安徽大学 2020—2021 学年第二学期

《高等数学 A（二）》期末试卷（B 卷）参考答案

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、B　　3、D　　4、B　　5、D

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 0

7. $[2020, 2022]$

8. 48π

9. $(f_1' + f_2' y)dx + (f_1' + f_2' x)dy$

10. $\dfrac{2}{3}\pi$

三、计算题

11.（9 分） **解：**

设 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$，$F_x' = -3yz$，$F_y' = -3xz$，$F_z' = 3z^2 - 3xy$，当 $z^2 \neq xy$ 时，得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}$$

12.（9 分）解：

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i - j - k$$

因此，所求平面方程为：

$$2(x-1) - (y-1) - (z-1) = 0$$

即 $2x - y - z = 0$

13.（9 分）**解：**

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds = 2\int_0^a \sqrt{ax}\,\frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}}\,dx = a\sqrt{a}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a - x}} = 2a^2$$

14.（9 分）**解：** S_1：$x^2 + y^2 \le 1$ **取下侧**

由高斯公式

$$\iint\limits_S (x^3+1)dydz + (y^3+1)dzdx + (z^3+1)dxdy$$

$$= \oiint\limits_{S+S_1} (x^3+1)dydz + (y^3+1)dzdx + (z^3+1)dxdy$$

$$= 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz = \frac{6\pi}{5}$$

又因为：

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+1)dydz+(y^3+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy=-\pi$$

所以，原式=$\dfrac{11\pi}{5}$

15. （9 分）

解：

$$\oiint\limits_{\Sigma}(z+1)^2dS=\oiint\limits_{\Sigma}z^2dS+\oiint\limits_{\Sigma}2zdS+\oiint\limits_{\Sigma}1dS$$

因为：$\oiint\limits_{\Sigma}1dS=4\pi a^2$，$\oiint\limits_{\Sigma}2zdS=0$，$\oiint\limits_{\Sigma}z^2dS=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}a^2dS=\dfrac{4}{3}\pi a^2$

所以，原式=$4\pi a^2+\dfrac{4}{3}\pi a^4$

16（9 分）

解 幂级数的收敛域为$(-1,1)$.

设$\forall x\in(-1,1)$内，幂级数的和函数为$S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

对$S(x)$两边求 0 到x上的积分，得

$$\int_0^x S(t)\,dt=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=x(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)=\frac{x}{1-x},$$

则$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

四、应用题（共 10 分）

17. **解：**由第二类曲线积分的物理意义和格林公式

$$W=\oint_L(y+3x)dx+(2y-x)dy=-\iint\limits_D\frac{\partial}{\partial x}(2y-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3x)dxdy$$

$$=2\iint\limits_D dxdy=2S_{椭圆}=4\pi$$

五、证明题（共 6 分）

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-2}$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-2}$发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-2}$由莱布尼兹判别法可判断收敛，收敛与发散和一定发散

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-2}$发散