第十八章　曲面积分

§18.1　第一型曲面积分

第一型曲面积分的定义

定义 1. 1 设Σ是可求面积的曲面，函数 $f(x,y,z)$ 在Σ上有界，用分割T把Σ分成n小曲面块S_i，以ΔS_i表示第i个小曲面块的面积，

$$分割T的细度\|T\|=\max_{1\le i\le n}\{S_i的直径\},$$

$$任取(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i,(i=1,2,\cdots,n),$$

若极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$存在, 且与分割 T

和 (ξ_i,η_i,ζ_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ 的取法无关,则称此

极限为$f(x,y,z)$在 Σ 上的 第一型曲面积分.

记为 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$,

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

密度函数为$\rho(x,y,z)$的曲面块的质量可以表示为:

$$m = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x,y,z)\mathrm{d}S\ .$$

性质

(1) $$\iint\limits_{\Sigma}[\lambda f(x,y,z)\pm\mu g(x,y,z)]\,dS$$
$$=\lambda\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,dS\pm\mu\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)\,dS;$$

(2) 若Σ可分为分片光滑的曲面Σ_1及Σ_2，则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\,dS+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\,dS.$$

特别，当 $f(x,y,z)\equiv 1$时，$\iint\limits_{\Sigma}dS=\Sigma$的面积.

(3) 若$f(x,y,z), g(x,y,z)$在曲面Σ上可积，且

$f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS \le \iint_{\Sigma} g(x,y,z)dS.$$

(4) 若$f(x,y,z)$在曲面Σ上可积, 则$|f(x,y,z)|$

也在Σ上可积，且

$$\left|\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS\right| \le \iint_{\Sigma} |f(x,y,z)| dS.$$

(5) 若$f(x,y,z)$在Σ上连续，则$\exists(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = f(\xi,\eta,\varsigma)S(\Sigma).$$

第一型曲面积分的计算

（1）曲面为直角坐标形式

$\sum: z = z(x, y), \ \ (x, y) \in D.$ D是分段光滑曲线围成的平面有界闭区域, z_x, z_y在D上连续, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy;$$

类似的

$$\Sigma: y = y(x,z), \quad (x,z) \in D$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS =$$

$$\iint_{D} f(x, y(x,z), z)\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\,dxdz;$$

$$\Sigma: \ x = x(y,z), \quad (y,z) \in D$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS =$$

$$\iint_{D} f(x(y,z), y, z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,dydz.$$

（2）曲面为参数形式 $\Sigma: \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$

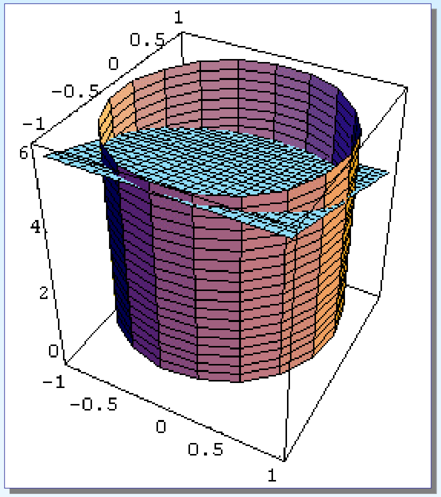
$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}$

例1 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中Σ为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分.

解 积分曲面Σ：$z=5-y$，



定义域：$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy,$$

故 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D}(x+y+5-y)dxdy=125\sqrt{2}\pi.$$

例2 计算$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$，其中Σ为内接于球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的八面体$|x|+|y|+|z|=a$表面.

解 利用对称性，$\oiint\limits_{\Sigma}=8\iint\limits_{\Sigma_1}$，

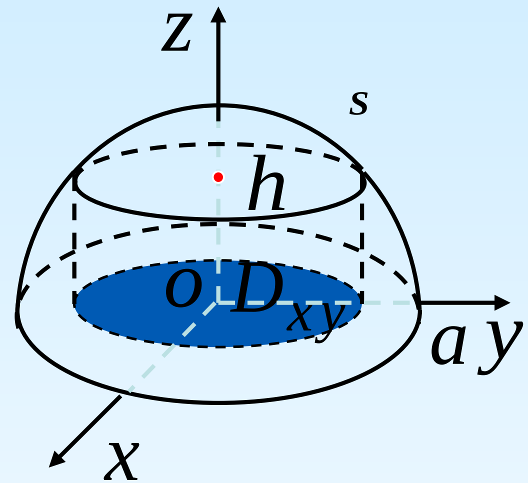
(其中Σ_1表示第一卦限部分曲面)

Σ_1： $x+y+z=a$，即$z=a-x-y$.

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$$

$$\text{原积分}=8\iint\limits_{D}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]\sqrt{3}dxdy=2\sqrt{3}a^4.$$

例3 计算 $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{z}$，其中$S$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.



解 $S: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

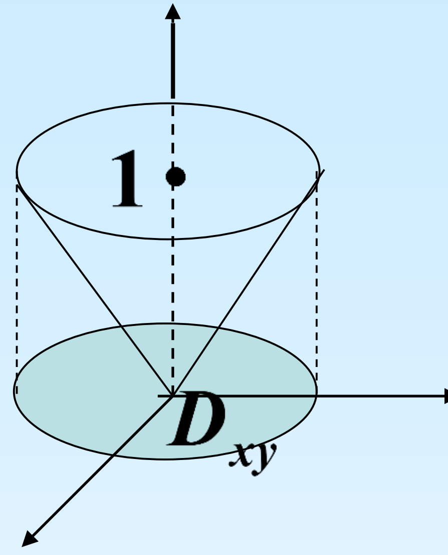
$$\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

例4 计算曲面积分 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，

其中S为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$

的边界曲面.



解 设 $S_1:\quad z=1,\ x^2+y^2\le 1$

$S_2:\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\le 1 \qquad D_{xy}:\quad x^2+y^2\le 1$

$$\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+0+0}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,\mathrm{d}r \quad =2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

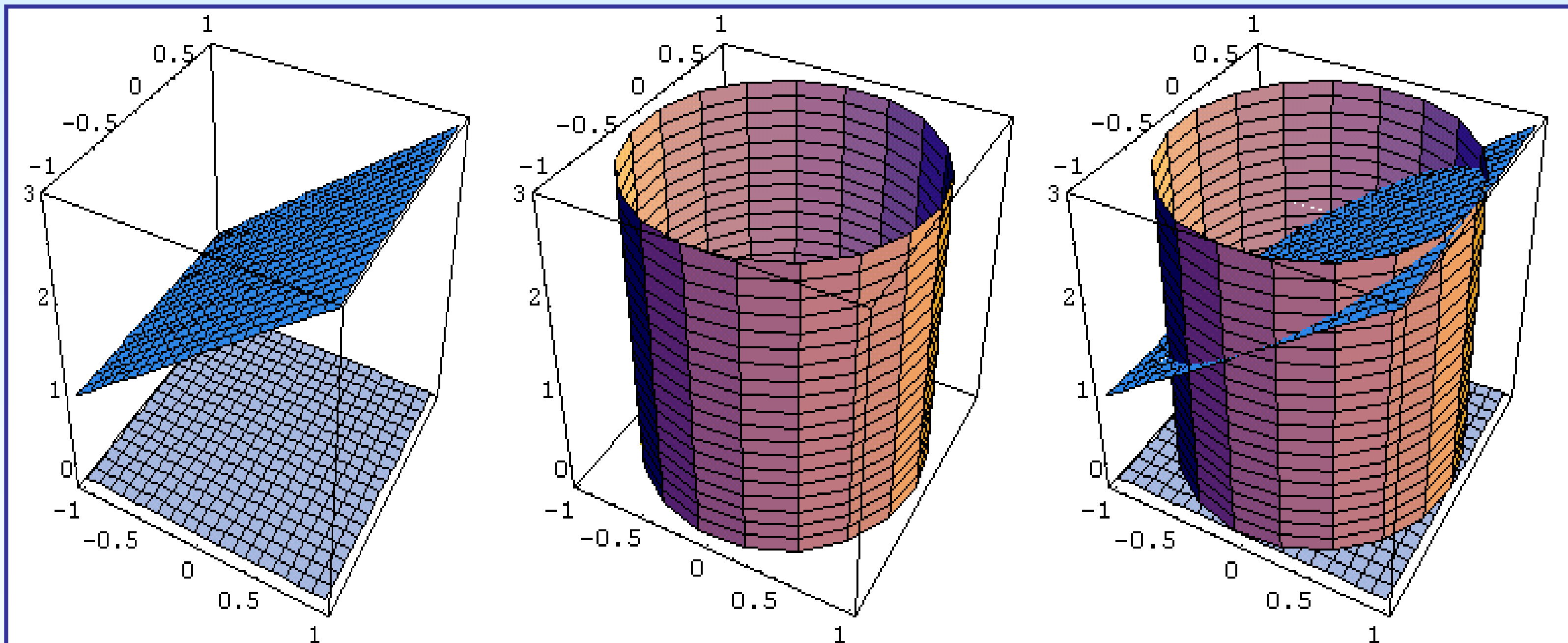
$$=\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

所以

$$\iint_S(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sqrt{2}=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$$

例5 计算$\oiint\limits_{\Sigma} x\,dS$，其中$\Sigma$是圆柱面 $x^2+y^2=1$，平面$z=x+2$及$z=0$所围成的空间立体的表面.



解 $\displaystyle\oiint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3}$

其中Σ_1: $z = 0$, Σ_2: $z = x + 2$,

Σ_3: $x^2 + y^2 = 1$. 投影域D_1: $x^2 + y^2 \le 1$

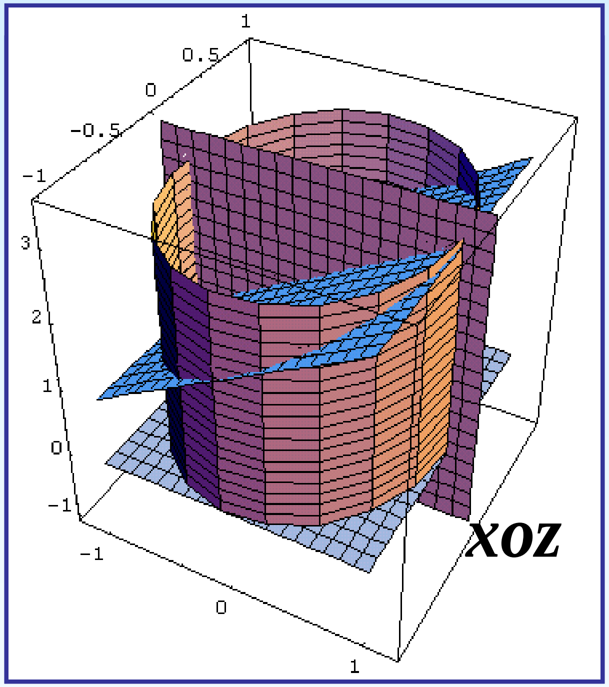
显然 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1} xdS = \iint_{D_1} xdxdy = 0$

$$\iint_{\Sigma_2} xdS = \iint_{D_1} x\sqrt{1+1}dxdy = 0,$$

讨论Σ_3时，将投影域选在xoz上.

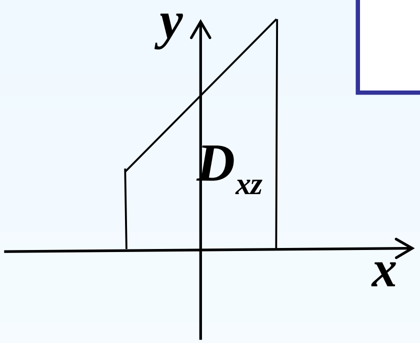
（注意：$y=\pm\sqrt{1-x^2}$分为左、右两片）

（左右两片投影相同）



$$\iint_{\Sigma_3} x\,dS=\iint_{\Sigma_{31}} x\,dS+\iint_{\Sigma_{32}} x\,dS$$

$$=2\iint_{D_{xz}} x\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$$



$$= 2\iint_{D_{xz}} x\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dxdz$$

$$= 2\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\int_{0}^{x+2}dz$$

$$= \pi,$$

$$\therefore \quad \oiint_{\Sigma} x dS = 0 + 0 + \pi = \pi.$$

例6 计算曲面积分 $J=\iint\limits_{S}(y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解法一 记 $S_1: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\le a^2;$

$S_2: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\le a^2.$

根据计算公式，并使用极坐标变换, 可得

$$J=\iint\limits_{S_1}(y^2+z^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_2}(y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\frac{a(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2a\int_0^a \mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{a^2 - r^2\cos^2\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a\int_0^a \frac{2a^2 - r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\,\mathrm{d}r$$

$$= \pi a\int_0^{a^2}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - t}} + \sqrt{a^2 - t}\right)\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\pi a^4.$$

解法二 S 的参数方程为

$$x = a\sin\varphi\cos\theta, y = a\sin\varphi\sin\theta, z = a\cos\varphi,$$

$$(\varphi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi].$$

则 $E = a^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + a^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + a^2\sin^2\varphi = a^2,$

$$F = -a^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta$$

$$+ a^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta = 0\,,$$

$$G = a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta = a^2\sin^2\varphi\,,$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{a^4\sin^2\varphi} = a^2\sin\varphi;$$

$$J = \iint_D (a^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + a^2\cos^2\varphi)\cdot a^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= a^4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}(\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2a^4\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\pi a^4.$$

解法三

因为 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S y^2\mathrm{d}S,\ \iint\limits_S x^2\mathrm{d}S=\iint\limits_S z^2\mathrm{d}S.$

所以 $\iint\limits_S (y^2+z^2)\mathrm{d}S=\dfrac{2}{3}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$

$$=\frac{2}{3}a^2\iint\limits_S \mathrm{d}S=\frac{2}{3}a^2\cdot\sigma(S)=\frac{8}{3}\pi a^4.$$

例7 求半径为 R 的均匀上半球壳 Σ 的重心.

解 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, (x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知重心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$,而

$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi R^3$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=2\pi R^2$$ 所以 $\bar{z}=\dfrac{R}{2}$,重心坐标为 $(0,0,\dfrac{R}{2})$.

也可用球面的参数方程形式来计算

$$x = R\sin\varphi\cos\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\varphi,$$

$$(\varphi,\theta) \in [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,2\pi].$$

$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

$$\overline{z} = \frac{\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S} = \frac{R^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi}{2\pi R^2} = \frac{\pi R^3}{2\pi R^2} = \frac{R}{2}.$$

小结

1、第一型曲面积分的概念、性质;

2、第一型曲面积分的计算.