

# 安徽大学 2019—2020 学年第一学期

## 《线性代数 A》期中考试试卷答案详解

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. D 2. C 3. A 4. D 5. C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 8 7. 6 8. 1 9. -2 10.  $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

$$\begin{aligned}
 11. \text{【解】 } D_n &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 0 & 1 & L & 1 \\ 1 & 1 & 0 & L & 1 \\ M & M & M & M & M \\ 1 & 1 & 1 & L & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & L & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & L & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & L & 1 \\ M & M & M & M & M \\ n-1 & 1 & 1 & L & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 0 & 1 & L & 1 \\ 1 & 1 & 0 & L & 1 \\ M & M & M & M & M \\ 1 & 1 & 1 & L & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & L & 1 \\ 0 & -1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L & 0 \\ M & M & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & L & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1). \quad 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \text{【解】 } D_n &= \begin{vmatrix} x+1 & x & x & L & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & L & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & L & x \\ M & M & M & M & M \\ x & x & x & L & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & L & x \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & L & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & L & 0 \\ M & M & M & M & M \\ -1 & 0 & 0 & L & \frac{1}{n} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1+\left(\sum_{i=1}^n i\right)x & x & x & L & x \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & L & 0 \\ M & M & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & L & \frac{1}{n} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} \left( 1 + \frac{n(n+1)}{2} x \right). \quad 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

$$13. \text{【解】 } 3A_{11} + 2A_{12} - 3A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad 7 \text{ 分}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 33 \quad 10 \text{ 分}$$

$$14. \text{【解】 (1) } A^2 = (E - XX^T)(E - XX^T) = E - 2XX^T + X(X^T X)X^T$$

$$= E - 2XX^T + XX^T = E - XX^T = A; \quad 4 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 可知  $A^2 = A$ , 得  $A^2 - A - 2E = -2E \Rightarrow (A - 2E)(A + E) = -2E$ , 有

$$\left[-\frac{1}{2}(A - 2E)\right](A + E) = E, \text{ 由定义可知 } (A + E)^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 2E). \quad 10 \text{ 分}$$

$$15. \text{ 由 } AB + E = A^2 + B, \text{ 可得 } (A - E)B = A^2 - E = (A - E)(A + E) \quad 5 \text{ 分}$$

$$\text{而 } A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \text{ 所以 } A - E \text{ 可逆}; \quad 8 \text{ 分}$$

$$B = (A - E)^{-1}(A - E)(A + E) = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 10 \text{ 分}$$

16. 【解】

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 5 \text{ 分}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 分

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 10 \text{ 分}$$

四、分析题 (每小题 12 分, 共 12 分)

17. 【解】方法一:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \end{vmatrix} = |A_1| = (a-1)(4-2b), \quad 6 \text{ 分}$$

下面分四种情况讨论:

(1) 当  $a \neq 1$  且  $b \neq 2$  时,  $|A| \neq 0$ , 则  $r(A) = 4$ ;

(2) 当  $a \neq 1$ ,  $b = 2$  时,  $|A_1|$  中已有一个三阶行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \neq 0$ , 但四阶行列式等于零, 则  $r(A) = 3$ ;

(3) 当  $a = 1$ ,  $b \neq 2$  时,  $|A_1|$  中已有一个三阶行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2-b \end{vmatrix} \neq 0$ , 但  $|A_1|$  中第 3 行与第 4 行成比例, 有  $|A_1| = 0$ , 则  $r(A) = 3$ ;

(4) 当  $a = 1$ ,  $b = 2$  时,  $|A|$  的第 3 行和第 4 行全为 0, 故  $r(A) = 2$ . 10 分

方法二:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \end{pmatrix} = A_1 \quad 6 \text{ 分}$

由  $A_1$  可以看出,

(1) 当  $a \neq 1$  且  $b \neq 2$  时,  $A_1$  中非零行有 4 行, 则  $r(A) = 4$ ;

(2) 当  $a \neq 1$ ,  $b = 2$  时,  $A_1$  中非零行有 3 行, 则  $r(A) = 3$ ;

(3) 当  $a = 1$ ,  $b \neq 2$  时,  $A_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2$ ,  $A_2$  中非零行有 3 行, 则

$$r(A)=3;$$

(4) 当  $a=1$ ,  $b=2$  时,  $A_1$  中非零行仅有 2 行, 故  $r(A)=2$ . 10 分

五、证明题 (每小题 8 分, 共 8 分)

18. 【证明】

(1)  $(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$ , 故  $A+A^T$  是对称阵;

$(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T)$ , 故  $A-A^T$  是反对称阵; 6 分

(2) 由 (1) 可知, 对于任意方阵  $A$ , 可得  $\frac{1}{2}(A+A^T)$  是对称阵,  $\frac{1}{2}(A-A^T)$  是反对称阵, 故有  $A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$ . 8 分