定义 5.8.1 设a是任意复数, m是任意正整数, 形如

$$J_m(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}_{m\times m} = aI_{(m)}+J_m(0)$$

的m阶方阵称为**若当块** (Jordan block), 记作 $J_m(a)$, 其中m表示它的阶数,a是它的对角线元素, 也就是它的特征值。如果一个方阵J是准对角阵, 并且所有的对角块都是若当块, 就称这个准对角阵为**若当形矩阵** (matrix of Jordan type)。

例1 试将矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

相似到Jordan型矩阵。

解: A的特征多项式为$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$。得到A的特征值1,2。对特征值 1, 解方程组 $(A-I)X=0$, 即

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求得一个解$X_1=(1,-1,0)^T$组成基础解系, 也就是特征子空间V_1的一组基。

对特征值2, 解方程组 $(A-2I)X=0$ 即

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求得一个解 $X_2=(2,0,1)^T$组成基础解系, 也就是特征子空间V_2的一组基。

$\{X_1, X_2\}$是特征向量集合的一个极大线性无关组, 它不是空间$V=C^{3x1}$的基, 因此A不能对角化。

设法补充一个满足条件$(A-I)X_3= X_1$的向量 X_3 使X_1,X_2,X_3组成V的基。为此解方程组$(A-I)X= X_1$ 即

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

求得一个解 $X_3=(-1,0,-1)^T$。易验证以X_1,X_2,X_3为各列组成的矩阵可逆，因而$\{X_1,X_2,X_3\}$是V的一组基。

$$(A-I)X_1=0,(A-I)X_3=X_1,(A-2I)X_2=0$$

$$\Rightarrow AX_1=X_1=0, AX_3=X_1+X_3, AX_2=X_2$$

$$\Rightarrow A(X_1,X_3,X_2)=(X_1,X_1+X_3,X_2)=(X_1,X_3,X_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AP=P\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$