Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Tutorium - Blatt 4

Das Blatt wird vom 13.11.2025 bis zum 18.11.2025 in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1
Seien M_1, M_2 zwei nicht-leere Mengen und seien $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ Äquivalenzrelationen auf M_1 bzw. M_2. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ ist stets eine Äquivalenzrelation auf $M_1 \cap M_2$.

(b) $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ ist stets eine Äquivalenzrelation auf $M_1 \cup M_2$.

Aufgabe 2
Sei $(G, *)$ eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass das neutrale Element eindeutig ist. Das eindeutige Element wird häufig mit 1_G oder e bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Element $g \in G$ genau ein inverses Element existiert. Dieses wird häufig mit g^{-1} bezeichnet.

(c) Zeigen Sie für $g \in G$, dass $g * h = e$ bereits impliziert, dass $g = h^{-1}$ und $h = g^{-1}$.

Aufgabe 3
Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für $a \in K$ bezechnet $n \cdot a := a + a + \cdots + a$ (n Summanden) die n-fache Summe von a in K.

(a) Es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in K^* = K \setminus \{0\}$ mit $n \cdot a = 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $n \cdot b = 0$ für alle $b \in K$ gilt

(b) Nun sei n aus (a) minimal mit seiner Eigenschaft. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist.

(c) Sei nun n eine Primzahl, sodass $n \cdot a = 0$ für ein $a \in K^*$. Zeigen Sie dass die Gleichheit $(b + c)^n = b^n + c^n$ für alle $b, c \in K$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen den binomischen Lehrsatz benutzen.

Aufgabe 4
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sim_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei die Relation definiert durch

$$x \sim_n y :\Leftrightarrow n \text{ teilt } x - y.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ handelt.

Sei nun $\mathbb{Z}/\sim_n$ die Menge der Äquivalenzklassen auf der die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert sind durch:

$$[r]_{\sim_n} + [s]_{\sim_n} = [r + s]_{\sim_n}$$

$$[r]_{\sim_n} \cdot [s]_{\sim_n} := [r \cdot s]_{\sim_n}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen wohldefiniert sind und es sich bei $(\mathbb{Z}/\sim_n, +, \cdot)$ um einen kommutativen Ring mit Eins handelt. Dieser wird oft mit $\mathbb{Z}_n$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nur dann einen Körper sein kann, wenn n eine Primzahl ist.