Prof. Dr. Alice Niemeyer
M.Sc. Leonard Sattler
M.Sc. Anna Wollenhaupt
Kontakt: la1@art.rwth-aachen.de

Lineare Algebra I

Übung - Blatt 8

Dieses Übungsblatt wird am 17.12.2025 in der Globalübung besprochen.

Bitte laden Sie Ihre Abgabe bis **Mittwoch, 17.12.2025, um 14:00 Uhr** im Moodle-Raum hoch. Geben Sie bitte in **Gruppen von 2-3 Studierenden** ab und schreiben Sie *alle* Namen und Matrikelnummern auf Ihre Abgabe. Wir würden uns wünschen, dass mindestens zwei der Abgabepartner jeweils einen Teil der Abgabe aufschreiben

Bitte achten Sie bei Ihrer Abgabe besonders auf die formale Korrektheit Ihrer Lösung. Es gibt pro Aufgabe einen Punkt für das formal korrekte Aufschreiben Ihrer Lösung, markiert mit einem *.

Aufgabe 1 (9+1* Punkte)
Zeigen Sie Korollar 5.20 aus der Vorlesung: Es sei K ein Körper und $f \in K[X] \setminus \{0\}$, dann hat f eine bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutige multiplikative Zerlegung in normierte, irreduzible Polynome und eine Einheit.

D.h. f lässt sich als Produkt $f = a \cdot \prod_{i=1}^{k} f_i$ für $f_i \in K[X]$ irreduzibel und $a \in K^*$ schreiben und alle anderen Produkte dieser Form unterscheiden sich nur durch die gewählte Reihenfolge der f_i's.

Aufgabe 2 (4+5+1* Punkte)
Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum.

(a) Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus von V mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Zeigen Sie, dass V (innere) direkte Summe von $\mathrm{Kern}(V)$ und $\mathrm{Bild}(V)$ ist.

(b) Sei nun $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\varphi\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}\colon A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^{tr})$. Zeigen Sie, dass

  (i) φ ein $\mathbb{R}$-Homomorphismus ist,
  (ii) $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt
  (iii) und bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ.