安徽大学 2023—2024 学年第二学期

《线性代数 A》期中考试试题参考答案及评分标准

一．选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1.（D）　2.（C）　3.（B）　4.（A）　5.（B）

6.（C）　7.（A）　8.（B）　9.（D）　10.（D）

二．计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11.【解】

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)x \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$ ………………（5 分）

$$= (n-1)x \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)x^n$$

………………（10 分）

12.【解】系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2) \neq 0$

………………（4 分）

由克拉默法则知，方程组有唯一解，且

$x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 1$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 0$，$x_3 = \dfrac{D_3}{D} = 0$　　………………（10 分）

13.【解】

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

………………（6 分）

所以 $X=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-1&1&-1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4&-2\\-6&5&-4\end{pmatrix}$

………………（10 分）

14．【解】 $\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-2&2&-6&2\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

向量组的秩为 2；………………（6 分）

α_1,α_2 为一个极大线性无关组．………………（10 分）

15．【解】

$A=\begin{pmatrix}1&3&2&a\\2&7&a&3\\0&a&5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&2&a\\0&1&a-4&3-2a\\0&0&5-a(a-4)&-5-a(3-2a)\end{pmatrix}$………………（6 分）

$r(A)=2$，得 $5-a(a-4)=0$，$-5-a(3-2a)=0$ ，故 $a=-1$．………………（10 分）

三．应用题（共 10 分）

16．【解】$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&2&1\\2&1&4&1&5\\-1&-2&-2&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&2&1\\0&3&0&-3&3\\0&-3&0&3&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&-1&2&2&1\\0&1&0&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$………………（6 分）

即 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+2x_4=1\\x_2-x_4=1\end{cases}$，取 x_3,x_4 为自由未知量，得 $\begin{cases}x_1=2-2x_3-x_4\\x_2=1+x_4\end{cases}$

………………（10 分）

四．证明题（共 10 分）

17．【证明】$A+B=AB\ \Rightarrow\ A+B-AB+E=E$ ………………（6 分）

$\Rightarrow\ (A-E)(B-E)=E$，………………（9 分）

所以 $A-E$ 可逆．………………（10 分）