第七章 光与物质的相互作用 光的量子性

7－1. 投石于平静的湖面，激起一列波澜。设想一下，如果水面波的色散规律分别是 $dv_p/d\lambda>0$ 和 $dv_p/d\lambda<0$，你能观察到什么现象？实地观察一下，水面波的色散属于哪种情况。

答： 根据群速与相速的关系可知

可知：

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda},$$

(1) 如果 $dv_p/d\lambda>0$，则 $v_g<v_p$，即群速小于相速；波包中心(波峰)的前进速度小于整列波澜的前进速度，它相对于波列向后移动。

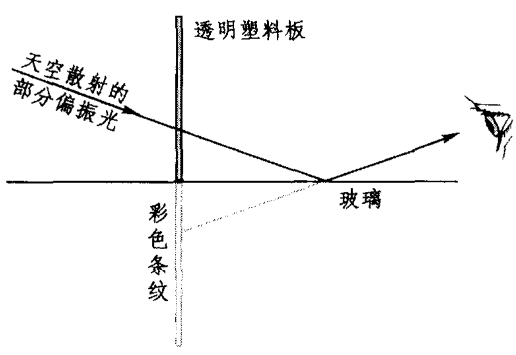
(2) 如果 $dv_p/d\lambda<0$，则 $v_g>v_p$，即群速大于相速；波包中心(波峰)的前进速度大于整列波澜的前进速度，它相对于波列向前移动。

实际观察可知，水面波属于情形(1)。

7－2. 为什么由点燃的香烟冒出的烟是淡蓝的，而吸烟者口中吐出的烟却呈白色？

答： 我们之所以看见烟雾，是光散射的结果。由点燃的香烟直接冒出的烟是细微颗粒组成的，它对光的散射属于瑞利散射，散射光强与波长的四次方成反比。由于白光中的短波成分(蓝紫色)受到的散射比长波成分(红黄色)强烈，我们看到的散射光因短波的富集而呈淡蓝色。从吸烟者口中吐出的烟由于吸附有水蒸气凝结成的水滴，使烟雾微粒的尺度增大，其半径与可见光的波长相比已不算太小，瑞利定律不再适用。水滴对光的散射属于米氏(Mie)散射，散射光强与波长的关系不大，因此烟雾呈白色。

7－3. 将一块透明塑料板(如直尺或三角板)立放在光滑桌面或玻璃板上，迎着窗口看它的倒影，有时你会在倒影中看到一些彩色条纹，试解释这个现象。



答： 塑料板在加工冷却时不免有应力冻结在里边，有一定的各向异性。在光测弹性仪里，塑料模型中因应力而产生的各向异性要放在起偏器和检偏器之间观察。本题中，如右图，晴朗的天空起着起偏器的作用，它散射的阳光是部分偏振的。玻璃板起着检偏器的作用，它在接近布儒斯特角反

射时产生很高的偏振度。

7－4. 做偏振光干涉的单光子实验，在正交偏振片之间插入一波晶片，后面置一光子探测器。现放一个光子通过此系统，这个光子在波晶片里的时候处于 o 光状态还是 e 光状态？在第二块偏振片内处于透振状态还是被吸收状态？探测器是否会接收到它？

答： 光子在波晶片里的时候既不处于 o 光状态，也不处于 e 光状态，而是处于 o 光和 e 光的叠加态，两者各有一定概率。

在进入第二块偏振片之前处于透振和与之垂直的振动的叠加态，两者各有一定概率。处于后者的概率就是该光子被吸收的概率，处于前者的概率就是该光子被后继仪器接收到它的概率。

第七章　光与物质的相互作用 光的量子性

7－1. 有一介质,吸收系数 $\alpha=0.32\,\mathrm{cm}^{-1}$,透射光强分别为入射光强的 10%、20%、50% 及 80% 时,介质的厚度各若干?

解: 由布格定律　$I=I_0e^{-\alpha l}$　得　$l=-\dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{I}{I_0}$,

式中 l 为介质的厚度。把 $\alpha=0.32\,\mathrm{cm}^{-1}$ 代入,算出

I/I_0	10%	20%	50%	80%
l/cm	7.2	5.0	2.2	0.7

7－2. 一玻璃管长 3.50 m,内贮标准大气压下的某种气体,若这气体在此条件下的吸收系数为 $0.1650\,\mathrm{m}^{-1}$,求透射光强的百分比。

解: 由布格定律得

$$I/I_0=\exp(-\alpha l)=\exp(-0.1650\,\mathrm{m}^{-1}\times3.50\,\mathrm{m})$$
$$=56.1\%.$$

7－3. 一块光学玻璃对水银灯蓝、绿谱线 $\lambda=435.8\,\mathrm{nm}$ 和 $546.1\,\mathrm{nm}$ 的折射率分别为 1.65250 和 1.62450,用此数据定出科西公式(7.11)中的 A、B 两常量,并用它计算对钠黄线 $\lambda=589.3\,\mathrm{nm}$ 的折射率 n 及色散率 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda$.

解: 将蓝、绿谱线的波长和折射率的数据分别代入柯西公式

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}\qquad ①$$

得联立方程

$$1.65250=A+\frac{B}{(435.8\,\mathrm{nm})^2},$$
$$1.62450=A+\frac{B}{(546.1\,\mathrm{nm})^2}.$$

解得

$$A=1.575,$$
$$B=1.464\times10^4\,\mathrm{nm}^2.$$

再将以上 A, B 值代入式①,得该光学玻璃对钠黄线(589.3 nm)的折率为

$$n=1.575+\frac{1.464\times10^4\,\mathrm{nm}^2}{(589.3\,\mathrm{nm})^2}=1.617.\qquad ②$$

色散率为

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2B}{\lambda^3}=-\frac{2\times1.464\times10^4\,\mathrm{nm}^2}{(589.3\,\mathrm{nm})^3}$$
$$=-1.431\times10^{-4}/\mathrm{nm}.$$

7－4. 利用第一章表 1－3 中冕牌玻璃 K9 对 F、D、C 三条谱线的折射率数据定出科西公式(7.10)中的 A、B、C 三常量,用它计算该表中给出的其它波长下折射率数据,并与表中实测数值比较。

谱线*	λ/nm	冕牌玻璃(K9) 实测值	冕牌玻璃(K9) 计算值
—(紫外)	365.0	1.53582	1.529
h(蓝)	404.7	1.52982	1.526
g(青)	435.8	1.52626	1.523
F(青绿)	486.1	1.52195	——
e(绿)	546.1	1.51826	1.517
D(黄)	589.3	1.51630	——
c(橙红)	656.3	1.51389	——
A′(红)	766.5	1.51104	1.511
—(红外)	863.0	1.50918	1.510
—(红外)	950.8	1.50778	1.509

解: 把冕玻璃(K9)对 F、D、C 三条谱线的折射率数据(见右表中栏)分别代入柯西公式

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4},$$

得联立方程

$$1.52195=A+\frac{B}{(486.1\,\mathrm{nm})^2}+\frac{C}{(486.1\,\mathrm{nm})^4},$$

$$1.51630=A+\frac{B}{(589.3\,\mathrm{nm})^2}+\frac{C}{(589.3\,\mathrm{nm})^4},$$

$$1.51389=A+\frac{B}{(656.3\,\mathrm{nm})^2}+\frac{C}{(656.3\,\mathrm{nm})^4},$$

用行列式法求解 A、B、C 如下:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & (486.1)^{-2} & (486.1)^{-4}\\ 1 & (589.3)^{-2} & (589.3)^{-4}\\ 1 & (656.3)^{-2} & (656.3)^{-4}\end{vmatrix}=-1.4424\times10^{-18},$$

$$\Delta_A=\begin{vmatrix}1.52195 & (486.1)^{-2} & (486.1)^{-4}\\ 1.51630 & (589.3)^{-2} & (589.3)^{-4}\\ 1.51389 & (656.3)^{-2} & (656.3)^{-4}\end{vmatrix}=-2.169\times10^{-18},$$

$$\Delta_B=\begin{vmatrix}1 & 1.52195 & (486.1)^{-4}\\ 1 & 1.51630 & (589.3)^{-4}\\ 1 & 1.51389 & (656.3)^{-4}\end{vmatrix}=-6.4\times10^{-15},$$

$$\Delta_C=\begin{vmatrix}1 & (486.1)^{-2} & 1.52195\\ 1 & (589.3)^{-2} & 1.51630\\ 1 & (656.3)^{-2} & 1.51389\end{vmatrix}=2.0\times10^{-10}.$$

$$A=\frac{\Delta_A}{\Delta}=1.504,\quad B=\frac{\Delta_B}{\Delta}=4.437\times10^3\,\mathrm{nm}^2,\quad C=\frac{\Delta_C}{\Delta}=-1.387\times10^8\,\mathrm{nm}^4$$

再由以上 A、B、C 值计算出冕玻璃对其他谱线的折射率,填入上表右栏。可以看出,与实测值比较,计算值短波段偏小,长波段偏大。

7－5. 一棱镜顶角50°,设它的玻璃材料可用二常量科西公式(7.11)来描写,其中$A=1.53974$, $B=4.6528\times10^{3}\,\mathrm{nm}^{2}$. 求此棱镜对波长550.0nm调到最小偏向角时的色散本领。

解: 工作于最小偏向角条件下的棱镜的角色散本领为

$$D_{\theta}=\frac{\mathrm{d}\delta_{\min}}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^{2}\sin^{2}(\alpha/2)}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}. \qquad ①$$

由柯西公式可算出,该棱镜材料对波长550.0nm光波的折射率和色散率分别为

$$n=A+\frac{B}{\lambda^{2}}=1.53974+\frac{4.6528\times10^{3}\,\mathrm{nm}^{2}}{(550.0\,\mathrm{nm})^{2}}=1.55512.$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2B}{\lambda^{3}}=-\frac{2\times4.6528\times10^{3}\,\mathrm{nm}^{2}}{(550.0\,\mathrm{nm})^{3}}=-5.593\times10^{-5}/\mathrm{nm}$$

将上述数值及$\alpha=50°$代入①式,得

$$D_{\theta}=\frac{2\times\sin25°\times5.593\times10^{-5}\,\mathrm{nm}}{\sqrt{1-1.55512^{2}\times\sin^{2}25°}}=6.272\times10^{-5}\,\mathrm{rad/nm}=1.29''/\mathrm{nm}.$$

7－6. 根据(7.25)式证明吸收峰的高度反比于γ_j,半值宽度(即峰值之半处的宽度,见图7－9b)$\Delta\lambda$正比于γ_j.

解: (7.25)式

$$n\kappa(\lambda)=\frac{Ne^{2}}{2\varepsilon_{0}m}\frac{1}{2\pi c}\sum_{j}\frac{f_{j}\gamma_{j}\lambda_{j}^{4}\lambda^{3}}{(2\pi c)^{2}(\lambda^{2}-\lambda_{j}^{2})^{2}+\gamma_{j}^{2}\lambda_{j}^{4}\lambda^{2}}.$$

是由(7.23)式

$$n\kappa(\omega)=\frac{Ne^{2}}{2\varepsilon_{0}m}\sum_{j}\frac{f_{j}\omega\gamma_{j}}{(\omega^{2}-\omega_{j}^{2})^{2}+\omega^{2}\gamma_{j}^{2}}$$

变过来的,我们用(7.23)式来讨论更方便些,因为ω与γ同量纲,容易比较它们的大小。在第j个吸收峰附近其它项都可略去:

$$n\kappa(\omega)\approx\frac{Ne^{2}}{2\varepsilon_{0}m}\frac{f_{j}\omega\gamma_{j}}{(\omega^{2}-\omega_{j}^{2})^{2}+\omega^{2}\gamma_{j}^{2}}. \qquad ①$$

在第j个峰值处$\omega_{j}^{2}\gamma_{j}^{2}\gg(\omega^{2}-\omega_{j}^{2})^{2}$,而在第$j$个吸收峰附近(半值宽度处)$\Delta\omega=\omega-\omega_{j}\gg\gamma_{j}$. 所以吸收峰的高度

$$[n\kappa(\omega)]_{\max}\approx\frac{Ne^{2}}{2\varepsilon_{0}m}\frac{f_{j}\omega_{j}\gamma_{j}}{\omega_{j}^{2}\gamma_{j}^{2}}\propto\frac{1}{\gamma_{j}}. \qquad ①$$

而在半值宽度处$\omega^{2}-\omega_{j}^{2}=(\omega+\omega_{j})(\omega-\omega_{j})\approx2\omega_{j}\Delta\omega$,略去分母上的$\gamma_j$项,有

$$n\kappa(\omega)\approx\frac{Ne^{2}}{2\varepsilon_{0}m}\frac{f_{j}\omega\gamma_{j}}{4\omega_{j}^{2}(\Delta\omega)^{2}}=\frac{1}{2}[n\kappa(\omega)]_{\max}=\frac{Ne^{2}}{4\varepsilon_{0}m}\frac{f_{j}}{\omega_{j}\gamma_{j}},$$

$$\Delta\omega=\frac{\gamma_{j}}{\sqrt{2}}\propto\gamma_{j}. \qquad ③$$

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega},\qquad \Delta\lambda=-\frac{2\pi c}{\omega_{j}^{2}}\Delta\omega\propto\gamma_{j}.$$

7－7. 一块玻璃对波长0.070nm的X射线的折射率比1小1.600×10^{-6}，求X射线能在此玻璃外表面发生全反射的最大掠射角.

解: X射线在玻璃外表面发生全反射时的临界角i_c对应最大的掠射角$\alpha_{max}=90°-i_c$，而临界角应满足

$$\sin i_c = n = 1-\Delta, \qquad \Delta = 1.600\times10^{-6}.$$

$$\sin^2 i_c \approx 1-2\Delta, \quad \cos i_c = \sqrt{1-\sin i_c} \approx \sqrt{2\Delta},$$

故得

$$\alpha_{max} \approx \sin\alpha_{max} = \cos i_c \approx \sqrt{2\Delta} = \sqrt{2\times1.600\times10^{-6}}$$

$$= 1.78\times10^{-6}\ \mathrm{rad} = 6.15'.$$

7－8. 估计一下铜的等离子体振荡角频率ω_p的数量级。

解: 等离子体振荡角频率为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{NZe^2}{\varepsilon_0 m}}, \tag{①}$$

我们查得铜原子的质量为

$$M_{Cu} = \frac{\text{铜的原子量}}{N_A} = \frac{63.54\times10^{-3}\mathrm{kg/mol}}{6.02\times10^{23}/\mathrm{mol}} = 1.055\times10^{-25}\mathrm{kg}.$$

原子数密度

$$N = \frac{\text{铜的密度}}{M_{Cu}} = \frac{8940\mathrm{kg/m^3}}{1.055\times10^{-25}\mathrm{kg}} = 8.474\times10^{28}/\mathrm{m^3}.$$

真空介电常数为 $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$,

电子质量为 $m = 9.200\times10^{-31}\mathrm{kg}$,

电子电荷为 $e = 1.602\times10^{-19}\mathrm{C}$,

①式中的Z值应是平均一个原子具有导带内共有化电子的数目，其值取多大难以准确确定。作为数量级估计，可取$Z\geqslant1$. 将以上所有数值带入①式，得

$$\omega_p \geqslant \sqrt{\frac{8.474\times10^{28}/\mathrm{m^3}\times(1.602\times10^{-19}\mathrm{C})^2}{8.854\times10^{-12}\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}\times9.200\times10^{-31}\mathrm{kg}}} = 1.6\times10^{16}\mathrm{Hz},$$

属远紫外到X射线波段。

7－9. 求习题7－4中冕牌玻璃K9对D双线的群速。

解:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}, \qquad \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3} - \frac{4C}{\lambda^5}.$$

按书中(7.14)式

$$n_g = \frac{c}{v_g} = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda} = A + \frac{3B}{\lambda^2} + \frac{5C}{\lambda^4}, \quad v_g = c\left(A + \frac{3B}{\lambda^2} + \frac{5C}{\lambda^4}\right)^{-1}.$$

把习题7－4所得A、B、C值和钠黄光波长λ值代入，得

$$v_g = c\left[1.504 + \frac{3\times4.437\times10^3\mathrm{nm^2}}{(589.3\,\mathrm{nm})^2} + \frac{5\times1.387\times10^8\mathrm{nm^4}}{(589.3\,\mathrm{nm})^4}\right]^{-1}$$

$$= 0.646c = 1.937\times10^8\mathrm{m/s}.$$

7－10. 试计算下列各情况下的群速：

(1)$v_p=v_0$(常量) (无色散介质,如空气中的声波)。

(2)$v_p=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2T}{\lambda^2\rho}\right)}$ (水面波,g 为重力加速度,T 为表面张力,ρ 为液体的密度)。

(3)n 满足正常色散的科西公式(7.11)。

(4)$\omega^2=\omega_c^2+c^2k^2$ (波导中的电磁波,ω_c 为截止角频率)。

解：(1)对无色散媒质来说,群速等于相速：

$$v_g=v_p=v_0.$$

(2)水面波

$$v_g=v_p-\lambda\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\lambda}=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2T}{\lambda^2\rho}\right)}-\left(\frac{\lambda g}{2\pi}-\frac{2\pi T}{\lambda\rho}\right)\left[2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2T}{\lambda^2\rho}\right)}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{12\pi^2T}{\lambda^2\rho}\right)\left[2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}\left(g+\frac{4\pi^2T}{\lambda^2\rho}\right)}\right]^{-1}.$$

(3)由柯西公式得

$$n=A+\frac{B}{\lambda^2},\qquad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2B}{\lambda^3}.$$

$$n_g=n-\lambda\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=n+\frac{2B}{\lambda^3},\qquad v_g=\frac{c}{n_g}=c\left(n+\frac{2B}{\lambda^3}\right)^{-1}.$$

式中 λ 为真空中的光波长。若 $\left|\frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right|=\frac{2B}{n\lambda^2}\ll1$,则

$$v_g\approx\frac{c}{n}\left(1-\frac{2B}{n\lambda^2}\right).$$

(4)波导中的电磁波

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(\omega_c^2+c^2k^2)=2c^2k.$$

7－11. 摄影者知道用橙黄色滤色镜拍摄天空时,在黑白照片中可增加蓝天和白云的对比。设照相机的镜头和底片的灵敏度将光谱范围限制在390.0nm到620.0nm之间,并设太阳光谱在此范围内可看成是常量。若滤色镜把波长在550.0nm以下的光全部吸收,天空的散射光被它去掉了百分之几?

解：为估算数量级,设滤色镜的滤光性能如题意,390.0～620.0nm之间的散射光强为 I_0,390.0～550.0nm的散射光强为 I',则滤色镜吸收光强的百分比为

$$\frac{I'}{I_0}=\frac{550.0-390.0}{620.0-390.0}=70\%.$$

7－12. 苯(C_6H_6)的拉曼散射中较强的谱线与入射光的波数差607,992,1178,1586,3047,3062cm^{-1},今以氩离子激光($\lambda=488.0$nm)入射,

计算各斯托克斯和反斯托克斯谱线的波长。

解： 入射光波数为

$$\frac{1}{\lambda_0}=\frac{1}{488.0\,\text{nm}}=20492\,\text{cm}^{-1}.$$

各斯托克斯谱线的波数和波长为分别为

$$\frac{1}{\lambda_j'}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_j}.$$

$$\frac{1}{\lambda_1'}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_1}=(20492-607)\,\text{cm}^{-1}=19885\text{cm}^{-1},\quad \lambda_1'=502.9\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_2'}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_2}=(20492-992)\,\text{cm}^{-1}=19500\text{cm}^{-1},\quad \lambda_2'=512.8\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_3'}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_3}=(20492-1178)\,\text{cm}^{-1}=19314\text{cm}^{-1},\quad \lambda_3'=517.8\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_4'}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_4}=(20492-1586)\,\text{cm}^{-1}=18906\text{cm}^{-1},\quad \lambda_4'=528.9\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_5'}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_5}=(20492-3047)\,\text{cm}^{-1}=17445\text{cm}^{-1},\quad \lambda_5'=573.2\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_6'}=\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda_6}=(20492-3062)\,\text{cm}^{-1}=17430\text{cm}^{-1},\quad \lambda_6'=573.7\,\text{nm}.$$

各反斯托克斯谱线的波数和波长为分别为

$$\frac{1}{\lambda_j''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_j}.$$

$$\frac{1}{\lambda_1''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_1}=(20492+607)\,\text{cm}^{-1}=21099\text{cm}^{-1},\quad \lambda_1''=474.0\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_2''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_2}=(20492+992)\,\text{cm}^{-1}=21484\text{cm}^{-1},\quad \lambda_2''=465.5\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_3''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_3}=(20492+1178)\,\text{cm}^{-1}=21670\text{cm}^{-1},\quad \lambda_3''=461.5\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_4''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_4}=(20492+1586)\,\text{cm}^{-1}=22078\text{cm}^{-1},\quad \lambda_4''=452.9\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_5''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_5}=(20492+3047)\,\text{cm}^{-1}=23539\text{cm}^{-1},\quad \lambda_5''=424.8\,\text{nm};$$

$$\frac{1}{\lambda_6''}=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_6}=(20492+3062)\,\text{cm}^{-1}=23554\text{cm}^{-1},\quad \lambda_6''=424.6\,\text{nm}.$$

7－13. 设一个两能级系统能级差 $E_2-E_1=0.01\,\text{eV}$，

（1）分别求 $T=10^2\text{K}$，10^3K，10^5K，10^8K 时粒子数 N_2 与 N_1 之比；

（2）$N_2=N_1$ 的状态相当于多高的温度？

（3）粒子数发生反转的状态相当于怎样的温度？

（4）我们姑且引入“负温度”的概念来描述粒子数反转的状态，你觉得 $T=-10^8\text{K}$ 和 $T=+10^8\text{K}$ 两个温度中哪一个更高？

解：按粒子数的玻耳兹曼正则分布律，有

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{0.01\,\text{eV}}{kT}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{0.01\,\text{eV}\times 1.602\times 10^{-19}\,\text{J/eV}}{1.38\times 10^{-23}\,\text{J/K}\times T(\text{K})}\right) = \exp\left(-\frac{116.1\,\text{K}}{T}\right),$$

$$T = 10^2\,\text{K},\qquad \frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{116.1}{10^2}\right) = 0.313;$$

$$T = 10^3\,\text{K},\qquad \frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{116.1}{10^3}\right) = 0.890;$$

$$T = 10^5\,\text{K},\qquad \frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{116.1}{10^5}\right) = 0.9988;$$

$$T = 10^8\,\text{K},\qquad \frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{116.1}{10^8}\right) = 0.9999998.$$

(2) 当 $T\to\infty$ 时，$\dfrac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\dfrac{116.1}{\infty}\right) = 1.$

(3) 如果仍然用正则分布的语言来描述，我们只能说粒子数发生反转时的状态是“负温度”状态。

(4) $T=-10^8\,\text{K}$ 比 $T=+10^8\,\text{K}$ 温度高。