Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2025
Alexander Effland, Manuel Haas, Moritz Kappes,
Jan Peter, Jan Verhülsdonk

1. Übungsblatt „Algorithmische Mathematik 2"

Die Abgabe der Lösungen erfolgt regulär am Mittwoch vor der Vorlesung. Das vorliegende erste Übungsblatt ist dementsprechend bis zum 16.4., 10:15 Uhr abzugeben. Die maximale Gruppengröße pro Abgabe ist drei, und wir bitten darum, soweit möglich, Dreiergruppen zu bilden.

---

1. (Gleichverteilung) (8 Punkte)

a) Sei Ω eine endliche Menge. Definiere die Gleichverteilung P auf Ω und zeige durch Überprüfen der Axiome, dass P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

b) In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K rot sind. Wir ziehen n Kugeln ohne Zurücklegen. Beschreibe dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe k rote Kugeln enthält, ist

$$\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}\Big/\binom{N}{n}.$$

2. (Kolmogorovsche Axiome) (8 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Zeige, dass $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$ ist.

b) Es gelte $P[A] = \frac{3}{4}$ und $P[B] = \frac{1}{3}$. Zeige: $\frac{1}{12} \leq P[A \cap B] \leq \frac{1}{3}$ und demonstriere anhand von Beispielen, dass beide Extremfälle eintreten können.

c) Ist $A \cup B = \Omega$, dann gilt $P[A \cap B] = P[A]\,P[B] - P[A^c]\,P[B^c]$.

3. (Geburtstagsparadox) (8 Punkte)
In einer Klasse sind n Schüler.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben ? Berechne p_{22} und p_{23} explizit. Dabei sei vereinfachend angenommen, dass kein Schüler am 29. Februar geboren ist und alle anderen Geburtstage gleich wahrscheinlich sind.

b) Zeige unter Verwendung der Ungeichung $1 - x \leq \exp(-x)$, dass

$$p_n \geq 1 - \exp\big(-n(n-1)/730\,\big).$$

Welche untere Schranke ergibt sich für p_{30}?

4. (Ereignisse als Mengen) (8 Punkte)
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Was bedeuten (mit Begründung) die folgenden Ereignisse anschaulich?

$$\text{a) } A \cap B \qquad \text{b) } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{c) } \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Sei nun speziell $\Omega = \big\{\omega = (x_1, x_2, \ldots) \;\mid\; x_i \in \{-1, +1\}\big\}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$S_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \omega = (x_1, x_2, \ldots) \in \Omega.$$

Was bedeuten die den folgenden Mengen zugeordneten Ereignisse anschaulich?

$$\text{d) } S_n^{-1}([-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]) \qquad \text{e) } \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} S_m^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

5. (Gerüchte) (8 Punkte)
In einer Stadt mit $n+1$ Einwohnern erzählt eine Person einer zweiten ein Gerücht, diese ihrerseits erzählt es erneut weiter, usw. Bei jedem Schritt wird der ,,Empfänger" zufällig unter den n möglichen Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt (- gelegentlich erzählt also auch jemand das Gerücht derselben Person, von der er es gehört hat). Das Gerücht wird auf diese Weise r mal weiter erzählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) es nicht zum Urheber zurückkommt,

b) es keiner Person zweimal erzählt wird.

c) Setze im Ergebnis von a) insbesondere $r = n+1$, und berechne den Limes für $n \to \infty$.