第18章 习题课

第一型曲面积分的计算

$$(1)\ \Sigma: z = z(x, y) \quad (x, y) \in D_{xy}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$$

$$(2)\ \Sigma: y = y(z, x) \quad (z, x) \in D_{zx}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{zx}} f(x, y(z, x), z)\sqrt{1 + y_z^2 + y_x^2}dzdx$$

$$(3)\ \Sigma: x = x(y, z) \quad (y, z) \in D_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}dydz$$

第一型曲面积分的奇偶对称性和轮换对称性类似于三重积分

$$(4)\ \Sigma:\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$,

$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$,

$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$.

第二型曲面积分的计算

"一投，二代，三定号"

(1) $\Sigma: z = z(x,y) \quad (x,y) \in D$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \pm \iint_{D} \left[(P(x,y,z(x,y)) \cdot (-z_x) + Q \cdot (-z_y) + R \cdot 1 \right] dxdy$$

上侧取正，下侧取负

特别地，$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint_{D} R(x,y,z(x,y))dxdy$

上侧取正，下侧取负

(2) $\Sigma: y = y(z,x) \quad (z,x) \in D$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \pm \iint_{D} \left[(P(x,y(z,x),z) \cdot (-y_x) + Q \cdot 1 + R \cdot (-y_z) \right] dzdx$$

右侧取正，左侧取负

第二型曲面积分的计算

“一投，二代，三定号”

特别地，$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D} Q(x,y(z,x),z)dzdx$

右侧取正，左侧取负

(3) $\Sigma : x = x(y,z) \quad (y,z) \in D$

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$
$$= \pm \iint\limits_{D} \left[(P(x(y,z),y,z) \cdot 1 + Q \cdot (-x_y) + R \cdot (-x_z) \right] dydz$$

前侧取正，后侧取负

特别地，$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D} P(x(y,z),y,z)dydz$

前侧取正，后侧取负

$$(4)\ \Sigma:\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v)\in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \pm\iint_{\Delta}[P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv$$

$(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})$与$\Sigma$指定侧的法向量方向一致时取$+$，否则取$-$.

两类曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为给定侧的曲面$\Sigma$的法方向余弦

Gauss公式　　曲面积分与三重积分

若：1. 空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面 Σ围成；

2. 在Ω上函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C^1$.

则有 $$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V}$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧.

若区域Ω为二维复连通区域, 外面的边界Σ取外侧, 内部的边界S取内侧. 相对于区域来说, 边界曲面整体取外侧.

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma(外侧)} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint\!\!\!\oint_{S(内侧)} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V}$$

注　若在Ω内又有 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$, 则 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma(外侧)} = \oint\!\!\!\oint_{S(外侧)}$

第二型曲面积分计算

根据被积函数补充曲面去奇点

$\frac{\partial P}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial Q}{\partial y}$ 或 $\frac{\partial R}{\partial z}$ 不连续(有奇点)

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

直接计算

两类联系

$\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ 连续(无奇点)

合 闭

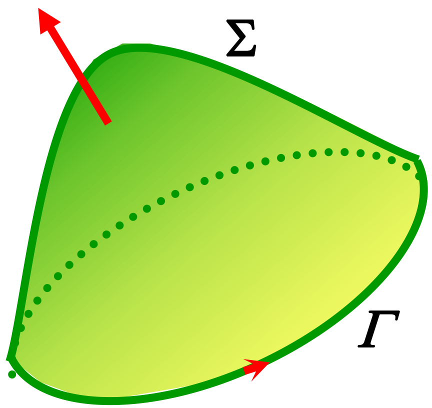
闭 非

高斯公式

补充曲面

Stokes公式

空间曲线积分与曲面积分



若：1. Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，

Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，

Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手法则.

2. 在曲面 Σ (包括Γ)上，$P,Q,R\in C^1$. 则有

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或记为

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

空间曲线积分与路径无关

条件	在单连通区域 Ω 上 $P(x,y,z),Q,R$ 具有连续的一阶偏导数, 则以下四个命题等价.
等价命题	(1) 在 Ω 内 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关 (2) $\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=0$, 任意封闭曲线 $\Gamma\subset\Omega$ (3) 在 Ω 内存在 $u(x,y,z)$, 使 $du=Pdx+Qdy+Rdz$; (4) 在 Ω 内, $\frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$.

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz$$

例1 求 $\iint_{\Sigma}(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\mathrm{dS}$, 其中 α,β,γ 为实数,

且 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=a^2\}$.

解 由积分曲面和被积函数的对称性有

$$\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{dS}=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{dS}=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{dS}$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{dS}=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}a^2\mathrm{dS}=\frac{4\pi a^4}{3},$$

$$\iint_{\Sigma}xy\mathrm{dS}=\iint_{\Sigma}xz\mathrm{dS}=\iint_{\Sigma}zy\mathrm{dS}=0,$$

所以, $\iint_{\Sigma}(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\mathrm{dS}=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot\dfrac{4\pi a^4}{3}$

例2 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的密度函数为 $\mu=x^2+y^2+z$，求此曲面壳在平面 $z=1$ 以上部分 Σ 的质量 M.

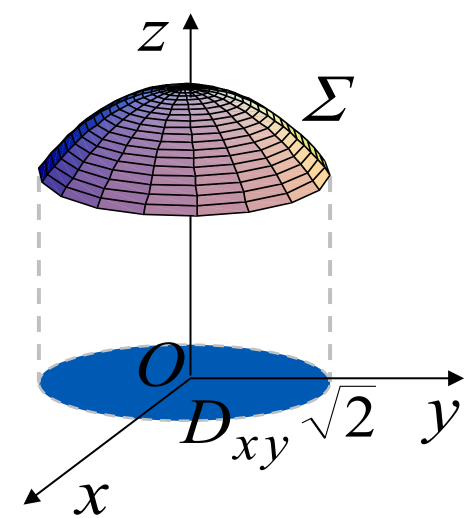
解 $\Sigma: z=3-(x^2+y^2)$ 投影区域: $D_{xy}: x^2+y^2\le 2$,

$$M=\iint_{\Sigma}\mu\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r$$

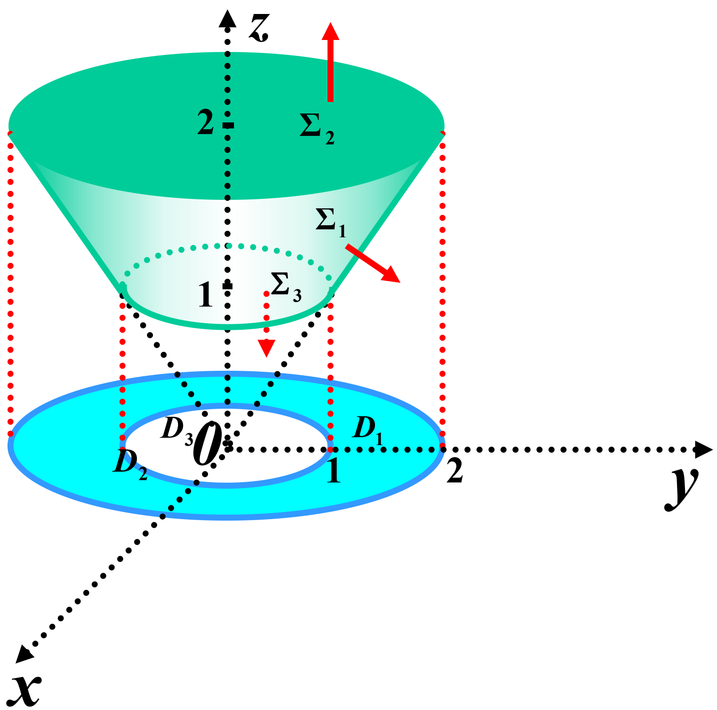
$$=6\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(1+4r^2)$$

$$=13\pi$$



例3 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, Σ是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1, z=2$所围成的立体的表面外 侧.

解 $$I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3}$$



$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_1}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{e^r}{r}\cdot r\mathrm{d}r=-2\pi(e^2-e)$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=e^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r=4\pi e^2$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_3}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-e\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r=-2\pi e$$

$$I=-2\pi(e^2-e)+4\pi e^2-2\pi e=2\pi e^2$$

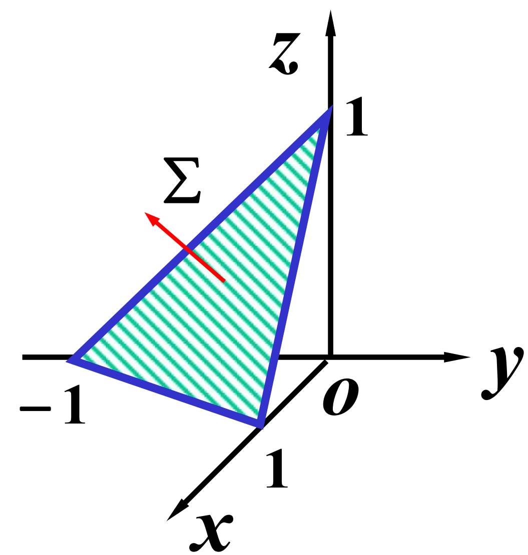
例4 计算 $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx$

$+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧 .

解 利用两类曲面积分之间的关系

$\because \Sigma$ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$,

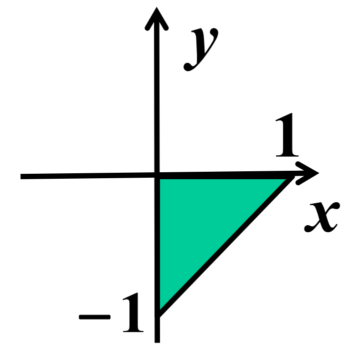
$$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



$$I=\iint\limits_{\Sigma}\{\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+x]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}[2f(x,y,z)+y]+\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+z]\}dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS$$



$\Sigma: z=1-x+y$,投影区域 D_{xy} 如右图所示

$$dS=\sqrt{3}dxdy \quad \text{所以} I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}dxdy=\frac{1}{2}.$$

也可直接计算(向量点积法)

$$\Sigma: z=1-x+y,(-z_x,-z_y,1)=(1,-1,1)$$

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{[f(x,y,1-x+y)+x]\cdot 1+[2f(x,y,1-x+y)+y]\cdot(-1)$$

$$+[f(x,y,1-x+y)+1-x+y]\cdot 1\}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}1\,dxdy=\frac{1}{2}$$

例5 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

其中Σ是由$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$绕y轴旋转一周所成

的曲面，法向量与y轴正方向夹角大于$\dfrac{\pi}{2}$.

解 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转面方程为

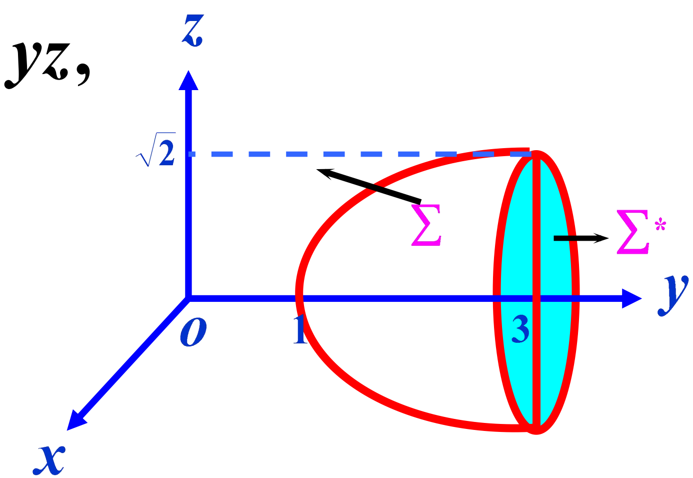
$$y-1=z^2+x^2$$

(如下图)

补充曲面Σ^*：$y=3$，$D_{zx}: z^2+x^2\le 2$，取右侧

记Σ和Σ^*所围区域为Ω，

记$P=x(8y+1), Q=2(1-y^2), R=-4yz$，



则$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$，由Gauss公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iint\limits_{z^2+x^2\le 2}dxdz\int_{1+z^2+x^2}^{3}dy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{1+r^2}^{3}dy=2\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma^*}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=\iint\limits_{z^2+x^2\le 2}(-16)dzdx=-32\pi$$

所以$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}-\iint\limits_{\Sigma^*}=34\pi$

例6 求$\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

Σ为曲面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧面.

解1 由积分区域与被积函数的对称性

$$原式=3\oint\!\!\oint_{\Sigma}\frac{z}{r^3}dxdy=6\iint_{x^2+y^2\le a^2}\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a^3}dxdy$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^3}rdr=4\pi$$

解2 $原式=\frac{1}{a^3}\oint\!\!\oint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le a^2}3dxdydz=4\pi$$

例7 计算 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dS$， 其中

Σ是曲面 $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{16} + \dfrac{(z-3)^2}{25} = 1$的外侧，

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是其外法线向量的方向 余弦.

解 设$P = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, Q = \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, R = \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

则$\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0, (x, y, z) \neq (0,0,0)$

对充分小的 $\varepsilon > 0$， 取$\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$(外侧)，

使Σ_1位于Σ的内区域中，记 Ω为Σ与Σ_1所围有界闭区域，则

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dS=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\iint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\iint_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\iiint_{\Omega}0dV+\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2}3dV=4\pi$$

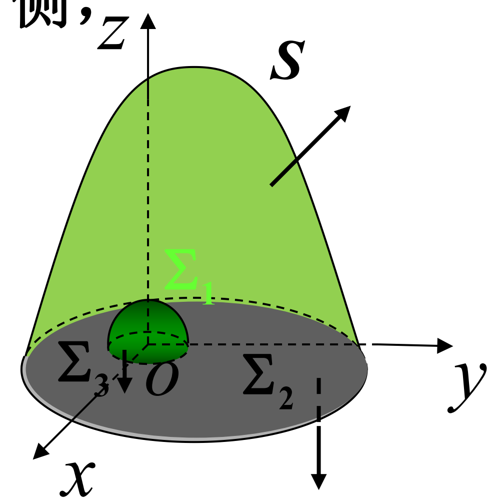
例8 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中$S$是

$$1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}(z\ge 0)$$,取上侧.

解 取Σ_1: $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$, 下侧,

Σ_2: $z=0, \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\le 1,\quad x^2+y^2\ge 1$, 下侧,

Σ_3: $z=0, x^2+y^2\le 1$, 下侧



$$I=\iint\limits_{S+\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

S与Σ_1,Σ_2所围区域记为Ω，边界曲面整体取外侧，则由Gauss公式

$$\iint\limits_{S+\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iiint\limits_{\Omega} 0dxdydz = 0$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$= -\iint\limits_{-\Sigma_1+\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy + \iint\limits_{\Sigma_3} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

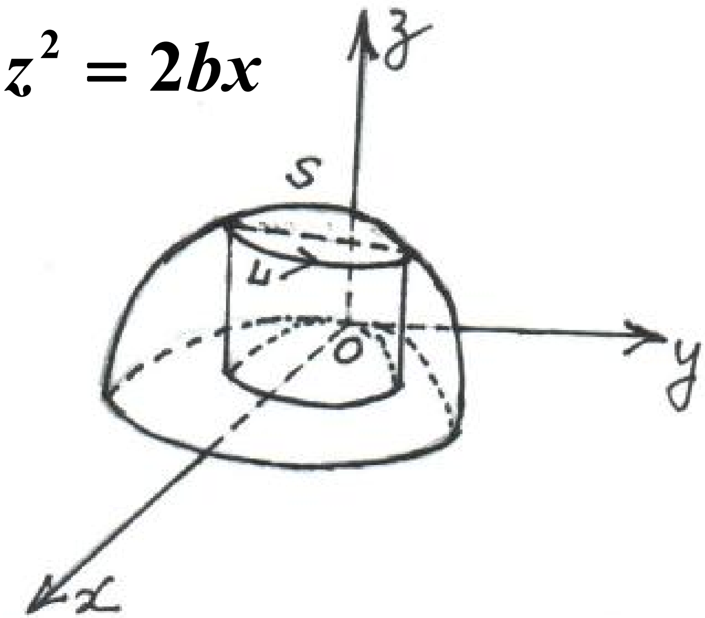
$$= -3\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz + 0 = -2\pi$$

其中Ω_1是Σ_2,Σ_3所围区域，边界曲面整体取外侧.

又$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$，所以$I = 2\pi$

例9 求$I=\oint_\Gamma (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(y^2+x^2)dz$, 其中$\Gamma$是球面$x^2+y^2+z^2=2bx$与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$的交线($z\geq 0$)，Γ的方向规定为沿Γ的方向运动时，从z轴正向往下看，曲线Γ所围球面部分总在左边.

解 取Σ为曲线Γ所围球面$x^2+y^2+z^2=2bx$ ($z\geq 0$)部分的上侧.



$$I=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & y^2+x^2 \end{vmatrix}$$

$$=2\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$\Sigma: z=\sqrt{2bx-x^2-y^2},(x,y)\in D: x^2+y^2\le 2ax,\text{上侧}$$

$$(-z_x,-z_y,1)=(\frac{x-b}{\sqrt{2bx-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{2bx-x^2-y^2}},1)$$

$$I=2\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=2\iint_D [(y-\sqrt{2bx-x^2-y^2})\frac{x-b}{\sqrt{2bx-x^2-y^2}}+$$

$$(\sqrt{2bx-x^2-y^2}-x)\frac{y}{\sqrt{2bx-x^2-y^2}}+(x-y)]dxdy$$

$$=2\iint_D (\frac{-by}{\sqrt{2bx-x^2-y^2}}+b)dxdy=2b\iint_D dxdy=2\pi a^2 b$$

也可以用第一型曲面积分来计算

S的单位法向量$\vec{n}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{\frac{x-b}{b},\frac{y}{b},\frac{z}{b}\}$

由两类曲面积分之间的关系

$$I=2\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=2\iint_S ((y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma)dS$$

$$=2\iint_S [\frac{x-b}{b}(y-z)+\frac{y}{b}(z-x)+\frac{z}{b}(x-y)]dS$$

$$=2\iint_S (z-y)dS=2\iint_S zdS=2\iint_S z\cdot\frac{dxdy}{\cos\gamma}=2\iint_S bdxdy$$

$$=2b\iint_{x^2+y^2\le 2ax} dxdy=2\pi a^2 b$$

例10 求$I=\oint_L (y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$,其中 L是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线,从z轴正向看去 ,L为逆时针方向 .

解 设Σ是平面$x+y+z=2$上以L为边界所围部分的上侧, D为Σ在 xoy面上的投影区域.由$Stokes$公式

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix} dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (4x+2y+3z)dxdy$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_D (x-y+6)\sqrt{3}dxdy=-12\iint_D dxdy=-24$$

例11 设 V 是 $Gauss$ 公式中的闭区域，$u, v \in C^1(V)$，

$\vec{n}$ 表示 V 的边界曲面 S 的单位外法向量场，求证：

(1) $\displaystyle \oiint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_V \Delta u dV$；

(2) $\displaystyle \oiint_S v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_V \nabla u \cdot \nabla v dV + \iiint_V v\Delta u dV$；

(3) $\displaystyle \oiint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} dS = \iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dV$.

证 (1) $\displaystyle \oiint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \oiint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{n}, z)\right) dS$

$$= \oiint_S \frac{\partial u}{\partial x} dydz + \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + \frac{\partial u}{\partial z} dxdy$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dV = \iiint\limits_V \Delta u dV .$$

$$(2) \oiint\limits_S v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \oiint\limits_S \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + v \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\vec{n}, y) + v \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\vec{n}, z)\right) dS$$

$$= \oiint\limits_S v \frac{\partial u}{\partial x} dxdy + v \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + v \frac{\partial u}{\partial z} dxdy$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) dV$$

$$= \iiint\limits_V \nabla u \cdot \nabla v dV + \iiint\limits_V v \Delta u dV .$$

(3) 由(2)知：

$$\oiint_S v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v dV+\iiint_V v\Delta u dV,$$

$$\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v dV+\iiint_V u\Delta v dV,$$

两式相减,即得

$$\oiint_S \begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}}\\ u & v\end{vmatrix}dS=\iiint_V \begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dV.$$

例12 设Σ是分片光滑的闭曲面,$\vec{n}$为Σ的单位外法向量,证明

$$I=\oiint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos(\vec{n},x) & \cos(\vec{n},y) & \cos(\vec{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=0$$

在下面两种情况下都成立

(1)P,Q,R在$\overline{\Omega}$上二阶连续可微,Ω是Σ所围的立体;

(2)P,Q,R在Σ上一节连续可微.

证明 (1)由Gauss公式

$$I=\oiint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdydz$$

$$=0$$

(2)在Σ上任取一条分段光滑的封闭曲线Γ,Γ将Σ分成Σ_1,Σ_2,在Σ_1,Σ_2上分别应用Stokes公式,可得

$$I=\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}\right)\begin{vmatrix}\cos(\vec{n},x) & \cos(\vec{n},y) & \cos(\vec{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

$$=\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz+\int_{-\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=0$$