

Projet d'Optimisation Financière

Méthode du treilli, Optimisation de la CVaR

HAOUILI Ahmed

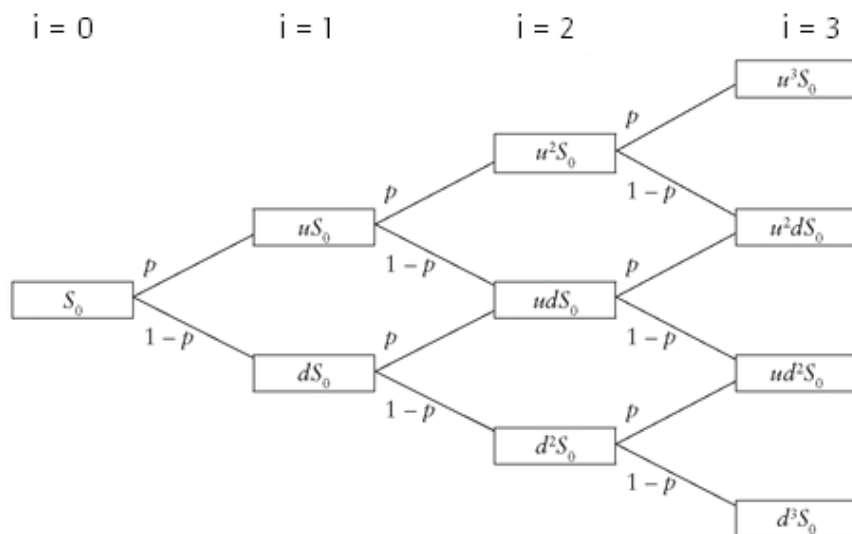
1. Partie 1 : Méthode des treillis

1. Rappel sur la méthode de calcul de prix d'options par la méthode du treillis :

Pour pouvoir comprendre ce document, il est nécessaire de rappeler la méthode de calcul de prix d'options. Pour calculer le prix d'une option, on procède à un découpage du temps en période N . C'est le point de départ de la méthode. Les périodes peuvent être des semaines ou des jours, ou des mois. Plus on augmente le nombre de périodes plus on se rapproche du temps continu.

On considère un actif financier qui est le sous-jacent de l'option, qu'on représente par la variable S . Ce sous-jacent peut-être n'importe quel actif présent sur les marchés financiers : Obligation d'état, action d'entreprise, taux de change, Le prix de ce sous-jacent évolue avec le temps, il peut croître comme il peut baisser. Pour évaluer tous ces scénarios et anticiper le prix de l'actif sous-jacent, on introduit la notion de probabilité risque neutre. Sous cette hypothèse, on définit les variables u et d , qui représente la hausse et la baisse possible de l'actif risqué respectivement. Les variables u et d borne R (taux d'actualisation qui vaut $1 + r$ où r est le taux sur une période). Dans le scénario de hausse l'actif vaudra $u * S$ où S est le prix de l'actif au cours de la période précédente, à contrario, dans le scénario de baisse, il vaudra $d * S$.

Voici une illustration de l'arbre produit quand on discrétise le temps en 3 périodes :



Grâce aux variables présentées précédemment, on peut introduire la notion de probabilité de hausse qu'on nomme P_u qui se calcule comme suit : $P_u = \frac{1+r-d}{u-d}$. La probabilité de baisse P_d vaut : $1 - P_u$. On la calcule comme suit : $P_d = \frac{u-1+r}{u-d}$.

Une fois ces probabilités calculées, on peut facilement calculer le prix de l'option. D'abord, il faut faire la distinction entre une option américaine et une option européenne. L'option américaine peut être exercée à la maturité de l'option et durant toute la durée précédant la maturité. En réalité, il y a quelques jours entre l'achat de l'option et la possibilité de l'exercer. Une option européenne quant à elle, peut seulement être exercée à la maturité. Grâce à ces définitions, on suppose que les options américaines sont plus chères que les options européennes. C'est ce que nous allons tenter d'observer et d'analyser. Il existe aussi, un grand

nombre d'option plus compliqué qu'on nomme option exotique telle que : les options asiatiques, bermudiens.

Il faut également distinguer les options de ventes - en anglais Put – des options d'achats – en anglais Call -. Ainsi, l'option de vente peut être exercée quand le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice de l'option qu'on nomme : Strike Price et qu'on représente par la variable K. L'option d'achat peut être exercée quand le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice de l'option.

Pour calculer le prix de l'option, on s'appuie sur les prix du sous-jacent ainsi que sur la probabilité de hausse et sur le taux R. Quel que soit le type d'option européenne ou américaine, on commence par calculer les prix dans les sommets terminaux avec l'expression suivante :

- Pour une option de vente : $\max(K - \text{prix de l'actif dans les sommets terminaux}, 0)$
- Pour une option d'achat : $\max(\text{prix de l'actif dans les sommets terminaux} - K, 0)$

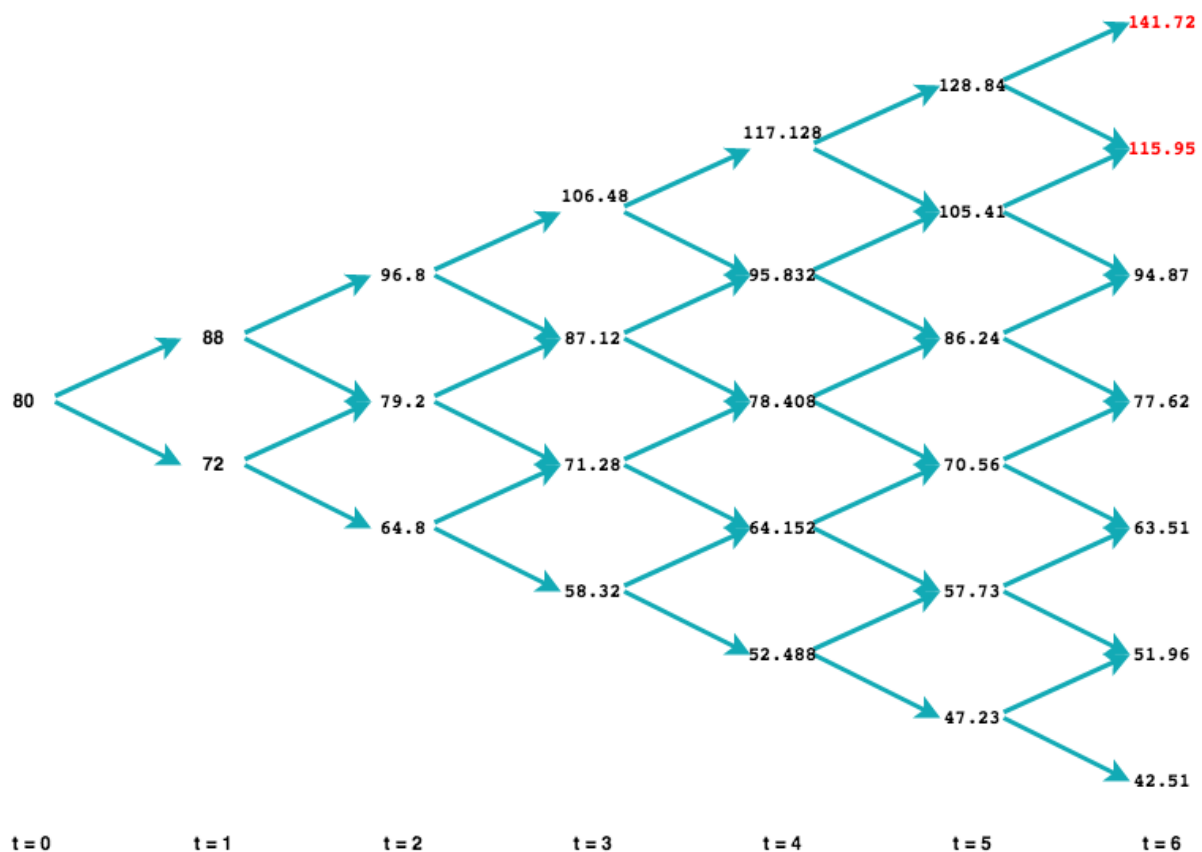
Ensuite, le calcul diffère entre le Pricing d'une option américaine ou européenne. Pour une option européenne, on calcule pour chaque nœud :

$$\frac{1}{R} (P_u * \text{valeur du sommet suivant en hausse} + P_d * \text{valeur du sommet suivant en baisse})$$

Pour une option américaine, on prend en compte le fait qu'on peut l'exercer au cours de toute la période dans le calcul.

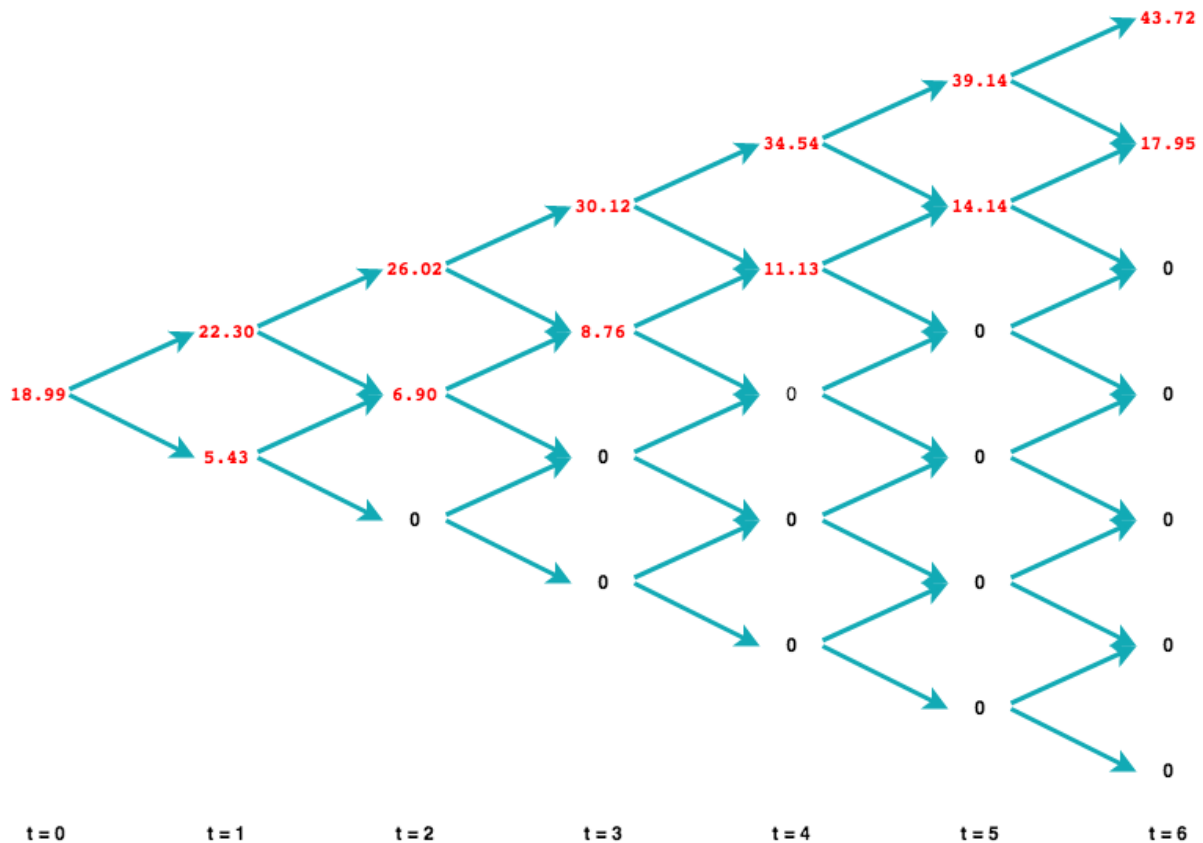
Voici un exemple concret d'un Pricing d'une option de vente américaine où on discrétise le temps en 6 périodes. On prend l'actif financier à un prix initial de 80 euros. On peut exercer l'option à 98 euros. Aussi, le taux r est de 5% par période. Si le taux n'est pas sur la période, il faut le convertir. Pour s'approcher au maximum de la réalité, on pose $d = 1.1$ et $u = 0.9$.

L'arbre ci-dessous illustre les différentes valeurs de l'actif risqué au cours des 6 périodes. Vu que c'est une option de vente, l'investisseur peut l'exercer seulement dans les



deux cas suivants : si le sous-jacent vaut 141,72 euros ou 115,95 euros. Dans le premier cas, il empochera 43,72 euros et dans le second cas, il empochera 17,92 euros. On retrouve les informations dans le graphique ci-dessous, qui représente la valeur de l'option de vente :

Le calcul nous indique que l'option vaut 18,99 euros.

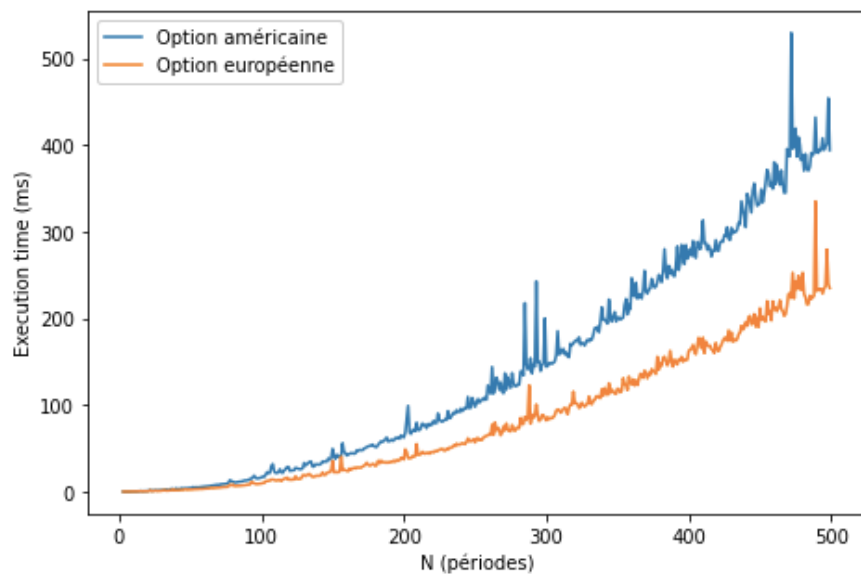
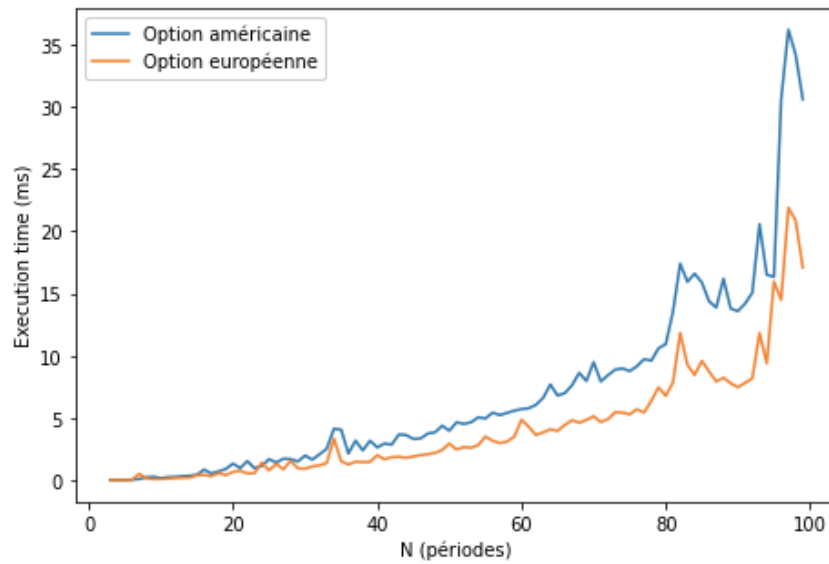
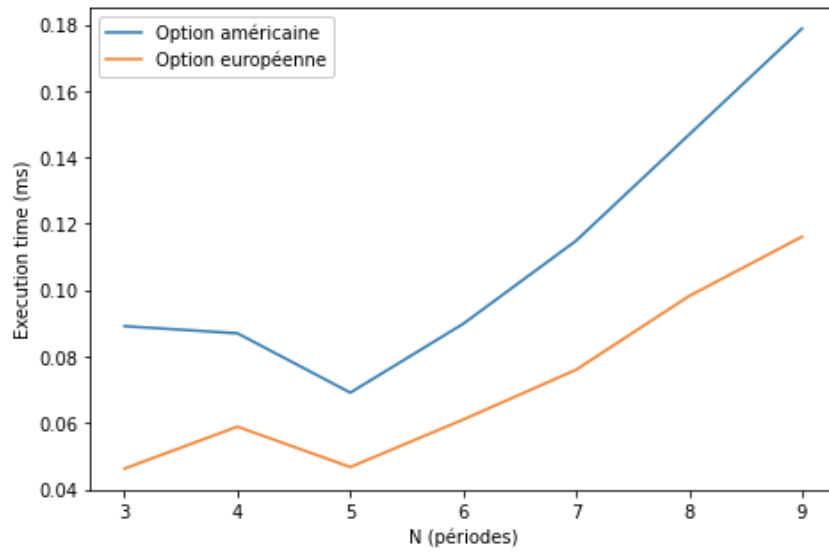


2. Implémentation technique

J'ai utilisé le langage de programmation *Python* pour pouvoir implémenter le calcul du treillis. Le code est disponible sur mon repository *Git* se trouvant à l'adresse suivante : https://github.com/Haouah19/PricingCRR/blob/main/projet_optimisation_financiere.ipynb.

Il faut savoir que le langage Python est un langage considéré comme long par rapport à un langage de bas niveau avec un fort typage comme le C++. Il est aussi important de souligner que les statistiques techniques que je vais présenter ici ont été tiré depuis des exécutions effectuées sur ma machine personnelle. Il se peut qu'avec une machine plus performante, les temps d'exécution s'améliorent.

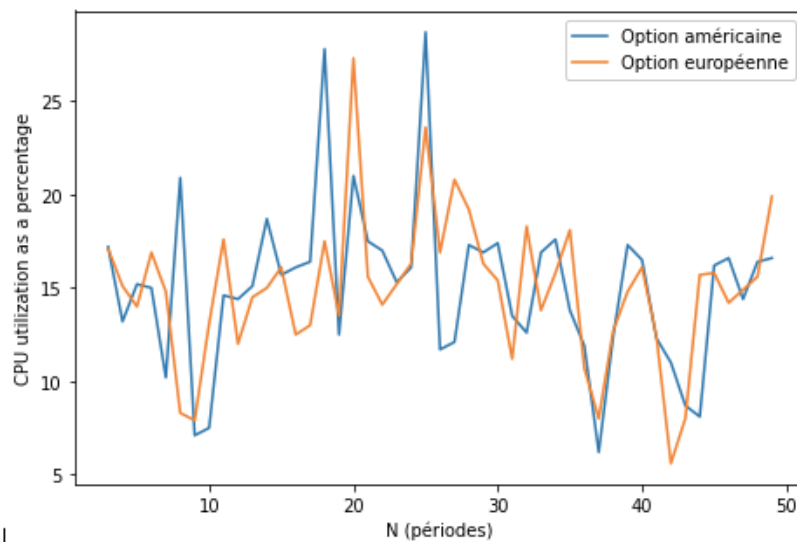
Ma première idée est de présenter les temps de calcul en fonction du nombre de périodes N car il paraît évident que le nombre de calculs augmente énormément quand on augmente le nombre de périodes N . Ici, j'essaie de d'estimer la complexité temporelle de mon implémentation. Pour cela, je vous propose 3 graphes distincts en augmentant à chaque fois la grandeur de N afin de mieux visualiser les temps de calculs.



Les graphes ci-dessous démontrent que les temps de calcul augmentent en fonction du nombre de périodes N , ce qui est logique. Il faut quand même noter que pour un calcul de prix d'option sur 500 périodes, la durée de traitement reste acceptable, d'environ une demi-seconde.

Les pics présents sur les graphiques sont à mon avis, dus à la configuration technique de ma machine. Dans le sens ou quand le processeur surchauffe, il lui faut un temps de latence pour refroidir ce qui fait augmenter le temps de calcul.

Il est aussi intéressant de visualiser l'utilisation du CPU en pourcentage par rapport au nombre de périodes N , ceci nous indiquera la consommation en CPU de l'implémentation. Je tiens à souligner que l'interprétation du graphique ci-dessous demande des connaissances poussées en architecture que je ne possède pas. Je laisse donc, au lecteur l'interprétation. Aussi, à cause des performances de mon ordinateur personnel, je n'ai pas pu aller au-delà de 50 périodes sur l'étude du CPU.



Ce que je peux déduire d'après le graphique est que l'utilisation du CPU ne dépend pas de la taille de l'entrée et du nombre de calculs à effectuer. Ce qui est pour moi illogique.

3. Analyse des sensibilités :

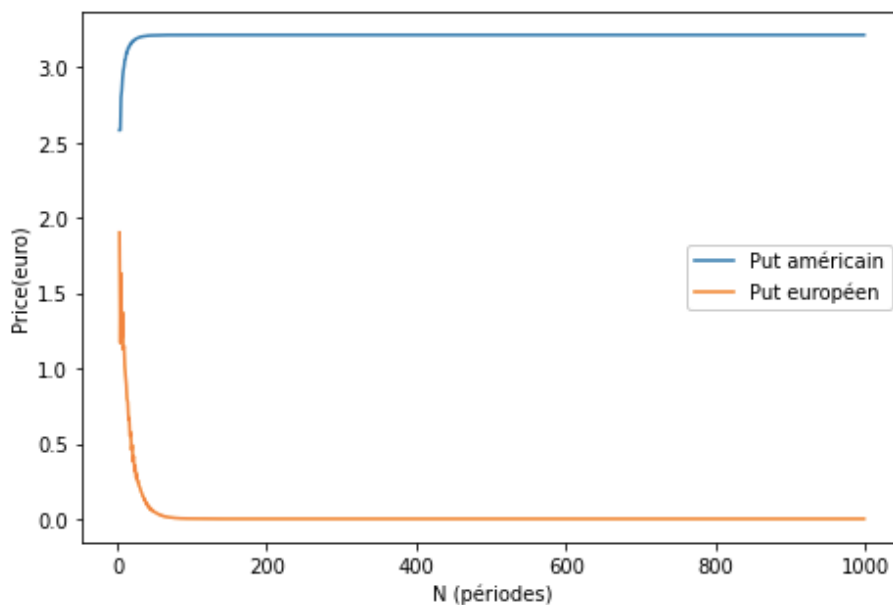
Dans cette partie nous allons faire une analyse des sensibilités des différentes variables de calcul (périodes N , le taux r , ...) par rapport au prix de l'option. Nous allons tenter de varier les valeurs de ces variables tout en restant cohérent avec la réalité. À chaque fois, nous comparerons le prix d'une option américaine et d'une option européenne.

3.1 Prix d'une option de vente « Put » en fonction des périodes N :

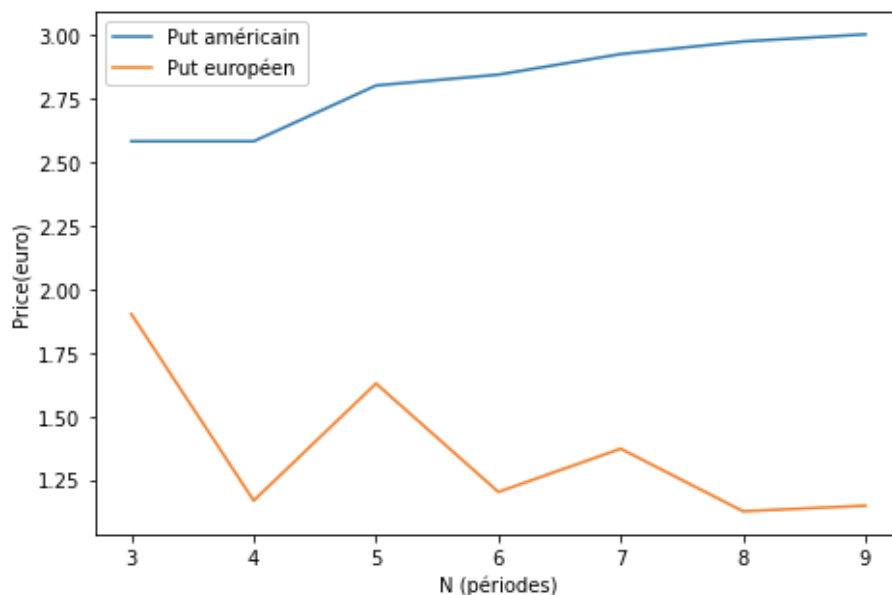
Dans le graphique ci-dessous nous comparons le prix d'une option de vente en augmentant à chaque fois le nombre de périodes N . Ces prix ont été calculés avec un taux r par période de 5%, ainsi qu'un d de 1,1 et un u de 0,9. Le sous-jacent a comme prix initial 100 euros. Cette option peut être exercée avec un Strike Price de $K = 98$ euros.

- D'abord, on remarque aisément que le prix d'une option de vente américaine est toujours supérieur à une option de vente européenne. Cet écart revient au fait qu'une option américaine peut-être exercer durant toutes les périodes précédant la date de maturité T .
- Ensuite, cette différence joue en faveur de l'option américaine car en augmentant le nombre de périodes N , l'option américaine tendra vers un prix supérieur à zéro stable. À contrario, le prix de l'option européenne tendra vers 0.
- Enfin, dans le sens où une option européenne peut être exercée seulement à maturité, on remarque que le prix d'une option européenne décroît en augmentant les périodes car plus on augmente les périodes plus notre modèle devient incertain. Par contre, en augmentant les périodes N , le prix de l'option américaine augmente et se stabilise à un prix fixe.

Pour N allant de 3 à 1000, nous avons le graphe suivant :



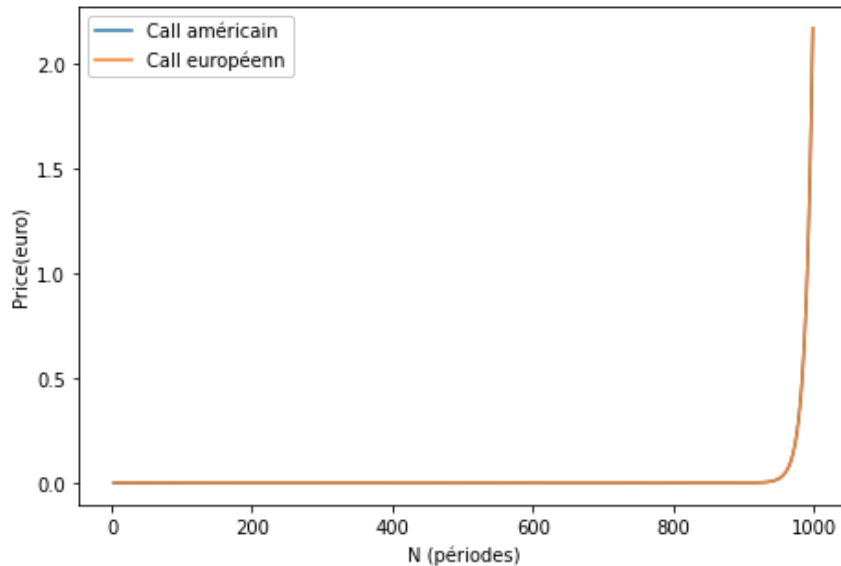
Nous avons baissé le nombre de périodes à N allant de 3 à 10 pour que vous puissiez visualiser plus facilement les oscillations des prix.



3.2 Prix d'une option d'achat « Call » en fonction des périodes N :

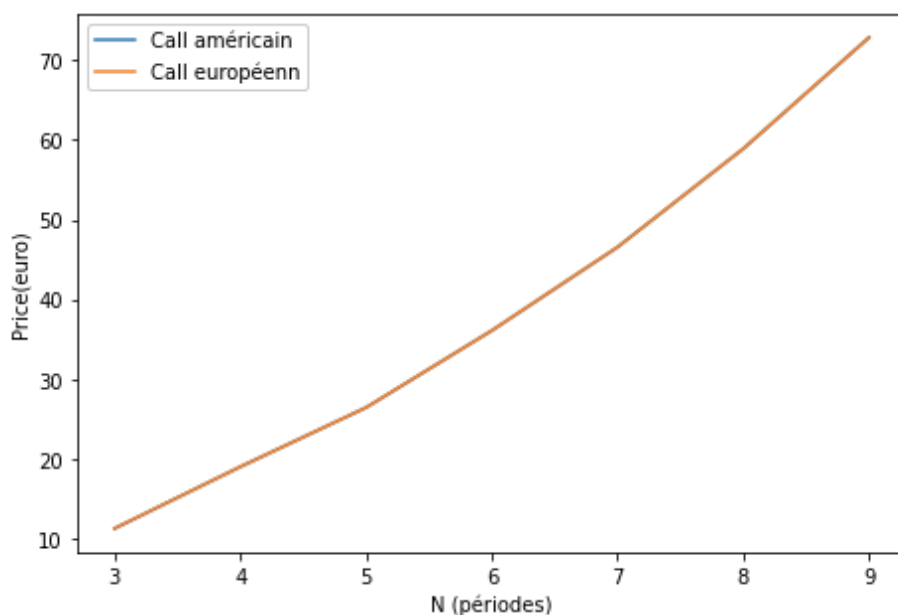
Nous avons effectué la même approche pour calculer les prix d'une option d'achats européenne et d'une option d'achats américaine. Nous avons repris les mêmes données que pour l'option de vente précédente sauf que cette fois-ci, l'option pourra être exercée quand prix du sous-jacent sera à 110 euros.

Pour N allant de 3 à 1000, nous avons le graphe suivant :



Remarque : La courbe de l'option d'achats américaine est sous la courbe de l'option européenne.

Il est difficile de s'apercevoir des sensibilités des prix avec une telle grandeur de N. C'est pour cela que j'introduis le graphe suivant sur N allant de 3 à 9 pour la même option.



Il est intéressant d'analyser le fait que le prix d'une option d'achats européenne est égal au prix d'une option d'achats américaine, quel que soit le nombre N . Cette constatation nous paraît illogique, car comme nous l'avons souligné une multitude de fois, le prix d'une option américaine prend en compte le fait qu'elle peut être exercée à n'importe quel moment. Sauf qu'en réalité, l'investisseur n'a aucun intérêt à l'utiliser avant la date de maturité, il aura plus de gain en la revendant sur les marchés que de l'exercer à une période inférieure à la maturité. Il faut néanmoins prendre en compte que cette assertion ne fonctionne que sous l'hypothèse d'absence de dividendes.

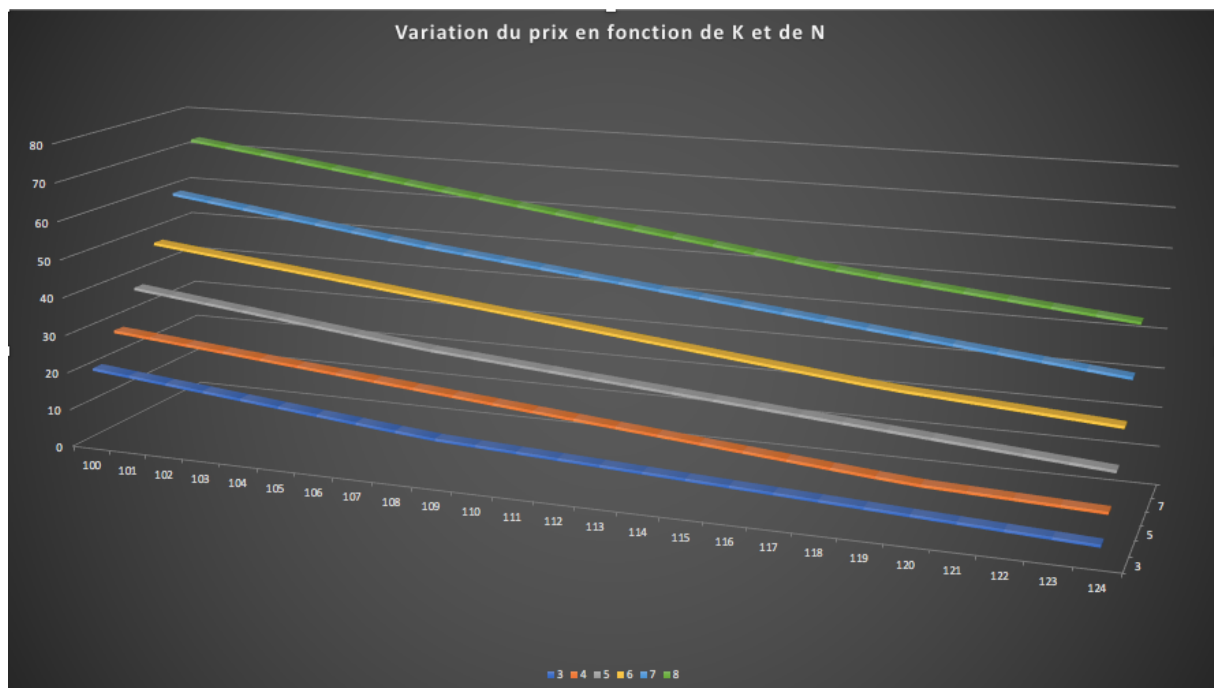
On peut démontrer cela en utilisant la relation parité Call-Put. Je n'explicitai pas ici la démonstration, mais intuitivement on peut dire qu'on n'aura jamais plus de gain qu'en attendant la maturité T .

Il est aussi important de souligner le fait que le prix de l'option croît en augmentant le nombre de périodes N .

3.3 Prix d'une option sur N périodes en fonction du Strike K :

Nous définissons un actif (sous-jacent) qui vaut 100 euros à l'instant 0 et qui peut augmenter avec $d = 1,1$ et $u = 0,9$. On possède un taux r sur période de 5%. Ici nous allons faire varier le nombre de périodes N ainsi que la valeur du Strike Price K . L'option est une option d'achats européenne.

Par souci de compréhension, le nombre de périodes ne variera que de 3 à 8. La visualisation des données devient incompréhensible quand on augmente le nombre de variations de N . Cette étude produit le graphique 3D ci-dessous où l'axe y représente le prix de l'actif et l'axe x , la valeur du Strike K . Aussi, pour rester cohérent avec la réalité, on propose des Strikes (prix d'exercice) allant de 100 euros à 124 euros.



D'abord, analysons le prix sur une seule valeur de la variable N . Par exemple $N = 3$, le prix de l'option diminue quand le Strike K augmente. En effet, quand le prix d'exercice vaut par exemple : 101 euros, ce qui est relativement proche de son prix initial, le prix de l'option

est de 19,53492188 euros. Par contre, quand le Strike Price est fixé à 124 euros, le prix de l'option diminue pour atteindre le prix suivant : 4,44419 euros. Ceci est logique car intuitivement, plus il est probable que le sous-jacent atteignent le prix d'exercice, c'est-à-dire, plus l'écart entre le prix du sous-jacent à maturité et le prix d'exercice de l'option est petit, plus le prix de l'option est grand. Pour reprendre l'exemple précédent, si à maturité $T = 3$, le prix de l'actif vaut 101 euros, alors que le prix initial est de 100, il est plus probable que le prix final du sous-jacent soit à 101 euros qu'à 124 euros. Cette répercussion se ressent sur le prix.

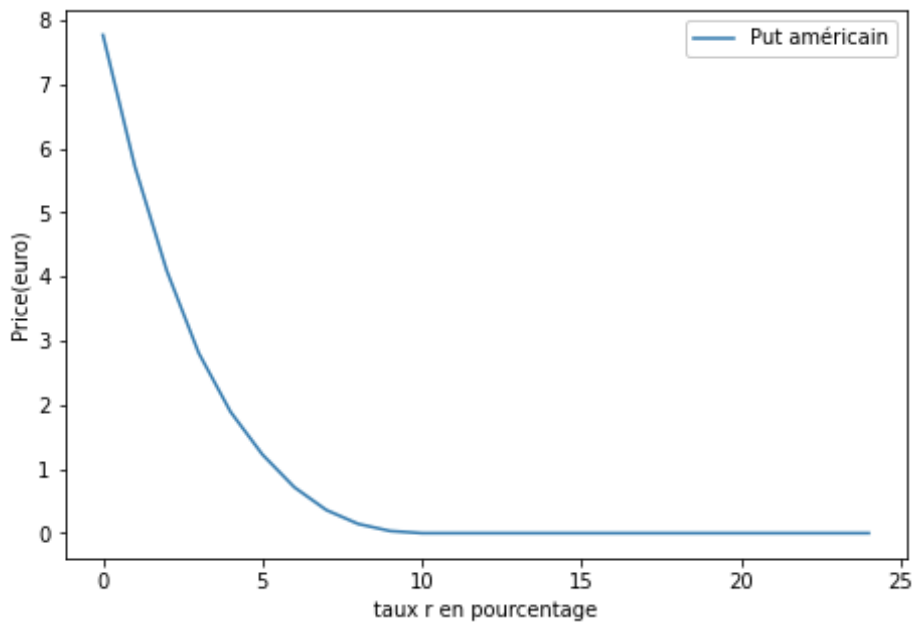
Ensuite, il est aussi intéressant d'étudier la variation du prix sur plusieurs périodes à la fois. On remarque très clairement que plus N est grand, plus le prix de l'option suivant le Strike est plus grand. Ainsi, pour une même option avec un Strike de 108 euros par exemple. Les prix sont croissants en fonction de N .

$K \backslash N$	3	4	5	6	7	8
100	20,51166797	27,9971448	37,15525841	47,2329143	58,85448538	72,00496764
101	19,53492188	27,09975932	36,01109193	46,11987588	57,54666524	70,69566924
102	18,55817578	26,20237385	34,86692545	45,00683746	56,23884509	69,38637084
103	17,58142969	25,30498838	33,72275898	43,89379904	54,93102495	68,07707244
104	16,60468359	24,4076029	32,5785925	42,78076062	53,62320481	66,76777404
105	15,6279375	23,51021743	31,43442602	41,6677222	52,31538466	65,45847565
106	14,65119141	22,61283196	30,29025954	40,55468378	51,00756452	64,14917725
107	13,67444531	21,71544648	29,14609306	39,44164536	49,76477956	62,83987885
108	12,69769922	20,81806101	28,06552878	38,32860694	48,70043657	61,53058045
109	11,76979043	19,92067554	27,25788185	37,21556852	47,63609358	60,22128205
110	11,28141738	19,02329006	26,45023492	36,1025301	46,57175059	58,91198366
111	10,79304434	18,12590459	25,642588	34,98949168	45,5074076	57,60268526
112	10,30467129	17,22851911	24,83494107	33,87645326	44,44306461	56,29338686
113	9,816298242	16,33113364	24,02729414	32,76341484	43,37872162	54,98408846
114	9,327925195	15,43374817	23,21964722	31,65037642	42,31437863	53,67479006
115	8,839552148	14,53636269	22,41200029	30,537338	41,25003564	52,36549167
116	8,351179102	13,63897722	21,60435337	29,42429958	40,18569265	51,05619327
117	7,862806055	12,74159175	20,79670644	28,31126116	39,12134966	49,74689487
118	7,374433008	11,84420627	19,98905951	27,19822274	38,05700667	48,6197696
119	6,886059961	10,9468208	19,18141259	26,24733016	36,99266369	47,61725242
120	6,397686914	10,15712158	18,37376566	25,53180547	35,9283207	46,61473523
121	5,909313867	9,772527808	17,56611873	24,81628077	34,86397771	45,61221805
122	5,42094082	9,387934033	16,75847181	24,10075607	33,79963472	44,60970087
123	4,932567773	9,003340259	15,95082488	23,38523137	32,73529173	43,60718368
124	4,444194727	8,618746485	15,14317796	22,66970667	31,67094874	42,6046665

3.4 Prix d'une option sur le taux petit r :

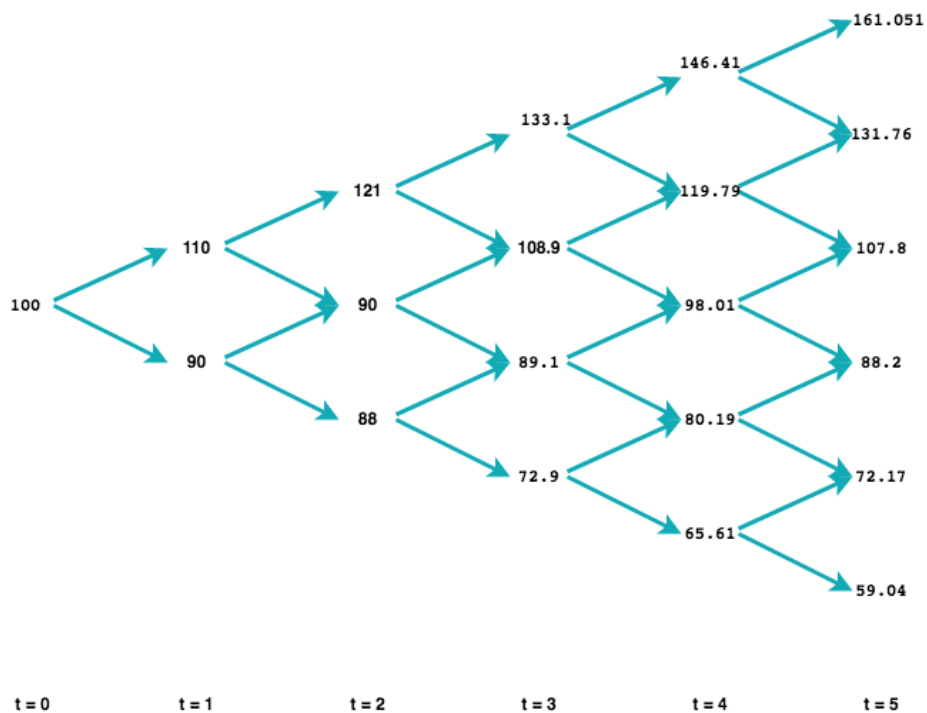
Pour effectuer une étude sur le taux r , l'idée principale était de faire varier le taux r de 0% à 100% et faire varier pour chaque taux, les variables u et d mais cette stratégie s'est avérée très complexe. J'ai réussi à obtenir des résultats mais il n'y a aucune façon concise de les présenter que ça soit sous forme d'un graphe ou d'un tableau.

Le graphe ci-dessous représente les variations du prix d'une option de vente américaine en fonction des variations du r allant de 0% à 25%. Je n'ai pas voulu aller plus haut pour que l'analyse ne soit pas éloignée de la réalité. Les paramètres d et u sont de 1,1 et de 0,9.

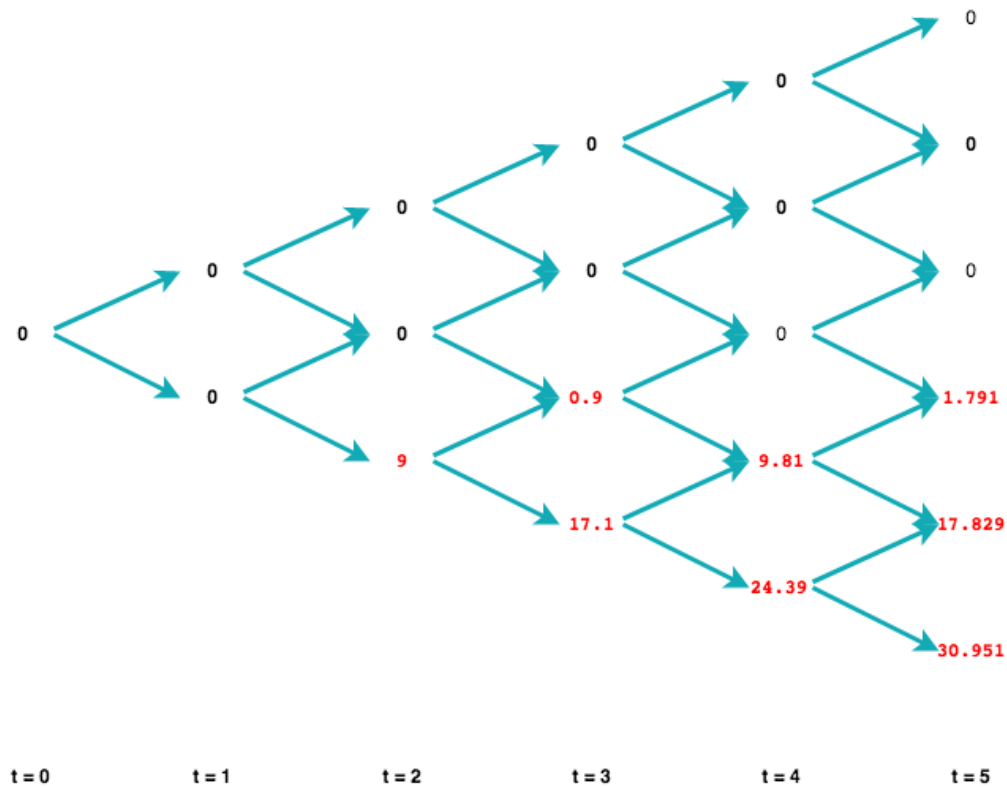


Le prix de l'option décroît jusqu'à atteindre 0 lorsque $r = 10\%$. En calculant la probabilité de hausse avec ce taux. On arrive à la situation improbable suivante ou $P_d = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1+0.1-0.9}{1.1-0.9} = 1$. Ainsi, à partir de ce taux, le prix de l'option sera de 0 quel que soit N.

Pour comprendre plus en détail comment cela se passe, voici le graphe sur 5 périodes des variations du sous-jacent, ainsi que le graphe du prix de l'option.



On remarque que même si la P_d est de 1. L'option n'est pas rentable.



2. Partie 2 : Optimisation de la CVaR

2.1 Rappel sur le modèle de minimisation de la CVaR (x) :

Le modèle qui minimise la CVaR en garantissant une rentabilité R avec une fonction de perte $f(x, y) = (b - y)^T x$ est le suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \gamma + \frac{1}{(1 - \alpha)S} \sum_{s=1}^S Z_s \\
 & Z_s \geq \sum (b_i - y_{is})x_i - \gamma, \text{ pour } s = 1, \dots, S \\
 & Z_s \geq 0, \text{ pour } s = 1, \dots, S \\
 & \sum_i x_i = 1 \\
 & \sum_i \mu_i x_i \geq R
 \end{aligned}$$

Il est important ici de définir les variables présentes dans le modèle.

- $Z_s = (f(x, y_s) - \gamma)^+$ Qui signifie : $\max(0, (f(x, y_s) - \gamma))$,
- R : Rentabilité espérée par l'investisseur,
- S : nombre de scénarios,
- X : vecteur de répartition des actifs dans le portefeuille financier,
- μ : Espérance de rendement des actifs.

En ce qui concerne la fonction de perte, b représente un vecteur des futurs prix des obligations et y représente un vecteur de probabilité.

2.2 Implémentation technique :

Comme pour la première partie du calcul des prix d'option grâce au treillis, j'ai utilisé le langage Python. D'autant plus qu'il nous fournit énormément de bibliothèque d'optimisation. Nous avons eu l'occasion d'en pratiquer et de voir quelques implémentations de modèle d'optimisation pendant le cours de M. Lepinette en Actuariat.

J'ai implémenté la solution grâce au module Scipy¹ de Python. En effet, je n'ai fait que définir les contraintes et les bornes des variables. Ce qui m'a motivé dans le choix de cette solution technique est le fait que le module nous permette de choisir l'algorithme de minimisation que l'on souhaite parmi ceux proposés tels que : l'algorithme de Nelder-Mead Simplexe ou la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Chacune de ces méthodes a ses particularités. Il faut choisir à bonne escient.

La partie qui a été la plus difficile est celle liée à la génération de données d'entrée cohérentes, c'est-à-dire, trouver par exemple, les bons rendements d'actifs pour que la rentabilité R soit réalisable. Autrement, l'implémentation ne converge pas. Après un nombre fixé d'itération, le programme sort en erreur. Pour pouvoir générer des données cohérentes, je me suis appuyé sur des rendements réels que j'ai calculés depuis des cotations historiques d'actifs financiers que j'ai pu télécharger depuis le site Yahoo Finance. Le tableau ci-dessous représente la cotation journalière du mois de janvier à la clôture des marchés d'IBM, d'Apple et de Facebook.

Date	IBM	Apple	Facebook
04/01/2021	123,94	129,41	268,94
05/01/2021	126,14	131,01	270,97
06/01/2021	129,289	126,6	263,31
07/01/2021	128,99001	130,92	268,73999
08/01/2021	128,53	132,05	267,57001
11/01/2021	128,58	128,98	256,84
12/01/2021	129,21001	128,8	251,09
13/01/2021	126,92	130,89	251,64
14/01/2021	128,97	128,91	245,64
15/01/2021	128,39	127,14	251,36
19/01/2021	129,02	127,83	261,10001
20/01/2021	130,08	132,03	267,48001
21/01/2021	131,64999	136,87	272,87
22/01/2021	118,61	139,07001	274,5
25/01/2021	118,58	142,92	278,01001
26/01/2021	122,49	143,16	282,04999
27/01/2021	122,47	142,06	272,14002
28/01/2021	120,08	137,09	265
29/01/2021	119,11	131,96001	258,32999

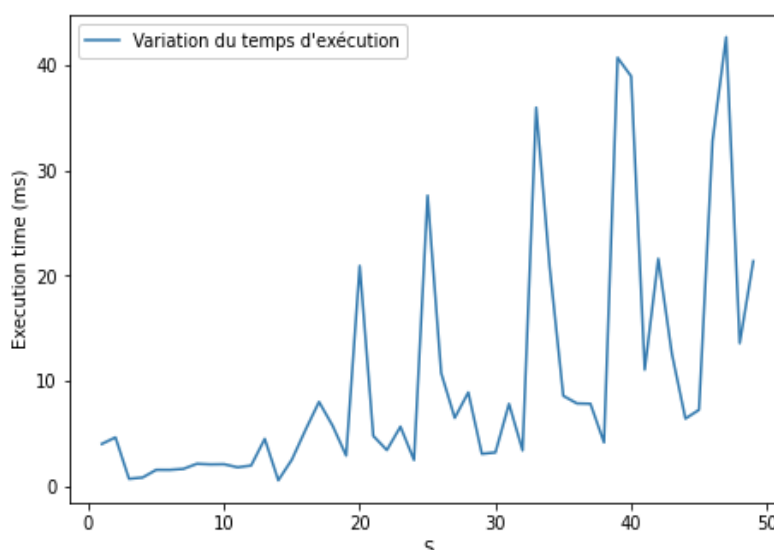
¹ <https://www.scipy.org/>

Par exemple, si on souhaite optimiser un portefeuille contenant 3 actifs. Je me rends sur le site Yahoo Finance, je sélectionne 3 actifs financiers assez proches tel que des actions d'entreprises dans le domaine de la technologie ou des obligations d'états européens. Je télécharge le maximum de cotations historiques, pour certains actifs, cela peut aller jusqu'à 10 ans. Je calcule le rendement journalier par actif, puis l'espérance de ces rendements. C'est ces données qui permettent à mon implémentation de converger vers une répartition d'actifs minimisant le CVaR, ceci permet aussi de s'approcher au maximum de la réalité des marchés financiers. Aussi, grâce aux rendements par actif, je peux m'approcher de la valeur de R . Ce qui me permet de ne pas m'éloigner du rendement maximal du portefeuille, et ainsi l'implémentation converge.

Pour générer les différents scénarios et les prix futures, je me suis appuyé sur les cotations historiques des actifs. Dans le livre « Optimization Methods in Finance² » de Gerard Cornuejols et Reha Tutuncu, ils utilisent la méthode de Monte-Carlo pour avoir les différents scénarios qu'ils utilisent ensuite pour la minimisation. Les probabilités de ses différents scénarios doivent être égaux.

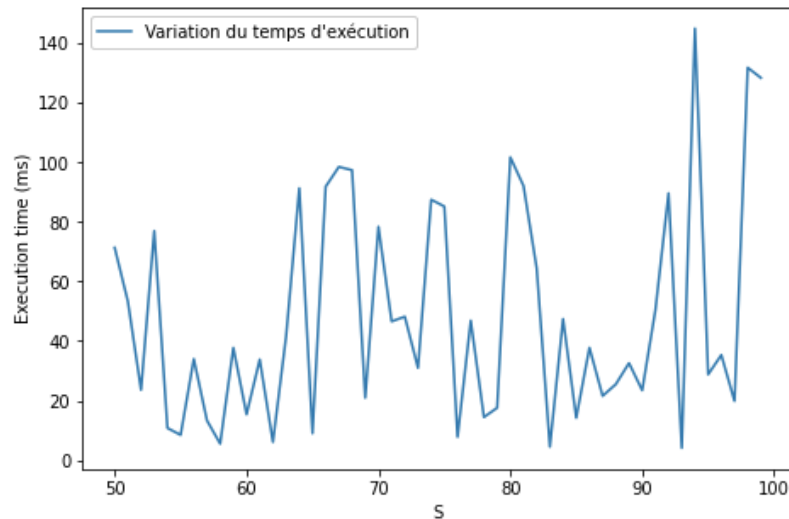
Un dernier point me semble important, il s'agit de la limitation en puissance de calcul. Je n'ai pas pu aller au-delà des 200 scénarios avec ma machine personnelle. J'aurais aimé pouvoir m'approcher des 20000 scénarios vus en cours.

Le graphique ci-dessous illustre les variations du temps d'exécution en fonction du nombre de scénarios. La tendance principale est que le temps d'exécution augmente en fonction du nombre de scénarios mais il est clair qu'il y a des exécutions où S est plus grand mais qui ont un temps de calcul moindre. Je n'ai aucune explication à ce sujet hormis les faits déjà énoncés lors l'analyse l'implémentation technique de la partie 1 (Refroidissement du processus = optimisation du temps de calcul).

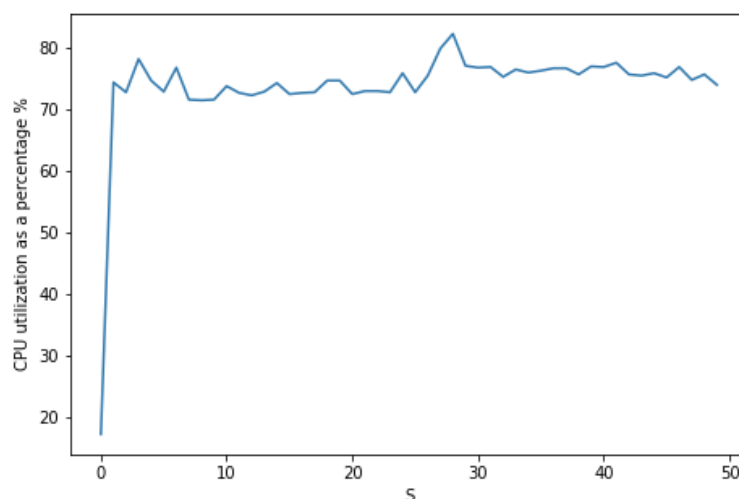


² http://web.math.ku.dk/~rolf/CT_FinOpt.pdf

Aussi, j'ai remarqué que le temps de calcul est moins sensible quand on augmente le nombre de scénarios S que quand on augmente le nombre d'actifs dans le portefeuille n c'est-à-dire, avoir un actif financier en plus dans son portefeuille est l'équivalent en termes de temps de calcul à l'ajout d'une dizaine de scénarios. Je n'ai pas pu produire de graphique comparatif à cause de la complexité de la démarche.



La complexité en matière d'utilisation du CPU de l'implémentation de la minimisation de la CVaR est présentée par les graphiques ci-dessous. On remarque facilement qu'à partir d'un seul scénario la charge sur le CPU reste à peu près constante. Elle ne diffère pas quand on exécute avec 20 scénarios ou une cinquantaine, ceci est logique car il est évident d'après le graphique que cela consomme 80% du CPU. On remarque aussi des pics d'utilisation du CPU mais je n'ai pas aucune explication sur l'origine de ce phénomène.



2.3 Analyse des sensibilités :

2.3.1 Calcul des variations de la VaR et CVaR par rapport au nombre d'actifs présents dans le portefeuille :

L'idée derrière cette analyse est de calculer la variation de la VaR et la CVaR en augmentant le nombre d'actifs présents dans le portefeuille. Le modèle nous offre en sortie la répartition optimale des actifs pour atteindre le rendement fixé R. À cause de la puissance de calcul de mon ordinateur qui est insignifiante, j'ai décidé de limiter le nombre d'actifs du portefeuille à 8. Ainsi, je compare le rendement initial avec le rendement final donné par le modèle qui doit être supérieur ou égale à R, ainsi que la VaR et CVaR initial et final.

Pour pouvoir lire les tableaux ci-dessous, il vous faut une grille de lecture :

- Chaque tableau représente un portefeuille avec un nombre d'actifs distincts allant de 3 à N.
- Les Actifs sont représentés par le nom, l'espérance de rendement et le prix initial.
- Aussi, on calcule la VaR et la CVaR pour 3 valeurs de alpha : 95%, 99% et 99,90%. J'ai choisi ses valeurs car elles sont les plus utilisées pour calculer la VaR et la CVaR dans la réalité.
- Ici, la VaR et la CVaR sont représentés en pourcentage pour qu'elles puissent être utilisées pour n'importe quelle valorisation de portefeuille. Ainsi, si une VaR(99) vaut par exemple : -3,35%, cela signifie qu'avec un indice de confiance de 99%, on perdra 3,35% de la valorisation du portefeuille. Si le portefeuille vaut 1000 euros, on perdra 3,35% de 1000 euros avec une probabilité de 0,1.
- On présente aussi, la répartition des actifs au sein du portefeuille avant la minimisation de la CVaR (colonne Initial), on calcule son rendement. On présente ensuite, la répartition des actifs après la minimisation (colonne Final) et le rendement de cette répartition.
- Le R fixé pour faire la minimisation est de 0,1% (0,001*100). Ce rendement est bas en vue des espérances de rendement des actifs composant le portefeuille.

Nombre d'actifs dans le portefeuille			3					
α			95%		99%		99,90%	
Actifs	μ_i	Prix	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
ORANGE	0,001167892	9,73 €	50%	77,79%	50%	78,06%	50%	83,00%
AXA	0,00019611	126,80 €	25%	3%	25%	3%	25%	17%
NOKIA	0,000444357	3,93 €	25%	19%	25%	18%	25%	0
Rendement du portefeuille			0,000744	0,001	0,000744	0,001	0,000744	0,001
VaR			-3,57%	-3,28%	-6,04%	-5,08%	-10,16%	-10,16%
CVaR			-6,17%	-5,51%	-9,15%	-8,32%	-39,67%	-39,70%

Nombre d'actifs dans le portefeuille			4					
α			95%		99%		99,90%	
Actifs	μ_i	Prix	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
ORANGE	0,001167892	9,73 €	25%	100%	25%	83%	25%	79 %
AXA	0,00019611	126,80 €	25%	0	25%	5%	25%	2 %

NOKIA	0,000444357	3,93 €	25%	0	25%	12%	25%	16 %
CAP	0,00019611	126,80 €	25%	0	25%	0%	25%	3 %
Rendement du portefeuille			0,00050	0,001	0,0005	0,001	0,0005	0,001
VaR			-3,84%	-3,06%	-7,01%	-4,96%	-10,16%	-10,10%
CVaR			-6,80%	-5,09%	-10,03%	-8,23%	-39,67%	-39,44%

Nombre d'actifs dans le portefeuille			5					
α			95%		99%		99,90%	
Actifs	μ_i	Prix	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
ORANGE	0,001167892	9,73 €	20%	17%	20%	83%	20%	77%
AXA	0,00019611	126,80 €	20%	72%	20%	5%	20%	3%
NOKIA	0,000444357	3,93 €	20%	0	20%	12%	20%	12%
CAP	0,00019611	126,80 €	20%	0	20%	0%	20%	4%
SOPRIA	0,000788123	132,19 €	20%	11%	20%		20%	4%
Rendement du portefeuille			0,00055	0,001	0,00055	0,001	0,0005	0,001
VaR			-4,07%	-3,35%	-7,61%	-8,25%	-10,16 %	-10,51%
CVaR			-7,09%	-5,72%	-10,51%	-11,3%	-39,67 %	-41,06%

Nombre d'actifs dans le portefeuille			6					
α			95%		99%		99,90%	
Actifs	μ_i	Prix	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
ORANGE	0,001167892	9,73 €	50%	80%	50%	77%	50%	67%
AXA	0,00019611	126,80 €	10%	0	10%	1%	10%	3%
NOKIA	0,000444357	3,93 €	10%	15%	10%	15%	10%	2%
CAP	0,00019611	126,80 €	10%	0	10%	1%	10%	0%
SOPRIA	0,000788123	132,19 €	10%	2%	10%	3%	10%	25%
Wavestone	0,000220896	29,70 €	10%	3%	10%	3%	10%	3%
Rendement du portefeuille			0,00076	0,001	0,00076	0,001	0,00076	0,001
VaR			-3,66%	-3,28%	-6,24%	-5,16%	-9,87%	-10,22%
CVaR			-6,19%	-5,45%	-9,17%	-8,34%	-38,56%	-39,93%

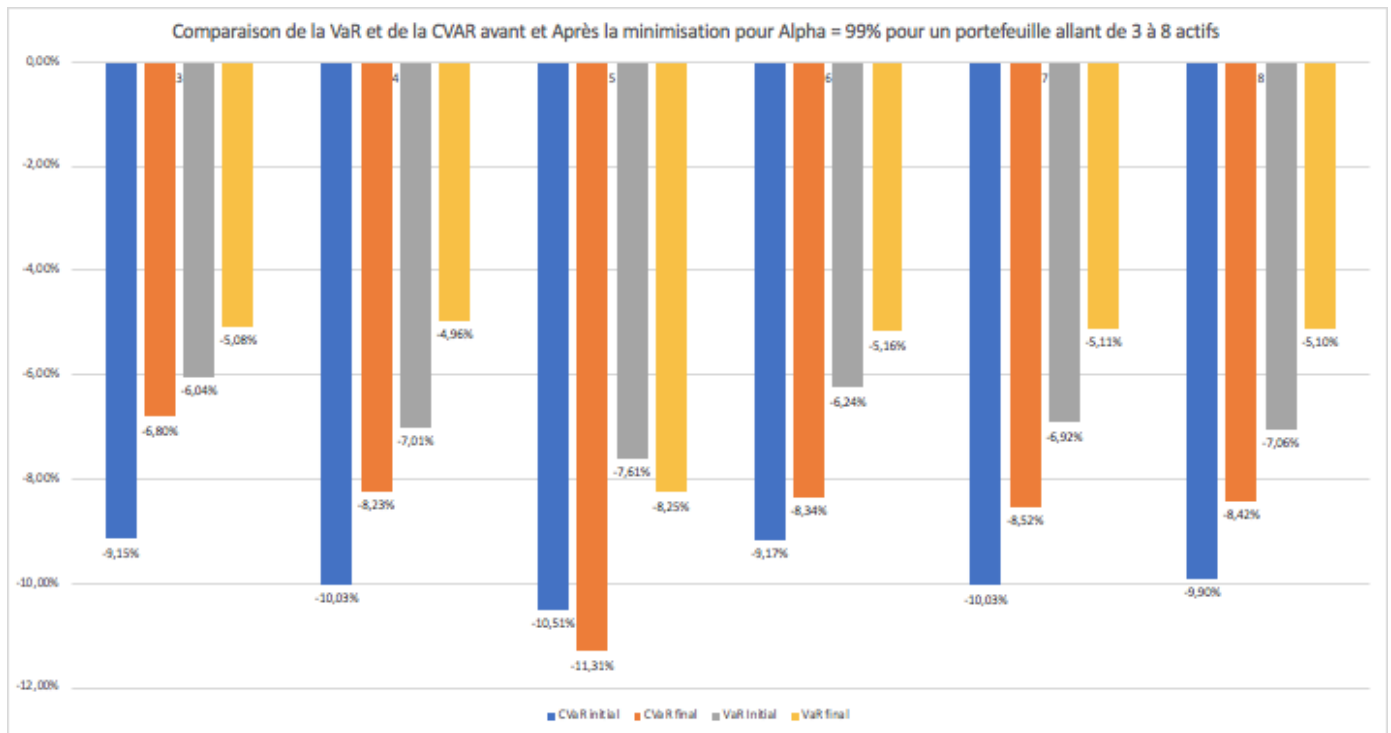
Nombre d'actifs dans le portefeuille			7					
α			95%		99%		99,90%	
Actifs	μ_i	Prix	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
ORANGE	0,001167892	9,73 €	25%	81%	50%	79%	50%	81%
AXA	0,00019611	126,80 €	10%	0	10%	0	10%	0%
NOKIA	0,000444357	3,93 €	10%	0	10%	8%	10%	1%
CAP	0,00019611	126,80 €	25%	0	25%	1%	25%	1%

SOPRIA	0,000788123	132,19 €	10%	0	10%	5%	10%	10%
Wavestone	0,000220896	29,70 €	10%	0	10%	1%	10%	1%
DASSAULT	0,00021948	166,14 €	10%	19%	10%	6%	10%	6%
Rendement du portefeuille			0,00052	0,001	0,00076	0,001	0,00076	0,001
VaR			-3,78%	-3,06%	-6,92%	-5,11%	-10,14%	-10,28%
CVaR			-6,65%	-5,42%	-10,03%	-8,52%	-39,60%	-40,17%

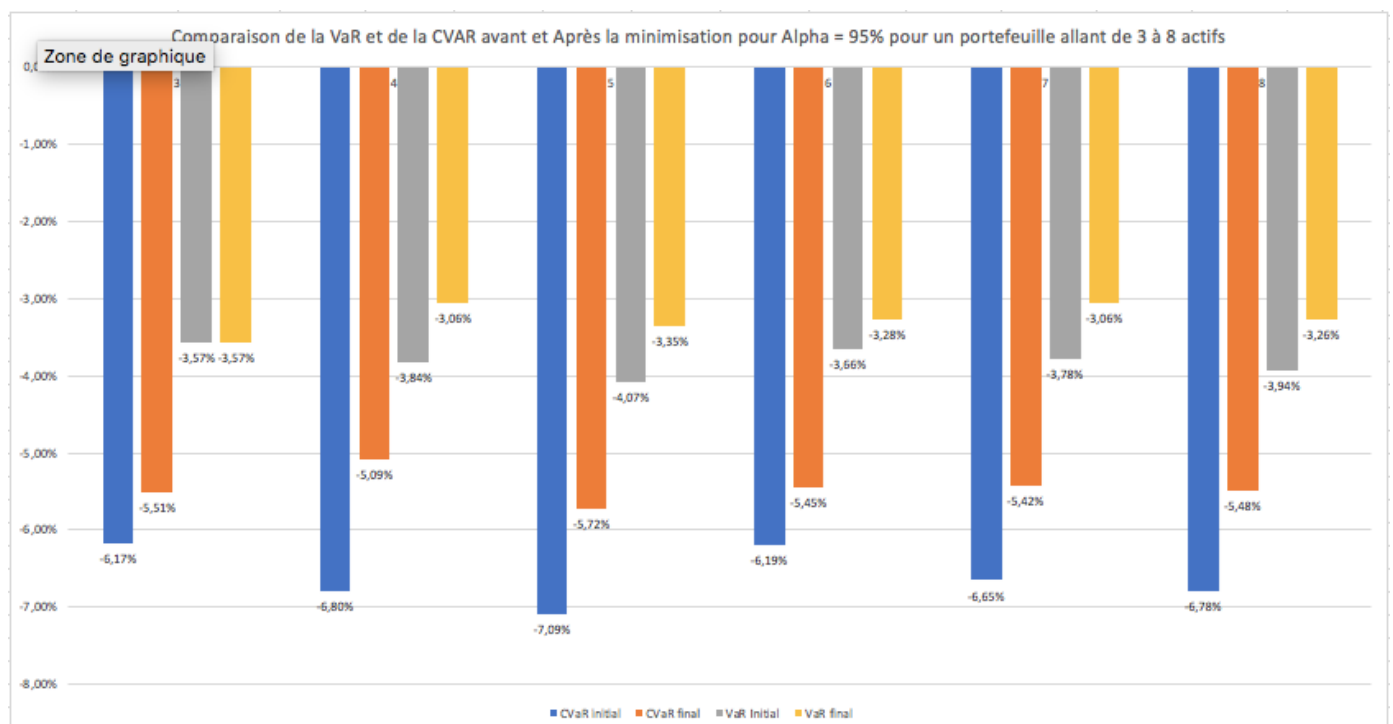
Nombre d'actifs dans le portefeuille			8					
α			95%		99%		99,90%	
Actifs	μ_i	Prix	Initial	Final	Initial	Final	Initial	Final
ORANGE	0,001167892	9,73 €	12,50%	82,00%	12,50%	84,00%	12,50%	78,00%
AXA	0,00019611	126,80 €	12,50%	4,00%	12,50%	2,00%	12,50%	2,00%
NOKIA	0,000444357	3,93 €	12,50%	0,00%	12,50%	0,00%	12,50%	0,00%
CAP	0,00019611	126,80 €	12,50%	0,00%	12,50%	0,00%	12,50%	0,00%
SOPRIA	0,000788123	132,19 €	12,50%	6,00%	12,50%	6,00%	12,50%	12,00%
Wavestone	0,000220896	29,70 €	12,50%	0,00%	12,50%	0,00%	12,50%	0,00%
DASSAULT	0,00021948	166,14 €	12,50%	4,00%	12,50%	3,00%	12,50%	3,00%
RO and Co	0,000260628	25,90 €						
Rendement du portefeuille			0,0004	0,001	0,0004	0,001	0,0004	0,00102
VaR			-3,94%	-3,26%	-7,06%	-5,10%	-9,70%	-10,14%
CVaR			-6,78%	-5,48%	-9,90%	-8,42%	-37,87%	-39,61%

Il se peut que vous vous perdiez dans les données présentées dans les tableaux ci-dessus. C'est pour cela qu'il est intéressant de les présenter sous forme de graphique. Voici les graphiques de la variation du couple (VaR ; CVaR) avant la minimisation et après la minimisation pour chaque nombre d'actifs N. Le diagramme représentant la VaR et la CVaR pour un alpha de 99,9% n'est pas présenté, car l'information est redondante.

- Pour $\alpha = 95\%$:



- Pour $\alpha = 99\%$:



Grâce aux graphiques ci-dessus, on remarque que dans la majorité des cas, quand le modèle converge, la VaR et la CVaR obtenus sont moins hautes que la VaR et la CVaR initiale et cela tout en garantissant le rendement R.

La VaR et la CVaR ont la même grandeur quelques soit le nombre d'actifs dans le portefeuille. Ainsi pour la VaR calculé pour $\alpha = 99\%$ pour les différents portefeuilles, les résultats des VaRs restent à peu près les mêmes à savoir :

- Pour 3 actifs :	VaR : -5,08%	&	CVaR : -8,32%
- Pour 4 actifs :	VaR : -4,96%	&	CVaR : -8,23%
- Pour 5 actifs :	VaR : -8,25%	&	CVaR : -11,3%
- Pour 6 actifs :	VaR : -5,16%	&	CVaR : -8,34%
- Pour 7 actifs :	VaR : -5,11%	&	CVaR : -8,52%
- Pour 8 actifs :	VaR : -5,10%	&	CVaR : -8,42%

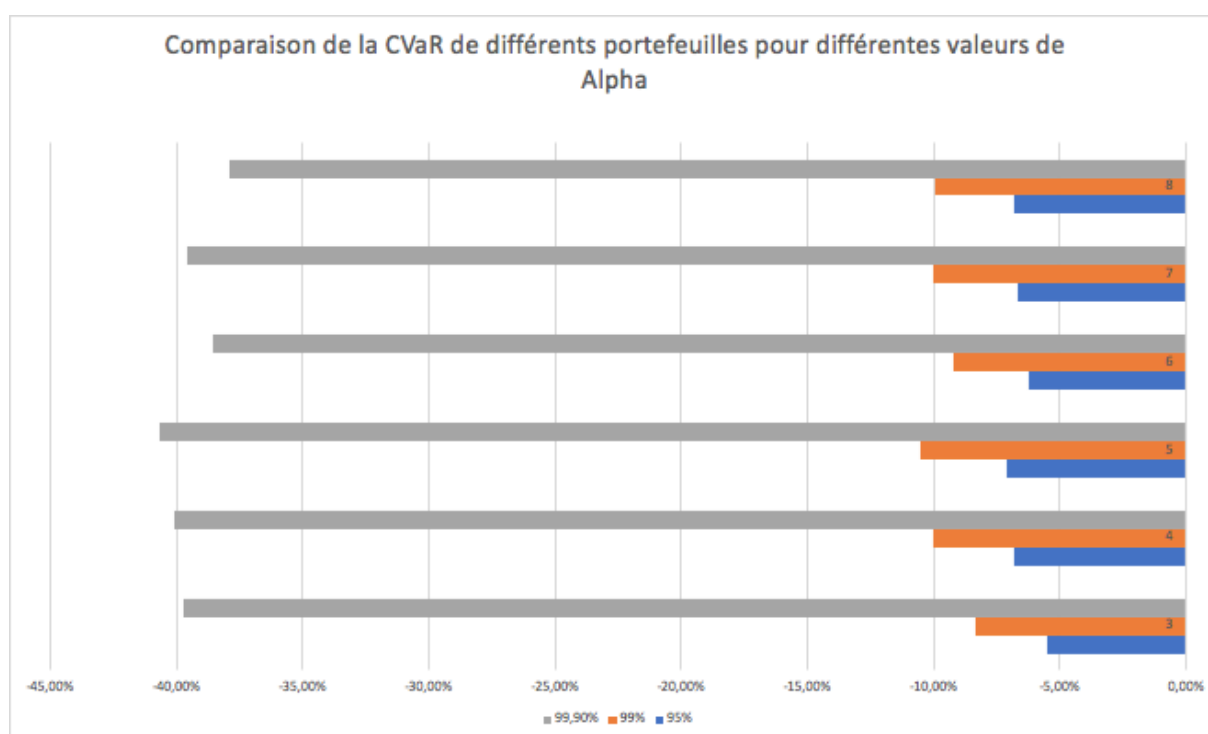
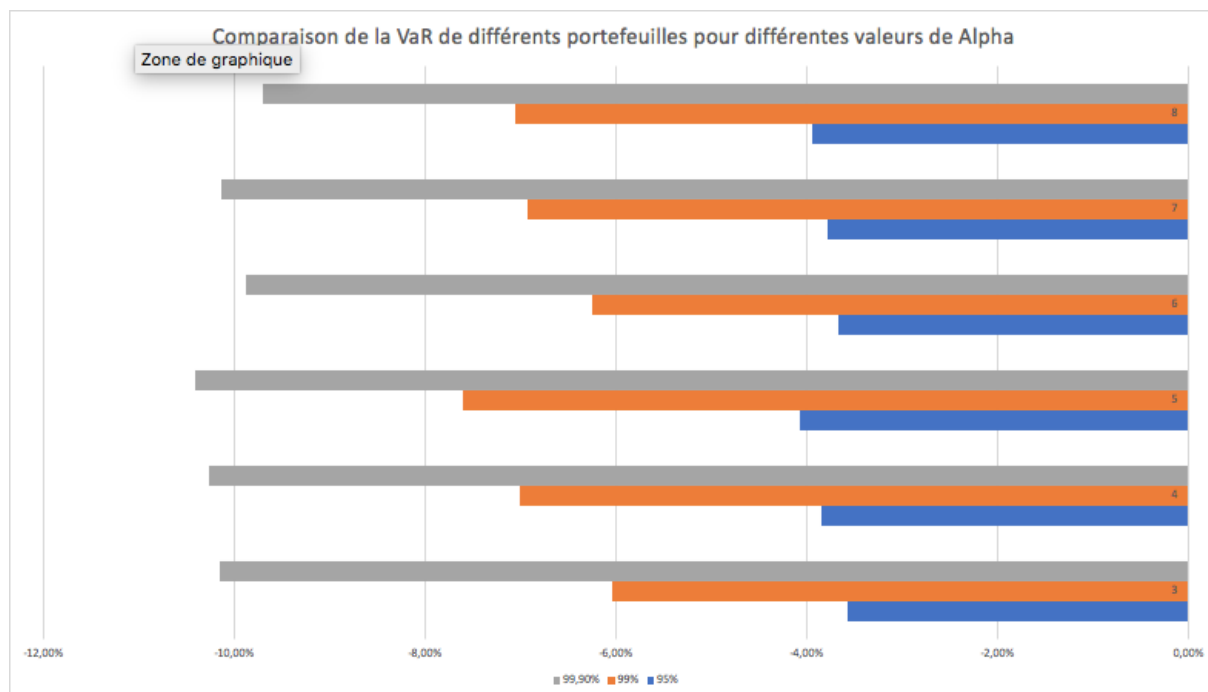
Nous avons appris que plus un portefeuille possède d'actifs différents, le portefeuille est dit diversifié. Le risque de chaque actif au sein du portefeuille est dilué et rééquilibré avec les autres actifs présents. Or, ici, en augmentant le nombre d'actifs, la VaR est à peu près égale pour chacun des cas. On suppose que le risque considéré n'est pas diversifiable avec les actifs choisis pour faire la simulation de la variation du nombre d'actifs dans le portefeuille car la majorité des actifs appartienne à un même secteur : la technologie.

Aussi, dans la majeure partie des simulations, la CVaR est plus haute que la VaR. Ce qui confirme l'assertion vue en cours et démontre que les résultats de l'implémentation sont cohérents.

2.3.2 Calcul des variations de la VaR et CVaR par rapport à Alpha :

Les graphes ci-dessous présentent les différentes valeurs de la CVaR et de la VaR des portefeuilles (de 3 à 8 actifs), avec une comparaison par rapport à alpha.

La barre bleue est la VaR ou la CVaR est pour alpha 95%, la barre orange quant à elle, est pour alpha 99%, enfin, la barre grise est pour alpha 99,9%. On remarque que la VaR et la CVaR calculées avec un indice de confiance alpha de 99,9% est plus basse que celle calculé avec alpha 99%, et plus basse que celle à 95% (*les valeurs sont en négatives*). Et cela est vrai pour tout portefeuille d'actifs. Cela revient au fait que le champ d'études et d'exploration devient plus grand en baissant la probabilité alpha.



2.3.3 Calcul des variations de la VaR et CVaR par rapport au nombre de scénarios

Encore une fois, j'évoque le souci des performances de ma machine personnelle. Je n'ai pas pu aller au-delà des 200 scénarios. Je pourrais bien exposer la différence entre le couple VaR et CVaR ainsi que la répartition des actifs obtenus en fonction de S allant de 1 scénario à 200 scénarios mais après une multitude d'essais, j'ai conclu qu'itérer sur 1 scénario ou sur 200 scénarios n'affecte pas énormément la valeur de la VaR ou de la CVaR. Il est vrai qu'elle diminue en fonction de S mais avec seulement 200 scénarios, la diminution est très petite. Cette déduction doit être mise dans le contexte dans lequel elle a été tirée.

Il est évident qu'en augmentant la valeur de S, on arrive à une VaR et une CVaR plus petite que celle avec un nombre de scénarios moindres mais je n'ai aucun graphique, ni aucune donnée qui permet de prouver cela.

2.3.4 Calcul des variations de la VaR et CVaR par rapport au rendement R :

Pour comprendre cette analyse, il faut comprendre la partie traitant de la génération des données. Ce qui est à retenir est que si on fixe un R assez grand avec des espérances de rendement petites, le modèle ne convergera pas car la contrainte associée ne sera jamais satisfaite quelques soit le nombre de scénarios ou le nombre d'itérations de l'implémentation.

Il faut que le R fixé soit relativement proche de l'espérance de rendement maximal des actifs. On ne peut demander un rendement de 10% au portefeuille si les actifs composant portefeuille n'ont pas le même ordre de grandeur. On peut toutefois, essayer de déduire après une multitude d'exécution, le maximum de rendement faisable et utiliser ce rendement pour pouvoir calculer la VaR et la CVaR. La VaR et la CVaR calculée seront maximales car un haut rendement du portefeuille accompagne un grand risque. Mais le R est proche du R maximale faisable par le portefeuille, plus la VaR et la CVaR sera minimisée.

Le modèle étudié est intéressant pour un investisseur car il permet d'avoir le risque minimal avec une meilleure répartition des actifs en gardant une rentabilité R qu'il fixe lui-même.

Pour conclure cette analyse, j'aimerais insister sur le point de la convergence de l'implémentation, si on lance une exécution avec des données d'entrées incohérentes, le modèle ne convergera pas car les contraintes ne seront jamais satisfaites. Il ne peut trouver un équilibre rendement/risque si le rendement demandé est élevé. Encore une fois, on laisse à l'investisseur le choix de son R et de son risque maximal toléré suivant sa stratégie d'investissement.

Aussi, après m'être documenté sur internet, il me semble que la définition du modèle peut être adaptée pour une exécution plus rapide. Le point de complexité de l'exécution est très important, car l'étude que j'ai menée est l'exemple parfait. Le modèle répond théoriquement à la problématique mais pour qu'en puisse le mettre en œuvre, il faut des moyens.

3. Partie 3 : Optimisation du Rendement R

3.1 Rappel sur le modèle de maximisation du rendement R en fonction d'un seuil de CVaR :

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_i \mu_i x_i \\ & \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)S} \sum_{s=1}^S Z_s \leq U_{\alpha j}, \text{ pour } s = 1, \dots, J \\ & Z_s \geq \sum_i (b_i - y_{is}) x_i - \gamma, \text{ pour } s = 1, \dots, S \\ & Z_s \geq 0, \text{ pour } s = 1, \dots, S \\ & \sum_i x_i = 1 \end{aligned}$$

Ici aussi, il est important définir les variables présentes dans le modèle.

- $Z_s = (f(x, y_s) - \gamma)^+$ Qui signifie : $\max(0, (f(x, y_s) - \gamma))$,
- U_j : Borne du risque toléré,
- S : nombre de scenarios,
- X : vecteur de répartition des actifs dans le portefeuille financier,
- μ : Espérance de rendement des actifs.

En ce qui concerne la fonction de perte, b représente un vecteur des futurs prix des obligations et y représente un vecteur de probabilité.