

## Kapitel 4

# Lineare Gleichungssysteme

### 4.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

#### Lernziele

- Lineare Gleichungssysteme definieren Matrizen,
- Matrizen definieren lineare Abbildungen,
- Lösen von linearen Gleichungssystemen = Faserbestimmung der zugehörigen linearen Abbildung.

Zunächst wollen wir klären, was wir unter einem Gleichungssystem verstehen und was es bedeutet, ein Gleichungssystem zu lösen.

#### Bemerkung 4.1

Seien  $M, N$  Mengen und  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung. Für jedes  $n \in N$  ist das zu  $f$  und  $n$  gehörige **Gleichungssystem** gegeben durch

$$f(m) = n,$$

und seine **Lösungsmenge** ist gerade die Faser

$$f^{-1}(\{n\}) = \{m \in M \mid f(m) = n\}.$$

Das Lösen eines Gleichungssystems ist Bestimmung einer Faser einer Abbildung  $f$ . Das Gleichungssystem  $f(m) = n$  für die Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist

- Immer lösbar, d.h. für jede rechte Seite  $n \in N$ , genau dann wenn  $f$  surjektiv ist.

- Immer eindeutig lösbar genau dann wenn  $f$  bijektiv ist.
- Ist  $f$  injektiv so hat für jedes  $n \in N$  das Gleichungssystem  $f(m) = n$  höchstens eine Lösung.

**Beispiel 4.2**

$$M = N = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$$f : M \rightarrow N, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x + 3y).$$

Gesucht ist  $f^{-1}(\{(1, 1)\})$ . Wir suchen also die Paare  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x^2 + y^2 = 1$  und  $x + 3y = 1$ . Man rechnet leicht nach, dass dieses Gleichungssystem genau 2 Lösungen hat, die man als Schnittpunkte von einem Kreis und einer Gerade finden kann.

**Beispiel 4.3**

Wir betrachten folgendes **lineares Gleichungssystem** für  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ :

$$(\spadesuit) \quad \begin{array}{rcl} -2b + c & = & -1 \\ -2a - 2b + c & = & -2 \end{array}$$

Zu diesem linearen Gleichungssystem gehört eine reelle  $2 \times 3$ -Matrix, also ein rechteckiges Zahlenschema:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine andere Betrachtungsweise ist es, dem Gleichungssystem (oder der Matrix) eine Abbildung zuzuordnen:

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (a, b, c) \mapsto (-2b + c, -2a - 2b + c)$$

Dann bilden die Lösungen von  $(\spadesuit)$  gerade die Faser  $\alpha^{-1}(\{(-1, -2)\})$  von  $\alpha$  über  $(-1, -2)$ .

Wir erinnern an Definition 3.15 einer Matrix:

**Definition**

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen. Eine  $m \times n$ -**Matrix** über einem Körper  $K$  ist eine Abbildung

$$A : \underline{m} \times \underline{n} \rightarrow K : (i, j) \mapsto a_{i,j}.$$

Notation:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Ist  $m = 1$  so ist die Matrix eine **Zeile**, wenn  $n = 1$  ist sie eine **Spalte**.

Mit anderen Worten, die Positionen in der Matrix entsprechen dem Definitionsbereich ( $i$ -Zeile,  $j$ -te Spalte entspricht  $(i, j)$ ) und der Wert von  $A$  für  $(i, j)$  wird in die entsprechende Position eingetragen. Die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen über  $K$  wird mit  $K^{n \times m}$  bezeichnet.

Das Lösen eines Gleichungssystems über  $K$  ist also immer die Bestimmung einer Faser für eine Abbildung: Das Lösen des Gleichungssystems mit Matrix  $A$  und rechter Seite  $b$  ist also die Bestimmung der Faser von  $b$  unter der Abbildung  $A$ .

Injektivität der Abbildung  $A$  bedeutet, daß für jedes  $b \in B$  das Gleichungssysteme  $A(a) = b$  höchstens eine Lösung hat. Surjektivität der Abbildung  $A$  bedeutet, daß für jedes  $b \in B$  das Gleichungssysteme  $A(a) = b$  mindestens eine Lösung hat. Bijektivität der Abbildung  $A$  bedeutet, daß für jedes  $b \in B$  das Gleichungssysteme  $A(a) = b$  genau eine Lösung hat. Ist das Gleichungssystem linear, so ist die Abbildung auch linear und umgekehrt. Auch diese Begriffe wollen wir sauber definieren:

**Definition 4.4**

1. Ein **lineares Gleichungssystem** über dem Körper  $K$  mit  $m$

Gleichungen und  $n$  Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{aligned}$$

wobei  $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$  eine (fest vorgegebene) Matrix ist und

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$$

eine (fest vorgegebene) Spalte.

2.  $A$  heißt die **Matrix** des Gleichungssystems  $(*)$  und  $(A \mid b) \in K^{m \times (n+1)}$  heißt die **erweiterte Matrix** von  $(*)$ . Dabei ist  $(A \mid b)$  definiert als

$$(A, b) : \underline{m} \times \underline{n+1} \rightarrow K : (i, j) \mapsto \begin{cases} a_{ij} & j \leq n \\ b_i & j = n+1 \end{cases}.$$

3. Eine **Lösung** von  $(*)$  ist eine Spalte  $v := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$ , derart, daß durch Einsetzen von  $c_i$  für  $x_i$  in  $(*)$  für  $i = 1, \dots, n$  alle  $m$  Gleichungen von  $(*)$  erfüllt sind.
4. Das Gleichungssystem heißt **homogen**, falls  $b_1 = \dots = b_m = 0$  und **inhomogen**, falls mindestens ein  $b_i \neq 0$ .

### Beispiel 4.5

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\
 & -x_1 - x_2 + 8x_3 - x_4 = 2 \\
 & 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3
 \end{aligned}$$

Die erweiterte Matrix des Gleichungssystems ist

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 8 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & -4 & 3 & 3 \end{array} \right).$$

Wir geben jetzt eine Abbildung von  $K^{n \times 1}$  nach  $K^{m \times 1}$  an, sodass die Lösungsmenge von (\*) die Faser dieser Abbildung über  $b$  ist. Dafür brauchen wir (\*) nur zu kopieren:

#### Definition 4.6

Sei  $A : \underline{m} \times \underline{n} \rightarrow K : (i, j) \mapsto a_{ij}$  eine  $m \times n$ -Matrix, kurz  $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ . Die von  $A$  **induzierte Abbildung**

$$\varphi_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1} : v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto Av = A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

ist definiert durch

$$\varphi_A \left( \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right) := A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n \end{pmatrix}$$

$Ac$  heißt das **Produkt** der Matrix  $A$  mit der Spalte  $v$ .

Wir sehen also, dass  $\varphi_A(v)$  dem Einsetzen der Einträge in der Spalte  $v$  in die linke Seite des Gleichungssystems entspricht.

Wir wollen nun verstehen, warum man  $\varphi_A$  eine lineare Abbildung nennt.

#### Bemerkung 4.7

Seien  $A, v, \varphi_A$  wie in Definition 4.6. Dann gilt:

1)

$$\varphi_A(v) = Av = c_1 S_1 + c_2 S_2 + \cdots c_n S_n$$

ist eine **Linearkombination** der Spalten

$$S_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

von  $A$  mit den Koeffizienten  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Insbesondere ist das Gleichungssystem  $(*)$  genau dann lösbar, wenn man die Spalte  $b$  als Linearkombination der Spalten von  $A$  darstellen kann.

2) Die Matrix

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} : \underline{n} \times \underline{n} \rightarrow K : (i, j) \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

heißt die **Einheitsmatrix** vom Grad  $n$  über  $K$ . Sie induziert die Identität von  $K^{n \times 1}$  als lineare Abbildung:

$$\varphi_{I_n} = \text{Id}_{K^{n \times 1}}.$$

In Definition 4.6 haben wir  $\varphi_A$  als *lineare Abbildung* bezeichnet. Wir definieren diesen Begriff nun ganz allgemein für Vektorräume.

### Definition 4.8

Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über demselben Körper  $K$ . Eine Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  heißt **linear**, oder ein  $K$ -**Homomorphismus**, falls für alle  $u, v \in V$  und alle  $a, b \in K$  gilt

$$\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

**Lemma 4.9**

Sei  $A \in K^{m \times n}$ .

(a) Die von  $A$  induzierte Abbildung

$$\varphi_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1} : v \mapsto Av$$

ist eine lineare Abbildung.

(b) Sei  $\varphi : V = K^{n \times 1} \rightarrow W = K^{m \times 1}$  eine beliebige lineare Abbildung. Dann existiert eine Matrix  $B \in K^{n \times m}$ , so dass für alle  $v \in V$  gilt:  $\varphi(v) = Bv$ . (Das heißt, dass  $\varphi = \varphi_B$  ist in der Notation von Teil (a).)

Beweis.

(a) Seien  $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$ ,  $k, \ell \in K$  und  $A = (a_{i,j})$ .

Wir müssen zeigen, dass die Gleichung

$$\varphi_A(kv + \ell w) = k\varphi_A(v) + \ell\varphi_A(w)$$

gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_A(kv + \ell w) &= A(kv + \ell w) \\ &= A \begin{pmatrix} kc_1 + \ell d_1 \\ \vdots \\ kc_n + \ell d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot (kc_1 + \ell d_1) + \cdots + a_{1n} \cdot (kc_n + \ell d_n) \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot (kc_1 + \ell d_1) + \cdots + a_{mn} \cdot (kc_n + \ell d_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k \cdot (a_{11}c_1 + \cdots + a_{1n}c_n) \\ \vdots \\ k \cdot (a_{m1}c_1 + \cdots + a_{mn}c_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ell \cdot (a_{11}d_1 + \cdots + a_{1n}d_n) \\ \vdots \\ \ell \cdot (a_{m1}d_1 + \cdots + a_{mn}d_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k \cdot \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + \cdots + a_{1n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + \cdots + a_{mn}c_n \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} a_{11}d_1 + \cdots + a_{1n}d_n \\ \vdots \\ a_{m1}d_1 + \cdots + a_{mn}d_n \end{pmatrix} \\
&= k \cdot Av + \ell \cdot Aw \\
&= k\varphi_A(v) + \ell\varphi_A(w).
\end{aligned}$$

(b) Übung.

q. e. d.

Man sieht, wie speziell lineare Abbildungen sind. Trotzdem sind sie wichtig, denn sie kommen sehr häufig vor, sowohl in der Praxis als auch in der Theorie. Z.B. versucht die Differentialrechnung eine sehr viel allgemeinere Klasse von Abbildungen  $K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$  durch lineare Abbildungen zu approximieren. Ein großer Vorteil der linearen Abbildungen ist nämlich, daß sie vergleichsweise leicht zu handhaben sind.



## 4.2 Matrixmultiplikation

### Lernziele

- Produkte von Matrizen und Komposition von linearen Abbildungen,
- injektive, surjektive und bijektive lineare Abbildungen.

Vielleicht haben Sie die Matrixmultiplikation bereits kennengelernt und fragen sich, warum das Matrixprodukt so definiert wurde.

### Definition 4.10

Seien  $A \in K^{m \times n}$ ,  $B \in K^{n \times \ell}$  Matrizen. Das **Matrixprodukt** von  $A$  und  $B$  ist definiert als die Matrix  $C := AB \in K^{m \times \ell}$  mit den Spalten  $AS_j$  für  $j = 1, \dots, \ell$ , wobei  $S_j$  die  $j$ -te Spalte der Matrix  $B$  ist, d.h.

$$S_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

### Beispiel 4.11

Seien die folgenden Matrizen  $A$  und  $B$  gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laut Definition ist das Produkt  $C = AB$  die Matrix mit den Spalten  $A \cdot S_1, A \cdot S_2, A \cdot S_3$ , wobei  $S_1, S_2, S_3$  die Spalten von  $B$  sind. Wir multiplizieren diese Matrizen mit dem **Falk-Schema**. In diesem Schema schreiben wir die Matrizen wie folgt:

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & AB \end{array}.$$

Man kann dieses Schema auch auf das Produkt mehrerer Matrizen erweitern.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 3 \\ & & & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Es stellt sich jetzt ganz allgemein die Frage, ob Kompositionen linearer Abbildungen zwischen Spaltenvektorräumen linear sind und sich wieder als  $\varphi_C$  für gewisse Matrizen  $C$  darstellen lassen. Der folgende Satz zeigt, dass dies der Fall ist und gibt uns eine Erklärung, warum das Matrixprodukt wie oben definiert ist.

**Satz 4.12**

Seien  $A \in K^{m \times n}$ ,  $B \in K^{n \times \ell}$  und  $\varphi_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$  und  $\varphi_B : K^{\ell \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$  die induzierten linearen Abbildungen. Dann gilt:

- (a) Die Komposition  $\varphi_A \circ \varphi_B$  der linearen Abbildungen  $\varphi_A$  und  $\varphi_B$  ist wieder eine lineare Abbildung,  $\varphi_A \circ \varphi_B : K^{\ell \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ .
- (b) Es gilt

$$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}.$$

Beweis. (a)  $\varphi_A \circ \varphi_B$  ist linear. Bew.: Seien  $a, b \in K$ ,  $u, v \in K^{\ell \times 1}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_A \circ \varphi_B)(au + bv) &= \varphi_A(\varphi_B(au + bv)) \\ &= \varphi_A(a\varphi_B(u) + b\varphi_B(v)) \\ &= a\varphi_A(\varphi_B(u)) + b\varphi_A(\varphi_B(v)) \\ &= a(\varphi_A \circ \varphi_B)(u) + b(\varphi_A \circ \varphi_B)(v). \end{aligned}$$

(b) Ist  $\gamma : K^{\ell \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$  eine lineare Abbildung, so ist  $\gamma = \varphi_G$ , wobei die Matrix  $G \in K^{m \times \ell}$  die Spalten  $\gamma(e_j)$  hat, wobei  $e_j$  die  $j$ -te Spalte von  $I_\ell$  ist. (Siehe auch Lemma 4.9(b).)

Sei nun  $C$  die Matrix, die  $\varphi_A \circ \varphi_B$  induziert. Dann müssen wir zeigen, dass  $C = AB$ .

Sei  $T_j$  die  $j$ -te Spalte von  $C$  und  $S_j$  die  $j$ -te Spalte von  $B$ . Um zu

zeigen, dass  $C = AB$ , müssen wir nach Definition 4.10 nur zeigen, dass  $T_j = AS_j$ , für  $j = 1, \dots, \ell$ .

Bew.:

$$\begin{aligned} T_j &= (\varphi_A \circ \varphi_B)(e_j) \\ &= \varphi_A(\varphi_B(e_j)) \\ &= \varphi_A(S_j) \\ &= AS_j, \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

q. e. d.

Wir wollen Injektivität, Surjektivität und Bijektivität im Zusammenhang mit linearen Abbildungen und Matrizen wiederholen.

**Lemma 4.13**

Sei  $A \in K^{m \times n}$ . Dann gilt:

- 1)  $\varphi_A$  ist genau dann injektiv, wenn die Faser von  $\varphi_A$  über der Nullspalte  $0_m \in K^{m \times 1}$  nur aus der Nullspalte  $0_n \in K^{n \times 1}$  besteht.
- 2)  $\varphi_A$  ist genau dann surjektiv, wenn sich alle Spalten aus  $K^{m \times 1}$  aus den Spalten von  $A$  linearkombinieren lassen.

Beweis. 1) “ $\Rightarrow$ “: Da  $\varphi_A$  injektiv, enthält jede Faser von  $\varphi_A$  höchstens ein Element, also gilt dies insbesondere für die Faser von  $0_m$ .

“ $\Leftarrow$ “: Seien  $u, v \in K^{n \times 1}$  mit  $\varphi_A(u) = \varphi_A(v)$ . Dann ist  $\varphi_A(u - v) = 0_m$ , also  $u - v = 0_n$ , d.h.  $u = v$ .

2) “ $\Rightarrow$ “: Da  $\varphi_A$  surjektiv, ist keine Faser von  $\varphi_A$  leer. Sei also  $w \in K^{m \times 1}$ . Dann existiert ein  $v \in K^{n \times 1}$  mit  $\varphi_A(v) = w$ . Nun ist aber  $\varphi_A(v)$  eine Linearkombination der Spalten von  $A$  nach Bemerkung 4.7.

“ $\Leftarrow$ “: Sei  $w \in K^{m \times 1}$ . Da sich  $w$  aus den Spalten  $S_j$  von  $A$  linearkombinieren läßt, existieren  $c_1, \dots, c_n$  mit  $w = c_1 S_1 + \dots + c_n S_n$ .

Setze  $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ . Also ist  $w = Av = \varphi_A(v)$  und somit ist  $\varphi_A$  surjektiv.

q. e. d.

**Bemerkung 4.14**

Sei  $\varphi_A$  injektiv. Dann besteht die Faser von  $\varphi_A$  über der Nullspalte  $0_m \in K^{m \times 1}$  nur aus der Nullspalte  $0_n \in K^{n \times 1}$ . Das bedeutet, dass  $0_m$  sich nur trivial, d.h. nur mit Nullen als Koeffizienten, aus den Spalten von  $A$  linearkombinieren läßt.

Zuallererst müssen wir eine wichtige Folgerung aus der Assoziativität der Komposition von Abbildungen, vgl. Gleichung (2.22), für die Assoziativität der Matrixmultiplikation ziehen.

**Korollar 4.15**

Matrixmultiplikation ist assoziativ, genauer: Sind  $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times \ell}, C \in K^{\ell \times p}$ , so gilt:

$$(AB)C = A(BC).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \varphi_{(AB)C} &= \varphi_{(AB)} \circ \varphi_C & (4.12) \\ &= (\varphi_A \circ \varphi_B) \circ \varphi_C & (4.12) \\ &= \varphi_A \circ (\varphi_B \circ \varphi_C) & (2.22) \\ &= \varphi_A \circ \varphi_{BC} & (4.12) \\ &= \varphi_{A(BC)} & (4.12) \end{aligned}$$

Da für eine beliebige Matrix  $G \in K^{r \times s}$  und für den Vektor  $e_j \in K^s$  dessen Einträge alle Null sind, ausser eine 1 an Stelle  $j \in \underline{s}$  gilt, dass die  $j$ -te Spalte von  $G$  gerade  $\varphi_G(e_j)$  ist, folgt nun dass die Spalten von  $(AB)C$  gleich denen von  $A(BC)$  sind, also auch  $(AB)C = A(BC)$ . q. e. d.

Beim Verständnis der Matrixmultiplikation helfen uns Zeilen auch weiter. Die folgende Bemerkung gibt ein ausgewogenes Bild.

**Bemerkung 4.16**

Sei  $A \in K^{m \times n}$  eine beliebige Matrix. Von nun an verwenden wir die folgende Notation:

$$A_{i,-} := (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in K^{1 \times n} \text{ bezeichnet die } i\text{-te Zeile von } A$$

$$A_{-,j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in K^{n \times 1} \text{ bezeichnet die } j\text{-te Spalte von } A.$$

**Bemerkung 4.17**

Sei  $A \in K^{m \times n}$ ,  $B \in K^{n \times \ell}$  und  $C = AB \in K^{m \times \ell}$ . Dann gilt:

- 1)  $c_{ij} = A_{i,-} B_{-,j}$  (Zeile mal Spalte).
- 2)  $C_{-,j} = AB_{-,j}$  (spaltenorientiert).
- 3)  $C_{i,-} = A_{i,-} B$  (zeilenorientiert).
- 4)  $C = A_{-,1} B_{1,-} + A_{-,2} B_{2,-} + \dots + A_{-,n} B_{n,-}$  (Spalte mal Zeile).

Beweis. Übung.

q. e. d.

## 4.3 Der GAUSSsche Algorithmus

### Lernziele

- GAUSSsches Eliminationsverfahren mit Anwendungen auf Bestimmung von Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme,
- Invertieren von Matrizen,
- Transponieren von Matrizen.

Wir wollen ein Verfahren kennenlernen (oder für die meisten wiederholen), welches die Faser über einem Punkt im Bildbereich unter der linearen Abbildung bestimmt. Es handelt sich um den GAUSSschen Algorithmus, den Carl Friedrich Gauß vor etwa 200 Jahren für die Behandlung astronomischer Fragestellungen entwickelt hat. Es hat sich

gezeigt, dass man dieses Verfahren schon vor 2000 Jahren in China kannte<sup>1</sup>, ist dort aber wohl wieder in Vergessenheit geraten. Unsere Ausgangssituation ist das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad Ax = b$$

mit  $A \in K^{m \times n}$  und  $b \in K^{m \times 1}$  fest vorgegeben. Gesucht ist die Faser von  $\varphi_A$  über  $b$ , also alle  $x \in K^{n \times 1}$ , die  $(*)$  erfüllen. Ausgeschrieben haben wir also

$$(*) \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Statt dies immer auszuschreiben, arbeiten wir einfach mit der erweiterten Matrix  $(A|b)$  des linearen Gleichungssystems. Der senkrechte Strich deutet an, wo die Matrix des Gleichungssystems aufhört und die rechte Seite anfängt. Es versteht sich von selbst, dass nicht alle linearen Probleme gleich in dieser Gestalt gegeben sind, sondern dass man manchmal etwas dafür arbeiten muß, damit man diese Gestalt erhält.

Zuerst beobachten wir, dass man in manchen Situationen die Lösungen eines Gleichungssystems fast direkt ablesen kann. Hier ist ein Beispiel:

#### Beispiel 4.18

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Dann sehen wir sofort, dass die Lösungen des Gleichungssystems die

<sup>1</sup>FANG-CHENG-ALGORITHMUS, vgl. P. Gabriel: Matrizen, Geometrie, lineare Algebra

folgende Menge ist:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

### Definition 4.19

Sei  $A \in K^{m \times n}$  eine Matrix mit den Zeilen  $Z_1, \dots, Z_m$ .

1) Für  $i \in \underline{m}$  ist der  $i$ -te **Stufenindex**  $St_i(A)$  definiert als

$$St_i(A) := \min\{j \in \underline{n} \mid A_{ij} \neq 0\}$$

Falls  $Z_i$  die Nullzeile ist, setzen wir  $St_i(A) := n + i$ .

2)  $A$  ist in **Stufenform**, falls die Folge

$$St(A) := (St_1(A), St_2(A), \dots, St_s(A))$$

streng monoton ansteigt, d.h.

$$St_1(A) < St_2(A) < \dots < St_s(A).$$

Falls zusätzlich noch für jeden Stufenindex  $j := St_i(A) \leq n$  für die entsprechende Spalte  $S_j$  von  $A$  gilt, dass  $S_j$  die  $i$ -te Spalte von  $I_m$  ist, so ist  $A$  in **striker Stufenform**.

### Beispiel 4.20

$$\begin{array}{rrrr} 1x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 + & 21x_4 = 2 \\ 2x_1 + & 4x_2 + & 4x_3 + & 28x_4 = 3 \end{array}$$

hat zugeordnete Matrix

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 21 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 28 & 3 \end{array} \right)$$

hat Stufenfolge  $(1, 1)$ , ist also nicht in Stufenform. Hingegen

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 21 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -14 & -1 \end{array} \right)$$

hat Stufenfolge  $(1, 3)$ , ist also in Stufenform, jedoch nicht in strikter Stufenform. Letztere liegt bei

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 7 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

vor, wo die Stufenspalten entsprechende Einheitsspalten sind. Das zugehörige lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & \frac{1}{2} \\ x_3 + 7x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann man nun sehr leicht lösen: Man fügt für jeden Nichtstufenindex einen Parameter  $p_i \in K$  und eine neue Gleichung ein. Im vorliegenden Fall:  $x_2 = p_1, x_4 = p_2$ . Durch Addition geeigneter Vielfache dieser neuen Gleichungen bringt man das neue Gleichungssystem in die strikte Stufengestalt und kann alle Lösungen ablesen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & \frac{1}{2} \\ x_3 + 7x_4 & = & \frac{1}{2} \\ x_2 & = & p_1 \\ x_4 & = & p_2 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_2 \end{array} \right)$$

Also

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - 2p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} - 7p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_2 \end{array} \right) \text{ also } \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} - 2p_1 \\ x_2 = p_1 \\ x_3 = \frac{1}{2} - 7p_2 \\ x_4 = p_2 \text{ mit } p_1, p_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{array}$$

Bei einem linearen Gleichungssystem in Stufengestalt ist somit die Gesamtheit der Lösungen ablesbar. Leider ist nicht jedes Gleichungssystem in dieser Form gegeben. Hier ist eine ganz allgemeine Strategie, die über den Fall der linearen Gleichungssysteme hinausgeht, wie man ein solches Problem angehen kann.

Die sich ergebende Strategie ist somit, eine Folge von fasernerhalten-



den Abbildungen anzuwenden, bis man die Lösungen hoffentlich ablesen kann. Anstatt das Gleichungssystem  $f(m) = n$  zu lösen, lösen wir also das Gleichungssystem  $(g \circ f)(m) = g(n)$ . Wir bestimmen also die Faser  $(g \circ f)^{-1}(\{g(n)\})$ . Eine fasernerhaltende Abbildung ist also eine Abbildung, die die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändert. Im Propädeutikum wurden solche Abbildungen schon eingeführt, die

1. das Vielfache einer Gleichung zu einer anderen addieren;
2. eine Gleichung mit einem Skalar in  $K^*$  multiplizieren;
3. zwei Gleichungen vertauschen.

Wir wollen diese Abbildungen wieder als lineare Abbildungen verstehen, d.h. wir wollen sie wieder durch Matrizen beschreiben. Hier ist eine Auswahl von Matrizen, die man von links an die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems heranmultiplizieren kann, ohne die Lösungsmenge zu verändern. Zunächst eine kleine Erinnerung.

#### Definition 4.21

Eine Matrix  $A \in K^{n \times n}$  heißt **invertierbar**, falls  $\varphi_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$  bijektiv ist. In dem Fall heißt die eindeutig bestimmte Matrix  $B \in K^{n \times n}$  mit  $AB = BA = I_n$  die zu  $A$  **inverse Matrix** und wird mit  $A^{-1}$  bezeichnet.

Übung: Verifiziere die in der Definition enthaltene Behauptung: Ist  $\varphi_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$  bijektiv, so ist  $(\varphi_A)^{-1} : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$  linear.

Hier ist eine Liste von invertierbaren Matrizen, die man üblicherweise zum Vereinfachen von linearen Gleichungssystemen benutzt.

#### Definition 4.22

Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $e_i \in K^{m \times 1}$  die  $i$ -te Spalte und  $f_i \in K^{1 \times m}$  die  $i$ -te Zeile der Einheitsmatrix  $I_m$ . Jede Matrix, welche von einem der drei nachfolgenden Typen ist, heißt auch **elementare Matrix** oder **elementare Umformungsmatrix**.

1) Für  $1 \leq i, j \leq m$  mit  $i \neq j$  und  $a \in K$  sei

$$\text{Add}_m(i, j, a) := I_m + ae_i f_j : \underline{m} \times \underline{m} \rightarrow K : (s, t) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } s = t \\ a & \text{falls } (s, t) = (i, j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.  $\text{Add}_m(i, j, a)$  unterscheidet sich von Einheitsmatrix vom Grad  $m$  nur darin, dass der Eintrag in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  das Körperelement  $a$  ist.

2) Für  $1 \leq i \leq m$  und  $a \in K - \{0\}$  sei

$$\text{Mul}_m(i, a) := I_m + (a-1)e_i f_i : \underline{m} \times \underline{m} \rightarrow K : (s, t) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } s = t \neq i \\ a & \text{falls } s = t = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.  $\text{Mul}_m(i, a)$  unterscheidet sich von Einheitsmatrix vom Grad  $m$  nur darin, dass der Eintrag in Zeile  $i$  und Spalte  $i$  das Körperelement  $a$  ist.

3) Für  $1 \leq i < j \leq m$  sei

$$\text{Ver}_m(i, j) := (e_1 \dots e_{i-1} e_j e_{i+1} \dots e_{j-1} e_i e_{j+1} \dots e_m) : \underline{m} \times \underline{m} \rightarrow K :$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } s = t \notin \{i, j\} \\ 1 & \text{falls } (s, t) \in \{(i, j), (j, i)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

d.h.  $\text{Ver}_m(i, j)$  unterscheidet sich von Einheitsmatrix  $I_m$  vom Grad  $m$  nur darin, dass die  $i$ -te und die  $j$ -te Zeilen von  $I_m$  vertauscht sind.

Zunächst sehen wir, dass jede dieser Matrizen invertierbar ist. Dies kann man leicht einsehen, indem wir die inversen Matrizen angeben. Daher sind die zugehörigen induzierten linearen Abbildungen bijektiv. Wir können sie also als fasernerhaltende Abbildungen auf unser Gleichungssystem anwenden.

**Lemma 4.23**

Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

1.  $\text{Add}_m(i, j, a) \in K^{m \times m}$  invertierbar mit inverser Matrix  $\text{Add}_m(i, j, -a)$ ;
2.  $\text{Mul}_m(i, a) \in K^{m \times m}$  für  $a \in K - \{0\}$  ist invertierbar mit Inverser  $\text{Mul}_m(i, a^{-1})$ .
3.  $\text{Ver}_m(i, j) \in K^{m \times m}$  ist zu sich selbst invers.

Wir untersuchen nun, wie sich eine Matrix  $B \in K^{m \times n}$  ändert, wenn wir sie von links mit einer dieser Elementarmatrizen multiplizieren. Dabei erkennen wir, dass wir die drei oben genannten Operationen mit der (erweiterten) Matrix eines linearen Gleichungssystems durchführen können.

**Lemma 4.24**

Seien  $t, m \in \mathbb{N}$  und  $B \in K^{m \times t}$  mit Zeilen  $Z_1, \dots, Z_m$ . Dann gilt:

1. Das Produkt  $\text{Add}_m(i, j, a)B$  unterscheidet sich von  $B$  nur in der  $i$ -ten Zeile: die  $i$ -te Zeile von  $\text{Add}_m(i, j, a)B$  ist  $Z_i + aZ_j$ . Also addiert  $\text{Add}_m(i, j, a)$  das  $a$ -fache der  $j$ -ten Zeile von  $B$  zur  $i$ -ten Zeile.
2. Das Produkt  $\text{Mul}_m(i, a)B$  unterscheidet sich von  $B$  nur in der  $i$ -ten Zeile. Die  $i$ -te Zeile des Produkts ist  $aZ_i$ .
3. Das Produkt  $\text{Ver}_m(i, j)B$  unterscheidet sich von  $B$  darin, dass die  $i$ -te und die  $j$ -te Zeile von  $B$  vertauscht sind.

Wir benötigen noch eine weitere Bemerkung über Abbildungen:

**Bemerkung 4.25**

Sei  $f : M \rightarrow N$  und  $n \in N$ . Für jede bijektive Abbildung  $g : N \rightarrow N$  gilt für die Faser von  $f$  über  $n$ :

$$f^{-1}(\{n\}) = (g \circ f)^{-1}(\{g(n)\}).$$

Beweis. Die erste Inklusion benutzt nicht die Bijektivität von  $g$ : Sei  $m \in f^{-1}(\{n\})$ , d. h.  $f(m) = n$ . Dann gilt  $g(f(m)) = g(n)$ , d. h.  $m \in (g \circ f)^{-1}(\{g(n)\})$ . Für den Umkehrschluß braucht man ein Linksinverses von  $g$ , was wegen der Bijektivität von  $g$  natürlich existiert. q. e. d.

Der GAUSSsche Algorithmus wird nun in zwei Teilen präsentiert. Der erste Teil überführt eine (erweiterte) Matrix in Stufenform. Der zweite Teil macht dann die Lösungen des Gleichungssystems explizit. Dafür werden gegebenenfalls neue Gleichungen eingeführt, die aber die Lösungsmenge nicht ändern.

Man beachte zum Beweis, aber auch im Hinblick auf das Lösen linearer Gleichungssysteme: Für jede Matrix  $B \in K^{m \times n}$  unterscheidet sich  $\text{Add}_m(i, j, a)B$  von  $B$  nur in der  $i$ -ten Zeile: die  $i$ -te Zeile von  $\text{Add}_m(i, j, a)B$  ist  $B_{i,-} + aB_{j,-}$ .

**Algorithmus 4.26.** Gegeben:  $C = (c_{i,j}) = (A \mid b) \in K^{m \times (n+1)}$  die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems.

Gesucht: Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Algorithmus:

**1. Teil:** Überführe  $C$  in Stufengestalt.

1. Finde den kleinsten Spaltenindex  $j$ , sodass die  $j$ -te Spalte von  $C$  nicht 0 ist.
2. Finde den kleinsten Zeilenindex  $i$  mit  $c_{i,j} \neq 0$ .
3. Falls  $i \neq 1$ , vertausche die erste und  $i$ -te Zeile, d.h. ersetze  $C$  durch  $\text{Ver}_m(1, i)C$  sodass wir  $i = 1$  haben.
4. Falls  $c_{1,j} \neq 1$ , ersetze  $C$  durch  $\text{Mul}_m(1, c_{1,j}^{-1})C$ , sodass wir mit  $c_{1,j} = 1$  weiterarbeiten können.
5. Räume die  $j$ -te Spalte aus durch Subtraktion der  $c_{i,j}$ -Vielfachen der ersten Zeile von der  $i$ -ten Zeile (d.h. ersetze  $C$  der Reihe nach durch  $\text{Add}_m(i, 1, -c_{i,j})C$ ) für  $i = 2 \dots m$ .
6. Wiederhole Schritte 1. – 5. mit der Teilmatrix von  $C$ , die durch Streichen der ersten Zeile und der ersten  $j$  Spalten hervorgeht.

Am Ende hat man eine Matrix  $C$  in Stufengestalt mit derselben Lösungsmenge. Letztere ist genau dann leer, wenn  $n+1$  ein Stufenindex ist.

**2. Teil:** Mache Lösungen explizit.

1. Falls  $n+1$  kein Stufenindex ist, streiche die Nullzeilen von  $C$ .
2. Füge für jeden Nichtstufenindex  $i_\ell$  mit  $\ell = 1, \dots, d$  der linken Seite eine neue Zeile  $(v, p_\ell)$  zu der Matrix hinzu, wo  $v$  die  $i_\ell$ -te Zeile von  $I_n$  ist und  $p_\ell$  paarweise verschiedene Parameter sind.
3. Bringe die resultierende Matrix durch die Linksmultiplikationen mit  $\text{Ver}_n(i, j)$  und  $\text{Add}_n(i, j, a)$  auf strikte Stufengestalt.

Die strikte Stufengestalt ist gegeben durch  $(I_n, L)$ , wo  $L$  eine Spalte ist, die die Lösungen in Abhängigkeit von den Parametern angibt.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert und dass wir am Ende wirklich sehen, ob eine Lösung existiert und alle Lösungen ablesbar sind. Ersteres ist klar, da nach spätestens  $m$  Übergängen zu Teilmatrizen die Stufenform erreicht ist. Hat die relevante Matrix  $r$  Zeilen, so sind zu jedem Übergang maximal  $1 + 1 + (r - 1)$  Zeilenumformungen notwendig. Die Anzahl der Zeilenumformungen im zweiten Teil kann man auch abschätzen (Übung), sodass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten terminiert. Nach Bemerkung 4.25 und der Invertierbarkeit der Umformungsmatrizen aus Beispiel 4.25 ändert sich die Lösungsmenge nicht. Das Weglassen von Nullzeilen ist kein Informationsverlust, das Hinzufügen der Zeilen mit den Parametern nur eine Namensgebung. q. e. d.

Mit dem GAUSSschen Algorithmus sind wir im Besitz einer Schlüsseltechnologie. Mit seiner Hilfe können wir nicht nur Fasern von linearen Abbildungen bestimmen, sondern viele der Begriffe aus dem Abbildungsabschnitt konstruktiv beherrschen: Bestimmung des Bildes einer linearen Abbildung, von Rechts- und Linksinversen, Sur- und Injektivitätstests. Wir begnügen uns jeweils mit Beispielen.

Übung: Stellt  $A \in K^{n \times n}$  eine bijektive lineare Abbildung  $\varphi_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$  dar, so gibt es ein lineares Inverses von  $\varphi_A$ , d.h. eine Matrix  $B \in K^{n \times m}$  mit  $AB = I_m$ .

#### Beispiel 4.27

Man löse das lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix  $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  über  $\mathbb{F}_3$  für  $x \in \mathbb{F}_3^{3 \times 1}$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir wenden zuerst Teil 1 des Gauss-Algorithmus auf die Matrix  $C = (A|b)$  an.

$$C = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

$j = 1, i = 1$  und  $c_{11} = 1$ . Wir müssen also die 1. Spalte unterhalb der 1. Zeile ausräumen.

$$\text{Add}(3, 1, -1)\text{Add}(2, 1, -1)C = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Nun streichen wir (in Gedanken) die 1. Zeile und die 1. Spalte. In der so erhaltenen Teilmatrix  $C'$  ist die 1. Spalte die Nullspalte. Also ist  $j = 3$  und  $i = 2$  und  $c_{ij} = 2 = -1$  (in der ganzen Matrix).

$$\text{Add}(3, 2, 1)\text{Add}(3, 1, -1)\text{Add}(2, 1, -1)C = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Damit ist der 1. Teil beendet, denn die Matrix hat Stufenform.

Nun überführen wir die Matrix in die strikte Stufenform in Teil 2. Es ist 4 kein Stufenindex. Zuerst streichen wir die Nullzeilen und erhalten:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Die Nicht-Stufenindizes sind 2 und 4. Für diese fügen wir Zeilen mit Parametern hinzu:

$$D := \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_2 \end{array} \right).$$

Nun bringen wir diese auf strikte Stufenform:

$$\begin{aligned}
 Ver(2, 3)D &:= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_2 \end{array} \right) \\
 &Add(3, 4, 1)Add(1, 2, -1)Ver(2, 3)D \\
 &:= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 - p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 + p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_2 \end{array} \right) \\
 &Mul(3, 2)Add(1, 4, -1)Add(1, 3, 1)Add(3, 4, 1)Add(1, 2, -1)Ver(2, 3)D \\
 &:= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 - p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 + 2p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p_2 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Nun können wir die Lösung ablesen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 - p_1 \\ p_1 \\ 2 + 2p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \mid p_1, p_2 \in \mathbb{F}_3 \right\}.$$

Da  $p_1$  und  $p_2$  nur endliche viele Werte annehmen können, nämlich 0, 1, 2 ist die Lösungsmenge endlich und wir können sie hinschreiben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$



**Beispiel 4.28**

Finde die inverse Matrix  $B$  von  $A$  über  $\mathbb{F}_3$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Sei  $e_i \in \mathbb{F}_3^{4 \times 1}$  die  $i$ -te Spalte der Einheitsmatrix  $I_4$ . Sei  $S_i$  die  $i$ -te Spalte von  $B$ . Dann ist  $AS_i = e_i$ . Da wir  $S_1$  noch nicht kennen, wollen wir die Einträge in  $S_1$  als Unbestimmte betrachten. Um diese zu bestimmen, wenden wir den GAUSSschen Algorithmus auf die Matrix

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

an. Die Lösung dieses Gleichungssystems gibt uns die erste Spalte  $S_1$  von  $B$ . Analog können wir für die anderen Spalten von  $B$  vorgehen. Da diese vier Gleichungssysteme dieselbe linke Seite, nämlich  $A$ , haben, kann man sie simultan lösen, indem man die vier rechten Seiten zu einer vierspaltigen rechten Seite  $I_2$  zusammenfaßt und dann den GAUSSalgorithmus anwendet:

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Ver_4(1,3)} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Add(4,1,2)} \\
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Ver(2,3) \\ Mul(2,2)}} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{Add(4,2,1)} \\
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Ver(3,4) \\ Mul(3,2), Mul(4,2)}} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{Add(1,2,2) \\ Add(2,3,1), Add(3,4,1)}} \\
& \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{Add(1,4,2)} \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Damit ist die inverse Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen jetzt mit Hilfe des GAUSSschen Algorithmus das Bild einer linearen Abbildung bestimmen. Man kann natürlich sagen, dass das Bild einfach aus allen Linearkombinationen der Spalten der Matrix besteht. Aber oft ist diese Beschreibung recht unübersichtlich. Wir gehen hier so vor, dass wir die rechte Seite mit Unbestimmten vorbesetzen, den ersten Teil des GAUSSschen Algorithmus durchführen und dann durch die Lösbarkeitsbedingung ein lineares Gleichungssystem für die Lösungsmenge bekommen.

#### Beispiel 4.29

Beschreibe Bild  $\varphi_A$ , wo  $A$  gegeben ist durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir wenden den GAUSSschen Algorithmus auf die Matrix

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & x \\ 2 & 3 & 4 & 5 & y \\ 3 & 4 & 5 & 6 & z \end{array} \right)$$

an. Also:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & x \\ 0 & -1 & -2 & -3 & y - 2x \\ 0 & -2 & -4 & -6 & z - 3x \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & x \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -y + 2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z + x - 2y \end{array} \right)$$

Also  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Bild}(\varphi_A)$  genau dann, wenn  $z + x - 2y = 0$  (was man direkt lösen kann.)

Als nächstes wollen wir an einem Beispiel diskutieren, wie man eine Rechtsinverse für surjektive lineare Abbildungen bestimmen kann. Als Vorübung eine kleine Aufgabe:

Übung: Stellt  $A \in K^{m \times n}$  eine surjektive lineare Abbildung  $\varphi_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$  dar, so gibt es ein lineares Rechtsinverses von  $\varphi_A$ , d. h. eine Matrix  $B \in K^{n \times m}$  mit  $AB = I_m$ .

#### Beispiel 4.30

Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Man überprüfe, ob  $\varphi_A : \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$  ein Rechtsinverses hat und berechne alle linearen Rechtsinversen.

Lösung: Gesucht sind alle Matrizen  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$  mit  $AB = I_2$ . Seien  $S_1$  und  $S_2$  die Spalten von  $B$ . Somit haben wir zwei lineare Gleichungssysteme zu lösen, nämlich

$$AS_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } AS_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da diese beiden Gleichungssysteme dieselbe linke Seite, nämlich  $A$ , haben, kann man sie simultan lösen, indem man beide rechten Seiten zu einer zweispaltigen rechten Seite  $I_2$  zusammenfaßt und dann den GAUSSalgorithmus anwendet:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & b \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -3+a & 2+b \\ 0 & 1 & 0 & 2-2a & -1-2b \\ 0 & 0 & 1 & a & b \end{array} \right)$$

sodass alle linearen Rechtsinversen durch die Matrizen

$$\left( \begin{array}{cc} -3+a & 2+b \\ 2-2a & -1-2b \\ a & b \end{array} \right)$$

dargestellt sind mit  $a, b \in \mathbb{R}$  beliebig. Man nennt auch diese Matrizen die rechtsinversen Matrizen von  $A$ . Man beachte jedoch, dass unter den rechtsinversen Abbildungen von  $\varphi_A$  auch nichtlineare Abbildungen sind.

Man überlegt sich jetzt leicht: Das surjektive  $\varphi_A$  ist genau dann bijektiv, wenn sein Rechtsinverses  $\varphi_B$  eindeutig bestimmt ist. In diesem Fall ist es gleichzeitig Linksinverses von  $\varphi_A$ .

Linksinverse für injektive lineare Abbildungen kann man durch einen kleinen Trick auf die Bestimmung von Rechtsinversen zurückführen.

#### Definition 4.31

Ist  $A : \underline{m} \times \underline{n} \rightarrow K : (i, j) \mapsto a_{ij}$  eine Matrix, so heißt

$$A^{tr} : \underline{n} \times \underline{m} \rightarrow K : (i, j) \mapsto a_{ji}$$

die **transponierte Matrix** oder einfach die **Transponierte** von  $A$ .

**Lemma 4.32**

Sind  $A \in K^{m \times n}$  und  $B \in K^{n \times \ell}$ , so sind  $B^{tr} \in K^{\ell \times n}$  und  $A^{tr} \in K^{n \times m}$  und

$$(AB)^{tr} = B^{tr} A^{tr}.$$

Ist  $\varphi_A$  surjektiv mit Rechtsinversen  $\varphi_B$ , so ist  $\varphi_{A^{tr}}$  injektiv mit Linksinversen  $\varphi_{B^{tr}}$  und umgekehrt.

Beweis. Übung.

q. e. d.

**Satz 4.33**

Sei  $K$  ein Körper. Dann ist  $K^{m \times n}$  ein Vektorraum und  $K^{n \times n}$  ist eine  $K$ -Algebra. Insbesondere gelten für die Addition von Matrizen und die Multiplikation von Körperelementen und Matrizen die Vektorraumaxiome. D.h. unter anderem gelten für  $a, b \in K$  und  $A, A_1, A_2, A_3 \in K^{m \times n}$ :

- 1)  $A_1 + (A_2 + A_3) = (A_1 + A_2) + A_3$
- 2)  $a(A_1 + A_2) = aA_1 + aA_2$
- 3)  $(a + b)A = aA + bA$
- 4)  $(ab)A = a(bA)$

Seien weiter  $B, B_1, B_2 \in K^{n \times l}$  sowie  $C \in K^{l \times k}$ . Dann gelten zudem:

- 5)  $(AB)C = A(BC)$
- 6)  $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$
- 7)  $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
- 8)  $a(AB) = (aA)B = A(aB)$
- 9)  $(A^{tr})^{tr} = A$
- 10)  $(aA)^{tr} = aA^{tr}$
- 11)  $(A + B)^{tr} = A^{tr} + B^{tr}$
- 12)  $(AB)^{tr} = B^{tr} A^{tr}.$

Falls  $A$  invertierbar ist, gilt:

$$13) (A^{-1})^{tr} = (A^{tr})^{-1}.$$

Beweis. 1) bis 4) folgen aus Satz 3.13.

5) ist Korollar 4.15.

6) und 7) wurden in der Globalübung gezeigt.

8) Übung.

9) bis 11) sind trivial.

12) ist Lemma 4.32.

13) Es ist

$$(A^{-1})^{tr} \cdot A^{tr} \stackrel{12)}{=} (A \cdot A^{-1})^{tr} = (I_n)^{tr} = I_n.$$

Also ist  $(A^{-1})^{tr}$  das Inverse von  $A^{tr}$ .

q. e. d.