北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

高阶微分方程

1. 可降阶的高阶微分方程
2. 高阶线性微分方程
3. 欧拉方程

可降阶的高阶微分方程

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型

【例1】 求微分方程$y''' = e^{2x} - \cos x$的通解.

【解】 $$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

通解 $$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

可降阶的高阶微分方程

2. $y^{(n)}=f(x,y^{(n-1)})$型

特点： 右端不显含变量 y

解法： 设 $y^{(n-1)}=p$，则 $y^{(n)}=\dfrac{dp}{dx}$

代入原方程化为 $p'=f(x,p)$

$\therefore y^{(n-1)}=p=\varphi(x,\ C_1)$,

$n-1$次积分即可.

可降阶的高阶微分方程

【例2】求方程 $xy''-y'=x^2$ 的通解.

【解】 齐次方程 $xy''-y'=0.$

$$y'=Cx \qquad y=C_1+C_2x^2$$

设原方程的通解为 $y=u_1(x)+u_2(x)x^2,$

$$\begin{cases} u_1'(x)+u_2'(x)x^2=0, \\ u_2'(x)2x=x. \end{cases} \qquad u_1'(x)=-\frac{x^2}{2}, \quad u_2'(x)=\frac{1}{2},$$

$$u_1(x)=-\frac{x^3}{6}+C_1, \quad u_2(x)=\frac{x}{2}+C_2,$$

原方程的通解为 $y=C_1+C_2x^2+\dfrac{x^3}{3}.$

可降阶的高阶微分方程

【例3】 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 的通解.

【解】 设 $y'=p$,代入原方程得

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$$

解得 $p=y'=C_1(1+x^2)$

两端再积分得 $y=C_1(x+\frac{1}{3}x^3)+C_2$

可降阶的高阶微分方程

【例4】 求方程 $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ 的通解.

【解】 设 $y^{(4)}=P(x)$, $y^{(5)}=P'(x)$

代入原方程：$xP'-P=0$,（$P\neq 0$）

解线性方程,得$P=C_1x$ 即 $y^{(4)}=C_1x$,

两端积分,得 $y'''=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2,\cdots\ \cdots,$

$$y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5\ ,$$

原方程通解为$y=d_1x^5+d_2x^3+d_3x^2+d_4x+d_5$

可降阶的高阶微分方程

3. $y'' = f(y, y')$ 型　右端不显含自变量x

设$y' = p$,但此时须用下式代换：$y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

方程可化为 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$

设它的通解为 $y' = p = \varphi(y, C_1)$

则原方程的通解为 $x + C_2 = \int \dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)}$

可降阶的高阶微分方程

【例5】 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

【解1】 设 $y' = P$, 则 $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$,

代入原方程得 $y \cdot P\dfrac{dP}{dy} - P^2 = 0$,

由 $y \cdot \dfrac{dP}{dy} - P = 0$, 可得 $P = C_1 y$,

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = C_1 y$,

原方程通解为 $y = C_2 e^{c_1 x}$.

可降阶的高阶微分方程

【解2】方程两端同乘$\frac{1}{y^2}, y \neq 0,$

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0.$$

可得 $y' = C_1 y.$

原方程通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}.$

可降阶的高阶微分方程

【例6】 求曲线，它在任意点处的曲率都等于常数$K(\neq 0)$.

【解】 设曲线$y = y(x)$, 则 $\dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = K$,

当$y'' > 0$,设$y' = p$, 代入原方程得 $\dfrac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = Kdx$,

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = K(x - C_1),$$

可降阶的高阶微分方程

$$\therefore p=\frac{x-C_1}{\sqrt{R^2-(x-C_1)^2}},\quad R=\frac{1}{K}.$$

$$y=-\sqrt{R^2-(x-C_1)^2}+C_2.$$

当$y''<0$,设$y'=p$,

$$y=\sqrt{R^2-(x-C_1)^2}+C_2.$$

$$\therefore (x-C_1)^2+(y-C_2)^2=R^2.$$

高阶线性微分方程

定义1.1 设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为定义在区间I内的n个函数.若存在n个不全为零的常数，使得当x在该区间内有恒等式成立

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0,$$

则称这n个函数在区间I上线性相关，否则称线性无关.

例如：当$x \in (-\infty, +\infty)$时，e^x, e^{-x}, e^{2x} 线性无关

$1,\ \cos^2 x,\ \sin^2 x$ 线性相关

高阶线性微分方程

$$\begin{cases} k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0 \\ k_1y_1'+k_2y_2'+\cdots+k_ny_n'=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1y_1^{(n-1)}+k_2y_2^{(n-1)}+\cdots+k_ny_n^{(n-1)}=0 \end{cases}$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$y_1,y_2\cdots y_n$线性相关的充分必要条件：$W(x)=0$

注 (1)若有一个函数恒为 0，则函数组线性相关；

(2)若在 I 上有$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$常数，则函数$y_1(x)$与$y_2(x)$在 I 上线性无关.

高阶线性微分方程

定理1.1

设函数$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_0(x)y = 0$$

的解，则它们的线性组合

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

也是方程的解，其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数.

高阶线性微分方程

定理1.2

设函数$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_0(x)y = 0$$

的线性无关的解，则它们的线性组合

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

是方程的通解，其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为任意常数.

高阶线性微分方程

定理1.3

设y^*是非齐次线性方程

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_0(x)y=f(x)\quad(3)$$

的一个特解，Y是与对应的齐次方程的通解，那么

$y=Y+y^*$是非齐次线性微分方程的通解.

高阶线性微分方程

定理1.4

设非齐次方程(3)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和， 如 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_0(x)y=f_1(x)$$

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_0(x)y=f_2(x)$$

的特解， 那么 $y_1^*+y_2^*$ 就是原方程的特解.

高阶线性微分方程

n阶常系数齐次线性方程 $y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$

特征方程为 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

特征方程的根	线性无关的特解
若是 k重根 r	$e^{rx},xe^{rx},\cdots,x^{k-1}e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x,xe^{\alpha x}\sin\beta x.\cdots.x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

高阶线性微分方程

注　n次代数方程有n个根, 而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项, 且每一项各一个任意常数.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

高阶线性微分方程

【例7】 求方程 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解.

【解】 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\quad r_2=r_3=i,\quad r_4=r_5=-i,$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

欧拉方程

定义1.2

形如 $$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数) 叫欧拉方程.

特点 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同.

解法 欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

欧拉方程

作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

将自变量换为 t,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right), \quad \cdots\cdots$$

欧拉方程

用D表示对自变量t求导的运算$\frac{d}{dt}$，

上述结果可以写为 $xy' = Dy$,

$$x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

$$\cdots\cdots$$

一般地，$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

欧拉方程

将上式代入欧拉方程，则化为以t为自变量的常系数线性微分方程

将 t 换 成 $\ln x$,即 得 到 原 方 程 的 解.

【例8】求欧拉方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$的通解.

【解】 作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

原方程化为 $D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t}$,

即 $D^3y - 2D^2y - 3Dy = 3e^{2t}$,

欧拉方程

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t}. \quad (1)$$

方程(1)所对应的齐次方程为 $\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=0,$

其特征方程 $r^3-2r^2-3r=0,$

特征方程的根为 $r_1=0, r_2=-1, r_3=3.$

所以齐次方程的通解为 $y=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3$

欧拉方程

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t}.$$

设特解为 $y^*=be^{2t}$

代入原方程，得 $b=-\frac{1}{2}.$

即 $y^*=-\frac{1}{2}e^{2t}=-\frac{x^2}{2}$,

所给欧拉方程的通解为 $y=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2.$

作业

1.求下列方程的通解：

(1) $y''' = x + \sin x$; (2) $xy'' + (x^2 - 1)(y' - 1) = 0$;

(3) $yy'' + y'^2 + 1 = 0$.

2.求方程 $y^3 y'' + 1 = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 1, y'(1) = 0$ 的特解.

3.求下列方程的通解：

(1) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; (2) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$.

4.求下列欧拉方程的通解:

(1) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$; (2) $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院