Stochastik

FH Aachen – Studienstandort Aachen
10. Oktober 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

(Stochastische) Unabhängigkeit

Motivation

Roulette

12
24
13
28
2
11
33
10

Auf welche Farbe sollten Sie setzen?

(Stochastische) Unabhängigkeit

Definition 15

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ sind *(stochastisch) unabhängig*, wenn gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

A und B sind *(stochastisch) abhängig*, wenn sie nicht unabhängig sind.

Beispiel 35: (Zweifacher Münzwurf)

Sei $\Omega = \{Z, K\}^2$. Die Ereignisse

$$A \hat{=} \text{“Zahl im ersten Wurf”}$$
$$B \hat{=} \text{“Kopf im zweiten Wurf”}$$

sind voneinander unabhängig:

$$\mathbb{P}(\{(Z,K)\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{(Z,Z),(Z,K)\})\mathbb{P}(\{(Z,K),(K,K)\})$$

Übung

Übung 23

Betrachten Sie die folgenden Ereignisse beim zweifachen Würfelwurf:

$$A \mathrel{\hat{=}} \text{“Die Augenzahl im ersten Wurf ist gerade”}$$
$$B \mathrel{\hat{=}} \text{“Die Summe beider Augenzahlen ist gerade”}$$

Sind die Ereignisse unabhängig?

(Stochastische) Unabhängigkeit

Beispiel 36

Sei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung, d.h. für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Für zwei unabhängige Ereignisse A und B gilt dann

$$\frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{|B|}{|\Omega|}.$$

Interpretation: B ist so häufig in A, wie in der Grundgesamtheit Ω.

Beispiel: Die Haarfarbe und Körpergröße einer Person sind voneinander unabhängig, d.h.

$$\frac{\text{“Anzahl blonder, großer Personen”}}{\text{“Anzahl blonder Personen”}} = \frac{\text{“Anzahl großer Personen”}}{\text{“Anzahl aller Personen”}}.$$

(Stochastische) Unabhängigkeit

Beispiel 37: (Kartenspiel)

Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten wird eine zufällige Karte gezogen. Betrachte die folgenden Ereignisse:

$$A \hat{=} \text{“Es wird Pik gezogen”}$$
$$B \hat{=} \text{“Es wird ein Ass gezogen”}$$
$$C \hat{=} \text{“Es wird die Karo 7 gezogen”}$$

Die Ereignisse A und B sind unabhängig, denn

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Die Ereignisse A und C bzw. B und C sind abhängig, denn

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{32} > 0 = \mathbb{P}(A \cap C)$$
$$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{32} > 0 = \mathbb{P}(B \cap C)$$

(Stochastische) Unabhängigkeit

Übung 24

Ein Zug fährt zwischen Jülich und Aachen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% hat er auf der Hinfahrt eine Verspätung. Auf der Rückfahrt beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Verspätung 30% und ist unabhängig von der Hinfahrt.

> Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug auf Hin- und Rückfahrt eine Verspätung hat?

> Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Zug in beide Richtungen pünktlich?

(Stochastische) Unabhängigkeit

Bemerkung 1

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ zwei unabhängige Ereignisse. Dann sind auch A^c und B unabhängig.

Beweis:

Übung

Übung 25

Seien A, B und C unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass dann auch $A \cup B$ und C unabhängig sind.

Übung 26

Zeigen Sie, dass für unabhängig Ereignisse A und B gilt

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B)\big(1 - \mathbb{P}(A)\big).$$

(Stochastische) Unabhängigkeit

Definition 16

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge von Ereignissen $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ heißt *(stochastisch) unabhängig*, wenn für jede Auswahl von Indizes $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ gilt

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \ \dots \ \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Warum wählen wir so eine komplizierte Definition und fordern nicht, bspw.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)?$$

Für eine sinnvolle Definition gilt: A_1, A_2, A_3 unabhängig $\implies$ A_1, A_2 unabhängig. Das folgt aber nicht aus der unteren Formel.

(Stochastische) Unabhängigkeit

Beispiel 38: (Kartenspiel)

Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten wird eine zufällige Karte gezogen. Betrachte die folgenden Ereignisse:

$$A \hat{=} \text{“Es wird eine Dame gezogen”}$$
$$B \hat{=} \text{“Es wird ein Ass gezogen”}$$
$$C = \varnothing$$

Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C),$$

aber A und B sind offensichtlich nicht unabhängig, denn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Übung

Übung 27

Betrachten Sie die folgenden Ereignisse beim zweifachen Münzwurf:

$A \hat{=}$ "Kopf im ersten Wurf"

$B \hat{=}$ "Kopf im zweiten Wurf"

$C \hat{=}$ "Die Anzahl der Würfe, bei denen Kopf erscheint, ist gerade"

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse, zeigen Sie dass die Ereignisse paarweise unabhängig sind (d.h. jeweils A und B, A und C, B und C), die Ereignisse aber nicht gemeinsam unabhängig sind.

(Stochastische) Unabhängigkeit

Beispiel 39: (Roulette)

Sei $\Omega = \{\cancel{0}, 1, \ldots, 36\}^n, n \in \mathbb{N}$. Die Ereignisse

$A \hat{=}$ "Es wird eine Zahl aus der $1.$ Spalte getroffen"

$B \hat{=}$ "Es wird eine Zahl ≥ 19 getroffen"

$C \hat{=}$ "Es wird eine 'rote' Zahl getroffen"

sind voneinander unabhängig:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

~~0~~		
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

(Stochastische) Unabhängigkeit

Satz 6

Seien $A_1, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse, unterteilt in zwei Blöcke $A_1, \ldots, A_k$ und $A_{k+1}, \ldots, A_n$. Seien B und C Ereignisse, die durch Vereinigungs-, Schnitt- und Komplementbildung aus dem ersten bzw. zweiten Block entstehen.Dann sind B und C stochastisch unabhängig.

Beweis: Vgl. Kapitel 16.6 in [Henze et al., 1997].
Idee: Schreibe B und C jeweils als Vereinigung disjunkter Mengen, nutze Additivität von $\mathbb{P}$ und Unabhängigkeit der Blöcke.

Bemerkung: Das gleiche Resultat gilt für mehr als zwei Blöcke (per Induktion).

(Stochastische) Unabhängigkeit

Beispiel 40: (Roulette – Fortsetzung)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Roulette eine Zahl aus der 1. Spalte getroffen wird, die ‘rot’ **oder** ≥ 19 ist?
Betrachte die Ereignisse

$A \hat{=}$ “Es wird eine Zahl aus der $1.$ Spalte getroffen”

$B \hat{=}$ “Es wird eine Zahl ≥ 19 getroffen”

$C \hat{=}$ “Es wird eine ‘rote’ Zahl getroffen”

Dann wird $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$ gesucht.

~~0~~		
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30
31	32	33
34	35	36

(Stochastische) Unabhängigkeit

Beispiel 41: (Roulette – Fortsetzung)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Roulette eine Zahl aus der 1. Spalte getroffen wird, die 'rot' **oder** ≥ 19 ist?

Gesucht: $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$

A, B, C sind unabhängig, also gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \cup C)$$

Weiter gilt

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Einsetzen ergibt

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Produktraum

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ die Wahrscheinlichkeitsräume von zwei unabhängigen Experimenten. Wie sieht der **gemeinsame** Wahrscheinlichkeitsraum aus?

Beispiel 42: (Zweifacher Würfelwurf)

Wenn wir einen Würfel zweimal werfen, gilt $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ mit $\mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega_1$.

Mögliche Ergebnisse sind dann $(\omega_1, \omega_2) \in \{1, \ldots, 6\}^2$ mit

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \frac{1}{36}.$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}),$$

die Würfe sind also voneinander unabhängig.

Produktraum

Allgemein definieren wir den gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum für zwei unabhängige Experimente wie folgt.

Definition 17

Seien $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), \mathbb{P}_i)$, für $i = 1, \dots, n$, diskrete Wahrscheinlichkeitsräume mit Wahrscheinlichkeitsfunktion p_i. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *Produktraum* der Wahrscheinlichkeitsräume, wobei

$$\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$$

und

$$p(\omega_1, \dots, \omega_n) = p_1(\omega_1) \cdot \ \dots \ \cdot p_n(\omega_n).$$

Produktraum

Beispiel 43: (Zweifacher Würfelwurf)

Mit $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, \ldots, 6\}$ und $\mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \mathbb{P}_2(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ für alle $\omega \in \Omega_1$ gilt für den Produktraum

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$$

und

$$p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) = \frac{1}{36}.$$

Produktraum

Beispiel 44: (Mehrfacher Münzwurf)

Betrachte den Produktraum $(\{Z,K\}^n,\mathbb{P}), n\in\mathbb{N}$, des n-fachen Münzwurfs, mit $\mathbb{P}(\{(\omega_1,\dots,\omega_n)\})=\frac{1}{2^n}$. Die Ereignisse

$$B_i \hat{=} \text{“Zahl im } i. \text{ Wurf”} \quad 1\le i\le n$$

sind voneinander unabhängig.

Beweis: Sei $I\subset\{1,\dots,n\}$, Wir müssen zeigen:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(B_i)$$

$\rightarrow$ triviale, aber lange Rechnung... Geht das einfacher?

Außerdem: Wie groß ist $\mathbb{P}(B_i)$?

Intuition: $\mathbb{P}(B_i)=\frac{1}{2}$, denn die Experimente $B_j, j\neq i$ spielen keine Rolle. Aber stimmt das?

Produktraum

Satz 7

Sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ der *Produktraum* von diskreten W'räume $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), \mathbb{P}_i)$ und $A_i \in \mathcal{P}(\Omega_i)$, für $i = 1, \ldots, n$. Definiere

$$\begin{aligned} A_i' &:= \{\omega \in \Omega : \omega_i \in A_i\} \\ &= \{(\omega_1, \ldots \omega_n) : \omega_j \in \Omega_j, \text{ für } j \neq i \text{ und } \omega_i \in A_i\} \\ &= \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt $\mathbb{P}(A_i') = \mathbb{P}_i(A_i)$ und die Ereignisse $A_1', \ldots, A_n'$ sind unabhängig.

Beweis: Vgl. Satz 3.9 in [Dehling and Haupt, 2006].

Idee: Schreibe $\mathbb{P}(A_i')$ als Summe von W'keiten von Elementarereignissen und nutze Unabhängigkeit A_i.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Produktraum

Beispiel 45: (Mehrfacher Münzwurf)

Betrachte den Produktraum $(\{Z,K\}^n,\mathbb{P}), n\in\mathbb{N}$, des n-fachen Münzwurfs, mit $\mathbb{P}(\{\omega_1,\dots,\omega_n\}) = \frac{1}{2^n}$. Die Ereignisse

$$B_i \hat{=} \text{“Zahl im } i. \text{ Wurf”} \quad 1\leq i\leq n$$

sind voneinander unabhängig.

Beweis: Für $A_i = \{Z\} \subset \Omega_i$ gilt $A_i' = B_i$ mit der Notation der letzten Folie. Nach dem Satz sind die Ereignisse $B_1,\dots,B_n$ unabhängig und es gilt

$$\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}_i(A_i) = \frac{1}{2}.$$

Die Intuition, dass wir bei unabhängigen Ereignissen, die nicht betrachteten Experimente weglassen können, ist richtig!

Übung

Übung 28

Betrachten Sie die folgenden Ereignisse beim zweifachen Würfelwurf:

$$A \hat{=} \text{“Die Augenzahl im ersten Wurf ist gerade”}$$
$$B \hat{=} \text{“Die Summe beider Augenzahlen ist gerade”}$$

Zeigen Sie mit dem vorherigen Satz, dass die Ereignisse unabhängig sind.
Achtung: Sie können den Satz nicht direkt auf A und B anwenden, sondern müssen ein geeignetes Ereignis C definieren.

Bernoulli-Experiment

Definition 18

Ein Experiment mit $\Omega = \{0, 1\}, \mathbb{P}(\{1\}) = p$ und $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$ für $p \in (0, 1)$ heißt *Bernoulli-Experiment*.

> Ein Bernoulli-Experiment ist eindeutig durch den Parameter $p \in (0, 1)$ definiert.

> Oft wird 1 als Erfolg und 0 als Misserfolg interpretiert.

> Beispiele

> > (Fairer) Münzwurf: $p = \frac{1}{2}$, Kopf $\hat{=}\ 0$, Zahl $\hat{=}\ 1$
> > Würfelwurf: $p = \frac{1}{6}$, 'Nicht-6' $\hat{=}\ 0$, '6' $\hat{=}\ 1$
> > Lotto: $p = 1/\binom{49}{6}$, '6 Richtige' $\hat{=} 1$

> Wie wahrscheinlich ist es beim Lotto 3 mal in einem Jahr zu gewinnen?

Bernoulli-Versuchsschema

- Angenommen wir führen ein Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p (unabhängig voneinander) n-mal durch
- Für die Ereignisse $A_i \hat{=}$"Das i. Experiment ist ein Erfolg" gilt $\mathbb{P}(A_i) = p$
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge?
- Definiere $C_k \hat{=}$"k Erfolge", dann gilt

$$C_k = \bigcup_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \notin I} A_i^c \right)$$

- Für die Wahrscheinlichkeit folgt

$$\mathbb{P}(C_k) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \bigcap_{i \notin I} A_i^c \right) = \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \prod_{i \notin I} \mathbb{P}(A_i^c)$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bernoulli-Versuchsschema

Beispiel 46: (Lottoziehung)

Wie wahrscheinlich ist es beim Lotto genau 3 mal in einem Jahr zu gewinnen?

- $n = 52$ unabhängige Experimente
- $k = 3$ Erfolge
- $p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \binom{49}{6}^{-1}$
- **Gesucht:** $\mathbb{P}(C_3)$

$$\mathbb{P}(C_3) = \binom{52}{3}\binom{49}{6}^{-3}\left(1 - \binom{49}{6}^{-1}\right)^{52-3} \approx 8.08 \cdot 10^{-18}$$

- Wie wahrscheinlich ist es einmal zu gewinnen? $\mathbb{P}(C_1) = 3.72 \cdot 10^{-6}$
- Wie wahrscheinlich ist es gar nicht zu gewinnen? $\mathbb{P}(C_0) = 99.99962\%$

Bernoulli-Versuchsschema

Übung 29: (Spanische Weihnachtslotterie)

Bei der spanischen Weihnachtslotterie werden Lose mit 5-stelliger Losnummer (00000 bis 99999) für 200 EUR verkauft. Es werden folgende Gewinne ausgeschüttet:

Anzahl	Gewinn in EUR
1	4 000 000
1	1 250 000
1	500 000
2	200 000
8	60 000
1 794	1 000
10 000	200

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in 5 Ziehungen etwas zu gewinnen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in 10 Ziehungen mindestens einmal mehr als den Einsatz zu gewinnen?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit in 10 000 Ziehungen mindestens einmal den Hauptgewinn zu gewinnen?

Literatur I

Bundesministerium für Gesundheit (2024).
Infektionsradar.
https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.