安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 线性代数 A》期末考试试卷答案详解

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. B 2. C 3. B 4. D 5. A

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $\dfrac{27}{4}$ **7.** 1 **8.** 1 **9.** 1 **10.** $y_1^2+y_2^2$

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11.【解】按第一行展开得：

$$D_n=(a+b)\begin{vmatrix} a+b & a & & \\ b & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ & & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1}-a\begin{vmatrix} b & a & & \\ & a+b & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ & & b & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$ 4 分

故有递推公式

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2}) \qquad \cdots\cdots①$$

①表明数列 D_n-aD_{n-1} 是以 b 为公比的等比数列。

因为 $D_1=a+b, D_2=\begin{vmatrix} a+b & b \\ a & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$，从而

$$D_2-aD_1=b^2， \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots②$$

所以 $$D_n-aD_{n-1}=b^n。 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots③$$

由于原行列式关于 a,b 对称，故也有

$$D_n-bD_{n-1}=a^n。 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots④$$

③ $\times b$ −④ $\times a$： $$(b-a)D_n=b^{n+1}-a^{n+1}， \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

当 $b\neq a$ 时， $D_n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$. 10 分

12.【解】显然 A 可逆，用 A^{-1} 右乘方程两边，得

$$A^{-1}B=6E+B，$$

即 $(A^{-1}-E)B=6E$，则 $B=6(A^{-1}-E)^{-1}$； 6 分

又 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$， $A^{-1}-E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，进而 $(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$，

从而得 $B=6(A^{-1}-E)^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.　　　　10 分

13.【解】 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$，则

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\0&1&1&-1&-1\\2&3&a+2&3&a+6\\4&0&4&a+7&a+11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\0&1&1&-1&-1\\0&1&a-2&-1&a\\0&-4&-4&a-1&a-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\0&1&1&-1&-1\\0&0&a-3&0&a+1\\0&0&0&a-5&a-5\end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=}A,$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<4$，故 $a=3$ 或 $a=5$，

又 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)$，

当 $a=3$ 时，由于 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)$，故 $a=5$；　　　　6 分

当 $a=5$ 时，由于

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\0&1&1&-1&-1\\0&0&2&0&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&3\\0&1&1&-1&-1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&2&-3\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解得 $x_1=1-3k,x_2=-4+k,x_3=3,x_4=k$，故

$\beta=(1-3k)\alpha_1+(-4+k)\beta_2+3\alpha_3+k\alpha_4$，其中 k 为任意实数.　　　　10 分

14.【解】 由解的性质可知 $A(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)=A\alpha_1+A\alpha_2-2A\alpha_3=b+b-2b=O$ 知，

$\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3=(2,2,-6,2)^T$ 为 $AX=O$ 的解；　　　　5 分

且与 $(0,1,-3,0)^T$ 线性无关；

而 $AX=O$ 有 $4-r(A)=2$ 个基础解析，所以 $AX=b$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\2\\-6\\2\end{pmatrix}$$（k_1,k_2 为任意实数）. 10 分

15.【解】（1）设 A 的特征向量 ξ 所对应的特征值为 λ，则有 $A\xi=\lambda\xi$，即，

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

即 $\begin{cases}2-1-2=\lambda\\5+a-3=\lambda\\-1+b+2=-\lambda\end{cases}$，解得 $\lambda=-1,a=-3,b=0$. 5 分

（2）当 $a=-3,b=0$ 时，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0$，

得 $\lambda=-1$ 是 A 的 3 重特征值，但 $r(-E-A)=2$，则 $\lambda=-1$ 对应的线性无关特征向量只有一个，故 A 不可相似对角化. 10 分

16.【解】（1）由题可知，$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$，不妨设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则有

$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-4a-2b^2=-12\end{cases}$，解得 $a=1,b=2$； 3 分

（2）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$，

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$，

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由 $(2E-A)x=0$，得 $\alpha_1=(2,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,0)^T$；

对于 $\lambda_3=-3$，由 $(-3E-A)x=0$，得 $\alpha_3=(1,0,-2)^T$；

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已两两正交，只需单位化，得

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^T,\gamma_2=(0,1,0)^T,\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)^T$，

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则由正交变换 $X=QY$，可将二次型化标准形为

$$2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$ 10 分

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

17.【证明】设常数k_1,k_2,k_3，使得$k_1\beta+k_2A\beta+k_3A^2\beta=0$成立，

由已知，有$A\beta=A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$，$A^2\beta=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2+\lambda_3^2\alpha_3$，代入上式，整理得

$$\left(k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2\right)\alpha_1+\left(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2\right)\alpha_2+\left(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2\right)\alpha_3=0,$$

又由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是不同特征值对应的特征向量，故它们必线性无关，即

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2=0\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2=0\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2=0\end{cases},$$

其系数行列式$\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq0$，所以$k_1=k_2=k_3=0$，则$\beta,A\beta,A^2\beta$线性无关.10 分

18.【证明】（1）B为反对称阵，即$B^T=-B$，

$$\left(\lambda E-B^2\right)^T=\lambda E^T-\left(B^2\right)^T=\lambda E^T-\left(B^T\right)^2=\lambda E^T-(-B)^2=\lambda E-B^2,$$

则$\lambda E-B^2$是对称阵； 4 分

（2）对任意的n为向量$x\neq0$，有

$$x^T(\lambda E-B^2)x=x^T(\lambda E+B^TB)x=\lambda x^Tx+x^TB^TBx=\lambda x^Tx+(Bx)^TBx,$$

$\lambda>0,x\neq0$，有$x^Tx>0,(Bx)^TBx\geq0$，故对任意的$x\neq0$，有

$$x^T(\lambda E-B^2)x>0,$$

所以$\lambda E-B^2$是正定阵. 10 分