$\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A)$ 的两种证明

Author: 秦昊隽 PB20020661

更推荐第一种方法.

Problem 0.1 若 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则 $\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(A)$.

Proof [第一种证明]

记 $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, 即 $Ax = 0$ 的解空间. 容易验证: W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

记 $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^TAx = 0\}$, 同理: U 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

一方面 $\forall x \in W$, 满足 $Ax = 0$, 等式左乘 A^T 得到 $A^TAx = 0$. 即 $\forall x \in W$ 都满足 $x \in U$, 于是 $W \subseteq U$.

但另一方面 $\forall x \in U$, 满足 $A^TAx = 0$, 等式左乘 x^T 得到 $x^TA^TAx = (Ax)^TAx = 0$. 记 $Ax = \begin{bmatrix} b_1, b_2, ..., b_n \end{bmatrix}^T$, 有 $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$, 得到 $b_i = 0\ \forall i$ ♡, 即 $Ax = 0$. 所以 $\forall x \in U$ 都满足 $x \in W$, 即 $U \subseteq W$

综上我们得到 $W = U$. 于是 $\dim W = \dim U \implies \text{rank}(A) = \text{rank}(A^TA)$. (这里我们用到了以下定理)

Theorem 0.1 (线性映射基本定理)

对于 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 考虑线性方程 $Ax = 0$, 记 $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, 则有

$$\dim \ker(A) = n - \text{rank}(A).$$

♡

Proof [第二种证明]

设 $\text{rank}(A) = r$, 考虑相抵标准型: $\exists P, Q$ 均为可逆矩阵, 使得

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q.$$

代入 A^TA 中:

$$A^TA = Q^T \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} P^TP \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q.$$

我们对 P 分块为 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, ($P_{11}$ 为 $r \times r$ 的方阵), 于是 $P^TP = \begin{bmatrix} P_{11}^TP_{11} + P_{21}^TP_{21} & * \\ * & * \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{aligned} A^TA &= Q^T \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^TP_{11} + P_{21}^TP_{21} & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \\ &= Q^T \begin{bmatrix} P_{11}^TP_{11} + P_{21}^TP_{21} & O \\ O & O \end{bmatrix} Q. \end{aligned}$$

由于 Q 是可逆矩阵, 我们得到 $\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(P_{11}^TP_{11} + P_{21}^TP_{21})$. 下面欲证明: $\text{rank}(P_{11}^TP_{11} + P_{21}^TP_{21}) = r$.

由分块知: $P_{11}^TP_{11} + P_{21}^TP_{21}$ 是一个 $r \times r$ 的矩阵. 假设 $\text{rank}(P_{11}^TP_{11} + P_{21}^TP_{21}) < r$, 即存在非零的 x, 使得 $P_{11}^TP_{11}x + P_{21}^TP_{21}x = 0$:

两边左乘 x^T, 得到

$$x^T P_{11}^T P_{11} x + x^T P_{21}^T P_{21} x = (P_{11}x)^T P_{11} x + (P_{21}x)^T P_{21} x = 0.$$

同方法一 ♡ 处方法, 我们得到 $P_{11}x = 0$ 且 $P_{21}x = 0$, 则 P 有非零解:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

这与 P 是可逆矩阵矛盾！故 $\mathrm{rank}(P_{11}^T P_{11} + P_{21}^T P_{21}) = r = \mathrm{rank}(A^T A)$.