北京航空航天大学

2014－2015 学年 第二学期期中

《 工科数学分析（2） 》

班号__________ 学号_________ 姓名________ 成绩________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2015 年 5 月 16 日

一、 选择题（每题 4 分，满 20 分）

1. 设$\{f_n(x)\}$是定义在点集D上的函数列，与“函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在点集$D$上一致收敛”等价的论断是下述的（ B ）

A．$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数N，当$m>n\geq N$，对于一切$x\in D$都有$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$

B．$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数N，当$m>n\geq N$，对于一切$x\in D$都有$|\sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x)|<\varepsilon.$

C．函数列$\{f_n(x)\}$在点集D上一致收敛于$0.$

D． 对于每一个$x\in D$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数N，当$m>n\geq N$，$|\sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x)|<\varepsilon.$

2. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$的收敛域为（ B ）

A. $(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3})$ ； B. $[\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3})$； C. $(-3,3)$； D. $(-2,4)$.

3. 函数e^{-x-y}的二阶 Maclaurin 公式为（ C ）

A. $1-(x+y)+\dfrac{(x+y)^2}{2}+o(x+y)$； B. $1-(x+y)+o(x+y)$；

C. $1-(x+y)+\dfrac{(x+y)^2}{2}+o(x^2+y^2)$； D. $1+(x+y)+\dfrac{(x+y)^2}{2}+o(x^2+y^2)$.

4. 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处具有偏导数是它在该点存在全微分的（ A ）

A. 必要而非充分条件； B. 充分而非必要条件；

C. 充分必要条件； D. 既非充分又非必要条件.

5. 已知二元函数$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$，下面命题正确的是（ C ）

①$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=0$；

②$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y),\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$不存在；

③$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$； ④$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$不存在.

A. ①③ B. ②③ C. ①④ D. ②④

二、（每题 6 分，满分 30 分）

1. 设$z=F\left(x+z,y\right)$，求方程所确定的隐函数的偏导数z_x，z_{xy}.

2. 求函数$u=xyz$在点$M(1,1,1)$，沿方向 $\vec{l}=(2,-1,3)$ 的方向导数与梯度。

3. 求球面$x^2+y^2+z^2=50$与平面$x+y+z=0$的交线在点$(5,0,-5)$点处的切线与法平面方程。

4. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展开为 Fourier 级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

5. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(1+\frac{x}{n})^n$ 在区间 $[0,1]$ 上的一致收敛性。

三、（本题 10 分）

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}\arctan(3+n)$ 是否收敛，若收敛，判别它是绝对收敛还是条件收敛。

解：因为 $\cos^2 n=\dfrac{1+\cos 2n}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 \mathrm{n}}{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}}+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{\mathrm{n}}\frac{\cos 2\mathrm{n}}{2\mathrm{n}}.$$

又因为 $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\mathrm{n}}}{2\mathrm{n}}$ 收敛，且 $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{\mathrm{n}}\dfrac{\cos 2\mathrm{n}}{2\mathrm{n}}=\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2\mathrm{n}+2\pi)}{2\mathrm{n}}$. ---------2 分

又因为 $\left|\sum\limits_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\cos(2+\pi)k\right|\le\dfrac{1}{\sin\frac{2+\pi}{2}}$，即级数 $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\cos(2\mathrm{n}+2\pi)$ 的部分和有界，

而 $\dfrac{1}{\mathrm{n}}$ 单调 $n\to\infty$ 时趋近于 0，由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2\mathrm{n}+2\pi)}{2\mathrm{n}}$ 收敛，

即 $\sum\limits_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(-1)^{\mathrm{n}}\dfrac{\cos 2\mathrm{n}}{2\mathrm{n}}$ 收敛； ----2 分

又 $\arctan(3+n)$ 单调有界，由 Abel 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}\arctan(3+n)$ 收敛。 ------2 分

而 $\left|\dfrac{\cos^2 n}{n}\arctan(3+n)\right|=\dfrac{1+\cos 2n}{2n}\arctan(3+n)$，且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2n}{2n}\arctan(3+n)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}\arctan(3+n)$ 发散，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\cos^2 n}{n}\arctan(3+n)\right|$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^2 n}{n}\arctan(3+n)$ 条件收敛。

------4 分

四、（本题 8 分）

证明函数项级数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+x)^n$ 在区间 $(0,1)$ 上连续。

证明： 对于任意点 $x_0\in(0,1)$, 存在 $0<r<1$, 使得 $x_0\in[r,1)$, 只需要证明该级数在 $[r,1)$ 上一致收敛（内闭一致收敛）。 ----------2 分

因为

$$|(\frac{1}{n}+x)^n|\le(\frac{1}{n}+r)^n, x\in[r,1).$$

--------2 分

又因为存在 N, 使得当 $n>N$ 时有

$$(\frac{1}{n}+r)^n\le q^n, 0<q<1.$$

根据 M-判别法，可知该级数在 $[r,1)$ 上一致收敛。 -----------------2 分

所以 $S(x)$ 在 $[r,1)$ 上连续，所以 $S(x)$ 在 x_0 点连续。

由 $x_0\in(0,1)$ 的任意性，所以 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}+x)^n$ 在区间 $(0,1)$ 上连续。 ----2 分

五、（本题 10 分）

讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性、可偏导性和可微性.

1) 解：由于 $\left|\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le|x|\sqrt{xy}$, ，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ （从而函数

$f(x,y)$在 $(0,0)$ 点连续. -----------------3 分

2) 由偏导数的定义

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

即函数 $f(x,y)$在$(0,0)$ 点偏导数存在，且值为 0. ---------2 分

3) 记 $z=f(x,y)$，则 $\Delta \boldsymbol{z}-\boldsymbol{dz}=\boldsymbol{f}(\Delta \boldsymbol{x},\Delta \boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(0,0)-\boldsymbol{f}_x(0,0)\cdot\Delta \boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}_y(0,0)\cdot\Delta \boldsymbol{y}$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{z}-\boldsymbol{dz}}{\rho}=\frac{\frac{\Delta \boldsymbol{x}^2\Delta \boldsymbol{y}}{\sqrt{\Delta \boldsymbol{x}^2+\Delta \boldsymbol{y}^2}}}{\rho}=\frac{\Delta \boldsymbol{x}^2\cdot\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}^2+\Delta \boldsymbol{y}^2}$$ ---------------3 分

而 $\left|\frac{\Delta \boldsymbol{x}^2\cdot\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}^2+\Delta \boldsymbol{y}^2}\right|\le\frac{1}{2}\left|\Delta \boldsymbol{x}\right|$

所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta \boldsymbol{z}-\boldsymbol{dz}}{\rho}=0$，所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. -------2 分

六、（本题 10 分）

某工厂生产一批长方体无盖盒子, 要求其体积为 $1\,m^3$ 。问：如何设定盒子的长、宽、高 才能使得用料最省？

七、（本题 12 分）

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}, 0\le x\le 1,$ 证明对 $\forall x\in(0,1)$， 有

(1) $S(x)+S(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C$(常数);

(2) $C=S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证明： （**1**）令 $g(x)=S(x)+S(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x),$ 则 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且

$$g'(x)=S'(x)-S'(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x \qquad \text{------3 分}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}\ln x+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x$$

$$=0.$$

于是

$$g(x)=C,\ x\in(0,1). \qquad \text{------3 分}$$

其中 C 为常数。

（2）由罗比达法则可知，

$$\lim_{n\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)=0. \qquad \text{-------2 分}$$

于是

$$C=\lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}[S(x)+S(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)]=S(1),$$

从而

$$C=S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

------2 分