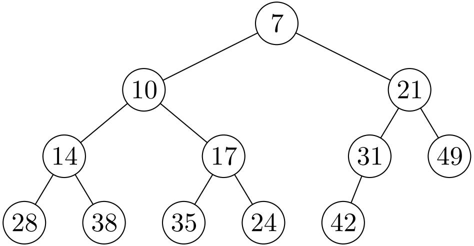
Entfernen der Wurzel – extract-min

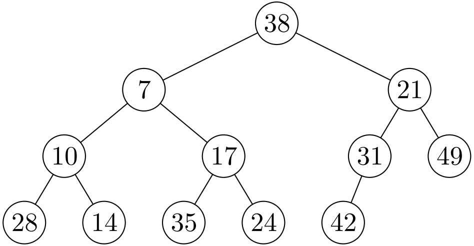


1. Ersetze den Schlüssel der Wurzel durch den Schlüssel des letzten Knoten
2. Lösche den letzten Knoten
3. Jetzt ist die Heap-Eigenschaft verletzt
4. Lasse den Schlüssel in der Wurzel hinuntersinken.

Java

```
final int bubble_down(int i) {
  int j;
  while(true) {
    if(2 * i + 2 >= size() || less(2 * i + 1, 2 * i + 2)) j = 2 * i + 1;
    else j = 2 * i + 2;
    if(j >= size() || less(i, j)) break;
    swap(i, j);
    i = j;
  }
  return i;
}
```

extract-min



Hinuntersinken: Zwei Vergleiche pro Schritt.

Alternative:

1. Hinuntersinken bis zum Blatt.
2. Dann von dort aufsteigen.

Heapsort

Der Algorithmus Heapsort ist jetzt einfach:

1. Konstruiere einen Max-Heap (größer = oben)
2. Entferne wiederholt das größte Element
3. Speichere es an der frei werdenden Position

Laufzeit: $O(n \log n)$

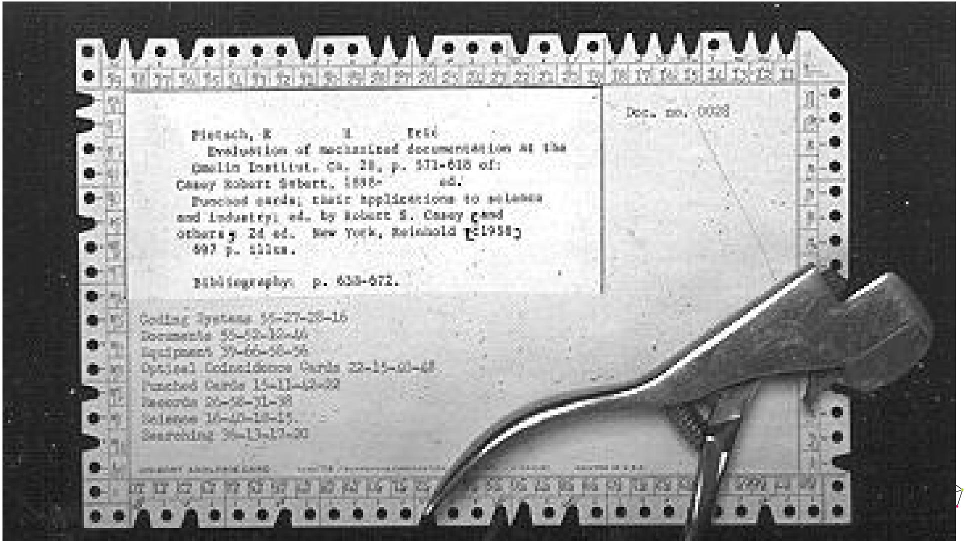
Einfügen und extract_max in $O(\log n)$ Zeit

Heapsort ist ein in-place–Verfahren.

Heapsort – Beispiel

Heapsort – Schnellere Variante

Radixsort



Gegeben seien Binärzahlen einer gewissen Länge:

11101010000010001000	01000000110011010001
10110001100111111001	00000000010000000011
01111100111110100100	01111100111110100100
00001011110100010001	00001011110100010001
01011011000110000000	01011011000110000000
11010111000100000110	01101011111000001001
00010111011101000011	00010111011101000011
01101011111000001001	11010111000100000110
10001101100000001100	10001101100000001100
11100000010000001010	11100000010000001010
10101010000011110000	10101010000011110000
10100100001011001010	10100100001011001010
00000000010000000011	10110001100111111001
01000000110011010001	11101010000010001000

Sortiere nach dem ersten Bit.

Bitstrings in Matrix $A[1 \dots n, 1 \dots w]$.
Vor dem Bitarray stehe $00 \dots 0$ und danach $11 \dots 1$.

Algorithmus

```
procedure radix_exchange_sort(i, a, b) :
  if i > w then return fi;
  s := a;  t := b;
  while s < t do
    while A[s, i] = 0 do s := s + 1;
    while A[t, i] = 1 do t := t − 1;
    vertausche A[s] und A[t]
  od;
  vertausche A[s] und A[t];
  radix_exchange_sort(i + 1, a, t);
  radix_exchange_sort(i + 1, s, b)
```

11101010000010001000	11101010000010001000
10110001100111111001	01111100111110100100
01111100111110100100	01011011000110000000
00001011110100010001	11010111000100000110
01011011000110000000	10001101100000001100
11010111000100000110	11100000010000001010
00010111011101000011	10101010000011110000
01101011111000001001	10100100001011001010
10001101100000001100	10110001100111111001
11100000010000001010	00001011110100010001
10101010000011110000	00010111011101000011
10100100001011001010	01101011111000001001
00000000010000000011	00000000010000000011
01000000110011010001	01000000110011010001

Sortiere nach dem letzten Bit.

Dann nach dem vorletzten usw. ($\rightarrow$ stabil!)

Straight-Radix-Sort

Algorithmus

procedure straight_radix_sort(i) :
  pos0 := 1; pos1 := n + 1;
  for k = 1, ..., n **do** pos1 := pos1 − A[k, i] **od**;
  for k = 1, ..., n **do**
    if A[k, i] = 0 **then** B[pos0] := A[k]; pos0 := pos0 + 1
              else B[pos1] := A[k]; pos1 := pos1 + 1 **fi**
  od

Sortiere stabil nach dem *i*-ten Bit.

Ergebnis ist in B.

Straight-Radix-Sort

Vollständiger Algorithmus:

Algorithmus

```
procedure straight_radix_sort :
  for i = w, ..., 1 do
    pos0 := 1;  pos1 := n + 1;
    for k = 1, ..., n do pos1 := pos1 − A[k, i] od;
    for k = 1, ..., n do
      if A[k, i] = 0 then B[pos0] := A[k];  pos0 := pos0 + 1
                     else B[pos1] := A[k];  pos1 := pos1 + 1 fi
    od;
    A := B;
  od;
```

Übersicht

Order-Statistics

Eingabe:

Eine Menge von n Schlüsseln aus einer geordneten Menge
Eine Zahl k, $1 \leq k \leq n$

Ausgabe:

Der k-te Schlüssel (nach Größe)

Spezialfall:

Median, der Schlüssel in der Mitte.

Einfachste Lösung:

1. Sortieren
2. Den Schlüssel an Position k zurückgeben

Quickselect

Wie Quicksort, aber nur die richtige Seite rekursiv behandeln:

Algorithmus

procedure quickselect(k, L, R) :
  if $R \leq L$ **then return** $a[k]$ **fi**;
  $p := a[L]$; $l := L$; $r := R + 1$;
  do
    do $l := l + 1$ **while** $a[l] < p$;
    do $r := r - 1$ **while** $p < a[r]$;
    vertausche $a[l]$ und $a[r]$
  while $l < r$;
  $temp := a[r]$; $a[L] := a[l]$; $a[l] := temp$; $a[r] := p$;
  if $k = r$ **then return** p
  else if $k < r$ **then return** quickselect(k, L, r)
  else return quickselect(k, r, R) **fi**

Quickselect – Analyse

Bei Quicksort hatten wir diese Rekursionsgleichung für die Anzahl der Vergleiche:

$$C_n = n + 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (C_{i-1} + C_{n-i}).$$

Für Quickselect gilt:

- Mit W'keit $1/n$ ist das Pivotelement der gesuchte Schlüssel
- Mit W'keit $(k-1)/n$ ist der gesuchte Schlüssel links
- Mit W'keit $(n-k)/n$ ist der gesuchte Schlüssel rechts

Quickselect – Analyse

Für $n > 1$ haben wir:

$$
\begin{aligned}
C_n &= n + 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k-1} C_{n-i} + \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^{n} C_{i-1} \\
&\leq n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} C_i
\end{aligned}
$$

Außerdem ist $C_0 = C_1 = 0$.

Zeige mit Induktion:

$$C_n \leq 4n$$

(Einfach $\rightarrow$ Übungsaufgabe)

Quickselect

Theorem

Quickselect findet den Schlüssel mit Rang k in einer n-elementigen Menge in $O(n)$ Schritten – im Erwartungswert.