安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《线性代数 A》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. A,B,C,D 是 n 阶矩阵，O 为 n 阶零矩阵，$a_i,b_i,c_i,d_i(i=1,2)$ 是实数，则下列正确的是（　）

(A) $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & D \end{vmatrix} = -|A||B|$

(C) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A|^2 - |B|^2$　(D) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$

2. A,B 是 n 阶矩阵，则下列结论中正确的是（　）

(A) $AB=O \Leftrightarrow A=O$且$B=O$　(B) $|A|=0 \Leftrightarrow A=O$

(C) $|AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$或$|B|=0$　(D) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

3. 设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再把 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则（　）

(A) $C=PAP^{-1}$　(B) $C=P^{-1}AP$　(C) $C=P^TAP$　(D) $C=PAP^T$

4. 设 A,B 为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 伴随矩阵，且 $|A|=2,|B|=3$，则 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* =$（　）

(A) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

5. 设 A 为 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$（　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 无法确定

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 设 A 是一个三阶方阵，$|A|=1$，则 $|2A^*|=$ __________.

7. 方程$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0$的所有根的乘积是________.

8. 已知齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+3x_2+4x_3=0\\ -x_1+\lambda x_2 \qquad =0\\ \qquad x_2+x_3=0\end{cases}$ $(\lambda\neq -1)$有非零解，则$\lambda=$________.

9. 设$A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{pmatrix}$，若$A$的伴随矩阵的秩为1，则$k=$______.

10. 已知a,b,c,d为实数，且$ad-bc\neq 0$，则$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=$________.

三、计算题（每小题10分，共60分）

11. 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}$.

12. 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix}x+1 & x & x & \cdots & x\\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x\\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n}\end{vmatrix}$.

13. 设行列式$D=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix}$，$A_{ij}$是$D$中元素$a_{ij}$的代数余子式，计算$3A_{11}+2A_{12}-3A_{13}+A_{14}$的值.

14. 设$A=E-XX^T$，其中$X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$，E为n阶单位矩阵，且$X^TX=1$.

（1）计算A^2；（2）利用（1）的结果计算$(A+E)^{-1}$.

15. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，且$AB+E=A^2+B$，求$B$.

16. 把矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&-1&-1&2\\1&4&-1&0&2\\-1&-4&2&-1&0\\2&8&1&1&0\end{pmatrix}$化成标准形.

四、分析题（每小题12分，共12分）

17. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\\3&5&1&7\end{pmatrix}$，其中$a$，$b$为待定常数，求矩阵$A$的秩.

五、证明题（每小题8分，共8分）

18. A是任一n阶矩阵，证明：

（1）$A+A^T$是对称阵，$A-A^T$是反对称阵；

（2）任何n阶方阵都可以表示成一个对称阵和一个反对称阵的和.