Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 3, Abgabe 30.4.

Aufgabe 1

Zu $a \in \mathbb{R}^n$ sei die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $L(x) := \sum_{i=1}^n a_i x_i$ gegeben.

Berechnen Sie die Operatornorm von L bezüglich der $p-$Norm für $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$.

Aufgabe 2

Es sei $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^n$ durch die Matrix $A = (a_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ gegeben ist. Es sei $V = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ $W = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$.

(i) Berechnen Sie die Operatornorm von A bezüglich der 1-Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

(ii) Es sei $m, n > 1$ und $\operatorname{rang} A > 1$. Zeigen Sie, dass bezüglich der euklidischen Norm gilt: $\|A\|_{L(V,W)} < \big(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \big)^{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 3

Richtig oder falsch? Begründen Sie!

(i) Die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes ist kompakt.

(ii) Die Vereinigung beliebig vieler kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes ist kompakt.

(iii) Jeder vollständige metrische Raum ist kompakt.

(iv) Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

(v) Die abgeschlossene Einheitskugel in ℓ^2 ist kompakt.

Aufgabe 4

Beweisen Sie die folgenden Aussagen in metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y).

(i) Jede abgeschlossene Teilmenge A einer kompakten Teilmenge K ist kompakt.

(ii) Sei $f\colon X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.

(iii) Sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Dann nimmt f auf K ihr Minimum und Maximum an.

Aufgabe 5*

Sei $x \in \ell^1$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$K := \{y \in \ell^1 \,|\, \forall\, k \in \mathbb{N} : |y_k| \leq |x_k|\}$$

eine kompakte Teilmenge von ℓ^1 ist.