

第四章 衍 射

4-1. “衍射”一词,旧译“绕射”,你觉得这名词有什么不确切的地方?

答:衍射现象不但发生在几何阴影区内,也发生在几何照明区内,即“衍射”不是简单地是偏离直线传播的现象。按惠更斯原理,衍射现象是子波繁衍并相干叠加而引起强度重新分布的结果。按照望文生义的理解,“绕射”只指出了偏离直线传播的问题,意思是不够确切的。

4-2. 隔着山可以听到中波段的电台广播,而电视广播却很容易被山甚至高大的建筑物挡住,这是什么缘故?

答:这一现象与波的衍射效应有关。衍射效应是否明显,取决于波长与障碍物线度的比值:两者比值较小,则衍射效应不明显;反之,就较为明显。无线电广播的中波段载波波长为数百米,与山的高度数量级差不多,因此衍射效应比较明显,无线电波不易被挡住。而电视广播的载波是超短波,其波长在米或分米数量级,比山或高大建筑物的高度要小得多。此时,电磁波的衍射效应很不明显,近乎直线传播,极易被挡住。

4-3. 你在日常生活中曾看到过某些属于光衍射的现象吗?试举例说明之。

答:除了思考题4-4中列举的例子外,现在最容易看到的光的衍射现象是光盘表面闪烁的彩色光芒,这是类似光栅的衍射现象。

4-4. 观察并讨论下列日常生活中遇到的光的衍射现象:

(1) 在晚间对着远处的白炽灯泡张开一块手帕,或隔着窗帘看远处的白炽灯,将看到的现象记录下来。

(2) 通过眼前张开的手帕注视远处的高压水银灯,将看到的现象记录下来。与白炽灯的情形相比有何不同?

(3) 用肉眼观察远处的灯,有时会看到它周围有光芒辐射,这种现象是怎样产生的?有人说这是瞳孔的衍射现象,因为一般人的瞳孔不是理想的圆孔,而是多边形。你满意这种解释吗?有什么办法可以验证或否定这种看法?

(4) 当你瞪大或眯小眼睛时,灯泡周围的辐射状的光芒有什么变化?晃动或摇摆你的脑袋时,这些光芒有什么变化?这些现象是有助于肯定还是否定(3)中提出的解释?

(5) 当你注视月亮或日光灯时,你能看到这些辐射状的光芒吗?对你

的观察结果作些解释。

(6) 将手指并拢贴在眼前,通过指缝看一灯泡发的光,记录并解释你观察到的现象。

答:(1) 隔着张开的手帕或窗帘观看远处的白炽灯,可以看到呈矩形规则排列的亮格点(衍射斑),每个斑点周围还镶着彩边。这是非单色光照射在二维网格上发生衍射的结果。

(2) 透过张开的手帕注视远处的水银灯,同样可以看到列的彩色斑点,由里向外分别有蓝色、绿色和黄色等几组。这种差别是由白炽灯和高压水银灯的光谱特性决定的,表明白炽灯的光谱是连续光谱,而水银灯的光谱包含了几种准单色谱线。

(3) 用肉眼观察远处的灯,可以看到光芒四射的辐射光芒,这是眼瞳衍射的结果。光芒分布在各个不同的角方位上,表明瞳孔是一个多边形。这可以用多边孔的衍射实验验证,若光束在某方向受到限制,则强度就在该方向扩展。这是衍射现象的特点之一。如果眼瞳是圆孔,则衍射图样应是一系列同心圆环,而不会是光芒辐射。

(4) 瞪大或眯小眼睛观察灯泡周围的光芒,则有两点明显差别:一是眯起眼睛看到的光芒更加明显,对光束限制愈厉害,衍射效应愈明显。这正是衍射现象的特点之一。二是眯起眼睛看到的光芒在垂直方向和水平方向比瞪大眼睛时看到的更强烈,这是由于眯上眼睛时合上的眼帘和睫毛构成了一条条水平的和垂直的狭缝,使在垂直和水平方向的衍射效应更加明显。

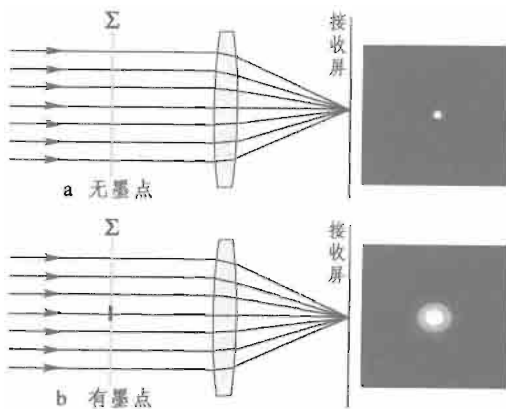
(5) 注视月亮或日光灯时,是看不到辐射光芒的。凡是观察面光源,都见不到辐射光芒。这些面光源可以看成是大量非相干点源的集合,每个点源都可以有一套衍射光芒,衍射强度是所有各套衍射光芒的非相干叠加。由于各个点源所对应的各套衍射光芒彼此错开,非相干叠加的结果使总强度趋于均匀。这就是看不到面光源辐射光芒的道理。

(6) 隔着指缝观察灯泡的发光,能看到指缝间有很细的明暗相间的条纹,条纹走向与指缝平行。这是狭缝衍射的结果。

4-5. 当一束截面很大的平行光束遇到一个小小的墨点时,有人认为它无关大局,其影响可以忽略,后场基本上还是一束平行光,这个看法对吗?你能设想一种场合,这小小墨点造成的后果是不可忽视的吗?

答:如右下图,用一凸透镜将平行光束聚焦到置于焦面的接收屏上。在平行光束中插入一块透明玻璃板 Σ 。若玻璃板上无墨点,光场基本上不

受干扰,在屏的中央,即焦点处有一亮斑(图 a)。若玻璃板中央有一小小圆墨点,则在屏上显示的如图 b 所示,是一同心圆状的衍射斑(按照巴比涅定理,小圆墨点的衍射斑除了在几何像点处之外,与小圆孔的衍射斑一样)。这就是说,在原来暗的地方有了复杂的光强发分布,可见,小小墨点对光场的影响绝不是无足轻重的,玻璃板后的光远不再是一束平行光。



4-6. 关于两个互补屏在同一场点的衍射强度之间的关系,有人说一个强度是亮(暗)的,则另一个强度是暗(亮)的。这样理解衍射巴比涅定理,对吗?

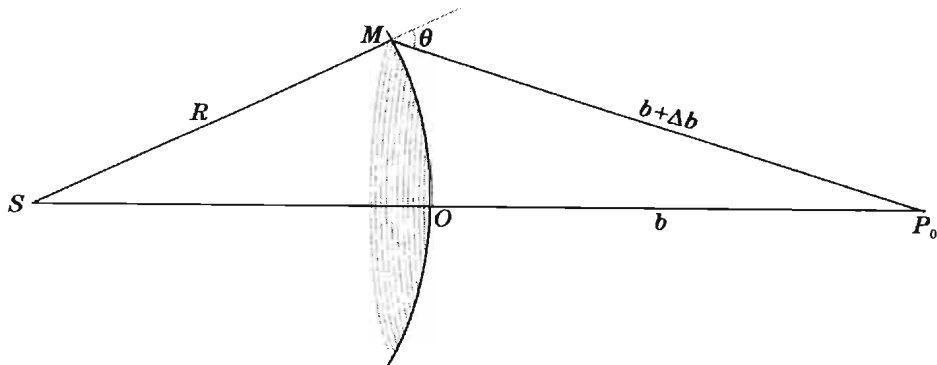
答:巴比涅定理直接给出的是一对互补屏 a、b 的衍射场中复振幅之间的关系:

$$\tilde{U}_a + \tilde{U}_b = \tilde{U}_0,$$

式中 \tilde{U}_0 是自由光场的复振幅,并不直接给出互补屏衍射场中强度的关系。巴比涅定理只对点光源(或平行光)照明时,互补屏在光源的像平面上产生的衍射场的强度作出预言:除光源的几何像点外,互补屏的衍射场强度相等,而不是亮暗相反。

4-7. 试估算菲涅耳圆孔衍射实验中第 10^4 个半波带处的倾斜因子 $f(\theta) = (1 + \cos\theta)/2$ 的数量级,如果将 $f(\theta)$ 近似取为 1,误差为多少?(所需的参考数据见 2.1 节。)

答:如下图所示,由余弦定理



$$\cos \theta = \frac{(R+b)^2 - R^2 - (b+\Delta b)^2}{2R(b+\Delta b)}.$$

在第 10^4 个半波带处, $\Delta b = 10^4 \lambda / 2$. 取可见光中心波长 $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$, 光源到圆孔的距离 $R = 3\text{m}$, 圆孔到接收屏幕的距离 $b = 5\text{m}$, 代入上式, 得

$$\cos \theta = \frac{8^2 - 3^2 - (5 + 10^4 \times 0.5 \times 10^{-6} / 2)^2}{2 \times 3 \times (5 + 10^4 \times 0.5 \times 10^{-6} / 2)} = 0.9987.$$

$$f(\theta) = (1 + \cos \theta) / 2 = 0.9994.$$

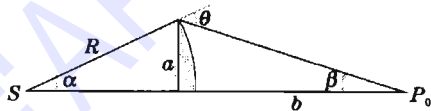
取 $f(\theta) \approx 1$ 的相对误差为 6×10^{-3} .

4-8. 为什么做菲涅耳衍射实验时, 光源和接收屏幕要放得那样远? 为什么放近了不易看到衍射图样?

答: 当衍射孔(衍射屏)边缘的倾斜因子 $f(\theta)$ 接近于 0 时, 接收点 P_0 的光强将自由传播(完全遮挡)时差不多, 衍射效应极不明显. 设衍射孔或衍射屏的半径为 a , 如右图所示,

$\theta = \alpha + \beta$, 而 $\alpha \approx \frac{a}{R}$, $\beta \approx \frac{a}{b}$, 故

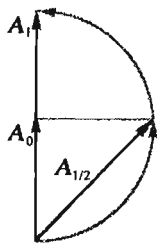
$$\theta \approx a \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{b} \right).$$



要倾斜因子 $f(\theta)$ 接近于 1, 必须 $\theta \ll 1$, 即 R 和 $b \gg a$, 即光源和接收屏幕要放得足够远。

4-9. 我们说, 整个波前产生的振幅相当于第一个半波带效果之半, 它是否等于半个第一半波带的效果?

答: 振动矢量图如右, 第一个半波带的振动曲线是半圆, 其合成振幅 A_1 相当于直径, 整个波前在 P_0 点产生的振幅 $A(P_0) = A_0 = A_1/2$, 而半个第一半波带的振动曲线是 $1/4$ 圆周, 合成振幅 $A_{1/2} = \sqrt{2}A_0 \neq A_0$.



4-10. 严格说来, 只有对波前进行无限分割, 面元 $d\Sigma$ 贡献的复振幅 $dU(P)$ 才与它的面积成正比. 为什么对于并非无穷小的半波带也能使用上述结论? 能否对波前的分割比半波波带法更粗糙一点, 譬如使用“全波带”(即相邻边缘的光程相差 λ 的环形带)的概念?

答: 在菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式(4.10)中的面元 $d\Sigma$ 当然应该是无穷小的, 但在轴对称的情况下可以把波前分割为无限窄的环带. 在一定宽度下环带的面积正比于其半径, 从而级数 k 大的环带面积大. 但是在菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式(4.10)中还有一个因子 $1/r$, (4.15)式表明

$$\frac{d\Sigma}{r} = \frac{2\pi R dr}{R+b},$$

式中 r 是面元 $d\mathbf{\Sigma}$ 到场点的距离。若 $d\mathbf{r}$ 是波长 λ 的固定倍数, 则环带的面积与 r 之比与环的半径无关, 只正比于其宽度。环带的宽度不是无穷小时, 它贡献的复振幅大小并不简单地正比其宽度, 其间的比例系数还与环带两侧的相位差有关。对于按一定相位差 (譬如 π) 分割的环带, 这比例系数是固定的。

沿环带的宽度方向, 复振幅的相位因子是一个快速振荡函数。对这种快速振荡函数进行叠加时, 分割的间隔不能大于半个周期, 更粗糙的分割将导致没有意义、甚至荒唐的结果。在这里“全波带”的概念是不能用的。

4-11. 设 S 为点光源, D 为孔径固定的衍射屏, P_0 为接收屏幕 (见图 4-10)。讨论下列情况下圆孔中包含半波带数目的增减:

(1) S 、 D 位置不变, 移动 P_0 ;

(2) D 、 P_0 位置不变, 移动 S ;

(3) S 、 P_0 位置不变, 移动 D 。

答: 圆孔所含半波带的个数 k 是和装置各参数的关系为

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{b} \right). \quad (1)$$

(1) 保持 S 、 D 位置不变, 移动 P_0 时 z 只有 b

变化。 b 增大时波带数 k 减小, b 减小时波带数 k 增加。

(2) 保持 D 、 P_0 位置不变, 移动 S 时只有 R 变化。 R 增大时波带数 k 减小, R 减小时波带数 k 增加。

(3) 保持 S 、 P_0 位置不变, 移动 D 意味着 R 、 b 同时改变, 但保持 $R+b=L$ 不变。① 式改写为

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{L-R} \right). \quad (2)$$

$$\frac{dk}{dR} = \frac{\rho^2}{\lambda} \frac{L(2R-L)}{R^2(L-R)}.$$

由上式可见, $R \leq L/2$ 时, $dk/dR \leq 0$, 即 $R=L/2$ 时 k 极小。

4-12. 你能够用半波带法说明轴上场点的强度随圆屏半径 ρ 的增大而连续单调下降吗? 怎样利用振动矢量图 4-15c 来说明这一点? 能否用巴比涅原理来说明, 为什么圆孔衍射图样中心强度作亮暗交替的变化, 而圆屏衍射图样的中心强度却作单调变化?

答: 下图是在振动矢量图 4-15c 基础上作的圆孔、圆屏合成振幅矢量图, 图中 $\vec{A}_0 = \vec{OC}$ 是自由传播时的振幅矢量, $\vec{A}_{\text{孔}} = \vec{OB}$ 是圆孔的振幅矢量。

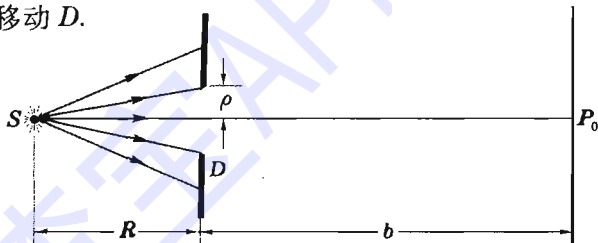


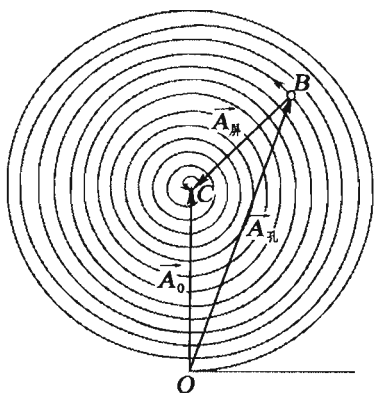
图 4-10

虽着圆孔半径的增大, B 点是沿振动曲线朝里移动。可以看出, 在此过程中 $\vec{A}_{\text{孔}}$ 的大小 \overline{OB} 是振荡的。

B 点每转一圈, 孔内多了一个波带, $A_{\text{孔}}$ 的大小 \overline{OB} 振荡一次。

圆屏是圆孔的互补屏, 按照巴比涅原理, $\vec{A}_{\text{孔}} + \vec{A}_{\text{屏}} = \vec{A}_0$.

在图中 $\vec{A}_{\text{屏}} = \vec{BC}$. 随着 B 点是沿振动曲线朝里移动 (即圆屏半径增大), \overline{BC} 的长度单调减小, 其平方, 即衍射图样中心强度亦单调减小。



4-13. 在菲涅耳圆孔衍射实验中, 从近到远移动接收屏幕, 中心强度始终作亮暗交替的变化吗? 接收屏幕在哪些位置上中心强度达到极大?

答: 圆孔所含半波带数 k 是与实验装置中各参数的关系 u 为

$$k = \frac{\rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{b} \right).$$

从近到远移动接收屏幕时, b 增大, k 减小。每当 k 扫过奇数时, 中心强度经历一次极大值; 每当 k 扫过偶数时, 中心强度经历一次极小值。当 b 值增加到大于 ρ^2/λ 以后, 上式右端第二项小于 1, 再继续增大 b 已不能引起 k 有大于 1 的变化, 中心强度不再作亮暗交替的变化。在此之前 k 最后一次取那个最小的奇数时, 中心强度的极大值是所有极大值中最大的。

4-14. 对于一个圆孔的衍射, 是否能引入焦点和焦距的概念? 是否有类似于透镜的物像公式?

答: 对于单个圆孔, 只要调整观察点到圆孔的距离 b , 使圆孔内含有一奇数个半波带, 中心强度就取极大值。考虑到倾斜因子的作用, 当圆孔含有一个半波带时, 观察点的强度最大。因此, 对于单个圆孔的衍射, 也可以和菲涅耳波带片一样, 引入焦点和焦距的概念。圆孔含有一个半波带所对应的观察点即为主焦点, 其焦距为

$$f = \rho^2 / \lambda.$$

式中 ρ 为圆孔半径。同时, 也有类似于透镜的物像距公式

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

式中 R 相当于物距, b 相当于像距, f 为焦距。当 $R \rightarrow \infty$ (平行光入射) 时, $b = f$. 另外, 圆孔和菲涅耳波带片一样, 除主焦点外, 还有一系列虚、实次焦点; 次焦点与主焦点的关系也完全与波带片相同。

4-15. 菲涅耳波带片的“物点”和“像点”之间是否有等光程性?

答: 菲涅耳波带片的“物点”和“像点”之间不存在等光程性。在“像点”的位置之所以获得亮点, 是因为从波带片上各透光的半波带到“像点”的衍射线的光程彼此相差波长 λ 的整数倍, 相干叠加结果的强度极大。

4-16. 论证菲涅耳波带片除了具有主焦点外, 还存在一系列次焦点。次焦点与主焦点光强之比是多少? 有人认为是 $1/9$ 、 $1/25$, \dots , 你认为对吗? 如果说次焦点的光强确实比主焦点弱, 主要是什么因素造成的?

答: 根据惠更斯-菲涅耳原理, 第 k 个半波带在场点的合成振幅

$$A_k \propto f(\theta_k) \Delta \Sigma_k / r_k,$$

其中 $\Delta \Sigma_k$ 为第 k 个半波带的面积, r_k 为该半波带到场点的距离, $f(\theta_k)$ 是倾斜因子。书上(4.16)式给出

$$\frac{\Delta \Sigma_k}{r_k} = \frac{\pi R \lambda}{R + b},$$

对于波带片 $R \rightarrow \infty$, 因此有

$$\frac{\Delta \Sigma_k}{r_k} = \pi \lambda,$$

可见 $\Delta \Sigma_k / r_k$ 不但与 k 无关, 而且与场点距离 b 也无关。所以, 若不考虑倾斜因子, 则在 $b = f/3, f/5, f/7, \dots$ 处次焦点的光强与主焦点处是一样的。然而考虑到倾斜因子, 次焦点处的光强开始比主焦点处稍减, 太高的次焦点处光强将急剧减弱到 0。

4-17. 振幅型的黑白波带片有个缺点, 即它使入射光通量损失一半。有什么办法使照射波带片的光通量全部进入衍射场, 从而造成更强的主焦点?

答: 把振幅型波带片中所有涂黑的半波带改成涂以透明介质, 并使之与未涂介质的半波带间的有效光程差为 $\lambda/2$ 。这样, 波带片就成为相位型的了。相位型波带片是全透明的, 全部光通量都进入衍射场, 且由于所有半波带间的相干叠加在场点都是互相加强的, 从而使主焦点有最大的强度。这是近年来正在兴起的二元衍射光学元件的一个雏形。

4-18. 试用半波带法说明夫琅禾费单缝衍射因子的一些特征, 如暗纹和次极大出现的位置。你能用半波带法说明各次极大的强度的宽度比例吗? 能说明次极大和主极大强度之比吗?

答: 用半波带法能够说明夫琅禾费单缝衍射因子的暗纹的位置, 以及近似地导出如图所示次极大的位置和相对强度。

如下图所示, 平行光正入射在单缝上。图 a 所示是 0 级条纹(即主极大)的形成, 在这里沿缝宽各处发出的衍射线之间没有相位差, 其振动矢量图是直的(见图 d 左部), 振幅 A_0 正比于缝宽 a 。

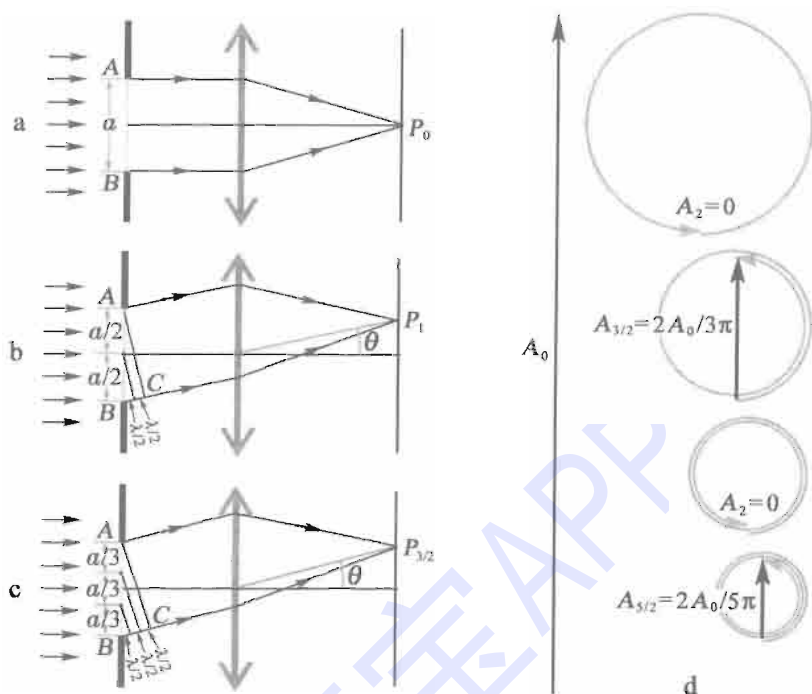


图 b 所示是第一暗纹处的情况, 由缝的上边缘 A 作垂直于衍射线的直线 AC , 从缝的下边缘 B 到 C 有两个 $\lambda/2$ 光程, 缝宽 a 分成两个相位相反的半波带, 从而 $a \sin \theta = \lambda$, 相应的振动矢量图是圆周总长为 A_0 的一个整圆圈 (见图 d 右部最上), 叠加后振幅 A_1 为 0.

图 c 所示是第一次极大处的情况, 由缝的上边缘 A 作垂直于衍射线的直线 AC , 从缝的下边缘 B 到 C 有三个 $\lambda/2$ 光程, 缝宽 a 分成三个半波带, 从而 $a \sin \theta = 3\lambda/2$, 相应的振动矢量图是总长为 A_0 的一圈半圆弧 (见图 d 右部第二图), 各衍射光叠加的振幅 $A_{3/2}$ 等于其直径, 长 $2A_0/3\pi = 0.212A_0$.

以此类推, 第二暗纹处于 $a \sin \theta = 2\lambda$ 的位置, 振动矢量图是总长为 A_0 的两圈圆弧 (见图 d 右部第三图), 叠加后振幅 A_2 为 0. 第二次极大处于 $a \sin \theta = 5\lambda/2$ 的位置, 振动矢量图是总长为 A_0 的两圈半圆弧 (见图 d 右部最下图), 各衍射光叠加的振幅 $A_{5/2}$ 等于其直径, 长 $2A_0/5\pi = 0.127A_0$. ……

标准的单缝衍射强度公式是

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}.$$

与此相比, 半波带法得到的暗纹位置是对的, 但次极大的位置和强度有一些误差:

次极大		第一	第二	第三
位置 α	标准公式	1.43	2.46	3.47
	半波带法	3/2	5/2	7/2
强度 $\frac{I}{I_0}$	标准公式	4.7%	1.7%	0.8%
	半波带法	$\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 = 4.5\%$	$\left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 = 1.6\%$	$\left(\frac{2}{7\pi}\right)^2 = 0.8\%$

半波带法的误差来自次极大并不刚好发生在奇整数个半波带的时候,而是稍微提前到来,那时振动矢量曲线缠卷得稍松些,圆圈稍大些。

4-19. 在夫琅禾费单缝衍射中,为保证在衍射场中至少出现强度的一级极小,单缝的宽度不能小于多少?为什么用 X 射线而不用可见光衍射晶体结构分析?

答: 由第一暗斑条件 $\sin\theta = \lambda/a$ 和 $|\sin\theta| \leq 1$ 可知,欲得 0 级以外的衍射斑,必须有 $\lambda < a$, 即光波长不能大于缝宽。晶体结构分析的光波波长不能大于晶格常量 a , 其数量级为 \AA (10^{-10}m), 而可见光的波长具有 10^{-7}m 的数量级, 远大于晶格常量。X 射线的波长具有 \AA 以下的数量级, 故可用于晶体结构分析。

4-20. 试讨论, 当图 4-21 所示的装置里点光源在垂直光轴的平面里上下左右移动时, 衍射图样有何变化?

答: 0 级衍射斑的中心就是几何光学的像点 (即等光程点)。在夫琅禾费单缝衍射装置中, 几何光学像是倒立的, 点光源在垂直光轴的平面里上下左右移动时, 其像点 (即 0 级衍射斑的中心) 按放大倍率作反

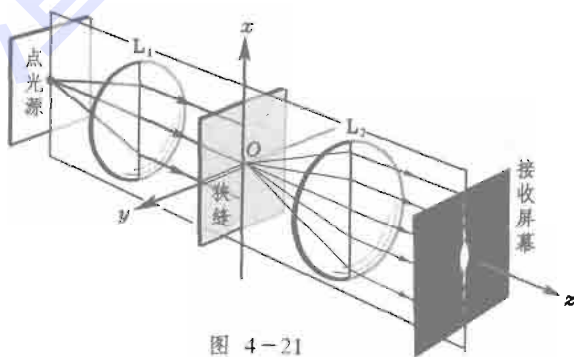


图 4-21

方向的相应移动。除此之外衍射图样 (条纹形状、间距等) 没有其它变化, 只是随着 0 级衍射斑的中心整体平移。

4-21. 若在单缝夫琅禾费衍射装置中线光源取向并不严格平行于单缝, 这对衍射图样有什么影响? 如果线光源本身太宽, 对衍射图样有什么影响? 设想一下, 若在图 4-26 所示的装置中把线光源转 90° 使之与单缝垂直, 你在幕上看到的是什么图样?

答：由思考题4-20的讨论我们知道，在点光源照明的情形中，当点光源由轴上移到轴外时，衍射图样整体向反方向平移，衍射图样的形状保持不变，衍射斑仍分布在垂直于狭缝的方向上。线光源可以看成是一系列非相干点光源的集合，其中的每一个点光源都对应有一套衍射斑，其0级斑的中心分别处在各自几何光学像点的位置。若点光源沿平行于狭缝的方向扩展为线光源，则各套衍射斑均只在狭缝方向发生平移，非相干叠加的结果使衍射斑扩展为一系列平行于狭缝的直线衍射条纹，如图4-26所示。

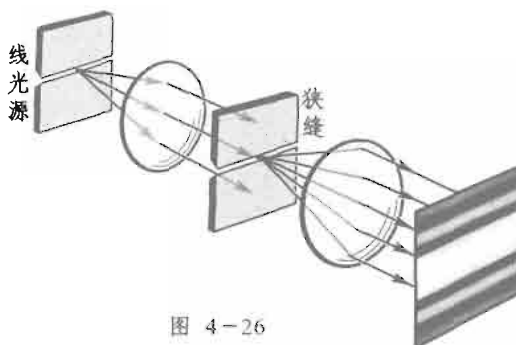


图 4-26

如果线光源的取向并不严格与单缝平行，则一系列非相干点源所对应的各套衍射斑不但在平行方向彼此错开，而且在垂直方向也有错开，非相干叠加的结果使条纹衬比度下降。这个结论是有实际意义的，因为在实验中很难事先测定线光源与狭缝是否严格平行，而反过来由条纹的清晰度来判断两者的平行程度，是相当灵敏的方法。

如果线光源与单缝垂直，则由于线光源中一系列非相干点源所对应的各套衍射斑都排列在与单缝垂直的同一直线上，非相干叠加结果成为一条垂直方向的均匀亮纹，衍射效应完全不见了。

4-22. 在白光照明下夫琅禾费衍射的0级斑中心是什么颜色？0级斑外围呈什么颜色？

答：白光是由各种波长的成分按一定比例组成的，经夫琅禾费衍射后，各种波长的0级斑中心仍重合于几何像点，该处仍呈白色。但由衍射反比关系可知，0级斑的半角宽度长波的比短波的大，这就导致0级斑外围有彩色，短波（蓝紫色）偏里，长波（红色）偏外，形成这种不饱和的非光谱色。

4-23. 若将图4-21a所示装置中的单缝换为方孔、三角孔或六角形孔，幕上0级衍射斑中心位置将在什么地方？

答：0级衍射斑的中

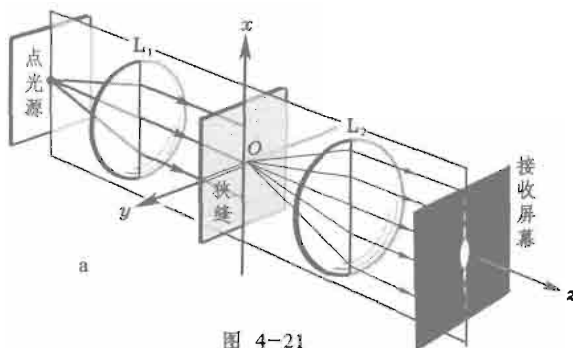


图 4-21

心总是在各衍射线之间光程差为零的位置,即照明点源的几何光学像点处.与衍射屏形状无关.从单缝换为方孔、三角孔或六角形孔,其0级斑的中心位置都不变。

4-24. 讨论夫琅禾费衍射装置有如下变动时,衍射图样的变化(参看图4-21):

- (1) 增大透镜 L_2 的焦距;
- (2) 增大透镜 L_2 的口径;
- (3) 将衍射屏沿光轴 z 方向前后平移;
- (4) 衍射屏作垂直于光轴的移动(不超出入射光束照明范围);
- (5) 衍射屏绕光轴 z 旋转。

在以上哪些情形里零级衍射斑的中心发生移动。

答: (1) 若增大透镜 L_2 的焦距,衍射图样的形状和0级斑的半角宽度都不变;但亮斑的线度及其间距均同时被放大。

(2) 若增大透镜 L_2 的口径,则在接收屏上将增加高级衍射斑的数目,原有衍射斑保持不变。

(3) 若沿光轴 z 正(负)方向平移衍射屏,则高级衍射斑的数目将会减少(增加),其余衍射斑保持不变。

(4) 若将衍射屏作垂直于光轴 z 的上下移动时,则0级斑保持不变,但高级斑的数目可能不再对称分布。如衍射屏沿 x 轴正方向移动,则在该方向上高级斑的数目减少,而与之相反的方向上高级斑的数目增多。

(5) 若衍射屏绕 z 轴旋转,衍射斑跟着旋转。

4-25. 菲涅耳圆孔衍射图样的中心点可能是亮的,也可能是暗的,而夫琅禾费圆孔衍射图样的中心总是亮的。这是为什么?

答: 菲涅耳衍射图样的中心点不是几何光学像点,汇聚到该点的光线没有等光程性。而在夫琅禾费衍射图样的中心点是几何光学像点,汇聚到该点的光线是等光程的,故中心点总是亮的。

4-26. 讨论下列日常生活中的衍射现象:

(1) 假如人眼的可见光波段不是 $0.55\mu\text{m}$ 左右,而是移到毫米波段,而人眼的瞳孔仍保持 4mm 左右的孔径,那么,人们所看到的外部世界将是一

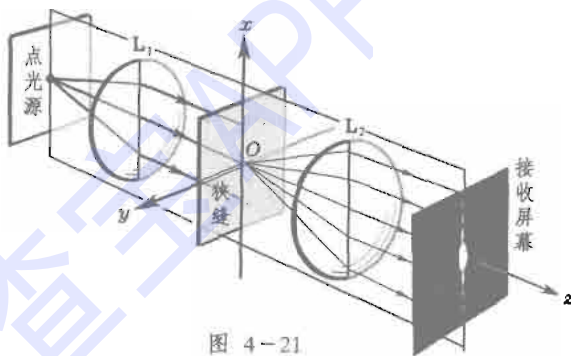


图 4-21

幅什么景象?

(2) 人体的线度是米的数量级,这数值恰与人耳的可听声波波长相近。假想人耳的可听声波波长移至毫米量级,外部世界给予我们的听觉形象将是什么状况?

答:(1) 由于衍射效应的限制,人眼的最小分辨角 $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$ (D 为瞳孔直径)。若 $\lambda = 10^{-3}\text{m}$, 与 D 同数量级,则 $\Delta\theta$ 为 1rad (几十度) 的数量级,已经不能成像了。

(2) 人耳不是靠声波成像的,不怕衍射效应。与之相反,不希望声音只沿直线传播。否则声音连与人体自身大小的障碍物都绕不过,在日常生活中会感到很不方便。

4-27. 蝙蝠在飞行时是利用超声波来探测前面的障碍物的,它们为什么不用对人类来说是可闻的声波?

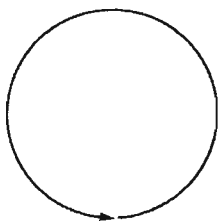
答:蝙蝠是靠声波来判断障碍物的,使用的波长必须远小于障碍物的尺度。人类可闻声波波长是米的数量级,比蝙蝠要探测的障碍物的尺度大得多,故不能用。

4-28. 为什么 $d\sin\theta = k\lambda$ 是缝间干涉因子的主极大条件,而 $a\sin\theta = k\lambda$ 却是单缝衍射的暗纹条件?

答:缝间干涉因子的主极大条件是一系列离散次波源之间的干涉,相邻次波源发出的光线之间的光程差为 λ 的整数 k 倍,矢量图如右图 a 所示,所有矢量都是同相位的,它们沿一直线排列,叠加成极大值。单缝衍射的暗纹条件是一系列光程从 0 连续变到 $k\lambda$ 的光线叠加,矢量图如右图 b 所示,所有矢量排成 k 周的封闭圆圈,叠加成 0。



a 多缝间干涉主极大条件



b 单缝衍射暗纹条件

4-29. 设缝宽 a 与缝间距离 d 之比 $a/d = m/n$ (不可简约的分数),讨论缺级情况。 $a/d = 1$ 的情况应怎样理解?

答: $a/d = m/n$ 时缝间干涉因子的第 n 级主极大与单缝衍射因子的第 m 级 0 点重合,使所有级数为 n 的整数倍的主极大缺失。 $a/d = 1$ 相当于没有遮光屏,此时缝间干涉因子的所有 $k \neq 0$ 的主极大缺失,而 $k = 0$ 的主极大就是自由传播时光源的像点。

4-30. 多缝衍射屏有缝宽 a 、缝距 d 、缝数 N 等三个结构参数,试分别讨论每一个参数的变化是如何影响主极大的位置、主极大的半角宽度和主

极大的强度的。

答：(1) 主极大的位置(角方位)由下式决定：

$$\sin\lambda/\theta_k = k\lambda/d,$$

k 取所有整数值。它仅由缝距 d 决定, 与缝宽 a 、缝数 N 无关。 d 愈小, 各级主极大所对应的衍射角愈大, 相邻主极大间的角间隔也愈大。

(2) 主极大的半角宽度为

$$\Delta\theta = \lambda/Nd,$$

它与 Nd (即多缝衍射屏的总有效长度) 成反比, 与缝宽 a 无关。

(3) 主极大的强度是单缝该方向强度的 N^2 倍。由于主极大的强度要受到单缝衍射因子的调制, 而单缝衍射 0 级斑的半角宽度与缝宽 a 成反比, 所以 a 愈大, 高级主极大的相对强度愈大。此外, 当 $a/d = m/n$ 是一不可简约的分数时, 级数 k 是 n 的整数倍的主极大缺失。

4-31. N 缝衍射装置中入射光能流比单缝大 N 倍, 而主极大却大 N^2 倍, 这违反能量守恒律吗?

答：缝数 N 愈大, 主极大的锐度愈大, 即能量的方向性愈强。虽然主极大的峰值强度增加为单缝的 N^2 倍, 而其半角宽度与 N 成反比, 仍使输出的总能流为单缝的 N 倍。 N 大使能流更加在方向上集中罢了, 并不违反能量守恒律。

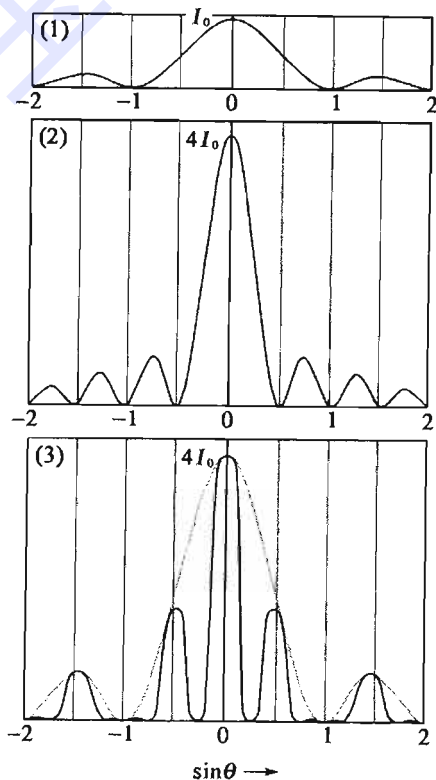
4-32. 画出下列三种情况的夫琅禾费衍射强度曲线, 并比较它们的特点:

- (1) 宽度为 a 的单缝;
- (2) 宽度为 $2a$ 的单缝;
- (3) 宽度为 a 、间距 $d=2a$ 的双缝。

答：三种情况的夫琅禾费衍射强度曲线如右。

(2) 与 (1) 相比单缝的宽度大了一倍, 故振幅大了一倍, 强度大 4 倍, 而条纹的角宽度减到一半。

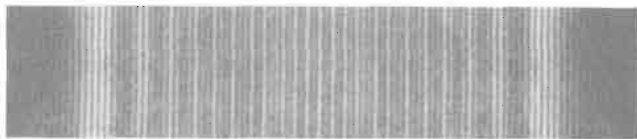
(3) 与 (1) 单缝宽度一样, 故单缝衍射因子角宽度一样。(3) 与 (2) 缝的总宽度一样, 故主极大的



强度一样,皆为情形(1)的4倍。

4-33. 在第三章图3-9b、图3-10b、图3-11b所示的非涅耳双镜、双棱镜和劳埃德镜的干涉条纹的照片中可以看到各级条纹强度不等,它们按一定的规律起伏。试解释这类现象。

答: 在非涅耳双棱镜实验中,每个棱镜都是一个衍射单元,干涉条纹是两个棱镜的衍射波相干叠加的结果。



b 菲涅耳双棱镜的干涉条纹

图3-10

因此,干涉条纹的强度必然要受到单元衍射因子的调制,呈现出按单元衍射强度变化曲线规律的起伏。图3-10b中的干涉图样是受左右对称的一对直边衍射因子调制的。其它双像干涉系统中,干涉条纹的强度起伏都或多或少有与非涅耳双棱镜实验相类似的现象。

4-34. 衍射屏上有大量缝宽 a 相同、但间距 d 作无规分布的缝,它的夫琅禾费衍射图样该是什么样的?

答: 缝宽 a 相同,则单缝衍射因子相同。间距 d 无规,使缝间干涉时相位差 δ 无规,若缝数 N 很大,则 δ 的各种可能取值的概率是相等的,因此缝间的所有干涉项互相抵消,叠加的结果与非相干情形叠加相同,即强度叠加。所以最后形成的衍射图样就是单缝衍射图样,只是除了几何像点外强度处处大了 N 倍。

4-35. 圆孔的夫琅禾费衍射强度分布函数由(4.49)式给出。当衍射屏上有很数目(N 个)孔径相同但位置无规分布的圆孔时,衍射强度分布的函数表达式为何?

答: 与上题同理,衍射强度分布的函数表达式是(4.49)式的 N 倍:

$$I(\theta) = NI_0 \left[\frac{2J_1(x)}{x} \right]^2,$$

式中 $x = 2\pi a/\lambda$, I_0 是单孔的中心强度。

4-36. 在玻璃板上撒上大量无规分布的不透明球形颗粒。设颗粒半径相同,求衍射强度分布的函数表达式,由此启发,你能想到一种测定颗粒半径和密度的方法吗?

答: 根据巴比涅原理,除0级衍射斑的中心点外,圆屏及与之互补的圆孔的夫琅禾费衍射场的强度分布相同。故本题的衍射屏的强度分布函数与上题相同。这表明,衍射场的强度处处(除0级中心点外)与球形颗粒总

数 N 成正比。由此我们可通过夫琅禾费衍射场强度的测量而测定衍屏上的颗粒密度。不过要求颗粒大小相同, 且在被测量的面积上颗粒总数必须足够多, 否则难以保证强度与颗粒数目的线性关系。

由于大量圆屏与单个圆屏的衍射图样是相同的, 我们可以通过测量整个衍射屏的夫琅禾费衍射图样的 0 级斑半角宽 $\Delta\theta$ 来测定圆球颗粒直径 d :

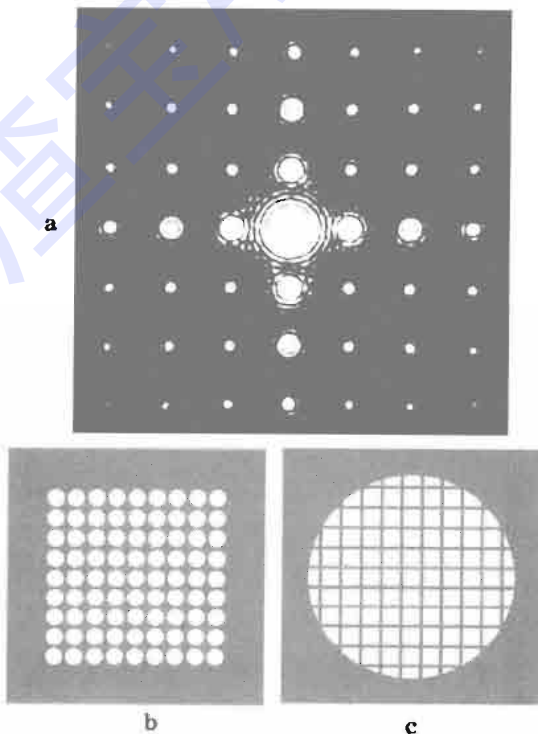
$$\Delta\theta = \frac{1.22\lambda}{d}$$

4 - 37. 在太阳或月亮的周围有时出现彩色晕圈, 你能解释这种现象吗?

答: 在太阳(或月亮)周围出现的彩色晕圈叫日晕(或月晕), 这是一种光的衍射花样。当高空的气温比地面低时, 天空上常常有层薄雾或薄云, 由小水滴或小冰晶组成。当阳光或月光照射在这些小颗粒上时, 就产生衍射光环。由于 0 级斑的半角宽 $\Delta\theta$ 正比于光波长 λ , 于是便呈现紫光在里、红光在外的彩色光环。人们把这种晕圈叫做风圈, 因为它常常预示着大风或大雨的到来。

4 - 38. 本题图 a 所示为一夫琅禾费衍射图样, 你能判断产生这图样的衍射屏是图 b 还是图 c 吗?

答: 产生这图样的衍射屏是图 c。在这里单孔衍射因子是小方孔衍射函数(见书上图 4 - 4b), 它决定了衍射图样 a 的总体结构; 其孔间干涉因子依赖于外部窗口, 大体上是大圆孔的衍射函数(见书上图 4 - 4d), 它决定了衍射图样 a 里各衍射斑的局部结构。总振幅分布是单孔衍射因子和孔间干涉因子的乘积。



4 - 39. 正入射时单缝衍射 0 级与缝间干涉 0 级重合, 斜入射能将两个 0 级分离吗?

思考题 4 - 38

答：斜入射时单缝衍射 0 级和缝间干涉 0 级都在衍射角等于入射光倾角的方位(即几何光学像点的位置)上,两个零级不能分离。为使上述两个 0 级分离,必须采用闪耀光栅。利用振幅型黑白光栅,不论怎样改变入射方式,均不能使两个 0 级分离。

4 - 40. 在光谱仪中为什么人们爱用反射镜(平面,凹面),而不大喜欢用透镜?

答：在光谱仪中采用反射镜而不用透镜,有如下优点:

- (1) 缩短装置长度;
- (2) 避免不必要的色散(即色差),因为光在介质中折射时有色散,而反射总是无色散的;
- (3) 避免光在介质中的吸收,减少能量损失。

4 - 41. 为了提高光栅的色散本领和分辨本领,既要求光栅刻线很窄(即 d 小),又要求刻线总数很多(即 N 大)。怎样理解 N 增大并不能提高光栅的色散本领? 怎样理解 d 减小时虽然扩大两条谱线的角间隔,却不能提高分辨本领?

答：光栅的色散由光栅公式

$$d \sin \theta = k \lambda$$

决定。它来自于单元间干涉因子,只与光栅的空间周期 d 有关,与衍射单元的总数 N 无关。因此,增加缝数 N 并不能提高光栅的色散本领。

当 d 减小时,同级光谱中两条谱线的角间隔增大,不过两条谱线能否被分辨,还要看每条谱线的细锐程度(即谱线半角宽度的大小)。光栅的色散角为

$$\delta \theta = \frac{k \delta \lambda}{d \cos \theta} \propto \frac{1}{d},$$

式中 $\delta \lambda$ 为谱线的波长差。谱线的半角宽度为

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{N d \cos \theta} \propto \frac{1}{d}.$$

由以上两式可见,两条谱线的色散角及每条谱线的半角宽都与 d 成反比, d 减小时,色散角增大,但同时半角宽也增加相同的倍数,从而不能提高分辨本领。

4 - 42. 现有一台光栅光谱仪备有同样大小的三块光栅: 1200 条/mm, 1600 条/mm, 90 条/mm. 试问:

- (1) 当光谱范围在可见光部分,应选用哪块光栅? 为什么?
- (2) 当光谱范围在红外 $3 \mu\text{m} \sim 10 \mu\text{m}$ 波段,应选用哪块光栅,为什么?

答：三块光栅的光栅常数分别为

$$d_1 = \frac{1}{1200/\text{mm}} = 0.83 \mu\text{m},$$

$$d_2 = \frac{1}{600/\text{mm}} = 1.7 \mu\text{m},$$

$$d_3 = \frac{1}{90/\text{mm}} = 11 \mu\text{m}.$$

光栅的色分辨本领 $R=kN$, 三块光栅同样大小, d 愈小, N 愈大, R 也愈大。但由光栅公式 $d \sin \theta = k \lambda$ 知 d 不能小于 λ , 否则连一级光谱都不出现。

(1) 可见光波长范围为 $0.4 \sim 0.8 \mu\text{m}$, d_1 、 d_2 、 d_3 均大于光波长。为获得最大分辨本领, 应选用 1200 条/mm 的光栅。

(2) 对于 $3 \sim 10 \mu\text{m}$ 的波段红外光, 只有 d_3 大于光波长, 90 条/mm 的光栅是唯一的选择。

4-43. (1) 试由 $R=Nk$ 导出光栅分辨本领公式的另一形式:

$$R = D \sin \theta / \lambda,$$

其中 $D=Nd$. $D \sin \theta$ 的物理意义是什么?

(2) 现代光栅的最大宽度 $D \sim 25 \text{ cm}$, 在波长 $0.5 \mu\text{m}$ 附近其极限分辨本领及相应的可分辨的最小波长 $\delta \lambda$ 各多少?

(3) 有人认为光栅光谱仪的分辨本领受照明光束的时间相干性限制, 你觉得这看法有道理吗?

答: (1) 由光栅公式 $d \sin \theta = k \lambda$ 得 $k = d \sin \theta / \lambda$, 代入分辨本领公式 $R=Nk$ 即得

$$R = \frac{d \sin \theta}{\lambda} N = \frac{D \sin \theta}{\lambda},$$

其中 $D=Nd$ 为光栅有效宽度, $D \sin \theta$ 的物理意义是光栅两端边缘上两衍射单元在 k 级方向上的光程差 (见右图)。

(2) 上式中取 $\sin \theta = 1$, 即得极限分辨本领

$$R_{\max} = \frac{D}{\lambda}.$$

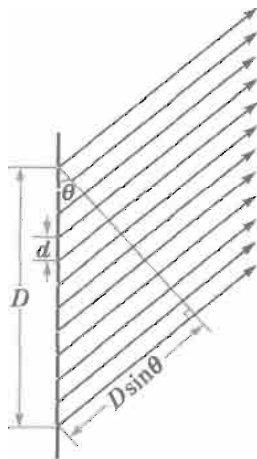
$D=25 \text{ cm}$, $\lambda=0.5 \mu\text{m}$ 代入, 算出 $R_{\max}=5 \times 10^5$. 相应的可分辨最小波长间隔为

$$\delta \lambda = \lambda / R_{\max} = 1.0 \times 10^{-6} \mu\text{m} = 1.0 \times 10^{-2} \text{ \AA}.$$

(3) 光栅是分光仪器, 不同的波长成分出现于谱面上的不同方位, 彼此并不发生叠加关系。凡有这类“选频”效应, 均不必考虑相干长度的影响。

4-44. 导出光栅色散本领公式的另一形式

$$D_\theta = \tan \theta / \lambda.$$



答: 根据光栅公式 $d \sin \theta = k \lambda$ 可得 $k = d \sin \theta / \lambda$, 代入光栅分辨本领公式 $D_\theta = k / d \cos \theta$ 即得

$$D_\theta = \tan \theta / \lambda.$$

4-45. 导出棱镜光谱仪色散本领的公式(4.82)。

答: 棱镜光谱仪工作在最小偏向角 δ_{\min} 的位置。令棱镜的棱角为 α , 则按第一章(1.23)式, 有

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{或} \quad n \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2},$$

于是

$$\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}.$$

第二章(2.75)式给出的角色散本领公式可化为

$$D_\theta = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}} \frac{dn}{d\lambda}, \quad (1)$$

最小偏向角发生于左右对称的时候, 如右图所示, δ_{\min} 的分角线 AF 与 α 的分角线 AD 垂直, 于是 β 是 $\frac{\alpha + \delta_{\min}}{2}$ 的余角,

$$\cos \frac{\alpha + \delta_{\min}}{2} = \sin \beta.$$

而

$$2l \sin \frac{\alpha}{2} = b, \quad l \sin \beta = a,$$

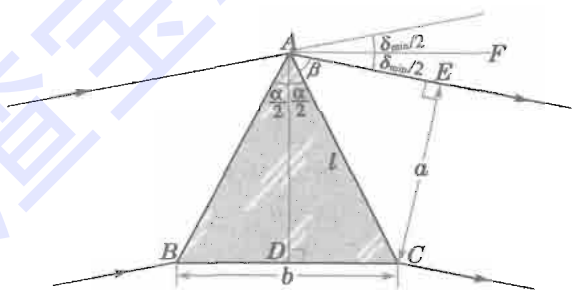
代入①式即得

$$D_\theta = \frac{b}{a} \frac{dn}{d\lambda}, \quad (2)$$

此即(4.82)式。

4-46. 色散型光谱仪加上出射狭缝, 就成为一台单色仪。由光栅光谱仪做成的单色仪, 其输出光束的单色性好坏由什么因素决定? 怎样才算充分利用了光栅元件的分辨本领? 增大光栅的宽度 $D = Nd$, 能改善输出光束的单色性吗?

答: 单色仪单色性的好坏由其色分辨本领决定: 色分辨本领愈高, 可能获得输出光束的单色性愈高。对光栅光谱仪来说, 要充分利用光栅的色分辨本领, 则应使输出狭缝的宽度与谱线的半角度相匹配, 以狭缝宽度与谱线半角宽所对应的线距离相等为宜。根据光栅的色分辨本领公式 $R = kN$



可知, 增大光栅宽度 $D = Nd$ 时, 在光栅常数 d 不变的情况下, 必然增加 N , 从而提高了色分辨本领 R , 这对改善输出光束的单色性是有利的。

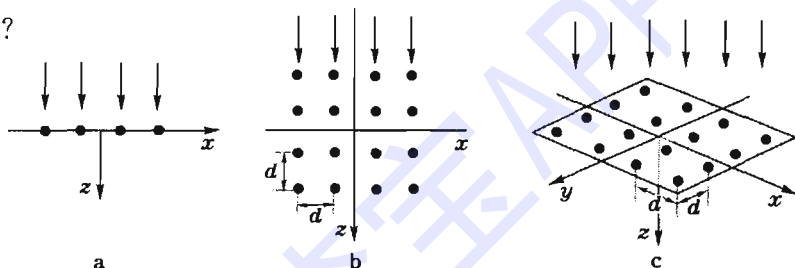
4-47. 分别就本题图 a、b 两种光栅模型分析 xz 平面内夫琅禾费衍射主极大条件, 并回答下列问题:

(1) 设入射波长连续分布, 光栅 a、b 对产生极大的波长有无限制?

(2) 设入射波长满足 $d = 10\lambda$, 光栅 a 中衍射极大共有几级? 哪些能在光栅 b 中保留下来?

(3) 设光栅 b 中入射波长连续, 试求主极大衍射角 θ 从 90° 往下的任意三个值。

(4) 如果衍射单元是在 xy 平面内的点阵(图 c), 试分析衍射线平行于 xz 平面的夫琅禾费衍射的主极大条件, 这种情形与上述 a 或 b 中的哪一种相似?



思考题 4-47

答: (1) 光栅 a 在衍射角为 θ 时相邻衍射线之间的光程差为 $\Delta L = d \sin \theta$ (右图 a), 产生极大的条件为

$$d \sin \theta = k_1 \lambda. \quad (1)$$

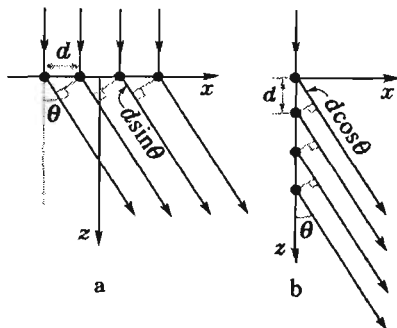
光栅 b 除了同行原子之间干涉应满足 ① 式外, 行间还要满足一定条件。在衍射角为 θ 时邻行衍射线之间的光程差为 $\Delta L = d \cos \theta$ (右图 b), 产生极大的条件为

$$d \cos \theta = k_2 \lambda. \quad (2)$$

对于光栅 a 产生主极大只需满足一个条件, 对波长的唯一限制是 $\lambda < d$. 在此条件下对于任意给定波长 λ 总有一个或多个衍射角 θ 满足条件 ①, 在那个或那些方向上产生主极大。

对于光栅 b 产生主极大需同时满足 ①、② 两个条件, 对波长的限制除 $\lambda < d$ 外, 还有进一步的限制。①、② 两式相除, 有

$$\tan \theta = \frac{k_1}{k_2}. \quad (3)$$



这是对衍射角 θ 在 ①、② 两式之外额外的限制。对于给定波长 λ ，一般它不能与受 ③ 式限制的 θ 同时满足 ①、② 式。若入射波长连续分布，可由 ①、②、③ 式联立求得产生主极大的 θ 和相应的 λ 。

(2) 若 $d=10\lambda$ ，光栅 a 中衍射极大有第 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 级，共 11 级。光栅 b 中只保留第 0、4、6、10 四级。

(3) 按照 ③ 式 $\tan\theta$ 必须是整数比，取 $k_1/k_2 = 2/1, 3/2, 4/3$ ，得

$$\theta_1 = \arctan \frac{2}{1} = 63.43^\circ,$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{3}{2} = 56.31^\circ,$$

$$\theta_3 = \arctan \frac{4}{3} = 53.13^\circ$$

(4) 对于平行于 xz 平面的衍射线，各排原子的夫琅禾费衍射主极大条件是独立的，其条件都是 ① 式，这种情形与 a 相似。

第四章 衍 射

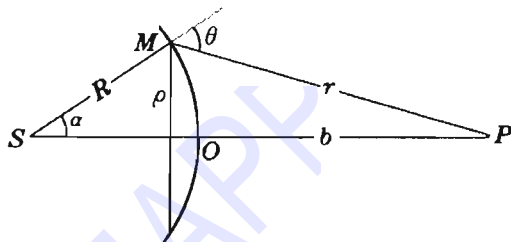
4-1. 在菲涅耳圆孔衍射实验中,圆孔半径 2.0 mm ,光源离圆孔 2.0 m ,波长 $0.5\text{ }\mu\text{m}$,当接收屏幕由很远的地方向圆孔靠近时,求

- (1) 前三次出现中心亮斑(强度极大)的位置;
- (2) 前三次出现中心暗斑(强度极小)的位置。

解: 菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{b} = \frac{k\lambda}{\rho^2}, \quad (1)$$

式中 R 和 b 分别是光源 S 和场点 P 到孔的距离(见右图), ρ 是圆孔的半径。令 ρ_k 代表第 k 级半波带的半径, $\rho_k = \rho$ 表示圆孔中露出 k 个半波带。若给



定的圆孔半径 ρ , 对于不同距离 b 的场点, 圆孔露出不同数目 k 的半波带。

① 式的意义就在于此。

当接收屏幕由很远的地方向圆孔靠近时, b 从 ∞ 减小。由 ① 式, $b = \infty$ 时, k 最小。

$$k = k_{\infty} = \frac{\rho^2}{R\lambda} = \frac{(2.0\text{ mm})^2}{2.0\text{ m} \times 0.5\text{ }\mu\text{m}} = 4. \quad (2)$$

k 随着 b 减小而增大。① 式可改写为

$$k = k_{\infty} + \frac{\rho^2}{b\lambda} = k_{\infty} \left(1 + \frac{R}{b} \right) \quad \text{或} \quad b = \frac{k_{\infty} R}{k - k_{\infty}}. \quad (3)$$

当屏幕由很远处向圆孔靠近时, 最前三次中心亮斑(强度极大)出现于 $k=5$ 、 7 、 9 的时候, 最前三次中心暗斑(强度极小)出现于 $k=6$ 、 8 、 10 的时候。相应的屏幕距离 b 如下:

- (1) 前三次出现中心亮斑的位置

$$k = 5, \quad b = \frac{k_{\infty} R}{k - k_{\infty}} = \frac{4 \times 2.0\text{ m}}{5 - 4} = 8.0\text{ m},$$

$$k = 7, \quad b = \frac{k_{\infty} R}{k - k_{\infty}} = \frac{4 \times 2.0\text{ m}}{7 - 4} = 2.67\text{ m},$$

$$k = 9, \quad b = \frac{k_{\infty} R}{k - k_{\infty}} = \frac{4 \times 2.0\text{ m}}{9 - 4} = 1.6\text{ m}.$$

- (2) 前三次出现中心暗斑的位置

$$k = 6, \quad b = \frac{k_{\infty} R}{k - k_{\infty}} = \frac{4 \times 2.0\text{ m}}{6 - 4} = 4.0\text{ m},$$

$$k = 8, \quad b = \frac{k_{\infty} R}{k - k_{\infty}} = \frac{4 \times 2.0\text{ m}}{8 - 4} = 2.0\text{ m},$$

$$k = 10, b = \frac{k_{\infty} R}{k - k_{\infty}} = \frac{4 \times 2.0 \text{ m}}{10 - 4} = 1.33 \text{ m}.$$

4-2. 在菲涅耳圆孔衍射实验中,光源距离圆孔 1.5 m,波长 $0.63 \mu\text{m}$,接收屏幕与圆孔距离 6.0 m,圆孔半径从 0.5 mm 开始逐渐扩大,求

(1) 最先的两次出现中心亮斑时圆孔的半径;

(2) 最先的两次出现中心暗斑时圆孔的半径。

解: 由菲涅耳圆孔衍射半波带半径公式

$$\rho_k = \sqrt{k} \rho_1, \quad \rho_1 = \sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}} = \sqrt{\frac{1.5 \text{ m} \times 6.0 \text{ m} \times 0.63 \mu\text{m}}{1.5 \text{ m} + 6.0 \text{ m}}} = 0.87 \text{ mm} > 0.5 \text{ mm}.$$

即圆孔半径等于 0.5 mm 时 k 还不到 1. 随着圆孔半径逐渐扩大 $k=1、3$ 时出现头两次中心亮斑, $k=2、4$ 时出现头两次中心暗斑。相应的圆孔的半径 ρ 如下:

(1) 最先的两次出现中心亮斑时圆孔的半径

$$\rho = \rho_1 = 0.87 \text{ mm},$$

$$\rho = \rho_3 = \sqrt{3} \rho_1 = 1.5 \text{ mm}.$$

(2) 最先的两次出现中心暗斑时圆孔的半径

$$\rho = \rho_2 = \sqrt{2} \rho_1 = 1.2 \text{ mm},$$

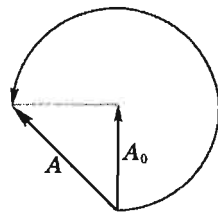
$$\rho = \rho_4 = \sqrt{4} \rho_1 = 1.7 \text{ mm}.$$

4-3. 用直刀口将点光源的波前遮住一半(直边衍射),几何阴影边缘点上的光强比自由传播时小多少倍?

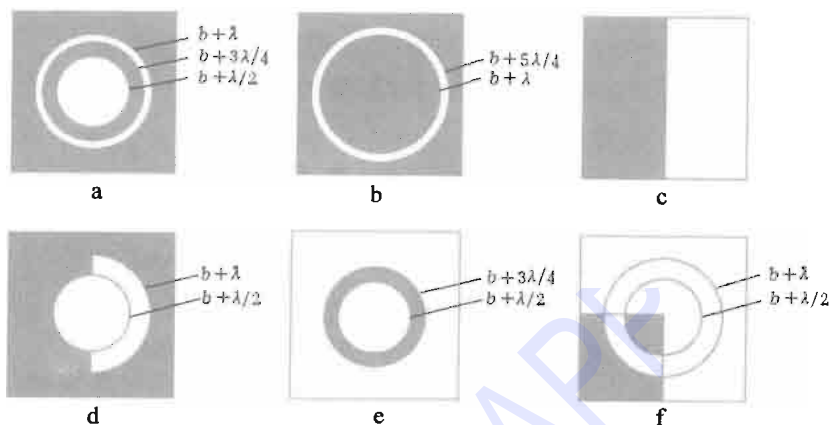
解: 这种情况相当于自由传播时的所有半波带都被遮掉 1/2, 各半环(半波带)对场点贡献的振幅因而减半, 相位关系不变。故此时场点的合成振幅也减半, 强度是自由传播时的 1/4.

4-4. 求圆孔中露出 1.5 个半波带时衍射场中心强度与自由传播时强度之比。

解: 作振动矢量图如右图所示, 可知此时场点振幅为 $A = \sqrt{2}A_0$, 强度为 $I = 2I_0$, 即中心强度为自由传播时的 2 倍。

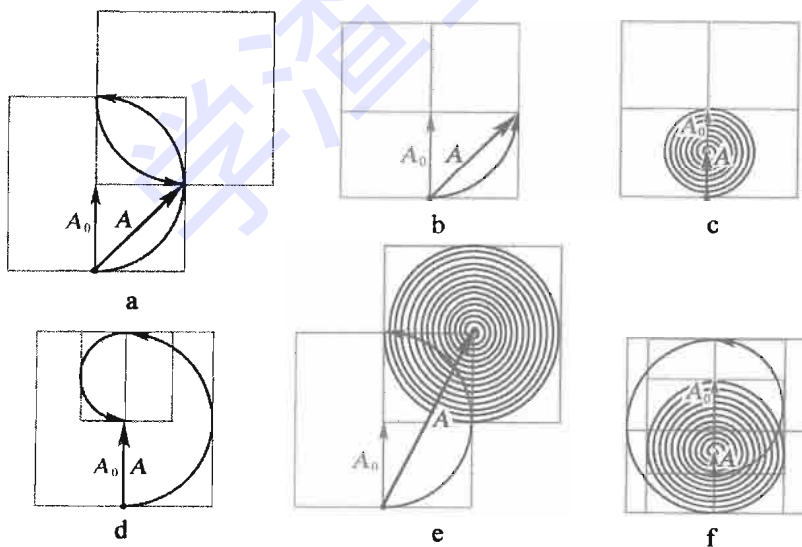


4-5. 用平行光照明衍射屏, 屏对波前作如本题图所示的下几种方式的遮挡, 求轴上场点的光强与自由传播时之比 (图中标出的是该处到场点的光程, 其中 b 是中心到场点的光程)。



习题 4-5

解: 设加衍射屏后轴上场点的振幅为 A , 光强为 $I=A^2$; 自由传播时轴上场点的振幅为 A_0 ; 光强 $I_0=A_0^2$. 分别作振动矢量图如下:



由此求得

- a. $A = \sqrt{2}A_0, I = 2I_0$; b. $A = \sqrt{2}A_0, I = 2I_0$; c. $A = A_0/2, I = I_0/4$;
d. $A = A_0, I = I_0$; e. $A = \sqrt{5}A_0, I = 5I_0$; f. $A = A_0/4, I = I_0/16$.

4-6. 若一个菲涅耳波带片只将前五个偶数半波带遮挡, 其余地方都开放, 求衍射场中心强度与自由传播时之比。

解: 振动矢量图如右, $A = 11A_0$, $I = 121I_0$, 即中心强度为自由传播时的 121 倍。

4-7. 若一个菲涅耳波带片将前 50 个奇数半波带遮挡, 其余地方都开放, 求衍射场中心强度与自由传播时之比。

解: 此时, 场点振幅为

$$A = A_2 + A_4 + \cdots + A_{98} + A_{100}/2 = 49.5A_1 = 99A_0.$$

强度为 $I = 99^2 I_0 = 9801 I_0$, 即中心强度为自由传播时的 9801 倍。

4-8. 菲涅耳波带片第一个半波带的半径 $\rho_1 = 5.0 \text{ mm}$,

(1) 用波长 $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ 的单色平行光照明, 求主焦距;

(2) 若要求主焦距为 25 cm, 需将此波带片缩小多少倍?

解: (1) 根据菲涅耳波带片主焦距公式

$$f = \frac{\rho_1^2}{\lambda} = \frac{(5.0 \text{ mm})^2}{1.06 \mu\text{m}} = 23.6 \text{ m}.$$

(2) 波带片的直径需缩小到

$$\rho_1' = \rho_1 \sqrt{\frac{f'}{f}} = 5.0 \text{ mm} \times \sqrt{\frac{25 \text{ cm}}{23.6 \text{ m}}} = 0.515 \text{ mm},$$

约为原来的 1/10.

4-9. 如何制作一张满足以下要求的波带片:

(1) 它在 400.0 nm 紫光照明下的主焦距为 80 cm;

(2) 主焦点光强是自由传播时的 10^3 倍左右。

解: (1) 先由主焦距的要求算出第一个半波带的半径

$$\rho_1 = \sqrt{f\lambda} = \sqrt{80 \text{ cm} \times 400.0 \text{ nm}} = 0.57 \text{ mm}.$$

然后以 $\rho_k = \sqrt{k} \rho_1$ 的比例刻画出一系列同心环; 再交替地遮断 (或露出) 奇数个半波带, 整个波带片的有效尺寸应由光强要求确定。

(2) 最高半波带数目为

$$k = A/A_0 = \sqrt{I/I_0} = \sqrt{10^3} \approx 32,$$

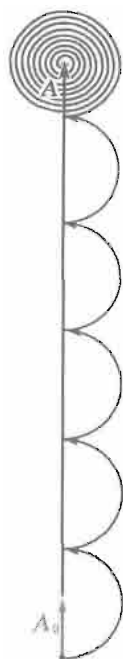
所以波带片包含的有效面积的半径为

$$\rho_{32} = \sqrt{32} \rho_1 = 3.2 \text{ mm}.$$

4-10. 一菲涅耳波带片对 900.0 nm 的红外光主焦距为 30 cm, 改用 632.8 nm 的氦氖激光照明, 主焦距变为多少?

解: 波带片主焦距与光波长成反比, 所以

$$f' = \frac{\lambda}{\lambda'} f = \frac{900.0 \text{ nm}}{632.8 \text{ nm}} \times 30 \text{ cm} = 43 \text{ cm}.$$



4-11. 如本题图, 平行光以 θ_0 角斜入射在宽度为 a 的单缝上, 试证明:

(1) 夫琅禾费衍射的强度公式基本不变(忽略倾斜因子), 即

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2,$$

式中 I_0 为零级中心强度, 只不过 α 的定义与正入射不同:

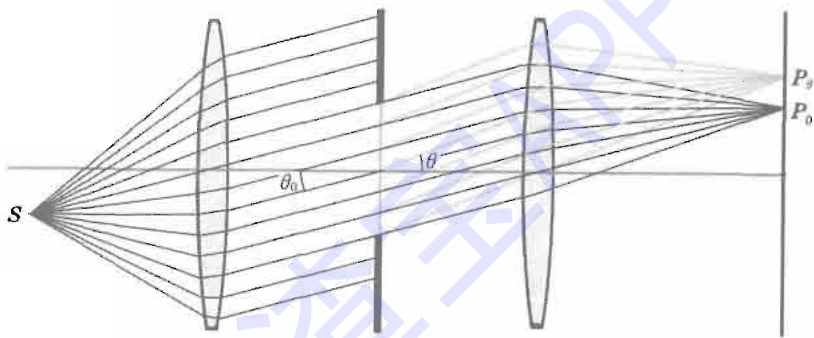
$$\alpha = \frac{a\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0);$$

(2) 零级中心的位置在几何光学像点处;

(3) 零级斑半角宽度为

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{a \cos \theta_0}.$$

(4) 如果衍射屏前后两侧并非同一介质, 情况将怎样?



习题 4-11

证: (1) 与正入射情况相比, 斜入射时光孔面上各点次波源的相位是不同的。因此, 在分析到达场点的各次级扰动之间的相位关系时, 不仅要考虑后场光程差的影响, 而且还要考虑前场光程差的影响。如下图所示, 边缘两点 A 、 B 到场点的相位差为

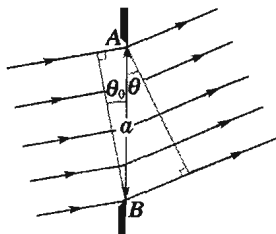
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin \theta_0),$$

其它运算与正入射时相同。于是强度分布函数成为

$$I(\theta) = I(\theta_0) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2,$$

式中

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0).$$



(2) 根据强度分布公式, 零级(极强)出现在 $\alpha=0$ 的地方。此时 $\theta=\theta_0$, 各衍射线(连同入射光线)之间无光程差, 根据费马原理推得的物像等光程性, 这正是几何光学像点的位置。

(3) 令 $\alpha = \pm\pi$, 得到零级两侧第一暗点的衍射角 $\theta_{\pm 1}$ 满足

$$\sin\theta_{\pm 1} - \sin\theta_0 = \lambda/a.$$

零级半角宽度为 $\Delta\theta = \theta_{\pm 1} - \theta_0$,

$$\sin\theta_{\pm 1} - \sin\theta_0 \approx \left[\frac{d\sin\theta}{d\theta} \right]_{\theta=\theta_0} \Delta\theta = \cos\theta_0 \Delta\theta = \frac{\lambda}{a},$$

于是

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a \cos\theta_0}.$$

(4) 如果衍射屏前后两侧为不同介质, 设前场照明空间折射率为 n_1 , 后场衍射空间折射率为 n_2 , 则衍射强度分布函数形式不变, 仍为

$$I(\theta) = I(\theta_0) \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2,$$

但式中

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} (n_2 \sin\theta - n_1 \sin\theta_0).$$

λ 为真空光波长。零级角方位 θ'_0 由 $\alpha=0$ 给出, 它也满足折射定律

$$n_2 \sin\theta'_0 = n_1 \sin\theta_0.$$

零级半角宽度 $\Delta\theta'$ 由下式确定:

$$n_2 \sin(\theta'_0 + \Delta\theta') - n_1 \sin\theta_0 = n_2 [\sin(\theta'_0 + \Delta\theta') - \sin\theta'_0] = \lambda/a,$$

取微分近似, 得

$$\Delta\theta' \approx \frac{\lambda}{n_2 a \cos\theta'_0} = \frac{\lambda}{a \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_0}}.$$

4-12. 估算下列情形光束在介质界面上反射和折射时反射光束和折射光束的衍射发散角。设界面的线度为 1 cm, 光波波长为 $0.6 \mu\text{m}$, 折射率为 1.5,

- (1) 平行光正入射;
- (2) 入射角为 75° ;
- (3) 入射角为 89° (掠入射)。

解: 利用上题所得零级半角宽度公式估计衍射发散角。

$$\text{反射 } \Delta\theta = \frac{\lambda}{a \cos\theta_0}, \quad \text{折射 } \Delta\theta' = \frac{\lambda}{a \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_0}}.$$

$$(1) \theta_0 = 0^\circ \quad \Delta\theta = \frac{0.6 \mu\text{m}}{1 \text{ cm}} = 6 \times 10^{-5} \text{ rad},$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6 \mu\text{m}}{1 \text{ cm} \times \sqrt{1.5^2 - 0}} = 4 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

$$(2) \theta_0 = 75^\circ \quad \Delta\theta = \frac{0.6 \mu\text{m}}{1 \text{ cm} \times \cos 75^\circ} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ rad},$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6 \mu\text{m}}{1 \text{ cm} \times \sqrt{1.5^2 - \sin^2 75^\circ}} = 5.2 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

$$(3) \theta_0 = 89^\circ \quad \Delta\theta = \frac{0.6 \mu\text{m}}{1 \text{ cm} \times \cos 89^\circ} = 3.4 \times 10^{-3} \text{ rad},$$

$$\Delta\theta' = \frac{0.6 \mu\text{m}}{1 \text{ cm} \times \sqrt{1.5^2 - \sin^2 89^\circ}} = 5.4 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

4-13. 试用巴比涅原理证明:互补的衍射屏产生的夫琅禾费衍射图样相同。

证: 巴比涅原理表明, 即除零级斑中心以外的区域, 互补屏造成的衍射强度分布完全一样。夫琅禾费衍射图样在几何光学像面上, 零级斑中心就是点光源的像, 它则好也是衍射图样的零级主极强的中心。通常衍射测量术中利用的是零级斑中心点以外暗点(暗纹或暗环)的角分布或强度分布, 并不直接关心零级斑中心点的绝对强度。在这个意义下我们可以说互补衍射屏产生的夫琅禾费衍射图样相同。

4-14. 衍射细丝测径仪就是把单缝夫琅禾费衍射装置中的单缝用细丝代替。今测得零级衍射斑的宽度(两个一级暗纹间的距离)为 1 cm, 求细丝的直径。已知光波波长 $0.63 \mu\text{m}$, 透镜焦距 50 cm。

解: 根据上题分析, 细丝夫琅禾费衍射强度分布与其互补的单缝强度分布在像点以外是处处相同的, 故 0 级斑半角宽度取同一个公式

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{2f} = \frac{\lambda}{a}$$

在本题中 a 应看做细丝直径, Δx 为 0 级斑的宽度。由此可算出

$$a = \frac{2f\lambda}{\Delta x} = \frac{2 \times 50 \text{ cm} \times 0.63 \mu\text{m}}{1 \text{ cm}} = 63 \mu\text{m}.$$

4-15. 一对双星的角间隔为 $0.05''$,

(1) 需要多大口径的望远镜才能分辨它们?

(2) 此望远镜的角放大率应设计为多少才比较合理?

解: (1) 取光波长 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$, 根据望远镜的最小分辨角公式 $\Delta\theta = 1.22 \lambda / D$ 算出所需物镜口径

$$D = \frac{1.22 \lambda}{\Delta\theta} = \frac{1.22 \times 0.55 \mu\text{m}}{0.05 \pi / (180 \times 3600)} = 2.8 \text{ m}.$$

(2) 需要将仪器分辨的角间隔放大到人眼可分辨的最小角 $\Delta\theta_e = 1'$, 因此, 与本台望远镜的分辨本领相匹配的视角放大率应为

$$M = \frac{\Delta\theta_e}{\Delta\theta} = \frac{1'}{0.05''} = 1200 \text{ 倍}.$$

4-16. 一台天文望远镜的口径为 2.16 m, 由这一数据你能进一步获得关于它在光学性能方面的哪些知识?

解: 从物镜口径的数据可以初步推算出一台望远镜的以下几方面光学性能:

(1) 望远镜的孔径光阑为物镜。从物镜的口径值可以推算出最小分辨角(取光波长 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$)

$$\delta\theta_{\min} = 1.22\lambda/D = 3.1 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.064''.$$

(2) 望远镜的有效(正常)放大率应设计为使得最小分辨角放大成人眼最小可分辨角。所以这台望远镜的视角放大率的正常值为

$$M = \frac{\delta\theta_e}{\delta\theta_{\min}} = \frac{1'}{0.064''} = 938 \text{ 倍}.$$

(3) 扩大口径不仅可以提高分辨本领,而且可以提高集光能力,即提高观察星体(点源)的主观亮度。根据第二章 8.3 节有关仪器主观亮度的知识可以知道,当实际放大率等于(或大于)正常放大率时,望远镜出瞳口径将等于(或小于)眼瞳直径。此时,被物镜接收的光通量(来自星体)将全部进入眼瞳,主观亮度是自然主观亮度的 M 倍。

实际的天文望远镜一般为反射型望远镜。以上由物镜口径的数据对光学性能的推算也适用于反射型。

4-17. 一台显微镜,已知其 N. A. = 1.32,物镜焦距 $f_o = 1.91 \text{ mm}$,目镜焦距 $f_E = 50 \text{ mm}$,求

(1) 最小分辨距离;

(2) 有效放大率;

(3) 光学筒长。

解: (1) 根据显微镜的最小分辨距离公式(取光波长 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$)

$$\delta y_{\min} = \frac{0.61\lambda}{\text{N. A.}} = \frac{0.61 \times 0.55 \mu\text{m}}{1.32} = 0.25 \mu\text{m}.$$

(2) 显微镜的有效(正常)放大率应使仪器可分辨的最小距离放大为人眼可分辨的最小距离:

$$\delta y_e = s_0 \delta\theta_e = 25 \text{ cm} \times 1' \times \frac{\pi}{180 \times 60} = 72.7 \mu\text{m}.$$

式中 $s_0 = 25 \text{ cm}$ 为明视距离。所以放大率的正常值为

$$M = \frac{\delta y_e}{\delta y_{\min}} = \frac{72.7 \mu\text{m}}{0.25 \mu\text{m}} = 290.$$

(3) 以上对放大率的要求应由镜头焦距的选取和镜头位置的适当安排来实现。根据显微镜视角放大率公式,本题中的光学筒长应取

$$\Delta = \frac{f_E f_o}{s_0} M = \frac{50 \text{ mm} \times 1.91 \text{ mm}}{25 \text{ cm}} \times 290 = 111 \text{ mm}.$$

4-18. 用一架照相机在离地面 200 km 的高空拍摄地面上的物体,如果要求它能分辨地面上相距 1 m 的两点,照相机的镜头至少要多大? 设镜头

的几何像差已很好地消除,感光波长为 400.0 nm 。

解:按题意,要求能分辨的最小角间隔为

$$\delta\theta_{\min} = \frac{1\text{ m}}{200\text{ km}} = 0.5 \times 10^{-5}\text{ rad},$$

该照相机的镜头即为孔径光阑,按其最小分辨角公式为

$$D = \frac{1.22\lambda}{\delta\theta_{\min}} = \frac{1.22 \times 400.0\text{ nm}}{0.5 \times 10^{-5}\text{ rad}} = 9.76\text{ cm}.$$

4-19. 已知地月距离约为 $3.8 \times 10^5\text{ km}$,用口径为 1 m 的天文望远镜能分辨月球表面两点的最小距离是多少?

解:取光波长 $\lambda = 0.55\text{ }\mu\text{m}$,算得

$$\delta\theta_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{1.22 \times 0.55\text{ }\mu\text{m}}{1\text{ m}} = 6.71 \times 10^{-7}\text{ rad},$$

因此月球表面上能被该望远镜分辨的最小距离为

$$\delta y_{\min} = l \delta\theta_{\min} = 3.8 \times 10^5\text{ km} \times 6.71 \times 10^{-7}\text{ rad} = 255\text{ m}.$$

4-20. 已知日地距离约为 $1.5 \times 10^8\text{ km}$,要求分辨太阳表面相距 20 km 的两点,望远镜的口径至少需有多大?

解:按题意,要求能分辨的最小角间隔为

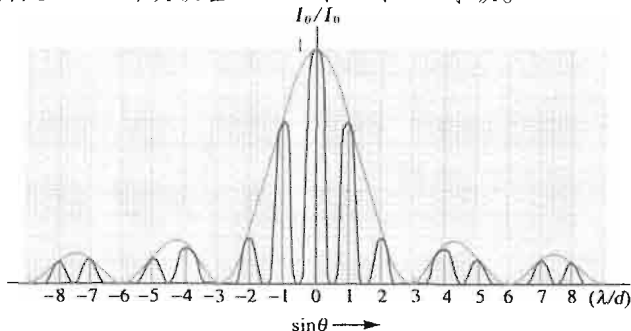
$$\delta\theta_{\min} = \frac{20\text{ km}}{1.5 \times 10^8\text{ km}} = 1.33 \times 10^{-7}\text{ rad},$$

取光波长 $\lambda = 0.55\text{ }\mu\text{m}$,算得该望远镜的口径

$$D = \frac{1.22\lambda}{\delta\theta_{\min}} = \frac{1.22 \times 0.55\text{ }\mu\text{m}}{1.33 \times 10^{-7}\text{ rad}} = 5.05\text{ m}.$$

4-21. 用坐标纸绘制 $N=2$ 、 $d=3a$ 的夫琅禾费衍射强度分布曲线,横坐标取 $\sin\theta$,至少画到第7级主极大,并计算第0级和第1级主极大与单缝主极大之比。

解:作强度分布曲线图如下。作图时注意到 $N=2$,相邻主极强之间不出现次极强;又 $d=3a$,缺级在 $k=\pm 3$ 、 ± 6 、 ± 9 等级。



多缝衍射某级主极强与单缝 0 级(主极强)强度之比为

$$\frac{I_k}{I_{\#}} = N^2 \left(\frac{\sin \alpha_k}{\alpha_k} \right)^2, \quad \text{其中} \quad \alpha_k = \frac{a}{d} k \pi = \frac{k \pi}{3}, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3}.$$

于是

$$\frac{I_1}{I_{\#}} = N^2 \left[\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} \right]^2 = 4 \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right)^2 = 2.74.$$

4-22. 用坐标纸绘制 $N=6$ 、 $d=1.5a$ 的夫琅禾费衍射强度分布曲线, 横坐标取 $\sin \theta$, 至少画到第 4 级主极大, 并计算第 4 级主极大与单缝主极大之比。

解: 作强度分布曲线如右。作图时注意到 $N=6$, 故相邻主极强之间出现 4 个次极强; 又 $d=1.5a$, 缺级现象发生在 $k=\pm 3, \pm 6$ 等级。

多缝衍射某级主极强与单缝主极强之比为

$$\frac{I_k}{I_{\#}} = N^2 \left(\frac{\sin \alpha_k}{\alpha_k} \right)^2,$$

$$\text{其中} \quad \alpha_k = \frac{a}{d} k \pi = \frac{2k\pi}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{8\pi}{3}.$$

于是

$$\frac{I_4}{I_{\#}} = N^2 \left[\frac{\sin(8\pi/3)}{8\pi/3} \right]^2 = 6^2 \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{16\pi} \right)^2 = 0.385.$$

4-23. 导出斜入射时夫琅禾费多缝衍射强度分布公式:

$$I_{\theta} = I_0 \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta'}{\sin \beta'} \right)^2,$$

其中

$$\alpha' = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0),$$

$$\beta' = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0).$$

θ_0 为入射线与光轴的夹角(见本题图)。

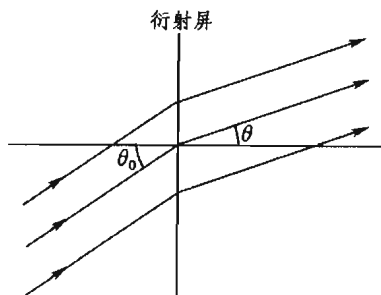
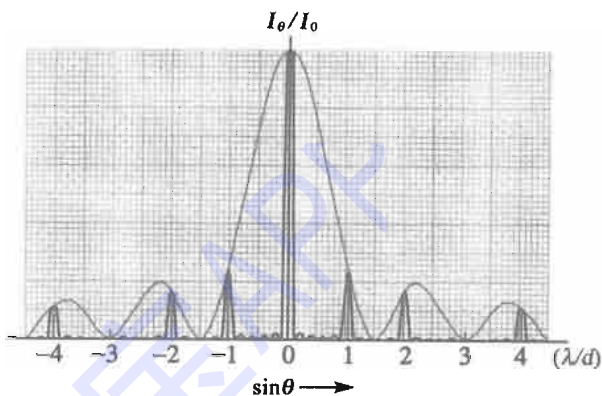
解: 习题 4-11 已证明, 单缝边缘两点 A、B 到场点的相位差为(见右图)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a (\sin \theta - \sin \theta_0),$$

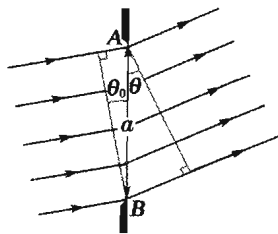
其它运算与正入射时相同。于是单缝衍射因子成为

$$a_{\theta} = a_0 \frac{\sin \alpha'}{\alpha'}, \quad \text{①}$$

式中



习题 4-23



$$\alpha' = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

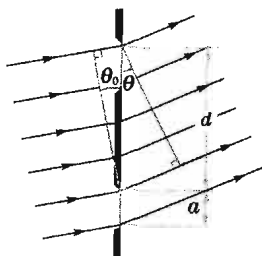
同理, 相邻对应两点到场点的相位差为(见右图)

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}d(\sin \theta - \sin \theta_0),$$

其它运算与正入射时相同。于是缝间干涉因子成为

$$A_\theta = a_\theta \frac{\sin N\beta'}{\sin \beta'}, \quad (2)$$

$$\text{式中 } \beta' = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin \theta - \sin \theta_0).$$



①、② 两式结合, 得

$$A_\theta = a_0 \frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \frac{\sin N\beta'}{\sin \beta'}, \quad (3)$$

衍射强度分布公式为

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin N\beta'}{\sin \beta'} \right)^2. \quad (4)$$

4-24. 导出斜入射时主极大位置公式, 第 k 级主极大的半角宽度公式及缺级情况, 并注意与正入射情况作比较。

解: 斜入射时第 k 级主极大的半角宽度公式与正入射情况时的(4.66)式在推导方法上和最终形式上完全一样:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_k},$$

只不过 θ_k 的位置不同。

缺级情况也与正入射时相同。

4-25. 有三条平行狭缝, 宽度都是 a , 缝距依次为 d 和 $2d$ (见本题图)。证明正入射时其夫琅禾费衍射强度分布公式为

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 [3 + 2(\cos 2\beta + \cos 4\beta + \cos 6\beta)],$$

其中 $\alpha = \pi a \sin \theta / \lambda,$

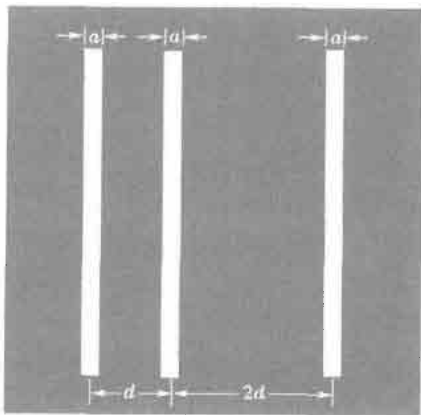
$$\beta = \pi d \sin \theta / \lambda.$$

证: 因三缝等宽, 单缝衍射因子 a_θ 与缝距均匀时一样:

$$a_\theta = a_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

其中 $\alpha = \pi a \sin \theta / \lambda.$

为了求缝间干涉因子, 作矢量图如右下。三束衍射线之间的光程差依次为 δ 和 2δ ($\delta=2\beta$, β 如题中所给出), 取直角坐标 xOy 如图, 代表三缝的



习题 4-25

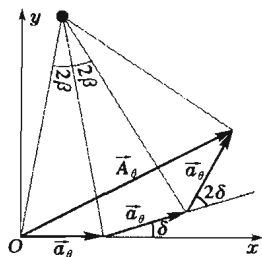
总振幅的矢量 \vec{A}_θ 的 x 、 y 分量分别为

$$A_{\theta x} = a_\theta (1 + \cos \delta + \cos 3\delta),$$

$$A_{\theta y} = a_\theta (\sin \delta + \sin 3\delta).$$

三缝衍射强度分布为

$$\begin{aligned} I_\theta &= A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2 \\ &= a_\theta^2 [(1 + \cos \delta + \cos 3\delta)^2 + (\sin \delta + \sin 3\delta)^2] \\ &= a_\theta^2 [3 + 2(\cos \delta + \cos 2\delta + \cos 3\delta)] \\ &= I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 [3 + 2(\cos \delta + \cos 4\beta + \cos 6\beta)]. \end{aligned}$$



I_0 为单缝衍射零级主极强。

4-26. 导出不等宽双缝的夫琅禾费衍射强度分布公式, 缝宽分别为 a 和 $2a$, 缝距 $d = 3a$ (见本题图)。

解: 标题中缝是不等宽的, 不过我们若把缝宽为 $2a$ 的单缝看成两个宽度为 a 的缝并列, 则本题就化为等宽而不等距的三缝问题, 于是单缝衍射因子就和不等距的多缝问题里的一样了, 都是

$$a_\theta = a_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

其中 $\alpha = \pi a \sin \theta / \lambda$ 。

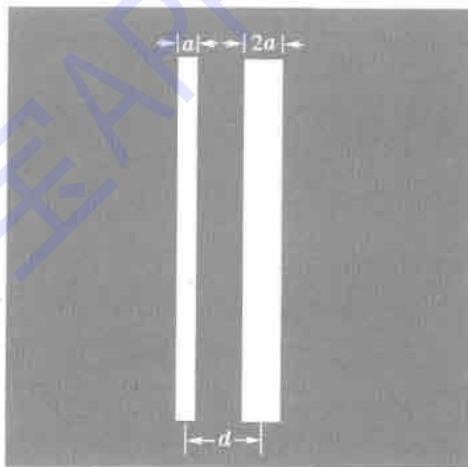
缝距依次为 $5a/2$ 和 a , 三束衍射线之间的光程差依次为 $5\delta/2$ 和 δ ($\delta = 2\alpha$)。为了求缝间干涉因子, 作矢量图如右下。取直角坐标 xOy 如图, 代表三缝的总振幅的矢量 \vec{A}_θ 的 x 、 y 分量分别为

$$A_{\theta x} = a_\theta \left(1 + \cos \frac{5\delta}{2} + \cos \frac{7\delta}{2} \right),$$

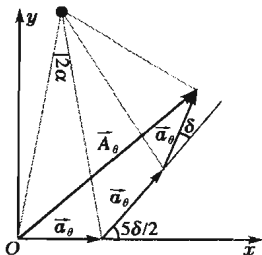
$$A_{\theta y} = a_\theta \left(\sin \frac{5\delta}{2} + \sin \frac{7\delta}{2} \right).$$

三缝衍射强度分布为

$$\begin{aligned} I_\theta &= A_{\theta x}^2 + A_{\theta y}^2 \\ &= a_\theta^2 \left[\left(1 + \cos \frac{5\delta}{2} + \cos \frac{7\delta}{2} \right)^2 + \left(\sin \frac{5\delta}{2} + \sin \frac{7\delta}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$



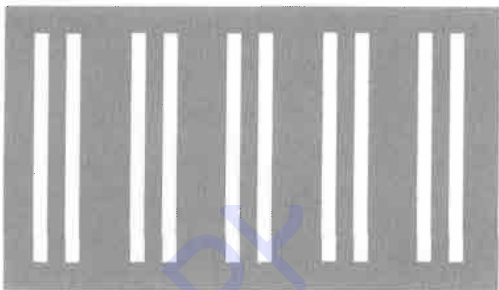
习题 4-26



$$\begin{aligned}
 &= a_\theta^2 \left[3 + 2 \left(\cos \delta + \cos \frac{5\delta}{2} + \cos \frac{7\delta}{2} \right) \right] \\
 &= I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 [3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)].
 \end{aligned}$$

I_0 为单缝衍射零级主极强。

4-27. 有 $2N$ 条平行狭缝, 缝宽相同都是 a , 缝间不透明部分的宽度作周期性变化: a 、 $3a$ 、 a 、 $3a$ 、 \dots (见本题图)。求下列各种情形中的衍射强度分布:



习题 4-27

- (1) 遮住偶数缝;
- (2) 遮住奇数缝;
- (3) 全开放。

解: (1) 遮住偶数缝时, 衍射屏成为一块缝宽为 a , 缝距 $d=6a$ 的 N 缝光栅, 其夫琅禾费衍射强度分布为

$$I_\theta = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}.$$

(2) 遮住奇数缝时, 与遮住偶数缝时相比, 衍射屏内部各次波源到达场点的相位关系完全相同, 因此衍射强度分布也完全相同。

(3) 全开放时, 可以分别把 N 条奇数缝与 N 条偶数缝看做两个相同的衍射单元。于是整个衍射屏就只是由间距 $d=2a$ (即 $\beta=2\alpha$) 的两个衍射单元组成。振幅的单元衍射因子如前:

$$u_\theta = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha},$$

两单元间干涉因子为

$$N_\theta = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cos 2\alpha.$$

所以强度分布为

$$I_\theta = I_0 u_\theta^2 N_\theta^2 = 4 I_0 \cos^2 2\alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin 6N\alpha}{\sin 6\alpha} \right)^2,$$

式中 I_0 为单缝衍射零级主极强。

4-28. 波长为 650.0nm 的红光谱线, 经观测发现它是双线, 如果在 9×10^5 条刻线光栅的第 3 级光谱中刚好能分辨此双线, 求其波长差。

解: 由光栅的色分辨本领公式 $R = \lambda / \delta\lambda = kN$ 得双线间隔

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{kN} = \frac{650.0\text{nm}}{3 \times 9 \times 10^5} = 2.41 \times 10^{-4}\text{nm}.$$

4-29. 若要 50 条/mm 的光栅在第 2 级光谱中能分辨钠双线 λ_1 ,

(589.0 nm) 和 λ_2 (589.6 nm), 光栅宽度应选多少?

解: 由光栅的色分辨本领公式 $R = \lambda / \delta\lambda = kN$ 得光栅单元总数应当满足的条件:

$$N = \frac{\lambda}{k\delta\lambda} = \frac{589.3 \text{ nm}}{2 \times (589.6 - 589.0) \text{ nm}} = 491.$$

光栅尺寸 $D = Nd = 491 \times \frac{1}{50/\text{mm}} = 9.82 \text{ mm} \approx 10 \text{ mm}.$

4-30. 绿光 500.0 nm 正入射在光栅常数为 $2.5 \times 10^{-4} \text{ cm}$, 宽度为 3 cm 的光栅上, 聚光镜的焦距为 50 cm,

- (1) 求第 1 级光谱的线色散;
- (2) 求第 1 级光谱中能分辨的最小波长差;
- (3) 该光栅最多能看到第几级光谱?

解: (1) 光栅的线色散本领

$$\begin{aligned} D_l &= \frac{fk}{d \cos \theta_k} = \frac{fk}{d \sqrt{1 - \sin^2 \theta_k}} = \frac{fk}{d \sqrt{1 - (\lambda/d)^2}} = \frac{fk}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} \\ &= \frac{50 \text{ cm} \times 1}{\sqrt{(2.5 \times 10^{-4} \text{ cm})^2 - (500.0 \text{ nm})^2}} \approx 0.2 \text{ mm/nm}. \end{aligned}$$

(2) 第 1 级光谱中能分辨的最小波长差间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{N} = \frac{\lambda d}{D} = \frac{500.0 \text{ nm} \times 2.5 \times 10^{-4} \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 4.2 \times 10^{-2} \text{ nm}.$$

(3) 由光栅公式 $d \sin \theta_k = k\lambda$ 知最大级别

$$k_{\max} < \frac{d}{\lambda} = \frac{2.5 \times 10^{-4} \text{ cm}}{500.0 \text{ nm}} = 5.$$

即 $k_{\max} = 4$, 此光栅最多能看到 ± 4 级光谱。

4-31. 一束白光正入射在 600 条/mm 的光栅上, 第 1 级可见光谱末端与第 2 级光谱始端之间的角间隔有多少?

解: 白光波长范围为 400.0 ~ 760.0 nm, 由光栅公式 $d \sin \theta_k = k\lambda$ 得白光 1 级光谱末端的衍射角为

$$\theta_1 = \arcsin \frac{\lambda_{\max}}{d} = \arcsin(760.0 \text{ nm} \times 600/\text{mm}) = \arcsin 0.456 = 27^\circ 8'.$$

白光 2 级光谱始端的衍射角为

$$\theta_2 = \arcsin \frac{2\lambda_{\min}}{d} = \arcsin(2 \times 400.0 \text{ nm} \times 600/\text{mm}) = \arcsin 0.48 = 28^\circ 42'.$$

两者角间隔为

$$\theta_2 - \theta_1 = 1^\circ 33'.$$

4-32. 国产 31W I 型 1 米平面光栅摄谱仪的技术数据表如右, 试根据这些数据来计算一下:

物镜焦距	1 050 mm
光栅刻划面积	60 mm × 40 mm
闪耀波长	365.0 nm (1 级)
刻线	1 200 条/mm
色散	0.8 nm/mm
理论分辨率	72 000 (1 级)

(1) 该摄谱仪能分辨的谱线间隔的最小值为多少?

(2) 该摄谱仪的角色散本领为多少[以(')/nm 为单位];

(3) 光栅的闪耀角为多大? 闪耀方向与光栅平面的法线方向成多大角度?

解: (1) 该光栅 1 级光谱在闪耀波长邻近能分辨的最小波长间隔为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{365.0 \text{ nm}}{72000} = 5.1 \times 10^{-3} \text{ nm}.$$

(2) 厂家提供的数据表中“色散”应理解为线色散本领 D_l 的倒数, 从而角色散本领为

$$D_\theta = \frac{D_l}{f} = \frac{1}{0.8 \text{ nm/mm} \times 1050 \text{ mm}} = 1.9 \times 10^{-3} \text{ rad/nm} = 4.1' / \text{nm}.$$

(3) 闪耀角(即压槽劈角)为

$$\theta_b = \arcsin \frac{\lambda}{2d} = \arcsin \left(\frac{1}{2} \times 1200 / \text{mm} \times 365.0 \text{ nm} \right) = 12^\circ 39'.$$

此角度也正是闪耀方向与光栅平面(宏观)法线方向之间的夹角。

4-33. 底边长度为 6 cm 的棱镜, 在光波长为 $0.6 \mu\text{m}$ 附近能分辨的最小波长间隔为多少?(以棱镜材料的色散 $dn/d\lambda$ 值为 $0.4 \times 10^{-4} / \text{nm}$ 来估算。)

解: 根据棱镜的色分辨本领公式

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = b \frac{dn}{d\lambda}$$

得

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{b \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{0.6 \mu\text{m}}{6 \text{ cm} \times 0.4 \times 10^{-4} / \text{nm}} = 0.25 \text{ nm}.$$

4-34. 根据以下数据比较光栅、棱镜、法-珀干涉仪三者的分光性能:

(1) 分辨本领; (2) 色散本领; (3) 自由光谱范围。

光栅宽度 $D = 5 \text{ cm}$; 刻线密度 $1/d = 600 \text{ 条/mm}$; 棱镜底边 $b = 5 \text{ cm}$; 顶角 $\alpha = 60^\circ$; 折射率 $n = 1.51$; 色散率 $dn/d\lambda = 0.6 \times 10^{-4} / \text{nm}$; 法-珀腔长 $h = 5 \text{ cm}$; 反射率 $R = 0.99$ 。

解: (1) 光栅 1 级光谱的色分辨本领为

$$R_{\text{光栅}} = N = D/d = 5 \text{ cm} \times 600/\text{mm} = 3 \times 10^4.$$

棱镜的色分辨本领为

$$R_{\text{棱镜}} = b \frac{dn}{d\lambda} = 5 \text{ cm} \times 0.6 \times 10^{-4}/\text{nm} = 3 \times 10^3.$$

法-珀仪的色分辨本领(取 $\lambda = 550 \text{ nm}$, $n = 1$, $\theta_k \approx 0$)为

$$R_{\text{F-P}} = \frac{2\pi n h \cos \theta_k}{\lambda} \frac{\sqrt{R}}{1-R} = \frac{2\pi \times 1 \times 5 \text{ cm}}{550 \text{ nm}} \frac{\sqrt{0.99}}{1-0.99} = 5.7 \times 10^7.$$

可见 $R_{\text{F-P}} > R_{\text{光栅}} > R_{\text{棱镜}}$.

(2) 光栅 1 级光谱的角色色散本领(取 $\lambda = 550 \text{ nm}$) 为

$$D_{\text{光栅}} = \frac{1}{d \cos \theta_1} = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 \text{ mm}/600)^2 - (550 \text{ nm})^2}} \\ = 6.36 \times 10^{-4} \text{ rad/nm} = 2.2' / \text{nm}.$$

棱镜的角色散本领为

$$D_{\text{棱镜}} = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-n^2 \sin^2(\alpha/2)}} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \times \sin 30^\circ}{\sqrt{1-(1.5)^2 \sin^2 30^\circ}} \times 0.6 \times 10^{-4} / \text{nm} \\ = 9.07 \times 10^{-5} \text{ rad/nm} = 0.31' / \text{nm}.$$

法-珀仪的角色散本领(取 $\lambda = 550 \text{ nm}$, $\theta_k = 10^\circ$)为

$$D_{\text{F-P}} = \frac{k}{2nh \sin \theta_k} = \frac{2nh \cos \theta_k}{2nh \sin \theta_k} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \tan \theta_k} = \frac{1}{550 \text{ nm} \times \tan 10^\circ} \\ = 1.03 \times 10^{-2} \text{ rad/nm} = 35.5' / \text{nm}.$$

可见 $D_{\text{F-P}} > D_{\text{光栅}} > D_{\text{棱镜}}$.

(3) 法-珀仪中心附近区域波长为 λ 的 k 级与波长为 $\lambda + \Delta\lambda$ 的 $k-1$ 级发生重叠的条件为 $k\lambda = (k-1)(\lambda + \Delta\lambda)$,

所以自由光谱范围为 $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{k-1} \approx \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda^2}{2nh}$.

如果取 $\lambda = 550 \text{ nm}$, $n = 1$, 则

$$\Delta\lambda = \frac{(550 \text{ nm})^2}{2 \times 1 \times 5 \text{ cm}} = 3 \times 10^{-3} \text{ nm}.$$

可见法-珀仪的量程(即自由光谱范围)是非常窄的。

光栅可测波长的最大值 λ_{max} 被光栅常数 d 所限制:

$$\lambda_{\text{max}} < \frac{d}{k}.$$

若不至于与 $k+1$ 级光谱发生重叠, 波长的最小值 λ_{min} 应取

$$\lambda_{\text{min}} > \frac{k\lambda_{\text{max}}}{k+1}.$$

本题中 $d = \frac{1}{600} \text{ mm} = 1667 \text{ nm}$, 若利用 1 级光谱, 则自由光谱范围大约是

833~1667nm; 若利用2级光谱, 则自由光谱范围大约是556~833nm, 只覆盖半个可见光波段。但与法-珀仪相比, 光栅的自由光谱范围大多了。

棱镜只有一套光谱, 故无光谱级之间的重叠问题, 自由光谱范围不受限制。当然, 考虑到棱镜材料的吸收, 对于从红外到可见再到紫外等不同波段, 应分别选用不同材料的棱镜。

学渣宝APP