徐昊霆

A Note of

Differentiable Manifold

For Physicists

SPA, SYSU

目录

第一章　微分流形与张量场 **5**

1.1　微分流形 5

1.2　流形上的切矢量 6

1.3　切空间--流形上的切矢量形成线性空间 7

1.4　余切空间--切空间的对偶空间 8

1.5　切空间上的张量 9

1.5.1　切空间上张量的定义 9

1.5.2　度规张量给出的余切矢量 10

1.6　用坐标来表示上面的定义 10

1.6.1　标量场的表象 10

1.6.2　切矢量和余切矢量的分量 10

1.6.3　张量的分量 12

1.6.4　度规的逆、张量指标的升降 13

1.7　场 14

第一章　微分流形与张量场

1.1　微分流形

定义 1.1.1 (开覆盖) 一集合 X 的开子集的集合 $\{O_\alpha\}$ 叫做 $A \subset X$ 的一个开覆盖 *(open cover)*，如果 $A \subset \cup_\alpha O_\alpha$，也可以说 $\{O_\alpha\}$ 覆盖了 A。

定义 1.1.2 (n 维微分流形) 对于拓扑空间 $(M, \mathcal{T})$，如果 M 有开覆盖 $\{O_\alpha\}$，$M \subset \cup_\alpha O_\alpha$，满足

(a) 存在同胚映射 $\psi_\alpha : O_\alpha \to V_\alpha$($V_\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 用通常拓扑衡量的开子集)

(b) $O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$，则复合映射 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$(如图 1.1) 是光滑的。

则称拓扑空间 $(M, \mathcal{T})$ 为 n 维微分流形，简称 n 维流形。

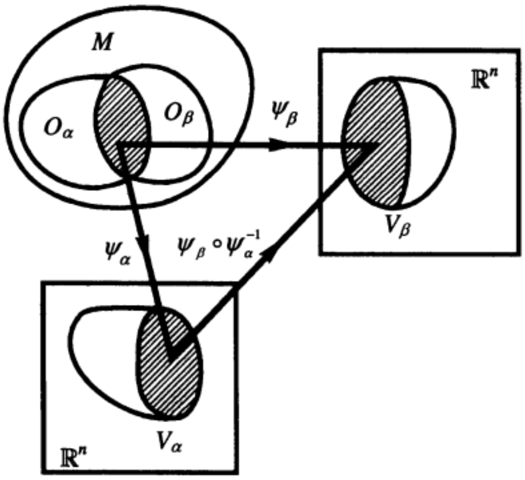

图 1.1: 微分流形的定义

简单来说，开覆盖是很多小开集的集合，这些小开集把整个集合铺满了。

现在又在每个小开集上定义了一个坐标网，即上面定义的同胚映射，把定义了坐标网的拓扑空间叫做微分流形。一个形象的比喻如图所示，如果把集合比作鱼，那么开集就是鱼身上的鳞片，开覆盖就是鱼身上鳞片的集合，如果每两个包含同一点的鳞片，那么就说鱼的表皮是连续的。如果在每一个鳞片上画一系列坐标网 (即把每一点映射到 2 维数组上)，那么鱼的表面就是一个二维微分流形。[1]

图 1.2: 鱼和鱼的鳞片

1.2 流形上的切矢量

我们先来定义流形上的标量场。

定义 1.2.1 (流形上的标量场) 流形 $\mathcal{M}$ 上的标量场是映射 $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$，即将流形上的一个点 p 映射到一个实数 $f(p)$。流形 $\mathcal{M}$ 上所有标量场的集合记为 $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$

例如，温度、压强、质量密度、电荷密度、高斯曲率等等，都是从一个点到实数轴上的映射，因此都是标量场。

有了流形上的标量场，我们来定义流形 $\mathcal{M}$ 上点 p 的切矢量。

定义 1.2.2 (流形上某一点的切矢量) 流形 $\mathcal{M}$ 上点 p 的切矢量是标量场到实数的映射。即 $X_p:\mathcal{F}_{\mathcal{M}}\to\mathbb{R}$，并且满足

[1]这个比喻来源于我的一位很好的朋友，他是一个小恐龙爱好者。原来的比喻是恐龙上的鳞片。

- X_p 是线性映射，即

$$X_p(\alpha f+\beta g)=\alpha X_p(f)+\beta X_p(g)$$

  其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$。

- 满足莱布尼茨律

$$X_p(fg)=f(p)X_p(g)+g(p)X_p(f)$$

练习 1.2.1 利用切矢量的定义证明

1. $X_p(1)=0$
2. $X_p(c)=0$
3. $X_p(\alpha f)=\alpha X_p(f)$

1.3 切空间--流形上的切矢量形成线性空间

上面我们定义了切矢量是流形上标量场到实数轴的线性、满足莱布尼茨律的映射。在切矢量定义的基础上定义切矢量的加法和数乘，可以定义切空间[2]，记为 $T_p\mathcal{M}$，意为流形上 p 点的切空间。

定义 1.3.1 (切矢量的线性运算) 定义切矢量的加法为

$$(X_p+Y_p)(f)=X_p(f)+Y_p(f)$$

存在一个特殊的 $0_p\in T_p\mathcal{M}$，使得对于任意 $f\in\mathcal{F}_\mathcal{M}$ 有 $0_p(f)=0$，切矢量的数乘定义为

$$(\alpha X_p)(f)=\alpha X_p(f)$$

应当注意对数乘定义的解读，(αX_p) 整体表示一个映射，它接收一个标量场 f，作用效果是先将 f 给 X_p 作用，再乘以实数 α。因此，通过定义加法和数乘，我们把切矢量组成了一个线性空间，被叫做切空间。

[2]顾名思义，切矢量所形成的空间

1.4 余切空间--切空间的对偶空间

先补充一下什么是对偶空间。

定义 1.4.1 (对偶空间) 线性空间 V 的对偶空间 V^* 是 V 上所有线性函数的集合。定义线性函数之间的加法和数乘也满足线性的关系

$$(\alpha f+\beta g)(v)=\alpha f(v)+\beta g(v)$$

现在给线性空间 V 选择一组基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，这里面的 n 称为线性空间的维数，记作 $n=\dim V$。定义一种特殊的线性函数 e^i，使得

$$e^i(e_j)=\delta^i_j$$

显然，可以证明，所有的线性函数都可以用 e^i 线性表示。所以说，$\{e^1,\cdots,e^n\}$ 构成对偶空间的一组基底。于是，线性空间和它的对偶空间是同维的。

现在我们定义切空间的对偶空间--余切空间。记余切空间为 $T^*_p\mathcal{M}$，记余切空间中的元素为 $df_p : T_p\mathcal{M}\to\mathcal{R}$，按照对偶空间的定义，$df_p$ 应该是切矢量的线性映射

$$df_p(\alpha X_p+\beta Y_p)=\alpha df_p(X)+\beta df_p(Y)$$

因此，找到一种线性映射就可以了，我们定义

定义 1.4.2 (余切矢量) 余切矢量 df_p 的定义为

$$df_p(X_p)\equiv X_p(f)$$

为了证明它确实是一个对偶空间的矢量，我们证明它对作用的元素线性，并证明映射本身是线性的：首先证明对元素的线性，对于两个切矢量 X_p, Y_p, 有

$$df_p(X_p+Y_p)=(X_p+Y_p)(f)=X_p(f)+Y_p(f)=df_p(X_p)+df_p(Y_p)$$

得证。再证明余切空间元素本身是线性的

$$(df_p+dg_p)(X_p)=X_p(f+g)=X_p(f)+X_p(g)=df_p(X_p)+dg_p(X_p)$$

可见上面的定义式 1.1满足对偶空间的条件。应当指出的是，我们把余切空间中的元素定义 df_p，并不意味着它是标量场的微分，而只是一种记号，虽然我们将看到它确实是某种微分。

1.5 切空间上的张量

1.5.1 切空间上张量的定义

定义 1.5.1 (线性空间上的张量) 对于一般的线性空间 V，如果它的对偶空间为 V^*，那么线性空间上的 *(s,t)* 型定义为一个 $s+t$ 元多重线性函数 *(*对每一个自变量呈线性*)*，即

$$T:\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{s}\times\underbrace{V^*\times V^*\times\cdots\times V^*}_{t}$$

将一般的线性空间换成我们的切空间，得到切空间上张量的定义。即多重线性函数 $T(X_1,\cdots,X_s;df_1,\cdots,df_t)$。利用 $\mathcal{T}_V(s,t)$ 表示全体 (s,t) 型张量的集合。

定义 1.5.2 (张量积) V 上的 (s,t) 和 (s',t') 型张量 T 和 T' 的张量积 $T\otimes T'$ 是一个 $(s+s',t+t')$ 型张量，定义为

$$\begin{aligned}&T\otimes T'\left(v_1,\cdots,v_l,v_{l+1},\cdots,v_{l+l'};\omega^1,\cdots,\omega^k;\omega^{k+1},\cdots,\omega^{k+k'}\right)\\&=T\left(v_1,\cdots,v_l,v_{l+1};\omega^1,\cdots,\omega^k\right)T'\left(v_{l+1},\cdots,v_{l+l'};\omega^{k+1},\cdots,\omega^{k+k'}\right)\end{aligned}$$

定理 1.5.1 $\mathcal{T}_V(s,t)$ 是向量空间，它的维数为 $\dim(s,t)=n^{s+t}$

证明略。

度规张量是切空间 $T_p\mathcal{M}$ 上的一个 $(2,0)$ 型对称张量，即它接收两个切矢量并返回一个实数，它是通过两个切矢量的内积定义的

$$\langle X,Y\rangle\equiv g(X,Y)$$

回忆线性空间上内积的定义[3]，我们得到度规需要满足 $g(X,Y)=g(Y,X)$，这时由内积的可交换性质给出的。对于内积永远大于等于零这一点，我们在这里予以舍弃，即我们不要求切矢量的内积是正定的。物理上，这对应于相对论中的时空间隔可以为负。如果说 $\forall X\in T_p\mathcal{M}$ 都有 $g(X,X)>0$, 则称具有这种度规的流形为黎曼流形。

应当注意，在之前我们都是抽象地去讨论一个流形上的切矢量、余切矢量、切空间、余切空间，有了内积的定义，我们才能对流形的“形状”有某种感觉。

[3]注意这个内积的定义是内积满足可交换、线性、正定，并不是高中学过的坐标相乘。

1.5.2 度规张量给出的余切矢量

定义 1.5.3 (切矢量自然对应的余切矢量) 如果流形 $\mathcal{M}$ 装备了度规 g，映射 $g_X(Y) \equiv g(X, Y)$，由于内积的线性性质，可以知道 g_X 是切空间到实数轴的线性映射，即余切矢量。所以称 g_X 是切矢量 X 自然对应的余切矢量。

1.6 用坐标来表示上面的定义

我们知道流形 $\mathcal{M}$ 上定义了一个开集 O，上面定义了一个到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 ψ，叫做局部坐标。

定义 1.6.1 (图) 结构 (O, ψ) 称作图。一个点上所有图的集合叫做图册。

两个重叠的图有坐标变换 $\psi_b \circ \psi_a^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，如果这个映射在流形上处处光滑，那么流形就叫做光滑的。

有了流形上点的局域坐标，我们便可以把流形上的点映射到 n 维数组上去。也就是说

$$p \to \left(x^1, \cdots, x^n\right) \tag{1.1}$$

1.6.1 标量场的表象

我们之前学过，标量场是流形上点到实数轴的映射，而现在流形上的点又通过局域坐标 ψ 映射到 n 维数组上，那么我们可以建立一个点的局域坐标直接到实数轴上的映射，记为 F，故有

$$F \equiv f \circ \psi^{-1} \tag{1.2}$$

可见 F 和 f 的联系，无非一个是把坐标映射到实数轴，而另一个是把抽象的点映射到实数轴。在今后讨论的，选好局域坐标的情况，读者可以不考虑 F, f 的区别。

1.6.2 切矢量和余切矢量的分量

回顾切矢量的定义，切矢量是标量场场到实数轴的映射。我们考虑算符

$$\partial_\mu(f) \equiv \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \tag{1.3}$$

证明上面的算符是切矢量，即证明它们满足线性和莱布尼茨律。考虑两个标量场相乘

$$\partial_\mu(fg) = \partial_\mu(FG) = G\partial_\mu F + F\partial_\mu G = g\partial_\mu f + f\partial_\mu g \tag{1.4}$$

从而可以证明它们满足莱布尼茨律。线性的证明和上面类似。

定理 1.6.1 (切矢量的基) 所有的切矢量都可以用 ∂_μ 唯一的线性表示，即

$$X = X^\mu \partial_\mu \tag{1.5}$$

从而 ∂_μ 张成 $T_p\mathcal{M}$。这个定理的证明十分困难，证明终止。有了切矢量的基，我们就可以定义余切矢量的基，回顾切矢量和余切矢量的定义

$$X_p(f) = df(X) \tag{1.6}$$

考虑一个特殊的标量场，即 p 点的第 ν 个坐标 x^ν，我们试图定义 dx^μ 使得

$$\partial_\mu(x^\nu) = dx^\nu(\partial_\mu) = \delta^\nu_\mu \tag{1.7}$$

上面 dx^μ 的定义是微分的正式定义，彻底解决了"无穷小"概念含糊不清的问题。因为每一个切矢量都可以用基来表示，自然地想到每一个余切矢量也可以用基来表示，我们大胆猜测有定理

定理 1.6.2 (余切矢量的基) 任意一个余切矢 $df \in T_p^*\mathcal{M}$ 可以进行展开 $df = f_\nu dx^\nu$。

证明略。考虑一个一般的余切矢量 df，按照定义有

$$df(\partial_\mu) = \partial_\mu(f) \tag{1.8}$$

另一方面，把这个余切矢量展开，则有

$$df(\partial_\mu) = (f_\nu dx^\nu)(\partial_\mu) = f_\mu \tag{1.9}$$

于是，有

$$f_\mu = \partial_\mu(f) = df(\partial_\mu) \tag{1.10}$$

上面的式子可以这样解读:余切矢量 df 作用在切矢量的基上得到余切矢量在坐标下的表象。

我们前面说过，切矢量是标量场到实数轴的映射，但是我们也可以不喂给它一个标量场，我们也可以喂给它一个余切矢量，定义喂给它一个余切矢量等效于喂给它一个标量场，即

$$X(df) \equiv X(f) \tag{1.11}$$

这不禁让我们思考，余切矢量和标量场是不是一一对应的呢？这个问题留给读者去探索。如果我们引入上面的定义，我们就会得到上面类似的解读:切矢量 X 作用在余切矢量的基上得到切矢量在坐标下的分量。

练习 1.6.1 写出上面解释对应的公式。

1.6.3 张量的分量

回顾张量的定义，张量是 s 个切矢量和 t 个余切矢量到实数轴的映射，并且满足多重线性的要求，把每个切矢量和余切矢量按照基展开，有

$$T(X_1,\cdots,X_s;df^1,\cdots,df^t)=X_1^{\mu_1}\cdots X_s^{\mu_s}f_{1\nu_1}\cdots f_{t\nu_t}T\left(\partial_{\mu1},\cdots\partial_{\mu s};dx^{\nu1},\cdots,dx^{\nu_t}\right) \tag{1.12}$$

记

$$T^{\nu_1\cdots\nu_t}_{\mu_1\cdots\mu_s}\equiv T\left(\partial_{\mu1},\cdots\partial_{\mu s};dx^{\nu1},\cdots,dx^{\nu_t}\right) \tag{1.13}$$

称为张量在给定坐标下的分量。因此，张量作用在 s 个切矢量的基和 t 个余切矢量的基上得到了张量在坐标系下的分量。[4] 于是，原来复杂的映射就直接变成了坐标分量的简单的相乘。

在前面我们学过一种特殊的张量，它是通过内积来定义的，叫做度规张量。回顾度规张量的定义

$$g(X,Y)=\langle X,Y\rangle \tag{1.14}$$

它的分量为

$$g_{\mu\nu}=g(\partial_\mu,\partial_\nu) \tag{1.15}$$

于是，和上面的张量类似，这样一个抽象的映射就写成对应分量的乘积并求和

$$\langle X,Y\rangle=g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu \tag{1.16}$$

定义一个新的余切矢量 (其实在前面定义过，称为切矢量自然对应的余切矢量)，它接收一个切矢量 Y，使得

$$g_X(Y)=g(X,Y) \tag{1.17}$$

它的坐标分量为: 给这个余切矢量传进去切矢量的基

$$g_X(Y)_\nu=g(X,\partial_\nu)=g(X^\mu\partial_\mu,\partial_\nu)=g_{\mu\nu}X^\mu \tag{1.18}$$

[4] 读者可以把蓝色的字读一遍，体会这里边的关系。

在不引起歧义的情况下，定义 $X_\nu = g_X(Y)_\nu$，它是我们新定义的余切矢量的坐标分量。

从上面的论述我相信你体会到了重要的一点:矢量、张量这些东西本来没有分量，就是一个抽象的映射在那里，但是因为有了坐标，它才有了分量。也就是说，矢量本来不是什么有方向的量，有了坐标之后，才能有方向。[5]

1.6.4 度规的逆、张量指标的升降

刚刚我们定义了一个新的余切矢量 $g_X(Z)$，它接收一个切矢量 Z，现在我们定义一个新的张量 h，它把两个刚刚的余切矢量映射到实数，并且有

$$h(g_X, g_Y) = g(X,Y) \tag{1.19}$$

h 就定义了切空间上的内积。

练习 1.6.2 证明上面的定义是一种内积。即证明它的可交换、线性。

练习 1.6.3 证明上面的定义 $h(g_X, g_Y) = g(X,Y)$ 等价为

$$g_{\rho\sigma}h^{\sigma\nu} = \delta_\rho{}^\nu$$

即在矩阵意义下，h 的坐标分量矩阵是 g 坐标分量矩阵的逆矩阵。所以通常逆矩阵的分量 $h^{\mu\nu}$ 可以记作 $g^{\mu\nu}$，而不引起歧义。

张量也有类似的升降指标公式。举个例子，我们考虑张量 $T(X_1, X_2, df^1, df^2)$ 和张量 $S(Y_1, Y_2, d\varphi^1, d\varphi^2)$。它们的坐标分量分别为 $T_{ij}^{lk} = T(\partial_i, \partial_j, dx^l, dx^k)$，$S_{mn}^{pq} = S(\partial_m, \partial_n, dx^p, dx^q)$，我们将 T 的第三个指标和 S 的第四个指标缩并，从而定义一个 6 阶张量，它的分量为

$$G\left(\partial_i, \partial_j, dx^l, \partial_k, \partial_m, dx^n\right) = g\left(\partial_\mu, \partial_\nu\right) T(\partial_i, \partial_j, dx^\mu, dx^l) S(\partial_k, \partial_m, dx^n, dx^\nu) \tag{1.20}$$

我们定义一个新的张量，它的分量为

$$T'(\partial_i, \partial_j, \partial_\nu, dx^l) = g\left(\partial_\mu, \partial_\nu\right) T(\partial_i, \partial_j, dx^\mu, dx^l) \tag{1.21}$$

写成上下指标有

$$T'^{l}_{ij\nu} = g_{\mu\nu} T^{\mu l}_{ij} \tag{1.22}$$

如果不引起歧义，那么可将 T' 记为 T。

上面的论述比较繁杂，看不懂也没关系，总之就告诉大家一般来说上下标的定义是通过这样来定义的。都是通过构造更少指标的张量。

[5]这种观念非常漂亮，想下去说不定搞出一种深刻的哲学。我把想象空间留给读者。

1.7　场

我们之前在流形上每一点都定义了矢量和张量。简单地说，如果在流形上处处定义了场，那么我们就说定义了一个矢量场、张量场。数学上，我们作如下定义

定义 1.7.1 (矢量场) 流形 $\mathcal{M}$ 上的矢量场 X 定义为光滑标量场之间的映射

$$X : C^{\infty}_{\mathcal{M}} \to C^{\infty}_{\mathcal{M}} \tag{1.23}$$

上面的定义实际上很好理解，我们知道流形上一个矢量实际上是标量场到实数轴上的映射，也就是说，一个矢量是一个映射，吃掉一个标量，吐出一个实数。那么如果矢量到处吃标量，把每一点的标量都吃了，那么它在每一点都吐出一个实数，这些实数又构成了一个标量场。所以说矢量场就是标量场到标量场的映射。