北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

§2　Taylor公式

微分近似的不足

可微：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ 一阶近似

设$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o[(x-x_0)^2]$,

再设$f''(x_0)$存在,则A、B、C=？ 二阶近似？

(1) 令$x\to x_0$, $\boxed{A=f(x_0)}$.

(2) $$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}=B+C(x-x_0)+\frac{o[(x-x_0)^2]}{(x-x_0)}$$

$\Rightarrow \boxed{B=f'(x_0)}$.

定理的引出

(3) $$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=C+\frac{o[(x-x_0)^2]}{(x-x_0)^2}$$

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}f''(x_0).\Rightarrow \boxed{C=\frac{1}{2}f''(x_0)}.$$

实际上，如果我们令

$$T_2(f,x_0;x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-T_2(f,x_0;x)}{(x-x_0)^2}=0.\quad (L'Hospital)$

若函数有更高阶导数，是否有更好近似？

Taylor 多项式

定义 设函数 f 在点 x_0 有直到 n 阶的导数，令

$$T_n(f, x_0; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为 f 在 x_0 处的 n 阶 *Taylor* 多项式.

Taylor定理(Peano余项)

定理2.1 设函数f在点x_0有直到n阶的导数，则：

$$\boxed{f(x)=T_n(f,x_0;x)+o[(x-x_0)^n],\quad (x\to x_0)}。$$

证明 令$R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0;x)$

则，$R_n(x)$在x_0附近$n-1$阶可导，在x_0点n阶可导.

且$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n-1)}(x_0)=R_n^{(n)}(x_0)=0.$

对于$x>x_0$,($x<x_0$类似)反复用Lagrange定理

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}},\xi_1\in(x_0,x)$$

Taylor定理

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{R_n(x)-r_n(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}},\xi_1\in(x_0,x)$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}}=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-x_0)^{n-2}},\xi_2\in(x_0,\xi_1)$$

$$=\cdots=\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2(\xi_{n-1}-x_0)},\xi_{n-1}\in(x_0,\xi_{n-2})$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2(\xi_{n-1}-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})-R_n^{(n-1)}(x_0)}{(\xi_{n-1}-x_0)}=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

常用展开式

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

证 由$f^{(n)}(x) = e^x$，$f^{(n)}(0) = 1$，可得。

2. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$

$$\ln(1-x) = -[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}] + o(x^n)$$

说明

(1) Taylor公式所做的事情就是在x_0的小邻域内,用Taylor多项式$T_n(x)$逼近$f(x)$;

(2) 记$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$，我们称之为余项。定理即$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$，我们称之为Peano余项。它描述的是$R_n(x)$在x_0附近的性质。

(3) 取$x_0=0$时,称为*Maclaurin*(麦克劳林)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$$

3. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + o(x^{2n})$

4. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1})$

由$e^{ix} = 1 + ix + \dfrac{(ix)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{(ix)^n}{n!} + o(x^n)$，得

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x.}$$

欧拉公式

5. $f(x)=(1+x)^{\lambda},(x>-1)$

广义二项式

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!}x^{k}+o(x^{n})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{\lambda}^{k}x^{k}+o(x^{n})$$

特例

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}-x^{3}+\cdots+(-1)^{n}x^{n}+o(x^{n})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}x^{k}+o(x^{n})$$

求函数的Taylor展式：直接法，间接法

例1 求$y=\arctan x$的麦克劳林展开式.

解 直接法,关键是求出$f^{(n)}(0)$:

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$， $f'(0)=1$.

(2) $(1+x^2)f'(x)=1$,两边求n阶导数

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+n\cdot 2xf^{(n)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2f^{(n-1)}(x)=0$$

取$x=0$, $f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0)$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\therefore \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例1 求$y=\arctan x$的麦克劳林展开式.

解 间接法,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\therefore \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$$

无穷小量的运算法则

$o(x^n)$是一类变量集合，满足：$\forall \alpha \in o(x^n)$有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x^n}=0$

当$x\to 0$时

$$o(x^m)\subset o(x^n),\ m\geq n>0$$

$$o(x^m)\pm o(x^n)\subset o(x^n),\ m\geq n>0$$

$$o(x^m)o(x^n)\subset o(x^{m+n}),\ m,n>0$$

$$C\cdot o(x^n)\subset o(x^n),\ C\neq 0\text{为常数}$$

$$x^n\cdot o(x^m)\subset o(x^{m+n}),\ m,n>0$$

$$\frac{1}{x^n}\cdot o(x^m)\subset o(x^{m-n}),\ m\geq n>0$$

$$o(o(x^n))\subset o(x^n)$$

例2 $f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$ 将此函数展开到6次.

解

$$f(x)=\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)}{x}\right)=\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)\right)\right)$$

$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+o(x^6)\right)^3+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)$$

例3 将函数$f(x)=\ln x$在$x=2$进行$Taylor$公式展开.

解 $$f(x)=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+o\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^n\right)$$

例4 设$f(x)=e^{2x-x^2}$.

(1)写出$f(x)$的5次带Peano余项的Maclaurin公式;

(2)写出$f(x)$在$x_0=1$处的5次带Peano余项的Taylor公式.

解 (1)$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)$

$$\Rightarrow e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}$$

$$+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}+o((2x-x^2)^5)$$

$$=1+(2x-x^2)+\frac{4x^2-4x^3+x^4}{2!}+\frac{8x^3-12x^4+6x^5}{3!}$$

$$+\frac{16x^4-32x^5}{4!}+\frac{32x^5}{5!}+o(x^5)$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^4}{6}-\frac{x^5}{15}+o(x^5)$$

（2）$x\to 1$时，$x-1\to 0$

$$\Rightarrow e^{2x-x^2}=e^{1-(x-1)^2}=e\cdot e^{-(x-1)^2}$$

$$=e\cdot\left[1-(x-1)^2+\frac{((x-1)^2)^2}{2!}+o((x-1)^5)\right]$$

$$=e\cdot\left[1-(x-1)^2+\frac{(x-1)^4}{2}+o((x-1)^5)\right]$$

例5 将函数 $f(x)=x^3+2x^2-x+1$ 在 $x=1$ 进行 *Taylor* 公式展开.

解 利用 *Taylor* 公式的唯一性

$$f(x)=(x-1+1)^3+2(x-1+1)^2-(x-1)$$

$$=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$$

$$+2(x-1)^2+4(x-1)+2-(x-1)$$

$$=(x-1)^3+5(x-1)^2+6(x-1)+3$$

Peano余项Taylor公式应用

应用1 **极值问题**

定理2.2 设f在x_0处有k阶导数,且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\ f^{(k)}(x_0)\neq 0,$$

1) k为奇数时,x_0不是极值点

2) k为偶数时,x_0是极值点,且

$f^{(k)}(x_0)>0$时x_0为极小值点,

$f^{(k)}(x_0)<0$时x_0为极大值点.

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^k)\quad (x\to x_0)$$

应用2 求极限

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

例6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解 $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left[\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right] = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\therefore 原式 = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

例7 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}$

解 $\because \tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$

$\therefore x\to 0$时, $\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$,

又 $\because \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$$\therefore 原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}}=\frac{1}{3}$$

例8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{\sin^3 x}$

解 $e^x\sin x = [1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)][x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)]$

$$= x - \frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^3)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

高阶项可省

$$e^x\sin x - x(1+x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

例9 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

解 $x\to+\infty, \frac{1}{x}\to 0^+$

$$\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2+o(\frac{1}{x^2})$$

$$x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})=x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})+o(1)$$

$$=\frac{1}{2}+o(1)$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\frac{1}{2}.$$

Taylor定理(Lagrange余项)

定理2.3 设 $f(x)$在$[a,b]$上有n阶连续导数，在(a,b)内有$n+1$阶导数, 则对$\forall x_0, x \in [a,b]$, 有

$$f(x) = T_n(f, x_0; x) + R_n(x),$$

其中 $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$。 **Lagrange余项**

回顾：$T_n(f, x_0; x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$$+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

带Lagrange余项Taylor公式

证 将$T_n(f,x_0;x)$中的x看成自变量，令$h(x)=T_n(f,x_0;x)$。

则有$h^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)$，$i=0,1,\cdots n$成立。因此

$$R_n^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0)-h^{(i)}(x_0)=0,\quad i=0,1,\cdots n。$$

而$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-h^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$。

令$g_n(x)=(x-x_0)^{n+1}$，则易见

$$g_n^{(i)}(x_0)=0,\quad i=0,1,\cdots n,$$

$$g_n^{(n+1)}(x)=(n+1)!。$$

对$R_n(x)$和$g_n(x)$运用$Cauchy$中值定理，可得

带Lagrange余项Taylor公式

$$\frac{R_n(x)}{g_n(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g_n(x)-g_n(x_0)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{g_n'(\xi_1)}$$

$$=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{g_n'(\xi_1)-g_n'(x_0)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{g_n''(\xi_2)}=\cdots\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{g_n^{(n)}(\xi_n)}$$

$$=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{g_n^{(n)}(\xi_n)-g_n^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g_n^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

因此$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$。

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

注

1.当$x_0=0$时的Taylor公式称为Maclaurin公式.

2. 当$n=0$时, Taylor 公式变成 Lagrange 中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

3.ξ也可表示为$x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1.$

4. Peano余项对误差进行定性的估计，Lagrange余项对误差有了更加准确的定量的描述。

$\boxed{\text{将 } Peano \text{ 余项 } (\text{局部}, x_0 \text{邻域内})}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{推广到 } (a,b) \text{区间}}$

$\boxed{\text{有}n\text{阶导数}}$ $\boxed{\text{有}n+1\text{阶导数}}$

从局部 $\rightarrow$ 大范围; 从模糊 $\rightarrow$ 精确

常用展开式的Lagrange余项

1. $e^x: R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1$

2. $\sin x: R_{2n}(x)=(-1)^n\dfrac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}, 0<\theta<1$

3. $\cos x: R_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}, 0<\theta<1$

4. $\ln(1+x): R_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}, 0<\theta<1$

5. $(1+x)^\lambda: R_n(x)=C_\lambda^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}x^{n+1}, 0<\theta<1$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例10 证明当$x>0$时,

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

证明

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi_1)^4},0<\xi_1<x,$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$

例11 在$[0,\pi]$上,用$T_9(f,0;x)$逼近$\sin x$,并估计误差.

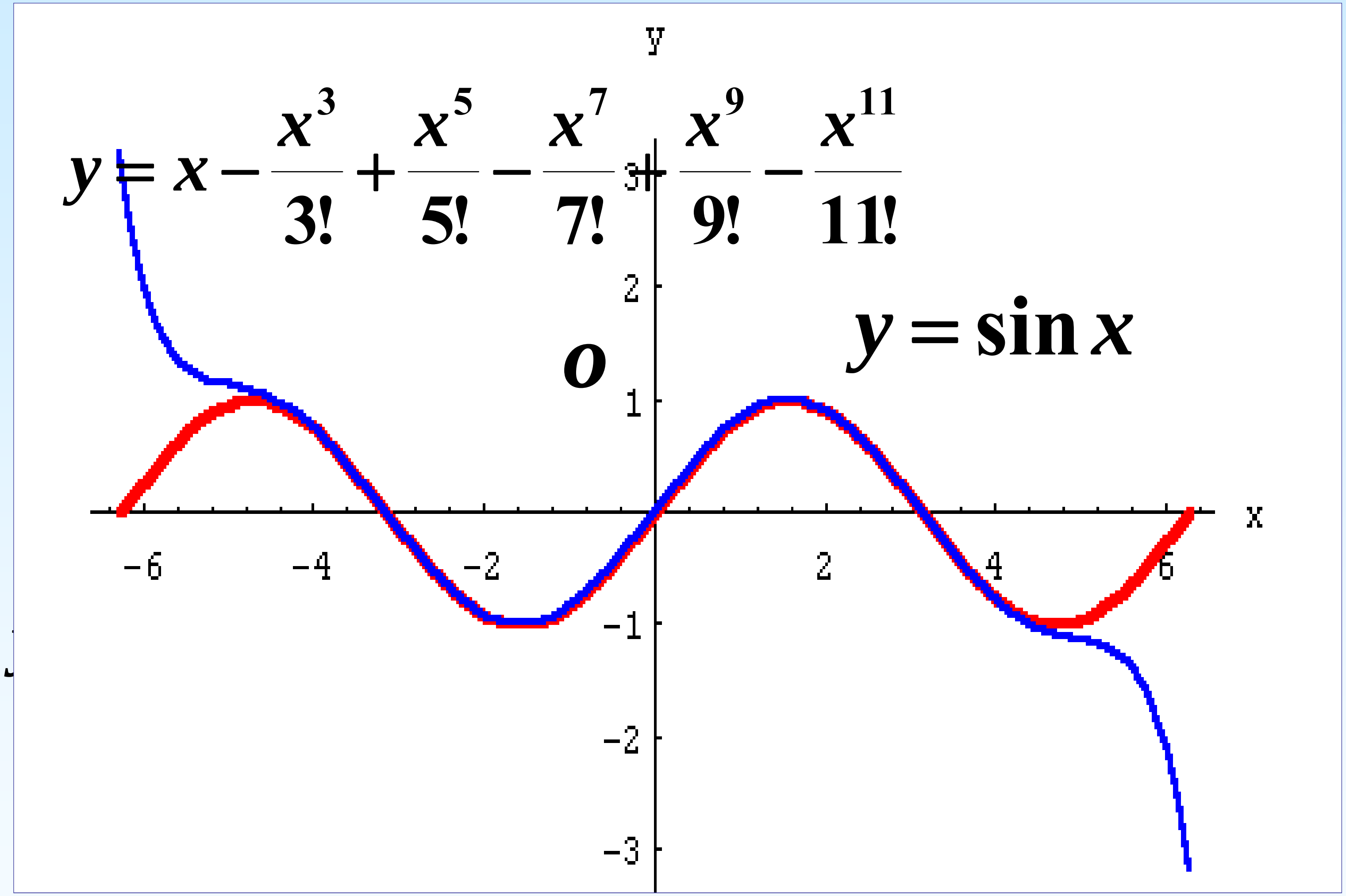
解

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{-\cos\theta x}{11!}x^{11},\ \theta \in (0,1)$$

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{x^{11}}{11!} \le \frac{\pi^{11}}{11!} = 0.0073404$$

① $|x|$越小,误差越小(局部).

② n越大,误差越小(全部).



$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$
$y = \sin x$
o
y
x
3
2
1
-1
-2
-3
-6
-4
-2
2
4
6

回顾：　带Peano余项的Taylor公式

定理2.1 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\quad (x\to x_0)$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处带 *Peano* 余项 n 阶 *Taylor* 公式

取 $x_0=0$ 时，称为 *Maclaurin*(麦克劳林)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$$

回顾： 带Lagrange余项的Taylor公式

定理2.3 设 $f(x)$在$[a,b]$上有n阶连续导数，在(a,b)内有$n+1$阶导数, 则对$\forall x_0, x\in[a,b]$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$在$x_0$与 x之间）称为 Lagrange 余项.

带Lagrange余项的n阶Taylor公式

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例12 f 在$[a,b]$二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$,

求证：$\exists c\in(a,b)$，使得

$$\left|f''(c)\right|\ge\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|,$$

即: $$\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\left|f''(c)\right|.$$

证 $f(x)$在a点, b点的一阶Taylor公式为

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2$$

$$=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,\qquad \xi\text{介于}a,x\text{之间}$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2$$

$$=f(b)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-b)^2,\qquad \eta\text{介于}x,b\text{之间}$$

$$\text{取}x=\frac{a+b}{2},\quad\text{得}f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(c_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

$$\text{类似可得}f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(c_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$$

$$\text{两式相减得 }f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(c_1)-f''(c_2)]$$

$$\therefore\left|f(b)-f(a)\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}[\left|f''(c_1)\right|+\left|f''(c_2)\right|]$$

取c_1,c_2中使$\left|f''(c_1)\right|,\left|f''(c_2)\right|$大者为$c$即可。

例13 在(a,b)内$f''(x)>0$,求证: $\forall x_1,x_2\in(a,b)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

证 在$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$处Taylor展开

$$f(x)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$$

其中ξ介于x与$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$之间.

$$>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right).\qquad (x\neq x_0)$$

将x分别代入为x_1, x_2，可得

$$f(x_1) > f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f'(\frac{x_1+x_2}{2})(\frac{x_1-x_2}{2}),$$

$$f(x_2) > f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f'(\frac{x_1+x_2}{2})(\frac{x_2-x_1}{2}),$$

两式相加

$$f(x_1) + f(x_2) > 2f(\frac{x_1+x_2}{2}),$$

例14 f在$[0,1]$内二阶可导，$f(0)=f(1)=0$,

$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$,求证: $\max\limits_{x\in[0,1]} f''(x)\geq 8$

证 极小值在 $(0,1)$内取得 , $f(c)=-1$最小 , $f'(c)=0$,

$f(x)$在c点的一阶 $Taylor$公式为

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2 \quad \xi\text{介于}x\text{与}c\text{之间}$$

分别取$x=0, x=1$,得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(-c)^2=0, \quad \xi_1\in(0,c)$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2=0, \quad \xi_2\in(c,1)$$

即 $\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2 = 1,\ f''(\xi_1) = \dfrac{2}{c^2},$

$$(c \le \frac{1}{2}\text{时})\ f''(\xi_1) \ge 8$$

$\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 = 1,\ f''(\xi_2) = \dfrac{2}{(1-c)^2},$

$$(c > \frac{1}{2}\text{时})\ f''(\xi_2) \ge 8$$

$\therefore \max\limits_{x\in[0,1]} f''(x) \ge 8.(\exists \xi,\ f''(\xi) \ge 8)$

例15 f 在$[0,1]$内二阶可导,且$|f(x)|\le a, |f''(x)|\le b,$

求证:$|f'(x)|\le 2a+\dfrac{b}{2}.$

证 函数在x点的一阶Taylor公式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2,\text{其中}\xi\text{介于}t,x\text{之间}$$

分别代入0,1点的值，可得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,\xi_1\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2,\xi_2\in(x,1)$$

$$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{1}{2}(1-x)^2 f''(\xi_2)+\frac{1}{2}x^2 f''(\xi_1)$$

$$\left|f'(x)\right| \le \left|f(1)\right|+\left|f(0)\right|+\frac{1}{2}(1-x)^2\left|f''(\xi_2)\right|+\frac{1}{2}x^2\left|f''(\xi_1)\right|$$

$$\le 2a+\frac{1}{2}[(1-x)^2+x^2]b$$

$$\le 2a+\frac{b}{2}$$

例16 f在$(-\infty,+\infty)$三阶可导，若f, f'''有界，证明：f', f''也有界.

证 函数在x点的二阶Taylor公式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(x)}{2}(t-x)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(t-x)^3,$$

代入$x+1, x-1$点的值，可得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!}$$

设$|f(x)|\le M_1, |f'''(x)|\le M_2.$

两式相加

$$f(x+1)+f(x-1)$$

$$=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)]$$

$$\therefore \left|f''(x)\right| \le 4M_1+\frac{1}{3}M_2 \text{ 有界}$$

两式相减

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$$

$$\therefore \left|f'(x)\right| \le M_1+\frac{1}{3}M_2 \text{ 有界}$$

例17 $f(x)$在$[0,+\infty)$上三次可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$.

证 函数在x点的二阶Taylor公式为

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(x)}{2}(t-x)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(t-x)^3,$$

代入$x+1, x-1$点的值，可得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!}$$

两式相加

$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}[f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1)]$$

两边取极限得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0.$

两式相减

$$2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{3!}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$$

两边取极限得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

例17

f在$(-1,1)$内$n+1$阶可导，且$f^{(n+1)}(0)\neq 0$，可得展式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta_n x)}{n!}x^n,(0<\theta_n<1)$$

求证：$\lim\limits_{x\to 0}\theta_n=\dfrac{1}{n+1}$.

证 $\because\ f^{(n)}(\theta_n x) = f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)\theta_n x + o(\theta_n x)$

$$\therefore\ f(x) = f(0) + f'(0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}\theta_n x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

又 $f(x) = f(0) + f'(0) + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

两式相减

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}\theta_n x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}\theta_n x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\theta_n = \frac{1}{(n+1)} + \frac{n!}{f^{(n+1)}(0)}\frac{o(x^{n+1})}{x^{n+1}} \quad \therefore \lim_{x\to 0}\theta_n = \frac{1}{n+1}$$

方法二

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta_n x)}{n!}x^n,(0<\theta_n<1)$$

又 $$f(x)=f(0)+f'(0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\Rightarrow\frac{f^{(n)}(\theta_n x)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(\theta_n x)-f^{(n)}(0)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}x+o(x)$$

$$\Rightarrow\frac{f^{(n)}(\theta_n x)-f^{(n)}(0)}{\theta_n x}\cdot\theta_n=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}+o(1)$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(\theta_n x)-f^{(n)}(0)}{\theta_n x}\cdot\lim_{x\to 0}\theta_n=\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\theta_n=\frac{1}{n+1}$$

总结：

Taylor公式证明题目时关键在点x_0, x的选取.

点多选端点、中点、驻 点、极值点等 .

本节作业

- 习题5.2

1、2（2, 3, 6）、4（1, 3, 7）、5（2）、6（2, 4, 6）、8、11、13、15、17