# 3.3 线性方程组唯一解公式

线性方程组唯一解的条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

即 $Ax=b$ 有唯一解的条件是：系数矩阵 $A=(a_1,\ldots,a_n)$ 线性无关。

定理3.3.1 设$A$是由$n$个方程组成的$n$元一次方程组$Ax=b$的系数矩阵。则

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{方程组} Ax = b \text{有唯一解.}$$

证明: 我们只需要证明如下定理即可。

预备定理 设$a_1,\ldots,a_n \in F^{n\times 1}$，Δ是从左向右依次以 $a_1,\ldots,a_n$ 为列组成的行列式，则：
$\{a_1,\ldots,a_n\}$是$F^{n\times 1}$的一组基当且仅当 $\Delta \neq 0$ 。

证明： 先设$\Delta \neq 0$

考虑关于$x_1, x_2, \dots, x_n$的方程组$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (3.4.7)$

即
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.4.8)$$

该方程组只有零解，因此$\alpha_1, \dots \alpha_n$线性无关，为$F^{n\times 1}$的基。

反过来，设$\alpha_1, \dots \alpha_n$为$F^{n\times 1}$的基，则$(3.4.8)$只有零解，考虑其系数矩阵行初等变换最简形式

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \dots & b_{1j_1} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & b_{2j_2} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{rj_r} & \dots & b_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

其中$b_{1j_1}=b_{2j_2}=\dots=b_{rj_r}=1, 1\le j_1<j_2<\dots<j_r\le n.$

方程只有零解所以$r=n$,则

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{21} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$|B|=b_{11}b_{22}\dots b_{nn}=1$, 又$|B|=\lambda|A|$, $\lambda\neq 0$, $\Delta=|A|=\lambda^{-1}|B|=\lambda^{-1}\neq 0$

**推论** 设$A$是$n$阶方阵，则如下命题等价：

(1) $|A| \neq 0$;

(2) $A$的列向量线性无关;

(3) $A$的行向量线性无关;

(4) $rankA = n.$

证明 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$的列向量线性无关$\Leftrightarrow rankA = n.$即

$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (4).$

又$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A'| \neq 0 \Leftrightarrow A'$的列向量线性无关$\Leftrightarrow A$的行

向量线性无关. 这说明$(1) \Leftrightarrow (3)$

例1 $\lambda$取什么值时，方程组有非零解，并在有非零解时求出通解。

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_3 \end{cases}$$

移项，整理得

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

上述方程有非零解，则系数行列式为0。而

$$\Delta=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}\overset{(2)+(1),(3)+(1)}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-2\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}\overset{(1)+(2),(1)+(3)}{=\!=\!=\!=}(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

由$(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$解得$\lambda=2$，或$\lambda=-1$.

当$\lambda$=2，对方程组的系数矩阵进行初等行变换

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(1),(3)+(1),(1,3)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(1),(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}(1),-(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

通解为$t(1,1,1)$.

当$\lambda$=-1,对方程组的系数矩阵进行初等行变换

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应线性方程 $x_1+x_2+x_3=0$

通解为$t_1(1,-1,0)+t_2(1,0,-1)$。

例2 设$a,b,c$不全为0, $\alpha, \beta, \gamma$为任意实数，且

$$\begin{cases} a = b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha \end{cases}$$

求证：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

证明：将$a,b,c$看成未知数,上述等式看成方程

$$\begin{cases} -a + b\cos\gamma + c\cos\beta = 0 \\ a\cos\gamma - b + c\cos\alpha = 0 \\ a\cos\beta + b\cos\alpha - c = 0 \end{cases}$$

有非零解,系数行列式等于0，即

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0,\text{ 从而}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

若方阵*A*的行列式|*A*|≠0，就称*A*是非退化的,否则称*A*是退化的。

定理3.3.1证明了，非退化方阵A的各行(列)线性无关，rank *A*=n，这样的方阵也称为是满秩的。

一般地，对任意矩阵$A$，以及正整数$i_1<\ldots<i_s$，$j_1<\ldots<j_s$，我们将A的第$i_1,\ldots,i_s$行和第$j_1,\ldots,j_s$列交叉位置的元组成的行列式称为$A$的一个$s$阶**子式（minor），记作：**$\Delta_s$

设$r$是正整数，$m\times n$矩阵$A$含有$r$阶非零子式，不含更大阶非零子式，即$A$中非零子式的最大阶是$r$，则$r$称为$A$的行列式秩。

若$A$中含有的不为零的最大阶子式为$k$阶子式$\Delta_k$

先证明A的列秩大于或等于$k$，为此，我们证明A的第$j_1$， $j_2$, …， $j_k$列组成列向量组的极大线性无关组。

非零子式$\Delta_k$ 的各列是线性无关的$k$维列向量。将这些列向量添加若干分量得到A的第$j_1, j_2, \ldots, j_k$列为线性无关向量组。因此，$k \leq \mathrm{rank} A$。

反之，若rank $A=s$，则A有某$s$列如第$j_1, j_2,\ldots, j_s$列线性无关，把这$s$列组成矩阵$A_s$，则它的列秩与行秩都为$s$，于是$A_s$中有$s$行，如$i_1, i_2, \ldots, i_s$行线性无关，这$s$行排成的$s$阶方阵$B_s$有$|B_s|\neq 0$,而$|B_s|$为$A$的$s$阶非零子式，所以rank $A=s\leq k$。于是我们有: rank $A=k$。

定理3.3.2 矩阵$A$的行列式秩=$A$的行秩=$A$的列秩.

**定义3.3.1** 矩阵$A$所含的非零子式的最高阶数$r$就称为$A$的秩(rank)，记为rank $A$。

例3 设n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

对每个1≤*j*≤*n*，分别用列向量 替换行列式Δ的第*j*列，得到两个相等的行列式，由此得到克莱姆（Cramer）法则。

解：　设$(x_1,x_2,\dots,x_n)$是原方程(*)的解，则

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

用此等式两边的向量替换系数行列式Δ的第$j$列，得到两个相等行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_k & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (**)$$

将这个等式右边的行列式记为$\Delta_j$，左边的行列式可以拆成n个行列式之和

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1k} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2k} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nk} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} x_k \qquad (\bigstar)$$

当$j \neq k$时，(★)求和号中的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1k} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2k} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nk} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (★★)$$

的第$j,k$两列相等，行列式的值为0。当$j=k$时行列式(★★)就是原方程组的系数行列式求和号中的行列式Δ。因此，(★)就是

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j, \quad \text{从而} \quad x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \forall\, 1 \le j \le n.$$

也即：原方程组(*) 如果有解，只有唯一一组解

$$(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=\left(\frac{\Delta_1}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_j}{\Delta},\cdots,\frac{\Delta_n}{\Delta}\right) \quad (※)$$

如果常数项$b_i(1\le i\le n)$全部为零，所有的$\Delta_i=0(1\le i\le n)$，(※)确实是原方程组的解，因而是原方程的唯一解。这表明原方程组的系数矩阵的$n$列线性无关，组成$n$维列向量空间$F^{n\times1}$的一组基，$F^{n\times1}$中的每个列向量$(b_1,\ldots,b_n)^T$都能唯一地表示成这组基的线性组合，也即原方程组对任意常数项$b_1,\ldots,b_n$都有唯一解，(※)确实是原方程组的唯一解，这就是Cramer法则。

定理3.3.3（克莱姆法则） 如果$n$元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

系数行列式$\Delta \neq 0$, 则方程组有唯一解

$$\left(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_j}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$$

其中$\Delta_j$是将$\Delta$的第$j$列各元分别换成$b_1, \dots, b_n$得到的行列式。