

北京航空航天大学

2022-2023 学年 第二学期期末

《 工科数学分析 (2) 》

试 卷 (A)

班 号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

任课教师 _____ 考场 _____ 成绩 _____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对入								

2023 年 06 月 15 日

一、 选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设 $D: x^2 + y^2 \leq ay (a > 0)$, $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数, $\iint_D f(x, y) dx dy = (\quad)$.

- (A) $\int_0^a dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta$ (B) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$
 (C) $\int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta$ (D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

答案(B)

2. 设 $\vec{c} = 8x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$, 数量场 $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 则 $\operatorname{div}(h\vec{c}) = (\quad)$.

- (A) $\frac{8x^2 + 2y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ (B) $\frac{8x^2 + 2y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + 9\ln(x^2 + y^2 + z^2)$
 (C) $\frac{16x^2 + 4y^2 - 2z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ (D) $\frac{16x^2 + 4y^2 - 2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} + 9\ln(x^2 + y^2 + z^2)$

答案(D)

3. 设曲线积分 $\int_L xf(y)dx + x^2ydy$ 与路径无关, 其中 f 具有一阶连续的导数, 且

$f(0) = 0$, 则 $\int_{(0,0)}^{(1,2)} xf(y)dx + x^2ydy = (\quad)$.

- (A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

答案 (B)

4. 已知球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Σ 是上半球面, Σ_1 是 Σ 位于第一卦限的部分, 则 ().

- (A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$ (B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$
 (C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$ (D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

答案(C)

5. 设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 取上侧, 则以下结论**错误**的是 ().

- (A) $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = 0$ (B) $\iint_{\Sigma} y^2 dy dz = 0$
 (C) $\iint_{\Sigma} x dy dz = 0$ (D) $\iint_{\Sigma} y dy dz = 0$

答案: (C)

二、 计算题（每小题 6 分，满分 30 分）

1. 设定义在全空间 R^3 上的数量值函数 $f(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\text{rot}(\text{grad } f)$.

解析: $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, 则

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\vec{i} + (f_{xz} - f_{zx})\vec{j} + (f_{yx} - f_{xy})\vec{k}$$

由于 $f(x, y, z)$ 的所有二阶偏导数连续, 故 $\text{rot}(\text{grad } f) = (0, 0, 0)$.

2. 计算 $\iint_D (x^2 + y^2 - x) dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x$, $y = 2x$ 和 $y = 2$ 所围成的有界闭区域.

解析: 积分区域 D 是第一象限内的三角形区域. 若将 D 作为 x 型区域, 则

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2 - x) dx dy &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2 - x) dy + \int_1^2 dx \int_x^2 (x^2 + y^2 - x) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{10}{3} x^3 - x^2 \right) dx + \int_1^2 \left(-\frac{4}{3} x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{8}{3} \right) dx = \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

若将 D 作为 y 型区域, 则

$$\iint_D (x^2 + y^2 - x) dx dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y (x^2 + y^2 - x) dx = \int_0^2 \left(\frac{19}{24} y^3 - \frac{3}{8} y^2 \right) dy = \frac{19}{6} - 1 = \frac{13}{6}$$

3. 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 $\Omega: \pi^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\pi^2$.

解析: 球坐标变换

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad \pi \leq r \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

于是

$$\iiint_{\Omega} \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos r}{r^2} \cdot r^2 \sin \phi dr = 4\pi \int_{\pi}^{2\pi} \cos r dr = 0$$

4. 计算 $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 是曲线 $\begin{cases} x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases}, 0 \leq \theta \leq \pi$, 常数 $a > 0$.

解析: 由参数方程, 弧微元

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(a(-\sin \theta + \sin \theta + \theta \cos \theta))^2 + (a(\cos \theta - \cos \theta + \theta \sin \theta))^2} d\theta \\ &= a\theta \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta = a\theta d\theta \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_L (x^2 + y^2) ds &= \int_0^\pi a^2 ((\cos \theta + \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta - \theta \cos \theta)^2) \cdot a\theta d\theta \\ &= a^3 \int_0^\pi (1 + \theta^2) \theta d\theta = a^3 \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{4} \right) = \frac{a^3}{2} \pi^2 + \frac{a^3}{4} \pi^4 \end{aligned}$$

5. 计算 $\iint_{\Sigma} [4x^2 + 5y^2 - \sin(xz^2)] dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

解析: $\iint_{\Sigma} [4x^2 + 5y^2 - \sin(xz^2)] dS = 4 \iint_{\Sigma} x^2 dS + 5 \iint_{\Sigma} y^2 dS - \iint_{\Sigma} \sin(xz^2) dS$

由轮换对称性, $\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{4}{3} \pi$

而 Σ 关于坐标面 Oyz 对称, 且 $\sin(-xz^2) = -\sin(xz^2)$, 所以 $\iint_{\Sigma} \sin(xz^2) dS = 0$, 于是

$$\iint_{\Sigma} [4x^2 + 5y^2 - \sin(xz^2)] dS = 9 \cdot \frac{4\pi}{3} = 12\pi$$

三、(10 分)

计算第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} [g(x, y, z) + x] dydz + [2g(x, y, z) + y] dzdx + [g(x, y, z) + z] dxdy,$$

其中 $g(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 为平面 $x - 2y + 3z = 4$ 在第四卦限部分的上侧.

解法一: 利用两类曲面积分之间的关系

$$\because \Sigma \text{ 的法向量为 } \vec{n} = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1 \right\}, \therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} [g(x, y, z) + x] - \frac{2}{\sqrt{14}} [2g(x, y, z) - 2y] + \frac{3}{\sqrt{14}} [g(x, y, z) + z] \right\} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_{\Sigma} (x - 2y + 3z) dS = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \frac{\sqrt{14}}{3} dxdy = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

解法二：利用向量点积法

$\Sigma: z = \frac{1}{3}(4-x+2y), (-z_x, -z_y, 1) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1), \Sigma$ 的投影区域为 D

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \{ [g(x, y, \frac{1}{3}(4-x+2y)) + x] \cdot \frac{1}{3} + [2g(x, y, \frac{1}{3}(4-x+2y)) + y] \cdot (-\frac{2}{3}) \\ &\quad + [g(x, y, \frac{1}{3}(4-x+2y)) + \frac{1}{3}(4-x+2y)] \} dx dy \\ &= \iint_D [\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}(4-x+2y)] dx dy \\ &= \iint_D \frac{4}{3} dx dy = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

四、(10 分) (利用 Green 公式)

计算曲线积分 $I = \int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 $L: x^2 + y^2 = 2$, 顺时针方向.

解: 因为 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $P_y = Q_x = \frac{y^2 - 4x^2 - 8xy}{(4x^2 + y^2)^2}$, \therefore 积分与路径无关.

换做椭圆曲线 $L_1: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 顺时针方向, $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得椭圆包含在 L 所围的区域内, 则原积分可化作

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{L_1} (4x-y)dx + (x+y)dy \text{ (利用 Green 公式).} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_D [(x+y)_x - (4x-y)_y] dxdy = -\frac{2}{\varepsilon^2} \iint_D dxdy = -\frac{2}{\varepsilon^2} A(D) = -\pi. \end{aligned}$$

注: 最后的积分也可以直接计算

$$l: \begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{2} \cos t \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases}, \quad t: 2\pi \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{2\pi}^0 \left[(2\varepsilon \cos t - \varepsilon \sin t) \cdot (\frac{\varepsilon}{2} \cos t)' + (\frac{\varepsilon}{2} \cos t + \varepsilon \sin t)(\varepsilon \sin t)' \right] dt \\ &= \int_{2\pi}^0 \frac{1}{2} dt = -\pi \end{aligned}$$

五、(10 分) (利用 Gauss 公式)

计算 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{r^3}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2}$,

S 为长方体 $V = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 3, |z| \leq 3\}$ 的表面, 并取外侧

解：因为 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r^2 - 3(y-2)^2}{r^5}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{r^2 - 3(z+2)^2}{r^5},$

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, 因为 V 中有奇点 $(0, 2, -2)$, 不能直接使用高斯公式

挖去一个小球 $V_1: x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 \leq \varepsilon^2$,

ε 充分小, 使得 $V_1 \subset V$, 且 V_1 的边界记为 S_1 , 取外侧, 记 S 与 S_1 所围区域为 Ω , 则

$$\iint_{S-S_1} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3} = \iiint_{\Omega} 0 dxdydz = 0$$

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3} &= \iint_{S_1} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{S_1} xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy = \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{S_1^2} 3 dxdydz = \frac{3}{\varepsilon^3} \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 4\pi. \end{aligned}$$

六、(10 分) (利用 Stokes 公式)

计算曲线积分 $\oint_{\Gamma} (2e^x + y^2 - z^2)dx + (y^2 + z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2 + 4\ln z^2)dz$ 其中 Γ

是平面 $x + y + z = \frac{3}{2}$ 截立方体: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 的表面所得的截痕,

若从 ox 轴的正向看去, 取逆时针方向.

解: 取 Σ 为平面的上侧被立方体所围成的部分. 则 Σ 法向量的方向余弦

$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, 由 Stokes 公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2e^x + y^2 - z^2 & y^2 - x^2 + z^2 & x^2 - y^2 + 4\ln z^2 \end{vmatrix} dS \\ &= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x + y + z) dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3} dxdy = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

解法二: 曲面的法向量为 $n = (1, 1, 1)$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2e^x + y^2 - z^2 & y^2 - x^2 + z^2 & x^2 - y^2 + 4\ln z^2 \end{vmatrix} \\
&= -2 \iint_{\Sigma} (y+z)dydz + (x+z)dzdx + (x+y)dxdy \\
&= -2 \iint_{\Sigma} [(y+z) \cdot 1 + (x+z) \cdot 1 + (x+y) \cdot 1]dxdy \\
&= -4 \iint_{\Sigma} (x+y+z) \cdot dxdy \\
&= -4 \cdot \frac{3}{2} \iint_D dxdy = -\frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

七、(10分) 设 φ, ψ 有连续导数, 积分

$$I = \int_L (2x\varphi(y) + \psi(y))dx + (x^2\psi(y) - 2x\varphi(y))dy \text{ 与路径无关,}$$

(1) 当 $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 1$ 时, 求 $\varphi(x), \psi(x)$;

(2) 设 L 是从 $O(0, 0)$ 到 $N(\pi, \frac{\pi}{2})$ 的分段光滑曲线, 计算 I 。

解(1). 由题设得 $\frac{\partial}{\partial x}(x^2\psi(y) - 2x\varphi(y)) = \frac{\partial}{\partial y}(2x\varphi(y) + \psi(y))$ 即

$$2x\psi(y) - 2\varphi(y) = 2x\varphi'(y) + 2\psi'(y) \text{ 对任何}(x, y) \text{ 都成立,}$$

令 $x = 0$, 有 $\varphi(y) + \psi'(y) = 0$, 代入上式得 $\psi(y) = \varphi'(y)$,

$\therefore \varphi''(y) + \varphi(y) = 0$, 其通解为 $\varphi(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y$,

由 $\varphi(0) = 0$ 及 $\psi(0) = \varphi'(0) = 1$ 解得 $C_1 = 0, C_2 = 1$

$\therefore \varphi(y) = \sin y, \psi(y) = \varphi'(y) = \cos y$.

(2) 取折线 OMN 为积分路线, $M(0, \frac{\pi}{2})$,

$$I = 0 + \int_0^{\pi} 2(x\varphi(\frac{\pi}{2}) + \psi(\frac{\pi}{2}))dx = \int_0^{\pi} 2x(1 + 0)dx = \pi^2.$$