RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111
Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

6. Übung

Abgabetermin B-Teil 19.05.2022

Der B-Teil kann bis spätestens am **19.05.2022 um 23:59 Uhr** als PDF unter Übungsbetrieb „Analysis II“ in RWTHmoodle hochgeladen werden.

Kleingruppe:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Name, Vorname:	
Matrikelnummern:	
Erreichte Punkte:	

Bitte geben Sie Ihre Lösungen mit dem ausgefüllten Deckblatt als erste Seite ab.

Fragen zu allen Aufgaben können in den Kleingruppenübungen **am 17.05.2022 und am 18.05.2022** gestellt werden.

Teil A

Aufgabe A26
Seien $[a,b], [b,c]$ zwei beschränkte und abgeschlossene Intervalle und sei $f_1 \in \mathcal{TF}([a,b])$ und $f_2 \in \mathcal{TF}([b,c])$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [a,c] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & \text{falls } x \in [a,b) \\ f_2(x), & \text{falls } x \in [b,c] \end{cases}$$

eine Treppenfunktion auf $[a,c]$ ist und geben Sie eine Zerlegung in Konstanzintervalle von f an. Beweisen Sie anschliessend, dass das Integral von f gegeben ist durch

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f_1 dx + \int_b^c f_2 dx$$

Aufgabe A27
Sei $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ für $a > 0$ integrierbar. Beweisen Sie: ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe A28

(i) Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiter sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Beweisen Sie: ist f^2 integrierbar, so ist auch f integrierbar.

(ii) Bleibt die Aussage richtig, wenn man auf die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ verzichtet?

Aufgabe A29
Sei f die *Dirichlet-Funktion*, also

$$f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to 0, 1, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $\underline{I}(f) = 0$ und dass $\overline{I}(f) = 1$ gilt.

Teil B

Aufgabe B24 [7+5=12 Punkte]

(i) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & \text{falls } x = \frac{1}{n} \text{ mit einem } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Untersuchen Sie f auf Integrierbarkeit.

(ii) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und es gelte $f \geq 0$. Beweisen Sie: Falls für jedes $\lambda > 0$ die Menge

$$\{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq \lambda\}$$

endlich ist, dann ist f Riemann-integrierbar.

Aufgabe B25 [6+2=8 Punkte]

(i) Sei $f \in \mathcal{F}([a, b])$ eine beschränkte Funktion und sei T_U eine Menge von Treppenfunktionen mit $u \leq f$ für alle $u \in T_U$ und T_O eine Menge von Treppenfunktionen mit $f \leq o$ für alle $o \in T_O$. Angenommen für jedes $\varepsilon > 0$ existieren $u \in T_U$ und $o \in T_O$ mit

$$\int_a^b (o(x) - u(x)) \ \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Beweisen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x = \sup \left\{ \int_a^b u(x) \ \mathrm{d}x \mid u \in T_U \right\} = \inf \left\{ \int_a^b o(x) \ \mathrm{d}x \mid o \in T_O \right\}.$$

(ii) Beweisen Sie, dass $f \in \mathcal{F}([a, b])$ Riemann-integrierbar ist, falls es zwei Folgen von Treppenfunktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(o_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $u_n \leq f \leq o_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sodass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b o_n(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x) \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe B26 [9 Punkte]

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $f(x) = g(x)$ für alle bis auf ein $x \in [a, b]$ gilt. Beweisen Sie, dass g integrierbar ist und $\int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ gilt.

Aufgabe B27 [5 Punkte]

Sei $f \in \mathcal{TF}([a, b])$ eine Treppenfunktion. Beweisen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und dass das Riemann-Integral von f gleich dem Integral von f als Treppenfunktion ist.