安徽大学 2010—2011 学年第一学期

《高等数学 B(三)》(B 卷)考试试题参考答案及评分标准

一、选择题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

1、C　　2、B　　3、A　　4、D　　5、C

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 2 分,共 10 分)

6、3　　7、3/7　　8、$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　9、$N(-1,2)$　　10、1/12

三、解答题(本大题共 5 小题,共 54 分)

11、解:将 D_4 中第三行元素换为 5,5,3,3,然后按第三行展开,有

$$5(A_{31}+A_{32})+3(A_{33}+A_{34})=0 \qquad (1)$$

再将 D_4 中第三行元素换为 2,2,1,1,然后按第三行展开,有

$$2(A_{31}+A_{32})+A_{33}+A_{34}=0 \qquad (2)$$

由(1)和(2)式得,$A_{31}+A_{32}=0,\ A_{33}+A_{34}=0$.

12、解:(1) 由题意知

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_2+3\alpha_3)$$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

所以 $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

（2）$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4),$

故B有特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

当$\lambda=1$时，解方程组$(E-B)x=0$，得同解方程为

$$x_1+x_2+2x_3=0,$$

因此对应的线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=(-2,0,1)^T,\alpha_2=(-1,1,0)^T.$$

当$\lambda=4$时，解方程组$(4E-B)x=0$，得同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=0\\ x_2-x_3=0\end{cases},$$

因此对应的特征向量为$\alpha_3=(0,1,1)^T$.

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

13、解：对增广矩阵$\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}$作初等行变换得

$$\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2+4\\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & 2 & \lambda-2 & 8\\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2+4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & 2 & \lambda-2 & 8\\ 0 & 0 & \dfrac{(\lambda+1)(4-\lambda)}{2} & \lambda(\lambda-4)\end{bmatrix}.$$

由此可见：

（1） 当$\lambda\neq-1$且$\lambda\neq4$时，由于$r(A)=r\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=3$，所以原方程组有唯一解；

（2） 当$\lambda=-1$时，由于$r(A)=2<r\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=3$，所以原方程组无解；

（3） 当$\lambda=4$时，由于$r(A)=2=r\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}<3$，所以原方程组有无穷多解，此时

增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应的方程组为$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ \quad\; x_2 + \; x_3 = 4 \end{cases}$,

故齐次方程组的基础解系为：$\alpha = (-3, -1, 1)^T$，非齐次方程组的特解为：$\beta = (0, 4, 0)^T$. 所以原方程组的通解为：$k\alpha + \beta$，其中k是任意常数.

14、解：记A^4表示事件“发 AAAA”，B^4表示事件“发 BBBB”，C^4表示事件“发 CCCC”，D表示事件“收 ABCA”，由题意知$P(A^4) = P(B^4) = P(C^4) = \dfrac{1}{3}$，且

$$P(D \mid A^4) = 0.6^2 \times 0.2^2 = 0.0144,$$
$$P(D \mid B^4) = 0.6 \times 0.2^3 = 0.0048 = P(D \mid C^4).$$

(1)由全概率公式得，

$$P(D) = P(A^4)P(D \mid A^4) + P(B^4)P(D \mid B^4) + P(C^4)P(D \mid C^4) = 0.008.$$

(2)由贝叶斯公式得，

$$P(A^4 \mid D) = \frac{P(A^4)P(D \mid A^4)}{P(D)} = 0.6.$$

15、解: 样本的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{(1-\theta)/\theta}, & 0 < x_1, x_2, \cdots, x_n < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

当$0 < x_1, x_2, \cdots, x_n < 1$时，$L(\theta) = \dfrac{1}{\theta^n} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{(1-\theta)/\theta} > 0$，两边取对数得，

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta + \frac{1-\theta}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i,$$

令$\dfrac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\dfrac{n}{\theta} - \dfrac{1}{\theta^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$，

于是得到θ的极大似然估计量为$\hat{\theta} = -\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i$.

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

16、证明：因为 $AA^* = |A|E$，所以 $|A||A^*| = |A|^n$，又由于 A 可逆，所以 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

由 $AA^* = |A|E$ 知，$A^* = |A|A^{-1}$，从而 $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}|A|^{-1}A = |A|^{n-2}A$.

17、证明：设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n$，则

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+1 \end{bmatrix}.$$

易见 $B^T = B$，且 A 与 B 的1阶、2阶，…，$n-1$阶顺序主子式全相同. 由于 A 正定，所以 A 的各阶顺序主子式全大于零. 现考虑 B 的 n 阶行列式

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |A| + (A\text{的}n-1\text{阶顺序主子式}) > 0,$$

因此 B 的各阶顺序主子式全大于零，故 B 是正定矩阵.

五、综合分析题（本大题共 14 分）

18、解：（1）随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度函数分别为

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_{-x}^{x} 1dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx = \begin{cases} \int_{-y}^{1} 1dx, -1 < y < 0 \\ \int_{y}^{1} 1dx, & 0 \le y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 1+y, -1 < y < 0, \\ 1-y, & 0 \le y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

由于在区域 $\{(x,y): |y| < x, 0 < x < 1\}$ 内，$p(x,y)$ 与 $p_X(x)p_Y(y)$ 并不是几乎处处相等，故 X 和 Y 不相互独立.

（2）由于

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$$
$$EY=\int_{-\infty}^{\infty}yp_Y(y)dy=\int_{-1}^0 y(1+y)dy+\int_0^1 y(1-y)dy=0,$$
$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)dxdy=\int_0^1[\int_{-x}^{x}xydy]dx=0,$$

所以$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0$，故$X$和$Y$不相关.

（3）$P(X+Y\geq 1)=\int_{1/2}^1[\int_{1-x}^{x}1dy]dx=\int_{1/2}^1(2x-1)dx=\frac{1}{4}$.