} = \|x + y\|_p^{\frac{p}{p'}} = \|x + y\|_p^{p-1}$ und somit

$$\|x + y\|_p^p \le \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big) \|x + y\|_p^{p-1} \,.$$

□

[11.12.2024]

[16.12.2024]

[13] Otto Hölder (1859-1937)
[14] Hermann Minkowski (1864-1909)

9 Das eindimensionale Riemann-Integral

In diesem Kapitel ist unser Ziel, Flächeninhalte zu berechnen, indem wir eine Fläche durch einfache geometrische Figuren approximieren, deren Flächeninhalte bekannt sind, wie z.B. Rechtecke. Wir besprechen hier das sogenannte Riemann-Integral; ein allgemeinerer und flexiblerer Integralbegriff ist das Lebesgue-Integral, das wir in Analysis III kennenlernen werden.
Wir definieren das Integral zunächst auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen und für beschränkte Funktionen. Wir werden später sehen, wie man den Begriff auf unbeschränkte Intervalle und unbeschränkte Funktionen erweitern kann.

9.1 Integrierbare Funktionen

Es sei zunächst $I = [a,b]$, also abgeschlossen und beschränkt, und $f \in B(I) = B([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$.

Definition 9.1 (Riemannsche Summen)**.** *1) Eine* <u>*Zerlegung*</u> *$\mathcal{Z}$ von $I = [a,b]$ in Teilintervalle I_j der Länge $|I_j|$, $j = 1, \cdots, k$, ist eine Menge von Punkten $x_0, \cdots, x_k \in \mathbb{R}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Die Punkte x_i heißen* <u>*Teilpunkte*</u> *von $\mathcal{Z}$ und es gilt $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $\Delta x_j := x_j - x_{j-1} = |I_j|$.*

Die <u>*Feinheit der Zerlegung*</u> *ist $\Delta(\mathcal{Z}) = \max\big(\Delta x_1, \cdots, \Delta x_k\big)$.*

2) Sei $\xi_j \in I_j$ und $f \in B(I)$. Dann ist

$$S_{\mathcal{Z}}(f) = S_{\mathcal{Z}}(f,\xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\Delta x_j$$

eine <u>*Riemannsche Zwischensumme*</u>*.*

3) Zu $f \in B(I)$ sei

$$\underline{m_j} := \inf_{I_j} f = \inf\{f(x) \mid x \in I_j\}$$
$$\overline{m_j} := \sup_{I_j} f = \sup\{f(x) \mid x \in I_j\}$$

und wir definieren

$$\underline{\text{Obersumme:}} \qquad \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) := \sum_{j=1}^{k} \overline{m_j}\Delta x_j\,,$$

$$\underline{\text{Untersumme:}} \qquad \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) := \sum_{j=1}^{k} \underline{m_j}\Delta x_j\,.$$

Damit gilt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \le S_{\mathcal{Z}}(f,\xi) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f)$$

für alle Zwischensummen.

Definition 9.2 (Verfeinerung). *1) Eine Zerlegung $\mathcal{Z}^*$ heißt* Verfeinerung *der Zerlegung $\mathcal{Z}$, wenn die Teilpunkte von $\mathcal{Z}$ auch Teilpunkte von $\mathcal{Z}^*$ sind.*

2) Wir nennen die gemeinsame Verfeinerung *$\mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2$ zweier Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ von I diejenige Zerlegung, deren Teilpunkte die von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ sind.*

Lemma 9.3. *Ist $\mathcal{Z}^*$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so gilt*

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f)\,.$$

Beweis. Falls $I_l^* \subset I_j$ so gilt $\inf_{I_j} f \leq \inf_{I_l^*} f$ und $\sup_{I_l^*} f \leq \sup_{I_j} f$. □

Lemma 9.4. *Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ von I gilt $\underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f)$.*

Beweis. Für $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2$ gilt $\underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f)$. □

Definition 9.5 (Ober- und Unterintegral). *Zu $f \in B(I)$ definieren wir*

Unterintegral:	$\underline{I}(f) := \sup\{\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } I\}\,,$
Oberintegral:	$\overline{I}(f) := \inf\{\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } I\}\,.$

Bemerkung: Diese Definition ist sinnvoll, da

$$|I| \inf_I f \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq |I| \sup_I f$$

für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ gilt.

Lemma 9.6. *Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von I, Dann gilt*

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f)\,.$$

Beweis. Lemma 9.4 impliziert $\underline{I}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f)$ für alle $\mathcal{Z}$ und daher gilt $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. □

Definition 9.7 (Riemann-integrierbare Funktionen). *Eine Funktion $f \in B([a,b])$ heißt* Riemann-integrierbar, *falls $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Dann heißt $I(f) := \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ das* bestimmte Riemann-Integral *von f über $[a,b]$.*

Bezeichnungen: $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f\,dx$, $\int_{[a,b]} f\,dx$, $\int_I f\,dx$.
Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen aus $B(I)$ bezeichnen wir mit $R(I)$.

Satz 9.8 (Integrabilitätskriterium I)**.** *Sei $f \in B(I)$. Dann gilt $f \in R(I)$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von I gibt, so dass*

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) < \varepsilon\,. \tag{9.1}$$

Beweis. Sei $f \in R(I)$. Zunächst folgt aus Definition 9.5, dass es zu $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_1$ gibt, so dass $0 \le \overline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) - \overline{I}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ebenso gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}_2$, so dass $0 \le \underline{I}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2$ gilt nach Lemma 9.4 und da $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$, dass (9.1) gilt.
Es gebe nun eine Zerlegung $\mathcal{Z}$, die (9.1) erfüllt. Dann gilt nach Lemma 9.6, dass $0 \le \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) < \varepsilon$ gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$, also $f \in R(I)$.

□

Satz 9.9 (Integrabilitätskriterium II)**.** *Sei $f \in B(I)$. Dann ist $f \in R(I)$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) < \varepsilon$ für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von I mit $\Delta(\mathcal{Z}) < \delta$ gilt.*

Beweis. $\Leftarrow$: folgt aus Satz (9.8)

$\Rightarrow$: Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 9.8 gibt es eine Zerlegung $\mathcal{Z}^* = \{x_0^*, \cdots, x_l^*\}$ mit $\overline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von I mit $\Delta(\mathcal{Z}) < \delta$, wobei δ noch geeignet zu wählen ist. Sei $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z} \vee \mathcal{Z}^*$. Nach Lemma 9.3 gilt $\overline{S}_{\mathcal{Z}'}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}'}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ober- und Untersumme zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ unterscheiden sich zur Ober- und Untersumme zu $\mathcal{Z}'$ höchstens in l Summanden. Daraus folgt

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}'}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}'}(f) + 2\|f\|_\infty l\delta\,.$$

Wenn wir $\delta = \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty l}$ wählen, so folgt also

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) < \varepsilon.$$

□

Korollar 9.10. *$(\mathcal{Z}_n)$ sei eine Folge von Zerlegungen von I mit $\Delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$. Zu $f \in R(I)$ sei $(S_{\mathcal{Z}_n}(f))$ eine Folge von Zwischensummen zu $(\mathcal{Z}_n)$. Dann gilt*

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{Z}_n}(f)\,.$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach Satz 9.9 ein $\delta > 0$, so dass $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) < \varepsilon$ falls $\Delta(\mathcal{Z}) < \delta$. Da $\Delta(\mathcal{Z}_n) \to 0$, können wir ein n_0 finden, so dass $\Delta(\mathcal{Z}_n) < \delta$ für $n \ge n_0$ gilt. Damit folgt $\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) < \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Da $\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) \le I(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f)$ und $\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) \le S_{\mathcal{Z}_n}(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f)$ gilt, folgt

$$\left|I(f) - S_{\mathcal{Z}_n}(f)\right| < \varepsilon\,.$$

□

9.2 Eigenschaften des Integrals

Satz 9.11 (Linearität des Integrals)**.** *$R([a,b])$ ist ein reeller Vektorraum, d.h. aus $f,g \in R([a,b])$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha f + \beta g \in R([a,b])$. Außerdem gilt*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx\,.$$

Beweis. i) Sei $h = \alpha f + \beta g$. Dann gilt

$$|h(x) - h(y)| \le |\alpha||f(x) - f(y)| + |\beta||g(x) - g(y)| \qquad \text{für alle } x,y \in [a,b]\,.$$

Daraus folgt

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(h) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(h) \le |\alpha|\big|\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f)\big| + |\beta|\big|\overline{S}_{\mathcal{Z}}(g) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(g)\big|$$

für eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$. Zu $\varepsilon > 0$ seien $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ Zerlegungen mit

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha| + |\beta|)} \quad \text{und} \quad \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(g) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_2}(g) < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha| + |\beta|)}\,.$$

Dann folgt für $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}_1 \vee \mathcal{Z}_2$, dass $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(h) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(h) < \varepsilon$, also nach Satz 9.8, dass $h \in R([a,b])$.

ii) Für alle Zwischensummen gilt

$$S_{\mathcal{Z}}(\alpha f + \beta g, \xi) = \alpha S_{\mathcal{Z}}(f,\xi) + \beta S_{\mathcal{Z}}(g,\xi),$$

also nach Korollar 9.10 die Behauptung.

□

Satz 9.12. *Es seien $f,g \in R([a,b])$. Dann gilt auch $fg \in R([a,b])$ und $|f| \in R([a,b])$. Falls außerdem $|g| \ge c > 0$, dann ist auch $f/g \in R([a,b])$.*

Der Beweis des Satzes ist eine Übungsaufgabe.

[16.12.2024]

[18.12.2024]

Satz 9.13 (Monotonie des Integrals)**.** *Es seien $f,g \in R([a,b])$ mit $f \le g$ in $[a,b]$. Dann gilt $\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$. Insbesondere gilt auch*

$$\Big|\int_a^b f\,dx\Big| \le \int_a^b |f|\,dx \qquad \text{und} \qquad \Big|\int_a^b fg\,dx\Big| \le \|f\|_\infty \int_a^b |g|\,dx\,.$$

Beweis. Die Funktion $h := g - f$ ist nach Voraussetzung nichtnegativ auf $[a,b]$ und Riemann-integrierbar nach Satz 9.11. Aus der Definition des Integrals und Satz 9.11 folgt $0 \le \int_a^b h\,dx = \int_a^b g\,dx - \int_a^b f\,dx$, also $\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$. Da $\pm f \le |f|$ und $\pm fg \le \|f\|_\infty |g|$ folgt aus dieser Abschätzung auch der zweite Teil der Behauptung. □

Definition 9.14 (L^2-Norm)**.** *Zu $f \in R([a,b])$ definieren wir*

$$\|f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2(a,b)} := \Big(\int_a^b |f|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \,,$$

die $\underline{L^2\text{-Norm von } f}$ auf $[a,b]$.

Bemerkung: Die L^2-Norm definiert eine Norm auf dem Raum $C^0([a,b])$. Positive Definitheit und Homogenität folgen direkt, die Dreiecksungleichung wird unten (Korollar 9.16) bewiesen.

Satz 9.15 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Für $f, g \in R([a,b])$ gilt*

$$\Big| \int_a^b f g \, dx \Big| \le \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \,.$$

Beweis. Es gilt $0 \le \int_a^b \big(f - \lambda g\big)^2 \, dx$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Aussage folgt für $\lambda := \frac{\|f\|_{L^2}}{\|g\|_{L^2}}$. □

Korollar 9.16 (Dreiecksungleichung)**.** *Es seien $f, g \in R([a,b])$. Dann gilt*

$$\|f + g\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \,.$$

Beweis.

$$\|f + g\|_{L^2}^2 \le \|f\|_{L^2}^2 + 2 \int_a^b |fg| \, dx + \|g\|_{L^2}^2 \overset{\text{Satz 9.15}}{\le} \Big(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \Big)^2 \,.$$

□

Satz 9.17. *Es gilt*

a) $C^0([a,b]) \subset R([a,b])$

b) Jede monotone, beschränkte Funktion ist über $[a,b]$ integrierbar.

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Beispiele:

1) $f(x) = \lambda$ für alle x, dann folgt $\int_a^b f \, dx = \lambda(b - a)$.

2) $f(x) = x$, $I = [0,1]$. Wir wählen die äquidistante Zerlegung $x_j = a + \frac{b-a}{n} j = \frac{j}{n}$. Damit folgt

$$S_n := \sum_{j=1}^n f(x_j) \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} \,.$$

Fazit: Berechnung des Integrals über die Definition ist in der Regel mühsam. Es ist oft einfacher, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu benutzen, den wir im übernächsten Kapitel kennenlernen werden.

Bemerkung: Falls f über I integrierbar ist, dann auch über jedes Teilintervall.

Definition 9.18 (orientiertes Integral)**.** *Es sei $f \in R([a,b])$ und $\alpha, \beta \in [a,b]$. Dann definieren wir*

$$\int_\alpha^\beta f\,dx := -\int_\beta^\alpha f\,dx \qquad \text{falls } \alpha > \beta$$

und

$$\int_\alpha^\beta f\,dx = 0 \qquad \text{falls } \alpha = \beta\,.$$

Satz 9.19. *Es sei $f \in R(I)$ und $\alpha, \beta, \gamma \in I$. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta f\,dx + \int_\beta^\gamma f\,dx = \int_\alpha^\gamma f\,dx\,.$$

Der Beweis des Satzes ist eine Übungsaufgabe.

9.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Definition 9.20 (Mittelwert)**.** *Zu $f \in R([a,b])$ heißt*

$$⨍_a^b f\,dx := \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$$

der <u>Mittelwert</u> von f über $[a,b]$.

Satz 9.21 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f \in C^0([a,b])$. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = ⨍_a^b f\,dx$.*

Beweis. Es gilt

$$\underline{m} := \min_{[a,b]} f \le ⨍_a^b f\,dx \le \max_{[a,b]} f =: \overline{m}.$$

Entweder $\underline{m} = \overline{m} = ⨍_a^b f\,dx$. Dann ist f konstant und $f(\xi) = ⨍_a^b f\,dx$ für alle $\xi \in [a,b]$.
Falls f nicht konstant ist, so existieren $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ mit $f(\xi_1) = \underline{m}$ und $f(\xi_2) = \overline{m}$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in (\min(\xi_1,\xi_2), \max(\xi_1,\xi_2))$ mit $f(\xi) = ⨍_a^b f\,dx$. □

9.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 9.22 (Hauptsatz). *a) Sei $c \in [a,b]$ und $f \in C^0([a,b])$. Dann ist durch $F(x) := \int_c^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$, eine Stammfunktion $F \in C^1([a,b])$ zu f gegeben.*

b) Ist $F \in C^1([a,b])$ eine Stammfunktion zu $f \in C^0([a,b])$, dann gilt

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b .$$

Beweis. a) Sei $\Delta_h F(x) = \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x))$ mit $h \neq 0$, $x \in [a,b]$ und $x+h \in [a,b]$. Es gilt

$$\int_c^{x+h} f(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\,, \qquad \text{also } \Delta_h F(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

und somit

$$\left|\Delta_h F(x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt\right| \le \sup_{\{t\,|\,|x-t|\le h\}} |f(t) - f(x)| \to 0$$

für $h \to 0$, da f stetig ist.

b) Sei $\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ und F eine beliebige Stammfunktion. Dann ist $\Phi(x) = F(x) + k$ für ein $k \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in [a,b]$. Da $\Phi(a) = 0$ gilt, folgt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)\,.$$

□

Definition 9.23 (unbestimmtes Integral). *Zu $f \in C^0(I)$ bezeichnet $\int f\,dx$ die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu f und heißt* unbestimmtes Integral *von f. Ist also F eine Stammfunktion, so ist die Gesamtheit durch $\{F + k \,|\, k \in \mathbb{R}\}$ gegeben.*

Beispiele:

1) $f(x) = x^n$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$f(x) = x^\alpha\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,\ x > 0: \qquad F(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & : \quad \alpha \neq -1 \\ \ln x & : \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

Falls $x < 0$ ist, so gilt für $f(x) = \frac{1}{x}$, dass $F(x) = \ln|x|$.

2)

$$f(x) = \sin x\,, \quad F(x) = -\cos x\,; \qquad f(x) = \cos x\,, \quad F(x) = \sin x$$

3) Es gilt $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $|x| < \frac{\pi}{2}$ und damit

$$\int_0^x \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \tan t\Big|_0^x = \tan x \qquad \text{für } 0 \le |x| < \frac{\pi}{2}$$

4) $f(x) = e^{Cx}$, $F(x) = \frac{1}{C} e^{Cx}$

5) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \arctan x$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \arcsin x$

[18.12.2024]

[8.1.2024]

9.5 Partielle Integration

Satz 9.24. *Es seien $f, g \in C^1([a,b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = -\int_a^b f(x) g'(x)\, dx + f(x)g(x)\Big|_a^b .$$

Beweis. Die Aussage folgt aus der Produktregel und dem Hauptsatz 9.22. □

Korollar 9.25. *Sei $f \in C^0([a,b])$, F Stammfunktion zu f und $g \in C^1([a,b])$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x) g'(x)\, dx .$$

Beispiele:

1) Es gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\, dx = \frac{\pi}{4} .$$

Dies folgt aus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\, dx = -\cos x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2\, dx$$

und

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin x)^2 + (\cos x)^2\right) dx .$$

2)

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int \frac{x}{x}\, dx = x\ln x - x$$

3)
$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{-\left(\sqrt{1-x^2}\right)'} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

4)
$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)'} dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

5) Ein Beispiel für mehrfache partielle Integration:
$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx \\ &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\Big(\frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx\Big),\end{aligned}$$
also folgt
$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big).$$

9.6 Substitutionsregel

Satz 9.26. *I und J seien beschränkte, abgeschlossene Intervalle, $f \in C^0(I)$, $\varphi \in C^1(J)$ mit $\varphi(J) \subset I$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in J$:*
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Bemerkung: Die Formel gilt auch, falls f nur Riemann-integrierbar ist.

Beweis. Sei $F \in C^1(I)$ Stammfunktion zu f und $g(t) := F(\varphi(t))$. Damit gilt $g \in C^1(J)$ und $g'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$, also
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta g'(t)\,dt = g(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$
□

Merkregel: $x = \varphi(t)$, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$, also $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Beispiele:

1) $\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$

2) Für $c \neq 0$: $\quad \int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx$

3) $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \ln|\varphi(t)|$

4)
$$\int \frac{Bt+C}{t^2+2bt+c}\,dt \qquad \text{mit } B, C, b, c \in \mathbb{R}$$

Idee: Schreibe Zähler als Ableitung des Nenners: also mit $q(t) = t^2 + 2bt + c$ und $q'(t) = 2t + 2b$ folgt
$$\frac{Bt+C}{q(t)} = \frac{B}{2}\Big(\frac{q'(t)}{q(t)}\Big) + \frac{C-Bb}{q(t)}$$
und somit
$$\int \frac{Bt+C}{t^2+2bt+c}\,dt = \frac{B}{2}\ln|q(t)| + (C-Bb)\int \frac{1}{q(t)}\,dt\,.$$
Es bleibt also noch $\int \frac{1}{q(t)}\,dt$ zu berechnen. Dazu unterscheiden wir folgende Fälle:

a) $c > b^2$: Dann gilt mit $\varphi(t) = \frac{t+b}{\sqrt{c-b^2}}$, $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}$, dass
$$\frac{1}{q(t)} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)+1} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\frac{d}{dt}\arctan\varphi(t)\,,$$
also
$$\int \frac{dt}{q(t)} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}}\arctan\frac{t+b}{\sqrt{c-b^2}}\,.$$

b) $c = b^2$: Dann folgt
$$\int \frac{dt}{q(t)} = \int \frac{dt}{(t+b)^2} = -\frac{1}{t+b}\,.$$

c) $c < b^2$: Dann schreiben wir
$$\frac{1}{q(t)} = \frac{1}{(t+b)^2 - \underbrace{(b^2-c)}_{=:d^2}} = \frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{t+b-d} - \frac{1}{t+b+d}\Big)$$
und es folgt
$$\int \frac{dt}{q(t)} = \frac{1}{2\sqrt{b^2-c}}\ln\Big|\frac{t+b-\sqrt{b^2-c}}{t+b+\sqrt{b^2-c}}\Big|\,.$$

5) Der Fall 4c) ist ein Beispiel für die sogenannte *Partialbruchzerlegung*, die wir oft benutzen können, wenn wir echt gebrochen rationale Funktionen integrieren wollen, also Funktionen der Form $\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei p und q Polynome sind und p kleineren Grad hat als q. Wir diskutieren

hier noch ein einfaches Beispiel und verweisen für eine ausführlichere Diskussion z.B. auf Hildebrandt, Kapitel 3.10. Wir wollen

$$\int \frac{1}{t^3 - t^2}\, dt$$

berechnen. Dazu ist zunächst die Partialbruchzerlegung zu bestimmen. Da $t^3 = t^2(t-1)$, machen wir folgenden Ansatz

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^3 - t^2} &= \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t-1} \\
&= \frac{1}{t^3 - t^2}\big(at(t-1) + b(t-1) + ct^2\big) \\
&= \frac{1}{t^3 - t^2}\big(t^2(a+c) + t(b-a) - a\big)\,.
\end{aligned}$$

Es folgt also $a = -1$, $b = -1$ und $c = 1$ und somit

$$\int \frac{1}{t^3 - t^2}\, dt = \ln|t-1| - \ln|t| + \frac{1}{t}\,.$$

9.7 Uneigentliche Integrale I (unbeschränktes Integrationsgebiet)

Wir haben bisher nur Integrale über ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall betrachtet. Integrale zB der Form $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ sind damit nicht definiert. Es liegt jedoch nahe, sie über

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2}\, dx$$

zu definieren, falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Definition 9.27 (Uneigentliches Integral)**.** *Es sei $I = [a,\infty)$ und $f \in \mathcal{R}([a,b])$ für alle $b \in (a,\infty)$. Wir definieren*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx\,,$$

falls der Grenzwert existiert und nennen dies das <u>uneigentliche Integral</u> von f über $[a,\infty)$. Ansonsten heißt $\int_a^\infty f(x)\, dx$ divergent.
Falls $\int_a^b f(x)\, dx \to \pm\infty$ für $b \to \infty$, so schreiben wir $\int_a^\infty f(x)\, dx = \pm\infty$.

Im folgenden sei in diesem Kapitel immer $f \in \mathcal{R}([a,b])$ für alle $b < \infty$ vorausgesetzt.

Aus der Definition der Konvergenz folgt

Satz 9.28. *$\int_a^\infty f(x)\, dx$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\xi \geq a$ existiert, so dass*

$$\Big|\int_b^{b'} f(x)\, dx\Big| < \varepsilon \qquad \text{für alle } b, b' > \xi \text{ gilt.}$$

Definition 9.29 (Absolut konvergentes Integral)**.** *$\int_a^\infty f(x)\,dx$ heißt* <u>*absolut konvergent*</u>*, falls $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergiert.*

Satz 9.30. *Falls $\int_a^\infty f(x)\,dx$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)\,dx$.*

Beweis. Dies folgt aus

$$\Big|\int_b^{b'} f(x)\,dx\Big| \le \int_b^{b'} |f(x)|\,dx$$

und Satz 9.28. □

Satz 9.31 (Majorantenkriterium)**.** *Falls $g \in \mathcal{R}([a,b])$ für alle $b > a$ existiert, falls $g \ge 0$ und falls $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergiert und falls ein $y \ge a$ existiert, so dass $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \ge y$ gilt, dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)\,dx$ absolut.*

Beweis. Die Aussage folgt aus

$$\int_b^{b'} |f(x)|\,dx \le \int_b^{b'} g(x)\,dx$$

und Satz 9.28. □

[8.1.2024]

[13.1.2025]

Beispiele:

1) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

   Dazu bemerken wir zuerst, dass wir $\frac{\sin x}{x}$ durch 1 stetig in die Null fortsetzen können. Die Funktion ist also auf jedem beschränkten Intervall integrierbar.

   Nun sei $0 < b < b'$. Partielle Integration ergibt

$$\int_b^{b'} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_b^{b'} - \int_b^{b'} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\,,$$

   also

$$\Big|\int_b^{b'} \frac{\sin x}{x}\,dx\Big| \le \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} + \int_b^{b'} \frac{1}{x^2}\,dx \le \frac{3}{b} \to 0 \qquad \text{für } b \to \infty\,.$$

   Andererseits erhalten wir durch Vergleich mit der harmonischen Reihe, dass

$$\int_0^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{l=1}^{k} \int_{(l-1)\pi}^{l\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \ge \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l\pi} \underbrace{\int_{(l-1)\pi}^{l\pi} |\sin x|\,dx}_{=2}$$

$$\ge \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} \to \infty \qquad \text{für } k \to \infty.$$

2) Falls $|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha}$ für ein $C > 0$, für $\alpha > 1$ und für $x \geq x_0$ für ein $x_0 > 0$ gilt, dann ist $\int_y^\infty f(x)\,dx$ absolut konvergent für $y > 0$. Dies folgt durch Vergleich mit

$$\int_y^z \frac{1}{x^\alpha}\,dx = -\frac{1}{\alpha-1}x^{1-\alpha}\Big|_y^z = \frac{1}{\alpha-1}\big(y^{1-\alpha} - z^{1-\alpha}\big) \to \frac{y^{1-\alpha}}{\alpha-1} \qquad \text{für } z \to \infty\,.$$

Insbesondere sind für $y > 0$ und $\alpha > 1$ die Integrale $\int_y^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ und $\int_y^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ absolut konvergent.

3) Das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ kann existieren, auch wenn $f(x)$ nicht gegen Null konvergiert für $x \to \infty$. Ein Beispiel sind die *Fresnelschen Integrale* $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ und $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$. Es gilt nämlich

$$\int_b^c \sin(x^2)\,dx = \int_{b^2}^{c^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt = -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\Big|_{b^2}^{c^2} - \frac{1}{4}\int_{b^2}^{c^2} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dt \to 0 \qquad \text{für } b, c \to \infty\,.$$

4) Die Fakultätsfunktion kann man durch ein Integral darstellen. Es gilt

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt\,. \tag{9.2}$$

Dazu führen wir die *Gamma-Funktion* $\Gamma(x)$ folgendermaßen ein.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Satz 9.32. *Es gilt*

1) $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(n+1)$ *konvergiert*

3) $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus

$$\int_0^R e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^R = 1 - e^{-R} \to 1 \qquad \text{für } R \to \infty\,.$$

Weiterhin folgt aus $\frac{t^{n+2}}{(n+2)!} \leq e^t$, dass $e^{-t}t^n \leq (n+2)!t^{-2}$, also ist $\frac{C}{t^2}$ eine integrierbare Majorante für $e^{-t}t^n$ und damit konvergiert $\Gamma(n+1)$.

Die dritte Aussage folgt mittels partieller Integration. Es gilt

$$\int_0^R e^{-t}t^n\,dt = -e^{-t}t^n\Big|_0^R + n\int_0^R e^{-t}t^{n-1}\,dt$$

und damit $\Gamma(n+1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}t^n\,dt = n\Gamma(n)$. □

Insbesondere folgt (9.2) aus den Eigenschaften der Γ-Funktion.

Entsprechend dem obigen Vorgehen definieren wir Integrale der Form $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.
Außerdem sagen wir, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert, wenn sowohl $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert, als auch $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Diese Definition ist unabhängig von $a \in \mathbb{R}$.

Achtung: Wir definieren **nicht** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$. Falls dieser Grenzwert existiert, nennt man ihn *Cauchyschen Hauptwert.* Er kann existieren, ohne dass $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ und $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ existieren. Ein Beispiel ist $f(x) = x^3$.

Analog zu Definition 9.29 definieren wir folgendes.

Definition 9.33. *Wir sagen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ist absolut konvergent, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ konvergiert.*

Für absolut konvergente Integrale kann das Problem der Auslöschung, wie beim Cauchyschen Hauptwert, nicht auftreten. Es gilt

Satz 9.34 (Majorantenkriterium)**.** *$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ existiert genau dann, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass*

$$\int_{-R}^{R} |f(x)|\,dx \le C \qquad \textit{für alle } R > 0 \textit{ gilt.}$$

Beispiele:

1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \arctan x\Big|_{-R}^{R} = \pi\,.$$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ konvergiert da $e^{x^2} \ge 1 + x^2$. Es gilt darüberhinaus $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, was wir aber erst später mit Hilfe mehrdimensionaler Integration berechnen können.

9.8 Uneigentliche Integrale II (unbeschränkte Funktionen)

Wir betrachten nun Funktionen $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ (oder $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$), die auf kompakten Teilintervallen beschränkt und integrierbar sind, für die aber gelten kann, dass $\lim_{x\nearrow b} f(x) = \pm\infty$ (bzw. $\lim_{x\searrow a} f(x) = \pm\infty$).

Definition 9.35. *Falls $\lim_{\xi\nearrow b} \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx$ (bzw. $\lim_{\xi\searrow a} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$) existiert, so sagen wir, dass das Integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ konvergiert und setzen*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\xi\nearrow b} \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx \qquad \textit{bzw.} \qquad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\xi\searrow a} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx\,.$$

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ heißt absolut konvergent, falls $\int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$ konvergiert.

Satz 9.36 (Majorantenkriterium)**.** *Falls* $|f(x)| \le \varphi(x)$ *für alle* $x \in [a,b)$ *(bzw.* $(a,b]$*) und falls ein* $C > 0$ *existiert, so dass* $\int_a^\xi \varphi(x)\,dx \le C$ *(bzw.* $\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \le C$*) für alle* $\xi \in (a,b)$ *gilt, dann ist* $\int_a^b f(x)\,dx$ *absolut konvergent.*

Beispiele:

1)
$$\int_\xi^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_\xi^1 \to 2 \qquad \text{für } \xi \to 0\,.$$

2)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \text{für } \alpha \in (0,1)\,.$$

3) Wir untersuchen, ob $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konvergiert. Da $1 - x^2 \ge 1 - x$ für $x \in (0,1)$ gilt, erhalten wir

$$\int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \le \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_{1-\xi}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \le 2\,,$$

also konvergiert $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium.

Mit Hilfe der Stammfunktion können wir auch berechnen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\xi \nearrow 1} \arcsin x\Big|_0^\xi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Definition 9.37. *Falls* f *eine singuläre Stelle in* $c \in (a,b)$ *hat, d.h falls* $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$*, dann sagen wir, dass* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergiert, falls* $\int_a^c f(x)\,dx$ *und* $\int_c^b f(x)\,dx$ *konvergieren. Wir setzen dann*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Bemerkung: Auch hier ist wieder der Cauchysche Hauptwert definiert über

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{[a,b]\setminus(c-\varepsilon,c+\varepsilon)} f(x)\,dx\,.$$

Wieder kann es sein, dass der Cauchysche Hauptwert existiert, ohne dass $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert. Ein Beispiel ist $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$.

9.9 Riemannsches Integralkriterium

Satz 9.38. *$f\colon[1,\infty)\to[0,\infty)$ sei monoton fallend und $a_n := f(n)$. Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.*

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n=2}^{N+1} a_n \le \int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N} a_n\,.$$

Falls $\sum a_n$ konvergiert, so folgt, dass $\int_1^{N+1} f(x)\,dx \le C$ für alle N und somit konvergiert das Integral, da f nicht negativ ist. Umgekehrt erhalten wir aus der Konvergenz des Integrals, dass $\sum_{n=1}^{N+1} a_n \le C$ und es folgt die Konvergenz der Reihe, da $a_n \ge 0$ für alle n gilt. □

Beispiele:

1) $\sum \frac{1}{n}$ divergiert, da $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty$.

2) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$, da $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

3) Für $f(x) = \ln(\ln x)$ gilt $f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$ und $\left(|\ln x|^{1-s}\right)' = \frac{1-s}{x|\ln x|^s}$. Damit erhalten wir

$$\int_2^\infty \frac{1}{x|\ln x|^s}\,dx \begin{cases} <\infty & s>1 \\ =\infty & s=1 \end{cases}$$

also auch

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^s} \begin{cases} <\infty & s>1 \\ =\infty & s=1 \end{cases}$$

[13.1.2025]

[15.1.2025]

9.10 Vertauschungssätze

In diesem Kapitel betrachten wir eine Funktionenfolge $(f_n)\subset\mathcal{R}([a,b])$, $f_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, die punktweise auf $[a,b]$ gegen eine Funktion $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ konvergiert, d.h. $f_n(x)\to f(x)$ für $n\to\infty$ für alle $x\in[a,b]$. Wir fragen, wann wir Integration und Grenzwert vertauschen können, d.h. wann $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ gilt.
Dazu betrachten wir zunächst das folgende Beispiel. Es sei

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & : \ x\in[0,\frac{1}{n}] \\ n(2-nx) & : \ x\in[\frac{1}{n},\frac{2}{n}] \\ 0 & : \ x\in[\frac{2}{n},1] \end{cases} \to 0 \qquad \text{für } n\to\infty \text{ für alle } x\in[0,1]\,.$$

Dann gilt

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx > \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0\,.$$

Dies kann jedoch nicht auftreten, wenn die Konvergenz der f_n gegen f gleichmäßig ist.

Satz 9.39 (Vertauschung von Integration und Konvergenz). *Sei* $(f_n) \subset \mathcal{R}([a,b])$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *und* $f_n \to f$ *gleichmäßig auf* $[a,b]$. *Dann gilt* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Beweis. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir n_0 so, dass $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(y)|\,. \tag{9.3}$$

Sei nun $n \geq n_0$ fest gewählt. Dazu wählen wir eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f_n) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f_n) < \varepsilon$. Mit (9.3) gilt dann

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) < 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon\,,$$

und es folgt insbesondere, dass $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Außerdem gilt

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f - f_n|\,dx \leq \|f - f_n\|_\infty |b-a| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

□

Bemerkung: Bei Satz 9.39 ist es wichtig, dass wir über beschränkte Intervalle integrieren. Für unbeschränkte Intervalle gelten andere Vertauschungssätze (siehe Analysis III). So gilt zum Beispiel für

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & : \quad x \in [0,n] \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}\,,$$

dass $f_n \to 0$ gleichmäßig auf $[0,\infty)$, aber $\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 9.40 (Vertauschung von Differentiation und Konvergenz). *Sei* $(f_n) \subset C^1([a,b])$ *und es gelte für eine Funktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *dass* $f_n(x) \to f(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$. *Außerdem konvergiere* f_n' *gleichmäßig gegen eine Funktion* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Dann ist* $f \in C^1([a,b])$ *mit* $f' = g$.

Beweis. Da f_n' stetig ist und $f_n' \to g$ gleichmäßig konvergiert, ist nach Satz 7.20 auch g stetig. Es gilt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

und aus Satz 9.39 folgt $\int_a^x f_n'(t)\,dt \to \int_0^x g(t)\,dt$. Nach Voraussetzung gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Also erhalten wir

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

und somit ist f stetig und nach dem Hauptsatz 9.22 ist f differenzierbar mit $f' = g$. □

Bemerkung: Es genügt nicht, dass f_n gleichmäßig und f_n' punktweise konvergiert, um Konvergenz und Differentation zu vertauschen. Ein Beispiel ist $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Dann gilt $f_n \to |x| =: f(x)$ gleichmäßig auf $[-1,1]$. Außerdem gilt

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \to = \begin{cases} 1 & : \quad x \in (0,1) \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x \in (-1,0) \end{cases}\,,$$

aber f ist nicht differenzierbar.

10 Lokale Approximation von Funktionen

10.1 Approximation mit Taylorpolynomen

Wir erinnern uns daran, dass die Tangente einer differenzierbaren Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ gegeben ist durch $T_1 f(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dies ist die beste affin lineare Approximation an f im Punkt x_0. Es gilt $T_1 f(x_0) = f(x_0)$ und $(T_1 f)'(x_0) = f'(x_0)$.

Nun wollen wir diese Approximation weiter verbessern, so dass auch höhere Ableitungen übereinstimmen. Dazu suchen wir ein Polynom T_n vom Grade $\leq n$, so dass gilt

$$T_n f(x_0) = f(x_0)\,, \quad (T_n f)'(x_0) = f'(x_0)\,, \quad \ldots \quad , \quad (T_n f)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,.$$

Mit dem Ansatz $T_n f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$ erhält man $(T_n f)^{(k)}(x_0) = k! a_k$ und somit $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$.

Definition 10.1 (Taylorpolynom)**.** *Sei $f \in C^n([a,b])$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann heißt*

$$T_n f(x) = T_n f(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom zu f im Punkt x_0.

Beispiele:

1) Zu $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$ erhalten wir

$$T_1 f(x; 0) = 1 + x\,, \qquad T_2 f(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,.$$

2) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

$$T_3 f(x; 1) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$$

Bemerkung: Falls f Polynom vom Grad n ist, so gilt $f = T_n f$.

Um zu erfassen, wie gut das Taylorpolynom eine gegebene Funktion f in einer Umgebung von x_0 approximiert, definieren wir das Restglied

$$R_{n+1}(x) := f(x) - T_n f(x; x_0)\,.$$

Satz 10.2 (Integralformel für R_{n+1}, Satz von Taylor)**.** *Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$, $x_0 \in (a,b)$ und $x \in [a,b]$. Dann gilt*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv.
(IA): $n = 0$: Es gilt $T_0 f(x;x_0) = f(x_0)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) + R_1(x)\,.$$

(IS): $n-1 \rightsquigarrow n$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt\,,$$

also

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n-1}f(x;x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=-\frac{d}{dt}\left(\frac{(x-t)^n}{n!}\right)} f^{(n)}(t)\,dt \\ &= T_{n-1}f(x;x_0) \underbrace{- \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{x_0}^{x}}_{=f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= T_n f(x;x_0) + R_{n+1}(x)\,. \end{aligned}$$

□

Satz 10.3 (Lagrange'sche Form des Restgliedes)**.** *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 10.2. Dann existiert ein $\xi \in (x_0, x)$ (bzw. $\xi \in (x, x_0)$) so dass*

$$f(x) = T_n f(x;x_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.$$

Zum Beweis benutzen wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz 10.4. *Sei $f \in C^0([a,b])$ und $p \in \mathcal{R}([a,b])$ mit $p \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ so dass*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis des Mittelwertsatzes 9.21 und ist eine Übungsaufgabe. □

Beweis. (von Satz 10.3)
$f^{(n+1)}$ ist nach Voraussetzung stetig. Nach Satz 10.4 existiert ein $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi) \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt}_{=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}\,.$$

Zusammen mit Satz 10.2 folgt die Behauptung.

□

Die Sätze 10.2 und 10.3 können sowohl zur Abschätzung der Größe des Fehlers als auch zur Bestimmung des Vorzeichens des Fehlers benutzt werden.

Beispiele:

(1) Es gilt $|\cos^{(n)}(\xi)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \mathbb{R}$. Also folgt nach Satz 10.3, dass

$$\left|\cos x - T_{2n} f(x;0)\right| = \left|\cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

(2) Es sei $f \in C^2([a,b])$ und konvex. Dann gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{für alle } x, x_0 \in (a,b)\,.$$

Dies ist gerade das Tangentenkriterium für konvexe Funktionen und folgt aus der Tatsache dass $f'' \geq 0$ und Satz 10.3.

Wir führen nun noch geeignete Notationen ein, um auszudrücken, wie das Verhältnis einer Funktion zu einer anderen Funktion in der Umgebung eines Punktes ist.

Definition 10.5 (Landausche Ordnungssymbole)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \overline{I}$, sowie $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \big(I \cap B_\varepsilon(x_0)\big) \setminus \{x_0\}$.*
Wir sagen

a)

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\text{“}f \text{ ist groß } O \text{ von } g\text{”}) \text{ für } x \to x_0$$

falls ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ und $C > 0$ existiert, so dass

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C \qquad \text{für alle } x \in \big(I \cap B_\delta(x_0)\big) \setminus \{x_0\}\,.$$

b)

$$f(x) = o(g(x)) \qquad (\text{“}f \text{ ist klein } o \text{ von } g\text{”}) \text{ für } x \to x_0$$

falls $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

c) f und g heißen <u>asymptotisch gleich</u>, $f \sim g$, für $x \to x_0$, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Beispiele:

1) $x + x^2 = O(x)$ für $x \to 0$.

2) $x^2 = o(|x|)$ für $x \to 0$.

3) $\sin x \sim x$ für $x \to 0$.

4) $\ln(1+x) = x + o(x)$ für $x \to 0$.

5) $e^{-x} = o(x^{-n})$ für $x \to \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

6) $\ln x = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$ für alle $\alpha > 0$.

Korollar 10.6. *Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$. Dann gilt für alle $x_0 \in (a,b)$ und $x \in [a,b]$, dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big(|x-x_0|^n\big) \qquad \textit{für } x \to x_0\,.$$

Beispiel: $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. Dann gilt $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(|x|)$ für $x \to 0$. Es folgt

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1) \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

10.2 Taylorreihen

Definition 10.7 (Taylorreihe)**.** *Sei $f \in C^\infty([a,b])$ und $x_0 \in (a,b)$. Zu $x \in [a,b]$ heißt*

$$Tf(x) = Tf(x;x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die Taylorreihe von f im Punkt x_0.

Bemerkungen:

1) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist nicht notwendig positiv.

2) Die Taylorreihe konvergiert genau für diejenigen $x \in [a,b]$ gegen $f(x)$ für die $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ gilt.

3) Falls die Taylorreihe konvergiert, so nicht unbedingt gegen $f(x)$. Ein Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x \le 0 \end{cases}$$

Wir haben in Übungsaufgabe 8.5 gesehen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit folgt, dass $Tf(x;0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $Tf(x;0) \neq f(x)$ für alle $x > 0$.

Beispiele:

1) $f(x) = e^x$, $Tf(x;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
$Tf(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{x_0} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$

2)
$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = Tf(x;0) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

3) Es gilt (Übungsaufgabe 13.4), dass
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k \qquad \text{für alle } |x| < 1$$
gilt. Da für $f(x) = \ln(1+x)$ gilt, dass $f^{(n)}(x)) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, ist $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k = Tf(x;0)$. Für $x \in [0,1]$ können wir auch mit dem Leibniz-Kriterium schließen, dass
$$\Big|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k\Big| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$
Die Taylorreihe konvergiert also auch für $x = 1$ und ist dort gleich dem Funktionswert. Insbesondere folgt
$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\,.$$

Definition 10.8 (reell analytisch)**.** *$f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt reell analytisch, wenn es zu jedem $x_0 \in I$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $B_\delta(x_0) \subset I$ gilt, die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ in $B_\delta(x_0)$ konvergiert und dort gleich $f(x)$ ist.*

Bemerkungen:

(i) Das Beispiel $e^{-\frac{1}{x}}$ zeigt, dass nicht jede C^∞-Funktion reell analytisch ist.

(ii) Falls eine Funktion durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist die Potenzreihe gleich der Taylorreihe.

11 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Differentialgleichung (DGL) versteht man eine Relation zwischen unabhängigen Variablen, Funktionen und deren Ableitungen. Falls es nur eine unabhängige Variable gibt, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

11.1 Einfache Beispiele

(i) Die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

Es seit $t \in I \subset \mathbb{R}$ die Zeitvariable, $y(t) \in \mathbb{R}^3$ der Ort eines Teilchens zur Zeit t und $V(t) \in \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld. Wir bezeichnen mit $m > 0$ die Masse des Teilchens und mit

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (y_1, y_2, y_3) \mapsto \big(F_1(y_1, y_2, y_3), F_2(y_1, y_2, y_3), F_3(y_1, y_2, y_3)\big)$$

das Kraftfeld. Dann sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} y'(t) &= V(t) \\ mV'(t)&F(y(t)) \end{aligned} \tag{11.1}$$

bzw.

$$my''(t) = F(y(t)) \,. \tag{11.2}$$

Hierbei ist $y'(t) = (y_1'(t), y_2'(t), y_3'(t))$ etc.. Die Gleichungen (11.1) sind also 6 Gleichungen für die Funktionen $y_1, y_2, y_3, V_1, V_2, V_3$. Man spricht von einem 6-dimensionalen System erster Ordnung, da nur erste Ableitungen auftreten. Äquivalent dazu erhält man (11.2), welches ein 3-dimensionales System zweiter Ordnung für y_1, y_2, y_3 ist.

Als konkrete Anwendung betrachten wir das sogenannte mathematische Pendel. Hier hängt eine Masse m an einem Pendelstab der Länge l, der in $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ befestigt ist. Das Pendel wird anfangs aus der Senkrechten ausgelenkt schwingt unter dem Einfluß der Schwerkraft hin und her. Da dies alles in einer Ebene stattfindet, können wir das Problem auf eine Gleichung in der Ebene $\mathbb{R}^2$ reduzieren. Es sei $y: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Position der Masse, die wir mittels des Winkels θ darstellen, den das Pendel zur Senkrechten hat:

$$y(t) = l \begin{pmatrix} \sin\theta(t) \\ -\cos\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Das Kraftfeld ist unabhängig von y und durch

$$F = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei g die Gravitationskonstante bezeichnet. Die Gleichung $y'' = F(y)$ wird also zu

$$\big(\sin\theta(t)\big)'' = 0 \,, \qquad \big(-\cos\theta(t)\big)'' = -\frac{g}{l} \,,$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &= \big(\cos(\theta(t))\theta'(t)\big)' = -\sin(\theta(t))\big(\theta'(t)\big)^2 + \cos(\theta(t))\theta''(t) \\ \frac{g}{l} &= \big(-\sin(\theta(t))\theta'(t)\big)' = -\cos(\theta(t))\big(\theta'(t)\big)^2 - \sin(\theta(t))\theta''(t) \,. \end{aligned}$$

Durch Auflösen der ersten Gleichung nach $\big(\theta'(t)\big)^2$, Einsetzen in die zweite Gleichung und Umstellung erhalten wir

$$\theta''(t) + \frac{g}{l} \sin\theta(t) = 0 \,.$$

Dies ist eine nichtlineare Gleichung zweiter Ordnung für den Winkel $\theta(t)$. Um diese weiter zu vereinfachen, nehmen wir an, dass wir das Pendel nur wenig auslenken und somit nur kleine Winkel auftreteten. Dann können wir die Approximation $\sin\theta(t) \sim \theta(t)$ benutzen und erhalten

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0\,.$$

Lösungen dieser Gleichung sind durch

$$\theta(t) = \alpha\cos\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}t\Big) + \beta\sin\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}t\Big)\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die Parameter α und β kann man durch Vorgabe von Anfangsposition $\theta(0) = \theta_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $\theta'(0) = V_0$ bestimmen und erhält

$$\theta(t) = \theta_0\cos\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}t\Big) + V_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}t\Big)\,. \tag{11.3}$$

Dies ist die einzige Lösung, wie man folgendermaßen zeigen kann. Wir nehmen an, es existieren zwei Lösungen $\theta_1(t)$ und $\theta_2(t)$. Für $\theta(t) \coloneqq \theta_1(t) - \theta_2(t)$ erhält man

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0\,, \qquad \theta(0) = 0\,, \theta'(0) = 0\,.$$

Wir multiplizieren diese Differentialgleichung mit $\theta(t)$ und erhalten

$$\frac{1}{2}\Big(\big(\theta'(t)\big)^2\Big)' + \frac{g}{2l}\big(\theta(t)^2\big)' = 0\,.$$

Aufintegrieren ergibt $\big(\theta'(t)\big)^2 + \frac{g}{l}\theta(t)^2 = const.$ für alle t. Da $\theta(0) = \theta'(0) = 0$ folgt, dass $const. = 0$ und somit gilt $\theta(t) = 0$ für alle t, also $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ für alle t.

Wir sehen also an (11.3), das das Pendel periodisch hin- und herschwingt. Dass sich die Schwingung nicht verlangsamt, liegt daran, dass wir Reibungseffekte vernachlässigen. Bringen wir diese auch in das Modell ein, erhalten wir die Gleichung

$$\theta''(t) + \frac{k}{m}\theta'(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0\,,$$

wobei k ein Reibungskoeffizient ist. Lösungen dieser Gleichung sind für $k < 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$ durch

$$\theta(t) = e^{-\frac{k}{2m}t}\big(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)\big)\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\ \omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{g}{l} - \frac{k^2}{m^2}}$$

gegeben. Durch Hinzunehmen der Reibungseffekte klingt die Lösung also exponentiell schnell in der Zeit ab.

(ii) Populationsmodelle:

Hier ist das Ziel, die zeitliche Entwicklung der Größe einer Population zu bestimmen. Es sei $y(t) \in [0, \infty)$ die Populationsgröße zur Zeit $t \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass die Änderungsrate der Population eine Funktion von t und y ist, also

$$y'(t) = r(t, y)y(t)\,.$$

In einem abgeschlossenen System ist die Form von r gegeben als $r(t,y) = g(t,y) - s(t,y)$ mit Geburtenrate $g(t,y)$ und Sterberate $s(t,y)$, wobei $g, s \geq 0$. Weiter sei die Populationsgröße zu einer Zeit t_0 bekannt, also es gilt $y(t_0) = y_0$. Wir betrachten nun einige verschiedene Modelle.

a) In einfachsten Fall haben wir eine konstante Rate $r(t,y) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Gleichung

$$y'(t) = \alpha y(t)\,, \qquad y(t_0) = y_0$$

hat die Lösung

$$\varphi(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

und es gilt $\varphi > 0$ falls $y_0 > 0$. Es gilt

$$\varphi(t) \to \begin{cases} \infty & \alpha > 0 \qquad \text{(Unbegrenztes Wachstum)} \\ 0 & \alpha < 0 \qquad \text{(Aussterben)} \end{cases}$$

Nach welcher Zeit verdoppelt sich in diesem Modell die Population?

$$2 = \frac{\varphi(t+\delta)}{\varphi(t)} = e^{\alpha\delta}\,, \qquad \text{also } \delta = \frac{\ln 2}{\alpha}\,.$$

Am Beispiel der Erdbevölkerung würde dies folgendes bedeuten. Mit $t_0 = 1974$ ist $y_0 = 4$Mrd. und $\delta = 48$ (im Jahr 2022 gab es 8 Mrd. Menschen) erhalten wir $\alpha = 0{,}01444$. Mit dem obigen Modell erwarten wir also, dass die Erdbevölkerung im Jahr 2070 die Größe von 16 Mrd. Menschen erreicht und im Jahr 2118 von 32 Mrd.. Das Modell ist aber irgendwann nicht mehr realistisch, da der Menschheit nicht mehr genügend Ressourcen zur Verfügung stehen.

b) Logistisches Wachstum: Hier nehmen wir an, dass eine Grenzpopulation $z > 0$ existiert, so dass $r(t,y) < 0$ gilt, falls $y > z$. Wir machen den linearen Ansatz $r(t,y) = \beta(z-y)$ für ein $\beta > 0$ und erhalten die logistische Gleichung

$$y' = \beta(z-y)y = \beta z y - \beta y^2\,. \tag{11.4}$$

Der nichtlineare Term βy^2 wird auch sozialer Reibungsterm genannt, er ist proportional zur Anzahl der Kontakte von Mitgliedern der Population. Was können wir über Lösungen der logistischen Gleichung sagen, ohne sie explizit zu kennen? Dazu suchen wir zuerst nach stationären Lösungen, d.h. nach Lösungen, die zeitunabhängig sind. Diese sind hier gegeben durch $\varphi_1(t) = 0$ und $\varphi_2(t) = z$ für alle t. Weiterhin gilt für Lösungen φ von (11.4), dass

$$\varphi' = \beta(z-\varphi)\varphi = \begin{cases} > 0 & : \quad 0 < \varphi < z \\ < 0 & : \quad \varphi > z \text{ oder } \varphi < 0 \end{cases}\,,$$

sowie

$$\varphi'' = \big(z\beta - 2\beta\varphi\big)\varphi' = \begin{cases} > 0 & : \quad 0 < \varphi < \frac{z}{2} \\ < 0 & : \quad \frac{z}{2} < \varphi < z \\ > 0 & : \quad \varphi > z \end{cases}\,.$$

Der Zeitpunkt t^* für den $\varphi(t^*) = \frac{z}{2}$ gilt, nennt man auch Trendwende.

c) Räuber-Beute Modell: Hier betrachten wir zwei verschiedene Populationen, y_1, die Beute, und y_2, die Räuber. Wir machen folgende Modellannahmen.

i) Die Räuber ernähren sich ausschließlich von der Beute. Falls keine Beute mehr vorhanden ist, sterben die Räuber mit Rate $\gamma > 0$ aus. Falls Beute vorhanden ist, ist die Geburtsrate der Räuber durch δy_1 gegeben. Damit erhalten wir

$$y_2' = -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \,.$$

ii) Die Beute hat immer genug Nahrung, d.h. wenn es keine Räuber gibt, wächst die Beutrpopulation mit Rate $\alpha > 0$. Falls Räuber existieren, stirbt die Beute mit Rate βy_2, Damit erhalten wir

$$y_1' = \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \,.$$

Das zweidimensionale System

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \,, \\ y_2' &= -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta\, \gamma, \delta > 0$ ist als Lotka-Volterra-Gleichung bekannt.

d) Analog zu oben erhalten wir das Räuber-Beute-Modell mit beschränktem Wachstum:

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 - \lambda y_1^2 \,, \\ y_2' &= -\gamma y_2 + \delta y_1 y_2 - \mu y_2^2 \,. \end{aligned}$$

11.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $U{:}\, I \times J$, $t \in I$ und $f{:}\, U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, d.h. falls $t_n \to t$ und $y_n \to y$, dann gilt $f(t_n, y_n) \to f(t, y)$. Wir suchen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \,. \tag{11.5}$$

Wir sagen, dass eine auf $I' \subset I$ differenzierbare Funktion φ Lösung (oder auch Lösungskurve oder Integralkurve) von (11.5) ist, falls für alle $t \in I'$ gilt, dass

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \,.$$

I' heißt dann das zu φ gehörende Existenzinterall. Die Differentialgleichung heißt autonom, falls $f = f(y)$.
Zu $(t_0, y_0) \in U$ heißt (11.5) zusammen mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ Anfangswertproblem (AWP).

11.3 Elementare Lösungsmethoden

11.3.1 f ist unabhängig von y

Dieser Fall ist besonders einfach, da man die Lösung durch Berechnung der Stammfunktion von f erhält.

Beispiel:

$$y'(t) = \ln t\,, \qquad t > 0\,.$$

Die Lösungskurven sind durch

$$\varphi(t) = t(\ln t - 1) + C_0$$

gegeben, wobei C_0 durch Vorgabe eines Anfangswertes eindeutig festgelegt ist.

11.3.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Definition 11.1. *Es seien $g\colon I \to \mathbb{R}$ und $h\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Falls $f(t,y) = g(t)h(y)$, dann heißt*

$$y'(t) = f(t, y(t)) = g(t)h(y) \tag{11.6}$$

Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Lösungen von (11.6) findet man mittels folgender Vorgehensweise. Sei $h(y) \neq 0$ und φ eine Lösung zu (11.6). Dann gilt

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t)$$

und damit

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{h(\varphi(s))}\,ds = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{1}{h(z)}\,dz\,. \tag{11.7}$$

Also erhält man eine Lösung der Differentialgleichung (11.6), falls die Stammfunktionen von g und von $\frac{1}{h}$ angegeben werden können.

Satz 11.2 (Lokaler Existenzsatz)**.** *Es sei $t_0, y_0 \in J$ und das Anfangswertproblem* (11.6) *mit $y(t_0) = y_0$ gegeben.*

a) Falls $h(y_0) = 0$, dann ist $\varphi(t) = y_0$ für alle $t \in I$ eine Lösung.

b) Falls $h(y_0) \neq 0$, dann existiert $I' \subset I$, so dass das Anfangswertproblem in I' eine Lösung besitzt. Diese erhält man durch Auflösen von (11.7)*.*

Beweis. (von Teil b)): Es sei $J' \subset J$ so, dass $y_0 \subset J'$ und $h \neq 0$ auf J'. Wir definieren $H\colon J' \to \mathbb{R}$ über $H(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(z)}\,dz$ und $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$. H ist streng monoton auf J', also existiert die Umkehrfunktion $H^{-1}\colon H(J') \to J'$. Sei I' offen, $t_0 \in I'$, $I' \subset I$ und $G(I') \subset H(J')$. I' existiert, da $G(t_0) = 0 \in H(J')$ und G stetig ist.
Auf I' definieren wir $\varphi(t) := H^{-1}(G(t))$. Damit gilt

$$\varphi(t_0) = H^{-1}\big(G(t_0)\big) = H^{-1}(0) = y_0$$

und $H(\varphi(t)) = G(t)$, also

$$\underbrace{H'(\varphi(t))}_{=\frac{1}{h(\varphi(t))}}\varphi'(t) = g(t)$$

und damit löst φ Gleichung (11.6). $\square$

Beispiele:

1)
$$y'(t) = y^2(t)\,, \qquad y(0) = y_0 > 0\,.$$

Wir berechnen die Lösung über

$$\Big(-\frac{1}{y}\Big)' = \frac{y'}{y^2} = 1\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{1}{y_0} - \frac{1}{\varphi(t)} = t$$

und somit
$$\varphi(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}\,.$$

Wir erhalten, dass $\varphi(t) \to \infty$ für $t \to \frac{1}{y_0}$. Das Existenzintervall ist damit $I' = (-\infty, \frac{1}{y_0})$. Dieses Beispiel zeigt, dass eine recht einfache Funktion h nicht die Existenz einer Lösung für alle Zeiten garantiert.

2)
$$y' = ty^2\,, \qquad y(0) = y_0 \neq 0\,.$$

Analog zum vorigen Beispiel erhalten wir

$$\frac{1}{y_0} - \frac{1}{\varphi(t)} = \frac{1}{2}t^2 \qquad \text{und somit} \qquad \varphi(t) = \frac{2}{\frac{2}{y_0} - t^2} \qquad \text{auf } I' = \begin{cases} \Big(-\sqrt{\frac{2}{y_0}}, \sqrt{\frac{2}{y_0}}\Big) & : \; y_0 > 0 \\ \mathbb{R} & : \; y_0 < 0 \end{cases}\,.$$