

# 桥梁大作业报告

组长：贺琪

组员：陈煜 刘畅武 杨昊光 朱子霖

2016 年 12 月 25 日



# 目录

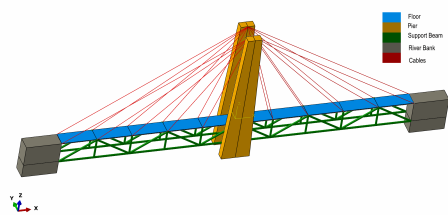
0.1	总述 . . . . .	5
0.1.1	项目描述 . . . . .	5
0.1.2	Abaqus结果 . . . . .	7
0.2	桥梁功能实现方案 . . . . .	7
0.2.1	前处理 . . . . .	7
0.2.2	SPR . . . . .	7
0.2.3	后处理 . . . . .	8
0.2.4	8H . . . . .	8
0.2.5	Beam . . . . .	11
0.2.6	Shell . . . . .	15
0.2.7	半带宽优化 . . . . .	15
0.2.8	稀疏存储求解器 . . . . .	15
0.3	其他单元 . . . . .	15
0.3.1	3T . . . . .	15
0.3.2	4Q . . . . .	15
0.3.3	6T . . . . .	15
0.3.4	8Q . . . . .	15
0.3.5	9Q . . . . .	15
0.3.6	4T . . . . .	15
0.3.7	铁木辛柯梁 . . . . .	15
0.3.8	Plate . . . . .	15
0.3.9	无限单元 . . . . .	15
0.3.10	超级单元 . . . . .	15
0.3.11	过渡单元 . . . . .	15
0.4	高级功能 . . . . .	15

0.4.1	弹塑性杆分析 . . . . .	15
0.4.2	模态分析 . . . . .	19
0.4.3	动力学响应分析 . . . . .	19

0.1 总述

0.1.1 项目描述

桥模型由桥墩（pier），桥面（floor）,支撑梁（support beam），河堤（river bank）和钢缆（cables）五部分组成，其中桥墩和河堤用实体单元建模，桥面用板单元建模，支撑梁用梁单元建模，钢缆用杆单元建模，如图1所示。

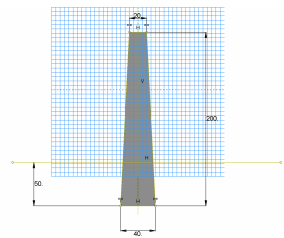


桥墩：

桥墩在XZ方向为左右对称梯形，如图2所示，梯形高200，上底为20，下底40，在y方向上厚度为10。桥面位于距桥墩底50处。两个桥墩顶面内侧中点为所有钢缆的与桥墩的连接点。（参照图1）

采用实体单元建模

材料	: Concrete
弹性模量	: 25e9
泊松比	: 0.3
密度	: 2320



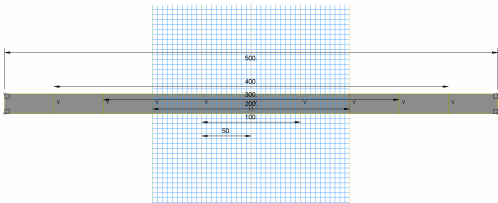
桥面：

桥面位于z=0的平面内，如图3所示，为长方形，长为500，宽为20，厚度为1。在桥面上下边对称地布置钢缆连接点，每个钢缆连接点相距50，共

计 $2 \times 2 \times 5 = 20$ 个钢缆连接点。每根钢缆另一端连接桥墩顶面内侧中点。（参照图1）

采用板单元建模

材料 : Concrete  
弹性模量 : 25e9  
泊松比 : 0.3  
密度 : 2320



河堤:

河堤为 $50 \times 50 \times 20$ 的立方体，如图1所示，变长为20的一边与桥面相铰接，另外在距离底面20处与支撑梁相铰接。（铰接指对应结点平动自由度相同，转动自由度自由）

采用实体单元建模。

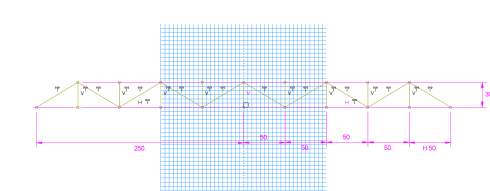
材料 : Granite  
弹性模量 : 60e9  
泊松比 : 0.27  
密度 : 2770

支撑梁:

支撑梁共有两组，分别位于桥面两侧下方，其结构左右对称，如图4所示。支撑梁上部每个结点与桥面相铰接，两组共计 $2 \times 9 = 18$ 个结点。两端结点与河堤相铰接，共计 $2 \times 2 = 4$ 个结点。

采用梁单元建模，梁截面为正方形筒，边长为2，厚度为0.1。

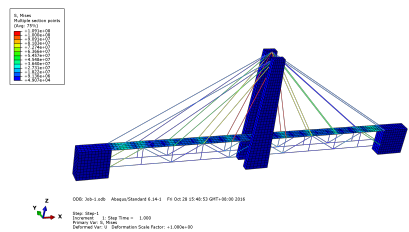
材料 : Aluminum  
弹性模量 : 70e9  
泊松比 : 0.346  
密度 : 2710



钢缆：  
连接桥面与桥墩，共计 $2 \times 2 \times 5 = 20$ 根。每根截面积为0.25。  
采用杆单元建模

- 材料 : Steel
- 弹性模量 : 117e9
- 泊松比 : 0.266
- 密度 : 7860

0.1.2 Abaqus结果



0.2 桥梁功能实现方案

0.2.1 前处理

0.2.2 SPR

采用SPR方法进行节点应力恢复。对于一个内部节点，若与8个8H单元相连，则有 $n = 8 \times 8 = 64$ 个高斯点用于应力恢复；对于一个边界面上的节点，则与4个单元相连，有32个高斯点用于应力恢复；同理，对于边界棱上的节点有16个，边界顶点上的节点有8个高斯点。为防止过拟合，对于边界面上的节点和内部节点采用完备二阶多项式进行最小二乘逼近，对于边界

棱和边界顶点上的节点采用完备一阶多项式进行最小二乘逼近。以三维单元为例：

- 对二阶逼近：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1 y_1 & y_1 z_1 & z_1 x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2 y_2 & y_2 z_2 & z_2 x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & z_n & x_n y_n & y_n z_n & z_n x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & xy & yz & zx \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{S}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^{(1)} & \sigma_{ij}^{(2)} & \cdots & \sigma_{ij}^{(n)} \end{bmatrix}^T$$

最小二乘逼近为解系数矩阵 $\mathbf{C}_{ij}$ ，使得： $\mathbf{A}\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{S}_{ij}$ ，即 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}^T \mathbf{S}_{ij}$ 。最后解 $\mathbf{X}^{(k)} \mathbf{C}_{ij} = \mathbf{S}_{ij}^{(k)}$ 为第 $k$ 个节点上的应力。

- 对一阶逼近：

同理，但只取 $1, x, y, z$ 的项使用。

- 当连接到一个节点的所有单元具有的高斯点都不足以满足系数要求，或单元采用的为直接刚度法时，转而采用节点平均法恢复应力。这种情况常见于梁、杆、3T单元等。

### 0.2.3 后处理

### 0.2.4 8H

- 算法分析
- 位移计算

给出一个8H单元，其节点坐标矩阵为 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix}$ ，每条边的

方向上采用2点高斯积分，共8个高斯点，并采用三线性函数作为形函



数。作前处理时，将坐标变换到 $\xi, \eta, \zeta$ 下求形函数的梯度，再对8个高斯点作加权求和，得到单元刚度阵：

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta), \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix}, \quad N_i = N_i \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$GN = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \nabla_s \mathbf{N} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} B_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & B_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & B_{iz} \\ B_{iy} & B_{ix} & 0 \\ 0 & B_{iz} & B_{iy} \\ B_{iz} & 0 & B_{ix} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$\mathbf{B}$ 矩阵的各量由单元Jacobian矩阵和形函数对各坐标的导数得到：

$$\mathbf{J}^{-1} \cdot GN = \begin{bmatrix} B_{1x} & B_{2x} & \dots & B_{8x} \\ B_{1y} & B_{2y} & \dots & B_{8y} \\ B_{1z} & B_{2z} & \dots & B_{8z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = GN \cdot \mathbf{X}^T$$

$\mathbf{D}$ 矩阵由本构关系得到，在此认为材料是各向同性的：

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & & & \\ & & & 2G & & \\ & & & & 2G & \\ & & & & & 2G \end{bmatrix}, \quad \text{s.t. } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{where } \boldsymbol{\varepsilon} =$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 w_i w_j w_k \mathbf{B}^T(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

生成单元刚度阵通过Location Matrix进行组装，得到全局的刚度阵，再解 $\mathbf{K}d = f$ 。

- 算法实现

位移计算部分按照变换将坐标变换到 $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ 后即可得到形函数和各导数。取得高斯点位置，代入 $\mathbf{D}$ 矩阵即可以产生单元刚度阵，调用COLHT和ADDBAN生成总刚度矩阵并求解。

SPR部分，在前处理时保存单元连接矩阵到临时文件中，在后处理中调取，计算每个节点连接的单元数量和编号，以及用于恢复节点位置的信息，生成为NodeRelationFlag数组。对每个节点，根据该数组选取逼近的阶次，计算 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{S}$ 矩阵，并传入最小二乘子程序LeastSquare中，得到系数数组，并代入节点位置信息，得到恢复的节点应力。

- 算法测试

Patch Test 选取了7单元模型和8单元模型进行测试，测试形状为单位立方体， $E = 1000$ ， $\nu = 0.25$ ，通过内部确定1个或8个点来将其分划为8个或7个单元。施加线性位移场：

$$u_x = 0.001x, u_y = 0.002y, u_z = 0.003z$$

得到各点需要施加的外力，并采用最少的边界条件对单元进行测试。测试结果如data/8H 中各输入输出文件所示。

测试结果表明，对于线性场，输出误差在机器 $\varepsilon$ 量级，单元设计能精确重构线性位移场，为一阶收敛的。

对SPR的测试，其输出结果误差也在机器 $\varepsilon$ 量级，因而从算法设计的角度来说合理的。

### 0.2.5 Beam

#### Basic principles

For a beam element, the equation for a single beam element is quite simple, for the reason that the calculation of the element stiffness matrix doesn't require numerical integral. It can be done manually. The stiffness matrix for a beam element is as follow.

$$K^{(e)} = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} \frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_z}{l} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & & & & & & & \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l} & & & & & & \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & & & \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_z}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_z}{l} & & \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} \end{array} \right] \quad \text{symmetry}$$

$$F^{(e)} = \{F_{Ni} \quad F_{Qiy} \quad F_{Qiz} \quad M_{ix} \quad M_{iy} \quad M_{iz} \quad F_{Nj} \quad F_{Qjy} \quad F_{Qjz} \quad M_{jx} \quad M_{jy} \quad M_{jz}\}^T$$

$$d^{(e)} = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{ix} \quad \theta_{iy} \quad \theta_{iz} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{jx} \quad \theta_{jy} \quad \theta_{jz}\}^T$$

In all, we can get the equation for the element itself.

$$K^{(e)} d^{(e)} = F^{(e)} \quad (1)$$

The process of assembly and solution of the linear equation is just the same as the former elements.

**ATTENTION** The stiffness matrix for beams point to arbitrary directions needs the translation matrix to do the coordinates translation.

$$\mathbf{K}^{(e)'} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T} \quad (2)$$

### Programming procedures

The most difficult part for the programming is the generation of the ID array without interfering with other elements. The structure of the STAP90 program is very terrible for this kind of modification, given the reason that the original program read the element controlling messages after the nodes, making it complex for the dealt for nodes. The only choice left for me is whether changing the whole blueprint for the entire STAP 90 program or just writing the individual input or output subroutine for the beam. In terms of the deadline requirements, I choose the lateral, leaving the former mission to the following weeks. As you can see in the source files, the input and output subroutine for the beam is in the 'BEAM.f90'.

### Input file format

For controlling messages of nodals:

列。	变量。	意义。
1-5。	N。	节点号 ( $1 \leq N \leq \text{NUMNP}$ )。
6-10。	ID(1,N)。	x-平动方向边界条件代码。 0-自由; 1-固定。
11-15。	ID(2,N)。	y-平动方向边界条件代码。 0-自由; 1-固定。
16-20。	ID(3,N)。	z-平动方向边界条件代码。 0-自由; 1-固定。
21-25。	ID(4,N)。	x-转动方向 (转角) 边界条件代码。 0-自由; 1-固定。
26-30。	ID(5,N)。	y-转动方向 (转角) 边界条件代码。 0-自由; 1-固定。
31-35。	ID(6,N)。	z-转动方向 (转角) 边界条件代码。 0-自由; 1-固定。
36-45。	X(N)。	x-坐标。
46-55。	Y(N)。	y-坐标。
56-65。	Z(N)。	z-坐标。

For information about the loads:

列。	变量。	意义。
1-5。	NOD。	集中载荷作用的节点号 ( $1 \leq \text{NOD} \leq \text{NUMNP}$ )。
6-10。	IDIRN。	载荷作用方向 (1-x 方向力, 2-y 方向力, 3-z 方向力, 4-x 方向力矩, 5-y 方向力矩, 6-z 方向力矩)。
11-20。	FLOAD。	载荷值。

For information about the materials:

列。	变量。	意义。
1-5。	N。	材料/截面性质组号 ( $1 \leq N \leq \text{NPAR}(3)$ )。
6-15。	E(N)。	杨氏模量。
16-25。	G(N)。	剪切模量。
26-35。	AREA(N)。	截面面积。
36-45。	$I_x(N)$ 。	对局部 x 轴截面二阶惯性矩 (形心主轴系)。
46-55。	$I_y(N)$ 。	对局部 y 轴截面二阶惯性矩 (形心主轴系)。
56-65。	$I_z(N)$ 。	对局部 z 轴截面二阶惯性矩 (形心主轴系)。
66-75。	$J_x(N)$ 。	对局部 x 轴的截面极矩 (形心主轴系)。
76-85。	$J_y(N)$ 。	对局部 y 轴的截面极矩 (形心主轴系)。
86-95。	$J_z(N)$ 。	对局部 z 轴的截面极矩 (形心主轴系)。

For information about the element connectivity:

列。	变量。	意义。
1-5。	M。	单元号 ( $1 \leq M \leq \text{NPAR}(2)$ )。
6-10。	II。	单元左端节点号 ( $1 \leq \text{II} \leq \text{NUMNP}$ )。
11-15。	JJ。	单元右端节点号 ( $1 \leq \text{JJ} \leq \text{NUMNP}$ )。
16-20。	MTYP。	本单元的材料/截面性质组号。
21-25。	KG。	单元自动生成增量。

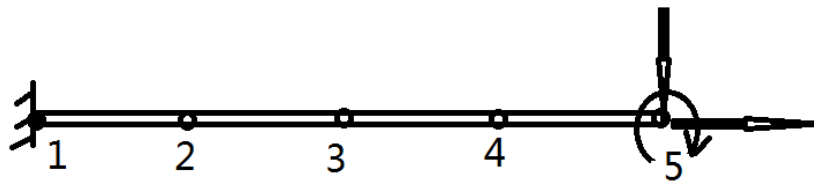
### The rate of convergence

For the beam, the FEM guarantees the continuity and the completeness. The completeness will be verified in the patchtest. For continuity, the method for the approximation of the function is 3-order Hermite interpolation, maintaining the continuity for both the displacement and the angle. It is obvious that the FEM will give the exact answer at nodes if we give concentration forces or momentum at the nodes. For the distribution forces, the FEM will not give the exact results. The reason for this is that the order of the moment is at least 2 for the distribution forces. The results will

be better and will converge to the exact solution with the mesh refined to infinite decimal. The convergence rate for the displacement is at the order of 2, while the rate for the energy norm is at the order of 1.

### Patchtest and the results

I use an example for the patchtest. The situation of the load and the structure is as follow.



The input files and the results for the patchtest in the folder for the beam.

**0.2.6 Shell****0.2.7 半带宽优化****0.2.8 稀疏存储求解器****0.3 其他单元****0.3.1 3T****0.3.2 4Q****0.3.3 6T****0.3.4 8Q****0.3.5 9Q****0.3.6 4T****0.3.7 铁木辛柯梁****0.3.8 Plate****0.3.9 无限单元****0.3.10 超级单元****0.3.11 过渡单元****0.4 高级功能****0.4.1 弹塑性杆分析****基本原理**

弹塑性杆是一种最简单的材料非线性问题。在这个功能中，我使用切线刚度法来进行求解。我把杆的塑性问题简化成弹性段和塑形段，其中每段近似成线性函数，并使用相应的弹性模量和塑形模量来表示两端线段的斜率。切线刚度法的基本思想就是：假使载荷为 $P_A$ 时，相应的位移为 $u_A$ ，切

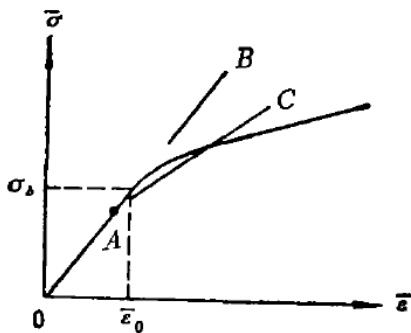
线刚度为 $K_A$ ，那么对于下一次载荷增量产生的位移是，

$$K_A \Delta u_{AB} = \Delta f_{AB}$$

$$u_B = u_A + \Delta u_{AB}$$

我们在使用切线刚度法进行计算时，都是从A点的应力状态出发，最后就得到载荷B情况下的各项参数，本方法的特点是，对于一次载荷分量，只需要求解一次即可。示意图如下。

切线刚度法示意图

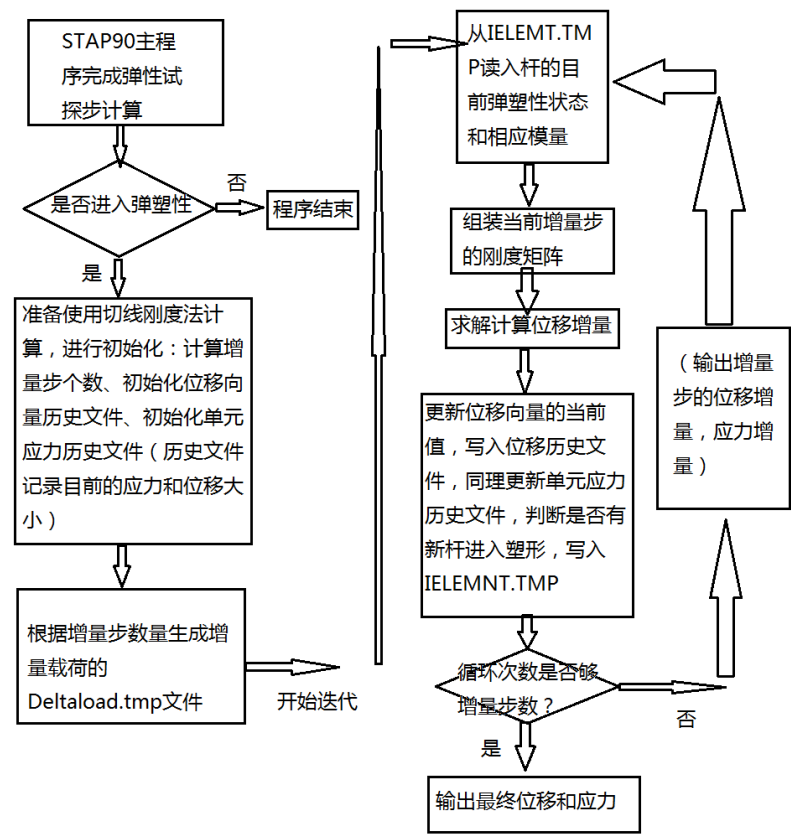


该方法参考了1982年固体力学学报《弹塑性有限元一些解法的比较》，由中科院力学研究所吴永礼先生著。

### 编程思路

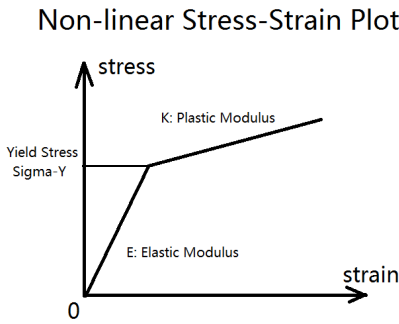
首先进行弹性试探步的计算，确定是否需要弹塑性分析。若进行弹塑性分析，则使用切线刚度法求解。首先把载荷分成很多细份，从零开始逐渐加载。使用切线刚度，算出每一步的位移增量和应力增量，计算每步加载后的位移和应力，同时判断是否有杆进入弹塑性，若有弹塑性变化，则下一次组装刚度阵时要更新。这种增量步的方法把一个非线性的问题线性化，实质上是微分的思路——把复杂的函数简单化，理论上，这种求解方式可以进行任何材料非线性问题的计算。在这个方法中，每一步更新需要前一步的历史位移和应力信息，这些都记录在临时文件里，每一步均更新。整个程序的流程图如下。





输入和输出结果

在一根杆上加了100000的力，材料的截面性质如下，各输入和输出如下，结果符合理论值。





**0.4.2 模态分析**

**0.4.3 动力学响应分析**