线性代数第七次习题课

秦昊隽 PB20020661

数学科学学院

2023 年 4 月 21 日

1 秩

2 Sylvester

3 初等变换与秩

4 一个重要现象

5 满秩分解定理

6 来自申伊埖老师讲义

秩的定义

定义

对于 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 和 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

称 r 为 A 的秩.

定义

设 A 至少有一个 r 阶非零子式, 且所有 $r+1$ 阶子式均为零, 则称 r 为 A 的秩.

秩不等式

定理 (例 4.5.2)

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

(秩的和の一种表示.)

定理 (例 4.5.7)

$$\operatorname{rank}(AB)\leq \min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)).$$

(矩阵相乘会降秩.)

定理 (可逆矩阵不降秩)

若 P 为可逆矩阵, 则

$$\operatorname{rank}(PA)=\operatorname{rank}(A).$$

秩不等式

定理

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \le \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$$

证明.

设 $\operatorname{rank}(A) = r_1$, $\operatorname{rank}(B) = r_2$,

则 $A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{r_1} \\ j_1 & \dots & j_{r_1} \end{pmatrix} \neq 0$ 且 $B\begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_{r_2} \\ k_1 & \dots & k_{r_2} \end{pmatrix} \neq 0$.

考虑 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} = D$ 的 $D\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{r_1} & m+l_1 & \dots & m+l_{r_2} \\ j_1 & \dots & j_{r_1} & n+k_1 & \dots & n+k_{r_2} \end{pmatrix} \neq 0$.

所以 $\operatorname{rank}(D) \ge r_1 + r_2$. $\square$

秩不等式

定理

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

证明.

$$\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} = A + B$$

□

★ 秩不等式 ★

定理 (Frobenius)

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\le\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)$$

证明.

$$\begin{bmatrix} ABC & O \\ O & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ABC & AB \\ O & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\le\operatorname{rank}\begin{bmatrix} O & AB \\ -BC & B \end{bmatrix}=\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B).$$

□

推论 (Sylvester)

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{n\times l}$

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(C)\le\operatorname{rank}(AC)+n$$

2012-2013 期中

问题

证明: **对于任意** n **阶方阵** A **均有** $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \geq n$, **等号成立当且仅当** $A^2 = I_n$.

证明.

$$\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \geq \text{rank}((I_n - A) + (I_n + A)) = n.$$

$(\Leftarrow)$
由 Sylvester 不等式:

$$\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) \leq \text{rank}((I_n - A)(I_n + A)) + n = n.$$

□

2012-2013 期中

问题

证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\operatorname{rank}(I_n - A) + \operatorname{rank}(I_n + A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = I_n$.

证明.

$(\Rightarrow)$

$$\begin{bmatrix} I_n - A & O \\ O & I_n + A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_n - A & O \\ I_n + A & I_n + A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2I_n & I_n + A \\ I_n + A & I_n + A \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2I_n & I_n + A \\ I_n + A & I_n + A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2I_n & O \\ I_n + A & \frac{1}{2}(I_n - A^2) \end{bmatrix} \implies I_n - A^2 = O$$

$\square$

2013-2014 期中

问题

证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(2I_n - A) \geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2 = 2A$.

证明.

同上 $\square$

2014-2015 期中

问题

证明: 对于任意 n 阶方阵 A 均有 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I_n-A)\geq n$, 等号成立当且仅当 $A^2=A$.

证明.

同上 $\square$

2014-2015 期中

问题

证明: 若 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, 且 $AB = O$, 则 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq n$.

证明.

(Sylvester):

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \leq \operatorname{rank}(AB) + n = n.$$

□

2019-2020 期中

问题

设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足 $A^2 = O$, 证明: $\mathrm{rank}(A) \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
并对每个 n 找一个 n 阶方阵 A, 使得 $A^2 = O$ 且 $\mathrm{rank}(A) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

证明.

(Sylvester):

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A) \le \mathrm{rank}(A^2) + n = n.$$

构造: 记 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 满足 $J^2 = O$.

$$A = \begin{bmatrix} J & & & \\ & J & & \\ & & \ddots & \\ & & & J \end{bmatrix} \text{ or } A = \begin{bmatrix} J & & & & \\ & J & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2011-2012 期中

问题

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 则 $I_n - BA$, $I_m - AB$ 和 $\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$ 的秩关系如何?

证明.

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ B & I_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_m - AB & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_m & O \\ B & I_n - BA \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n - BA \end{bmatrix}$$

最终得到: $n + \operatorname{rank}(I_m - AB) = m + \operatorname{rank}(I_n - BA) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$ □

2017-2018 期中

问题

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 证明: $n + \operatorname{rank}(I_m - AB) = m + \operatorname{rank}(I_n - BA)$.

证明.

同上 □

2011-2012 期中

问题

求下列矩阵的秩

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 1 \end{bmatrix}$$

证明.

$$A = \begin{bmatrix} I_m & \alpha \\ \beta^T & 1 \end{bmatrix}$$

由上面结论:

$$\mathrm{rank}(A) = m + \mathrm{rank}(1 - \beta^T \alpha).$$

当 $\beta^T \alpha = 1$ 时, $\mathrm{rank}(A) = m$. 当 $\beta^T \alpha \neq 1$ 时, $\mathrm{rank}(A) = m + 1$. □

2011-2012 期中

问题

求下列矩阵的秩

$$A = \begin{bmatrix} 1-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_m \\ -a_2b_1 & 1-a_2b_2 & \cdots & -a_2b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_mb_1 & -a_mb_2 & \cdots & 1-a_mb_m \end{bmatrix}$$

证明.

$$A = I_m - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix} = I_m - \alpha\beta^T$$

$$1 + \text{rank}(A) = m + \text{rank}(1 - \beta^T\alpha).$$

2015-2016 期中

问题

求下列矩阵的秩:

$$\begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

证明.

$$A = (a-b)I_n + \begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

□

2015-2016 期中

证明.

$$A=(a-b)I_n+\begin{bmatrix} b \\ b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

当 $b=a=0$ 时, $\operatorname{rank}(A)=0$. 当 $b=a\neq 0$ 时, $\operatorname{rank}(A)=1$.
当 $b\neq a$ 时,

$$A=(a-b)(I_n-\begin{bmatrix} -\frac{b}{a-b} \\ -\frac{b}{a-b} \\ \vdots \\ -\frac{b}{a-b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix})$$

当 $b=-\frac{a}{n-1}$ 时, $\operatorname{rank}(A)=n-1$. 否则 $\operatorname{rank}(A)=n$. □

2014-2015 期中

问题

证明: 若 A 为实矩阵, 则 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T A)$.

证明.

(回顾上课笔记) □

这个结论会在 "线性方程解结构" 之后再被用到, 到时的证明会非常简洁.

2016-2017 期中

问题

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 则 A^TA 的秩为?

证明.

$$\mathrm{rank}(A) = 2$$

$\square$

2016-2017 期中

```
A =

     1     1     1     1
     1     2     3     4

>> rank(A'*A)

ans =

     2
```

图: Matlab 结果

2014-2015 期中

问题 (满秩分解定理)

证明: 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$,则 $\mathrm{rank}(A) = r$ 等价于存在列满秩矩阵 $B \in \mathbb{F}^{m\times r}$ 与行满秩矩阵 $C \in \mathbb{F}^{r\times n}$ 使得 $A = BC$.

证明.

存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = P\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix} Q = BC$$

其中: $B = P\begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} I_r & O \end{bmatrix} Q$. □

2016-2017 期中

问题

设 A 是 n 阶方阵, $\mathrm{rank}(A)=1$, $c=\mathrm{tr}(A)$, 证明: $A^2=cA$.
并计算 $\det(I+A)$.

证明.

(满秩分解): $A=\beta\alpha^T$, 其中 β,α 均为列向量.

$$A^2=\beta\alpha^T\beta\alpha^T=\beta(\alpha^T\beta)\alpha^T=cA.$$

其中(书上定理4.2.5(4))

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(\beta\alpha^T)=\mathrm{tr}(\alpha^T\beta)=c$$

下面计算: $\det(I+A)=\det(I+\beta\alpha^T)$. □

行列式计算

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$,

$$\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & O \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda I_m & O \\ B & I_n - \frac{1}{\lambda}BA \end{bmatrix}$$

我们得到:

$$\det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(I_n - \frac{1}{\lambda}BA) = \lambda^{m-n}\det(\lambda I_n - BA).$$

最终有:

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

书上例 4.5.6

问题

若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 是列满秩的, 则 A 是某个 m 阶可逆方阵的前 n 列.

证明.

由 $\operatorname{rank}(A) = n$, 得到 $m \geq n$.

$$A = P \begin{bmatrix} I_r \\ O \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} Q \\ O \end{bmatrix}$$

这是下面矩阵的前 n 列:

$$P \begin{bmatrix} Q & O \\ O & I_{m-n} \end{bmatrix}$$

□

2015-2016 期中

问题

判断: 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 则 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.

2015-2016 期中

问题

判断: 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 则 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.

证明.

错误!

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

则

$$BA = O, \ AB \neq O.$$

$\square$

问题

设 A, B 均为 n 阶方阵, 满足 $A^2 = A$, $B^2 = B$, 且 $I - A - B$ 可逆, 证明: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

Method 1.

(Sylvester):

$$\operatorname{rank}(I - A - B) + \operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}(A - A^2 - BA) + n = \operatorname{rank}(BA) + n.$$

由 $I - A - B$ 可逆: $\operatorname{rank}(I - A - B) = n$

$$\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}(BA).$$

而

$$\operatorname{rank}(BA) \le \operatorname{rank}(B).$$

得到: $\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}(B)$. 由对称性: $\operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}(A)$. $\square$

问题

设 A, B **均为** n **阶方阵, 满足** $A^2 = A$, $B^2 = B$, **且** $I - A - B$ **可逆, 证明**: $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

Method 2.

$$(I - A - B)B = -AB = A(I - A - B)$$

乘以可逆矩阵 $(I - A - B)$ 不改变秩. 所以 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$. $\square$

问题

若 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rank}(A)$.

证明.

存在 n 阶可逆方阵 P, Q 使得: $A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$

$$A^2 = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = A$$

消去可逆矩阵:

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

□

证明.

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

对 QP 作分块:

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

我们得到 $R_{11} = I_r$, 则

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q) = \mathrm{tr}(\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QP) = \mathrm{tr}(\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ O & O \end{bmatrix}) = r.$$

□

问题

若 A 为 n 阶方阵, 并存在正整数 N 使得 $\mathrm{rank}(A^N) = \mathrm{rank}(A^{N+1})$, 证明 $\mathrm{rank}(A^N) = \mathrm{rank}(A^{N+1}) = \mathrm{rank}(A^{N+2}) = \dots$

问题

若 A 为 n 阶方阵, 并存在正整数 N 使得 $\operatorname{rank}(A^N)=\operatorname{rank}(A^{N+1})$, 证明 $\operatorname{rank}(A^N)=\operatorname{rank}(A^{N+1})=\operatorname{rank}(A^{N+2})=\dots$

证明.

(Frobenius)

$$\operatorname{rank}(AA^N)+\operatorname{rank}(A^NA)\le\operatorname{rank}(AA^NA)+\operatorname{rank}(A^N).$$

而

$$\operatorname{rank}(AA^NA)\le\operatorname{rank}(A^NA)=\operatorname{rank}(A^N).$$

$\square$

习题 4.96. 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) = (a_{ij}(t))$ 是一个可逆方阵，其每个元素都是关于实变量 t 的可微函数. 记 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'(t) = (a'_{ij}(t))$ 为对每个元素都求导后得到的方阵. 证明：行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 的导数满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det(\boldsymbol{A})) = \det(\boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A}^{-1}).$$

证明.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \implies \frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = A_{ij}.$$

而 $\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}t} = a'_{ij}$. 根据链式法则:

$$\frac{\mathrm{d}\det(A)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}a'_{ij}.$$

□

习题 4.96. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t))$ 是一个可逆方阵, 其每个元素都是关于实变量 t 的可微函数. 记 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}'(t)=(a'_{ij}(t))$ 为对每个元素都求导后得到的方阵. 证明: 行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 的导数满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det(\boldsymbol{A}))=\det(\boldsymbol{A})\cdot\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{A}^{-1}).$$

证明.

$$\frac{\mathrm{d}\det(A)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}a'_{ij}.$$

化简右边:

$$\det(A)\operatorname{tr}(A'A^{-1})=\operatorname{tr}(A'\det(A)A^{-1})=\operatorname{tr}(A'A^{*}).$$

为了方便, 我们记 $(A)_{ij}$ 表示 A 的 (i,j) 元素.

$$\operatorname{tr}(A'A^{*})=\sum_{i=1}^{n}(A'A^{*})_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A')_{ij}(A^{*})_{ji}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}A_{ij}$$

习题 4.90. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 为 n 维列向量, 证明以下关于伴随矩阵的等式:

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})^{*}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}+(1-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}.$$

习题 4.90. 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 为 n 维列向量, 证明以下关于伴随矩阵的等式:

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}})^{*}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}+(1-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}.$$

证明.

$$\begin{aligned}(I-xy^T)^* &= \det(I-xy^T)(I-xy^T)^{-1}\\ &= \det(1-y^Tx)(I+\frac{xy^T}{1-y^Tx})\end{aligned}$$

其中第二行的行列式计算用了 "满秩分解部分" 第3页的公式.
第二行的逆矩阵计算用了 Sherman-Morrison-Woodbury 公式.
$I-xy^T$ 不可逆时, 用摄动法. □

定理

设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$,

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

定理 (Sherman-Morrison-Woodbury)

设 $U, V \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 则有

$$(I_n + UV^T)^{-1} = I_n - U(I_m + V^T U)^{-1} V^T.$$

推论

设 $U, V \in \mathbb{F}^{n\times 1}$, 则有

$$(I_n + UV^T)^{-1} = I_n - \frac{UV^T}{(1 + V^T U)}.$$

习题 4.91. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶反对称方阵. 若 n 为奇数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个对称矩阵; 若 n 为偶数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个反对称矩阵.

分析: A 是反对称矩阵 $\implies A^T = -A$:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$$

只要 A 是可逆的反对称矩阵, 则 A^{-1} 是反对称矩阵. 但题目中说: n 为奇数时, A^* 是一个对称矩阵.
这说明 n 为奇数时, A 不可逆! (Hint: $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A)$)

习题 4.91. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶反对称方阵. 若 n 为奇数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个对称矩阵; 若 n 为偶数, 验证 $\boldsymbol{A}^*$ 是一个反对称矩阵.

证明.

A_{ij} 表示 A 的 (i,j) 元的代数余子式, A^T_{ji} 表示 A^T 的 (j,i) 元的代数余子式.
$(-A)_{ji}$ 表示 $-A$ 的 (j,i) 元的代数余子式.
则 $A_{ij}=A^T_{ji}$ (动手画一画, 这两个行列式只相差转置).
而 $A^T=-A \implies A^T_{ji}=(-A)_{ji}=(-1)^{n-1}A_{ji}$
我们得到

$$A_{ij}=(-1)^{n-1}A_{ji}.$$

□

习题 4.92. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶反对称方阵, 其主对角线的右上角的元素全是 1. 计算 $\boldsymbol{A}^*$.

证明.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

算就完了. □

当 n 为偶数时:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

当 n 为奇数时:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Thanks!