安徽大学 2009—2010 学年第一学期

《高等数学 A（三）》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. C　　2. D　3. D　4.B　5. C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $x=-2$ 或 $x=0$　　7.　24　　8. $\frac{1}{4}$　　9.　$\frac{1}{12}$　　10.　$[480.4, 519.6]$

三、计算题（本大题共 **10** 分）

11.（本小题 10 分）解：为使 D_{n+1} 中各列元素的方幂次数自上而下递升排列，将第 $n+1$ 行依次与上一行交换直至第 1 行；第 n 行依次与上一行交换直至第 2 行…；第 2 行交换到第 n 行，于是共经过

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

次行的交换，得到 n 阶范德蒙行列式

$$D_{n+1}=(-1)^{-\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{-\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-n)^{n-1} & (a-(n-1))^{n-1} & \cdots & a^{n-1} \\ (a-n)^n & (a-(n-1))^n & \cdots & a^n \end{vmatrix}$$

再对上面右端行列式的列进行与上述行的相同调换，得到

$$D_{n+1}=(-1)^{-\frac{n(n+1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

令

$$x_1=a-n, x_2=a-(n-1), \cdots, x_i=a-(n-i+1), \cdots, x_j=a-(n-j+1), \cdots, x_n=a-1, x_{n+1}=a$$

注意到 $(-1)^{-\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{-\frac{n(n+1)}{2}}=1$，故有

$$D_{n+1}=\prod_{1\le j\le i\le n+1}(x_i-x_j)$$

$$=\prod_{1\le j\le i\le n+1}((a-(n-i+1))-(a-(n-j+1)))$$

$$=\prod_{1\le j\le i\le n+1}(i-j)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}k!$$

四、分析题（本大题共 6 小题，共 62 分）

12.（本小题 13 分）解：增广矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&-1&-2&-2&-6&-3a\\0&1&2&2&6&b\\0&-1&-2&-2&-6&2-5a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&-1&-2&-2&-6&-3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix}$$

当 $a=1,b=3$ 时，方程组有无穷多解。

此时有

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&-3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

对应的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3-x_4-5x_5=-2\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5-2\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3\end{cases}$$

令 $x_3=x_4=x_5=0$，得到原非齐次线性方程组的一个特解：

$$X^*=(-2,3,0,0,0)^T$$

原非齐次线性方程组对应的导出组为

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+5x_5\\x_2=-2x_3-2x_4-6x_5\end{cases}$$

令 $x_3=1,x_4=x_5=0$，得到 $X_1=(1,-2,1,0,0)^T$；

令 $x_4=1, x_3=x_5=0$，得到 $X_2=(1,-2,0,1,0)^T$；

令 $x_5=1, x_3=x_4=0$，得到 $X_3=(5,-6,0,0,1)^T$，

故原非齐次线性方程组的结构解为

$X=X^*+k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数。

13.（本小题 14 分）解：二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

由 $|\lambda E-A|=0$ 得到 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=10$。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解方程组 $(E-A)X=0$，可得到基础解系

$\alpha_1=(2,1,2)^T, \alpha_2=(-2,2,1)^T$

当 $\lambda_3=10$ 时，解方程组 $(10E-A)X=0$，得到基础解系

$\alpha_3=(1,2,-2)^T$

容易验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交，故只需将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化即可，得到

$$\beta_1=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \beta_1=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \beta_1=\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

令 $Q=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

则当 $X=QY$ 时，有 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1{}^2+y_2{}^2+10y_3{}^2$

因为二次型的正惯性指数为 3，故二次型为正定二次型。

14.（本小题 10 分）解：设 $B_1=$\{那天下雨\}，$B_2=$\{那天不下雨\}，$A=$\{那天外出购物\}，则有 $P(B_1)=0.3, P(B_2)=0.7$，$P(A|B_1)=0.2, P(A|B_2)=0.9$。

（1）由全概率公式有

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=0.3\times0.2+0.7\times0.9=0.69$$

（2）由 Bayes 公式有

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.06}{0.69}=\frac{2}{21}$$

15.（本小题 13 分）解：

（1）(X,Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P(X=-1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=0)+P(X=-1,Y=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=0)=P(X=0,Y=-1)+P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)=\frac{1}{8}+0+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

(X,Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P(Y=-1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=0,Y=-1)+P(X=1,Y=-1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

$$P(Y=0)=P(X=-1,Y=0)+P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{8}+0+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=1)=P(X=-1,Y=1)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

（2）因为 $P(X=-1,Y=-1)\neq P(X=-1)P(Y=-1)$

所以 X,Y 不独立。

（3）$EX=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{8}=0$

$$EY=-1\times\frac{3}{8}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{8}=0$$

$$EXY=-1\times(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times0\times\frac{1}{8}+(-1)\times1\times\frac{1}{8}$$

$$+0\times(-1)\times\frac{1}{8}+0\times0\times0+0\times1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times0\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0$$

因而有 $Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$ 。

故 X,Y 不相关。

16.（本小题 12 分）解：（1）由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，即

$$\int_0^{+\infty} axe^{-\frac{x^2}{\lambda}}dx = a \bullet \frac{\lambda}{2} = 1$$

得到 $a = \frac{2}{\lambda}$。

（2）设总体 X 的样本值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n (x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$，似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^n \bullet \prod_{i=1}^{n} x_i \bullet \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}\right\}$$

取对数有

$$\ln L(\lambda) = n\ln 2 - n\ln\lambda + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}$$

令 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} = 0$

得到 λ 的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}$$

λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2}$

（3）由于 $EX^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \bullet \frac{2}{\lambda} xe^{-\frac{x^2}{\lambda}}dx = \lambda$

因此 $E\hat{\lambda} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^{\ 2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^{\ 2} = \lambda$

由此可知 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2}$ 是 λ 的无偏估计量。

五、证明题（本大题 8 分）

17. （本小题 8 分）证明：

（1）由 $A^2 + 2AB - 2E = 0$ 得到

$$\frac{1}{2}A(A + 2B) = E$$

故有 $A + 2B$ 可逆。

（2）由（1）知 $A + 2B$ 可逆，且逆矩阵为 $\frac{1}{2}A$，因而有

$$(A + 2B)\left(\frac{1}{2}A\right) = E$$

故有$\frac{1}{2}A(A+2B)=(A+2B)\left(\frac{1}{2}A\right)$

即有$AB=BA$.