例1 设L为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长为$a$,求$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds$.

例2 求$I=\int_L (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$,

其中为由点$(a,0)$到点$(0,0)$的上半圆周

$x^2+y^2=ax$, $y>0$.

例3 设平面有向曲线 L 由连接点 $A(1,0)$ 与点 $B(0,1)$ 的直线段和上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上从$B(0,1)$ 到 $C(-1,0)$ 的弧段构成, 求$\int_L (x^2-y)dx+(x+e^y)dy$.

例4 计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$其中$L$是以点$(1,0)$为中心，$R$为半径的圆周$(R > 1)$取逆时针方向.

例5 计算$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$其中$L$是从点$A(-1,-1)$到点$B(\frac{1}{2},0)$再到点$C(0,1)$的折线.

例6 确定常数λ，使在右半平面$x > 0$上向量

$$\vec{A}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^{\lambda}\vec{i} - x^2(x^4 + y^2)^{\lambda}\vec{j}$$

为某个二阶偏导连续的二元函数$u(x, y)$的梯度，并求$u(x, y)$.

例7 设$Q(x,y)$在xoy平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xydx + Q(x,y)dy$与路径无关，且对任意t恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + Q(x,y)dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + Q(x,y)dy,$$

求$Q(x,y)$.

例8 选择常数a,b使得曲线积分

$$I = \int_L \frac{(ax^2 + 2xy + y^2)dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$$与路径无关，

并计算 $\int_{(1,1)}^{(5,5)} \frac{(ax^2 + 2xy + y^2)dx - (x^2 + 2xy + by^2)dy}{(x^2 + y^2)^2}$.

例9 已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\}$，$L$为$D$的正向边界，试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx \ge 2\pi^2$.（2003年考研题）

例10 设$f(x,y)\in C^2(D)$, D: $x^2+y^2\le 1$,且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$

求$\displaystyle\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$.

例11

假设L为逆时针方向的封闭光滑曲线, D为L所围区域, u具有连续的二阶偏导数, $\vec{n}$为L外法线的单位向量, 证明

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=-\iint_D u\,\Delta u\,dxdy+\oint_L u\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds.$$

例12

计算曲线积分$\oint_C (x-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$其中$C$是曲线

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$从$z$轴正向看去，$C$的方向是顺时针方向