Prof. Dr. B. Niethammer
L. Pohl
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn

Analysis II

Übungsblatt 2, Abgabe 23.4.

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{y}{x^2} e^{-\left|\frac{y}{x^2}\right|}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf jeder Gerade durch den Ursprung stetig ist, f aber unstetig in $(0,0)$ ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ zum Zylinder $Z := \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ homöomorph ist, indem Sie nachweisen, dass durch $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to Z$

$$f(x_1, x_2) := \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \ln r\right), \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

ein Homöomorphismus gegeben ist.

Aufgabe 3

Sei $V = (C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ und $W = (C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C1})$, wobei $\|f\|_{C^1} := \sup_{x \in [a,b]} (|f(x)| + |f'(x)|)$ für $f \in C^1([a,b])$.

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $D : W \to V$, gegeben durch $Df := f'$, linear und stetig ist.
2. Bestimmen Sie die zugehörige Operatornorm von D.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Mengen

(i) $M_1 := \{x \in \ell^\infty \,|\, \lim_{i\to\infty} x_i \ \text{ existiert}\}$

(ii) $M_2 := \{x \in \ell^\infty \,|\, \lim_{i\to\infty} x_i = 0\}$

abgeschlossen in ℓ^∞ sind.

Aufgabe 5*

Sei X eine unendliche Menge, die versehen mit der diskreten Metrik $d(x,y)$ ein metrischer Raum ist.

(i) Zeigen Sie, dass alle Teilmengen von X sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

(ii) Zeigen Sie, dass X beschränkt ist.

(iii) Bestimmen Sie eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat.