

## 2017-2018 第一学期 线代期中试卷

### 一、填空题 (每小题 5 分, 共 35 分)

1. 行列式  $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 已知一个三阶行列式的第二行元素全为 1, 第三行的余子式分别为  $a, a+1, a+2$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设  $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ ,  $A_{ij}$  为  $D$  的  $(i, j)$  元的代数余子式, 则

$-2A_{12} - 4A_{22} + 2A_{32} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设  $A, B$  为 3 阶方阵,  $|A|=1, |B|=-2$ , 则  $|(2A)^*(2B)^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ , 则  $A^* = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设  $A = (\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1, 4\alpha_3, \alpha_3)$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  都是 3 维列向量, 已知  $|A|=2$ , 则  $|A+B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ , 那么  $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

### 二、选择题 (每小题 5 分, 共计 25 分)

1. 设  $A, B, C$  为  $n$  阶方阵, 且  $ABC = E$ , 则下列等式必成立的是 ( )

(A)  $BCA = E$       (B)  $BAC = E$       (C)  $ACB = E$       (D)  $CBA = E$

2. 设  $A, B$  为  $n$  阶方阵, 且  $AB = O$ , 则必有 ( ).

(A)  $A = O$  或  $B = O$       (B)  $|A| + |B| = 0$

(C) 若  $A \neq O$ , 则  $B = O$       (D) 若  $|A| \neq 0$ , 则  $B = O$

3. 设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$ ,  $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则必有 ( ).

(A)  $AP_1P_2 = B$  (B)  $AP_2P_1 = B$  (C)  $P_1P_2A = B$  (D)  $P_2P_1A = B$

4. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = AB^{-1}$ , 则矩阵  $C^{-1}$  中第三行、第二列的元素是 ( ).

(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C) 1 (D)  $\frac{3}{2}$

5. 以下结论正确的是 ( ).

(A) 若方阵  $A$  的行列式  $|A| = 0$ , 则  $A = 0$  (B) 若  $A$  为对称矩阵, 则  $A^2$  也是对称矩阵  
(C) 若  $A^2 = 0$ , 则  $A = 0$  (D) 对  $n$  阶方阵  $A, B$ , 有  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

三、(10 分) 解方程组 
$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = d, \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = d, \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = d. \end{cases}$$
 其中  $a, b, c$  互异.

四、(10 分) 求  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  的逆矩阵.

五、(10 分) 已知  $\alpha = (1, 2, 3)^T$ ,  $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$ , 若  $A = \alpha\beta^T$ , 求  $A^{2017}$ .

六、(10 分) 设  $n$  阶方阵  $A$  满足方程  $A^3 + A^2 - 2A - 2E = 0$ , 证明  $A$  及  $E - A$  都可逆, 并求  $A^{-1}$  及  $(E - A)^{-1}$ .