第2章　一维运动

One-dimensional Motion

【内容提要】

1. 一维无限深方势阱 $V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & x\le 0 \text{ 或 } x\ge a\end{cases}$

本征值 $E_n=\dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2},\quad n=1,2,3,\cdots$

本征函数 $\psi_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}, & 0<x<a\\ 0, & x\le 0 \text{ 或 } x\ge a\end{cases}$

若 $V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a\\ \infty, & |x|\ge a\end{cases}$

则本征值 $E_n=\dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{8\mu a^2}$

本征函数 $\psi_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{2a}, & n\text{为偶数}, \quad |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}$

$$\psi_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{a}}\cos\dfrac{n\pi x}{2a}, & n\text{为奇数}, \quad |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}$$

2. 三维无限深方势阱 $V=\begin{cases}0, & 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c\\ \infty, & \text{其余}\end{cases}$

本征值 $E_{n_1n_2n_3}=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2\mu}\left(\dfrac{n_1^2}{a^2}+\dfrac{n_2^2}{b^2}+\dfrac{n_3^2}{c^2}\right)$, n_1、n_2、$n_3=1,2,3,\cdots$

本征函数 $\psi_{n_1n_2n_3}(\vec{r})=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{8}{abc}}\sin\dfrac{n_1\pi x}{a}\sin\dfrac{n_2\pi x}{b}\sin\dfrac{n_3\pi x}{c}, & \text{阱内}\\ 0, & \text{阱外}\end{cases}$

3. 一维谐振子 $V=\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$

本征值 $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad , \quad n=0,1,2,\cdots$

本征函数 $\psi_n=N_n\,\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x)$

$$N_n=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}}, \quad \alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$$

$$x\psi_n=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_n=\alpha\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}\right]$$

宇称 $\psi_n(-x)=(-1)^n\psi_n(x)$

4. 势垒贯穿

方形势垒
$$V=\begin{cases} V_0, & 0<x<a \\ 0, & x\le 0 \text{ 或 } x\ge a \end{cases}$$

当 $\frac{a}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0-E)}>>1$ 时，透射系数为

$$T=T_0\exp\left[-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0-E)}\right],\qquad T_0=\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}$$

任意形状的势垒 $V(x)$，透射系数为

$$T=T_0\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_a^b\sqrt{2\mu(V(x)-E)}\,\mathrm{d}x\right]$$

5. 一维有限深方势阱

6. δ 势 $V(x)=\pm\gamma\delta(x) \quad (\gamma>0)$

跃变条件 $\psi'(0^+)-\psi'(0^-)=\pm\frac{2\mu\gamma}{\hbar^2}\psi(0)$

7. 束缚态、非束缚态及其能级特点

8. 简并、简并度

【典型习题解答】

2.1 束缚态、非束缚态及相应能级的特点。

答：束缚态：粒子在一定范围内运动，$|\vec{r}|\to\infty$ 时，$\psi\to 0$。能级分立。

非束缚态：粒子的运动范围没有限制，$|\vec{r}|\to\infty$ 时，ψ 不趋于 0。能级连续分布。

2.2 能级简并、简并度。

答：量子力学中，把处于不同状态、具有相同能量、对应同一能级的现象称为能级简并。把对应于同一能级的不同状态数称为简并度。

2.3　对于阶梯形方势场

$$V(x)=\begin{cases}V_1, & x<a\\ V_2, & x>a\end{cases}$$

如果（V_2-V_1）有限，则定态波函数$\psi(x)$连续否？其一阶导数 $\psi'(x)$连续否？

答：定态波函数$\psi(x)$连续；其一阶导数 $\psi'(x)$也连续。

2.4 一质量为 μ 的粒子在一维无限深方势阱

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2a\\ \infty, & x<0,\ x>2a\end{cases}$$

中运动，写出其状态波函数和能级表达式。

解：

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{2a}, & 0<x<2a\,,\\ 0\,, & x\le 0,\ x\ge 2a\end{cases}$$

$$E_n=\frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{8\mu a^2},\qquad n=1,2,3,\cdots$$

2.5 一维运动粒子的状态是

$$\psi(x)=\begin{cases}A x \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0\end{cases},$$

求：

① 归一化常数 A；

② 粒子动量的几率分布；

③ 粒子动量平均值。

解：① 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{*}(x) \psi(x) \mathrm{d} x=|A|^{2} \int_{0}^{\infty} x^{2} \mathrm{e}^{-2 \lambda x} \mathrm{~d} x=\frac{2|A|^{2}}{(2 \lambda)^{3}}=1$

可取归一化常数 $A=2 \lambda^{3 / 2}$

② $$\varphi(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\int_0^{\infty}Ax\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\cdot\mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\,\mathrm{d}x=\frac{A}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\int_0^{\infty}x\,\mathrm{e}^{-\left(\lambda+\frac{i}{\hbar}p\right)x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(\lambda+ip/\hbar)^2}=\frac{2\lambda^{3/2}}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(\lambda+ip/\hbar)^2}$$

粒子动量的几率分布 $$w(p)=|\varphi(p)|^2=\frac{2\lambda^3\hbar^3}{\pi(\lambda^2\hbar^2+p^2)^2}$$

③ 粒子动量平均值可用下面两种方法求得：

1）

$$\bar{p}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\hat{p}\psi(x)\,\mathrm{d}x=-i\hbar\int_0^{\infty}A^2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-i\hbar A^2\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-i\hbar A^2\left(\frac{1}{4\lambda^2}-\lambda\cdot\frac{2}{8\lambda^3}\right)=0$$

2）

$$\bar{p}=\int_{-\infty}^{+\infty}pw(p)\,\mathrm{d}p=\frac{2\lambda^3\hbar^3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p\,\mathrm{d}p}{(\lambda^2\hbar^2+p^2)^2}=0$$

（因为被积函数为奇函数）

2.6 在一维势箱问题求解中，假定在箱内 $V(x)=C\neq 0$（C 为常数），是否对其解产生影响？怎样影响？

解：当 $V(x)=C\neq 0$ 时，一维势箱中的粒子的 S.eq 为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+C\psi(x)=E\psi(x)$$

即
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}=(E-C)\psi(x)$$

或
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}=E'\psi(x)$$

其中 $E'=E-C$

边界条件不变，因此 S.eq 的解为

$$E_n' = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

即 $V(x) = C \neq 0$ 不影响波函数，能级整体改变 C：

$$E_n = E_n' + C = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} + C$$

2.7 重 1g 的小球在长 1cm 的盒内，试计算当它的能量等于在 300K 下的 kT 时其量子数 n。这一结果说明了什么？k 和 T 分别为玻尔兹曼常数和热力学温度。 $k = 1.3807\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}},\ \hbar = 1.055\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$

解：由一维势箱粒子的能级公式

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

得

$$n = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\pi\hbar}a = \frac{\sqrt{2mkT}}{\pi\hbar}a$$

$$= \frac{\sqrt{2\times10^{-3}\times300\times1.3807\times10^{-23}}}{3.14\times1.055\times10^{-34}}\times10^{-2} = 8.7\times10^{21}$$

量子数 n 很大，说明量子化效应不明显。

2.8 设粒子处在二维无限深势阱中，

$$V(x,y)=\begin{cases}0, & 0<x<a,\quad 0<y<b\\ \infty, & \text{其余区域}\end{cases}$$

求粒子的能量本征值和本征波函数。如 $a=b$，能级的简并度如何？

解：定态 S.eg 为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x,y)\right]\psi(x,y)=E\psi(x,y) \qquad (1)$$

阱内，$V(x,y)=0$，式（1）化为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y)=E\psi(x,y) \qquad (2)$$

采用分离变量法求解。令

$$\psi(x,y)=X(x)Y(y) \tag{3}$$

代入式（2），整理后得

$$\frac{-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}}{X(x)}+\frac{-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}}{Y(y)}=E \tag{4}$$

左边第一项只含变量x，第二项只含变量y，E为与x、y均无关的常量。欲使此等式对给定区域中任意x、y都成立，则要求等号左边的每一项都是常量。设第一项为E_1，则有

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=E_1X(x) \tag{5}$$

利用边条件$X(0)=0,X(a)=0$，得归一化解

$$X_{n_1}(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n_1\pi x}{a} \tag{6}$$

$$E_{1n_1}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\frac{n_1^2}{a^2},\qquad n_1=1,2,3,\cdots$$

同理可求得

$$Y_{n_2}(x)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{n_2\pi y}{b} \tag{7}$$

$$E_{2n_2}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\frac{n_2^2}{b^2},\qquad n_2=1,2,3,\cdots$$

据此可得能量的本征值和本征函数为

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right)$$

$$\psi_{n_1 n_2} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{\pi n_1 x}{a} \sin\frac{\pi n_2 y}{b}, & 0 < x < a, 0 < y < b \\ 0, & \text{其它区域} \end{cases}$$

$$n_1, n_2 = 1, 2, 3, \cdots$$

若 $a = b$，则

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2) \qquad \psi_{n_1 n_2} = \frac{2}{a} \sin\frac{\pi n_1 x}{a} \sin\frac{\pi n_2 y}{a}$$

这时，若 $n_1 = n_2$，则能级不简并；若 $n_1 \neq n_2$，则能级一般是二度简并的（有偶然简并情况，如 $n_1 = 10, n_2 = 5$ 与 $n_1' = 11, n_2' = 2$）。总之，这时能级简并度为满足 $n_1^2 + n_2^2 = \frac{2ma^2 E}{\hbar^2 \pi^2}$ 条件的正整数解 (n_1, n_2) 的个数。

2.9 设粒子限制在长方体形状的匣子中运动，即

$$V(x,y,z)=\begin{cases}0, & 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c;\\ \infty, & \text{其余区域。}\end{cases}$$

求粒子的能量本征值和本征波函数。如 $a=b=c$，讨论能级的简并度。

解：与题 2.8 相仿，能量本征值和本征波函数为

$$E_{n_1n_2n_3}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}+\frac{n_3^2}{c^2}\right),$$

$$\psi_{n_1n_2n_3}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{8}{abc}}\sin\dfrac{\pi n_1x}{a}\sin\dfrac{\pi n_2y}{b}\sin\dfrac{\pi n_3z}{c}, & 0<x<a, 0<y<b, 0<z<c;\\ 0, & \text{其余区域}\end{cases}$$

$n_1,n_2,n_3=1,2,3,\cdots$

当 $a=b=c$ 时，

$$E_{n_1n_2n_3}=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2)$$

$$\psi_{n_1 n_2 n_3} = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\frac{\pi n_1 x}{a} \sin\frac{\pi n_2 y}{a} \sin\frac{\pi n_3 y}{a}$$

$n_1 = n_2 = n_3$ 时，能级不简并。

n_1, n_2, n_3 三者中有二者相等而与第三者不相等时，能级一般为三重简并的。

n_1, n_2, n_3 三者皆不相等时，能级一般为 6 度简并的。

还有偶然简并情况，如 $(n_1, n_2, n_3) = (5,6,8) \to (3,4,10)$；$(10,12,16) \to (6,8,20)$；$(1,7,9) \to (1,3,11)$；$(1,5,10) \to (3,6,9)$，等等。因为 $5^2 + 6^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 10^2$；$10^2 + 12^2 + 16^2 = 6^2 + 8^2 + 20^2$，等等。总之，这时能级简并度为满足 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \dfrac{2ma^2E}{\hbar^2\pi^2}$ 条件的正整数解 (n_1, n_2, n_3) 的个数。

2.10 一电子局限在 10^{-14} 米的区域中运动。已知电子质量 $m = 9.11\times10^{-31}$ 千克，试计算该电子的基态能量（提示：可按长、宽、高均为 10^{-14} 米的三维无限深势阱计算）。

解：在三维无限深势阱中运动的电子的能量为：

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right)$$

依题意，$a=b=c=10^{-14}\,\mathrm{m}$，$m=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$，基态 $n_x=n_y=n_z=1$，基态能量

$$E_{111}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\cdot\frac{3}{a^2}=1.8\times10^{-8}\,\mathrm{J}$$

2.11 求下列波函数的归一化常数 A：

① $\psi_n(x)=\begin{cases} A\sin\dfrac{n\pi}{2a}(x+a), & |x|<a \\ 0, & |x|\ge a \end{cases}$

② $\psi(x)=A\exp\left(-\alpha^2x^2/2\right)$。（积分公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$）

解：①

$$\int_{-a}^{a}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}|A|^2\sin^2\frac{n\pi}{2a}(x+a)\,\mathrm{d}x=2|A|^2\int_0^a\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{n\pi(x+a)}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=|A|^2\left[x-\frac{a}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x+a)}{a}\right]_0^a=|A|^2a=1$$

可取

$$A=\sqrt{\frac{1}{a}}$$

② $$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|A|^2\,\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{|A|^2}{\alpha}\cdot\sqrt{\pi}=1$$

可取

$$A=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}$$

2.12 设粒子处在一维无限深方势阱

$$V(x)=\begin{cases}0, & 0<x<a\\ \infty, & x<0,\ x>a\end{cases}$$

中，证明处于定态 $\psi_n(x)$ 的粒子，

$$\bar{x}=\frac{a}{2},\qquad \overline{(x-\bar{x})^2}=\frac{a^2}{12}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right)$$

讨论 $n\to\infty$ 的情况，并与经典力学计算结果相比较。

证：设粒子处于第 n 个本征态，其本征函数

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}, & 0<x<a\\ 0, & x<0,\ \mathrm{x}>a\end{cases}$$

$$\bar{x}=\int_0^a x|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{a}\int_0^a x\sin^2\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^a\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{2} \qquad (1)$$

$$\overline{(x-\bar{x})^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x-\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^a x^2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x-\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{a^2}{12}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right) \qquad (2)$$

在经典情况下，在$(0, a)$区间粒子除与阱壁碰撞（设碰撞时间不计，且为弹性碰撞，即粒子碰撞后仅运动方向改变，但动能、速度不变）外，来回作匀速运动，因此粒子处于$x \to x+dx$范围的几率为$\frac{dx}{a}$，故

$$\bar{x} = \int_0^a x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{a}{2}, \qquad (3)$$

$$\overline{x^2} = \int_0^a x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{a} = \frac{a^2}{3},$$

$$\overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}。 \qquad (4)$$

当$n \to \infty$时，式（2）趋于式（4）的结果，即量子力学与经典力学的结果趋于一致。

2.13 已知局限在 $x=0$ 到 a 范围内运动的粒子的归一化波函数为

$$\psi_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}, & 0<x<a\\ 0, & x\le 0 \text{ 或 } x\ge a\end{cases}$$

计算其动量和动能平均值。

解：动量算符为

$$p=-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

动能算符为

$$T=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

动量的平均值为

$$\bar{p} = -i\hbar\int_0^a \psi_n^*(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -i\frac{2\hbar}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -i\frac{2\hbar}{a}\left(\frac{n\pi}{a}\right)\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = 0$$

动能的平均值为

$$\bar{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^a \psi_n^*(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\hbar^2}{ma}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\hbar^2}{ma}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

2.14 上题中的波函数是否动量的本征函数？是否动能的本征函数？如果是，本征值是多少？

解：① $p\psi_n(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_n(x)$

$$= -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] = -i\hbar\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

所以 $\psi_n(x)$ 不是动量的本征函数

② $T\psi_n(x) = \frac{p^2}{2m}\psi_n(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\psi_n(x)$$

所以 $\psi_n(x)$ 是动能的本征函数，本征值为 $\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$。

2.15 设粒子处在一维无限深方势阱中，

$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a/2\\ \infty, & |x|>a/2\end{cases}$$

处于基态 $(n=1)$，求粒子的动量分布。

解：基态波函数为 $\psi_1=\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}$

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\cdot\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}}\int_{-a/2}^{a/2}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{i\pi x/a}+e^{-i\pi x/a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\hbar a}}\int_{-a/2}^{a/2}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{p}{\hbar}\right)x}+e^{-i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{p}{\hbar}\right)x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}}\left\{\frac{1}{2i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{p}{\hbar}\right)}\cdot\left[e^{i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{p}{\hbar}\right)\frac{a}{2}}-e^{-i\left(\frac{\pi}{a}-\frac{p}{\hbar}\right)\frac{a}{2}}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-2i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{p}{\hbar}\right)}\cdot\left[e^{-i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{p}{\hbar}\right)\frac{a}{2}}-e^{i\left(\frac{\pi}{a}+\frac{p}{\hbar}\right)\frac{a}{2}}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}}\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{a}-\frac{p}{\hbar}}\cos\frac{pa}{2\hbar}+\frac{1}{\frac{\pi}{a}+\frac{p}{\hbar}}\cos\frac{pa}{2\hbar}\right\}$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi a\hbar^3}}{\pi^2\hbar^2-a^2p^2}\cos\frac{pa}{2\hbar}$$

动量的几率分布 $\rho(p)=|\varphi(p)|^2=\frac{4\pi a\hbar^3}{\left(\pi^2\hbar^2-a^2p^2\right)^2}\cos^2\frac{pa}{2\hbar}$

2.16 在动量表象中，写出线谐振子的哈密顿算符的矩阵元。

解：在坐标表象中，线谐振子的哈密顿算符为

$$H=\frac{p^{2}}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}$$

在动量表象中，该哈密顿算符为

$$H=\frac{p^{2}}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^{2}\left(i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\right)^{2}=\frac{p^{2}}{2m}-\frac{1}{2}m\omega^{2}\hbar^{2}\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}p^{2}}$$

由于动量的本征函数为$\delta(p-p')$，故哈密顿算符的矩阵元为

$$H_{p'p''}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(p-p')\left[\frac{p^{2}}{2m}-\frac{1}{2}m\omega^{2}\hbar^{2}\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}p^{2}}\right]\delta(p-p'')\,\mathrm{d}p$$

$$=\left[\frac{p'^{2}}{2m}-\frac{1}{2}m\omega^{2}\hbar^{2}\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}p'^{2}}\right]\delta(p'-p'')$$

2.17 利用 **Hermite** 多项式的递推关系，证明谐振子波函数满足下列关系

$$x\psi_n(x)=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right]$$

$$x^2\psi_n(x)=\frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}(x)+(2n+1)\psi_n(x)+\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}(x)\right]$$

并由此证明，在ψ_n态下，$\bar{x}=0$，$\overline{V}=E_n/2$。

证：谐振子波函数

$$\psi_n(x)=A_n \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x) \qquad (1)$$

其中，归一化常数

$$A_n=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n\cdot n!}},\qquad \alpha=\sqrt{m\omega/\hbar} \qquad (2)$$

$H_n(\alpha x)$ 的递推关系为

$$H_{n+1}(\alpha x) - 2\alpha x H_n(\alpha x) + 2nH_{n-1}(\alpha x) = 0 \qquad (3)$$

$$x\psi_n(x) = A_n \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2} \cdot xH_n(\alpha x) = \frac{1}{2\alpha} A_n \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2} \cdot 2\alpha xH_n(\alpha x)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} A_n \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\left[H_{n+1}(\alpha x) + 2nH_{n-1}(\alpha x)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n!}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2} \cdot nH_{n-1}(\alpha x)$$

$$+ \frac{1}{2\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n!}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2} \cdot H_{n+1}(\alpha x)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1)!}} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2} \cdot H_{n-1}(\alpha x)$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!}} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2} \cdot H_{n+1}(\alpha x)$$

$$
=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right]
$$

$$
x^2\psi_n(x)=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}x\psi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}x\psi_{n+1}(x)\right]
$$

$$
=\frac{1}{\alpha^2}\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-2}(x)+\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_n(x)\right]+\right.
$$

$$
\left.+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\left[\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_n(x)+\sqrt{\frac{n+2}{2}}\psi_{n+2}(x)\right]\right\}
$$

$$
=\frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}(x)+(2n+1)\psi_n(x)+\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}(x)\right]
$$

$$
\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^* x\psi_n\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)\cdot\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right]\mathrm{d}x=0
$$

$$\overline{V}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)\cdot\frac{1}{2}m\omega^2x^2\cdot\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\psi_n^*(x)\cdot\frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{1}{2\alpha^2}\cdot(2n+1)\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{1}{2\alpha^2}\cdot(2n+1)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=E_n/2$$

2.18　利用 Hermite 多项式的求导公式证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_n(x)=\alpha\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_n(x)=\frac{\alpha^2}{2}\left[\sqrt{n(n-1)}\,\psi_{n-2}(x)-(2n+1)\psi_n(x)+\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\psi_{n+2}\right]$$

证：Hermite 多项式的求导公式为：

$$H_n'(\xi)=2nH_{n-1}(\xi)$$

$$\frac{\mathrm{d}H_n(\alpha x)}{\mathrm{d}x}=2n\alpha H_{n-1}(\alpha x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_n(x)=A_n\cdot\left[\left(-\alpha^2x\right)\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x)+\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\cdot 2n\alpha H_{n-1}(\alpha x)\right]$$

$$=-\alpha^2x\psi_n(x)+\sqrt{2n}\alpha\psi_{n-1}(x)$$

$$=-\alpha\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right]+\alpha\cdot\sqrt{2n}\psi_{n-1}(x)$$

$$=\alpha\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi_n(x)=\alpha\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\alpha\left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}\psi_{n-2}-\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_n\right]\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\cdot\alpha\left[\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_n-\sqrt{\frac{n+2}{2}}\psi_{n+2}\right]\right\}$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\left[\sqrt{n(n-1)}\,\psi_{n-2}-(2n+1)\psi_n+\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\psi_{n+2}\right]$$

$$\overline{p}=\int\psi_n^*\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_n\,\mathrm{d}x=(-i\hbar)\int\psi_n^*\cdot\alpha\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\overline{T}=\frac{\overline{p^2}}{2m}=\int\psi_n^*\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\psi_n\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\int\psi_n^*\cdot\frac{\alpha^2}{2}\left[\sqrt{n(n-1)}\,\psi_{n-2}-(2n+1)\psi_n+\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\psi_{n+2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\hbar^2\alpha^2}{4m}\cdot(2n+1)\int\psi_n^*\psi_n\,\mathrm{d}x=\frac{\hbar^2}{4m}\cdot\frac{m\omega}{\hbar}(2n+1)=\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=\frac{E}{2}$$

2.19　谐振子处于ψ_n态下，计算

$$\Delta x=\left[\overline{(x-\bar{x})^2}\right]^{1/2}，\quad \Delta p=\left[\overline{(p-\bar{p})^2}\right]^{1/2}，\quad \Delta x\cdot\Delta p=?$$

解：由题 2.17，

$$\bar{x}=0,\qquad \overline{x^2}=\frac{2\bar{V}}{m\omega^2}=\frac{E_n}{m\omega^2}=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar}{m\omega}$$

由题 2.18，

$$\bar{p}=0,\qquad \overline{p^2}=2m\bar{T}=mE_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)m\hbar\omega$$

$$\Delta x = \left[\overline{(x-\bar{x})^2}\right]^{1/2} = \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)^{1/2} = \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m\omega}\right]^{1/2}$$

$$\Delta p = \left[\overline{(p-\bar{p})^2}\right]^{1/2} = \left(\overline{p^2} - \bar{p}^2\right)^{1/2} = \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)m\hbar\omega\right]^{1/2}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar$$

对于基态， $n=0$， $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$，刚好是不确定关系所规定的下限。

2.20 荷电 q 的谐振子，受到外电场 ε 的作用，

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2-q\varepsilon x \tag{1}$$

求能量本征值和本征函数。

解：
$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-q\varepsilon x=H_0-q\varepsilon x \tag{2}$$

H_0 的本征函数为

$$\psi_n=A_n\,\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x)$$

本征值

$$E_n^{(0)}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

现将 H 的本征值记为 E_n，本征函数记为 $\varphi_n(x)$。

式（1）的势能项可以写成

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2\left[(x-x_0)^2-x_0^2\right]$$

其中

$$x_0=q\varepsilon/m\omega^2 \tag{3}$$

如作坐标平移，令

$$x'=x-x_0 \tag{4}$$

由于

$$p=-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}=p' \tag{5}$$

H 可表成

$$H=\frac{p'^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x'^2-\frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 \tag{6}$$

式（6）中的 H 与式（2）中的 H_0 相比较，易见 H 和 H_0 的差别在于变量由 x 换成 x'，并添加了常数项 $\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2\right)$，由此可知

$$E_n = E_n^{(0)} - \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \qquad (7)$$

$$\varphi_n(x) = \psi_n(x') = \psi_n(x - x_0) \qquad (8)$$

即

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2 \cdot \left(\frac{q\varepsilon}{m\omega^2}\right)^2$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (9)$$

$$\varphi_n(x) = A_n \,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2\left(x-\frac{q\varepsilon}{m\omega^2}\right)^2} H_n\left[\alpha\left(x - \frac{q\varepsilon}{m\omega^2}\right)\right] \tag{10}$$

其中

$$A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\cdot 2^n \cdot n!}}, \qquad \alpha = \sqrt{m\omega/\hbar} \tag{11}$$

2.21 在时间 $t=0$ 时，一个线性谐振子处于用下列归一化的波函数所描写的状态：

$$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{5}}u_0(x)+\sqrt{\frac{1}{2}}u_2(x)+c_3u_3(x)$$

式中 $u_n(x)$ 是振子的第 n 个本征函数。

① 试求 c_3 的数值；

② 写出在 t 时刻的波函数；

③ 在 $t=0$ 时振子能量的平均值是多少？ $t=1$ 秒时呢？

解：① $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2+c^2=1$，得 $c=\sqrt{\frac{3}{10}}$

② $\psi(x,t)=\sqrt{\frac{1}{5}}u_0(x)\mathrm{e}^{-i\frac{1}{2}\omega t}+\sqrt{\frac{1}{2}}u_2(x)\mathrm{e}^{-i\frac{5}{2}\omega t}+\sqrt{\frac{3}{10}}u_3(x)\mathrm{e}^{-i\frac{7}{2}\omega t}$

③ 在 $t=0$ 时振子能量的平均值是

$$\overline{E}=\frac{1}{2}\hbar\omega\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2+\frac{5}{2}\hbar\omega\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2+\frac{7}{2}\hbar\omega\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^2=\frac{12}{5}\hbar\omega$$

由于谐振子的 **Hamiltom** 量不显含时间，所以能量是守恒量，其平均值不随时间变化，因而 $t=1$ 秒时振子能量的平均值仍然是 $\frac{12}{5}\hbar\omega$。

根据

$$\overline{E}=(\psi(x,t),H\psi(x,t))$$

及厄密算符的属于不同本征值的本征函数彼此正交，也可证明上述结论。

2.22 设粒子在下列势阱中运动，

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2, & x>0.\end{cases}$$

求粒子能级。

解：既然粒子不能穿入$x<0$的区域，则对应的 **S.eq** 的本征函数必须在$x=0$处为零。另一方面，在$x>0$的区域，这些本征函数和谐振子的本征函数相同（因在这个区域，粒子的H和谐振子的H完全一样，粒子的波函数和谐振子的波函数满足同样的 **S.eq**）。振子的具有$n=2k+1$的奇宇称波函数在$x=0$处为零，因而这些波函数是这一问题的解（$n=2k$的偶宇称波函数不满足边条件$\psi(0)=0$）。所以

$$E_k=(2k+3/2)\hbar\omega, \qquad k=0,1,2,\cdots$$

2.23 在质量为 m 的单原子组成的晶体中，每个原子可看作在所有其他原子组成的球对称势场 $V(r)=\frac{1}{2}kr^2$ 中振动，式中 $r^2=x^2+y^2+z^2$。该模型称为三维各向同性谐振子模型，请给出其能级的表达式。

解：该振子的 **Hamiltonian** 算符为

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}kx^2\right)+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}ky^2\right)+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{2}kz^2\right)$$

$$=H_x+H_y+H_z$$

即 H 为三个独立谐振子 **Hamiltonian** 算符之和。根据量子力学基本定律，该振子的能级为三个独立振子能级之和：

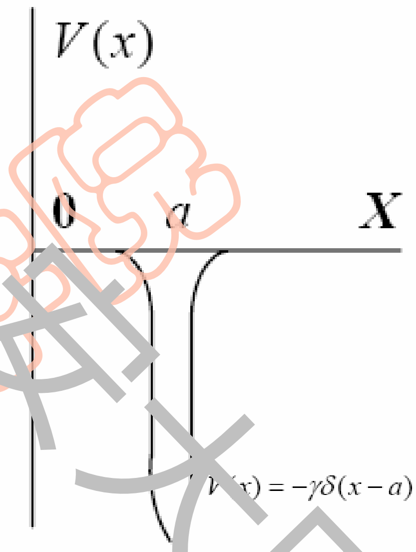
$$E_{n_x n_y n_z}=\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega+\left(n_y+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega+\left(n_z+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$=\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega=\left(N+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

$$N=n_x+n_y+n_z=0,1,2,\cdots$$

2.24 设粒子在下列势阱中运动，

$$V(x)=\begin{cases}\infty\ , & x<0\\ -\gamma\delta(x-a), & x>0,\quad(\gamma,a>0)\end{cases}\qquad(1)$$



是否存在束缚定态？求存在束缚定态的条件及确定束缚能级的公式。

解：S.eq：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''-\gamma\delta(x-a)\psi=E\psi\qquad(2)$$

对于束缚态，$E<0$，令

$$\beta^2=-2mE/\hbar^2\qquad(3)$$

则

$$\psi'' - \beta^2\psi + \frac{2m\gamma}{\hbar^2}\delta(x-a)\psi = 0 \qquad (4)$$

积分，$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \mathrm{d}x, \varepsilon \to 0^+$，得$\psi'$的跃变条件

$$\psi'(a^+) - \psi'(a^-) = -\frac{2m\gamma}{\hbar^2}\psi(a) \qquad (5)$$

在$x \neq a$处，式（4）化为

$$\psi'' - \beta^2\psi = 0 \qquad (6)$$

边条件$\psi(0)=0$，$\psi(\infty)=0$（束缚态），因此

$$\psi(x) = \begin{cases} \sinh\beta x, & 0 \le x < a \\ A\mathrm{e}^{-\beta x}, & x > a \end{cases} \qquad (7)$$

$x=a$点$\psi(x)$连续及$\psi'(x)$的的跃变条件分别给出

$$\sinh\beta a = A\mathrm{e}^{-\beta a} = \psi(a) \tag{8}$$

$$-\beta A\mathrm{e}^{-\beta a} - \beta\cosh\beta a = -\frac{2m\gamma}{\hbar^2}\psi(a) \tag{9}$$

式（9）$\times\left[-\dfrac{a}{\psi(a)}\right]$，利用式（8），得

$$\beta a + \beta a\coth\beta a = \frac{2m\gamma a}{\hbar^2} \tag{10}$$

此式即为确定能级的公式。

下面分析至少存在一条束缚态能级的条件。

当势阱出现第一条能级时，$E\sim 0^-$，所以 $\beta a\sim 0^+$。利用

$$\lim_{\beta a\to 0}\beta a\coth\beta a = \lim_{\beta a\to 0}\frac{\beta a}{\tanh\beta a} = 1$$

式（10）化为

$$\frac{2m\gamma a}{\hbar^2} = \beta a + \beta a \coth \beta a = 1 + 0^+$$

因此至少存在一条束缚态能级的条件为

$$\frac{2m\gamma a}{\hbar^2} \geq 1 \qquad (11)$$

我们已经知道，纯δ势阱肯定存在唯一的束缚态能级。当一侧存在无限高势垒时，由于排斥作用（表现为 $\psi(x) \equiv 0$, 对 $x \leq 0$），束缚态存在与否是要受到影响的。纯δ势阱的特征长度为 $L = \hbar^2 / m\gamma$，条件（11）可改写成

$$a \geq L/2 \qquad (12)$$

即要求无限高势垒离开 δ 势阱较远（$a \ge L/2$），才能保证 δ 势阱中束缚态能存在下去。

显然，当 $a \to \infty$（即 $a >> L/2$）, $\beta a \to \infty$ 时，左侧无限高势垒的影响可完全忽略。此时 $\coth \beta a \to 1$，式（10）给出

$$\beta = m\gamma / \hbar^2$$

即

$$E = -\hbar^2 \beta^2 / 2m = -m\gamma^2 / 2\hbar^2 \tag{13}$$

和孤立的 δ 势阱中束缚态能级完全相同。

令 $\beta a = \eta$，式（10）化为

$$\eta(1 + \coth \eta) = 2m\gamma a / \hbar^2 \tag{14}$$

由于 $\eta(1+\coth\eta)\geq 1$，所以只当 $\dfrac{2m\gamma a}{\hbar^2}\geq 1$ 时，式(10)或式(14)才有解。解出根 η 之后，利用

$$\eta=\beta a=a\sqrt{-2mE}/\hbar$$

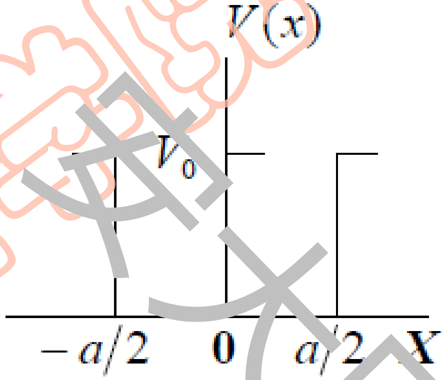
即可求出能级

$$E=-\hbar^2\eta^2/2ma^2 \tag{15}$$

2.25 粒子在深度为 V_0，宽度为 a 的直角势阱中运动，求：

① 阱口刚好出现一个束缚态能级（即 $E \approx V_0$）的条件；

② 束缚态能级总数，并和无限深势阱作比较。



解：① $E < V_0$ 时为束缚态，$E > V_0$ 时为游离态。

定态 S.eq 为

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi = 0 \qquad (1)$$

令

$$k = \sqrt{2mV_0}/\hbar, \quad \beta = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \qquad (2)$$

则式(1)可写成

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0, \qquad |x| \le a/2\ (\text{阱内}) \qquad (3)$$

$$\psi'' - \beta^2\psi = 0, \qquad |x| \ge a/2\ (\text{阱外}) \qquad (4)$$

由于束缚态边条件（$|x| \to \infty$处, $\psi \to 0$），式(4)的解应取为

$$\psi(x) = C\,\mathrm{e}^{-\beta|x|}, \qquad |x| \ge a/2 \qquad (5)$$

当阱口刚好出现束缚态能级时，$E \approx V_0$, $\beta \approx 0$。因此，由(5)式得

$$\psi'(x) = \pm\beta C\,\mathrm{e}^{-\beta|x|} \approx 0, \quad |x| \ge a/2 \qquad (6)$$

阱内波函数由式(3)解出，当$E \approx V_0$时，解为：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{偶宇称} & \psi(x) = \cos kx \\ \text{奇宇称} & \psi(x) = \sin kx \end{array}\right\} \quad |x| \le a/2 \qquad (7)$$

阱内、外ψ和ψ'应分别连续，而由式(6)可知，$x=a/2$处$\psi'=0$，将这一条件应用于式(7)，得

偶宇称 $$\sin\frac{ka}{2}=0,\qquad ka=2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\cdots \tag{8a}$$

奇宇称 $$\cos\frac{ka}{2}=0,\qquad ka=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\cdots \tag{8b}$$

亦即阱口刚好出现束缚态能级的条件为

$$ka=n\pi,\quad n=1,\ 2,\ 3,\cdots \tag{9}$$

即 $$2mV_0a^2/\hbar^2=n^2\pi^2 \tag{10}$$

② 一维势阱至少有一个束缚能级。因此，如$2mV_0a^2/\hbar^2<\pi^2$，只存在一个束缚态，偶宇称（基态）。如$2mV_0a^2/\hbar^2=\pi^2$，除基态外，阱口将再出现一个奇宇称态能级，共二个能级。如$2mV_0a^2/\hbar^2=(2\pi)^2$，阱口出现的将是第三个能级（偶宇称）……依此类推。由此可知，对于给定的V_0a^2，束缚态能级总数为

$$N=1+\left[\frac{a}{\pi\hbar}\sqrt{2mV_0}\right] \tag{11}$$

符号$[A]$表示不超过A的最大整数。

当粒子在宽度为a的无限深势阱中运动时，能级为

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2},\quad n=1,2,3,\cdots$$

则 $E \le V_0$ 的能级数为

$$n = \left[\frac{a}{\pi \hbar} \sqrt{2mV_0} \right] = N - 1 \tag{12}$$

即：如果只计算 $E \le V_0$ 的能级数，则有限深（V_0）势阱的能级数比无限深势阱的能级数多一个。

注意，后者的每一个能级均一一对应地高于前者的相应能级。

2.26 能量为 1 eV 的电子入射到矩形势垒上，势垒高为 2 eV，为使穿透几率约为10^{-3}，势垒大约多宽？

解：穿透系数

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2a\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar} = 4\,e^{-2a\sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar} \approx 10^{-3}$$

$$\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)} = \ln 4000$$

$$a = \frac{\hbar \ln 4000}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \frac{1.05\times 10^{-34}\times \ln 4000}{2\sqrt{2\times 9.1\times 10^{-31}\times 1.6\times 10^{-19}}}$$

$$= 8.1\times 10^{-10}\,(m) = 8.1(\mathring{A})$$

2.27 一个谐振子处于基态：$\psi(x,t)=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi^{1/2}}}\,e^{-\alpha^2x^2/2-i\omega t/2}$，求势能 $V=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ 的平均值及动能 $T=p^2/2m$ 的平均值。

（积分公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ ）

解：

$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x,t)x^2\psi(x,t)\,dx=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\alpha^2x^2}\,dx$$

$$=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^3}=\frac{1}{2\alpha^2}=\frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\overline{V}=\frac{1}{2}m\omega^2\overline{x^2}=\frac{1}{4}\hbar\omega$$

$$\overline{T}=\frac{\overline{p^2}}{2m}=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\alpha\hbar^2}{2m\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha^4x^2-\alpha^2)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\alpha\hbar^2}{2m\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2}-\alpha\sqrt{\pi}\right)=\frac{\alpha^2\hbar^2}{4m}=\frac{1}{4}\hbar\omega$$

2.28 一粒子处于如图所示的一维势阱中，求确定能量本征值的方程。

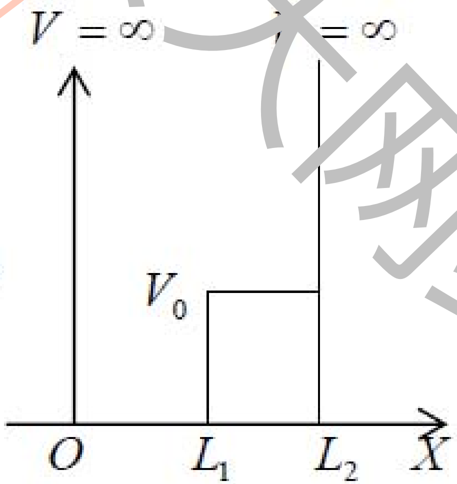
解：① 先设 $E > V_0$，则有

$$\psi'' + k^2\psi = 0, \qquad 0 < x < L_1$$

$$\psi'' + k'^2\psi = 0, \qquad L_1 < x < L_2$$

其中 $k^2 = 2mE/\hbar^2$, $k'^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin(kx + \eta), & 0 < x < L_1 \\ B\sin(k'x + \delta), & L_1 < x < L_2 \end{cases}$$



边界条件：

$$\psi(0)=0 \quad \Rightarrow \quad \eta=0$$

$$\psi(L_2)=0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k'L_2+\delta)=0, \quad \delta_n=n\pi-k'L_2$$

$x=L_1$ 处，$(\ln\psi)'$ 连续 $\Rightarrow \quad k\cot kL_1=k'\cot(k'L_1+\delta_n)$

将 δ_n 代入，得

$$k\cot kL_1=k'\cot k'(L_1-L_2) \tag{1}$$

②若 $E<V_0$，则 $k'\to ik'$，代入式（1），可得

$$k\cot kL_1=k'\coth k'(L_1-L_2) \tag{2}$$

式（1）、式（2）即为确定能量本征值的方程。

2.29 质量为 m 的粒子在势场 $V(x)$ 中作一维运动，试建立动量表象中的能量本征方程。

解：采用狄拉克符号，能量本征方程可写成

$$H|\psi\rangle = (T+V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{1}$$

在动量表象中，有

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad \hat{p}|p'\rangle = p'|p'\rangle \tag{2}$$

已知

$$\begin{cases} \varphi(p) = \langle p|\psi\rangle \\ \langle p|p'\rangle = \delta(p-p') \\ \int |p'\rangle\langle p'|\,\mathrm{d}p' = 1 \end{cases} \tag{3}$$

所以

$$|\psi\rangle=\int|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle \mathrm{d}p'=\int|p'\rangle\varphi(p')\,\mathrm{d}p' \tag{4}$$

式（4）代入式（1），得

$$(T+V)\int|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p'=E\int|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p'$$

以$\langle p|$左乘上式，得

$$\int\langle p|(T+V)|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p'=E\int\langle p|p'\rangle\varphi(p')\mathrm{d}p' \tag{5}$$

其中

$$\langle p|T|p'\rangle=\frac{p'^2}{2m}\delta(p-p') \tag{6}$$

定义

$$V_{pp'}=\langle p|V|p'\rangle$$

代入式（5），得

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)+\int V_{pp'}\varphi(p')\,\mathrm{d}\,p'=E\varphi(p) \tag{7}$$

此即所求的 p 表象中的能量本征方程。

$$\begin{aligned}V_{pp'}&=\int\langle p|x\rangle\langle x|V(x)|x'\rangle\langle x'|p'\rangle\,\mathrm{d}\,x'\,\mathrm{d}\,x\\&=\int\psi_p^*(x)V(x')\delta(x-x')\psi_{p'}(x')\,\mathrm{d}\,x'\,\mathrm{d}\,x\\&=\int\psi_p^*(x)V(x)\psi_{p'}(x)\,\mathrm{d}\,x\\&=\frac{1}{2\pi\hbar}\int V(x)\mathrm{e}^{i(p'-p)x/\hbar}\,\mathrm{d}\,x\end{aligned} \tag{8}$$

若 $V(x)=\sum_n C_n x^n$， 由于

$$x\,\mathrm{e}^{i(p'-p)x/\hbar} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{e}^{i(p'-p)x/\hbar}$$

则式（8）式变为

$$V_{pp'} = \sum_n C_n\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{e}^{i(p'-p)x/\hbar}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_n C_n\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \delta(p-p') = V(\hat{x})\delta(p-p') \qquad (9)$$

其中

$$\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p} \qquad (10)$$

式（9）代入式（7）得

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\varphi(p) = E\varphi(p) \qquad (11)$$

例如，谐振子，

$$V(\hat{x})=\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=-\frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}$$

能量本征方程为

$$\frac{p^2}{2m}\varphi(p)-\frac{1}{2}m\omega^2\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\varphi(p)=E\varphi(p)$$

【动量表象中的能量本征方程，最普遍的形式是式(7)；仅当$V(x)$取$V(x)=\sum_n C_n x^n$的形式时，其形式才为式(11)。】

2.30 质量为 m 的粒子处于长为 l 的一维盒子中，

$$V=\begin{cases}\infty, & x<0,\quad x>l \\ 0, & 0<x<l\end{cases}$$

在 $t=0$ 时，粒子波函数为

$$\psi=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{30}{l^5}}\,x(l-x), & 0<x<l \\ 0, & x<0,\ x>l\end{cases}$$

求 $\psi(t)$ 的级数表达式和级数系数表示式。

解：

$$\psi(x,t)=\mathrm{e}^{-iHt/\hbar}\,\psi(x,0) \qquad (1)$$

$$\psi(x,0)=\sum_n a_n\psi_n(x) \qquad (2)$$

$$\psi(x,t)=\sum_n a_n\psi_n(x)\,\mathrm{e}^{-iE_nt/\hbar} \qquad (3)$$

一维无限深势阱的解为

$$\left.\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x \\ E_n &= \frac{1}{2m}\left(\frac{n\pi\hbar}{l}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad (4)$$

式（2）中，

$$a_n = \int \psi_n^*(x)\psi(x,0)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\sqrt{\frac{30}{l^5}}x(l-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{l^3}\left\{\int_0^l l\,x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x - \int_0^l x^2\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{l^3}\left\{l\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2(\sin y - y\cos y)\Big|_0^{n\pi} - \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3\left[2y\sin y - (y^2-2)\cos y\right]\Big|_0^{n\pi}\right\}$$

$$=\frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3}(1-\cos n\pi)=\frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$=\frac{8\sqrt{15}}{(2k+1)^3\pi^3}\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

式（4)、式（5）代入式（3)，得

$$\psi(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}8\sqrt{\frac{30}{l}}\cdot\frac{1}{(2k+1)^3\pi^3}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x\cdot\exp\left[\frac{-i(2k+1)^2\pi^2\hbar t}{2ml^2}\right]$$

2.31 考虑如下一维波函数

$$\psi(x) = A\left(\frac{x}{x_0}\right)^n e^{-x/x_0} \qquad (1)$$

其中 A、n、x_0 为已知常数。

① 利用 S.eq 求位势 $V(x)$ 和能量 E。对于它们，该波函数为一本征函数（已知当 $x \to \infty$, $V(x) \to 0$）；

② 该势与轨道角动量为 l 的氢原子态的径向势有何异同?

解：① 定态 S.eq 为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x) \qquad (2)$$

对题给$\psi(x)$求导：

$$\psi' = A\frac{n}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}\mathrm{e}^{-x/x_0} + A\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n}\left(-\frac{1}{x_0}\right)\mathrm{e}^{-x/x_0} = \left(\frac{n}{x} - \frac{1}{x_0}\right)\psi \tag{3}$$

$$\psi'' = -\frac{n}{x^2}\psi + \left(\frac{n}{x} - \frac{1}{x_0}\right)\psi' = \left[\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x_0 x} + \frac{1}{x_0^2}\right]\psi \tag{4}$$

从式（2）和（4）中消去$\psi(x)$，得

$$E - V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x_0 x} + \frac{1}{x_0^2}\right] \tag{5}$$

当$x \to \infty, V(x) \to 0$，所以

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m x_0^2} \tag{6}$$

代回式（5），解得

$$V(x)=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{n(n-1)}{x^2}-\frac{2n}{x_0 x}\right] \quad (7a)$$

② 氢原子有效径向势为

$$V(r)=-\frac{e^2}{r}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} \quad (8)$$

将式（7a）改写为

$$V(x)=-\frac{n\hbar^2/mx_0}{x}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n(n-1)}{x^2} \quad (7b)$$

2.32 一个质量为 m 的粒子在势 $V(x)$ 作用下作一维运动。假定它处在 $E=\dfrac{\hbar^2\alpha^2}{2m}$ 的能量本征态 $\psi(x)=\left(\dfrac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\alpha^2x^2/2}$，

① 求粒子的平均位置； ② 求粒子的平均动量；

③ 求 $V(x)$； ④ 求粒子的动量在 $p\to p+\mathrm{d}p$ 间的几率。

解：①
$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)x\psi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2}e^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x=0$$

②
$$\langle p\rangle=\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2/2}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)e^{-\alpha^2x^2/2}\,\mathrm{d}x=0$$

③ 由 **S.eq:** $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{1}$$

而 $$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}=(-\alpha^2+\alpha^4x^2)\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2} \tag{2}$$

注意到 $$E=\hbar^2\alpha^2/2m, \tag{3}$$

将式（2)、（3）代入（1)，可解得

$$V(x)=\hbar^2\alpha^4x^2/2m \tag{4}$$

④ $$|\psi(x)\rangle=\int|p\rangle\langle p|\psi(x)\rangle\mathrm{d}p=\int\varphi(p)\,|p\rangle\mathrm{d}p,$$

$$\varphi(p)=\langle p|\psi(x)\rangle=\int\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\cdot\psi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ipx/\hbar}\cdot e^{-\alpha^2x^2/2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x^2+2ipx/\hbar\alpha^2)}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x+ip/\hbar\alpha^2)^2}\cdot e^{-p^2/2\hbar^2\alpha^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\alpha}e^{-p^2/2\hbar^2\alpha^2}\cdot\sqrt{\pi}=\left(\frac{1}{\hbar^2\alpha^2\pi}\right)^{1/4}e^{-p^2/2\hbar^2\alpha^2}$$

——波函数的动量表象　　（5）

粒子的动量在 $p\to p+dp$ 间的几率为

$$P(p)\,dp=|\varphi(p)|^2\,dp=\left(\frac{1}{\hbar^2\alpha^2\pi}\right)^{1/2}e^{-p^2/\hbar^2\alpha^2}\,dp \qquad (6)$$

2.33 $t=0$ 时，处在谐振子势 $V=\frac{1}{2}kx^2$ 中的一粒子波函数为

$$\psi(x,0)=Ae^{-\alpha^2x^2/2}\left[\cos\beta H_0(\alpha x)+\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}H_2(\alpha x)\right]$$

其中 β、A 为常数，$\alpha^2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{mk}$，且厄密多项式是归一的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2x^2}[H_n(\alpha x)]^2\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\cdot 2^n n!$$

$$\left[N_n=\left(\frac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\right]$$

① 写出 $\psi(x,t)$ 表示式；

② 在该态下粒子能量的测值及相对几率；

③ $t=0$ 时，$\langle x\rangle=?$ $\langle x\rangle$ 怎样随 t 变化？

解：① 任意时刻，有

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=H\psi(x,t)$$

形式解为

$$\psi(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(x,0)$$

$$\psi(x,0)=\sum_n a_n\psi_n(x)$$

$$\psi(x,t)=\sum_n a_n\psi_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}$$

$$a_n=\int\psi_n^*(x)\psi(x,0)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int\mathrm{d}x\,N_n\,\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x)\cdot A\,\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\cdot\left[\cos\beta\cdot H_0+\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}H_2\right]$$

$$=A\left[\frac{1}{N_0}\cos\beta\delta_{n0}+\frac{1}{N_2}\frac{\sin\beta}{2\sqrt{2}}\delta_{n2}\right]$$

$$N_0=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2},\qquad N_2=\left(\frac{\alpha}{4\cdot 2\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}$$

所以

$$\psi(x,t)=A\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^{1/2}\left[\cos\beta\,\psi_0(x)\,\mathrm{e}^{-iE_0t/\hbar}+\sin\beta\,\psi_2(x)\,\mathrm{e}^{-iE_2t/\hbar}\right]$$

$$=A\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^{1/2}\left[\cos\beta\,\psi_0(x)\,\mathrm{e}^{-i\omega t/2}+\sin\beta\,\psi_2(x)\,\mathrm{e}^{-i5\omega t/2}\right]$$

② 可测得的能量为

$$E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega,\qquad E_2=\frac{5}{2}\hbar\omega$$

二者测得的相对几率为

$$P_0/P_2=\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}=\cot^2\beta$$

③ 因为 $\psi(x,0)$ 仅为 ψ_0 与 ψ_2 的叠加态，而 ψ_0 和 ψ_2 皆为偶宇称，故叠加后仍为偶宇称态，即

$$\psi(-x,0)=\psi(x,0)$$

$t=0$ 时，

$$\langle x\rangle=\left(\psi(x,0),x\psi(x,0)\right)=0$$

由 $(\psi(x,t),x\psi(x,t))$ 立即可以看出，平均值 $\langle x\rangle$ 不随时间 t 变化，即任意时刻 t，均有 $\langle x\rangle=0$。

2.34　在$t=0$时，处于势$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中的粒子，由波函数

$$\psi(x,0)=A\sum_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\psi_n(x)$$

描述，ψ_n是能量本征态，$(\psi_n,\psi_{n'})=\delta_{nn'}$，求

① 归一化常数A；

② 给出$t>0$时，$\psi(x,t)$的表式；

③ 证明$|\psi(x,t)|^2$是一个周期函数，求出其最长的周期；

④ 求出 $t=0$时，体系能量的平均值。

解：①

$$(\psi(x,0),\psi(x,0))=|A|^2\sum_{n,m}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}}(\psi_m,\psi_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot|A|^2=2|A|^2=1$$

可取
$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

②
$$\psi(x,t)=e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\psi(x,0)=\sum_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega t}\psi_n(x)$$

③
$$|\psi(x,t)|^2=\frac{1}{2}\sum_{n,m}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m}e^{-i\omega(n-m)t}\psi_n(x)\psi_m^*(x)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|\psi_n(x)|^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{n,m=0\\ m\neq n}}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}}e^{-i(n-m)\omega t}\psi_n(x)\psi_m^*(x)$$

显然，上式是时间 t 的周期函数，最长周期 $\tau=2\pi/\omega$。

④ $t=0$时，

$$\overline{E}=(\psi(x,0),H\psi(x,0))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}\right)\hbar\omega \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$$

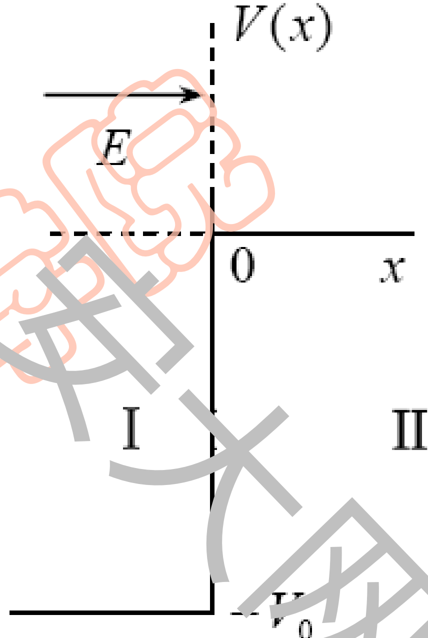
$$=\frac{1/4}{1-1/2}+\frac{1/8}{1-1/2}+\frac{1/16}{1-1/2}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1/2}{1-1/2}=1 \quad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1/4}{1-1/2}=\frac{1}{2} \quad (3)$$

式（2）、式（3）代入式（1），得

$$\overline{E}=\frac{3}{2}\hbar\omega$$

2.35 设粒子（能量 $E>0$）从左入射，碰到下列势阱（图），求阱壁处的反射系数。



解：势阱为

$$V(x)=\begin{cases}-V_0, & x<0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

在区域 I 上有入射波与反射波，在区域 II 上仅有透射波。故

$$\psi_1=A\,\mathrm{e}^{ik_1x}+B\,\mathrm{e}^{-ik_1x},\quad k_1=\sqrt{2m(V_0+E)}/\hbar$$

$$\psi_2=C\,\mathrm{e}^{ik_2x},\qquad k_2=\sqrt{2mE}/\hbar$$

由 $\psi_1(0)=\psi_2(0)$，得

$$A+B=C$$

由$\psi_1'(0)=\psi_2'(0)$，得

$$k_1(A-B)=k_2C$$

从上二式消去C，得

$$(k_1-k_2)A=(k_1+k_2)B$$

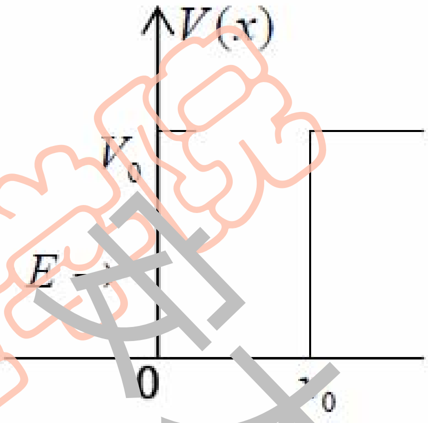
反射系数

$$R=|r|^2=\frac{B^2}{A^2}=\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}$$

将k_1,k_2代入运算，可得

$$R=\frac{V_0^2}{\left(\sqrt{V_0+E}+\sqrt{E}\right)^4}=\begin{cases} V_0^2/16E^2, & E>>V_0 \\ 1-4\sqrt{E/V_0}, & E<<V_0 \end{cases}$$

2.36 一质量为 m，动量为 p 的粒子从左射向图示阶跃状势垒，计算下列两种情况下粒子向后散射的几率。



① $p^2/2m < V_0$；　　② $p^2/2m > V_0$

解：将纵坐标平移至 x_0 处，不影响反射系数的计算结果。

S.eq 为：

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right]\psi(x)=0, \qquad x<x_0$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\right]\psi(x)=0, \qquad x>x_0 \qquad (1)$$

① $E=\dfrac{p^2}{2m}<V_0$ ，解为

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{ik(x-x_0)}+r\,e^{-ik(x-x_0)}, & x<x_0 \\ t\,e^{-k'(x-x_0)}, & x>x_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$k^2=2mE/\hbar^2, \qquad k'^2=2m(V_0-E)/\hbar^2 \quad (3)$$

$x=x_0$ 处 ψ 及 ψ' 分别连续，得

$$\begin{cases} 1+r=t \\ ik(1-r)=-k't \end{cases}$$

所以

$$r=\frac{k'+ik}{-k'+ik} \quad (4)$$

反射系数

$$R = \left| j_{反} / j_{入} \right| = |r|^2 = 1 \quad （因为是无限宽势垒） \qquad （5）$$

② $E = \dfrac{p^2}{2m} > V_0$ ，方程（1）的解为

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik(x-x_0)} + r e^{-ik(x-x_0)}, & x < x_0 \\ t e^{ik''(x-x_0)}, & x > x_0 \end{cases} \qquad （6）$$

其中

$$k^2 = 2mE/\hbar^2, \qquad k''^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2 \qquad （7）$$

$x = x_0$ 处，ψ 及 ψ' 分别连续，得

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ ik(1 - r) = ik''t \end{cases}$$

所以

$$r=\frac{k-k''}{k+k''} \qquad (8)$$

反射系数

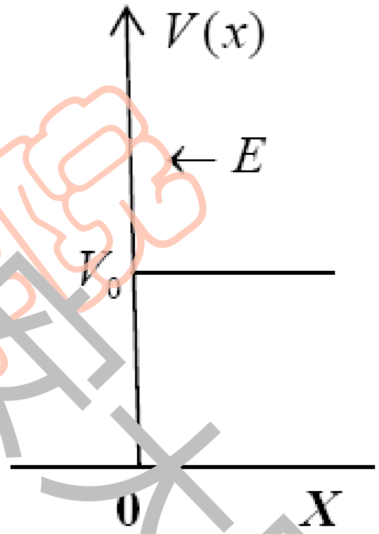
$$R=|r|^2=\left(\frac{k-k''}{k+k''}\right)^2=\frac{(k-k'')^2(k+k'')^2}{(k+k'')^4}=\frac{(k^2-k''^2)^2}{(k+k'')^4}$$

$$=V_0^2/(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4 \qquad (9)$$

透射系数

$$T=1-R=1-\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4} \qquad (10)$$

2.37 若粒子从右边入射，求如图所示一维阶梯势的反射和透射系数。



解：右边入射，显然 $E > V_0$。

$x > 0$ 区域：既有入射波，也有反射波。S.eq 为

$$\psi'' + k_1^2\psi = 0, \qquad k_1^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$$

解为

$$\psi = e^{-ik_1 x} + r e^{ik_1 x} \qquad (x > 0)$$

在 $x < 0$ 区域：只有透射波。S.eq 为

$$\psi'' + k_2^2\psi = 0, \qquad (x < 0)$$

$$k_2^2 = 2mE/\hbar^2$$

解为

$$\psi = t\,e^{-ik_2 x} \qquad (x < 0)$$

$x=0$ 处，ψ 、 ψ' 分别连续，给出

$$\begin{cases} 1+r=t \\ k_1(1-r)=k_2 t \end{cases}$$

所以

$$r=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$$

反射系数

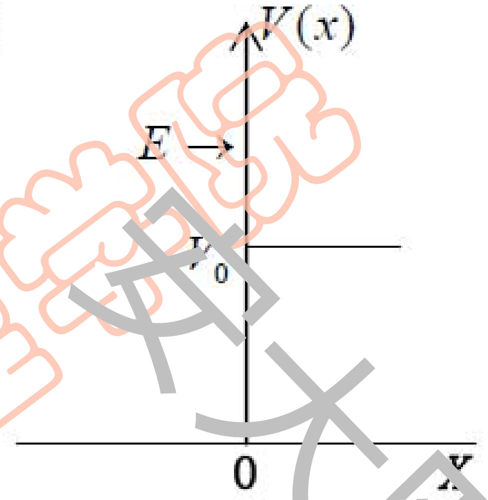
$$R=|r|^2=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=\frac{(k_1-k_2)^2(k_1+k_2)^2}{(k_1+k_2)^4}$$

$$=\frac{(k_1^2-k_2^2)^2}{(k_1+k_2)^4}=\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4}$$

透射系数

$$T=1-R=1-\frac{V_0^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^4}$$

2.38 一质量为 m 的粒子沿 x 正方向以能量 E 向 $x=0$ 处的势阶运动。当 $x\le 0$ 时，该势为 0；当 $x>0$ 时，该势为 $\frac{3}{4}E$。问在 $x=0$ 处粒子被反射的的几率多大？



解：S.eg 为

$$\begin{cases}\psi''+k^2\psi=0, & x\le 0\\ \psi''+k'^2\psi=0, & x>0\end{cases}$$

其中 $k^2=2mE/\hbar^2$， $k'^2=2m(E-V_0)/\hbar^2=k^2/4\quad\left(V_0=\frac{3}{4}E\right)$

方程的解为：

$$\psi = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx}, & x \le 0 \\ t e^{ikx/2}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$x=0$处，ψ及ψ'分别连续，给出

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ k(1-r) = \dfrac{k}{2} t \end{cases}$$

解得

$$r = \frac{1}{3}$$

反射系数

$$R = |r|^2 = \frac{1}{9}$$

2.39 证明：对于任意的一维势垒贯穿问题，粒子的反射系数 R 与透射系数 T 总有关系

$$R + T = 1$$

证：对于散射问题，粒子在无限远处不受力的作用，即力总是作用在一个有限的范围，因此在无限远处位势总趋于常数：

$$V(x)\begin{cases} \to V_L, & x \to -\infty \\ \to V_R, & x \to +\infty \end{cases}$$

于是对于一定能量 E 的粒子，在无限远处的波函数行为如：

$$\mathrm{e}^{\pm ikx}, \qquad x \to -\infty, \qquad k = \sqrt{2m(E - V_L)}/\hbar$$

$$\mathrm{e}^{\pm ik'x}, \qquad x \to +\infty, \qquad k' = \sqrt{2m(E - V_R)}/\hbar$$

考虑散射边界条件，假定粒子从左边 ($x=-\infty$ 处) 入射，于是在右边（$x=+\infty$ 处）只有出射粒子，而向 $x=-\infty$ 处运动的则有被势垒反射的粒子。因此定态波函数的渐近行为是

$$\psi(x)\begin{cases}\rightarrow \psi_1 = e^{ikx} + r e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ \rightarrow \psi_2 = t e^{ik'x}, & x \rightarrow +\infty\end{cases}$$

由于是定态，故几率密度 $\rho=\psi^*\psi$ 与时间无关。于是由几率守恒定律

$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$, 可知

$$\partial_x \vec{j} = 0$$

$\vec{j}$ 为一维几率流密度。对此式进行空间积分，可得

$$j(-\infty) = j(\infty)$$

$$j_1 = j_2 \tag{1}$$

$$j_1 = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi_1^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_1 - c.c.\right] = \frac{\hbar k}{m}(1 - |r|^2) \tag{2}$$

$$= j_{入} + j_{反} \tag{3}$$

其中

$$j_{入} = \frac{\hbar k}{m}, \quad j_{反} = -\frac{\hbar k}{m}|r|^2 \tag{4}$$

而

$$j_2 = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi_2^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi_2 - c.c.\right] = \frac{\hbar k'}{m}|t|^2 \tag{5}$$

反射系数

$$R = |j_{反}/j_{入}| = |r|^2$$

透射系数

$$T=\left|j_2/j_{入}\right|=\frac{k'}{k}\left|t\right|^2$$

由此，

$$R+T=\left|r\right|^2+\frac{k'}{k}\left|t\right|^2 \qquad (6)$$

式（2）、式（5）代入式（1），得

$$k\left(1-\left|r\right|^2\right)=k'\left|t\right|^2$$

即

$$\left|r\right|^2+\frac{k'}{k}\left|t\right|^2=1 \qquad (7)$$

比较式（6）、式（7），得

$$R+T=1 \qquad (8)$$

***2.40** 对于直角势阱（深V_0，宽a）的第n个束缚态ψ_n、E_n，在$V_0 >> E_n$条件下，计算：

① 粒子在阱外出现的几率；

② $V(x)$和的$V^2(x)$平均值，并和E_n比较。

解：① 以偶宇称态为例，定态 S.eg 可写成

$$\begin{cases} \psi'' + k^2\psi = 0, & |x| \le a/2 \quad \text{（阱内）} \\ \psi'' - \beta^2\psi = 0, & |x| \ge a/2 \quad \text{（阱外）} \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k &= \sqrt{2mE}/\hbar \\ \beta &= \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

注意：在$V_0 >> E$条件下，$\beta >> k$。

式（1）的偶宇称解为

$$\begin{aligned} \psi &= \cos kx, & |x| \le a/2 \\ \psi &= C\mathrm{e}^{-\beta|x|}, & |x| \ge a/2 \end{aligned} \quad (3)$$

$x = a/2$ 处 ψ 应连续，由此得出

$$C = \mathrm{e}^{\beta a/2} \cos\frac{ka}{2} \quad (4)$$

$x = a/2$ 处 ψ' 应连续，得出

$$C = \frac{k}{\beta}\mathrm{e}^{\beta a/2} \sin\frac{ka}{2} \quad (5)$$

由式（4)、式（5）得能级公式

$$\tan\frac{ka}{2} = \frac{\beta}{k} \quad (6)$$

在 $\beta >> k$ 条件下，式（6）的解为

$$ka = n\pi\,, \quad n = 1, 3, 5, \cdots \tag{7}$$

代入式（2），得能级

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \tag{8}$$

这正是无限深势阱的能级公式。

现在计算粒子在阱内、外出现的几率。由式（3）、式（4），得

$$I_1 = \int_{\text{阱外}} |\psi|^2 \,\mathrm{d}x = 2C^2 \int_{a/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta x}\,\mathrm{d}x = \frac{C^2}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta a} = \frac{1}{\beta}\cos^2\frac{ka}{2} \tag{9}$$

$$I_2 = \int_{\text{阱内}} |\psi|^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{a/2} \cos^2 kx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{\sin ka}{ka}\right) \tag{10}$$

由于式（7），使得 $\sin ka$ 和 $\cos\frac{ka}{2}$ 均→0。可知粒子在阱外出现的几率 $P_{外}$ 远小于阱内几率 $P_{内}$，且有

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2\,\mathrm{d}x\approx\int_{阱内}|\psi|^2\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2} \qquad (11)$$

阱外几率

$$P_{外}=\frac{\int_{阱外}|\psi|^2\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi|^2\,\mathrm{d}x}\approx\frac{2}{\beta a}\cos^2\frac{ka}{2} \qquad (12)$$

利用式(6).得

$$1+\tan^2\frac{ka}{2}=\frac{k^2+\beta^2}{k^2}=\frac{V_0}{E}$$

所以

$$\cos^2\frac{ka}{2}=\frac{E}{V_0} \tag{13}$$

代入式（12），得阱外几率

$$P_{外}=\frac{2E}{a\beta V_0}\approx\frac{2\hbar}{a\sqrt{2mV_0}}\frac{E}{V_0} \tag{14}$$

考虑到$V_0>>E$和式（8），有

$$\sqrt{2mV_0}>>\sqrt{2mE_n}\approx n\pi\hbar/a \tag{15}$$

所以阱外几率

$$P_{外}<<2E/n\pi V_0 \tag{16}$$

② $$\langle V(x)\rangle = (\text{阱外几率})\cdot V_0 = \frac{2\hbar E}{a\sqrt{2mV_0}} << \frac{2}{n\pi}\cdot E_n \qquad (17)$$

$$\langle V^2(x)\rangle = (\text{阱外几率})\cdot V_0^2 \approx \frac{\hbar E}{ma}\sqrt{2mV_0} >> \frac{n\pi\hbar^2 E}{ma^2} \sim \frac{2}{n\pi} E_n^2 \qquad (18)$$

*2.41 粒子在无限深方势阱（宽为 a）中运动，处于第 n 个束缚态 ψ_n，求粒子对于每一侧阱壁的平均作用力。

解：先考虑为有限深（V_0），再过渡到 $V_0\to\infty$ 的情况。

即
$$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a/2\\ V_0, & |x|\ge a/2 \quad (V_0\to\infty)\end{cases} \tag{1}$$

粒子所受作用力为 $-dV/dx$，其对阱壁的作用力为

$$F(x)=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=V_0\delta(x-a/2)-V_0\delta(x+a/2) \tag{2}$$

（右侧）（左侧）

$$\langle F_{右}\rangle=\frac{\int|\psi|^2V_0\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}x}{\int|\psi|^2\mathrm{d}x}=\frac{V_0\left|\psi\left(\frac{a}{2}\right)\right|^2}{\int|\psi|^2\mathrm{d}x}=\frac{V_0\cos^2(ka/2)}{a/2}=\frac{2E_n}{a} \tag{3}$$

（参 2.40 题式（13）：$V_0\cos^2(ka/2)=E$。）(V_0/E)越大，式（3）则越正确。由于对称性，显然有

$$\langle F_{左}\rangle=-\langle F_{右}\rangle \tag{4}$$

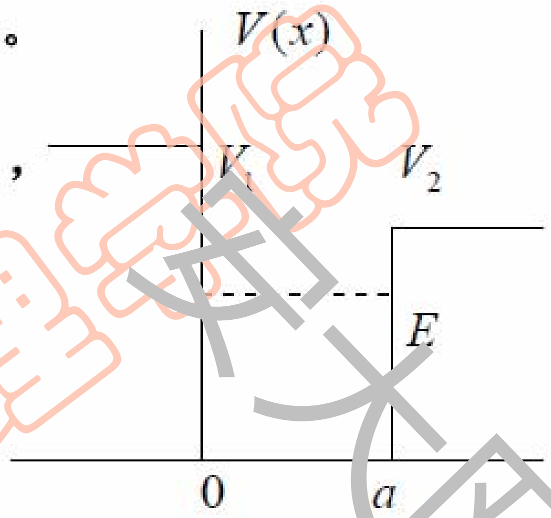
式（3）可作如下解释：设固定阱壁左侧，而令右侧徐缓外移Δa，则粒子对外作功$\langle F_{右}\rangle\Delta a$，导致能级降低。据能量守恒律，有

$$\langle F_{右}\rangle=-\frac{\partial E_n}{\partial a}=-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\right)=\frac{2}{a}E_n \tag{5}$$

这正是式（3）。

*2.42　求不对称势阱中粒子的能量本征值。

解：仅讨论分立能级的情况，即 $0 < E < V_2$，



所以
$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}\psi$$

当 $x \to \pm\infty$ 时，$\psi \to 0$，故有

$$\psi = \begin{cases} A_1\,\mathrm{e}^{k_1 x}, & x < 0, \quad k_1 = \sqrt{2m(V_1 - E)}/\hbar \\ A\sin(kx+\delta), & 0 < x < a, \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar, \quad (\delta < \pi) \\ A_2\,\mathrm{e}^{-k_2 x}, & a < x, \quad k_2 = \sqrt{2m(V_2 - E)}/\hbar \end{cases}$$

由 $\mathrm{d}\ln\psi/\mathrm{d}x$ 在 $x = 0$、$x = a$ 处的连续条件，得

$$k_1 = k\cot\delta, \quad (1)$$

$$k_2 = -k\cot(ka+\delta) \quad (2)$$

由式（1）可得

$$\sin\delta = \frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_1}} \quad (3)$$

由于k_1, k_2, k皆为正值，故由（2），知$ka+\delta$为二、四象限的角。因而

$$\sin(ka+\delta) = \pm\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_2}} \quad (4)$$

又由式（1），余切函数的周期为π，故由式(3)，得

$$\delta = n_1\pi + \sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_1}} \quad (5)$$

由式(4)，得

$$ka+\delta=n_2\pi-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_2}} \qquad (6)$$

结合式(5)、式（6)，得

$$ka=n_2\pi-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_2}}-n_1\pi-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV}}$$

或

$$ka=n\pi-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_1}}-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_2}} \qquad (7)$$

$$n=1,2,3,\cdots$$

一般而言，给定一个n值，有一个解k_n，相当于有一个能级：

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \tag{8}$$

当$V_2 \neq V_1$时，仅当

$$\frac{a\sqrt{2mV_2}}{\hbar} \geq \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$$

才有束缚态 ，故V_1、V_2给定时，仅当

$$a \geq \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_2}}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\sqrt{\frac{V_2}{V_1}}\right) \tag{9}$$

时才有束缚态（若$V_1 = V_2 = V$，则无论V和a的值如何，至少总有一个能级）。

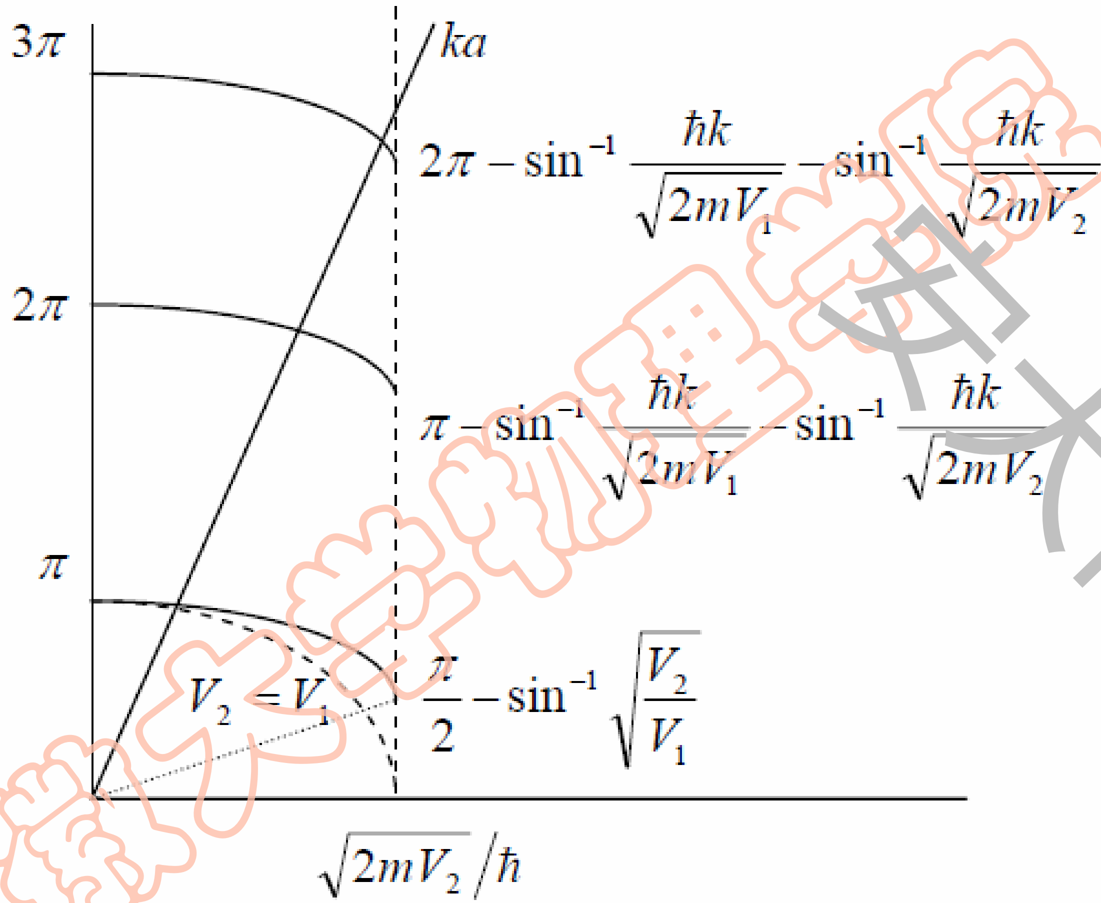
当V_1、V_2、a给定时，由式(8)可求出n个能级(若有n个能级的话)。

相应的波函数为:

$$
\psi_n = \begin{cases} A_n \dfrac{\hbar k_{1n}}{\sqrt{2mV_1}} \mathrm{e}^{k_n x} & , \quad x < 0 \quad , \quad k_{1n} = \sqrt{2m(V_1 - E)}/\hbar \\ A_n \sin(k_n x + \delta_n) & , \quad 0 < x < a \\ A_n (-1)^{n-1} \dfrac{\hbar k_{2n}}{\sqrt{2mV_2}} \mathrm{e}^{-k_{2n}(x-a)} & , \quad x > a \quad , \quad k_{2n} = \sqrt{2m(V_2 - E)}/\hbar \end{cases}
$$

其中

$$
A_n = \sqrt{2/(a + 1/k_{1n} + 1/k_{2n})}
$$



3π
2π
π
ka
$2\pi-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_1}}-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_2}}$
$\pi-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_1}}-\sin^{-1}\frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_2}}$
$\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$
$V_2=V_1$
$\sqrt{2mV_2}/\hbar$

END