

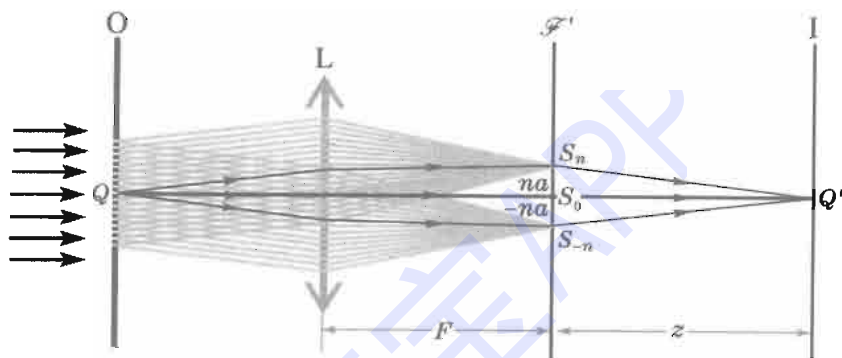
## 第五章 变换光学与全息照相

5-1. 试证明在傍轴条件下黑白光栅在傅氏面上 $\pm n$ 级衍射斑相对0级的相位为

$$\varphi_{\pm n} = -k \frac{(na)^2}{2z},$$

式中 $z$ 是傅氏面到像面的距离, $a$ 为相邻衍射斑中心间的距离。

答: 如下图所示, 平行光正入射在光栅上, 光栅中点 $Q$ 成像于像面中点 $Q'$ . 在透镜 $L$ 后焦面 $\mathcal{F}'$ , 即傅氏面上 $S_0$ 、 $S_{\pm n}$ 分别是0级和 $\pm n$ 衍射斑。



由物像等光程性原理, 有

$$(QS_{\pm n}Q') = (QS_0Q').$$

而  $(QS_{\pm n}Q') = (QS_{\pm n}) - (S_{\pm n}Q')$ ,  $(QS_0Q') = (QS_0) - (S_0Q')$ .  
 $S_{\pm n}$  相对  $S_0$  的相位为

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm n} &= \frac{2\pi}{\lambda} [(QS_{\pm n}Q') - (QS_0Q')] \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda} [(S_{\pm n}Q') - (S_0Q')] = -\frac{2\pi}{\lambda} [\overline{S_{\pm n}Q'} - \overline{S_0Q'}].\end{aligned}$$

因  $\overline{S_{\pm n}S_0} = na$ ,  $\overline{S_0Q'} = z$ , 在傍轴条件下

$$\overline{S_{\pm n}Q'} = \sqrt{z^2 + (na)^2} = z \left[ 1 + \left( \frac{na}{z} \right)^2 \right]^{1/2} \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{na}{z} \right)^2 \right],$$

于是

$$\varphi_{\pm n} = -\frac{\pi}{\lambda} \frac{(na)^2}{z} = -k \frac{(na)^2}{2z},$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$ .

5-2. 通常在一台光栅光谱仪的焦面上获得的光谱是时间频谱还是空间频谱?

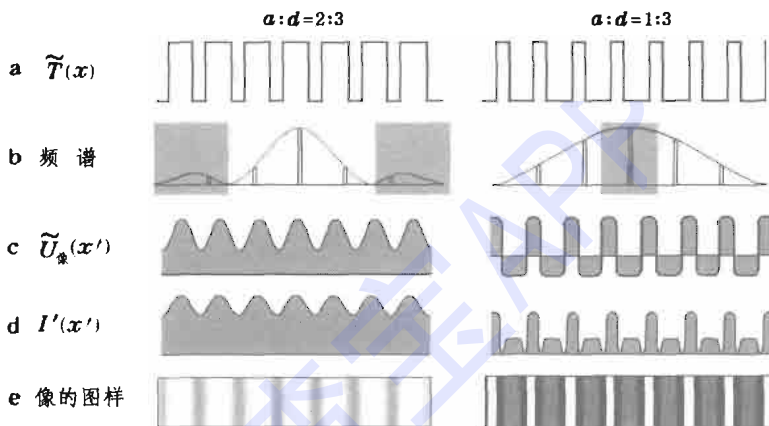
答: 光栅光谱仪是利用光栅的色散效应进行分光的, 通常其焦面上接收的是同一级主极强的不同波长成分。这样获得的一套同级光谱反映的是

入射光的时间频谱,并不反映光栅的空间频谱。光栅的空间频谱由同一波长的不同级主极强来反映。

**5-3.** 仿照图 5-17,但把  $a$  与  $d$  的比例左右对调一下,画出相应的各种曲线。

**答:** (1)  $a:d=2:3$ , 频谱面上的滤波器只让  $0, \pm 1$  级通过

$0$  级构成均匀背景  $\pm 1$  级构成在像面上构成正弦分布。如下图左半部所示,在这里  $0$  级大于  $\pm 1$  级两倍以上,合成振幅恒正,故无  $0$  点。像面上是在较强的亮背景有一反衬不太大的正弦条纹。



(2)  $a:d=1:3$ , 频谱面上的滤波器只挡掉  $0$  级通过

如上图右半部所示,频谱面上振幅分布基本上仍是方波,只不过由于孔径光阑滤掉高频,方波的棱角稍被磨圆。由于  $0$  级被挡掉,振幅方波的平均值为  $0$ ,从而有  $2/3$  宽度取负值,正负振幅绝对值之比是  $2:1$ 。像面上是强度  $4:1$ 、宽度  $1:2$  的亮纹相间排列,相邻亮纹间被暗纹隔开。

**5-4.** 经空间滤波器改造了的频谱是否为像函数的空间频谱? 试论证你的结论。

**答:** 经频谱面上滤波器改造后的频谱即为像场函数的空间频谱。这个结论可以论证如下:若频谱面上没有滤波器,光波能够自由通过,则图像将完全复原,这时物像的空间频谱完全相同。插入空间滤波器后新的频谱对应一个新的物。如果在物面上输入这个新的假想物,其光波在频谱面上形成那个被改造了的频谱而无需空间滤波器。显然,输出像场函数的频谱与假想物的频谱相同,亦即像场函数的频谱与滤波器改造后的物信息的频谱一致。

**5-5.** (1) 在相衬法中  $\varphi(x,y) \ll 1$  这个条件有什么好处?

(2) 为了保证  $\varphi(x,y)$  小,是否要求样品厚度  $d$  必须很小? 在什么条件

下样品可以比较厚,同时又能做到  $\varphi(x, y) \ll 1$ ?

(3) 一厚度均匀折射率不均匀的相位型物体,  $n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$ , 最大相对起伏  $\Delta n/n_0 \approx 0.01$ 。为使  $\varphi \ll 1$  满足, 允许该样品的厚度有多大?

答: (1) 在相衬法中, 像面上光强分布的普遍表达式为[见书上(5.43)式, 取透过率  $a=1$ ]

$$I(x', y') = A^2 [3 + 2(\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta - \cos\varphi - \cos\delta)], \quad (1)$$

式中  $\varphi(x', y')$  与物的相位信息  $\varphi(x, y)$  对应。一般说来, 像面上虽然出现了与物的相位信息相关的黑白图像, 但其强度分布  $I(x', y')$  并不与  $\varphi(x', y')$  成线性关系。在  $\varphi(x, y) \ll 1$  的条件下  $\varphi(x', y') \ll 1$ , (1) 式简化为

$$I(x', y') \approx A^2 [1 + 2\sin\delta \varphi(x', y')], \quad (2)$$

$I(x', y')$  与  $\varphi(x', y')$  成线性关系。这就是  $\varphi(x, y) \ll 1$  条件的好处。

(2) 相位物的透过率函数为

$$\check{t}(x, y) = e^{i\varphi(x, y)},$$

其中

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} n d.$$

式中  $d$  是厚度,  $n$  是折射率。因为  $\varphi(x, y)$  是相位, 它增减一个常数仅影响  $I(x', y')$  中的常数项, 只有它的起伏才有意义。相位的随物的厚度和折射率的变化而起伏的:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [n \Delta d + d \Delta n], \quad (3)$$

只要  $\Delta d$  和  $\Delta n$  足够小, 即可保证  $\Delta\varphi(x, y) \ll 1$ , 并不需要厚度  $d$  很小。

(3) 此时  $\Delta d = 0$ ,  $\Delta n \approx 0.01 n_0$ , 由 (3) 式可知  $\Delta\varphi(x, y) \ll 1$  的条件是

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \Delta n = \frac{0.02\pi}{\lambda} n_0 d \ll 1,$$

即

$$d \ll \frac{\lambda}{0.02\pi n_0} = 15.9 \frac{\lambda}{n_0},$$

取  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $n_0 = 1.5$ , 则要使  $\Delta\varphi \ll 1$  得到满足, 样品的厚度

$$d \ll 5.83 \mu\text{m}.$$

$d$  应有光波波长的数量级。

5-6. (1) 若相位板中心液滴的光学厚度为  $3\lambda/4$ , 写出任意大小的  $\varphi$  和  $\varphi \ll 1$  时像面函数的表达式。

(2) 这时像的图样与液滴的光学厚度为  $\lambda/4$  时有何不同?

(3) 若考虑液滴对光的吸收, 设其强度透射率为  $\tau < 1$ , 像面上强度分布有何变化? 衬比度有何变化?

答: (1) 如上题, 像面上光强分布的普遍表达式为

$$I(x', y') = A^2 [3 + 2(\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta - \cos\varphi - \cos\delta)], \quad (1)$$

在  $\varphi(x, y) \ll 1$  的条件下  $\varphi(x', y') \ll 1$ , ① 式简化为

$$I(x', y') \approx A^2 [1 + 2 \sin \delta \varphi(x', y')], \quad (2)$$

中心液滴光学厚度为  $3\lambda/4$  对应  $\delta = 3\pi/2$ ,  $\sin \delta = -1$ ,  $\cos \delta = 0$ , ① 式化

$$\text{为 } I(x', y') = A^2 [3 - 2(\sin \varphi + \cos \varphi)] = A^2 [3 - 2\sqrt{2} \sin(\varphi + \pi/4)],$$

② 式化为

$$I(x', y') \approx A^2 (1 - 2\varphi).$$

(2) 中心液滴光学厚度为  $\lambda/4$  对应  $\delta = \pi/2$ ,  $\sin \delta = 1$ ,  $\cos \delta = 0$ , ① 式化

$$\text{为 } I(x', y') = A^2 [3 + 2(\sin \varphi - \cos \varphi)] = A^2 [3 + 2\sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4)],$$

② 式化为

$$I(x', y') \approx A^2 [1 + 2\varphi].$$

与情形(1)相比强度起伏项是互补的。

(3) 傅氏面上的中心液滴只影响像面上的直流成分。设中心液滴的透过率为  $a$ , 书上(5.43)式给出

$$I(x', y') = A^2 [2 + a^2 + 2(a \sin \varphi \sin \delta + a \cos \varphi \cos \delta - \cos \varphi - a \cos \delta)]. \quad (3)$$

$\varphi \ll 1$  时,

$$I(x', y') \approx A^2 [a^2 + 2a \sin \delta \varphi(x', y')]. \quad (4)$$

将上式与 ② 式相比可见, 本底强度减弱了  $a^2$  倍, 信息  $\varphi(x', y')$  的强度减弱了  $a$  倍, 从而衬比度增大了  $1/a$  倍。选择对光有较强吸收的相移滴对提高相衬像的衬比度是有好处的。

**5 - 7.** 观察相位型物体的另一种方法是“中心暗场法”, 即在傅氏面的中心设置一个细小的不透明屏, 假定物体的相位变换函数  $\varphi \ll 1$ , 写出像面上强度的分布, 并与相衬法的优劣作一比较。

**答:** 在傅氏面上把 0 级斑完全遮掉。这相当于令上题 ③ 式中

$$I(x', y') = A^2 [2 + a^2 + 2(a \sin \varphi \sin \delta + a \cos \varphi \cos \delta - \cos \varphi - a \cos \delta)],$$

$a = 0$  时

$$I(x', y') = 2A^2 [1 - \cos \varphi],$$

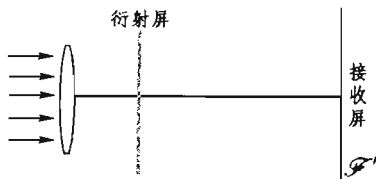
$\varphi \ll 1$  时,

$$I(x', y') \approx A^2 \varphi^2(x', y').$$

相位的差别完全反映在强度的变化上, 像的本底强度为零, 背景全是黑的, 像的反衬度极高。这是暗场法优于相衬法的特点。暗场法的像场强度正比于  $\varphi^2$ , 它不是线性的, 且  $\varphi \ll 1$  时  $\varphi^2$  更小, 因而光强很弱。这两点是暗场法不如相衬法之处。

**5 - 8.** 装置如本题图所示, 在后焦面  $\mathcal{F}'$  上接收衍射场,

(1) 这种装置能否接收夫琅禾费衍射场? 如果能, 需要什么条件? 夫琅禾费衍射场的范围有多大?

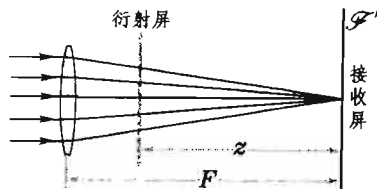


思考题 5-8

(2) 前后移动衍射屏, 对衍射图样有何影响?

(3) 此装置与衍射屏放置在透镜前时有何不同?

答: (1) 凡在照明光源像面上接收到的衍射场都是夫琅禾费衍射场, 本装置中透镜的后焦面正是照明光源的像面, 可以接收夫琅禾费衍射场。



(2) 衍射屏被透镜会聚的球面波照明, 其照明范围限制在球面中心 (即透镜后焦点) 与透镜边缘连线构成的光锥内。移动衍射屏, 当  $z$  减小时, 衍射图样有两点变化: ① 照明范围缩小, 这相当于衍射屏外围部分被遮掉, 衍射图样当然会有相应的变化; ② 衍射屏离接收屏近了, 衍射图样会缩小, 但强度增大。当  $z$  增大时, 效果相反。

(3) 衍射屏放在透镜前时, 其照明范围是不变的, 这与衍射屏在透镜后不同。若衍射屏在透镜前, 前后移动时衍射图样的上述两点变化都不存在。

5-9. 在(5.49)式中积分号外有一个与场点的坐标有关的相因子  $e^{i\varphi(\theta_1, \theta_2)}$ , 用什么方法可使这个相因子成为与场点坐标无关的常数?

答: (5.49)式是针对图5-20里的装置c的, 其中相位因子  $\varphi(\theta_1, \theta_2) = kr_0$ ,  $r_0$  是衍射屏中心  $O$  到达不同场点  $P(\theta_1, \theta_2)$  的衍射线的光程。在图5-20里的装置c里对衍射屏到透镜  $L$  的距离未作规定, 若规定它等于透镜的焦距

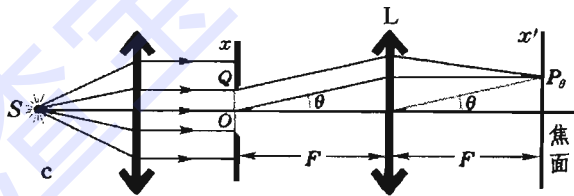


图 5-20

$F$ , 则  $r_0$  是常数, 从而相因子  $e^{i\varphi(\theta_1, \theta_2)}$  也成为与场点坐标无关的常数。

5-10. 讨论图5-24所示的相干光学图像处理系统:

- (1) 如果  $L_1$ 、 $L_2$  两透镜的焦距不等, 系统的性能有什么变化?
- (2) 如果两个透镜不是共焦组合, 系统的性能有什么变化?

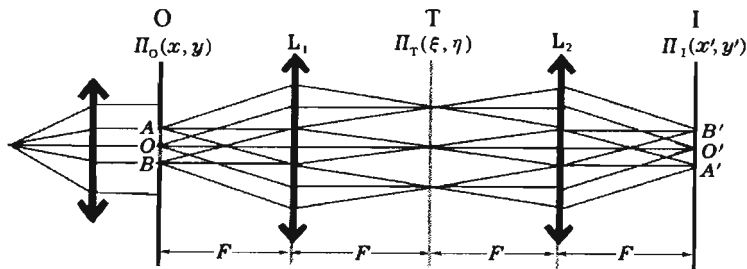
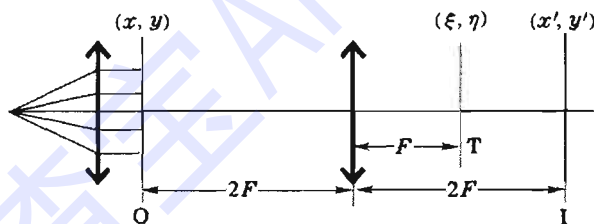


图 5-24

答: (1) 如图 5-24 所示的  $L_1$ 、 $L_2$  两透镜的焦距不等, 从 O 面到 T 面以及从 T 面到 I 面的两次衍射都是从焦面到焦面的夫琅禾费衍射, 从而保证每次的复振幅变换仍然都是纯粹的傅里叶变换。与等焦距  $4F$  系统不同的是, 两次傅里叶变换中频谱面 T 和 I 上空间坐标对空间频率的缩放比例不同, 输出图像除倒置外还得到缩放, 但并不影响系统的滤波性和成像质量。

(2) 如果两个透镜  $L_1$ 、 $L_2$  不是共焦组合, 则变换平面 T 不可能同是两个透镜的焦面, 只可能是  $L_1$  的后焦面或  $L_2$  的前焦面。对于前者, 第一次夫琅禾费衍射是复振幅的纯粹的傅里叶变换, 第二次夫琅禾费衍射复振幅的变换则不是纯粹的傅里叶变换; 对于后者, 两次衍射复振幅变换的情况正好相反。无论变换平面的位置是哪一种配置, 像面的输出波前都不再是物波前或假想物波前的倒置。

5-11. 如本题图所示的系统是否成为一个相干光学图像处理系统? 它与  $4F$  系统比较有什么不同? 哪个系统的性能更好?



思考题 5-11

答: 如本题图所示

的系统中, O 和 I 面为物像共轭面, T 面为 O 面的频谱面。该系统也构成一个相干光学图像处理系统, 其原理就是阿贝成像原理。在频谱面上设置滤波器即可改变图像的频谱, 实现改造图像的目的。与  $4F$  系统不同的是, 这里从 O 面到 T 面的第一次衍射虽然是夫琅禾费衍射, 但复振幅的变换不是纯粹的傅里叶变换, 积分号外有一个与场点的坐标有关的相因子。从 T 面到 I 面的衍射是菲涅耳衍射, 其计算要比  $4F$  系统复杂得多。该系统虽然是横向放大率等于 -1 的成像系统, 但即使 T 面畅通无阻, 像面上输出的复振幅分布也不是输入的倒置 (还差一个二次相位因子)。当然, 这个相位因子不影响强度分布, 输出的强度分布仍可使图像复原。显然, 本题图所示的系统性能不如  $4F$  系统优越, 它只适用于成像系统的图像处理。该系统的一个优点是结构简单, 可少用一个傅里叶透镜。

5-12. 解释正文中的网格滤波实验。

答: 网格滤波实验如图 5-25 所示。

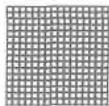
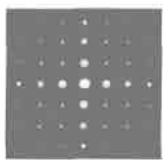
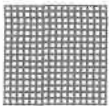
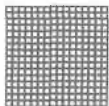


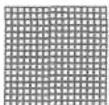


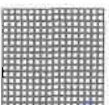
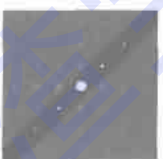

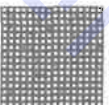


|   | 输入图像  | 频谱变换  | 输出图像  | 说 明                  |
|---|---|---|---|----------------------|
| a |    |    |    | 全<br>通               |
| b |    |    |    | 保留<br>$f_1$ 频谱       |
| c |    |    |    | 保留<br>$f_2$ 频谱       |
| d |   |   |   | 保留<br>$f_0$ 频谱       |
| e |  |  |  | 用<br>a 的<br>负片<br>滤波 |

图 5 - 25

如果按图 5 - 25b 所示, 遮掉  $\Pi_T$  面上除中央一纵列外所有其余的衍射斑, 则从横向看只有 0 级亮斑, 即直流成分, 故输出面  $\Pi_1$  上沿横向看是强度均匀的, 没有网格, 输出面上只剩下横向网格。

如果按图 5 - 25c 所示, 遮掉  $\Pi_T$  面上除中央一横行外所有其余的衍射斑, 则从纵向看只有 0 级亮斑, 即直流成分, 故输出面  $\Pi_1$  上沿纵向看是强度均匀的, 没有网格, 输出面上只剩下纵向网格。

如果按图 5 - 25d 所示, 遮掉  $\Pi_T$  面上除中央一斜排外所有其余的衍射



斑, 则从与之正交的方向看只有0级亮斑, 即直流成分, 故输出面 $\Pi_1$ 上沿正交方向看是强度均匀的, 没有网格, 输出面上只剩下正交方向的网格。

图5-25e所示滤散乱污点的方法已在书中正文有详细解释, 此处从略。

### 5-13. 解释正文中的 $\theta$ 调制实验。

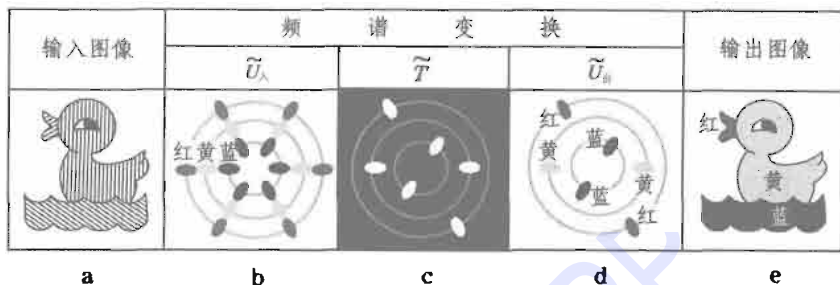
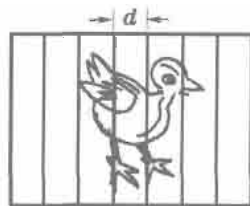


图5-26

答: 如图5-26所示, 透明物由几块不同形状的光栅片(通常用相位光栅)拼成, 这些光栅片是在50/mm或100/mm的一张光栅上剪裁下来的。拼图时利用光栅的不同取向把准备着上不同颜色的部位区分开来(图a)。当一束白光照射到这透明物上时, 在变换平面上呈现的是沿与各光栅纹络正交方向铺展的彩色斑(图b)。用黑纸或熏烟的玻璃板遮在变换平面上, 并在适当的地方开些透明窗口(图c), 把所需颜色的 $\pm 1$ 级衍射斑提取出来(图d), 这相当于在这些区域加了单色滤波器。这样, 在输出平面上相应区域就出现滤出颜色的光栅像(相位光栅的像强度是均匀的), 于是得到符合我们期望的彩色图(图e)。

5-14. 如本题图, 一张图上画有一只小鸟关在牢笼中, 用怎样的光学滤波器能够去掉栅网, 把它“释放”出来?



思考题5-14

答: 竖直方向栅格的空间频谱是排在频谱面中央的一条横轴上的一行衍射斑。如果遮掉除0级以外的所有这些衍射斑, 竖直方向栅格就不见了。鸟的图像的频谱分布在整个频谱面上, 低频部分(代表图像的大轮廓)在中央附近, 高频部分(代表图像的细节)在周围。去掉栅格频谱时对鸟的图像细节的信息有些损害, 但损害不大; 而大轮廓的信息基本上不受影响。



**5 - 15.** 一张底片的本底有灰雾,用什么样的光学滤波器可以使之改善?

**答:** 在底片的本底灰雾的频谱中,高频成分比较丰富;而在底片的图像中,相对来说低频成分较多. 因此,在相干光学图像处理系统中,以底片为物输入,只要在频谱面上置入低通滤波器,截去高频,即可使输出图像得以改善。

**5 - 16.** (1) 以一张黑白图案作光学滤波器,并在黑的地方开个孔。这张滤波器的透过率函数是图案与孔的透过率函数的积还是和?

(2) 若在上述图案中白的地方点上一黑点,其透过率函数是图案与黑点的透过率函数的积还是和?

**答:** (1) 以黑白图案中黑的地方开一个小孔作为滤波器,其滤波函数应是黑白图案与小孔的透过率函数的相加,而非相乘;

(2) 以黑白图案中白的地方点一黑点作为滤波器,其滤波函数是黑白图案与黑点透过率函数相乘,而非相加。

**5 - 17.** 试将全息图波前的重建与平面镜成像进行比较,其中有何相同和不同之处?

**答:** 全息图波前再现与平面镜反射成像相比,有如下几个共同点:

(1) 全息图能再现物光波前,平面镜反射的也是物光波前。两者都包含了物点的振幅信息和相位信息,因而都能观察到逼真的立体图像。

(2) 全息图中的每个点(局部)都能再现物体各点的全部信息,平面镜每个点(局部)也都反射物体各点的全部信息。

两者的不同之处有:

(1) 平面镜反射的只是物光波(虚像);而全息图再现的是一对孪生的(可能有所偏转和缩放的)物光波和物光波的共轭波。

(2) 平面镜所成的虚像与原物镜像对称;全息图再现的虚像可在原物的位置,实像可能相对全息图与原物镜像对称,但凹凸反转了。

(3) 全息图再现像可以移位和缩放,而平面镜成像既不能移位,也不能缩放。

**5 - 18.** 为什么全息术对光源的时间相干性有较高的要求? 在布置全息记录的光路时,人们常常注意让参考光路与物光路到达记录介质的光程尽量相近,这是为什么? 为什么全息台要有很好的防震设备?

**答:** 全息术依据的是干涉和衍射原理。全息图记录的是物光波的振幅信息和相位信息,是由物光波与参考光波相干叠加产生的干涉条纹记录下来的。干涉条纹的衬比度记录了物光波前的振幅分布,其几何特征记录了物光波前的相位分布。如果参考光波与物光波不相干,则物光波前的相位分布是不可能记录下来的。因此,全息术必须要用相干光源照明。通常物

光波和参考光波是由同一照明光波分离出来的,它们在记录介质重新交叠时必然要有光程差。为使在光程差较大时仍有较高的相干程度,这就要求照明光波有足够的相干长度,即光源有较高的时间相干性。在布置全息记录光路时,尽量使参考光路与物光路到达记录介质的光程相同(这是基于时间相干性的考虑,因为光程差愈小,两光波的相干程度愈高)。此外,全息台要有很好的防震性能,才能使记录介质上的干涉条纹准确地反映物光波前的相位分布,因为全息台的任何轻微振动都会导致两相干光束光程差的改变。到达记录介质某一点的光程差变化一个波长,该处的条纹就会移过一条,条纹的衬比度下降到0。这时,干涉场的强度将趋于均匀,就完全记录不到相位信息了。

**5-19.** 全息图破损就意味着丢失了一些信息,为什么再现的像仍然完整无缺?这时再现像中包含的信息没有减少吗?如果残留的全息图太小了,对再现像有什么影响?试说明理由。

**答:** 在全息照相中,物光波的振幅信息和相位信息是通过物光波与参考光波的干涉条纹记录在全息图上的。每一物点所发出的光波直接落在记录介质的整个平面上,也就是说,全息图的每个局部都包含了物体各点的全部振幅信息和相位信息。因此,即使全息图破损,它仍然记录物光波的全部光信息,再现像仍然完整无缺,再现像中包含的光信息(全部物点的振幅信息和相位信息)并未减少。当然,如果残留的全息图太小,再现像将会模糊不清,主要原因有二:

(1) 由于衍射再现时衍射屏(全息图)的面积太小,导致像的强度减弱,变得暗淡。

(2) 残留的全息图线度太小,相当于在其上加了一个光阑,把高频信息滤掉很多,导致像的细节变得模糊。

**5-20.** 若制备全息图时未能做到线性冲洗,非线性效应会造成什么后果?

**答:** 在制备全息图时,若对记录介质做到线性冲洗,则全息图的屏函数  $\tilde{T}(Q)$  与曝光时的光强  $I(Q)$  成线性关系[参见书上(5.68)式]:

$$\tilde{T}(Q) = T_0 + \beta I(Q) = T_0 + \beta [A_R^2 + A_0^2 + \tilde{U}_R^* \tilde{U}_0 + \tilde{U}_0^* \tilde{U}_R],$$

式中  $\beta$  是与  $Q$  点无关的常量。若对记录介质未能做到线性冲洗,则  $\beta$  为与  $Q$  点坐标  $(x, y)$  有关的复数:

$$\tilde{\beta} = \beta(x, y) e^{i\varphi(x, y)},$$

$\tilde{\beta}$  的模  $\beta(x, y)$  影响全息像的强度分布,辐角  $\varphi(x, y)$  使全息像产生移位、缩放或更复杂的变化。

**5 - 21.** 怎样配置参考光波与再现时用的照明光波,才能使再现的  $\pm 1$  级像与原物大小一样,位置相对全息图面成镜像对称?

答:在全息图再现的衍射场中  $\pm 1$  级波分别为[参见书上(5.69)式]

$$\tilde{U}_{+1} = \beta A_R' A_R \tilde{U}_0 \exp[i(\varphi_R' - \varphi_R)],$$

$$\tilde{U}_{-1} = \beta A_R' A_R \tilde{U}_0^* \exp[i(\varphi_R' + \varphi_R)].$$

欲使再现的  $\pm 1$  级像与原物大小一样,且成镜像对称,必须满足以下条件:

$$\varphi_R' - \varphi_R = \varphi_R' + \varphi_R = 0.$$

当记录时的参考光波和再现时的照明光波都是正入射的平面波时,  $\varphi_R' = \varphi_R = 0$ , 以上两条件同时满足。

**5 - 22.** 一对孪生波均为发散波(两个虚像)或均为会聚波(两个实像)是可能的吗? 试设计出现此种情况的照明条件。

答:全息图再现时,将产生一对由  $\pm 1$  级衍射波决定的孪生像。 $\pm 1$  级衍射波分别表示受到参考波及照明波相因子作用后的物光波和物光共轭波。因为线性因子作用到一个波前函数上,等效于一个棱镜的偏转,并不改变光束的聚散性,所以线性相因子分别作用到  $\tilde{U}_0$  和  $\tilde{U}_0^*$  上产生的孪生像必然是一个虚像和一个实像。二次相因子对波前函数的作用等效于一个透镜的聚散。一般情况下,球面波在傍轴条件下的相因子包含线性和二次两部分,从而它对波前的作用等效于一个棱镜和一个透镜的联合。如果参考波和(或)照明波为球面波时,可以预期,全息图的衍射场中一对孪生波有可能均为发散波(两个虚像)或均为会聚波(两个实像)。习题5-13(2)给出了这样的例子。

## 第五章 变换光学与全息照相

5-1. 设薄透镜由折射率为  $n_L$  的材料做成, 物方和像方的折射率分别是  $n$  和  $n'$ , 导出其相位变换函数(用透镜的焦距表示出来)。

**解:** 如右图, 在透镜前后各取一个平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  与顶点相切, 且与光轴垂直。设光线的入射点为  $P_1(x, y)$ , 出射点为  $P_2(x, y)$ 。在薄透镜和傍轴条件下, 可近似地认为  $P_1(x, y)$ 、 $P_2(x, y)$  等高, 于是相位差为

$$\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y) = k(n\Delta_1 + n_L d + n'\Delta_2). \quad (1)$$

式中  $k$  为真空中波数。忽略透镜的吸收, 其相位变换函数为

$$\tilde{T}_L(x, y) = \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (2)$$

考虑到  $d = d_0 - (\Delta_1 + \Delta_2)$ ,

$$\text{式中} \quad \Delta_1 = \frac{x^2 + y^2}{2r_1}, \quad \Delta_2 = \frac{x^2 + y^2}{2(-r_2)}.$$

式中曲率半径按第二章 2.2 节正负号规定  $r_2 < 0$ 。

代入 (1) 式

$$\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y) = \frac{k}{2} \left( \frac{n - n_L}{r_1} - \frac{n' - n_L}{r_2} \right) (x^2 + y^2) + k n_L d_0.$$

于是 (2) 式改写为

$$\tilde{T}_L(x, y) = \tilde{T}_0 \exp \left[ -i \frac{n k (x^2 + y^2)}{2F} \right],$$

式中  $\tilde{T}_0 = e^{ikn_L d_0}$  是一个常数相因子, 而

$$F = n \left( \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \right)^{-1}$$

正是由磨镜者公式给出的物方焦距。

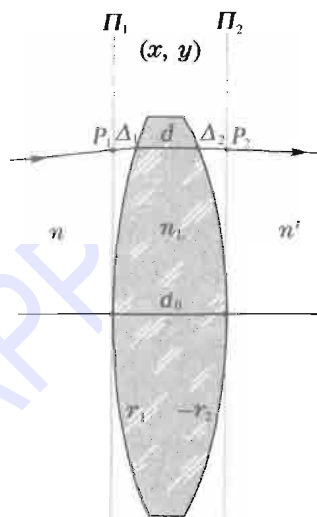
5-2. 用薄透镜的相位变换函数导出傍轴条件下的横向放大率公式。

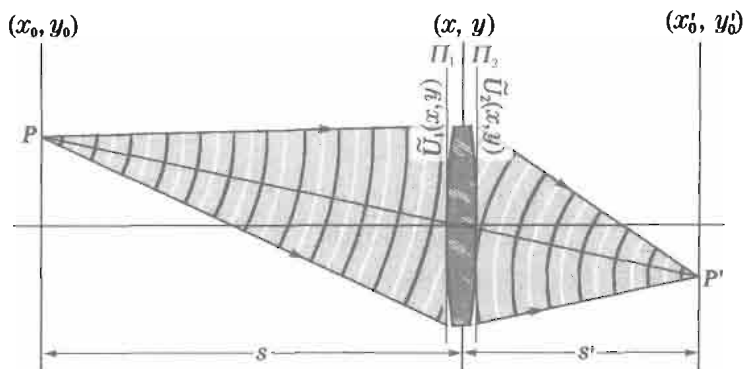
**解:** 如下图, 在透镜前后各取一个平面  $\Pi_1$  和  $\Pi_2$  与顶点相切, 且与光轴垂直。傍轴物点  $P$  距透镜  $s$ , 坐标为  $(x_0, 0)$ , 由此发出的发散球面波到达  $\Pi_1$  的波前函数为

$$\tilde{U}_1(x, y) = \tilde{A}_1 \exp \left[ ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2s} - \frac{x_0 x}{s} \right) \right]. \quad (1)$$

经透镜相位变换函数的作用, 出射波前函数为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{T}_L(x, y) \tilde{U}_1(x, y) \\ &= \tilde{A}_1 \tilde{T}_0 \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2F} \right] \exp \left[ ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2s} - \frac{x_0 x}{s} \right) \right] \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
 &= \tilde{A}_2 \exp \left\{ -ik \left[ \frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{F} - \frac{1}{s} \right) - \frac{x_0 x}{s} \right] \right\} \\
 &= \tilde{A}_2 \exp \left[ -ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2s'} - \frac{x'_0 x}{s'} \right) \right], \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中

$$\tilde{A}_2 = \tilde{A}_1 \tilde{T}_0, \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{F} - \frac{1}{s}, \quad x'_0 = -\frac{s'}{s} x_0, \quad (3)$$

②式是会聚到距透镜  $s'$  处的球面波,  $x'_0$  是会聚中心  $P'$  到光轴的距离, 即像高。③式证明了几何光学里的物像距公式和横向放大率公式:

$$V = \frac{x'_0}{x_0} = -\frac{s'}{s}.$$

5-3. 用劈形棱镜的相位变换函数(5.27)式导出傍轴光束斜入射时产生的偏向角  $\delta$ .

解: 如右图, 入射平行光束倾角为  $\theta$ , 傍轴条件下波前函数为

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_1(x, y) &= A_1 \exp(ikx \sin \theta) \\
 &\approx A_1 \exp(ikx \theta).
 \end{aligned}$$

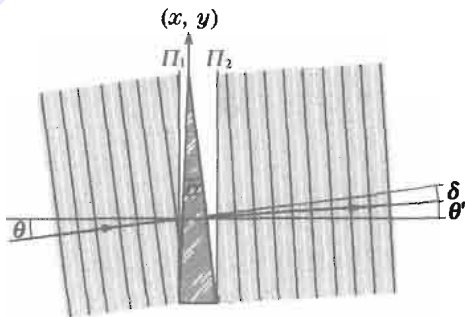
按(5.27)式, 劈形棱镜的相位变换函数为

$$\tilde{T}_p(x, y) = \exp[-ik(n-1)\alpha x].$$

经薄棱镜相位变换函数作用以后, 出射波前函数为

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{U}_1(x, y) \tilde{T}_p(x, y) = A_1 \exp(ikx \theta) \exp[-ik(n-1)\alpha x] \\
 &= A_1 \exp(ikx \theta'),
 \end{aligned}$$

式中  $\theta' = \theta - (n-1)\alpha$ , 偏向角  $\delta = \theta - \theta' = (n-1)\alpha$ .



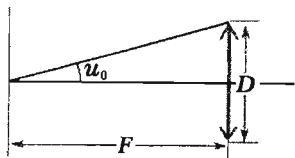
5-4. 在一相干成像系统中, 镜头(作为入射光瞳)的相对孔径为  $1/5$ , 求此系统的截止频率( $\text{mm}^{-1}$ )。设物平面在前焦面附近, 照明波长为  $0.5 \mu\text{m}$ 。

解: 如右图, 系统的截止频率  $f_c$  由镜头口径限制的最大出射角  $u_0$  决定:

$$\sin u_0 = f_{\max} \lambda.$$

从几何上看, 大体上  $\sin u_0 \approx D/2F$ , 所以

$$f_{\max} = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{D}{F} \right) = \frac{1}{2 \times 0.5 \mu\text{m}} \times \frac{1}{5} = 200/\text{mm}.$$



5-5. 利用阿贝成像原理导出在相干照明条件下显微镜的最小分辨距离公式, 并同非相干照明的最小分辨距离公式比较。

解: 上题讨论过的截止频率  $f_{\max}$  的倒数便是镜头口径限制下的相干显微成像系统可分辨的最小空间周期:

$$d_{\min} = \frac{1}{f_{\max}} = \frac{\lambda}{\sin u_0},$$

而非相干显微成像系统的最小分辨距离公式为

$$\delta y_{\min} = 0.61 \frac{\lambda}{\sin u_0},$$

两者的数量级是一样的。

5-6. 采用远场装置(图 5-20b)接收单缝的夫琅禾费衍射场, 设单缝宽约为  $100 \mu\text{m}$ , 入射光波长  $632.8 \text{ nm}$ .

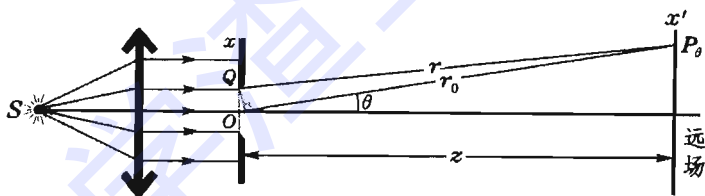


图 5-20b 远场接收

- (1) 接收屏幕至少应放在多远?
- (2) 在接收屏幕的多大范围内才算是夫琅禾费衍射场?
- (3) 0 级半角宽度为多少?
- (4) 在接收屏幕上 0 级的线宽度有多少?

解: (1) 相对于衍射屏线度  $a$  来说, 远场条件要求纵向距离

$$z \gg a^2/\lambda = (100 \mu\text{m})^2/632.8 \text{ nm} = 0.016 \text{ m}$$

取  $z$  大 60 倍, 接收屏幕可放在  $1 \text{ m}$  左右。

(2) 夫琅禾费衍射远场装置只要求接收范围  $\rho$  满足傍轴条件

$$\rho \ll z,$$

取  $\rho$  为  $z$  的  $1/50$ , 即  $2 \text{ cm}$  内是夫琅禾费衍射场。

(3) 零级半角宽度公式是

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{632.8 \text{ nm}}{100 \mu\text{m}} = 6.33 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

(4) 在接收屏幕零级两侧暗点之间的线宽度

$$2\Delta\theta z = 1.3 \text{ cm.}$$

5-7. 采用像面接收装置(图5-20d或e)接收单缝的夫琅禾费衍射场, 设单缝宽度约为1 mm, 入射光波长488.0 nm, 物距40 cm, 像距80 cm.

(1) 如果单缝置于透镜后方, 要求在像面1 cm 范围内准确地接收到夫琅禾费衍射场, 单缝离像面至少多远?

(2) 如果单缝紧贴透镜后侧, 求0级半角宽度和接收屏幕上0级的线宽度;

(3) 如果单缝离透镜40 cm 远, 求0级半角宽度及它在幕上的线宽度;

(4) 如果单缝置于透镜前方, 紧贴在其左侧, 情况如何?

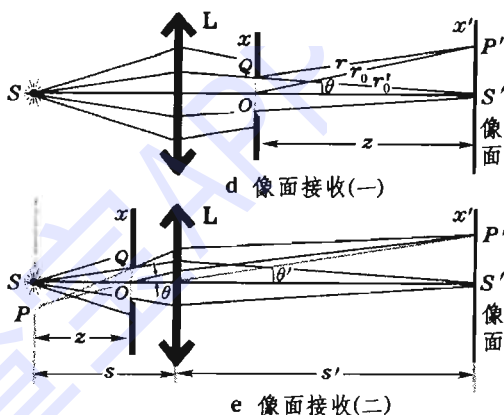


图5-20 d和e 像面接收

解: (1) 像面接收装置对衍射屏和接收屏都只要求傍轴条件, 即要求衍射屏线度  $a$  和接收屏横向线度  $\rho$  满足

$$z \gg a, \quad z \gg \rho.$$

$\rho = 0.5 \text{ cm}$  范围内接收到夫琅禾费衍射场, 可取  $z > 50\rho = 25 \text{ cm}$ .

(2) 单缝紧贴透镜后侧,  $z = s' = 80 \text{ cm}$ , 则像面上0级半角宽度为

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{488.0 \text{ nm}}{1 \text{ mm}} = 4.88 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

0级线宽

$$2\Delta\theta z = 2 \times 4.88 \times 10^{-4} \text{ rad} \times 80 \text{ cm} = 0.78 \text{ mm.}$$

(3) 如果单缝与透镜之间的距离  $s' - z = 40 \text{ cm}$ , 0级半角宽度不变, 0级线宽减半, 即为0.39 mm.

(4) 如果衍射屏置于透镜前方紧贴在其左侧, 情况与(2)同.

5-8. 对图5-20 d和e所示装置, 推导出傍轴条件下它的衍射场表达式, 并论证它符合夫琅禾费衍射场的标准形式。



【提示：对于装置 e，利用场点  $P'$  的共轭点  $P$ （见图 5-20e）。】

证：设从点光源  $S$  照射在衍射屏上的复振幅为  $\tilde{U}_1(x, y)$ ，经衍射屏函数  $\tilde{T}(x, y)$  的修饰后变为  $\tilde{U}_2(x, y)$ ，照射在接收屏 ( $S$  的像面) 上的复振幅分布为  $\tilde{U}(x', y')$ ，则

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(x, y) &= A e^{ik(SQ)}, \\ \tilde{U}_2(x, y) &= \tilde{U}_1(x, y) \tilde{T}(x, y), \\ \tilde{U}(x', y') &= C \iint \tilde{U}_2(x, y) e^{ik(QP')} dx dy = C \iint \tilde{U}_1(x, y) \tilde{T}(x, y) e^{ik(QP')} dx dy \\ &= C' \iint \tilde{T}(x, y) e^{ik(SQP')} dx dy.\end{aligned}\quad (1)$$

(1) 像面接收 (一)

如图 d，衍射屏在透镜后。

$$\begin{aligned}r &= (QP') = z \left[ 1 + \frac{(x' + x)^2 + (y' + y)^2}{2z^2} \right] \\ &= z \left( 1 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z^2} + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} - \frac{x'x + y'y}{z^2} \right) = (QS') + \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{x'x + y'y}{z},\end{aligned}$$

其中  $(QS') = r'_0 = z \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right).$

$$\begin{aligned}\text{于是 } \tilde{U}(x', y') &= C' \iint \tilde{T}(x, y) e^{ik(SQP')} dx dy \\ &= C' \iint \tilde{T}(x, y) e^{i(SQS')} \exp \left[ ik \left( \frac{x'^2 + y'^2}{2z} - \frac{x'x + y'y}{z} \right) \right] dx dy,\end{aligned}$$

因物像之间的等光程性，光程  $(SQS')$  与  $x, y$  无关。在上列积分里凡与  $x, y$  无关的因子都可从积分号中提出来，于是

$$\tilde{U}(x', y') = C' e^{i(SQS')} \exp \left( ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z} \right) \iint \tilde{T}(x, y) \exp \left( -ik \frac{x'x + y'y}{z} \right) dx dy.$$

上式符合夫琅禾费衍射积分的标准形式。

(2) 像面接收 (二)

如图 e，衍射屏在透镜前。因物像之间的等光程性，光程  $(SQS')$  和  $(PQP')$  都是与  $x, y$  无关的。于是

$$\begin{aligned}(SQP') &= (SQ) + (QP') = (SQS') - (QS') + (PQP') - (PQ) \\ &= (SQS') + (PQP') - (PQS') = (SQS') + (PQP') + (S'QP),\end{aligned}$$

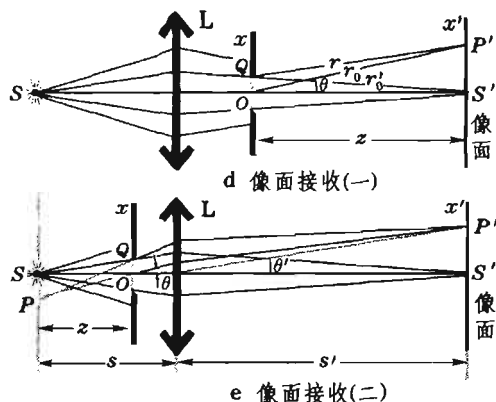


图 5-20 d 和 e 像面接收

即光程( $SQP'$ )与( $S'QP$ )只差一个常量,①式中的相因子 $e^{ik(SQP')}$ 可用 $e^{ik(S'QP)}$ 代替,差别只是积分前的因子 $C'$ .

$$\tilde{U}(x', y') = C'' \iint \tilde{T}(x, y) e^{ik(S'QP)} dx dy. \quad (2)$$

光程( $S'QP$ )=( $S'Q$ )+( $QP$ )的计算只需把图d中的光路倒过来,其中( $QP$ )段与(1)中( $QP'$ )的差别只是 $z$ 代表衍射屏与物面的距离,以及( $x', y'$ )换成( $x, y$ )/ $V$ ( $V$ 为横向放大率):

$$(QP) = (QS) + \frac{x'^2 + y'^2}{2zV^2} - \frac{x'x + y'y}{zV}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \tilde{U}(x', y') &= C'' \iint \tilde{T}(x, y) e^{ik(S'QP)} dx dy \\ &= C'' \iint \tilde{T}(x, y) e^{i(S'QS)} \exp \left[ ik \left( \frac{x'^2 + y'^2}{2zV^2} - \frac{x'x + y'y}{zV} \right) \right] dx dy \\ &= C'' e^{i(S'QS)} \exp \left( ik \frac{x'^2 + y'^2}{2zV^2} \right) \iint \tilde{T}(x, y) \exp \left( -ik \frac{x'x + y'y}{zV} \right) dx dy. \end{aligned}$$

上式也符合夫琅禾费衍射积分的标准形式。

**5-9.** 在透镜的前焦面上有一系列同相位的相干光源等距排列在 $x$ 轴上,形成一维点阵(见本题图),用傅里叶变换法求后焦面上的夫琅禾费衍射场。

**解:** 点源的复振幅应由 $\delta$ 函数来描述。沿 $x$ 轴等距排列的一维点阵表示为

$$\tilde{G}(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x - nd, y),$$

后焦面上的夫琅禾费衍射场为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x', y') &= \iint \tilde{G}(x, y) e^{-2\pi i(f_x x + f_y y)} dx dy \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i f_x nd} = \frac{1 - e^{-2\pi i f_x Nd}}{1 - e^{-2\pi i f_x d}}. \end{aligned}$$

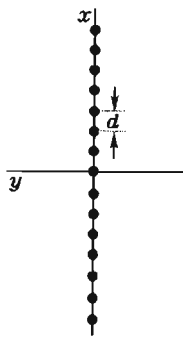
式中 $f_x = x'/F\lambda$ . 衍射场强度分布为

$$\begin{aligned} I(x', y') &= \tilde{U}(x', y') \tilde{U}^*(x', y') = \frac{1 - e^{-2\pi i f_x Nd}}{1 - e^{-2\pi i f_x d}} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i f_x Nd}}{1 - e^{2\pi i f_x d}} \\ &= \frac{2 - 2 \cos(2N\pi f_x d)}{2 - 2 \cos(2\pi f_x d)} = \frac{\sin^2(N\pi f_x d)}{\sin^2(\pi f_x d)} = \frac{\sin^2(N\beta x')}{\sin^2(\beta x')}, \end{aligned}$$

式中 $\beta = \pi d/F\lambda$ . 这与 $N$ 缝的缝间干涉因子是一样的。

**5-10.** 设透镜直径 $D=5\text{ cm}$ , 焦距 $F=60\text{ cm}$ , 图像(衍射屏)线度 $l=2\text{ cm}$ , 入射光波长 $\lambda=0.6\text{ }\mu\text{m}$ .

(1) 分别算出后焦面上( $x', y'$ )=(0,0), (0,1), (1,0), ( $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2$ ), ( $-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2$ ), (0.5,2), (3, -5), (-10, -15)(单位皆为mm)等地点所对应



习题 5-9

的空间频率( $f_x, f_y$ )的具体数值(单位皆为  $\text{mm}^{-1}$ )。

(2) 计算系统的截止频率。

解: (1) 夫琅禾费衍射场点位置( $x', y'$ )与屏函数空间频率( $f_x, f_y$ )的关系为

$$(f_x, f_y) = (x', y')/F\lambda.$$

按题意算出( $f_x, f_y$ )值列于下表。

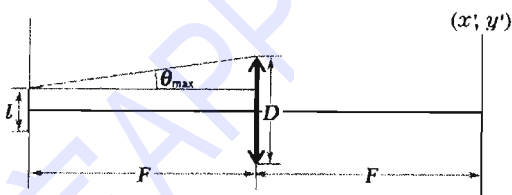
| $(x', y')/\text{mm}$       | $(f_x, f_y)/\text{mm}^{-1}$ | $(x', y')/\text{mm}$        | $(f_x, f_y)/\text{mm}^{-1}$ |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (0,0)                      | (0,0)                       | $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ | (-1.96, 1.96)               |
| (0,1)                      | (0, 0.28)                   | (0.5, 2)                    | (1.39, 5.56)                |
| (1,0)                      | (0.28, 0)                   | (3, -5)                     | (8.3, -13.9)                |
| $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ | (1.96, 1.96)                | (-10, -15)                  | (-27.8, -41.7)              |

(2) 如右图, 透镜所能接收的最大衍射角  $\theta_{\max}$  满足

$$\sin \theta_{\max} \approx \left( \frac{D}{2} - \frac{l}{2} \right) F^{-1} = \frac{D-l}{2F}.$$

因此, 透镜作为滤高频的低通滤波器, 其截止频率为

$$f_{\max} = \frac{\sin \theta_{\max}}{\lambda} \approx \frac{D-l}{2F\lambda} = \frac{(5-2) \text{ cm}}{2 \times 60 \text{ cm} \times 0.6 \mu\text{m}} = 42/\text{mm}.$$



5-11. 如本题图 a, 参考光束  $R$  和物光束  $O$  均为平行光, 对称地斜入射于记录介质  $\Sigma$  上, 即  $\theta_R = -\theta_O$ , 二者间的夹角  $\theta = 2\theta_O$ .

(1) 试说明全息图上干涉条纹的形状;

(2) 试分别写出物光波和参考光波在  $\Sigma$  平面上的相位分布  $\varphi_O(y)$  和  $\varphi_R(y)$ ;

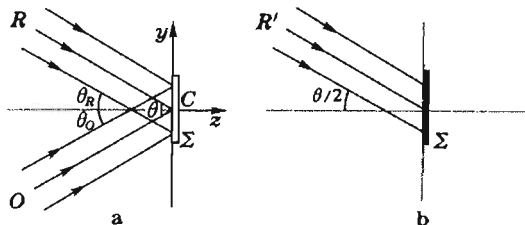
(3) 试证明全息图上干涉条纹的间距公式为

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}.$$

(4) 试计算, 当夹角  $\theta = 1^\circ$  时间距  $d$  为多少? 当

夹角  $\theta = 60^\circ$  时间距  $d$  为多少? (采用 He-Ne 激光记录,  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .)

(5) 某感光胶片厂生产一种可用于全息照相的记录干版, 其性能如下: 感光层厚度为  $8 \mu\text{m}$ , 分辨率为 3000 条/mm 以上。利用题(4) 所得数据, 试说明: 当夹角  $\theta = 60^\circ$  时, 用该记录干版是否构成一张体全息图? 当夹角  $\theta = 60^\circ$  时, 该记录干版的分辨率是否匹配?



习题 5-11

(6) 如本题图 b, 采用与参考光束  $R$  同样波长同样倾角的照明光束  $R'$  照射该张全息图, 试分析 0 级、+1 级、-1 级三个衍射波都出现在什么方向上, 并在图上画出。

解: (1) 条纹形状为一组与  $y$  轴正交的等距直线。

(2) 物光波  $O$  和参考光波  $R$  在  $\Sigma$  平面上的相位分布函数分别为

$$\varphi_O(y) = ky \sin \theta_O + \varphi_0,$$

$$\varphi_R(y) = ky \sin \theta_R = -ky \sin \theta_O,$$

式中  $\varphi_0$  为物光波和参考光波在  $\Sigma$  面坐标原点处的相位差。

(3) 应从相位差的改变来确定条纹的间距。当场点坐标改变一个条纹间距  $\Delta y$  时, 相位差改变  $2\pi$ , 干涉强度还原。物光波与参考光波在  $\Sigma$  面上的相位差分布为

$$\Delta\varphi(y) = \varphi_O(y) - \varphi_R(y) = 2ky \sin \theta_O + \varphi_0,$$

当它改变  $2\pi$  时  $y$  的相应改变量  $\Delta y$  为干涉条纹间距:

$$\Delta y = \frac{2\pi}{2k \sin \theta_O} = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}.$$

$$(4) \quad \theta = 1^\circ \text{ 时, } \Delta y = \frac{632.8 \text{ nm}}{2 \times \sin 0.5^\circ} = 36.26 \mu\text{m}.$$

$$\theta = 60^\circ \text{ 时, } \Delta y = \frac{632.8 \text{ nm}}{2 \times \sin 30^\circ} = 0.6328 \mu\text{m}.$$

(5) 当  $\theta = 60^\circ$  时, 感光层厚  $8 \mu\text{m}$  远大于条纹间距  $\Delta y = 0.6328 \mu\text{m}$ , 故该记录干版可以构成一张体全息图。

干版的最小分辨距离为  $d = 3000^{-1} \text{ mm} = 0.33 \mu\text{m} < \Delta y$ , 且两者同数量级, 是匹配的。

(6) 记录时, 干涉场的强度分布为

$$I_H(x, y) = (\tilde{U}_O + \tilde{U}_R)(\tilde{U}_O + \tilde{U}_R)^*.$$

经线性冲洗后, 这张全息底片的透过率函数为

$$\tilde{T}_H = T_0 + \beta I_H(x, y) = T_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2 + \beta \tilde{U}_R^* \tilde{U}_O + \beta \tilde{U}_R \tilde{U}_O^*.$$

经照明光波  $\tilde{U}_R'$  作用, 透射场为

$$\tilde{U}_T = \tilde{T}_H \tilde{U}_R' = (T_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2) \tilde{U}_R' + \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R^* \tilde{U}_O + \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R \tilde{U}_O^*. \quad (1)$$

式中  $\tilde{U}_R'$ 、 $\tilde{U}_O$ 、 $\tilde{U}_R$  分别为照明光波、物光波、参考光波三列平面波的波前函数:

$$\begin{cases} \tilde{U}_R' = \tilde{U}_R = A_R \exp\left(-iky \sin \frac{\theta}{2}\right), \\ \tilde{U}_O = A_O \exp\left(iky \sin \frac{\theta}{2} + i\varphi_0\right). \end{cases}$$

于是透射场的具体形式为

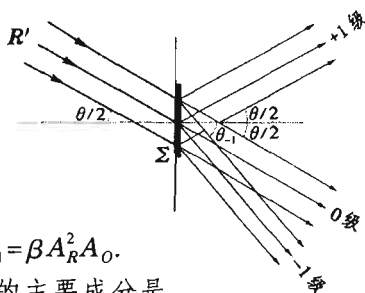
$$\begin{aligned}\tilde{U}_T = & A_0 \exp\left(-iky \sin \frac{\theta}{2}\right) \\ & + A_{+1} \exp\left(iky \sin \frac{\theta}{2} + i\varphi_0\right) \\ & + A_{-1} \exp\left(-iky \sin \frac{\theta}{2} + i\varphi_0\right), \quad (2)\end{aligned}$$

式中

$$A_0 = (T_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2) A_R, \quad A_{+1} = A_{-1} = \beta A_R^2 A_0.$$

从相因子可以判断,透射场如上图所示,包含的主要成分是三列平面衍射波,它们的方向分别为

$$\theta_{+1} = +\frac{\theta}{2}, \quad \theta_0 = -\frac{\theta}{2}, \quad \theta_{-1} = -\arcsin\left(3 \sin \frac{\theta}{2}\right).$$



5-12. 若在上题中改为用正入射的平面波再现,  $\pm 1$  级衍射波各发生什么变化?

解: 照明光波照在全息图上,透射场如上题①式:

$$\tilde{U}_T = \tilde{T}_H \tilde{U}_R' = (T_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2) \tilde{U}_R' + \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R^* \tilde{U}_0 + \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R \tilde{U}_0^*. \quad (1)$$

式中  $\tilde{U}_0$ 、 $\tilde{U}_R$  如上题:

$$\begin{cases} \tilde{U}_R = A_R \exp\left(-iky \sin \frac{\theta}{2}\right), \\ \tilde{U}_0 = A_0 \exp\left(iky \sin \frac{\theta}{2} + i\varphi_0\right), \\ \tilde{U}_R' = A_R'. \end{cases}$$

但

于是透射场的具体形式为

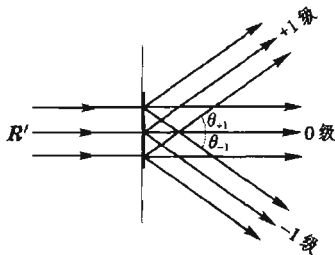
$$\tilde{U}_T = A_0 + A_{+1} \exp\left(2iky \sin \frac{\theta}{2} + i\varphi_0\right) + A_{-1} \exp\left(-2iky \sin \frac{\theta}{2} - i\varphi_0\right),$$

式中  $A_0 = (T_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2) A_R'$ ,

$$A_{+1} = A_{-1} = \beta A_R A_0 A_R'.$$

从相因子可以判断,透射场包含的主要成分是三列平面衍射波(见右图),它们的方向分别为

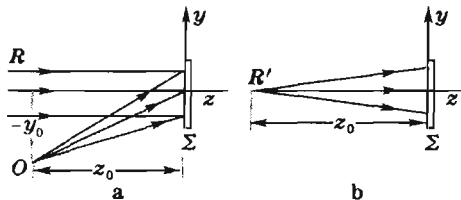
$$\theta_0 = 0, \quad \theta_{\pm 1} = \pm \arcsin\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right).$$



5-13. 如本题图 a, 用正入射的平面参考光波记录轴外物点 O 发出的球面波。

(1) 如本题图 b 所示, 用轴上的点源 R' 发出的球面波来重建波前, 求  $\pm 1$  级两像点的位置;

(2) 用与记录全息图时不同波长的正入射平面波照明, 求  $\pm 1$  级两像点的位置。



习题 5-13

解：照明光波照在全息图上，透射场如习题 5-11 的解中 ① 式：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_T &= \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1}, & \text{①} \\ \text{其中} \quad \begin{cases} \tilde{U}_0 &= (T_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2) \tilde{U}_R', & \text{②} \\ \tilde{U}_{+1} &= \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R^* \tilde{U}_0, & \text{③} \\ \tilde{U}_{-1} &= \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R^* \tilde{U}_0^*. & \text{④} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{以及} \quad \tilde{U}_0 = A_O \exp \left[ i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{y_0 y}{z_0} \right) \right], \quad \tilde{U}_R = A_R \exp(i\varphi_R). \quad \text{⑤}$$

$$\text{(1) 若} \quad \tilde{U}_R' = A_R' \exp \left[ i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \varphi_R' \right) \right], \quad \text{⑥}$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 &= (T_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2) A_R' \exp \left[ i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \varphi_R' \right) \right], \\ \tilde{U}_{+1} &= \beta A_R' A_R A_O \exp \left[ i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \varphi_R' \right) \right] \exp(-i\varphi_R) \exp \left[ i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{y_0 y}{z_0} \right) \right] \end{aligned}$$

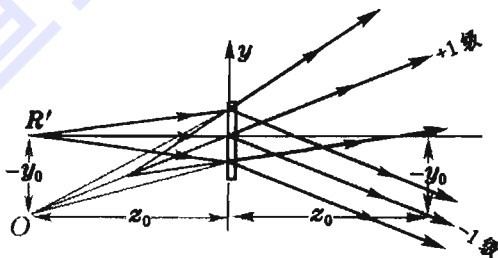
$$= A_{+1} \exp \left[ i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_{+1}} + \frac{y_{+1} y}{z_{+1}} \right) \right] \exp[i(\varphi_R' - \varphi_R)],$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{-1} &= \beta A_R' A_R A_O \exp \left[ i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \varphi_R' \right) \right] \exp(i\varphi_R) \exp \left[ -i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{y_0 y}{z_0} \right) \right] \\ &= A_{-1} \exp \left[ i \left( -k \frac{y_0 y}{z_0} + \varphi_R' + \varphi_R \right) \right], \end{aligned}$$

$$\text{式中} \quad A_{+1} = \beta A_R' A_R A_O,$$

$$z_{+1} = z_0/2, \quad y_{+1} = y_0/2.$$

从相因子可以判断，+1 级虚像点的位置在  $(y_0/2, z_0/2)$ ，-1 级像点的位置在无穷远（见右图）。0 级虚像点在  $R'$  的原来位置。



(2) 用不同波长的正入射平面波照明，

$$\tilde{U}_R' = A_R' \exp(i\varphi_R'), \quad \text{⑦}$$

则

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 &= (T_0 + \beta A_O^2 + \beta A_R^2) A_R' \exp(i\varphi_R'), \\ \tilde{U}_{+1} &= \beta A_R' A_R A_O \exp(i\varphi_R') \exp(-i\varphi_R) \exp \left[ i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{y_0 y}{z_0} \right) \right] \end{aligned}$$

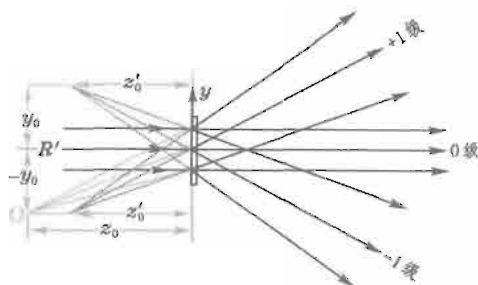
$$= A_{+1} \exp \left[ i k' \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_0'} + \frac{y_0 y}{z_0'} \right) \right] \exp[i(\varphi_R' - \varphi_R)],$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{-1} &= \beta A_R' A_R A_O \exp(i\varphi_R') \exp(i\varphi_R) \exp \left[ -i k \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \frac{y_0 y}{z_0} \right) \right] \\ &= A_{-1} \exp \left[ -i k' \left( \frac{x^2 + y^2}{2z_0'} + \frac{y_0 y}{z_0'} \right) \right] \exp[i(\varphi_R' + \varphi_R)], \end{aligned}$$

式中  $A_{\pm 1} = \beta A_R' A_R A_O$ ,

$$z_0' = \frac{k'}{k} z_0 = \frac{\lambda}{\lambda'} z_0.$$

从相因子可以判断,  $\pm 1$  级虚像点的位置在  $(\pm y_0, z_0')$  (见右图), 0 级仍为  $R'$  原方向的平面波。



5-14. (1) 求图 5-32a 所示装置制备的全息图中各级干涉条纹的半径, 并证明它们与一张菲涅耳波带片相符;

(2) 验证用图 5-32c 方式再现的两个像点  $O$ 、 $O'$  确是菲涅耳波带片的一对焦点。

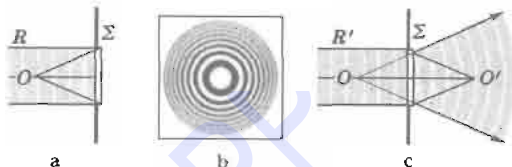


图 5-32

解: (1) 照明光波照在全

息图上, 透射场如习题 5-11 的解中 ① 式:

$$\tilde{U}_T = \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{+1} + \tilde{U}_{-1}, \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{U}_0 = (T_0 + \beta A_0^2 + \beta A_R^2) \tilde{U}_R', & (2) \\ \tilde{U}_{+1} = \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R^* \tilde{U}_O, & (3) \\ \tilde{U}_{-1} = \beta \tilde{U}_R' \tilde{U}_R \tilde{U}_O^*. & (4) \end{cases}$$

在本题中

$$\tilde{U}_O = A_O \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2z_0}\right), \quad \tilde{U}_R = A_R \exp(i\varphi_R), \quad \tilde{U}_R' = A_R \exp(i\varphi_R').$$

于是

$$\tilde{U}_{\pm 1} = \beta A_R' A_R A_O \exp\left[i\left(\pm k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} + \varphi_R' \mp \varphi_R\right)\right].$$

从相因子可以判断,  $+1$  级虚像点的位置在  $O$  处,  $-1$  级实像点的位置在  $O$  的镜像对称点  $O'$  处。

(2) 当  $x^2 + y^2 = \rho_1^2$  (第一菲涅耳半波带的半径) 时, 相位等于  $\pi$ :

$$k \frac{x^2 + y^2}{2z_0} = k \frac{\rho_1^2}{2z_0} = \pi. \quad \text{即} \quad z_0 = \frac{k\rho_1^2}{2\pi} = \frac{\rho_1^2}{\lambda},$$

这正是菲涅耳波带片的焦距公式  $f = \rho_1^2 / \lambda$ , 故  $O$ 、 $O'$  是菲涅耳波带片的一对焦点。