北京航空航天大学

2014－2015 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ） 》

(A卷)

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成　绩									
阅卷人									
校对人									

2015年01月21日

一、 选择题（每题 4 分，满 20 分）

1. 下列结论正确的是（ C ）

A.若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $f(x)$在$[a,b]$上必有界；反之，若函数 $f(x)$在$[a,b]$有界，则 $f(x)$在$[a,b]$必可积；

B.函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,则 $f(x)$在$[a,b]$上必有原函数；反之，若函数 $f(x)$在$[a,b]$有原函数，则 $f(x)$在$[a,b]$必可积；

C.若函数在任何有限区间上可积，则对任一点$c\in[a,b]$有$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$；

D.若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则必存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

2. $\int_{-R}^{R}(x^{2015}\cos x+1)\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=$（ A ）

A. $\frac{1}{2}\pi R^2$　　B. 0　　C. $\frac{1}{4}\pi R^2$　　D. πR^2

3. 下列命题中正确的是（ C ）

①若$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛；

②若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$也收敛；

③若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散，则$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx$发散；

④若$\int_a^{+\infty}f(x)dx$和$\int_a^{+\infty}g(x)dx$都发散，则$\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx$也发散；

A. ①②　　B. ②③　　C. ①③　　D. ③④

4. $\int_0^1\ln x dx=$（ B ）

A. 1　　B. -1　　C. $+\infty$　　D. $-\infty$

5. 求双纽线$r^2=a^2\cos2\theta$围成的平面图形的面积（ C ）

A. a　　B. $\sqrt{a}$　　C. a^2　　D. $2a$

二、 计算题（每题 6 分，满分 30 分）

1. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

解：设

$\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2, dx=2tdt,$

于是

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{\arcsin t}{t}2tdt=2\int \arcsin tdt$$

$$=2t\arcsin t-2\int t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=2t\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.$$

建议：根式代换 2 分，剩下计算 4 分。也可以不做变量代换，直接凑微分。

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int \arcsin\sqrt{x}d\sqrt{x}=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-2\int \sqrt{x}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}dx$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+C.$$

2. 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int x^3 f'(x)dx$.

解：由于 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$，于是 $(\frac{\sin x}{x})'=f(x).$

即 $f(x)=(\frac{\sin x}{x})'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$

所以 $\int x^3 f'(x)dx=\int x^3 df(x)=x^3 f(x)-\int 3x^2 f(x)dx$ ——— （*）

$$=x^2\cos x-x\sin x-\int 3x^2\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3\int x\cos xdx-3\cos x$$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3x\sin x-6\cos x+C$$

$$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$$

其中 C 为任意常数.

建议：原函数定义求 $f(x)$ 2 分，（*）式分部积分 2 分，剩下计算 2 分。

（(*) 式中 $\int 3x^2 f(x)dx = 3\int x^2\, d\frac{\sin x}{x}$ 再分部积分也可以。）

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解： $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

建议：转化成定积分 4 分，结果 2 分。

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{2(1-\cos x)}$

解： $\frac{0}{0}$ 型，且当 $x\to0, 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，则利用洛必达法则得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{2(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt)'}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\cos^2x}(-\sin x)}{2x}=-\frac{1}{2e}.$$

建议：变上限函数求导 3 分，洛必达法则及结果 3 分。

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$, 其中 $p>0, n$ 为正整数.

解： 利用积分中值定理，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin\xi}{\xi}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}p,\ \xi\in(n,n+p)\ .$$

当 $n\to+\infty$ 时，$\xi\to+\infty$，$\sin\xi$ 有界，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}p=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}p=0.$$

建议：积分中值定理 3 分，求极限 3 分。

三、（本题 10 分）

求变上限函数 $f(x)=\int_0^{e^x}\dfrac{t^4-16}{t+1}dt$ 的最小值.

解：因为 $f'(x)=(\int_0^{e^x}\dfrac{t^4-16}{t+1}dt)'=\dfrac{(e^x)^4-16}{1+e^x}e^x$， -------3 分

令 $f'(x)=0$，我们得到驻点 $x=\ln 2$. -------1 分

根据函数的性质可知函数在 $x=\ln 2$ 处取得最小值， -----2 分

则

$$\min f(x)=f(\ln 2)=\int_0^2\frac{t^4-16}{t+1}dt=\int_0^2\frac{(t^4-1)-15}{t+1}dt$$

$$=\int_0^2(t^2+1)(t-1)\,dt-\int_0^2\frac{15}{t+1}dt=\frac{4}{3}-15\ln 3.$$

------4 分

四、（本题 10 分）

设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数，单调递减，证明对于 $0<a<b<1$，不等式

$b\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^b f(x)dx$ 成立.

证明：方法一: 命题等价于

$$(b-a)\int_0^a f(x)dx \ge a\int_a^b f(x)dx,$$ **-------2 分**

由于 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数，所以在上式左右两边利用积分中值定理，得

$(b-a)af(\xi_1) \ge (b-a)af(\xi_2), \xi_1 \in (0,a), \xi_2 \in (a,b)$. **----每个中值定理 3 分，共 6 分**

$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的递减函数，所以 $f(\xi_1) \ge f(\xi_2)$.　　上式成立,得证. **-------2 分**

方法二:　设 $F(x) = b\int_0^x f(t)dt - x\int_0^b f(t)dt, x \in [0,b]$, **-------2 分**

则 $F'(x) = bf(x) - \int_0^b f(t)dt$ **-------2 分**

由第一积分中值定理知 $F'(x) = b[f(x) - f(\xi)], \xi \in (0,b)$ **-------2 分**

由于 $f(x)$ 为单调递减的函数, 所以

当 $0<x<\xi$ 时, $F'(x) \ge 0$,即 $F(x)$ 单调增加;

当 $\xi<x<b$ 时, $F'(x) \le 0$, 即 $F(x)$ 单调减少. **-------2 分**

而 $F(0)=F(b)=0$,所以 $\forall x \in [0,b], F(x) \ge 0$.从而 $F(a) \ge 0$. 得证. **-------2 分**

方法三: 做代换 $x = \frac{a}{b}t$, **-------2 分**

则 $b\int_0^a f(x)dx = a\int_0^b f(\frac{a}{b}t)dx$, **-------2 分**

命题等价于证明 $a\int_0^b f(\frac{a}{b}t)dt \ge a\int_0^b f(t)dt$, 即 $a\int_0^b \left[f(\frac{a}{b}t) - f(t) \right] dt \ge 0$. **-------3 分**

对任意的 $0<a<b<1$, $\frac{a}{b}t < t$, 由函数单调递减 $f(\frac{a}{b}t) \ge f(t)$. **-------2 分**

所以由积分的保号性 $a\int_0^b \left[f(\frac{a}{b}t) - f(t) \right] dt \ge 0$. 得证. **-------1 分**

五、（本题 10 分）

已知星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$， $a > 0$. 求：（1）它的全长；（2）它绕x轴旋转而成的旋转曲面的面积；（3）它绕x轴旋转而成的旋转体的体积.

解：（1）先求

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t.$$

由对称性只需要求第一象限的曲线的弧长，所以在任意$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 弧长微分为

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 3a\sqrt{\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t}dt = 3a\sin t\cos t.$$

于是所求弧长为

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t dt = -3a\cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$ ------4 分

（2）由对称性及面积计算公式，得

$$A = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t dt$$ ------3 分

$$= \frac{12}{5}\pi a^2.$$

（3）所求体积为

$$A = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi\int_0^{\pi} 3a^3\sin^7 t\cos^2 t dt = 3a^3\pi\int_0^{\pi}(\sin^9 t - \sin^7 t)dt = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

------3 分

建议：相应求弧长面积体积公式写出来即给部分分数。

六、（本题 10 分）

假设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上可导，满足 $f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}} e^{x^2-4}f(x)dx$，证明在 $(1,2)$ 上至少存在一点 c，使得 $f'(c)+2cf(c)=0$.

证明： 令 $g(x)=e^{x^2}f(x),$ 则 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上可导， -----2 分

$$g(2)=e^4 f(2)=e^4\times 2\int_1^{\frac{3}{2}} e^{x^2-4}f(x)dx=2\int_1^{\frac{3}{2}} e^{x^2}f(x)dx,$$ -----2 分

由积分中值定理得，

$$2\int_1^{\frac{3}{2}} e^{x^2}f(x)dx=2\times\frac{1}{2}\times e^{\xi^2}\times f(\xi)=g(\xi),\ \xi\in(1,\frac{3}{2}).$$ -------3 分

由 ROLLE 中值定理， $\exists c\in(0,2),\ g'(c)=0,$ -------2 分

即：$e^{c^2}f'(c)+e^{c^2}2cf(c)=0.$

而 $e^{c^2}\neq 0$，所以 $f'(c)+2cf(c)=0$． 得证. -------1 分

七、（本题 10 分）讨论无穷广义积分$\int_1^{+\infty}(3-\arctan x)\frac{\cos 2x}{x^m}dx\ (m>0)$的敛散性，若收敛，说明是绝对还是条件收敛.

解：由于$|\int_1^A\cos 2xdx|\le 2,$ 当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{x^m}\to 0,$ 所以由 Dinichlet 判别法知，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^m}dx \text{ 收敛}.$$ -------2 分

同理：$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^m}dx$收敛。

又由于$3-\arctan x$单调有界（$3-\frac{\pi}{2}<3-\arctan x\le 3-\frac{\pi}{4}$），所以由 Abel 判别法得

$$\int_1^{+\infty}(3-\arctan x)\frac{\cos 2x}{x^m}dx\ (m>0) \text{ 收敛}.$$ ------------2 分

（1） 当$m>1$时，$|\frac{\cos 2x}{x^m}(3-\arctan x)|\le\frac{1}{x^m}(3-\frac{\pi}{4}),$

由于$\int_1^{+\infty}(3-\frac{\pi}{4})\frac{1}{x^m}dx$收敛，所以由比较判别法，

$$\int_1^{+\infty}|(3-\arctan x)\frac{\cos 2x}{x^m}|dx \text{ 收敛},$$

因此当$m>1$时，$\int_1^{+\infty}(3-\arctan x)\frac{\cos 2x}{x^m}dx$ 绝对收敛． ---------3 分

（2） 当$0<m\le 1$时，由于

$$|\frac{\cos 2x}{x^m}(3-\arctan x)|\ge\frac{(3-\frac{\pi}{2})\cos^2 2x}{x^m}=(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4})\frac{1}{x^m}(1+\cos 4x),$$

-----1 分

且$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^m}dx$发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^m}dx$收敛， ------1 分

所以$\int_1^{+\infty}|(3-\arctan x)\frac{\cos 2x}{x^m}|dx$发散．

因此当$0<m\le 1$时，$\int_1^{+\infty}(3-\arctan x)\frac{\cos 2x}{x^m}dx$条件收敛． ----------------1 分

八、附加题（本题 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\le 0,\ x\in[0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f(\frac{1}{3}).$$

证明：将函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 展开成 1 阶 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{1}{3})^2,(0<\xi<1).$$ --------3 分

由 $f''(x)\le 0,$ 得到 $f(x)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}),\ x\in[0,1].$ **----------1 分**

再用 x^2 替换 $x,$ 即得到

$$f(x^2)\le f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3}).$$ ----------3 分

对上述不等式两边从 0 到 1 积分，由于 $\int_0^1 (x^2-\frac{1}{3})dx=0,$ **---------------2 分**

就得到

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f(\frac{1}{3}).$$ ----------1 分