

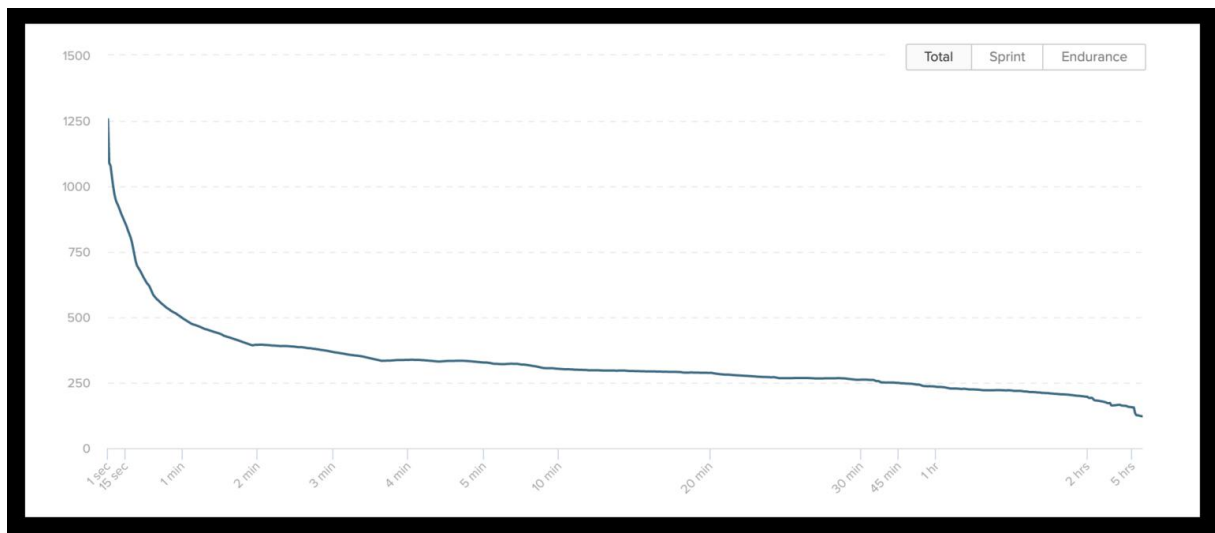
2022 MCM A 题：自行车手的能量分布

背景

公路自行车赛有很多种类型，包括**标准赛**、团体计时赛和个人计时赛。在这些比赛中，骑手成功的机会可能会根据比赛的类型、赛道和骑手的能力而有所不同。在个人计时赛中，每个自行车手都需要单独骑一个固定的赛道，获胜者是在**最短的时间**内完成的车手。

每个骑手可以在不同长度的时间内产生不同水平的力量，能量的大小和骑手能产生该水平能量的时间长度在骑手之间有很大的不同。骑手的**功率曲线**表示骑手能产生给定数量的功率的时间。换句话说，在一段特定的时间内，功率曲线提供了骑手在给定时间内所能保持的最大功率。一般来说，骑手产生的力量越多，骑手在不得不减少力量和恢复之前保持力量的时间就越少。骑手可以选择短暂地超过他们的功率曲线的限制，但骑手需要额外的时间处于较低的功率水平来恢复。此外，车手在过去的力量输出很重要，随着比赛的进行，车手会越来越疲劳。

功率曲线是骑行者在一段时间内产生的最大功率的可视化描述，用线形图表示。图中 X 轴表示时间，Y 轴表示以瓦为单位的循环功率。由于较大的功率只能持续很短的时间，功率曲线通常向下向右倾斜。如图所示：



A season-long cycling power curve from TrainerRoad's Personal Records chart

骑手们总是希望尽量减少完成一定距离所需的时间。根据一个特定骑手的功率曲线，给定该特定骑手的能力，该骑手在骑行一个给定的计时赛程时应该如何应用力量？此外，许多类型的车手都可以参加个人计时赛，如计时赛专家、登山者、短跑运动员、冲刺者或冲刺者，每种类型的车手都有不同的力量曲线。

功率分布档案可以反映骑手骑自行车的能力。主要包括四个非常重要的值：冲刺能力(5s 最大功率)，无氧能力(1 分钟最大功率)，5 分钟(V02 最大容量)，20 分钟(FTP)。这四个数字除以骑手的重量就是功率档案，单位是 W/Kg。

为了求解本题，可以把骑手看作会自发力的运动体，只不过这个运动体存在运动功率的限制，也就是骑手的功率分布曲线。因此本题是典型的物理题，需要结合骑手的功率限制和赛道的地形变化等对骑手进行物理受力分析。根据骑手在某一时刻的功率，以及赛道坡度、骑手体重、速度、加速度等参数之间的力学关系，可以求出骑手在该时刻提供的牵引力/加速度，通过引入时间参数 t 使力与速度/加速度与赛道位置相匹配，从而得到骑手在每一位置应采取的功率。

本题的决策变量是选手的功率，我们可以通过时间参数 t 将功率 W 与赛道上距起点的位置 x 联系起来，则决策变量计为 $W(t)$ ，有了 $W(t)$ 曲线，就可以得到不同时刻的位置以及最终完成赛道的时间。 $W(t)$ 曲线的变化影响最终完成比赛的时间，也就是本题的优化目标。因此可以将本题转化为求解不同功率（以及其相应能坚持的时长）在 $W(t)$ 曲线上的分布。从而变成求解运筹优化问题。

要求

建立一个模型，可以应用于任何类型的骑手，以决定骑手在赛道上的位置^{位置}和骑手所施加的功率^{功率}之间的关系。请记住，骑手在赛道上可以消耗的总能量有一个限制，以及由过去的进攻性和超过功率曲线限制而积累的限制。

模型的关键在于给定骑手的功率档案和不同赛道位置，求出骑手应该施加的功率。

此处提到的限制并没有找到相关资料，可能需要自己设计。对于骑手消耗的总能量限制，建议可以先忽略，待结果求解出来后再参考结果设置总能量上限。对于由于过去的功率积累的限制，猜测与前文提到的“骑手可以选择短暂地超过他们的功率曲线的限制，但骑手需要额外的时间处于较低的功率水平来恢复。”有关，可以自行设置一个恢复期时间和功率，或者参考功率曲线图中右端较平滑的部分作为恢复功率。（功率曲线图可以参考该网址：<https://www.cyclinganalytics.com/blog/2013/06/comparative-statistics>）

您的模型开发和报告应包括以下内容：

- 定义两种类型的车手的功率概况。你的一个骑手应该是计时赛专家^{计时赛专家}，另一个应该是不同类型的骑手。你还应该考虑不同性别的骑手的个人资料。

这一问需要给出两种不同类型骑手分性别的功率档案，在相关网站上可以找到参考值，不同骑手的功率曲线数据在文件夹里，该表包括 5 秒，1 分钟，5 分钟，以及不同性别和不同类别的功率：

名称	修改日期	类型	大小
 powerprofile-allrounder-v4	2022-02-18 8:10	XLS 工作表	29 KB
 powerprofile-pursuiter-v4	2022-02-18 8:10	XLS 工作表	29 KB
 powerprofile-sprinter-v4	2022-02-18 8:11	XLS 工作表	29 KB
 powerprofile-tter-v4	2022-02-18 8:18	XLS 工作表	29 KB

Men				Women			
5 s	1 min	5 min	FT	5 s	1 min	5 min	FT
24.04	11.50	7.60	6.40	19.42	9.29	6.61	5.69
23.77	11.39	7.50	6.31	19.20	9.20	6.52	5.61
23.50	11.27	7.39	6.22	18.99	9.11	6.42	5.53
23.22	11.16	7.29	6.13	18.77	9.02	6.33	5.44
22.95	11.04	7.19	6.04	18.56	8.93	6.24	5.36
22.68	10.93	7.08	5.96	18.34	8.84	6.15	5.28
22.41	10.81	6.98	5.87	18.13	8.75	6.05	5.20
22.14	10.70	6.88	5.78	17.91	8.66	5.96	5.12
21.86	10.58	6.77	5.69	17.70	8.56	5.87	5.03
21.59	10.47	6.67	5.60	17.48	8.47	5.78	4.95
21.32	10.35	6.57	5.51	17.26	8.38	5.68	4.87
21.05	10.24	6.46	5.42	17.05	8.29	5.59	4.79
20.78	10.12	6.36	5.33	16.83	8.20	5.50	4.70
20.51	10.01	6.26	5.24	16.62	8.11	5.41	4.62
20.23	9.89	6.15	5.15	16.40	8.02	5.31	4.54
19.96	9.78	6.05	5.07	16.19	7.93	5.22	4.46

或者也可以通过以下网址查看，包括不同级别运动员以及不同类别运动员的功率分布数据：<https://cyklopedia.cc/cycling-tips/power-profile/>

	Men				Women			
	5 sec.	1 min.	5 min.	FTP	5 sec.	1 min.	5 min.	FTP
	25.18	11.50	7.60	6.40	19.42	9.29	6.74	5.69
	24.88	11.39	7.50	6.31	19.20	9.20	6.64	5.61
	24.59	11.27	7.39	6.22	18.99	9.11	6.55	5.53
	24.29	11.16	7.29	6.13	18.77	9.02	6.45	5.44
World Class	24.00	11.04	7.19	6.04	18.56	8.93	6.36	5.36
	23.70	10.93	7.08	5.96	18.34	8.84	6.26	5.28
	23.40	10.81	6.98	5.87	18.13	8.75	6.17	5.20

Sprinter

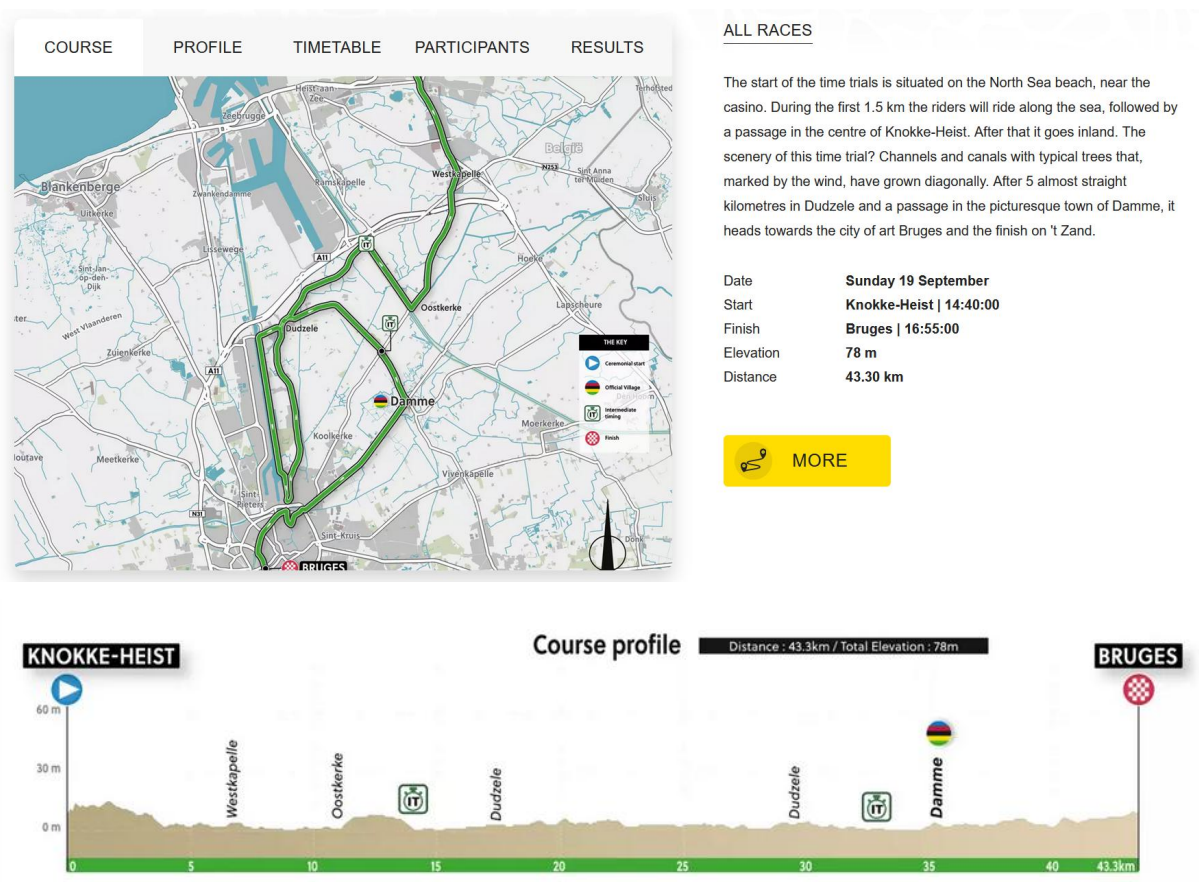
5 sec.	1 min.	5 min.	FTP
21.63	10.12	6.36	5.33
21.33	10.01	6.26	5.24
21.03	9.89	6.15	5.15
20.74	9.78	6.05	5.07
20.44	9.66	5.95	4.98
20.15	9.55	5.84	4.89
19.85	9.43	5.74	4.80

- 将您的模型应用于各种计时赛课程，至少包括下面列出的每个功率配置文件：

- 2021 年奥运会计时赛

2021 东京奥运会计时赛路线可以参考该网址

<https://www.cyclingnews.com/news/tokyo-2020-olympic-games-individual-time-trial-routes-revealed/>



- 2021 年 UCI 世界锦标赛计时赛，比利时弗兰德斯

2021 年 UCI 世界锦标赛计时赛路线可以参考该网址

<https://www.flanders2021.com/en/races/men-elite-individual-time-trial>

- 至少有一条你自己设计的赛道，包括至少四个急转弯和至少一个重要的道路等级。赛道的终点应该接近其起点。

自己设计的道路可以在满足要求的前提下尽可能简单。

注意：前两条实际比赛使用的赛道需要对坡度等进行简化后再求解。必要时可以放上简化后的纵断面图，以更直观地展示。

- 确定天气条件的潜在影响，包括风向和风力强度，以确定你的结果对天气和环境的微小差异有多敏感。

在前面受力分析的基础上增加风向和风力，从而对天气环境的影响进行分析。从参赛的角度而言，好的模型应该保持鲁棒性，对天气的变化没有那么敏感，使得运动员在不同的天气状况下采用相似的功率策略都能有好的发挥。

- 确定结果对骑手偏离目标功率分布的敏感性。一个骑手不太可能遵循一个非常详细的计划而不会错过功率目标。骑手和体育总监将对在一个给定的赛道的关键部分的预期分割时间的可能范围有一些想法。

同样，好的策略需要在骑手对策略有一些偏离时仍能有较好的表现。可以在求出的最优策略的基础上上下波动一定值，分析其结果对结果的影响性较小，从而证明模型得出的策略具有稳定性。

考虑到运动员和体育总监的想法，最好能够求出在一定功率波动范围内，通过赛道关键部分的时间范围，并且在后面的建议信中体现出来。（如：如果运动员想要将通过关键赛道部分的时间控制在某个范围内，则需要使功率策略的上下浮动范围控制在？% 以内。）

- 讨论如何扩展你的模型使其包括每个车队 6 名车手的车队计时赛的最佳功率，其中车队的时间是在第四名车手越过终点线时确定的。

由于车队成绩的关键在于第四名过线的选手，所以车队功率策略应关注车队内实力排名第 3-5 位的选手，先简单通过每个选手的功率曲线确定关键选手，然后再针对关键选手进行策略的求解。

作为你的解决方案的一部分，为一个团队的指导报告写一个两页的骑手的比赛指南。骑手的比赛指导应该关注单个骑手和单人计时赛程的结果。它应该包含骑手方向的概述。它还应该包括一个你的模型的大致总结，但适合一个没有数学背景的体育总监和骑手。

您的 PDF 解决方案总共不超过 25 页，应该包括：

一页的摘要表。

目录表。

你完整的解决方案。

两页的比赛指导报告。

引用列表。

注：MCM 竞赛的页面限制版数为 25 页。您提交的所有方面都有 25 页的限制（摘要表、目录、参考列表和任何附录）。您必须引用您的想法、图像和您的报告中使用的任何其他材料的来源。

页面在 20-25 面都合理，不要遗漏了内容。信的内容主要是描述最终提出的功率方案，从比赛的角度说明什么类型的运动员在哪些赛道段应以什么样的功率左右通过，或者应控制通过时间为多少。尽可能避免从物理分析和规划求解角度阐释。

词汇表

标准赛：在一个封闭的赛道上举行的自行车比赛。长度可以由固定的圈数或预定时间段内的最多圈数来指定。

体育总监：负责管理骑手和工作人员，做出比赛决策，并决定特定比赛的车队组成。

个人计时赛：骑手一次穿越一个预定赛道的项目。骑手不允许一起工作或互相靠近。单独记录每个骑手穿越赛道所需的时间。时间越短，骑手的最终排名就越好。

功率曲线：是骑手在特定时间长度内所能保持的最大功率的视觉表示。

骑手类型词汇表

登山者：专门从事有多次长攀登的比赛的骑手。

冲坡手：专门从事包括许多短而陡峭的攀登或许多剧烈加速的比赛的骑手。

多面手：在各种地形的比赛中表现出色的骑手。

短跑运动员：专门在短时间内产生极高功率的骑手。这些车手通常专注于在比赛结束或中间冲刺（如果比赛有中间冲刺）中获胜。

计时赛专家：专门从事个人计时赛项目的骑手。