Advanced **Q**uantum **M**echanics

Talk 12 Representing Relativistic Quantum State

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec

自然单位制

$$c = \hbar = 1$$

4-矢量和度规

四矢量的逆变分量为

$$A = (A^\mu) = \left(A^0, \vec{A}\right)$$

注意，拉丁指标i, j, k从1取到3，希腊指标α, β, γ从0取到3。4-位置矢量为

$$x = (t, x, y, z)$$

Minkowski 度规

$$g = (g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

定义

$$g^{-1} = (g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

内积和Minkowski 时空

指标升降规则

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \; T_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\omega} T^{\lambda\omega}$$

定义内积

$$g(A, B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu$$

4-矢量长度为

$$A^2 = \left(A^0\right)^2 - \vec{A}^2$$

如果$A^2 > 0$，则称A为类时的，如果$A^2 > 0$，称A为类空的。特殊地，对于4-位置矢量

$$x^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

定义Minkowski 时空为$M = (\mathbb{R}^4, g)$

Levi-Civita tensor

引入三维 Levi-Civita 张量$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$，它满足

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijk} &= 6 && (1)\\
\epsilon^{ijk}\epsilon^{klm} &= \delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl} && (2)\\
\epsilon^{ijk}\epsilon^{lmn} &= \delta^{il}\left(\delta^{jm}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{km}\right) - \delta^{im}\left(\delta^{jl}\delta^{kn} - \delta^{jn}\delta^{kl}\right) && (3)\\
&\quad +\delta^{in}\left(\delta^{jl}\delta^{km} - \delta^{jm}\delta^{kl}\right)
\end{aligned}
$$

Levi-Civita tensor

对于四维时空，定义Levi-Civita tensor，它满足指标升降规,且有如下对应性质

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$$

等等，因为后面几乎用不到，所以不抄了。

洛伦兹变换

洛伦兹变换是保内积不变的变换。假设有两个4-矢量x, y，经过洛伦兹变换后成为

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad , y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} y^{\nu}$$

他们的内积为

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \Lambda^{\lambda}{}_{\mu} x^{\nu} y_{\lambda} = g_{\nu\lambda} x^{\nu} y^{\lambda}$$

进而得到洛伦兹变换应该满足的关系

$$\left(\Lambda^{T}\right)_{\nu}{}^{\mu} g_{\mu\omega} \Lambda^{\omega}{}_{\lambda} = g_{\nu\lambda}$$

即

$$\Lambda^{T} g \Lambda = g$$

洛伦兹变换

例如，在狭义相对论中，两个惯性系之间的变换为

$$x' = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0 \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda^{(01)} x$$

可以验证，上面的变换$\Lambda^{(01)}$是一个洛伦兹变换。这样的变换又被叫做standard configuration Lorentz transformation，它是standard transformation(boost)的一种，系数ξ又被称做快度(rapidity, boost parameter)。为了和经典的伽利略变换对应起来，我们取

$$\cosh\xi = \gamma, \sinh\xi = \beta\gamma$$

就回到我们熟悉的洛伦兹变换。

洛伦兹群

洛伦兹群的定义为

$$\mathcal{L} = \{\Lambda : M \to M, x' \cdot y' = x \cdot y, \text{where } \ x' = \Lambda x, \ \ y' = \Lambda y\}$$

上面的条件可以等价地写成

$$g = \Lambda^T g \Lambda, \ or \ \ g_{\mu\omega}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\omega}{}_{\lambda} = g_{\nu\lambda}$$

对上面的条件两边求行列式，得到

$$(\det\Lambda)^2 = 1$$

令$\nu = \lambda = 0$，得到

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2 = 1$$

因此有

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \ or \ \ \Lambda^0{}_0 \leq -1$$

洛伦兹群

因此可以用$\det\Lambda$和$\Lambda^0{}_0$的符号给洛伦兹群分类。定义

$$\mathcal{L}_+ = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \mathrm{det}\Lambda = 1\}, \ \ \mathcal{L}^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$$

其中$\mathcal{L}_+$又被叫做Pure Lorentz Group，$\mathcal{L}^\uparrow$被叫做Orthochronous Lorentz Group。进而定义$\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}^\uparrow \cap \mathcal{L}_+$，可以证明，上面三个群都是洛伦兹群的子群。使用同样的规则，也可以定义$\mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_-^\downarrow, \mathcal{L}_+^\downarrow$,它们都不是子群，通过下面的变换，可以说明两个元素的乘法不在群里面。

- Parity $\Lambda_p = \mathrm{diag}\ (1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}_-^\uparrow$
- Time reversal $\Lambda_T = \mathrm{diag}\ (-1, 1, 1, 1) \in \mathcal{L}_-^\downarrow$
- Spacetime inversion $\Lambda_{PT} = \mathrm{diag}\ (-1, -1, -1, -1) \in \mathcal{L}_+^\downarrow$

另外，集合$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+^\uparrow \cap \mathcal{L}_-^\downarrow$也是洛伦兹群的一个子群。

洛伦兹群

通过上面的变换，我们可以将$\mathcal{L}_-^\uparrow, \mathcal{L}_-^\downarrow, \mathcal{L}_+^\downarrow$三个子群映射到pure and orthochronous Lorentz Group中

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_P \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_T \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \Lambda_{PT} \mathcal{L}_+^\uparrow$$

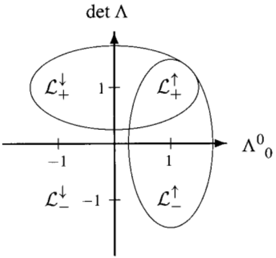


Figure: 洛伦兹群的子群

洛伦兹群

所以我们现在只需要来研究$\mathcal{L}_+^\uparrow$，这个子群又被叫做$SO^+(1,3)$群，它是一个李群。因此有

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)$$

其中$M^{\mu\nu}$为生成元，其中指标$\mu\nu$为生成元矩阵的编号。不妨设$M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}$。注意这和我们熟悉的$SO(N)$群不同，在那里生成元矩阵是反称的，那是因为它满足$R^TR=1$，而这里Λ却满足$\Lambda^Tg\Lambda=g$，将无穷小变换带入这个关系式，将得到

$$g_{\nu\omega}M^{\omega}{}_{\lambda}+g_{\mu\lambda}M^{\mu}{}_{\nu}=0$$

上面这个关系式保证了生成元有六个独立分量，但是不一定反对称，因此有六个独立的生成元矩阵。

洛伦兹群的生成元

生成元有多种取法，我们取$M^{\mu\nu}$就对应与无穷小的$\Lambda^{\mu\nu}$使得$\Lambda^{\mu\nu} \simeq 1 - \frac{i}{2} M^{\mu\nu}$现在对于无穷小standard configuration Lorentz transformation，我们求解它的生成元

$$M^{01} = i\frac{d\Lambda(\xi)}{d\xi}|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见，M^{0i}对应与Lorentz boost，而M^{ij}对应于三维空间的转动。

洛伦兹群的生成元

因此，可以将反对称的生成元$M^{\mu\nu}$拆分成J^i, K^i，$2\times 3 = 6$个矩阵，它们与生成元的关系为

$$J^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk},\ K^i = M^{0i}$$

可以证明，它们满足对易关系

$$\begin{aligned} \left[J^i, J^j\right] &= i\epsilon^{ijk}J^k && (4)\\ \left[J^i, K^j\right] &= i\epsilon^{ijk}K^k && (5)\\ \left[K^i, K^j\right] &= -i\epsilon^{ijk}J^k \end{aligned}$$

可见，它们形成了一个李代数。为了好看，我们定义

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{1}{2}\left(\vec{J}+i\vec{K}\right) && (6)\\ \vec{k} &= \frac{1}{2}\left(\vec{J}-i\vec{K}\right) \end{aligned}$$

洛伦兹代数

这时对易关系变为

$$
\begin{aligned}
[j^i, j^j] &= i\epsilon^{ijk} j^k \qquad (7)\\
[j^i, k^j] &= 0 \qquad (8)\\
[k^i, k^j] &= i\epsilon^{ijk} k^k
\end{aligned}
$$

我们说，$\vec{j}, \vec{k}$是脱耦的。我们将上述李代数的结构叫做洛伦兹代数，记作$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$。对应的洛伦兹群的表示为$D^j \otimes D^{j'}$，$D^j$是$SU(2)$的不可约表示。我们将$D^j$在$|j, m\rangle$这组基下展开，那么洛伦兹群的基为

$$|j, m; j', m'\rangle = |j, m\rangle |j', m'\rangle$$

例如，$D^{(\frac{1}{2}, 0)}$和$D^{0, (\frac{1}{2})}$的生成元的表示为

$$\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \ \vec{k} = 0 \quad \text{and} \quad \vec{j} = 0, \ \vec{k} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$$

其中$\vec{\sigma}$为三个泡利矩阵。

Poincare 群

Poincare群的定义为

$$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a) : x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu\}$$

其中$\Lambda \in \mathcal{L}$是一个洛伦兹变换，$a \in \mathbb{R}^4$是一个Lorentz Translation。如果$P^\uparrow_+$是一个pure and orthochronous Pioncare Group，如果$\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow_+$。可以得到两个群的乘法为

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

显然Poincare群有一个五维表示

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{5\times5}$$

Poincare群的逆为$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$。

Poincare群的生成元

我们已经知道了洛伦兹群的生成元

$$U(\Lambda, 0) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)$$

我们再来看poincare translation的生成元即$U(1, a)$的生成元。我们思考一下可以发现生成元只有对角项，所以生成元只有四个，因此

$$U(1, a) = \exp\left(ia_\mu P^\mu\right)$$

因此，如果Poincare群在一阶近似附近，那么Poincare群元可近似写为

$$U(\Lambda, a) \simeq \left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + ia_\mu P^\mu\right)$$

生成元的对易关系

我们再来看生成元的对易关系。使用洛伦兹群的定义，并结合$U_1U_2U_1^{-1} = 1 + B + [A, B]$，我们就得到了生成元的对易关系

$$
\begin{aligned}
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i\left(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}\right) && (9) \\
[M^{\mu\nu}, P^{\sigma}] &= -i\left(g^{\nu\sigma}P^{\mu} - g^{\mu\sigma}P^{\nu}\right) && (10) \\
[P^{\mu}, P^{\nu}] &= 0
\end{aligned}
$$

Casimir 算符

Casimir算符定义为

- 是由生成元构建的。
- 和所有生成元对易。
- 是该群的不变量。

比如说，$\vec{J}^2$是$SO(3)$的Casimir不变量。Poincare群的Casimir算符有两个，分别为$P^2 = P_\mu P^\mu$，$w^2 = w_\mu w^\mu$。w被叫做Pauli-Lubanski 矢量，定义为

$$w_\sigma = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}M^{\mu\nu}P^\lambda$$

Pauli-Lubanski矢量

利用Pauli- Lubanski矢量的定义，我们得到它与生成元的对易关系

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, w_\sigma] &= -i\left(g_{\nu\sigma} w_\mu - g_{\mu\sigma} w_\nu\right) && (11)\\
[P_\mu, w_\nu] &= 0 && (12)\\
[w_\mu, w_\nu] &= i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} w^\rho P^\sigma
\end{aligned}
$$

还有一种书写Pauli-Lubanski矢量的方法

$$v^{\mu\nu\rho} = P^\mu M^{\nu\rho} + P^\nu M^{\rho\mu} + P^\rho M^{\mu\nu}$$

则$w = \left(v^{321}, v^{320}, v^{310}, v^{210}\right)$。$w^2$使用之前的生成元可以表示为

$$w^2 = -\frac{1}{2} M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} P^2 + M^{\mu\sigma} M_{\nu\sigma} P_\mu P^\nu$$

舒尔引理

引理

(舒尔引理) 如果$U(g)$是不可约表示，并且A和所有的$U(g)$对易，那么A一定是单位算符的倍数，即$A=\alpha I$，α是一个常数。

来点物理

上面我们讨论的都是纯数学，现在我们加点物理。我们把群的元素看成是希尔伯特空间的算符。

什么是粒子?

如何区分不同的粒子?在相对论中坐标变换是Poincare变换，所以每个态在Poincare变换下是不同的，但是，你知道它还是一个粒子。所以我们希望用一个Poincare变换下的不变量。什么是Poincare变换下的不变量? 根据舒尔引理，Casimir算符的本征值！ 所以我们说，我们通过Poincare群不可约表示的Casimir算符来区分不同的粒子！

Poincare群的Casimir 不变量

现在，我们不把Poincare变换作用的矢量选成4-位置，我们选成4-动量，即$\vec{p}=(E,\vec{p})$，使用书中所谓的correspondence principle，生成元P的本征值就是$p=(p^{\mu})=(E,\vec{p})$，所以说P就是动量算符。动量算符就是Lorentz translation 的生成元！
我们知道,$p^2=p_{\mu}p^{\mu}=m^2$,因此$P^2=m^2I$，我们知道粒子的质量m是一个用来区分不同粒子的指标。

粒子的自旋

我们知道还有一个Casimir 不变量，那个是w^2，我们来看看这是啥。我们将w作用在一组基$|m, p^\mu, \gamma\rangle$，简单起见，我们取$p^\mu = \left(m, \vec{0}\right)$，我们得到

$$\begin{aligned} w^0|m, p^\mu, \gamma\rangle &= 0 \\ w^i|m, p^\mu, \gamma\rangle &= mJ^i|m, p^\mu, \gamma\rangle \end{aligned} \tag{13}$$

我们计算出了另外一个Casimir算符，它是

$$w^2|m, p^\mu, \gamma\rangle = -m^2 s(s+1)|m, p^\mu, \gamma\rangle$$

我们得到了另外一个区分不同粒子(态)的参数：自旋！

描述一个粒子

最后，我们还需要自旋角动量在某一个轴的投影算符来描述一个态。故最后一个态可以描述为

$$\left|m, p; s, m_S\right\rangle$$

m_s又成为螺旋性(helicity)，因此常常又被记作h。

粒子的分类

Wigner 按照p^2和p_0给粒子分了四种情况

- $p^2 = m^2 > 0,\ p^0 > 0$ 或$p^0 < 0$
- $p^2 = 0,\ p \neq 0,\ p^0 > 0$ 或$p^0 < 0$
- $p^2 = 0,\ p^0 = 0$ 真空 vacuum
- $p^2 < 0$ 超光子tachyons

态如何变换

记

$$U(a) = U(1_4, a) = \exp(ia \cdot P)$$

$P = (P^0, \vec{P})$是4-动量算符，P^0便是哈密顿量，在相对论情形下

$$P^0 = +\sqrt{m^2 + \vec{P}2}$$

引入平面波基矢$|p, \zeta\rangle$，使得

$$P^\mu |p, \zeta\rangle = p^\mu |p, \zeta\rangle$$

ζ是除了动量之外其他的量子数。于是有

$$U(a)|p, \zeta\rangle = e^{ia \cdot P}|p, \zeta\rangle = e^{iap}|p, \zeta\rangle$$

进行坐标变换

从这里开始我就看不懂了。
(应该是)进行洛伦兹变换使得$p=\Lambda(p)p'$，变换后新的基矢记作$|\Lambda(p),\zeta\rangle$(terrible notations)，于是根据定义

$$U(a)|\Lambda(p),\zeta\rangle = U(a)U(\Lambda(p))|p',\zeta\rangle$$

利用关系(我无法得到的关系)

$$U(a)U(\Lambda(p)) = U(\Lambda(p),a) = U(\Lambda(p))U(\Lambda(p)^{-1}a)$$

之后的操作我就更看不懂了，例如$[\Lambda(p)^{-1}a]\cdot p' = a\cdot\Lambda(p)p' = a\cdot p$，最后结果为

$$U(a)|\Lambda(p),\zeta\rangle = e^{ia\cdot p}|\Lambda(p),\zeta\rangle$$

最终得到

$$P^{\mu}|\Lambda(p),\zeta\rangle = p^{\mu}|\Lambda(p),\zeta\rangle$$

这说明了啥?

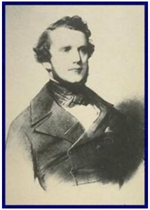
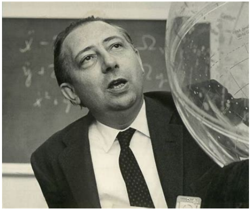
little group

从上面可以看到，有一些Poincare变换保持p'不变。我们现在来研究这些变换。记保持p'不变的群为little group(or stabilizer)，记作$W(p')$，因为是Wigner引入的这个小群。其中的群元记作$\Gamma \in W(p')$。

Figure: 还记得凝聚态物理中遇到的Wigner吗?

凝聚态物理复习

从左到右
布拉伐-Auguste Bravais，1811-1863，法国人
Eugene Wigner，1902-1995，匈牙利人
Frederick Seitz，1911-2008，美国人


小群的表示

因为小群的元素保持4-动量不变，所以变换后的态可以写成$|p', \zeta\rangle$的线性组合。

$$U(\Gamma)|p', \zeta\rangle = \sum_{\zeta'} D_{\zeta'\zeta}(\Gamma)|p', \zeta'\rangle$$

因此，$D_{\zeta'\zeta}$是Γ的一个不可约表示。对于下面的情况，我们把不可约表示求出来

- massive particles,
- massless particles.

massive particles

先考虑最简单的情况，粒子静止，即$p'_0 = m, p'_i = 0$,这时什么么是保持p'不变的变换?显然，三维空间的旋转。令ζ是自旋，故矩阵为

$$D(R) = D^{(s)}(R(\vec{\theta})) = \exp(-i\vec{\theta}\cdot\vec{s})$$

例如，对于自旋1/2，有

$$D^{(1/2)} = \exp\left(-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$$

其中σ是三个Pauli矩阵。

Lorentz Boost

上面我们在静止系下获得了小群的表示论，现在我们试图在相对粒子运动的参考系下找表示论，由于两个参考系之间差一个Lorentz Boost $L(p)$,我们用以下的步骤来找运动参考系的表示论。

- 首先, reboost。将$L(p)^{-1}$作用在运动参考系的态上。
- 在静止参考系变换。
- 再boost 回来，作用$L(p)$在变换好的态上。

因此$R(P,\Lambda) = L(\Lambda p)^{-1}\Lambda L(p)$就是运动参考系的小群。这又被叫做 Wigner 转动。

Massless Particles

无质量的粒子不可能静止下来，所以上面的方法就不管用了。对于无质量粒子有

$$p'^2 = 0$$

假设3-动量沿着z轴方向，则

$$p'_3 = p'_0$$

取$p'_0 = 1$，那么这种情况的小群为$\Lambda_t R_z(\theta)$，其中

$$\Lambda_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

但是，如果为了使系统具有分立的自旋(因为观测)，必须有

$$D(\Lambda_t) = 1, \quad D(R_z(2\pi)) = \pm 1$$

$R_z(\theta)$

现在，回忆我们熟悉的$SO(2)$，因为$SO(2)$群是阿贝尔群，所以它只有一维不可约表示，所以

$$D_{\lambda'\lambda}(\Gamma) = \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i\lambda\theta}$$

因为$D(R_z(2\pi)) = \pm 1$，这就意味着λ是一个整数或者半整数。

无质量粒子的特性

如果我们再考虑宇称的话，我们会发现无质量粒子的helicity 只能取$\pm\lambda$。

- 光子，自旋为1，只有± 1的helicity。
- 胶子，自旋为1，只有± 1的helicity。
- 引力子，自旋为2，± 2。
- 中微子，自旋1/2，以前认为是无质量粒子，有两种helicity。