安徽大学 2009—2010 学年第二学期《高等数学 C（二）》

考试答案（A 卷）参考答案与评分标准

一、　填空题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. $\frac{3}{5}$　　2. 只有零解　　3. $|A|^{(n-1)^3}$　　4. $\frac{1}{36}$　　5. 328

二、单项选择题（本题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1. D　　2. D　　3.B　　4. A　　5.D

三、计算题（本题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln y\cdot x^{\ln y-1}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{\ln y}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{y}$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\ln y\cdot x^{\ln y-1}dx+x^{\ln y}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{y}dy$$

2. $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le y,0\le y\le 1\}$

$$\iint\limits_D ye^x dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y ye^x dx=\frac{1}{2}$$

3. 设抛物线 $y^2=4x$ 上一点 (x,y) 到直线 $x-y+4=0$ 的距离 d 最短。

则 $d=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}$。由题意，构造拉格朗日函数如下

$$L=(x-y+4)^2+\lambda(y^2-4x)$$

求偏导 $\begin{cases}L_x=2(x-y+4)-4\lambda\\ L_y=2(x-y+4)+2\lambda y\\ L_\lambda=y^2-4x\end{cases}$，解得唯一驻点 $(1,2)$。

所以 $d=\frac{|x-y+4|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$　。

4. 因为 α_1，α_2，α_3 线性无关，所以，$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\ne 0$，

即 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&0&b\\1&3&2\end{vmatrix}=a-2b+1\ne 0$

5．解法一： $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

因为二次型正定，所以顺序主子式均大于零

$A_1=|1|=1>0$，

$A_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}=(2-t)(2+t)>0$，所以 $-2<t<2$

$A_3=\begin{vmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{vmatrix}=4-2t^2>0$，所以 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$

综上，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ 。

解法二：利用初等变换

$$\begin{pmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&t&0\\t&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{t^2}{4}&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

因为 $\frac{1}{2}-\frac{t^2}{4}>0$，所以 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ 。

6. 收敛半径 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，收敛域 $(-1,1)$

设在收敛域上，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=S(x)$

逐项积分有 $\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_0^x nt^{n-1}dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n==\frac{x}{1-x}$

所以，$S(x)=(\int_0^x S(t)dt)'==(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$ 。

四、综合分析题（共 10 分）

设 $\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$ 是对应特征值 $\lambda=1$ 的特征向量，

则 $(\xi,\xi_1)=x_1+x_2-x_3=0$ 。

解得 $\xi_2=(-1,1,0)^T$， $\xi_3=(1,0,1)^T$ 。

构造矩阵 $P=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$，由实对称矩阵性质知： $P^{-1}AP=diag(-2,1,1)$

$$A=Pdiag(-2,1,1)P^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

五．证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1、 $(A+E)(A^2+3A+3E)=4E$

所以 $(A+E)$ 可逆，且 $(A+E)^{-1}=\dfrac{1}{4}(A^2+3A+3E)$

2、$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$，矩阵 A 的特征值为 $2,-1,1$，所以 A 相似于对角矩阵 $diag(2,-1,1)$.

同理 $|\lambda E-B|=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$，矩阵 B 的特征值为 $2,-1,1$，所以 B 相似于对角矩阵 $diag(2,-1,1)$.

由相似的传递性，

对任何实数 a，矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$ 均相似。