2017-2018 学年第一学期《线性代数》期中试卷参考答案

一、填空题（每小题 5 分，共 35 分）

1、 $\underline{(x+2a)(x-a)^2}$； 2、$\underline{-1}$； 3、 $\underline{0}$； 4、$\underline{-4}$； 5、 $\underline{\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$；

6、$\underline{8}$；7、 $\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}}$.

二、选择题（每小题 5 分，共 25 分）

1、A； 2、D； 3、C； 4、A； 5、B.

三、（10 分）

解: 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0,$（$a,b,c$ 互异），

则由 cramer 法则知方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\begin{vmatrix} d & a & a^2 \\ d & b & b^2 \\ d & c & c^2 \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=\frac{dD}{D}=d,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\begin{vmatrix} 1 & d & a^2 \\ 1 & d & b^2 \\ 1 & d & c^2 \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=0,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 1 & b & d \\ 1 & c & d \end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=0.$$

四、（10 分）

解法 1（用初等行变换）

$$\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}\right)\xrightarrow{\text{(初等行变换)}}\left(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{r_3\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1/2&-3/2&-5/2\\0&1&0&1/2&1/2&1/2\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&-3/2&-5/2\\1/2&1/2&1/2\\0&1&1\end{pmatrix}$

解法 2　用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 求解也可，由 $|\boldsymbol{A}|=-2,\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$

得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&-3/2&-5/2\\1/2&1/2&1/2\\0&1&1\end{pmatrix}$.

五、(**10** 分)

解：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^T=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left[1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right]=\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\2&2/2&2/3\\3&3/2&3/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{2017}=(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)^{2017}&=(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)\cdots(\boldsymbol{\alpha\beta}^T)\\&=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^T\qquad(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3)\\&=3^{2016}\boldsymbol{\alpha\beta}^T=3^{2016}\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}^{2017}=3^{2016}\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{pmatrix}$$

六、(10 分)

解：由已知得 $A(A^2+A-2E)=2E$，即 $A\,[\dfrac{1}{2}(A^2+A-2E)]=E$，

于是由矩阵可逆定理的推论知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A^2+A-2E).$$

又由已知得 $(A^2+2A)(A-E)=2E$，即 $-\dfrac{1}{2}(A^2+2A)(E-A)=E$，

所以 $E-A$ 可逆，且有 $(E-A)^{-1}=-\dfrac{1}{2}(A^2+2A)$.