Prof. Dr. Florian Heinrichs, Yvonne Albrecht, Johannes Dreßen FH Aachen, FB 09; IT Center, RWTH Aachen

Aufgabe 1 Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte f_X. Zeigen Sie: Für jedes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ gilt

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{dx}$$

Aufgabe 2 Die stetige Zufallsvariable X sei die Verspätung einer U-Bahn an einer bestimmten Haltestelle und habe die folgende Dichtefunktion (in Minuten):

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}125 \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die angegebene Dichtefunktion tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

(b) Bestimmen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die U-Bahn ein bis drei Minuten verspätet?

Aufgabe 3 Für die Zufallsvariable X sei folgende Dichtefunktion mit einer Konstanten a gegeben

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cdot x^4 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten a, so dass $f_X(x)$ eine echte Dichtefunktion der Zufallsvariable X darstellt.

Führen Sie alle Berechnungen mit dem Wert für a durch.

b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Dichtefunktion:

(1) $\mathbb{P}(X < 0{,}5)$ (2) $\mathbb{P}(X > 0{,}7)$ (3) $\mathbb{P}(0{,}6 < X < 0{,}8)$
(4) $\mathbb{P}(1{,}1 < X)$

c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$.

d) Berechnen Sie

(1) $\mathbb{E}[X]$ und (2) $var(X)$.

Aufgabe 4 An einer Haltestelle kommt pünktlich alle 20 Minuten eine S-Bahn. Eine Person geht, ohne auf die Uhr zu schauen, an die Haltestelle und nimmt die nächste S-Bahn. Die Zufallsvaribale T bezeichne die Wartezeit in Minuten.

(a) Modellieren Sie die Verteilung von T mit einer geeigneten Dichtefunktion.

(b) Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten für

(1) $\mathbb{P}(T < 10)$, (2) $\mathbb{P}(T > 5)$, (3) $\mathbb{P}(5 < T < 8)$.

Aufgabe 5 Die Lebensdauer (in Stunden) von Energiesparlampen eines bestimmten Fabrikats kann durch eine mit dem Parameter $\lambda > 0$ expoentialverteilte Zufallsvariable X beschrieben werden. Die zugehörige Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0;1]$ ist damit gegeben durch:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie für $\lambda = \frac{1}{800}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer einer derartigen Energiesparlampe

(1) höchstens 300 Stunden, (2) mehr als 120 Stunden,
(3) mindestens 240 und höchstens 360 Stunden

beträgt?

(b) Für welchen Wert des Parameters λ ergibt sich eine Lebensdauerverteilung, bei der mit Wahrscheinlichkeit 0,99 die Lebensdauer einer derartigen Energiesparlampe mindestens 100 Stunden beträgt?

Optional:

Aufgabe 6 X sei die exponentialverteilte Lebensdauer eines Objektes, d.h. X genügt der Verteilungsfunktion

$$F_c(t) = 1 - e^{-c \cdot t} \qquad c > 0, t > 0$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(b) Berechnen Sie die Varianz von X. Verwenden Sie ggf. $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{c^2}$

(c) Die Ausfallrate ist eine Kenngröße für die Zuverlässigkeit eines Objektes. Sie gibt an, wie viele Objekte in einer Zeiteinheit durchschnittlich ausfallen und ist als

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{1 - F_c(t)}$$

definiert, wobei $f_c(t)$ die Dichtefunktion der Verteilung $F_c(t)$ ist. Berechnen Sie $\lambda_c(t)$.