学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 院/系＿＿＿＿

答题勿超装订线

安徽大学 2017—2018 学年第一学期
《高等数学 A（一）》期中考试试卷
（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号＿＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

得 分	10

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\frac{3}{n^2+n+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ $\frac{1}{2}$ 。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=$ 0 。

3. 已知 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2017)$，$x\in R$，则 $f'(0)=$ $2017!$ 。

4. 设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=-2x+1$ 。

5. 设函数 $f(x)$ 可微，$y=f(x)e^{f(x)}$，则 $dy=$ $f'(x)e^{f(x)}(1+f(x))dx$ 。

得 分	8

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则（ C ）。

(A) $a=1,\ b=1$　　(B) $a=-1,\ b=1$

(C) $a=1,\ b=-1$　　(D) $a=-1,\ b=-1$

7. 当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}e^{\frac{1}{x-2}}$ 的极限（ D ）。

(A) 等于 4　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但也不为 ∞

8. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（ B ）。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^3$，则当 n 为正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$（ A ）。

(A) $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)[f(x)]^{2n+1}$　　(B) $1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)[f(x)]^{2n+1}$

(C) $1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)[f(x)]^{2n-1}$　　(D) $1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)[f(x)]^{2n-1}$

10. 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$（ A ）。C

(A) a　　(B) b　　(C) $a+b$　　(D) 0

三、计算题（每小题 8 分，共 64 分）

得 分	

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

解：当 $x<0$ 时，不妨设 $-1<x<0$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-(-2)\right]=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+2\right)=\lim_{x\to0^-}(e^{\frac{1}{x}}+2)=2$$

当 $x>0$ 时，设 $0<x<1$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{\ln(1+t)}=2$$

∴ 原式 $=2$

12. 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=1$, $a_n=\dfrac{3n-1}{3n}a_{n-1}$, n为正整数。求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

$\because 0<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{3n-1}{3n}<1$

$\downarrow$

单调有界.

$a=\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)a$

$a=0$

13. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$。

$\left(\dfrac{x+f(x)}{x}\right)'$

$=\dfrac{1+f'(x)-(x+f(x))}{x^2}$

14. 设$f(x)=\sqrt{\dfrac{2016^x(\arcsin x)^{2017}}{(\ln x)^{2018}\sin(2019x)}}$，求$f'(x)$。

$\ln f(x)=\frac{1}{2}(x\ln 2016+2017\ln(\arcsin x)-2018\ln\ln x$
$-\ln\sin(2019x))$

$\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{2}(\qquad\qquad)f$

15. 设 $f(x)=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。试分别求下列各项的值：

$f'_{+}(0)$、$f'_{-}(0)$、$f'(0)$、$f'(0^{+})$、$f'(0^{-})$、$\lim\limits_{x\to 0} f'(0)$。

16. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dx}{dy}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}$。

17. 设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(2017)}(0)$。

$\sin^{(n)}(x)$

18. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$，试求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型。

四、应用题（本题共 6 分）

得分	

19. 试确定 a 的值，使得两抛物线 $C_1:(y-1)^2=x+1$ 和 $C_2:(y-1)^2=-4x+a+1$ 在交点处各自切线互相垂直。

$x+\cancel{1}=-4x+a+\cancel{1}$

$5x=a$

$x=\dfrac{a}{5}$ $\qquad \pm\sqrt{x+1}$

$C_1: 2(y-1)\cdot y'=1$, $y'=\dfrac{1}{2(y-1)}=\dfrac{1}{\pm 2\sqrt{x+1}}$

$C_2: \cancel{2}(y-1)y'=-\cancel{4}$, $y'=\dfrac{-2}{\pm\sqrt{x+1}}$

$\dfrac{-1}{(x+1)}=-1$

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

得 分	

20. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为有理数}，\\ 0, & \text{当}x\text{为无理数}。\end{cases}$ 试证明：

(1) 函数 $f(x)$ 为有界函数；(2) 函数 $f(x)$ 为偶函数；(3) 函数 $f(x)$ 是周期函数，但无最小正周期。

(1) $|f(x)|<1$

(2) ✓

(3) ✓

21. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内可导。试证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(\xi)}{\xi-a}=f'(\xi)。$$