Introductory Cosmology
Lecture 01-The Geometry of Spacetime

Haoting Xu

xuht9@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/HaotingXu/seminar_lec/

Introduction

课程内容简介

课程内容

本课程是对宇宙学的一个简介，它会让你对宇宙学有一个基本的图像。本课程分为三个部分

- 如何描述宇宙膨胀、如何求解宇宙膨胀，暴涨理论
- 宇宙的热历史
- 大尺度结构的形成

天文学基本长度单位

天文单位 (Astronomical Unit)：日地距离

$$1\ \mathrm{AU} \simeq 1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$$

光年 (Light Year)：光速乘一年的时间

$$1\ \mathrm{ly} \simeq 9.5 \times 10^{15}\ \mathrm{m}$$

秒差距：地球轨道绕日视差法所定义的单位

$$1\ \mathrm{pc} \simeq 3.26 \mathrm{ly}$$

快速入门

BBC 宇宙学纪录片
https://www.bilibili.com/bangumi/play/ss20776/?from=search&seid=17545224509047143
在线教程
http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmolog.htm

参考书目

- 教材 David Tong
  http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/cosmo.html
- 进阶阅读 Scott Dodelson- Modern Cosmology
- Weinberg- Cosmology

The FRW Metric

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left[\frac{1}{1-kr^2/R^2} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right)\right]$$

宇宙学原理

这一门课，我们要研究的目标是整个宇宙。放眼望去，满天繁星，每个地方都发生着很有意思的现象，我们不可能把宇宙的每一个细节都用公式去表达。我们需要一个简化的模型，让我们的研究对象看起来简单一些。这是一个权宜之计，让我们能够站在最大的尺度上思考问题，而暂时不考虑那些不均匀性。这就是宇宙学原理，它表述为

- On the largest scales, the universe is spatially homogeneous and isotropic.

用中文来说，就是大尺度上，宇宙是“均匀”且“各向同性”的。要注意“均匀”和“各向同性”的区别，比如用砖块制成的墙，它大体上是均匀的，但不是各向同性的；又如一个甜甜圈，它是各向同性的而却不是均匀的，而我们的宇宙，我们假设，在最大最大的尺度上看它，它看起来是均匀和各向同性的。

物理规律

知道了宇宙学的原则，我们还要知道我们认为正确并用来描述宇宙的物理规律。在这里，引力使用广义相对论来描述。在广义相对论中，空间常常用时空度规来描述

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

我们第一部分就是要写出和求解宇宙度规的演化。

曲率

“曲率”，顾名思义，是指空间的弯曲程度。拿二维曲面来举例子，在三维空间中的一个二维平面，曲率为 0。在三维空间中的一个二维球面，曲率为正；在三维空间中的一个双曲面，曲率为负。值得指出的是，曲率是一个“内禀”物理量，一个平面，或者一个空间 (更专业的术语叫做流形) 的曲率如何，取决于空间自身的度规。

在这里，我们基于宇宙学原理，来构造均匀、各向同性的度规。我们先从平坦的空间开始。

平坦空间

对于平坦的三维欧几里德空间，它的度规是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

人们常常采用球坐标
$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$。分别取微分代入上式，得到

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2\right)$$

正曲率空间

对于我们生活在三维世界的人来说，如何构造一个正曲率的三维空间呢？那最好把我们的三维空间镶嵌到四维的欧氏空间 (x, y, z, w) 去。就和一个球面是二维的正曲率空间一样，一个四维球面便是一个三维的正曲率空间，四维球的数学表达式为

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

这个方程所对应的空间就是我们要的正曲率三维空间。我们选取另一组坐标 (r, θ, ϕ, w)，其中 $w = \pm\sqrt{R^2 - r^2}$, 我们只取上半支 $w \geq 0$ 的部分。于是我们取微分得到

$$dw = \frac{-rdr}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

代入四维的度规 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$，得到

$$ds^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2} dr^2 + r^2 \left(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2 \right)$$

严格的来讲，这个只是 $w \geq 0$ 的半球。

正曲率空间 (续)

我们还可以采取另一种坐标选取方式，即 (θ, ϕ, χ)，χ 是新定义的一个方位角，他们和原来坐标的联系为

$$
\begin{aligned}
x &= R\sin\chi\sin\theta\cos\phi \\
y &= R\sin\chi\sin\theta\sin\phi \\
z &= R\sin\chi\cos\theta \\
w &= R\cos\chi
\end{aligned}
$$

如果采用这种坐标，那么四维球面的度规为

$$ds^2 = R^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

其中，各个“方位角”的定义域为 $\chi, \theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$。值得指出的是，上面的这种正曲率三维空间是可以单独存在的，不需要依赖于我们假想的四维空间。

负曲率空间

一个三维负曲率空间可以认为是一个四维的双曲面(hyperboloid)，它的方程是

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -R^2$$

我们同样可以选取 (r, θ, ϕ) 坐标，最终得到度规为

$$ds^2 = \frac{R^2}{r^2 + R^2} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right)$$

如果采用 (χ, θ, ϕ)，那么度规为

$$ds^2 = R^2 \left[d\chi^2 + \sinh^2 \chi \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\phi^2 \right) \right]$$

三维均匀各项同性空间

最后，我们可以将上面三种情况写成统一的形式，如果采用 (r, θ, ϕ) 的坐标，则有

$$ds^2 = \frac{1}{1 - kr^2/R^2} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

其中 $k = +1, 0, -1$ 分别对应正曲率、平坦空间和负曲率空间。如果采用 (χ, θ, ϕ) 的坐标，则有

$$ds^2 = R^2 \left[d\chi^2 + S_k(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

其中

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k = +1 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh\chi, & k = -1 \end{cases}$$

上面的式子便是三维均匀各向同性空间的度规。

FRW 度规

考虑到相对论，我们在空间项前面加上时间项。将时空度规写作

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)\left[\frac{1}{1-kr^2/R^2}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

这就是 FRW(Friedmann-Robertson-Walker) 度规。其中我们加入了一个随时间变化的系数 $a(t)$，被称作尺度因子 (scale factor)。我们观察到，如果作变换

$$a \to \lambda a, r \to r/\lambda, R \to R/\lambda$$

那么度规则不变。所以我们需要一个归一化。我们把我们今天的尺度因子 a 定义为

$$a_0 = a(t_0) = 1$$

今后如果不加声明，带下标 0 的物理量则表示今天的物理量，如 t_0 表示从宇宙大爆炸开始到现在的时间。

共动坐标和真实距离

从 FRW 度规的表达式我们发现，真实的物理距离是

$$
\begin{aligned}
d_{\rm phys} &= a(t)\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-kr'^2/R^2}}\,dr' \\
&= a(t)R\chi
\end{aligned}
$$

意思是说，一个星系与我们的距离，一方面取决于它的坐标 (r,θ,ϕ) 或者 (χ,θ,ϕ)，还取决于现在宇宙的年龄。如果 a 在不断变大，那么假设星系本身没有运动的话，星系之间的物理距离仍然会变远。就像你吹一个气球，气球上的点没有运动，而他们的距离是随着气球的变大而逐渐变远。我们称坐标 (r,θ,ϕ) 或者 (χ,θ,ϕ) 叫做共动坐标 (comoving coordinate)。它只是一组标记物体在宇宙中位置的数，而需要再乘上尺度因子才是最后的物理距离。

星系退行速度

假设一个星系，它的具体的物理坐标是 $\vec{x}_{\text{phys}}(t) = a(t)\vec{x}(t)$，其中 $\vec{x}(t)$ 是这个星系的共动坐标。所以这个星系的速度为

$$\vec{v}_{\text{phys}} = \frac{d\vec{x}_{\text{phys}}(t)}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{x} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = H\vec{x}_{\text{phys}} + \vec{v}_{\text{pec}}$$

其中我们定义了哈勃参数

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

第二项为星系自己相对于宇宙网络的速度。它的典型数值为 $400\,\text{km}/\,\text{s}$。

宇宙在膨胀

那么今天的宇宙怎么样呢？人们发现，宇宙在不断膨胀。尺度因子在不断变大。这意味着 $\dot{a} > 0$。这一点最早由哈勃的观测发现。它观测了很多个星系与我们的距离和这些星系的运行速度，得到下面的结果

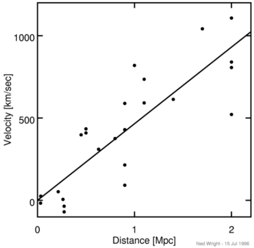


Figure: 哈勃 1929 年观测结果

哈勃常数

哈勃大胆预测星系退行的速度和距离成正比。虽然它的实验十分粗糙，但是这一大胆的预测是宇宙学的先驱。更多的数据如下图所示。今天的哈勃参数数值为

$$H_0 \sim 70\,\mathrm{km/(\,s \cdot Mpc)}$$

人们经常定义参数 $H_0 = 100h\,\mathrm{km/(\,s \cdot Mpc)}$，其中 $h \sim 0.7$。

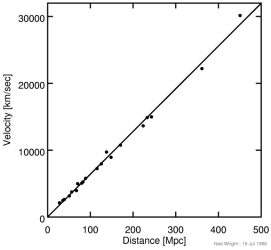


Figure: 截止至 1996 的数据

视超光速

从上面的星系运动速度公式可以看出，这里并没有对于速度的限制。也就是说，如果距离足够远，那么他们看起来是超光速的。值得指出的是，这种超光速是由于时空本身的膨胀引起的，并不违反相对论。

Redshift

$$\frac{1}{a} = 1 + z$$

光信号的传播

我们所有的观测数据都来自电磁波或者引力波。所以接下来我们来研究光在这样一个时空中如何传播。我们知道光在时空中走的轨迹是

$$ds = 0$$

由 FRW 度规我们有

$$cdt = \pm a(t)\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R^2}}$$

我们将我们自己放在宇宙原点，$-$ 号表示光向我们运动。我们考虑在一个遥远的相对共动坐标静止的星系，共动坐标的径向分量为 r_1，它在时间 t_1 发射一束光，而我们在 t_0 时间 (今天) 接收到了，那么对上式积分则有

$$c\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = -\int_{r_1}^{0}\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2/R^2}}$$

宇宙学红移

假设这个星系在 $t_1+\delta t_1$ 时间又发射了一束光，我们假设我们在 $t+\delta t_0$ 接收到，那么对于这个信号，则有

$$c\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0}\frac{dt}{a(t)}=\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2/R^2}}$$

我们发现这个式子和上一页的式子的右边都一样，所以两式相减得到

$$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0}\frac{dt}{a(t)}-\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{a(t)}=0$$

将第一项用近似展开，得到

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)}=\frac{\delta t_0}{a(t_0)}=\delta t_0$$

其中我们用到了我们的归一化条件 $a(t_0)=1$。

宇宙学红移

如果这个星系周期性地发射光波，那么它发射时的波长为 $\lambda_1 = c\delta t_1$，我们接收到的波长为 $\lambda_0 = c\delta t_0$，于是我们利用上面的式子，得到

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{a(t_1)}$$

我们看到，因为宇宙的膨胀 (光发射时和接收时候的尺度因子不一样)，光的波长发生了变化。因为我们宇宙在膨胀，$a(t_1) < 1$，所以光的波长实际上是变小了，发生了红移。我们把这个红移叫做宇宙学红移。我们定义红移参数，简称红移

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1 - a(t_1)}{a(t_1)}$$

还可以反解得到

$$a = \frac{1}{1+z}$$

可见红移和过去的尺度因子有一个对应关系。今天对应 $z = 0$，宇宙大爆炸的时候 $z \to \infty$。

如何测量红移

那么如何测量谱线的红移？遥远的光经过自己星系的星云，有一些特定的谱线被星云里面的原子、分子吸收，把这些吸收线和地球上原子的吸收线作对比，便得到了 z。
让人感到震惊的是，吸收线的相对位置和地球上原子、分子吸收线的相对位置完全一致。这意味着我们至少现在没有观测到，在遥远地方的物理和地球上的物理有什么不一样。

可观测宇宙和事件视界

宇宙有多大，年龄有多长

宇宙年龄

有了对于宇宙时空的描述，我们就可以问宇宙有多大，宇宙的年龄有多大。前面说过，我们已经测量过今天 H 的数值，那么如果我们随便采取一个线性近似

$$a(t) \simeq 1 + H_0(t - t_0)$$

我们取 t 为宇宙大爆炸的时间 t_{BB}，这时尺度因子为 0，因此有

$$t_0 - t_{BB} = H_0^{-1} \simeq 4.4 \times 10^{17}\,\mathrm{s} \simeq 1.4 \times 10^{10} \text{ years}$$

而真实的情况，宇宙的年龄有 138 亿年，可以看到，我们随便作的近似竟然相当准确，至少在数量级上不差。

可观测宇宙

我们说过我们所有的观测都来自于光，如果考虑大爆炸时刻 t_{BB} 发射一束光，它一直传播到今天，则有

$$c\int_{t_{BB}}^{t}\frac{dt'}{a(t')}=\int_{0}^{r_{max}}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2/R^2}}$$

可以求出共动坐标 $r_{max}(t)$ 所对应的今天的物理距离为

$$d_H(t)=a(t)\int_{0}^{r_{max}}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2/R^2}}=ca(t)\int_{0}^{t}\frac{dt'}{a(t')}$$

这个距离是我们可以接收到光的最远距离，这被称作粒子视界 (Particle Horizon)，这个距离也被称作可观测宇宙 (Observable Universe) 的大小。这个大小之外的宇宙所发射出的光 (是指共动坐标之外的宇宙)，无论如何也不能被我们接收到。

事件视界 (BC)

那么我们今天发出的光信号，能影响距离我们多远的地方呢？这个取决于我们宇宙的命运。第一种情况是宇宙最终收缩 (Big Crunch)，如果宇宙收缩到一个点的时间是 t_{BC}，那么我们今天发出的光信号

$$c\int_{t}^{t_{BC}}\frac{dt'}{a(t')}=\int_{0}^{r_{max}(t)}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2/R^2}}$$

这个 $r_{max}(t)$ 就是我们今天能传递的最远的共动坐标。

事件视界 (Event Horizon)

如果宇宙无休止地膨胀下去，那么上面的式子改写为

$$c\int_t^{+\infty}\frac{dt'}{a(t')}=\int_0^{r_{max}(t)}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2/R^2}}$$

可见如果等式左边是收敛的，那么可以推出 $r_{max}(t)$ 也是一个有限的数值。例如，我们将会看到，当 $t\to\infty$ 时，$a(t)\sim e^{Ht}$ 是一种很有可能的情况，这个时候等式左边就是收敛的。
这里的 $r_{max}(t)$ 被称作共动事件视界，它描述了我们的光信号能在未来影响多远。
值得指出的是，上面“视界”的名词本来都是描述黑洞的术语，这里只是一个形象的类比。

共形时间 (Conformal Time)

我们知道 FRW 度规和闵氏度规的区别，一个就是多了个 $a(t)$，还有一个就是多了关于时空曲率的描述。由于这样描述太麻烦了，我们引入一个新的事件坐标，叫做共形时间

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}$$

有了这样一个共形时间,FRW 度规就可以写成

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-c^2 d\tau^2 + R^2 d\chi^2 + R^2 S_k(\chi)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

这样如果我们在 $(c\tau, R\chi)$ 平面上画光的世界线，光的世界线就是 45° 线。

思考题

尝试用光的世界线的方式来表示可观测宇宙和事件视界。

总结

这一小节我们学习了

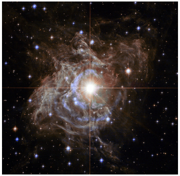
- 宇宙年龄的一种随便近似。
- Particle Horizon：可观测的宇宙大小，
- Event Horizon：我们可以影响的宇宙大小。
- Conformal Time：一种简化分析的新的时间坐标。

距离测量

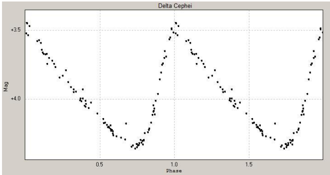
如何测量一个星体的距离？如果星体距离我们很近，那么我们可以用视差法，但是这种测量的方法目前的最远距离为 2×10^{-5} 角秒，换算成距离只有不到 0.1Mpc，和宇宙相比这点距离完全不够，可观测宇宙的大小大概为 3000Mpc。所以我们如何测量距离我们十分遥远的星系的距离？我们作天文观测，只能知道这个星星发出的光我们看起来是多亮，如果我们看到一颗星很亮，我们不能分辨它到底是本身就很亮，还是里我们很近。于是我们得想办法知道某一些星体的绝对亮度。这样，通过比较我们测到的亮度，我们才能知道距离。下面我们介绍几种可以知道其绝对亮度的星体。

造父变星 (Cepheids)

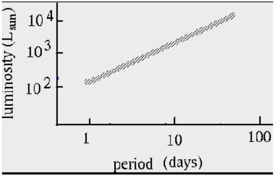
造父变星 (Cepheids)。造父变星的光度在不断振荡，振荡周期大概是几天到一个月。观测表明造父变星的绝对亮度 (直接正比与能量的亮度) 和其振荡周期成正比。于是知道其周期就可以知道其绝对亮度。



(a) 造父变星的图片



(b) 造父变星光变曲线

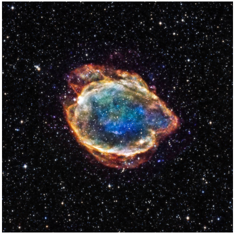


(c) 亮度-周期曲线

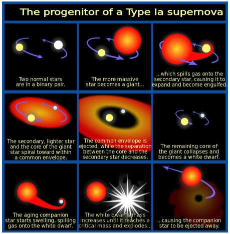
Figure: 造父变星

Ia 型超新星 (Type Ia Supernovae)

考虑一个白矮星和伴星的系统。回忆在统计物理中白矮星是由电子简并压而形成的星体。这个星体在不断吸收伴星的质量。如果白矮星部分的质量超过钱德拉塞卡极限 ($\sim 1.4M_{\odot}$)，那么电子简并压不足以对抗引力，就会产生超新星爆发的现象。



(a) 超新星爆发的遗迹



(b) 超新星产生的物理过程

Figure: 超新星

引力波

未来还有一种可能的辩认距离的方式可能是通过引力波。

视光度

我们希望推导在 FRW 度规下，视光度 f 和绝对光度 L 的关系。视光度是指单位面积的接收器单位时间内所接收到的能量。显然，在平坦空间内，它和绝对光度 L 的关系为

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}$$

其中 d 是光源到接收器的距离。我们其实只需要考虑三项修正

- FRW 度规对于球面表面积的修正。
- 红移所引起的能量修正。
- 红移所引起的频率修正-单位时间内接收的光子数变少。

视光度 (续)

回忆 FRW 度规

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)R^2 \left[d\chi^2 + S_k(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right]$$

考虑空间部分，在径向和两个角度项的小“线元”分别为 $a(t)Rd\chi$，$a(t)RS_k(\chi)d\theta$，$a(t)RS_k(\chi)\sin\theta\, d\phi$。注意我们考虑的应该是在“今天”这个时间 t_0，我们和那个星体所对应的物理距离，这个和光实际走过的距离是有差别的，在计算能量分配的时候，要按照这个同时的物理距离计算。于是我们取 $a(t_0) = 1$。在 χ 固定的情况下，三维球面的面积为 $4\pi R^2 S_k^2(\chi)$。这就是 FRW 度规对于 $4\pi d^2$ 项的修正。

光度距离 (Luminosity Distance)

根据红移的定义有

$$\nu_0 = \frac{\nu}{1+z}$$

其中 ν 是光发射时光的波长。所以能量也应该乘上 $1/1+z$ 的衰减系数。

最后，我们再考虑由于红移所引起的单位时间内接收光子数变少，由上式，得知还应该乘上一个频率系数。所以最后我们得到接收到的视光度为

$$f = \frac{L}{4\pi R^2 S_k^2(\chi)} \times \left(\frac{1}{1+z}\right)^2$$

和平坦空间的式子作对比，我们定义光度距离 (Luminosity Distance)

$$d_L = RS_k(\chi)(1+z)$$

这样视光度便可以写成 $f = \frac{L}{4\pi d_L^2}$

思考题

我们已经发展出了第一个可以用到观测的公式

$$d_L = RS_k(\chi)(1+z) = \sqrt{\frac{f}{4\pi L}}$$

这意味着在天文观测中，可以测到一个星体的 (z, f)，知道了 f 就相当于知道了 d_L。你能从一系列低红移的超新星曲线中拟合出哈勃常数吗？宇宙膨胀的加速度呢？上网找点数据试试？(提示：假设 $k=0$，将 $R\chi$ 使用哈勃常数和加速度泰勒展开)
最后，从你的结果可以看出，我们现在的宇宙是如何膨胀的，在加速还是在减速？这符合你的直觉吗？为什么？