

## 第六章 偏 振

**6-1.** 如果你手头有一块偏振片的话,请用它来观察下列各种光,并初步鉴定它们的偏振态:(1)直射的阳光;(2)经玻璃板反射的阳光;(3)经玻璃板透射的阳光;(4)不同方位天空散射的光;(5)白云散射的光;(6)月光;(7)虹霓。

**答:** (1) 直射的阳光是自然光。

(2) 经玻璃板反射的阳光一般是部分偏振光,仅当阳光以布儒斯特角入射时,其反射光为线偏振光,且振动面垂直于入射面。

(3) 经玻璃板透射的阳光都是部分偏振光。

(4) 晴朗的日子里,蔚蓝天空的散射光多半是部分偏振光。偏振度与散射光的方向有关:散射光与入射光的方向愈接近垂直,散射光的偏振度愈高;垂直方向的散射光是线偏振的。

(5) 白云散射光都是部分偏振光。

(6) 月光是粗糙表面反射的太阳光,仍是自然光。

(7) 虹霓是由太阳光照射在天空的小水滴群上,产生规则的折射和反射造成的,是部分偏振光。

**6-2.** 自然光中的振动矢量如图6-5所示呈各向同性分布,合成矢量的平均值为0,为什么光强度却不为0?

**答:** 图6-5所示应理解为大量( $N \gg 1$ )方向和相位都是随机的矢量,它们的矢量和平均为0,但它们大小的平方(即强度)的平均不为0,这是因为强度有涨落。具体地说,我们可以把每个电矢量 $\mathbf{E}$ 分解为 $E_x = E \cos \theta$ 和 $E_y = E \sin \theta$ 分量,它们的平均值

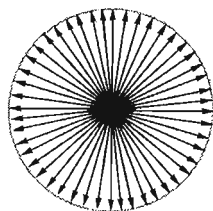


图 6-5

$$\begin{cases} \overline{E_x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_x d\theta = \frac{E}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \\ \overline{E_y} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_y d\theta = \frac{E}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

涨落是用方差来量度的:

$$(\Delta E_x)^2 = (E_x - \overline{E_x})^2 = E_x^2 - 2\overline{E_x} E_x + (\overline{E_x})^2 = E_x^2 - 2\overline{E_x} E_x + (\overline{E_x})^2$$

$$\text{即} \quad \overline{(\Delta E_x)^2} = \overline{E_x^2} - (\overline{E_x})^2 = \overline{E_x^2} - 0 = \overline{E_x^2}. \quad (2)$$

$$\text{同理} \quad \overline{(\Delta E_y)^2} = \overline{E_y^2} - (\overline{E_y})^2 = \overline{E_y^2} - 0 = \overline{E_y^2}. \quad (3)$$

方差就是各分量的平均强度:

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{I_x} &= \overline{(\Delta E_x)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_x^2 d\theta = \frac{E^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{E^2}{2}, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{I_y} &= \overline{(\Delta E_y)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_y^2 d\theta = \frac{E^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{E^2}{2}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$N$  个随机矢量强度总和为

$$\bar{I} = N(\bar{I_x} + \bar{I_y}) = NE^2 \neq 0. \quad (6)$$

**6-3.** 自然光和圆偏振光都可看成是等幅垂直偏振光的合成,它们之间主要的区别是什么? 部分偏振光和椭圆偏振光呢?

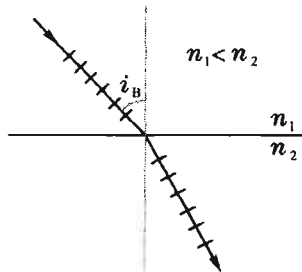
**答:** 它们的主要区别在于前者光振动矢量的两个正交分量之间没有稳定的相位关系; 而后的两个正交分量之间有确定的相位差  $\pm \pi/2$ . 部分偏振光和椭圆偏振光的主要区别也在相位关系上: 前者两正交分量之间无稳定的相位关系; 后者两个正交分量之间有稳定的相位差。

**6-4.** 自然光投射在一对正交的偏振片上, 光不能通过, 如果把第三块偏振片放在它们中间, 最后是否有光通过? 为什么?

**答:** 自然光通过偏振片后, 被改造成振动平行于透振方向的线偏振光。当线偏振光再入射到偏振片上时, 只能透过与偏振片透振方向平行的分量。因此, 自然光通过一对正交的偏振片时, 其透射光的强度必然为 0。如果在一对正交的偏振片之间插入第三块偏振片, 只要插入的偏振片的透振方向与已知的两正交偏振片中任一透振方向不重合时, 从前一偏振片出射的线偏振光入射到下一偏振片时, 都有平行分量能透过, 于是有光通过。但是如插入的偏振片的透振方向与已知的两正交偏振片之一的透振方向重合, 则结果与一对正交偏振片相同, 最后出射光强亦为 0。可见, 在正交偏振片中插入第三块偏振片, 出射光强一般不为 0, 特殊情况下仍为 0。

**6-5.** 当一束光射在两种透明介质的分界面上时, 会发生只有透射而无反射的情况吗?

**答:** 这种“全透射”的情况是可以发生的, 如右图所示, 当入射光为  $p$  方向的线偏振光, 并以布儒斯特角入射时, 则光束只有透射, 而无反射。忽略介质的吸收, 这时的能流透射率将等于 100%。



**6-6.** 科学幻想小说中常描绘一种隐身术。设想一下, 即使有办法使人体变得无色透明, 要想别人完全看不见, 还需要什么条件?

**答:** 实现隐身术, 仅使人体变得无色透明还不够, 还必须使人体的光强反射率为 0, 光强透射率为 100%。根据菲涅耳反射折射公式, 只有使人体的

折射率和空气一样,才能实现无反射和全透射。

6-7. 一束光从空气入射到一块平板玻璃上,讨论

(1) 在什么条件下透射光获得全部光能流?

(2) 在什么条件下透射光能流为0?

答:(1) 若平板玻璃的两表面平行,则在上表面以布儒斯特角入射的光,在下表面仍以布儒斯特角出射(参见思考题6-16),所以在忽略吸收的情况下,以布儒斯特角入射的p方向的线偏振光透过平板玻璃时获得全部能流。

(2) 以布儒斯特角入射的p方向的线偏振光全部透射,但以布儒斯特角入射的s方向的线偏振光并不全部反射,从而不能使透射光能流为0. 要使透射光能流为0,能否利用全反射? 全反射只发生在玻璃内部,即光在平板玻璃下表面的那次反射。但从上表面入射进入玻璃的光,在下表面的入射角小于等于全反射的临界角。要使透射光能流为0,除非玻璃的两表面不平行。

6-8. 振幅透射率可能大于1吗? 试举例说明之。

答: 从书上(6.29)式

$$\begin{cases} t_p = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}, \\ t_s = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \end{cases}$$

可以证明,当光从光密介质向光疏介质折射时,振幅透射率就大于1. 此时  $n_1 > n_2$ ,  $i_1 < i_2$ ,  $\cos i_1 \geq \cos i_2$  (正入射时取等号),

$$\begin{cases} \frac{1}{t_p} = \frac{1}{2} \left( \frac{n_2}{n_1} + \frac{\cos i_2}{\cos i_1} \right) < 1, \\ \frac{1}{t_s} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} \right) < 1. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} t_p > 1, \\ t_s > 1. \end{cases}$$

振幅透射率大于1并不违反能量守恒,能量守恒要求能流透射率  $\mathcal{T} \leq 1$ . 能流透射率与振幅透射率相比,差折射率和光束截面积两个因子。可以证明,考虑到这两个因素,在上述情形里  $\mathcal{T}$  还是不大于1的。

6-9. 斯托克斯倒逆关系中  $\tilde{t}$  与  $\tilde{t}'$  的关系如何?

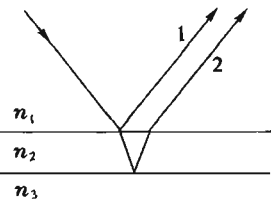
答: 从书上(6.29)式下标1、2互换可得

$$\begin{cases} t_p = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}, \\ t_s = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}. \end{cases} \quad \begin{cases} t'_p = \frac{2n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}, \\ t'_s = \frac{2n_2 \cos i_2}{n_2 \cos i_2 + n_1 \cos i_1}. \end{cases}$$

由此得

$$\frac{t'_p}{t'_s} = \frac{t'_s}{t'_s} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}.$$

6-10. 设折射率为  $n_2$  的介质层放在折射率分别为  $n_1$ 、 $n_3$  的两种介质之间(见本题图), 讨论下列各情形里上下两界面反射的光线 1、2 之间是否有半波损失?



思考题 6-10

(1)  $n_1 > n_2 > n_3$ ;

(2)  $n_1 < n_2 < n_3$ ;

(3)  $n_1 > n_2 < n_3$ .

答: 在介质层两侧折射率不等的情况下, 普遍地讨论以任意入射角入射时上下两界面反射的光线 1、2 之间的半波损是比较复杂的。下面仅以上下界面的入射角均小于或均大于布儒斯特角的情形为例进行讨论。

首先, 确定各光线的局部  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{k}$  正交坐标系。我们规定  $\mathbf{s}$  的正方向垂直纸面向外,  $\mathbf{k}$  的正方向沿光波矢,  $\mathbf{p}$  的正方向由  $\mathbf{k} \times \mathbf{s} = \mathbf{k}$  确定。

其次, 设入射点的场分量为正, 即与坐标架正方向一致。根据菲涅耳公式

$$r_p = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)}, \quad r_s = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_1 + i_2)}$$

判断各界面的  $r_p$ 、 $r_s$  的符号( $t_p$ 、 $t_s$  恒正); 正号表示经过界面后实际场分量与坐标架方向一致, 负号表示实际场分量与坐标架方向相反。

再次, 在光路图中画出实际场分量, 比较光线 1、2 实际场分量的方向。如两个分量方向均相同, 则表示两光线间无半波损; 反之, 则表示有半波损失。

(1)  $n_1 > n_2 > n_3$

当  $i_1 < i_B$  时,  $i_1 + i_2 < 90^\circ$ ,  $\tan(i_1 + i_2) > 0$ ,  $\sin(i_1 + i_2) > 0$ . 在  $n_1$  到  $n_2$  的界面上,

$$i_1 < i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s > 0;$$

在  $n_2$  到  $n_3$  的界面上,

$$i_2 < i_3, \quad r_p < 0, \quad r_s > 0.$$

据此作实际场分量如图(1)a, 此时光线 1、2 之间没有半波损失。

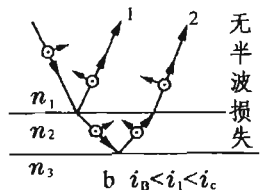
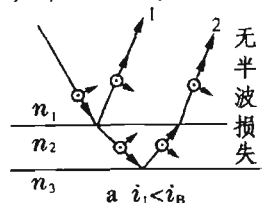
当  $i_B < i_1 < i_c$  时,  $i_1 + i_2 > 90^\circ$ ,  $\tan(i_1 + i_2) < 0$ ,  $\sin(i_1 + i_2) > 0$ . 在  $n_1$  到  $n_2$  的界面上,

$$i_1 < i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0;$$

在  $n_2$  到  $n_3$  的界面上,

$$i_2 < i_3, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0.$$

(1)  $n_1 > n_2 > n_3$



据此作实际场分量如图(1)b,此时光线1,2之间仍没有半波损失。

$$(2) n_1 < n_2 < n_3$$

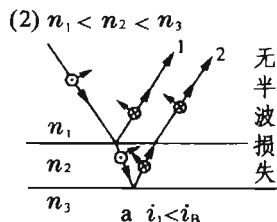
当  $i_1 < i_B$  时,  $i_1 + i_2 < 90^\circ$ ,  $\tan(i_1 + i_2) > 0$ ,  $\sin(i_1 + i_2) > 0$ . 在  $n_1$  到  $n_2$  的界面上,

$$i_1 > i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0;$$

在  $n_2$  到  $n_3$  的界面上,

$$i_2 > i_3, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0.$$

据此作实际场分量如图(2)a,此时光线1,2之间没有半波损失。



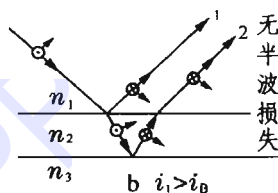
当  $i_1 > i_B$  时,  $i_1 + i_2 > 90^\circ$ ,  $\tan(i_1 + i_2) < 0$ ,  $\sin(i_1 + i_2) > 0$ . 在  $n_1$  到  $n_2$  的界面上,

$$i_1 > i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s < 0;$$

在  $n_2$  到  $n_3$  的界面上,

$$i_2 > i_3, \quad r_p < 0, \quad r_s < 0.$$

据此作实际场分量如图(2)b,此时光线1,2之间仍没有半波损失。



$$(3) n_1 > n_2 < n_3$$

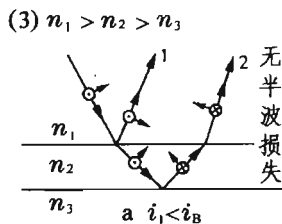
当  $i_1 < i_B$  时,  $i_1 + i_2 < 90^\circ$ ,  $\tan(i_1 + i_2) > 0$ ,  $\sin(i_1 + i_2) > 0$ . 在  $n_1$  到  $n_2$  的界面上,

$$i_1 < i_2, \quad r_p < 0, \quad r_s > 0;$$

在  $n_2$  到  $n_3$  的界面上,

$$i_2 > i_3, \quad r_p > 0, \quad r_s < 0.$$

据此作实际场分量如图(2)a,此时光线1,2之间没有半波损失。



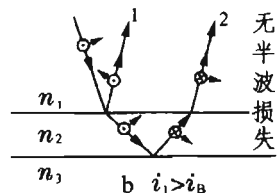
当  $i_1 > i_B$  时,  $i_1 + i_2 > 90^\circ$ ,  $\tan(i_1 + i_2) < 0$ ,  $\sin(i_1 + i_2) > 0$ . 在  $n_1$  到  $n_2$  的界面上,

$$i_1 < i_2, \quad r_p > 0, \quad r_s > 0;$$

在  $n_2$  到  $n_3$  的界面上,

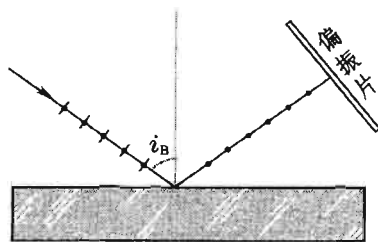
$$i_2 > i_3, \quad r_p < 0, \quad r_s < 0.$$

据此作实际场分量如图(2)b,此时光线1,2之间也有半波损失。



**6-11.** 通常偏振片的透振方向是没有标明的,你用什么简易的方法可将它确定下来?

**答:** 一种粗略地判定偏振片透振方向的简单方法如右图所示,自然光以布儒斯特角  $i_B$  (约  $57^\circ$ ) 从空气入射到玻璃表



面上,则反射光是振动方向垂直于入射面的线偏振光。旋转偏振片观察反射光,可得消光位置。消光时,偏振片上与入射面平行的方向即为透振方向。实验时来自普通光源的入射光并不一定是平行光,入射角也不必严格校准,这时“消光”并不精确,但强度最小的位置还是可以非常明显地观察到的。

**6-12.** 在夏天,炽热的阳光照射柏油马路发出刺眼的反光,汽车司机需要戴上一副墨镜来遮挡。是否可用偏振片做眼镜,这比墨镜有什么优点?

**答:** 从路面上发出直接射入眼睛的反射光要比来自其他目标的漫射光强烈得多。通常把这种刺眼的强光叫眩光。眩光对司机的安全行车有严重影响。戴上墨镜,可以减弱射入眼睛的光强,但并不能只限制眩光。如果用偏振片做眼镜,情况就大不相同了。因为阳光(自然光)经路面反射后是部分偏振光,在入射角接近布儒斯特角时偏振度很高,近似为线偏振光。对于水平的路面来说,反射部分偏振光的强度极大的分量总是在水平方向。因此,只要使眼镜上的偏振片的透振沿竖直方向,就可以强烈地吸收刺目的眩光;而对来自其他目标的漫射光的吸收则要相对小得多。这种有选择地吸收眩光的优点是墨镜所没有的。

此外,墨镜对光的吸收往往对波长有选择作用,改变观察目标的色调。而偏振片眼镜的吸收只对偏振态有选择作用,对波长并无选择吸收,不会改变目标的色调。这也算是一个优点。

**6-13.** 一束右旋圆偏振光从空气正入射在玻璃板上,反射光的偏振态如何?

**答:** 决定光的偏振态的是两个垂直分量之间的振幅和相位关系。对于圆偏振光,两者振幅相等,相位差 $\pm\pi/2$ 。一般在考虑光在两种介质界面上折射反射时,把光的振动矢量按 $p$ 、 $s$ 分解,然而在正入射时就无所谓 $p$ 、 $s$ 之分了,两者是一样的,反射时有无半波损失的情况也一样,所以反射时它们之间的相位差不变,旋转方向也不变。然而圆偏振光的左、右旋是相对于传播的逆方向而言的,正入射时入射光与反射光传播方向相反,对入射光是右旋的旋转方向对反射光就是左旋,所以右旋圆偏振光入射,反射后变为左旋圆偏振光。这结论与两种介质的光疏光密无关,是普遍成立的。

**6-14.** 验证菲涅耳公式满足能量守恒条件(6.25)。

**答:** 由菲涅耳公式得到的振幅反射率和振幅透射率公式为[书上(6.28)式和(6.29)式]

$$\begin{cases} \widetilde{r}_p = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}, & \begin{cases} \widetilde{t}_p = \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}, \\ \widetilde{t}_s = \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}. \end{cases} \\ \widetilde{r}_s = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}. \end{cases}$$

能流反射率与能流透射率之和为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p + \mathcal{T}_p &= |\widetilde{r}_p|^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |\widetilde{t}_p|^2 \\ &= \left( \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \right)^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} \left( \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \right)^2 \\ &= \frac{(n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2)^2 + 4 n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)^2} = 1. \\ \mathcal{R}_s + \mathcal{T}_s &= |\widetilde{r}_s|^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |\widetilde{t}_s|^2 \\ &= \left( \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \right)^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} \left( \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \right)^2 \\ &= \frac{(n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2)^2 + 4 n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)^2} = 1. \end{aligned}$$

即  $p, s$  分量分别满足能流守恒条件(6.25)。

**6-15.** 验证菲涅耳公式满足斯托克斯倒逆关系式(6.31)和(6.32)。

答：书上(6.28)式下标 1、2 对调，即由  $\widetilde{r}_p, \widetilde{r}_s$  变为  $\widetilde{r}_p', \widetilde{r}_s'$ 。

$$\begin{cases} \widetilde{r}_p' = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}, & \begin{cases} \widetilde{r}_p' = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}, \\ \widetilde{r}_s' = \frac{n_2 \cos i_2 - n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_2 + n_1 \cos i_1}. \end{cases} \\ \widetilde{r}_s' = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}. \end{cases} \quad (1)$$

书上(6.29)式下标 1、2 对调，即由  $\widetilde{t}_p, \widetilde{t}_s$  变为  $\widetilde{t}_p', \widetilde{t}_s'$ 。

$$\begin{cases} \widetilde{t}_p' = \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}, & \begin{cases} \widetilde{t}_p' = \frac{2 n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}, \\ \widetilde{t}_s' = \frac{2 n_2 \cos i_2}{n_2 \cos i_2 + n_1 \cos i_1}. \end{cases} \\ \widetilde{t}_s' = \frac{2 n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}. \end{cases} \quad (2)$$

由①式可见

$$\widetilde{r}_p' = -\widetilde{r}_p, \quad \widetilde{r}_s' = -\widetilde{r}_s. \quad (3)$$

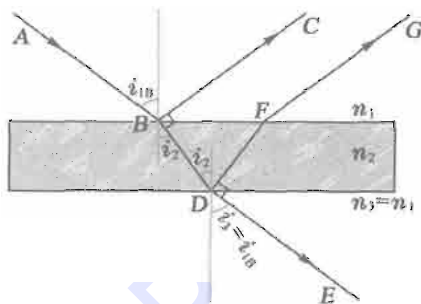
由①、②式

$$\begin{cases} \widetilde{r}_p'^2 + \widetilde{t}_p' \widetilde{t}_p' \\ = \frac{(n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2)^2}{(n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)^2} + \frac{2 n_1 \cos i_1 \cdot 2 n_2 \cos i_2}{(n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2)(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)} = 1, \\ \widetilde{r}_s'^2 + \widetilde{t}_s' \widetilde{t}_s' \\ = \frac{(n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2)^2}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)^2} + \frac{2 n_1 \cos i_1 \cdot 2 n_2 \cos i_2}{(n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2)(n_2 \cos i_2 + n_1 \cos i_1)} = 1. \end{cases} \quad (4)$$

③、④ 两式即斯托克斯倒逆关系式。

**6 - 16.** 证明当光束射在平行平面玻璃板上时,如果在上表面反射时发生全偏振,则折射光在下表面反射时亦将发生全偏振。

**答:** 如右图所示,在入射角  $i$  等于布儒斯特角  $i_{1B}$  时发生反射线的全偏振,此时反射线与折射线垂直,即  $\angle CBD = 90^\circ$ , 或  $i_{1B} + i_2 = 90^\circ$ . 因玻璃板上下表面平行,若下表面外的介质与上表面外的相同,即  $n_3 = n_1$ , 则  $i_3 = i_{1B}$ , 于是  $i_2 + i_3 = 90^\circ$ ,  $\angle FDE = 90^\circ$ ;



这就是说,  $i_2$  是产生反射线全偏振的布儒斯特角。

**6 - 17.** 试从以下诸方面归纳一下隐失波的特点:

- (1) 波矢的虚实;
- (2) 有无周期性;
- (3) 等相面与等幅面;
- (4) 瞬时能流与平均能流。

**答:** 光在光密介质到光疏介质的界面上发生全反射时,在光疏介质一侧的一定深度内存在隐失波,其特点可大致归纳如下:

- (1) 隐失波矢沿界面的法向分量为纯虚数,即出现虚波矢成分。
- (2) 隐失波仍具有时间周期性和沿界面切向的空间周期性,沿界面的法向不再具有空间周期性。

(3) 其等相面与界面和入射面垂直,等幅面与界面平行。等相面与等幅面不再重合,而是相互正交,这是一种“非均匀波”。

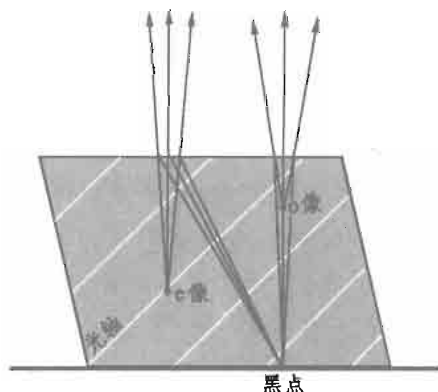
(4) 在穿透深度内,沿纵深方向的瞬时能流不为 0,但平均能流为 0. 这说明在发生全反射时,入射波的能量并不在几何界面上全部反射,而是在穿透光疏介质的一定深度中逐渐反射的。沿界面切向的能量不等于 0.

**6 - 18.** 在白纸上画一个黑点,上面放一块冰洲石,即可看到两个淡灰色的像,其中一个的位置比另一个高。转动晶体时,一个像不动,另一个像围绕着它转,试解释这个现象。在这个实验中哪个像点是看起来较高的?

**答:** 透过冰洲石观察纸上的黑点,看到的是光线折射所成的两个像,

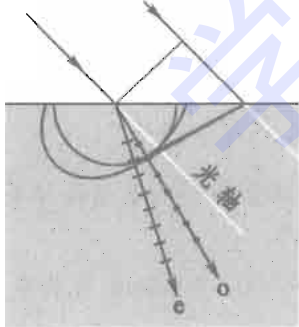


这是因为光在冰洲石晶体内发生了双折射。设我们沿晶体表面法线方向观察,这时看到的是正入射的光线。如右图所示,在晶体内 $\circ$ 光不改变方向, $\epsilon$ 光在主截面内偏折,两光线从晶体内出来后都沿面法线方向,但 $\epsilon$ 光有一段距离的平移。考虑成像问题,需要考虑在中心光线周围小立体角内的一个发散光锥。这光锥从晶体出射时再次折射,发散角有所增大,从而发散中心提高。折射率愈大,其发散中心(即像点)愈高,像浮起的高度愈大。冰洲石是负晶体,其 $\epsilon$ 光的折射率(除光轴方向外)总是比 $\circ$ 光小,所以在这个实验中, $\circ$ 光折射引起的像点位置较高。

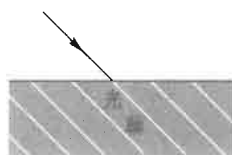


当晶体转动时,主截面随之转动。 $\circ$ 光所成的像始终在转轴上,故不动; $\epsilon$ 光所成的像在主截面内但偏离转轴,故随主截面转动。

**6-19.** 当单轴晶体的光轴与表面成一定角度时,一束与光轴方向平行的光入射到晶体表面之内时(见本题图),它是否会发生双折射?



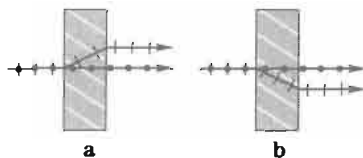
**答:** 如左图用惠更斯作图法可见,在晶体光轴方向与表面成一定夹角时,尽管入射光线与光轴方向平行,晶体内的光线仍然发生了双折射。通常说“光线沿光轴方向传播时不发生双折射”是指晶体内的光线,在晶体外沿光轴方向入射的光线,还是可能发生双折射的。



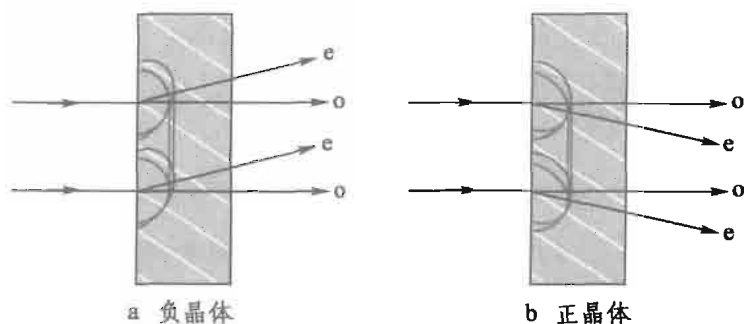
思考题 6-19

**6-20.** 在本题图中白线代表光轴,试根据图中所画的折射情况判断晶体的正负。

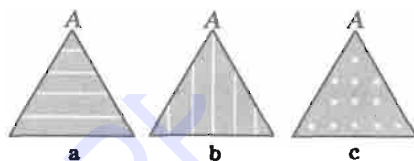
**答:** 如下图,用惠更斯作图法分别作出正负晶体中 $\circ$ 光和 $\epsilon$ 光的折射方向,与本题图比较即可判断出:图a是负晶体,图b是正晶体。



思考题 6-20



**6-21.** 用单轴晶体制成三棱镜三块,光轴方向分别由图 a、b、c 中的白线所示,图中 A 代表顶角。若采用最小偏向角法测折射率,使用哪块棱镜可测得  $n_e$ ,哪块可测得  $n_o$ ?



思考题 6-21

**答:** 在最小偏向角法测折射率的光路中,要求当光线在三棱镜内传播时平行于底边。在本题图 a 的情形里这个方向是光轴, o 光和 e 光都以  $v_o$  速度传播,测出来的折射率只有  $n_o$ 。在图 b 和 c 的情形里平行于底边的方向垂直于光轴,既可以测  $n_o$ ,也可以测  $n_e$ ,二者达到最小偏向角的入射角不同,最小偏向角也不同。

**6-22.** 图 6-44 所示锥形折射光束中各光线在晶体中经历的光程相等吗?

**答:** 从书中图 6-43 可知,图 6-44 中晶体出射面是双轴晶体波面的切面,锥形折射光束与晶体出射面的交线(过 M、 $N_o$  两点的圆圈)上各点都是切点,它们在同一波面上,故为等相位点,即锥形折射光束中各光线从 O 点到这些点的光程是相等的。

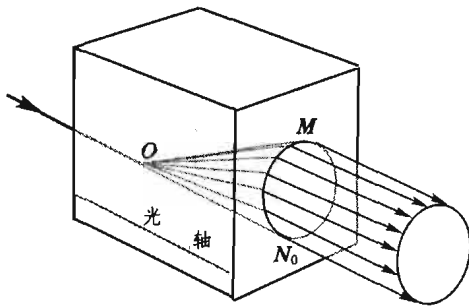


图 6-44

**6-23.** 令  $\hat{s}$  和  $\hat{k}$  分别代表光线和法线(波矢)方向的单位矢量。通常把平面波写成

$$E = E_0 \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = E_0 \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{\hat{k} \cdot \mathbf{r}}{v_N}\right)\right],$$

这里  $v_N$  是法向速度。若把此式写成

$$E = E_0 \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}}{v_r} \right) \right],$$

式中  $v_r$  为射线速度, 对吗? 为什么?

答: 把平面波写成

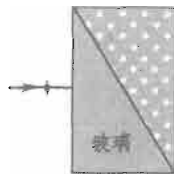
$$E = E_0 \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r}}{v_r} \right) \right]$$

形式就意味着

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{r} = \text{常量}$$

是等相面。然而在几何上此式代表一个与射线矢量  $\hat{\mathbf{s}}$  垂直的平面, 这对于各向同性介质中的平面波一般是不对的。故该式不能用。

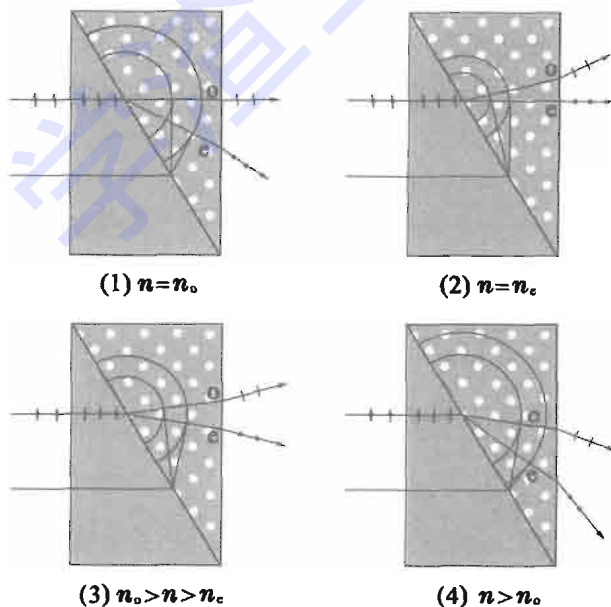
**6-24.** 分别就下列三种情形确定自然光经过本题图中的棱镜后双折射光线的传播方向和振动方向。设晶体是负的, 玻璃的折射率为  $n$ 。



(1)  $n = n_o$ ; (2)  $n = n_e$ ; (3)  $n_o > n > n_e$ ; (4)  $n > n_o$ .

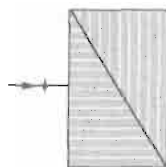
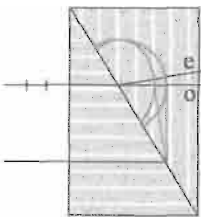
答: 当晶体中的光轴垂直入射界面时, 两折射光线都服从普通的折射定律, 只是折射率应取主折射率  $n_o$  和  $n_e$ 。光线正入射到玻璃棱镜后不偏折, 射入晶体后  $o$  振动垂直主平面,  $e$  振动平行主平面。据此, 以题中四种情形按惠更斯作图法作图如下, 得到两折射光线的方向。

思考题 6-24



6-25. 确定自然光经过本题图中的棱镜后双折射光线的传播方向和振动方向。晶体是正的。

答：当自然光正入射到第一块棱镜时，由于光轴与晶体表面垂直，不发生双折射。进入第二块棱镜后，对于 o 光两棱镜的折射率都是  $n_o$ ，它仍原方向前进；最后出射时也不发生偏折。对于 e 光，两棱镜的折射率不同，在其界面上要发生偏折，但不服从普通的折射定律，折射光的方向由惠更斯作图法确定，如左图所示。



思考题 6-25

6-26. 分析沃拉斯顿棱镜(见图 6-46)中双折射光线的传播方向和振动方向。

答：第一块棱镜的光轴与表面平行。当自然光正入射时，两折射光线的传播方向均垂直于表面和光轴，方向并不分离，但波速  $v_o$  和  $v_e$  不同(由于冰洲石是负晶体， $v_o < v_e$ )。进入第二块棱镜后，由于光轴垂直于入射面，光线的传播方向服从普通的折射定律，只是折射率应取主折射率  $n_o$  和  $n_e$ 。对于平行纸面的振动，折射率由  $n_e$  变到  $n_o$ 。因  $n_o > n_e$ ，光线朝上偏折；对于垂直纸面的振动，折射率由  $n_o$  变到  $n_e$ 。因  $n_e < n_o$ ，光线朝下偏折。出射棱镜后，由于空气的折射率比  $n_o$  和  $n_e$  都要小，光线将进一步朝相反的方向偏折。

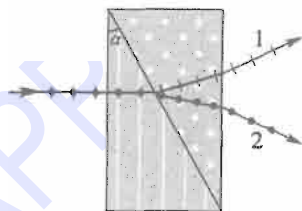


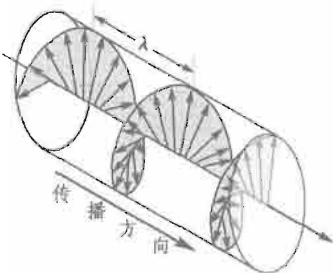
图 6-46

6-27. 圆偏振光中电矢量的大小为  $A$ ，它的强度  $I = ?$  经过偏振片后其强度  $I'$  变为多少？(设偏振片是理想的，即对沿透振方向分量的透射率为 100%.)

答：电矢量大小为  $A$  的圆偏振光可以看成相位差为  $\pm \pi/2$ 、振幅为  $A$  的两个相互垂直的线偏振光的合成，强度为两个线偏振光强度的非相干叠加，即  $I = 2A^2$ 。圆偏振光经过偏振片后，只剩下振动方向平行于透振方向的线偏振光分量。在忽略反射、吸收的情况下，透射光的强度  $I' = A^2$ 。

6-28. 本题图所示为一椭圆偏振光的电矢量沿波线的瞬时分布图，它是左旋还是右旋的？

答：波动是运动状态的传播。某一时刻、某一地点的运动状态必然要成为下一时刻、下一地点的运动状态。因此，沿波线方向呈右旋的电矢量的瞬时分布，对应于同一波面上电矢量的左旋运动，即本题图所示的右旋瞬时分布的椭圆偏振光是左旋的。



思考题 6-28

## 6-29. 画出本题图中各情形出射光的偏振状态。

$\lambda/4$ 片 ( $\delta=+\pi/2$ )		$\lambda/4$ 片 ( $\delta=-\pi/2$ )	
入射光	出射光	入射光	出射光
①		②	
③		④	
⑤		⑥	
⑦		⑧	
⑨		⑩	

思考题 6-29

答：答案在上图出射光栏中标出，说明如下：

① 入射光只有  $o$  分量，故出射光仍只有  $o$  分量的线偏振光，且振幅大小不变。

② 入射光只有  $e$  分量，故出射光仍为只有  $e$  分量的线偏振光，且振幅大小不变。

③ 入射光为第1、3象限内的线偏振光， $\delta_{\lambda}=0$ ， $\delta'=-\pi/2$ ，故  $\delta_{\text{出}}=-\pi/2$ ，出射光为左旋正椭圆偏振光。

④ 入射光为第2、4象限内的线偏振光，偏振方向与  $o$  轴成  $45^\circ$  角， $\delta_{\lambda}=\pi$ ， $\delta'=\pi/2$ ，故  $\delta_{\text{出}}=3\pi/2$ ，出射光为左旋圆偏振光。

⑤ 入射光为长轴在第2、4象限内的左旋斜椭圆偏振光,  $\delta_\lambda$  为第3象限内的某个角度,  $\delta' = \pi/2$ ,  $\delta_\pm$  为第2象限内的某个角度, 出射光为右旋斜椭圆偏振光。

⑥ 入射光为第2、4象限内的左旋椭圆偏振光,  $\delta_\lambda$  为第3象限内的某个角度,  $\delta' = \pi/2$ ,  $\delta_\pm = \delta_\lambda + \delta'$  为第4象限内的某个角度, 出射光为第1、3象限内左旋椭圆偏振光。

⑦ 入射光为左旋圆偏振光,  $\delta_\lambda = -\pi/2$ , 故  $\delta_\pm = -\pi$ , 出射光为第2、4象限内的线偏振光, 且振动方向与 o 轴成  $45^\circ$  角。

⑧ 入射光为左旋圆偏振光,  $\delta_\lambda = -\pi/2$ , 故  $\delta_\pm = 0$ , 出射光为第1、3象限内的线偏振光, 且振动方向与 e 轴成  $45^\circ$  角。

⑨ 入射光为自然光, 可看成大量取向轴对称分布、振幅大小相等、相位无关联的线偏振光的集合。经波晶片后, 各线偏振光分别转化为沿 o、e 轴的线偏振光, 左、右旋圆偏振光以及长短轴比例不同的左、右旋正椭圆偏振光。简言之, 出射光是各种长短轴比例的且大量相位无关联的左、右旋正椭圆偏振光(圆偏振光、线偏振光是椭圆偏振光的特例)的集合。从宏观上看, 出射光的偏振态仍具有轴对称性。尽管细微偏振结构与入射光不同, 但宏观结果是相同的, 因此出射光仍可认为是自然光。

⑩ 入射光为部分偏振光, 它是大量相位无关联的线偏振光的集合; 它们的振幅大小不同, 不具有轴对称性。出射光为线偏振光、圆偏振光和长短轴比例各不相同的椭圆偏振光的集合; 它们在相位上也是无关联的。与 ⑨ 不同的是, 这时出射光在宏观上仍无轴对称性, 仍是部分偏振光。

6-30. 将上题中的  $\lambda/4$  片换成  $\lambda/2$  片, 各情形出射光的偏振状态怎样?

答: 具体结果在右图右栏中标出, 分析方法与上题完全类似, 不再赘述。

$\lambda/2$ 片 ( $\delta = \pm\pi$ )	
入 射 光	出 射 光
①	
②	
③	
④	
⑤	

**6-31.** 在一对正交的偏振片之间放一块  $\lambda/4$  片,以自然光入射。

(1) 转动  $\lambda/4$  片的光轴方向时,出射光的强度怎样变化? 有无消光现象?

(2) 如果有强度极大和消光现象,它们在  $\lambda/4$  片的光轴处于什么方向时出现? 这时从  $\lambda/4$  片射出的光的偏振状态如何?

**答:** 首先,自然光入射到第一块偏振片上,出射的是线偏振光。再经  $\lambda/4$  片后,出射的一般是椭圆偏振光(特殊情况下是圆偏振光或线偏振光,具体由  $\lambda/4$  片的光轴方向和第一块偏振片透振方向的相对取向决定)。最后,从第二块偏振片出射的是线偏振光,强度随  $\lambda/4$  片的转动而变,有极大和消光现象。当  $\lambda/4$  片的光轴与第一块偏振片的透振方向成  $45^\circ$  角时,从  $\lambda/4$  片出射的为圆偏振光,从第二块偏振片出射光的强度为极大。当  $\lambda/4$  片的光轴平行或垂直于第一块偏振片的透振方向时,从  $\lambda/4$  片出射的为线偏振光,偏振方向垂直于第二块偏振片的透振方向;从而最后出射光的强度为 0,有消光现象。

**6-32.** 如 §4 末尾指出,在实验中偏振片和  $\lambda/4$  片上透振方向和光轴方向都未标出,而在检验椭圆偏振光的第二步中需要将  $\lambda/4$  片的光轴对准椭圆的主轴之一。你能根据上题的原理设计出一个方案,利用两块偏振片和一块  $\lambda/4$  片做到这一点吗?

**答:** 方案如下:

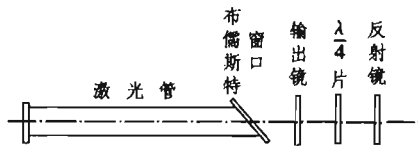
(1) 用第一块偏振片对准入射光,转动其透振方向,观察透射光的强度变化。当强度达极大或极小时,停住转动。这时,此偏振片已对准入射光的极大或极小方位。

(2) 在第一块偏振片后加第二块偏振片,并转动后者的透振方向,观察透射光的强度变化,必有极大和消光位置。在消光位置停住转动第二块偏振片,这时必然有两块偏振片的透振方向互相垂直。

(3) 在两块偏振片之间插入  $\lambda/4$  片,透射光的强度一般不为 0。转动  $\lambda/4$  片,可观察到四个消光方位,任选一个方位停住  $\lambda/4$  片。这时,已保证  $\lambda/4$  片的光轴对准入射光的极大或极小方位(椭圆偏振光的主轴方位)。

(4) 撤去第一块偏振片,并保持  $\lambda/4$  片不动。这时,转动第二块偏振片即可检验椭圆偏振光。

**6-33.** 激光器中的布儒斯特窗口是其法线与管轴夹角等于布儒斯特角(全偏振角)的玻璃窗口。有布儒斯特窗口的激光器发出的光是线偏振的。如本题图所示,在使用激光器发出的线偏振光进行各种测量时,为了避免激光返回



思考题 6-33

谐振腔,在激光器输出镜端放一块  $\lambda/4$  片,并且其主截面与光的振动平面



成  $45^\circ$  角。试说明此波晶片的作用。

答：从激光器布儒斯特窗输出的激光是线偏振光，其振动面是窗口法线与管轴构成的平面，即发出的激光是  $p$  光。由于  $p$  光的振动面与  $\lambda/4$  片的主截面成  $45^\circ$  角，故  $p$  光入射到  $\lambda/4$  片后，透射的是圆偏振光。不妨设光在波晶片内传播引起的  $o$ 、 $e$  两分量间的相位差

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = \frac{\pi}{2}.$$

则圆偏振光是右旋的。右旋圆偏振光入射到反射镜上，经反射后成为左旋圆偏振光(注意,所谓左旋还是右旋,总是相对迎着光束传播的观察方向而言的)。左旋圆偏振光再入射到  $\lambda/4$  片上，透射光又成为线偏振光，其振动方向在由  $e$ 、 $o$  分量组成的坐标系中的第 1、3 象限内，且与  $e$  轴成  $45^\circ$  角，而与从激光器输出的线偏振光的振动方向正好成  $90^\circ$  角，即返回的激光是  $s$  光。输出的  $p$  光返回时成为  $s$  光,这是由  $\lambda/4$  片的相移作用造成的。由于返回的激光以布儒斯特角入射到布儒斯特窗上，反射的全部是  $s$  光，即对于  $s$  光来说，反射损耗较大，透射强度被抑制。进入激光器后，在谐振腔内进一步受到布儒斯特窗的抑制作用，不能满足阈值条件，即不能成长为激光。

6-34. 任何干涉装置中都需要有分光束器件，§5 所描述的装置中的分光束器件是什么？

答：偏振光干涉装置中的分光束器件是各向异性元件，例如波晶片把入射光分解成  $o$  光和  $e$  光。

6-35. 以前(第三章)讲过分波前和分振幅的干涉装置，本章 §5 所描述的干涉装置是按什么分割光束的？

答：在偏振光干涉装置中是按偏振态分割光束的，由各向异性介质元来实现。例如在波晶片中，把入射光分割成  $o$  和  $e$  两部分相互垂直的线偏振光。

6-36. §5 所描述的干涉装置中，偏振器 I、II 对保证相干条件来说各起什么作用？撤掉偏振器 I、II 能否产生干涉效应？为什么？

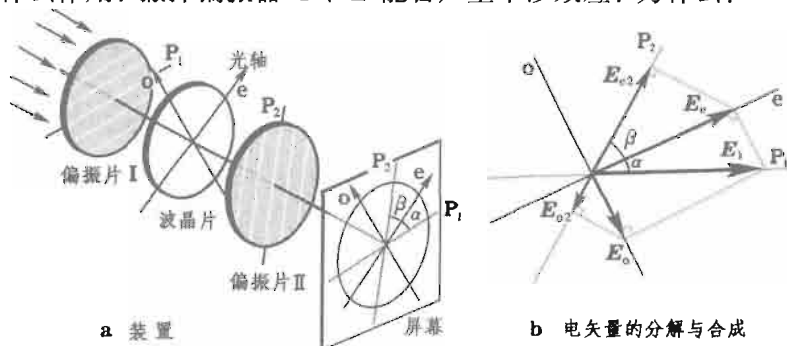


图 6-59



答：如 §5 图 6-59 所示的偏振光干涉装置，其出射光强是  $o$ 、 $e$  振动在偏振器 II 透振方向  $P_2$  上投影平行分量的相干叠加。显然，偏振器 II 的作用是保证了“存在相互平行的振动分量”这一相干条件的。

本装置中入射的是自然光，其垂直分量间没有稳定的相位关系。但是，自然光经过偏振片后，偏振片把自然光改造成线偏振光。线偏振光的两个垂直分量之间是有确定的相位差的。可见，偏振片 I 的作用是使  $o$ 、 $e$  分量之间有稳定的相位差，即保证了“相位差稳定”这一相干条件。

综上所述，在自然光入射的情形下，撤掉偏振器 I 或 II 都不能产生干涉效应。当然，如果入射光本身就是线偏振光、圆偏振光或椭圆偏振光，它们的两个垂直分量之间本身有确定的相位关系，偏振器 I 就不必要了。

6-37. 在 5.1 和 5.2 节中描述的实验中并没有干涉条纹，你认为这时是否发生了光的干涉？为什么？

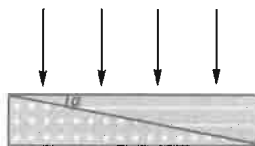
答：两列相干波的强度分别为  $I_1$  和  $I_2$ ，叠加时其总强度为

$$I = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta,$$

式中最后一项叫做“干涉项”，它与两波之间的相位差  $\delta$  有关。若没有干涉项，则两波叠加后的总强度为两波强度之和。推而广之，凡波叠加时总强度不等于各波强度之和的现象，都是干涉现象。5.1 和 5.2 节中描述的偏振光干涉的实验都符合这个定义，干涉条纹不是必要的。

6-38. 巴比涅补偿器的结构如本题图所示，它由两个劈形的石英棱镜组成，光轴方向如图。

(1) 当单色线偏振光、椭圆偏振光、自然光通过巴比涅补偿器时，通过检偏器观察，将分别看到什么图样？



(2) 干涉暗纹的距离与顶角  $\alpha$  有什么关系？

思考题 6-38

(3) 用白光入射时，观察到的图样如何？

答：当平行光正入射到补偿器上后，被分解为两个振动正交的线偏振光。其中平行纸面振动的线偏振光先以速度  $v_o$  通过第一块棱镜，再以速度  $v_o$  通过第二块棱镜；垂直纸面振动的线偏振光则反之，先以速度  $v_o$  通过第一块棱镜，再以速度  $v_e$  通过第二块棱镜。石英是正晶体， $v_e < v_o$ ，故  $n_o < n_e$ 。如图 a 所示，设补偿器的厚度  $d$ ，在补偿器下表面取  $x$  坐标垂直于棱边，原点  $O$  在中间两棱镜等厚处。由于  $\alpha$  很小，光线的偏折对光程的影响是二级小量，可忽略。故按直线计算，两偏振光通过补偿器的光程分别为

$$L_{//} = n_e \left( \frac{d}{2} - \alpha x \right) + n_o \left( \frac{d}{2} + \alpha x \right),$$

$$L_{\perp} = n_e \left( \frac{d}{2} + \alpha x \right) + n_o \left( \frac{d}{2} - \alpha x \right),$$

光程差为

$$\Delta L = L_{\perp} - L_{//} = 2(n_e - n_o)\alpha x. \quad (1)$$

(1) 单色线偏振光或椭圆偏振光通过巴比涅补偿器时,两光束间的相位差与  $x$  成正比地增加,如图 b 所示,在

出射面处形成不同的椭圆偏振光,包括退化为直线的线偏振光。在  $x=0$  的中心光的偏振状态与入射光相同。若在补偿器下加一检偏器 P,则可如图 c 所示,观察到明暗相间的“等厚干涉条纹”。

当自然光入射时,由于两垂直分量之间没有稳定的相位关系,通过检偏器后仍不能观察到干涉条纹。

(2) 令 (1) 式中的  $\Delta L$  等于波长  $\lambda$ , 得条纹间隔

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\alpha} \propto \frac{1}{\alpha}. \quad (2)$$

(3) 用白光入射时,不同  $\lambda$  的成分形成不同间隔的条纹,检偏器后观察到的是彩色干涉条纹。

**6-39.** 本题图所示为杨氏干涉装置,其中 S 为单色自然光源,  $S_1$  和  $S_2$  为双孔。

(1) 如果在 S 后放置一偏振片 P,干涉条纹是否发生变化? 有何变化?

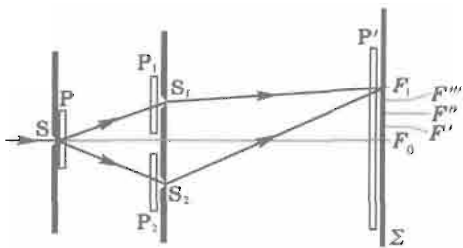
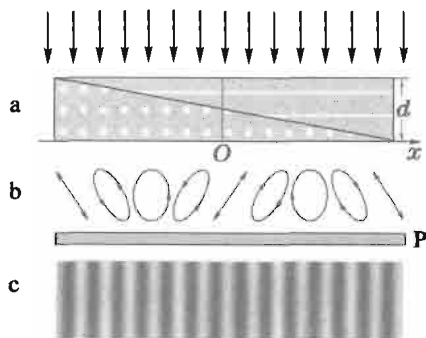
(2) 如果在  $S_1$ 、 $S_2$  之前再各放置一偏振片  $P_1$ 、 $P_2$ ,它们的透振方向相互垂直,并都与 P 的透振方向成  $45^\circ$  角,幕  $\Sigma$  上的强度分布如何?

(3) 在  $\Sigma$  前再放置一偏振片  $P'$ ,其透振方向与 P 平行,试比较这种情形下观察到的干涉条纹与  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P'$  都不存在时的干涉条纹有何不同?

(4) 同(3),如果将 P 旋转  $90^\circ$ ,幕上干涉条纹有何变化?

(5) 同(3),如果将 P 撤去,幕上是否有干涉条纹?

(6) 类似(2)的布置,屏幕  $\Sigma$  上的  $F_0$  和  $F_1$  分别是未加  $P_1$ 、 $P_2$  时 0 级和 1



思考题 6-39

级亮纹所在处,  $F'$ 、 $F''$ 、 $F'''$  是  $F_0 F_1$  的四等分点, 试说明  $F_0$ 、 $F_1$  及  $F'$ 、 $F''$ 、 $F'''$  各点的偏振状态。

答: (1) 如果在  $S$  后放置一偏振片  $P$ , 幕  $\Sigma$  上干涉图样强度普遍减小一半。

(2) 如果在偏振片  $P_1$ 、 $P_2$ , 它们的透振方向相互垂直, 幕  $\Sigma$  上没有干涉条纹。

(3) 在  $\Sigma$  前再放置一透振方向与  $P$  平行的偏振片  $P'$ , 干涉条纹复出。强度是  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P'$  都不存在时的  $1/4$ 。

(4) 如果将  $P$  旋转  $90^\circ$ , 幕上干涉条纹与 (3) 一样。

(5) 如果将  $P$  撤去, 通过偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  的光没有稳定的相位关系, 幕上干涉条纹消失。

(6) 设迎光看去  $P_1$ 、 $P_2$  的透振方向分别在  $P$  转  $\pm 45^\circ$  的方向, 则

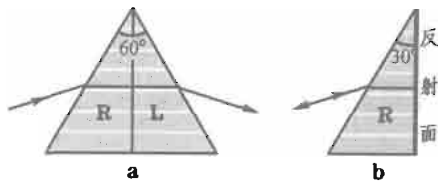
在  $F_0$  和  $F_1$  点为与  $P$  的透振方向同方向的线偏振;

在  $F'$  点为左旋圆偏振;

在  $F''$  点为与  $P$  的透振方向垂直的线偏振;

在  $F'''$  点为右旋圆偏振。

6-40. 本题图 a 所示的棱镜叫做考纽 (M. A. Cornu) 棱镜, 它由两半个石英晶体做成, 一半是右旋晶体, 另一半是左旋晶体, 光轴如图中白线所示。这种石英晶体棱镜是为摄谱仪设计的, 它有什么优点? 实际的摄谱仪中多采用图 b 所示的半个考纽棱镜, 中垂面上镀银或铝, 将光束沿原路反射回去。这样的装置是否能达到整个科纽棱镜的作用? 为什么?



思考题 6-40

答: 在本题图 a 所示的考纽棱镜中, 只要保证光线以最小偏向角条件入射, 则当光线通过棱镜时, 在左半部的振动面向右旋转, 在右半部的振动面向左旋转, 两者转过的角度相等, 从而保证出射光线的振动面与入射光线的振动面一致。

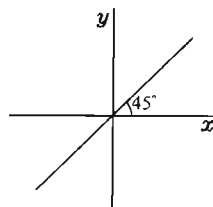
图 b 所示的半个考纽棱镜同样能达到上述效果, 因为自然旋光物质的左、右旋性质与光的传播方向是否反转无关。对右旋晶体来说, 迎着传播方向看, 振动面总是右旋的。因此当反射光束沿入射光束的原路返回时, 其振动面总是回到初始位置的。这样的装置能达到整个科纽棱镜的作用。

**6-41.** 法拉第旋转隔离器的装置就是在一磁光介质棒的前后各放置一个偏振器  $P_1$  和  $P_2$ . 为了达到光隔离的目的, 通过磁感应强度的大小和介质棒长度的选择, 应使振动面的偏转角  $\psi$  等于多少? 两偏振器  $P_1$ 、 $P_2$  的透振方向应有多大夹角? 为什么?

**答:** 法拉第旋转效应的特点之一是: 当线偏振光通过磁光介质时, 沿磁场方向传播, 振动面向右旋; 当光束逆磁场方向传播时, 振动面向左旋。所以, 如果光束由于反射正、负各两次通过磁光介质后, 振动面与初始位置比较将转过  $2\psi$  ( $\psi$  为振动面的偏转角) 的角度。因此, 在法拉第旋转隔离器中, 通过对磁感应强度大小和介质棒长度的选择, 应使振动面的偏转角  $\psi = 45^\circ$ , 同时使两偏振器  $P_1$  和  $P_2$  的透振方向也成  $45^\circ$  夹角。这样才能使透射光通过, 反射光消光, 从而达到光隔离的目的。

**6-42.** 有四个滤光器件: I 是各向同性的滤光片, 使各种偏振态的光强都滤掉一半, II 和 III 都是线起偏器, 透振方向分别为水平方向 ( $x$  轴) 和  $+45^\circ$  (见本题图), IV 是圆起偏器, 它让右旋圆偏振光全部通过, 把左旋圆偏振光全部吸收掉。把各滤光器件分别放在要研究的光路中, 测量透射出来的光强。设入射光强为  $I_0$ , 透过 I、II、III、IV 的光强分别为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ , 斯托克斯引入下列四个参量来描述电磁波的偏振状态:

$$\begin{cases} S_0 = 2I_1, \\ S_1 = 2(I_2 - I_1), \\ S_2 = 2(I_3 - I_1), \\ S_3 = 2(I_4 - I_1), \end{cases}$$














这便是斯托克斯参量的操作定义 (G. Stokes, 1852 年)。 思考题 6-42

人们还常把这些参量归一化, 即用  $I_0$  除一下, 把得到的

四个数  $S_0/I_0$ 、 $S_1/I_0$ 、 $S_2/I_0$ 、 $S_3/I_0$  写成一组, 用来描写入射光的偏振状态。例如对于自然光,  $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_0/2$ , 故描述它的归一化斯托克斯参量为  $(1, 0, 0, 0)$ 。写出下列偏振态的斯托克斯参量:

- (1) 水平 ( $x$  方向) 线偏振;
- (2) 垂直 ( $y$  方向) 线偏振;
- (3)  $+45^\circ$  线偏振;
- (4)  $-45^\circ$  线偏振;
- (5) 右旋圆偏振;
- (6) 左旋圆偏振;
- (7) 部分偏振, 极大在  $y$  方向, 偏振度为 50%。

答:

滤光器件	 $I_1$	 $I_2$	 $I_3$	 $I_4$	斯托克斯参量			
					$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
(1) 	1/2	1	1/2	1/2	1	1	0	0
(2) 	1/2	0	1/2	1/2	1	-1	0	0
(3) 	1/2	1/2	1	1/2	1	0	1	0
(4) 	1/2	1/2	0	1/2	1	0	-1	0
(5) 	1/2	1/2	1/2	1	1	0	0	1
(6) 	1/2	1/2	1/2	0	1	0	0	-1
(7) 	1/2	1/4	1/2	1/2	1	-1/2	0	0

## 第六章 偏 振

6-1. 自然光投射到互相重叠的两个偏振片上,如果透射光的强度为

(1) 透射光束最大强度的  $1/3$ ,

(2) 入射光束强度的  $1/3$ ,

则这两个偏振片的透振方向之间夹角是多大? 假定偏振片是理想的,它把自然光的强度严格减少一半。

解: (1) 设自然光(即入射光)的总强度为  $I_0$ , 通过第一块偏振片  $P_1$  的强度为  $I_0/2$ . 当两块偏振片平行时, 最后通过第二块偏振片  $P_2$  的强度为  $I_0/2$ , 此为最大透光强度  $I_{\max}$ , 即  $I_{\max} = I_0/2$ . 当  $P_1$ 、 $P_2$  的透振方向夹角为  $\theta$  时,

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta = I_0 \cos^2 \theta / 2 = I_{\max} \cos^2 \theta.$$

若  $I_2/I_{\max} = 1/3$ , 算出  $\cos \theta = \sqrt{1/3}$ , 故

$$\theta = 54^\circ 45'.$$

(2) 若  $I_2/I_0 = 1/3$ , 算出  $\cos \theta = \sqrt{2/3}$ , 故

$$\theta = 35^\circ 15'.$$

6-2. 一束自然光入射到一偏振片组上,这组由四块组成,每片的透振方向相对于前面一片沿顺时针方向转过  $30^\circ$  角。试问入射光中有多大一部分透过了这组偏振片?

解: 设入射自然光总强度为  $I_0$ , 通过四块偏振片的光强依次为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ , 根据马吕斯定律,得

$$I_4 = I_3 \cos^2 30^\circ = I_2 \cos^4 30^\circ = I_1 \cos^6 30^\circ = I_0 \cos^6 30^\circ / 2 = \frac{3^3}{2^7} I_0 = 21\% I_0.$$

6-3. 将一偏振片沿  $45^\circ$  角插入一对正交偏振器之间,自然光经过它们强度减为原来的百分之几?

解: 设偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  正交, 沿  $45^\circ$  角插入的偏振片为  $P$ , 则通过各偏振片光强的变化为

$$I_2 = I \cos^2 45^\circ = I_1 \cos^4 45^\circ = I_0 \cos^4 45^\circ / 2 = \frac{1}{2^3} I_0 = 12.5\% I_0.$$

6-4. 计算从空气到水面的布儒斯特角(水的折射率  $n = 4/3$ )。

解: 布儒斯特角为

$$i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{4}{3} = 53^\circ 8'.$$

6-5. 一束光由水射在玻璃上,当入射角为  $50.82^\circ$  时,反射光全偏振,求玻璃的折射率(已知水的折射率为  $4/3$ )。

解: 根据布儒斯特角公式得

$$n_2 = n_1 \tan i_B = \frac{4}{3} \tan 50.82^\circ = 1.636.$$

- 6-6. 计算 (1) 由空气到玻璃( $n=1.560$ )的全偏振角;  
 (2) 由此玻璃到空气的全偏振角;  
 (3) 在全偏振时由空气到此玻璃的折射光的偏振度;  
 (4) 在全偏振时由此玻璃到空气的折射光的偏振度;  
 (5) 自然光从空气以布儒斯特角入射到平行平面玻璃板以后,最终透射光的偏振度。

解: (1) 由空气到此玻璃的全偏振角为

$$i_{B1} = \arctan n = \arctan(1.560) = 57.34^\circ.$$

(2) 由此玻璃到空气的全偏振角为

$$i_{B2} = \arctan(1/n) = \operatorname{arccot} n = 90^\circ - i_{B1} = 32.26^\circ.$$

由此可见,光束射到空气中的平行平面玻璃板上,当上表面反射发生全偏振时,则折射光在下表面的反射也将发生全偏振,每一界面反射的全部都是s分量。

(3) 首先导出折射率从 $n$ 到 $n'$ 折射光偏振度的一般公式。在布儒斯特角附近折射光的p分量为极大强度,s分量为极小强度,所以折射光的偏振度为

$$\begin{aligned} P &= \frac{I'_{\max} - I'_{\min}}{I'_{\max} + I'_{\min}} = \frac{I'_p - I'_s}{I'_p + I'_s} = \frac{I_p T_p - I_s T_s}{I_p T_p + I_s T_s} = \frac{I_p \frac{n'}{n} |t_p|^2 - I_s \frac{n'}{n} |t_s|^2}{I_p \frac{n'}{n} |t_p|^2 + I_s \frac{n'}{n} |t_s|^2} \\ &= \frac{I_p |t_p|^2 - I_s |t_s|^2}{I_p |t_p|^2 + I_s |t_s|^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $I_p$ 和 $I_s$ 为入射光的强度, $I'_p$ 和 $I'_s$ 为折射光的强度。如果连续经过折射率从 $n_0$ 到 $n_1, n_2, \dots, n_N$ 的 $N$ 次折射,则最后折射光的强度为

$$I_{pN} = I_{p0} \frac{n_N}{n_0} |t_{p1} t_{p2} \dots t_{pN}|^2, \quad I_{sN} = I_{s0} \frac{n_N}{n_0} |t_{s1} t_{s2} \dots t_{sN}|^2.$$

如果 $N$ 次折射是从空气经过 $N/2$ 块折射率为 $n$ 的平玻璃板回到空气,则

$$n_1 = n_3 = \dots = n_{N-1} = n, \quad n_0 = n_2 = \dots = n_N = 1,$$

$$t_{p1} = t_{p3} = \dots = t_{p(N-1)} = t_p, \quad t_{s1} = t_{s3} = \dots = t_{s(N-1)} = t_s \text{ (空气到玻璃)},$$

$$t_{p2} = t_{p4} = \dots = t_{pN} = t'_p, \quad t_{s2} = t_{s4} = \dots = t_{sN} = t'_s \text{ (玻璃到空气)}.$$

$$\text{偏振度为} \quad P_N = \frac{I_{p0} |t_p t'_p|^N - I_{s0} |t_s t'_s|^N}{I_{p0} |t_p t'_p|^N + I_{s0} |t_s t'_s|^N}. \quad (2)$$

以布儒斯特角入射时,由菲涅耳公式得

$$t_p = \frac{1}{t'_p} = \frac{1}{n}, \quad t_p t'_p = 1; \quad t_s = \frac{2}{n^2 + 1}, \quad t'_s = \frac{2n^2}{n^2 + 1}.$$

代入①式,得一次折射后的偏振度:

$$\text{空气到玻璃} \quad P = \frac{I_p |t_p|^2 - I_s |t_s|^2}{I_p |t_p|^2 + I_s |t_s|^2} = \frac{(n^2 + 1)^2 I_p - 4n^2 I_s}{(n^2 + 1)^2 I_p + 4n^2 I_s}, \quad (3)$$

$$\text{玻璃到空气} \quad P' = \frac{I_p |t_p'|^2 - I_s' |t_s'|^2}{I_p |t_p'|^2 + I_s' |t_s'|^2} = \frac{(n^2+1)^2 I_p - 4n^2 I_s}{(n^2+1)^2 I_p + 4n^2 I_s}, \quad (4)$$

自然光入射时  $I_{p0}=I_{s0}=I_0/2$ , 代入 (2) 式, 得经  $N/2$  块玻璃板折射后的偏振度

$$P_N = \frac{(n^2+1)^{2N} - (2n)^{2N}}{(n^2+1)^{2N} + (2n)^{2N}}. \quad (5)$$

取  $n=1.560$ , 代入 (3) 式得全偏振时由空气到此玻璃的折射光的偏振度

$$P = \frac{(1.560^2+1)^2 I_p - 4 \times 1.560^2 I_s}{(1.560^2+1)^2 I_p + 4 \times 1.560^2 I_s} = \frac{11.790 I_p - 9.734 I_s}{11.790 I_p + 9.734 I_s},$$

自然光入射时  $I_p=I_s$ ,  $P=9.55\%$ .

(4) 取  $n=1.560$ , 代入 (4) 式得全偏振时由此玻璃到空气折射光的偏振度

$$P' = \frac{(1.560^2+1)^2 I_p - 4 \times 1.560^2 I_s}{(1.560^2+1)^2 I_p + 4 \times 1.560^2 I_s} = \frac{11.790 I_p - 9.734 I_s}{11.790 I_p + 9.734 I_s}.$$

(5) 取  $n=1.560$ ,  $N=2$ , 代入 (5) 式得自然光从空气以布儒斯特角入射到平行平面玻璃板以后透射光的偏振度

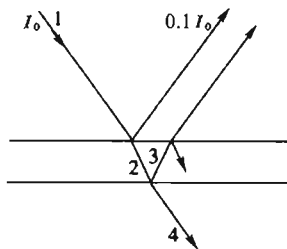
$$P_2 = \frac{(1.560^2+1)^4 - (2 \times 1.560)^4}{(1.560^2+1)^4 + (2 \times 1.560)^4} = 18.9\%.$$

6-7. 求自然光透过八块  $n=1.560$  的平行玻璃板组成的玻片堆后的偏振度(忽略玻璃对光的吸收)。

解: 利用上题解答中的 (5) 式, 取  $n=1.560$ ,  $N=16$ , 得自然光透过玻片堆后的偏振度

$$P_{16} = \frac{(1.560^2+1)^{32} - (2 \times 1.560)^{32}}{(1.560^2+1)^{32} + (2 \times 1.560)^{32}} = 91\%.$$

6-8. 已知自然光射于某平行平面玻璃板上时, 反射光的能流为入射光的 0.10 倍(见本题图), 取入射能流为一个单位, 设玻璃的折射率为 1.50, 求图中标出的光束 2、3、4 的能流(略去玻璃对光的吸收)。



习题 6-8

解: 设入射能流为  $W_0$ , 则光束 1, 2, 3, 4 能流关系式分别为  $W_1 = \mathcal{R} W_0$ ,

$$W_2 = \mathcal{T} W_0 = (1 - \mathcal{R}') W_0,$$

$$W_3 = \mathcal{R}' W_2 = \mathcal{R} \mathcal{T} W_0 = \mathcal{R}' (1 - \mathcal{R}) W_0,$$

$$W_4 = \mathcal{T}' W_2 = \mathcal{T}' \mathcal{T} W_0 = (1 - \mathcal{R}') (1 - \mathcal{R}) W_0.$$

在平面玻璃板的情况下  $r' = -r$ ,  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ . 按题意  $\mathcal{R} = 0.1$  算出

$$W_1 = 10\% W_0, \quad W_2 = 90\% W_0, \quad W_3 = 9\% W_0, \quad W_4 = 81\% W_0.$$



6-9. 线偏振光的振动面和入射面之间的夹角称为振动的方位角。设入射线偏振光的方位角为  $\alpha$ , 入射角为  $i$ , 求折射光和反射光的方位角  $\alpha_2$  和  $\alpha_1'$  (已知两介质的折射率为  $n_1$  和  $n_2$ )。

解: 由折射定律得

$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i, \quad \cos i_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i\right)^2}.$$

根据菲涅耳公式导出  $\alpha$  与  $\alpha_2$  和  $\alpha_1'$  的关系为

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1' &= \frac{E_{1s}'}{E_{1p}'} = \frac{r_s E_{1s}}{r_p E_{1p}} = \frac{r_s}{r_p} \tan \alpha = \frac{\sin(i_2 - i_1) \tan(i_2 + i_1)}{\sin(i_2 + i_1) \tan(i_1 - i_2)} \tan \alpha \\ &= \frac{\cos(i_2 - i_1)}{\cos(i_2 + i_1)} \tan \alpha = \frac{\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2}{\sin i_1 \sin i_2 - \cos i_1 \cos i_2} \tan \alpha \\ &= \frac{\frac{n_1}{n_2} \sin^2 i + \cos i \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i\right)^2}}{\frac{n_1}{n_2} \sin^2 i - \cos i \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i\right)^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \frac{E_{2s}}{E_{2p}} = \frac{t_s E_{1s}}{t_p E_{1p}} = \frac{t_s}{t_p} \tan \alpha = \frac{2 n_1 \cos i (n_2 \cos i + n_1 \cos i_2)}{(n_1 \cos i + n_2 \cos i_2) 2 n_1 \cos i} \tan \alpha \\ &= \frac{n_2 \cos i + n_1 \cos i_2}{n_1 \cos i + n_2 \cos i_2} \tan \alpha = \frac{\frac{n_2}{n_1} \cos i + \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i\right)^2}}{\frac{n_1}{n_2} \cos i + \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin i\right)^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

6-10. 线偏振光以布儒斯特角从空气入射到玻璃 ( $n = 1.560$ ) 的表面上, 其振动的方位角为  $20^\circ$ , 求反射光和折射光的方位角。

解: 因该偏振光以布儒斯特角入射, 反射光为 s 光, 即反射光的方位角  $\alpha_1' = 90^\circ$ . 在上题结果 (2) 中取  $i = i_B$ ,  $i_2 = 90^\circ - i_B$ ,  $\tan i_B = n_2/n_1$ , 有

$$\tan \alpha_2 = \frac{n_2 \cos i_B + n_1 \sin i_B}{n_1 \cos i_B + n_2 \sin i_B} \tan \alpha = \frac{n_2 + n_1 \tan i_B}{n_1 + n_2 \tan i_B} \tan \alpha = \frac{2 n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \tan \alpha.$$

以  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1.560$ ,  $\alpha = 20^\circ$  代入, 得  $\alpha_2 = 18.30^\circ$ .

6-11. 设入射光、反射光、折射光的总能流分别为  $W_1$ 、 $W_1'$ 、 $W_2$ , 则总能流反射率  $\mathcal{R}$  和总能流透射率  $\mathcal{T}$  定义为

$$\mathcal{R} = \frac{W_1'}{W_1}, \quad \mathcal{T} = \frac{W_2}{W_1}.$$

(1) 当入射光为线偏振光, 方位角 (见习题 6-9) 为  $\alpha$  时, 试证明

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{R}_s \sin^2 \alpha,$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{T}_s \sin^2 \alpha.$$

(2) 证明  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ .

(3) 设入射光是自然光, 求  $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{T}$  与  $\mathcal{R}_p$ 、 $\mathcal{R}_s$  和  $\mathcal{T}_p$ 、 $\mathcal{T}_s$  的关系。

(4) 设入射光是圆偏振光, 求  $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{T}$  与  $\mathcal{R}_p$ 、 $\mathcal{R}_s$  和  $\mathcal{T}_p$ 、 $\mathcal{T}_s$  的关系。

解: (1) 入射光的强度和能流

$$I_{1p} = I_1 \cos^2 \alpha, \quad W_{1p} = W_1 \cos^2 \alpha;$$

$$I_{1s} = I_1 \sin^2 \alpha, \quad W_{1s} = W_1 \sin^2 \alpha.$$

总能流反射率为

$$\mathcal{R} = \frac{W_1'}{W_1} = \frac{W_{1p}' + W_{1s}'}{W_1} = \frac{\mathcal{R}_p W_{1p} + \mathcal{R}_s W_{1s}}{W_1} = \mathcal{R}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{R}_s \sin^2 \alpha, \quad (1)$$

$$\mathcal{T} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_{2p} + W_{2s}}{W_1} = \frac{\mathcal{T}_p W_{1p} + \mathcal{T}_s W_{1s}}{W_1} = \mathcal{T}_p \cos^2 \alpha + \mathcal{T}_s \sin^2 \alpha. \quad (2)$$

(2) 书上(6.25)式已证明:

$$\mathcal{R}_p + \mathcal{T}_p = 1, \quad \mathcal{R}_s + \mathcal{T}_s = 1.$$

①、②式相加, 有

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = (\mathcal{R}_p + \mathcal{T}_p) \cos^2 \alpha + (\mathcal{R}_s + \mathcal{T}_s) \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

(3) 自然光入射时,  $W_{1p} = W_{1s} = W_1/2$ , 所以

$$\mathcal{R} = \frac{W_1'}{W_1} = \frac{W_{1p}' + W_{1s}'}{W_1} = \frac{W_{1p}'}{W_1} + \frac{W_{1s}'}{W_1} = \frac{W_{1p}'}{2W_{1p}} + \frac{W_{1s}'}{2W_{1s}} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s),$$

$$\mathcal{T} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_{2p} + W_{2s}}{W_1} = \frac{W_{2p}}{W_1} + \frac{W_{2s}}{W_1} = \frac{W_{2p}}{2W_{1p}} + \frac{W_{2s}}{2W_{1s}} = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_p + \mathcal{T}_s).$$

(4) 圆偏振光入射时, 也有  $W_{1p} = W_{1s} = W_1/2$ , 所以同理也有

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s), \quad \mathcal{T} = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_p + \mathcal{T}_s).$$

**6-12.** 光从空气到玻璃( $n=1.50$ )以布儒斯特角入射, 试计算

(1) 能流反射率  $\mathcal{R}_p$  和  $\mathcal{R}_s$  的值;

(2) 能流透射率  $\mathcal{T}_p$  和  $\mathcal{T}_s$  的值。

解: (1) 布儒斯特角  $i_B = \arctan 1.50 = 56.31^\circ$ .

以布儒斯特角入射时,  $i_1 = i_B$ ,  $i_1 + i_2 = 90^\circ$ ,  $i_2 - i_1 = 90^\circ - 2i_B$ .

$$\mathcal{R}_p = 0,$$

$$\mathcal{R}_s = r_s^2 = \frac{\sin^2(i_2 - i_1)}{\sin^2(i_2 + i_1)} = \frac{\sin^2(90^\circ - 2i_B)}{\sin^2 90^\circ} = \sin^2(-22.62^\circ) = 15\%.$$

(2) 根据能流守恒直接求出

$$\mathcal{T}_p = 1 - \mathcal{R}_p = 1, \quad \mathcal{T}_s = 1 - \mathcal{R}_s = 85\%.$$

**6-13.** 线偏振光从空气到玻璃( $n=1.5$ )以  $45^\circ$  角入射, 方位角为  $60^\circ$ ,

试计算

(1) 总能流反射率  $\mathcal{R}$  和总能流透射率  $\mathcal{T}$ ;

(2) 改为自然光入射,  $\mathcal{R}$  和  $\mathcal{T}$  为多少?

解: (1)  $i_1 = 45^\circ$ ,  $i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 45^\circ}{1.5}\right) = 28.13^\circ$ ,

由菲涅耳公式

$$\mathcal{R}_p = r_p^2 = \frac{\tan^2(i_1 - i_2)}{\tan^2(i_1 + i_2)} = \frac{\tan^2 16.87^\circ}{\tan^2 73.13^\circ} = 0.85\%,$$

$$\mathcal{R}_s = r_s^2 = \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\sin^2(i_1 + i_2)} = \frac{\sin^2 16.87^\circ}{\sin^2 73.13^\circ} = 9.2\%,$$

$$\mathcal{T}_p = 1 - \mathcal{R}_p = 99.15\%, \quad \mathcal{T}_s = 1 - \mathcal{R}_s = 90.8\%.$$

按习题 6-11(1)

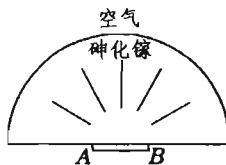
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_p \cos^2 60^\circ + \mathcal{R}_s \sin^2 60^\circ = 7.1\%,$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_p \cos^2 60^\circ + \mathcal{T}_s \sin^2 60^\circ = 92.9\%.$$

(2) 如果自然光入射, 则

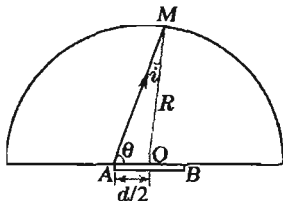
$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_p + \mathcal{R}_s) = 5\%, \quad \mathcal{T} = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_p + \mathcal{T}_s) = 95\%.$$

6-14. 本题图所示为一支半导体砷化镓发光管, 管芯 AB 为发光区, 其直径  $d \sim 3\text{mm}$ , 为了避免全反射, 发光管上部研磨成半球形, 以使内部发的光能够以最大的透射率向外输送。如果要使发光区边缘两点 A 和 B 发的光不至于全反射, 半球的半径至少应取多少? 已知砷化镓的折射率为 3.4 (对发射的  $0.9\mu\text{m}$  波长)。



习题 6-14

解: 由发光区边缘点 A 或 B 发出的光可能在球面上发生全反射。为避免全反射, 在动点 M 变动过程中, 使入射角  $i$  的最大值不超过临界角  $i_c$ 。如右图所示, 在  $\triangle AMO$  中以  $\theta$  为变量, 应用三角正弦定理:



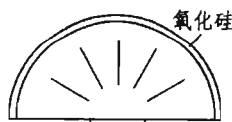
$$\frac{\sin i}{\sin \theta} = \frac{d/2}{R}, \quad \text{即} \quad \sin i_{\max} = \frac{d}{2R},$$

由  $\sin i_{\max} < \sin i_c = n_2/n_1$  求出

$$R > \frac{d}{2 \sin i_c} = \frac{n_1 d}{2 n_2} = \frac{3.4 d}{2} = 5.1\text{mm}.$$

6-15. 接上题, 为了减少光在砷化镓-空气界面的反射, 工艺上常在

砷化镓表面镀一层氧化硅增透膜,如本题图所示。氧化硅的折射率为 1.7。现在单纯从几何光学角度提出一个问题,加膜后人射角为多少才不至于在空气表面发生全反射?试与不加膜时相比(设膜很薄,可按平板计算)。



习题 6-15

解: 从砷化镓到空气的全反射

临界角  $i_{c1} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  (见右图 a),

从氧化硅到空气的全反射临界角  $i_{c0}$

$= \arcsin \frac{n_2}{n_0}$  (见右图 b)。按折射定律,

$$n_1 \sin i_1 = n_0 \sin i_0 = n_2 \sin i_2,$$

达到全反射临界角的条件是  $i_2 = 90^\circ$ ,  $\sin i_2 = 1$ 。上式表明, 如果  $i_1$  达到全反射临界角  $i_{c1}$  的话, 则以此角入射到介质 0 时的折射角  $i_0$  也达到进入介质 2 的全反射临界角  $i_{c0}$ , 即加膜不改变是否发生全反射的性质。

6-16. 从光密介质到光疏介质, 当  $\sin i_1 > n_2/n_1$  时发生全反射, 作为一种处理方法, 我们仍可在形式上维持折射定律  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , 这时  $\sin i_2 > 1$ , 可认为  $i_2$  是个虚折射角, 它的余弦也为虚数:

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = i \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1},$$

试利用菲涅耳公式证明此时  $|\widetilde{r}_p| = 1$ ,  $|\widetilde{r}_s| = 1$ , 从而  $\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_s = 1$ 。

【注: 本来这里根号前有正、负两种可能, 为了保证 (6.55) 式中的  $\kappa > 0$ , 从而使 (6.56) 式中衰减因子的指数确实是负的, 根号应取正的。】

解: 令  $\cos i_1 = a$ ,  $\cos i_2 = ib$ ,  $a$ 、 $b$  皆为实数, 则按菲涅耳公式

$$\begin{cases} \widetilde{r}_p = \frac{n_2 a - i n_1 b}{n_2 a + i n_1 b}, & |\widetilde{r}_p| = 1, & \mathcal{R}_p = |\widetilde{r}_p|^2 = 1; \\ \widetilde{r}_s = \frac{n_1 a - i n_2 b}{n_1 a + i n_2 b}, & |\widetilde{r}_s| = 1, & \mathcal{R}_s = |\widetilde{r}_s|^2 = 1. \end{cases}$$

6-17. 推导全反射时的相移公式 (6.35)。

解: 如上题, 令  $\cos i_1 = a$ ,  $\cos i_2 = ib$ ,  $a$ 、 $b$  皆为实数, 则按菲涅耳公式

$$\widetilde{r}_p = \frac{n_2 a - i n_1 b}{n_2 a + i n_1 b},$$

$$\text{相移 } \delta_p = \arg \widetilde{r}_p = -2 \arctan \frac{n_1 b}{n_2 a} = -2 \arctan \left[ \frac{n_1 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{n_2 \cos i_1} \right];$$

$$\widetilde{r}_s = \frac{n_1 a - i n_2 b}{n_1 a + i n_2 b},$$

$$\text{相移 } \delta_s = \arg \widetilde{r}_s = -2 \arctan \frac{n_2 b}{n_1 a} = -2 \arctan \left[ \frac{n_2 \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 i_1 - 1}}{n_1 \cos i_1} \right].$$

6-18. (1) 计算  $n_1=1.51$ ,  $n_2=1.0$ , 入射角为  $54^\circ 37'$  时全反射光的相移  $\delta_p$  和  $\delta_s$ ;

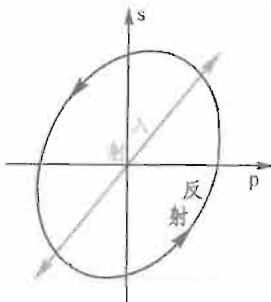
(2) 如果入射光是线偏振的, 全反射光中 p 振动和 s 振动的相位差为多少? 说明由两者合成的是椭圆偏振光。

解: (1) 以  $n_1=1.51$ ,  $n_2=1.0$ ,  $i_1=54^\circ 37'$  代入(6.35)式, 分别算出

$$\delta_p = -123^\circ 48', \quad \delta_s = -78^\circ 48'.$$

$$(2) \varphi_{1s}' - \varphi_{1p}' = (\varphi_{1s}' - \varphi_{1s}) - (\varphi_{1p}' - \varphi_{1p}) = \delta_s - \delta_p = -45^\circ.$$

两个振动合成为左旋的椭圆偏振光, 如右图所示。



6-19. 在上题中用的光源是氦氖激光, 求隐失波的穿透深度。

解: 隐失波的穿透深度为

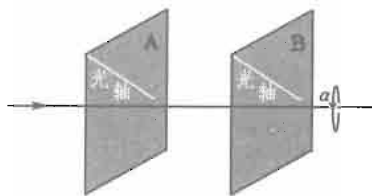
$$\begin{aligned} d &= \frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_c}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2}} \\ &= \frac{632.8 \text{ nm}}{2\pi\sqrt{1.51^2 \times \sin^2 54^\circ 37' - 1}} = 140.6 \text{ nm}. \end{aligned}$$

6-20. 一束线偏振的钠黄光垂直射入一块方解石晶体, 振动方向与晶体的主平面成  $20^\circ$  角, 试计算 o、e 两光束折射光的相对振幅。

解: 线偏振光射入方解石晶体后, 电矢量被分解为垂直于主平面的 o 振动和平行于主平面的 e 振动。设入射光线偏振的振幅为 A, 则

$$\left. \begin{aligned} A_o &= A \sin 20^\circ, \\ A_e &= A \cos 20^\circ. \end{aligned} \right\} \frac{A_o}{A_e} = \tan 20^\circ = 0.36.$$

6-21. 两大小相同的冰洲石晶体 A、B 前后排列, 强度为 I 的自然光垂直于晶体 A 的表面入射后相继通过 A、B (见本题图)。A、B 的主截面之间的夹角为  $\alpha$  (图中  $\alpha$  为  $0$ )。求  $\alpha=0^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $180^\circ$  时由 B 射出光线的数目和每个的强度 (忽略反射、吸收等损失)。



习题 6-21

解: 自然光垂直射入晶体 A 以后, 被分解为平行于主截面的  $e_1$  振动和垂直于主截面的  $o_1$  振动。由于光轴与表面既不平行, 又不垂直,  $o_1$  光和  $e_1$  光的传播方向不同, 从晶体 A 出射后被分解为垂直 A 表面的两束光, 其强度分别为

$$I_o = I/2, \quad I_e = I/2.$$

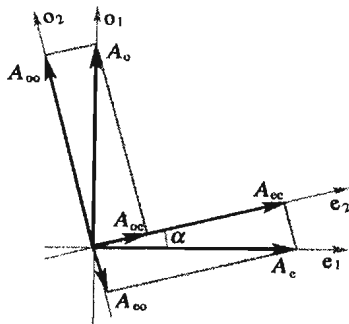
这两束光射入晶体B后,又分别被分解为B内的 $o_2$ 振动和 $e_2$ 振动;一般来说,其传播方向也要继续分离。从B出射的将有四束光(除特殊夹角外)。它们的强度与A,B两晶体主截面的夹角 $\alpha$ 有关(参见右图)。这四束光的强度分别为

$$I_{oo} = A_{oo}^2 \cos^2 \alpha = I \cos^2 \alpha / 2,$$

$$I_{oe} = A_{oe}^2 \sin^2 \alpha = I \sin^2 \alpha / 2,$$

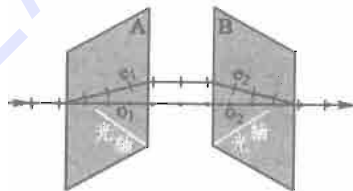
$$I_{eo} = A_{eo}^2 \sin^2 \alpha = I \sin^2 \alpha / 2,$$

$$I_{ee} = A_{ee}^2 \cos^2 \alpha = I \cos^2 \alpha / 2.$$



$\alpha = 0^\circ$  时,  $I_{oo} = I_{ee} = I/2, \quad I_{oe} = I_{eo} = 0,$  由B射出两束光;  
 $\alpha = 45^\circ$  时,  $I_{oo} = I_{ee} = I_{oe} = I_{eo} = I/4,$  由B射出四束光;  
 $\alpha = 90^\circ$  时,  $I_{oo} = I_{ee} = 0, \quad I_{oe} = I_{eo} = I/2,$  由B射出两束光;  
 $\alpha = 180^\circ$  时,  $I_{oo} = I_{ee} = I/2, \quad I_{oe} = I_{eo} = 0,$  由B射出一束光。

在 $\alpha = 180^\circ$ 的情况下 $e_1$ 和 $e_2$ 朝相反的方向偏折(见右图),最后与不发生偏折的 $o_1$ 和 $o_2$ 汇合成一束光。



**6-22.** 一水晶平板厚 $0.850\text{ mm}$ ,光轴与表面平行,用水银灯的绿光( $546.1\text{ nm}$ )垂直照射,求

- (1) o、e 两光束在晶体中的光程;
- (2) 二者的相位差(用度表示)。

**解:** (1) 水银绿光在水晶中的主折射率为 $n_o = 1.54617$ 和 $n_e = 1.55535$ ,绿光通过板厚 $l = 0.850\text{ mm}$ 的光程分别为

$$L_o = n_o l = 1.314\text{ mm}, \quad L_e = n_e l = 1.322\text{ mm}.$$

(2) 相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_o - \varphi_e = -\frac{2\pi}{\lambda}(L_o - L_e) \bmod(2\pi) = 4.08\text{ rad} = 233.76^\circ.$$

**6-23.** 一束钠黄光以 $50^\circ$ 的入射角射到冰洲石平板上,设光轴与板表面平行,并垂直于入射面,求晶体中o光和e光的夹角。

**解:** 在此特殊情况下,o光与e光在晶体内的传播方向均服从普通的折射定律,即

$$\sin i = n_o \sin i_o = n_e \sin i_e,$$

以  $n_o = 1.65836$ ,  $n_e = 1.48641$ ,  $i = 50^\circ$  代入, 分别算出

$$i_o = 27.51^\circ, \quad i_e = 31.02^\circ.$$

两束光在晶体中的夹角为

$$\Delta i = i_e - i_o = 3.51^\circ.$$

**6 - 24.** 一束钠黄光掠入射到冰的晶体平板上, 光轴与入射面垂直, 平板厚度为 4.20 mm, 求 o 光和 e 光射到平板对面上两点的间隔。已知对于钠黄光冰的  $n_o = 1.3090$ ,  $n_e = 1.3104$ 。

**解:** 在此特殊情况下, o 光与 e 光在晶体内的传播方向均服从普通的折射定律, 即

$$\sin i = n_o \sin i_o = n_e \sin i_e,$$

入射角  $i \approx 90^\circ$ , 故  $\sin i = 1$ , 故

$$i_o = \arcsin \frac{1}{n_o} = \arcsin \frac{1}{1.3090} = 49.81^\circ,$$

$$i_e = \arcsin \frac{1}{n_e} = \arcsin \frac{1}{1.3104} = 49.74^\circ.$$

o, e 两光线射向平板对面的位置坐标(参见右图)为

$$x_o = d \tan i_o, \quad x_e = d \tan i_e.$$

两点间隔为为

$$\Delta x = d(\tan i_o - \tan i_e) = 4.20 \text{ mm} \times (\tan 49.81^\circ - \tan 49.74^\circ) = 12.3 \mu\text{m}.$$

**6 - 25.** 用 ADP(磷酸二氢铵,  $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ ) 晶体制成  $50^\circ$  顶角的棱镜, 光轴与折射棱平行,  $n_o = 1.5246$ ,  $n_e = 1.4792$ 。试求

(1) o 光和 e 光的最小偏向角;

(2) 二者之差。

**解:** 在此特殊情况下, o 光与 e 光在晶体内的传播方向均服从普通的折射定律, 故棱镜的最小偏向角公式(1.23)分别对 o 光和 e 光可用。

$$n = \frac{\sin \frac{(\alpha + \delta_{\min})}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{即} \quad \delta_{\min} = 2 \arcsin \left( n \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha.$$

(1) o 光的最小偏向角

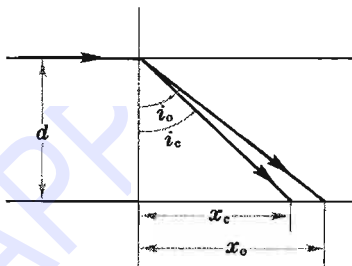
$$(\delta_o)_{\min} = 2 \arcsin \left( n_o \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha = 2 \times \arcsin \left( 1.5246 \times \sin \frac{50^\circ}{2} \right) - 50^\circ = 30.23^\circ.$$

e 光的最小偏向角

$$(\delta_e)_{\min} = 2 \arcsin \left( n_e \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha = 2 \times \arcsin \left( 1.4792 \times \sin \frac{50^\circ}{2} \right) - 50^\circ = 27.38^\circ.$$

(2) 二者之差

$$\Delta \delta_{\min} = 30.23^\circ - 27.38^\circ = 2.85^\circ.$$



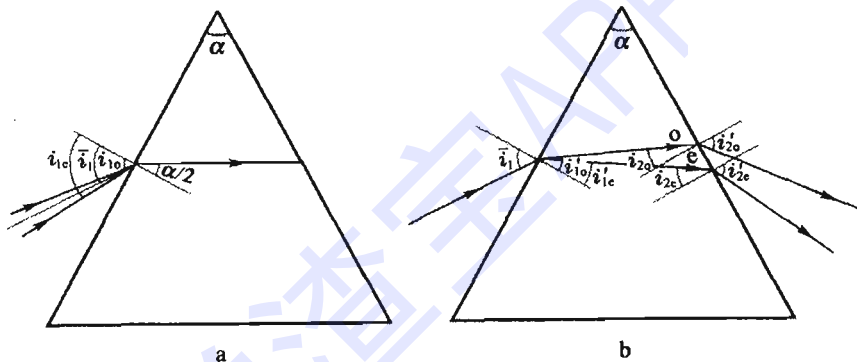
**6-26.** 设一水晶棱镜的顶角为  $60^\circ$ , 光轴平行于折射棱。钠黄光以最小偏向角的方向在棱镜中折射, 用焦距为  $1\text{ m}$  的透镜聚焦, o 光和 e 光两谱线的间隔为多少?

**解:** 在此特殊情况下, o 光与 e 光在晶体内的传播方向均服从普通的折射定律。不过同一入射角不能使 o 光和 e 光同时满足最小偏向角的条件。实际上只可能近似地以 o 光和 e 光的平均值入射。先分别求满足最小偏向角的条件的 o 光与 e 光入射角  $i_o$  和  $i_e$ :

$$i_{1o} = \arcsin\left(n_o \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin\left(1.54425 \times \sin \frac{60^\circ}{2}\right) = 50.545^\circ,$$

$$i_{1e} = \arcsin\left(n_e \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \arcsin\left(1.55336 \times \sin \frac{60^\circ}{2}\right) = 50.958^\circ$$

二者的平均值(下图 a)  $\bar{i}_1 = 50.752^\circ$



以此平均角入射(上图 b), 则在棱镜内的折射角为

$$i_{1o}' = \arcsin\left(\frac{1}{n_o} \sin \bar{i}_1\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 50.752^\circ}{1.54425}\right) = 30.098^\circ,$$

$$i_{1e}' = \arcsin\left(\frac{1}{n_e} \sin \bar{i}_1\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 50.752^\circ}{1.55336}\right) = 29.904^\circ.$$

在棱镜第二折射面处的入射角为

$$i_{2o} = \alpha - i_{1o}' = 29.902^\circ, \quad i_{2e} = \alpha - i_{1e}' = 30.096^\circ.$$

在棱镜第二折射面处的折射角为

$$i_{2o}' = \arcsin(n_o \sin i_{2o}) = \arcsin(1.54425 \times \sin 29.902^\circ) = 50.339^\circ,$$

$$i_{2e}' = \arcsin(n_e \sin i_{2e}) = \arcsin(1.55336 \times \sin 30.096^\circ) = 51.163^\circ,$$

二者之差为

$$\Delta i_2' = i_{2e}' - i_{2o}' = 51.163^\circ - 50.339^\circ = 0.824^\circ = 1.44 \times 10^{-2} \text{ rad}.$$

经透镜聚焦后, 两束光线的间隔

$$\Delta x = f \Delta i_2' = 1 \text{ m} \times 1.44 \times 10^{-2} \text{ rad} = 1.44 \text{ cm}.$$



6-27. 求冰洲石晶体中钠黄光射线和波法线间的最大夹角。

解: 如图 6-37, 射线面方程为

$$n_o^2 z^2 + n_e^2 x^2 = 1, \quad (1)$$

取微分 
$$\frac{dx}{dz} = -\frac{n_o^2 z}{n_e^2 x}. \quad (2)$$

$$\tan \xi = \frac{x}{z}, \quad \tan \theta = -\frac{dz}{dx} = \frac{n_e^2 x}{n_o^2 z}. \quad (3)$$

射线和波法线间夹角的正切

$$\begin{aligned} \tan(\xi - \theta) &= \frac{\tan \xi - \tan \theta}{1 + \tan \xi \tan \theta} \\ &= \frac{\frac{x}{z} - \frac{n_e^2 x}{n_o^2 z}}{1 + \frac{n_e^2 x^2}{n_o^2 z^2}} = \frac{(n_o^2 - n_e^2)xz}{n_o^2 z^2 + n_e^2 x^2} = (n_o^2 - n_e^2)xz. \end{aligned}$$

求导, 取极值:

$$\begin{aligned} \frac{d \tan(\xi - \theta)}{dx} &= (n_o^2 - n_e^2) \left( z + x \frac{dz}{dx} \right) = (n_o^2 - n_e^2) \left( z - \frac{n_e^2 x^2}{n_o^2 z} \right) \\ &= \frac{(n_o^2 - n_e^2)}{n_o^2 z} (n_o^2 z^2 - n_e^2 x^2) = \frac{(n_o^2 - n_e^2)}{n_o^2 z} (1 - 2n_e^2 x^2) = 0. \end{aligned}$$

由此得  $x = \frac{1}{\sqrt{2}n_e}$ , 代入 (1) 式得  $z = \frac{1}{\sqrt{2}n_o}$ .

于是  $(\xi - \theta)_{\min} = \arctan \frac{n_o^2 - n_e^2}{2n_o n_e^2}. \quad (4)$

对于钠黄光  $n_o = 1.65836$ ,  $n_e = 1.48641$ , 代入上式算得

$$(\xi - \theta)_{\min} = \arctan \frac{1.65836^2 - 1.48641^2}{2 \times 1.65836 \times 1.48641} = \arctan(0.109684) = 6.26^\circ.$$

6-28. 图 6-31b 中, 设入射光是钠黄光, 晶体为方解石, 光轴与晶体表面成  $30^\circ$  角, 入射角为  $45^\circ$ ,

(1) o 光和 e 光的方向;

(2) e 光的折射率。

解: (1) o 光的方向可用普通的折射律求得。设折射角为  $i_o$ , 则  $n_o \sin i_o = \sin 45^\circ$ ,

$$i_o = \arcsin\left(\frac{\sin 45^\circ}{n_o}\right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2} \times 1.65836}$$

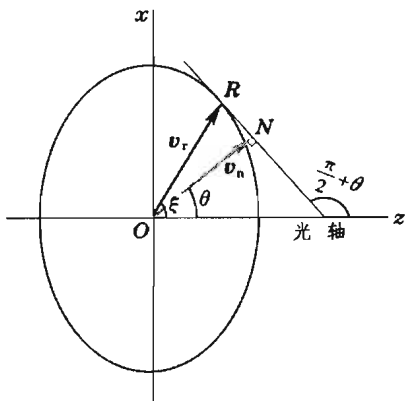


图 6-37

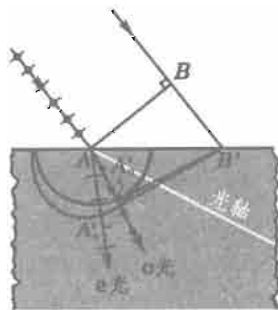


图 6-31b

$$= \arcsin(0.42639) = 25.24^\circ.$$

e 光的方向如右图用惠更斯作图法求得。以  $45^\circ$  入射的平行光落在界面上,  $B'$  点比  $A$  点落后光程  $(BB') = \overline{BB'}$ 。取光轴为  $y$  轴, 以  $A$  点为中心作 e 光在  $\Delta t = \overline{BB'}/c$  时刻的次波面。则次波面的方程为

$$n_e^2 x^2 + n_o^2 y^2 = (\overline{BB'})^2. \quad (1)$$

取  $\overline{BB'} = 1$ , 则  $\overline{AB'} = \sqrt{2}$ ,  $B'$  点的坐标为

$$(\sqrt{2}\sin 30^\circ, -\sqrt{2}\cos 30^\circ) = (\sqrt{1/2}, -\sqrt{3/2}).$$

过  $B'$  点作波面的切线, 切于  $A'_e(x, y)$  点, 切线的斜率为  $\frac{dy}{dx} = -\frac{n_e^2 x}{n_o^2 y}$ , 切线的方程为

$$\frac{y + \sqrt{3/2}}{x - \sqrt{1/2}} = \frac{dy}{dx} = -\frac{n_e^2 x}{n_o^2 y} \quad \text{或} \quad n_e^2 x(x - \sqrt{1/2}) + n_o^2 y(y + \sqrt{3/2}) = 0. \quad (2)$$

①、② 联立求得切点  $A'_e$  的坐标  $(x, y)$ 。由两式消去  $y$ , 得  $x$  的方程:

$$(3n_e^2 n_o^2 + n_e^4)x^2 - 2\sqrt{2}n_e^2 x + 2 - 3n_o^2 = 0. \quad (3)$$

将  $n_o = 1.63836$ ,  $n_e = 1.48641$  代入, 解得  $x = -0.40215$ 。将此  $x$  值代入 (2) 式, 得  $y = -0.48342$ 。e 光  $AA'_e$  射线与光轴的夹角

$$\begin{aligned} \xi_e &= \arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{-0.40215}{-0.48342} \\ &= \arctan(0.88189) = 39.76^\circ. \end{aligned}$$

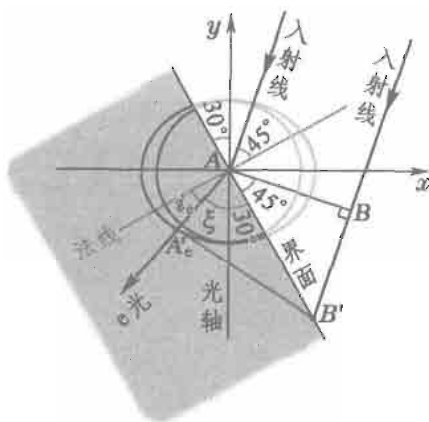
折射角为  $i_e = 90^\circ - (30^\circ + \xi_e) = 20.24^\circ$ 。

(2) 波法线与光轴之间的夹角

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \left( \frac{n_e^2}{n_o^2} \tan \xi_e \right) \\ &= \arctan \left( \frac{1.48641^2}{1.63836^2} \times 0.88189 \right) = 35.96^\circ. \end{aligned}$$

e 光的折射率

$$\begin{aligned} n(\theta) &= \sqrt{\frac{n_e^2 n_o^2}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}}, \\ n(35.96^\circ) &= \sqrt{\frac{1.48641^2 \times 1.63836^2}{1.48641^2 \times \cos^2 35.96^\circ + 1.63836^2 \times \sin^2 35.96^\circ}} \\ &= 1.60013. \end{aligned}$$



6-29. 当图6-46中沃拉斯顿棱镜的顶角  $\alpha = 15^\circ$  时, 两出射光线间的夹角为多少?

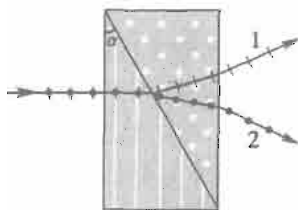
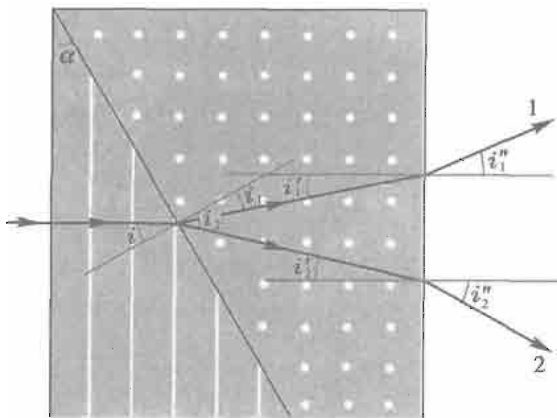


图 6-46

**解:** 如左图, 在中间界面上发生的折射情形是光线 1 由折射率  $n_e \rightarrow n_o$ , 光线 2 由折射率  $n_o \rightarrow n_e$ , 入射角均为  $\alpha$ , 折射角分别设为  $i_1$  和  $i_2$ . 此时两光线

在第二块棱镜中的传播方向仍由普通的折射定律确定。取  $n_o = 1.63836$ ,  $n_e = 1.48641$ , 算出

$$i_1 = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_o} \sin \alpha\right) = 13.41^\circ, \quad i_2 = \arcsin\left(\frac{n_o}{n_e} \sin \alpha\right) = 16.78^\circ$$

再考虑 1, 2 两条光线在右侧界面的折射情形。根据几何关系, 此时的入射角分别为

$$i'_1 = \alpha - i_1 = 1.59^\circ, \quad i'_2 = \alpha - i_2 = -1.78^\circ$$

相应的折射角为

$$i''_1 = \arcsin(n_o \sin i'_1) = 2.637^\circ, \quad i''_2 = \arcsin(n_o \sin i'_2) = -2.647^\circ$$

两光线夹角为

$$\Delta i = i''_1 - i''_2 = 5.284^\circ$$

6-30. 设图6-47b所示的尼科耳棱镜中  $\angle CA''C''$  为直角, 光线  $SM$  平行于  $A''A$ , 计算  $\angle S_0MS$ .

**解:** 尼科耳棱镜的两部分是用加拿大树胶 ( $n = 1.55$ ) 黏合的。o 光 ( $n_o = 1.65836$ ) 在界面上全反射临界角如右图所示为

$$i_{oc} = \arcsin\left(\frac{1.55}{1.65836}\right) = 69.17^\circ$$

此时第一界面的折射角为

$$i' = 90^\circ - i_{oc} = 20.83^\circ,$$

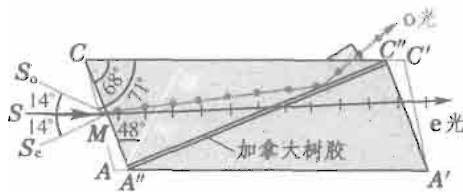
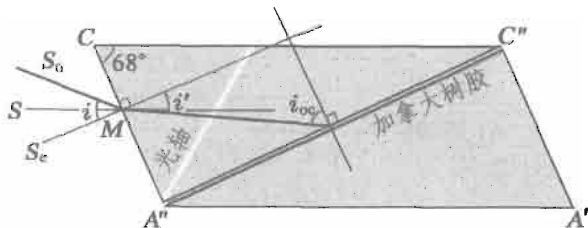


图 6-47b



相应的最大入射角为

$$i = \arcsin(n_o \sin i') = 36.14^\circ,$$

所以

$$\angle S_oMS = i - (90^\circ - 68^\circ) = 14.14^\circ.$$

**6-31.** 用方解石和石英薄板作对钠黄光的  $\lambda/4$  片, 它们的最小厚度各为多少?

**解:**  $\lambda/4$  片的最小厚度  $d$  应满足

$$(n_o - n_e) = \pm \lambda/4$$

就  $\lambda = 589290 \text{ nm}$  的钠黄光来说, 对于方解石有

$$n_o - n_e = 1.65836 - 1.48641 = 0.17195,$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 856.8 \text{ nm}.$$

对于石英有

$$n_o - n_e = 1.55336 - 1.54425 = 0.00911,$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 16.71 \mu\text{m}.$$

**6-32.** 两尼科耳棱镜主截面的夹角由  $30^\circ$  变到  $45^\circ$ , 透射光的强度如何变化? 设入射自然光的强度为  $I_0$ .

**解:** 由马吕斯定律知道, 通过第二个尼科耳棱镜后的光强为

$$I_2 = I_0 \cos^2 \alpha/2,$$

式中  $\alpha$  为两尼科耳棱镜主截面的夹角。

$$\text{当 } \alpha = 30^\circ \text{ 时} \quad I_2 = 3I_0/8;$$

$$\text{当 } \alpha = 45^\circ \text{ 时} \quad I_2 = I_0/4.$$

**6-33.** 单色线偏振光垂直射入方解石晶体, 其振动方向与主截面成  $30^\circ$  角, 两折射光再经过置于方解石后的尼科耳棱镜, 其主截面与原入射光的振动方向成  $50^\circ$  角, 求两条光线的相对强度。

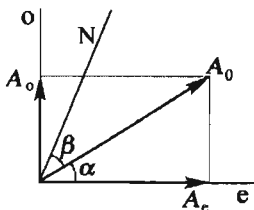
**解:** 如右图, 设线偏振光的振幅为  $A_0$ , 其振动方向与晶体主截面的夹角为  $\alpha$ , 与尼科耳棱镜主截面的夹角为  $\beta$ , 线偏振光经方解石后分解为  $e$  振动和  $o$  振动, 其振幅分别为各自通过尼科耳棱镜后的振幅分别为

$$A_1 = A_e \cos(\alpha + \beta) = A_0 \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha,$$

$$A_2 = A_o \sin(\alpha + \beta) = A_0 \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha.$$

强度之比为

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \tan^2(\alpha + \beta) \tan^2 \alpha = \tan^2(30^\circ + 50^\circ) \tan^2 30^\circ = 10.72.$$



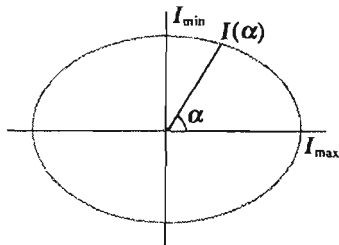
6-34. 经尼科耳棱镜观察部分偏振光, 当尼科耳棱镜由对应于极大强度的位置转过  $60^\circ$  时, 光强减为一半, 求光束的偏振度。

解: 如右图, 部分偏振光的光强极大  $I_{\max}$  方位与光强极小  $I_{\min}$  方位总是正交的。任意斜方位的光强  $I(\alpha)$  是  $I_{\max}$  和  $I_{\min}$  的非相干叠加, 即

$$I(\alpha) = I_{\max} \cos^2 \alpha + I_{\min} \sin^2 \alpha.$$

按题意, 当  $\alpha = 60^\circ$  时  $I(\alpha) = I_{\max}/2$ , 代入上式求出  $I_{\min} = I_{\max}/3$ . 因此该部分偏振光的偏振度为

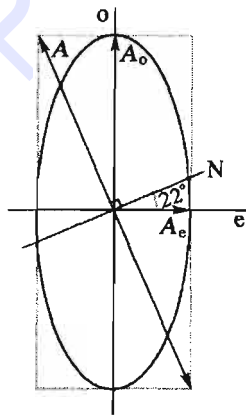
$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 50\%.$$



6-35. 用一块  $\lambda/4$  片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光。达到消光位置时,  $\lambda/4$  片的光轴与偏振片透振方向相差  $22^\circ$ , 求椭圆长短轴之比。

解: 一椭圆偏振光经  $\lambda/4$  片后能有消光位置, 这说明  $\lambda/4$  片的光轴已经对准入射椭圆光的长轴或短轴方向, 将它转化为线偏振光, 如右图所示。消光时, 偏振片 P 的透振方向与线偏振 A 方向正交, 而 A 的方位取决于入射椭圆光的长短轴之比 (见右图), 长短轴之比为

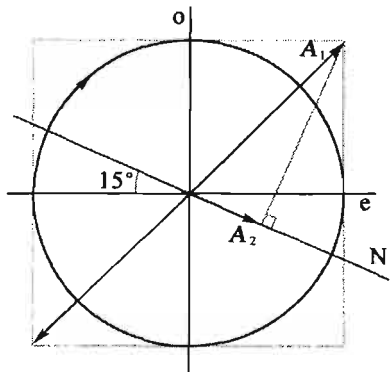
$$\frac{A_o}{A_e} = \cot 22^\circ = 2.5.$$



6-36. 强度为  $I_0$  的右旋圆偏振光垂直通过  $\lambda/4$  片 (此  $\lambda/4$  片由方解石做成, o 光和 e 光在晶片中的光程差刚好是  $\lambda/4$ ); 然后再经过一块主截面相对于  $\lambda/4$  片光轴向右旋  $15^\circ$  的尼科耳棱镜, 求最后出射的光强 (忽略反射、吸收等损失)。

解: 右旋圆偏振光入射到  $\lambda/4$  片表面时分解成 o 振动和 e 振动, 其间相位差  $\delta_\lambda = \pi/2$ , 在  $\lambda/4$  片体内传播的附加相位差  $\Delta\delta = -\pi/2$ , 出射时  $\delta_\pm = \delta_\lambda + \Delta\delta = 0$ , 即出射光化为第 1、3 象限的线偏振光 (如右图, 图中 N 为尼科耳棱镜的透振方向), 强度为  $I_0$ , 按马吕斯定律, 它再通过尼科耳棱镜的强度为

$$I_N = I_0 \cos^2(45^\circ + 15^\circ) = I_0/4.$$



6-37. 平行于光轴切割一块方解石晶片, 放置于主截面成  $15^\circ$  角的一对尼科耳棱镜之间, 晶片的光轴平分此角, 求

(1) 从方解石晶片射出的 o 光和 e 光的振幅和光强;

(2) 由第二个尼科耳棱镜射出时的 o 光和 e 光的振幅和光强。

设入射自然光的光强为  $I_N = A^2$ , 反射和吸收等损失可忽略。

解: (1) 如右图, 设经第一块尼科耳棱镜  $N_1$  后的线偏振光的振幅为  $A_1$ , 光强为  $I_1$ , 则

$$I_1 = I_0/2 = A^2/2, \quad A_1 = A/\sqrt{2}.$$

从方解石出射的 e 光和 o 光的振幅分别为

$$A_{1e} = A_1 \cos 15^\circ = (A/\sqrt{2}) \cos 15^\circ = 0.68 A,$$

$$A_{1o} = A_1 \sin 15^\circ = (A/\sqrt{2}) \sin 15^\circ = 0.18 A.$$

光强分别为

$$I_e = A_{1e}^2 = 0.68^2 A^2 = 0.47 I_0, \quad I_o = A_{1o}^2 = 0.18^2 A^2 = 0.03 I_0.$$

(2) 投影于第二块尼科耳棱镜  $N_2$  的 e 光和 o 光的振幅分别为

$$A_{2e} = A_{1e} \cos 15^\circ = A_1 \cos^2 15^\circ = (A/\sqrt{2}) \cos^2 15^\circ = 0.66 A,$$

$$A_{2o} = A_{1o} \sin 15^\circ = A_1 \sin^2 15^\circ = (A/\sqrt{2}) \sin^2 15^\circ = 0.047 A.$$

光强分别为

$$I'_e = A_{2e}^2 = 0.66^2 A^2 = 0.44 I_0, \quad I'_o = A_{2o}^2 = 0.047^2 A^2 = 0.0022 I_0.$$

**6-38.** 强度为  $I_0$  的单色平行光通过正交尼科耳棱镜。现在两尼科耳棱镜之间插入一  $\lambda/4$  片, 其主截面与第一尼科耳棱镜的主截面成  $60^\circ$  角, 求出射光的强度 (忽略反射、吸收等损失)。

解: 如右图, 对通过第一块尼科耳棱镜  $N_1$  的线偏振光的振幅  $A_1$  作两次投影, 得第二块尼科耳棱镜  $N_2$  透振方向的两个振动的振幅  $A_{2e}$  和  $A_{2o}$ , 其值分别为

$$A_{2e} = A_1 \cos 60^\circ \sin 60^\circ = \sqrt{3} A_1 / 4,$$

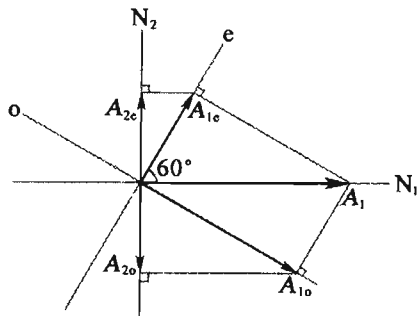
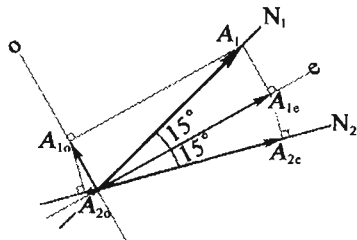
$$A_{2o} = A_1 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = \sqrt{3} A_1 / 4.$$

现在分析这两个振动之间的相位差:

$$\delta = \delta_\lambda + \Delta + \delta' = \pi \pm \frac{\pi}{2} + 0 = \pi \pm \frac{\pi}{2},$$

式中  $\delta_\lambda = \pi$  为  $\lambda/4$  片入射点处 o、e 振动的相位差,  $\Delta = \pm \pi/2$  为  $\lambda/4$  片引起的相位差,  $\delta' = 0$  为从  $\lambda/4$  片出射的光向  $N_2$  投影所引起的相位差。最后通过  $N_2$  的光强为

$$I_2 = A_{2e}^2 + A_{2o}^2 + 2 A_{2e} A_{2o} \cos \delta = \frac{3}{16} A_1^2 + \frac{3}{16} A_1^2 + 0 = \frac{3}{8} A_1^2 = \frac{3}{16} I_0.$$



6-39. 一块0.025 mm厚的方解石晶片, 表面平行于光轴, 放在正交尼科耳棱镜之间, 晶片的主截面与它们成 $45^\circ$ 角, 试问:

(1) 在可见光范围内哪些波长的光不能通过?

(2) 如果将第二个尼科耳棱镜的主截面转到与第一个平行, 哪些波长的光不能通过?

解: (1) 如右图, 对通过第一块尼科耳棱镜  $N_1$  的线偏振光的振幅  $A_1$  作两次投影, 得第二块尼科耳棱镜  $N_2$  透振方向的两个振动的振幅  $A_{2e}$  和  $A_{2o}$ , 其值分别为

$$A_{2e} = A_1 \cos 45^\circ \sin 45^\circ = A_1/2,$$

$$A_{2o} = A_1 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = A_1/2,$$

即两振幅大小相等。现在分析这两个振动之间的相位差:

$$\delta = \delta_\lambda + \Delta + \delta' = \pi + \Delta + 0 = \pi + \Delta, \quad (1)$$

式中  $\delta_\lambda = \pi$  为波晶片入射点处 o、e 振动的相位差,  $\delta' = 0$  为从波晶片出射的光向  $N_2$  投影所引起的相位差, 而  $\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$  为波晶片引起的相位差。

$\delta = (2k+1)\pi$ , 即  $\Delta = 2k\pi$  的光不能通过, 相应的波长为

$$\lambda_k = \frac{(n_o - n_e)d}{k} = \frac{(1.65836 - 1.48641) \times 0.025 \text{ mm}}{k} = \frac{4298.75 \text{ nm}}{k}.$$

$k = 5 \sim 11$  时波长落在可见光波段内, 它们是

$$\lambda_5 = 859.8 \text{ nm}, \quad \lambda_6 = 716.5 \text{ nm}, \quad \lambda_7 = 614.1 \text{ nm}, \quad \lambda_8 = 537.3 \text{ nm},$$

$$\lambda_9 = 477.6 \text{ nm}, \quad \lambda_{10} = 429.9 \text{ nm}, \quad \lambda_{11} = 390.8 \text{ nm}.$$

(2) 如果  $N_2$  与  $N_1$  平行, 对通过第一块尼科耳棱镜  $N_1$  的线偏振光的振幅  $A_1$  作两次投影如右图, 得第二块尼科耳棱镜  $N_2$  透振方向的两个振动的振幅  $A_{2e}$  和  $A_{2o}$  大小同(1), 仍彼此相等。相位差关系不同之处是  $\delta' = \pi$ , 从而 ① 式化为

$$\delta = \delta_\lambda + \Delta + \delta' = \pi + \Delta + \pi = 2\pi + \Delta, \quad (2)$$

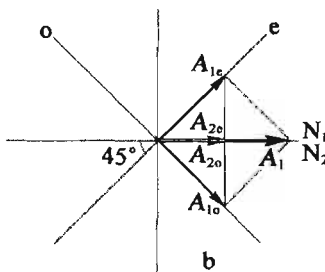
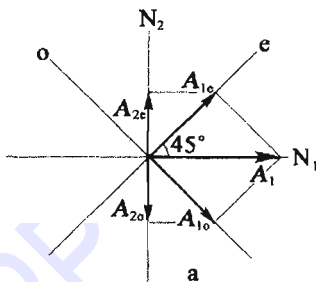
$\delta = (2k+1)\pi$ , 即  $\Delta = (2k-1)\pi$  的光不能通过, 相应的波长为

$$\lambda'_k = \frac{(n_o - n_e)d}{k-1/2} = \frac{(1.65836 - 1.48641) \times 0.025 \text{ mm}}{k-1/2} = \frac{4298.75 \text{ nm}}{k-1/2}.$$

$k = 6 \sim 11$  时波长落在可见光波段内, 它们是

$$\lambda'_6 = 781.6 \text{ nm}, \quad \lambda'_7 = 661.3 \text{ nm}, \quad \lambda'_8 = 573.2 \text{ nm},$$

$$\lambda'_9 = 505.7 \text{ nm}, \quad \lambda'_{10} = 452.5 \text{ nm}, \quad \lambda'_{11} = 409.4 \text{ nm}.$$



**6-40.** 劈形水晶棱镜顶角为 $0.5^\circ$ , 棱边与光轴平行, 置于正交偏振片之间, 使其主截面与两偏振片的透振方向都成 $45^\circ$ 角, 以水银的 $404.7\text{ nm}$ 紫色平行光正入射。

- (1) 通过第二偏振片看到的干涉图样如何?
- (2) 相邻暗纹的间隔 $\Delta x$ 等于多少?
- (3) 若将第二偏振片的透振方向转 $90^\circ$ , 干涉图样有何变化?
- (4) 维持两偏振片正交, 但把晶片的主截面转 $45^\circ$ , 使之与第二偏振片的透振方向垂直, 干涉图样有何变化?

**解:** (1) 如右图 a, 对通过第一偏振片  $P_1$  的线偏振光的振幅  $A_1$  作两次投影, 得第二偏振片  $P_2$  透振方向的两个振动的振幅  $A_{2e}$  和  $A_{2o}$ , 其值皆为  $A_1/2$ 。

现在分析这两个振动之间的相位差。如右图 b, 设棱镜顶角为  $\alpha (=0.5^\circ = 8.727 \times 10^{-3} \text{ rad})$ , 取  $x$  轴平行于偏振片表面并与棱镜棱边垂直, 原点取在中央, 该处棱镜的厚度为  $\frac{d}{2}$ , 于是在  $x$  处棱镜的厚度为  $\frac{d}{2} - \alpha x$ ,  $e$  光和  $o$  光的光程和它们的光程差为

$$\begin{cases} L_e = n_e \left( \frac{d}{2} - \alpha x \right) + \left( \frac{d}{2} + \alpha x \right), \\ L_o = n_o \left( \frac{d}{2} - \alpha x \right) + \left( \frac{d}{2} + \alpha x \right). \end{cases}$$

$$\Delta L = L_o - L_e = (n_o - n_e) \left( \frac{d}{2} - \alpha x \right).$$

通过第二偏振片看到的是平行棱镜棱边的等距干涉条纹 (见图 b 下方)。

- (2) 取上式对  $x$  的微分:

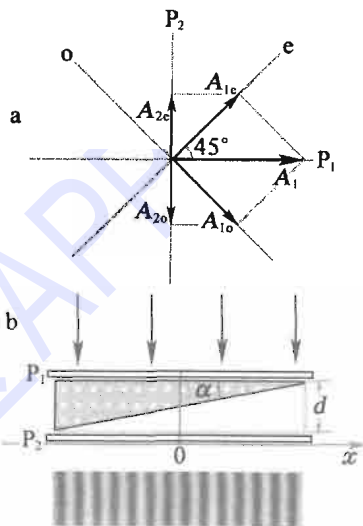
$$d(\Delta L) = -(n_o - n_e) \alpha dx.$$

当  $d(\Delta L) = \lambda$  时  $dx = \Delta x$  即为条纹间隔:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{(n_e - n_o) \alpha} = \frac{404.7 \text{ nm}}{(1.56671 - 1.55716) \times 8.727 \times 10^{-3} \text{ rad}} = 4.86 \text{ mm}.$$

(3) 当我们将第二块偏振片的透振方向 (主截面) 转  $90^\circ$ , 与第一块偏振片一致时, 由于  $o$  轴、 $e$  轴的正向在  $P_2$  投影的相位差与未转动时相比增加  $180^\circ$ , 干涉条纹的亮暗纹互换, 其它方面 (诸如条纹的形状、间距等) 均无变化。

(4) 如果将水晶棱镜的主截面转  $45^\circ$  而与  $P_1$  透振方向一致, 则射入水晶棱镜的是纯  $e$  光。从棱镜出射的是同一振动方向的线偏振光, 被  $P_2$  全部消光,  $P_2$  后方呈一片暗场。





6-41. (1) 将石英晶体巴比涅补偿器(见思考题6-38)放在正交偏振片之间,光轴与它们的透振方向成 $45^\circ$ 角,你将看到什么现象?若劈角 $\alpha = 2.75^\circ$ ,用平行的钠黄光照明,求干涉条纹的间隔。

(2) 转动补偿器的光轴,对干涉条纹有什么影响?

解:(1) 在巴比涅补偿器光轴与正交偏振片透振方向成 $45^\circ$ 角的情况下,振幅矢量的分解与上题同。如上题图a,通过第一偏振片 $P_1$ 的线偏振光的振幅 $A_1$ 作两次投影,得第二偏振片 $P_2$ 透振方向的两个振动的振幅 $A_{2e}$ 和 $A_{2o}$ ,其值皆为 $A_1/2$ 。

如右图a,棱镜顶角 $\alpha = 2.75^\circ = 4.800 \times 10^{-2} \text{ rad}$ ,取 $x$ 轴平行于偏振片表面并与棱镜棱边垂直,原点取在中央,该处补偿器内两棱镜的厚度皆为 $\frac{d}{2}$ ,于是在 $x$ 处上下棱镜的厚度分别为 $\frac{d}{2} \pm \alpha x$ ,平行和垂直于纸面振动的光程和它们的光程差为

$$\begin{cases} L_{//} = n_e \left( \frac{d}{2} + \alpha x \right) + n_o \left( \frac{d}{2} - \alpha x \right), \\ L_{\perp} = n_o \left( \frac{d}{2} + \alpha x \right) + n_e \left( \frac{d}{2} - \alpha x \right), \end{cases}$$

$$\Delta L = L_{//} - L_{\perp} = 2(n_e - n_o)\alpha x.$$

通过第二偏振片看到的是平行棱镜棱边的等距干涉条纹(见图a下方)。取上式对 $x$ 的微分:

$$d(\Delta L) = 2(n_e - n_o)\alpha dx.$$

当 $d(\Delta L) = \lambda$ 时 $dx = \Delta x$ 即为条纹间隔:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)\alpha} = \frac{589.3 \text{ nm}}{2 \times (1.55336 - 1.54425) \times 4.800 \times 10^{-2} \text{ rad}} = 0.674 \text{ mm}.$$

(2) 若如右图b将转动补偿器光轴转到与 $P_1$ 成任意角 $\theta$ ,而 $\varphi$ 为其余角,则通过 $P_1$ 的线偏振光的振幅 $A_1$ 作两次投影,得 $P_2$ 透振方向的两个振动的振幅:

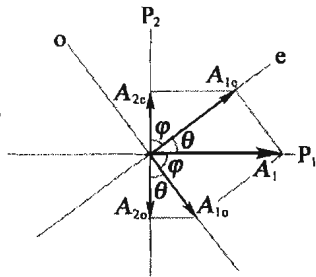
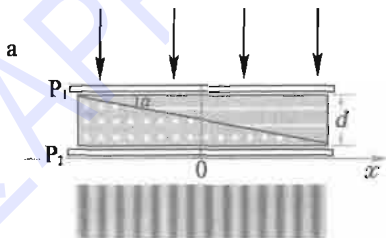
$$A_{2e} = A_1 \cos \theta \cos \varphi = A_1 \cos \theta \sin \theta,$$

$$A_{2o} = A_1 \cos \varphi \cos \theta = A_1 \sin \theta \cos \theta.$$

$A_{2e}$ 和 $A_{2o}$ 仍相等,但其值不等于 $A_1/2$ 。光程

差的分析仍同前,故干涉图样除强度有所不同外,别无其它变化。

6-42. 以线偏振光照在巴比涅补偿器上(见思考题6-38),通过偏振片观察时在中央两劈形棱镜厚度 $d_1 = d_2$ 处有一暗线,与中央暗线距离 $a$ 处又有一暗线。今以一同样波长的椭圆偏振光照在此巴比涅补偿器上,发现暗线移至离中央 $b$ 处。



(1) 求椭圆偏振光在补偿器晶体中分解成的两个振动分量的初始相位差与  $a$ 、 $b$  的关系；

(2) 如果椭圆的长短轴正好分别与两劈形棱镜的光轴平行, 试证此时  $b = a/4$ ;

(3) 设已知偏振片的透振方向与补偿器中一劈的光轴夹角为  $\theta$ , 找出  $\theta$  与(2) 问中椭圆长短轴比值的关系。

**解:** (1) 因相邻暗线间距为  $a$ , 对应的相位差改变为  $2\pi$ , 所以当同级暗线位移  $b$  时, 相位差改变量为

$$\delta_1 = \frac{2\pi b}{a}.$$

这也正是入射椭圆光两个正交振动  $A_{\perp}$  与  $A_{\parallel}$  的初始相位差, 它被补偿器带来的附加相位差所抵消, 在非中心的某处出现了零级暗线。

(2) 此时, 椭圆光为正椭圆, 相位差  $\delta_1$  只有取  $\pm\pi/2$  两种可能, 由此解得

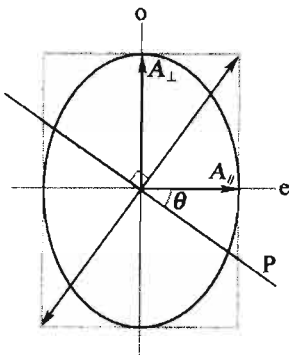
$$b = \pm a/4,$$

式中正号说明暗线向上位移, 此时入射椭圆光为右旋; 负号说明暗线向下位移, 相应的入射椭圆光为左旋。

(3) 在巴比涅补偿器后面加偏振片观测, 对于暗线位置来说, 必须保证偏振片  $P$  的透振方向与从补偿器出射的两个正交振动  $A_{\perp}$ 、 $A_{\parallel}$  合成的线偏振方向正交。从右图可见, 此时偏振片透振方向与补偿器一楔光轴的夹角  $\theta$  应满足

$$\theta = \arctan\left(\frac{A_{\parallel}}{A_{\perp}}\right),$$

式中  $A_{\parallel}/A_{\perp}$  为入射正椭圆偏振光长短轴之比。



**6-43.** 已知水晶对钠黄光的旋光率  $\alpha = 21.75^\circ/\text{mm}$ , 求左、右旋圆偏振光折射率之差  $\Delta n$ 。

**解:** 由旋光率  $\alpha$  与折射率差  $\Delta n$  的关系  $\alpha = \frac{\pi}{\lambda} \Delta n$  得

$$\Delta n = \frac{\lambda \alpha}{\pi} = 589.3 \text{ nm} \times \frac{21.75^\circ/\text{mm}}{180^\circ} = 7.121 \times 10^{-5}.$$

**6-44.** 在两尼科耳棱镜之间插一块石英旋光晶片, 以消除对眼睛最敏感的黄绿色光 ( $\lambda = 550.0 \text{ nm}$ )。设对此波长的旋光率为  $24^\circ/\text{mm}$ , 求下列情形下晶片的厚度:

(1) 两尼科耳棱镜主截面正交;

(2) 两尼科耳棱镜主截面平行。

**解:** (1) 当两尼科耳棱镜主截面正交时, 为要消除黄绿色光, 应使该

波长的光在通过石英旋光晶片后, 偏振面旋转  $k\pi$ , 即

$$\psi = \alpha d = k\pi,$$

由此得  $d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{k \times 180^\circ}{24^\circ/\text{mm}} = 7.50k \text{ mm} \quad (k = 1, 2, \dots),$

(2) 当两尼科耳棱镜主截面平行时, 应满足

$$\psi = \alpha d = (k + 1/2)\pi,$$

由此得

$$d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{(2k+1) \times 90^\circ}{24^\circ/\text{mm}} = 3.75(2k+1) \text{ mm} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

**6-45.** 一石英棒长 5.639 cm, 端面垂直于光轴, 置于正交偏振器间, 沿光轴方向输入白光, 用光谱仪观察透射光。

(1) 用一大张坐标纸, 画出可见光范围(400.0 ~ 760.0 nm) 振动面的旋转角与波长的曲线, 旋光率数据可参照表 6-5。

(2) 从这曲线看, 哪些波长的光在光谱仪中消失?

(3) 在这些丢失的波长中, 振动面的最大和最小旋转角各是多少?

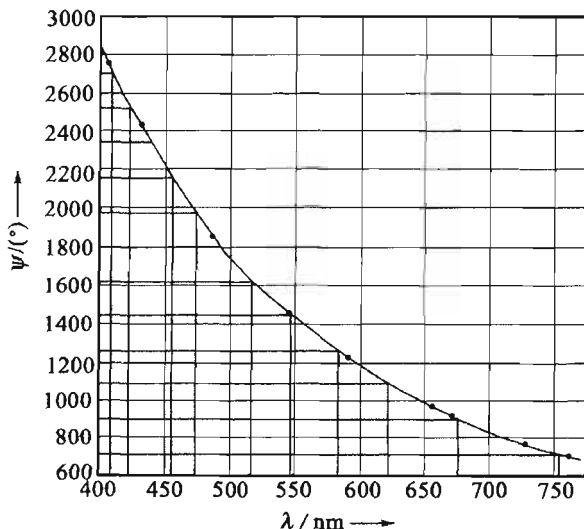
**解:** (1) 根据旋光率与波长的关系表提供的  $\alpha(\lambda)$  数值, 由  $\psi = \alpha d$  得

$\alpha/[(^\circ)\text{mm}^{-1}]$	$\lambda/\text{nm}$	$\psi = \alpha d$	$\alpha/[(^\circ)\text{mm}^{-1}]$	$\lambda/\text{nm}$	$\psi = \alpha d$
382.0	55.625	$3137^\circ$	589.0	21.749	$1226^\circ$
404.7	48.945	$2760^\circ$	656.2	17.318	$976.6^\circ$
430.7	42.604	$2402^\circ$	670.8	16.535	$932.4^\circ$
486.1	32.773	$1848^\circ$	728.1	13.924	$785.2^\circ$
546.1	25.538	$1440^\circ$	760.4	12.668	$714.3^\circ$

$\psi$ - $\lambda$  旋光色散曲线见右下。

(2) 凡满足  $\psi = k\pi$  波长的光都将被第二个偏振器消光而在光谱仪中消失。在可见光范围内, 这一系列波长的取值如下表:

$k$	$\lambda/\text{nm}$	$k$	$\lambda/\text{nm}$
4	757.0	10	490.0
5	679.0	11	466.0
6	628.0	12	448.0
7	583.0	13	436.0
8	546.1	14	421.0
9	514.0	15	415.0



相应消光位置用灰线示于图中。

(3) 在可见光范围内被丢失的波长中, 当  $\lambda = 415.0 \text{ nm}$  时偏振面的旋转角最大, 其值为  $\psi_{\max} = 2700^\circ$ ; 当  $\lambda = 757.0 \text{ nm}$  时偏振面的旋转角最小, 其值为  $\psi_{\min} = 720^\circ$ 。

**6 - 46.** 一块表面垂直光轴的水晶片恰好抵消  $10 \text{ cm}$  长浓度  $20\%$  的麦芽糖溶液对钠光振动面所引起的旋转, 对此波长水晶的旋光率  $\alpha = 21.75^\circ/\text{mm}$ , 麦芽糖的比旋光率  $[\alpha] = 144^\circ/[\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)]$ , 求此水晶片的厚度。

**解:** 在麦芽糖溶液中偏振面的旋转角为

$$\psi_1 = [\alpha] Nl,$$

按题意, 此旋转角等于水晶片中所引起的旋转角

$$\psi_2 = \alpha d.$$

由以上二式得, 此水晶片厚度为

$$d = \frac{[\alpha] Nl}{\alpha} = \frac{144^\circ/[\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)] \times 20\% \times 10 \text{ cm}}{21.75^\circ/\text{mm}} = 1.32 \text{ mm}.$$

**6 - 47.**  $15 \text{ cm}$  长的左旋葡萄糖溶液使钠黄光的振动面转了  $25.6^\circ$ , 已知  $[\alpha] = -51.4^\circ/[\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)]$ , 求溶液浓度。

**解:** 溶液浓度为

$$N = \frac{\psi}{[\alpha]l} = \frac{-25.6^\circ}{-51.4^\circ/[\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)] \times 15 \text{ cm}} = 0.332 \text{ g}/\text{cm}^3.$$

**6 - 48.** 将  $14.50 \text{ g}$  的蔗糖溶于水, 得到  $60 \text{ cm}^3$  的溶液。在  $15 \text{ cm}$  的量糖计中测得钠光振动面旋转角为向右  $16.8^\circ$ , 已知  $[\alpha] = 66.5^\circ/[\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)]$ , 这蔗糖样品中有多少比例的非旋光性杂质?

**解:** 蔗糖溶于水后的“粗”浓度为

$$N' = \frac{14.50 \text{ g}}{60 \text{ cm}^3} = 0.242 \text{ g}/\text{cm}^3.$$

由量糖计中测得蔗糖的“净”浓度为

$$N \frac{\psi}{[\alpha]l} = \frac{16.8^\circ}{66.5^\circ/[\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)] \times 15 \text{ cm}} = 0.168 \text{ g}/\text{cm}^3.$$

故此蔗糖含非旋光性杂质的比例为

$$\frac{N' - N}{N} = \frac{(0.242 - 0.168) \text{ g}/\text{cm}^3}{0.242 \text{ g}/\text{cm}^3} = 31\%.$$

**6 - 49.** 钠光以最小偏向角条件射入顶角为  $60^\circ$  的石英晶体棱镜中, 棱镜中光轴与底平行。求出射的左、右旋偏振光之间的夹角(所需数据在本章给出的表格中查找)。

**解:** 如下图, 所谓以“最小偏向角入射”, 意即选取合适的入射角, 使光

线经第一折射面后平行于棱镜的底边。本题棱镜底边平行于光轴,故光线在石英棱镜内部沿光轴传播,它将被分解为左旋光和右旋光,折射率分别为  $n_L$  和  $n_R$  ( $n_R < n_L$ ); 经第二折射面后就有不同的偏向角  $\delta_L$  和  $\delta_R$ 。考虑到在第二个折射面右旋光和左旋光的入射角近似于  $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , 应用折射定律有  $n_R \sin 30^\circ = \sin i_R$ ,  $n_L \sin 30^\circ = \sin i_L$ 。

由此得

$$\sin i_L - \sin i_R = (n_L - n_R) \sin 30^\circ = (n_L - n_R)/2.$$

由于  $\Delta n = n_L - n_R$  和  $\Delta i = i_L - i_R = \Delta \delta$  都远小于 1, 上

式可近似写成微分形式:

$$\cos i \, di = dn/2.$$

上式中的  $\cos i$  可按折射率为  $n_L$  和  $n_R$  的平均值计算。 $n_L$  和  $n_R$  的平均值就是石英内寻常光的折射率  $n_o$ , 其数值可在书中的表 6-2 里查到, 对于钠黄光  $n_o = 1.54425$ 。于是按折射定律有

$$n_o \sin 30^\circ = \sin i, \quad \cos i = \sqrt{1 - n_o^2 \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - n_o^2/4} = 0.6355.$$

$dn = \Delta n$  可取自习题 6-43 的结果, 等于  $7.121 \times 10^{-5}$ 。最后得到出射的两束左、右旋圆偏振光传播方向之间的夹角为

$$\Delta \delta = \frac{\Delta n}{2 \cos i} = 5.6 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

