安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《概率论与数理统计 A》期末考试（A 卷）

试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D　　2．C　　3．B　　4．A　5．C

二．填空题（**每小题 3 分，共 15 分**）

6．1　　7．$\frac{5}{9}$　　8．3　　9．　0.05　　10．$t(2)$

三．**计算题（每小题 10 分，共 50 分）**

11．【解】记事件 A:取到第一台车床加工的零件，B:取到合格品，则 $P(A)=\frac{2}{3}$.

（1）由全概率公式可得：

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{2}{3}\times 0.96+\frac{1}{3}\times 0.93=0.95\ ;$$

（2）由全概率公式可得：$P(\overline{A}\mid \overline{B})=\dfrac{P(\overline{A})P(\overline{B}\mid \overline{A})}{P(\overline{B})}=\dfrac{\frac{1}{3}\times 0.07}{0.05}=\dfrac{7}{15}$.　　　10 分

12．【解】（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{+\infty}Ke^{-5x}dx=\frac{1}{5}K=1$，故 $K=5$；

（2）$P(X>0.2)=\int_{0.2}^{+\infty}5e^{-5x}dx=e^{-1}$ ；

（3）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $x\ge 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}dx+\int_{0}^{x}5e^{-5x}dx=1-e^{-5x}$.

（2）故 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-5x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$.　　　10 分

13．【解】由卷积公式得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$，

又因为 X 与 Y 相互独立，所以 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$，

当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=0$ ；

当 $0<z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{0}^{z}e^{-(z-x)}dx=1-e^{-z}$；

当 $z\ge 1$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{0}^{1}e^{-(z-x)}dx=e^{-z}(e-1)$ ；

所以 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 1-e^{-z} & 0<z<1.\\ e^{-z}(e-1) & z\ge 1\end{cases}$$ 10 分

14.【解】由题意可知(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1,\ 0<x<1,|y|<x,\\ 0,\qquad 其他.\end{cases}$$

（1） $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy,\ 0<x<1,\\ 0,\qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}2x,\ 0<x<1,\\ 0,\qquad 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1dx,\ \ |y|<2,\\ 0,\qquad 其他\end{cases}=\begin{cases}1-|y|,\ |y|<1,\\ 0,\qquad 其他.\end{cases}$$

（2）由于$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以X与Y不独立. 10 分

15. 【解】（1） $EX=\int_0^1 \theta x^{\theta}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$，

令$\overline{X}=EX$，则θ的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$；

（2）设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为来自总体X下样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的样本值，则似然函数为：

$$L(\theta)=\theta^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1},$$

有对数似然函数为：

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

于是 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得似然方程$\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

解得 $\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

因此得θ 的极大似然估计量为： $\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$. 10 分

四. 应用题（**每小题 10 分，共 10 分**）

16.【解】$H_0:\mu=\mu_0=9.7$， $H_1:\mu\ne\mu_0$；

检验统计量：$T \overset{H_0}{=} \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

拒绝域为：$|T| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，

又$n=4$，计算得$\bar{x}=10$，$S=0.4$，从而$T=3$，又

$$T > t_{0.025}(15) = 2.1315,$$

故拒绝H_0，认为这批零件长度均值为 9.7 的假设不合理.　　　　　　10 分

五．证明题（**每小题 10 分，共 10 分**）

17．【证明】U与V的取值分别为 1，2，于是

$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}^2=\dfrac{4}{9}$，

$P\{U=1,V=2\}=P(\phi)=0$，

$P\{U=2,V=1\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=2P\{X=1\}P\{Y=2\}=\dfrac{4}{9}$

$P\{U=2,V=2\}=1-\dfrac{4}{9}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$，

故

$U \backslash V$	1	2
1	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

（1） $P(U=1,V=2) \ne P(U=1)P(V=2)$，所以不独立；

（2）

$$EU=\frac{4}{9}\times1+\frac{4}{9}\times2+\frac{1}{9}\times2=\frac{14}{9}，\quad EV=\frac{4}{9}\times1+\frac{4}{9}\times1+\frac{1}{9}\times2=\frac{10}{9},$$

$EUV=\dfrac{4}{9}\times1\times1+\dfrac{4}{9}\times1\times2+\dfrac{1}{9}\times2\times2=\dfrac{16}{9}$，故

$Cov(U,V)=E(UV)-(EU)(EV)=\dfrac{4}{81}\neq 0$，所以相关.