北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

一般函数无穷积分的收敛性判别法

一、Cauchy收敛原理

二、绝对收敛和条件收敛

三、Dirichlet和Abel判别法

四、瑕积分相关结论

一、Cauchy收敛原理

定理3.1（Cauchy收敛原理）

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$, 只要 $A', A'' > A_0$, 总有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

证明 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $\Leftrightarrow \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ 存在,

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$, 只要 $A', A'' > A_0$, 总有

$$\left|F(A'') - F(A')\right| < \varepsilon,$$

$$\Leftrightarrow \quad \cdots\cdots \quad \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

一、Cauchy收敛原理

例1 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续可微，$x\to+\infty$时，$f(x)$递减趋于0，证明$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件是$\int_1^{+\infty}xf'(x)dx$收敛.

证明 $\Rightarrow$: 若$\int_1^{\infty}f(x)dx$收敛，则$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>0, A>2A_0, \int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)dx<\varepsilon$

$$\frac{A}{2}f(A)=\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(A)dx\le\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)dx<\varepsilon\ \Rightarrow\lim_{A\to+\infty}\frac{A}{2}f(A)=0$$

$$\exists A'>A_0,\forall A_1,A_2>A',\left|A_2f(A_2)\right|<\varepsilon,\left|A_1f(A_1)\right|<\varepsilon,\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$\int_{A_1}^{A_2}xf'(x)dx=A_2f(A_2)-A_1f(A_1)-\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx$$

$$\Rightarrow\left|\int_{A_1}^{A_2}xf'(x)dx\right|\le\left|A_2f(A_2)\right|+\left|A_1f(A_1)\right|+\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<3\varepsilon$$

一、Cauchy收敛原理

$\Leftarrow$: $$\int_1^{+\infty} f(x)dx = xf(x)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} xf'(x)dx$$

问题归结为证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$ 存在.

$\because \int_1^{+\infty} xf'(x)dx$收敛

$$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists A''>0, A_1>A_2>A'', \left|\int_{A_2}^{A_1} xf'(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$\left|A_2 f(A_2)-A_2 f(A_1)\right| = \left|A_2\int_{A_2}^{A_1} f'(x)dx\right| \le \left|\int_{A_2}^{A_1} xf'(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$A_1\to+\infty \Rightarrow \left|A_2 f(A_2)\right| \le \varepsilon$$

由ε的任意性可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$

二、绝对收敛和条件收敛

如$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是绝对收敛.

如$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，但$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是条件收敛.

定理3.2（绝对收敛一定收敛） $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛

证明 $\because \int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，

对$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>a$，只要$A',A''>A_0$，总有 $\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon$，

$\therefore \left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|\le\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon.$

$\therefore$ 由Cauchy 收敛原理知 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

二、绝对收敛和条件收敛

定理3.3 $g(x)$在$[a,+\infty)$上有界,即存在$M>0$,使得$|g(x)|\le M, x\in[a,+\infty)$,

若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$绝对收敛,且有

$$\int_a^{+\infty}\left|f(x)g(x)\right|dx \le M\int_a^{+\infty}\left|f(x)\right|dx.$$

例2 判别广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx$ (a,b 都是常数$a>0$)

的收敛性.

解 $\because \sin bx$有界,而$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛. $\therefore \int_0^{+\infty}\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx$ 收敛.

从而原广义积分收敛.

二、绝对收敛和条件收敛

例3 证明无穷积分 $\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx$ 收敛.

证明 令$t = x^2$,

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_1^{+\infty} - \frac{1}{4}\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt}$$

$\cos t$在$[1,+\infty)$上有界,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$绝对收敛

绝对收敛

所以所给广义积分收敛.

三、Dirichlet和Abel判别法

第二积分中值定理

① 若$f(x)\in R[a,b]$,且$g(x)$是$[a,b]$上非负递减函数，

则$\exists\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx;$$

② 若$f(x)\in R[a,b]$,且$g(x)$是$[a,b]$上非负递增函数，

则$\exists\eta\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\eta^b f(x)dx.$$

第三积分中值定理

设$f(x)\in R[a,b]$,且$g(x)$是$[a,b]$上的单调函数,则$\exists\xi\in[a,b]$,

使得 $$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

三、Dirichlet和Abel判别法

考虑$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛性. $f(x)$和$g(x)$应满足什么条件?

分析:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx$$

$$\xi \in [A', A'']$$

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx ? \quad g(x)?$$

三、Dirichlet和Abel判别法

判断$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$的敛散性

定理3.4(Dirichlet判别法)

设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ 在$(a,+\infty)$上有界;

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调,且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

证明　由第三积分中值定理有:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx=g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx+g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx,$$

其中$\xi\in[A',A'']$.

三、Dirichlet和Abel判别法

所以有$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right|$

由1°，$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| = |F(\xi) - F(A')| \le 2M$,

$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| = |F(A'') - F(\xi)| \le 2M,$$

由2°, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a, \forall A', A'' > A_0$， 总有

$$|g(A')| < \varepsilon, |g(A'')| < \varepsilon.$$

因此当$A', A'' > A_0$时, $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le 4M\varepsilon$,

由$Cauchy$收敛原理知，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

三、Dirichlet和Abel判别法

例4 证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是条件收敛.

证明 (1) 由于$\left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos A - \cos 1| \le 2$, 满足$1^\circ$

又$g(x)=\frac{1}{x}$,递减趋向于0,满足2°, 所以$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛.

(2) 由于$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$,

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$收敛, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$发散, 所以$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$发散.

综上$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是条件收敛.

三、Dirichlet和Abel判别法

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$，$p > 1$时绝对收敛，$0 < p \leq 1$时条件收敛，$p \leq 0$时发散.

$p > 1$时，$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$，由$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$收敛知原广义积分绝对收敛 ；

$0 < p \leq 1$,条件收敛同上面例题；

$p \leq 0$时，取$x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, x_n'' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$,

$$\left|\int_{x_n'}^{x_n''} \frac{\sin x}{x^p} dx\right| \geq \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{-p} \int_{x_n'}^{x_n''} \sin x dx$$

$$\geq \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{-p} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^{-p}$$

由$Cauchy$收敛原理知广义积分发 散.

三、Dirichlet和Abel判别法

定理3.5(Abel判别法) 设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

证明 由1°, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0$, 当$A', A'' > A_0$时, 总有 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$,

由2°, $|g(x)| \le M$,

$$\therefore \left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right|,$$

$$\le M\cdot\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon,\ \text{其中}\ \xi \in [A', A''],$$

由$Cauchy$ 收敛原理知，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

三、Dirichlet和Abel判别法

例5 讨论积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx\ (p>0)$的敛散性，并说明是绝对还是条件收敛.

解 (1) 当$p>1$时，$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|\le\frac{\pi}{2x^p}$，

由比较判别法知，原积分绝对收敛；

(2) 当$0<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}$收敛，$\arctan x$在$[1,+\infty]$单调有界，

由$Abel$判别法知，原积分收敛；

但当x充分大时，$\frac{\arctan x}{x^p}|\sin x|\ge\frac{\pi}{4x^p}\sin^2 x=\frac{\pi}{8x^p}-\frac{\pi}{8x^p}\cos 2x$

$\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{8x^p}dx$发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{8x^p}\cos 2xdx$收敛，$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}|\sin x|dx$发散，

所以此时条件收敛 .

三、Dirichlet和Abel判别法

$\frac{1}{x}\in(0,1),\sin\frac{1}{x},\cos\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上非负有界且单调

例6 讨论下列积分的收敛性, 若收敛, 请说明绝对收敛还是条件收敛

$$(1)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\sin\frac{1}{x}}{x}dx \qquad (2)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x}dx$$

$$(3)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+\frac{1}{x})}{x}dx \qquad (4)\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x dx\ (p>0)$$

解 (1)因为$\left|\frac{\sin x\sin\frac{1}{x}}{x}\right|\le\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}$, $x\to\infty$时$\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\sim\frac{1}{x^2}$

由$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛,知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}dx$收敛,所以原积分绝对收敛.

三、Dirichlet和Abel判别法

$$(2)\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x}dx$$

解 由Dirichlet判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛

又$\cos\frac{1}{x}$在$[1,+\infty)$上单调有界，由Abel判别法知原积分收敛.

$$x\to+\infty\text{时},\left|\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{x}\cos\frac{1}{x}\sim\frac{|\sin x|}{x}$$

$$\text{而}\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}$$

由比较判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$发散，从而$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x}\right|dx$发散，

所以原积分条件收敛.

三、Dirichlet和Abel判别法

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x+\frac{1}{x})}{x} dx$

解 $\frac{\sin x \sin(x+\frac{1}{x})}{x} = \frac{\sin^2 x \cos\frac{1}{x}}{x} + \frac{\sin x \cos x \sin\frac{1}{x}}{x}$

$x \to +\infty$时, $\frac{\sin^2 x \cos\frac{1}{x}}{x} \sim \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$收敛, 由比较判别法知$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos\frac{1}{x}}{x} dx$发散.

又 $\left|\frac{\sin x \cos x \sin\frac{1}{x}}{x}\right| \le \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} \sim \frac{1}{x^2} (x \to \infty)$, 由 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$收敛,

可知$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x \sin\frac{1}{x}}{x} dx$绝对收敛, 所以原积分发散.

三、Dirichlet和Abel判别法

$$(4)\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \mathrm{d}x\ (p>0)$$

解 $p>1$时，$\left|\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right|\le\dfrac{e^2}{x^p}$，

由$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，知原积分绝对收敛.

$0<p\le1$时，对$\forall A>1$，$\left|\displaystyle\int_1^A e^{\sin x}\cos x dx\right|=\left[e^{\sin x}\right]_1^A\le 2e$，

又$\dfrac{1}{x^p}$单调且$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，

由Dirichlet判别法知$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛.

三、Dirichlet和Abel判别法

而$(1+\frac{1}{x})^x$单调有界,由Abel判别法知$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x\mathrm{d}x$收敛.

下面讨论$0<p\le 1$时$\int_1^{+\infty}|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x|\mathrm{d}x$的收敛性.

$$x\to+\infty\text{时},\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x\right|\sim e\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\right|$$

$$\text{而}\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\right|\ge e^{-1}\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|\ge e^{-1}\frac{\cos^2 x}{x^p}=\frac{1}{2e}(\frac{1-\cos 2x}{x^p})$$

所以$0<p\le 1$时,$\int_1^{+\infty}|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x|\mathrm{d}x$发散.

综上, 原积分$p>1$时绝对收敛,$0<p\le 1$时条件收敛.

四、瑕积分相关结论

瑕积分与无穷积分有平行的理论和结果

瑕积分的性质

性质4.1 若$f_1(x), f_1(x)$的瑕点同为 $x=a, k_1, k_2$为任意常数，

则当瑕积分 $\int_a^b f_1(x)dx$与$\int_a^b f_2(x)dx$都收敛时，

瑕积分 $\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx$也收敛，且

$$\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

性质4.2 若$f(x)$的瑕点为 $x=a$，且 $c\in(a,b)$为任意常数，

则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^c f(x)dx$同敛散，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

四、瑕积分相关结论

瑕积分收敛的判别法

1. 定理4.1（柯西准则）

若$f(x)$在$(a,b]$上有定义，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty, \forall \varepsilon>0, f(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，则 $\int_a^b f(x)dx$ (a为瑕点)收敛的充要条件是

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 只要当$\forall a<u_1<u_2<a+\delta$, 有 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

2. 性质4.3

若$f(x)$在$(a,b]$上有定义, a为瑕点, 且$\int_a^b |f(x)|dx$收敛,

则$\int_a^b f(x)dx$收敛, $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛；收敛 $\not\Rightarrow$ 绝对收敛.

四、瑕积分相关理论

3. 定理4.2（比较判法）

设$f(x)$，$g(x)$在$(a,b]$上有定义，瑕点同为 $x=a$,且对 $\forall \varepsilon>0, f(x), g(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，对充分靠近 a的 $x\ (x>a)$,如果有$0\le f(x)\le g(x)$,则

1^o 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

2^o 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散.

常用的比较对象： $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}\ (a>0)$ $\begin{cases} 当\ p<1\ 时收敛; \\ 当\ p\ge 1\ 时发散. \end{cases}$

四、瑕积分相关结论

4. 定理4.3（比较判别法极限形式）

设$f(x),g(x)\geq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$，则

1° 当$0<l<+\infty$时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散;

2° 当$l=0$时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

3° 当$l=+\infty$时, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

四、瑕积分相关结论

5. 定理4.4(Dirichlet判别法)

设$f(x), g(x)$在$(a,b]$上有定义，且$f(x)$有唯一瑕点$x=a$，

$\forall \varepsilon>0, f(x), g(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，如果$f(x), g(x)$满足下列条件：

1° $\exists M>0$，使得对$\forall 0<\eta<b-a$，有 $\left|\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right|<M$;

2° g在$(a,b]$上单调，且$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$，

则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

四、瑕积分相关结论

6. 定理4.5(Abel判别法)

设$f(x), g(x)$在$(a,b]$上有定义，且$f(x)$有唯一瑕点$x=a$,

$\forall \varepsilon>0, f(x), g(x)$在$[a+\varepsilon, b]$上可积，如果$f(x), g(x)$满足 下列条件：

1° $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

2° $g(x)$在$(a,b]$上单调有界.

则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

瑕点为积分上限或者中 间值时,有类似的结果.

四、瑕积分相关结论

例7 判别$\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)}dx$的敛散性.

解

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln x\ln(1+x)}{x(1+x)}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{4}}\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}}=-4\lim_{x\to 0}\frac{1}{xx^{-\frac{1}{4}-1}}=0$$

因为$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}dx$收敛, 由比较判别法知原积分收敛.

$x\to 0^+$时, $\frac{\ln x\ln(1+x)}{x(1+x)}\sim \ln x$, (被积函数恒负, 可用比较判别法)

$\int_0^1 \ln x\, dx=[x\ln x]_0^1-\int_0^1 x\, d\ln x=-1$收敛.

四、瑕积分相关结论

例8 判别广义积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解 被积函数在点 $x=1$ 的左邻域内无界.

由洛必达法则知：

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0,$$

根据比较判别法极限形式, 原广义积分发散.

$x\to1^+$时, $\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{\ln[1+(x-1)]}\sim\frac{1}{x-1}$

四、瑕积分相关结论

例9 判别级数$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$的敛散性.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx=\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$

(1)$x\to 0$时,$\frac{\sin^2 x}{x^m}\sim\frac{1}{x^{m-2}}$,

所以当且仅当$m-2<1$即$m<3$时,$\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$收敛;

(2) 由$\left|\frac{\sin^2 x}{x^m}\right|\le\frac{1}{x^m}$, 可知$m>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$收敛,

$\frac{\sin^2 x}{x^m}=\frac{1-\cos 2x}{2x^m}$, $m\le 1$时,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$发散.

所以当$1<m<3$时, 原广义积分收敛.

四、瑕积分相关结论

例10 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx\ (p>0)$的敛散性．

解 原积分$=\int_0^1\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$

由$\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}(x\to 0+)$可知，当$p<1$时第一项积分收敛；

当$0<p<1$时，由比较判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}|\cos x|}{x^p}dx$发散，

当$0<p<1$时，$\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos x dx\right|<2e$，$\frac{1}{x^p}$单调减少$\to 0(x\to+\infty)$.

由*Dirichlet*判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$收敛．

综上,$0<p<1$时原积分条件收敛，其他情况发散．

四、瑕积分相关结论

当$0<p<1$时，$\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos x dx\right|<2e$,

$$\frac{1}{x^p}\text{单调减少}\to 0(x\to+\infty).$$

由*Dirichlet*判别法知，

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx\text{收敛}.$$

综上，$0<p<1$时原积分条件收敛，其他情况发散.

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院