基础物理学 A1
2025年春季学期

谢柯盼
kpxie@buaa.edu.cn
物理学院

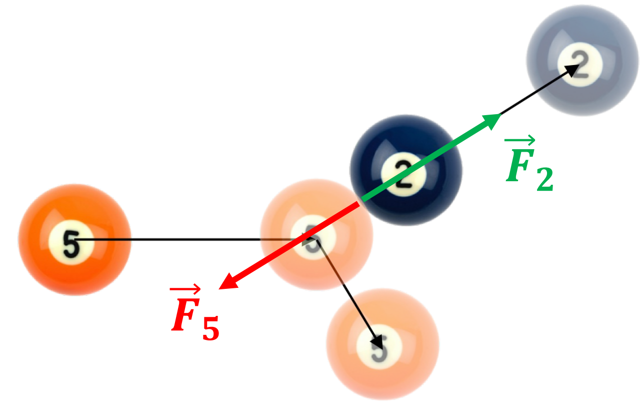
第三章 动量定理与动量守恒

§ 3-1 冲量与动量定理

§ 3-2 动量守恒

§ 3-3 “变质量”问题

§ 3-0 引子



例：5号球在碰撞前后速度分别为$\vec{u}_5$和$\vec{u}_5'$，2号球被撞之前静止。试求2号球的末速度$\vec{u}_2'$。

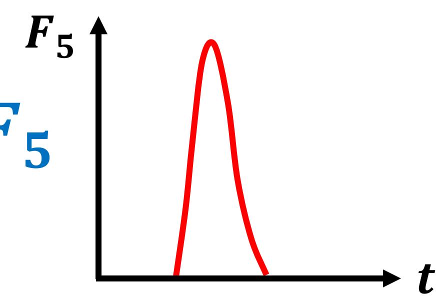
要求用第二章的方法求解

对5号球$m_5\, \mathrm{d}\vec{v}_5/\mathrm{d}t = \vec{F}_5$

对2号球$m_2\, \mathrm{d}\vec{v}_2/\mathrm{d}t = \vec{F}_2$

牛顿第三定律$\vec{F}_5 = -\vec{F}_2$

撞击力F_5的性质



联立可得$\mathrm{d}(m_5\vec{v}_5 + m_2\vec{v}_2)/\mathrm{d}t = 0$

初末态条件给出$m_5\vec{u}_5 = m_5\vec{u}_5' + m_2\vec{u}_2'$

得$\vec{u}_2' = (m_5\vec{u}_5 - m_5\vec{u}_5')/m_2$

- 只关心初末态时，如何直接略去$\vec{F}_5$快捷求解？
- 在需要研究撞击力时，如何刻画$\vec{F}_5$的性质？

类似的问题

需要更好的处理方法！

§3-1 冲量与动量定理

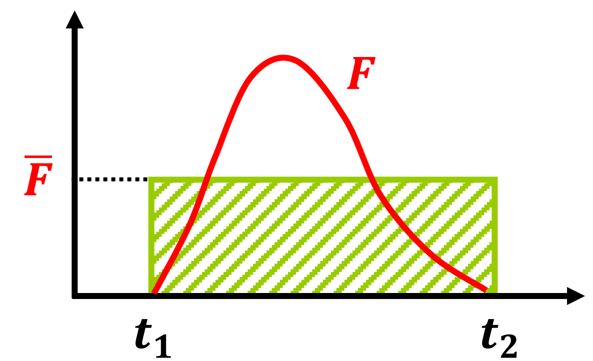
冲量：力在一段时间内的积累效应

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

是矢量，是过程量；与参考系无关。单位是N · s

- 如果$\vec{F}$是恒力，则$\vec{I}=(t_2-t_1)\vec{F}$
- 常见的错误写法：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}t\mathrm{d}t$（多写了一个$t$）

平均力：与$\vec{F}$在一段时间内给出相同冲量的恒力



$$\overline{\vec{F}}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$

可用于描述碰撞、爆炸等过程中的复杂冲力

动量定理：

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=m\vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2}=\Delta\vec{p}$$

一段时间内质点动量的改变量（或称增量）等于它所受外合力的冲量

- 是矢量方程，适用于惯性系
- 动量与参考系有关，但冲量、动量的增量与参考系的选取无关

牛顿第二定律：动量的瞬时变化率等于力

动量定理：动量的改变等于力在时间上的累积

思考：用动量定理如何描述碰撞、爆炸等过程？

动量定理在直角坐标系下的分量式

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = \Delta p_x \qquad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = \Delta p_y$$

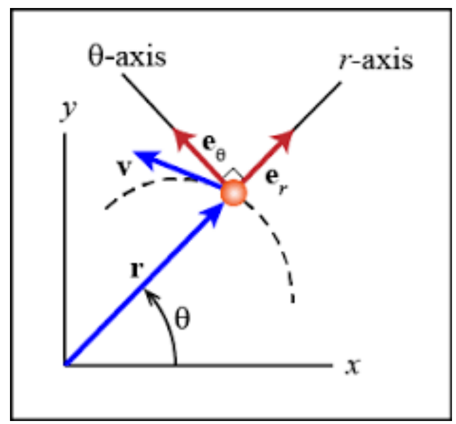
$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = \Delta p_z$$

质点在某一方向上的动量增量等于外合力在该方向上的冲量

思考：在平面极坐标系下，有以下关系吗？

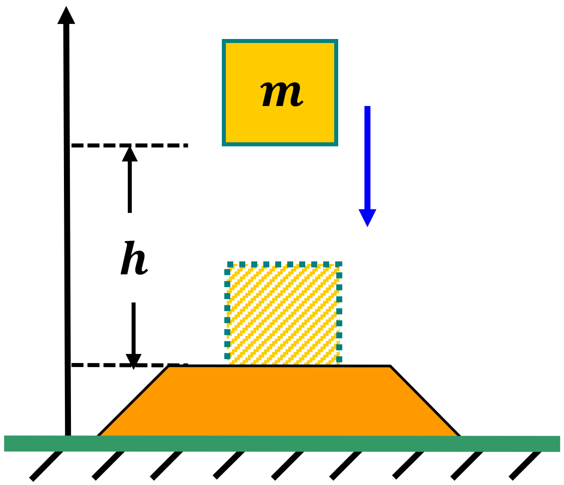
$$I_r = \int_{t_1}^{t_2} F_r \mathrm{d}t = \Delta p_r$$

$$I_\theta = \int_{t_1}^{t_2} F_\theta \mathrm{d}t = \Delta p_\theta$$



答：一般没有这种关系，因为$\vec{e}_r$和$\vec{e}_\theta$会随着位置变化

例：重锤从高度为h处自由下落，与工件碰撞后速度为零，碰撞时间为Δt。



a) 求平均冲击力与锤自重的比值

b) 若$h = 1.5$米，求$\Delta t = 10^{-4}$、10^{-2}、1秒时的比值大小

解：碰撞前后重锤动量分别为mv和0，其中$v = \sqrt{2gh}$（自由落体）

据动量定理$(\bar{N} - mg)\Delta t = mv$，故

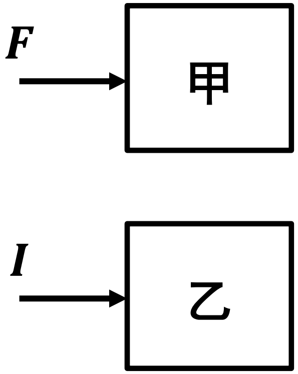
$$\frac{\bar{N}}{mg} = 1 + \frac{1}{\Delta t}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Δt [s]	1	10^{-2}	10^{-4}
$\bar{N}/mg$	1.6	56	5.5×10^3

Δt与材料有关。选择Δt较大的材料，可以减少冲击力

例：质量相等的两个物体，并排静止于光滑水平面。现用一水平恒力F作用在物体甲上，同时给物体乙一个与F同方向的瞬时冲量I，使两物体沿同一方向运动，则两物体再次达到并排的位置时所经过的时间为_______。

解：甲匀加速运动，位移



$$s=\frac{at^2}{2}=\frac{Ft^2}{2m}$$

乙匀速运动，位移

$$s=vt=\frac{It}{m}$$

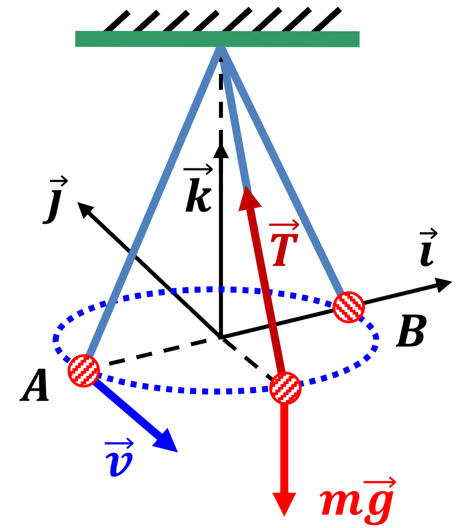
联立得

$$t=\frac{2I}{F}$$

“给一瞬时冲量”等价于“给一初速度”

例：物体由绳悬挂着，作半径为R的圆周运动，速率为v。求物体从A运动到B（半个圆周）时拉力对其冲量。

解：由动量定理



$$\Delta\vec{p} = \vec{I}$$

其中$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = 2mv\vec{j}$

而$\vec{I} = \vec{I}_T + \vec{I}_G$

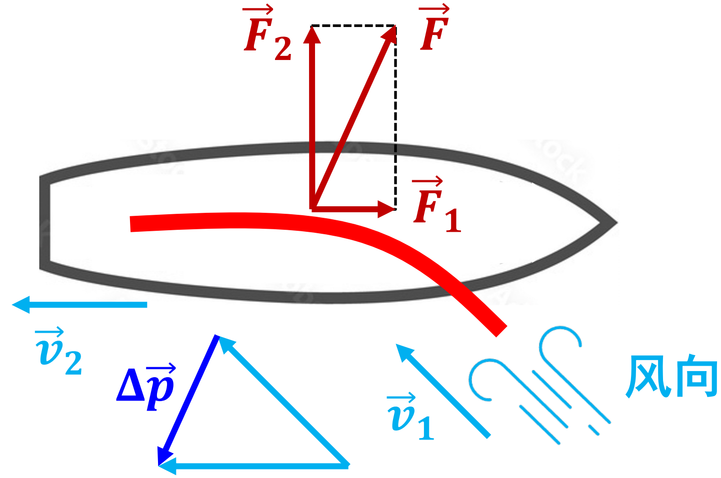
重力是恒力，故

$$\vec{I}_G = m\vec{g}\Delta t = -mg\frac{\pi R}{v}\vec{k}$$

联立给出

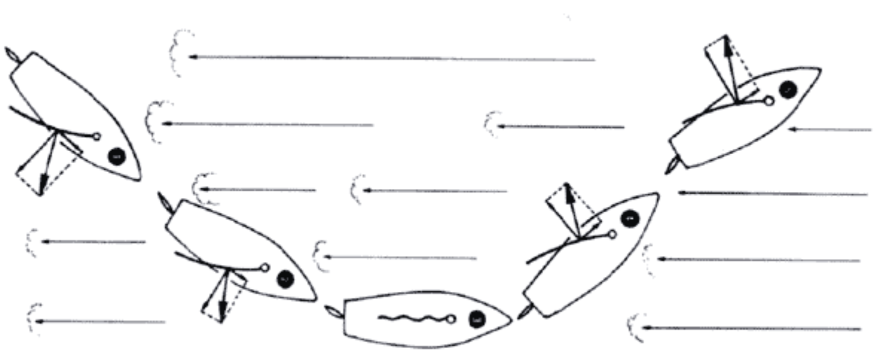
$$\vec{I}_T = \Delta\vec{p} - \vec{I}_G = 2mv\vec{j} + mg\frac{\pi R}{v}\vec{k}$$

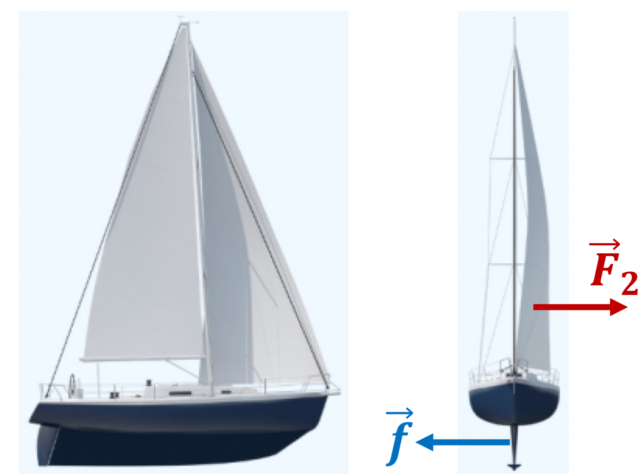
动量定理的应用：逆风行舟



$\vec{F}_1$为**推进力**，使船前进；

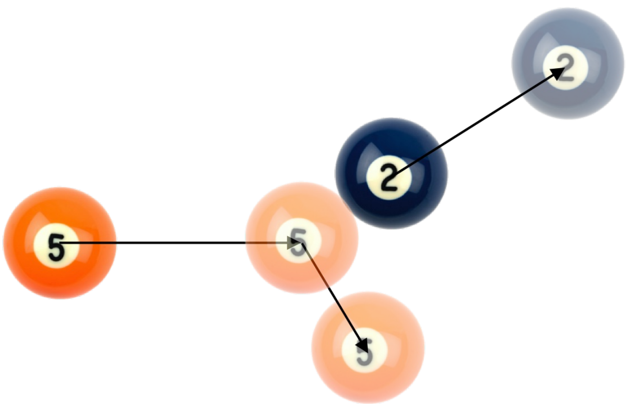
$\vec{F}_2$为横向推力，被水对龙骨的阻力平衡掉





此为风与水**协同作用**的结果，二者缺一不可

以动量定理分析本章开头的问题：



例：5号球在碰撞前后速度分别为$\vec{u}_5$和$\vec{u}'_5$，2号球被撞之前静止。求2号球的末速度$\vec{u}'_2$

解：5号球所受冲量为$\vec{I} = m_5\vec{u}'_5 - m_5\vec{u}_5$

由牛顿第三定律，2号球所受冲量必为$-\vec{I}$

因而$m_2\vec{u}'_2 = -\vec{I}$，联立得

$$\vec{u}'_2 = (m_5\vec{u}_5 - m_5\vec{u}'_5)/m_2$$

不需要显式出现复杂剧变的撞击力

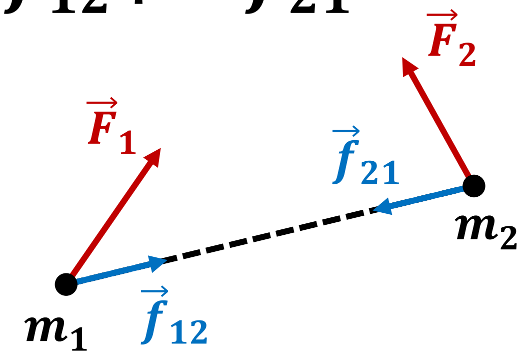
若求平均撞击力，则需要知道碰撞时间Δt

思考：是不是有更快捷的处理方式?

- 两球所受冲量互相抵消似乎是一种普遍现象

考虑两个质点构成的体系，相互作用力$\vec{f}_{12}$和$-\vec{f}_{21}$

在$\mathrm{d}t$时间内：



对于质点1，有$\mathrm{d}\vec{p}_1 = \left(\vec{F}_1 + \vec{f}_{12}\right)\mathrm{d}t$

对于质点2，有$\mathrm{d}\vec{p}_2 = \left(\vec{F}_2 + \vec{f}_{21}\right)\mathrm{d}t$

且牛顿第三定律保证了$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$恒成立

联立得到$\mathrm{d}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)\mathrm{d}t$，或曰

$$\Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)\mathrm{d}t$$

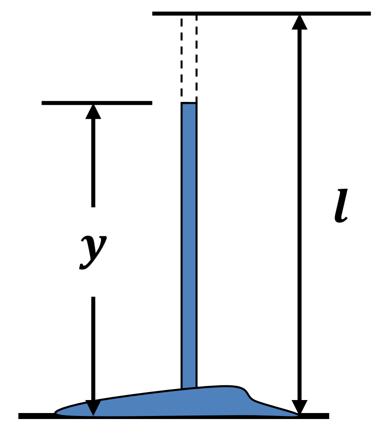
其中$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$为体系的总动量

即质点系总动量增量等于合外力的冲量，与内力无关

易推广至任意数量质点，称为质点系动量定理

质点系的动量定理，使得我们在某些问题中能够忽略内力，获得便捷的解法

例：柔软绳长l，线密度ρ，一端着地开始自由下落。当空中绳长为y时，地面的压力N为多少?



解：柔软绳空中有限长部分自由下落

速度为$v = gt$，且$y = l - gt^2/2$

故空中部分的动量为

$$p = \rho y v = \rho g t\left(l - \frac{gt^2}{2}\right)$$

地面部分静止无动量，故体系总动量为p

应用质点系动量定理，以向下为正，则

$$\dot{p} = \rho l g - N$$

代入得到$N = 3\rho g^2 t^2/2 = 3\rho g(l - y)$

注意时间是我们自设的中间变量，最后的答案需要以题目所给的变量来描述

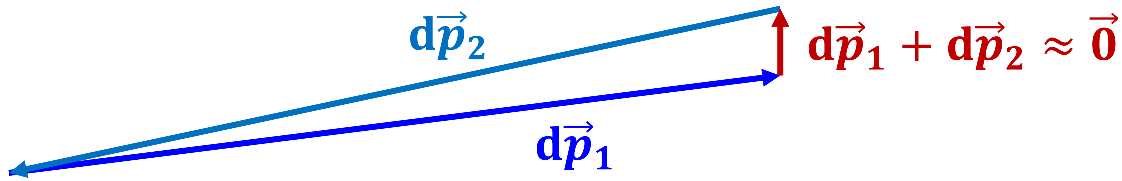
§3-2 动量守恒

若系统在任意微过程中，外合力的元冲量$\mathrm{d}\vec{I} \equiv \vec{0}$
则整个运动过程中，系统总动量保持不变，或称守恒
即$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i =$ 常量
由于$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$，故动量守恒的条件是外合力为零

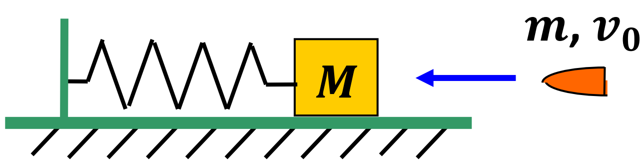
注意区分“动量守恒”和“初末态动量一样”的区别
前者等价于$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{0}$，而后者等价于$\vec{I} = \vec{0}$

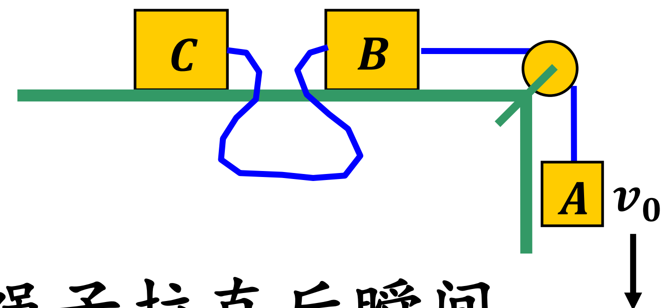
- 若在某惯性系中体系动量守恒，则在任意惯性系中该体系动量均守恒
- 若系统在某方向上合外力为零，则在该方向上动量守恒（总动量可能不守恒）

若在某过程中内力远大于外力，则系统动量近似守恒



如碰撞、爆炸等过程发生前后瞬间对比；又如





子弹击中嵌入木块一同运动，击中后瞬间

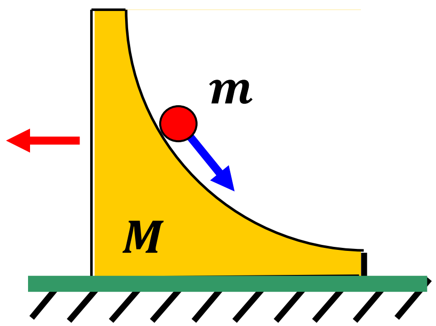
$$v_1 = \frac{mv_0}{M+m}$$

绳子拉直后瞬间

$$v_1 = \frac{(m_A + m_B)v_0}{m_A + m_B + m_C}$$

动量守恒让我们可以在不需知道系统内部作用细节的情况下求解许多问题

例：大滑块M的上表面为半径R的圆弧，初始时静止于光滑的地面上。小滑块m从其顶部由静止释放，最终滑至底部与M脱离。求该段时间内M在地面所滑行的距离S。



解：水平方向动量守恒，故

$$mv_x = -MV_x$$

两边积分必有

$$ms_x = -MS$$

又由$-S + s_x = R$可得

$$S = \frac{mR}{M+m}$$

该结论与两滑块间是否存在摩擦力无关，也与大滑块上表面的具体形状无关

陆小凤更吃惊，脚尖点地，身子立刻蹿起。
大殿上的横梁离地十丈。
没有人能一掠十丈。
他身子蹿起，左足足尖在右足足背上一点，竟施展出武林中久已绝传的“梯云纵”绝顶轻功。
他居然掠上了横梁。

——古龙《陆小凤传奇·幽灵山庄》

梯云纵

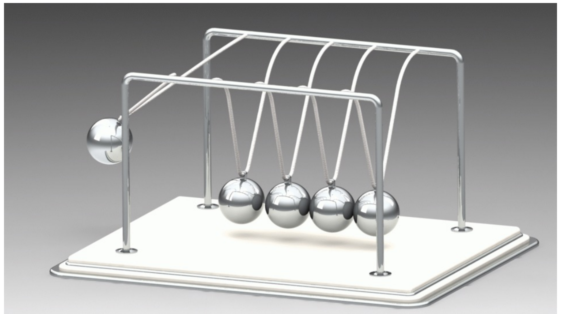
忽见冯琳右脚在左脚脚背一踏，倏然间身形又凭空拔起三丈，这样三起三落，终于是赞密法师先落到地面，冯琳这才跟着脚尖沾地，登时掌声雷动。

——梁羽生《云海玉弓缘》

在经典力学中，动量守恒是一个定理：

- 第二定律指出，质点动量的增量由其所受冲量决定
- 第三定律保证了体系内力的冲量两两相消

据此可以推导出动量守恒定理



古人对此很早就有所察觉，并提出了"运动/活力不变"等朴素概念

1596-1650

笛卡尔认为质点质量乘以速度的标量和在运动过程中保持不变，称之为"运动的量"

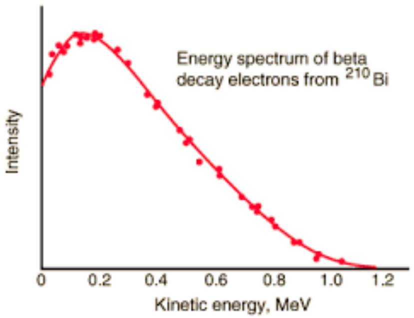
1646-1716

莱布尼茨则认为质点质量乘以速度平方的和在运动过程中保持不变，称之为"活力"

牛顿在《原理》中明确给出动量的定义，指出其矢量性，并定量给出了其变化规律

现代观点：动量守恒是一条定律，比牛顿力学更基本

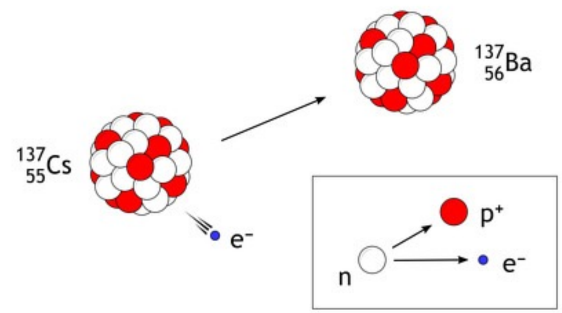
20世纪初的物理学革命中，人们一度怀疑动量、能量守恒这些“经典物理学的古董推论”是否应该被放弃



1910年代，人们测得原子核贝塔衰变的电子能谱，引发了关于能量、动量守恒的信任危机

当时认为贝塔衰变是原子核中的一个中子衰变成了质子和电子

$$ {}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + e^{-} $$



两体衰变：联立动量守恒和能量守恒

$$ m_p v_p = m_e v_e, \qquad \Delta E = \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} m_e v_e^2 $$

末态电子能量有唯一解，即其能谱应为一个尖峰，与实验得到的连续谱相矛盾！

1885-1962

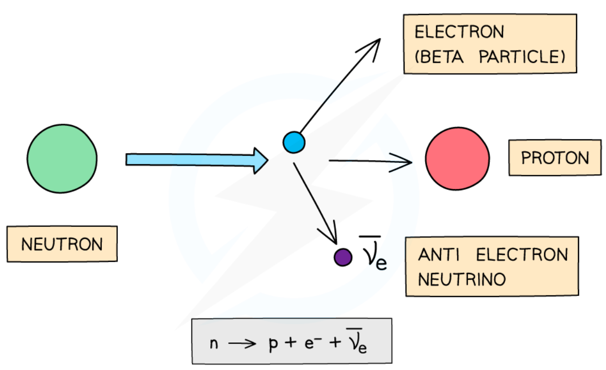
丹麦物理学家尼尔斯·玻尔提出：

- 在微观世界的单次反应过程中，动量守恒和能量守恒都**不再成立**；
- 这些守恒律只是宏观统计平均的结果，仅在经典力学里成立。

1900-1958

奥地利物理学家沃尔夫冈·泡利提出（1930）

- 能量守恒和动量守恒在微观世界也**成立**；
- 贝塔衰变的电子能量之所以是连续谱，是因为衰变末态有一个**看不见**的粒子把部分能量带走了。



放弃守恒律

VS

假设存在看不见的新粒子

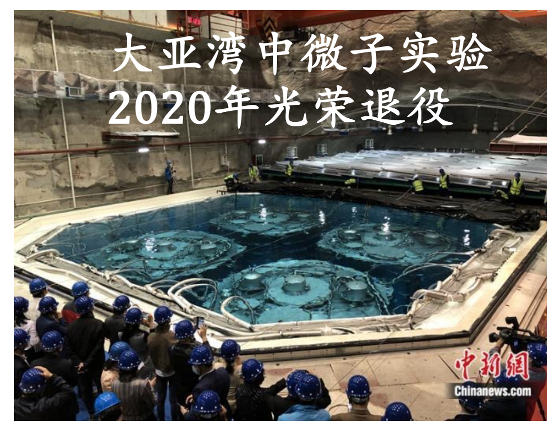
中微子的概念在1930年代已被广泛接受

- 1933年，意大利物理学家恩里科·费米据此写下弱力的第一个量子场论描述
- 1938年，费米移居美国，1942年带领团队成功建造世界上第一座核反应堆，揭开了核能时代的序幕


1901-1954

中微子不带电，质量极小，相互作用极弱，极难测量

- 1956年，美国物理学家科温和莱因斯以0.2吨水为靶物质，首次探测到核反应堆中微子
- 近70年来，中微子的理论和实验研究始终是前沿热点
- 中国的中微子研究世界领先，2012年首次测出振荡角θ_{13}



为什么动量守恒定律如此之普适？
现代物理认为，守恒律与对称性之间有紧密联系

诺特定理（1915）：
物理的每一个可微的对称性，都对应着一个守恒量。

若物理定律在空间平移下不变，则动量必定守恒

更具体地说：只要空间是均匀的，则物理理论中<u>必定能定义</u>一个称为“动量”的矢量，对孤立体系守恒

此时，质点动量的定义不一定是牛顿力学中的$m\vec{v}$

在微观、高速等情形下牛顿力学失效，但仍然可定义“动量”这一物理量，动量守恒定律依然严格成立

动量守恒是空间均匀性的结果，是空间本身的性质体现，比牛顿定律更基本，也更普适

§3-3 “变质量”问题

这些运动的原理是什么？

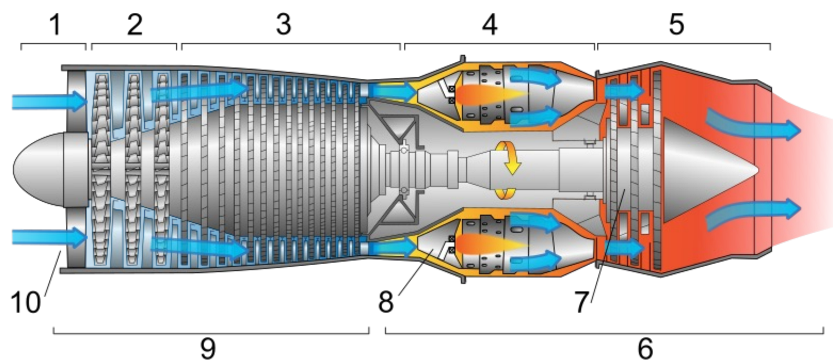
它们都可概括为：

- 通过向后喷射物质而产生**推力**

将之抽象为“变质量”体系

- 牛顿力学中，质点的质量与运动状态无关，不存在变质量的质点
- 但在质点系问题中，通过对体系的界定，可以出现**变质量体系**，此即“变质量”问题

为这类体系建立模型：本体质量M，速度v
且在$\mathrm{d}t$时间内



吸入物质$\mathrm{d}m_1$

相对地面静止

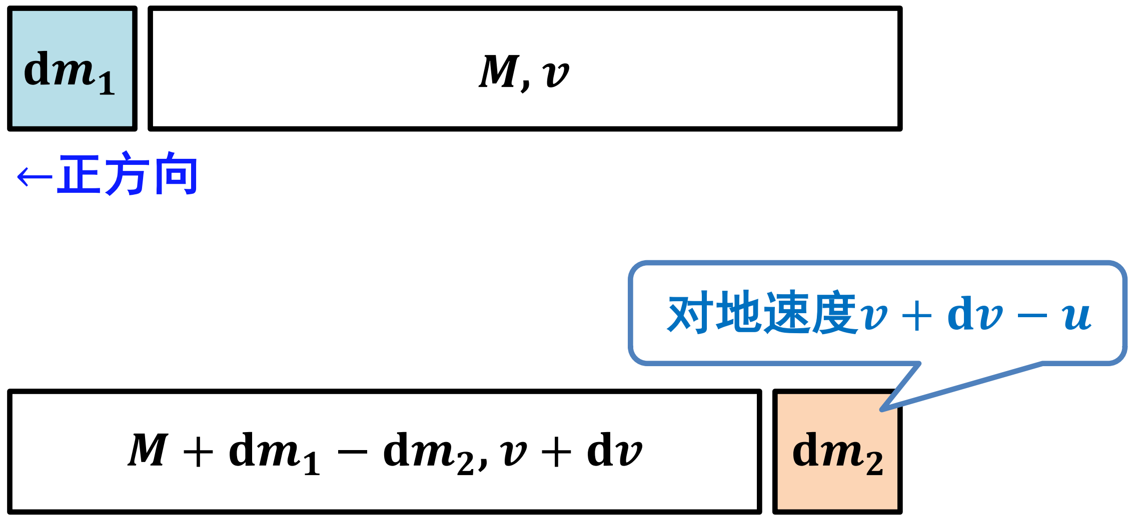
向后喷射物质$\mathrm{d}m_2$

相对本体的速率为u

本体获得多少推力？
两种思路均可得出答案：整体分析；隔离分析

整体分析法：体系=本体+所交换的物质

t时刻



总动量$P = Mv$

$t+\mathrm{d}t$时刻

总动量

$$P+\mathrm{d}P = (M+\mathrm{d}m_1-\mathrm{d}m_2)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m_2(v-u)$$

质点系**动量定理**

$$\mathrm{d}P = F_{\mathrm{ext}}\mathrm{d}t$$

F_{ext}：体系所受外力，如空气/水的阻力、重力等

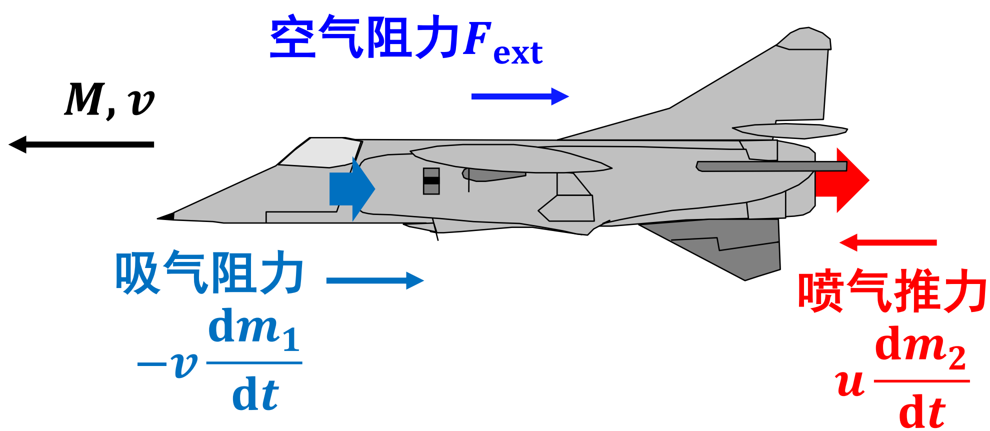
代入得到$\mathrm{d}m_1 v + M\mathrm{d}v - u\mathrm{d}m_2 = F_{\mathrm{ext}}\mathrm{d}t$

变质量运动方程：

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_{\mathrm{ext}}-v\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}$$

本体质量乘加速度　外力　吸入物质导致阻力　喷射物质提供推力

形式上亦为$Ma=F$，但要注意M随时间变化

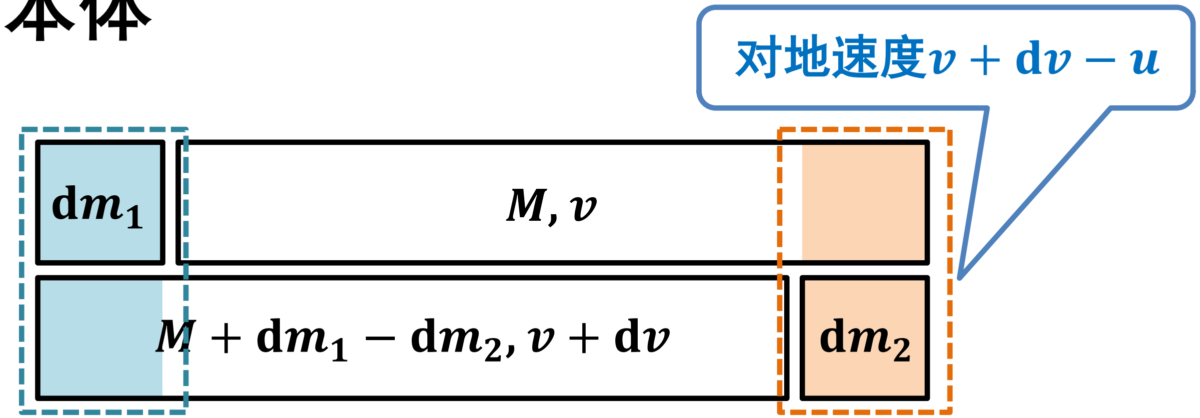


参数函数$\mathrm{d}m_1/\mathrm{d}t$和$\mathrm{d}m_2/\mathrm{d}t$由体系自身性质决定，如发动机设计、生物构造等

隔离法：体系=本体

t时刻

$t+\mathrm{d}t$时刻



吸入的物质

$$\mathrm{d}P_1=v\mathrm{d}m_1=F_1'\mathrm{d}t$$

F_1'为体系对物质的力

物质对体系反作用力

$$F_1=-F_1'=-v\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}$$

喷出的物质

$$\mathrm{d}P_2=(v-u)\mathrm{d}m_2-v\mathrm{d}m_2$$

等于$F_2'\mathrm{d}t$，

物质对体系的反作用力

$$F_2=-F_2'=u\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}$$

联立，由$F=Ma$得出

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_{\mathrm{ext}}+F_1+F_2=F_{\mathrm{ext}}-v\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}$$

应用：火箭方程。考虑地表附近的火箭发射，初始质量为M_0，速度为v_0

火箭只喷射不吸气，$\mathrm{d}m_1/\mathrm{d}t=0$
且$\mathrm{d}m_2=-\mathrm{d}M$（注意$\dot{M}<0$）
选取向上为正，则$F_{\mathrm{ext}}=-Mg$。代入得

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-Mg-u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

将之改写为$\mathrm{d}v=-g\mathrm{d}t-u\,\mathrm{d}M/M$，两边积分得

$$v(t)=v_0-gt+u\ln\frac{M_0}{M(t)}$$

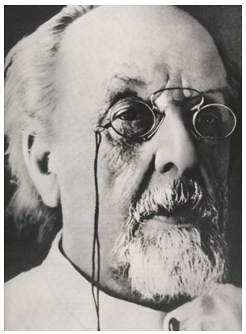
t时刻火箭质量$M(t)$由发动机决定，且$M_0=M(0)$
若不计重力（自由空间）则得到齐奥尔科夫斯基公式

$$v=v_0+u\ln\frac{M_0}{M}$$

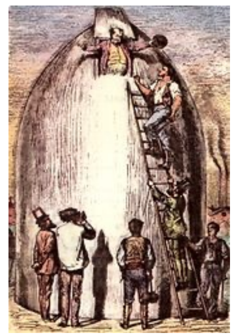
齐奥尔科夫斯基火箭公式（1903）

$$v = v_0 + u \ln \frac{M_0}{M}$$

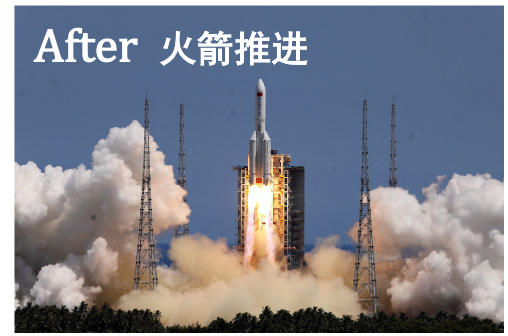
t时刻的速度 → v；v_0 ← 初始速度；u ← 喷射相对速度；M_0 ← 初始质量；M ← t时刻的质量



[俄]
1857-1935



Before
大炮发射
《从地球到月球》
儒勒·凡尔纳1865



被誉为“航天之父”，提出用反冲效应来获得推进力冲出地球，并有分级火箭、太空电梯等设想

亦擅长写科幻小说，著有《在地球之外》等

地球是人类的摇篮，但人类不可能永远生活在摇篮里。——齐奥尔科夫斯基

齐氏火箭公式的应用：有效载荷与发射初速度

- 火箭抽象为燃料M_1加上载荷m，初始质量$M_1 + m$
- 代入得最终速度$v_f = v_0 + u \ln[(M_1 + m)/m]$

或等价地说，要将载荷加速至v_f，所需燃料

$$M_1 = m\left[\exp\left(\frac{v_f - v_0}{u}\right) - 1\right]$$

若取典型数值$u = 3\ \mathrm{km/s}$，$v_f = 7.9\ \mathrm{km/s}$

- 无初速发射，$v_0 = 0$，得$m/M_1 \approx 0.077$
- 在赤道发射，v_0为地球自转线速度460 m/s，得$m/M_1 \approx 0.092$

效率增加18%！

低纬度地区发射优势

为什么现代火箭多采用**分级结构**？

假定火箭由两级构成，第一级燃料M_1，第二级燃料M_2，载荷m，且初速为零

则燃烧完第一级之后速度为

$$v_1 = u\ln\left(\frac{m+M_1+M_2}{m+M_2}\right)$$

燃烧完第二级之后的**终末速度**为

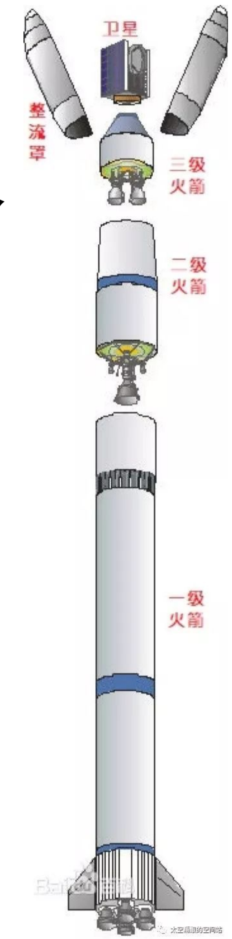
$$v_2 = v_1 + u\ln\left(\frac{m+M_2}{m}\right) = u\ln\left(\frac{m+M_1+M_2}{m}\right)$$

<u>若火箭**不分级**</u>，直接烧完燃料M_1+M_2，末速为

$$v' = u\ln\left(\frac{m+M_1+M_2}{m}\right)$$

$v' = v_2$，和分级的结果**一模一样**！分级没有用？

思考：问题出在哪？



实际上火箭是由燃料、载荷以及壳体构成的

令第一级燃料M_1和壳体M_1'，第二级燃料M_2和壳体M_2'

则燃烧完第一级之后速度为

$$v_1 = u\ln\left(\frac{m + M_1 + M_1' + M_2 + M_2'}{m + M_1' + M_2 + M_2'}\right)$$

此时抛弃第一级火箭壳体M_1'并点燃第二级燃料

了解即可

燃烧完第二级之后的终末速度为

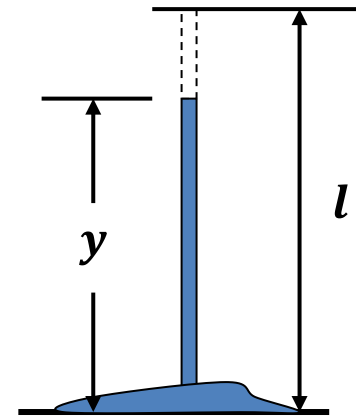
$$v_2 = v_1 + u\ln\left(\frac{m + M_2 + M_2'}{m + M_2'}\right)$$

<u>若火箭不分级</u>，直接烧完燃料$M_1 + M_2$，末速为

$$v' = u\ln\left(\frac{m + M_1 + M_1' + M_2 + M_2'}{m + M_1' + M_2'}\right)$$

直接代数计算即可证明$v_2 > v'$，故分级火箭末速更高

例：柔软绳长l，线密度ρ，一端着地开始自由下落。当空中绳长为y时，地面的压力N为多少?



解：将空中部分视为变质量的运动体系：

其所受外力$F_{\text{ext}} = \rho g y - N_1$

N_1是地面给体系的力，方向竖直向上

绳子不断下落，视为体系“喷出”物质，得

$$\mathrm{d}m_2/\mathrm{d}t = \rho v = \rho\sqrt{2g(l-y)}$$

且“喷出”后相对于体系的速率为$u = v$

体系相对地面的速率为$v = gt$。代入变质量运动方程

$$\rho y \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_{\text{ext}} + u\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}t}$$

左边等于$\rho g y$，右边等于$\rho g y - N_1 + 2\rho g(l-y)$

得$N_1 = 2\rho g(l-y)$，此亦为空中部分对地面部分的力

故地面部分对地压力为$N_1 + \rho g(l-y) = 3\rho g(l-y)$

本节课小结

冲量是力在时间上的积累，它导致动量的变化

- 动量定理是矢量方程，在惯性系中成立

合外力为零时，体系动量守恒

- 某一方向合外力为零时，该方向动量守恒
- 短时间内，若内力远大于外力，则反应前后的动量近似守恒

在质点系问题中，通过恰当地定义研究对象，可给出变质量运动方程

- 火箭方程的导出和应用
- 注意具体问题中的$\mathbf{d}m_{1,2}$和u符号约定不一定与本课件一致

第三章作业

3.3, 3.5, 3.6, 3.7, 3.12

作业扫描提交至spoc.buaa.edu.cn，助教线上批改

提交时间段：3月11日0:00至3月25日00:00
以系统时间戳为准，原则上不接受其他解释

时间节点：3月14日（本周五）开始讲第四章