安徽大学 20__19__—20__20__学年第__一__学期

《 概率论与数理统计 A 》考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号____________

院/系__________ 年级__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					
阅卷人					

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

1. 设事件 A 与 B 互不相容，则下列选项正确的是（　　）.

 (A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

 (C) $P(A)=1\text{-}P(B)$　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

2. 设 $f(x)$ 和 $F(x)$ 分别为 X 的概率密度函数和分布函数，则下列选项正确的是（　　）.

 (A) $P(X=x)=f(x)$　　(B) $P(X=x)\le F(x)$

 (C) $0\le f(x)\le 1$　　(D) $P(X=x)=F(x)$

3. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$ 为 $[-1,1]$ 上均匀分布的概率密度函数. 若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 0, \\ bf_2(x), & x>0, \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度函数，则 a,b 应满足（　　）.

 (A) $2a+3b=4$　　(B) $3a+2b=4$　　(C) $a+b=1$　　(D) $a+b=2$

4. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ a+b\arcsin x, & -1\le x<1, \\ 1, & x\ge 1, \end{cases}$$

则 a, b 的值分别为（　　）.

 (A) $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{\pi}$　　(B) $a=0, b=0$　　(C) $a=0, b=\dfrac{1}{\pi}$　　(D) $a=\dfrac{1}{2}, b=0$

5. 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中概率为 $p(0<p<1)$，则此人第四次射击恰好第二次命中目标的概率为（　　）.

 (A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$　　(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

得 分	

6. 设 $P(A)=0.3, P(B\mid A)=0.5, P(A\mid B)=0.25$，则 $P(B)=$________.

7. 设随机变量 X 的分布列为

$$P(X=k)=a\frac{\lambda^k}{k!}\ (k=0,1,2,\cdots),$$

其中 a 为常数，$\lambda>0$ 为参数，则 $a=$________.

8. 设随机变量 X 服从指数分布 $E(\lambda)$ $(\lambda>0)$，且二次方程 $y^2+2y+X=0$ 无实根的概率为 e^{-1}，则 $\lambda=$______.

9. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/2, & 0\le x<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1,\end{cases}$ 则 $P(X=1)=$________.

10. 设随机变量 X 在区间 $(2,5)$ 上服从均匀分布，现对 X 进行．三次独立观测，则至少有两次观测值大于 3 的概率为________.

三、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

得 分	

11. 12 个乒乓球中有 9 个新球，3 个旧球，第一次比赛时取出 3 个球，用完后放回，第二次比赛又从中取出 3 个球.

（1）求第二次取出的 3 个球中有 2 个新球的概率；

（2）若第二次取出的 3 个球中有 2 个新球，求第一次取到的 3 个球中恰有一个新球的概率.

12. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}k\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中 k 为常数，$\theta>0$ 为未知参数，且 $P(X>1)=0.5$．求：

（1）k 和 θ 的值；（2）随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$.

13. 某地区 18 岁的女青年的血压（收缩压）服从正态分布 $N(110,10^2)$，从该地区任选一名女青年，测量她的血压是 X.

（1）求 $P(100\le X\le 120)$；（2）试确定最小的 x，使得 $P(X>x)\le 0.05$.

（已知 $\Phi(0.1)=0.5398, \Phi(1)=0.8413, \Phi(1.65)=0.95, \Phi(1.96)=0.975$.）

14. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cx^2y, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

其中C为常数．求：（1）常数C的值；（2）$P(X>Y)$．

15. 设G是平面上由曲线$y=x^2$及直线$y=x$所围成的区域，二维随机变量(X,Y)服从区域G上的均匀分布．求：（1）(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$；（2）X与Y的边缘密度函数．

16. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	-1	0	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.05	0.1
2	a	0	0.1

其中a为常数．求：（1）常数a的值；（2）X,Y的边缘分布律；（3）$P(XY=0)$．

四、证明题（每小题8分，共8分）

得 分	

17. 设连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$F(x)$为X的分布函数．令$Y=F(X)$，求证：随机变量Y在$[0,1]$上服从均匀分布．

安徽大学 20__19__—20__20__学年第__一__学期

《 概率论与数理统计 A 》考试试题（A 卷）

参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D　　2. B　　3. D　　4. A　　5. C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 0.6　　7. $e^{-\lambda}$　　8. 1　　9. $\frac{1}{2}-e^{-1}$　　10. $\frac{20}{27}$

三、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

11. 解：记 $A_i(i=0,1,2,3)$ 表示事件“第一次取到 i 个新球”，B 表示事件“第二次取到 2 个新球”，根据古典概型有

$$P(A_0)=C_3^3/C_{12}^3=1/220,\qquad P(A_1)=C_3^2C_9^1/C_{12}^3=27/220,$$
$$P(A_2)=C_3^1C_9^2/C_{12}^3=27/55,\quad P(A_3)=C_9^3/C_{12}^3=21/55.$$

在第一次取得取到 i 个新球的情况下，第二次取球是在 $9-i$ 个新球，$3+i$ 个旧球中任取 3 个球，于是有，

$$P(B|A_0)=C_3^1C_9^2/C_{12}^3=27/55,\qquad P(B|A_1)=C_4^1C_8^2/C_{12}^3=28/55,$$
$$P(B|A_2)=C_5^1C_7^2/C_{12}^3=105/220,\quad P(B|A_3)=C_6^1C_6^2/C_{12}^3=90/220.$$

............6 分

（1）由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=1377/3025\approx 0.455;$$

（2）由 Bayes 公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{7}{51}\approx 0.137.$$

...........................12 分

12. 解：（1）由于 $f(x)$ 为概率密度函数，所以

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}k\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=k,$$

又 $P(X>1)=0.5$，所以 $0.5=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=e^{-\frac{1}{\theta}}$，从而 $\theta=\frac{1}{\ln 2}$. ....6 分

（2）由于 $F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，所以，当 $x<0$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$；

当 $x\ge 0$ 时，$F_X(x)=\int_0^x \frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt=1-e^{-\frac{x}{\theta}}=1-e^{-x\ln 2}=1-2^{-x}$．故随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\ge 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$ ……………………………………12 分

13. 解：（1）所求概率为

$$P(100\le X\le 120)=\Phi\left(\frac{120-110}{10}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{10}\right)$$ ………………6 分

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826.$$

（2）由于 $P(X>x)\le 0.05$，所以 $P(X\le x)\ge 0.95$，即 $\Phi\left(\frac{x-110}{10}\right)\ge\Phi(1.65)$，从而 $x\ge 126.5$，故最小的 x 为 126.5．……………………………………………………12 分

14. 解：（1）因为

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}[\int_{x^2}^{1}Cx^2ydy]dx=\frac{4}{21}C,$$

所以 $C=\frac{21}{4}$．……………………………………………………………………6 分

（2）$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy=\int_0^1[\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2ydy]dx=\frac{3}{20}$．………………………12 分

15. 解：（1）由于区域 G 的面积为 $S=\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{1}{6}$，故 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$ ……………………………………6 分

（2）X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx, & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ……12 分

16. 解：（1）由联合分布律的性质知，所有概率之和为 1，即

$$0.1+0.2+0.3+0.05+0.1+a+0.1=0.85+a=1,$$

故有 $a=0.15$． ....4 分

（2）由 (X,Y) 的联合分布律得 X,Y 的边缘分布律分别为

X	0	1	2
P	0.3	0.45	0.25

Y	-1	0	2
P	0.55	0.25	0.2

....8 分

（3）由 (X,Y) 的联合分布律得

$$\begin{aligned}P(XY=0)&=P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)\\&=0.1+0.2+0.05=0.35.\end{aligned}$$ ....12 分

四、证明题（每小题 8 分，共 8 分）

17. 证明：随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0,\\ \int_0^x 2tdt=x^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

故

$$Y=F(X)=\begin{cases}0, & X<0,\\ X^2, & 0\le X\le 1,\\ 1, & X>1.\end{cases}$$

易见，随机变量 Y 的取值范围为 $[0,1]$，故当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\varnothing)=0$；当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\Omega)=1$；当 $0\le y\le 1$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\le y)=P(Y\le y,0\le X\le 1)\\&=P(X^2\le y,0\le X\le 1)\\&=P(0\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}2xdx=y.\end{aligned}$$

从而随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即随机变量 Y 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布. ....8 分