2016—2017 学年第一学期期末考试

考试统一用答题册

考试课程________工科高等代数 **A**________

班　　级__________**学 号**____________

姓　　名__________**成 绩**____________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
成绩							
阅卷人签字							
校对人签字							

2017-1-5

姓 名______________学 号 _________ A

一. 选择题 (每题 2 分，共 22 分)

1. 设 A、B、C 均为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位阵，若 $B=E+AB$，$C=A+CA$，则 $B-C$ 为（ a ）

a. E; b. $-E$; c. A; d. $-A$

2. 若 3 阶方阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 的行列式 $|A|=1$，则 $|\alpha_1\ \alpha_2\ 3\cdot\alpha_3-\alpha_1|=$（ c ）

a. 2; b. 1; c. 3; d. -1

3. 设 A 是 4×3 的矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为 （ c ）

a. $\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$; b. $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$;

c. $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$; d. $\dfrac{\eta_1-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

4. 若 A 是 n 阶实方阵，x 是 R^n 中的列向量，则 $x^TA^TAx=$（ d ）

a. 长度$|Ax|$; b. 正数; c. 长度$|x|$; d. $|Ax|^2$

5. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B (b)

a. 既相合又相似; b. 相合但不相似; c. 不相合但相似;
d. 既不相合也不相似

6. 设 A 为 n 阶方阵矩阵，则 A 可逆等价于(b)

a. $\det(A)=0$; b. $\mathrm{R}(A)=n$; c. A^T 不可逆; d. A 有零特征值

7. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，令 $W=\{x\in R^n\mid Ax=0\}$，则 $\dim(W)+\mathrm{R}(A)=$(c).

a. $n-1$; b. $m-n$; c. m; d. n

8. 设 A 和 B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵，则必有（ a ）

a. A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关;
b. A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关;
c. A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关;
d. A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

9. 实对称阵 A 为正定阵的充分必要条件是(d)

a. A 满秩; b. A 可逆; c. $|A|$为正; d. A 的全体特征根为正数

10. 设 A 为 n 阶正交阵，下列说法正确的是(a)

a. $A^T = A^*$(伴随阵); b. $A^{-1} = A^T$; c. $|A| = -1$; d. $|A| = 1$

11. 设 A 和 B 为 n 阶方阵，且 $A^2 = A$，$B^2 = B$，$E - A - B$ 可逆，则（ c ）

a. 秩 $R(A) > R(B)$； b. $R(A) < R(B)$； c. $R(A) = R(B)$； d. $R(A) \neq R(B)$

二. 填空题 (每题 2 分，共 8 分）

1. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{19} =$ ________

2. 设 α 是 3 维列向量，若 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha =$ ________

3. 若 3 阶方阵 A 满足 $|A - E| = |A - 2E| = |A + E| = 0$，则 $|A^2 + 3E| =$ ________

4. 设 A 是 n 阶实正交阵，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维列向量且线性无关，若 $(A+E)\alpha_1$, $(A+E)\alpha_2, \cdots, (A+E)\alpha_n$ 也线性无关，则 $|A| =$ ________

三. 判断题 (每题 1 分，共 11 分) (正确的在括号内打“√”，错误的在括号内打“X”)

1. 任意线性变换都可以把线性空间的一组基映为一组基. (t)

2. 初等列变换不改变矩阵的秩. (t)

3. 若方阵 A 可对角化，则属于 A 的不同特征值的特征子空间彼此正交. ( )

4. 若方阵 A, B 相合，则 A, B 有相同的特征值. (t)

5. 正交变换在任意一组基下的矩阵都是正交阵. (t)

6. 任意 n 阶方阵 A 与 B，AB 和 BA 具有相同的迹. (t)

7. 设 A 为实 $m \times n$ 矩阵，则秩 $R(A^T A) = R(A)$. (t)

8. 若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 v_1, v_2 线性表示，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 一定线性无关. (f)

9. 若 A 是正定矩阵，则 $A^{-1} + A^*$ 也是正定矩阵. (t)

10. 设 A 与 B 均为 n 阶方阵，$R(A) + R(B) < n$，则 A 与 B 有公共的特征值和特征向量. (t)

11. 若 n 元方程组 $A_{n\times n}\boldsymbol{x}=0$ 只有零解，则 $A_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解. (f)

四. 计算下列各题（每题 8 分，共 24 分）

1. 设R^4的两个子空间V_1与V_2分别为

$$V_1 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 = a_2 = a_3, a_i \in R, i = 1,2,3,4\}$$

$$V_2 = L(x_1, x_2)\text{，其中 } x_1 = (1,0,1,0), x_2 = (0,1,0,1).$$

(1) 求$V_1 + V_2$的维数及其一组基；　　(2) 求$V_1 \cap V_2$的维数及其一组基.

2. 设 A 为 n 阶可逆阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块阵

$$P = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix},$$

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位阵.

(1) 计算并化简 PQ；(2)求 Q 可逆的充要条件.

3. 设 4 维向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2+a\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+a\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+a\end{pmatrix}$,

(1) a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？

(2) 当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

五. 求解下列题目 (每题 10 分，共 20 分)

1. 设所有次数不大于 4 的多项式全体所构成的线性空间为$P_3[x]$，其上有线性变换 T 将任意 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P_3[x]$映为

$$\mathrm{T}[f(x)]=(a_1+a_2)+(a_1+a_2)x+2(a_0+a_3)x^3$$

（1）设$P_3[x]$的一组基 I 为$1,x,x^2,x^3$，求线性变换 T 在基 I 下的矩阵 A；

（2）判断 A 是否可以相似对角化；若可以，求相似变换的矩阵以及与 A 相似的对角阵；

（3）求$P_3[x]$的另外一组基，使 T 在该基下的矩阵为对角阵.

2. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^{\ 2}+(1-a)x_2^{\ 2}+2x_3^{\ 2}+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，

(1) 求此二次型的矩阵及 a 的值；

(2) 求正交变换 $x=Qy$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形，并写出此标准形；

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

六. 证明题 (每题 5 分，共 15 分)

1. 设 A 是 $m\times n$ 阶实矩阵，E 是 n 阶单位阵. 已知矩阵 $B=\lambda E+A^{T}A$，求证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

2. 设 A 为 n 阶可逆的反对称阵，b 为 n 维列向量，设 $B=\begin{pmatrix} A & b \\ b^{T} & 0 \end{pmatrix}$，

求证：秩 $\mathrm{R}(B)=n$.

3. 设 A 和 B 均为实对称阵，求证：存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 与 $Q^{-1}BQ$ 同为对角阵当且仅当 $AB = BA$.