RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Westdickenberg
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 110/111
Tel.: +49 241 80-94569
Sekr.: +49 241 80-94921
mwest@instmath.rwth-aachen.de
https://www.instmath.rwth-aachen.de/mwest/

Teil A

Aufgabe A38

Gegeben sei ein nicht-leeres Intervall $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, Zahlen $x, x_0 \in (a,b)$ und eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion

$$F : t \in (a,b) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

durch $t \in (a,b) \mapsto \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$ gegeben ist.

2. Wenden Sie den Mittelwertsatz (Theorem 8.29) auf die obige Funktion F an, um die Formel $R^f_{x_0,n}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_C)(x-\xi_C)^n(x-x_0)$ für das Restglied nach Cauchy zu beweisen.

3. Verwenden Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 8.28) für obiges F und die Funktion $g : t \mapsto (x-t)^{n+1}$, um die Formel $R^f_{x_0,n}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_L)(x-x_0)^{n+1}$ für das Restglied nach Lagrange zu beweisen.

Lösung

1. Da die Summe endlich ist können wir die Ableitung auf die einzelnen Summanden anwenden:

$$\begin{aligned} F' : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(t) k-1!(x-t)^{k-1} \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(t) k!(x-t)^{k} \\ = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung.

2. Sei $x > x_0 \in (a,b)$ dann ist $F_{|[x_0,x]}$ stetig und auf (x_0,x) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi_C \in (x_0,x)$, so dass $F(x) - F(x_0) \overset{\text{MWS}}{=} F'(\xi_C)(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_C)}{n!}(x-\xi_C)^n(x-x_0)$. Daraus folgt Behauptung.

3. Seien x, x_0 wie oben. Dann ist $F_{|[x_0,x]}$ stetig und $g_{|[x_0,x]}$ ebenso, beide sind auf dem offenen Intervall differenzierbar. Dann existiert ein $\xi_L \in (x_0,x)$, so dass

$$\begin{aligned} F'(\xi_L)(g(x) - g(x_0)) = g'(\xi_L)(F(x) - F(x_0) \\ \Leftrightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi_L)}{n!}(x-\xi_L)^n(-(x-x_0)^{n+1}) = -(n+1)(x-\xi_L)^n(F(x) - F(x_0)) \\ \Leftrightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi_L)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = F(x) - F(x_0) \end{aligned}$$

Aufgabe A39

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \int_0^x \log\big(t + \sqrt{1+t^2}\big)\, dt.$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Taylor'schen Formel, dass

$$-\frac{1}{24}x^4 \leq f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung

Idee: Entwickle f in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$.
Bestimme dazu die ersten 4 Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \log\big(x + \sqrt{1+x^2}\big) \\
f''(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
f'''(x) &= -{}^1\!/\!_2 \left(1+x^2\right)^{-3/2} \cdot 2x = -\tfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \\
f^{(iv)}(x) &= -\tfrac{1\cdot\left(1+x^2\right)^{3/2} - x\left(1+x^2\right)^{1/2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2x}{\left[\left(x^2+1\right)^{3/2}\right]^2} = -\tfrac{\left(1+x^2\right)^{3/2} - 3x^2\left(1+x^2\right)^{1/2}}{(1+x^2)^3} \\
&= -\tfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} + \tfrac{3x^2}{\left(1+x^2\right)^{5/2}}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f^{(iv)}(\xi)}{4!}\cdot x^4 \\
&= 0 + 0\cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{0}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{24} f^{(iv)}(\xi)\cdot x^4 \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24} f^{(iv)}(\xi)\cdot x^4
\end{aligned}$$

wobei $\xi \in (0, x)$ ist. Schätze nun die 4. Ableitung von f ab. Es gilt:

$$f^{(iv)}(\xi) = \frac{-\left(1+\xi^2\right) + 3\xi^2}{(1+\xi^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\xi^2 - 1}{(1+\xi^2)^{\frac{5}{2}}} \overset{2\xi^2 \geq -\xi^2}{\geq} \frac{-\xi^2 - 1}{(1+\xi^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{\underbrace{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}_{\geq 1}} \geq -1$$

Damit folgt:

$$f(x) - \frac{1}{2}x^2 \geq -1 \cdot \frac{1}{24}x^4 = -\frac{1}{24}x^4$$

Andererseits gilt für f:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot x^2 = \frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

mit $\xi \in (0, x)$. Da $f''(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \leq 1$ gilt, folgt:

$$f(x) \leq \frac{1}{2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - \frac{1}{2}x^2 \leq 0.$$

Insgesamt erhalten wir also die Behauptung.

Aufgabe A40

Man bestimme das Taylorpolynom n-ten Grades $T_n(x)$ um $x_0 = 0$ für $f(x) := \log(1+x)$ und beweise mit Hilfe des Restgliedes in Integralform, dass für alle $x \in (-1,1)$ gilt

$$T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Lösung

Es gilt $f'(x) = (1+x)^{-1}$ und damit $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ (per Induktion)

Dann lautet das Taylorpolynom nach Definition $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ für $x > -1$ und da f auf $(-1,\infty)$ beliebig oft differenzierbar ist, folgt mit Satz 9.46 für festes $x > -1$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n(-1)^n n!(1+t)^{-n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \int_0^x \frac{1}{1+t}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt = \begin{cases} (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt, & x \geq 0, \\ (-1)^{n+1} \displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt, & -1 < x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Setze nun $g : [0,x] \to \mathbb{R},\ g(t) := \frac{x-t}{1+t}$, falls $x \geq 0$ und $g : [x,0] \to \mathbb{R},\ g(t) := \frac{x-t}{1+t}$, falls $-1 < x < 0$. Dann ist g auf $[0,x]$ bzw. $[x,0]$ stetig und auf $(0,x)$ und $(x,0)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(t) = \frac{-(1+t)-(x-t)}{(1+t)^2} = \frac{-1-x}{(1+t)^2} < 0 \quad \text{für alle } t$$

Daher ist g monoton fallend. Es folgt

$$\frac{x-t}{1+t} \leq \begin{cases} \frac{x-0}{1+0} = x, & x \geq 0, \\ \frac{x-x}{1+x} = 0, & -1 < x < 0. \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \frac{x-t}{1+t} \geq \begin{cases} \frac{x-x}{1+x} = 0, & x \geq 0, \\ \frac{x-0}{1+0} = x, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} x \geq 0 &: 0 \leq g(t) \leq x, \\ -1 < x < 0 &: x \leq g(t) \leq 0, \end{aligned}$$

stets gilt also $|g(t)| \leq |x|$, also $|g(t)|^n \leq |x|^n$ für alle t. Somit erhält man

$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \left|\frac{1}{1+t}\right| \cdot \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n dx \leq |x|^n \int_0^x \left|\frac{1}{1+t}\right| \mathrm{d}t = |x|^n|\log(1+x)|.$$

Genau dann, wenn $x \in (-1,1)$, folgt $|x|^n|\log(1+x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, was zu zeigen war.

Aufgabe A41

Beweisen Sie das folgende Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale.

Seien $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b]$ mit $b > a$ Riemann-integrierbar. Für alle $x \in [a,\infty)$ gelte $g(x) \geq 0$ und $|f(x)| \leq g(x)$. Falls das uneigentliche Integral $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, dann existiert auch

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $b_1 = 1$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Dann gilt

$$\int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=:F_k} = \sum_{k=1}^{n} F_k.$$

Außerdem ist

$$|F_k| =\leq \int_{b_k}^{b_{k+1}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{b_k}^{b_{k+1}} g(x)\,\mathrm{d}x =: G_k.$$

Da g auf $[a,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist, konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{n-1} G_k = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Die Existenz von $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ folgt nun aus dem Majorantenkriterium für Reihen und aus der Beliebigkeit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe A42

Untersuchen Sie, für welche reellen Konstanten α, β das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx.$$

Lösung

Da der Integrand stetig auf $[1,\infty)$ ist, ist das Integral uneigentlich bezüglich der oberen Grenze.
Wir betrachten zunächst: $\boxed{\beta > 0}$. Wegen $x^\beta \geq 1$ für $x \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^\alpha}{x^\beta} \leq \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \leq \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

und somit

$$\frac{1}{2}\cdot x^{\alpha-\beta} \leq \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \leq x^{\alpha-\beta}$$

Also ist $x^{\alpha-\beta}$ eine integrierbare Majorante, falls

$$\alpha-\beta < -1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < \beta - 1,$$

und eine divergente Minorante, falls

$$\alpha-\beta \geq -1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \geq \beta - 1$$

Somit folgt:

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx \begin{cases} < \infty & \text{falls } \alpha < \beta-1,\ \beta > 0 \\ = \infty & \text{falls } \alpha \geq \beta-1,\ \beta > 0 \end{cases}$$

Nun zum Fall $\boxed{\beta < 0}$: Hier gilt:

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} = \frac{x^{-\beta}}{x^{-\beta}}\cdot\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} = \frac{x^{\alpha-\beta}}{1+x^{-\beta}}$$

Da $(-\beta) > 0$ folgt wie oben (mit $\alpha - \beta = \widetilde{\alpha}$):

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx \begin{cases} < \infty & \text{falls } \alpha < -1,\ \beta < 0 \\ = \infty & \text{falls } \alpha \geq -1,\ \beta < 0 \end{cases}.$$

Teil B

Aufgabe B37 [9 Punkte]

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \int_0^x \arctan\big(\sin(t)\big)\, dt.$$

Beweisen Sie mit Hilfe der Taylor'schen Formel, dass

$$-\frac{1}{2}x^3 \le f(x) - \frac{1}{2}x^2 \le 0 \quad \text{für } x \in (0, \pi).$$

Lösung

Idee: Entwickle f in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$.
Bestimme dazu die ersten 3 Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan\big(\sin(x)\big) \\ f''(x) &= \tfrac{1}{1+\sin^2(x)} \cdot \cos(x) \\ f'''(x) &= \tfrac{-\sin(x)(1+\sin^2(x)) - \cos(x)\cdot 2\sin(x)\cos(x)}{\left(1+\sin^2(x)\right)^2} \\ &= -\tfrac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)} - \tfrac{2\cos^2(x)\sin(x)}{\left(1+\sin^2(x)\right)^2} \end{aligned}$$

Damit ist die Taylorentwicklung von f um $x = 0$ wie folgt:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot(x-0)^3$$

wobei $\xi \in (0, x)$ ist. Also gilt:

$$f(x) = 0 + 0\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}\cdot x^3 \quad \text{, also} \quad f(x) - \frac{1}{2}x^2 = \frac{f'''(\xi)}{6}\cdot x^3$$

Schätze nun die dritte Ableitung von f ab. Für $\xi \in (0, \pi)$ gilt:

- $\sin(\xi) > 0$, $\cos^2(\xi) \ge 0$, also folgt:

$$f'''(\xi) = -\frac{\sin(\xi)}{1+\sin^2(\xi)} - \frac{2\cos^2(\xi)\sin(\xi)}{\left(1+\sin^2(\xi)\right)^2} \le 0$$

- $0 < \sin(\xi) \le 1$, $\cos^2(\xi) \le 1$, also folgt:

$$f'''(\xi) \ge \frac{-1}{1} - \frac{2\cdot 1\cdot 1}{1} = -3$$

Also gilt insgesamt: $$-3 \le f'''(\xi) \le 0$$

Damit gilt für $x \in (0, \pi)$:

$$\begin{aligned} & \frac{-3}{6}x^3 \le f(x) - \frac{1}{2}x^2 \le \frac{0}{6}x^3 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}x^3 \le f(x) - \frac{1}{2}x^2 \le 0 \end{aligned}$$

Dies ist gerade die Behauptung.

Aufgabe B38 [9 Punkte]
Man bestimme das Taylorpolynom n-ten Grades $T_n(x;x_0)$ um $x_0=0$ für $f(x):=\sqrt{1+x}$ und beweise mit Hilfe des Restgliedes in Integralform, dass für alle $x\in(-1,1)$ gilt

$$T_n(x;0)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Lösung
Bestimme exemplarisch die ersten 3 Ableitungen:
$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}$, $f''(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(1+x)^{\frac{1}{2}-2}$ und $f'''(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(2-\frac{1}{2})(1+x)^{\frac{1}{2}-3}$
Per Induktion folgt, dass $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n-1}\left(i-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n}$ für $n\geq 2$.
Dann lautet das Taylorpolynom

$$T_n(x;0)=f(0)+f'(0)x+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k!}(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k-1}\left(i-\frac{1}{2}\right)x^k\right)=1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k!}(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k-1}\left(i-\frac{1}{2}\right)x^k\right)$$

Da f $n+1$-mal differenzierbar ist, folgt mit Satz 9.46

$$\begin{aligned}R_n(x;0)&=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)dt\\&=\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n(-1)^n\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)(1+t)^{\frac{1}{2}-(n+1)}dt\\&=(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)\int_0^x(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n dt.\end{aligned}$$

Setzt man $g(t):=\dfrac{x-t}{1+t}$, dann gilt $g(0)=x$, $g(x)=0$,

$$g'(t)=\frac{-(1+t)-(x-t)}{(1+t)^2}=-\frac{1+x}{(1+t)^2}<0,\text{für } t\in[0,x]$$

also $|g(t)|\leq|x|$ und auch $\left|(1+t)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x-t}{1+t}\right)^n\right|\leq(1+t)^{-\frac{1}{2}}|x|^n$.
Somit folgt wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}2\sqrt{1+t}=(1+t)^{-\frac{1}{2}}$:

$$|R_n(x,0)|\leq\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\underbrace{\prod_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)}_{<n!}|x|^n\left|\int_0^x(1+t)^{-\frac{1}{2}}\,dt\right|<\frac{1}{2}|x|^n|2\sqrt{1+x}-2|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

was zu beweisen war.

Aufgabe B39 [7 Punkte]
Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Integrale

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x-1)^3}\,dx,\quad\int_{1}^{5}\frac{1}{(x-1)^3}\,dx,$$

divergieren, aber der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\int_{-1}^{1-\varepsilon}\frac{1}{(x-1)^3}\,dx+\int_{1+\varepsilon}^{5}\frac{1}{(x-1)^3}\,dx\right).$$

Lösung
Es gilt:

$$\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \int (x-1)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-2}$$

also:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{a\nearrow 1}\int_{-1}^{a} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{a\nearrow 1} -\frac{1}{2}(x-1)^{-2}\Big|_{-1}^{a} = \lim_{a\nearrow 1}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\right)$$

wegen $\frac{1}{(a-1)^2} \xrightarrow{a\to 1} \infty$ ist $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$ divergent.
Weiter gilt:

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{a\searrow 1}\int_{a}^{5} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{a\searrow 1} -\frac{1}{2}(x-1)^{-2}\Big|_{a}^{5} = \lim_{a\searrow 1} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(a-1)^2}$$

wegen $\frac{1}{(a-1)^2} \xrightarrow{a\to 1} \infty$ ist $\int_{1}^{5} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$ divergent.
Aber es gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx + \int_{1+\varepsilon}^{5} \frac{1}{(x-1)^3}\,dx\right] \\
&\qquad= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\Big|_{1+\varepsilon}^{5}\right] \\
&\qquad= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-\varepsilon-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon-1)^2}\right] \\
&\qquad= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left[\frac{3}{32}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\right] \\
&\qquad= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{3}{32} = \frac{3}{32}
\end{aligned}$$

Aufgabe B40 [4+5=9 Punkte]

(i) Verwenden Sie Satz 9.35, um den p-Test in Beispiel 7.17 zu erhalten.

(ii) Imitieren Sie des Weiteren die Methodik im Beweis von Satz 9.35 (Skript), um zu zeigen, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Big|\log(N) - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\Big| \leq 1.$$

Lösung

(i) Wir betrachten die Funktionenschar $f_p : [1,\infty] \to [0,1] : x \mapsto x^{-p}$ für $p \in (0,\infty)$. Offensichtlich ist f_p monton fallend.
Nach Satz Satz 9.35 gilt nun, dass $\sum_{n=2}^{\infty} f_p(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Nun gilt:

$$\int_1^{\infty} f_p(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\begin{cases}\frac{b^{-p+1}-1}{-p+1} \text{ falls } p \neq 1\\ \log(b) \text{ falls } p = 1\end{cases} = \begin{cases}\frac{-1}{-p+1} \text{ falls } p \neq 1\\ \infty \text{ falls } p \leq 1\end{cases}$$

Somit konvergiert $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ genau dann, wenn $p > 1$ ist. Somit konvergiert aber auch $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}+1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ genau dann. Dies ist die Aussage von 7.17.

(ii) Sei $f = f_1$, dann gilt: Für $n \in \mathbb{N}$ und einen beliebigen Zwischenpunkt $x \in [n, n+1]$ gilt nach Monotonie von f die Ungleichung $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ und somit

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(n),$$

Nach Summation von 1 bis n erhält man mit Intervalladditivität des Riemann-Integrals

$$\sum_{\ell=2}^{n+1} f(\ell) = \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Somit gilt mit $N := n+1$

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} \leq \int_1^N \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(N) \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}$$

und weiter:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leq \log(N) + 1 \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + 1 \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} + 1$$

also

$$-1 \leq \log(N) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leq 0$$

Also

$$\Big| \log(N) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \Big| \leq 1$$

Aufgabe B41 [5 Punkte]

Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende Integral konvergiert:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\big(\log(x)\big)^\alpha}\mathrm{d}x$$

Lösung

Das Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x[\log(x)]^\alpha}\,dx$ ist uneigentlich bezüglich oberer Grenze, da der Integrand stetig ist für $x \geq 2$.

Betrachte also:

$$\begin{aligned}
\int_2^R \frac{1}{x[\log(x)]^\alpha}\,dx &\overset{\substack{\log(x)=t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt}}{=} \int_{\log(2)}^{\log(R)} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \cdot t^{1-\alpha}\Big|_{\log(2)}^{\log(R)} & \alpha \neq 1 \\ \log(t)\Big|_{\log(2)}^{\log(R)} & \alpha = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[(\log(R))^{1-\alpha} - (\log(2))^{1-\alpha}\right] & \alpha \neq 1 \\ \log(\log(R)) - \log(\log(2)) & \alpha = 1 \end{cases} \\
&\xrightarrow{R\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(\log(2))^{1-\alpha} & 1-\alpha < 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha > 1 \\ \infty & \alpha \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Also:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x[\log(x)]^\alpha}\,dx \quad \text{ist} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{konvergent für } \alpha > 1 \\ \text{divergent für } \alpha \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Aufgabe B42 [10* Punkte]

Bonusaufgabe. Sei $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Für welche p existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x \sin(x^p)\ \mathrm{d}x?$$

Hinweis: Betrachten Sie den Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{b_k} x \sin(x^p)\,\mathrm{d}x$$

für eine geeignete Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *und interpretieren Sie das Integral als Reihe. Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz (Leibniz-Kriterium).*

Lösung

Aufgabe B42*

$$\int_0^\infty x \sin(x^p)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\sin(x^p)\,dx$$

Subst. $\varphi(y) = y^{1/p}$ $\quad \varphi: [0, b^p] \to [0,b]$ stetig d.b. auf $(0, b^p)$

$\varphi'(y) = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}$

$$\int_0^b x \sin(x^p)\,dx = \int_0^{b^p} y^{1/p} \sin(y) \cdot \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}\,dy$$

$$= \int_0^{b^p} \frac{1}{p} y^{\frac{2}{p}-1} \sin(y)\,dy$$

Also existiert $\int_0^\infty x\sin(x^p)\,dx$ g.d.w. $\int_0^\infty x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\,dx$ ex.

Sei $I_k := [k\pi, (k+1)\pi]$

Es gilt $\sin(x) = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}$

$\sin(\pi \cdot 2k + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\sin(\pi(2k+1) + \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

Also gilt $\sin(x) > 0$ für $x \in I_k$, k gerade

$\sin(x) < 0$ für $x \in I_k$, k ungerade

(da sin auf $\mathring{I}_k$ keine Nullstellen hat und stetig ist).

$p \leq 2$

$\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(\pi) = 0$, sin stetig.

Also ex. $(u,v) \subset (0,\pi)$ mit $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \in (u,v)$.

Sei $J_k := (u,v) + k\pi$. Dann gilt

•) k gerade: $\int_{I_k} \underbrace{\sin(x)}_{\geq 0} x^{\frac{2}{p}-1}\,dx \geq \int_{J_k} \underbrace{\sin(x)}_{\geq \frac{1}{2}} x^{\frac{2}{p}-1}\,dx$

$\geq \frac{1}{2} \int_{J_k} \underbrace{x^{\frac{2}{p}-1}}_{\geq 1}\,dx \geq \frac{1}{2} |J_k| = \frac{1}{2} |v-u|$

Es folgt, dass

$$\left| \int_0^{(k+1)\pi} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\,dx - \int_0^{k\pi} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\,dx \right|$$

$$= \int_{I_k} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\,dx \geq \frac{1}{2}|v-u|$$

Also ist $\left(\int_0^{k\pi} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\,dx \right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge.

Also konvergiert die Folge nicht. Insbesondere konvergiert $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b x^{\frac{2}{p}-1}\sin(x)\,dx$ nicht.

$p > 2$

Betrachte zunächst $\Big(\underbrace{\int_0^{k\pi} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\,dx}_{=:A_k} \Big)_{k\in\mathbb{N}}$

setze $a_k := \int_{I_k} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\,dx$

Dann gilt $a_k = (-1)^k |a_k|$, sowie $A_k = \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n$

$$|a_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^{\frac{2}{p}-1} |\sin(x)|\,dx \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^{\frac{2}{p}-1}\,dx$$

$$\leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (k\pi)^{\frac{2}{p}-1}\,dx = \pi^{\frac{2}{p}} \cdot k^{\overbrace{\frac{2}{p}-1}^{<0 \text{ da } p>2}} \xrightarrow{(k\to\infty)} 0 .$$

Außerdem ist mit der Substitution $\varphi(y) = y+\pi$, $\varphi'(y) = 1$:

$$|a_{k+1}| = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} x^{\frac{2}{p}-1} |\sin(x)|\,dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \underbrace{(y+\pi)^{\frac{2}{p}-1}}_{\leq y^{\frac{2}{p}-1}} \underbrace{|\underbrace{\sin(y+\pi)}_{=-\sin(y)}|}_{=|\sin(y)|}\,dy$$

$$\leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} y\,|\sin(y)|\,dy = |a_k| .$$

Also ist $|a_k|$ mon fallend.

Mit dem Leibniz-Kriterium folgt:

$$\int_0^{k\pi} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\, dx = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n |a_n| \quad \text{konvergiert.}$$

Sei $A := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ und sei $\varepsilon > 0$ bel.

Dann ex. $N \in \mathbb{N}$ s.d. für alle $k \geq N$ gilt

$$\left| \int_0^{k\pi} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\, dx - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sowie

$$\int_{I_k} x^{\frac{2}{p}-1} |\sin(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $b \in \mathbb{R}$, $b \geq N$. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\pi \leq b < (k+1)\pi.$$

Es gilt $\left| \int_0^b \underbrace{x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)}_{=: f(x)} dx - A \right|$

$$= \left| \int_0^{k\pi} f(x)\, dx + \int_{k\pi}^b f(x)\, dx - A \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{k\pi} f(x)\, dx - A \right| + \left| \int_{k\pi}^b f(x)\, dx \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{k\pi}^b x^{\frac{2}{p}-1} |\sin(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^{\frac{2}{p}-1} \sin(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)\, dx = A$.