基础物理学A1

（电磁学）

北京航空航天大学

2025年4月22号

电磁学 (Electromagnetism)

- 电磁现象的观察
- 电磁现象的定量的理论研究

  始于1785年库仑对电荷之间的相互作用的研究。
- 电磁相互作用是物质世界中最普遍的相互作用之一。
- 电磁学就是研究物质间**电磁相互作用**，研究**电磁场**的产生、变化和运动的规律的一门学科。

电磁学(Electromagnetism)

第一章 静电场（7学时）

第二章 静电场中的导体和电介质（6学时）

第三章 直流电*

第四章 恒定磁场（7学时）

第五章 磁介质（3学时）

第六章 电磁感应（4学时）

第七章 交流电*

第八章 麦克斯韦电磁场理论（2学时）

复习课（1学时）

第一章 静电场 (Electrostatic field)

§1-1 库仑定律

§1-2 电场、电场强度、场强叠加原理

§1-3 静电场的Gauss定理

§1-4 静电场的环路定理 电势

§1-5 静电场中的基本微分方程*

§1-1 库仑定律

一. 电荷的基本性质:

1. **分正负**: **同斥异吸** $\Rightarrow$ **可以中和、屏蔽**
2. **量子性**: **存在最小单位电量, 不连续**

$$q = ne\begin{cases} n: \text{正/负整数} \\ e: 1.60217733 \times 10^{-19}\,C \end{cases}$$

1897年，J.J.汤姆孙的阴极射线实验发现电子;
1909年，密立根油滴实验证实了电荷的量子性;

- **夸克带分数电荷**

  但迄今没发现可单独存在

$$\begin{cases} q = \pm\dfrac{1}{3}e \\ q = \pm\dfrac{2}{3}e \end{cases}$$

3. 电荷守恒:

在一个与外界无电荷交换的系统内, 正负电荷的代数和在任何过程中始终保持不变.

一切微观、宏观过程

4. 相对论不变性:

电荷的电量与其运动状态无关.

或：电荷的电量与参考系的选择无关.

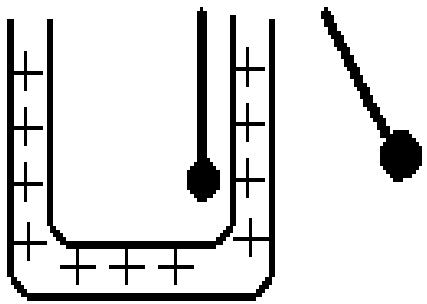
例如:

H_2与He的电子电量相同, 但质子运动状态大不相同(氢键:核力≈10^-6), 二者却精确呈电中性!

二. 库仑定律:

提出问题：两带电体间的相互作用规律

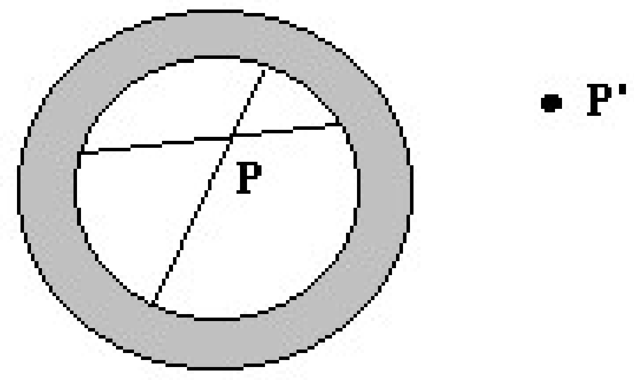
- Franklin 首先发现金属小杯内的软木小球完全不受杯上电荷的影响;
- 在Franklin的建议下，Priestel做了实验



猜测答案

- 现象与万有引力有相同规律
- 由牛顿力学可知：球壳对放置在壳外的物体有引力，而放置在球壳内任何位置的物体受力为零。
- 类比：电力与距离平方成反比

$$\sim F_{电} \propto \frac{1}{r^2}$$



设计实验

- 1769年Robison通过作用在一个小球上电力和重力平衡的实验，第一次直接测定了两个同号电荷的斥力与距离平方成反比

$$f \propto r^{-2.06}$$

▪两个异号电荷的引力比平方反比的方次要小些。（研究结果直到1801年发表才为世人所知）

Cavendish实验

- 1772年 Cavendish遵循Priestel 的思想设计了实验**验证电力平方反比律**，如果实验测定带电的空腔导体的内表面确实没有电荷，就可以确定电力定律是遵从平方反比律的，即

$$f \propto r^{-2\pm\delta}$$

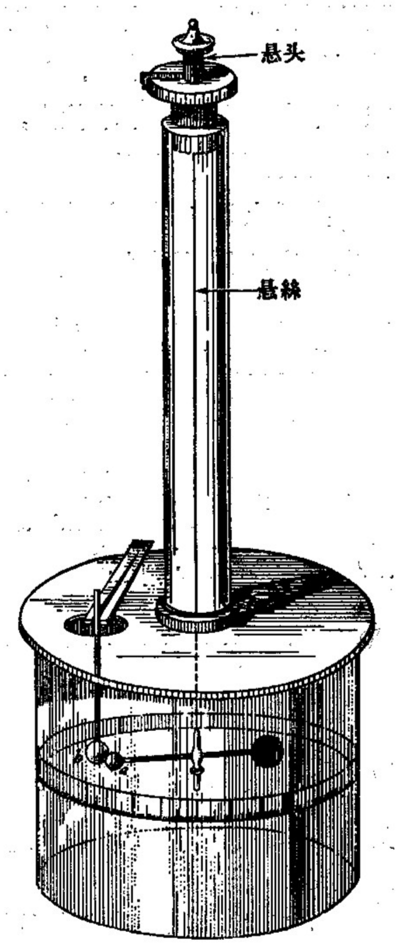
δ越小，内表面电荷越少

- 他测出不大于 0.02（未发表,100年以 后 Maxwell 整理他的大量手稿，才将此结果公诸于世。

§1-1 库仑定律

1785年Coulomb测出结果

- 精度与十三年前Cavendish的实验精度相当
  - 库仑是扭称专家;
  - 电斥力——扭称实验，数据只有几个，且不准确（由于漏电）——不是大量精确的实验;
- 电引力——单摆实验得
- 电引力单摆周期正比于距离
- 与万有引力单摆周期类比，得



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{Gm}}\, r \sim F_{电} \propto r^{-2\pm\delta}, \delta < 10^{-2}$$

§1-1 库仑定律

库仑定律的表述:

在真空中，两个静止的点电荷q_1和q_2之间的相互作用力大小与q_1和q_2的乘积成正比，与它们之间的距离r平方成反比；作用力的方向沿着它们的联线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

$$\vec{f} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\vec{r}}\begin{cases} f \propto r^{-2\pm\delta} \text{——实验结果} \\ f \propto q_1 q_2 \text{——类比于引力，定义了电 量} \\ \vec{f} \parallel \vec{r} \text{——对称性的结果} \end{cases}$$

真空介电常数: $\varepsilon_0 = 8.95\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988\times10^{9}\,\mathrm{Nm^2/C^2} \approx 9.0\times10^{9}\,\mathrm{Nm^2/C^2}$$

库仑定律的成立条件

即两点电荷相对静止，且相对于观察者静止；

适当放宽：适用于静止点电荷对运动点电荷的作用

但不适用于运动点电荷对静止点电荷的作用力；

适用范围和精度：

- 原子核尺度——地球物理尺度
- 天体物理、空间物理　大概无问题

- 精度：Coulomb时代　$\delta < 10^{-2}$
- 1971年　$\delta < 10^{-16}$

- **电力叠加原理**:

两个点电荷之间作用力不因第三个点电荷的存在而改变. 即: 若 $\ni q_1, q_2 \cdots q_n$,则q_1受力为

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_{13} + \cdots + \vec{\mathbf{F}}_{1n} = \sum_{i=2}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{1i}$$

$$\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i q_0}{r^2} \hat{\vec{r}}$$ **或** $$\vec{f} = \int d\vec{f} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\hat{\vec{r}}}{r^2} dq$$

库伦定律的建立，标志着电学研究从定性描述正式走向定量计算，是静电学的基础。

重要概念：场

问题：非接触物体之间的相互作用是如何传递的？

- 超距作用观点：不需要任何媒介物的传递，不需要传递时间
- 近距作用观点：需要媒介物的传递，也需要传递时间

两种观点的争论由来已久，近代物理证明：

- 目前唯一已知的超距作用为量子纠缠效应
- 对传递媒介的认知过程

以太 ⟶ 场：物质存在的基本形态之一，具有能动量，分布在整个空间中 ⟶ 玻色子

电场即由电荷在其周边空间激发的一种特殊物质分布，能够对与其接触的其它带电物质产生作用力

对电场的认知

- 起初，电场是用来描述库伦力在空间分布的数学工具；
- 麦克斯韦方程组建立后，电场强度和磁场强度满足波动方程，以电磁波的形式在空间传播；

由于电磁波具有能量和动量，且可在真空传播，因此可以认为电磁场本身就是一种物质的存在形式：

- 可单独存在，以c 传播；
- 与实物区别：电场可叠加；实物有不可入性；
- 对处于电场中的其他带电体有作用力；
- 在电场中移动其他带电体时,电场力要对它作功；

量子场论的观点：电磁场由光子组成

§1-2 电场强度

一. 电场强度

1. 试验电荷 q_0

- 几何线度充分小——点电荷
- 电量充分小——几乎不影响产生电场的电荷分布

2. 电场强度的定义:

从试验电荷所受的库伦力中扣除试验电荷则

$$\boxed{\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{q_0}}$$

SI: N/C 或 V/m

电场**强度矢量**

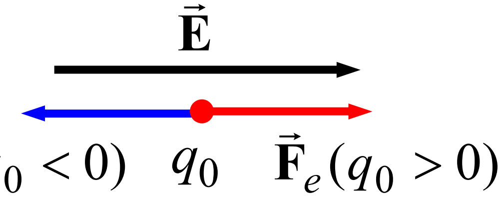
$$\vec{E}\begin{cases}\text{大小：单位正电荷在电场中受到的力的大小}\\ \text{方向：与单位正电荷所受力的方向一致}\end{cases}$$

§1-2 电场强度

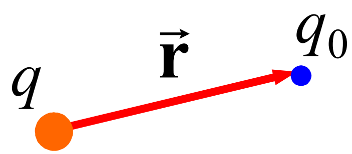
注意:

- 矢量! 表征电场本身, 与有无 q_0 无关.
- 是位置的单值函数.
- q_0 一般取正值, 但也可为负

  $\Rightarrow$ 应注意力的符号与场强的符号可能相反



3. 点电荷 q 的场强:



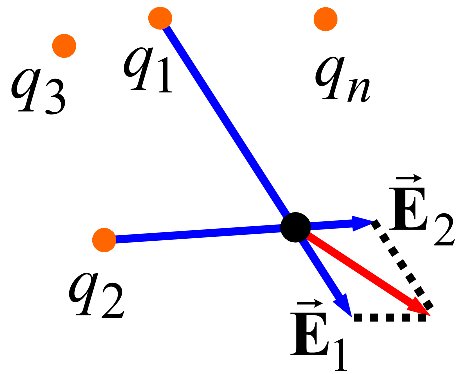
引入 q_0, 有 $\vec{\mathbf{F}} = \dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{r}}^0$

由 $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}} / q_0 \Rightarrow$ 点电荷场强公式: $\boxed{\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{r}}^0}$

二. 场强叠加原理

点电荷组（或连续分布电荷）在空间某点产生的电场等于各点电荷（或各电荷微元）单独存在时在该点产生的场强的矢量叠加

1. 分离电荷系



由力的叠加 $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{E}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i}$$

2. 连续分布的电荷系

宏观大量电荷的集合, 可看成连续.

数学上取微元 dq , 视为点电荷

$$\boxed{dq \rightarrow d\vec{\mathbf{E}} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{r}}^0} \qquad \boxed{\vec{\mathbf{E}} = \int d\vec{\mathbf{E}}}$$

- 矢量积分!

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x;\ E_y = \int dE_y;\ E_z = \int dE_z \\ \vec{\mathbf{E}} = E_x\vec{\mathbf{i}} + E_y\vec{\mathbf{j}} + E_z\vec{\mathbf{k}} \end{cases}$$

- 电荷元:

$$dq = \begin{cases} \lambda dl; & \lambda: \text{电荷线密度} \\ \sigma dS; & \sigma: \text{电荷面密度} \\ \rho dV; & \rho: \text{电荷体密度} \end{cases}$$

注意:

- **微观: 量子化, 不连续;**
- **空间某点的场强是空间所有电荷共同产生的;**
- **点电荷场强公式+场叠加原理 → 原则上可解任意复杂电场的场强;**
- **实际只有在高度对称的条件下，才能完成积分。**

三. 电场强度的计算(*a*)

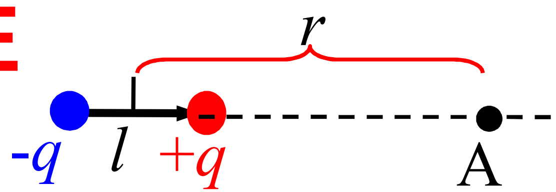
1. 受力法, 按定义

2. 叠加法, 点电荷场强公式+场叠加原理

例1: 求电偶极子的电场强度

电偶极子(Electric dipole): 靠得很近的$\pm q$, 相距l

电偶极矩(电矩): $\boxed{\vec{\mathbf{p}}_e = q\vec{\mathbf{l}}}$, 从负到正



解:

a) 轴线延长线上A点.

$$E_A = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r - l/2)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r + l/2)^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2rl}{(r^2 - l^2/4)^2} \xrightarrow{r>>l} \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\therefore \quad \vec{\mathbf{E}}_A = \frac{2\vec{\mathbf{p}}_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

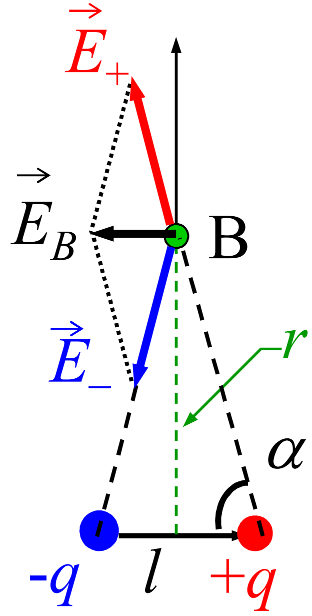
b) 中垂线上B点

$$E_B = E_+ \cos\alpha + E_- \cos\alpha$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + l^2/4)} \cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

$$\xrightarrow{r>>l} \boxed{\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{E_A}{2}}$$



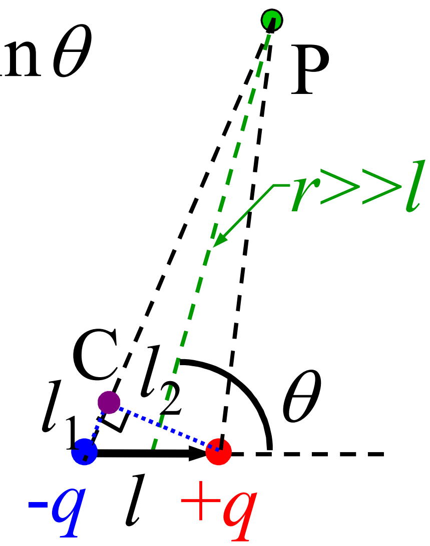
c) 任意点P处 (虚构/补偿法: C点引入电荷± q)

$$p_{e1} = ql_1 \approx ql\cos\theta; \qquad p_{e2} = ql_2 \approx ql\sin\theta$$

$$\Rightarrow E_{//} = \frac{2p_{e1}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \approx \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta$$

$$E_{\perp} = \frac{p_{e2}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta$$

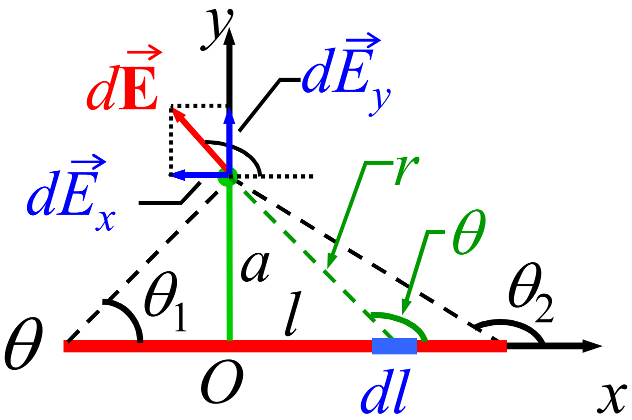
$$\therefore \quad E_p = \sqrt{E_{//}^2 + E_{\perp}^2} = \boxed{\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}}$$



- $E \propto 1/r^3$; 电偶极子振荡

例：**带电细线**. **如图, 已知:** $L, q, a, \theta_1, \theta_2$, **求**$\vec{\mathbf{E}}_p$

解: **电荷线密度**$\lambda = q/L$



$$dq = \lambda dl \rightarrow d\vec{\mathbf{E}} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{r}}^0$$

先分: $dE_x = dE\cos\theta;\ dE_y = dE\sin\theta$

后合: $E_x = \int dE_x = \int \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dx;\quad E_y = \int dE_y$

统一变量: $x = -a\cot\theta;\ dx = a\csc^2\theta d\theta;\quad r = a\csc\theta$

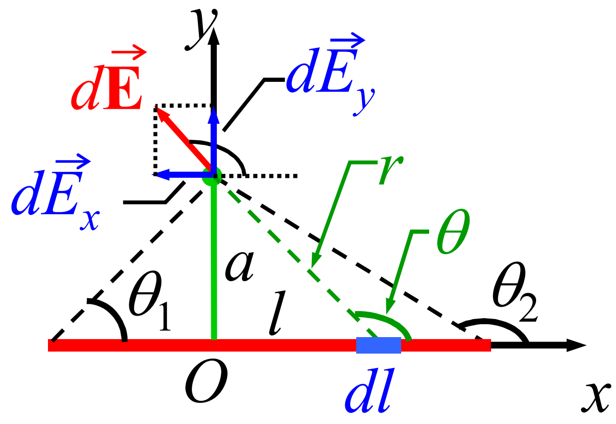
积分:$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1);\ E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

$\vec{\mathbf{E}} = E_x\vec{\mathbf{i}} + E_y\vec{\mathbf{j}} = \cdots$ 或 $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \cdots;\ \theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{E_y}{E_x} = \cdots$

§1-2 电场强度

讨论：

- **有轴对称性**
- **中垂线上**$\theta_2 = \pi - \theta_1$



这时 $E_x = 0;$

$$\frac{L/2}{\sqrt{a^2 + (L/2)^2}}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{a^2 + L^2/4}}$$

- $a << L \quad \rightarrow \quad \infty$长： $\boxed{E_y = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 aL}}$

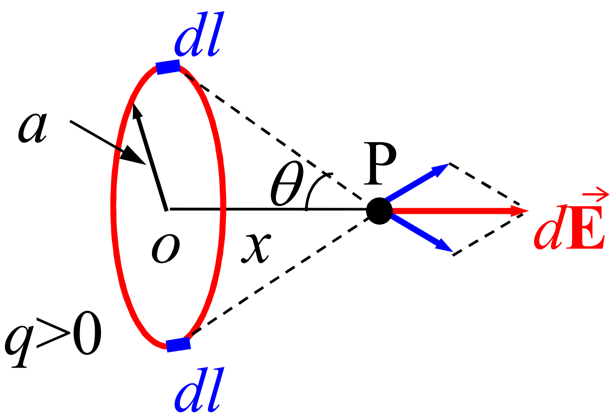
- $a >> L \quad \rightarrow$点电荷：$E_y = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

§1-2 电场强度

例: **圆环中轴线**. 如图, 已知a, q, x, 求$\vec{E}_p$

解: $\lambda = \dfrac{q}{2\pi a}$; $dq = \dfrac{q}{2\pi a} dl$

$$d\vec{\mathbf{E}} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{\mathbf{r}}^0 = \cdots$$



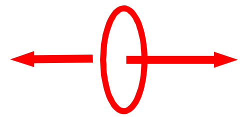
由**对称性**知, $\vec{E} // x$轴

$$\Rightarrow \quad E = \int_L dE_x = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

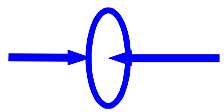
统一变量, 积分:

$$\boxed{E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}}}$$

方向: $q > 0$



$q < 0$



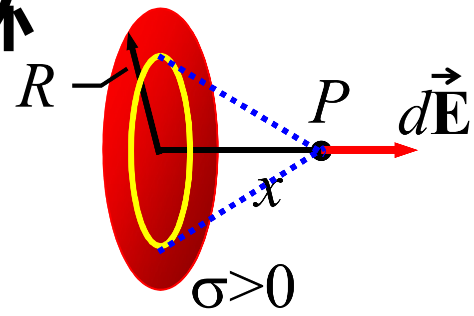
- **圆心处**: $x = 0$, $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}}$, 也可从对称性分析得出.
- $x >> a$: $\rightarrow$ 点电荷场.

§1-2 电场强度

例:**薄圆盘中轴线**, 如图, 已知σ, R, x, 求 $\vec{\mathrm{E}}_p$

解: 圆盘⇔无数半径连续变化的细圆环

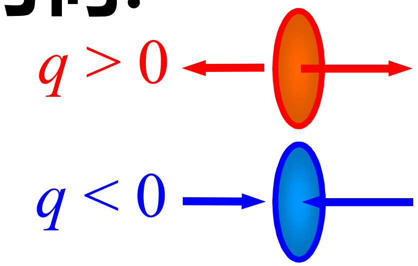
由上题, 及$dq=\sigma 2\pi\rho d\rho$，有



$$d\vec{\mathrm{E}}=\frac{\sigma 2\pi\rho d\rho\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+x^2)^{3/2}}\vec{\mathrm{i}}$$

$$E=\int dE=\cdots=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

方向:

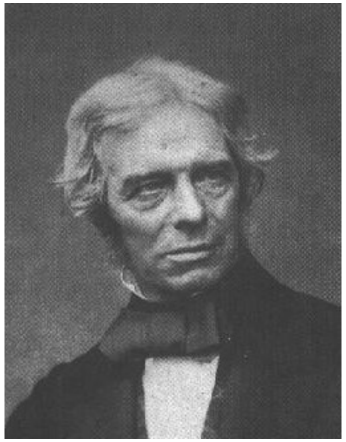


- $x << R$: $\rightarrow$无限大平板, $\boxed{E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$，均匀电场
- $x >> R$: $\rightarrow$ 点电荷场, 但略去R , $E=0$，问题?

"破零"！ $$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{1}{2}x+\cdots$$

§1-3 静电场的Gauss定理

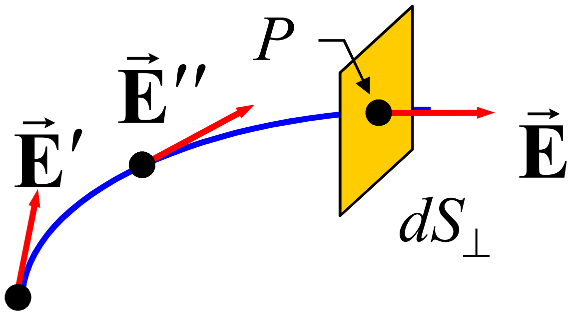
一. 电场线 (Faraday,英,1791-1867)



一组有方向的曲线族

$$\begin{cases} \text{正切向} \Leftrightarrow \vec{E}\text{的方向} \\ \text{疏密} \Leftrightarrow \vec{E}\text{的大小} \end{cases}$$

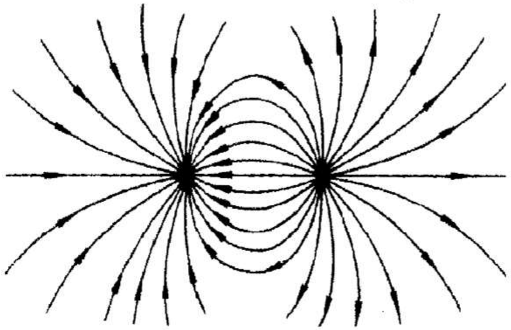
$$dN \propto E dS_{\perp} \ \rightarrow \ E \propto \frac{dN}{dS_{\perp}}$$



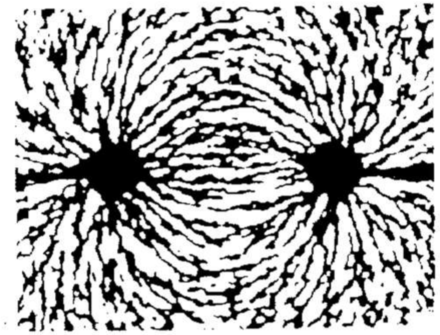
静电场中电场线的性质:

§1-3 静电场的Gauss定理

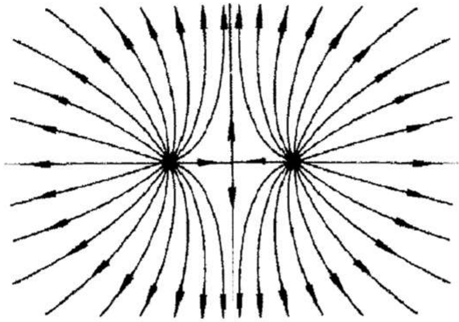
常见电场的电场线图



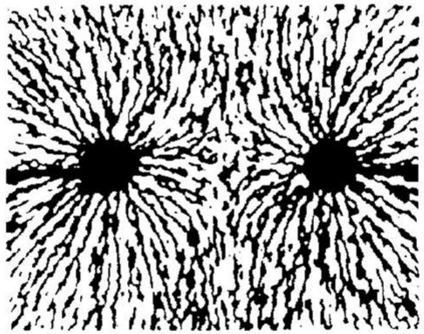
a 一对等量异号电荷



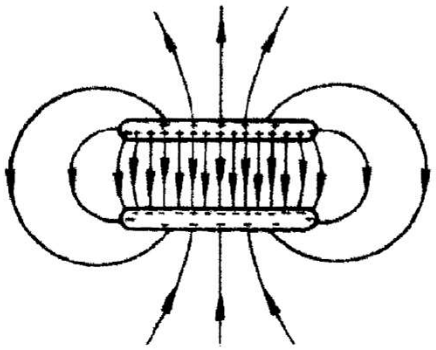
a 一对等量异号电荷



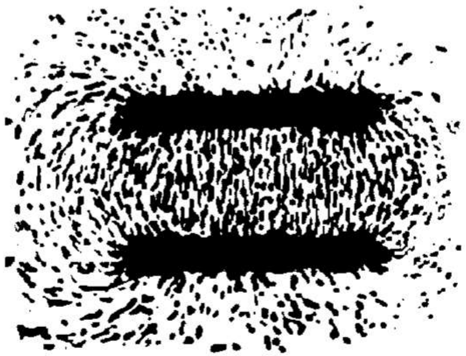
b 一对等量同号电荷



b 一对等量同号电荷



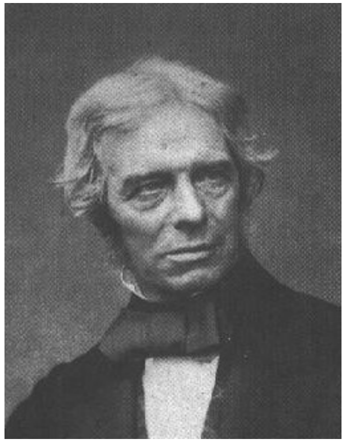
c 一对带等量异号电荷的平行板



c 一对带等量异号电荷的平行板

§1-3 静电场的Gauss定理

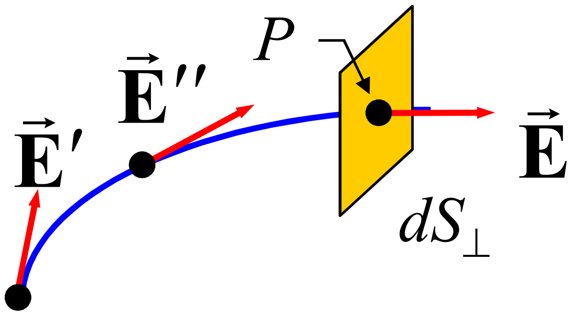
一. 电场线 (Faraday,英,1791-1867)



一组有方向的曲线族

$$\begin{cases} \text{正切向} \Leftrightarrow \vec{E}\text{的方向} \\ \text{疏密} \Leftrightarrow \vec{E}\text{的大小} \end{cases}$$

$$dN \propto E dS_{\perp} \;\rightarrow\; E \propto \frac{dN}{dS_{\perp}}$$

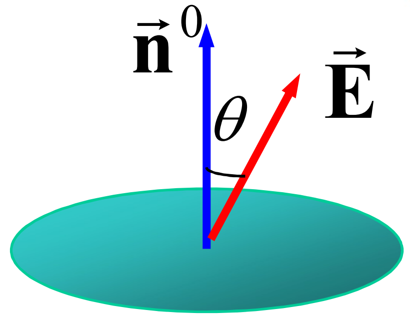


静电场中电场线的性质：

- **有头(源)有尾(汇、漏), 由+(或∞)指向−(或∞)**
- **无电荷处不中断**
- **不闭合, 不相交**

§1-3 静电场的Gauss定理

二. 电通量

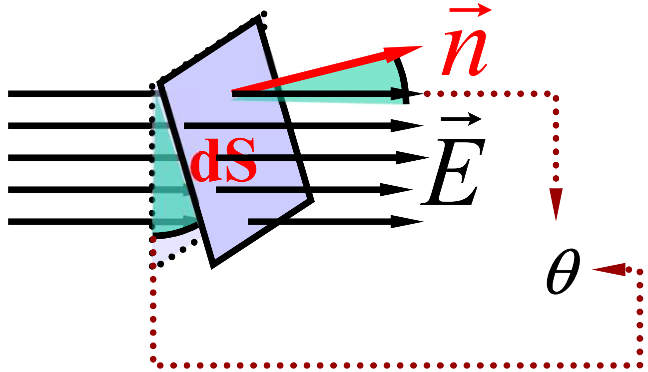


$$dN \propto E dS_{\perp}$$

$$E dS \cos\theta = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{\mathbf{S}} = dS \cdot \vec{\mathbf{n}}^0$$

1. 通过dS的电通量

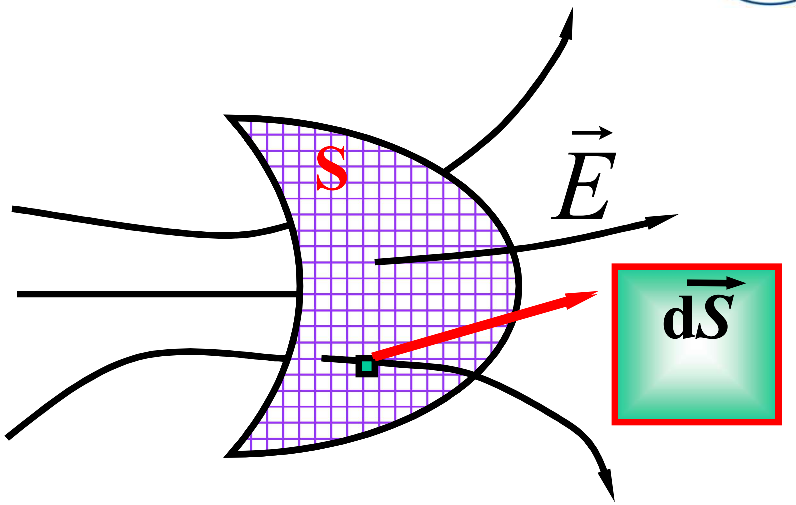


$$d\Phi_e = E\cos\theta dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

标量!

$$d\Phi_e \propto dN \begin{cases} d\Phi_e > 0 \leftrightarrow (\vec{E} \wedge \vec{n}) < \pi/2 \\ d\Phi_e < 0 \leftrightarrow (\vec{E} \wedge \vec{n}) > \pi/2 \\ d\Phi_e = 0 \leftrightarrow \vec{E} = \vec{0} \text{ 或 } \vec{E} \perp d\vec{S} \end{cases}$$

2. 通过有限曲面S的电通量



$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S E\cos\theta dS$$

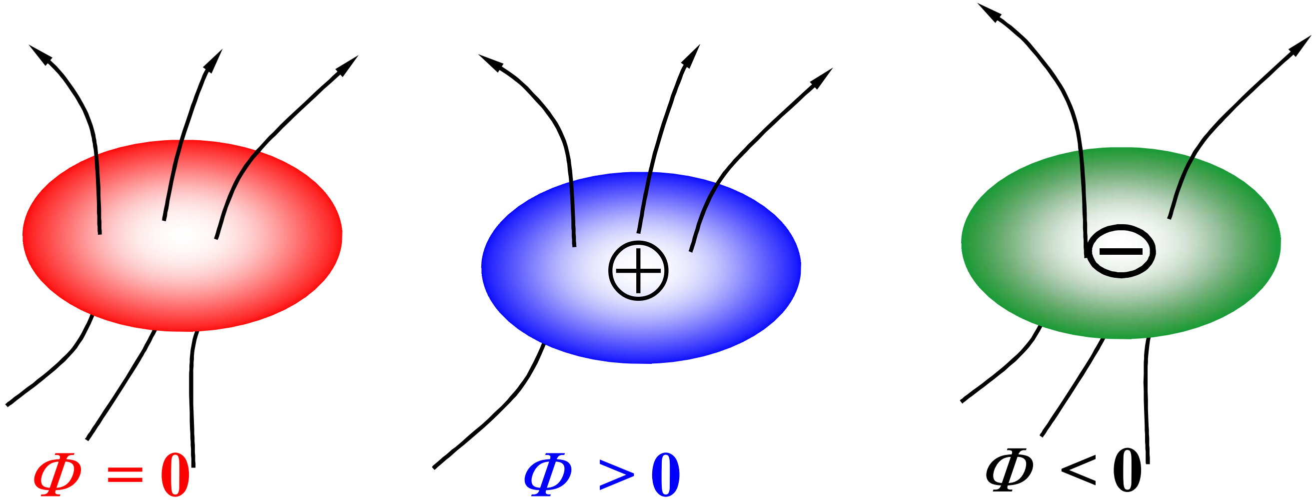
- $\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})$, 但 $dS \to 0$, 在$d\vec{\mathrm{S}}$上近似有$\vec{\mathrm{E}}$ =常量
- 计算时先规定好正法向($\vec{\mathrm{n}}$ 的方向).
- 与$\vec{\mathrm{E}}$的分布, S的形状位置和$\vec{\mathrm{n}}$的选择有关

3. 封闭曲面(闭合曲面)的电通量

面上任意点可规定一个$\vec{n}$. 方向由内向外.

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \begin{cases} \Phi_e > 0 & \text{出} > \text{入} \\ \Phi_e < 0 & \text{出} < \text{入} \\ \Phi_e = 0 & \text{出} = \text{入} \end{cases}$$

- $\Phi_e = 0$不一定没有场线穿过闭合面S!



三. Gauss 定理：

(K.F.Gauss——德国物理学家、数学家、天文学家)

在真空中的任何静电场中，通过任一闭合曲面的电通量等于该闭合曲面所包围的电荷的代数和的$1/\varepsilon_0$倍，即

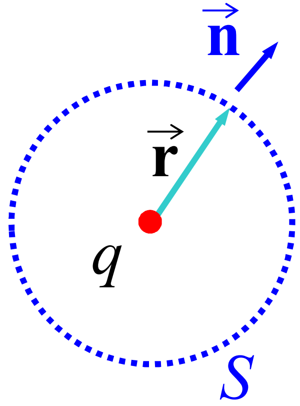
$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i内}}$$

意义：静电场是有源场。若 $\Phi_e \neq 0$，S内必有净电荷，电场线发于正、止于负。

- S是闭合面，法线向外；
- E 由 $q_{i内} + q_{i外}$ 共同产生，E的积分$\propto q_{i内}$
- 对变化电场也适用，比Coulomb定律普适，但不能全面描述静电场性质。

§1-3 静电场的Gauss定理

推导: 以库仑定律为基础.

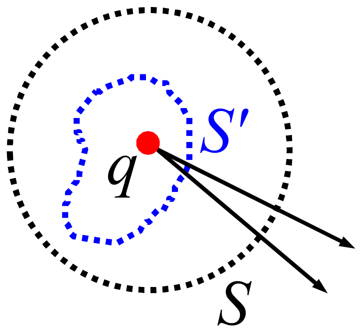


1. 点电荷在球面S内

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \underbrace{(\vec{r}^{\,0} \cdot \vec{n})}_{=1} dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2.点电荷在任意曲面S'内



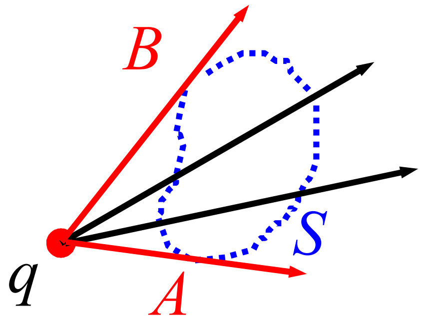
作一足够大的球面包围S'和q(以q为圆心)

∵ 电场线在无电荷处不中断,

∴ 过S'的电场线必穿过球面S.

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

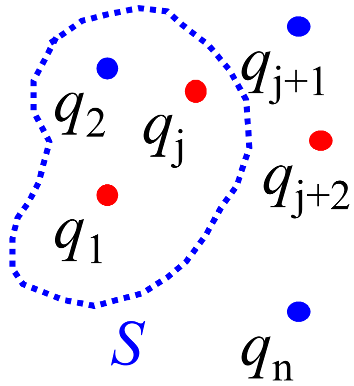
3. 点电荷在任意曲面S外



切点A、B间的电场线可穿过S

且不中断 $\Rightarrow$ 入=出 $\Rightarrow$ $\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0$

4. 点电荷系

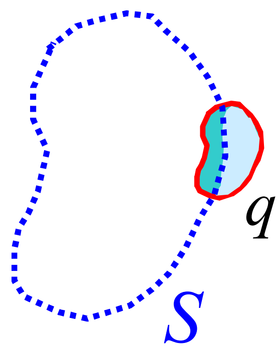


$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \cdots + \oint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + \cdots + q_j) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i内}$$

5. 连续带电体

S是几何面，q分为无穷多微元



$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{S内} dq}$$

四. 电场强度的计算(b)——对称性 + Gauss定理

q分布具有某些特殊对称性时可用Gauss定理求$\vec{E}$

Why & How? (数学：已知积分值，求被积函数?)

常见三类：$\left\{\begin{array}{l}\text{球对称}\\ \text{轴对称 (柱)}\\ \text{镜面对称 (平面)}\end{array}\right\}$ 或它们的组合.

步骤: 分析q对称性→ $\vec{E}$ 对称性→作高斯面S, 使满足：

a) S过待求点

b) S的整个或部分//$\vec{E}$，且E的大小为常量,
其余部分$\perp\vec{E}$，使 $\cos\theta = 0$

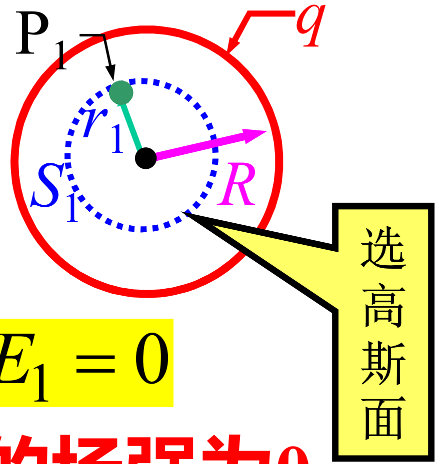
c) S的总面积或各部分面积可求.

§1-3 静电场的Gauss定理

例1. **球对称场(点、球面、球体)** 源球对称 ⟶ 场球对称

a) 均匀带电球面.

已知R, q, 求球面内外P_1、P_2处的$\vec{E}$



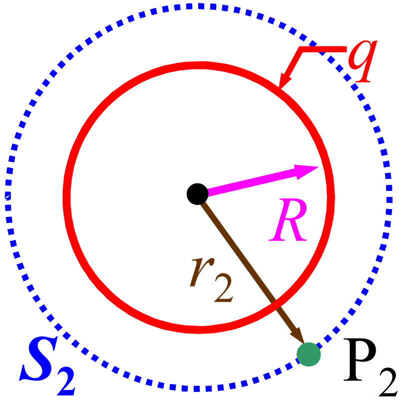
P_1: $r_1 < R$, 作高斯面S_1(半径r_1),

面上各点E等值，但 $\sum q_{内} = 0$ $\quad \therefore\ E_1 = 0$

推论: $r_1 < R$可任选 $\Rightarrow$ **面内任意点的场强为0**

P_2: $r_2 > R$, 同理作高斯面S_2(半径r_2),

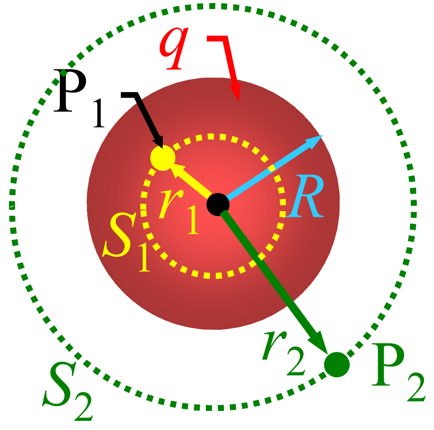
有 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r_2^2 \cdot E_2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$,



$$\therefore\ \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\vec{r}^0$$ $\Rightarrow$ **球面外与点电荷电场相同**

b) **均匀带电球体.**

已知R, q, 求球内外P_1、P_2处的 $\vec{E}$



P_1: $r_1 < R$, 作高斯面S_1(半径r_1),

S_1包围的电荷:

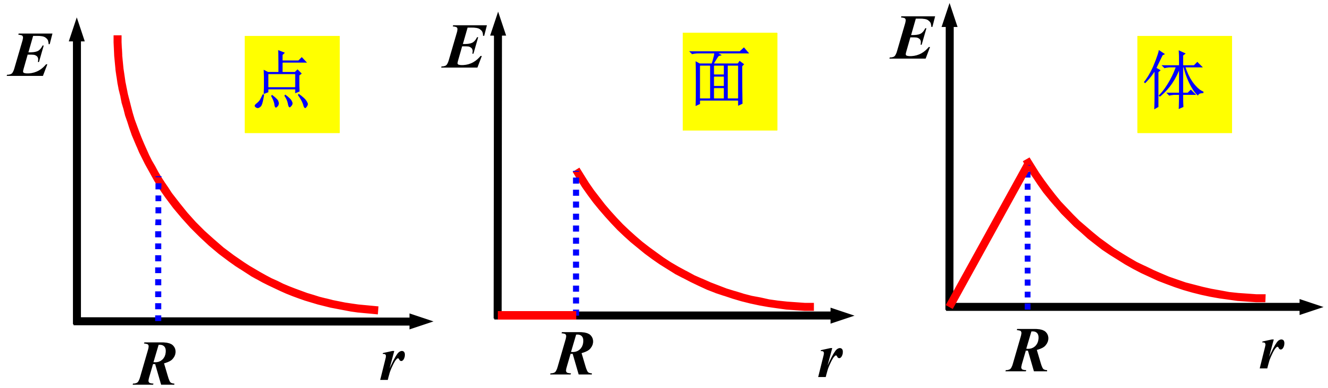
$$q' = \rho \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{r_1^3}{R^3} q; \quad \rho = q / (\frac{4}{3}\pi R^3)$$

$$\therefore \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r_1^2 \cdot E_1 = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r}$$ 方向: ...

P_2: $r_2 > R$, 同前例.

点、面、体比较:

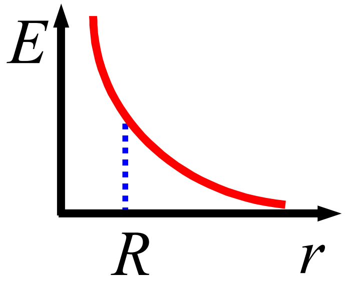


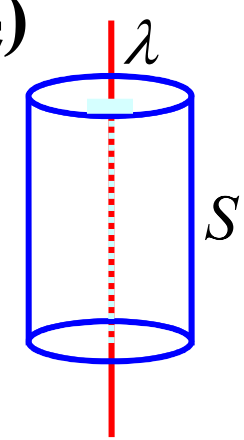
例2. **轴对称场(直线, 柱面、柱体)**

无限长, 均匀带电, 电荷线密度λ, (只给结果)

直线:

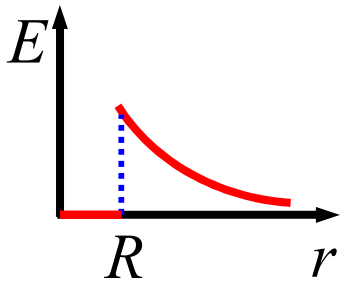
$$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{r}^{\,0}$$



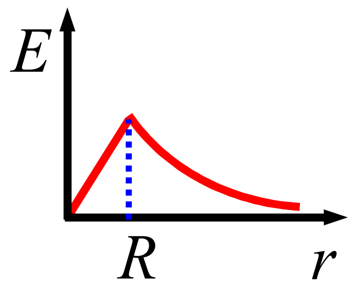


§1-3 静电场的Gauss定理

圆柱面: $\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} \vec{\mathbf{0}} & (r < R) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{\mathbf{r}}^0 & (r > R) \end{cases}$



圆柱体: $\vec{\mathbf{E}} = \begin{cases} \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{\mathbf{r}}^0 & (r < R) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{\mathbf{r}}^0 & (r > R) \end{cases}$

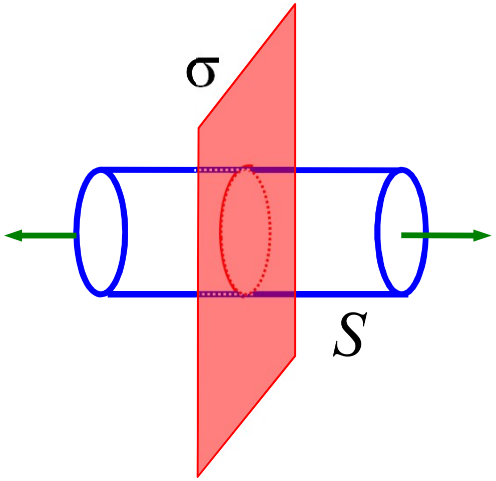


- **非无限长/不均匀带电, 是否可用Guass定理?**
- **结果中有**$r \to 0$时 $\vec{\mathbf{E}} \to \infty$**, 是否合理?如何解释 ?**

例3. 镜面对称(平面, 厚平板)

平面: G-面如图, 易得:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} = \text{常量}$$

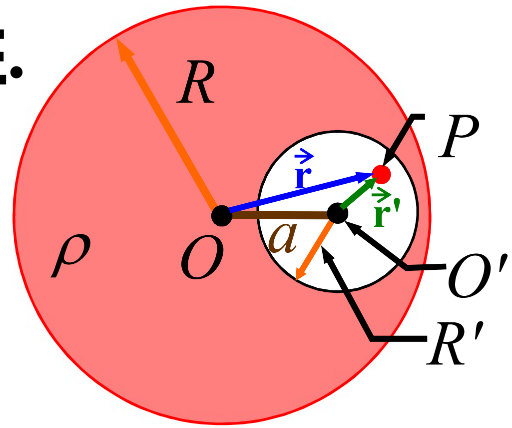


厚平板: G-面同前.

例4. **基本组合的叠加**

如图, 已知R, R', a, ρ.求空腔内任一点P 的$\vec{E}$

解: **无特定对称性, 可设法利用对称性.**



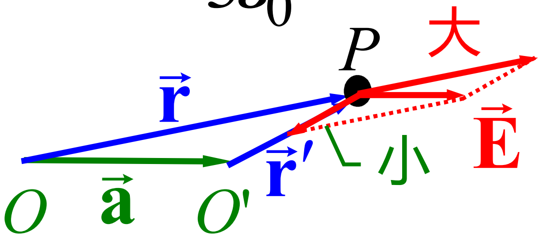
补偿法:

$$\text{空腔内填加}\pm\rho \Rightarrow \begin{cases} R,\text{大球},+\rho \\ R',\text{小球},-\rho \end{cases}$$

这时腔内任一点P处有: $\vec{E} = \vec{E}_{大} + \vec{E}_{小}$

其中 $\vec{E}_{大} = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}^0 = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$, **同理** $\vec{E}_{小} = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}') = \boxed{\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}}$$



与 $\vec{r}, \vec{r}'$ 无关. $\vec{E}$ =常量, 均匀场!

求大球内, 空腔外任一点, $\vec{E}$ 是否均匀, 为什么?

§1-4 静电场的环路定理 电势

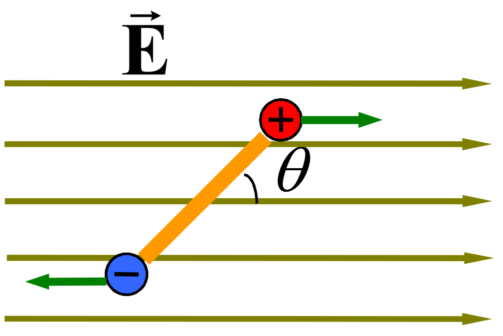
一. 电场力

已知$\vec{E}$，则一带电粒子q在其中所受力为 $\vec{F} = q\vec{E}$

- 和$\vec{E} = \vec{F}/q_0$不同，由q_0测得$\vec{E}$，不计场源，求任意电荷q所受的力.
- $\vec{E}$ 中不包括q所产生的电场，是外场!

例：电偶极子受力和力矩.

1. 均匀$\vec{E}$



合力为0，力矩 $\vec{M}_e = \vec{p}_e \times \vec{E} \neq 0$

→ 旋转：$\vec{p}_e \parallel \vec{E}$ 时，稳定平衡

$\vec{p}_e \nparallel \vec{E}$ 时，不稳平衡.

2. 非均匀 $\vec{\mathrm{E}}=\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})$

合力不为0: $\vec{F}=q(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=p_e\dfrac{\vec{E}_1-\vec{E}_2}{l}$

合力矩不为0:

$$M=F_1\frac{l}{2}\sin\theta+F_2\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{p_e}{2}\sin\theta(E_1+E_2)$$

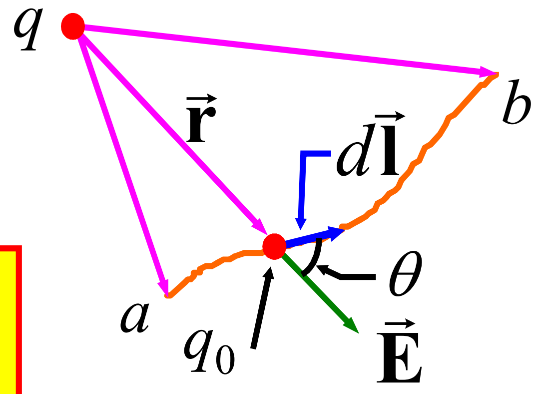
若l尺度$\vec{\mathrm{E}}$变化很小, $\vec{\mathrm{E}}_1\approx\vec{\mathrm{E}}_2$, 则有$\vec{\mathbf{M}}_e\approx\vec{\mathbf{p}}_e\times\vec{\mathbf{E}}$

这时, 电偶极子**旋转**到 $\vec{\mathbf{p}}_e\|\vec{\mathbf{E}}$ 的方向, 并**向电场较强的方向移动**.

二. 静电场力的功

q_0在q的电场中沿某路径由a至b，

静电场力所作的功为:



$$\boxed{A_{a\to b}=\int_{(a)}^{(b)}\vec{F}\cdot d\vec{l}=q_0\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

1. 点电荷场:

$$\boxed{A_{a\to b}=\int_a^b\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overbrace{\vec{r}^{\,0}\cdot d\vec{l}}^{\cos\theta\, dl\,=\,dr}=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)}$$

- **路径无关, 只与始末位置有关!** 可推广

2. 点电荷系的电场:

$$\because \vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$$

$$\therefore A_{a\to b}=q_0\sum_i\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=q_0\sum_i\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right)$$

q_i 到 a 点的距离

- **等于各点电荷场对q_0作功之和.**

3. 连续带电体: (同理, 略)

三. 静电场的环路定理

设q_0沿闭合回路运动, 回到原位置, 由上式得:

$$q_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \Rightarrow \boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0}$$

静电场是无旋场!

静电场的环路定理（三种等价表述）：

- **静电场中电场力作功与路径无关, 和…有关.**
- **静电场中,电荷q沿任一闭合路径回到原处, 电场力作功为0.**
- **静电场中场强沿任意闭合路径的环量恒为0.**

三. 静电场的环路定理

设q_0沿闭合回路运动, 回到原位置, 由上式得:

$$q_0\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \Rightarrow \boxed{\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0}$$

静电场是无旋场!

静电场的环路定理（三种等价表述）：

- 静电场中电场力作功与路径无关, 和…有关.
- 静电场中,电荷q沿任一闭合路径回到原处, 电场力作功为0.
- 静电场中场强沿任意闭合路径的环量恒为0.

物理意义: 静电场是保守场, 可以引入势，势能

注意：只对静电场适用!

四. 电势能

类比势能和保守力作功, 引入电势能: 系统中电场力所作的功在数值上等于相应电势能增量的负值, 即

$$A_{a\to b}=-(W_b-W_a)=W_a-W_b=q_0\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

沿任意路径!

比较最后等号, 有 $W_a=q_0\int_{(a)}^{(b)}\vec{E}\cdot d\vec{l}+W_b$

选 $W_b=0$**, 得** q_0 **在** a **处的电势能:**

$$\boxed{W_a=q_0\int_{(\text{场点 }a)}^{(\text{势能零点})}\vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

- **对有限分布的电荷系统, 常常取** $W_\infty=0$

§1-4 静电场的环路定理 电势

点电荷：

$$W(r) = q_0 \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \begin{cases} \text{同号时} W > 0 \\ \text{异号时} W < 0 \end{cases}$$

- **对无限大区域的电荷分布, 取有限远b点处$W_b = 0$**

即 $$\boxed{W_a = q_0 \int_{(\text{场点}a)}^{(\text{势能零点}b)} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

- **工程中经常取地球电势为零**
- **电势能属于q_0和 $\vec{E}$ 整个系统**

五. 电势

为单独描述 $\vec{E}$ 的性质, 排除q_0影响, 引入电势概念:

$$u_a=\frac{W_a}{q_0}=\int_{(\text{场点}a)}^{(\text{势能零点})}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

两种等价叙述:

静电场中某点的电势在数值上等于

a) 单位正电荷在该点时的电势能.

b) 单位正电荷从该点沿任意路径到参考点时电场力所作的功.

注意: a) 标量空间函数! 大小正负与零点选择有关.

b) 零点选择方法同电势能

c) 静电力⇔电势能, 电场强度⇔电势

六. 电势差

比较两点电势时与零点选择无关:

$$u_{ab} \equiv u_a - u_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

数值上：单位正电荷在静电场中从a点沿任意路径到达b点时电场力所作的功. 工程上称为电压.

⇒带任意电量q的电荷如上运动时电场力作的功为

$$A_{ab} = q(u_a - u_b)$$

电子伏: (能量的非SI单位) 一个电子通过电势差为1伏的电场时其电势能的改变量：$1\,\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{J}$

讨论：

- 环路定理⇔作功与路径无关⇔保守场⇔有势
- 环路定理是静电场的另一重要定理，

  Coulomb定律完备描述静电场

  = Gauss定理 + 环路定理

  (Gauss定理不能描述静电场的有心力场性质)
- 可用环路定理检验一个电场是不是静电场。
- 环路定理要求电场线不能闭合(无旋)。

  静电场是有源、无旋场。

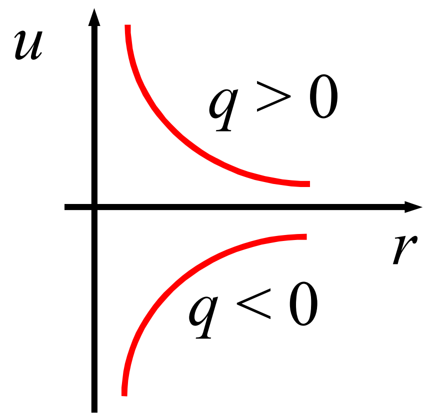
七. 电势的计算

- **功能法(定义)**
- **场强法** $\boxed{u_P = \int_P^{\text{势能零点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$
- **叠加法** $\boxed{u_P = \sum u_{Pi}}$ 或 $\boxed{u_P = \int du_P}$

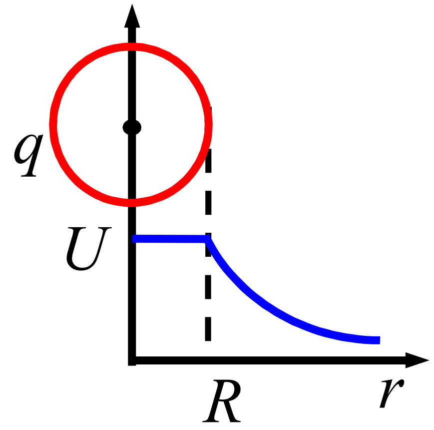
例. 点电荷场的电势 (功能法)

$$u_P = \frac{W_P}{q_0} = \frac{A_{P\infty}}{q_0} = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$u_{P\to\infty} = 0$$



例：均匀带电球面. 已知q, R,
求电势分布.



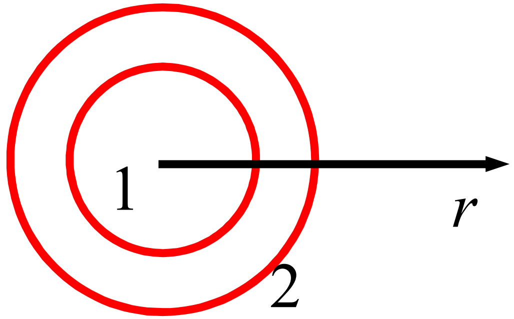
解:电场易求, 可用场强法

$$u_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{r_P}^{R} \vec{0} \cdot d\vec{l} + \int_R^{\infty} \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r_P \le R) \\ \displaystyle\int_{r_P}^{\infty} \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_P} & (r_P \ge R) \end{cases}$$

- 球内各点u为常量,球面电势与球内相等, u连续!
- 球外各点电势与点电荷场的情况相同.

§1-4 静电场的环路定理 电势



例: 两同心球面均匀带电,

已知$R_1, Q_1; R_2(> R_1), Q_2$. 求电势分布

解法一: 场强法.

对均匀带电球面，内：0；外：同点电荷

$$
\begin{array}{cccc}
 & (r < R_1) & (R_1 < r < R_2) & (r > R_2) \\
\vec{E} = & \vec{0} & \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^0 & \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^0
\end{array}
$$

选 $u_\infty = 0$, 有:

$$r \le R_1: \ u(r) = \int_r^{R_1} \vec{0} \cdot d\vec{r} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

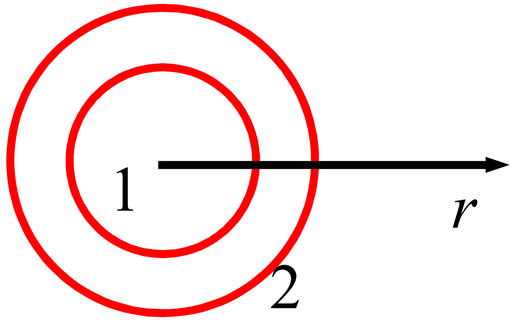
$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = const.$$

§1-4 静电场的环路定理 电势

$R_1 \le r \le R_2$:

$$u(r) = \int_r^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$



$r \ge R_2$: $u(r) = \int_r^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

解法二: **叠加法**. **选**$u_\infty = 0$

$$u = \begin{cases} q / 4\pi\varepsilon_0 R \ (r \le R) \\ q / 4\pi\varepsilon_0 r \ \ (r \ge R) \end{cases}$$

$u = u_1 + u_2 = \cdots$ **(比解法一简单)**

例:无限长均匀带电圆柱面. 已知R,σ, 求u分布.

解: ① 选距轴线的b点为势能零点. (为什么?)

②有轴对称性, 易用G-定律求$\vec{E}$ $\Rightarrow$ 用场强法

由G-定律, 对柱面有: $\vec{E}=\begin{cases}\vec{0} & (r<R)\\ \dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}\vec{r}^0 & (r>R)\end{cases}$

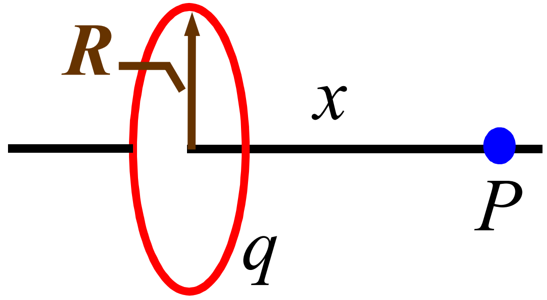
由$u(r)=\int_r^{r_b}\vec{E}\cdot d\vec{l}$, 得:

$$r<R:\quad u(r)=\int_r^R\vec{0}\cdot d\vec{l}+\int_R^{r_b}\frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}dr=\boxed{\frac{R\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{R}}$$

$$r>R:\quad u(r)=\int_r^{r_b}\frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r}dr=\boxed{\frac{R\sigma}{\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r}}$$

- 选不同的r_b对应不同的$u(r)$, 但 $r_b\to\infty, u(r)\to\infty$

例: 均匀带电圆环. 已知R, q. 求轴线上P点电势.



解: (叠加法) $dq = \lambda dl = \dfrac{q}{2\pi R}dl$,

$$du = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q\,dl}{8\pi^2\varepsilon_0 R\sqrt{R^2+x^2}}$$

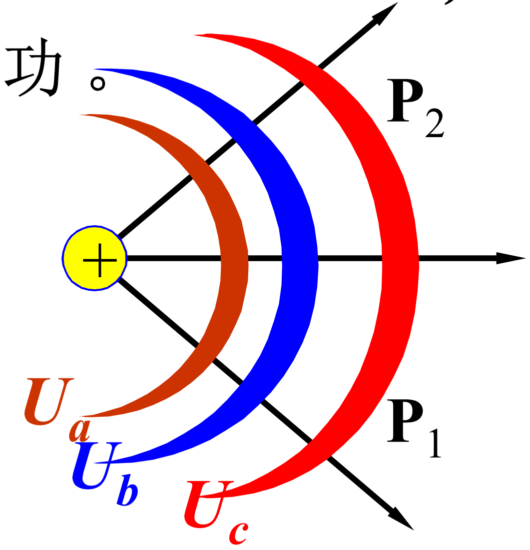
$$u = \int du = \int_0^{2\pi R}\frac{q\,dl}{8\pi^2\varepsilon_0 R\sqrt{R^2+x^2}} = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}}$$

- $x >> R$时, $u \to \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$ 点电荷场!
- $x = 0$时, $u = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$
- 也可以用场强法

八. 场强与电势的微分关系

1、等势面

电势相等的空间各点组成的曲面(~地图中等高线)



特点

（1）沿等势面移动电荷，电场力不作功。

$$A_{12}=Q(U_1-U_2)\overset{\text{同一等势面上}}{=\!=\!=}0$$

（2）等势面处处与电力线正交。

$$dA=Q\vec{E}\cdot d\vec{r}\overset{\text{同一等势面上}}{=\!=\!=}0$$

$$Q\neq 0 \quad E\neq 0 \quad \mathrm{d}\,r\neq 0 \Longrightarrow \vec{E}\perp \mathrm{d}\vec{r}$$

（当规定相邻两等势面的电势差为定值）

（3）等势面稠密处 —— 电势变化快

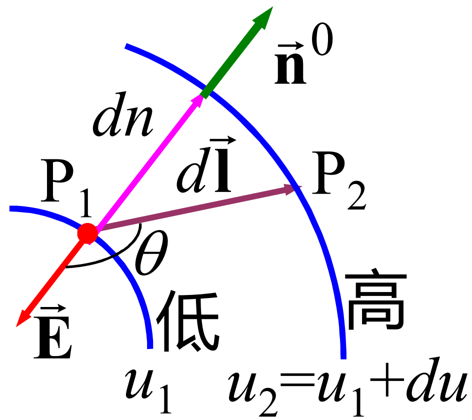
电场强度大

§1-4 静电场的环路定理 电势

- **电场线从高电势处指向低电势处**
- **直观**, 对相等势差的等势面: 密$\leftrightarrow \vec{E}$ 大, 稀$\leftrightarrow \vec{E}$ 小
- **方便**, 电场线族和等势面族知一即可. 等势面族更容易获得.

2. 场强与电势梯度

思路: u等于$\vec{E}$的积分, $\vec{E}$等于u的微商.



如图 $u_1 - u_2 = \vec{E}\cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta = -du$

$$\Rightarrow \quad E\cos\theta = -\frac{du}{dl}$$

这时有 $E = -\left.\dfrac{du}{dl}\right|_{\max.} = -\dfrac{du}{dn}$ **, 注意到** $\dfrac{du}{dn}\vec{n}^0$**是u的梯度,**

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{du}{dn}\vec{n}^0 = -\nabla u}$$

$\vec{n}^0$**是电势升高最快的方向**

- **E只与该点u的空间变化率有关, 与u值本身无关.**
  u变化越快, 等势面越密, E就越大. $V/m \equiv N/C$

3. 由电势计算场强（梯度法）

思路: $q\text{分布} \xrightarrow{\text{标量叠加}} u \xrightarrow{\text{微分}} \vec{E}$

直角坐标系中, $u = u(x, y, z)$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)}$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

- 分两步走, 但一般还是简单些, 特别是对复杂场
- 实验上u比E 容易测定.

例:电偶极子. 由u求E.

解:$u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_2-r_1}{r_1 r_2}\right)\approx\dfrac{p_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

在xoy坐标系中, 有 $r^2=x^2+y^2;\ \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\therefore\quad E_x=-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p_e(2x^2-y^2)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3p_e xy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\cdots=\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{5/2}}\sqrt{4x^2+y^2}=\cdots$$

4. 带电粒子在电场中的运动

要点:

$$\vec{F}=q\vec{E}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$ ，给出规律，是矢量方程

$$W=qu \text{或} A=q(u_0-u)=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

给出动能定理，能量关系

- 均匀场中，匀加速运动，反之亦然.
- 动能变化与运动路径无关，只与电势差有关.
- 一般而言，如果没有其它力，纯静电力下只能有不稳平衡

§1-5 静电场的基本微分方程

一.（数学）矢量分析

对任意矢量场A, 有高斯定理和斯托克斯定理

通量 $$\oint\!\!\!\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{s} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{A})\,dV$$ 高斯定理

$\nabla\cdot\vec{A}$：A的散度

环流 $$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{s}$$ 斯托克斯定理

$\nabla\times\vec{A}$：A的旋度

§1-5 静电场的基本微分方程

其中，▽称为**哈密顿算符**，是一个矢量微分算符，兼有微分运算和表示矢量两种功能。

直角坐标系中

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \nabla\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{k}$$

二. 静电场高斯定理和环路定理的微分表示

$$\begin{cases} \iiint\limits_V (\nabla \cdot \vec{E})dV = \oiint\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \rho dV \\ \iint\limits_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

静电场基本方程的微分形式

§1-5 静电场的基本微分方程

利用场强和电势的微分关系

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla u}$$

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ 泊松方程

$$\nabla^2 u = 0$$ 拉普拉斯方程

课后作业

课后习题：

1.8，1.9，1.11，1.13，1.15，1.16，1.18，1.19，1.21，1.22，1.23，1.24，1.25

截止日期：2025-05-13 24:00

谢 谢!