1.若把麦克斯韦方程组的所有矢量都分解为无旋的(纵场)和无散的(横场)两部分，写出 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 的这两部分在真空所满足的方程式，并证明电场的无旋部分对应于库仑场。

解：在真空中的麦克斯韦方程组是：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}，\quad \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\nabla\cdot\vec{B}=0$$

如果把此方程组中所有的矢量都分解为：无旋的纵场——用角标 L 表示，
无散的横场——用角标 T 表示。

那么： $\vec{E}=\vec{E}_L+\vec{E}_T$，且 $\nabla\times\vec{E}_L=0$，$\nabla\cdot\vec{E}_T=0$;

$\vec{J}=\vec{J}_L+\vec{J}_T$,

$\vec{B}=\vec{B}_L+\vec{B}_T$：由于 $\nabla\times\vec{B}=0$，即 $\vec{B}$ 无源场，不存在纵场分量；亦是说 $\vec{B}_L$,则$\vec{B}=\vec{B}_T$

代入上面麦氏方程组：

1> $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ：

$$\nabla\times(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\times\vec{E}_L+\nabla\times\vec{E}_T=\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t}$$

2> $\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$ ： $\nabla\cdot(\vec{E}_L+\vec{E}_T)=\nabla\cdot\vec{E}_L+\nabla\cdot\vec{E}_T=\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$

3> $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$： $\nabla\times\vec{B}_T=\mu_0(\vec{J}_L+\vec{J}_T)+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{E}_L+\vec{E}_T)$

$$=(\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})+(\mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t})$$

若两边同时取散度， $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}_T)=0$

$$\nabla\cdot(\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t})=0$$

$$\therefore 当且仅当 \mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0 时，上式方成立。$$

综上，得麦氏方程的新表示方法：

$$\nabla\times\vec{E}_T=-\frac{\partial\vec{B}_T}{\partial t}; \qquad \nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla\times\vec{B}_T=\mu_0\vec{J}_T+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_T}{\partial t}; \qquad \mu_0\vec{J}_L+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_L}{\partial t}=0 \quad; \quad \vec{B}_L=0$$

证明电场的无旋部分对应库仑场：

电场的无旋部分表达式为：$\nabla\cdot\vec{E}_L=\rho/\varepsilon_0$

引入 $\vec{E}_L=-\nabla\varphi$ 于是有：$\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ 此泊松方程的解，即是静止电荷在真空中产生的电势分布，那么 $\vec{E}_L$ 即对应静止电荷产生的库仑场。

2. 证明在线性各向同性均匀非导电介质中，若 $\rho=0,\vec{J}=0$，则 E 和 B 可完全由矢势 A 决定，若取 $\varphi=0$，这时 A 满足哪两个方程？

解：在线性各向同性均匀非导电介质中，如果令 $\vec{J}=0,\rho=0$，麦氏方程表示为：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \quad \nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}; \quad \nabla\cdot\vec{D}=0; \quad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

其中 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu}$

由：$\nabla\cdot\vec{B}=0$ 引入矢势 $\vec{A}$，使 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

则 $\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$ 故，$\vec{B}$ 由矢势 $\vec{A}$ 完全决定。

把 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 代入 $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$；有：

$$\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0 \quad 令 \vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \quad 则：\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=\nabla\times(-\nabla\varphi)=0$$

则：$\vec{E}=-\partial\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 故 $\vec{E}$ 有标势 $\vec{A}$ 完全决定。

如果取 $\varphi=0$，有：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$　　代入方程　$\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\qquad\qquad \nabla\cdot\vec{D}=0$$

有：　1>$\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$：　$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon\mu\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow\ \nabla\times(\nabla\times\vec{A})=-\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\ \nabla\times(\nabla\times\vec{A})+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

2>$\nabla\cdot\vec{D}=0$：　$\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=0$

由于取 $\varphi=0$，库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$，与洛伦兹规范 $\nabla\cdot\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ 相同

$\therefore$ 由 1>2>得：$\vec{A}$ 满足的方程有：

$$\nabla\cdot\vec{A}=0$$

$$\nabla^2\vec{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t}=0$$

3. 证明沿 z 轴方向传播的平面电磁波可用矢势 $\vec{A}(\omega\tau)$ 表示，其中 $\tau=t-z/c$，A 垂直于 z 轴方向。

证：对于沿 z 轴传播的任意一平面电磁波 $\vec{E},\vec{B}$，可写作：

$$\vec{E}=E_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$$
$$\vec{B}=B_0\vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)}$$

满足：1）$\vec{E},\vec{B}$ 均垂直于传播方向 $\vec{e}_z$

2）$\vec{E},\vec{B}$ 相互垂直，$\vec{E}\times\vec{B}$ 沿 $\vec{k}$ 方向

3）$\vec{E},\vec{B}$ 同相，振幅比为 υ（真空中为 c）

故，不妨取 $\vec{A}=A_0\vec{e}_x e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})}=A_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$，　$k=\dfrac{\omega}{c}$

$$\therefore \vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial z}\vec{e}_y=ikA_0\vec{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \qquad (1)$$

$$\vec{E}=-\frac{\partial A}{\partial t}=i\omega A_0\vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \qquad (2)$$

可见，如果令 $kA_0=B_0,\omega A_0=E_0$，表达式（1）（2）可表示的波正是符合条件的平面波，所以命题得证。

4. 设真空中矢势 $\vec{A}(\vec{x},t)$ 可用复数傅立叶展开为 $\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[a_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+a_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$,其中 $\vec{a}_k^*$ 是 $\vec{a}_k$ 的复共轭。

（1）证明 $\vec{a}_k$ 满足谐振子方程 $\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=0$。

（2）当选取规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0$ 时，证明 $\vec{k}\cdot\vec{a}_k=0$。

（3）把 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 用 $\vec{a}_k$ 和 $\vec{a}_k^*$ 表示出来。

解：（1）证明：$\because \vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore$ 根据傅立叶级数得正交性，必有：

$$\vec{a}_k(t)=\int\vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$$

$$\therefore \frac{d^2a_k(t)}{dt^2}=\int\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x} \qquad (1)$$

而洛仑兹变换时，矢势 $\vec{A}$ 满足方程 $\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$

在真空中，$\vec{J}=0$，故，$\nabla^2\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$

$\therefore$ （1）式化为 $\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}=\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}(c^2\nabla^2\vec{A})d\vec{x}$

而 $k^2c^2\vec{a}_k(t)=\int k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x}$

于是：$$\frac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=\int[c^2\nabla^2\vec{A}(\vec{x},t)+k^2c^2\vec{A}(\vec{x},t)]e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d\vec{x} \qquad (2)$$

$\because \vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$\therefore \nabla^2\vec{A}(\vec{x},t)=-k^2\vec{A}(\vec{x},t)$

$\therefore$ （2）式右边的积分式中，被积函数为 0，积分为 0。

$\therefore \dfrac{d^2\vec{a}_k(t)}{dt^2}+k^2c^2\vec{a}_k(t)=0$，亦即 $\vec{a}_k$ 满足谐振子方程。

2）选取规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0$，于是有

$$\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]=\sum_k[\vec{a}_k(t)\nabla\cdot e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)\nabla\cdot e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$=\sum_k[\vec{k}\cdot\vec{a}_k(t)\cdot ie^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}-\vec{k}\cdot\vec{a}_k^*(t)\cdot ie^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]=0$$

$\because \vec{a}_k(t),\vec{a}_k^*(t)$ 是线性无关的正交组

$\therefore$ 要使上式成立，仅当 $\vec{k}\cdot\vec{a}_k=\vec{k}\cdot\vec{a}_k^*=0$ 时

$\therefore$ 故，证得当取 $\nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0$ 时，$\vec{k}\cdot\vec{a}_k=0$

3）已知 $\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k[\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$

$$\therefore \vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\sum_k[i\vec{k}\vec{a}_k(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}-ik\vec{a}_k^*(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\sum_k[\frac{d\vec{a}_k(t)}{dt}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}+\frac{d\vec{a}_k^*(t)}{dt}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}]\quad（取规范\ \nabla\cdot\vec{A}=0,\varphi=0）$$

5. 设 $\vec{A}$ 和 φ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势。

（1）引入一矢量函数 $\vec{Z}(\vec{x},t)$（赫兹矢量），若令 $\varphi=\nabla\cdot\vec{Z}$，证明 $\vec{A}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$。

（2）若令 $\rho=-\nabla\cdot\vec{P}$ 证明 $\vec{Z}$ 满足方程 $\nabla^2\vec{Z}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\vec{P}$，写出在真空中的推迟解。

（3）证明 $\vec{E}$和$\vec{B}$ 可通过 $\vec{Z}$ 用下列公式表出，$\vec{E}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P},\vec{B}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$

解：1）证明：$\vec{A}$ 与 φ 满足洛仑兹规范，故有 $\nabla\cdot\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

$\because \varphi=-\nabla\cdot\vec{Z}$ 代入洛仑兹规范，有：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\cdot\vec{Z})=0，即\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t})$$

$$\therefore \vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}$$

2）证明：$\because$ 标势 φ 在满足洛仑兹规范得条件下有方程：$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

而 $\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z}$，故：$\nabla^2\varphi=\nabla^2(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(-\nabla\cdot\vec{Z})=-\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})$$

代入原方程：

$$-[\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})]=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

令 $\rho=-\nabla\cdot\vec{P}$，则上式化为：

$$\nabla\cdot(\nabla^2\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\nabla\cdot(\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\cdot\vec{P}$$

即：$\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=-c^2\mu_0\vec{P}$ （2）

由于矢势 $\vec{A}$：$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}$ 在真空中的推迟势为：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

故，可类比得出，方程（2）在真空中的推迟势解为：

$$\vec{Z}(\vec{x},t)=\frac{c^2\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{P}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$$

3）$\because \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，代入 $\varphi=-\nabla\cdot\vec{Z},\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$ 有：

$$\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{Z})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})+\nabla^2\vec{Z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\vec{Z})-c^2\mu_0\vec{P}$$

同理：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{Z}$

$$\therefore \vec{E} = \nabla \times (\nabla \times \vec{Z}) - c^2 \mu_0 \vec{P}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{Z}$$

6. 两个质量，电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生。

证明：电偶极矩与磁偶极矩产生的辐射场分别是：

1>由电偶极矩产生的辐射场：

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}(\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}$$

2>由磁偶极矩产生的辐射场：

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c R}(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}) \times \vec{n}$$

现有两个质量，电荷都相同的粒子相向而行，发生磁撞，在此过程中，取两个电荷的连线为 x 轴，于是，此系统的电偶极矩是：

$$\vec{p} = q\vec{x}_1 + q\vec{x}_2 = q(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

由此可发现：$\ddot{\vec{p}} = \frac{d^2}{dt^2}[q(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)] = q(\ddot{\vec{x}}_1 + \ddot{\vec{x}}_2)$

由于两个粒子质量相同，电量也相同，故当其运动时 $\ddot{\vec{x}}_1 = -\ddot{\vec{x}}_2$（牛顿第二定律）

即：$\ddot{\vec{p}} = 0$

于是，系统的电偶极矩辐射场为 0

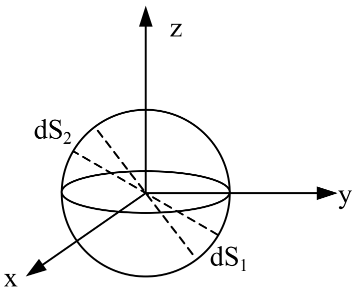
又由于，此系统的磁偶极矩 $\vec{m} = 0$， 于是，系统的磁偶极矩辐射场为 0。

综上，两个质量，电荷都相同的粒子同向而行发生磁撞，不会发生电偶极辐射和磁偶极辐射。

7. 设有一个球对称的电荷分布，以频率 ω 沿径向做简谐振动，求辐射场，并对结果给以物理解释。

解：

设球面上均匀分布了总电量为 Q 的电荷，此假设满足题目中的球对称分布，于是，球面电荷密度与球面半径的关系是：



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

取如图相对的两块小面元 dS_1, dS_2，由于两块小面元对应相同的立体角，故有相同的面积

$dS_1 = dS_2$，

于是　$\Delta Q_1 = \sigma dS_1 = \dfrac{Q}{4\pi R^2} dS_1 = \dfrac{Q}{4\pi R^2} dS_2 = \sigma dS_2 = \Delta Q_2$

考虑到两电荷元$\Delta Q_1, \Delta Q_2$，由于是球对称，又以相同的频率ω作沿径向的简谐振动

$$\therefore \quad \vec{p} = \Delta Q_1 \cdot R \cdot \vec{e}_r + \Delta Q_1 \cdot R \cdot (-\vec{e}_r) = 0$$

$$\vec{m} = I \cdot \Delta \vec{S} = 0$$

故，此两电荷元的振动不能产生辐射场。

根据场的叠加原理，整个球对称分布的电荷体系沿径向的简谐振荡是不能产生辐射场的振动，辐射场为 0。

8. 一飞轮半径为 R，并有电荷均匀分布在其边缘上，总电量为 Q。设此飞轮以恒定角速度ω旋转，求辐射场。

解：

设飞轮边缘的厚度为 d,于是，边缘上的电荷面密度$\sigma = \dfrac{Q}{2\pi Rd}$

体系的电偶极矩为：　$\vec{p} = \oint \dfrac{Q}{2\pi Rd} \cdot d \cdot dl \cdot \vec{x} = \dfrac{Q}{2\pi R} \oint \vec{x} \cdot dl$

$$= \frac{Q}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot d\theta \cdot \vec{e}_x + \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot d\theta \cdot \vec{e}_y\right] = 0$$

体系的此偶极矩：$\vec{m} = I \cdot \Delta \vec{S} = \dfrac{Q\omega}{2\pi} \cdot \pi R^2 \cdot \vec{e}_z = \dfrac{Q\omega R^2}{2} \vec{e}_z$

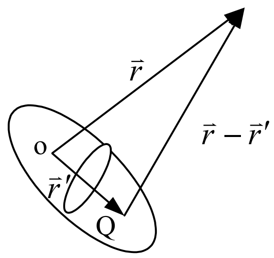
由此得：$\ddot{\vec{p}} = 0 \quad \ddot{\vec{m}} = 0$

故，辐射场为 0。

9. 利用电荷守恒定律，验证$\vec{A}$和φ的推迟势满足洛伦兹条件。

证明：如右图所示，O 是坐标原点，Q 是源点，P 是场点

于是，$\vec{A}$与φ的推迟势可写作：



$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\vec{V}} \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{V}，\text{其中，} t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

因为在空间中有一个固定点，有$\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'}$，故：

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial t'}\rho(\vec{r}',t')dV'$$

而 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla\cdot\vec{J}dV' \qquad (*)$$

当算符 ∇ 作用于 $|\vec{r}-\vec{r}'|$ 的 n 次幂时，可写作：

$$\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|^n=-\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|^n$$

其中 ∇' 只作用于 $\vec{r}'$，因为 $\vec{J}(\vec{r}',t')$ 中的变量 $t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$，其中含有 $\vec{r}$，故：

$$\nabla\cdot\vec{J}=\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla t')=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla|\vec{r}-\vec{r}'|)=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

另一方面，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t'}\cdot(\nabla'|\vec{r}-\vec{r}'|)$

对此上两式，有：$\nabla'\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla\cdot\vec{J}$

即：$\nabla\cdot\vec{J}=(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J}$

代入*式，有：

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}((\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}-\nabla'\cdot\vec{J})dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}\cdot(\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|})dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\nabla'\cdot\vec{J}dV'+$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const})dV'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$$

因为 $\int_{V'}\nabla'\cdot[\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]dV'=\oint_{S'}\frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{S}'$

只要把 V' 取得足够大，就可以使 $\vec{J}(\vec{r}',t')$ 在 V' 的边界面上处处为零，结果上式便为零。

于是　$\nabla\cdot\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}dV'$

$$\therefore\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}[(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\frac{\partial\rho}{\partial t}]dV'$$

由电荷守恒定律有：

$(\nabla'\cdot\vec{J})_{t'=const}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t'}=0$，　式中 t' 是 $\vec{r}'$ 点的局域时间，由以上两式有：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

由此可见，只要电荷守恒定律成立，则推迟势 $\vec{A}$ 和 φ 就满足洛仑兹规范。

10. 半径为 R_0 的均匀永磁体，磁化强度为 $\vec{M}_0$，求以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 $\vec{M}_0$ 的轴旋转，设 $R_0\omega$<<c，求辐射场和能流。

解：

本题相当于一个位于原点的磁偶子的旋转振荡，此磁偶极子为：

$$\vec{M}=\frac{4}{3}\pi R_0^2\vec{M}_0$$

其振荡可分解为 x，y 方向上相位差为 $\pi/2$ 的简谐振荡的合成。

$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3 M_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3 M_0\sin(\omega t)\vec{e}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3 M_0\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

用复数形式表达为：

$$\vec{M}_x=\frac{4}{3}\pi R_0^3 M_0 e^{-i(\omega t)}\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_y=\frac{4}{3}\pi R_0^3 M_0 ie^{-i(\omega t)}\vec{e}_y$$

$$\vec{E}=-\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi cR}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})$$

根据磁偶极矩辐射场公式：$\vec{B}=\dfrac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi c^2 R}(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n})\times\vec{n}$

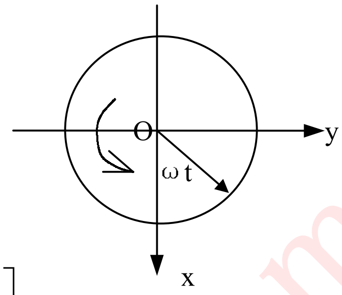
$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3R^2}\sin^2\theta\vec{n}$$

1>求 $\vec{B}$

在 x 方向作简谐振荡的分量，

$$\vec{B}_x=\frac{\mu_0}{4\pi c^2 R}\cdot e^{ikR}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 M_0\omega^2 e^{-i\omega t}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r$$

$$=\frac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3c^2 R}(\vec{e}_x\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$



在 y 方向的分量，

$$\vec{B}_y=\frac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3c^2 R}(\vec{e}_y\times\vec{e}_r)\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}$$

根据：$\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\phi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_R\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\phi\end{bmatrix}$

得：　$\vec{B}=\dfrac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3cR}(\vec{e}_\theta\cos\theta+i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$

同理可得：$\vec{E}=\dfrac{\mu_0\omega^2 R_0^3 M_0}{3cR}(i\vec{e}_\theta-\vec{e}_\phi\cos\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$

$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4 R_0^6 M_0^2}{18c^3 R^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

11. 带电粒子 e 作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 ω。求远处的辐射电磁场和辐射能流。

解：由题意，得右图

本题所研究的系统的磁偶极矩 $\vec{m}$ 是一个常量，因此不产生电磁辐射，但此系统的电偶极矩是一旋转的变化量

$$\vec{p}=ea\vec{e}_r$$

同 10 题的解法，把此旋转量分解到 x，y 方向上的两个简谐振荡是：

$$\vec{p}_x=ea\cos\omega t\vec{e}_x=eae^{-i\omega t}\vec{e}_x$$

$$\vec{p}_y=ea\cos(\omega t-\pi/2)\vec{e}_y=eae^{-i(\omega t+\frac{\pi}{2})}\vec{e}_y$$

$$=-eaie^{-i\omega t}\vec{e}_y$$

根据公式：$\vec{B}=\dfrac{i\mu_0 k}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\dot{\vec{p}})$

$$\vec{E}=\frac{i\mu_0 kc}{4\pi R}e^{ikR}(\vec{n}\times\dot{\vec{p}})\times\vec{n}$$

$$\vec{S}=\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^{2}}{32\pi^{2}\varepsilon_{0}c^{3}R^{2}}\sin\theta\vec{n}$$

有：$\dot{\vec{p}}_x=-i\omega e a e^{-i\omega t}\vec{e}_x,\ddot{\vec{p}}_x=\omega^2 e a e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$\dot{\vec{p}}_y=i\omega e a i e^{-i\omega t}\vec{e}_y,\ddot{\vec{p}}_y=-\omega^2 e a i e^{-i\omega t}\vec{e}_y$

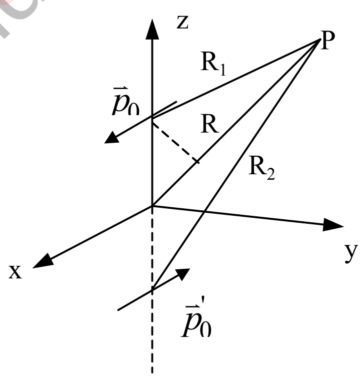
分别代入上式，可得：

$$\vec{B}=\frac{\mu_0\omega^2 ea}{4\pi cR}(\vec{e}_\phi\cos\theta-i\vec{e}_\theta)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{E}=\frac{\mu_0\omega^2 ea}{4\pi R}(\vec{e}_\theta\cos\theta+i\vec{e}_\phi)e^{i(kR-\omega t+\phi)}$$

$$\vec{S}=\frac{\mu_0\omega^4 e^2 a^2}{32\pi^2 cR^2}(1+\cos^2\theta)\vec{e}_r$$

12. 设有一电矩振幅为 $\vec{p}_0$，频率为 ω 的电偶极子距理想导体平面为 a/2 处，$\vec{p}_0$ 平行于导体平面。设 $a<<\lambda$，求在 $R>>\lambda$ 处电磁场及辐射能流。



解：由题，如图所示，设平面 xoy 式导体平面，

利用镜像法，构造图中的像电偶极子。

由图：$\vec{p}_0=p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$\vec{p}_o{}'=-\vec{p}_0=-p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

分别计算它们在场点 P 处产生的辐射场 $\vec{B}$

1）$\ddot{\vec{p}}_0=-\omega^2p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}e^{ik(R-\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0\times\vec{e}_r=-e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega^2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

2）$\ddot{\vec{p}}_0'=\omega^2p_0e^{-i\omega t}\vec{e}_x$

$$\vec{B}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot e^{ik(R+\frac{a}{2}\cos\theta)}\cdot\ddot{\vec{p}}_0'\times\vec{e}_r=e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}}\cdot\frac{\omega_2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot d^{i(kR-\omega t)}$$

故：$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$

$$=\frac{\omega^2p_0}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\cdot\vec{e}_x\times\vec{e}_r\cdot e^{i(kR-\omega t)}\cdot[e^{i\frac{ka\cos\theta}{2}}-e^{-i\frac{ka\cos\theta}{2}}]$$

$$\approx \frac{ika\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \cos\theta(-\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\phi - \sin\phi\vec{e}_\theta)$$

$$= -\frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^3} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{R},t) = -\frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^3} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta + \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)$$

$$\vec{E}(\vec{R},t) = c\vec{B}\times\vec{e}_r = \frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R}(\cos\theta\sin\phi\vec{e}_\phi - \cos^2\theta\cos\phi\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{2\mu_0}\left|\vec{B}\right|^2\vec{n} = \frac{\mu_0\omega^6 p_0^2 a^2}{32\pi^2 c^3 R^2}(\cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^4\theta\cos^2\phi)\vec{e}_r$$

13. 设有线偏振平面波 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上（$\vec{E}_0$ 在 z 方向），引起介质球极化，极化矢量 $\vec{P}$ 是随时间变化的，因而产生辐射。设平面波的波长 $2\pi/k$ 远大于球半径 R_0，求介质球所产生的辐射场和能流。

解：本题相当于电偶极矩

$$\vec{p} = \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_z \text{ 的辐射。}$$

$$\therefore \ddot{\vec{p}} = -\frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\omega^2 R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}\vec{e}_z$$

$\therefore$ 介质球产生的辐射场为：

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 cR} \cdot e^{ikR} \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 e^{-i\omega t}(-\vec{e}_z)\times\vec{e}_r$$

$$= -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^3 R}\sin\theta e^{i(kR-\omega t)}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = c\vec{B}\times\vec{e}_r = -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^5 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_r$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0}c\left|\vec{B}\right|^2\vec{e}_r = \frac{\omega^4 R_0^6 E_0^2(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{2\mu_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)c^5 R^2}\sin^2\theta\vec{e}_r$$