Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 17. 11. 2025

Übungsblatt 6 — Analysis I — WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 20.

Bestimmen Sie, sofern existent, Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der folgenden Mengen:

(a) $M = \{x \in \mathbb{R} : x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{2}\}$,

(b) $U = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : nx = n^2 + 1\}$.

Aufgabe A 21.

Geben Sie Beispiele nicht-leerer, beschränkter Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass

$$\sup(A \cdot B) > \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Aufgabe A 22.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|u + v| + |u - v| \geq |u| + |v|$$

gilt.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ gilt

$$\frac{1}{|x - 2|} \geq \frac{2}{1 + |x - 3|}?$$

Aufgabe A 23.

Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $(\forall \varepsilon > 0 : x < y + \varepsilon) \Leftrightarrow x \leq y$,

(b) $(\forall \varepsilon > 0 : |x| < \varepsilon) \Leftrightarrow x = 0$.

Zeigen Sie ferner, dass aus

$$\forall \varepsilon > 0 : x < y + \varepsilon$$

nicht folgt, dass $x < y$.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 21. (Dichtheit der irrationalen Zahlen im Einheitsintervall, 7 Punkte)

Zeigen Sie, dass die irrationalen Zahlen $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ im offenen Einheitsintervall dicht in $[0,1]$ liegen, d.h. dass für alle $a, b \in [0,1]$ mit $a < b$ existiert eine irrationale Zahl $u \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ mit

$$a < u < b.$$

Hinweis: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe B 22. (Existenz der Quadratwurzel, 7 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $y \geq 0$ genau ein $r \geq 0$ mit

$$r^2 = y$$

existiert.

Aufgabe B 23. (Gleichheit in der Dreiecksungleichung, 6 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. In welchen Fällen gilt $|x + y| = |x| + |y|$?

Aufgabe B 24. (Metriken, 3+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass, für eine beliebige Menge M, die Abbildung

$$d : M \times M \to \mathbb{R}, d(x,y) \mapsto \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

alle Eigenschaften aus Theorem 2.6 erfüllt.

(b) Seien $M = [1, \infty)$ und $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Zeigen Sie, dass d alle Eigenschaften aus Theorem 2.6 erfüllt.