Group Theory

The Eightfold way of $SU(3)$

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec

Introduction

吹水

S.L Glashow's fortune

While most of our colleagues were put off by the unfamiliar math, [Sidney Coleman and I] became traveling disciples of the Eightfold Way.
- Sheldon Lee Glashow(received the Nobel Prize in 1979 for work based to a large extent on group theory.)

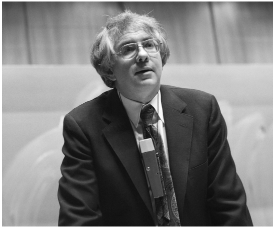


Figure: Sheldon Lee Glashow

仰天大笑吧！困惑上世纪六十年代顶尖粒子物理学家的数学不过只是 $SU(3)$！五分钟就能学完。

粒子物理中的 $SU(3)$

我们已经见过了 $SU(2)$ 的威力，它贯穿整个量子力学，它也在经典物理中出现。$SU(3)$ 只在粒子物理中出现，而且出现了两次

- 夸克的发现
- 量子色动力学的规范对称群

使用张量方法构造表示

$$D(m,n)=\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2)$$

张量方法构造表示

我们还是用张量的方法构造表示，回忆 $SU(N)$ 群中要区分上下标，比如对于 $SU(2)$ 群，有

$$\psi_i = \epsilon_{ij}\psi^j$$

因此，我们说上标和下标实际上可以不做区分，是等价的。但是对于 $SU(3)$ 群，显然上标和下标不等价，尝试这样缩并只会得到更高阶的张量。

上标和下标

因此，我们需要单独处理上标和下标，我们记有 m 个上标和 n 个下标的张量为 (m, n) 型张量。虽然 $SU(3)$ 需要区分上下标，但是它仍然有非常好的性质，我们将证明，只需要考虑无迹且上下标分别对称的张量。证明如下

- 取一个 (m, n) 型张量，取定两个指标，构造他们的对称部分、反对称部分和迹，将无迹对称张量纳入考虑。用特殊方法抽掉的迹也是对称张量。
- 将反对称部分使用 ϵ_{ijk} 缩并，就会将两个反对称上 (下) 指标变成一个下 (上) 指标，如此往复操作 (再进行对称反对称、抽迹)，直到剩余 $(1, 1)$ 型张量。
- 这样剩余的全部是我们要的张量，证毕。

小练习

试构造对称张量 T^{ij}_{kl} 的无迹部分

$$\tilde{T}^{ij}_{kl} = T^{ij}_{kl} - A(\delta^i_k T^j_l + \delta^j_k T^i_l + \delta^i_l T^j_k + \delta^j_l T^i_k) + B(\delta^i_k \delta^j_l + \delta^j_k \delta^i_l + \delta^i_l \delta^j_k + \delta^j_l \delta^i_k) T$$

其中 $T^j_l = T^{ij}_{il}$，$T = T^j_j$

$SU(3)$ 表示的维数

因此，全体 (m,n) 型无迹对称张量得到的表示就是 $SU(3)$ 用这种方法得到的所有不可约表示。我们下面研究表示的维数。表示的维数就是张量的独立分量数，先只考虑对称。注意到 i,j,k 等指标在 $SU(3)$ 群里只能取 $1,2,3$。假设有一个 $(m,0)$ 张量 $S^{33\cdots 3xx\cdots x}$，假设有 k 个指标不是 3，即有 k 个 $x(x=1,2)$，在这种情况下，看 k 个 $1,2$ 中有多少个 1，故独立分量个数为

$$\sum_{k=0}^{m}(k+1)=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

$SU(3)$ 表示的维数

因此，(m,n) 型上下指标分别对称的张量的独立分量就有 $\frac{1}{4}(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)$ 个，现在考虑无迹的等式

$$\delta_i^j \varphi_{jj_2\cdots j_m}^{ii_2\cdots i_m} = 0$$

等式左边的行为像一个 $(m-1,n-1)$ 型张量，所以一共有 $\frac{1}{4}m(m+1)n(n+1)$ 个等式。因此，(m,n) 型张量得到的表示维数为

$$\begin{aligned} D(m,n) &= \frac{1}{4}(m+1)(m+2)(n+1)(n+2) - \frac{1}{4}m(m+1)n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2) \end{aligned}$$

一些例子

通过上面的公式计算一些特殊的例子，如下

(1, 0)	$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 3=3$
(1, 1)	$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot 4=8$
(2, 0)	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot 4=6$
(3, 0)	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot 5=10$
(2, 1)	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 5=15$
(2, 2)	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot 6=27$

将张量相乘

在 $SU(2)$ 中，我们将两个张量乘起来得到一堆张量，这在代数中其实对应于角动量的加法。那么相应的，我们也来研究 $SU(3)$ 的张量乘法，以后我们会看到和 $\mathfrak{su}(3)$ 代数的联系。我们先算几个简单的例子。

一些记号

也可以用维数来表示张量。但是，$(1,0)$ 型张量和 $(0,1)$ 型张量都贡献三维表示。由于上下标不等价，所以应该做区分，前者记为 3，后者记为 3^*。同理，$(3,0)$ 型 (无迹对称) 张量得到的表示记作 10，$(0,3)$ 型张量得到的表示记作 10^*，以此类推。

例 1:$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$

现在我们将张量直接“相乘”，我们先来计算 $(1,0) \otimes (0,1)$，这意味着拼成一个张量 T_j^i，根据套路，分成对称、反称 (这里因为上标下标只有一个，所以没得构造)、迹三部分，迹是一个标量 $(0,0)$，剩下的无迹部分便是一个 $(1,1)$ 型表示。所以我们得到

$$(1,0) \otimes (0,1) = (1,1) \oplus (0,0)$$

即

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

例 2:$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$

我们来计算 $(1,0) \otimes (1,0)$，首先他们拼成一个 $(2,0)$ 型张量，$(2,0)$ 型张量没的抽迹。将它拆成对称部分和反称部分，对称部分为 $(2,0)$ 型对称张量，反对称部分利用 $\chi_i = \epsilon_{ijk}A^{jk}$，这样将两个上标变成一个下标，得到一个 $(0,1)$ 型张量。于是

$$(1,0) \otimes (1,0) = (2,0) \oplus (0,1)$$

即

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

例 3:$3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$

再来算一个例子 $(1,0)\otimes(2,0)$。他们先弄出一个 $(3,0)$ 型张量，将 $(3,0)$ 型张量分为对称部分、反称部分和迹。这里只有上指标，所以没有迹。利用 ϵ 将两个上指标变成一个下指标，得到一个 $(1,1)$ 型张量，就没得抽了。因此，我们得到

$$(1,0)\otimes(2,0)=(3,0)\oplus(1,1)$$

即

$$3\otimes 6=10\oplus 8$$

例 4:$3 \otimes 3 \otimes 3$

利用上面三个例子得到的关系，得到

$$
\begin{aligned}
3 \otimes 3 \otimes 3 &= (6 \oplus 3^*) \otimes 3 \\
&= (6 \otimes 3) \oplus (3^* \otimes 3) \\
&= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1
\end{aligned}
$$

例 5:8 $\otimes$ 8

大家自己做个练习

$$(1,1)\otimes(1,1)=(2,2)\oplus(3,0)\oplus(0,3)\oplus(1,1)\oplus(1,1)\oplus(0,0)$$

一般情况

有了上面的例子，我们现在可以来讨论一般情况，考虑 $(m,n)\otimes(m',n')=(m,n;m',n')$，由于 (m,n) 和 (m',n') 已经是无迹对称的，所以抽取迹的操作应该对于不同张量的部分。例如，只能缩并 m 个上标中的一个指标和 n' 下标中的一个。所以得到

$$\begin{aligned}
(m,n)\otimes(m',n') &= (m,n;m',n')\\
&\oplus (m-1,n;m',n'-1)\oplus(m,n-1;m'-1,n')\\
&\oplus (m-1,n-1;m'-1,n'-1)\\
&\oplus (m-2,n;m',n'-2)\\
&\oplus \cdots ||
\end{aligned}$$

其中 $||$ 表示当没有指标可以缩并的时候，这个过程终止。

一般情况

最终，我们拿掉了所有的迹，得到 $(m-p, n-q; m'-q, n'-p)$，注意这时候我们还没有关注张量是对称的还是反称的，接下来操作的一般表示就写不下去了，就举一个 $8 \otimes 8$ 的例子。
$(1,1) \otimes (1,1)$ 进行疯狂抽迹操作，得到

$$(1,1) \otimes (1,1) = (1,1;1,1) \oplus (0,1;1,0) \oplus (1,0;0,1) \oplus (0,0;0,0)$$

现在构造对称与反称张量，得到

$$(1,1;1,1) = (2,2) \oplus (3,0) \oplus (0,3)$$

其它的都不用构造了，因为上标或者下标仅有一个指标。

$SU(3)$ 与粒子物理

$SU(3)$ 基础表示是夸克

粒子物理的实验发现

在 1950-1960，发现了一系列粒子。

- Λ 重子在 1950 年被发现，质量 1115MeV，质量和中子、质子几乎相同，自旋与质子和中子一致。S.Sakata 推广了 $SU(2)$ 同位旋到 $SU(3)$ 中。
- 不幸的是，其他质量相近的重子被发现了：$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$，质量约为 1190MeV，$\Xi^-, \Xi^0$，质量约为 1320MeV。到此，发现了八种重子 $\Sigma^+,\Sigma^0,\Sigma^-,\Xi^-,\Xi^0,\Lambda,n,p$。
- 还新发现了四种赝无自旋的介子：$K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-$(质量约为 495MeV)，他们的性质像三个 π 介子 (质量约为 138MeV)。故一共发现了七种介子 $K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-, \pi^+, \pi^-, \pi^0$。

7?

可见，发现了七种介子和八种重子。这时一些优秀的理论物理学家指出，Λ, Σ^0 有不同的宇称，故应该把 Λ 除掉。一时之间，很多理论物理学家都在找有 7 维不可约表示的对称群。

The Eightfold Way

最终，另外一个赝无自旋的粒子 η，被发现了。质量大约 550MeV。而且实验证实，Λ, Σ^0 有相同的宇称。

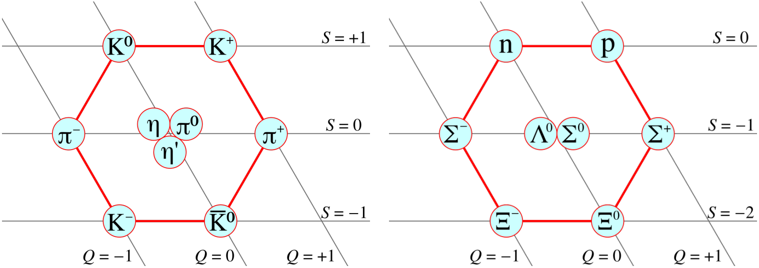
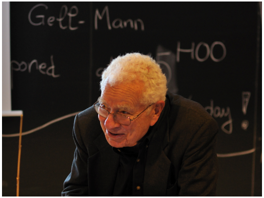


Figure: Mesons and Baryons

The Eightfold Way

于是，Gell-Mann 和 Ne’eman 分别独立指出：八个自旋为零的介子和八个自旋为 $1/2$ 的介子可以得到 $SU(3)$ 的八维伴随表示，就是我们的 (1,1) 型张量。随后，Gell-Mann 指出，有 10 种 ((3,0) 型张量得到的表示)baryon resonances，最后一种是 Ω^-。



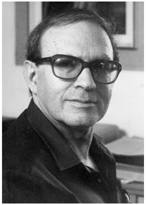


Figure: Gell-Mann, Ne’eman

Badly broken symmetry

$SU(2)$ 的同位旋假说很成功，得到的粒子质量差不多，是一个近似对称性。但是 $SU(3)$ 得到的质量就没有那么相近，我们可以忍受粒子质量差 $20\% \sim 30\%$。重子的情况还好，但是 K 介子和 π 介子就差的离谱。

Quarks and Triality

上面的两个被实验观测到的对称性 $(m, n) = (1, 1) = 8$ 和 $(m, n) = (3, 0) = 10$ 不禁引发我们思考，因为他们都满足

$$(m - n) \mod 3 = 0$$

我们把上面的这个余数叫做 triality。可见，实验上只观测到了 triality 为 0 的粒子。

The center of a group

回想起我们定义过群的中心是和其他群元对易的群元的集合。我们之前讨论过 $SU(N)$ 群的中心就是 Z_N 群。因此 $SU(3)$ 群的中心是 $\{I, z, z^2\}$，其中

$$z \equiv \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} = e^{2\pi i/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将这个群元作用在 (m, n) 型张量上，会使得 (m, n) 型张量多出相因子 $e^{2\pi i(m-n)/3}$，这就是为什么 triality 出现的原因。

Quark

实验只观测到了 $(m-n) \mod 3 = 0$ 的粒子，给了强相互作用理论很大的暗示。这时候，你一定会问: “Where is the fundamental representation 3?”，这就是 Gell-Mann 当年在哥伦比亚大学中午吃饭的时候问的问题。
Gell-Mann 不久之后就搞出了构建 3 的粒子，上夸克 u、下夸克 d、奇异夸克 s。3^* 由反夸克 $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ 构建。说的详细点，$(1,0)$ 对应于夸克，$(0,1)$ 对应于反夸克，所以很容易有

$$\text{triality} = (\text{quark} - \text{antiquark}) \mod 3$$

Etymology

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.

解释发现的重子和介子

有了基础表示对应的粒子，群论立刻就解释了发现的粒子。因为有

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

所以介子是由一个夸克 (对应于 3) 和反夸克 (对应于 3^*) 构成的。又因为有

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

所以重子是三个夸克的束缚态。例如，质子为 uud，中子为 udd，等等。同理，这个 10 种 baryon resonance 也应该是三个夸克束缚在一起，我们惊奇的发现，Ω^- 是 sss 构成的。

$\mathfrak{su}(3)$ Algebra

I scream, you scream, we all scream for icecream!

$\mathfrak{su}(2)$ 代数简要回顾

回顾一下我们如何建立的 $\mathfrak{su}(2)$ 代数，我们先有三个生成元的对易关系

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

其中一种取法是 $J_i = \frac{\sigma_i}{2}$。之后我们定义了升降算符 $J_\pm$，之后三个对易关系变为了 $J_\pm$ 和 J_3 的对易关系。之后我们利用这个对易关系，并选择 J_3 的本征态 $|m\rangle$ 为基底，发现 $J_\pm$ 的作用是升降算符，之后假设有

$$J_+|m\rangle = c_{m+1}|m+1\rangle, J_-|m\rangle = c_m^*|m-1\rangle$$

我们让爬梯子的过程终止于 $|j\rangle$，并利用 $\langle j|J_-J_+|j\rangle = 0$ 和对易关系获得 c_j，最终再次利用对易关系得到一个递推公式，最终得到

$$J_\pm|m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}|m\pm1\rangle$$

另外，从上式可以得到梯子是对称的。

$\mathfrak{su}(3)$ 生成元

回忆 $\mathfrak{su}(3)$ 生成元是无迹厄米矩阵的集合，经过一定的线性组合之后得到八个盖尔曼矩阵，他们按 $\mathrm{tr}\lambda_a\lambda_b = 2\delta_{ab}$ 归一化。

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

盖尔曼矩阵

仔细观察盖尔曼矩阵，我们发现

- λ_1, λ_2 就是泡利矩阵 σ_1, σ_2 多了一行和一列 0。
- λ_4, λ_5 是所谓 $1-3$ 泡利矩阵。
- λ_6, λ_6 是所谓 $2-3$ 泡利矩阵。
- λ_3, λ_8 是两个对角矩阵，任何无迹厄米对角矩阵都可以写成 λ_3, λ_8 的线性组合。

因为 λ_4, λ_5 是 $1-3$ 泡利矩阵，所以我们尝试计算

$$[\lambda_4, \lambda_5] = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8)$$

由此可见，$\mathfrak{su}(3)$ 代数大致是三个互相重叠的 $\mathfrak{su}(2)$ 代数，有两个 $\mathfrak{su}(2)$ 代数共用一个 J_z

对易关系与结构常数

习惯上，定义 $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$，故有

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

通过对盖尔曼矩阵直接的计算，得到

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1 \\ f^{147} &= -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2} \\ f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

在下一章 (下学期) 将会证明，李代数的 f^{abc} 一定是全反对称的。

标记本征态

通过对结构常数的了解，我们发现 $[T^3, T^8] = 0$，因此他们可以具有相同的本征态。由于 T^3 大概就是泡利矩阵，我们直接把 $\mathfrak{su}(2)$ 的 $|m\rangle$ 推广到这里来，定义 T^3 的本征值为 I_3，物理上叫做同位旋的第三个分量。
而描述一个态还需要另外一个量，那就是 T^8 的本征值。由于历史原因，物理学家使用 $Y = \frac{2}{\sqrt{3}} T^8$ 这个矩阵的本征值，这里的 Y 又被称作超电荷矩阵。于是一个态可以用这两个量表征为 $|i_3, y\rangle$，它满足

$$I_3|i_3, y\rangle = i_3|i_3, y\rangle,\ Y|i_3, y\rangle = y|i_3, y\rangle$$

我们把可同时对角化的生成元数目叫做李代数的秩 (rank)。
$\mathfrak{su}(2)$ 的 rank 为 1。

升降算符

这样有两个数来表征一个态，自然就想到定义一堆升降算符，让他们能在这些态里走来走去。和 $\mathfrak{su}(2)$ 不同的是，$\mathfrak{su}(2)$ 是一维的爬梯子，$\mathfrak{su}(3)$ 是在二维的操场上跳远。我们仿照 $\mathfrak{su}(2)$ 中升降算符的定义，随缘定义

$$
\begin{aligned}
I_\pm &= T_1 \pm iT_2 \\
U_\pm &= T_6 \pm iT_7 \\
V_\pm &= T_4 \pm iT_5 \\
I_3 &= T_3 \\
Y &= \frac{2}{\sqrt{3}} T_8
\end{aligned}
$$

Icecream is for you!

不知道是谁规定的这三个符号，粒子物理学家把他们成为“I spin, U spin, V spin!”

对易关系

有了升降算符，接下来就是将原来的对易关系转换为新的八个算符之间的对易关系。

$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm$	$[I_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm$	$[I_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm$
$[Y, I_\pm] = 0$	$[Y, U_\pm] = \pm U_\pm$	$[Y, V_\pm] = \pm V_\pm$
$[I_+, I_-] = 2I_3$	$[U_+, U_-] = 2U_3$	$[V_+, V_-] = 2V_3$
$[I_+, V_-] = -U_-$	$[I_+, U_-] = V_+$	$[U_+, V_-] = I_-$
$[I_+, V_+] = 0$	$[I_+, V_-] = 0$	$[V_+, V_-] = 0$

其他的对易关系都可以由上面的公式得到。

Climbing around on a jungle gym

有了对易关系，我们可以说明这些算符作用在态上使得 i_3, y 的值改变。由于 $\mathfrak{su}(2)$ 的经验，我们不用算就知道

$$I_\pm|i_3, y\rangle \sim |i_3 \pm 1, y\rangle$$

我们再来看看，$U_\pm, V_\pm$ 将会给 $|i_3, y\rangle$ 带来怎样的改变。

$$I_3 U_\pm|i_3, y\rangle = \left(U_\pm I_3 \mp \frac{1}{2} U_\pm\right)|i_3 \pm 1, y\rangle = \left(i_3 \mp \frac{1}{2}\right) U_\pm|i_3, y\rangle$$

同理，有

$$YU_\pm|i_3, y\rangle = (y \pm 1) U_\pm|i_3, y\rangle$$

因此

$$U_\pm|i_3, y\rangle \sim |i_3 \mp \frac{1}{2}, y \pm 1\rangle,\ V_\pm|i_3, y\rangle \sim |i_3 \pm \frac{1}{2}, y \pm \frac{1}{2}\rangle$$

Root Vectors

我们想象我们在 (i_3, y) 的平面，每一个升降算符都对应于这个平面上的一个矢量 $(\Delta i_3, \Delta y)$

$I_\pm$	$(\pm 1, 0)$
$U_\pm$	$(\mp\frac{1}{2}, \pm 1)$
$V_\pm$	$(\pm\frac{1}{2}, \pm 1)$

我们都学过平面几何，这几个向量看的十分别扭，这是为什么呢？

Root Vectors

这是因为我们的 y, i_3 不是以相同的规则归一化的。在盖尔曼矩阵那里我们取了相同的归一化标准，之后我们为了历史原因，取了 $T^8 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y$，如果现在以 T^8 的本征值 i^8 作为操场上的坐标，则升降算符在操场上对应的向量为

$$\vec{I}_\pm = (\pm 1, 0), \quad \vec{U}_\pm = \left(\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \vec{V}_\pm = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

画出来如下图所示，下图又被称作根图 (root diagram)

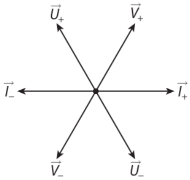
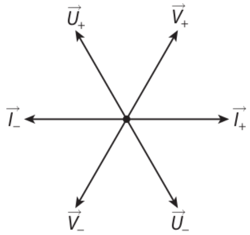


Figure: Root Diagram

从根图中读出对易关系



从根图中我们可以读出对易关系。仔细观察对易关系，两个根的对易子是另外一个根。一般来说，对易关系不为 0 是因为两次移动产生的系数不同。但是如果有一个对易关系移动之后的方向不是原点到这个点的任何方向。那么对易关系显然应该为 0。

有关根向量的一些定理

凭着我们的感觉，我们感觉到

- 所有的根向量有相同的长度。
- 根向量之间的夹角非常好。
- 根向量的和有可能是根向量，也有可能不是。
- 如果 $\vec{\alpha}$ 是一个根向量，它的一些倍数，比如 $2\vec{\alpha}$，不是根向量。

这实际上是一般李代数的定理，下学期我们可能来证明这些。从根图中你还可以感觉到，三组根向量是平权的，你可以任取一个轴为横轴。

Positive and Simple Roots

定义 (Positive Roots)

一个根是正的，如果它对应向量的第一个非零实数分量为正。

说一个根是不是正的，与它本征值选取顺序有关，我们取了 (i_3, i_8)，但原则上，也可以反着取。如果像原来那样取，则正根为 $\vec{V}_+, \vec{I}_+, \vec{U}_-$，且有 $\vec{I}_+ = \vec{V}_+ + \vec{U}_-$，所以我们有下面的定义

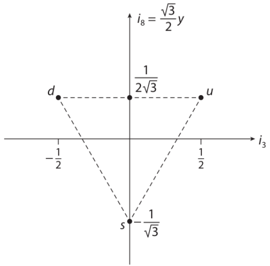
定义 (Simple roots)

给定一个 l 维空间正根的集合，一个子集被称作简单的，如果子集中的任何正根都可以写成简单根的非负系数线性组合。

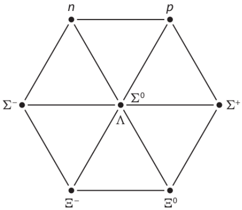
可见，$\vec{V}_+, \vec{U}_-$ 是 $\mathfrak{su}(3)$ 的两个简单根。

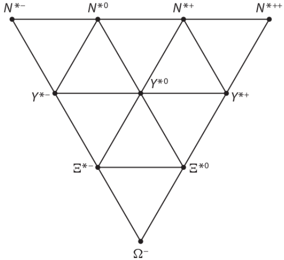
Weight Diagram

根 $\mathfrak{su}(2)$ 的梯子做类比，我们自然想把梯子画出来。在平面上，每一个态用 $(i_3, i_8) = (i_3, \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ 来表示。由于三个根向量是平权的，选取任意一个你正在走的轴为横轴，都是一个 $\mathfrak{su}(2)$ 代数，回忆起 $\mathfrak{su}(2)$ 代数的梯子是关于原点对称的，所以 weight diagram 需沿着三组根向量的三个方向关于原点对称。于是我们来构造夸克的根图

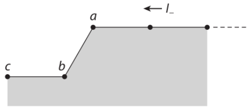


8 和 10 的 weight diagram





Weight Diagram 的定理



可以证明，weight diagram 不是这样的形状。假设
$I_-|a\rangle = 0$, $V_-|a\rangle = \beta|b\rangle$, $I_-|b\rangle = \gamma|c\rangle$，故有

$$I_-V_-|a\rangle = \beta I_-|b\rangle = \beta\gamma|c\rangle = ([I_-, V_-] + V_-I_-)|a\rangle = 0$$

从 $SU(3)$ 回到 $SU(2)$

$$3 \to 2_1 \oplus 1_{-2}$$

从 $SU(3)$ 回到 $SU(2)$

我们现在试图从 $SU(3)$ 回到海森堡的 $SU(2)$ 同位旋理论。考虑 $(1,0)$ 型张量 ψ^i, 很自然地拆分成 $\psi^i = \{\psi^a, \psi^3\}$，其中 a 从 1 取到 2。

这意味着只变换 ψ 的前两个分量，而始终保持第三个分量不变。我们知道前两个分量是上夸克和下夸克，也就是说可以将前两个分量变换成上夸克和下夸克的线性组合。当上下夸克互相变换的时候，正好是质子和中子的互相变换。因此如果保持第三个奇异夸克分量不变，我们成功将 $SU(3)$ 拆成原来的，即

$$\mathbf{3} \to \mathbf{2} \oplus \mathbf{1}$$

更细致的拆分

刚刚我们拆分的方法简单粗暴，如果考虑的更多一点，得到 $SU(3)$ 最大的子群:$SU(3) \to SU(2) \oplus U(1)$，这里 $U(1)$ 中的元素是 $e^{i\theta Y}$，其中

$$Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

其中 Y 又被称作超电荷矩阵。观察 Y, 它是个无迹厄米矩阵，而且变换时候不会改变前两个分量，故确实可以做这种分解，这种分解记为

$$3 \to (2,1) \oplus (1,-2)$$

其中括号的第一个数表示同位旋的维数，第二个数就是 $3Y$，也可以写成更加紧凑的形式

$$3 \to 2_1 \oplus 1_{-2}$$

拆分 $SU(3)$ 的所有表示

将上面的式子每一项都取厄米共轭，因为 $SU(2)$ 怎么取共轭都不变，所以上面的拆分就变为

$$3^* \to 2_{-1} + 1_2$$

因为所有的表示都是由基础表示构建的，所以任何一个表示都可以按照上面两条式子拆分。

给我们的粒子配对

考虑 $3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$，将等式左边用上面两个公式换掉，得到

$$8 \to 3 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 2$$

这说明八个介子或者重子由一个同位旋 triplet，两个同位旋 doublets，一个同位旋 singlet 构成，实验发现，果真如此。

	介子	重子
isospin triplet	π^+, π^0, π^-	$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$
isospin doublets	$K^+, K^0; \bar{K}^0, K^-$	$\Xi^0, \Xi^-; n, p$
isospin singlet	η	Λ

使用更细致的分解

利用 $SU(3) \to SU(2) \oplus U(1)$，可以得到 (注意数 Y 在相乘的过程中只是相加，因为是简单的 $U(1)$ 群)

$$8 \to 3_0 \oplus 1_0 \oplus 2_3 \oplus 2_{-3}$$

这意味着对于 triplet 和 singlet，$Y = 0$，对于 doublets: $Y = \pm 1$

等价方法：拆分张量

将张量拆成低维的张量也可以等效的得到上面的拆分，例如对于上面的 $3 \otimes 3^*$，便可以这样拆分

$$\varphi^i_j = \{\bar{\varphi}^a_b, \varphi^a_3, \varphi^3_a, \varphi^3_3\}$$

其中的 bar 表示那是个无迹张量。

电荷

在上一节中，我们曾经启发性的推导了 $Q = I + \frac{1}{2}Y$，我们曾经说，Y 是在 $SU(2)$ 之外的一个算符，当时我们对于 Y 的值无能为力。但是现在，可以看到，对于 doublets, $Y = 1$，所以电荷为 $Q = (1, 0)$，对于 triplet，电荷为 $Q = (1, 0, -1)$。但是如果将这个规则运用到夸克上，就出现了奇妙的事情，因为 $3 \to 2_1 \oplus 1_{-2}$，那么得到 $Q = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$。可见夸克具有分数的电荷，在早期寻找夸克的努力中，就是冲着分数电荷去的。

未完待续

我们对于 roots 和 weights，还有李代数还有很多话要讲。下学期讲。