§15.6 多元函数的极值

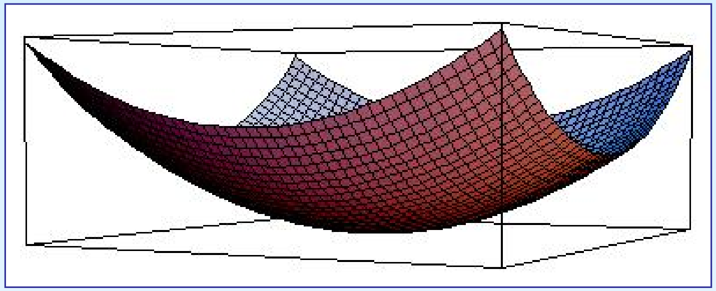
多元函数的极值

定义6.1 设开集$D\subset R^n, f:D\to R$为多元函数,$\vec{a}\in D$. 若存在$\delta>0$,使得$B_\delta(\vec{a})\subset D$,且$\forall\vec{x}\in B_\delta(\vec{a})\setminus\{\vec{a}\}$,都有$f(\vec{a})\ge f(\vec{x})$(或$f(\vec{a})\le f(\vec{x})$),则称$\vec{a}$为$f$的极大(小)值点,$f(\vec{a})$称为函数的极大(小)值.

若将"$\ge$"("$\le$")换成"$>$"("$<$"),则称$\vec{a}$为f的严格极大(小)值点.

例1 函数 $z = 3x^2 + 4y^2$

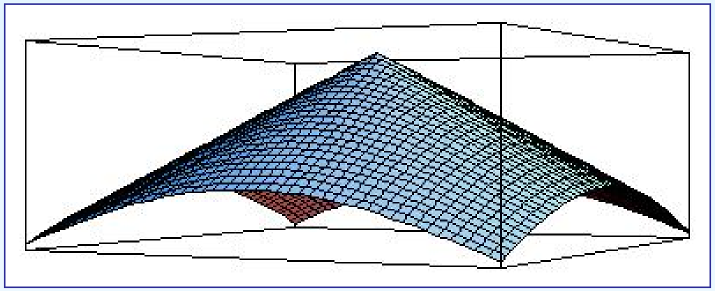
在 (0,0) 处有极小值.



(1)

例２ 函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

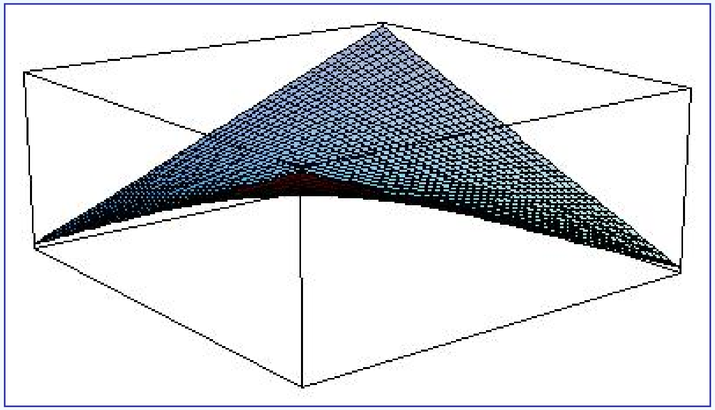
在 (0,0) 处有极大值.



(2)

例３ 函数 $z = xy$

在 (0,0) 处无极值.



(3)

定理 6.1（必要条件）

若$\vec{a}$为f的极值点，且f在$\vec{a}$处存在一阶偏导数，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}=\cdots=\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}=0.$$

证　设$\varphi(t)=f(t,a_2,\cdots,a_n)$，则$a_1$为$\varphi(t)$的极值点

又$\because \varphi'(t)$存在

$\therefore$由一元函数的$Fermat$引理得到$\varphi'(a_1)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})=0$

类似可证$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}=\cdots=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}=0.$

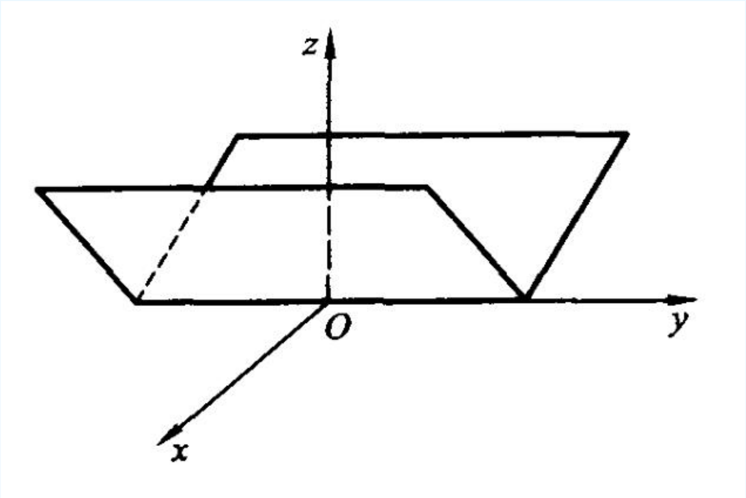
满足 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = \cdots = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = 0$ 的点 $\vec{a}$ 称为 f 的驻点

$$\text{驻点} \underset{\not\longrightarrow}{\xleftarrow{\text{可导}}} \text{极值点}$$

例如，点(0,0)是函数 $z = xy$ 的驻点，但不是极值点.

偏导数不存在的点也可能是极值点.

如柱面方程 $f(x,y) = |x|$，y 轴上的每点都是极小值点，但关于 x 的偏导数都不存在.



问题：如何判定一个驻点是否为极值点？

预备知识

设A是一个$n\times n$对称矩阵,即$a_{ij}=a_{ji},i,j=1,2,...,n.$

如果对$\forall x\in R^n$,都有

$x'Ax>0$,则称A为(严格)正定矩阵;

$x'Ax\geq 0$,则称A为半正定矩阵;

$x'Ax<0$,则称A为(严格)负定矩阵;

$x'Ax\leq 0$,则称A为半负定矩阵;

如果不是上述情况,则称A为不定矩阵.

判定方法　设A是一个$n\times n$对称矩阵，

A正定 $\Leftrightarrow$ 所有顺序主子式大于0

$\Leftrightarrow$ 所有特征值大于0

A半正定 $\Leftrightarrow$ 所有顺序主子式大于等于0

$\Leftrightarrow$ 所有特征值大于等于0

A负定 $\Leftrightarrow -A$正定，

A半负定 $\Leftrightarrow -A$半正定.

例如 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

A正定 $\Leftrightarrow a_{11}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0.$

A半正定 $\Leftrightarrow a_{11}\geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\geq 0.$

A负定 $\Leftrightarrow a_{11}<0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0.$

A不定 $\Leftrightarrow a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0.$

设 $z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的所有二阶偏导数存在，f 在点P_0的 $Hesse$矩阵定义为 ：

$$Hess(f)(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{P_0}$$

类似可定义 $u=f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的 $Hesse$矩阵:

$$Hess(f)(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}_{P_0}$$

类似可以推广到n元函数的Hesse矩阵

定理 6.2（充分条件）

设开集$D \subset R^n$, $f: D \to R$具有二阶连续偏导数,

若$\vec{a}$为f的驻点, 则

(1)若$Hesse(f)(\vec{a})$为正(负)定方阵, 则$\vec{a}$为f的严格极小(大)值点;

(2)若$Hesse(f)(\vec{a})$为不定方阵, 则$\vec{a}$不是f的极值点.

定理 6.3

设函数$z=f(x,y)$在驻点(x_0,y_0)的某邻域内连续，有一阶及二阶连续偏导数，

令$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，

则在(x_0,y_0)点

(1) $AC-B^2>0$时取得极值，当$A<0$时取极大值，当$A>0$时取极小值；

(2) $AC-B^2<0$时不取极值；

(3) $AC-B^2=0$时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.

证 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处带有$Peano$余项的二阶$Taylor$公式为

$$\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$$

$$=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(\rho^2),$$

$$=\frac{k^2}{2}(A(\frac{h}{k})^2+2B\frac{h}{k}+C)+o(\rho^2),\rho\to 0.$$

这里$h=x-x_0,k=y-y_0,A=f_{xx}(x_0,y_0),$

$B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0),\rho=\sqrt{h^2+k^2},$

并且假设$k\neq 0.$

令$t=\dfrac{h}{k}, D=At^2+2Bt+C$,

当$|h|,|k|$充分小时，Δf的符号由D决定.

由一元二次方程根与判别式关系，可知

(1)　若$AC-B^2>0$，则对任意t, D与A(或C)同号，即函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)取得极值.

$A<0$(或$C<0$)时，$D<0$,即$\Delta f<0, f(x_0,y_0)$为极大值;

$A>0$(或$C>0$)时，$D>0$,即$\Delta f>0, f(x_0,y_0)$为极小值.

(2)　若$AC-B^2<0$，则方程$D=0$有两实根$t_1<t_2$，D在(t_1,t_2)内与$[t_1,t_2]$外异号.(x_0,y_0)的任意小邻域内都有点使得$\Delta f>0$和$\Delta f<0$，故函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)无极值.

(3)　当$AC-B^2=0$时，需另作进一步的讨 论.

例 4 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x-6$ 的极值.

解 分别对 x,y 求偏导，并由必要条件有

$$\begin{cases}3x^2+6x-9=0,\\ -3y^2+6y=0,\end{cases}$$

解方程得驻点 $P_1(1,0),P_2(1,2),P_3(-3,0),P_4(-3,2)$.

$A=f_{xx}=6x+6,\quad B=f_{xy}=0,\quad C=f_{yy}=-6y+6,$

$AC-B^2=36(x+1)(1-y),$

$P_1(1,0),AC-B^2>0,A>0$ 函数在 P_1 有极小值.

$P_4(-3,2),AC-B^2>0,A<0$ 函数在 P_4 有极大值.

$P_2(1,2)$ 和 $P_3(-3,0),AC-B^2<0,$ 函数在 P_2,P_3 无极值.

函数极小值、极大值分别为 $f(1,0)=-11,f(-3,2)=25.$

例 5 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

解 分别对 x,y 求偏导，并由必要条件有

$$\begin{cases}4x^3-2x-2y=0,\\4y^3-2x-2y=0,\end{cases}$$ 解得驻点 $P_1(1,1),P_2(-1,-1),P_3(0,0)$

$A=f_{xx}=12x^2-2,\quad B=f_{xy}=-2,\quad C=f_{yy}=12y^2-2,$

$P_1(1,1), AC-B^2>0, A>0$ 函数在 P_1 有极小值-2.

$P_2(-1,-1), AC-B^2>0, A>0$ 函数在 P_2 有极小值-2.

$P_3(0,0), AC-B^2=0$ 判别法失效.

在(0,0)附近，$f(x,x)=2x^2(x^2-2)<0,$ 函数在 P_3 无极值.

$f(x,-x)=2x^4>0, f(0,0)=0,$

求函数$z = f(x, y)$极值的一般步骤：

第一步　解方程组 $f_x(x, y) = 0,\quad f_y(x, y) = 0$

求出实数解，得驻点.

第二步　对于每一个驻点(x_0, y_0)，

求出二阶偏导数的值 A、B、C.

第三步　定出$AC - B^2$的符号，再判定是否是极值.

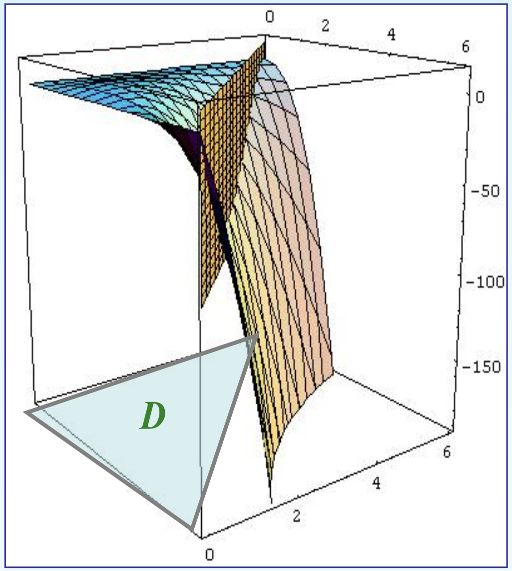
多元函数的最值

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

求最值的一般方法

将函数在D内的所有驻点处的函数值及在D的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

例 6 求二元函数 $z = f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

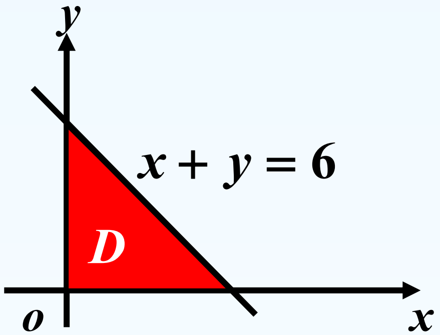


解 先求函数在 D 内的驻点,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy(4-x-y) - x^2 y = 0 \\ f_y(x,y) = x^2(4-x-y) - x^2 y = 0 \end{cases}$$

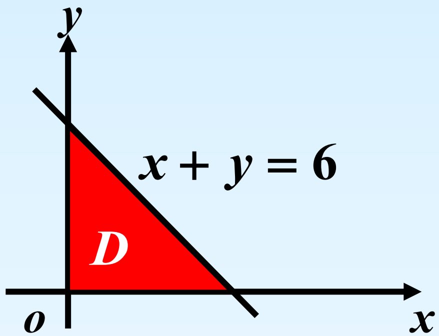
得区域 D 内唯一驻点 $(2,1)$, 且 $f(2,1) = 4$,

再求 $f(x,y)$ 在 D 边界上的最值,



在边界 $x = 0$ 和 $y = 0$ 上 $f(x,y) = 0$,

在边界$x+y=6$上，即$y=6-x$



于是$f(x,y)=x^2(6-x)(-2)$,

$$f_x=4x(x-6)+2x^2=0$$

得$x_1=0, x_2=4.$

$f(0,6)=0, f(4,2)=-64,$

比较后可知$f(2,1)=4$为最大值,

$f(4,2)=-64$为最小值.

例 7 某工厂要用钢板制造容积为 V 的无盖长方体容器，问怎样选择尺寸可使用料最省.

解 设长、宽、高为 x, y, z, 则表面积为

$$A = xy + 2xz + 2yz, \quad xyz = V,$$

$$A = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), x > 0, y > 0,$$

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0, \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0, \end{cases}$$

得区域内唯一驻点 $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$,

用料最省时长、宽、高分别为

$$\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

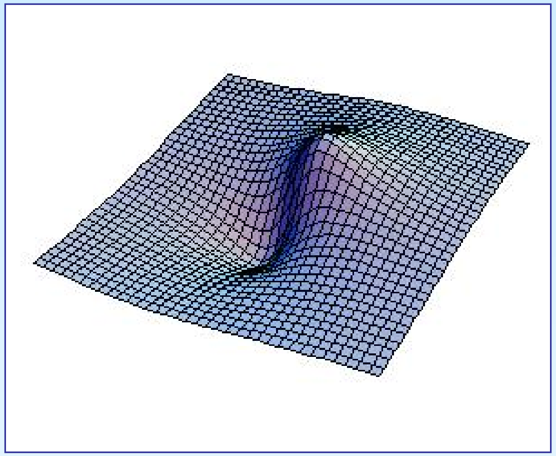
例 8 求$z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$的最大值和最小值.

解 由 $z_x=\dfrac{(x^2+y^2+1)-2x(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$

$$z_y=\frac{(x^2+y^2+1)-2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$$

得驻点$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$和$(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$,

因为$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=0$



即边界上的值为零.

$z(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad z(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以最大值为$\frac{1}{\sqrt{2}}$，最小值为$-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

思考题

若 $f(x_0, y)$ 及 $f(x, y_0)$ 在 (x_0, y_0) 点均取得极值，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否也取得极值？

不是. 例如 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$,

当 $x = 0$ 时，$f(0, y) = y^2$ 在 $(0,0)$ 取极小值;

当 $y = 0$ 时，$f(x,0) = x^2$ 在 $(0,0)$ 取极小值;

$(0,0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点;

但 $f(x, y)$ 在 $(0,0)$ 不取极值.