1. 试用 $\vec{A}$ 表示一个沿 z 方向的均匀恒定磁场 $\vec{B}_0$，写出 $\vec{A}$ 的两种不同表示式，证明两者之差是无旋场。

解：$\vec{B}_0$ 是沿 z 方向的均匀的恒定磁场，即 $\vec{B}_0=B\vec{e}_z$，且 $\vec{B}_0=\nabla\times\vec{A}$

在直角坐标系中，$\nabla\times\vec{A}=(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\vec{e}_x+(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\vec{e}_y+(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\vec{e}_z$

如果用 $\vec{A}$ 在直角坐标系中表示 $\vec{B}_0$，即：
$$\begin{cases}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=0\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=0\end{cases}$$

由此组方程，可看出 $\vec{A}$ 有多组解，如：

解 1：$A_y=A_Z=0, A_x=-B_0y+f(x)$

即：　$\vec{A}=[-B_0y+f(x)]\vec{e}_x$

解 2：$A_x=A_z=0, A_Y=B_0x+g(y)$

即：　$\vec{A}=[B_0x+g(y)]\vec{e}_y$

解 1 和解 2 之差为：$\Delta\vec{A}=[-B_0y+f(x)]\vec{e}_x-[B_0x+g(y)]\vec{e}_y$

则：

$$\nabla\times(\Delta\vec{A})=[\frac{\partial(\Delta A)_z}{\partial y}-\frac{\partial(\Delta A)_y}{\partial z}]\vec{e}_x+[\frac{\partial(\Delta A)_x}{\partial z}-\frac{\partial(\Delta A)_z}{\partial x}]\vec{e}_y+[\frac{\partial(\Delta A)_y}{\partial x}-\frac{\partial(\Delta A)_x}{\partial y}]\vec{e}_z$$

$=0$

这说明两者之差是无旋场。

2. 均匀无穷长直圆柱形螺线管，每单位长度线圈匝数为 n，电流强度为 I，试用唯一性定理求管内外磁感应强度 B。

解：根据题意，得右图，取螺线管的中轴线为 z 轴

本题给定了空间中的电流分布，故可由 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3}dV'$ 求解磁场分布，又 $\vec{J}$ 在导线上，所以 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Jd\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

1）螺线管内：由于螺线管是无限长理想螺线管，故，由电磁学的有关知识知，其内部磁

场是均匀强磁场，故只须求出其中轴线上的磁感应强度，即可知道管内磁场。
由其无限长的特性，不妨取场点为零点，以柱坐标计算：

$$\vec{r}=-a\cos\varphi'\vec{e}_x-a\sin\varphi'\vec{e}_y-z'\vec{e}_x$$

$$d\vec{l}=-ad\varphi'\cdot\sin\varphi'\vec{e}_x+ad\varphi'\cdot\cos\varphi'\vec{e}_y$$

$$\therefore d\vec{l}\times\vec{r}=(-ad\varphi'\cdot\sin\varphi'\vec{e}_x+ad\varphi'\cdot\cos\varphi'\vec{e}_y)\times(-a\cos\varphi'\vec{e}_x-a\sin\varphi'\vec{e}_y-z'\vec{e}_x)$$

$$=-az'\cos\varphi'd\varphi'\vec{e}_x-az'\sin\varphi'd\varphi'\vec{e}_y+a^2d\varphi'\vec{e}_z$$

取由 $z'-z'+dz'$ 的以小段，此段上分布有电流 $nIdz'$

$$\therefore\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{nJdz'(-az'\cos\varphi'd\varphi'\vec{e}_x-az'\sin\varphi'd\varphi'\vec{e}_y+a^2d\varphi'\vec{e}_z)}{[a^2+(z')^2]^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2dz'}{[a^2+(z')^2]^{3/2}}\cdot nI\vec{e}_z=\frac{nI\mu_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(\frac{z'}{a})}{[(\frac{z'}{a})^2+1]^{3/2}}=n\mu_0I$$

2)螺线管外部:由于是无限长螺线管，不妨就在 xoy 平面上任取一点 $P(\rho,\varphi.0)$ 为场点 $(\rho>a)$

$$\therefore|r|=|\vec{x}-\vec{x}'|=\sqrt{(\rho\cos\varphi-a\cos\varphi')^2+(\rho\sin\varphi-a\sin\varphi')^2+z'^2}$$

$$=\sqrt{\rho^2+a^2+z'^2-2a\rho\cos(\varphi-\varphi')}$$

$$\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'=(\rho\cos\varphi-a\cos\varphi')\vec{e}_x+(\rho\sin\varphi-a\sin\varphi')\vec{e}_y-z'\vec{e}_z$$

$$d\vec{l}=-ad\varphi'\cdot\sin\varphi'\vec{e}_x+ad\varphi'\cdot\cos\varphi'\vec{e}_y$$

$$\therefore d\vec{l}\times\vec{r}=-az'\cos\varphi'd\varphi'\vec{e}_x-az'\sin\varphi'd\varphi'\vec{e}_y+[a^2-a\rho\cos(\varphi'-\varphi)]d\varphi'\vec{e}_z$$

$$\therefore\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot nI[\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{az'\cos\varphi'd\varphi'}{r^3}\vec{e}_xdz'+\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{az'\sin\varphi'd\varphi'}{r^3}\vec{e}_ydz'+$$

$$+\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2-a\rho\cos(\varphi'-\varphi)}{r^3}dz'\vec{e}_z]$$

由于磁场分布在本题中有轴对称性，而螺线管内部又是匀强磁场，且螺线管又是无限长，故不会有磁力线穿出螺线管，上述积分为 0，所以 $\vec{B}=0$。

3. 设有无穷长的线电流 I 沿 z 轴流动，以 z<0 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，z>0 区域为真空，试用唯一性定理求磁感应强度 B，然后求出磁化电流分布。

解：本题的定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}_1=-\mu_0\vec{J},(z>0)\\ \nabla^2\vec{A}_2=-\mu\vec{J},(z<0)\\ \vec{A}_1=\vec{A}_2\big|_{z=0}\\ \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_2\big|_{z=0}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_1\big|_{z=0}\end{cases}$$

由本题具有轴对称性，可得出两个泛定方程的特解为：

$$\vec{A}_1(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}}{r}$$
$$\vec{A}_2(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l}}{r}$$

由此可推测本题的可能解是：$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z>0)\\ \dfrac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z<0)\end{cases}$

验证边界条件：1）$\vec{A}_1=\vec{A}_2\big|_{z=0}$,即$\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0$

题中，$\vec{n}=\vec{e}_z$,且$\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta=0$，所以边界条件 1）满足。

2）$\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_2\big|_{z=0}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_1\big|_{z=0}$,即$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$

本题中介质分界面上无自由电流密度，又

$$\vec{H}_1=\frac{\vec{B}_1}{\mu_0}=\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$
$$\vec{H}_2=\frac{\vec{B}_2}{\mu}=\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

$\therefore\vec{H}_2-\vec{H}_1=0$,满足边界条件$\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0$

综上所述，由唯一性定理可得，本题有唯一解：$\vec{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z>0)\\ \dfrac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_\theta,(z<0)\end{cases}$

在介质中，$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$，故在 z<0 的介质中，$\vec{M}=\dfrac{\vec{B}_2}{\mu_0}-\vec{H}_2$

即：$\vec{M}=\frac{I}{2\pi r}\cdot\frac{\mu}{\mu_0}\vec{e}_\theta-\frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\theta=\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_\theta$

∴ 介质界面上的磁化电流密度：

$$\vec{\alpha}_M=\vec{M}\times\vec{n}=\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_\theta\times\vec{e}_z=\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_r$$

总的感应电流：$J_M=\int\vec{M}\cdot d\vec{l}=\int_0^{2\pi}\frac{I}{2\pi r}(\frac{\mu}{\mu_0}-1)\vec{e}_\theta\cdot r\cdot d\varphi\cdot\vec{e}_\theta=I(\frac{\mu}{\mu_0}-1)$，电流在 z<0 的空间中，沿 z 轴流向介质分界面。

4. 设 x<0 半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，x>0 空间为真空，今有线电流 I 沿 z 轴流动，求磁感应强度和磁化电流分布。

解：假设本题中得磁场分布仍呈轴对称，则可写作

$$\vec{B}=\frac{\mu' I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

其满足边界条件：
$$\begin{aligned}&\vec{n}\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0\\&\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{\alpha}=0\end{aligned}$$

即可得，在介质中：

$$\vec{H}_2=\frac{\vec{B}}{\mu}=\frac{\mu' I}{2\pi r\mu}\vec{e}_\varphi$$

而 $\vec{H}_2=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}=\frac{\mu' I}{2\pi r\mu_0}\vec{e}_\varphi-\vec{M}$

∴在 x<0 的介质中，$\vec{M}=\frac{\mu' I}{2\pi r}\frac{\mu-\mu_0}{\mu\mu_0}\vec{e}_\varphi$

则 $I_M=\oint\vec{M}d\vec{l}$，取积分路线为 $B\to C\to A\to B$ 的半圆。

$\because \overrightarrow{AB}\perp\vec{e}_\varphi$， $\therefore \overrightarrow{AB}$ 段积分为零

$$I_M=\frac{I\mu'(\mu-\mu_0)}{2\mu\mu_0}$$

$$\therefore \vec{B}=\frac{\mu_0(I+I_M)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

∴由 $\frac{\mu_0(I+I_M)}{2\pi r}\vec{e}_\varphi=\vec{B}=-\frac{\mu' I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$，可得 $\mu'=\frac{2\mu\mu_0}{\mu+\mu_0}$

$\therefore$ 空间 $\vec{B}=\dfrac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0}\dfrac{I}{\pi r}\vec{e}_\varphi$

$$I_M=\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}I \qquad \text{（沿 z 轴）}$$

5. 某空间区域内有轴对称磁场，在柱坐标原点附近已知 $B_z\approx B_0-C(z^2-\dfrac{1}{2}\rho^2)$，其中 B_0 为常量，试求该处的 B_ρ。

提示：用 $\nabla\cdot\vec{B}=0$, 并验证所得结果满足 $\nabla\times\vec{H}=0$。

解：由 $\vec{B}$ 具有轴对称性，设 $\vec{B}=B_\rho\vec{e}_\rho+B_z\vec{e}_z$，其中 $B_z=B_0-c(z^2-\dfrac{1}{2}\rho^2)$

$$\because \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\therefore \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\frac{\partial}{\partial z}B_z=0$$

即 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)-2cz=0$ 　　　　$\therefore \rho B_\rho=cz\rho^2+A$ (常数)

取 $A=0$，　得 $B_\rho=cz\rho$

$$\therefore \vec{B}=cz\rho\vec{e}_\rho+[B_0-c(z^2-\frac{1}{2}\rho^2)]\vec{e}_z \qquad (1)$$

$$\because \vec{j}=0,\vec{D}=0 \qquad \therefore \nabla\times\vec{B}=0 \ \text{即}\ (\frac{\partial B_\rho}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial\rho})\vec{e}_\theta=0 \qquad (2)$$

代入（1）式可得（2）式成立，$\therefore B_\rho=cz\rho$，　c 为常数。

6. 两个半径为 a 的同轴线圈形线圈，位于 $z=\pm L$ 面上，每个线圈上载有同方向的电流 I。
（1）　求轴线上的磁感应强度
（2）　求在中心区域产生最接近于均匀的磁场时的 L 和 a 的关系。

提示：用条件 $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}B_z=0$

解：1）由毕－萨定律，L 处线圈在轴线上 z 处产生得磁感应强度为

$$\vec{B}_1=B_{1z}\vec{e}_z,\qquad B_{1z}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\left|Id\vec{l}\times\vec{r}\right|}{r^3}\sin\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia^2}{[a^2+(z-L)^2]^{3/2}}\int d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\mu_0 Ia^2\frac{1}{[(L-z)^2+a^2]^{3/2}}$$

同理，－L 处线圈在轴线上 z 处产生得磁感应强度为：

$$\vec{B}_2=B_{2z}\vec{e}_z,\qquad B_{2z}=\frac{1}{2}\mu_0 Ia^2\frac{1}{[(L+z)^2+a^2]^{3/2}}$$

∴ 轴线上得磁感应强度

$$\vec{B}=B_z\vec{e}_z=\frac{1}{2}\mu_0 Ia^2\left\{\frac{1}{[(L-z)^2+a^2]^{3/2}}+\frac{1}{[(L+z)^2+a^2]^{3/2}}\right\}\vec{e}_z$$

2）$\because\nabla\times\vec{B}=0$

$$\therefore\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}=0$$

又 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，　$\therefore\nabla^2\vec{B}=0,\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}B_z=0$ 代入（1）式中，得：

$$\frac{\left\{-[(L-z)^2+a^2]^{-\frac{1}{2}}(L-z)^2-[(L-z)^2+a^2]^{\frac{1}{2}}\right\}[(L-z)^2+a^2]^3+6(L-z)^2[(L-z)^2+a^2]^{\frac{5}{2}}}{[(L-z)^2+a^2]^6}$$

$$-\frac{\left\{[(L+z)^2+a^2]^{-\frac{1}{2}}(L+z)^2+[(L+z)^2+a^2]^{\frac{1}{2}}\right\}[(L+z)^2+a^2]^3-6(L-z)^2[(L+z)^2+a^2]^{\frac{5}{2}}}{[(L-z)^2+a^2]^6}$$

＝0

取 z＝0，得：

$$(L^2+a^2)^3[-2(L^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}L^2-2(L^2+a^2)^{\frac{1}{2}}]+12(L^2+a^2)^{\frac{5}{2}}L^2=0$$

$$\therefore 5L^2=L^2+a^2$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}a$$

7. 半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 J 均匀分布于截面上，试解矢势 $\vec{A}$ 的微分方程，设导体的磁导率为 μ_0，导体外的磁导率为 μ。

解：定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}_{内}=-\mu_0\vec{J},(r<a)\\ \nabla^2\vec{A}_{外}=0,(r>a)\\ \vec{A}_{内}\big|_0<\infty\\ \vec{A}_{外}\big|_a=\vec{A}_{内}\big|_a\\ \dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_{内}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_{外}\end{cases}$$

选取柱坐标系，该问题具有轴对称性，且解与 z 无关，令

$$\vec{A}_{内}=A_{内}(r)\vec{e}_z$$

$\vec{A}_{外}=A_{外}(r)\vec{e}_z$ 代入定解问题得：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial A_{内}(r)}{\partial r})=-\mu_0 J\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial A_{外}(r)}{\partial r})=0\end{cases}$$

得：
$$A_{内}(r)=-\frac{1}{4}\mu Jr^2+C_1\ln r+C_2$$
$$A_{外}(r)=C_3\ln r+C_4$$

由 $A_{内}(r)\big|_{r=0}<\infty$ 得 $C_1=0$

由 $\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}_{内}=\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_{外}$ 得 $C_3=-\dfrac{\mu}{2}Ja^2$

由 $\vec{A}_{外}\big|_a = \vec{A}_{内}\big|_a$，令 $\vec{A}_{外}\big|_a = \vec{A}_{内}\big|_a = 0$ 得 $C_2 = \dfrac{1}{4}\mu_0 Ja^2, C_4 = \dfrac{\mu}{2}Ja^2 \ln a$

$$\therefore \begin{cases} \vec{A}_{内} = \dfrac{1}{4}\mu_0 \vec{J}(a^2 - r^2) \\ \vec{A}_{外} = \dfrac{\mu}{2}\vec{J}a^2 \ln\dfrac{a}{r} \end{cases}$$

8. 假设存在磁单极子，其磁荷为 Q_m，它的磁场强度为 $\vec{H} = \dfrac{Q_m}{4\pi\mu_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}$。给出它的矢势的一个可能的表示式，并讨论它的奇异性。

解：$\vec{H} = \dfrac{Q_m}{4\pi\mu_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3} = \dfrac{Q_m}{4\pi\mu_0}\dfrac{1}{r^2}\vec{e}_r$

由 $\nabla\times\vec{A} = \vec{B} = \mu_0\vec{H} = \dfrac{Q_m}{4\pi r^2}\vec{e}_r$ 得：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r\sin\theta}[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial\phi}] = \dfrac{Q_m}{4\pi r^2} \\ \dfrac{1}{r}[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\phi} - \dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)] = 0 \\ \dfrac{1}{r}[\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

令 $A_r = A_\theta = 0$，得：$\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) = \dfrac{Q_m\sin\theta}{4\pi r}$

$$\therefore \sin\theta A_\phi = \int_0^\theta \frac{Q_m\sin\theta}{4\pi r}d\theta$$

$$\therefore A_\phi = \frac{Q_m}{4\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}$$

显然，A_ϕ 满足（1）式

∴ 磁单极子产生的矢势 $\vec{A} = \dfrac{Q_m}{4\pi}\dfrac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\vec{e}_\phi$

讨论： 当$\theta \to 0$时，$\vec{A} \to 0$

当$\theta \to \dfrac{\pi}{2}$时，$\vec{A} \to \dfrac{Q_m}{4\pi r}\vec{e}_\phi$

当$\theta \to \pi$时，$\vec{A} \to \infty$ ， 故$\vec{A}$的表达式在$\theta = \pi$具有奇异性，$\vec{A}$不合理

9. 将一磁导率为μ，半径为 R_0 的球体，放入均匀磁场$\vec{H}_0$内，求总磁感应强度$\vec{B}$和诱导磁矩$\vec{m}$。

解：根据题意，以球心为原点建立球坐标，取$\vec{H}_0$的方向为$\vec{e}_z$，此球体在外界存在的磁场的影响下极化，产生一个极化场，并与外加均匀场相互作用，最后达到平衡。保持在一个静止的状态，呈现球对称。

本题所满足的定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_{m_1} = 0, R < R_0 \\ \nabla^2\varphi_{m_2} = 0, R > R_0 \\ \varphi_{m_1} = \varphi_{m_2}, \mu\dfrac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R} = \mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}, (R = R_0) \\ \varphi_{m_1}\big|_{R=0} < \infty \\ \varphi_{m_2}\big|_{R=\infty} = -H_0 R\cos\theta \end{cases}$$

由泛定方程和两个自然边界条件得：

$$\varphi_{m_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_2} = -H_0 R\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

由两个边界条件有：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_0^n P_n(\cos\theta) = -H_0 R_0\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{R_0^{n+1}}P_n(\cos\theta) \\ \displaystyle\mu\sum_{n=1}^{\infty} a_n n R_0^{n-1} P_n(\cos\theta) = -H_0\mu_0\cos\theta - \mu_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)d_n}{R_0^{n+2}}P_n(\cos\theta) \end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{3\mu_0 H_0}{\mu+2\mu_0} \\ d_1 = \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 R_0^3 \\ a_n = d_n = 0, (n \neq 1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \varphi_{m_1} = -\dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu} H_0 R\cos\theta, R < R_0 \\ \varphi_{m_2} = -H_0 R\cos\theta + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2} H_0 \cos\theta, R > R_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{H}_1 = -\nabla\varphi_{m_1} = \dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0} H_0 \cos\theta \vec{e}_r - \dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu} H_0 \sin\theta \vec{e}_\theta = \dfrac{3\mu_0}{\mu+2\mu}\vec{H}_0 \\ \vec{B}_1 = \mu\vec{H}_1 = \dfrac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{H}_2 = -\nabla\varphi_{m_2} = [1+\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{2R_0^3}{R^3}]H_0\cos\theta\vec{e}_r - [1-\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^3}]H_0\sin\theta\vec{e}_\theta \\ = \vec{H}_0 + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3[\dfrac{3(\vec{H}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{H}_0}{R^3}] \\ \vec{B}_2 = \mu_0\vec{H}_2 = \mu_0\vec{H}_0 + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mu_0 R_0^3[\dfrac{3(\vec{H}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{H}_0}{R^3}] \end{cases}$$

$$\therefore \vec{B} = \begin{cases} \dfrac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_0, (R < R_0) \\ \mu_0\vec{H}_0 + \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\mu_0 R_0^3[\dfrac{3(\vec{H}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{H}_0}{R^3}], (R > R_0) \end{cases}$$

当 $\vec{B}$ 在 $R>R_0$ 时，表达式中的第二项课看作一个磁偶极子产生的场

$\therefore \varphi_{m_2}$ 中 $\dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2}H_0\cos\theta$ 可看作偶极子 $\vec{m}$ 产生的势

即：$\dfrac{1}{4\pi}\cdot\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{R^3} = \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2}H_0\cos\theta = \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot\dfrac{R_0^3}{R^2}\vec{H}_0\cdot\vec{R}$

$$\therefore \vec{m} = 4\pi\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\cdot R_0^3\vec{H}$$

10. 有一个内外半径为 R_1 和 R_2 的空心球，位于均匀外磁场 $\vec{H}_0$ 内，球的磁导率为 μ，求空

腔内的场 $\vec{B}$，讨论 $\mu >> \mu_0$ 时的磁屏蔽作用。

解：根据题意，以球心为原点，取球坐标，选取 $\vec{H}_0$ 的方向为 $\vec{e}_z$，在外场 $\vec{H}_0$ 的作用下， 球壳极化，产生一个附加场，并与外场相互作用，最后达到平衡，$\vec{B}$ 的分布呈现轴对称。

定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_{m_1} = 0, R < R_1 \\ \nabla^2\varphi_{m_2} = 0, R_1 < R < R_2 \\ \nabla^2\varphi_{m_3} = 0, R > R_3 \\ \varphi_{m_1} = \varphi_{m_2}\Big|_{R=R_1}, \varphi_{m_2} = \varphi_{m_3}\Big|_{R=R_2} \\ \mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R} = \mu\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R=R_1}, \mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m_3}}{\partial R} = \mu\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R=R_2} \\ \varphi_{m_1}\Big|_{R=0} < \infty \\ \varphi_{m_3}\Big|_{R=\infty} = -H_0 R\cos\theta \end{cases}$$

由于物理模型为轴对称，再有两个自然边界条件，故，三个泛定方程的解的形式为：

$$\varphi_{m_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_2} = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n R^n + \frac{c_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_3} = -H_0 R\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

因为泛定方程的解是把产生磁场的源 $\vec{H}_0$ 做频谱分解而得出的，分解所选取的基本函数系是其本征函数系－$\{P_n(\cos\theta)\}$。在本题中，源的表示是：

$$-H_0 R\cos\theta = -H_0 R P_1(\cos\theta)$$

所以上面的解中，$a_n = b_n = c_n = d_n = 0, (n \neq 0)$

故，解的形式简化为：

$$\varphi_{m_1} = a_1 R\cos\theta$$

$$\varphi_{m_2} = (b_1 R + \frac{c_1}{R^2})\cos\theta$$

$$\varphi_{m_3} = -H_0 R\cos\theta + \frac{d_1}{R^2}\cos\theta$$

代入衔接条件，得：

$$\begin{cases} a_1 R_1 = b_1 R_1 + \dfrac{c_1}{R_1^2} \\ b_1 R_2 + \dfrac{c_1}{R_2^2} = -H_0 R_2 + \dfrac{d_1}{R_2^2} \\ a_1 \mu_0 = \mu(b_1 - \dfrac{2c_1}{R_1^3} \\ -\mu_0 H_0 - \mu \dfrac{2d_1}{R_2^3} = \mu(b_1 - \dfrac{2c_1}{R_2^3}) \end{cases}$$

解方程组得：

$$a_1 = \frac{3\mu_0(2\mu+\mu_0)H_0R_2^3 + 3\mu_0(\mu-\mu_0)H_0R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3}$$

$$b_1 = \frac{3\mu_0(2\mu+\mu_0)H_0R_2^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3}$$

$$c_1 = \frac{3\mu_0(\mu-\mu_0)H_0R_2^3R_1^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3}$$

$$d_1 = \frac{3\mu_0(2\mu+\mu_0)H_0R_2^6 + 3\mu_0(\mu-\mu_0)H_0R_2^3R_1^3}{2(\mu-\mu_0)^2R_1^3 - (2\mu+\mu_0)(2\mu_0+\mu)R_2^3} + H_0R_2^3$$

而： $\vec{B}_i = \mu_0\vec{H}_i = -\mu_0\nabla\varphi_{m_i}, (i=1,2,3)$

$$\therefore \vec{B}_1 = -\mu_0 a_1 \vec{e}_z$$

$$= [1 - \frac{1-(\frac{R_1}{R_2})^3}{\frac{(\mu+2\mu_0)(2\mu+\mu_0)}{2(\mu-\mu_0)^2} - (\frac{R_1}{R_2})^3}]\mu_0\vec{H}_0$$

当 $\mu >> \mu_0$ 时：

$$\frac{(\mu+2\mu_0)(2\mu+\mu_0)}{2(\mu-\mu_0)^2} \approx 1$$

$$\therefore \vec{B}_1 = 0$$

即球壳腔中无磁场，类似于静电场中的静电屏障。

11. 设理想铁磁体的磁化规律为 $\vec{B} = \mu\vec{H} + \mu_0 M_0, M_0$ 是恒定的与 $\vec{H}$ 无关的量，今将一个

理想铁磁体做成均匀磁化球（M_0 为常值）浸入磁导率为 μ' 的无限介质中，求磁感应强度和磁化电流分布。

解：根据题意，取球心为原点，做球坐标，以 $\vec{M}_0$ 的方向为 $\vec{e}_z$ 本题具有球对称的磁场分布，满足的定解问题为：

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi_{m_1} = 0, R < R_0 \\ \nabla^2\varphi_{m_2} = 0, R > R_0 \\ \varphi_{m_1} = \varphi_{m_2}\big|_{R=R_0}, \\ \mu\dfrac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R} - \mu'\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R_0} = M_0\mu_0\cos\theta \\ \varphi_{m_1}\big|_{R=0} < \infty \\ \varphi_{m_2}\big|_{R=\infty} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \varphi_{m_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_{m_2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

代入衔接条件，对比 $P_n(\cos\theta)$ 对应项前的系数，得：

$$a_n = b_n = 0, (n \neq 1),\quad a_1 = \frac{\mu_0 M_0}{2\mu' + \mu},\quad b_1 = \frac{\mu_0 M_0}{2\mu' + \mu}R_0^3$$

$$\therefore \varphi_{m_1} = \frac{\mu_0 M_0}{2\mu' + \mu}R\cos\theta \ (R < R_0)$$

$$\varphi_{m_2} = \frac{\mu_0 M_0}{2\mu' + \mu}\frac{R_0^3}{R^2}\cos\theta, (R > R_0)$$

由此，$R < R_0, \vec{B}_1 = \mu\vec{H}_1 + \mu_0\vec{M}_0 = \dfrac{2\mu'\mu_0\vec{M}_0}{2\mu' + \mu}$

$$R > R_0,\quad \vec{B}_2 = -\mu'\nabla\varphi_{m_2} = \frac{\mu'\mu_0 R_0^3}{2\mu' + \mu}\left[\frac{3(\vec{M}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{M}_0}{R^3}\right]$$

$$\therefore \vec{B} = \begin{cases} \dfrac{2\mu'\mu_0\vec{M}_0}{2\mu' + \mu}, (R < R_0) \\ \dfrac{\mu'\mu_0 R_0^3}{2\mu' + \mu}\left[\dfrac{3(\vec{M}_0\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{M}_0}{R^3}\right], (R > R_0) \end{cases}$$

又 $\vec{n}\times(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\big|_{R_0}=\mu_0(\vec{\alpha}_M+\vec{\alpha})$，其中，$\vec{\alpha}=0$

代入 $\vec{B}$ 的表达式，得：

$$\vec{\alpha}_M=-\frac{3\mu'}{2\mu'+\mu_0}M_0\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

12. 将上题的永磁球置入均匀外磁场 $\vec{H}_0$ 中，结果如何？

解：根据题意，假设均匀外场 $\vec{H}_0$ 的方向与 $\vec{M}_0$ 的方向相同，定为坐标 z 轴方向。

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_{m_1}=0, R<R_0\\ \nabla^2\varphi_{m_2}=0, R>R_0\\ \varphi_{m_1}=\varphi_{m_2}\Big|_{R=R_0},\\ \mu\dfrac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R}-\mu_0\dfrac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R}\Big|_{R_0}=M_0\mu_0\cos\theta\\ \varphi_{m_1}\Big|_{R=0}<\infty\\ \varphi_{m_2}\Big|_{R=\infty}=-H_0R\cos\theta\end{cases}$$

解得满足自然边界条件的解是：

$$\varphi_{m_1}=a_1R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=-H_0R\cos\theta+\frac{d_1}{R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

代入衔接条件：

$$a_1R_0=-H_0R_0+\frac{d_1}{R_0^2}$$

$$\mu_0H_0+\mu_0\frac{2d_1}{R_0^3}+\mu a_1=\mu_0M_0$$

得到： $$a_1=\frac{\mu_0M_0-3\mu_0H_0}{\mu+2\mu_0}$$

$$d_1=\frac{\mu_0M_0+(\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3$$

$$\therefore\varphi_{m_1}=\frac{\mu_0M_0-3\mu_0H_0}{\mu+2\mu_0}R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=-H_0R\cos\theta+\frac{\mu_0M_0+(\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}\frac{R_0^3}{R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

$$\therefore \vec{H}_1=-\nabla\varphi_{m_1}=-[\frac{\mu_0M_0-3\mu_0H_0}{\mu+2\mu_0}\cos\theta\vec{e}_r-\frac{\mu_0M_0-3\mu_0H_0}{\mu+2\mu_0}\sin\theta\vec{e}_\theta]$$

$$=-\frac{\mu_0\vec{M}_0-3\mu_0\vec{H}_0}{2\mu_0+\mu}$$

$$\vec{B}_1=\mu\vec{H}+\mu_0\vec{M}_0=\frac{3\mu\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{H}_0+\frac{2\mu_0^2}{\mu+2\mu_0}\vec{M}_0,(R<R_0)$$

$$\vec{H}_2=-\nabla\varphi_{m_2}=-[(-H_0\cos\theta-\frac{\mu_0M_0+(\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}\frac{2R_0^3}{R^2}\cos\theta)\vec{e}_r-$$

$$-(-H_0\sin\theta+\frac{\mu_0M_0+(\mu-\mu_0)H_0}{\mu+2\mu_0}\frac{R_0^3}{R^2}\sin\theta)\vec{e}_\theta]=\vec{H}_0+\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{m}}{R^3}$$

$$\vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2=\mu_0[\vec{H}_0+\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{m}}{R^3}],\quad \vec{m}=\frac{\mu_0\vec{M}_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3+\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}R_0^3\vec{H}_0$$

13. 有一个均匀带电的薄导体壳，其半径为 R_0，总电荷为 Q，今使球壳绕自身某一直径以角速度 ω 转动，求球内外的磁场 $\vec{B}$。

提示：本题通过解 $\vec{A}$ 或 φ_m 的方程都可以解决，也可以比较本题与 § 5 例 2 的电流分布得到结果。

解：根据题意，取球体自转轴为 z 轴，建立坐标系。

定解问题为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_{m_1}=0,R<R_0\\ \nabla^2\varphi_{m_2}=0,R>R_0\\ \frac{1}{R_0}(\frac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial\theta}-\frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial\theta})=-\frac{Q\omega\sin\theta}{4\pi R_0}\Big|_{R=R_0}\\ \mu\frac{\partial\varphi_{m_1}}{\partial R}=\mu_0\frac{\partial\varphi_{m_2}}{\partial R},(R=R_0)\\ \varphi_{m_1}\big|_{R=0}<\infty\\ \varphi_{m_2}\big|_{R=\infty}=0\end{cases}$$

其中，$\sigma=\dfrac{Q\omega\sin\theta}{4\pi R_0}$ 是球壳表面自由面电流密度。

解得满足自然边界条件的解为：

$$\varphi_{m_1}=a_1R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=\frac{b_1}{R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

代入衔接条件：$\begin{cases}a_1R_0-\dfrac{b_1}{R_0^2}=-\dfrac{Q\omega}{4\pi R_0}\\ a_1+\dfrac{2b_1}{R_0^3}=0\end{cases}$

解得： $a_1=-\dfrac{Q\omega}{6\pi R_0}$， $b_1=\dfrac{Q\omega R_0^2}{12\pi}$

$$\therefore\varphi_{m_1}=-\frac{Q\omega}{6\pi R_0}R\cos\theta,(R<R_0)$$

$$\varphi_{m_2}=\frac{Q\omega R_0^2}{12\pi R^2}\cos\theta,(R>R_0)$$

$$\therefore\vec{H}_1=-\nabla\varphi_{m_1}=\frac{Q\omega}{6\pi R_0}\cos\theta\vec{e}_r-\frac{Q\omega}{6\pi R_0}\sin\theta\vec{e}_\theta=\frac{Q\vec{\omega}}{6\pi R_0}$$

$$\vec{B}_1=\mu_0\vec{H}_1=\frac{Q\mu_0}{6\pi R_0}\vec{\omega}$$

$$\vec{H}_2=-\nabla\varphi_{m_2}=\frac{2Q\omega R_0^2}{12\pi R^3}\cos\theta\vec{e}_r+\frac{Q\omega R_0^2}{12\pi R^3}\sin\theta\vec{e}_r=\frac{1}{4\pi}[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{m}}{R^3}]$$ ，其中

$$\vec{m}=\frac{QR_0^2}{3}\vec{\omega}$$

$$\vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{R})\vec{R}}{R^5}-\frac{\vec{m}}{R^3}]$$

14. 电荷按体均匀分布的刚性小球，其总电荷为 Q，半径为 R_0，它以角速度ω绕自身某以直径转动，求

（1） 它的磁矩

（2） 它的磁矩与自转动量矩之比（设质量 M_0 是均匀分布的）

解：1）磁矩 $\vec{m}=\dfrac{1}{2}\int\vec{x}\times\vec{J}(\vec{x})dV$

又 $\vec{x}=\vec{R}=\mathrm{R}\vec{e}_r$， $\vec{J}(\vec{x})=\rho\vec{v}=\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}(\vec{\omega}\times\vec{R})$

$$\therefore \vec{m}=\frac{1}{2}\frac{3Q}{4\pi R_0^3}\int \vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})R^2\sin\theta drd\theta d\phi=\frac{1}{2}\frac{3Q\omega}{4\pi R_0^3}\int(\vec{e}_r\times\vec{e}_\phi)R^4\sin^2\theta drd\theta d\phi$$

又 $\vec{e}_r\times\vec{e}_\phi=-\vec{e}_\theta=\sin\theta\vec{e}_z+\cos\theta(-\cos\phi\vec{e}_x-\sin\phi\vec{e}_y)$

$$\therefore \vec{m}=\frac{3Q\omega}{8\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}[\sin\theta\vec{e}_z+\cos\theta(-\cos\phi\vec{e}_x-\sin\phi\vec{e}_y)R^4\sin^2\theta drd\theta d\phi$$

$$=\frac{3Q\omega}{8\pi R_0^3}\vec{e}_z\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}\sin^3\theta R^4 drd\theta d\phi=\frac{QR_0^2}{5}\vec{\omega}$$

2)自转动量矩 $\vec{L}=\int d\vec{L}=\int\vec{R}\times d\vec{P}=\int\vec{R}\times\vec{v}dm=\dfrac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int\vec{R}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})dV$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^2\omega(\vec{e}_r\times\vec{e}_z\times\vec{e}_r)R^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^2\omega(-\sin\theta\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r)R^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$=\frac{3M_0}{4\pi R_0^3}\int R^2\omega\sin\theta(-\vec{e}_\theta)R^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

$$=\frac{3M_0\omega}{4\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}[\sin\theta\vec{e}_z+\cos\theta(-\cos\phi\vec{e}_x-\sin\phi\vec{e}_y)R^4\sin^2\theta drd\theta d\phi$$

$$=\frac{3M_0\vec{\omega}}{4\pi R_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R_0}R^4\sin^3\theta drd\theta d\phi=\frac{2M_0R_0^2\vec{\omega}}{5}$$

$$\therefore \vec{m}/\vec{L}=\frac{\frac{QR_0^2}{5}\vec{\omega}}{\frac{2M_0R_0^2}{5}\vec{\omega}}=Q/2M_0$$

15. 有一块磁矩为 $\vec{m}$ 的小永磁体，位于一块磁导率非常大的实物的平坦界面附近的真空中，求作用在小永磁体上的力 $\vec{F}$.

解：根据题意，因为无穷大平面的 μ 很大，则可推出在平面上，所有的 $\vec{H}$ 均和平面垂直，类比于静电场，构造磁矩 $\vec{m}$ 关于平面的镜像 $\vec{m}'$，则外场为：

$$\begin{cases} \vec{B}_e = -\mu_0 \nabla \varphi_m \\ \varphi_m = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3} = \dfrac{m\cos\theta}{4\pi r^2} \end{cases}$$

$$\therefore \vec{B}_e = -\mu_0 \frac{m}{4\pi}[-\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r - \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta] = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(\alpha\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)$$

$\therefore \vec{m}$ 受力为：

$$\vec{F} = (\vec{m}\cdot\nabla)\cdot\vec{B}_e\Big|_{\substack{r=2a \\ \theta=\alpha}} = -\frac{3m^2\mu_0}{64\pi a^4}(1+\cos^2\alpha)\vec{e}_z$$