Chapter 1 期中考试参考答案

Author: 秦昊隽 PB20020661

注: 仅供参考, 答案仅代表作者观点.

1.1 填空题

Problem 1.1 排列 $(3,6,5,4,1,2)$ 的逆序数是 11 .

Solution

$$2+4+3+2=11$$

Problem 1.2 齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4+2x_5=0 \\ x_1-x_3+4x_4=0 \end{cases}$ 的解空间的维数是 3 .

Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(A)=2 \implies \dim\ker(A)=5-2=3.$$

Problem 1.3 方程 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的解 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Solution

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -7 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Problem 1.4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, 而 $\boldsymbol{A}^*$ 是它的伴随矩阵, 那么 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2, \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*)=1$

Solution

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Theorem 1.1 (余秩公式)

对于 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其中 $n\geq 2$,

$$\operatorname{rank}(A^*)=\begin{cases}n & \text{if } \operatorname{rank}(A)=n\\ 1 & \text{if } \operatorname{rank}(A)=n-1\\ 0 & \text{if } \operatorname{rank}(A)\leq n-2\end{cases}$$

Problem 1.5 如果 $A=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\O&A_3\end{pmatrix}$, 其中 A_1 与 A_3 都是可逆矩阵, 那么 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&-A_1^{-1}A_2A_3^{-1}\\O&A_3^{-1}\end{pmatrix}$.

Solution

$$\begin{bmatrix}A_1&A_2&I&O\\O&A_3&O&I\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A_1&O&I&-A_2A_3^{-1}\\O&A_3&O&I\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}I&O&A_1^{-1}&-A_1^{-1}A_2A_3^{-1}\\O&I&O&A_3^{-1}\end{bmatrix}$$

Problem 1.6 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\-2&3&-11&5\\4&-5&17&3\end{pmatrix}$ 的相抵标准形是 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

Solution

$$\begin{bmatrix}1&-1&3&2\\-2&3&-11&5\\4&-5&17&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&2\\0&1&-5&9\\0&-1&5&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&2\\0&1&-5&9\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

1.2 判断题

Problem 1.7 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 任何 4 个向量都线性相关.

Proof 对. 设这四个向量为 3×4 矩阵 A 的列向量组, 由于 A 的秩至多为 3, A 的零空间至少是 $4-3=1$ 维的, 从而这四个向量线性相关.

Problem 1.8 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性相关, 那么其中的每个向量都可以由其余的向量线性表示.

Proof 错. 反例如下:

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 但 α_3 不能被 α_1,α_2 线性表出.

Problem 1.9 设 A 是一个秩为 4 的矩阵, 那么一定存在秩为 2 的矩阵 B 和 C 使得 $A=B+C$.

Proof 对. 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_4&O\\O&O\end{bmatrix}Q,$$

由此, 令

$$B=P\begin{bmatrix}I_2&&\\&O_2&\\&&O\end{bmatrix}Q,\ C=P\begin{bmatrix}O_2&&\\&I_2&\\&&O\end{bmatrix}Q.$$

满足题意.

Problem 1.10 设 A,B 为二阶方阵, 且 $AB=B-I$, 那么 $AB=BA$.

Proof 对. 由条件推出 $(I-A)B=I$. 这说明 $I-A$ 与 B 互为逆矩阵, 从而有 $B(I-A)=I$, 即 $BA=B-I$. 由此可知 $AB=BA$.

1.3 解答题

Problem 1.11 (12 分) 当 a 为何值时, 如下的线性方程组有解? 当有解时, 求出它的所有解.

$$\begin{cases}x_1-4x_2+2x_3=-1\\-x_1+11x_2-x_3=3\\3x_1-5x_2+7x_3=a\end{cases}$$

Proof

$$\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\-1&11&-1&3\\3&-5&7&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&2&-1\\0&7&1&2\\0&0&0&a+1\end{bmatrix}$$

因此, 方程组有解的充要条件是 $a=-1$. 矩阵可以进一步化为:

$$\begin{bmatrix}1&0&\frac{18}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

从而方程组的通解为

$$x_1=-\frac{18}{7}t+\frac{1}{7},x_2=-\frac{1}{7}t+\frac{2}{7},x_3=t.$$

其中 $t\in\mathbb{F}$ 任意.

Problem 1.12 (8 分) 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2-b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3-b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4-b \end{vmatrix}$.

Proof

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2 & a_3 & a_4 \\ \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2-b & a_3 & a_4 \\ \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2 & a_3-b & a_4 \\ \sum_{i=1}^4 a_i - b & a_2 & a_3 & a_4-b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^4 a_i - b\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2-b & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3-b & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4-b \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^4 a_i - b\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = \left(b - \sum_{i=1}^4 a_i\right) b^3.
\end{aligned}
$$

Theorem 1.2

若 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 则有:

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

Proof

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (-1)^4 \det\left(\begin{bmatrix} b & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} b & & & \\ & b & & \\ & & b & \\ & & & b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \right) \\
&= b^3 \det\left(b - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(b - \sum_{i=1}^4 a_i\right) b^3.
\end{aligned}
$$

Problem 1.13 (10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix}$ 为 3 阶方阵, 其中 $a \neq -1$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Proof 我们用初等变换方法:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} a & a+1 & a+2 & 1 & 0 & 0 \\ a+2 & a & a+1 & 0 & 1 & 0 \\ a+1 & a+2 & a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ a+2 & a & a+1 & 0 & 1 & 0 \\ a+1 & a+2 & a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & -2 & -1 & -\frac{a+2}{3a+3} & 1-\frac{a+2}{3a+3} & -\frac{a+2}{3a+3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{a+1}{3a+3} & -\frac{a+1}{3a+3} & 1-\frac{a+1}{3a+3} \end{bmatrix} \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{a+1}{3a+3} & -\frac{a+1}{3a+3} & 1-\frac{a+1}{3a+3} \\ 0 & -2 & -1 & -\frac{a+2}{3a+3} & 1-\frac{a+2}{3a+3} & -\frac{a+2}{3a+3} \end{bmatrix} \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{a+1}{3a+3} & -\frac{a+1}{3a+3} & 1-\frac{a+1}{3a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a+4}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{3a+4}{9a+9} & -\frac{2}{3}+\frac{3a+4}{9a+9} \end{bmatrix} \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} & \frac{1}{3a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \end{bmatrix} \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此, 所要求的逆矩阵为:

$$
\begin{bmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} \\ \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} & \frac{1}{9a+9} & -\frac{1}{3}+\frac{1}{9a+9} \end{bmatrix} = \frac{1}{9a+9} \begin{bmatrix} -3a-2 & 3a+4 & 1 \\ 1 & -3a-2 & 3a+4 \\ 3a+4 & 1 & -3a-2 \end{bmatrix}.
$$

Remark

使用伴随矩阵同样能解决这一问题, 但需要注意, 是否相差一个转置.

Problem 1.14 (12 分) 设 $n \geq 2$ 为正整数, 而 $a_1, \ldots, a_n$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 内的 n 个互异的数. 用 V 表示次数小于 n 的全体复系数多项式构成的 $\mathbb{C}$ 上的线性空间. 对于 $j = 1, \ldots, n$, 令

$$f_j(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \cdots (x - a_n).$$

(1). 证明: $f_1, \ldots, f_n$ 构成 V 的一组基.

(2). 对于 $j = 1, \ldots, n$, 设 $a_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi j/n} = \cos(2\pi j/n) + \mathrm{i}\sin(2\pi j/n)$, 即 $a_1, \ldots, a_n$ 为全体 n 次单位根. 求从基 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 到 $f_1, \ldots, f_n$ 的过渡矩阵.

(3). 在 (2) 的条件下, 求多项式 $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ 在 $f_1, \ldots, f_n$ 下的坐标.

Proof

(1). 设存在 $k_1, k_2, ..., k_n$, 使得

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + ... + k_n f_n = 0.$$

在上式中令 $x = a_i$, 得到 $k_i f_i(a_i) = 0$, 因此 $k_i = 0$. 这表明 $f_1, \ldots, f_n$ 是线性无关的.

(2). 由于

$$x^n - 1 = \prod_{j=1}^{n} (x - a_j)$$

对固定的指标 i,

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - a_j) = \frac{x^n - 1}{x - a_i} = \frac{x^n - a_i^n}{x - a_i} = x^{n-1} + a_i x^{n-2} + \cdots + a_i^{n-2} x + a_i^{n-1}.$$

我们得到:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & ... & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

这就是要求的过渡矩阵.

(3). 观察到 $a_n = 1$, 所以:

$$f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

因此所求的坐标为:

$$[0, \ldots, 0, 1]$$

Problem 1.15 (8 分)

(1). 若 $C \in F^{m\times n}$ 是一个行满秩的矩阵, 证明: 一定存在矩阵 $D \in F^{n\times m}$ 使得 $CD = I_m$ 为单位阵.

(2). 若 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$, 证明: 存在 X 使得 $ABX = A$. (提示: 利用 A 的相抵标准形)

Proof

(1). (方法一) 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得 $C = P(I_m, O)\,Q$, 选取 $D = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix} P^{-1}$ 即可.

(方法二) 设 $e_1, \ldots, e_m$ 是 F^m 的标准基, 对于 $i = 1, 2, \ldots, m$, 方程组 $Cx = e_i$ 有解.
因为

$$\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(C, e_i) = m,$$

设 x_i 是一个解. 那么, $D = (x_1, \ldots, x_m)$ 满足要求.

(2). (方法一) 设 $\operatorname{rank}(A) = r$, 于是, 存在可逆矩阵 P 和 Q 使得 $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$.

此时 $AB = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}QB = P\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}$, 其中 C 有 r 行. 由于 AB 的秩也是 r, 这说明 C 是一个行满秩矩阵.

由 (1) 可知, 存在 D 使得 $CD = I_r$. 要想构造 X 使得 $ABX = A$, 即 $P\begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}X = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$, 只需选取 $X = (D, O)Q$ 即可.

(方法二) 设 $S_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}$ 为 A 的列向量组, $S_2 = \{c_1, \ldots, c_n\}$ 为 AB 的列向量组, 则 S_2 可由 S_1 线性表示. 又由于 $\operatorname{rank}(S_2) = \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(S_1)$, 这说明 S_1 与 S_2 等价.
从而 S_1 可由 S_2 线性表示. 而这意味着存在 X 使得 $ABX = A$.