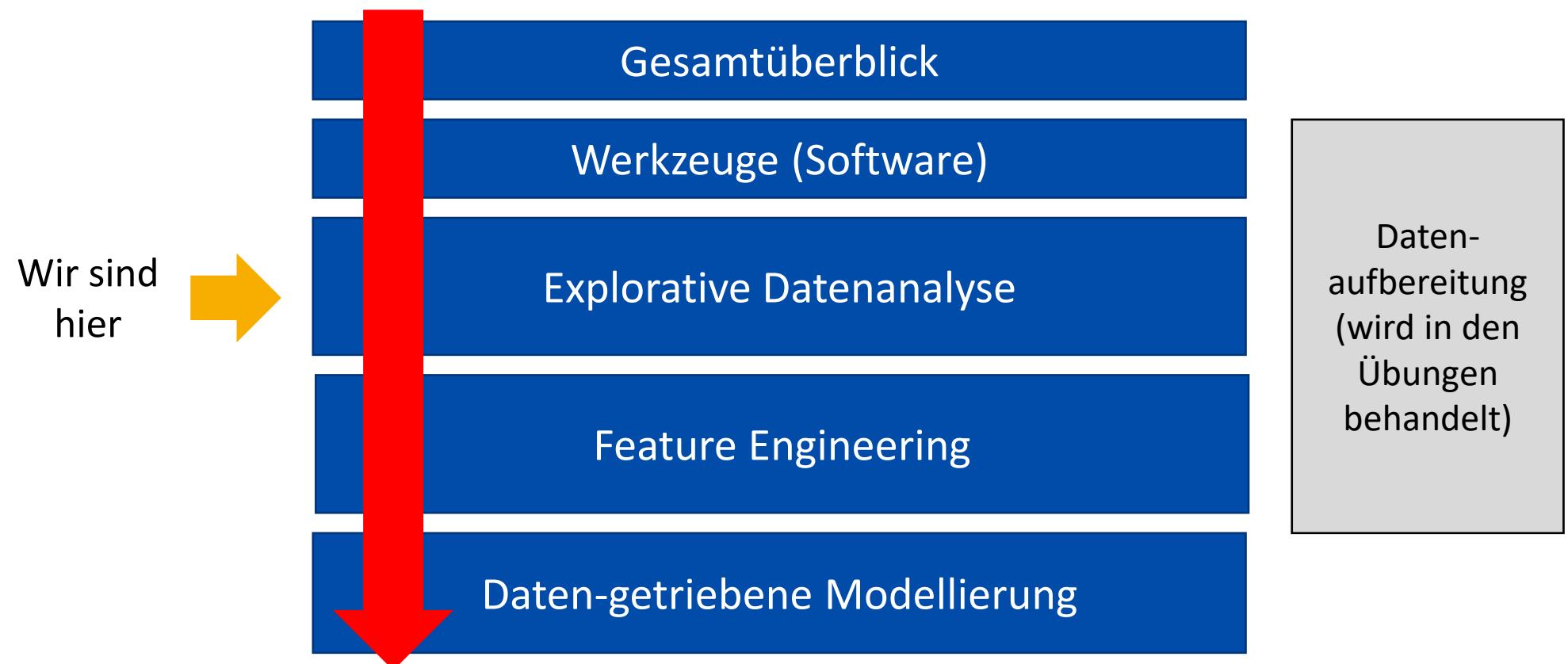
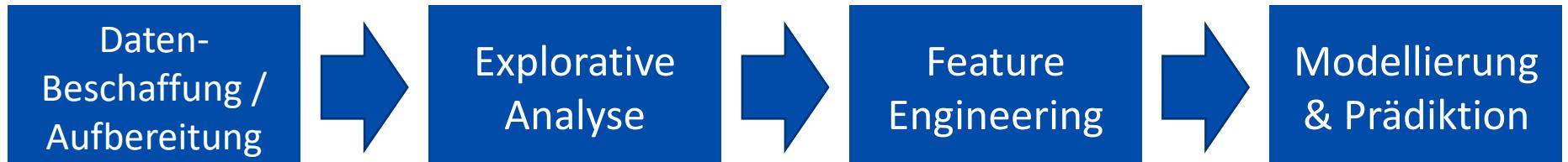


# Einführung in Data Science

## Unser Plan für heute:

1. Wiederholung
2. Dimensionsreduktionsverfahren
  - Hauptkomponentenzerlegung (PCA)

# Data Science



# Curriculum

1. Grundbegriffe / Überblick
2. Zentrale Softwarebibliotheken
3. Univariate explorative Analyse (EDA)  
Visualisierung (Teil 1)
4. Visualisierung (Teil 2),  
Multivariate explorative Analyse (Teil 1)
5. Multivariate explorative Analyse (Teil 2)
6. Dimensionsreduktion (Teil 1): PCA
7. Dimensionsreduktion (Teil 2): MDS, Isomap
8. Clustering: K-Means, HCA
9. Clustervalidierung
10. Probeklausur
11. Feature Engineering,  
Datengetriebene Modellierung (Teil 1)
12. Datengetriebene Modellierung (Teil 2)

Überblick /  
Begriffe

Explorative  
Analyse  
(EDA)

Feature  
Engineering &  
Modellierung



# Multivariate Explorative Analyse

Methoden der multivariaten explorativen Analyse,  
die Sie bisher kennengelernt haben:

1. Multivariate deskriptive Statistik  
(hier vor allem: Visualisierungsarten)
2. Korrelationskoeffizienten  
(bivariate Analyse: Suche nach Zusammenhängen)

Nun:

- 
3. Dimensionsreduktionsverfahren

# M'variate Explorative Analyse | Dimensionsreduktion

In der Praxis:

- Daten sind häufig hochdimensional:  
Jeder Datenpunkt (jedes Objekt) hat oft viele Merkmale (Features)

Beispiel (kennen Sie aus der Übung):

	country	continent	year	lifeExp	pop	gdpPercap
0	Afghanistan	Asia	1952	28.801	8425333	779.445314
1	Afghanistan	Asia	1957	30.332	9240934	820.853030
2	Afghanistan	Asia	1962	31.997	10267083	853.100710

Merkmale: Land, Kontinent, Jahr, Lebenserwartung, Populationsgröße, Bruttoinlandsprodukt/Kopf

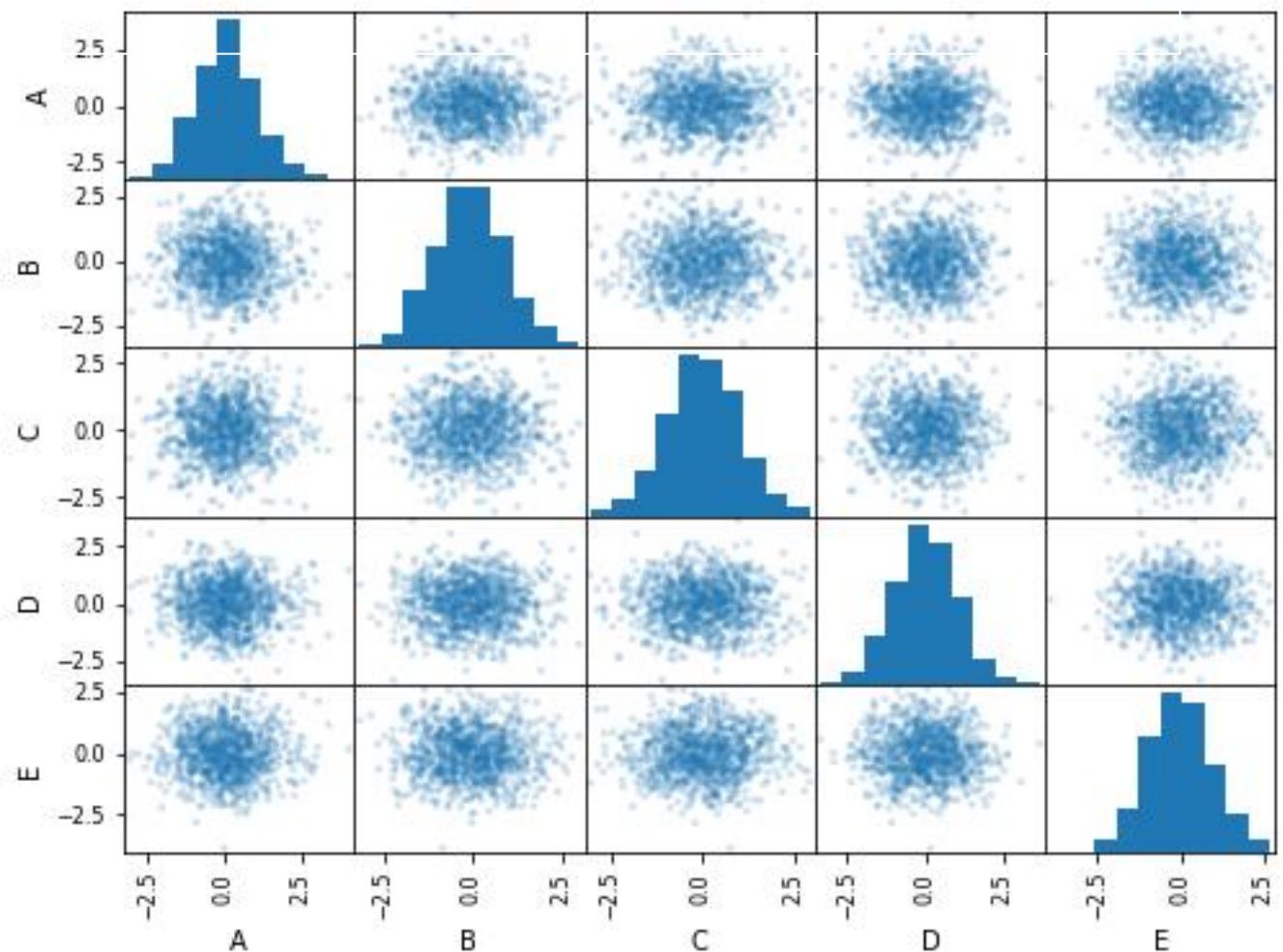
Erkundung (z.B. durch Visualisierung) hochdimensionaler Daten ist anspruchsvoll.

# M'variate Explorative Analyse | Dimensionsreduktion

Erkundung hochdimensionaler Daten durch Visualisierung durch viele Scatterplots:

Beispiel:

1000 Datenpunkte mit je 5 Features (also: 5-dimensionalmer Merkmalsraum)

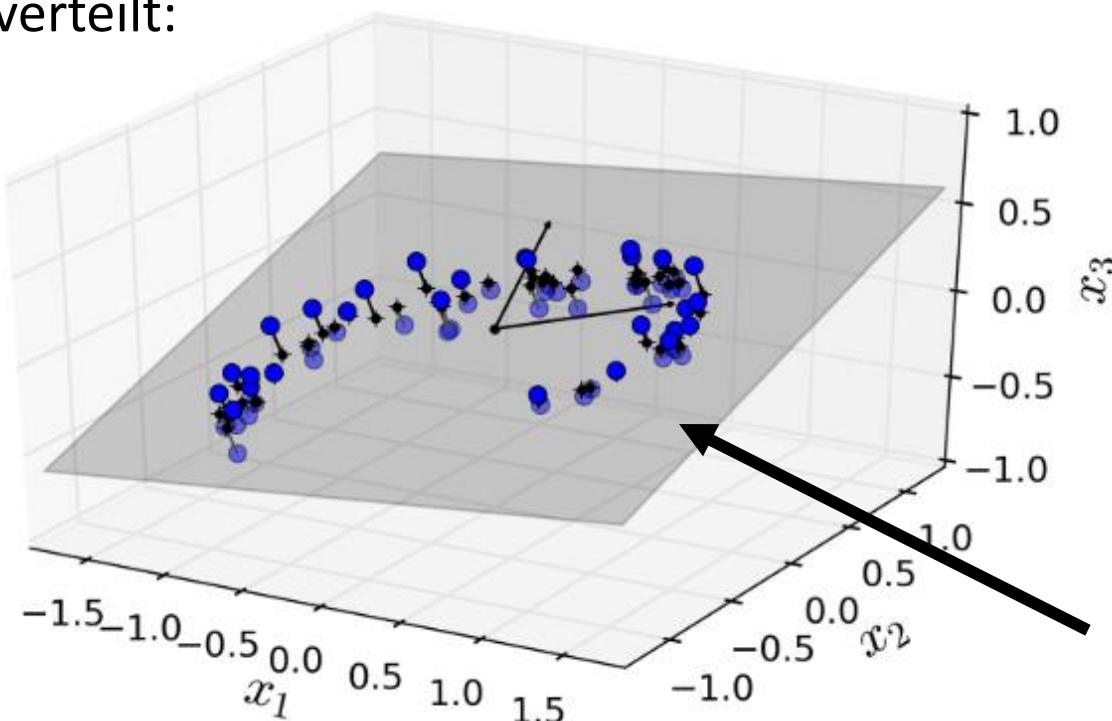


# M'variate Explorative Analyse | Dimensionsreduktion

## Dimensionsreduktionstechniken

- reduzieren die Anzahl der Merkmale (Dimensionen)  
(oft mit dem Ziel, soweinig Informationen dabei zu verlieren)

Viele Daten sind nicht uniform im Merkmalsraum (Feature-Raum) verteilt:



Manche Merkmale sind miteinander stark korreliert

→ Datenpunkte liegen oft in einem Unterraum

Daten liegen hier ungefähr in einem 2-dimensionalen Unterraum (= graue Fläche).

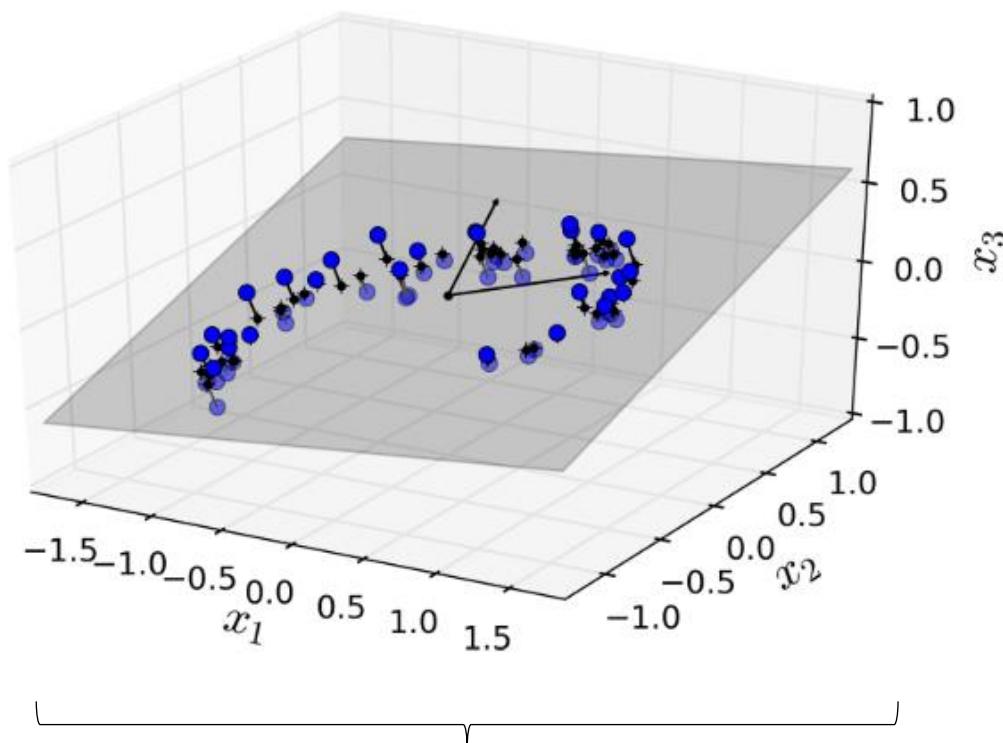
# M'variate Explorative Analyse | Dimensionsreduktion

Dimensionsreduktion durch Projektion jedes Punktes auf einen Unterraum

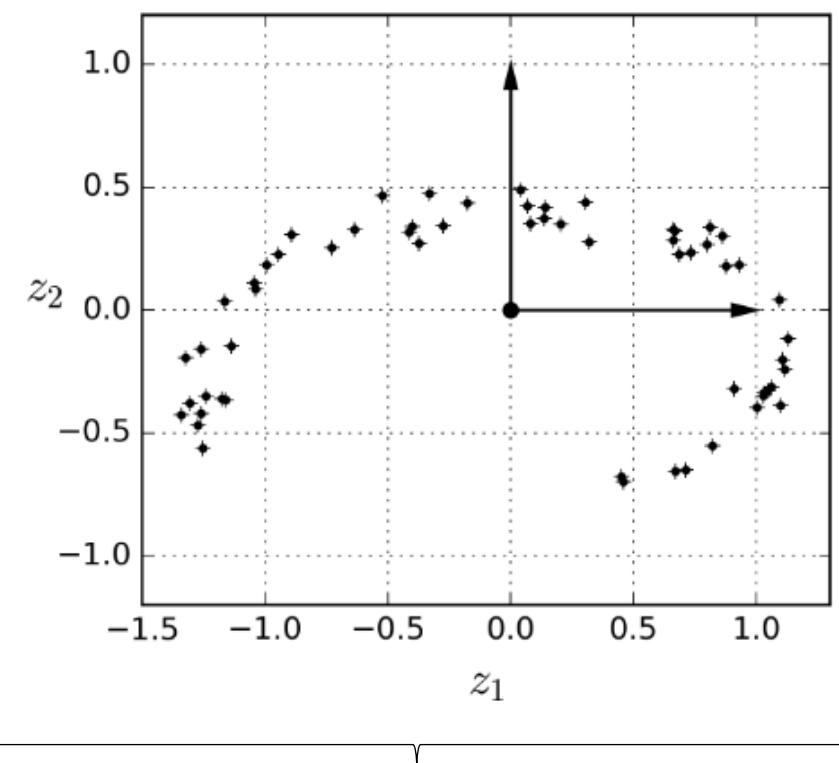
3-dimensionaler Merkmalsraum



2-dimensionaler Merkmalsraum



alte Merkmale (Features)



neue, transformierte Merkmale

# Dimensionsreduktion | PCA

## Hauptkomponentenzerlegung (*principal component analysis, PCA*)

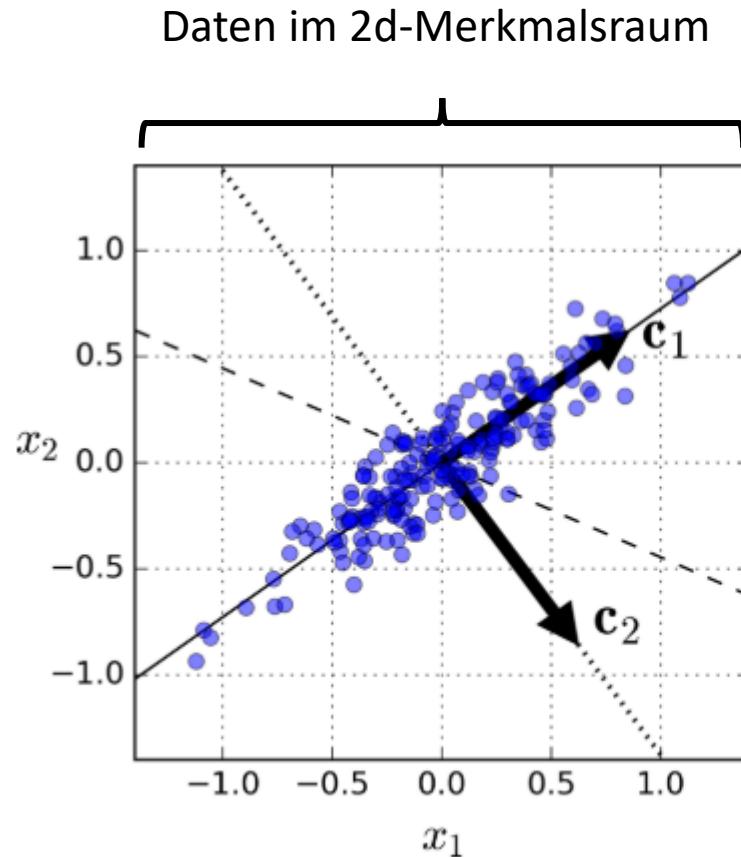
- zählt zu den bekanntesten Dimensionsreduktionsverfahren
- 1901 von Karl Pearson publiziert<sup>1</sup>

### Kernideen

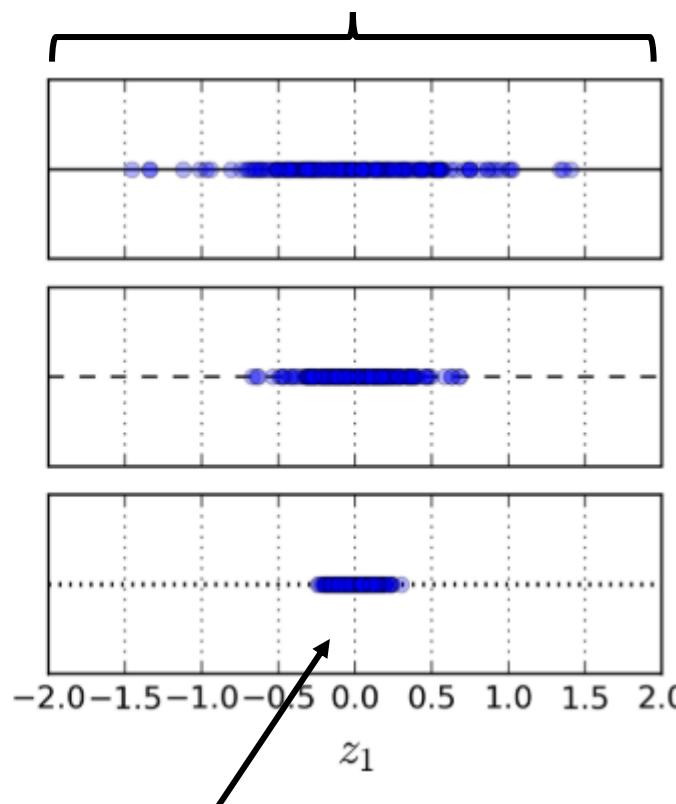
- PCA findet neue Achsen (Komponenten) für die Daten, so dass die Daten bezüglich dieser Achsen eine *möglichst große Varianz* aufweisen.
- Achsen, bezüglich derer die Daten kaum (oder keine) Varianz aufweisen, können später weggelassen werden  
(→ Dimensionsreduktion).
- Neue Achsen werden durch *orthogonale Transformation* erzeugt (d.h. Vektorlängen und Winkel bleiben erhalten, präziser: das innere Produkt bleibt erhalten).

# Dimensionsreduktion | PCA

Beispiel:



Daten projiziert auf verschiedene Achsen

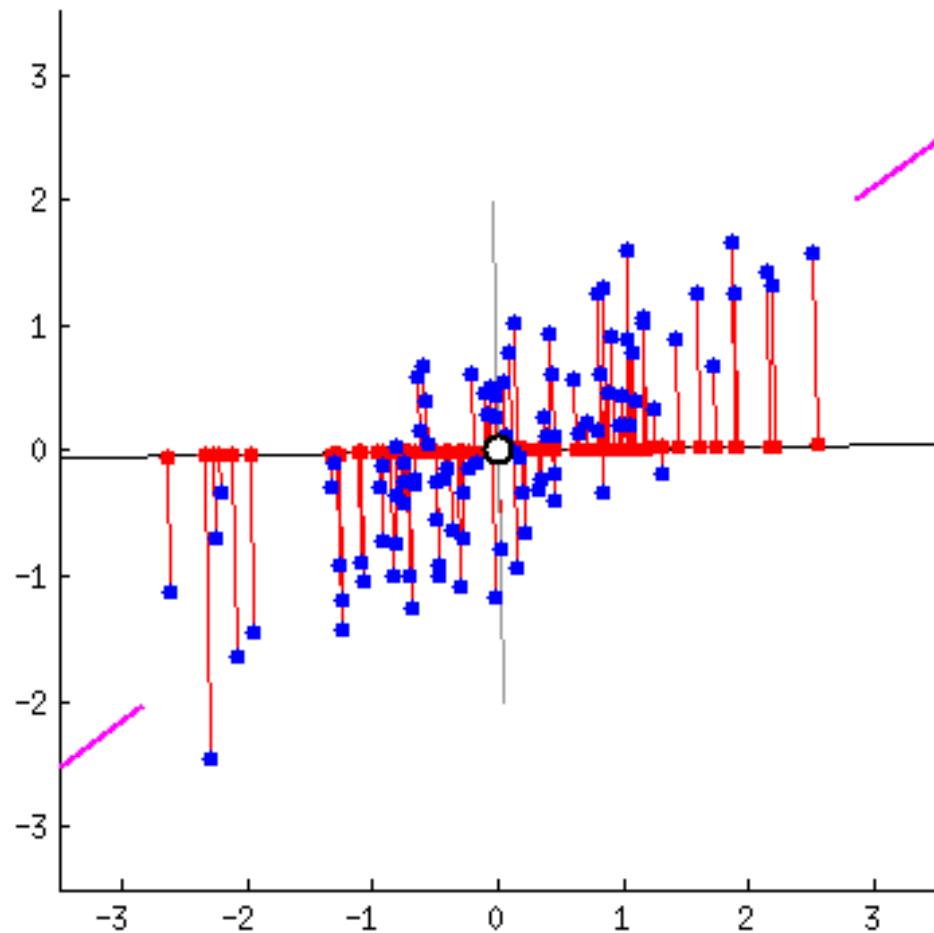


Varianz der Daten ist auf dieser Achse ( $c_1$ ) am größten: Dies ist die 1. Achse der PCA

PCA ist eine orthogonale Transformation: Achsen stehen senkrecht aufeinander. Dies ist also die 2. Achse ( $c_2$ ) der PCA.

In diesem Beispiel unterscheiden sich die Datenpunkte auf dieser Achse kaum voneinander ( $\rightarrow$  geringe Varianz). Wir könnten die Daten also 1-dimensional (mithilfe der 1. Achse) darstellen.

# Dimensionsreduktion | PCA



# Dimensionsreduktion | PCA

## Formale Betrachtung

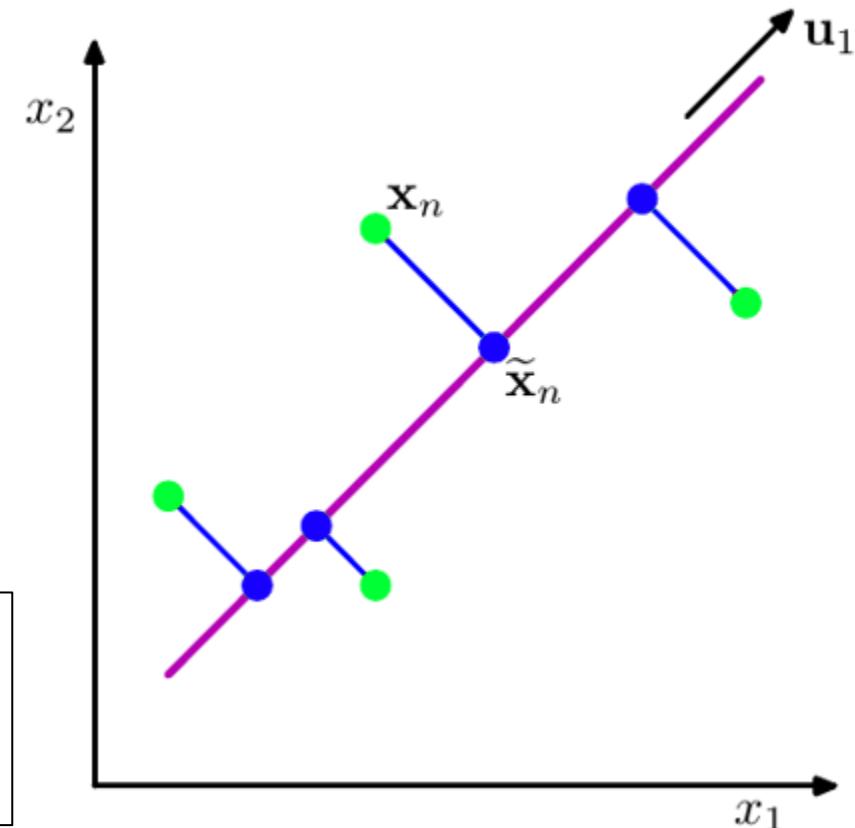
$\{\mathbf{x}_n\}$ :  $N$  Datenpunkte mit  $n=1,\dots,N$   
mit  $D$  Merkmalen

Mittlerer Vektor  
der Daten       $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n$

Einheitsvektor  $\mathbf{u}_1$   
(mit:  $\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1$ )

Wir suchen die Richtung  $\mathbf{u}_1$ , so dass die Varianz der Projektion der Daten auf  $\mathbf{u}_1$  maximiert wird.

Projektion eines Datenpunktes  $\mathbf{x}_n$  auf  $\mathbf{u}_1$ :  $\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}_n$



# Dimensionsreduktion | PCA

Wir suchen die Richtung  $\mathbf{u}_1$ , so dass die Varianz der Projektion der Daten auf  $\mathbf{u}_1$  maximiert wird.

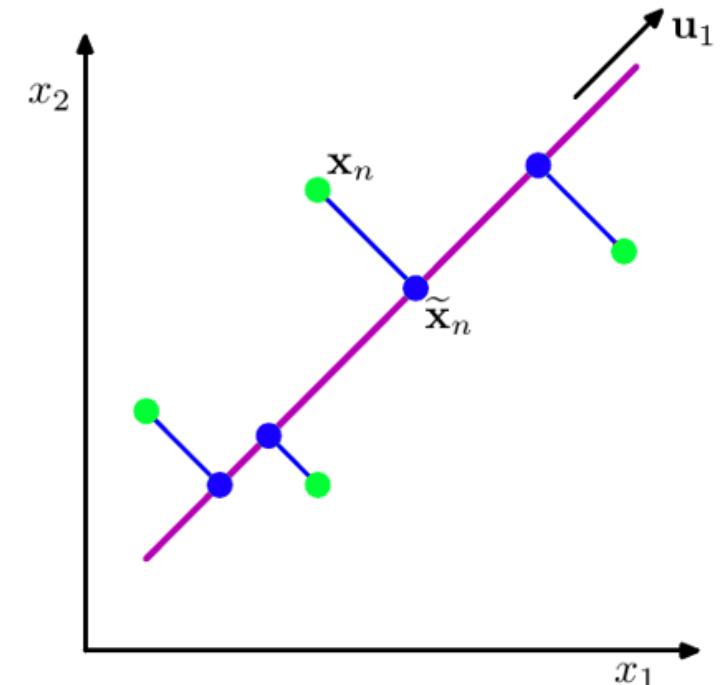
Varianz der Projektion der Datenpunkte auf  $\mathbf{u}_1$ :

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{u}_1^T \mathbf{x}_n - \mathbf{u}_1^T \bar{\mathbf{x}})^2 \\ &= \mathbf{u}_1^T S \mathbf{u}_1\end{aligned}$$

mit der Kovarianzmatrix  $S = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})^T$

$\text{Var}(\mathbf{u}_1^T \mathbf{x})$  soll maximiert werden, also:

$$\max_{\mathbf{u}_1} (\mathbf{u}_1^T S \mathbf{u}_1) \text{ mit Nebenbedingung } \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1$$



# Dimensionsreduktion | PCA

$\text{Var}(\mathbf{u}_1^T \mathbf{x})$  soll maximiert werden, also:

$$\max_{\mathbf{u}_1} (\mathbf{u}_1^T S \mathbf{u}_1) \text{ mit Nebenbedingung } \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1$$

Dies ist ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung.

**Lösungsstrategie:** Umwandlung in ein unbeschränktes Optimierungsproblem durch Einführung eines Lagrange-Multiplikators und differenzieren der resultierenden Lagrange-Funktion.

$$\max_{\mathbf{u}_1} (\mathbf{u}_1^T S \mathbf{u}_1 + \lambda_1 [1 - \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1])$$

$$\mathcal{L}$$

Ableiten, auf null setzen und lösen:  $\nabla_{\mathbf{u}_1, \lambda_1} \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0$

# Dimensionsreduktion | PCA

$$\nabla_{\mathbf{u}_1, \lambda_1} \mathcal{L} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

Wir betrachten zunächst die Ableitung in  $\lambda_1$ -Richtung:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\mathbf{u}_1^T S \mathbf{u}_1 + \lambda_1 [1 - \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1]) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \lambda_1 [1 - \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1] \stackrel{!}{=} 0$$

$$[1 - \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1 \quad \text{(die Nebenbedingung ist also erfüllt)}$$

Wir betrachten nun die Ableitungen in  $\mathbf{u}_1$ -Richtung:

# Dimensionsreduktion | PCA

$$\nabla_{\mathbf{u}_1} (\mathbf{u}_1^T S \mathbf{u}_1 + \lambda_1 [1 - \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1]) \stackrel{!}{=} 0$$

$$S \mathbf{u}_1 - \lambda_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

$$S \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

$\mathbf{u}_1$  ist also Eigenvektor von  $S$  mit Eigenwert  $\lambda_1$ .



multiplizieren mit  $\mathbf{u}_1^T$  von links

$$\mathbf{u}_1^T S \mathbf{u}_1 = \lambda_1 \quad \text{weil} \quad \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 = 1$$

Varianz der Projektion  
der Datenpunkte auf  $\mathbf{u}_1$

Zur Erinnerung: Wir wollen die Varianz maximieren.

Die größte Varianz entspricht dem größten Eigenwert.

Wir wählen also  $\mathbf{u}_1$  als den Eigenvektor zum größten Eigenwert  $\lambda_1$ .

# Dimensionsreduktion | PCA

- Bis jetzt: Richtung (Vektor  $\mathbf{u}_1$ ) identifiziert, in der die Varianz der Daten maximal wird, die sogenannte Hauptkomponente (*principal component*).
- Jetzt: weitere Richtungen  $\mathbf{u}_j$  finden, die senkrecht aufeinander und senkrecht auf  $\mathbf{u}_1$  stehen), in denen die Varianz der Daten maximiert wird.

Induktionsbeweis

Induktionsannahme:

Seien  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M$  Eigenvektoren der Kovarianzmatrix  $S$  zu den  $M$  größten Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ .

Induktionsschritt:

Wir suchen  $\mathbf{u}_{M+1}$  so dass

1. die Varianz in dieser Richtung maximal ist,
2.  $\mathbf{u}_{M+1}$  orthogonal zu  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M$  ist
3.  $\mathbf{u}_{M+1}$  normiert ist:  $\mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_{M+1} = 1$

# Dimensionsreduktion | PCA

Wir suchen  $\mathbf{u}_{M+1}$  so dass

1. die Varianz in dieser Richtung maximal ist,
  2.  $\mathbf{u}_{M+1}$  orthogonal zu  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M$  ist
  3.  $\mathbf{u}_{M+1}$  normiert ist:  $\mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_{M+1} = 1$
- } Nebenbedingungen

Dies ist eine Optimierung unter Nebenbedingungen, die wir mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren (wie auf den Folien davor) formulieren:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathbf{u}_{M+1}^T S \mathbf{u}_{M+1}}_{\text{Varianz in Richtung } \mathbf{u}_{M+1}} + \underbrace{\lambda_{M+1} [1 - \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_{M+1}]}_{\mathbf{u}_{M+1} \text{ sei normiert}} + \underbrace{\sum_{i=1}^M \eta_i \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_i}_{\mathbf{u}_{M+1} \text{ sei orthogonal zu } \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M}$$

Varianz in Richtung  $\mathbf{u}_{M+1}$   
→ Bedingung (1)

$\mathbf{u}_{M+1}$  sei normiert  
→ Bedingung (3)

$\mathbf{u}_{M+1}$  sei orthogonal zu  
 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M$   
→ Bedingung (2)

mit den Lagrange Multiplikatoren:  $\lambda_{M+1}, \eta_1, \dots, \eta_M$

Das Optimierungsproblem lautet nun:  $\max_{\mathbf{u}_{M+1}} (\mathcal{L})$

Lösen durch Ableiten und setzen auf Null:  $\nabla_{\mathbf{u}_{M+1}, \lambda_{M+1}, \eta_i} \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0$

# Dimensionsreduktion | PCA

$$\mathcal{L} = \mathbf{u}_{M+1}^T S \mathbf{u}_{M+1} + \lambda_{M+1} [1 - \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_{M+1}] + \sum_{i=1}^M \eta_i \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_i$$

$$\nabla_{\mathbf{u}_{M+1}, \lambda_{M+1}, \eta_i} \mathcal{L} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

Wir betrachten zunächst die Ableitung nach  $\lambda_{M+1}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{M+1}} \mathcal{L} = 1 - \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_{M+1} \stackrel{!}{=} 0 \iff \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_{M+1} = 1$$

implementiert also die Nebenbedingung (3) der vorherigen Folie:  $\mathbf{u}_{M+1}$  ist normiert.

Nun betrachten wir die Ableitungen nach  $\eta_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \mathcal{L} = \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{implementiert also die Nebenbedingung (2) der vorherigen Folie: } \mathbf{u}_{M+1} \text{ ist orthogonal zu } \mathbf{u}_1 \text{ bis } \mathbf{u}_M.$$

Auf der nächsten Folie betrachten wir die Ableitung nach  $\mathbf{u}_{M+1}$ .

# Dimensionsreduktion | PCA

$$\mathcal{L} = \mathbf{u}_{M+1}^T S \mathbf{u}_{M+1} + \lambda_{M+1} [1 - \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_{M+1}] + \sum_{i=1}^M \eta_i \mathbf{u}_{M+1}^T \mathbf{u}_i$$

$$\nabla_{\mathbf{u}_{M+1}} \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0 \iff 2S\mathbf{u}_{M+1} - 2\lambda_{M+1}\mathbf{u}_{M+1} + \sum_{i=1}^M \eta_i \mathbf{u}_i \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (*)$$

Bestimmung von  $\eta_j, j = 1 \dots, M$ :

$$2\mathbf{u}_j^T S \mathbf{u}_{M+1} - 2\lambda_{M+1} \underbrace{\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_{M+1}}_{= 0 \text{ wegen Orthogonalit\"at}} + \sum_{i=1}^M \eta_i \underbrace{\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_i}_{= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} = 0$$

$\mathbf{u}_j^T$  an Gleichung (\*) von links multiplizieren

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u}_j^T S \mathbf{u}_{M+1} + \eta_j &= 0 \\ 2\mathbf{u}_{M+1}^T S^T \mathbf{u}_j + \eta_j &= 0 \end{aligned}$$

Transponieren

$$2\mathbf{u}_{M+1}^T S \mathbf{u}_j + \eta_j = 2\mathbf{u}_{M+1}^T \lambda_j \mathbf{u}_j + \eta_j = \eta_j = 0 \quad \text{d.h. } \boxed{\eta_j = 0, j = 1, \dots, M}$$

$\uparrow$   
 $S^T = S$  weil  $S$  symmetrisch ist

$\nwarrow$   
weil  $\mathbf{u}_j$  Eigenvektor von  $S$  ist

$(**)$

# Dimensionsreduktion | PCA

Bestimmung von  $\lambda_{M+1}$  :

Aus (\*) und (\*\*) ergibt sich:  $S\mathbf{u}_{M+1} = \lambda_{M+1}\mathbf{u}_{M+1}$

Das bedeutet:  $\mathbf{u}_{M+1}$  ist ebenfalls Eigenvektor von  $S$ .

Zur Maximierung der Varianz **wählen wir den größten aus den verbliebenen Eigenwerten  $\lambda_i$**  mit dem assoziierten Eigenvektor  $\mathbf{u}_i$  aus und nennen beide  $(\lambda_{M+1}, \mathbf{u}_{M+1})$ .

Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen.

Auf Deutsch: Die Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix  $S$  liefert uns Eigenwerte und Eigenvektoren. Wir sortieren nach Größe der Eigenwerte und erhalten die Richtungen der PCA über die zu den Eigenwerten assoziierten Eigenvektoren von  $S$ .

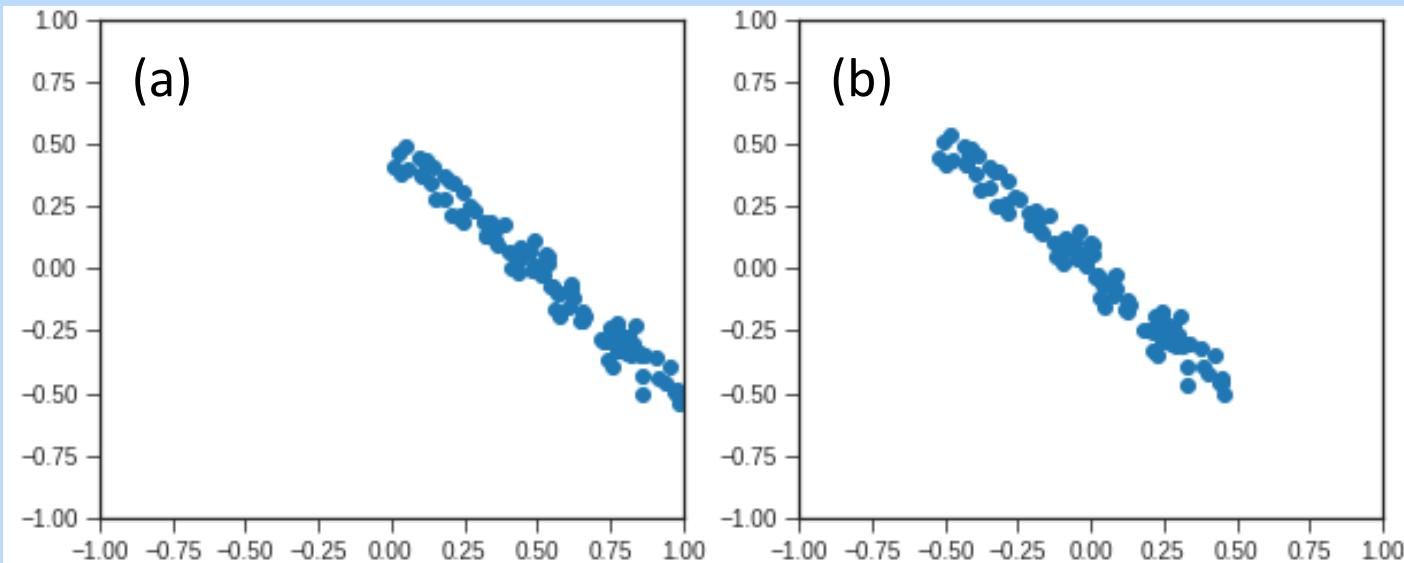
# Dimensionsreduktion | PCA

F

## Aktivität

PCA kann als Transformation interpretiert werden, die die Achsen des Koordinatensystems so rotiert, dass die Varianz der Projektion der Daten auf der ersten Achse maximiert wird.

1. Diskutieren Sie mit Ihrem Banknachbarn die beiden unten dargestellten Fälle. Welche(n) Unterschied(e) erkennen Sie?



# Dimensionsreduktion | PCA

# Dimensionsreduktion | PCA

# Dimensionsreduktion | PCA

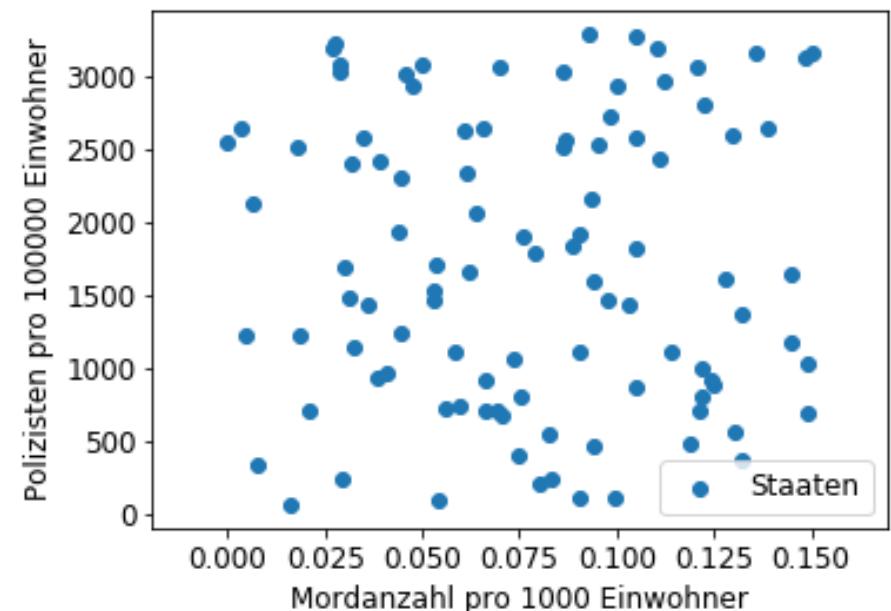
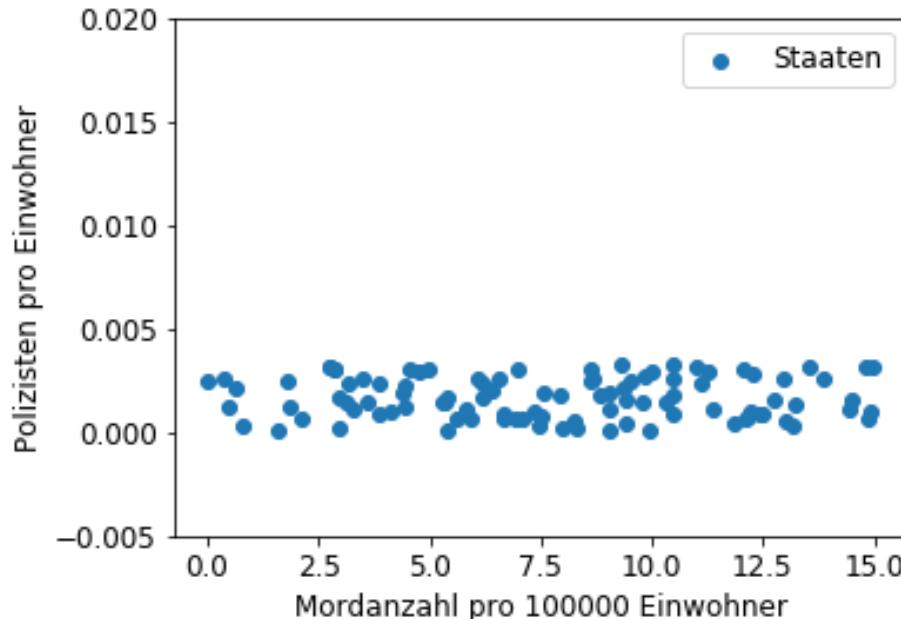
# Dimensionsreduktion | PCA

F

## Aktivität

Unten sehen Sie dieselben (fiktiven) Daten in zwei Abbildungen dargestellt. Diskutieren Sie mit Ihrem Banknachbarn:

1. Was unterscheidet die beiden Abbildungen genau?
2. Wo liegt die erste Achse der PCA? Wo liegt die 2. Achse der PCA?



# Dimensionsreduktion | PCA

# Dimensionsreduktion | PCA

## Standardisierung (z-scoring)

- Transformation eines Merkmals  $X$ , so dass es Mittelwert 0 und Varianz 1 aufweist. (also: Zentrieren und Skalieren)

Sei  $\bar{X}$  der Mittelwert und  $\sigma$  die Standardabweichung von  $X$ . Das standardisierte Merkmal (z-score)  $Z$  wird erzeugt durch:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

**In der Praxis** sind Daten oft in Matrizen (bzw. DataFrames) organisiert, in denen jede Spalte einem Merkmal entsprechen. In diesem Fall standardisieren Sie jedes Merkmal, indem Sie jede Spalte separat auf Mittelwert 0 und Varianz 1 transformieren.

# Dimensionsreduktion mit PCA

- Grundannahme der Dimensionsreduktion mittels PCA:  
**Die Richtungen mit der größten Varianz beinhalten die meiste Information.**
- Dimensionsreduktion mit PCA heißt: Wir verwerfen die PCA-Komponenten (Richtungen), die nur wenig Varianz repräsentieren.
- PCA liefert uns neue Achsen mit Richtungsvektoren  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots$
- Projektion eines standardisierten Datenpunktes  $\mathbf{x}_i$  auf Richtungsvektoren liefert die Komponenten der PCA-Koordinaten dieses Datenpunktes, also:

$$\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{u}_1^T- \\ -\mathbf{u}_2^T- \\ \vdots \end{pmatrix} \mathbf{x}_i \quad i = 1, \dots, N$$

Zur Erinnerung:

$N$  Datenpunkte  
 $D$  Merkmale

# Dimensionsreduktion mit PCA

## Welche PCA-Komponenten verwerfen wir?

- Im Wesentlichen: Heuristiken und Ad-Hoc-Entscheidungen
- Nützlich für die Entscheidung: *Proportion of Variance Explained Plot*

## Proportion of Variance Explained (PVE)

(= Bruchteil der Gesamtvarianz der Merkmale, die über die PCA-Komponenten repräsentiert wird)

Varianz der  $j$ -ten Komponente:

$$\text{Var}(Z_j) = \lambda_j$$

Vgl. Sie mit vorherigen Folien: Die Varianz entspricht dem Eigenwert.

Gesamtvarianz über alle Merkmale:  $\text{Var}_{\text{total}} = \sum_{j=1}^D \text{Var}(Z_j) = \sum_{j=1}^D \lambda_j$

Zur Erinnerung:  
 $N$  Datenpunkte;  
 $D$  Merkmale

# Dimensionsreduktion | PCA

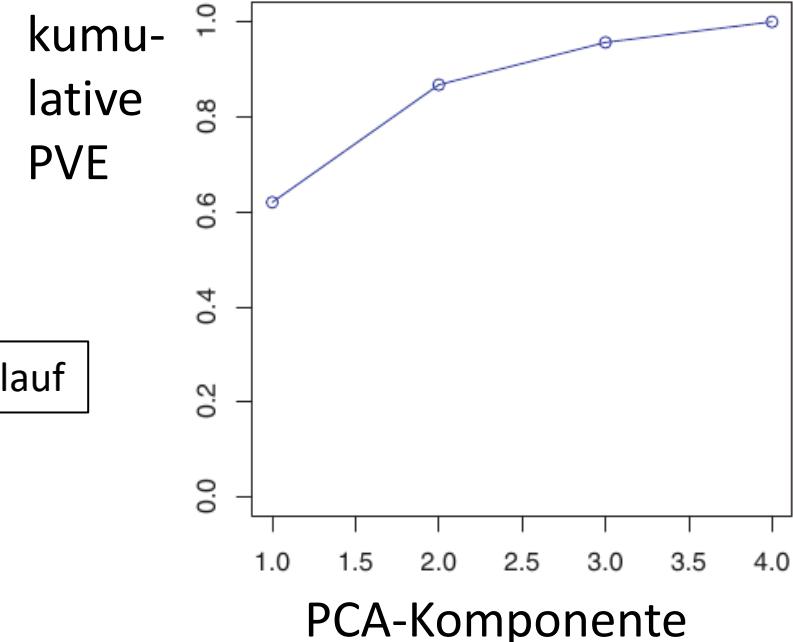
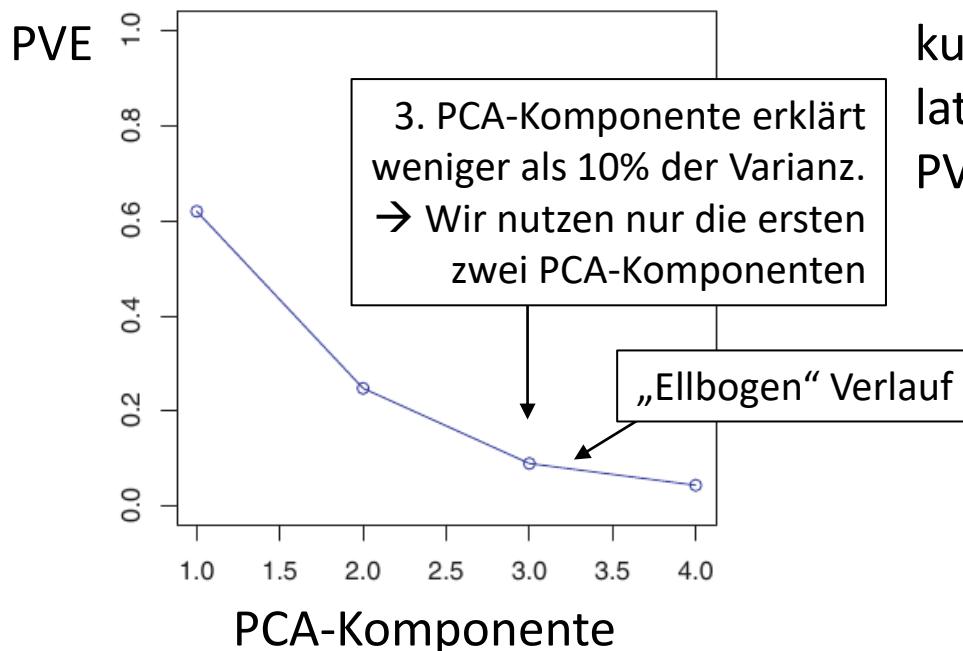
## Proportion of Variance Explained (PVE)

(= Bruchteil der Gesamtvarianz der Merkmale, die über die PCA-Komponenten repräsentiert wird)

$$\text{PVE}(j) = \frac{\text{Var}(Z_j)}{\text{Var}_{\text{total}}} = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^D \lambda_i}$$

$\uparrow$   
*j-te PCA-Komponente*

## Beispiel

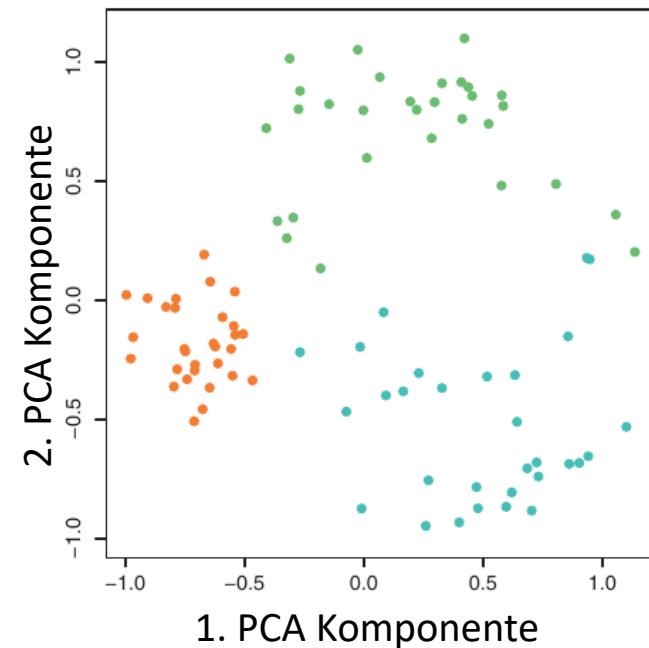
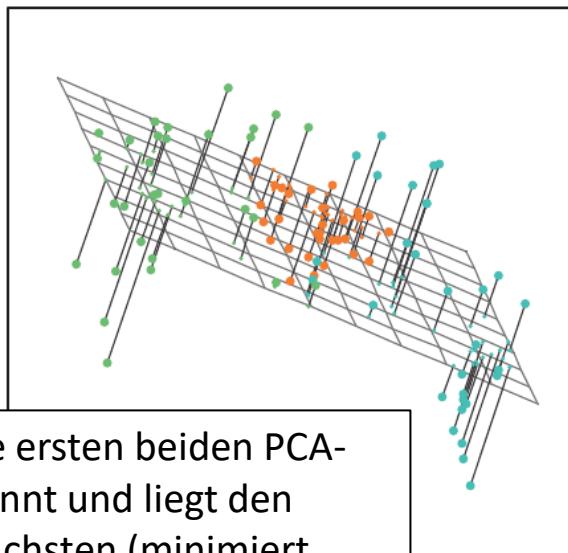


# Dimensionsreduktion | PCA

## Interpretationen der PCA

- a) Transformation in ein Koordinatensystem, auf dessen Achsen die größte, zweitgrößte, ... Varianz in den Daten entfällt
- b) Erste  $d$ -Hauptkomponenten (Richtungen) der PCA spannen einen  $d$ -dimensionalen Raum auf, der den Datenpunkten am nächsten liegt<sup>1</sup>.

## Beispiel



- 1) Im Sinne einer Minimierung quadratischer Abstände der Datenpunkte zum aufgespannten Raum.