院/系________ 年级________ 专业________ 姓名________ 学号________

答题勿超装订线

安徽大学 2023—2024 学年第一学期

《 高等数学 A（一） 》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷　　时间 120 分钟）

考场登记表序号________

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　　）.

（A）不连续　　　　（B）连续但不可导

（C）可导且导数为0　　　　（D）可导且导数不为0

2．设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^3}{(x-3)(x-e)}$，则（　　）.

（A） $x=3$ 及 $x=e$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=3$ 及 $x=e$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $x=3$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点， $x=e$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D） $x=3$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=e$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

3．若 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，则 $\int xf'(x)dx=$（　　）.

(A) $(1+2x^2)e^{-x^2}+C$　　　　(B) $-(1+2x^2)e^{-x^2}+C$

(C) $(1-2x^2)e^{-x^2}+C$　　　　(D) $-(1-2x^2)e^{-x^2}+C$

4．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$（　　）.

（A） e　　（B） e^2　　（C） e^3　　（D） e^4

5．若广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{(1-p)x}dx$ 与 $\int_1^{e}\dfrac{dx}{x\ln^{p-1}x}$ 均收敛，则常数 p 的取值范围是（　　）.

（A） $p>1$　　（B） $p<1$　　（C） $1<p<2$　　（D） $p>2$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=$ ________.

7．曲线 $y=xe^{-x}$ 的拐点坐标是________.

8．曲线 $y=x^2$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率为________.

9．摆线第一拱$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$（$0 \le t \le 2\pi$）的弧长为__________.

10．$\int_{-1}^{1}\left(2+\sin x\right)\sqrt{1-x^2}dx =$ ___________.

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

12．求函数$y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$的单调区间与极值.

13．设函数$y(x)$是微分方程$y'+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$满足$y(1)=3$的解，求曲线$y=y(x)$的斜渐近线方程.

14．计算不定积分$\int\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

15．设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & x<1 \\ x\ln x, & x\ge 1 \end{cases}$，求$\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

四、应用题（每小题 10 分，共 10 分）

16．已知曲线$y=x^2$，过点$(1,1)$作曲线的切线，该切线与曲线以及x轴所围图形为D（1）求D的面积；（2）求D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

17． $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内可导， $f(0)=0$，

证明：$\exists\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)\cos\xi = f(\xi)\sin\xi$.

18．设λ为任意实数，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\left(\tan x\right)^{\lambda}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\left(\cot x\right)^{\lambda}}dx$.