第3章 行列式

3.1 二阶与三阶行列式

1. 行列式的由来

线性方程组的求解，二阶、三阶

2. 行列式的几何意义

有向面积与有向体积

3. 行列式的展开

3. 2 n阶行列式的定义与性质

1. 排列

定义3.1.1 由 1,2,…,n 按任意顺序重新排列而成的有序数组 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$称为一个 n元排列。

注意：

① n元排列的总数为$n!$

② 将1,2,…,n 按从小到大的顺序得到的排列 (12…n) 称为标准排列。

③ 在任意一个排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 中, 可能出现顺序"颠倒"的情况：$p < q$ 然而 $j_p > j_q$，也就是较大的数 j_p 反而排在较小的数 j_q 的前面。每出现一对这样的(j_p, j_q)称为这个排列的一个逆序。

排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$中的逆序的个数称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 。逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如. 排列 (3142) 中的逆序共有 (3,1), (3,2), (4,2) 等 3 个, 因此 $\tau(3142) = 3$, (3142) 是奇排列。自然排列 (12…n) 的逆序数为0, 因此是偶排列。

定义3.1.3 将排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 中的某两个数码 j_p, j_q 互相交换位置, 称为这个排列的一个对换。

定理3.1.1 任意一个排列经过任一次对换,必改变奇偶性。

证明:首先考虑相邻两个数k_i，k_{i+1}的对换。若$k_i > k_{i+1}$则对换后逆序数减少1；若$k_i < k_{i+1}$,则对换后逆序数增加1；无论哪种情形, 奇偶性都改变。

一般情形，不相邻对换可通过相邻对换来实现:

不妨设$i < j$, 将k_i 与 k_{i+1}对换, 再与k_{i+2}对换, 换了j-i次后再将k_j 与k_{j-1}对换, 再与k_{j-2}对换, 经过了 j-i-1次后, k_i 与k_j 实现对换，一共进行了2(j-i)-1次相邻对换，因此奇偶性发生改变。

定理3.1.2 每个排列 ($j_1j_2\ldots j_n$)都可以经过有限次对换变成标准排列(12…n)。同一排列 ($j_1j_2\ldots j_n$) 变成标准排列经过的对换次数s不唯一，但奇偶性唯一，并且与排列的奇偶性相同。

证明：对n归纳。$(12\dots n)$为偶排列，当$(j_1j_2\dots j_n)$也是偶排列，经过s次对换后成标准排列，奇偶性改变s次后仍为偶排列，当然s为偶数。奇排列情形同理。

对于排列 $(j_1j_2\dots j_n)$，规定

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(j_1 j_2 \cdots j_n) \\
&= (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = \begin{cases} 1 & \text{当}(j_1 j_2 \cdots j_n)\text{是偶排列;} \\ -1 & \text{当}(j_1 j_2 \cdots j_n)\text{是奇排列。} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\operatorname{sgn}(j_1j_2\dots j_n)=(-1)^s$

2. n阶行列式的定义

将 n^2 个数 a_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ 排成 n行n列的形式，按如下方式计算：

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} \operatorname{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \quad (3.2.1)$$

得到一个数，称为 *n* **阶行列式**，上面的式子中的求和号 $\sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}$ 表示对所有的排列$(i_1 i_2 \ldots i_n)$求和。

例1 求下列行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

行列式看成n阶矩阵的函数,记作det$A$或者$|A|$.

主对角线、上三角矩阵、

下三角矩阵和对角阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

计算一般行列式的方法:

化为上(下)三角矩阵.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例2 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{vmatrix} \text{和} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

答案：0和0。

行列式的性质

行列式从每一行中取一个元素、使它们各在不同列中, 将这些元素相乘得到一个乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。这些元素 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 既然各在不同的列中, 就可以在乘积中将它们按列指标从小到大的顺序重新排列, 得到同样的乘积 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$

这样的重新排列可以这样来实现:

将排列 $(j_1j_2\ldots j_n)$中的各数码$j_1,j_2,\ldots j_n$ 经过s次对换变成标准排列$(12\ldots n)$, 对应的各因子$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$经过同样这些对换变成按顺序 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$, 因而各因子$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的行指标经过相应的s次对换变成按顺序 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 排列。

这说明排列$(j_1j_2\ldots j_n)$与$(i_1i_2\ldots i_n)$的奇偶性相同: 当s是偶数时同为偶排列, 当s是奇数时同为奇排列。因此 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$

进而

命题 3.2.1

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}\operatorname{sgn}(j_1j_2\cdots j_n)a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \quad (3.2.1)$$

定义3.2.1 将$m\times n$矩阵A的行列互换得到矩阵B，称为矩阵A的**转置**，记作A^T。

设行列式$\Delta=\det A$，则$\det A^T$称为Δ的**转置**，记作Δ^T。

机动 目录 上页 下页 返回 结束

定理3.2.1 行列式有如下的性质:

性质1. det A=det A^T，即转置不改变行列式的值。

即，行列式的行和列是同等地位的。

性质2. Δ中某行(列)可拆成两个向量的和，则Δ可以拆成相应两个Δ_1，Δ_2的和。

$$(1)\Delta(\beta_k+\gamma_k)=\Delta(\beta_k)+\Delta(\gamma_k);$$

$$(2)\Delta(\lambda\alpha_k)=\lambda\Delta(\alpha_k)。$$

性质3. 将行列式的任意一行(列)乘以常数λ则行列式的值变为原来的λ倍。

性质4. 行列式两行(列)对换，行列式的值变为原来的相反数。

性质5. 若行列式某行(列)元全为0，则行列式为0。

性质6. 若行列式某两行(列)相等，则行列式为0。

性质7. 若行列式某两行(列)对应成比例，则行列式为0。

性质8. 若行列式某一行(列)的λ倍加到另一行(列)，行列式的值不变。

例3.求行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 0 & -5\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

解:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -3 & -9\\ 0 & -7 & -10 & -12\\ 0 & -2 & -2 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -5\\ 0 & 0 & -3 & -9\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}$$

$$=2\times1\times1\times(-3)\times(-4)=24$$

例4. 求n阶行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解:

各行加到第1行

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

各列减去第1列

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

例5. 求n阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解:

所有其他列加到第1列；提公因子

$$\Delta = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

每一行减去上一行

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

各行加到第1行

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

第1行加到各行

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{1+2+\cdots+(n-2)}(-1)(-n)^{n-2}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^{n-2}$$

例6. 求n阶行列式

$$V(x_1,x_2,\cdots x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

解

各行减去上一行得x_1倍

$$V(x_1,x_2,\cdots x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\bullet V(x_2, x_3, \cdots x_n)$$

由此得到递推关系: $V(x_1, x_2, \cdots x_n) = \prod_{1<i\le n}(x_i - x_1)\bullet V(x_2, x_3, \cdots x_n)$

注意到

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

由数学归纳法得

$$V(x_1, x_2, \cdots x_n) = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$