A

北京航空航天大学

2012－2013 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2013 年 06 月 19 日

A

一、 求解下面问题（每小题 6 分，满分 48 分）

1. 设 $f(x,y)$ 为一连续函数，求极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy.$

2. 改变累次积分的积分顺序：

$$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$$

3. 计 算 二 重 积 分 $\iint\limits_{D}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ ， 其 中 积 分 区 域 为 $D=\{(x,y)\,|\,\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}.$

4. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}(y^{2012}x+1)dxdydz$，其中 V 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $3z=x^2+y^2$ 所成的立体.

5. 计算积分 $I=\int_{\Gamma}(x^2+2z)ds$，其中曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$（利用对称性）

6. 计 算 第 一 型 曲 面 积 分 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$ ， 其 中 Σ 为 球 面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geq h\ (0<h<a)$ 的部分. （可利用对称性）

7. 证明向量场

$$\vec{F}=(yz(2x+y+z),\ \ xz(x+2y+z),\ \ xy(x+y+2z))$$

是有势场，并求其势函数.

8. 设曲面Σ：$x+y+z=1\ \ (x,y,z\geq 0)$，已知连续函数$f(x,y,z)$满足

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^3+\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{dS},$$

求$f(x,y,z)$.

二、（10 分）(直接计算，不能用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{S}(z^2+x)dydz+ydzdx-zdxdy$, 其中 S 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧。

三、（12 分）(利用 Green 公式)

计算 $\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}$, $(a>0,\ b>0)$ 其中 L 为一条无重点, 分段光滑且不经过原点的连续闭曲线, L 的方向为逆时针方向.

四 、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算$\iint\limits_{S} yz\ dydz+(x^2+z^2)y\ dzdx+xy\ dxdy$,其中 S 为曲面$4-y=x^2+z^2\ (y>0)$的外侧.

五、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算$\oint_{\Gamma} 2ydx+3xdy-z^2dz$,其中$\Gamma$是球面$x^2+y^2+z^2=9$的上半部分$S$（取外侧）的边界曲线，从$z$轴正向看逆时针方向.

六、（**10** 分）证明 Green 第一公式：

其中 $\boldsymbol{L}$ 为封闭光滑曲线，$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 围成的区域。这里假设 $\boldsymbol{u}$ 有连续的二阶偏导数，$\vec{\boldsymbol{n}}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 外法线单位向量，上式曲线积分为逆时针方向。

七、附加题（10 分） 已知函数 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求 $f(x)$ 的表达式.