§2 可积条件和定积分的性质

一、可积的条件

考虑函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数}\\ 0, x\text{为无理数}\end{cases}$

对区间 [0,1] 进行分割

取ξ_i为有理数 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta x_i = 1$

取ξ_i为无理数 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot \Delta x_i = 0$

$\therefore \int_0^1 D(x)dx$不存在

定理2.1（可积的必要条件）

若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证明 设$\int_a^b f(x)dx = I$,

则对$\varepsilon=1$，必存在一个分割（划分）T,使得

$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1$， 其中$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$任选,

易见 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I| + 1$,

$$|f(\xi_1)\Delta x_1| < |I| + 1 + \left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|,$$

$$|f(\xi_1)| < \frac{1}{\Delta x_1}\left(|I| + 1 + \left|\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|\right).$$

固定$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 2,3,\cdots,n$, ξ_1在$[x_0, x_1]$上任取,

易见$f(x)$在$[x_0, x_1]$上有界, 其他类似.

注：可积必有界，有界未必可积.

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

定义（达布(Darboux)上和达布下和）

设$f(x)$在$[a,b]$上有界,取$[a,b]$的分割

$$T: x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

定义和式: $S(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

这里M_i, m_i分别为$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的上确界和下确界.

它们分别称函数$f(x)$相应于分割T的达布上和和下和.

注 对于任意分割$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$,有

$$m(b-a) \le s(T) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le S(T) \le M(b-a).$$

引理2.1 设$f(x)$在$[a,b]$上有界，设有两个分割T,T'，其中T'是在T基础上多加了k个新分点的加密分割，则

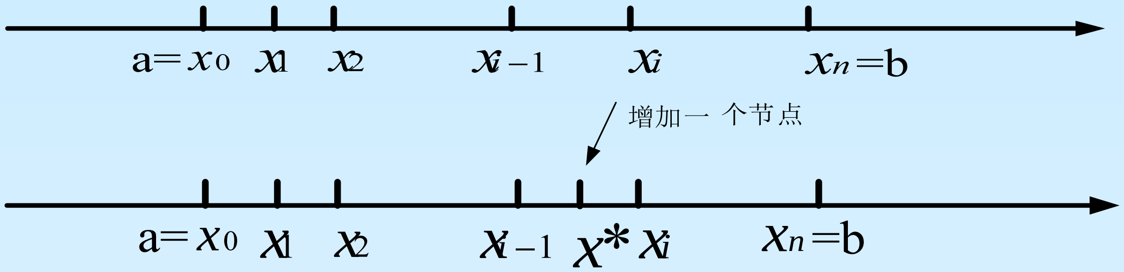
$$S(T) \ge S(T') \ge S(T) - k\omega\|T\|,$$

$$s(T) \le s(T') \le s(T) + k\omega\|T\|.$$

这里$\omega = M - m$，M, m分别是f在$[a,b]$上的上下确界.

增加分点后,上和不增,下和不减

证明 仅证明加密分割只增加了一个节点的情况，其余类似.



$$T: x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i\text{-}1} < x_i < \ldots < x_n = b,$$

$$T': x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i\text{-}1} < x^* < x_i < \ldots < x_n = b.$$

在$[x_{i\text{-}1}, x_i]$中,用$m_i \Delta x_i$代替

$$(x^* - x_{i\text{-}1}) \inf(f[x_{i\text{-}1}, x^*]) + (x_i - x^*) \inf(f[x^*, x_i])$$

可见$s(T) \le s(T')$,

$$s(T') - s(T) \le M_i \Delta x_i - m_i \Delta x_i \le \omega \|T\|$$

类似可证明$S(T) \ge S(T') \ge S(T) - k\omega \|T\|$.

推论

设$f(x)$在$[a,b]$上有界. 对于任意两个分割T,T',有:

$$m(b-a)\le s(T')\le S(T)\le M(b-a)$$

证明

t1

将分割T'中的节点插入T得到新的分割T^*,则有

$$S(T)\ge S(T^*)\ge s(T^*),$$

$$s(T')\le s(T^*)\le S(T^*).$$

结论得证.

幻灯片 8

t1 增加了动画效果

thinkpad, 2011/7/28

定义 设$f(x)$在$[a,b]$上有界,定义

$$\overline{I}=\inf\left\{S(T)\middle|T\text{ 为}[a,b]\text{上一个分割}\right\}$$

$$\underline{I}=\sup\left\{s(T)\middle|T\text{ 为}[a,b]\text{上一个分割}\right\}$$

并称$\overline{I}$为$f(x)$在$[a,b]$上的上积分,$\underline{I}$称$f(x)$在$[a,b]$上的下积分.

引理2.2（Darboux定理）

对$[a,b]$上任意有界函数$f(x)$,有

$$\lim_{\|T\|\to 0}S(T)=\overline{I},\ \lim_{\|T\|\to 0}s(T)=\underline{I}.$$

定理 设$f(x)$在$[a,b]$上有界,则下列命题等价:

1) $f(x)$在$[a,b]$可积;

2) $\overline{I} = \underline{I}$;

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,使得对任意分割$T$,当$\|T\| < \delta$,

有$S(T) - s(T) < \varepsilon$. 即,$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

4) $\forall \varepsilon > 0$,$\exists$分割T,使得$S(T) - s(T) < \varepsilon$. 即,$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

5) 对于$[a,b]$上的任何一个分割T, $\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$;

这里$\omega_i = M_i - m_i$为$f(x)$在区间$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅.

例1 证明：若f在$[a,b]$上可积，且在$[a,b]$上$|f(x)|\geq m>0$，那么$\dfrac{1}{f}$在$[a,b]$上可积.

$\sum_i \omega_i(\frac{1}{f})\Delta x_i<\varepsilon$

证 任取$[a,b]$一个分割：$a=x_0<\cdots<x_n=b$.

$$\because \left|\frac{1}{f(x_1)}-\frac{1}{f(x_2)}\right|=\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_2)}\right|\leq\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{m^2}$$

$\leq \frac{1}{m^2}|f(x_2)-f(x_1)|$

$$\therefore \omega_i(\frac{1}{f})\leq\frac{\omega_i(f)}{m^2}$$

由f在$[a,b]$上可积，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$\|T\|<\delta$时

$$\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<m^2\varepsilon,$$

从而$\displaystyle\sum_{i=1}^n\omega_i(\frac{1}{f})\Delta x_i\leq\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$

二、定积分的基本性质

性质2.1 （线性性质）

假设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上可积，则对于任意实数α,β，$\alpha f(x)\pm\beta g(x)$也可积，且

$$\int_a^b(\alpha f(x)\pm\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx.$$

特别的，$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.$

性质2.2（保号性和保序性）

如果$\forall x\in[a,b], f(x)\ge g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx;$

特别的，如果$\forall x\in[a,b], f(x)\ge 0$，则$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$

性质2.3（估值不等式）

设$f(x)$在$[a,b]$上有最大值M和最小值m,则

$m \le f \le M$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

性质2.4（乘积可积性）

假设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上可积, 则$f(x)g(x)$在$[a,b]$上也可积.

注 一般地,$\int_a^b f(x)g(x)dx \ne \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$

例2 若$f(x)+g(x)$或$f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积，是否能推出$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积？

解　无法确定.

例如$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}, g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}\\ 1, & x\text{为无理数}\end{cases}$

在$[a,b]$上均不可积，

但$f(x)+g(x)=1$和$f(x)g(x)=0$在$[a,b]$上可积.

性质2.5（绝对可积性）

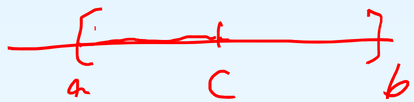
$$\big||f(x_1)|-|f(x_2)|\big| \le |f(x_1)-f(x_2)|$$
$$\Rightarrow \omega_i(|f|) \le \omega_i(f)$$

若f在$[a,b]$上可积，那么$|f|$也在$[a,b]$上可积， $\sum \omega_i(|f|)\Delta x_i < \varepsilon \Leftarrow \sum \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$

并且$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

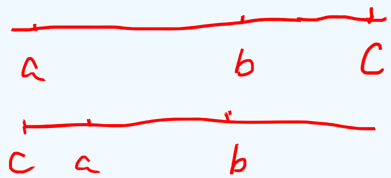
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

性质2.6（积分区间可加性）



若f在$[a,b]$上可积，则$\forall c \in (a,b)$，f在$[c,b]$与$[a,c]$上可积，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

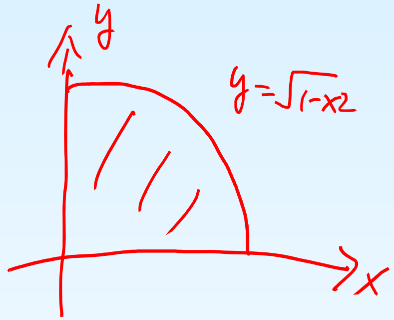


注 不论a,b,c的相对位置如何,上式总成立.

例如,若$a<b<c$, $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$

则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$



例3 计算积分$\int_0^2 f(x)dx$,其中$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1\le x\le 2.\end{cases}$

解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}+0=\dfrac{\pi}{4}.$

例 4 比较积分值$\int_0^{-2} e^x dx$和$\int_0^{-2} x dx$的大小.

解 $\because \quad e^x > x, \quad x \in [-2, 0]$

$$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$$

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} e^{\theta x} x^2 > 1 + x > x.$$

例 5 估计积分$\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx$的值.

解 $\forall\ x\in[0,\pi],\quad \frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\sin^3 x}\le\frac{1}{3},$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3}dx,$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^3 x}dx\le\frac{\pi}{3}.$$

例 6 估计积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ 的值.

解 $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0,$$

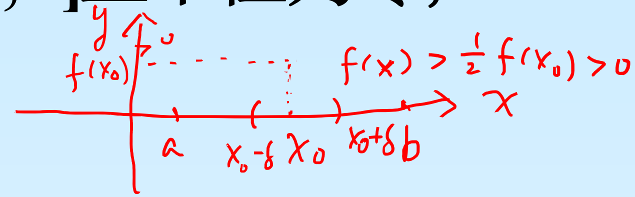
$f(x)$在$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$上单调下降,

$$M = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \quad m = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi},$$

$$\therefore \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}, \therefore \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且非负，在$[a,b]$上不恒为零，

则有$\int_a^b f(x)dx > 0.$



证明

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续且非负，且在$[a,b]$上不恒为零，

故存在一点$x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) > 0$,

由函数连续的定义，我们有

取$\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$, $\exists \delta > 0$, $|x - x_0| < \delta$, 有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即$f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$,

因此 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx$

$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > \dfrac{f(x_0)}{2} 2\delta > 0,$

$\int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{b}$ ≥ 0 ≥ 0

推论1 $f \in C[a,b], f(x) \geq 0,$且$\int_a^b f(x)dx = 0,$

则$f(x) \equiv 0, x \in [a,b]$

推论2 $f, g \in C[a,b], f(x) \geq g(x),$且$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

则$f = g.$

例8 设 $f \in C[a,b]$,且 $\int_a^b x f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$ $\Rightarrow f(x_0)=0$

求证： f在$[a,b]$至少2个零点

证 因为$f \in C[a,b]$,且$\int_a^b f(x)dx = 0$, 则f在$[a,b]$上有零点.

$f(x)<0$ $f(x)>0$

a x_0 b

（1）若$f \equiv 0$,结论成立

（2）若不然 ,设f有唯一零点x_0, $f(x_0)=0$

(x_0两侧 $f(x)$异号,否则与$\int_a^b f(x)dx = 0$矛盾)

令$g(x)=(x-x_0)f(x)$,在$[a,b]$上不变号(不妨设$g \geq 0$)

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b (x-x_0)f(x)dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b xf(x)dx}_{=0} - x_0 \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{=0} = 0$$

但由例2,$\int_a^b g(x)dx > 0$,矛盾！ 命题得证！

三、可积函数类

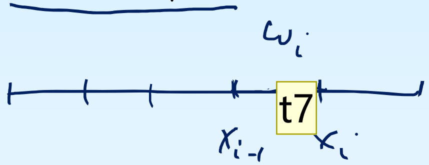
$\forall \varepsilon>0\ \exists T\ \text{s.t.}\ \sum \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon$

△ **定理2.7** 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$可积.

证明 由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,则一致连续,

所以$\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0, \forall x_1, x_2 \in [a,b], |x_1-x_2|<\delta,$

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$



对于$[a,b]$任意分割$T: a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b,$

当$\|T\|<\delta$时,有

$\omega_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i\text{-}1}) \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i\text{-}1})\right| = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Δx_i

幻灯片 23

t7 增加了动画效果
thinkpad, 2011/7/28

定理2.8 若$f(x)$在$[a,b]$有界，且有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

证明 仅证明只有一个间断点的情况,其它情况类似.

设$\left|f\left(x\right)\right|\le M, x\in\left[a,b\right]$，不妨设$x=b$是间断点.

$\forall\varepsilon>0$，考虑区间$\left[a,b-\varepsilon/(4M)\right]$上$f(x)$连续 $\Rightarrow$ 可积

故存在分法$T': x_0=a<x_1<x_2<...<x_{n-1}=b-\varepsilon/(4M)$

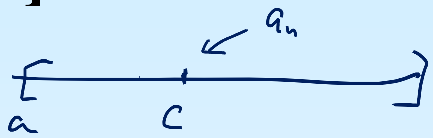
$$\text{使得}, \sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是得分法$T: x_0=a<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$

$$\text{使得}, \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i+\omega_n\Delta x_n<\frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.$$

$\Rightarrow$ 可积

例9 若$f(x)$在$[a,b]$有界，在$[a,b]$上有间断点$\{a_n\}$，$n=1,2,\cdots$，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$，则$f(x)$在$[a,b]$可积.



证明 设$|f(x)| \le M, x\in[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \quad \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N, |a_n - c| < \frac{\varepsilon}{12M}$$

考虑区间

$$[a,b] = \left[a, c-\frac{\varepsilon}{12M}\right] \bigcup \left[c-\frac{\varepsilon}{12M}, c+\frac{\varepsilon}{12M}\right] \bigcup \left[c+\frac{\varepsilon}{12M}, b\right]$$

在$\left[c-\frac{\varepsilon}{12M}, c+\frac{\varepsilon}{12M}\right]$上，$\omega\Delta x \le 2M\cdot\frac{\varepsilon}{6M} = \frac{\varepsilon}{3}$.

在$\left[a, c-\frac{\varepsilon}{12M}\right]$，$\left[c+\frac{\varepsilon}{12M}, b\right]$上$f(x)$只有有限个间断点，故可积.

存在分法$T_1: x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = c - \frac{\varepsilon}{12M}, \text{s.t.}, \sum_{i=1}^{n} \omega'_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$

存在分法$T_2: y_0 = c + \frac{\varepsilon}{12M} < y_1 < y_2 < \dots < y_m = b, \text{s.t.}, \sum_{j=1}^{m} \omega_j'' \Delta y_j < \frac{\varepsilon}{3}$

有分法$T: x_0 = a < x_1 < \dots < x_n < y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b,$

$$\text{使得}, \sum_{i=1}^{n} \omega'_i \Delta x_i + \omega \Delta x + \sum_{j=1}^{m} \omega''_j \Delta y_j < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

注：c位于端点时，类似地可以证明。

定理2.9 设$f(x)$是$[a,b]$上单调有界函数，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

证明 不妨假设函数$f(x)$在$[a,b]$单调递增.

3

对于$[a,b]$的任意分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b,$$

$\lambda = \|T\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [\underline{f(x_i) - f(x_{i-1})}]\Delta x_i \le \|T\| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$\le (f(b) - f(a))\|T\|$$ $< \varepsilon$?

因此$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$，当$\|T\| < \delta$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$

幻灯片 27

3 增加了动画效果

, 2011/7/28

定理2.10（积分第一中值定理）

假设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续.$g(x)$在$[a,b]$上不变号

则存在$\xi\in[a,b]$满足：$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$

证明 不妨假设,$g(x)\geq 0, x\in[a,b]$,

（1）若$\int_a^b g(x)dx=0$，则$g(x)\equiv 0$.结论显然成立.

（2）若$\int_a^b g(x)dx>0$,

设M,m为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,则

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x).$$

$$m\int_a^b g(x)dx = \therefore \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx, = M\int_a^b g(x)dx$$

等价于$m\leq\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M$，由连续函数的介值定理即得. $= f(\xi)$ $\xi\in(a\,b)$

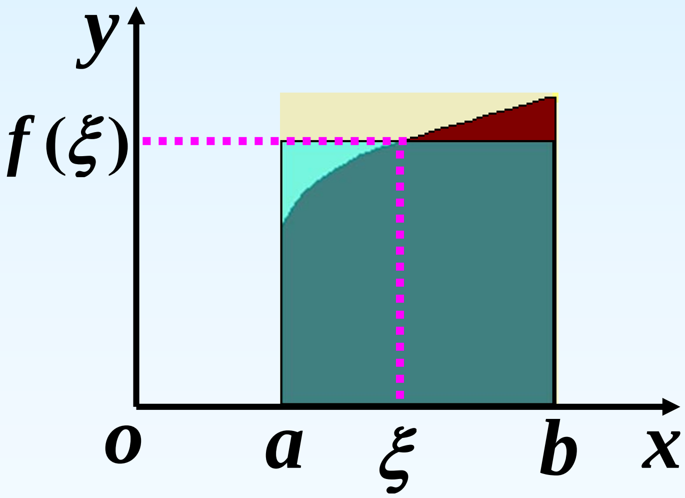
注 同样的条件可以得到存在的 $\xi\in(a,b)$.

推论

$\int_a^b f g\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

$$f \in C[a,b], \exists \xi \in [a,b], \text{使} \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y = f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积.

定理2.11（积分第二中值定理）

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

设函数f在$[a,b]$上可积,

1)如果函数g在$[a,b]$上非负递减,则$\exists\xi\in(a,b), s.t.$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx.$$

2)如果函数g在$[a,b]$上非负递增,则$\exists\xi\in(a,b), s.t.$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

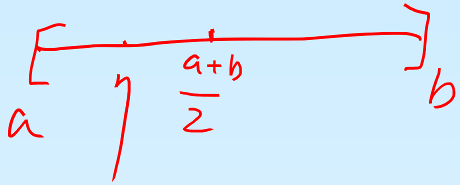
补充定理（积分第三中值定理）

若f在$[a,b]$上可积, g为单调函数,则$\exists\xi\in(a,b), s.t.$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx.$$

例10 $f(x)$在$[a,b]$连续，(a,b)可导，且有

$$f(\eta) = \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)$$



证明：存在$\xi \in (a,b), st. f'(\xi) = 0.$

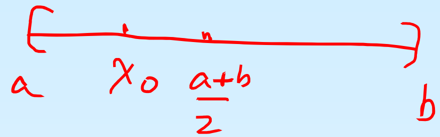
证明 由积分中值定理知$\exists \eta \in (a, \dfrac{a+b}{2})$,

$$使得 f(\eta) = \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)$$

再在$[\eta, b]$上使用微分中值定理即可.

稍改动一下 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{x-b} f(x)dx = f(b)$$



证明：存在$\xi \in (a,b), st. f(\xi)+f'(\xi)=0.$

$e^{\xi}(f(\xi)+f'(\xi))=0$

积分中值定理：$e^{x_0-b} f(x_0) = f(b)$，$x_0 \in [a, \frac{a+b}{2}]$

$[e^{\xi} f(x)]' = 0$

即，$e^{x_0} f(x_0) = e^b f(b)$,

$F(x)=e^x f(x)$

令$F(x)=e^x f(x)$,　则$F'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$,

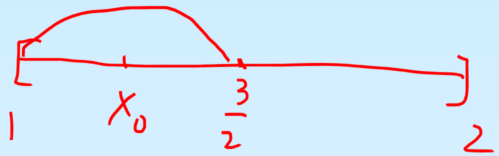
$F(x_0)=F(b)$

$$F(x_0)=F(b)$$

存在$\xi \in (x_0,b) \subset (a,b), F'(\xi)=0.$

例 假设$f(x)$在$[1,2]$上可导，且满足

$$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}} e^{x^2-4} f(x)dx$$



证明：存在$c\in(1,2)$,使得$f'(c)+2cf(c)=0.$

$$f(2)=2\cdot e^{x_0^2-4}f(x_0)\cdot\frac{1}{2}=e^{x_0^2-4}f(x_0)$$

$$e^4 f(2)=e^{x_0^2}f(x_0)$$

令 $F(x)=e^{x^2}f(x)$

$$F(2)=F(x_0)$$

$$f'(c)+(c^2)'f(c)=0$$

$$[e^{x^2}f(x)]'\big|_{x=c}$$

$$=e^{x^2}\cdot 2x f(x)+e^{x^2}f'(x)\big|_{x=c}$$

$$=e^{x^2}[f'(x)+2xf(x)]\big|_{x=c}$$

$$=0$$

$$F'(c)=0$$

例11 证明：如果$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$，

则存在ξ_1, ξ_2，且$\xi_1 \neq \xi_2$，使得$f(\xi_1) = f(\xi_2)$.

证 由中值定理，存在 $\xi_1 \in (0, \frac{\pi}{2}), \xi_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，使得

$$0 = \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x dx$$

$$= f(\xi_1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + f(\xi_2)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$$

$$= f(\xi_1) - f(\xi_2)$$

原命题得证.

例12 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$ p,n为自然数.

解 因为$\frac{\sin x}{x}$在$[n,n+p]$上连续,由积分中值定理,

$$\exists\xi_n\in(n,n+p),\text{使得}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p.$$

又因为$n\to\infty$时，$\xi_n\to\infty$，而$|\sin\xi_n|\le 1$,

所以 $$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

例 13 设 $f(x)$可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt$.

解 由定理2.10可知有 $\xi\in[x, x+2]$,

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt = \xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)(x+2-x)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t}f(t)dt = 2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi}f(\xi)$$

$\sim \frac{3}{\xi}$

$$= 2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi) = 6.$$

作业:

习题7.2

5(2)(3),7(1)(2)(4),8(1)(3),9,10,11,12