本章内容

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言
- 论域、结构与模型

推论关系语义

- **定义3.2.1** 设$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是合式公式，若对于任意指派函数$\boldsymbol{\sigma}$，都有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \vDash \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$，则称$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{Q}$的逻辑推论，或称$\boldsymbol{Q}$语义推出$\boldsymbol{R}$，记为：$\boldsymbol{Q} \vDash \boldsymbol{R}$

- **定义3.2.2** 设$\boldsymbol{\mathit{\Gamma}}$是合式公式集合，$\boldsymbol{R}$是合式公式，若对于任意指派函数$\boldsymbol{\sigma}$，都有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\mathit{\Gamma}}) \vDash \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$，则称$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{\mathit{\Gamma}}$的逻辑推论，或称$\boldsymbol{\mathit{\Gamma}}$语义推出$\boldsymbol{R}$，记为$\boldsymbol{\mathit{\Gamma}} \vDash \boldsymbol{R}$

- **定义3.2.3** 设$\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}$是谓词命题，若$\boldsymbol{\mathit{\Gamma}} = \{\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}\}$，则$\boldsymbol{\Gamma} \vDash \boldsymbol{R}$，也可记为$\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n} \vDash \boldsymbol{R}$。若$\boldsymbol{\Gamma}$是空集合，则记为：$\vDash \boldsymbol{R}$ 。

等价关系语义

- **定义3.2.4** 设$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是合式公式，如果对于任意指派$\boldsymbol{\sigma}$，都有 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$，则称$\boldsymbol{Q}$与$\boldsymbol{R}$是逻辑等价，记为：$\boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}$
- **例如** 对于合式公式$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$，可以先求$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q})$和$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$，而后判断$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q})$和$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$是否逻辑等价。这样，合式公式之间的相等关系变为逻辑域上逻辑真值之间的相等关系，即先用指派函数$\boldsymbol{\sigma}$分别求两个合式公式的真值，而后判断两个逻辑真值是否相等

等价关系语义

- **定义3.2.4** 设Q和R是合式公式，如果对于任意指派σ，都有 $\sigma(Q) = \sigma(R)$，则称Q与R是逻辑等价，记为：$Q \Leftrightarrow R$
- $Q \Leftrightarrow$R当且仅当$Q \leftrightarrow$R是永真式

无论怎样解释和赋值，逻辑语义都相同

- 也称 A 和 B **逻辑等价**，记为 $A \Leftrightarrow B$。

- **强调：** “ $\Leftrightarrow$ ” 是两个逻辑公式之间的一种 “关系”。
- **思考：** 比较在命题逻辑中的相应概念。

证明$A \Leftrightarrow B$ 的方法

- 要证明 $A \Leftrightarrow B$，可采用以下四种方法：

1. 对于每个解释 I 和 I 中每个赋值 v,
   $I(A)(v) = 1$ 当且仅当 $I(B)(v) = 1$。
2. 对于每个解释 I 和 I 中每个赋值 v,
   $I(A)(v) = 0$ 当且仅当 $I(B)(v) = 0$。
3. 对于每个解释 I 和 I 中每个赋值 v,
   若 $I(A)(v) = 1$，则 $I(B)(v) = 1$；
   若 $I(A)(v) = 0$，则 $I(B)(v) = 0$。
4. 对于每个解释 I 和 I 中每个赋值 v,
   若 $I(B)(v) = 1$，则 $I(A)(v) = 1$；
   若 $I(B)(v) = 0$，则 $I(A)(v) = 0$。

证明 $A \Leftrightarrow B$ 不成立的方法

- 要证明 $A \Leftrightarrow B$ 不成立，**只需找到一个反例**，
- 即具体找出一个解释 I 和 I 中一个赋值 v， 使得
- $$I(A)(v) \neq I(B)(v)。$$
- **例1** $P(x)$ 与 $P(y)$ 是否等值？
- 给定解释 I 和 I 中赋值 v 如下：
- D_I 为正整数集，$P^I(x) = 1$ 当且仅当 x 是奇数，
- $v(x) = 1$，$v(y) = 2$。
- $I(P(x))(v) = 1$，$I(P(y))(v) = 0$。

$$P(x) \not\Leftrightarrow P(y)$$

定理

- 设 A, B, C, D 是任意公式，x 是任意变元。

1. 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$。
2. 若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $C \Leftrightarrow D$，则

   $A \rightarrow C \Leftrightarrow B \rightarrow D$，

   $A \vee C \Leftrightarrow B \vee D$，

   $A \wedge C \Leftrightarrow B \wedge D$，

   $A \oplus C \Leftrightarrow B \oplus D$，

   $A \leftrightarrow C \Leftrightarrow B \leftrightarrow D$。
3. 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$，$\exists xA \Leftrightarrow \exists xB$。

- 证明：（1与2的证明略，问3怎么证？）

定理

- 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$，$\exists xA \Leftrightarrow \exists xB$ 。
- 证明：
- 任取解释 I 和 I 中赋值 v， 因为 $A \Leftrightarrow B$
- 所以，对任意 $d \in D_I$， $I(A)(v[x/d]) = I(B)(v[x/d])$

- 因此，对任意 $d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 1$
- 当且仅当 对任意 $d \in D_I$， $I(B)(v[x/d]) = 1$
- 从而， $\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$ 。

- 有 $d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 1$
- 当且仅当 有 $d \in D_I$， $I(B)(v[x/d]) = 1$
- 从而， $\exists xA \Leftrightarrow \exists xB$ 。

定理

- 在命题逻辑中列出的等值式模式，若将其中的 A, B, C 理解为谓词逻辑公式，仍然是正确的。
- 如双重否定律。可证明如下：
- 因为 $A \leftrightarrow \neg\neg A$ 是在命题逻辑中是永真式，所以它在谓词逻辑中是重言式，进而也是永真式，
- 因此，在谓词逻辑中，也有 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ 。

- 下面只给出一些与量词有关的等值式模式，这是谓词逻辑区别于命题逻辑的地方。

常用的量词等值式模式

- **1、量词否定规则：**
- ① $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$,
- ② $\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$
- **2、约束变元换名规则：**
- ① $\forall xA \Leftrightarrow \forall yA_y^x$,

问：需要满足什么要求？

回顾：可代入

- **可代入：** 设t是项，y是t中任一自由变元，Q是合式公式，x是Q中自由变元，如果Q中x的任何自由出现都不在∀y(∃y)的辖域内，则称项t是对Q中自由变元x可代入的(substitutable)。

- **特别指出：** 若 $x_1,\ldots,x_n$ 在 A 中没有自由出现，则 $A_{t_1,\cdots,t_n}^{x_1,\cdots,x_n}$ 和 A 相同，显然 $t_1,\ldots,t_n$ 对于 A 中的 $x_1,\ldots,x_n$ 是可代入的

常用的量词等值式模式

- **1、量词否定规则：**
- ① $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$，
- ② $\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$
- **2、约束变元换名规则：**
- ① $\forall xA \Leftrightarrow \forall yA_y^x$，
- ② $\exists xA \Leftrightarrow \exists y\, A_y^x$
- 其中 y 不是 A 的自由变元且 y 对 A 中的 x 可代入。
- **3、量词分配规则：**
- ① $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge \forall x\, B$
- ② $\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$

常用的量词等值式模式　　定理3.2.1

- **4、量词辖域规则：**
- **在本组等值式模式中，x 不是 B 的自由变元。**
- ① $\forall x\,(A \lor B) \Leftrightarrow \forall x A \lor B$

常用的量词等值式模式

定理3.2.1

- **4、量词辖域规则：**
- **在本组等值式模式中，** x **不是** B **的自由变元。**
- ① $\forall x\,(A \vee B) \Leftrightarrow \forall x A \vee B$
- ② $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A \wedge B$
- ③ $\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists x A \vee B$
- ④ $\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A \wedge B$
- ⑤ $\forall x(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A \rightarrow B$
- ⑥ $\forall x(B \rightarrow A) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A$
- ⑦ $\exists x(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A \rightarrow B$
- ⑧ $\exists x(B \rightarrow A) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A$

特别注意
5和7

量词否定规则证明

- **1、量词否定律：** ① $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$
- ② $\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$

- **证明：根据存在量词的定义** $\exists xA \Leftrightarrow \neg\forall x\neg A$，
- $\neg\forall x\, A \Leftrightarrow (\neg\forall x\neg)\neg A \Leftrightarrow \exists x\neg A$
- $\neg\exists x\, A \Leftrightarrow \neg(\neg\forall x\neg A)$
- $\Leftrightarrow \neg\neg(\forall x\neg A) \Leftrightarrow \forall x\neg A$

换名规则证明

- **2、换名规则：** ① $\forall xA \Leftrightarrow \forall y A_y^x$ ，② $\exists xA \Leftrightarrow \exists y A_y^x$
- y 不是 A 的自由变元且 y 对于 A 中的 x 是可代入的。
- **证明：** 若y与x相同，没有换名，等值式显然成立。
- 故只考虑y与x不同的情况。
- 注意到：任取 I 和 v，对任意 $d \in D_I$，总有：
- $$I(A)(v[x/d]) = I(A_y^x)(v[y/d])$$

- $I(\forall xA)(v) = 1$
- 当且仅当：对任意 $d \in D_I$，$I(A)(v[x/d]) = 1$
- 当且仅当：对任意 $d \in D_I$，$I(A_y^x)(v[y/d]) = 1$
- 当且仅当：$I(\forall y A_y^x)(v) = 1$
- 所以 $\forall xA \Leftrightarrow \forall yA_y^x$

换名规则证明

- 注意：在换名规则中，特别强调 y 不是 A 的自由变元，
- 且 y 对 A 中的 x 可代入！
- 当 y 是 A 的自由变元时，等值式可能不成立。比如：

换名规则证明

- 注意：在换名规则中，特别强调 y 不是 A 的自由变元，
- 且 y 对 A 中的 x 可代入！
- 当 y 是 A 的自由变元时，等值式可能不成立。比如：
- 取 A 为 $P(x, y)$，$\forall xA$ 为 $\forall xP(x, y)$，$\forall y A_y^x$ 为 $\forall yP(y, y)$

$$\forall xP(x,y) \not\Leftrightarrow \forall yP(y,y)$$

- 具体反例：论域 D_I 为自然数集，
- $P^I(x, y) = 1$ 当且仅当 $x \le y$，
- $v(y) = 1$。
- 则在解释与赋值下，$\forall xP(x, y) = \forall xP(x, 1) = 0$，
- $\forall yP(y, y) = 1$。
- 满足“可代入”要求：用新变量名做换名！

量词分配规则

- ① $\forall x\,(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
-

回顾：公式的语义

- 定义 设 v 是解释 I 中的赋值，公式 A 在解释 I 和赋值 v 下的意义 I(A)(v) 定义如下：

1. 若 A 是 $P(t_1,\cdots,t_n)$，其中 P 是 n 元谓词符号， $t_1,\cdots,t_n$ 是项，则

$$I(A)(v) = P^I(I(t_1)(v),\cdots,I(t_n)(v))$$

2. 若 A 是 $\neg B$，其中 B 是公式，则 $I(A)(v) = \neg I(B)(v)$。
3. 若 A 是 $B \to C$，其中 B, C 是公式，则

$$I(A)(v) = I(B)(v) \to I(C)(v)$$

4. 若 A 是 $\forall xB$，其中 B 是公式，x 是变元，则

$$I(A)(v)=\begin{cases}1 & \text{若对于每个}\ d\in D_I,\ I(B)(v[x/d])=1\\ 0 & \text{若存在}\ d\in D_I\ \text{使得}\ I(B)(v[x/d])=0\end{cases}$$

量词分配规则

- ① $\forall x\,(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA \wedge \forall xB$
- 证明： 任取 I 和 v，
- $I\,(\forall x\,(A \wedge B))(v) = 0$
- 当且仅当：存在 $d \in D_I$ 使得 $I(A \wedge B)(v[x/d]) = 0$
- 当且仅当：存在 $d \in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d]) = 0$

  或者存在 $d \in D_I$ 使 $I(B)(v[x/d]) = 0$
- 当且仅当： $I(\forall xA)(v) = 0$ 或者 $I(\forall xB)(v) = 0$
- 当且仅当： $I(\forall xA \wedge \forall xB)(v) = 0$

量词分配规则

- ② $\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$
- 证明： $\exists x\,(A \vee B) \Leftrightarrow \neg\forall x\neg(A \vee B)$
- $\Leftrightarrow \neg\forall x\,(\neg A \wedge \neg B)$
- $\Leftrightarrow \neg\,(\forall x\neg A \wedge \forall x\neg B)$
- $\Leftrightarrow (\neg\forall x\,\neg A) \vee (\,\neg\forall x\,\neg B)$
- $\Leftrightarrow \exists xA \vee \exists xB$

- 特别注意：$\forall x$ 对 $\wedge$ 可分配，对 $\vee$ 不可分配！
- $\exists x$ 对 $\vee$ 可分配，对 $\wedge$ 不可分配！

辖域规则证明 （定理3.2.2）

- ① $\forall x\,(A \vee B) \Leftrightarrow \forall xA \vee B$，
- 其中 x 不是 B 的自由变元。
- 证明： 任取 I 和 v。对任取 $d \in D_I$，
- 因为 $x \notin \mathrm{Var}(B)$，所以 $I(B)(v) = I(B)(v[x/d])$ 。
- $I(\forall x\,(A \vee B))(v) = 0$
- 当且仅当：存在 $d \in D_I$ 使 $I(A \vee B)(v[x/d]) = 0$
- 当且仅当：存在 $d \in D_I$ 使 $I(A)(v[x/d]) = 0$
- 且使 $I(B)(v[x/d]) = I(B)(v) = 0$
- 当且仅当： $I(\forall xA)(v) = 0$ 且 $I(B)(v) = 0$
- 当且仅当： $I(\forall xA \vee B)(v) = 0$

证明

- **定理3.2.2** $\forall x(Q(x)\vee R) \Leftrightarrow \forall xQ(x)\vee R$。$x$不是$R$的自由变元。
- **证明：** 对指派σ，论域D，若$\sigma\big(\forall x(Q(x)\vee R)\big) = 0$,

$\sigma\big(\forall x(Q(x)\vee R)\big) = \forall x\, \sigma(Q(x)\vee R) = 0$

当且仅当 存在d∈D，$\sigma[x/\mathrm{d}](Q(x) \vee R)$=0

因为x不是R的自由变元，$\sigma[x/\mathrm{d}](R) = \sigma(R)$

$\sigma[x/\mathrm{d}](Q(x) \vee R) = \sigma[x/\mathrm{d}](Q(x))\vee\sigma(R)$=0,

因此有：$\sigma[x/\mathrm{d}](Q(x)) = 0$, 并且 $\sigma(R)$=0

即存在d，$\sigma[x/\mathrm{d}](Q(x)) = 0$，因此有$\sigma\big(\forall xQ(x)\big)$=0

故$\sigma(\forall xQ(x)\vee R)$= $\sigma(\forall xQ(x))\vee\sigma(R) = 0$

$\forall x\big(Q(x)\vee R(x)\big) \Leftrightarrow \forall xQ(x)\vee\forall xR(x)$?

量词分配规则

- **反例：** 取论域 D_I 为自然数集，
- $P^I(x)$ 表示 x 是奇数，$Q^I(x)$ 表示 x 是偶数。
- 在这个解释下 $\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) = 1$
- 表示：所有自然数，都是奇数或偶数。
- $\forall xP(x) \lor \forall xQ(x) = 0$，
- 表示：所有自然数都是奇数，或者都是偶数。

$$\forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big) \nLeftrightarrow \forall xP(x) \lor \forall xQ(x)$$

- $\exists x\,(P(x) \land Q(x)) = 0$
- 表示：存在既是奇数又是偶数的自然数。
- $\exists xP(x) \land \exists\, xQ(x)) = 1$
- 表示：有奇数自然数，并且有偶数自然数。

$$\exists x\big(P(x) \land Q(x)\big) \nLeftrightarrow \exists xP(x) \land \exists xQ(x)$$

辖域规则证明

- **辖域规则：** ⑤ $\forall x\,(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA \rightarrow B$
- **证明：** $\forall x\,(A \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\,(\neg A \vee B)$
- $\Leftrightarrow \forall x \neg A \vee B \Leftrightarrow \neg\neg \forall x \neg A \vee B$
- $\Leftrightarrow \neg\,(\exists x\, A) \vee B \Leftrightarrow \exists xA \rightarrow B$
- **需要注意:**
- 在辖域规则中，要求 x 不是 B 的自由变元。
- 若 x 是 B 的自由变元，等值式可能不成立。

证明　⑥ $\forall x(B \to A) \Leftrightarrow B \to \forall xA$

- **定理3.2.3**　$R \to \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x\big(R \to Q(x)\big)$，$x$不是$R$的自由变元。
- **证明：**　$R \to \forall x Q(x) \Leftrightarrow \neg R \vee \forall x Q(x)$,

  x不是R的自由变元,根据定理3.2.2有：

  $$\neg R \vee \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(\neg R \vee Q(x))$$

  $$\Leftrightarrow \forall x(R \to Q(x))$$

辖域规则证明

- 例：证明 $\forall x \exists y\,(P(x) \to Q(y)) \Leftrightarrow \exists y \forall x (P(x) \to Q(y))$

- 证明：利用等值演算规则：

$$\begin{aligned}
&\exists y \forall x \big(P(x) \to Q(y)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists y \big(\exists x P(x) \to Q(y)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x P(x) \to \exists y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \big(P(x) \to \exists y Q(y)\big) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \exists y\,(P(x) \to Q(y))
\end{aligned}$$

5）$\forall x(A \to B) \Leftrightarrow \exists x A \to B$；

8）$\exists x(B \to A) \Leftrightarrow B \to \exists x A$

5）$\forall x(A \to B) \Leftrightarrow \exists x A \to B$；

8）$\exists x(B \to A) \Leftrightarrow B \to \exists x A$

辖域规则证明

- **例：** $\exists xP(x) \leftrightarrow \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x))$
- 成立否？

- **解：** 构造最简单模型做检查：
- 选取解释 I：D_I 为自然数集，
- $P\,(x)$ 表示 x 是奇数，$Q\,(x)$ 表示 x 是偶数。
- $\exists xP(x) = \exists xQ(x) = 1$，
- $\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) = 0$

- 所以，
- $\exists xP(x) \leftrightarrow \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x\,(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ 不成立。

重要推论式

- 重要推论式

$$(\forall x Q(x)) \vDash (\forall y Q(y))$$

$$(\exists x Q(x)) \vDash (\exists y Q(y))$$

$$(\forall x Q(x)) \vDash (\exists x Q(x))$$

$$Q(c) \vDash (\exists x Q(x))$$

$$\left(\forall x(\forall y Q(x,y))\right) \vDash \left(\forall y(\forall x Q(x,y))\right)$$

$$\left(\exists x(\exists y Q(x,y))\right) \vDash \left(\exists y(\exists x Q(x,y))\right)$$

$$\left(\forall x(\forall y Q(x,y))\right) \vDash (\forall x Q(x,x))$$

重要推论式

- 重要推论式

$$\exists x Q(x,x) \vDash \exists x \exists y Q(x,y)$$

$$\forall x\big(Q(x) \rightarrow R(x)\big) \vDash \forall x Q(x) \rightarrow \forall x R(x)$$

$$\forall x\big(Q(x) \rightarrow R(x)\big) \vDash \exists x Q(x) \rightarrow \exists x R(x)$$

$$\forall x Q(x) \land \forall x R(x) \vDash \forall x\big(Q(x) \land R(x)\big)$$

$$\forall x Q(x) \lor \forall x R(x) \vDash \forall x\big(Q(x) \lor R(x)\big)$$

$$\exists x\big(Q(x) \lor R(x)\big) \vDash \exists x Q(x) \lor \exists x R(x)$$

重要推论式

- 重要推论式

$$\vDash \forall x\big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$$

$$\exists x\big(\forall y Q(x,y)\big) \vDash \forall y\big(\exists x Q(x,y)\big)$$

$$\exists x\big(Q(x) \wedge R(x)\big) \vDash \exists x Q(x) \wedge \exists x R(x)$$

$$\forall x\big(Q(x) \wedge R(x)\big) \vDash \forall x Q(x) \wedge \forall x R(x)$$

$$\forall x Q(x) \vDash \neg\Big(\exists x\big(\neg Q(x)\big)\Big)$$

$$\exists x\big(Q(x)\big) \vDash \neg\Big(\forall x\big(\neg Q(x)\big)\Big)$$

$$\forall x\big(\neg Q(x)\big) \vDash \neg\big(\exists x Q(x)\big)$$

$$\exists x\big(\neg Q(x)\big) \vDash \neg\big(\forall x Q(x)\big)$$

推论关系的判定

- 对于合式公式$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$，可以先求$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q})$和$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$，而后判断$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q})$和$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$是否有逻辑推论关系。

- 合式公式之间的推论关系变换为逻辑域上逻辑真值之间的推论关系，即先用指派函数$\boldsymbol{\sigma}$分别求两个合式公式的逻辑真值，而后判断两个合式公式是否有推论关系

推论式重要定理（同命题逻辑）

- **定理3.2.4**（演绎定理） $\models Q \to R$当且仅当$Q \models R$。
  证明同命题逻辑
- **定理3.2.5**（反证律） 若$Q, \neg R \models 0$，则$Q \models R$。
  命题逻辑证明
- **定理3.2.8** $\models Q$当且仅当Q是永真式。
- **定理3.2.9** 设$Q_1, \ldots, Q_n, Q$是合式公式，则$Q_1, \ldots, Q_n \models Q$当且仅当$Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \to Q$是永真式
- **定理3.2.10** 公式集合Γ不可满足，当且仅当每个公式都是Γ的逻辑推论。

演绎定理与反证律

- **定理3.2.4**（演绎定理） $\vDash Q \to R$当且仅当$Q \vDash R$。

  证明：充分性 $\Rightarrow$

  对于任意指派函数σ，都有$\sigma(Q \to R)=1$。

  当$\sigma(Q)=1$时，由$\sigma(Q \to R)=1$可知，$\sigma(R)=1$，

  因此，$Q \vDash R$

  必要性 $\Leftarrow$

  对于任意指派函数σ，如果 $\sigma(Q)=1$，

  则由 $Q \vDash R$，可知$\sigma(R)=1$，进而$\sigma(Q \to R)=1$

  如果 $\sigma(Q)=1$，则$\sigma(Q \to R)=1$

推论判断的方法

- **定理3.2.6** 设$\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$是谓词合成公式，$\boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}$当且仅当$\boldsymbol{Q} \vDash \boldsymbol{R}$及$\boldsymbol{R} \vDash \boldsymbol{Q}$。
  (证明同命题逻辑)
- **证明：**

  因为$\boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}$，所以有$\boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R}$是永真式，

  即$(\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}) \wedge (\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Q})$是永真式；

  $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$是永真式，有$\boldsymbol{Q} \vDash \boldsymbol{R}$；

  $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Q}$是永真式，有$\boldsymbol{R} \vDash \boldsymbol{Q}$。
- 反之亦然。

重要定理

- **定理3.2.11** 设Γ是合式公式集，Q是合式公式，x是变元。若x不是Γ中任意公式的自由变元，且$\Gamma \vDash Q$，则$\Gamma \vDash \forall x Q$。
- **证明：**

设$\Gamma = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$，因为$\Gamma \vDash Q$，所以$Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \to Q$是永真式。$\forall x(Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \to Q)$也是永真式。

因为x不是Γ中任意公式的自由变元，

$$\forall x(Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \to Q) \Leftrightarrow Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \to \forall x Q$$

因此，$Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \to \forall x Q$也是永真式。

因此，$Q_1, \ldots, Q_n \vDash \forall x Q$，即$\Gamma \vDash \forall x Q$。

重要定理

- **定理3.2.12** 设Q是合式公式，x, y是变元，且y对于Q中的x是可代入的，则$\forall xQ \vDash \forall yQ[x/y]$。
- **证明:**

因为y对Q中的x是可代入的，所以，$\forall xQ \vDash Q[x/y]$。

可知，$\forall xQ \to Q[x/y]$ 是永真式，

进而，$\forall y(\forall xQ \to Q[x/y])$ 是永真式，

进而，$\forall xQ \to \forall yQ[x/y]$ 是永真式，

所以，$\forall xQ \vDash \forall yQ[x/y]$。

本章内容

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言
- 论域、结构与模型

前束范式定义

- **定义3.3.1** 设δ_k为$\forall,\exists$量词，$x_1\ldots,x_n$为不同变元，Q为开公式，形式为$\delta_1 x_1\ldots\delta_n x_n Q$的公式称为前束范式，称$\delta_1 x_1\ldots\delta_n x_n$为前束词，称$Q$为母式。

- **定理3.3.1** 设δ_k为$\forall,\exists$量词，$x_1\ldots,x_n$为不同变元，对于任意合式公式Q，存在前束范式$\delta_1 x_1\ldots\delta_n x_n R$，使得$Q\Leftrightarrow\delta_1 x_1\ldots\delta_n x_n R$。

前束范式变换步骤

(1) 去掉除∨,∧,¬ 之外的联结词：

$$Q \oplus R \Leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow R)$$

$$Q \leftrightarrow R \Leftrightarrow (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$$

$$Q \rightarrow R \Leftrightarrow \neg Q \vee R$$

(2) 公式化简，将¬置于原子公式谓词前：

- $\neg\neg Q \Leftrightarrow Q$
- $\neg\forall x Q(x) \Leftrightarrow \exists x \neg Q(x)$，$\neg\exists x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \neg Q(x)$
- $\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{Q} \vee \neg\mathrm{R}$，$\neg(\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{Q} \wedge \neg\mathrm{R}$

(3) 量词前置：

- 分析约束变元的辖域，将不同辖域的约束变元换名为互不相同的变元名

$$\forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall y Q(y) \qquad \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists y Q(y)$$

前束范式变换步骤

- 量词前束定理

  若$\boldsymbol{x}$不在$\boldsymbol{Q}$中出现，则

$$\boldsymbol{Q} \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\big)、\boldsymbol{Q} \vee \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\big)$$

$$\boldsymbol{Q} \wedge \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\big)、\boldsymbol{Q} \vee \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\big)$$

(4) 用等值变换交换量词次序

$$\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{y}\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$$\exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y}\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

例

■ **例题3.3.1** 公式$\forall xQ(x) \leftrightarrow \neg\exists yR(x,y)$化为前束范式

$$\forall xQ(x) \leftrightarrow \neg\exists yR(x,y)$$

$$\Leftrightarrow (\forall xQ(x) \rightarrow \neg\exists yR(x,y)) \wedge (\neg\exists yR(x,y) \rightarrow \forall xQ(x))$$

$$\Leftrightarrow (\neg\forall xQ(x) \vee \neg\exists yR(x,y)) \wedge (\neg\neg\exists yR(x,y) \vee \forall xQ(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x\neg Q(x) \vee \forall y\neg R(x,y)) \wedge (\exists yR(x,y) \vee \forall xQ(x))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x_1\neg Q(x_1) \vee \forall x_2\neg R(x,x_2)) \wedge (\exists x_3R(x,x_3) \vee \forall x_4Q(x_4))$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1\forall x_2\left(\neg Q(x_1) \vee \neg R(x,x_2)\right) \wedge \exists x_3\forall x_4\left(R(x,x_3) \vee Q(x_4)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1\forall x_2\left(\left(\neg Q(x_1) \vee \neg R(x,x_2)\right) \wedge \exists x_3\forall x_4\left(R(x,x_3) \vee Q(x_4)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1\forall x_2\exists x_3\forall x_4\left(\left(\neg Q(x_1) \vee \neg R(x,x_2)\right) \wedge \left(R(x,x_3) \vee Q(x_4)\right)\right)$$

前束范式的等价性

- **定理3.3.2** 设Q是公式，Q'是Q的前束范式，$Q \Leftrightarrow Q'$
- **证明：**

(1) 去掉除∨,∧,¬ 之外的联结词：

$Q \oplus R \Leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow R)$

$Q \leftrightarrow R \Leftrightarrow (Q \to R) \wedge (R \to Q)$

$Q \to R \Leftrightarrow \neg Q \vee R$

得到公式Q_1，$Q \Leftrightarrow Q_1$

(2) 公式化简，将¬置于原子公式即谓词前：

- $\neg\neg Q \Leftrightarrow Q$
- $\neg\forall x Q(x) \Leftrightarrow \exists x \neg Q(x)$，$\neg\exists x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \neg Q(x)$
- $\neg(\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{Q} \vee \neg\mathrm{R}$，$\neg(\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) \Leftrightarrow \neg\mathrm{Q} \wedge \neg\mathrm{R}$

得到公式Q_2，$Q_1 \Leftrightarrow Q_2$

(3) 量词前置：

- 分析约束变元的辖域，将不同辖域的约束变元换名为互不相同的变元名

$\forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall y Q(y) \qquad \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists y Q(y)$

53

得到公式为Q_3，$Q_2 \Leftrightarrow Q_3$

- 量词前置定理

若x不在Q中出现，则

得到公式为Q_4，$Q_3 \Leftrightarrow Q_4$

$$Q \wedge \forall x R(x) \Leftrightarrow \forall x\big(Q \wedge R(x)\big)、Q \vee \forall x R(x) \Leftrightarrow \forall x\big(Q \vee R(x)\big)$$

$$Q \wedge \exists x R(x) \Leftrightarrow \exists x\big(Q \wedge R(x)\big)、Q \vee \exists x R(x) \Leftrightarrow \exists x\big(Q \vee R(x)\big)$$

(4) 用等值变换交换量词次序

生成公式Q_5，$Q_4 \Leftrightarrow Q_5$

$$\forall x \forall y Q(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x Q(x,y)$$

$$\exists x \exists y Q(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x Q(x,y)$$

存在等值序列：$Q \Leftrightarrow Q_1$，$Q_1 \Leftrightarrow Q_2$，$Q_2 \Leftrightarrow Q_3$，$Q_3 \Leftrightarrow Q_4$，$Q_4 \Leftrightarrow Q_5$，$Q_5 \Leftrightarrow Q'$，

所以，$Q \Leftrightarrow Q'$。

无存在前束范式

- **定义3.2.5**（无∃前束范式）设Q是前束范式，Q'是Q的无∃前束范式的递归定义：

(1) 若Q中无存在量词，则Q'为Q；

(2) 若Q是$\exists x R(x)$，则Q'为$R(c)$，其中c不是$R(x)$的常元

(3) 若Q是$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y R(x_1, \ldots, x_n, y)$，则$Q'$为

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n R(x_1, \ldots, x_n, y)[y/f(x_1, \ldots, x_n)]$$

其中f不是$R(x_1, \ldots, x_n, y)$中的函数。

- 母式是合取范式的无存在前束范式称为斯科伦范式

- 例：求$\exists x\forall y\exists z\exists u\forall v(\mathrm{P}(x,y,z)\rightarrow \mathrm{Q}(u,v))$的无存在前束范式

$$\forall y\forall v(\neg \mathrm{P}(a,y,f(y)) \vee \mathrm{Q}(g(u),v))$$

- 公式与其无存在前束范式/斯克伦范式并不一定等值
- 公式的不可满足与其无存在前束范式/斯科伦范式的不可满足一致。

利用前束范式进行推论判断

- **例题3.2.1**：证明$\vDash \exists x\forall y Q(x,y) \to \forall y\exists x Q(x,y)$
- 往证$\neg(\exists x\forall y Q(x,y) \to \forall y\exists x Q(x,y))$不可满足

$\neg(\exists x\forall y Q(x,y) \to \forall y\exists x Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall y Q(x,y) \wedge (\neg\forall y\exists x Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\forall y Q(x,y) \wedge (\exists y\forall x\neg Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x_0\forall y_0 Q(x_0,y_0) \wedge (\exists y_1\forall x_1\neg Q(x_1,y_1))$ 换名

$\Leftrightarrow \exists x_0(\forall y_0 Q(x_0,y_0)\wedge(\exists y_1\forall x_1\neg Q(x_1,y_1)))$ 量词前置

$\Leftrightarrow \exists x_0\exists y_1\forall x_1\forall y_0\,(Q(x_0,y_0)\wedge\neg Q(x_1,y_1))$ 前束范式

斯克伦范式为$\forall x_1\forall y_0\,(Q(c_0,y_0)\wedge\neg Q(x_1,c_1))$ 消去存在量词

令$\sigma(x_1)= c_0$, $\sigma(y_0)= c_1$，有$\sigma(Q(c_0,c_1)\wedge\neg Q(c_0,c_1))=0$

$\forall x_1\forall y_0\,(Q(c_0,y_0)\wedge\neg Q(x_1,c_1))$不可满足，

故$\neg(\exists x\forall y Q(x,y) \to \forall y\exists x Q(x,y))$不可满足。得证。

利用前束范式进行推论判断

过程如下：

1. 通过使用演绎定理、反证律，公式$\boldsymbol{Q}$→R永真判定变换为$\boldsymbol{Q}$∧¬R永假判定
2. 对于¬进行变换直至¬置于原子公式前
3. 约束变元换名
4. 使用前束定理将所有量词前置，公式变换为前束范式
5. 消去存在量词，公式变换为无∃前束范式
6. 母式变换为合取范式，斯克伦范式
7. 找到反例，得证。

小结

- $Q \vDash R$成立，则$Q \to R$永真 意味着
  $\neg(\neg Q \vee R) \Leftrightarrow Q \wedge \neg R$ 永假
- 公式的斯科伦范式
  - 量词前置，公式转为前束范式
  - 去掉存在量词，公式转为无存在前束范式
  - 公式母式转为合取范式
- 公式与其斯克伦范式并不一定等值。
- 公式的不可满足与其斯科伦范式的不可满足一致。

本章内容

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言
- 论域、结构与模型

一阶理论语言

- **定义3.4.1** 给定领域知识符号集合，即给定领域的谓词和函词语言，称为一阶理论语言。
- 一阶理论语言

$$\boldsymbol{L_0^2} = < \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus\}, \{\forall, \exists\}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C} >$$

其中$\boldsymbol{P}$是谓词符号集合，$\boldsymbol{F}$是函词符号集合，$\boldsymbol{C}$是常元符号集合。

一阶理论语言

- **定义3.4.2** 语言$\boldsymbol{L_0^2}$中合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串：

1）若$\boldsymbol{t_1,\ldots,t_n}$是项,$\boldsymbol{Q_i^n}$是$\boldsymbol{n}$元谓词,则$\boldsymbol{Q_i^n(t_1,\ldots,t_n)}$是合式公式；

2）若$\boldsymbol{Q}$是合式公式，则$(\neg \boldsymbol{Q})$是合式公式；

3）若$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是合式公式，则$(\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})$，$(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})$，$(\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R})$，$(\boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R})$及$(\boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{R})$是合式公式；

4）若$\boldsymbol{Q}$是合式公式,$\boldsymbol{x}$是变元,则$(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q})$及$(\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q})$是合式公式；

5）只有有限次应用（1）～（4）构成的公式是合式公式。

一阶理论语言

- 一阶谓词逻辑语言$L_1^1 =< \{\neg, \rightarrow\}, \{\forall\}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C} >$
- **定义3.4.3** 语言L_1^1中合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串：

1）若$t_1, \dots, t_n$是项，Q_i^n是n元谓词，则$Q_i^n(t_1, \dots, t_n)$是合式公式；

2）若Q是合式公式，则$(\neg Q)$是合式公式；

3）若Q和R是合式公式，则$(Q \rightarrow R)$是合式公式；

4）若Q是合式公式，x是变元，则$(\forall x Q)$是合式公式；

5）只有有限次应用（1～4）构成的公式是合式公式。

一阶理论语言

- 具有等词的一阶谓词逻辑语言

  $L_2^1 =<\{\neg, \rightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C}>$，其中$=\in \boldsymbol{P}$。

- 例：

  自然数语言$\boldsymbol{L} =<\{\neg, \rightarrow\}, \{\forall\}, \{=\}, \{+, \circ, \boldsymbol{s}\}, \{\mathbf{0}\}>$，其中+，$\circ$是二元运算符（加函词和乘函词），$\boldsymbol{s}$是一元函数符（后继函词），0为常元。

本章内容

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言
- 论域、结构与模型

论域

- 通常，我们将研究的整体称为论域。在论域中，研究有哪些对象，对象之间的基本运算以及对象之间的基本关系。在论域上，研究用谓词逻辑语句表示的命题以及逻辑真值。

- **定义3.5.1** 论域是一个数学系统，记为 D。它由三部分组成：
  - 一个非空对象集合，每个对象也称为个体；
  - 一个关于D的函数集合，也称运算；
  - 一个关于D的关系集合。

量词的语义

- 量词 ∀, ∃ 的语义在论域上解释为逻辑量词∀, ∃。
- $\boldsymbol{\sigma}(\forall x Q(x))$语义表示：
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\forall x Q(x)\big) = \mathbf{1}$，对论域上$D$任意$d$，使$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\forall x Q(x)\big) = \mathbf{0}$，对论域上$D$存在$c$，使$Q^{\sigma}(x)[x/c] = 0$
- $\boldsymbol{\sigma}(\exists x Q(x))$语义表示：
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\exists x Q(x)\big) = \mathbf{1}$，对论域上$D$存在$c$，使$Q^{\sigma}(x)[x/c] = 0$；
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\exists x Q(x)\big) = \mathbf{0}$，对论域上$D$任意$d$，使$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$
- $Q^{\sigma}(x)$简记为$Q(x)$ 。

逻辑关系

- 在自然数论域中，有自然数集合$\boldsymbol{N}$；有运算集合$\{+,\times\}$，其中+表示加法，×表示乘法；有关系集合$\{=,\leq\}$，其中=表示相等关系，≤表示小于或等于关系。
- 在整数论域中，有整数集合$\boldsymbol{Z}$；有运算集合$\{+,-,\times\}$，其中+表示加法，−表示减法，×表示乘法；有关系集合$\{=,\leq\}$，其中=表示相等关系，≤表示小于或等于关系。

逻辑关系

- 每个关系表示论域$\boldsymbol{D}$的对象之间、函数之间以及对象与函数之间的逻辑关系。
  - 在自然数论域中，表示对象之间逻辑关系，$3 \leq 5$是真，$3 = 5$是假。
  - 表示函数之间逻辑关系$6 + 8 = 8 + 6$是真；
  - 表示对象与函数之间逻辑关系，$3 \times 5 \leq 4$是假。

- 通常一个合式公式可能没有自由变元，也可能有自由变元。通过对变元的指派，合式公式的一个自由变元指定一个常元。

指派与解释

- **定义3.5.2** 命题形式的自由变元被指定为集合中的一个常元称为**指派**，记为 $\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{C}$。
- **定义3.5.3** 设L是语言，$\boldsymbol{D}$是论域，一个**解释**$\boldsymbol{I}$由以下四部分组成：
  - 对于每个常元$\boldsymbol{c}$，指派为$\boldsymbol{D}$上一个常量$\boldsymbol{c}$；
  - 对于每个$\boldsymbol{n}$元函词$\boldsymbol{f}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个$\boldsymbol{n}$元函数$\boldsymbol{f}$；
  - 对于每个$\boldsymbol{m}$元谓词符$\boldsymbol{Q}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个$\boldsymbol{m}$元关系$\boldsymbol{Q}$；
  - 对于每个自由变元$\boldsymbol{x}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个常量$\boldsymbol{c}$，也称为赋值函数。
- **定义3.5.5** 解释和指派统称为指派函数（简称指派），对于合式公式$\boldsymbol{Q}$，记为$\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{Q} \to \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$。

指派为合式公式$\boldsymbol{Q}$确定一个真值，即语义

结构与模型

- **定义3.5.4** 给定语言$\boldsymbol{L}$以及论域$\boldsymbol{D}$和解释$\boldsymbol{I}$，偶对$<\boldsymbol{D},\boldsymbol{I}>$称为$\boldsymbol{L}$的结构，记为$\boldsymbol{S}=<\boldsymbol{D},\boldsymbol{I}>$。
- **定义3.5.6** 设$\boldsymbol{L}$是语言，$\boldsymbol{D}$是论域，$\boldsymbol{\sigma}$是$\boldsymbol{D}$上的指派，则$<\boldsymbol{D},\boldsymbol{\sigma}>$称为语言$\boldsymbol{L}$的模型，记为$\boldsymbol{M}=<\boldsymbol{D},\boldsymbol{\sigma}>$。
- **定义3.5.7** 设$\boldsymbol{L}$是语言，$\boldsymbol{M}=<\boldsymbol{D},\boldsymbol{\sigma}>$是语言$\boldsymbol{L}$的模型，$\boldsymbol{Q}$是合式公式，并且$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q})=1$，则称$\boldsymbol{Q}$在$\boldsymbol{D}$上有模型。

结构与模型

- 在论域上，我们研究命题的真伪，这些命题可以表示为一阶谓词逻辑的逻辑语句。通常，相同的逻辑语句可能来自不同的论域。
- 一般来说，首先选择确定一个论域，经过解释I：
  - 合式公式的常元解释为论域上的常量；
  - 合式公式的函词解释为论域上的一个函数；
  - 合式公式的谓词符解释为论域上的一个性质或关系。
- 公式中的常元、函词和谓词在论域上就具有明确、唯一的含义，公式的意义理解具有唯一性，不会产生二义性。

逻辑语句与命题

- 通过指派，一个逻辑语句变换为确定的论域上的命题，命题就具有确定真假意义了。
  - 在自然数论域中，$\forall y(0 \le y)$是真，$\exists x \forall y(x \le y)$是真，$\forall x \forall y(x + y = y + x)$是真，$\forall x \forall y(x + y \le y)$是假；
  - 在整数论域中，$\forall y(0 \le y)$是假，$\exists x \forall y(x \le y)$是假，$\forall x \forall y(x + y = y + x)$是真，$\forall x \forall y(x + y \le y)$是假。

逻辑语句与命题

- 通常，逻辑语句的真值与论域有关。有些逻辑语句在不同的论域上都为真，而有些逻辑语句仅在某些论域上为真，而在另一些论域上为假。

- 数理逻辑中一个重要研究内容就是求证一个合式公式在所有的模型下为真还是为假，或者求证一个合式公式在什么模型下为真或为假。

结构与模型

- 有些合式公式在一些模型下为真，而在另一些模型下为假。
- 例如，对于合式公式$\exists x \forall y R(x,y)$和$\forall y \exists x R(x,y)$，若将谓词$R(x,y)$分别解释为自然数论域和整数论域上的关系≤，则公式变换为$\exists x \forall y(x \leq y)$和$\forall y \exists x(x \leq y)$。
  - 在自然数论域中，最小数为0，所以$\forall y(0 \leq y)$。
  - 在自然数论域上，有模型$M = < D_N, \sigma >$，使得$\sigma\big(\exists x \forall y(x \leq y)\big) = 1$和$\sigma\big(\forall y \exists x(x \leq y)\big) = 1$。
  - 在整数论域上，有模型$M = < D_I, \sigma >$，使得$\sigma\big(\forall y \exists x(x \leq y)\big) = 1$，$\sigma\big(\exists x \forall y(x \leq y)\big) = 0$。

有效式和矛盾式

- 有些合式公式在任意模型下都为真。
  - 如$\forall x Q(x) \vee \neg \forall x Q(x)$；
- 有些合式公式在任意模型下都为假。
  - 如$\forall x Q(x) \wedge \neg \forall x Q(x)$ 。
- 在数理逻辑中，用可满足性和有效性表示合式公式的逻辑真值性质，它们是重要的语义概念。

模型与公式的语义

- **定义3.5.8** 给定合式公式$\boldsymbol{Q}$，模型$\boldsymbol{M} =< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$使得$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{1}$成立，称公式$\boldsymbol{Q}$关于模型$\boldsymbol{M}$是可满足的，简称在模型$\boldsymbol{M}$上$\boldsymbol{Q}$可满足，记为$\vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{Q}$。
- **例如：**
  - 在自然数论域中，在模型$\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}} =< \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{\sigma} >$上，$\vDash_{\boldsymbol{M}_{\mathbf{1}}} \exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y})$。
  - 在整数论域中，在模型$\boldsymbol{M}_{\mathbf{2}} =< \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{\sigma} >$上，$\vDash_{\boldsymbol{M}_{\mathbf{2}}} \forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y})$ 。

模型与公式的语义

- **定义3.5.9** 给定合式公式Q，模型$M =< D, \sigma >$使得$\sigma(Q) = 0$成立，称公式Q关于模型M是不可满足的，记为$\nvDash_M Q$。
- **例如：**
  - 在整数论域中，在模型$M_2 =< D_Z, \sigma >$上，$\nvDash_{M_2} \exists x \forall y (x \leq y)$。

公式集合与模型

- **定义3.5.10** 给定合式公式集合$\boldsymbol{\Gamma} = \{\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}\}$，模型$\boldsymbol{M} =< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$使得对于每个公式$\boldsymbol{Q_k} \in \boldsymbol{\Gamma}$，有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q_k}) = \mathbf{1}$成立，则称公式集合$\boldsymbol{\Gamma}$关于模型$\boldsymbol{M}$是可满足的，简称$\boldsymbol{\Gamma}$可满足。也称模型$< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$满足$\boldsymbol{\Gamma}$，记为$\vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Gamma}$。

- **定理3.5.1** 给定一个语言$\boldsymbol{L}$，设$\boldsymbol{\Gamma} = \{\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}\}$，$\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}$是它的$\boldsymbol{n}$个公式$(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1})$，$\boldsymbol{M} =< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$是模型，则$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{1}$当且仅当$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q_1} \wedge \dots \boldsymbol{Q_1} \wedge \boldsymbol{Q_n}) = \mathbf{1}$

谓词合式公式的逻辑推论

- **定义3.5.11** $\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是谓词合式公式，若存在模型$\boldsymbol{M} = <\boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma}>$，使得当$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{1}$时，有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}$，则称$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{Q}$关于模型$\boldsymbol{M}$上的逻辑推论，记为$\boldsymbol{Q} \vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{R}$。

- **定义3.5.12** 设$\boldsymbol{\Gamma}$是谓词合式公式集合， $\boldsymbol{R}$是谓词合式公式，若存在模型$\boldsymbol{M} =< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$，使得当$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{1}$时，有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}$，则称$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{\Gamma}$关于模型$\boldsymbol{M}$上的逻辑推论，记为$\boldsymbol{\Gamma} \vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{R}$。

小结

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言、论域、结构与模型