平面壳单元的编写

陈煜 2014011629

December 4, 2016

Part I 程序思路

有弹性力学中我们有公式：

由平板弯曲造成应变：

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx1} \\ \tau_{yy1} \\ \tau_{xy1} \end{bmatrix} = -z \times \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix}$$

由薄膜应力造成的应变：

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx2} \\ \tau_{yy2} \\ \tau_{xy2} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

对其进行虚功原理分析，得到方程：

$$\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx1} & \varepsilon_{yy1} & \varepsilon_{xy1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx1} \\ \tau_{yy1} \\ \tau_{xy1} \end{bmatrix} dzdA + k \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dzdA +$$

$$\int_A \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx2} & \varepsilon_{yy2} & \varepsilon_{xy2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{xx2} \\ \tau_{yy2} \\ \tau_{xy2} \end{bmatrix} dzdA$$

$= \int_A wpdA$

(注：由于选取的是中性面，平板弯曲和薄膜应力在交叉项积分为0，因而可以直接解耦)

所以类比之前的刚度矩阵构造，我们可以构造单元刚度矩阵为：

$K = \int_A (B_\kappa^T C_b B_\kappa + B_\gamma^T C_s B_\gamma + B_p^T C_p B_p) dA$

此时便按照原STAP90程序计算结果即可

本题使用的是八节点单元，坐标变化为四节点的线性变换，即为亚参元。

Part II
收敛性分析

本程序使用八节点单元

平板弯曲部分:

由已知的形函数结构知道，元素中的场可以写成如下形式:

$w^e = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2$

而单元平板弯曲常应力场中位移表示为:

$\underline{u^e = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2}$

明显w^e可精确重构u^e

薄膜应力部分:

由已知的形函数结构知道，元素中的场可以写成如下形式:

$w^e = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2$

而单元薄膜应力常应力场中位移表示为:

$\underline{u^e = b_1 + b_2x + b_3y}$

明显w^e可精确重构u^e

Part III
分片实验

平板弯曲部分:（用悬臂梁精确解模拟）

对于悬臂梁问题，我们有已知的精确解:

$w = \frac{Mx^2}{2EI}$

$\beta = \frac{Mx}{EI}$

我们可以给出厚度为0.1:

$I = 2\int_{-0.05}^{0.05} z^2dz = 1/6000$

因此我们有:

$w = 2.4 \times 10^{-5}x^2 = 0.384E - 01$

$\beta_x = 4.8 \times 10^{-5}x = 0.192E - 02$

而在STAP90算出结果如下:

```
D I S P L A C E M E N T S

 NODE           X-DISPLACEMENT     Y-DISPLACEMENT     Z-DISPLACEMENT
   1             0.00000E+00        0.00000E+00        0.00000E+00
   2             0.38400E-01        0.19200E-02        0.00000E+00
   3             0.38400E-01        0.19200E-02        0.00000E+00
   4             0.00000E+00        0.00000E+00        0.00000E+00
   5             0.96000E-02        0.96000E-03        0.00000E+00
   6             0.38400E-01        0.19200E-02        0.00000E+00
   7             0.96000E-02        0.96000E-03        0.00000E+00
   8             0.00000E+00        0.00000E+00        0.00000E+00
```

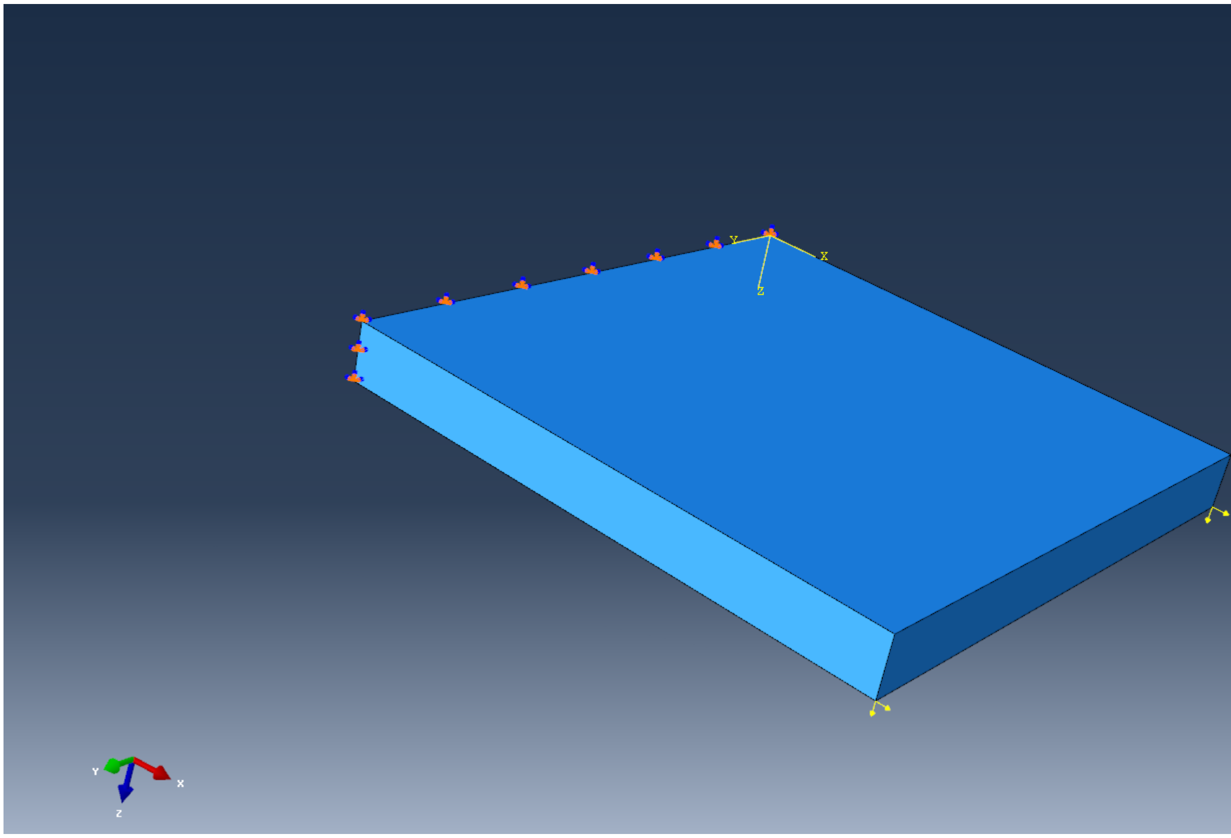
可以得到精确解

薄膜应力部分:（用平面应力精确解模拟）

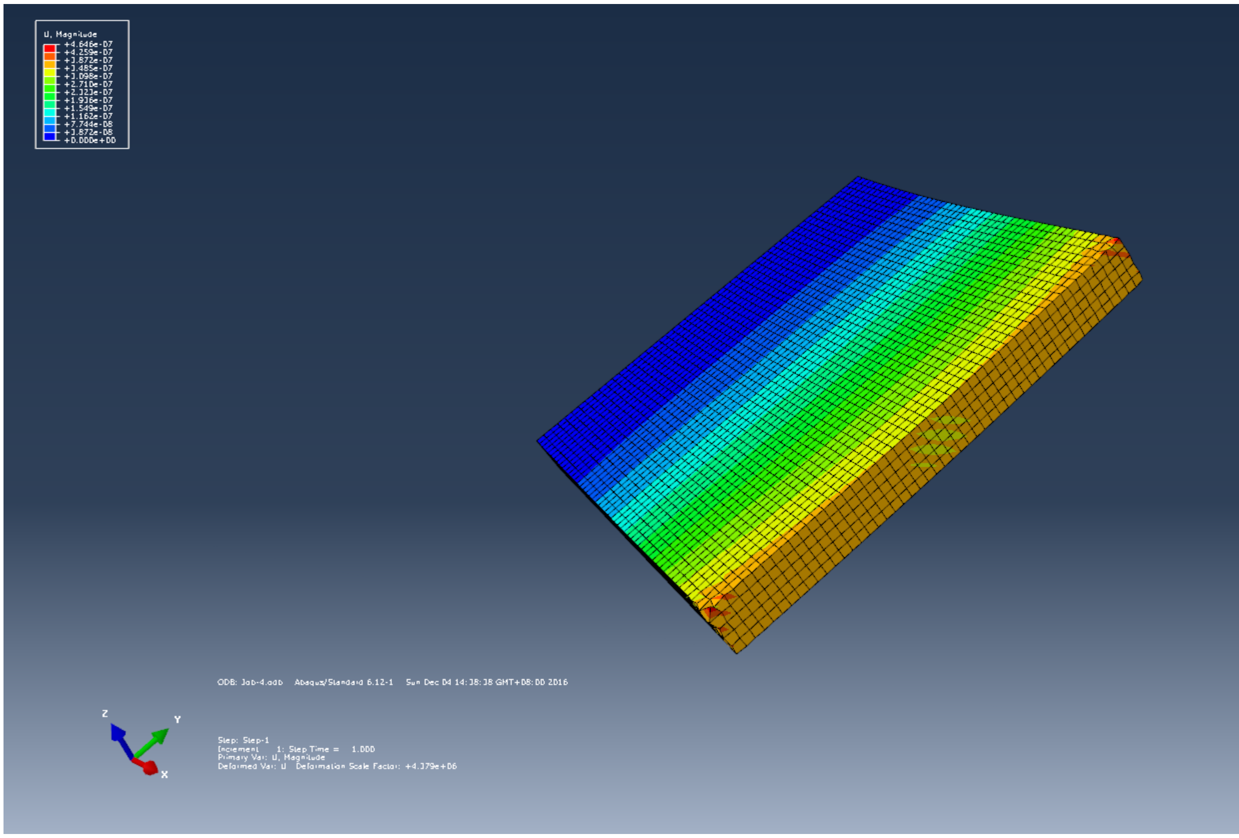
与之前平面应力部分完全一样，因此此处忽略

Part IV
实例验证

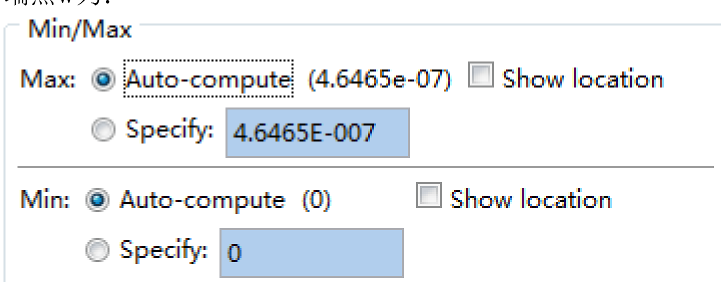
算一个如下实例:



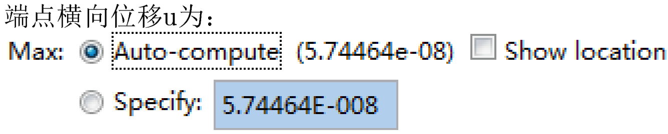
即固定一侧，另一侧端点施加垂直中性面及平行于X轴的平面应力
算例结果如下：



端点w为：



端点横向位移u为：



通过STAP90壳单元计算得：

D I S P L A C E M E N T S

NODE	W	BETA_X	BETA_Y	U	V
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	0.4347E-06	0.4099E-07	0.0000E+00	0.2120E-08	0.6787E-09
3	0.4347E-06	0.4099E-07	0.0000E+00	0.2120E-08	-0.6787E-09
4	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
5	0.1150E-06	0.2199E-07	0.0000E+00	0.1009E-08	0.1174E-09
6	0.4339E-06	0.4093E-07	-0.6617E-23	0.1160E-08	-0.7238E-24
7	0.1150E-06	0.2199E-07	0.0000E+00	0.1009E-08	-0.1174E-09
8	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00

可见十分接近算例的abaqus解