安徽大学 2008–2009 学年第 1 学期
《电动力学》考试试卷(A卷)

(时间120 分钟)

院（系）物理与材料科学 专业______________姓名______________学号______________

题　号	一	二	三	四	总　分
得　分					

一、简答题(每小题4分, 共20分; 无需推导, 不限字数, 建议回答少于50字)

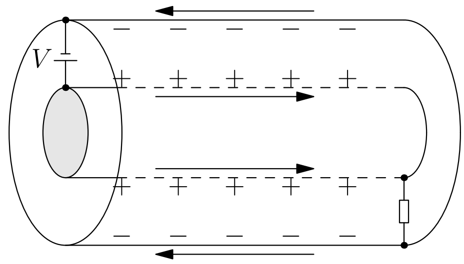
得　分	

1. 简要叙述静电场的唯一性定理.
2. 组成电介质的分子分为极性分子和非极性分子, 这两种类型的电介质在外电场中极化机制分别是怎样的?
3. 简要说明麦克斯韦引入位移电流对安培环路定理进行修正的原因.
4. 直接写出库伦规范和洛伦兹规范的表达式. (如果忘了, 考虑在其他题目完成的情况下详细的推导)
5. 爱因斯坦狭义相对论的两个基本假设是什么?

二、计算题(每小题15分,共15分)

得　分	

1. (15分) 长度为 l 的长同轴电缆, 内部导体的半径为 a, 外部导体的内半径为 b. 忽略同轴电缆的电阻. 现在在一端加一电池, 提供电势差 V, 另一端接一电阻, 如图所示. 这样内部导体均匀带电, 同时有一稳定的电流 I 从左至右. 外面导体单位长度带相反等量电荷, 载有稳定的相反方向电流.



(a) (5分) 计算中间部分的电场强度 $\vec{E}$.

(b) (5分) 计算中间部分的磁感强度 $\vec{B}$.

(c) (5分) 计算中间部分的 Poynting 矢量 $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$.

三、综合题（每小题20分，共20分）

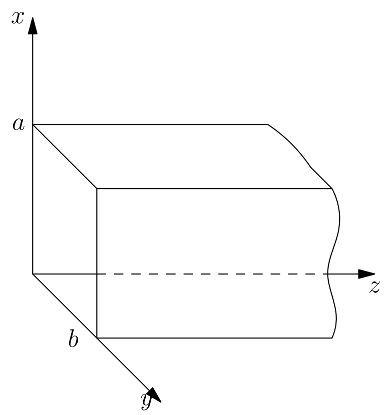
得　分	

1. (20分) 如图所示, 矩形波导管, 管壁看成没有电阻的导体, 中间看成真空. 波导管的长为 a, 宽为 b, $a > b$. 现在讨论其中沿 z 方向传播的时谐 TE 波, 角频率为 ω, 波矢为 k, 真空中的光速记为 c. 磁感强度的 z 分量 B_z 满足微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) B_z(x, y) = 0,$$

和边界条件

$$\left.\frac{\partial B_z}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial B_z}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial B_z}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial B_z}{\partial y}\right|_{y=b} = 0.$$



(a) (12分) 试采用分离变量法计算 B_z 的本征解.

(b) (8分) 计算波矢 k 的本征值和截止频率.

四、证明题(3小题，共45分)

得 分	

1. (15分) 电势 Φ 和磁矢势 $\vec{A}$ 能够确定电场强度 $\vec{E}$ 和磁感强度 $\vec{B}$, 磁感强度 $\vec{B}$ 由 $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$ 确定.

(a) (10分) 从麦克斯韦方程组出发, 证明: 电场强度由下面等式确定

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

(b) (5分) 对于确定的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$, 如果我们选取一组 $(\Phi', \vec{A}')$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

其中 λ 是任意的一标量. 证明: $(\Phi', \vec{A}')$ 和 $(\Phi, \vec{A})$ 对应于相同的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$.

2. (10分) Poynting 的矢量定义为

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H},$$

电磁场的能量密度的定义为

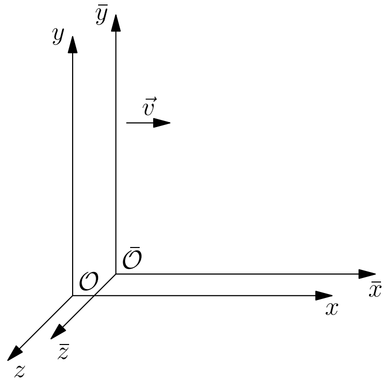
$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2.$$

(a) (5分) 证明: 在真空中, 有下面的等式成立

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}.$$

(b) (5分) 从上面的关系式, 说明 Poynting 矢量的含义.

3. (20分) 一个参考系 $\bar{S}$ 相对于另外一个参考系 S 沿其 x 轴正方向以大小为 v 匀速运动, 如图所示. 此时, 两个参考系中描述同一时空点, 其时空坐标的关系是



$$
\left.\begin{aligned}
\bar{x} &= \gamma(x - vt) \\
\bar{y} &= y \\
\bar{z} &= z \\
\bar{t} &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

其中 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

(a) (5分) 有一质点在参考系 $\bar{S}$ 中以速度 $\bar{u}$ 沿 $\bar{x}$ 轴正方向运动. 证明: 参考系 S 中描述该质点的运动速度 u 为

$$u = \frac{\bar{u} + v}{1 + \bar{u}v/c^2}.$$

(b) (5分) 证明: 这一速度合成公式符合爱因斯坦的光速不变假设.

(c) (5分) 在参考系 S 中两个事件之间的时空间隔定义为

$$I = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

应用变换关系(1)证明: 这一间隔在参考系 $\bar{S}$ 中是不变的.

(d) (5分) 当 $I > 0$ 时, 我们称这样的间隔为类时间隔. 证明: 类时间隔情况下, 某一参考系 S 中不同时刻发生的事件, 无法通过洛伦兹变换找到另一参考系 S', 使得在 S' 中, 两个事件同时发生.

附: 常用的公式和一些参数的定义

- 介质中的 Maxwell 方程组

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

其中

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

- 一些可能用到的数学公式

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\\
\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) &= f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}f)\\
\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\\
\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) &= f(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\times(\vec{\nabla}f)\\
\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})
\end{aligned}
$$

《电动力学》考试参考答案(A)

一、简答题(每小题4分, 共20分; 无需推导, 不限字数, 建议回答少于50字)

1. 在确定的两类边界条件下, 有导体或者没有导体存在, 场可以由微分方程和边界条件唯一确定.
2. 极性分子在外场中, 由原来的混乱状态过渡到不混乱状态, 是转动的过程. 非极性的分子从没有极性, 变得有极性, 是电荷分布被改变的过程.
3. 为了保证随时间变化的情况下, 局部的电荷守恒.
4. 库伦规范是 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, 洛伦兹规范为 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$.
5. 两个假设是: 相对性原理和真空中光速不变原理.

二、计算题(每小题15分,共15分)

1. (15分)
   (a) (5分) 解: 采用高斯定理, 选取半径为 r, 长度 h 的圆筒, 由于两端没有电场通量, 所以总的电场通量为
   $$E2\pi rh=h\lambda/\epsilon_0,$$
   其中 λ 表示单位长度上的电荷数. 得到电场强度之后, 可以计算出电势差
   $$V=\int_a^b\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$
   所以最后得到的电场强度大小为
   $$E=\frac{V}{r\ln\frac{b}{a}}$$
   方向沿径向正方向.
   (b) (5分) 解: 应用安培环路定理, 选取半径为 r 的同心圆, 根据对称性分析, 磁场的环路积分和电流的关系为
   $$B2\pi r=\mu_0 I$$
   这样得到
   $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
   方向沿绕轴的方向, 和内部的电流方向构成右手关系.
   (c) (5分) 解: 由于两个矢量的方向相互垂直, 所以其矢量积的大小为
   $$S=\frac{VI}{2\pi r^2\ln\frac{b}{a}}$$
   方向沿内部的电流方向.

三、综合题（每小题20分，共20分）

1. (20分)

(a) (12分) 解: 采用分离变量法, B_z 可以写成

$$B_z(x,y) = X(x)Y(y)$$

把这个放入微分方程中, 可以得到

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0,$$

考虑到三部分相互独立, 我们引入

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 \tag{2}$$

其本征值满足关系式

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 - k^2 = 0 \tag{3}$$

方程(2)的通解是

$$X(x) = C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x, \quad Y(y) = C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y. \tag{4}$$

考虑边界条件, 我们可以得到

$$D_1 = 0, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad D_2 = 0, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 0, 1, 2, ...$$

那么 B_z 的解为

$$B_z = A \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

其中 A 是任意系数, 根据输入的电磁波的能量确定, n 和 m 不能同时为 0.

(b) (8分) 解: 从方程(3)可以得到

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

或者写成

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}}.$$

要保证波导管中有电磁波传播, 要求 k 为实数, 所以根据方程(3), 有

$$\frac{\omega^2}{c^2} > k_x^2 + k_y^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

那么后面一项最小的可能取值是

$$m = 1, \quad n = 0.$$

此时, 截止频率 ω_c 便是这最小的频率, 低于这个频率的电磁波无法在这一波导管中传播

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a}.$$

四、证明题(3小题，共45分)

1. (15分)

(a) (10分) 从麦克斯韦方程组知

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{A})=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

得到

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

考虑到任意一个标量的梯度是无旋的, 我们引入标量 Φ

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi$$

这样, 当随时间变化的场退化到不随时间变化的情形时, 标量 Φ 是静电场中的电势, 这样电场强度表示为

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.\quad\square$$

(b) (5分) 证明:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+0=\vec{B}$$

并且

$$-\vec{\nabla}\Phi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi+\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\partial\vec{\nabla}\lambda}{\partial t}=-\vec{\nabla}\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{E}.\quad\square$$

2. (10分)

(a) (5分) 证明: 在真空中,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

同时

$$-\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\epsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2)=-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

其中

$$\vec{D}=\epsilon_0\vec{E},\quad\vec{B}=\mu_0\vec{H}$$

所以

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=-\frac{\partial w}{\partial t}.\quad\square$$

(b) (5分) 从上面的关系式可以看出, Poynting 矢量的散度对应于能量密度随时间的减少, 所以 Poynting 矢量是能流密度. 即单位时间内, 穿过单位面积的电磁场能量.

3. (20分)

(a) (5分) 证明: 参考系 $\bar{S}$ 中的速度

$$\bar{u}=\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}=\frac{d[\gamma(x-vt)]}{d[\gamma(t-\frac{v}{c^2}x)]}=\frac{dx-vdt}{dt-\frac{v}{c^2}dx}=\frac{\frac{dx}{dt}-v}{1-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}=\frac{u-v}{1-\frac{v}{c^2}u}$$

改写一下, 得到

$$u=\frac{\bar{u}+v}{1+\bar{u}v/c^2}.\quad\square$$

(b) (5分) 证明: 当 $\bar{u} = c$, 利用上题证明的结论, 可以得到

$$u = \frac{c+v}{1+cv/c^2} = c,$$

即光速不变.

(c) (5分) 证明:

$$\begin{aligned} I' &= c^2(\Delta\bar{t})^2 - (\Delta\bar{x})^2 - (\Delta\bar{y})^2 - (\Delta\bar{z})^2 \\ &= c^2(\gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x))^2 - (\gamma(\Delta x - v\Delta t))^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= (c^2 - v^2)\gamma^2\Delta t^2 + \gamma^2\Delta x^2(\frac{v^2}{c^2} - 1) - 2\gamma^2 u\Delta x\Delta t + 2\gamma^2 u\Delta x\Delta t - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = I. \end{aligned}$$

(d) (5分) 证明: 假设有一个参考系使得$\Delta t' = 0$, 那么$I' < 0$, 这样间隔发生了变化, 破坏了狭义相对论中的间隔不变性. 因此无法找到参考系S', 使得这两个事件同时发生.