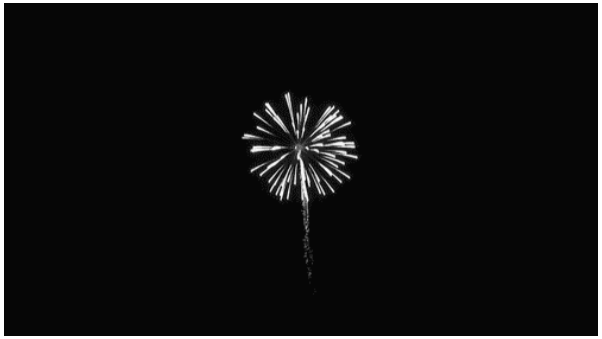
基础物理学 A1
2025年春季学期

谢柯盼
kpxie@buaa.edu.cn
物理学院

第六章 质心力学定理

§ 6-0 引子

很多时候，体系不能看成一个质点，而是应该看成多个质点的集合，即质点系



一般地，质点系的运动总可以分解成整体的运动与部分相对于整体的运动

前面的课程内容已经涉及过质点系的运动：质点系的动量定理、动能定理、角动量定理等

这些描述只关心质点系的总动量、总动能、总角动量等整体性质

但是，对质点系的完备描述不仅要包含其整体运动，还要包含部分相对于整体的运动

本章会补全这一描述，引进质心的概念，并定量描述

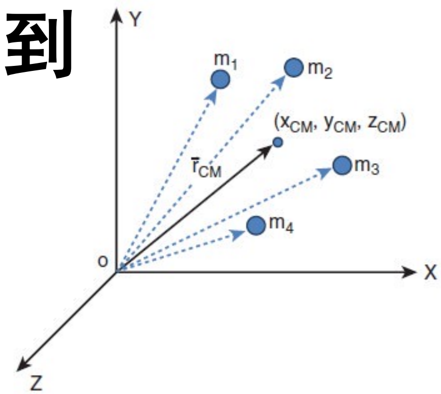
- 质点系的整体运动（即质心的运动）
- 部分相对于整体的运动（即质点相对质心的运动）

从而实现对质点系运动的分解，据此可以完备地刻画并求解其运动状态

本章的很多普遍结论将是下一章（刚体力学）的知识基础，并且可应用至更多不同的质点系统，例如流体力学、弹性力学等

§ 6-1 质心动量定理

质心：体系内各部分按质量加权平均所得到的一特殊点，可用于描述体系的整体运动

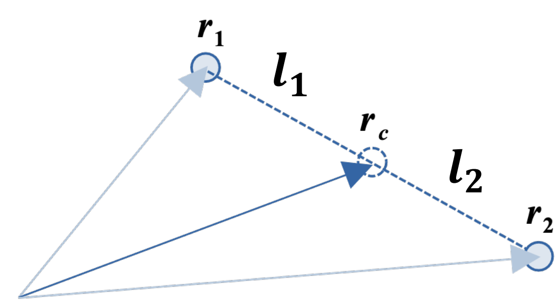


$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$\sum_i m_i = M$是体系总质量

质心是一个虚拟的点，不需要“附着”在体系内部的某一个具体质点上

例：双质点体系



$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

直接计算可以给出$m_1(\vec{r}_C - \vec{r}_1) = m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_C)$

即$m_1 l_1 = m_2 l_2$，质心在质点连线上，且更靠近重质点

多质点体系的质心可以通过往双质点体系里添加新的质点，按“$m_1 l_1 = m_2 l_2$法则”一步步“迭代”得到：

例：3质点体系，可将第1、2个质点视为“合成”了一个质量为$m_{12} = (m_1 + m_2)$的质点，其位置在

$$\vec{r}_{C12} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

故添加第3个质点时，新的质心在

$$\vec{r}_{C123} = \frac{m_{12} \vec{r}_{C12} + m_3 \vec{r}_3}{m_{12} + m_3} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

与上页的普遍定义一致

对更多质点，可以证明其质心总可以视为通过双质点体系一步步添加新质点并利用法则

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

计算而来。这是质心定义的一层几何意义

在直角坐标系下，质心坐标为

$$x_C=\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i},\qquad y_C=\frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i},\qquad z_C=\frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

其中$\sum_i m_i=M$是体系总质量

对质量连续分布的体系，质心坐标为

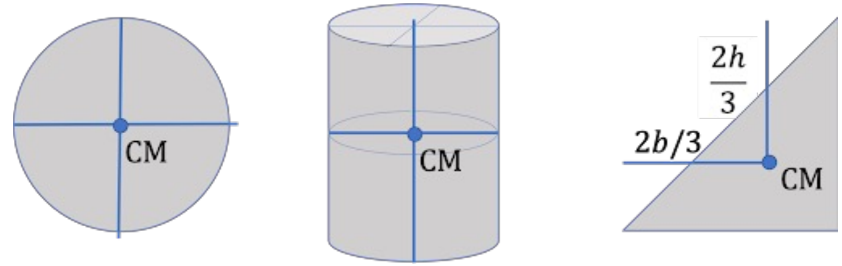
$$x_C=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m},\qquad y_C=\frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m},\qquad z_C=\frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

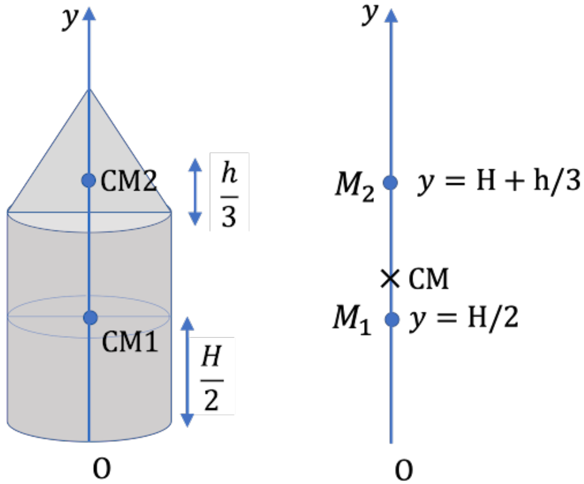
其中$\int \mathrm{d}m=M$是体系总质量

质量微元$\mathrm{d}m$取决于体系的形状

- 对一维体系，$\mathrm{d}m=\lambda(x)\mathrm{d}x$，$\lambda$称为线密度
- 对二维体系，$\mathrm{d}m=\sigma(x,y)\mathrm{d}S$，$\sigma$称为面密度
- 对三维体系，$\mathrm{d}m=\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$，$\rho$称为体密度

质量均匀分布的简单几何体，质心在**几何对称中心**





若体系是若干个均匀几何体的组合，质心可以通过各部分质心位置加权平均的方式一步步求出

更复杂的体系质心只能通过定义来求和或求积分给出

注意**质心**不等同于重心

- 质心为物体固有，与外界无关
- 重心是物体受重力的作用中心，与**引力场的性质**有关

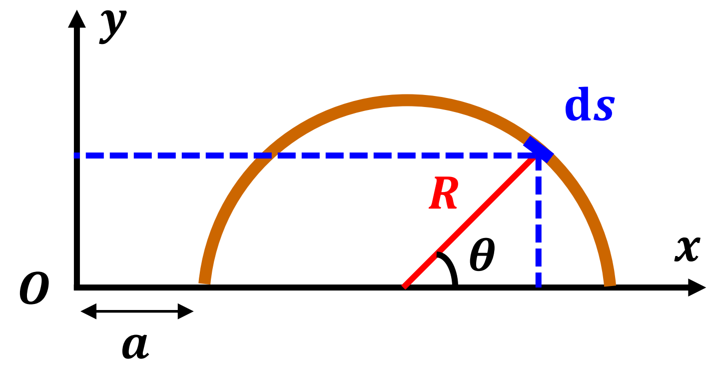
若引力场不均匀，则二者**不重合**

例：质量为M的均匀细杆弯曲成半径为R的半圆，圆心在x轴上，距离原点$a+R$。求质心坐标。

解：取弧元$\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta$

质元可表述为

$$\mathrm{d}m=\frac{M}{\pi R}\mathrm{d}s=\frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta$$



而质元的坐标为$x=a+R(1+\cos\theta)$和$y=R\sin\theta$

代入积分得

$$x_C=\frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(a+R+R\cos\theta)\mathrm{d}\theta=a+R$$

$$y_C=\frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2R}{\pi}$$

例：一长为l的细杆，其线密度$\rho = \rho_0 x/l$随着x而变化，x是杆的一段算起的距离，ρ_0为常量，求其质心位置。

解：根据定义计算，$\mathrm{d}m = \rho_0 x\mathrm{d}x/l$

$$x_C = \left(\int_0^l x\,\rho_0 x\mathrm{d}x/l\right) \Big/ \left(\int_0^l \rho_0 x\mathrm{d}x/l\right)$$

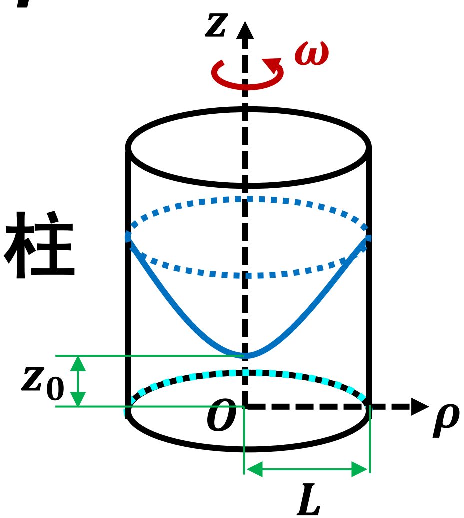
消去常数，得

$$x_C = \left(\int_0^l x^2\mathrm{d}x\right) \Big/ \left(\int_0^l x\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{3}l$$

最终结果与ρ_0无关

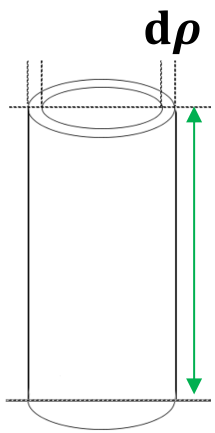
注意：如果题目要求质心位置，做完后最好快速检查一下自己是否得出了一个坐标量纲的量

例：水桶绕z轴以角速度ω匀速转动，水面方程$h(\rho)=z_0+\omega^2\rho^2/(2g)$【见第二章例题】，其中$\rho$为水面质元到转轴的距离。求质心所在位置。



解：由旋转对称性知质心在z轴上。

取$\rho+\mathrm{d}\rho$区间内的微元，其形状为空心圆柱



$$h=z_0+\frac{\omega^2\rho^2}{2g}$$

该微元质心位于$h/2$处

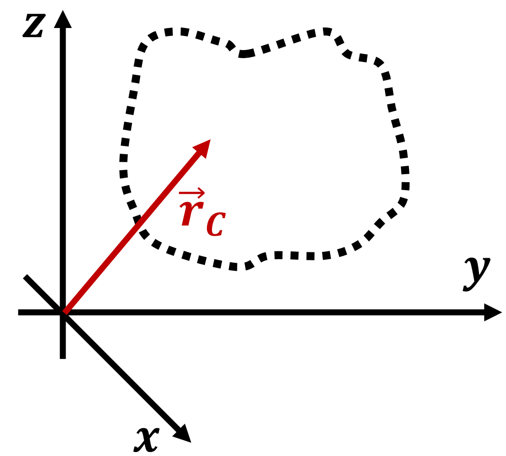
假定水密度为ρ_w，则质量微元为$\mathrm{d}m=\rho_w\cdot 2\pi\rho h\mathrm{d}\rho$，体系质心

$$z_C=\int_0^L \pi\rho_w\rho h^2\mathrm{d}\rho\Big/\int_0^L 2\pi\rho_w\rho h\mathrm{d}\rho$$

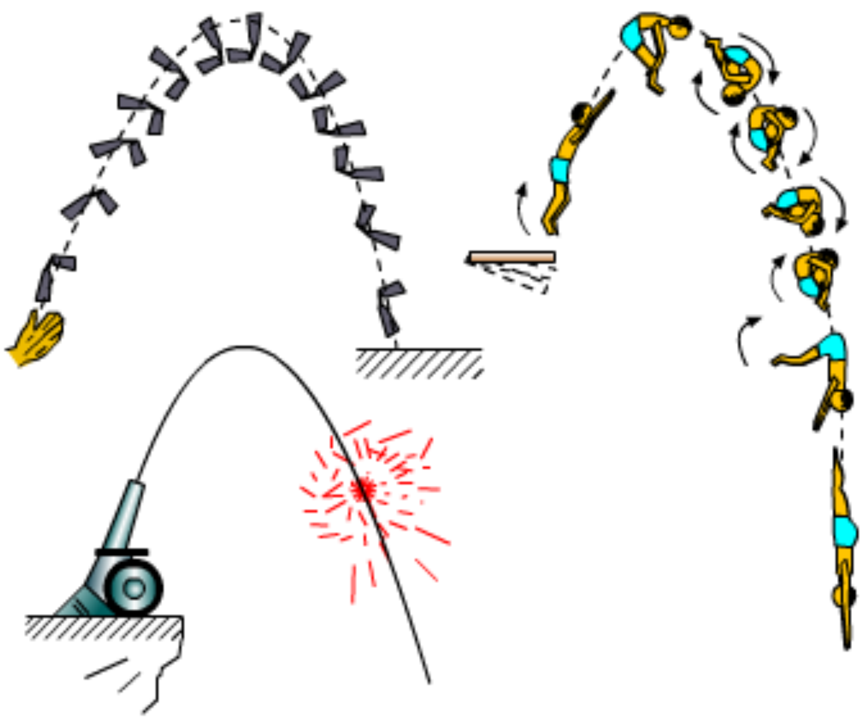
完成积分，给出

$$z_C=\frac{1}{3}\left(z_0+\frac{2gz_0^2}{L^2\omega^2+4gz_0}+\frac{L^2\omega^2}{2g}\right)$$

质心可以看成一个位于$\vec{r}_C$处且集中了体系全部质量的“大号质点”



随着体系的演化，质心也会运动，具有速度$\vec{v}_C$、加速度$\vec{a}_C$等



作为一个“质点”，运动的质心具有动量、动能，以及角动量

质心的运动可以视为体系的整体运动

质心的运动速度

$$\vec{v}_C=\dot{\vec{r}}_C=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i\right)=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i$$

若将质心视为质点，则其动量为

$$\vec{P}_C=M\vec{v}_C=\sum_i m_i\vec{v}_i$$

即质心动量等于质点系的总动量

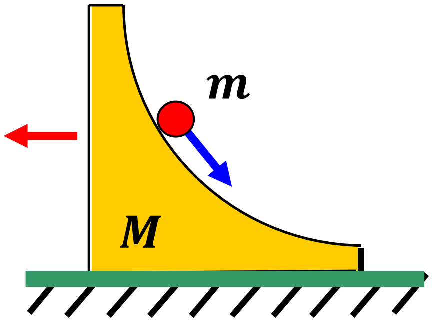
$$\dot{\vec{P}}_C=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i\vec{v}_i\right)=\sum_i m_i\vec{a}_i=\sum_i\vec{F}_i$$

等于体系所受合外力，称质心运动定理。亦写为

$$\sum_i\vec{F}_i=M\vec{a}_C$$

注意诸外力作用点不一定相同，质心动量变化只与其直接求和相关，不体现作用点的信息

例：大滑块M的上表面为半径R的圆弧，初始时静止于光滑的地面上。小滑块m从其顶部由静止释放，最终滑至底部与M脱离。求该段时间内M在地面所滑行的距离S。



解：体系在水平方向不受力，

故水平方向质心位置始终静止。令X为大滑块坐标，x为小滑块坐标，

$$MX + mx \equiv 0$$

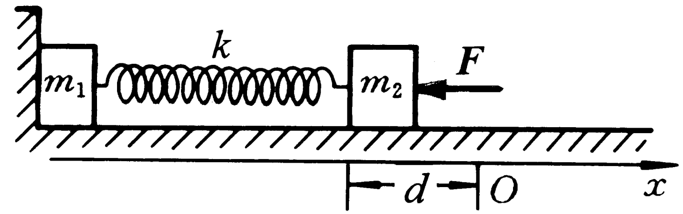
故$m|x| = -M|X|$，且$S = |X|$

又由$|X| + |x| = R$，可得

$$S = \frac{mR}{M + m}$$

可对比第三章的动量解法

例：轻弹簧k连接着m_1和m_2，置于光滑水平面。初始时，在m_2上施力将弹簧压缩了d。求在外力撤去之后，系统质心<u>加速度</u>和<u>速度</u>的最大值。



解：m_2向右运动，弹簧恢复原长之后会被拉伸，并将m_1拉离墙壁

该过程中墙对m_1的力逐渐减小，m_1<u>被拉离瞬间</u>力为零

故<u>撤去外力的瞬间</u>墙壁对体系的压力最大

此时最大质心加速度$a_{c,\max} = kd/(m_1 + m_2)$

m_1离开墙后，体系水平方向不受外力，质心匀速运动

故质心速度在m_1<u>离墙瞬间</u>达到最大，此后保持不变

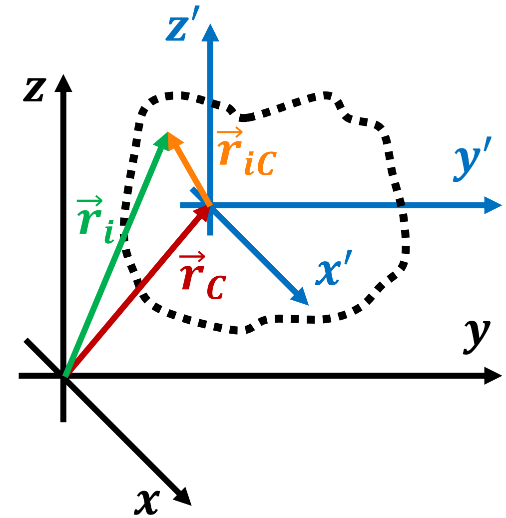
假定该瞬间m_2速度为v_2，则机械能守恒给出

$$m_2 v_2^2/2 = kd^2/2$$

得$v_2 = d\sqrt{k/m_2}$，故质心速度最大值为

$$v_{c,\max} = m_2 v_2/(m_1 + m_2) = m_2 d\sqrt{k/m_2}/(m_1 + m_2)$$

以质心为原点建立一平动参考系，称之为质心系



则体系的运动均可分解为质心的运动以及体系相对于质心的运动

- 后者即是体系在质心系内的运动

质心系牵连加速度是$\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i / M$

当体系受合外力不为零时，质心系不是惯性系，在其内部讨论质点运动需要加入惯性力。

- 质心系是平动系，不存在离心力或科里奥利力

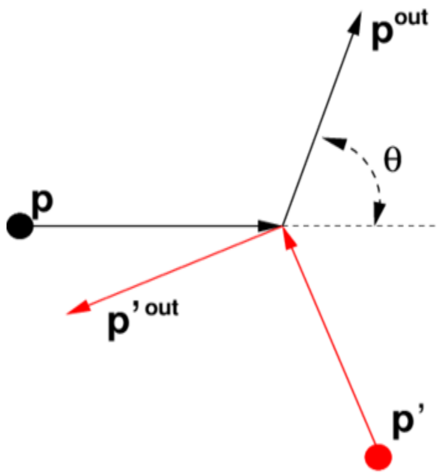
质心系内任一质点坐标为$\vec{r}_{iC} = \vec{r}_i - \vec{r}_C$，而质心满足$\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i$，可得一关键等式

$$\sum_i m_i \vec{r}_{iC} = \vec{0}$$

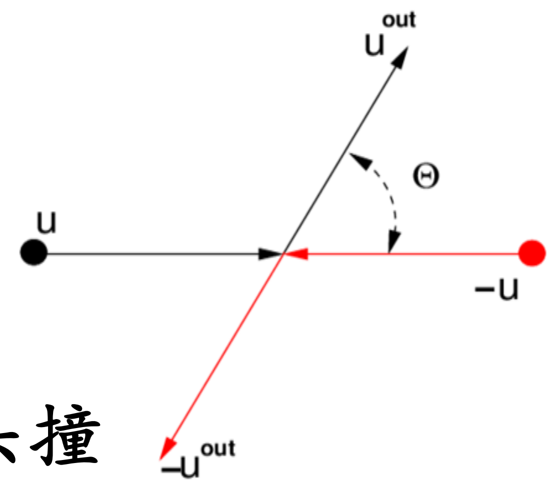
由质心系中的关键等式$\sum_i m_i \vec{r}_{iC} = \vec{0}$，求导得

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{iC} = \sum_i m_i \vec{v}_{iC} = \vec{0}$$

即体系在质心系中的总动量恒为零



实验室系



质心系

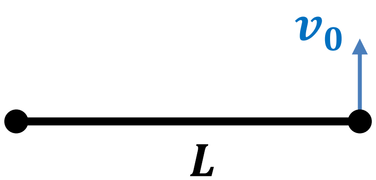
——对头撞

再求导得

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_{iC} = \sum_i m_i \vec{a}_{iC} = \vec{0}$$

在质心系中，<u>真实力的合外力</u>时刻被惯性力精确抵消

例：长度为L的轻绳，两端各系一小球，质量均为m。初始时，系统静止放于光滑水平面上，然后打击右端小球，使其获得一垂直于绳子的初速度v_0，求后续运动中的绳张力大小。



解：系统运动过程中不受外力，故质心匀速直线运动

质心系为惯性系，且在打击后瞬间速度为$v_0/2$，方向与右小球一致

此时，质心系中，左右小球速度均为$v_0/2$，方向相反，故它们将作逆时针匀速圆周运动

向心力由绳张力提供。得

$$F = m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 \frac{1}{L/2} = \frac{mv_0^2}{2L}$$

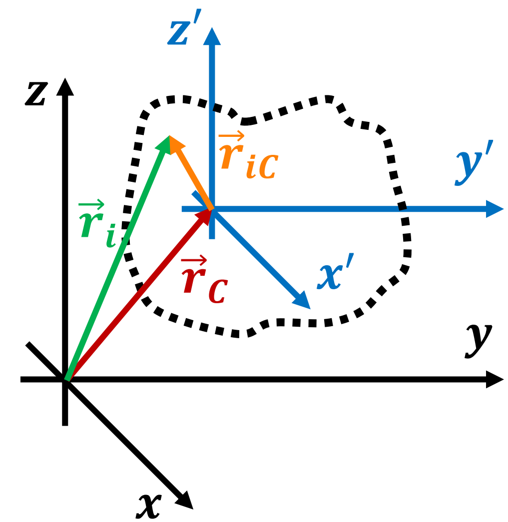
§ 6-2 质心动能定理

质心作为大号质点，具有动能

$$E_C = \frac{1}{2} M v_C^2$$

但质点系的总动能实际上是

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



二者有何定量联系？

根据$\vec{r}_i = \vec{r}_{iC} + \vec{r}_C$，可得$\vec{v}_i = \vec{v}_{iC} + \vec{v}_C$，从而

$$v_i^2 = (\vec{v}_{iC} + \vec{v}_C)^2 = v_{iC}^2 + 2\vec{v}_{iC} \cdot \vec{v}_C + v_C^2$$

代入总动能得到

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_{iC}^2 + 2\vec{v}_{iC} \cdot \vec{v}_C + v_C^2 \right)$$

展开得到质点系的总动能

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iC}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{iC} \cdot \vec{v}_C + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_C^2$$

体系在质心系内的动能E_{rC}

质心的动能E_C

$$\vec{v}_C \cdot \sum_i m_i \vec{v}_{iC}$$

质心系关键等式：$\sum_i m_i \vec{r}_{iC} = \vec{0}$（见第15页）

求导得$\sum_i m_i \vec{v}_{iC} = \vec{0}$，故$\vec{v}_C \cdot \sum_i m_i \vec{v}_{iC} = 0$

得$E_k = E_C + E_{rC}$，称为科尼希定理

亦即质点系的总动能等于质心动能与体系相对质心的动能之和

- 所谓相对质心的动能，指质心系中的动能

考虑元过程中的功能原理

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{int},n} + \mathrm{d}W_{\mathrm{ext}} = \mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p$$

非保守内力做的功　外力做的功　动能增量　势能增量

以上是实验室系/地面系内的关系。考虑质心系：

- 内力总是成对出现，做功之和与参考系无关，故 $\mathrm{d}W_{\mathrm{int},n} = \mathrm{d}W^C_{\mathrm{int},n}$
- 外力做的功

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{ext}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{iC} + \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_C$$

质心系中的外力做的功$\mathrm{d}W^C_{\mathrm{ext}}$

地面系中合外力对质心做的功，等于质心动能增量$\mathrm{d}E_C$

- 势能增量只与质点的相对位置有关，$\mathrm{d}E_p = \mathrm{d}E_p^C$

代入功能原理得到

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{int},n}^{C} + \mathrm{d}W_{\mathrm{ext}}^{C} = (\mathrm{d}E_k - \mathrm{d}E_C) + \mathrm{d}E_p^{C}$$

又由科尼希定理，$E_k = E_C + E_{rC}$，得质心系内

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{int},n}^{C} + \mathrm{d}W_{\mathrm{ext}}^{C} = \mathrm{d}E_{rC} + \mathrm{d}E_p^{C}$$

非保守内力做的功	外力做的功	动能增量	势能增量

称为质心系内的功能原理：

在质心系中，体系机械能的增量等于外力与内部非保守力做功之和

- 若对任一微过程均有$\mathrm{d}W_{\mathrm{int},n}^{C} + \mathrm{d}W_{\mathrm{ext}}^{C} = 0$，则质心系中的机械能守恒
- 不管质心系是否为惯性系，其功能原理与机械能守恒定律都与惯性系中的形式相同
- 这意味着质心系中的惯性力做功之和恒为零

一般说来，体系的势能由体系各质点间的相互作用决定，此时“质心的势能”一词并无物理意义

但如果体系处于某外部力场中，则质心作为大号质点，具有质心势能

特例：在均匀重力场$\vec{g}$下，体系的重力势能为

$$E_p = \sum_i m_i g h_i$$

而质心重力势能为

$$E_{pC} = Mgh_C = Mg\frac{\sum_i m_i h_i}{\sum_i m_i} = E_p$$

即质心的重力势能等于体系的重力势能

这是非常特殊的情况，因为重力势能正好是正比于质量的线性函数

其他势能如引力势能、弹性势能、电势能均无此性质

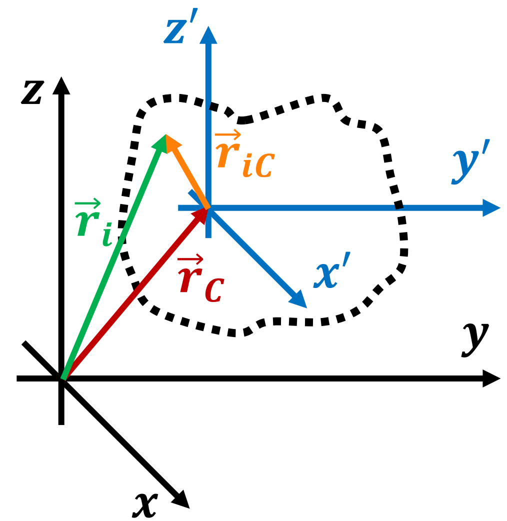
§6-3 质心角动量定理

质心作为大号质点，具有角动量

$$\vec{L}_C=\vec{r}_C\times M\vec{v}_C$$

但质点系的总角动量实际上是

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$



二者有何定量联系？

根据$\vec{r}_i=\vec{r}_{iC}+\vec{r}_C$，可得$\vec{v}_i=\vec{v}_{iC}+\vec{v}_C$，从而

$$\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i=(\vec{r}_{iC}+\vec{r}_C)\times m_i(\vec{v}_{iC}+\vec{v}_C)$$

展开后给出四项

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC}+\sum_i \vec{r}_C\times m_i\vec{v}_{iC}$$
$$+\sum_i \vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_C+\sum_i \vec{r}_C\times m_i\vec{v}_C$$

四项拆开一一讨论：第一项

$$\sum_i \vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_{iC} = \vec{L}_{rC}$$

体系相对于质心的角动量

交叉项利用质心系**关键等式**$\sum_i m_i\vec{r}_{iC} = \vec{0}$，给出

$$\sum_i \vec{r}_C\times m_i\vec{v}_{iC} = \vec{r}_C\times\left(\sum_i m_i\vec{v}_{iC}\right) = \vec{0}$$

$$\sum_i \vec{r}_{iC}\times m_i\vec{v}_C = \left(\sum_i m_i\vec{r}_{iC}\right)\times\vec{v}_C = \vec{0}$$

最后一项

$$\sum_i \vec{r}_C\times m_i\vec{v}_C = \vec{r}_C\times\left(\sum_i m_i\right)\vec{v}_C = \vec{L}_C$$ 质心的角动量

最终得出

$$\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}_{rC}$$

即质点系的总角动量等于质心角动量与体系相对质心的角动量之和

值得注意：

- $\vec{L}$和$\vec{L}_C$的参考点为实验室系的原点
- $\vec{L}_{rC}$的参考点为质心系的原点，即质心
- 故上述等式中的角动量运算涉及两个不同的参考点

质心可能在实验室系内运动，但$\vec{L}_{rC}$并不意味着我们把运动的点取为了参考点

$\vec{L}_{rC}$实际上是在质心系来计算的，在该系内质心恒静止于原点，故参考点仍为静止的点

根据质点系的角动量定理（见第五章PPT），

$\dot{\vec{L}} = \vec{\mathcal{M}}$，其中$\vec{\mathcal{M}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$为合外力矩

另外，质心形式上满足牛顿第二定律

$\vec{F} = M\vec{a}_C$，其中$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$为合外力

故可仿照单质点形式推导出质心角动量定理

$\dot{\vec{L}}_C = \vec{\mathcal{M}}_C$，其中$\vec{\mathcal{M}}_C = \vec{r}_C \times \vec{F}$为合外力对质心的矩

注意$\vec{\mathcal{M}} \neq \vec{\mathcal{M}}_C$，且定量地有

$$\vec{\mathcal{M}} - \vec{\mathcal{M}}_C = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_C \times \sum_i \vec{F}_i$$

$$= \sum_i (\vec{r}_{iC} + \vec{r}_C) \times \vec{F}_i - \vec{r}_C \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_{iC} \times \vec{F}_i$$

综合前页计算结果：

$\dot{\vec{L}} = \vec{\mathcal{M}}$；$\dot{\vec{L}}_C = \vec{\mathcal{M}}_C$；$\vec{\mathcal{M}} - \vec{\mathcal{M}}_C = \sum_i \vec{r}_{iC} \times \vec{F}_i$

以及$\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}_{rC}$

最终可得相对质心的角动量定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{rC}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{r}_{iC} \times \vec{F}_i$$

即体系相对质心的角动量变化率等于外力对质心的总力矩

或可表述为：在质心系中，体系总角动量变化率等于外力的合力矩

这一结论不管质心系是否为惯性系都成立

- 换句话说，质心系中惯性力的合力矩恒为零

小结：质心的两层物理意义（1）

质心本身是一个虚拟质点，体现体系的整体性质

- 其位置为$\vec{r}_C$，速度为$\vec{v}_C$，质量为$M=\sum_i m_i$
- 动量为$M\vec{v}_C$，动能为$Mv_C^2/2$，角动量为$\vec{r}_C\times M\vec{v}_C$

质心所受外力为体系的合外力，$\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$

力矩为$\vec{r}_C\times\vec{F}=\vec{r}_C\times\sum_i \vec{F}_i$，即合外力的矩，但不是合外力矩$\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i$

质心形式上满足牛顿第二定律$\vec{F}=M\vec{a}_C$，故可推导出动量定理$\mathrm{d}\vec{P}_C=\vec{F}\mathrm{d}t$

- 动能定理$\mathrm{d}E_C=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_C$，注意右边不是合外力对体系做的功，而是合外力对质心做的功
- 角动量定理$\mathrm{d}\vec{L}_C=\vec{r}_C\times\vec{F}\mathrm{d}t$，注意右边不是体系的合外力矩，而是合外力对质心的力矩

小结：质心的两层物理意义（2）

以质心作为原点，建立平动的质心参考系，质点位矢满足$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_{iC}$，且存在以下陈述：

- 质点系的总_____等于质心的_____与体系在质心系中的_____之和。

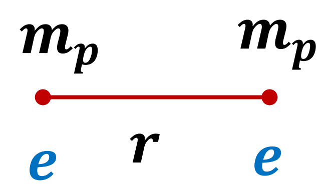
其中空白处可填动量、动能、角动量

以上关系均来自质心系的关键等式

$$\sum_i m_i \vec{r}_{iC} = \vec{0}$$

- 在质心系中，体系的总动量恒为零，但总动能、总角动量一般不为零
- 不管质心系是不是惯性系，其功能原理、角动量定理的形式都与惯性系中相同
- 换句话说，质心系中的惯性力做功及合力矩均为零

例：两质子相互作用电势能为ke^2/r，从相距很远处开始分别以速率v_0和$2v_0$相向运动。求二者能达到的最近距离。



解：实验室系$v_1 = v_0$及$v_2 = -2v_0$

可知质心速度

$$v_C = \frac{m_p v_1 + m_p v_2}{m_p + m_p} = -\frac{v_0}{2}$$

在质心系中，两粒子初速分别为

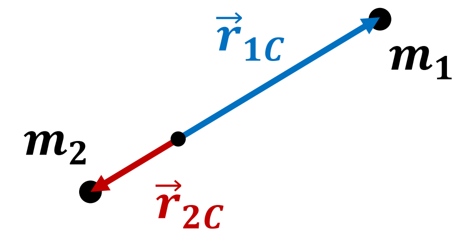
$v_1' = v_1 - v_C = 3v_0/2$和$v_2' = v_2 - v_C = -3v_0/2$

能量守恒给出

$$\frac{1}{2}m_p\left(\frac{3v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_p\left(\frac{3v_0}{2}\right)^2 = \frac{ke^2}{r_{\min}}$$

解得$r_{\min} = 4ke^2/\left(9m_p v_0^2\right)$

§6-4 有心运动方程与约化质量



考虑**两体问题**：双质点体系，不受外力

此时质心系为**惯性系**，在该系中

$m_1\ddot{\vec{r}}_{1C}=\vec{f}_1$，$m_2\ddot{\vec{r}}_{2C}=\vec{f}_2$

且$\vec{f}_1=-\vec{f}_2$为内力

以m_2为原点建立平动的非惯性参考系，

则m_1的位矢$\vec{r}_1=\vec{r}_{1C}-\vec{r}_{2C}$，且满足

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1=m_1\ddot{\vec{r}}_{1C}-\frac{m_1}{m_2}m_2\ddot{\vec{r}}_{2C}=\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\vec{f}_1$$

改写为$\mu\ddot{\vec{r}}_1=\vec{f}_1$，形式上满足牛顿第二定律，其中

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

称为**约化质量**，或折合质量

在两体问题中，可以以其中一个物体为参考系，则另一个物体的运动方程形式上仍满足牛顿第二定律

$$\vec{f}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{a}_1 = \mu\vec{a}_1$$

只是质量m要替换为约化质量μ

把较为复杂的两体问题化简为有心力场中的平面单体问题，使得问题大大简化

约化质量是将惯性力的作用效果吸收进质量定义的结果，只是我们已知的定律的另一种表述形式

例：如果$m_2 \gg m_1$，则$\mu \approx m_1$

- 太阳质量约为地球质量的33万倍，日心系中的地球约化质量与真实质量差别仅3×10^{-6}
- 地球质量约为月球质量的81倍，地心系中的月球约化质量与真实质量差别约0.01

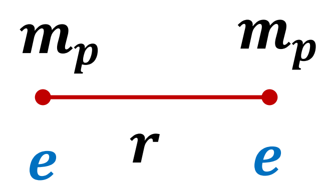
注意：两体问题在使用**约化质量**化为单体问题时

- 所处的参考系是非惯性系，因为是以其中一个物体为基础建立的
- 但是**不需要**考虑惯性力，因为惯性力的效果已经被吸收进约化质量里面了

易错点有三：

1. 认为这是在非惯性系中处理问题，因而特地考虑了惯性力，造成**重复计数**
2. 在真实力与质量有关时，用约化质量计算力，得到**错误的力**。例如万有引力下的两体问题，尽管约化质量为$\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$，但两质点间的引力仍为Gm_1m_2/r^2，而非$G\mu m_2/r^2$，也非$G\mu^2/r^2$
3. 忘记“**体系不受外力**”的前提，对任意双质点系统都应用公式

例：两质子相互作用电势能为ke^2/r，从相距很远处开始分别以速率v_0和$2v_0$相向运动。求二者能达到的最近距离。



解：在其中一质子上建立参考系

另一质子初速度为$3v_0$

由能量守恒知

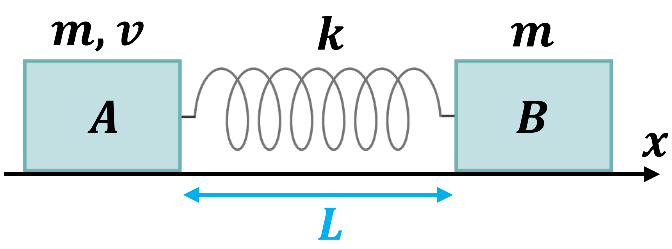
$$\frac{1}{2}\mu v^2+\frac{ke^2}{r}=\text{const.}$$

$\mu=m_p/2$为约化质量。二粒子最近时，相对速度必为零，得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_p}{2}\right)(3v_0)^2=\frac{ke^2}{r_{\min}}$$

解得$r_{\min}=4ke^2/\left(9m_pv_0^2\right)$

例：光滑水平面上，两滑块由轻弹簧相连。初始弹簧处于原长，左边的滑块有初速度。问在后续运动中两滑块的最近距离。



解：在其中滑块B上建立参考系，则滑块A的约化质量为$\mu = m/2$

且其初始动能为

$$E_{kA} = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

最近时，动能全部转化为弹性势能，故压缩量Δx满足

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = E_{kA} = \frac{1}{4}mv^2$$

代入解得$\Delta x = v\sqrt{m/(2k)}$

故最近时距离为$L - v\sqrt{m/(2k)}$

本题也可用质心系的方法求解，在此不赘述

本节课小结

质心的定义及其计算方式

- 尤其是质量连续分布的物体的质心计算
- 要注意审题，不要默认密度均匀

质心的运动

- 与单质点力学相对应的动量定理、动能定理和角动量定理
- 注意合外力的矩不等于合外力矩

质心系的重要性质

- 体系运动分解为质心的运动以及体系相对于质心的运动
- 质心系中的功能原理和角动量定理

利用约化质量把两体问题化简为单体问题

第六章作业

6.1, 6.3, 6.4, 6.7

作业扫描提交至spoc.buaa.edu.cn，助教线上批改

提交时间段：3月25日0:00至4月8日00:00
以系统时间戳为准，原则上不接受其他解释

时间节点：3月28日（本周五）开始讲第七章