北京航空航天大学

2013－2014 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ） 》

(A 卷)

班号__________ 学号_________ 姓名________ 成绩________

题　号	一	二	三	四	五	六	总分
成　绩							
阅卷人							
校对人							

2014 年 01 月 13 日

一、 计算题（每题 5 分，满分 50 分）

1、$\int \frac{2}{3+\sqrt{x}}dx$

解：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt$，

$$\int \frac{2}{3+\sqrt{x}}dx=\int \frac{2}{3+t}\cdot 2tdt=4\int\left(1-\frac{3}{3+t}\right)dt$$
$$=4t-12\ln|3+t|+C$$
$$=4\sqrt{x}-12\ln\left|3+\sqrt{x}\right|+C$$

建议：根式带换 2 分，剩下计算每行各 1 分。

2、$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx$

解：$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}dx=\int \frac{x^2+(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\arctan x-\frac{1}{x}+C$

建议：被积函数拆成两项 3 分，结果 2 分。

3、$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}},(p>0)$.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right\}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}$$

建议：转化成定积分 4 分，结果 1 分。

4、$\int_{-2}^{2}(x^{2014}\sin x+\frac{1}{2})\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

解：由对称性：$\int_{-2}^{2}x^{2014}\sin x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=0$,

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$$

（其中 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=2\pi$ 可以看做圆心在原点，半径为 2 的上半圆的面积，

也可以利用公式 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$ 来计算。）

建议：对称性 2 分，剩下计算 3 分。

5、 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

解：

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(1+x^2)d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \ln(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$= 4\ln 2 - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx = 4\ln 2 - 2\sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4\ln 2 - 2$$

建议：分部积分 3 分，计算及结果 2 分。

6、 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

解法一：

$$\because \frac{1}{2}x^n \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n,\quad \forall x\in[0,1]$$

$$\therefore \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

$\therefore$由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$

注：利用$0 \le \frac{x^n}{1+x} \le x^n,\quad \forall x\in[0,1]$夹逼也可以.

建议：被积函数不等式放缩 2 分，夹逼定理及结果 3 分。

解法二：由第一积分中值定理，$\exists \xi_n \in (0,1)$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi_n}\cdot\frac{1}{n+1}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0.$ 建议：第一中值定理写对 3 分，其余 2 分。

7、设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3\int_0^1 f(t)\,dt$, 求 $f(x)$.

解：假设 $\int_0^1 f(t)\,dt = A$，等式两边在 $[0,1]$ 上积分，得

$A=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dt+A\int_0^1 x^3\,dt,$　　即 $A=\frac{\pi}{4}+\frac{A}{4}$, 从而 $A=\frac{\pi}{3}$.

代入已知等式得 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{3}x^3$.

建议：令 $\int_0^1 f(t)\,dt=A$ 1 分，等式两边积分 2 分，其余计算及结果 2 分。

8、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t\cos 2t dt}{\ln(1+x^4)}$

解： 由等价代换及洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t\cos 2t dt}{\ln(1+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t\cos 2t dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(2x^2)\cdot 2x}{4x^3}=\frac{1}{2}.$$

建议：变上限函数求导 2 分，其余计算及结果 3 分。

9、计算曲线的 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ 弧长（$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$）.

解： 记 $f(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$，则 $f'(x)=\sqrt{\cos x}$，曲线方程 $y=f(x),-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx=2\sqrt{2}\left[\sin\frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4$$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

建议：弧长公式写对 2 分，其余计算及结果 3 分。

10、计算瑕积分 $\int_0^1\ln x dx.$

解： $\int_0^1\ln x dx=\left[x\ln x\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx=-\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)-1=0-1=-1.$

建议：前两个等号各 2 分，结果 1 分。

二、（本题 15 分）

讨论无穷广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x dx\ (p>0)$ 的敛散性，若收敛，说明是绝对还是条件收敛.

解：由于 $|\int_1^A \sin x dx|\le 2,$ 当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x^p}\to 0,$ 所以由 Dinichlet 判别法知，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx \text{ 收敛。}$$ -------2 分

同理：$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}dx$ 收敛。 ----------1 分

又由于 $(1+\frac{1}{x})^x$ 单调有界（$2<(1+\frac{1}{x})^x\le e$），所以由 Abel 判别法得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x dx\ (p>0) \text{ 收敛。}$$ ------------2 分

（1） 当 $p>1$ 时，$|\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x|\le\frac{e}{x^p},$ -----------2 分

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{e}{x^p}dx$ 收敛， 所以由比较判别法，$\int_1^{+\infty}|\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x|dx$ 收敛，因此当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x dx$ 绝对收敛。 ---------3 分

（2）当 $0<p\le 1$ 时，由于 $|\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x|\ge\frac{2\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{x^p}(1-\cos 2x),$ -----2 分

且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}dx$ 收敛， ------1 分

所以 $\int_1^{+\infty}|\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x|dx$ 发散。

因此当 $0<p\le 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x dx$ 条件收敛。 --------------------------2 分

三、（本题 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且是单调函数，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增，对 $[a,b]$ 上的任意分割：

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b.$$ ------2 分

由于 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \le (f(b) - f(a)) \|\pi\|,$ -------3 分

因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$ ---------2 分

当 $\|\pi\| < \delta$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \le (f(b) - f(a)) \|\pi\| < \varepsilon,$$ -------------------3 分

因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

四、（本题 15 分）

设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x = 1$ 所围成图形的面积为 S_2，且 $a < 1$,

（1） 确定 a 的值，使得 $S_1 + S_2$ 达到最小，并求出最小值；

（2） 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1）

由 $\begin{cases} y = ax \\ y = x^2, \end{cases}$ 解出交点 $(0,0)$ 和 (a, a^2). -------1 分

所以

$$S_1 = \int_0^a (ax - x^2) dx = \frac{1}{6} a^3,$$

$$S_2 = \int_a^1 (x^2 - ax) dx = \frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.$$ ------3 分

因此 $|S_1 + S_2| = |\dfrac{a^3}{6} - \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{3}|$，令 $f(a) = \dfrac{a^3}{6} - \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{3}$，则 $f'(a) = a^2 - \dfrac{1}{2}$, 则

当 $a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(a)>0$; 当 $a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(a)<0$,

所以当 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(a)$ 取到极小值，也即最小值 $f(a)_{\min}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, |S_1+S_2|_{\min}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. -------3 分或 4 分

（2） $V_1=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2dx-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\pi(x^2)^2dx=\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$, ------3 分

$V_2=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\pi(x^2)^2dx-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2dx=\dfrac{1}{30}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$, ----3 分

因此 $V=V_1+V_2=\dfrac{1}{30}(\sqrt{2}+1)\pi$. -----1 分

（建议：画出草图给 1 分 ， 交点 1 分）

五、（本题 10 分）

如果 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=0$, 证明存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明：由积分中值定理，存在 $\xi_1\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\xi_2\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, 使得

$$0=\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos x dx \quad \text{-------3 分}$$

$$=f(\xi_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+f(\xi_2)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx \quad \text{-----------3 分}$$

$$=f(\xi_1)-f(\xi_2), \quad \text{--------2 分}$$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$。

由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $f'(\xi)=0$. -------3 分

六 附加（10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$，

证明至少存在一个 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f(\xi) = 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明：设 $\varphi(x) = e^{-x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$， -----2 分

则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，

而 $\varphi(1) = e^{-1}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = e^{-1}\cdot 3\int_0^{1/3} e^{1-x^2}(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$

$= 3\int_0^{1/3}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 3\varphi(\xi_1)\cdot\frac{1}{3} = \varphi(\xi_1)$ ---------------4 分

根据 Rolle 定理知，$\exists\xi \in (\xi_1,1)$，使得 $\varphi'(\xi) = 0$， ------2 分

即 $e^{-\xi^2}[f(\xi) - 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x] = 0 \Rightarrow f(\xi) = 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$. ---2 分