安徽大学 2008-2009 学年第一学期

《高等数学 C（一）》考试试卷（A 卷）

参考答案与评分标准

一、填空题 (每小题 2 分，共 10 分)

1. $\underline{\varphi(x) = \arcsin(1-x^2)}$; 2. $\underline{a = 0, b = 1}$; 3. $\underline{(0,1)}$; 4. $\underline{(x+n)e^x}$; 5. $\underline{1}$.

二、选择题 (每小题 2 分，共 10 分)

1. B; 2. C; 3. C; 4. C; 5. A.

三、计算下列极限 (每小题 6 分，共 24 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}]$ ……………………………………(2 分)

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}} + \sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}}$ ……………………………………(4 分)

$= \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………(6 分)

2. 因为

$$2011 = \sqrt[n]{2011^n} < \sqrt[n]{2008^n + 2009^n + 2010^n + 2011^n} < \sqrt[n]{4\cdot 2011^n} = 2011\sqrt[n]{4}$$

……………………………………………………………………(3 分)

且 $\lim\limits_{n\to\infty}2011 = 2011 = \lim\limits_{n\to\infty}2011\sqrt[n]{4}$ ……………………………………(4 分)

故由夹逼定理可知,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2008^n + 2009^n + 2010^n + 2011^n} = 2011$ ……………………………………(6 分)

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ .... (2 分)

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$ .... (6 分)

4. $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{\sin^2 x}\ln\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}}$ .... (3 分)

$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}} = e^{-\frac{1}{2}}$ .... (6 分)

四、计算下列积分 (每小题 6 分，共 24 分)

1. $\int \dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \int \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x - \int \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$ .... (1 分)

$= \int \dfrac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ .... (3 分)

$= a\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$ .... (6 分)

2. 令 $t = \sqrt{x+1}$, 则 $x = t^2 - 1$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$, $t|_1^{\sqrt{3}} \iff x|_0^2$. 故

$\int_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{(1+x)^3}}$

$= \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{2t\mathrm{d}t}{t+t^3} = \int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$ .... (3 分)

$= 2\arctan t|_1^{\sqrt{3}} = 2(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{6}$ .... (6 分)

3. 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $t = \frac{1}{x}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$. 故

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-9}} = -\int \dfrac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-9t^2}}$ .... (2 分)

$= -\frac{1}{18}\int \dfrac{\mathrm{d}9t^2}{\sqrt{1-9t^2}} = \frac{1}{9}\sqrt{1-9t^2} + C$ .... (4 分)

$= \frac{1}{9x}\sqrt{x^2-9} + C$. .... (6 分)

4. $\int_{e^{-1}}^{e} |\ln x|\mathrm{d}x = \int_1^e \ln x\mathrm{d}x - \int_{e^{-1}}^{1} \ln x\mathrm{d}x$ .... (2 分)

$= (x\ln x - x)|_1^e - (x\ln x - x)|_{e^{-1}}^1$ .... (5 分)

$= 2 - 2e^{-1}$ .... (6 分)

五、综合分析题 (每小题 10 分，共 20 分)

1. 当 $x > 1$ 时， $f'(x) = a$; 当 $x < 1$ 时， $f'(x) = 2x$. …………………… (2 分)

$f'_+(1) = a$, 且 $f'_-(1) = 2$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，故 $a = 2$ ………………… (5 分)

此外，因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，所以 $1 = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a + b$,

故 $b = -1$. ………………………………………………………… (8 分)

进一步 $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ ……………………………………… (10 分)

2. 平面区域 D 的面积为

$S = \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2$. …………………………………………… (4 分)

设绕 x 轴旋转所得的体积为 V_x, 取积分变量为 x, $x \in [1, 2]$,

$V_x = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$. …………………………………………… (10 分)

六、证明题（ 每小题 6 分，共 12 分 ）

1. 设 $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. ……………………………………… (2 分)

$f(0) = 1, f(-2) = -\frac{1}{3} < 0$. 显然 $f(x)$ 连续，故由零点存在定理可知,

$\exists \xi \in (-2, 0)$, s.t. $f(\xi) = 0$. ………………………………………… (4 分)

另一方面， $f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上严格单调递增.

故 $f(x)$ 有且仅有一个实根. ……………………………………… (6 分)

2. 设 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x \in [a, b]$. …………………… (2 分)

显然 $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x) \ne 0, x \in [a, b]$, 且

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$ ……………………………………………… (4 分)

由 Cauchy 中值定理可知，存在 $\xi \in (a, b)$, s.t.

$\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \dfrac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$ ……………………………… (6 分)