—— 班________学号________ A

使用书中记号：I 表示单位阵；A^T, X^T 表示转置；$\det(A)=|A|$ 表示行列式

一、选择题（每小题2分，共24分）

1．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $m<n$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的(　　)

(a) 充分条件；　(b) 必要条件；(c)等价条件；(d) 不充分条件

2．A 是n阶方阵，则 $|A|=0$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的(　　)

(a) 等价条件；　(b) 充分条件；(c) 必要条件；(d) 不等价条件

3．设 $A=A_{3\times1}, B=B_{1\times3}$　则有 $|AB|=$ (　　)

(a) $|A||B|$；　(b) 0；　(c) $|BA|$；(d) 不确定

4．若3阶阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式 $|A|=1$，则 $|\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3-\alpha_1|=$ (　　)

(a) 2；　(b) 6；　(c) 3；　(d) 1

5．$A=A_{m\times n}$ 为实矩阵，令 $W=\{x\in R^n \mid Ax=0\}$，则 $\dim(W)+rank(A)=$(　　)

(a) $m+n$；　(b) $m-n$；　(c) n；　(d) m

6．设 A 为 n 阶正交阵，下列说法正确的是(　　)

(a) $|A|=1$；　(b) $A^T=A^*$(伴随阵)　(c) $A^{-1}=A^T$；　(d) $A^*A=I$

7．A 是n阶实方阵，x 是 R^n 中列向量，则 $x^TA^TAx=$ (　　)

(a) 模长$|Ax|$；　(b) 模长$|x|$；　(c) $|x|^2$；　(d) $|Ax|^2$

8．A 为实矩阵，则方程组(I): $Ax=0$ 与(II): $A^TAx=0$ 有(　　)

(a)不同的解；(b)解集不同；(c) $r(A)\neq r(A^TA)$；　(d)(I)的解与(II)的解相同

9．λ_1 是方阵 A 的 k 重特征值，则特征子空间 $W=\{x\mid (A-\lambda_1 I)x=0\}$ 的维数(　　)

(a) 不大于 k；(b) 大于 k；(c) 不大于 $n-k$；　(d) 等于 $n-k$

10. 设 φ 是线性映射，且 $\varphi(X), \varphi(Y)$ 线性无关，则 X, Y (　　)

(a) 不一定无关； (b) 线性相关； (c) 线性无关； (d) 不确定

11. 若 n 个线性无关向量 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 可由向量组 $A=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ 线性表出，则秩 $r(A)$ (　　)

(a) 等于 n； (b) 大于 n； (c) 小于 n； (d) 不确定

12. 若 A 是实对称正定阵 $(A>0)$，则下列说法错误的是 (　　)。

(a) A 的特征值都是正数； (b) A 的主子式都是正的，特别 $|A|>0$;

(c) 存在可逆阵 P 使 $A=P^TP$ 或 $A=PP^T$； (d) A 的元素都是正的 $(a_{ij}>0)$

二、填空题 (每题 2 分，共 16 分).

1. 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，则 A 相似于＿＿＿＿

2. 若 3 阶方阵 A 有 3 个特征值 1,1,2，I 为单位阵，则 $|A^2+I|=$＿＿＿＿

3. 欧氏空间 R^n 中向量 α, β 满足 $\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha+\beta\|^2$，则内积 $(\alpha, \beta)=$＿＿＿

4. 若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可被 v_1, v_2 线性表示，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性＿＿＿＿ (相关，无关)

5. R^2 中线性变换 φ 对基 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ 的作用为 $\varphi(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+2\varepsilon_2$，$\varphi(\varepsilon_2)=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$，则

φ 在基 $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ 下的矩阵 $B=$＿＿＿＿＿

6. 设 3 阶实对称阵 A 有特征值 2，2，1，则其若当形 $J_A=$＿＿＿＿

7. R^3 中基 $[2\alpha_1, 3\alpha_2, 4\alpha_3]$ 到基 $[4\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 的过度矩阵 P=＿＿＿＿＿

8.若向量α_1,α_2线性无关，$\beta_1=\alpha_1-t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2-t\alpha_1$线性相关，则 $t=$______

三、判断题 (每题 1 分，共 10 分)(正确的在括号内打“√”，错误的打“×”)

1. 若有 $P^{-1}AP=D$ 为对角阵，则 P 中各列都是 A 的特征向量（　　）
2. 线性变换 ϕ 把一组线性无关的向量映射成一组线性无关的向量（　　）
3. 若 A 与 B 合同(相合)，A 是正定阵，则 B 也是正定阵（　　）
4. 若 A 与 B 相似，A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵（　　）
5. 若 A 与 B 是同阶正交阵，则 AB 也是正交矩阵（　　）

6. $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$的最小多项式(最小 0 化式)为 $m(\lambda)=(\lambda-1)^2$（　　）

7. A，B 都是 n 阶阵，且 $AB=0$(零阵)，则秩 $r(A)+r(B)\le n$（　　）

8. 若 n 元线性方程组 $A_{3\times n}X=0$ 只有零解，则 $A_{3\times n}X=b$ 必存在唯一解（　　）

9. A 为实矩阵, 则秩 $\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(A)$（　　）

10. Cayley(开来)定理说: 若 $T(\lambda)=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$ 为 A 的特征多项式，则

$T(A)=A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_1A+c_0I=O$(零阵)（　　）

四、计算下列各题(共 13 分)

1. $A=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$, 计算 A^{2019}

2. $A=\begin{pmatrix}3&3&3&3\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}，并且求 A 的全体代数余子式之和 $\sum A_{ij}$

3.已知$A_{4\times 4}=(a_i-b_j)_{4\times 4}$，求行列式$det(A)$

五、计算(3+4+5=12 分)

1.$\mathbb{R}^2$中线性变换$\varphi: X\mapsto AX$满足$\varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，$\varphi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$，求变换矩阵$A$

使$\varphi(X)=AX$，$X\in\mathbb{R}^2$

2.设五阶矩阵A

$$A \xrightarrow{\text{经过初等行变换后}} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一个极大无关组,并用它表示其余向量.

3.R^n中子空间:$V_1=\left\{X=(x_1,\cdots,x_n)^T \mid x_1+\cdots+x_n=0\right\}$, $V_2=\left\{X=(x_1,\cdots,x_n)^T \mid x_1=x_2=\cdots=x_n\right\}$

(1)分别求V_1,V_2的维数,求V_2的基底.   (2)求$V_1\cap V_2$与维数$\dim(V_1+V_2)$, $V_1+V_2=?$

六、计算题

1.设矩阵A可逆，且各行元素之和均为a，向量$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}X$.

2.已知x_1,x_2,x_3的二次型$f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

(1)求二次型的矩阵 A 与 A 的特征值；(2)求正交阵P使$P^TAP=D$为对角形，

并用正交变换$X=PY$把f化成标准形；(3) $f=0$在R^3中的图形 S 是什么？

七、证明题（共6+6=12分）

1. (a)设 A 为 n 阶实正交阵，则 $|A|^2=1$，且若 $|A|=-1$，则 $|A+I|=0$

(b)设 A 为 n 阶实正交阵，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 R^n 中列向量，若 $(A+I)\alpha_1,\cdots,(A+I)\alpha_n$ 线性无关，则 $|A|=1$.

2.(a)设 A 为实对称阵，且全体特征值为0($\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$)，则 $A=O$(零阵)

(b)设 A 为正定阵，B 为实对称阵，如果 $AB+BA=0$，则 $B=O$(零阵).