1.考虑两列振幅相同的、偏振方向相同、频率分别为$\omega+d\varpi$和$\omega-d\omega$的线偏振平面波，它们都沿 z 轴方向传播。

（1）求合成波，证明波的振幅不是常数，而是一个波。

（2）求合成波的相位传播速度和振幅传播速度。

解：
$$\vec{E}_1(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})\cos(k_1x-\omega_1t)$$
$$\vec{E}_2(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})\cos(k_2x-\omega_2t)$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1(\vec{x},t)+\vec{E}_2(\vec{x},t)=\vec{E}_0(\vec{x})[\cos(k_1x-\omega_1t)+\cos(k_2x-\omega_2t)]$$

$$=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(\frac{k_1+k_2}{2}x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)\cos(\frac{k_1-k_2}{2}x-\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$$

其中$k_1=k+dk, k_2=k-dk; \omega_1=\omega+d\omega, \omega_2=\omega-d\omega$

$$\therefore \vec{E}=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(kx-\omega t)\cos(dk\cdot x-d\omega\cdot t)$$

用复数表示$\vec{E}=2\vec{E}_0(\vec{x})\cos(dk\cdot x-d\omega\cdot t)e^{i(kx-\omega t)}$

相速 $kx-\omega t=0$

$$\therefore v_p=\frac{\omega}{k}$$

群速 $dk\cdot x-d\omega\cdot t=0$

$$\therefore v_g=\frac{d\omega}{dk}$$

2．一平面电磁波以$\theta=45^{\circ}$从真空入射到$\varepsilon_r=2$的介质，电场强度垂直于入射面，求反射系数和折射系数。

解：$\vec{n}$为界面法向单位矢量，$<S>,<S'>,<S''>$分别为入射波，反射波和折射波的玻印亭矢量的周期平均值，则反射系数 R 和折射系数 T 定义为：

$$R=\left|\frac{<S'>\cdot\vec{n}}{<S>\cdot\vec{n}}\right|=\frac{E_0^{'2}}{E_0^2}$$
$$T=\left|\frac{<S''>\cdot\vec{n}}{<S>\cdot\vec{n}}\right|=\frac{n_2\cos\theta_2E''^2}{n_1\cos\theta E_0^2}$$

又根据电场强度垂直于入射面的菲涅耳公式，可得：

$$R=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2}\right)^2$$

$$T=\frac{4\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta\cos\theta_2}{(\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2)^2}$$

又根据反射定律和折射定律

$$\theta=\theta_1=45^{\circ}$$

$$\sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2=\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta$$

由题意， $\varepsilon_1=\varepsilon_0,\varepsilon_2=\varepsilon_0\varepsilon_r=2\varepsilon_0$

$$\therefore\theta_2=30^{\circ}$$

$$\therefore R=\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$T=\frac{4\varepsilon_0\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\sqrt{\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\varepsilon_0}\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

3．有一可见平面光波由水入射到空气，入射角为 60°。证明这时将会发生全反射，并求折射波沿表面传播的相速度和透入空气的深度。设该波在空气中的波长为 $\lambda_0=6.28\times10^{-5}$cm，水的折射率为 n=1.33。

解：由折射定律得，临界角 $\theta_c=\arcsin(\frac{1}{1.33})=48.75^{\circ}$，所以当平面光波以 60° 入射时，将会发生全反射。

折射波： $k''=k\sin\theta$

相速度 $v_p=\frac{\omega''}{k''}=\frac{\omega}{k/\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$

投入空气的深度 $\kappa=\frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}=\frac{6.28\times10^{-5}}{2\pi\sqrt{\sin^2 60-(\frac{1}{1.33})^2}}\approx1.7\times10^{-5}$ cm

4．频率为 ω 的电磁波在各向同性介质中传播时，若 $\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H}$ 仍按 $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ 变化，但 $\vec{D}$ 不再与 $\vec{E}$ 平行（即 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 不成立）。

（1）证明 $\vec{k}\cdot\vec{B}=\vec{k}\cdot\vec{D}=\vec{B}\cdot\vec{D}=\vec{B}\cdot\vec{E}=0$，但一般 $\vec{k}\cdot\vec{E}\neq0$

（2）证明 $\vec{D}=\dfrac{1}{\omega^2\mu}[k^2\vec{E}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}]$

（3）证明能流 $\vec{S}$ 与波矢 $\vec{k}$ 一般不在同方向上。

证明：1）由麦氏方程组

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

得：

$$\nabla\cdot\vec{B}=\vec{B}_0\cdot\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=i\vec{k}\cdot\vec{B}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}=i\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

$$\therefore\vec{k}\cdot\vec{B}=0$$

同理 $\vec{k}\cdot\vec{D}=0$

$$\nabla\times\vec{H}=[\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]\times\vec{H}_0=i\vec{k}\times\vec{H}=-i\omega\vec{D}$$

$$\therefore i\vec{k}\times\vec{B}=-i\mu\omega\vec{D}$$

$$\therefore\vec{B}\cdot\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega}\vec{B}\cdot(\vec{k}\times\vec{B})=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=[\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]\times\vec{E}_0=i\vec{k}\times\vec{E}=i\omega\vec{B}$$

$$\therefore\vec{B}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})\cdot\vec{E}=0，\quad\nabla\cdot\vec{E}=i\vec{k}\cdot\vec{E}$$

$\because\vec{D}\neq\varepsilon\vec{E}$ $\quad\therefore\nabla\cdot\vec{E}$ 一般 $\neq0$，即 $\vec{k}\cdot\vec{E}$ 一般 $\neq0$

2）由$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 得： $\vec{B}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$

另由$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 得： $\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega}(\vec{k}\times\vec{B})$

$$\therefore\vec{D}=-\frac{1}{\mu\omega^2}[\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})]=\frac{1}{\mu\omega^2}[(\vec{k}\times\vec{E})\times\vec{k}]=\frac{1}{\mu\omega^2}[k^2\vec{E}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}]$$

3）由$\vec{B}=\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$ 得 $\vec{H}=\frac{1}{\mu\omega}(\vec{k}\times\vec{E})$

$$\therefore\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu\omega}\vec{E}\times(\vec{k}\times\vec{E})=\frac{1}{\mu\omega}[E^2\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{E}]$$

$\because\vec{k}\cdot\vec{E}$一般$\neq0$ $\therefore\vec{S}$一般$\neq\frac{1}{\mu\omega}E^2\vec{k}$，即$\vec{S}$一般不与$\vec{k}$同向

5．有两个频率和振幅都相等的单色平面波沿 z 轴传播，一个波沿 x 方向偏振，另一个沿 y 方向偏振，但相位比前者超前$\frac{\pi}{2}$，求合成波的偏振。

反之，一个圆偏振可以分解为怎样的两个线偏振？

解：偏振方向在 x 轴上的波可记为：

$$x=A_0\cos(\omega t-kz)=A_0\cos(\omega t+\varphi_{0x})$$

在 y 轴上的波可记为：

$$y=A_0\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{2})=A_0\cos(\omega t+\varphi_{0y})$$

$$\Delta\varphi=\varphi_{0y}-\varphi_{0x}=\frac{\pi}{2}$$

合成得轨迹方程为：

$$x^2+y^2=A_0^2[\cos^2(\omega t+\varphi_{0x})+\cos^2(\omega t+\varphi_{0y})]$$

$$=A_0^2[\cos^2(\omega t+\varphi_{0x})+\sin^2(\omega t+\varphi_{0x})]$$

$$=A_0^2$$

即：$x^2+y^2=A_0^2$

所以合成的振动是一个圆频率为ω的沿 z 轴方向传播的右旋圆偏振。反之，一个圆偏

振可以分解为两个偏振方向垂直，同振幅，同频率，相位差为$\pi/2$的线偏振的合成。

6．平面电磁波垂直直射到金属表面上，试证明透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热。

证明：设在 z>0 的空间中是金属导体，电磁波由 z<0 的空间中垂直于导体表面入射。

已知导体中电磁波的电场部分表达式是：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

于是，由 z=0 的表面，单位面积进入导体的能量为：

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$，其中，$\vec{H} = \dfrac{1}{\omega\mu}\vec{k} \times \vec{E} = \dfrac{1}{\omega\mu}(\beta + i\alpha)\vec{n} \times \vec{E}$

其平均值为$\overline{|\vec{S}|} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \dfrac{\beta}{2\omega\mu}E_0^2$

在导体内部，：$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \sigma\vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$

所以金属导体单位面积那消耗的焦耳热的平均值为：

$$dQ = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{J}^* \times \vec{E}) = \frac{1}{2}\sigma E_0^2 e^{-2\alpha z}$$

作积分：$Q = \dfrac{1}{2}\sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \dfrac{\sigma}{4\alpha}E_0^2$ 即得单位面积对应的导体中消耗的平均焦耳热。

又$\because \alpha\beta = \dfrac{\omega\mu\sigma}{2}$

$\therefore Q = \dfrac{\sigma}{4\alpha}E_0^2 = \dfrac{\beta}{2\omega\mu}E_0^2$ 原题得证.

7．已知海水的$\mu_r = 1, \sigma = 1S\ m^{-1}$，试计算频率$\nu$为$50, 10^6$和$10^9$ Hz 的三种电磁波在海水中的透入深度。

解：取电磁波以垂直于海水表面的方式入射，

透射深度 $\delta = \dfrac{1}{\alpha} = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}}$

$\because \mu_r = 1$

$\therefore \mu = \mu_0\mu_r = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

$\therefore 1 > \nu = 50Hz时: \delta_1 = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\dfrac{2}{2\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}} = 72m$

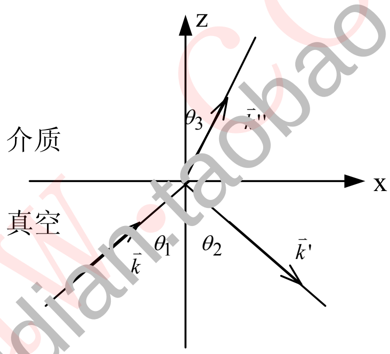
$$2>\nu=10^6Hz\text{时：}\ \delta_2=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}\times1}}\approx0.5m$$

$$3>\nu=10^9Hz\text{时}:\delta_3=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{2}{2\pi\times10^9\times4\pi\times10^{-7}\times1}}\approx16mm$$

8．平面电磁波由真空倾斜入射到导电介质表面上，入射角为θ_1，求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度。若导电介质为金属，结果如何？

提示：导电介质中的波矢量$\vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha},\vec{\alpha}$只有 z 分量（为什么？）。

解：根据题意，如图所示，入射平面是 xz 平面



导体中的电磁波表示为：$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

$$\vec{k}''=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$$

与介质中的有关公式比较可得：

$$\begin{cases}\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon\\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$$

根据边界条件得：$k_x''=\beta_x+i\alpha_x=\text{实数},\therefore\alpha_x=0$

$$\text{又}\ k_x''=k_x=k\sin\theta_1=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$$

$$\therefore\beta_x=\frac{\omega}{c}\sin\theta_1$$

而入射面是 xz 平面，故$\vec{k},\vec{k}''$无 y 分量。　$\therefore\alpha_y=0,\beta_y=0$

$\therefore\vec{\alpha}$只有α_z存在，$\vec{\beta}$有β_x与β_z，其中$\beta_x=\dfrac{\omega}{c}\sin\theta_1$

$$\therefore\text{有}\begin{cases}(\frac{\omega}{c}\sin\theta_1)^2+\beta_z^2-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon\\ \alpha_z\beta_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$$

解得：

$$\beta_z^2=\frac{1}{2}(\mu\varepsilon\omega^2-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1-\omega^2\mu\varepsilon)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

$$\alpha_z^2=-\frac{1}{2}(\mu\varepsilon\omega^2-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)+\frac{1}{2}[(\omega^2\mu\varepsilon-\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1)^2+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

其相速度为：$v=\dfrac{\omega}{\beta}$，　　衰减深度为 $1/\alpha$

如果是良导体，则：$\begin{cases}\dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_1+\beta_z^2-\alpha_z^2=0\\ \alpha_z\beta_z=\dfrac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}$

$$\therefore\ \beta_z^2=-\frac{\omega^2}{2c^2}\sin 2\theta_1+\frac{1}{2}[\frac{\omega^4}{c^4}\sin^4\theta_1+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

$$\alpha_z^2=\frac{\omega^2}{2c^2}\sin^2\theta_1+\frac{1}{2}[\frac{\omega^4}{c^2}\sin^4\theta_1+\omega^2\mu^2\sigma^2]^{1/2}$$

9．无限长的矩形波导管，在在 z=0 处被一块垂直地插入地理想导体平板完全封闭，求在 $z=-\infty$ 到 z=0 这段管内可能存在的波模。

解：在此中结构得波导管中，电磁波的传播依旧满足亥姆霍兹方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\end{cases}$$

方程的通解为：

$$E(x,y,z)=(C_1\sin k_x x+D_1\cos k_x x)\cdot(C_2\sin k_y y+D_2\cos k_y y)\cdot(C_3\sin k_z z+D_3\cos k_z z)$$

根据边界条件有：

$$E_y=E_z=0,(x=0,a)\,,\qquad E_x=E_z=0,(y=0,b)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0,(x=0,a)\,,\quad \frac{\partial E_y}{\partial y}=0,(y=0,b)\,,\quad \frac{\partial E_z}{\partial z}=0,(z=0)$$

故：$\begin{cases}E_x=A_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z\\ E_y=A_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z\\ E_z=A_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z\end{cases}$

其中，　$k_x=\dfrac{m\pi}{a},m=0,1,2\cdots$

$k_y=\dfrac{n\pi}{b},n=0,1,2\cdots$

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0=\frac{\omega^2}{c^2}\ \text{且}\ A_1\frac{m\pi}{a}+A_2\frac{n\pi}{b}+A_3k_z=0$$

综上，即得此种波导管种所有可能电磁波的解。

10．电磁波 $\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{i(k_2z-\omega t)}$ 在波导管中沿 z 方向传播，试使用 $\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu_0\vec{H}$ 及 $\nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}$ 证明电磁场所有分量都可用 $E_x(x,y)$ 和 $H_z(x,y)$ 这两个分量表示。

证明：沿 z 轴传播的电磁波其电场和磁场可写作：

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{i(k_zz-\omega t)},\quad \vec{H}(x,y,z,t)=\vec{H}(x,y)e^{i(k_zz-\omega t)}$$

由麦氏方程组得

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=i\omega\mu_0\vec{H}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-i\omega\varepsilon_0\vec{E}$$

写成分量式：$\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial z}=\dfrac{\partial E_z}{\partial y}-ik_zE_y=i\omega\mu_0H_x$　　（1）

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=ik_zE_x-\frac{\partial E_z}{\partial x}=i\omega\mu_0H_y \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=i\omega\mu_0H_z$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-ik_zH_y=-i\omega\varepsilon_0E_x \qquad (3)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=ik_zH_x-\frac{\partial H_z}{\partial x}=-i\omega\varepsilon_0E_y \qquad (4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-i\omega\varepsilon_0E_z$$

由（2）（3）消去 H_y 得 $E_x=\dfrac{1}{i(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2)}(-\omega\mu_0\dfrac{\partial H_z}{\partial y}-k_z\dfrac{\partial E_z}{\partial x})$

由（1）（4）消去 H_x 得 $E_y = \dfrac{1}{i(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)} (\omega\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial x} - k_z \dfrac{\partial E_z}{\partial y})$

由（1）（4）消去 E_y 得 $H_x = \dfrac{1}{i(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)} (-k_z \dfrac{\partial H_z}{\partial x} + \omega\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial y})$

由（2）（3）消去 E_x 得 $H_y = \dfrac{1}{i(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)} (-k_z \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \omega\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial x})$

11．写出矩形波导管内磁场 $\vec{H}$ 满足的方程及边界条件。

解：对于定态波，磁场为 $\vec{H}(\vec{x},t) = \vec{H}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$

由麦氏方程组 $\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$

得 $\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = -\nabla^2 \vec{H} = -i\omega\varepsilon \nabla \times \vec{E}$

又 $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega\mu\vec{H}$

$\therefore -i\omega\varepsilon\nabla \times \vec{E} = \omega^2\mu\varepsilon\vec{H} = -\nabla^2 \vec{H}$

$\therefore \begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\vec{H} = 0, k^2 = \omega^2\varepsilon\mu \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$ 即为矩形波导管内磁场 $\vec{H}$ 满足的方程。

由 $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ 得 $\vec{n} \cdot \vec{H} = 0$，$H_n = 0$

利用 $\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$ 和电场的边界条件可得：$\dfrac{\partial H_t}{\partial n} = 0$

$\therefore$ 边界条件为 $\begin{cases} H_n = 0 \\ \dfrac{\partial H_t}{\partial n} \end{cases}$

12．论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 或 TM_{0n} 波。

证明：已求得波导管中的电场 $\vec{E}$ 满足：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

由 $\vec{H} = -\dfrac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$ 可求得波导管中的磁场为：

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_3 k_y - iA_2 k_z)\sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ H_y = -\dfrac{i}{\omega\mu}(iA_1 k_z - A_3 k_x)\cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ H_z = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_2 k_x - A_1 k_y)\cos k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

本题讨论 TM 波，故 $H_z=0$，即：$A_2 k_x - A_1 k_y = 0$

故：1）若 $n = 0$, 则 $k_y = \dfrac{n\pi}{b} = 0$, $A_2 k_x = 0$

又 $k_x = \dfrac{m\pi}{a} \neq 0$, 那么 $A_2=0$

$\therefore H_x = H_y = 0$

2）若 $m = 0$, 则 $k_x = \dfrac{m\pi}{a} = 0$, $A_1 k_y = 0$

又 $k_y = \dfrac{n\pi}{b} \neq 0$, 那么 $A_1 = 0$

$\therefore H_x = H_y = 0$

$\therefore$ 波导中不可能存在 TM_{m0} 和 TM_{0n} 两种模式的波

13．频率为 30×10^9 Hz 的微波，在 $0.7cm\times0.4cm$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？在 $0.7cm\times0.6cm$ 的矩形波导管中能以什么波模传播？

解：1）$\nu = 30\times10^9\ Hz$，波导为 $0.7cm\times0.4cm$

由 $\nu = \frac{\omega}{2m} = \frac{c}{2}\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}$

当 $a = 0.7\times10^{-2} m., b = 0.4\times10^{-2} m$ 时

$$m = 1, n = 1\text{时}, \nu = 4.3\times10^{10} Hz$$
$$m = 1, n = 0\text{时}，\ \nu = 2.1\times10^{10} Hz$$
$$m = 0, n = 1\text{时}, \nu = 3.7\times10^{10} Hz$$

∴此波可以以 TM_{10} 波在其中传播。

2）$\nu = 30\times10^9 Hz$，波导为 $0.7cm\times0.6cm$

$$m = 1, n = 1\text{时}, \nu = 2.1\times10^{10} Hz$$
$$m = 1, n = 0\text{时}，\ \nu = 2.5\times10^{10} Hz$$
$$m = 0, n = 1\text{时}, \nu = 3.3\times10^{10} Hz$$

∴此波可以以 TE_{10} 和 TE_{01} 两种波模传播。

14．一对无限大的平行理想导体板，相距为 b，电磁波沿平行与板面的 z 方向传播，设波在 x 方向是均匀的，求可能传播的波模和每种波模的截止频率。

解：在导体板之间传播的电磁波满足亥姆霍兹方程：

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0\\ k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\\ \nabla\cdot\vec{E} = 0\end{cases}$$

令 U（x，y，z）是 $\vec{E}$ 的任意一个直角分量，由于 $\vec{E}$ 在 x 方向上是均匀的

$$\therefore U(x,y,z) = U(y,z) = Y(y)Z(z)$$

又在 y 方向由于有金属板作为边界，是取驻波解；在 z 方向是无界空间，取行波解

∴解得通解：$U(x,y,z) = (C_1\sin k_y y + D_1\cos k_y y)e^{ik_z z}$

由边界条件：$\vec{n}\times\vec{E} = 0, 和 \frac{\partial E}{\partial n} = 0$ 定解

$$E_x = A_1\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$E_y = A_2\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_z z - \omega t)} \quad \text{且} k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = (\frac{n\pi}{b})^2 + k_z^2, n = 0,1,2\cdots$$
$$E_z = A_3\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$

又由 $\nabla\cdot\vec{E} = 0$ 得：A_1 独立，与 A_2,A_3 无关，$\frac{n\pi}{b}A_2 = ik_z A_z$

令 k_z＝0 得截止频率：$\omega_c = \dfrac{n\pi c}{b}$

15．证明整个谐振腔内的电场能量和磁场能量对时间的平均值总相等。

证明：在谐振腔中，电场 $\vec{E}$ 的分布为：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

由 $\vec{H} = -\dfrac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$ 可求得波导管中的磁场为：

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_3 k_y - iA_2 k_z)\sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ H_y = -\dfrac{i}{\omega\mu}(iA_1 k_z - A_3 k_x)\cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ H_z = -\dfrac{i}{\omega\mu}(A_2 k_x - A_1 k_y)\cos k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

由 $\omega = \dfrac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B})$ 有，谐振腔中：

1）电场能流密度

$$\omega_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

$$\therefore \overline{\omega}_E = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\cdot\vec{D})] = \frac{1}{4}\mathrm{Re}(\vec{E}^*\cdot\vec{D})$$

$$= \frac{\varepsilon}{4}[A_1^2\cos^2 k_x x \sin^2 k_y y \sin^2 k_z z + A_2^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \sin^2 k_z z + A_3^2 \sin^2 k_x x \sin^2 k_y y \cos^2 k_z z]$$

2)磁场能流密度

$$\omega_B = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

$$\overline{\omega}_B = \frac{1}{4}\mathrm{Re}(\vec{H}^*\cdot\vec{B})$$

$$= \frac{1}{4\mu\omega^2}[(A_3 k_y - A_z k_z)^2 \sin^2 k_x x \cos k^2 k_y y \cos^2 k_z z +$$

$$+ (A_1 k_z - A_3 k_x)^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y \cos^2 k_z z +$$

$$+ (A_2 k_x - A_1 k_y)^2 \cos^2 k_x x \cos^2 k_y y \sin^2 k_z z]$$

有：$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$ 且 $A_1 k_x + A_2 k_Y + A_3 k_z = 0$

其中：$k_x = \dfrac{m\pi}{a}, k_y = \dfrac{n\pi}{b}, k_z = \dfrac{p\pi}{c}, m, n, p = 0,1,2\cdots$

a，b，c 是谐振腔的线度，不妨令 x:0～a, y:0～b, z:0～c

于是谐振腔中电场能量对时间的平均值为：

$$\overline{W}_E = \int \overline{\varpi}_E dV = \frac{\varepsilon}{4}\int_0^a\int_0^b\int_0^c (A_1^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y \sin^2 k_z z + A_2^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y \sin^2 k_z z +$$

$$+ A_3^2 \sin^2 k_x x \sin^2 k_y y \cos^2 k_z z) dxdydz$$

$$= \frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

谐振腔中磁场能量的时间平均值为：

$$\overline{W}_B = \int \overline{\varpi}_B dV = \frac{1}{4\mu\omega^2}\cdot\frac{abc}{8}[(A_3k_y - A_2k_z)^2 + (A_1k_z - A_3k_x)^2(A_2k_x - A_1k_y)^2]$$

$$\because A_1k_x + A_2k_y + A_3k_z = 0$$

$$\therefore (A_1k_x + A_2k_y + A_3k_z)^2 = A_1^2k_x^2 + A_2^2k_y^2 + A_3^2k_z^2 + 2A_1A_2k_xk_y + 2A_1A_3k_zk_x + 2A_2A_3k_yk_z = 0$$

$$\therefore \overline{W}_B = \frac{abc}{32\mu\omega^2}[(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)]$$

$$= \frac{abck^2}{32\mu\omega^2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = \frac{abc\varepsilon}{32}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

$$\therefore \overline{W}_E = \overline{W}_B$$