Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I
Übung - Blatt 4

Dieses Übungsblatt wird am 19.11.2025 in der Globalübung besprochen.

Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis **Mittwoch, 19.11.2025, um 14:00 Uhr** im Moodle-Raum hoch. Geben Sie bitte in Gruppen von 2 Studierenden ab und schreiben Sie *alle* Namen und Matrikelnummern auf Ihre Abgabe.

Bitte achten Sie bei Ihrer Abgabe besonders auf die formale Korrektheit Ihrer Lösung. Es gibt pro Aufgabe einen Punkt für das formal korrekte Aufschreiben Ihrer Lösung, markiert mit einem *.

Definition (Antisymmetrische Relation)
Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq M \times M$ heißt *antisymmetrisch*, falls $((x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, x) \in \mathcal{R}) \Rightarrow x = y$.

Aufgabe 1 (1+2+2+2+2+1* = 10 Punkte)
Bestimmen und begründen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für die Anzahl der

(a) Relationen auf $\underline{n}$.

(b) reflexiven Relationen auf $\underline{n}$.

(c) symmetrischen Relationen auf $\underline{n}$.

(d) Relationen auf $\underline{n}$, die sowohl reflexiv als auch antisymmetrisch sind.

(e) Relationen auf $\underline{n}$, die zugleich reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Definition (Untergruppe)
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subseteq G$ eine Teilmenge von G. Dann heißt $(U, *)$ eine *Untergruppe* von $(G, *)$, notiert $U \leq G$, wenn für alle $g, h \in U$ gilt

(a) $g * h \in U$ (U ist abgeschlossen unter der Verknüpfung $*$) und

(b) $g^{-1} \in U$ (U ist abgeschlossen unter Inversen).

Aufgabe 2 (3+2+4+1* = 10 Punkte)
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Die Relation $\sim_U$ auf G sei definiert durch

$$g \sim_U h \;:\Leftrightarrow\; g * h^{-1} \in U.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim_U$ eine Äquivalenzrelation auf G ist.

(b) Sei $g \in G$. Beschreiben Sie die Äquivalenzklasse $[g]_{\sim_U}$ von g unter $\sim_U$.

(c) Sei G endlich. Zeigen Sie, dass dann gilt: $|G| = |G/\sim_U| \cdot |U|$.