FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Stochastik

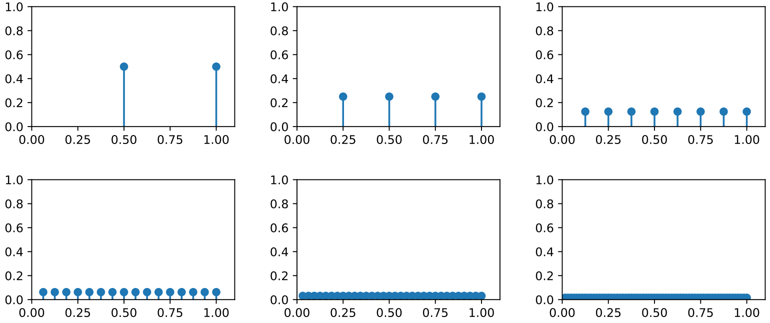
FH Aachen – Studienstandort Aachen
31. Oktober 2025

Prof. Dr. Florian Heinrichs

Stetige Verteilungen

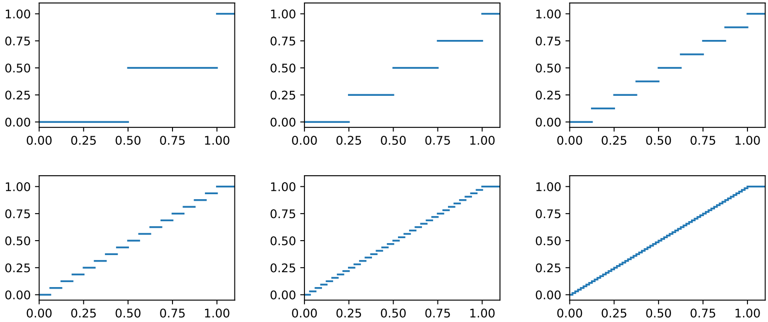
Diskrete Gleichverteilung

- Sei $X \sim \mathcal{U}_{\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}}$ gleich verteilt auf den Zahlen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$.
- Dann gilt $\mathbb{P}(X = \frac{i}{n}) = \frac{1}{n}$
- Was passiert für $n \to \infty$?
- $\mathbb{P}(X = \frac{i}{n}) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ Das ist wenig hilfreich!



Diskrete Gleichverteilung

- Sei $X \sim \mathcal{U}_{\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\}}$ gleich verteilt auf den Zahlen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$.
- Dann gilt $\mathbb{P}(X \leq \frac{i}{n}) = \frac{i}{n}$
- Was passiert für $n \to \infty$?
- $\mathbb{P}(X \leq \frac{\lfloor xn \rfloor}{n}) = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \xrightarrow{n\to\infty} x$ Besser!



FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Stetige Gleichverteilung

Definition 33

Eine Zufallsvariable $X \in [0,1]$ mit

$$\mathbb{P}(X \leq x) \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } x \in [0,1] \\ 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

ist (stetig) *gleich verteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *(stetige) Gleichverteilung*.

Notation: $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.

Wir können die Gleichverteilung auch allgemeiner definieren: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ für $a < b$, dann ist $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$ für $x \in [a,b]$.

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte

- Sei $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$
- Dann gilt $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\mathrm{d}y$

Definition 34

Eine integrierbare* Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ heißt *(Wahrscheinlichkeits-) Dichte* (oder *Dichtefunktion*) der Zufallsvariablen X bzw. der Verteilung $\mathbb{P}_X$, falls für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gilt

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}_X((a, b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Verteilungen mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte heißen *stetige* Verteilungen.

---

*Integrierbar bedeutet eigentlich *Lebesgue-integrierbar*. Für die meisten wichtigen Funktionen stimmen Lebesgue-Integral und das "normale" (Riemann-)Integral überein.

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte

> Was ist die Dichte der Gleichverteilung $\mathcal{U}_{[0,1]}$?

> $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

> Aber auch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin [0,1] \\ c & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

> Die Verteilung F_X legt die Dichte f_X nicht (ganz) eindeutig fest
  > Wenn f_X an endlichen vielen Punkte geändert wird, ist es immer noch eine Dichte von F_X
  > Allgemeiner: Änderung an abzählbar vielen Punkten möglich
  > Noch allgemeiner: Änderung auf einer "Nullmenge" möglich

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte

Bemerkung 12: (Eigenschaften stetiger Verteilungen)

1. F_X ist stetig in x genau dann, wenn $\mathbb{P}(X = x) = 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = F_X(\infty) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x) = 1$
3. Falls X eine stetige Zufallsvariable ist, dann ist F_X stetig

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte

- Wir haben die Dichte über eine Verteilung definiert.
- Andersrum definiert jede integrierbare Funktion mit den Eigenschaften
  1. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

  eine Verteilung $\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ und ist damit eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte

Übung 47

Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = cx^{-\lambda}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$ für $\lambda > 1$ eine Dichte?

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte

> Kommt Ihnen die Form $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y$ bekannt vor?

> Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung : f stetig, dann ist F differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$

> Es gilt sogar: Jede Verteilungsfunktion F ist fast überall* differenzierbar. Sie hat eine Dichte genau dann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)\mathrm{d}x = 1$ und die Dichte ist gegeben durch $f(x) = F'(x)$.

---

*für uns: fast überall = bis auf in abzählbar unendlich vielen Punkten

Rechenregeln

Bemerkung 13

Sei X eine stetige Zufallsvariable. Dann gilt:

- Für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a)\\ &= \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x = \mathbb{P}(a < X \leq b)\end{aligned}$$

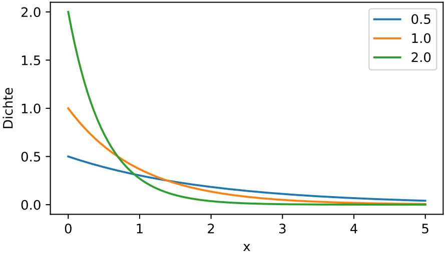
- $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)\mathrm{d}x$
- $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ diskret, d.h. $A = \{a_i\}_{i \in I}, I \subset \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = a_i) = 0$$

Exponentialverteilung

Definition 35

Eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, für ein $\lambda > 0$, heißt *exponentialverteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *Exponentialverteilung*.
Notation: $X \sim Exp(\lambda)$.



Exponentialverteilung

Für die Verteilung gilt

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d}y = [-e^{-\lambda y}]_x^\infty = 0 - (-e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq x + y | X > y) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq x + y, X > y)}{\mathbb{P}(X > y)} \\ &= e^{-\lambda(x+y)} e^{\lambda y} \\ &= e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X \geq x)\end{aligned}$$

Interpretation:

> λ gibt die "Ausfallrate" an.

> Die Exponentialverteilung ist "Gedächtnislos", d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass X für weitere x Jahre nicht ausfällt ist unabhängig von der bisherigen Lebensdauer y.

(Wahrscheinlichkeits-)Dichte

Übung 48

Überprüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeitsdichten der Gleich- und Exponentialverteilung wirklich Dichtefunktionen definieren, d.h.

1. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Die Dichten sind jeweils gegeben durch $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ und $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, für $\lambda > 0$.

Exponentialverteilung

Beispiel 92

Eine Firma produziert ein technisches Gerät, z.B. eine Waschmaschine. Falls kein Gerät jemals ausfällt, kann die Firma keine weiteren Geräte verkaufen, sobald alle Kunden versorgt sind.
Zur Gewinnmaximierung möchte die Firma, dass täglich 0.1% der Geräte unabhängig von ihrem Alter kaputt gehen (die Firma hat ermittelt, dass sich bei dieser Ausfallquote die Kunden nicht übermäßig beschweren, aber zeitnah neue Geräte kaufen müssen).
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät noch ein halbes Jahr (genauer: 180 Tage) funktioniert?

> $X =$ "Remaining Useful Life" $\sim Exp(0.001)$

> $\mathbb{P}(X \geq 180) = e^{-\lambda 180} = e^{-0.001 \cdot 180} \approx 0.835$

Exponentialverteilung

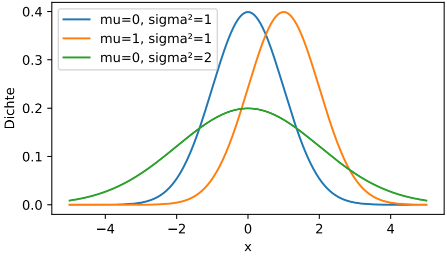
Übung 49

Ein Förderband fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% je Tag unabhängig von der bisherigen Einsatzzeit aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Förderband 4 weitere Wochen ohne Ausfall läuft?

Normalverteilung

Definition 36

Eine Zufallsvariable X mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$ heißt *normalverteilt*. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *Normalverteilung* (auch Gauß-Verteilung).
Notation: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



Normalverteilung

- Die Normalverteilung ist **wichtig** ! ! !
- Viele stetige Größen sind (annähernd) normalverteilt, z.B. Körpergröße
- Wir sehen später: Der Mittelwert von Zufallsvariablen mit (fast) beliebiger Verteilung ist (asymptotisch) normalverteilt

Chi-Quadrat-Verteilung

Definition 37

Eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{n/2-1} \exp(-x/2)$$

heißt *chi-Quadrat-verteilt* mit n Freiheitsgraden. Die Verteilung $\mathbb{P}_X$ heißt *Chi-Quadrat-Verteilung* (auch χ^2-Verteilung) mit n Freiheitsgraden.

Notation: $X \sim \chi^2(n)$.

- Γ bezeichnet die Gammafunktion. Für uns nur wichtig: $\Gamma(\frac{n}{2})$
- Es gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- Die χ^2-Verteilung wird später wichtig: Für unabhängig, normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt $X = X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$

Weitere Verteilungen

Es gibt noch andere stetige Verteilungen, die in bestimmten Anwendungsbereichen wichtig sind

- Gammaverteilung
- Betaverteilung
- Cauchy-Verteilung
- Gumbelverteilung
- ...

Diskrete Gleichverteilung

> Sei $X_n \sim \mathcal{U}_{\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\}}$ gleich verteilt auf den Zahlen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$.
> Dann gilt

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X_n = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 x \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$$

> Die rechte Seite ist der Erwartungswert der stetigen Gleichverteilung $\mathcal{U}_{[0,1]}$
> **Notation:** Wir schreiben oft $\int f(x)\mathrm{d}x$ statt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$

Erwartungswert

Definition 38

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X. Der Erwartungswert von X *existiert*, falls $\int |x| f_X(x) \mathrm{d}x < \infty$. In diesem Fall definieren wir den *Erwartungswert* von X als

$$\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x) \mathrm{d}x.$$

> Die meisten Aussagen zum Erwartungswert gelten auch für stetige Zufallsvariablen

> Die Varianz ist so definiert wie bisher: $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

> Insbesondere gelten die Rechenregeln für Zufallsvariablen X, Y und reelle Zahlen a, b:

1. $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$
2. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
3. $\mathbb{E}[b] = b$
4. $X \leq Y \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$

Erwartungswert

Es gilt ebenfalls analog eine Transformationsformel

Satz 17: (Transformationsformel für den Erwartungswert)

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung mit $\int |u(x)| f(x) \mathrm{d}x < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}[u(X)] = \int u(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

Beweis: Maßtheorie

Erwartungswert

Beispiel 93: (Gleichverteilung)

Sei $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, dann gilt $\mathbb{E}[X] = \int x \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Erwartungswert

Beispiel 94: (Normalverteilung)

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int (\sigma y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int y \exp\left(- \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}y + \mu \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{y^2}{2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu
\end{aligned}$$

Erwartungswert

Übung 50: (Exponentialverteilung)

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ, d.h.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

Varianz

Übung 51: (Gleichverteilung)

Sei $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Varianz von X.

Übersicht

Verteilung	Dichte	$\mathbb{E}[X]$	var(X)
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$	μ	σ^2
$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
χ_n^2	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{n/2-1}\exp(-x/2)$	n	$2n$

Transformationssatz

Satz 18: (Transformationssatz für Dichten)

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und Dichte f_X. Ist $J \subset \mathbb{R}$ ein weiteres offenes Intervall und $u : I \to J$ ein Diffeomorphismus*, so hat $Y = u(X)$ die Dichte

$$f_Y(y) = f_X(u^{-1}(y))|(u^{-1})'(y)|$$

für $y \in J$ und $f_Y(y) = 0$ für $y \in \mathbb{R} \setminus J$.

Beweis: Satz 8.10 in [Dehling and Haupt, 2006].

*u ist ein Diffeomorphismus, falls u bijektiv ist und u, u^{-1} stetig differenzierbar.

Normalverteilung

Beispiel 95: (Transformation der Normalverteilung)

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$,

$$Y = a \cdot X + b \sim \mathcal{N}(a \cdot \mu + b, a^2\sigma^2).$$

Beweis: Nach dem Transformationssatz für Dichten gilt:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{|a|} f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big) \\ &= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(\frac{\frac{y-b}{a} - \mu}{\sigma}\Big)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(\frac{y-(a\mu+b)}{a\sigma}\Big)^2\right) \end{aligned}$$

Transformationssatz

Übung 52

Sei $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = X^2$ und $Z = \sqrt{X}$.

Übung 53

Sei $X \sim Exp(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = e^X$.

Normalverteilung

- Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Das Integral $F_X(x)$ kann nicht analytisch gelöst werden
- Es gilt $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Die Verteilungsfunktion der *Standardnormalverteilung* wird mit $\Phi(x)$ bezeichnet
- Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ sind in Tabellen/ Formelsammlungen angegeben
- Daraus können wir die Verteilungsfunktion zu beliebigen normalverteilten Zufallsvariablen berechnen

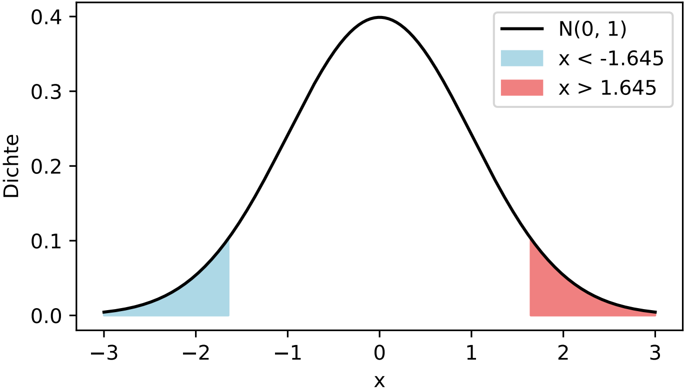
Tabelle der Standardnormalverteilung (Verteilungsfunktion)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169

Normalverteilung

Die Standardnormalverteilung ist symmetrisch:

$$f_Z(x) = f_Z(-x) \text{ und } \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$



Normalverteilung

Tabelle der Standardnormalverteilung (Verteilungsfunktion)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Normalverteilung

Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

> Was ist $\mathbb{P}(X \leq 0)$? $\rightarrow \mathbb{P}(X \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$
> Was ist $\mathbb{P}(X \leq 1)$? $\rightarrow \mathbb{P}(X \leq 1) = \Phi(1) \approx 0.8413$

Übung 54

Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten

> $X \sim \mathcal{N}(0,1)$: $\mathbb{P}(X \leq -1)$
> $Y \sim \mathcal{N}(1,4)$: $\mathbb{P}(Y \leq 3)$
> $Z \sim \mathcal{N}(2,2.25)$: $\mathbb{P}(Z+1 \geq 4.5)$

Normalverteilung

Übung 55

Es wird oft* angenommen, dass die Körpergröße in der Bevölkerung normalverteilt ist. Nehmen Sie im folgenden an, dass die Körpergröße normalverteilt ist mit $\mu = 173$ cm und $\sigma^2 = 100$cm².
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person...

- ...höchstens 1.83 m groß ist?
- ... mindestens 1.53 m groß ist?
- ... mindestens 1.43 m, höchstens aber 2.03 m groß ist?

---

*in Statistik-Vorlesungen

Quantilstransformation

- Eine Verteilungsfunktion F ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $[0, 1]$
- Wir können die "Umkehrfunktion" $F^{-1} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definieren

$$F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$

- **Achtung:** F muss nicht injektiv sein, F^{-1} ist i.A. nicht die Umkehrfunktion
- Wenn F streng monoton wachsend (und damit injektiv), ist F^{-1} die Umkehrfunktion
- F^{-1} heißt auch *Pseudoinverse* (auch *untere Quantilfunktion* oder *linke verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion*)

Quantilstransformation

- Sei
$$F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$
die Pseudoinverse einer Verteilungsfunktion F
- Es gilt $F^{-1}(p) \leq x \iff p \leq F(x)$
- Sei $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ und $Y := F^{-1}(U)$, dann gilt
$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq y) = \mathbb{P}(U \leq F(y)) = F(y)$$
- Y besitzt die Verteilung F
- **Zufallszahlengenerator:** Wenn wir gleichverteilte Zufallsvariablen simulieren können, können wir auch beliebige Zufallsvariablen simulieren

Quantil

Definition 39

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung F. Für $p \in (0,1)$, ist q_p ein p-Quantil von X bzw. von F, falls gilt:

- $\mathbb{P}(X \leq q_p) \geq p$ und $\mathbb{P}(q_p \leq X) \geq 1 - p$ oder (äquivalent)
- $F(q_p) \geq p$ und $\lim_{x \nearrow q_p} F(x) \leq p$.

- Im Allgemeinen ist das p-Quantil nicht eindeutig
- Falls F streng monoton wachsend und stetig ist, ist q_p eindeutig
- Falls q_p nicht eindeutig ist, können wir es "eindeutig" machen, indem wir das kleinste Quantil betrachten

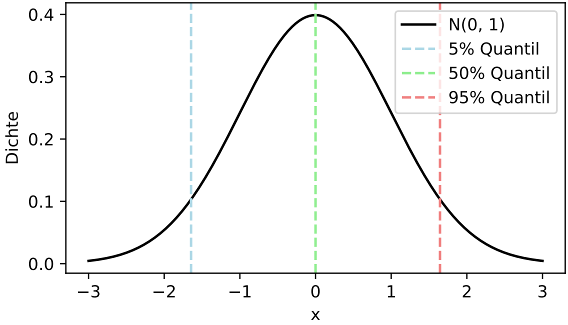
$$F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$

Quantil

Manche Quantile haben eigene Namen

- $>$ Das 50%-Quantil wird als *Median* bezeichnet.
- $>$ 25%- und 75%-Quantil heißen *unteres* bzw. *oberes Quartil*.

Normalverteilung:



Normalverteilung

Übung 56

Nehmen Sie wieder an, dass die Körpergröße in der Bevölkerung normalverteilt ist mit $\mu = 173$ cm und $\sigma^2 = 100$cm².
Bestimmen Sie:

- Den Median
- Das untere und obere Quartil
- Das 5% und das 95% Quantil

Literatur I

Bundesministerium für Gesundheit (2024).
Infektionsradar.
https://infektionsradar.gesund.bund.de/de/covid/inzidenz.
Abgerufen: 2024-10-15.

Dehling, H. and Haupt, B. (2006).
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.
Springer-Verlag.

Literatur II

Dinnes, J., Sharma, P., Berhane, S., van Wyk, S., Nyaaba, N., Domen, J., Taylor, M., Cunningham, J., Davenport, C., Dittrich, S., Emperador, D., Hooft, L., Leeflang, M., McInnes, M., Spijker, R., Verbakel, J., Takwoingi, Y., Taylor-Phillips, S., Van den Bruel, A., and Deeks, J. (2022).
Rapid, point-of-care antigen tests for diagnosis of sars-cov-2 infection.
Cochrane Database of Systematic Reviews, (7).

Henze, N. et al. (1997).
Stochastik für Einsteiger, volume 4.
Springer.