安徽大学 2009-2010 学年第一学期《高等数学 C（一）》（A 卷）

考试试题参考答案与评分细则

一、填空题（本题共 5 小题, 每小题 2 分，共 10 分）

1. $x=1$；2. $\dfrac{\pi}{2}$；3. $x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$；4. $x=0$；5. $(0,+\infty)$.

二、选择题（本题共 5 小题, 每小题 2 分，共 10 分）

6. C；7.D；8. B；9.A；10.B.

三、计算下列极限（本题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 解: 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+\sqrt{n+\sqrt{n}})-n}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{n}}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

12. 解: $x-1<[x]\le x$，所以$\dfrac{x-1}{x}<\dfrac{1}{x}[x]\le 1$，

又因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1=1$.

由夹逼定理可知$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}[x]=1$.

13, 解: 原式$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{3}-1}}\right]^{\frac{n(3^{1/n}-1)}{2}}$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{1/n}-1}{1/n}}=e^{\frac{\ln 3}{2}}=\sqrt{3}.$$

14. 解: 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\ln(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

15. 解: 令$x=t^2$，则$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

原式$=\int \frac{\arcsin t}{t} 2t\mathrm{d}t = 2\int \arcsin t\mathrm{d}t$

$=2(t\arcsin t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t) = 2(t\arcsin t + \sqrt{1-t^2}) + C$

$=2(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) + C$

16. 解: 方法一. 当 $x \in [0,3]$ 时,

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)e^{(x-1)^2}, 0 \le x \le 2, \\ e, \qquad\qquad 2 < x \le 3. \end{cases}$$

于是,

原式$=\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_2^3 e\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\Big|_0^2 + e = e$.

方法二, 令 $x-1=t$, 则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$,

于是 原式$=\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 te^{t^2}\mathrm{d}t + \int_1^2 e\mathrm{d}t = e$.

17. 解: 由对称性可知,

原式$=2\int_0^1 \frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=4\int_0^1 (1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$

$=4-4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = 4-4\cdot\frac{\pi}{4} = 4-\pi.$

18. 解: 原方程可化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$, 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

于是原方程可化为 $u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u$, 即 $u\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$,

两边积分得 $\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C_1$. 变量代回得原方程通解为 $y^2 = x^2(\ln x^2 + C)$

将 $x=1, y=2$ 代入通解得 $C=4$.

故原方程在给定初始条件下的特解为 $y^2 = x^2(\ln x^2 + 4)$

四、分析计算题（本题共两小题, 其中第 19 题 10 分, 第 20 题 12 分，共 22 分）

19. 解: 将 $x=-1$ 代入曲线方程, 解得 $y=-2$.

方程两边对 x 求导得

$3x^2+3y^2y'+\cos(\pi y)-(x+1)\pi y'\sin(\pi y)=0$.

将 $x=-1$, $y=-2$ 代入上式解得 $y'(-1)=-\dfrac{1}{3}$, 即曲线在点 $(-1,-2)$ 处的切线斜率为 $-\dfrac{1}{3}$,

从而曲线在点 $(-1,-2)$ 处的法线斜率为 3, 故法线方程为 $y=3x+1$.

20. 解: 曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 的交点为 $(0,0)$ 与 $(1,1)$. 因此, 图形 D 为:

$x^2\le y\le\sqrt{x},0\le x\le 1$

(1) 图形 D 的面积为

$S=\int_0^1|\sqrt{x}-x^2|\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

(2) $V_x=\pi[\int_0^1(\sqrt{x})^2\mathrm{d}x-\int_0^1(x^2)^2\,\mathrm{d}x]$

$=\dfrac{3}{10}\pi$

由对称性可知, $V_y=\dfrac{3}{10}\pi$.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

21. 证明: 设 $f(x_1)=\max\limits_{x\in(a,b)}f(x),g(x_2)=\max\limits_{x\in(a,b)}g(x)$, 由题设可知 $f(x_1)=g(x_2)$.

令 $F(x)=f(x)-g(x)$. 显然 $F(a)=0$.

$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=g(x_2)-g(x_1)\ge 0$,

$F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-f(x_1)\le 0$

由零点定理可知, 存在 $x_3\in(a,b)$, 使得 $F(x_3)=0$.

由 Rolle 定理知, 存在 $\xi\in(a,x_3),$,使得 $F'(\xi)=0$.

22. 证明:

令 $F(x)=2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 显然 $F(a)=0$.

$F'(x)=2xf(x)-(a+x)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$=\int_a^x [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$

因为 f 在$[a,+\infty)$上单调递增，故当$a\le t\le x$时，$f(x)-f(t)\ge 0$.

于是$F'(x)\ge 0$，故$F(x)$在$[a,+\infty)$单调递增，从而$F(b)\ge F(a)=0$.

即$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.