

随机过程补考试卷

学生所在系_____ 姓名_____ 学号_____ 得分_____

1. (15分) 设某公司的网站受到网络攻击的次数为一Poisson过程, 平均每小时3次. 试求:

- (1) 一上午(8至12点)没有受到攻击的概率;
- (2) 下午第一次受到攻击的时间的分布.

2. (20分) 某人负责订阅杂志. 设前来订阅杂志的人数服从强度为8的Poisson过程, 每人分别以概率 $1/2, 1/3, 1/6$ 订阅一本, 两本, 三本杂志, 且各人的选择相互独立. 现以 $N_i(t)$ 表示 $(0, t]$ 时段内订阅 i 本杂志的人数, $i = 1, 2, 3$.

(1) 试问 $N_i(t), i = 1, 2, 3$ 分别是什么过程? 又问 $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ 是否相互独立? 若是请加以证明.

(2) 若每订出一本杂志可获得一元的手续费, 以 $N(t)$ 表示 $(0, t]$ 时段内所获得的全部手续费, 试求 $E[N(t)]$ 和 $\text{Var}[N(t)]$.

3. (15分) 设有甲, 乙, 丙三个品牌的某种产品在某一地区的市场占有率开始时($n = 0$)各为 $\frac{1}{3}$. 而每过一个月(单位时间)顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述, 其一步转移概率矩阵为(状态1, 2, 3分别表示购买甲, 乙, 丙三种产品):

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- (1) 问两个月后各品牌的市场占有率将会变为多少?
- (2) 各品牌产品的市场占有率最终会稳定于什么样的比例?

4. (20分) 独立连续地掷一枚均匀的骰子, 现以 X_n 表示前 n 次所掷出的最大点数, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一马氏链.

- (1) 试求其一步转移概率矩阵 P ;
- (2) 对该马氏链做状态分析(分为几个等价类? 各类的周期性如何? 是否常返? 是否常返?);
- (3) 试求该马氏链的 n 步转移概率矩阵 $P^{(n)}$;
- (4) 试求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = ?$

5. (15分) 设 $X(t) = a \cos(\Theta t + \Psi)$, 其中 a 为常数, $\Psi \sim U(0, 2\pi)$, Θ 的密度函数 $f(\theta)$ 为偶函数, 且 Θ 与 Ψ 相互独立. 证明 $\{X(t), t \in R\}$ 为一个平稳过程.

6. (15分) 设平稳过程 $X = \{X(t), t \in R\}$ 的功率谱密度为:

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 25}{\omega^4 + 11\omega^2 + 24},$$

- (1) 试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$;
- (2) 问 X 是否具有均值遍历性? 为什么?