主要内容

一、三重积分的定义和性质

二、对称性在计算中的应用

三、直角坐标系下三重积分的计算

（一）投影法 ---- “先一后二”

（二）截面法 ---- “先二后一”

四、三重积分的变量代换

五、柱面坐标变换计算三重积分

六、球面坐标变换计算三重积分

一、三重积分的定义和性质

1. 三重积分的定义

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

2. 三重积分的几何意义

当 $f(x,y,z)=1$ 时，$\iiint_{\Omega} dV = V$ 表示空间区域的体积.

3. 三重积分的性质 类似于二重积分

积分中值定理 设函数 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续，则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V(\Omega)$$

其中 $V(\Omega)$ 为区域 Ω 的面积.

例1 设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$,比较下列积分的大小关系:

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz,$$

$$I_2=\iiint\limits_{\Omega}[\cos^4(x^2+y^2+z^2)+z^3]dxdydz,$$

$$I_3=\iiint\limits_{\Omega}[\ln(x^2+y^2+z^2)+\sin(x^2y^3z^4)]dxdydz.$$

解 $\because$ 积分区域Ω关于xy平面对称,且被积函数

$\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}$和$z^3$关于$z$为奇函数,

$$\therefore I_1 = 0, I_2 = \iiint\limits_{\Omega} \cos^4(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz > 0.$$

$\because$ 积分区域Ω关于xz平面对称, 且被积函数 $\sin(x^2 y^3 z^4)$关于y为奇函数，

$$\therefore I_3 = \iiint\limits_{\Omega} \ln(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz < 0.$$

因此有$I_3 < I_1 < I_2$.

例2 设$f(x,y,z)$连续, 求$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} f(x,y,z)dV}{\pi\sin\rho^3}$.

解 由积分中值定理可知

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} f(x,y,z)dV = f(\xi,\eta,\mu)\cdot\frac{4}{3}\pi\rho^3$$

其中$(\xi,\eta,\mu)\in\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le\rho^2\}$

再由函数的连续性, 可得

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2} f(x,y,z)dV}{\pi\sin\rho^3}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\xi,\eta,\mu)\cdot\frac{4}{3}\pi\rho^3}{\pi\rho^3}=\frac{4f(0,0,0)}{3}$$

例3 求极限 $\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{1}{r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\cos(x-y+z)e^{x^2+y^2+z^2+3xyz}dxdydz$

解 由积分中值定理,存在(ξ,η,ς),$\xi^2+\eta^2+\varsigma^2\le r^2$,使得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\cos(x-y+z)e^{x^2+y^2+z^2+3xyz}dxdydz$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3\cos(\xi-\eta+\varsigma)e^{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2+3\xi\eta\varsigma}$$

因此,原式$=\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{4}{3}\pi\cos(\xi-\eta+\varsigma)e^{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2+3\xi\eta\varsigma}=\dfrac{4}{3}\pi$

二、对称性在计算中的应用

奇偶对称性

$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$ $\quad(f(x,y,-z)=f(x,y,z))$

则称f关于变量z的奇(偶)函数.

若域Ω 关于 xOy坐标面对称，则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$

$$=\begin{cases} 0 & f\text{为}z\text{的奇函数} \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V & f\text{为}z\text{的偶函数} \end{cases}$$

其中Ω_1为Ω在xOy 坐标面的上半部区域.

轮换对称性

若把x与y对调后，Ω不变，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(y,x,z)\mathrm{d}V$$

其他情况与此类似．

如$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le \mathrm{R}^2\}$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(y)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V$$

三重积分的计算

三重积分可以用直角坐标、柱面坐标和球面坐标来计算．其方法都是将三重积分化为三次积分．

将三重积分化为三次积分关键：

- 根据被积函数和积分域选择合适的坐标系；
- 画出投影域、确定积分序；
- 定出积分限、计算要简便．

三重积分积分区域一般由以下曲面围成：

$ax + by + cz + d = 0$ ⟹ 平面

$z = a^2x^2+b^2y^2$ ⟹ 抛物面

$x^2+y^2+z^2 = r^2$ ⟹ 球面

$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$ ⟹ 椭球面

$z^2 = a^2x^2+b^2y^2$ ⟹ 锥面

$f(x, y) = 0$ ⟹ 柱面

三、直角坐标系下三重积分的计算

（一）投影法：先投影，再确定上、下面 “先一后二”

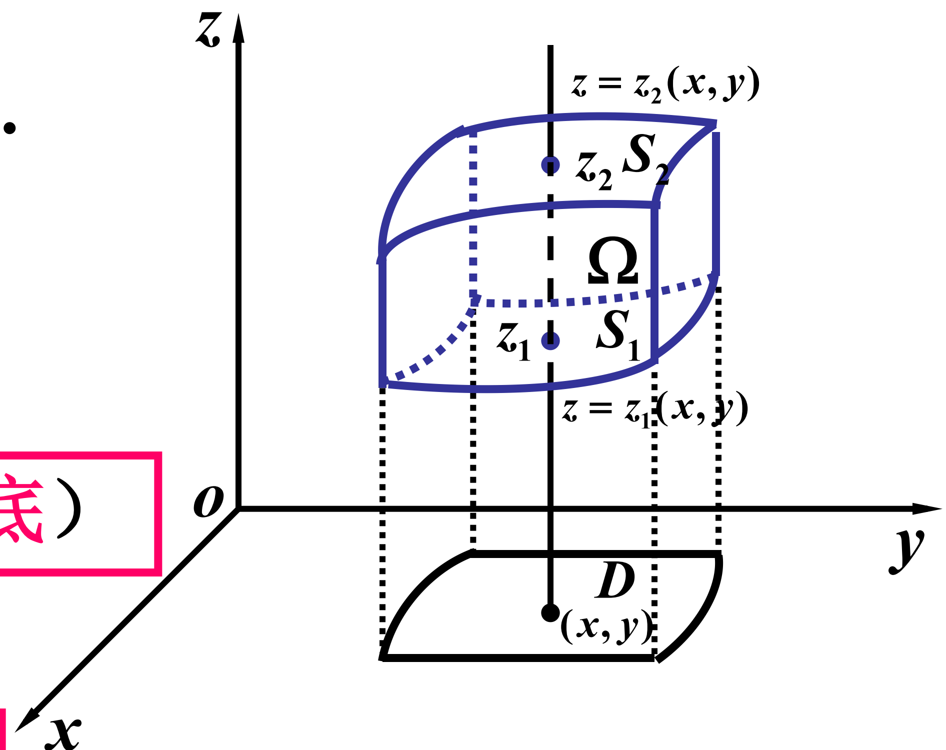
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$$

$$= \iint_{D} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

上边界曲面（上顶）

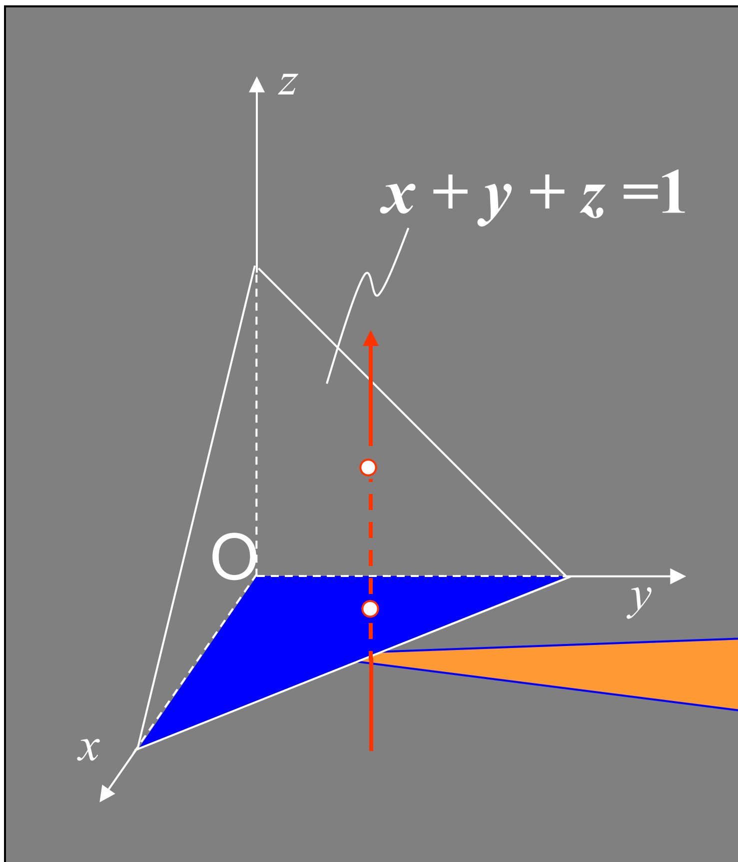
下边界曲面（下底）

xOy 坐标面上的投影区域



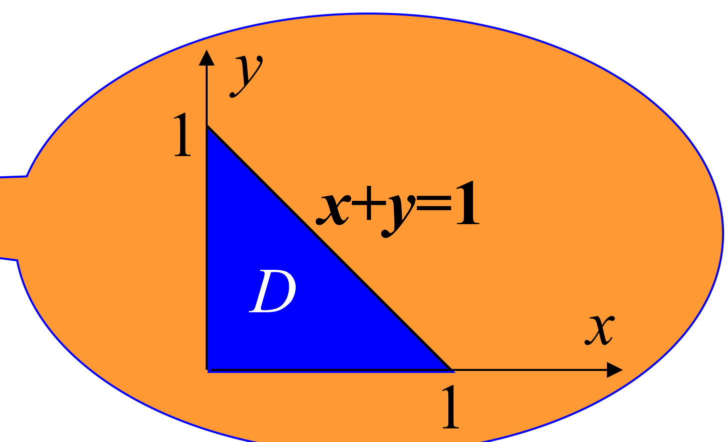
例4 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中Ω是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围闭区域.

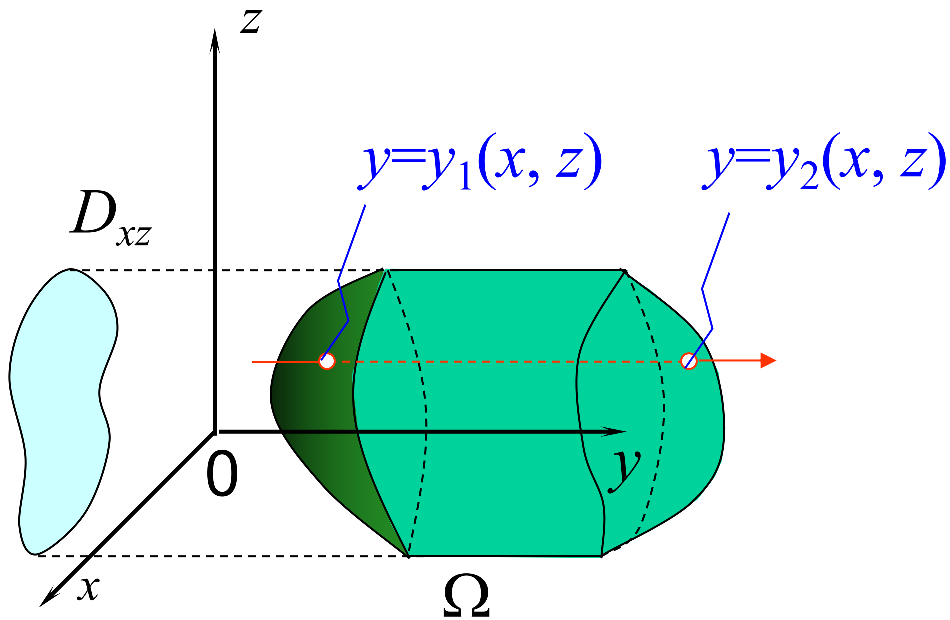
解 D: $0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1$



$$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} x\mathrm{d}z$$

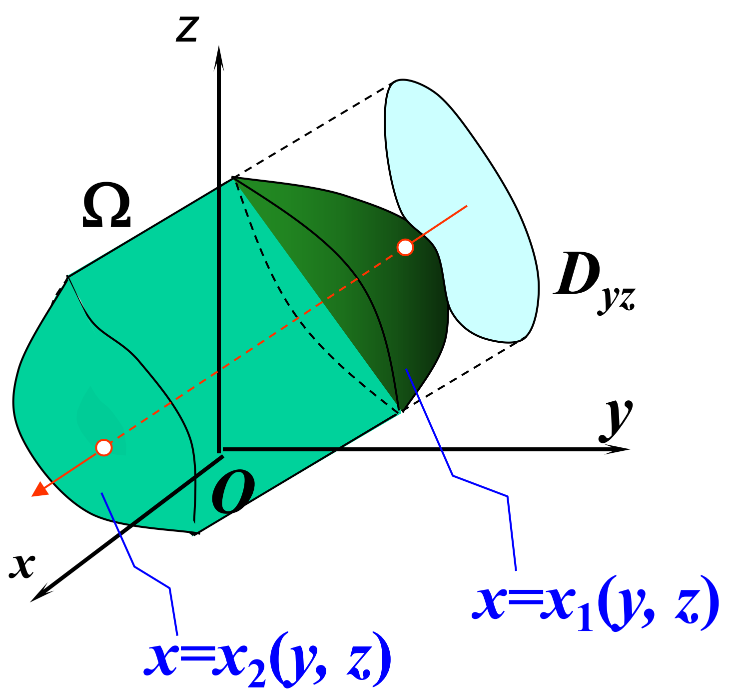
$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} x\mathrm{d}z = \frac{1}{24}$$





$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xz}} \mathrm{d}x\mathrm{d}z \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\mathrm{d}y$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\mathrm{d}x$$

例 5 计算三重积分 $\iiint\limits_V y\sqrt{1-x^2}\,dxdydz$，其中 V 由曲面 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成.

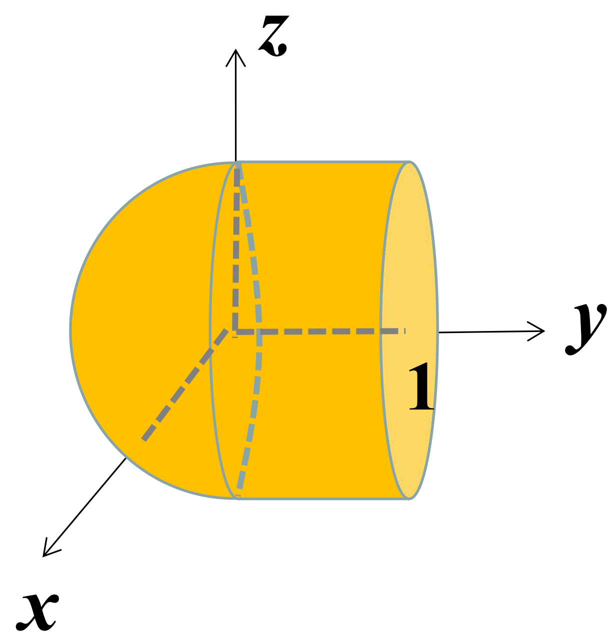
解 V 向 zx 平面投影的投影区域 $D_{xz}: x^2+z^2\le 1$

$$\text{原式}=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\,dxdz\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,\frac{x^2+z^2}{2}\,dz$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(x^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\,dx \qquad =\frac{28}{45}.$$



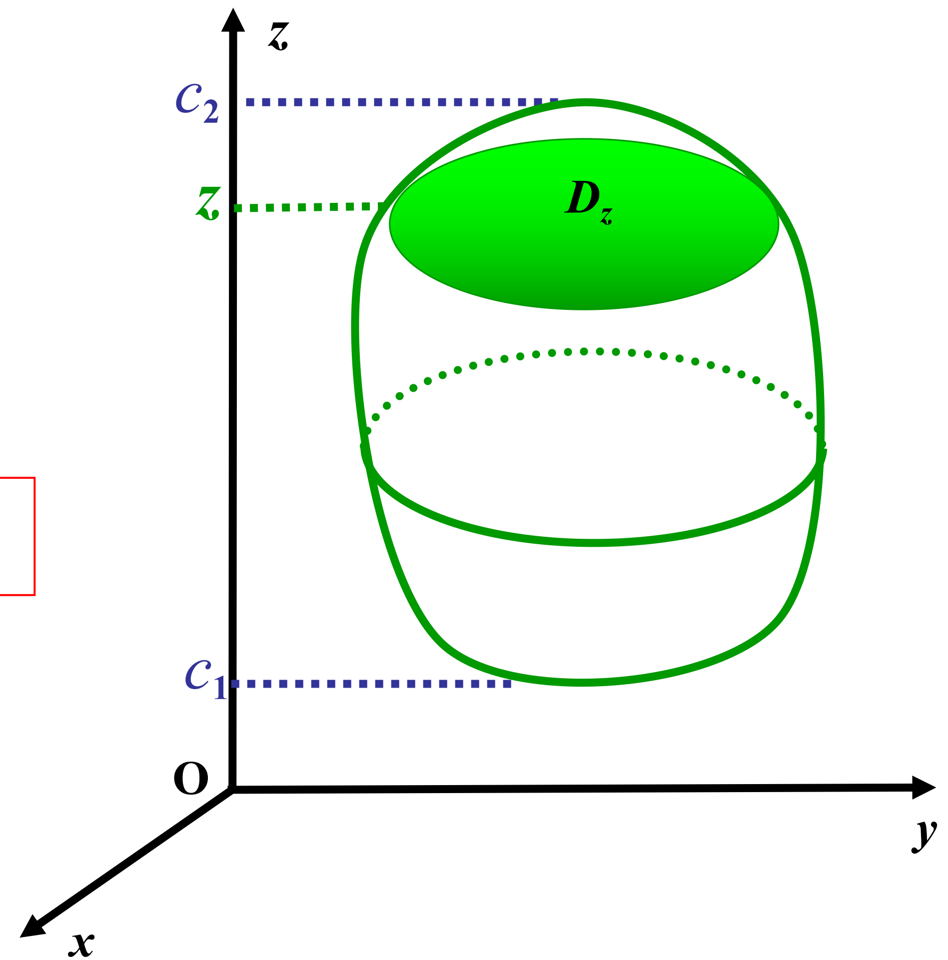
（二）截面法

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid c_1\le z\le c_2,(x,y)\in D_z\}$$

“先二后一”

$$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

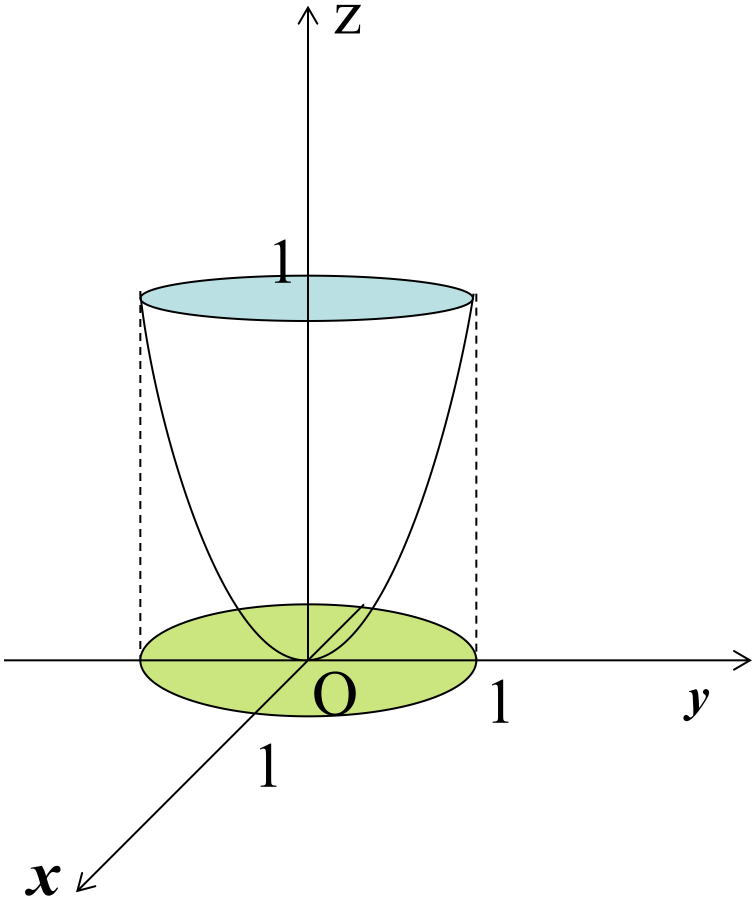


$[c_1, c_2]$: Ω 向 z 轴的投影区间

D_z : 过 $z\in[c_1, c_2]$且垂于z轴的平面截 Ω 得到的截面

当 Ω 向 x 轴, y轴投影时，有类似的结果.

例6 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 所围成的闭区域.



解 “先一后二”

Ω在xy平面的投影区域为

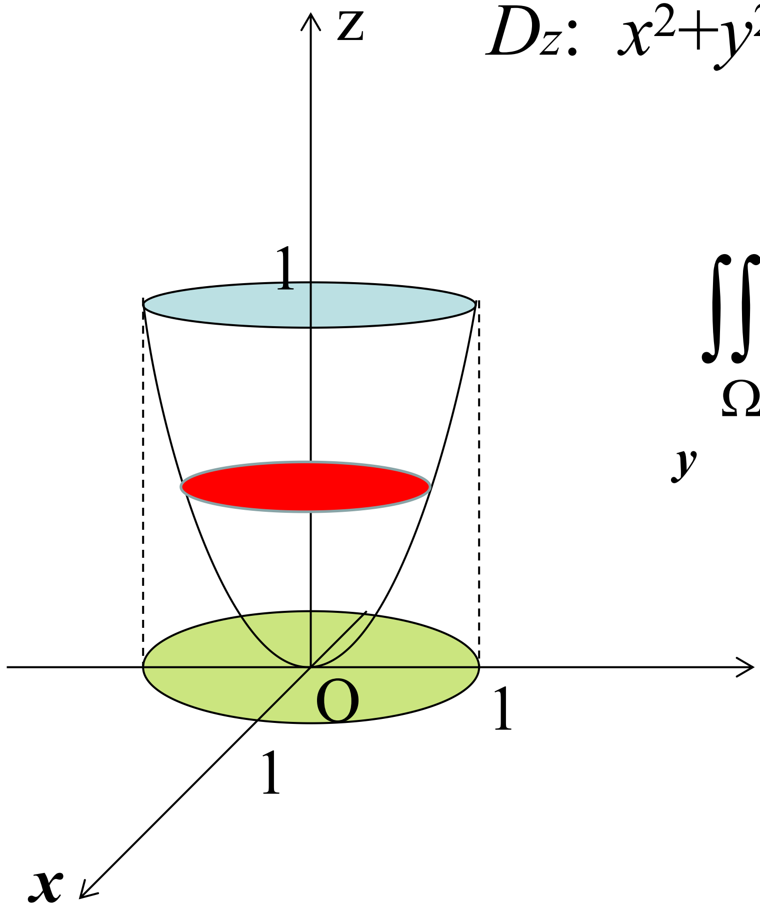
$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D} dxdy\int_{x^2+y^2}^{1} zdz$$

$$=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{D}\frac{(x^2+y^2)^2}{2}dxdy=\frac{\pi}{3}$$

“先二后一” $0 \le z \le 1$

D_z: $x^2+y^2 \le z$



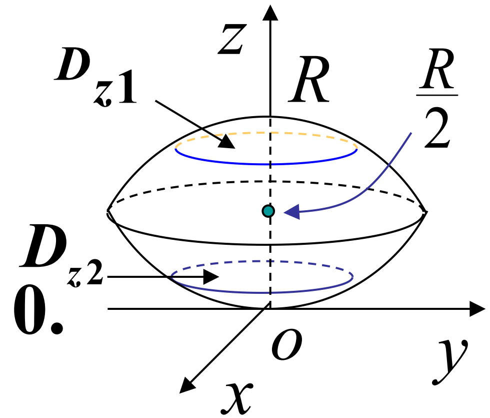
$\pi(\sqrt{z})^2 = \pi z$

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 z\,\mathrm{d}z \boxed{\iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi z\,\mathrm{d}z = \pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

例7 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x)dV$，$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 与

$x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ 所围的公共部分.



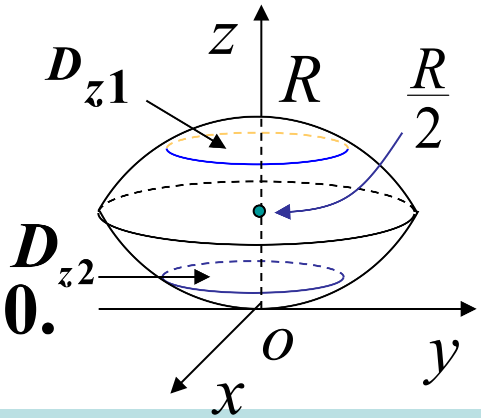
解 $\because \Omega$ 关于 yoz 平面对称 $\therefore \iiint\limits_{\Omega} x dV = 0.$

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z^2 dV$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \le \frac{3}{4}R^2} dxdy \int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2 dz$$

投影法计算比较麻烦

例7 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x)dV$，$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 所围的公共部分.



解 $\because \Omega$ 关于 yoz 平面对称 $\therefore \iiint\limits_{\Omega} xdV = 0.$

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV$$

$$=\int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint\limits_{D_z: x^2+y^2\le 2Rz-z^2} dxdy + \int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2 dz \iint\limits_{D_z: x^2+y^2\le R^2-z^2} dxdy$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

例4 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围闭区域.

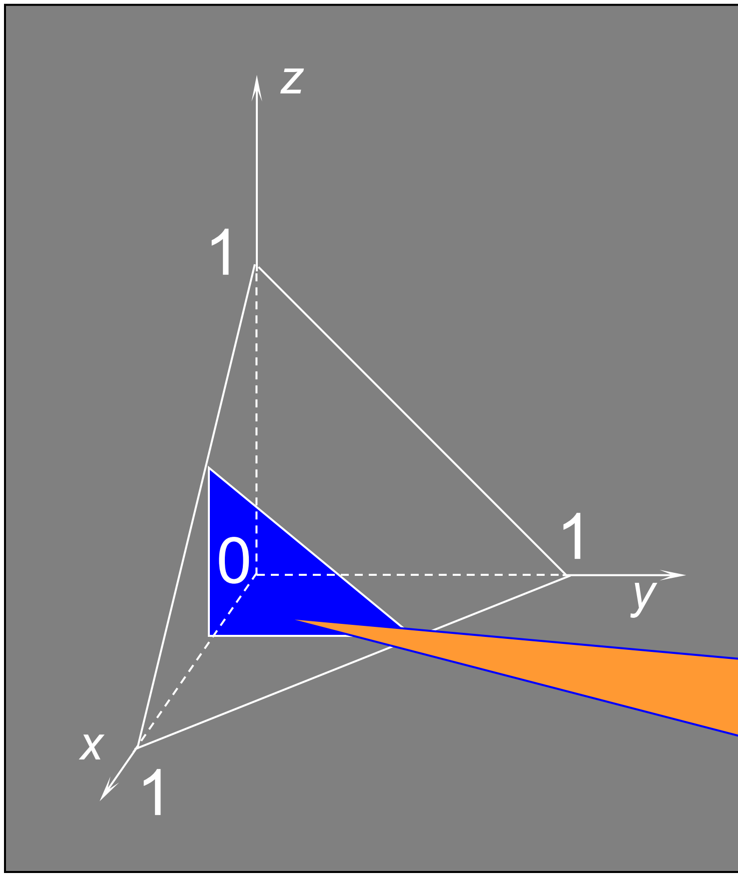
解 $D(x)$: $0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y$

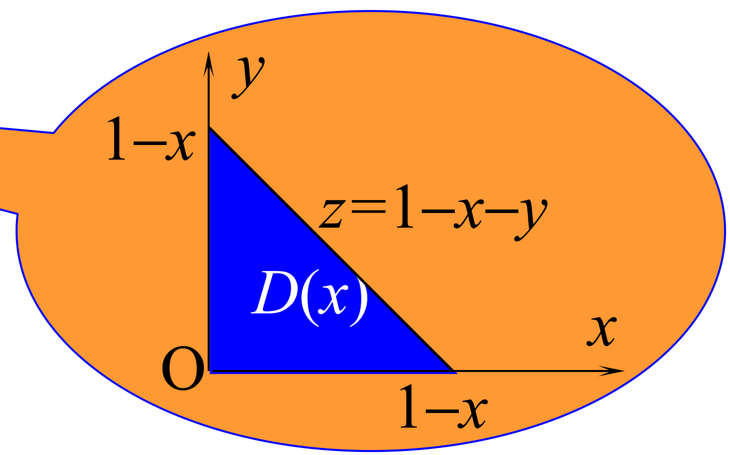
$x: 0 \le x \le 1$

$$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x \iint\limits_{D(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

$\frac{1}{2}(1-x)^2$





四、三重积分的变量代换

设$f(x,y,z)$在有界闭区域 V 上可积, 若变换 $T: x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$, 将 uvw 空间中的区域 Δ 一对一的映成 xyz 空间中的区域 V, 函数 $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ 及它们的一阶偏导数在Δ内连续, 且

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v,w) \in \Delta.$$

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}\neq 0,\ (u,v,w)\in\Delta.$$

则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint_{\Delta} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudvdw$$

注 $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$$

例8 计算 $\iiint\limits_V (x+y+z)\cos(x+y+z)^2 dV$，其中

$$V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x-y\le 1, 0\le x-z\le 1, 0\le x+y+z\le 1\}.$$

解 引入坐标变换

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x-z, \\ w=x+y+z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3$$

则 $\Delta=\{(u,v,w)\,|\,0\le u\le 1, 0\le v\le 1, 0\le w\le 1\}$

$$\iiint_V (x+y+z)\cos(x+y+z)^2\,dV,$$

$$=\iiint_\Delta w\cos w^2\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

$$=\int_0^1 du\int_0^1 dv\int_0^1 w\cos w^2\cdot\frac{1}{3}dw$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 w\cos w^2 dw$$

$$=\frac{1}{6}\sin w^2\Big|_0^1=\frac{1}{6}\sin 1$$

五、利用柱面坐标计算三重积分

柱面坐标变换 $M(x, y, z) \to M(r, \theta, z)$

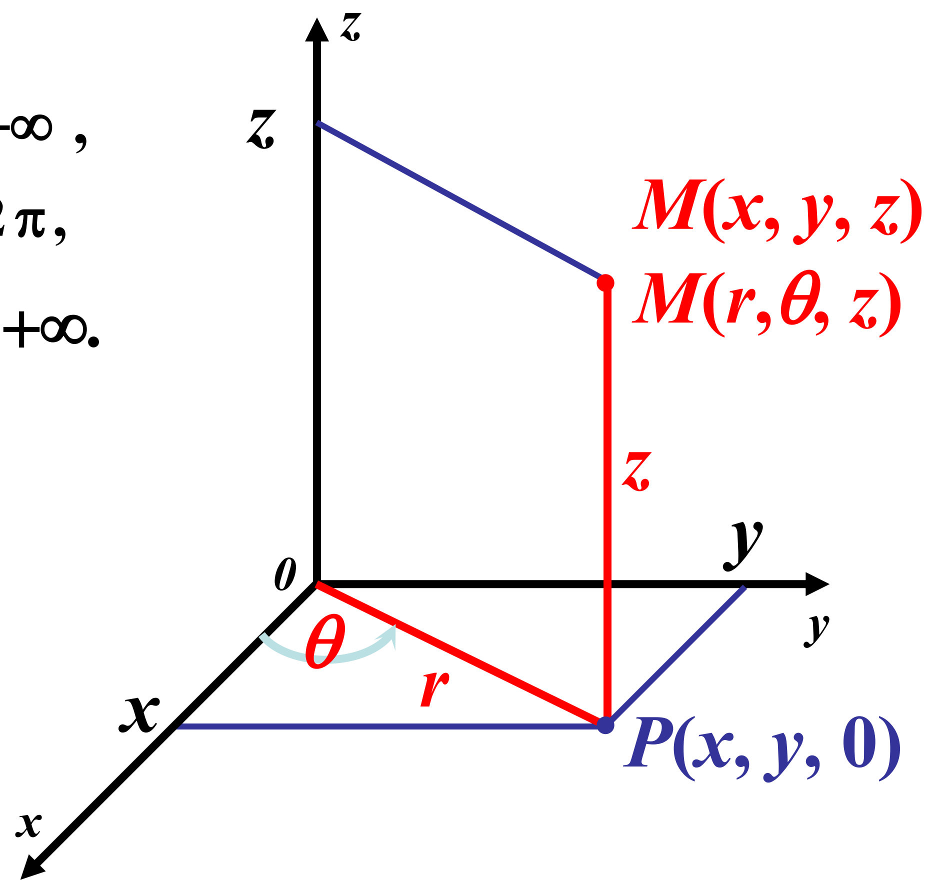
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$0 \le r < +\infty$,

$0 \le \theta \le 2\pi$,

$-\infty < z < +\infty$.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$



柱面坐标下的体积元素

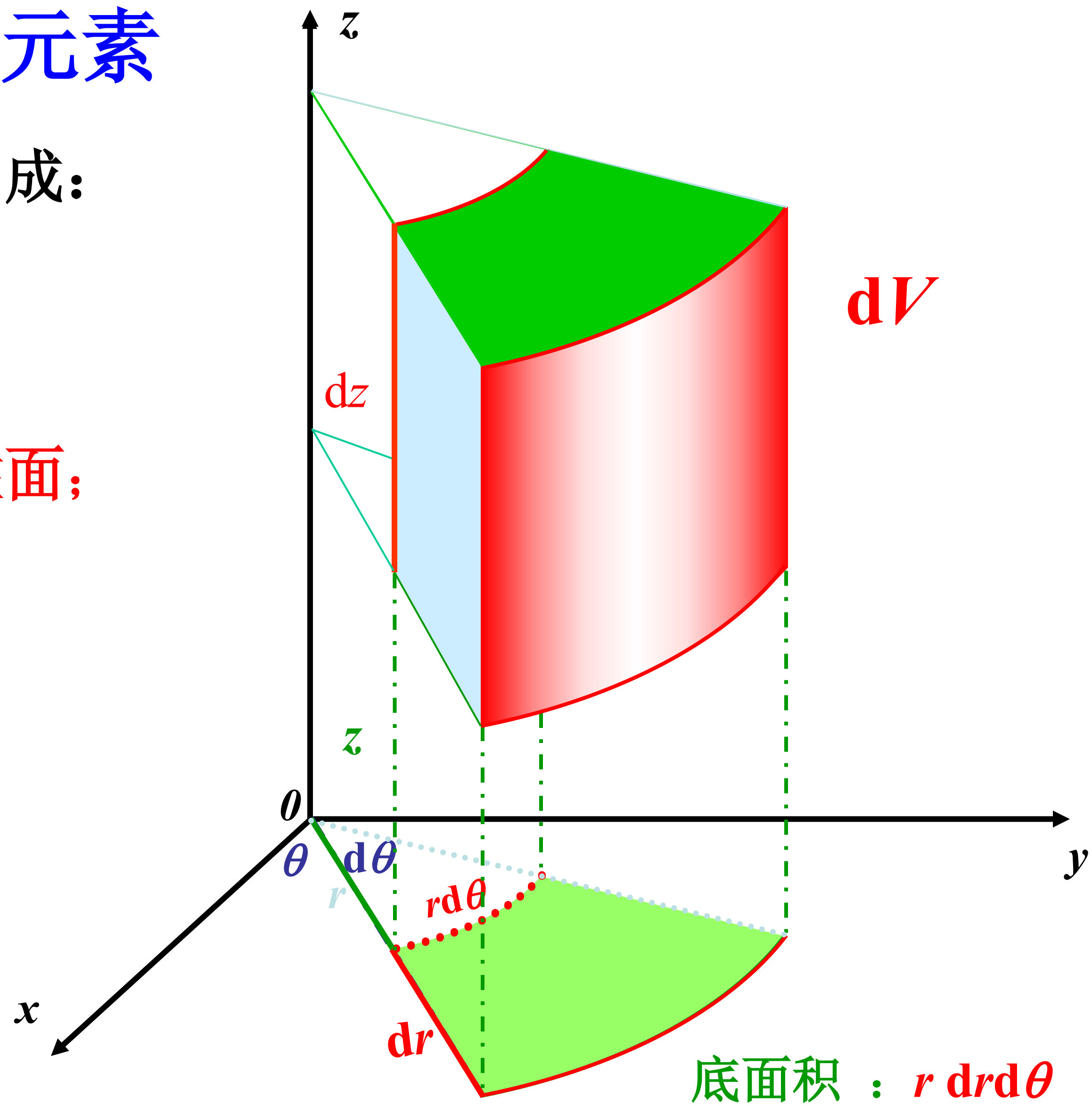
元素区域由六个坐标面围成：

半平面 θ 及 $\theta+\mathrm{d}\theta$；

半径为 r 及 $r+\mathrm{d}r$ 的圆柱面；

平面 z 及 $z+\mathrm{d}z$；

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

例9 计算$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv$，其中$\Omega$为$z=3\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2=y$及平面$z=0$围成的立体，则正确的解法为（ **B** ）.

(A) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta}rdr\int_0^{3r}f(r^2+z^2)dz$；

(B) $I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sin\theta}rdr\int_0^{3r}f(r^2+z^2)dz$；

(C) $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin\theta}rdr\int_0^{3r}f(r^2+z^2)dz$；

(D) $I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\cos\theta}rdr\int_0^{3r}f(r^2+z^2)dz$

例10 设Ω是由曲线$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$围成的空间区域，

求 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z)\mathrm{d}V$.

解 由曲线$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的旋转曲面方程为 $x^2 + y^2 = 2z$

由$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 投影区域 $D: x^2 + y^2 \le 8$

$D: x^2 + y^2 \le 8$

$\boxed{\text{旋转曲面方程 } x^2 + y^2 = 2z}$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V = \iint\limits_{D} dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{4}(x^2+y^2+z)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{8}} r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{4}(r^2+z)\mathrm{d}z$$

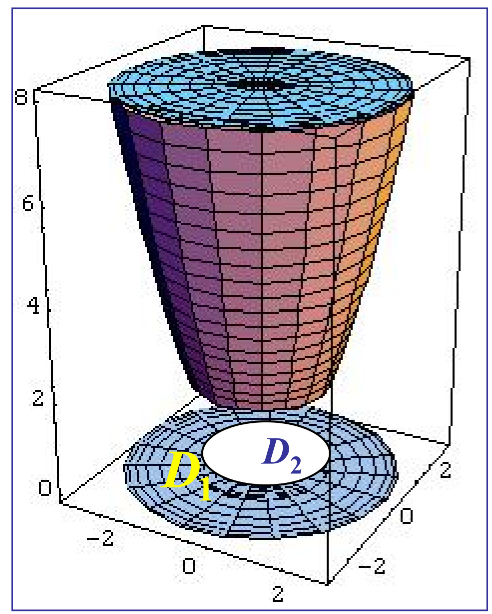
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{8}}[(r^3z+\frac{1}{2}rz^2)\,|_{\frac{r^2}{4}}^{4}]\mathrm{d}r$$

$$=\frac{256}{3}\pi$$

例11 计算 $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$， 其中$V$是曲线 $y^2 = 2z$， $x = 0$ 绕z轴旋转一周而成的曲面与两平面$z = 2, z = 8$所围的立体.

解 曲线$\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$绕$z$轴旋转所得的曲面方程 为

$$x^2 + y^2 = 2z,$$

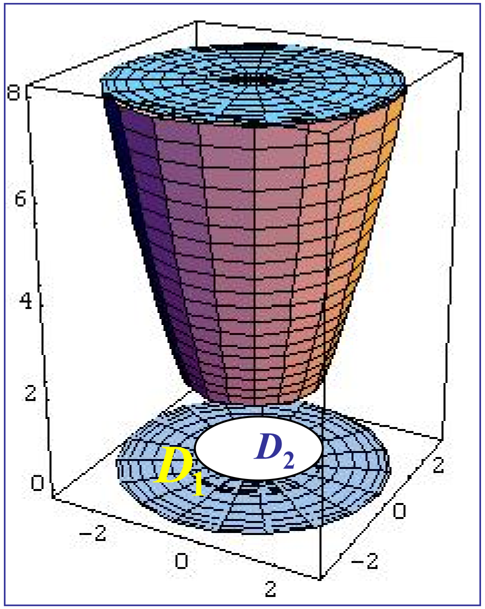


方法一

D_1： $x^2+y^2\le 16,$ V_1： $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 4 \\ \dfrac{r^2}{2}\le z\le 8 \end{cases},$

D_2： $x^2+y^2\le 4,$

V_2： $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 2 \\ \dfrac{r^2}{2}\le z\le 2 \end{cases}.$



$$I = I_1 - I_2$$

$$= \iiint\limits_{V_1} (x^2 + y^2)dxdydz - \iiint\limits_{V_2} (x^2 + y^2)dxdydz,$$

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} dxdy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{8} (x^2 + y^2)dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 rdr \int_{\frac{r^2}{2}}^{8} r^2 dz = \frac{4^5}{3}\pi,$$

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} dxdy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{4} (x^2 + y^2)dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^2 dz = \frac{2^5}{6}\pi,$$

所以$I = \dfrac{4^5}{3}\pi - \dfrac{2^5}{6}\pi = 336\pi.$

方法二

$$I=\int_2^8 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_2^8 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^2\cdot rdr$$

$$=2\pi\int_2^8\frac{1}{4}\cdot(2z)^2dz$$

$$=336\pi$$

六、利用球面坐标计算三重积分

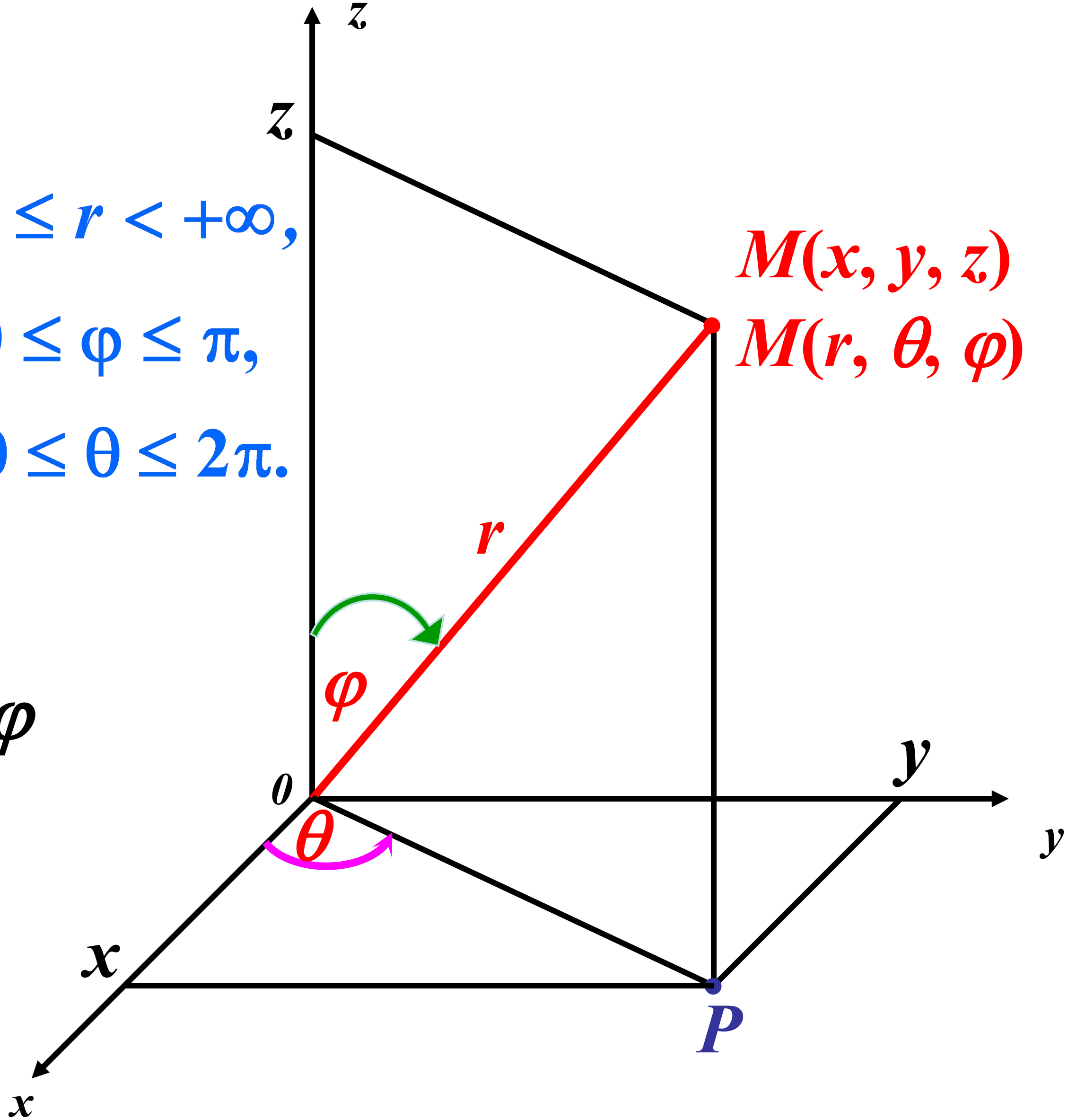
球面坐标变换

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$0 \le r < +\infty,$

$0 \le \varphi \le \pi,$

$0 \le \theta \le 2\pi.$



$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$$

球面坐标下的体积元素

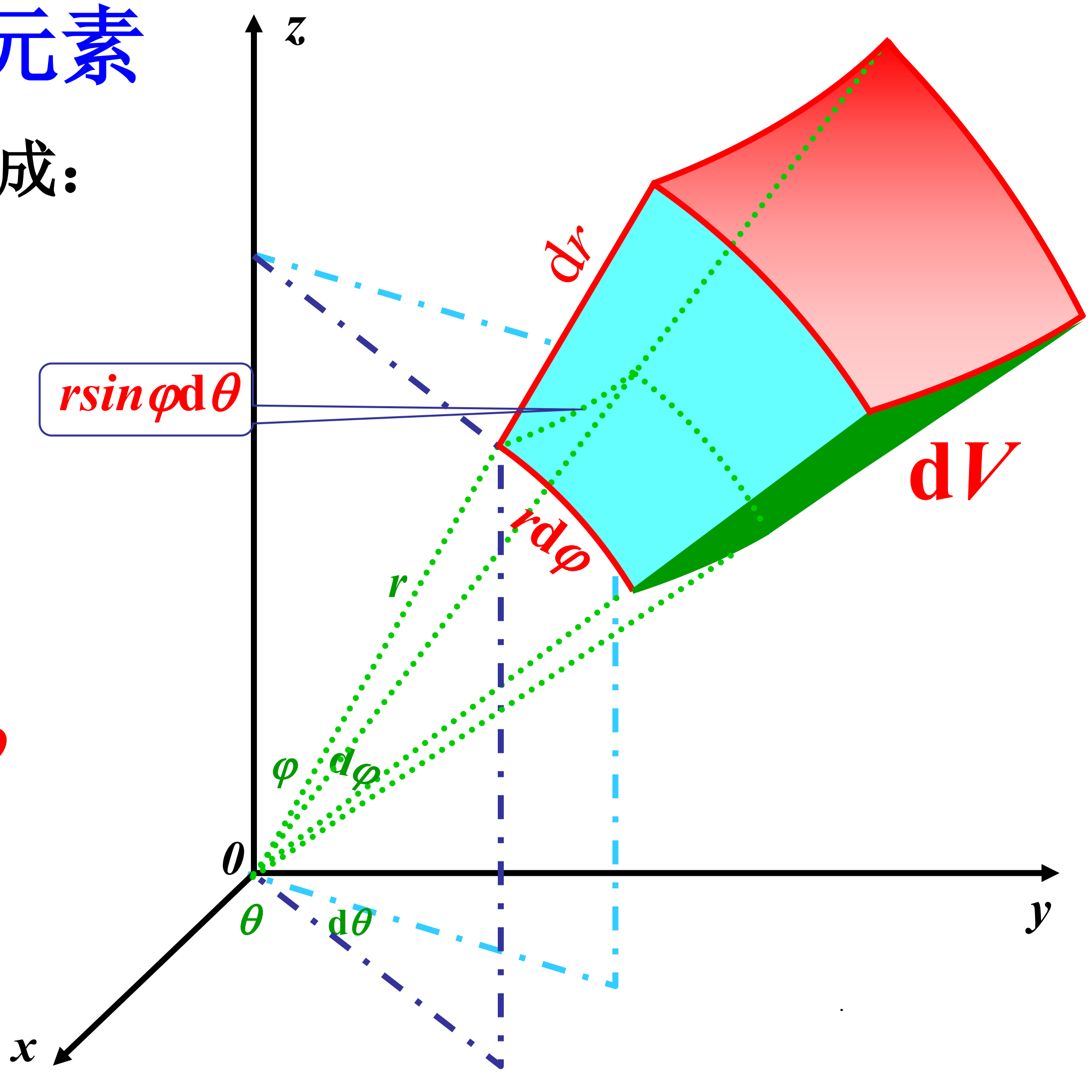
元素区域由六个坐标面围成：

半平面θ及θ+dθ；

半径为r及r+dr的球面；

圆锥面φ及φ+dφ

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$



$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

注 通常是先积r、再积φ、后积θ.

广义球面坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$$

其中

$$0 \le r < +\infty$$

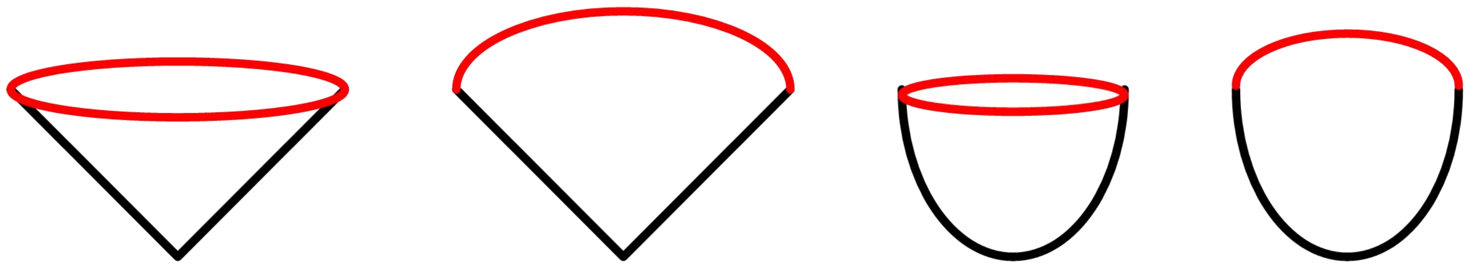
$$0 \le \varphi \le \pi$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

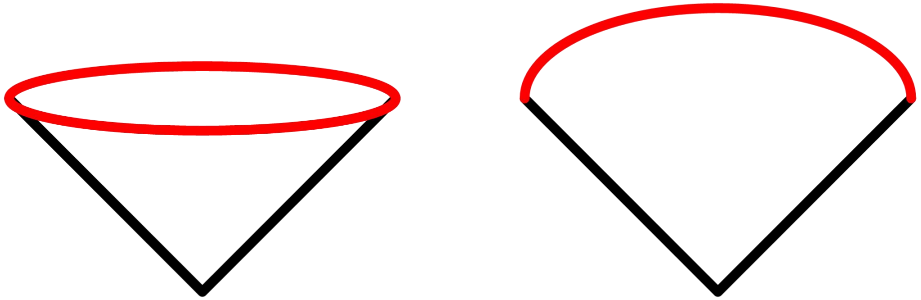
广义球坐标变换的Jacobi行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi,$$

柱面坐标

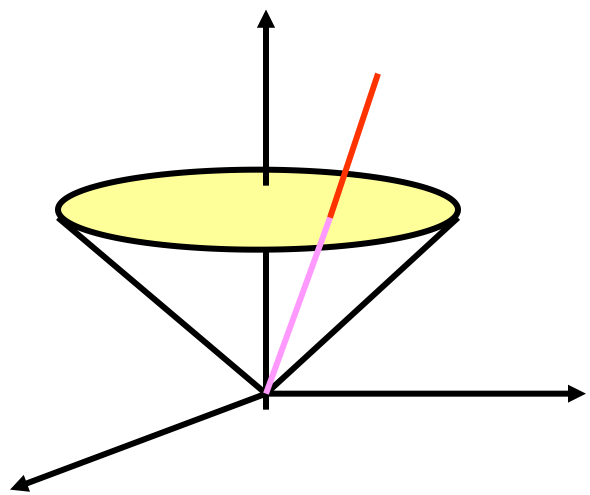


球面坐标



例13 计算$I=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$,其中$V$是锥面$x^2+y^2=z^2$与平面$z=a(a>0)$所围立体.

解　采用球面坐标



$$\because \quad z=a \Rightarrow r=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \Omega:\ 0\le r\le \frac{a}{\cos\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$\therefore \Omega:\ 0 \le r \le \frac{a}{\cos\varphi},\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

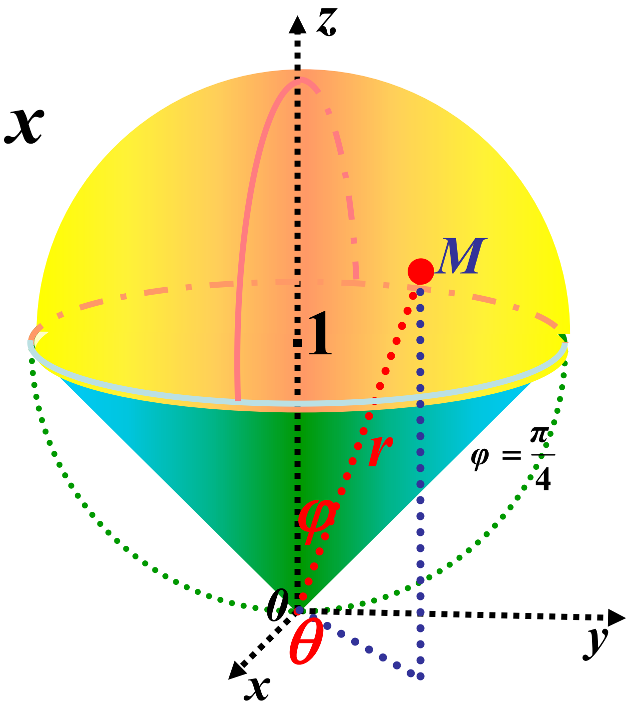
$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} r^4 \sin\varphi\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \cdot \frac{1}{5}\frac{a^5}{\cos^5\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{3\pi}{10} a^5.$$

例14 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$, 其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的.



解 $\because \Omega$ 关于 yoz 面为对称，$f(x,y,z)=x$ 为 x 的奇函数，有 $\iiint\limits_{\Omega} xdV=0.$

利用球面坐标变换 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi. \end{cases}$

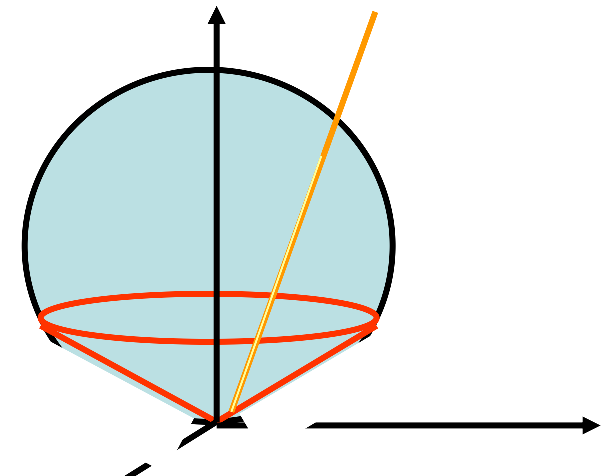
$J=r^2\sin\varphi$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV=\iiint\limits_{\Omega} zdV$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr \quad =\frac{7\pi}{6}.$$

例 15 求由 $x^2+y^2+z^2\le 2az$ 与 $z\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体体积.

解 Ω 由锥面和球面围成，采用球面坐标，



$$\Omega:\quad 0\le r\le 2a\cos\varphi,$$

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{3},$$

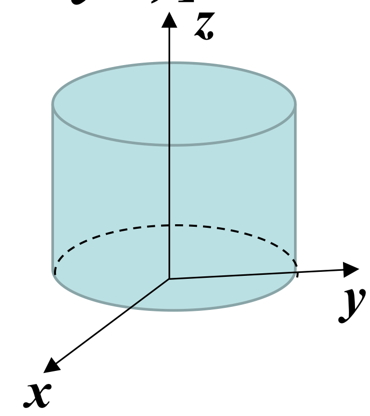
$$0\le\theta\le 2\pi,$$

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cdot\frac{(2a\cos\varphi)^3}{3}d\varphi=\frac{5}{4}\pi a^3.$$

例16 设$f(t)$为连续函数，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dV$

其中$\Omega: 0\le z\le h,\ x^2+y^2\le t^2$，求$\dfrac{dF}{dt}$



解 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} dxdy\int_0^h (z^2+f(x^2+y^2))dz$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rdr\int_0^h (z^2+f(r^2))dz$$

$$=2\pi\int_0^t r(\frac{1}{3}h^3+f(r^2)h)dr$$

$$\frac{dF(t)}{dt}=2\pi t(\frac{h^3}{3}+f(t^2)h)$$

例17 设$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$,求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

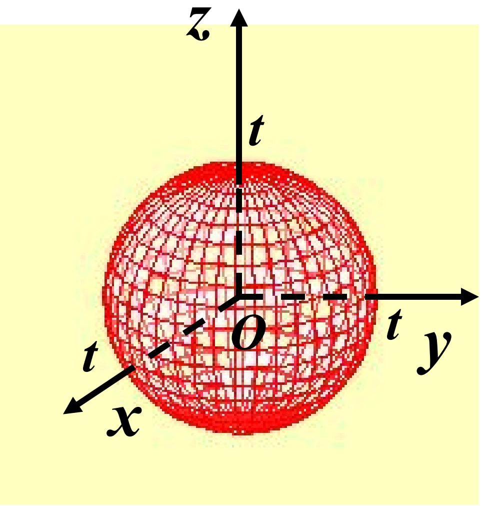
其中$\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$.

解

$$\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{t} r^2 f(r)\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^{t} r^2 f(r)\mathrm{d}r$$



$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi\int_0^t r^2 f(r)\mathrm{d}r}{t^4} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi t^2 f(t)}{4t^3} \qquad f(0)=0$$

$$=\pi\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\pi f'(0)$$

例18 计算$\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\,dxdydz$，其中$\Omega$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2 \le 1,\quad 0\le z\le 1.$

解 作广义球面坐标变换 $\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=abr^2\sin\varphi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 z\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} a^2 r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot r\cos\varphi\cdot abr^2\sin\varphi\, drd\varphi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^1 a^3br^5dr$$

$$=\frac{a^3b\pi}{24}.$$

练习1 计算三重积分

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dz\int_0^{1-x-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y.$$

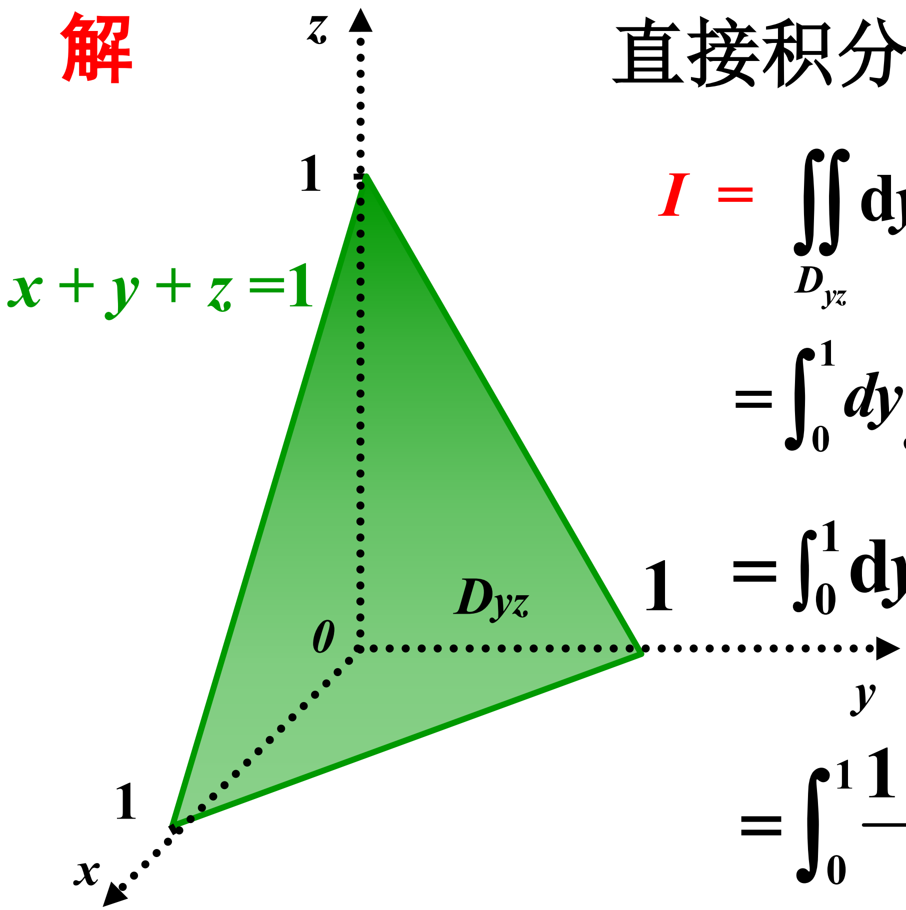
练习2 分别用投影法\截面法\柱面坐标\球面坐标计算 $I=\iiint\limits_V z\,dxdydz$，其中$V$是球$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$上侧所围的立体.

练习3 求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sin t\cdot\ln(1+t^3)}$, 其中$f(x)$有连续导数, $f(0)=0$,区域Ω由柱面$x^2+y^2=t^2$和平面$z=0,z=1$围成.

练习1 计算三重积分

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dz\int_0^{1-x-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y.$$

解



直接积分困难，考虑改变积分次序

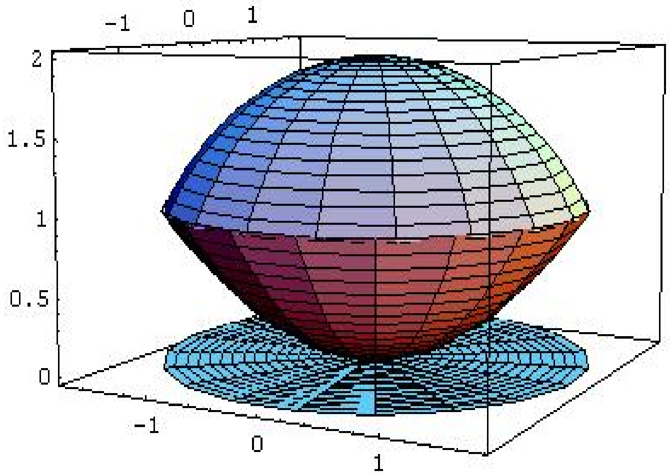
$$I=\iint_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_0^{1-y-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\int_0^{1-y-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y)(1-y-z)e^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\frac{1-y}{2}\cdot(1-e^{-(1-y)^2})dy=\frac{1}{4e}$$

练习2 计算$I=\iiint\limits_V z\,dxdydz$，其中$V$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$上侧所围的立体.



解 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$

知交线为 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$

把Ω投影到xoy面上,D：$x^2+y^2\le 3$

投影法\柱面坐标

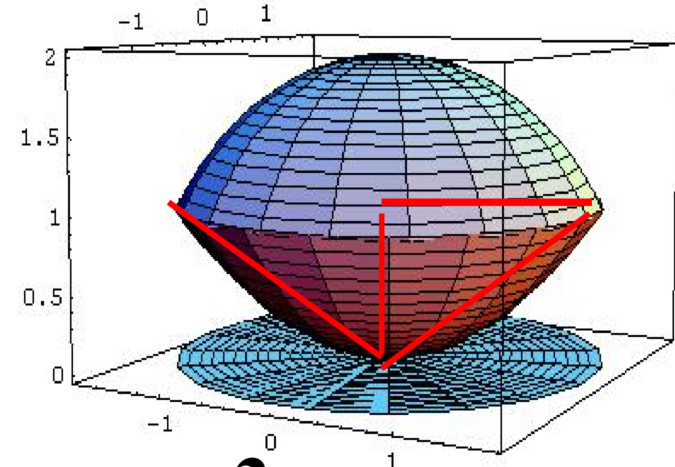
$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\le 3} dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}} dr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z\cdot rdz \ =\frac{13}{4}\pi.$$

截面法

$$I=\int_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 3z} dxdy+\int_1^2 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2} dxdy$$

$$=\int_0^1 z\cdot\pi\cdot 3zdz+\int_1^2 z\cdot\pi(4-z^2)dz \ =\frac{13}{4}\pi.$$



球面坐标

$$x^2+y^2+z^2=4 \leftrightarrow r=2$$

$$x^2+y^2=3z \leftrightarrow r^2\sin^2\varphi=3r\cos\varphi \Rightarrow r=\frac{3\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{3\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{13}{4}\pi.$$

练习3 求 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sin t\cdot\ln(1+t^3)}$，其中$f(x)$有连续导数，

$f(0)=0$，区域Ω由柱面$x^2+y^2=t^2$和平面$z=0, z=1$围成.

解

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sin t\cdot\ln(1+t^3)}=\lim_{t\to0^+}\frac{\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} dxdy\int_0^1 f(x^2+y^2)dz}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r^2)rdr}{t^4}=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t f(r^2)rdr}{t^4}$$

由于$f(x)$有连续导数，$f(0)=0$，可得

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sin t\cdot\ln(1+t^3)}=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{tf(t^2)}{4t^3}=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{f'(t^2)\cdot2t}{8t}=\frac{\pi}{2}f'(0)$$