第十五章　多元函数的微分

§15.1 全微分与偏导数(1)

多元函数偏导数、全微分、方向导数的定义

定义1 设开集 $D \subset R^n, f: D \to R$,对于 D 中给定 $\boldsymbol{x}_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，极限

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots x_k + \Delta x_k, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots x_k, \cdots, x_n)}{\Delta x_k}$$

$(k = 1, 2, \cdots, n)$ 存在,

则称函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于第 k 个分量可偏导,

并称该极限为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 x_k 的偏导数，

记为

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \text{ 或 } f_{x_k}(\boldsymbol{x}_0).$$

如果函数$f(\boldsymbol{x})$在D上处处关于x_k可偏导，则D的每一点$\boldsymbol{x}$与这点处关于x_k的偏导数之间就建立了一个n元函数，称为$f(\boldsymbol{x})$关于x_k的偏导函数，简称

偏导数，记为

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}),\left(\ \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ \right)}$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

$$\boxed{\text{或}\quad f_{x_k}(\boldsymbol{x}),\left(\ f_{x_k}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ \right).}$$

定义2 设开集$D\subset R^n$, $f:D\to R$, 任取一点$\boldsymbol{x}_0\in D$, 对于D中$\boldsymbol{x}_0$附近的$\boldsymbol{x}$，如果

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\lambda_1\Delta x_1+\lambda_2\Delta x_2+\cdots+\lambda_n\Delta x_n+o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|),$$

其中λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n是与$\boldsymbol{x}$无关的常数

$\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=(\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n)$, 则称函数$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$处可微 .

线性主要部分

$\lambda_1\Delta x_1+\lambda_2\Delta x_2+\cdots+\lambda_n\Delta x_n$为$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$处的**全微分**.

记为 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\lambda_1\mathrm{d}x_1+\lambda_2\mathrm{d}x_2+\cdots+\lambda_n\mathrm{d}x_n$

可推导得 $\lambda_k=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0),(k=1,2,\cdots,n).$

定义3 设开集 $D \subset R^n, f: D \to R$,对于$D$中给定 $\boldsymbol{x}_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，如果函数$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$处关于每个分量都可偏导，则称向量

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \right)}$$

为$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$的**梯度**，记为$grad\ f(\boldsymbol{x}_0)$.

定义4 设 $\boldsymbol{u}$ 为给定的方向，$\boldsymbol{x}_0 \in D$，极限

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

称为$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$处沿方向 $\boldsymbol{u}$的**方向导数**，记为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)$.

二元函数偏导数定义及计算

定义 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y取固定值y_0时，若一元函数$f(x,y_0)$在x_0可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\text{或}f_x(x_0,y_0).$$

同理可定义函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记为$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$或$f_y(x_0,y_0)$.

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内任一点(x,y)处对x的偏导数都存在，那么这个偏导数就是x、y的函数，它就称为函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导函数，简称偏导数，

记作$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$或$f_x(x,y)$.

同理可以定义函数$z=f(x,y)$对自变量y的偏导数，记作$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$或$f_y(x,y)$.

三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处的偏导数可以类似定义

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

有关偏导数的几点说明：

1、 偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$是一个整体记号，不能拆分；

2、 求多元函数的偏导数可以按照一元函数的求导法则和求导公式进行；

但求分界点、不连续点处的偏导数要用定义求；

3、偏导数存在与连续的关系

一元函数中在某点可导 $\longrightarrow$ 连续，

多元函数中在某点偏导数存在 $\overset{?}{\longrightarrow}$ 连续，

例如，函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

依定义知在(0,0)处，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$

但函数在该点处并不连续. 偏导数存在 $\not\longrightarrow$ 连续.

偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 存在只表明一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 x_0 连续.

多元函数中在某点连续 $\overset{?}{\Longrightarrow}$ 偏导数存在，

不能，例如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在(0,0)处连续，

但是$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$都不存在.

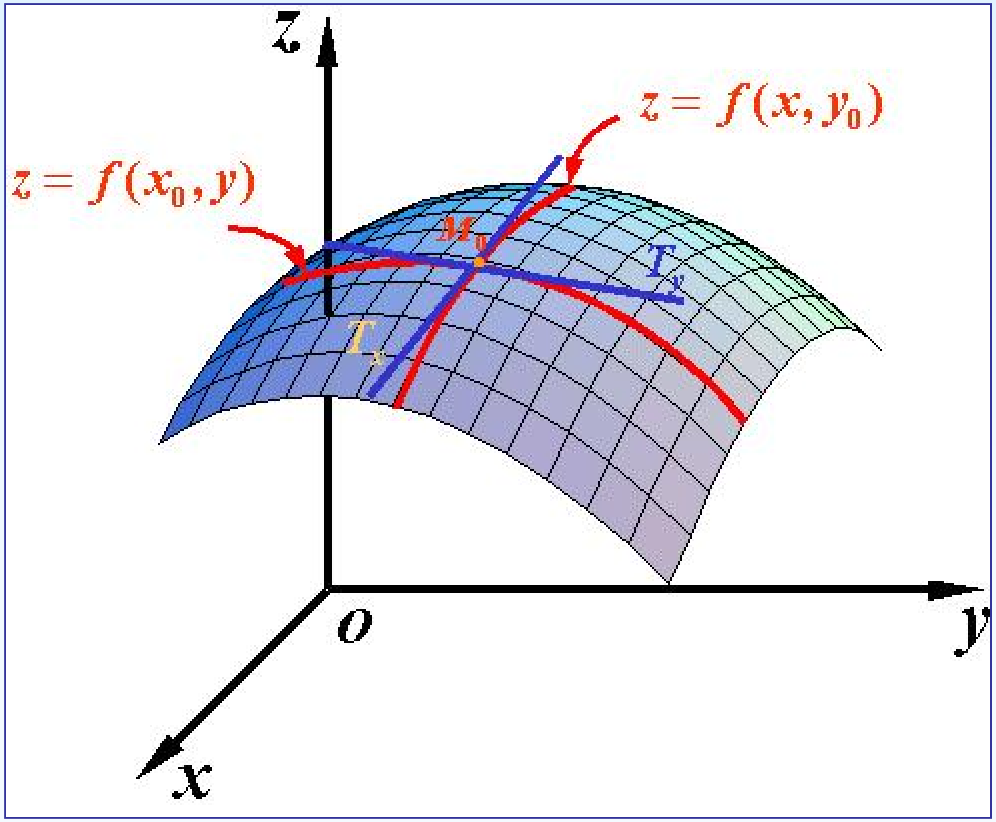
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{不存在}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}\text{不存在}$$

4、偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上一点,

如图



几何意义:

偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 就是曲面被平面 $y = y_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 与 x 轴的正向夹角的正切，或此切线对 x 轴的斜率.

偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 就是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 与 y 轴的正向夹角的正切，或此切线对 y 轴的斜率.

例 1 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1,2)处的偏导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$.

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 2\times1 + 3\times2 = 8,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 3\times1 + 2\times2 = 7.$$

例 2 设$z = x^y\ (x > 0, x \neq 1)$，

求证 $$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

证 $$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,$$

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x}x^y \ln x$$

$$= x^y + x^y = 2z.$$ 原结论成立.

例 3 设 $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \qquad (\sqrt{y^2}=|y|)$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{(-xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

例 4 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$（R为常数），求证：$\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}=-1.$

证 $p=\dfrac{RT}{V}\Rightarrow\dfrac{\partial p}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2};$

$V=\dfrac{RT}{p}\Rightarrow\dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{R}{p};\qquad T=\dfrac{pV}{R}\Rightarrow\dfrac{\partial T}{\partial p}=\dfrac{V}{R};$

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

例5 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$

试求 $f_x(0,1), f_y(0,1)$.

解 $$f_x(0,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}.$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}=1.$$

$$f_y(0,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0,1+\Delta y)-f(0,1)}{\Delta y}.$$

$$=0.$$