第五章　　数值微积分

第一节　数值积分公式

数值积分引言

计算定积分 $\boxed{I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

微积分基本公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$牛顿-莱布尼茨公式

但是在许多实际计算问题中

(1) $f(x)$ **表达式较复杂，原函数难求！甚至有时不能用初等函数表示。如** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4},\ \dfrac{\sin x}{x},\ e^{-x^2}$

(2) $f(x)$ **表达式未知，只有通过测量或实验得来的数据表示。**

此时理论的牛顿-莱布尼茨公式无效，需要利用数值方法来近似计算定积分。

1. 机械求积

记

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

则$\boldsymbol{I}$为泛函——即将函数 $\boldsymbol{F}$映射为一个数。

由定积分中值定理，$\boldsymbol{f(x)}$当在$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ 上连续时，存在

$\xi \in [a, b]$，使得：

$$I(f) = (b-a)f(\xi)$$

则积分问题转化为对$\boldsymbol{f(\xi)}$进行估计的问题。

几个简单求积公式

定积分中值定理： $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

$f(\xi)$ 可看做区间[a, b]上的平均高度（需要估计）。

✓ 分别用 $f(a)$，$f(b)$ 和 $f\big((a+b)/2\big)$ 近似 $f(\xi)$ 可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(a) \longrightarrow \boxed{\text{左矩形公式（5.2）}}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(b) \longrightarrow \boxed{\text{右矩形公式（5.3）}}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \longrightarrow \boxed{\text{中矩形公式（5.4）}}$$

✓ 若用 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的算术平均值近似 $f(\xi)$，则可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \longrightarrow \boxed{\text{梯形公式（5.5）}}$$

一般求积公式

更一般地，可以用 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一些离散点

$$a \le \boxed{x_0 < x_1 < \cdots < x_n} \le b$$

求积节点（结点）

上的值加权平均作为 $f(\xi)$ 的近似值，从而构造出

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \boxed{A_i} f(x_i)$$

机械求积公式

求积系数（权）

记 $\boxed{Q(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)}$，则误差为 $\boxed{R(f) = I(f) - Q(f)}$

问题：什么样的求积公式误差可能会比较小呢？

代数精度

定义5.1: 如果对于一切次数不超过 m 的多项式 $f(x)$，公式

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx Q(f), Q(f)$ − −线性泛函

精确成立，但对于某一次数为 $m+1$ 的多项式 $f(x)$ 不精确成立，则称该求积公式的代数精度为 m 次。

当泛函 $F(f)$ 对任意函数 f，g，实数 k，l 满足

$$F(kf + lg) = kF(f) + lF(g)$$

时，称为 $F(f)$ 为线性泛函。显然机械求积公式左 $I(f)$ 右 $Q(f)$ 均为线性泛函。

例5.4

将 $f(x)\equiv\alpha$ 分别代入左矩阵公式（5.2）及梯形公式（5.5）得：

0次　　1次

$$I(f)=\int_a^b \alpha dx=(b-a)\alpha$$

$$G_a(f)=(b-a)\alpha;\ \surd\ T(f)=\frac{(b-a)}{2}(\alpha+\alpha)=(b-a)\alpha\ \surd$$

而将 $f(x)=\alpha x+\beta$ 分别代入矩阵公式（5.2）及梯形公式（5.5）得 $I(f)\neq G_a(f), I(f)=T(f)$

而将 $f(x)=x^2$ 代入梯形公式（5.5）得 $I(f)\neq T(f)$

$G_a(f)$只有零次代数精度，$T(f)$有一次代数精度。

利用定义验证代数精度非常不便，而利用线性泛函的特性可简化代数精度的验证过程。

性质5.1: 公式

$$I(f)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx Q(f)$$

有m次代数精度的充要条件为该式对$1, x, x^2, \ldots, x^m$精确成立，但对$f(x)=x^{m+1}$不精确成立.

要验证一个求积公式具有 m 次代数精度，只需验证对$f(x)=1, x, x^2, \ldots, x^m$精确成立，但对$f(x)=x^{m+1}$不精确成立即可，即：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} A_i x_i^m = \int_a^b x^m \,\mathbf{d}x = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} A_i x_i^{m+1} \neq \int_a^b x^{m+1} \,\mathbf{d}x = \frac{b^{m+2}-a^{m+2}}{m+2} \end{cases}$$

矩形和梯形公式的代数精度

容易验证：

✓左矩形公式 和 右矩形公式 具有 零次 代数精度。

✓中矩形公式 和 梯形公式 具有 一次 代数精度。

举例（一）

例： 试确定系数 A_i，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

解： 将 $f(x)=1, x, x^2$ 代入求积公式，使其精确成立得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} 1dx = (1^1 - (-1)^1)/1 = 2 \\ -A_0 \qquad + A_2 = \int_{-1}^{1} xdx = (1^2 - (-1)^2)/2 = 0 \\ A_0 \qquad + A_2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = (1^3 - (-1)^3)/3 = 2/3 \end{cases}$$

奇函数在对称区间的积分为0

解得 $A_0=1/3, A_1=4/3, A_2=1/3$，所以求积公式为:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx [f(-1) + 4f(0) + f(1)]/3$$

代数精度为2次吗?

易验证该公式对 $f(x)=x^3$ 也精确成立，但对 $f(x)=x^4$ 不精确成立，所以此求积公式具有 3 次代数精度。

牛顿–科茨（Newton-Cotes）公式

- 设 $f(x)$ 在节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的函数值为 $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$，作 n 次拉格朗日插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

于是有

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x \equiv \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)}$$

其中 $\boxed{A_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{j\ne i}^{j=0,..n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\mathrm{d}x}$ **插值型求积公式**

定理 求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 至少具有 n 次代数精度的充要条件是：它是插值型的。

牛顿–科茨（Newton-Cotes）公式

插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \text{ 其中 } A_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x$$

等分节点的插值型求积公式称为牛顿–科茨公式：

取等分节点：$x_i = a + i\,h$， $h = \dfrac{b-a}{n}$， $i = 0, 1, \ldots, n$

令 $x = a + t\,h$ 得：

$$A_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{\substack{j=0,..n\\ j\neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,\mathrm{d}x = \int_0^n \prod_{\substack{j=0,...,n\\ j\neq i}} \frac{t-j}{i-j}\cdot h\mathrm{d}t$$

$$= \frac{(b-a)(-1)^{n-i}}{n\cdot i!\cdot(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0,...,n\\ j\neq i}} (t-j)\mathrm{d}t$$

牛顿–科茨公式（续）

$$A_i = \frac{(b-a)(-1)^{n-i}}{n\, i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0,\dots,n \\ j\neq i}} (t-j)dt$$

科茨(Cotes)系数 $C_i^{(n)}$

注：Cotes 系数（常数） $C_i^{(n)} = A_i/(b-a)$ 仅取决于 n 和 i，与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a, b]$ 均无关。

牛顿–科茨公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$

几个常见公式

$n=1$: $C_0^{(1)}=\dfrac{1}{2}$, $C_1^{(1)}=\dfrac{1}{2}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = T$$

梯形求积公式 代数精度 $=1$

$n=2$: $C_0^{(2)}=\dfrac{1}{6}$, $C_1^{(2)}=\dfrac{2}{3}$, $C_2^{(2)}=\dfrac{1}{6}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)] = S$$

抛物线求积公式

辛甫森(Simpson)求积公式

代数精度 $=3$

$n=4$: 科茨(Cotes)求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)] = C$$

$x_i = a + i\cdot h,\quad h=(b-a)/4$

科茨系数表

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

系数特点和稳定性

科茨具有以下特点：

(1) $\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1$

(2) $C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$

(3) 当 $n \geq 8$ 时，出现负数，稳定性得不到保证。而且当 n 较大时，由于Runge现象，收敛性也无法保证。

故一般不采用高阶的牛顿-科茨求积公式。

当 $n \leq 7$ 时，牛顿-科茨公式是稳定的。

牛顿–科茨公式的代数精度

例：辛普森求积公式精度：

解：？

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)]$$

三次代数精度

可以证明：

当 n 为奇数时，牛顿一科茨公式至少有 n 次代数精度。

当 n 为偶数时，牛顿一科茨公式至少有 $n+1$ 次代数精度。

举例

例： 分别用梯形公式(n=1)和simpson(n=2)公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$

解： $a=0,\ b=1,\ f(x)=e^{-x}$，

由梯形公式可得

$$T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]=\frac{1}{2}\left[e^{0}+e^{-1}\right]=0.6839$$

由 simpson 公式可得

$$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right]=\frac{1}{6}\left[e^{0}+4e^{-0.5}+e^{-1}\right]=0.6323$$

与精确值0.6321...相比得误差分别为0.0518和0.0002。

5.4 数值微分

问题： 已知 $f(x)$ 在节点 $x_0, \ldots, x_n$ 上的函数值，如何计算在这些节点处导数的近似值？

方法1：差商法

导数是差商的极限，因此可用差商近似导数.

方法2：插值型求导

先构造出$f(x)$的插值多项式 $p_n(x)$，然后用$p_n(x)$的导数来近似$f(x)$的导数。

5.4 数值微分法

由导数定义可得到一些简单的数值微分公式：

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

1 差商法

向前差商公式

$$\boxed{f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}, \quad \Delta x = h, \quad h > 0$$

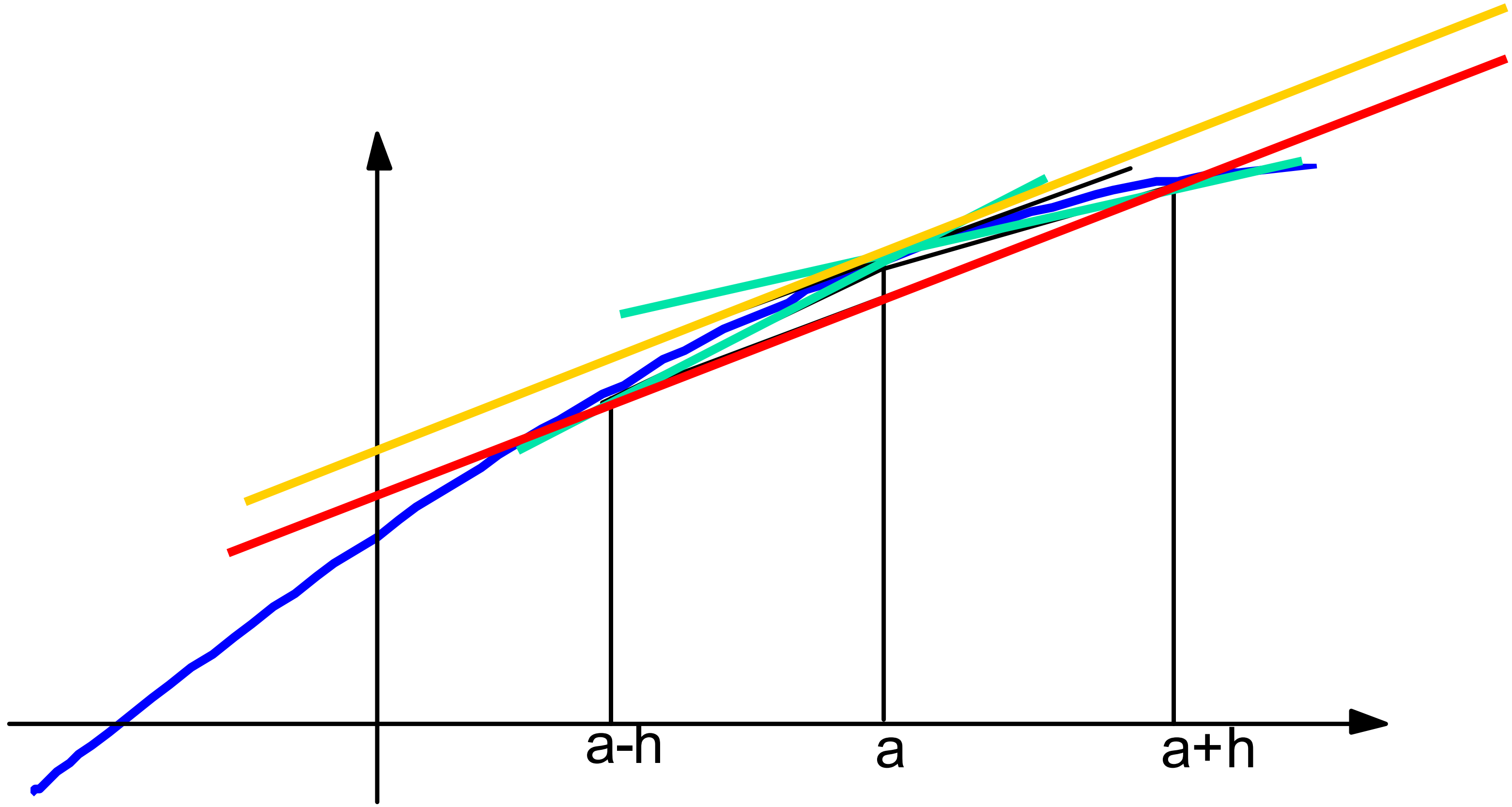
向后差商公式

$$\boxed{f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}}, \quad \Delta x = -h$$

中心差商公式

$$\boxed{f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}}$$

差商公式比较



中心差商精度比较高

插值型求导
——余项公式

多项式插值余项

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

两边求导得

$$R(x)=f'(x)-L_n{}'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\left(\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right)'$$

ξ_x与x有关，

$$+\frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\left(f^{(n+1)}(\xi_x)\right)'$$

当x为某节点时，$\omega(x)=0,(\omega(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j))$

$$\boxed{R(x)=f'(x)-L_n'(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega'(x)\approx 0\text{ ,余项可控制}}$$

得 $f'(x)\approx L_n{}'(x)$

两点公式

两点公式（等距）：

$n=1$，节点 x_0，x_1，

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)$$

$$=\frac{-(x-x_1)f(x_0)+(x-x_0)f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$\boxed{L_1{}'(x)=\frac{1}{x_1-x_0}(f(x_1)-f(x_0))}$$

由 $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)$

设 $x_0=a$, $x_1=a+h$，步长 $h=x_1-x_0$

$$\omega(x) = (x-a)(x-a-h) = (x-a)^2 - h(x-a)$$

$$\omega'(x) = 2(x-a) - h$$

得$\omega'(x_0) = -h$

$$R(x_0) = f'(x_0) - L_1'(x_0) = \frac{f''(\xi_x)}{2}\omega'(x_0)$$

$$= -\frac{h}{2}f''(\xi_0)$$

两点公式

所以 $f'(x_0) = \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)) - \frac{h}{2}f''(\xi_0)$,**向前差商**

同理，$h = x_0 - x_1$得$x_1 = x_0 - h$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(f(x_0) - f(x_0-h)) + \frac{h}{2}f''(\xi_1)$$ **向后差商**

两点公式

三点公式（等距）

三点公式(等距)：

$n=2$，步长 h ，节点 $x_i = x_0 + ih$ ，$i = 0, 1, 2$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

令 $x = x_0 + th, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$ 得

$$L_2(x_0+th) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)f(x_0) - t(t-2)f(x_1) + \frac{1}{2}t(t-1)f(x_2)$$

对t求导

$$\boxed{hL_2'(x) = \frac{1}{2}[(2t-3)f(x_0) - 4(t-1)f(x_1) + (2t-1)f(x_2)]}$$

$$L_2'(x) = \frac{1}{2h}[(2t-3)f(x_0) - 4(t-1)f(x_1) + (2t-1)f(x_2)]$$

三点公式（等距）

分别令 $t=0,1,2$，得

$$L_2'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)]$$

$$L_2'(x_1) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_0) + f(x_2)\right]$$

$$L_2'(x_2) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)\right]$$

由$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$$=(x-x_0)^3-3h(x-x_0)^2+2h^2(x-x_0)$$

$$\omega'(x)=3(x-x_0)^2-6h(x-x_0)+2h^2$$

得$\omega'(x_0)=2h^2, \omega'(x_1)=-h^2, \omega'(x_2)=2h^2$

三点公式

所以

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_2)\right]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

中心差商:

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}\left[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

举例

例：已知函数 $y=e^x$ 的函数值表

x_i	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
y_i	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

试用两点和三点公式计算 $x=2.7$ 处的一阶导数。

解：两点公式：

精确值y'(2.7)=y(2.7)=14.8797...

取 $x_0=2.6$， $x_1=2.7$，得：

$f'(a) \approx \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$

向后差商： $$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.1}\big(f(2.7)-f(2.6)\big)=14.1600$$

若取 $x_0=2.7$， $x_1=2.8$，则

$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

向前差商： $$f'(2.7)\approx\frac{1}{0.1}\big(f(2.8)-f(2.7)\big)=15.6490$$

举例

精确值y'(2.7)=y(2.7)=14.8797...

若取 $x_0=2.5$， $x_1=2.7$，则

向后差商： $f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}\left(f(2.7)-f(2.5)\right)=13.4860$

若取 $x_0=2.7$， $x_1=2.9$，则

向前差商： $f'(2.7)\approx\frac{1}{0.2}\left(f(2.9)-f(2.7)\right)=16.4720$

通常步长越小，误差也越小。

三点公式：取 $x_0=2.6$， $x_1=2.7$， $x_2=2.8$，得

中心差商： $f'(2.7)\approx\frac{1}{2\times0.1}\left(f(2.8)-f(2.6)\right)=14.9045$

问题：是不是步长越小，误差一定越小？

例子：用中心差商 $G(h)=\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{2h}$ 计算 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=2$ 处的一阶导数。取4位有效数字计算。

h	*G(h)*
1	0.3660
0.5	0.3564
0.1	0.3535
0.05	0.3530
0.01	0.3500

h	*G(h)*
0.005	0.3500
0.001	0.3500
0.0001	0.3000
0.00001	0.0000
……	……

准确值 $f'(2)=$ 0.353553...

有舍入误差的影响，步长 *h* 不能太小！

2. 确定以下求积公式的参数使其有尽可能高的代数精度.

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$, $x_1<x_2<x_3$

(2) $\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx A_1 f(-h) + A_2 f(0) + A_3 f(h)$ ($h>0$ 为给定常数)

解: (1) 令 $f(x)=1$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx \approx 3c = 2$

令 $f(x)=x$

$\int_{-1}^{1} x\,dx = c(x_1+x_2+x_3) = 0$

令 $f(x)=x^2$

$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = c(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = \frac{2}{3}$

令 $f(x)=x^3$

$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = c(x_1^3+x_2^3+x_3^3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\frac{2}{3} \\ x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2=0 \\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx Q(f) = \frac{2}{3}[f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(0) + f(\frac{\sqrt{2}}{2})]$

令 $f(x)=x^4$

$I(f)=\frac{2}{5}$ $\quad Q(f)=\frac{1}{3}$

有3次代数精度

(2) $\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx A_1 f(-h) + A_2 f(0) + A_3 f(h)$

令 $f(x)=1$

$\int_{-2h}^{2h} 1\,dx = A_1+A_2+A_3 = 4h$

令 $f(x)=x$

$\int_{-2h}^{2h} x\,dx = -hA_1 + hA_3 = 0$

令 $f(x)=x^2$

$\int_{-2h}^{2h} x^2\,dx = h^2A_1 + h^2A_3 = \frac{16}{3}h^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=\frac{8}{3}h \\ A_2=-\frac{4}{3}h \\ A_3=\frac{8}{3}h \end{cases}$$

$I(f)=\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx Q(f) = \frac{4}{3}h[2f(-h) - f(0) + 2f(h)]$

令 $f(x)=x^3$

$I(f)=Q(f)=0$

令 $f(x)=x^4$

$I(f)=\frac{64}{5}h^5$ $\quad Q(f)=\frac{16}{3}h^5$

有3次代数精度

3. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx A_1 f(-1) + A_2 f(-\frac{1}{3}) + A_3 f(\frac{1}{3})$

解: 对 $1, x, x^2$ 准确

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=2 \\ -A_1-\frac{1}{3}A_2+\frac{1}{3}A_3=0 \\ A_1+\frac{1}{9}A_2+\frac{1}{9}A_3=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=\frac{1}{2} \\ A_2=0 \\ A_3=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$I(f)=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}[f(-1)+3f(\frac{1}{3})]$

令 $f(x)=x^3$

$I(f)=0$ $\quad Q(f)=-\frac{4}{9}$

至少2次代数精度

取 $H(x)$ 不超过2次多项式

$H(-1)=f(-1)$

$H(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3})$ $\quad H'(\frac{1}{3})=f'(\frac{1}{3})$

余项 $R(f) = I(f)-Q(f)$

$= \frac{f'''(\xi)}{3!}\int_{-1}^{1}(x+1)(x-\frac{1}{3})^2\,dx$

10. 由插值多项式导出向后差商公式及其余项

解: 向后插值公式:

$f'(a) = \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$

$x_0 = a-h$

$x_1 = a$

$L_1(x) = f(a-h) + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}(x-a+h)$

$L_1'(x) = \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$

$f'(a) \approx L_1'(a) = \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$

$\omega(x) = (x-a+h)(x-a)$

$= (x-a)^2 + h(x-a)$

$\omega'(x) = 2(x-a)+h$

$f'(a) - L'(a) = \frac{f''(\xi)}{2}\omega'(a)$