安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《线性代数 A》（A 卷）参考答案及评分标准

一、选择题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. B；　2. B；　3. A；　4. D；　5. C.

二、填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 0；　7. $-1<t<0$；　8. $\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$；　9. 273；　10. $(1,1,-1)^T$.

三、分析计算题（6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 解：方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&3&k&3\\1&k&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-k-3&0\\0&1&k+2&1\\0&0&k^2+k-6&k-2\end{array}\right).$$

讨论：1）当 $k=-3$ 时，方程组无解；

2）当 $k=2$ 时，方程组有无穷多个解，其解为：

$X=k(5,-4,1)^T+(0,1,0)^T$，其中 k 为任意实数.

3）当 $k\neq-3$ 且 $k\neq 2$ 时，方程组有唯一解，解为 $X=(1,\frac{1}{k+3},\frac{1}{k+3})^T$.

…………………（10 分）

12. 解：由于 $XA-A^T=X$，则 $XA-A^T=X$，从而 $X=A^T(A-I)^{-1}$.

因为 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&3\end{pmatrix}$，这样 $X=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&-4&-3\\-1&1&1\\-1&2&2\end{pmatrix}.$$

………………（10 分）

13. 解：将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 排成一个矩阵，并对其作初等行变换，化其为阶梯形矩阵：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\1&-1&2&3\\4&-2&3&10\\2&4&-11&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\0&-2&5&2\\0&-6&15&6\\0&-2&-5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\0&-2&5&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

故原向量组的一个极大线性无关组是α_1,α_2，且有

$$\alpha_3=-\frac{1}{2}\alpha_1-\frac{5}{2}\alpha_2,\quad \alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2.$$

注：答案不唯一.

…………（10 分）

14. 解：由于A与B相似，它们具有相同的特征值，相同的迹和行列式. 而B的特征值是 0，-1，-1，于是有

（1）$b-10=-2$；（2）$|A|=\begin{vmatrix}0&3&3\\a&b&c\\2&-14&-10\end{vmatrix}=6c-12a-6b=0$；

（3）$|-I-A|=\begin{vmatrix}-1&-3&-3\\-a&-1-b&-c\\-2&14&9\end{vmatrix}=20c-15a-15b-15=0$.

解得$a=-1,b=8,c=6$.　……………（10 分）

15. 解：设二次型对应的实对称矩阵为A，则

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}，其特征多项式为$$

$|\lambda E-A|=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，解得：

属于特征值$\lambda_1=1$的特征向量为$\alpha_1=(0,1,1)^T,\alpha_2=(-4,1,-1)^T$；

属于特征值$\lambda_2=10$的特征向量为$\alpha_3=(1,2,-2)^T$.

正交单位化得到：

$$\beta_1=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^T；\ \beta_2=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}^T；\ \beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}^T.$$

故作正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{6} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{6} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$将二次型化为

标准形：$y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$.　　……………（10 分）

16. 解：设$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，则$A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，

得到$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

……………（10 分）

四、证明题（共 10 分）

17. 证明：（1）由于A是实对称矩阵，故

$$(I - A^{-1})^T = I^T - (A^{-1})^T = I - (A^T)^{-1} = I - A^{-1},$$

从而$I - A^{-1}$也是实对称矩阵.

（2）设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的所有特征值，于是$A - I$的所有特征值为

$\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \cdots, \lambda_n - 1$，而$A - I$正定，故对$1 \le i \le n$，均有$\lambda_i - 1 > 0$，即$\lambda_i > 1$.

对于实对称矩阵$I - A^{-1}$，其特征值为$1 - \dfrac{1}{\lambda_1}, 1 - \dfrac{1}{\lambda_2}, \cdots, 1 - \dfrac{1}{\lambda_n}$.

这样，$I - A^{-1}$的特征值均大于 0，从而$I - A^{-1}$正定的.

……………（10 分）