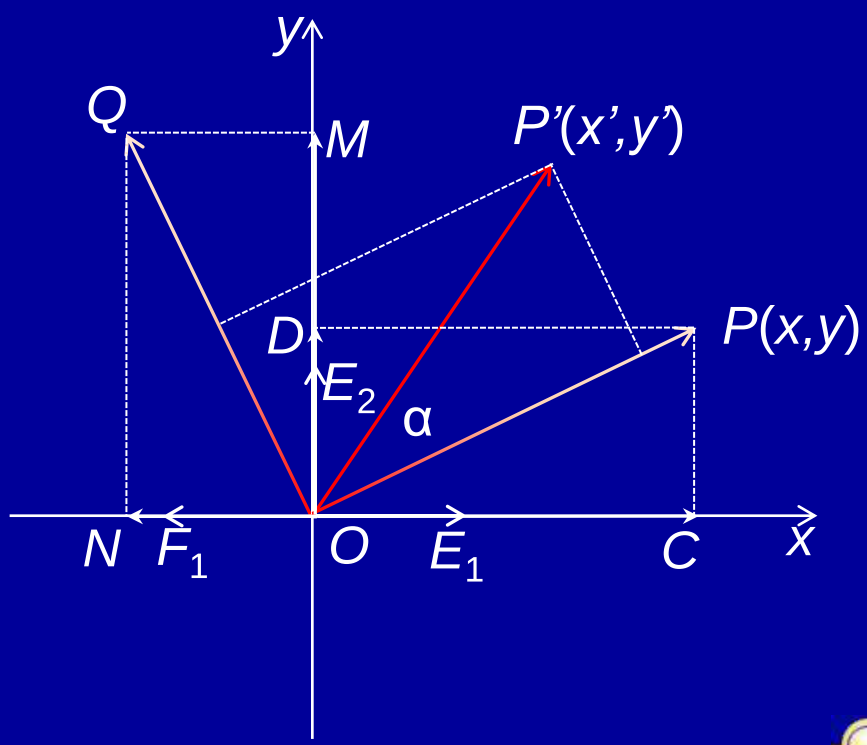
4.2 矩阵乘法与线性变换

例 1 平面上建立了直角坐标系, 将平面上每个点 P 绕原点O 旋转角α到P'。试写出由点P的坐标(x,y)计算P'的坐标(x',y')的函数关系式。



解：将OP旋转90°得到OQ.则

$$\overrightarrow{OP'} = (\cos\alpha)\overrightarrow{OP} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OQ}$$

只要求出OQ的坐标即可求出OP'坐标。而OQ的坐标为$(-y,x)$,于是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\cos\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (\sin\alpha)\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AX$$

定义4.2.1 设U，V是数域F上两个线性空间。如果存在映射$\varphi: U \to V$，满足条件

(1) $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$，$\forall \alpha, \beta \in U$

(2) $\varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha)$，$\forall \alpha \in U$，$\lambda \in F$

称φ是U到V的线性映射。当U=V称φ是U上的线性变换。

设$A: U \to V$是线性映射。则

(1) A将零向量$\mathbf{0}_U \in U$变到零向量$\mathbf{0}_V \in V$，将$\boldsymbol{a}$的负向量$-\boldsymbol{a}$变到$A(a)$的负向量：

$$A(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V \quad A(-\boldsymbol{a}) = -A(\boldsymbol{a})$$

(2) A保持线性组合关系式不变：

$$A(\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_k a_k)=\lambda_1 A(a_1)+\ldots+\lambda_k A(a_k).$$

(3) 如果$a_1,\ldots,a_k$线性相关，则

$A(a_1),\ldots, A(a_k)$线性相关.

(4) 如果 $A(a_1),\ldots, A(a_k)$线性无关，则

$a_1,\ldots,a_k$线性无关.

例 2　已知

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

(1)求AB.

(2) n是任意正整数，求A^n

解:

$$(1)AB=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

$$(2)A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$$

2 线性变换的矩阵

例 3 是否存在$\mathbf{R}^{2\times 1}$上的线性变换σ将$e_1=(1,0)^T$, $e_2=(0,1)^T$分别映到$(2,3)^T$, $(4,5)^T$?若存在，是否唯一

解：存在且唯一，$\sigma: X \mapsto AX$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

引理4.2.1 从$F^{n\times 1}$到$F^{n\times 1}$的线性变换$\sigma: X \mapsto AX$的矩阵$A=(A_1,\ldots,A_n)$的各列 $A_j=\sigma(e_j)$,分别等于各个自然基向量$e_j\,(1\le j\le n)$在映射σ下的像。

3 线性映射的矩阵

定义 设U,V是数域F上有限维线性空间，分别取U的基$M1=\{\boldsymbol{\alpha}1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}n\}$ 和V的基$M2=\{\boldsymbol{\beta}1,\ldots,\boldsymbol{\beta}m\}$。对每个$1\le j\le n$，设$U$的基向量$\boldsymbol{\alpha}_j$在 σ下的像 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_j)$ 在基M2下的坐标为

$$A_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in F^{m\times 1}$$

A是依次以$A_1,A_2,\ldots,A_n$为各列组成的矩阵，即

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)A$$

则A称为**σ在基M_1和M_2下的矩阵**。 **当U=V时**

取**M**1=**M**2={**α**1,…,**α**n},此时称满足条件

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)A$$

的矩阵**A为线性变换**σ**在基M1下的矩阵**。

注：将U中的每个向量**α**用它在**M**1下的坐标X代表,将V中每个向量**β**由它在基**M**2下的坐标Y代表，这样就将U用$F^{n\times 1}$代表、将V用$F^{m\times 1}$代表，则σ被表示为σ: $F^{n\times 1} \to F^{m\times 1}$ ($X \mapsto AX$)

σ的作用通过它的矩阵A的左乘来实现。这里将$X \mapsto AX$ 称为 σ**在基M1,M2下的坐标表示**。

定理4.2.1 设τ:U→V是数域F上有限维线性空间的映射。取U的基M_1将U的向量用坐标表示,取V的基M_2将V的向量用坐标表示。τ引起的坐标间的映射通过矩阵A的左乘实现： $\tau: X \to AX$

则τ是线性映射，A是τ在基M_1，M_2下的矩阵。

例4 设$V = F^{2\times 2}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^{2\times 2}$. 定义$A$在V中的左乘

变换 A_L：V→V，$X \to AX$。取基

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求A_L在基M下的矩阵。

解:

$$\mathcal{A}_L(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21}$$

在M下的坐标为 $(a,0,c,0)^T$。类似地有:

$$\mathcal{A}_L(E_{12}) = aE_{12} + cE_{22}, \mathcal{A}_L(E_{21}) = bE_{11} + dE_{21},$$

$\mathcal{A}_L(E_{22}) = bE_{12} + dE_{22}$，坐标分别为 $(0,a,0,c)^T$,

$(b,0,d,0)^T, (0,b,0,d)^T$.

因此A_L在基M下的矩阵为: $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$

4.3 逆矩阵

定义 对于矩阵 $A \in F^{m\times n}$，如果存在矩阵 $B \in F^{n\times m}$ 满足条件 $AB = I_{(m)}$ 且 $BA = I_{(n)}$ 就称 A **可逆**，并且称B是A的逆。

命题 假如 A 可逆，那么A 的逆 B 是唯一的。

A 可逆时，记它的逆为 A^{-1}. 由 $AA^{-1} = I, A^{-1}A = I$ 知

引理 A 可逆 $\Rightarrow A^{-1}$ 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A.$

例1　求2阶方阵X满足条件 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解　记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

法一　将X写成 $X=(X_1, X_2)$, 将B写成 $B=(B_1, B_2)$,

则 $A(X_1, X_2) = (B_1, B_2) \Rightarrow (AX_1, AX_2) = (B_1, B_2)$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

解这两个方程组，得

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

法二　将 X,B 分别按行分块写成 $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$,
则原方程 $AX=B$ 成为

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, 将 X_1, X_2, B_1, B_2 看成普通数，用矩阵消元法：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & B_1 \\ 3 & 5 & B_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & B_1 \\ 0 & -1 & -3B_1+B_2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2(1)+(1),-1(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5B_1+2B_2 \\ 0 & 1 & 3B_1-B_2 \end{pmatrix},$$ 于是

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5B_1+2B_2 \\ 3B_1-B_2 \end{pmatrix}.$$

矩阵等式 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5B_1+2B_2 \\ 3B_1-B_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$

将 $B_1=(1,0), B_2=(0,1)$ 代入上式得到原方程的解

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

法三　直接将 B_1, B_2 的具体数值代入后进行消元：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{-3(1)+(2)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2(2)+(1),-1(2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\quad X=\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

例2 求方阵A的逆，

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

解：根据A的几何意义，可以得

$$A=\begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

例3 求n阶方阵P的逆，

$$P=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \\ 0 & 1 & \\ & & I_{(n-2)} \end{pmatrix}$$

解：令A是任意$n\times m$矩阵，则

$$\sigma: A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \to PA=\begin{pmatrix} \alpha_1+\lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$ 取 $$Q=\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \\ 0 & 1 & \\ & & I_{(n-2)} \end{pmatrix}$$

$$\tau: A \to QA = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \lambda\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

于是取$A=I$就有$PQ=QP=I$，即

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \\ 0 & 1 & \\ & & I_{(n-2)} \end{pmatrix}$$

矩阵可逆的条件

引理 A 可逆 $\Rightarrow A$ 的各列线性无关。

推论 A 可逆 $\Rightarrow A$ 是方阵，且行列式$|A|\neq 0.$

证明 设 $A\in F^{m\times n}$ 可逆。则A 的各列是 n个线性无关的 m 维向量，因此 $n\leq m.$

又 $A^{-1}\in F^{n\times m}$ 也可逆，则 $m\leq n.$ 因而$n=m.$

可知方阵 A 的行列式 $|A|\neq 0.$

定义 行列式等于0的方阵称为**奇异方阵**.

例4 当 $|A| \neq 0$，根据行列式的性质可知

$$a_{k1}A_{j1} + a_{k2}A_{j2} + \cdots + a_{kn}A_{jn} = \begin{cases} |A| & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

令

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A^* 的第 (j,i) 元 A_{ij} 为 A 中第 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式。

A^* 称为 A 的伴随矩阵。

易验证

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| I_{(n)}$$

于是得到

$$A \cdot \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} A^* \cdot A = I.$$

因此有下面的定理。

引理4.3.3 A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 是方阵且 $|A| \neq 0.$

当 $|A| \neq 0$ 时，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*.$

此时，线性方程组 $AX=\beta$ 有唯一解 $X=A^{-1}\beta$.

逆矩阵的算法

由于 A^* 的计算量比较大，尤其 n 较大时。因此可用解矩阵 $AX=I$ 求出 X，则 $X=A^{-1}$.

具体做法如下：

对行列式不为0的方阵 $A\in F^{n\times n}$ 及任意 $B\in F^{n\times m}$，求矩阵方程 $AX=B$ 的解 X. 将此方程写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \qquad (4.3.5)$$

将行向量 $X_i, B_i(1\le i\le n)$ 都看作“数”，把(4.3.5)当作 n 元一次方程组来解，用“增广矩阵”

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & B_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & B_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & B_n \end{pmatrix} \qquad (4.3.6)$$

来代表方程组(4.3.5). 由于 $|A|\neq 0$, 一定可将 A 经过一系列初等行变换变成单位矩阵，$\widetilde{A}$ 变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & D_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & D_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & D_n \end{pmatrix}$$ 于是, $$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}.$$

算法4.3.1 (求矩阵方程$AX=I$的解)

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (I \mid A^{-1})$$

例5　求方阵A的逆:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}.$$

解: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{-(1)+(2),-(1)+(3)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{-(2)+(1),-3(2)+(3)}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -3 & 4 & -1\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

例6 求方阵 A 的逆:

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 $ad-bc\neq 0$.

解: $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(2) $$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

解: 解法1

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{-(i)+(i-1),i=2,3,\ldots,n}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & \cdots & \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix},\quad
A^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -1 & & \\
 & 1 & \ddots & \\
 & & \ddots & -1 \\
 & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

解法2 记

$$N=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

则 $N^n=O, A=I+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$. 由

$$(I-N)A=(I-N)(I+N+N^2+\cdots+N^{n-1})=I-N^n=I$$

知

$$A^{-1}=I-N=\begin{pmatrix}1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

(3) n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解法1

按照(2)中解法1：第一步将其余各行加到第1行；第二步第1行乘以 $\dfrac{1}{n-1}$；第三步其余各行减去第1行；第四步其余各行加到第1行，然后第2至n行乘 -1, 便得 A^{-1}.

解法2　令

$$N = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$N^2 = nN, A = -I + N.$$

对任意常数 λ, 有

$$(-I+N)(-I+\lambda N)=I-(\lambda+1)N+\lambda N^2$$

$$=I-(\lambda+1)N+\lambda nN=I+(n\lambda-\lambda-1)N$$

选取 λ 使 $n\lambda-\lambda-1=0$，则 $(-I+N)(-I+\lambda N)=I.$

$$n\lambda-\lambda-1=0 \Leftrightarrow (n-1)\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{n-1}$$

因此，

$$A^{-1}=-I+\frac{1}{n-1}N$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{n-2}{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(4)\quad n\text{阶方阵}A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{取}N=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}\text{则}N^k=\begin{pmatrix} & I_{(n-k)} \\ O_{(k)} & \end{pmatrix}(\forall 1\le k\le n-1),$$

$N^n = O$.我们有$A = I + N$.由

$$(I+N)(I-N+N^2-\cdots+(-1)^{n-1}N^{n-1}) = I-(-N)^n = I$$

知$A^{-1} = I-N+N^2-\cdots+(-1)^{n-1}N^{n-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

例6 (1) $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},$ 求 X,Y 使 $AX=B, YA=B.$

解法1

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$Y=BA^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -22\\ 5 & -8\end{pmatrix}$$

解法2

$$(A,B)=\begin{pmatrix}2&5&4&-1\\1&3&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{两行互换}}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\2&5&4&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2(1)+(2)}\begin{pmatrix}1&3&2&1\\0&-1&0&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{3(2)+(1),-1(2)}\begin{pmatrix}1&0&2&-8\\0&1&0&3\end{pmatrix}$$

因此 $X=\begin{pmatrix}2&-8\\0&3\end{pmatrix}.$ 另外, 方程 $YA=B$ 两边转置, 化为 $A^TY^T=B^T$ 来解, 得

$$Y^T=\begin{pmatrix}13&5\\-22&-8\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}13&-22\\5&-8\end{pmatrix}.$$

$$(2)\, X\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

解:

$$(A^T, B^T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, X = Y^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

可逆矩阵的性质

性质1　A 可逆 $\Rightarrow$ A 的逆 A^{-1} 也逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A.$

性质2　n 阶方阵 A,B 可逆 $\Rightarrow$ 它们的乘积 AB 可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

一般地，若 $A_1,A_2,\ldots,A_k$ 可逆，则它们的乘积可逆，且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

性质3　设 $0\neq\lambda\in F$，A 可逆，则 $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}.$

性质4　设 A 可逆，则它的转置 A^T 可逆，且

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T.$$

性质5　设 m 阶方阵 A 与 n 阶方阵 B 可逆，则准对角线 $\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix}$ 可逆，且 $\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1}\end{pmatrix}.$

例7 设$AX=b$是n个方程组成的n元方程组，系数行列式$\Delta=|A|\neq 0$。求唯一解X的公式。

解： $\because \Delta=|A|\neq 0 \therefore A$可逆，$X=A^{-1}b$.而 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}A^*b=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+\cdots+b_nA_{n1} \\ \vdots \\ b_1A_{1n}+\cdots+b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x_i=\frac{1}{|A|}(b_1A_{1i}+\cdots+b_nA_{ni}),$$

$$b_1A_{1i}+\cdots+b_nA_{ni}=\det(\alpha_1,\cdots,a_{i-1},b,\alpha_{i+1},\cdots,a_n)=\Delta_i$$

$$X=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right)^T$$

例8　设$S\in F^{m\times n}, A\in F^{m\times m}, B\in F^{n\times n}$,且 A,B 可逆。

(1)　求证：$\begin{pmatrix} I & S \\ O & I \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} I & O \\ S & I \end{pmatrix}$可逆, 求它们的逆。

(2)　求证：$\begin{pmatrix} A & S \\ O & B \end{pmatrix}$ 可逆并求它的逆。

证明 (1)注意

$$\begin{pmatrix} I & S \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & S_1 \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & S+S_1 \\ O & I \end{pmatrix}$$

对任意$S_1\in F^{m\times n}$ 成立。特别地，取$S_1=-S$ 可得

$$\begin{pmatrix} I & S \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -S \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -S \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & S \\ O & I \end{pmatrix}=I$$

因此

$$\begin{pmatrix} I & S \\ O & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -S \\ O & I \end{pmatrix}.$$

类似地

$$\begin{pmatrix} I & O \\ S & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & O \\ -S & I \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & S \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}S \\ O & I \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{pmatrix} A & S \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & A^{-1}S \\ O & I \end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix} A & S \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}S \\ O & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -A^{-1}S \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}^{-1} .$$