安徽大学 2008—2009 学年第一学期

《高等数学 B(三)》(A 卷)考试试题参考答案及评分标准

一. 选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1.D;　2.C;　3.D;　4.A;　5.B.

二.　填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1.　$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$；　2. $t>0$；　3. 1；　4. $\frac{73}{9}$.　5.　$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

三. 解答题

1. 解：根据行列式的性质, 将 D 的每行均加至第一行, 提出公因式 $x+(n-1)a$ 得

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

再把第1行的 $-a$ 倍分别加到第二行至第 n 行, 得

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

2. 解:首先对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 进行初等行变换, 将其化成阶梯形矩阵 $\overline{B}$.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & b & 2 \\ 2a & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & b & 2 \\ 0 & 0 & b-3 & 0 \end{pmatrix}=\overline{B}.$$

因此

①当 $a\neq 0, b\neq 3$ 时,此时方程组的系数行列式不为 0,从而方程组有唯一解.

②当 $a=0$ 时,此时有 $\overline{A}\to\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & b & 2 \\ 0 & 0 & b-3 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & b-3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

即 秩(A) $<$ 秩($\overline{A}$),从而方程组无解.

③当$a \neq 0, b=3$时，此时有$\overline{A} \to \begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{B}$,即 秩(A) = 秩($\overline{A}$) = 2,此时方程组有无穷多解.

而此时$\overline{B}$对应的线性方程组为

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

可取x_3为自由未知量.令$x_3 = 0$,代入(1)解得原方程组得一个特解$\gamma_0 = (\frac{2}{a},1,0)^T$

而(1)的导出组为

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

令自由未知量$x_3 = 2$得原方程组的一个基础解系$\eta = (0,-3,2)^T$

因此原方程组的通解为

$$\gamma = \gamma_0 + k\eta = (\frac{2}{a},1,0)^T + k(0,-3,2)^T,\text{其中} k \text{为任意常数.}$$

3.解：记A_i =“所抽报名表是来自于第i个地区”，$i = 1,2,3$. 记B =“所抽到的报名表是女生报名表”，由题意知 $P(A_1) = \frac{10}{50}$，$P(A_2) = \frac{15}{50}$，$P(A_3) = \frac{25}{50}$，

且$P(B|A_1) = \frac{3}{10}$，$P(B|A_2) = \frac{7}{15}$，$P(B|A_3) = \frac{5}{25}$.

(1)由全概率公式有，$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = \frac{1}{3}$.

（或者由古典概型可直接计算得到，$P(B) = \frac{3+7+15}{10+15+25} = \frac{1}{3}$.）

(2)由贝叶斯公式有

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{9}{50}.$$

4.解(1)由 $\varphi_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dy$ 得，当$0 < x < 1$时，

$$\varphi_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)dy = \int_0^1 4xydy = 2x.$$

从而$\varphi_\xi(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 同理，$\varphi_\eta(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

易见, $\varphi(x,y)=\varphi_\xi(x)\varphi_\eta(y)$, 从而 ξ,η 独立.

(2) $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi_\xi(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$. 同理 $E\eta=\frac{2}{3}$.

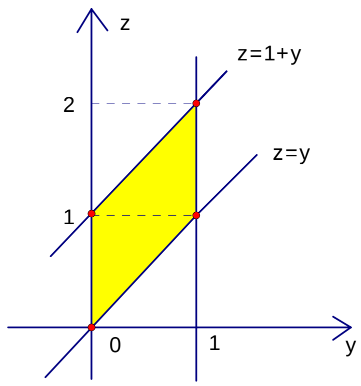
而 $E\xi\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 4x^2y^2dxdy=\frac{4}{9}$.

故 $Cov(\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=0$.

(或者，由（1）知 ξ,η 独立，从而 ξ,η 不相关，故 $Cov(\xi,\eta)=0$)

1)　由卷积公式知, $\zeta=\xi+\eta$ 的密度函数为 $\varphi_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z-y,y)dy$, 注意到

$\begin{cases}0<z-y<1\\ 0<y<1\end{cases}$, 如右图可知,



当 $z<0$ 或者 $z>2$ 时， $\varphi_\zeta(z)=0$;

当 $0<z<1$ 时， $\varphi_\zeta(z)=\int_0^z 4(z-y)ydy=\frac{2}{3}z^3$;

当 $1<z<2$ 时， $\varphi_\zeta(z)=\int_{z-1}^1 4(z-y)ydy=-\frac{2}{3}z^3+4z-\frac{8}{3}$,

因此 ζ 的密度函数为 $\varphi_\zeta(z)=\begin{cases}\frac{2}{3}z^3, & 0<z<1,\\ -\frac{2}{3}z^3+4z-\frac{8}{3}, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$

5. 解：总体 X 的数学期望为 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\theta x^\theta dx=\frac{\theta}{\theta+1}$.

令 $\frac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$, 解得未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^n\prod_{i=1}^n(x_i)^{\theta-1}, & 0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

当 $0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)$ 时， $L(\theta)>0$, 且

$$\ln L=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i,$$

再令$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=0$，得$\dfrac{n}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$,可解得$\theta$的极大似然估计值为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

从而得θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

四、证明题

1. 证明:若$x_1(2\alpha_1+3\alpha_2)+x_2(\alpha_2-\alpha_3)+x_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0$整理得

$$(2x_1+x_3)\alpha_1+(3x_1+x_2+x_3)\alpha_2+(-x_2+x_3)\alpha_3=0$$

由已知条件$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 故组合系数必全为0, 即

$$\begin{cases} 2x_1+x_3=0 \\ 3x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_2+x_3 \end{cases}, \text{而其系数行列式} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

故上述齐次线性方程组只有零解, 即$x_1=x_2=x_3=0$.

因此$2\alpha_1+3a_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$线性无关.

2. 证明: A的特征多项式为:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & 0 \\ -4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2.$$

所以A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$.

对特征值$\lambda=1$,解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2=0 \\ 2x_1-x_2=0 \\ -4x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

得基础解系为$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$.

对特征值$\lambda=0$,解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ 2x_1-2x_2=0 \\ -4x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}$$

得基础解系$\alpha_3=(1,1,-2)^T$.因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$A$的三个线性无关的特征向量,所以$A$

与对角形矩阵相似,即 A 可以对角化.
再令

$$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}.$$

因为 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,0)$,

所以 $AQ=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,即 $A=Q\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}Q^{-1}$.而,$Q^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\4&-2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$,所以

$$A^n=Q\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}^n Q^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{pmatrix}.$$