北京航空航天大学

2017－2018 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ）》

(A 卷)

班号 ___________ 学号__________ 姓名___________

主讲教师_________ 考场__________ 成绩___________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2018 年 01 月 23 日

一、 选择题（每题 4 分，满 20 分）

1. 下列命题中正确的是 （ B ）

A. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界，则 $f(x)$在$[a,b]$上必可积；

B. 若 $f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$|f(x)|$在区间$[a,b]$上也可积 ；

C. 若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 也收敛；

D. 若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx$ 发散.

2. 设 $f(x)$满足等式 $f(x)+\sin x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=$（ B ）

A. $\dfrac{2}{2-\pi}$; B. $\dfrac{2}{\pi-2}$; C. $\dfrac{\pi-2}{2}$; D. $\dfrac{\pi-1}{2}$.

3. 设函数 $f(x)$ 可导，则下列说法中正确的是（ B ）

（1） $\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$; （2） $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$;

（3） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{x^2} f(t)dt\right)=f(x^2)$; （4） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{b} f(x)dx\right)=0$.

A. (1)(3); B.(2)(4); C.(1)(4); D.(2)(3) .

4. 下列广义积分中，发散的是（ C ）

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}dx$; B. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1+\cos x}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

C. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$; D. $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

5. 曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt, 0\le x\le\pi$ 的弧长为（ D ）

A. $\sqrt{2}$; B. 2; C. $1+\sqrt{2}$; D. 4.

二、 计算题（每题 6 分，满分 30 分）

1. $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx$

解：$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx=\int\frac{(x-3)+8}{(x-3)^2+4}dx=\int\frac{x-3}{(x-3)^2+4}dx+8\int\frac{1}{(x-3)^2+4}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-3)^2+4}d[(x-3)^2+4]+8\int\frac{1}{(x-3)^2+4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)+C.$$

建议：拆成两项 3 分，积分计算各 3 分。

2. $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(x+3)^2}dx$

$$-\int_0^1\ln(1+x)d\frac{1}{x+3}=-\frac{\ln(1+x)}{x+3}|_0^1-\int_0^1\frac{1}{x+3}d\ln$$

解 原式$==-\frac{\ln 2}{4}+\int_0^1\frac{1}{(x+3)(1+x)}dx=-\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+3}dx$

$$=-\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{3}{4}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3$$

建议：分部 2 分，积分计算各 4 分。

3. $\int_{-3}^{3}(x^{2017}\arctan^2 x+2018)\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

解 由对称性：$\int_{-3}^{3}x^{2017}\arctan^2 x\,\mathrm{d}x=0$

原式 $=2018\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=2018\times\frac{9}{2}\pi=9081\pi.$

（其中$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\pi$ 可以看做圆心在原点，半径为 3 的上半圆的面积）

建议：对称性 3 分，剩下计算 3 分。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\sin x}^{x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{x\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\int_{\sin x}^{x}\sin t^2\,\mathrm{d}t)'}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2-\sin(\sin x)^2\cos x}{2x}$$

解　原式$==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{2x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)^2\cos x}{2x}$

$$=0-\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{2x}=0$$

建议：等价代换 2 分，变上，下限求导 3 分，结果 1 分。

5. 计算瑕积分 $\int_0^2\dfrac{1}{\sqrt{|1-x|}}dx.$

解　$x=1$是瑕点

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon_1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0+}\int_{1+\varepsilon_2}^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}(-2\sqrt{1-x})|_0^{1-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0+}(2\sqrt{x-1})|\int_{1+\varepsilon_2}^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}(-2\sqrt{1-x})|_0^{1-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0+}(2\sqrt{x-1})|_0^2=4.$$

三、　证明题（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x,$ 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，

使得 $\xi f'(\xi)=-f(\xi).$

证明：　构造辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微。且

$$F(1)=f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x=\eta f(\eta)=F(\eta),\ \eta\in[0,\frac{1}{2}]$$

因此存在 $\xi\in(\eta,1)\in(0,1)$，使得　$F(\xi)=0.$ 即：$\xi f'(\xi)=-f(\xi).$ 成立。

建议：辅助函数 2 分，中值定理 $F(1)=F(\eta)$ 5 分，　最后 3 分。

四、 （本题 10 分）

（1） 求二阶线性非齐次常微分方程 $y''-y'-2y=xe^{-x}$ 的通解；

（2） 求上述方程满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解 .

解： （1）特征方程：$\lambda^2-\lambda-2=0.$ -------2 分

容易求得两个特征根为：$\lambda_1=2, \lambda_2=-1.$ -------1 分

对应齐次方程的通解为：$\mathrm{Y}=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}.$ -------1 分

因为-1不是特征根，我们设非齐次方程的特解 $y^*=x(Ax+B)e^{-x}.$ -------1 分

求得

$$(y^*)'=(2Ax+B)e^{-x}-(Ax^2+Bx)e^{-x}=[(2A-B)x+B-Ax^2]e^{-x}.$$

$$(y^*)''=(Ax+B-4A)xe^{-x}+(2A-2B)e^{-x}.$$

带入方程，我们有 $(-6Ax+2A-3B)e^{-x}=xe^{-x}.$

所以，$A=-\frac{1}{6}, B=-\frac{1}{9}.$ -------2 分

于是非齐次方程的特解为 $y^*=y^*=-x(\frac{1}{6}x+\frac{1}{9})e^{-x}.$

非齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-x(\frac{1}{6}x+\frac{1}{9})e^{-x}.$ -------1 分

（2）$y(0)=0, y'(0)=1$ 带入非齐次方程的通解，得 $C_1=-\frac{10}{27}, C_2=\frac{10}{27},$

所以所求特解为：$y=-\frac{10}{27}e^{-x}+\frac{10}{27}e^{2x}-x(\frac{1}{6}x+\frac{1}{9})e^{-x}.$ -------2 分

五、　（本题 10 分）

将曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ 所围成的公共部分绕 x 轴旋转一周，求所得旋转体的体积和表面积.

解：两曲线交点为 $(0,0),(1,1)$ --2 分

以 x 作为积分变量，旋转体体积为 $\int_0^1 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx+\int_0^1 \pi\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$ ---------2 分

$$=\int_0^1 \pi x dx+\int_0^1 \pi\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right)dx=\frac{\pi}{2}+2\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^2}{2}$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{7}{6}\pi$$ - ---2 分

表面积为 $\int_0^1 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx+\int_0^1 2\pi\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx$ --------2 分

$$=\int_0^1 \pi\sqrt{4x+1}dx+\int_0^1 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)dx=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{4x+1}\right)^3\Big|_0^1+2\pi(\arcsin x-x)\Big|_0^1$$

$$=\frac{5\sqrt{5}-13}{6}\pi+\pi^2$$ --2 分

六、　（本题 10 分）

讨论无穷广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx\,(p>0)$ 的敛散性，若收敛，说明是绝对还是条件收敛．

解：

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right|\le M$

$\because \left|\frac{\cos 3x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right|\le\frac{M}{x^p}$，$\therefore$ 由比较判别法可知当 $p>1$ 时绝对收敛 ------2 分

当 $0<p\le 1$ 时，$\int_1^A\cos 3x dx$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界，$\frac{1}{x^p}$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$

$\therefore$ 由 $Dirichlet$ 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 3x}{x^p}dx$ 收敛

又 $\because \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 单调有界 $\therefore$ 由 Abel 判别法可知原积分收敛 ----------------3 分

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos 3x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right|dx\ge\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 3x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$$

------2 分

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos 6x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$$

当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\sim\frac{e}{x^p}$，$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$ 发散

由 $Dirichlet$ 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 6x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$ 收敛

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 3x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$ 发散，原级数条件收敛 -------------------------3 分

注意：　此题 $2<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<3$　或 $2<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e$ 均可以。

七、 （本题 10 分, 每题 5 分）

（1） 利用定积分定义，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}\right)$.

（2） 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$.

解：（1） $\dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{i}{n}\right)^3$ ---2 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{i}{n}\right)^3=\int_0^1 x^3dx$ ------------------------------2 分

$=\dfrac{1}{4}$ ---1 分

（2） $\forall\varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon}\cos^n x\mathrm{d}x+\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$ -----------------1 分

由第一积分中值定理，存在$\xi\in[\varepsilon,\dfrac{\pi}{2}]$,

使得$0\le\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\cos^n\xi\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\le\dfrac{\pi}{2}\cos^n\varepsilon$ -------------------------------------2 分

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=0$

$\left|\int_0^{\varepsilon}\cos^n x\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon$,

$\therefore$由ε的任意性可知$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon}\cos^n x\mathrm{d}x=0\ \therefore\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=0$ -----------------2 分

八、 附加题（本题 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=1,$ 证明：

（1） $(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x;$

（2） $(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x)^2+(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x)^2 \le b-a$ (k为实数).

证(1) 解法 1：

令$F(t)=\int_a^b\left(tf(x)+g(x)\right)^2dx=t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{dx}+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx$

--3 分

$\because$ 对任意实数$t,F(t)\ge 0$

$\therefore (2\int_a^b f(x)g(x))^2dx-4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\le 0,$----------------------------------2 分

即$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x;$

解法 2： 令 $F(x)=(\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t)^2-\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t;$---------------2 分

$F'(x)=2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t-g^2(x)\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$ --2 分

$=-\int_a^x (f(x)g(t)-f(t)g(x))^2\mathrm{d}t\le 0$

故此函数单调递减，$F(x)\le F(0)=0$---1 分

（2） $(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b \cos^2 kx\,dx$ -------------------------2 分

$(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b \sin^2 kx\,dx$ ----------------------------------2 分

$\therefore (\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x)^2+(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{d}x=(b-a)$--1 分