北京航空航天大学

2022－2023 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2023 年 06 月 15 日

一、 选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设$D: x^2+y^2\le ay\ (a>0)$, $f(x,y)$是D上的连续函数, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=($ $)$.

(A) $\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$ (B) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$ (D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

答案(B)

2. 设 $\vec{c}=8x\vec{i}+2y\vec{j}-z\vec{k}$，数量场$h(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则$div(h\vec{c})=($ $)$.

(A) $\dfrac{8x^2+2y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ (B) $\dfrac{8x^2+2y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}+9\ln(x^2+y^2+z^2)$

(C) $\dfrac{16x^2+4y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2}$ (D) $\dfrac{16x^2+4y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2}+9\ln(x^2+y^2+z^2)$

答案(D)

3.设曲线积分 $\int_L xf(y)\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 f 具有一阶连续的导数,且 $f(0)=0$,则$\int_{(0,0)}^{(1,2)} xf(y)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=($ $)$.

(A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

答案 (B)

4.已知球面$x^2+y^2+z^2=1$, Σ是上半球面, Σ_1是Σ位于第一卦限的部分，则 ( ).

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$ (B) $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$ (D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S$

答案(C)

5. 设Σ为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，取上侧，则以下结论**错误**的是 ( ).

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ (B) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ (D) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

答案：(C)

二、 **计算题（每小题 6 分，满分 30 分）**

1. 设定义在全空间R^3上的数量值函数$f(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，求$rot(grad\ f)$.

解析：$grad\ f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$，则

$$rot(grad\ f)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(f_{zy}-f_{yz}\right)\vec{i}+\left(f_{xz}-f_{zx}\right)\vec{j}+\left(f_{yx}-f_{xy}\right)\vec{k}$$

由于$f(x,y,z)$的所有二阶偏导数连续，故$rot(grad\ f)=(0,0,0)$.

2. 计算$\iint\limits_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是由直线$y=x,y=2x$和$y=2$所围成的有界闭区域.

解析：积分区域D是第一象限内的三角形区域. 若将D作为x型区域，则

$$\iint\limits_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2x}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2(x^2+y^2-x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x^3-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(-\frac{4}{3}x^3+3x^2-2x+\frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{13}{6}$$

若将D作为y型区域，则

$$\iint\limits_D(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{19}{24}y^3-\frac{3}{8}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{19}{6}-1=\frac{13}{6}$$

3. 计算$\iiint\limits_\Omega\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$：$\pi^2\le x^2+y^2+z^2\le 4\pi^2$.

解析：球坐标变换

$$\begin{cases}x=r\sin\phi\cos\theta\\ y=r\sin\phi\sin\theta \quad \pi\le r\le 2\pi,\ 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\\ z=r\cos\phi\end{cases}$$

于是

$$\iiint\limits_\Omega\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\phi\int_\pi^{2\pi}\frac{\cos r}{r^2}\cdot r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r=4\pi\int_\pi^{2\pi}\cos r\,\mathrm{d}r=0$$

4. 计算$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$是曲线$\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}, 0\le\theta\le\pi$，常数$a>0$.

解析：由参数方程，弧微元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(a(-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta)\right)^2+\left(a(\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta)\right)^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=a\theta\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=a\theta\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^\pi a^2\left((\cos\theta+\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta-\theta\cos\theta)^2\right)\cdot a\theta\mathrm{d}\theta$$
$$=a^3\int_0^\pi\left(1+\theta^2\right)\theta\mathrm{d}\theta=a^3\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^4}{4}\right)=\frac{a^3}{2}\pi^2+\frac{a^3}{4}\pi^4$$

5. 计算$\iint_\Sigma\left[4x^2+5y^2-\sin(xz^2)\right]\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$.

解析：$\iint_\Sigma\left[4x^2+5y^2-\sin(xz^2)\right]\mathrm{d}S=4\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S+5\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S-\iint_\Sigma\sin(xz^2)\mathrm{d}S$

由轮换对称性，$\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_\Sigma\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi$

而Σ关于坐标面Oyz对称, 且$\sin(-xz^2)=-\sin(xz^2)$, 所以$\iint_\Sigma\sin(xz^2)\mathrm{d}S=0$, 于是

$$\iint_\Sigma\left[4x^2+5y^2-\sin(xz^2)\right]\mathrm{d}S=9\cdot\frac{4\pi}{3}=12\pi$$

三、（10 分）

计算第二型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma[g(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2g(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[g(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$g(x,y,z)$为连续函数, Σ为平面$x-2y+3z=4$在第四卦限部分的上侧.

解法一：利用两类曲面积分之间的关系

$\because\Sigma$的法向量为$\vec{n}=\{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\}$, $\therefore\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$.

$$I=\iint_\Sigma\{\frac{1}{\sqrt{14}}[g(x,y,z)+x]-\frac{2}{\sqrt{14}}[2g(x,y,z)+y]+\frac{3}{\sqrt{14}}[g(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{14}}\iint_\Sigma(x-2y+3z)\mathrm{d}S=\frac{4}{\sqrt{14}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{14}{9}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{16}{3}.$$

解法二：利用向量点积法

$$\sum: z=\frac{1}{3}(4-x+2y),(-z_x,-z_y,1)=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1),\sum\text{的投影区域为}D$$

$$I=\iint_{\Sigma}\{[g(x,y,z)+x]\cdot\frac{1}{3}+[2g(x,y,z)+y]\cdot(-\frac{2}{3})+[g(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\frac{4}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\cdot4=\frac{16}{3}$$

四、（10 分）(利用 Green 公式)

计算曲线积分$I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$,其中$L: x^2+y^2=2$,顺时针方向.

解：因为$(x,y)\neq(0,0)$时,$P_y=Q_x=\frac{y^2-4x^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}$,所以积分与路径无关.

做椭圆曲线$L_1: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$,顺时针方向,$\varepsilon>0$充分小,使得椭圆包含在$L$所围的区域内,则原积分可化作

$$I=\int_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y(\text{利用Green公式}).$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D[(x+y)_x-(4x-y)_y]dxdy=-\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_D dxdy=-\frac{2}{\varepsilon^2}A(D)=-\pi.$$

注：最后的积分也可以直接计算

$$L_1:\begin{cases}x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t\\ y=\varepsilon\sin t\end{cases},\quad t:2\pi\to0,$$

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{2\pi}^{0}\left[(2\varepsilon\cos t-\varepsilon\sin t)\cdot(\frac{\varepsilon}{2}\cos t)'+(\frac{\varepsilon}{2}\cos t+\varepsilon\sin t)(\varepsilon\sin t)'\right]dt$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{2\pi}^{0}\frac{\varepsilon^2}{2}dt=-\pi$$

五、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$,其中$r=\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$,

Σ为长方体$V=\{(x,y,z):|x|\le1,|y|\le3,|z|\le3\}$的表面,并取外侧.

解：因为$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3(y-2)^2}{r^5},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3(z+2)^2}{r^5},$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$,因为$V$中有奇点$(0,2,-2)$,不能直接使用高斯公式.

挖去一个小球$V_1: x^2+(y-2)^2+(z+2)^2\le\varepsilon^2$,

ε充分小,使得$V_1\subset V$,且V_1的边界记为S_1,取外侧,记S与S_1所围区域为Ω,则

$$\iint\limits_{S-S_1}\frac{xdydz+(y-2)dzdx+(z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2})^3}=\iiint\limits_{\Omega}0dxdydz=0,$$

$$\iint\limits_{S}\frac{xdydz+(y-2)dzdx+(z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2})^3}=\iint\limits_{S_1}\frac{xdydz+(y-2)dzdx+(z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2})^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_1}xdydz+(y-2)dzdx+(z+2)dxdy=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{S_1}3dxdydz=\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi.$$

六 、(10 分)(利用 Stokes 公式)

计算曲线积分$\oint_{\Gamma}(2e^x+y^2-z^2)\mathrm{d}x+(y^2+z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2+4\ln z^2)\mathrm{d}z$,

其中Γ是平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$截立方体$:0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$的表面所得截痕,

从x轴的正向看向原点时取逆时针方向.

解:取Σ为平面的上侧被立方体所围成的部分,则其法向量的方向余弦

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3})$, 由 Stokes 公式

$$原式=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt3} & \dfrac{1}{\sqrt3} & \dfrac{1}{\sqrt3}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2e^x+y^2-z^2 & y^2-x^2+z^2 & x^2-y^2+4\ln z^2\end{vmatrix}dS$$

$$=-\frac{4}{\sqrt3}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=-\frac{4}{\sqrt3}\frac{3}{2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt3dxdy=-\frac{9}{2}.$$

解法二:曲面的法向量为$n=(1,1,1)$

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2e^x+y^2-z^2 & y^2-x^2+z^2 & x^2-y^2+4\ln z^2 \end{vmatrix}$$

$$=-2\iint_{\Sigma}(y+z)dydz+(x+z)dzdx+(x+y)dxdy$$

$$=-2\iint_{\Sigma}[(y+z)\cdot 1+(x+z)\cdot 1+(x+y)\cdot 1]dxdy$$

$$=-4\iint_{\Sigma}(x+y+z)\cdot dxdy=-4\cdot\frac{3}{2}\iint_{D}dxdy=-\frac{9}{2}.$$

七、（**10 分**）设φ,ψ有连续导数,曲线积分

$I=\int_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\psi(y)-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y$ 与路径无关,

(1)当 $\varphi(0)=0,\psi(0)=1$时,求$\varphi(y),\psi(y)$;

(2)设 L 是从 $O(0,0)$到 $N(\pi,\dfrac{\pi}{2})$的分段光滑曲线,计算 I .

解(1).由题设得$\dfrac{\partial}{\partial x}[x^2\psi(y)-2x\varphi(y)]=\dfrac{\partial}{\partial y}2[x\varphi(y)+\psi(y)]$,　即

$2x\psi(y)-2\varphi(y)=2x\varphi'(y)+2\psi'(y)$对任何$(x,y)$都成立,

令 $x=0$,　有$\varphi(y)+\psi'(y)=0$,代入上式得$\psi(y)=\varphi'(y)$,

$\therefore\varphi''(y)+\varphi(y)=0$,其通解为$\varphi(y)=C_1\cos y+C_2\sin y$,

由$\varphi(0)=0$及$\psi(0)=\varphi'(0)=1$,　解得　$C_1=0,C_2=1$.

$\therefore$　$\varphi(y)=\sin y$,　$\psi(y)=\varphi'(y)=\cos y$.

(2)取折线OMN为积分路线,其中$M(0,\dfrac{\pi}{2})$,

$$I=0+\int_0^{\pi}2[x\varphi(\frac{\pi}{2})+\psi(\frac{\pi}{2})]dx=\int_0^{\pi}2x(1+0)dx=\pi^2.$$