安徽大学 2008—2009 学年第一学期

《高等数学 A（三）》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1、B　　2、C　　3、 D　　4、D　　5、A

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6、-1，-2　　7、$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　8、30　　9、9　　10、（19.77，20.05）

三、计算题（本大题共 4 小题，其中第 11 题和第 13 题各 10 分，第 12 题 14 分，第 14 题 12 分，共 46 分）

11、解：将第一行的-1 倍加到其余各行，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 - x_1 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 - x_1 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 - x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

再将第 $i(i = 2,3,\cdots,n)$ 列的 $\dfrac{x_1 - a_1}{x_i - a_i}$ 倍加到第一列，得

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 + \sum_{i=2}^{n} \dfrac{a_i(x_1 - a_1)}{x_i - a_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i(x_1 - a_1)}{x_i - a_i})(x_2 - a_2)(x_3 - a_3)\cdots(x_n - a_n)$$

$$= (1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i})(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3)\cdots(x_n - a_n)$$

12、 解：(1)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

令 $(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-6)=0$ ，得 $\lambda_1=2,\lambda_2=4,\lambda_3=6$.
当 $\lambda_1=2$ 时，解下列方程组

$$\begin{cases}-2x_1=0\\ -2x_2-2x_3=0\\ -2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

得特征向量 $\alpha_1=(0,1,-1)^T$ ；
当 $\lambda_2=4$ 时，解下列方程组

$$\begin{cases}-2x_3=0\\ -2x_2=0\end{cases}$$

得特征向量 $\alpha_2=(1,0,0)^T$ ；
当 $\lambda_3=6$ 时，解下列方程组

$$\begin{cases}2x_1=0\\ 2x_2-2x_3=0\\ -2x_2+2x_3=0\end{cases}$$

得特征向量 $\alpha_3=(0,1,1)^T$ 。

(2) 由于实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交，所以只需将(1)中得到的特征向量单位化即可得到正交矩阵。将特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得

$$\beta_1=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})^T，\quad \beta_2=(1,0,0)^T，\quad \beta_3=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$$

令 $Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，从而 Q 为正交矩阵，并且 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，

即所求的对角矩阵为 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$。

(3) 由(2)知

$$A=Q\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}Q^T$$

所以

$$A^k=Q\begin{pmatrix}2^k&0&0\\0&4^k&0\\0&0&6^k\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}4^k&0&0\\0&\dfrac{2^k+6^k}{2}&\dfrac{-2^k+6^k}{2}\\0&\dfrac{-2^k+6^k}{2}&\dfrac{2^k+6^k}{2}\end{pmatrix}$$

13、解：二次型的矩阵为

$$\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&a&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$$

各阶顺序主子式为

$$|2|=2,\ \begin{vmatrix}2&2\\2&a\end{vmatrix}=2a-4,\ \begin{vmatrix}2&2&-2\\2&a&-4\\-2&-4&5\end{vmatrix}=2(3a-10),$$

由于二次型正定，所以各阶顺序主子式均大于 0，即

$$\begin{cases}2(3a-10)>0\\2a-4>0\end{cases}$$

解得 $a>10/3$。

14、解：(1) 由于 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合密度函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$$

即

$$\int_{-1}^{1}[\int_{x^2}^{1}Cx^2ydy]dx=\frac{4}{21}C=1$$

所以 $C=\dfrac{21}{4}$

(2)
$$\begin{aligned}P(0\le X\le Y)&=\iint\limits_{0\le x\le y}f(x,y)dxdy\\&=\frac{21}{4}\int_0^1x^2[\int_x^1ydy]dx=\frac{21}{8}\int_0^1x^2(1-x^2)dx\\&=\frac{21}{8}\int_0^1(x^2-x^4)dx=\frac{7}{20}\end{aligned}$$

四、证明题（本大题共 2 小题，每题 12 分，共 24 分）

15、证明：（1）由于 $A^2-6A-7E=0$，所以 $(A+E)(A-7E)=0$，下用反正法：

若 $A-7E$ 可逆，则 $A+E=0\bullet(A-7E)^{-1}=0$，此与假设 $A+E\neq0$ 矛盾，所以 $A-7E$ 不可逆。

（2）由于 $A^2-6A-7E=0$，所以 $(A-5E)(A-E)=12E$，从而

$$[\frac{1}{12}(A-5E)](A-E)=E$$

所以$A-E$可逆，并且$(A-E)^{-1}=\frac{1}{12}(A-5E)$。

16、证明：(1) 由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x\frac{1-x^3y+xy^3}{4}dxdy=0,$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}y\frac{1-x^3y+xy^3}{4}dxdy=0,$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xy\frac{1-x^3y+xy^3}{4}dxdy=0,$$

所以 $\rho_{X,Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$，即$X$与$Y$不相关。

(2) 先求X与Y的边缘密度函数：

当$x>1$或$x<-1$时，$f_X(x)=0$。

当$|x|\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{1-x^3y+xy^3}{4}dy=\frac{1}{2}$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

同理可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|\le 1\\ 0, & |y|>1\end{cases}$$

易见$f(x,y)$和$f_X(x)\bullet f_Y(y)$在区域$\{(x,y):|x|\le 1,|y|\le 1\}$内并不是几乎处处相等的，所以$X$与$Y$不独立。

五、综合分析题（本大题共 10 分）

17、解：(1) 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的观测值，因为总体X的概率密度函数为

$$f(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

所以似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n(\frac{1}{\sigma^2})^{n/2}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2]$$

对数似然函数为

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=n\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

似然方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\ \dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$$

解得 μ 和 σ^2 的极大似然估计分别为

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\end{cases}$$

对应的估计量分别为

$$\begin{cases}\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\end{cases}$$

(2) 由于 $E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\sigma^2$，所以

$$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 不是 σ^2 的无偏估计量。