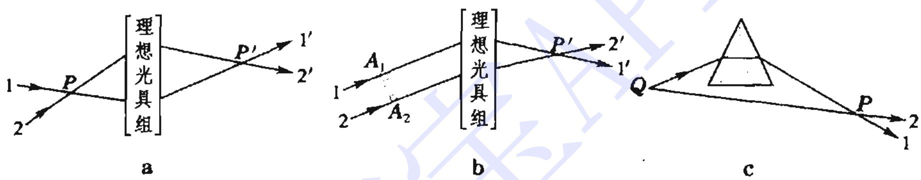
第二章 几何光学成像

2－1. (1) 如本题图a所示，若光线1、2相交于P点，经过一理想光具组后，它们的共轭线$1'$、$2'$是否一定相交？如果有交点，令此交点为P'，两光线在P、P'间的光程是否相等？

(2) 如本题图b所示，若光线1、2平行，经过一理想光具组后，它们的共轭线$1'$、$2'$是否一定相交？如果有交点，令此交点为P'，作A_1A_2垂直于1、2，光程(A_1P')和(A_2P')是否一定相等？

(3) 如本题图c所示，从点光源Q发出两根光线1和2，光线1经棱镜偏折，光线2不经过棱镜，两光线相交于P，在Q、P间两光线的光程是否相等？



思考题2－1

答: (1) 理想光具组必须保证同心光束保持同心性，即相交于一点的入射光线经理想光具组变换后，其出射光线必然也交于唯一的一点。所以图a中交于P点的入射光线1、2之共轭光线$1'$、$2'$必定交于一点。若交点为P'，则P和P'点为物像共轭点，根据物像等光程性原理，两光线在P和P'间光程相等。

(2) 图b中的入射光线1、2平行，相当于交点在无穷远处，令该交点为P；由(1)的分析可知，其共轭光线$1'$、$2'$也必定交于一点。若交点为P'，则P和P'点为物像共轭点。根据物像等光程性原理有光程$(PA_1P')=(PA_2P')$. 又因线段A_1A_2垂直于光线1、2，故A_1、A_2为入射光等相面上的两点，$(PA_1)=(PA_2)$，因此有$(A_1P')=(PA_1P')-(PA_1)=(PA_2P')-(PA_2)=(A_2P')$.

(3) 在图c中光线1在Q、P两点间光程显然大于光线2在Q、P两点间的光程。棱镜不是成像的理想光具组，Q、P不是物像共轭点，其间不存在等光程性。

2－2. 在图2－5a中用通过M点与椭球面相切的球面反射镜代替椭球面反射镜，在下列三种情况下光线QMQ'的光程是极大值、极小值，还是恒定值？

(1) 球面的半径大于椭球在 M 点的曲率半径，

(2) 球面的半径等于椭球在 M 点的曲率半径，

(3) 球面的半径小于椭球在 M 点的曲率半径。

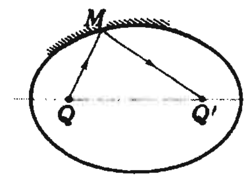
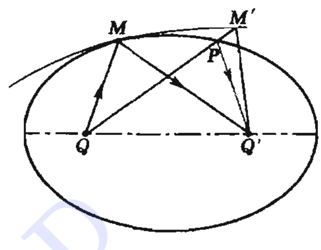


图 2–5 a 椭球面

答：(1) 如右图，M' 点在曲率半径大于椭球面的球面上，P 点在椭球面上。根据椭球的特性知，光程 $(QPQ')=(QMQ')$. 由于



$$\overline{PQ'}<\overline{PM'}+\overline{M'Q'},$$

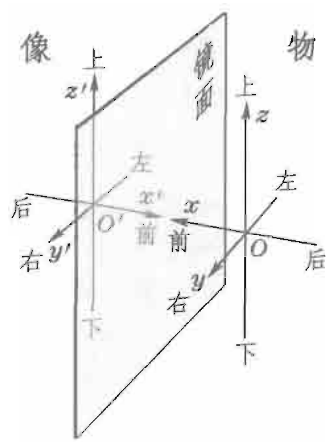
所以光程

$$(QMQ')=(QPQ')<(QM'Q').$$

光线 $QM'Q'$ 是违背反射定律的，即入射光线 QM' 在 M' 点反射后不会通过 Q' 点；而光线 QMQ' 是符合反射定律的，因此，在球面反射镜 MM' 上的实际光线 QMQ' 是光程为极小的情形。

同理可证，在(2)和(3)中，光线 QMQ'的光程分别是恒定值和极大值。

此外，我们还可设想有一在 M 点与椭球外切于左侧而内切于右侧的反射镜，则光程(QMQ') 取拐点值。由此可见，费马原理所讲的光线的实际路径是光程为平稳的路径，平稳光程可以有上述四种基本形态，相应的实际例子都是可以被找到的。



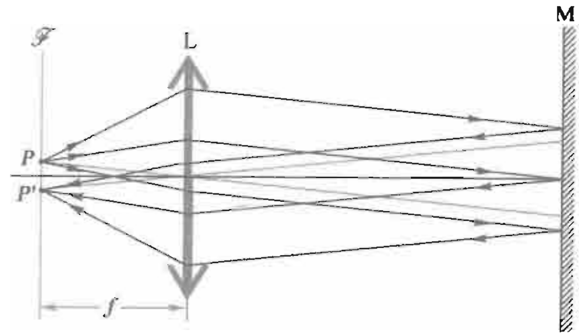
2－3. 为什么平面镜成像左右互易，而上下不颠倒？

答：若一个人面对镜子站着，相对于空间来说，镜中的像上下左右都没有颠倒，而是前后易位(见右图)。不过我们是相对于上下前后来定义左和右的，前后易位，右手坐标系变成了左手坐标系。

2－4. 将物体放在凸透镜的焦面上，透镜后放一块与光轴垂直的平面反射镜，最后的像成在什么地方？其大小和虚实如何？上述装置中平面镜的位置对像有什么影响？你能否据此设计出一种测凸透镜焦距的简便方法？(此法称为自聚焦法。)

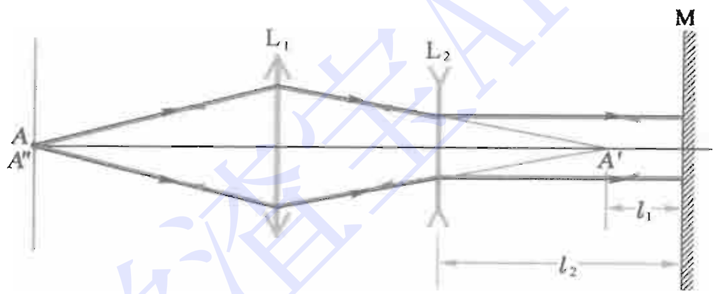
答：如右下图所示，凸透镜 L 前焦面 $\mathscr{F}$上轴外物点 P 发出的发散同心光束，先经透镜 L 后转化为斜入射到平面镜 M 上的平行光束；然后经 M 反射后转化为自右向左的倾斜平行光束；再次通过透镜 L 后必聚于焦面 $\mathscr{F}$上的一点 P'. 由 M 上入射平行光和反射平行光在方向上的对称性可知 P' 必与 P

对于光轴对称。因此，凸透镜焦面$\mathscr{F}$上的物经上述系统后成与原物大小相同的倒立实像于原焦面$\mathscr{F}$上。前后移动平面镜对像的大小、正倒、虚实及位置均无影响。利用此装置即可测定凸透镜的焦距：沿光轴前后挪动透镜L，当平面镜反射回来的光束在物面上成像最清晰时，这时物与透镜距离就等于透镜的焦距f. 这就是所谓“自聚焦法”。



2－5. 上题中测焦距的方法能否用于凹透镜？

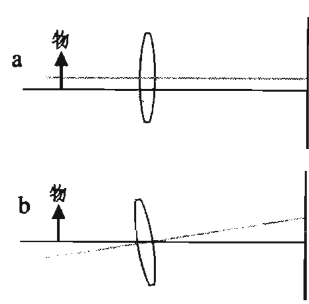
答： 自聚焦法也可用于测凹透镜的焦距，不过要有一个凸透镜作为辅助。



光路如上图所示。起初先撤走待测凹透镜L_2，令物点A通过凸透镜L_1成实像于A'，测出A'与平面镜M的距离l_1. 然后再在像A'与凸透镜L_1之间插入凹透镜L_2. 前后移动L_2，当它与A'的距离刚好等于待测透镜焦距时，经平面镜M反射回来的光束将在物面上成一最清晰的像A''. 测出这时凹透镜L_2与平面镜M的距离l_2，即得凹透镜焦距的大小为

$$|f_2| = l_2 - l_1.$$

2－6. 如本题图，一凸透镜将傍轴小物成像于幕上。保持物和幕不动，(1) 将透镜稍微沿横向平移（图a），(2) 将透镜的光轴稍微转动（图b），讨论幕上像的移动。



思考题 2－6

答： (1) 将凸透镜作横向微小平移，则幕上的像也向同方向平移，像的大小不变，清晰度也不变。设凸透镜横向移动距离为Δy，则

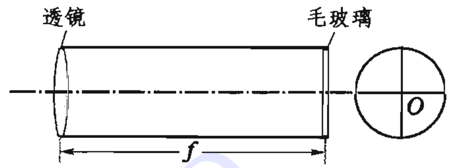
像的移动距离为

$$\Delta y' = (1+|V|)\Delta y,$$

其中 V 为像的横向放大率。

(2) 将光轴作微小转动时,幕上的像不产生移动，大小也不改变。但由于此时小物和幕都不再严格与光轴垂直，像的清晰度有所下降，且因放大率不一致而稍有畸变。

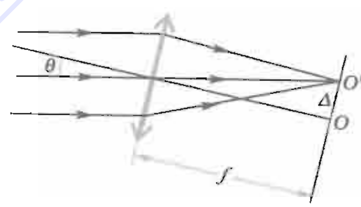
2－7. 在镜筒前端装一凸透镜，后端装一毛玻璃屏，上面刻有十字线,交点 O 在光轴上(见本题图)。筒长为透镜的焦距 f. 用此装置瞄准一个很远的发光点，使成像于屏上 O 点。讨论在下列情况中像点在屏上的移动:(1) 镜作横向平移,(2) 镜筒轴线转过角度 θ.



思考题 2－7

答: 发光点在很远的地方,可视为无穷远，入射到透镜上的光束为平行光束，若像点在 O 点(即焦点)，则表明入射光束平行于光轴。

(1) 当透镜作横向平移时,并未改变入射平行光的相对方向，因此屏上的像点不动,固定在 O 点。

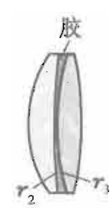


(2) 当镜筒轴线转过 θ 角时(见右图)，入射平行光与光轴成 θ 角,像点 O' 在毛玻璃屏(透镜后焦面)上平移距离 $\Delta = f\theta$.

2－8. 用上题的装置对准很远的景物，使之成像于毛玻璃屏上。若这时把透镜下半部遮住,我们在屏上会看到什么现象?

答: 将透镜遮住一半,屏上仍能得到完整的像，只是由于参加成像的光束截面减小，使像变暗。

2－9. 当黏合两薄透镜时,若相接触的表面曲率半径 r_2、r_3 不吻合(见本题图),复合透镜的焦距公式(2.49) 应如何修改?



思考题 2－9

答: 这里的黏合剂也可看做一个透镜,复合透镜相当于三个透镜的密接,其合成焦距公式为

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_0},$$

式中 f_1 和 f_2 分别为两玻璃透镜的焦距，f_0 是黏合剂透镜的焦距:

$$f_0 = \frac{1}{(n_0-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)},$$

式中 n_0 为黏合剂的折射率。

2－10. 非望远系统中可能有一对以上的主面吗?

答: 轴对称的理想光具组有一条性质:只要有两对共轭面内的横向放大率相等,则横向放大率处处相等,亦即此系统为望远系统。所以非望远系统中没有一对以上放大率等于1的共轭面,即主面。

2－11 一般说来,理想光具组能保持不与光轴垂直的平面内几何图形的相似性吗?

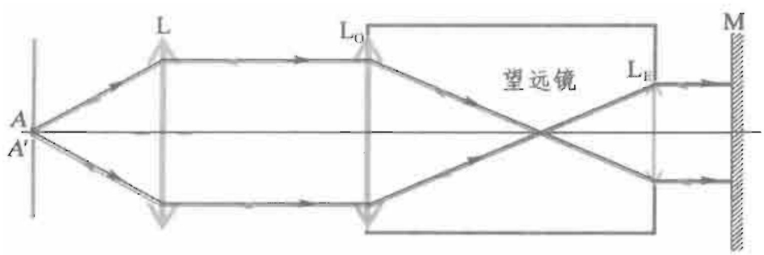
答: 根据共轴理想光具组的性质,在垂直于光轴的同一平面内横向放大率相等,而在垂直于光轴的不同平面内横向放大率一般不等。因此,不与光轴垂直的平面内各点的放大率一般也是不相等的,这就不能保持几何图形的相似性。但对于望远系统来说,不属于同一垂直于光轴平面的横向放大率是相等的,因而不与光轴垂直平面内的几何图形仍能保持相似性。

2－12. 为什么调节显微镜时镜筒作整体移动,而不改变筒长,而调节望远镜时则需要调节目镜相对于物镜的距离?

答: 显微镜的观察对象是近物,其焦深很小,物距的微小改变将非常敏感地影响中间像的位置。因此,用调节目镜的方法使显微镜对不同距离的物聚焦是很困难的。而对镜筒作整体移动,即改变物距,只要作微小的调节就可达到调焦的目的。望远镜所观察的是远处(无穷远)的物,其焦深很大,整体移动镜筒(即物距的微小改变)并不改变中间像的位置,因而不能达到使望远镜调焦的目的。由于望远镜的中间像在目镜和物镜焦点附近,调节目镜,就改变了中间像作为目镜的物的物距,这对望远镜的观测是非常有效的。

2－13. 通常说将望远镜调节到对无穷远聚焦,这是什么意思?如何利用自聚焦法(参考思考题2－4)调节望远镜,使聚焦于无穷远?

答: 望远镜对无穷远聚焦是指,当平行光入射到望远镜时,出射光束仍为平行光。这时的望远镜是一个无焦系统(望远系统)。欲调节望远镜对无



穷远聚焦,可采用自聚焦法。如上图所示,先按思考题2－4的方法,调节凸透镜L达到自聚焦,即使最后的像A'清晰地成于物面。然后在透镜L和

平面镜 M 之间插入望远镜,调节目镜 L_E,仍使最后的像 A' 成在物面上达到最清晰,这样就重新实现自聚焦,望远系统就对无穷远聚焦了。

2-14. 测距显微镜是利用镜筒的平移来测量微小长度的,能够利用望远镜筒的平移来测量远处物体的长度吗?为什么?

答: 测距显微镜是通过测量中间像移过叉丝的距离计算出被测物的长度的。当显微镜的镜筒垂直光轴移动时,被测物通过物镜所成的中间像随之移动。设镜筒横移 Δy,则中间像相对于叉丝横移为 $\Delta y' = V_O \Delta y$(其中 V_O 为物镜的横向放大率)。通过对中间像移过叉丝的全部距离的测量,即可得出被测物的长度。而望远镜所观察的物体在无穷远处,物面上每一个点入射到望远镜的物镜上是不同方向的平行光。镜筒横向移动时并不改变入射平行光的方向,通过物镜所成的中间像并不移动。因此,企图利用横向平移望远镜筒以测量远处物体的长度是不可能的。

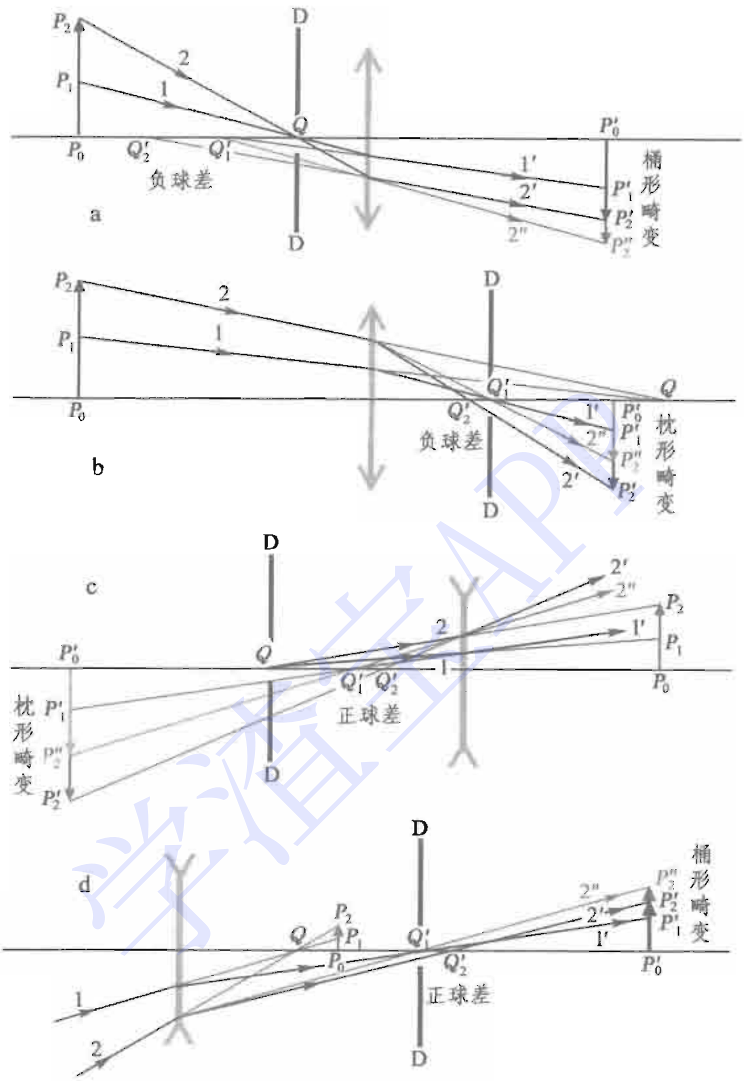
2-15. 为什么用极限法测折射率的装置中(参见第一章习题1-15)需用望远镜观察?为什么在望远镜视场中出现有明显分界线的半明半暗区?

答: 参见第一章习题 1-15 的解答,在极限法测折射率的装置中,从棱镜 AC 面出射光线的折射角有一最小值 i',折射角大于 i' 的折射光线是从 AC 面出射的一系列不同方向的平行光束。接收平行光束,相当于观察无穷远的物体,使用望远镜显然是合适的。一个方向的平行光在望远镜物镜的像方焦面上会聚于一点,形成一个亮点。折射角大于 i' 的所有各组平行光会聚的亮点即组成亮区。由于不存在折射角小于 i' 的平行光束,物镜像方焦面上与此对应的地方即为暗区。于是,在望远镜的视场中出现界限分明的半明半暗区。

2-16. 用光路图说明;对于有负球差的透镜,孔径光阑在前时产生桶形畸变,在后时产生枕形畸变。有正球差的透镜则正好相反(参考图 2-58a、b)。

答: 孔径光阑的位置如下图所示,其中图 a 和 b 分别为有负球差的透镜产生桶形畸变和枕形畸变;c 和 d 分别为有正球差的透镜产生枕形畸变和桶形畸变。物 $P_0P_1P_2$ 成像于 $P_0'P_1'P_2'$.

(1) 图 a 是孔径光阑在有负球差的透镜(凸透镜)之前的情形。光线 1 过近轴物点 P_1 和孔径光阑中心 Q 点,光线 2 过远轴物点 P_2 和 Q 点。这时,Q 点即可视为轴上物点,光线 1 的共轭光线 1′ 交光轴于 Q_1' 点。如果是理想光具组,远轴光线 2 的共轭光线 2″ 也亦交光轴于 Q_1' 点,且 P_2 的共轭点 P_2'' 和 P_1 的共轭点 P_1' 高度合乎同一比例。然而由于透镜有负球差,光线 2 的共轭光线 2′ 与光轴的交点 Q_2' 在 Q_1' 之左,从而光线 2′ 通过的像点 P_2' 在 P_2'' 之上,



即远轴的放大率小于近轴的放大率，产生了桶形畸变。

(2) 图 b 是孔径光阑在有负球差的透镜(凸透镜)之后的情形。光线 1 由近轴物点 P_1 发出，通过孔径光阑中心 Q_1' 点到达像点 P_1'. 设光线 1 的延长线交光轴于 Q 点，作由远轴物点 P_2 发出，且延长线亦通过 Q 点的光线 2. Q 点亦可视为轴上物点，如果是理想光具组，它的共轭点是 Q_1'，即光线 2 的共轭线 2″ 也通过 Q_1'，最后到达的像点 P_2'' 在高度上与 P_1' 合乎比例。然而由于透镜有负球差，光线 2 的共轭光线 2′ 与光轴的交点 Q_2' 在 Q_1' 之左，从而光线 2′ 通过的像点 P_2' 在 P_2'' 之下，即远轴的放大率大于近轴的放大率，产

生了枕形畸变。

(3) 图 c 是孔径光阑在有正球差的透镜(凹透镜)之前的情形。以虚物成虚像的情形为例。由光阑中心 Q 点出发作延长线分别通过虚物点 P_1 和 P_2 的光线 1 和 2. 如果是理想光具组，光线 1 和 2 共轭线 1′ 和 2″ 的延长线应通过 Q 的同一共轭点 Q_1'，且与之对应的像点 P_1'、P_2'' 在高度上与相应的物点合乎同一比例。然而由于透镜有正球差，光线 2 的共轭光线 2′ 与光轴的交点 Q_2' 在 Q_1' 之右，从而光线 2′ 的延长线通过的像点 P_2' 在 P_2'' 之下，即远轴的放大率小于近轴的放大率，产生了枕形畸变。

(4) 图 d 是孔径光阑在有正球差的透镜(凹透镜)之后的情形。以虚物成实像的情形为例。作通过近轴像点 P_1' 和光阑中心 Q_1' 点的像方光线 1′ 的物方共轭线 1，其延长线交光轴于 Q. 作延长线过 Q 的物方光线 2. 如果是理想光具组，光线 2 的共轭线 2″ 的应通过 Q_1' 达到像点 P_2''，且点 P_1'、P_2'' 在高度上与相应的物点合乎同一比例。然而由于透镜有正球差，光线 2 的共轭光线 2′ 与光轴的交点 Q_2' 在 Q_1' 之右，从而光线 2′ 的延长线通过的像点 P_2' 在 P_2'' 之下，即远轴的放大率小于近轴的放大率，产生了桶形畸变。

2 - 17. 在一个大晴天，我们可以用一个放大镜把阳光会聚到焦点上，引起纸片或干木屑的燃烧。这是尽人皆知的事实。相传古代阿基米德曾用长焦距的镜子会聚日光烧毁了停泊在远处的敌舰，多少代来，这个传说一直吸引着发明家的遐想。你能用科学的论据来辨明这个传说的真伪吗?

答: 放大镜把阳光会聚到焦点上，实际上是把太阳成像在透镜焦面上。像的亮度 B 大体上与物(即太阳)的亮度一样，而照度 $E \approx \pi B u_0'^2$，这里 u_0' 是出射孔径角。通常用放大镜引燃纸片或干木屑时，出射孔径角 u_0' 具有 1 rad 的数量级，即能够点火的照度可认为是[参见(2.88)式]

$$E_0 \approx \pi B.$$

设想阿基米德时代能够做的最大聚光镜，半径具有米的数量级，而敌舰的距离具有公里(即千米)的数量级。用这聚光镜聚焦到敌舰上，太阳像的照度只有 $\left(\frac{1}{1000}\right)^2 E_0 \approx 10^{-6} E_0$. 很难设想，这样微弱的照度能够烧毁敌舰。

2 - 18. 当前世界上拟建的最大望远镜物镜(拼合反光镜)的直径为 15 m，你能大致估计出它的放大倍率吗?

答: 可认为望远镜放大率 M 的大小为(参见习题 2 - 47)

$$|M| = \frac{D_0}{D'},$$

式中 D_0 是物镜直径，D' 是出射光瞳直径。若设 D' 为瞳孔直径，按 3 mm 估算，$|M| \approx 15/(3\times10^{-3}) = 5000$ 倍。

第二章　几何光学成像

2－1. 以第一章 §2 例题 2 中所用的光线追迹作图法证明图 2－6 中 Q 和 Q' 是一对共轭点。

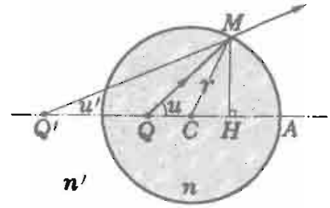
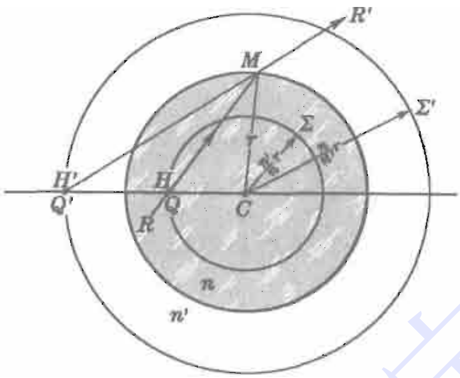


图 2－6

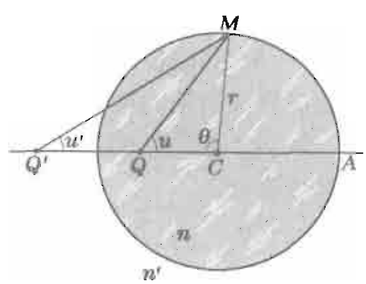
解: 如下图，仿第一章 §1 例题 2 中的作法，分别以 $\frac{n'}{n}r$ 和 $\frac{n}{n'}r$ 为半径作球面 Σ 和 Σ'



(此处与该例题相反，入射线在光密介质内)，作通过 Q 点的入射线 RQM，此光线与 Σ 的交点 H 就是 Q，连 CH 与 Σ' 交于 H'，连 $H'M$ 并延长到 R'，MR' 即折射线，它与 Σ' 的交点 H' 即 Q' 点。以上光线追迹作图的作法就保证了：以任何方向过 Q 点的入射线折射后延长线必然通过 Q' 点，亦即 Q 和 Q' 是一对共轭点。

2－2. 证明(2.4)式。

解: 如右图，



$$\overline{QC}=\frac{n'}{n}r,\quad \overline{Q'C}=\frac{n}{n'}r;$$

$$\overline{QA}=\overline{QC}+\overline{CA}=\left(\frac{n'}{n}+1\right)r=\frac{n'+n}{n}r,$$

$$\overline{Q'A}=\overline{Q'C}+\overline{CA}=\left(\frac{n}{n'}+1\right)r=\frac{n+n'}{n'}r.$$

所以
$$\frac{\overline{Q'A}}{\overline{QA}}=\frac{n}{n'}. \qquad ①$$

由 $\dfrac{\overline{Q'C}}{\overline{CM}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{QC}}=\dfrac{n}{n'}$，　有　$\triangle Q'CM\backsim\triangle MCQ$，　$\dfrac{\overline{Q'M}}{\overline{MQ}}=\dfrac{n}{n'}$.　　②

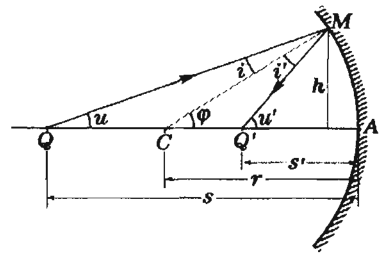
运用正弦定律于 $\triangle MCQ$ 和 $\triangle Q'CM$：

$$\frac{\sin u}{\overline{CM}}=\frac{\sin\theta}{\overline{MQ}},\quad \frac{\sin u'}{\overline{MC}}=\frac{\sin\theta}{\overline{Q'M}};\quad 所以\quad \frac{\sin u}{\sin u'}==\frac{\overline{Q'M}}{\overline{MQ}}. \qquad ③$$

从①、②、③式可知
$$\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{\overline{Q'A}}{\overline{QA}}. \qquad ④$$

④式即(2.4)式。

2－3. 根据反射定律推导球面反射镜的物像距公式(2.23)和焦距公式(2.24)。



解： 如右图所示，设入射角为 i，反射角为 i'，入射光线、反射光线、半径 CM 与光轴的夹角分别为 u、u'、φ，若 Q 点成像于 Q' 点，则 $i=\varphi-u$，$i'=u'-\varphi$. 在傍轴条件下有

$$\varphi\approx\frac{h}{-r},\quad u\approx\frac{h}{s},\quad u'\approx\frac{h}{s'}.$$

又由反射定律 $i=i'$ 得
$$\frac{h}{-r}-\frac{h}{s}=\frac{h}{s'}-\frac{h}{-r}.$$
整理上式即得球面反射镜的物像距公式为
$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}.$$
分别令 $s'\to\infty$，$s=f$ 和 $s\to\infty$，$s'=f'$，球面反射镜的焦距公式为
$$f=f'=-r/2.$$

2－4. 物体放在凹球面反射镜前何处，可产生大小与物体相等的倒立实像？

解： 设物距为 s. 据题意，球面反射镜的横向放大率 $V=-s'/s=-1$，则得像距 $s'=-sV=s$. 再代入反射球面成像公式，解得 $s=-r$. 故物体应放在凹球面反射镜前球心处。

2－5. 凹面镜的半径为 40 cm，物体放在何处成放大两倍的实像？放在何处成放大两倍的虚像？

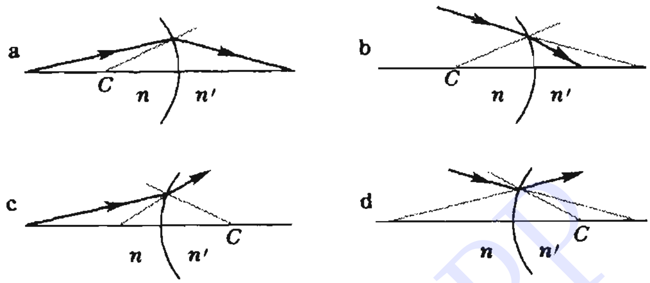
解： 实物形成两倍实像时，球面反射镜的横向放大率 $V_1=-2$；实物形成两倍虚像时 $V_2=+2$. 联立反射镜物像距公式及横向放大率公式
$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r},\quad s'=-sV,$$
解得
$$s=\frac{1-V}{2V}r.$$
按题意，分别以 $r=-40\,\mathrm{cm}$，$V_1=-2$，$V_2=+2$ 代入上式，算出
$$s_1=30\,\mathrm{cm},\quad s_2=10\,\mathrm{cm}.$$
即物体应相应地置于凹面镜前 30 cm 和 10 cm 处。

2－6. 要把球面反射镜前 10 cm 处的灯丝成像于 3 m 处的墙上，镜形应是凸的还是凹的？半径应有多大？这时像放大了多少倍？

解： 以物距 $s=10\,\mathrm{cm}$、像距 $s'=300\,\mathrm{cm}$ 代入球面反射镜物像距公式和横向放大率公式，分别求得球面镜的曲率半径和横向放大率为
$$r=-19.4\,\mathrm{cm},\quad V=-30.$$

这说明，为了满足像距要求，应选用一块凸面镜，此时得到的是一个放大了30倍的倒立的实像。

2－7. 按已约定的正负号法则（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）、（Ⅳ）、（Ⅴ）等，标示出本题各图中的物距 s、像距 s'、曲率半径 r、光线倾角 u、u' 的绝对值。比较各图中折射率 n、n' 的大小，指明各图中物像的虚实。



习题 2－7

解： 物距 s、像距 s'、曲率半径 r、光线倾角 u、u' 的绝对值标示如下图。

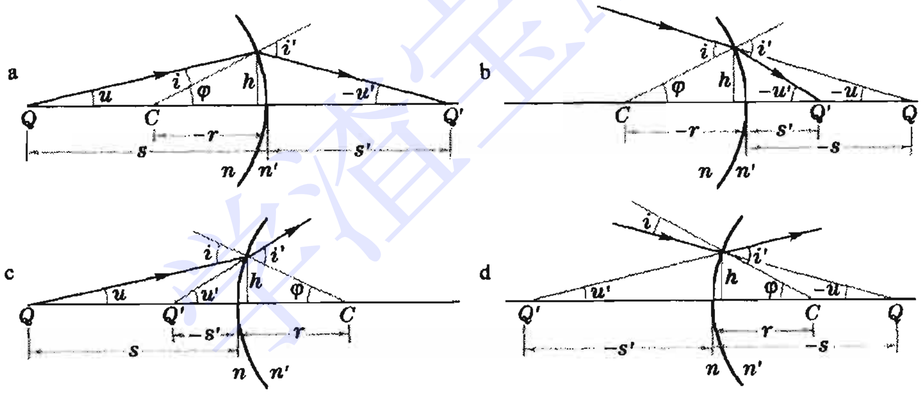


图 a：实物，实像，$n<n'$；　　图 b：虚物，实像，$n<n'$；

图 c：实物，虚像，$n>n'$；　　图 d：虚物，虚像，$n>n'$.

2－8. 分别根据上题各图推导球面折射成像公式(2.19)。

解： 在傍轴条件下折射定律可写成

$$ni\approx n'i'. \qquad ①$$

(1) 上题图 a 情形：$u\approx\dfrac{h}{s}$，　$-u'\approx\dfrac{h}{s'}$，　$\varphi\approx\dfrac{h}{-r}$.

$$i=\varphi-u=h\left(\frac{1}{-r}-\frac{1}{s}\right),\qquad i'=\varphi+(-u')=h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{s'}\right).$$

代入式①得　$nh\left(\dfrac{1}{-r}-\dfrac{1}{s}\right)=n'h\left(\dfrac{1}{-r}+\dfrac{1}{s'}\right)$，　即　$\dfrac{n'}{s'}+\dfrac{n}{s}=\dfrac{n'-n}{r}$.

(2) 上题图 b 情形：　$-u \approx \frac{h}{-s}$，　$-u' \approx \frac{h}{s'}$，　$\varphi \approx \frac{h}{-r}$.

$$i = \varphi + (-u) = h\left(\frac{1}{-r} + \frac{1}{-s}\right), \qquad i' = \varphi + (-u') = h\left(\frac{1}{-r} + \frac{1}{s'}\right).$$

代入式①得　$nh\left(\frac{1}{-r} + \frac{1}{-s}\right) = n'h\left(\frac{1}{-r} + \frac{1}{s'}\right)$，　即　$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$.

(3) 上题图 c 情形：　$u \approx \frac{h}{s}$，　$u' \approx \frac{h}{-s'}$，　$\varphi \approx \frac{h}{r}$.

$$i = \varphi + u = h\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right), \qquad i' = \varphi + u' = h\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{-s'}\right).$$

代入式①得　$nh\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right) = n'h\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{-s'}\right)$，　即　$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$.

(4) 上题图 d 情形：　$-u \approx \frac{h}{-s}$，　$u' \approx \frac{h}{-s'}$，　$\varphi \approx \frac{h}{r}$.

$$i = \varphi - (-u) = h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{-s}\right), \qquad i' = \varphi + u' = h\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{-s'}\right).$$

代入式①得　$nh\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{-s}\right) = n'h\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{-s'}\right)$，　即　$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}$.

可以看出，有了约定的正负号法则(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅳ)、(Ⅴ)等，所有 a、b、c、d 四种情况球面折射成像的物像距公式都可统一表示为

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r}, \qquad ②$$

即书上的(2.19)式。

2－9. 若空气中一均匀球形透明体能将平行光束会聚于其背面的顶点上，此透明体的折射率应等于多少？

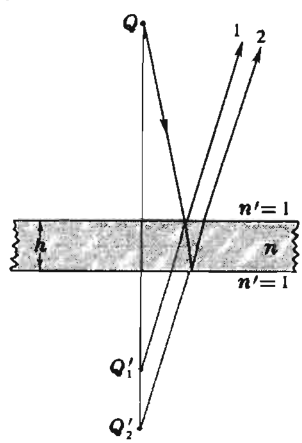
解： 由球面折射成像的焦距公式

$$f' = \frac{n'r}{n'-n} \quad 得 \quad n' = \frac{f'n}{f'-r}.$$

按题意，$f' = 2r$，$n = 1$，代入上式得

$$n' = \frac{2r}{2r-r} = 2.$$

2－10. 如本题图，一平行平面玻璃板的折射率为 n，厚度为 h，点光源 Q 发出的傍轴光束(即接近于正入射的光束)经上表面反射，成像于 Q_1'；而折射线穿过上表面后在下表面反射，再从上表面折射的光束成像于 Q_2'. 证明 Q_1' 与 Q_2' 间的距离为 $2h/n$.



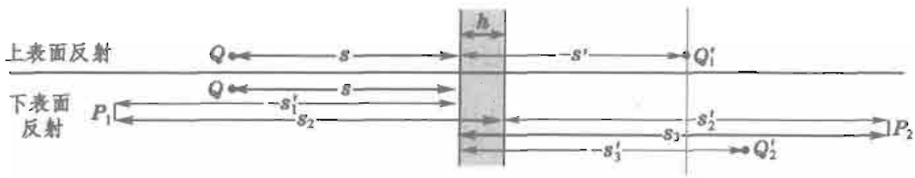
习题 2－10

【提示：把平面看成 $r \to \infty$ 的球面，并利用球面折射公式计算。】

解： 从点光源 Q 发出的傍轴光束经上表面反

射，成像于 Q_1'. 如下图所示，设物距为 s，则像距 $-s'=s$.

从点光源 Q 发出的傍轴光束透过上表面时折射成第一个中间像 P_1（虚



像），物距和像距分别为 s 和 $-s_1'$. P_1 作为实物发出的傍轴光束经下表面反射成第二个中间像 P_2（虚像），物距和像距分别为 s_2 和 $-s_2'$. P_2 作为实物发出的傍轴光束透过上表面时折射成最后的像 Q_2'（虚像），物距和像距分别为 s_3 和 $-s_3'$.

两次透射，用球面折射成像的物像距公式，令其中 $r=\infty$：

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}=0. \qquad ①$$

反射时注意光轴要反向。

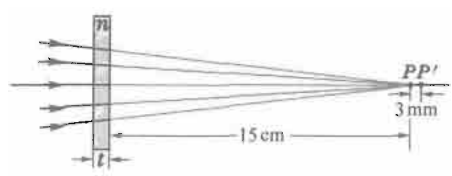
从 Q 到 P_1 第一次透射成像，①式中 n 为 1，n' 为 n，s 为 s，s' 为 s_1'，得 $s_1'=-ns$.

从 P_1 到 P_2 是反射成像，物距 $s_2=ns+h$，像距 $-s_2'=ns+h$.

从 P_2 到 Q_2' 是第二次透射成像，①式中 n 为 n，n' 为 1，s 为 $s_3=ns+2h$，s'为 s_3'，代入①式得　　$s_3'=-s_3/n=-(s+2h/n)$.

所以Q_1'与Q_2'间的距离为　　$-s_3'-(-s')=2h/n$.

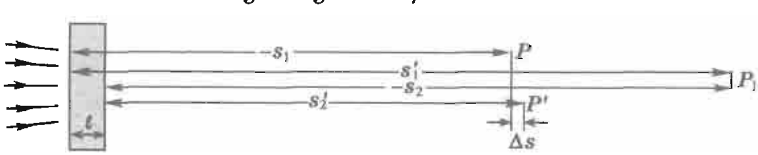
2－11. 如本题图，一会聚光束本来交于 P 点：插入一折射率为 1.50 的平面平行玻璃板后，像点移至 P'. 求玻璃板的厚度 t.



习题 2－11

解： 如下图所示，P 点是虚物，经玻璃板第一表面后成中间像 P_1（实像）。对于第二表面 P_1 是虚物，透射后成最后的像 P'（实像）。两次成像都用球面折射成像的物像距公式，令其中 $r=\infty$：

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}=0. \qquad ①$$



从 P 到 P_1 第一次透射成像，①式中 n 为 1，n' 为 n，s 为 $s_1=-(15\,\text{cm}+t)$，s' 为 s_1'，代入①式得 $s_1'=-ns_1$.

从 P_1 到 P' 是第二次透射成像，①式中 n 为 n，n' 为 1，s 为 $s_2=-s_1'-t$，s' 为 s_2'，代入①式得 $s_2'=-s_2/n=15\,\text{cm}+t-t/n$.

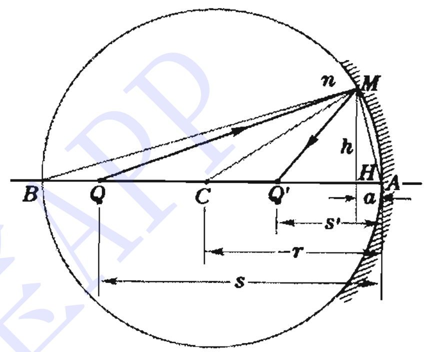
$$\Delta s = s_2'-(-s_1+t) = t(1-1/n),$$

$$t = \frac{nt}{n-1} = \frac{1.50\times 3\,\text{mm}}{1.50-1} = 9\,\text{mm}.$$

2－12. 根据费马原理推导傍轴条件下球面反射成像公式(2.23)。

解： 如右图所示，因直角三角形 $\triangle AMB\backsim\triangle AHM$，故 $h^2=a[2(-r)-a]$，

傍轴条件下光程



$$(QM)=n\sqrt{(s-a)^2+h^2}$$

$$=n\sqrt{(s-a)^2+a[2(s-r)-a]}$$

$$=n\sqrt{s^2-2a(s+r)}\approx ns\left[1-\frac{a(s+r)}{s^2}\right],$$

同理 $(MQ')\approx ns'\left[1-\dfrac{a(s'+r)}{s'^2}\right]$.

$$(QMQ') = ns\left[1-\frac{a(s+r)}{s^2}\right]+ns'\left[1-\frac{a(s'+r)}{s'^2}\right],$$

光程取极值条件：$\dfrac{\mathrm{d}(QMQ')}{\mathrm{d}a} = -\dfrac{n(s+r)}{s}-\dfrac{n(s'+r)}{s'} = 0.$

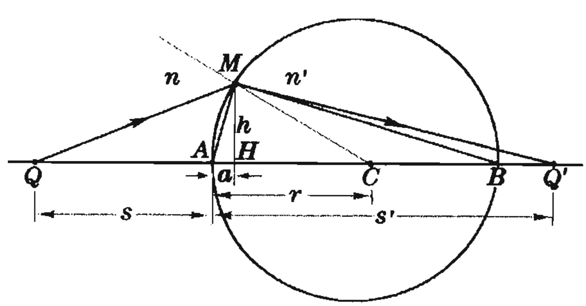
经整理得
$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s} = -\frac{2}{r},$$

此即球面反射成像公式(2.23)。

2－13. 根据费马原理推导傍轴条件下球面折射成像公式(2.19)。

解： 如下图所示，因直角三角形 $\triangle AMB\backsim\triangle AHM$，故

$$h^2=a(2r-a),$$



傍轴条件下光程

$$(QM) = n\sqrt{(s+a)^2+h^2}$$
$$= n\sqrt{(s+a)^2+a(2r-a)}$$
$$= n\sqrt{s^2+2a(r+s)} \approx ns\left[1+\frac{a(r+s)}{s^2}\right],$$

同理 $$(MQ') \approx n's'\left[1+\frac{a(r-s')}{s'^2}\right].$$

$$(QMQ') = ns\left[1+\frac{a(r+s)}{s^2}\right]+n's'\left[1+\frac{a(r-s')}{s'^2}\right],$$

光程取极值条件：$$\frac{\mathrm{d}(QMQ')}{\mathrm{d}a} = \frac{n(r+s)}{s}+\frac{n'(r-s')}{s'} = 0.$$

经整理得 $$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s} = \frac{n'-n}{r},$$

此即球面折射成像公式(2.19)。

2－14. 求联立方程式(2.15)和(2.16)的解，说明它所代表的共轭点就是1.4节中给出的齐明点。

解： 方程式

$$\begin{cases} \dfrac{s^2}{n^2(s+r)^2} - \dfrac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} = 0, & (2.15) \\ \dfrac{1}{n^2(s+r)} + \dfrac{1}{n'^2(s'-r)} = 0. & (2.16) \end{cases}$$

(2.15)式可写为 $$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2} = \frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}, \quad ①$$

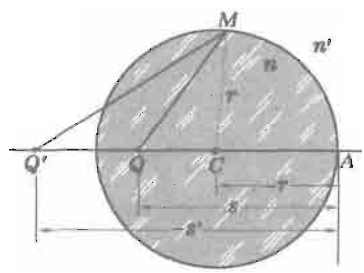
(2.16)式可写为

$$n^2(s+r) = -n'^2(s'-r), \quad ②$$

取②式平方

$$n^4(s+r)^2 = n'^4(s'-r)^2, \quad ③$$

与①式相乘： $$n^2s^2 = n'^2s'^2. \quad ④$$



1.4节中给出的齐明点是实物成虚像(见右图)，即 $s>0$，$s'<0$，故上式开方时取

$$n's' = -ns. \quad ⑤$$

代入②式：

$$n^2(s+r) = n'^2\left(\frac{n}{n'}s+r\right), \quad 即 \quad s = -\left(1+\frac{n'}{n}\right)r. \quad ⑥$$

这里 r 取负值。将⑥式代入⑤式，得

$$s' = \left(1+\frac{n}{n'}\right)r. \quad ⑦$$

⑥、⑦两式给出1.4节中齐明点的正确位置。

2－15. 某透镜用 $n=1.50$ 的玻璃制成，它在空气中的焦距为10.0cm，它在水中的焦距为多少？(水的折射率为4/3.)

解：设薄透镜材料的折射率为 n_L，物像方（同一介质）的折射率为 n_0，则薄透镜的焦距为

$$f=\frac{1}{\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)},$$

设该透镜在空气中和在水中的焦距分别为 f_1 和 f_2，则按上式有

$$\frac{f_2}{f_1}=\frac{(n_L-1)n_0}{n_L-n_0}=\frac{(1.50-1)\times 4/3}{1.50-4/3}=4.$$

即
$$f_2=4f_1=40.0\,\text{cm}.$$

2－16. 一薄透镜折射率为1.500，光焦度为500 D. 将它浸入某液体，光焦度变为 −1.00 D. 求此液体的折射率。

解：薄透镜（折射率为 n_L）在介质（折射率为 n_0）中的焦度公式为

$$P=\frac{1}{f}=\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

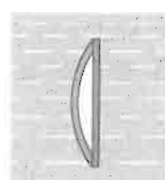
如果将薄透镜先后置于折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质中，则其它们的角度比为

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\frac{n_L}{n_2}-1}{\frac{n_L}{n_1}-1}.$$

按题意 $P_2/P_1=-1/500$，$n_L=1.50$，由此算出第二种介质（液体）的折射率为

$$n_2=\frac{n_L}{\left(\frac{n_L}{n_1}-1\right)\frac{P_2}{P_1}+1}=\frac{1.500}{0.999}=1.502.$$

2－17. 用一曲率半径为20 cm的球面玻璃和一平面玻璃黏合成空气透镜，将其浸于水中（见本题图）。设玻璃壁厚可忽略，水和空气的折射率分别为4/3和1，求此透镜的焦距。此透镜是会聚的还是发散的？



习题 2 – 17

解：此透镜的焦距为

$$f=\frac{1}{\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

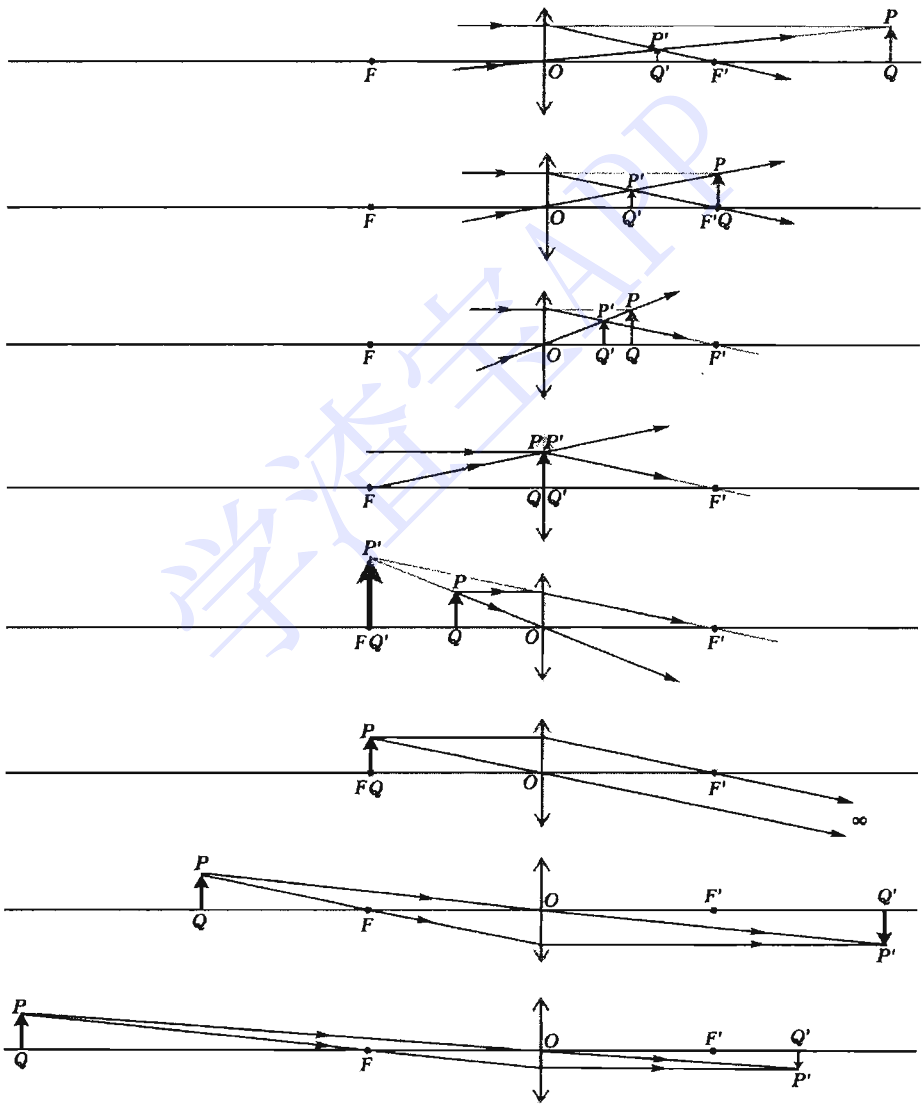
$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{4/3}-1\right)\left(\frac{1}{20\,\text{cm}}-\frac{1}{\infty\ \text{cm}}\right)}=-80\,\text{cm}.$$

它是发散透镜。

2－18. 一凸透镜的焦距为12cm，填充下表中的空白，并作出相应的光路图。

物距 s/cm	-24	-12	-6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s'/cm	**8**	**6**	**4**	**0**	**-12**	**∞**	**24**	**18**
横向放大率 V	**1/3**	**1/2**	**2/3**	**1**	**2**	**-∞**	**-1**	**-1/2**
像的虚实	**实**	**实**	**实**	**—**	**虚**	**实**	**实**	**实**
像的正倒	**正**	**正**	**正**	**正**	**正**	**倒**	**倒**	**倒**

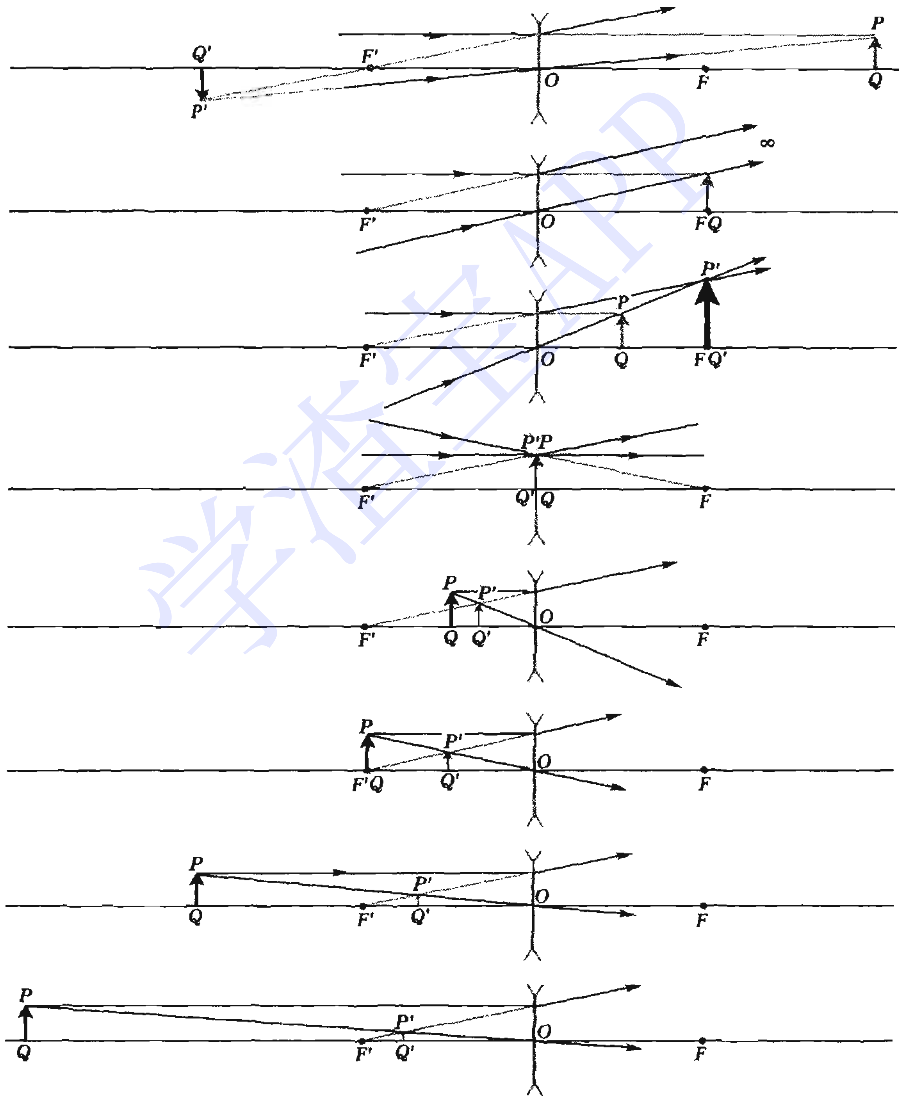
解： 数据用黑体字填入上表，光路图如下：



2-19. 一凹透镜的焦距为12cm，填充下表中的空白，并作出相应的光路图。

物距 s/cm	-24	-12	-6.0	0	6.0	12	24	36
像距 s'/cm	-24	∞	12	0	-4	-6	-8	-9
横向放大率 V	-1	∞	2	1	2/3	1/2	1/3	1/4
像的虚实	虚	实	实	—	虚	虚	虚	虚
像的正倒	倒	正	正	正	正	正	正	正

解： 数据用黑体字填入上表，光路图如下：



2－20. 在5cm焦距的凸透镜前放一小物,要想成虚像于25cm到无穷远之间,物应放在什么范围里?

解: 薄透镜物像公式

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f},\quad 即\ s=\frac{fs'}{s'-f}.$$

令像距

$$-\infty<s'<-25\,\mathrm{cm},$$

得物距

$$4.2\,\mathrm{cm}<s<5\,\mathrm{cm}.$$

亦即该透镜的焦深为8mm.

2－21. 一光源与屏间的距离为1.6m,用焦距为30cm的凸透镜插在二者之间,透镜应放在什么位置,才能使光源成像于屏上?

解: 设光源离透镜距离为 s, 则屏离透镜的距离为 $s'=l-s\,(l=1.6\,\mathrm{m})$,

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{s}+\frac{1}{l-s}=\frac{1}{f},\quad s^2-ls+lf=0.$$

此题有两解:

$$s=\frac{1}{2}\left(l\pm\sqrt{l^2-4lf}\right)=\begin{cases}120\,\mathrm{cm},\\40\,\mathrm{cm}.\end{cases}\quad 相应的\ s'=\begin{cases}40\,\mathrm{cm},\\120\,\mathrm{cm}.\end{cases}$$

2－22. 屏幕放在距物100cm远处,二者之间放一凸透镜。当前后移动透镜时,我们发现透镜有两个位置可以使物成像在屏幕上。测得这两个位置之间的距离为20.0cm,求

(1) 这两个位置到幕的距离和透镜的焦距,

(2) 两个像的横向放大率。

解: 在物像距离大于4倍焦距的条件下,利用光的可逆性原理可以证明,两次成像的物像距满足对易关系,即第一次成像的物距正是第二次成像的像距;第一次成像的像距正是第二次成像的物距。

(1) 上题已导出,在物和像之间的距离 l 给定的情况下,物距 s 满足下列方程式及其解为:

$$s^2-ls+lf=0.\quad s=\frac{1}{2}\left(l\pm\sqrt{l^2-4lf}\right).$$

从而两个成像位置之间的距离为

$$\Delta s=\sqrt{l^2-4lf}.$$

由此焦距为

$$f=\frac{l^2-(\Delta s)^2}{4l}=\frac{100^2-20^2}{4\times100}\,\mathrm{cm}=24\,\mathrm{cm}.$$

物像距为

$$s=\frac{1}{2}(l\pm\Delta s)=\begin{cases}60\,\mathrm{cm},\\40\,\mathrm{cm}.\end{cases}\quad s'=\begin{cases}40\,\mathrm{cm},\\60\,\mathrm{cm}.\end{cases}$$

(2) 两个像的横向放大率为

$$V=-\frac{s'}{s}=\begin{cases}-2/3=-0.67,\\-3/2=-1.50.\end{cases}$$

两个都是倒立的实像,一个缩小,一个放大。

2－23. 如上题，在固定的物与幕之间移动凸透镜。证明：要使透镜有两个成像位置，物和幕之间的距离必须大于四倍焦距。

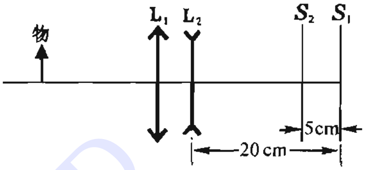
解： 上题已经解出物像距为

$$s=\frac{1}{2}\left(l\pm\sqrt{l^2-4lf}\right),\quad s'=\frac{1}{2}\left(l\mp\sqrt{l^2-4lf}\right).$$

两解是实数的条件为

$$l^2-4lf>0,\quad 即\quad l>4f.$$

2－24. 如本题图，L_1、L_2 分别为凸透镜和凹透镜，前放一小物，移动屏幕到 L_2 后 20 cm 的 S_1 处接到像。现将凹透镜 L_2 撤去，将屏移前 5 cm 至 S_2 处，重新接收到像。求凹透镜 L_2 的焦距。



习题 2－24

解： 这是测定发散透镜焦距的一种实用方法，其中会聚透镜是这种方法所用的一个辅助透镜。按题意，无凹透镜时所成的实像正是凹透镜引入后的虚物，此时对凹透镜来说，

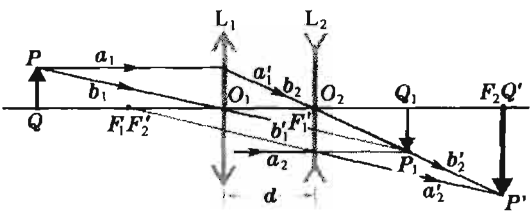
$$物距\ s=-(20-5)\,\text{cm}=-15\,\text{cm},\qquad 像距\ s'=20\,\text{cm}.$$

由高斯公式算出凹透镜焦距

$$f=\frac{s's}{s'+s}=\frac{20\times(-15)}{20+(-15)}\text{cm}=-60\,\text{cm}.$$

2－25. 一光学系统由一焦距为 5.0 cm 的会聚透镜 L_1 和一焦距为 10.0 cm 的发散透镜 L_2 组成，L_2 在 L_1 之右 5.0 cm. 在 L_1 之左 10.0 cm 处置一小物，求经此光学系统后所成的像的位置和横向放大率。用作图法验证计算结果。

解： 这是两次成像问题。对 L_1 实物 PQ 成实像 P_1Q_1；P_1Q_1 对 L_2 来说是虚物，它最后成实像 $P'Q'$（见下图）。设对 L_1 成像的物距和像距分别为 s_1 和 s_1'，对 L_2 成像的物距和像距分别为 $s_2=-(s_1'-d)$ 和 s_2'，把数据代入高斯公式得



$$\frac{1}{10.0\,\text{cm}}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{5.0\,\text{cm}},$$

$$\frac{1}{-(s_1'-5.0\,\text{cm})}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{-10.0\,\text{cm}},$$

解得

$$s_1'=10.0\,\text{cm},\quad s_2=-5.0\,\text{cm},\quad s_2'=10.0\,\text{cm}.$$

横向放大率分别为

$$V_1=-\frac{s_1'}{s_1}=-\frac{10.0}{10.0}=-1.0,\quad V_2=-\frac{s_2'}{s_2}=-\frac{10.0}{-5.0}=2.0.$$

总放大率为

$$V_1V_2 = -2.0.$$

验证计算结果的作图法见前图：

求第一次所成的像 P_1Q_1：由 P 点作两条特殊光线 a_1 和 b_1. a_1 与光轴平行，经 L_1 后折射线 a_1' 通过像方焦点 F_1'；b_1 通过光心 O_1，折射线 b_1' 方向不变。a_1' 和 b_1' 的交点即像点 P_1.

求第二次所成的像 $P'Q'$：由 P_1 点作两条特殊光线 a_2 和 b_2. a_2 与光轴平行，经 L_2 后折射线 a_2' 延长线通过像方焦点 F_2'；b_2 通过光心 O_2，折射线 b_2' 方向不变（因 F_1' 与 O_2 重合，b_2 与 a_1' 重合）。a_2' 和 b_2' 的交点即像点 P'.

作图结果与计算符合。

2－26. 用逐次成像法解4.4节中的例题4，并将结果与之比较。

解： 例题4讨论的是惠更斯目镜，光路见下图。这里有两个凸透镜 L_1 和 L_2，焦距分别是 $3a$ 和 a. 对 L_1 虚物 PQ 成实像 P_1Q_1；P_1Q_1 对 L_2 来说是实物，它最后成虚像 $P'Q'$. 设对 L_1 成像的物距和像距分别为 $s_1(=-2a)$ 和 s_1'，对 L_2 成像的物距和像距分别为 s_2 和 s_2'，$s_2=2a-s_1'$. 把数据代入高斯公式，得

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{3a},\quad \frac{1}{2a-s_1'}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{a},$$

解得

$$s_1' = 1.2a,\quad s_2 = 0.8\,\mathrm{cm},\quad s_2' = -4a.$$

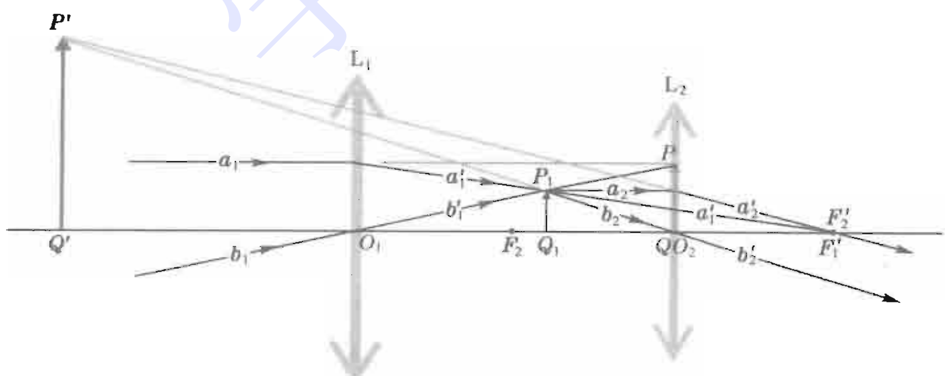
横向放大率分别为

$$V_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{1.2a}{-2.0a} = 0.6,\quad V_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -\frac{-4a}{0.8a} = 5.$$

总放大率为

$$V_1V_2 = 3.$$

验证计算结果的作图法如下图。

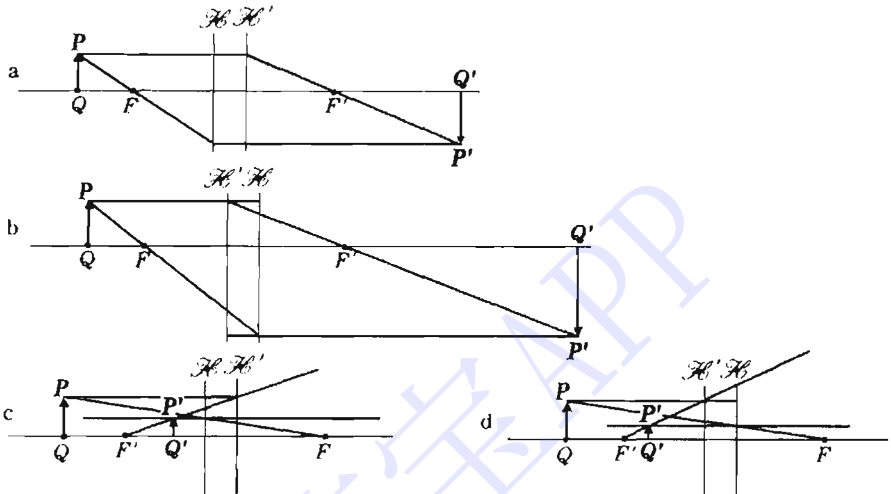


求第一次所成的像 P_1Q_1：由 P 点作两条特殊光线 a_1 和 b_1. a_1 与光轴平行，经 L_1 后折射线 a_1' 通过像方焦点 F_1'；b_1 通过光心 O_1，折射线 b_1' 方向不变。a_1' 和 b_1' 的交点即像点 P_1.

求第二次所成的像$P'Q'$：由P_1点作两条特殊光线a_2和b_2. a_2与光轴平行，经L_2后折射线a_2'延长线通过像方焦点F_2'；b_2通过光心O_2，折射线b_2'方向不变。a_2'和b_2'的交点即像点P'.

作图结果与计算符合。

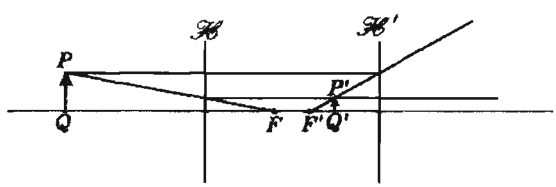
2－27. 用作图法求本题各图中PQ的像(入射线从左到右)。



习题 2-27

解： a、b、c、d 四情形作图法皆同：① 从P点作平行于光轴的光线到达物方主面$\mathscr{H}$，从像方主面$\mathscr{H}'$上的等高点引光线过像方焦点F'；② 从P点引光线过物方焦点F到达物方主面$\mathscr{H}$，从像方主面$\mathscr{H}'$上的等高点引平行于光轴的光线。两光线的交点即为像点P'.

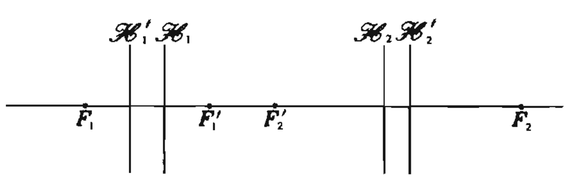
2－28. 用作图法求本题图中PQ点的像(入射线从左到右)。



习题 2-28

解： 作图法同前题。

2－29. 用作图法求本题图中联合光具组的主面和焦点。



习题 2-29

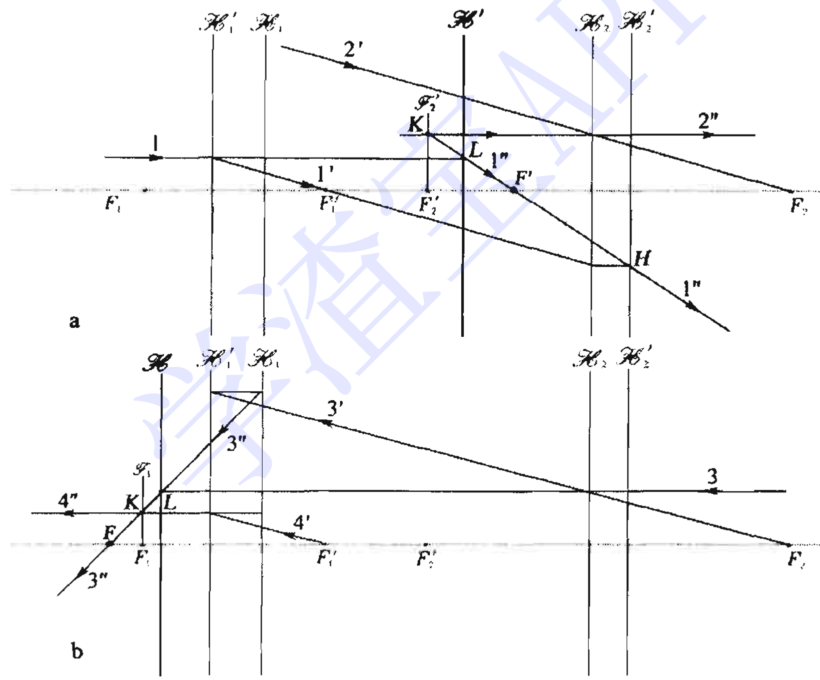
解：(1) 求联合光具组的像方主面 $\mathscr{H}'$ 和像方焦点 F' 作图步骤如下图 a 所示，光线都是自左向右。

① 作平行于光轴的光线 1 遇 $\mathscr{H}_1$，从 $\mathscr{H}_1'$ 上的等高点引光线 1′ 过 F_1'. 光线 1′ 遇 $\mathscr{H}_2$，得 $\mathscr{H}_2'$ 上的等高点 H.

② 作过 F_2 且与 1′ 平行的光线 2′ 遇 $\mathscr{H}_2$，从 $\mathscr{H}_2'$ 上的等高点引平行于光轴的光线 2″. 过 F_2' 作焦面 $\mathscr{F}_2'$，光线 2″ 交 $\mathscr{F}_2'$ 于 K，光线 1′ 对于光具组 Ⅱ 的共轭线光线 1″ 必过 K 与 H，光线 1″ 与光轴的交点即为联合光具组的像方焦点 F'.

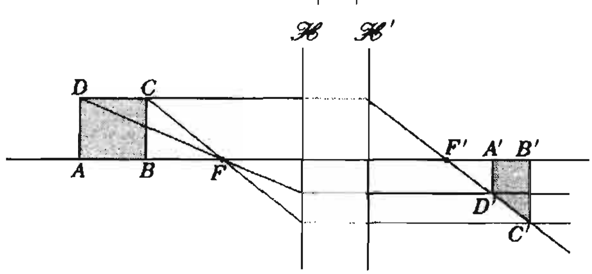
③ 延长光线 1 交光线 1″ 于 L，过 L 并垂直于光轴的平面即为联合光具组的像方主面 $\mathscr{H}'$.

(2) 求联合光具组的物方主面 $\mathscr{H}$ 和物方焦点 F 作图步骤如下图 b 所示，作法与(1) 完全类似，只是光线都是自右向左。



2-30. 用作图法求本题图中正方形 $ABCD$ 的像。

解：作图如右图所示。由于远近物体的纵向放大率不同，正方形



习题 2-30

$ABCD$ 的像 $A'B'C'D'$ 变成梯形。

2－31. 验算7.7节图2－63a和b中绘出的两种拉姆斯登目镜的主面与焦点。

解：（1）第一种拉姆斯登目镜 $f_1:f_2:d=1:1:1.$

$$f_1=f_1'=f_2=f_2'=d,\quad \Delta=d-f_1'-f_2=-d.$$

由光具组联合公式得目镜焦距

$$f=f'=-f_1'f_2/\Delta=d.$$

主面位置为

$$X_H=X_H'=f_1d/\Delta=-d.$$

即 $\mathscr{H}$ 面在向场镜 L_1 之右 d 处，正好与接目镜 L_2 重合；$\mathscr{H}'$ 面在 L_2 之左 d 处，正好与透镜 L_1 重合。同时，焦点 F、F' 也正好落在两个透镜的光心位置。这些结果与精确绘图所得结果是一致的。

（2）第二种拉姆斯登目镜 $f_1:f_2:d=1:1:2/3.$

$$f_1=f_1'=f_2=f_2'=2d/3,\quad \Delta=d-f_1'-f_2=-2d.$$

因此

$$X_H=X_H'=f_1d/\Delta=-3d/4,\quad f=f'=9d/8,$$

即 $\mathscr{H}$ 面在 L_1 之右 $3d/4$ 处，$\mathscr{H}'$ 面在 L_2 之左 $3d/4$ 处；F 点在 $\mathscr{H}$ 面之左 $9d/8$ 处，F' 点在 $\mathscr{H}'$ 面之右 $9d/8$ 处。这与精确作图所得结果一致。

2－32. 求右表中厚透镜的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示。已知玻璃的折射率为1.500，两界面顶点间的距离为1.00 cm，透镜放在空气中。

	形状	r_1/cm	r_2/cm
(1)	双凸	10.0	−10.0
(2)	凸凹	10.0	20.0
(3)	凹凸	−15.0	−20.0

解： 厚透镜是两个折射球面组成的光具组，在傍轴条件下这两个折射面能很好成像，且主点 H_1、H_1' 和 H_2、H_2' 分别与前后两个球面的顶点重合。设前后两个折射球面的焦距分别为 f_1、f_1' 和 f_2、f_2'. 则

$$\begin{cases} f_1=\dfrac{n_0r_1}{n_L-n_0}, \\ f_1'=\dfrac{n_Lr_1}{n_L-n_0}; \end{cases}\qquad \begin{cases} f_2=\dfrac{n_Lr_2}{n_0-n_L}, \\ f_2'=\dfrac{n_0r_2}{n_0-n_L}. \end{cases}$$

式中 $n_0=1$，$n_L=1.500$. 两折射面间的光学间隔

$$\Delta=d-f_1'-f_2.$$

透镜系统的焦距为

$$f=-\frac{f_1f_2}{\Delta},\qquad f'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta}.$$

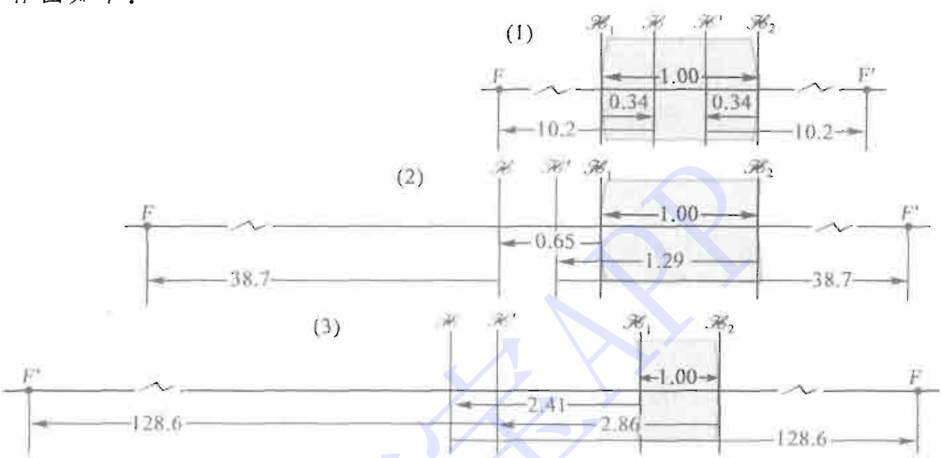
主点位置

$$X_H=f_1d/\Delta,\qquad X_H'=f_2'd/\Delta.$$

将上表数据代入，所得答案见下表。

	形状	r_1/cm	r_2/cm	f_1/cm	f_1'/cm	f_2/cm	f_2'/cm	Δ/cm	f/cm	f'/cm	X_H/cm	X_H'/cm
(1)	双凸	10.0	−10.0	20.0	30.0	30.0	20.0	−59.0	10.2	10.2	−0.34	−0.34
(2)	凸凹	10.0	20.0	20.0	30.0	−60.0	−40.0	31.0	38.7	38.7	0.65	−1.29
(3)	凹凸	−15.0	−20.0	−30.0	−45.0	60.0	40.0	−14.0	−128.6	−128.6	2.41	−2.86

作图如下:

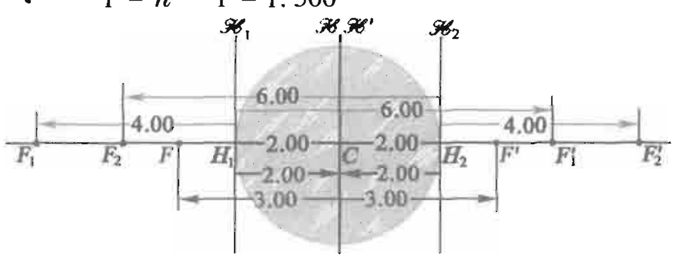


2－33. 求放在空气中玻璃球的焦距和主面、焦点的位置,并作图表示。已知玻璃球的半径为 2.00 cm,折射率为 1.500.

解: 前后两个折射球面的焦距分别为

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{r_1}{n-1} = \dfrac{2.00}{1.500-1}\,\mathrm{cm} = 4.00\,\mathrm{cm}, \\ f_1' = \dfrac{nr_1}{n-1} = \dfrac{1.500\times 2.00}{1.500-1}\,\mathrm{cm} = 6.00\,\mathrm{cm}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 = \dfrac{nr_2}{1-n} = \dfrac{1.500\times(-2.00)}{1-1.500}\,\mathrm{cm} = 6.00\,\mathrm{cm}, \\ f_2' = \dfrac{r_2}{1-n} = \dfrac{-2.00}{1-1.500}\,\mathrm{cm} = 4.00\,\mathrm{cm}. \end{cases}$$



间隔

$$\Delta = -\overline{F_1'F_2} = -8.00\,\mathrm{cm}, \qquad d = \overline{H_1H_2} = 4.00\,\mathrm{cm}.$$

玻璃球的焦距

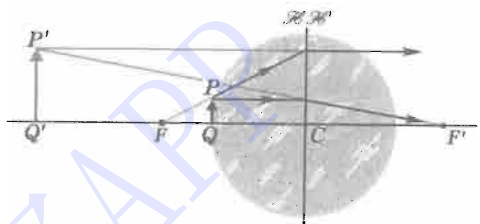
$$\begin{cases} f=-\dfrac{f_1 f_2}{\Delta}=-\dfrac{4.00\times 6.00}{-8.00}\,\mathrm{cm}=3.00\,\mathrm{cm}, \\ f'=-\dfrac{f_1' f_2'}{\Delta}=-\dfrac{6.00\times 4.00}{-8.00}\,\mathrm{cm}=3.00\,\mathrm{cm}. \end{cases}$$

主面的位置

$$\begin{cases} X_H=\dfrac{f_1\ d}{\Delta}=\dfrac{4.00\times 4.00}{-8.00}\,\mathrm{cm}=-2.00\,\mathrm{cm}, \\ X_H'=\dfrac{f_2'd}{\Delta}=\dfrac{4.00\times 4.00}{-8.00}\,\mathrm{cm}=-2.00\,\mathrm{cm}. \end{cases}$$

计算所得结果示于上图。

2 - 34. 上题中玻璃球表面上有一斑点，计算从另一侧观察此斑点像的位置和放大率，并用作图法验证之。



解： 把玻璃球表面上的斑点看成傍轴小物 PQ，物距 $s=2.00\,\mathrm{cm}$，焦距 $f=3.00\,\mathrm{cm}$，按高斯公式：

$$s'=\frac{fs}{s-f}=\frac{3.00\times 2.00}{2.00-3.00}\,\mathrm{cm}=-6.00\,\mathrm{cm}.$$

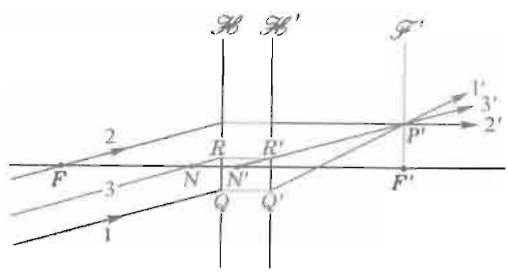
放大率

$$V=-\frac{s'}{s}=\frac{-6.00}{2.00}=3.$$

利用上题求得的主面 $\mathscr{H}$、$\mathscr{H}'$ 作图如上，结果与计算符合。

2 - 35. (1) 用作图法求本题图中光线 1 的共轭线；

(2) 在图上标出光具组节点 N、N' 的位置。



习题 2 - 35

解： (1) 过焦点 F 作平行于 1 的光线 2，在主面 $\mathscr{H}$、$\mathscr{H}'$ 等高点上出射的与光轴平行的共轭线 2′ 与后焦面 $\mathscr{F}'$ 交于 P'.

光线 1 交主面 $\mathscr{H}$ 于 Q，从主面 $\mathscr{H}'$ 的等高点 Q' 作光线 $Q'P'$，即为光线 1 的共轭线 1′.

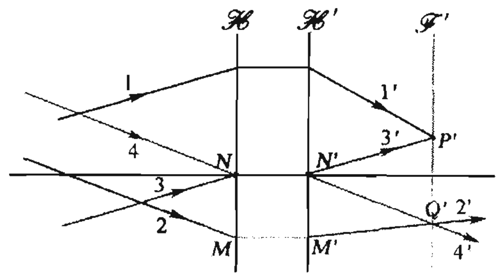
(2) 过 P' 作平行于 2 的光线 3′，延长线交光轴于 N'，即为后节点。从光线 3′ 与主面 $\mathscr{H}'$ 的交点 R' 在 $\mathscr{H}$ 上的等高点 R 引同方向的入射线 3， 3 与光轴交于 N，即为前节点。

2 - 36. 已知 1 -1′ 是一对共轭光线，求光线 2 的共轭线（见本题图）。

解： 作平行于光线 1 的光线 3 过节点 N，从 N' 引其同方向的共轭线 3′ 交 1′ 于 P'. 过 P' 与光轴垂直的面即为后焦面 $\mathscr{F}'$.

过节点 N 作平行于光线 2 的光线 4，其共轭线 4′ 过节点 N' 沿同方向射出，交后焦面 $\mathscr{F}'$ 于 Q'.

从光线 2 与 $\mathscr{H}$ 交点 M 在 $\mathscr{H}'$ 上的等高点 M' 引光线 $M'Q'$，即为光线 2 的共轭线 2′.



习题 2－36

2－37. 对一光具组，测得当物距改变 Δx 时，像距改变 $\Delta x'$，同时横向放大率由 V_1 变到 V_2. 试证明此光具组的焦距为

$$f = \frac{\Delta x}{\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{2}{V_1}}, \qquad f' = \frac{\Delta x'}{V_1 - V_2}.$$

这里提供了一种测焦距的方法，它与测焦点位置的方法配合起来，可以确定光具组的主面。

解： 由横向放大率公式

$$V = -\frac{f}{x_1} = -\frac{x'}{f'}$$

得
$$V_1 = -\frac{f}{x} = -\frac{x_1'}{f'}, \quad V_2 = -\frac{f}{x_1 + \Delta x} = -\frac{x_1' + \Delta x'}{f'}.$$

所以
$$\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} = -\frac{\Delta x}{f}, \quad V_2 - V_1 = -\frac{\Delta x'}{f'}.$$

即
$$f = \frac{\Delta x}{\dfrac{1}{V_1} - \dfrac{1}{V_2}}, \qquad f' = \frac{\Delta x'}{V_1 - V_2}.$$

2－38. 一架幻灯机的投影镜头的焦距为 7.5 cm，当幕由 8 m 移至 10 m 远时，镜头需移动多少距离？

解： 由物像距关系的牛顿(Newton)公式

$$x_1 = \frac{f^2}{x_1'}, \quad x_2 = \frac{f^2}{x_2'}.$$

得物位移量 Δx 与像位移量 $\Delta x'$ 的关系为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -\frac{\Delta x'}{x_2' x_1'} f^2.$$

考虑到投影系统的特点是像距远远大于焦距，取

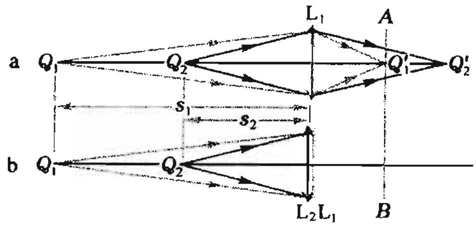
$$x_1' \approx s_1' = 8\,\mathrm{m}, \quad x_2' \approx s_2' = 10\,\mathrm{m},$$

则
$$\Delta x' = x_2' - x_1' \approx s_2' - s_1' = 2\,\mathrm{m}.$$

所以
$$\Delta x = -0.014\,\mathrm{cm},$$

即投影镜头应移近画片 0.014 cm.

2－39. 某照相机可拍摄物体的最近距离为 1 m，装上光焦度为 2 D 的近拍镜后，能拍摄的最近距离为多少？（假设近拍镜与照相机镜头是密接的。）



解： 右图 a 中 L_1 是照相机镜头，可拍摄的最近物体 Q_1 在 $s_1=1\,m$ 处，成像于位于 s_1' 处的 AB 面上，此面是底片最远位置。更近距离的物体 Q_2 在 s_2 处，成像于位于 Q_2'，它在 AB 面之后。加近拍镜 L_2 于 L_1 前，其作用是使位于 s_2 处的物体 Q_2 成虚像于 Q_1（图 b），它再经 L_2 将成像于 AB 面上。运用高斯公式于 L_2，物距 $s=s_2$，像距 $s'=-s_1=-1\,m$，焦距 $f=1/P$，得

$$s_2=\frac{s_1}{Ps_1+1}=\frac{1}{3}m.$$

加近拍镜后能拍摄的最近距离为 (1/3) m.

2－40. 某人对 2.5 m 以外的物看不清，需配多少度的眼镜？另一人对 1 m 以内的物看不清，需配怎样的眼镜？

解： 对 2.5 m 以外的物体看不清者，其远点在 2.5 m 远处，故为近视眼，应配发散镜，使无穷远的物成像于 2.5 m 处。这相当于此发散镜的焦距为 $f_1=-2.5\,m$，眼镜度数为

$$P_1=1/f_1=-0.4\,D=-40\text{ 度。}$$

对 1 m 以内物看不清者，其近点在 1 m 处，故为远视眼，应配会聚镜，使明视距离 $s=0.25\,m$ 的物成像于 $s'=-1\,m$ 处。由高斯公式算出

$$f_2=\frac{ss'}{s+s'}=\frac{1}{3}m,$$

眼镜度数为 $$P_2=1/f_2=3\,D=300\text{ 度。}$$

2－41. 计算 2×、3×、5×、10× 放大镜或目镜的焦深。

解： 放大镜（或目镜）的工作距离是使得物体处在第一焦点附近稍靠里一些的小范围内。这样才能形成一个明视距离 s_0 以远处的放大虚像供正常人眼观察。所谓“焦深”，是指上述小范围的纵向间隔 Δx，这也正是与明视距离对应的牛顿物距。令像距 $x'=-(s_0+f)$，由牛顿公式得

$$x=\frac{f^2}{x'}=-\frac{f^2}{s_0+f},$$

须知视角放大率 $M=s_0/f$，替换上式中的焦距 f 得

$$x=-\frac{s_0}{M(M+1)}.$$

焦深

$$\Delta x = |x| = \frac{s_0}{M(M+1)}.$$

由此算出

$$\Delta x = \begin{cases} 4.17\,\mathrm{cm}, & M = 2; \\ 2.08\,\mathrm{cm}, & M = 3; \\ 0.83\,\mathrm{cm}, & M = 5; \\ 0.23\,\mathrm{cm}, & M = 10. \end{cases}$$

由此可见，高倍放大镜或目镜的焦距很短，焦深也随之缩短，要求调节十分精细。

2 - 42. 一架显微镜，物镜焦距为 4 mm，中间像成在物镜像方焦点后面 160 mm 处，如果目镜是 20× 的，显微镜的总放大率是多少？

解： 物镜的横向放大率为

$$V_O = -\frac{x_O'}{f_O} = -\frac{160}{4} = -40.$$

显微镜的总放大率为

$$M = V_O M_E = -40 \times 20 = -800.$$

2 - 43. 一架显微镜的物镜和目镜相距 20.0 cm，物镜焦距为 7.0 mm，目镜焦距为 5.0 mm，把物镜和目镜都看成是薄透镜，（1）求被观测物到物镜的距离，（2）物镜的横向放大率，（3）显微镜的总放大率，（4）焦深。

解： 显微镜的工作距离应使小物成放大的实像（中间像）于目镜第一焦点附近（靠里一些），故按题意此显微镜中间像对物镜的距离为

$$s_O' = 20.0\,\mathrm{cm} - 5.0\,\mathrm{mm} = 195\,\mathrm{mm},$$

由高斯公式求得小物到物镜的距离为

$$s_O = 7.3\,\mathrm{mm}.$$

（2）物镜的横向放大率为

$$V_O = -s_O'/s_O = -26.7 \approx -27.$$

（3）显微镜的总（角）放大率 M 可取物镜横向（线）放大率 V_O 与目镜（角）放大率 M_E 的乘积，而目镜的（角）放大率 M_E 等于明视距离除以目镜焦距：

$$M_E = \frac{25\,\mathrm{cm}}{5.0\,\mathrm{mm}} = 50.$$

所以

$$M = V_O M_E = -26.7 \times 50 = -1\,335.$$

（4）目镜的焦深（参见习题 2 - 41 解）为

$$\Delta x_E = \frac{25\,\mathrm{cm}}{M_E(M_E+1)} \approx 0.1\,\mathrm{mm}.$$

相应的物镜焦深可通过牛顿公式微分运算（取绝对值）求得：

$$\Delta x_O' = \frac{f_O^2}{x_O'^2}\Delta x_O = \frac{f_O^2}{x_O'^2}\Delta x_E.$$

以 $f_O=7\,\text{mm}$，$\Delta x_E=0.1\,\text{mm}$，$x_O'=s_O'-f_O=188\,\text{mm}$ 代入，算出

$$\Delta x_O = 0.0001\,\text{mm}.$$

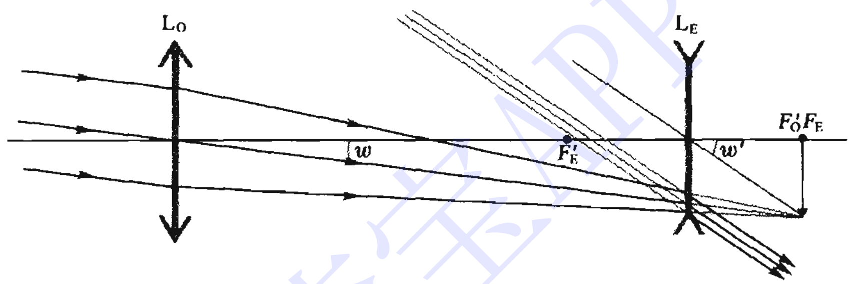
焦深几乎为 0，这说明在目镜位置（相对镜筒）固定的情况下，显微镜的工作距离（物镜头与小物之间的距离）被严格确定，几乎没有什么调节余地。

2－44. 物镜、目镜皆为会聚的望远镜称为开普勒型望远镜（图 2－39），物镜会聚而目镜发散的望远镜，称为伽利略型望远镜。

（1）画出伽利略型望远镜的光路；

（2）一伽利略型望远镜的物镜和目镜相距 12 cm，若望远镜的放大率为 4×，物镜和目镜的焦距各多少？

解：（1）伽利略型望远镜的光路如下图。



物镜 L_O 成像于 L_E 的物方焦面上，成为 L_E 的虚物，L_E 再将它成像于无穷远。

（2）望远镜的角放大率为

$$M = -f_O/f_E,$$

筒长

$$d = f_O + f_E.$$

解得

$$f_O = \frac{Md}{M-1}, \qquad f_E = -\frac{d}{M-1}.$$

以 $M=4$、$d=12\,\text{cm}$ 代入，算出此望远镜物镜和目镜的焦距分别为

$$f_O = 16\,\text{cm}, \qquad f_E = -4\,\text{cm}.$$

2－45. 拟制一个 3× 的望远镜，已有一个焦距为 50 cm 的物镜，问，在（1）开普勒型中和（2）伽利略型中，目镜的光焦度以及物镜、目镜的距离各多少？

解：（1）在开普勒型望远镜中应取 $M=-3$. 由物镜焦距 $f_O=50\,\text{cm}$ 可以算出目镜焦距

$$f_E = -f_O/M = 17\,\text{cm},$$

光焦度

$$P_E = \frac{1}{f_E} = \frac{1}{0.17\,\text{m}} = 6\,\text{D}.$$

望远镜筒长

$$d = 50\,\text{cm} + 17\,\text{cm} = 67\,\text{cm}.$$

（2）在伽利略型望远镜中应取 $M=3$. 由此算出

$$f_E = -f_O/M = -17\,\mathrm{cm},\quad P_E = \frac{1}{f_E} = -6\,\mathrm{D}.$$

$$d = 50\,\mathrm{cm} - 17\,\mathrm{cm} = 33\,\mathrm{cm}.$$

2－46. 一望远镜的物镜直径为5.0cm,焦距为20cm,目镜直径为1.0cm,焦距为2.0cm,求此望远镜的入射光瞳和出射光瞳的位置和大小。

解: 望远镜的孔径光阑即为物镜 L_O 的边框，所以入射光瞳即为物镜本身，出射光瞳为物镜对目镜 L_E 在像方的共轭像。

$$s_E = f_O + f_E = (20+2.0)\,\mathrm{cm} = 22\,\mathrm{cm},\quad f_E = = 2.0\,\mathrm{cm},$$

由高斯公式求得 $s_E' = 2.2\,\mathrm{cm}$，即出射光瞳的位置在目镜后2.2cm处。横向放大率为 $V_E = -0.1$，所以出射光瞳的直径为

$$D' = |V_E| D_O = 0.1 \times 5.0\,\mathrm{cm} = 5.0\,\mathrm{mm}.$$

2－47. 望远镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置,并证明出射光瞳直径 D' 与物镜直径 D_0 之比为

$$D' = \frac{D_0}{|M|},$$

其中 $M = -f_O/f_E$ 是望远镜的视角放大率。

解: (1) 出射光瞳为物镜(孔径光阑)对目镜所成的像,此时物距 $s = f_O + f_E$,由高斯公式求得像距(出射光瞳与目镜的距离)

$$s' = \frac{(f_O + f_E) f_E}{f_O} \approx f_E.$$

(2) 设物镜直径为 D_O,出射光瞳直径为 D'. 在目镜与物镜的前后焦点重合的情况下 $\frac{D_O}{D'} = \frac{f_O}{f_E}$. 又因 $M = -\frac{f_O}{f_E}$，则得 $D' = \frac{D_O}{|M|}$.

2－48. 将望远镜倒过来可作激光扩束之用。设一望远镜物镜焦距为30cm,目镜焦距为1.5cm,它能使激光光束的直径扩大几倍?

解: 这时,通过望远镜出射光瞳的激光束都能通过入射光瞳。由上题可知

$$\frac{D_O}{D'} = |M| = \frac{f_O}{f_E} = 20.$$

使用这台倒望远镜时，激光束直径扩大了20倍。

2－49. 显微镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘。求

(1) 出射光瞳的位置;

(2) 证明在傍轴近似下出射光瞳的直径 D' 与入射孔径角 u_0 的关系是[1]

$$D' = \frac{2 s_0 n u_0}{|M|},$$

[1] 严格的公式应把 u_0 换成 $\sin u_0$,参见习题2－56.

式中 $s_0=25\,\mathrm{cm}$ 是明视距离，M 是显微镜的视角放大率，n 是物方折射率（除油浸物镜外，$n\approx1$）。

解：（1）出射光瞳为物镜（孔径光阑）对目镜所成的像。此次成像，物距 $s=f_O'+\Delta+f_E$，由高斯公式得出射光瞳到目镜的距离（像距）

$$s'=\frac{(f_O'+\Delta+f_E)f_E}{f_O'+\Delta}\approx f_E\quad(\Delta\gg f_E),$$

式中 Δ 为显微镜的光学筒长。

（2）以物镜为物，目镜的横向放大率为 $V_E=-\dfrac{f_E}{f_O'+\Delta}$，故出射光瞳的直径为

$$D'=V_E D_O=-\frac{f_E D_O}{f_O'+\Delta}.\qquad ①$$

在傍轴条件下 $D_O\approx2f_Ou_0$，于是 ① 式化为

$$D'=-\frac{2u_0f_Of_E}{f_O'+\Delta}.\qquad ②$$

显微镜总的（角）放大率 $M=-\dfrac{s_0}{f_O'f_E}$，于是 ② 式化为

$$D'=\frac{f_O}{f_O'}\frac{\Delta}{f_O'+\Delta}\frac{2s_0u_0}{M}.\qquad ③$$

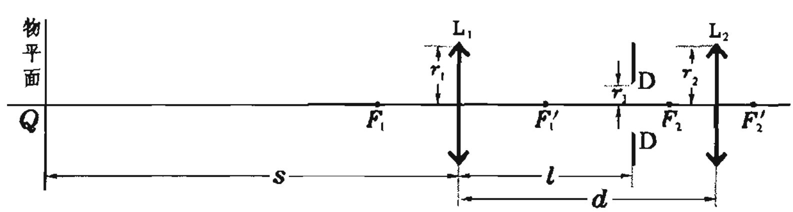
考虑到

$$\frac{f_O}{f_O'}=n,\quad\frac{\Delta}{f_O'+\Delta}\approx1,$$

最后 ③ 式化为

$$D'\approx\frac{2ns_0u_0}{|M|}.$$

2－50. 如本题图中 L_1、L_2 是两个会聚透镜，Q 是物点，DD 是光阑，已知焦距 $f_1=2a$，$f_2=a$，图中标示各距离为 $s=10a$，$l=4a$，$d=6a$；此外透镜与光阑半径之比是 $r_1=r_2=3r_3$. 求此光具组的孔径光阑、入射光瞳、出射光瞳、入射窗和视场光阑的位置和大小。

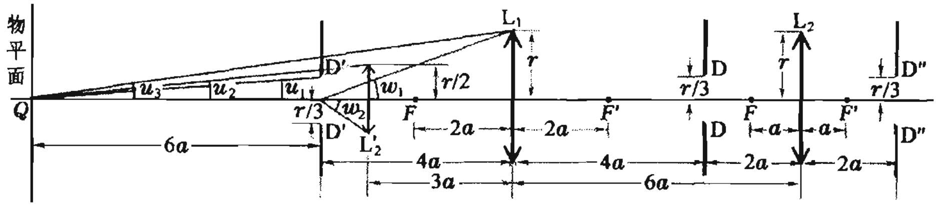


习题 2－50

解：（1）确定孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳

先将 DD 对 L_1 成像到系统的物空间去，这时 $s=4a$，$f=2a$，求得 $s'=4a$，$V=-1$，像 D′D′ 的位置和大小如下图所示。

再将 L_2 对 L_1 成像到系统的物空间去，这时 $s=6a, f=a$，求得 $s'=3a$，$V=-1/2$，像 L_2' 的位置和大小如下图所示。



分别比较像 D'D'、L_2'、L_1 对轴上物点 Q 的张角 u_1、u_2、u_3 的大小：

$$\tan u_1=\frac{r/3}{6a}=\frac{r}{18a},\quad \tan u_2=\frac{r/2}{7a}=\frac{r}{14a},\quad \tan u_3=\frac{r}{10a}.\quad (r=r_1=r_2.)$$

可见 $u_1<u_2<u_3$，因此 DD 为孔径光阑，它在物空间的像 D'D' 为入射光瞳，位置在 L_1 左侧 $4a$ 处，大小与 DD 一样。

把 DD 对 L_2 成像到系统的像空间去，即得出射光瞳 D"D". 这时 $s=2a$，$f=a$，求得 $s'=2a$，$V=-1$，出射光瞳 D"D" 在 L_2 右侧 $2a$ 处，大小与 DD 一样。

（2）确定视场光阑和入射窗

比较 L_1 和 L_2' 对入瞳 D'D' 中心的张角 w_1、w_2 的大小：

$$\tan w_1=\frac{r}{4a},\quad \tan w_2=\frac{r/2}{a}=\frac{r}{2a}.$$

可见 $w_1<w_2$，所以 L_1 的边框即为视场光阑，并兼为入射窗。

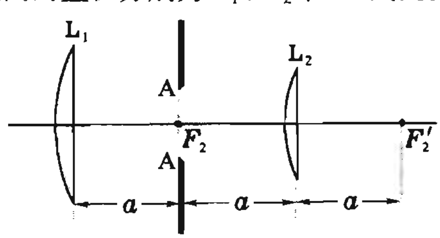
2－51. 惠更斯目镜的结构详见7.7节图2－62，如本题图所示，今在两透镜间放一光阑AA，设透镜 L_1、L_2 和光阑的直径分别为 D_1、D_2 和 D. 试证：

（1）向场镜 L_1 成为孔径光阑的条件为 $D_1<D_2$；

（2）光阑 AA 成为视场光阑的条件是 $D/2<D_2$；

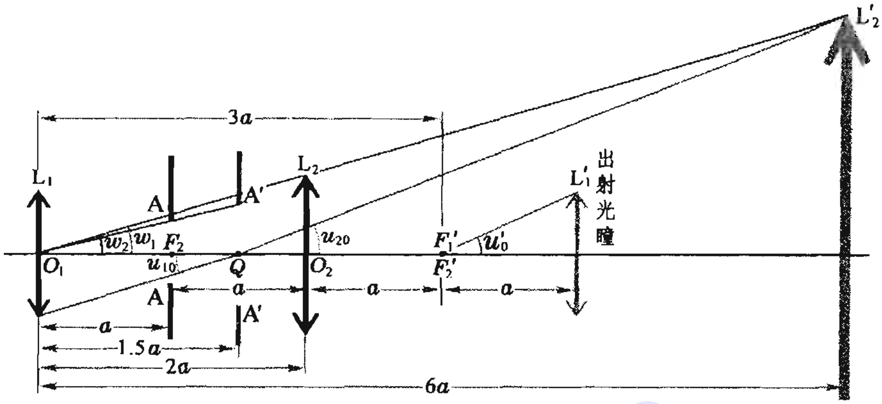
（3）这时对 F_2' 点计算的出射孔径角 u_0' 由下式确定：

$$\tan u_0' = D_1/2a.$$



习题 2－51

解： 要确定光学系统的孔径光阑，必须首先将所有光学元件对物方成像，并确定这些像的孔径线度，然后明确物点的位置。须知，对不同物点来说，孔径光阑可能是不同的。要确定系统的视场光阑，就应当在上述确定孔径光阑的基础上，以入射光瞳中心为顶点向物平面横扫，被物方的孔径对横向范围限制得最厉害的就是视场光阑。



(1) 为确定孔径光阑，求出 AA 和 L_2 的边框经 L_1 成于物方空间的像 A′A′ 和 L_2'. 对于 AA，$s=a$，$f=3a$，由高斯公式求得 $s'=-1.5a$，即 A′A′ 正好与物平面重合，如上图所示，故 AA 不可能为孔径光阑。对于 L_2，$s=2a$，$f=3a$，由高斯公式求得 $s'=-6a$，$D_2'=3D_2$. L_2' 位置亦见上图。现以物点 Q 为顶点，向场镜 L_1 和 L_2' 所张的角分别为

$$u_{10}=\arctan\frac{D_1}{2\times1.5a}=\arctan\frac{D_1}{3a},$$

$$u_{20}=\arctan\frac{D_2'}{2\times4.5a}=\arctan\frac{3D_2}{9a}=\arctan\frac{D_2}{3a}.$$

$u_{10}<u_{20}$（即向场镜 L_1 成为孔径光阑）的条件是 $D_1<D_2$.

(2) 若惠更斯目镜的向场 L_1 是孔径光阑，则同时也是入射光瞳。以其光心 O_1 为顶点，设 L_2 或 L_2' 所张的角为 w_1，AA 或 A′A′ 所张的角为 w_2，则

$$w_1=\arctan\frac{D_2}{2\times2a}=\arctan\frac{D_2}{4a},$$

$$w_2=\arctan\frac{D}{2\times a}=\arctan\frac{D}{2a}.$$

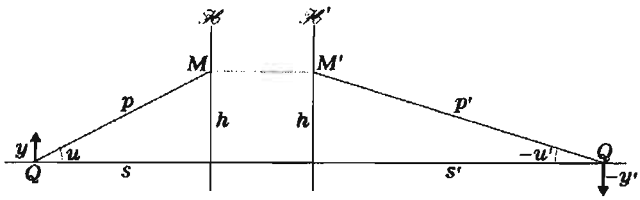
$w_2<w_1$（即 AA 为视场光阑）的条件是 $D<D_2/2$.

(3)“出射孔径角”是指出射光瞳对 F_2' 所张的角 u_0'. 为此首先确定出射光瞳的大小和位置。出射光瞳是孔径光阑在像方的共轭。孔径光阑是 L_1 的边框，求 L_1 对 L_2 所成的像 L_1'：$s=2a$，$f=a$，由高斯公式求得 $s'=2a$，放大率 $V=-1$，其位置如上图所示，在 F_2' 之右距离 a 处，大小与 L_1 一样。故出射孔径角为

$$u_0=\arctan\frac{D_1}{2\times a}=\arctan\frac{D_1}{2a}.$$

2－52. 证明在一对齐明点附近不可能有另一对齐明点。

解： 作图如下。在傍轴条件下理想光具组成像的公式有：



$$\begin{cases} s = x + f, \\ s' = x' + f'. \end{cases} \qquad ①$$

$$xx' = ff'. \qquad ②$$

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \qquad ③$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{f'}{x} = -\frac{x'}{f}. \qquad ④$$

$$u = \frac{h}{s}, \qquad u' = -\frac{h}{s'}. \qquad ⑤$$

傍轴小物以宽光束成像时，①、②、③、④四式仍成立，但⑤式需代之以下式：

$$\tan u = \frac{h}{s}, \qquad \tan u' = -\frac{h}{s'}. \qquad ⑥$$

齐明点必需满足阿贝正弦条件：

$$n y \sin u = n' y' \sin u',$$

或
$$\sin u' = \frac{n y}{n' y'} \sin u = -\frac{f}{f'} \frac{x}{f} \sin u = -\frac{x}{f'} \sin u,$$

即
$$\sin u' + \frac{x}{f'} \sin u = 0 \quad (x = s - f). \qquad ⑦$$

若一对齐明点附近有另一对齐明点，则上式右端对物距 x 的微商在齐明点处取值应等于0：

$$\left[\cos u' \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{f'} \cos u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{f'} \sin u\right]_{\text{齐明点}} = 0. \qquad ⑧$$

由①式和②式，
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} = -\frac{ff'}{x^2}.$$

由⑥式，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{h\cos^2 u}{s^2} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\frac{h}{p^2} \quad \left[p = \sqrt{s^2+h^2} = s(1+\delta^2)^{1/2},\ \delta = h/s\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x} = \frac{h\cos^2 u'}{s'^2} \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}x} = -\frac{h}{p'^2} \frac{ff'}{x^2} \quad \left[p' = \sqrt{s'^2+h^2} = s'(1+\delta'^2)^{1/2},\ \delta' = h/s'\right].$$

此外
$$\cos u = \frac{s}{p}, \qquad \cos u' = \frac{s'}{p'}, \qquad \sin u = \frac{h}{p}.$$

将上面各式代入⑧式左端：

$$\cos u'\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}+\frac{x}{f'}\cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{f'}\sin u=-\frac{s'}{p'}\frac{h}{p'^2}\frac{ff'}{x^2}-\frac{x}{f'}\frac{s}{p}\frac{h}{p^2}+\frac{h}{f'p}$$

$$=\frac{h}{s^2f'}\left[-\frac{f}{(1+\delta'^2)^{3/2}}-\frac{x}{(1+\delta^2)^{3/2}}+\frac{s}{(1+\delta^2)^{1/2}}\right]. \qquad ⑨$$

对于傍轴光束，$\delta'\approx\delta\approx0$，⑨ 式化为

$$\frac{h}{s^2f'}(-f-x+s)=0.$$

若要求宽光束成像，δ' 和 δ 不可忽略，⑨ 式不等于0，即 ⑧ 式不成立，亦即齐明点附近的点不满足正弦条件，不可能是齐明点。

2－53. 试证明，显微镜出射光瞳直径 D' 由下式确定：

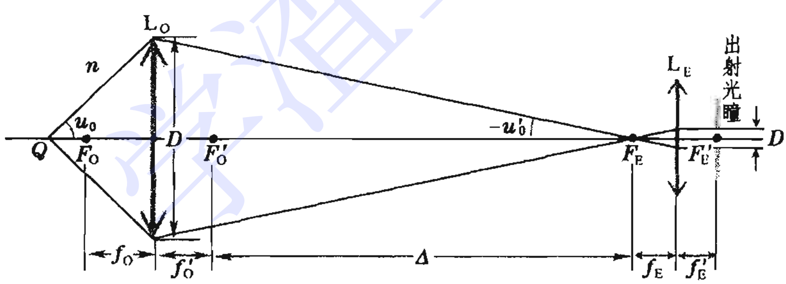
$$D'=\frac{2s_0 n\sin u_0}{|M|}=2s_0\frac{\mathrm{N.A.}}{|M|},$$

即 D' 正比于数值孔径 N. A. $=n\sin u_0$，反比于视角放大率 M.（$s_0=25\,\mathrm{cm}$ 是明视距离。）

解： 如下图所示，显微镜的特点是 $\Delta\gg f_O'$、f_E，小物 Q 位于 F_O 点附近齐明点，t 它对物镜来说满足阿贝正弦条件：

$$ny\sin u_0=y'\sin u_0'.$$

中间像落在 F_E 点附近，出射光瞳在 F_E' 点附近。



物镜的横向放大率 $\quad V_O=\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{\Delta}{f_O'}.$

因物镜直径（入射光瞳直径）

$$D=2(\Delta+f_O')\tan(-u_0')\approx2(\Delta+f_O')\sin(-u_0')=-2(\Delta+f_O')\frac{ny}{y'}\sin u_0$$

$$=2n\sin u_0(\Delta+f_O')\frac{f_O'}{\Delta}\approx2n\sin u_0 f_O'=\frac{2n\sin u_0 s_0\Delta}{f_E|M|},$$

式中 $M=-s_0\Delta/f_O'f_E$ 为显微镜的视角放大率。

出射光瞳是物镜边框对目镜所成的像，其直径

$$D'=\frac{f_E}{f_O'+\Delta+f_E}D\approx\frac{f_E}{\Delta}D.$$

将上式代入，得

$$D' = \frac{2ns_0\sin u_0}{|M|}.$$

2－54. 拟用冕牌玻璃 K9($n_D=1.5163$, $n_F=1.5220$, $n_C=1.5139$)和重火石玻璃 F4($n_D=1.6199$, $n_F=1.6321$, $n_C=1.6150$)来做消色差胶合透镜，焦距为 100 mm，若已确定其负透镜的非黏合面为平面，试求其余各面的曲率半径。

解： 联立下列两个方程：

$$\begin{cases} P_D = (n_{1D}-1)K_1 + (n_{2D}-1)K_2 = 10.0\,\mathrm{D}, \\ P_F - P_C = (n_{1F}-n_{1C})K_1 + (n_{2F}-n_{2C})K_2 = 0. \end{cases}$$

将题中所给数据代入，解得：

$$K_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 44.90,$$

$$K_2 = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} = -21.27.$$

令 $r_4 \to \infty$，$r_2 = r_3$，算出：

$$r_1 = 42.3\,\mathrm{mm}, \quad r_2 = -47.0\,\mathrm{mm}.$$

式中 r_1 为正透镜非黏合面曲率半径，r_2 为黏合面曲率半径。

2－55. 太阳表面的辐射亮度为 $2\times10^7\,\mathrm{W/(m^2\cdot sr)}$，用相对孔径 $D/f=1.5$ 的放大镜将阳光聚焦成光斑的最大辐射照度是多少？

解： 在光能被聚焦，用于点火、钻孔、熔化、烧毁等过程中，起作用的光度学量是照度，而不是光源本身的亮度。利用远物(成像于聚光透镜的焦面附近)成像的照度公式

$$E \approx \frac{\pi}{4}B\left(\frac{D}{f}\right)^2,$$

以 $B=2\times10^7\,\mathrm{W/(m^2\cdot sr)}$，$D/f=1.5$ 代入，算出太阳像斑的最大辐射照度值为

$$E \approx 3.5\times10^7\,\mathrm{W/m^2}.$$

2－56. 一屏放在离烛 100 cm 处，把一会聚薄透镜放在烛和屏之间，透镜有两个位置可以在屏上得到烛的像，这两个位置相距 20 cm，在屏上烛的两个像的照度相差多少倍？

解： 这两对共轭物像满足互易关系，也就是说，物距 s_1 及其像距 s_1'，物距 s_2 及其像距 s_2' 满足　$s_2 = s_1'$，　$s_1 = s_2'$.

又有　$s_1 + s_1' = s_2 + s_2' = l = 100\,\mathrm{cm}$，　$s_1 - s_1' = \Delta s = 20\,\mathrm{cm}$..

解出

$$\begin{cases} s_1 = 60\,\mathrm{cm}, \quad s_1' = 40\,\mathrm{cm}; \\ s_2 = 40\,\mathrm{cm}, \quad s_2' = 60\,\mathrm{cm}. \end{cases}$$

对于朗伯体两种情况下像面接收的光通量 $\Delta\Phi_1$、$\Delta\Phi_2$ 之比为

$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2}=\frac{k\pi B\sigma\sin^2u_{10}}{k\pi B\sigma\sin^2u_{20}}\approx\frac{u_{10}^2}{u_{20}^2}=\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2,$$

式中k、B和σ分别为透镜的透光系数、光源的亮度和面积，u_{10}^2、u_{20}^2分别为两种情况下的入射孔径角。成像面积σ_1和σ_2之比为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\left(\frac{s_1'}{s_1}\frac{s_2}{s_2'}\right)^2,$$

所以像的照度之比

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\Phi_2}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2\left(\frac{s_2'}{s_2}\frac{s_1}{s_1'}\right)^2=\left(\frac{s_2'}{s_1'}\right)^2=\left(\frac{60}{40}\right)^2=2.25.$$

即小像照度大。

2－57. 望远镜物镜的直径为75 mm，当放大率为(1)20倍，(2)25倍，(3)50倍时，求望远镜中月亮的像的主观亮度与天然主观亮度之此。眼睛瞳孔的直径为3.0 mm.

解： 天然主观亮度是无仪器时视网膜上像的照度，计算公式为

$$H_0=\frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D_e}{f}\right)^2,$$

式中D_e为眼瞳直径。有仪器时的视网膜上像的照度称为主观亮度，计算公式为

$$H=\frac{k\pi B}{4}\left(\frac{D_e'}{f}\right)^2,$$

式中D_e'为有效眼瞳直径。当望远镜出瞳直径$D'\geqslant D_e$时，应取$D_e'=D_e$，主观亮度与天然主观亮度相等；当$D'\leqslant D_e$时，应取$D_e'=D'$，主观亮度小于天然主观亮度，两者之比为

$$\frac{H_0}{H}=\left(\frac{D_e}{D'}\right)^2=\left(\frac{D_eM}{D}\right)^2.$$

下面讨论$D_e=3.0\,\mathrm{mm}$，$D=75\,\mathrm{mm}$时的情况：

(1) 当$M=20$时，

$$D'=D/M=3.75\,\mathrm{mm}>D_e=3.0\,\mathrm{mm},\quad H_0/H=1.$$

(2) 当$M=25$时，

$$D'=D/M=3.0\,\mathrm{mm}=D_e,\quad H_0/H=1.$$

(3) 当$M=50$时，

$$D'=D/M=1.5\,\mathrm{mm}<D_e,$$

$$\frac{H_0}{H}=\left(\frac{D_eM}{D}\right)^2=\left(\frac{3.0\times50}{75}\right)^2=4.0.$$

2－58. 一天文望远镜的物镜直径等于18 cm，透光系数为0.50，已知肉眼可直接观察到六等星。求

（1）用此望远镜所能看到的最弱星等；

（2）最适宜观察星的放大率（正常放大率）；

（3）当放大率为10倍时可见到星的等次。设眼睛瞳孔的直径值可取3.0 mm.

【注：星等增加一等，其亮度减小 $\sqrt[5]{100}\approx 2.5$ 倍。】

解：（1）此题应将星体当做点光源处理，视网膜上像点的亮度取决于进入眼瞳的全部光通量。无望远镜时，进入眼瞳的光通量为

$$\Delta\Phi_0 \propto D_e^2.$$

有望远镜时，进入物镜的光通量为

$$\Delta\Phi = D^2.$$

考虑系统的透光系数是 k，从出瞳通过的光通量减为

$$\Delta\Phi' = k\Delta\Phi \propto kD^2.$$

当 $D'\leqslant D_e$ 时，从望远镜出瞳通过的光通量全部进入眼瞳，故

$$\frac{\Delta\Phi'}{\Delta\Phi_0} = k\left(\frac{D}{D_e}\right)^2 = 0.50\times\left(\frac{180}{3.0}\right)^2 = 1800.$$

按天文学上关于星等划分标准，此时所能看到的最高星等（弱星）为

$$N = N_0 + \log_{2.5}1800 = 6 + 8 = 14.$$

（2）为满足 $D'\leqslant D_e$ 条件，合理的设计应是望远镜的放大率 M 满足

$$D' = D/M = D_e,$$

由此算出

$$M = \frac{D}{D_e} = \frac{180}{3.0} = 60.$$

（3）若放大率过小，以致 $D'\geqslant D_e$，从望远镜出瞳通过的光通量只有部分进入眼瞳，按比例应为

$$\Delta\Phi'' \propto \left(\frac{D_e}{D'}\right)^2 D^2,\quad \frac{\Delta\Phi''}{\Delta\Phi_0} = kM^2.$$

当该望远镜的放大率 $M=10$ 时 $D'=D/10=18\,\mathrm{mm}>D_e$，故按上式算出

$$\Delta\Phi''/\Delta\Phi_0 = 50.$$

此时，可见到的星等为

$$N = N_0 + \log_{2.5}50 = 6 + 4.3 \approx 10.$$

2－59. 求数值孔径为1.5的显微镜的正常放大率，设瞳孔直径为3.0 mm.

解：显微镜的数值孔径N.A.、放大率、出瞳孔径三者之间有一个简单关系：

$$D' = \frac{2s_0 \mathrm{N.\,A.}}{|M|},$$

式中s_0为明视距离。显微镜的合理设计应使出瞳孔径D'等于眼瞳直径D_e. 在数值孔径 N. A. 确定条件下，此时的放大率(正常放大率)为

$$|M_e| = \frac{2s_0 \mathrm{N.\,A.}}{D_e} = \frac{2 \times 250 \times 1.5}{3.0} = 250.$$