$SU(2)$ 群的奇异特性

徐昊霆

2019 年 11 月 20 日

目录

1 $SU(N)$ 群复习

1.1 定义、张量方法构造表示

定义 1.1 (**$SU(N)$ 群**) 同时满足 $U^\dagger U = 1$ 且 $\det U = 1$ 的群。

回顾 $SU(N)$ 群对矢量和张量的作用，对于矢量

$$\psi^i \to u^{ij}\psi^j \tag{1}$$

对于具有 m 个指标的张量

$$\psi^{i_1\cdots i_m} \to U^{i_1 j_1}\ldots U^{i_m j_m}\psi^{j_1\cdots j_m} \tag{2}$$

一般来说只需要考虑对称张量和全反对称张量。于是，对于 $SU(2)$ 群，张量 $\psi^{i_1\cdots i_m}$ 有 $m+1$ 个独立分量，因此对应的表示是 $m+1$ 维表示。之后我们计算任何一个张量的迹，我们发现它不是像 $SO(N)$ 群一样像一个张量一样独立变换。为了让迹独立变换，我们定义了上下指标，上下指标的变换为

$$\psi^i \rightarrow U^i_j \psi^j \tag{3}$$
$$\psi_i \rightarrow \left(U^\dagger\right)^i_j \psi^j \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

于是可以知道一个张量究竟是怎样变换的。再利用 $\det U = 1$，我们得到

$$\det U = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_N} U^{i_1}_{j_1} \cdots U^{i_1}_{j_1} = \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_N} \tag{6}$$

因此，在变换下，可以得到下面的等式[1]

$$\phi_{ik} = \epsilon_{ipq} \phi^{pq}_k \tag{7}$$

利用式 6可以验证，在 U 的变换下上面的等式确实成立。因此得到下面的重要结论

重要结论 1.1 在 $SU(N)$ 群中，我们使用 ϵ 符号升降张量的指标。

1.2 $SU(N)$ 代数

考虑无穷小变化

$$H = I + i\epsilon H \tag{8}$$

并利用关系 $U^\dagger U = I$，可以得到 H 是无迹厄米矩阵。N 维无迹厄米矩阵有 $(N-1) + N(N-1) = N^2 - 1$ 个分量。对于 $SU(2)$ 群，无迹厄米矩阵的集合就是三个泡利矩阵。我们回忆 $SO(N)$ 群的生成元有 $\frac{1}{2}N(N-1)$ 个，于是我们惊奇的发现 $2^2 - 1 = \frac{1}{2}3 \times 2 = 3$，暗示了 $SU(2)$ 群和 $SO(3)$ 群惊人的联系。

2 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 局域同构

在这一节我们将看到，一个 $SU(2)$ 中有两个 $SO(3)$。我们想办法把三维空间的转动对应到 $SU(2)$ 中的元素上去。我们把三维空间的矢量 $\vec{x}$ 先映射到

[1]这里取一个特殊的例子，有 m 个指标的写起来过于繁杂

$SU(2)$ 的无迹厄米矩阵 X 上去，并令

$$X = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & z \end{pmatrix} \tag{9}$$

一会我们就将看到，如果这样映射，就可以把两个群对应起来。我们注意到 X 的行列式为

$$\det X = -(x^2+y^2+z^2) = -\vec{x}^2 \tag{10}$$

现在我们做变换 $X' = U^\dagger XU$，我们会发现变换后的 X' 仍然是一个无迹厄米矩阵，且它的行列式不变。先求迹

$$\mathrm{tr}X' = \mathrm{tr}XUU^\dagger = \mathrm{tr}X = 0 \tag{11}$$

上面的推导需要用一点张量指标的小技巧。也很容易证明它的厄米性。现在，新的 X' 又可以用一组新的系数来代表，它们是 (x', y', z')，我们计算矩阵 X' 的行列式，我们会得到 $\det X = \det X'$，我们发现，这种变换也是保证模长不变的线性变换，根据定义，这正是一个三维空间的旋转。另外，映射 $f: U \to R$ 也构成群。

值得注意的是，映射 $f: U \to R$ 是一个 2 对 1 的映射，因为 $-U$ 也可以映射到同一个 R 上，因为 $(-U)^\dagger X(-U) = U^\dagger XU$，在 $SU(2)$ 群中，U 和 $-U$ 显然不可能是一个东西。所以，我们又有了重要结论

重要结论 2.1 *$SU(2)$ covers $SO(3)$ twice.*

上面我们只是大概讨论了一下做那样的变化你可以把 $SU(2)$ 映射到 $SO(3)$，下面我们来直接计算一下。我们知道 $SU(2)$ 的元素可以表示为

$$U = e^{i\varphi_a\sigma_a/2} \tag{12}$$

我们定义 $\vec{\varphi} = \varphi\hat{\varphi}$，利用

$$(\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma})^2 = \varphi^2 \tag{13}$$

于是直接将群元直接展开，并将奇偶项拆开

$$\begin{aligned} U = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\left(\frac{\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right)^n \\ = & \cos\frac{\varphi}{2} + i\hat{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

现在直接计算 $U^\dagger XU$，并利用泡利矩阵的性质 $\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}I + i\epsilon_{abc}\sigma_c$，如果对于 z 轴的旋转，就会得到原来我们熟悉的变换。

根据刚刚的计算，如果是绕 z 轴旋转，那么有 $U(\varphi) = e^{i\varphi\sigma_3/2}$，如果我们考虑 2π 的旋转，我们得到

$$U(2\pi) = -I \tag{15}$$

这里又反映了我们之前的重要结论，$SU(2)$ 中包含两个 $SO(3)$，在下一节我们会对这个问题有更深刻的理解。

3 $SU(2)$ 的李代数

在之前我们讲过，$SU(2)$ 的李代数与 $SO(3)$ 有同样的结构，他们满足对易关系

$$\left[T^i, T^j\right] = i\epsilon^{ijk}T^k \tag{16}$$

于是同样的可以定义升降算符，满足 $T^\pm = T^1 \pm T^2$，于是对易关系变为

$$\left[T^3, T^\pm\right] = \pm T^\pm,\quad \left[T^+, T^-\right] = 2T^3 \tag{17}$$

于是选择 T^3 的本征态，我们又可以重复之前李代数的操作。我们将看到 $SU(2)$ 的表示是 $2j+1$ 维的，其中 j 既可以取整数又可以取半整数。我们其实已经可以看出为什么了，这是因为具有 m 个指标的张量贡献一个 $m+1$ 维表示，直接令 $m = 2j$，就可以得到上面的半整数了。但是，这样说到目前为止还有一点不严谨，因为我们知道，对于一般 $SU(N)$ 群，上标的张量和下标的张量是不一样的，那么下标会不会贡献其他的表示？

4 $SU(2)$ 的奇妙性质

4.1 只需考虑上标对称张量

我们之前学习 $SO(3)$ 的时候，我们知道了 $SO(3)$ 的特殊性，即我们只需要考虑 n 维无迹对称张量就行了，其他的 $SO(N)$ 群则没有这样的特性。

根据刚刚的指标升降公式，我们可以把下标的全部都升上去，例如对张量 $T^{pqijk} = \epsilon^{pm}\epsilon^{qn}T^{ijk}_{mn}$。我们也只需要考虑对称的张量，因为如果有一个张量，比如说，4 个指标的张量 T^{ijkl}，总可以对两个指标 i, k 构造对称部分和反对称

部分

$$
\begin{aligned}
S^{ijkl} &= T^{ijkl} + T^{kjil} &(18)\\
A^{ijkl} &= T^{ijkl} - T^{kjil} &(19)
\end{aligned}
$$

然后对于反对称张量，可以构造一个二阶的对称张量 $\epsilon_{ik}A^{ijkl}$，所以高维的反对称张量总可以变成低维的张量，最后全变成一维的张量，而一维的张量没有反对称和对称这一说法。所以说，为了构造 $SU(2)$ 群的不可约表示，我们只需要考虑上标的对称张量即可。这和其他的群是不同的。因此，我们就可以说对于 m 个指标的张量，我们只需要考虑对称张量就完了，所以得到 $SU(2)$ 有 $m+1$ 维的表示。

重要结论 4.1 $SU(2)$ 有 $m+1$ 维的表示。

小练习 4.1 试证明上面的论述对于 $SU(3)$ 群不成立。

所以，我们看到了之前李代数的半整数的来源了，是 $SU(2)$ 群。

4.2 $SU(2)$ is pseudoreal

在上一讲我们提到，必须严格区分上下标，但是我们刚刚又讲过，不需要下标的东西。这不是矛盾吗? 不需要下标到底是啥意思，它们不是差一个共轭吗? 我们回想到我们在第二章学过一个群表示的 real 和 pseudoreal，实际上，$SU(2)$ 是 pseudoreal 的。回顾一下定义

定义 4.1 一个群的表示是 *pseudoreal* 的，如果存在一个矩阵 S，使得

$$D(g)^* = SDS^{-1} \tag{20}$$

可以验证，这个矩阵 S 可以是 σ_2。

小练习 4.2 验证矩阵 S 可以是 σ_2

重要结论 4.2 $SU(2)$ *is pseudoreal.*

5 $SU(N)$ 和 $U(N)$ 的关系

$U(N)$ 群有两种，第一种是 $U(1)$ 群，它的形式为 $e^{i\varphi}I$，第二种就是我们所说的 $SU(N)$ 群，聪明的物理学家这时候路过，写下 $U(N) = SU(N) \otimes U(1)$。

但是这是错的。

我们没有意识到，这两种是有交集的。考虑下面这些元素

$$e^{i2\pi k/N}I, \quad k=1,\cdots,N$$

你惊奇的发现，这个矩阵的行列式为 1，而且它还是 $U(1)$ 群的元素。这些群是啥?Z_N 群的元素！所以正确的写法为

重要结论 5.1

$$U(N)=(SU(N)/Z_N)\otimes U(1) \tag{21}$$

上面的写法如果对于 $N=2$，又一次暗示了 $SU(2)$ 包含了两个 $SO(3)$。我们回想起强力、弱力和电磁相互作用的对称群是 $SU(3)\oplus SU(2)\oplus U(1)$，这个写法应该也不严谨。但是在物理中，整体的对称性没有出现，而只是李代数或者局域不变性出现在拉格朗日量中。