Prof. Dr. M.G. Westdickenberg
Lehrstuhl für angewandte Analysis
RWTH Aachen Aachen, den 01. 12. 2025

Übungsblatt 8 — Analysis I — WiSe 2025/2026

A-Teil für die Kleingruppenübung

Aufgabe A 28.

Beweisen Sie:

(a) Wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(b) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

(c) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|}$.

Aufgabe A 29.

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit

$$|a_n - a_{n+1}| < \tfrac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe A 30. (Potenzgesetze)

Zeigen Sie für alle $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(a^x)^y = a^{xy}$

(b) $(ab)^x = a^x b^x$

Für diejenigen, die schon fertig sind und noch mehr lernen / üben wollen:

Aufgabe A 31.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $\sup(A) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ existiert, sodass $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$.

B-Teil für die Abgabe

Aufgabe B 30. (3+2+1 Punkte)

Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(a) Beweisen Sie: $\{a_n \cdot c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass aus den Bedingungen nicht die Konvergenz der Produktfolge folgt.

(c) Unter welcher zusätzlichen Voraussetzung an $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ folgt die Konvergenz von $\{a_n \cdot c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe B 31. (4+2 Punkte)

Zeigen Sie: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn jede Teilfolge konvergiert.

Aufgabe B 32. (10 Punkte)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie:
Die Folge konvergiert genau dann, wenn sie nur einen einzigen Häufungswert besitzt.

Aufgabe B 33. (Harmonische Reihe, 1+3 Punkte)

Sei $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(a) Zeigen Sie: $|H_{n+1} - H_n| \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie direkt anhand der Definition: $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge.

Aufgabe B 34. (4 Punkte)

Verwenden Sie die AGM-Ungleichung (2.3.7) für ein Produkt von $(n+1)$ Faktoren, um zu zeigen, dass für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq -x$, $x \neq 0$, gilt:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$