Vector Functions

$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$

1.1 domain(定义域)

1.2 find the parametric expression(参数表达式)

$x^2 + y^2 = 1, z + x + y = 1$

$\Rightarrow x = \sin(t); y = \cos(t); z = 1 - \sin(t) - \cos(t), t \in [0, 2\pi)$

重点：

The arc lenth:

$$s(t) = \int_a^t |r'(u)| du = \int_a^t \sqrt{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})^2 + (\frac{dz}{du})^2} du$$

$$\text{这也意味着}\frac{ds}{dt} = |r(t)|, \quad s(t)(\text{弧长}) = \int |\text{切线}| dt$$

The curvature(曲率):

1. $T(t)$ 是曲线的运动的方向，类似于单位切向量

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

2. κ(曲率)

$$\kappa = |\frac{dT}{ds}| = |\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}}| = |\frac{T'(t)}{s'(t)}|$$

$s(t)$ is the length of the curve

3. κ的化简和推导过程

$$\kappa = |\frac{(\frac{r'(t)}{|r'(t)|})'}{s'(t)}|$$

$\vec{r}' = \frac{ds}{dt}\vec{T}$

$\vec{r}'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)\frac{d\vec{T}}{dt}$

$\vec{r}'' = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{T}'$

$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) \times \left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{T}'\right]$

根据叉积的分配律，展开它：

$= \left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) \times \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\vec{T} + \left(\frac{ds}{dt}\vec{T}\right) \times \left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{T}'$

- 第一项：由于 $\vec{T} \times \vec{T} = \vec{0}$，所以第一项整个都变成了零！
- 第二项：

  $= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2(\vec{T} \times \vec{T}')$

  $\vec{r}' \times \vec{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2(\vec{T} \times \vec{T}')$

这个公式把我们想要的东西 `T'` 和我们已知的东西 `r'`、`r''` 联系起来了！ 现在，我们对两边取模长：

$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\|\vec{T} \times \vec{T}'\|$

- 因为 `T` 是单位向量，且 `T'` 与 `T` 正交（这是单位向量求导的一个重要性质），所以 `T` 和 `T'` 的夹角是90度。
- 因此，$\|\vec{T} \times \vec{T}'\| = \|\vec{T}\|\|\vec{T}'\| \sin(90^\circ) = 1 \cdot \|\vec{T}'\| \cdot 1 = \|\vec{T}'\|$。
- 并且，$\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'\|$。

代入这些，我们得到： $|\vec{r}'| = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)^3|}$

4. PS: 非常重要的性质，
   $|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{[f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)] \cdot [f''^2(t) + g''^2(t) + h''^2(t)] - (f'(t)f''(t) + g'(t)g''(t) +}$

   $\Sigma(f'(t)h''(t) - f''(t)h'(t))^2$

   可以看成是柯西不等式证明过程中的拉格朗日恒等式

其实在计算的过程中，如果直接对于$\frac{dT}{dt}$进行计算就会得出最上面的形式出来的

5. vertex(顶点)： 求曲线的fertex就是求取曲率最大的地方，也就是曲率半径最小的地方，实际上就是希望这个二阶导数为0，因而$\rho = \frac{1}{\kappa}$, κ最小的地方，可以用$p(a)$表示，a是点取到κ最大的地方