安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．B　　2．D　　3．C　　4．A　　5．D

二．填空题**（每小题 3 分，共 15 分）**

6．0.2　　7．$\dfrac{3}{5}$　　8．1　　9．24　　10．$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

三．计算题（每小 10 分，共 50 分）

11．【解】$P(X>\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，所以 $Y\sim B(4,\frac{1}{2})$，

故Y的分布列为$P\left(X=k\right)=C_4^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$，$k=0,1,2,3,4$.

………………（10 分）

12．【解】（1）由归一性$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，即$\int_0^{\pi}k\sin xdx=1$，得$k=\frac{1}{2}$

（2）$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

$x<0$时，$F(x)=0$

$0\le x<\pi$时，$F(x)=\int_0^x\frac{1}{2}\sin tdt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x$

$x\ge\pi$时，$F(x)=1$

则$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x, & 0\le x<\pi, \\ 1, & x\ge\pi. \end{cases}$

13．【解】（1）依题意$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$

$a=(0.4+a)(a+b)$

另一方面，由归一性，　$a+b+0.5=1$

故$a=0.4,b=0.1$

（2）显然，$X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

………………（10 分）

14．【解】（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}y, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}=\begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{+\infty}12\mathrm{e}^{-3x-4y}\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases},$$

（2） $P(0<X\le 1,1<Y\le 2)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_1^2 12\mathrm{e}^{-3x-4y}\,\mathrm{d}y$

$$=(1-\mathrm{e}^{-3})(\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{-8})\ .$$

………………（10 分）

15．【解】 $f(z)=\begin{cases}1/4, & -2\le z\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，

$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{Z\le -1,Z\le 1\}=P\{Z\le -1\}=\dfrac{1}{4}$，

$P\{X=-1,Y=1\}=P\{Z\le -1,Z>1\}=0$，

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Z>-1,Z\le 1\}=P\{-1<Z\le 1\}=\dfrac{1}{2}$，

$P\{X=1,Y=1\}=P\{Z>-1,Z>1\}=P\{Z>1\}=\dfrac{1}{4}$，

所以 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	-1	1
-1	$1/4$	0
1	$1/2$	$1/4$

………………（10 分）

四．应用题（**每小题 10 分，共 10 分**）

16．【解】设 $A=$ 甲胎蛋白检测阳性， $B=$ 患有肝炎

依题意， $P(A\mid B)=0.95$ ， $P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.90$ ， $P(B)=0.0004$

由贝叶斯公式

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+0.9996\times 0.1}=0.0038$$

………………（10 分）

五．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．【解】X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}3\mathrm{e}^{-3x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，

则 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-3X}\le y\}=P\{\mathrm{e}^{-3X}\ge 1-y\}$ ，

当 $y<0$ 时， $F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-3X}\ge 1-y\}=P(X\le 0)=0$ ；

当 $y\ge 1$ 时， $F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-3X}\ge 1-y\}=1$ ；

当 $0\le y<1$ 时， $F_Y(y)=P\{\mathrm{e}^{-3X}\ge 1-y\}=P\{X\le -\dfrac{1}{3}\ln(1-y)\}=\int_0^{-\frac{1}{3}\ln(1-y)}3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$ ，

利用变限积分求导，得 $F_Y'(y)=3\mathrm{e}^{\ln(1-y)}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-y}=1$，

于是 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1\text{，}0<y<1\\0,\quad \text{其他}\end{cases}$，即 Y 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

………………（10 分）