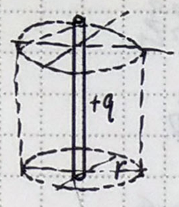


$$\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{上下} E\,ds + \int_{侧面} E\,ds = E\int_{侧} ds = E\,2\pi r h$$

$$\phi_E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

※ 常用方程:有对称性时可考虑.

$$\phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S}\ ,\quad \phi_E = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

例 均匀带电球壳的电场强度

一半径为R,均匀带电Q的薄球壳。求球壳内外任意点的电场强度。 解(1) $0<r<R$

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \quad \vec{E} = 0$$

(2) $r>R$

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

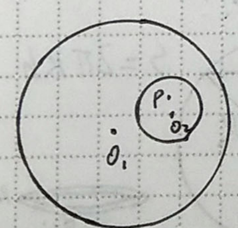
若为球体,则

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = E\,4\pi r^2 \begin{cases} \dfrac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} & (r<R) \\ \dfrac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} & (r>R) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot r & r<R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r>R \end{cases}$$

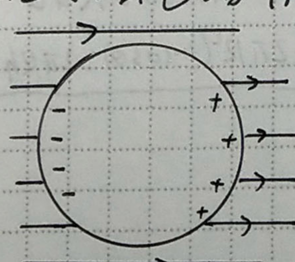
例:电荷分布均匀的球体挖去一个球体,球体空间中的电场为匀强电场



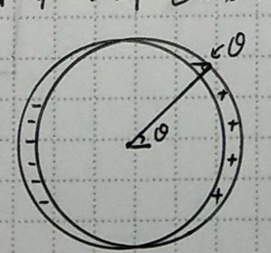
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 3}\overrightarrow{O_1P} + \left(-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\overrightarrow{O_2P} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$$

注:挖去的部分不完全在大球内也可,只要外面补上相反电荷.

在匀强电场中,某球体内部电场强度为0. 求电荷分布.



$\Rightarrow$



因为感应电荷只会出现在两端而不会在中间,故可等效为一个球被自己"挖去"(近似)

设两球偏移 O_1O_2,故厚度为 $d = O_1O_2\cos\theta$

$$\sigma = \rho d = \rho\,\overline{O_1O_2}\cos\theta = 3\varepsilon_0 E\cdot\cos\theta$$

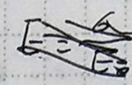
$\rho S d = \sigma S$

体密度转面密度

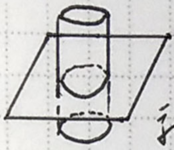
无限大平面均匀带电，电荷密度 σ，求距平面 r 处场强.

对称性分析：垂直平面选取闭合的柱形高斯面.

$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$ $\quad 2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$ $\quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ← ~~电场线~~ 前后两个面的



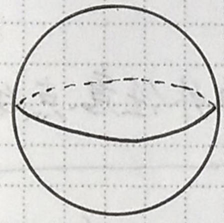
S'：电场线穿过的面积 $\quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ← 单个面的



示意图（圆柱、方柱等都可）

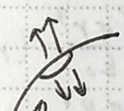
张力系数：
~~单独~~垂直通~~过~~过单位长度力的大小叫张力系数

例：



带电球壳的张力系数

"将球壳分为上下两半球壳，进行受力分析"



取 ds，$r>R$ 时，$E=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$

看作无限大平面

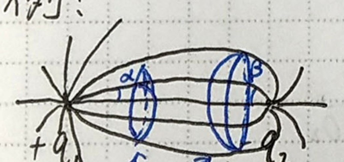
$F = qE = \sigma ds \cdot \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\quad P = \frac{F}{S} = \frac{\sigma ds \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

$E_{ds} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，则 ds 受到的电场强度为 $E - E_{ds}$

张力系数 $\eta = \frac{P\pi R^2}{2\pi R} = \frac{PR}{2}$ ← 上半球面受力为压强 × 同边界平面面积

球半径 $\quad \eta = \frac{1}{2}\Delta P R$ 曲率半径

例：

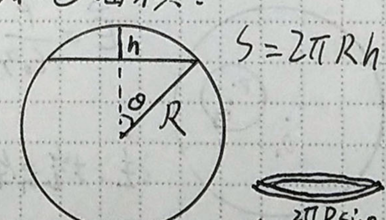


$\frac{q_1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi r_1^2(1-\cos\alpha)}{4\pi r_1^2} = \frac{q_2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi r_2^2(1-\cos\beta)}{4\pi r_2^2}$

取电场线数目相同的球冠

$q_1(1-\cos\alpha) = q_2(1-\cos\beta)$

球冠面积：



$S = 2\pi R h$

推导 $S = \int_0^\theta 2\pi R\sin\theta\, R\, d\theta$

$= 2\pi R^2(1-\cos\theta) = 2\pi R h$

1.4 电势及其梯度

一、电势

$\int_{AB} q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -(E_{pB} - E_{pA})$ 电场力作功大小 = 电势能减少量

同除q_0

$$\int_{AB}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left(\boxed{\frac{E_{pB}}{q_B}} - \boxed{\frac{E_{pA}}{q_0}}\right)$$ 积分大小与q_0无关

B点电位 $= V_B$ $\quad$ $= V_A$ A点电位

电势（电位）：单位正的点电荷所具有的电势能

$V_A = \int_{AB}\vec{E}\cdot d\vec{l} + V_B$ ← 参考电位值可任选

电势零点选择方法：有限带电体以无穷远为电位零点

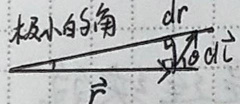
实际问题中常选择地球电位为0

电势的物理意义：把单位正试验电荷从点A移到无穷远时静电场力所作的功.

注：$1eV = 1.602\times10^{-19} J$

二、点电荷的电位

令 $V_\infty = 0$，$V=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{l}$



$\vec{r}\cdot d\vec{l} = r\cdot dl\cdot\cos\theta = rdr$

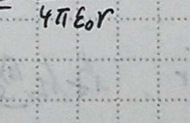
$\therefore V=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\, rdr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad\begin{cases} q>0,\ V>0 \\ q<0,\ V<0\end{cases}$

三、电位的叠加原理

计算电场强度的积分在源空间 } 独立，可以交换顺序
计算电势的积分在场空间

$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$，$V_A = \int_A^\infty \vec{E}\, d\vec{l} = \sum_i\int_A^\infty \vec{E}_i\, d\vec{l}$，$V_A=\sum_i V_{Ai} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$

电荷连续分布 $V_P=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$

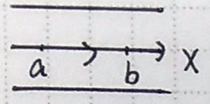


$dq=\rho dV$

前提：
“有限大”+“$V_\infty=0$”

or $V_P=\int_A^{V=0点}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

↑已知$\vec{E}$函数表达式



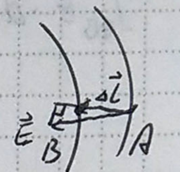
$\varphi_b-\varphi_a=-E_x dx=d\varphi$

$$E_x=-\frac{d\varphi}{dx}$$

~~四.场强与电位梯~~度

$\vec{E}=\int k\frac{dq}{r^2}\vec{e}_r$ 点电荷E与φ对比.

$\varphi=\int k\frac{dq}{r}$



梯度：$U_{AB}=-(V_B-V_A)=\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=E\cdot\Delta l\cdot\cos\theta$ ，$E\cos\theta=E_l$

$-\Delta V=E_l\Delta l$　$E_l=-\frac{\Delta V}{\Delta l}$，$E_l=-\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta l}=-\frac{dV}{dl}$

电场中某一点的场强沿某一方向的分量＝该点电位沿该方向单位长度上电位变化率的负值

电场中某一点的场强为电势方向导数取负的最大值时的绝对值。

$$\begin{cases}\text{大小 } |\vec{E}|=\left|\frac{dV}{dl_n}\right| \\ \text{方向：与 } \vec{e}_n \text{ 相反，由高电位指向低电位处。}\end{cases}$$

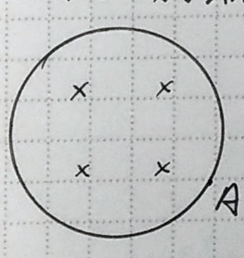
求$\vec{E}$的三种方法：

① 利用电场强度叠加原理

② 利用高斯定理

③ 利用电位与电场强度的关系

因为场强不会无穷大，所以空间中电势的分布一定是连续的。



$\pi R^2\cdot\frac{dB}{dt}=I_r$ ，存在感生电场(旋度为0)(保守场)

电荷匀速移动

此时圆上没有电势　$\nabla\times(\nabla\varphi)\equiv 0$

A转一圈 $\oint_l\vec{E}d\vec{l}=\varphi_A-\varphi_A=0$，$\oint_l\vec{E}\cdot d\vec{l}$ (环量)

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}=|\nabla\times\vec{E}|$$

旋度：单位面积环量最大值

环量：流体速度沿闭曲线的路径积分.