Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Übung - Blatt 9

Dieses Übungsblatt wird am 07.01.2026 in der Globalübung besprochen.

Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis **Mittwoch, 07.01.2026, um 14:00 Uhr** im Moodle-Raum hoch. Geben Sie bitte in **Gruppen von 2-3 Studierenden** ab und schreiben Sie *alle* Namen und Matrikelnummern auf Ihre Abgabe. Wir würden uns wünschen, dass mindestens zwei der Abgabepartner jeweils einen Teil der Abgabe aufschreiben

Bitte achten Sie bei Ihrer Abgabe besonders auf die formale Korrektheit Ihrer Lösung. Es gibt pro Aufgabe einen Punkt für das formal korrekte Aufschreiben Ihrer Lösung, markiert mit einem *.

Aufgabe 1 (4+(1+2+2)+1*=10 Punkte)
Seien K ein Körper und seien V, W zwei K-Vektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w') \quad \text{und} \quad k \cdot (v, w) := (k \cdot v, k \cdot w)$$

für alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $k \in K$ ein K-Vektorraum ist.

(b) Seien nun $U_1, U_2 \leq V$ zwei Unterräume.

(1) Zeigen Sie, dass

$$f\colon U_1 \times U_2 \to V : (u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$$

eine K-lineare Abbildung ist.

(2) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$.

(3) Folgern Sie, wie U_1 und U_2 jeweils charakterisiert werden können im Falle, dass f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.
Hinweis: Eine Charakterisierung ist eine hinreichende und notwendige Bedingung, d.h. es soll eine Äquivalenz gezeigt werden.

Aufgabe 2 (2+1+3+3+1*=10 Punkte)
Seien K ein Körper, V, W K-Vektorräume und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Weiter sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen jeweils für die Fälle, dass φ ein Homomorphismus, ein Monomorphismus oder ein Epimorphismus ist.

(a) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig, so ist auch $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ linear unabhängig.

(b) Ist $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ linear unabhängig, so ist auch $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig.

(c) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V, so ist auch $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von W.

(d) Ist $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von W, so ist auch $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V.