安徽大学 2024 —2025 学年第一学期

《 概率论与数理统计 A 》期中考试参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1.B　2.D　3.C　4.D　5. B　6. A　7. C　8. D　9. A　10. C

二、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. 解：（1）当 $x<0$ 时，$F(x)=0.$

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} t^2 dt=\dfrac{x^3}{3}.$

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{1} t^2 dt+\int_{1}^{x}(2t-t^2)dt=\dfrac{1}{3}+(t^2-\dfrac{t^3}{3})\Big|_{1}^{x}=x^2-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{3};$

当 $x\ge 2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{1} t^2 dt+\int_{1}^{2}(2t-t^2)dt=\dfrac{1}{3}+(t^2-\dfrac{t^3}{3})\Big|_{1}^{2}=1.$

所以 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^3}{3}, & 0\le x<1, \\ x^2-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{3}, & 1\le x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$　　8 分

（2）$P(\dfrac{1}{2}\le X<\dfrac{3}{2})=F(\dfrac{3}{2})-F(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}.$　　2 分

12. 解：随机挑选一名考生，记其成绩为 X，由题意 $X\sim N(70,\sigma^2)$，

由 $P(X>86)=0.055$，即 $P(X\le 86)=P(\dfrac{X-70}{\sigma}\le\dfrac{86-70}{\sigma}=\dfrac{16}{\sigma})=0.945$，

即 $\Phi(\dfrac{16}{\sigma})=0.945=\Phi(1.6)$, 故 $\sigma=10$.　　6 分

$P(60<70<80)=P(\dfrac{60-70}{10}<70<\dfrac{80-70}{10})=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.682.$　　10 分

13. 解：（1）由于 $\dfrac{1}{6}+a+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}+b=1,\Rightarrow a+b=\dfrac{1}{2};$

由 $P(X+Y=1)=P(X+Y)$

$$P(X+Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1，\ Y=0)=a+\frac{1}{8}$$

$$=P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1，\ Y=)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4},$$

$\Rightarrow a=\frac{1}{8}$，故$b=\frac{3}{8}$， 4分

（2）

X	0	1
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$

Y	0	1	2
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{2}$

6分

(3) $P(XY=0)=1-P(XY\neq 0),$

$$P(XY\neq 0)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{1}{12}+\frac{3}{8}=\frac{11}{24}.$$

$P(XY=0)=1-P(XY\neq 0)=1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}.$ 10分

14. 解：（1）

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,$ $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx,$

当$0\le x\le 1$时，$f_X(x)=\int_x^1 6xdy=6x(1-x);$ 当$0\le y\le 1$时，$f_Y(y)=\int_0^y 6xdx=3y^2;$

当$x<0$或$x>1$时，$f_X(x)=0,$ 当$y<0$或$y>1$时，$f_Y(y)=0,$

故$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 故$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

6 分

（2）$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)dx=\frac{1}{4}.$

10 分

15. 解：由于 $X\sim U(-1,5)$，设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & -1\le x\le 5,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 则

$P(Y=1)=P(X\ge 0)=\int_0^5 \frac{1}{6}dx=\frac{5}{6},$

$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^0 \frac{1}{6}dx=\frac{1}{6},$ 故 Y 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. 10 分

三、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16. 解：设 $A=$“考试及格”，$B=$“按时交作业”，则依题意得

$$P(A)=0.85，\quad P(\overline{A})=0.15，\quad P(B|A)=0.8，\quad P(B|\overline{A})=0.3.$$

（1） 由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(B)&=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A}) \\ &=0.85\times 0.8+0.15\times 0.3=0.725. \end{aligned}$$ 6 分

（2）由贝叶斯公式以及(1)的结果得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.85\times 0.8}{0.725}=\frac{136}{145}.$$ 10 分

四、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

17.证明：$Y=X^2$ 的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y).$

当$y<0$时,$\{X^2\le y\}=\varnothing$,故$F_Y(y)=0$;

当$y\ge 0$时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}).$

因此当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\sqrt{y}$;

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{-1}0dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx+\int_{1}^{\sqrt{y}}0dx=1.$

故 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ \sqrt{y}, & 0\le y<1, \\ 1, & y\ge 1. \end{cases}$ 8 分

故 $Y=X^2$ 为连续型随机变量，其密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 10 分