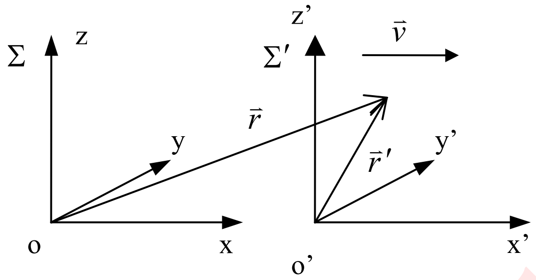
1．证明牛顿定律在伽利略交换下是协变的，麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的。

证明：根据题意，不妨取如下两个参考系，并取分别固着于两参考系的直角坐标系，且令 t＝0 时，两坐标系对应轴重合，计时开始后，Σ' 系沿 Σ 系的 x 轴以速度 v 作直线运动

根据伽利略变换，有：

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$



1）牛顿定律在伽利略变换下是协变的：

以牛顿第二定律为例：$\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

在 Σ 系下，：$\vec{F} = m\dfrac{d\ddot{x}}{dt^2}$

$\because x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t$

$$\therefore \vec{F} = m\frac{d^2[x' + vt, y', z']}{dt'^2} = m'\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = \vec{F}'$$

可见，在 Σ' 系中，牛顿定律有相同的形式，$\vec{F}' = m'\dfrac{d^2\vec{x}'}{dt'^2}$

所以，牛顿定律在伽利略变换下是协变的。

2）麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的

以真空中的麦氏方程 $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 为例，设有一正电荷 q 位于 O' 点，并随 Σ' 系运动，

在 Σ' 中，q 是静止的，故: $\vec{E}' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\vec{e}_{r'}$， $\vec{B}' = 0$

于是，方程 $\nabla' \times \vec{E}' = -\dfrac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$ 成立。

将 $\vec{E}' = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\vec{e}_{r'}$ 写成直角分量形式;

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\frac{x'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{x'} + \frac{y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{y'} + \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}\vec{e}_{z'}\Big]$$

由伽利略变换关系有：

在Σ中，

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{x-vt}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\vec{e}_x+\frac{y}{[(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_y+$$

$$+\frac{z}{[(x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

$$\therefore \nabla\times\vec{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{[(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}[(y-z)\vec{e}_x+$$

$$+(z-x+vt)\vec{e}_y+(x-vt-y)\vec{e}_z]$$

可见$\nabla\times\vec{E}$不恒为零。

又在Σ系中观察，q 以速度 v$\vec{e}_x$运动，故产生电流$\vec{J}=qv\vec{e}_x$

于是有磁场$B=\dfrac{\mu_0 qv}{2\pi R}$　（R 是场点到 x 轴的距离）

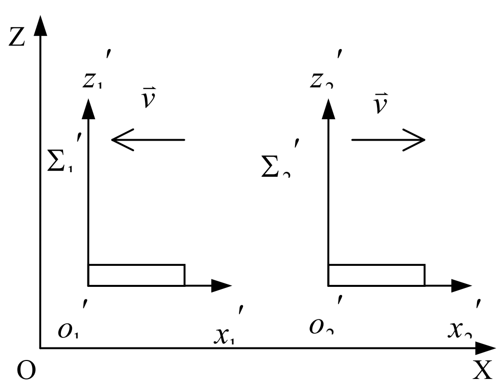
此时 有$\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$

于是　$\nabla\times\vec{E}\neq-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

故麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的。

2．设有两根互相平行的尺，在各自静止的参考系中的长度均为l_0，它们以相同的速率 v 相对于某一参考系运动，但运动方向相反，且平行于尺子，求站在一根尺子上测量另一根尺子的长度。

解：根据相对论速度交换公式，可得$\Sigma_2{}'$系相对于$\Sigma_1{}'$的速度大小是：



$$v'=\frac{2v}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}$$

$\therefore$在$\Sigma_1{}'$系中测量$\Sigma_2{}'$系中静长为l_0的尺子的长度为：

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}} \quad 代入\ v' = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

即得 $l = l_0\dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}$，此即是在 $\Sigma_1{}'$ 系中观测到的相对于 $\Sigma_2{}'$ 静止的尺子的长度。

3．静止长度为 l_0 的车厢，以速度 v 相对于地面 s 运行，车厢的后壁以速度 u_0 向前推出一个小球，求地面观测者看到小球从后壁到前壁的时间。

解：根据题意，取地面为参考系 S，车厢为参考系 S'

于是相对于地面参考系 S，

车长：$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$　　车速：v　　球速：$u = \dfrac{u_0+v}{1+\frac{u_0 v}{c^2}}$

故在地面参考系 S 中观察，小球在此后，由车后壁到车前壁

$$\Delta t = \frac{l}{u-v} = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\frac{u_0+v}{1+\frac{u_0 v}{c^2}}-v} = \frac{l_0(1+\frac{u_0 v}{c^2})}{u_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

4.一辆以速度 v 运动的列车上的观察者，在经过某一高大建筑物时，看见其避雷针上跳起一脉冲电火花，电光迅速传播，先后照亮了铁路沿线上的两铁塔，求列车上观察者看到的两铁塔被电光照亮的时间差。设建筑物及两铁塔都在一直线上，与列车前进方向一致，铁塔到建筑物的地面距离已知都是 l_0。

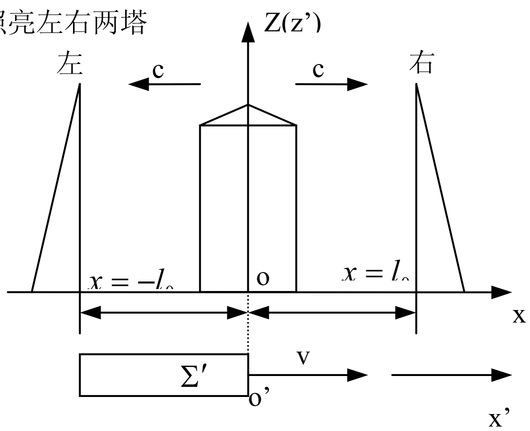
解：由题意，得右示意图。取地面为静止的参考系 Σ，列车为运动的参考系 Σ'。

取 x 轴与 x' 轴平行同向，与列车车速方向一致，令 $t=0$ 时刻为列车经过建筑物时，并令此处为 Σ 系与 Σ' 的原点，如图。

在 Σ 系中，光经过 $t = \dfrac{l_0}{c}$ 的时间后，同时照亮左右两塔

但在 Σ' 系中，观察两塔的位置为：

$$x'_{右} = l_0 v - \beta v l_0 = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{v}{c})$$



$$x'_{左} = -l_0 v - \beta v l_0 = -\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1+\frac{v}{c})$$

$$\therefore d'_{右} = \left|x'_{右} - o'\right| = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1-\frac{v}{c})$$

$$d'_{左} = \left|x'_{左} - o'\right| = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(1+\frac{v}{c})$$

时间差为：

$$\Delta t = \frac{d'_{左}}{c} - \frac{d'_{右}}{c} = \frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1}{c}\left[(1+\frac{v}{c}) - (1-\frac{v}{c})\right] = \frac{2vl_0}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

5. 有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l，S－R 装置浸在均匀无限的液体介质（静止折射率 n）中，试对下列三种情况计算光源发出讯号到接收器收到讯号所经历的时间。
（1）液体介质相对于 S－R 装置静止
（2）液体沿着 S－R 连线方向以速度 v 运动
（3）液体垂直于 S－R 连线方向以速度 v 运动

解：1）液体介质相对于 S－R 装置静止时：

$$\Delta t_1 = \frac{nl_0}{c}$$

2）液体沿着 S－R 连线方向以速度 v 运动：

取固着于介质的参考系 Σ'，Σ' 系沿 x 轴以速度 v 运动，在 Σ' 系中测得光速在各个方向上均是 $\frac{c}{n}$

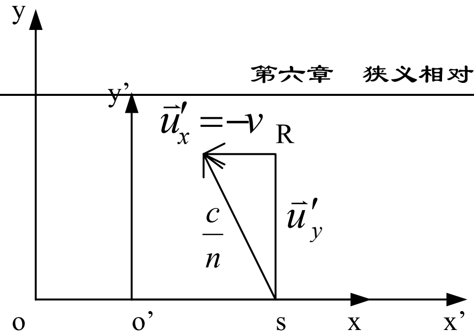
由速度变换关系得在 Σ 系中，沿介质运动方向的光速：

$$v' = \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{cn}}$$

$\therefore$ R 接收到讯号的时间为　$\Delta t_2 = \dfrac{(1+\frac{v}{cn})l_0}{\frac{c}{n}+v}$

3）液体垂直于 S－R 连线方向以速度 v 运动

同（2）中取相对于 S-R 装置静止的参考系为 Σ 系，相对于介质静止的系为 Σ' 系，如下建立坐标：



可见，$u'_x=-v$

$$u'_y=\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}\ \text{t}$$

$\therefore$ 在 Σ 系中，测得 y 方向上的速度：

$$u_y=\frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_x v}{c}}=\frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{(-v)\cdot v}{c}}=\frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \Delta t_3=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Big/\sqrt{\frac{c^2}{n^2}-v^2}$$

6. 在坐标系 Σ 中有两个物体都以速度 u 沿 x 轴运动，在 Σ 系看来，它们一直保持距离 l 不变。今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到这两个物体的距离是多少？

解：根据题意，　Σ′ 系，取固着于观察者上的参考系

又取固着于 A，B 两物体的参考系为 Σ″ 系

在 Σ 中，A,B 以速度 u 沿 x 轴运动，相距为 l，在 Σ″ 系中，A，B 静止相距为 l_0，有：

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\therefore l_0=\frac{l}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

又 Σ′ 系相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动，Σ″ 系相对于 Σ 系以速度 u 沿 x 轴运动

由速度合成公式，Σ″ 系相对于 Σ′ 系以速度

$$v'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\quad \text{沿 x 轴运动}$$

$\therefore$ 在 Σ′ 系中看到两物体相距：

$$l'=l_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}=\frac{l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

7. 一把直尺相对于 Σ 系静止，直尺与 x 轴交角 θ，今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到直尺与 x 轴交角 θ' 有何变化？

解：取固着于观察者上的参考系为Σ'

在Σ系中：　$l_x = l\cos\theta$，　$l_y = l\sin\theta$

在Σ'系中，　$l_x' = l_x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = l\cos\theta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

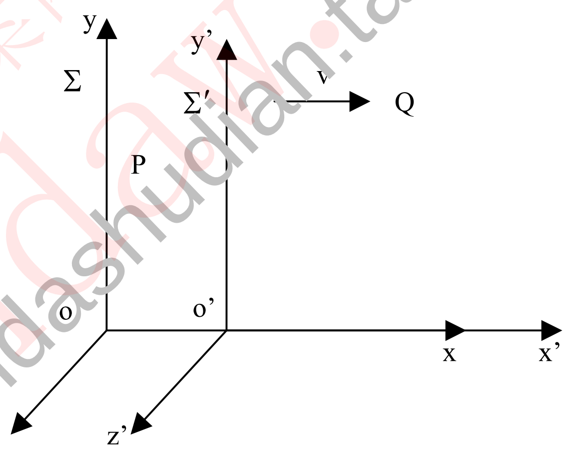
$$l_y' = l_y = l\sin\theta$$

$$\therefore tg\theta' = \frac{l_y'}{l_x'} = \frac{tg\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

8. 两个惯性系Σ和Σ'中各放置若干时钟，同一惯性系的诸时钟同步，Σ'相对于Σ以速度v沿x轴运动，设两系原点相遇时，$t_0 = t_0' = 0$，问处于Σ系中某点（x，y，z）处的时钟与Σ'系中何处时钟相遇时，指示的时刻相同？读数是多少？

解：根据变换关系，得：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdots\cdots(1) \\ y' = y \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ z' = z \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdots\cdots(4) \end{cases}$$



设Σ系中$P(x,y,z,t)$处的时钟与Σ'系中$Q(x',y',z',t')$处时钟相遇时，指示时间相同：

$\therefore$在（4）式中，有$t = t'$，解得：$x = \frac{c^2}{v}t(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})$代入（1）式，

得：$x' = -\frac{c^2}{v}t(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}) = -x$

相遇时：$t = t' = \dfrac{x}{\frac{c^2}{v}(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})} = \frac{x}{v}(1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})$

即为时钟指示的时刻。

9．火箭由静止状态加速到$v = \sqrt{0.9999}c$，设瞬时惯性系上加速度为$|\dot{\vec{v}}| = 20m\cdot s^{-2}$，问按

照静止系的时钟和按火箭内的时钟加速火箭各需要多少时间？

解：1）在静止系中，加速火箭

令静止系为Σ系，瞬时惯性系为Σ'系，且其相对于Σ系的速度为 u，可知$\vec{v},\dot{\vec{v}},\vec{u}$同向，并令此方向为 x 轴方向

由 x 轴向上的速度合成有：

$$v=\frac{v'+u}{1+\frac{uv}{c^2}} \qquad （v'\text{是火箭相对于}\Sigma'\text{系的速度}）$$

$\therefore$在Σ系中，加速度为 $a=\frac{dv}{dt}=(1-\frac{u^2}{c^2})^{3/2}\frac{a'}{(1+\frac{uv'}{c^2})^3}$ （$a'=\frac{dv'}{dt'}$）

本题中$a'=20m\cdot s^{-2}$，而Σ'系相对于火箭瞬时静止，$\therefore u=v,v'=0$

$$\therefore a=\frac{dv}{dt}=a'(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}$$

$$\therefore \int_0^{\sqrt{0.9999}c}\frac{dv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}=\int_0^t a'dt$$

得： $t=\frac{100\sqrt{0.9999}c}{a'}=47.5$年

10．一平面镜以速度 v 自左向右运动，一束频率为ω_0，与水平线成θ_0夹角的平面光波自左向右入射到镜面上，求反射光波的频率ω及反射角θ，垂直入射的情况如何？

解：1）平面镜水平放置，取相对于平面镜静止的参考系为Σ'系，取静止系为Σ系，并令入射光线在平面 xoy 内

在Σ系中，有：

入射光线：$k_{ix}=k\cos\theta_0,k_{iy}=k\sin\theta_0,k_{iz}=0,\omega_i=\omega_0$

由变换关系，得Σ'系中的入射光线：

$$\begin{cases} k_{ix}' = \gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) \\ k_{iy}' = -k\sin\theta_0 \\ k_{iz}' = 0 \\ \omega_i' = \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0) \end{cases}$$

在Σ'系中，平面镜静止，由反射定律可得，反射光线满足：

$$k_{rx}' = \gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0); k_{ry}' = k\sin\theta_0$$

$$k_{rz}' = 0; \omega_r' = \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)$$

代入逆变换关系，得Σ系中的反射光线满足：

$$k_{rx} = \gamma[\gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) + \frac{v}{c^2}\gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)] = k\cos\theta_0$$

$$k_{ry} = k\sin\theta_0$$

$$k_{rz} = 0$$

$$\omega_r = \gamma[v\gamma(k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) + \gamma(\omega_0 - vk\cos\theta_0)] = \omega_0$$

$\therefore$ 在Σ系中观察到： 入射角$= \frac{\pi}{2} - \theta_0 =$ 反射角，$\omega_i = \omega_r = \omega_0$

若垂直入射，$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$，以上结论不变。

3）镜面垂直于运动方向放置，同 1）选择参考系，并建立相应坐标系

在Σ系中，入射光线满足：$k_{ix} = -k\cos\theta_0, k_{iy} = -k\sin\theta_0, k_{iz} = 0, \omega_i = \omega_0$

由变换关系，得Σ'系中的入射光线：

$$\begin{cases} k_{ix}' = \gamma(-k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) \\ k_{iy}' = -k\sin\theta_0 \\ k_{iz}' = 0 \\ \omega_i' = \gamma[\omega_0 - v(-k\cos\theta_0)] = \gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0) \end{cases}$$

在Σ'系中，平面镜静止，由反射定律可得，反射光线满足：

$$k_{rx}' = -\gamma(-k\cos\theta_0 - \frac{v}{c^2}\omega_0) = \gamma(k\cos\theta_0 + \frac{v}{c^2}\omega_0); k_{ry}' = -k\sin\theta_0$$

$$k_{rz}' = 0; \omega_r' = \gamma(\omega_0 + vk\cos\theta_0)$$

代入逆变换关系，得Σ系中的反射光线满足：

$$k_{rx}=\nu[\nu(k\cos\theta_0+\frac{v}{c^2}\omega_0)+\frac{v}{c^2}\nu(\omega_0+vk\cos\theta_0)]$$

$$k_{ry}=-k\sin\theta_0$$

$$k_{rz}=0$$

$$\omega_r=\nu[v\nu(k\cos\theta_0+\frac{v}{c^2}\omega_0)+\nu(\omega_0+vk\cos\theta_0)]$$

其中，$k=\dfrac{\omega_0}{c}$. 并令 $\beta=\dfrac{v}{c}$

$\therefore$ 反射光满足： 反射角： $tg\theta=\left|\dfrac{k_{ry}}{k_{rx}}\right|=\dfrac{\sin\theta_0}{\nu^2[(\beta+\cos\theta_0)+\beta(1+\beta\cos\theta_0)]}$

反射光频率：$\omega=\nu^2\omega_0[(1+\beta\cos\theta_0)+\beta(\beta+\cos\theta_0)]$

如果垂直入射，$\theta_0=0$，于是，Σ 系中会观察到：$\theta_i=\theta_r=0$

反射光频率：$\omega=\nu^2\omega_0(1+\beta)^2$

11. 在洛仑兹变换中，若定义快度 y 为 $\tanh y=\beta$

1） 证明洛仑兹变换矩阵可写为：

$$a_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} chy & 0 & 0 & ishy \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -ishy & 0 & 0 & chy \end{bmatrix}$$

2）对应的速度合成公式 $\beta=\dfrac{\beta'+\beta''}{1+\beta'\beta''}$ 可用快度表示为 $y=y'+y''$

证明：1） $a_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$

其中$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(thy)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\dfrac{shy}{chy})^2}}=\dfrac{chy}{\sqrt{(chy)^2-(shy)^2}}$

$$\because (chy)^2-(shy)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1$$

$\therefore \gamma=chy$

又 $\beta\gamma=thy\cdot chy=shy$

$$\therefore a_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} chy & 0 & 0 & ishy \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -ishy & 0 & 0 & chy \end{bmatrix}$$

2）速度合成公式 ： $\beta=\dfrac{\beta'+\beta''}{1+\beta'\beta''}$ 可写为 ： $thy=\dfrac{thy'+thy''}{1+thy'thy''}$

由定义 $thy'\dfrac{e^{2y'}-1}{e^{2y'}+1},thy''=\dfrac{e^{2y''}-1}{e^{2y''}+1}$

得$\dfrac{thy'+thy''}{1+thy'thy''}=\dfrac{e^{2(y'+y'')}-1}{e^{2(y'+y'')}+1}=th(y'+y'')$

$\therefore thy=th(y'+y''),y=y'+y''$

12. 电偶极子$\vec{P}_0$以速度$\vec{v}$作匀速运动，求它产生得电磁势和场$\varphi,\vec{A},\vec{E},\vec{B}$

解：选随动坐标系Σ'，$\vec{P}_0\perp\vec{v}$

在Σ'系中，$\vec{P}_0$产生的电磁势 $\varphi'=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{P}_0\cdot\vec{\tilde{R}}}{\tilde{R}^3},\vec{A}=0$

$$\text{电磁场}\quad \vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{P}_0\cdot\tilde{\vec{R}})\tilde{\vec{R}}}{\tilde{R}^5} - \frac{\vec{P}_0}{\tilde{R}^3}\right], \vec{B}' = 0$$

四维势 $A_\mu = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$，由逆变换 $A_\mu = a_{\mu\nu}A_\nu{}'$

得：
$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c}\varphi' \end{pmatrix}$$

Σ 系中，电磁势 $\varphi = \gamma\varphi' = \dfrac{\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{P}_0\cdot\tilde{\vec{R}}}{\tilde{R}^3}$

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x = \frac{\beta\gamma}{c}\varphi'\vec{e}_x = \frac{v}{c^2}\gamma\varphi'\vec{e}_x = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi$$

电磁场 $\vec{E}_{平行}=\vec{E}'_{平行}$，$\vec{E}_\perp=\gamma(\vec{E}'-\vec{v}\times\vec{B}')_\perp = \gamma\vec{E}'_\perp$

$$\vec{B}_{平行}=\vec{B}_{平行}=0,\ \vec{B}_{\perp e} = \gamma(\vec{B}' + \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}')_\perp = \gamma(\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}')_\perp = \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}_\perp$$

由坐标变换，$x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$ 得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x' = \gamma x - v\gamma t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

取 t=0 得 $\begin{cases} x' = \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$，　　$\therefore \tilde{\vec{R}} = (x', y', z') = (\gamma x, y., z)$

13. 设在参考系 Σ 内，$\vec{E}\perp\vec{B}$，Σ' 系沿 $\vec{E}\times\vec{B}$ 的方向运动，问 Σ' 系应以什么样的速度相对于 Σ 系运动才能使其中只有电场或只有磁场？

解：如图，Σ' 系以 $\vec{v}$ 沿 x 轴方向相对于 Σ 系运动

由电磁场变换公式：

$$\vec{E}_{平行}{}' = \vec{E}_{平行}=0,\quad \vec{E}'_{\perp}=\gamma\,(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})_{\perp} = \gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\vec{B}'_{平行} = \vec{B}_{平行} = 0,\quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp} = \gamma(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})$$

令 $\vec{E}_{\perp}=0$，则 $\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}=0$

两边同时叉乘 $\vec{B}$ 并利用矢量分析公式，得：

$$\vec{v}=\frac{1}{B^2}(\vec{E}\times\vec{B}),\ \text{取模}\quad v=\frac{E}{B}=\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$$

$\because v<c \qquad \therefore |\vec{E}|<c|\vec{B}|$

即若 $|\vec{E}|<|\vec{B}|$，则当 $\vec{v}=\dfrac{1}{B^2}(\vec{E}\times\vec{B})$ 时，$\vec{E}'=0$

同理，令 $\vec{B}'_{\perp}=0$，则 $\vec{B}-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}=0$

两边同时叉乘 $\vec{E}$ 并利用矢量分析公式，得：

$$\vec{v}=\frac{c^2}{E^2}(\vec{E}\times\vec{B}),\qquad \text{取模}\quad v=\frac{c^2}{E}B=c^2\frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|}$$

$\because v<c \qquad \therefore |\vec{E}|>c|\vec{B}|$

即若 $|\vec{E}|>c|\vec{B}|$，则当 $\vec{v}=\dfrac{c^2}{E^2}(\vec{E}\times\vec{B})$ 时，$\vec{B}'=0$

14. 做匀速运动的点电荷所产生的电场在运动方向发生“压缩”，这时在电荷的运动方向上电场 $\vec{E}$ 与库仑场相比较会发生减弱，如何理解这一减弱与变换公式 $E_{平行}=E'_{平行}$ 的关系。

解：设点电荷 e 以速度 $\vec{v}$ 沿 Σ 系 x 轴方向运动，选 Σ' 系为 e 的随动系

在 Σ' 系中，$E'_{平行}=\dfrac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$ 为库仑场。

由变换 $E_{平行}=E'_{平行}$，得 $E_{平行}=\dfrac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$，此场在 Σ 系中并非静电库仑场。

由坐标变换：$\begin{cases} x' = x\gamma \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$

得 $E_{平行} = (1-\dfrac{v^2}{c^2})\dfrac{ex}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = (1-\dfrac{v^2}{c^2})E_0$，$E_0$ 为 Σ 系中库仑场

当 $v \approx c$ 时，$E_{平行} << E_0$ （压缩）

15．有一沿 z 轴方向螺旋进动的静磁场 $\vec{B} = \vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$，其中 $k_m = 2\pi/\lambda_m$，λ_m 为磁场周期长度。现有一沿 z 轴以速度 $v = \beta c$ 运动的惯性系，求在该惯性系中观察到的电磁场。证明当 $\beta \cong 1$ 时，该电磁场类似于一列频率为 $\gamma\beta c k_m$ 的圆偏振电磁波。

解：由电磁场变换式，在 Σ' 系中：

$$\vec{E}'_{平行} = \vec{E}_{平行} = 0,$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(E + \vec{v}\times\vec{B})_{\perp} = \gamma\vec{v}\times\vec{B} = \gamma\beta c\vec{e}_z \times \vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$$

$$= \gamma\beta c\vec{B}_0(-\sin k_m z\vec{e}_x + \cos k_m z\vec{e}_y)$$

$$\vec{B}'_{平行} = \vec{B}_{平行} = 0,$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_{\perp} = \gamma\vec{B}_{\perp} = \gamma\vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$$

$\therefore$ 在该惯性系中观察到的电磁场为;

$$\vec{E}' = \gamma\beta c\vec{B}_0(-\sin k_m z\vec{e}_x + \cos k_m z\vec{e}_y)$$

$$= \gamma\beta c\vec{B}_0[\cos(k_m z + \frac{\pi}{2})\vec{e}_x + \sin(k_m z + \frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

$$\vec{B}' = \gamma\vec{B}_0(\cos k_m z\vec{e}_x + \sin k_m z\vec{e}_y)$$

当 $\beta \approx 1$ 时，$v \approx c$，$\because \vec{E}'\perp(-\vec{e}_z), \vec{B}'\perp(-\vec{e}_z), \vec{E}'\perp\vec{B}', \dfrac{|\vec{E}'|}{|\vec{B}'|} = \beta c = v \approx c$

$\therefore$ 该电磁场类似于一列真空中的圆偏振平面电磁波。

由四维矢量 $k_\mu = (\vec{k}, i\dfrac{\omega}{c})$ 的变换关系得：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

$$k'_z = \gamma(k_z - \frac{v}{c^2}\omega) = \gamma k_m, k'_x = k_x = 0, k'_y = k_y = 0, \omega' = \gamma(\omega - vk_z) = -\beta c k_m$$

$\therefore$ 该圆偏振电磁波的频率为 $\gamma \cdot \beta c k_m$

16．有一无限长均匀带电直线，在其静止参考系中线电荷密度为 λ，该线电荷以速度 $v=\beta c$ 沿自身长度匀速移动，在与直线相距为 d 的地方有一以同样速度平行于直线运动的点电荷 e，分别用下列两种方法求出作用在电荷上的力：

（a）　在直线静止系中确定力，然后用四维力变换公式

(b)　直接计算线电荷和线电流作用在运动电荷上的电磁力。

解：（a）在直线静止系中，由高斯定理，d 处的电场强度为 $\vec{E}'=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$（取 $\vec{e}_r=\vec{e}_z$），

磁场 $\vec{B}'=0$. e 受力 $\vec{F}'=e(\vec{E}'+\vec{v}\times\vec{B}')=e\vec{E}'=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$

由四维矢量公式，e 受到的四维力矢量为 $k'_\mu=(\vec{k}',\dfrac{i}{c}\vec{k}'\cdot\vec{v}')=(\gamma\vec{F}',\dfrac{i}{c}\gamma\vec{F}'\cdot\vec{v}')$，其中 $\vec{v}'=0$，

$\gamma'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}=1$ （$\vec{v}'$ 为 e 相对于直线静止的速度）

$\therefore k'_\mu=(\vec{F}',0)=(0,0,\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d},0)$

根据四维力矢量的变换关系 $k_\mu=a_{\mu\nu}k'_\nu$ 得

$$\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\\k_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&-i\beta\gamma\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\i\beta\gamma&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\\0\end{pmatrix}$$

$\therefore k_x=k_y=k_\varphi=0, k_z=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}, \vec{K}=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$

$\therefore$ e 受力 $\vec{F}=\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\vec{K}=\dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\gamma}\vec{e}_r$

（b）在直线静止系中，电流密度四维矢量 $J'_\mu=(\vec{J}',ic\rho')$

$\vec{J}'=0$，设直线截面面积为 S（设不变），则 $\rho'=\dfrac{\lambda}{S}$

$J'_\mu=(0,0,0,ic\dfrac{\lambda}{S})$，由变换公式 $J_\mu=a_{\mu\nu}J'_\nu$ 得：

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \\ ic\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\therefore J_x = \beta c\gamma \frac{\pi}{S}, J_y = J_z = 0, \rho = \gamma \frac{\lambda}{S}$$

$$\therefore J_\mu = (\beta c\gamma \frac{\lambda}{S}, 0, 0, \gamma \frac{\lambda}{S})$$

在 o－xyz 系中，线电荷密度为 $\gamma\lambda$，电流为 $I = \beta c\gamma\lambda$，流向沿 x 轴方向。

由高斯定理，e 处场强为 $\vec{E} = \dfrac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r$ （取 $\vec{e}_r = \vec{e}_z$）

由安培环路定律得，e 处磁感应强度为 $\vec{B} = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_y$

$\therefore$ e 所受的洛仑兹力为 $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \dfrac{e\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\vec{e}_r - \dfrac{ev\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_r$

$$= \frac{e\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}(1 - \frac{v^2}{c^2})\vec{e}_r = \frac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\gamma}\vec{e}_r$$

17. 质量为 M 得静止粒子衰变为两个粒子 m_1 和 m_2，求粒子 m_1 的动量和能量。

解：衰变前粒子的动量为 $\vec{p} = 0$，能量为 $w = Mc^2$。衰变后设两粒子动量为 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$，能量分别为 $w_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4}, w_2 = \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4}$

由动量守恒和能量守恒得：

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} = 0 \qquad (1)$$

$$\sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4} = Mc^2 \qquad (2)$$

由（1）得 $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$ 代入（2）解得

$$p_1 = p_2 = p = \frac{c}{2M}\sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}$$

粒子 m_1 的能量为 $E_1 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} = \dfrac{c^2}{2M}[M^2 + m_1^2 - m_2^2]$

18. 已知某一粒子 m 衰变成质量为 m_1 和 m_2，动量为 p_1 和 p_2（两者方向夹角为 θ）的两个

粒子，求该粒子的质量 m。

解：由 $\bar{p}_1+\bar{p}_2=\bar{p}$ 动量守恒得：

$$p^2=p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\theta \qquad (1)\quad \bar{p}\text{ 为 m 的动量}$$

由能量守恒 $\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}=\sqrt{p_1^2c^2+m_1^2c^4}+\sqrt{p_2^2c^2+m_2^2c^4} \qquad (2)$

（1）代入（2）得：

$$m^2=m_1^2+m_2^2+\frac{2}{c^2}[\sqrt{(p_1^2+m_1^2c^2)(p_2^2+m_2^2c^2)}-p_1p_2\cos\theta]$$

19.（1）设 E 和 $\bar{p}$ 是粒子体系在实验室参考系 Σ 中的总能量和总动量（$\bar{p}$ 与 x 轴方向夹角为 θ），证明在另一参考系 Σ'（相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴方向运动）中的粒子体系总能量和总动量满足：

$$p_x'=\gamma(p_x-{\beta E}/{c}),\quad E'=\gamma(E-c\beta p_x),\quad tg\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta E/cp)}$$

（2）某光源发出的光束在两个惯性系中与 x 轴的夹角分别为 θ 和 θ'，证明

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta},\quad \sin\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

（3）考虑在 Σ 系内立体角为 $d\Omega=d\cos\theta d\phi$ 的光束，证明当变换到另一惯性系 Σ' 时，立体角变为 $d\Omega'=\dfrac{d\Omega}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$

证明：（1）

四维动量矢量 $p_\mu=(\bar{p},\frac{i}{c}E)$，满足洛仑兹变换：

$$\begin{cases} p_x'=\dfrac{p_x-v\dfrac{E}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma(p_x-\beta\dfrac{E}{c}) \\ p_y'=p_y \\ p_x'=p_x \\ E'=\gamma(E-vp_x)=\gamma(E-c\beta p_x) \end{cases}$$

在 Σ' 系中，$\bar{p}'$ 与 x 轴的夹角 θ' 满足：

$$tg\theta'=\frac{p_y'}{p_x'}=\frac{p\sin\theta}{\gamma(p\cos\theta-\beta\dfrac{E}{c})}=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta E/cp)}$$

（2）四维波矢量 $k_\mu=(\vec{k},i\dfrac{\omega}{c})$

对沿 x 轴方向的特殊洛仑兹变换有

$$\begin{cases} k_1'=\gamma(k_1-\dfrac{v}{c^2}\omega) \\ k_2'=k_2 \\ k_3'=k_3 \\ \omega'=\gamma(\omega-vk) \end{cases} \quad (*)$$

在两个惯性系中有：

$$k_1=\frac{\omega}{c}\cos\theta，\ k_1'=\frac{\omega'}{c}\cos\theta'$$

代入（*）式得：

$$\omega'=\omega\gamma(1-\frac{v}{c}\cos\theta),\cos\theta'=\frac{\cos\theta-\dfrac{v}{c}}{1-\dfrac{v}{c}\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\sin\theta'=\sqrt{1-\cos'^2}=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\sin\theta}{1-\dfrac{v}{c}\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

（3）在另一个惯性系中，$d\Omega'=d\cos\theta'd\phi'$

对沿 x 轴方向得特殊洛仑兹变换有：$\cos\theta'=\dfrac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$，（2）中已证，且

$$d\phi'=d\phi\ \therefore d\cos\theta'=d(\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta})=\frac{(1-\beta^2)d\cos\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}=\frac{d\cos\theta}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$$

$$\therefore d\Omega'=d\cos\theta'd\phi'=\frac{d\Omega}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}$$

20. 考虑一个质量为 m_1，能量为 E_1 的粒子射向另一质量为 m_2 的静止粒子的体系，通常在高能物理中，选择质心参考系有许多方便之处，在该参考系中，总动量为零。

（1）求质心系相对于实验室系的速度 β_c

（2）求质心系中每个粒子的动量，能量和总能量；

（3）已知电子静止质量 $m_ec^2=0.511MeV$ 。北京正负电子对撞机（BEPC）的设计能量为 2×2.2GeV(1GeV=10^3MeV).估计一下若用单束电子入射于静止靶，要用多大的能量才能达到与对撞机相同的相对运动能量？

解：(1)设质心系中两粒子动量分别为 $\vec{p}_1',\vec{p}_2'$，且 $\vec{p}_1'+\vec{p}_2'=0$

能量为 $E_1'^2 = p_1'^2c^2 + m_1^2c^4, E_2'^2 = p_2'^2c^2 + m_2^2c^4$

实验室系中： $p_2 = 0, p_1 \neq 0$

$$E_1^2 = p_1^2c^2 + m_1^2c^4, E_2^2 = m_2^2c^4$$

由特殊洛仑兹变换得：

$$p_1 = \frac{p_1' + \frac{\beta_c}{c^2}E_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad (1); \quad E_1 = \frac{E_1' + \beta_c p_1'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad (2);$$

$$p_2 = \frac{p_2' + \frac{\beta_c}{c^2}E_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad (3); \quad E_2 = \frac{E_2' + \beta_c p_2'}{\sqrt{1-\beta_c^2/c^2}} \quad (4)$$

（1）＋（3）得： $p_1 = \gamma\frac{\beta_c}{c^2}(E_1' + E_2')$

（2）＋（4）得 $E_1 + E_2 = \gamma(E_1' + E_2')$

$$\therefore p_1 = \frac{\beta_c}{c^2}(E_1 + E_2)$$

$\therefore \beta_c = \dfrac{p_1c^2}{E_1 + E_2} = \dfrac{\sqrt{E_1^2 + m_1^2c^4}}{E_1 + m_2c^2}c$ 为质心系相对于实验室系的速度 β_c。

2）$|\vec{p}_1'| = \dfrac{m_2\sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4}}{Mc}$， $|\vec{p}_2'| = |\vec{p}_1'|$

$\therefore E_1' = \sqrt{p_1'^2c^2 + m_1^2c^4} = \dfrac{m_1^2c^2 + m_2E_1}{M}$， $E_2' = \sqrt{p_2'^2c^2 + m_2^2c^4} = \dfrac{m_2E_1 + m_2^2c^2}{M}$

总能量 $E' = E_1' + E_2' = \dfrac{(m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2m_2E_1}{M}$，其中 $M^2c^4 = m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + 2m_2E_1c^2$

4）实验室系中：

$$p_\mu = [\vec{p}_1 + \vec{p}_2, \frac{i}{c}(E_1 + E_2)] = (\vec{p}, \frac{i}{c}(E_1 + E_2)]$$

质心系中 $p_\nu' = [\vec{p}_1' + \vec{p}_2', \frac{i}{c}(E_1' + E_2')] = [0, \frac{i}{c}2E_1']$

由不变量 $p_\mu p_\mu' = p_\nu p_\nu'$

得：$-2m_eE_1 = -\dfrac{1}{c^2}4E_1'^2$

$$\therefore E_1 = \frac{2E_1'^2}{m_e c^2} = 1.9\times10^4 GeV$$

21. 电荷为 e，质量为 m 的粒子在均匀电场 $\vec{E}$ 内运动，初速度为零，试确定粒子的运动轨迹与时间的关系，并研究非相对论情况。

解：1）相对论情况

力学方程为 $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E}, \vec{P} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

分量式为 $\dfrac{dP_x}{dt} = 0, \dfrac{dP_y}{dt} = 0, \dfrac{dP_z}{dt} = eE$

由题意，$P_x = P_y = 0$，当 $t = 0$ 时，$P_z = 0$，$\therefore P_z = eEt$

粒子能量 $w = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{P^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{P_z^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4}$

由 $\dfrac{dP_z}{dt} = \dfrac{P_z}{m\Big/\sqrt{1-v^2\big/c^2}} = \dfrac{P_z}{w\big/c^2} = \dfrac{eEc^2t}{\sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4}}$

设粒子从 z=0 运动，则：

$$z = \int_0^t \frac{eEc^2tdt}{\sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4}} = \frac{1}{eE}[\sqrt{e^2E^2c^2 + m^2c^4} - mc^2]$$

$$= \frac{mc^2}{eE}[\sqrt{1+(\frac{eE}{mc})^2} - 1]$$

2）非相对论情况

力学方程 $e\vec{E} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}, \vec{P} = m\vec{v}$

分量式 $\dfrac{dP_x}{dt} = 0, \dfrac{dP_y}{dt} = 0, \dfrac{dP_z}{dt} = eE$

由题意，$P_x = P_y = 0$，当 $t = 0$ 时，$P_z = 0$，$\therefore P_z = eEt$

由 $\dfrac{dP_z}{dt} = \dfrac{P_z}{m} = \dfrac{eEt}{m}$，设粒子从 z=0 运动，则：$z = \dfrac{eE}{m}\displaystyle\int_0^t tdt = \dfrac{eE}{2m}t^2$

22.利用洛仑兹变换，试确定粒子在互相垂直的均匀电场 $E\vec{e}_x$ 和磁场 $B\vec{e}_y (E > cB)$ 内的运动规律，设粒子初速度为零。

解：设 Σ' 系 $o' - x'y'z'$ 以 $\vec{u}$ 沿 z 轴运动，t=0 时，o', o 重合。

$\because E > cB$

$\therefore$ 当 $\vec{u} = \dfrac{c^2}{E^2}\vec{E}\times\vec{B}$ 时，在 Σ' 内 $\vec{B}' = 0$

此时，$\vec{E}'_{平行} = \vec{E}_{平行} = 0$，$\vec{E}'_{\perp} = \gamma_u(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})_{\perp} = \gamma_u(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})$

$$= \gamma_u(\vec{E} - c^2\frac{B^2}{E^2}\vec{E}) = \gamma_u\vec{E}(1 - \frac{u^2}{c^2}) = \frac{\vec{E}}{\gamma_u}$$

即：$\vec{E}' = \dfrac{\vec{E}}{\gamma_u}$

由 21 题结果，粒子 e 在 Σ' 系中的运动轨迹与时间的关系为：

$$x' = \frac{mc^2}{eE'}[\sqrt{1 + (\frac{eE'}{mc}t')^2} - 1], y' = 0, z' = 0$$

由洛仑兹变换 $\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & 0 & 0 & -i\beta\gamma_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma_u & 0 & 0 & \gamma_u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z' \\ x' \\ y' \\ ict' \end{pmatrix}$ 得：

$$\begin{cases} z = \gamma_u z' + \beta c\gamma_u t' = ut \\ x = x' \\ y = y' = 0 \\ t = \gamma_u t' \end{cases}$$

$\therefore$ e 在互相垂直得均匀电磁场中的运动规律为

$$x = \frac{mc^2\gamma_u}{eE}[\sqrt{1 + (\frac{eE}{\gamma_u^2 mc}t)^2} - 1], y = 0, z = ut,\ 其中\ u = \frac{c^2}{E}B, \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

23. 已知 t=0 时点电荷 q_1 位于原点，q_2 静止于 y 轴 $(0, y_0, 0)$ 上，q_1 以速度 v 沿 x 轴匀速运动，试分别求出 q_1，q_2 各自所受的力，如何解释两力不是等值反向？

解：选参考系 Σ' 固定在粒子 q_1 上，在 Σ' 系观察时，粒子静止，只有静电场，电磁场强度

为 $\vec{E}_1' = \dfrac{e\vec{x}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}, \vec{B}_1' = 0$

在 Σ 系中观察，q_1 以速度 $\vec{v}$ 沿 x 轴方向运动，由速度变换关系得：

$$E_{1x} = \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},\quad E_{1y} = \gamma\frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},\quad E_{1z} = \gamma\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

$$B_{1x} = 0,\qquad B_{1y} = -\gamma\frac{v}{c^2}\frac{ez'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3},\quad B_{1z} = \gamma\frac{v}{c^2}\frac{ey'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}$$

$$\therefore \vec{E}_1 = (1-\gamma^2)\frac{e\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0[(1-\beta^2)r^2 + (\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c})^2]^{\frac{3}{2}}},\quad \vec{B}_1 = \frac{\vec{v}\times\vec{E}_1}{c}$$

在 q_2 处，$\vec{E}_1 = \dfrac{q_1\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}\,y_0^2}, \vec{B}_1 = \dfrac{\vec{v}\times\vec{E}_1}{c^2}$

q_2 受力 $\vec{F}_{12} = q_2(\vec{E}_1 + \vec{0}\times\vec{B}_1) = \dfrac{q_1 q_2\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}\,y_0^2}$

同理，q_2 产生场 $\vec{E}_2 = \dfrac{q_2\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \vec{B}_2 = 0$

在 q_1 处，$\vec{E}_2 = -\dfrac{q_2\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}, \vec{B}_2 = 0$

$\therefore q_1$ 受力 $\vec{F}_{21} = q_1(\vec{E}_2 + \vec{v}\times\vec{B}) = -\dfrac{q_1 q_2\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 y_0^2}$

24. 试比较下列两种情况下两个电荷的相互作用力：（1）两个静止电荷 q 位于 y 轴上相距为 l;（2）两个电荷都以相同的速度 $\vec{v}$ 平行于 x 轴匀速运动。

解：（1）此属于静电场情况，两电荷之间的静电库仑为

$F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$，为排斥力。

由上题求得，原点处 q 在 y=l 处产生的电磁场为

$$\vec{E} = \frac{q\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}\,l^2},\qquad \vec{B} = \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2} = \frac{1}{c^2}vE\vec{e}_z$$

y=l 处 q 受洛仑兹力为

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E} + \frac{q}{c^2} vE\vec{v} \times \vec{e}_z = q(1-\beta^2)\vec{E} = \frac{q^2\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{e}_y}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

$$\left|\vec{F}\right| < \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

25. 频率为 ω 的光子（能量为 $\hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec{k}$ ）碰在静止的电子上，试证明：

（1）电子不可能吸收光子，否则能量和动量守恒定律不能满足；

（2）电子可以散射这个光子，散射后光子频率 ω' 比散射前光子频率 ω 小（不同于经典理论中散射光频率不变的结论）

证明：1）设电子可以吸收这个光子，反应后它的动量为 $\vec{p}$，反应前光子能量 $\hbar\omega$，电子能量 $m_e c^2$，反应后能量为 $\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}$

由动量守恒 $\hbar\vec{k} = \vec{p}$　　　$\therefore \hbar k = p$　　　（1）

能量守恒 $\hbar\omega + m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}$　　　（2）

（1）式代入（2）式得：

$$\hbar\omega + m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + (\hbar kc)^2} = \sqrt{m_e^2 c^4 + (\hbar\omega)^2}$$

$\therefore 2\hbar\omega m_e c^2 = 0$，　显然此式不成立，所以电子不可能吸收光子，否则能量和动量守恒定律不能满足

2) 电子可散射这个光子，散射后的频率为 ω'，电子的动量变为 $\vec{p}$

由动量守恒定律得　　$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}$

$$\therefore p^2 = (\hbar k)^2 + (\hbar k')^2 - 2\hbar^2 kk'\cos\theta$$

由能量守恒定律得　　$\hbar\omega + m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} + \hbar\omega'$

$$\therefore \hbar(\omega - \omega') = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} - m_e c^2$$

$\because p > 0$　　$\therefore \hbar(\omega - \omega') > 0$，即　$\omega > \omega'$，散射后频率降低。

26. 动量为 $\hbar\vec{k}$，能量为 $\hbar\omega$ 的光子撞在静止的电子上，散射到与入射方向夹角为 θ 的方向上，证明散射光子的频率变换量为 $\omega - \omega' = \dfrac{2\hbar}{m_0 c^2}\omega\omega'\sin^2\dfrac{\theta}{2}$。亦即散射光波长

$\lambda' = \lambda + \dfrac{4\pi\hbar}{m_0 c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，$\lambda$ 为散射前光子波长 $2\pi/k$，m_0 为电子的静止质量。

解：设碰撞后，光子动量变为 $\hbar\vec{k}'$，能量变为 $\hbar\omega'$，电子碰撞后动量为 $\vec{p}$，能量为 $w = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$，　四维动量 $p_\mu = (\vec{p}, \dfrac{i}{c}\omega)$

由碰撞前后动量守恒得　$p_{\mu 1} = p_{\mu 2}$

$$\begin{cases} \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}, (1) \\ \hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}, (2) \end{cases}$$

对（1）式，由余弦定理，$p^2 = (\hbar k)^2 + (\hbar k')^2 - 2\hbar^2 kk'\cos\theta$

$$= \frac{\hbar\omega^2}{c^2} + \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - 2\hbar^2\frac{\omega\omega'}{c^2}\cos\theta$$

代入（2）式得 $\hbar\omega - \hbar\omega' = \sqrt{(\hbar\omega)^2 + (\hbar\omega')^2 - 2\hbar^2\omega\omega'\cos\theta + m_0^2c^4} - m_0c^2$

平方整理得：

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar\omega\omega'}{m_0c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

代入 $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}, \omega' = \dfrac{2\pi c}{\lambda'}$ 得　$\lambda' = \lambda + \dfrac{4\pi\hbar}{m_0 c}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

27. 一个总质量为 M_0 的激发原子，对所选定的坐标系静止，它在跃迁到能量比之低 Δw 的基态时，发射一个光子（能量为 $\hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec{k}$），同时受到光子的反冲，因此光子的频率不能正好是 $\nu = \dfrac{\Delta w}{h}$，而要略小一些，证明这个频率 $\nu = \dfrac{\Delta w}{h}(1 - \dfrac{\Delta w}{2M_0c^2})$

证明：设基态原子静止质量为 M_1，跃迁后基态原子反冲动量为 $\vec{p}$

跃迁前四维动量为　$p_{\mu 1} = (0, M_0c^2)$

跃迁后四维动量为 $p_{\mu 2} = (\vec{p} + \hbar\vec{k}, \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4})$

由四维动量守恒：$\begin{cases} \vec{p} + \hbar\vec{k} = 0, (1) \\ M_0c^2 = \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4}, (2) \end{cases}$

由（1）得 $p=\hbar k=\hbar\dfrac{\omega}{c}$　　　$\therefore\ p^2c^2=\hbar^2\omega^2$　（3）

又 $M_0c^2-M_1c^2=\Delta w$　　　$\therefore\ M_1^2c^4=(M_0c^2-\Delta w)^2$　（4）

（3）(4)代入（2）得 $(M_0c^2-\hbar\omega)^2=\hbar^2\omega^2+(M_0c^2-\Delta w)^2$

整理得 $2M_0c^2\hbar\omega=2M_0c^2h\nu=2M_0c^2\Delta w-\Delta w^2$

$\therefore$ 光子频率 $\nu=\dfrac{\Delta w}{h}(1-\dfrac{\Delta w}{2M_0c^2})$

28. 一个处于基态的原子，吸收能量为 $h\nu$ 的光子跃迁到激发态，基态能量比激发态能量低 Δw，求光子的频率。

解：设原子基态静止质量为 M_1，激发态静止质量为 M_0，光子能量为 $h\nu=\hbar\omega$，动量为 $\hbar\vec{k}$，原子吸收光子后动量为 $\vec{p}$，设原子基态时静止。

吸收前四维动量为 $p_{\mu1}=(\hbar\vec{k},M_1c^2+\hbar\omega)$

吸收后四维动量为 $p_{\mu2}=(\vec{p},\sqrt{p^2c^2+M_0^2c^4})$

由四维动量守恒：$\begin{cases}\vec{p}=\hbar\vec{k},(1)\\ M_1c^2+\hbar\omega=\sqrt{p^2c^2+M_0^2c^4},(2)\end{cases}$

由（1）得 $p=\hbar k=\hbar\dfrac{\omega}{c}$，得 $p^2c^2=\hbar^2\omega^2$　（3）

又 $M_0c^2-M_1c^2=\Delta w$　得 $M_0^2c^4=(M_1c^2+\Delta w)^2$　（4）

（3）(4)代入（2）得 $(M_1c^2+\hbar\omega)^2=\hbar^2\omega^2+(M_1c^2+\Delta w)^2$

整理得 $2M_1c^2\hbar\omega=2M_1c^2h\nu=2M_1c^2\Delta w+\Delta w^2$

$\therefore$ 光子频率 $\nu=\dfrac{\Delta w}{h}(1+\dfrac{\Delta w}{2M_1c^2})$