例1 计算$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx.$

例2 计算$\iint\limits_D |y-x^2|d\sigma$,其中$D:-1\le x\le 1, 0\le y\le 1.$

例3 证明:$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)dy.$

例4 求由$y^2=x, y^2=2x$与$xy=3, xy=4$所围成的平面图形的面积.

例5 计算$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$.其中$D$是由心脏线$r=a(1+\cos\theta)$和圆$r=a$所围的区域(取圆外部).

例6 设 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2, \end{cases}$

计算$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $D:|x|+|y|\le 2$.

例7 设$f(u)$为连续函数,区域D由$|y|\le|x|\le 1$确定,

证明

$$I=\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\pi\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{\sqrt{2}}(\pi-4\arccos\frac{1}{x})xf(x)dx$$

例8 设$\varphi(t)$为连续正值函数，证明

$$\iint_D \frac{a\varphi(x)+b\varphi(y)}{\varphi(x)+\varphi(y)}dxdy = \frac{1}{2}\pi R^2(a+b)$$

其中 $D: x^2+y^2 \le R^2$.

例9 设$f(t)$为连续函数，证明

$$\iint_D f(x-y)dxdy = \int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)dt$$

其中 $D: |x| \le \frac{A}{2}, |y| \le \frac{A}{2}$,

例10 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)>0,$

证明：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2.$

例11 设函数$f(x)$在上连续，单调减少且恒大于零，

证明：$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

例12 设D为$x^2+y^2\leq 1$，试证明不等式

$$\frac{61}{165}\pi \leq \iint_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy \leq \frac{2}{5}\pi.$$

例13 设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$,比较下列积分的大小关系:

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz,$$

$$I_2=\iiint\limits_{\Omega}[\cos^4(x^2+y^2+z^2)+z^3]dxdydz,$$

$$I_3=\iiint\limits_{\Omega}[\ln(x^2+y^2+z^2)+\sin(x^2y^3z^4)]dxdydz.$$

例14 设$f(x,y,z)$连续, 求$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\rho^2}f(x,y,z)dV}{\pi\sin\rho^3}$.

例15 设$f(t)$为连续函数, $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dV$

其中$\Omega: 0\le z\le h,\ x^2+y^2\le t^2$, 求$\dfrac{dF}{dt}$

例16 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dV$, 其中$\Omega$是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成.

例17 求$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sin t\cdot\ln(1+t^3)}$, 其中$f(x)$有连续导数,

$f(0)=0$, 区域Ω由柱面$x^2+y^2=t^2$和平面$z=0, z=1$围成.

例18 计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|} dV$，$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1$.

例19 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证：

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y f(x)f(y)f(z)dzdydx = \frac{1}{6}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^3.$$

例20

设$f(x)$连续且恒大于零，$F(t)=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}$,

$G(t)=\dfrac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)dx}$, $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$,

$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$.

(1)讨论$F(t)$在区间$(0,+\infty)$上的单调性;

(2)证明：当$t>0$时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.