院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

装 订 线

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1． 设随机事件 A 和 B 满足 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$，则有（　　）

（A）$A\cup B=\Omega$　　（B）$AB=\Phi$　　（C）$P(A-B)=0$　　（D）$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

2． 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度函数为 $f(x)$，$Y=1+X$，Y 的分布函数为 $G(y)$，概率密度函数为 $g(y)$，则有（　　）

（A）$G(y)=F(1-y)$　（B）$G(y)=1-F(1-y)$　（C）$g(y)=f(y-1)$（D）$g(y)=1-f(y)$

3． 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，X_1，X_2，X_3 是来自总体 X 的简单随机样本，则下列估计量中不是 μ 的无偏估计量的是（　　）

（A）$\hat{\mu}_1=\dfrac{1}{5}X_1+\dfrac{3}{10}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$　　（B）$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{4}X_1+\dfrac{1}{5}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$

（C）$\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{4}X_2+\dfrac{5}{12}X_3$　　（D）$\hat{\mu}_4=\dfrac{1}{3}X_1+\dfrac{1}{6}X_2+\dfrac{1}{2}X_3$

4． 设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 σ^2 已知，μ 为未知参数，则 μ 的双侧置信度长度 L 与置信度 $1-\alpha$ 的关系是（　　）.

（A）当 $1-\alpha$ 减小时，L 变小　　（B）当 $1-\alpha$ 减小时，L 变大

（C）当 $1-\alpha$ 减小时，L 不变　　（D）当 $1-\alpha$ 减小时，L 增减不定

5．设总体 X 服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布，X_1，$X_2,\cdots$，X_n 为来自总体 X 的简单随机样本，$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}\le 1\right\}=$（　　）

（A）$\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)$　　（B）$\Phi(1)$　　（C）$\Phi\left(\sqrt{3}\right)$　　（D）$\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6． 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$________.

7． 设 $X\sim B(2,\dfrac{1}{3})$，则 $P(X\ge 1)=$__________.

8． 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，X 与 Y 的期望均为 0，方差均为 1，它们的协方差为 0，记 $Z_1=2X+Y$，$Z_2=2X-Y$，则 Z_1 和 Z_2 的协方差为__________.

9．设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=75$，方差 $D(X)=5$，则根据切比雪夫不等式 $P\left(|X-75|\ge 10\right)\le$__________.

10．设总体 $X\sim N(0,1)$，X_1，X_2，X_3，X_4 为来自总体 X 的简单随机样本，则 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$ 服从的分布为___________.（**分布须含自由度**）

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.04，第二台出现不合格品的概率是 0.07，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件数比第二台加工的零件数多一倍.

（1）求任取一个零件是合格品的概率；

（2）如果取出的零件是不合格品，求它是第二台车床加工的概率.

12．设连续型随机变量 X 的密度为 $f(x)=\begin{cases} Ke^{-5x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

（1）确定常数 K；（2）求 $P\{X>0.2\}$；（3）求分布函数 $F(x)$.

13．设 X 与 Y 两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0; \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数.

14．设连续型随机变量 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)\mid 0<x<1,|y|<x\}$ 上的均匀分布.

（1）求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；（2）问 X 与 Y 是否独立？

15．设总体 $\boldsymbol{X}$ 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，其中 θ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从该总体中抽取的一个样本，求 θ 的矩估计量与极大似然估计量.

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16．已知某机器生成出的零件长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从中随意抽取容量为 16 的一个样本，测得样本均值 $\overline{x}=10$，样本方差 $S^2=0.16$.问在显著性水平为 0.05 下能否接受假设：这批零件长度的均值为 9.7.

（可能用到的数据：$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.025}(16)=2.1199$）

五、证明题（每小题 10 分，共 10 分）

17．设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$. 证明：U 与 V 不独立，但相关.