北京航空航天大学

2016－2017 学年 第一学期 期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ） 》

(A 卷)

班号 ＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿

主讲教师＿＿＿＿＿ 考场＿＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成　绩									
阅卷人									
校对人									

2017 年 01 月 06 日　　8:00—10:00

答题注意事项：

（1）答案写在题目要求的位置。

（2）大题的部分答案若写在异处要在原题有标注。其余情况无效。答题要写详细计算步骤。

(3) 蓝黑、蓝色签字笔、钢笔答题有效，铅笔及红色笔答题无效。

（4）请保持卷面整洁，不写与答题无关的内容。

一、　**单项选择题（每题 4 分，满 24 分）**

1、　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=$ _____A__________。

A　$\frac{2}{\pi}$ ；　B　$\frac{\pi}{2}$ ；　C　π ；　D　2 ；

2、　若$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}(p>q)$收敛，则 p,q 满足____D____C_____。

A　$p<1$ ；　B　$q<1$；　C　$p\geq 1$ ；　D　$q\geq 1$ ；

3、　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则下列结论正确的是________D______。

A　$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)+c$ ；　B　$\int f'(x)dx=f(x)$ ；

C　$\left(\int_1^2 f(t)dt\right)'=f(t)$ ；　D　$\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)$ ；

4、　设 $f(x)\in C[0,+\infty)$， $f(x)\geq 0$ 且 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$。则对函数 $f(x)$ 下述结论正确的是_________C_____。

A. 无界；　B 严格单调 ；　C 任意阶可导 ；　D 不恒等于零

5、　$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}(1+\sin^3 x\cos^2 x)dx=$ _____C__________。

A　0 ；　B　$\frac{\pi}{2}$ ；　C　$2-\frac{\pi}{2}$ ；　D　2 ；

6、　下列广义积分收敛的是 ________B_______。

A　$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ ；　B　$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ ；

C　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ；　D　$\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{x}dx$ ；

二、计算证明题（每题 6 分，满 30 分）

1、 计算 $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$；

解：

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}})dx$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx^2$$

$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+c$$

分部积分正确 2 分，换元正确 2 分，结论正确 2 分，没写 c 扣一分

2、 计算 $\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$；

解：

$$\int\frac{x-2}{x^2+2x+3}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+3}d(x^2+2x+3)-3\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-3\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{3}{\sqrt{2}}arc\tan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

前两步正确 3 分，后面三分，没有 c 扣一分

3、 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2016}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2016}xdx$；

证明：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $dx=-dt$ ------------------------3 分

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2016}xdx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^{2016}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2016}xdx$ **-----------------6 分**

4、 计算 $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx$；

解：

$$\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx^2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$= 1$$

换元正确 2 分，分部积分正确两分，结果正确 2 分

5、 计算瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$；

解：1 是瑕点---1 分

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$\overset{\sqrt{1-x}=t}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_1^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{-2t dt}{t(1+t^2)} = 2\lim_{\varepsilon \to 0+} \arctan t \Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

第一个等式 2 分，后面一等式一分

三、(**本题 6 分**) 设 $f(x) > 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$G(x) = \dfrac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$，证明 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增。

$$G'(x) = \frac{(\int_0^x t f(t) dt)' \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt (\int_0^x f(t) dt)'}{(\int_0^x f(t) dt)^2}$$

$$= \frac{x f(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt}{(\int_0^x f(t) dt)^2}$$ ------------------------**4 分**

$$= \frac{\int_0^x (x-t) f(x) f(t) dt}{(\int_0^x f(t) dt)^2}$$

由于 $t \in [0,x]$，且 $x > 0$ 知 $(x-t) f(x) f(t)$ 非负连续，且对于 $t \in [0,x]$，不恒等于零，

故分子大于 0，而 $(\int_0^x f(t) dt)^2 > 0$，故 $G'(x) > 0 (x > 0)$。---------------------------6 分

所以 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格增。

四、（本题 10 分）

考虑曲线 $y=f(x)=\ln x$，$x\in[1,2]$。过此曲线上任意一点(x, $f(x)$) 做切线，该切线与 x 轴的交点记为（$g(x)$，0)，$x\in[1,2]$。记曲线 $g(x)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形为 D。

（1） 求 $g(x)$ 的表达式，$x\in[1,2]$；

（2） 计算 D 的面积；

（3） 求 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

解:(1) 此题改为交点为($g(x)$，0)后，估计出现的解法会很多，不管如何只认结果。结果不对一概没分。

$g(x)=x-x\ln(x)$ ， $x\in[1,2]$ **-------2 分 [只要出现这个才给 2 分]**

(2) $g(x)=x-x\ln(x)=x[1-\ln x]\geq 0,\ x\in[1,2]$ ， $x\in[1,2]$ **-------1 分**

$$S_D=\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2(x-x\ln x)dx$$ **-------2 分（公式分）**

$$=\frac{x^2}{2}-[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}]|_1^2=[\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x]|_1^2=\frac{9}{4}-2\ln 2$$ **-------1 分(答案分)**

注 1：若没有 $g(x)\geq 0$, 这个结论。$S_D=\int_1^2|g(x)|dx$ 才给 3 分，否则扣 1 分只给 2 分。

(3) D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^2(g(x))^2dx=\pi\int_1^2(x-x\ln x)^2dx$$ **-------2 分（公式分）**

$$=\pi[(x-x\ln x)^2x|_1^2-\int_1^2 xd(x-x\ln x)^2]$$ **-------1 分（会用一步分部积分）**

$$=\pi[x^3(1-\ln x)^2|_1^2+2\int_1^2 x(x-x\ln x)\ln xdx]$$

$$=\pi[8(1-\ln 2)^2-1+2(\frac{40}{9}\ln 2-\frac{8}{3}(\ln 2)^2-\frac{35}{27})]$$

$$=\pi[\frac{119}{27}-\frac{64}{9}\ln 2+\frac{8}{3}(\ln 2)^2]$$ **-------1 分（答案分）**

注 2：给分总则【2 分+4 分+4 分】 原则上送公式 4 分，即便不会做第一步也不会差距太大。第（2）问是纯送分。第（3）问的答案分虽比重小，也是为了拉开差距。

五、(本题 10 分)

求二阶线性非齐次常微分方程 $y''-y'+y=(\sin x)e^{-x}$ 的通解。

解： 特征方程：$\lambda^2-\lambda+1=0.$ **-------2 分**

容易求得两个特征根为: $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}.$ -------1 分

对应齐次方程的通解为: $y=e^{\frac{x}{2}}[C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x].$ -------1 分

因为-1+i 不是特征根(重数 $k=0$)，设非齐次方程的特解

$y^*=e^{-x}[A\cos x+B\sin x].$ -------2 分

$$y^*{}'=[e^{-x}(A\cos x+B\sin x)]'$$
$$=e^{-x}(-A\cos x-B\sin x)+e^{-x}(-A\sin x+B\cos x)$$
$$=e^{-x}[(B-A)\cos x-(B+A)\sin x]$$

$$y^*{}''=[e^{-x}[(B-A)\cos x-(B+A)\sin x]]'$$
$$=e^{-x}[-(B-A)\cos x+(B+A)\sin x]+e^{-x}[-(B-A)\sin x-(B+A)\cos x]$$
$$=e^{-x}[-2B\cos x+2A\sin 2x]$$

带入方程，我们有

$$y''-y'+y=e^{-x}[(2A-3B)\cos x+(3A+2B)\sin x]=(\sin x)e^{-x}$$
$$2A-3B=0$$
$$3A+2B=1$$

所以, $A=\dfrac{3}{13},B=\dfrac{2}{13}$ -------2 分

于是非齐次方程的**特解**为

$y^*=e^{-x}[\dfrac{3}{13}\cos x+\dfrac{2}{13}\sin x].$ -------1 分

非齐次方程的**通解**为

$y=e^{\frac{x}{2}}[C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x]+e^{-x}[\dfrac{3}{13}\cos x+\dfrac{2}{13}\sin x].$ -------1 分

给分总则:【齐次通解 4 分+非齐次特解 5 分+答案非齐次通解 1 分】

（1） 特征方程 2 分，特征根 1 分，齐次通解 1 分。

（2） 非齐次特解写对 2 分，待定系数正确 2 分，

（3） 非齐次通解=齐次通解+非齐次特解。1 分。

（4） 其中 C_1,C_2 是否标注任意常数，可不计较。

六、（**本题 10 分**）讨论 p 取何值时广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x^2}{x^p}dx$ 收敛，并判定条件收敛与绝

对收敛。

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx \overset{x^2=t}{=} \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{p}{2}}}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{2}}}dt$ **；----------2 分**

因为对任意的 $A>1$,有 $|\int_1^A \sin t dt|\le 2$； 且当 $\frac{p+1}{2}>0$ 时 $\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}$ 单调递减趋于 0，故有狄利克雷判别法知当 $p>-1$ 时广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$ 收敛。

-----------------------------4 分

因为 $\left|\frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{2}}}\right|\le\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}}$， 所以当 $\frac{p+1}{2}>1$，即 $p>1$时广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$绝对收敛；

--7 分

当$0<\frac{p+1}{2}\le 1$，即 $-1<p\le 1$时，广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$条件收敛------------9 分

当$\frac{p+1}{2}\le -1$,即 $p\le -1$时，发散------------10 分

七、（本题 10 分）

设函数 $f(x)\ge 0$ 在$[0,1]$上连续且单调递减，$0<\alpha<\beta<1$， 求证

$$\int_0^\alpha f(x)dx\ge\frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)dx \text{。}$$

证明：

由积分中值定理知， 存在 $\xi\in[0,\alpha]$，使得 $\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx=f(\xi)$，

存在 $\eta\in[\alpha,\beta]$，使得 $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\eta)$；---------------------4 分

由 $f(x)$ 单减知，$f(\xi)\ge f(\eta)$，

从而$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx\ge\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$；**-----------------------------------8 分**

又因为 $\alpha>0$，所以

$\int_0^\alpha f(x)dx\ge\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge\frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ 。**-----------------------------10 分**

八、 附加题(本题 10 分)

设可导函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$，$f(0)=0$，且满足 $f(x)=x^2-2\int_0^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t$，

求：$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

解： $f(x)=x^2-2\int_0^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t$ 两边求导

$f'(x)=2x-2g(f(x))f'(x)$ ------- 2 分

因为 $g(f(x))=x$， ------- 2 分

则 $f'(x)=2x-2xf'(x)$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+2x}$$ ------- 2 分

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{2t}{1+2t}dt=\int_0^x(1-\frac{1}{1+2t})dt$$

$$=[t-\frac{1}{2}\ln|1+2t|]|_0^x=x-\frac{1}{2}\ln|1+2x|$$ -------2 分

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1[x-\frac{1}{2}\ln(1+2x)]dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}[x\ln(1+2x)-x+\frac{1}{2}\ln(1+2x)]|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}[\ln 3-1+\frac{1}{2}\ln 3]$$ --2 分

$$=1-\frac{3}{4}\ln 3$$

给分总则：（1）本题 5 个给分点，建议统一要求每个点全对才给相应的分. 如果中间步骤明显错误，答案碰巧的情况一概不给分。

变上限函数求导 2 分+反函数性质 2 分+ $f'(x)$ 2 分+ $f(x)$ 2 分+结果 2 分。