Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 4, Abgabe 7.5.

Aufgabe 1

Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ und $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{ct} \cos t \\ e^{ct} \sin t \end{pmatrix}.$$

(i) Zu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve auf $[a, b]$. Berechnen Sie $L_{a,b}$.

(ii) Berechnen Sie $\lim_{a\to-\infty} L_{a,0}$ und $\lim_{b\to\infty} L_{0,b}$.

Aufgabe 2

Sei $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Geben Sie eine geeignete Parametertransformation $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ an, so dass $g := \gamma \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. so dass $|g'(t)| = 1$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$ gilt.

Aufgabe 3

Seien $a, b > 0$ und betrachten Sie die Ellipse gegeben durch $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$ für $0 \le t \le 2\pi$. Zeigen Sie, dass die Länge L abgeschätzt werden kann durch

$$\pi(a + b) \le L \le 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Hinweis: Für die untere Abschätzung können Sie benutzen, dass $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ konkav ist, d.h. es gilt $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ für alle $x, y \ge 0$ und $\lambda \in [0, 1]$.

Aufgabe 4

(i) Zeigen Sie, dass für eine vektorwertige Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \le \int_a^b |f(t)|\, dt\,.$$

Hinweis: Für $w \in \mathbb{R}^n$ gilt aufgrund der Linearität des Integrals

$$\left\langle \int_a^b f(t)\, dt, w \right\rangle = \int_a^b \langle f(t), w\rangle\, dt.$$

(ii) Benutzen Sie (i) um zu zeigen, dass die gerade Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ eine kürzeste Verbindungskurve dieser Punkte ist.