

安徽大学 2018—2019 学年第 1 学期

《 概率论与数理统计 A 》考试试卷 (A 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号 _____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分

1. 三个人独立地破译一个密码, 他们单独破译出的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 则“此密码被破译出”的概率为_____.

2. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复

观察中随机事件 $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数, 则 $P(Y = 2) =$ _____.

3. 设随机变量 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布, 且满足 $P(\xi = 1) = P(\xi = 2)$, 则 $P(\xi^2 < 3) =$ _____.

4. 已知总体 X 的期望 $EX = 0$, 方差 $DX = \sigma^2$, 从总体 X 中抽取容量为 n 的简单随机样本, 样本均值、样本方差分别记为 \bar{X}, S^2 , 则 $E\left(\frac{n}{2}\bar{X}^2 + \frac{1}{2}S^2\right) =$ _____.

5. 设某农作物的平均亩产量 X (单位: kg) 服从 $N(\mu, 100^2)$. 现随机抽取 100 亩进行试验, 观察其亩产量, 得到样本均值 $\bar{x} = 500$ kg, 则总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为_____. ($\Phi(1.645) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975$)

二、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分

6. 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 且 $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则().

(A) 事件 A 与事件 B 互不相容

(B) 事件 A 与事件 B 对立

(C) 事件 A 与事件 B 不独立

(D) 事件 A 与事件 B 独立

7. 设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$, 则下列结论中正确的是().

- (A) $P(X - Y \leq 0) = \frac{1}{2}$ (B) $P(X - Y \leq 1) = \frac{1}{2}$
 (C) $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{2}$ (D) $P(X + Y \leq 0) = \frac{1}{2}$

8. 如果随机变量 X 与 Y 满足 $D(X+Y) = D(X-Y)$, 则必有().

- (A) $D(X)D(Y) = 0$ (B) $D(X) = 0$
 (C) X 与 Y 相互独立 (D) X 与 Y 不相关

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为一列独立同分布随机变量序列, 其共同期望为 0, 方差为 1. 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则以下正确的是().

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) = \Phi(x)$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) = \Phi(x)$
 (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) = \Phi(x)$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n \sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) = \Phi(x)$

10. 下列叙述正确的是().

- (A) 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 则 $\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$
 (B) 设 $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$, 且 X 与 Y 独立, 则 $X+Y \sim \chi^2(n+m)$
 (C) 设 θ_1 和 θ_2 都是参数 θ 的无偏估计, 如果 $D\theta_1 \leq D\theta_2$, 则 θ_2 比 θ_1 有效
 (D) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, μ 为未知参数, 则 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 是一个统计量

三、分析计算题 (每小题 13 分, 共 65 分)

得分	
----	--

11. 试卷中有一道选择题, 共有 $n(n \geq 2)$ 个答案可供选择, 其中只有一个答案是正确的. 任一考生如果会解这道题, 则一定能选出正确答案; 如果他不会解这道题, 则他不妨任选其中一个答案. 设任一考生会解这道题的概率是 $p(0 < p < 1)$,

- (1) 求任一考生选出正确答案的概率;
 (2) 已知某考生所选答案是正确的, 求他/她确实会解这道题的概率.

12. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

- (1) 求 k 的值;
- (2) 求关于 t 的一元二次方程 $t^2 + \sqrt{2}t + X = 0$ 有实根的概率;
- (3) 求随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度函数.

13. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right), & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

(1) 求 X 的边际密度函数;

(2) 求概率 $P(X > Y)$;

(3) 求在 $\left\{ X = \frac{1}{2} \right\}$ 的条件下 Y 的条件概率密度 $f_{Y|X} \left(y \middle| \frac{1}{2} \right)$ 以及概率 $P \left(Y < \frac{1}{2} \middle| X = \frac{1}{2} \right)$.

14. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令随机变量

$$X_1 = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

(1) 求 (X_1, X_2) 的联合分布;

(2) 判断 X_1, X_2 是否独立;

(3) 判断 X_1, X_2 是否相关; 如果相关, 求 X_1, X_2 的相关系数.

15. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\lambda} e^{-\frac{x^2}{\lambda}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n .

- (1) 求参数 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}$;
- (2) 判断 $\hat{\lambda}$ 是否为 λ 的无偏估计量.

得分	
----	--

四、应用题（每小题 8 分，共 8 分）

16. 假定某厂生产一种钢索，它的断裂强度 X (kg/cm^2) 服从正态分布 $N(\mu, 20^2)$. 从中选取一个容量为 9 的样本，得 $\bar{x} = 680 \text{kg}/\text{cm}^2$. 若取 $\alpha = 0.05$ ，则能否据此样本认为这批钢索的断裂强度为 $700 \text{kg}/\text{cm}^2$? ($\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$)

得分	
----	--

五、证明题（每小题 7 分，共 7 分）

17. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ 与 μ 的泊松分布，试证： $X + Y$ 服从参数为 $\lambda + \mu$ 的泊松分布.