

安徽大学 2020—2021 学年第 1 学期 《离散数学（上）》期中考试参考答案及评分标准

一、简答题（每小题 10 分，共 20 分）

1.	语 句	是否命题	命题真值
	今天的试卷很难。	否	-
	监考老师长得帅/漂亮。	否	-
	火星上有生命存在的迹象。	是	无法判断
	这幅画很美。	否	-
(每空 1 分)	马克思出生那天，杭州在下雪。	是	无法判断

2. 答：命题合式公式，又称为命题公式(简称公式)，可按下列规则归纳生成：

(1)命题常元和命题变元是命题公式。 (2 分)

(2)如果 A 是命题公式，则 $\neg A$ 是命题公式。 (2 分)

(3)如果 A 和 B 是命题公式，那么 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式。 (3 分)

(4)当且仅当有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的包含命题常元、命题变元、联结词和圆括号的符号串是命题公式。 (3 分)

二、计算题（每小题 10 分，共 30 分）

1. 解：

P	Q	R	$P \wedge \neg Q \rightarrow \neg P \vee R$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(左边真值指派全对得 2 分，右边真值每行 1 分)

2. 解：

$$(P \vee \neg Q \wedge R) \rightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee (\neg Q \wedge R)) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg R)) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \sum (0, 1, 2, 3, 6, 7) \quad (\text{主析取范式}) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \prod (4, 5) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \quad (\text{主合取范式}) \quad (2 \text{ 分})$$

3. 解:

$$(P(1) \downarrow P(2)) \rightarrow (P(1) \oplus P(3)) \Leftrightarrow \neg(P(1) \vee P(2)) \rightarrow (P(1) \wedge \neg P(3)) \vee (\neg P(1) \wedge P(3)) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \neg((P(1) \vee P(2)) \vee (P(1) \wedge \neg P(3)) \vee (\neg P(1) \wedge P(3)))$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(1) \vee P(2) \vee (\neg P(1) \wedge P(3))) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \neg(P(1) \vee P(2) \vee P(3))$$

$$\Leftrightarrow \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \Leftrightarrow \sum(0) \quad (\text{主析取范式}) \quad (2 \text{ 分})$$

当 $P(x)$ 表示为 $P(x): x < 2$ 时, $P(1)$ 真, $P(2)$ 和 $P(3)$ 假, (2 分)

$(P(1) \downarrow P(2)) \rightarrow (P(1) \oplus P(3))$ 的真值为假。 (2 分)

三、证明题 (每小题 10 分, 共 20 分)

1. 证: $P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee P \wedge Q \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee Q \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow P \rightarrow Q \quad (2 \text{ 分})$$

2. 证:

$$A = P \vee R \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee R) \vee Q, \text{ 其对偶公式为: } A^* = \neg(P \wedge R) \wedge Q, \quad (2 \text{ 分})$$

$$B = (P \rightarrow Q) \vee (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee (\neg R \vee Q),$$

$$\text{其对偶公式为: } B^* \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg R \wedge Q), \quad (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} B^* &\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg R \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R \\ &\Rightarrow \neg P \wedge Q \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge Q) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge R) \wedge Q = A^*. \quad (1 \text{ 分})$$

所以, 由 $B^* \Rightarrow A^*$ 推得 $A \Rightarrow B$ 。 (1 分)

四、推理题 (每小题 10 分, 共 20 分)

1. 证: 步骤	断言	依据
1	$\neg P$	P
2	$\neg P \leftrightarrow Q$	P
3	Q	T, 1, 2
4	$R \rightarrow \neg Q$	P
5	$\neg R$	T, 3, 4
6	$P \vee R$	P
7	P	T, 5, 6
8	$\neg P \wedge P$	T, 1, 7
9	$\neg S$	T, 8

所以, 结论是有效的。

2. 证:	(1) $\exists x \neg R(x)$	P	(1 分)
	(2) $\neg R(a)$	T, (1), ES	(2 分)
	(3) $\forall x (Q(x) \vee R(x))$	P	(1 分)
	(4) $Q(a) \vee R(a)$	T, (4), US	(1 分)
	(5) $Q(a)$	T, (2) (4), I	(1 分)
	(6) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	P	(1 分)
	(7) $P(a) \rightarrow \neg Q(a)$	T, (6), US	(1 分)
	(8) $\neg P(a)$	T, (5) (7), I	(1 分)
	(9) $\exists x \neg P(x)$	T, (8), EG	(1 分)
	\therefore 结论有效。		

五、应用题（共 10 分）

1. 解：根据上面的命题符号，得到前提： $P \oplus Q$ ， $S \rightarrow P$ ， $Q \rightarrow R$ ， $\neg S \wedge \neg R$ 。（4 分）

推导步骤：

(1) $\neg S \wedge \neg R$	P（前提引入）	
(2) $\neg R$	T(1), 简化式	(1 分)
(3) $Q \rightarrow R$	P（前提引入）	
(4) $\neg Q$	T(2) (3), 拒取式	(1 分)
(5) $P \oplus Q$	P（前提引入）	
(6) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$	T(5), 异或表达式	
(7) $P \vee Q$	T(6), 简化式	(1 分)
(8) P.	T(4) (7), 析取三段论。	(1 分)
故甲为罪犯。		(2 分)