北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

2015—2016 学年第一学期期末考试

考试统一用答题册

考试课程________工科高等代数 **A**________

班　　级__________**学 号**______________

姓　　名__________**成 绩**______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人签字									
校对人签字									

2016-1-14

姓　名＿＿＿＿＿＿＿＿学 号 ＿＿＿＿＿　　　　　　　　　A

一. 选择题 (每题 2 分，共 22 分）

1. 设 A 为 $m\times n\,(m>n)$ 矩阵，则秩 R(A)=(　　)时，方程组 $AX=0$ 只有零解.
a． $n-1$;　　　b． 1;　　　c． m;　　　d． n

2. 设 T 是 R^3 上的线性变换，$\mathrm{T}(x_1,x_2,x_3)^T=(x_1+x_3,x_1,x_3)^T$，那么 T 在基

$\{(1,1,0)^T,(1,0,1)^T,(0,0,1)^T\}$ 下的矩阵为 (　　　)

a. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$;　　b. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$;　　c. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$;　　d. T 是可逆的

3. 若 3 阶阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式$|A|=1$, 则$|\alpha_1,3\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1|=$（　　）

a．2 ;　　　b．　1;　　　c．　3 ;　　　d．　-1

4. $\{\mathbf{v}_1=(1,1,\ 1)^{\mathrm{T}},\mathbf{v}_2=(1,\ 1,-1)^{\mathrm{T}},\mathbf{v}_3=(2,\ 2,\ -2)^{\mathrm{T}}\}$ 的一个极大无关组为（　　）

a．v_1 ;　　　b．v_1，v_2，v_3 ;　　c．v_1，v_2 或 v_1，v_3;　　　d．v_2，v_3

5. 若 A 是 n 阶实方阵，x 是 R^n 中的列向量, 则 $x^TA^TAx=$（　　　）

a．长度$|Ax|$;　　b．正数;　　c．长度$|x|$;　　d．$|Ax|^2$

6. A 为实 $m\times n$ 矩阵,下列说法正确的是(　　　)

a．秩 $\mathrm{R}(A^TA)=\mathrm{R}(A)$；　b．$A^TA$ 不对称;　c. A^TA 为正定;　d．$\mathrm{R}(A^T)\neq\mathrm{R}(A)$

7. 设 $A=A_{m\times n}$ 为 $m\times n$ 矩阵，令 $W=\{x\in R^n\mid Ax=0\}$，则 $\dim(W)+\mathrm{R}(A)=($　　$)$.

a．$n-1$;　　　b．$m-n$;　　　c．n;　　　d．m

8. 设 A,B 分别是 m 阶与 n 阶方阵，则行列式 $\begin{vmatrix}B&0\\C&A\end{vmatrix}=$（　　）

a. $|A||B|$;　　b. $-|AB|$;　　c. 0;　　d. $(-1)^{mgn}|A||B|$

9. 实对称阵 A 为正定阵的充分必要条件是(　　　)

a．A 的全体特征根为正数；　b．A 可逆；　c．$|A|$为正；　d．A 满秩

10. 设 A 为 n 阶正交阵，下列说法正确的是(　　)

a．$A^{-1}=A^T$;　　b．$A^T=A^*$(伴随阵);　　c．$|A|=-1$;　　d．$|A|=1$

11. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2$ 是（　　　）

a. 正定二次型；b. 半正定二次型；　c. 负定型；　d. 不定型

二. 填空题 (每题 2 分，共 8 分）

1. 设 A 为 3 阶矩阵，则行列式 $|-2A|+8|A| \ =$________

2. 设 3 阶阵 A 的特征根是 a,b,c，则 $|A|+$迹$\mathrm{tr}(A) \ =$______

3. 已知 $A, aE+A$ 是正定矩阵，且 A 满足条件 $A^2+3A-4E=O$，则实数 a 满足条件_______

4. 设 E 是 n 阶单位矩阵，$M=\begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$，则 $M^{-1}=$___________

三. 判断题 (每题 1 分,共 12 分) (正确的在括号内打"√",错误的在括号内打"X")

1. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$ 的基础解系为 $\{(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}\}$.（　　）

2. 初等变换不改变矩阵的秩.（　　）

3. 若 $P^{-1}AP$ 有定义, $f(x)$ 是多项式，则 $f(P^{-1}AP)=P^{-1}f(A)P$. (　　)

4. n 阶方阵 A 的行列式$|A|=0 \ \Leftrightarrow \mathrm{R}(A)<\mathrm{n} \ \Leftrightarrow \ Ax=0$ 有非零解. (　　)

5. 若方阵 A,B 相似，则 A,B 有相同的特征向量. (　　)

6. 正交变换在任意一组基下的矩阵是可逆阵. (　　)

7. 若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量, 则 A 必可对角化. (　　)

8. 设 3 阶可逆阵 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 A^{-1} 的特征值是 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1}$. (　　)

9. 若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 v_1,v_2 线性表示, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一定线性相关. (　　)

10. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 则 $AX=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$. (　　)

11. 若矩阵 $A\neq 0,\ B\neq 0$，则 $AB\neq 0$. (　　)

12. 若 n 元方程组 $A_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}\,\boldsymbol{x}=0$ 只有零解, 则 $A_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解. (　　)

四. 计算下列各题（每题 8 分，共 24 分）

1. 给定 R^4 的子空间 W_1 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和子空间 W_2 的基 $\{\beta_1,\beta_2\}$，其中

$$\begin{cases} \alpha_1=(1,1,0,0), \\ \alpha_2=(0,1,1,0), \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1=(1,2,3,4), \\ \beta_2=(0,1,2,2). \end{cases}$$

(1) 求 W_1+W_2 的维数并求出一组基.

(2) 求 $W_1\cap W_2$ 的维数并求出一组基，并将它扩充为 W_1+W_2 的一组基.

2. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，(1) 把 A 分解为列向量与行向量的积，并计算 A^{2013}；

(2) 求 A 的特征多项式 $|A-\lambda E|$ 与全体特征值；(3) 求 3 个互相正交的特征向量.

3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，(1) 求 A 的特征多项式与特征值；(2) 求 A^{-1}；

(3) 利用 A^{-1} 求出 A 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^{*}$.

五. 求解下列题目 (每题 5 分，共 10 分)

1. 设 R^4 中列向量 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ,矩阵 $A = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, 已知:

$$A=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)\xrightarrow{\text{经过初等行变换后}}B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

求向量组 v_1, v_2, v_3 , v_4, v_5 的一个极大无关组，并用它表示向量 v_5 与 v_3.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 4 元非齐次方程组 $AX=b$ 的三个解向量，且秩$\mathbf{R}(A)=3$,

$\alpha_1+\alpha_2=(2,6,6,2)^T,\alpha_2+\alpha_3=(2,4,4,2)^T$，分别求 $AX=0$ 与 $AX=b$ 的通解.

六. (12 分) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. (1) 求 A 的特征多项式； (2) 求正交阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵；(3) 用正交变换 $x=Py$ 把二次型 $\mathbf{f}=x^{T}Ax$ 化为标准形.

七. 证明题 (每题 6 分，共 12 分)

1. 已知 $A+B=AB$ ， 证明：$(A-E)^{-1}=(B-E)$，并且 $AB=BA$.

2. 若 A 是 3 阶正交阵, 且 $|A|=-1$. 证明：-1 是 A 的一个特征值；而且对于列向量 $x\in R^3$， Ax 的长度 $|Ax|$ 满足 $|Ax|=|x|$， 其中记号 $|x|$ 代表 x 的长度.