§2-2 分部积分法

问题 $\int xe^x dx = ?$

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$可导,

$(uv)' = u'v + uv'$, $\boxed{uv' = (uv)' - u'v,}$

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx,$$

分部积分公式

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

定理2.2 设函数$u(x)$和$v(x)$可导,若$u'(x)v(x)$存在原函数,则$u(x)v'(x)$存在原函数,并有

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

或
$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

选u和v的总原则:

1. v易求;

2. $\int v\,du$比$\int u\,dv$易求.

例24 求积分 $\int x\cos x dx$.

解 (一) 令 $u=\cos x$, $xdx = d\left(\frac{x^2}{2}\right) = dv$

$$\int x\cos x dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x dx$$

显然，u, v' 选择不当，积分更难进行.

(二) 令 $u = x$, $\cos x dx = d(\sin x) = dv$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

例25 求积分$\int x^2e^x dx.$

解 $u=x^2,\qquad e^x dx=de^x=dv,$

$$\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\int xe^x dx$$

（再次使用分部积分法）$u=x,\ e^x dx=dv$

$$=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$$

总结 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为u，使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例26 求积分 $\int x\arctan x dx.$

解 令 $u=\arctan x$， $xdx = d\dfrac{x^2}{2} = dv$

$$\int x\arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} d(\arctan x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

例27　求积分$\int x^3\ln x dx$.

解　$u=\ln x,\quad x^3dx=d\dfrac{x^4}{4}=dv,$

$$\int x^3\ln x dx=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

总结　若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

函数u的选取一般优先级：

反（三角函数)、对（数函数）、幂（函数）、三（角函数）、指（数函数),

即排列次序在前面的函 数优先取为 $u(x)$.

例28 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，求 $\int xf'(x)dx$.

解 $\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx$,

$\boxed{\text{而} \int f(x)dx = e^{-x^2} + C,}$

两边同时对 x 求导，$\because \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

$\boxed{f(x) = -2xe^{-x^2},}$

$$\therefore \int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

$$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

例29 求积分$\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$$

解

$\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \arctan x \, d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\, d(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

例30 求积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

造循环

例31 求积分$\int \sin(\ln x)dx$.

解 $\boxed{\int \sin(\ln x)dx}$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)dx}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

例32　求积分$\int e^x \sin x dx$.

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx}$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

$$= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx)$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$$

$$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

思考： 在接连几次应用分部积分公式时，应注意什么？

注意前后几次所选的u应为同类型函数.

例 $\int e^x \cos x dx$

第一次时若选 $u_1 = \cos x$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

第二次时仍应选 $u_2 = \sin x$

例33 求积分 $\int e^{\sqrt{x}}dx.$

解 令$u=\sqrt{x}$,则$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int ue^{u}du$

$$=2\int ude^{u}$$

$$=2ue^{u}-2\int e^{u}du$$

$$=2ue^{u}-2e^{u}+C$$

$$=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例34 求积分 $I_n=\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx.$

解

$$I_n=\frac{x}{(1+x^2)^n}-\int xd\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2n\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}dx$$

$$=\frac{x}{(1+x^2)^n}+2nI_n-2nI_{n+1}$$

$$\therefore I_{n+1}=\frac{x}{2n(1+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n$$

递推公式

由 $I_1=\arctan x+C$，可求出 I_n 的表达式.

例35 计算$\int \cos^n x dx$, $\int \sin^n x dx$, 其中$n \in N^*$.

解 $$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \, d(\sin x)$$

$$\therefore \int \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x dx - (n-1)\int \cos^n x dx$$

$$\boxed{\therefore \int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx}$$

递推法

类似可求得：

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.$$

思考 建立求解$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$的递推公式

提示：$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\int \frac{d\cot x}{\sin^{n-2} x}$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

思考　建立求解$I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$的递推公式

提示: $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\int\frac{d\cot x}{\sin^{n-2} x}$

$$=-\frac{\cot x}{\sin^{n-2} x}+\int\cot x d\frac{1}{\sin^{n-2} x}$$

$$=-\frac{\cot x}{\sin^{n-2} x}-(n-2)\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$=-\frac{\cot x}{\sin^{n-2} x}-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2}.$$

$$I_n=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cot x}{\sin^{n-2} x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

作业:

习题6.2

1(单数), 2(单数), 3,

4(1,3,6,10,11,13,16,18), 5