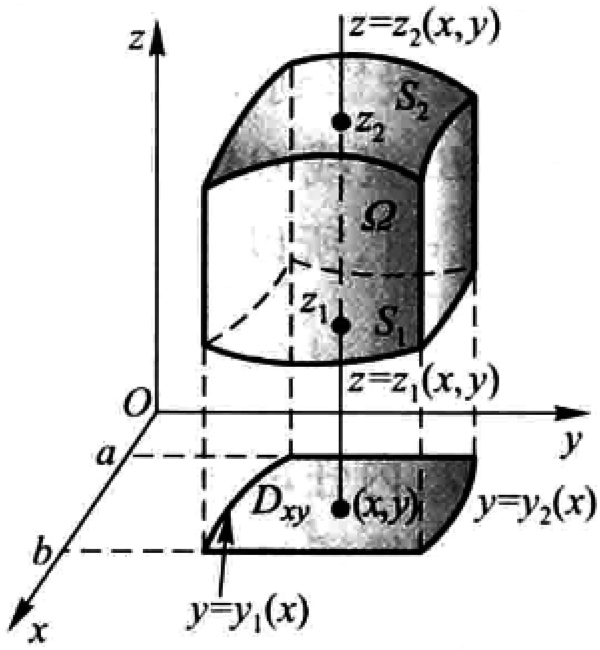
三重积分的定义和计算(Definition of Triple Integral)

1. 坐标系计算：



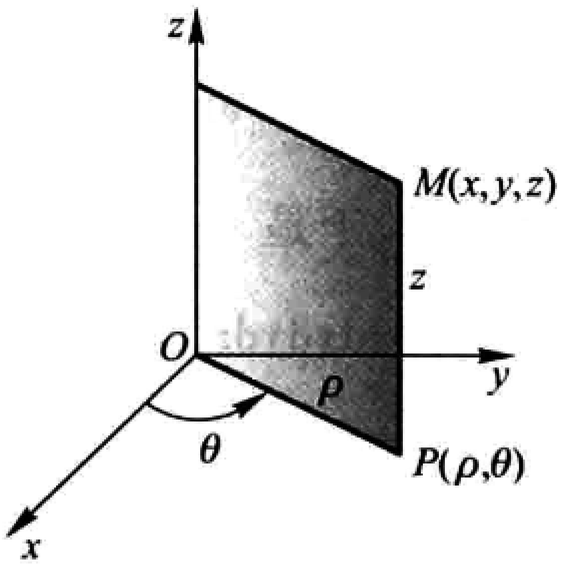
Perspective 1：$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$，看作二重积分的基础上先对纵向的z进行积分，然后再横向的做二重积分，从三重转向二重

（2，1）

Perspective2 :$F(z)=dz\cdot\iint_{\sigma} f(x,y)dxdy$,先横向经行积分，然后再纵向的对于z进行积分

（1，2）

2. 利用柱面坐标计算:

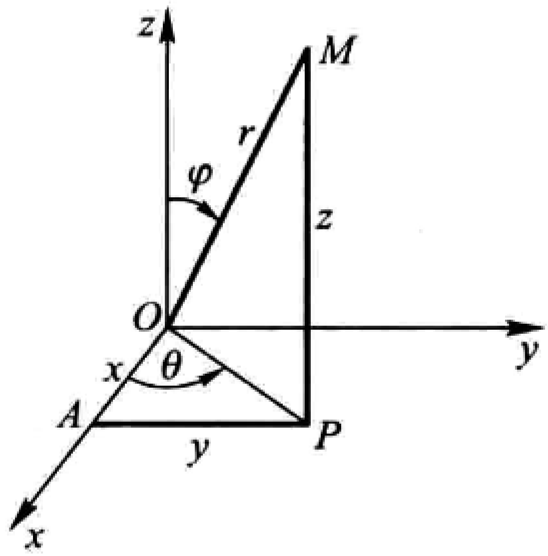


设$x=\rho cos\theta,y=\rho sin\theta,z=z$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho cos\theta,\rho sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$$

绝大多数情况是基于z积分，这样比较容易

3. 利用球面坐标计算:



$x=rsin\varphi cos\theta$, $y=rsin\varphi sin\theta,$

$z=rcos\varphi$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(rsin\varphi cos\theta,rsin\varphi sin\theta,rcos\varphi)r^2d\theta d\varphi dr$$

当积分区域 Ω 为球面 $r=a$ 所围成时，则

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r.$$

特别地，当 $F(r,\varphi,\theta)=1$ 时，由上式即得球的体积

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^2\mathrm{d}r=2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

这是我们所熟知的结果.

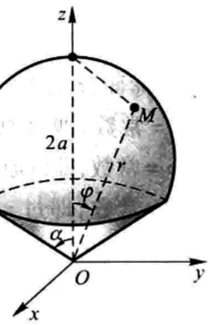


图 10－37

例 4 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体（图 10－37）的体积.

An example:

解 设球面通过原点 O，球心在 z 轴上，又内接锥面的顶点在原点 O，其轴与 z 轴重合，则球面方程为 $r=2a\cos\varphi$，锥面方程为 $\varphi=\alpha$. 因为立体所占有的空间闭区域 Ω 可用不等式

$$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示，所以

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).\end{aligned}$$

练习题：

14. 求上、下分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

*15. 球心在原点、半径为 R 的球，在其上任意一点的密度的大小与这点到球心的距离成正比，求这球的质量.