安徽大学 2012—2013 学年第二学期

《数值分析》（A 卷）考试试题参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1． $x_{n+1}=\dfrac{2x_n^3+3}{3x_n^2-1}$，　**2**． 1，　**3**． $-\dfrac{h^5}{90}f^{(4)}(c)$，　**4**． $\ln(\dfrac{y}{x})$

二、计算题（每小题 12 分，共 72 分）

5．（1）设不动点迭代为 $x_{n+1}=\dfrac{2-e^{x_n}}{10}$

令 $\varphi(x)=\dfrac{2-e^x}{10}$， $x\in[0,\ 0.5]$，则： $\varphi(x)\in[0,\ 0.5]$，且

$|\varphi'(x)|=\dfrac{1}{10}|-e^x|\le 0.825<1$，故此不动点迭代收敛

……………………（6 分）

（2）由 $x_{n+1}=\dfrac{2-e^{x_n}}{10}$，及 $x_0=0$，得 $x_1=\dfrac{2-e^{x_0}}{10}=0.1$

$$x_2=\frac{2-e^{x_1}}{10}=0.0895,\quad x_3=\frac{2-e^{x_2}}{10}=0.0906$$

……………………（12 分）

6．（1）该方程组的高斯-塞德尔迭代为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(11-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(18-x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{5}(22-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

由 $P_0=(0,0,0)^T$，得 $\begin{cases} x_1^{(1)}=\dfrac{1}{4}(11-0-0) \\ x_2^{(1)}=\dfrac{1}{4}(18-x_1^{(1)}-0) \\ x_3^{(1)}=\dfrac{1}{5}(22-2x_1^{(1)}-x_2^{(1)}) \end{cases}$　即

$P_1=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)})^T=(2.75,3.8125,2.5375)^T$，同理得

$$P_2=(0.2094,3.1789,3.6805)^T$$

$$P_3=(0.2404,2.5997,3.1839)^T$$

…………………（9 分）

（2）因为，该方程组的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&1\\1&4&2\\2&1&5\end{pmatrix}$ 为严格对角占优矩阵，故此高斯-塞德尔迭代收敛

…………………（12 分）

7．依题意，有

$$L_2(x)=\frac{0.5(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}+\frac{1(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+\frac{2(x+1)(x-0)}{(1+1)(1+0)}$$

$$=0.25x^2+0.75x+1$$

$$2^{0.3}\approx L_2(0.3)=0.25\cdot 0.3^2+0.75\cdot 0.3+1=1.2475$$

…………………（9 分）

因为 $f'''(x)=(\ln 2)^3 2^x$， $M=\max\limits_{-1\le x\le 1}|f'''(x)|=2(\ln 2)^3=0.6660$

故误差 $|2^{0.3}-L_2(0.3)|\le\dfrac{0.6660}{3!}(0.3+1)(0.3-0)(0.3-1)=0.0303$

…………………（12 分）

8．设拟合曲线为 $y=a+bx$，由最小二乘法，a，b 由下列方程组确定

$$\begin{cases}(\sum\limits_{k=1}^{5}x_i)a+(\sum\limits_{k=1}^{5}x_i^2)b=\sum\limits_{k=1}^{5}x_iy_i\\(\sum\limits_{k=1}^{5}x_i)b+5a=\sum\limits_{k=1}^{5}y_i\end{cases}，即\begin{cases}15a+55b=105.5\\5a+15b=31\end{cases}$$

…………………（10 分）

得 $a=2.45$， $b=1.25$，于是拟合曲线为 $y=2.45+1.25x$

…………………（12 分）

9．设 $f(x)=\dfrac{1}{2x}$， $x\in[1,2]$，则

$$f''(x)=\frac{1}{x^3},\quad M_2=\max_{1\le x\le 2}|f''(x)|=1$$

由组合梯形公式的误差 $E_T(f,h)=-\dfrac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$，知

$|E_T(f,h)|=|-\dfrac{2-1}{12}h^2f''(\eta)|\le\dfrac{h^2}{12}M_2=\dfrac{h^2}{12}$，要使 $|E_T(f,h)|\le\dfrac{h^2}{12}\le 10^{-3}$，只要

$h\le 0.1095$，故取 $h=0.1$

……………………（6 分）

$$T(f,0.1)=\frac{2-1}{2\times 10}[f(1)+f(2)+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)]$$

$$=\frac{1}{2\times 10}[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2(\frac{1}{2\times 1.1}+\frac{1}{2\times 1.2}+\cdots+\frac{1}{2\times 1.9})]=0.3469$$

……………………（12 分）

10．令 $f(x,y)=-y+x+1$，步长 $h=0.1$

由欧拉公式 $\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_0=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}y_{n+1}=y_n+0.1(x_n+1-y_n)\\ y_0=1\end{cases}$， $n=0,1,2,\cdots$

……………………（6 分）

$y_1=1+0.1(0+1-1)=1$，同理有

$$y_2=1.0100,\quad y_3=1.0290,\quad y_4=1.0561,\quad y_5=1.0905$$

……………………（12 分）

三、证明题（每小题 8 分，共 8 分）

11．设方程 $f(x)=0$， $x\in[a,b]$ 的真实根为 x^*，二分法产生的序列为

$$\{x_n\},\quad n=0,1,2,\cdots$$

由二分法的误差 $|x_n-x^*|\le\dfrac{1}{2^{n+1}}(b-a)$，而 $x_{n+1}-x^*=(x_n-x^*)+(x_{n+1}-x_n)$

所以 $\dfrac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=1+\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}$

……………………（3 分）

容易证明$|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{2^{n+2}}(b-a)$，故

$$\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n-x^*|}\geq(\frac{b-a}{2^{n+2}})/(\frac{b-a}{2^{n+1}})=\frac{1}{2}$$

显然，当$x_n>x^*$时，$x_{n+1}<x_n$，当$x_n<x^*$时，$x_{n+1}>x_n$，故

$$\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=|1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}|=|1-|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}||\leq\frac{1}{2}$$

故二分法线性收敛

......................（8 分）