院/系__________ 专业__________ 姓名__________ 学号__________

答 题 勿 超 装 订 线

装 订 线

安徽大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A（一）》期末考试试卷（A 卷）

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号__________

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
阅卷人						

一、填空题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2018}\right)^n=$__________.

2. 设函数$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则$f^{(n)}(x)=$__________.

3. 设$y=y(x)$是由方程$y=\cos(x+y)$确定的隐函数，则微分$\mathrm{d}y=$__________.

4. 曲线 $C: y=3x^5+5x^4-2x+4$的拐点坐标为__________.

5. 广义积分$\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=$__________.

二、选择题（本题共五小题，每小题 3 分，共 15 分）

得 分	

6. 广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}x^p\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是 （　　）

A. $-1<p<0$; B. $p>-1$; C. $0<p<1$; D. $p<-1$.

7. 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^k}=c$，其中$k,c$ 均为实常数，且$c\neq0$. 则 （　　）

A. $k=4,c=-\dfrac{1}{24}$; B. $k=4,c=\dfrac{1}{24}$;

C. $k=5,c=-\dfrac{1}{120}$; D. $k=5,c=\dfrac{1}{120}$.

8. 设函数$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则下列说法正确的是 （　　）

A. $F(x)$是偶函数当且仅当$f(x)$是奇函数;

B. $F(x)$是奇函数当且仅当$f(x)$是偶函数;

C. $F(x)$是周期函数当且仅当$f(x)$是周期函数;

D. $F(x)$是单调函数当且仅当$f(x)$是单调函数.

9. 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$（$0<a<b$）上有连续导数，且$f(x)>0$. 则由曲线$C: y=f(x)$与直线$x=a,x=b$以及x轴围成图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为 （　　）

A. $2\pi\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$; B. $2\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$;

C. $\pi\displaystyle\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$; D. $2\pi\displaystyle\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$.

10. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^5\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则下列说法正确的是 （　　）

A. $f(x)$在$x=0$处有2阶导数，但$f''(x)$在$x=0$处不连续;

B. $f(x)$在$x=0$处有2阶导数，且$f''(x)$在$x=0$处连续;

C. $f(x)$在$x=0$处有3阶导数，但$f'''(x)$在$x=0$处不连续;

D. $f(x)$在$x=0$处有3阶导数，且$f'''(x)$在$x=0$处连续.

三、计算题（本题共六小题，每小题 7 分，共 42 分）

得 分	

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t}{\tan x-x}$.

12. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\frac{k\pi}{n}$.

13. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$为参数）．求$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

14. 求不定积分$I=\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x$.

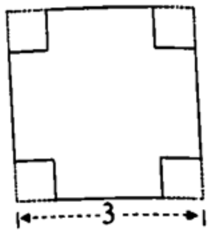
15. 求定积分$\int_0^1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}\mathrm{d}x$.

16. 求初值问题$\begin{cases}xy'+y=\cos x,\\ y(\frac{\pi}{2})=1\end{cases}$ 的解.

四、应用题（本题共两小题，每小题 8 分，共 16 分）

得 分	

17. 设有边长为3的正方形纸板，将其四角剪去相等的小正方形，然后叠成盒子．问小正方形的边长为多少时，叠成的盒子的体积为最大？



18. 设某钢丝段形状为$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t \end{cases}$ $(t \in [0, 2\pi])$．求该钢丝段的长度．

五、证明题（本题共两小题，每小题 6 分，共 12 分）

得 分	

19. 利用 Rolle（罗尔）定理证明 Lagrange（拉格朗日）中值定理：设$f(x)$满足 (i) 在$[a,b]$上连续，(ii) 在(a,b)内可导．则至少存在一个$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$．

20. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对任意$x \in [a,b]$，$f(x) > 0$．证明：存在唯一的$\xi \in (a,b)$，使得$\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t = \int_\xi^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$．