安徽大学 2010—2011 学年第二学期

《高等数学 C（二）》（A 卷）参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 收敛.　　　　　　2. $C_1\cos x+C_2\sin x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

3. $\dfrac{n(n-1)}{2}-k$.　　　4. -2.

5. $y_n=C2^n-1$，其中 C 为任意常数.

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. A.　　　2. C.　　　3. C.　　　4. B.　　　5. D

三、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解　令 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$，将各行加到第一行，则第一行有公因子 $x+(n-1)a$，将其提到行列式之外得

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

将各行加上第一行的 $-a$ 倍得

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

2. 设 $AX=b$ 为三阶非齐次线性方程组，已知 $r(A)=1$，η_1,η_2,η_3 是它的三个解，并且

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

求该方程组的通解.

解　因为$r(A)=1$，故导出组$AX=0$的基础解系含有两个解向量.

$$\xi_1=\eta_1-\eta_3=(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},$$

$$\xi_2=\eta_2-\eta_1=(\eta_2+\eta_3)-(\eta_1+\eta_3)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

是导出组的两个线性无关的解向量.

$$\eta_1=\frac{1}{2}[(\eta_1-\eta_3)+(\eta_1+\eta_3)]=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

因此，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

其中C_1,C_2为任意常数.

(注：本题的答案不唯一，　只要结论正确均给分)

3.　设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，　求正交矩阵$Q$，使$Q^{-1}AQ$为对角矩阵.

解　矩阵A的特征多项式

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3),$$

故A的特征值为$\lambda_1=1$(二重)，$\lambda_2=3$.

对于$\lambda_1=1$，解齐次方程组$(E-A)X=0$，得到一个基础解系为

$$\alpha_1=(1,0,0)^T,\ \alpha_2=(0,1,-1)^T.$$

对于$\lambda_2=3$，解齐次方程组$(3E-A)X=0$，得到一个基础解系为

$$\alpha_3=(0,1,1)^T.$$

由于α_1,α_2是正交的，将其单位化得$\gamma_1=(1,0,0)^T$，$\gamma_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

将α_3单位化得$\gamma_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

故正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，且$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

4. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+ax_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3$的正、负惯性指数都是 1， 求$a$的值.

解 该二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

由于二次型的正、负惯性指数都是 1，则矩阵A的含有一个特征值 0，且秩为 2. 由此可得$|A|=-a^3+3a-2=0$. 于是，$a=1$或$a=-2$.

由于$a=1$时，$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$的秩为 1；$a=-2$时，$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$的秩为 2，故$a=-2$.

5. 求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{1}{2})^n$的和.

解 构造幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，先求该幂级数的和函数.

对$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}$两边求导得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

再对两边求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3},$$

两边同乘以 x 得 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$，且该级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $x=\frac{1}{2}$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(\frac{1}{2})^n=8$.

6． 求微分方程 $y'-\frac{y}{x}+\frac{\ln x}{x}=0$ 在初始条件 $y(1)=1$ 下的解.

解 原方程可化为 $y'-\frac{1}{x}y=-\frac{\ln x}{x}$，为一阶非齐次线性方程.

故原方程的通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}[\int(-\frac{\ln x}{x})e^{\int(-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]\\&=x(\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x+C)\\&=x[\frac{1}{x}(\ln x+1)+C]\\&=\ln x+1+Cx,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

将 $x=1,y=1$ 带入得 $C=0$，故原方程在初始条件 $y(1)=1$ 下的解为 $y=\ln x+1$.

四、分析计算题（共 10 分）

给定向量组 $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)^T$，$\alpha_2=(1,0,2,3,-4)^T$，$\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)^T$，$\alpha_4=(7,1,0,-1,3)^T$.

（1）判定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，并求秩.

（2）求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，并用这个极大无关组表示其余向量.

解 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{pmatrix}$.

通过初等行变换将 A 化为阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & -8 & 40 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & -8 & 40 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

因此，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$.

由于 β_1,β_2,β_4 为 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的一个极大无关组，且 $\beta_3=\beta_1-5\beta_2$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，且 $\alpha_3=\alpha_1-5\alpha_2$.

五、证明题（共 10 分）

设 A,B 均为 n 阶方阵，

（1）若 A 或 B 可逆， 证明 AB 与 BA 具有相同的特征值.

（2）若 A,B 均不可逆，上述结论是否正确？并说明理由.

证（1）不妨假设 A 可逆，此时 $A^{-1}ABA=BA$，即 AB 与 BA 相似，故具有相同的特征值.

(2) 结论正确.

(方法一) 考虑分块矩阵

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix},$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵. 由于 $\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，故

$$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ 具有相同的特征值. 由于 $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 特征值是由 AB 的特

征值和n个0构成，$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$的特征值是由$BA$的特征值和$n$个0构成，故结论正确.

(方法二)

设λ为AB的特征值，对应特征向量为X，则$ABX=\lambda X$. 两边同时左乘B得

$$BABX = BA(BX) = \lambda(BX).$$

若$BX \neq 0$，λ是BA的特征值. 若$BX = 0$，由于$X \neq 0$，则此时$\lambda = 0$，即$|B| = 0$.

因为$|BA| = |B||A| = 0$，所以$\lambda = 0$也是BA的一个特征值.

同理可证若λ是BA的一个特征值，则λ也是AB的一个特征值.

综上所述，结论正确.