4.2 Newton 插值

Lagrange 插值公式简单易用，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新算过。

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$ (插值基函数)

考虑插值基函数组（节点为 $x_0, \ldots, x_n$）

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) = x - x_0 \\ \varphi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1) \\ \cdots\cdots \\ \varphi_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{cases}$$

当增加一个节点 x_{n+1} 时，只需加上基函数 $\phi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 即可。

Newton 插值

此时 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$$

问题：怎样确定参数 $a_0, \ldots, a_n$?

$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j}$

差商的定义

定义： 设 $f(x)$在节点 $x_0, \ldots, x_n$ 的函数值为 $f_0, \ldots, f_n$

$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$ 称为 $f(x)$ 关于 x_i, x_j 的一阶差商；

$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j}$，$f(x)$ 关于 x_i, x_j, x_k 的二阶差商

一阶差商的差商

一般地，称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为 $f(x)$ 关于 $x_0, \ldots, x_k$ 的 k 阶差商。例题4.2

- 例 已知$f(0)=1$，$f(-1)=5$，$f(2)=-1$，求$f[0,-1,2]$
- $f[-1,2,0]$ $\dfrac{f(-1)-f(0)}{-1-0}$

$f[0,-1]=\dfrac{5-1}{-1-0}=-4$，$f[-1,0]=\dfrac{1-5}{1}=-4$

$f[0,2]=\dfrac{-1-1}{2-0}=-1$，$f[-1,2]=\dfrac{-1-5}{3}=-2$

$f[0,-1,2]=\dfrac{-1-(-4)}{2-(-1)}=1$ $\dfrac{f[0,2]-f[0,-1]}{2-(-1)}$

$f[-1,2,0]=\dfrac{f[-1,0]-f[-1,2]}{0-2}=\dfrac{-4+2}{-2}=1$

$f[0,-1,2]=f[-1,2,0]$;

$f[0,-1]=f[-1,0]$

差商的性质

1) 差商可以表示为函数值的线性组合。

归纳法证明

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)}$$

依此类推

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$$

记： $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_{n+1}{}'(x_j)}$$

2) 差商对节点具有对称性：

$$f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_k]=f[x_0,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_k]$$

任意交换两个节点的次序，差商不变！

差商的性质

推广：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}]$$

其中i_0, i_1, … , i_k是 0 , 1, … , k 的任一排列。说明差商与节点的排列无关。

3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 k 阶导数，则至少存在一点

$\xi \in (a,b)$,使得$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ （证明见插值余项）

k 阶差商与 k 阶导数之间的关系

差商的计算

设 $f(x)$ 在节点 $x_0, \dots, x_n$ 的函数值为 $f_0, \dots, f_n$，可按如下的差商表顺序逐次计算各阶差商值

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	$\cdots$	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$				
x_2	$f(x_2)$	$f[x_0, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
x_3	$f(x_3)$	$f[x_0, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	$f(x_n)$	$f[x_0, x_n]$	$f[x_0, x_1, x_n]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_n]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

差商举例

例：已知 $y = f(x)$ 的函数值表，试计算其各阶差商。

k	0	1	2	3
x_k	-2	-1	1	2
$f(x_k)$	5	3	17	21

解：差商表如下

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_0, x_k]$	$f[x_0, x_1, x_k]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_k]$
0	-2	5			
1	-1	3	-2		
2	1	17	4	3	
3	2	21	4	2	-1

Newton 插值公式

$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$

由差商的定义可得：

$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{(x - x_0) f[x, x_0]} \quad \cdots\cdots \quad 1$$

$$\boxed{f[x, x_0]} = f[x_0, x_1] + \boxed{(x - x_1) f[x, x_0, x_1]} \quad \cdots\cdots \quad 2$$

… … … … $f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1)$

$$\boxed{f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]} = f[x_0, \dots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, \dots, x_n] \quad \cdots \quad n-1$$

$$1 + (x - x_0) \times 2 + \dots \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \times n-1$$

$$f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

$$+ f[x, x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

$N_n(x)$

$R_n(x)$

Newton 插值公式

于是 $f(x) = N_n(x) + R_n(x)$

$$\begin{cases} \boxed{N_n(x)\text{ 是 } n \text{ 次多项式}} \qquad R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \\ R_n(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_n(x_i) = f(x_i),\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$\boxed{N_n(x)\text{ 是 } f(x) \text{ 的 } n \text{ 次插值多项式}}$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$$

其中 $a_0 = f(x_0),\qquad a_i = f[x_0, \cdots, x_i],\qquad i = 0,2,\cdots,n$

Newton 插值公式

由插值公式的唯一性可知 $N_n(x) \equiv L_n(x)$， 只是算法不同，因此余项也相同，即

$$R_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

所以 $$f[x, x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

将 x 看作是一个节点，即可推广到一般情形：

$$\boxed{f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}}$$

Newton 插值举例

例：已知函数 $y = \ln x$ 的函数值如下

x	10	11	12	13	14
$\ln x$	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

试用牛顿线性插值和抛物线插值计算 ln11.75。

解：分别取节点 $x_0 = 11, x_1 = 12$ 和 $x_0 = 11, x_1 = 12, x_2 = 13$，作差商表

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_0, x_k]$	$f[x_0, x_1, x_k]$
0	11	2.3979		
1	12	2.4849	0.0870	
2	13	2.5649	0.0835	-0.0035

Newton 插值举例

$$N_1(x) = f(x_0)+f[x_0, x_1](x-x_0)=2.3979 + 0.0870\,(x-11)$$

$$N_2(x) = f(x_0)+f[x_0, x_1](x-x_0)+f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 2.3979 + 0.0870\,(x-11) + (-0.0035)(x-11)(x-12)$$

线性插值： ln11.75 $\approx N_1(11.75) \approx 2.4632$

抛物线插值： ln11.75 $\approx N_2(11.75) \approx 2.4638$

可以计算出 ln11.75 的准确值为：2.46385324059…

可以看出，当增加一个节点时，牛顿插值公式只需在原来的基础上增加一项，前面的计算结果仍然可以使用。与拉格朗日插值相比，牛顿插值具有灵活增加节点的优点！

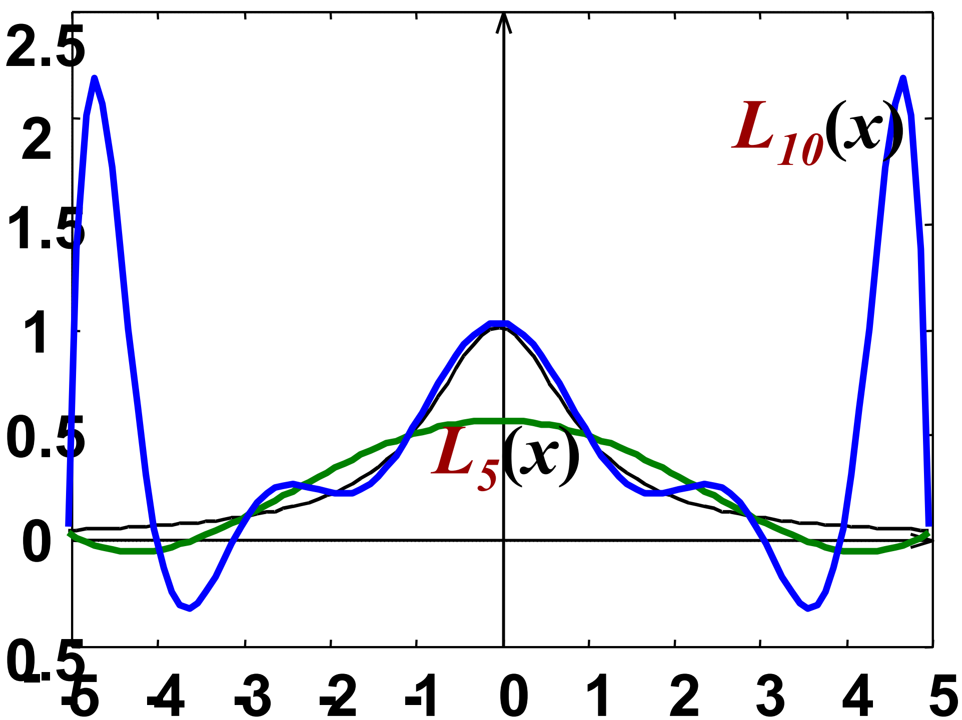
4.3 三次样条插值

问题： 抛物线插值的误差比线性插值要小，**是不是插值多项式的次数越高，精度就越好?**

NO!

例：在 [–5, 5] 上考察 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的 $L_n(x)$。取 $x_k=-5+kh$

$(h=10/n,\ k=0,\ \ldots, n; n=5,10)$



n 越大，端点附近的抖动越大，称为 Runge现象。

$L_n(x) \not\rightarrow f(x)$

1 分段插值

在处理实际问题时，总是希望将所得到的数据点用得越多越好。使用分段低次插值来进行分段插值以避免高阶插值的龙格现象。

分段低次插值

基本思想：**用分段低次多项式来代替单个高次多项式。**

具体作法：**(1) 把整个插值区间分割成多个小区间；**

(2) 在每个小区间上作低次插值多项式；

(3) 将所有插值多项式拼接整一个多项式。

优点：**公式简单、 运算量小、稳定性好、收敛性 …**

缺点：**节点处的导数可能不连续，失去原函数的光滑性。**

1）分段线性插值

假设：已知 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ **及** $f(x_i) = y_i$ **，** $\boldsymbol{i=0,1,\ldots,n}$

$I_{\boldsymbol{i}}(x)$**为**$[x_{i-1}, x_i]$**上的线性函数（不超过1次的多项式）且满足**

$$I_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, I_i(x_i) = y_i \qquad i = 0, \cdots, n$$

由线性插值公式可得：

$$I_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

分段线性插值

余项公式

$$R_1(x) = f(x) - I_i(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_{i-1})(x - x_i) \qquad （x_{i-1} \le x \le x_i）$$

收敛性

由于: $$\max_{x_{i-1} \le x \le x_i} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| = (\frac{x_i - x_{i-1}}{2})^2$$

因此: $$|R_i(x)| = |f(x) - I_i(x)| \le \frac{h^2}{8} M_2$$

其中 $$h = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}), \quad M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_n} |f''(x)|, \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$|R_i(x)| = |f(x) - I_i(x)| \le \frac{h^2}{8} M_2 \to 0 \qquad h \to \mathbf{0}$$

但不光滑！

例4.4

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间[-5,5]上取等距插值节点，10等分时，用线性分段插值求**f(x)**的数值解的误差限，并分析几等分可使结果有**3**位有效数字。

解题关键

1. h=1→ $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ ⇒**M2=** $\max_{-5\le x\le 5}|f''(x)|=2$，从

而误差 $|R_1(x)|=|f(x)-I_1(x)|\le\frac{h^2}{8}M_2$ **= ¼**

2. 分段讨论，最小值决定**m**，误差决定**k**（有效数字**m+k**），又由**n=10/h → n?**

当$0 < |\boldsymbol{x}| \leq 3$时，$0.1 \leq f(x) < 1$

$$|f(x) - I_1(x)| \leq \frac{h^2}{4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} \Rightarrow h \leq \sqrt{2 \times 10^{-3}} \Rightarrow$$
$$n \geq \frac{10}{\sqrt{2\times10^{-3}}} = 224$$

当$\mathbf{3} < |\boldsymbol{x}| \leq \mathbf{5}$时，$0.01 \leq f(x) < 0.1$

$$|f(x) - I_1(x)| \leq \frac{h^2}{4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \Rightarrow h \leq \sqrt{2 \times 10^{-4}} \Rightarrow$$
$$n \geq \frac{10}{\sqrt{2\times10^{-4}}} = 708$$

2）分段3次Hermite插值

已知 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 及 $y_i = f(x_i)$、$y_i' = f'(x_i)$，$I_i(x)$ 为 $[x_{i-1}, x_i]$ 上不超过**3**次多项式，且满足

$$I_i(x_{i-1}) = y_{i-1},\quad I'_i(x_{i-1}) = y'_{i-1},\quad I_i(x_i) = y_i,\quad I'_i(x_i) = y'_i,$$

由**3**次埃尔米特插值式可得到：

$$I_i(x) = \alpha_{i-1}(x)y_{i-1} + \alpha_i(x)y_i + \beta_{i-1}(x)y'_{i-1} + \beta_i(x)y'_i$$

$\alpha_{i-1}(x) = (1+2l_i(x))l_{i-1}^2(x)$

$\alpha_i(x) = (1+2l_{i-1}(x))l_i^2(x)$

$$x_{i-1} \le x \le x_i,$$

$$\alpha_{i-1}(x) = (1 + 2l_i(x))l_{i-1}^2(x)$$
$$\alpha_i(x) = (1 + 2l_{i-1}(x))l_i^2(x)$$
$$\beta_{i-1}(x) = (x - x_{i-1})l_{i-1}^2(x)$$
$$\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

$$l_{i-1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i},\quad l_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$\beta_{i-1}(x) = (x - x_{i-1})l_{i-1}^2(x)$ $\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$

2）分段3次Hermite插值

余项公式

$$R_i(x) = f(x) - I_i(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2$$

收敛性 $\quad h = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}),\ M_4 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_n}\left|f^{(4)}(x)\right|,$

$$|R_i(x)| = |f(x) - I_i(x)| \le \frac{M_4}{4!}\left(\frac{h^2}{4}\right)^2 = \frac{h^4}{384}M_4 \to 0$$

一阶光滑！但实际工程中一般不知道也不必固定$f'(x_i)$的值！

三次样条函数

所谓“样条”(spline)是工程绘图中的一种工具，它是有弹性的细长木条。绘图时,往往用样条在样点用压铁顶住，样条在自然弹性弯曲下形成的光滑曲线称之为样条曲线,此曲线不仅具有一阶连续导数，而且还有连续的曲率（即具有二阶连续导数）。可以证明，此曲线是分段的三次曲线。

样条函数就是对这样的曲线进行数学模拟得到的。由一些按照某种光滑条件分段拼接起来的多项式组成的函数。它除了要求给出**各个结点处的函数值**外,只需提供**两个边界点处导数**信息,便可满足对光滑性的要求。

最常用的样条函数为三次样条函数。

三次样条函数

三次样条函数定义：

设节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，若函数S($x$)在[$a$, b]上有二阶连续导数，在每个小区间[x_{i-1} , x_i]上是三次多项式，如果同时满足$S(x_i)=f(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \ldots, n$)，则称 $S(x)$ 为$f(x)$在[a , b]上的三次样条函数(插值)。即满足

（1）插值条件：$S(x_i)=y_i$，　$i=0,\cdots,n$

（2）连接条件：

$$S(x_i-0)=S(x_i+0),$$

$$S'(x_i-0)=S'(x_i+0),$$

$$S''(x_i-0)=S''(x_i+0),\qquad i=1,\cdots,n-1$$

三次样条函数的确定

由定义可设:$$S(x)=\begin{cases} s_1(x), & x\in[x_0,x_1] \\ s_2(x), & x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ s_n(x), & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

其中 $s_k(x)$ 为$[\,x_{k\text{-}1}\,,\,x_k\,]$上的三次多项式，且满足

$s_k(x_{k-1})=y_{k-1}$, $s_k(x_k)=y_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$插值条件

连接条件

$$S(x_k^-) = S(x_k^+), S'(x_k^-) = S'(x_k^+), S''(x_k^-) = S''(x_k^+)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$$

每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式，有4个待定系数，所以共有 $4n$ 个待定系数，需 $4n$ 个方程才能确定。前面已经得到 n+1 +3 (n −1) = $4n$ - 2 个方程，还缺 2 个方程！

实际问题通常对样条函数在端点处的状态有要求，即所谓的边界条件。

边界条件

第一类边界条件：给定函数在端点处的一阶导数，

$$\boxed{s'(x_0) = {y_0}', \qquad s'(x_n) = {y_n}'}$$

第二类边界条件：**给定函数在端点处的二阶导数，**即

$$\boxed{s''(x_0) = {y_0}'', \qquad s''(x_n) = {y_n}''}$$

当$s''(x_0) = s''(x_n) = 0$时，称为**自然边界条件**，此时的样条函数称为**自然样条函数。**

第三类边界条件：设$f(x)$是**周期函数**，并设$x_n - x_0$是一个周期，于是$s(x)$满足

$$\boxed{s'(x_0) = s'(x_n), \qquad s''(x_0) = s''(x_n)}$$

第四类边界条件（非扭结）：第一、二段多项式三次项系数相同，最后一段和倒数第二段三次项系数相同。

三次样条插值函数的构造

记三次样条插值函数$S(x)$ 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ 上的表达式为$S_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$。

(一)用节点处的一阶导数表示的三次样条插值函数

记节点处的一阶导数值为$S'(x_i)=m_i(i=0,1,\cdots,n)$，则$S(x)$在$[x_{i-1},x_i](i=1,2\cdots,n)$上就是满足

$$S(x_{i-1})=y_{i-1} \quad , \quad S(x_i)=y_i$$

$$S'(x_{i-1})=m_{i-1} \quad , \quad S'(x_i)=m_i$$

$(i=0,1,\cdots,n)$的三次埃尔米特插值多项式。

构造步骤可分为下三步:

第(1)步

在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上建立三次埃尔米特插值多项式 $S_i(x)$：

$$S_i(x) = \alpha_0(x)y_{i-1} + \alpha_1(x)y_i + \beta_0(x)m_{i-1} + \beta_1(x)m_i$$

$\alpha_0(x)$、$\alpha_1(x)$、$\beta_0(x)$、$\beta_1(x)$为基函数。

$$S_i(x) = \left[1 + 2\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right]\left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\right)^2 y_{i-1} + \left[1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\right]\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 y_i + (x - x_{i-1})\left(\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\right)^2 m_{i-1} + (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 m_i$$

若记$h_i = x_i - x_{i-1}$，则上式可写为

$$S_i(x) = \frac{(x - x_i)^2[h_i + 2(x - x_{i-1})]}{h_i^3} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2[h_i + 2(x_i - x)]}{h_i^3} y_i + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i-1})}{h_i^2} m_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{h_i^2} m_i$$

式中$x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$

第(2)步

为了确定m_i，需要用到$S(x)$的二阶导数在节点连续的条件，$S(x)$在$[\boldsymbol{x_{i-1}},\boldsymbol{x_i}]$和$[\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{x_{i+1}}]$上的二阶导数分别为

$$S_i''(x)=\frac{6x-2x_{i-1}-4x_i}{h_i^2}m_{i-1}+\frac{6x-4x_{i-1}-2x_i}{h_i^2}m_i+\frac{6(x_{i-1}+x_i-2x)}{h_i^3}(y_i-y_{i-1})\qquad (x\in[x_{i-1},x_i])$$

$$S_{i+1}''(x)=\frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_i+\frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_{i+1}^2}m_{i+1}+\frac{6(x_i+x_{i+1}-2x)}{h_{i+1}^3}(y_{i+1}-y_i)\qquad (x\in[x_i,x_{i+1}])$$

而
$$S''(x_i-0)=\frac{2}{h_i}m_{i-1}+\frac{4}{h_i}m_i-\frac{6}{h_i^2}(y_i-y_{i-1})$$
$$S''(x_i+0)=-\frac{4}{h_{i+1}}m_i-\frac{2}{h_{i+1}}m_{i+1}+\frac{6}{h_{i+1}^2}(y_{i+1}-y_i)$$

由$S''(x)$在x_i处连续可知$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$可得
$$\frac{1}{h_i}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)m_i+\frac{1}{h_{i+1}}m_{i+1}$$
$$=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\right)$$

上式两端同除以 $\dfrac{1}{h_i}+\dfrac{1}{h_{i+1}}$，得
$$\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}m_{i-1}+2m_i+\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}m_{i+1}$$
$$=3\left[\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right]$$

引入记号
$$
\begin{cases}
\lambda_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\
\mu_i = 1 - \lambda_i = \dfrac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \\
g_i = 3\left(\mu_i \underbrace{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}}_{f[x_i, x_{i+1}]} + \lambda_i \underbrace{\dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}}_{f[x_{i-1}, x_i]}\right)
\end{cases}
\qquad (i = 1,2,\cdots,n-1)
$$

第(3)步

则上式可写为

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = g_i \quad (i = 1,2,\cdots,n-1) \qquad (*)$$

对于第一种边界条件，即

$$S'(x_0) = m_0 \qquad S'(x_n) = m_n$$

则
$$\lambda_1 m_0 + 2m_1 + \mu_1 m_2 = g_1$$
$$\lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} + \mu_{n-1} m_n = g_{n-1}$$

即
$$2m_1 + \mu_1 m_2 = g_1 - \lambda_1 m_0$$
$$\lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} = g_{n-1} - \mu_{n-1} m_n$$

对于第一种边界条件，即当$S'(x_0) = m_0, S'(x_n) = m_n$

时，将该条件代入(*)式，可得三对角方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 m_0 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} m_n \end{bmatrix}$$

对于第二种边界条件,即当

$$S''(x_0) = M_0 \quad , \quad S''(x_n) = M_n$$

时，根据前面的计算可知

$$S_1''(x) = \frac{6x - 2x_0 - 4x_1}{h_1^2} m_0 + \frac{6x - 4x_0 - 2x_1}{h_1^2} m_1 + \frac{6(x_0 + x_1 - 2x)}{h_1^3} (y_1 - y_0)$$

由$S''(x_0) = M_0$，即$S_1''(x_0) = M_0$，可得

$$2m_0 + m_1 = \frac{3}{h_1} (y_1 - y_0) - \frac{h_1}{2} M_0$$

同理由 $S''(x_n) = M_n$可得

$$m_{n-1} + 2m_n = \frac{3}{h_n} (y_n - y_{n-1}) + \frac{h_n}{2} M_n$$

将该条件代入(*)式，得 三对角方程组

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & & & & \\
\lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\
& \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\
& & & & 1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
3\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - \dfrac{h_1}{2} M_0 \\
g_1 \\
g_2 \\
\vdots \\
g_{n-1} \\
3\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \dfrac{h_n}{2} M_n
\end{pmatrix}
$$

例 给出函数表

h_1 h_2 h_3

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	3	4	6
$f'(x_i)$	1			0

试求$f(x)$ 在区间[0,3]上的三次样条插值函数

解　令$m_0 = f'(0) = 1$，$m_3 = f'(3) = 0$，$h_i = 1(i = 1,2,3)$，有

$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = \frac{1}{2}$　$\mu_i = 1 - \lambda_i = \frac{1}{2}$

$$\lambda_i = \mu_i = \frac{1}{2} \qquad (i = 1,2)$$

$$g_1 = 3\left[\frac{1}{2}(f(1) - f(0)) + \frac{1}{2}(f(2) - f(1))\right] = 6$$

$$g_2 = 3\left[\frac{1}{2}(f(2) - f(1)) + \frac{1}{2}(f(3) - f(2))\right] = \frac{9}{2}$$

$$g_i = 3\left[\lambda_i \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \mu_i \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right]$$

则

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - \frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

解得$m_1 = \frac{7}{3}$ ， $m_2 = \frac{5}{3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 - \lambda_1 y_0' \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} y_n' \end{pmatrix}$$

从而三次样条插值函数为

$$S_1(x) = 3[1 + 2(1 - x)]x^2 + x(x - 1)^2 + \frac{7}{3}x^2(x - 1) \qquad (x \in [0,1])$$

$$S_2(x) = 3(2x - 1)(x - 2)^2 + 4(5 - 2x)(x - 1)^2 + \frac{7}{3}(x - 1)(x - 2)^2 + \frac{5}{3}(x - 2)(x - 1)^2$$

$$S_3(x) = 4(2x - 3)(x - 3)^2 + 6(7 - 2x)(x - 2)^2 + \frac{5}{3}(x - 2)(x - 3)^2 \qquad (x \in [2,3])$$

三次样条插值求解步骤

■由计算机数值求解的步骤

由边界条件和插值条件列三对角方程组;

用追赶法解方程组求得$m_0, m_1, \cdots, m_n$;

判断插值点 x 在第i 个小区间;

用第i个小区间的三次样条插值多项式求插值（每一段，基不同）.

■例4.6　求满足下列数据的三次样条插值函数 $S(x)$

■解法一（分析推导，称为承袭法）;(不适合编程)

■解法二（待定系数法）;（计算量大，解法一、二不适合数值计算）

■解法三（用计算公式）。（不适合手工计算，是数值求解的有效算法）

9. 已知 $y=\sqrt{x}$ 在 100，121，144 处取值，用牛顿插值法求 $x=115$ 时 y 的近似值。

解：牛顿差商表：

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_0, x_k]$	$f[x_0, x_1, x_k]$
0	100	10		
1	121	11	$\frac{11-10}{121-100}=\frac{1}{21}$	
2	144	12	$\frac{12-10}{144-100}=\frac{1}{22}$	$\frac{\frac{1}{22}-\frac{1}{21}}{144-121}=\frac{1}{21\times22\times23}$

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_1)(x-x_0)$$

$$=10+\frac{1}{21}\times(x-100)+\frac{1}{21\times22\times23}(x-100)(x-121)$$

$$=10.7415$$

13. 求三次样条 $S(x)$，

(1)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	1	0
$f'(x)$	0			-1

解：$x_0=-1$　$x_1=0$　$x_2=1$　$x_3=2$

$m_0=0$　$m_3=-1$

$h_i=1$

$\lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=\frac{1}{2}$

$\mu_i=1-\lambda_i=\frac{1}{2}$

$$g_1(x)=3\left[\frac{1}{2}\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}+\frac{1}{2}\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\right]$$

$$=3\left(\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times1\right)$$

$$=3$$

$$g_2(x)=3\left[\frac{1}{2}\frac{f(1)-f(0)}{1-0}+\frac{1}{2}\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\right]$$

$$=3\times\left(\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times(-1)\right)$$

$$=0$$

公式法：

$$\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1\\ m_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\frac{1}{2}\times0\\ 0-\frac{1}{2}\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2m_1+\frac{1}{2}m_2=3\\ \frac{1}{2}m_1+2m_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}m_1=23/15\\ m_2=-2/15\end{cases}$$

① $-1\le x\le 0$

$$l_0(x)=\frac{x-0}{-1-0}=-x$$

$$l_1(x)=\frac{x-(-1)}{0-(-1)}=x+1$$

$$\alpha_0(x)=(1+2(x+1))(-x)^2$$

$$=x^2(2x+3)=2x^3+3x^2$$

$$\alpha_1(x)=(1+2(-x))(x+1)^2$$

$$=(1-2x)(x+1)^2=(1-2x)(x^2+2x+1)=x^2+2x+1-2x^3-4x^2-2x=-2x^3-3x^2+1$$

$$\beta_0(x)=(x-(-1))(-x)^2$$

$$=x^2(x+1)=x^3+x^2$$

$$\beta_1(x)=(x-0)(x+1)^2$$

$$=x(x+1)=x^2+x$$

$$S(x)=-\frac{7}{15}x^3+\frac{1}{15}x^2+\frac{23}{15}x$$

② $0\le x\le 1$　$S(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{15}x^2+\frac{23}{15}$

③ $1\le x\le 2$　$S(x)=\frac{13}{15}x^3-\frac{13}{3}x^2+\frac{89}{15}x-\frac{22}{15}$

(2)

x	-1	0	1
$f(x)$	-1	0	1
$f''(x)$	0		-1

解：待定系数法（插值条件，连接条件，边界条件）

$$S(x)=\begin{cases}a_0x^3+b_0x^2+c_0x+d_0 & -1\le x\le 0\\ a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$S'(x)=\begin{cases}3a_0x^2+2b_0x+c_0 & -1\le x\le 0\\ 3a_1x^2+2b_1x+c_1 & 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$S''(x)=\begin{cases}6a_0x+2b_0 & -1\le x\le 0\\ 6a_1x+2b_1 & 0\le x\le 1\end{cases}$$

$S(-1)=-1$　$S(0)=0$　$S(1)=1$

$S''(-1)=0$　$S''(1)=-1$

$$\begin{cases} -a_0 + b_0 - c_0 + \cancel{d_0} = -1 \\ d_0 = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 + \cancel{d_1} = 1 \\ d_1 = 0 \\ -6a_0 + 2b_0 = 0 \\ 6a_1 + 2b_1 = -1 \\ 2b_0 = 2b_1 \\ c_0 = c_1 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{12}x, & -1 \le x \le 0 \\ -\frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{12}x, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

14. 已知 $f(2) = 1$，$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1, & 0 \le x \le 1 \\ p(x), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ 为 $f(x)$ 关于节点 $0, 1, 2$ 的三次样条，求多项式 $p(x)$ 的表达式。

解：设 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$S'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 3ax^2 + 2bx + c, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 0 \le x \le 1 \\ 6ax + 2b, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 1$$

$$S(1-0) = S(1+0)$$
$$S'(1-0) = S'(1+0)$$
$$S''(1-0) = S''(1+0)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - 1 + 1 = a + b + c + d \\ 1 - 2x = 3a + 2b + c \\ 2 - 2 = 6a + 2b \Rightarrow b = -3a \end{cases}$$

$$p(x) = \frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 4x - \frac{1}{3}$$