Group **T**heory

The Eightfold way of $SU(3)$

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec

Introduction

吹水

S.L Glashow's fortune

While most of our colleagues were put off by the unfamiliar math, [Sidney Coleman and I] became traveling disciples of the Eightfold Way.
- Sheldon Lee Glashow(received the Nobel Prize in 1979 for work based to a large extent on group theory.)

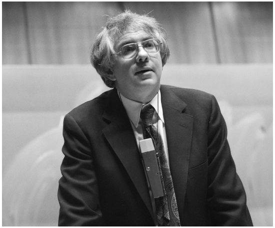


Figure: Sheldon Lee Glashow

仰天大笑吧！困惑上世纪六十年代顶尖粒子物理学家的数学不过只是 $SU(3)$！五分钟就能学完。

粒子物理中的 $SU(3)$

我们已经见过了 $SU(2)$ 的威力，它贯穿整个量子力学，它也在经典物理中出现。$SU(3)$ 只在粒子物理中出现，而且出现了两次

- 夸克的发现
- 量子色动力学的规范对称群

使用张量方法构造表示

$$D(m, n) = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2)$$

张量方法构造表示

我们还是用张量的方法构造表示，回忆 $SU(N)$ 群中要区分上下标，比如对于 $SU(2)$ 群，有

$$\psi_i = \epsilon_{ij}\psi^j$$

因此，我们说上标和下标实际上可以不做区分，是等价的。但是对于 $SU(3)$ 群，显然上标和下标不等价，尝试这样缩并只会得到更高阶的张量。

上标和下标

因此，我们需要单独处理上标和下标，我们记有 m 个上标和 n 个下标的张量为 (m,n) 型张量。虽然 $SU(3)$ 需要区分上下标，但是它仍然有非常好的性质，我们将证明，只需要考虑无迹且上下标分别对称的张量。证明如下

- 取一个 (m,n) 型张量，取定两个指标，构造他们的对称部分、反对称部分和迹，将无迹对称张量纳入考虑。用特殊方法抽掉的迹也是对称张量。
- 将反对称部分使用 ϵ_{ijk} 缩并，就会将两个反对称上 (下) 指标变成一个下 (上) 指标，如此往复操作 (再进行对称反对称、抽迹)，直到剩余 $(1,1)$ 型张量。
- 这样剩余的全部是我们要的张量，证毕。

小练习

试构造 T^{ij}_{kl} 的无迹对称部分

$$\tilde{T}^{ij}_{kl} = T^{ij}_{kl} - A(\delta^i_k T^j_l + \delta^j_k T^i_l + \delta^i_l T^j_k + \delta^j_l T^i_k) + B(\delta^i_k \delta^j_l + \delta^j_k \delta^i_l + \delta^i_l \delta^j_k + \delta^j_l \delta^i_k) T$$

其中 $T^j_l = T^{ij}_{il}$，$T = T^j_j$

$SU(3)$ 表示的维数

因此，全体 (m,n) 型无迹对称张量得到的表示就是 $SU(3)$ 用这种方法得到的所有不可约表示。我们下面研究表示的维数。表示的维数就是张量的独立分量数，先只考虑对称。注意到 i,j,k 等指标在 $SU(3)$ 群里只能取 $1,2,3$。假设有一个 $(m,0)$ 张量 $S^{33\cdots 3xx\cdots x}$，假设有 k 个指标不是 3，即有 k 个 x，在这种情况下，看 k 个 $1,2$ 中有多少个 1，故独立分量个数为

$$\sum_{k=0}^{m}(k+1)=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$$

$SU(3)$ 表示的维数

因此，(m,n) 型上下指标分别对称的张量的独立分量就有 $\frac{1}{4}(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)$ 个，现在考虑无迹的等式

$$\delta_i^j \varphi_{jj_2\cdots j_m}^{ii_2\cdots i_m} = 0$$

等式左边的行为像一个 $(m-1,n-1)$ 型张量，所以一共有 $\frac{1}{4}m(m+1)n(n+1)$ 个等式。因此，(m,n) 型张量得到的表示维数为

$$\begin{aligned} D(m,n) &= \frac{1}{4}(m+1)(m+2)(n+1)(n+2) - \frac{1}{4}m(m+1)n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2) \end{aligned}$$

一些例子

通过上面的公式计算一些特殊的例子，如下

$(1,0)$	$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot 3=3$
$(1,1)$	$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot 4=8$
$(2,0)$	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot 4=6$
$(3,0)$	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot 5=10$
$(2,1)$	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 5=15$
$(2,2)$	$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot 6=27$

将张量相乘

在 $SU(2)$ 中，我们将两个张量乘起来得到一堆张量，这在代数中其实对应于角动量的加法。那么相应的，我们也来研究 $SU(3)$ 的加法，以后我们会看到和 $\mathfrak{su}(3)$ 代数的联系。我们先算几个简单的例子。

一些记号

也可以用维数来表示张量。但是，$(1,0)$ 型张量和 $(0,1)$ 型张量都贡献三维表示由于上下标不等价，所以应该做区分，前者记为 3，后者记为 3^*。同理，$(3,0)$ 型 (无迹对称) 张量得到的表示记作 10，$(0,3)$ 型张量得到的表示记作 10^*，以此类推。

例 1:$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$

现在我们将张量直接“相乘”，我们先来计算 $(1,0) \otimes (0,1)$，这意味着拼成一个张量 T^i_j，根据套路，分成对称、反称 (这里因为上标下标只有一个，所以没得构造)、迹三部分，迹是一个标量 $(0,0)$，剩下的无迹部分便是一个 $(1,1)$ 型表示。所以我们得到

$$(1,0) \otimes (0,1) = (1,1) \oplus (0,0)$$

即

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

例 2:$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$

我们来计算 $(1,0) \otimes (1,0)$，首先他们拼成一个 $(2,0)$ 型张量，$(2,0)$ 型张量没的抽迹。将它拆成对称部分和反称部分，对称部分为 $(2,0)$ 型对称张量，反对称部分利用 $\chi_i = \epsilon_{ijk} A^{jk}$，这样将两个上标变成一个下标，得到一个 $(0,1)$ 型张量。于是

$$(1,0) \otimes (1,0) = (2,0) \oplus (0,1)$$

即

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

例 3:$3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$

再来算一个例子 $(1,0)\otimes(2,0)$。他们先弄出一个 $(3,0)$ 型张量，将 $(3,0)$ 型张量分为对称部分、反称部分和迹。这里只有上指标，所以没有迹。利用 ϵ 将两个上指标变成一个下指标，得到一个 $(1,1)$ 型张量，就没得抽了。因此，我们得到

$$(1,0)\otimes(2,0)=(3,0)\oplus(1,1)$$

即

$$3\otimes 6=10\oplus 8$$

例 4:$3 \otimes 3 \otimes 3$

利用上面三个例子得到的关系，得到

$$\begin{aligned} 3 \otimes 3 \otimes 3 &= (6 \oplus 3^*) \otimes 3 \\ &= (6 \otimes 3) \oplus (3^* \otimes 3) \\ &= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1 \end{aligned}$$

例 5:8 $\otimes$ 8

大家自己做个练习

$$(1,1)\otimes(1,1)=(2,2)\oplus(3,0)\oplus(0,3)\oplus(1,1)\oplus(1,1)\oplus(0,0)$$

一般情况

有了上面的例子，我们现在可以来讨论一般情况，考虑 $(m,n)\otimes(m',n')=(m,n;m',n')$，由于 (m,n) 和 (m',n') 已经是无迹对称的，所以抽取迹的操作应该对于不同张量的部分。例如，只能缩并 m 个上标中的一个指标和 n' 下标中的一个。所以得到

$$
\begin{aligned}
(m,n)\otimes(m',n') &= (m,n;m',n') \\
&\oplus (m-1,n;m',n'-1)\oplus(m,n-1;m'-1,n') \\
&\oplus (m-1,n-1;m'-1,n'-1) \\
&\oplus (m-2,n;m',n'-2) \\
&\oplus \cdots||
\end{aligned}
$$

其中 $||$ 表示当没有指标可以缩并的时候，这个过程终止。

一般情况

最终，我们拿掉了所有的迹，得到 $(m-p, n-q; m'-q, n'-p)$，注意这时候我们还没有关注张量是对称的还是反称的，接下来操作的一般表示就写不下去了，就举一个 $8 \otimes 8$ 的例子。
$(1,1) \otimes (1,1)$ 进行疯狂抽迹操作，得到

$$(1,1) \otimes (1,1) = (1,1;1,1) \oplus (0,1;1,0) \oplus (1,0;0,1) \oplus (0,0;0,0)$$

现在构造对称与反称张量，得到

$$(1,1;1,1) = (2,2) \oplus (3,0) \oplus (0,3)$$

其它的都不用构造了，因为上标或者下标仅有一个指标。

$SU(3)$ 与粒子物理

$SU(3)$ 基础表示是夸克

粒子物理的实验发现

在 1950-1960，发现了一系列粒子。

- Λ 重子在 1950 年被发现，质量 1115MeV，质量和中子、质子几乎相同，自旋与质子和中子一致。S.Sakata 推广了 $SU(2)$ 同位旋到 $SU(3)$ 中。
- 不幸的是，其他质量相近的重子被发现了：$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$，质量约为 1190MeV，$\Xi^-, \Xi^0$，质量约为 1320MeV。到此，发现了八种重子 Σ^+,Σ^0,Σ^-,Ξ^-,Ξ^0,Λ,n,p。
- 还新发现了四种赝无自旋的介子：$K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-$(质量约为 495MeV)，他们的性质像三个 π 介子 (质量约为 138MeV)。故一共发现了七种介子 $K^+, K^0, \bar{K}^0, K^-, \pi^+, \pi^-, \pi^0$。

The Particle Zoo

感觉很乱? 那就对了 。

7?

可见，发现了七种介子和八种重子。这时一些优秀的理论物理学家指出，Λ, Σ^0 有不同的宇称，故应该把 Λ 除掉。一时之间，很多理论物理学家都在找有 7 维不可约表示的对称群。

The Eightfold Way

最终，另外一个赝无自旋的粒子 η，被发现了。质量大约 550MeV。而且实验证实，Λ, Σ^0 有相同的宇称。

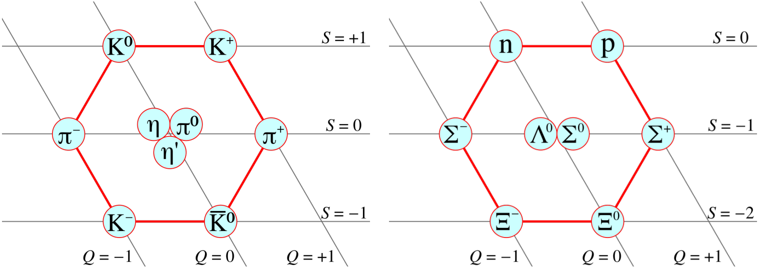
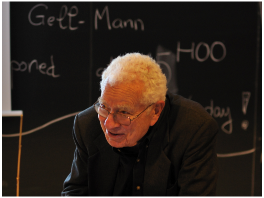


Figure: Mesons and Baryons

The Eightfold Way

于是，Gell-Mann 和 Ne'eman 分别独立指出：八个自旋为零的介子和八个自旋为 1/2 的介子可以得到 $SU(3)$ 的八维伴随表示，就是我们的 (1,1) 型张量。随后，Gell-Mann 指出，有 10 种 ((3,0) 型张量得到的表示)baryon resonances，最后一种是 Ω^-。



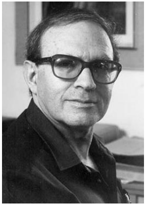


Figure: Gell-Mann, Ne'eman

Badly broken symmetry

$SU(2)$ 的同位旋假说很成功，得到的粒子质量差不多，是一个近似对称性。但是 $SU(3)$ 得到的质量就没有那么相近，我们可以忍受粒子质量差 $20\% \sim 30\%$。重子的情况还好，但是 K 介子和 π 介子就差的离谱。

Quarks and Triality

上面的两个被实验观测到的对称性 $(m,n)=(1,1)=8$ 和 $(m,n)=(3,0)=10$ 不禁引发我们思考，因为他们都满足

$$(m-n) \mod 3 = 0$$

我们把上面的这个余数叫做 triality。可见，实验上只观测到了 triality 为 0 的粒子。

The center of a group

回想起我们定义过群的中心是和其他群元对易的群元的集合。我们之前讨论过 $SU(N)$ 群的中心就是 Z_N 群。因此 $SU(3)$ 群的中心是 $\{I, z, z^2\}$，其中

$$z \equiv \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} = e^{2\pi i/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将这个群元作用在 (m, n) 型张量上，会使得 (m, n) 型张量多出相因子 $e^{2\pi i(m-n)/3}$，这就是为什么 triality 出现的原因。

Quark

实验只观测到了 $(m-n) \mod 3 = 0$ 的粒子，给了强相互作用理论很大的暗示。这时候，你一定会问: “Where is the fundamental representation 3?”，这就是 Gell-Mann 当年在哥伦比亚大学中午吃饭的时候问的问题。

Gell-Mann 不久之后就搞出了构建 3 的粒子，上夸克 u、下夸克 d、奇异夸克 s。3^* 由反夸克 $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ 构建。说的详细点，$(1,0)$ 对应于夸克，$(0,1)$ 对应于反夸克，所以很容易有

$$\text{triality} = (\text{quark} - \text{antiquark}) \mod 3$$

Etymology

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.

解释发现的重子和介子

有了基础表示对应的粒子，群论立刻就解释了发现的粒子。因为有

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

所以介子是由一个夸克 (对应于 3) 和反夸克 (对应于 3^*) 构成的。又因为有

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

所以重子是三个夸克的束缚态。例如，质子为 uud，中子为 udd，等等。同理，这个 10 种 baryon resonance 也应该是三个夸克束缚在一起，我们惊奇的发现，Ω^- 是 sss 构成的。

从 $SU(3)$ 回到 $SU(2)$

$$\mathbf{3} \to \mathbf{2}_1 \oplus \mathbf{1}_{-2}$$

从 $SU(3)$ 回到 $SU(2)$

我们现在试图从 $SU(3)$ 回到海森堡的 $SU(2)$ 同位旋理论。考虑 $(1,0)$ 型张量 ψ^i, 很自然地拆分成 $\psi^i = \{\psi^a, \psi^3\}$，其中 a 从 1 取到 2。

这意味着只变换 ψ 的前两个分量，而始终保持第三个分量不变。我们知道前两个分量是上夸克和下夸克，也就是说可以将前两个分量变换成上夸克和下夸克的线性组合。当上下夸克互相变换的时候，正好是质子和中子的互相变换。因此如果保持第三个奇异夸克分量不变，我们成功将 $SU(3)$ 拆成原来的，即

$$3 \to 2 \oplus 1$$

更细致的拆分

刚刚我们拆分的方法简单粗暴，如果考虑的更多一点，得到 $SU(3)$ 最大的子群:$SU(3) \to SU(2) \oplus U(1)$，这里 $U(1)$ 中的元素是 $e^{i\theta Y}$，其中

$$Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

其中 Y 又被称作超电荷矩阵。观察 Y, 它是个无迹厄米矩阵，而且变换时候不会改变前两个分量，故确实可以做这种分解，这种分解记为

$$3 \to (2, 1) \oplus (1, -2)$$

其中括号的第一个数表示同位旋的维数，第二个数就是 $3Y$，也可以写成更加紧凑的形式

$$3 \to 2_1 \oplus 1_{-2}$$

拆分 $SU(3)$ 的所有表示

将上面的式子每一项都取厄米共轭，因为 $SU(2)$ 怎么取共轭都不变，所以上面的拆分就变为

$$3^* \to 2_{-1} + 1_2$$

因为所有的表示都是由基础表示构建的，所以任何一个表示都可以按照上面两条式子拆分。

给我们的粒子配对

考虑 $3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$，将等式左边用上面两个公式换掉，得到

$$8 \to 3 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 2$$

这说明八个介子或者重子由一个同位旋 triplet，两个同位旋 doublets，一个同位旋 singlet 构成，实验发现，果真如此。

	介子	重子
isospin triplet	π^+, π^0, π^-	$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$
isospin doublets	$K^+, K^0; \bar{K}^0, K^-$	$\Xi^0, \Xi^-; n, p$
isospin singlet	η	Λ

使用更细致的分解

利用 $SU(3) \to SU(2) \oplus U(1)$，可以得到 (注意数 Y 在相乘的过程中只是相加，因为是简单的 $U(1)$ 群)

$$8 \to 3_0 \oplus 1_0 \oplus 2_3 \oplus 2_{-3}$$

这意味着对于 triplet 和 singlet，$Y = 0$，对于 doublets: $Y = \pm 1$

等价方法：拆分张量

将张量拆成低维的张量也可以等效的得到上面的拆分，例如对于上面的 $3 \otimes 3^*$，便可以这样拆分

$$\varphi^i_j = \{\bar{\varphi}^a_b, \varphi^a_3, \varphi^3_a, \varphi^3_3\}$$

其中的 bar 表示那是个无迹张量。

电荷

在上一节中，我们曾经启发性的推导了 $Q = I + \frac{1}{2}Y$，我们曾经说，Y 是在 $SU(2)$ 之外的一个算符，当时我们对于 Y 的值无能为力。但是现在，可以看到，对于 doublets, $Y = 1$，所以电荷为 $Q = (1, 0)$，对于 triplet，电荷为 $Q = (1, 0, -1)$。但是如果将这个规则运用到夸克上，就出现了奇妙的事情，因为 $3 \to 2_1 \oplus 1_{-2}$，那么得到 $Q = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$。可见夸克具有分数的电荷，在早期寻找夸克的努力中，就是冲着分数电荷去的。

未完待续

我们对于 $SU(3)$ 和粒子物理还有很多的话要讲，但是在那之前，我们需要仔细学习 $SU(3)$ 代数。所以我们今天的故事就到这里结束了。