安徽大学 2008－2009 学年第二学期

《高等数学 C（二）》考试试卷（A 卷）参考答案及评分细则

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．1 或 2；　2. $\sqrt{2}$；　3. $\dfrac{1}{10}A$；　4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$；　5. 2.

二、单项选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. C；　7. A；　8. C；　9. D；　10. B.

三、计算题(第 11 小题至第 14 小题每题 8 分，
第 15 小题至第 17 小题每题 10 分，共 62 分)

11. 已知 $z=\sin\dfrac{y}{x}$，求(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$；　(2) dz；　(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解：$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$$

$$dz = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx + \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

12. 求二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\cos x}{x} dxdy$，其中 D 为直线 $y=x$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域.

解：$$\iint\limits_D \frac{\cos x}{x} dxdy = \int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx \int_{x^2}^{x} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\cos x}{x}(x - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 (\cos x - x\cos x) dx$$

$$= 1 - \cos 1$$

13. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ 的通解.

解：方程对应的齐次微分方程为：$y'' - 3y' + 2y = 0$

其特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$，解得 $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.

故齐次方程的通解为：$C_1e^{x}+C_2e^{2x}$.

设非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^{-x}$

代入原方程得到 $Ae^{-x}+3Ae^{-x}+2Ae^{-x}=e^{-x}$，故 $A=\dfrac{1}{6}$

这样原方程的通解为：$C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{6}e^{-x}$.

14. 将 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数，并求该幂级数的收敛半径、收敛域.

解：$f(x)=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3+x-3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+(\dfrac{x-3}{3})}$

而 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$， $x\in(-1,1)$，

故 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+(\dfrac{x-3}{3})}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-3}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$

且 $\left|\dfrac{x-3}{3}\right|<1$，于是 $|x-3|<3$，收敛半径为 $r=3$，

收敛区域为 $(0,6)$.

15. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 若 X 满足 $AX+2B=BA+2X$，求 X.

解：由 $AX+2B=BA+2X$ 得到：$(A-2E)X=B(A-2E)$，

从而 $X=(A-2E)^{-1}B(A-2E)$

又 $(A-2E)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$，$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

这样，$X=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

16．求矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量；判断它是否可以对角化，并说明理由.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

令$|\lambda E-A|=0$解得特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

对于$\lambda_1=2$，解方程组

$$(2E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0，得基础解系为：\eta_1=(0,0,1)^T$$

故属于$\lambda_1=2$的全部特征向量为$k_1(0,0,1)^T\ (k_1\neq 0)$

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程组

$$(E-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0，得基础解系为：\eta_2=(1,2,-1)^T$$

故属于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量为$k_2(1,2,-1)^T\ (k_2\neq 0)$

因A只有两个线性无关的特征向量，故A不能对角化.

17．对于非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+2x_2+2x_3=0,\\x_1-x_2+ax_3=0.\end{cases}$

（1） a为何值时，方程组无解；

（2） a为何值时，方程组有解，并求其解.

解：方程组对应系数的增广矩阵为：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&0\\1&-1&a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&-1\\0&-2&a-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&a+1&-3\end{pmatrix}$$

（1） 当$a+1=0$时方程组无解；
（2） 当$a+1\neq 0$即$a\neq -1$时，方程组有唯一解，其解为：

$$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=\dfrac{3}{a+1}-1 \\ x_3=-\dfrac{3}{a+1} \end{cases}.$$

四、应用题（本题 10 分）

18．在平面上求一点，使它到直线$x=0$，$y=0$及$x+2y-16=0$的距离的平方和最小.

解：设所求的点为(x,y)，则它到$x=0$，$y=0$及$x+2y-16=0$的距离分别为$|x|$，

$|y|$，$\dfrac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}$，于是由题意，距离的平方和为：

$$s=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2$$

令$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial x}=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0 \end{cases}$，解得唯一驻点$(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5})$

根据实际意义所求的点一点存在，即为$(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5})$.

五、证明题（本题 8 分）

设β是非齐次线性方程组$AX=b$的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是对应的齐次方程组的一个基础解系，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关.

证明：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+k\beta=0$，因为$A\alpha_i=0,(i=1,2,\cdots,n-r)$，于是$A$左乘上式两端得到$kA\beta=0$，而$A\beta=b\neq 0$，故$k=0$

于是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=0$，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是$AX=0$的一个基础解系，从而线性无关，故$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=k=0$，这样$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关.