数值分析第四次上机练习实验报告

——函数逼近与数据拟合

力 4　杨昊光　2014011619

一、问题描述

设$f(x)=x^2\ln(2+x), x\in[-1,1]$，试求出权函数$\rho(x)=1$的最佳平方逼近三次多项式。另外请用 Chebyshev 截断级数法和插值余项极小化的方法分别给出近似最佳一致逼近三次多项式。并画图比较。

二、方法描述

1. 用 Legendre 多项式做权函数为$\rho(x)=1$的最佳平方逼近

在区间[-1,1]上用权函数$\rho(x)\equiv 1$定义出的内积下正交多项式$P_n(x)$（$n=0,1,\dots$）称为 Legendre 多项式。其表达式为：

$$\begin{cases} P_0(x)=1, \\ P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n] \ , n\geq 1. \end{cases}$$

其正交性表示为：$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} 0 \ , n\neq m, \\ \frac{2}{2n+1} \ , n=m. \end{cases}$

同时具有递推关系：$P_{n+1}(x)=\frac{(2n+1)}{(n+1)}xP_n(x)-\frac{n}{(n+1)}P_{n-1}(x) \ , n=0,1,2,\dots,P_{-1}=0.$

取函数空间$\Phi=\mathrm{span}\{P_0,P_1,P_2,P_3\}, f\in C[-1,1]$，故$f$在 Φ 中的最佳平方逼近为：

$$s_3^*(x)=\sum_{j=0}^{3}\left(\sqrt{\frac{2j+1}{2}}a_j^*P_j(x)\right) \ ,\text{其中} a_j^*=\sqrt{\frac{2j+1}{2}}\int_{-1}^{1}f(x)P_j(x)\mathrm{d}x.$$

提出标准化因子$\sqrt{\frac{2j+1}{2}}$，得$s_3^*(x)=\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{2j+1}{2}P_j(x)\cdot\int_{-1}^{1}f(x)P_j(x)\mathrm{d}x\right).$

2. Chebyshev 截断级数法近似最佳三次一致逼近

取权函数为$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , x\in[-1,1]$，则关于$\rho(x)$的正交多项式序列每一项 $T_n(x)$为 Chebyshev 多项式。其表达式为：$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \ , n\geq 0.$ 其正交性表示为：

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\begin{cases} 0 \ , n\neq m, \\ \pi/2 \ , n=m\neq 0, \\ \pi \ , n=m=0. \end{cases}$$

同时具有递推关系：$T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), n=1,2,\dots$

由$f\in C[-1,1]$，可以在该区间上展开为 Chebyshev 级数形式的广义 Fourier 级数：

$$f(x)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}c_kT_k(x) \ , c_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x, k=0,1,\dots$$

取其前 4 项到 k=3 即为f的截断 Chebyshev 级数近似。

在计算c_k时，为使计算简化，作换元$x=\cos\theta$，得：$c_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta.$

3. 插值余项极小化方法近似最佳三次一致逼近

   解$T_4(x)=8x^4-8x^2+1=0$，得到 4 个零点用于做三次 Lagrange 插值，即为余项极小化的插值情况。由正交多项式的性质知，[-1,1]上的$T_4(x)$在[-1,1]上恰有 4 个单根。设单根为x_i，有：$x_i=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}}$.

   取$L_3(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)l_i(x)$，其中$l_i(x)=\prod_{j=0,j\neq i}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}, i=0,1,2,3$，即为所求逼近函数。

三、方案设计

由于需要计算积分和各式结构和系数，本次上机实验采用了 Matlab 的符号运算功能。首先设自变量为 x，输入函数表达式 Function。然后求解 Legendre 多项式法、Chebyshev 级数截断法和插值余项极小化法的逼近函数表达式。

Legendre 多项式法：分别构造多项式列阵 P(n)和系数列阵 a(n)，然后用 dot 函数用两列阵构造逼近函数 s_L。为便于计算采用递推式得到 P(n)。

Chebyshev 截断级数法：与上面方法相近构造 T(n)和 c(n)，同时将余项极小化法中需要用到的 T(5)也一并算出，再作点积得到逼近函数 s_C。为降低计算机运算量，在构造 T(n)时采用了递推式，而在计算 c(n)的积分时用到了换元后的三角函数表达式，并将积分结果保存为双精度类型（16 位有效数字）。

余项极小化方法：用 solve 函数直接解得 T(5)=0 的四个根，然后用 Lagrange 插值法的典型步骤，构建 l(n)的因式矩阵，计算 l(n)，再得到三次插值多项式 L_em。

程序的最后一部分是代入 x 的数值计算并作误差分析，将结果存为一维数组用于画图。

四、计算结果及其分析

在采用了符号运算功能后，各逼近函数的表达式也一并求出。

Legendre 多项式法：

$$\big(P_n(x)\big)=\begin{pmatrix}1.0\\ x\\ 1.5x^2-0.5\\ 2.5x^3-1.5x\end{pmatrix},\big(a_n\big)=\begin{pmatrix}0.203473988557720\\ 0.320305876241883\\ 0.381969173141415\\ 0.221703189548609\end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}s_3^*(x)=0.5542579738715235754587805935823&8x^3\\ &+\ 0.57295375971212194561689162972623x^2\\ &-\ 0.01224890808103115937352281383863 7x\\ &+\ 0.012489401987012777442792867697269\end{aligned}$$

Chebyshev 截断级数法：

$$\big(T_n(x)\big)=\begin{pmatrix}1.0\\ x\\ 2.0x^2-1.0\\ 4.0x^3-3.0x\end{pmatrix},\big(c_n\big)=\begin{pmatrix}0.29395616575131299313135383124876\\ 0.40513010305782415922354766461456\\ 0.27536262630233134135092423336294\\ 0.14052534684830611754208261369897\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}s_3^*(x)=0.&56210138739322447016833045479589x^3\\ &+\ 0.55072525260466268270184846672588x^2\\ &-\ 0.016445937487094193402700176482 35x\\ &+\ 0.018593539448981651780429597885816\end{aligned}$$

$$\text{余项极小化方法：}\left(f(x_n)\right)=\begin{pmatrix}0.12714895088869028170462906727349\\0.91578711333243173663777587344251\\0.070406892731900304139143295674095\\0.062618737301708683268461648157542\end{pmatrix}$$

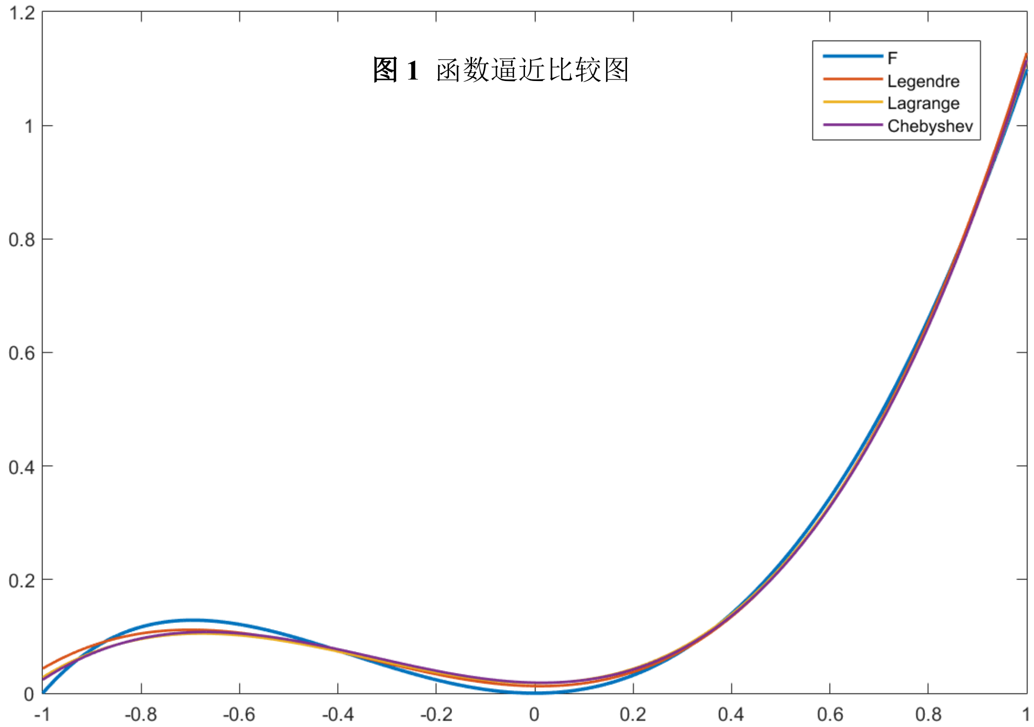
$$\left(l_n(x)\right)=\begin{pmatrix}-1.8477590650225735122563663787936x^3-0.70710678118654752440084436210485x^2+1.5771610149494750200565047761104x+0.60355339059327376220042218105242\\0.7653668647301795434569199680608x^3+0.70710678118654752440084436210485x^2-0.1120853822919912795285983813472x-0.10355339059327376220042218105242\\1.8477590650225735122563663787936x^3-0.70710678118654752440084436210485x^2-1.5771610149494750200565047761104x+0.60355339059327376220042218105242\\-0.7653668647301795434569199680608x^3+0.70710678118654752440084436210485x^2+0.1120853822919912795285983813472x-0.10355339059327376220042218105242\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}s_3^*(x)=0.54814115272232662641874512461585x^3\\+\ 0.55214433504884428228375357021528x^2\\-\ 0.0061363415539559441349688469384008x\\+\ 0.017918256039260610295625686029271\end{aligned}$$

选择$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-s_3^*(x)\right)^2\mathrm{d}x$作为逼近误差的参考标准，各方法各项系数及逼近误差如下表所示：

逼近方法	Legendre 多项式	Chebyshev 截断级数	插值余项极小化
x^3系数	0.554257973871524	0.562101387393224	0.548141152722327
x^2系数	0.572953759712122	0.550725252604663	0.552144335048844
x系数	−0.0122489080810312	−0.0164459374870942	−0.00613634155395594
x^0系数	0.0124894019870128	0.0185935394489817	0.0179182560392606
逼近误差	2.738823858144909e-04	3.681165381775958e-04	3.610992630377604e-04

各逼近函数及题目所给函数的图像及误差图像画出如下：



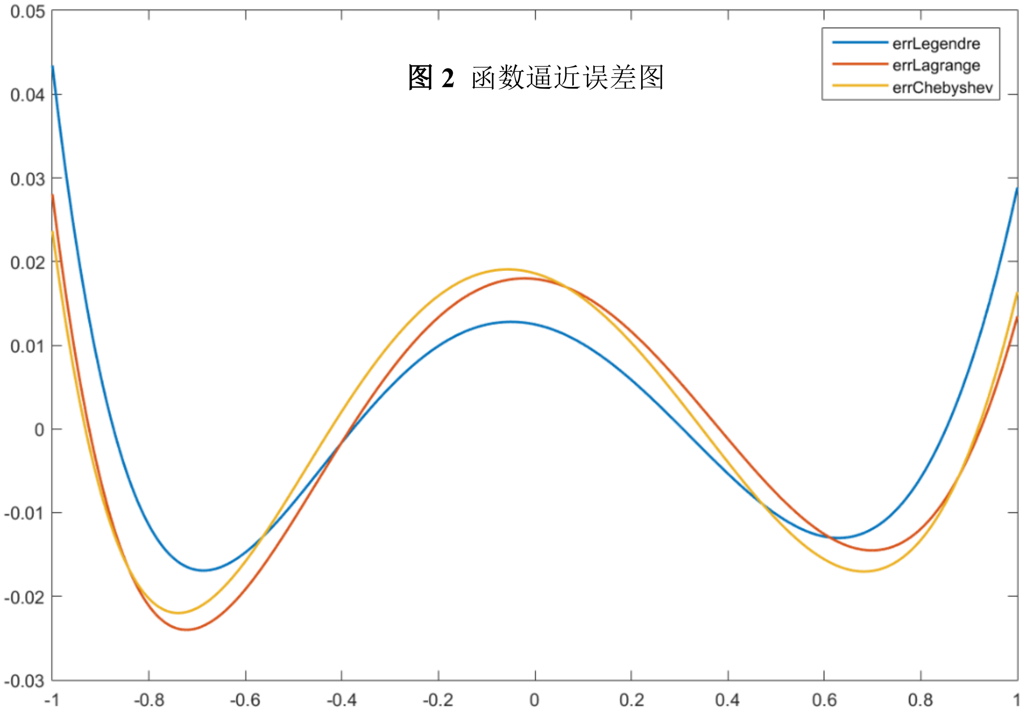


图 2 函数逼近误差图

由图可见，Legendre 多项式的最佳平方逼近相对于近似最佳一致逼近方法，在多项式次数相同的情况下，精度比后两者稍高。对于近似最佳一致逼近，在本例中两者表现相当，且插值余项极小化有极其微弱的优势。三者的误差图上，都是正负偏差点相继出现。对于插值余项极小化的方法，可以发现其没有 Runge 现象出现，原因是通过$T_4(x)=0$对插值分划点的选取在很大程度上避免了边缘发散现象的出现。这时多项式插值的优势才真正显现出来。

五、结论

通过此次上机实验，我们发现函数逼近作为函数插值对个别点上准确性的弱化和对整体准确性的强化，在对于不精确数据的处理中具有巨大作用，即是对离散数据的拟合或对连续变化量的近似。函数逼近的目的在使多项式逼近函数和给定函数在函数空间内的某种范数最小，如要求∞-范数最小的最佳一致逼近，以及要求 2-范数最小的最佳平方逼近。然而在实际工程应用中，最佳一致逼近往往难以运算，故有近似最佳一致逼近和最佳平方逼近的方法来达到类似的效果。最佳平方逼近包括利用在各种权函数下正交的函数系来构造多项式的方法，如利用 Legender 多项式、Hermite 多项式和 Laguerre 多项式等。近似最佳一致逼近的常用方法包括应用 Chebyshev 多项式的截断级数法和余项极小化方法（Chebyshev 多项式零点插值）。周期函数可以用 Fourier 级数来逼近，非周期函数逼近的思想也类似于 Fourier 级数展开的思想。

另外此次上机实验也让我熟悉了 Matlab 进行符号运算的编程方法，令我受益匪浅。