RWTH Institut für Mathematik
Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111

Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

4. Übung

Abgabetermin B-Teil 05.05.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **05.05.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II“ in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 03.05.2022 und am 04.05.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A16

Bestimmen sie alle lokalen und globalen Minima von der folgenden Funktion $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$.

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ x - 1 & x \in (1, 2] \\ (x-3)^2 & x \in (2, 4] \\ (x-5)^2 & x \in (4, 7] \end{cases}$$

Aufgabe A17

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall mit Endpunkten $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist. Was, wenn das Intervall nicht beschränkt wäre?

Aufgabe A18

(i) Beweisen Sie, dass die Funktion $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \tan(x)$, injektiv ist. *Im folgenden werden wir ohne Beweis benutzen, dass* $\tan$ *auch surjektiv ist (das könnte zum Beispiel mit Hilfe des Zwischenwertsatzes bewiesen werden).*

(ii) Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(iii) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle $x \neq 0$ gilt:

$$|\arctan(x)| < |x|.$$

Aufgabe A19

Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}$ *Hinweis:* $\sin(x) \neq x$ *für alle* $x \neq 0$.

(ii) $\lim_{x \searrow 0} x^x$

(iii) $\lim_{x\to\infty} x \log(1 + \frac{1}{x})$

Teil B

Aufgabe B14 [4+5 = 9 Punkte]

a) Finden Sie alle lokalen Extrema der Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x$.

b) Finden Sie alle lokalen Extrema der Funktion $|f|$ auf $[-3, 3]$.

Aufgabe B15 [7 Punkte]
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, sodass die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existieren und endlich sind. Beweisen Sie, dass dann $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ gilt.

Aufgabe B16 [5+(2+1)+(2+2)=12 Punkte]
Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Beweisen Sie: die Funktion f ist genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.

(b) Beweisen Sie:

  (i) Die Funktion f ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.

  (ii) Zeigen Sie anhand des Beispiels $g : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$, dass die Umkehrung von (i) nicht gelten muss.

(c) (i) Beweisen Sie, dass die Funktion $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (1, 1)$ injektiv ist. *Im Folgenden dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass die Abbildung auch sujektiv ist.*

  (ii) Es sei $\arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die stetige Inverse von sin. Zeigen Sie, dass arcsin differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Aufgabe B17 [5+5+5+8 = 23 Punkte]
Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital die folgenden Grenzwerte.

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad \text{(iii)} \lim_{x\to\infty} \log\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right) \quad \text{(iv)} \lim_{x\searrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$