2023-2024-2 工科数学分析期中试题解答（A 卷）

一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1．已知二元函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$，下面命题正确的是（ C ）.

(1) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$；　　(2) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在.

A. (1)(3)；　　B. (2)(3)；　　C. (1)(4) ；　　D. (2)(4).

2．已知集合$E=\{(x,y,z)|x+y+z\neq 0\}$，下面命题正确的是（ C ）.

(1)集合E是开集；　　(2)集合E是闭集；　　(3)集合E是有界集；

(4)集合E是区域；　　(5)集合E的导集$E'=R^3$.

A. (1) (3)；　　B. (2)(3)(4)；　　C. (1)(5)；　　D. (2)(4)(5).

3．下列论断正确的是（ D ）.

A. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数都存在，则其在此点处可微；

B. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则其在此点处两个偏导数都连续；

C. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续，则其在此点处两个偏导数都存在；

D. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则其在此点处沿任意方向的方向导数都存在.

4．设$z=x^3+y^3-3xy$，则此函数的梯度为$(0,0)$的点为（ A ）.

A. $(0,0)$和$(1,1)$；　　B. $(0,0)$和$(-1,-1)$；

C. $(1,1)$和$(-1,-1)$；　　D. 这样的点不存在.

5．下列级数收敛的一组是（ D ）.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{n}{n+1}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{6^n}$；(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$；(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

A. (2)(3)；　　B. (1)(4)；　　C. (2)(4)；　　D. (3)(4).

二、计算题(每小题 5 分，共 30 分)

1. 讨论函数列 $f_n(x)=\dfrac{n+x^2}{n+x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解： $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=1$

$|f_n(x)-f(x)|=\left|\dfrac{x^2-x}{n+x}\right|$

取$x_n=n$,则$\beta_n\geq|f_n(x_n)-f(x_n)|\geq\dfrac{n-1}{2}>\dfrac{1}{2}$(当$n>2$时)，故$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\neq 0$

函数列非一致收敛

2. 将函数 $f(x)=1-x^2\ (0\leq x\leq\pi)$ 展成余弦级数.

解：将函数进行偶延拓，则$b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2(1-\frac{\pi^2}{3})$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\left(\frac{\cos nx}{n}\right)'dx=-\frac{4}{n^2}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}$$

故 $f(x)=1-\dfrac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{4}{n^2}\cos nx,-\pi\leq x\leq\pi$

3. 设$z=f(x+y,e^{xy})$，其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 z_{xy}.

解：对 x 求偏导： $z_x=f_1+f_2e^{xy}y$,

上式对 y 求偏导：
$$\begin{aligned}z_{xy}&=f_{11}+f_{12}e^{xy}x+(f_{21}+f_{22}e^{xy}x)e^{xy}y+f_2e^{xy}(1+xy)\\&=f_{11}+f_{12}e^{xy}(x+y)+f_{22}e^{2xy}xy+f_2e^{xy}(1+xy)\end{aligned}$$

4. 求曲面 $z=\sqrt{3x^2+y^2}$ 与曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 的交线在点$(1,-1,2)$ 处的切线方程.

解：交线方程为$\begin{cases}y=y(x),\\z=z(x),\end{cases}$其中 $y(x),z(x)$由隐函数组$\begin{cases}z=\sqrt{3x^2+y^2},\\2x^2+3y^2+z^2=9,\end{cases}$确定

对隐函数组两边关于 x 求导得：

$$\begin{cases} zz_x = 3x + yy_x, \\ 2x + 3yy_x + zz_x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_x = \dfrac{7x}{4z} \\ y_x = -\dfrac{5x}{4y} \end{cases} \Rightarrow \text{在切点处} \begin{cases} z_x = \dfrac{7}{8} \\ y_x = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

故切向量为$(1, \frac{5}{4}, \frac{7}{8})$

切线方程为$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{z-2}{\frac{7}{8}}$

5. 求函数$f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2 + 1$的极值.

解：$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ f_y = 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$驻点$(0,0),(2,2)$

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x - 8 \\ f_{xy} = 2 \\ f_{yy} = -2 \end{cases}$$

在$(0,0)$点，$AC - B^2 = 12 > 0$, 且$A < 0$, 故为极大值点，极大值为1

在$(2,2)$点，$AC - B^2 = -12 < 0$, 故非极值点

6. 求函数$f(x,y) = \ln(1+2x)\sin\dfrac{y}{2}$在$(0,0)$处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

解：$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + o(x^3) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + o(\rho^3), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，

$$\sin\frac{y}{2} = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{48} + o(y^3) = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{48} + o(\rho^3)$$

故$f(x,y) = \left(2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 + o(\rho^3)\right)\left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{y^3}{48} + o(\rho^3)\right) = xy - x^2y + o(\rho^3)$

三．(10 分) 讨论数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+a^n)}{n^2}(a>0)$的敛散性。

解：（1）当 0<a<1 时，$\ln(1+a^n) \sim a^n (n\to\infty)$,又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^2}} = a < 1$,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2}$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+a^n)}{n^2}$收敛。

（2）当 a=1 时,原级数变为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^2}$，故收敛。

（3）当 a>1 时, $\ln(1+a^n) > n\ln a$, 从而$\frac{\ln(1+a^n)}{n^2} > \frac{\ln a}{n}$, 易知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln a}{n}$ 发散，

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+a^n)}{n^2}$发散。

四、(10 分) 讨论数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\ln n}{n}\cos\frac{2n}{n^2+1}$ 的敛散性, 若收敛, 判别其是绝对收敛还是条件收敛.

证明： (第一部分收敛性)

因为 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right|\le\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 的部分和有界，

又 $\{\frac{\ln n}{n}\}$ 单调递减, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ ，由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\ln n}{n}$ 收敛.

又因为 $\cos\frac{2n}{n^2+1}$ 单调且有界，再由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\ln n}{n}\cos\frac{2n}{n^2+1}$ 收敛.

(第二部分不绝对收敛), 由于

$$\left|\frac{\sin n\cdot\ln n}{n}\cos\frac{2n}{n^2+1}\right|\ge\cos1\cdot\frac{\sin^2 n\cdot\ln n}{n}=\cos1\cdot\frac{\ln n-\cos(2n)\ln n}{2n}$$

同样由 Dirichlet 判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)\ln n}{2n}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n}$ 发散，

由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\cdot\ln n}{n}\cos\frac{2n}{n^2+1}\right|$ 发散，从而原级数条件收敛.

五.（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)2^n}$ 的和。

证明：法一：令 $y=x^2$,则原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(2n-1)}$ ，取 $a_n=\frac{1}{n(2n-1)}$,则新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(2n-1)}$ 的收敛半径为

$R_y=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)}=1$,故 $|x^2|\le1$,即 $|x|\le1$,所以 $R_x=1$。

法二：取 $a_n=\frac{1}{n(2n-1)}$，则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{n(2n-1)}}=1$，所以收敛半径 $R=1$。

当 $x=\pm1$ 时，易知数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}$ 收敛。

所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域是[-1,1]。

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$,则我们有当 $x\neq\pm1$ 时，

$$S(x)=2\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}dt=2\int_0^x[\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}u^{2n-2}du]\,dt=2\int_0^x[\int_0^t\frac{1}{1-u^2}du]dt$$

$$=\int_0^x[\int_0^t(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})du]dt=\int_0^x[\ln(1+t)-\ln(1-t)]dt$$

$$=(x+1)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)2^n}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。

六.（10 分）证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n^2+x^2}+\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}\right]$在[-1,1]上一致收敛，且它的和函数在[-1,1]上是连续的。

证明：法一：因为$|\frac{x}{n^2+x^2}|\le\frac{1}{n^2}$，由 Weierstrass 判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$在[-1,1]上一致收敛。

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$，令$a_n(x)=(-1)^n, b_n(x)=\frac{n}{n^2+x^2}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和一致有界。对于固定的$x\in[-1,1]$, $\{b_n(x)\}_n$单调下降数列，且$0\le b_n(x)\le\frac{1}{n}\to 0$ 当 $n\to\infty$，即$b_n(x)$一致收敛于 0，故由 Dirichlet 判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$在[-1,1]上一致收敛,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n^2+x^2}+\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}\right]$在[-1,1]上一致收敛。

因为$\frac{x}{n^2+x^2}+\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$在[-1,1]上连续，从而和函数在[-1,1]上连续。

法二：$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n^2+x^2}+\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}\right]$=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+x^2}\left[\frac{x}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right]$，对于取定的$x\in[-1,1]$, $\frac{n^2}{n^2+x^2}$是单调递增数列且一致有界，即$|\frac{n^2}{n^2+x^2}|\le 1$，而易知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$在[-1,1]上都是一致收敛的，故由 Abel 判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{n^2+x^2}+\frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}\right]$在[-1,1]上一致收敛。从而和函数在[-1,1]上连续。

七.（10 分）讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\ne 0\\ 0,\ x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)处的连续性、偏导数的存在性与可微性。

证明：法一：令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,根据不等式$|f(x,y)|\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=|r(cos^3\theta+sin^3\theta)|\le 2|r|\longrightarrow 0$ 当$r\longrightarrow 0$，即$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.所以 $f(x,y)$在（0,0）

处连续。

法二：对任意的$(x,y)\neq(0,0)$时，$|f(x,y)|\leq\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}|y|\leq |x|+|y|$，从而有夹逼定理知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 即$f(x,y)$在（0,0）处连续。

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x^3)}{\Delta x^3}=1,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta y^3)}{\Delta y^3}=1.$$

记$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\frac{\sin(x^3+y^3)-(x+y)(x^2+y^2)}{\rho^3}$,

则当沿着$y=kx$且$x\to 0+$时，

$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\frac{\sin((1+k^3)x^3)-(1+k)(1+k^2)x^3}{(1+k^2)^{3/2}x^3}\to\frac{1+k^3-(1+k)(1+k^2)}{(1+k^2)^{3/2}}$,

即$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}$不存在，从而$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}\neq 0$，所以$f(x,y)$在（0,0）处不可微。