第十章　常微分方程

§10.1　微分方程的基本概念

微分方程的定义

凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

例 $y' = xy$,

$$y'' + 2y' - 3y = e^x,$$

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0,$$

实质: 联系自变量, 未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad y = \int 2x dx \quad \text{即 } y = x^2 + C,$$

由于 $x = 1$时, $y = 2$ 求得$C = 1$,

所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

分类1： 常微分方程，偏微分方程.

微分方程的阶： 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称之.

分类2：

一阶微分方程 $F(x,y,y')=0,\quad y'=f(x,y);$

高 (n) 阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

分类3： 线性与非线性微分方程.

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$$

分类4： 单个微分方程与微分方程组.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z, \end{cases}$$

主要问题------求方程的解

微分方程的解:

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称之.即满足 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0.$$

若微分方程的解中含有任意常数的个数与方程的阶数相同，且任意常数之间不能合并，则称此解为该方程的通解（或一般解）.

其通解的图形是平面上的一族曲线，称为积分曲线族.

用来确定通解中的任意常数的附加条件一般称为**初始条件**．当通解中的各任意常数都取得特定值时所得到的解，称为方程的**特解**．

例 2 验证:函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解．并求满足初始条件

$$x\Big|_{t=0} = A, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$ 的特解.

解 $\because \dfrac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt,$$

将$\dfrac{d^2x}{dt^2}$和x的表达式代入原方程，

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$$

故$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$是原方程的解.

$$\because\ x\big|_{t=0}=A,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0,\qquad \therefore\ C_1=A,\quad C_2=0.$$

所求特解为$x=A\cos kt$.

作业

习题10.1

1(2,4)，2(2)，3(1)，4(2)