A

北京航空航天大学

2015－2016 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名_________ 成绩__________

任课教师__________考场___________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2016 年 06 月 24 日

A

一、 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知$f(x,y,z)$为R^3上连续函数，Σ_r表示球面$x^2+y^2+z^2=r^2$，则极限$\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\oiint_{\Sigma_r} f(x,y,z)dS=$（　　　）

A. $f(0,0,0)$；　B. $\frac{4}{3}f(0,0,0)$；　C. $4f(0,0,0)$；　D. $\frac{3}{4}f(0,0,0)$.

2. 改变积分次序：$\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$ =（　　　）

A. $\int_1^2 dx\int_x^{x^2} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_x^4 f(x,y)dy$；

B. $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$；

C. $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy$；

D. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$.

3. 设$D=\{(x,y)|r\le|x|+|y|\le 1\}$（其中$0<\mathrm{r}<1$），记$I=\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$，则$I$的值（　　　）

A. 大于 0；　B. 小于 0；　C. 等于 0；　D. 与r有关，无法判断符号.

4. 设L是平面上的有向分段光滑曲线，如果积分$\int_L (x^4+4xy^a)dx+(6x^{a-1}y^2-5y^4)dy$与路径无关，则$a$的值为（　　　）

A. -1；　B. 0；　C. 1；　D. 3.

5. 设函数f在矩形$I=[a,b]\times[c,d]$上有连续的二阶偏导数，则积分$\iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy=$（　　　）

A. $f(b,d)+f(a,c)-f(a,d)-f(b,c)$；　B. $f(b,d)+f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)$；

C. $f(b,d)-f(a,c)+f(a,d)-f(b,c)$；　D. $f(a,d)+f(b,c)-f(b,d)-f(a,c)$.

二、计算题（每小题 6 分，满分 30 分）

1. 使用极坐标换元计算二重积分 $I=\iint_D sin(x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$.

2. 计算三重积分 $I=\iiint_V (x^2\sqrt{x^2+y^2}+x^{2016}\sin(xy))dxdydz$, 其中区域 V 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围的有界闭区域.（提示：使用对称性简化运算）

3. 计算第一型曲线积分$I=\int_{\Gamma} zds$，其中$\Gamma: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\ (0\leq t\leq 1)$为圆锥螺线的一段.

4. 计算第二型曲线积分$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$，其中$\Gamma$为曲线：$x=t, y=t^2, z=t^3, t\in[0,1]$，方向是参数$t$增加的方向.

5. 计算第一型曲面积分$I=\iint_S (z+y\cos(xy))dS$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被柱面$x^2+y^2=ax$所截下来的上半部分($a>0$). （提示：使用对称性简化计算）

三、（本题 10 分）计算第二型曲面积分$\iint_\Sigma (y^2f(x,y,z)+x)dydz-xyf(x,y,z)dzdx+2dxdy$，其中$f(x,y,z)$为连续函数，$\Sigma$为曲面$x^2+y^2+z=1$在第一卦限的部分，指向上侧.

四、（本题 10 分）验证 $(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y})dx+(\ln x-\frac{x^2}{y^2})dy,(x>0,y>0)$ 为某个二元函数的全微分，求出函数 $u(x,y)$，并计算积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y})dx+(\ln x-\frac{x^2}{y^2})dy.$

五、（本题 10 分）利用 Green 公式计算 $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中　为单位圆 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

六 、(本题 10 分)利用 Gauss 公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中$\sum$是抛物面$z=x^2+y^2$介于$z=0,z=R(R>0)$之间的部分，取下侧.

七、（本题 10 分）用 Stokes 公式计算$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(x-y)dz$，其中$\Gamma$是从$(a,0,0)$经$(0,a,0)$和$(0,0,a)$回到$(a,0,0)$的三角形边界$(a>0)$.

八、附加题（本题 10 分）设$P(x,y)$和$Q(x,y)$在全平面上有连续偏导数，而且对任意点(x_0,y_0)为中心，以任意正数r为半径的上半圆$C: x = x_0 + r\cos\theta, y = y_0 + r\sin\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$恒有

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

求证：$P(x,y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$. （提示：做辅助曲线然后使用格林公式）