第八章 定积分的应用

§ 微元法

回顾 曲边梯形求面积的问题 $A=\int_a^b f(x)dx$

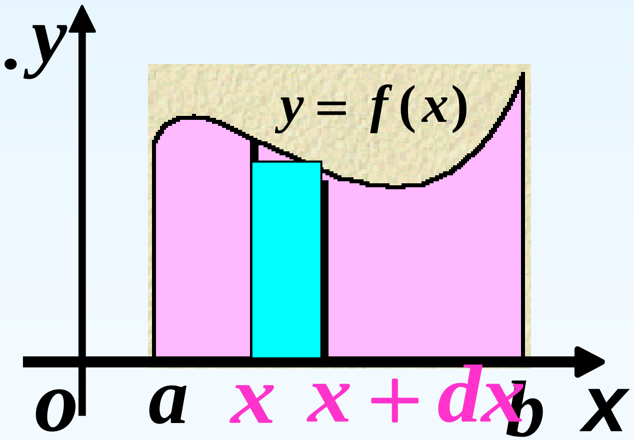
提示 若用 ΔA 表示任一小区间 $[x, x+\Delta x]$ 上的窄曲边梯形的面积 则 $A=\sum \Delta A$,

若 $\Delta A \approx \underline{f(x)dx}$, → dA → 面积微元

于是 $A \approx \sum f(x)dx$.

$$A=\lim \sum f(x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx.$$



当所求量U符合下列条件：

（1）U是与一个变量x的变化区间$[a,b]$有关的量；

（2）U对于区间$[a,b]$具有可加性；

（3）$[x, x+\mathrm{d}x]$上部分量ΔU的近似值可表示为$f(x)\mathrm{d}x$；

就可以考虑用定积分来表达这个量U.

相应的方法通常叫做微元法.

微元法的一般步骤：

1. 选定待求量U与自变量x,确定自变量的变化区间$[a,b]$;

2. 分割区间$[a,b]$,取其中任意一个小区间，记为$[x, x+\mathrm{d}\,x]$,

若相应的部分量$\Delta U = f(x)\mathrm{d}\,x + o(\mathrm{d}x)$，即$\Delta U \approx f(x)\mathrm{d}\,x$,

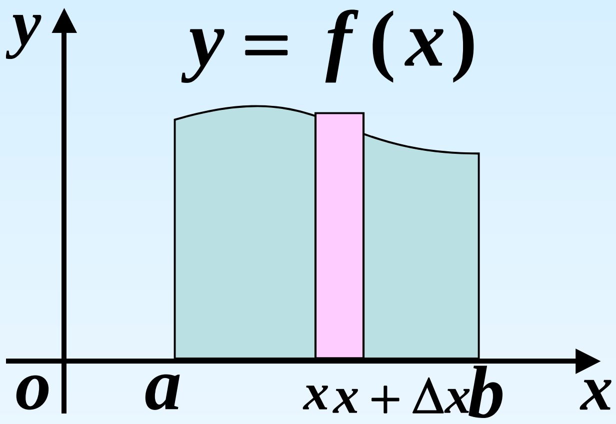
记$dU = f(x)dx$，称为关于物理量U的微元;

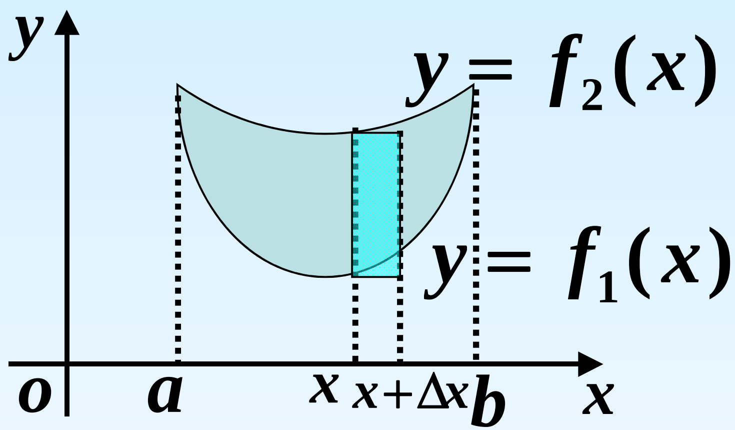
3. 以$\mathrm{d}\,U = f(x)\mathrm{d}\,x$为被积表达式, 所求的物理量为

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

§1　平面图形的面积

直角坐标系情形





曲边梯形的面积

平面图形的面积

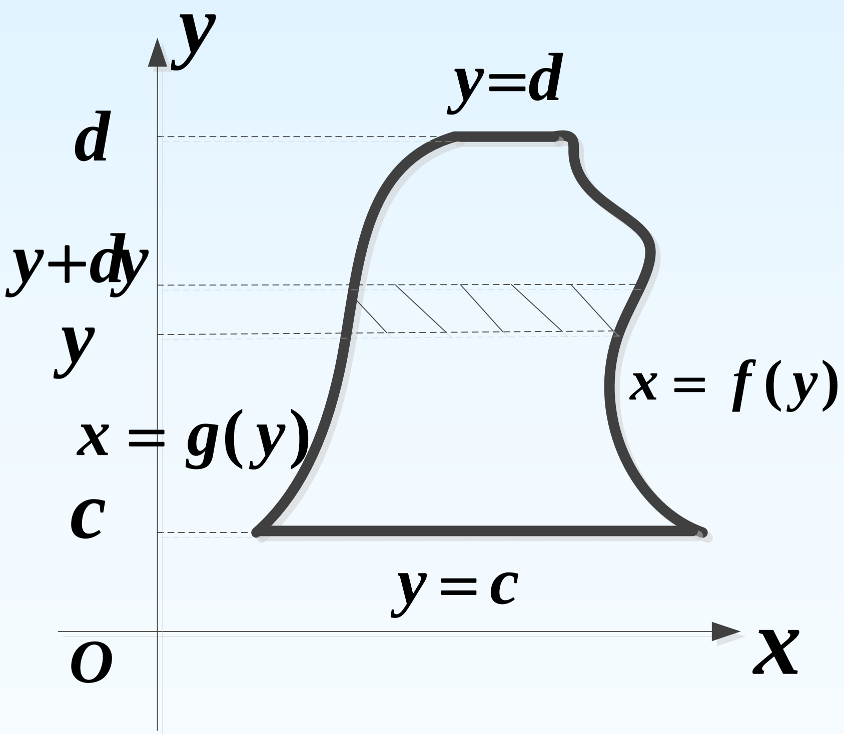
$$A=\int_a^b f(x)dx$$

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

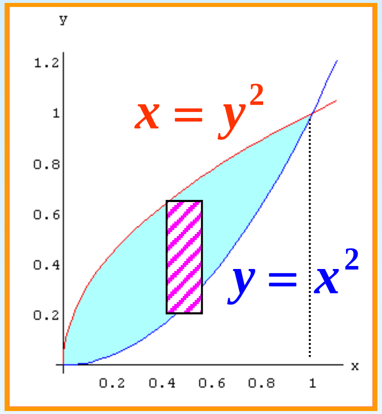
类似地，当平面图形$D=\begin{cases} g(y)\le x\le f(y) \\ c\le y\le d. \end{cases}$时

面积微元为$\mathrm{d}A=[f(y)-g(y)]\mathrm{d}y$,

相应平面图形的面积为$A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\mathrm{d}y$.



例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.



解 两曲线的交点

$$(0,0) \quad (1,1)$$

选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

面积元素 $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$

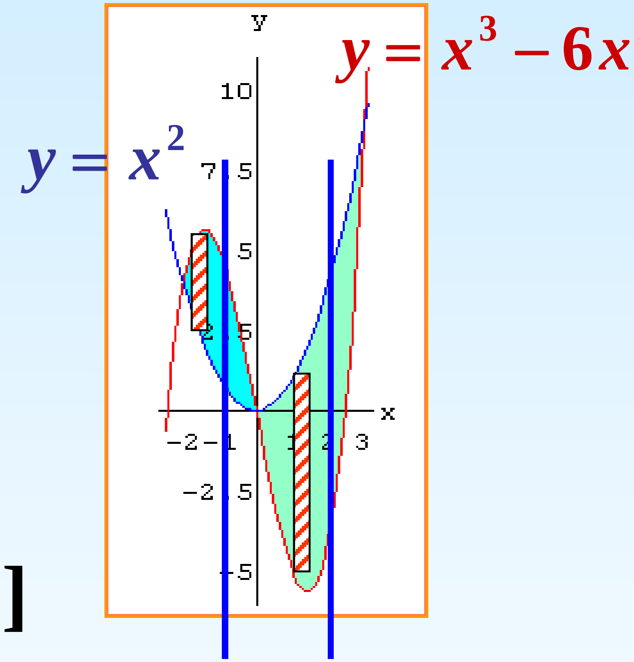
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算由曲线 $y=x^3-6x$ 和 $y=x^2$ 所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y=x^3-6x \\ y=x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (0,0),\quad (-2,4),\quad (3,9).$



选 x 为积分变量 $x\in[-2,3]$

(1) $x\in[-2,0]$, $\int_{-2}^{0}(x^3-6x-x^2)dx$

(2) $x\in[0,3]$, $\int_{0}^{3}(x^2-x^3+6x)dx$

于是所求面积

$$A=\int_{-2}^{0}(x^3-6x-x^2)dx+\int_{0}^{3}(x^2-x^3+6x)dx$$

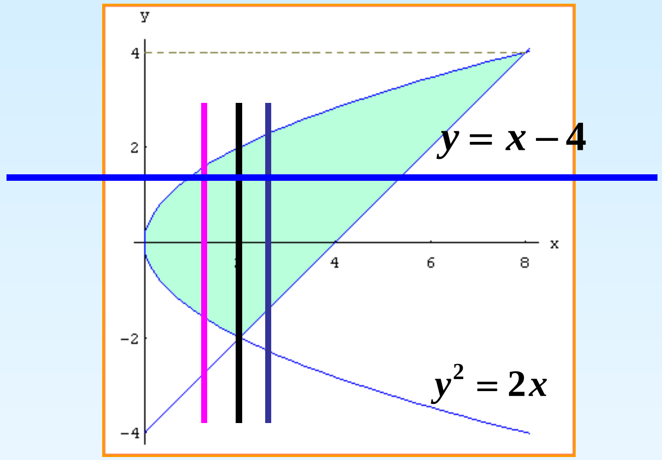
$$=\frac{253}{12}.$$

说明：注意各积分区间上被积函数的形式.

问题：积分变量只能选 x吗？

例 3 计算由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点



$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2,-2),\ (8,4).$$

选 y 为积分变量 $y \in [-2, 4]$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy = 18.$$

参数方程情形

如果曲边梯形的曲边为参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad t\in[t_1,t_2]$$

在$[t_1,t_2]$上$x=\varphi(t)$具有连续导数且$\varphi'(t)\neq 0$，

$y=\psi(t)$连续.

曲边梯形的面积 $A=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx.$

$$\boxed{A=\int_{t_1}^{t_2}|\psi(t)\varphi'(t)|dt.}$$

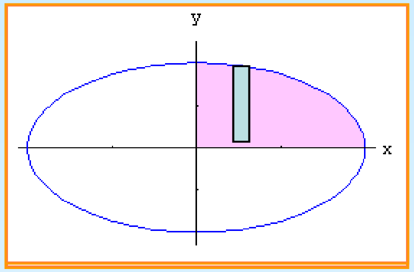
事实上，

当$x'(t)>0$时 $S=\int_a^b|y|dx=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)|dx(t)=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|dt$

当$x'(t)<0$时 $S=\int_a^b|y|dx=\int_{T_2}^{T_1}|y(t)|dx(t)=\int_{T_2}^{T_1}|y(t)|x'(t)dt$

$$=\int_{T_1}^{T_2}|y(t)x'(t)|dt$$

例 4 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积.



解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$A = 4\int_0^a y dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t d(a\cos t)$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

直接用公式$A = 4\int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)\varphi'(t)| dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |-b\sin t a\sin t| dt$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2 t dt = \pi ab$$

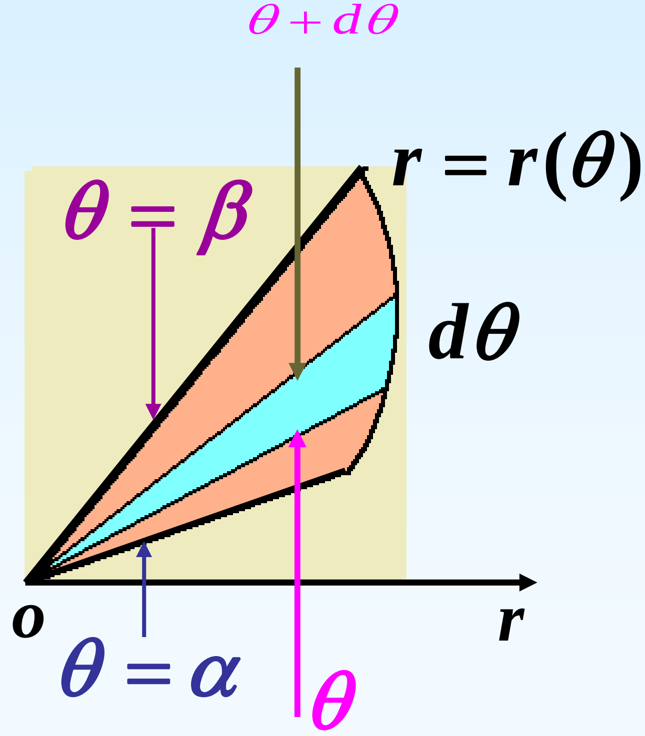
极坐标情形

设由曲线$r=r(\theta)$及射线$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$围成一曲边扇形，求其面积．其中，$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$r(\theta)\geq 0$.

面积元素 $dA=\dfrac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta$

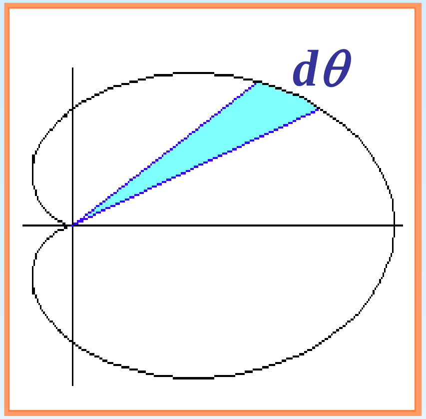
曲边扇形的面积

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta.$$



例 5 求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ 所围平面图形的面积.

$(a > 0)$



解 $dA = \dfrac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$

利用对称性知

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

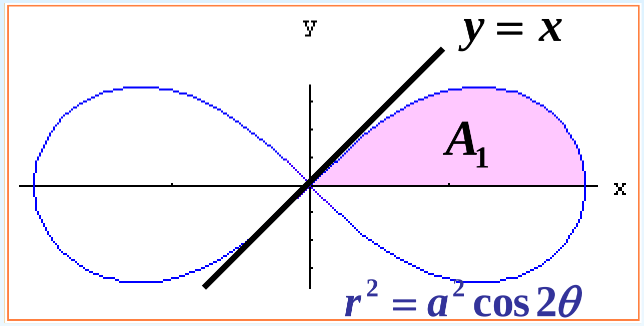
$$= a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

例 6 求双纽线$r^2 = a^2\cos 2\theta$所围平面图形的面积.

解 由对称性知总面积=4倍第一象限部分面积

$$A = 4A_1$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta d\theta = a^2.$$



小结

求在直角坐标系下、参数方程形式下、极坐标系下平面图形的面积.

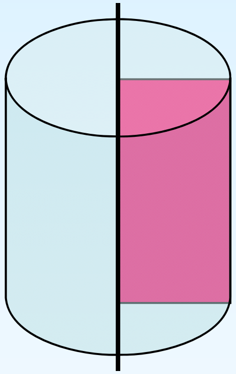
（注意恰当的选择积分变量有助于简化积分运算）

作业 习题8.1 3, 5, 7

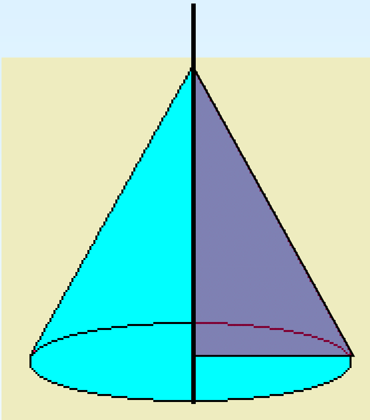
§2 空间立体的体积和旋转曲面的面积

旋转体的体积

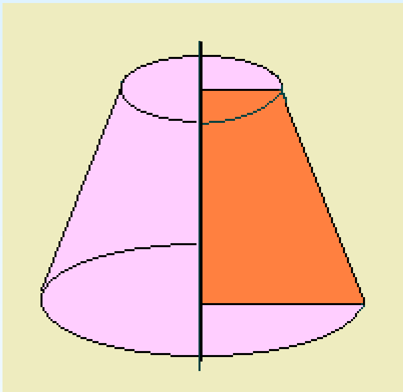
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做**旋转轴**.



圆柱



圆锥



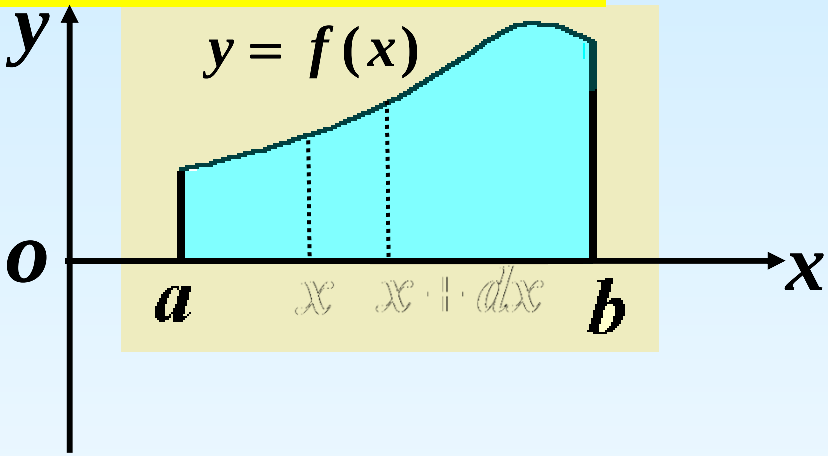
圆台

一般地，如果旋转体是由连续曲线$y = f(x)$、直线$x = a$、$x = b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，体积为多少？

取积分变量为x，$x \in [a,b]$

在$[a,b]$上任取小区间

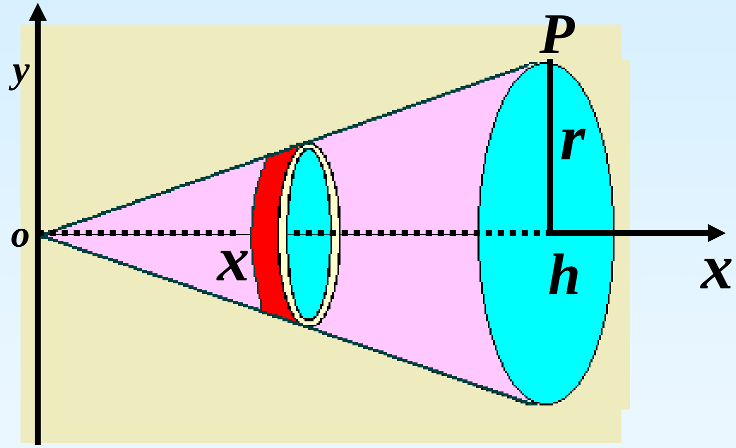
$[x, x + dx]$，



dx为底的小曲边梯形绕x轴旋转而成的薄片体积的近似为体积元素，$dV = \pi[f(x)]^2 dx$

旋转体的体积为 $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$

例 1 连接坐标原点O及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形. 将它绕x轴旋转构成一个底半径为r、高为h的圆锥体，计算圆锥体的体积.



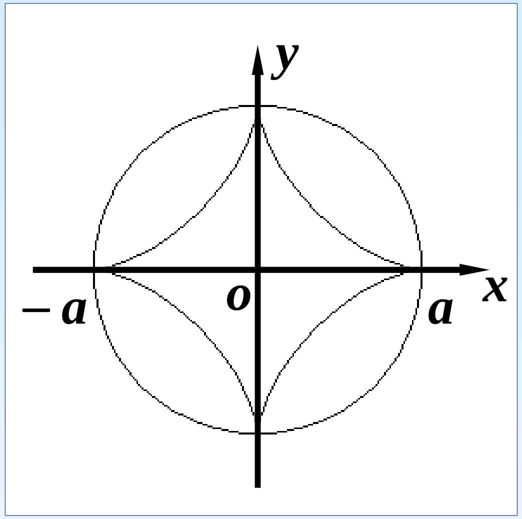
解 直线 OP方程为$\boxed{y=\frac{r}{h}x}$

取积分变量为x， $x\in[0,h]$

$$dV=\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx$$

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi hr^2}{3}.$$

例 2 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 绕 x 轴旋转构成旋转体的体积.



解 $\because y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}},$

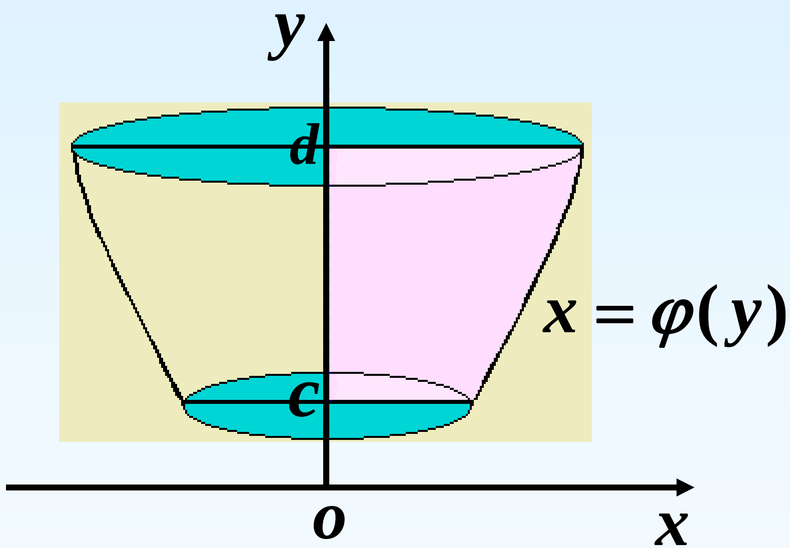
$$\therefore y^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \quad x \in [-a, a]$$

旋转体的体积

$$V = \int_{-a}^{a} \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

如果旋转体是由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



例 3 求曲线 $y=\sin x\,(0\le x\le \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积 V.

解1 取积分变量为 y，$y\in[0,1]$

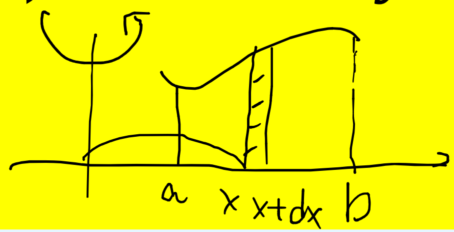
$$dV=\pi(\pi-\arcsin y)^2dy-\pi(\arcsin y)^2dy$$

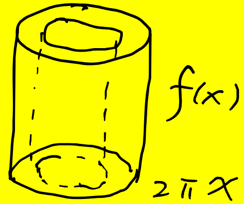
$$=\pi(\pi^2-2\pi\arcsin y)dy,$$

$$V=\pi\int_0^1(\pi^2-2\pi\arcsin y)dy=2\pi^2.$$

设旋转体是由连续曲线$y=f(x)$,直线$x=a,x=b(b>a>0)$及x轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周而成的立体，若取x为积分变量，则$V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$

此公式适用于无法将$y=f(x)$写成x关于y的函数形式或者函数表达式较复杂的情况.





解2　取积分变量为x，　$x\in[0,\pi]$

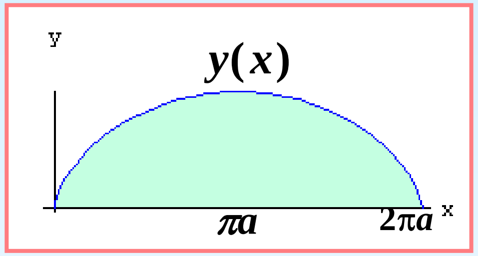
任取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,\pi]$,　　$\Delta V\approx 2\pi x f(x)\mathrm{d}x$

体积微元$\mathrm{d}V=2\pi x f(x)\mathrm{d}x$

$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\sin x\,dx=2\pi^2.$$

例 4 求摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ 的一拱与 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转构成旋转体的体积.

解 绕 x 轴旋转的旋转体体积



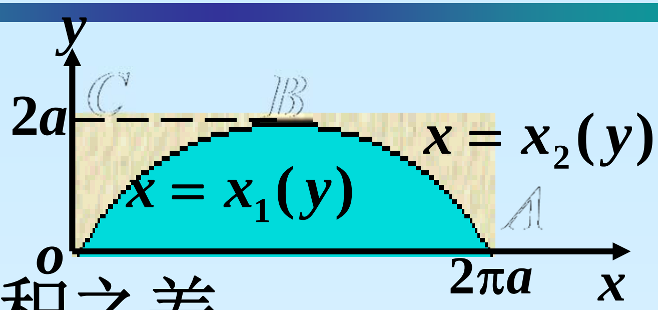
$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t)\,dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt = 5\pi^2 a^3.$$

绕y轴旋转的旋转体体积

可看作平面图$OABC$与OBC



分别绕y轴旋转构成旋转体的体积之差.

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dy$$

$$= \pi\int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt - \pi\int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t dt$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t dt \qquad = 6\pi^3 a^3.$$

或$$V_y = \int_0^{2\pi a} 2\pi x y(x) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi a(t-\sin t)\cdot a(1-\cos t)d[a(t-\sin t)]$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)\cdot(1-\cos t)^2 dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)d(t-\sin t)^2 = 6\pi^3 a^3.$$

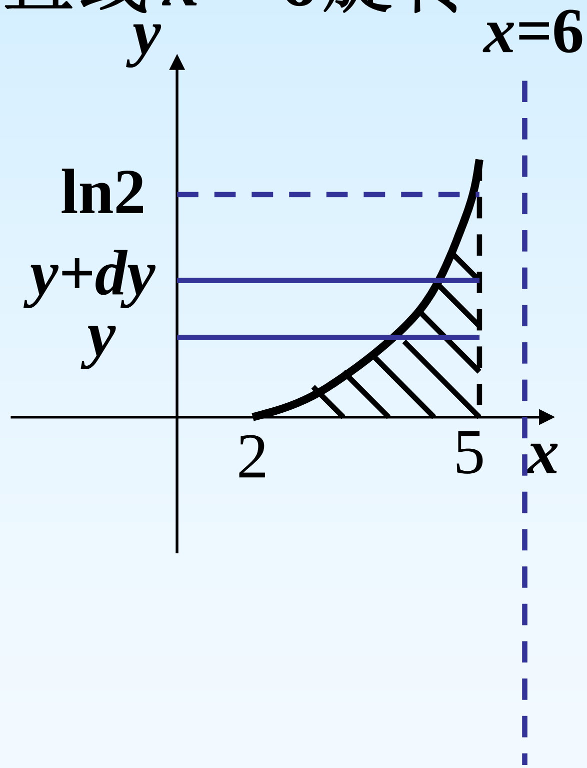
例 5 求由曲线 $y^2=2x$ 及 $x=0, y=1$ 所围成的图形绕直线 $y=1$ 旋转构成旋转体的体积.

解 取积分变量为 x, $x\in[0,\frac{1}{2}]$

$$dV=\pi(1-\sqrt{2x})^2dx$$

$$\therefore V=\pi\int_0^{1/2}(1-\sqrt{2x})^2dx=\frac{\pi}{12}.$$

例6 求曲线$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \ln t \end{cases}, 1 \le t \le 2$与直线$y = 0$，$x = 5$所围成的平面图形的面积以及该图形绕直线$x = 6$旋转一周所得旋转体的体积.



解 平面图形如图所示

面积$S = \int_2^5 y dx$

$$= \int_1^2 \ln t d(1 + t^2) = 2\ln 2 - 1$$

体积微元为$\pi[(6 - x)^2 - 1^2]dy$

$$\text{体积}V=\int_0^{\ln 2}\pi[(6-x)^2-1^2]dy$$

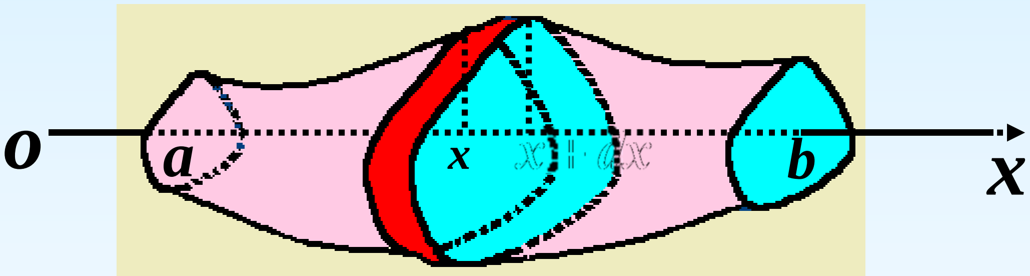
$$=\int_1^2\pi[(6-1-t^2)^2-1]d(\ln t)$$

$$=\int_1^2\pi(t^3-10t+\frac{24}{t})dt=\pi(24\ln 2-\frac{45}{4})$$

平行截面面积为已知的立体的体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.

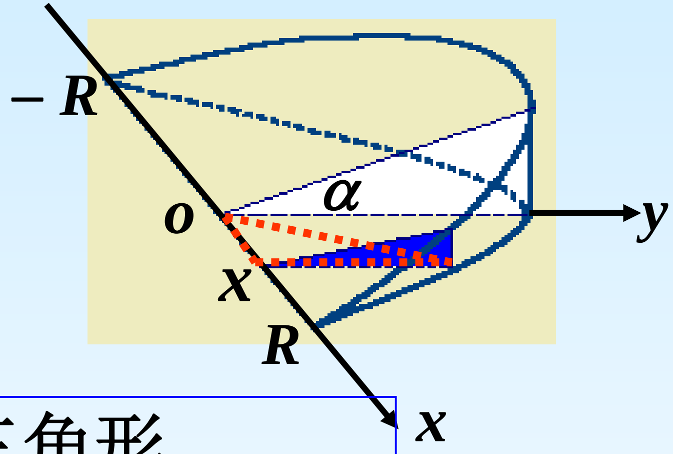
$A(x)$表示过点x且垂直于x轴的截面面积，



$A(x)$为x的已知连续函数

$$dV = A(x)dx, \qquad \text{立体体积 } V = \int_a^b \boxed{A(x)}dx.$$

例 7 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角 α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.



解 取坐标系如图

底圆方程为 $x^2 + y^2 = R^2$

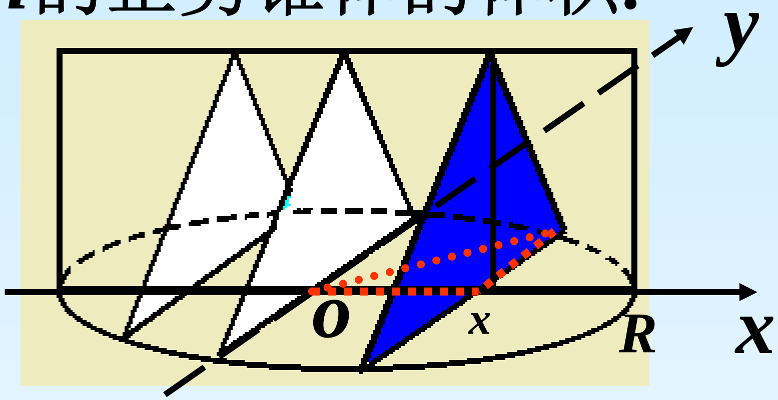
垂直于 x 轴的截面为直角三角形

截面面积 $A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha,$

立体体积 $V = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)\tan\alpha dx = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

例 8 求以半径为R的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为h的正劈锥体的体积.

解 取坐标系如图



底圆方程为

$$x^2+y^2=R^2,$$

垂直于x轴的截面为等腰三角形

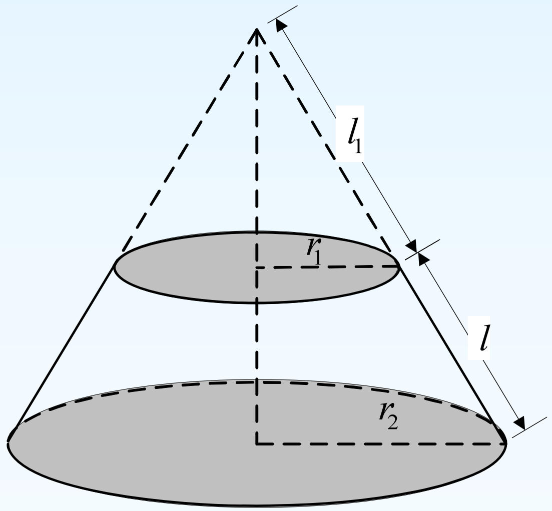
截面面积 $A(x)=h\cdot y=h\sqrt{R^2-x^2}$

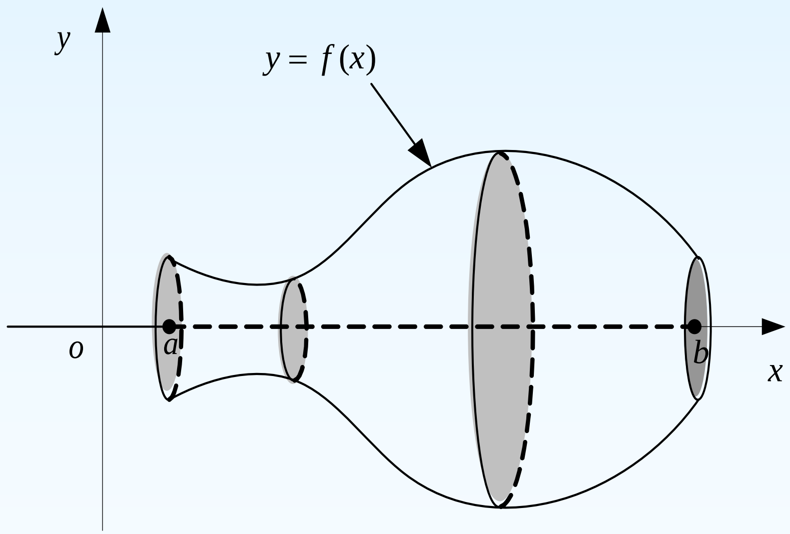
立体体积 $V=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\pi R^2h.$

旋转曲面的面积

由平面上的曲线绕着平面内一条直线旋转得到的曲面称为**旋转曲面**.

现在求$S:\begin{cases} y=f(x)\geq 0 \\ a\leq x\leq b \end{cases}$绕$x$轴旋转一周得到的曲面的面积,其中$f(x)$有连续的导数.

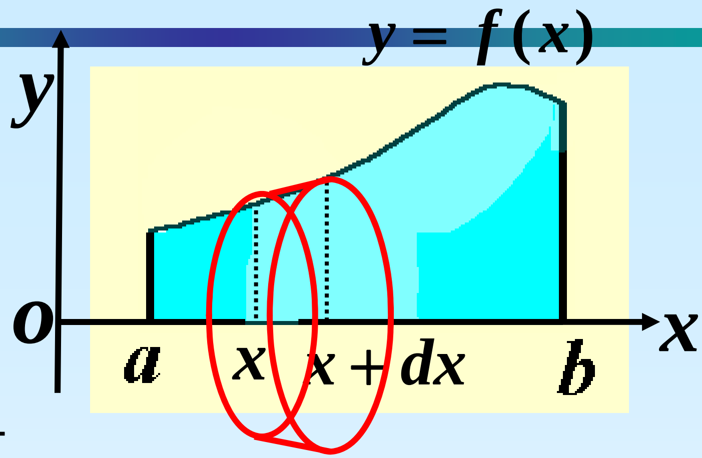




设平面光滑曲线 C的方程为：

$$y = f(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b$$

绕x轴旋转一周,得到旋转曲面.



$$\Delta S \approx 2\pi f(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\,\Delta x$$

$$\approx 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi f(x)\,\mathrm{d}l$$

$$S_{侧} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)\,\mathrm{d}l$$

参数方程

$$S_{侧}=2\pi\int_a^b|y(t)|\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$=2\pi\int_a^b|y(t)|\,\mathrm{d}l$$

极坐标

$$S_{侧}=2\pi\int_\alpha^\beta|r(\theta)\sin\theta|\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\int_a^b|r(\theta)\sin\theta|\,\mathrm{d}l$$

例9 计算曲线 $y = e^x (0 \le x \le \ln 2)$ 绕 x 轴旋转一周所成的曲面的面积 S.

解 S 分布在区间 $[0, \ln 2]$ 上,

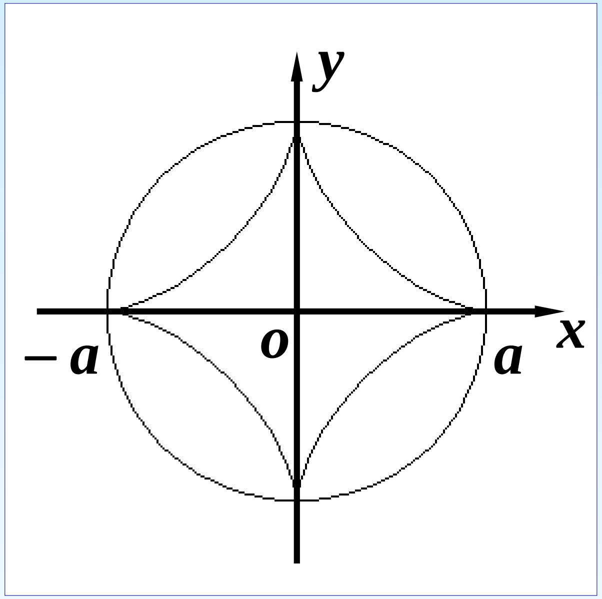
$$dS = 2\pi e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$S = \int_0^{\ln 2} 2\pi e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}\right].$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例10 已知星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a > 0)$, 求它绕 x 轴旋转而成的旋转体表面 积.



解 设旋转体的表面积为 S.

由对称性,有

$$S = 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1 + {y'_x}^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\cos t\sin t\,dt$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^2.$$

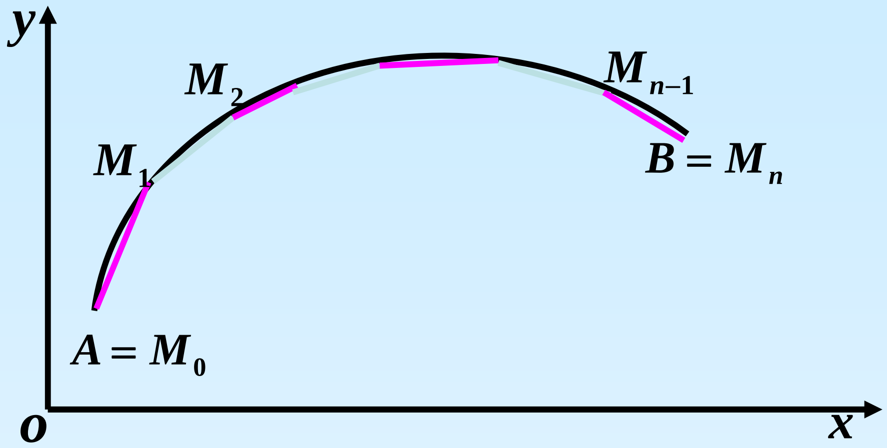
作业 习题8. 2 1, 3, 5, 7, 10(2)(4), 12

§3 平面曲线的弧长与曲率

定义5.1

设A、B是曲线弧上的两个端点，在弧上插入分点

$$A=M_0, M_1, \cdots M_i,$$
$$\cdots, M_{n-1}, M_n=B$$



并依次连接相邻分点得一内接折线，当分点的数目无限增加且每个小弧段都缩向一点时，

如折线长$\sum_{i=1}^{n}|M_{i-1}M_i|$的极限存在，且与分割方式无关，则称此极限为曲线弧$AB$的弧长.

此时,我们称曲线弧AB是可求长的!

参数方程情形

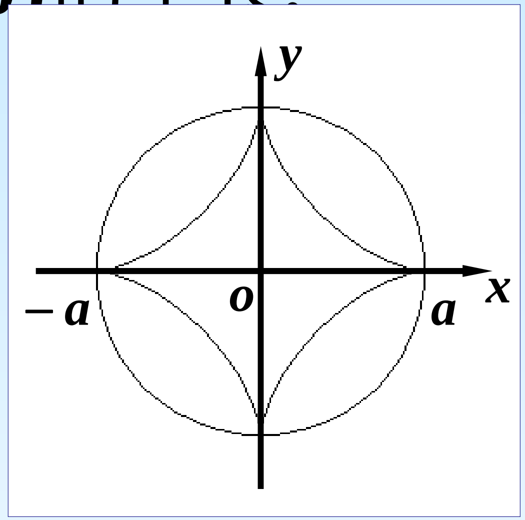
定义5.2 设曲线$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta, x'(t), y'(t)$在$[\alpha, \beta]$连续，并且$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \ne 0, t \in [\alpha, \beta]$，则称曲线为光滑曲线.

定理5.1 设$L\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$为光滑曲线,则L可求长且

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'^2(t) + y'^2(t)]}\,\mathrm{d}t,$$

弧微分: $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'^2(t) + y'^2(t)]}\,\mathrm{d}t.$

例 1　求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$的全长.



解　星形线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$

根据对称性　$s=4s_1$ 第一象限部分的弧长

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,dt=6a.$$

直角坐标情形

(1)$L: y = f(x) \quad (a \le x \le b)$，其中 $f(x)$ 在$[a,b]$上有一阶连续导数，

$$x = x, y = f(x), \quad x \in [a,b]$$

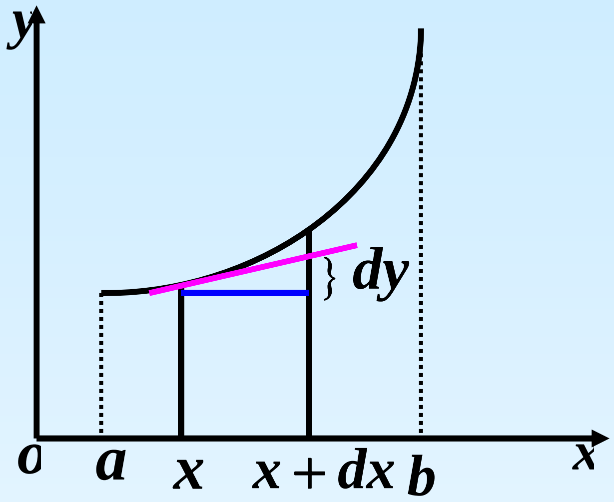
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

(2)$L: x = \varphi(y), c \le y \le d$

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\,dy.$$

取积分变量为x，在$[a,b]$上任取小区间$[x, x+dx]$，

以对应小切线段的长代替小弧段的长



小切线段的长 $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}dx$

弧长元素 $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$

弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx.$

例 2 计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧的长度.

解 $s=\int_a^b\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}].$

例 3 计算曲线 $y=\int_0^{\frac{x}{n}}n\sqrt{\sin\theta}d\theta$ 的弧长 $(0\le x\le n\pi)$.

解 $y'=n\sqrt{\sin\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\sqrt{\sin\frac{x}{n}},$

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin\frac{x}{n}}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin t}\cdot ndt=4n.$$

极坐标情形

设曲线弧为 $r = r(\theta)$ $\quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

其中$r(\theta)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数.

$$\because \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

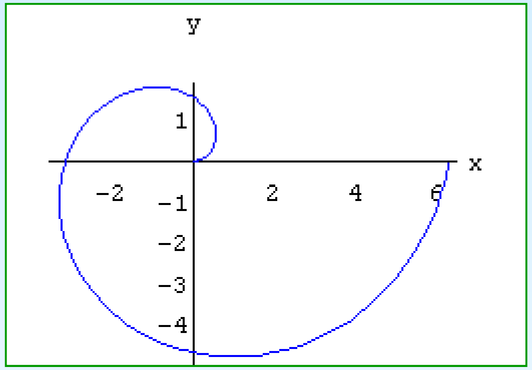
$$\begin{cases} x' = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, \\ y' = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta, \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 = r^2(\theta) + r'^2(\theta)$$

弧长 $\quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta.$

例 4 求阿基米德螺线 $r = a\theta \quad (a > 0)$ 上相应于 θ 从 0 到 2π 的弧长.

解 $\because \quad r' = a,$



$$\therefore \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

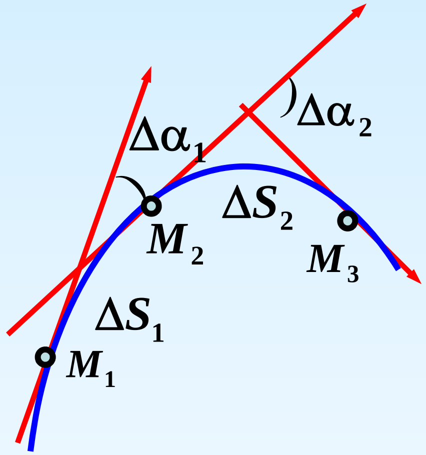
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

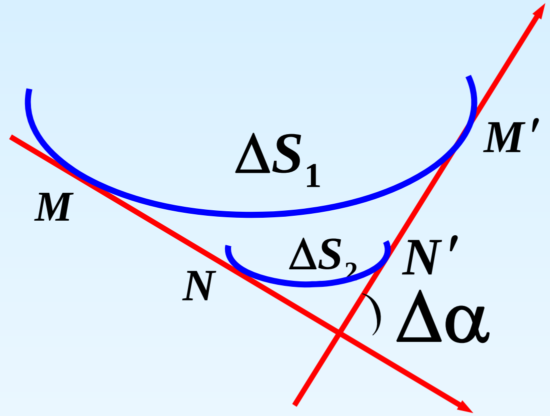
$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})\right].$$

作业 习题7.5（1）(3)(5)

平面曲线的曲率

曲率是描述曲线局部性质（弯曲程度）的量





弧的长度相同

转角越大
弧段弯曲程度越大

转角相同

弧的长度越短
弯曲程度越大

设曲线C是光滑的，M, M'为C上两点，

$$|\overset{\frown}{MM'}| = |\Delta s|, \qquad M \to M' \text{ 切线转角为} |\Delta \alpha|.$$

定义5.3 弧段$\overset{\frown}{MM'}$的平均曲率为 $\bar{K} = \left|\dfrac{\Delta \alpha}{\Delta s}\right|.$

曲线C在点M处的曲率 $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta \alpha}{\Delta s}\right|$

在 $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta s}$ 存在的条件下，$K = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|.$

注意：直线的曲率处处为零.

曲率的计算公式 $K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|.$

设 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ 二阶可导，$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

$$\because \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\tan\alpha, \therefore \alpha=\arctan\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha'(t)}{s'(t)}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore k=\frac{\left|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)\right|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

特别的，若曲线$L: y = f(x)$，曲率公式为

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

例1 求半径为R的圆周的曲率.

$$k=\frac{|\phi'(t)\psi''(t)-\phi''(t)\psi'(t)|}{[\phi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

解: 设圆周方程为

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

$$x' = -R\sin t,\ x'' = -R\cos t,$$

$$y' = R\cos t,\ y'' = -R\sin t,$$

代入得 $k=\dfrac{1}{R}.$

圆上各点处的曲率等于半径的倒数,且半径越小曲率越大.

例2 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大？

解 $y' = 2ax + b, \qquad y'' = 2a,$

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\therefore k = \frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

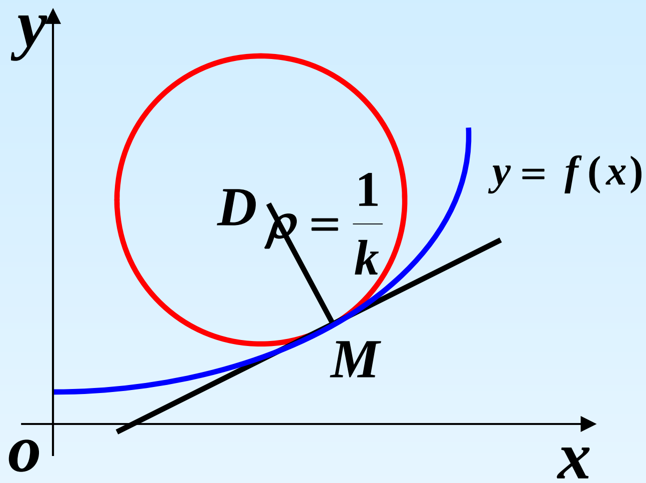
显然，当$x = -\dfrac{b}{2a}$时，k最大.

又 $\because \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$为抛物线的顶点，

$\therefore$ 抛物线在顶点处的曲率 最大.

曲率圆与曲率半径

定义8.5 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $k(k\neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点 D, 使 $|DM|=\dfrac{1}{k}=\rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆(如图),称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆.



D---曲率中心， ρ---曲率半径.

注意:

1.曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

即 $\rho = \frac{1}{k}, k = \frac{1}{\rho}.$

2.曲线上一点处的曲率半径越大,曲线在该点处的曲率越小(曲线越平坦);曲率半径越小,曲率越大(曲线越弯曲).

3.曲线上一点处的曲率圆弧可近似代替该点附近曲线弧(称为曲线在该点附近的二次近似).

作业 习题8.3 ***1(1)(3), 2, 3(1)(3)***