基础物理学 A1
2025年春季学期

谢柯盼
kpxie@buaa.edu.cn
物理学院

第八章 相对论

§8-1 相对论以前的力学和时空观

§8-2 电磁场理论建立以后呈现的新局面

§8-3 爱因斯坦的假设与洛伦兹变换

§8-4 相对论时空观

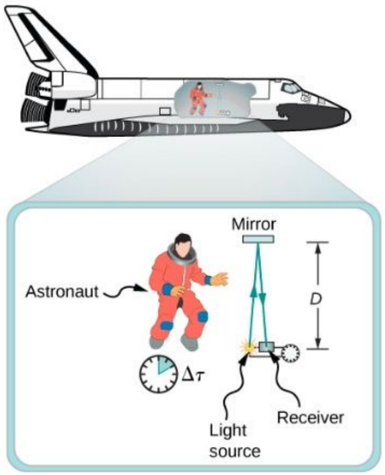
§8-5 相对论多普勒效应*（基物2讲授，本课程不讲）

§8-6 速度变换公式

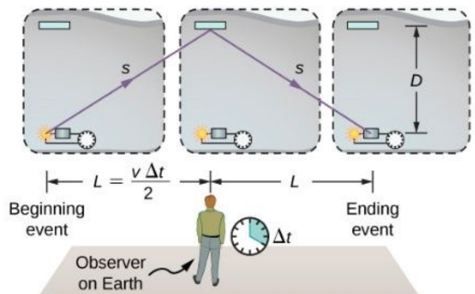
§8-7 质量、能量和动量

§8-8 广义相对论简介

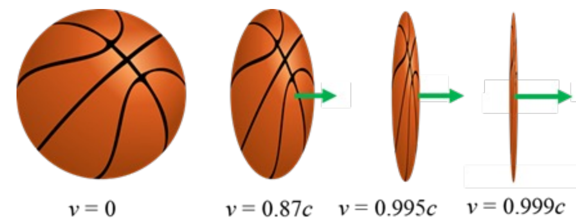
爱因斯坦的两个重要假设：相对性原理+光速不变原理
推论：钟慢效应和尺缩效应



$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$



$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - u^2/c^2}$$



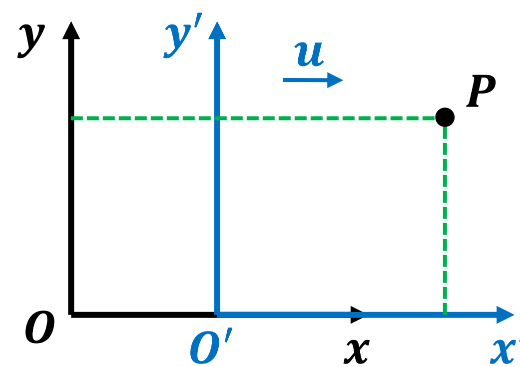
以上这些推论只是相对论的二级结论，并不足以处理更一般的场景

要真正理解钟慢和尺缩的根源，必须推导出一般情形下的坐标变换，建立完整的狭义相对论理论和理解其时空观

回顾上次课说的不可能三角：
1. 经典时空观（伽利略变换）
2. 相对性原理（所有的惯性系都彼此等价）
3. 麦克斯韦电磁理论（给出恒定的光速）

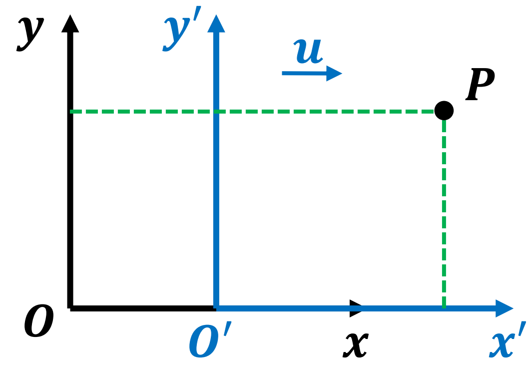
狭义相对论认为，2和3成立，1必须修正
即是说惯性系之间的坐标变换不再是伽利略变换

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$



如此“显然”的变换公式，问题出在哪里？
我们先在2和3的基础上导出新的坐标变换，然后再回过头评述伽利略变换

考虑如右图场景。相对运动沿着x轴方向，一般的变换式可写为



$$x' = f(x,t)$$
$$t' = g(x,t)$$

以及有$y' = y$和$z' = z$

假定**时空均匀**，或者更具体地讲，若一质点在S系内作匀速运动，则其在S'内也必作匀速运动

这表示$f(x,t)$和$g(x,t)$必为**线性函数**

反例：若$x' = a_1x^2 + a_2t$，$t' = b_1x + b_2t^2$，非线性

则某一质点在S'和S系的速度关系为

$$v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{2a_1x\mathrm{d}x + a_2\mathrm{d}t}{b_1\mathrm{d}x + 2b_2t\mathrm{d}t} = \frac{2a_1xv_x + a_2}{b_1v_x + 2b_2t}$$

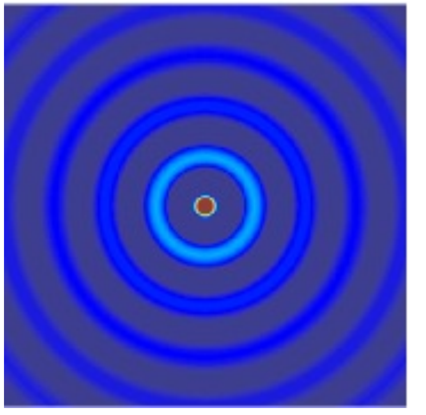
即使v_x为常数，v'_x也不是常数

故在S系中匀速运动的质点，在S'系中会作变速运动

因此，变换式必为线性变换，可一般地写为

$$x' = a_{11}x + a_{14}t, \qquad t' = a_{41}x + a_{44}t$$

其中a_{ij}为待定常数



考虑$t = t' = 0$时刻从原点发出的球面光波

其波阵面方程为

在S系中：$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$

在S'系中：$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$

利用了光速不变原理——S和S'系都认为这是球面波

将变换式代入S'系的波阵面，应得到S系的波阵面，故

$$x^2 - c^2t^2 = (a_{11}x + a_{14}t)^2 - c^2(a_{41}x + a_{44}t)^2$$

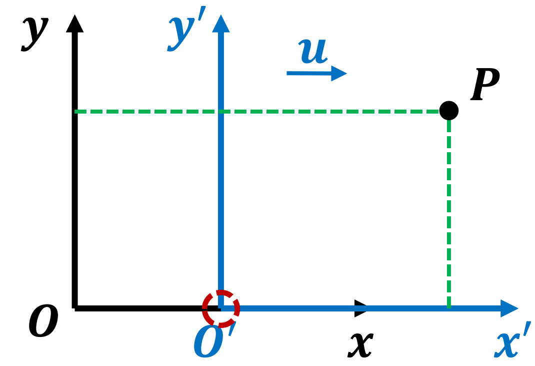
据此得以下系数关系式

$$a_{11}^2 - c^2a_{41}^2 = 1, \qquad a_{14}^2 - c^2a_{44}^2 = -c^2$$

$$a_{11}a_{14} - c^2a_{41}a_{44} = 0$$

现有3个方程，但是总共有4个a_{ij}系数，还缺一个方程

考虑S'系原点O'在S系中的运动：



O'点在S'系中的方程为$x' = 0$

代入变换式$x' = a_{11}x + a_{14}t = 0$，

得到$x/t = -a_{14}/a_{11}$

此为S系中的时刻t与O'点坐标x的关系

在S系中，O'以速度u运动，故得$-a_{14}/a_{11} = u$

联立以下四式：

$$a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1$$

$$a_{14}^2 - c^2 a_{44}^2 = -c^2$$

$$a_{11}a_{14} = c^2 a_{41}a_{44}$$

$$a_{14} = -ua_{11}$$

$$a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1$$

$$u^2 a_{11}^2 - c^2 a_{44}^2 = -c^2$$

$$-ua_{11}^2 = c^2 a_{41}a_{44}$$

$$a_{41} = -\frac{1}{c}\sqrt{a_{11}^2 - 1}$$

$$a_{44} = \frac{1}{c}\sqrt{u^2 a_{11}^2 + c^2}$$

最终得到只含a_{11}的方程，

解得$a_{11} = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

及其逆变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

*逆变换可以通过$u \to -u$快速得到

上式称为**洛伦兹变换**，是狭义相对论的时空变换公式

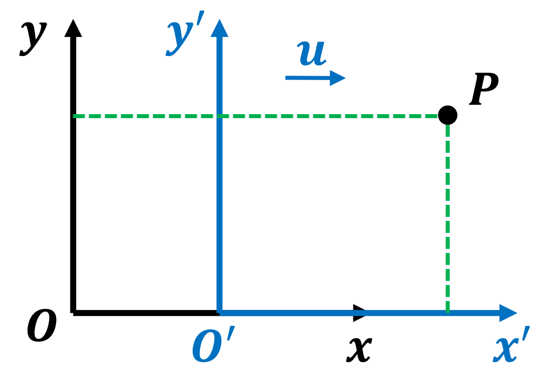
荷兰物理学家洛伦兹于19世纪末首先得出此公式

但爱因斯坦1905年提出狭义相对论以后才**正确地诠释**了公式的含义

- 这是同一事件在不同惯性系之间的坐标变换
- 当$c \to \infty$时，回归到伽利略变换，即经典时空观
- 当$u < c$时才有意义，隐含了速度**不能超光速**

一个更现代的推导方法：

只要**相对性原理**一个假定就可以**几乎**导出洛伦兹变换



时空均匀，故

$x' = a_{11}x + a_{14}t$和$t' = a_{41}x + a_{44}t$

S'的原点在S系内看来是以轨迹$x = ut$运动

故第一个变换式为$x' = a_{11}(x - ut)$，且$a_{11} > 0$

若令$u \to -u$，相当于S'和S系互换，故

$x = a_{11}(x' + ut')$，联立二式可得

$$x' = a_{11}(x - ut)$$

$$t' = a_{11}\left(t - \frac{a_{11}^2 - 1}{a_{11}^2 u}x\right)$$

当$a_{11} = 1$时得到伽利略变换，即经典力学时空观

问：如果$a_{11} \neq 1$呢？

不妨先假定$a_{11} > 1$。时间变换式暗示，S系内的空间坐标会影响S'系内的时间坐标

若S相继发生两个事件A和B，时间间隔$\Delta t > 0$，空间间隔Δx，则它们在S'中的时间间隔为

$$\Delta t' = a_{11}\left(\Delta t - \frac{a_{11}^2 - 1}{a_{11}^2 u}\Delta x\right)$$

如果$\Delta x > a_{11}^2 u \Delta t/(a_{11}^2 - 1)$，则$\Delta t' < 0$，

即只要A和B之间的空间间隔足够大，在S'看来，它们的时序就是颠倒的，是先B后A！

时序的颠倒可能会导致荒谬的结论。在S'中可能出现以下场景：

子弹先击中靶子，后从枪管中发射；大楼先装修，后打地基；树先结果，后开花；...

因果律的破坏是不可接受的

时序倒转的条件为$\Delta x > a_{11}^2 u \Delta t/(a_{11}^2 - 1)$

- 若满足上述条件的事件A和B之间没有因果关系，则它们的顺序倒转不会引起悖论
- 这相当于要求相互作用的传递速度存在上限u_0

相对性原理断定，任何惯性系中的u_0均相同，考虑沿x轴正向的极限速度，有$u_0 = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t' =$

$$\frac{\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - (a_{11}^2 - 1)\mathrm{d}x/(a_{11}^2 u)} = \frac{u_0 - u}{1 - (a_{11}^2 - 1)u_0/(a_{11}^2 u)}$$

这里S系中的极限速度也为$u_0 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$。据此解得

$u_0 = a_{11}u/\sqrt{a_{11}^2 - 1}$，符合$a_{11} > 1$的假设

同时也给出$a_{11} = 1/\sqrt{1 - u^2/u_0^2}$

这就完全确定了变换式的形式！

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/u_0^2}} \\ t' = \dfrac{t - ux/u_0^2}{\sqrt{1 - u^2/u_0^2}} \end{cases}$$

这是$a_{11} > 1$时，用相对性原理和因果律得到的结果

如果假定$a_{11} < 1$，会推出矛盾，故只有$a_{11} > 1$有解

本段论述理解即可

综上，在时空均匀、相对性原理成立的情况下，只有两种自洽的时空变换

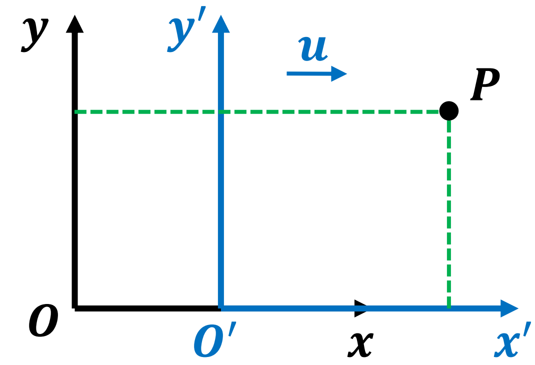
1. 伽利略变换，隐含着经典时空观
2. 洛伦兹变换，存在一极限速度u_0，是相互作用传播速度的上限

电磁定律认为自然界属于后者，$u_0 =$ 真空中的光速c

从这一视角看来，u_0必定存在，光只是正好以该速度运动，光速不变原理应理解为极限速度不变原理

洛伦兹变换是狭义相对论的核心公式

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \dfrac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t = \dfrac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \beta = \frac{u}{c}$$



1. 这是**同一个时空点**在两个不同惯性系之间的坐标变换，只涉及一个点（三维空间点+时刻）
2. **特别注意**，这**不是**一把尺子/棍子的长度变换，也**不是**某个时钟的时间段变换
3. 但是，灵活运用公式，我们可以通过1导出2
4. 若两坐标系的相对速度u并非沿着x轴，而是沿任意方向，则变换公式会较复杂，本课程不探究。只需掌握**标准洛伦兹变换**即可
5. 在$c \to \infty$时，公式退化到伽利略变换，即经典时空观是相对论时空观的低速极限

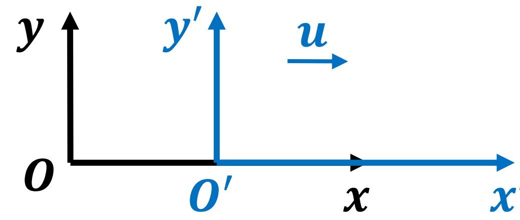
真空中的光速不变已经是被实验广泛验证的事实

- 1983年，国际计量大会定义：1米为真空中的光在1/299792458秒内行进的距离
- 因此，光速为299792458 m/s是定义式

狭义相对论只基于两个假设，理论基础非常简洁

1. 相对性原理结合麦克斯韦方程也能导出光速不变，但这依赖于具体的物理现象——电磁定律
2. 狭义相对论是关于时空本身的理论，它不依赖于具体的物理定律；反之，具体物理定律必须符合相对论，即符合洛伦兹变换
3. 麦克斯韦方程组在洛伦兹变换下不变，已符合相对论，在相对论中不需修改
4. 牛顿定律在洛伦兹变换下会改变，故它只是低速下的近似，在高速时需要修正（见8.7节）

例：在S系中于$t=0$时刻从原点发射一导弹，于$t=10\ \mathrm{s}$时击中$x=5000\ \mathrm{m}$处的目标。问在S'系中导弹与发射点的距离如何随时变化？已知$u=0.5c$。



解：导弹发射$(x',t')=(0,0)$

击中时的空间时间坐标分别为

$$x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\approx -1.73\times 10^9\ \mathrm{m}$$

$$t'=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\approx 11.5\ \mathrm{s}$$

此时S系坐标原点位于S'系中$-ut'$处，故S'系认为导弹与发射点连线的长度变化为

$L'=x'+ut'\approx 4330.13\ \mathrm{m}$，得出$L'/t'=375\ \mathrm{m/s}$

与S系中$x/t=500\ \mathrm{m/s}$稍为不同（8.6节会细说）

要注意，相对论相关运算中经常出现一种情况：

- 大数相减，最后得到一个特别小的数

若分别计算大数，各自保留若干有效数字之后再相减，则容易因为舍尾误差得到错误的结果

- **此错误在用手机计算器计算题目时最易犯**

例：上页计算$L' = x' + ut'$时，如果拆开来算：

$$x' = -1.730846789770504\times10^9\ \mathrm{m}$$

$$ut' = 1.730851119897523\times10^9\ \mathrm{m}$$

在计算这两项时，分别

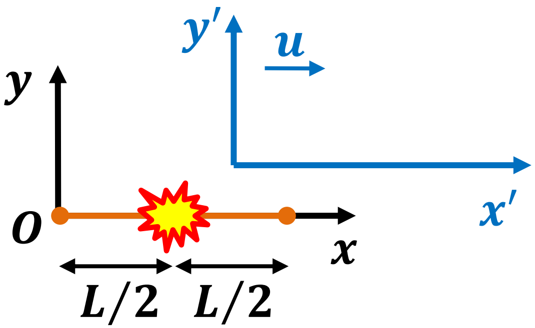
- **保留到小数点后5位，则得到$L' = 0$**
- **保留到小数点后6位，则得到$L' = 4000\ \mathrm{m}$**
- **保留到小数点<u>后11位</u>才可得到$4330.13\ \mathrm{m}$**

反之，如果将$x' + ut'$合起来算，则$1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$因子只要保留到小数点<u>后4位</u>即可得到$L' = 4330.13\ \mathrm{m}$

在洛伦兹变换中，Δt依赖于参考系

这意味着**同时的相对性**：在某一参考系看来同时的两件事，在另一参考系看来一般是不同时的

一种可能的直观理解——



S系静止棍子中点发出一闪光

S系认为闪光同时击中棍子两端

由于光速不变原理，S'系则认为闪光**先击中**右端

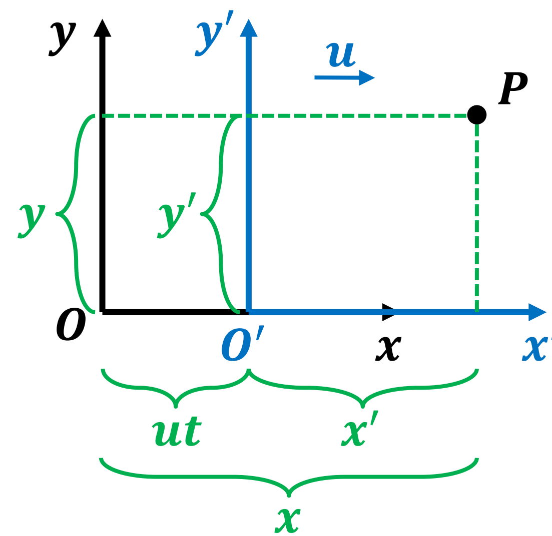
伽利略变换的推导中**隐含**的假定

x'是在S'系中的t'时刻测得的

而x和ut则是在S系中的t时刻测得的

若二者直接相加，则意味着

- 绝对时间：t和t'是同一时刻
- 绝对空间：x'可以直接和x相加



洛伦兹变换的特点：两事件在不同惯性系内的Δt和$|\Delta\vec{r}|$可以不同，故不存在绝对时间和绝对空间

但$\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - |\Delta\vec{r}|^2$在不同惯性系内一致，是洛伦兹变换的**不变量**，称为四维距离

证明：由变换的差分式

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

直接计算可以验证

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

不存在独立的绝对时间或绝对空间，只存在一体的**4维时空**，时间和空间的**特定组合**保持不变

- 由此理解为何钟慢效应和尺缩效应必须同时出现

对比经典时空观：伽利略变换给出$|\Delta\vec{r}| = |\Delta\vec{r}|'$，$\Delta t = \Delta t'$，时间和空间各自保持不变，为**3+1维时空**

§ 8-4 相对论时空观

伽利略变换是经典时空观的数学描述，体现了绝对时间和绝对空间

- 从伽利略变换可以推出经典时空观的种种性质

洛伦兹变换是相对论时空观的数学描述

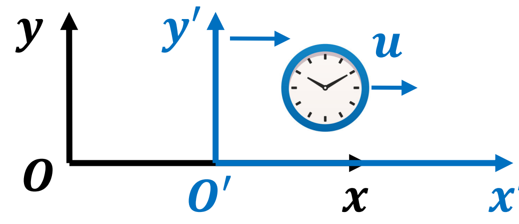
- 从洛伦兹变换可以推出相对论时空观的种种性质

先前的公式和例题已经体现出了相对论时空观与经典时空观不一样的地方，例如：

- 同时的相对性，Δt依赖于参考系，动钟变慢
- 长度的相对性，$|\Delta\vec{r}|$依赖于参考系，动尺缩短
- 不变量$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - |\Delta\vec{r}|^2$的存在，表明时间和空间是四维时空的不同分量

本节从洛伦兹变换出发，深入讨论相对论时空观

时间膨胀效应：考虑静止于S'系中x'处的钟，其相对S系以速度u作匀速运动



把钟的示数为t'作为事件1，钟的示数为$t' + \Delta t'$作为事件2

则洛伦兹逆变换给出

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

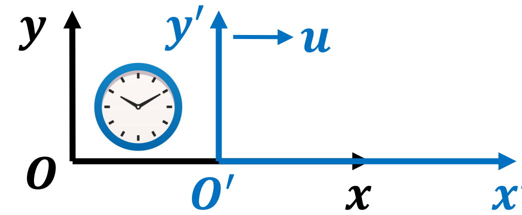
这里$\Delta x' = 0$，因为钟静止于S'系。

Δt是事件1、2在S系中的时间差别，或者说是当动钟走过$\Delta t'$时间时，地面所经历的时间

由$|u| < c$知$\Delta t > \Delta t'$，即地面上的钟走得更快，或者说**动钟变慢了**，此即时间膨胀效应

注意：此处讨论**不依赖于**任何具体的钟表实现，不管是“光钟”还是“电子钟”“机械钟”都一样

时间膨胀的相对性：考虑静止于S系中x处的钟，其相对S'系以速度$-u$作匀速运动



把钟的示数为t作为事件1，钟的示数为$t+\Delta t$作为事件2

则洛伦兹变换给出

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

这里$\Delta x = 0$，因为钟静止于S系。

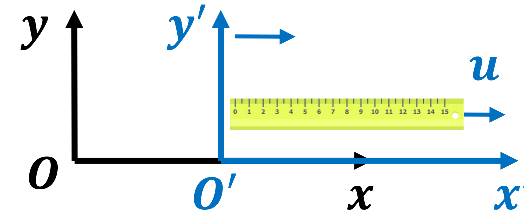
$\Delta t'$是事件1、2在S'系中的时间差别，或者说是当地面的钟走过Δt时间时，运动系所经历的时间

由$|u| < c$知$\Delta t' > \Delta t$，即动系S'上的人认为地面的钟走得更慢

由此得出时间膨胀的相对性：相对运动的参考系，**互相认为对方的时间变慢了**

长度缩短效应：考虑静止于S'系、两端分别为x'和$x' + \Delta x'$的尺，其相对S系以速度u作匀速运动

要在S系中测量动尺的长度，需在**某一时刻**t确定尺子两端的位置。据此，



事件1：尺子左端在x，事件2：尺子右端在$x + \Delta x$
由洛伦兹变换给出

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

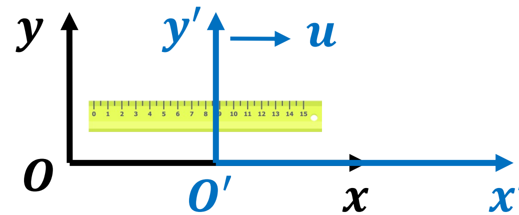
这里$\Delta t = 0$，因为在S系中测量时需要在**同一瞬间**为尺子拍个快照

Δx即是动尺在S系中测得的长度

由$|u| < c$得$\Delta x < \Delta x'$，即S系中测得的尺子更短
或者说**动尺变短了**，此即长度缩短效应

长度缩短的相对性：静止于S系、两端分别为x和$x+\Delta x$的尺，其相对S'系以速度$-u$作匀速运动

要在S'系中测量动尺的长度，需在某一时刻t'确定尺子两端的位置。据此，



事件1：尺子左端在x'，事件2：尺子右端在$x'+\Delta x'$
由洛伦兹逆变换给出

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+u\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

这里$\Delta t'=0$，因为在S'系中测量时需要在同一瞬间为尺子拍个快照

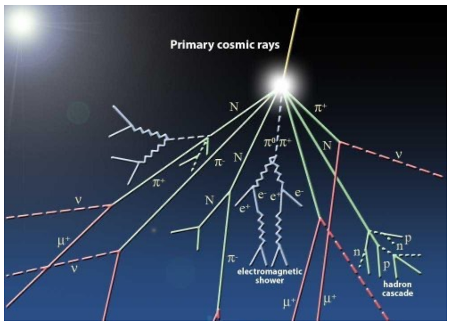
$\Delta x'$即是地面上的尺在S'系中测得的长度

由$|u|<c$得$\Delta x>\Delta x'$，即S'系中测得的尺子更短

相对运动的参考系，**互相认为对方的长度缩短了**

时间膨胀和长度缩短总是相伴出现，常常可作为同一现象的不同解释

例：静止μ子寿命为$\tau_0 = 2.2\times10^{-6}$ s，似乎衰变前最多走过$c\tau_0 = 660$ m的距离，但宇宙射线轰击万米高空大气原子产生的μ子能到达地面



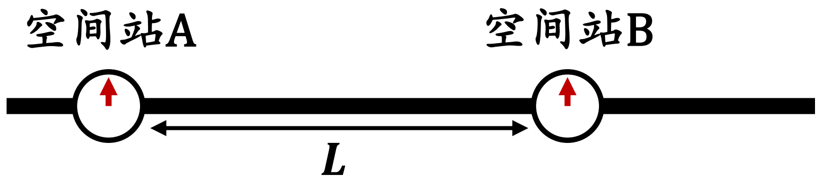
地面参考系的看法：
次级μ子有极高的速度，导致其时间膨胀，寿命延长至原来的20余倍，故可到达地面

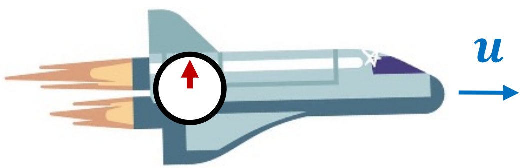
μ子参考系的看法：
μ子保持静止，但地表在以极高的速度迎着它而来，导致长度收缩至600余米，故μ子可在寿命之内到达地面

谁的时间变慢了是否可以有一个“绝对”的答案？

事件1：飞船经过空间站A

- 此时飞船上的钟和空间站上的钟示数均为0





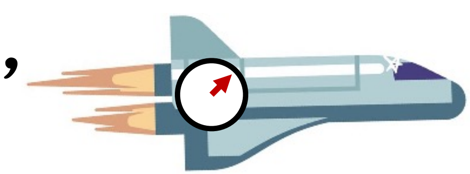
S系内的描述：
空间站静止，飞船运动

事件2：飞船经过空间站B

- 此时两个空间站上的钟示数均为$T = L/u$

$T' < T$，是否证明飞船确实在运动，因此时间变慢了？

飞船上的钟由于运动变慢，示数为$T' = T\sqrt{1-u^2/c^2}$

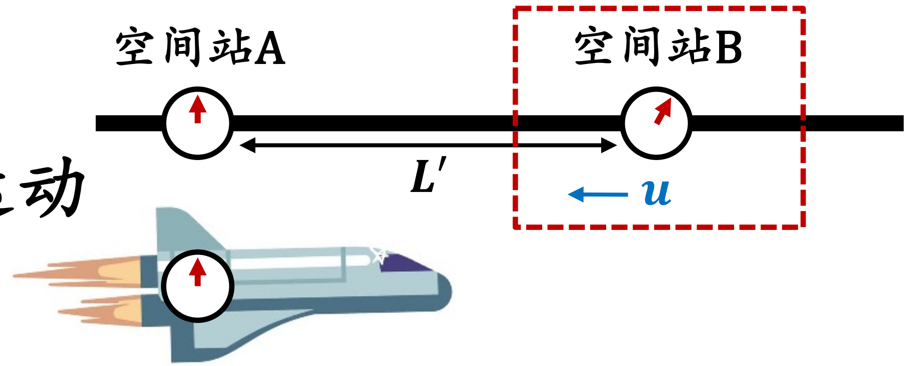


事件2发生时，船钟的示数比空间站小，这是一个**客观事实**，不因参考系的改变而发生变化

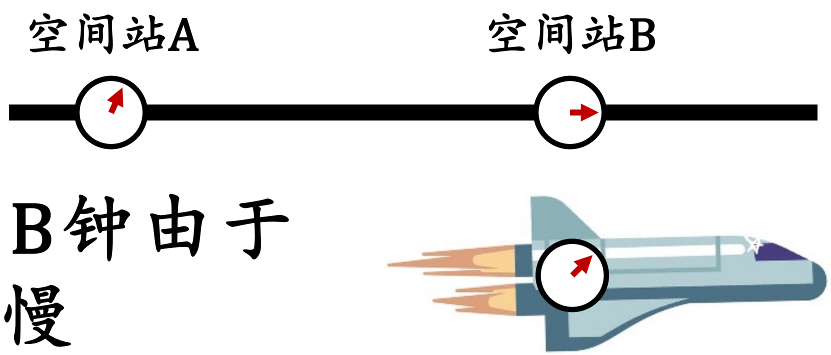
故要探究的是：飞船系S'如何**解释**这一事实？

S'系内的描述：

飞船静止，空间站运动



事件1发生时，S'系认为B钟的示数已经**不为零**，即飞船观测者认为两空间站的钟**不同步**（同时的相对性）



S'系认为B钟由于运动而变慢

但因为B钟有**初始示数**，最终事件2发生时，其示数依然比船钟要大

第一个问题：事件1（飞船过空间站A）发生时，S'系认为B钟的示数为多少？

解：事件1在S'系中发生于$t'=0$时刻。据此将洛伦兹变换的时间分量式写为

$$t'=0=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

右式给出一个关于t和x的约束，代表了在S'系中$t'=0$时刻测量到的“在S系中静止于x处的钟”的示数为t

而B钟在$x=L$处，故知其当时的示数为uL/c^2

第二个问题：S'系认为从A到B花费多长时间？

解：AB两点在S系中静止，故在S'系中测得其长度收缩为$L'=L\sqrt{1-u^2/c^2}$

故S'系认为飞行耗时$\Delta t'=L'/u=(L/u)\sqrt{1-u^2/c^2}$

第三个问题：S'系认为在旅程中B钟走了多长时间？

解：飞船认为B钟在运动，时间变慢，故其走过的时间

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1 - u^2/c^2} = (L/u)\left(1 - u^2/c^2\right)$$

小于船钟所走过的时间

汇总所有信息：比较在事件2（飞船过空间站B）发生时船钟和B钟的示数

解：在S'系看来，事件1发生时船钟示数为零，飞行耗时$\Delta t'$，故事件2发生时，船钟示数为

$$T' = \Delta t' = (L/u)\sqrt{1 - u^2/c^2} \equiv T\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

而事件1发生时B钟示数为uL/c^2，飞行过程中其走过了Δt，故事件2发生时，B钟示数为

$$uL/c^2 + \Delta t = L/u \equiv T > T'$$

最终的对钟结果与S系中的描述完全一致

因此同一事实有两种解释：

- 空间站系认为，AB的时钟同步，飞船运动导致船钟变慢，造成了事件2中船钟的示数小于B钟；
- 飞船系认为，AB时钟不同步，B钟一开始就有更大的示数，即使其运动导致B钟变慢，最终在事件2发生时，示数依然大于船钟

两参考系一致同意：在飞船过B站时，B钟示数大于船钟（客观事实），但他们仍互相认为对方的钟走得慢

解决表观矛盾的关键在于同时的相对性：

1. 看似是两个钟对比，实质上有三个钟参与比较，而不同参考系对钟的同步有不同的看法
2. 船钟实际上是与A钟和B钟各自对比了一次，并没有与哪个钟先后比两次，故它们相互认为对方的时间变慢，这并不矛盾

如果非要比较两个钟在一段时间后谁快谁慢呢？

此时讨论的是两个质点的时间比较，且至少有一个质点经历过非匀速运动，否则不能重新相遇

这属于在同一惯性系S中讨论两变速运动质点的时间

定义运动的质点自己所携带的钟所走过的时间称为固有时τ，区别于惯性系的时钟走过的坐标时t

以速度$\vec{v}$运动的质点，在惯性系时间流逝$\mathrm{d}t$（坐标时）时，它自己的时间（固有时）流逝

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

相对论假定，固有时只与速度有关，与加速度无关

在惯性系内经过有限时间Δt时，质点固有时流逝

$$\Delta\tau = \int \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\int\sqrt{c^2\mathrm{d}t^2-|\mathrm{d}\vec{r}|^2} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}s$$

$\mathrm{d}s$是洛伦兹变换的**不变量**（见PPT第17页），固有时不管在哪个惯性系计算都一样，正符合其物理意义

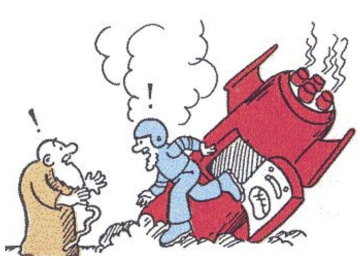
*注意区分u（惯性系相对速度）与$\vec{v}$（质点速度）

例：双生子之一在地球生活，另一人则进行数十年的近光速太空旅行。他们在地球上重聚时，谁更年轻？

解：地球兄弟速率近似为零，其固有时$\tau_1 = T$

地球上测得宇航员兄弟的速率为$v(t)$，其固有时

$$\tau_2 = \int_0^T \mathrm{d}t\sqrt{1-v^2/c^2}$$



$v < c$，故$\tau_2 < T$，宇航员兄弟确实更年轻！

例：惯性系S中闪电从x_1出发并击中$x_2 = x_1 + L$处。在相对速度$u = \beta c$的惯性系S'中，发出点和击中点的空间距离、时间间隔是多少？

解：以“闪电出发”事件为时空原点，列出(x, t)表格，已知量和未知量一目了然

	S系坐标(x, t)	S'系坐标(x', t')
事件1	$(0, 0)$	$(0, 0)$
事件2	$(L, L/c)$	(L', t')

由洛伦兹变换得

$$L' = \frac{L - uL/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$t' = \frac{L/c - uL/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

上页例题的时间和长度变换因子都不是$\sqrt{1-u^2/c^2}$先前得到的、简单的时间膨胀和长度收缩公式

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad \Delta x = \Delta x'\sqrt{1-u^2/c^2}$$

来源于几个基本限制：

- 动钟对应的事件在S'系中同地不同时
- 动尺对应的事件在S系中同时不同地

只有在这种情况下才能得到$\sqrt{1-u^2/c^2}$因子，这属于二级结论

如果所讨论的两个事件既不同时也不同地，则对应的变换因子通常没有统一的形式

因此，如果对相对论的时空观不太熟悉，列表格是解决洛伦兹变换相关问题最稳妥的方法

例：惯性系S中两事件发生于同一地点，而时间相隔4 s。在惯性系S'中，两事件的时间间隔是6 s，问在S'系中两事件的空间间隔是多少？

解：列出(x,t)表格，已知量和未知量一目了然

	S系坐标(x,t)	S'系坐标(x',t')
事件1	$(0,0)$	$(0,0)$
事件2	$(0,4\ \text{s})$	$(x_2',6\ \text{s})$

由洛伦兹变换得

$$t_2' = 6\ \text{s} = \frac{t_2 - ux_2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{4\ \text{s}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

解得$u=\pm\sqrt{5}c/3$，继续由洛伦兹变换得

$$x_2' = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{-ut_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \mp 1.34\times 10^9\ \text{m}$$

本节课小结

洛伦兹变换的推导

- 球面光波法要求掌握；因果律法了解即可
- 不变量，四维距离$\Delta s^2 \equiv c^2\Delta t^2 - |\Delta\vec{r}|^2$
- 变换式的初步应用

洛伦兹变换的物理意义——相对论时空观

- 钟慢效应的导出及其相对性
- 尺缩效应的导出及其相对性
- 钟慢和尺缩的关联
- 变速运动质点的固有时$\Delta\tau = \Delta s/c$

第八章作业

《近代物理》分册

1.2, 1.4, 1.6, 1.10, 1.12, 1.14, 1.15, 1.16, 1.18

第1.10及其后的题目需要用到相对论力学的知识，将在下周讲授，可先不完成

作业扫描提交至spoc.buaa.edu.cn，助教线上批改

提交时间段：4月11日0:00至4月25日00:00

以系统时间戳为准，原则上不接受其他解释