北京航空航天大学

2022－2023 学年第一学期期中试卷

(A 卷)

考试课程<u>工科数学分析 (I)</u>　任课老师________________

班级______________学号_______________姓名________________

2022 年 11 月 6 日

一．单项选择题(本题 20 分，每小题 4 分)

1. a 为有限数,下列关于数列极限的表述中正确的是(　　)

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$;

(B) 若 $a_n\le b_n\le c_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 都存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在；

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\ (a\ne 0)$, 则存在 $N\in N^*$, 使得当 $n>N$ 时有 $|a_n|>\dfrac{2|a|}{3}$；

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n)=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

2. x=0 是函数 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{3}{x}}}+\dfrac{1}{|x|}\sin x$ 的(　　)

(A) 第二类间断点;　(B) 跳跃间断点;　(C) 可去间断点;　(D) 连续点.

3. 下列选项中**错误的**是(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$;

(B) 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 也不存在;

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{5x}-1}{5(e^x-1)}\right]^{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{5(e^x-1)}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{5x}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{x}}=1^{\frac{1}{2}}=1$;

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\cos(x+h)=\cos x$.

4. 下面选项中包含了所有正确结论的选项是(　　)

(1) 若 $f(x)$有二阶导数，且 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点，则 $f''(x_0)=0$;

(2) 若 $f(x)$有二阶导数，且 $f''(x_0)=0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}=1$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点；

(4) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点, 则必定存在 x_0 的某邻域, 在此邻域内, 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左侧单调增加，在点 x_0 的右侧单调减少.

(A)　(1)(3);　　(B)　(3)(4);　　(C)　(1)(3)(4);　　(D)　(1)(2)(3)

5. 函数 $f(x)=e^{ax}\sin bx$ 的 n 阶导数为(　　)

(A) $\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}e^{ax}\sin(bx+\frac{(n-k)\pi}{2})$;　　(B) $\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k e^{ax}\sin(bx+\frac{k\pi}{2})$;

(C) $\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}e^{ax}\sin(bx+\frac{k\pi}{2})$;　　(D) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi),\varphi=\arctan\frac{b}{a}$.

二．计算题(本题 25 分，每小题 5 分)

1. 求数列极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n^3}{3^n})^n$.

2. 求函数极限 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x\tan x}-1+x^3\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1-x^2)}$.

3. 设 $xe^{f(y)}=e^y$，$f(x)$有二阶导数且 $f'(x)\neq1$，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设 $\begin{cases}x=R\cos\theta\\ y=R\sin\theta\end{cases}$ $(R>0)$，求 $\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$.

5. 写出函数$f(x)=e^{1-\cos x}$在$x=0$处的4次带Peano余项的泰勒公式.

三．证明题(本题 7 分)　证明函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

四．求解证明题(本题 10 分)

设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)},(n=1,2,\cdots)$

（1） 证明 $\{x_n\}$ 的极限存在，求出该极限；

（2） 指出 $\{x_n\}$ 的上确界，并用定义证明.

五．证明题(本题 8 分)

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，若 $f(0)=0$，

$f(1)=2$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-2\xi]=2.$$

六 求解题(本题 10 分)

讨论函数 $y=\frac{1-2x}{x^2}+1\ (x>0)$ 的单调区间、极值、凹凸区间、拐点。

七 证明题(本题 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三次可导，证明存在 $\xi\in(-1,1)$，使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).$$

八 证明题(本题 12 分)

设$f(x)$满足$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|,\forall x,y\in R$,其中$0<k<1$.

(1)对任意的$x_1\in R$,令$x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$.证明$\lim_{n\to\infty}x_n$存在;

(2)证明函数$f(x)$存在唯一的不动点,即存在唯一的$\xi\in R$,使 $f(\xi)=\xi$.