第十四章

多元函数的极限和连续

§1 Euclid 空间的点集及基本概念

n维向量组成的集合：

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \vec{x} \quad \text{向量或点}$$

设$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，在$\mathbf{R}^n$中

定义加法和数乘

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

性质 $\forall x, y, z \in \mathrm{R}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathrm{R}$

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

定义 集合R^n定义加法和数乘运算后，称为**n维向量空间**.

定义 $<x,y>=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,称为向量$x,y$的内积.

性质 $\forall x,y,z\in \mathbf{R}^n, \forall \lambda,\mu\in \mathbf{R}$

1) (正定性) $<x,x>\geq 0$, 当且仅当$x=0$时等号成立;

2) (对称性) $<x,y>=<y,x>$;

3) (线性性) $<x,\lambda y+\mu z>=\lambda<x,y>+\mu<x,z>$.

定义 定义了内积的向量空间称为*Euclid*空间,

简称欧氏空间.

定义1.1 $\|x\| = \sqrt{<x,x>} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$，称为向量$x$的**范数.**

性质1.3

1) (正定性) $\|x\| \ge 0$，当且仅当$x = 0$时等号成立；

2) (数乘性) $\forall \lambda, \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$；

3) (三角不等式) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

*Cauchy-Schwarz*不等式 $\Leftrightarrow <x,y>^2 \le <x,x><y,y>$

即 $|<x,y>| \le \|x\|\,\|y\|$，

$$\|x+y\|^2 = <x+y, x+y> = \|x\|^2 + 2<x,y> + \|y\|^2$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

定义 如果x,y都不是零向量，则 $\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\le 1$

存在唯一的$\theta\in[0,\pi]$ $s.t.$ $\cos\theta=\dfrac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$

称θ为x,y之间的**夹角**.

最后我们定义两点间的**距离**为$\|x-y\|$

$\|x-y\|\le\|x-z\|+\|z-y\|$(距离的三角不等式)

定义1. 2 $a \in \mathbf{R}^n, r > 0$,称集合 $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| < r\}$ 为$\mathbf{R}^n$中以a为球心，以r为半径的开球，记为$B_r(a)$.

令$\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - a\| \le r\}$,

它是$B_r(a)$加球面上的点，称为**闭球**.

定义 $E \subset \mathbf{R}^n$,若存在$r > 0$, s.t. $E \subset B_r(0)$, 则E称为**有界集**.

也可描述为：$\exists M > 0$, 对$\forall x \in E$, 都有$\|x\| \le M$.

F**无界集** :$\forall m \in N^*$,都存在$x_m \in F$ $s.t \|x_m\| > m$.

$\mathbf{R}^n$中点列的极限

定义 $\boldsymbol{x}_k \in \mathbf{R}^n, k=1,2,\cdots$，称$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的**点列**.

定义1.3 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的点列，且$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$.如果对任意的$\varepsilon > 0$,都存在正整数$K$，使得当$k > K$,都有

$$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon,$$

我们称$\boldsymbol{a}$是$\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限，记作

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}, \text{或} \quad \boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a} \quad (k \to +\infty)$$

这时也称点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$**收敛于点**$\boldsymbol{a}$.

性质 若$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a},\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{b}$,那么

1^0 如果点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛，那么极限必唯一.

2^0 收敛点列必定有界.

3^0 $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}_k\pm\boldsymbol{y}_k)=\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$;

4^0 任何$\lambda\in\mathbf{R}$, 有$\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda\boldsymbol{x}_k)=\lambda\boldsymbol{a}$.

定义 $\{\boldsymbol{x}_k\}$是点列， $\boldsymbol{x}_k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k),k=1,2,\ldots,$

如果对于$i=1,2,\ldots,$ 有$\lim\limits_{k\to\infty}x_i^k=a_i$,

那么称数列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按分量收敛于$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

定理1.1 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$ 点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$按分量收敛于$\boldsymbol{a}$.

证明 不妨设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

$$\left|x_i^k\right|\le\|\boldsymbol{x}_k\|\le\left|x_1^k\right|+\left|x_2^k\right|+\cdots+\left|x_n^k\right|$$

可知当$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$时，$\lim\limits_{k\to\infty}x_i^k=0$，即按分量收敛.

反之，若$\boldsymbol{x}_k$按分量收敛于$\boldsymbol{0}$，得出

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left|x_1^k\right|+\left|x_2^k\right|+\cdots+\left|x_n^k\right|\right)=0\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$$

例1 $\mathbf{R}^3$中的点列 $\boldsymbol{x}_k = ((1+\frac{1}{k})^k, \frac{k}{1+k}, (1-\frac{1}{k})^k),$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{k})^k = e,\quad \lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{1+k} = 1$

$$\lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{k})^k = \frac{1}{e},$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = (\mathrm{e},\ 1,\ \mathrm{e}^{-1})$

定义1.4 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是$\mathbf{R}^n$中的点列, 如果对任意的$\varepsilon > 0$, 都存在正整数K, 当$k, l > K$时, 都有$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l\| < \varepsilon$, 我们称$\{\boldsymbol{x}_k\}$是一个基本列.

定理1.2 点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛的充分必要条件是$\{\boldsymbol{x}_k\}$是基本点列.

证明 $\Rightarrow$ 设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists K,s.t.\ k>K$ 时,

有 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 因此当 $k,l>K$ 时有

$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\dfrac{\varepsilon}{2},\quad \|\boldsymbol{x}_l-\boldsymbol{a}\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 由距离的三角不等式

$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_l\|\le\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{x}_l-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon$, $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是基本列.

$\Leftarrow$ $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是基本列, $\left|x_i^k-x_i^l\right|\le\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_l\|(i=1,\cdots,n)$

可知 $\{x_i^k\}$ 是基本列，所以收敛，令 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^k=a_i$,

即 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 按分量收敛于 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$. 从而点列收敛.

定义1.5 设$E\subset \mathbf{R}^n$,若对任意的点$a\in E$，都存在$r>0$，使得$B_r(a)\subset E$，则称E为开集；

如果一个集合的补集是开集，则称该集合为闭集.

注 约定空集和$\mathbf{R}^n$是开集，当然也是闭集.

例2 R^2中的上半平面$\{(x,y):y>0\}$是R^2中的开集.

证明 任取一点$a=(x,y), y>0$. 做球 $B_y(a)$,

任取一点$(x',y')\in B_y(a),(x'-x)^2+(y'-y)^2<y^2$,

$\Rightarrow 2yy'>(x'-x)^2+(y')^2\geq 0.$ 由$y>0$知$y'>0$, 得证.

例3 将R^n挖去一点后得到的集合是开集.

证明 设$a\in\mathrm{R}^n$,考察$E=\mathrm{R}^n\setminus\{a\}$.

任取$x\in E$,令$r=\|x-a\|>0$.做球$B_r(x)$.对任意$y\in B_r(x)$

由$\|x-y\|<r=\|x-a\|$,知$y\neq a$,所以$y\in E$,即$B_r(x)\subset\mathrm{E}$.

例4 设$r>0$,球$B_r(a)$是开集.

证明 任取$c\in B_r(a)$,令$d=r-\|a-c\|>0$,做球$B_d(c)$,只须证明$B_d(c)\subset B_r(a)$即可。

任取$x\in B_d(c)$,那么$\|x-c\|<d$,由三角不等式

$$\|x-a\|\le\|x-c\|+\|c-a\|<d+\|c-a\|=r.$$

定理(de Morgan 定律)

$$\left(\bigcap_{\alpha}E_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha}E_\alpha^c \qquad \left(\bigcup_{\alpha}E_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha}E_\alpha^c$$

性质1. 1

1） 设$\{E_\alpha\}$是$\mathbf{R}^n$中的开子集族，（α属于指标集I）

那么$\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$也是开集（任意多个开集的并还是开集）

设$E_1, E_2, \cdots, E_m$是有限个开集，那么交集

$\bigcap\limits_{i=1}^{m} E_i$也是开集（有限个开集的交也是开集）

注 无穷多个开集的交未必是开集

例如$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_{1/k}(0)=\{0\}$

2） 设$\{F_\alpha\}$是R^n中的闭子集族,那么交集$\bigcap\limits_{\alpha\in I} F_\alpha$是闭集

(任意多个闭集的交是闭集)

设$F_1, F_2, \cdots, F_m$是有限个闭集， 那么并集

$\bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$也是闭集(有限个闭集的并是闭集）

注　无穷多个闭集的并未必是闭集

例如$\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \overline{B}_{m/m+1}(0) = B_1(0)$

定义1.6 设$E \subset \mathbf{R}^n$,如果点$a \in E$，如果存在$r > 0$使得$B_r(a) \subset E$，那么称a为E的一个内点.

集合E的内点的全体称为E的内部，记为E^o.

如果a存在开球$B_r(a)$,使得$B_r(a) \subset E^c$,则称a为E的外点.

外点是“补集的内点”,外点的集合称为外部.

集合E的外部即为补集的内部$(E^c)^o$

如果包含a的任意开球既含有E的内点又含有E的外点，则称a为E的边界点，边界点的全体称为E的边界，记为∂E.

空心球: $B_r(a)\setminus\{a\}=\{x\in\mathbf{R}^n:0<\|x-a\|<r\}$,记做 $B_r(\breve{a})$.

定义1.7 设 $E\subset\mathbf{R}^n$, 若 $a\in\mathbf{R}^n$ 有这样的性质：对任何 $r>0$, 在空心球 $B_r(\breve{a})$ 中总有 E 中的点, 那么称 a 为 E 的**聚点**.

注 聚点可属于E也可不属于，E中不是聚点的点称为**孤立点**.

性质 1^o 点 a 是E的聚点当且仅当以 a 为球心的任何球中都有E中的无限多个点.

2^o 点 a 是E的聚点当且仅当可从E中选出互不相同的点组成的点列 $\{x_k\}$, $s.t.\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$.

定义1.8 点集$E\in\mathbf{R}^n$的聚点的全体称为E的**导集**，记作E'. 记$\overline{E}=E\cup E'$,称$\overline{E}$为E的**闭包**.

定理1.3 E是闭集的充分必要条件是$E'\subset E$.

证明 $\Rightarrow$ E为闭集, 则E^c开集, 任取$a\in E^c$, 则存在球$\mathrm{B}_r(a)\subset E^c$,所以$\mathrm{B}_r(a)$一定没有$E$中点，$a$不是聚点，即$E'\subset E$.

$\Leftarrow$ 设$E'\subset E$,取$a\in E^c$, 则a必不是聚点，因此必有r>0，s.t. $\mathrm{B}_r(a)$中不含有E中的点, 即$\mathrm{B}_r(a)\subset E^c$, 则$E^c$开集，$E$为闭集.

定理1.4 E是闭集 $\Leftrightarrow$ E中任何收敛点列的极限仍在E中.

定理1.5 E的导集E'与闭包$\bar{E}$都是闭集.

证明 任取$a\in(E')^c$,则a不是E的聚点，所以存在球$\mathrm{B}_r(a)$

且$\mathrm{B}_r(a)$中点都不是聚点，即$\mathrm{B}_r(a)\subset(E')^c$,$(E')^c$是开集，

从而E'是闭集.

再证$\bar{E}$: 任取$a\in(\bar{E})^c$,则a不是E中的点也不是E的聚点，

存在 $r>0$,$\mathrm{B}_r(a)$中的点都不是E中的点，也不是E的聚点，

即$\mathrm{B}_r(a)\subset(\bar{E})^c$,$(\bar{E})^c$是开集，从而$\bar{E}$是闭集.

内部是包含于集合的最大开集，闭包是包含集合的最小闭集.

定义 给定一个映射$\varphi=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots\varphi_n(t)):[a,b]\to\mathbf{R}^n$，如果$\varphi_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$都连续，则称$\varphi$为一个连续映射，它的像称为一条连续曲线.

定义1.9（道路连通） 令设E是$\mathbf{R}^n$中的点集，如果任给$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in E$，均存在$E$中的连续映射（连续曲线）将$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$连结，则称$E$是道路连通的. 其中曲线可表示为:

$$x_i=\varphi_i(t),i=1,2,\cdots n,\quad t\in[a,b]$$

$$\boldsymbol{p}=(\varphi_1(a),\cdots,\varphi_n(a)),\boldsymbol{q}=(\varphi_1(b),\cdots,\varphi_n(b)),\varphi([a,b])\subset E.$$

定义1.10 在$\mathbf{R}^n$中，道路连通的开集称为（开）区域，区域的闭包称为闭区域.

§2 Euclid空间的基本定理

定理2.1(闭集套定理)

设$\{\boldsymbol{E}_k\}$是上的非空闭集序列，满足$\boldsymbol{E}_1 \supset \boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_k \supset \boldsymbol{E}_{k+1} \cdots$，

且$\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{diam}\boldsymbol{E}_k = 0$，则$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{E}_k$中只有唯一的点.

其中$\mathrm{diam}\boldsymbol{E} = \mathbf{sup}\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}\}$称为集合$\boldsymbol{E}$的直径.

定理2.2(Bolzano-Weierstrass)

$\mathbf{R}^n$上的有界点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，必有收敛子列.

证 由点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有界知，其每一个分量都是有界数列，记其向量形式为

$$\{(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\}.$$

根据数列的 **Bolzano-Weierstrass** 定理知，每个分量中都可选出一个收敛子列.

首先，从第一个分量 $\{x_1^{(k)}\}$ 中选出收敛于 a_1 的子列记为 $\{x_1^{(k_j^1)}\}(j=1,2,\cdots)$，其它分量按相同规律选取，记向量列的子列为

$$\{(x_1^{(k_j^1)},\cdots,x_n^{(k_j^1)})\}.$$

然后，从数列 $\{x_2^{(k_j^1)}\}$ 中选出收敛于 a_2 子列 $\{x_2^{(k_j^2)}\}$，得新的向量列的子列

$$\{(x_1^{(k_j^2)},\cdots,x_n^{(k_j^2)})\}.$$

注意其中第一个分量对应的数列 $\{x_1^{(k_j^2)}\}$ 是收敛数列 $\{x_1^{(k_j^1)}\}$ 的子列，因此 $j\to\infty$ 时其极限仍为 a_1.

按分量依次取下去，最后再从 $\{x_n^{(k_j^{n-1})}\}$ 中选出收敛于 a_n 子列 $\{x_n^{(k_j^n)}\}$, 最后得 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的一个子列

$$\{(x_1^{(k_j^n)},\cdots,x_n^{(k_j^n)})\}$$

根据选取方法有 $\lim\limits_{j\to\infty} x_i^{(k_j^n)} = a_i$，$i=1,\cdots,n$. 由定理 14.1.1 知

$$\lim_{k_n\to\infty}(x_1^{(k_j^n)},\cdots,x_n^{(k_j^n)}) = (a_1,\cdots,a_n).$$

定义2. 1 设S为$\mathbf{R}^n$上的点集，如果$\mathbf{R}^n$中的一组开集$\{U_\alpha\}$满足$\bigcup_\alpha U_\alpha \supset S$, 那么$\{U_\alpha\}$称为$S$的一个开覆盖.

如果S的任意一个开覆盖$\{U_\alpha\}$中总存在一个有限子覆盖，即存在$\{U_\alpha\}$中的有限个开集$\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^P$，满足$\bigcup_{i=1}^P U_{\alpha_i} \supset S$，则称$S$为紧致集.

定理2.3 设E为$\mathbf{R}^n$中的子集，则以下几条等价：

1） E为紧致集；

2） E中任意无穷点列均有收敛子列，且该子列极限仍在E中；

3） E为有界闭集.