5.4 实对称方阵相合标准形

例1 试通过对称方阵的相合对角化化简二次型

$$Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4xy-6xz-4yz$$

解: 记$X=(x,y,z)^T$,则$Q(X)=X^TSX$,其中

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

第一步: 将S的第1行的-2倍加到第2行，再将第1列的-2倍加到第2列，得到S_1.

也就是将S左乘初等矩阵$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$,

再右乘P_1^T,得到 $S_1 = P_1 S P_1^T$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2(1)+(2)]{-2(1)+(2)} S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

第二步： 将S_1的第1行的3倍加到第3行，再将

第1列的3倍加到第3列，得到S_2. 也就是将S_1左乘初等矩阵$P_2=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ 3 & & 1\end{pmatrix}$，再右乘$P_2^T$，得到$S_2=P_2S_1P_2^T$.

$$S_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & -3 & 4\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[3(1)+(3)]{3(1)+(3)}S_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & -8\end{pmatrix}$$

第三步：将S_2的第2行的$\dfrac{4}{3}$倍加到第3行，

再将第2列的$\frac{4}{3}$倍加到第3列，得到S_3.也就是将S_2

左乘初等矩阵$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$,再右乘$P_3^T$,得到

$S_3 = P_3 S_2 P_3^T$.

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{4}{3}(2)+(3)]{\frac{4}{3}(2)+(3)} S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

这样就得到了对角矩阵

$$S_3 = P_3 P_2 P_1 S P_1^T P_2^T P_3^T = P^T S P$$

其中

$$P = P_1^T P_2^T P_3^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 3 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \frac{4}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ & 1 & \frac{4}{3} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

通过可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - 2y' + \frac{1}{3}z' \\ y' + \frac{4}{3}z' \\ z' \end{pmatrix}$$

将原二次型$Q(x, y, z)$化成了平方和的形式

$$Q_1(x', y', z') = x'^2 - 3y'^2 - \frac{8}{3}z'^2$$

例1用矩阵相合的办法获得的标准型和配方所得的结果相同。

这里将每次实现初等变换所用的初等矩阵 P_1, P_2, P_3 记录下来，并在最后相乘得到P。

注意到当S经过初等变换和相应的列变换变成

$P_3P_2P_1SP_1^T P_2^T P_3^T$的时候，同样的初等行变换将单位矩阵$I$变成$P_3P_2P_1 = P^T$. 因此可以改进为如下的算法：

算法： 将n阶对称方阵S相合到对角矩阵

$S_1 = P^T SP$，求S_1及P：

1.将S与同阶单位矩阵I排成$n\times 2n$矩阵$A=(S,I)$.

2.从$A_0=A$开始，经过初等变换依次得到$A_1, A_2\cdots$,

其中对每个A_{i-1}进行一次初等行变换，然后对它的前n列进行相应的列变换，得到A_i.

这里，与初等行变换$\mathfrak{I}$相应的列变换$\mathfrak{I}'$是：

(1) 设$\mathfrak{I}$将第i, j两行互换，则$\mathfrak{I}'$将第i, j两列互换；

(2) 设$\mathfrak{I}$将第i行乘非零常数a，则$\mathfrak{I}'$将第i列乘a;

(3) 设$\mathfrak{I}$将第j行的a倍加到第i行，则$\mathfrak{I}'$将第j列的

a倍加到第i列.

3.将第2步重复有限次，将(S,I)变成(S_1,P^T)，其中左边n列组成对角矩阵S_1, 则右边n列组成的可逆方阵P^T的转置方阵P满足条件$S_1=P^TSP$.

这样，矩阵相合的过程可以重写为(注意 以下只在箭头上方标明了所用的初等行变换,而不再将相应的初等列变换标在下方)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2(1)+(2),3(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{3}(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{8}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{3}}(2),\sqrt{\frac{3}{8}}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dfrac{1}{2\sqrt{6}} & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则

$$S_1=P^TSP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

取可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

则二次型化为

$$Q_1(x', y', z') = x'^2 - y'^2 - z'^2$$

注意　在之前的解法中，已经得到对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

机动　目录　上页　下页　返回　结束

这里再将第2行和第2列同时乘$\frac{1}{\sqrt{3}}$(由$\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{3}}(2)}$表示),第3行和第3列同时乘$\sqrt{\frac{3}{8}}$(由$\xrightarrow{\sqrt{\frac{3}{8}}(3)}$表示),将第2行和第3行的对角元$-3, -\frac{8}{3}$都变成了$-1$. 得到了更简单的对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

例2 试通过对称方阵的相合对角化化简二次型

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

解：记 $X=(x_1,x_2,x_3)^T\in F^{3\times1}$, 则$Q(X)=X^TSX$,

$$\text{其中}S=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}(1)+(2),-(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

取

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

则

$$S_1=P^TSP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$Q(x_1,x_2,x_3)=Q_1(y_1,y_2,y_3)=y_1{}^2-y_2{}^2-y_3{}^2$$

注意 当给定二次型不含平方项时， 它的主对角线元全为0. 第一步先将第2行加到第1行、第2列加到第1列， 将对角线上的第(1,1)元化为非零的数，然后才能用这个元去消去与它同一列和同一行的其余元， 使矩阵的相合对角化前进一步.

以下证明：以上给出的具体方法可以推广到任意数域F上的对称方阵S，将S相合到对角矩阵.

定理： 设S是数域F上的n阶对称方阵， 则存

在F上n阶可逆方阵P使$D=P^TSP$是对角矩阵.其中的对角元可以按任意指定的顺序排列.

证明:(算法5.4.1)设$S=(s_{ij})_{nxn}$，对n用数学归纳法证明定理结论.

当$n=1$时，$S=(s_{11})$已经是对角矩阵.

当$n\geq 2$,并且假定$n-1$阶对称方阵都可以相合到对角矩阵,证明n阶对称方阵S相合于对角矩阵.

情况1 $\quad s_{11}\neq 0.$

取

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -s_{11}^{-1}s_{12} & \cdots & -s_{11}^{-1}s_{1n} \\ & 1 & & \\ & & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$S_1 = P_1^T S P_1 = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}$$

其中$S_{22} \in F^{(n-1)\times(n-1)}$.并且由于$S_1^T = S_1$,有$S_{22}^T = S_{22}$.

根据归纳假设，存在F上$n-1$阶可逆方阵 P_{22}使

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$D_2 = P_{22}^T S_{22} P_{22}$是对角矩阵.

取$P_2 = diag(1, P_{22})$,则P_2是F上n阶可逆方阵，且

$$D = P_2^T S_1 P_2 = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

是对角矩阵. 取$P = P_1 P_2$,则

$$P^T S P = P_2^T P_1^T S P_1 P_2 = P_2^T S_1 P_2 = D$$

是对角矩阵.

情况2 $s_{11} = 0$,但$s_{1k} = s_{k1} \neq 0$对某个$2 \leq k \leq n$成立.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

取n阶初等方阵$P_1=T_{k1}(1)=I+E_{k1}$ (其中E_{k1}表示第$(k,1)$个元为1、其余元为0的方阵).则

$$S_1=P_1^T S P_1=(b_{ij})_{n\times n}$$

其中$b_{11}=2s_{1k}\neq 0$.S_1符合情况1的要求. 根据情况1的论证，存在n阶可逆方阵P_2使$D=P_2^T S_1 P_2$是对角矩阵.

取$P=P_1P_2$，则P是F上n阶可逆方阵，$P^T SP=D$是对角矩阵.

情况3　$s_{1j}=s_{j1}=0$对所有的$1\le j\le n$成立. 此时

$$S=\begin{pmatrix}0 & \\ & S_{22}\end{pmatrix}$$

其中S_{22}是$n-1$阶对称方阵. 根据归纳假设,

存在F上$n-1$阶可逆方阵P_2使$D_2=P_2^T S_{22} P_2$是

对角矩阵. 取$P=diag(1,P_2)$, 则

$$P^T SP=\begin{pmatrix}0 & \\ & D_2\end{pmatrix}$$

是对角矩阵.

根据数学归纳法，对任意正整数n, F上n阶对称方阵都相合于对角矩阵.

设已有n阶可逆方阵P将S相合到对角矩阵

$$P^T SP = D = diag(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

对$1, 2, \cdots n$的任意排列$\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_n)$，依次将单位矩阵$I$的第$i_1, i_2, \cdots, i_n$列排成可逆方阵$P_\sigma$，则

$$(PP_\sigma)^T S(PP_\sigma) = P_\sigma{}^T DP_\sigma = D_\sigma = diag(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_n})$$

可见S相合于将D的对角元按任意顺序重新排列得到的对角矩阵D_σ.

定理5.4.1: 对实数域上任意n阶对称方阵S，存在n阶实可逆方阵P，使

$$P^T SP = \mathrm{diag}(I_{(p)}, -I_{(q)}, O_{(n-p-q)})$$

其中$p+q=\mathrm{rank}\, S$.

证明：由定理,存在n阶可逆实方阵P_1,使得

$$P_1^T SP_1 = D_1 = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots a_n)$$

且可排列对角元$a_1, a_2, \cdots a_n$的顺序，使排在前面的p个$a_i > 0(\forall 1 \le i \le p)$，其次的$q$个$a_i < 0(\forall p < i \le p+q)$,

最后的$n-p-q$个$a_i=0(\forall p+q<i\le n)$. 由于$S$与$D_1$相抵，

$$p+q=\operatorname{rank} D_1=\operatorname{rank} S$$

取n阶可逆实对角矩阵

$$P_2=\operatorname{diag}(b_1,\cdots,b_n)$$

使

$$b_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a_i}},\forall 1\le i\le p\\ \dfrac{1}{\sqrt{-a_i}},\forall p<i\le p+q\\ 1,\forall p+q<i\le n\end{cases}$$

取$P=P_1P_2$，则

$$D=P^TSP=P_2^TD_1P_2=\mathrm{diag}(I_{(p)},-I_{(q)},O_{(n-p-q)}).$$

$\mathrm{diag}(I_{(p)},-I_{(q)},O_{(n-p-q)})$称为实对称方阵相合的规范形. 我们将证明，与实对称方阵S相合的规范形由 S 唯一决定.

在求多元二次实函数以至于一般的多元实函数的极值时，正定或负定的二次型起着重要的作用.

定义5.4.1 设$Q(X)$是n元实二次型. 如果对R^n中所有的$X \neq O$都有$Q(X) > 0$，就称Q是正定的. 如果对R^n中所有的$X \neq O$都有$Q(X) < 0$，就称Q是负定的. 如果对R^n中所有的$X \neq O$都有$Q(X) \geq 0$，就称Q是半正定的. 如果对R^n中所有的$X \neq O$都有$Q(X) \leq 0$，就称Q是半负定的.

设S是n阶实对称方阵.如果S所决定的n元实二次型$Q(X)=X^TSX$正定，或负定，或半正定，或半负定，也就是说对$R^{n\times 1}$中所有的$X\neq O$都有$X^TSX>0$，或都有$X^TSX<0$，或都有$X^TSX\geq 0$，或都有$X^TSX\leq 0$，就分别称S正定，或负定，或半正定，或半负定，分别记为$S>0$，或$S<0$，或$S\geq 0$，或$S\leq 0$.

显然，Q负定$\Leftrightarrow -Q$正定；Q半负定$\Leftrightarrow -Q$半正定. 类似地，$S<0 \Leftrightarrow -S>0$； $S \le 0 \Leftrightarrow -S \ge 0$.

引理: 与正定（或半正定）实对称方阵S相合的方阵$S_1 = P^T SP$仍然正定（或半正定），其中P是实可逆方阵.

证明：设S是n阶正定实对称方阵. 则对任意$O \neq X \in R^{n\times 1}$，有$X^T SX > 0$. 对任意$O \neq Y \in R^{n\times 1}$有$X = PY \neq O$，从而

$$Y^T S_1 Y = Y^T P^T SPY = X^T SX > 0.$$ 可见S_1正定.

类似地可以证明S半正定$\Rightarrow S_1$半正定，只要将以上证明中的$>$号全部改为$\geq$号就行了.

下面研究S正定或半正定的充要条件.

已经证明：任何一个n阶实对称方阵S相合于

$$D = \mathrm{diag}(I_{(p)}, -I_{(q)}, O_{(n-p-q)})$$

$$S > 0 \Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow \text{二次型}$$

$$Q(X) = X^T D X = x_1^2 + \cdots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 \text{ 正定.}$$

如果$q > 0$，取$X = e_{p+1}$为第$p+1$个分量为1，其余分量为0的n维列向量，则$Q(e_{p+1}) = -1 < 0$，D既不是正定也不是半正定.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

因此，$S \geq 0 \Rightarrow q = 0 \Leftrightarrow Q(X) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$

反过来，对所有的$O \neq X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in R^{n\times 1}$有

$Q(X) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 \geq 0$. 这说明

$S \geq 0 \Leftrightarrow q = 0 \Leftrightarrow S$相合于$diag(I_{(r)}, O_{(n-r)})$

如果$n > r$，取$e_n = (0, \cdots, 0, 1)^T \in R^{n\times 1}$，则

$e_n \neq 0$但$Q(e_n) = 0$，这说明此时Q半正定但不正定.

因此，

$S>0 \Rightarrow n=r=p \Leftrightarrow D=I_{(n)} \Leftrightarrow Q(X)=x_1^2+\cdots+x_n^2$

显然$Q(X)=x_1^2+\cdots+x_n^2>0$对所有的$O \neq X \in R^{n\times 1}$成立. 因此得到 $S>0 \Leftrightarrow S$相合于$I_{(n)} \Leftrightarrow$ 存在可逆方阵P使$S=P^T IP=P^T P$.

可得如下结果。

引理5.4.1实对称方阵S正定$\Leftrightarrow$存在可逆实方阵P使$S=P^T P \Leftrightarrow S$与单位矩阵$I$相合.

实对称方阵S半正定有类似的充要条件：

推论： n阶实对称方阵S半正定$\Leftrightarrow$

存在矩阵$A\in R^{m\times n}$使$S=A^TA$，并且可以要求$m=$

$\mathrm{rank}S$.

证明： 设$S=A^TA$,则对任意$O\neq X\in R^{n\times 1}$有

$$X^TSX=X^TA^TAX=Y^TY=y_1^2+\cdots+y_m^2\geq 0$$

其中$Y=AX=(y_1,\cdots,y_m)^T\in R^{m\times 1}$.这说明了$S$半

正定.

反过来，设S半正定，则S相合于$D=\operatorname{diag}(I_{(r)},O_{(n-r)}), r=\operatorname{rank} D=\operatorname{rank} S.$存在$n$阶可逆方阵$P$使

$$S=P^T DP=P^T\begin{pmatrix} I_{(r)} & \\ & O_{(n-r)} \end{pmatrix}P=P^T\begin{pmatrix} I_{(r)} \\ O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \end{pmatrix}P=A^T A$$

其中$A=\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \end{pmatrix}, P\in R^{r\times n}, \operatorname{rank}A=r=\operatorname{rank}S$

容易知道：正定实对称方阵都是可逆方阵.实际上，容易证明：S正定$\Leftrightarrow$ S半正定且可逆.

正定实对称方阵S既然是可逆方阵，行列式$\det S$当然不为0，不仅如此，还有：

推论5.4.3: 实对称方阵S正定$\Rightarrow$ S的行列式$\det S > 0$.

证明 $S>0 \Rightarrow$ 存在可逆方阵P使$S=P^TP$

$\Rightarrow \det S=\det P^T \det P=\det P\det P=(\det P)^2>0.$

例3 已知实对称方阵$S>0$.求证：对任意

正整数k有$S^k>0$.

证明： 当k为偶数$2m$时$S^k=P^TP$对可逆方阵

$P=S^m$成立,$S^k>0$;当k为奇数$2m+1$时，取$P=S^m$,

则$S^k=P^TSP$与正定方阵S相合，也是正定方阵.

由例3的证明可知：当k为偶数时，$S^k > 0$对任意可逆实对称方阵S成立，不要求$S > 0$.

正定实对称方阵$S=(s_{ij})_{n\times n}$不但本身的行列式>0,而且它的前k行和前k列交叉位置的元组成的子方阵$S_k=(s_{ij})_{1\le i,j\le k}$也是正定的,行列式$\det S_k > 0$. 一般地，对任意方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$和任意正整数$k\le n$，我们将$A$中前$k$行和前$k$列交叉

位置的元组成的行列式$\det(a_{ij})_{1\le i,j\le k}$称为$A$的顺序主子式. 我们有

定理5.4.2 实对称方阵$S=(s_{ij})_{n\times n}$正定$\Leftrightarrow$ S的所有顺序主子式大于0：

$$\begin{vmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{k1} & \cdots & s_{kk} \end{vmatrix} > 0, \forall 1 \le k \le n$$

证明： 设$S=(s_{ij})_{n\times n}$是实对称方阵. 对每个

$1\le k\le n$, 记$S_k=(s_{ij})_{1\le i,j\le k}$为$S$中处于前$k$行和

前k列的交叉位置的元组成的k阶实对称方阵.

先设S正定. 则对任意不全为零的实数$x_1,\cdots x_k$,有

$$(x_1,\cdots x_k)S_k(x_1,\cdots x_k)^T=(x_1,\cdots x_k,0,\cdots,0)S(x_1,\cdots x_k,0,\cdots,0)^T>0$$

这说明S_k正定，从而行列式$\det S_k>0$.

再设$\det S_k>0$对$1\le k\le n$成立. 对n用数学归纳

法证明$S>0$.

当$n=1$时，$S_1=s_{11}>0$，$s_{11}x_1^2>0$对所有的实数$x_1\neq 0$成立，$S=(s_{11})$正定.

设$n\geq 2$,且假设命题已对$n-1$阶实对称方阵成立. 则由S_{n-1}的所有的顺序主子式$\det S_k>0$ $(\forall 1\leq k\leq n-1)$知$S_{n-1}$正定. 存在$n-1$阶可逆方阵$P_1$使$S_{n-1}=P_1^T P_1$.

将S分块为

$$S=\begin{pmatrix} S_{n-1} & \beta \\ \beta^T & s_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$\beta\in R^{(n-1)\times 1}$，由$\det S_{n-1}>0$知$S_{n-1}$可逆. 取$n$阶可逆方阵

$$T=\begin{pmatrix} I_{(n-1)} & -S_{n-1}{}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$D = T^T S T = \begin{pmatrix} I_{(n-1)} & 0 \\ -\beta S_{n-1}^{\ -1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{n-1} & \beta \\ \beta^T & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(n-1)} & -S_{n-1}^{\ -1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{n-1} & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}$$

其中$d_n = s_{nn} - \beta^T S_{n-1}\beta$.由$\det T = 1$知道

$$\det S = \det D = (\det S_{n-1}) d_n ,\text{从而} d_n = \frac{\det S}{\det S_{n-1}}.$$

但$\det S = \det S_n > 0, \det S_{n-1} > 0$, 故$d_n > 0$.于是

$$D=\begin{pmatrix} P_1^T P_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_n}\sqrt{d_n} \end{pmatrix}=P^T P$$

对可逆方阵$P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$成立. 这说明$D$正定,

从而S正定.

根据数学归纳法原理，定理对所有的正整数n成立.

不但正定实对称方阵S的顺序主子式都大于零,

而且S的任意主子式都大于零. 这里，$S=(s_{ij})_{n\times n}$

的主子式是指：对任意$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$,由$S$中第

$i_1,i_2,\cdots,i_k$行和第$i_1,i_2,\cdots,i_k$列交叉位置的元组成的

行列式$S\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$，它的主对角元也都是

S的主对角线元.

例4 给出正定实二次型$Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$的系数a,b,c满足的充分必要条件。

解：

$$Q(x,y)=(x,y)S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, S=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix},$$

$$Q>0 \Leftrightarrow S>0 \Leftrightarrow \begin{cases} |S_1|=a>0 \\ |S_2|=ac-\dfrac{b^2}{4}>0 \end{cases}$$

Q正定的充分必要条件为$a>0$且$b^2-4ac<0$.

例5: 已知实二次型

$$Q(x,y,z)=\lambda(x^2+y^2+z^2)-2xy-2xz+2yz.$$

(1) λ取什么值时$Q(x,y,z)$正定？

(2) λ取什么值时$Q(x,y,z)$负定？

(3) λ取什么值时$Q(x,y,z)$可以写成实系数一次多项式的平方$(ax+by+cz)^2$？

证明: $Q(x,y,z)$的矩阵

$$S=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

(1) Q正定 $\Leftrightarrow S>0 \Leftrightarrow S$的顺序主子式 $\det S_k>0$, $\forall k=1,2,3$,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det S_1=\lambda>0, \\ \det S_2=\lambda^2-1>0, \\ \det S_3=(\lambda-1)^2(\lambda+2)>0. \end{cases} \Leftrightarrow \lambda>1$$

故Q正定当且仅当$\lambda>1$.

(2) Q负定 $\Leftrightarrow S<0 \Leftrightarrow -S>0 \Leftrightarrow -S$的所有顺序主子式 $\det((-S)_k)>0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \det((-S)_1) = -\lambda > 0, \\ \det((-S)_2) = \lambda^2 - 1 > 0, \\ \det((-S)_3) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \lambda < -2$$

故Q负定当且仅当$\lambda < -2$.

(3)$Q = (ax + by + cz)^2 \Leftrightarrow S \geq 0$且$\mathrm{rank}\, S = 1$.

$\mathrm{rank} S = 1 \Rightarrow \det S = (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$或

$\lambda = -2$.易见$\lambda = -2$时S不是半正定（并且此时$\mathrm{rank} S$

$= 2$).剩下唯一的可能性是$\lambda = 1$.当$\lambda = 1$时

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz = (x - y - z)^2$$

引理 任意数域F上任意对角矩阵$D=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$相合于

$$\mathrm{diag}(c_1^2a_1,\ldots,c_n^2a_n),$$

其中$c_1,\ldots,c_n$是F中的任意非零元。

证明： 取$P=\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n)$，则

$$P^{\mathrm{T}}DP=\mathrm{diag}(c_1^2a_1,\ldots,c_n^2a_n)$$

定理： 在复数域C上的任意对称方阵S相合于唯一的规范型

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中r =rank S。

证明： S相合于对角矩阵D=diag(a_1,…,a_n)，且可排列对角元的顺序使D=diag(a_1,…,a_r,0,…,0)，其中a_i≠0(1≤i≤r)。显然 r=rank D=rank S 。

对于每个1≤i≤r，取c_i使$c_i^2=a_i^{-1}$，则$c_i^2a_i=1$。 D相合于 Λ=diag($c_1^2a_1$,…,$c_r^2a_r$,0,…,0)=diag($I_{(r)}$,$O_{(n-r)}$)

其中，r=rank S 由S唯一确定。

惯性定理 实数域R上的任意*n*阶对称方阵*S*相合于规范型

$$\Lambda=\begin{pmatrix} I_{(p)} & & \\ & -I_{(q)} & \\ & & O_{(n-p-q)} \end{pmatrix}$$

其中*p*,*q*由 *S*唯一决定，*p*+*q*=rank *S*。

证明： 由于*S*与Λ相抵，*p*+*q*=rankΛ=rank *S*。因此只要证明*p*的唯一性即可。

S定义了二次型$Q(X)=X^TSX$, $X\in R^{n\times 1}$

设有可逆方阵P_1，P_2分别将S相合于

$$\Lambda_1 = P_1^{\mathrm{T}} S P_1 = \mathrm{diag}(I_{(p)}, -I_{(r-p)}, O_{(n-r)})$$

$$\Lambda_2 = P_2^{\mathrm{T}} S P_2 = \mathrm{diag}(I_{(s)}, -I_{(r-s)}, O_{(n-r)})$$

Λ_1，Λ_2分别定义了二次型

$$Q_1(Y) = Y^{\mathrm{T}} \Lambda_1 Y = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$Q_2(Z) = Z^{\mathrm{T}} \Lambda_2 Z = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

其中$Y=(y_1,\ldots,y_n)^T$，$Z=(z_1,\ldots,z_n)^T \in \mathrm{R}^{n\times 1}$。

假如 $p \neq s$， 不妨设 $p > s$。

设$a_1,\ldots,a_n$依次是P_1的各列，V_+是由P_1的前 p 列$a_1,\ldots,a_p$生成的 p 维子空间。对任意 $0\neq a\in V_+$, 有

$$a=y_1a_1+y_2a_2+\ldots+y_pa_p,$$

其中各项前实系数不全为0，则

$$0\neq Y=(y_1,\cdots,y_p,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{n\times1}$$

$$a=(a_1,\cdots,a_p)(y_1,\cdots,y_p)^{\mathrm{T}}=P_1Y$$

$$Q(a)=a^{\mathrm{T}}Sa=(P_1Y)^{\mathrm{T}}S(P_1Y)=Y^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}SP_1Y=Y^{\mathrm{T}}\Lambda_1Y$$

$$=Q_1(Y)=y_1^2+\cdots+y_p^2>0$$

设$b_1,\ldots,b_n$依次是P_2的各列，V_-是由P_2的后 n-s列$b_{s+1},\ldots,b_n$生成的 n-s 维子空间。对任意$0\neq b\in V_-$，有

$$b=z_{s+1}b_{s+1}+\ldots+z_nb_n,$$

其中各项前为实系数。

取$Z=(0,\cdots,0,z_{s+1},\cdots,z_n)^T\in\mathrm{R}^{n\times 1}$,则

$$b=(b_{s+1},\cdots,b_n)(z_{s+1},\cdots,z_n)^T=P_2Z$$

$$Q(b)=b^TSb=(P_2Z)^TS(P_2Z)=Z^TP_2^TSP_2Z=Z^T\Lambda_2Z$$

$$=Q_2(Z)=-z_{s+1}^2-\cdots-z_r^2\leq 0$$

V_+，V_-都是n维空间$V=R^{n\times 1}$的子空间。由于$p>s$，$\dim V_+ + \dim V_- = p+n-s>n=\dim V$，因此有$V_+\cap V_- \neq 0$。取$0\neq a\in V_+\cap V_-$。

一方面，知$Q(a)>0$；另一方面，知$Q(a)\leq 0$，矛盾。因此，$p=s$。

定义 5.4.2 **实对称方阵S的相合规范形中对角线上 1 的个数*p*称为S的正惯性指数，-1的个数*q*称为负惯性指数，正惯性指数与负惯性指数的差*p-q*称为符号差。**

机动 目录 上页 下页 返回 结束

实二次型$Q(X)=X^TSX$ 的矩阵S的正惯性指数、负惯性指数、符号差也称为二次型Q的正惯性指数、负惯性指数、符号差。

- 实对称方阵S的相合规范形可以由S的秩和正惯性指数确定, 也可以由秩和符号差决定。
- 显然， $S>0$当且仅当S的正惯性指数等于n。而 $S\geq 0$当且仅当S的负惯性指数等于0。