$\boxed{9.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 25

****

(Abgabe: 20.06.)

Aufgabe H33. Zeigen Sie, dass die Transformationen (1) und (2) in Abschnitt 6.3 die Kongruenzklasse erhalten.

Aufgabe H34. Sei $1 + 1 \neq 0$ in K, und sei $A \in K^{n,n}$ eine symmetrische Matrix. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ berechnet, so dass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe H35. Sei $K = \mathbb{C}$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in K^{2,2}.$$

(i) Finden Sie ein $S \in \mathrm{GL}_2(K)$, so dass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(ii) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe H36. In dieser Aufgabe arbeiten wir nur mit symmetrischen K-Vektorräumen. Insbesondere gilt also $\bar{\cdot} = \mathrm{id}_K$. Sei $n \geq 1$.

(i) Sei (V, s) ein n-dimensionaler regulärer symmetrischer $\mathbb{F}_5$-Vektorraum. Zeigen Sie: Es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass

$$\mathbf{c}_B(s) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_1, \ldots, a_n \in \{1, 2\} \subset \mathbb{F}_5$.

(ii) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $(\mathbb{F}_5)^{2,2}$. Zeigen Sie, dass A und B kongruent sind.

(iii) Zeigen Sie, dass für $a_1, \ldots, a_n \in \{1, 2\} \subset \mathbb{F}_5$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

entweder zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{oder zu} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

kongruent ist.

****