# 11章 习题课（二）

# 一、主要定理

## 1. Cauchy收敛定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{收敛} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \text{使} n > N \text{时}, \forall p \in N^*, \text{恒有} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

## 2. 绝对收敛与条件收敛

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是绝对收敛；

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是条件收敛 .

## 3. 莱布尼茨（Leibniz）判别法

设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n \geq 0,$

若$\{a_n\}$递减趋于0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

称此类交错级数为 *Leibniz* 级数

*Leibniz*级数一定收敛 .

## 4. Dirichlet判别法

设$\{a_n\},\{b_n\}$是两个数列, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$,

如果它们满足:

(1) $\sum a_n$的部分和数列$\{S_n\}$有界;

(2) $\{b_n\}$是单调数列，且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$;

则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

## 5. Abel判别法

设$\{a_n\}\{b_n\}$是两个数列，满足下列条件

(1) $\sum a_n$收敛， (2) $\{b_n\}$单调有界；

则$\sum a_n b_n$收敛.

## 6. 常用性质

**1.** 假设级数$\sum u_n$ 收敛, 级数 $\sum v_n$ 发散, 则级数 $\sum(u_n+v_n)$ 发散.

**2.** 假设级数$\sum u_n$ 绝对收敛, 级数$\sum v_n$条件收敛, 问级数$\sum(u_n+v_n)$ 条件收敛.

## 二、典型例题

Wallis公式: $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, n \to \infty$

**例1** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^p$ 的收敛性，$p>0$.

**解** 因为 $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$$[\frac{1}{2\sqrt{n}}]^p < [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^p < [\frac{1}{\sqrt{2n+1}}]^p$$

$p>2$时, 级数绝对收敛,

$0<p\leq 2$时, 级数条件收敛.

**例2** 判断下列级数是否收敛？如果收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$　$(\alpha>0,\beta>0)$

**(1) 解** $\because\ \dfrac{1}{n-\ln n}>\dfrac{1}{n}$，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}\ \text{发散},$$

即原级数非绝对收敛.

$\because \quad f(x) = x - \ln x \quad (x > 0),\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} > 0 \quad (x > 1),$

$\therefore \quad f(x)$在$(1,+\infty)$上单增，即$\dfrac{1}{x - \ln x}$单减，

从而$\dfrac{1}{n - \ln n}$当$n > 1$时单减，

又$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n - \ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{\ln n}{n}} = 0,$

所以原级数是Leibniz级数，进而收敛，为条件收敛.

(2) **解** 首先原级数是Leibniz级数,从而收敛;

当$\alpha > 1$时，由$\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}\right| \le \dfrac{1}{n^{\alpha}} (n > 3)$,知$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$绝对收敛;

当$\alpha = 1, \beta > 1$时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^{\beta}}$绝对收敛;

当$\alpha = 1, 0 < \beta \le 1$时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^{\beta}}$条件收敛;

当$0 < \alpha < 1, \beta > 0$时,存在$\varepsilon > 0$,满足$\alpha + \varepsilon < 1$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\varepsilon}}{(\ln n)^{\beta}} = +\infty$ 可知$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$条件收敛.

**例3** 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛.

**解** 因为 $\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})$

所以

(1) 当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$绝对收敛，

(2) 当$\frac{1}{2}<p\leq 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$条件收敛，

(3) 当$p\leq\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{n^p}]$发散.

**例4** 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}]$， $a>0$是否收敛？若收敛是条件收敛还是绝对收敛.

**解** $\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}]=(-1)^n\sin[\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)]$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\sim(-1)^n\frac{\pi a^2}{2n}$$

所以, $\sum_{n=1}^{\infty}|\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}]|$ 发散

又因为$\{\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\}$单调递减趋近于0,所以原级数收敛.

因此, $\sum_{n=1}^{\infty}\sin[\pi\sqrt{n^2+a^2}]$条件收敛

**例5** 构造发散交错级数使得其通项趋于0.

分析：交错级数 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots$

部分和$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$$

构造，$a_n \to 0$，且$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}, \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$一个收敛另一个发散

**解** $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{2n} + \cdots.$$

**例6** 设$\{a_n\}\downarrow 0$,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$收敛

**解**

记$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,则$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$$b_n-b_{n-1}=\frac{(n-1)a_n-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n(n-1)}<0$$

由Leibniz判别法可知,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\text{收敛}$$

**例7** 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的收敛性 .

**解** $$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$为Leibniz级数，从而收敛，

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散 .

**例8** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p+(-1)^{n-1}}(p\geq 1)$ 的敛散性.

**解** 当$p>1$时, $|a_n|=\frac{1}{n^p+(-1)^{n-1}}\sim\frac{1}{n^p}$

因此级数绝对收敛;

当$p=1$时, $|a_n|=\frac{1}{n+(-1)^{n-1}}\sim\frac{1}{n}$

此时级数非绝对收敛,

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}[n-(-1)^{n-1}]}{n^2-1}=\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2-1}-\frac{1}{n^2-1}$$ 级数收敛.

综上，原级数当 $p>1$时绝对收敛 ;当$p=1$时条件收敛 .

**例9** 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n\arctan 3n$ 的敛散性.

**解** $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 为Leibniz级数从而收敛,$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$单调有界,

由$Abel$判别法知，$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n$收敛,

又$\{\arctan 3n\}$单调有界，再由$Abel$判别法知原级数收敛 .

$$|(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n\arctan 3n|=\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n\arctan 3n\sim\frac{\pi}{2}\frac{e}{\ln n},n\to\infty$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散，所以$\sum_{n=2}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{\ln n}(1+\frac{1}{n})^n\arctan 3n|$发散,

从而原级数条件收敛.

**例10** 已知$\alpha>0, p>0$,证明$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 5n}{n^p+\alpha}\arctan 5n$

(1)$p>1$时绝对收敛;(2)$0<p\le 1$时条件收敛.

**证明** 记$a_n=(-1)^n\frac{\sin^2 5n}{n^p+\alpha}\arctan 5n$,

(1)$p>1$时,因为$|a_n|\le\frac{\pi}{2}\frac{1}{n^p}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛,

由比较判别法知原级数 绝对收敛.

(2)$0<p\le 1$时,$|a_n|=\frac{1}{2}(\frac{1}{n^p+\alpha}\arctan 5n-\frac{\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n)$

$n\to\infty$时,$\frac{\arctan 5n}{n^p+\alpha}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{n^p}$,由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan 5n}{n^p+\alpha}$发散.

而$|\sum_{k=1}^{n}\cos 10k|\le\frac{1}{|\sin 5|}$,$\frac{1}{n^p+\alpha}$单调收敛于0,由*Dirichlet*判别法,

可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 10n}{n^p+\alpha}$收敛,又因为$\arctan 5n$单调有界,所以由*Abel*判别法,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n$收敛. 从而$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散,原级数非绝对收敛.

又因为$a_n=\frac{1}{2}[\frac{(-1)^n}{n^p+\alpha}\arctan 5n-\frac{(-1)^n\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n]$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+\alpha}$是*Lebnitz* 级数,从而收敛 ,再由 *Abel* 判别法知

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+\alpha}\arctan 5n$收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 10n}{n^p+\alpha}\arctan 5n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(10n+n\pi)}{n^p+\alpha}\arctan 5n$$,级数收敛

所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,即当$0<p\le 1$时,原级数条件收敛 .