A

北京航空航天大学

2012－2013 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2013 年 06 月 19 日

A

一、 求解下面问题（每小题 6 分，满分 48 分）

1. 设 $f(x,y)$ 为一连续函数，求极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy$.

2. 改变累次积分的积分顺序：

$$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$$

3. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$.

4. 计算三重积分 $\iiint\limits_{V}(y^{2012}x+1)dxdydz$，其中 V 由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $3z=x^2+y^2$ 所成的立体.

5. 计算积分 $\boldsymbol{I=\int_{\Gamma}(x^2+2z)ds}$，其中曲线$\boldsymbol{\Gamma}$为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$（利用对称性）

6. 计 算 第 一 型 曲 面 积 分 $\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS$ ， 其 中 Σ 为 球 面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上

$z \geq h\ (0<h<a)$的部分. （可利用对称性）

7. 证明向量场

$$\vec{F}=(yz(2x+y+z),\ \ xz(x+2y+z),\ \ xy(x+y+2z))$$

是有势场，并求其势函数.

8. 设曲面Σ: $x+y+z=1\ \ (x,y,z\geq 0)$，已知连续函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^3+\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{dS},$$

求 $f(x,y,z)$.

二、（10 分）(直接计算，不能用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_S (z^2+x)dydz + ydzdx - zdxdy$, 其中 S 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧。

三、（12 分）(利用 Green 公式）

计算 $\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}$, $(a>0,\ b>0)$ 其中 L 为一条无重点, 分段光滑且不经过原点的连续闭曲线, L 的方向为逆时针方向.

四 、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算$\iint\limits_S yz\,dydz+(x^2+z^2)y\,dzdx+xy\,dxdy$，其中 S 为曲面 $4-y=x^2+z^2\ (y>0)$ 的外侧.

五、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算$\oint_\Gamma 2ydx+3xdy-z^2dz$，其中$\Gamma$是球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的上半部分 S（取外侧）的边界曲线，从 z 轴正向看逆时针方向.

六、（**10** 分）证明 Green 第一公式：

其中 $\boldsymbol{L}$ 为封闭光滑曲线，$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 围成的区域。这里假设 $\boldsymbol{u}$ 有连续的二阶偏导数，$\vec{\boldsymbol{n}}$ 为 $\boldsymbol{L}$ 外法线单位向量，上式曲线积分为逆时针方向。

七、附加题（10 分） 已知函数 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

A

北京航空航天大学

2013－2014 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2014 年 06 月 27 日

一、 求解下面问题（每小题 6 分，满分 48 分）

1. 设 $u(x,y,z)$ 为连续函数，　　是以 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，半径为 R 的球面，求极限

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} u(x,y,z)dS.$$

2. 计算 $\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy,$ 其中 D 是由 $x=0, y=1$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

3. 已知椭圆型区域 $D=\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$. 利用广义极坐标变换计算积分

$$I=\iint_D (b^2x^2+a^2y^2)d\,x\,d.$$

4. 求曲面Σ: $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 2)$的面积.

5. 计算三重积分$\iiint\limits_V \left[(\cos y)^{2012}x+3\right]dxdydz$，其中　由$z=1$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所成的立.

6. 计算第一型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)^2 dS$，其中　为上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2$（$z\ge 0$），

其中$a>0$. （可利用对称性）

7. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} z\, ds$, 其中 Γ 为圆锥螺线 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, t \in [0, 2\pi]$.

8. 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$,

其中 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$，取上侧.

二、（本题 10 分）求方程 $y'' + 3y' - 4y = xe^{2x}$ 的通解.

三、（本题 10 分）设曲线积分 $I=\int_L \frac{(x+2y)dx+(ax+y)dy}{x^2+y^2}$ 在区域 D 内与路径无关，

（1）写出满足题设的区域 D 的条件，并求常数 a；

（2）设曲线 L 为从点 $A(1,0)$ 沿上半平面到点 $B(2,0)$ 的一段弧，求曲线积分 I .

四、（本题 12 分）(利用 Green 公式)

计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}$, 其中 是以 $(1,1)$ 为中心, 4 为半径的圆周, 取顺时针方向.

五 、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 是曲面

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，取上侧.

六、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算 $\oint_{\Gamma} ydx+(\mathrm{z}-\cos x)dy+(x+e^{z})dz,$ 其中　是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+\mathrm{z}=0. \end{cases}$ 从 $\boldsymbol{z}$ 轴正向看为逆时针方向.

七、附加题（本题 10 分）

设 是分片光滑的闭曲面， 上的单位外法向量$\vec{n}$的方向余弦为$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，分别证明对于以下两种情形，

(1) P,Q,R在$\overline{\Omega}$上具有二阶连续偏导数，Ω为 所围的立体；

(2) P,Q,R在 上具有一阶连续偏导数.

都成立 $$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=0.$$

A

北京航空航天大学

2014－2015 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2015 年 07 月 10 日

一、 选择（每小题 4 分，共 20 分）

1. 向量场 $\vec{F}=(x-z, x^3+yz, -3xy^2)$ 的旋度为 (　　)

A. $(-6xy-y, 3y^2-1, 3x^2)$； B. $(-6xy-y, 3y^2+1, 3x^2)$；

C. $(-6xy+y, 3y^2-1, -3x^2)$； D. $(-6xy-y, 3y^2-1, 3x^2+1)$.

2. 已知 $f(x,y,z)$ 为连续函数，则极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2} f(x,y,z)dxdydz=$ (　　)

A. $f(0,0,0)$； B. $\frac{4}{3}f(0,0,0)$； C. $4f(0,0,0)$； D. $\frac{3}{4}f(0,0,0)$.

3. 改变积分次序：$\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$ =（　　）

A. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_0^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$；

B. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$；

C. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$；

D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_0^2 dx\int_1^{2-x} f(x,y)dy$.

4. 已知 $I_1=\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ I_2=\iint\limits_D \ln(x+y)dxdy,\ I_3=\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2dxdy$

其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为 $(1,0), (1,1), (2,0)$, 则大小顺序为（　　）

A. $I_1>I_2>I_3$； B. $I_1>I_3>I_2$； C. $I_2>I_1>I_3$； D. $I_3>I_2>I_1$.

5. 设 L 是上半平面 $(y>0)$ 有向分段光滑曲线，如果积分 $\int_L \frac{(x+ay)\mathrm{d}x+ydy}{x^2+y^2}$ 与路径无关，则 a 的值为（　　）

A. -1； B. 0； C. 1； D. 2 .

二、计算（每小题 5 分，满分 30 分）

1. 已知椭圆型区域 $D=\{(x,y)\frac{x^2}{4}+y^2\le$ 利用广义极坐标变换计算积分 $I=\iint\limits_D(x^2+4y^2)dxdy$.

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma zdS$, 其中曲面 Σ 为锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$.

3. 利用对称性计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}[(xy^3\cos z - x^3e^{-z^2}) + 5]\,dxdydz$，其中 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4\,(z \geq 0)$ 和旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围成的区域.

4. 计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\left[(2x^2 + y^2) + 3xyz\right]dS$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，其中 $a > 0$. （可利用对称性）

Σ

5. 计算第一型曲线积分$\int_{\Gamma} xyz\ ds$, 其中$\Gamma: x=\cos t, y=\sin t, z=t, 0\le t\le 2\pi.$

6. 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z^2dydz+dzdx-y^2dxdy$,其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0, z=4$之间的部分，取下侧.

三（1）、（本题 8 分）求方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ 的通解.

三(2)、（本题 10 分） 已知 $I=\int_{\Gamma}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，

（1）证明曲线积分 I 与路径无关;

（2）设曲线 Γ 为从点 到点 的有向曲线，求曲线积分 I .

四、（本题 12 分）（利用 Green 公式）

计算 $\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$，其中 是上半椭圆：$\frac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1\ (y \geq 0)$，**方向为逆时针方向.**

五 、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中　是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于

$z=0,z=h\,(h>0)$之间的部分，取下侧.

六、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算$\oint_{\Gamma}(y+x)dx+(z-\sin y)dy+2xdz,$其中 为柱面$x^2+y^2=1$与平面$x+y+z=1$的交线，从 **z** 轴正向看 为顺时针方向.

七、附加题（本题 10 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$, L 为 D 的正向边界，试证明：

（1）

（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2.$

A

北京航空航天大学

2015－2016 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试　卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名_________ 成绩__________

任课教师__________考场___________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成　绩									
阅卷人									
校对人									

2016 年 06 月 24 日

A

一、 选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知$f(x,y,z)$为R^3上连续函数，Σ_r表示球面$x^2+y^2+z^2=r^2$，则极限$\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{\pi r^2}\oint\!\!\oint_{\Sigma_r} f(x,y,z)dS=$（　　）

A. $f(0,0,0)$；　B. $\frac{4}{3}f(0,0,0)$；　C. $4f(0,0,0)$；　D. $\frac{3}{4}f(0,0,0)$.

2. 改变积分次序：$\int_1^2 dy\int_y^{y^2} f(x,y)dx$ =（　　）

A. $\int_1^2 dx\int_x^{x^2} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_x^4 f(x,y)dy$；

B. $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$；

C. $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy$；

D. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy$.

3. 设$D=\{(x,y)|r\le|x|+|y|\le 1\}$（其中$0<\mathrm{r}<1$），记$I=\iint_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$，则$I$的值（　　）

A. 大于 0；　B. 小于 0；　C. 等于 0；　D. 与r有关，无法判断符号.

4. 设L是平面上的有向分段光滑曲线，如果积分$\int_L (x^4+4xy^a)dx+(6x^{a-1}y^2-5y^4)dy$与路径无关，则$a$的值为（　　）

A. -1；　B. 0；　C. 1；　D. 3.

5. 设函数f在矩形$I=[a,b]\times[c,d]$上有连续的二阶偏导数，则积分$\iint_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy=$（　　）

A. $f(b,d)+f(a,c)-f(a,d)-f(b,c)$；　B. $f(b,d)+f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)$；

C. $f(b,d)-f(a,c)+f(a,d)-f(b,c)$；　D. $f(a,d)+f(b,c)-f(b,d)-f(a,c)$.

二、计算题（每小题 6 分，满分 30 分）

1. 使用极坐标换元计算二重积分 $I=\iint_D sin(x^2+y^2)dxdy$，其中区域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\}$.

2. 计算三重积分 $I=\iiint_V (x^2\sqrt{x^2+y^2}+x^{2016}\sin(xy))dxdydz$, 其中区域 V 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围的有界闭区域.（提示：使用对称性简化运算）

3. 计算第一型曲线积分$I=\int_{\Gamma} zds$，其中$\Gamma: x=t\cos t, y=t\sin t, z=t\ (0\le t\le 1)$为圆锥螺线的一段.

4. 计算第二型曲线积分$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$，其中$\Gamma$为曲线：$x=t, y=t^2, z=t^3, t\in[0,1]$，方向是参数$t$增加的方向.

5. 计算第一型曲面积分$I=\iint_S (z+y\cos(xy))dS$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被柱面$x^2+y^2=ax$所截下来的上半部分（$a>0$）．（提示：使用对称性简化计算）

三、（本题 10 分）计算第二型曲面积分$\iint_\Sigma (y^2f(x,y,z)+x)dydz-xyf(x,y,z)dzdx+2dxdy$，其中$f(x,y,z)$为连续函数，$\Sigma$为曲面$x^2+y^2+z=1$在第一卦限的部分，指向上侧.

四、（本题 10 分）验证 $(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y})dx+(\ln x-\frac{x^2}{y^2})dy,(x>0,y>0)$ 为某个二元函数的全微分，求出函数 $u(x,\mathrm{y})$，并计算积分 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y})dx+(\ln x-\frac{x^2}{y^2})dy.$

五、（本题 10 分）利用 Green 公式计算 $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中 为单位圆 $x^2+y^2=1$，取逆时针方向.

六 、(**本题 10 分**)利用 Gauss 公式计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $\sum$ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于 $z=0, z=R(R>0)$ 之间的部分，取下侧.

七、（本题 10 分）用 Stokes 公式计算$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(x-y)dz$，其中$\Gamma$是从$(a,0,0)$经$(0,a,0)$和$(0,0,a)$回到$(a,0,0)$的三角形边界$(a>0)$.

八、附加题（本题 10 分）设$P(x,y)$和$Q(x,y)$在全平面上有连续偏导数，而且对任意点(x_0,y_0)为中心，以任意正数r为半径的上半圆$C: x = x_0 + rcos\theta, y = y_0 + rsin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$恒有

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

求证：$P(x,y) \equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0.$ （提示：做辅助曲线然后使用格林公式）

A

北京航空航天大学

2016－2017 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷

学　　号____________ 姓名__________ 成绩___________

任课教师_____________ 班次__________ 考场____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2017 年 06 月 26 日

A

一、　选单项择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设$I_1=\iint_D \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$I_3=\iint_D \sin[(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$其中$\mathrm{D}=\{(\mathrm{x},\mathrm{y})|x^2+y^2\le 1\},$ 则（　　　）.

A. $I_1>I_2>I_3$；B. $I_3>I_2>I_1$；C． $I_2>I_1>I_3$；　D.　$I_3>I_1>I_2$.

2.　设V_r表示球体$x^2+y^2+z^2\le r^2$,则极限

$$\lim_{\mathrm{r}\to 0}\frac{1}{r^3}\iiint_V \cos\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=（\qquad）.$$

A.　0　　　B.　$\frac{5}{3}\pi$　　　C.　$\frac{4}{3}\pi$　　　D. $\frac{2}{3}\pi$

3. 设曲线Γ为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$ 则曲线积分$\int_\Gamma (x+y^2)\,ds=$（　　　　）

A.　$\dfrac{2\pi a^2}{3}$.　　　B.　$\dfrac{4\pi a^2}{3}$.　　　C.　$\dfrac{2\pi a^3}{3}$.　　　D.　$\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

4. 给定曲面Σ：$|x|+|y|+|\mathrm{z}|=1$，已知其在第一卦限内的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则曲面积分 $\oiint_\Sigma$（$|x|+y$）dS=（　　　）

A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$;　　　B.　$\frac{4}{3}\sqrt{3}$;　　　C.　　$\frac{8}{3}\sqrt{3}$;　　　D.　$\frac{16}{3}\sqrt{3}$.

5. 设f(x)为连续函数，$\mathrm{F}(\mathrm{z})=\int_1^z \mathrm{d}y\int_y^z f(x)\mathrm{d}x$, 则$\mathrm{F}'(z)=$（　　　　）

A. $f(z)$;　　B.　$f(z)z$;　　C. $f(z)(1-z)$;　　D. $f(z)(z-1)$.

A

二、计算题（每空 6 分，满分 30 分）

1. 计算二重积分$\iint\limits_D \dfrac{1+x+y}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

2. 计算三重积分$\iiint\limits_V (x+y)^2 dxdydz$，其中 **V** 由$x^2+y^2=z^2$与平面$z=1$所围成的立体.

3. 计算第一型曲线积分$\oint_L x^{2017}y\mathrm{d}s$, 其中$L$为单位圆周.

4. 设L为椭圆$x^2+2y^2=2$的上半部分逆时针，计算第二型曲线积分

$$I=\int_L xdy-ydx.$$

5. 计算第一型曲面积分$\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS$，其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于$z=0$与$z=1$之间的部分.

三、（本题 8 分） 设Σ是平面$x-2y+z=1$在第四卦限内的部分，方向取与 z 轴正向夹角为锐角，求

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

四、（本题 8 分）（利用 Green 公式） 设L为**上半圆周** $x^2+y^2=9$，方向为逆时针方向，求$\int_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值.

五、（本题 10 分）(利用 Gauss 公式) 计算

$$\iint_S y^2 z\, dydz + 3(x^2+z^2)y\, dzdx + x^2 y\, dxdy,$$

其中 S 为曲面 $\mathbf{4 - y = x^2 + z^2\ \ (y > 0)}$ 的外侧.

六 、（本题 14 分）(利用 Stokes 公式) 计算

$$\oint_{\Gamma}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz,$$

其中 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx(z\geq 0, R>1)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线，从 z 轴正向看 为逆时针方向.

七、（附加题，本题 10 分）若在右半平面内，

曲线积分$\int_L \frac{\varphi(y)dx + xdy}{x^2 + y^2}$与路径无关，其中φ(y)连续可导.

（1）求函数$\varphi(y)$的表达式.

（2）对（1）中的$\varphi(y)$，求满足全微分

$du(x,y) = \frac{\varphi(y)}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ 且   的函数   .

A

北京航空航天大学

2017－2018 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试　卷（A）

班　　号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2018 年 06 月 28 日

A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2=2\}$，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下为（　　）.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}f(r\cos\theta+1,r\sin\theta+1)dr$

C. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$　D. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

2. 积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中 φ 有连续导数, $\varphi(0)=0$. 则 $\varphi(x)=$（　　）.

A. x^2　B. $x^2+C;$　C. $2x^2;$　D. $0.$

3. Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$，取外侧. Σ_1 为右半椭球面. 则（　　）.

A. $\iint\limits_{\Sigma}ydS=2\iint\limits_{\Sigma_1}ydS;$　B. $\iint\limits_{\Sigma}ydzdx=2\iint\limits_{\Sigma_1}ydzdx;$

C. $\iint\limits_{\Sigma}y^2dzdx=2\iint\limits_{\Sigma_1}y^2dzdx;$　D. $\iint\limits_{\Sigma}ydzdx=0.$

4. Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧. Σ_1 为上半球面；Σ_2 为下半球面；Σ_3 为 xOy 平面上的圆盘 $x^2+y^2\le 1$，取上侧. Γ 为 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=1$，从 z 轴正向来看为逆时针方向. 则与 $\oint_\Gamma xydx+yzdy+zxdz$ **不相等**的为（　　）.

A. $-\iint\limits_{\Sigma_1}ydydz+zdzdx+xdxdy;$　B. $-\iint\limits_{\Sigma_2}ydydz+zdzdx+xdxdy;$

C. $\iint\limits_{\Sigma_2}ydydz+zdzdx+xdxdy;$　D. $-\iint\limits_{\Sigma_3}ydydz+zdzdx+xdxdy.$

5. 设 $u(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是以 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，半径为 R 的球面，极限 $\lim\limits_{R\to 0^+}\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}u(x,y,z)dS=$（　　）.

A. $u(x_0,y_0,z_0)$；　B. $u(0,0,0)$；　C. $\frac{4u(x_0,y_0,z_0)}{3}$；　D. $\frac{u(x_0,y_0,z_0)}{2}.$

二、计算题（每小题 5 分，满分 30 分）

1.．设向量场$\overrightarrow{F}(x,y,z)=(2x,-4y,8z)$，求此向量场的旋度.

2. 计算$\int_0^1 dx\int_x^1 x\sin(y^3)dy$

3. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(z+2x+3y)dxdydz$，其中$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 2z\}$.

4. 计算$\oint_L (\frac{3}{10}x^2+\frac{2}{5}y^2)ds$，其中$L$为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, l是椭圆的周长.

5. 计算$\int_L 2xydx+x^2dy$，其中L为有向折线OAB． 这里$O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$．

6. 设Σ是圆柱面$x^2+y^2=1\,(0\le z\le 1)$，计算$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1-x^2}\,dS$

三、（10 分） 计算第二型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} \cos x dydz + \sqrt{1-y^2} dzdx + zdxdy$，其中$\Sigma$为 上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，取上侧.

四、（10 分）（利用 Green 公式）

计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{2x^2+3y^2}$, 其中 $\boldsymbol{L}$ 是以 (1,1) 为中心, 4 为半径的圆周, 取逆时针方向.

五、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{\Sigma} x(z-2y+1)dydz + y(x-z+2)dzdx + z(2y-x-1)dxdy$，其中$\Sigma$是曲面

$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$，取下侧.

六 、（10 分）(利用 Stokes 公式) 计算 $\oint_{\Gamma}(3y+2e^{x})dx+(3z-y^{2})dy+(3x+4e^{z})dz$,其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y-z=0. \end{cases}$ 从 z 轴正向看 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为逆时针方向.

七、（10 分）确定函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f(0)=0, g(0)=1$，且使得下面曲线积分与路径无关：$\int_L \left[\frac{g(x)}{2}y^2 - 4f(x)y\right]dx + \left[f(x)y + g(x)\right]dy + zdz$.

A

北京航空航天大学

2018－2019 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班 号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2019 年 06 月 24 日

A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 将$\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$化为极坐标下的二次积分为（　　）.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,dr$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,r\,dr$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,r\,dr$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta}} f(r)\,dr$

2. 下列论断中正确的是（　　）

A. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$, 其中$f(x,y)$是连续函数；

B. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2} f(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^a f(r^2)r^2\sin\varphi dr$, 其中$f(t)$是连续函数；

C. 有界闭区域D由分段光滑的闭曲线L围成，$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续的偏导数，则$\oint_L P(x,y)dy+Q(x,y)dx=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$；

D. 若空间有界区域V关于xOy平面对称，函数$f(x,y,z)$在V上连续，且$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$，则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=0$.

3. 设$f(x,y)$连续，$L=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2=R^2\}$，则$\lim\limits_{R\to0^+}\frac{\int_L f(x,y)ds}{2\pi R}=$（　　）.

A. $f(0,0)$;　　B. $2f(0,0)$;

C. $f(1,1)$;　　D. $2f(1,1)$.

4. 设$F(x)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^x f(t)dt$，其中$f(t)$为连续函数，则$F'(x)=$（　　）.

A. $f(x)$;　　B. $\pi f(x)$;

C. $2\pi f(x)$;　　D. 0.

5. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$，则$\iint\limits_\Sigma(x^2+y^2)dS=$（　　）.

A. $\frac{2\pi}{3}$;　　B. $\frac{4\pi}{3}$;

C. 2π;　　D. $\frac{8\pi}{3}$.

二、计算题（每小题 5 分，满分 30 分）

1. 设数量场 $f(x,y,z)=x^2+2yz+xz$，求 f 的梯度 $gradf$ 以及向量场 $gradf$ 的旋度.

2. 计算 $\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4$.

3. 计算 $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.

4. 计算第一型曲线积分$\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中$L: x=3\cos t,\ y=3\sin t, z=4t,$ $0\le t\le 2\pi$.

5. 计算第二型曲线积分$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中L为从$(2,0)$沿上半椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$到$(-2,0)$的曲线.

6. 设Σ是平面$6x+4y+3z=12, x, y, z\ge 0$，计算第一型曲面积分$\iint_\Sigma \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)dS$.

三、（10 分） 计算第二型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} y^3 z^2 dydz + (z+1)dxdy$，其中$\Sigma$为 上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧.

五、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_S (y-z+x^2)dydz+(z-x+y^2)dzdx+(x-y+z^2)dxdy$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 1$，方向取下侧.

六、（**10 分**）已知$\int_L xy^2dx + yf(x)dy$与路径无关，$f(x)$具有连续导数，且$f(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(2,2)} xy^2dx + yf(x)dy$.

七、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算 $\oint_L (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$, 其中 L 为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 为顶点的三角形边界，从 x 轴正向看过去，方向取逆时针.

北京航空航天大学

2019－2020 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号____________学号_______________姓名________

任课教师____________考场_______________成绩________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

一、 **计算题（20 分)**

1. 设区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$，求$\iint\limits_D \dfrac{1+xy^2}{1+x^2+y^2}dxdy.$

2. 设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，求$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz.$

3. 计算$\int_L (2+x^2y)\mathrm{d}s$，其中$L$为单位圆周$x^2+y^2=1$的右半部分.

二, 计算题（15 分）

1. 求函数$f(x,y)=x^2-2xy+3y^2-2x+2y$的极值.

2. 设函数$f(x)=1-x^2\ (0\le x\le\pi)$,

(1) 将函数$f(x)$展成余弦级数； (2) 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

三、（12 分）

设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ ，讨论：（1）$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性;

(2) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性;(3) $f(x,y)$在$(0,0)$点的可微性.

四、证明题（10 分）

证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(0,2\pi)$ 内可导.

五、（用 Green 公式计算 12 分）

已知L是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点$(2,0)$,再沿$x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线，计算曲线积分$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y.$

六、（计算题 17分）

设曲面Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，

（1）利用Gauss公式计算$\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（2）求$\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{2}(x^2y + xy + x^2z)\mathrm{d}S$.

七、（计算题　17 分）

(1) 利用Stokes公式 计算$\oint_{\Gamma}(y+x^2)\mathrm{d}x+(z+y^2)\mathrm{d}y+(2x+z^2)\,\mathrm{d}z$,其中$\Gamma$为平面$x+y+z=1$与柱面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$的交线，从$z$轴正向看向原点时$\Gamma$为顺时针方向.

(2) 求曲线积分$\int_{L} x\mathrm{d}x-y^2\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$, 其中$L$为曲线$\Gamma$从$(2,0,-1)$到$(-2,0,3)$的一段.

A

北京航空航天大学

2020－2021 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成　绩									
阅卷人									
校对人									

2021 年 06 月 25 日

A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$，$I_2=\iiint\limits_{\Omega}[\cos^4(x+y+z)+z^3]dxdydz$，$I_3=\iiint\limits_{\Omega}[\ln(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 之间的大小关系为（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　（B）$I_1>I_2>I_3$.

（C）$I_2>I_1>I_3$.　　（D）$I_2<I_1<I_3$.

2. 设 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$ 则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下为（　　）.

（A）$\int_0^a dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.　　（B）$\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.

（C）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.　　（D）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

3. 曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与坐标面所围成立体的体积为（　）

(A) $\frac{4\pi}{3}$.　　(B) $\frac{\pi}{2}$.

(C) π.　　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，L 是以 $M(x_0,y_0)$ 为中心，半径为 r 的圆周，极限 $\lim\limits_{r\to0^+}\frac{1}{r}\int_L f(x,y)ds=$（　　）.

（A）$2\pi f(x_0,y_0)$　　（B）$f(0,0)$

（C）$2\pi f(0,0)$　　（D）$f(x_0,y_0)$

5. 抛物面 $2z=x^2+y^2$ 位于平面 $z=2$ 下方的面积为（　）.

(A) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}+1)$.　　(B) $\pi(5\sqrt{5}-1)$.

(C) $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.　　(D) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.

二、计算题（每小题 5 分，满分 15 分）

1．设向量场$\vec{F}(x,y,z)=(xyz^2, z\sin y, x^2e^y)$,求散度$div\vec{F}$,旋度$rot\vec{F}$.

2.设$D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}$，$f(x)$连续且恒正，$a,b$是常数,计算$\iint\limits_D \dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$.

3．计算曲线积分 $\int\limits_L (x+y^2)ds$ 其中L是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

三、计算题（每题 5 分，共 15 分）

1 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(2z+3xy^2)dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成.

2. 计算积分 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(y\ge 0)$ 上从点 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$ 的一段弧.

3. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\ge 0$;

四、（10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(3y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为

$z=\sqrt{x^2+y^2}$，$0\le z\le b$，的外侧.

五、（10 分）设函数 $f(x),g(y)$ 在 R 上具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，已知积分

$\int\limits_L 2xydx+[f(x)+g(y)]dy$ 与路径无关，且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+[f(x)+g(y)]dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+[f(x)+g(y)]dy$$

求 $f(x),g(y)$.

六、（10 分）利用 Gauss 公式计算

$$\iint_S x(x-2y+x^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(y-2z+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z(z-2x+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot$$

其中 S 为上半球面 $\boldsymbol{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ 的上侧.

七 、（10 分）利用 Stokes 公式计算

$$\int_\Gamma (5y-2e^x)\mathrm{d}x+(5z-2y^2)\mathrm{d}y+(5x+e^{2z})\mathrm{d}z$$

其中$\boldsymbol{\Gamma}$是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y-z=0. \end{cases}$从 $\boldsymbol{z}$ 轴正向看$\boldsymbol{\Gamma}$为逆时针方向.

八、（10 分）利用 Green 公式

证明积分 $I=\oint_{L}\frac{e^{x}}{x^{2}+y^{2}}[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]=2\pi$，

其中 L 为任意包含原点在其内部的分段光滑闭曲线,L 取逆时针方向.

A

北京航空航天大学

2021－2022 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号______________学号__________________姓名__________

任课教师______________考场__________________成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2022 年 06 月 24 日

A

一、计算题（每小题 6 分, 共 30 分）

1. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$的收敛域及和函数.

2. 将$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, x\in[0,\pi]$展开为正弦级数,设该级数的和函数为$S(x)$, 求$S(\frac{\pi}{2}), S(\pi)$.

3. 已知区域$D: x^2+y^2\le 2$, 求$f(x,y)=3x^2+3y^2-2x^3$ 在D上的最大值和最小值.

4. 已知$z=x^2 f(x+y,x-y)+g(xy)$,其中f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶导数, 计算

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

5. 设$f(u)$具有连续导数, $f(0)=0$,区域$\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$,计算极限

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz}{\ln(1+t^4)}.$$

二、（本题 10 分）

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}$, 证明$S(x)$在$[-2,2]$上连续.

三、（本题 12 分）

设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$证明$f(x,y)$在$(0,0)$点可微,并求$df(0,0)$.

四、（本题 12 分）

计算曲线积分$\int_L\frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}$, 其中$L$是沿曲线$y=\pi\cos\frac{x}{2}$从$A(0,\pi)$到$B(\pi,0)$的一段.

五、（本题 12 分）

应用$Gauss$公式计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\Sigma$为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,取外侧.

六、（本题 12 分）

应用$Stokes$公式计算曲线积分$\oint_{\Gamma}(y^2-z)dx+(z-x^2)dy+(x+2y)dz$,其中$\Gamma$为柱面$\frac{x^2}{4}+y^2=1$与平面$x+y+z=2$的交线,从$z$轴正向看去为顺时针方向.

七、（本题 12 分）

已知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$绝对收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^p})$条件收敛,试讨论$p$的取值范围.

北京航空航天大学

2022－2023 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2023 年 06 月 15 日

一、　选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设$D: x^2+y^2 \le ay\ (a>0)$, $f(x,y)$是D上的连续函数, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=($　　　$)$.

(A) $\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$　　(B) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta$　　(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

2. 设 $c=8xi+2yj-z\vec{k}$，数量场$h(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$，则$div(hc)=($　　　$)$.

(A) $\dfrac{8x^2+2y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$　　(B) $\dfrac{8x^2+2y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}+9\ln(x^2+y^2+z^2)$

(C) $\dfrac{16x^2+4y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2}$　　(D) $\dfrac{16x^2+4y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2}+9\ln(x^2+y^2+z^2)$

3.设曲线积分 $\int_L xf(y)\mathrm{d}x+x^2y\,\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 f 具有一阶连续的导数,且 $f(0)=0$,则$\int_{(0,0)}^{(1,2)} xf(y)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=($　　　$)$.

(A) -2　　(B) 2　　(C) -4　　(D) 4

4.已知球面$x^2+y^2+z^2=1$，Σ是上半球面，Σ_1是Σ位于第一卦限的部分，则（　）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S$

5. 设Σ为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧，则以下结论**错误**的是（　　　）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

二、　计算题（每小题 6 分，满分 30 分）

1. 设定义在全空间R^3上的数量值函数$f(x,y,z)$具有二阶连续偏导数, 求$rot(grad\ f)$.

2. 计算$\iint\limits_{D}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是由直线$y=x, y=2x$和$y=2$所围成的有界闭区域.

3. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$: $\pi^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\pi^2$.

4. 计算$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$是曲线$\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}, 0\le\theta\le\pi$，常数$a>0$.

5. 计算$\iint_\Sigma \left[4x^2+5y^2-\sin(xz^2)\right]\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$.

三、（10 分）

计算第二型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma [g(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2g(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[g(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$g(x,y,z)$为连续函数，Σ为平面$x-2y+3z=4$在第四卦限部分的上侧.

四、（10 分）(利用 Green 公式)

计算曲线积分$I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$,其中$L:x^2+y^2=2$,顺时针方向.

五、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$,其中$r=\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$,

Σ为长方体$V=\{(x,y,z):|x|\le 1,|y|\le 3,|z|\le 3\}$的表面,并取外侧.

六 、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算曲线积分$\oint_{\Gamma}(2e^{x}+y^{2}-z^{2})\mathrm{d}x+(y^{2}+z^{2}-x^{2})\mathrm{d}y+(x^{2}-y^{2}+4\ln z^{2})\mathrm{d}z$,

其中Γ是平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$截立方体$:0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$的表面所得截痕,

从x轴的正向看向原点时取逆时针方向.

七、（**10 分**）设φ, ψ有连续导数,曲线积分

$$I=\int_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\psi(y)-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y$$ 与路径无关,

(1)当 $\varphi(0)=0, \psi(0)=1$时,求$\varphi(y), \psi(y)$;

(2)设 L 是从 $O(0, 0)$到 $N(\pi, \frac{\pi}{2})$的分段光滑曲线,计算 I .