安徽大学 2010—2011 学年第一学期

《高等数学 C(一)》（B 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、　填空题（本题共五小题，每小题 2 分，共 10 分）

1．2；　2．第二类（或无穷）；　3．$\frac{1}{e}$；　4．$x=0$；　5．$x-1$

二、选择题（本题共五小题，每小题 2 分，共 10 分）

6．D；　7．A；　8．B；　9．C；　10．A

三、计算题（本题共八小题，每小题 6 分，共 48 分）

11．$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le \frac{n}{n+\sqrt{1}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}}=1$

故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}})=1$

12．$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$

$=\frac{1}{3}$

13．$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x+1}}$．

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e$

14．$\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^{x^2}(t-1)\ln t dt}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2-1)\ln x^2\cdot 2x}{3(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{4x(x+1)\ln x}{3(x-1)}$

$$=\frac{8}{3}\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{8}{3}$$

15. $\int\frac{2x-5}{x^2-6x+10}dx=\int\frac{2x-6}{x^2-6x+10}dx+\int\frac{1}{x^2-6x+10}dx$

$$=\int\frac{1}{x^2-6x+10}d(x^2-6x+10)+\int\frac{1}{(x-3)^2+1}dx$$

$$=\ln|x^2-6x+10|+\int\frac{1}{(x-3)^2+1}dx(x-3)$$

$$=\ln(x^2-6x+10)+\arctan(x-3)+C$$

16. $\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int xd\sin(\ln x)=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)+\int xd\cos(\ln x)$$

$$=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)dx$$

故$=\frac{1}{2}[x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)]+C$

17. 由奇、偶函数在对称区间上定积分性质知

原式$=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=2\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx$$

$$=2-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=2-2\cdot\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}$$

18. 令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，则$0\le\theta\le\pi$， $0\le r\le2\sin\theta$

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr=\frac{8}{3}\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta==\frac{8}{3}(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta)|_0^\pi=\frac{32}{9}$$

四、应用题（本题共两小题，其中第 19 题 10 分，第 20 题 12 分，共 22 分）

19. 设 $f(x,y)$ 表示总利润，则

$$f(x,y)=(10x+9y)-[400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)]$$

$=8x+6y-0.01(3x^2+xy+3y^2)-400$

由 $f'_x(x,y)=8-0.01(6x+y)=0$， $f'_y(x,y)=6-0.01(x+6y)=0$，

得驻点 $(120,80)$

再由 $A=f''_{xx}(120,80)=-0.06<0$， $B=f''_{xy}=-0.01$， $C=f''_{yy}=-0.06$，知

$B^2-AC=-3.5\times10^{-3}<0$，

所以，当 $x=120$， $y=80$ 时， $f(120,80)=320$ 是极大值，由题目实际意义知，生产 120 件产品 I 、80 件产品 II 时所得利润最大。

20．（1）设切点 A 的坐标为 (a,a^2)，则过点 A 的切线斜率为 $y'|_{x=a}=2a$，切线方程为 $y=2ax-a^2$

此切线与 Ox 轴交点为 $(\frac{a}{2},0)$，曲线、Ox 轴及切线所围图形面积

$\frac{1}{12}=\int_0^a x^2dx-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}$，因此 $a=1$.

故切点 A 的坐标为 $(1,1)$，切线方程为 $y=2x-1$.

（2）旋转体的体积

$V=\int_0^1\pi(x^2)^2dx-\int_{1/2}^1\pi(2x-1)^2dx=\frac{\pi}{30}$.

五、证明题（本题共两小题，每小题 5 分，共 10 分）

21．令 $F(x)=2\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$，显然 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、可导

$$F'(x)=2xf(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$$

由积分中值定理知，

$F'(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt=xf(x)-xf(\xi)=x[f(x)-f(\xi)]$，其中， $0\le\xi\le x$

由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加知， $F'(x)\ge0$，即 $F(x)$ 单调增加，

又因为 $F(0)=0$，故 $F(x)\ge0$． 得证.

22．由 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不恒为常数，且 $f(a)=f(b)$，故存在 $c\in(a,b)$，

使得 $f(c)\neq f(a)$， $f(c)\neq f(b)$

若 $f(c)>f(a)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$$

若 $f(c)<f(a)$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(c,b)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$$

故总有 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$.