Mathematical Proof

1. Basic Concept of Mathematical Proof

Premises (前提): 定理的假设，通常是已知的事实、已接受的公理或先前证明过的定理。

Conclusion (结论): 通过推理得到的陈述，表示最终要证明的命题。

2. Methods of Mathematical Proof

Direct Proof 是通过展示“如果 p 为真，则 q 也为真”来证明命题 $p \to q$（如果 p 则 q）。这通常通过演绎推理直接从前提到结论。

Proof by Contradiction 是通过假设结论不成立，并从中推导出矛盾，从而证明原命题为真。

Proof by Contrapositive 是证明 $p \to q$ 时，转而证明其逆命题，即 $\neg q \to \neg p$。

Proof by Cases 是证明分类情况下的所有情况

Proof of Equivalence 是证明两个命题 p 和 q 等价，即证明 $p \to q$ 和 $q \to p$ 都成立。

3. Rules of Inference

推理规则是构建有效论证的基本工具。常见的推理规则包括:

Hypothetical Syllogism(假设推理) : 如果 $p \to q$ 且 $q \to r$，则 $p \to r$。

Conjunction (合取推理): 如果 p 和 q 都成立，则 $p \wedge q$ 成立。

Disjunction(析取推理): 如果 $p \vee q$ 成立，并且 p 为假，则 q 必须为真。

4. 数学证明的具体示例 (Examples in Mathematical Proof)

- **证明：$\sqrt{2}$ 是无理数**:
  假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质。通过推导得到 a 和 b 必须同时是偶数，这与假设矛盾，因此 $\sqrt{2}$ 是无理数。
- **证明：素数的个数是无限的**:
  假设素数个数有限，列举所有素数。构造一个新的数 $n = 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p + 1$，然后证明 n 不是任何已知素数的倍数，因此 n 是新的素数，从而与有限个素数的假设矛盾。
