§15.5 隐函数的几何应用

平面曲线的切线与法线

设平面曲线的方程 $F(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x)$

切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

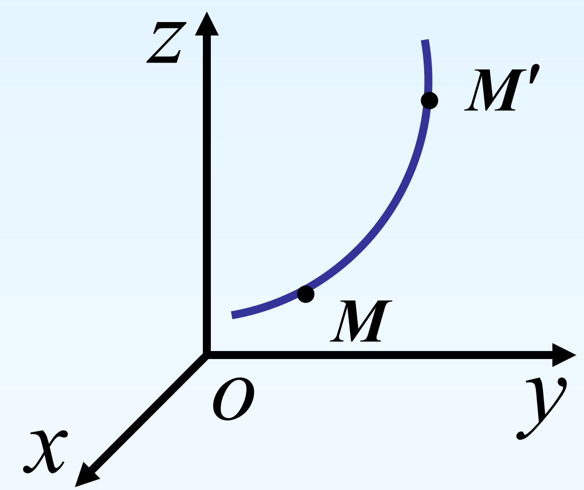
而 $f'(x)=-\dfrac{F_x}{F_y}$，所以

切线：$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

法线：$F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

空间曲线的切线与法平面

设空间曲线的方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ (1)



设 $M(x_0, y_0, z_0)$,对应于 $t = t_0$;

$M'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$

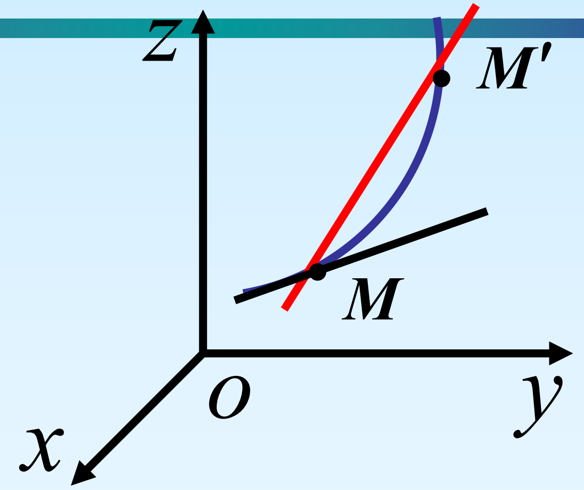
对应于 $t = t_0 + \Delta t$.

(1)式中的三个函数均在 $t = t_0$ 处可导.

且 $[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2 \neq 0.$

割线 MM' 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$



考察割线趋近于极限位置——切线的过程

上式分母同除以 Δt,

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

当$M' \to M$,即$\Delta t \to 0$时，曲线在M处的

切线方程: $$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

切向量：切线的方向向量称为曲线的切向量.

$$\vec{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$$

法平面：过M点且与切线垂直的平面.

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

例1 求曲线$\Gamma: x=\int_0^t e^u \cos u\,du$, $y=2\sin t+\cos t$, $z=1+e^{3t}$在$t=0$处的切线和法平面方程.

解 当$t=0$时， $x=0, y=1, z=2,$

$$x'=e^t\cos t,\ y'=2\cos t-\sin t,\ z'=3e^{3t},$$

$$\Rightarrow\ x'(0)=1,\quad y'(0)=2,\quad z'(0)=3,$$

切线方程 $$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3},$$

法平面方程 $$x+2(y-1)+3(z-2)=0,$$

即 $x+2y+3z-8=0.$

特殊地:

1.空间曲线方程为 $\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$,

在$M(x_0, y_0, z_0)$处,

切线方程为 $$\frac{x - x_0}{x'(z_0)} = \frac{y - y_0}{y'(z_0)} = \frac{z - z_0}{1},$$

法平面方程为

$$x'(z_0)(x - x_0) + y'(z_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

2.空间曲线方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0} \neq 0,\ \exists\, x=\varphi(z), y=\psi(z),\ \text{使得}$$

$x_0=\varphi(z_0), y_0=\psi(z_0)$, 且

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

切线方程为 $$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{dx}{dz}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{dy}{dz}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{1},$$

即： $$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}},$$

法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}(z-z_0)=0.$$

例 2　求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$，$x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解 1　直接利用公式;

解 2　将所给方程的两边对 x 求导并移项，得

$$\begin{cases} y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x \\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{y-z},$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)} = 0, \qquad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)} = -1,$$

由此得切向量 $\vec{T} = \{1, 0, -1\}$,

所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$,

法平面方程为 $(x-1) + 0\cdot(y+2) - (z-1) = 0$,

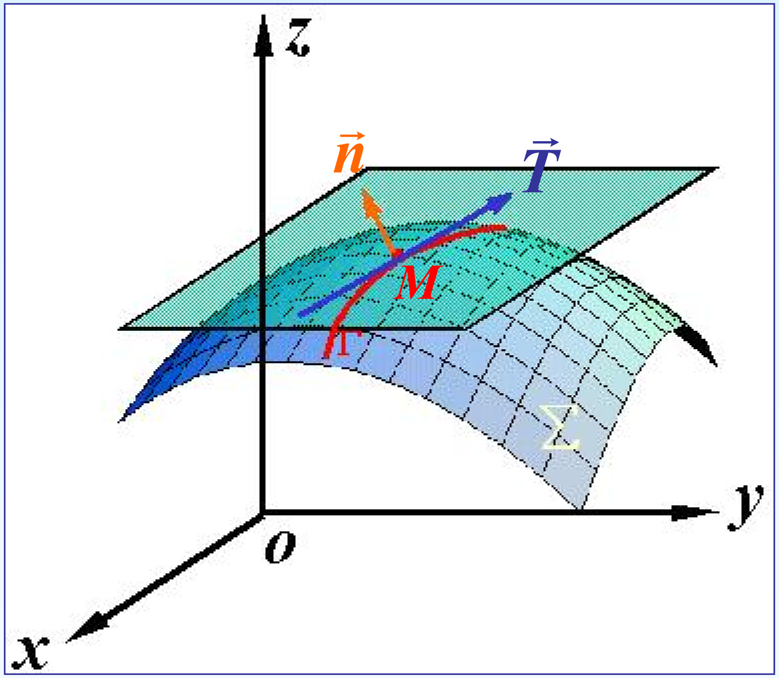
$$\Rightarrow \quad x - z = 0$$

曲面的切平面与法线

设曲面方程为

$$F(x,y,z)=0$$

在曲面上任取一条通过点M的曲线



$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

曲线在M处的切向量 $\vec{T}=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$,

由$F(x(t),y(t),z(t))=0$

$$F'_t(t_0)=F_x\,x'(t_0)+F_y\,y'(t_0)+F_z\,z'(t_0)=0$$

$$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

则$T\perp\vec{n}$,由Γ的任意性知,曲面上M点处

所有曲线的切线共面，称为曲面的切平面.

垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的**法向量**.

曲面在M处的法向量(Normal vector)即

$$\boxed{\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}}$$

切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

通过点$M(x_0,y_0,z_0)$而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线.

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

特殊地：空间曲面方程形为 $z = f(x, y)$

令 $F(x, y, z) = f(x, y) - z,$

曲面在M处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0,$$

曲面在M处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

若α、β、γ表示曲面的法向量的方向角，并假定法向量的方向是向上的，即使得它与z轴的正向所成的角γ是锐角，则法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

其中

$$f_x = f_x(x_0, y_0)$$

$$f_y = f_y(x_0, y_0)$$

若曲面方程为参数方程形式 $\Sigma:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$

若 $\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \neq 0$

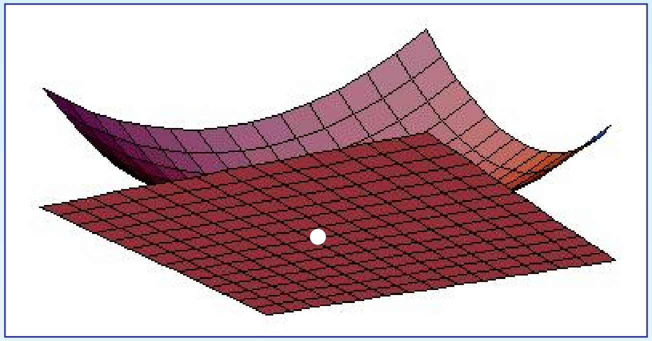
$x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0), z_0 = z(u_0,v_0)$

则曲面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\vec{n} = \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix}\right|_{(u_0,v_0)}$$

$$= \left(\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}, \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}, \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\right)$$

例 3 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.



解 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$

$$\vec{n}\Big|_{(2,1,4)} = \{2x, 2y, -1\}\Big|_{(2,1,4)} = \{4, 2, -1\},$$

切平面方程为 $4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0,$

$$\Rightarrow \quad 4x + 2y - z - 6 = 0,$$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-1}.$

例 4 求曲面$z-e^z+2xy=3$在点$(1,2,0)$处的切平面及法线方程.

解 令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$,

$$F'_x\big|_{(1,2,0)}=2y\big|_{(1,2,0)}=4,\quad F'_y\big|_{(1,2,0)}=2x\big|_{(1,2,0)}=2,$$

$$F'_z\big|_{(1,2,0)}=1-e^z\big|_{(1,2,0)}=0,$$

切平面方程 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0,$

$$\Rightarrow\quad 2x+y-4=0,$$

法线方程 $$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

例 5 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面方程.

解 设 (x_0,y_0,z_0) 为曲面上的切点,

切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$$

依题意，切平面方程平行于已知平面，得

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6}, \Rightarrow 2x_0=y_0=z_0.$$

因为(x_0, y_0, z_0)是曲面上的切点，

满足方程 $\therefore\ x_0 = \pm 1,$

所求切点为 $(1,2,2),\ (-1,-2,-2),$

切平面方程(1)

$$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=21$$

切平面方程(2)

$$-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad x+4y+6z=-21$$

例 6 证明曲面 $F(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0(a,b,c$是常数$)$

上任意点处的切平面都过定点(a,b,c).

证 设(x_0,y_0,z_0) 为曲面上的任一点,

切平面方程为

$$F_1'\frac{(x-x_0)}{z_0-c}+F_2'\frac{(y-y_0)}{z_0-c}$$

$$-\left[F_1'\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}+F_2'\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}\right](z-z_0)=0$$

将定点代入平面方程即得.