

# 安徽大学 2023—2024 学年第一学期

## 《线性代数 A》期中考试试卷

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号\_\_\_\_\_

学号

姓名

专业

年级

院/系

### 一、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 排列  $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$  的逆序数为 ( )

- A.  $\frac{n(n-1)}{2}$       B.  $\frac{n(n+1)}{2}$       C.  $n^2$       D.  $n^2 - n$

2. 若方阵  $A, B$  等价, 则 ( )

- A.  $|A| = |B|$       B.  $|A| \neq |B|$   
C. 若  $|A| > 0$ , 则  $|B| > 0$       D. 若  $|A| = 0$ , 则  $|B| = 0$

3. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $A \neq 0, AB = 0$ , 则以下结论正确的是 ( )

- A.  $B = 0$       B.  $|A| = 0$  或  $|B| = 0$       C.  $BA = 0$       D.  $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

4. 设  $m \times n$  矩阵  $A$  的秩  $r(A) = m < n$ ,  $I_m$  为  $m$  阶单位矩阵, 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $A$  的任意  $m$  个列向量线性无关  
B.  $A$  的任意  $m$  阶子式不等于 0  
C. 若矩阵  $B$  满足  $BA = 0$ , 则  $B = 0$   
D.  $A$  经过初等变换, 必可以化为  $(I_m, 0)$  的形式

5. 已知线性方程组的系数矩阵  $A$  是  $4 \times 5$  矩阵, 且  $A$  的行向量线性无关, 则 ( )

- A.  $A$  的列向量线性无关  
B. 方程组增广矩阵的列向量线性相关  
C. 方程组增广矩阵的任意四个列向量线性无关  
D. 方程组增广矩阵的列向量线性无关

### 二、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

6.  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n = \underline{\hspace{2cm}} .$

7. 已知  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 + 2A + 3I = 0$ , 则  $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}} .$

8. 若  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $AB = A + B$ , 则  $B = \underline{\hspace{2cm}} .$

9.  $A$  为 3 阶方阵, 且  $|A|=4$ , 则  $|(A^*)^{-1}|=$ \_\_\_\_\_.

10. 设  $r(A_{4 \times 3})=2, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 则  $r(AB)=$ \_\_\_\_\_.

### 三、计算题 (每小题 10 分, 共 60 分)

11.  $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ , 求  $A^{-1}$ .

12. 设矩阵  $A=\begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ , 求  $-M_{41}+M_{42}-M_{43}+M_{44}$ , 其中  $M_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的余子式.

13. 计算  $n$  阶行列式  $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-n \end{vmatrix}$  的值.

14. 求向量组  $\alpha_1=(2,1,3,-1), \alpha_2=(3,-1,2,0), \alpha_3=(4,2,6,-2), \alpha_4=(4,-3,1,1)$  的秩和极大无关组.

15. 求  $\lambda$  的值, 使矩阵  $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  的秩最小, 问此最小值为多少?

16. 求数  $a, b$  的值, 使方程组  $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=a \\ x_2+2x_3+2x_4=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4=b \end{cases}$  有解, 并求此时方程组的通解.

### 四、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

17. 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶方阵,  $AB=BC=CA=I$ . 证明:  $A^2+B^2+C^2=3I$ .

18. 已知  $\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3, \beta_2=\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_1-3\alpha_2-\alpha_3$ , 且  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关. 证明:  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性无关.