安徽大学 2023−2024 学年第一学期

《线性代数 A》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

院/系__________ 年级__________ 姓名__________ 学号__________

答题勿超装订线

装　订　线

一、选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 为任一 n 阶方阵，下列结论**错误**的是（　　）

（A）$AA^* = A^*A$；　　（B）$AA^T = A^TA$；

（C）$A^mA^p = A^pA^m$；　　（D）$(A+I)(A-I)=(A-I)(A+I)$.

2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k，必有（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关；　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2$ 线性无关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关；　（D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+\beta_2$ 线性相关.

3. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征值，则其伴随矩阵 A^* 必有一个特征值为（　　）

（A）$\dfrac{|A|}{\lambda}$；　（B）$\dfrac{|A|^{n-1}}{\lambda}$；　（C）$\lambda|A|$；　（D）$\lambda|A|^{n-1}$.

4. 设线性方程组 $AX=0$ 的解都是线性方程组 $BX=0$ 的解，则必有（　　）

（A）秩 $A<$ 秩 B；（B）秩 $A>$ 秩 B；（C）秩 $A\le$ 秩 B；（D）秩 $A\ge$ 秩 B.

5. 下列矩阵中与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 矩阵 A 为一个 $n(n\ge 2)$ 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $r(A)=n-2$，则 $r(A^*)=$_________.

7. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 正定，　则 t 的范围为 ___________.

8. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$，$(A^{-1})^*$ 是 A^{-1} 的伴随矩阵，则 $(A^{-1})^*=$_______________.

9. 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，2，3，则矩阵 A^2+A+I 的行列式为 _________.

10. 设 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中一个基，向量 $\alpha=(1,2,1)$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为______________.

三、分析计算题（共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 讨论线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$ 解的情况；若有解，则求出方程组的解.

12. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，且 $XA - A^T = X$，求矩阵 X.

13. 求向量组 $\alpha_1 = (1,1,4,2)^T$，$\alpha_2 = (1,-1,-2,4)^T$，$\alpha_3 = (-3,2,3,-11)^T$，$\alpha_4 = (1,3,10,0)^T$，的一个极大线性无关组并将余下的向量表示成该极大线性无关组的线性组合.

14. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似，求 a,b,c 的值.

15. 用正交变换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 化为标准形，并写出相应正交变换的矩阵.

16. 给定向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的两个基

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{与} \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

四、证明题(共 10 分)

17. 矩阵 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A - I$（其中 I 为 n 阶单位矩阵）为正定矩阵.
证明：（1）$I - A^{-1}$ 是实对称矩阵；（2）$I - A^{-1}$ 是正定矩阵.