$\boxed{5.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 25

****

(Abgabe: 16.05.)

Aufgabe H17. Sei (V, s) ein unitärer Vektorraum, und sei $\|\cdot\|$ die dazugehörige Norm. Zeigen Sie, dass

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2\right)$$

für alle $v, w \in V$.

Aufgabe H18. Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$ mit $\langle u-w, v-w\rangle = 0$. Zeigen Sie:

$$\|u-w\|^2 + \|v-w\|^2 = \|u-v\|^2.$$

Zeichnen Sie ein passendes Bild zu dieser Aussage.

Aufgabe H19. Wir betrachten $(\mathbb{R}^3, s_A)$ wobei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Zeigen Sie:

(i) s_A ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$;

(ii) Seien

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie Gram-Schmidt (bzgl. $(\mathbb{R}^3, s_A)$) auf (b_1, b_2, b_3) an.

Aufgabe H20. Seien (V, s_V) und (W, s_W) euklidische Vektorräume mit $\dim(V) = n$. Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus mit $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist orthogonaltreu;

(ii) f ist winkeltreu.

****