5. 3 二次型

定义5.3.1 n个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 二次齐次多项式

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

称为n元二次型。

如果自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 都在数域F中取值，函数表达式 $Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}x_ix_j$ 中的系数 a_{ij} 也都在F中取值，则 $Q(x_1,\cdots,x_n)$ 称为数域F上的二次型，它是F上数组空间

F^n 到 F 中的一个映射

$$Q: F^n \to F, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto Q(x_1, \cdots, x_n)$$

例1 求下面的实二次型的值域以及它们的最大值或最小值。

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 6xz - 4yz$$

$$= (x+2y-3z)^2 - 3(y - \frac{4}{3}z)^2 - \frac{8}{3}z^2 \qquad \textbf{(5.3.1)}$$

令

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 3z \\ y' = y - \dfrac{4}{3}z \\ z' = z \end{cases} \text{即} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\dfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \textbf{(5.3.2)}$$

将(5.3.2)代入(5.3.1), $Q(x, y, z)$ **可以化为**

$$Q_1(x', y', z') = x'^2 - 3y'^2 - \frac{8}{3}z'^2$$

由于矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$可逆，由（5.3.2）定义的映射$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$是$R^3$到自身的1—1对应。所以$Q$、$Q_1$的定义域和值域相同。又因$Q_1$的值域是$R=(-\infty,\infty)$从而$Q$的值域也是$R$，即

没有最大值，也没有最小值。

选择适当的可逆矩阵P，将二次型

$$Q(X)=\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}x_i x_j$$ 化为简单的形式

$$Q(Y)=a_1y_1^2+a_2y_2^2+\cdots+a_ny_n^2 \qquad （5.3）$$

即将定义在 F^n 的任意二次型 $Q(x_1,\cdots,x_n)$

通过可逆线性变换 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_2 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

化为（5.3）的形式 $Q(y_1,\cdots,y_n)$

（5.3）所给形式的二次型称为二次型的**标准型**。

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例2 将下列二次型化为标准型：

(1) $Q(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

(2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

解 （1）取可逆线性变换 $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=y-z \\ z'=z \end{cases}$

则 $Q(x,y,z)=x'^2+y'^2+(x'+y')^2=2(x'+\frac{1}{2}y')^2+\frac{3}{2}y'^2$

再令 $\begin{cases} u=x'+\frac{1}{2}y'=x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z \\ v=y'=y-z \\ w=z'=z \end{cases}$

则原来的二次型化为标准型

$$Q(x,y,z)=Q_1(u,v,w)=2u^2+\frac{3}{2}v^2$$

(2) 令 $\begin{cases} x_1=z_1+z_2 \\ x_2=z_1-z_2 \\ x_3=z_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2 \\ z_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2 \\ z_3=x_3 \end{cases}$

则 $Q(x_1,x_2,x_3)=(z_1+z_2)(z_1-z_2)+(z_1-z_2)z_3+z_3(z_1+z_2)$

$$=(z_1+z_3)^2-z_2^2-z_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3 \\ y_2=z_2=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2 \\ y_3=z_3=x_3 \end{cases}$

则 $Q(x_1,x_2,x_3)=Q(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

定理 任意数域F上的二次型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

都可以通过配方法找到**可逆线性变换** $Y=PX$,

化成标准型

$$Q(x_1,\cdots,x_n)=Q_1(y_1,\cdots,y_n)=b_1y_1^2+\cdots+b_ny_n^2$$

证明： 对n用数学归纳法

当 $n=1$ 时 $Q(x_1)=a_{11}x_1^2$ 已经是标准型。如果

$F=R$ ，则当 $a_{11}\neq 0$ 时取 $y_1=\sqrt{|a_{11}|}x_1$ 可以再化为

$Q(y_1)=y_1^2$(当$a_{11}>0$)或$Q(y_1)=-y_1^2$(当$a_{11}<0$)

以下设 $n\geq 2$，并且设$n-1$ 元二次型可以通过可逆线性变换化为平方和的形式。

情况1 $a_{11}\neq 0$

$$Q(x_1,\ldots,x_n)=a_{11}(x_1^2+x_1(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n))+R_2(x_2,\ldots,x_n)$$

其中 $R_2(x_2,\ldots,x_n)$是由 $Q(x_1,\ldots,x_n)$中不含 x_1 的项组成的 $x_2,\ldots,x_n$ 的二次型。

将$Q(x_1,\ldots,x_n)$ 看作自变量 x_1 的二次函数，其他字母 $x_2,\ldots,x_n$ 的多项式都看作 x_1 的多项式的系数，配方得

$$Q(x_1,\ldots,x_n)=a_{11}(x_1+\frac{1}{2}(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n))^2+R_3(x_2,\ldots,x_n)$$

其中 $R_3(x_2,\ldots,x_n)=-\frac{a_{11}}{4}(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2+R_2(x_2,\ldots,x_n)$

是 $x_2,\ldots,x_n$ **的二次型。**

根据归纳假设，将自变量 $x_2,\ldots,x_n$ **经过适当的可逆线性变换** $\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=P_1\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

可以将 $R_3(x_2,\ldots,x_n)$ **化为标准型**

$$\tilde{Q}_1(x_2,\ldots,x_n)=b_2y_2^2+\cdots+b_ny_n^2$$

再令 $y_1=x_1+\frac{1}{2}(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)$

则可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{2a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2a_{11}} \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

将原二次型化为平方和的形式

$$Q_1(y_1, \cdots, y_n) = a_{11} y_1^2 + b_2 y_2^2 + \cdots + b_n y_n^2$$

情况二 $a_{11} = 0$，但 $a_{1k} \neq 0$ 对某个 $k \geq 2$ 成立。

取自变量的可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + u_k \\ x_k = u_1 - u_k \\ x_j = u_j \qquad (\forall j \notin \{1, k\}) \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_k \\ u_k = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_k \\ u_j = x_j \qquad (\forall j \notin \{1,k\}) \end{cases}$$

则原二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)$ 化为

$$Q_2(u_1,\ldots,u_n) = a_{1k}u_1^2 - a_{1k}u_k^2 + Q_2'(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}u_iu_j$$

其中二次型 $Q_2'(u_1,\ldots,u_n)$ 不含 u_1^2 项，$Q_2(u_1,\ldots,u_n)$ 中 u_1^2 的系数 $b_{11} = a_{1k} \neq 0$，化为已解决了的情况1。

情况3 $a_{1j} = 0$ 对所有的 $1 \le j \le n$

此时 $Q(x_1,\ldots,x_n)$ 不含 x_1，实际上是 $n-1$ 个自变量 $x_2,\ldots,x_n$ 的二次型 $Q_3(x_2,\ldots,x_n)$.

根据归纳假设，$Q_3(x_2,\ldots,x_n)$ 可以通过可逆线性变换化为平方和的形式。

根据数学归纳法原理，**定理对所有的正整数n成立。**

推论 实数域R上的二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)$ 可以通过可逆线性变换化为如下形式

$$Q_1(u_1,\ldots,u_n)=u_1^2+\cdots+u_p^2-u_{p+1}^2-\cdots-u_{p+q}^2$$

1、二次型的矩阵

例 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是F上任意n阶方阵 . $X=(x_1,\cdots x_n)^T$是F上任意n维列向量，求证：

（1） $Q(X)=X^TAX$是F^n上的二次型.

(2) 任意二次型$Q(X)$可以用$Q(X)=X^TSX$的形式来表示, 其中S是对称方阵, 由$Q(X)$唯一决定

证明：（1） 计算可得

$$Q(X)=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1 \le i, j \le n} x_i a_{ij} x_j \qquad \text{(a)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j \qquad \text{(b)}$$

(2) 将任意二次型

$$Q(x_1, \cdots x_n) = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

选择 F 上n阶方阵$B = (b_{ij})_{n \times n}$使

$$b_{ii} = a_{ii}, \forall 1 \le i \le n; \ b_{ij} + b_{ji} = a_{ij}, \ \forall 1 \le i < j \le n$$

则$Q(X) = X^T BX$成立.

特别,选取对称方阵$S = (s_{ij})_{n \times n}$,使

$$s_{ii} = a_{ii}, \forall 1 \le i \le n; \qquad s_{ij} = s_{ji} = \frac{1}{2} a_{ij}, \forall 1 \le i < j \le n$$

则$Q(X) = X^T SX$, 其中$S = S^T$由Q唯一决定.

定义5.3.2 设 $Q(x_1,\cdots x_n)=\sum\limits_{1\le i\le j\le n} a_{ij}x_i x_j$

是数域F上的二次型，则满足条件

$$Q(X)=X^T SX,\forall X=(x_1,\cdots x_n)^T\in F^{n\times 1}$$

这里，对称方阵S称为二次型Q的矩阵.

设V是数域F上的线性空间，M是V的一组基. V上任何一个

二次型$Q(\alpha)$可以通过向量α在M下的坐标X来表示，从而可以用

对称方阵S来表示： $Q(\alpha)=X^T SX$

S称为V上的二次型Q在基M下的矩阵.

例2　求二次型

$$Q(x,y,z)=2x^2-3y^2+5z^2+2xy-3xz+5yz$$

的矩阵S，并将$Q(x,y,z)$用矩阵的乘法来表示。

解：

$$S=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix}, Q(x,y,z)=(x_1,\cdots x_n)S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

注意 在写二次型$Q(x_1,\cdots,x_n)$的矩阵S时，要将“交叉项” $x_i x_j (i \neq j)$的系数a_{ij}拆成两半，将$\frac{1}{2}a_{ij}$分别放到S的第(i, j)位置和第(j,i)位置. 而平方项x_i^2的系数a_{ii}则直接放到S的对角线的第(i,i)位置.

2. 矩阵相合的定义

为了研究二次型的性质，在第一节中通过适当的可逆线性代换$X = PY$将二次型$Q(X)$化简为$Q_1(Y)$.如果$Q(X)$的矩阵是S，则将$X = PY$代入$Q(X) = X^T SX$得到

$$Q_1(Y)=(PY)^T S(PY)=Y^T(P^T SP)Y$$

其中的方阵$P^T SP$满足条件

$$(P^T SP)^T=P^T S^T P=P^T SP$$

$P^T SP$是对称方阵，因而是$Q_1(Y)$的矩阵.

定义5.3.3 设A,B是F上的n阶方阵. 如果存在F上n阶可逆方阵P，使

$$B=P^T AP$$

就称A与B**相合**.

显然，相合是相抵的一种特殊情况，因此，A与B 相合

$\Rightarrow \operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B.$

容易验证矩阵的相合关系的以下性质：

引理5.3.1 方阵的相合关系具有如下性质：

(1) 自反性：每个方阵A与自身相合；

(2) 对称性：如果A与B相合，则B与A相合；

(3) 传递性：如果A与B相合，且B与C相合，则A与C相合.

由相合关系具有的以上性质，可以将同阶的方阵按相合关系分成等价类，使同一类中任意两个方阵相合，不同类中的方阵不相合.

将二次型$Q(X)$通过可逆线性代换$X=PY$化成二次型$Q_1(Y)$，相当于将Q的矩阵S通过相合变换变成Q_1的矩阵P^TSP.二次型的矩阵都是对称方阵. 为了研究二次型的需要，我们首先研究对称方阵的相合.

引理5.3.2 与对称方阵相合的方阵仍是对称方阵，与反对称方阵相合的方阵仍是反对称方阵.

证明　设S, K分别是$F^{n\times n}$中的对称方阵和反对称方阵, $P \in F^{n\times n}$ 是可逆方阵.则

$$(P^T SP)^T = P^T S^T P = P^T SP, (P^T KP)^T = P^T K^T P = -P^T KP$$

可见$P^T SP, P^T KP$分别是对称方阵和反对称方阵.

既然与对称方阵相合的仍是对称方阵，我们首先研究:在由对称方阵组成的相合等价类中，可以选取怎样的简单方阵作为这一个等价类的代表元.

如果$Q(X)$被化简为平方和的形式

$$Q_1(Y)=b_1y_1^2+\cdots+b_ny_n^2$$

则$Q_1(Y)$的矩阵

$$S_1=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix}$$

是对角矩阵.因此，通过可逆线性变换将二次型$Q(X)$化简成平方和,也就是通过相合变换将$Q(X)$的矩阵S化成对角矩阵.

设V是F上的n维线性空间,$M=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$与$M_1=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$是它的两组基. 则任意$\alpha\in V$在这两组基下的坐标$X,Y$之间有坐标变换关系

$$X = PY \tag{5.3.1}$$

其中P是由M到M_1的过渡方阵,满足条件

$$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) P \tag{5.3.2}$$

设V上的二次型Q在上述两组基M_1, M_2下的矩阵分别是S, S_1,即

$$Q(\alpha) = X^T S X = Y^T S_1 Y \tag{5.3.3}$$

将坐标变换公式(5. 3. 1)代入(5. 3. 3)得到

$$(PY)^T S(PY) = Y^T S_1 Y,$$

即

$$Y^T (P^T S P) Y = Y^T S_1 Y \tag{5.3.4}$$

由(5.3.4)知道$P^T SP$与S_1是$F^{n\times 1}$上同一二次型的矩阵,它们应当相等

$$S_1 = P^T SP$$

这证明了:

定理 数域F上有限维线性空间V上同一个二次型在两组不同基M, M_1下的矩阵S, S_1相合:

$$S_1 = P^T SP$$

其中P是M到M_1的过渡矩阵.