中国科学技术大学
2008–2009 学年第一学期考试试卷

考试科目：随机过程　　　　　　　　　　　得 分 ____________

学生所在系 ____________　姓 名 ____________　学 号 ____________

(2009 年 1 月 15 号，开卷)

1. (20 分) (1) 考虑电子管中的电子发射问题. 设单位时间内达到阳极的电子数目 N 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而每个电子携带的能量与 N 独立，且它们各自不相关且均服从区间 $[1,2]$ 上的均匀分布. 记单位时间内阳极接受的能量为 S. 求 S 的期望和方差.

(2) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一个独立增量过程，且 $X(0)=0$, 分别记 $V(t), R(t,s)$ 表示 $X(t)$ 的方差函数和协方差函数，证明： $R(t,s) = V(\min(s,t))$.

2. (15 分) 设粒子来到的过程可以用一个强度为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 来描述，其中粒子分 A, B 两种，且来到的粒子的种类取决于时间. 具体地，若在时刻 y 来到一粒子，则其为 A 类的概率为 $P_1(y)$, 为 B 类的概率为 $P_2(y)$, $P_1(y)+P_2(y)=1$. 记 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别表示时刻 t 为止 A 和 B 类粒子来到的总数目. 证明： $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是相互独立的 Poisson 过程，且强度为

$$\lambda_i = \lambda \int_0^t P_i(s)ds, \quad i=1,2.$$

3. (15 分) 设河流每天的 BOD(生物耗养量) 浓度为一个齐次马氏链，状态空间 $I = \{1,2,3,4\}$ 是按 BOD 浓度为极低，低，中，高分别表示的，其一步转移概率矩阵 (以一天为单位) 为

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

若 BOD 浓度高，则称河流处于污染状态.

(1) 证明该马氏链是遍历的；

(2) 求该马氏链的极限分布和平稳分布；

(3) 求河流再次达到污染的平均时间.

4. (15 分) 将 2 个红球 4 个白球任意地分别放入甲乙两个盒子中，每个盒子放 3 个. 现从每个盒子中各任取一球，交换后放回盒中 (甲盒中取出的球放入乙盒，乙盒中取出的球放入甲盒), 以 $X(n)$ 表示经过 n 次交换后甲盒中的红球数目，则 $\{X(n), n \geq 0\}$ 为一个齐次马氏链. 试求：

(1) 一步转移概率矩阵;

(2) 证明 $\{X(n), n \geq 0\}$ 为遍历的;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$, $j = 0, 1, 2$.

5. (15 分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ 的功率谱密度为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 25}{\omega^4 + 11\omega^2 + 24},$$

(1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) 问 X 是否具有均值遍历性？为什么？

6. (20 分) 设 $X(t) = a\cos(\Theta t + \Psi)$, 其中 a 为常数， $\Psi \sim U(0, 2\pi)$, Θ 的密度函数 $f(\theta)$ 为偶函数，且 Θ 与 Ψ 相互独立.

(1) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为一个平稳过程;

(2) 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 的功率谱密度为 $S(\omega) = a^2\pi f(\omega)$. (提示：对任意连续的随机变量 X, 其密度函数 $f(x)$ 与特征函数 $g(t) = \mathrm{E}[e^{itX}]$ 互为一对 Fourier 变换，其中 $i = \sqrt{-1}$.)