EOB 轨道动力学模拟实现

——中国科学院上海天文台实习记录以及毕设进展记录

HW Zhong Phys.1701.Hust

2020 年 7 月 17 日

目录

Part I

上海天文台实习

论文阅读准则

1. 作者想要解决什么问题?
2. 作者为什么研究这个课题?
3. 目前这个课题 (小领域) 的研究进行到了哪一阶段?
4. 作者使用理论基于哪些假设?
5. 作者通过什么理论/模型来解决这个问题?
6. 作者给出的答案是什么?
7. 这篇文章存在哪些缺陷?

Chapter 1

实习前准备

1.1 June 22^{nd}

复习梁先生书本第 4 章。完成了对 *Lee* 导数的进一步理解以及计算练习。

1.2 June 23^{rd}

复习梁先生书本第 4 章剩余内容以及第 5 章。完成了对微分形式场以及对偶微分形式场的深入学习。

1.3 June $24th$

复习梁先生书本第 6 章，第七章内容。

开始阅读文献：遇到了几个生词希望在接下来几天解决掉。首先我们要明确我们要面对是 *Kerr-Newman* 度规，我们要处理的是用 *Kerr-Newman* 度规描述的带电而且有自转的黑洞。目前碰到的概念有

- *Teukolsky's perturbation formalism*
- 黑洞的无量纲自旋 χ
- dominant (ℓ, m) gravitaitonal-wave mode
- matched-filtering technique：这是一个从充满噪音的信号中提取引力波信号的手段。
- **PN**,**EOB** 提出的目的：在互相绕转 (*inspiring*) 的过程中，通常的近似还可以，所以可以用 **PN** 来做，但是之后的剧烈的合并过程没法做了，必须数值求解。所以提出了 **EOB** 来描述 “The last stages of inspiral, plunge, merger, and ringdown.” 在文中提到了非常重要的一点，核心思想是 These result from **EOB**, at the interface between numerical and analytical relativity. 在参考文献 9，10 中第一次提出了 **EOB** 的概念，之后在 11-13 中进行了改进。文章中采用的哈密顿量参考 34，35；引力波能流 38，39。
- $\chi = 0.44$?

1.4 June 25^{th}

1.4.1 线性引力论全部推导过程

我们考虑在闵氏度规基础上存在一个微扰：

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$$

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab}$$

所谓微扰的意思是微扰度规在所有分量在任何一个坐标系中的坐标分量都是一阶小量。接下来计算克氏符：

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd}\Big(\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\Big) = \frac{1}{2}\eta^{cd}\Big(\partial_a \gamma_{bd} + \partial_b \gamma_{ad} - \partial_d \gamma_{ab}\Big)$$

接下来计算黎曼曲率张量：

$$R^d_{abc} = \partial_b \Gamma^d_{ac} - \partial_a \Gamma^d_{bc} + \underbrace{\Big\{\Gamma^d_{be}\Gamma^c_{ca} - \Gamma^e_{cb}\Gamma^d_{ae}\Big\}}_{\text{二阶小量}}$$

将我们计算出来的克氏符代入：

$$\Gamma^d_{ac} = \frac{1}{2}\eta^{de}\Big(\partial_a \gamma_{ce} + \partial_c \gamma_{ae} - \partial_e \gamma_{ac}\Big)$$
$$\Gamma^d_{bc} = \frac{1}{2}\eta^{ed}\Big(\partial_b \gamma_{ce} + \partial_c \gamma_{be} - \partial_e \gamma_{bc}\Big)$$

代入曲率张量表达式中可以得到：

$$R^{(1)}_{abcd} = \partial_b \partial_{[c}\gamma_{d]a} + \partial_a \partial_{[d}\gamma_{c]b} = \partial_b \partial_{[c}\gamma_{d]a} - \partial_a \partial_{[c}\gamma_{d]b}$$

将 $a \leftrightarrow b$,$c \leftrightarrow d$ 可以得到：

$$R^{(1)}_{bdac} = \partial_d \partial_{[a}\gamma_{c]b} - \partial_b \partial_{[a}\gamma_{c]d}$$

由于曲率张量前后两对指标是对称的因此有：

$$\boxed{R^{(1)}_{acbd} = \partial_d \partial_{[a}\gamma_{c]b} - \partial_b \partial_{[a}\gamma_{c]d}}$$

得到这个重要的式子之后用 η^{cd} 升指标并且缩并：

$$\boxed{R^{(1)}_{ab} = \partial^c \partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a \partial_b \gamma}$$

$$\boxed{R^{(1)} = \partial^c \partial^b \gamma_{bc} - \partial^c \partial_c \gamma}$$

于是我们就得到了线性化的爱因斯坦方程：

$$\partial^c \partial_{(a}\gamma_{b)c} - \frac{1}{2}\partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a \partial_b \gamma - \frac{1}{2}\eta_{ab}\Big(\partial^c \partial^b \gamma_{bc} - \partial^c \partial_c \gamma\Big) = 8\pi T_{ab}$$

下一步令

$$\boxed{\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma}$$

经过痛苦的计算我们会发现恰好有：

$$\partial^c\partial_{(a}\bar{\gamma}_{b)c}-\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^b\bar{\gamma}_{bc}=8\pi T_{ab}$$

我们令

$$\boxed{\tilde{\gamma}_{ab}=\gamma_{ab}+\partial_a\xi_b+\partial_b\xi_a}$$

这个变换实际上代表存在一个满足线性爱因斯坦方程的等价类！我们可以计算得到：

$$\Gamma'^{d}_{bc}=\Gamma^d_{bc}+2\partial_b\partial_c\xi^d$$

其中第二部分的存在并不会导致曲率张量的变化，因此也不会导致里奇张量，曲率标量的变化，因此说如果 γ_{ab} 是爱因斯坦方程的解，那么 $\tilde{\gamma}_{ab}$ 也一定是。更进一步我们可以证明的是**一定存在 $\tilde{\gamma}_{ab}$ 使得**

$$\partial^b\tilde{\gamma}_{ab}=0$$

这就导致线性爱因斯坦方程进一步化简为：

$$\boxed{\partial^c\partial_c\bar{\gamma}_{ab}=-16\pi T_{ab}}$$

下面尝试导出 **TT gauge**。现在采用我找到的讲义里的记号，首先说清楚无穷小坐标变换的来历。我们考虑我们已经找到了一个 *near-cartesian* 坐标系，再做一个无穷小坐标变换：

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\xi^{\alpha}\qquad |\xi|^{\alpha}\ll 1$$

可以计算得到：

$$\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}=\delta^{\beta}_{\alpha}-\partial_{\alpha}\xi^{\beta}$$

于是就可以计算度规：

$$g'_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}-\partial_\mu\xi_\nu-\partial_\nu\xi_\mu+h_{\mu\nu}$$

也就得到了我们之前得到的一个变换：

$$h'_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\partial_\mu\xi_\nu-\partial_\nu\xi_\mu$$

我们再考虑 *Lorenz gauge*

$$0=\partial_\mu H^{\mu\nu}=\partial_\mu(h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h)$$

我们可以计算变换后的关系，为此需要先计算一下变换后的迹：

$$h'=\eta^{\mu\nu}h'_{\mu\nu}=h-2\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\xi_\mu$$

$$H'_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}-\partial_\mu\xi_\nu-\partial_\nu\xi_\mu+\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\xi_\beta$$

我们希望找到一个 ξ^α 对任意的 $H^{\mu\nu}$ 都满足

$$\partial_\mu H'^{\mu\nu}=0$$

$$0=\partial_\mu H'^{\mu\nu}=\partial_\mu H^{\mu\nu}-\partial_\mu\partial^\mu\xi^\nu$$

只需要保证

$$\Box^2\xi^\nu=\partial_\mu H^{\mu\nu}$$

就可以保证洛伦兹规范在变换后的坐标系中仍然满足。这本质上是 4 个微分方程，数学上可以证明一定有解。不过这只是一组通解，即使给定一个 $H^{\mu\nu}$ 和一个坐标系满足洛伦兹规范，我们仍然有极大的规范自由度，可以选择满足

$$\Box^2 \xi^\nu = 0$$

的无穷小坐标变换，变换后仍然满足洛伦兹规范。

现在我们面对如下方程：

$$\Box^2 H^{\mu\nu} = -16\pi G T^{\mu\nu} \quad H^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h \quad g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

并且满足洛伦兹规范：

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$$

但是我们仍然有规范自由度：

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \qquad |\xi^\alpha| \ll 1 \qquad \Box^2 \xi^\alpha = 0$$

之前我们计算过的

$$H'_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \xi_\beta$$

稍微变换一下：

$$H'^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha \xi^\alpha$$

如果在真空中，那很幸福，直接能动张量为 0。我们可以得到：

$$\Box^2 H^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow H^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}\cos k_\sigma k^\sigma = A^{\mu\nu}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个常矩阵，k_σ 是常协变矢量。我们把这个方程代入爱因斯坦方程和洛伦兹规范以及观察对称性有：

$$\underbrace{k^\alpha k_\alpha = 0}_{\text{Einstein equation}} \qquad \underbrace{k_\mu A^{\mu\nu} = 0}_{\text{Lorenz gauge}} \qquad \underbrace{A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}}_{\text{Symmetry}}$$

第一个式子告诉我们：

$$\omega = k \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = 1 = c!!!$$

问题来了，度规张量出现了对闵氏度规的偏离可能是真正的引力波，但是也可能只是因为我们选取的不是 Cartesian 坐标系，比如考虑球坐标系下的度规张量，如何判断到底是真的物理还是坐标系的欺骗呢？我们尝试尽可能地找出 A 这个矩阵的非零量，如果真的找不到办法消除了，那就是真的物理。当然了，度规张量可能会骗我们，可是**曲率张量是判断时空到底是否弯曲的唯一标准！我们就去计算一个度规张量！**我们只需要计算 21 个独立的分量，但是由于循环恒等式的存在我们只需要计算 20 个！为了方便，我们考虑

$$k_t = -\omega, k_x = 0, k_y = 0, k_z = \omega$$

可以得到：

$$A^{tt} = A^{zt} = A^{tz}$$

$$A^{tx} = A^{zx} = A^{xt} = A^{xz}$$

$$A^{ty} = A^{zy} = A^{yt} = A^{yz}$$

$$A^{tz} = A^{zz}$$

以及我们可以得到:(这里波采用正弦形式)

$$\partial_\beta \partial_\mu h_{\alpha\nu} = -\partial_\beta \partial_\mu (H_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\nu} H) \sin k_\sigma x^\sigma$$

当然了，我们可以知道如果 $\boldsymbol{A}$ 的指标中含有 1 个时分量那么协变逆变形式差 1 个负号，其他情况都是相等的。之后可以计算得到所有曲率张量的值：其中

$\alpha\beta\downarrow$ \ $\mu\nu\rightarrow$	tx	ty	tz	xy	xz	yz
tx	$R_{txtx}=a$	$R_{txty}=b$	$R_{txtz}=0$	$R_{txxy}=0$	$R_{txxz}=a$	$R_{txyz}=b$
ty		$R_{tyty}=-a$	$R_{tytz}=0$	$R_{tyxy}=0$	$R_{tyxz}=b$	$R_{tyyz}=a$
tz			$R_{tztz}=0$	$R_{tzxy}=0$	$R_{tzxz}=0$	$R_{tzyz}=0$
xy				$R_{xyxy}=0$	$R_{xyxz}=0$	$R_{xyyz}=0$
xz					$R_{xzxz}=a$	$R_{xzyz}=b$
yz						$R_{yzyz}=-a$

$$a \equiv \frac{1}{4}\omega^2 (A_{xx} - A_{yy}) \sin k_\sigma x^\sigma \qquad b \equiv \frac{1}{2}\omega^2 A_{xy} \sin k_\sigma x^\sigma$$

我们可以做一些聪明的变换，令 $A = A^{xx} + A^{yy}$：

$$A^{xx}_{new} = A^{xx} - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A^{xx} - A^{yy})$$

$$A^{yy}_{new} = A^{yy} - \frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}(A^{xx} - A^{yy})$$

于是我们就得到了：

$$H^{\mu\nu}_{TT} = \left(A_+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A_\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cos k_\sigma x^\sigma$$

值得注意的一点是，在 **TT gautge** 下有：

$$h^{\mu\nu}_{TT} = H^{\mu\nu}_{TT} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} H_{TT} = H^{\mu\nu}_{TT}$$

1.5 June 28^{th}

今天是实习前的最后一天了，我想要把论文的脉络给完全把控住，细节肯定是没法理解透彻的。大致看下来，留在我的脑子里的行文逻辑是首先介绍 **EOB** 动力学以及波形，之后给出了一些参数的取值范围，之后就是利用 **NR** 的 *waveform* 进行 *calibrate*，然后对比出结果。我觉得难点有三个，一个是在于 **EOB** 动力学，其中还涉及到大量的 **PN** 让我感觉非常困难，第二点在于那些非常不自然的数字是用什么算出来的？是用 *Mathematica*? 最后一点在于我到目前为止没有找到哪里可以进行数值积分的微分方程，感觉非常困难。全文的脉络如下 (由作者在 *Introduction* 最后一部分给出)：

- Sec. II
  介绍 **spin EOB model** 以及它的 *dynamics,waveforms,and adjustable parameters*。

- Sec. III A
  介绍在低频波段通过比较 **EOB & NR** 的 *waveform* 来校准 (*alignment*) 的过程。并且给出了用来量化波形差距的参数 $\mathcal{M}$

- Sec. III B
  具体介绍 *calibrate* 的细节。

- Sec. IV
  将 Sec. III A 的结论同参考文献 [28] 的结论相结合来构建 **prototype EOB model**。这里利用到了插值并且外推到了更加大的参数空间, 最后利用两个没有参与校准的 *nearly extremal spin* 的 **NR waveform** 来检验模型的效果。

- Sec. V
  总结全文结论。

- Appendix
  给出一些诡异的参数的显示表达。

这篇文章最大的贡献应该在于考虑了**自旋**。

Chapter 2

实习中

2.1 June 29^{th}

今天是实习第一天，早上听了韩老师的组会，大致了解了一下他的学生目前在从事的课题，还是非常有意思的。师姐的题目是关于轨道偏心率的问题，根据我的印象，师姐提到了产生引力波的几个天体系统有三个可能的形成机制。

- 原本就是双星系统，在互相绕转的过程中发生 *inspiral-merger-ringdown* 的过程, 值得注意的是这个物理过程它们的绕转轨道必然是不存在偏心率 e 的。
- 动力学捕获。这也是比较有意思的一个过程，就是说非常巧合的在演化过程中发生了捕获，根据我听到的内容是对于这样的形成过程将有百分之 5 的概率出现偏心率。
- Kozai-Lidov 过程。这是一个三体系统，这种形成机制将会导致百分之 90(听到的内容，并不一定准确) 的轨道出现偏心率。

2.1.1 第一篇文献

下面简单说一下我的任务，现在非常明确了就是将 **EOB** 轨道动力学的模型给吃透，只需要考虑动力学部分，能够将文章中的公式完全吃透并且可以做轨道的计算。我暂时不需要思考波形到底该如何产生，目前我就考虑轨道的问题。

在最开始同样需要定义一些等效单体的物理量：类似于牛顿力学中的等效单体，在这里我们用到的是这样的等效：

$$\begin{tikzcd} m_1, \boldsymbol{S_1} \arrow[r] \arrow[dr] & \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}, \boldsymbol{S}^* \\ m_2, \boldsymbol{S_2} \arrow[r] \arrow[ur] & M = m_1 + m_2, \boldsymbol{S}_{\text{Kerr}} \end{tikzcd}$$

首先明确对于等效的单体我们用位矢 $\mathbf{R}$, 动量 $\mathbf{P}$ 来表征，为了方便还定义了 *reduced variables*

$$\boldsymbol{r} \equiv \frac{\boldsymbol{R}}{M}, \boldsymbol{p} \equiv \frac{\boldsymbol{P}}{\mu}$$

重要的还有事定义了无量纲的自旋变量 χ_i，由于我们仅仅考虑的是自旋角动量的方向要么和轨道角动量方向平行要么反平行，于是就很简单的有：

$$\boldsymbol{S_i} \equiv \chi_i m_i^2 \hat{\boldsymbol{L}}, \boldsymbol{S}_{\text{Kerr}} \equiv \chi_{\text{Kerr}} M_i^2 \hat{\boldsymbol{L}}$$

这些定义都是十分清晰的。最重要的东西是 **EOB/real Hamiltonian**:

$$H_{\text{real}} \equiv \mu \hat{H}_{\text{real}} = M\sqrt{1+2\nu\Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}-1\Big)} - M$$

在下面我会着重提到哈密顿量的计算，在此之前需要明确一下自旋的计算：(这里的所有的 η 均为原文中的 ν)

$$\boldsymbol{S_{\text{Kerr}}} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$$

$$\boldsymbol{S}^* = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S_1} + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S_2} + \Delta_{\sigma^*}^{(1)} + \Delta_{\sigma^*}^{(2)} + \frac{d_{SO}\nu}{r^3}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S_1} + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S_2}\Big)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)} =& \boldsymbol{\sigma}^*\left[\frac{1}{6}\left(-4b_0+7\eta\right)\frac{M}{r} + \frac{1}{3}\left(2b_0+\eta\right)(Q-1)\right.\\ &\left.-\frac{1}{2}\left(4b_0+5\eta\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right] + \boldsymbol{\sigma}\left[-\frac{2}{3}\left(a_0+\eta\right)\frac{M}{r}\right.\\ &\left.+\frac{1}{12}\left(8a_0+3\eta\right)(Q-1) - \left(2a_0+3\eta\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)} =& \boldsymbol{\sigma}^*\left[\frac{1}{36}\left(-56b_0-24b_2+353\eta-60b_0\eta-27\eta^2\right)\left(\frac{M}{r}\right)^2 + \frac{5}{3}\left(-2b_3+3b_0\eta+3\eta^2\right)\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4\right.\\ &+\frac{1}{72}\left(-4b_0+48b_1-23\eta-12b_0\eta-3\eta^2\right)(Q-1)^2 + \frac{1}{36}\left(-14b_0-24b_1+24b_2-103\eta+66b_0\eta+60\eta^2\right)\frac{M}{r}(Q-1)\\ &+\frac{1}{12}\left(2b_0-24b_1+24b_3+16\eta-30b_0\eta-21\eta^2\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1) + \frac{1}{12}\left(-24b_0-16b_1-32b_2\right.\\ &\left.\left.-24b_3+47\eta-24b_0\eta-54\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right] + \boldsymbol{\sigma}\left[\frac{1}{9}\left(-14a_0-6a_2-56\eta-15a_0\eta-21\eta^2\right)\left(\frac{M}{r}\right)^2\right.\\ &+\frac{5}{24}\left(-16a_3+24a_0\eta+27\eta^2\right)\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4 + \frac{1}{144}\left(-8a_0+96a_1-45\eta-24a_0\eta\right)(Q-1)^2\\ &+\frac{1}{36}\left(-14a_0-24a_1+24a_2-109\eta+66a_0\eta+51\eta^2\right)\frac{M}{r}(Q-1) + \frac{1}{24}\left(4a_0-48a_1+48a_3+6\eta-60a_0\eta\right.\\ &\left.\left.-39\eta^2\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1) + \frac{1}{24}\left(-48a_0-32a_1-64a_2-48a_3-16\eta-48a_0\eta-147\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]\end{aligned}$$

为了搞清楚怎么求解轨道，我首先得搞明白哈密顿量 (不是说搞清楚来龙去脉，而是说能够进行计算知道怎么代入数据)。文中提到的哈密顿量为：

$$\frac{H_{\text{eff}}}{\mu} = \beta^i p_i + \alpha\sqrt{1+\gamma^{ij}p_ip_j+\mathcal{Q}_4(\boldsymbol{P})} + \frac{H_{SO}}{\mu} + \frac{H_{SS}}{\mu} - \frac{1}{2Mr^5}(r^2\delta^{ij}-3r^ir^j)S_i^*S_j^* + \frac{d_{SS}\nu}{r^4}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S_1}+\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S_2}\Big)\cdot\Big(\boldsymbol{S_1}+\boldsymbol{S_2}\Big)$$

这里的下标都是非常清晰的，*SS:Spin+Spin;SO:Spin+Orbit*。重点在于其中的每一个值都是怎么算的，因此我在这里罗列一下：

The deformed metric takes the form:

$$
\begin{aligned}
g^{tt} &= -\frac{\Lambda_t}{\Delta_t \Sigma} \\
g^{rr} &= \frac{\Delta_r}{\Sigma} \\
g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\Sigma} \\
g^{\phi\phi} &= \frac{1}{\Lambda_t}\Big(-\frac{\tilde{\omega}_{fd}^2}{\Delta_t \Sigma} + \frac{\Sigma}{\sin^2\theta}\Big) \\
g^{t\phi} &= -\frac{\tilde{\omega}_{fd}}{\Delta_t \Sigma}
\end{aligned}
$$

而这里又引入了很多参数，具体形式如下：

$$
\begin{aligned}
\Delta_t(u) &= \frac{1}{u^2}\Delta_u(u) \\
\Delta_u(u) &= A(u) + \chi_{\text{Kerr}}^2 u^2 \\
A(u) &= 1 - 2u + 2\nu u^3 + \nu\Big(\frac{94}{3} - \frac{41}{32}\pi^2\Big)u^4 \\
u &= \frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

在**文献 34** 中将 $\Delta_u(u)$ 又做了一个改写：

$$
\Delta_u(u) = \bar{\Delta}_u(u)\Big[1 + \nu\Delta_0 + \nu\log\big(1 + \Delta_1 u + \Delta_2 u^2 + \Delta_3 u^3 + \Delta_4 u^4\big)\Big]
$$

而这里面用到的参数如下：

$$
\bar{\Delta}_u(u) = \chi_{\text{Kerr}}^2\Big(u - \frac{1}{r_+^{\text{EOB}}}\Big)\Big(u - \frac{1}{r_-^{\text{EOB}}}\Big)
$$

$$
r_\pm^{\text{EOB}} = \Big(1 \pm \sqrt{1 - \chi_{\text{Kerr}}^2}\Big)(1 - K\nu)
$$

Note: 这里我得回去把 *Kerr* 黑洞的基础的东西学习一下，不能说连这个东西都不懂。

在原文中说 $r_\pm^{\text{EOB}}$are radii reducing to those of the Kerr event and Cauchy horizons when the EOB adjustable parameter K goes to zero。

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 &= K(\nu K - 2) \\
\Delta_1 &= -2(\nu K - 1)(K + \Delta_0) \\
\Delta_2 &= \frac{1}{2}\Delta_1(-4\nu K + \Delta_1 + 4) - \frac{a^2}{M^2}(\eta K - 1)^2\Delta_0 \\
\Delta_3 &= \frac{1}{3}\Big[-\Delta_1^3 + 3(\nu K - 1)\Delta_1^2 + 3\Delta_2\Delta_1 + 3\Delta_2\Delta_1 - 6(\nu K - 1) \times (-\nu K + \Delta_2 + 1) - 3\frac{a^2}{M^2}(\nu K - 1)^2\Delta_1\Big] \\
\Delta_4 &= \frac{1}{12}\Big\{6\frac{a^2}{M^2}(\Delta_1^2 - 2\Delta_2)(\nu K - 1)^2 + 3\Delta_1^4 - 8(\nu K - 1)\Delta_1^3 - 12\Delta_2\Delta_1^2 + 12[2(\nu K - 1)\Delta_2 + \Delta_3]\Delta_1 \\
&\quad + 12\Big(\frac{94}{3} - \frac{41}{23}\pi^2\Big)(\nu K - 1)^2 + 6[\Delta_2^2 - 4\Delta_3(\nu K - 1)]\Big\}
\end{aligned}
$$

最后需要知道的物理量是：

$$
\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g^{tt}}}
$$

$$
\beta^i = \frac{g^{ti}}{g^{tt}}
$$

$$\gamma^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{ti}g^{tj}}{g^{tt}}$$

还有很重要的一环就是两个系数 H_{SO}, H_{SS}:

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{SO}} =& \frac{e^{2\nu-\tilde{\mu}}\left(e^{\tilde{\mu}+\nu}-\tilde{B}\right)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)\left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{Kerr}}\right)}{\tilde{\boldsymbol{B}}^2\sqrt{Q}\xi^2} + \frac{e^{\nu-2\tilde{\mu}}}{\tilde{\boldsymbol{B}}^2(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\Big\{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{J}\Big[\mu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\sqrt{Q}+1)-\mu_{\cos\theta}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2 \\
&-\sqrt{Q}\left(\nu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)+\left(\mu_{\cos\theta}-\nu_{\cos\theta}\right)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right)\Big]\tilde{B}^2 + e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(2\sqrt{Q}+1)\Big[\tilde{J}\nu_r(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})-\nu_{\cos\theta}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\Big]\tilde{B} \\
&-\tilde{J}\tilde{B}_r e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\sqrt{Q}+1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{SS}} =& \omega\left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{Kerr}}\right) + \frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\tilde{J}\omega_r}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\Big\{-e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B} + e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}) \\
&+e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\xi^2\tilde{B}^2 + \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})[(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})]\xi^2\tilde{B}^2\Big\} \\
&+\frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\omega_{\cos\theta}}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}}\Big\{-e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) + e^{\tilde{\mu}+\nu}\tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B} \\
&+\Big[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)^2 - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r) - e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\Big]\tilde{B}^2\Big\}
\end{aligned}$$

2.1.2 第二篇文献

暂时把刚才的那篇文章给放一下，重点把老师给我的另一篇文献给读透。 *A Surrogate Model for Gravitational Wave Signals from Comparable- to Large- Mass-Ratio Black Hole Binaries*

研究的目的和原因

目的很简单，要提出一种好的模板或者说算法。因为目前的 **inspiral-merger-ringdown(IMR)models** 只对比较 moderate 质量比的系统进行了校准，这其实就导致对于那些质量比较大的系统这种传统方法的适用性不好。本文提出了一种叫做 *EMRISur1dq1e4* 的替代方法适用于 $q \in [3, 10000]$ 的系统。这个取值范围是超过目前所有方法的。我粗略地阅读下来感觉，这篇文章的处理方法是有点类似于机器学习的，通过训练根据 *point-particle black hole perturbation theory(ppBHPT)* 产生的数据就可以得到一个很好的模型。我尝试一句话概括说**作者通过运用 *ppBHPT* 方法生成数据并且进行训练得到了一个可以适用于大质量比甚至是极端质量比的系统产生的引力波信号的比对，数据处理的模型**。文中也提到了 **EOB** 这个方法本质上是唯象的一个方法，通过物理直觉“猜出模型”，然后根据真实的数据也好，数值相对论的波形也好来校准 (*calibrate*)。**但是！作者声称他们提出的这种方式是不依赖于任何 underlying phenomenology 的。这个 model follows a data-driven learning strategy.**

接下来讨论一下研究的过程。**目前碰到了一个疑问点，什么叫 The model spans 13500M in duration?**为什么时间可以用 M 作为衡量的单位？是不是因为取了 $G = c = 1$，然后看不出来呢？**我觉得我需要补上关于 Kerr 黑洞的知识，还是不能操之过急，从最基础的史瓦西黑洞开始！** 通常的球坐标系下的史瓦西线元：

$$ds^2 = -\Big(1-\frac{2GM}{r}\Big)dt^2 + \Big(1-\frac{2GM}{r}\Big)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

其中

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

下面定义乌龟坐标 r^*

$$r^* := r + 2GM \ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right|$$

满足如下关系：

$$\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

很显然若 r 从视界外接近 $2GM$ 那么 r^* 将会趋向于负无穷，因为 r 在减小，同时导数为正无穷，反之亦然。总之视界处 $r = 2GM$ 对于乌龟坐标就是 $-\infty$

2.2 June 30^{th}

今天是实习的第二天，首先安排一下今天的工作。我目前初步规定自己用周二和周三完成老师新给的文献的精读，我自己是希望能够对其中的一些代码跑一跑的。对了，对其中的基础的理论知识需要再补一补，特别是那个方程 *Teukolsky equation*。当然如果有空的话可以看一看科尔时空的相关内容。

下午的一些想法：我找到了文章的源代码，我希望能够真正地理解一下源代码，我应该要至少可以运行，并且应该可以在运行的过程中有一些收获。其次是我真的很想对球谐函数展开有更深的理解，应该要再找一些资料看一看。然后对于量纲的问题我现在是这么思考的，首先是对于长度而言我们有三个特征量：

$$r = \frac{2GM}{c^2}, r = \frac{3GM}{c^2}, r = \frac{6GM}{c^2}$$

但是我们一旦取了几何单位制之后就会得到：

$$r = 2M, 3M, 6M$$

那么我们再考虑时间，因为速度的“量纲”变为了 1，那么很自然的就有时间和长度等价。因此说时间也是用 M 作为衡量单位的。在找到的一篇 doctor thesis 里面提到了如下关系：

$$1M_\odot = 1.47\text{km} = 4.92 \times 10^{-6}\text{seconds}$$

文章里面提到的比较的方法还是比较合理的，利用 **L2** 范数进行比较，如果是少数的点的话是用求和，连续就用积分：

$$\min_\alpha \frac{\sum |\tilde{x}_i - x_i|^2}{\sum |x_i|^2} \to \min_\alpha \frac{\int |\tilde{x}_i - x_i|^2}{\int |x_i|^2}$$

下面我开始读一下这篇博士论文，**Kerr** 度规：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r}{\Sigma}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\phi^2 - \frac{4Mar}{\Sigma}\sin^2\theta dt d\phi$$

这里有两个参数是老朋友了：

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \qquad \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

这里的其他参数都是很明确的，新出现的 a 其实是单位质量的角动量：

$$a := \frac{\mathcal{J}}{M}$$

不知道为什么，a 的取值范围只能是 $-M < a < M$, 因此经常引入无量纲参数 q 来描述

$$q := \frac{a}{M} \in [-1, 1]$$

我们当然也可以用同样的方法计算出 **Kerr** 黑洞的视界：

$$\Delta \equiv 0 \Rightarrow r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

靠近事件视界的地方，space 被扭曲，所有的物体都会沿着黑洞自旋的方向被吸进去，没有任何东西可以停留在相同的空间位置，这个被称为 *ergosphere*。

接下来继续倒一倒最初的那篇文献中的关系。因为要求轨道，显然我需要六个微分方程，而这正是哈密顿正则方程：

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\hat{t}} = \frac{\partial \hat{H}_{\text{real}}}{\partial \boldsymbol{p}}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\hat{t}} = -\frac{\partial \hat{H}_{\text{real}}}{\partial \boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{\mathcal{F}}} = -\frac{\partial \hat{H}_{\text{real}}}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{1}{\nu \hat{\Omega} |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}|} \frac{dE}{dt} \boldsymbol{p}$$

最后显然我要用的是分量关系，直接用对应的分量就可以了。为了直观一点，我这里把哈密顿量再拿出来一下：

$$H_{\text{real}} \equiv \mu \hat{H}_{\text{real}} = M \sqrt{1 + 2\nu \Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu} - 1 \Big)} - M$$

注意了微分关系中的哈密顿量是约化哈密顿量，不能够直接用，应该要用 $\frac{H_{\text{real}}}{\mu}$ 具体的偏微分关系需要我手算或者用 **Mathematica** 来计算。

我目前的想法是将所有的参数一个一个慢慢磨掉

1. β

$$\beta^i = \frac{g^{ti}}{g^{tt}}$$

$$g^{t\theta} = g^{tr} = 0$$

$$g^{tt} = -\frac{\Lambda_t}{\Delta_t \Sigma}$$

其实我们直接就可以发现

$$\beta^r = \beta^\theta = 0 \qquad \beta^\phi = \frac{\varpi_{fd}}{\Lambda_t}$$

而

$$\varpi_{fd} = 2aMr + \omega_1^{fd} \nu \frac{aM^3}{r} + \omega_2^{fd} \nu \frac{aM^3}{r}$$

而

$$\Lambda_t = \varpi^4 - a^2 \Delta_t \sin^2\theta \qquad \Delta_t = r^2 \Big[A(u) + \frac{a^2}{M^2} u^2 \Big]$$

$$A(u) = 1 - 2u + 2\nu u^3 + \nu \Big(\frac{94}{3} - \frac{41}{32}\pi^2 \Big) u^4 \qquad u = \frac{M}{r}$$

$$\varpi^2 = a^2 + \omega^2$$

代入就可以得到：

$$\boxed{\beta^r = \beta^\theta = 0 \qquad \beta^\phi = \frac{2aMr + \omega_1^{fd} \nu \frac{aM^3}{r} + \omega_2^{fd} \nu \frac{aM^3}{r}}{(a^2 + \omega^2)^4 - a^2 r^2 \sin^2\theta \Big[1 - 2u + 2\nu u^3 + \nu \Big(\frac{94}{3} - \frac{41}{32}\pi^2 \Big) u^4 + \frac{a^2}{M^2} u^2 \Big]}}$$

这样就得到了 β 的显式表达式。但是具体计算过程中肯定是用 $\{x, y, z\}$ 的，因此还是需要把 β^ϕ 转换为 $\beta^{x,y,z}$，根据 $\boldsymbol{e_\phi}$ 同 $\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z}$ 的转换关系，这个太麻烦了，先放着。

2. $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{p} = \left\{p^1, p^2, p^3\right\} \equiv \left\{p_x, p_y, p_z\right\}$$

3. α

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g^{tt}}} = \sqrt{\frac{\Delta_t(r^2 + a^2\cos\theta^2)}{\varpi^4 - a^2\Delta_t \sin\theta^2}}$$

写在今天的最后，感觉到困难重重，一个是由于黑洞物理学习不多导致很多概念上的缺失，目前我还是没有搞明白 T 方程提出的目的和意义，没有明白球谐函数展开，没有明白第二篇文章的具体操作和代码，同时感觉我是不是对于第一篇文章需要代码求解的东西产生了理解偏差？那个东西有点太过夸张了。

现在，我就通过每天晚上的时间来补充学习黑洞物理的基础知识以及其他的相关内容。

2.3 July 1^{st}

今天是实习的第三天！我希望今天能够完成两件事情，一个是跟着代码把第二篇文献的逻辑给理清楚，第二个是把第一篇文献中的计算关系再推进一点然后去找一下老师问一下问题。

2.3.1 第二篇文章

现在这篇文章的目的已经非常明确了，*EMRISur1dq1e4* 是一个计算波形的替代 **NR** 以及 **EOB** 的方法。同其他唯象的经验理论不同，这个方法是类似于机器学习的 **Data Driven** 的方法。而用来训练的数据都是根据 **ppBHPT** 方法产生的，适用于 $q \in [3, \infty]$，这是目前唯一使用范围如此之广的方法。有意思的一点在于质量比做了一个映射，这个关系是通过拟合或者插值出来的。在读了代码之后，仍然对于他具体的操作有些迷糊，目的是要插值或者说拟合找出 $A_S^{\ell,m}, \Phi_S^{\ell,m}$ 来代替真正的 $A^{\ell,m}, \Phi^{\ell,m}$，但是他具体的操作流程呢？我还是不太清楚，因此我找到了他们之前的工作也就是参考文献【47】，其中有比较具体的算法的描述。主要分成四个步骤：

Step 1: Greedy selection of parameter samples and reduced basis

比如说我现在有 $\mathcal{N}$ 个数据，每一个数据包含了一组参数 $\{\boldsymbol{\Lambda}\}$, 以及在这组参数下的波形信息 $h(t, \boldsymbol{\Lambda})$, 那么我手头上就有了一个数据集，我们利用这么多的波形通过贪心算法去找到一组 m 个 **RB**，以及每一个 **RB** 对应的参数组 (比如 q, a, Q)。(具体的算法我暂时不去关心。) 这个和量子力学其实就很像，只不过量子力学理我们解析地去求解得到本征波函数，然后用这组 (无穷个) 本征波函数将这个希尔伯特空间里的所有可能出现的波函数进行线性展开。i.e.:

$$h(t, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\boldsymbol{\lambda}) e_i(t)$$

每一个基矢其实就是一个仅仅同 t 有关的函数。当然了，我们需要去验证这个展开的好坏就需要引入一个人为控制的 ϵ:

$$\sigma_m \equiv \max_{\boldsymbol{\lambda}} \min_{c_i \in \mathbb{C}} \left\| h(\cdot; \boldsymbol{\lambda}) - \sum_{i=1}^{m} c_i(\boldsymbol{\lambda}) e_i(\cdot) \right\|^2$$

$$c_i(\boldsymbol{\lambda}) = \langle h(\cdot; \boldsymbol{\lambda}), e_i(\cdot) \rangle$$

Step 2: Greedy selection of time samples and empirical interpolation

第二步，同样通过贪心算法去找到最好的时间点，同样是 m 个，这个个数的选择应该和插值有关。

Step 3:Fitting at empirical nodes 挑选完了基底和利用 **EMI** 挑选出时间点之后，随机地挑选一组参数 $\{\boldsymbol{\Lambda}\}$, 将它所对用的波形尝试用 $\{h(T_i;\boldsymbol{\Lambda_j})\}_{j=1}^{m}$ 来拟合出来。当然了，我们将波形分成了振幅和幅角两个部分：

$$h(t,\boldsymbol{\lambda}) = A(t;\boldsymbol{\lambda})e^{-i\phi(t;\boldsymbol{\lambda})}$$

于是我们的任务就变成了找到 $2m$ 个方程来近似波形：

$$\{A_i(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^{m}\text{and}\{\phi_i(\boldsymbol{\lambda})\}_{i=1}^{m}$$

Step4:Blablabla 总之最后就得到了模型。

我终于成功安装了 *gwsurrogate* 下面我就跟着程序跑一跑，但是好像我没有他们的那个数据？找到了数据。

2.3.2 第一篇文章

没看。

2.4 July 2^{nd}

已经基本明白了第二篇文章的意思，并且完成了 Slides 的制作，但是还有一些细节有点迷糊，先放一天，星期六再看看吧。现在的主要的精力就投入到第一篇文章中。我希望首先能够实现一下最开始的文章，画个图。最开始的文章理论太多，不搞了。

2.5 July 3^{rd}

今天的目标就是能够尝试完成最简单的情况的哈密顿量的导数符号计算，如果可能的话写成 **Python** 代码。最简单的情况如下：

$$\hat{H}_{\text{real}} = \frac{M}{\mu}\Big[\sqrt{1+2\nu\Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}-1\Big)}-1\Big]$$

代入哈密顿正则方程而且忽略耗散项就有：

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}\Big\{\frac{1}{\mu}\Big[\sqrt{1+2\nu\Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}-1\Big)}-1\Big]\Big\}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\Big\{\frac{1}{\mu}\Big[\sqrt{1+2\nu\Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}-1\Big)}-1\Big]\Big\}$$

因此关键点就在于

$$\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}$$

这一项。简化后的这一项约等于：

$$\frac{H_{\text{eff}}}{\mu} \approx \beta^i p_i + \alpha\sqrt{1+\gamma^{ij}p_ip_j}$$

其中 α,β,γ 完全由度规决定。

和老师的谈话结果如下：

1. 确实不需要考虑耗散 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{Q}_4$
2. 分开去算，不要一股脑儿代进去
3. *rescaling* 的原因是用了微扰理论，但是事实上通常并不是微扰，因此要做一个尺度变换。

下面我进行一下简单的计算，第一步：

$$\frac{\partial \hat{H}_{\text{real}}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial \hat{H}_{\text{real}}}{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial \boldsymbol{X}} \qquad \boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}\}$$

其中：

$$\frac{\partial \hat{H}_{\text{real}}}{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}$$

因此求导的结果就应该为：

$$\frac{\partial \hat{H}_{\text{real}}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial \boldsymbol{X}} \qquad \boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}\}$$

下面对第二项进行求导：(角动量应该守恒)

$$\frac{H_{\text{eff}}}{\mu} = \beta^i p_i + \alpha\sqrt{1+\gamma^{ij}p_ip_j} = \beta^\phi p_\phi + \alpha\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2}$$

我们要注意到，α,β,γ 完全由度规决定，因此只是广义坐标 $\boldsymbol{r}$ 的函数，再进一步，由于 $(deformd)Kerr$ 度规是轴对称度规，显然是和 ϕ 无关的，也就是有：

$$\beta=\beta(r,\theta), \alpha=\alpha(r,\theta), \gamma^{ij}=\gamma^{ij}(r,\theta)$$

而广义动量显然只是广义动量的函数。我下面全都写出来：

$$-\dot{p_r} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial r} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\frac{\partial\beta^\phi}{\partial r}p_\phi + \frac{\partial\alpha}{\partial r}\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2} + \frac{\alpha\left(\frac{\partial\gamma^{rr}}{\partial r}p_r^2+\frac{\partial\gamma^{\theta\theta}}{\partial r}p_\theta^2+\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial r}p_\phi^2\right)}{2\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2}}\right]$$

$$-\dot{p_\theta} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial \theta} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\frac{\partial\beta^\phi}{\partial \theta}p_\phi + \frac{\partial\alpha}{\partial \theta}\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2} + \frac{\alpha\left(\frac{\partial\gamma^{rr}}{\partial \theta}p_r^2+\frac{\partial\gamma^{\theta\theta}}{\partial \theta}p_\theta^2+\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial \theta}p_\phi^2\right)}{2\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2}}\right]$$

$$-\dot{p_\phi} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial \phi} = 0$$

这也说明了角动量

$$p_\phi = const \equiv \mathcal{J}$$

下一步就是对广义动量求导了：

$$\dot{r} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial p_r} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\alpha\gamma^{rr}p_r}{\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial p_\theta} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\alpha\gamma^{\theta\theta}p_\theta}{\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2}}$$

$$\dot{\phi} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\partial(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu})}{\partial p_\phi} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\alpha\gamma^{\phi\phi}p_\phi}{\sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2}}$$

假如我考虑一个圆轨道：

$$p_r = \dot{p_r} = 0, \dot{r} = 0, r = const, \phi_0 = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

将这个条件带进去就有对于：$\dot{r} = 0$ 这个条件带进去其实就是得到 $p_r = 0$，是一个 trivial 的条件，没得到啥别的有效信息。但是我可以用来化简这几个关系，注意了 $\beta^r = \beta^\theta = 0$ 因此有：

$$\dot{p_r} = -\frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\frac{\partial\beta^\phi}{\partial r}\mathcal{J}+\frac{\partial\alpha}{\partial r}\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}+\frac{\alpha\left(\frac{\partial\gamma^{\theta\theta}}{\partial r}p_\theta^2+\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial r}\mathcal{J}^2\right)}{2\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}}\right] = 0 \Rightarrow \text{是否是一个限制?}$$

$$\dot{p_\theta} = -\frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\frac{\partial\beta^\phi}{\partial\theta}\mathcal{J}+\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}+\frac{\alpha\left(\frac{\partial\gamma^{\theta\theta}}{\partial\theta}p_\theta^2+\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial\theta}\mathcal{J}^2\right)}{2\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}}\right]$$

$$\dot{p_\phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = \mathcal{J}$$

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = const$$

$$\dot{\theta} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\frac{\alpha\gamma^{\theta\theta}p_\theta}{\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}}$$

$$\dot{\phi} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\beta^\phi+\frac{\alpha\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}}{\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}}\right]$$

所以现在唯一的任务就是搞清楚度规到底该如何取？需要求导的量如下：

$$\partial_r\alpha, \partial_\theta\alpha, \partial_r\beta^\phi, \partial_\theta\beta^\phi, \partial_r\gamma^{\theta\theta}, \partial_r\gamma^{\phi\phi}, \partial_\theta\gamma^{\theta\theta}, \partial_\theta\gamma^{\phi\phi}$$

我还算了一下角动量：

$$\mathcal{J} = -\frac{2\partial_r\alpha(1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2)+\alpha\partial_r\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2}{\alpha\partial_r\gamma^{\phi\phi}+2\gamma^{\phi\phi}\partial_r\alpha}$$

这应该是一个常数，从这里可以得到什么信息呢？有些困难。

我现在想一想感觉度规那里复杂了，不应该那么复杂，等我复习完 Fortran 完后再考虑度规的问题。现在主要复习 **Fortran**，为之后的数值积分做准备。我来定一下 **Fortran** 的复习计划，第一步是复习数据结构，定义的方式，这是十分重要的。第二步是复习输入输出方式，第三步是复习选择结构，第四步是复习循环结构。最后复习一下 *subroutine* 和 *funciton* 的定义方式。

2.6 July 4^{th}

今天我主要工作是两个方面，第一是把度规过一遍，第二就是准备要把度规以及其他参数代入方程了，如果顺利的话应该就可以得到正则方程的简化形式了。我本来是考虑可不可以直接手算出度规的最简形式？后来想了想这不是一个好办法，因为原来的形式是很简单的，算出那些量之后都会存在内存里，计算机会直接调用而不是重新计算，但是如果我手动地把它们都算出来只是弄巧成拙而且加大了我自己的工作量，我要用到

的其实仅仅是求导后的结果罢了。现在开始检查一下哈密顿量的计算。经过验证，昨天的计算是正确的。考虑到结果中的根号出现了多次，我可以定义一个变量：

$$\text{The\_guy\_with\_alpha} := \sqrt{1+\gamma^{rr}p_r^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}p_\phi^2}$$

而且这一项很友善的地方是不用求导。

我看了一下张晨师兄展示的一个哈密顿量对 p_r 的求导结果，是超乎我想象的简单，显然我的求导策略出现了问题。

2.7 July 5^{th}

我做了进一步的计算：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial x} &= \frac{1}{2(-g^{tt})^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial g^{tt}}{\partial x}\\
\frac{\partial\beta^{\phi}}{\partial x} &= \frac{1}{(g^{tt})^2}\left[\frac{\partial g^{t\phi}}{\partial x}g^{tt}-\frac{\partial g^{tt}}{\partial x}g^{t\phi}\right]\\
\frac{\partial\gamma^{\theta\theta}}{\partial x} &= \frac{\partial g^{\theta\theta}}{\partial x}\\
\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial x} &= \frac{\partial g^{\phi\phi}}{\partial x}-\frac{1}{(g^{tt})^2}\left[2g^{t\phi}g^{tt}\frac{\partial g^{t\phi}}{\partial x}-(g^{t\phi})^2\frac{\partial g^{tt}}{\partial x}\right]
\end{aligned}$$

于是归根结底，把问题化归为了度规的求导：我需要求导的有以下几个量：

$$\boxed{\frac{\partial g^{tt}}{\partial r},\frac{\partial g^{tt}}{\partial\theta},\frac{\partial g^{t\phi}}{\partial r},\frac{\partial g^{t\phi}}{\partial\theta},\frac{\partial g^{\theta\theta}}{\partial r},\frac{\partial g^{\theta\theta}}{\partial\theta},\frac{\partial g^{\phi\phi}}{\partial r},\frac{\partial g^{\phi\phi}}{\partial\theta}}$$

针对最简单的圆轨道的话，我们要考虑的仅仅有 **4** 个对 θ 的导数！！

$$\boxed{\frac{\partial g^{tt}}{\partial\theta},\frac{\partial g^{t\phi}}{\partial\theta},\frac{\partial g^{\theta\theta}}{\partial\theta},\frac{\partial g^{\phi\phi}}{\partial\theta}}$$

进一步计算可以得到简单得惊人的结果！

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^{tt}}{\partial\theta} &= -\frac{1}{\Delta_t(r)}\frac{\Sigma\frac{\partial\Lambda_t}{\partial\theta}-\Lambda_t\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}}{\Sigma^2} = \frac{a^2\sin(2\theta)\left[a^2\Delta_t+r^2\Delta_t-\varpi^4\right]}{\Delta_t\Sigma^2}\\
\frac{\partial g^{t\phi}}{\partial\theta} &= -\frac{1}{\Delta_t}\frac{a^2\sin(2\theta)\tilde{\omega}_{fd}}{\Sigma^2}\\
\frac{\partial g^{\theta\theta}}{\partial\theta} &= \frac{a^2\sin(2\theta)}{\Sigma^2}\\
\frac{\partial g^{\phi\phi}}{\partial\theta} &= \frac{a^2\sin(2\theta)}{(\Lambda_t)^2}\left[\frac{2\Sigma\Delta_t-\Lambda_t}{\sin^2\theta}-\frac{\tilde{\omega}_{fd}^2(\Delta_t\Sigma+\Lambda_t)}{\Delta_t\Sigma^2}\right]
\end{aligned}$$

我的计算应该是没有问题的，但是我现在就是要解决手头上的这个**初值如何取的问题**，但是其实质量，自旋以及 r 这些量都是我给定的，我现在的唯一任务就是去算出 $p_\phi=\mathcal{J}$，我要找一找这个关系，由于是守恒动力学部分，而且我只是先算一个圆轨道，那么很显然我要考虑的就是 p_θ, 但是我之前没有考虑到**能量守恒**这个条件，我可以直接从这里就计算出 $p_\phi=\mathcal{J}$

2.8 July 6^{th}

今天开了组会，做了一下报告，然后发现我对初始条件还是完全没有感觉。类似于质量，角动量以及 p_ϕ, p_θ 到底该如何取，仍然没有一个感觉。

2.9 July 7^{th}

早上我解决了动图以及可视化的问题，这个成果可以下周组会的时候报告来展示一下，现在我手头上有两个任务，一个是帮张晨师兄解决那个求积分的问题，第二个就是解决我圆轨道的初值问题，并且我之前忽略掉的积分上限问题，积分到什么地方停止？对了，我现在就直接用 $Runge-Kutta$ 方法把欧拉法换掉。粗略看了一下，不太容易搞，但是应该也不难实现，放到最后去思考。

和张晨师兄交流之后感觉受益匪浅。我之前一直在思考

$$\dot{p_r} = 0$$

这一项该如何使用？但是实际上由于

$$r = \text{const} \Rightarrow \dot{r} = p_r = 0$$

$\dot{p_r} = 0$ 这一项本身就已经体现在我的哈密顿量里面了，我一直用的是没有 p_r 的哈密顿量，那么就说明 $p_r \equiv 0$，这里面已经包含了 $p_r = 0$。师兄说，我应该手动输入两个 θ 的极值，直接从 θ 的最小值开始积分，这是有道理的。因为我目前手头上的其实是有这么一个关系：

$$\beta^\phi \mathcal{L} + \alpha\sqrt{1 + \gamma^{\theta\theta} p_\theta^2 + \gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2} = \text{const}$$

由于我这个是圆轨道还更加简单，我完全不需要考虑 r，我只需要任意地去取两个点，然后利用这个条件去计算出

$$\mathcal{L} \equiv p^\phi = \text{const}$$

一旦我计算出 p_θ 之后，我没有必要再利用微分方程去计算 p_θ 的演化，而是可以直接通过守恒的哈密顿量去计算出 p_θ 在任意 θ 情况下的取值。假设我取定如下 θ 的最大，最小值：

$$\theta_{max} \equiv \theta_+ \qquad \theta_{min} \equiv \theta_-$$

于是我有如下条件：

$$\beta^\phi(\theta_-)\mathcal{L} + \alpha\sqrt{1 + \gamma^{\phi\phi}(\theta_-)\mathcal{L}^2} = \beta^\phi(\theta_+)\mathcal{L} + \alpha\sqrt{1 + \gamma^{\phi\phi}(\theta_+)\mathcal{L}^2}$$

下面将采用如下记号 $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$，利用 **Mathematica** 可以计算得到如下结果：

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2 - \alpha_1^4\gamma_1 + 2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2 - (\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\Big]} - \alpha_2^4\gamma_2 + \alpha_1^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2 + \alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)\Big]}{\Big[(\beta_1-\beta_2)^2 - \alpha_1^2\gamma_1\Big]^2 - 2\alpha_2^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2 + \alpha_1^2\gamma_1\Big]\gamma_2 + \alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

但是我之前没有注意到实际上一共有两个正数解: 所以我推测可能是我之前取的那个解不行？我检查一下，在

这里完整地给出四个解:

$$\mathcal{L}_1=\sqrt{\frac{\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^4\gamma_1+2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\Big]}-\alpha_2^4\gamma_2+\alpha_1^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)\Big]}{\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^2\gamma_1\Big]^2-2\alpha_2^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_1^2\gamma_1\Big]\gamma_2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

$$\mathcal{L}_2=\sqrt{\frac{\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^4\gamma_1-2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\Big]}-\alpha_2^4\gamma_2+\alpha_1^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)\Big]}{\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^2\gamma_1\Big]^2-2\alpha_2^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_1^2\gamma_1\Big]\gamma_2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

$$\mathcal{L}_3=-\sqrt{\frac{\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^4\gamma_1+2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\Big]}-\alpha_2^4\gamma_2+\alpha_1^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)\Big]}{\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^2\gamma_1\Big]^2-2\alpha_2^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_1^2\gamma_1\Big]\gamma_2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

$$\mathcal{L}_4=-\sqrt{\frac{\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^4\gamma_1-2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\Big]}-\alpha_2^4\gamma_2+\alpha_1^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)\Big]}{\Big[(\beta_1-\beta_2)^2-\alpha_1^2\gamma_1\Big]^2-2\alpha_2^2\Big[(\beta_1-\beta_2)^2+\alpha_1^2\gamma_1\Big]\gamma_2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

我认为 $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_3$ 等价，$\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_4$ 是等价的，只不过是一个逆时针转，一个顺时针转而已，我为了方便不妨取正数解，但是这两个真的都可以吗？我觉得我直接加绝对值的做法是错误的，我应该找出哪个是对的才行。于是我们就求出了这个情况下守恒的轨道角动量 L, 下面再次利用守恒关系

$$E=\beta_1(\theta_-)\mathcal{L}+\alpha_1(\theta_-)\sqrt{1+\gamma_1(\theta_-)\mathcal{L}^2}=const$$

于是

$$E=\beta^\phi(\theta)\mathcal{L}+\alpha(\theta)\sqrt{1+\gamma^{\phi\phi}(\theta)\mathcal{L}^2+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2}$$

观察这个式子我们很容易就可以得到:

$$p_\theta=\sqrt{\frac{\left(\frac{E-\beta^\phi(\theta)\mathcal{L}}{\alpha(\theta)}\right)^2-\gamma^{\phi\phi}(\theta)\mathcal{L}^2-1}{\gamma^{\theta\theta}}}$$

这样的话，我们就没有必要再利用微分方程去计算得到 p_θ 了，而是可以直接利用守恒关系来得到 p_θ，这显然也降低了误差，而且很关键的一点我们可以发现，在 $\dot{\theta},\dot{\phi}$ 里面，其实是不含有任何一个导数项的，只含有 θ 项，但是实际上我之前还忽略了很重要的一点:

$$\boldsymbol{r}\equiv\frac{\boldsymbol{R}}{M}\qquad \boldsymbol{p}\equiv\frac{\boldsymbol{P}}{\mu}\qquad \hat{t}\equiv\frac{t}{M}$$

这样实际上就是:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\hat{t}}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$$
$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\hat{t}}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\frac{M}{\mu}$$

不过我先别考虑这么多，记住：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\frac{d\boldsymbol{r}}{d\hat{t}}d\hat{t}$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0+\frac{d\boldsymbol{p}}{d\hat{t}}d\hat{t}$$

等我最后积分结束之后我再考虑

$$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{R}\qquad \boldsymbol{p}\to\boldsymbol{P}$$

下面我要考虑把刚才干出来的东西写进代码里面,但是由于这就要求我需要首先根据初始条件去定出 $\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2$，但是这就要求我再一次计算度规，那么显然我不能够采用目前的这种非常 *dirty* 的编程方法了，我需要定义函数，然后每次调用函数即可。下面开始重构代码。但是其实尝试了一下定义这些函数未必方便，继续尝试。

2.10 July 8^{th}

今天的目标就是写完代码，然后能够跑出正确的结果来，当然首先是用欧拉法去解微分方程，因为他简单，同时要改成 *Runge-Kutta* 法其实要废不少的脑筋，目前我碰到的问题是计算出来的 p_ϕ 和总能量 E 不是个数了，我猜测基本是因为根号下面出现了负数导致的，下一步就是要检查一下代码和计算的公式是否正确。我觉得有点奇怪，先把整理好的角动量表达式写下来：

$$\mathcal{L}_1=\sqrt{\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^4\gamma_1+\alpha_2^4\gamma_2)+\alpha_1^2\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)+2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\left[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\right]}}{(\beta_1-\beta_2)^4-2(\beta_1-\beta_2)^2(\alpha_1^2\gamma_1+\alpha_2^2\gamma_2)-2\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma_1\gamma_2+\alpha_1^4\gamma_1^2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

$$\mathcal{L}_2=\sqrt{\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^4\gamma_1+\alpha_2^4\gamma_2)+\alpha_1^2\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)-2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\left[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\right]}}{(\beta_1-\beta_2)^4-2(\beta_1-\beta_2)^2(\alpha_1^2\gamma_1+\alpha_2^2\gamma_2)-2\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma_1\gamma_2+\alpha_1^4\gamma_1^2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

$$\mathcal{L}_3=-\sqrt{\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^4\gamma_1+\alpha_2^4\gamma_2)+\alpha_1^2\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)+2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\left[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\right]}}{(\beta_1-\beta_2)^4-2(\beta_1-\beta_2)^2(\alpha_1^2\gamma_1+\alpha_2^2\gamma_2)-2\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma_1\gamma_2+\alpha_1^4\gamma_1^2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

$$\mathcal{L}_4=-\sqrt{\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^4\gamma_1+\alpha_2^4\gamma_2)+\alpha_1^2\alpha_2^2(\gamma_1+\gamma_2)-2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2(\beta_1-\beta_2)^2\left[(\beta_1-\beta_2)^2-(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(\gamma_1-\gamma_2)\right]}}{(\beta_1-\beta_2)^4-2(\beta_1-\beta_2)^2(\alpha_1^2\gamma_1+\alpha_2^2\gamma_2)-2\alpha_1^2\alpha_2^2\gamma_1\gamma_2+\alpha_1^4\gamma_1^2+\alpha_2^4\gamma_2^2}}$$

我做了一下测试发现连最基本的 $\theta\equiv\frac{\pi}{2}$ 的情况程序都跑不了，基本判定是程序的其他地方出错了，下面开始排查程序中的问题。

问题发现了，问题在于这个做法本身就是失效的，最上面的和最下面的两个点本质上是等价的，因此遮掩是没有办法计算出来的，我这个时候可能必须要去考虑 $\dot{p_r}=0$ 的这个条件来提供第二个约束条件了。

2.11 July 9^{th}

今天的任务就是求出角动量和能量，然后尝试完善代码。经过我的手推证明这是一个可行的办法，我目前需要处理的有三个对 r 的导数

$$\frac{\partial\beta}{\partial r}\qquad\frac{\partial\alpha}{\partial r}\qquad\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial r}$$

最终要求解的式子是:

$$aL + b\sqrt{1+cL^2} + \frac{\alpha d L^2}{2\sqrt{1+cL^2}} = 0$$

其中 $q \equiv \partial_r \beta^\phi \Big|_{\theta_-}$,$b \equiv \partial_r \alpha \Big|_{\theta_-}$,$c \equiv \gamma^{\phi\phi} \Big|_{\theta_-}$,$d \equiv \partial_r \gamma^{\phi\phi} \Big|_{\theta_-}$ 我一共得到四个解如下:

$$\mathcal{L}_1 = -\sqrt{\frac{-2b^2}{-q^2 + 2b^2 c + bd\alpha + \sqrt{q^4 - 2q^2 bd\alpha}}} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{L}_2 = -\sqrt{\frac{2b^2}{q^2 - 2b^2 c - bd\alpha + \sqrt{q^4 - 2q^2 bd\alpha}}} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{L}_3 = \sqrt{\frac{-2b^2}{-q^2 + 2b^2 c + bd\alpha + \sqrt{q^4 - 2q^2 bd\alpha}}} \qquad \checkmark$$

$$\boxed{\mathcal{L}_4 = \sqrt{\frac{2b^2}{q^2 - 2b^2 c - bd\alpha + \sqrt{q^4 - 2q^2 bd\alpha}}} \qquad \checkmark}$$

具体的取值也是到时候再考虑,但是可以确定的是仍然是 $\mathcal{L}_1 \Leftrightarrow \mathcal{L}_3$,$\mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_4$。

下面开始考虑具体的导数计算:

$$\beta^\phi = \frac{\tilde{\omega}_{\text{fd}}}{\Lambda_t} \Rightarrow \partial_r \beta^\phi = \frac{(\tilde{\omega}_{\text{fd}})'\Lambda_t - (\Lambda_t)'\tilde{\omega}_{\text{fd}}}{\Lambda_t^2} \qquad \checkmark$$

$$\boxed{(\beta^\phi)' = \frac{2aM\Lambda_t - 2aMr(\Lambda_t)'}{\Lambda_t^2} = \frac{2aM}{\Lambda_t}\left(1 - r\frac{\Lambda_t'}{\Lambda_t}\right) \qquad \checkmark}$$

这里面就出现了两个需要我们处理的导数项

$$\underbrace{(\tilde{\omega}_{\text{fd}})'}_{\text{easy to deal with}} \qquad (\Lambda_t)' \Rightarrow (\Delta_t)' \qquad \checkmark$$

这里的第一项是十分容易处理的,第二项比较复杂,但是仍然是可以接受的范围之内,之后会进行仔细的处理。

$$\partial_r \alpha = \frac{-1}{2(-g^{tt})^{3/2}} \frac{(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma - \Big[(\Delta_t)'\Sigma + (\Sigma)'\Delta_t\Big]\Lambda_t}{(\Delta_t\Sigma)^2} \qquad \checkmark$$

稍作化简:

$$\boxed{\partial_r \alpha = \frac{-1}{2(-g^{tt})^{3/2}} \frac{(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma - \Big[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\Big]\Lambda_t}{(\Delta_t\Sigma)^2} \qquad \checkmark}$$

这里出现的导数其实在之前我们就已经碰到过了。下面处理最后一项:

$$\partial_r \gamma^{\phi\phi} = \partial_r g^{\phi\phi} - \frac{2g^{t\phi}g^{tt}(g^{t\phi})' - (g^{t\phi})^2(g^{tt})'}{(g^{tt})^2} \qquad \checkmark$$

$$(g^{tt})' = -\frac{(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma - \Big[(\Delta_t)'\Sigma + (\Sigma)'\Delta_t\Big]\Lambda_t}{(\Delta_t\Sigma)^2} \qquad \checkmark$$

$$\boxed{(g^{tt})' = -\frac{(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma - \Big[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\Big]\Lambda_t}{(\Delta_t\Sigma)^2} \qquad \checkmark}$$

这一项其实就是之前计算 α 的时候已经碰到过的东西。

$$(g^{t\phi})' = \frac{\tilde{\omega}_{\text{fd}}\Big[(\Delta_t)'\Sigma + (\Sigma)'\Delta_t\Big] - (\tilde{\omega}_{\text{fd}})'\Delta_t\Sigma}{(\Delta_t\Sigma)^2} \qquad \checkmark$$

$$\boxed{(g^{t\phi})' = \frac{\tilde{\omega}_{\text{fd}}\Big[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\Big] - 2aM\Delta_t\Sigma}{(\Delta_t\Sigma)^2} \qquad \checkmark}$$

$$(g^{\phi\phi})' = \frac{-2\Lambda_t\Delta_t\Sigma\tilde{\omega}_{\text{fd}}(\tilde{\omega}_{\text{fd}})' + \tilde{\omega}_{\text{fd}}^2\Big[(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma + \Lambda_t(\Delta_t)'\Sigma + \Lambda_t\Delta_t(\Sigma)'\Big]}{(\Lambda_t\Delta_t\Sigma)^2} + \frac{(\Sigma)'\Lambda_t - (\Lambda_t)'\Sigma}{\Lambda_t^2\sin^2\theta} \qquad \checkmark$$

$$\boxed{(g^{\phi\phi})' = \frac{-8a^2M^2r\Lambda_t\Delta_t\Sigma + \tilde{\omega}_{\text{fd}}^2\Big[(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma + \Lambda_t(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Lambda_t\Delta_t\Big]}{(\Lambda_t\Delta_t\Sigma)^2} + \frac{2r\Lambda_t - (\Lambda_t)'\Sigma}{\Lambda_t^2\sin^2\theta} \qquad \checkmark}$$

下面开始显式地处理这些表达式：

1. $(\tilde{\omega}_{\text{fd}})'$

   这其实是最简单的一项

   $$\tilde{\omega}_{\text{fd}} = 2aMr \Rightarrow (\tilde{\omega}_{\text{fd}})' = 2a \qquad \checkmark$$

2. $(\Lambda_t)'$

   这一项可以化归为对 Δ_t 的偏导数：

   $$\Lambda_t = (r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\Delta_t \Rightarrow (\Lambda_t)' = 4r(r^2+a^2) - a^2\sin^2\theta(\Delta_t)' \qquad \checkmark$$

3. $(\Sigma)'$

   $$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta \Rightarrow (\Sigma)' = 2r \qquad \checkmark$$

4. $(\Delta_t)'$

   其实这里面就是这一项在捣乱，这一项是一切复杂的根源所在，下面我就来分析它：

   $$\Delta_t(u) = \frac{\Delta_u(u)}{u^2} \Rightarrow (\Delta_t(u))' = 2r\Delta_u - \frac{\partial\Delta_u}{\partial u} \qquad \checkmark$$

   $$\Delta_u = \left[\chi_{\text{Kerr}}^2u^2 + \frac{2u}{\nu K-1} + \frac{1}{(\nu K-1)^2}\right]\left[1 + \nu\Delta_0 + \nu\log\left(1 + \Delta_1\nu + \Delta_2\nu^2 + \Delta_3\nu^3 + \Delta_4\nu^4\right)\right] \qquad \checkmark$$

   下面要做的就是这个东西对 u 求导：

   $$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta_u}{\partial u} = {} & \frac{\nu\left(\Delta_1 + 4\Delta_4u^3 + 3\Delta_3u^2 + 2\Delta_2u\right)\left[\frac{1}{(K\nu-1)^2} + \frac{2u}{K\nu-1} + u^2\chi^2\right]}{\Delta_4u^4 + \Delta_3u^3 + \Delta_2u^2 + \Delta_1u + 1} \\ & + \left(\frac{2}{K\nu-1} + 2u\chi^2\right)\left[\Delta_0\nu + \nu\log\left(\Delta_4u^4 + \Delta_3u^3 + \Delta_2u^2 + \Delta_1u + 1\right) + 1\right] \qquad \checkmark\end{aligned}$$

于是到这里为止所有的导数都已经搞定了！为了写代码更加方便，现在把它们全都整合在一起

$$
\begin{aligned}
q &\equiv \partial_r \beta^\phi = \frac{2aM\Lambda_t - 2aMr(\Lambda_t)'}{\Lambda_t^2} = \frac{2aM}{\Lambda_t}\left(1 - r\frac{\Lambda_t'}{\Lambda_t}\right) \\
b &\equiv \partial_r \alpha = \frac{-1}{2(-g^{tt})^{3/2}} \frac{(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma - \Big[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\Big]\Lambda_t}{(\Delta_t\Sigma)^2} \\
d &= \partial_r \gamma^{\phi\phi} = \partial_r g^{\phi\phi} - \frac{2g^{t\phi}g^{tt}(g^{t\phi})' - (g^{t\phi})^2(g^{tt})'}{(g^{tt})^2} \\
(g^{tt})' &= -\frac{(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma - \Big[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\Big]\Lambda_t}{(\Delta_t\Sigma)^2} \\
(g^{t\phi})' &= \frac{\tilde{\omega}_{\text{fd}}\big[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\Big] - 2aM\Delta_t\Sigma}{(\Delta_t\Sigma)^2} \\
(g^{\phi\phi})' &= \frac{-8a^2M^2r\Lambda_t\Delta_t\Sigma + \tilde{\omega}_{\text{fd}}^2\Big[(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma + \Lambda_t(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Lambda_t\Delta_t\Big]}{(\Lambda_t\Delta_t\Sigma)^2} + \frac{2r\Lambda_t - (\Lambda_t)'\Sigma}{\Lambda_t^2\sin^2\theta} \\
(\Lambda_t)' &= 4r(r^2+a^2) - a^2\sin^2\theta(\Delta_t)' \\
(\Delta_t(u))' &= 2r\Delta_u - \frac{\partial\Delta_u}{\partial u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta_u}{\partial u} = {} & \frac{\nu\left(\Delta_1 + 4\Delta_4u^3 + 3\Delta_3u^2 + 2\Delta_2u\right)\left[\frac{1}{(K\nu-1)^2} + \frac{2u}{K\nu-1} + u^2\chi^2\right]}{\Delta_4u^4 + \Delta_3u^3 + \Delta_2u^2 + \Delta_1u + 1} \\
& + \left(\frac{2}{K\nu - 1} + 2u\chi^2\right)\Big[\Delta_0\nu + \nu\log\left(\Delta_4u^4 + \Delta_3u^3 + \Delta_2u^2 + \Delta_1u + 1\right) + 1\Big]
\end{aligned}
$$

下午的工作就是写这个代码咯，首先把 $(\Lambda_t)', (\Delta_t)'$ 搞定就可以全盘皆活了！已经成功绘制出了图像！

2.12 July 10^{th}

今天的任务首先是把之前所有的内容做一个检查和汇总，虽然图像出来了，但是也并不就是说这一定是正确的了，还是需要小心地验证，上午我主要是考虑做一些理论的计算分析和整合，将整个程序以流程图的形式绘制出来。下午是再一次检查代码，然后考虑用 **Runge-Kutta**4(5) 法进行优化。

输入两黑洞参数

$\downarrow$

人为指定 $\Theta_{max}, \Theta_{min}$

$\downarrow$

计算度规

$\downarrow$

利用守恒条件计算 $\mathcal{H}_{eff}$,$\mathcal{L}$

$\downarrow$

利用守恒条件直接得出 p_θ 并计算 $\dot{\theta}, \dot{\phi}$

$\downarrow$

更新 θ, ϕ

$\downarrow$

更新度规

1. 输入两黑洞参数
   输入两黑洞质量，比如 $m_1 = 1, m_2 = 0.001 \Rightarrow M := m_1 + m_2$。根据这个就可以得到两个非常重要的参数
   $$\mu := \frac{m_1 m_2}{M} \qquad \nu := \frac{\mu}{M}$$
   然后输入自旋 $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$，但是要保证 $|\boldsymbol{S_i}| < m_i$，根据自旋可以计算出 a,χ_{Kerr}

2. 人为指定 $\Theta_{min}, \Theta_{max}$
   指定这两个值是为了下一步利用守恒量计算 $\mathcal{H}_{eff}, \mathcal{L}$

3. 计算度规
   $$g^{tt} = -\frac{\Lambda_t}{\Delta_t \Sigma} \qquad \checkmark$$
   $$g^{rr} = \frac{\Delta_r}{\Sigma} \qquad \checkmark$$
   $$g^{\theta\theta} = \frac{1}{\Sigma} \qquad \checkmark$$
   $$g^{\phi\phi} = \frac{1}{\Lambda_t}\Big(-\frac{\tilde{\omega}_{fd}^2}{\Delta_t \Sigma} + \frac{\Sigma}{\sin^2\theta}\Big) \qquad \checkmark$$
   $$g^{t\phi} = -\frac{\tilde{\omega}_{fd}}{\Delta_t \Sigma} \qquad \checkmark$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g^{tt}}}$$

$$\beta^i = \frac{g^{ti}}{g^{tt}}$$

$$\gamma^{ij} = g^{ij} - \frac{g^{ti}g^{tj}}{g^{tt}}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\varpi^2 = r^2 + a^2$$

$$\Lambda_t = \varpi^4 - a^2\Delta_t \sin^2\theta$$

$$D^{-1}(u) = 1 + \log(1 + 6\nu u^2 + 2(26 - 3\nu)\nu u^3)$$

$$\bar{\Delta}_u(u) = \chi^2 u^2 + \frac{2u}{\nu K - 1} + \frac{1}{(\nu K - 1)^2}$$

$$\Delta_u(u) = \bar{\Delta}_u(u)\Big[1 + \nu\Delta_0 + \nu\log(1 + \Delta_1 u + \Delta_2 u^2 + \Delta_3 u^3 + \Delta_4 u^4)\Big]$$

$$\Delta_t(u) = \frac{\Delta_u(u)}{u^2}$$

$$\Delta_r(u) = \Delta_t(u)D^{-1}(u)$$

$$\tilde{\omega}_{fd} = 2aMr + \omega_1\nu\frac{aM^3}{r} + \omega_2\nu\frac{Ma^3}{r}$$

$$K = 1.4467 \times (1 - 4\nu)^2 + 4(1 - 2\nu)\nu$$

$$\Delta_0 = K(\nu K - 2)$$

$$\Delta_1 = -2(\nu K - 1)(K + \Delta_0)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\Delta_1(-4\nu K + \Delta_1 + 4) - \frac{a^2}{M^2}(\nu K - 1)^2\Delta_0$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{3}\Big[-\Delta_1^3 + 3(\nu K - 1)\Delta_1^2 + 3\Delta_2\Delta_1 - 6(\nu K - 1)\times(-\nu K + \Delta_2 + 1) - 3\frac{a^2}{M^2}(\nu K - 1)^2\Delta_1\Big]$$

$$\begin{aligned}\Delta_4 = \frac{1}{12}\Big\{&6\frac{a^2}{M^2}(\Delta_1^2 - 2\Delta_2)(\nu K - 1)^2 + 3\Delta_1^4 - 8(\nu K - 1)\Delta_1^3 - 12\Delta_2\Delta_1^2 + 12[2(\nu K - 1)\Delta_2 + \Delta_3]\Delta_1 \\ &+12\Big(\frac{94}{3} - \frac{41}{32}\pi^2\Big)(\nu K - 1)^2 + 6[\Delta_2^2 - 4\Delta_3(\nu K - 1)]\Big\}\end{aligned}$$

4. 计算 $\mathcal{L}, \mathcal{H}_{eff}$

第一步需要利用我们设置的 $\Theta_{min}, \Theta_{max}$ 来计算出 $p_\phi = const \equiv \mathcal{L}$

$$q \equiv \partial_r\beta^\phi\Big|_{\theta_-}, b \equiv \partial_r\alpha\Big|_{\theta_-}, c \equiv \gamma^{\phi\phi}\Big|_{\theta_-}, d \equiv \partial_r\gamma^{\phi\phi}\Big|_{\theta_-}$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{2b^2}{q^2 - 2b^2c - bd\alpha + \sqrt{q^4 - 2q^2bd\alpha}}}$$

$$E \equiv \mathcal{H}_{eff} = \beta_1(\theta_-)\mathcal{L} + \alpha_1(\theta_-)\sqrt{1 + \gamma_1(\theta_-)\mathcal{L}^2} = const$$

$$p_\theta = \pm\sqrt{\frac{\left(\frac{E - \beta^\phi(\theta)\mathcal{L}}{\alpha(\theta)}\right)^2 - \gamma^{\phi\phi}(\theta)\mathcal{L}^2 - 1}{\gamma^{\theta\theta}}} = \frac{\pm}{\alpha}\sqrt{\frac{(E - \beta L)^2 - \alpha^2(1 + \gamma^{\phi\phi}L^2)}{\gamma^{\theta\theta}}}$$

$$q \equiv \partial_r \beta^\phi = \frac{2aM\Lambda_t - 2aMr(\Lambda_t)'}{\Lambda_t^2} = \frac{2aM}{\Lambda_t}\left(1 - r\frac{\Lambda_t'}{\Lambda_t}\right)$$

$$b \equiv \partial_r \alpha = \frac{1}{2(-g^{tt})^{3/2}} \frac{\left[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\right]\Lambda_t - (\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma}{(\Delta_t\Sigma)^2}$$

$$d = \partial_r \gamma^{\phi\phi} = \partial_r g^{\phi\phi} - \frac{2g^{t\phi}g^{tt}(g^{t\phi})' - (g^{t\phi})^2(g^{tt})'}{(g^{tt})^2}$$

$$(g^{tt})' = \frac{\left[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\right]\Lambda_t - (\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma}{(\Delta_t\Sigma)^2}$$

$$(g^{t\phi})' = \frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{fd}}\left[(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Delta_t\right] - 2aM\Delta_t\Sigma}{(\Delta_t\Sigma)^2}$$

$$(g^{\phi\phi})' = \frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{fd}}^2\left[(\Lambda_t)'\Delta_t\Sigma + \Lambda_t(\Delta_t)'\Sigma + 2r\Lambda_t\Delta_t\right] - 8a^2M^2r\Lambda_t\Delta_t\Sigma}{(\Lambda_t\Delta_t\Sigma)^2} + \frac{2r\Lambda_t - (\Lambda_t)'\Sigma}{\Lambda_t^2\sin^2\theta}$$

$$(\Lambda_t)' = 4r(r^2+a^2) - a^2\sin^2\theta(\Delta_t)'$$

$$(\Delta_t(u))' = 2r\Delta_u - \frac{\partial \Delta_u}{\partial u}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta_u}{\partial u} &= \frac{\nu\left(\Delta_1 + 4\Delta_4 u^3 + 3\Delta_3 u^2 + 2\Delta_2 u\right)\left[\frac{1}{(K\nu-1)^2} + \frac{2u}{K\nu-1} + u^2\chi^2\right]}{\Delta_4 u^4 + \Delta_3 u^3 + \Delta_2 u^2 + \Delta_1 u + 1} \\ &\quad + \left(\frac{2}{K\nu-1} + 2u\chi^2\right)\left[\Delta_0\nu + \nu\log\left(\Delta_4 u^4 + \Delta_3 u^3 + \Delta_2 u^2 + \Delta_1 u + 1\right) + 1\right]\end{aligned}$$

5 利用哈密顿正则方程得到演化的微分方程

$$\dot{\theta} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\mathrm{real}} + M)} \frac{\alpha\gamma^{\theta\theta}p_\theta}{\sqrt{1 + \gamma^{\theta\theta}p_\theta^2 + \gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}}$$

$$\dot{\phi} = \frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\mathrm{real}} + M)}\left[\beta^\phi + \frac{\alpha\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}}{\sqrt{1 + \gamma^{\theta\theta}p_\theta^2 + \gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}}\right]$$

可以发现这里其实完全没有涉及到导数了，本质上只要知道目前所在的位置就可以求出度规和 p_θ，演化方程非常容易处理。

经过测试发现代码还是有问题，当我取 $\Theta_{min} = \Theta_{max} = \frac{\pi}{2}$ 的时候，轨道出现了之前那样的一种塌缩的现象。

我现在准备基本全用 **Mathematica** 来计算，避免出现错误，首先可以明确的是出错的大概率是在几个对 α, β, γ 求导的时候出现的。最后得到角动量的那个根式一定是对的。下面列出 **Mathematica** 给出的结果：

$$\frac{\partial \beta^\phi}{\partial r} = \frac{2aM\left[a^2\cos^2(\theta) + \left(a^2 - 3r^2\right)\left(a^2 + r^2\right)\right]}{\left[a^2\cos^2(\theta) + \left(a^2 + r^2\right)^2\right]^2}$$

2.13 July 11^{th}

功夫不负有心人啊，终于是解决了问题，首先是把我的方法的所有项全都检查了一遍，发现是没有问题的，然后我开始怀疑是 K 的取值的问题，后来发现应该是没问题的。之后我改了张晨师兄的代码，发现不管是能量也好还是角动量也好，都是对得上的。那基本确定代码的前半部分是没有问题的了，那么接下去要做的就是利用微分方程进行迭代更新了，但是碰到一个问题就是**如果我直接希望利用能量守恒去计算出 p_θ 的话我一定会碰到开根号的问题，但是理论上在 θ 极值点的时候 p_θ 极其小，极其趋近于 0，对于计算机来说很有可能计算出一个很小的负数导致 NAN**。**因此这个方法是行不通的**。**最好的办法还是直接利用哈密顿正则方程去求出 p_θ 演化的规律**。理论上：

$$p_\theta = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{(E-\beta^\phi\mathcal{L})^2-\alpha^2(\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2-1)}{\gamma^{\theta\theta}}}$$

这种做法对于计算机而言是行不通的，本来我是希望通过定义一个 $\epsilon \ll 1$ 来判断什么时候 p_θ 取正号，什么时候取负号，但是这种方法必然导致轨迹是不连续的，在 $\Theta_{\text{max}},\Theta_{\text{min}}$ 的时候轨迹会出现非常尖锐的形状，因此这种方法会带来两个问题，一是可能出现十分小的负数无法开方，二是边界处十分难处理。想要解决这两个问题是十分困难的，因此不如不用这种方式去计算 p_θ，直接采用：

$$\dot{p_\theta} = -\frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\frac{\partial\beta^\phi}{\partial\theta}\mathcal{J}+\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}+\frac{\alpha\left(\frac{\partial\gamma^{\theta\theta}}{\partial\theta}p_\theta^2+\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial\theta}\mathcal{J}^2\right)}{2\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{J}^2}}\right]$$

这里不涉及什么危险的开根号，因此是一定安全而且准确的。下面我要考虑利用 **Runge-Kutta** 方法进行微分方程的优化了。

2.14 July 12^{th}

我今天的任务就是完成用 **RTF48** 方法求解微分方程组的代码优化工作。如果这个工作能够顺利展开，那么最后的代码应该会更加简洁漂亮，之后就是需要考虑引入那些复杂的自旋量了，这应该会比较难，加油！

我似乎理解错了 **Runge-Kutta** 方法？定义里给的情况是：

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

然后再去讨论变化 x 和 y 情况下不同的导数。但是我目前的情况是这样的：

$$\dot{p_\theta} = f_1(\theta,p_\theta)$$
$$\dot{\theta} = f_2(\theta,p_\theta)$$
$$\dot{\phi} = f_3(\theta,p_\theta)$$

因此我认为更新应该是这样的一个过程：

$$\begin{cases}
K_{p_{\theta_1}} = f_1(\theta,p_\theta) & K_{\theta_1} = f_2(\theta,p_\theta) & K_{\theta_3} = f_3(\theta,p_\theta) \\
K_{p_{\theta_2}} = f_1\Big(\theta+\frac{h}{2}K_{\theta_1},p_\theta+\frac{h}{2}K_{p_{\theta_1}}\Big) & K_{\theta_2} = f_2\Big(\theta+\frac{h}{2}K_{\theta_1},p_\theta+\frac{h}{2}K_{p_{\theta_1}}\Big) & K_{\phi_2} = f_3\Big(\theta+\frac{h}{2}K_{\theta_1},p_\theta+\frac{h}{2}K_{p_{\theta_1}}\Big) \\
K_{p_{\theta_3}} = f_1\Big(\theta+\frac{h}{2}K_{\theta_2},p_\theta+\frac{h}{2}K_{p_{\theta_2}}\Big) & K_{\theta_3} = f_2\Big(\theta+\frac{h}{2}K_{\theta_2},p_\theta+\frac{h}{2}K_{p_{\theta_2}}\Big) & K_{\phi_3} = f_3\Big(\theta+\frac{h}{2}K_{\theta_2},p_\theta+\frac{h}{2}K_{p_{\theta_2}}\Big) \\
K_{p_{\theta_4}} = f_1\Big(\theta+hK_{\theta_3},p_\theta+hK_{p_{\theta_3}}\Big) & K_{\theta_4} = f_2\Big(\theta+hK_{\theta_3},p_\theta+hK_{p_{\theta_3}}\Big) & K_{\phi_4} = f_3\Big(\theta+hK_{\theta_3},p_\theta+hK_{p_{\theta_3}}\Big)
\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
p_\theta &:= p_\theta + \frac{h}{6}(K_{p_{\theta_1}} + 2K_{p_{\theta_2}} + 2K_{p_{\theta_3}} + K_{p_{\theta_4}}) \\
\theta &:= \theta + \frac{h}{6}(K_{\theta_1} + 2K_{\theta_2} + 2K_{\theta_3} + K_{\theta_4}) \\
\phi &:= \phi + \frac{h}{6}(K_{\phi_1} + 2K_{\phi_2} + 2K_{\phi_3} + K_{\phi_4})
\end{aligned}
$$

我用 **RK4** 跑了一下代码发现结果是非常精彩的，应该说比原来的 **Euler Method** 的结果好了非常非常多。下面我的工作是把 **RK4** 再一次升级为 **RKF45**。算法描述如下：

Algorithm 1 RKF45

set $w_0 = \alpha$

$k_1 = hf(t_i, w_i)$

$k_2 = hf\Big(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{k_1}{4}\Big)$

$k_3 = hf\Big(t_i + \frac{3h}{8}, w_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\Big)$

$k_4 = hf\Big(t_i + \frac{12h}{13}, w_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\Big)$

$k_5 = hf\Big(t_i + h, w_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\Big)$

$k_6 = hf\Big(t_i + \frac{h}{2}, w_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\Big)$

$w_{i+1} = w_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$

$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12858}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$

$R = \frac{1}{h}|\tilde{w}_{i+1} - w_{i+1}|$

$\delta = 0.84\Big(\frac{\epsilon}{R}\Big)^{1/4}$

if $R \le \epsilon$ **then**

  keep w as the current step solution and move to the next step with step size δh

else

  recalculate the current step with step size δh

end if

上面这种应该是比较纯正的 **RKF45** 方法，但是对于微分方程组而言我觉得其实并不好处理，这个自适应反而不是一个好现象。下面我有找到了一个比较容易处理的一种 **RK45** 方法。

我完成了 **RK45** 的代码编写，跑出来的结果也是非常振奋人心的，今天可以说是顺利完成了自己安排的任务。那么阶段性地总结一下我两周以来的成果吧：第一周我花了很多时间去尝试理解，然后写了第一版本非常错误的代码，当时没有认识到初值的取值方法，之后找到了很多条错误的途径，最终发现了错误，完成了代码的编写。明天组会后应该要和老师交流下一步的工作是什么，是完善这个代码加上那些多余的项还是考虑要开始计算波形了？

2.15 July 13th

今天应该是我实习的第 15 天了，今天早上的目标就是能够加入那些被我忽略的项，然后尝试考虑了所有的项之后仍然能够运行代码，现在开始尝试！直观的感受是这实在是太难了，基本就不可能实现呀。但是我们

Algorithm 2 adaptive RK45

Given $t_0, t_f, x_0, h_0, n_{max}, e_{min}, e_{max}, h_{min}, h_{max}$
Set $h = h_0, t = t_0, x_0 = x_0, k = 0$
while $(k < n_{max}$ and $t < t_f)$ **do**
  if $h > h_{max}$ **then**
    $h = h_{max}$
  end if
  Compute RKF4,RKF5, and $e = |RKF4 - RKF5|$
  if $(e > e_{max}$ and $h > h_{min})$ **then**
    $h = h/2$;(reject the step)
  else
    $k = k+1; t = t+h; x_k = RKF5$
  end if
  if $e < e_{min}$ **then**
    $h = 2h$
  end if
end while

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{SO}} = {} & \frac{e^{2\nu-\tilde{\mu}}(e^{\tilde{\mu}+\nu}-\tilde{B})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{Kerr}})}{\tilde{B}^2\sqrt{Q}\xi^2} + \frac{e^{\nu-2\tilde{\mu}}}{\tilde{B}^2(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{J}[\mu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\sqrt{Q}+1) - \mu_{\cos\theta}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2 \\
& - \sqrt{Q}(\nu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r) + (\mu_{\cos\theta}-\nu_{\cos\theta})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2)]\tilde{B}^2 + e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(2\sqrt{Q}+1)[\tilde{J}\nu_r(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}) - \nu_{\cos\theta}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2]\tilde{B} \\
& - \tilde{J}\tilde{B}_r e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\sqrt{Q}+1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\},
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

and

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{SS}} = {} & \omega(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{Kerr}}) + \frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\tilde{J}\omega_r}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\{-e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B} + e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}) \\
& + e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\xi^2\tilde{B}^2 + \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})[(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})]\xi^2\tilde{B}^2\} \\
& + \frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\omega_{\cos\theta}}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}}\{-e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) + e^{\tilde{\mu}+\nu}\tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B} \\
& + [(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)^2 - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r) - e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2]\tilde{B}^2\},
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

尝试着拆分目标，把这一大堆的东西拆分着来看。首先熟悉明确一下物理量：

$$
\begin{aligned}
&\omega=\frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{fd}}}{\Lambda_t}\\
&e^{2\nu}=\frac{\Delta_t\Sigma}{\Lambda_t}\\
&B_r=\frac{\sqrt{\Delta_r}\Delta_t'-2\Delta_t}{2\sqrt{\Delta_r\Delta_t}R}\\
&\omega_r=\frac{-\Lambda_t'\tilde{\omega}_{\mathrm{fd}}+\Lambda_t\tilde{\omega}_{\mathrm{fd}}'}{\Lambda_t^2}\\
&\nu_r=\frac{r}{\Sigma}+\frac{\varpi^2(\varpi^2\Delta_t'-4r\Delta_t)}{2\Lambda_t\Delta_t}\\
&\mu_r=\frac{r}{\Sigma}-\frac{1}{\sqrt{\Delta_r}}\\
&B_{\cos\theta}=0\\
&\omega_{\cos\theta}=-\frac{2a^2\cos\theta\Delta_t\tilde{\omega}_{\mathrm{fd}}}{\Lambda_t^2}\\
&\nu_{\cos\theta}=\frac{a^2\varpi^2\cos(\varpi^2-\Delta_t)}{\Lambda_t\Sigma}\\
&\mu_{\cos\theta}=\frac{a^2\cos\theta}{\Sigma}\\
&\tilde{B}=BR=\sqrt{\Delta_t}\\
&\tilde{B}_r=B_rR=\frac{\sqrt{\Delta_r}\Delta_t'-2\Delta_t}{2\sqrt{\Delta_r\Delta_t}}\\
&e^{2\tilde{\mu}}=e^{2\mu}R^2=\Sigma\\
&\tilde{J}=JR=\sqrt{\Delta_r}\\
&Q:=1+\frac{\Delta_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})^2}{\Sigma}+\frac{(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2\Sigma}{\Lambda_t\sin^2\theta}+\frac{(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)^2}{\Sigma\sin^2\theta}\\
&\xi^2=\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

首先思考一下如果全部处理妥当了，把这些项加进我的哈密顿里会得到什么结果呢？首先由于角动量是我通过 $\dot{p}_r=0$ 计算出来的，因此角动量的表达式显然就变了，其次我用来更新的微分方程本质上还是通过对哈密顿量求导得到的，因此如果改变了哈密顿量那么微分方程也需要修改，不过好消息是基本碰到的方程都是线性的，除了角动量可能难以处理一些，其他的地方都只需要线性叠加上新的要处理的项即可。不过 $\mathcal{Q}_4$ 确实是一个非常难以处理的项，而且它本身就在根号里面。假如我先不考虑 $\mathcal{Q}_4$ 这一项，只考虑另外的三项的话现在碰到了几个问题如下：

$$\Delta_\sigma^{(1)},\Delta_\sigma^{(2)}$$

的表达式实在是太过于复杂，其次是出现了一些我暂时不清楚如何处理的项：

$$a_0,b_0,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n},\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r,\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r,r^ir^jS_i^*S_j^*$$

那么我今天给自己定一个小目标就是说我能够理解这些式子在表达什么意思，我应该如何写代码去实现它们，别的就先不管，今天就争取能把这些东西搞清楚，吃透。我分几个部分去考虑这个问题吧：

1. $r^ir^jS_i^*S_j^*$

   由于这个量本质上是一个标量与我选择的坐标系显然是无关的，我没有必要去用球坐标系，完全可以采

用 *Cartesian* 坐标也就是说处理的问题变为了：

$$\Big\{r,\theta,\phi\Big\}\cdot\Big\{S_r,S_\theta,S_\phi\Big\}\Longrightarrow\Big\{x,y,z\Big\}\cdot\Big\{S_x,S_y,S_z\Big\}$$

由于我们不考虑自旋和轨道角动量方向存在夹角，也就是仅仅考虑自旋向上或者自旋向下的简单情况，那么问题就进一步简化为了：

$$\Big\{x,y,z\Big\}\cdot\Big\{S_x,S_y,S_z\Big\}\Longrightarrow\Big\{0,0,r\cos\theta\Big\}\cdot\Big\{0,0,S\Big\}=Sr\cos\theta$$

在进一步考虑我们要处理的式子本身：

$$r^ir^jS_i^*S_j^*=r^iS_i^*r^jS_j^*=r^2\cos^2\theta(S^*)^2$$

我刚才还在思考为啥不直接写成平方的形式，现在看了一下因为这本身就是描述的自旋和自旋的耦合，其实是最微弱的一项，那么这项如何处理已经非常明了了，我把整个式子写出来就是

$$-\frac{1}{2Mr^5}(r^2\delta^{ij}-3r^ir^j)S_i^*S_j^*=-\frac{1}{2Mr^5}\Big[r^2(S^*)^2-3r^2\cos^2\theta(S^*)^2\Big]$$

$$\Rightarrow \mathrm{LHS}=-\frac{1}{2Mr^5}\Big[(r^2-3r^2\cos^2\theta)(S^*)^2\Big]=-\frac{1}{2Mr^3}\Big[(1-3\cos^2\theta)(S^*)^2\Big]$$

那么这个东西处理起来基本就是没有难度的了。但是看起来虽然简单，实际上还是要考虑复杂的自旋项，两个 $\Delta_\sigma^{(1)},\Delta_\sigma^{(2)}$ 简直是噩梦的来源。当然了，在另一篇文献中给出的一个算式更加印证了我的计算是正确的，参考文献 35 中给出的表达式为：

$$-\frac{\mu}{2Mr^3}\Big[\delta^{ij}-3n^in^j\Big]S_i^*S_j^*$$

而这个结果实际上是和我之前计算的相同的。

2. $\mathcal{Q}_4$

这一项我觉得非常诡异，目前找到的所有文献里都说是参考文献 11 里给了表达式，但是我看来看去没有发现，大概是因为是最原始的文章，我没有了解背景还没办法搞明白，但是我可以发现在参考文献 12 里给了 2 个 $\mathcal{Q}_4$ 的具体的表达式，这个放到最后去考虑，等到把更加重要的 $\Delta_\sigma^{(1)},\Delta_\sigma^{(2)},S_1^*,S_2^*$ 搞清楚再集中精力考虑 $\mathcal{Q}_4$。刚才和张晨师兄讨论了一下，结果却是就是在这第 12 篇参考文献中给出的，现在可以仔细查看一下。文章里给出了显式的表达式：

$$\mathcal{Q}_4=\frac{2}{\mu^2}(4-3\nu)\nu\frac{(GM)^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^4$$

这里的 4 次方也就是 $\mathcal{Q}_4$ 的由来，当然了如果用自然单位制那分子处的 $G=1$，这里留有疑问的项也只剩下了 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 其实是位矢的单位矢量：

$$n^i\equiv\frac{x^i}{r}\Longrightarrow\boldsymbol{n}=\Big\{\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta\Big\}$$

当然了，文章里还定义了

$$\hat{p}_i\equiv\frac{p_i}{\mu},\hat{u}_\rho\equiv\frac{GM}{\sqrt{\rho^2}}$$

实际上这里的 $\hat{p}_i$ 就是我用的 p_i，那么考虑了 $\mathcal{Q}_4$ 之后的 H_{NS} 就表示为：

$$H_{\text{NS}}=\beta^ip_i+\alpha\sqrt{1+\gamma^{ij}p_ip_j+2(4-3\nu)\nu\hat{u}_\rho^2(n^ip_i)^4-1}$$

这个其实并不难处理其中的内积为：

$$n^i p_i = n^r p_r + n^\theta p_\theta + n^\varphi p_\varphi$$

那对于我的圆轨道而言就是没有 $p_r = 0$ 而且 $p_\phi \equiv \mathcal{L} = \text{const}$ 因此处理起来其实也很方便这一项就成了：

$$\mathcal{Q}_4 = \frac{2(4-3\nu)\nu M^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\Big(n^\theta p_\theta + n^\varphi \mathcal{L}\Big)^4 = \frac{2(4-3\nu)\nu M^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\Big(\sin\theta\sin\varphi p_\theta + \cos\theta\mathcal{L}\Big)^4$$

这一项其实处理起来并没有那么困难，是可以解决的问题。

3. $\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{n}}$
   这两个问题其实在尝试解决 $\mathcal{Q}_4$ 这个问题的时候已经搞清楚了，这只是简单的一个变换：

$$\hat{p}_i \equiv \frac{p_i}{\mu} \qquad \hat{\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

   本质上这里定义的 $\hat{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}}$ 就是我用的 p_i

4. $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \times \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\xi}$$

   对于我考虑的自旋仅仅是向上或者向下的简单情况而言：

$$\boldsymbol{\xi} = \Big\{0, 0, \pm 1\Big\} \times \Big\{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\Big\} = \Big\{\mp\sin\theta\sin\varphi, \pm\sin\theta\cos\varphi, 0\Big\}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\times(\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}}\times\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} - (\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}})\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} - \boldsymbol{n}\cos\theta = \Big\{-\sin\theta\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta\cos\theta\sin\varphi, \pm 1 - \cos^2\theta\Big\}$$

2.16 July 14^{th}

早上划水的时候背了单词，并且弄明白了如何给 *gfortran* 编译出来的文件命名的方式只需要用如下语法即可：

gfortran EOB.f90 -o EOB

今天的任务就是能够彻底拎清楚完整的哈密顿量的计算方式，特别是搞清楚 $H_{\text{SO}}, H_{\text{SS}}$ 的具体计算方式，之后在求具体方程的时候需要做偏微分，但是老师说这个偏微分可以用差分代替没有必要老老实实地把一长串东西的偏微分都搞出来，那样会很复杂。

昨天基本上是把所有的物理量已经搞明白了，下面就可以去考虑这两个量本身了。其中还出现了

$$\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \equiv \frac{\boldsymbol{S}_{\text{Kerr}}}{|\boldsymbol{S}_{\text{Kerr}}|}$$

公式里还提到了 $\boldsymbol{S}$ 那显然就是等效单体的自旋了。一眼看过去物理量基本已经清晰了。我把他们全部罗列出来：

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}_{\text{fd}}}{\Lambda_t}$$
$$e^{2\nu} = \frac{\Delta_t \Sigma}{\Lambda_t}$$
$$B_r = \frac{\sqrt{\Delta_r}\Delta_t' - 2\Delta_t}{2\sqrt{\Delta_r \Delta_t}R}$$
$$\omega_r = \frac{-\Lambda_t' \tilde{\omega}_{\text{fd}} + \Lambda_t \tilde{\omega}_{\text{fd}}'}{\Lambda_t^2}$$
$$\nu_r = \frac{r}{\Sigma} + \frac{\varpi^2(\varpi^2 \Delta_t' - 4r\Delta_t)}{2\Lambda_t \Delta_t}$$
$$\mu_r = \frac{r}{\Sigma} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_r}}$$
$$B_{\cos\theta} = 0$$
$$\omega_{\cos\theta} = -\frac{2a^2 \cos\theta \Delta_t \tilde{\omega}_{\text{fd}}}{\Lambda_t^2}$$
$$\nu_{\cos\theta} = \frac{a^2 \varpi^2 \cos(\varpi^2 - \Delta_t)}{\Lambda_t \Sigma}$$
$$\mu_{\cos\theta} = \frac{a^2 \cos\theta}{\Sigma}$$
$$\tilde{B} = BR = \sqrt{\Delta_t}$$
$$\tilde{B}_r = B_r R = \frac{\sqrt{\Delta_r}\Delta_t' - 2\Delta_t}{2\sqrt{\Delta_r \Delta_t}}$$
$$e^{2\tilde{\mu}} = e^{2\mu} R^2 = \Sigma$$
$$\tilde{J} = JR = \sqrt{\Delta_r}$$
$$Q := 1 + \frac{\Delta_r (\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{n})^2}{\Sigma} + \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\xi} r)^2 \Sigma}{\Lambda_t \sin^2\theta} + \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{v} r)^2}{\Sigma \sin^2\theta}$$
$$\xi^2 = \sin^2\theta$$
$$\mathcal{Q}_4 = \frac{2(4-3\nu)\nu M^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(n^\theta p_\theta + n^\varphi \mathcal{L}\right)^4 = \frac{2(4-3\nu)\nu M^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(\sin\theta \sin\varphi p_\theta + \cos\theta \mathcal{L}\right)^4$$
$$\underbrace{\hat{p}_i \equiv \frac{p_i}{\mu}} \qquad\qquad \hat{\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

Just p_i what I used

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \times \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\xi}$$
$$\boldsymbol{\xi} = \left\{0, 0, \pm 1\right\} \times \left\{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right\} = \left\{\mp\sin\theta\sin\varphi, \pm\sin\theta\cos\varphi, 0\right\}$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times (\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \times \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} - (\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}})\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} - \boldsymbol{n}\cos\theta$$
$$= \left\{-\sin\theta\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta\cos\theta\sin\varphi, \pm 1 - \cos^2\theta\right\}$$
$$\xi^2 = \sin^2\theta$$
$$\cos\theta = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \cdot \boldsymbol{n}$$

看了一下公式有一个好的消息，就是那些导数我之前已经算过了，所以这次就不需要再手算了，现在的目标就只剩下把 $\boldsymbol{S}$ 搞出来了。但是我回看了一下原文发现我之前对 $\mathcal{Q}_4$ 的选取可能是有问题的，文章里用到的表达

式是：

$$\mathcal{Q}_4 \propto \frac{p_{r*}^4}{r^2}(r^2+\chi_{\text{Kerr}}^2)^4$$

好像有点对不上，没关系，我先思考 $\boldsymbol{S}$，回过头来最后思考这个问题。

$$\boldsymbol{S}^* = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2 + \Delta_{\sigma^*}^{(1)} + \Delta_{\sigma^*}^{(2)} + \Delta_{\sigma^*}^{(3)}$$

其中

$$\Delta_{\sigma^*}^{(1)}, \Delta_{\sigma^*}^{(2)} \Longrightarrow \text{Ref[34,35]}$$

$$\Delta_{\sigma^*}^{(3)} = \frac{d_{\text{SO}}\nu}{r^3}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\Big)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)} =& \boldsymbol{\sigma}^*\left[\frac{1}{6}\left(-4b_0+7\eta\right)\frac{M}{r}+\frac{1}{3}\left(2b_0+\eta\right)(Q-1)-\frac{1}{2}\left(4b_0+5\eta\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]+\boldsymbol{\sigma}\left[-\frac{2}{3}\left(a_0+\eta\right)\frac{M}{r}\right.\\ &\left.+\frac{1}{12}\left(8a_0+3\eta\right)(Q-1)-\left(2a_0+3\eta\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)} =& \boldsymbol{\sigma}^*\left[\frac{1}{36}\left(-56b_0-24b_2+353\eta-60b_0\eta-27\eta^2\right)\left(\frac{M}{r}\right)^2+\frac{5}{3}\left(-2b_3+3b_0\eta+3\eta^2\right)\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4\right.\\ &+\frac{1}{72}\left(-4b_0+48b_1-23\eta-12b_0\eta-3\eta^2\right)(Q-1)^2+\frac{1}{36}\left(-14b_0-24b_1+24b_2-103\eta+66b_0\eta+60\eta^2\right)\frac{M}{r}(Q-1)\\ &+\frac{1}{12}\left(2b_0-24b_1+24b_3+16\eta-30b_0\eta-21\eta^2\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1)+\frac{1}{12}\left(-24b_0-16b_1-32b_2\right.\\ &\left.\left.-24b_3+47\eta-24b_0\eta-54\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]+\boldsymbol{\sigma}\left[\frac{1}{9}\left(-14a_0-6a_2-56\eta-15a_0\eta-21\eta^2\right)\left(\frac{M}{r}\right)^2\right.\\ &+\frac{5}{24}\left(-16a_3+24a_0\eta+27\eta^2\right)\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4+\frac{1}{144}\left(-8a_0+96a_1-45\eta-24a_0\eta\right)(Q-1)^2\\ &+\frac{1}{36}\left(-14a_0-24a_1+24a_2-109\eta+66a_0\eta+51\eta^2\right)\frac{M}{r}(Q-1)+\frac{1}{24}\left(4a_0-48a_1+48a_3+6\eta-60a_0\eta\right.\\ &\left.\left.-39\eta^2\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1)+\frac{1}{24}\left(-48a_0-32a_1-64a_2-48a_3-16\eta-48a_0\eta-147\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]\end{aligned}$$

这里再一次出现了无数的变量，提到了 $\boldsymbol{\sigma}^*$, 还有一大堆的 a, b，接下去就要搞明白这些是啥玩意儿。

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2 \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$$

这个是简单的而且显然的。公式里的其他 a_i, b_i 都是 *gauge parameter*，它们都是由于正则变换做映射而引入的量，但是在我读的这篇文章里提到了如果可以做到任意阶的后牛顿展开这些规范参数就没有存在的必要，但是正是因为我们做不到任意阶的展开，因此说这些参数有存在的价值，可以反映出真实的物理，但是在这篇文章里提到了，把所有的参数都设为 0，同时引入一个 4.5**PN** 项。如果把所有的规范参数都设为 0 那么会得到如下的结果：

$$\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}^*\left[\frac{7}{6}\eta\frac{M}{r}+\frac{\eta}{3}(Q-1)-\frac{5}{2}\eta\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]+\boldsymbol{\sigma}\left[-\frac{2}{3}\eta\frac{M}{r}+\frac{1}{4}\eta(Q-1)-3\eta\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)} = \quad & \boldsymbol{\sigma}^*\Bigg[\frac{1}{36}(353\eta-27\eta^2)\Big(\frac{M}{r}\Big)^2+5\eta^2\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4-\frac{1}{72}(23\eta-3\eta^2)(Q-1)^2+\frac{1}{36}(-103\eta+60\eta^2)\frac{M}{r}(Q-1) \\ & +\frac{1}{12}(16-21\eta^2)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1)+\frac{1}{12}\left(47\eta-54\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\Bigg]+ \\ & \boldsymbol{\sigma}\left[\frac{1}{9}\left(-56\eta-21\eta^2\right)\left(\frac{M}{r}\right)^2+\frac{45}{8}\eta^2\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4-\frac{5}{16}\eta(Q-1)^2+\frac{1}{36}\left(-109\eta+51\eta^2\right)\frac{M}{r}(Q-1)\right. \\ & \left.+\frac{1}{8}\left(2\eta-13\eta^2\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1)+\frac{1}{24}\left(-16\eta-147\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]\end{aligned}$$

那么这个东西就搞定了。如果我对文章里的意思没有曲解的话，把所有 *gauge parameter* 设为 0，用增加的一项来弥补。但是目前萦绕在上空的还是有两个诡异的可调参数没有露出真容：

$$\Delta_{\sigma^*}^{(3)}=\frac{d_{\mathrm{SO}}\nu}{r^3}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1+\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\Big)$$

以及

$$\frac{d_{\mathrm{SS}}\nu}{r^4}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1+\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\Big)\cdot\Big(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2\Big)$$

这两个修正项中的 $d_{\mathrm{SS}}, d_{\mathrm{SO}}$ 一直没有找到。在下文里我找到了：

$$d_{\mathrm{SS}}=2.75, d_{\mathrm{SO}}=-69.5$$

那么这样的话我们就得到了 $\boldsymbol{S}^*$

$$\boldsymbol{S}^*=\boldsymbol{\sigma}^*+\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)}+\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)}+\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(3)}$$

根据参考文献 34，在这篇文献中既出现了 $\boldsymbol{S}$ 又出现了 $\boldsymbol{S}^*$ 而且在包含自旋的哈密顿量中出现的明确是 $\boldsymbol{S}$，我猜测实际上的关系是：

$$\boldsymbol{S}^*=\frac{M}{\mu}\boldsymbol{S}$$

由于原文中考虑的是试验例子，本身就可以理解为 $m\ll M$ 那么：

$$\boldsymbol{S}^*=\frac{M}{\mu}\boldsymbol{S}=\frac{M}{\frac{mM}{m+M}}\boldsymbol{S}\approx\frac{M}{m}\boldsymbol{S}$$

这么看来我猜测的关系应当是正确的。综上所述我把这一部分的关系全部列出来：

$$\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}^* \left[\frac{7}{6}\eta\frac{M}{r} + \frac{\eta}{3}(Q-1) - \frac{5}{2}\eta\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right] + \boldsymbol{\sigma}\left[-\frac{2}{3}\eta\frac{M}{r} + \frac{1}{4}\eta(Q-1) - 3\eta\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)} =$$

$$\boldsymbol{\sigma}^*\left[\frac{1}{36}(353\eta - 27\eta^2)\left(\frac{M}{r}\right)^2 + 5\eta^2\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4 - \frac{1}{72}(23\eta - 3\eta^2)(Q-1)^2 + \frac{1}{36}(-103\eta + 60\eta^2)\frac{M}{r}(Q-1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}(16 - 21\eta^2)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1) + \frac{1}{12}\left(47\eta - 54\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right] +$$

$$\boldsymbol{\sigma}\left[\frac{1}{9}\left(-56\eta - 21\eta^2\right)\left(\frac{M}{r}\right)^2 + \frac{45}{8}\eta^2\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4 - \frac{5}{16}\eta(Q-1)^2 + \frac{1}{36}\left(-109\eta + 51\eta^2\right)\frac{M}{r}(Q-1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\left(2\eta - 13\eta^2\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1) + \frac{1}{24}\left(-16\eta - 147\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(3)} = \frac{d_{\rm SO}\nu}{r^3}\left(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\right) \qquad d_{\rm SS} = 2.75, d_{\rm SO} = -69.5$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2 \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$$

$$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)} + \boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)} + \boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(3)}$$

$$\boldsymbol{S}^* = \frac{M}{\mu}\boldsymbol{S} = \frac{M}{\frac{mM}{m+M}}\boldsymbol{S} \approx \frac{M}{m}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mu}{M}\boldsymbol{S}^*$$

$$H_{\rm SO} = \frac{e^{2\nu-\tilde{\mu}}\left(e^{\tilde{\mu}+\nu} - \tilde{B}\right)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)\left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\rm Kerr}\right)}{\tilde{\boldsymbol{B}}^2\sqrt{Q}\xi^2} + \frac{e^{\nu-2\tilde{\mu}}}{\tilde{\boldsymbol{B}}^2(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\left\{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{J}\left[\mu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\sqrt{Q}+1) - \mu_{\cos\theta}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{Q}\left(\nu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r) + \left(\mu_{\cos\theta} - \nu_{\cos\theta}\right)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right)\right]\tilde{B}^2 + e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(2\sqrt{Q}+1)\left[\tilde{J}\nu_r(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}) - \nu_{\cos\theta}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right]\tilde{B}$$

$$\left. - \tilde{J}\tilde{B}_r e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\sqrt{Q}+1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\right\}$$

$$H_{\rm SS} = \omega\left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\rm Kerr}\right) + \frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\tilde{J}\omega_r}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\left\{-e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B} + e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\right.$$

$$\left. + e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\xi^2\tilde{B}^2 + \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})[(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})]\xi^2\tilde{B}^2\right\}$$

$$+ \frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\omega_{\cos\theta}}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}}\left\{-e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) + e^{\tilde{\mu}+\nu}\tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B}\right.$$

$$\left. + \left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)^2 - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r) - e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right]\tilde{B}^2\right\}$$

那么现在的话，思路就很清晰了，通过上面的所有关系就可以把 $\boldsymbol{S}$ 给整出来，一旦把 $\boldsymbol{S}$ 整出来就就可以代入 $H_{\rm SO}, H_{\rm SS}$ 之中了。那么这个问题在理论上基本是解决了。下面主要思考 $\mathcal{Q}_4$ 具体的表达式应该如何取。我又看了一下文献 12，发现之前对于文献 12 的理解有些差异。$\mathcal{Q}_4$ 本身的形式应该写为:

$$\mathcal{Q}_4 = \mu^2 2(4-3\nu)\nu\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^4}{r^2 + a^2\cos^2\theta}$$

代入 H_{NS} 的表达式，用我的形式就应该写为：

$$\frac{H_{\text{NS}}}{\mu}=\beta^i p_i+\alpha\sqrt{1+\gamma^{ij}p_ip_j+\frac{2(4-3\nu)\nu}{r^2+a^2\cos^2\theta}(n^ip_i)^4}$$

其实我可以去考虑为了之后代码的通用性让 r 也去演化，我应该可以做到让所有的参数都在演化，但是由于我的限制条件的存在让它们保持不变，这个目标我要作为下一阶段的阶段目标来实现。我的目标是在一周内能够完成**考虑完整哈密顿量的全参数演化圆轨道代码编写**。现在的目标是检查一遍我的参数是否正确，以及我的理解是否正确，同时有没有遗漏什么关键信息。最主要的问题在于我不确定每篇文章用的物理量定义是否相同。我处理的是约化的位矢和动量但是文献 34，35 中好像并不是这么处理的。

在文献 35 中的 r 其实就是我的文章中的 R，那么其实他的文章里的

$$\frac{M}{r}\Longrightarrow\frac{1}{r}=u$$

现在可以确定文献 34 里的 r 也是我的文章里的 R。但是我之前用的度规呢？这个问题我没有考虑到，既然我现在发现了这两篇文章里出现的 r 都是我的文章里的 R 那度规那些分量是怎么回事呢？我先从度规的分量开始检查，度规的分量本身是不包含 r 的，但是那些 *potential* 是包含 r 的。

首先明确一点，两个地方的 u 是一样的，r 确实是不一样的，我可以以 u 作为基准来判断是不是出问题了。那么

$$\bar{\Delta}_u(u)\qquad\Delta_u(u)\qquad\text{相同}$$

而这就导致了文献 34 和我的这篇文章里用的 Δ_t 不同。我的写的是

$$\underbrace{\Delta_t=\frac{1}{u^2}\Delta_u(u)}_{\text{我的}}\qquad\underbrace{\Delta_t=r^2\Delta_u(u)}_{\text{文献 34}}$$

这里的话文献 34 用我的语言翻译过来应该是：

$$\Delta_t(u)=R^2\Delta_u(u)$$

我确定了之前碰到的情况是有问题的，除了我用的这篇文献之外，其他文献中的 r 都是代指我的文献中的 R，而其他文献中会用 $\hat{p}$ 指代我的 p，我看了文献 25 之后更加坚定了这个想法，明天要把这个错误带来的问题给修正并且开始码代码，因为已经明确了除了这篇文章之外其他的都是 R!

2.17 July 15^{th}

今天早上就准备留在宾馆办公了，给自己分配一下任务，九点钟到九点四十听韩老师的讲座，然后今天剩余的时间分成两部分，第一部分用来修改之前的推导过程和之前的计算代码，第二部分就是加上剩余的几个部分的。

首先由于度规本身的形式不牵扯到 r,R 的问题，因此我只需要修改 *potential* 就可以做到修改度规的目的，其次我给出的微分方程恰好是用了各项展开的形式，因此也不会受到太大的影响，只需要修改少数参数即可。

$$\Sigma=R^2+a^2\cos^2\theta$$

$$\varpi^2=R^2+a^2$$

由于两种文献中对于 u 的定义本质上是相同的：

$$u_1 \equiv \frac{1}{r} = \frac{M}{R} \equiv u_2$$

因此仅仅涉及到 u 的 $\Delta_u, \bar{\Delta}_u$ 其实仍然是一样的。但是这样的话，按照文献 34 中的定义就会发现 Δ_t 是发生了本质上的变化的，文献 34 给出的

$$\Delta_t = R^2 \Delta_u(u)$$

因为我的所有度规都是按照文献 34 来的，我理应取文献 34 的形式。因此：

$$\Lambda_t = \varpi^4 - a^2 \Delta_t \sin^2\theta \qquad \Delta_r(u) = \Delta_t D^{-1}(u)$$

也需要作出相应的修正。以及

$$\tilde{\omega}_{\text{fd}} = 2aMR + \omega_{1\text{fd}}\nu\frac{aM^3}{R} + \omega_{2\text{fd}}\nu\frac{Ma^3}{R}$$

如果要改写成我熟悉的形式就应该是：

$$\Sigma = R^2 + a^2\cos^2\theta = M^2r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\varpi^2 = R^2 + a^2 = M^2r^2 + a^2$$

$$\Delta_t = R^2\Delta_u(u) = M^2r^2\Delta_u(u)$$

$$\tilde{\omega}_{\text{fd}} = 2aM^2r + \omega_{1\text{fd}}\nu\frac{aM^2}{r} + \omega_{2\text{fd}}\nu\frac{a^3}{r}$$

我反思了一下我的代码，其实我给的初值里 $r = 8. \times M$ 本质上已经是其他文献中的 R 了，所以我的度规以及那些势函数其实是不需要改变的。我需要考虑的有以下几点检查其他部分的 u, r 问题，以及思考最后求导的时候应该如何处理。我在最后求导的时候观察一下两个式子：

$$\frac{dr}{d\hat{t}} = \frac{dr}{dt/M} = \frac{dR}{dt} \Longrightarrow \text{这个式子不受到影响}$$

$$\frac{dp}{d\hat{t}} = -\frac{\partial H}{\partial r} \Longrightarrow \frac{dp}{dt/M} = -\frac{\partial H}{\partial R/M} \Longrightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R}$$

所以我的一系列的求导不需要改变，因为本来就是针对 R 求导。除了有一处我是利用了对 u 本身求导更加方便需要在原来的式子上乘上一个 M 以外，其他程序都不需要修改。主要还是误打误撞吧，之前没有留意，以为自己是对 $\hat{r}$ 求导的，其实我程序里所有的 r 都是 $R = Mr$。那么我下面就要开始要按照文献 34，35 往程序中添加由于自旋带来的项的影响了。为了方便，我再一次把所有即将用到的项都放到这里来，并且做出一些修正，由于昨天对于 r, R 的认识还不到位。

注意：这里所有的 r 都是我代码中的 R 并非我参考的文献中的 r，这么做是为了和其他文献能够对应起来不产生混淆。

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}_{\text{fd}}}{\Lambda_t}$$

$$e^{2\nu} = \frac{\Delta_t \Sigma}{\Lambda_t}$$

$$B_r = \frac{\sqrt{\Delta_r}\Delta_t' - 2\Delta_t}{2\sqrt{\Delta_r \Delta_t} R}$$

$$\omega_r = \frac{-\Lambda_t' \tilde{\omega}_{\text{fd}} + \Lambda_t \tilde{\omega}_{\text{fd}}'}{\Lambda_t^2}$$

$$\nu_r = \frac{r}{\Sigma} + \frac{\varpi^2(\varpi^2 \Delta_t' - 4r\Delta_t)}{2\Lambda_t \Delta_t}$$

$$\mu_r = \frac{r}{\Sigma} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_r}}$$

$$B_{\cos\theta} = 0$$

$$\omega_{\cos\theta} = -\frac{2a^2 \cos\theta \Delta_t \tilde{\omega}_{\text{fd}}}{\Lambda_t^2}$$

$$\nu_{\cos\theta} = \frac{a^2 \varpi^2 \cos(\varpi^2 - \Delta_t)}{\Lambda_t \Sigma}$$

$$\mu_{\cos\theta} = \frac{a^2 \cos\theta}{\Sigma}$$

$$\tilde{B} = BR = \sqrt{\Delta_t}$$

$$\tilde{B}_r = B_r R = \frac{\sqrt{\Delta_r}\Delta_t' - 2\Delta_t}{2\sqrt{\Delta_r \Delta_t}}$$

$$e^{2\tilde{\mu}} = e^{2\mu} R^2 = \Sigma$$

$$\tilde{J} = JR = \sqrt{\Delta_r}$$

$$Q := 1 + \frac{\Delta_r (\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{n})^2}{\Sigma} + \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\xi} r)^2 \Sigma}{\Lambda_t \sin^2\theta} + \frac{(\hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{v} r)^2}{\Sigma \sin^2\theta}$$

$$\xi^2 = \sin^2\theta$$

$$Q_4 = \frac{2(4-3\nu)\nu M^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\left(p_r^4\right)$$

$$\underbrace{\hat{p}_i \equiv \frac{p_i}{\mu}}_{\text{Just } p_i \text{ what I used}} \qquad \hat{\boldsymbol{n}} \equiv \frac{\boldsymbol{x}}{r}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \times \boldsymbol{n} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\xi}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \Big\{0, 0, \pm 1\Big\} \times \Big\{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\Big\} = \Big\{\mp\sin\theta\sin\varphi, \pm\sin\theta\cos\varphi, 0\Big\}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \times (\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \times \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} - (\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}})\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} - \boldsymbol{n}\cos\theta$$

$$= \Big\{-\sin\theta\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta\cos\theta\sin\varphi, \pm 1 - \cos^2\theta\Big\}$$

$$\xi^2 = \sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \hat{\boldsymbol{S}}_{\text{Kerr}} \cdot \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}^* \left[\frac{7}{6}\eta\frac{M}{r} + \frac{\eta}{3}(Q-1) - \frac{5}{2}\eta\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right] + \boldsymbol{\sigma}\left[-\frac{2}{3}\eta\frac{M}{r} + \frac{1}{4}\eta(Q-1) - 3\eta\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)} =$$

$$\boldsymbol{\sigma}^*\left[\frac{1}{36}(353\eta - 27\eta^2)\left(\frac{M}{r}\right)^2 + 5\eta^2\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4 - \frac{1}{72}(23\eta+3\eta^2)(Q-1)^2 + \frac{1}{36}(-103\eta+60\eta^2)\frac{M}{r}(Q-1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}(16\eta - 21\eta^2)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1) + \frac{1}{12}\left(47\eta - 54\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right] +$$

$$\boldsymbol{\sigma}\left[\frac{1}{9}\left(-56\eta - 21\eta^2\right)\left(\frac{M}{r}\right)^2 + \frac{45}{8}\eta^2\frac{\Delta_r^2}{\Sigma^2}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^4 - \frac{5}{16}\eta(Q-1)^2 + \frac{1}{36}\left(-109\eta + 51\eta^2\right)\frac{M}{r}(Q-1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\left(2\eta - 13\eta^2\right)\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2(Q-1) + \frac{1}{24}\left(-16\eta - 147\eta^2\right)\frac{M}{r}\frac{\Delta_r}{\Sigma}(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})^2\right]$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(3)} = \frac{d_{\mathrm{SO}}\nu}{r^3}\left(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\right) \qquad d_{\mathrm{SS}} = 2.75, d_{\mathrm{SO}} = -69.5 \qquad \text{这个公式是从原始文献里拿来的，因此 } r = \tfrac{R}{M}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2 \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$$

$$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(1)} + \boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(2)} + \boldsymbol{\Delta}_{\sigma^*}^{(3)}$$

$$\boldsymbol{S}^* = \frac{M}{\mu}\boldsymbol{S} = \frac{M}{\frac{mM}{m+M}}\boldsymbol{S} \approx \frac{M}{m}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mu}{M}\boldsymbol{S}^*$$

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{SO}} =& \frac{e^{2\nu-\tilde{\mu}}\left(e^{\tilde{\mu}+\nu} - \tilde{B}\right)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)\left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{Kerr}}\right)}{\tilde{\boldsymbol{B}}^2\sqrt{Q}\xi^2} + \frac{e^{\nu-2\tilde{\mu}}}{\tilde{\boldsymbol{B}}^2(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\left\{(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{J}\left[\mu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\sqrt{Q}+1) - \mu_{\cos\theta}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right.\right.\\
&\left. -\sqrt{Q}\left(\nu_r(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r) + (\mu_{\cos\theta} - \nu_{\cos\theta})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right)\right]\tilde{B}^2 + e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(2\sqrt{Q}+1)\left[\tilde{J}\nu_r(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}) - \nu_{\cos\theta}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right]\tilde{B}\\
&\left. -\tilde{J}\tilde{B}_r e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\sqrt{Q}+1)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\right\}\\
H_{\mathrm{SS}} =& \omega\left(\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{Kerr}}\right) + \frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\tilde{J}\omega_r}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}\xi^2}\left\{-e^{\tilde{\mu}+\nu}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B} + e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\right.\\
&\left. + e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\xi^2\tilde{B}^2 + \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})[(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})]\xi^2\tilde{B}^2\right\}\\
&+ \frac{e^{-3\tilde{\mu}-\nu}\omega_{\cos\theta}}{2\tilde{B}(\sqrt{Q}+1)\sqrt{Q}}\left\{-e^{2(\tilde{\mu}+\nu)}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)^2(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}) + e^{\tilde{\mu}+\nu}\tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\xi}r)(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\xi})\tilde{B}\right.\\
&\left. + \left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r)^2 - \tilde{J}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v}r) - e^{2\tilde{\mu}}(1+\sqrt{Q})\sqrt{Q}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n})\xi^2\right]\tilde{B}^2\right\}
\end{aligned}$$

为了方便代码编写，我首先脑子保持清晰，我先把几个矢量给定义清楚了：

$$\hat{p}_i = p_i \Longrightarrow \text{就是我用的 } p \qquad \hat{\boldsymbol{n}} \Longrightarrow \text{方向矢量}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{Kerr}} \times \boldsymbol{n} \qquad |\boldsymbol{\xi}| = \sin\theta$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\xi}$$

现在我已经根据我的理解将所有的量都敲进了代码里，但是其实有几个原因导致代码方便了很多，第一是通

过引入了另一项的自旋修正项 $\Delta^3_{\sigma^*}$ 使得 $\Delta^1_{\sigma^*}$,$\Delta^2_{\sigma^*}$ 中的所有的规范参数均为 0，大大简化了计算。其次是由于我们假设自旋的方向仅仅是限制在 $+z/-z$ 方向也就是说自旋矢量仅仅为:

$$\boldsymbol{S} = \left\{0, 0, S_z\right\}$$

大大简化了计算。另一方面，由于 $\boldsymbol{\xi}$ 本身是和 $\boldsymbol{S}$ 垂直的，那么它们的点乘就是 0，因此最终关于 $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{S}$ 的项全部为 0，也简化了计算。

既然已经将所有的项全都考虑进去了，下一步应该考虑如下问题:

1. **如何计算出角动量——p_r 计算是否变困难了？**
2. **微分方程是否变复杂了？**
3. **考虑让 r 也进行演化**

首先通过我粗略的计算，求解角动量的难度应该没有太大改变，我迫切需要确认的是 $\mathcal{Q}_4$，自旋项的参数中的 r。

在思考的过程中，我发现我之前弄错了一个地方，我居然认为：$(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ 是球坐标，这显然是不对的！这就是直角坐标！如果用球坐标写的话就是:

$$(r, 0, 0) \Longrightarrow \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n} = p_r$$

由于这个点乘就是个数，在坐标系的变换下结果是不变的，我完全可以按需而求，处理自旋的时候我就用直角坐标系令自旋在 z 方向，但是处理动量的时候我就用球坐标。我之前对于这些矢量的分析有错误，应该是这样的:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \frac{|\boldsymbol{x}|}{r} = \hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{n}} = \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{e}}_r \times \sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$$

按照这个逻辑就有:

$$\boldsymbol{p}\cdot(\hat{\boldsymbol{e}}_r, r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta, r\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = (p_r, p_\theta, p_\phi)$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} = p_r$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\xi}r = p_\phi$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}r = -\sin\theta p_\theta$$

下面我根据这个关系去改正代码。虽然这样是可行的，但是代码显然还不够通用，没有泛化到任意自旋方向的情况。

现在我主要碰到的是这样几个问题:

1. 文献之间的 Δ_t 的选择是不是真的有差异?
2. 对于 $\mathcal{Q}_4$ 的选取我做的是否合理?
3. 对于第三个自旋项我取的是否合理?

我不管到底谁是谁，但是我可以通过量纲分析的方法来判断我自己的式子是否自洽，我现在无论是 a 还是 r 都是带有 M 的，可以通过观察约化哈密顿量的式子来得知这个式子应该是没有量纲的，也可以观察根号内部来判断 $\mathcal{Q}_4$ 应当无量纲！而且原文的最后一项自旋自旋作用给出的是错误的，我的推导是正确的。

2.18 July 16^{th}

今天的任务分为以下几块，第一是检查一下理论部分有没有什么漏洞，第二是检查一下代码是否有抄错，或者公式有没有抄错，第三部分就是开始理论推导那些导数，考虑如何使用差分去计算。

首先我发现了我的公式里有一个地方抄错了，第二是明确了文中给出的第 (6) 式是错误的，因为这一项是直接加到哈密顿量上的，因此应该是一个无量纲数，但是文中给出的形式显然不对，分母处应当是 R 而非 r。

现在已经将公式和代码都检查了一遍了，下面就将进行理论的导数计算，并且考虑差分方法的运用。第一步我仍然需要求出轨道角动量 p_ϕ，因此我仍然采用之前的方法，需要利用 $\dot{p_r}=0$ 这一个重要的条件。在此之前我需要罗列出完整的哈密顿量：

$$\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}=\beta^{\phi}\mathcal{L}+\alpha\sqrt{1+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}+\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}+\frac{d_{\text{SS}}\nu}{R^4}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1+\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\Big)\cdot(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)-\frac{1}{2MR^3}(1-3\cos^2\theta)(S*)^2$$

这里我用的不是约化的位矢，而是 $R=Mr$，而且根号下也省略了两项，由于圆轨道省略 p_r，由于计算的位置一定是 $\Theta_{\text{max/min}}$ 因此省略 p_θ。

$$\frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}\Big)=0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}\Big)=\frac{\partial\beta^{\phi}}{\partial R}\mathcal{L}+\frac{\partial\alpha}{\partial R}\sqrt{1+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}+\frac{\alpha\Big(\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial R}\mathcal{L}^2+\frac{\partial\mathcal{Q}_4}{\partial R}\Big)}{2\sqrt{1+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}}+\frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}\Big)-$$
$$\frac{4d_{\text{SS}}\nu}{R^5}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1+\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\Big)(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)+\frac{3}{2MR^4}(1-3\cos^2\theta)(S*)^2-\frac{2S^*}{MR^3}(1-3\cos^2\theta)\frac{\partial S^*}{\partial R}=0$$

这里面其实新加进来的几项并没有造成太大干扰，而且由于圆轨道 $\mathcal{Q}_4\propto(p_r)^4=0$，也可以不考虑最后的结果就是：

$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{H_{\text{eff}}}{\mu}\Big)=\frac{\partial\beta^{\phi}}{\partial R}\mathcal{L}+\frac{\partial\alpha}{\partial R}\sqrt{1+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2}+\frac{\alpha\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial R}\mathcal{L}^2}{2\sqrt{1+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2}}+\frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}\Big)-$$
$$\frac{4d_{\text{SS}}\nu}{R^5}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1+\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\Big)(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)+\frac{3}{2MR^4}(1-3\cos^2\theta)(S^*)^2-\frac{2S^*}{MR^3}(1-3\cos^2\theta)\frac{\partial S^*}{\partial R}=0$$

这里的话由于涉及到 $H_{\text{SO}},H_{\text{SS}},S^*$ 的导数实在是太过于繁杂，我准备采用数值差分去计算。我先定义一些量放到 **Mathetmatica** 里去计算一下最后的角动量表达式：

$$\frac{\partial\beta^{\phi}}{\partial R}=w\qquad\frac{\partial\alpha}{\partial R}=b\qquad\gamma^{\phi\phi}=c\qquad\frac{\partial\gamma^{\phi\phi}}{\partial R}=d\qquad\frac{\partial}{\partial R}\Big(\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}\Big)=e$$

$$\frac{4d_{\text{SS}}\nu}{R^5}\Big(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1+\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\Big)(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)=f\qquad\frac{3}{2MR^4}(1-3\cos^2\theta)(S^*)^2=h\qquad\frac{2S^*}{MR^3}(1-3\cos^2\theta)\frac{\partial S^*}{\partial R}=j$$

我将方程简化为了

$$w\mathcal{L}+b\sqrt{1+c\mathcal{L}^2}+\frac{\alpha d\mathcal{L}^2}{2\sqrt{1+c\mathcal{L}^2}}+\mathcal{Z}=0\qquad\mathcal{Z}=e-f+h-j$$

没想到用 **Mathematica** 计算的结果还是那么复杂，有些匪夷所思，仅仅是加了一项常数，解就复杂了很多。那么我现在有三种选择：

1. 用 **Mathematica** 给出的解析结果代入计算得到精确解

2. 用数值的方法去求解角动量的值

3. 不管这些多余的项而是仍然用原本的角动量

这里面我肯定是首选第一种方式，如果 MMA 给出的结果是在可以接受的长度的话，我就精确地去求解。如果实在不行，我可以做个实验，尝试去数值地解一下角动量，如果数值的结果和本身精确的表达式的结果的误差很小的话，那我完全可以用数值的结果代替精确的结果。但是这个需要做个实验验证一下。但是这也有问题，因为这里有 4 个解，除了两个负数解我不要之外，我没有办法保证数值的解法一定能够让角动量收敛到那个正确的解上，这也是需要考虑的问题。

当然，解这个方程本身是我已经得到了 $\mathcal{Z}$ 的值的前提下，但是事实上我还有三个比较棘手的数值差分没有做。我完全可以把 $H_{\mathrm{SO}}, H_{\mathrm{SS}}$ 捆绑在一起去求，而对于 S^* 则需要另外处理了。我查了一下数值微分的方式，有两种方式，一种是：

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \qquad R = -\frac{-f^{(3)}(c)}{6}h^2$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(c)$$

误差显然是第二个更小，但是这个 h 应该如何选取呢？我可以尝试取 $h = 0.0001$。我下面就开始编写数值微分的方程。我突然意识到一个很严重的问题，就是在我本来认为是常数的项中实际上是包含了我要求的角动量的，那这件事情就变得复杂起来了。

由于耦合现象的存在，我已经不可能用之前的方法去求解了。我只可能直接用原来的到的角动量的值或者说**用原来的到的角动量的值作为零级近似，直接利用雅可比迭代法去求解复杂化后的角动量**，但是这样我没有办法保证一定会收敛，而且可能计算的代价太大。我先尝试用雅可比迭代法去求解，如果实在是无法实现，或者说计算结果完全一样，差别不大，那我完全可以不浪费计算资源，而直接采用原来的角动量的值。由于这个方程本身的形式已经给了我非常大的便利：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\partial_R \beta^\phi}\mathcal{G}(\mathcal{L})$$

直接用 $\mathcal{L}_0$ 作为初值代入，应该可以保证收敛。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{w}(b\sqrt{1+c\mathcal{L}^2} + \frac{\alpha d\mathcal{L}^2}{2\sqrt{1+c\mathcal{L}^2}} + e - f + h - j)$$

2.19 July 17^{th}

首先安排一下今天的工作任务，由于昨天已经完成了角动量的计算，那么今天的任务应该没有那么困难了，在得到角动量之后我就可以通过哈密顿正则方程去编写演化的程序了，今天早上应该要完成理论推导工作，下午和晚上完成程序编写，结果分析的工作。首先考虑完整的哈密顿量：

$$\frac{H_{eff}}{\mu} = \beta^\phi\mathcal{L} + \alpha\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4} + \frac{H_{\mathrm{SO}}}{\mu} + \frac{H_{\mathrm{SS}}}{\mu} + \frac{d_{\mathrm{SS}}\nu}{R^4}\left(\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{S}_1 + \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{S}_2\right)\cdot(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2) - \frac{1}{2MR^3}(1-3\cos^2\theta)(S*)^2$$

在考虑演化方程的时候，这次我打算 r 也参与演化，也就是让这个式子对着 p_r 尝试去求导一次：

$$\dot{R}=\frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\frac{\alpha\partial_{p_R}\mathcal{Q}_4}{2\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}}+\frac{\partial}{\partial p_R}\Big(\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}\Big)-\frac{(1-3\cos^2\theta)S^*}{MR^3}\frac{\partial}{\partial p_R}S^*\right]$$

$$\dot{\theta}=\frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\frac{\alpha\gamma^{\theta\theta}p_\theta}{\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}}+\frac{\partial}{\partial p_\theta}\Big(\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}\Big)-\frac{(1-3\cos^2\theta)S^*}{MR^3}\frac{\partial}{\partial p_\theta}S^*\right]$$

$$\dot{\phi}=\frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\left[\beta^\phi+\frac{\alpha\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}}{\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}}+\frac{\partial}{\partial p_\phi}\Big(\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}\Big)-\frac{(1-3\cos^2\theta)S^*}{MR^3}\frac{\partial}{\partial p_\phi}S^*\right]$$

$$\dot{p_\theta}=-\frac{M^2\nu}{\mu(\mu\hat{H}_{\text{real}}+M)}\Bigg[\partial_\theta\beta^\phi\mathcal{L}+\partial_\theta\alpha\sqrt{1+\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}+\frac{\alpha(\partial_\theta\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\partial_\theta\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\partial_\theta\mathcal{Q}_4)}{\sqrt{\gamma^{\theta\theta}p_\theta^2+\gamma^{\phi\phi}\mathcal{L}^2+\mathcal{Q}_4}}+\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{H_{\text{SO}}}{\mu}+\frac{H_{\text{SS}}}{\mu}\Big)$$
$$+\frac{3\sin(2\theta)}{2MR^3}(S^*)^2-\frac{(1-3\cos^2\theta)S^*}{MR^3}\frac{\partial}{\partial\theta}S^*\Bigg]$$

这里其实我有一些东西已经处理过了，可以直接拿来用。其中出现的后面几项的偏微分我都是通过差分来代替微分，唯一我没有处理过的东西就只剩下对 $\mathcal{Q}_4$ 的导数而已。而对它的导数也是非常简单

$$\partial_{p_R}\mathcal{Q}_4\propto\frac{4p_R^3}{R^2+a^2\cos^2\theta}$$
$$\partial_\theta\mathcal{Q}_4\propto\frac{a^2p_R^4\sin(2\theta)}{(R^2+a^2\cos^2\theta)^2}$$

那么至此为止，理论上的工作就已经做完了，下面就可以开始代码的编写了，这里一定要注意很多项其实是都在变化的，一定要小心谨慎处理。

为了写代码的时候更加方便，我在这里把完整的 $\mathcal{Q}_4$ 的偏微分给出来：

$$\partial_{p_R}\mathcal{Q}_4=2(4-3\nu)\nu M^2\frac{4p_R^3}{R^2+a^2\cos^2\theta}$$
$$\partial_\theta\mathcal{Q}_4=2(4-3\nu)\nu M^2\frac{a^2p_R^4\sin(2\theta)}{(R^2+a^2\cos^2\theta)^2}$$

先记录一下早上和老师的谈话过程，我现在的任务如下：

1. 需要画一个类似于极坐标的图，来判断我搞的是不是正确。
2. 验证卡特常数
   - $\nu=0,S^*=0$ 用来判读我做的是否正确
   - $\nu\approx 0,S^*=0$ 用来判断是否仍是常数?
   - $\nu\approx 0,S^*\neq 0$ 用来判断是否有有趣的事情发生!

现在继续我的工作，把考虑了所有效应之后的圆轨道整出来。在搞定了角动量 $\mathcal{L}$ 之后，我需要找出守恒的能量，现在守恒的能量变得复杂了很多，由于 $\mathcal{Q}_4$ 和 p_R 成正比，因此在我考虑的情况中 $\mathcal{Q}_4=0$，情况大为简化。现在的情况是代码已经写完了，但是微分方程演化起来误差有点大，比不考虑别的项的情况下，解得不是那么准确了，而且解得非常慢。代码的优化问题，我可以先放一放，周末里把这个问题给解决掉，同时我应该要开始检验 **Carter** 常数是否守恒。

$$\Theta=Q-\left[(\mu^2-E^2)a^2+\frac{\mathcal{L}^2}{\sin^2\theta}\right]\qquad\Theta=p_\theta^2$$

$$\Longrightarrow Q = p_\theta^2 + \left[(\mu^2 - E^2)a^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{\sin^2\theta}\right]\cos^2\theta$$

这里的量纲让我对这些量有了新的理解，其实 p_R 已经是无量纲的数了，但是两个角动量其实还有 M 的量纲。

Chapter 3

黑洞物理学习

从拉普拉斯得到的朴素的结论出发：

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow \frac{2GM}{Rc^2} \geq 1$$

我们不妨假设这个星球是球对称而且密度均匀的。那么就有：

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Rightarrow \frac{8\pi}{3}\frac{G\rho R^2}{c^2} \geq 1$$

要满足这个条件可以存在“两种”黑洞，其中一种是正常的半径惊人的密度，一种是惊人的半径正常的密度，当然我朴素的感觉是也可以两者兼顾。其中第一种是由致密天体的合并导致的，典型质量是 10 个太阳质量。为了建立数觉，一个 $R \sim 10^5\mathrm{cm}$ 的黑洞的密度要求 $\rho \geq 1.7 \times 10^{17}\mathrm{g/cm^3}$。而后一种通常被称为超大质量黑洞，它们可以在星系的中心处被发现，典型质量为 $2.5 \times 10^6 M_\odot$

3.1 The Schwarzschiled black hole

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)dt^2 + \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

我们可以发现在 $r = 0, 2GM$ 处看似存在两个发散点，但是实际上 $2GM$ 并不是一个时空奇点，而是一个坐标奇点，我们完全可以通过坐标系的变换和选择消除它。然而通过计算 $r = 0$ 处的曲率标量，我们会发现它确实在那里 *blow up* 了。但是事实上即使是曲率表现良好也并不能够说明就是真正的 *well-behaved*。

3.1.1 Spacetime extensions

我们考虑一个正定度规：

$$ds^2 = \frac{dx^2}{x^4} + dy^2$$

并且规定 $x \in (0, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$ 很明显存在一个坐标奇点 $x = 0$, 但是我们只需要令 $\tilde{x} = \frac{1}{x^2}$ 就可以得到：

$$ds^2 = d\tilde{x}^2 + dy^2$$

这显然就是一个平直时空的欧式度规。虽然 $\tilde{x} \in (0, +\infty)$，但是这个时候 $\tilde{x} = 0$ 已经不是一个坐标奇点了，因此可以把这个点延拓进我们讨论的时空流形。但是这时 $\tilde{x} = 0$ 并不对应于 $x = 0$，而是对应于 $x = \infty$, 事实上就是把原流形延拓到了 $-\infty$。事实上并不是 $x = 0$ 出问题，而是 $x = +\infty$ 的时候测地不完备，我们的坐标变换本质上是把有限长度拉伸为无限长，有点乌龟坐标的意思。第二个例子我在这里省略不谈，讲第三个精彩的例子：

$$ds^2 = -z^2 dt^2 + dz^2 \qquad z \in (0, \infty), t \in (-\infty, +\infty)$$

看起来在 $z = 0$ 的时候时时分量消失了，这个时空好像变得奇怪了，但是实际上由于所有的二维的度规都是共性平直的，因此我们可以引入一个坐标变换：

$$ds^2 = z^2 \Big(-dt^2 + \frac{1}{z^2} dz^2 \Big)$$

$$\zeta = \ln z \Rightarrow ds^2 = e^{2\zeta}(-dt^2 + d\zeta^2)$$

$$\zeta \in (-\infty, +\infty)$$

原本 $z = 0$ 的点现在是 $\zeta = -\infty$ 的点，这本质上是看的视角发生了变化，而不是时空本身的问题。下一步引入坐标变换：

$$u = t - \zeta, v = t + \zeta \qquad u, v \in (-\infty, +\infty)$$

可以证明的是，$\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ 是 *null vector filed.*

$$ds^2 = -e^{(v-u)} du dv$$

再做一个变换：

$$U = -e^{-u} \qquad V = e^{v}$$

于是说

$$ds^2 = -dU dV$$

这本质上是一个闵氏时空的四分之一。

$$T = \frac{1}{2}(U + V) \qquad Z = -\frac{1}{2}(U - V)$$

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2$$

$$T = z \sinh t, Z = \cosh t$$

Chapter 4

实习后

Part II

毕设推进