安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《 线性代数 A 》期中考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. D　　3.B　　4.D　　5.B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. $\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha\beta \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$　7. $-\frac{1}{3}(A+2I)$　8. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　9. 1/16　10. 2

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 由题意，

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

所以，其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$　（10 分）

12. $-M_{41}+M_{42}-M_{43}+M_{44} = A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$　（10 分）

13.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n\\1&-1&0&\dots&0\\0&2&-2&\dots&0\\&\dots&&\dots&\\0&0&0&\cdots&n-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&2&3&\dots&n\\0&-1&0&\dots&0\\0&2&-2&\dots&0\\&\dots&&\dots&\\0&0&0&\cdots&1-n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&2&3&\dots&n\\0&-1&0&\dots&0\\0&2&-2&\dots&0\\&\dots&&\dots&\\0&0&0&\cdots&1-n\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$$ （10 分）

14. $\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T\right)=\begin{pmatrix}2&3&4&4\\1&-1&2&-3\\3&2&6&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\2&3&4&4\\3&2&6&1\\-1&0&-2&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\0&5&0&10\\0&5&0&10\\0&-1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\0&5&0&10\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，向量组秩等于 2，α_1,α_2 为其一组极大线性无关组. （10 分）

15. $|A|=\begin{vmatrix}1&2&4\\2&\lambda&1\\1&1&0\end{vmatrix}=4\lambda-9$，

所以，当 $\lambda\neq\frac{9}{4}$ 时，矩阵的行列式 $|A|\neq 0$，$r(A)=3$，

当 $\lambda=\frac{9}{4}$ 时，$\begin{pmatrix}1&2&4\\2&\frac{9}{4}&1\\1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-\frac{7}{4}&-7\\0&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4\\0&-\frac{7}{4}&-7\\0&0&0\end{pmatrix}$，

此时，秩的最小值 $r(A)=2$ （10 分）

16. 方程组的增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&a\\0&1&2&2&3\\5&4&3&3&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&a-3\\0&1&2&2&3\\0&-1&-2&-2&b-5\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&a-3\\0&1&2&2&3\\0&-1&-2&-2&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&3\\0&0&0&0&a\\0&0&0&0&b-2\end{pmatrix},$$

所以$a=0,b=2$时，方程组有解。此时，同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$，

通解为$\begin{cases}x_1=-2+x_3+x_4\\x_2=3-2x_3-2x_4\end{cases}$，其中$x_3$，$x_4$为自由变量. （10 分）

四、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 因为$AB=CA=I$，所以矩阵A可逆，B，C均为A的逆矩阵。
又因为逆矩阵唯一，所以$B=C$，同理$A=C$。即，$A=B=C$

所以$A^2=B^2=C^2=I$ ，$A^2+B^2+C^2=3I$. （5 分）

18. 由题意，$(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\3&3&-3\\2&1&-1\end{pmatrix}$

且$\begin{pmatrix}2&1&1\\3&3&-3\\2&1&-1\end{pmatrix}$可逆，则$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\3&3&-3\\2&1&-1\end{pmatrix}^{-1}$

β_1，β_2，β_3与α_1，α_2，α_3等价，

此时$r(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)=r(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=3$，$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性无关. （5 分）