一 、单选题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知数列$\{x_n\}$收敛，则可由（ D ）推出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + x_n^2) = 0$； B. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sqrt{x_n^2}) = 0$；

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan x_n = 0$； D. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1 + x_n^2) = 0$.

2. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2 + b}{x\sin x} = 2$,则$a,b$的值分别为（ A ）.

A. $a = 2, b = 0$； B. $a = 1, b = 1$； C. $a = 2, b = 1$； D. $a = -2, b = 0$.

3. 设函数$y = f(x)$由方程$y - x - \mathrm{e}^{x(1-y)} = 0$所确定,则$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right] =$（ B ）.

A. 0； B. 1； C. -1； D. 此极限不存在.

4.设$f(x) = \dfrac{x-1}{1 - e^{\frac{x-1}{x}}}$,则其间断点及类型分别为（ C ）.

A. $x = 0, x = 1$均为跳跃间断点；

B. $x = 0$为无穷间断点,$x = 1$为可去间断点；

C. $x = 0$为跳跃间断点,$x = 1$为可去间断点；

D. $x = 0, x = 1$均为可去间断点.

5.设$f(x)$有连续的二阶导数,且$f'(0) = 0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x) - 1}{x^2} = 1$，则（ B ）.

A． $f(0)$为函数的极大值； B. $f(0)$为函数的极小值；

C. $(0, f(0))$为函数曲线的拐点； D. $f(0)$不是函数的极值.

二、计算证明（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}$.

解 1：$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1)^{\frac{n^2}{e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1}}\right]^{\left(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1\right)n^2}$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}$ 和海涅定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1\right)n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{2}}$

解 2：$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\ln(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})}$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\ln(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}n^2(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1)$$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}$ 和海涅定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1\right)n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{2}}$

2.设函数$\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = te^t \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{(t+1)e^t}{3(t^2+1)}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{(t^3 - t + 2)e^t}{3(t^2+1)^2}}{3(t^2+1)} = \frac{(t^3 - t + 2)e^t}{9(t^2+1)^3}$$

3.设 $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^{2023}$,求 $f^{(2023)}(1)$.

解：$(x^2 - 4x + 3)^{2023} = (x-1)^{2023}(x-3)^{2023}$

$$f^{(2023)}(x) = (x-1)^{2023}\left[(x-3)^{2023}\right]^{(2023)} + 2023 \cdot \left[(x-1)^{2023}\right]'\left[(x-3)^{2023}\right]^{(2022)}$$
$$+ \cdots + 2023 \cdot \left[(x-1)^{2023}\right]^{(2022)}\left[(x-3)^{2023}\right]' + \left[(x-1)^{2023}\right]^{(2023)}(x-3)^{2023}$$

故 $f^{(2023)}(1) = \left[(x-1)^{2023}\right]^{(2023)}(x-3)^{2023}\Big|_{x=1} = -2023! \cdot 2^{2023}$

4. 求集合 $A = \left\{ a_n \middle| a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, \cdots \right\}$ 的下确界，并用确界的定义加以证明.

解：$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n} = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{2k-1}, n = 2k-1, \\ 1 + \dfrac{1}{2k}, n = 2k \end{cases}$

$\forall a_n \in A, a_n \geq -1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in N^*$,使得$\dfrac{1}{2k-1} < \varepsilon$,即$\exists a_{2k-1} \in A$,使得$a_{2k-1} < -1 + \varepsilon$

故此集合的下确界为-1

5. 证明 $y = \ln x$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

证明：取 $x_n' = \dfrac{1}{n}, x_n'' = \dfrac{2}{n}$

当$n \to \infty$时$|x_n' - x_n''| = \dfrac{1}{n} \to 0$，但$|\ln x_n' - \ln x_n''| = \ln 2$ 极限非 0，故此函数非一致连续

三、已知数列$\{x_n\}$，$0 < x_1 < 1$，$x_{n+1} = \dfrac{4(1+x_n)}{4+x_n}, \forall n \geq 1$. 证明数列$\{x_n\}$收敛，并求

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解：由条件可知$0 < x_{n+1} = \frac{4(1+x_n)}{4+x_n} < 4$，$\forall n \geq 1$. 所以$\{x_n\}$为有界正数列。此外，

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(1+x_n)}{4+x_n} - \frac{4(1+x_{n-1})}{4+x_{n-1}} = \frac{12(x_n - x_{n-1})}{(4+x_n)(4+x_{n-1})} \quad (1)$$

$x_{n+1} - x_n$与$x_n - x_{n-1}$同号，而

$$x_2 - x_1 = \frac{4(1+x_1)}{4+x_1} - x_1 = \frac{4-{x_1}^2}{4+x_1} > 0 \quad (2)$$

于是，$x_{n+1} - x_n > 0$，$\forall n \geq 1$.即$\{x_n\}$是单调递增有上界的数列，故收敛。设$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，那么由$x_{n+1} = \frac{4(1+x_n)}{4+x_n}$，两边关于$n \to +\infty$取极限，得

$$a = \frac{4(1+a)}{4+a}$$

解得$a = 2$或$a = -2$. 由于$\{x_n\}$是有界正数列，由极限的保号性，必$a \geq 0$，所以

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$$

方法二：在证明数列$\{x_n\}$收敛时，也可以采用 Cauchy 收敛原理，如下：由(1)式可得

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{3}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} |x_2 - x_1|$$

于是，对于任意正整数 n 以及一切自然数 p，都有

$$|x_{n+p} - x_n| \leq 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} |x_2 - x_1|$$

对于任意$0 < \varepsilon < |x_2 - x_1|$，取$\mathrm{N} = \left[\frac{ln\frac{\varepsilon}{3|x_2 - x_1|}}{ln\frac{3}{4}}\right] + 2$，当$n > N$时，对一切自然数 p，有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

所以$\{x_n\}$是 Cauchy 列，必定收敛。后面求极限的过程与前面一样。

四、设$\alpha > 0$，函数$f(x)$定义如下，

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(1) 用$\varepsilon - \delta$语言证明函数$f(x)$在$x = 0$处连续.
(2) 若函数$f(x)$在$x = 0$处可导，求α的取值范围，并求$f'(0)$.
(3) 若函数$f'(x)$在$x = 0$处连续，求α的取值范围.

(1) 证明：对于任意$\varepsilon > 0$，取$\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$，当$|x| < \delta$时，

$$|f(x) - f(0)| = \left|x^{\alpha} sin\frac{1}{x}\right| \le |x|^{\alpha} < \varepsilon$$

故函数$f(x)$在$x = 0$处连续。

(2) 解：若$0 < \alpha \le 1$，$\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x}$不存在；若$\alpha > 1$，则$\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} = 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} = 0$$

即$\alpha > 1$时，函数$f(x)$在$x = 0$处可导，且$f'(0) = 0$

(3) 解：当$x \neq 0$时，

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2} cos\frac{1}{x}$$

当$\alpha > 2$时，

$$\lim_{x\to 0}\left(\alpha x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2} cos\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$$

当$1 < \alpha \le 2$时，$\lim\limits_{x\to 0} \alpha x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} = 0$，但是极限$\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-2} cos\frac{1}{x}$不存在，从而极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\alpha x^{\alpha-1} sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos\frac{1}{x}\right)$$不存在。

当$0 < \alpha \le 1$时，函数$f(x)$在$x = 0$处不可导，即此时$f'(0)$不存在。

综合上述讨论，α的取值范围是$(2, +\infty)$.

五、设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，$f(0) = f(1) = 0$， $f'_+(0)$ 和 $f'_-(1)$ 都存在，且 $f'_+(0)\cdot f'_-(1) > 0$．试证明：存在点$\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 0$．

证明：根据条件，不妨设 $f'_+(0) > 0$，$f'_-(1) > 0$，即

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} > 0, \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > 0$$

由函数极限的局部保号性，存在$\delta_1 > 0$，使得$(0,\delta_1) \subset [0,1]$，

$$f(x) > f(0) = 0, \qquad \forall x \in (0,\delta_1).$$

存在$0 < \delta_2 < 1-\delta_1$，使得$(1-\delta_2, 1) \subset [0,1]$，

$$f(x) < f(1) = 0, \qquad \forall x \in (1-\delta_2, 1).$$

于是分别取$a \in (0,\delta_1)$，$b \in (1-\delta_2, 1)$，则 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，$f(a) < 0$，$f(b) > 0$.

根据连续函数的介值定理，必存在$\xi \in [a,b] \subset (0,1)$，使得 $f(\xi) = 0$.

六、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上三阶可导, $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$, 且在 (a,b) 内存在两个不同的点 x_1, x_2 ,使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 试证明:

(1) $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

(2)存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'''(\xi)=0$.

证明: （1）由于 $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$， x_1和 x_2 必为函数的极小值点，由 Fermat 引理，

$$f'(x_1)=f'(x_2)=0. \tag{1}$$

（2）不妨设 $x_1<x_2$ ， $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 连续， 在开区间 (x_1,x_2) 可导， $f(x_1)=f(x_2)=0$，故由 Rolle 中值定理，存在点 $c\in(x_1,x_2)$，使得

$$f'(c)=0. \tag{2}$$

考虑闭区间 $[x_1,c]$ 和 $[c,x_2]$,函数 $f(x)$ 在这两个闭区间上都连续,在开区间 (x_1,c) 和 (c,x_2) 都是可导的，结合(1)式和(2)式，由 Rolle 中值定理，可得

$$\exists\mu\in(x_1,c),\ \exists\nu\in(c,x_2),\quad f''(\mu)=0,\quad f''(\nu)=0 \tag{3}$$

根据条件, 函数 $f''(x)$ 在闭区间 $[\mu,\nu]$ 连续,在开区间 (μ,ν) 可导,结合(3)式,再次应用 Rolle 中值定理，存在点 $\xi\in(\mu,\nu)\subset(a,b)$ ，使得 $f'''(\xi)=0$. 证毕。

七、设函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(1) 求函数的单调区间、函数的极值点、极值和最值.

(2) 求函数的凹凸区间、函数曲线的拐点.

解：简单计算可得

$$y'=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\qquad y''=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

I. 令 $y'=0$，解得 $x_1=-1,\ x_2=1$.

1).当 $x<-1$ 时, $y'<0$ ，故函数在 $(-\infty,-1)$ 内严格递减;

2).当 $-1<x<1$ 时， $y'>0$ ，故函数在 $(-1,1)$ 内严格递增;

3).当 $x>1$ 时， $y'<0$ ，故函数在 $(1,+\infty)$ 内严格递减。

$y'(-1)=0$，而且函数在 $x_1=-1$ 左侧单调递减，而在其右侧单调递增，故 $x_1=-1$ 是函数的极小值点，极小值 $y(-1)=-1$.

$y'(1)=0$，而且函数在 $x_2=1$ 左侧单调递增，而在其右侧单调递减，故 $x_2=1$ 是函数的极大值点，极大值 $y(1)=1$.

在 $[0,+\infty)$ 上，$x^2+1\geq 2x$ 恒成立，故 $y\leq 1, \forall x\in[0,+\infty)$. 此外，函数是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，故 $y\geq -1, \forall x\in(-\infty,0]$.所以，函数的最大值为 $y(1)=1$；函数的最小值为 $y(-1)=-1$.

II. 令 $y''=0$，解得 $\xi_1=-\sqrt{3},\ \xi_2=0,\ \xi_3=\sqrt{3}$

1).当 $x<-\sqrt{3}$ 时，$y''<0$，故在 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 内是严格凹函数；

2).当 $-\sqrt{3}<x<0$ 时，$y''>0$，故在 $(-\sqrt{3},0)$ 内是严格凸函数；

3).当 $0<x<\sqrt{3}$ 时，$y''<0$，故在 $(0,\sqrt{3})$ 内是严格凹函数；

4).当 $x>\sqrt{3}$ 时，$y''>0$，故在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内是严格凸函数；

注意到 $y(-\sqrt{3})=\dfrac{-\sqrt{3}}{2},\quad y(0)=0,\quad y(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以函数曲线的拐点是 $(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{2})$ $(0,0)$和$(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.