Group Theory
The Poor Man Finds His Roots

Haoting Xu

February 13, 2020

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec

Introduction and Review

吹水和复习

Introduction

这一章我们来学习如何处理一般的李代数。在那之前我们需要看一些具体的例子找找感觉。这一讲全在算具体的例子找感觉，所以特别水。

回到 $SU(2)$

$SU(2)$ 的生成元是三个泡利矩阵 $\frac{1}{2}\sigma_i$，对角化 $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，定义上升矩阵

$$\frac{1}{2}\sigma_{1+i2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是从对易关系 $[\frac{1}{2}\sigma_3, \frac{1}{2}\sigma_{1+i2}] = \frac{1}{2}\sigma_{1+i2}$，我们可以得知一维的根向量。

$\mathfrak{su}(3)$ 的根向量

回忆 $\mathfrak{su}(3)$ 生成元是无迹厄米矩阵的集合，经过一定的线性组合之后得到八个盖尔曼矩阵，他们按 $\mathrm{tr}\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$ 归一化。

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

盖尔曼矩阵

仔细观察盖尔曼矩阵，我们发现

- λ_1, λ_2 是所谓 $1-2$ 泡利矩阵
- λ_4, λ_5 是所谓 $1-3$ 泡利矩阵。
- λ_6, λ_7 是所谓 $2-3$ 泡利矩阵。
- λ_3, λ_8 是两个对角矩阵，任何无迹厄米对角矩阵都可以写成 λ_3, λ_8 的线性组合。一个代数中可同时对角化的生成元数目被成为代数的 rank，用 l 表示。

因此 $SU(3)$ 有两个可以对角化的生成元，我们说 $SU(3)$ 的秩是 2。引入记号 $\frac{1}{2}\lambda_{1+i2}, \frac{1}{2}\lambda_{4+i5}, \frac{1}{2}\lambda_{6+i7}$，通过计算与 $\frac{1}{2}\lambda_3$ 和 $\frac{1}{2}\lambda_8$ 的对易关系，我们便可以得到根向量。

得到 $SU(3)$ 的根向量

因为这些生成元其实都是 x, y 泡利矩阵，所以在计算根向量的时候我们不必要每次计算 3×3 的乘法。而只用计算 2×2 矩阵的乘法就可以了。

- 例如，$\frac{1}{2}\lambda_{1+i2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 它是由 $1-2$ 泡利矩阵得到的生成元，只有左上角那一块不是 0，因此当计算与 $\frac{1}{2}\lambda_8$ 的对易关系时只需要使用左上角的 2×2 方块进行计算。
- 又如，$\frac{1}{2}\lambda_{4+i5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，我们只需要提取出 $1-3$ 方块进行计算，这时对应计算的 λ_3, λ_8 分别为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Determining roots

上面的思考启发我们来算一个一般的公式

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}n+1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]=(n+1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

对于 $\frac{1}{2}\lambda_{4+i5}$ 与 λ_3 的对易关系，我们取 $n=0$，对于它和 λ_8 的对易关系，我们取 $n+2$。事实上，如果我们记住一些归一化常数，我们瞬间就可以写出 $\frac{1}{2}\lambda_{4+i5}$ 对应的根向量

$$\frac{1}{2}\left((0+1),\frac{1}{\sqrt{3}}(2+1)\right)=\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})$$

进一步我们发现 $\frac{1}{2}\lambda_{6+i7}$ 对应的根向量是 $\frac{1}{2}(-1,\sqrt{3})$，最终我们得到了三个根向量 $(1,0),\frac{1}{2}(1,\sqrt{3}),\frac{1}{2}(-1,\sqrt{3})$。它们的模长都是 1，而且他们内积的绝对值都是 $\frac{1}{2}$，即两两之间夹角为 60° 或 120°。

Presses onward to $SU(4)$ easily

通过上面的例子，我们知道了下面的经验

经验

计算对易关系，只需要计算 2×2 矩阵就行了。

现在我们考虑 $SU(4)$ 的情况，我们知道 $SU(N)$ 群的生成元是无迹厄米矩阵，因此我们掐指一算，$SU(4)$ 群有 $2 \times (3+2+1)+3=15$ 个生成元，如果按照之前的形式，我们有三个对角化的矩阵

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}, \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -2 & \\ & & & \end{pmatrix}, \lambda_{15} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

$SU(4)$ 根向量

三个对角化的矩阵意味着它的参数空间是三维的。之前的升降算符，例如

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

都在原来的参数空间里面，新多出来的就是 4 分量的东西，例如

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

，请试着计算它对应的根向量。

$SU(N)$

计算结果为那个矩阵对应的根向量为 $\frac{1}{2}(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}})$，可以证明，它的模长是 1，它与其他根向量的夹角是 $60°$ 或者 $120°$。

Problem ($SU(5)$ 群的根图)

For fun, you could work out $SU(5)$ and see whether the pattern persists.

注：我们这本书的最终章将学习，$SU(5)$ 是大统一理论 (grand unified theory) 的对称群。

Roots and Weights for Orthogonal, Unitary and Symplectic Algebras

$$H^1 = \mathrm{diag}\,(1, -1, 0, 0, \cdots, 0, 0)$$

概念复习

定义 (Positive Roots)

一个根是正的，如果它对应向量的第一个非零实数分量为正。

说一个根是不是正的，与它本征值选取顺序有关，我们取了 (i_3, i_8)，但原则上，也可以反着取。如果像原来那样取，则正根为 $\vec{V}_+, \vec{I}_+, \vec{U}_-$，且有 $\vec{I}_+ = \vec{V}_+ + \vec{U}_-$，我们有下面的定义

定义 (Simple roots)

给定一个 l 维空间正根的集合，一个子集被称作简单的，如果子集中的任何正根都可以写成简单根的非负系数线性组合。

获得基础表示根向量的一般方法

一般来说采取如下步骤

1. 找到可同时对角化的生成元，记作 H^i，使用 $\mathrm{tr}\left(H^iH^j\right)=\delta^{ij}$ 归一化。
2. 直接从 H^i 中读出 weights。
3. 从 weight diagram 中读出根。
4. 选定一种方向的顺序，从根中读出正根。
5. 从正根中选出简单根。

一个简单的例子——$SU(3)$

$SU(3)$ 群的两个可同时对角化的矩阵为

$$H^1 = \text{diag }(1,-1,0)/\sqrt{2}$$
$$H^2 = \text{diag }(1,1,-2)/\sqrt{6}$$

注意这里按照 $\text{tr }(H^i H^j) = \delta^{ij}$ 归一化。于是 $SU(3)$ 的 weights 生活在二维空间中，从上面的生成元可直接读出 weights 的坐标分量分别为

$$\begin{aligned} w^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ w^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ w^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\frac{2}{\sqrt{3}}) \end{aligned}$$

其中 w_1, w_2, w_3 分别对应于上夸克、下夸克和奇异夸克。可以看到，他们形成等边三角形。

正根和简单根

接下来我们求根

$$\begin{aligned}\alpha^1 &\equiv w^1 - w^2 = \sqrt{2}(1,0)\\ \alpha^2 &\equiv w^2 - w^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\sqrt{3})\\ \alpha^3 &\equiv w^1 - w^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\sqrt{3}).\end{aligned}$$

数学家这样选他们的方向来判断正根，他们选取 H_2 在前，H_1 在后，这样正根就可以写成

$$w^m - w^n \text{ for all } m < n$$

简单根似乎很难写成这样的形式，不过不久之后我们将会看到一种更加舒适的写法。

向 $SO(N)$ 出发

现在我们有足够的储备来研究 $SO(N)$ 群了，我们一会就会发现，奇数的情况和偶数的情况要单独讨论。

第二个例子 $SO(4)$

我们来研究 $SO(4)$ 的根图。首先，我们回忆 $SO(N)$ 群的生成元是 $J = -i\mathcal{J}$，其中 $\mathcal{J}$ 是一个反对称矩阵。对于 $SO(4)$ 群，可同时对角化的两个生成元的一种选择是

$$\begin{aligned} H^1 &= \operatorname{diag}(1, -1, 0, 0) \\ H^2 &= \operatorname{diag}(0, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

这是因为他们分别旋转 $1-2$ 平面和 $3-4$ 平面，没有第三个生成元和他们同时对易。这相当于对 $(x_1 \pm ix_2, x_3 \pm ix_4)$ 进行操作。然后我们读出 weights

$$w^1 = (1, 0), \quad w^2 = (-1, 0), \quad w^3 = (0, 1), \quad w^4 = (0, -1)$$

正方形出现了！

进而求出根向量

$$\begin{aligned}\alpha^1 &\equiv w^1 - w^4 = (1,1),\ \alpha^2 \equiv w^1 - w^3 = (1,-1)\\ \alpha^3 &\equiv w^4 - w^1 = (-1,-1),\ \alpha^4 \equiv w^3 - w^1 = (-1,1)\end{aligned}$$

把 weights 和根向量画出来，我们的老朋友，正方形出现了。

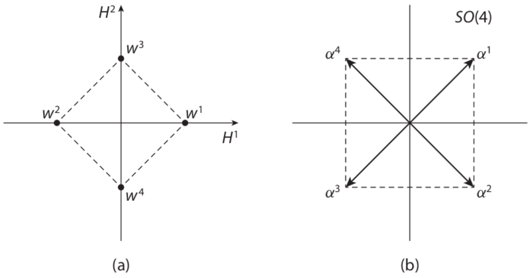
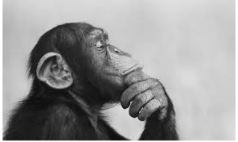


Figure: $\mathfrak{so}(4)$ 代数的根图

思考题



在 $SU(3)$ 群中，我们的根向量可以沟通所有的 weights，但是你有没有发现在 $SO(4)$ 群中却没有沟通 w^1, w^2 的 roots，这是为什么呢？难道我们把它漏掉了？

思考题解答

前面说过，如果同时对角化 H^1, H^2，相当于对 $(x_1 \pm ix_2, x_3 \pm ix_4)$ 进行旋转，而这种旋转是没法沟通第一个坐标和第二个坐标。

45 度的偏差

我们发现 w 的方向和 α 的方向不太一致，而是偏差了 45 度，这意味着

$$SO(4) \simeq SU(2) \otimes SU(2)$$

这个在第四章讲过 (或是在相对论量子力学的第一章)。

$\mathfrak{so}(4)$ 的正根和简单根

我们可以把 α 写成一个简单的形式，如果用 e^i 来表示 i 维空间上的基底，则 α 可以表示成

$$\pm e^1 \pm e^2 (\text{signs uncorrelated})$$

很容易发现，正根就是

$$e^1 \pm e^2$$

他们全是简单根。

$SO(5)$ 群

我们再来看 $SO(5)$ 群，我们仔细思考 $SO(5)$ 的生成元，能同时对角化的矩阵也只有五个里面挑两个坐标，对角化之后是 σ_3。但是挑选完成之后总会剩一个坐标。于是 $SO(5)$ 的对角化的生成元和 $SO(4)$ 几乎相同

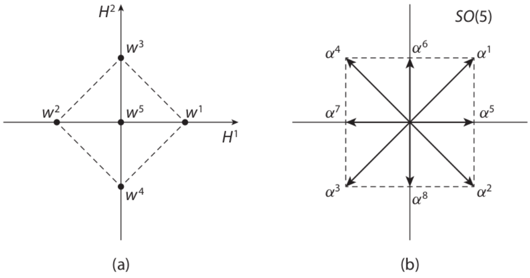
$$\begin{aligned} H^1 &= \operatorname{diag}(1,-1,0,0,0) \\ H^2 &= \operatorname{diag}(0,0,1,-1,0) \end{aligned}$$

因此 $SO(5)$ 的根向量也生活在 2 维空间。我们可以瞬间得到 weights, 我们发现前四个 weights 和 $SO(4)$ 是一样的，唯独多了一个

$$w^5 = (0,0)$$

短根和长根

将 weight diagram 和根图画出来是这个样子



注意因为相同的原因，还是没有沟通 w^1, w^2 的根。但是这里我们看到了一个新的特性，那就是根的长度不一样。其中 $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ 的长度为 $\sqrt{2}$，被称为长根 (long roots)。而 $\alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8$ 的长度为 1，被成为短根 (short roots)。注意如果采取不同的对 H 的归一化关系，根的具体长度将变得不同，但是具体长根和短根长度的比值是不变的——它不依赖于归一化的选取。

正根和简单根

八个根向量可以写成

$$\pm e^1 \pm e^2 \text{ (signs uncorrelated)}, \pm e^1,\ \pm e^2$$

显然，正根为

$$e^1 \pm e^2,\ e^1,\ e^2$$

简单根为

$$e^1 - e^2, e^2$$

思考题

尝试写出 $SO(6)$ 的 weights, roots, positive roots and simple roots.
从上面的例子我们能体会到，奇数的情况和偶数的情况是不同的。

$SO(2l)$

现在，我们来处理 $SO(2l)$ 的情况，可同时对角化的生成元为

$$\begin{aligned} H^1 &= \text{diag}\,(1,-1,0,0,\cdots,0,0) \\ H^2 &= \text{diag}\,(0,0,1,-1,\cdots,0,0) \\ &\vdots \\ H^l &= \text{diag}\,(0,0,0,0,\cdots,1,-1) \end{aligned}$$

可以读出它的 $2l$ 个 weights

$$w^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ w^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ w^{2l-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ w^{2l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

他们生活在 l 维空间当中，他们可以记作 $\pm e^i$, for $i = 1,\cdots,l$.

根

于是根可以表述为 $\pm e^i \pm e^j$(signs uncorrelated), $(i < j)$，我们来数一数根的数目为 $4 \times \sum_{m=1}^{l} m - 1 = 2l(l-1)$，总共的生成元数目

$$2l(l-1) + l = 2l(2l-1)/2$$

取正根为 $e^i \pm e^j$，则简单根为

$$e^{i-1} - e^i,\ e^{l-1} + e^l,\ (i = 2, \cdots, l)$$

简单根的证明

我们来证明所有的正根 $e^m \pm e^n, (m < n)$ 都可以写成所有简单根的非负线性组合。首先有

$$e^m - e^n = (e^m - e^{m+1}) + (e^{m+1} - e^{m+2}) + \cdots + (e^{n-1} - e^n)$$

对于加法，我们将最后一项改造一下

$$e^m + e^n = (e^m - e^{m+1}) + (e^{m+1} - e^{m+2}) + \cdots + (e^{n-1} - e^n) + (e^n - e^l) + (e^n + e^l)$$

再利用

$$\begin{aligned} e^n - e^l &= (e^n - e^{n+1}) + (e^{n+1} - e^{n+2}) + \cdots + (e^{l-1} - e^l) \\ e^n + e^l &= (e^n - e^{n+1}) + (e^{n+1} - e^{n+2}) + \cdots + (e^{l-1} + e^l) \end{aligned}$$

这样所有的正根就全写成简单根的线性组合了。

$SO(2l+1)$

对于 $SO(2l+1)$ 重复同样的操作。得到多了一个根 $w^{2l+1}=(0,0,\cdots,0)$, 根可以表示为

$$\pm e^i \pm e^j(\text{ signs uncorrelated }), (i<j), \pm e^i$$

下一步，检查生成元个数为 $2l(2l+1)/2$。最后，得到正根为 $e^i \pm e^j$, e^i ，简单根为

$$e^{i-1}-e^i,\ e^l$$

尝试证明简单根是简单根。

$SU(N)$ 群的根

$SU(N)$ 群可同时对角化的生成元为

$$
\begin{aligned}
H^1 &= \operatorname{diag}(1,-1,0,\cdots,0)/\sqrt{2} \\
H^2 &= \operatorname{diag}(1,1,-2,\cdots,0)/\sqrt{6} \\
&\vdots \\
H^i &= \operatorname{diag}(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{i},-i,0,\cdots,0)/\sqrt{i(i+1)} \\
H^l &= \operatorname{diag}(0,0,0,0,\cdots,1,-1)/\sqrt{l(l+1)}
\end{aligned}
$$

$SU(N)$ 的根向量生活在 $l=N-1$ 维空间。可以读出 w^j 的第 i 个分量是 $(H^i)_{jj}$。

根向量

$SU(N)$ 群的根向量为 $w^m - w^n$，其中 $m, n = 1, \cdots, N$。正根可以表示为 $w^m - w^n$，其中 $m < n$。简单根有 $N-1$ 个，为

$$w^m - w^{m+1} \text{ for } m = 1, 2, \cdots, N-1$$

从线段到等边三角形到正四面体

试着推导出 $SU(4)$ 的根图，并发现它是一个正四面体。试着写出 $SU(4)$ 的三个简单根，定义为

$$
\begin{aligned}
\alpha^1 &\equiv w^1 - w^2 \\
\alpha^2 &\equiv w^2 - w^3 \\
\alpha^3 &\equiv w^3 - w^4
\end{aligned}
$$

并证明 $(\alpha^1)^2 = (\alpha^2)^2 = (\alpha^3)^2 = 2$ 且 $\alpha^1 \cdot \alpha^2 = -1$, $\alpha^2 \cdot \alpha^3 = -1$。$\alpha^1 \cdot \alpha^3 = 0$，因为正四面体的两条边是垂直的。

另一个优美的表示方法

我们发现到目前为止，$SU(N)$ 群的根向量都满足

$$\left(\alpha^i\right)^2 = 2,\ \alpha^i \cdot \alpha^{i+1} = -1$$

其中 $i = 1, \cdots, l-1$。考虑 $(l+1)$ 维空间中的基底 e^i，我们发现

$$(e^i - e^{i+1})^2 = 1 + 1 = 2,\ (e^i - e^{i+1}) \cdot (e^j - e^{j+1}) = \begin{cases} -1, & j = i \pm 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

所以 l 个 $SU(l+1)$ 的简单根为

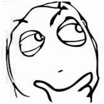
$$\alpha^i \equiv e^i - e^{i+1},\ i = 1, \cdots, l$$

辛群复习

辛群就是在辛流形上保内积不变的变换的集合。辛群满足 $R^T JR = J$。幺正辛群的生成元为

$$H = \begin{pmatrix} iA + S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & iA - S_3 \end{pmatrix} = iA \otimes I + iS_i \otimes \sigma_i$$

小朋友快来猜一猜，上面哪个是已经同时对角化了的生成元?



对角化的生成元为

$$H^i = u^i \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} u^i & 0 \\ 0 & -u^i \end{pmatrix}$$

对于 $Sp(4)$ 的情况，得到根图。注意这与 $SO(2l)$ 的情况不同，可以有沟通 w^1, w^3 的根。

Positive roots and Simple roots

得到的根图如图

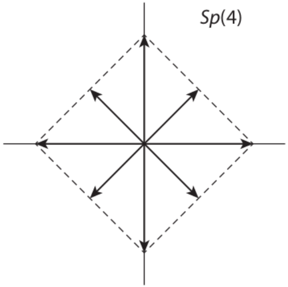


Figure: $Sp(4)$ 的根图

注意到如果将此图旋转 $45°$，就会得到 $SO(5)$ 的根图，这暗示了

$$Sp(4) \simeq SO(5)$$

Positive roots and Simple roots

对于 $Sp(2l)$ 群，我们得到它的根为

$$\pm e^i \pm e^j, \ \pm 2e^i, \ i,j = 1, \cdots, l$$

positive roots

$$e^i \pm e^j, \ 2e^i$$

simple roots

$$e^{i-1} - e^i, \ i = 2, \cdots, l \text{ and } 2e^l$$

最后，证实 $Sp(2l)$ 有 l^2 个正根，$l(2l+1)$ 个生成元。

总结

最后，我们将这节课学的根都列在下面的表中。

	Number of generators	Roots	Simple roots
$SU(l)$	l^2-1	e^i-e^j	e^i-e^{i+1}
$SO(2l+1)$	$l(2l+1)$	$\pm e^i \pm e^j,\ \pm e^i$	$e^{i-1}-e^i,\ e^l$
$Sp(2l)$	$l(2l+1)$	$\pm e^i \pm e^j,\ \pm 2e^i$	$e^{i-1}-e^i,\ 2e^l$
$SO(2l)$	$l(2l-1)$	$\pm e^i \pm e^j$	$e^{i-1}-e^i,\ e^{l-1}+e^l$

Table: The four families we have studied.