§2　二重积分的计算(1)

直角坐标系下二重积分的计算—矩形区域

设 $D=[a,b]\times[c,d]$, $f:D\to R$, 如对 $\forall x\in[a,b]$,

函数 $f(x,\cdot)$ 在$[c,d]$上可积, 则可得如下函数:

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy,\quad x\in[a,b].$$

如果函数 $I(x)$ 也在$[a,b]$上可积，则得积分

$$\int_a^b I(x)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\,.$$

此积分称为累次积分．记为 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$.

类似理解：

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy\,.$$

问题：

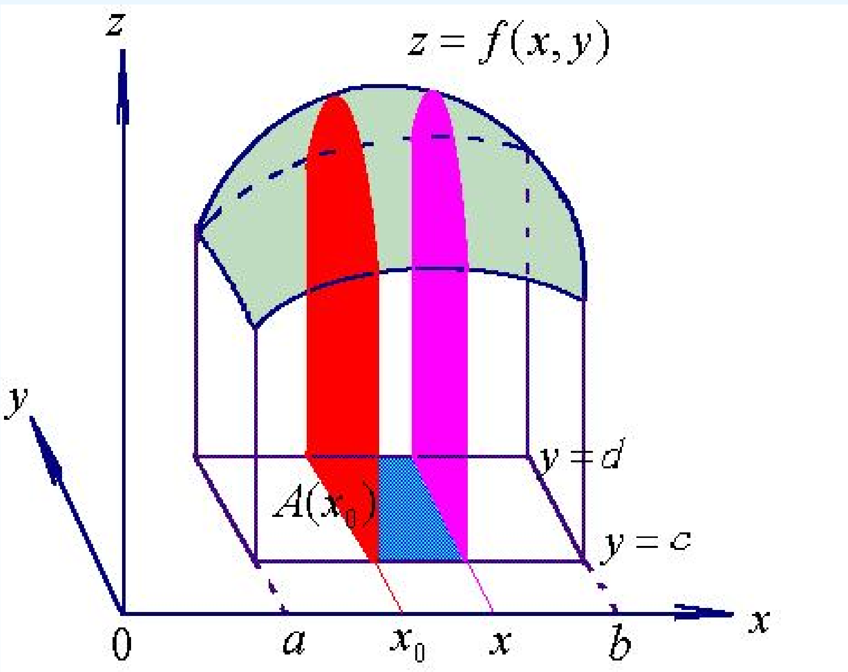
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \overset{?}{=} \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy,$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \overset{?}{=} \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

定理2. 1 设$f(x,y)$在矩形区域$D=[a,b]\times[c,d]$上可积，且对 $\forall x\in[a,b]$, 积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 都存在, 则累次积分 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$ 也存在，且

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

$$\boxed{A(x)=\int_c^d f(x,y)dy}$$



证明 $I(x)=\int_c^d f(x,y)dy,\quad x\in[a,b].$

对$[a,b]$,$[c,d]$的分割

$$\pi_x: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$\pi_y: c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d,$$

令 $I_i=[x_{i-1},x_i],i=1,\cdots,n,$

$$J_j=[y_{j-1},y_j],j=1,\cdots,m.$$

因此子矩形$I_i\times J_j$形成了D的分割 $\pi=\pi_x\times\pi_y$

令$A=\iint\limits_D f\,\mathrm{d}\sigma$ 由定义，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

当分割 π满足$\|\pi\| < \delta$时，有

$$A-\varepsilon < \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j < A+\varepsilon \quad (1)$$

现取$\|\pi_x\|,\|\pi_y\| < \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$,则$\|\pi\| < \delta$ 在(1)中取

$$\sum_{j=1}^{n} \inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_j \qquad \sum_{j=1}^{n} \sup f(\xi_i,J_j)\Delta y_j$$

分别是$f(\xi_i,\cdot)$在$[c,d]$上的上和与下和

$$\sum_{j=1}^{n} \inf f(\xi_i, J_j)\Delta y_j \le \int_c^d f(\xi_i, y)dy$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \sup f(\xi_i, J_j)\Delta y_j$$

$$A-\varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \le A+\varepsilon$$

$$\lim_{\|\pi_x\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i = A$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

定理2.2

设$f(x,y)$在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]$上可积,

且对 $\forall y\in[c,d]$, 积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 都存在, 则累次

积分 $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$ 也存在，且

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

证明 类似于定理 2.1

定理2.3 设$f(x,y)$在矩形区域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续，则有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$
$$= \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

累次积分交换顺序的充分条件：

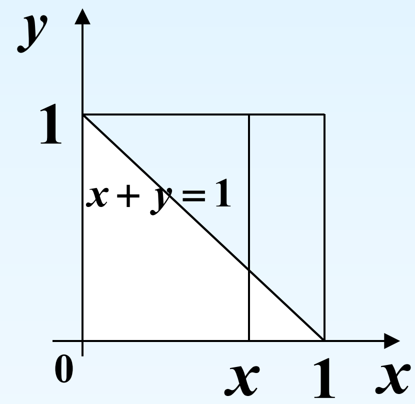
$f(x,y)$在D上可积，

对$\forall x\in[a,b]$，积分$\int_c^d f(x,y)dy$都存在，

对$\forall y\in[c,d]$，积分$\int_a^b f(x,y)dx$都存在.

例1 设 $f(x,y)=1-x-y$

计算 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.



解 因为$f(x,y)$满足定理 2.3

的条件, 所以

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

而 $\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 (1-x-y)dy$

$$= \int_0^1 (1-x)dy - \int_0^1 ydy$$

$$= (1-x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - x$$

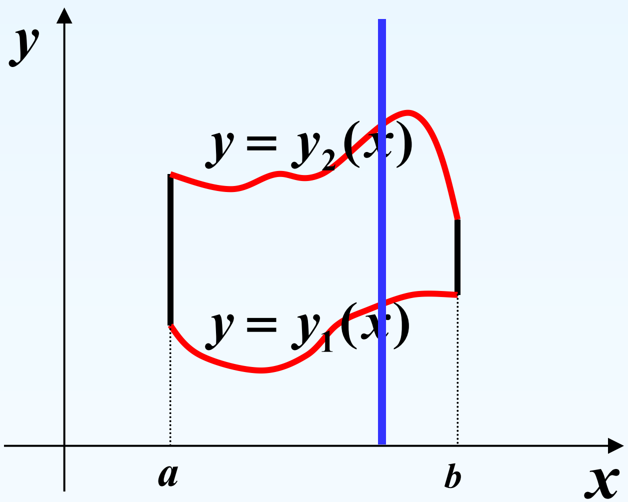
所以 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_0^1 (\frac{1}{2} - x)dx = 0.$

一般区域上二重积分的计算

x型区域

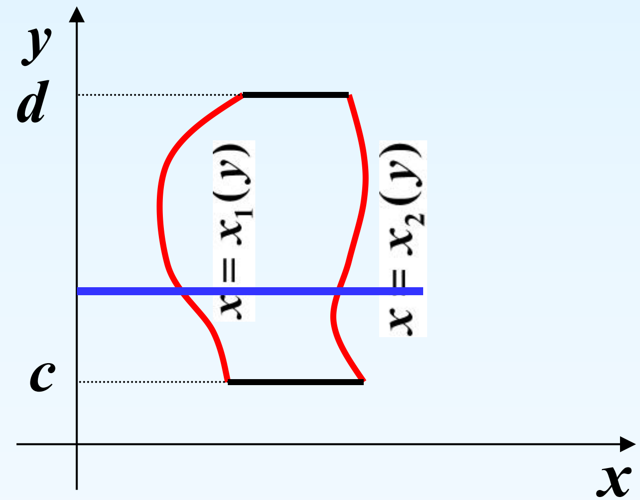
$$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$$

特点： 穿过区域且平行于y轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.



y型区域

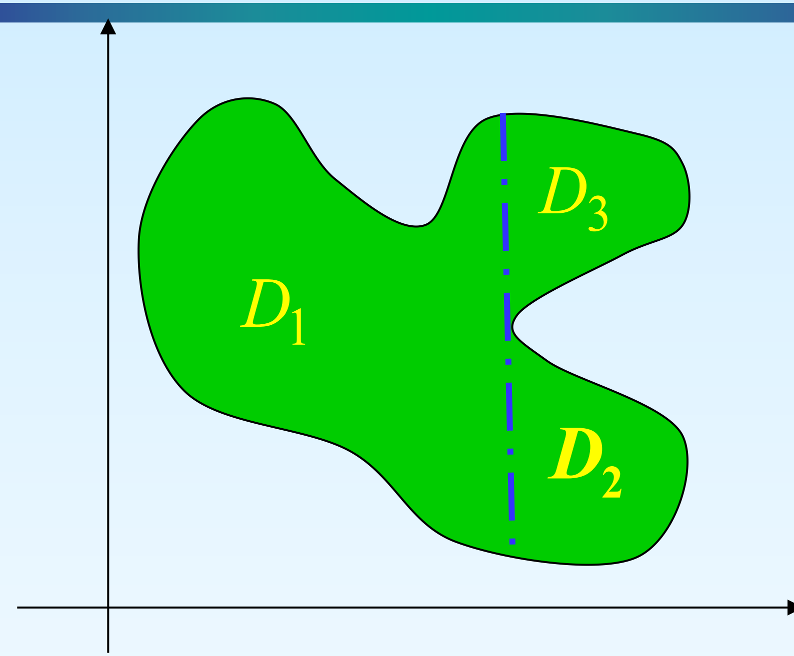
$$D=\{(x,y)\,|\,x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$$



特点： 穿过区域且平行于 x轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

一般区域

分解成有限个无公共内点的 x型区域 或 y型区域.

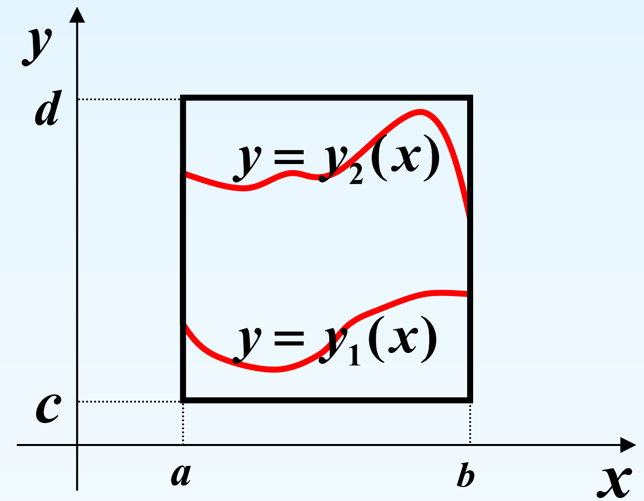


因此

一般区域上的二重积分 计算问题归结到 x型区域或 y型区域上的二重积分计算问题 .

定理2.4 设$f(x,y)$在x型区域 D上连续,其中 $y_1(x)$ $y_2(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



分析：

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y),(x,y)\in D, \\ 0, \quad (x,y)\notin D. \end{cases}$$

证 由于 $y_1(x)$，$y_2(x)$在$[a,b]$上连续，故总存在矩形区域$[a,b]\times[c,d]\supset D$，作定义在$[a,b]\times[c,d]$上的辅助函数

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y),(x,y)\in D, \\ 0, \quad (x,y)\notin D. \end{cases}$$

可以验证$F(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上可积，而且

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_c^d F(x,y)dy$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y)dy = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

定理2. 5 若$f(x,y)$在y型区域 D上连续，$x_1(y)$

$x_2(y)$在$[c,d]$上连续，则

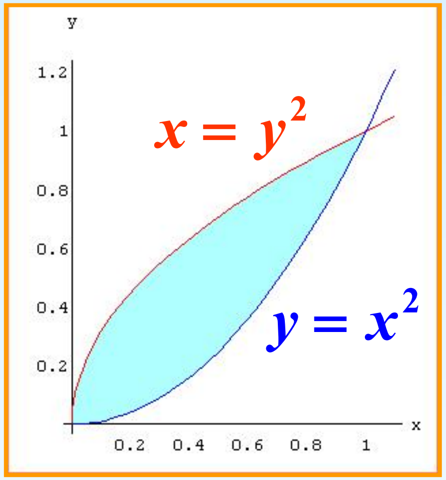
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

注 意：积分限的问题

务必保证：下限 $\leq$ 上限 $\longleftarrow$ 同一定积分

先定后积 $\longleftarrow$ 累次积分

例 2 求$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中$D$是由抛物线$y=x^2$和$x=y^2$所围平面闭区域.

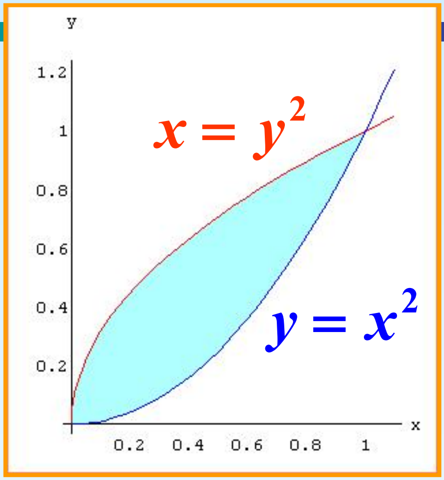


解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ,(1,1),$$

$$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)dy$$

$$=\int_0^1 [x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)]dx=\frac{33}{140}.$$



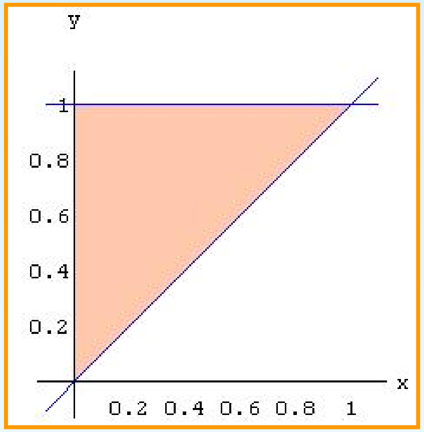
$$\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)dx$$

$$= \int_0^1 (y^{\frac{3}{2}} - y^3 + \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^6)dy$$

$$= \left(\frac{8}{15}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{21}y^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{33}{140}.$$

例3 计算$\iint\limits_D x^{-2}e^{-y^2}d\sigma$，其中$D$是由$x=0, y=1$及$y=x$围成的区域.



解 $\because \int e^{-y^2}dy$无法用初等函数表示

$\therefore$ 积分时必须考虑次序

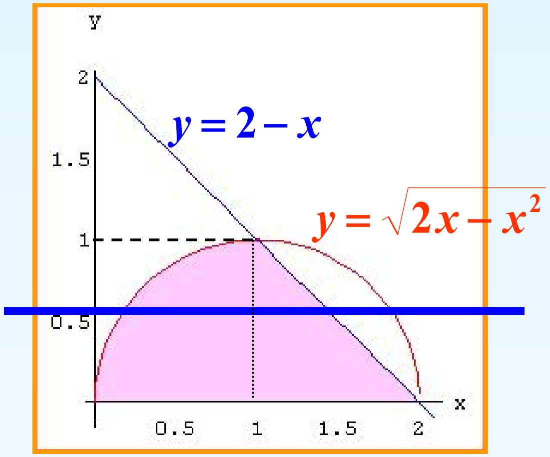
$$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx$$

$$= \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}dy = \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}dy^2 = \frac{1}{6}(1-\frac{2}{e}).$$

例 4 改变积分

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$ 的次序.

解 积分区域如图

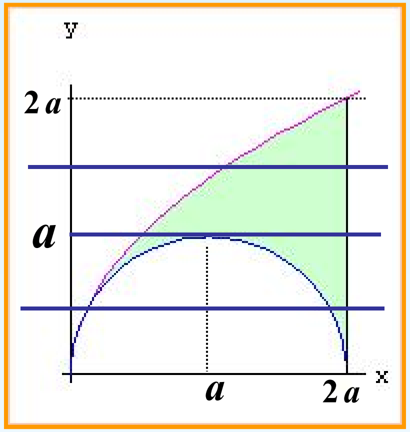


$$y=\sqrt{2x-x^2}\to x=1-\sqrt{1-y^2}$$

$$\text{原式}=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

例5 改变积分$\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy\ \ (a>0)$的次序.

解



$$y=\sqrt{2ax}$$

$$y=\sqrt{2ax-x^2}\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

$$\text{原式}=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx$$

$$+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx.$$

例6 计算积分 $I=\int_{\frac14}^{\frac12}dy\int_{\frac12}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac12}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx.$

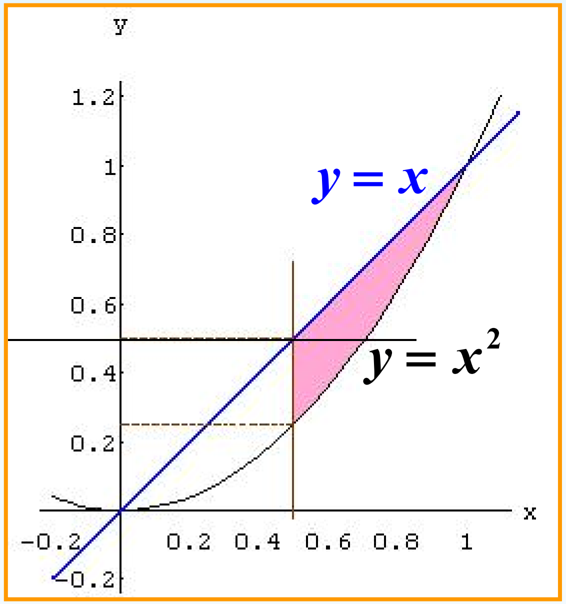
解 $\because \int e^{\frac{y}{x}}dx$不能用初等函数表示

$\therefore$先改变积分次序.

$$I=\int_{\frac12}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy$$

$$=\int_{\frac12}^{1}x(e-e^{x})dx$$

$$=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}.$$



例7 求两圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的体积.

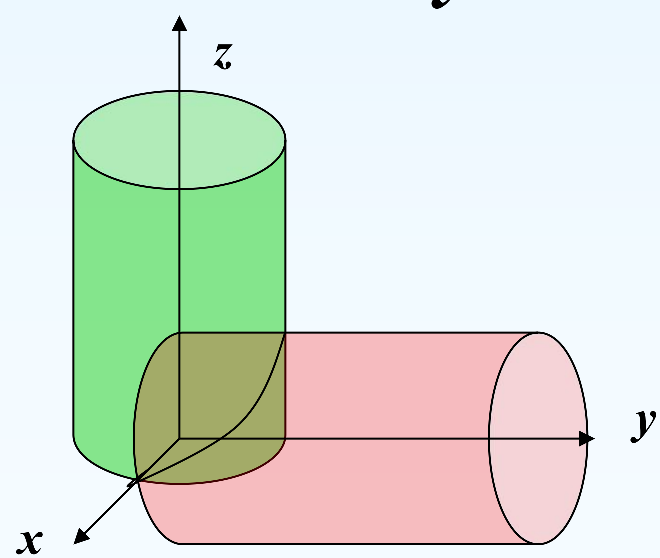
解 利用对称关系 $V=8V_1$, $V_1=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma$,

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le \sqrt{R^2-x^2}, 0\le x\le R\}.$$

$$V_1=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2}\,d\sigma=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,dy$$

$$=\int_0^R (R^2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}R^3.$$

所以 $V=8V_1=\dfrac{16}{3}R^3.$



例8 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ $z = 6 - 2x^2 - y^2$

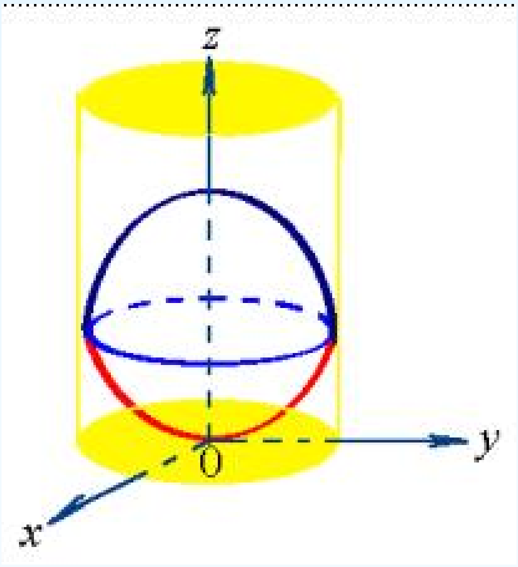
所围成的立体的体积

解 1. 作出该立体的简图, 并确定投影

消去变量 z 得一垂直于

xoy 面的柱面

$$x^2 + y^2 = 2$$



立体镶嵌在其中, 立体在

xoy面的投影区域就是该柱面在xoy面上所围成的区域

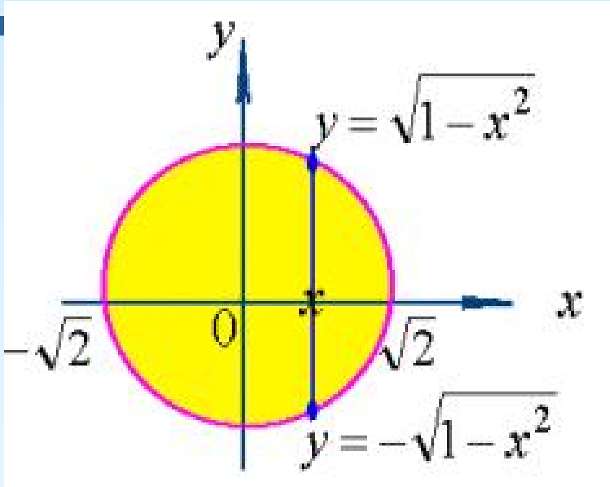
$$D\text{:}\quad x^2+y^2\le 2$$

2. 列出体积计算的表达式

$$V=\iint_D [(6-2x^2-y^2)-(x^2+2y^2)]d\sigma$$

$$=\iint_D (6-3x^2-3y^2)d\sigma$$

3. 配置积分限, 化二重积分为二次积分



$$V = 6\iint_D d\sigma - 3\iint_D x^2 d\sigma - 3\iint_D y^2 d\sigma$$

$$\iint_D d\sigma = 2\pi$$

由x,y的对称性$\iint\limits_D x^2 d\sigma = \iint\limits_D y^2 d\sigma$

$$\iint\limits_D x^2 d\sigma = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy = 2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 16\cdot\frac{(2-1)!!(2-1)!!}{(2+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 16\cdot\frac{1\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$ 所以体积$= 12\pi - 6\pi = 6\pi$

利用对称性计算二重积分

设积分区域 D 关于 x 轴对称，D_1 是 D 中对应于 $y \geq 0$ 的部分，则

(1) 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数，即

$$f(x,-y) = f(x,y).$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma.$$

(2) 若被积函数 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，即

$$f(x,-y) = -f(x,y).$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = 0.$$

例9 计算 $\iint\limits_D xy^2e^{|x|}dx$ 和 $\iint\limits_D (|x|+|y|)dx$，其中

$D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 1\}$.

解 区域D关于y轴对称，

被积函数$f(x,y)=xy^2e^{|x|}$关于变量x为奇函数，即

$$f(-x,y)=-f(x,y)$$

所以 $\iint\limits_D xy^2e^{|x|}dx=0.$

记 $D_1 = D \cap \{(x,y) \mid x \geq 0\}$, $D_2 = D \cap \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

被积函数 $|x|+|y|$ 关于变量 x, y 都是偶函数，则

$$\iint_D (|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} (|x|+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_{D_2} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x+y)\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$$

小结

直角坐标系下二重积分的计算

关键：如何化为累次积分

1. 矩形区域

2. x型区域，y型区域

3.一般区域

利用对称性计算二重积分