重积分的应用

先了解一下微分学的应用：这里

通过点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于切平面(6 - 18)的直线称为曲面在该点的法线. 法线方程是

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{6-19}$$

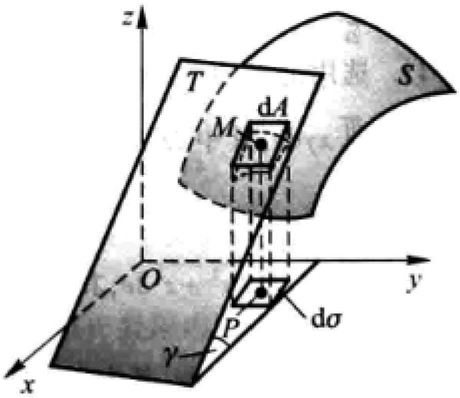
suppose: $f(x,y)=z,\ F(x,y,z)=f(x,y)-z$

$\nabla=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=(f_x(x,y),f_y(x,y),-1)$

这个上面的可以看作是某一点的切面的法向量，，如果假定法向量是向上的，那么就是$\nabla'=(-f_x(x,y),-f_y(x,y),1)$

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

1. 曲面的计算



核心想法：把曲面的计算看作是对于底部投影面积的积分除以$cos\gamma$

$$cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$dA=d\sigma\cdot\frac{1}{cos\gamma}$$

$$dA=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$$

最后的表达式：

$$S_{曲面}=\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

D为平面x,y上的图形

例 1 求半径为 a 的球的表面积.

解 取上半球面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则它在 xOy 面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，得

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

因为这函数在闭区域 D 上无界，我们不能直接应用曲面面积公式. 所以先取区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant b^2\}$ $(0<b<a)$为积分区域，算出相应于 D_1 上的球面面积 A_1 后，令 $b\to a$ 取 A_1 的极限①就得半球面的面积.

$$A_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用极坐标，得

$$A_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$
$$=2\pi a\int_0^b\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

于是

$$\lim_{b\to a}A_1=\lim_{b\to a}2\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})=2\pi a^2.$$

这就是半个球面的面积，因此整个球面的面积为

ps:注意，这里可以用ρ,θ给代掉的：但是一般不这么代换，这样会使得这个式子非常的复杂。

2. 曲面计算的一般公式

***利用曲面的参数方程求曲面的面积**

若曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

给出，其中 D 是一个平面有界闭区域，又 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 在 D 上具有连续的一阶偏导数，且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

不全为零，则曲面 S 的面积

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$
$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

下面我们对例 2 用球面的参数方程按上述公式来进行计算.

Σ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\varphi, \end{cases} \qquad (\varphi,\theta) \in D_{\varphi\theta}.$$

这里 $D_{\varphi\theta} = \{(\varphi,\theta) \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$.

由于 $\sqrt{EG - F^2} = R^2\sin\varphi$，于是

$$\begin{aligned} A &= \iint_{D_{\varphi\theta}} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_{D_{\varphi\theta}} R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi R^2(1 - \cos\alpha) = 2\pi R^2 \cdot \frac{h}{R+h}. \end{aligned}$$

这个也很好理解，原来的公式：$S_{曲面} = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy$

变成了$S_{曲面} = \iint_{D_{new}} \sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)})^2 + (\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)})^2}\,dudv$

3. 含参积分的计算

对于$R^2 = [a,b] \times [c,d]$，有：$\iint_\sigma f(x,y)dxdy = \int_c^d dy[\int_a^b f(x,y)dx]$

定理 3 如果函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，那么由积分(5－1)确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微分，并且

$$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d f_x(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{5-4}$$

这个定理的核心其实是在于对于一系列的定积分的计算

对于 $\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx$,突然发现这个可以作为 $\int_{x_1}^{x_2}[F(x,a)dx-F(x,b)dx]$,同时也可以写成这个样子: $\int_{x_1}^{x_2}dx(\int_a^b f(x,y)dy)$ ，此时就可以写成 $\int_a^b dy(\int_{x_1}^{x_2}f(x,y)dx)$，如果一开始处理 $\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx$ 发现不是很方便，可以尝试去计算它的它的先关于y的导数再求x的这个新函数的积分

曲线积分的计算

1. 对弧长的积分

1. 平面的曲线的计算：$L_{xy}=\int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx$

   如果$y=f(x)$,那么L_{xy}在$x=[a,b]$的大小等于 $\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$
2. 在三维的曲线计算：

   如果$L_{xyz}=\int\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(d)}=\int\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2+(\frac{dz}{dx})^2}dx$
3. 类似的也会有：$L_{xyz}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$

2. 对坐标的曲线积分

对于变力做功的一类的计算公式:

变力沿曲线所作的功 设一个质点在 xOy 面内受到力

$$\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

$$W_{a\to b}=\int F\cdot\overrightarrow{AB}=\int_L f(x,y)d\overrightarrow{r}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

其中$P(x,y),Q(x,y)$分别是x方向和y方向上的力的分量

对于立体的也是一样的:

$$W_{a\to b}=\int F\cdot\overrightarrow{AB}=\int_L f(x,y,z)d\overrightarrow{r}=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

其中$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$分别是x方向,y方向和z方向上的力的分量

三条性质

格林公式:

定理 1

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，若函数 $P(x,y)$及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy, \tag{3-1}$$

其中 L是 D 的取正向的边界曲线。

计算

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

其中 L为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L的方向为逆时针方向。

解：令

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

则当 $x^2 + y^2 \neq 0$时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

记 L 所围成的闭区域为 D。当 $(0,0) \notin D$)时，由公式 (3-1) 便得

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0;$$

当 $(0,0) \in D$ 时，选取适当小的 $r > 0$，作位于 D内的圆周 $l : x^2 + y^2 = r^2$。记 L 和 l所围成的闭区域为 D_1。对复连通区域 D_1，应用格林公式，得

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0,$$

其中 l 的方向取逆时针方向。于是

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

在极坐标下:

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}{r^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 1, d\theta = 2\pi.$$

三、二元函数的全微分求积

现在要讨论：函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 满足什么条件时，表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 才是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分；当这样的二元函数存在时把它求出来。

定理 3

设区域 G 是一个单连通域，若函数 $P(x,y)$与$Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

在 G 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3-5}$$

证明

先证必要性。假设存在某一函数$u(x,y)$，使得

$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由于 P 与Q 具有一阶连续偏导数，所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 连续，因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},$$

即 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$。这就证明了条件 (3-5) 是必要的。

下面来证明充分性：设已知条件 (3-5) 在 G 内恒成立，则由定理 2 可知，起点选定以后，积分结果与路径无关。

因此，定义函数

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中积分路径任意。

下面要证明该函数 $u(x,y)$ 的全微分就是

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

因为 $P(x,y)$与$Q(x,y)$都是连续的，因此只要证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

按偏导数的定义，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}.$$

由 (3-6) 式，得

$$u(x+\Delta x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy。$$

由于这里的曲线积分与路径无关，可以取先从点 M_0 到点 M，然后沿平行于 x 轴的直线段从 M 到点 N 作为上述右端曲线积分的路径。

$$u(x+\Delta x,y)=u(x,y)+\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy。$$

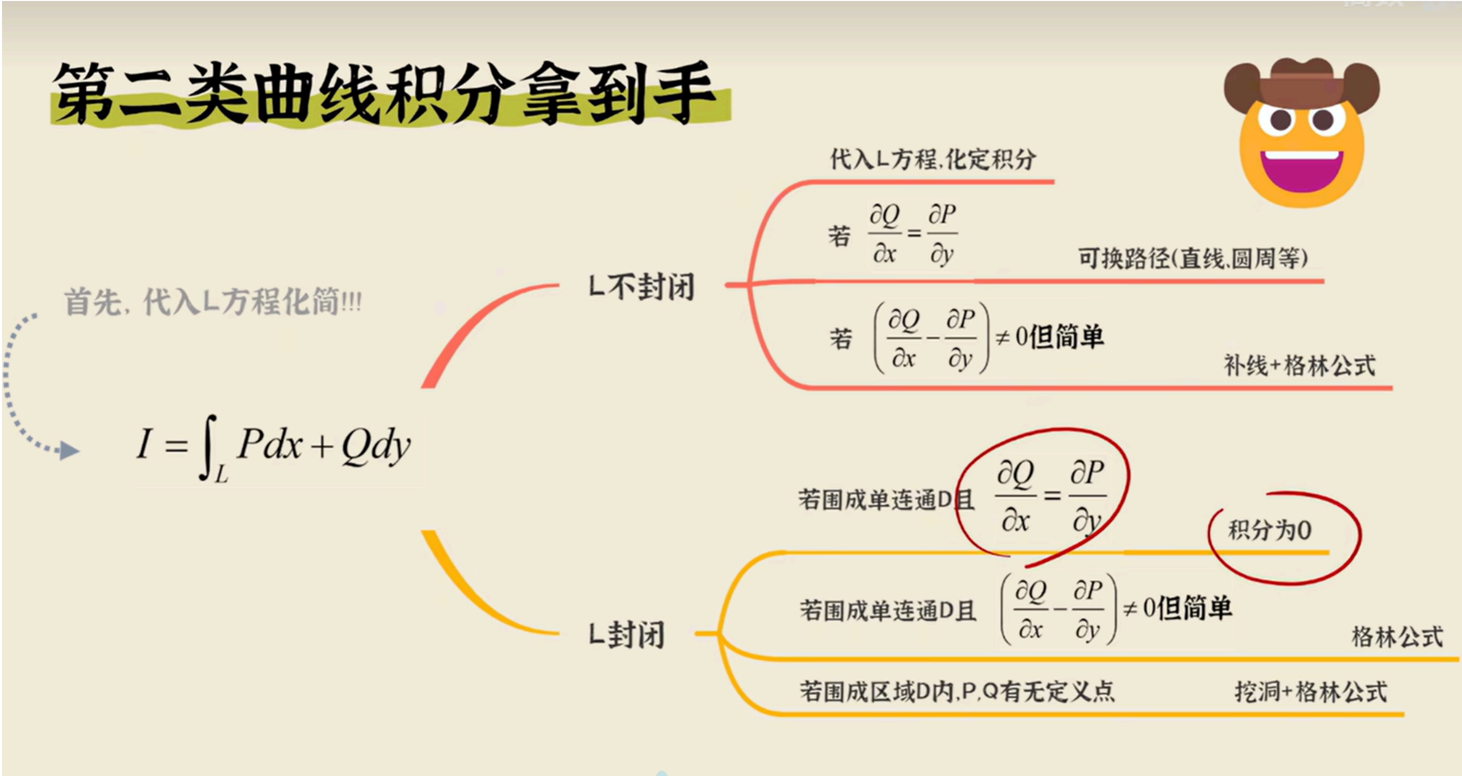
从而

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy。$$

因为直线段 MN 的方程为$y=$常数，按对坐标的曲线积分的计算法，上式成为

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_{x}^{x+\Delta x}P(x,y)dx。$$

总结：



第二类曲线积分拿到手
首先，代入L方程化简!!!
$I=\int_L Pdx+Qdy$
L不封闭
代入L方程，化定积分
若 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$
可换路径(直线、圆周等)
若 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\neq 0$但简单
补线+格林公式
L封闭
若围成单连通D且 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$
积分为0
若围成单连通D且 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\neq 0$但简单
格林公式
若围成区域D内，P、Q有无定义点
挖洞+格林公式