Kapitel 1

Aussagen und Mengen

1.1 Aussagenlogik

Lernziele

Symbole und Kalkül der Aussagenlogik, Wahrheitstafeln,

und	oder	nicht	impliziert	folgt aus	äquivalent
$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftrightarrow$

***Notation* 1.1.**
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, die Menge der **natürlichen Zahlen**.
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n} := \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. (Dann ist $\underline{n} \subseteq \mathbb{N}$, genauer, $\underline{n}$ ist eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$.)

In der Mathematik ist es wichtig, Objekte und ihre Zusammenhänge untereinander zu beschreiben. Natürliche Zahlen sind Beispiele für Objekte. Zwei Aspekte sind an Aussagen interessant: Erstens, welcher Sachverhalt durch sie beschrieben wird, welchen Sinn oder Bedeutung sie haben, zweitens, ob sie wahr oder falsch sind. Zu dem ersten Aspekt soll hier nichts gesagt werden, insbesondere verzichten wir auf eine Definition, was eine Aussage ist. Wichtig für uns ist alleine der zweite Aspekt, dass man einer Aussage genau einen der Wahrheitswerte **wahr** (w) oder **falsch** (f) zuordnen kann und dass man aus Aussagen neue Aussagen durch Verknüfungen wie „und“, „oder“ oder Verneinung konstruieren kann, sodass der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage einzig und allein von den Wahrheitswerten der

Ausgangsaussagen abhängt.

Beispiel 1.2

1.) „5 ist eine Primzahl“ ist eine wahre Aussage.
2.) „1 ist eine Primzahl“ ist eine falsche Aussage.
3.) „$5^2 - 1 = (5-1)(5+1)$“ ist eine wahre Aussage.
4.) „$n^2 = 25$“ ist keine Aussage, weil n nicht hinreichend spezifiziert ist.

Definition 1.3

1.) Eine Aussage A hat entweder den **Wahrheitswert** **wahr** ($W(A) = w$) oder **falsch** ($W(A) = f$).

2.) Zwei Aussagen mit demselben Wahrheitswert heißen **äquivalent**.

3.) Ist A eine Aussage, so auch ihre **Verneinung** $\neg A$ (nicht A). Es gilt: $W(\neg A) = w$ genau dann, wenn $W(A) = f$ oder tabellarisch ausgedrückt:

A	$\neg A$
w	f
f	w

.

4.) Sind A, B Aussagen, so auch ihre **Konjunktion** $A \wedge B$ (A und B). Es gilt: $W(A \wedge B) = w$ genau dann, wenn gleichzeitig $W(A) = w$ und $W(B) = w$.

5.) Sind A, B Aussagen, so auch ihre **Disjunktion** $A \vee B$ (A oder B). Es gilt: $W(A \vee B) = f$ genau dann, wenn gleichzeitig $W(A) = f$ und $W(B) = f$.

Die letzte Definition ist etwas hinterhältig. Wir geben daher für die Konjunktion und die Disjunktion noch die **Wahrheitstafel**n an: In der ersten Zeile stehen die Aussagen und in den Spalten darunter die Wahrheitswerte der Aussagen, sodass alle Kombinationen der Wahrheitswerte von A und B vorkommen:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Insbesondere sehen wir, dass unser „Oder“ ein nichtausschließendes Oder ist. Man kann nun aus diesen drei Grundverknüfungen von Aussagen neue Verknüfungen definieren, von denen einige weniger wichtig sind, wie das „Entweder Oder“, also das ausschließende Oder, andere grundlegend wie etwa die **Implikation** $\Rightarrow$. Bevor wir dies tun, wollen wir noch einige Rechenregeln für die Verknüpfungen von Aussagen auflisten, die das Leben oft einfacher machen:

Satz 1.4

Seien A, B, C Aussagen. Dann gilt:

1. $W(\neg(\neg A)) = W(A)$, d. h. A und $\neg(\neg A)$ sind äquivalente Aussagen.

2. **Kommutativität der Konjunktion**:
   $W(A \wedge B) = W(B \wedge A)$.

3. **Kommutativität der Disjunktion**:
   $W(A \vee B) = W(B \vee A)$.

4. **Assoziativität der Konjunktion**:
   $W(A \wedge (B \wedge C)) = W((A \wedge B) \wedge C)$.

5. **Assoziativität der Disjunktion**:
   $W(A \vee (B \vee C)) = W((A \vee B) \vee C)$.

6. **Distributivität der Disjunktion gegenüber der Konjunktion**:
   $W(A \vee (B \wedge C)) = W((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.

7. **Distributivität der Konjunktion gegenüber der Disjunktion**:
   $W(A \wedge (B \vee C)) = W((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

Proof. Wir begnügen uns mit dem Beweis von 1.) und von 7.). Die anderen ergänzen Sie nach demselben Prinzip. Wir erstellen sukzessive die Wahrheitstafeln der beiden Aussagen und sehen dass die entsprechenden Wahrheitswerte gleich sind. Es ist darauf zu achten, dass alle Kombinationen der Wahrheitswerte der Ausgangsaussagen vorkommen, also 2, 4 oder 8. Die Zahlen in der zweiten Reihe geben an, in welcher Reihenfolge die Spalten auszufüllen sind.

Für 1.:

$\neg$	$(\neg$	$A)$	A
3	2	1	1
w	f	w	w
f	w	f	f

Die Gleichheit der ersten und der letzten Spalte beweisen die Behauptung.

Für 7.:

A	$\wedge$	$(B$	$\vee$	$C)$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$C)$
1	3	1	2	1	1	2	1	3	1	2	1
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	w	f	w	w	w	w	w	f	f
w	w	f	w	w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	w	w	f	f	w	f	f	f	w
f	f	w	w	f	f	f	w	f	f	f	f
f	f	f	w	w	f	f	f	f	f	f	w
f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f

Weil die beiden mit 3 überschiebenen Spalten übereinstimmen, ist der Beweis erbracht. □

Während der gerade angeschriebene Satz noch einigermaßen einleuchtend ist, haben Anfänger meist Schwierigkeiten mit den Verneinungen von Konjunktionen und Diskunktionen.

Satz 1.5

Seien A, B Aussagen. Dann gilt:

1. **Verneinung der Konjunktion**:
   $W(\neg(A \wedge B)) = W(\neg A \vee \neg B)$.
   (Das $\neg$-Zeichen bindet stärker als $\vee$, sodass die rechte Seite als $W((\neg B) \vee (\neg A))$ zu lesen ist.)

2. **Verneinung der Disjunktion**:
   $W(\neg(A \vee B)) = W(\neg A \wedge \neg B)$.

Proof. 1.) Mit Wahrheitstafel (4 Kombinationen). Übung.
2.) Aus 1.) und Satz 1.4 1.): Setze $C := \neg A$ und $D := \neg B$.[1] Nach 1.) sind dann $C \vee D$ und $\neg(\neg C \wedge \neg D)$ äquivalent. Also sind auch die Verneinungen $\neg(C \vee D)$ und $\neg C \wedge \neg D$ äquivalent. Indem wir C zu A und D zu B umtaufen, steht die Behauptung da. $\square$

Wir kommen jetzt zu zwei wichtigen Verknüpfungen von Aussagen, die bei Beweisen und bei Algorithmen besonders wichtig sind.

Definition 1.6

Seien A, B Aussagen.
Die **Implikation** $A \Rightarrow B$, auch gelesen als A impliziert B oder B folgt aus A, bezeichnet die Aussage $\neg A \vee B$.
Die **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$, auch gelesen als A äquivalent zu B, bezeichnet die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Wir hatten bereits früher über die Wahrheitswerte Äquivalenz definiert. Wenn wir es hier nochmals definieren, müssen wir zeigen, dass es dasselbe ist.

[1] Das Zeichen := beduetet: Was links steht wird durch das, was rechts steht, definiert.

Bemerkung 1.7

1.) Die Wahrheitstafel für die Implikation ist (zeilenweise):

$$\begin{array}{c|cccc} A & \text{w} & \text{w} & \text{f} & \text{f} \\ B & \text{w} & \text{f} & \text{w} & \text{f} \\ \hline A \Rightarrow B & \text{w} & \text{f} & \text{w} & \text{w} \end{array}.$$

Insbesondere ist $\Rightarrow$ nicht kommutativ in dem Sinne, dass $A \Rightarrow B$ äquivalent (im Sinne von Definition 1.3 2) ist mit $B \Rightarrow A$. Manchmal schreibt man letzteres auch als $A \Leftarrow B$, gelesen als A folgt aus B. Man beachte, dass die Umgangssprache an dieser Stelle sehr unsauber ist.
2.) Die Wahrheitstafel für die Äquivalenz ist :

$$\begin{array}{c|cccc} A & \text{w} & \text{w} & \text{f} & \text{f} \\ B & \text{w} & \text{f} & \text{w} & \text{f} \\ \hline A \Leftrightarrow B & \text{w} & \text{f} & \text{f} & \text{w} \end{array}.$$

Insbesondere sind A und B genau dann äquivalent, wenn ihre Wahrheitswerte übereinstimmen, d. h. die neue Definition steht im Einklang mit Definition 1.3 2.).

1.2 Mengen.

Lernziele

Einfache Notation, Konstruktionen und Identitäten der Mengenlehre:

- Teilmengen, Potenzmenge, Vereinigung und Durchschnitt,
- kartesische Produkte, Vergleich mit Aussagenlogik,
- Umgang mit Quantoren

1.2.1 Notation

In diesem Abschnitt wollen wir nicht erklären, was eine Menge ist, sondern eher, wie man Mengen konstruieren, manipulieren und benutzen kann. Eine Menge ist eine Ansammlung von Objekten, den sogenannten **Element**en der Menge. Beispiele für Mengen kennt der eine oder andere schon aus der Schule.

Beispiel 1.8

1.) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen.
2.) $A := \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$, die Menge der Primzahlen zwischen 3 und 17. Es gibt verschiedene Beschreibungen für dieselbe Menge:
Aufzählende Form: $A_1 = \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$
oder auch $A_2 = \{11, 13, 17, 5, 3, 5, 7\}$.
(In einer Menge kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an und es kommt kein Element mehrfach vor.)
Beschreibende Form:

$$A_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 17 \text{ und } n \text{ ist Primzahl } \}.$$

Wir legen nun wichtige Notation für Mengen fest, die uns immer wieder begleiten wird.

Definition 1.9: (Notation Mengen)

1.) Ist M eine Menge und a ein Element von M, so schreiben wir $a \in M$. Ist a kein Element von M, so sagen wir $a \notin M$.

2.) Zwei Mengen M und N sind **gleich**, kurz $M = N$, genau dann wenn sie dieselben Elemente enthalten, also $a \in M$ genau dann wenn $a \in N$.

3.) Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die **leere Menge** $\emptyset$ oder auch $\{\}$.

4.) Eine Menge N heißt **Teilmenge** der Menge M, $N \subseteq M$, falls für alle Elemente $a \in N$ gilt, dass $a \in M$. In Formeln: $(N \subseteq M) :\Leftrightarrow (a \in N \Rightarrow a \in M)$

5.) Für eine Menge M heißt

$$\mathrm{Pot}(M) := \{T \mid T \subseteq M\},$$

also die Menge aller Teilmengen von M, die **Potenzmenge** von M.

Beispiel 1.10

1.) $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

2.) Eine beschreibende Form für die leere Menge ist z.B. $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 0\}$.

3.) $\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Man beachte, dass die Elemente dieser Menge ihrerseits wieder Mengen sind, was anfangs etwas verwirrend sein kann:

$$\{3\} \in \mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) \Longleftrightarrow 3 \in \{1,2,3\}.$$

Übung 1.11. Zeigen Sie unter Benutzung von Definition 1.9 2.) dass die drei Beschreibungen in Beispiel 1.8 2.) die gleiche Menge beschreiben, also $A_1 = A_2 = A_3$ gilt. (Beachte: Um die Gleichheit zweier Mengen, sagen wir A, B zu zeigen, müssen wir die Äquivalenz $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ zeigen, also zwei Implikationen.)

Definition 1.12

Wir definieren einige wichtige Mengen.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, die **Menge der natürlichen Zahlen**.

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, Menge der natürliche Zahlen mit Null.

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, **Menge der ganzen Zahlen**.

$\mathbb{R}$, die **Menge aller reellen Zahlen**, deren Charakterisierung Sie in der Analysis I kennenlernen.

$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$, die **Menge der rationalen Zahlen**.

$\underline{n} := \{1, 2, 3, \ldots, n\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq n\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es ist $\underline{0} = \emptyset$ und es gilt $\underline{n} \subseteq \mathbb{N}$.

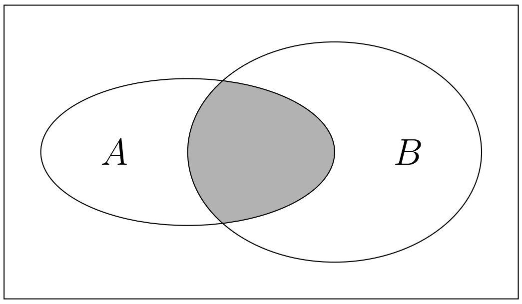
1.2.2 Mengenoperationen

Wir wollen in Analogie zu den drei Verknüpfungen von Aussagen die Entsprechungen für Mengen einführen. Manchmal sind die Akzente hier etwas anders, aber eigentlich läßt sich alles übertragen. Wir präsentieren die Definitionen zusammen mit den zugehörigen VENN[2]-Diagrammen, die ein sich selbst erklärender Appell an die Anschauung sind.

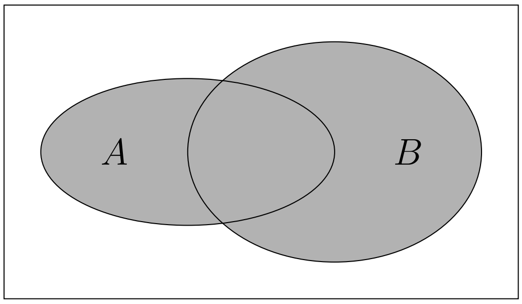
Definition 1.13

Sei M eine Menge mit Teilmengen $A, B \subseteq M$.
1) $A \cap B := \{m \in M \mid m \in A \text{ und } m \in B\}$ heißt der **Durchschnitt** der Mengen A und B.

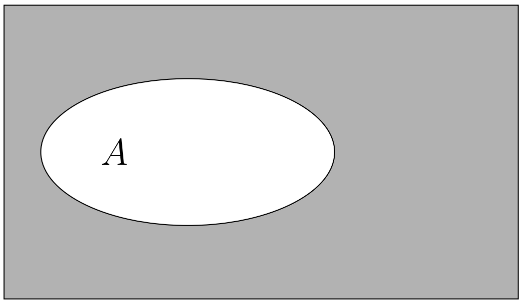
[2] JOHN VENN 1834 - 1923



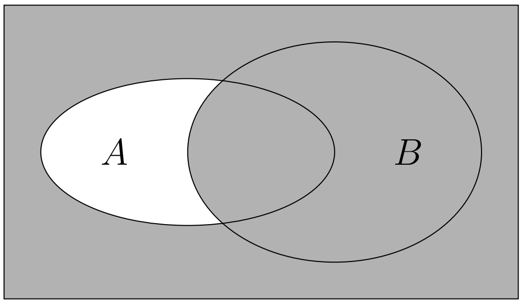
2) $A \cup B := \{m \in M \mid m \in A \text{ oder } m \in B\}$ heißt die **Vereinigung** der Mengen A und B.



3.) $\overline{A} := M \setminus A := \{m \in M \mid m \notin A\}$ heißt das **Komplement** von A in M.



4) $A \setminus B := \{m \in M \mid m \in A \text{ und } m \notin B\} = A \cap \overline{B}$ heißt die **Differenzmenge** A ohne B.



Wir haben also durch $\cap, \cup, ^{-}$ Verknüfungen auf $\mathrm{Pot}(M)$. Diese gehorchen Gesetzen, die in genauer Analogie zu den Eigenschaften von $\wedge, \vee, \neg$ stehen, die wir in Satz 1.4 kennengelernt hatten.

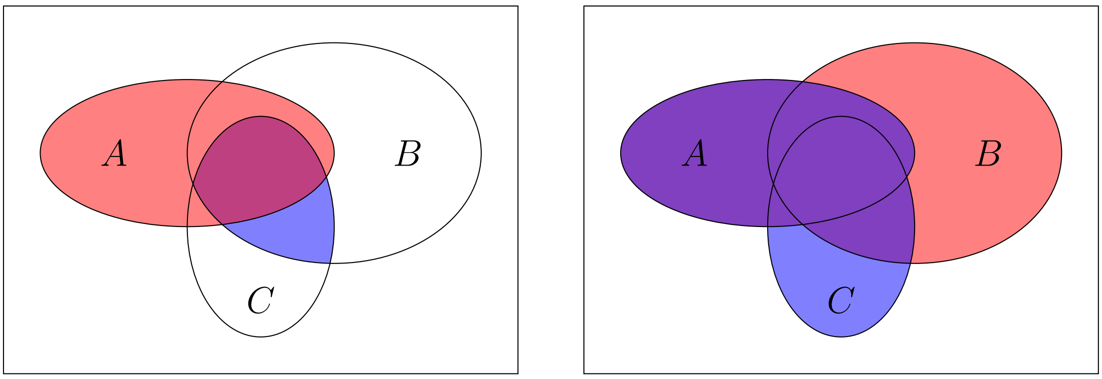
Satz 1.14

Seien $A, B, C \subseteq M$. Dann gilt:
1.) $\overline{\overline{A}} = A$.
2.) **Kommutativität des Durchschnittes**:
$A \cap B = B \cap A$.
3.) **Kommutativität der Vereinigung**:
$A \cup B = B \cup A$.
4.) **Assoziativität des Durchschittes**:
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5.) **Assoziativität der Vereinigung**:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
6.) **Distributivität der Vereinigung gegenüber dem Schnitt**:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7.) **Distributivität des Schnittes gegenüber der Vereinigung**:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Proof. Der Beweis folgt direkt aus Satz 1.4. Wir wollen exemplarisch 6.) beweisen und gleichzeitig das zugehörige VENN-Diagramm als Erinnerungsstütze, Kurznotation für den Beweis angeben.

$$
\begin{gathered}
x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow \\
x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow \\
x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\
(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow \\
(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Leftrightarrow \\
x \in (A \cup B) \cap (A \cup C))
\end{gathered}
$$

VENN-Diagramme:



$\square$

Übung 1.15. Man beweise die übrigen Aussagen des letzten Satzes und male die zugehörigen VENN-Diagramme. Diese Übung sollten Sie als sehr einfach empfinden.

Analog zu Satz 1.5 gilt natürlich der folgende Satz, dessen Beweis wir auch als Übungsaufgabe lassen:

Satz 1.16

Seien $A, B \subseteq M$. Dann gilt:

1.) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Eine weitere wichtige mengentheoretische Konstruktion ist das kartesische Produkt. Es unterscheidet sich grundsätzlich von den bisherigen Operationen $\cup, \cap, \overline{}$, die aus Teilmengen einer Menge eine neue Teilmenge machten. Rein formal kommt hier eine Teilmenge der Potenzmenge heraus, aber die Idee her wird eine neue Menge konstruiert.

Definition 1.17

(formale Definition) Seien M, N Mengen.
1) Für $m \in M$ und $n \in N$ bezeichnet

$$(m, n) := \{\{m\}, \{m, n\}\}$$

das **geordnete Paar** der beiden Elemente.
2)

$$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

heißt das **kartesische Produkt**[a] der Mengen M und N oder auch die Paarmenge.

[a] René Descartes 1596 - 1650

Bemerkung 1.18

(anschauliche Definition des kartesischen Produkts)
Für $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in M \times N$ gilt:
$(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ genau dann, wenn $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$.

Proof. $(m_1, n_1) = \{\{m_1\}, \{m_1, n_1\}\}$ ist eine Menge. Diese enthält ein Element, falls $m_1 = n_1$ ist, ansonsten zwei Elemente. Ist $m_1 = n_1$, so ist $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ genau dann, wenn (m_2, n_2) auch nur ein Element enthält und dieses Element gleich $\{m_1\}$ ist, also genau dann, wenn

$m_2 = n_2 = m_1$ ist. Gilt aber $m_1 \neq n_1$, so hat (m_1, n_1) zwei Elemente (die ihrerseits wieder Mengen sind) und sich durch die Anzahl ihrer Elemente unterscheiden: $\{m_1\}$ enthält genau ein Element und $\{m_1, n_1\}$ enhält genau zwei Elemente. Also gilt $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ genau dann wenn $\{m_1\} = \{m_2\}$ und $\{m_1, n_1\} = \{m_2, n_2\}$ also genau dann wenn $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$ gelten. $\square$

Beispiel 1.19

(Einfache Beispiele)
1.) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann man als reelle Ebene visualisieren. Dies setzt natürlich die Visualisierung von $\mathbb{R}$ als Zahlengerade voraus.
2.) $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.
3.) $\{1, 2\} \times \{2, 3, 4\} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$.
4.) $M \times \emptyset = \emptyset$.

Beispiel 1.20

(Skatspiel) Seien

$$F := \{c, h, p, k\} \text{ und } W := \{7, 8, 9, 10, B, D, K, A\},$$

so ist die angemessene Visualisierung des kartesischen Produktes $F \times W$ gegeben durch

	7	8	9	10	B	D	K	A
c	$(c, 7)$	$(c, 8)$	$(c, 9)$	$(c, 10)$	(c, B)	(c, D)	(c, K)	(c, A)
h	$(h, 7)$	$(h, 8)$	$(h, 9)$	$(h, 10)$	(h, B)	(h, D)	(h, K)	(h, A)
p	$(p, 7)$	$(p, 8)$	$(p, 9)$	$(p, 10)$	(p, B)	(p, D)	(p, K)	(p, A)
k	$(k, 7)$	$(k, 8)$	$(k, 9)$	$(k, 10)$	(k, B)	(k, D)	(k, K)	(k, A)

Man hat noch gewisse Wahlfreiheiten bei dieser Visualisierung: Ob die erste Komponente in der Vertikalen oder Horizontalen abgetragen wird und in welcher Anordnung. Formal ist $F \times W$ die Menge der so angeordneten Paare, so dass man Mengenklammern und Kommata einfügen müßte. Übrigens ändert sich die Menge beim Mischen nicht. Wie wir die Reihenfolge modellieren, sehen wir später. Man beachte, dass man aus der obigen Anordnung leicht zählen kann, wieviele Elemente das kartesische Produkt enthält.

Wir können geordnete Paare wie folgt verallgemeinern:

Definition 1.21

Ist $n \in \mathbb{N}$ und X irgendeine Menge, so bezeichnet X^n die Menge aller n-**Tupel** der Elemente von X auch X-wertige Folgen der Länge n genannt:

$$X^n := \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in X \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

mit der Gleichheitsdefinition

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \text{ für } x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$$

genau dann, wenn

$$x_i = y_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

1.2.3 Quantoren und Mengenfamilien.

Wir müssen unsere sprachlichen Ausdrucksmöglichkeiten erweitern. Beispielsweise können wir den Durchschnitt zweier Teilmengen einer Menge bilden und damit durch Iteration auch den Durchschnitt endlich vieler Teilmengen. Aber das reicht nicht aus, insbesondere dann nicht, wenn wir es mit unendlichen Mengen zu tun haben.

Definition 1.22

Ist M eine Menge so schreiben wir:
1.) statt "für alle Elemente m der Menge M (gilt ...)" kürzer "für alle $m \in M$ (gilt ...)" oder noch kürzer " $\forall m \in M$ (gilt ...)",
2.) statt "es gibt ein Element $m \in M$ (mit ...)" oder "es existiert ein Element $m \in M$ (mit ...)" kürzer "$\exists m \in M$ (mit ...)".

Bemerkung 1.23

Sei $E(m)$ eine Aussage, die von $m \in M$ abhängt. In mengentheoretischer Schreibweise können wir dies auch so ausdrücken: $\forall\, m \in M$ gilt $E(m)$, ist gleichbedeutend damit, dass

$$M = \{m \in M \mid E(m)\}$$

und $\exists\, m \in M$ mit $E(m)$, bedeutet

$$\{m \in M \mid E(m)\} \neq \emptyset.$$

Als Anwendung dieses neuen Ausdrucksmöglichkeit können wir den Durchschnitt und die Vereinigung von einer Menge von Teilmengen definieren.

Definition 1.24

Sei $\mathcal{U}$ eine Menge von Teilmengen von M, also $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Pot}(M)$.
1.) Der **Durchschnitt** von $\mathcal{U}$ (oder der Mengen aus $\mathcal{U}$) ist definiert als

$$\begin{aligned} \bigcap_{T \in \mathcal{U}} T &:= \{m \in M \mid m \in T \text{ für alle } T \in \mathcal{U}\} \\ &= \{m \in M \mid \forall\, T \in \mathcal{U} \text{ gilt } m \in T\}. \end{aligned}$$

2.) Die **Vereinigung** von $\mathcal{U}$ (oder der Mengen aus $\mathcal{U}$) definiert als

$$\begin{aligned} \bigcup_{T \in \mathcal{U}} T &:= \{m \in M \mid m \in T \text{ für (mindestens) ein } T \in \mathcal{U}\} \\ &= \{m \in M \mid \exists\, T \in \mathcal{U} \text{ mit } m \in T\}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.25

Sei M eine nicht leere Menge.
1.) Ist $\mathcal{U} := \emptyset \subseteq \operatorname{Pot}(M)$, so gilt

$$\bigcap_{T \in \mathcal{U}} T = M \text{ und } \bigcup_{T \in \mathcal{U}} T = \emptyset$$

Wir beweisen die erste Behauptung und lassen die zweite als Übung:

$$\begin{aligned} \bigcap_{T \in \mathcal{U}} T &= \{m \in M \mid \forall\, T \in \mathcal{U} \text{ gilt } m \in T\} \\ &= \{m \in M \mid \ T \in \mathcal{U} \Rightarrow m \in T\} \\ &= M \end{aligned}$$

denn die Prämisse "$T \in \mathcal{U}$" der Implikation "$T \in \mathcal{U} \Rightarrow m \in T$" ist nie

erfüllt, da $\mathcal{U} = \emptyset$, sodass die Implikation immer richtig ist.
2.) Sei $a \in M$ und $\mathcal{U} := \{B \subseteq M | \ a \in B\}$. Dann gilt

$$\bigcap_{T \in \mathcal{U}} T = \{a\} \text{ und } \bigcup_{T \in \mathcal{U}} T = M$$

Wir beweisen wieder die erste Behauptung und lassen die zweite als Übung:
"$\supseteq$": Nach Definition von $\mathcal{U}$ gilt: $\forall\, T \in \mathcal{U}$ gilt $\ a \in T$, also $a \in \bigcap_{T \in \mathcal{U}} T$.
"$\subseteq$": Sei $b \in \bigcap_{T \in \mathcal{U}} T$, d. h. $\forall T \in \mathcal{U}$ gilt $b \in T$. Angenommen $b \neq a$. Dann gilt: $\forall\, T \in \mathcal{U}$ gilt $T - \{b\} \in \mathcal{U}$. Dies impliziert aber $b \notin \bigcap_{T \in \mathcal{U}} T$, was ein Widerspruch zur Ausgangssituation ist. Also $b = a$ und somit $b \in \{a\}$.

Oftmals will man die Teilmengen, deren Schnitt oder Vereinigung man bilden will, durch Namen ansprechen, wobei es durchaus vorkommen kann, dass dieselbe Teilmenge mehrmals durch verschiedene Namen angesprochen wird. Die Menge der Namen nennt man dann Indexmenge, weil man dann die Namen meistens als Indizes schreibt.

Definition 1.26

Seien I, M ein Mengen und für jedes $i \in I$ sei $T_i \in \mathrm{Pot}(M)$. Dann heißt $(T_i)_{i \in I}$ eine **Mengenfamilie** (indiziert durch I) und

$$\bigcap_{i \in I} T_i := \{m \in M \mid \forall i \in I : m \in T_i\}$$

und

$$\bigcup_{i \in I} T_i := \{m \in M \mid \exists i \in I : m \in T_i\}$$

Durchschnitt bzw. **Vereinigung** der Mengenfamilie.

Es ist klar, dass bei Indexmengen aus zwei oder drei Elementen, der gerade definierte Durchschnitt bzw. Vereinigung identisch mit den früheren Durchschnitt- oder Vereinigungsbildungen sind.

Beispiel 1.27

Definiert man für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $T_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ teilt } n\}$ (also die Menge aller Teiler von n), so ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n = \{1\}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \mathbb{N}.$$

Beweis: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n = \{1\}$, denn $1 \in T_n$ für alle n und $T_1 = \{1\}$.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \mathbb{N}$, da $n \in T_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zur Verneinung von Aussagen, die Existenz- oder Allquantoren enthalten, ist folgendes zu bemerken, was mit Satz 1.5 verglichen werden muss:

Satz 1.28

Sei I eine Menge und für jedes $i \in M$ sei $E(i)$ eine Aussage.
1.) $\neg(\forall\, i \in I : E(i)) \Leftrightarrow (\exists\, i \in I : \neg E(i))$.
2.) $\neg(\exists\, i \in I : E(i)) \Leftrightarrow (\forall\, i \in I : \neg E(i))$.

Proof. Wir beweisen 1.) und lassen 2.) als Übung:[3]

$$\begin{gathered}
\neg(\forall\, i \in I : E(i)) \Leftrightarrow \\
\neg(I = \{i \in I : E(i)\} \Leftrightarrow \\
I \neq \{i \in I : E(i)\} \Leftrightarrow \\
\{i \in I : \neg E(i)\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \\
(\exists\, i \in I : \neg E(i))
\end{gathered}$$

□

[3] Die Schreibweise für die hier benutze Schlusskette ist eine etwas missverständlich. Aus Bequemlichkeit schreibt man häufig in Beweisen: $A \Rightarrow B \Rightarrow C$, was streng genommen als $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ zu interpretieren ist. Gemeint ist aber $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$. Entsprechendes gilt für längere Schlussketten und für Ketten von Äquivalenzen (wie oben) statt Implikationen.

Übung 1.29. Seien I und J Mengen und für jedes $i \in I$ und jedes $j \in J$ sei $E(i,j)$ eine Aussage. Verneine die Aussage: $\forall\, i \in I\ \exists\, j \in J : E(i,j)$.

Die Version für Mengen muss mit Satz 1.16 verglichen werden.

Korrolar 1.30

Sei I eine Menge und $(T_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie mit $T_i \subseteq M$ Dann gilt:
1.)
$$\overline{\bigcap_{i\in I} T_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{T_i}.$$
2.)
$$\overline{\bigcup_{i\in I} T_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{T_i}.$$

Proof. Übung. □

Wir beschließen dieses Kapitel über Mengen und Aussagen mit einer sehr einleuchtenden, aber trotzdem hilfreichen Bemerkung: Beschreibt man seine Mengen durch Aufzählung der Eigenschaften der Elemente oder durch Aufzählung der Elemente, so erwartet man im Allgemeinen ein duales Verhalten: Viele Eigenschaften entsprechen wenigen Elementen und umgekehrt. In diesem Zusammenhang beweise man:

Übung 1.31. Sei M eine nicht leere Menge. Zeige: Für jede Teilmenge $T \subseteq M$ gilt:
$$\bigcap_{t\in T} \overline{\{t\}} = \overline{T}.$$

1.2.4 Die RUSSELsche Antinomie

Die urspüngliche Definition, die der Begünder der Mengenlehre GEORG CANTOR[4] 1895 für Mengen gegeben hatte, lautete: „Eine Menge ist Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen.“ Das mindeste, was hieraus für die Objekt, sprich Elemente, folgen sollte, ist wohl dieses:

Bemerkung 1.32

Ist M eine Menge und a irgendein Objekt. Dann gilt entweder $a \in M$ oder $a \notin M$.

Man hat sehr bald danach gemerkt, dass dies zu Antinomien, also Widersprüchen, führt. Die **RUSSELLsche Antinomie** von 1903 hat die sogenannte naive Mengenlehre grundlagentheoretisch als unhaltbar entlarvt. Man hat dann verschiedene andere Axiomensysteme für die Mengenlehre konstruiert, wo man zwischen Mengen und Klassen, also allgemeineren Gebilden als Mengen, unterschieden hat. Da unser Kurs weniger die theoretischen Grundlagen der Mathematik als die grundlegende Spache behandelt, begnügen wir uns mit der naiven Mengenlehre, wie sie etwa in dem Standardlehrbuch von HALMOS dargestellt ist. Für fast alle von Ihnen wird das bis zum Ende des Studiums reichen.

Beispiel 1.33

RUSSELLsche Antinomie (B. RUSSEL[a], E. ZERMELO[b])
Sei M eine Menge.

$$N_M := \{a \in M \mid a \notin a\}$$

ist dann auch eine Menge.
Behauptung: $N_M \notin M$.
Beweis: Angenommen $N_M \in M$. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:
1.) $N_M \in N_M$, so folgt aus der Definition von N_M (von links nach rechts gelesen), dass $N_M \notin N_M$, Widerspruch.

[4] GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP CANTOR 1845 - 1918

2.) $N_M \notin N_M$, so folgt aus der Beschreibung von N_M (von rechts nach links gelesen), dass $N_M \in N_M$ sein muss. Ein Widerspruch.
Also ist die Behauptung bewiesen.
Insbesondere bildet die Gesamtheit G aller Mengen keine Menge, ansonsten wäre auch N_G eine Menge und damit $N_G \in G$ (im Widerspruch zur oben bewiesenen Behauptung).
Dies nur zur Warnung, dass es Beschreibungen gibt, die keine Mengen beschreiben. Aber wir wollen hier nicht auf diese Feinheiten eingehen.
B. Russel hat seine Antinomie 1918 durch sein Barbier-Paradoxon popularisiert: „Man kann einen Barbier definieren als einen, der alle diejenigen und nur diejenigen, die sich nicht selbst rasieren, rasiert. Die Frage ist: Rasiert der Barbier sich selbst?“

---

[a] Bertrand Arthur William Russell 1872 - 1970
[b] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo 1871 - 1953

1.3 Beweisprinzipien

Lernziele

Beweis durch Kontraposition, Beweis durch Widerspruch, Peano Axiome, vollständige Induktion.

Die Wahrheitstafel der Implikation macht am Anfang manchmal Schwierigkeiten mit der Anschauung. Aber man mache sich klar, dass man aus einer falschen Annahme alles Mögliche folgern kann: Die Folgerung ist richtig, aber über die Richtigkeit des Gefolgerten weiß man nichts. In Beweisen und bei Algorithmen folgert man immer aus richtigen oder zumindest als richtig angenommene Aussagen. Zwei Eigenschaften der Implikation sind im Hinblick auf Beweise wichtig:

Bemerkung 1.34

Sind A, B, C Aussagen so gilt :
1.) (**Kontraposition**)

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

2.) (**Transitivität**) Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$, so gilt auch $A \Rightarrow C$. Mit anderen Worten: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ ist immer eine wahre Aussage.
3.) (**Ringschluss**) Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ und $C \Rightarrow A$, so sind je zwei der drei Aussagen A, B, C äquivalent.

Proof. 1.) Der Beweis kann per Wahrheitstafel geführt werden:

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	$A)$
1	2	1	4	2	1	3	2	1
w	w	w	w	f	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	f	f	w
f	w	w	w	f	w	w	w	f
f	w	f	w	w	f	w	w	f

Weil in der Spalte unter 4 nur w vorkommt, ist die Behauptung gezeigt.

2.) Übung.
3.) Sofort aus 2.) □

Neben der Kontraposition ist auch noch der Widerspruchsbeweis beliebt. Man nimmt das Gegenteil dessen an, was man eigentlich zeigen will, und zeigt dass eine falsche Aussage daraus folgt. Damit ist dann der Beweis erbracht.

Bemerkung 1.35

Sei A eine Aussage und F eine falsche Aussage. Dann gilt:

$$A \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow F)$$

Proof. Übung mit Wahrheitstafel. □

Seltener braucht man das „entweder oder“ und das „weder noch“. Wir lassen es als Übung diese beiden auf die drei Grundverknüfungen zurückzuführen. Man beachte, es gibt manchmal mehrere äquivalente Möglichkeiten.

Beispiel 1.36

Wir betrachten die folgende Aussage:

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und ab ungerade, so sind schon a und b ungerade.

Direkter Beweis: Da ab ungerade, existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $ab = 2 \cdot k + 1$. Wir unterscheiden die Fälle: (i) a, b beide gerade, (ii) eine Zahl ist gerade, die andere ungerade, (iii) beide ungearde.
(i) $a = 2k$, $b = 2\ell$, dann ist $ab = 4k\ell$ eine gerade Zahl.
(ii) $a = 2k$, dann ist $ab = 2kb$ eine gerade Zahl.
(iii) $a = 2k+1$, $b = 2\ell+1$ dann ist $ab = 2(2k\ell + k + \ell) + 1$ eine gerade Zahl.

Da ab ungerade, kann nur Fall (iii) eintreten, d.h. a und b beide ungerade.

Kontraposition: Die Kontraposition der Aussage ist

Sei a oder b gerade, dann ist auch ab gerade.
Angenommen mindestens eine der Zahlen a, b ist gerade. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei a gerade. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2 \cdot k$. Folglich ist $ab = 2 \cdot k \cdot b$ und dies ist eine gerade Zahl.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen ab sei gerade aber a und b beide ungerade. Dann ist $a = 2k + 1$ und $b = 2\ell + 1$ für $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist $ab = (2k + 1)(2\ell + 1) = 4k\ell + 2k + 2\ell + 1 = 2(2k\ell + k + \ell) + 1$, also ungerade. Dies ist ein Widerspruch zu ab gerade.

1.3.1 Die Peaono-Axiome

Definition 1.37: (Peano-Axiome)

Sei N eine Menge. N erfüllt die Peano[a]-Axiome, falls gilt:

(P1) Zu jedem $n \in N$ existiert ein eindeutiges Element $n' \in N$, der **Nachfolger** von n.

(P2) Es gibt genau ein Element, das nicht Nachfolger eines Elementes $n \in N$ ist. Es sei mit 1_N bezeichnet.

(P3) Sind $n_1, n_2 \in N$ verschiedene Elemente, so sind auch deren Nachfolger n_1' und n_2' verschieden, d.h.
$n_1 \neq n_2 \Longrightarrow n_1' \neq n_2'$.

(P4) Ist $M \subseteq N$ eine Teilmenge von N mit

$$\text{(a) } 1_N \in M \text{ und (b) } m \in M \Longrightarrow m' \in M$$

so ist $M = N$.

[a] Giuseppe Peano 1858 - 1932

Man sollte etwa folgende Visualisierung vor Augen haben, wobei der erste Punkt 1_N ist:

$$\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \dots$$

Wir stellen uns auf denselben Standpunkt wie Leopold

KRONECKER[5], der gesagt hat: „Die natürlichen Zahlen sind vom lieben Gott geschaffen, alles andere in der Mathematik ist nur Menschenwerk.“ Dieser Standpunkt ist nicht der einzige, den man einnehmen kann. RICHARD DEDEKIND[6] hat gesagt: „Die natürlichen Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes.“

Bemerkung 1.38

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ erfüllt die PEANO-Axiome mit $1_\mathbb{N} = 1$ und $\nu(n) := n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\pi(n) = n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Aus den PEANO-Axiomen leiten wir jetzt ein wichtiges Prinzip her: das Beweisprinzip der vollständige Induktion. Die vollständige Induktion ist eine wissenschaftliche Umschreibungen dessen, was man sonst mit “u.s.w.” abkürzt, also eine mathematisch fundierte Methode, “und so weiter” zu sagen.

Satz 1.39: (Vollständige Induktion)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Gilt der
Induktionsanfang: $A(1)$
und der
Induktionsschluss: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Proof. Sei
$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr }\}.$$
Dann ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und wir müssen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist. Dazu benutzen wir das 2. PEANO-Axiom. Denn nach Voraussetzung gilt $1 \in M$. Außerdem gilt für jedes $m \in M$ auch dass $m + 1 \in M$ liegt. Also erfüllt M die Voraussetzung des 2. PEANO-Axioms und somit ist $M = \mathbb{N}$. □

Als Beispiel beweisen wir folgende Aussage:

[5] LEOPOLD KRONECKER 1823 - 1891
[6] JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND 1831 - 1916

Satz 1.40

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$$A(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Proof. Wir beweisen die Aussage per Induktion:

1. Induktionsanfang: Wir beweisen die Aussage $A(1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2.$$

2. Induktionsvoraussetzung: Angenommen für ein beliebiges, aber festes n gelte

$$A(n) : \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

3. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} A(n+1) : \quad \sum_{i=1}^{n+1} i &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \\ &=_{IV} n+1+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(2(n+1)+n(n+1)) \\ &= \frac{1}{2}((n+1)(n+2)). \end{aligned}$$

□