光学思考题解答

第一章　光和光的传播

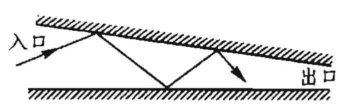
1－1. 为什么透过茂密树叶缝隙投射到地面的阳光形成圆形光斑？你能设想在日偏食的情况下这种光斑的形状会有变化吗？

答： 这与针孔成像的原理是一样的。光斑是太阳的像，其形状与太阳相似，而与小孔（树叶缝隙）形状无关。当日偏食发生时，光斑的形状将随之改变，但仍保持相似关系。

1－2. 试说明，为什么远处灯火在微波荡漾的湖面形成的倒影拉得很长。

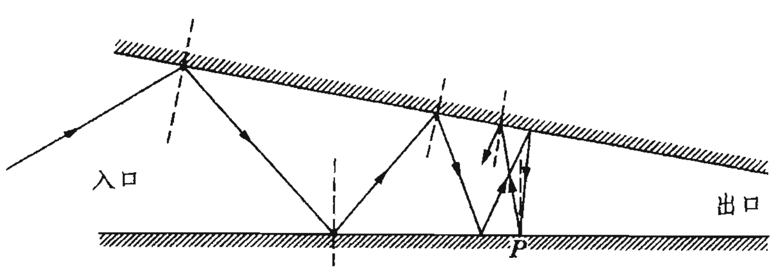
答： 湖中灯火的倒影是灯光经湖面反射所成的像。当湖面平静如镜时，灯光将在水面下对称处形成轮廓清晰的倒影。当微风吹过时，平静的湖面泛起层层细浪，宛如一块块小平面镜；在每一块小镜面下方与灯火对称处，都会出现一个对称的灯影。因为这些小镜面不在同一平面上，所以各自所成的像的位置也不同。因为水面大体上是水平的，通过灯和眼睛作一竖直平面，从远离此平面的像点发出的光不通过我们的眼睛，我们看不到这些像点，只有这一平面附近的像点我们才看得到。所以我们看到的是灯的下方一系列的像点，即一个上下拉长的倒影。

1－3. 有人设想用如本题图所示的反射圆锥腔使光束的能量集中到极小的面积上，因为出口可以做得任意小，从而射出的光束的能流密度可以任意大。这种想法正确吗？



思考题 1－3

答： 如下图所示，圆锥的截面两母线是不平行的，从入口进入的光线，



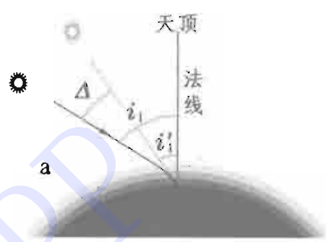
在逐次反射过程中入射角不断减小，必然会在某一点（如图中 P 点）处光线从法线右侧入射，从而使光线返回入口。所以，仅从光的反射定律来分析即可看出，欲用反射圆锥腔来聚焦光束能流的设想是不可能实现的。

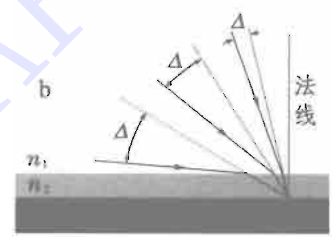
1 – 4. 为什么日出和日落时太阳看起来是扁的?

答: 这是由于太阳发出的光线穿过地球周围大气层时的折射造成的。利用思考题1 – 5有关蒙气差的结论,旭日或落日的下边缘比上边缘更接近地平线,其视高度抬高得更多,于是太阳看起来是扁的。

1 – 5. 大气折射给星体位置的观察造成的偏差,叫做蒙气差,这是天文学必须考虑的因素。试定性地讨论蒙气差与星体到天顶距离之间的关系。

答: 大气的密度随高度的增加而减小,折射率也随高度的增加而逐渐降低。来自星体的光线穿过大气层时从光疏介质到光密介质,光线折射愈来愈向法线靠近,即向地面弯曲。我们从地面上观察光线好像是从较高的位置射来的,也就是说,我们感到发光点的位置 i_1' 比实际位置 i_1 高了角度 $\Delta = i_1 - i_1'$(见右图a),这就是蒙气差。蒙气差 Δ 是随发光点到天顶的角距离 i_1 的增大而增大的(见右图b),即愈接近地平线,星体的视高度增加得愈多。定量计算的结果可证明这一点:





$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_1', \quad i_1' = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right),$$

$$\frac{d\Delta}{di_1} = 1 - \frac{(n_1/n_2)\cos i_1}{\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1}}.$$

由于 $n_1/n_2 < 1$, $\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\sin^2 i_1} > \sqrt{1-\sin^2 i_1} = \cos i_1$,于是

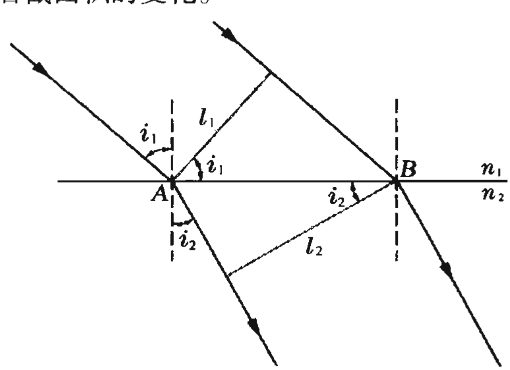
$$\frac{d\Delta}{di_1} > 1-(n_1/n_2) > 0,$$

即 Δ 随 i_1 递增。

1 – 6. 试讨论平行光束折射后截面积的变化。

答: 如右图所示,设平行光束的入射角为 i_1,折射角为 i_2,则折射光束和入射光束截面之比为

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{\overline{AB}\cos i_2}{\overline{AB}\cos i_1} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1}$$

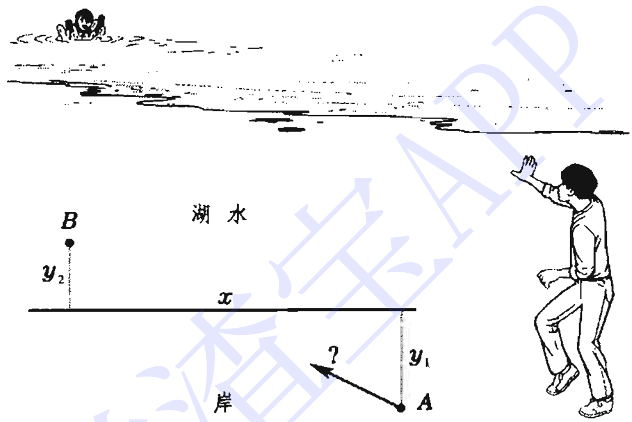


即平行光束在介质的界面上折射时,折射光束和入射光束的横截面积之比等于折射角和入射角的余弦之比。这一结论正是能量守恒所要求的。

1 – 7. 惠更斯原理是否适用于空气中的声波？你是否期望声波也服从和光波一样的反射定律和折射定律？

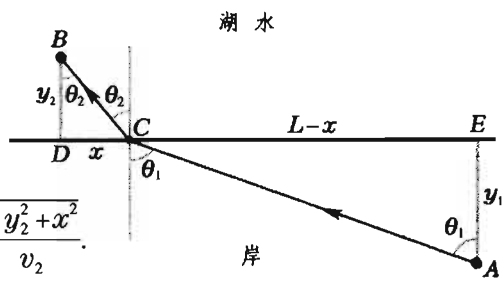
答：惠更斯原理是关于波面传播的理论，对任何波动过程它都是适用的。不论是机械波或电磁波，只要知道某一时刻的波面，都可以用惠更斯作图法求出下一时刻的波面，由此可以导出波的反射定律和折射定律。这既适用于光波，也适用于声波。不过声波的波长比光波的大得多，反射面或折射面太小时，衍射现象严重。

1 – 8. 一儿童落水，岸上青年奔去抢救。设他在岸上奔跑的速度为 v_1，泅水的速度为 v_2，$v_1 > v_2$，他从 A 点出发应采取怎样的路径最快地到达孩子处 B（见本题图）？这个问题与光的折射定律有什么相似的地方？



思考题 1 – 8

答：如右图所示，设青年入水的地点 C，从 A、B 点作湖岸的垂线 AE 和 BD，$\overline{DE}=L$，$\overline{DC}=x$，则 $\overline{CE}=L-x$. 青年从 A 经 C 到 B 的时间为



$$t=\frac{\overline{AC}}{v_1}+\frac{\overline{CB}}{v_2}=\frac{\sqrt{y_1^2+(L-x)^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{y_2^2+x^2}}{v_2}.$$

取 t 对 x 的导数以求最短时间：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{L-x}{v_1\sqrt{y_1^2+(L-x)^2}}+\frac{x}{v_2\sqrt{y_2^2+x^2}}=-\frac{\sin\theta_1}{v_1}+\frac{\sin\theta_2}{v_2}=0.$$

即
$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

这与光线从光疏介质到光密介质折射的规律形式完全一样。光线服从费马原理，即走光程最短的路径。光程最短即时间最短，道理都是相通的。

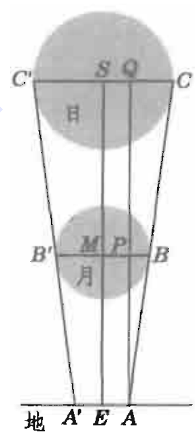
光学习题解答

第一章　光和光的传播

1－1. 太阳与月球的直径分别是 1.39×10^6 km 和 3.5×10^3 km，太阳到地面的距离为 1.50×10^9 km，月球到地面的距离为 3.8×10^5 km. 试计算，地面上能见到日全食区域的面积（可把该区域的地面视为平面）。

解： 如右图所示，按照光的直线传播定律作几何投影，由相似三角形的比例关系得

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{QC}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}},$$



而 $\overline{PB}=\overline{MB}-\overline{MP}=\overline{MB}-\overline{EA},$

$\overline{QC}=\overline{SC}-\overline{SQ}=\overline{SC}-\overline{EA}.$

又 $2\overline{MB}=\overline{B'B}=D_{\text{☾}}$（月球直径），

$2\overline{SC}=\overline{C'C}=D_{\odot}$（太阳直径）；

$2\overline{EA}=\overline{A'A}=D$（日全食区域直径）。

以及 $\overline{AP}=\overline{EM}=L_{\text{☾}}$（月球到地面的距离），

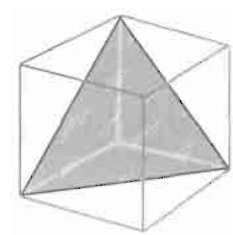
$\overline{AQ}=\overline{ES}=L_{\odot}$（太阳到地面的距离）。

于是 $\dfrac{D_{\text{☾}}-D}{D_{\odot}-D}=\dfrac{L_{\text{☾}}}{L_{\odot}}$，　解得 $D=\dfrac{D_{\text{☾}}L_{\odot}-D_{\odot}L_{\text{☾}}}{L_{\odot}-L_{\text{☾}}}$

$$=\frac{3.5\times10^3\times1.50\times10^9-1.39\times10^6\times3.8\times10^5}{1.50\times10^9-3.8\times10^5}\text{km}=3.15\times10^3\text{km},$$

地面上能见到日全食区域的面积为 $S=\pi D^2/4\approx7.8\times10^6\text{km}^2$.

1－2. 由立方体的玻璃切下一角制成的棱镜，称为隅角棱镜（见本题图）。证明从斜面射入的光线经其它三面全反射后，出射线的方向总与入射线相反。设想一下，这样的棱镜可以在什么场合发挥作用。



习题 1－2

解： 用矢量 $\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)$ 代表光线传播方向。光的反射定律表明，反射时 $\boldsymbol{k}$ 的法向分量反向，切向分量不变。取直角坐标 xyz 沿隅角棱镜的三个棱边，于是它的三个反射面分别与 x,y,z 轴垂直。在棱镜内部光线先后在每个面上反射一次，一次一个分量反号，三次反射后 k_x，k_y，k_z 三个分量都反号，$\boldsymbol{k}$ 变成 $-\boldsymbol{k}$，即光线沿原方向返回。至于在光线隅角棱镜斜面上的折射，按光的可逆性原理，因在玻璃内来回的光线方向相反，玻璃外来回的光线方向必然也是相反的，故而从隅角棱镜出射线的方向总

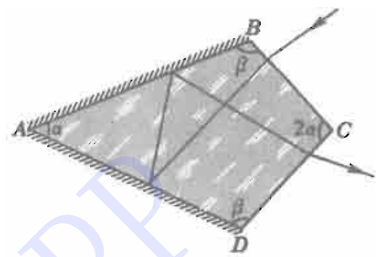
与入射线相反。

隅角棱镜这一特性可作公路路标，夜晚当车灯从任何方向打在上面时都能返回到车上让驾驶员看到。隅角棱镜还可以有效地被利用来进行远距离激光测距。设想登月飞船把一个由多只隅角棱镜组成的反射器送到月球表面，则地球上许多国家就可以选择反射器中的某些隅角棱镜作为自己的“合作目标”，用激光束测量月－地距离。

1－3. 光线射入如本题图所示的棱镜，经两次折射和反射后射出。

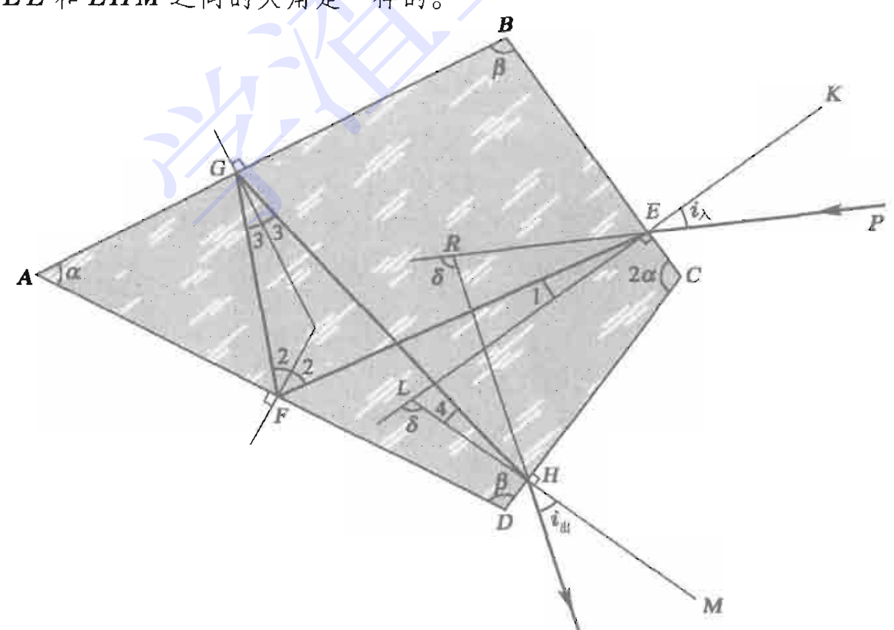
（1）证明偏向角与入射方向无关，恒等于 2α.

（2）在此情况下，能否产生色散？



习题 1－3

解：（1）光线射入如本题图所示的棱镜时一般经历不止两次反射。当光线正入射于界面 BC 时，光线在这种棱镜内反射两次，最后从界面 CD 垂直射出。在入射角 $i_入$ 较小时，光线可在这种棱镜内反射两次后射出。下面证明，在这种情况下出射角 $i_出=i_入$，且入射线 PE 和出射线 HQ 相对于各自的法线 KE 和 HM 来说处于同侧（见下图），从而光线 PE 和 HQ 之间的偏向角 δ 与法线 KEL 和 LHM 之间的夹角是一样的。



任意三角形内角和等于 180°，任意四边形内角和等于 360°. ∠1、∠2、

$\angle 3$、$\angle 4$ 的意义如图所示。

四边形 $CDFE$ 内角和　$2\alpha+\beta+(90°-\angle 2)+(90°+\angle 1)=360°$,　①

四边形 $CBGH$ 内角和　$2\alpha+\beta+(90°-\angle 3)+(90°-\angle 4)=360°$,　②

四边形 $ABCD$ 内角和　$3\alpha+2\beta=360°$.　③

三角形 AFG 内角和　$\alpha+(90°-\angle 2)+(90°-\angle 3)=180°$,

即　$\angle 2+\angle 3=\alpha$.　④

① 式+② 式:

$$4\alpha+2\beta-(\angle 2+\angle 3)+(\angle 1-\angle 4)=360°,$$

代入 ④ 式:

$$4\alpha+2\beta-\alpha+(\angle 1-\angle 4)=360°,$$

即

$$3\alpha+2\beta+(\angle 1-\angle 4)=360°,$$

代入 ③ 式:　$360°+(\angle 1-\angle 4)=360°$,　即　$\angle 1=\angle 4$.　⑤

按折射定律:

$$\sin i_{入}=n\sin\angle 1,\quad \sin i_{出}=n\sin\angle 4,$$

由 ⑤ 式知　$i_{入}=i_{出}$.　⑥

于是如前所述,$\angle PRQ=\angle KLM$,从而偏向角

$$\delta=180°-\angle PRQ=180°-\angle KLM.\quad ⑦$$

四边形 $CELH$ 内角和　$2\alpha+90°+\angle KLM+90°=360°$,

即　$\angle KLM=180°-2\alpha$.

代入 ⑦ 式,得

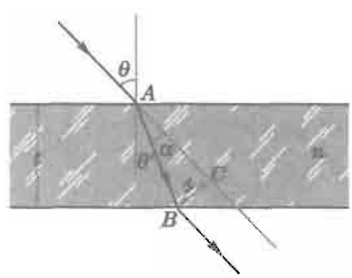
$$\delta=2\alpha.\quad ⑧$$

(2) 因偏向角 δ 与折射率 n 无关,故无色散。

1-4. 试证明:当一条光线通过平行平面玻璃板时,出射光线方向不变,但产生侧向平移。当入射角 θ 很小时,位移为

$$x=\frac{n-1}{n}\theta t,$$

式中 n 为玻璃板的折射率,t 为其厚度。



解: 对平行平板上、下表面分别两次运用折射定律,并考虑到平板上下是同一介质,便可证明最后出射光线与初始入射光线的方向一致。

如右图所示,$\alpha=\theta-\theta'$,根据几何关系可得侧向位移量为

$$x=\overline{AB}\sin\alpha=\frac{t}{\cos\theta'}\sin(\theta-\theta'),\quad ①$$

利用折射定律　$\sin\theta=n\sin\theta'$.　②

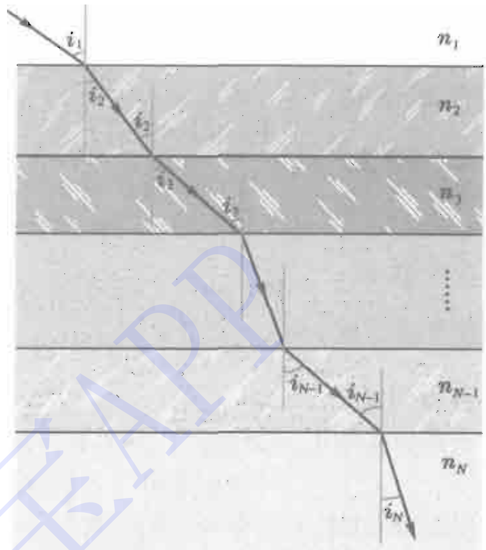
在 $\theta'<\theta\ll 1$ 的条件下,取小角近似:

$$\theta \approx n\theta', \quad \cos\theta' \approx 1, \quad \sin(\theta-\theta') \approx \theta-\theta' \approx \left(1-\frac{1}{n}\right)\theta,$$

于是①式化为

$$x = \frac{n-1}{n}\theta t. \tag{3}$$

1－5. 证明：光线相继经过几个平行分界面的多层介质时，出射光线的方向只与两边的折射率有关，与中间各层介质无关。



解： 如右图，因为界面都是平行的，所以前一次的折射角就是下一次的入射角，于是有

$$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2,$$

$$n_2\sin i_2 = n_3\sin i_3,$$

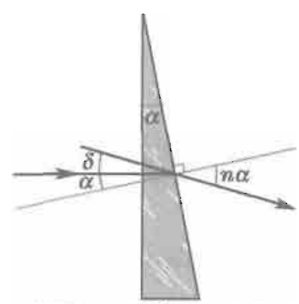
$$\cdots\cdots$$

$$n_{N-1}\sin i_{N-1} = n_N\sin i_N.$$

于是 $n_1\sin i_1 = n_N\sin i_N$，

与中间各层介质无关。

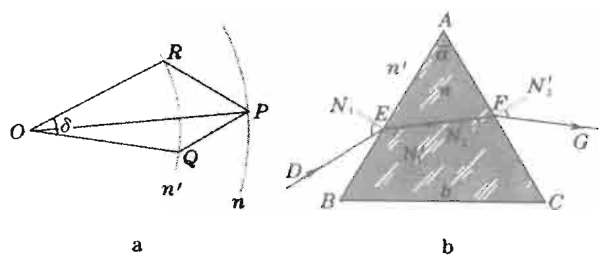
1－6. 顶角 α 很小的棱镜称为光劈（wedge），证明光劈使垂直入射的光线产生偏向角 $\delta=(n-1)\alpha$，其中 n 是光劈的折射率。



解： 如右图所示，由于光线垂直入射，光线在第一个界面不发生折射，仅在第二个界面有折射。这时入射角为 α，在小角度近似下折射角为 $n\alpha$，偏向角等于折射角减入射角：

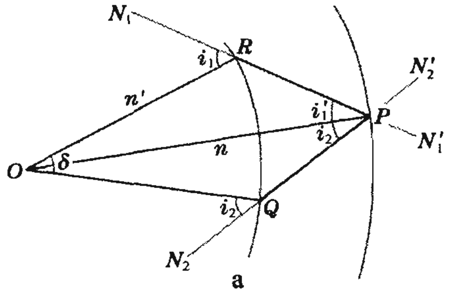
$$\delta = n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha.$$

1－7. 本题图所示是一种求折射线方向的追迹作图法。例如为了求光线通过棱镜的路径（图b），可如图a以 O 为中心作二圆弧，半径正比于折射率 n、n'（设 $n>n'$）。作 OR 平行于入射线 DE，作 RP 平行于棱镜第一界面的法线 N_1N_1'，则 OP 的方向即

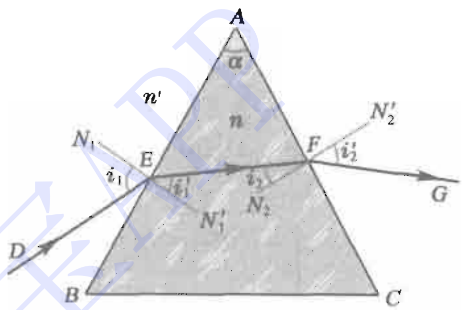


习题1－7

为第一次折射后光线 EF 的方向。再作 QP 平行于第二界面的法线 N_2N_2'，则 OQ 的方向即为出射线 FG 的方向，从而 $\angle ROQ=\delta$ 为偏向角。试论证此法的依据。



a



b

解：(1) 图 a 中的 OR 是入射线，它与法线 N_1RPN_1' 之间的夹角 $\angle ORN_1$ 为第一次入射角 i_1. 要说明 OP 沿第一次折射线的方向，需证明 $\angle OPR$ 为第一次折射角 i_1'. 为此看 $\triangle OPR$，它的边长 $\overline{OP}=n$，$\overline{OR}=n'$，按正弦定律，有

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\angle ORP}=\frac{\overline{OR}}{\sin\angle OPR},$$

而 $\sin\angle ORP=\sin\angle ORN_1=\sin i_1$，

故 $$\frac{n}{\sin i_1}=\frac{n'}{\sin\angle OPR},$$

或 $$n\sin\angle OPR=n'\sin i_1,$$

即 $\angle OPR$ 是符合折射定律的折射角 i_1'.

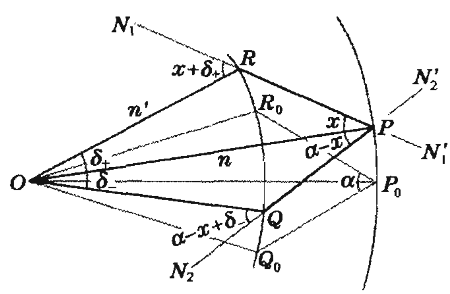
(2) 既然图 a 中的 OP 是第一次折射线，它就是第二次入射线，它与法线 N_2QPN_2' 之间的夹角 $\angle OPQ$ 为第二次入射角 i_2. 要说明 OQ 沿第二次折射线的方向，需证明 $\angle OQN_2$ 为第二次折射角 i_2'. 为此看 $\triangle OPQ$，它的边长 $\overline{OP}=n$，$\overline{OQ}=n'$，按正弦定律，有

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\angle OQP}=\frac{\overline{OQ}}{\sin\angle OPQ},\quad 而\quad \sin\angle OQP=\sin\angle OQN_2,$$

故 $$\frac{n}{\sin\angle OQN_2}=\frac{n'}{\sin i_2}\quad 或\quad n'\sin\angle OQN_2=n\sin i_2,$$

即 $\angle OQN_2$ 是符合折射定律的折射角 i_2'.

1－8. 利用上题的图证明最小偏向角的存在及(1.23)式。



解：上题的图复制在这里，其中 $\angle RPQ=\alpha$ 是棱镜的顶角，是不变的，$\angle ROQ=\delta$ 是偏向角，随入射方向而变。取 $\angle OPR=x$（它相当于第一次折射角 i_1'）为自变量，δ 随它变化。当 $x=\alpha/2$ 时 $\angle OPQ=\alpha-x=\alpha/2$，$R$、$Q$ 对于 OP 来说处于对称位置

(见右图灰色四边形 $OR_0P_0Q_0$)，如果偏向角 δ 有极值的话，一定在这里。我们称此时的 δ 为 δ_m，不过它是极大还是极小，尚待论证。

在右图中 $\overline{OP}=n$，$\overline{OR}=\overline{OQ}=n'$，分别运用正弦定律于两三角形 $\triangle ORP$ 和 $\triangle OQP$，我们得到

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\angle ORP}=\frac{\overline{OR}}{\sin\angle OPR},\quad 即\quad \frac{n}{\sin(x+\delta_+)}=\frac{n'}{\sin x};\tag{①}$$

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\angle OQP}=\frac{\overline{OQ}}{\sin\angle OPQ},\quad 即\quad \frac{n}{\sin(\alpha-x+\delta_-)}=\frac{n'}{\sin(\alpha-x)}.\tag{②}$$

其中 $\delta_++\delta_-=\delta$. 对称时 $x=\alpha/2$，$\delta_+=\delta_-=\delta_m/2$，①、② 两式皆化为

$$\frac{n}{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}=\frac{n'}{\sin(\alpha/2)}\quad 或\quad \frac{n}{n'}=\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}.\tag{③}$$

此式即书中(1.23)式。

将 ①、② 式改写为

$$n\sin x=n'\sin(x+\delta_+),\quad n\sin(\alpha-x)=n'\sin(\alpha-x+\delta_-).\tag{④}$$

对 x 一次求导：

$$\begin{cases} n\cos x=n'\cos(x+\delta_+)\left(1+\dfrac{d\delta_+}{dx}\right),\\ n\cos(\alpha-x)=n'\cos(\alpha-x+\delta_-)\left(1-\dfrac{d\delta_-}{dx}\right).\end{cases}\tag{⑤}$$

对称时

$$\begin{cases} n\cos(\alpha/2)=n'\cos[(\alpha+\delta_m)/2]\left[1+\left(\dfrac{d\delta_+}{dx}\right)_0\right],\\ n\cos(\alpha/2)=n'\cos[(\alpha+\delta_m)/2]\left[1-\left(\dfrac{d\delta_-}{dx}\right)_0\right],\end{cases}\tag{⑥}$$

式中导数的下标 0 代标该导数取 $x=\alpha/2$ 处之值。以上两式相减，得

$$\left(\frac{d\delta}{dx}\right)_0=\left(\frac{d\delta_+}{dx}\right)_0+\left(\frac{d\delta_-}{dx}\right)_0=0.\tag{⑦}$$

亦即，对称时 δ 确实取极值。

⑤ 式对 x 再次求导：

$$\begin{cases} -n\sin x=-n'\sin(x+\delta_+)\left(1+\dfrac{d\delta_+}{dx}\right)^2+n'\cos(x+\delta_+)\dfrac{d^2\delta_-}{dx^2},\\ n\sin(\alpha-x)=n'\sin(\alpha-x+\delta_-)\left(1-\dfrac{d\delta_-}{dx}\right)^2+n'\cos(\alpha-x+\delta_-)\dfrac{d^2\delta_-}{dx^2}.\end{cases}$$

对称时

$$\begin{cases} -n\sin\dfrac{\alpha}{2}=-n'\sin\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}\left[1+\left(\dfrac{d\delta_+}{dx}\right)_0\right]^2+n'\cos\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}\left(\dfrac{d^2\delta_+}{dx^2}\right)_0,\\ n\sin\dfrac{\alpha}{2}=n'\sin\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}\left[1-\left(\dfrac{d\delta_-}{dx}\right)_0\right]^2+n'\cos\dfrac{\alpha+\delta_m}{2}\left(\dfrac{d^2\delta_-}{dx^2}\right)_0.\end{cases}\tag{⑧}$$

由⑥式和③式得

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}\delta_+}{\mathrm{d}x}\right)_0=1-\left(\frac{\mathrm{d}\delta_-}{\mathrm{d}x}\right)_0=\frac{n\cos(\alpha/2)}{n'\cos[(\alpha+\delta_m)/2]}$$

$$=\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)\cos[(\alpha+\delta_m)/2]}=\frac{\tan[(\alpha+\delta_m)/2]}{\tan(\alpha/2)}.$$

代入⑧式，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta_+}{\mathrm{d}x^2}\right)_0=\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\cos[(\alpha+\delta_m)/2]}\left[\frac{\tan[(\alpha+\delta_m)/2]}{\tan(\alpha/2)}\right]^2-\frac{n\sin(\alpha/2)}{n'\cos[(\alpha+\delta_m)/2]}$$

$$=\tan[(\alpha+\delta_m)/2]\left\{\left[\frac{\tan[(\alpha+\delta_m)/2]}{\tan(\alpha/2)}\right]^2-1\right\},$$

同理　$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta_+}{\mathrm{d}x^2}\right)_0=\tan[(\alpha+\delta_m)/2]\left\{\left[\frac{\tan[(\alpha+\delta_m)/2]}{\tan(\alpha/2)}\right]^2-1\right\}.$$

故有

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta}{\mathrm{d}x^2}\right)_0=\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta_+}{\mathrm{d}x^2}\right)_0+\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta_-}{\mathrm{d}x^2}\right)_0$$

$$=2\tan[(\alpha+\delta_m)/2]\left\{\left[\frac{\tan[(\alpha+\delta_m)/2]}{\tan(\alpha/2)}\right]^2-1\right\}>0, \qquad ⑨$$

即对称时 δ 取极小值，δ_m 为最小偏向角。

1－9. 已知棱镜顶角为60°,测得最小偏向角为53°14′,求棱镜的折射率。

解： 在书中(1.23)式里取 $n'=1$，得

$$n=\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}=\frac{\sin[(60°+53°14')/2]}{\sin(60°/2)}=1.670.$$

1－10. 顶角为50°的三棱镜的最小偏向角是35°,如果把它浸入水中,最小偏向角等于多少？(水的折射率为1.33.)

解： 在空气中三棱镜的三棱镜的折射率为

$$n=\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}=\frac{\sin[(50°+35°)/2]}{\sin(50°/2)}=1.60.$$

设水的折射率为 n'，在水中

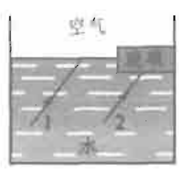
$$\sin[(\alpha+\delta_m')/2]=\frac{n}{n'}\sin(\alpha/2)=\frac{1.60}{1.33}\sin(50°/2)=0.5080.$$

$$\frac{\alpha+\delta_m'}{2}=\arcsin 0.5080=30°32', \qquad \delta_m'=2\times30°32'-50°=11°4'.$$

1－11. 如本题图所示,在水中有两条平行光线1和2,光线2射到水和平行平板玻璃的分界面上。

(1) 两光线射到空气中是否还平行？

(2) 如果光线1发生全反射,光线2能否进入空气？



习题1－11

解： (1) 习题1－5的结论是,光线经平行分界面的多层

介质时，出射方向只与两边的折射率有关。由此可知本题图中的光线 1 和 2 射到空气中仍保持平行。

(2) 如果光线 1 进入空气的折射角等于 90°，则光线 2 进入空气的折射角也等于 90°. 故光线 1 和 2 的入射角 i_0 再大，两光线都因发生全反射而不能进入空气。

1－12. 计算光在下列介质之间穿行时的全反射临界角：(1) 从玻璃到空气，(2) 从水到空气，(3) 从玻璃到水。

解： $n_{水}=4/3$，$n_{玻璃}=1.5$，

(1) 从玻璃到空气 $i_{c1}=\arcsin\dfrac{1}{1.5}=41.8°$，

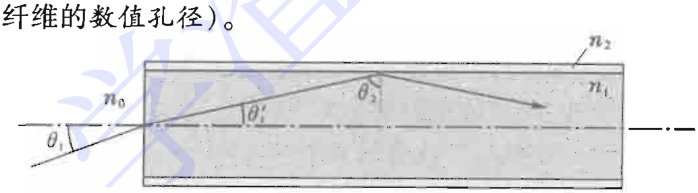
(2) 从水到空气 $i_{c2}=\arcsin\dfrac{3}{4}=48.6°$，

(3) 从玻璃到水 $i_{c3}=\arcsin\dfrac{4/3}{1.5}=62.7°$.

1－13. 设光导纤维玻璃芯和外套的折射率分别为 n_1 和 $n_2(n_1>n_2)$，垂直端面外介质的折射率为 n_0（见本题图），试证明，能使光线在纤维内发生全反射的入射光束的最大孔径角 θ_1 满足下式：

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

（θ_1 称为纤维的数值孔径）。



习题 1－13

解： 根据折射定律，

$$n_0\sin\theta_1=n_1\sin\theta_1'=n_1\cos\theta_2=n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_2}.$$

光线在玻璃芯和外套的界面上发生全反射的条件为

$$\sin\theta_2\geqslant n_2/n_1,\quad 即\quad \cos\theta_2\leqslant\sqrt{1-(n_2/n_1)^2},$$

于是 $$n_0\sin\theta_1=n_1\cos\theta_2\leqslant n_1\sqrt{1-(n_2/n_1)^2}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}.$$

即光导纤维的数值孔径 θ_1 满足

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}.$$

1－14. 光导纤维外套由折射率为 1.52 的冕牌玻璃做成，芯线由折射率为 1.66 的火石玻璃做成，求垂直端面的数值孔径。

解： 由上题，光导纤维的数值孔径 θ_1 满足

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\sqrt{1.66^2-1.52^2}=0.667.$$

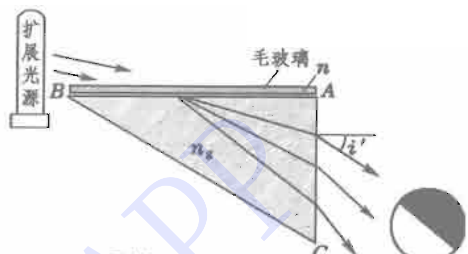
设 $n_0=1$，数值孔径

$$\theta_1=\arcsin 0.667=41.8°.$$

1－15. 极限法测液体折射率的装置如本题图所示，ABC 是直角棱镜，其折射率 n_g 为已知。将待测液体涂一薄层于其上表面 AB，覆盖一块毛玻璃，用扩展光源在掠入射的方向照明。从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一下限 i'（用望远镜观察，则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区）。试证明，待测液体的折射率 n 可按下式算出：

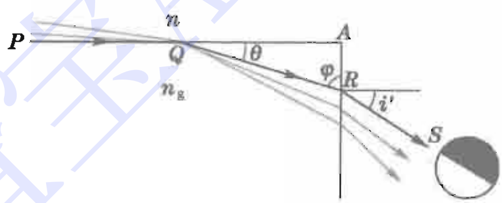
$$n=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}.$$

用这种方法测液体折射率，测量范围受到什么限制？



习题 1-15

解： 毛玻璃的作用是增加散射，以使液层上表面处处为散射源，产生各个方向的光线射到待测液体与棱镜的界面 AB 上。在 AB 面入射角愈大的光线，在棱镜垂直面 AC 上出射角愈小。入射角最大是 90°（掠入射），在 AC 面上出射角 i' 最小，如右图所示。图中极限光线 $PQRS$ 与棱镜两边组成的三角形 $\triangle QRA$ 中 θ 是第一次折射时折射角的余角，φ 是第二次折射时入射角的余角，θ 与 φ 亦互为余角。按折射定律，有



$$n\sin 90°=n_g\cos\theta,\quad n_g\cos\varphi=\sin i'.$$

$\sin 90°=1$，$\cos\theta=\sin\varphi=\sqrt{1-(\sin i'/n_g)^2}$，故

$$n=n_g\cos\theta=n_g\sin\varphi=n_g\sqrt{1-(\sin i'/n_g)^2}=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}.$$

1－16. 在空气中钠黄光的波长为 589.3 nm，问

（1）其频率有多大？

（2）在折射率为 1.52 的玻璃中其波长为多少？

解：（1）频率 $$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8\,\text{m/s}}{589.3\times10^{-9}\,\text{m}}=5.09\times10^{14}\,\text{Hz}.$$

（2）玻璃中波长 $$\lambda'=\frac{\lambda}{n}=\frac{589.3\,\text{nm}}{1.52}=387.7\,\text{nm}.$$

1－17. 在熔凝石英中波长为 550.0 nm 的光频率为多少？已知折射率

为 1.460.

解：令 λ 和 λ' 分别代表真空和石英中波长，$\lambda'=\lambda/n$，则

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{n\lambda'}=\frac{3\times10^{8}\mathrm{m/s}}{1.460\times550.0\times10^{-9}\mathrm{m}}=3.74\times10^{14}\mathrm{Hz}.$$

1－18. 填充下表中的空白：

谱 线	F 线		D 线	
介 质	真 空	水	真 空	水
折射率	1	1.337	1	1.333
波 长	486.1 nm	**363.6 nm**	589.3 nm	**442.1 nm**
频 率 /(10^{14}Hz)	**6.17**	**6.17**	**5.09**	**5.09**
光 速 /($10^{8}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)	**3**	**2.24**	**3**	**2.25**

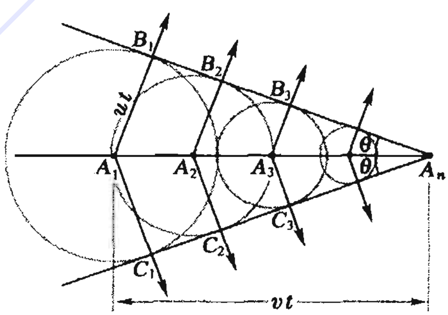
解：计算公式： 介质中波长 $\lambda'=\dfrac{\lambda}{n}$ 频率 $\nu=\dfrac{c}{\lambda}$， 光速 $v=\dfrac{c}{n}$.
计算结果用黑体字填于上表。

1－19. 一只船以速度 v 在水面上行驶，v 比水面波的速率 u 大。用惠更斯作图法证明，在水中出现一圆锥形波前，其半顶角 θ 由下式给出：

$$\sin\theta=\frac{u}{v},$$

此波称为艏波，超音速飞机在空气中产生的冲击波，也是这样产生的。

设想一下，若电子以大于介质中光速的速度在介质中作匀速直线运动，会产生什么现象？



解：由于船头对水的扰动，船头端沿途各点先后成为次波源。如右图所示，当船头端在水中依次经过 A_1、A_2、A_3、… 到达 A_n 点时，各点发出的次波经历时间为

$$t_1=\overline{A_1A_n}/v,\ t_2=\overline{A_2A_n}/v,\ t_3=\overline{A_3A_n}/v,\cdots.$$

发出波面的半径分别是

$$ut_1,\ ut_2,\ ut_3,\ \cdots.$$

作这些球面的包络面，即为总扰动的水波面。包络面与次波面分别相切于 B_1、B_2、B_3、… 和 C_1、C_2、C_3、… 各点，构成以 A_n 为顶点的锥面[称为“马赫(Mach)锥”]，其半顶角为

$$\theta=\arcsin\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_n}}=\arcsin\frac{ut_1}{vt_1}=\arcsin\frac{u}{v}.$$

若电子以大于介质中光速的速度在介质中作匀速直线运动，将会发生类似马赫锥的电磁辐射，称为“切连科夫辐射”。

1－20. 证明图1－18中光线A_1C_1、$A_2B_2C_2$、$A_3B_3C_3$、…、A_nB_n的光程相等。

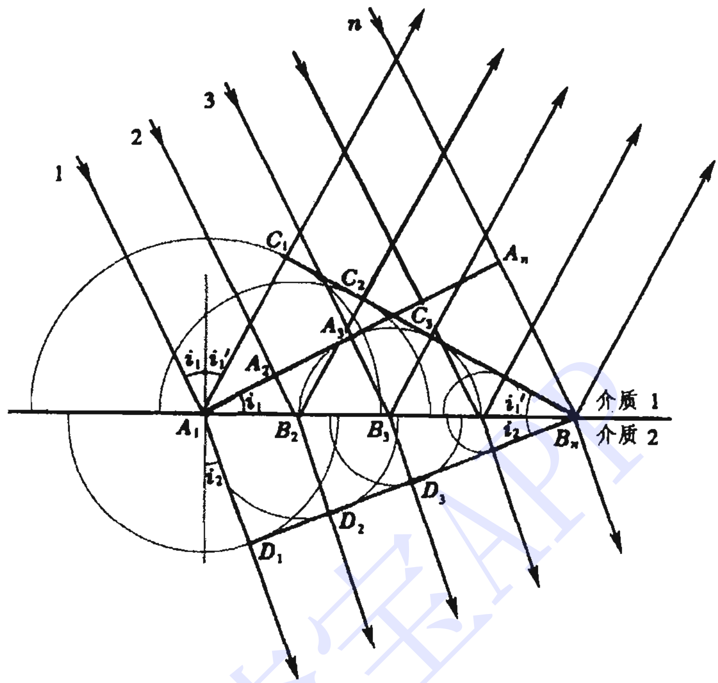


图1－18

解： 因$i_1'=i_1$，$\triangle A_1B_nA_n\equiv\triangle B_nA_1C_1$，故$\overline{A_1C_1}=\overline{B_nA_n}$.

$\triangle A_1B_2A_2$、$\triangle A_1B_3A_3$、…、$\triangle A_1B_nA_n$是一系列相似三角形，故

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_nB_n}}=\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{A_1B_n}}=\frac{1}{n-1},\qquad \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_nB_n}}=\frac{\overline{A_1B_3}}{\overline{A_1B_n}}=\frac{2}{n-1},\qquad \cdots.$$

$\triangle B_nA_1C_1$、$\triangle B_nA_2C_2$、$\triangle B_nA_3C_3$、…是一系列相似三角形，故

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{B_nB_2}}{\overline{B_nA_1}}=\frac{n-2}{n-1},\qquad \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{B_nB_3}}{\overline{B_nA_1}}=\frac{n-3}{n-1},\qquad \cdots.$$

所以

$$\overline{A_2B_2}+\overline{B_2C_2}=\frac{1}{n-1}\overline{A_nB_n}+\frac{n-2}{n-1}\overline{A_1C_1}=\overline{A_nB_n},$$

$$\overline{A_3B_3}+\overline{B_3C_3}=\frac{2}{n-1}\overline{A_nB_n}+\frac{n-3}{n-1}\overline{A_1C_1}=\overline{A_nB_n},$$

…………

反射线与入射线在同一介质内，光线长度相等就意味着光程相等，于是题中命题得证。

1－21. 证明图1－18中光线A_1D_1、$A_2B_2D_2$、$A_3B_3D_3$、…、A_nB_n的光程相等。

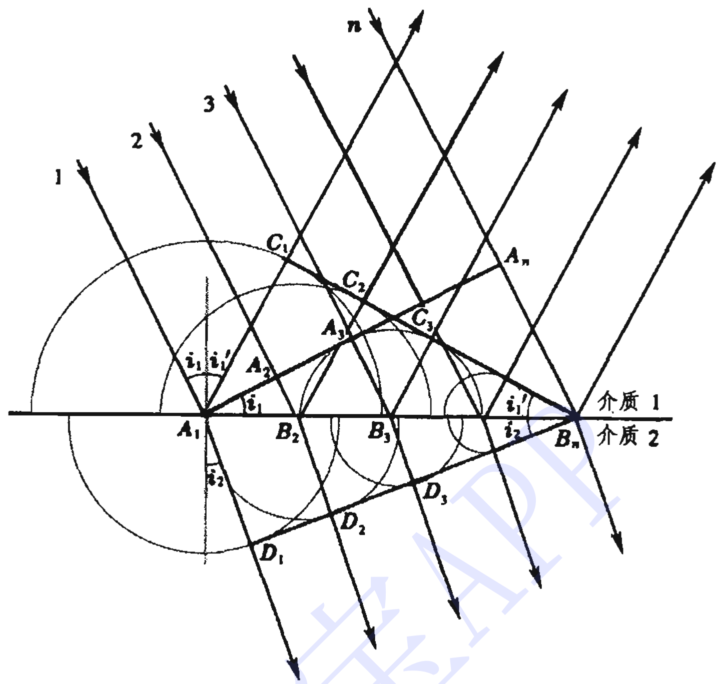


图 1 - 18

解：$\overline{B_nA_n}=\overline{A_1B_n}\sin i_1$，$\overline{A_1D_1}=\overline{A_1B_n}\sin i_2$，于是 $\dfrac{\overline{B_nA_n}}{\overline{A_1D_1}}=\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2}=\dfrac{n_2}{n_1}$.

所以光程
$$(B_nA_n)=n_1\,\overline{B_nA_n}=n_2\,\overline{A_1D_1}=(A_1D_1).$$

$\triangle A_1B_2A_2$、$\triangle A_1B_3A_3$、…、$\triangle A_1B_nA_n$ 是一系列相似三角形，故
$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_nB_n}}=\frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{A_1B_n}}=\frac{1}{n-1},\qquad \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_nB_n}}=\frac{\overline{A_1B_3}}{\overline{A_1B_n}}=\frac{2}{n-1},\qquad \cdots.$$

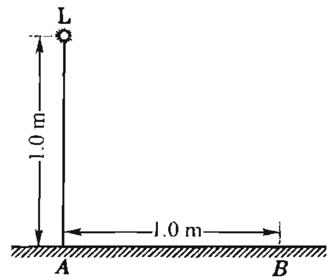
$\triangle B_nA_1D_1$、$\triangle B_nB_2D_2$、$\triangle B_nB_3D_3$、… 是一系列相似三角形，故
$$\frac{\overline{B_2D_2}}{\overline{A_1D_1}}=\frac{\overline{B_nD_2}}{\overline{B_nD_1}}=\frac{n-2}{n-1},\qquad \frac{\overline{B_3D_3}}{\overline{A_1D_1}}=\frac{\overline{B_nD_3}}{\overline{B_nD_1}}=\frac{n-3}{n-1},\qquad \cdots.$$

所以光程
$$(A_2B_2)+(B_2D_2)=n_1\,\overline{A_2B_2}+n_2\,\overline{B_2D_2}$$
$$=\frac{1}{n-1}n_1\,\overline{A_nB_n}+\frac{n-2}{n-1}n_2\,\overline{A_1D_1}=\frac{1}{n-1}(A_nB_n)+\frac{n-2}{n-1}(A_1D_1)=(A_1D_1),$$
$$(A_3B_3)+(B_3D_3)=n_1\,\overline{A_3B_3}+n_2\,\overline{B_3D_3}$$
$$=\frac{2}{n-1}n_1\,\overline{A_nB_n}+\frac{n-3}{n-1}n_2\,\overline{A_1D_1}=\frac{2}{n-1}(A_nB_n)+\frac{n-3}{n-1}(A_1D_1)=(A_1D_1),$$

…………

题中命题得证。

1－22. 在离桌面1.0m处有盏100cd的电灯L，设L可看作是各向同性的，求桌上A、B两点的照度（见本题图）。



习题 1－22

解： 按点光源照明时的照度公式

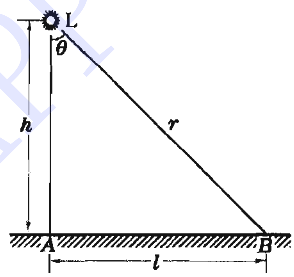
$$E = \frac{I\cos\theta}{r^2}. \qquad ①$$

$$I = 100\,\text{cd}, \quad \begin{cases}\cos\theta_A = 1,\\ r_A = 1.0\,\text{m}.\end{cases} \quad \begin{cases}\cos\theta_B = 1/\sqrt{2},\\ r_B = \sqrt{2}\,\text{m}.\end{cases}$$

以两组数据分别代入①式，得

$$I_A = 100\,\text{lx}, \quad I_B = 35\,\text{lx}.$$

1－23. 若上题中电灯L可垂直上下移动，问怎样的高度使B点的照度最大。



解： 如右图，设照明处B与电灯垂足A点的距离为l，电灯位于不同高度将同时改变距离r和倾角θ. 选θ为变量，则$r = l/\sin\theta$. 照度公式改写为

$$E = \frac{I\cos\theta}{r^2} = \frac{I}{l^2}\cos\theta\sin^2\theta,$$

对上式求导，得

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{I}{l^2}\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta),$$

令$dE/d\theta = 0$，解得

$$\tan\theta = \sqrt{2}.$$

电灯的高度

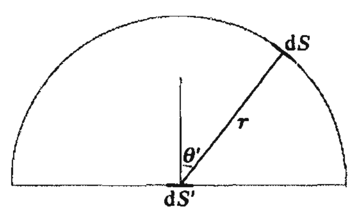
$$h = \frac{l}{\tan\theta} = \frac{1.0\,\text{m}}{\sqrt{2}} = 0.71\,\text{m}.$$

1－24. (1) 设天空为亮度均匀的朗伯体，其亮度为B，试证明，在露天水平面上的照度为$E = \pi B$；

(2) 在上面的计算中，与我们假设天空是怎样形状的发光面有无关系？与被照射面的位置有无关系？

解： (1) 书上(1.40)式

$$E = \iint_{(\text{光源表面}S)} \frac{B\,dS\cos\theta\cos\theta'}{r^2},$$



取光源表面S为半径为r的半球面如右图，被照水平面元dS'在球心，从而$\cos\theta = 1$，$dS = 2\pi r^2\sin\theta' d\theta'$. 对于亮度均匀的朗伯体，$B$可以提到积分号外，于是

$$E = 2\pi B\int_0^{\pi/2}\frac{r^2\sin\theta'\cos\theta'}{r^2}d\theta' = 2\pi B\int_0^{\pi/2}\sin\theta'\cos\theta' d\theta' = \pi B\sin^2\theta'\Big|_0^{\pi/2} = \pi B.$$

(2) 以上推导表明，投射于被照射面元的总光通量只决定于光源面对

它所张立体角，照度与光源面的位置和具体形状无关。

1－25. 试证明，一个理想漫射体受到照度为 E 的辐射时，反射光的亮度 $B=E/\pi$.

解： 理想漫射体是个朗伯体，设其亮度为 B，则自它的面元 $\Delta S'$ 散射的总光通量为

$$\Delta\Phi = 2\pi B\Delta S'\int_0^{\pi/2}\sin\theta'\cos\theta'\mathrm{d}\theta' = \pi B\Delta S'\sin^2\theta'\Big|_0^{\pi/2} = \pi B\Delta S'.$$

对于理想漫射体，散射的总光通量 $\Delta\Phi$ 就是它接收的光通量 $\Delta\Phi'$，故其照度

$$E = \frac{\Delta\Phi'}{\Delta S'} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S'} = \pi B, \quad 即 \quad B = \frac{E}{\pi}.$$

1－26. 阳光垂直照射地面时，照度为 1.0×10^5 lx. 若认为太阳的亮度与光流方向无关，并忽略大气对光的吸收，且已知地球轨道半径为 1.5×10^8 km，太阳的直径为 1.4×10^6 km，求太阳的亮度。

解：（1）书上（1.40）式

$$E = \iint\limits_{(光源表面S)} \frac{B\mathrm{d}S\cos\theta\cos\theta'}{r^2},$$

式中 $r=r_\odot$（日地距离），光源表面 S 为半径为 $R_\odot$ 的半球面，$\mathrm{d}S=2\pi R_\odot^2\sin\theta\mathrm{d}\theta$，垂直照射时面元 $\cos\theta'=1$. 太阳是亮度均匀的朗伯体，B 可以提到积分号外，于是

$$E = \frac{2\pi BR_\odot^2}{r_\odot^2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi BR_\odot^2}{r_\odot^2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi BR_\odot^2}{r_\odot^2},$$

即

$$B = \frac{Er_\odot^2}{\pi R_\odot^2}.$$

代入数值：

$$B = \frac{1.0\times10^5\times10^{-4}\mathrm{ph}\times(1.5\times10^8\mathrm{km})^2}{\pi\,\mathrm{sr}\times(1.4\times10^6\mathrm{km}/2)^2} = 1.5\times10^5\mathrm{sb}.$$