第六章、磁场中带电粒子的运动

$ 6.1 带电粒子在电磁场中的 Schrödinger 方程

假定外磁场是恒定的，即 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_B$，且均匀。则一个带电粒子在其中运动的 Schrödinger 方程是可解的。

首先，让我们用正则量子化规则来推导这一方程。从经典电动力学我们知道，一个带电粒子在电磁场中满足牛顿方程

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} + q\mathbf{E}. \tag{1}$$

我们现在要找到相应的拉格朗日量 L，使得方程 (1) 可以从 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \tag{2}$$

推出。为此，我们引入矢势和标势

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \tag{3}$$

依赖于 $\mathbf{A}$ 和 φ，我们有

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - q\varphi. \tag{4}$$

事实上，对于 $\mathbf{v}$ 求导后，我们有

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}. \tag{5}$$

而将 L 对于 $\mathbf{r}$ 求导给出

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - q\nabla\varphi. \tag{6}$$

利用矢量公式

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{7}$$

及

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{v} = 0, \tag{8}$$

我们得到

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{9}$$

代入 Langrange 方程后，我们有

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}) = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{q}{c}\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} - q\nabla\varphi. \tag{10}$$

另一方面，粒子所感受到的 $\mathbf{A}$ 随时间的变化又可写为

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}. \tag{11}$$

代入方程 (10) 的左边后，我们有

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{q}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} - q\nabla\varphi + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}, \tag{12}$$

或是

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} + q\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\right) = \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} + q\mathbf{E}. \tag{13}$$

由此，我们得出结论， L 即是所要求的拉氏量。

下面，我们要求正则动量。它由下式给出。

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}. \tag{14}$$

将之代入哈密顿量的表达式后，我们得到

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{P}\cdot\mathbf{v} - L = \left(m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{v} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - q\varphi\right) \\ &= \frac{mv^2}{2} + q\varphi = \frac{1}{2m}(m\mathbf{v})^2 + q\varphi = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 + q\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

最后一步是量子化。我们要求

$$\left[\hat{x},\ \hat{P}_x\right] = \left[\hat{y},\ \hat{P}_y\right] = \left[\hat{z},\ \hat{P}_z\right] = i\hbar. \tag{16}$$

这等价于要求

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{\hbar}{i}\nabla. \tag{17}$$

因此，我们最后得到 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},\,t)=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla-\frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},\,t)\right)^2\Psi(\mathbf{r},\,t)+q\varphi(\mathbf{r},\,t)\Psi(\mathbf{r},\,t). \tag{18}$$

与这一方程相联系的一些概念，如电流密度和规范不变性等问题，请阅读教科书 245 至 248 页。

§6.2 **正常** Zeeman **效应**

我们考虑的第一个例子，是氢原子光谱在强磁场下的分裂现象。此时，我们有

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\,t)=\frac{1}{2}\,\mathbf{B}\times\mathbf{r},\quad q\varphi(\mathbf{r})=V(r). \tag{19}$$

代入定态的 Schrödinger 方程后，我们有

$$\begin{aligned} E\Psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_x-\frac{eB}{2c}y\right)^2\Psi(\mathbf{r})+\frac{1}{2m}\left(\hat{P}_y+\frac{eB}{2c}x\right)^2\Psi(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{1}{2m}\hat{P}_z^2\Psi(\mathbf{r})+V(r)\Psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{20}$$

这里，我们用到了 $q=-e$ 这一事实。将两个平方项展开后，我们有

$$E\Psi(\mathbf{r})=\frac{1}{2m}\hat{P}^2\Psi(\mathbf{r})+V(r)\Psi(\mathbf{r})+\frac{1}{2m}\frac{eB}{c}\hat{L}_z\Psi(\mathbf{r})+\frac{1}{2m}\frac{e^2B^2}{4c^2}\left(x^2+y^2\right)\Psi(\mathbf{r}). \tag{21}$$

不难看出，波函数 (在略去 x^2+y^2 项后)

$$\Psi_{n_rLM}(r,\,\theta,\,\varphi)=R_{n_rL}(r)Y_{LM}(\theta,\,\varphi). \tag{22}$$

仍是这一方程的本征函数。代入后，我们得到

$$E\Psi_{n_rLM}(r,\,\theta,\,\varphi)=\left(E_{n_rL}+\frac{eB\hbar}{2mc}M\right)\Psi_{n_rLM}(r,\,\theta,\,\varphi). \tag{23}$$

因此，原来简并的能级 E_{n_rL} 现在分裂成 $2L+1$ 条 $(-L\le M\le L)$ 。分裂后的相邻能级间距为 $\hbar\omega_L=\frac{eB\hbar}{2mc}$ 。而 $\omega_L=\frac{eB}{2mc}$ 称为 Larmor 频率。显然， $\omega_L\propto B$ 。由于能级分裂，相应的光谱线也发生分裂，如教科书 253 页上的图 7.2 所示。钠黄线 $(\lambda\sim 5893\mathring{A})$ 在磁场中分裂成三条， $\omega,\omega+\omega_L$ 和 $\omega-\omega_L$ 。并且外场越强，分裂就越大。

§6.3 Landau 能级

现在，我们考虑另外一个例子。即外磁场中的自由电子运动。在此情况下，我们有

$$\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}\times\mathbf{r}. \tag{24}$$

代入 Schödinger 方程后，我们有

$$\begin{aligned} E\Psi(\mathbf{r}) &= \left[\frac{1}{2m}\left(\hat{P}_x - \frac{eB}{2c}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_y + \frac{eB}{2c}x\right)^2 + \frac{1}{2m}\hat{P}_z^2\right]\Psi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2m}\hat{P}^2\Psi(\mathbf{r}) + \frac{e^2B^2}{8mc^2}\left(x^2+y^2\right)\Psi(\mathbf{r}) + \frac{eB}{2mc}\hat{L}_z\Psi(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{25}$$

有趣的是，这一方程可以精确求解。为此，我们引入柱坐标 $(\rho,\,\varphi,\,z)$ 。在此坐标下，我们有

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \hat{P}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{26}$$

代入后，我们有

$$E\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(\mathbf{r}) + \frac{eB\hbar}{2mci}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi(\mathbf{r}) + \frac{e^2B^2}{8mc^2}\rho^2\Psi(\mathbf{r}). \tag{27}$$

令

$$\Psi(\mathbf{r}) = R(\rho)e^{in\varphi}e^{ikz}, \quad n = 0,\,\pm1,\,\pm2,\cdots\cdots, \tag{28}$$

则我们有

$$ER(\rho) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} - k^2\right)R(\rho) + \frac{eB\hbar}{2mc}nR(\rho) + \frac{e^2B^2}{8mc^2}\rho^2R(\rho), \tag{29}$$

或是

$$\begin{aligned} &\left(E - \frac{\hbar^2k^2}{2m} - \frac{eB\hbar}{2mc}n\right)R(\rho) \equiv \tilde{E}R(\rho) \\ = &-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right) + \frac{n^2\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho^2}R(\rho) + \frac{e^2B^2}{8mc^2}\rho^2R(\rho). \end{aligned} \tag{30}$$

这个方程有两个极点 $\rho=0$ 和 $\rho=\infty$ 。我们需要分别加以考虑。

(1) 当 $\rho \to \infty$ 时，我们有

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{e^2B^2}{8mc^2}\rho^2R(\rho)\cong 0, \tag{31}$$

或是

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}-\frac{e^2B^2}{4\hbar^2c^2}\rho^2R(\rho)\cong 0. \tag{32}$$

其近似解为

$$R^{(1)}(\rho)=\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{eB}{2\hbar c}\rho^2\right)\equiv\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right). \tag{33}$$

这里， $\omega_L=\frac{eB}{2mc}$ 。

(2) 当 $\rho \to 0$ 时，我们近似有

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{n^2\hbar^2}{2m}\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\cong 0. \tag{34}$$

令 $R(\rho)=\rho^s$ 。代入后，有

$$-[s(s-1)+s]+n^2=0. \tag{35}$$

即 $s=\pm n$ 。我们取 $R^{(a)}(\rho)=\rho^{|n|}$ 。令

$$R(\rho)=\rho^{|n|}\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi(\rho). \tag{36}$$

则我们有

$$\begin{aligned}
R'(\rho) &= |n|\rho^{|n|-1}\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi(\rho)+\rho^{|n|}\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi'(\rho)\\
&+ \rho^{|n|+1}\left(-\frac{m\omega_L}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi(\rho)\\
R''(\rho) &= |n|(|n|-1)\rho^{|n|-2}\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi(\rho)+2|n|\rho^{|n|-1}\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi'(\rho)\\
&+ |n|\rho^{|n|}\left(-\frac{m\omega_L}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi(\rho)+\rho^{|n|}\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi''(\rho)\\
&+ 2\rho^{|n|+1}\left(-\frac{m\omega_L}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi'(\rho)\\
&+ (|n|+1)\rho^{|n|}\left(-\frac{m\omega_L}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi(\rho)\\
&+ \rho^{|n|+2}\frac{m^2\omega_L^2}{\hbar^2}\exp\left(-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2\right)\chi(\rho).
\end{aligned} \tag{37}$$

代入方程后，我们有

$$\begin{aligned}
-\frac{2m}{\hbar^2}\tilde{E}\rho^{|n|}\chi(\rho) &= |n|(|n|-1)\rho^{|n|-2}\chi(\rho)+2|n|\rho^{|n|-1}\chi'(\rho) \\
&- (2|n|+1)\rho^{|n|}\frac{m\omega_L}{\hbar}\chi(\rho)+\rho^{|n|}\chi''(\rho)-\frac{2m\omega_L}{\hbar}\rho^{|n|+1}\chi'(\rho) \\
&+ \rho^{|n|+2}\frac{m^2\omega_L^2}{\hbar^2}\chi(\rho)+|n|\rho^{|n-2|}\chi(\rho)+\rho^{|n-1|}\chi'(\rho) \\
&- \frac{m\omega_L}{\hbar}\rho^{|n|}\chi(\rho)-\frac{n^2}{\rho^2}\rho^{|n|}\chi(\rho)-\frac{m^2\omega_L^2}{\hbar^2}\rho^{|n|+2}\chi(\rho) \\
&= \rho^{|n|}\chi''(\rho)+(2|n|\rho^{|n|-1}-\frac{2m\omega_L}{\hbar}\rho^{|n|+1}+\rho^{|n|-1})\chi'(\rho) \\
&- (2|n|+2)\rho^{|n|}\frac{m\omega_L}{\hbar}\chi(\rho), \qquad (38)
\end{aligned}$$

或是

$$\begin{aligned}
&\rho^{|n|}\chi''(\rho)+\left[(2|n|+1)\rho^{|n|-1}-\frac{2m\omega_L}{\hbar}\rho^{|n|+1}\right]\chi'(\rho) \\
-&\left[(2|n|+2)\frac{m\omega_L}{\hbar}\rho^{|n|}-\frac{2m}{\hbar^2}\tilde{E}\rho^{|n|}\right]\chi(\rho)=0. \qquad (39)
\end{aligned}$$

方程两边同除 $\rho^{|n|}$ 后，我们有

$$0=\chi''(\rho)+\frac{1}{\rho}\left[(2|n|+1)-\frac{2m\omega_L}{\hbar}\rho^2\right]\chi'(\rho)-\left[(2|n|+2)\frac{m\omega_L}{\hbar}-\frac{2m}{\hbar}\tilde{E}\right]\chi(\rho). \qquad (40)$$

若令 $\frac{m\omega_L}{\hbar}\rho^2=\xi$，则我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d\chi}{d\rho} &= \frac{d\xi}{d\rho}\frac{d\chi}{d\xi}=\frac{2m\omega_L}{\hbar}\rho\frac{d\chi}{d\xi} \\
\frac{d^2\chi}{d\rho^2} &= \frac{d}{d\rho}(\frac{2m\omega_L}{\hbar}\rho\frac{d\chi}{d\xi})=\frac{2m\omega_L}{\hbar}\frac{d\chi}{d\xi}+\frac{4m^2\omega_L^2}{\hbar^2}\rho^2\frac{d^2\chi}{d\xi^2} \\
&= \frac{2m\omega_L}{\hbar}\frac{d\chi}{d\xi}+\frac{4m\omega_L}{\hbar}\xi\frac{d^2\chi}{d\xi^2}. \qquad (41)
\end{aligned}$$

代入方程后，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{4m\omega_L}{\hbar}\xi\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+\frac{2m\omega_L}{\hbar}\frac{d\chi}{d\xi}+\frac{2m\omega_L}{\hbar}\left[(2|n|+1)-2\xi\right]\frac{d\chi}{d\xi}-\left[(2|n|+2)\frac{m\omega_L}{\hbar}-\frac{2m}{\hbar^2}\tilde{E}\right]\chi \\
=\;&\frac{4m\omega_L}{\hbar}\xi\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+\frac{2m\omega_L}{\hbar}\left[(2|n|+2)-2\xi\right]\frac{d\chi}{d\xi}-\left[(2|n|+2)\frac{m\omega_L}{\hbar}-\frac{2m}{\hbar^2}\tilde{E}\right]\chi \\
=\;&0. \qquad (42)
\end{aligned}$$

两边同除 $\frac{4m\omega_L}{\hbar}$ 后，我们有

$$\xi\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+[(|n|+1)-\xi]\frac{d\chi}{d\xi}-\left[\frac{|n|+1}{2}-\frac{\tilde{E}}{2\hbar\omega_L}\right]\chi=0. \tag{43}$$

将此方程与合流超几何方程

$$\xi\frac{d^2\chi}{d\xi^2}+(\gamma-\xi)\frac{d\chi}{d\xi}-\alpha\chi=0 \tag{44}$$

相比较后，我们有

$$\alpha=\frac{|n|+1}{2}-\frac{\tilde{E}}{2\hbar\omega_L},\quad \gamma=|n|+1. \tag{45}$$

当 $\xi\sim\rho^2\to\infty$ 时，有限的解由截断

$$\frac{|n|+1}{2}-\frac{\tilde{E}}{2\hbar\omega_L}=\alpha=-n_\rho,\quad n_\rho=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots \tag{46}$$

给出。由此我们得到

$$\tilde{E}=E-\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\frac{eB\hbar}{2mc}n=E-\frac{\hbar^2k^2}{2m}-n\hbar\omega_L=(2n_\rho+|n|+1)\,\hbar\omega_L. \tag{47}$$

因此，我们最后得到

$$E=(2n_\rho+|n|+n+1)\,\hbar\omega_L+\frac{\hbar^2k^2}{2m}. \tag{48}$$

这就是我们要求的本征值，而相应的本征函数则为

$$\psi_{n_\rho,\,n}(\rho,\ \varphi,\ z)\cong\rho^{|n|}F(-n_\rho,\ |n|+1,\ \frac{m\omega_L}{\hbar}\rho^2)e^{-\frac{m\omega_L}{2\hbar}\rho^2}e^{in\varphi}e^{ikz}. \tag{49}$$

这些能级称为 Landau 能级。由于 n 可以取负值，因此每一条 Landau 能级

$$\begin{aligned} E_N &= (N+1)\hbar\omega_L+\frac{\hbar^2k^2}{2m} \\ &= (2n_\rho+|n|+n+1)\,\hbar\omega_L+\frac{\hbar^2k^2}{2m} \end{aligned} \tag{50}$$

都是无穷维简并的。这一点非常重要。

另一方面，由于磁场强度 $\mathbf{B}=B\mathbf{k}$ 也可以由矢势 $\mathbf{A}=-By\mathbf{i}$ 给出，带电粒子的定态 Schrödinger 方程具有另外一个规范等价的形式

$$E\Psi(\mathbf{r})=\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{P}_x-\frac{eB}{c}y\right)^2+\frac{1}{2m}\hat{P}_y^2+\frac{1}{2m}\hat{P}_z^2\right]\Psi(\mathbf{r}). \tag{51}$$

我们取

$$\Psi(x,\, y,\, z) = e^{ik_z z} e^{ik_x x} \phi(y). \tag{52}$$

代入后，我们有

$$E\phi(y) = \left[\frac{1}{2m}\left(\hbar k_x - \frac{eB}{c}y\right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right]\phi(y). \tag{53}$$

经过整理后，我们得到

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(y)}{dy^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(y-y_0)^2\phi(y) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\phi(y). \tag{54}$$

这里

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} = 2\omega_L, \quad y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB}. \tag{55}$$

这是一个一维谐振子方程。它的解可以写作

$$\phi_{y_0 n}(y) \sim e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar}(y-y_0)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}(y-y_0)\right). \tag{56}$$

而其能量则为

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = (2n+1)\hbar\omega_L + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}, \quad n = 0,\, 1,\, 2, \cdots\cdots \tag{57}$$

从表面上看，这一能级是非简并的。但由于 $y_0 = \frac{c\hbar k_x}{eB}$ 随 k_x 的变化可以取任意值，因此这一能级也是无穷维简并的。

练习：(1) 教科书 262 页上第 7.3 题。

(2) 习题集 7.1， 7.2， 7.4， 7.5 。