一、简答题

1. 束缚态、非束缚态及相应能级的特点。

答：束缚态：粒子在一定范围内运动，$r\to\infty$时，$\psi\to 0$。能级分立。

非束缚态：粒子的运动范围没有限制，$r\to\infty$时，ψ不趋于 0。能级分立。

2. 简并、简并度。

答：量子力学中，把处于不同状态、具有相同能量、对应同一能级的现象称为简并。把对应于同一能级的不同状态数称为简并度。

3. 用球坐标表示，粒子波函数表为 $\psi(r,\theta,\varphi)$ ，写出粒子在立体角$d\Omega$中被测到的几率。

解：$P=d\Omega\int_0^\infty|\psi(r,\theta,\varphi)|^2r^2dr$

4. 用球坐标表示，粒子波函数表为 $\psi(r,\theta,\varphi)$ ，写出粒子在球壳$(r,r+dr)$中被测到的几率。

解：$P=r^2dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}|\psi(r,\theta,\varphi)|^2d\varphi$

5. 用球坐标表示，粒子波函数表为$\psi(r,\theta,\varphi)$。写出粒子在(θ,φ)方向的立体角$d\Omega$中且半径在$0<r<a$范围内被测到的几率。

解：$P=d\Omega\int_0^a|\psi(r,\theta,\varphi)|^2r^2dr$

6. 一粒子的波函数为$\psi(\vec r)=\psi(x,y,z)$，写出粒子位于$x\sim x+dx$间的几率。

解：$P=dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz|\psi(x,y,z)|^2$

7. 写出一维谐振子的归一化波函数和能级表达式。

解：$\psi_n(x)=A_ne^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x)$，$A_n=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n\cdot n!}}$

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\quad n=0,1,2,\cdots$$

8. 写出三维无限深势阱

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0, 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c\\ \infty, \text{其余区域}\end{cases}$$

中粒子的能级和波函数。

解：能量本征值和本征波函数为

$$E_{n_x n_y n_z}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{8}{abc}}\sin\dfrac{n_x\pi x}{a}\sin\dfrac{n_y\pi y}{b}\sin\dfrac{n_z\pi z}{c}, & 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c\\ 0, & \text{其余区域}\end{cases}$$

$$n=1,2,3,\cdots\cdots$$

9. 粒子在一维 δ 势阱 $\qquad V(x)=-\gamma\delta(x) \qquad (\gamma>0)$

中运动，波函数为 $\psi(x)$，写出 $\psi'(x)$ 的跃变条件。

解：
$$\psi'(0^+)-\psi'(0^-)=-\frac{2m\gamma}{\hbar^2}\psi(0)$$

10. 何谓几率流密度？写出几率流密度 $\vec{j}$（$\vec{r}$, t）的表达式。

解：单位时间内通过与粒子前进方向垂直的单位面积的几率称为几率流密度。

$$j(\vec{r},t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)$$

11. 写出在 σ_z 表象中的泡利矩阵。

解：$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

12. 电子自旋假设的两个要点。

解：（1）电子具有自旋角动量 $\vec{s}$，它在空间任意方向的投影只有两个取值：$\pm\hbar/2$；

（2）电子具有自旋磁矩 $\vec{M}$，它的回转磁比值为轨道回转磁比值的 2 倍，即

$$|g_s|=\left|\frac{\text{内禀磁矩}}{\text{自旋}}\right|=\frac{e}{mc}=2\left(\text{取}\frac{e}{2mc}\text{为单位}\right)$$

$$|g_l|=\left|\frac{\text{轨道磁矩}}{\text{轨道角动量}}\right|=\frac{e}{2mc}=1$$

13. 量子力学中，一个力学量 Q 守恒的条件是什么？用式子表示。

解：有两个条件：$\dfrac{\partial Q}{\partial t}=0$，$\quad [Q,H]=0$。

14.（L^2 , L_z）的共同本征函数是什么？相应的本征值又分别是什么？

解：$\left(L^2, L_z\right)$的共同本征函数是球谐函数$Y_{lm}(\theta,\varphi)$。

$$L^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)=l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta,\varphi)\,, \qquad L_z Y_{lm}(\theta,\varphi)=m\hbar Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

15. 写出电子自旋s_z的二本征态和本征值。

解：$s_z=\frac{\hbar}{2}$，$\alpha=\chi_{1/2}(s_z)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$；$s_z=-\frac{\hbar}{2}$，$\beta=\chi_{-1/2}(s_z)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$。

16. 解：

$$\left[x, p_y\right]=0 \qquad \left[z, p_z\right]=i\hbar \qquad \left[L_x, L_z\right]=-i\hbar L_y \qquad \left[y, L_z\right]=i\hbar x$$

$$\left[L^2, L_z\right]=0 \qquad \left[\sigma_y, \sigma_x\right]=-2i\sigma_z \qquad \left[L_y, p_z\right]=i\hbar p_x$$

17. 完全描述电子运动的旋量波函数为 $\psi(\vec r, s_z)=\begin{pmatrix}\psi(\vec r, \hbar/2)\\ \psi(\vec r, -\hbar/2)\end{pmatrix}$，准确叙述 $|\psi(\vec r,\hbar/2)|^2$ 及 $\int d^3r\,|\psi(\vec r,-\hbar/2)|^2$ 分别表示什么样的物理意义。

解：$|\psi(\vec r,\hbar/2)|^2$ 表示电子自旋向上（$s_z=\hbar/2$）、位置在$\vec r$处的几率密度；

$\int d^3r\,|\psi(\vec r,-\hbar/2)|^2$ 表示电子自旋向下（$s_z=-\hbar/2$）的几率。

18. 二电子体系中，总自旋 $\vec S=\vec s_1+\vec s_2$，写出（S^2, S_z）的归一化本征态（即自旋单态与三重态）。

解：（S^2, S_z）的归一化本征态记为χ_{SM_S}，则

自旋单态为
$$\chi_{00}=\frac{1}{\sqrt2}\left[\alpha(1)\beta(2)-\beta(1)\alpha(2)\right]$$

自旋三重态为
$$\begin{cases}\chi_{11}=\alpha(1)\alpha(2)\\ \chi_{10}=\frac{1}{\sqrt2}\left[\alpha(1)\beta(2)+\beta(1)\alpha(2)\right]\\ \chi_{1-1}=\beta(1)\beta(2)\end{cases}$$

19. 何谓正常塞曼效应？何谓反常塞曼效应？何谓斯塔克效应？

解：在强磁场中，原子发出的每条光谱线都分裂为三条的现象称为正常塞曼效应。在弱磁场中，原子发出的每条光谱线都分裂为$(2j+1)$条（偶数）的现象称为反常塞曼效应。原子置于外电场中，它发出的光谱线会发生分裂的现象称为斯塔克效应。

20. 给出一维谐振子升、降算符a^+、a的对易关系式；粒子数算符N与a^+、a的关系；哈密顿量H用N

或a^+、a表示的式子；N（亦即H）的归一化本征态。

解：

$$[a,a^+]=1,\qquad N=a^+a,\qquad H=\left(a^+a+\frac{1}{2}\right)=\left(N+\frac{1}{2}\right)$$

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$$

21. 二粒子体系，仅限于角动量涉及的自由度，有哪两种表象？它们的力学量完全集分别是什么？两种表象中各力学量共同的本征态及对应的本征值又是什么？

22. 使用定态微扰论时，对哈密顿量H有什么样的要求？

23. 写出非简并态微扰论的波函数（一级近似）和能量（二级近似）计算公式。

24. 何谓光的吸收？何谓光的受激辐射？何谓光的自发辐射？

25. 给出光学定理的表达式。光学定理的意义何在？

26. 散射问题中，高能粒子散射和低能粒子散射分别宜采用什么方法处理？

解：高能粒子散射宜采用玻恩近似方法处理；低能粒子散射宜采用分波法处理。

27. 对于阶梯形方势场

$$V(x)=\begin{cases}V_1, & x<a\\ V_2, & x>a\end{cases},$$

如果（V_2-V_1）有限，则定态波函数$\psi(x)$连续否？其一阶导数 $\psi'(x)$连续否？

解：定态波函数$\psi(x)$连；其一阶导数 $\psi'(x)$也连续。

28. 量子力学中，体系的任意态$\psi(x)$可用一组力学量完全集的共同本征态$\psi_n(x)$展开：

$$\psi(x)=\sum_n c_n\psi_n(x),$$

写出展开式系数c_n的表达式。

解：$$c_n=\left(\psi_n(x),\psi(x)\right)=\int\psi_n^*(x)\psi(x)dx\text{。}$$

29. 一个电子运动的旋量波函数为 $\psi(\vec r,s_z)=\begin{pmatrix}\psi(\vec r,\hbar/2)\\ \psi(\vec r,-\hbar/2)\end{pmatrix}$，写出表示电子自旋向上、位置在$\vec r$处的几率密度表达式，以及表示电子自旋向下的几率的表达式。

解：$|\psi(\vec r,\ \hbar/2)|^2$ 表示电子自旋向上（$s_z=\hbar/2$）、位置在$\vec r$处的几率密度；

$\int d^3r\,|\psi(\vec r,\ -\hbar/2)|^2$表示电子自旋向下（$s_z=-\hbar/2$）的几率。

30. 相互不对易的力学量是否一定没有共同的本征态？试举例加以说明。

解：相互不对易的力学量可以有共同的本征态。例如：L_x, L_y, L_z 相互不对易，但 $\psi = Y_{00}(\theta,\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$ 就是它们的共同本征态，本征值皆为 0。

二、计算证明题

1. 计算下列对易式：

$$(1)\ \left[x,\ \frac{d}{dx}\right] = ? \qquad (2)\ \left[\frac{d}{dx},\ x^2\right] = ?$$

解：(1) -1　　(2) $2x$。

2. 一维运动中，哈密顿量 $H = \dfrac{p^2}{2m} + V(x)$，求 $[x, H] = ?$　$[p, H] = ?$

解：　$[x, H] = \dfrac{\hbar^2}{m}\dfrac{d}{dx}$，　　$[p, H] = -i\hbar \dfrac{d}{dx} V(x)$。

3. 计算：$[\hat{p}_x, f(x)] = ?$　　$[\hat{p}_x^2, f(x)] = ?$

解：　$[\hat{p}_x, f(x)] = -i\hbar \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$，　$[\hat{p}_x^2, f(x)] = -\hbar^2 \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - 2i\hbar \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} p_x$。

4. 质量为 m 的粒子处于能量为 E 的本征态，波函数为 $\psi(x) = Axe^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$，问粒子在什么样的位势中运动？

解：　$V(x) = E + \dfrac{\hbar^2}{2m} \cdot \dfrac{\psi''(x)}{\psi(x)} = E + \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\alpha^4 x^2 - 3\alpha^2\right)$

5. 一电子局限在 10^{-14} 米的区域中运动。已知电子质量 $m = 9.11\times10^{-31}$ 千克，试计算该电子的基态能量（提示：可按长、宽、高均为 10^{-14} 米的三维无限深势阱计算）。

解：　$E_{111} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m} \cdot \dfrac{3}{a^2} = 1.8\times10^{-8} J$。

6. 设粒子处于一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x < 0 \quad 或 \quad x > a \end{cases}$$

中，求处于定态 $\psi_n(x)$ 中的粒子位置 x 的平均值。

解：　　$\bar{x}=\dfrac{a}{2}$　。

7. 一个谐振子处于基态：$\psi(x,t)=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi^{1/2}}}e^{-\alpha^2x^2/2-i\omega t}$，求势能 $V=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ 的平均值及动能 $T=p^2/2m$ 的平均值。$\left[\text{积分公式:}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\right]$

解：　　$\bar{V}=\dfrac{1}{4}\hbar\omega$，　$\bar{T}=\dfrac{1}{4}\hbar\omega$　。

8. 质量为 m 的粒子处于长为 l 的一维盒子中，

$$V=\begin{cases}\infty, & x<0,\quad x>l\\ 0, & 0<x<l\end{cases}$$

在 $t=0$ 时，粒子波函数为

$$\psi=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{30}{l^5}}x(l-x), & 0<x<l\\ 0, & x<0,\ x>l\end{cases}$$

求 $\psi(t)$ 的级数表达式和级数系数表示式。

解：　　$a_k=\dfrac{8\sqrt{15}}{(2k+1)^3\pi^3}$　　$k=0,1,2,\cdots$

$$\psi(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}8\sqrt{\frac{30}{l}}\cdot\frac{1}{(2k+1)^3\pi^3}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x\cdot e^{-i(2k+1)^2\pi^2\hbar t/2ml^2}$$

9. 考虑如下一维波函数

$$\psi(x)=A\left(\frac{x}{x_0}\right)^n e^{-x/x_0}$$

其中 A、n、x_0 为已知常数。

（a）利用 S. eq 求位势 $V(x)$ 和能量 E。对于它们，该波函数为一本征函数（已知当 $x\to\infty$，$V(x)\to 0$）；

（b）该势与轨道角动量为 l 的氢原子态的径向势有何异同？

解：（a）　$E=-\dfrac{\hbar^2}{2mx_0^2}$　　　$V(x)=\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[\dfrac{n(n-1)}{x^2}-\dfrac{2n}{x_0x}\right]$

（b）氢原子有效径向势为

$$V(r)=-\frac{e^2}{r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}, \qquad V(x)=-\frac{n\hbar^2/mx_0}{x}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n(n-1)}{x^2}$$

10. 一个质量为 m 的粒子在势 $V(x)$ 作用下作一维运动。假定它处在 $E=\dfrac{\hbar^2\alpha^2}{2m}$ 的能量本征态

$$\psi(x)=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\gamma^2x^2/2},$$

（a）求粒子的平均位置；　（b）求粒子的平均动量；

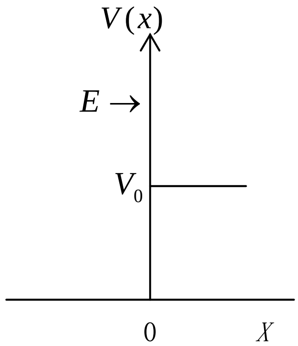
（c）求 $V(x)$；　（d）求粒子的动量在 $p\to p+dp$ 间的几率。

解：（a）$\langle x\rangle=0$　（b）$\langle p\rangle=0$　（c）$V(x)=\hbar^2\alpha^4x^2/2m$

（d）粒子的动量在 $p\to p+dp$ 间的几率为

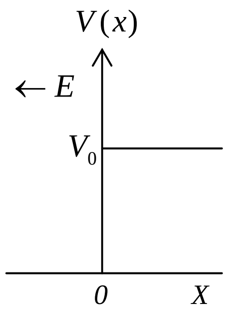
$$P(p)dp=|\varphi(p)|^2\,dp=\left(\frac{1}{\hbar^2\alpha^2\pi}\right)^{1/2} e^{-p^2/\hbar^2\alpha^2}dp$$

11. 一质量为 m 的粒子沿 x 正方向以能量 E 向 $x=0$ 处的势阶运动。当 $x\le 0$ 时，该势为 0；当 $x>0$ 时，该势为 $\dfrac{3}{4}E$。问在 $x=0$ 处粒子被反射的的几率多大？



解：反射系数　$R=|r|^2=\dfrac{1}{9}$。

12. 若粒子从右边入射，求如图所示一维阶梯势的反射和透射系数。



解：

反射系数

$$R=|r|^2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=\frac{(k_1-k_2)^2(k_1+k_2)^2}{(k_1+k_2)^4}=\frac{(k_1^2-k_2^2)^2}{(k_1+k_2)^4}=\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4}$$

透射系数　$$T=1-R=1-\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4}$$

13. 设力学量A不显含时间t，证明在束缚定态下，$\frac{d\overline{A}}{dt}=0$。

14. 已知厄米算符A、B互相反对易：$\{A,B\}=AB+BA=0$；$|b\rangle$是算符B的本征态：$B|b\rangle=b|b\rangle$，本征值$b\neq 0$。求在态$|b\rangle$中，算符A的平均值。

解：$\overline{A}=\langle b|A|b\rangle=0$。

15. $|n\rangle$为L_z的本征态，本征值为$n\hbar$。求在L_z的本征态$|n\rangle$下，L_x和L_y的平均值。

解：$\overline{L}_x=\overline{L}_y=0$。

16. 证明：厄密算符的属于不同本征值的本征函数彼此正交。

17. 在直角坐标系中，证明：$[\vec{L},\vec{p}^2]=0$，其中$\vec{L}$为角动量算符，$\vec{p}$为动量算符。

18. 定义径向动量算符 $p_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\vec{r}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{r}\frac{1}{r}\right)$，证明：

① p_r是厄密算符。

② p_r还可表为 $p_r=-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)$，就此证明$[r,p_r]=i\hbar$。

19. 在一维势箱问题求解中，假定在箱内$V(x)=C\neq 0$（C为常数），是否对其解产生影响？怎样影响？

解：$$E_n'=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\quad \psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

即$V(x)=C\neq 0$不影响波函数，能级整体改变C：

$$E_n=E_n'+C=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}+C$$

20. 一质量为m的粒子在一维势箱$0<x<a$中运动，其量子态为

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{3\pi x}{a}\right)$$

① 该量子态是否为能量算符H的本征态？

② 对该系统进行能量测量，其可能的结果及其所对应的概率为何？

③ 处于该量子态粒子能量的平均值为多少？

解：①
$$\psi(x)=\frac{1}{2}\psi_1(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3(x)$$

即粒子处在$\psi_1(x)$和$\psi_3(x)$的叠加态，该量子态不是能量算符H的本征态。

② 能量测量的可能值为

$$E_1=\frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2},\quad E_3=\frac{9\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

其出现的概率分别为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

③ 能量测量的平均值为 $\overline{E}\frac{7\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$

21. 对于氢原子基态，求电子处于经典禁区的几率（已知氢原子能级 $E_n=-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}=-\frac{e^2}{2a}\cdot\frac{1}{n^2}$，基态波函数 $\psi_{100}=\left(\frac{1}{\pi a^3}\right)^{1/2}e^{-r/a}$，$a=\hbar^2/\mu e^2$ 为 Bohr 半径，势能 $V=-\frac{e^2}{r}$）。

解： $P=13e^{-4}=0.2381$。

22. 氢原子处于基态：$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$，求：

（1）势能 $-e^2/r$ 的平均值；

（2）最可几半径。

解：（1） $\langle V\rangle=-\frac{e^2}{a}$

（2）最可几半径为 $r=a$。

23. 在 $t=0$ 时刻，氢原子处于状态

$$\Psi(\bar{r},0)=C\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\psi_1(\bar{r})+\sqrt{\frac{1}{3}}\psi_2(\bar{r})+\sqrt{\frac{1}{2}}\psi_3(\bar{r})\right]$$

式中，$\psi_n(\bar{r})$ 为氢原子的第 n 个能量本征态。计算 $t=0$ 时能量取各值的概率与平均值，写出 $t>0$ 时的波函数。

解： 能量取各值的概率为

$$W(E_1)=W(E_3)=\frac{3}{8};\qquad W(E_2)=\frac{1}{4}$$

能量平均值为 $$\overline{E}=\frac{23}{48}\left(-\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\right)=\frac{23}{48}E_1=\frac{23}{48}(-13.6\,\text{eV})=-6.52\,\text{eV}$$

当$t>0$时，波函数为

$$\Psi(\vec r,t)=\sqrt{\frac{3}{8}}\psi_1(\vec r)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_1t\right)+\frac{1}{2}\psi_2(\vec r)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_2t\right)+\sqrt{\frac{3}{8}}\psi_3(\vec r)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_3t\right)$$

24. $|m\rangle$ 和 $|n\rangle$ 为L_z的二本征态，本征值分别为$m\hbar$ 和 $n\hbar$。证明：

（1）矩阵元$(L_y)_{mn}$和 $(L_x)_{mn}$ 之间的关系为

$$i(L_y)_{mn}=(m-n)(L_x)_{mn}$$

（2）在L_z 的任何本征态（比如$|n\rangle$）下，恒有 $\overline{L_x}=\overline{L_y}=0$。

25. 在半径为a的硬钢球内，有一质量为m的粒子处于基态。现突然将这硬钢球扩展到原来半径的两倍，求扩展后系统中粒子处在基态的几率是多少？

公式 $$\sin\alpha\,\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(a+\beta)]$$

解： $P=\dfrac{32}{9\pi^2}$

26. 一电子处于$\psi_{32m}=R_{32}(r)\,Y_{2m}(\theta,\varphi)$态，测力学量$L^2$，测值如何？ 测力学量$L_z$，可能得哪些测值？写出$L_z$在其自身表象中的矩阵表示。

解：测力学量L^2，测值为$6\hbar^2$。

测力学量L_z，测值可能为$2\hbar,\hbar,0,-\hbar,-2\hbar$ 。

在L_z表象中，L_z自身的矩阵形式是对角矩阵，对角元为L_z的本征植：

$$L_z=\hbar\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

27. 在σ_z表象中，求σ_y的本征态。

解：在σ_z表象中，σ_y的两个本征态为

$$\lambda=1,\quad \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix};\qquad \lambda=-1,\quad \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}。$$

28. 已知$\vec L$、$\vec s$分别为电子的轨道角动量和自旋角动量，$\vec J=\vec L+\vec s$为电子的总角动量。$(\vec L^2,\ \vec J^2,J_z)$的

共同本征态为 $\phi_{l j m_j}$。证明 $\phi_{l j m_j}$ 是 $\vec{s}\cdot\vec{L}$ 的本征态，并就 $j=l+1/2$ 和 $j=l-1/2$ 两种情况分别求出其相应的本征值。

解：$$\vec{s}\cdot\vec{L}\phi_{l j m_j}=\begin{cases}\dfrac{\hbar^2}{2}l\phi_{l j m_j}, & j=l+1/2\\ -\dfrac{\hbar^2}{2}(l+1)\phi_{l j m_j}, & j=l-1/2\,(l\neq 0)\end{cases}$$

29. 氢原子的波函数（$t=0$ 时刻）为

$$\psi(\vec{r},0)=\frac{1}{2}\psi_{100}(\vec{r})+\frac{1}{3}\psi_{210}(\vec{r})+\frac{\sqrt{3}}{3}\psi_{211}(\vec{r})$$

求 t 时刻的平均能量，t 时刻氢原子具有能量 E_2 的几率，以及氢原子相应角动量在 Z 方向投影为零的几率。其中 $\psi_{nlm}(\vec{r})$ 为定态空间波函数。

解：t 时刻波函数为

$$\psi(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\psi_{100}(\vec{r})e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{3}\psi_{210}(\vec{r})e^{-iE_2t/\hbar}+\frac{\sqrt{3}}{3}\psi_{211}(\vec{r})e^{-iE_2t/\hbar}$$

t 时刻的能量平均值

$$\bar{E}=\frac{13E_1}{25}=-7.07(eV)$$

t 时刻氢原子处于能量为 E_2 状态中的几率为

$$P(E_2)=\frac{16}{25}=64\%$$

t 时刻角动量 Z 方向投影为零的几率为

$$P(L_z=0)=52\%$$

30. 一维运动粒子的状态是

$$\psi(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求：

(1) 归一化常数 A；

(2) 粒子动量的几率分布；

(3) 粒子动量平均值。

解: (1) $A=2\lambda^{3/2}$。

(2) 粒子动量的几率分布

$$w(p)=|\varphi(p)|^2=\frac{2\lambda^3\hbar^3}{\pi(\lambda^2\hbar^2+p^2)^2}。$$

(3) $\overline{p}=0$。

31. 粒子自旋处于 $s_z=\hbar/2$ 的本征态 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，试求 s_x 和 s_y 的测不准关系

$$\sqrt{\overline{(\Delta s_x)^2}\cdot\overline{(\Delta s_y)^2}}=\ ?$$

解: $\sqrt{\overline{(\Delta s_x)^2}\cdot\overline{(\Delta s_y)^2}}=\hbar^2/4$。

32. 氢原子处于状态 $\psi(\vec{r},s_z)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}R_{21}Y_{11}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}Y_{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}$,

(1) 求轨道角动量的 z 分量 L_z 的平均值;

(2) 求自旋角动量的 z 分量 s_z 的平均值;

(3) 求总磁矩 $\vec{M}=-\frac{e}{2\mu}\vec{L}-\frac{e}{\mu}\vec{s}$ 的 z 分量 M_z 的平均值。

解:（1）$\overline{L_z}=\frac{1}{4}\hbar$ 。

（2）$\overline{s_z}=-\frac{1}{4}\hbar$。

（3）$\overline{M_z}=\frac{e\hbar}{8\mu}=\frac{1}{4}M_B$。

33. 氢原子处于状态 $\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\varphi)+\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{1-1}(\theta,\varphi)$。试求:

（1）能量算符 H 、角动量平方算符 L^2 和角动量 z 分量 L_z 的可能取值;

（2）上述三个量取各可能值的几率;

（3）上述三个量的平均值。

解：H 只可能取值 $E_2=-\dfrac{\mu e^4}{2\hbar^2\cdot 2^2}=-\dfrac{\mu e^4}{8\hbar^2}$，出现的几率为 1，平均值 $\overline{H}=E_2=-\dfrac{\mu e^4}{8\hbar^2}$；

L^2 只可能取值 $l(l+1)\hbar^2=2\hbar^2$，出现的几率为 1，平均值 $\overline{L^2}=2\hbar^2$；

L_z 的可能取值有两个：0、$-\hbar$，出现 0 的几率为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，出现 $-\hbar$ 的几率为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$，平均值 $\overline{L_z}=0\times\dfrac{1}{4}+(-\hbar)\times\dfrac{3}{4}=-\dfrac{3}{4}\hbar$。

34. 两个自旋 1/2，质量为 m 的无相互作用的全同费米子同处线性谐振子场中，写出基态和第一激发态的能量本征值和本征函数，指出简并度。

解：① 基态：$E_0=E_0(1)+E_0(2)=\hbar\omega$，

$$\Phi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(1)\psi_0(2)\left[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)\right]，\text{不简并。}$$

② 第一激发态：$E_1=2\hbar\omega$，

$$\Phi_1=\begin{cases}\Psi_A\chi_S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(1)\psi_1(2)-\psi_0(2)\psi_1(1)\right]\begin{cases}\alpha(1)\alpha(2)\\ \beta(1)\beta(2)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha(1)\beta(2)+\alpha(2)\beta(1)\right]\end{cases}\\ \Psi_S\chi_A=\dfrac{1}{2}\left[\psi_0(1)\psi_1(2)+\psi_0(2)\psi_1(1)\right]\cdot\left[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)\right]\end{cases},$$

是四重简并的。

35. 一维无限深势阱（$0<x<a$）中的粒子，受到微扰 H' 用，

$$H'(x)=\begin{cases}2\lambda x/a, & 0<x<a/2\\ 2\lambda(1-x/a), & a/2<x<a\end{cases}$$

求基态能量的一级修正。

解：$E_1=E_1^{(0)}+E_1^{(1)}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi^2}\right)\lambda$。

36. 证明 pauli 矩阵满足

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z=i。$$

37. $\vec{s}$、$\vec{L}$ 分别为电子的自旋和轨道角动量，$\vec{J}=\vec{s}+\vec{L}$ 为电子的总角动量。证明：[$\vec{J}$, $\vec{s}\cdot\vec{L}$]=0；

$[J^2, J_\alpha]=0$，$\alpha = x, y, z$。

38. 证明：$[L^2, L_\alpha]=0$，　$[s^2, s_\alpha]=0$，　$[J^2, \vec{s}\cdot\vec{L}]=0$，其中$\alpha = x$、$y$、$z$，　$\vec{J}=\vec{s}+\vec{L}$。

39. 已知$\vec{L}$、$\vec{s}$分别为电子的轨道角动量和自旋角动量，$\vec{J}=\vec{L}+\vec{s}$为电子的总角动量。$(\vec{L}^2, \vec{J}^2, J_z)$的共同本征态为$\phi_{ljm_j}$。证明$\phi_{ljm_j}$是$\vec{s}\cdot\vec{L}$的本征态，并就$j=l+1/2$和$j=l-1/2$两种情况分别求出其相应的本征值。

解：

$$\vec{s}\cdot\vec{L}\phi_{ljm_j} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - 3\hbar^2/4\right)\phi_{ljm_j} = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]\phi_{ljm_j}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\hbar^2}{2} l\phi_{ljm_j}\,, & j = l + 1/2 \\ -\dfrac{\hbar^2}{2}(l+1)\phi_{ljm_j}\,, & j = l - 1/2\,(l \neq 0) \end{cases}$$

40. $\vec{s}$、$\vec{L}$分别为电子的自旋和轨道角动量，$\vec{J}=\vec{s}+\vec{L}$为电子的总角动量。证明：

$[\vec{J}, \vec{s}\cdot\vec{L}]=0$；　　$[J^2, J_\alpha]=0$，$\alpha = x, y, z$。

41. 已知电子的自旋角动量、轨道角动量和总角动量分别为$\vec{s}$、$\vec{L}$和$\vec{J}$，$\vec{J}=\vec{s}+\vec{L}$，(L^2, J^2, J_z)的共同本征态为$|ljm_j\rangle$。利用$[J_z, s_z]=0$证明：

$$\langle ljm_j'|s_z|ljm_j\rangle = \delta_{m_j' m_j}\langle ljm_j|s_z|ljm_j\rangle$$

42. 粒子在二维无限深方势阱$V(x,y)$中运动，

$$V(x,y) = \begin{cases} 0\,, & 0<x<\pi, 0<y<\pi \\ \infty\,, & \text{其它区域} \end{cases},$$

（1）试直接写出（不必求解）基态和第一激发态的能级和能量本征函数；

（2）加上微扰　　$H' = \lambda \cos x \cos y$　，

求第一激发态能量至λ级、基态能量至λ^2级。

解：（1）$\lambda = 0$，无微扰，有

$$\left.\begin{aligned} E_{n_x n_y} &= \frac{\hbar^2}{2m}\left(n_x^2 + n_y^2\right) \\ \psi_{n_x n_y} &= \frac{2}{\pi}\sin n_x x \sin n_y y \end{aligned}\right\}\ 0 \le x, y \le \pi\,,\ n_x, n_y = 1, 2, \cdots$$

基态，$$E_{11}^{(0)}=\frac{\hbar^2}{m}$$

$$\psi_{11}^{(0)}=\frac{2}{\pi}\sin x\sin y$$

第一激发态，$$E_{12}^{(0)}=\frac{5\hbar^2}{2m}$$

$$\begin{cases}\psi_{12}^{(0)}=\dfrac{2}{\pi}\sin x\sin 2y\\ \psi_{21}^{(0)}=\dfrac{2}{\pi}\sin 2x\sin y\end{cases}$$

（2）λ 很小，取微扰 $H'=\lambda\cos x\cos y$ ，

基态，无简并，$E_{11}=E_{11}^{(0)}+E_{11}^{(1)}+E_{11}^{(2)}=\dfrac{\hbar^2}{m}-\dfrac{m\lambda^2}{48\hbar^2}$。

第一激发态，二重简并，$E_{12}^{(1)}=\pm\dfrac{\lambda}{4}$ ，　　$E_{12}=E_{12}^{(0)}+E_{12}^{(1)}=\dfrac{5\hbar^2}{2m}\pm\dfrac{\lambda}{4}$ 。

43. 在时间 $t=0$ 时，一个线性谐振子处于用下列归一化的波函数所描写的状态：

$$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{5}}u_0(x)+\sqrt{\frac{1}{2}}u_2(x)+c_3u_3(x),$$

式中 $u_n(x)$ 是振子的第 n 个本征函数。

（1）试求 c_3 的数值；

（2）写出在 t 时刻的波函数；

（3）在 $t=0$ 时振子能量的平均值是多少？$t=1$ 秒时呢？

解：（1）$c_3=\sqrt{\dfrac{3}{10}}$。

（2）$\psi(x,t)=\sqrt{\dfrac{1}{5}}u_0(x)e^{-i\frac{1}{2}\omega t}+\sqrt{\dfrac{1}{2}}u_2(x)e^{-i\frac{5}{2}\omega t}+\sqrt{\dfrac{3}{10}}u_3(x)e^{-i\frac{7}{2}\omega t}$。

（3）在 $t=0$ 时振子能量的平均值是 $\overline{E}=\dfrac{12}{5}\hbar\omega$；

$t=1$ 秒时振子能量的平均值也是 $\dfrac{12}{5}\hbar\omega$。

44. 质量为 μ 的粒子受微扰后，在一维势场

$$V(x)=\begin{cases} A\cos\dfrac{\pi x}{a}, & 0\le x\le a \\ \infty, & x<0,\ x>a \end{cases}$$

中运动。

（1）题中应当把什么看作微扰势？

（2）写出未受微扰时的能级和波函数；

（3）用微扰论计算基态能量到二级近似，其中 $A=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{10\mu a^2}$ 。

提示：$\int_0^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx dx=\dfrac{\pi}{2}\delta_{nm}$ 。

解：（1）应在一维无限深势阱

$$V(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le a \\ \infty, & x<0,\ x>a \end{cases}$$

的基础上，把

$$H'=\begin{cases} A\cos\dfrac{\pi x}{a}, & 0\le x\le a \\ 0, & x<0,\ x>a \end{cases}$$

看作微扰势。

（2）未受微扰时的波函数和能级分别为

$$\psi_n^{(0)}(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a},\qquad E_n^{(0)}=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2},\qquad n=1,2,3,\cdots$$

（3）$E_1=E_1^{(0)}+E_1^{(1)}+E_1^{(2)}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}-\dfrac{\pi^2\hbar^2}{600\mu a^2}=\dfrac{299\pi^2\hbar^2}{600\mu a^2}$ 。

45. 粒子在一维势场

$$V(x)=\begin{cases} \infty, & x<0,\ x>a \\ \lambda\delta\left(x-\dfrac{a}{2}\right), & 0\le x\le a \end{cases}$$

中运动，λ 甚小，试求基态能量准确到 λ^2 的修正值以及 λ 应满足的条件。

解：$E_1=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}+\dfrac{2\lambda}{a}-\dfrac{2\mu\lambda^2}{\pi^2\hbar^2}$ ，　$\lambda<<\pi^2\hbar^2/\mu a$

46. 质量为 m 的粒子在二维无限深势阱中运动，（$0 \le x\,,\,y \le \pi$）。阱内有一势

$$V(x\,,\,y) = \lambda \cos x \cos y$$

（a）写出 $\lambda = 0$ 时能量最低的四个本征值和相应的本征函数；

（b）λ 很小，求第一激发态能量至 λ 级、基态能量至 λ^2 级。

解：（a）$\lambda = 0$，能量最低的四个态为：

基态，
$$E_{11}^{(0)} = \frac{\hbar^2}{m}$$

$$\psi_{11}^{(0)} = \frac{2}{\pi}\sin x \sin y$$

第一激发态，
$$E_{12}^{(0)} = \frac{5\hbar^2}{2m}$$

$$\begin{cases} \psi_{12}^{(0)} = \dfrac{2}{\pi}\sin x \sin 2y \\ \psi_{21}^{(0)} = \dfrac{2}{\pi}\sin 2x \sin y \end{cases}$$

第二激发态，
$$E_{22}^{(0)} = \frac{4\hbar^2}{m}$$

$$\psi_{22}^{(0)} = \frac{2}{\pi}\sin 2x \sin 2y$$

第三激发态，
$$E_{13}^{(0)} = \frac{5\hbar^2}{m}$$

$$\begin{cases} \psi_{13}^{(0)} = \dfrac{2}{\pi}\sin x \sin 3y \\ \psi_{31}^{(0)} = \dfrac{2}{\pi}\sin 3x \sin y \end{cases}$$

（b）$E_{11} = E_{11}^{(0)} + E_{11}^{(1)} + E_{11}^{(2)} = \dfrac{\hbar^2}{m} - \dfrac{m\lambda^2}{48\hbar^2}$

第一激发态，二重简并，$E_{12} = E_{12}^{(0)} + E_{12}^{(1)} = \dfrac{5\hbar^2}{2m} \pm \dfrac{\lambda}{4}$

47.（a）粒子在二维无限深方势阱中运动，

$$V=\begin{cases}0\,, & 0<x<a,0<y<a \\ \infty\,, & \text{其它区域}\end{cases} \qquad (1)$$

试写出能级和能量本征函数（能量最低的两个态）;

（b）加上微扰 $H'=\lambda xy$ （2）

求最低的两个能级的一级微扰修正。

解：（a）能级和能量本征函数为

$$E_{n_1n_2}^{(0)}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_1^2+n_2^2\right),\qquad n_1,n_2=1,2,3,\cdots \qquad (3)$$

$$\psi_{n_1n_2}^{(0)}=\frac{2}{a}\sin\frac{n_1\pi x}{a}\sin\frac{n_2\pi y}{a},\ (\text{阱内},\text{下同}) \qquad (4)$$

基态是非简并的，能级 $E_{11}^{(0)}$，本征函数为

$$\psi_{11}^{(0)}=\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} \qquad (5)$$

第一激发态是二重简并的，能级 $E_{12}^{(0)}$，本征函数为

$$\begin{aligned}\psi_{12}^{(0)}&=\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}=\psi_\alpha \\ \psi_{21}^{(0)}&=\frac{2}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}=\psi_\beta\end{aligned} \qquad (6)$$

（b）基态能级的一级修正等于 H' 的平均值，即 $E_{11}^{(1)}=\frac{\lambda}{4}a^2$ （7）

第一激发态 $E_{12}^{(1)}=\frac{\lambda}{4}a^2\left(1\pm\frac{1024}{81\pi^4}\right)=\frac{\lambda}{4}a^2(1\pm0.13)=\lambda a^2\times\begin{cases}0.2825\\0.2175\end{cases}$ （8）

结论：在微扰作用下，基态能级升高 $\lambda a^2/4$，第一激发能级的重心也升高 $\lambda a^2/4$，同时分裂为二，裂距为 0.065$\left(\lambda a^2\right)$。

48. 考虑在无限深势阱（$0<x<a$）中运动的两电子体系，略去电子间的相互作用以及一切与自旋有关的相互作用，求体系的基态和第一激发态的波函数和能量。

解：

（1）基态： $E_{11}=\pi^2\hbar^2/\mu a^2$

总波函数 $\Phi=\psi_{11}\chi_{00}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\phi_1(1)\alpha(1) & \phi_1(2)\alpha(2)\\ \phi_1(1)\beta(1) & \phi_1(2)\beta(2)\end{vmatrix}$

（2）第一激发态： $E_{12}=5\pi^2\hbar^2/2\mu a^2$

二电子体系的总波函数

$$\Phi=\begin{cases}\psi_A\chi_S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(1)\phi_2(2)-\phi_1(2)\phi_2(1)\right]\cdot\begin{cases}\alpha(1)\alpha(2)\\ \beta(1)\beta(2)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha(1)\beta(2)+\alpha(2)\beta(1)\right]\end{cases}\\ \psi_S\chi_A=\dfrac{1}{2}\left[\phi_1(1)\phi_2(2)+\phi_1(2)\phi_2(1)\right]\cdot\left[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)\right]\end{cases}$$

基态不简并，第一激发态是四重简并的。

49. 两个自旋 1/2，质量为 m 的无相互作用的全同费米子同处线性谐振子场中，写出基态和第一激发态的能量本征值和本征函数，指出简并度。

解： （1）基态： $E_0=E_0(1)+E_0(2)=\hbar\omega$

$$\Phi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(1)\psi_0(2)\left[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)\right]，不简并。$$

（2）第一激发态： $E_1=2\hbar\omega$

$$\Phi_1=\begin{cases}\Psi_A\chi_S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_0(1)\psi_1(2)-\psi_0(2)\psi_1(1)\right]\begin{cases}\alpha(1)\alpha(2)\\ \beta(1)\beta(2)\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha(1)\beta(2)+\alpha(2)\beta(1)\right]\end{cases}\\ \Psi_S\chi_A=\dfrac{1}{2}\left[\psi_0(1)\psi_1(2)+\psi_0(2)\psi_1(1)\right]\cdot\left[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)\right]\end{cases}$$

是四重简并的。

50. 一维无限深的、宽为 1 $\mathring{A}$ 的势阱中含有三个电子，势

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1\,\mathring{A}\\ \infty, & 其它\end{cases}$$

在温度 $T=0\,(K)$ ，并忽略库仑相互作用近似下，三个电子的平均能量 $E=12.4eV$ 。问在同样近似下，在阱中若有四个电子时，其平均能量是多少？

解： 四个电子时，平均能量 $E=\dfrac{5}{2}E_1=15.5(eV)$ 。

51. 两个质量为 μ 、自旋 1/2 的全同费米子处在一维无限深势阱中，阱宽为 L ，粒子间相互作用势 $V(x_1-x_2)$ 可作为微扰。试用单粒子态和自旋态组出三个最低能态，用一阶微扰论计算第二、第三个最低能态的能量，忽略自旋相关力，积分不必求出。

解：（1）基态，$n=m=1$，$E_0=\pi^2\hbar^2/\mu L^2$ 。

空间波函数对称，自旋波函数反对称：$\Phi_0=\Psi_{11}^S\chi_{00}$，非简并。

（2）第一激发态，$n=1,m=2$，$E_1=5\pi^2\hbar^2/2\mu L^2$ 。

$$\Phi_1=\left\{\begin{array}{l}\Psi_{12}^A\chi_{1M_s}\ ,M_s=1,0,-1\\ \Psi_{12}^S\chi_{00}\end{array}\right\}\ \text{简并度：4}$$

（3）第二激发态：$n=2,m=2$，$E_2=4\pi^2\hbar^2/\mu L^2$

空间对称，自旋反对称：$\Phi_2=\Psi_{22}^S(x_1,x_2)\chi_{00}$，非简并。

考虑相互作用势$V(x_1-x_2)$，因为忽略自旋相关力，计算一级微扰修正，对于第一激发态：

$$\Delta E_1^A=\int dx_1dx_2\left|\Psi_{12}^A(x_1,x_2)\right|^2V(x_1-x_2),$$

$$\Delta E_1^S=\int dx_1dx_2\left|\Psi_{12}^S(x_1,x_2)\right|^2V(x_1-x_2)。$$

对于第二激发态：

$$\Delta E_2=\int dx_1dx_2\left|\Psi_{22}^S(x_1,x_2)\right|^2V(x_1-x_2)。$$

53. 宽为 L 的一维盒子内有两个质量均为 μ 的无自旋的粒子，其相互作用势为

$$V(x_1,x_2)=a\delta(x_1-x_2),$$

计算基态能量，精确到 a 的一次项。

解：$E_{11}=E_{11}^{(0)}+E_{11}^{(1)}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{\mu L^2}+\dfrac{3a}{2L}$ 。

54. 一维势阱具有下列单粒子能量本征态：

$\psi_a(x),\psi_b(x),\psi_c(x),\cdots$；对应能级 $E_a<E_b<E_c<\cdots$

两个无相互作用的粒子置于该势阱中。对下列不同情况写出：两粒子体系可具有的两个最低总能量值及相应的简并度；与上述能级对应的所有二粒子波函数。

（a）两个自旋为 1/2 的可区分粒子；

（b）两个自旋为 1/2 的全同粒子；

（c）两个自旋为 0 的全同粒子。

解：（a）自旋 1/2，二可区分粒子，不必对称化。

① 基态：总能量 $E_a+E_a=2E_a$

波函数为

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\left|\,00\right\rangle \\ \psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\left|\,1M_s\right\rangle \ (\,M_s=0\,,\pm1\,)\end{array}\right. \quad , \quad \text{四重简并。}$$

② 第一激发态：总能量 E_a+E_b，

波函数为

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\left|\,00\right\rangle \\ \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\left|\,1M_s\right\rangle\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l}\psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\left|\,00\right\rangle \\ \psi_b(x_1)\psi_a(x_2)\left|\,1M_s\right\rangle\end{array}\right.\end{array}\right\} M_s=0\,,\pm1 \ ,\ 8\text{ 重简并。}$$

（b）自旋 1/2，二全同粒子，总波函数是反对称的。

① 基态：总能量 $E_a+E_a=2E_a$，

波函数为

$$\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\left|\,00\right\rangle\text{，非简并。}$$

② 第一激发态：总能量 E_a+E_b，

波函数为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)+\psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\right]\left|\,00\right\rangle \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)-\psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\right]\left|\,1M_s\right\rangle\end{array}\right\} \ \text{四重简并。}$$

（c）自旋为 0，二全同粒子，总波函数是对称的。

① 基态：总能量 $E_a+E_a=2E_a$，

波函数为

$$\psi_a(x_1)\psi_a(x_2)\left|\,00\right\rangle\text{，不简并。}$$

② 第一激发态：总能量 E_a+E_b，

波函数为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)+\psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\right]\left|\,00\right\rangle \ ,\ \text{不简并。}$$

55. 一维谐振子，哈密顿 $H=\dfrac{1}{2\mu}p^2+\dfrac{1}{2}\mu\omega^2x^2$。采用自然单位：$\hbar=\mu=\omega=1$，则 $H=\dfrac{1}{2}p^2+\dfrac{1}{2}x^2$。

基本对易式可表成

$$[x\,,\,p\,]=i \qquad (1)$$

令
$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+ip) \\ a^{+} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-ip) \end{cases} \tag{2}$$

证明（1）
$$[a\,,a^{+}\,]=1 \tag{3}$$

（2）
$$H=\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)=\left(N+\frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

其中
$$N=a^{+}a$$

为声子数算符。

56. 已知 $N=a^{+}a$ 为声子数算符，其归一化本征态为

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^{+}\right)^{n}|0\rangle,$$

满足
$$N|n\rangle=n|n\rangle。$$

证明：
$$a^{+}|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle。$$

57. 设有两类谐振子，相应的声子产生和湮没算符用 $a_1^{+}\,,a_1$ ； $a_2^{+}\,,a_2$ 表示，它们满足

$$[a_i\,,a_j^{+}\,]=\delta_{ij}\,,[a_i\,,a_j\,]=[a^{+}\,,a_j^{+}\,]=0\,,i\,,\;j=1\,,2\,。$$

定义算符

$$J_x=\frac{1}{2}(a_1^{+}a_2+a_2^{+}a_1)$$
$$J_y=\frac{1}{2i}(a_1^{+}a_2-a_2^{+}a_1)$$
$$J_z=\frac{1}{2}(a_1^{+}a_1-a_2^{+}a_2)$$

证明： $[J_{\alpha}\,,J_{\beta}\,]=i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,J_{\gamma}$ ， $\alpha,\beta,\gamma=x,y,z\;(\hbar=1)$。

58. 设哈米顿算符 $H=\varepsilon a^{+}a+\lambda\left(a^{+}+a\right)$，其中 ε 是正实数，λ 是正参数，a^{+} 和 a 为玻色型产生算符和消灭算符，用微扰论求 H 的基态本征值（准至 λ^{2} 级）和相应的本征态（准至 λ 级）。

解： 准至 λ^{2}, 基态本征值为

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{\varepsilon} \text{。}$$

准至λ级，基态波函数为

$$|\,\psi_0\,\rangle = |\,0\,\rangle - \frac{\lambda}{\varepsilon}|\,1\,\rangle \text{。}$$