北京航空航天大学

2020－2021 学年 第二学期期中考卷

《 工科数学分析 (II)》

(A 卷)

班号 ___________　　学号__________　　姓名___________

主讲教师________　　考场__________　　成绩___________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成　绩									
阅卷人									
校对人									

2021 年 5 月 16 日

一、 单项选择题（每题 4 分，满分 20 分）

1. 下列级数发散的一组是（ C ）

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ln\,n}{n^{3/2}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{6^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$; (4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln\,n}$.

A. (1)(3)； B. (1)(4)； C. (2)(4)； D. (3)(4).

2. 已知集合$E=\{(x,y)|xy=0\}$，下面命题正确的是（ B ）

① 集合E是开集； ② 集合E是闭集； ③ 集合E是有界集；

④ 集合E是区域； ⑤ 集合E的导集$E^{'}=E$.

A. ①②③ B. ②⑤ C. ①③④ D. ②④⑤

3. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n},(a>0)$在$x=2$处条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$在$x=-1$处（C）

A. 条件收敛； B.绝对收敛； C. 发散； D.无法确定敛散性.

4. 下列函数在(0,0)点的重极限存在但累次极限不存在的是 (B)

A. $f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$; B. $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$;

C. $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$; D. $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

5. 设函数$z=z(x,y)$由方程$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$确定，其中$F(u,v)$具有连续偏导数，

且$xF_u+yF_v\neq 0$,则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ (D).

A. $\frac{z}{x^2+y^2}$; B. $(x+y)z$;

C. $z+xy$; D. $z-xy$.

二、 计算题（每题 5 分，满分 15 分）

1. 将函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,\pi]$ 上展开为余弦级数.

解 把此函数先做偶延拓，再做周期延拓，然后根据公式计算如下：

解 计算 Fourier 系数得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

所以有

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

根据定理 13.1.1 可得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},\quad x\in[-\pi,\pi].$$

2. 求曲线 $\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$ 上 $(1,-2,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

方程两边微分 $\begin{cases}dx+dy+dz=0\\2xdx+2ydy+2zdz=0\end{cases}$

将 $(x,y.z=)(1,-2,1)$ 代入得；$\begin{cases}dx+dy+dz=0\\dx-2dy+dz=0\end{cases}$，所以，$\begin{cases}dy=0\\dz=-dx\end{cases}$

所以，$\dfrac{dy}{dx}=0,\dfrac{dz}{dx}=-1$，切向量：$T=\{1,0,-1\}$

切线：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面：$(x-1)+0(y+2)-(z-1)=0$，即，$z=x$

3. 求函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在（0,0）点带皮亚诺余项的 2 阶 Taylor 展式.

解： $\sqrt{1-x^2-y^2}=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+o(\sqrt{x^2+y^2})^2$

三、计算证明题(每题 5 分，满分 15 分)

1. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$，试证：

1）$a_n<\dfrac{1}{n}$；　　　　2）对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

证：1） $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx=\int_0^1 t^n\dfrac{dt}{1+t^2}<\int_0^1 t^n dt=\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$，

2）由前知，该级数为正项级数，且 $\dfrac{a_n}{n^\lambda}<\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$,所以级数收敛.

2. 证明函数列 $\boldsymbol{f_n(x)=nx(1-x)^n}$，$\boldsymbol{x\in[0,1]}$ 不一致收敛.

解　易得极限函数为 f(x)=0，所以

$$|\boldsymbol{f_n(x)-f(x)}| = |\boldsymbol{nx(1-x)^n}| = \boldsymbol{\varphi(x)},$$

$$\boldsymbol{\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}\varphi(x)\geq\frac{n}{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^n\to\frac{1}{e}>0}$$

故不一致收敛

3. 设二元函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数,定义一元函数$g(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$,其中$\alpha$为给的常数，求$g''(t)$.

解：　由于$\frac{dg(t)}{dt}=(f_x,\ f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$

记$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$，则

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$\frac{dg(t)}{dt}=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha$$

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2}=f_{xx}\cos^2\alpha+2f_{xy}\sin\alpha\ \cos\alpha+f_{yy}\sin^2\alpha$$

四、(本题 10 分) 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\ln n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的收敛性，并指明是条件收敛还是绝对收敛

解：设 $a_n=\sin n$，$b_n=\dfrac{1}{\ln n}$，

1）易见 $\{b_n\}$ 单调递减趋于 0，而

$$\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\right|=\left|\sum_{n=1}^{N}\sin n\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos(N+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{1}{2}},$$

所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 的部分和 $\{S_N\}$ 有界，由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\ln n}$ 收敛.

又 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调有界，由 Abel 判别法，所以原级数收敛。

2）

$$\left|\boldsymbol{\frac{\sin n}{\ln n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right|\ge\boldsymbol{\frac{\sin^2 n}{\ln n}=\frac{1-\cos 2n}{\ln n}}$$

由级数 $\sum\boldsymbol{\frac{1}{\ln n}}$ **发散**；和级数 $\sum\boldsymbol{\frac{\cos 2n}{\ln n}}$ **收敛**； **知级数** $\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{\ln n}\right|$ 发散，所以条件收敛。

五.（本题 10 分）

讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点的连续性与可微及沿 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数.

证明：

（1） 易见对任意的 $(x,y)\neq(0,0)$，不等式

$$|f(x,y)|\le\frac{|x^2y|}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}|x|$$

成立，因此任取 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{2}|x|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(2)

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\ \ f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$， 因为

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin x^2y}{\rho^3}$$

不存在（(x,y)沿着曲线$y=0$ 与曲线$y=x$趋于$(0,0)$的极限不一致），所以$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

（3）根据方向导数的定义

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{t\to 0+}\frac{f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\dfrac{\sin(t^3\cos^2\alpha\sin\alpha)}{t^2}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin(t^3\cos^2\alpha\sin\alpha)}{t^3}=\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

六、（本题 10 分）设函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, $x\in(0,2\pi)$, 证明

1）$f(x)$连续；2）$f(x)$存在导函数$f'(x)$，且$f'(x)$连续.

证明 （1）$\dfrac{\sin nx}{n^2}$在区间$(0,2\pi)$上连续，且

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛以及 Weierstrass 判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$在$(0,2\pi)$上一致收敛，从而其和函数 $f(x)$在$(0,2\pi)$上连续.

（2）$\left(\dfrac{\sin nx}{n^2}\right)'=\dfrac{\cos nx}{n}$ 在$(0,2\pi)$上连续，

对任意的$0<\delta<\pi$，$\forall x\in[\delta,2\pi-\delta]$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},\quad n=1,2,\cdots$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 的部分和序列一致有界，又因为$\dfrac{1}{n}$单调，$n\to\infty$一致收敛于 0,

由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 一致收敛.

由函数项级数的逐项可导定理可知，和函数 $f(x)$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上可导，且导函数连续，

由 δ 的任意性可知 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 可导，且导数连续.

七、(本题 10 分) 求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z(x>0,y>0,z>0)$ 在球面

$x^2+y^2+z^2=5r^2$ 上的最大值，并证明对任意 $a,b,c>0$, 有

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$$

解：设

$$F(x,y,z,\lambda)=(\ln x+\ln y+3\ln z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2),$$

由

$$\begin{cases} F'_x=\frac{1}{x}+2\lambda x=0, \\ F'_y=\frac{1}{y}+2\lambda y=0, \\ F'_z=\frac{3}{z}+2\lambda z=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2+z^2-5r^2=0 \end{cases}$$

解得 $x=y=r,z=\sqrt{3}r,\lambda=-\frac{1}{2r^2}$,由此得驻点为（$r,r,\sqrt{3}r$),根据

$\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$,可知该点为最大值，且最大值为 $f\left(r,r,\sqrt{3}r\right)=\ln\left(3\sqrt{3}r^5\right)$.

对 $\forall a,b,c>0$,取 $r=\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$,就有

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2=a+b+c=5r^2,$$

$$f(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})=\ln\sqrt{a}+\ln\sqrt{b}+3\ln\sqrt{c}=\frac{1}{2}\ln(abc^3)\leqslant\ln(3\sqrt{3}r^5)$$

$$=\ln 3\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^{\frac{5}{2}},$$

$$abc^3\leqslant\left[3\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^2=27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

八、(本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

解：因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{n^2+n+1}=0$

故收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。由

$$\frac{n^2+n+1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n+1)!}(n\ge 1)$$

及幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(x-1)^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n$的收敛域皆为$(-\infty,+\infty)$得

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n$。

用$S_1(x),S_2(x)$分别表示上式右端 2 个幂级数的和函数。依据e^x的展开式得到

$$S_1(x)=(x-1)\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=(x-1)\quad e^{x-1},$$

再由

$$(x-1)S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=e^{x-1}-1$$

得到，当$x\neq 1$时$S_2(x)=\frac{1}{x-1}(e^{x-1}-1)$，又$S_2(1)=1$。

综合以上讨论，最终得到所给幂级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}(x-1)\quad e^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}(e^{x-1}-1) & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$$