Group Theory

The Eightfold way of $SU(3)$

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec

S.L Glashow's fortune

While most of our colleagues were put off by the unfamiliar math, [Sidney Coleman and I] became traveling disciples of the Eightfold Way.
- Sheldon Lee Glashow(received the Nobel Prize in 1979 for work based to a large extent on group theory.)

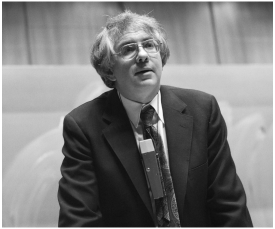


Figure: Sheldon Lee Glashow

仰天大笑吧！困惑上世纪六十年代顶尖粒子物理学家的数学不过只是$SU(3)$！五分钟就能学完。

粒子物理中的$SU(3)$

我们已经见过了$SU(2)$的威力，它贯穿整个量子力学，它也在经典物理中出现。$SU(3)$只在粒子物理中出现，而且出现了两次

- 夸克的发现
- 量子色动力学的规范对称群

张量方法构造表示

我们还是用张量的方法构造表示，回忆$SU(N)$群中要区分上下标，比如对于$SU(2)$群，有

$$\psi_i = \epsilon_{ij}\psi^j$$

因此，我们说上标和下标实际上可以不做区分，是等价的。但是对于$SU(3)$群，显然上标和下标不等价，尝试这样缩并只会得到更高阶的张量。

上标和下标

因此，我们需要单独处理上标和下标，我们记有m个上标和n个下标的张量为(m,n)型张量。虽然$SU(3)$需要区分上下标，但是它仍然有非常好的性质，我们将证明，只需要考虑无迹且上下标分别对称的张量。证明如下

- 取一个(m,n)型张量，取定两个指标，构造他们的对称部分、反对称部分和迹，将无迹对称张量纳入考虑。用特殊方法抽掉的迹也是对称张量。
- 将反对称部分使用ϵ_{ijk}缩并，就会将两个反对称上(下)指标变成一个下(上)指标，如此往复操作(再进行对称反对称、抽迹)，直到剩余$(1,1)$型张量。
- 这样剩余的全部是我们要的张量，证毕。

小练习

试构造T^{ij}_{kl}的无迹对称部分

$$\tilde{T}^{ij}_{kl} = T^{ij}_{kl} - A(\delta^i_k T^j_l + \delta^j_k T^i_l + \delta^i_l T^j_k + \delta^j_l T^i_k) + B(\delta^i_k \delta^j_l + \delta^j_k \delta^i_l + \delta^i_l \delta^j_k + \delta^j_l \delta^i_k) T$$

其中$T^j_l = T^{ij}_{il}$， $T = T^j_j$

$SU(3)$表示的维数

因此，全体(m,n)型无迹对称张量得到的表示就是$SU(3)$用这种方法得到的所有不可约表示。我们下面研究表示的维数。表示的维数就是张量的独立分量数，先只考虑对称。注意到i,j,k等指标在$SU(3)$群里只能取$1,2,3$。假设有一个$(m,0)$张量$S^{33\cdots 3xx\cdots x}$，假设有k个指标不是3，即有k个x，在这种情况下，看k个$1,2$中有多少个1，故独立分量个数为

$$\sum_{k=0}^{m}(k+1)=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

$SU(3)$表示的维数

因此，(m,n)型上下指标分别对称的张量的独立分量就有$\frac{1}{4}(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)$个，现在考虑无迹的等式

$$\delta_i^j \varphi^{ii_2\cdots i_m}_{jj_2\cdots j_m} = 0$$

等式左边的行为像一个$(m-1,n-1)$型张量，所以一共有$\frac{1}{4}m(m+1)n(n+1)$个等式。因此，(m,n)型张量得到的表示维数为

$$\begin{aligned} D(m,n) &= \frac{1}{4}(m+1)(m+2)(n+1)(n+2) - \frac{1}{4}m(m+1)n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2) \end{aligned}$$

一些例子

通过上面的公式计算一些特殊的例子,如下

$(1,0)$	$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 3=3$
$(1,1)$	$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot 4=8$
$(2,0)$	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot 4=6$
$(3,0)$	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot 5=10$
$(2,1)$	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 5=15$
$(2,2)$	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot 6=27$

将张量相乘

在$SU(2)$中，我们将两个张量乘起来得到一堆张量，这在代数中其实对应于角动量的加法。那么相应的，我们也来研究$SU(3)$的加法，以后我们会看到和$\mathfrak{su}(3)$代数的联系。我们先算几个简单的例子。

一些记号

也可以用维数来表示张量。但是，$(1,0)$型张量和$(0,1)$型张量都贡献三维表示由于上下标不等价，所以应该做区分，前者记为3，后者记为3^*。同理，$(3,0)$型(无迹对称)张量得到的表示记作10，$(0,3)$型张量得到的表示记作10^*，以此类推。

例1:$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$

现在我们将张量直接“相乘”，我们先来计算$(1,0)\otimes(0,1)$，这意味着拼成一个张量T_j^i，根据套路，分成对称、反称(这里因为上标下标只有一个，所以没得构造)、迹三部分，迹是一个标量$(0,0)$，剩下的无迹部分便是一个$(1,1)$型表示。所以我们得到

$$(1,0)\otimes(0,1)=(1,1)\oplus(0,0)$$

即

$$3\otimes 3^* = 8\oplus 1$$

例2:$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$

我们来计算$(1,0) \otimes (1,0)$，首先他们拼成一个$(2,0)$型张量，$(2,0)$型张量没的抽迹。将它拆成对称部分和反称部分，对称部分为$(2,0)$型对称张量，反对称部分利用$\chi_i = \epsilon_{ijk} A^{jk}$，这样将两个上标变成一个下标，得到一个$(0,1)$型张量。于是

$$(1,0) \otimes (1,0) = (2,0) \oplus (0,1)$$

即

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

例3:$3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$

再来算一个例子$(1,0)\otimes(2,0)$。他们先弄出一个$(3,0)$型张量，将$(3,0)$型张量分为对称部分、反称部分和迹。这里只有上指标，所以没有迹。利用ϵ将两个上指标变成一个下指标，得到一个$(1,1)$型张量，就没得抽了。因此，我们得到

$$(1,0)\otimes(2,0)=(3,0)\oplus(1,1)$$

即

$$3\otimes 6=10\oplus 8$$

例4:$3 \otimes 3 \otimes 3$

利用上面三个例子得到的关系，得到

$$\begin{aligned} 3 \otimes 3 \otimes 3 &= (6 \oplus 3^*) \otimes 3 \\ &= (6 \otimes 3) \oplus (3^* \otimes 3) \\ &= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \end{aligned}$$

例5:$8 \otimes 8$

大家自己做个练习

$$(1,1) \otimes (1,1) = (2,2) \oplus (3,0) \oplus (0,3) \oplus (1,1) \oplus (1,1) \oplus (0,0)$$

一般情况

有了上面的例子，我们现在可以来讨论一般情况，考虑$(m,n)\otimes(m',n')=(m,n;m',n')$，由于$(m,n)$和$(m',n')$已经是无迹对称的，所以抽取迹的操作应该对于不同张量的部分。例如，只能缩并m个上标中的一个指标和n'下标中的一个。所以得到

$$
\begin{aligned}
(m,n)\otimes(m',n') &= (m,n;m',n') \\
&\oplus (m-1,n;m',n'-1)\oplus(m,n-1;m'-1,n') \\
&\oplus (m-1,n-1;m'-1,n'-1) \\
&\oplus (m-2,n;m',n'-2) \\
&\oplus \cdots||
\end{aligned}
$$

其中$||$表示当没有指标可以缩并的时候，这个过程终止。

一般情况

最终，我们拿掉了所有的迹，得到$(m-p, n-q; m'-q, n'-p)$，注意这时候我们还没有关注张量是对称的还是反称的，接下来操作的一般表示就写不下去了，就举一个$8\otimes 8$的例子。
$(1,1)\otimes(1,1)$进行疯狂抽迹操作，得到

$$(1,1)\otimes(1,1)=(1,1;1,1)\oplus(0,1;1,0)\oplus(1,0;0,1)\oplus(0,0;0,0)$$

现在构造对称与反称张量，得到

$$(1,1;1,1)=(2,2)\oplus(3,0)\oplus(0,3)$$

其它的都不用构造了，因为上标或者下标仅有一个指标。

粒子物理的实验发现

在1950-1960，发现了一系列粒子。

- Λ重子在1950年被发现，质量1115MeV，质量和中子、质子几乎相同，自旋与质子和中子一致。S.Sakata 推广了$SU(2)$同位旋到$SU(3)$中。
- 不幸的是，其他质量相近的重子被发现了：$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$，质量约为1190MeV，$\Xi^-, \Xi^0$，质量约为1320MeV。到此，发现了八种重子$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^-, \Xi^0, \Lambda, n, p$。
- 还新发现了四种赝无自旋的介子：$K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-$，他们的性质像三个π介子。故一共发现了七种介子$K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-, \pi^+, \pi^-, \pi^0$。

The Particle Zoo

感觉很乱?那就对了。

$7 \neq 8$?

可见，发现了七种介子和八种重子。这时一些优秀的理论物理学家指出，Λ, Σ^0有不同的宇称，故应该把Λ除掉。一时之间，很多理论物理学家都在找有7维不可约表示的对称群。

The Eightfold Way

最终，另外一个赝无自旋的粒子η，被发现了。质量大约550MeV。而且实验证实，Λ, Σ^0有相同的宇称。

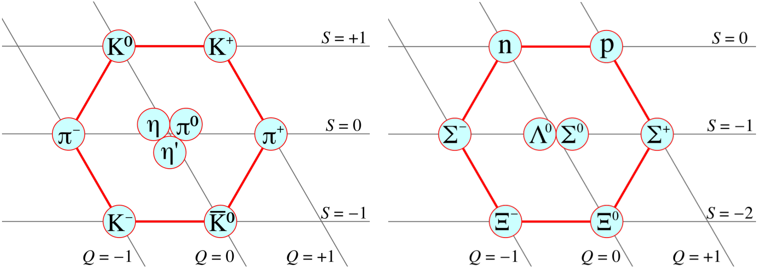
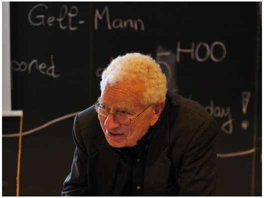


Figure: Mesons and Baryons

The Eightfold Way

于是，Gell-Mann和Ne'eman分别独立指出：八个自旋为零的介子和八个自旋为1/2的介子可以得到$SU(3)$的八维伴随表示，就是我们的(1,1)型张量。随后，Gell-Mann指出，有10种((3,0)型张量得到的表示)baryon resonances，最后一种是Ω^-。



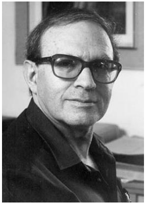


Figure: Gell-Mann, Ne'eman

Badly broken symmetry

$SU(2)$的同位旋假说很成功，得到的粒子质量差不多，是一个近似对称性。但是$SU(3)$得到的质量就没有那么相近，我们可以忍受粒子质量差$20\% \sim 30\%$。重子的情况还好，但是K介子和π介子就差的离谱。

Quarks and Triality

上面的两个被实验观测到的对称性$(m, n) = (1, 1) = 8$和$(m, n) = (3, 0) = 10$不禁引发我们思考，因为他们都满足

$$(m - n) \mod 3 = 0$$

我们把上面的这个余数叫做triality。可见，实验上只观测到了triality为0的粒子。

The center of a group

回想起我们定义过群的中心是和其他群元对易的群元的集合。我们之前讨论过$SU(N)$群的中心就是Z_N群。因此$SU(3)$群的中心是$\{I, z, z^2\}$，其中

$$z \equiv \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} = e^{2\pi i/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将这个群元作用在(m, n)型张量上，会使得(m, n)型张量多出相因子$e^{2\pi i(m-n)/3}$，这就是为什么triality出现的原因。

Quark

实验只观测到了$(m-n) \mod 3 = 0$的粒子，给了强相互作用理论很大的暗示。这时候，你一定会问:“Where is the fundamental representation 3?”，这就是 Gell-Mann 当年在哥伦比亚大学中午吃饭的时候问的问题。
Gell-Mann 不久之后就搞出了构建3的粒子，上夸克u、下夸克d、奇异夸克s。3^*由反夸克$\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$构建。说的详细点，$(1,0)$对应于夸克，$(0,1)$对应于反夸克，所以很容易有

$$\text{triality} = (\text{quark} - \text{antiquark}) \mod 3$$

Etymology

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.

解释发现的重子和介子

有了基础表示对应的粒子，群论立刻就解释了发现的粒子。因为有

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

所以介子是由一个夸克(对应于3)和反夸克(对应于3^*)构成的。又因为有

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

所以重子是三个夸克的束缚态。例如，质子为uud，中子为udd，等等。同理，这个10种baryon resonance 也应该是三个夸克束缚在一起，我们惊奇的发现，Ω^-是sss构成的。

从$SU(3)$回到$SU(2)$

我们现在试图从$SU(3)$回到海森堡的$SU(2)$同位旋理论。考虑$(1,0)$型张量ψ^i,很自然地拆分成$\psi^i=\{\psi^a,\psi^3\}$，其中a从1取到2。
这意味着只变换ψ的前两个分量，而始终保持第三个分量不变。我们知道前两个分量是 上夸克和下夸克，也就是说可以将前两个分量变换成上夸克和下夸克的线性组合。当上下夸克互相变换的时候，正好是质子和中子的互相变换。因此如果保持第三个奇异夸克分量不变，我们成功将$SU(3)$拆成原来的，即

$$3\rightarrow 2\oplus 1$$

更细致的拆分

刚刚我们拆分的方法简单粗暴，如果考虑的更多一点，得到$SU(3)$最大的子群:$SU(3) \to SU(2) \oplus U(1)$，这里$U(1)$中的元素是$e^{i\theta Y}$，其中

$$Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

其中Y又被称作超电荷矩阵。观察Y,它是个无迹厄米矩阵，而且变换时候不会改变前两个分量，故确实可以做这种分解，这种分解记为

$$3 \to (2,1) \oplus (1,-2)$$

其中括号的第一个数表示同位旋的维数，第二个数就是$3Y$，也可以写成更加紧凑的形式

$$3 \to 2_1 \oplus 1_{-2}$$

拆分$SU(3)$的所有表示

将上面的式子每一项都取厄米共轭，因为$SU(2)$怎么取共轭都不变，所以上面的拆分就变为

$$3^* \to 2_{-1} + 1_2$$

因为所有的表示都是由基础表示构建的，所以任何一个表示都可以按照上面两条式子拆分。

给我们的粒子配对

考虑$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$，将等式左边用上面两个公式换掉，得到

$$8 \to 3 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 2$$

这说明八个介子或者重子由一个同位旋triplet，两个同位旋doublets，一个同位旋singlet构成，实验发现，果真如此。

	介子	重子
isospin triplet	π^+, π^0, π^-	$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$
isospin doublets	$K^+, K^0; \bar{K}^0, K^-$	$\Xi^0, \Xi^-; n, p$
isospin singlet	η	Λ

使用更细致的分解

利用$SU(3) \to SU(2) \oplus U(1)$，可以得到(注意数$Y$在相乘的过程中只是相加，因为是简单的$U(1)$群)

$$8 \to 3_0 \oplus 1_0 \oplus 2_3 \oplus 2_{-3}$$

这意味着对于triplet 和singlet，$Y = 0$，对于doublets: $Y = \pm 1$

等价方法：拆分张量

将张量拆成低维的张量也可以等效的得到上面的拆分，例如对于上面的$3 \otimes 3^*$，便可以这样拆分

$$\varphi^i_j = \{\bar{\varphi}^a_b, \varphi^a_3, \varphi^3_a, \varphi^3_3\}$$

其中的bar表示那是个无迹张量。

电荷

在上一节中，我们曾经启发性的推导了$Q = I + \frac{1}{2}Y$，我们曾经说，Y是在$SU(2)$之外的一个算符，当时我们对于Y的值无能为力。但是现在，可以看到，对于doublets, $Y = 1$，所以电荷为$Q = (1, 0)$，对于triplet，电荷为$Q = (1, 0, -1)$。但是如果将这个规则运用到夸克上，就出现了奇妙的事情，因为$3 \to 2_1 \oplus 1_2$，那么得到$Q = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$。可见夸克具有分数的电荷，在早期寻找夸克的努力中，就是冲着分数电荷去的。

未完待续

我们对于$SU(3)$和粒子物理还有很多的话要讲，但是在那之前，我们需要仔细学习$SU(3)$代数。所以我们今天的故事就到这里结束了。