1 第一次作业: 2021.09.07

1. 证明: 普朗克黑体辐射公式在高频和低频极限下分别给出维恩公式和瑞利 -金斯公式.

2. 由普朗克黑体辐射公式推导出维恩位移定律: 即黑体辐射的峰值波长 λ_{max} 与辐射温度 T 之间的关系 $\lambda_{max}T=$ 常数. (提示: 根据 $u_\nu(T)$ 得到 $u_\lambda(T)$).

3. 根据普朗克给出的单个振子的平均能量, 假设固体处于温度 T, 所有原子以同一频率 ν 振动, 每个原子有三个自由度.

(1) 求 N 个原子的平均能量 E;

(2) 计算固体的比热 $C=\frac{\partial E}{\partial T}$;

(3) 确定比热在高温和低温极限下的取值.

2 第二次作业: 2021.09.14

1. (经典概率) 在一次集体活动中, 参加活动的成员的年龄分布如下:

年龄/岁	14	15	16	17	23	24	30
人数/个	10	6	7	8	2	2	1

Table 1: 参加活动成员的年龄和相应的人数

(1) 随机抽出一人, 求其年龄为 24 岁的概率;

(2) 求参加该集体活动的成员的平均年龄.

2. (经典概率) 设想一个物体从 h 处自由下落, 在它落地之前, 在足够多的随机的时刻测量物体已经下落的高度.

(1) 求物体下落的高度为 x $(0 < x < h)$ 的概率密度; 提示: 设下落的总时间为 T, 则物体处于 x 到 $x + dx$ 的概率等于相应的处于时刻 t 到 $t + dt$ 的概率 $\frac{dt}{T}$.

(2) 求物体已经下落的高度 $x(0 < x < h)$ 的平均值.

3. (波函数归一化与量子力学概率) 教材第 8 页练习 1, 练习 5

4. (波函数归一化与导数) 考虑波函数 $\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$. 这里, A, λ, ω 均为实的.

(1) 求归一化常数 A.

(2) 计算 $\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$.

3 第三次作业: 2021.09.28

1. 设某时刻一维自由粒子的波函数为一个高斯波包 $\psi(x) = Ae^{ik_0x-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$. 对于该量子态,

(1) 确定归一化常数 A.

(2) 计算坐标的平均值 $\langle\hat{x}\rangle$, 动量算符的平均值 $\langle\hat{p}\rangle$, 坐标算符的不确定度 $\Delta x = \sqrt{\langle(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)^2\rangle}$, 以及动量算符的不确定度 $\Delta p = \sqrt{\langle(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)^2\rangle}$.

提示: 对任意算符 $\hat{A}$, $\left\langle\left(\hat{A}-\left\langle\hat{A}\right\rangle\right)^2\right\rangle = \left\langle\hat{A}^2\right\rangle - \left\langle\hat{A}\right\rangle^2$.

2. 对于第 2 次作业第 4 题中的 $\Psi(x,t)$, 计算下列物理量:

(1) 计算 $\langle\hat{x}\rangle$ 和 $\langle\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle\rangle^2$;

(2) 计算动能的平均值 $\left\langle\hat{T}\right\rangle$, 这里 $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$.

3. 已知三维量子体系氢原子的基态波函数为 $\psi(r) = A\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, 这里 A 为归一化常数, a 为玻尔半径, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

(1) 证明: 动能算符 $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$;

(2) (选做) 证明: 球坐标系下动能算符 $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$;

(3) 计算动能的平均值;

(4) 计算势能的平均值 $\left\langle\hat{V}\right\rangle$, 这里 $\hat{V} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

4 第四次作业: 2021.10.12

1. 证明概率密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 和概率流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 可以分别表示为下列算符的平均值: $\hat{\rho}(\boldsymbol{r}_0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$, $\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)+\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\hat{\boldsymbol{p}})$.

2. 考虑一维情形, 粒子状态由波函数 $\psi(x,t)$ 描述, 设 P_{ab} 是在 t 时刻发现粒子处于区间 ($a<x<b$) 内的概率.

(1) 证明 $\frac{dP_{ab}}{dt}=J(a,t)-J(b,t)$. 这里概率流密度 $J(x,t)=\frac{i\hbar}{2m}(\psi(x,t)\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}-\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x})$.

(2) 分别确定 $\psi(x,t)$ 和 $J(x,t)$ 的量纲.

(3) 若 $\psi(x,t)=Ae^{-\lambda(x-x_0)^2-i\omega t}$, 这里 A, λ, x_0, ω 均为实数. 利用 $J(x,t)$ 的公式确定其概率流密度.

3. 自然界存在不稳定的粒子. 随着时间的推移, 它会分解成其它粒子. 可建立如下模型研究这一过程. 设粒子处于量子态 $\psi(x,t)$, 其势能 $V(x)=V_0(x)-i\Gamma$, 这里 $V_0(x)$ 是实的, 而 Γ 是正的实常数. 令 $P=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2dx$,

(1) 证明: $\frac{dP}{dt}=-\frac{2\Gamma}{\hbar}P$;

(2) 令 $P(0)=1$, 求 $P(t)$.

(3) 定义发现粒子的总概率衰减为开始时的 e^{-1} 所经历的时间 t_0 定义为其寿命, 试确定不稳定粒子寿命的表达式.

4. 对由**归一化**波函数 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 所描述的量子体系, 魏格纳 (E.P. Wigner) 分布函数定义为

$$W(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}''/\hbar}\psi^*\left(\boldsymbol{r}'-\frac{\boldsymbol{r}''}{2}\right)\psi\left(\boldsymbol{r}'+\frac{\boldsymbol{r}''}{2}\right)d^3r''$$

(1) 证明: $W(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')=W^*(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')$;

(2) 证明: $\int W(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')d^3p'=|\psi(\boldsymbol{r}')|^2$;

(3) 对于某可观测量对应的算符 $C(\hat{\boldsymbol{r}})$, 证明: $\langle C(\hat{\boldsymbol{r}})\rangle=\int\int C(\boldsymbol{r}')W(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')d^3r'd^3p'$;

(4) 证明: $\int\int W(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{p}')d^3r'd^3p'=1$.

5 第五次作业 2021.10.19

1. 已知质量为 m 的微观粒子处于状态 $\psi(\boldsymbol{r})$, 其概率密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$ 和概率流密度为 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$. 设 $\xi(\boldsymbol{r})$ 为 $\psi(\boldsymbol{r})$ 的辐角, 则

(1) 证明 $\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\rho(\boldsymbol{r})} e^{i\xi(\boldsymbol{r})}$

(2) 证明 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{\hbar}{m}\rho(\boldsymbol{r})\nabla\xi(\boldsymbol{r})$.

(3) 如果两个波函数给出同一个概率密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$ 和同一个概率流密度为 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, 则这两个波函数只相差一个总的相位因子.

2. 假设 $t=0$ 时刻, 一个粒子的初始状态是能量本征态 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$ 的线性叠加: $\psi(x,0) = A\left(\psi_1(x) + \sqrt{2}i\psi_2(x) + \psi_3(x)\right)$ A 为归一化常数. $\psi_n(x)$ 对应的本征能量为 E_n, 满足 $n \neq m$ 时, $E_n \neq E_m$, 且 $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$, 即正交归一, $m,n = 1,2,3$.

(1) 已知粒子 Hamiltonian 算符为 $\hat{H}$, 计算它在 $\psi(x,0)$ 上的能量平均值;

(2) 求 $t>0$ 时刻粒子的波函数 $\psi(x,t)$, 验证它满足 Schrödinger 方程, 并计算能量的平均值;

(3) 若在 $t=0$ 时刻测量粒子的能量, 求测量值为 E_2 的概率. 求粒子在 $t>0$ 时刻的波函数, 并解释原因.

3. 算符 $\hat{A}$ 表示力学量 A, 它有两个正交归一的本征态 ψ_1 和 ψ_2, 本征值分别为 a_1 和 a_2. $a_1 \neq a_2$. 算符 $\hat{B}$ 表示力学量 B, 它有两个正交归一的本征态 ϕ_1 和 ϕ_2, 本征值分别为 b_1 和 b_2. $b_1 \neq b_2$. 它们的本征态由下式联系:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= c_1\left(\sqrt{2}\phi_1 + i\phi_2\right) \\
\psi_2 &= c_2\left(\phi_1 - \sqrt{2}i\phi_2\right)
\end{aligned}$$

这里 c_1, c_2 为归一化常数.

(1) 开始时, 先对力学量 A 进行测量, 测量值为 a_2. 当测量刚刚完成时, 体系的状态如何表示? 简述原因.

(2) 接下来, 测量力学量 B, 可能的测量值是什么？它们出现的概率是多少?

(3) 最后, 再次测量力学量 A, 测量值为 a_2 的概率是多少?

6 第六次作业: 2021.10.26

1. 给定一族函数 $\left\{\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2-\delta_{n0}}{\pi}}\cos nx,\ 0\le x\le\pi,\ n=0,1,2,\cdots\right\}$. 已知定义在区间 $[0,\pi]$ 上的函数 $\psi_1(x)=\cos^3 x+\sin^2 x+\cos x+1$, 和 $\psi_2(x)=\cos^2 x-\cos x$.

(1) 证明: $(\varphi_n,\varphi_m)=\delta_{mn}$;

(2) 令 $\psi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$, $\psi_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\varphi_n(x)$. 试确定展开系数 $\{a_n,\quad n=0,1,2,\cdots\}$, 和 $\{b_n,\quad n=0,1,2,\cdots\}$.

(3) 计算内积 (ψ_1,ψ_1), (ψ_1,ψ_2).

提示: 定义在区间 $[0,\pi]$ 上的平方可积的函数构成了一个线性空间, ψ_1 和 ψ_2 就是这个空间的元素. 本题给这个线性空间选定了一组基函数. 一旦选定了基函数, 这个空间的元素都可以对应为一个 $\mathbb{C}^\infty$ 向量 (即无穷维的复向量). **与元素有关的内积就可以转化为向量内积的运算.**

2. 设有一维势 $V(x)$, 满足 $V(\pm\infty)\to+\infty$, 考虑定态 Schrödinger 方程的两个实的归一化解: $\psi_n(x)$ 和 $\psi_m(x)$, 相应的本征能量 $E_n>E_m$.

(1) 证明:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi_m}{dx}\psi_n-\psi_m\frac{d\psi_n}{dx}\right)=\frac{2m}{\hbar^2}(E_n-E_m)\psi_m\psi_n$$

(2) 设 x_1 和 x_2 是 $\psi_m(x)$ 的两个相邻的节点 $(x_1<x_2)$, 证明

$$\psi_m'(x_2)\psi_n(x_2)-\psi_m'(x_1)\psi_n(x_1)=\frac{2m}{\hbar^2}(E_n-E_m)\int_{x_1}^{x_2}\psi_m\psi_n dx \tag{1}$$

(3) 证明: 在 $\psi_m(x)$ 的任两个相邻节点 x_1 和 x_2 之间, $\psi_n(x)$ 至少有一个节点. (提示: 如果 $\psi_n(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间无节点, 则它在这个区间上不变号, 结合 (2) 的结论利用反证法.)

3. 证明: 若势能存在极小值 V_{min}, 则一维粒子的束缚态能量不小于势能极小值 V_{min}. 提示: 这等价于证明粒子的动能平均值总是非负的.

4. 朗斯基行列式的性质及运用

(1) 设 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 是两个函数, 定义它们的朗斯基行列式为 $W(\psi_1,\psi_2)=\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \psi_1' & \psi_2'\end{vmatrix}$, 证明若 $W(\psi_1,\psi_2)=0$, 则 ψ_1,ψ_2 线性相关.

(2) 证明朗斯基行列式满足: 反对称性 $W(\psi_1,\psi_2)=-W(\psi_2,\psi_1)$, 和线性 $W(\psi_1,C_2\psi_2+C_3\psi_3)=C_2W(\psi_1,\psi_2)+C_3W(\psi_1,\psi_3)$, C_2, C_3 为常数;

(3) 利用朗斯基行列式证明: 若一维势中粒子的能量本征态 $\psi(x)$ 和 $\psi^*(x)$ 线性无关, 则 $\varphi(x)\equiv\psi(x)+\psi^*(x)$ 和 $\chi(x)\equiv -i(\psi(x)-\psi^*(x))$ 必然是线性无关的.

(4) 运用上述结论和定理 6, 证明一维势中粒子的能量本征态的简并度不超过 2. 提示: 反证法, 设对应某本征能量, 一维势中的粒子有三个线性无关的能量本征态 ψ_1, ψ_2 和 ψ_3.