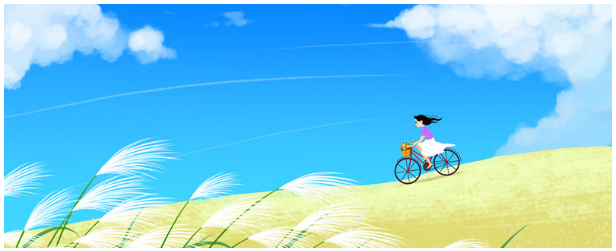
基础物理学 A1
2025年春季学期

谢柯盼
kpxie@buaa.edu.cn
物理学院

第七章 刚体力学

§ 7-0 引子

很多时候，所研究的**质点系**有一些特殊的性质，使得我们可以抽象出一些理想模型



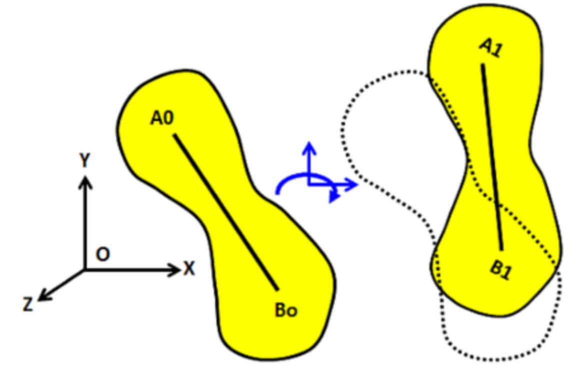
流体　　弹性体　　刚体

本章学习坚硬（刚性）物体的力学，即刚体力学

§7-1 刚体运动学

刚体：运动过程中大小和形状都保持不变的质点系

或：组分质点之间的距离始终保持不变的质点系



刚体是特殊的质点系，是一种理想模型

当体系的大小和形状变化在所研究的问题中可忽略时就可以视为刚体

思考：下列物体哪些能视为刚体，哪些不能？

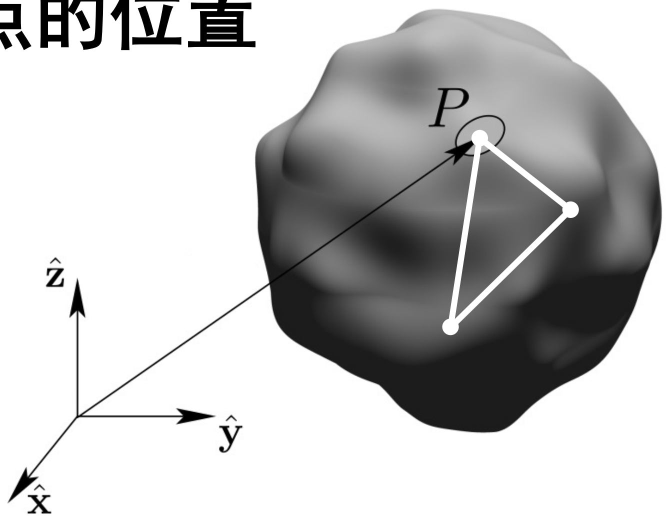
- 在水上漂浮的泡沫塑料
- 承重测试中的钢筋混凝土
- 上课板书时的黑板

有关质点系的规律均适用于刚体，而刚体还有自身的特殊性质，具有很多特有的定理和推论

刚体作为有大小的、在空间中扩展的物体，其运动的描述远比质点复杂

在三维空间中，3个数可以确定质点的位置

但不足以确定刚体的姿态



由于刚体的特殊性质，只要确定其内部不共线三点的位置，即可确定整个刚体的位置和取向

3个数确定第一个点的位置（即其三维坐标）

2个数确定第二个点的相对取向（即方位角）

1个数确定第三个点的转动角

总共需要$3+2+1=6$个数来完整地描述刚体的姿态

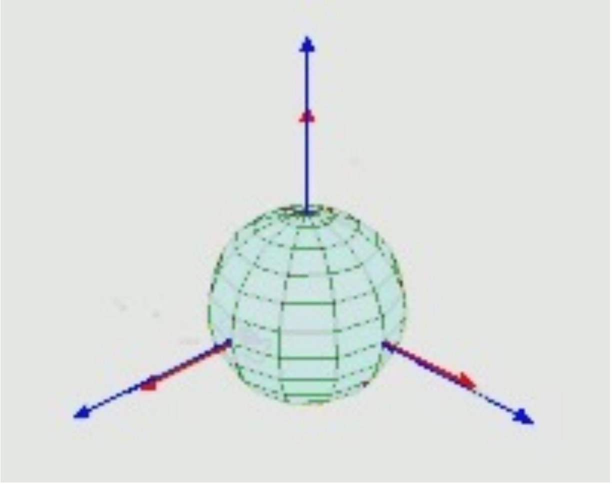
即刚体的自由度数为6

自由度是确定体系位形所需要的独立变量的个数
体系每受到一个约束，自由度数就减1
三维空间中的自由质点，自由度数为3
二维曲面上运动的质点，自由度数为$3-1=2$
刚体的位形由其内部不共线三点（或曰刚性三角形）的位形确定

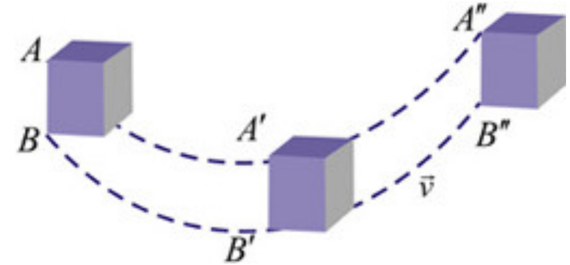
- 三个点的总自由度数为$3\times 3=9$
- 体系受到3个**约束**——点与点之间距离不变
- 故刚体的自由度数为$9-3=6$

可分解为刚体上某点的位置（3个空间坐标）与其他点相对于该点的角度（3个**欧拉角**）

欧拉角动画演示（了解即可）



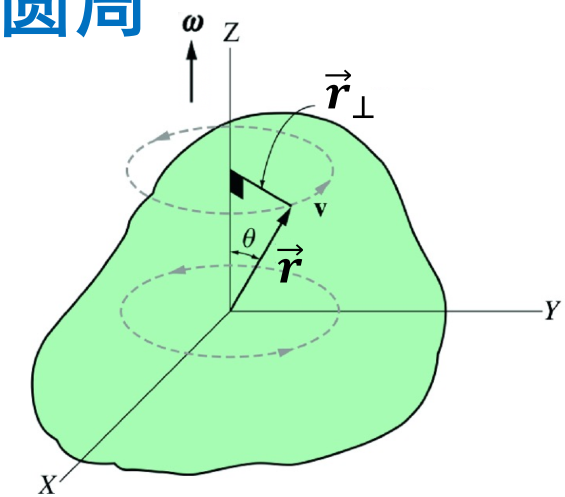
刚体运动的描述和分类



平动：刚体内部任意两点的连线始终保持与原来的位置**平行**

平动**不代表**刚体上某一点的运动轨迹是直线！

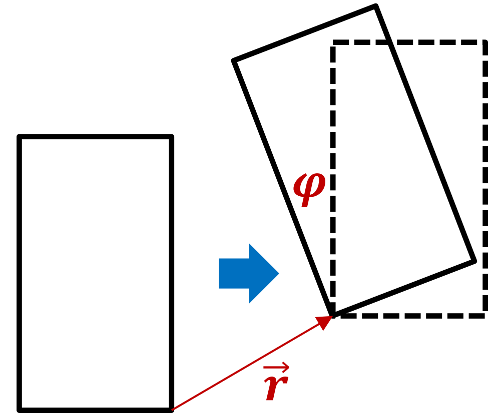
定轴转动：刚体各点都绕同一直线作**圆周**运动，该直线称为转轴



- 转动既可以是匀速的，也可以是非匀速的
- 角速度$\vec{\omega}$与转轴平行，具体方向由右手定则确定
- 角动量$\vec{L}$一般**不与转轴平行**，后面会细讲
- 注意区分刚体上一点到原点的距离r以及其到转轴的距离$r_\perp = r\sin\theta$

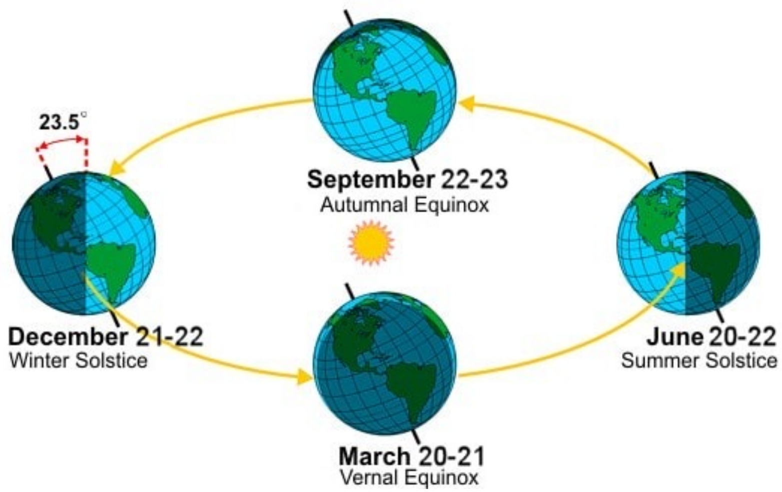
平面平行运动：刚体内部任意点都在作平面运动，且这些平面相互平行

- 分解为参考点的平面运动，以及刚体绕过该点且垂直于平面的直线的定轴转动



例：直行汽车的车轮运动

例：地球在黄道面内绕太阳公转，同时还在绕地轴自转，这是平面平行运动吗？



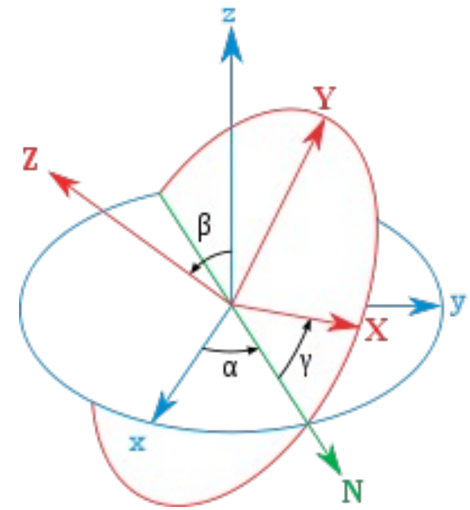
解：黄赤交角$\approx 23.5°$，地球运动不是平面平行运动

地球上某一点的轨迹不局限在某一平面内

如果该角为零，则地球运动为平面平行运动

定点转动：刚体上某一点固定不动，其他点任意运动

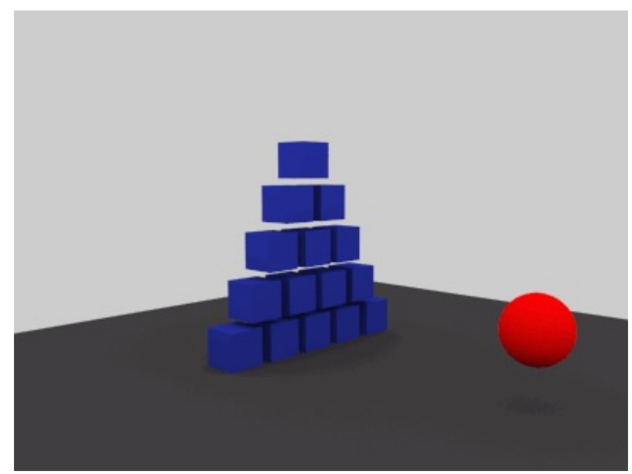
- 刚体内任意点的运动轨迹均分布在大小不一的球面上，因为各点在运动过程中与固定点的距离保持不变
- 可由3个欧拉角描述：进动角α，章动角β，自旋角γ（了解即可）



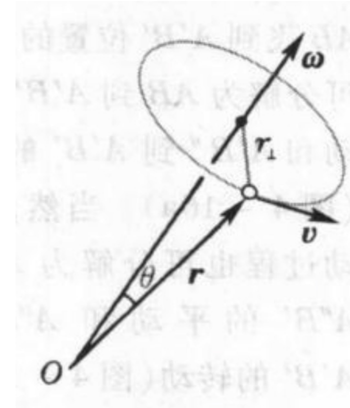
一般运动：刚体的任意运动

- 可以分解为刚体上某一基准点的平动与刚体绕该基准点的定点转动叠加
- 任意两个组分质点在其连线上的速度投影相等：$(\vec{r}_i-\vec{r}_j)^2$为常量，求导得

$$(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\cdot\vec{v}_i=(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\cdot\vec{v}_j$$



欧拉旋转定理（1775）：若一刚体绕O点进行定点转动，则每一瞬间均存在一矢量$\vec{\omega}$，使得体系内任一质点的速度均可表达为$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$，其中$\vec{r}$为质点的位矢。（证明略）



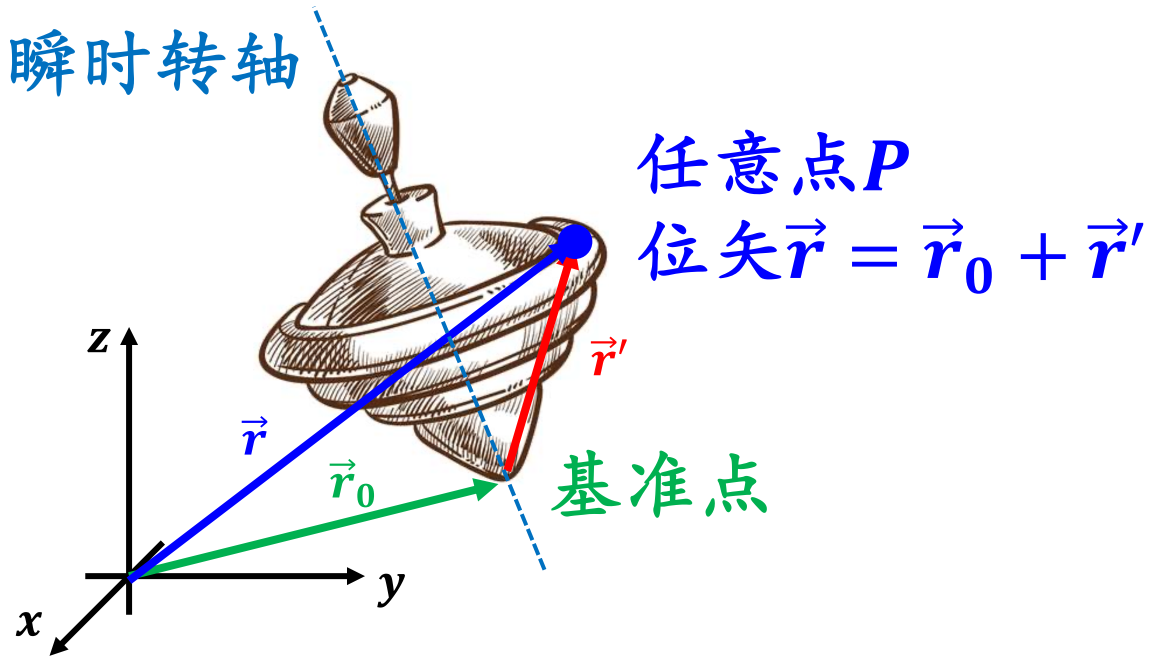
换句话说，**定点转动**的刚体每一瞬间均可看成是正在绕过定点的**某轴**进行角速度为$\vec{\omega}$的**绕轴转动**，该轴称为瞬时转轴，可随时间变化

看似复杂的刚体**绕点**转动实际上可看成绕某瞬时转轴的**绕轴**转动，大大简化了对刚体运动的描述

- 该定理的证明依赖于刚体的性质——任意两质点的距离保持不变，并不适用于一般的质点系

刚体的**一般运动**可分解为基准点平动及绕基准点的定点转动，据此可以得一般运动图景

刚体一般运动的图景：平动+定点转动



基准点平动，位矢$\vec{r}_0$，速度$\vec{v}_0=\dot{\vec{r}}_0$

体系相对于基准点转动，瞬时角速度$\vec{\omega}$

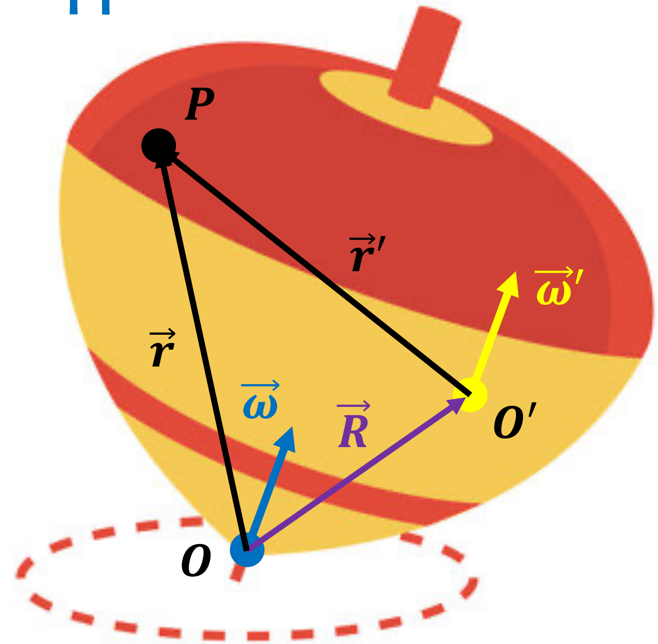
刚体上的任意一点P，相对基准点的位矢为$\vec{r}'$，相对于原点的位矢为$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}'$

速度为基准点平动与瞬时转动的叠加，$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}'$

刚体角速度的绝对性：在同一瞬间，不管取体系内哪一点作为基准点，得出的角速度都一样

证明：假定以O和为O'基准点时，角速度分别为$\vec{\omega}$和$\vec{\omega}'$

且两个点的相对位矢为$\overrightarrow{OO'}=\vec{R}$



则任一点P的速度可写为

$$\vec{v}_P=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{v}_{O'}+\vec{\omega}'\times\vec{r}'$$

O'点速度还可以O点为参考点写为

$$\vec{v}_{O'}=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{R}$$

代入$\vec{v}_P$的表达式，考虑到$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$，得

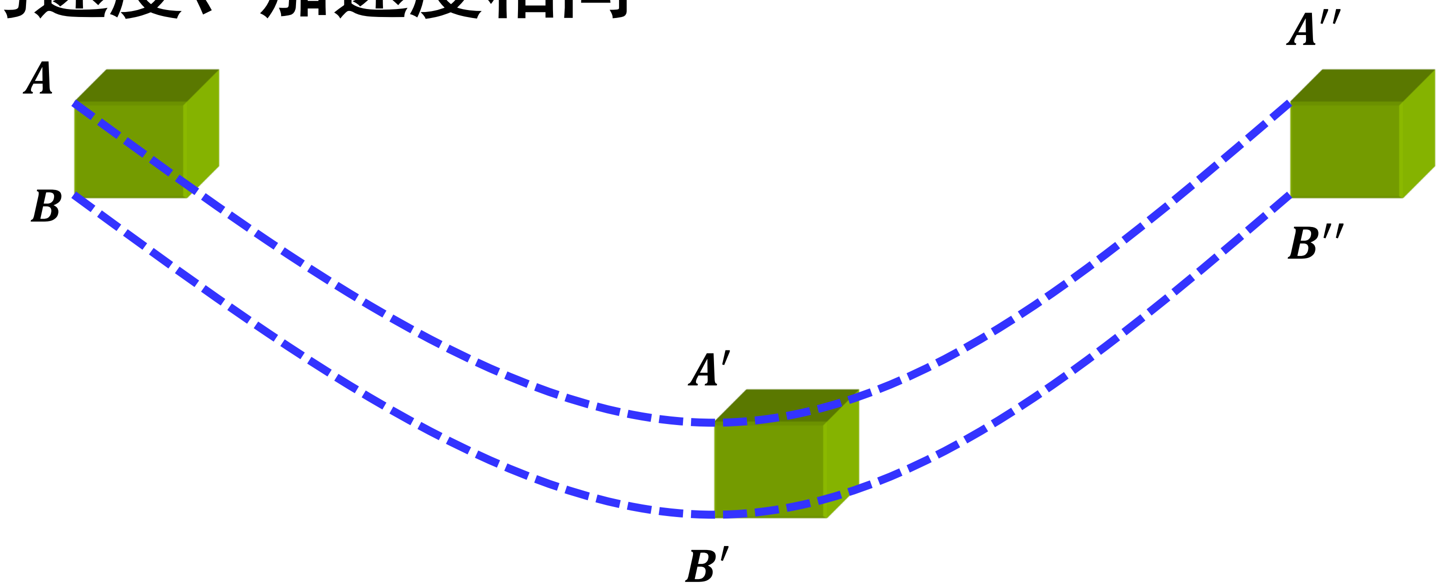
$$\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}')+\vec{\omega}'\times\vec{r}'$$

移项，给出$(\vec{\omega}-\vec{\omega}')\times\vec{r}'=\vec{0}$

$\vec{r}'$是任意的，故$\vec{\omega}=\vec{\omega}'$，即刚体角速度的绝对性

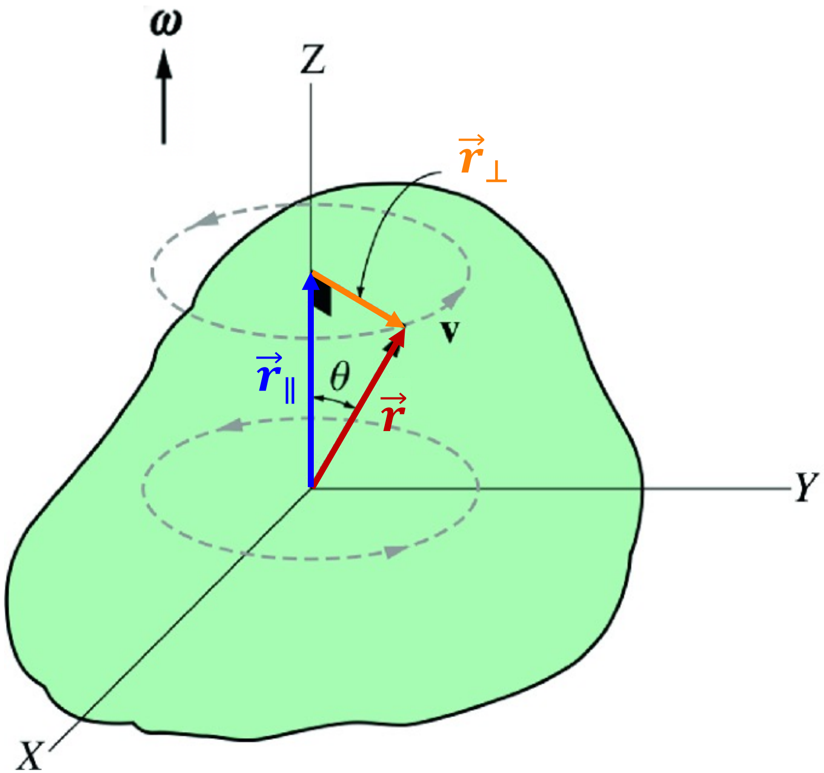
刚体运动的定量描述

平动：对应一般运动中取$\vec{\omega} = \vec{0}$的特殊情况，刚体上所有点的速度、加速度相同



- 各点的**轨迹相同**（但不一定是直线）
- 任一瞬间只要知道任意一点的位置，即可得知整个刚体的姿态，故自由度数为3
- 此时，刚体在运动描述上相当于一个质点，或一个平动参考系

定轴转动：对应一般运动中基准点**静止**并且**转轴不变**的情况（但角速度的**代数值**可以改变），自由度数为1



位矢在转轴方向和运动平面的分解

$$\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$$

其中

- $|\vec{r}_{\perp}| = r\sin\theta$
- $\left|\vec{r}_{\parallel}\right| = r\cos\theta$

有的参考书或题目会用不同的记号，一定要注意鉴别！

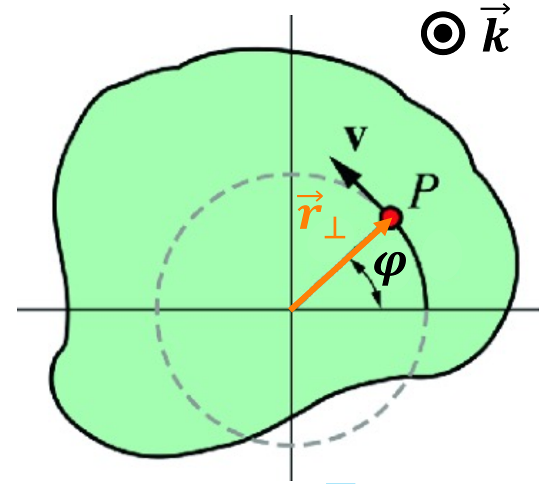
刚体内各点在做圆周运动，线速度与角速度的关系为

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{\perp}$$

各点的**角量**相同，**线量**一般不同

定轴转动的角量描述

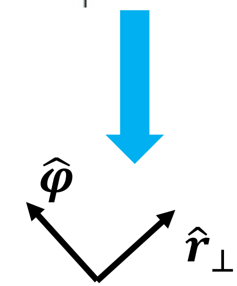
- 角坐标/角位置：刚体转过的角度φ
- 角速度：$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$，矢量
- 角加速度：$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}} = \beta\vec{k} = \ddot{\varphi}\vec{k}$



定轴转动的线量描述

- 速度$\vec{v} = v\hat{\varphi}$，速率$v = \omega r_\perp = \omega r \sin\theta$
- 加速度$\vec{a} = a_\tau\hat{\varphi} - a_n\hat{r}_\perp$，注意$\hat{r}_\perp = -\hat{n}$
- $a_\tau = \dot{v} = \beta r_\perp$，$a_n = v^2/r_\perp = \omega^2 r_\perp$

*可对比第一章第五节的PPT学习



P点处的方向矢量

一些进阶推导（了解即可）：

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\beta}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

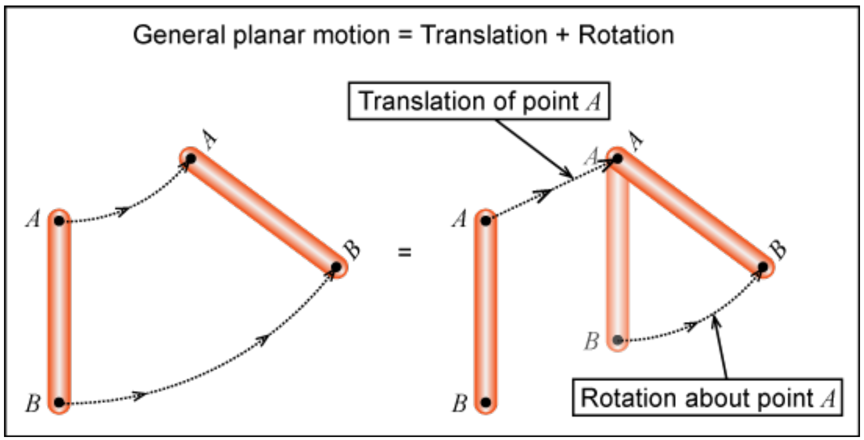
$$= \vec{\beta}\times\vec{r} + (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega} - \omega^2\vec{r} = \vec{\beta}\times\vec{r}_\perp - \omega^2\vec{r}_\perp$$

平面平行运动：对应一般运动中基准点**进行平面运动**且角速度**始终垂直于该平面**的情况

基准点（参考点）所运动的平面称为基准面

过参考点且垂直于基准面的直线称为基准轴，该轴一般也在运动

且轴上各质点运动状态完全相同



可分解为基准点的平面运动叠加上绕基准轴的定轴转动

自由度数为

$$2 + 1 = 3$$

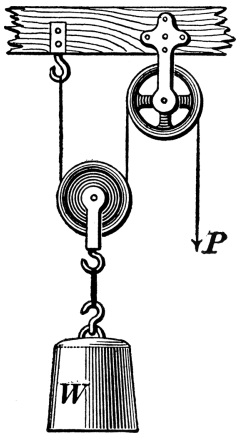
以基准点为原点建立平动参考系，则**在该系内**，刚体在定轴转动

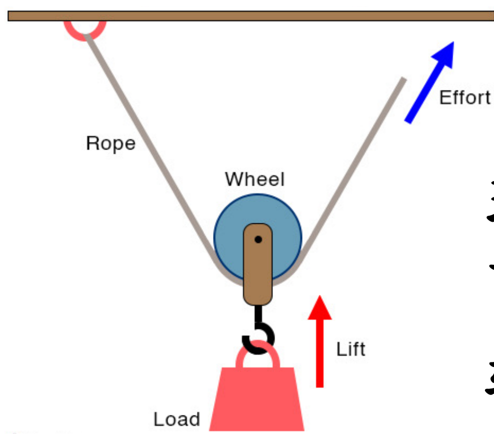
基准点可任意选取，常取为刚体**质心**，可获很多便利

平面平行运动是本章例题、习题最常涉及的运动

直行汽车的车轮，可分解为轮轴平动和绕轮轴的转动

转弯时不属于平面运动



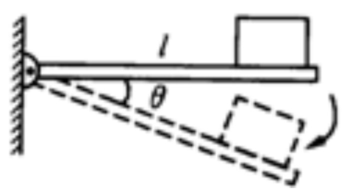


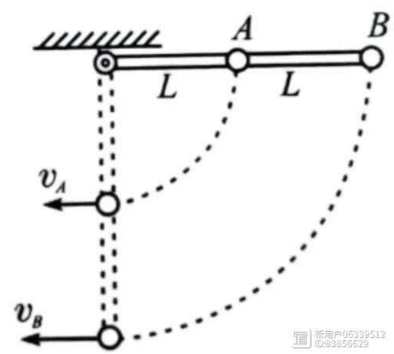
理想工作状态下的滑轮

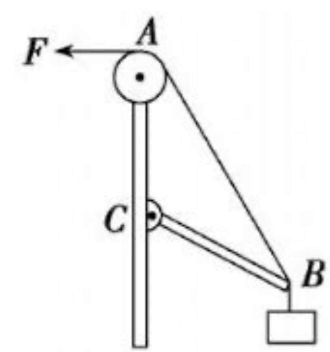
可存在摩擦，也可不存在摩擦

轮轴平动+绕轴转动

各种典型习题中的机械装置

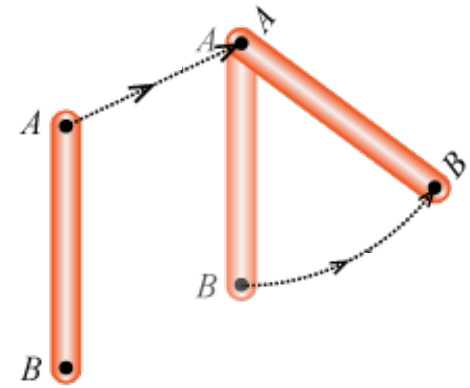






在**基准面**中分析平面平行运动中任一质点P的速度

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$$



任一瞬间总存在某个点P使上式为$\vec{0}$，即P在这一瞬时静止

这样的点P称为**瞬心**或转动瞬心

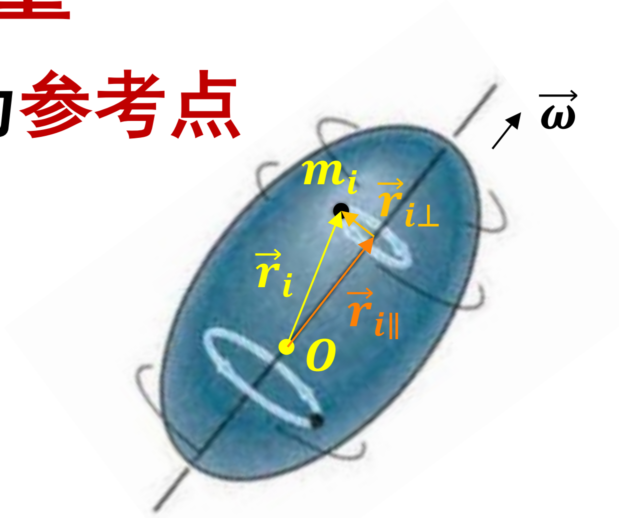
- 以瞬心为参考点，运动可分解为瞬心的运动+相对于瞬心的**无滑动**纯滚动

纯滚动过程，车轮与地面接触点为瞬心

- 瞬心一般随着时间变化，并不是体系内部某个固定的点，甚至可以在**刚体之外**

§ 7-2 定轴转动惯量

对定轴转动的刚体，取轴上固定点O为参考点



$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$$

根据位矢的分解$\vec{r}_i = \vec{r}_{i\perp} + \vec{r}_{i\parallel}$

$$\vec{L} = \boxed{\sum_i \vec{r}_{i\perp} \times (m_i \vec{v}_i)} + \sum_i \vec{r}_{i\parallel} \times (m_i \vec{v}_i)$$

$\vec{r}_{i\perp}$和$\vec{v}_i$垂直于转轴，且$\vec{r}_{i\perp} \perp \vec{v}_i$，而$\vec{r}_{i\parallel}$平行于转轴

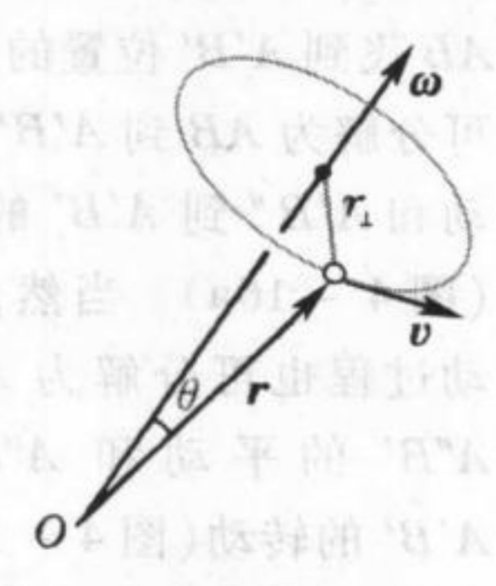
故$\vec{L}$分解式的第1项平行于转轴，第2项垂直于转轴

即刚体角动量$\vec{L}$与角速度$\vec{\omega}$一般不平行

我们一般更关心平行于转轴的分量，并称之为绕轴角动量$\vec{L}_{\parallel}$，其值与轴上O点的选取无关

根据定义，绕轴角动量为

$$\vec{L}_{\parallel}=\sum_i \vec{r}_{i\perp}\times(m_i\vec{v}_i)$$



考虑到$\vec{v}_i=\vec{\omega}\times\vec{r}_{i\perp}$，有

$$\vec{r}_{i\perp}\times\vec{v}_i=\vec{r}_{i\perp}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{i\perp})=r_{i\perp}^2\vec{\omega}$$

可得到

$$\vec{L}_{\parallel}=\left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2\right)\vec{\omega}=I\vec{\omega}$$

I称为刚体对该轴的**转动惯量**，SI量纲为$\mathrm{kg\cdot m^2}$

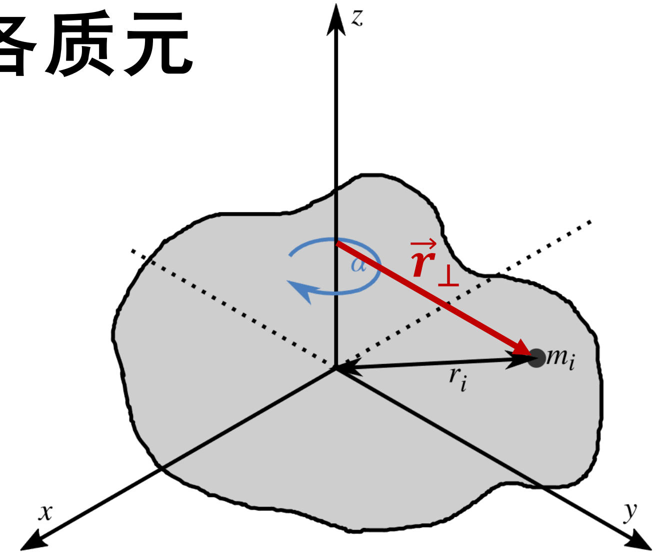
刚体绕固定轴转动的角动量，等于刚体对该轴的转动惯量与角速度的数乘

类比：动量=质量×速度，角动量=转动惯量×角速度

注意：绕轴角动量只是总角动量在转轴方向的**分量**

刚体对某轴的转动惯量等于刚体各质元质量与其到轴距离的平方乘积之和

$$I=\sum_i m_i r_{i\perp}^2$$



转轴为z轴时$I=\sum_i m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)$

若刚体质量连续分布

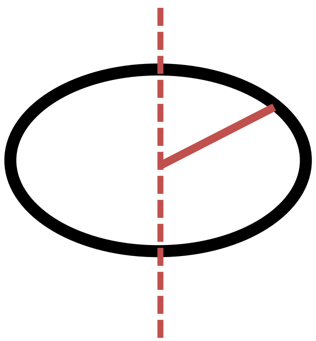
$$I=\int r_\perp^2 \mathrm{d}m$$

$$\begin{cases} I=\int r_\perp^2 \rho \mathrm{d}V & \text{三维（体密度）} \\ I=\int r_\perp^2 \sigma \mathrm{d}S & \text{二维（面密度）} \\ I=\int r_\perp^2 \lambda \mathrm{d}l & \text{一维（线密度）} \end{cases}$$

I的三要素：

- 质量
- 转轴位置
- 质量对轴的分布

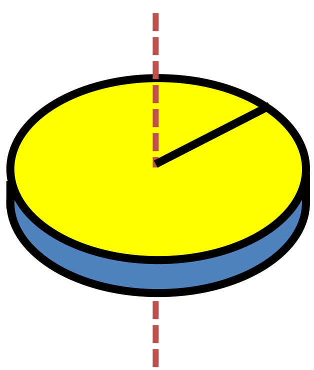
例：一些简单情形下的转动惯量计算



质量为m、半径为R的圆环，转轴过圆心垂直于环所在平面

$$I = mR^2$$

注意此结果不依赖于圆环均匀与否



质量为m、半径为R的均质薄圆盘，转轴过圆心垂直于盘

用平面极坐标计算，面密度为σ，面积元为一圆环，$\mathrm{d}S = 2\pi r \mathrm{d}r$

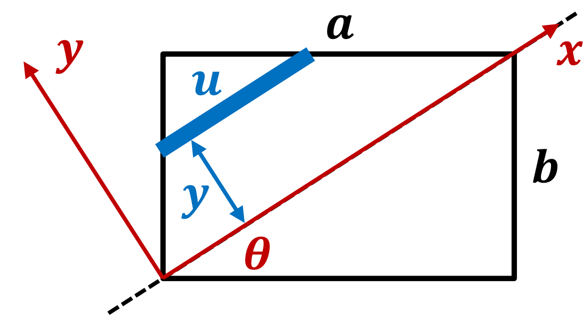
$$I = \int r^2 \sigma \mathrm{d}S = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\sigma R^4$$

考虑到$m = \sigma\pi R^2$，得$I = mR^2/2$

注意此结果只适用于均质圆盘，因为σ被提出积分外

例：求均质长方形薄片m绕其对角线的转动惯量。

解：建立平面直角坐标系



选取y到$y+\mathrm{d}y$间的质元，其质量为

$\mathrm{d}m=\sigma u\mathrm{d}y$，其中$\sigma$为面密度

几何关系：

$$\frac{u}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a\sin\theta-y}{a\sin\theta},\qquad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

据此得转动惯量

$$I=2\int_0^{a\sin\theta}y^2\mathrm{d}m=2\int_0^{a\sin\theta}y^2\sigma\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{a\sin\theta-y}{a\sin\theta}\mathrm{d}y$$

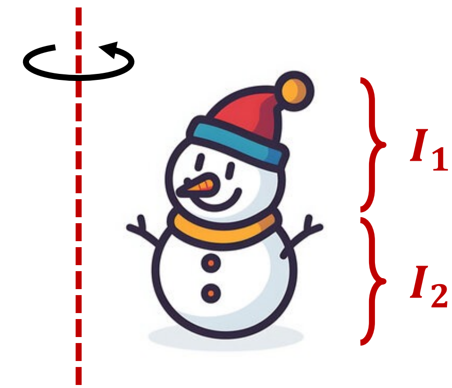
最终给出（利用$m=\sigma ab$）

$$I=\frac{\sigma}{6}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}=\frac{m}{6}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

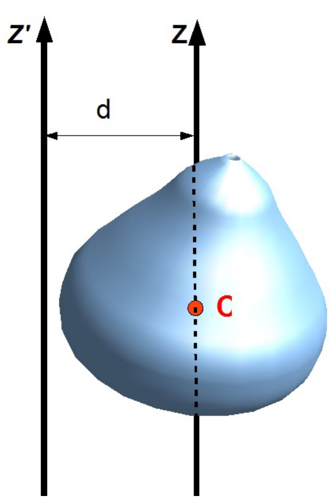
刚体各部分对同一轴的转动惯量**可叠加**

$I=\sum_i I_i$，其中I_i为第i部分的转动惯量

若刚体是若干易于计算的形状组合而成，则可以分别计算I_i并求和



平行轴定理：刚体对某轴的转动惯量，等于刚体对**过质心且平行于该轴**的转轴的转动惯量加上刚体质量与两轴距离平方的乘积



如图，z轴过刚体的质心C，且刚体对z轴的转动惯量为I_C

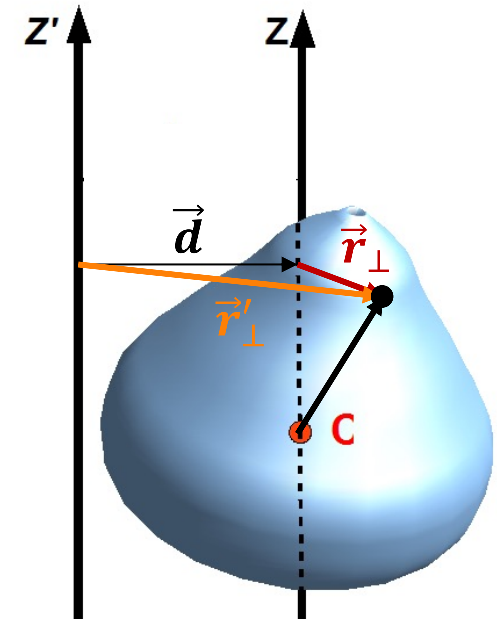
z'轴平行于z轴，且两轴距离为d

则刚体对z'轴转动惯量为

$$I=I_C+md^2$$

其中m为刚体质量

平行轴定理的证明



由矢量关系$\vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp + \vec{d}$得

$$r'^2_\perp = r^2_\perp + d^2 + 2\vec{r}_\perp \cdot \vec{d}$$

故绕z'轴的转动惯量可写为三项之和，

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$I_1 = \sum_i m_i r^2_{i\perp} = I_C$为绕$z$轴的转动惯量

而$I_2 = \sum_i m_i d^2 = (\sum_i m_i) d^2 = md^2$

最后一项$I_3 = 2(\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}) \cdot \vec{d}$

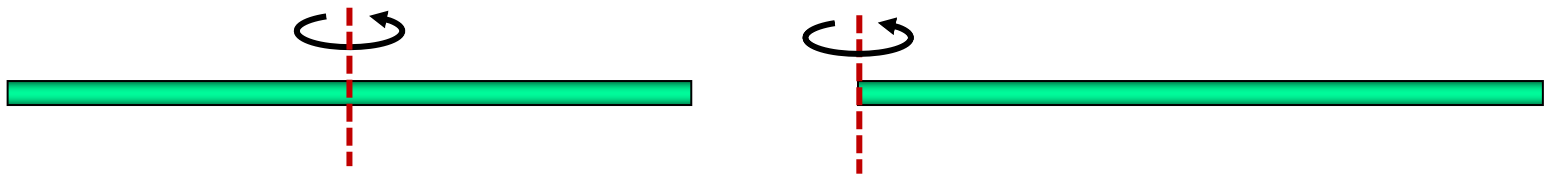
$\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp}$是质心坐标$\vec{r}_C$在$Oxy$平面上的投影，因为质心

$$\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i \Big/ \sum_i m_i$$

而z轴又过质心，故$\sum_i m_i \vec{r}_{i\perp} = \vec{0}$，即$I_3 = 0$

最终得$I = I_C + md^2$

例：求长度为L、质量为m的均质细杆对以下两轴的转动惯量，并验证平行轴定理。



转轴过中心　　　　转轴过一端

解：线密度为$\lambda = m/L$。对左图的情形，转轴过质心

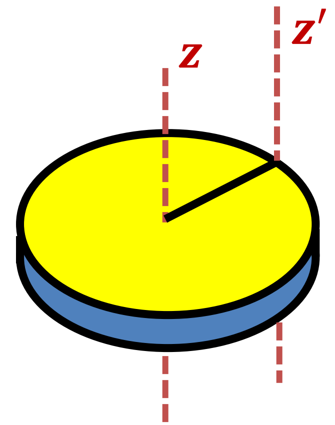
$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^2 \mathrm{d}x = \frac{mL^2}{12}$$

对右图的情形，则有

$$I = \int_0^L \lambda x^2 \mathrm{d}x = \frac{mL^2}{3}$$

可验证平行轴定理，即$I = I_C + m(L/2)^2$

例：求半径为R、质量为m的均质圆盘对过其边缘且垂直其平面的z'轴的转动惯量。



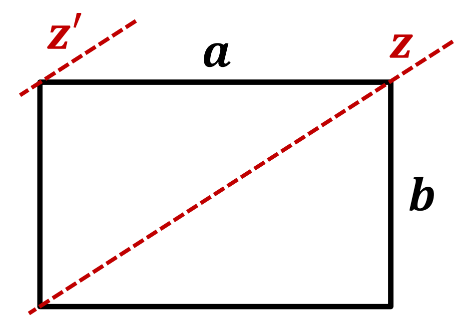
解：其绕过质心的z轴转动惯量

$$I_C = mR^2/2$$

且z轴和z'轴距离为R，故

$$I = I_C + mR^2 = 3mR^2/2$$

例：求质量为m的均质长方形薄片绕过其一点且平行于对角线的轴的转动惯量。



解：其绕过质心的z轴转动惯量

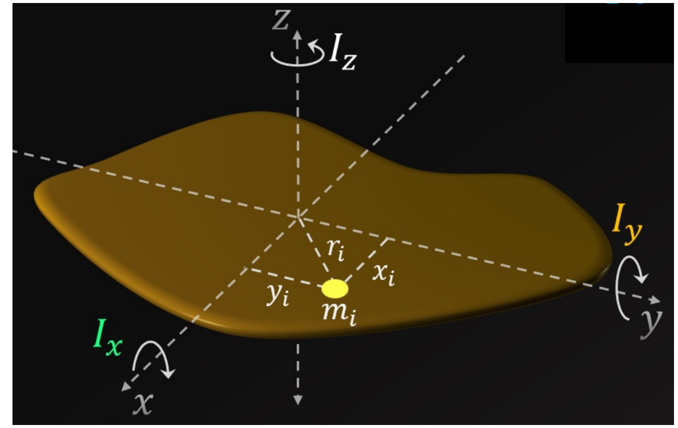
$$I_C = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

且z轴和z'轴距离为$D = ab/\sqrt{a^2+b^2}$

$$I = I_C + mD^2 = \frac{7m}{6}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

薄板的正交轴定理（或称垂直轴定理）：

若已知板对x轴转动惯量为



$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

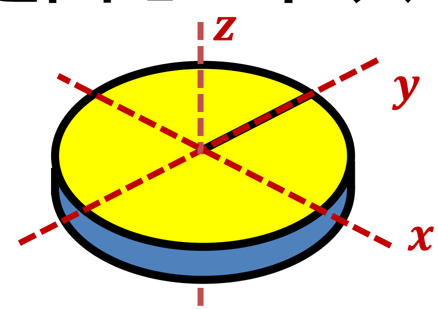
对y轴，类似地$I_y = \sum_i m_i x_i^2$

则板对z轴的转动惯量为

$$I_z = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) = I_x + I_y$$

注意此定理只对**薄板**成立，对三维刚体**不成立**

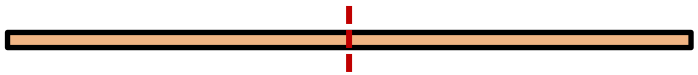
例：求半径为R、质量为m的均质圆盘对过圆心且在其平面内的轴的转动惯量。



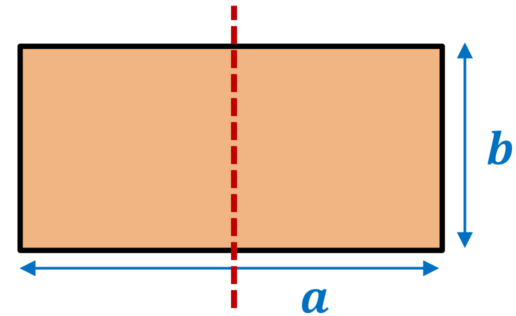
解：正交轴定理$I_z = mR^2/2 = I_x + I_y$

由对称性知$I_x = I_y = mR^2/4$

灵活运动转动惯量的可加性以及两个定理，可以求出形状非常复杂的刚体的转动惯量

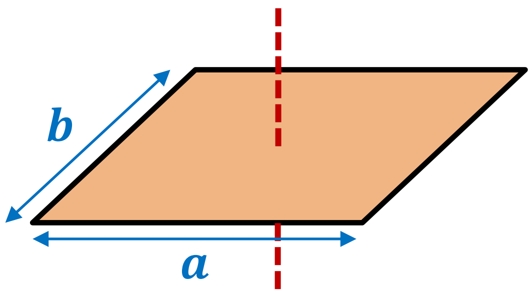


长度a、质量m，转轴过中心$I = ma^2/12$



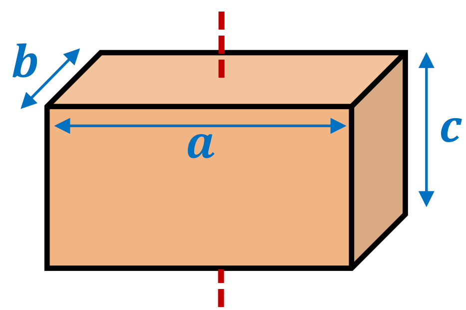
转轴在其平面内，过中心且垂直于一边

$$I = ma^2/12$$



转轴过中心且垂直于平面

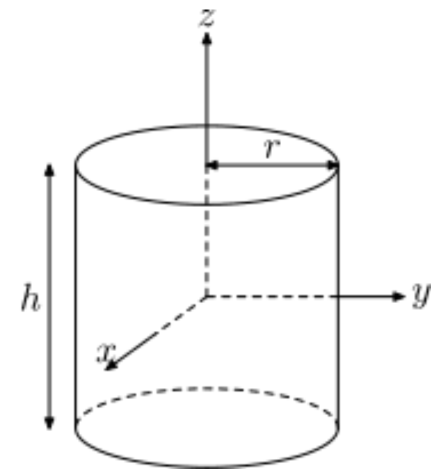
$$I = m\left(a^2 + b^2\right)/12$$



转轴过中心且垂直于一面$I = m\left(a^2 + b^2\right)/12$

类似地，均质圆柱体绕z轴的转动惯量可视为一系列圆盘薄片的叠加，得

$$I=\frac{R^2}{2}\int \mathrm{d}m=\frac{mR^2}{2}$$



据此及平行轴定理，可计算圆柱与长方体复杂组合的转动惯量，包括挖空

如何求得均匀圆柱绕x轴的转动惯量？

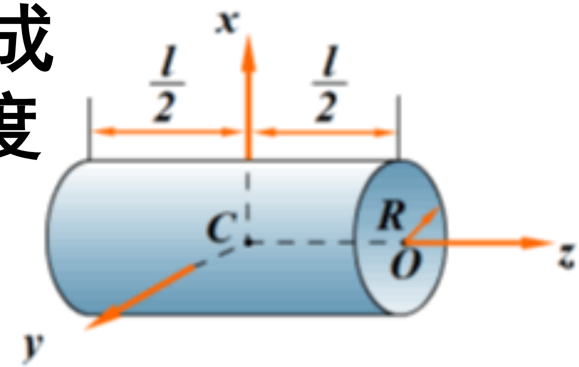
一种思路：应用正交轴定理，

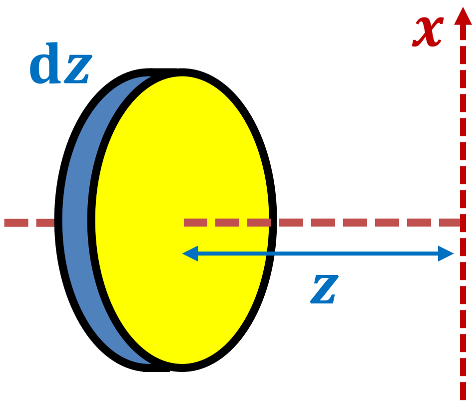
$$I_z=I_x+I_y$$

由于圆柱绕z轴有旋转对称性，$I_x=I_y$，得$I_x=I_z/2=mR^2/4$

该解法是错误的，原因在于圆柱不是薄板，不能应用正交轴定理！

将右图圆柱用平行于Oxy平面的刀切成质量$\mathrm{d}m=\rho\pi R^2\mathrm{d}z$的薄片，$\rho$为其密度





则该片贡献

$$\mathrm{d}I=\frac{R^2}{4}\mathrm{d}m+z^2\mathrm{d}m$$

圆盘对过质心的轴　平行轴定理

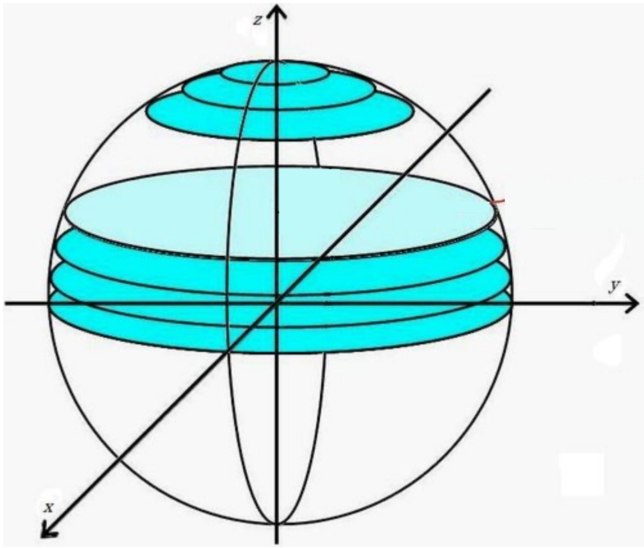
因而总的转动惯量

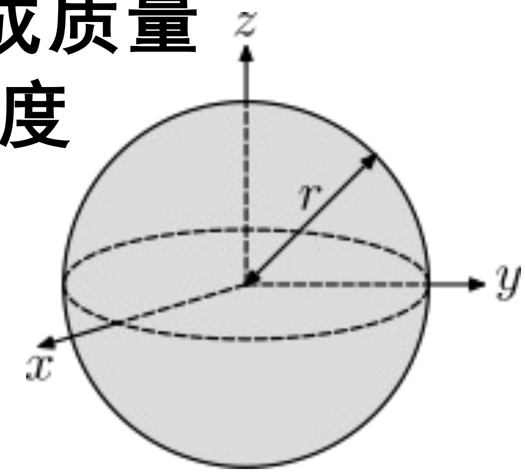
$$I=\int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{R^2}{4}+z^2\right)\rho\pi R^2\mathrm{d}z=\frac{m}{4}\left(R^2+\frac{l^2}{3}\right)$$

其中$m=\rho\pi R^2 l$为总质量

易验证，该表达式在$R\to 0$时回到细杆结果，在$l\to 0$时回到圆盘结果

将右图球体用平行于Oxy平面的刀切成质量$\mathrm{d}m = \rho\pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$的薄片，$\rho$为其密度





则该片（圆盘）贡献转动惯量

$$\mathrm{d}I = \frac{R^2 - z^2}{2}\mathrm{d}m$$

总的转动惯量由$\mathrm{d}I$积分得到

$$I = \int_{-R}^{R} \frac{R^2 - z^2}{2}\rho\pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{2}{5}mR^2$$

其中$m = 4\pi R^3\rho/3$为总质量

本例也可通过直接球坐标三重积分得到，详见数学课

本节课小结

刚体的定义及其运动描述

- 6个自由度，拆解为3平动和3转动，基准点和瞬时转轴（必须理解欧拉旋转定理）
- 为一般运动加上不同的限定条件，可得到各种特殊运动，尤其要熟悉平面平行运动

定轴转动的描述，角量和线量的联系

- 角动量与角速度一般并不平行
- 通常关心的绕轴角动量是总角动量沿轴向的分量

转动惯量的定义和计算

- 平行轴定理对所有刚体适用
- 正交轴（垂直轴）定理只对薄板适用

第七章作业

本次课暂不布置作业，可先通过下次课的预习PPT熟悉第七章的习题类型

下周二（4月1日）课将讲解大量例题并布置作业，并讲完第七章