安徽大学 2023—2024 学年第二学期

《 线性代数 A 》期中考试试卷

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1．已知 A，B，C 均为 n 阶方阵，则下列结论正确的是（　　）

(A)　$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(B)　$(AB)^m = A^m B^m$，其中 m 为正整数

(C)　若 $AB = AC$ 且 $A \neq 0$，则 $B = C$

(D)　若 $ABC = E$，则 $BCA = E$，其中 E 为 n 阶单位矩阵

2．A 是 n 阶（$n>1$）可逆矩阵，A^* 是其伴随矩阵，下列结论**错误**的是（　　）

(A)　$\left(A^*\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$　(B) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$　(C) $(kA)^* = k^n A^*$　(D) $(kA)^* = k^{n-1} A^*$

3．设 α_1，α_2 是 n 维向量，向量 β_1，β_2，β_3 均可以由 α_1，α_2 线性表示，则下列结论正确的是（　　）

(A)　β_1，β_2，β_3 线性无关

(B)　β_1，β_2，β_3 线性相关

(C)　仅当 α_1，α_2 线性无关时，β_1，β_2，β_3 线性无关

(D)　仅当 α_1，α_2 线性相关时，β_1，β_2，β_3 线性相关

4．设 A, P 均为 3 阶方阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，

若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$，则 $Q^T AQ$ 为（　　）

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5．设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩 $r(A) = m < n$，I_m 为 m 阶单位矩阵，则（　　）

(A)　A 的任意 m 个列向量必线性无关

(B)　A 的行向量组必线性无关

(C)　A 的任意一个 m 阶子式不等于零

(D)　A 通过初等行变换，必可化为 (I_m, O) 的形式

6．设行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，满足$a_{11}=1$，$a_{12}=2$，$a_{13}=0$，余子式$M_{31}=6$，$M_{32}=x$，$M_{33}=19$，则$x=$（　　）

（A）2　　（B）-2　　（C）3　　（D）-3

7．设A,B均是二阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，求$|2A^*B^{-1}|=$（　　）

（A）$-\dfrac{8}{3}$　　（B）$\dfrac{8}{3}$　　（C）$-\dfrac{5}{3}$　　（D）$\dfrac{5}{3}$

8．若$\lambda>0$，且齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+3x_2+4x_3=0 \\ -x_1+\lambda x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$有非零解，则$\lambda=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）4　　（D）3

9．已知$\alpha=(1,2,3)$，$\beta=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3})$，设$A=\alpha^T\beta$，则$A^n=$（　　）

（A）$3^n\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$　　（B）$3^n\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 2 & 1 & 3/2 \\ 3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

（C）$3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 2 & 1 & 3/2 \\ 3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$　　（D）$3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$

10．若向量组$\alpha_1=(1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(1,0,a)^T$，$\alpha_3=(1,-1,3)^T$线性相关，则$a=$（　　）

（A）$-\dfrac{8}{3}$　　（B）$\dfrac{8}{3}$　　（C）$-\dfrac{5}{3}$　　（D）$\dfrac{5}{3}$

二、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．计算n阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

12．已知a_1,a_2,a_3是互不相同的实数，利用克拉默法则求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=1 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=1. \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=1 \end{cases}$$

13．已知矩阵方程 $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$，求未知矩阵 X .

14．求向量组 $\alpha_1=(1,1,2,3)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,3,5)^T$，$\alpha_4=(4,-2,5,6)^T$ 和 $\alpha_5=(-3,-1,-5,-7)^T$ 的秩和一个极大无关组.

15．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & a\\ 2 & 7 & a & 3\\ 0 & a & 5 & -5\end{pmatrix}$，若秩 $r(A)=2$，求 a 的值.

三、应用题（共 10 分）

16．工程技术人员针对土木工程中的某个平衡问题，得到如下线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+2x_4=1\\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=5\\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4\end{cases}$$

求该线性方程组的通解.

四、证明题（共 10 分）

17．设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$，证明：$A-E$ 为可逆矩阵.