第2章 向量空间

2.1 线性方程组的几何意义

2.2 线性相关与线性无关

2.3 基

2.4 坐标变换

2.5 向量组的秩

2.6 子空间

2.7 子空间的交与和

2.8 更多的例子*

2.1 线性方程组的几何意义

线性方程组的唯一解问题

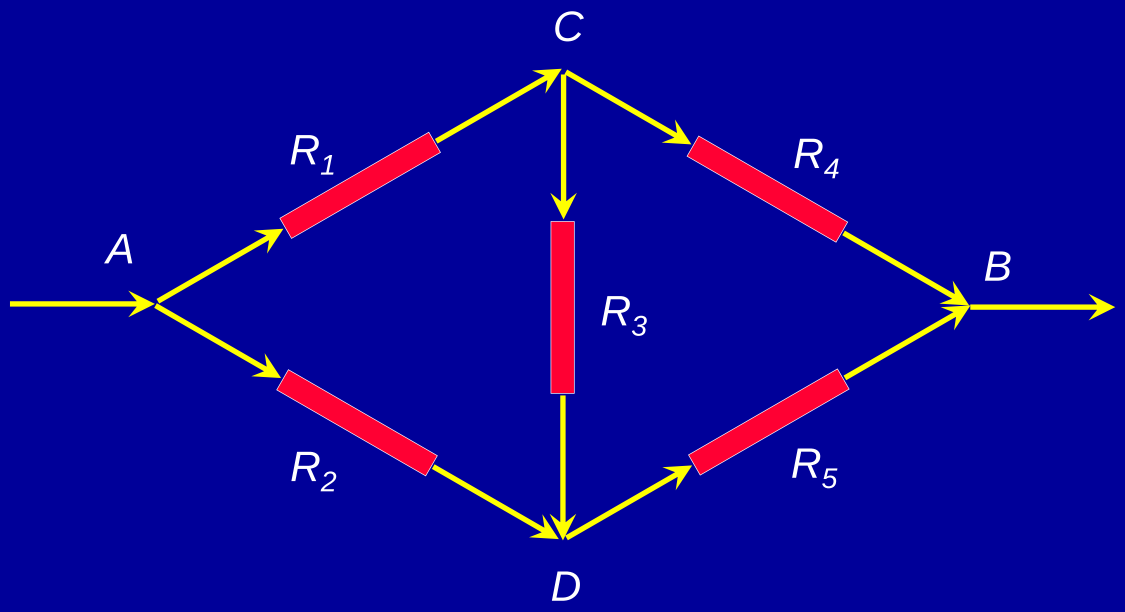
例1 在平面上建立直角坐标系，(x_1,y_1), (x_2,y_2),…, (x_n,y_n)是任意n个横坐标不同的点。是否存在唯一的实系数多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$, 它的图形曲线经过这$n$个已知点？

分析

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_1^m = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_m x_2^m = y_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m = y_n \end{cases}$$

变量个数$m+1$，方程个数为n。何时有唯一解，特别当$m+1=n$时，上述方程是否有唯一解。

例2 由5个电阻组成的电路。设在两点A,B之间加电压V。求在五个电阻上流过的电流。



分析 在*C*,*D*两点流进与流出的电流的代数和为0得到两个方程

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

$$I_2 + I_3 - I_5 = 0$$

两条回路*ACDA*,*CBDC*总电势差为0得到

$$I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 = 0$$

$$I_3R_3 - I_4R_4 + I_5R_5 = 0$$

*A*到*B*的总电压为*V*,得到方程

$$I_1R_1 + I_4R_4 = V$$

5个方程组成的方程组是有一定有唯一解?

二元一次方程组有唯一解的条件

例3 研究实系数二元一次方程组有唯一解的充分必要条件

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

解：方程组可写成向量形式

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (2.1.2)$$

也就是 $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (2.1.3)

将 $\overrightarrow{OC}$ 表示成 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的**线性组合**，求系数 *x, y* 。

当 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线，

即 $a_1b_2 \neq a_2b_1$ 时，有**唯一解**.

当 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 共线时

如果有解，一定有**无穷多个解**。

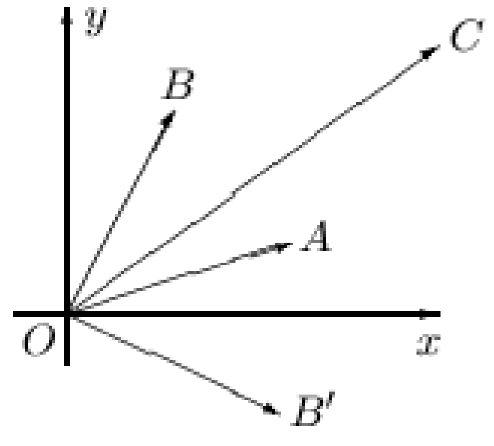


图 1

方程（2.1.1)有唯一解的充分必要条件是：

$$a_1b_2 \neq a_2b_1$$

三元一次方程组有唯一解的条件

例4 研究实系数三元一次方程组有唯一解的充分必要条件

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

解：可写成 $$x\alpha+y\beta+z\gamma=\delta \quad (2.1.6)$$

其中 $$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

都代表建立了直角坐标系的三维空间中的向量.

三元一次方程组(2. 1. 5)有唯一解的充要条件：以它的系数矩阵的3列为坐标的几何向量

$$\overrightarrow{OA}=\alpha,\ \overrightarrow{OB}=\beta,\ \overrightarrow{OC}=\gamma$$

不共面 $\longleftrightarrow$ 方程组 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=0$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

只有唯一解(0, 0, 0)，而没有非零解。

例5 在平面上建立直角坐标系，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 是任意3个横坐标不同的点。是否存在唯一的不超过二次的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，它的图像曲线经过这3个已知点？

解：

$$\begin{cases} a_0+x_1a_1+x_1^2a_2=y_1 \\ a_0+x_2a_1+x_2^2a_2=y_2 \\ a_0+x_3a_1+x_3^2a_2=y_3 \end{cases}$$ 有唯一解

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0+x_1a_1+x_1^2a_2=0 \\ a_0+x_2a_1+x_2^2a_2=0 \\ a_0+x_3a_1+x_3^2a_2=0 \end{cases}$$ 只有唯0解

$$M=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{pmatrix}\xrightarrow{-(1)+(2),-(1)+(3)}\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2\\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & 1 & x_2+x_1\\ 0 & 1 & x_3+x_1\end{pmatrix}\longrightarrow T=\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2\\ 0 & 1 & x_2+x_1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

只有唯一的零解，因此满足要求的多项式一定存在而且唯一。

2.2 线性相关与线性无关

任意属于域F上的n元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

有唯一解的条件。

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = \beta$$

其中

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \forall 1 \le j \le n; \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

定义 将任意数域F上的 n维数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成向量，将这些数组的全体组成的集合 F^n 看成向量空间，称为n维数组空间。

n维数组空间中的向量的加法

设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$

是两个n维向量,将它们按分量相加得到的向量

$$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

称为这两个向量的和, 记作$\alpha+\beta$.

n维数组空间中的向量与数的乘法

F^n中任一向量$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$可以与F中任意常数c相乘得$F^n$中向量$ca=(ca_1, ca_2, \cdots, ca_n)$。

F^n中定义的**加法与数乘**两种运算满足如下的运算律：

(A1) 加法交换律：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

(A2) 加法结合律：

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\alpha)$$

(A3) 零向量：

$$0+\alpha=\alpha+0=\alpha \quad 0\text{称为零向量}$$

(A4) 负向量：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha=0 \quad \beta\text{称为}\alpha\text{的负向量}$$

(D1) 数乘对向量加法的分配律：

$$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$$

(D2) 数乘对纯量加法的分配律：

$$(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$$

(M1) 数乘结合律：

$$\lambda(\mu\alpha)=\lambda\mu(\alpha)$$

(M2) 1乘向量：

$$1\alpha=\alpha$$

以上8条基本运算规律可以推出我们熟悉的其他一些运算性质。

n维数组空间中向量的线性组合

将一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 分别乘以数 $\lambda_1,\cdots\lambda_m$ 再相加,得到的向量 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m$ 称为向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 的**线性组合**，也称为向量组S={ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ }的线性组合。

由S的若干个线性组合 $b_i=c_{i1}a_1+\cdots+c_{im}a_m$ 组成的向量组T也称为**S的线性组合**.

F^n的n维向量可以写成一行形式，称为n维行向量，其全体组成空间$F^{1\times n}$，称为F上n维行向量空间。

F^n的n维向量可以写成一列形式，称为n维列向量，其全体组成空间$F^{n\times 1}$，称为F上n维列向量空间。

矩阵的加法

$F^{m\times n}$ 中矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 相加，得到的和是 $A+B$ 矩阵，它的第 (i,j) 元等于 A,B 的第 (i,j) 元之和 $a_{ij}+b_{ij}$，即：

$$(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

矩阵与数的乘法 (矩阵的数乘)

对任意 $A\in F^{m\times n},\lambda\in F$, 相乘得

$$\lambda A=\lambda(a_{ij})_{m\times n}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

•行空间与列空间分别是矩阵空间的特殊情形.

•行空间与列空间实质上都是相同的，由于加法和数乘两种运算导出的定义和性质对它们同样成立.

转置

$$\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n) \longrightarrow \alpha^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

定义 将$m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到$n \times m$ 矩阵，称为A 的**转置矩阵**，记作A^T. 即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T的第(i,j) 元等于A 的第(j,i)元.

线性相关与线性无关

定义2.2.1 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$是数域F上的n维向量，如果存在不全为0的数$x_1,\ldots,x_m \in F$，使

$$x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m=0$$

就称向量组$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性相关.

反过来，如果对于$x_1,\ldots,x_m \in F$，$x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m=0$ 当且仅当$x_1=\ldots=x_m=0$时成立，就称向量组$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性无关.

定理2.2.1 设$m\geq 2$,则:

向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow$ 其中某个向量α_i是其余向量的线性组合.

证明 先设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关，即存在不全为0的$\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in F$满足条件

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0 \qquad (2.1.4)$$

设$\lambda_i\neq 0$。将等式（2.1.4）左边除了$\lambda_i\alpha_i$之外的其余各项移到右边，再将所得的等式两边同除以非零数λ_i，得

$$\alpha_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\alpha_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i}\alpha_m \quad (2.1.5)$$

这就说明α_i是$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$中其余向量α_j（$1\le j\le m, j\ne i$）的线性组合.

再设某个α_i是$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$中其余向量α_j（$1\le j\le m, j\ne i$）的线性组合，即存在一组数t_j（$1\le j\le m, j\ne i$）,使

$$\alpha_i = t_1\alpha_1 + t_{i-1}\alpha_{i-1} + t_{i+1}\alpha_{i+1} + \ldots + t_m\alpha_m \quad (2.1.6)$$

将等式右边的各项全部移到左边，得

$$-t_1\alpha_1-\dots-t_{i-1}\alpha_{i-1}+1\alpha_i-t_{i+1}\alpha_{i+1}-\dots-t_m\alpha_m=0 \quad (2.1.7)$$

等式左边是$\alpha_1,\dots,\alpha_m$的线性组合，其中α_i的系数$1\neq0$，可见存在不全为0的$\lambda_1,\dots,\lambda_m$使$\lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_m\alpha_m=0$. □

注意：一个向量组成的向量组｛α_1｝线性相关的充分必要条件是$\alpha_1=0$.

定理2.2.1' 向量组{ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ }线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中某个α_i是它前面的向量α_j（$j<i$）的线性组合.

证明 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关，则存在不全为0的$\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in F$使

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0$$

设$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$中最后一个非零的数是$\lambda_i$，也就是：$\lambda_i\neq 0$,且$\lambda_j=0$对所有的$i<j\leq m$成立.则

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_i\alpha_i=0$$

当$i\geq 2$时，

$$\alpha_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\alpha_{i-1}$$

α_i是它前面的向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$的线性组合.

当$i=1$时，$\lambda_1\neq 0$，$\lambda_1\alpha_1=0$，这迫使$\alpha_1=0$.此时α_1“前面的向量”组成的集合是空集合，我们规定零向量是空集合的线性组合，因此零向量α_1仍然是它前面的向量的线性组合.

反过来，如果有某一个向量α_i是它前面的向量的线性组合，则由定理2.1.1即可知$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关.

推论2.2.1 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$是由非零向量组成的向量组，其中每个α_i（$2\le i\le m$）都不是它前面的向量α_j（$1\le j<i$）的线性组合，则$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性无关. □

含有零向量的向量组都线性相关.设向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$中的向量$\alpha_i=0$，则

$$0\alpha_1+\ldots+0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\ldots+0\alpha_m=0$$

且其中α_i的系数1不为0.

可见$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关.

例1 一个向量组成的向量组S={a}何时线性相关，何时线性无关？

引理2.2.1 如果向量组{ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ }包含一个子集 $\{\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_k}\}$ 线性相关，那么整个向量组{ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ }线性相关.如果向量组 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性无关，那么它的每个子集都线性无关.

证明 $\{\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_k}\}$ 线性相关

$\Rightarrow$ 存在不全为0的$\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in F$使

$$\lambda_1\alpha_{i_1}+\cdots+\lambda_k\alpha_{i_k}=0$$

设$\alpha_{i_{k+1}},\cdots,\alpha_{i_n}$ 是{ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ }中去掉$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_k}$之后剩下的那些向量，则

$$\lambda_1\alpha_{i_1}+\cdots+\lambda_k\alpha_{i_k}+0\alpha_{i_{k+1}}+\cdots+0\alpha_{i_m}=0$$

其中各向量的系数$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$,0,…,0不全为0，这说明$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_k},\alpha_{i_{k+1}},\cdots,\alpha_{i_m}$ 线性相关，也就是$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性相关.

由于{ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ }的任何一个子集线性相关都将导致{ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ }线性相关，要使{ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ }线性无关，必须它的所有子集线性无关.

利用解线性方程组判定线性相关

定义向量组$u_1,\ldots,u_m$的线性相关或线性无关所用的等式

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \tag{2.2.3}$$

可以看成以$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$为未知数的一个方程.

方程**至少有一组解** $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)=(0,\ldots,0)$

因此, 线性相关和线性无关的定义可这样来理解:

(1)$u_1,\ldots,u_m$线性相关等价于方程 (2.2.3)有非零解

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0,\ldots,0)$

(2)$u_1,\ldots,u_m$线性无关等价于方程 (2.2.3)只有一组 解$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)=(0,\ldots,0)$

设$u_1,\ldots,u_m$都是n维数组向量, 不妨将其中每个向量u_j $(1\leq j\leq m)$写成列向量的形式

$$u_j=(a_{1j},\ldots,a_{nj})^T$$

则 (2.2.3) 成为

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

进而写成齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1j}\lambda_j + \cdots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nj}\lambda_j + \cdots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

这个齐次线性方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

这个矩阵依次以$u_1,\ldots,u_m$为各列组成, 对矩阵A进行初等行变换消元可以得出方程组 (2.2.4) 的解.

例 2 在平面直角坐标系判断如下4点A,B,C,D是否共面?

(1) A= (1,2,3); B = (2,3,4); C= (3,3,8); D=(2,-1,16).

(2) A= (1,2,3); B = (2,3,4); C= (3,3,8); D=(2,-1,7).

解 转化为如下问题:

如下向量 α , β, γ 是否共面?

(1) α= (1,1,1); β = (2,1,5); γ= (1,-3,13).

(2) α= (1,1,1); β = (2,1,5); γ= (1,-3,4).

(1) 用待定系数法, 看 γ是否可写成 α, β的**线性组合**, 也就是看是否存在实数λ_1, λ_2 使

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta = \gamma$$

等式 (1.1) 即

$$\lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(2,1,5)=(1,-3,13)$$

也即

$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=1 & (1) \\ \lambda_1+\lambda_2=-3 & (2) \\ \lambda_1+5\lambda_2=13 & (3) \end{cases}$$

这是以λ_1,λ_2为未知数的方程组. 解之得

$$\begin{cases} \lambda_1=-7 \\ \lambda_2=4 \end{cases}$$

经检验 -7(1,1,1)+4(2,1,5)=(1,-3,13) 确实成立.

可见 α， β， γ共面.

(2)考虑满足条件

$$\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \gamma = 0$$

的所有的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 即 看作以λ_1, λ_2,
λ_3 为未知数的方程组来求解.

不难知道，$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(0,0,0)$是如下方程组的唯一组解.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

例3 当b_1,b_2,b_3取什么实数值时，如下方程有唯一解：

$$(1)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+13z=b_3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+4z=b_3 \end{cases}$$

例4(引理2.2.2)　设F^n中的向量$u_1,\dots,u_m$线性无关。如果在每个$u_j=(a_{1j},\dots,a_{nj})(1\le j\le m)$上再任意添加一个分量成为$F^{n+1}$中的一个向量$v_j=(a_{1j},\dots,a_{nj},a_{n+1,j})$,那么所得到的向量组$v_1,\dots,v_m$线性无关.

证明　已经知道$u_1,\dots,u_m$线性无关，即：F中满足条件

$$\lambda_1u_1+\dots+\lambda_mu_m=0 \qquad (2.1.12)$$

的数$\lambda_1,\dots,\lambda_m$只能是$\lambda_1=\dots=\lambda_m=0.$

而（2.1.12）即方程组

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases} \qquad (2.1.13)$$

因此，方程组（2.1.13）只有唯一解 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=(0,\ldots,0)$.

设F中m个数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$满足条件

$$\lambda_1 v_1+\ldots\lambda_m v_m=0 \qquad (2.1.14)$$

即
$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1+\cdots+a_{1m}\lambda_m=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1+\cdots+a_{nm}\lambda_m=0 \\ a_{n+1,1}\lambda_1+\cdots+a_{n+1,m}\lambda_m=0 \end{cases} \qquad (2.1.15)$$

方程组（2.1.15）的前*n*个方程就是方程组（2.1.13）的全部方程，因此（2.1.15）的解一定是（2.1.13）的解.已经知道方程组（2.1.13）只有唯一解$(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=(0,\ldots,0)$，因此方程组（2.1.15）除了零解之外没有别的解.这说明$v_1,\ldots,v_m$线性无关.

例5 已知数域F上的向量组u_1,u_2,u_3线性无关。试判断u_1+u_2,u_2+u_3,u_3+u_1是线性相关还是线性无关？

解 设F中的数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足条件

$$\lambda_1(u_1+u_2)+\lambda_2(u_2+u_3)+\lambda_3(u_3+u_1)=0 \quad (2.1.1)$$

即

$$(\lambda_1+\lambda_3)u_1+(\lambda_1+\lambda_2)u_2+(\lambda_2+\lambda_3)u_3=0 \quad (2.1.2)$$

由于u_1,u_2,u_3线性无关，（2.1.2）成立仅当

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

（2.1.3）是以$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为未知数的方程组，解之得$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$.

这说明u_1+u_2,u_2+u_3,u_3+u_1线性无关.

2.3 基

维数

例1 F^n中最多有多少线性无关的向量?

定理 设$u_1,\ldots,u_m$是n维向量空间F^n中的m个向量.如果$m>n$，则$u_1,\ldots,u_m$线性相关.

证明 考虑关于F中m个未知数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$的方程

$$\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_m u_m=0 \qquad (2.1.18)$$

对每个$1\le j\le m$，记 $u_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

则（2.1.18）成为线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1+\cdots+a_{1m}\lambda_m=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1+\cdots+a_{nm}\lambda_m=0 \end{cases} \qquad (2.1.19)$$

此方程组有m个未知数，n个方程，由$m>n$知此方程组有非零解$(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\neq(0,\ldots,0)$

可见$u_1,\ldots,u_m$线性相关.

问题:举例说明在F^n中存在n个线性无关的向量.

解 对每个$1\le i\le n$，记

$$e_i=(0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}i\text{个分量}}}{1},0,\ldots,0)$$

表示第i个分量为1、其余分量为0的数组向量.

我们证明：n个向量$e_1,e_2,\ldots,e_n$线性无关.

为此，只需证明：

$$\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n=0 \Longrightarrow (\lambda_1,\ldots\lambda_n)=(0,\ldots,0)$$

而$\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n=0$ 即

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\\vdots\\\lambda_n=0\end{cases}$$

如所欲证.

结论：n维数组空间F^n中线性无关的向量最多有n个. 因此F^n称为**n维空间**。 □

基的定义

定义2.3.1(基与坐标)

如果F^n中存在一组向量$M=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$，使$F^n$中每个向量$\alpha$都能写成$\alpha_1,\dots,\alpha_m$在$F$上的线性组合$\alpha=x_1\alpha_1+\dots+x_m\alpha_m$，

并且其中的系数$x_1,\dots,x_m$由α唯一决定，则M称为F^n的一组**基**. α的线性组合表达式中的系数组成的有序数组$(x_1,\dots,x_m)$称为α在基M下的**坐标**. □

一个的例子是: E={$e_1,\ldots,e_n$} 是例1中所定义的 F^n 中最简单然而重要得基,则 F^n 中任意一个向量 $b=(b_1,\ldots,b_n)$ 在这组基下的坐标就是 $(b_1,\ldots,b_n)$ 本身。这组基{$e_1,\ldots,e_n$}称为F^n的**自然基**,或**标准基**.

$F^{m\times n}$ 在**加法和数乘**运算下满足线性空间的8条运算律，它为**线性空间**.

例1. 求数域 F 上线性空间 $F^{m\times n}$ 的维数并求一组基.

解: 记 $E_{ij}\in F^{m\times n}$ 表示第 (i,j) 个元素为1，其余元为0的矩阵，这里 $1\le i\le m, 1\le j\le n.$

对任意一组 $\lambda_{ij}\in F$,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij}=(\lambda_{ij})_{m\times n}=0\Leftrightarrow\lambda_{ij}=0,\forall 1\le i\le m,1\le j\le n.$$

即集合 $\varepsilon=\{E_{ij}\mid 1\le i\le m,1\le j\le n\}$ 中的元素线性无关.

$\forall A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$ 可以唯一地写成 ε 的线性组合

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}.$$

可见 ε 是 $F^{m\times n}$ 的一组基，包含 mn 个元素，因此，$F^{m\times n}$ 的维数等于 mn. □

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例2 在复数域C上的3维空间C^3中，向量$\mathbf{a}_1=(2,0,0)$,$\mathbf{a}_2=(a_2,3,0)$,$\mathbf{a}_3=(a_3,a_4,5)$是否组成一组基？

解 只要考虑方程$x\mathbf{a}_1+y\mathbf{a}_2+z\mathbf{a}_3=\mathbf{b}$即

$$\begin{cases} 2x+a_2y+a_3z=b_1 \\ \qquad 3y+a_4z=b_2 \\ \qquad\qquad 5z=b_3 \end{cases}$$

是否有唯一解。

•对角元全不为0的n阶上(下)三角矩阵可以通过一系列初等行变换化成单位矩阵I，因而以其为系数矩阵的方程组有唯一解，其各列(行)组成F^n的一组基。

$$S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\} \xrightarrow{\text{“行向量”形式}} A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$$

$$b=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m$$

$$\Big\Downarrow \text{“行”列向量乘积}$$

$$b=AX=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_m x_m$$

引理2.3.1 设向量组B是A的线性组合, C是B的线性组合, 则C是A的线性组合.

引理2.3.2 设向量组$b_1,\ldots,b_k$线性相关（无关）当且仅当他们在同一组基下的坐标$X_1,\ldots,X_k$线性相关（无关）。

基的判定定理

F^n的基$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$有以下两条刻画：

(1)(坐标的存在性)使F^n中每个向量α都能写成$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$在F上的线性组合$\alpha=AX$,其中$A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$。

(2)(坐标的唯一性)每个$b=AX$中的X由b唯一决定，即$AX=AY$当且仅当$X=Y$.

定理　设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是$n$维向量空间$F^n$中任意$n$个线性无关的向量，则$F^n$中任何一个向量$\beta$都能写成$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$的线性组合的形式 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n$并且其中的系数$x_1, x_2, \ldots, x_n$由$\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_n, \beta$唯一确定.

证明　$\alpha_1,\ldots, \alpha_n, \beta$是$F^n$中$n+1$个向量.由定理2.1.5知道它们线性相关，存在不全为0的数$\lambda_1,\ldots, \lambda_n, \lambda$使

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_n\alpha_n+\lambda\beta=0$$

如果$\lambda=0$，则$\lambda_1,\ldots, \lambda_n$不全为0且

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_n\alpha_n=0$$

这导致$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性相关，矛盾.故$\lambda\neq 0$.由(2.1.20)得

$$\beta=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\alpha_1-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda}\alpha_n$$

可见β是$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的线性组合.

(由于$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性无关，其中每个向量都不是它前面的向量的线性组合.如果β不是$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的线性组合，则向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$中每个向量都不是它前面的向量的线性组合，由定理2.1.2的推论2.1.1知：这导致$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$线性无关，矛盾.因此$\beta$是$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的线性组合.)

现证明表达式$\beta=x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n$中系数$x_1,\ldots,x_n$的唯一性.

假定有两组系数$x_1,\ldots,x_n$与$y_1,\ldots y_n$满足条件

$$\beta=x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n$$

$$\beta=y_1\alpha_1+\ldots+y_n\alpha_n$$

将两个表达式相减得

$$(x_1-y_1)\alpha_1+\ldots+(x_n-y_n)\alpha_n=0 \qquad (2.1.21)$$

由于$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性无关，向量等式(2.1.21)仅当

$$x_1-y_1=\ldots=x_n-y_n=0$$

时成立，也就是

$$x_1=y_1,\ldots,x_n=y_n$$

这就说明系数$x_1,\ldots,x_n$的唯一性. □

定理2.3.1　F^n中的向量组S是基$\Leftrightarrow S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$由$n$个线性无关向量组成.

判定线性方程组的唯一解

例3 在复数范围内求常数b_1,b_2,b_3,使线性方程组有唯一解。

$$\begin{cases} x+y+z=b_1 \\ x+2y+4z=b_2 \\ x+3y+9z=b_3 \end{cases}$$

解：原方程写成向量形式$xa_1+ya_2+za_3=b$.只要判定$A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$代表的向量组S是否线性无关，就是S是否为C^3的一组基，方程组是否有唯一解。原方程组对任意b_1,b_2,b_3都有唯一解。

定理2.3.2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

对任意一组$b_1,\ldots,b_m$组都有唯一解的充分必要条件是：$m=n$；且齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有唯一解(0,…,0)。

•方程组的矩阵形式：$AX=b$

•齐次方程组的矩阵形式：$AX=0$

如果X_1,X_2都是$AX=b$的解，则$AX_1=AX_2 \Longleftrightarrow$ $AX_1-AX_2=A(X_1-X_2)=0$，X_1-X_2方程$AX=0$的解.

再次验证了：方程$AX=b$有唯一解当且仅当方程$AX=0$有唯一解

引理2.3.4 设F上n阶方阵A经过一系列初等行变换变成B，并经过一系列初等行变换变成阶梯形方阵T. 则A的各列组成F^n的基当且仅当B的各列组成F^n的基当且仅当T的对角元全不为0.

例4当b_1,b_2,b_3取什么复数时，如下线性方程组有唯一解：

$$(1)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+13z=b_3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+4z=b_3 \end{cases}$$

§ 2.4 坐标变换

求向量坐标

例1 求向量e_1=(1,0,0)在F^3的基T={α_1=(1,1,1), α_2=(1,2,3), α_3=(1,4,9)下的坐标。

解：设e_1在T下的坐标为(x_1,x_2,x_3)满足$e_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$转化为列向量形式$e_1=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$ 即AX=e_1由方程增广矩阵求解.

$$(A,e_1)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&0\\1&3&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-(2)+(3),-(1)+(2)}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&-1\\0&1&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-(2)+(3),-(2)+(1)}\begin{pmatrix}1&0&-2&2\\0&1&3&-1\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+(1),\frac{1}{2}(3),-3(3)+(2)}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-\frac{5}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所得方程组的解X=(3,-5/2,1/2)就是所求坐标。

例2 设$R_3[x]$是由不超过2次的全体实系数多项式$f(x)$组成的向量空间.求多项式$(x-5)^2$在基$S=\{1,x-2,(x-2)^2\}$下的坐标.

解：令$y=x-2$,即$x=y+2$,代入$(x-5)^2$整理得：$(x-5)^2 = (y+2-5)^2 = (y+3)^2 =y^2+6y+9=9-6(x-2)+ (x-2)^2$,可见$(x-5)^2$的坐标为(9,6,1).

例3 求自然基向量$\varepsilon_1=(1,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1)$在F^3的基$T=\{\alpha_1=(1,1,1), \alpha_2=(1,2,3), \alpha_3=(1,4,9)$下的坐标。

解：将6个向量写成列向量排成M，经过例1中的初等行变换化为最简阶梯形矩阵

$$(A,e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所得后三列为ε_1, ε_2, ε_3在T下的坐标(3,-5/2,1/2)，(-3,4,-1),(1,-3/2,1/2)。

例4 求向量$\beta=(y_1,y_2,y_3)$在F^3的基$T=\{\alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2=(1,2,3),\ \alpha_3=(1,4,9)\}$下的坐标。

解：已知自然基向量在T下的坐标，而β是自然基向量的线性组合$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3$，$\beta$在T下的坐标也就是$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$在T下的坐标的相应的线性组合

$$y_1(3,-\frac{5}{2},\frac{1}{2})+y_2(-3,4,-1)+y_3(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$$

$$=\left(3y_1-3y_2+y_3,-\frac{5}{2}y_1+4y_2-\frac{3}{2}y_3,\frac{1}{2}y_1-y_2+\frac{1}{2}y_3\right).$$

坐标变换公式

设V是数域F上有限维线性空间,它的两组基是$M_1=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$,$M_2=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$. 设第二组基$M_2$中的每个向量$\beta_j(1\le j\le n)$在第一组基$M_1$下的坐标为

$$\Pi_j=(p_{1j},\cdots,p_{nj})^T$$

依次以这些坐标为列向量组成矩阵:

$$P=(\Pi_1,\cdots,\Pi_n)=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

则$\boldsymbol{P}$称为基M_1到M_2的过渡矩阵. 它可以由等式

$(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\boldsymbol{P}$ 定义,称为基变换公式.

设$M_1=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, $M_2=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$是$V$的基, P是M_1到M_2的过渡方阵. 设$\alpha\in V$在基M_1, M_2下的坐标分别是$X=(x_1,\ldots,x_n)$, $Y=(y_1,\ldots,y_n)$. 从而$\alpha=y_1\beta_1+\ldots+y_n\beta_n$, 将等式两端用坐标代替，得到坐标等式:

$$X = y_1\Pi_1 + \cdots + y_n\Pi_n = \left(\Pi_1,\ldots,\Pi_n\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = PY$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称为**坐标变换公式**,也就是一个向量在两组不同基下的坐标X,Y之间的关系.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

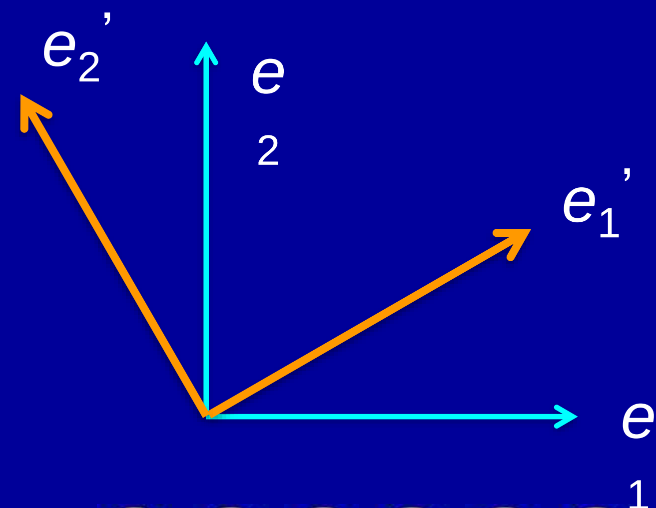
上述内容总结为**定义2.4.1，定理2.4.1。**

例5 描述平面直角坐标系中方程 $2x^2+4xy+5y^2=6$ 的图像曲线的形状。

解：将平面直角坐标系绕原点旋转α角，将方程化为标准型.

自然基$\{e_1, e_2\}$绕原点旋转α角为$\{e_1', e_2'\}$仍为一组基过度矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



因此有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{即} \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

代入曲线方程$2x^2+4xy+5y^2=6$得

$$2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + 4(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)$$
$$+5(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 = 6,$$

整理得

$$x'^2\left(\frac{7}{2} + 2\sin 2\alpha - \frac{3}{2}\cos 2\alpha\right) + x'y'(3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha)$$
$$+y'^2\left(\frac{7}{2} - 2\sin 2\alpha + \frac{3}{2}\cos 2\alpha\right) = 6.$$

选择α使3sin2 α+4cos2 α=0,即tan2 α=-4/3.选2 α在第二象限,

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}} = -\frac{3}{5}, \sin 2\alpha = \frac{4}{5}.$$

代入曲线整理得

$$6x'^2 + y'^2 = 6, \text{即} x'^2 + \frac{y'^2}{6} = 1.$$

图像曲线为椭圆，长半轴为√6，短半轴为1.

§2.5 向量组的秩

例 1 以下方程组在空间直角坐标系中各是什么形状?

$$(1)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ 3x+2y+6z=0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$(2)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

解 方程组 (1.1),(1.2) 中的方程都是 3 个, 个数相同. 两个方程组同样都由3个方程组成, 但解集的大小明显不同: 方程组(1.1)有无穷多个解, 方程组(1.2)只有一个解.

但稍加观察就可以发现: 方程组 (1.1) 中第 3 个方程是前两个方程的和, 前两个方程的公共解一定是第3个方程的解. 因此, 可以将第 3 个方程从方程组 (1.1) 中删去, 所得到的方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases} \qquad (1.3)$$

与原方程组 (1.1) 同解.

（1）方程组 (1.1) 中的第 3 个方程可看成是“多余的”, 方程组 (1.1) 实质上与 (1.3) 相同, 只有两个方程而没有3个方程.图像为一条直线。

（2）方程组 (1.2) 中的3个方程后两个是第一个方程的常数倍线性, 可以删。方程组实质上只有一个方程.图像为一个平面。

定义2.5.1（极大线性无关组）设S是向量组. 如果S的子集$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性无关，并且将$S$任一向量$\alpha$添加在$M$上所得的向量组$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha\}$线性相关，就称$M$是$S$的**极大线性无关组**.

引理　设S是向量组，$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$是$S$的线性无关子集，则$M$是$S$的极大线性无关组

$\Longleftrightarrow$ S中所有的向量都是M的线性组合.

证明 先设M是S的极大线性无关组.

任取$\alpha\in S$. 当$\alpha\in M$时当然α是M的线性组合：

$$\alpha=\alpha+\sum_{\beta\in M,\beta\neq\alpha}0\beta$$

设$\alpha\notin M$，则$S=M\cup\{\alpha\}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha\}$线性相关，$F$中存在不全为0的数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda$使

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m+\lambda\alpha=0 \qquad (2.2.1)$$

如果$\lambda=0$，则(2.2.1)成为

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0$$

其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$不全为0，这意味着$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关，矛盾.

因此$\lambda\neq0$，由(2.2.1)得

$$\alpha=-\frac{\lambda_1}{\lambda}-\cdots-\frac{\lambda_m}{\lambda}\alpha_m$$

这说明α是M的线性组合.

引理2.5.2 设$S_2=\{v_1,\ldots,v_s\}$是$S_1=\{u_1,\ldots,u_t\}$的线性组合，并且$s>t$，则S_2线性相关.

证明 对每个$1\le j\le s$,记

$$v_j=a_{1j}u_1+\ldots+a_{tj}u_t \quad (2.2.11)$$

考虑使

$$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_s v_s=0 \quad (2.2.12)$$

的数$\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in F$.

将(2.2.11)代入(2.2.12),得

$$\lambda_1(a_{11}u_1+\dots+a_{t1}u_t)+\dots+\lambda_j(a_{1j}u_1+\dots+a_{tj}u_t)+\dots+\lambda_s(a_{1s}u_1+\dots+a_{ts}u_t)=0$$

整理得

$$(a_{11}\lambda_1+\dots+a_{1s}\lambda_s)u_1+\dots+(a_{i1}\lambda_1+\dots+a_{is}\lambda_s)u_i+\dots+(a_{t1}\lambda_1+\dots+a_{ts}\lambda_s)u_t=0 \qquad (2.2.13)$$

选择$\lambda_1,\dots,\lambda_s$使

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1+\cdots a_{1s}\lambda_s=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{t1}\lambda_1+\cdots a_{ts}\lambda_s=0 \end{cases} \qquad (2.2.14)$$

成立,则(2.2.13)成立.从而(2.2.12)成立.

(2.2.14)是以$\lambda_1,\dots,\lambda_s$为未知数的齐次线性方程组，有$s$个未知数，$t$个方程.由于$s>t$，(2.2.14)有非零解$(\lambda_1,\dots,\lambda_s)\neq(0,\dots,0)$，这也是(2.2.12)的非零解.因此$v_1,\dots,v_s$线性相关.

□

推论 如果$S_2=\{v_1,\dots,v_s\}$是$S_1=\{u_1,\dots,u_t\}$的线性组合，并且S_2线性无关，则$s\le t$. □

推论2.5.1 如果线性无关向量组$S_1=\{u_1,\dots,u_s\}$与$S_2=\{v_1,\dots,v_t\}$等价，即互为线性组合，那么它们所含向量个数s与t相等.特别，同一向量组S的两个极大线性无关子集S_1,S_2所含向量个数相等. □

定义2.5.2　任一向量组S的任一极大线性无关组所含向量个数r称为向量组S的**秩**，记作rank$S$.

任一矩阵A的行向量组的秩称为这个矩阵的**行秩**，A的列向量组的秩称为A的**列秩**. □

推论2.5.2　如果向量组S_2是S_1的线性组合，则rankS_2≤rankS_1.互为线性组合的向量组秩相等.

证明　设T_1,T_2分别是S_1,S_2的极大线性无关组，则$|T_1|$=rankS_1, $|T_2|$=rankS_2.

T_1与S_1等价，T_2与S_2等价，S_1是T_1的线性组合，T_2是S_2的线性组合.由线性组合的传递性知T_2是T_1的线性组合.而T_2线性无关，由推论2.2.2知$|T_2|\leq|T_1|$，即$\text{rank}S_2\leq\text{rank}S_1$.

如果S_1与S_2等价，互为线性组合，则$\text{rank}S_2\leq\text{rank}S_1$与$\text{rank}S_1\leq\text{rank}S_2$同时成立，从而$\text{rank}S_1\leq\text{rank}S_2$. □

定义2.5.3 设S_1与S_2是同一个向量空间V中的两个向量组. 如果S_1与S_2 互为线性组合，就称S_1与S_2**等价**.如果矩阵A与B的行(列)向量组等价，就称A与B行(列)等价

定理 初等行变换不改变矩阵的列秩.

定理2.5.3 初等行变换不改变矩阵的行秩.

证明 每次初等行变换前后的矩阵的行向量组等价.由等价的传递性知道：矩阵A经过若干次初等行变换得到的矩阵B的行向量组与A的行向量组等价. 由此知：A与B的行秩相等. □

命题2.2.3 如果数域F上的向量组S_2是S_1的线性组合，S_3是S_2的线性组合，那么S_3是S_1的线性组合.

证明 设 $S_1=\{u_1,\dots,u_m\}$，$S_2=\{v_1,\dots,v_n\}$

由于S_2是S_1的线性组合，则对每个$1\le j\le n$，有

$$v_j=a_{1j}u_1+\dots+a_{mj}u_m \qquad (2.2.9)$$

其中$a_{1j},\dots,a_{mj}\in F$.

又因为S_3是S_2的线性组合，则S_3中每个向量w可写为

$$w=b_1v_1+\dots+b_nv_n \qquad (2.2.10)$$

其中$b_1,\dots,b_n\in F$.

将(2.2.9)代入(2.2.10)，得

$$w=b_1(a_{11}u_1+\ldots+a_{m1}u_m)+\ldots+b_n(a_{1n}u_1+\ldots+a_{mn}u_m)$$

$$=c_1u_1+\ldots+c_mu_m$$

其中$c_j=b_1a_{1j}+b_2a_{2j}+\ldots+b_na_{nj}\in F, 1\le j\le m$.

可见S_3中每个向量w都是S_1的线性组合，从而S_3是S_1的线性组合. □

推论2.5.4　如果向量组S_2与S_1等价，S_3与S_2等价，那么S_3与S_1等价. □

用初等行变换计算秩

例2 试求线性方程组的秩

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 9 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 15 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 17 \end{cases} \qquad (2.5.1)$$

解：将方程表成增广矩阵M.方程组的秩就是M的行秩.用初等行变换化为阶梯形

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&3&5&7&9\\1&5&8&10&15\\1&4&9&16&17\end{pmatrix}\longrightarrow T=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&-1&-3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于rank(M)=rank(T)=3,方程组的秩为3.

算法2.5.1(求向量组的秩) 求向量组 $S=\{u_1,\ldots,u_m\}$的秩.

将S的各向量u_i写成行向量,并以他们为各行排成矩阵A,将A经过系列初等行变换化成阶梯形T.则T的非零行数r=rank$S$

用初等行变换求极大线性无关组

例　　求由下列向量组成的向量组的一个极大线性无关组:

$\alpha_1=(1,2,3,4,-3)$　　$\alpha_2=(1,2,0,-5,1)$

$\alpha_3=(2,4,-3,-19,6)$　　$\alpha_4=(3,6,-3,-24,7)$

解　考虑关于$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$的方程

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4=0 \qquad (2.2.2)$$

此方程即齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3+6\lambda_4=0 \\ 3\lambda_1-3\lambda_3-3\lambda_4=0 \\ -3\lambda_1+\lambda_2+6\lambda_3+7\lambda_4=0 \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

对(2.2.3)的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -5 & -19 & -24 \\ -3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

作一系列初等行变换进行消元，化为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的方程组为

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 - 4\lambda_4 \end{cases}$$

通解为

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)=(t_1+t_2,-3t_1-4t_2,t_1,t_2) \qquad (2.2.4)$$

在通解(2.2.4)中取$(t_1,t_2)=(1,0)$,得$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)=(1,-3,1,0)$,这说明

$$\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3=0，\ \alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2 \qquad (2.2.5)$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

在通解(2.2.4)中取$(t_1,t_2)=(0,1)$,得$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)=(1,-4,0,1)$,这说明

$$\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4=0，\alpha_4=-\alpha_1+4\alpha_2 \qquad (2.2.6)$$

(2.2.5)和(2.2.6)说明α_3, α_4是α_1, α_2的线性组合.显然α_1, α_2线性无关，因此$\{\alpha_1, \alpha_2\}$就是$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$的一个极大线性无关组. □

算法2.5.2 求F_n中有限个向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$组成的向量组的极大线性无关组.

(1)将各向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$写成列向量的形式，依次以它们为各列排成矩阵A.

(2)将A经过一系列初等行变换化成如下的阶梯形

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & b_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & b_{rj_r} & \cdots \\ & & & & & & & & O \end{pmatrix}$$

其中$1\le j_1<j_2<\ldots<j_r\le n$，而$b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}$ 都不为0.

于是B的第$j_1,j_2,\ldots,j_r$列组成B的列向量组的一个极大线性无关组，相应的，A的第$j_1,j_2,\ldots,j_r$列 $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 组成$\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m$的一个极大线性无关组.

例 求向量$\alpha_1=(1,2,0,-5,1)$, $\alpha_2=(1,2,3,4,-3)$,

$\alpha_3=(2,4,-3,-19,6)$, $\alpha_4=(1,1,1,1,1)$,

$\alpha_5=(3,6,-3,-24,7)$组成的向量组S的一个极大线性无关组.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\2&2&4&1&6\\0&3&-3&1&-3\\-5&4&-19&1&-24\\1&-3&6&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{一系列初等变换}}B=\begin{pmatrix}1&1&2&1&3\\0&1&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

B 的第1,2,4列组成B的列向量组的极大线性无关组，因此$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$是$S$的一个极大线性无关组. □

引理2.4.3 初等行变换不改变矩阵的列秩.

初等行变换不改变矩阵的行秩.

证明 每次初等行变换前后的矩阵的行向量组等价.由等价的传递性知道：矩阵A经过若干次初等行变换得到的矩阵B的行向量组与A的行向量组等价.A与B的行秩相等.

□

定理2.2.9 任意矩阵的行秩与列秩相等.

证明 设$A \in F^{m\times n}$.则A可以经过一系列初等行变换变成阶梯形矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & c_{rj_r} & \cdots \\ & & & & & & & & O \end{pmatrix}$$

其中$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n$，而 $c_{1j_1}=c_{2j_2},\cdots,c_{rj_r}=1$

且与 $c_{1j_1}, c_{2j_2}, \cdots, c_{rj_r}$ 在同一列的其余元都等于0，C的最好n-r行全为0，第i行的c_{ij}(j<j_i)也都为0.

由定理2.2.7，定理2.2.8知：C与A的列秩相等，C与A的行秩也相等，则A的行秩与列秩相等.

C的第$j_1,j_2,\ldots,j_r$列组成C的列向量组的极大线性无关组，C的列秩是r.

对$1\le i\le m$，记C的第i行为C_i.设$\lambda_1,\ldots, \lambda_r\in F$满足

$$\lambda_1 C_1+\ldots+\lambda_r C_r=0 \qquad (2.2.16)$$

由于$\lambda_1 C_1+\ldots+\lambda_r C_r$的第$j_1,j_2,\ldots,j_r$分量分别为$\lambda_1,\ldots, \lambda_r$，(2.2.16)仅当$\lambda_1=\ldots= \lambda_r=0$时成立，说明$C$的$r$行$C_1,C_2,\ldots,C_r$线性无关.而$C$得其余行都为0，显然是$C_1,C_2,\ldots,C_r$的线性组合.因此$C$的前$r$行组成$C$的行向量组的极大线性无关组.$C$的行秩为$r$.

C的列秩与行秩相等，都等于r.于是A的列秩与行秩也相等，都等于r. □

定义 矩阵A的行秩和列秩称为A的秩，记作rank$A$. □

引理2.5.4 设F^n的任意一个线性无关子集S都能扩充为F^n的一组基.

证明 F^n的线性无关子集S可以扩充为F^n的一个极大线性无关组M，M是F^n 的基.

例4 试将F^4的线性无关向量$\alpha_1=(1,1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3,3)$扩充成一组基.

§ 2.6 子空间

例1 V是实数域R上的线性空间。已知V中的向量u_1, u_2, u_3线性无关。

(1) 试判断u_1+u_2，u_2+u_3，u_1+u_3是线性相关还是线性无关？

(2) 对不同的λ值，求向量组$S=\{u_1-\lambda u_2$， $u_2-\lambda u_3$， $u_3-\lambda u_1\}$的秩。

证明 设$W=V(u_1, u_2, u_3)$，则$\{u_1, u_2, u_3\}$是W的一组基。将W中每个向量α在这组基下的坐标记作$\sigma(\alpha)$，则$\sigma: W\to R^3$是线性空间之间的同构映射。

- (1) 向量$\alpha_1 = u_1+u_2$，$\alpha_2 = u_2+u_3$，$\alpha_3 = u_3+u_1$含于W，在上述基下的坐标分别为

$$\sigma(\alpha_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \sigma(\alpha_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \sigma(\alpha_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

- 解关于λ_1，λ_2，λ_3的方程组

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- 得$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，可见$u_1+u_2$，$u_2+u_3$，$u_1+u_3$线性无关

(2) 记$\beta_1 = u_1 - \lambda u_2$，$\beta_2 = u_2 - \lambda u_3$，　$\beta_3 = u_3 - \lambda u_1$。

$\sigma(\beta_1) = (1,-\lambda,0)$，$\sigma(\beta_2) = (0,1,-\lambda)$，$\sigma(\beta_3) = (-\lambda, 0,1)$。

S=$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$的秩等于它在$F^3$中的像$\{(1,-\lambda,0), (0,1,-\lambda), (-\lambda, 0,1)\}$的秩，也就是矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的行秩。

$$A \xrightarrow{\lambda(1)+(3),\ \lambda^2(2)+(3)} B = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

- 当$1-\lambda^3=0$，即$\lambda=1$，rank B = 2
- 从而rank S = rank A =2；
- 当$1-\lambda^3\neq 0$，即$\lambda\neq 1$，rank B = 3
- 从而rank S = rank A =3。

子集生成的子空间

定义2.6.1 向量空间F^n的非空子集W如果满足一下两个条件：

(1)$u,v\in W \qquad u+v\in W$,

(2)$u\in W,\ \lambda\in F \qquad \lambda u\in W$,

就称W是F^n的**子空间**.如果F^n的子空间W_1是子空间W_2的子集，则称W_1是W_2的子空间. □

定义2.6.2 设W是F^n的子空间，如果W中存在r个线性无关向量，并且任意$r+1$个向量线性相关，就称W的**维数**为r，记为$\dim W=r$.

如果W中存在一组向量$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$，使$W$中每个向量$\alpha$都能写成$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$在$F$上的线性组合

$$\alpha=x_1\alpha_1+\ldots+x_r\alpha_r, \qquad (2.3.6)$$

并且其中的系数$x_1,\ldots,x_r$由α唯一决定，则M称为W的一组基. α的线性组合表达式(2.3.6)中的系数组成的有序数组$(x_1,\ldots,x_r)$称为α在基M下的坐标. □

定理（引理2.6.1） 设W是F^n的子空间.

$$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}\subset W,\text{ 则}$$

(1)M是W的基 $\Leftrightarrow$ M是W的极大线性无关组.

(2)W的基M所含向量个数$|M|=\dim W$.

证明 (1)先设M是W的极大线性无关组，则W中每个向量α都能写成M的线性组合：

$$\alpha=x_1\alpha_1+\ldots+x_r\alpha_r, \qquad (2.3.7)$$

若还有

$$\alpha=y_1\alpha_1+\ldots+y_r\alpha_r, \qquad (2.3.8)$$

将等式(2.3.7)与(2.3.8)相减得,

$$(x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+\ldots+(x_r-y_r)\alpha_r=0$$

由$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性无关得

$$x_1-y_1=\ldots=x_n-y_n=0$$

从而$x_i=y_i$对$1\le i\le r$成立.可见$(x_1,\ldots,x_r)\in F^r$由α唯一决定.

这说明M是W的基.

再设M是W的基.设$\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in F$满足条件

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_r\alpha_r=0 \qquad (2.3.9)$$

另一方面有

$$0\alpha_1+\ldots+0\alpha_r=0 \qquad (2.3.10)$$

(2.3.9)与(2.3.10)都是将零向量0表示为$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$的线性组合的等式，由于M是基，表示的系数具有唯一性，这使得$(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)=(0,\ldots,0)$

这说明M线性无关.

由于W中所有的向量都是M的线性组合，因此M是W的极大线性无关组.

(2)设$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$是$W$的基，由$r$个向量组成.则$M$中的向量就是$W$中$r$个线性无关的向量.$W$中任意$r+1$个向量$\beta_1,\ldots,\beta_{r+1}$都是$M$中$r$个向量的线性组合，由定理2.2.5知$\beta_1,\ldots,\beta_{r+1}$线性相关.可见$\dim W=r=|M|$. □

推论 F^n的子空间W的所有的基所含向量个数相等，等于向量组W的秩rank$W$.
rank$W$=dim$W$.
□

引理2.6.2　设F^n的子空间W的维数为r，则W中任意一个线性无关子集S都能扩充为W的一组基，S所含向量个数都不超过r.如果W_0是W的子空间，则W_0的任何一组基都能扩充为W的一组基，$\dim W_0 \le \dim W$，且$W_0 = W \Leftrightarrow \dim W_0 = \dim W$.

证明　W的线性无关子集S可以扩充为W的一个极大线性无关组M，M是W的基，含有r个向量，当然S所含向量个数不超过r.

W的子空间W_0的基$M_0=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$是$W$中的线性无关子集，当然可以扩充为$W$的一组基$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$，且$\dim W_0=k\le r=\dim W$显然成立.

显然$W_0=W \Rightarrow \dim W_0=\dim W$.

而由$M_0 \subseteq M$知$\dim W_0=k=\dim W=r \Rightarrow M_0=M$

$W_0=W$.

定理2.3.4 设F^n的子空间W的维数为r，$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\} \subset W$，则$M$线性无关 $\Leftrightarrow$ M是W的基 $\Leftrightarrow$ W中所有的向量都是M的线性组合.

证明　如果M是W的基，当然“M线性无关”与“W中所有的向量都是M的线性组合”这两个条件同时满足.反过来，证明：当M所含向量个数r等于$\dim W$时，只要满足这两个条件之一，M就是W的基.

先设M线性无关，则M可以扩充为W的一组基M_1.M_1包含M，且M_2中所含的向量个数也是r，与M一样多.因此$M_1=M$，M是W的基.

再设W中所有的向量都是M的线性组合.取M的极大线性无关组M_0，则M是M_0的线性组合.由线性组合的传递性知W中所有的向量

也都是M_0的线性组合.而M_0线性无关，因此是W的极大线性无关组.从而M_0是W的基，含有r个向量.M_0是M的子集而且所含向量个数与M一样多，因此$M_0=M$，M是W的基. □

引理2.6.3 F^n的任意非空子集S的全体线性组合组成的集合$V(S)$是F^n的子空间.F^n的子空间如果包含S，必然包含$V(S)$.

证明 根据定义2.1.2，$V(S)$就是S的有限子集的线性组合的全体组成的集合.即

$V(S)=\{\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_k\alpha_k|k$是正整数，$\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in S, \lambda_1,\ldots, \lambda_k\in F\}$.

设$u,v\in V(S)$,则

$u=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_ku_k$，$v=\mu_1v_1+\ldots+\mu_mv_m$

其中$u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_m \in S$, $\lambda_1,\ldots, \lambda_k$, $\mu_1,\ldots \mu_m \in F$.于是

$$u+v= \lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_k u_k+\mu_1 v_1+\ldots+\mu_m v_m$$

与 $\lambda u=\lambda\lambda_1 s_1+\ldots+\lambda\lambda_k s_k$ (对任意$\lambda \in F$)

都是S中有限个向量的线性组合，含于$V(S)$. 这就证明了$V(S)$是F^n的子空间.

如果W是F^n中包含S的子空间，则由命题2.3.2知W包含S中向量的所有线性组合，也就是包含$V(S)$.这说明$V(S)$是F^n中包含S的最小子空间.

□

定义2.6.3 F^n的非空子集S的全体线性组合组成的子空间，称为**S生成的子空间**，记作$L(S)$. 当S是有限子集$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$时，也将$L(S)$记作$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.

例3 设S_1,S_2,S_3是F^n的非空子集.求证：

(1)S_2是S_1的线性组合$\Leftrightarrow$ $L(S_2)\subseteq L(S_1)$.

S_1与S_2等价$\Leftrightarrow$ $L(S_2)=L(S_1)$.

(2)如果S_2是S_1的线性组合，且S_3是S_2的线性组合，则S_3是S_1的线性组合.

如果S_1与S_2等价，且S_2与S_3等价，则S_1与S_3等价.

(3)设S_0是S_1的极大线性无关组，则S_0是$L(S_1)$的基. rankS_1=dim$L(S_1)$.

证明　(1)$L(S_1)$包含了S_1的全体线性组合.因此，S_2是S_1的线性组合$\Leftrightarrow$ $S_2 \subseteq L(S_1)$.

由于$L(S_1)$是子空间，如果它包含S_2，必然包含S_2的全体线性组合组成的集合$L(S_2)$.

这说明：$S_2 \subseteq V(S_1) \Rightarrow L(S_2) \subseteq L(S_1)$.

由$S_2 \subseteq L(S_2)$知：$L(S_2) \subseteq L(S_1) \Rightarrow S_2 \subseteq L(S_1)$.

这就证明了$V(S_2) \subseteq V(S_1) \Leftrightarrow S_2 \subseteq L(S_1) \Leftrightarrow$ S_2是S_1的线性组合.

由以上结论知：S_1与S_2互为线性组合$\Leftrightarrow$ $L(S_1)$与$L(S_2)$相互包含 $\Leftrightarrow$ $L(S_1)=L(S_2)$.

(2)设S_2是S_1的线性组合，且S_3是S_2的线性组合，由本题第(1)小题的结论知$L(S_2)\subseteq L(S_1)$且$L(S_3)\subseteq L(S_2)$，这导致$L(S_3)\subseteq L(S_1)$，从而S_3是S_1的线性组合.

如果S_1与S_2等价，且S_2与S_3等价，由本题第(1)小题的结论知$L(S_2)=L(S_1)$且$L(S_3)=L(S_2)$，于是S_1与S_3等价.

(3)S_1的极大线性无关组S_0与S_1等价.因而$V(S_0)=V(S_1)$. $V(S_1)$是S_0的线性组合，并且S_0线性无关，因此S_0是$V(S_1)$的极大线性无关组，S_0是$V(S_1)$基.$\dim V(S_1)=|S_0|=\mathrm{rank} S_1$，这里$|S_0|$表示$S_0$所含元素个数.

□

齐次线性方程组的解空间

例4 求证：数域F上n元齐次线性方程组$AX=0$的全体解组成的集合V_A是F^n的子空间。

证明：

$$X_1, X_2 \in V_A \Rightarrow \begin{cases} AX_1 = 0 \\ AX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A(X_1 + X_2) = 0 \\ A(\lambda X_1) = \lambda A X_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 \in V_A \\ \lambda X_1 \in V_A \end{cases}$$

证明了V_A是F^n的子空间.

齐次线性方程组的解集合称为**解空间**。

例5 **求以下子空间W的维数及一组基.**

(1)三元一次方程$x+y+z=0$的解空间W.

(2)三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases}$$

的解空间W.

(3) 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_4+x_5=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4-5x_5=0 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4-3x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-3x_3-19x_4+8x_5=0 \\ 3x_1+6x_2-3x_3-24x_4+9x_5=0 \end{cases}$$

的解空间W.

解 (1)方程$x+y+z=0$的通解是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别取$(t_1,t_2)=(1,0),(t_1,t_2)=(0,1)$,得到两个解

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解$X=t_1X_1+t_2X_2$是X_1，X_2的线性组合.显然X_1，X_2不成比例，因此线性无关，是解空间W的一组基.

解空间W的维数是2.

(2)解方程组得通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

取$t=1$得一个解

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为tX_1,是X_1的线性组合.X_1不等于0，线性无关，单独组成解空间W的一组基.

(3)方程组的系数矩阵A经过一系列初等行变换化为最简形式：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&-5&1\\1&2&3&4&-5\\1&2&2&1&-3\\2&4&-3&-19&8\\3&6&-3&-24&9\end{pmatrix}\rightarrow B=\begin{pmatrix}1&2&0&-5&1\\0&0&1&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

以A为系数矩阵的原方程简化为以B为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 5x_4 - x_5 \\ x_3 = -3x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

x_2,x_4,x_5是自由未知数，可以在F分别独立取值t_1,t_2,t_3，这3个自由未知数的值决定了其余两个未知数x_1，x_3的值，从而确定通解

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 + 5t_2 - t_3 \\ t_1 \\ -3t_2 + 2t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

分别取(t_1,t_2,t_3)=(1,0,0)或(0,1,0)或(0,0,1)，得到3个解

$$X_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\\1\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\quad(2.3.12)$$

由通解(2.3.11)知：方程组的所有解都是(2.3.12)的3个解X_1,X_2,X_3的线性组合.证明X_1,X_2,X_3线性无关，组成W的一组基.

设

$$t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3=0 \qquad (2.3.13)$$

即

$$\begin{pmatrix} -2t_1+5t_2-t_3 \\ t_1 \\ -3t_2+2t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

(2.3.14)成立仅当$t_1=t_2=t_3=0$，可见X_1,X_2,X_3线性无关，组成W的一组基.W的维数等于3. □

齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ (2.3.15)

中的各方程的未知数系数组成**系数矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定理2.6.1 设数域F上n元齐次线性方程组的系数矩阵为A，则它的解空间的维数 $\dim V_A = n - \operatorname{rank} A$

证明 系数矩阵A可以经过初等行变换化为

$$
B=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & b_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2j_2} & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{pmatrix} \quad (2.3.16)
$$

其中 $b_{1j_1}=b_{2j_2}=\cdots=b_{rj_r}=1, 1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n,$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

并且B中第$j_1,j_2,\ldots,j_r$列除了 $b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}$ 以外其余的元都是0.其中r=rank$B$=rank$A$.

设1,2,...,n这n个数中除了$j_1,j_2,\ldots,j_r$之外剩下的数从小到大依次是$j_{r+1},\cdots,j_n$.

将A经过初等行变换化为B，也就是将方程组(2.3.1)经过同解变形化为

$$\begin{cases} x_{j_1} + b_{1j_{r+1}} x_{j_{r+1}} + \cdots + b_{1j_n} x_{j_n} = 0 \\ x_{j_2} + b_{2j_{r+1}} x_{j_{r+1}} + \cdots + b_{2j_n} x_{j_n} = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r} + b_{rj_{r+1}} x_{j_{r+1}} + \cdots + b_{rj_n} x_{j_n} = 0 \end{cases} \qquad (2.3.17)$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

将方程组(2.3.17)中含未知数 $x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$ 的项留在左边，其余各项移到右边，变为

$$\begin{cases} x_{j_1} = -b_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \cdots - b_{1j_n}x_{j_n} \\ x_{j_2} = -b_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \cdots - b_{2j_n}x_{j_n} = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r} = -b_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \cdots - b_{rj_n}x_{j_n} = 0 \end{cases} \qquad (2.3.18)$$

将独立未知数 $x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n}$ 分别独立取任意值，每一组值 $(x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n})$ 代入(2.3.18)就可计算出 $x_{j_1},\cdots,x_{j_r}$ 的唯一一组值，从而得到方程(2.3.1)的一个解 $X=(x_1,\ldots,x_n)$. 这组解 X 由 $n-r$ 元数组 $(x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n})\in F^{n-r}$ 唯一决定，可记为 $f(u)=f(x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n})$.

对每个$1\le i\le n-r$，记e_i是F^{n-r}中第i分量为1、其余分量为0的数组向量，则$\{e_1,\ldots,e_{n-r}\}$是F^{n-r}的自然基，

$$u=(x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n})=x_{j_{r+1}}e_1+\cdots x_{j_n}e_{n-r}$$

$$X=f(u)=f(x_{j_{r+1}}e_1+\cdots+x_{j_n}e_{n-r})$$

$$=x_{j_{r+1}}f(e_1)+\cdots+x_{j_n}f(e_{n-r})$$

$$=x_{j_{r+1}}X_1+\cdots+x_{j_n}X_{n-r}\ (2.3.19)$$

其中$X_1,\ldots,X_{n-r}$分别等于$f(e_1),\ldots,f(e_{n-r})$，是方程组(2.3.1)的$n-r$个解，(2.3.19)说明方程组所有的解X都是这$n-r$个解$X_1,\ldots,X_{n-r}$的线性组合.

设 $x_{j_{r+1}} X_1 + \cdots x_{j_n} X_{n-r} = 0 \quad (2.3.20)$

即
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f(x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.21)$$

(2.3.20)成立仅当X的分量 $x_{j_{r+1}} = \cdots = x_{j_n} = 0$ ，这说明$X_1,\ldots,X_{n-r}$线性无关，组成解空间V_A的一组基.这组基由n-r个向量组成，因此

$$\dim V_A = n-r = n-\operatorname{rank}A \qquad \square$$

齐次线性方程组的解空间的一组基称为这个方程组的一个**基础解系**.

例6　已知F^5中的向量

$$X_1=(1,2,3,4,5),X_2=(1,3,2,1,2)$$

求一个齐次线性方程组，使X_1,X_2组成这个方程组的基础解系.

解　设

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4+a_{i5}x_5=0$$

是方程组$AX=0$的任意一个方程.将X_1,X_2的坐标代入得

$$\begin{cases} a_{i1}+2a_{i2}+3a_{i3}+4a_{i4}+5a_{i5}=0 \\ a_{i1}+3a_{i2}+2a_{i3}+a_{i4}+2a_{i5}=0 \end{cases} \quad (2.3.22)$$

将(2.3.22)看作以$a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4},a_{i5}$为未知数的线性方程来解.此方程组的系数矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

就是以X_1,X_2为行向量组成的矩阵.对B作初等行变换得

$$B\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

方程组(2.3.22)化为

$$\begin{cases} a_{i1} = -5a_{i3} - 10a_{i4} - 11a_{i5} \\ a_{i2} = a_{i3} + 3a_{i4} + 3a_{i5} \end{cases}$$

因此

$(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4},a_{i5})$

$=(-5a_{i3}-10a_{i4}-11a_{i5},a_{i3}+3a_{i4}+3a_{i5},a_{i3},a_{i4},a_{i5})$

$=a_{i3}(-5,1,1,0,0)+a_{i4}(-10,3,0,1,0)+a_{i5}(-11,3,0,0,1)$

方程组(2.3.22)的一组基础解系是

(-5,1,1,0,0), (-10,3,0,1,0), (-11,3,0,0,1).

以这组基础解系为各行组成矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则rank$A$=3.以A为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0 \\ -10x_1+3x_2+x_4=0 \quad (2.3.23) \\ -11x_1+3x_2+x_5=0 \end{cases}$$

的解空间的维数为5-rank$A$=5-3=2.而X_1,X_2是方程组(2.3.23)的两个线性无关解，因此组成(2.3.23)的基础解系.

因此，方程组(2.3.23)符合要求.

□

非齐次线性方程组

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

方程组的增广矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

非齐次方程组的向量形式

令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\Rightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}\quad(2.4.2)$$

几何意义：已知F^m中的向量$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}$，将$\boldsymbol{\beta}$表示成$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合，求组合系数。

非齐次线性方程组有解的条件

定理2.4.1 线性方程组（2.4.1）有解$\Leftrightarrow$ 它的系数矩阵与增广矩阵的秩相同。

简单证明：记 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1、\boldsymbol{\alpha}_2、\cdots、\boldsymbol{\alpha}_n\}$

$(2.4.1)$有解$\Leftrightarrow(2.4.2)$有解$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$是$S$的线性组合

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}\in V(S)\Leftrightarrow V(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=V(S)$$

由于$S\cup\{\boldsymbol{\beta}\}\supseteq S, V(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})\supseteq V(S)$,

$V(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=V(S)\Leftrightarrow\dim V(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=\dim V(S)$

S是A的列向量组$\Rightarrow\dim V(S)=\text{rank S=rank }A$

$S\cup\{\boldsymbol{\beta}\}$是$\tilde{A}$的列向量组$\Rightarrow\dim V(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=\text{rank}(\text{S}\cup\{\boldsymbol{\beta}\})\text{=rank }A$

$\dim V(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=\dim V(S)$，即$\text{rank }A=\text{rank }\tilde{A}$

非齐次线性方程组解集的结构

定理2.4.2 任意取定非齐次线性方程组(2.4.1)的一个特解 η，则(2.4.1)的通解为$X=\eta+Y$ ，其中Y是与(2.4.1)对应的齐次线性方程组(2.4.5)的通解。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (2.4.1)$$

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0 \quad (2.4.5)$$

定理2.6.2 设 η 是数域F上的非齐次线性方程（2.4.1）的一个特解，$X_1,\cdots,X_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组（2.4.5）的一个基础解系。则非齐次线性方程组（2.4.1）的通解为

$$X=\eta+t\ X_1+\cdots+t_{n-r}X_{n-r}$$

其中 $t_1,\cdots,t_{n-r}$ 是F中的任意常数。

例7 设4元线性方程组的系数矩阵A的秩 rankA=3. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是它的3个解，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\4\end{pmatrix},\quad 5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\8\end{pmatrix}$$

求这个线性方程组的通解。

解 以A为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间V_A的维数$\dim V_A = 4 - \text{rank}\,A = 4 - 3 = 1$。如果原方程组是齐次线性方程组，则$\alpha_1$，$5\alpha_2 - 2\alpha_3$都是它的解，都在1维空间$V_A$中。

机动 目录 上页 下页 返回 结束

但α_1，$5\alpha_2-2\alpha_3$线性无关，不在同一个1维子空间中。因此原方程组是非齐次线性方程组。

原线性方程组的任意两个解的差是对应的齐次线性方程组的解，含于V_A。因此V_A包含$\alpha_2-\alpha_1$，$\alpha_3-\alpha_1$，从而包含它们的线性组合

$$X_1=5(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)-2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=(5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)-3\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\8\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\\9\\-4\end{pmatrix}$$

因此，方程组的通解为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + tX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

§2.7 子空间的交与和

子空间的交

例3 (1) 设W_1，W_2是数域F上的线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0 \\ x_2+2x_3+x_5=0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} x_1+2x_2+7x_3+5x_4-4x_5=0 \\ x_2+4x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的解空间。求$W_1\cap W_2$。

解 将这两个方程组的4个方程组共同组成一个方程组，求得的通解$\left(-\frac{1}{2}t_1+3t_2, 3t_1-3t_2, -\frac{3}{2}t_1+t_2, t_1, t_2\right)$

即 $t_1\left(-\frac{1}{2},3,-\frac{3}{2},1,0\right)+t_2(3,-3,1,0,1)$

组成的集合就是$W_1\cap W_2$。容易看出$W_1\cap W_2$是由两个线性无关的向量组成的2维子空间。

例3 (2) 设π_1是建立了空间直角坐标系的3维几何空间R^3中过点(0,0,0)，(1,-1,1)，(1,2,-3)的平面，π_2是过点(0,0,0)，(1,-1,-1)，(2,3,1)平面，求这两个平面的交集$\pi_1\cap\pi_2$。

解 用3维几何空间中坐标(x,y,z)的点表示R^3中的向量(x,y,z)，则π_1是向量$\alpha_1=(1,-1,0)$，$\alpha_2=(1,2,-3)$生成的子空间，π_2是向量$\beta_1=(1,-1,-1)$，$\beta_2=(2,3,1)$生成的子空间。

$$\boldsymbol{\alpha}\in\pi_1\cap\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2\left(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{R}\right)$$

$$\left(2,7,1\right)$$

条件 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2$ ，即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 - y_1\boldsymbol{\beta}_1 - y_2\boldsymbol{\beta}_2 = 0$$

将$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$的坐标代入得

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-y_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}-y_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

这是以x_1,x_2,y_1,y_2为未知数的线性方程组，求得通解为

$$(x_1,x_2,y_1,y_2)=t\left(\frac{19}{3},\frac{5}{3},6,1\right)$$

将 $x_1=\frac{19}{3}t, x_2=\frac{5}{3}t$ 代入(2,7,1)得

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{19}{3}t(1,-1,0)+\frac{5}{3}t(1,2,-3)=t(8,-3,-5)$$

因此 $\pi_1\cap\pi_2=\{t(8,-3,-5)\mid t\in R\}$ 是(8,-3,-5)生成的1维子空间，图像是过原点和点(8,-3,-5)的直线。

定理2.7.1 设W_i ($i \in I$)是F上线性空间V的任意一组子空间，$U = \bigcap_{i \in I} W_i = \{\alpha \mid \alpha \in W_i, \forall i \in I\}$

是这些子空间的交。则U是V的子空间。（注意：这里的 I 是用来给出子空间W_i的“编号” i 的集合，可以是无穷集合。）

证明 对任意的 $u,v \in U$，$\lambda \in F$，

u,v含于$\cap_{i \in I} W_i$ => u,v含于每个W_i

由于W_i是子空间，$u + v \in W_i$，$\lambda u \in W_i$。这又导致$u + v$和λu含于$U = \cap_{i \in I} W_i$。这就证明了U是子空间。

子空间的和

定义 设V是F上线性空间，$W_1,\ldots, W_t$是V的子空间。定义

$$W_1+\ldots+ W_t=\{b_1+\ldots+b_t \mid b_i\in W_i, \mathbf{1}\leq i \leq t\}$$

称为子空间$W_1,\ldots, W_t$的和。

例4 给定F^4的子空间W_1的基$\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和子空间W_2的基$\{\beta_1,\beta_2\}$其中$\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_1=(0,1,1,0)$, $\beta_1=(1,2,3,4)$, $\beta_2=(0,1,2,2)$.

(1) 求W_1+W_2的维数并求出一组基;

(2) 求$W_1\cap W_2$的维数并求出一组基,扩充为W_1+W_2的一组基;

解: (1)W_1+W_2由$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$生成,S的极大线性无关组就是$W_1+W_2$的基.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&2&1\\0&1&3&2\\0&0&4&2\end{pmatrix}\longrightarrow T=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

T的前三列成列向量的极大线性无关组.可见$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$组成了$W_1+W_2$的一组基,同时我们有$\dim(W_1+W_2)=3$.

(2)仿照例3(2)得到

$W_1 \cap W_2=\{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2 | x_1,x_2,y_1,y_2 \in F\}$

解方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_1+x_4\beta_2=0$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&2&1\\0&1&3&2\\0&0&4&2\end{pmatrix}\longrightarrow T=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow \Lambda=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Λ对应的方程组的通解为$(x_1,x_2,x_3,x_4)=t(-1,1,1,-2)$ $W_1 \cap W_2=\{t(-\alpha_1+\alpha_2)=t(-\beta_1+2\beta_2) | t \in F\}$, $\alpha_0= \alpha_1-\alpha_2)=\beta_1-2\beta_2$ 组成了$W_1 \cap W_2$的一组基，同时可证$\{\alpha_0,\alpha_2,\beta_1\}$线性无关，组成了$W_1+W_2$的一组基。

命题 设V是F上线性空间，$W_1, \ldots, W_t$是V的子空间，则

(1) $W_1 + \ldots + W_t$ 是子空间；

(2) $W_1 + \ldots + W_t$是包含$W_1 \cup \ldots \cup W_t$的最小的子空间；

(3) 取每个W_i ($1 \le i \le t$)的一组基，则$M_1 \cup \ldots \cup M_t$生成的子空间等于$W_1 + \ldots + W_t$

(4) $\dim (W_1 + \ldots + W_t) \le \dim W_1 + \ldots + \dim W_t$

证明　记$W = W_1 + \ldots + W_t$，$M = M_1 \cup \ldots \cup M_t$。任取$u = u_1 + \ldots + u_t \in W$, $v = v_1 + \ldots + v_t \in W$ $\lambda \in W$，其中u_i，$v_i \in W_i$。则

$$u + v = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_t + v_t)$$

$$\lambda u = (\lambda u_1) + \ldots + (\lambda u_t) \qquad (2.7.3)$$

对每个$1 \le i \le t$，由于W_i是子空间，$u_i, v_i \in W_i \Rightarrow u_i + v_i \in W_i$ 且$\lambda u_i \in W_i$。(2.7.3)说明了$u+v \in W$，$\lambda u \in W$，这说明了W是子空间。

(2) 对任意$w \in W_1 \cup \ldots \cup W_t$，存在$1 \le i \le t$使$w \in W_i$。对每个$1 \le j \le t$，当$j \ne i$时取$w_j = 0 \in W_j$，当$j = i$时取$w = w_i = 0 \in W_i$，则$w = w_1 + \ldots + w_t \in W$。这就说明了W包含$W_1 \cup \ldots \cup W_t$。

设$U = V(W_1 \cup \ldots \cup W_t)$是$W_1 \cup \ldots \cup W_t$生成的子空间，也就是包含$W_1 \cup \ldots \cup W_t$的最小子空间。则U包含任何一组$w_i \in W_i (1 \le i \le t)$之和$w_1 + \ldots + w_t$，也就是包含W。由W是子空间知$W = U$。

(3) 每个$W_i(1 \le i \le t)$是M_i的线性组合，因而 $W_1 \cup \ldots \cup W_t$是$M = M_1 \cup \ldots \cup M_t$的线性组合。而W是$W_1 \cup \ldots \cup W_t$的线性组合，因此W是M的线性组合，等于M生成的子空间。

(4) W由M生成，其维数dim W不超过M所含向量个数$|M|$，每个M_i所含向量个数$|M_i| = \dim W_i$

因此$\dim W \le |M_1| + \ldots + |M_t| = \dim W_1 + \ldots + \dim W_t$

定理2.7.2 设W_1,W_2是V的子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

证明 取$W_1\cap W_2$ 的一组基$M_0=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ ，扩充为W_1的的一组基 $M_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m\}$ 。则

$$M=M_1\cup M_2=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s\}$$

生成W_1+W_2，所含元素个数

$$|M|=|M_1|+|M_2|-|M_0|=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cup W_2)$$

$$=m+s-r$$

我们证明M线性无关，是W_1+W_2的一组基。

设 (2.7.4)

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r+\cdots+x_m\alpha_m+y_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+y_s\beta_s=0$$

其中 $x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r+\cdots+x_m\alpha_m+y_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+y_s\beta_s=0$

$$x_i,y_j\in\mathbf{F}\left(1\le i\le m,r+1\le j\le s\right)$$

将(2.7.4)移项得

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r+\cdots+x_m\alpha_m=-y_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-y_s\beta_s \quad (2.7.5)$$

将等式(2.7.5)左边的向量记为α，右边的向量记为β。则α是M_1的线性组合，含于W_1；β是M_2的线性组合，含于W_2。等式(2.7.5)说明α = β同时含于W_1与W_2，因而α = β∈$W_1 \cap W_2$。

β应是$W_1 \cap W_2$的基M_0的线性组合，即：存在 $y_i \in \mathbf{F}\left(1 \le i \le r\right)$ 使，

$$y_1\alpha_1 + \cdots + y_r\alpha_r = \beta = -y_{r+1}\beta_{r+1} - \cdots - y_s\beta_s$$

即

$$y_1\alpha_1 + \cdots + y_r\alpha_r + y_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + y_s\beta_s = 0 \quad \left(2.7.6\right)$$

由于$\mathbf{M}_2 = \left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{\mathrm{r}}, \beta_{\mathrm{r+1}}, \cdots, \beta_{\mathrm{s}}\right\}$是$W_2$的基，(2.7.6)仅当所有的$y_i = 0$ ($1 \le i \le s$)时成立。代入(2.7.5)得

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + \cdots + x_m\alpha_m = 0 \quad \left(2.7.7\right)$$

而 $\mathbf{M}_1 = \left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{\mathrm{m}}\right\}$ 是W_1的基，(2.7.7)仅当所有的$x_i = 0$ ($1 \le i \le m$)时成立。

这就说明了(2.7.4)仅当所有的$x_i = y_i = 0$ ($1 \le i \le m$, $r + 1 \le j \le s$)时成立，

$$\mathbf{M} = \left\{ \alpha_i, \beta_j \middle| 1 \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{m}, \boldsymbol{r} + 1 \le \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{s} \right\}$$

线性无关，确实是$W_1 + W_2$的基。从而

$$\dim\left(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2\right) = \dim\left(\mathbf{W}_1\right) + \dim\left(\mathbf{W}_2\right) - \dim\left(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2\right)$$

推论2.7.1 设W_1,W_2是V的子空间，则

$$\dim(W_1\cap W_2)\geq\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(V)$$

特别，当 $\dim(W_1)+\dim(W_2)>\dim(V)$ 时有

$$W_1\cap W_2\neq 0$$

定理2.7.3 设W_1,W_2是F^n的子空间，则如下等价：

(1)$W_1\cap W_2=\{0\}$;

(2)$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$;

(3)每个$w\in W_1+W_2$对的分解式$w=w_1+w_2$由w唯一决定；

(4)设$w=w_1\in W_1$，$w_2\in W_2$，则$w_1+w_2=0$当且仅当$w_1=w_2=0$.

定义2.7.1 设W_1, W_2是线性空间V的子空间，满足定理2.7.3四个等价命题中的任意一个，则W_1+W_2称为W_1, W_2的直和，记为$W_1 \oplus W_2$