概率论中的放缩

原题：$(1-p^n)^m+(1-q^m)^n\geq 1,p+q=1,p,q>0$

1 代数证明：

显然$n=1,$或者$m=1$是等式成立，因此考虑归纳

假设(n,m)时成立，考虑$(n,m+1)$

$\because (1-p^n)^m+(1-q^m)^n\geq 1$

$\therefore (1-p^n)^{m+1}+(1-p^n)(1-q^m)^n\geq 1-p^n$

只需要证明：

$(1-q^{m+1})^n\geq p^n+(1-p^n)(1-q^m)^n$

在考虑此时情况下对于 n 进行单独的归纳（二次归纳）

$(1-q^{m+1})^{n+1}\geq (1-q^{m+1})p^n+(1-q^{m+1})(1-p^n)(1-q^m)^n$

现在证明这个：

$(1-q^{m+1})p^n+(1-q^{m+1})(1-p^n)(1-q^m)^n\geq p^{n+1}+(1-p^{n+1})(1-q^m)^{n+1}$

整理下：

$\Leftrightarrow q(1-q^m)p^n+(1-q^{m+1})(1-p^n)(1-q^m)^n\geq (1-p^{n+1})(1-q^m)^{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{qp^n}{(1-q^m)^n}+(1-q^{m+1})(1-p^n)\geq (1-p^{n+1})(1-q^m)$

$\Leftrightarrow \frac{qp^n}{(1-q^m)^n}+q^{m+1}p^n+q^mp-p^nq-p^{n+1}q^m\geq 0$

$\because \frac{1}{(1-q^m)^n}\geq \frac{1}{(1-q^m)}\geq 1+q^m$

$\therefore \frac{qp^n}{(1-q^m)^n}\geq qp^n(1+q^m)$

上式子会比 0 大

$\therefore (n, m+1)$ 也是对的了, according to the symmetry, the $(n+1, m)$ can also be proved right

这就完成了证明

2 概率论证明（来源于朝夕）

这个方法非常的巧妙，由于 $p+q=1$，可以考虑构造一个随机变量 ξ，其取值有两种，不妨设为 $0,1$，概率分别为 p,q。

这样构造的话，$1-p^n$是 n 个独立随机变量中，至少有一个取 1 的概率。将 n 个独立随机变量的取值视为 1 组试验，$(1-p^n)m$就是 m 组试验的结果均为至少有 1 个取 1 的概率。

类似地，$1-q^m$是 m 个独立随机变量中，至少有一个取 0的概率。将 m 个独立随机变量的取值视为 1 组试验，$(1-q^m)^n$ 就是 n 组试验的结果均为至少有 1 个取 0 的概率。

$1-(1-q^m)^n$ 就是 n 组试验中，存在某一组试验的结果全都取 1 的概率。构造下面两个事件：

- A：m 组试验，每组试验有 n 个独立随机变量，每组试验结果均至少有一个随机变量取 1。
- B：n 组试验，每组试验有 m 个独立随机变量，存在某一组试验的结果是所有随机变量均取 1。

由于两个事件均涉及到 m,n 个独立随机变量，只是排列方式不一样。因此整体考虑 m,n 个独立随机变量，然后研究上述 A，B 两个事件的包含关系。