Introductory Cosmology
Lecture 02-The Dynamics of Spacetime

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec/

宇宙如何膨胀

上一讲我们提到，在宇宙学中，时空几何使用 FRW 度规来描述。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left[\frac{1}{1-kr^2/R^2}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

这只是一个对均匀各项同性的宇宙学原理的数学表述，并没有任何物理。物理是来决定这个度规的动力学，即 $a(t)$ 如何演化。

这一讲我们就来求解 $a(t)$ 如何随时间演化。

广义相对论

决定 $a(t)$ 如何演化的物理当然是广义相对论。广义相对论可以简单理解为

Spacetime tells matter how to move, matter tells space how to curve.

于是，几何的部分我们已经有了，而另一部分我们要解决的就是物质，或者更精确地说，物质的能量动量张量。

Perfect Fluids

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$$

理想流体

对于我们人类来说，一个星系的体积十分巨大。但是如果我们从大尺度来思考问题，每个星系实际上相当于宇宙流体的一个小原子。

对于理想流体我们只关心两件事情：第一个是流体的能量密度 $\rho(t)$(在相对论的文本中，质量和能量不分家)，第二个是流体的压强 $P(t)$。

研究对象

在平衡态的情况下，$P(\rho)$ 被称作状态方程。我们主要关心三种东西的状态方程。

- 非相对论气体：尘埃。
- 相对论气体。
- 暗能量。

非相对论气体

在这里我们直接采用统计物理中的结果，如果不熟悉的话可以去看我的统计物理讲义。对于非相对论 (理想) 气体，压强为

$$P = \frac{Nk_B T}{V} = \frac{1}{3}\frac{N}{V}m\langle v^2\rangle$$

这里用到了理想气体的速度平方的平均值。因为是非相对论情况，动能远远小于静止的能量 mc^2，代入 $E \simeq mc^2$，得到

$$P = \frac{NE}{V}\frac{\langle v^2\rangle}{c^2} \simeq 0$$

所以我们平时讲的那点压强，在宇宙学尺度看来，几乎为 0。

相对论气体

对于极端相对论情况，我们在统计物理中推导过，压强和能量密度的关系为

$$P = \frac{1}{3}\rho$$

大部分的状态方程都有如下形式

$$P = w\rho$$

我们已经看到非相对论气体 $w = 0$，相对论气体 $w = 1/3$。我们以后将会看到一些不可思议的例子。

对 w 的一个理论上的限制

可以从流体力学中推导出来，介质中的声速满足如下关系

$$c_s^2 = c^2 \frac{dP}{d\rho}$$

这告诉我们 $w \leq 1$，因为声速不能超过光速。w 如果是负的，这时候声速 c_s 变成一个虚数，这意味着在这种介质中，声波不可能传播，因为它会指数衰减。

连续性方程 (4-动量流守恒方程)

下面介绍一个决定物质的能量密度如何演化的方程。这个方程的严谨版本需要从广义相对论出发。我们之后会介绍一下这个思想。下面我们给出非严谨版本的推导，但是这个经典的随便的推导竟然和严谨的一样。考虑没有热量的热力学第一定律

$$dE = -pdV$$

则有

$$\frac{dE}{dt} = -p\frac{dV}{dt}$$

假设今天这团东西的体积是 V_0，那么在任何时间有 $V = a^3(t)V_0$，$E = \rho a^3(t)V_0$。直接将这两个式子代入上式，得到

$$\dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} = -3pa^2\dot{a}$$

利用哈勃参数的定义，有

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$$

求解物质的演化

把一般的状态方程 $P = w\rho$ 代入上式，得到

$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot a}{a}$$

直接求解，得到

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$$

其中 ρ_0 是今天的能量密度。值得记住两个例子，对于尘埃，有

$$\rho_m \sim \frac{1}{a^3}$$

这和我们瞎猜的差不多一样。再看辐射

$$\rho_r \sim \frac{1}{a^4}$$

这也和我们瞎猜的差不多一样，相比于尘埃，多了一个 $1/a$ 因子，这恰好就是红移。

Friedmann Equation

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{kc^2}{R^2 a^2}$$

Friedmann 方程

重复一下我们的图像：我们考虑的是一个均匀 (里面的物质是均匀的) 且各向同性的宇宙。在 FRW 度规下和上面所述的物质的背景下，爱因斯坦方程就变成了

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{kc^2}{R^2 a}^2$$

其中 k 是空间曲率，$G = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3 \mathrm{Kg}^{-1} \mathrm{s}^{-2}$。因为我们没学过广义相对论，所以这部分推导暂时没法推。但是，出乎意料的是，如果做一些错误的 (不完全符合) 图像的假设，用牛顿引力也能推导出上面的方程。但是读者应该牢记，这个推导是“假”的。有关正确的推导，大家可以去看 Dodelson 的书。

求解宇宙

最后，有了 Friedmann 方程和物质的演化方程 (动力学方程) 和物质的状态方程，就可以求解宇宙是如何演化的了。
这里就和静电场非常相似，要求解一个具体问题，首先要知道一个问题的源和电场遵从的方程 (泊松方程)。

引力场

物理学家很喜欢“场”的概念。干什么都要先定义一波场。类比于静电场，我们定义引力场，用一个引力势来描述

$$\vec{F} = -m\nabla\Phi = -\int_{V'} (\rho dV') \frac{Gm}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}$$

其中上式最后一个等号用到了牛顿万有引力定律。直接对上式求散度，则有

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\nabla\Phi) &= -\nabla \cdot \left(\int (\rho dV') \frac{G}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right) \\ &= -\int (\rho dV') G 4\pi \delta^{(3)}(vecx - \vec{x}') \\ &= -4\pi G \rho(\vec{x}) \end{aligned}$$

这就是引力场的泊松方程。最后，我们把 ρ 换成能量密度 (原来是质量密度)，则有

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G}{c^2}\rho$$

求解场

我们考虑如下模型，整个宇宙就是一个大球，取 m 为大球边缘的一个小质量元，设整个大球的质量为 $M(r) = \rho 4\pi r^3/3$。我们假设它是不变的。对泊松方程积分一次得到高斯定理

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla\Phi) dV = \int_S (\nabla\Phi) \cdot d\vec{S} = (\nabla\Phi)_r \cdot 4\pi r^2 = \int_V \frac{4\pi G}{c^2} \rho dV$$

求解得到

$$(\nabla\Phi)_r = \frac{GM(r)}{r^2}$$

于是我们有

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}$$

对动力学方程积分

把上式对时间积分一次，得到

$$\int m\ddot{r}\dot{r}dt = -\int \frac{GMm}{r^2}\dot{r}dt$$

第一项分布积分，得到

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E$$

上式就是大名鼎鼎的能量守恒定律。我认为上面这一套是物理系学生的看家本领。

Friedmann 方程

根据之前的 FRW 度规，代入 $r = a(t)r_0$，我们定义

$$C = -\frac{2E}{r_0^2}$$

得到 Friedmann 方程

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{c^2} - \frac{C}{a^2}$$

曲率

在这里我们强行说 $C = k^2c^2/R^2$。这是牛顿力学无法理解的。但是可以从牛顿力学有一个很好的类比。

- 当 $C < 0$ 时，这意味着 $E > 0$，而我们知道在两体运动当中，$E > 0$ 情况对应于双曲线。双曲线就意味着 k 为负，是负曲率空间。我们将在以后看到，负曲率的宇宙的 $a(t)$ 是大概率发散的。
- 当 $C > 0$ 时，这意味着 $E < 0$，而在牛顿力学，$E < 0$ 对应着一条闭合曲线。而我们以后会看到，正曲率的宇宙大概率是收敛的。

错误的图像给出了正确的结果

注意我们上面推导中的图像是错误的，宇宙不是一个巨大的物质球。而且这样宇宙膨胀的图像也是错误的，宇宙并不是以某一点为中心而膨胀，而是宇宙中有无限的空间，空间中有一个个网格，是那个网格 (以 a 来表示尺度) 在膨胀。一个星系的共动坐标变化并不是“宇宙”意义上的膨胀。事实上从哈勃图我们也能发现，星系的共动坐标变化相对于宇宙膨胀的速度是几乎可以忽略不计的。