第5章时间序列作业　　应用统计学16 2016310868 郑昊亮

5.1 (a) 由于 $\phi_1=1$, $\phi_2=-0.25$, 满足 $\phi_1+\phi_2<1$, $\phi_2-\phi_1<1$, $|\phi_2|<1$

因此该模型是平稳的 ARMA(2,1) $(d=0)$, $\phi_1=1$, $\phi_2=-0.25$, $\theta_1=0.1$

(b) 由于 $\phi_1=2$, $\phi_2=-1$, $\phi_1+\phi_2=1$ 不满足平稳条件

$Y_t-Y_{t-1}=Y_{t-1}-Y_{t-2}+e_t$, 即 $\nabla Y_t=\nabla Y_{t-1}+e_t$, 此时 $\phi=1$, 仍不满足平稳条件

做二阶差分, 可得 $\nabla^2 Y_t=e_t$, 因此该模型是 IMA(2,0) $(p=0)$

(c) 由于 $\phi_1=0.5$, $\phi_2=-0.5$, 满足 $\phi_1+\phi_2<1$, $\phi_2-\phi_1<1$, $|\phi_2|<1$

因此该模型是平稳的 ARMA(2,2) $(d=0)$, $\phi_1=0.5$, $\phi_2=-0.5$, $\theta_1=-0.5$, $\theta_2=0.25$

5.2 (a) $\nabla Y_t=3+e_t-0.75e_{t-1}$

$E(\nabla Y_t)=3$　　$Var(\nabla Y_t)=\sigma_e^2+0.75^2\sigma_e^2=\frac{25}{16}\sigma_e^2$

(b) $\nabla Y_t=10+0.25\nabla Y_{t-1}+e_t-0.1e_{t-1}$, 由于 $\phi=0.25$, 满足平稳性条件

$E(\nabla Y_t)=10+0.25E(\nabla Y_{t-1})$, $E(\nabla Y_t)=\frac{10}{0.75}=\frac{40}{3}$

$Var(\nabla Y_t)=\frac{(1-2\phi\theta+\theta^2)}{1-\phi^2}\sigma_e^2=\frac{(1-2\times0.25\times0.1+0.1^2)}{1-0.25^2}=1.024\sigma_e^2$

(c) $\nabla Y_t=5+\nabla Y_{t-1}-0.7\nabla Y_{t-2}+e_t-0.5e_{t-1}+0.25e_{t-2}$

其中 $\phi_1=1$, $\phi_2=-0.7$, $\phi_1+\phi_2<1$, $\phi_2-\phi_1<1$, $|\phi_2|<1$, 因此满足平稳条件

$E(\nabla Y_t)=5+E(\nabla Y_{t-1})-0.7E(\nabla Y_{t-2})$, 得 $E(\nabla Y_t)=\frac{50}{7}$

5.3 (a) $E(Y_t)=0$

$Cov(Y_t,Y_{t-k})=Cov(e_t+ce_{t-1}+\cdots+ce_0,\ e_{t-k}+ce_{t-k-1}+\cdots+ce_0)$

$=Cov(ce_{t-k}+\cdots+ce_0,\ e_{t-k}+\cdots+ce_0)=(1+(t-k)\cdot c)\cdot c\cdot\sigma_e^2$

则协方差函数与t有关, 因此 $\{Y_t\}$ 不平稳

(b) $\nabla Y_t=Y_t-Y_{t-1}=e_t+(c-1)e_{t-1}$

$E(\nabla Y_t)=0$

$$\gamma_k=\begin{cases}(c^2-2c+2)\sigma_e^2, & k=0\\ (c-1)\sigma_e^2, & k=1\\ 0, & k=2\end{cases}$$

且 MA(q) 总是平稳的, 总之 $\{\nabla Y_t\}$ 平稳

5.4 (a) $E(Y_t)=A+Bt$ 与t有关, 因此不平稳

(b) $\nabla Y_t=A+Bt+X_t-(A+B(t-1)+X_{t-1})=B+\nabla X_t$

由于 X_t 为随机游动, 则 ∇X_t 为白噪声 e_t

$E(\nabla Y_t)=B$ 为常数

$Cov(\nabla Y_t,\nabla Y_{t-k})=0$　　因此平稳

(c) $E(Y_t)=A+tE(B)$ 仍与t有关，因此不平稳

(d) $E(\nabla Y_t)=E(B)$ 为常数

$Cov(\nabla Y_t, \nabla Y_{t-k})=Var(B)$ 因此平稳

5.7 (a) A：由于 $\phi_1=0.9$，$\phi_2=0.09$，满足 $\phi_1+\phi_2<1$，$\phi_2-\phi_1<1$，$|\phi_2|<1$

因此该模型是平稳的AR(2) $(d=q=0)$，$\phi_1=0.9$，$\phi_2=0.09$

B：由于 $\phi=1$，不满足平稳条件，做一阶差分

$\nabla Y_t=e_t-0.1e_{t-1}$

因此该模型是 IMA(1,1) $(p=0)$，$\theta=0.1$

(b) 不同之处在于模型A平稳而B不平稳

(c) 对于ψ系数：

通过式4.3.21，$\begin{cases}\psi_0=1\\ \psi_1-\phi_1\psi_0=0\\ \psi_j-\phi_1\psi_{j-1}-\phi_2\psi_{j-2}=0 \quad j=2,3\cdots\end{cases}$ 可算得模型A的ψ系数前几项（从1阶滞后开始）为：

0.900 0.900 0.891 0.883 0.875

通过式5.2.6，可算得模型B的ψ系数前几项为：0.9 0.9 0.9 0.9 0.9

因此两模型前几项ψ系数较为接近

对于π系数：

模型A $\pi_1=0.9$，$\pi_2=0.09$

通过式4.5.2，$\nabla Y_t=(-\theta\nabla Y_{t-1}-\theta^2\nabla Y_{t-2}-\cdots)+e_t$

$Y_t-Y_{t-1}=(-\theta(Y_{t-1}-Y_{t-2})-\theta^2(Y_{t-2}-Y_{t-3})-\cdots)+e_t$

$Y_t=(1-\theta)Y_{t-1}+\theta(1-\theta)Y_{t-2}+\cdots+e_t$

则模型B $\pi_1=0.9$，$\pi_2=0.09$，$\pi_3=0.009$ 因此两模型前两项π系数一样，后几项也十分接近(0)

5.8 (a) 对滞后项不断迭代

$Y_t=\phi Y_{t-1}+e_t=e_t+\phi(\phi Y_{t-2}+e_{t-1})=e_t+\phi e_{t-1}+\phi^2 Y_{t-2}=\cdots$

$=e_t+\phi e_{t-1}+\phi^2 e_{t-2}+\cdots+\phi^{t-1}e_1+\phi^t Y_0$

$=e_t+\phi e_{t-1}+\phi^2 e_{t-2}+\cdots+\phi^{t-1}e_1$

(b) $Var(Y_t)=Var(e_t+\phi e_{t-1}+\phi^2 e_{t-2}+\cdots+\phi^{t-1}e_1)=\sigma_e^2\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}$

(c) $Cov(Y_t,Y_{t-k})=Cov(e_t+\phi e_{t-1}+\cdots+\phi^{t-1}e_1,\ e_{t-k}+\phi e_{t-k-1}+\cdots+\phi^{t-k-1}e_1)$

$=Cov(\phi^k e_{t-k}+\phi^{k+1}e_{t-k-1}+\cdots+\phi^{t-1}e_1,\ e_{t-k}+\phi e_{t-k-1}+\cdots+\phi^{t-k-1}e_1)$

$=\sigma_e^2(\phi^k+\phi^{k+2}+\cdots+\phi^{2t-k-2})=\sigma_e^2\phi^k\cdot\frac{1-\phi^{2(t-k)}}{1-\phi^2}$

(d) $Corr(Y_t,Y_{t-k})=Cov(Y_t,Y_{t-k})/(\sqrt{Var(Y_t)}\cdot\sqrt{Var(Y_{t-k})})=\phi^k\sqrt{\frac{\phi^{2(t-k)}-1}{\phi^{2t}-1}}=\sqrt{\frac{1-\phi^{2(k-t)}}{1-\phi^{-2t}}}\approx 1$ 正确