安徽大学 2009—2010 学年第一学期

《高等数学 B(三)》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1、D　　2、A　　3、C　　4、C　　5、B

二. 填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6、0　　7、$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　8、3/8　　9、84　　10、（39.51, 40.49）

三、解答题（本大题共 5 小题，共 56 分）

11、解：由余子式的定义知

$$M_{11}=x-2y,\ M_{12}=x-4,\ M_{13}=y-2;$$
$$A_{11}=M_{11}=x-2y,\ A_{12}=-M_{12}=4-x,\ A_{13}=M_{13}=y-2.$$

代入两已知等式得

$$\begin{cases}(x-2y)+(x-4)-(y-2)=3;\\(x-2y)+(4-x)+(y-2)=1.\end{cases}$$

解之得 $x=4, y=1.$

因此 $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1.$

12、解：(1)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

令 $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3)=0$，得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，解下列方程组

$$\begin{cases}-2x_1=0\\-2x_2-2x_3=0\\-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

得特征向量 $\alpha_1=(0,1,-1)^T$；

当$\lambda_2=1$时，解下列方程组

$$\begin{cases}-2x_3=0\\-2x_2=0\end{cases}$$

得特征向量$\alpha_2=(1,0,0)^T$；

当$\lambda_3=3$时，解下列方程组

$$\begin{cases}2x_1=0\\2x_2-2x_3=0\\-2x_2+2x_3=0\end{cases}$$

得特征向量$\alpha_3=(0,1,1)^T$.

（2）将特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化得

$$\beta_1=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})^T，\ \beta_2=(1,0,0)^T，\ \beta_3=(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T.$$

令$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，从而$Q$为正交矩阵，并且

$$A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}Q^T$$

所以

$$A^k=Q\begin{pmatrix}(-1)^k&0&0\\0&1&0\\0&0&3^k\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{(-1)^k+3^k}{2}&\frac{(-1)^{k+1}+3^k}{2}\\0&\frac{(-1)^{k+1}+3^k}{2}&\frac{(-1)^k+3^k}{2}\end{pmatrix}$$

13、解：对增广矩阵$\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}$作初等行变换得

$$[A\ \ b]=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1)\end{bmatrix}.$$

由此可见：

（1） 当$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时，原方程组有唯一解；

（2） 当$\lambda=-2$时，原方程组无解；

（3） 当$\lambda=1$时，原方程组有无穷多解，此时增广矩阵为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

对应的方程为$x_1+x_2+x_3=-2$.

故齐次方程组的基础解系为：$\alpha_1=(-1,1,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1)^T$.

非齐次方程组的特解为：$\beta=(-2,0,0)^T$.

所以原方程组的通解为：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\beta$，其中$k_1,k_2$是任意常数.

14、解：记A_i表示事件“敌机中i发炮弹”，$i=0,1,2,3$，B表示事件“敌机被击落”，由题意知

$P(A_0)=C_3^0\times0.7^3=0.343$，　　$P(A_1)=C_3^1\times0.3\times0.7^2=0.441$，

$P(A_2)=C_3^2\times0.3^2\times0.7=0.189$，$P(A_3)=C_3^3\times0.3^3=0.027$，

且$P(B|A_0)=0$，$P(B|A_1)=0.2$，$P(B|A_2)=0.6$，$P(B|A_3)=1$.

(1) 由全概率公式得，$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.2286$.

(2) 由贝叶斯公式得，

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{1134}{2286}\approx0.496.$$

15、解：（1）总体X的数学期望为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x;\theta)dx=\int_0^{\theta}\frac{6x^2(\theta-x)}{\theta^3}dx=\frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}(\theta x^2-x^3)dx=\frac{\theta}{2},$$

令 $\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$，解得未知参数$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}$.

（2）由于

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x;\theta)dx=\int_0^{\theta}\frac{6x^3(\theta-x)}{\theta^3}dx=\frac{6}{\theta^3}\int_0^{\theta}(\theta x^3-x^4)dx=\frac{3\theta^2}{10},$$

所以

$$DX^2=EX^2-(EX)^2=\frac{3\theta^2}{10}-\frac{\theta^2}{4}=\frac{\theta^2}{20},$$

从而

$$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n\theta^2}{20}=\frac{\theta^2}{5n}.$$

四、证明题（本大题共 2 小题，共 14 分）

16、证明：因为$(A+E)^T=(E+B)^{-1}$，所以

$$(A+E)^T(E+B)=E,$$

从而$A^T(E+B)=-B$.由于B和$E+B$皆可逆，所以

$$|E+B|\neq 0,\ |B|\neq 0,$$

故$|A|\neq 0$，从而A可逆.

17、证明：由于A,B是正定矩阵，所以$A^T=A, B^T=B$，从而

$$C^T=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A^T&O\\O&B^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=C,$$

即C为对称矩阵.

任取非零向量$x\in R^{m+n}$，将x分块为$x=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$，其中$\alpha\in R^m,\beta\in R^n$，不妨设$\alpha\neq 0$.

由于A,B是正定矩阵，所以$\alpha^TA\alpha>0,\ \beta^TB\beta\geq 0$，

所以

$$x^TCx=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\alpha^TA\alpha+\beta^TB\beta>0,$$

即$C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$是正定矩阵.

五、综合分析题（本大题共 10 分）

18、解：（1）由于

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}，\quad P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6},$$

所以

$$P\{X=1,\ Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,\ Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,\ Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=0,\ Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3},$$

（或$P\{X=0,\ Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$），

故(X,Y)的联合概率分布列为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

（2）由(X,Y)的联合概率分布列可得X和Y的边缘分布列分别为

X	0	1
P	3/4	1/4

Y	0	1
P	5/6	1/6

由于$P\{X=0,\ Y=0\}=\frac{2}{3}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{5}{8}$，所以$X$和$Y$不独立.