北京航空航天大学

2019－2020 学年 第一学期期末考卷

《 工科数学分析 （Ⅰ）》

(A 卷)

班号 ___________ 学号__________ 姓名___________

主讲教师________ 考场__________ 成绩___________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2020 年 1 月 6 日

一、 选择题（每题 4 分，满 24 分）

1. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx=$（ A ）.

A. 2；　　B. 6；　　C. 5；　　D. 1.

2. 设 $f(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$, 则曲线 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的弧长为 （ D ）.

A. 1　　B. $\ln 2$　　C. $\ln 3$　　D. 4.

3. 下列广义积分中，收敛的是 （ C ）.

A. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$　　C. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$　　D. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$.

4. 曲线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$　$(a>0)$ 在 $x=0$ 处的曲率　$k=$ （ C ）

A. $\sqrt{2}a$　　B. $2a$　　C. $\frac{1}{a}$　　D. 0

5. 设函数 $f(u)=\int_0^u\cos(u-t)^2\mathrm{d}t$,令 $F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，则 $F''(x)=$(B).

A. $\int_0^x\cos(u-t)\mathrm{d}t$　　B. $\cos x^2$　　C. $-\cos x^2$　　D. 1.

6. 下列叙述中正确的是 （ A ）

A. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调递增的函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

B. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在原函数

C. 若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

D. 若对任意 $A>0$, 积分 $\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，

则广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

二、 计算题（每题 6 分，满分 18 分）

1. $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x.$

解：$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$ -------------------3 分

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$ --------------------------------6 分

2. $\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

解：**法一**：

$\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{(1+e^x-e^x)}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_0^2(1-\frac{e^x}{1+e^x})\ \mathrm{d}x$ -------------------3 分

$=[x-\ln(1+e^x)]|_0^2=2+\ln\frac{2}{1+e^2}.$ ----------------------6 分

法二：$\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}+1}=-\int_0^2\frac{1}{e^{-x}+1}d(e^{-x}+1)$ -------------------3 分

$=-\ln(e^{-x}+1)|_0^2=\ln 2-\ln(1+e^{-2})$ ---------------------6 分

法三：令 $e^x=t$， $\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_1^{e^2}\frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ -------------------3 分

$=\int_1^{e^2}(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})\ \mathrm{d}t=[\ln t-\ln(1+t)]|_1^{e^2}=2+\ln(\frac{2}{1+e^2})$ -------------6 分

注：答案写成 $2-\ln(1+e^2)+\ln 2.$ 等不同形式

3. $\int_{-1}^1\left(\sin x^{2019}+x^{2020}\right)\cos(x^{2021})\mathrm{d}x$

解：由 $\sin x^{2019}\cos(x^{2021})$ 是奇函数及**对称性知** $\int_{-1}^1\left(\sin x^{2019}\right)\cos(x^{2021})\mathrm{d}x=0$ -------------2 分

所以

$\int_{-1}^1\left(\sin x^{2019}+x^{2020}\right)\cos(x^{2021})\mathrm{d}x=\int_{-1}^1x^{2020}\cos(x^{2021})\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}\int_{-1}^1\cos(x^{2021})\mathrm{d}x^{2021}$ ------------4 分

$=\frac{1}{2021}(\sin(x^{2021}))|_{-1}^1=\frac{2\sin 1}{2021}$ ------------6 分

三、 **计算证明题（每小题 6 分，满分 18 分）**

1. 指出瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 中的瑕点并计算积分值.

解：$x=1$ 是瑕点 ------------------------2 分

令 $\sqrt{1-x}=t$ 原式 $=\int_1^0 \frac{-2t}{(1+t^2)t}dt$

$=2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=2\left(\arctan t\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$ ------------------------6 分

2. 求方程 $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2}$ 的通解.

解：此为一阶线性微分方程 其中 $P(x)=-\frac{2}{x+1}, Q(x)=(x+1)^2$ ---------------2 分

带入公式

$y(x)=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C].$ $y(x)=(x+1)^2(x+C).$ ----6 分

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

解法 1：$0\le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\le x^n \Rightarrow 0\le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx\le \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$，夹逼定理得极限为 0

解法 2：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^1 x^n dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cdot\frac{1}{1+n}=0$

四、(本题 8 分) 求微分方程 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$ 的通解.

解：该方程对应的特征方程 $p^2-p-2=0$ 的解为 $p_1=-1$，$p_2=2$，

所以齐次方程的通解为

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ -------------------------------3 分

因为 λ=1 不是特征方程的根，所以设非齐次微分方程的特解为

$y^*=(Ax+B)e^x$ ------------------------------4 分

将 $(y^*)'=Ae^x+(Ax+B)e^x$， $(y^*)''=2Ae^x+(Ax+B)e^x$

代入非齐次方程，整理后得：$-2Ax+(A-B)=1-2x$

解得：A=1，$B=0$ ------------------------------7 分

所以所求方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$ -----------8 分

五.（本题 12 分） 求圆 $(x-b)^2+y^2\le a^2(0<a<b)$, 绕 y 轴旋转一周，所得旋转体的**体积**和**表面积**.

解：以 y 作为积分变量，$-a \le y \le a$, 记 $x_1(y) = b + \sqrt{a^2 - y^2}, x_2(y) = b - \sqrt{a^2 - y^2}$,

旋转体体积为：

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(b + \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy - \pi\int_{-a}^{a}(b - \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy$$ ------2 分

$$= 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - y^2}dy = 8\pi b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2 - y^2}dy = 2\pi^2 a^2 b.$$ -------6 分

旋转体表面积为：

$$S = 2\pi\int_{-a}^{a} x_1(y)\sqrt{1 + (x_1')^2}dy + 2\pi\int_{-a}^{a} x_2(y)\sqrt{1 + (x_2')^2}dy$$ -------8 分

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}(b + \sqrt{a^2 - y^2})\sqrt{1 + (\frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}})^2}dy + 2\pi\int_{-a}^{a}(b - \sqrt{a^2 - y^2})\sqrt{1 + (\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}})^2}dy$$

$$= 8\pi ab\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 8\pi ab \arcsin\frac{y}{a}\Big|_{0}^{a} = 4\pi^2 ab$$ -------12 分

六、**（本题 10 分）** 设广义积分为

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1 + \frac{1}{x})^x \mathrm{d}x \ \ (p > 0)$$

指出并证明无穷广义积分绝对收敛和条件收敛时所对应的参数 p 的取值范围.

解：

(1) 当$p > 1$时，由于$\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1 + \frac{1}{x})^x\right| \le \frac{e}{x^p}$,

由比较判别法可知，此时广义积分绝对收敛. ---------------------3 分

（2） 当 $0 \le p \le 1$时，

对任意$A>1$, $|\int_{1}^{A} e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x| = |e^{\sin x}|_{1}^{A}| = |e^{\sin A} - e^{\sin 1}| < 2e$，有界

当 $x \to +\infty$时, $\frac{1}{x^p}$单调递减且极限为0

由$Dirichlet$判别法可知$\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$收敛，

---------------------5 分

$(1 + \frac{1}{x})^x$在$[1, +\infty)$上单调有界，

由 Abel 判别法可知，此时广义积分收敛. ---------------------6 分

(3) $|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1 + \frac{1}{x})^x| > \frac{1}{e}\frac{\cos^2 x}{x^p} = \frac{1}{2ex^p} + \frac{\cos 2x}{2ex^p}$

------------8 分

当$0 \le p \le 1$时, $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2x^p}dx$发散，由Dirichlet判别法可知$\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$收敛，

所以当$0<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^x\cos x}{x^p}dx$发散.

即$0<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x(9+\arctan x)}{x^p}dx$条件收敛.

-------------------------10 分

七、(本题 10 分, 每题 5 分)

(1) 设 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，证明$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明 根据有限闭区间上连续函数的性质，若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则必一致连续. 根据一致连续函数的性质,任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对$[a,b]$中任意两点x',x''，只要$|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

--------------------- 2 分

因此只要$[a,b]$上的分割T 满足$\|T\|<\delta$，则 $f(x)$在任一小区间Δ_i上的振幅满足

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{x',x''\in\Delta_i}|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

所以有 $\sum_T\omega_i\Delta x_i\le\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_T\Delta x_i=\varepsilon\cdot$

所以 $f(x)$在$[a,b]$上可积. ---------------------5 分

(2) 求极限 $I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$

解: 对于一切$k<n,n>3$,

$0\le\frac{k\pi}{n^2}-sin\frac{k\pi}{n^2}\le tan\frac{k\pi}{n^2}-sin\frac{k\pi}{n^2}\le tan\frac{k\pi}{n^2}\left(1-cos\frac{k\pi}{n^2}\right)\le\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-cos\frac{\pi}{n}\right)$, ----2 分

所以

$0\le\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})(\frac{k\pi}{n^2}-sin\frac{k\pi}{n^2})\le\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-cos\frac{\pi}{n}\right)\le 2\pi\left(1-cos\frac{\pi}{n}\right)\to 0.$

则有 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}=\int_0^1(1+x)\pi x dx=\frac{5\pi}{6}$---------5 分