安徽大学 2010—2011 学年第一学期

《高等数学 A（三）》（B 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1.A　　2. C　　3. D　4.C　5. B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

6. $\dfrac{A+2E}{2}$　　7. 24　　8. $\dfrac{9}{64}$　9. $\dfrac{3}{4}$　　10. $[19.87,20.15]$

三、计算题（本大题共 10 分）

11. 解：将 D_n 的第 2 列直到第 n 列依次加到第 1 列得,

$$D_n=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^n a_i-m & a_2 & \cdots & a_n\\ \sum_{i=1}^n a_i-m & a_2-m & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum_{i=1}^n a_i-m & a_2 & \cdots & a_n-m\end{vmatrix}=(\sum_{i=1}^n a_i-m)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2-m & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-m\end{vmatrix},$$

再将第 1 行乘上 -1 分别加到第 2 行直到第 n 行得,

$$D_n=(\sum_{i=1}^n a_i-m)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -m & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix}=(-m)^{n-1}(\sum_{i=1}^n a_i-m).$$

四、分析题（本大题共 6 小题，共 62 分）

12.（本小题 12 分）解：方程组的增广矩阵为:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a & -2\\ 1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & 3\\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1+2a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & a & -2\\ 0 & a-1 & 1-a & 3\\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & 4+2a\end{pmatrix},$$

于是,

(1) 当 $a=1$ 时, $r(A)=1$, $r(\overline{A})=3$, 方程组无解;

(2) 当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时, $r(A)=r(\overline{A})=3$, 方程组有唯一解;

(3) 当 $a=-2$ 时, $r(A)=r(\overline{A})=2$, 方程组有无穷多解.

当方程组有无穷多组解时, 此时

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

对应的线性方程组为:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-2\\ -3x_2+3x_3=3\end{cases}$$

令 $x_3=0$，得到原非齐次线性方程组的一个特解：$\gamma_0=(-1,-1,0)^T$.

原非齐次线性方程组对应的导出组为:

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\ -3x_2+3x_3=0\end{cases},$$

令 $x_3=1$，得到基础解系为 $\eta=(1,1,1)^T$；

故原非齐次线性方程组的结构解为:

$X=\gamma_0+k\eta$，k 为任意常数。

13.（本小题 12 分）(1) 解：二次型 f 及其标准形矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & a\\ -2 & a & 1\end{pmatrix} 与 \Lambda=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & b\end{pmatrix}.$$

在正交变换下, A 与 Λ 相似, 故有

$1+1+1=3+3+b$,

以及 $|3E-A|=\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -a\\ 2 & -a & 2\end{vmatrix}=-2(a+2)^2=0$,

联立上述两式可得 $a=-2, b=-3$.

(2) 由 (1) 知, 矩阵 A 的特征值为 $3,3,-3$,

对于 $\lambda=3$，解方程组 $(3E-A)X=0$，可得到基础解系 $\eta_1=(-1,1,0)^T, \eta_2=(-1,0,1)^T$；

即属于 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量.

对于 $\lambda=-3$，解方程组 $(-3E-A)X=0$，可得到基础解系 $\eta_3=(1,1,1)^T$；即属于

$\lambda=-3$的线性无关的特征向量.

因为属于$\lambda=3$的特征向量η_1,η_2不正交,故需 Schmidt 正交化,

令$\beta_1=\eta_1=(-1,1,0)^T$，$\beta_2=\eta_2-\dfrac{(\eta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{2}(-1,-1,2)^T$.

再单位化，得到

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\ \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

从而$Q=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

14.（本小题 10 分）解：设$A=$“乙在当天收到甲发出的 e-mail”,$B=$“甲在当天收到乙的回复”,则依题意得

$P(A)=\dfrac{n-1}{n}$，$P(\overline{A})=\dfrac{1}{n}$，$P(B|A)=\dfrac{n-1}{n}$，$P(B|\overline{A})=0$.

（1） 由全概率公式有

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\times 0=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

（2）由 Bayes 公式以及(1)的结果得

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n}}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}=\frac{n-1}{2n-1}.$$

15.（本小题 8 分）解：(1)由题意得(X,Y)的联合分布列为

Y \ X	1	2	
1	1/9	2/9	1/3
2	2/9	4/9	2/3
	1/3	2/3	

于是$P(X=Y)=P(X=Y=1)+P(X=Y=2)=1/9+4/9=5/9$.

(2)由于 $P(Z=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=1/9$,

$P(Z=3)=P(X+Y=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=4/9$,

$P(Z=4)=P(X+Y=4)=P(X=2,Y=2)=4/9$.

故 $Z=X+Y$ 的分布列为

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 \end{pmatrix}$$

16.（本小题 12 分）解：（1）首先,(X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases},$$

由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ 得, 则当 $-1\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi},$$

从而 $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1\le x\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

同理，由 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ 得，$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（2）由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立.

（3） 首先 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\pi}dydx=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx=0$,

同理 $EY=0$.

而 $EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{xy}{\pi}dxdy$，作极坐标变换得

$$EXY=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \frac{\rho\cos\theta\rho\sin\theta}{\pi}\rho d\rho=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta\int_0^1 \rho^3 d\rho=0$$

得 $\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$，故 X 与 Y 不相关.

17.（本小题 8 分）解：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本值, 当 $0 \le x_i \le 1, (i=1,2,\cdots,n)$ 时，似然函数为：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\ \theta}=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta}$$

故对数似然函数为: $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$,

而 $$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ ,$$

再令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{dp}=0$，即 $\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$,

解得 p 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

从而 p 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

五、证明题（本大题 8 分）

18. 证明：令 $k_1(\beta+\alpha_1)+k_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+k_t(\beta+\alpha_t)=0$，　　(*)

用 A 左乘上式两边得 $k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_tA\alpha_t+(k_1+k_2+\cdots+k_t)A\beta=0$,

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 故 $A\alpha_i=0(i=1,2,\cdots,t)$,

带入上式得: $(k_1+k_2+\cdots+k_t)A\beta=0$,

而 $A\beta\ne 0$,故 $k_1+k_2+\cdots+k_t=0$.

将上式带入(*)得， $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=0$,

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是基础解系, 他们线性无关, 故必有 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$,

因此, 向量组 $\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.