北京航空航天大学

2021－2022 学年 第二学期期中大作业

《工科数学分析（II）》

（A 卷）

班号 ___________ 学号__________ 姓名___________

主讲教师_________ 考场__________ 成绩___________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2022 年 5 月 27 日

一、 选择题（每题 4 分，满分 20 分）

1. 下列级数中收敛的个数是（　　）

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n})$；(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$；　(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\,ln\,n}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 下列条件中能得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的是（　）

①任意正整数 p，$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$；

②部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；

③ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛，且 $b_n \le a_n \le c_n$，$\forall n\in N^*$；

④ $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 均收敛.

A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ② ④

3. 下列级数在给定区间上不一致收敛的是（　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n, x\in[0,1]$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}, x\in(-\infty,+\infty)$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}, x\in(-\infty,+\infty)$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$　$x\in[0,1]$

4. 下列函数在(0,0)点的累次极限存在但重极限不存在的是 （　）

A. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$　　B. $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$;

C. $f(x,y)=x\cos\frac{1}{x}\tan\frac{1}{y}$;　　D. $f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{\tan y}$

5. 满足下列条件的集合中是闭集的是（　）

① 集合E的补集是开集；　　② 集合E的导集$E'\subset E$；

③ 集合E是有界集；　　④ 集合E的闭包$\bar{E}=E$.

A. ①②③　　B. ②③　　C. ①③④　　D. ①②④

二、计算题（每题 5 分，满分 15 分）

1. 将函数$f(x) = x$，$x \in [0,\pi]$ 展开为余弦级数.

2. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x^2+z^2=R^2 \end{cases}$在点$M\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$处的切线方程和法平面方程.

3. 求函数$f(x,y) = \sin(x+y)$ 在（0,0）点带皮亚诺余项的 3 阶 Taylor 展式.

4. 证明函数列 $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ 在（0,1）上不一致收敛.

5．设函数$f(t)$具有二阶连续导数，$z = f(xy+z)$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

三、(本题 10 分)

设n为正整数，$x, y > 0$,用条件极值的方法证明$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.

四、证明题(8 分)

设函数$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{n^3}$, $x \in (0,1)$, 证明该函数存在连续的导函数$f'(x)$.

五. (本题 10 分)

设函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

（1） 讨论函数在 $(0,0)$ 点的连续性；

（2） 讨论函数在$(0,0)$ 点的可微性与偏导数的连续性

（3） 研究函数在$(0,0)$ 点沿方向（1, 1）的方向导数.

六、 (本题 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ 的收敛域与和函数.

七、(本题 12 分)

(1) 对任意$x \in (0,\pi)$ 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}$，条件收敛。

(2) 证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}, x \in (0,\pi)$ 在给定区间上连续。