完全集

- 设S是联结词集合。如果每个n(n>0)元的联结词都可由S定义，则称S为完全集。

- 定理1. 6 $\{\neg, \wedge, \vee\}$是完全集。

• $\{\neg, \wedge, \vee\}$中的联结词是不是独立的?

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

逻辑联结词完全集之间的联系

定理 1.7

假设 S 与 T 都是逻辑联结词的集合：

S 是完全的，

S 中的每个联结词都可以由 T 定义，

则 T 是完全的。

定理 1.7

证明:

假设 A 是一个由 S 生成的公式. 以下证明它对应于一个由 T 生成的公式 B, 这两个公式是等值的, 且出现在 B 的命题变元都在 A 中出现:

1. 若 A 是零元逻辑联结词, 则 B 是由 T 中联结词生成的可以定义 A 的公式.

2. 若 A 是命题变元, 则 B 被定义为 A.

3. 若 A 是 $FA_1A_2\cdots A_m$, 其中 F是 S 中的 m 元联结词. 假设 F 由公式 C 定义, 其中 C 是由 T 生成的公式.

定理 1.7（续）

证明：

则定义 B 为以下公式:

$$C_{B_1,B_2,\cdots,B_m}^{A_1,A_2,\cdots,A_m}$$

其中 $B_1,B_2,\ldots,B_m$ 为分别对应于 $A_1,A_2,\ldots,A_m$ 的公式.

这时 B 等值于 A, 是由 T 生成的公式, 且出现在 B 的命题变元都在 A 中出现.

所以任意一个非零元联结词都可以由 T 定义，即 T 是逻辑联结词的完全集.

极小完全集

- 定义：如果从完全集S中去掉任何一个联结词，S就成为不完全的，称S为极小完全集。

- 思考
  - 还有哪些完全集?
  - {¬，∧，∨}是否是极小完全集?
  - 极小完全集一定是联结词的数量最少的吗?

定理1.8

定理 1.8 以下的逻辑联结词的三个集合是极小完全集.

$$\{\neg,\wedge\},\{\neg,\vee\},\{\neg,\rightarrow\}.$$

证明： 因为

$$p\vee q\Leftrightarrow\neg(\neg p\wedge\neg q),$$

$$p\wedge q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q),$$

$$p\vee q\Leftrightarrow\neg p\rightarrow q,$$

$$p\wedge q\Leftrightarrow\neg(p\rightarrow\neg q),$$

这三个集合都是完全的.

真值表的启示（回顾）

p	q	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- 证 $F_4\, p\, q \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
  - (p/0,q/0), (p/0,q/1)
  - (p/1,q/0),(p/1,q/1)

代入得证

定理1.8

以下证明它们都不是极小完全的，只需证明以下四个集合都不是完全的: $\{\neg\},\{\wedge\},\{\vee\},\{\rightarrow\}$.

分四种情况分别证明:

1. $\{\neg\}$ 不是完全集
2. $\{\wedge\}$不是完全集
3. $\{\vee\}$不是完全集
4. $\{\rightarrow\}$不是完全集

定理1.8：证明：{¬, ∧}是极小完全集

1. 思路：证明{¬}不是完全集

由该集合生成的仅包含命题变元 p 的公式或者等值于 p, 或者等值于 ¬p.

这两个公式只能定义两个逻辑联结词 F_2, F_3，而不能定义 F_1和F_4

p	$F_1(p)$
0	0
1	0

p	$F_2(p)$
0	0
1	1

p	$F_3(p)$
0	1
1	0

p	$F_4(p)$
0	1
1	1

定理1.8：证明：{¬, ∧}是极小完全集

- 目标：证明{¬}不是完全集
- 取一元联结词F使得F(0) = F(1)
- 令真值赋值v_1=(p/0)和v_2=(p/1)
- 任取由{¬}生成只出现命题变元p的公式Q= ¬¬⋯¬p
- v_1(Q)≠v_2(Q)，而前提中说的v_1(F(p))=v_2(F(p))，所以他们是相互矛盾的，所以Q不能定义F
- 因此{¬}不是完全集

情况 F_1和F_4

定理1.8：证明：{¬, ∧}是极小完全集

2. 思路：{∧} 不是完全集

由该集合生成的仅包含命题变元 p 的公式只能定义逻辑联结词 F_2，而不能定义其它:

p	$F_1(p)$
0	0
1	0

p	$F_2(p)$
0	0
1	1

p	$F_3(p)$
0	1
1	0

p	$F_4(p)$
0	1
1	1

定理1.8：证明：{¬, ∧}是极小完全集

- 证明(续)：
  - 目标：证明{∧}不是完全集
  - 任取由{∧}生成只出现命题变元p的公式Q= p ∧ ⋯ ∧ p
  - 令真值赋值v=(p/1)，则v(Q)=1，但v(¬p)=0，所以Q不能定义¬。
  - 因此{∧}不是完全集
  - 综上{¬,∧}是完全集，但去掉任意一个联结词后不构成完全集，因此{¬,∧}是极小完全集

- 同理可证{¬, ∨}，{¬, →}是极小完全集

小结

- 概念： 完全集
- 极小完全集
- 性质： 基本的完全集
- 完全集之间的联系
- 方法： 结构归纳法

内容

范式

- $\neg(p \to q) \vee r$

等值演算的结果是什么?
请大家试试

范式

- $\neg(p\rightarrow q)\vee r$
- $\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r$
- $\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$
- $\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$
- $\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge (p\vee \neg q\vee r)\wedge(p\vee \neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee \neg q\vee r)$
- 结论：
  - 公式唯一性？？
  - 等值公式有唯一的表示？
  - 判断公式等值—范式比较

问题提出：观察等值式模式特点

交换律	$Q \vee R \Leftrightarrow Q \vee R$	$Q \wedge R \Leftrightarrow R \wedge Q$	$Q \oplus R \Leftrightarrow R \oplus Q$
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \oplus Q) \oplus R \Leftrightarrow P \oplus (Q \oplus R)$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \oplus R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \oplus (P \wedge R)$
德•摩根律	$\neg(Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg R$	$\neg(Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg R$	
幂等律	$Q \vee Q \Leftrightarrow Q$	$Q \wedge Q \Leftrightarrow Q$	
同一律	$Q \wedge 1 \Leftrightarrow Q$	$Q \vee 0 \Leftrightarrow Q$	
吸收律	$Q \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow Q$	$Q \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow Q$	
零 律	$Q \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$Q \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	
排中律	$Q \vee \neg Q \Leftrightarrow 1$	双重否定律	$\neg\neg Q \Leftrightarrow Q$
矛盾律	$Q \wedge \neg Q \Leftrightarrow 0$	假言易位	$Q \rightarrow R \Leftrightarrow \neg R \rightarrow \neg Q$

本节深入研究等值式模式的相关问题

对偶定理

- 定义1.10 设 A 是由 $\{0, 1, \neg, \vee, \wedge\}$ 生成的公式，
- 将 A 中的 $\vee$和 $\wedge$互换，0和 1互换得到 A^*，
- 称 A^* 与 A 互为对偶式。
- 比如： $(p \vee q) \wedge r$ 与 $(p \wedge q) \vee r$ 互为对偶式，
- $\neg(p \vee 0) \wedge 1$ 与 $\neg(p \wedge 1) \vee 0$ 互为对偶式。

注意：
0 与 1 互换
$\vee$与 $\wedge$ 互换
$\neg$ 保持不动

相反的赋值

- 定义1.11　如果真值赋值 v_1 和 v_2 满足：
- 　　对于每个命题变元 p， $v_1(p) \neq v_2(p)$，
- 　　则称 v_1 和 v_2 是相反的赋值。
- 相反赋值的含义理解为：$v_1(p) = \neg\, v_2(p) = v_2(\neg\, p)$。
- 若 $v_1(A)$ 已知，$v_2(A)$ 是对 $v_1(A)$ 所有命题变元取
- 相反赋值。
- 定理1.4　设 A 是由 $\{0, 1, \neg, \vee, \wedge\}$ 生成的公式，
- 　　A^* 与 A 互为对偶式，v 和 v' 是相反的，则
  - $v(A^*) = \neg\, v'(A)$

原公式的变元取相反赋值后再取相反

公式里面否完外面再否

定理1.5 （对偶定理）

- 设 A, B 是由 $\{0, 1, \neg, \vee, \wedge\}$ 生成的公式， 且
- A^* 与 A 互为对偶式， B^* 与 B 互为对偶式。
- 如果 $A \Leftrightarrow B$， 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

等值的公式
其对偶式
也等值！

- 证明：
- 任取真值赋值 v,
- 令 v' 是与 v 相反的真值赋值。
- 因为 $A \Leftrightarrow B$， 所以 $v'(A) = v'(B)$。因此，
  - $v(A^*) = \neg v'(A) = \neg v'(B) = v(B^*)$
- 因而， $A^* \Leftrightarrow B^*$。

逻辑联结词完全集之间的联系

定理 1.7

假设 S 与 T 都是逻辑联结词的集合：

S 是完全的，

S 中的每个联结词都可以由 T 定义，

则 T 是完全的。

真值表的启示

p	q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- **F_4 p q ?**
- **F_4为真 当且仅当 p为假且q为假 或 p为假且q为真**

  $(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

- **$F_4\ p\ q \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ ？**

真值表的启示

p	q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- **证 $F_4\ p\ q \Leftrightarrow\ (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$**
  - **(p/0,q/0), (p/0,q/1)**
  - **(p/1,q/0),(p/1,q/1)**

  代入得证

真值表的启示：其它联结词推广

p	q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- F_1 p q ?
- F_1 p q $\Leftrightarrow$ 0

$\Leftrightarrow \neg p \wedge p$

$\Leftrightarrow \neg q \wedge q$

公式A的一般形式

- 公式A可如下构造：

  - 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是永假式，取A为$p_1 \wedge \neg p_1$。
  - 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是可满足式，设满足$Fp_1p_2\ldots p_n=1$的真值赋值有m组，分别为：$(p_1/a_1^1, \ldots, p_n/a_n^1), \ldots, (p_1/a_1^m, \ldots, p_n/a_n^m)$，

    则取A为：$(\widetilde{p_1^1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{p_n^1}) \vee \ldots \vee (\widetilde{p_1^m} \wedge \ldots \wedge \widetilde{p_n^m})$

    其中

$$\widetilde{p_j^i} = \begin{cases} p_j & \text{若} a_j^i = 1 \\ \neg p_j & \text{若} a_j^i = 0 \end{cases} \quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

- 往证 $F\ p_1 \ldots p_n \Leftrightarrow A$

任取真值赋值v，$v(A)=1$

- 当且仅当有$1\le i\le m$，使$v(\widetilde{p_1^i}\wedge\ldots\wedge\widetilde{p_n^i})=1$
- 当且仅当有$1\le i\le m$，使$v(\widetilde{p_1^i})=\ldots=v(\widetilde{p_n^i})=1$
- 当且仅当有$1\le i\le m$，使$v=(p_1/a_1^i, \ldots, p_n/a_n^i)$

因此，$F\ p_1 \ldots p_n \Leftrightarrow A$

结论

- 任意**n**元联结词都可由{¬,∧,∨}定义。
  - 永假则用其任意一个变元的矛盾式定义
  - 其它任意**n**元联结词，真值表中有多少组为真，则其定义公式**A**是由多少个公式**B**的析取构成。每个公式**B**均是**n**个项的合取组成，每项对应每个变元，变元取假，则用其否定式；为真，取其肯定式。

范式定义

- 定义：原子公式和原子公式的否定统称为文字。如果一个文字恰为另一个文字的否定，则称它们为相反文字。
  - 文字:**p**,相反文字:**¬p**
- 定义：设n是正整数，$Q_1,\ldots\ldots,Q_n$都是文字，称$Q_1 \lor \ldots \lor Q_n$为简单析取式，称$Q_1 \land \ldots \land Q_n$为简单合取式。
  - $(p \lor q \lor r)$，$(p \land \neg q \land r)$

范式定义

- 定义：设n是正整数。若$R_1,\ldots\ldots,R_n$都是简单合取式，则称$R_1 \vee \ldots \vee R_n$为析取范式。若$R_1,\ldots\ldots,R_n$都是简单析取式，则称$R_1 \wedge \ldots \wedge R_n$为合取范式。
  - 简单合取式的析取是析取范式，
  - $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
  - 简单析取式的合取是合取范式，
  - $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

合取范式与析取范式：举个例子

- $(p\vee q\rightarrow r)\rightarrow p$
- $\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\vee r)\rightarrow p$
- $\Leftrightarrow \neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$
- $\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge\neg r\vee p$
- $\Leftrightarrow (p\vee q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$
- $\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(\neg r\vee p)$ 合取范式
- $\Leftrightarrow p\wedge(\neg r\vee p)\vee q\wedge(\neg r\vee p)$ 吸收律
- $\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg r)\vee(q\wedge p)$ 吸收律
- $\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg r)$ 析取范式
- $\Leftrightarrow p\wedge(r\vee\neg r)\vee(q\wedge\neg r)$
- $\Leftrightarrow p\wedge r\vee p\wedge\neg r\vee(q\wedge\neg r)$ 不唯一

主析取范式与主合取范式

- 定义：设n是正整数，$p_1,\ldots\ldots,p_n$是不同的命题变元。若对于每个i，Q_i是p_i或$\neg p_i$，则称
  - $Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$为关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$极大项，$Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_n$为关于$p_1,\ldots\ldots,p_n$的极小项。

- 定义：设m是自然数。
  - 若R_1,……,R_m是关于p_1,……,p_n的不同极小项，则称$R_1 \vee \ldots \vee R_m$为关于p_1,……,p_n的主析取范式。
  - 若R_1,……,R_m是关于p_1,……,p_n的不同极大项，则称$R_1 \wedge \ldots \wedge R_m$为关于$p_1$,……,$p_n$的主合取范式。
  - 主析取范式和主合取范式统称为主范式。

- 定义：设公式Q中出现的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，
- R是关于 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的主析取范式（主合取范式），并且 $Q \Leftrightarrow R$,
- 则称R为Q的主析取范式（主合取范式）。

主范式变换步骤

- 联接词等值变换
- （1）消去联接词→、↔、⊕将公式由∧、∨、¬表示
  - $Q \rightarrow R \Leftrightarrow \neg Q \vee R$
  - $Q \leftrightarrow R \Leftrightarrow (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$
  - $Q \oplus R \Leftrightarrow (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$
- 德.摩根律
- （2）应用德.摩根律¬内移或消去约束公式的¬变换为约束变元
  - $\neg(Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg R$　$\neg(Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg R$

主范式变换步骤

- 矛盾律与排中律
  - （3）应用矛盾律与排中律求主合取范式或主析取范式
  - $Q \wedge \neg Q \Leftrightarrow 0 \quad Q \vee \neg Q \Leftrightarrow 1$
- 分配律
  - （4）应用分配律求取合取范式或析取范式
  - $Q \vee (R \wedge S) \Leftrightarrow (Q \vee R) \wedge (Q \vee S)$
  - $Q \wedge (R \vee S) \Leftrightarrow (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$
- 交换律
  - （5）应用交换律变元位置排序
  - $Q \vee R \Leftrightarrow R \vee Q \quad Q \wedge R \Leftrightarrow R \wedge Q$

主合取范式：举例

- $(\neg p \to r) \wedge (q \leftrightarrow p)$
- $\Leftrightarrow (\neg p \to r) \wedge (q \to p) \wedge (p \to q)$
- $\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$
- $\Leftrightarrow (p \vee r \vee q \wedge \neg q) \wedge (\neg q \vee p \vee r \wedge \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r \wedge \neg r)$
- $\Leftrightarrow (p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee p \vee r)$
  $\wedge (\neg q \vee p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$
- $\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$
  $\wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

主合取范式（续）

```
>>> s='(¬p→r)∧(q↔p)'
>>> s=s.replace('(q↔p)','(q→p)∧(p→q)')
>>> s
'(¬p→r)∧(q→p)∧(p→q)'
>>> s=s.replace('(¬p→r)','(p∨r)')
>>> s=s.replace('(q→p)','(¬q∨p)')
>>> s=s.replace('(p→q)','(¬p∨q)')
>>> s
'(p∨r)∧(¬q∨p)∧(¬p∨q)'
>>> s=s.replace('(p∨r)','(p∨q∨r)∧(p∨¬q∨r)')
>>> s=s.replace('(¬q∨p)','(p∨¬q∨r)∧(p∨¬q∨¬r)')
>>> s=s.replace('(¬p∨q)','(¬p∨q∨r)∧(¬p∨q∨¬r)')
>>> s
'(p∨q∨r)∧(p∨¬q∨r)∧(p∨¬q∨r)∧(p∨¬q∨¬r)∧(¬p∨q∨r)∧(¬p∨q∨¬r)'
```

主析取范式

- $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q$
- $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q$
- $\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)) \vee p \wedge q$
- $\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee \neg q) \vee p \wedge q$
- $\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee \neg p \vee \neg q \vee p \wedge q$
- $\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge (q \vee \neg q) \vee \neg q \vee p \wedge q$
- $\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q \vee \neg q \vee p \wedge q$
- $\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q \vee (p \vee \neg p) \wedge \neg q \vee p \wedge q$
- $\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge \neg q \vee p \wedge q$
- $\Leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$

定理：

- 任何公式等值于某一析取范式
- 任何公式等值于某一合取范式
- 每一公式有唯一的主析取范式
- 每一公式有唯一的主合取范式

联结词完全集-公式A的一般形式（回顾）

- 公式A可如下构造：

  - 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是永假式，取A为$p_1 \wedge \neg p_1$。
  - 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是可满足式，设满足$Fp_1p_2\ldots p_n=1$的真值赋值有m组，分别为：$(p_1/a_1^1, \ldots, p_n/a_n^1), \ldots, (p_1/a_1^m, \ldots, p_n/a_n^m)$，

  则取A为：$(\widetilde{p_1^1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{p_n^1}) \vee \ldots \vee (\widetilde{p_1^m} \wedge \ldots \wedge \widetilde{p_n^m})$

  其中

$$\widetilde{p_j^i} = \begin{cases} p_j & \text{若} a_j^i = 1 \\ \neg p_j & \text{若} a_j^i = 0 \end{cases} \quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

拓展定理

- 定理：设在公式Q中出现n个命题变元，以下条件是等价的。
  - (1)Q是永真式。
  - (2)Q的主析取范式中包含了所有的极小项，即它是2^n个极小项的析取。
  - (3)Q的主合取范式中不包含任何极大项，即它是0个极大项的合取，也就是1。

拓展定理

- 定理：设在公式Q中出现n个命题变元，则以下条件是等价的。
  - (1)Q是永假式。
  - (2)Q的主合取范式中包含了所有的极大项，即它是2^n个极大项的合取。
  - (3)Q的主析取范式中不包含任何极小项，即它是0个极小项的析取，也就是0。

等值演算与范式

- 命题公式:Q的范式是Q '，R的范式是R ',
- 因为 Q⇔Q '， Q '⇔R '，R' ⇔R 。
- 所以Q⇔R

等值演算与范式

- $Q \Leftrightarrow R$
- 公式Q范式
- $A_1 := Q \Leftrightarrow Q_1$
- $A_2 := Q_1 \Leftrightarrow Q_2$
- ……
- $A_n := Q_{n-1} \Leftrightarrow Q_n$

- 公式R范式
- $A_1 := R \Leftrightarrow R_1$
- $A_2 := R_1 \Leftrightarrow R_2$
- ……
- $A_m := R_{m-1} \Leftrightarrow R_m$

- $Q \Leftrightarrow R$
- $A_1 := Q \Leftrightarrow Q_1$
- $A_2 := Q_1 \Leftrightarrow Q_2$
- ……
- $A_n := Q_{n-1} \Leftrightarrow Q_n$
- $A_{n+1} := Q_{\mathbf{n}} \Leftrightarrow R_{\mathbf{m}}$
- $A_{n+2} := R_m \Leftrightarrow R_{m-1}$
- ……
- $A_{n+m-1} := R_2 \Leftrightarrow R_1$
- $A_{n+m} := R_1 \Leftrightarrow R$
- $A_{n+m+1} := Q \Leftrightarrow R$

内容

§ 1.1 命题和联结词

§ 1.2 公式和真值赋值

§ 1.3 等值演算

§ 1.4 对偶定理

§ 1.5 联结词的完全集

§ 1.6 范式

§ 1.7 逻辑推论

前情提要

- 公式取值，$v(Q)=?$
  - 若有真值赋值v使$v(Q)=1$，则称v满足Q
  - 若每个真值赋值都满足Q，则称Q为永真式
  - 若每个真值赋值都不满足Q，则称Q为不可满足式
  - 若至少有一个真值赋值满足Q，则称Q为可满足式

特点：这些都是对一个公式而言的！
如果我们拓展一下，对一个公式集合呢？

定义1.20

对v而言

- 设$\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$是公式集合:
- 若真值赋值v满足Γ中的每一个公式，则称v满足Γ,
- 若有真值赋值满足Γ，则称Γ是可满足的，
- 否则称Γ是不可满足的。

对Γ而言

$$\boxed{v\text{满足}\Gamma \Leftrightarrow v(A_1)=v(A_2)=\ldots=v(A_n)=1}$$

定义1.21

- 设R是公式，如果每个满足公式集合Γ的真值赋值都满足R，则称R是Γ的**逻辑推论**，记为$\Gamma \models R$，读作“Γ推出R”。若$\Gamma \models R$不成立，记作$\Gamma \not\models R$
  - 只要前提真，结论一定真
  - $\Gamma \models R \Leftrightarrow$如果 $v(\Gamma)=1$, 则$v(R)=1$
- 若 $\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$,则$\Gamma \models R$也记为$A_1, A_2, \ldots, A_n \models R$

定理1.11

设A是公式，则$\models A$当且仅当A是永真式

证明：

充分性：设$\models A$(即$\Phi \models A$)，取任意真值赋值v，因为空集Φ中没有公式，因此可以说使得空集Φ中所有公式都为真（根据定义），又$v(A)=1$，因此是永真式

必要性：设A是永真式，显然$\models A$

证毕

思路整理1：逻辑关系与逻辑运算

真值表			
A	B	A→B	A↔ B
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

- 逻辑关系与逻辑运算

$A \Leftrightarrow B$ “当且仅当” $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

$A \models B$ “当且仅当” $A \rightarrow B$ 是永真式。

定理1.13：

- 设Q，R是公式。$Q \Leftrightarrow R$当且仅当 $Q \models R$且$R \models Q$。
- 证明
  - $Q \Leftrightarrow R$
  - 当且仅当 $Q \leftrightarrow R$是永真式
  - 当且仅当 $Q \rightarrow R$和$R \rightarrow Q$都是永真式
  - 当且仅当 $Q \models R$且$R \models Q$
- 证毕