北京航空航天大学

2020－2021 学年第一学期期中

试卷

考试课程 <u>工科数学分析 (I)</u>　　任课老师________________

班级______________ 学号______________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									
校对人									

2020 年 11 月 29 日

一．单项选择题(每小题 4 分，本题 20 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，将 $(1)\ln^3(1+\sqrt[3]{x});(2)x-\sin x;(3)(e^x-1)^2;(4)x^2(1-\cos x)$ 的阶从低阶到高阶排列，正确的顺序为（ C ）.

$A.$ (1)(2)(3)(4);　　$B.$ (4)(3)(2)(1);　　$C.$ (1)(3)(2)(4);　　$D.$ (3)(4)(1)(2).

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$($a$为有限数)，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n(n+1)}=$（ C ）.

$A.$ 0;　　$B.$ a;　　$C.$ $\dfrac{a}{2}$;　　$D.$ 不存在.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{3x}+b, & x\le 0, \\ \sin(ax), & x>0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则（ C ）.

$A.$ $a+b=1$;　　$B.$ $a+b=0$;　　$C.$ $a+b=2$;　　$D.$ $a+b=-1$.

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数，且 $f(0)=1,\ f'(0)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{f(x)}=1$，则（ B ）.

$A.$ $f(0)$是$f(x)$的极大值；

$B.$ $f(0)$是$f(x)$的极小值；

$C.$ $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；

$D.$ $f(0)$不是极值，$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

5.求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\cdots+\dfrac{1}{4n}\right)=$（ ）. B

$A.$ $\ln\dfrac{2}{3}$;　　$B.$ $\ln\dfrac{4}{3}$;　　$C.$ $\ln\dfrac{3}{4}$;　　$D.$ $\ln 2$.

二．计算证明题（每小题 5 分，本题 30 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x^2e^x)^{\frac{1}{x^2e^x}}\right]^{\frac{x^2e^x}{1-\cos x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{\frac{x^2}{2}}=2$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^2$

2. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-xf(x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，求 $f(0), f'(0)$

和 $f''(0)$.

解 由 $f(x)$在$x=0$处的二阶泰勒公式可得

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{[3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)]-x[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[3-f(0)]x-f'(0)x^2-[\frac{f''(0)}{2!}+\frac{9}{2}]x^3+o(x^3)}{x^3}$$

所以 $f(0)=3, f'(0)=0, f''(0)=-10.$

3. 设 函 数 $f(x)$ 由 方 程 $\begin{cases} x=t^2+2t \\ t-y+\sin y=1-\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 确 定，若 $y(t)|_{t=0}=\dfrac{\pi}{2}$，求 导 数

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=0}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=0}$.

解：由方程可得

$$x'(t)=2t+2, 1-y'(t)+\cos y\cdot y'(t)=0\Rightarrow y'(t)=\frac{1}{1-\cos y}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1}{(1-\cos y)(2t+2)}，\quad 当t=0时y'=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-\cos y)(2t+2)}\right)}{x'(t)}=-\frac{1-\cos y+(t+1)\sin y\cdot y'}{4(1-\cos y)^2(t+1)^3}，\quad 当t=0时y''=-\frac{1}{2}.$$

4. 设$y(x)=x\sin x\sin 3x$，求$y^{(10)}(x)$.

解：$\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x.$

$$y^{(10)}(x)=\frac{1}{2}[(x\cos 2x)^{(10)}-(x\cos 4x)^{(10)}]$$

$$=\frac{1}{2}[x\cos^{(10)}2x+10\cos^{(9)}2x-(x\cos^{(10)}4x+10\cos^{(9)}4x)]$$

$$=\frac{1}{2}[x\cdot 2^{10}\cos(2x+10.\frac{\pi}{2})+10\cdot 2^9\cos(2x+9.\frac{\pi}{2})-(x\cdot 4^{10}\cos(4x+10.\frac{\pi}{2})+10\cdot 4^9\cos(4x+9.\frac{\pi}{2}))]$$

$$=\frac{1}{2}[-x\cdot 2^{10}\cos 2x-10\cdot 2^9\sin 2x+x\cdot 4^{10}\cos 4x+10\cdot 4^9\sin 4x]$$

$$=-5\cdot 2^9\sin 2x+5\cdot 2^{18}\sin 4x+2^{19}x\cos 4x-2^9x\cos 2x.$$

5. 设$0<x<1$,求证：$xe^{-x}>\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

方法 1：不等式两边取对数,即证$\ln x-x>-\ln x-\frac{1}{x}$

令$f(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}, f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$

$\therefore f(x)>f(1)=0$

方法二：原不等式等价于$x^2e^{\frac{1}{x}-x}>1$.

令$f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}-x}-1, f'(x)=-(x-1)^2e^{\frac{1}{x}-x}<0$

$\therefore f(x)>f(1)=0$

6. 设$f(x)$在(a,b)单调递增，则$\forall x_0\in(a,b)$, x_0处的左极限$f(x_0^-)$存在.

证明： 设$A=\{f(x)\,|\,x\in(a,x_0)\}$，则$A$有上确界$\alpha$

上确界定义可知：$\forall x\in(a,x_0)$，$f(x)\le\alpha$; $\forall\varepsilon>0,\exists x'\in(a,x_0)$，$f(x')>\alpha-\varepsilon$;

由f的单调性可知，取$\delta=x_0-x'>0$，当$-\delta<x-x_0<0$时，

$x'<x<x_0, -\varepsilon<f(x')-\alpha\le f(x)-\alpha\le 0<\varepsilon$

$\therefore f(x_0^-)$存在且等于α.

三．计算题（本题 10 分）

求函数$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$的单调区间，凹凸区间，极值点，极值和拐点.

解：$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}$

单调增区间$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$，单调减区间$[-1,0)\cup(0,2]$

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\frac{5x+2}{x^4}$$

$\therefore$凸区间为$[-\dfrac{2}{5},0)\cup(0,+\infty)$，凹区间为$(-\infty,-\dfrac{2}{5}]$，拐点为$(-\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$

驻点为-1和2，$f''(-1)<0, f''(2)>0$,

所以-1为极大值点，极大值为e^{-1}，2为极小值点，极小值是$4e^{\frac{1}{2}}$

四. 计算证明题(本题 10 分)

设数列$\{x_n\}$满足如下性质：$x_0=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}, n=0,1,2,\cdots$，用 Cauchy 收敛定理证明数列$\{x_n\}$收敛, 并计算其极限.

证明：(1) **用归纳法证：** $\dfrac{1}{2}\le x_n\le 1, n=0,1,2,\cdots$

$\dfrac{1}{2}\le x_0\le 1$正确, **设** $\dfrac{1}{2}\le x_n\le 1$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\le\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}\le 1$,

$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\ge\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore\ \dfrac{1}{2}\le x_n\le 1$.

$$(2)\ |x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+x_{n-1}}\right|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}\le\frac{|x_n-x_{n-1}|}{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{4}{9}|x_n-x_{n-1}|$$

$$<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|<\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|<\cdots<\frac{1}{2^n}|x_1-x_0|<\frac{1}{2^{n+1}},$$

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\sum_{k=1}^{p}(x_{n+k}-x_{n+k-1})\right|\le\sum_{k=1}^{p}|x_{n+k}-x_{n+k-1}|<\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k}}$$

$$<\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n},$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, **当** $n>N$ **时**, $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$. **即**: $\{x_n\}$**是基本列.**

(3) **设** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，**对** $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$ **两端取极限得**，$A=\dfrac{1}{1+A}$，$A^2+A-1=0$,

$\therefore A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

五．证明题（本题 6 分）

判断$y = x\sin x$在$[0, +\infty)$上的一致连续性，并证明你的结论.

解：不一致连续

取$x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}, x_n' = 2n\pi$, 则$|x_n - x_n'| \to 0$,

但$|f(x_n) - f(x_n')| = \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n} \sim \left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \to 2\pi \neq 0$

因此不一致连续

六．证明题（本题 8 分）

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，$f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$.

证明：存在$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi) = 1$..

证明：令$F(x) = f(x) - x$, 则$F(0) = 0, F(1) = -1, F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

由零点定理可知存在$c \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得$F(c) = 0$

在[0, c]上应用Rolle定理

七．　证明题（本题 8 分）

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上二阶可导，证明：存在$\xi \in (0,1)$，使得

$$f(1) - 2f(\frac{1}{2}) + f(0) = \frac{1}{4}f''(\xi).$$

证明方法1：将函数在$\frac{1}{2}$进行Taylor展开：$f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f''(c)(x - \frac{1}{2})^2$.

则$f(0) = f(\frac{1}{2}) - f'(\frac{1}{2})\frac{1}{2} + \frac{1}{8}f''(c_1), f(1) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})\frac{1}{2} + \frac{1}{8}f''(c_2)$

两式相加：$f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{f''(c_1) + f''(c_2)}{2}$

由$Darboux$定理可知，$\exists \xi \in (0,1)$　使得$f''(\xi) = \frac{f''(c_1) + f''(c_2)}{2}$

证明方法2：引入辅助函数$F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$.

则$f(0)-2f(\frac{1}{2})+f(0)=F(\frac{1}{2})-F(0)$

在$[0,\frac{1}{2}]$上对$F(x)$应用Lagrange中值定理，

$\exists c_1\in(0,\frac{1}{2})$,使得$F(\frac{1}{2})-F(0)=F'(c_1)\frac{1}{2}=[f'(c_1+\frac{1}{2})-f'(c_1)]\frac{1}{2}$

因为$f(x)$二阶可导,故$\exists\xi\in(c_1,c_1+\frac{1}{2})$,使得$f'(c_1+\frac{1}{2})-f'(c_1)=\frac{1}{2}f''(\xi)$

$\therefore F(\frac{1}{2})-F(0)=\frac{1}{4}f''(\xi)$

八．计算讨论题（本题 8 分）

已知$x^5-5x=a$有三个不相等的实根，求a的取值范围.

解：设$f(x)=x^5-5x-a,f'(x)=5(x^4-1)$

$f'(x)=0$得到驻点$x=\pm1$

当$x\in[-1,1]$时函数单调减，$x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$时函数单调增

$f(-1)=4-a$为极大值,$f(1)=-4-a$为极小值

$\because\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$

$\therefore$必存在$X>0$,使得当$x<-X$时$f(x)<0,x>X$时$f(x)>0$

若函数有三个不相等的实根，则由零点定理：

当$f(1)>0$或$f(-1)<0$时，$f(x)$仅有一个实根,

当$f(1)=0$或$f(-1)=0$时,$f(x)$有两个实根

当$f(1)<0$，$f(-1)>0$时，$f(x)$有三个实根,

$\therefore -4<a<4$