Quantum Field Theory
正则量子化

Haoting Xu

February 20, 2020

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec

单粒子量子力学的终结

$$P \simeq e^{-m|x|}$$

海森堡绘景

薛定谔绘景：算符不随时间改变，态随时间改变。

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle_S$$

海森堡绘景：算符随时间改变，态不随时间改变。为了保持算符平均值不变，定义

$$\hat{\mathcal{O}}_H = e^{-i\hat{H}t}\hat{\mathcal{O}}_S e^{i\hat{H}t}$$

利用 $i\partial_t|\psi(t)\rangle_S = \hat{H}|\psi(0)\rangle_S$，可以得到算符的演化方程

$$\frac{d\hat{\mathcal{O}}_H(t)}{dt} = -i\left[\hat{\mathcal{O}}_H(t), \hat{H}\right]$$

海森堡绘景的好处

如果采用了海森堡绘景，算符不随时间变化。即算符是洛伦兹不变的。在我们讨论相对论的时候，这就 good

单粒子量子力学的终结

我们现在要试图把单粒子量子力学和狭义相对论结合起来，即简单的设想 $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$，我们采取归一化 $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle$。狭义相对论要求无法和具有类空距离的事件沟通，即要求两个态不能相互跃迁。因此我们来计算 (其中 $t > |\vec{x}| = x$)

$$\mathcal{A} = \langle\vec{x}|e^{-i\hat{H}t}|\vec{x} = 0\rangle$$

利用套路，有

$$\begin{aligned}\langle\vec{x}|e^{-i\hat{H}t}|\vec{x} = 0\rangle &= \int d^3p\langle\vec{x}|e^{-i\hat{H}t}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{x} = 0\rangle \\ &= \int d^3p\frac{1}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{-iE_pt}\end{aligned}$$

进行积分

一阵优秀的化直角坐标为球坐标的操作后，得到

$$\mathcal{A} = \frac{-i}{(2\pi)^2 x} \int_{-\infty}^{\infty} dp p e^{ipx} e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}$$

进行围到积分最终得到

$$\mathcal{A} \simeq e^{-m|\vec{x}|}$$

因此我们可以看到，仍然是有概率跃迁到类空距离的点，这样会违背因果律。所以单粒子的量子力学体系想要和相对论统一起来是不可能的。

量子场论对于因果律的要求

我们构建的量子场论不能破坏因果律，在量子场论中，我们把场看做算符，这意味着要求

$$\left[\hat{\mathcal{O}}(x), \hat{\mathcal{O}}(y)\right] = 0$$

如果 $(x-y)^2 < 0$。

对称性与诺特定理

一种对称性意味着守恒流守恒

对称性

定义 (对称性)

如果在一种无穷小变换 $\delta\phi$ 下，拉氏密度 $\mathcal{L}$ 差某个函数的四维散度

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu W^\mu$$

则称这样的变换是一种对称变换。

如果这样，我们有

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$

如果场还满足欧拉-拉格朗日方程，则有

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) = \partial_\mu W^\mu$$

诺特定理

于是我们有

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

其中守恒流为

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi - W^\mu$$

我们便证明了诺特定理。

一个例子：能量动量张量

考虑时空平移的无穷小变换

$$x^\nu \to x^\nu - \epsilon^\nu$$

则拉氏密度作如下变换

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \epsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(x)$$

代入诺特定理，得到时空平移的守恒流为

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \epsilon^\nu \partial_\nu \phi - \epsilon^\mu \mathcal{L}(x)$$

我们可以去掉 ϵ^ν，从而提取出一个张量

$$(j^\mu)_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}(x) \equiv T^\mu_\nu$$

这就是能量动量张量。对应于在经典力学里我们老生常谈的: 时间平移不变性对应能量守恒，空间平移不变性对应动量守恒。

小练习:KG 场的能量动量张量

套用上面的公式，求出 KG 场的能量动量张量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

角动量守恒

大家回去自己尝试推导在无穷小洛伦兹变换下

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

的守恒流。

内禀对称性

例如对于复数场

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - V(|\psi|^2)$$

拉氏密度在如下变换下保持不变

$$\psi \to \psi e^{i\alpha}$$

这种对称性被叫做 $U(1)$ 对称性，试着得到 $U(1)$ 对称性的守恒流。一会我们将看到这个守恒流的意义。

正则量子化一般步骤

我们现在要建立场的量子化描述，一般步骤如下

1. 写出拉氏密度。
2. 写出哈密顿密度。$\mathcal{H} = \pi^a \cdot \dot{\phi}_a - \mathcal{L}$
3. 引入对易关系。
4. 将场使用产生湮灭算符展开，代入哈密顿量。
5. Normal Ordering.

一个例子：标量场量子化

我们先来搞个最简单的

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

瞬间得到哈密顿量

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

将场变为算符，引入对易关系

$$\left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}^0(t,\vec{y})\right] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

相对论归一化

我们希望我们接下来书写的一些表达式都是相对论不变的。显然，下面的式子

$$\int d^4p\delta(0)=\int d^4p\delta(p_0^2-\vec{p}^2-m^2)$$

是洛伦兹不变的，利用广主神奇公式 $\delta(f(x))=\sum_n\frac{\delta(x-x_n)}{f'(x_n)}$，得到

$$\int d^4p\delta(p_0^2-\vec{p}^2-m^2)=\int\frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}}$$

是洛伦兹不变的。

相对论归一化

我们还可以得到 $2E_{\vec{p}}\delta^3(\vec{p}-\vec{q})$ 是洛伦兹不变的。我们还可以定义相对论归一化的态 $|p\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}}|\vec{p}\rangle$，他们满足

$$\langle p|q\rangle = 2E_{\vec{p}}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$$

产生湮灭算符

可以将场用产生湮灭算符展开

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}})$$

如果我们考虑海森堡绘景

$$\hat{\phi}(x) = \hat{U}^{\dagger}\hat{\phi}(\vec{x})\hat{U} = e^{i\hat{H}t}\hat{\phi}(\vec{x})e^{-i\hat{H}t}$$

先计算 $\hat{U}^{\dagger} a_{\vec{p}} \hat{U}$

利用对易关系 $[H, \hat{a}_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$ 和公式

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2!} \left[A, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] + \cdots$$

我们得到

$$e^{i\hat{H}t} a_{\vec{p}} e^{-i\hat{H}t} = a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}} t}$$

最终形式

最终我们得到

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}} e^{ip\cdot x})$$

另外从对易关系我们可以得到升降算符的对易

哈密顿量

将上面的表达式带入到哈密顿量中

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2$$

进行一顿计算后得到

$$H = \int d^3pE_{\vec{p}}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\right)$$

可见最后一项必然导致发散，那么怎么处理呢?

Normal Ordering

有一种解释就是我们只关心能量差，因此直接把后面那项扔掉。我们只关心产生算符在前，湮灭算符在后的项，这种产生在前，湮灭在后的顺序就叫做 Normal Ordering，用 N 来表示 Normal Ordering，有

$$N[\hat{A}\hat{B}\hat{C}^\dagger\cdots\hat{Z}] = (\text{creation operators on the left}) \equiv :\hat{A}\hat{B}\hat{C}^\dagger\cdots\hat{Z}:$$

对于玻色场，上面的 ordering 没有问题。注意对于费米场，会额外多一个排序因子 $(-1)^P$。

Casimir Effect

你以为这样扔掉就完了吗？没有粒子的真空那部分能量不会体现吗？考虑一个长为 L 的盒子，考虑中间有两块平行板 d。将哈密顿量拿过来

$$H = \int d^3 p E_{\vec{p}} \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0)$$

回忆 δ 函数相当于空间的体积

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = \lim_{L\to\infty} \int_{-L/2}^{L/2} d^3 x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}|_{\vec{p}=0} = V$$

因此蕴含在两板之间的能量

$$E \sim \frac{n\pi}{2d}$$

Ultraviolet cut-off

但是两板之间的能量仍然是无穷的，实验中一般使用电磁场，我们知道电磁场在高频的时候就不很好的遵循低频边界条件了，所以我们直接让高频的部分能量衰减。

$$E(d) \sim \sum_n \frac{n\pi}{2d} e^{-n\pi a/d} \simeq \frac{d}{2\pi a^2} - \frac{\pi}{24d} + \cdots$$

真正的能量是

$$E = E(d) + E(L-d)$$

最终能计算出受力

$$F = -\frac{\partial E}{\partial d} = -\frac{\pi}{24d^2}$$

这就是 Casimir 效应，这告诉我们两个板放在一起会损失一些模式，从而表现为负能量。另一个解释是这个力起源于真空中的涨落 (正反粒子对的产生和湮灭)。

Feynman's Interpreatation of the negative frequency

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} e^{ip\cdot x})$$

盯着这个表达式，你会发现第一项似乎是“负能量态”，如何给这一个解释？费曼给出了一个猜想，负能量态就是产生一个反粒子向外跑，而正能量态是正粒子向内跑湮灭。对于这个标量场，它是自身的反粒子。

复数场

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^\dagger(x)\partial_\mu \psi(x) - m^2 \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

复数场的量子化

复数场的拉氏密度

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^\dagger(x) \partial_\mu \psi(x) - m^2 \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

得到哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \partial_0 \psi^\dagger(x) \partial_0 \psi(x) + \nabla \psi^\dagger(x) \cdot \nabla \psi(x) + m^2 \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

引入对易关系

$$\left[\hat{\psi}(t,\vec{x}), \hat{\pi}_\psi(t,\vec{y})\right] = \left[\hat{\psi}^\dagger(t,\vec{x}), \hat{\pi}_{\psi^\dagger}(t,\vec{y})\right] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

正反粒子

将场算符用产生湮灭算符展开

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} \right)$$

其中 $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$ 分别湮灭两种不同的粒子，又由于这两种粒子具有相同的能量，所以我们把它们解释为正反粒子。

哈密顿量

将上述展开带入哈密顿量中，并进行 normal ordering，得到

$$\hat{H} = \int d^3 p E_p \left(a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p \right)$$

守恒流

回顾之前 $U(1)$ 对称性导致的复数场的守恒流

$$J^\mu = i[(\partial^\mu \psi^\dagger)\psi - (\partial^\mu \psi)\psi^\dagger]$$

考虑守恒荷 j^0，将之前的展开带入，进行 normal ordering 得到

$$N[\hat{Q}] = \int d^3p(b_p^\dagger b_p - a_p^\dagger a_p)$$

使用粒子数算符，有

$$Q = -N_a + N_b$$

这说明粒子数减去反粒子数守恒。这就是电荷守恒。一般来说，对正粒子选取正号，对于反粒子选取负号，即上面的整个式子差个负号。

非相对论极限

非相对论情形下能量为

$$E = mc^2 + \epsilon$$

其中 ϵ 是一个小量，取非相对论极限的步骤就是将 mc^2 的演化部分分离出来，即

$$\phi(x) \to \psi(x)e^{-imt}$$

例如对于 KG 方程 $(\partial^2 + m^2)\psi(x)e^{-imt}$，我们将上面的式子代入并做一些近似得到

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

即自由粒子的薛定谔方程。

复数场的情形

对于复数场，我们采取如下分离方式

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-imt} \Psi$$

将这个带入到拉氏量中，得到

$$\mathcal{L} = i\Psi^\dagger(x)\partial_0(x) - \frac{1}{2m}\nabla\Psi^\dagger(x)\cdot\Psi(x) - \frac{g}{2}[\Psi^\dagger(x)\Psi(x)]^2$$

试着将这个场量子化，如果懒，就看看书上 Example 12.4。书上还给出了另一种有趣的量子化方式，大家可以随便看看。

很多分量的场

升降算符数目取决于场的独立分量数

同位旋

1932 年，海森堡发现质子的质量和中子的质量十分相近 $m_p \simeq m_n$，并认为他们是同一个东西，它们组成一个类似于自旋 1/2 的系统，在一种特定的变换下可以相互转换。我们知道 $SU(2) \simeq SO(3)$，我们先来考虑一个 $SO(3)$ 的同位旋系统。假设 $SO(3)$ 的 weights 分别对应与三种粒子 (t, d, h)(short for Tom, Dick, Harry)。因为场是粒子的激发态，所以我们猜测需要三个场来描述。

拉氏量

于是我们的场为 $\vec{\Phi}(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x))$，随便构造一个 $SO(3)$(对场变换) 的拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{\Phi}) \cdot (\partial_\mu \vec{\Phi}) - \frac{m^2}{2} \vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi}$$

现在将场量子化，首先计算哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \left[\frac{1}{2}(\partial_0 \phi_\alpha)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi_\alpha)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_\alpha^2 \right]$$

对易关系和展开

因此可以引入对易关系，由于我们认为三个场是独立的，有

$$[\Phi_\alpha(x), \pi_\beta(y)] = i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{\alpha\beta}$$

所以需要引入三组产生湮灭算符，将场展开为

$$\vec{\Phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{h}_\alpha \left(a_{\vec{p}\alpha} e^{-ip\cdot x} + a^\dagger_{\vec{p}\alpha} e^{ip\cdot x} \right)$$

其中 $\vec{h}_1 = (1,0,0), \cdots$

诺特定理

回忆三维空间的无穷小转动

$$\begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta^3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

可以写为

$$\Phi_i \to \Phi_i - \epsilon_{ijk}\theta_j\Phi_k$$

使用诺特定理，得到守恒流

$$(j^\mu)_i = \epsilon_{jik}(\partial^\mu \phi_i)\phi_k$$

这里的守恒荷就是同位旋。

规范对称性

考虑复数场

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi)^\dagger (\partial_\mu \psi) - m^2 \psi^\dagger \psi$$

作 $U(1)$ 变换 $\psi \to \psi e^{i\alpha}$，拉氏量不变。但是如果 α 依赖于时空坐标 $\alpha(x)$，那么不变性就不成立。这就说明这个场论不是全局对称的，而是局域对称的。为了使得不变性成立，引入一个新的场并定义一个新的协变导数算符

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$$

其中 A_μ 按照如下规则变换

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x)$$

可以证明，在变换下 $D(\psi) \to D(\psi e^{i\alpha})$，所以拉氏量改写为

$$\mathcal{L} = (D^\mu \psi)^\dagger (D_\mu \psi) - m^2 \psi^\dagger \psi$$

规范场的拉氏量

对于规范场，引入拉氏量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A^{\mu}J^{\mu}$$

运动方程就是麦克斯韦方程组。如果进行规范变换

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\chi(x)$$

则不会改变观测量。可见场的选择有一定任意性，可以进行规范固定，如选取洛伦兹规范

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$$

但是这样还不能完全固定场，还可以加上一个 $\partial^2\epsilon = 0$ 的场。如果再选取库伦规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$，有了这两个规范，场的独立分量就是 $4 - 1 - 1 = 2$ 个，意味着光子有两种偏振态。

场量子化

拉氏量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

求得哈密顿量

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

引入对易关系，为了保证规范不变，我们取

$$[A^i(x), E^j(y)] = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{x}-\vec{y})} \left(\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{p^2} \right) = i\delta^{(3)}_{\mathrm{tr}}(\vec{x} - \vec{y})$$

仍然有 $[\hat{a}_{\vec{p}\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}\lambda}] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})\delta_{\lambda\lambda'}$

将场展开为

$$A^{\mu}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^{2} \left(\epsilon_{\lambda}^{\mu} a_{\vec{p}\lambda} e^{-ip\cdot x} + \epsilon_{\lambda}^{\mu *} a_{\vec{p}\lambda}^{\dagger} e^{ip\cdot x} \right)$$

将这个代入哈密顿量，据说就能得到

$$\hat{H} = \int d^3p \sum_{\lambda} E_{\vec{p}} a_{\vec{p}\lambda}^{\dagger} a_{\vec{p}\lambda}$$

解释为光子。