安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期中试卷（参考答案）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\pi/3$
2. $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
3. $2021^{2022}\ln 2021$
4. $e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数
5. $Z=e^{x^2+y^2}$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

6、C　　7、B　　8、A　　9、D　　10、D

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11、解：

这是典型的一阶非齐次线性方程，这里 $P(x)=-\dfrac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$.

于是直接利用公式， $y=\tilde{C}e^{-\int P(x)dx}+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\cdot e^{-\int P(x)dx}$

可知所求通解为

$$y=\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}dx+\tilde{C}\right]e^{\int\frac{2}{x+1}dx}=\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+\tilde{C}\right](x+1)^2$$　（9 分）

12、解：

$x^2y=t$

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t-\arcsin t}{t^3}$

$=-\dfrac{1}{3}$(利用洛必达法则，或者利用泰勒公式，都可以）

（9 分）

13、解

设：切点（x_0, y_0, z_0），

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$$

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}=\lambda$$

$$\lambda^2+2(-\frac{\lambda}{2})^2+（2\lambda）^2=1$$

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\ x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$$

（9 分）

14. **解：**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}\ f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\ f_1'+y\frac{\partial f_1'}{\partial y}-\frac{1}{y^2}\ f_2'+\frac{1}{y}\frac{\partial f_2'}{\partial y}$$

$$==\ f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}\ f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}\ f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}\ f_{22}''\right)$$

$$=f_1'+yxf_{11}''-\frac{1}{y^2}\ f_2'-\frac{x}{y^3}\ f_{22}''$$

（9 分）

15．**解：**

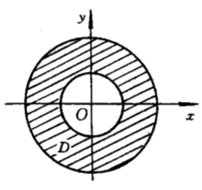
$$x\frac{\partial u}{\partial y}+v+y\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u+y\frac{\partial u}{\partial y}-x\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xv+yu}{x^2+y^2},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{xu-yv}{x^2+y^2}$$

（9 分）

16.解：



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$\iint_D\left|x^2+y^2-\frac{1}{4}\right|dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{2}}^{1}(r^2-\frac{1}{4})rdr$$

$$=\frac{5\pi}{16}$$

（9 分）

四、应用题（共 10 分）

17.

设长方体的长、宽、高分别为 x， y 和 z，则问题是要求函数

$$V=xyz \qquad （x>0，\ y>0，\ z>0）$$

在条件 $2(xy+yz+xz)-a^2=0$

下的最大值．令拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-a^2)，$$

求出 $L(x,y,z,\lambda)$ 对 x， y， z，的偏导数：

$$\begin{cases} L'_x=yz+2\lambda(y+z)=0, \\ L'_y=xz+2\lambda(x+z)=0, \\ L'_z=xy+2\lambda(x+y)=0, \\ L'_\lambda=2xy+2yz+2xz-a^2=0. \end{cases}$$

注意到 $x>0$， $y>0$， $z>0$

由此式可解得： $x=y=z$，可得：

$$x=y=z=\frac{\sqrt{6}a}{6}.$$

由于该问题最大值一定存在，且可能极值点唯一，因此可以断定所求得的点就是函数的最大值点． 于是便知，以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的立方体的体积最大，且最大体积 $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$. （10 分）

五、证明题（共 6 分）

18、证明：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{\varphi_1'c}{-a\varphi_1'-b\varphi_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{\varphi_2'c}{-a\varphi_1'-b\varphi_2'}$$

所以：

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$$

（6 分）