



Application of Quantum Mechanics

Talk 5-Shine a light

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec/shine_a_light

高中物理的疑惑

在高中物理选修3-5我们学过，如果使用光照射原子，如果光子的能量恰好为

$$h\nu = E_2 - E_1$$

那么电子就会从状态1(可以是基态)跃迁到状态2(激发态)上。激发态不稳定，立刻又会落回基态，发出同样频率的光子。

But why?



原子物理的疑惑

学过量子力学之后大家都知道，氢原子的一个状态是不同本征态之间的叠加(加上一个时间震荡因子)

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i e^{-iEt/\hbar} |\psi_i\rangle$$

根据通常的量子力学，本征态不论是激发态还是基态都及其稳定，为何激发态会自发地向基态转变？既然是不同本征态的叠加，何为跃迁？

跃迁的物理本质

光的本质是电磁波，在这里我们先使用经典的处理方法，完整的处理需要将光场量子化(之后会提到)。对于单色光(平面波)，有

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c} (\hat{k} \times \vec{E}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

其中角频率和波长

$$\omega = c|\vec{k}|, \quad \lambda = 2\pi c/\omega$$

对光子的条件

- (1) 光子的波长与跃迁所需能量相近
- (2) 光的波长远远大于原子的尺度 $\lambda \gg a_0$ ，所以电磁场可认为是空间均匀的

上述两种条件是自洽的，典型的波长为 $\lambda \simeq \frac{2\pi a_0}{\alpha}$ ， $\alpha = 1/137$ 。

电场vs磁场

斯塔克效应引起的能级分裂

$$\Delta E \simeq \frac{e\epsilon\hbar}{mc\alpha}$$

塞曼效应引起的能级分裂

$$\Delta E \simeq \frac{eB\hbar}{2m} = \frac{e\epsilon\hbar}{2mc}$$

电场引起的分裂大概是磁场的137倍，所以我们暂时不考虑磁场的效应。

哈密顿量

带电粒子在电磁场中的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} + e\vec{A})^2 + q\phi$$

因为波长远大于玻尔半径，故电场可以看做是时变的。我们这里取 $\vec{A} = 0$, $\phi = \vec{E}_0 \cdot \vec{x} \cos(\omega t)$ ，电子总的哈密顿量可看成氢原子的哈密顿量加上微扰

$$H = H_0 + \Delta H(t) = H_0 + e\vec{E}_0 \cdot \vec{x} \cos(\omega t)$$

含时微扰

我们只考虑两个我们关注的态, $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$, 没有电场的情况下, 一般的态是他们俩的线性组合

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-iE_1t/\hbar}|\psi_1\rangle + c_2(t)e^{-iE_2t/\hbar}|\psi_2\rangle$$

其中 $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, 将上式带入含时薛定谔方程中

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = (H_0 + \Delta H)|\Psi\rangle$$

得到的式子分别与 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ 做内积, 定义 $\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$

$$\begin{cases} i\hbar\dot{c}_1(t) = c_1(t)\langle\psi_1|\Delta H|\psi_1\rangle + c_2(t)e^{-i\omega_0t}\langle\psi_1|\Delta H|\psi_2\rangle \\ i\hbar\dot{c}_2(t) = c_1(t)e^{i\omega_0t}\langle\psi_2|\Delta H|\psi_1\rangle + c_2(t)\langle\psi_2|\Delta H|\psi_2\rangle \end{cases}$$

计算矩阵元

矩阵元为

$$\langle \psi_i | \Delta H | \psi_j \rangle = e \vec{E}_0 \cdot \langle \psi_i | \vec{x} | \psi_j \rangle \cos \omega t$$

\vec{x} 是奇宇称算符

$$\langle \psi_i | \vec{x} | \psi_j \rangle = -\langle \psi_i | \hat{\pi} \vec{x} \hat{\pi} | \psi_j \rangle = (-1)^{p_i + p_j + 1} \langle \psi_i | \vec{x} | \psi_j \rangle$$

故当两个态宇称相同时矩阵元为0，两个态宇称相反时矩阵元不为0。判断宇称用到氢原子波函数

$$\psi = R(r) e^{im\phi} P_l^m(\cos \theta)$$

可见，如果 $i = j$ ，矩阵元为0。两个态宇称相反时才能发生跃迁(选择定则)。

拉比频率

说了这么多，我们得到很多态之间的矩阵元都为0。但是得到矩阵元的一般公式是困难的，反正它只是个常数，我们不妨定义拉比频率

$$\hbar\Omega = e\vec{E}_0\langle\psi_1|\vec{r}|\psi_2\rangle$$

利用上面的定义和欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ，得到

$$\begin{cases} i\dot{c}_1 = \frac{\Omega}{2} \left[e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right] c_2 \\ i\dot{c}_2 = \frac{\Omega}{2} \left[e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right] c_1 \end{cases}$$

因为 ω 十分接近 ω_0 ，所以 $|\omega - \omega_0| \ll \omega + \omega_0$ ，所以可见第二项振动的特别快，在时间平均的意义下可以忽略。这个近似叫做旋转波近似，叫这个名字是因为核磁共振(nuclear magnetic resonance)中有类似的处理方法。

拉比共振

采取上述近似后，如果定义 $\delta = \omega - \omega_0$ ，方程变为

$$\begin{cases} i\dot{c}_1 = \frac{\Omega}{2} e^{i\delta t} c_2 \\ i\dot{c}_2 = \frac{\Omega}{2} e^{-i\delta t} c_1 \end{cases}$$

现在我们考虑入射光频率恰好等于跃迁所需的频率，即 $\delta = 0$ ，这时方程变为

$$\begin{cases} i\dot{c}_1 = \frac{\Omega}{2} c_2 \\ i\dot{c}_2 = \frac{\Omega}{2} c_1 \end{cases}$$

求解方程

取一个初始条件 $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$, 得到方程的解

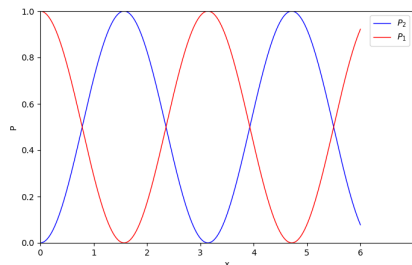
$$\begin{cases} c_1 = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ c_2 = -i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{cases}$$

计算取每个态的概率, 得到

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \cos^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ P_2(t) &= \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{aligned}$$

可见, 状态1的概率和状态2的概率都在不断振动。

将 P_1, P_2 画出图来如下图所示



这就叫做拉比振动(Rabi Oscillation or Rabi flopping)。振动周期为 $\frac{2\pi}{\Omega}$ ，如果我们照射时间恰好等于 $\frac{\pi}{\Omega}$ ，这之后立即停止照射，就会恰好得到一个激发态。但如果我们照射时间恰好为 $\frac{\pi}{2\Omega}$ 就会恰好得到一个 $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle - i|\psi_2\rangle)$ ，这就是实验上如何制造叠加态的方法。

如果不恰好相等

如果入射光和跃迁的频率不恰好相等，即 $\delta \neq 0$ ，这时有

$$\begin{cases} i\dot{c}_1 = \frac{\Omega}{2}e^{i\delta t}c_2 \\ i\dot{c}_2 = \frac{\Omega}{2}e^{-i\delta t}c_1 \end{cases}$$

化简得到

$$\frac{d^2c_1}{dt^2} - i\delta\frac{dc_1}{dt} + \frac{\Omega^2}{4}c_1 = 0$$

通解为

$$c_1(t) = e^{i\delta t/2} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}}{2}t\right) \right]$$

不恰好相等

利用初始条件 $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$ 得到

$$\begin{cases} c_1(t) = e^{i\delta t/2} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}}{2}t\right) - \frac{i\delta}{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}}{2}t\right) \right] \\ c_2(t) = -ie^{i\delta t/2} \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}}{2}t\right) \end{cases}$$

如果不恰好相等，振动的频率为 $\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ ，即振动频率加快。

$$P_2(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}}{2}t\right)$$

因为拉比频率正比于电场强度，可见如果电场增强， P_2 就增大。如果电场特别弱，即 $\delta \gg \Omega$ ，上式近似为

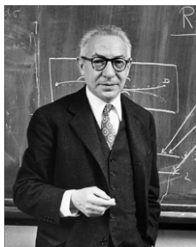
$$P_2(t) \simeq \frac{\Omega^2}{\delta^2} \sin^2\left(\frac{\delta t}{2}\right)$$

磁偶极子跃迁

我们上面讨论的情况都是由于电偶极子能量的跃迁，实际上，如果考虑氢原子的精细结构或者超精细结构(在那里起作用的就是磁偶极矩)，这时主要的效应就是由磁场导致的。上面的推导仍然成立，只要修改拉比频率为

$$\hbar\Omega = \vec{B} \cdot \langle \psi_1 | \vec{\mu} | \psi_2 \rangle$$

Isador Rabi 因为解释了超精细结构的跃迁而获得了1944年诺贝尔物理学奖。



如果矩阵元消失

矩阵元消失意味着加入振荡的电场时，激发态不会向基态衰变：
激发态在电偶极子跃迁的情况下是稳定的。
但是这并不意味着激发态永远不变，可以存在其他可能的路径。

选择定则

首先,位置算符与自旋无关,这意味着要求

$$\Delta s = \Delta m_s = 0$$

否则,矩阵元消失。

选择定则

哈密顿量微扰项一部分为 $E_z \cdot \langle \psi | z | \psi \rangle$ ，实际上，利用对易关系 $[L_z, z] = 0$ ，有

$$\langle n', l' m' | [L_z, z] | n, l, m \rangle = \hbar(m' - m) \langle n', l' m' | z | n, l, m \rangle$$

所以只有当 $m = m'$ 时， $\langle n', l' m' | z | n, l, m \rangle \neq 0$ 。故如果电场在 z 轴，当且仅当 $\Delta m = 0$ 时才能发生跃迁。

选择定则

如果电场在 x, y 轴, 由对易关系 $[L_z, x \pm iy] = \pm \hbar(x \pm iy)$ 可得

$$\begin{aligned}\langle n', l', m' | [L_z, x \pm iy] | n, l, m \rangle &= \hbar(m' - m) \langle n', l', m' | x \pm iy | n, l, m \rangle \\ &= \pm \hbar \langle n', l', m' | x \pm iy | n, l, m \rangle\end{aligned}$$

所以只有当

$$\Delta m = \pm 1$$

矩阵元 $\langle n', l', m' | [L_z, x \pm iy] | n, l, m \rangle$ 才不为0。故如果波矢在 z 轴, 则满足 $\Delta m = \pm 1$ 才能跃迁。

选择定则

同理，利用对易关系 $[L^2, [L^2, \vec{x}]] = 2\hbar^2(\vec{x}L^2 + L^2\vec{x})$ 最终可以得到 $\Delta l = \pm 1$ 时，才能发生跃迁。上述推导感觉上很凑巧，一个更加系统地方法是使用 Wigner-Eckart 定理，这个定理基于旋转群的表示论。

例子

$$2p \rightarrow 1s \quad \tau \simeq 10^{-9} \text{ s}$$

$2s \rightarrow 1s$ Forbidden, find another route $\tau \simeq 10^{-1} \text{ s}$

对于磁偶极子的跃迁，有不同的跃迁规则。氢原子的超精细能级:10 million years!

自发辐射

试问在通常的量子力学，如果一个原子处于激发态，把它放在真空中，会发生什么？答案：**Nothing Happened**. 但是实际上，我们知道它会自发地变为基态，辐射光子。我们说，激发态有一定的寿命 τ ，这一节我们就来估算 τ 。

显然，通常的量子力学解释不了上述现象，完整的解释需要用到量子场论。即我们需要学习光子的量子力学描述，在本讲最后我们会涉及一点。

但是，如果假设上述现象是成立的，一个聪明的统计力学方法可以帮助我们估算寿命 τ ，我们下面介绍这个方法。

衰变方程

假设有 N_1 个粒子处于基态上， N_2 个粒子处于激发态，我们猜测，激发态向基态跃迁的速率(单位时间内跃迁的个数)为 A_{21} ，我们假设有下列关系成立

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21} N_2$$

解得 $\tau = 1/A_{21}$ 。然后我们什么也没算出来，这时我们采取一个聪明的方法，将这一大群原子暴露在黑体谱中 $\rho(\omega)$ 。这时，有一部分基态的电子就会跃迁到激发态，因为激发态的概率正比于该频率光子的能量，这个效应引起的速率为 $\rho(\omega_0)B_{12}$ 。又因为我们黑体谱的存在，又会激发激发态的电子跃迁回基态，这个过程叫做受激辐射(stimulated emission)，这个效应引起的激发态跃迁回基态的速率为 $\rho(\omega_0)B_{21}$

爱因斯坦 A, B 系数

考虑到上述效应，基态和激发态的粒子数目随时间演化的方程改为

$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt} &= \rho(\omega_0)(B_{12}N_1 - B_{21}N_2) - A_{21}N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} &= -\rho(\omega_0)(B_{12}N_1 - B_{21}N_2) + A_{21}N_2\end{aligned}$$

上面的系数 A_{21}, B_{21}, B_{12} 被称为爱因斯坦 A, B 系数。

计算爱因斯坦A, B系数

根据统计力学, 在温度 T 下, 有

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{e^{-E_2/k_B T}}{e^{-E_1/k_B T}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\hbar\omega_0/k_B T}$$

其中 g_1, g_2 为基态和激发态上的兼并态数目。如果达到热平衡(基态和激发态粒子数目保持恒定), 则有

$$\rho(\omega_0) = \frac{A_{12}N_2}{B_{12}N_1 - B_{21}N_2}$$

将上述热力学关系式带入, 再利用黑体辐射的普朗克公式, 得到

$$\rho(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{12}(g_1/g_2)e^{\hbar\omega_0/k_B T} - b_{12}} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \quad A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{21}$$

因此, 三个爱因斯坦系数只要计算一个就可以得到另外两个。

计算爱因斯坦 A, B 系数

回忆电场较弱时激发态出现的概率

$$P_2(t) \simeq \frac{\Omega^2}{\delta^2} \sin^2 \left(\frac{\delta t}{2} \right)$$

如果假设电场 $\vec{E} = (0, 0, \varepsilon)$, 则有

$$\Omega^2 = \frac{e^2 \varepsilon^2}{\hbar^2} |\langle \psi_1 | z | \psi_2 \rangle|^2$$

利用 $\rho(\omega) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$, 对于所有的频率积分。

$$P_2(t) = \frac{2e^2}{\epsilon_0 \hbar^2} |\langle \psi_1 | z | \psi_2 \rangle|^2 \int d\omega \frac{\rho(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2} \sin^2 \left(\frac{(\omega - \omega_0)t}{2} \right)$$

计算爱因斯坦A, B系数

因为上述积分只在 $\omega = \omega_0$ 处贡献比较大，所以可以作近似 $\rho(\omega) = \rho(\omega_0)$ ，得到

$$P_2(t) = \frac{e^2 \pi}{\epsilon \hbar^2} \rho(\omega_0) |\langle \psi_1 | z | \psi_2 \rangle|^2 t$$

实际上，上面只是得到了一个一阶近似，真正重要的是

$$\dot{P}_2(t) = \frac{e^2 \pi}{\epsilon \hbar^2} \rho(\omega_0) |\langle \psi_1 | z | \psi_2 \rangle|^2$$

这就是原子对于光的吸收速率。最终我们得到了爱因斯坦系数

$$B_{12} = \frac{e^2 \pi}{3 \epsilon \hbar^2} |\langle \psi_1 | \vec{x} | \psi_2 \rangle|^2$$

上面的1/3因子是因为考虑了各个方向的缘故。所以当矩阵元越小，激发态生存的时间就越长。

光子状态的描述

每一个光子的状态可以由它的动量和偏振来描述。偏振可以分解为两种偏振态(如左旋和右旋)，使用 λ 来标记($\lambda = 1, 2$)。对于大量的光子，我们对于他们的偏振和动量进行分类，我们数一数对于确定动量和偏振的光子有多少个。故光子的量子态可以记为

$$|\{n_{\vec{k},\lambda}\}\rangle$$

这样我们就完全描述了一堆光子，没有光子的真空记为 $|0\rangle$ 。对于具有相同动量和偏振的光子，我们无法分辨。

产生与湮灭算符

与通常我们研究的粒子不同，光子可以凭空产生，光子数不守恒。受简谐振子的启发，我们对于特定的动量和偏振，引入产生和湮灭算符 $a_{\vec{k},\lambda}^\dagger, a_{\vec{k},\lambda}$ ，他们满足像谐振子中升降算符一样的对易关系

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

因此 $|\{n_{\vec{k},\lambda}\}\rangle$ 记为

$$|\{n_{\vec{k},\lambda}\}\rangle = \prod_{\vec{k},\lambda} \frac{(a_{\vec{k},\lambda}^\dagger)^{n_{\vec{k},\lambda}} |0\rangle}{\sqrt{n_{\vec{k},\lambda}!}}$$

哈密顿量

因此，光子的哈密顿量为

$$H = \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\hbar \omega a_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} a_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

由这个哈密顿量实际上可以得到 $|\{n_{\vec{k}, \lambda}\}\rangle$ 是本征态，能量的本征值为

$$E = n_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega$$

相干态

有一种特殊的状态，模拟了经典力学中的谐振子，它是

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

其中参数 α 与总光子数有关

$$n = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

如何产生这样一个量子态?详见附录。

杰恩斯-卡明斯模型

现在，有了光子的toy model，我们可以研究光子如何与原子相互作用。我们将原子的基态记作 $|\downarrow\rangle = (0, 1)^T$ ，激发态记作 $|\uparrow\rangle = (1, 0)^T$ 。因此原子的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

我们考虑原子的周围有一群光子，光子的状态和哈密顿量为(略去下标)

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \\ H &= \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) \end{aligned} \tag{1}$$

杰恩斯-卡明斯模型

将原子的希尔伯特空间和光子的希尔伯特空间做直积

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{atom}} \otimes \mathcal{H}_{\text{photons}}$$

例如，具有 n 个光子且原子处于激发态就表示为 $|n; \uparrow\rangle$ 。为了描述光子和原子作用，哈密顿量为

$$H_{JC} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & ga \\ ga^\dagger & -\omega_0 \end{pmatrix} + \hbar\omega a^\dagger a$$

其中 g 表征光子和原子的耦合。上面的哈密顿量又被称作杰恩斯-卡明斯(Jaynes-Cummings)模型。

思考题

$$H_{JC} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & ga \\ ga^\dagger & -\omega_0 \end{pmatrix} + \hbar\omega a^\dagger a$$

这个哈密顿量如何与态 $|n-1; \uparrow\rangle$ 作用?



计算矩阵元

我们研究从状态 $|n-1; \uparrow\rangle$ 到状态 $|n; \downarrow\rangle$ 的演化，为此我们要计算上面哈密顿量的矩阵元。计算结果为

$$H_n = \begin{pmatrix} (n-1)\omega + \frac{1}{2}\omega_0 & \frac{1}{2}g\sqrt{n} \\ \frac{1}{2}g\sqrt{n} & n\omega - \frac{1}{2}\omega_0 \end{pmatrix}$$

这意味着原子的基态和激发态并不是这个哈密顿量的本征态，经过计算，能量的本征值为

$$E_{\pm} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \frac{1}{2}\hbar\sqrt{g^2n + \delta^2}$$

本征态为

$$\begin{aligned} |n_+\rangle &= \sin\theta|n-1; \uparrow\rangle - \cos\theta|n; \downarrow\rangle \\ |n_-\rangle &= \cos\theta|n-1; \uparrow\rangle + \sin\theta|n; \downarrow\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\tan(2\theta) = \frac{g\sqrt{n}}{\delta}$, $\delta = \omega_0 - \omega$ 。

再论拉比进动

初始情况，原子处于基态 $|\Psi(t=0)\rangle = |n, \downarrow\rangle = \sin\theta|n_-\rangle - \cos\theta|n_+\rangle$ ，之后开始演化

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iE_-t/\hbar} \sin\theta|n_-\rangle - e^{-iE_+t/\hbar} \cos\theta|n_+\rangle$$

计算得到激发态的概率为

$$P_{\uparrow}(t) = \frac{g^2 n}{g^2 n + \delta^2} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{g^2 n + \delta^2} t}{2} \right)$$

这与前面得到的结果相同，拉比频率 $\Omega = g\sqrt{n}$ 。

再论拉比进动

这次，我们将周围的光子换成相干态的光子(激光)

$$|\Psi\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0, \downarrow\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n, \downarrow\rangle$$

考虑相干态中有大量的光子 $|\alpha| \gg 1$, 通过同样地方法求态的演化，可以得到激发态的概率

$$P_{\uparrow}(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \sin^2 \left(\frac{g\sqrt{n}t}{2} \right)$$

死亡与复生

激发态概率

$$P_{\uparrow}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(g\sqrt{n}t)$$

考察系数 $\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$, 取对数并利用斯特林公式

$$\ln \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \simeq 2n \ln |\alpha| - n \ln n + n$$

由此可知, 当 $n = |\alpha|^2$ 时上面的系数有最大值。我们将其在极大值附近泰勒展开到二阶

$$\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \simeq \frac{1}{2\pi|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2 - m^2/2|\alpha|^2}$$

其中 $m = n - |\alpha|^2$ 。如果 $|\alpha|^2$ 充分大, 求和可以从 $-\infty$ 到 ∞ 。

所以我们有

$$P_{\uparrow}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2/2|\alpha^2|} \cos(gt\sqrt{|\alpha^2| + m})$$

画出来如下图所示。

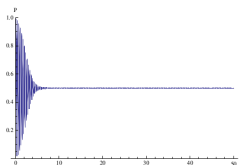


Figure 85: Once decayed, they stay decayed...

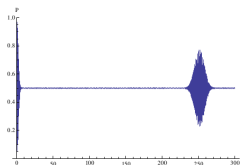


Figure 86: ...until they don't!

死亡与复生

不断地沉默与复生，直到最后出现不稳定的波动。

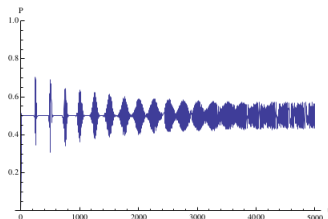


Figure 87:

总结

能发出光来就不错了。

附录：如何产生相干态

我们来说明，下面的哈密顿量可以产生相干态

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar(f^*(t)a + f(t)a^\dagger)$$

相互作用绘景

求解这个哈密顿量几乎不可能，我们借助于相互作用绘景。相互作用绘景将哈密顿量分解成两项 $H = H_0 + H_I$ ，其中 H_0 一般是我們熟知的系统，而 H_I 是对于系统的微扰。相互作用绘景中，态矢和算符的定义为

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_I &= e^{iH_0 t} |\psi\rangle_S \\ \mathcal{A}_I &= e^{iH_0 t} \mathcal{A}_S e^{-iH_0 t} \end{aligned} \quad (3)$$

从薛定谔绘景的算符和态矢演化方程出发，可以得到相互作用绘景态矢和算符的演化方程

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} &= H_I |\psi\rangle \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [H, \mathcal{A}] \end{aligned} \quad (4)$$

可以证明，不论在哪个绘景，矩阵元 $\langle \psi_1 | \mathcal{A} | \psi_2 \rangle$ 相同。

时间演化算符

首先求得 H_I 在相互作用绘景中的形式，根据定义

$$H_I = \hbar e^{iH_0 t/\hbar} (f^*(t)a + f(t)a^\dagger) e^{-iH_0 t/\hbar} = \hbar \left(e^{-i\omega t} f^*(t)a + e^{i\omega t} f(t)a^\dagger \right)$$

由演化算符的方程

$$i\hbar \frac{\partial U_I}{\partial t} = H_I U_I$$

得到解是

$$U_I(t) = \exp \left(\alpha(t)a^\dagger - \alpha^* a + i\varphi(t) \right)$$

其中 $\alpha = -i \int dt' f(t') e^{i\omega t'}$, $\varphi(t) = \frac{1}{2} \int dt' \text{Im}(\dot{\alpha}^* \alpha)$ 。

构造相干态

如果取 $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$ ，就得到了我们要的相干态。