安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．C　　3．B　　4．D　　5．C

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．$\frac{1}{4}$　　7．$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$　　8．2　　9．8　　10．π

三．计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(1+x^2)}{2x^3}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$$

…………………………（10 分）

12．解：函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$，$y'=\frac{4x}{(1-x)^3}$，

令 $y'=0$，得 $x=0$，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	不存在	$-$
y	$\searrow$	极小值	$\nearrow$		$\searrow$

由此可知，函数的单增区间为 $(0,1)$，单减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$；函数在 $x=0$ 取得极小值，极小值为 0

………………（10 分）

13．解：$y=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left[\int(2+\sqrt{x})e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx+C\right]=2x+Ce^{-\sqrt{x}}$

由 $y(1)=3$，得 $C=e$，故 $y=2x+e^{1-\sqrt{x}}$

$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+e^{1-\sqrt{x}}}{x}=2$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y-ax\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+e^{1-\sqrt{x}}-2x\right)=0$

故所求的斜渐近线方程为 $y=2x$

………………（10 分）

14．解：令 $x=\tan t$，$\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\tan^2 t}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\int\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C$.

………………（10 分）

15．解：$\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x\xlongequal{x-2=t}\int_{-1}^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$

$=0+\frac{1}{2}\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

………………（10 分）

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16．解：（1）过点 $(1,1)$ 的切线斜率为 $y'|_{x=1}=2$，切线方程为 $y=2x-1$，

此切线与 Ox 轴交点为 $(\frac{1}{2},0)$，曲线、Ox 轴及切线所围图形面积

$$\int_0^1 x^2dx-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

（2）旋转体的体积

$$V=\int_0^1\pi(x^2)^2dx-\int_{1/2}^1\pi(2x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}$$

………………（10 分）

五．证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17．证明：令 $F(x)=\cos xf(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且 $F(0)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$，

则由罗尔中值定理，知 $\exists\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$F'(\xi)=0$

………………（5 分）

18．证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan x)^\lambda}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{1}{1+\left(\tan(\frac{\pi}{2}-u)\right)^\lambda}du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot u)^\lambda}du$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\cot x)^\lambda}dx$

………………（5 分）