A

北京航空航天大学

2020－2021 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班 号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2021 年 06 月 25 日

A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$，$I_2=\iiint\limits_{\Omega}[\cos^4(x+y+z)+z^3]dxdydz$，$I_3=\iiint\limits_{\Omega}[\ln(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 之间的大小关系为（ C ）.

（A） $I_1<I_2<I_3$.　　（B） $I_1>I_2>I_3$.

（C） $I_2>I_1>I_3$.　　（D） $I_2<I_1<I_3$.

2. 设 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$ 则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下为（ B ）.

（A） $\int_0^a dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.　　（B） $\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.

（C） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.　　（D） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

3. 曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与坐标面所围成立体的体积为（ B ）

(A) $\frac{4\pi}{3}$.　　(B) $\frac{\pi}{2}$.

(C) π.　　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，L 是以 $M(x_0,y_0)$ 为中心，半径为 r 的圆周，极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_L f(x,y)ds=$（ A ）.

（A） $2\pi f(x_0,y_0)$　　（B） $f(0,0)$

（C） $2\pi f(0,0)$　　（D） $f(x_0,y_0)$

5. 抛物面 $2z=x^2+y^2$ 位于平面 $z=2$ 下方的面积为(D).

(A) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}+1)$.　　(B) $\pi(5\sqrt{5}-1)$.

(C) $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.　　(D) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.

A

二、计算题（每小题 5 分，满分 15 分）

1．设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=(xyz^2, z\sin y, x^2e^y)$,求散度$div\vec{F}$,旋度$rot\vec{F}$.

解：$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=yz^2+z\cos y$，

$$rot\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz^2 & z\sin y & x^2e^y \end{vmatrix}=(x^2e^y-\sin y, 2xyz-2xe^y, -xz^2).$$

2.设$D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}$，$f(x)$连续且恒正，$a,b$是常数,计算$\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy.$

解：利用区域对称性可知,$\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint\limits_D \dfrac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy.$

所以$\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D \dfrac{(a+b)[f(x)+f(y)]}{f(y)+f(x)}dxdy=\dfrac{1}{2}(a+b).$

3．计算曲线积分 $\int\limits_L (x+y^2)ds$ 其中L是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

解：利用轮换对称性可得

$$\boldsymbol{\int\limits_L (x+y^2)ds=\frac{1}{3}\int\limits_L (x+y+z+x^2+y^2+z^2)ds=\frac{2}{3}\pi R^3.}$$

三、计算题（每题 5 分，共 15 分）

1 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(2z+3xy^2)dxdydz$， 其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成.

解：由于Ω 关于 yoz 平面对称， $f(x,y,z)=3xy^2$ 为 x 的奇函数，故 $\iiint\limits_{D} 3xy^2dv=0$

再利用球面坐标，得到

$$\iiint\limits_{D}(3xy^2+2z)dxdydz=\iiint\limits_{D}2zdxdydz=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\ \ \int_0^1 r\cos\ \ \cdot r^2\sin\ \ d\,r=\frac{\pi}{4}.$$

.

2. 计算积分 $I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(y\geq 0)$ 上从点 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$ 的一段弧.

解： $L: x=a\cos\theta, y=b\sin\theta, 0\leq\theta\leq\pi,$

$$I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(-a\sin\theta)+2b\sin\theta(b\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{2}{3}a(a^2+2b^2).$$

3. $\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$;

解:在曲面上$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,法向量为$n=(-\frac{x}{z},-\frac{y}{z},-1)$,所以$\mathrm{d}S=|n|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则

$$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3.$$

四、（10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(3y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,$0\le z\le b$, 的外侧.

解：曲面方程为：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，法向量为 $\vec{n}_z=(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1)$, 曲面在 xOy 平面的投影为 $D_{xy}:x^2+y^2\le b^2$, $\vec{A}=(3y-z,z-3x,x-y)$,所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(3y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}[-(\frac{3xy-xz+zy-3xy}{\sqrt{y^2+x^2}})+x-y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}[\frac{z(x-y)}{\sqrt{y^2+x^2}}+x-y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$（对称性）.

五、（10 分）设函数$f(x),g(y)$在R上具有一阶连续导数,且$f(0)=0$,已知积分 $\int\limits_L 2xydx+[f(x)+g(y)]dy$与路径无关，且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+[f(x)+g(y)]dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+[f(x)+g(y)]dy$$

求 $f(x),g(y)$.

解:由积分与路径无关的充要条件,

$$f'(x)=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x,\quad f(x)=x^2+C,$$

又因为$f(0)=0\Rightarrow C=0$,

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+[x^2+g(y)]dy=\int_0^1[t^2+g(y)]dy=t^2+\int_0^1 g(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+[x^2+g(y)]dy=\int_0^t[1+g(y)]dy=t+\int_0^t g(y)dy$$

所以$t^2+\int_0^1 g(y)dy=t+\int_0^t g(y)dy$,，两边关于 t 求导得 $2t=1+g(t)$，$g(t)=2t-1$.

即 $f(x)=x^2$，$g(y)=2y-1$.

六、（10 分）利用 Gauss 公式计算

$$\iint_S x(x-2y+x^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(y-2z+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z(z-2x+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot$$

其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：取 Σ: $z=0,\quad (x^2+y^2\le a^2)$ 下侧. 利用高斯公式，得

$$\iint_S x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dzdx+z(z-2x+z^2)dxdy$$

$$+\iint_\Sigma x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dzdx+z(z-2x+z^2)dxdy$$

$$=\iiint_\Omega (2x-2y+3x^2+2y-2z+3y^2+2z-2x+3z^2)dxdydz$$

其中 Ω 为 S，Σ 所围区域

$$=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a \rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=\frac{6\pi}{5}a^5$$

又 $\because \iint_\Sigma x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dxdz+z(z-2x+z^2)dxdy=0$

$\therefore \iint_S x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dxdz+z(z-2x+z^2)dxdy=\dfrac{6\pi}{5}a^5$

七 、（10 分）利用 Stokes 公式计算

$$\int_\Gamma (5y-2e^x)\mathrm{d}x+(5z-2y^2)\mathrm{d}y+(5x+e^{2z})\mathrm{d}z$$

其中 Γ 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y-z=0.\end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解：设 Σ 为平面 $x+y-z=0$ 上被曲线 Γ 所围成的部分，并取 Σ 的法向量向上，则 Σ

法向量的方向余弦 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$，由 Stokes 公式

$$\text{原式}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 5y-2e^x & 5z-2y^2 & 5x+e^{2z}\end{vmatrix}=\iint_\Sigma 5\frac{\sqrt3}{3}\mathrm{d}S=\frac{5}{3}\sqrt3\pi R^2.$$

注：也可利用

$$\text{原式}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 5y-2e^x & 5z-2y^2 & 5x+e^{2z}\end{vmatrix}=-\iint_\Sigma 5\mathrm{d}y\mathrm{d}z+5\mathrm{d}z\mathrm{d}x+5\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 展开计算。

$\vec{n}_z=(-1,-1,1), F=(1,1,1)$，所以原式 $=\iint_{\Sigma} 5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} 5\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$D_{xy}: x^2+y^2+(x+y)^2\le R^2$，令 $\begin{cases} u=x+\dfrac{y}{2} \\ v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}, |J|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, D_{xy}$变为$D_{uv}: u^2+v^2\le \dfrac{R^2}{2}$,

原式 $=-\iint_{\Sigma} 5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} 5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}} 5\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\pi R^2$

注记：曲面也可以取做球面，法向量求对得 4 分。

八、（10 分）利用 Green 公式

证明积分 $I=\oint_L \dfrac{e^x}{x^2+y^2}[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]=2\pi$，

其中 L 为任意包含原点在其内部的分段光滑闭曲线, L 取逆时针方向.

证明：设 $P(x,y)=\dfrac{e^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{e^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}$, 则当$(x.y)\ne(0,0)$时,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\frac{[(x^2+y^2)x+y^2-x^2]\cos y+(x^2+y^2-2x)y\sin y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

因为闭曲线 L 的方向为逆时针方向，在 L 内添加闭曲线 L_1: $x^2+y^2=a^2$, ($a>0$ 充分小),方向

逆时针方向，在 $L-L_1$ 上利用格林公式，积分为 0. 故原积分

$$I=\oint_{L_1}\frac{\mathrm{e}^x}{a^2}[(x\sin y-y\cos y)]\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]=\frac{1}{a^2}\iint_{x^2+y^2\le a^2} 2e^x\cos y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}(2e^{\xi}\cos\eta)\pi a^2=2\pi e^{\xi}\cos\eta,$$

令 $a\to 0, I=\lim\limits_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}}(2\pi e^{\xi}\cos\eta)=2\pi.$