Lehrstuhl für
Geometrie und Analysis

Prof. Dr. H. Führ
D. Bartusel, M.Sc.
M.Getter, M.Sc.

RWTH AACHEN UNIVERSITY

10.01.2023

# Aufgabensammlung zur Vorlesung Analysis (mit Hinweisen)

Diese Aufgabensammlung dient der Wiederholung des bisherigen Vorlesungsstoffes (bis einschließlich IV §3). Es erfolgt keine Abgabe oder Korrektur der Aufgaben.

## Aufgabe 1

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

## Lösungshinweise

Zeigen Sie die Aussage per vollständiger Induktion. Verwenden Sie dazu folgende Schritte:

1) Zeigen Sie, dass für $n = 1$ beide Seiten den Wert 1 haben.

2) Nehmen Sie an, dass $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3) Teilen Sie die Summe $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot \binom{n+1}{k}$ auf, indem Sie nur die ersten $n$ Summanden in der Summe belassen und den letzten Summanden separat addieren. Verwenden Sie dann Lemma (1.12)b), um die Summe zu zwei Summen auseinanderzuziehen.

4) Wenden Sie auf eine der beiden resultierenden Summen die Induktionsvoraussetzung an. Wenden Sie auf die andere der beiden Summen eine Indexverschiebung an und nehmen Sie den in Schritt 3) separat geschriebenen Summanden in dieses Summenzeichen mit auf. (Danach sollten Sie den Term $n \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=0}^{n}(k+1) \cdot \binom{n}{k}$ erhalten.)

5) Ziehen Sie nun die verbleibende Summe wiederum zu zwei Summen auseinander. Verwenden Sie dann erneut die Induktionsvoraussetzung sowie Korollar (1.15)a).

6) Fassen Sie den verbleibenden Term (in dem nun keine Summenzeichen mehr vorkommen sollten) zu $(n + 1) \cdot 2^n$ zusammen.

7) Begründen Sie mit dem Induktionsprinzip, dass auf diese Weise die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt wurde.

### Aufgabe 2

Untersuchen Sie die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} \mid |x^2 - 2x + 2| < 3\}$$

als Teilmenge des angeordneten Körpers $\mathbb{R}$ auf Beschränktheit nach oben und nach unten. Entscheiden Sie anschließend, ob Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von $M$ jeweils existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

---

### Lösungshinweise

1) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{Q}$ genau dann $x \in M$ gilt, wenn $x^2 - 2x - 1 < 0$ gilt.
2) Bestimmen Sie mittels quadratischer Ergänzung und dritter binomischer Formel Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $x^2 - 2x - 1 = (x - a) \cdot (x - b)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Folgern Sie, dass $M := (a, b) \cap \mathbb{Q}$ gilt.
3) Zeigen Sie, dass $\inf(M) = a$ und $\sup(M) = b$ gilt. Folgern Sie dann, dass $M$ weder Minimum noch Maximum besitzt.

---

### Aufgabe 3

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und nichtleer. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils:

a) Es gilt $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

b) Ist $A \cap B$ nichtleer, so gilt $\sup(A \cap B) = \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.

---

### Lösungshinweise

a) Begründen Sie zunächst, warum Sie ohne Einschränkung $\sup(A) \geq \sup(B)$ annehmen dürfen. Gehen Sie dann wie folgt vor:
   1) Zeigen Sie, dass $\sup(A)$ eine obere Schranke von $A \cup B$ ist.
   2) Nehmen Sie an, es gebe ein $C < \sup(A)$, welches ebenfalls eine obere Schranke von $A \cup B$ ist. Nutzen Sie die Definition des Supremums um einen Widerspruch herzuleiten.
   3) Folgern Sie die Behauptung.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel, welches die Aussage widerlegt. Ein mögliches Gegenbeispiel hat die Form $A = M \cup \{a\}$, $B = M \cup \{b\}$ mit einer geeigneten beschränkten Menge $M$ und geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$.

---

**Aufgabe 4**

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit.

a) $M_1 := \{n^2 + k^n \mid k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x^6 + \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} \in \mathbb{Q}\}$

c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + iz - \sqrt{3} \cdot i \in \mathbb{R}\}$

---

**Lösungshinweise**

a) Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to M_1$ und folgern Sie daraus die Abzählbarkeit von $M_1$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $A_q := \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, x^6 + \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{8} = q\}$ für jedes $q \in \mathbb{Q}$ endlich ist. Schreiben Sie $M_2$ anschließend als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und folgern Sie daraus die Abzählbarkeit von $M_2$.

c) Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $z_x \in \mathbb{C}$ mit $z_x^2 + iz_x - \sqrt{3} \cdot i = x$ gibt. Konstruieren Sie damit eine injektive Abbildung $\psi : \mathbb{R} \to M_3$ und folgern Sie daraus die Überabzählbarkeit von $M_3$.

---

**Aufgabe 5**

Es seien $M$ und $N$ nichtleere Mengen sowie $f : M \to N$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in N$ das Urbild $f^{-1}(\{x\})$ abzählbar sei. Zeigen Sie, dass $M$ genau dann abzählbar ist, wenn das Bild $f(M)$ abzählbar ist.

---

**Lösungshinweise**

Zeigen Sie die beiden Implikationen einzeln:

1) Nehmen Sie an, dass $M$ abzählbar ist und verwenden Sie die Definition der Abzählbarkeit sowie die Abbildung $f$ um daraus die Abzählbarkeit von $f(M)$ zu folgern.

2) Nehmen Sie an, dass $f(M)$ abzählbar ist. Schreiben Sie $M$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und folgern Sie daraus die Abzählbarkeit von $M$.

---

## Aufgabe 6

Zeigen Sie nur mithilfe der Definition der Folgenkonvergenz, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ gilt.

---

## Lösungshinweise

Betrachten Sie ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$ und gehen Sie dann wie folgt vor:

1) Fassen Sie den Ausdruck $1 - \frac{n^2}{n^2+1}$ zu einem Bruch zusammen.
2) Zeigen Sie die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N^2} \leq \varepsilon$. ($N$ darf dabei von $\varepsilon$ abhängen.)
3) Zeigen Sie, dass $\left|1 - \frac{n^2}{n^2+1}\right| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt und folgern Sie die Behauptung.

---

## Aufgabe 7

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Grenzwert.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{8n^4-3n^3+7n}{2n^2+5n^4+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \sqrt[n]{n^3+4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := \sqrt[n]{n^n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \left(1 + \frac{1}{6^n}\right)^{6^n} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$
e) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n := i^n \cdot \sqrt[n]{9}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
f) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := i^{n+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

---

## Lösungshinweise

a) Klammern Sie in Zähler und Nenner zunächst jeweils $n^4$ aus und kürzen Sie. Wenden Sie dann die Grenzwertsätze für Summen an, um zu zeigen, dass sowohl die Folge der Zähler der $a_n$ als auch die Folge der Nenner der $a_n$ konvergiert, und bestimmen Sie die jeweiligen Grenzwerte. Wenden Sie schließlich die Grenzwertsätze für Quotienten an, um $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{8}{5}$ zu zeigen. Denken Sie dabei daran, alle notwendigen Voraussetzungen zu überprüfen.

b) Zeigen Sie zunächst, dass $\sqrt[n]{4} \leq b_n \leq \sqrt[n]{2n^3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt. Verwenden Sie dann die Rechenregeln für Wurzeln sowie die Grenzwertsätze, um zu zeigen, dass sowohl $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1$ als auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^3} = 1$ gilt. Verwenden Sie schließlich das Sandwich-Lemma, um $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ zu zeigen.

c) Zeigen Sie, dass $c_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und folgern Sie daraus die Divergenz der Folge.

d) Fassen Sie $\left(\left(1+\frac{1}{6^n}\right)^{6^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge einer Ihnen bekannten Folge auf und folgern Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{6^n}\right)^{6^n}=e$. Zeigen Sie außerdem $\lim_{n\to\infty} 1-\left(\frac{1}{6}\right)^n=1$. Verwenden Sie schließlich die Grenzwertsätze, um $\lim_{n\to\infty} d_n=e$ zu erhalten.

e) Betrachten Sie zum Beispiel die Teilfolgen $(e_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(e_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} e_{4n}=1$ sowie $\lim_{n\to\infty} e_{4n+2}=-1$ gilt. Folgern Sie daraus, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

f) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das Produkt einer beschränkten Folge mit einer Nullfolge ist und folgern Sie daraus $\lim_{n\to\infty} f_n=0$.

---

## Aufgabe 8

Es seien $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Abbildungen und es gebe Konstanten $C_f, C_g>0$ mit

$$|f(x)-f(y)|\le C_f\cdot|x-y| \quad \text{und} \quad |g(x)-g(y)|\le C_g\cdot|x-y|$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Weiter gelte $f(x)=g(x)$ für alle $x\in\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann schon $f=g$ gilt.

---

### Lösungshinweise

Die beiden Funktionen $f$ und $g$ sind genau dann gleich, wenn $f(x)=g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt. Betrachten Sie also ein festes $x\in\mathbb{R}$ und gehen Sie wie folgt vor, um zu zeigen, dass $f(x)=g(x)$ gilt:

1) Zeigen Sie die Existenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n=x$.

2) Betrachten Sie ein beliebiges, festes $\varepsilon>0$ und zeigen Sie, dass es ein $N_1\in\mathbb{N}$ mit $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$ für alle $n\ge N_1$ und ein $N_2\in\mathbb{N}$ mit $|g(x_n)-g(x)|<\varepsilon$ für alle $n\ge N_2$ gibt.

3) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n)=g(x)$ gilt und folgern Sie daraus $f(x)=g(x)$.

---

## Aufgabe 9

Es seien $x_0:=2$ und $x_{n+1}:=\sqrt{4x_n-1}$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

---

**Lösungshinweise**

1) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $2 \leq x_n \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Begründen Sie dabei im Induktionsschritt zunächst (unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung) die Wohldefiniertheit von $x_{n+1}$.
2) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.
3) Verwenden Sie, dass Monotoniekriterium, um die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $x \in [2, 4]$ zu zeigen.
4) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = x^2$ gilt und leiten Sie mit den Grenzwertsätzen eine quadratische Gleichung für $x$ her.
5) Zeigen Sie, dass die gefundene quadratische Gleichung genau zwei reelle Lösungen besitzt und folgern Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = 2 + \sqrt{3}$.

---

**Aufgabe 10**

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes superior und Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}\right) \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

---

**Lösungshinweise**

1) Zeigen Sie, dass die beiden Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Folgern Sie, dass 0 und 2 Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind.
2) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darüber hinaus keine weiteren Häufungspunkte besitzt.
3) Folgern Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

---

**Aufgabe 11**

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| z - \frac{i^n}{n} \right| < \frac{1}{n^2} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \right\}$$

in $\mathbb{C}$ offen, aber nicht abgeschlossen ist.

---

### Lösungshinweise

1) Zeigen Sie mithilfe eines Beispiels aus der Vorlesung, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left| z - \frac{i^n}{n} \right| < \frac{1}{n^2} \right\}$$

offen ist.

2) Folgern Sie daraus, dass auch die Menge $M$ offen ist.

3) Zeigen Sie, dass $\frac{i^n}{n} \in M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$ gilt.

4) Zeigen Sie, dass $0 \notin M$ gilt und folgern Sie daraus, dass $M$ nicht abgeschlossen ist.

---

### Aufgabe 12

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ ist ein Häufungspunkt von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

abgeschlossen ist.

---

### Lösungshinweise

Die Menge $M$ ist nach Definition genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge in $M$ bereits wieder ein Element von $M$ ist. Betrachten Sie also eine konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ und setzen $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Gehen Sie dann wie folgt vor, um zu zeigen, dass $x \in M$ gilt:

1) Definieren Sie rekursiv eine streng monoton wachsenden Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, welche $|a_{n_k} - x_k| \leq \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

2) Betrachten Sie den Ausdruck $|a_{n_k} - x_k + x_k - x|$ und zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$ gilt.

3) Folgern Sie, dass $x \in M$ gilt.

---

### Aufgabe 13

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{5}\right)^k$ konvergiert und bestimmen Sie den Reihenwert.

---

### Lösungshinweise

Zeigen Sie, dass $\left|-\frac{i}{5}\right| < 1$ gilt und nutzen Sie die Tatsache, dass die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für jedes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$ konvergiert.

(Zur Kontrolle: Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{5}\right)^k = -\frac{1+5i}{26}$.)

---

### Aufgabe 14

Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ und bestimmen Sie ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$\left| q - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1} \right| \leq \frac{1}{10}.$$

Konvergiert die Reihe auch absolut?

---

### Lösungshinweise

1) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{1}{3k+1}\right)$ eine monoton fallende Nullfolge ist und folgern Sie mit dem Leibnizkriterium die Konvergenz der Reihe.

2) Verwenden Sie die Abschätzung aus dem Leibnizkriterium, um zu zeigen, dass $q := \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{3k+1}$ die gewünschte Ungleichung erfüllt.

3) Vergleichen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k+1}$ mit der harmonischen Reihe, um zu zeigen, dass die angegebene Reihe nicht absolut konvergiert.

---

### Aufgabe 15

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j}$

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k-\sqrt{k}}$
*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst mithilfe der dritten binomischen Formel, dass für alle $a, b \geq 1$ mit $a > b$ schon $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq a - b$ gilt.

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot \sqrt{k}}$

d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^9}{\left(2-\frac{1}{k^6}\right)^k}$

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k)}{\exp(k)}$

---

**Lösungshinweise**

a) Nutzen Sie die Tatsache, dass laut Vorlesung $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, und verwenden Sie ein Beispiel aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die Reihe (absolut) konvergiert.

b) Zeigen Sie die Aussage im Hinweis und nutzen diese, um $\frac{1}{k-\sqrt{k}} - \frac{1}{k+1-\sqrt{k+1}} \geq 0$ für alle $k \geq 2$ zu zeigen. Zeigen Sie anschließend, dass $k \geq 2\sqrt{k}$ für alle $k \geq 4$ gilt und folgern Sie $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k-\sqrt{k}} = 0$. Folgern Sie nun mit dem Leibnizkriterium die Konvergenz der angegebenen Reihe. Verwenden sie schließlich die harmonische Reihe als Minorante, um zu zeigen, dass die Reihe nicht absolut konvergiert.

c) Verwenden Sie Aufgabe 7b) von Blatt 7, um die absolute Konvergenz der Reihe zu zeigen. Folgern Sie daraus auch die Konvergenz.

d) Setzen Sie $a_k := \frac{k^2}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und zeigen Sie $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie schließlich $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und folgern Sie mit dem Quotientenkriterium die (absolute) Konvergenz der Reihe.

e) Verwenden Sie die Grenzwertsätze, um $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k^9}{\left(2-\frac{1}{k^6}\right)^k}\right|} = \frac{1}{2}$ zu zeigen, und folgern Sie mit dem Wurzelkriterium die (absolute) Konvergenz der Reihe.

f) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Exponentialfunktion, dass $\exp(k) \geq \frac{k^2}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Verwenden Sie weiterhin die Tatsache, dass laut Vorlesung $|\sin(k)| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, um mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe zu folgern. Folgern Sie daraus auch die Konvergenz.

---

**Aufgabe 16**

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ absolut konvergiert.

---

**Lösungshinweise**

Definieren Sie rekursiv eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, welche $|a_{n_k}| \leq \frac{1}{k^2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Folgern Sie dann mit dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$.

---