北京航空航天大学

2021－2022 学年 第二学期期中考卷

《工科数学分析（II）》

(A 卷)

班号 ___________ 学号__________ 姓名___________

主讲教师_________ 考场__________ 成绩___________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2022 年 5 月 14 日

一、 选择题（每题 4 分，满分 20 分）

1. 下列级数中收敛的个数是（ C ）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n})$；(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$； (4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln\,n}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 下列条件中能得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的是（ B ）

①任意正整数 p， $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$；

②部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；

③ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛，且 $b_n \le a_n \le c_n$， $\forall n\in N^*$；

④ $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 均收敛.

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ② ④

3. 下列级数在给定区间上不一致收敛的是（ A ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n, x\in[0,1]$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x\in(-\infty,+\infty)$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ $x\in[0,1]$

4. 下列函数在(0,0)点的累次极限存在但重极限不存在的是 （A）

A. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$　　B. $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$;

C. $f(x,y)=x\cos\frac{1}{x}\tan\frac{1}{y}$;　　D. $f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{\tan y}$

5. 满足下列条件的集合中是闭集的是（ D ）

① 集合E的补集是开集；　　② 集合E的导集$E'\subset E$；

③ 集合E是有界集；　　④ 集合E的闭包$\overline{E}=E$.

A. ①②③　　B. ②③　　C. ①③④　　D. ①②④

二、计算题（每题 5 分，满分 15 分）

1. 将函数$f(x)= x$，$x\in[0,\pi]$ 展开为余弦级数.

解　把此函数先做偶延拓，再做周期延拓为$F(x)$，然后根据公式计算如下：

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx|_0^\pi-\int_0^\pi\frac{1}{n}x\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}0 & n=2k\\ -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi} & n=2k-1\end{cases},n\geq 1,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi，b_n=0.$$

又$F(x)$为连续函数，所以$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x, 0\leq x\leq\pi.$

2. 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ x^2+z^2=R^2\end{cases}$在点$M\left(\frac{R}{\sqrt2},\frac{R}{\sqrt2},\frac{R}{\sqrt2}\right)$处的切线方程和法平面方程.

解　设$F=x^2+y^2-R^2, G=x^2+z^2-R^2$

则在点$M\left(\frac{R}{\sqrt2},\frac{R}{\sqrt2},\frac{R}{\sqrt2}\right)$处，$F_x=F_y=\sqrt2R, F_z=0, G_x=G_z=\sqrt2R, G_y=0.$

所以切向量为$\left(\begin{vmatrix}\sqrt2R & 0\\ 0 & \sqrt2R\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & \sqrt2R\\ \sqrt2R & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\sqrt2R & \sqrt2R\\ \sqrt2R & 0\end{vmatrix}\right)=2R^2(1,-1,-1).$

所以切线方程为$\dfrac{x-\frac{R}{\sqrt2}}{1}=\dfrac{y-\frac{R}{\sqrt2}}{-1}=\dfrac{z-\frac{R}{\sqrt2}}{-1}$,

法平面方程为$\left(x-\frac{R}{\sqrt2}\right)\bullet1+(-1)\bullet\left(y-\frac{R}{\sqrt2}\right)+(-1)\bullet\left(z-\frac{R}{\sqrt2}\right)=0$, 即$x-y-z+\frac{R}{\sqrt2}=0.$

3. 求函数$f(x,y)=\sin(x+y)$在（0,0）点带皮亚诺余项的 3 阶 Taylor 展式.

解

$f_x=\cos(x+y)=f_y, f_{xx}=-\sin(x+y)=f_{yy}=f_{xy}=f_{yx}, f_{xxx}=f_{yyy}=f_{xxy}=f_{xyy}=-\cos(x+y),$

所以，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=1, f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=f_{xy}(0,0)=0, f_{xxx}(0,0,0)=f_{yyy}(0,0,0)=f_{xxy}(0,0,0)=f_{xyy}(0,0,0)=-1$

函数$f(x,y)=\sin(x+y)$在（0,0）点带皮亚诺余项的 3 阶 Taylor 展式

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^3+o(\rho^3)$$

$$=x+y-\frac{1}{6}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)++o(\rho^3).$$

或有人借助正弦函数的 Taylor 展开式得

$$\sin(x+y)=(x+y)-\frac{1}{6}\left(x+y\right)^3+o(\rho^4)=x+y-\frac{1}{6}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+o(\rho^4).$$

4．证明函数列 $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ 在（0,1）上不一致收敛.

证明　在（0,1），$\lim\limits_{n\to\infty}.f_n(x)\overset{\Delta}{=}f(x)\equiv 0.$ $\boldsymbol{\varphi(x)=|f_n(x)-f(x)|}=\dfrac{1}{1+nx}$ ，

所以 $\boldsymbol{\beta_n=\sup\limits_{x\in(0,1)}\varphi(x)1\to 0}$**，所以该**函数列在（0,1）上不一致收敛.

5．设函数 $f(t)$ 具有二阶连续导数，$z=f(xy+z)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解 两边求偏导得 $z_x=f'(xy+z)(y+z_x)$, **所以** $z_x=\dfrac{yf'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}$.

类似地， $z_y=\dfrac{xf'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}$.

所以

$$z_{xy}=\frac{(f'(xy+z)+yf''(xy+z)(x+z_y))(1-f'(xy+z))+yf'(xy+z)f''(xy+z)(x+z_y)}{(1-f'(xy+z))^2}$$

$$=\frac{f'(xy+z)-(f'(xy+z))^2+xyf''(xy+z)+[yf''(xy+z)(1-f'(xy+z))+yf'(xy+z)f''(xy+z)]\frac{xf'(xy+z)}{1-f'(xy+z)}}{(1-f'(xy+z))^2}$$

$$=\frac{f'(xy+z)-2(f'(xy+z))^2+(f'(xy+z))^3+xyf''(xy+z)}{(1-f'(xy+z))^3}$$

三、（本题 10 分） 设 n 为正整数，$x,y>0$, 用条件极值的方法证明 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

证明　设 $x+y=a(a>0)$.

令 $L(x,y,\lambda)=\dfrac{x^n+y^n}{2}-\lambda(x+y-a), f(x,y)=\dfrac{x^n+y^n}{2}$.

由 $\begin{cases} L_x=\dfrac{n}{2}x^{n-1}-\lambda=0 \\ L_y=\dfrac{n}{2}y^{n-1}-\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y-a=0 \end{cases}$ 得 $x_0=y_0=\dfrac{a}{2}$.

此时，$f(x_0,y_0)=\dfrac{a^n}{2^n}$.

又 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\,|\,x+y=a,x\ge 0,y\ge 0\}$ 的边界点 $(0,a),(a,0)$ 处的值均为 $\dfrac{a^n}{2}$.

所以 $f(x,y)$ 在约束条件下的最大值为 $\dfrac{a^n}{2}$.，最小值为 $\dfrac{a^n}{2^n}$.

所以 $f(x,y)\ge\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$，即 $\dfrac{x^n+y^n}{2}\ge\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

四、证明题（8 分） 设函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(\boldsymbol{1+nx})}{\boldsymbol{n^3}}$, $x\in(0,1)$, 证明该函数存在连续的导函数$f'(x)$.

证明 记$u_n(x)=\dfrac{\ln(1+nx)}{n^3}$，因为$|u_n(\frac{1}{2})|\le\dfrac{1}{n^2}$，所以该级数在点$x=\dfrac{1}{2}$收敛。

又$u_n'(x)=\dfrac{1}{n^2(1+nx)}$在[0,1]连续，且$|u_n'(x)|\le\dfrac{1}{n^2}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在[0,1]一致收敛。

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在[0,1]上有一阶连续的导函数，所以在(0,1)上有一阶连续的导函数，。

五.（本题 10 分）
设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

（1） 讨论函数在 (0, 0) 点的连续性；
（2） 讨论函数在(0, 0) 点的可微性与偏导数的连续性
（3） 研究函数在(0, 0) 点沿方向（1, 1）的方向导数.

解
（1） 易见对任意的$(x,y)\neq(0,0)$，不等式

$$|f(x,y)-0|\le\frac{x^2}{x^2+y^2}|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}|y|\le|x|+|y|$$

成立，由夹逼准则知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 因此$f(x,y)$ 在 (0, 0) 点连续。

（2）$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=1$，$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=1$

记$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$， $\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\frac{xy(x+y)}{\rho^3}=\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

因为 $\lim\limits_{y=kx,x\to 0} g(x,y)=\dfrac{k(1+k)}{(1+k^2)^{3/2}}$，与$k$有关，所以$g(x,y)$在$(0,0)$点无极限。所以

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

可以证明如果$f(x,y)$关于两个自变量的偏导数在（0,0）的一个小邻域存在，且至少一个在（0,0）点连续，则该函数在（0,0）可微。现在该函数在（0,0）点不可微，且易知两个偏导数在（0,0）点小邻域存在，故两个偏导数在（0,0）都不连续。

（3）（1,1）方向的单位方向向量为 $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$。根据方向导数的定义

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(\frac{1}{\sqrt{2}}t,\frac{1}{\sqrt{2}}t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t}{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

六、（本题 10 分） 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$ 的收敛域与和函数.

解：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(n-1)}}=1$, 所以收敛半径为$R=\frac{1}{1}=1$。

又 $x=\pm 1$ 时，$\left|\dfrac{x^n}{n(n-1)}\right|\le\dfrac{1}{n(n-1)}$，所以该幂级数在 $x=\pm 1$ 处收敛。所以收敛域为$[-1,1]$.。

设 $s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n-1)}$, 则 $s'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)}$, $s''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\dfrac{1}{1-x}$.

所以

$$s'(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+s'(0)=-\ln(1-x).$$

$$s(x)=\int_0^x(-\ln(1-t))dt+s(0)$$

$$=-t\ln(1-t)\big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=(1-x)\ln(1-x)+x,-1\le x<1.$$

又 $x=1$ 时，$s(1)=1$, 所以

$$s(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x & -1\le x<1\\ 1 & x=1\\ 1 & \end{cases}.$$

七、（本题 12 分）（1）对任意$x\in(0,\pi)$ 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}$，条件收敛。

（2）证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}, x\in(0,\pi)$ 在给定区间上连续。

证明　（1）因$\sum_{k=1}^{n}\sin kx$有界，对于每一个$x\in(0,\pi)$，$\frac{\sin x}{\sqrt{n+x}}$关于$n$单调趋于 0，所以由 D 判别法知该级数收敛。

又$\left|\frac{\sin nx\sin x}{\sqrt{n+x}}\right|\geq\frac{\sin^{2}nx}{\sqrt{n+x}}|\sin x|=\frac{|\sin x|}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{n+x}}-\frac{\cos 2nx}{\sqrt{n+x}}\right]$,

对固定的$x\in(0,\pi)$,

$\frac{|\sin x|}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+x}}$发散，$\frac{|\sin x|}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{\sqrt{n+x}}$收敛（由 D 判别），

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2}nx}{\sqrt{n+x}}|\sin x|$发散，所以原级数不绝对收敛，故原级数条件收敛。

（2）对任意$x_0\in(0,\pi)$，取包含x_0的闭区间$[a,b]$，此时$0<a<x_0<b<\pi$.

易知$\sum_{k=1}^{n}\sin kx$在$[a,b]$上一致有界。对于$[a,b]$每一个$x\in[a,b]$，$\frac{\sin x}{\sqrt{n+x}}$关于$n$单调, 且一致收敛于 0，所以由 D 判别法知该级数在$[a,b]$上一致收敛。所以该函数项级数在$[a,b]$上连续。所以该函数项级数的和函数在x_0连续。由x_0的任意性，所以该函数项级数的和函数在$(0,\pi)$上连续。

$x_0\in(0,\pi)$，取包含x_0的闭区间$[a,b]$，此时$0<a<x_0<b<\pi$.