

Advanced Quantum Mechanics

Talk 12 Representing Relativistic Quantum State

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec

自然单位制

$$c = \hbar = 1$$

4-矢量和度规

四矢量的逆变分量为

$$A = (A^\mu) = (A^0, \vec{A})$$

注意，拉丁指标 i, j, k 从1取到3，希腊指标 α, β, γ 从0取到3。4-位置矢量为

$$x = (t, x, y, z)$$

Minkowski 度规

$$g = (g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

定义

$$g^{-1} = (g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

内积和Minkowski 时空

指标升降规则

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}, \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\omega} T^{\lambda\omega}$$

定义内积

$$g(A, B) = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A_{\mu} B^{\mu}$$

4-矢量长度为

$$A^2 = (A^0)^2 - \vec{A}^2$$

如果 $A^2 > 0$, 则称 A 为类时的, 如果 $A^2 < 0$, 称 A 为类空的。特殊地, 对于4-位置矢量

$$x^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

定义Minkowski 时空为 $M = (\mathbb{R}^4, g)$

Levi-Civita tensor

引入三维 Levi-Civita 张量 $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$, 它满足

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{ijk} = 6 \quad (1)$$

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{klm} = \delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} = & \delta^{il} \left(\delta^{jm} \delta^{kn} - \delta^{jn} \delta^{km} \right) - \delta^{im} \left(\delta^{jl} \delta^{kn} - \delta^{jn} \delta^{kl} \right) \\ & + \delta^{in} \left(\delta^{jl} \delta^{km} - \delta^{jm} \delta^{kl} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Levi-Civita tensor

对于四维时空，定义Levi-Civita tensor，它满足指标升降规，且有如下对应性质

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$$

等等，因为后面几乎用不到，所以不抄了。

洛伦兹变换

洛伦兹变换是保内积不变的变换。假设有两个4-矢量 x, y ，经过洛伦兹变换后成为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu}$$

他们的内积为

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\lambda}_{\mu} x^{\nu} y_{\lambda} = g_{\nu\lambda} x^{\nu} y^{\lambda}$$

进而得到洛伦兹变换应该满足的关系

$$\left(\Lambda^T\right)^{\mu}_{\nu} g_{\mu\omega} \Lambda^{\omega}_{\lambda} = g_{\nu\lambda}$$

即

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

洛伦兹变换

例如，在狭义相对论中，两个惯性系之间的变换为

$$x' = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda^{(01)} x$$

可以验证，上面的变换 $\Lambda^{(01)}$ 是一个洛伦兹变换。这样的变换又被叫做standard configuration Lorentz transformation，它是standard transformation(boost)的一种，系数 ξ 又被称做快度(rapidity, boost parameter)。为了和经典的伽利略变换对应起来，我们取

$$\cosh \xi = \gamma, \sinh \xi = \beta\gamma$$

就回到我们熟悉的洛伦兹变换。

洛伦兹群

洛伦兹群的定义为

$$\mathcal{L} = \{\Lambda : M \rightarrow M, x' \cdot y' = x \cdot y, \text{ where } x' = \Lambda x, y' = \Lambda y\}$$

上面的条件可以等价地写成

$$g = \Lambda^T g \Lambda, \text{ or } g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\lambda = g_{\nu\lambda}$$

对上面的条件两边求行列式, 得到

$$(\det \Lambda)^2 = 1$$

令 $\nu = \lambda = 0$, 得到

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2 = 1$$

因此有

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ or } \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

洛伦兹群

因此可以用 $\det \Lambda$ 和 Λ^0_0 的符号给洛伦兹群分类。定义

$$\mathcal{L}_+ = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = 1\}, \quad \mathcal{L}^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \Lambda^0_0 \geq 1\}$$

其中 \mathcal{L}_+ 又被叫做Pure Lorentz Group, \mathcal{L}^\uparrow 被叫做Orthochronous Lorentz Group。进而定义 $\mathcal{L}^\uparrow_+ = \mathcal{L}^\uparrow \cap \mathcal{L}_+$, 可以证明, 上面三个群都是洛伦兹群的子群。使用同样的规则, 也可以定义 $\mathcal{L}^\uparrow_-, \mathcal{L}^\downarrow_-, \mathcal{L}^\downarrow_+$, 它们都不是子群, 通过下面的变换, 可以说明两个元素的乘法不在群里面。

- ▶ Parity $\Lambda_P = \text{diag} (1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}^\uparrow_-$
- ▶ Time reversal $\Lambda_T = \text{diag} (-1, 1, 1, 1) \in \mathcal{L}^\downarrow_-$
- ▶ Spacetime inversion $\Lambda_{PT} = \text{diag} (-1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}^\downarrow_+$

另外, 集合 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}^\uparrow_+ \cap \mathcal{L}^\downarrow_-$ 也是洛伦兹群的一个子群。

洛伦兹群

通过上面的变换，我们可以将 $\mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_-^\downarrow, \mathcal{L}_+^\downarrow$ 三个子群映射到pure and orthochronous Lorentz Group中

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_P \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_T \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_{PT} \mathcal{L}_+^\uparrow$$

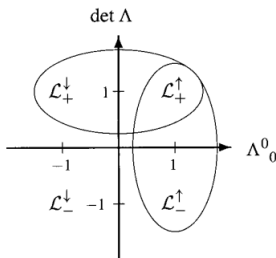


Figure: 洛伦兹群的子群

洛伦兹群

所以现在我们只需要来研究 \mathcal{L}_+^\uparrow ，这个子群又被叫做 $SO^+(1, 3)$ 群，它是一个李群。因此有

$$\Lambda = \exp \left(-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \right)$$

其中 $M^{\mu\nu}$ 为生成元，其中指标 $\mu\nu$ 为生成元矩阵的编号。不妨设 $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ 。注意这和我们熟悉的 $SO(N)$ 群不同，在那里生成元矩阵是反称的，那是因为它满足 $R^T R = 1$ ，而这里 Λ 却满足 $\Lambda^T g \Lambda = g$ ，将无穷小变换带入这个关系式，将得到

$$g_{\nu\omega} M^\omega_{\lambda} + g_{\mu\lambda} M^\mu_{\nu} = 0$$

上面这个关系式保证了生成元有六个独立分量，但是不一定反对称，因此有六个独立的生成元矩阵。

洛伦兹群的生成元

生成元有多种取法，我们取 $M^{\mu\nu}$ 就对应与无穷小的 $\Lambda^{\mu\nu}$ 使得 $\Lambda^{\mu\nu} \simeq 1 - \frac{i}{2} M^{\mu\nu}$ 现在对于无穷小standard configuration Lorentz transformation，我们求解它的生成元

$$M^{01} = i \frac{d\Lambda(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见， M^{0i} 对应与Lorentz boost，而 M^{ij} 对应于三维空间的转动。

洛伦兹群的生成元

因此, 可以将反对称的生成元 $M^{\mu\nu}$ 拆分成 J^i, K^i , $2 \times 3 = 6$ 个矩阵, 它们与生成元的关系为

$$J^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk}, K^i = M^{0i}$$

可以证明, 它们满足对易关系

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk}J^k \quad (4)$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon^{ijk}K^k \quad (5)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk}J^k$$

可见, 它们形成了一个李代数。为了好看, 我们定义

$$\vec{J} = \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}) \quad (6)$$

$$\vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K})$$

洛伦兹代数

这时对易关系变为

$$[j^i, j^j] = i\epsilon^{ijk} j^k \quad (7)$$

$$[j^i, k^j] = 0 \quad (8)$$

$$[k^i, k^j] = i\epsilon^{ijk} k^k$$

我们说, \vec{j}, \vec{k} 是脱耦的。我们将上述李代数的结构叫做洛伦兹代数, 记作 $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ 。对应的洛伦兹群的表示为 $D^j \otimes D^{j'}$, D^j 是 $SU(2)$ 的不可约表示。我们将 D^j 在 $|j, m\rangle$ 这组基下展开, 那么洛伦兹群的基为

$$|j, m; j', m'\rangle = |j, m\rangle |j', m'\rangle$$

例如, $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$ 和 $D^{0, (\frac{1}{2})}$ 的生成元的表示为

$$\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \vec{k} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{j} = 0, \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$$

其中 $\vec{\sigma}$ 为三个泡利矩阵。

Poincare 群

Poincare群的定义为

$$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a) : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu\}$$

其中 $\Lambda \in \mathcal{L}$ 是一个洛伦兹变换, $a \in \mathbb{R}^4$ 是一个Lorentz Translation。如果 P_+^\uparrow 是一个pure and orthochronous Pioncare Group, 如果 $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ 。可以得到两个群的乘法为

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

显然Poincare群有一个五维表示

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{5 \times 5}$$

Poincare群的逆为 $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ 。

Poincare群的生成元

我们已经知道了洛伦兹群的生成元

$$U(\Lambda, 0) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)$$

我们再来看poincare translation的生成元即 $U(1, a)$ 的生成元。我们思考一下可以发现生成元只有对角项，所以生成元只有四个，因此

$$U(1, a) = \exp(ia_{\mu}P^{\mu})$$

因此，如果Poincare群在一阶近似附近，那么Poincare群元可近似写为

$$U(\Lambda, a) \simeq \left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + ia_{\mu}P^{\mu}\right)$$

生成元的对易关系

我们再来看生成元的对易关系。使用洛伦兹群的定义，并结合 $U_1 U_2 U_1^{-1} = 1 + B + [A, B]$ ，我们就得到了生成元的对易关系

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}) \quad (9)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\sigma] = -i(g^{\nu\sigma} P^\mu - g^{\mu\sigma} P^\nu) \quad (10)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

Casimir 算符

Casimir算符定义为

- ▶ 是由生成元构建的。
- ▶ 和所有生成元对易。
- ▶ 是该群的不变量。

比如说, \vec{J}^2 是 $SO(3)$ 的 Casimir 不变量。Poincare 群的 Casimir 算符有两个, 分别为 $P^2 = P_\mu P^\mu$, $w^2 = w_\mu w^\mu$ 。 w 被叫做 Pauli-Lubanski 矢量, 定义为

$$w_\sigma = \frac{1}{2} \epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} M^{\mu\nu} P^\lambda$$

Pauli-Lubanski矢量

利用Pauli- Lubanski矢量的定义，我们得到它与生成元的对易关系

$$[M_{\mu\nu}, w_\sigma] = -i(g_{\nu\sigma} w_\mu - g_{\mu\sigma} w_\nu) \quad (11)$$

$$[P_\mu, w_\nu] = 0 \quad (12)$$

$$[w_\mu, w_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} w^\rho P^\sigma$$

还有一种书写Pauli-Lubanski矢量的方法

$$v^{\mu\nu\rho} = P^\mu M^{\nu\rho} + P^\nu M^{\rho\mu} + P^\rho M^{\mu\nu}$$

则 $w = (v^{321}, v^{320}, v^{310}, v^{210})$ 。 w^2 使用之前的生成元可以表示为

$$w^2 = -\frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} P^2 + M^{\mu\sigma} M_{\nu\sigma} P_\mu P^\nu$$

舒尔引理

引理

(舒尔引理) 如果 $U(g)$ 是不可约表示, 并且 A 和所有的 $U(g)$ 对易, 那么 A 一定是单位算符的倍数, 即 $A = \alpha I$, α 是一个常数。

来点物理

上面我们讨论的都是纯数学，现在我们加点物理。我们把群的元素看成是希尔伯特空间的算符。

什么是粒子?

如何区分不同的粒子?在相对论中坐标变换是Poincare变换, 所以每个态在Poincare变换下是不同的, 但是, 你知道它还是一个粒子。所以我们希望用一个Poincare变换下的不变量。什么是Poincare变换下的不变量? 根据舒尔引理, Casimir算符的本征值! 所以我们说, 我们通过Poincare群不可约表示的Casimir算符来区分不同的粒子!

Poincare群的Casimir 不变量

现在，我们不把Poincare变换作用的矢量选成4-位置，我们选成4-动量，即 $\vec{p} = (E, \vec{p})$ ，使用书中所谓的correspondence principle，生成元 P 的本征值就是 $p = (p^\mu) = (E, \vec{p})$ ，所以说 P 就是动量算符。动量算符就是Lorentz translation 的生成元！

我们知道， $p^2 = p_\mu p^\mu = m^2$ ，因此 $P^2 = m^2 I$ ，我们知道粒子的质量 m 是一个用来区分不同粒子的指标。

粒子的自旋

我们知道还有一个Casimir 不变量，那个是 w^2 ，我们来看看这是啥。我们将 w 作用在一组基 $|m, p^\mu, \gamma\rangle$ ，简单起见，我们取 $p^\mu = (m, \vec{0})$ ，我们得到

$$\begin{aligned}w^0|m, p^\mu, \gamma\rangle &= 0 \\w^i|m, p^\mu, \gamma\rangle &= mJ^i|m, p^\mu, \gamma\rangle\end{aligned}\tag{13}$$

我们计算出了另外一个Casimir算符，它是

$$w^2|m, p^\mu, \gamma\rangle = -m^2s(s+1)|m, p^\mu, \gamma\rangle$$

我们得到了另外一个区分不同粒子(态)的参数：自旋！

描述一个粒子

最后，我们还需要自旋角动量在某一个轴的投影算符来描述一个态。故最后一个态可以描述为

$$|m, p; s, m_s\rangle$$

m_s 又成为螺旋性(helicity)，因此常常又被记作 h 。

粒子的分类

Wigner 按照 p^2 和 p_0 给粒子分了四种情况

- ▶ $p^2 = m^2 > 0, p^0 > 0$ 或 $p^0 < 0$ ✕
- ▶ $p^2 = 0, p \neq 0, p^0 > 0$ 或 $p^0 < 0$ ✕
- ▶ $p^2 = 0, p^0 = 0$ 真空 vacuum
- ▶ $p^2 < 0$ 超光子tachyons

态如何变换

记

$$U(a) = U(1_4, a) = \exp(ia \cdot P)$$

$P = (P^0, \vec{P})$ 是4-动量算符, P^0 便是哈密顿量, 在相对论情形下

$$P^0 = +\sqrt{m^2 + \vec{P}^2}$$

引入平面波基矢 $|p, \zeta\rangle$, 使得

$$P^\mu |p, \zeta\rangle = p^\mu |p, \zeta\rangle$$

ζ 是除了动量之外其他的量子数。于是有

$$U(a)|p, \zeta\rangle = e^{ia \cdot P} |p, \zeta\rangle = e^{iap} |p, \zeta\rangle$$

进行坐标变换

从这里开始我就看不懂了。

(应该是)进行洛伦兹变换使得 $p = \Lambda(p)p'$, 变换后新的基矢记作 $|\Lambda(p), \zeta\rangle$ (terrible notations), 于是根据定义

$$U(a)|\Lambda(p), \zeta\rangle = U(a)U(\Lambda(p))|p', \zeta\rangle$$

利用关系(我无法得到的关系)

$$U(a)U(\Lambda(p)) = U(\Lambda(p), a) = U(\Lambda(p))U(\Lambda(p)^{-1}a)$$

之后的操作我就更看不懂了, 例

如 $[\Lambda(p)^{-1}a] \cdot p' = a \cdot \Lambda(p)p' = a \cdot p$, 最后结果为

$$U(a)|\Lambda(p), \zeta\rangle = e^{ia \cdot p}|\Lambda(p), \zeta\rangle$$

最终得到

$$P^\mu|\Lambda(p), \zeta\rangle = p^\mu|\Lambda(p), \zeta\rangle$$

这说明了啥?

little group

从上面可以看到，有一些Poincare变换保持 p' 不变。我们现在来研究这些变换。记保持 p' 不变的群为little group(or stabilizer)，记作 $W(p')$ ，因为是Wigner引入的这个小组。其中的群元记作 $\Gamma \in W(p')$ 。



Figure: 还记得凝聚态物理中遇到的Wigner吗?

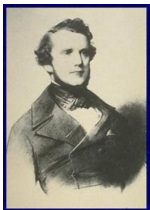
凝聚态物理复习

从左到右

布拉伐-Auguste Bravais, 1811-1863, 法国人

Eugene Wigner, 1902-1995, 匈牙利人

Frederick Seitz, 1911-2008, 美国人



小群的表示

因为小群的元素保持4-动量不变，所以变换后的态可以写成 $|p', \zeta\rangle$ 的线性组合。

$$U(\Gamma)|p', \zeta\rangle = \sum_{\zeta'} D_{\zeta'\zeta}(\Gamma)|p', \zeta'\rangle$$

因此， $D_{\zeta'\zeta}$ 是 Γ 的一个不可约表示。对于下面的情况，我们把不可约表示求出来

- ▶ massive particles,
- ▶ massless particles.

massive particles

先考虑最简单的情况，粒子静止，即 $p'_0 = m, p'_i = 0$ ，这时什么是保持 p' 不变的变换？显然，三维空间的旋转。令 ζ 是自旋，故矩阵为

$$D(R) = D^{(s)}(R(\vec{\theta})) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{s})$$

例如，对于自旋1/2，有

$$D^{(1/2)} = \exp\left(-i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$$

其中 $\vec{\sigma}$ 是三个Pauli矩阵。

Lorentz Boost

上面我们在静止系下获得了小群的表示论，现在我们试图在相对粒子运动的参考系下找表示论，由于两个参考系之间差一个 Lorentz Boost $L(p)$ ，我们用以下的步骤来找运动参考系的表示论。

- ▶ 首先, reboost。将 $L(p)^{-1}$ 作用在运动参考系的态上。
- ▶ 在静止参考系变换。
- ▶ 再boost 回来，作用 $L(p)$ 在变换好的态上。

因此 $R(P, \Lambda) = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p)$ 就是运动参考系的小群。这又被叫做 Wigner 转动。

Massless Particles

无质量的粒子不可能静止下来，所以上面的方法就不管用了。对于无质量粒子有

$$p'^2 = 0$$

假设3-动量沿着z轴方向，则

$$p'_3 = p'_0$$

取 $p'_0 = 1$ ，那么这种情况的小群为 $\Lambda_t R_z(\theta)$ ，其中

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

但是，如果为了使系统具有分立的自旋(因为观测)，必须有

$$D(\Lambda_t) \equiv 1, \quad D(R_z(2\pi)) = \pm 1$$

$$R_z(\theta)$$

现在，回忆我们熟悉的 $SO(2)$ ，因为 $SO(2)$ 群是阿贝尔群，所以它只有一维不可约表示，所以

$$D_{\lambda'\lambda}(\Gamma) = \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i\lambda\theta}$$

因为 $D(R_z(2\pi)) = \pm 1$ ，这就意味着 λ 是一个整数或者半整数。

无质量粒子的特性

如果我们再考虑宇称的话，我们会发现无质量粒子的helicity 只能取 $\pm\lambda$ 。

- ▶ 光子，自旋为1，只有 ± 1 的helicity。
- ▶ 胶子，自旋为1，只有 ± 1 的helicity。
- ▶ 引力子，自旋为2， ± 2 。
- ▶ 中微子，自旋 $1/2$ ，以前认为是无质量粒子，有两种helicity。