第13章 习题课

一、Fourier系数及其级数

设$f(x)$是定义在$[-\pi,\pi]$上以2π为周期的可积或绝对可积的函数，则$f(x)$有$Fourier$级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

其中：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1,2,\cdots$$

为$f(x)$的$Fourier$系数.

注 以2π为周期的函数$f(x)$，Fourier系数中的积分区间可以改成长度为2π的任意区间，不影响a_n,b_n的值，即有$\forall c$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx dx, n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx dx, n=1,2,\cdots$$

二、Fourier系数相关结论

定理1（Riemann-Lebesgue引理）

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积或绝对可积，那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

推论1 设 $\{a_n\},\{b_n\}$是某个可积或绝对可积函数的Fourier系数,那么

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

推论2 设 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可导,$f'(x)$可积或绝对可积, 如果 $f(-\pi)=f(\pi)$,那么

$$a_n=o(\frac{1}{n}),b_n=o(\frac{1}{n}),n\to\infty.$$

推论3 设 f 在$[-\pi,\pi]$上有直到$k+1$导数, $f^{(k+1)}$可积或绝对可积,且

$$f(-\pi)=f(\pi),\ \ldots,\ f^{(k)}(-\pi)=f^{(k)}(\pi)$$

那么

$$a_n=o(\frac{1}{n^{k+1}}),b_n=o(\frac{1}{n^{k+1}}),n\to\infty.$$

三、Fourier级数的收敛定理

若$f(x)$ 以 2π为周期，在$[-\pi,\pi]$上分段光滑，那么$f(x)$的Fourier级数在每点x_0处收敛于$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

特别地，在 $f(x)$ 的连续点处，它收敛于$f(x_0)$.

四、非周期函数的Fourier级数

对于非周期函数，如果函数$f(x)$ 只在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，并且满足收敛定理条件，如何展开成Fourier级数.

作法：周期延拓$(T=2\pi)$ $\quad F(x)=f(x) \quad (-\pi,\pi)$

五. 奇函数和偶函数的Fourier级数

(1) 当周期为2π的奇函数$f(x)$展开成Fourier级数时，它的Fourier系数为

$$a_n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

其Fourier级数为正弦级数

(2) 当周期为2π的偶函数$f(x)$展开成 Fourier级数时，它的Fourier系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

其Fourier级数为余弦级数

六、以2l为周期的函数的Fourier级数

定理 设周期为$2l$的周期函数 $f(x)$满足收敛定理的条件,则它的*Fourier*级数展开 式为

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),}$$

其中 $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

例1

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,2\pi]; \\ 2\pi, & x=0. \end{cases}$$

写出它的 Fourier 级数. 并讨论其Fourier级数的收敛性.

解 将函数延拓成的 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 的函数，

延拓后函数的不连续点为 $2n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

Fourier 系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nxdx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nxdx=-\frac{2}{n},\quad n=1,2,\cdots$$

由收敛定理，$f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases}f(x),x\in(0,2\pi)\\ \pi,\ x=0,2\pi\end{cases}$$

例2 将$f(x)=x\ (x\in[0,\pi])$分别展成正弦级数和余弦级数.

解 (1)用奇延拓作正弦级数展开，即作

$$F(x)=x, -\pi\le x\le\pi.$$

则得 $a_n=0,\quad (n=0,1,2,\cdots)$

再由Fourier系数公式，用分部积分法求得，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$$=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},(n=1,2,\cdots)$$

所以 $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\quad (0\le x\le\pi)$

(2)用偶延拓作余弦级数展开，即作

$$F(x)=\begin{cases} x, x\in[0,\pi) \\ -x, x\in(-\pi,0]. \end{cases}$$

则得 $b_n=0,(n=1,2,\cdots)$ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x=\pi$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}=2\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}=\begin{cases} 0, & n=2k, \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=2k+1, \end{cases}$$

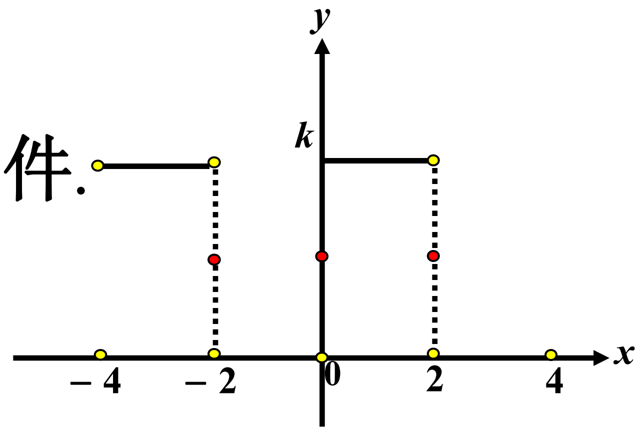
所以 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x \quad (0\le x\le\pi)$

例3 设$f(x)$是周期为4的周期函数，在$[-2,2)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases},(k\neq 0)$$

将其展成Fourier级数.

解 因为$l=2$, 且满足收敛定理的条件.



$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx$$

$$=k,$$

级数在连续点处收敛到本身,
间断点处收敛到该点的左右极限和
的一半

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}x dx = 0, \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x dx = \frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2k}{n\pi} & 当 n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & 当 n = 2,4,6,\cdots \end{cases},$$

$$\therefore f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

例4 设$f(x)$是周期为 2 的周期函数，在 $(-1,1]$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases} 2 & -1<x\leq 0 \\ x^3 & 0<x\leq 1 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的*Fourier*级数在 $x=1$ 收敛到何值?

$x=1$不是连续点

解 根据收敛定理,

$f(x)$ 的*Fourier*级数在 $x=1$ 收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=\frac{1}{2}[f(1-0)+f(-1+0)]$$

不用计算出 Fourier级数

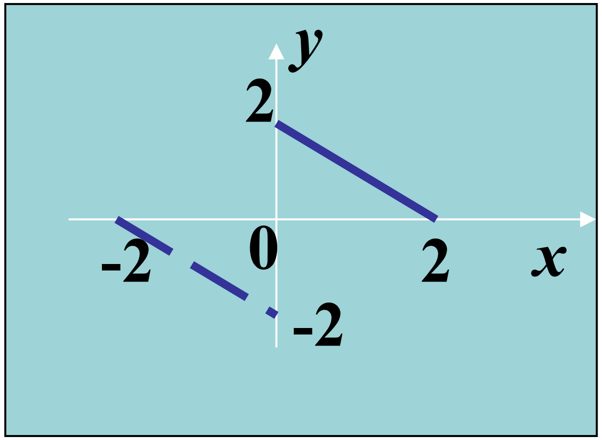
$$=\frac{1}{2}[x^3|_{x=1}+2]=\frac{3}{2}$$

例5 设$f(x)=2-x\ (0\le x<2)$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\quad(-\infty<x<+\infty)$

其中 $b_n=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\quad(n=1,2,\cdots)$，求 $S(-1)$ 和 $S(0)$.

解 因为$S(x)$是$f(x)$在$[0,2]$上的$Fourier$ 级数,函数是奇函数,设

$$F(x)=\begin{cases}2-x, & 0<x<2\\ 0, & x=0\\ -2-x, & -2\le x<0\end{cases},$$



由收敛定理得，$F(x)$在连续点$x=-1$处

$$S(-1)=F(-1)=-2-(-1)=-1,$$

$F(x)$在间断点$x=0$处 $S(0)=\dfrac{F(0-0)+F(0+0)}{2}=\dfrac{-2+2}{2}=0.$

例6 证明：当$0 \le x \le \pi$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$.

解 设 $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$,

将 $f(x)$ 在$[0, \pi]$上展开成余弦级数：

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4}\right) = -\frac{\pi^3}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{2}{n\pi}[(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2})\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})\sin nx dx]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})d\cos nx=\frac{2}{n^2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{n^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.\qquad (0\le x\le \pi)$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}.$$