12章 习题课（二）

幂级数求收敛域及和函数

幂级数的收敛半径

定理1 （ Cauchy-Hadamard ）

记$A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径

$$R=\begin{cases}0, & 若A=+\infty,\\ \dfrac{1}{A}, & 若A\in(0,+\infty),\\ +\infty, & 若A=0.\end{cases}$$

定理2

记$A=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径

$$R=\begin{cases}0, & 若A=+\infty,\\ \dfrac{1}{A}, & 若A\in(0,+\infty),\\ +\infty, & 若A=0.\end{cases}$$

幂级数的一致收敛性

定理3 设R为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径，则对任意闭子区间$I \subset (-R, R)$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在 I 上一致收敛.

定理4 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R$，$0 < R < +\infty$，则

(1) 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = R$处收敛，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[0, R]$一致收敛；

(2) 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = -R$处收敛，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[-R, 0]$一致收敛；

定理6（逐项积分）

设级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$,则

对$\forall x \in (-R, R)$,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

注　积分后幂级数收敛半径不变,

但收敛域可能会改变, 在端点处的收敛性可能变“好”， 但不可能变“坏”.

幂级数和函数的分析运算性质

定理5 （连续性定理）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,

则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在$(-R, R)$连续；

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在$x = R$处左连续，即

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n;$$

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在$x = -R$右连续，即

$$\lim_{x \to -R+0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

定理7（逐项求导）

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为 R，和函数为 $S(x)$，

则$S(x)$在$(-R,R)$内连续，而且在$(-R,R)$中有

任意阶导数：

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \quad k=1,2,\cdots$$

注 1. 更精确的说，是在收敛域内连续；

2. 尽管$S^{(k)}(x)$的收敛半径不变，

但收敛域可能会改变，在端点处的收敛性可能变“坏”，但不可能变“好”.

例1 求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n;\qquad (5)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}.$$

解 (1) $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\quad \therefore R=1$

当$x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，该级数收敛

当$x=-1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，该级数发散

故收敛区间是$(-1,1]$.

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n;$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \therefore R=0,$$

级数只在$x=0$处收敛,

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\quad \therefore R=+\infty,$$

收敛区间$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \quad \therefore R = \frac{1}{2}$,

即$\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$收敛， $x \in (0,1)$收敛，

当$x = 0$时， 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$， 发散

当$x = 1$时， 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$， 收敛

故收敛域为(0,1].

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$（缺项）

解法1 $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}, a_{2n+1}=0$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{|a_{2n}|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{n\cdot 2^n}=\sqrt{2}$$

解法2 令$x^2=y$ (知$y\geq 0$),

$$\text{原级数}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^n}{n\cdot 2^n}$$

$R_y=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2$, 即当$x^2<2$时级数收敛.

所以原级数的收敛半径为$\sqrt{2}$.

解法3 令$u_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\dfrac{n\cdot 2^n}{x^{2n}}\right|=\dfrac{x^2}{2}$

当$x^2<2$时，$|x|<\sqrt{2}$时收敛；

当$x^2>2$时，$|x|>\sqrt{2}$时发散；

所以收敛半径 $R=\sqrt{2}$，**收敛区间**为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

而当$x=\pm\sqrt{2}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛.

故原级数**收敛域**为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

当幂级数为缺项情形

1. 用Cauchy-Hadamard公式, 辨清 a_n

2.先利用变量代换化为非缺项情形后再用公式求收敛半径及收敛区间, 之后再通过逆代换求出原幂级数的收敛区间及收敛半径.

3.用比值审敛法或根值审敛法及幂级数收敛域的结构特点来求.

幂级数求和函数

常用公式

$$
\begin{cases}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, |x|<1; \\
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots, |x|<1; \\
\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots, |x|<1; \\
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots, |x|<1;
\end{cases}
$$

例2 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 收敛域及和函数 .

解一 令 $a_n = n+1$, 则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$,

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$ 的收敛半径为 $R=1$,

从而当 $|x-1|<1$ 时级数收敛，即 收敛域为 $(0,2)$.

设此级数的和函数为 $S(x)$, 则有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n.$$

两边逐项积分

$$\int_1^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x (n+1)(t-1)^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (t-1)^{n+1} \Big|_1^x = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^{n+1}$$

$$= \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x-1}{2-x},$$

两边再对 x 求导，得

$$S(x) = \left(\frac{x-1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2}. \quad x \in (0,2)$$

解二 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x-1)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(x-1)^{n+1}]'=[\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+1}]'$$

$$=[(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n]'$$

$$=[\frac{x-1}{1-(x-1)}]'=(\frac{x-1}{2-x})'$$

$$=\frac{1}{(2-x)^2}, \qquad x\in(0,2).$$

例3 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)x^{2n-1}$ 收敛域及和函数.

解 令$u_n(x)=(3n-1)x^{2n-1}$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|(3n+2)x^{2n+1}|}{|(3n-1)x^{2n-1}|}=x^2$

所以当$x^2<1$时级数收敛，$x^2>1$时级数发散，

又$x=\pm1$时级数发散，收敛域为 $(-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}3nx^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2n})'-\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{3}{2}(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n})'-x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

$$=\frac{3}{2}(\frac{1}{1-x^2}-1)'-\frac{x}{1-x^2}=\frac{x^3+2x}{1-x^2}\quad x\in(-1,1)$$

例4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1}$ 收敛域及和函数.

解 $\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|(n+1)2^{\frac{n+1}{2}}x^{3n+2}|}{|n2^{\frac{n}{2}}x^{3n-1}|}=\sqrt{2}\,|x|^3$

收敛域为 $(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}},\frac{1}{\sqrt[6]{2}})$,

例12.4.3结论: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$

$$xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n2^{\frac{n}{2}}x^{3n}=\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt{2}x^3)^n=\frac{\sqrt{2}x^3}{(1-\sqrt{2}x^3)^2}$$

$$S(x)=\frac{\sqrt{2}x^2}{(1-\sqrt{2}x^3)^2},\qquad x\in(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}},\frac{1}{\sqrt[6]{2}})$$

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$ 的和函数.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1})'=(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n)'$

$$=(\frac{1}{x}\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}})'=(\frac{x}{2-x^2})'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad 0<\frac{x^2}{2}<1$$

显然$x=0$时,上式也成立;$x=\pm\sqrt{2}$时,级数发散.

所以原幂级数的和函数

$$S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

例6 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解 记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，显然 $S(0)=0$,

$$S'(x)=[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}]'=\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},\qquad(-1<x<1)$$

两边积分得 $S(x)-S(0)=S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\ln(1+x)$

又 $x=1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛,$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x).$

$$(-1<x\leq 1)$$

例7 证明等式 $\int_0^1 [-\frac{\ln(1-x)}{x}]\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

解 $\ln(1-x) = \int_0^x [-\frac{1}{1-t}]\,dt = -\int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} t^n)\,dt$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^x t^n\,dt) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ x \in [-1,1)$$

$$\int_0^x [-\frac{\ln(1-t)}{t}]\,dt = \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n})\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}\,dt)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},\ x \in [-1,1)$$

由连续性定理 (定理5)可得

$$\int_0^1 [-\frac{\ln(1-x)}{x}]\,dx = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x [-\frac{\ln(1-t)}{t}]\,dt = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

例8 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x t^n dt\right)$$

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)dt \qquad 0<|x|<1$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}dt$$

$$=-\ln(1-x)+1+\frac{1}{x}\ln(1-x)=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$$

也即是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x),\quad 0<|x|<1$

显然$x=0$时，级数和为 0; $x=\pm1$时，级数也收敛 .

由和函数的连续性 ,级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x), & 0<|x|<1\text{及}x=-1\\ 0, & x=0\\ 1. & x=1\end{cases}$$

12章 习题课（二）

幂级数的展开及应用

函数的幂级数展开

定义　如果$f(x)$有任意阶导数，即 $f(x)\in C^{\infty}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x\in(x_0-R,x_0+R)$$

——$f(x)$所生成的在x_0处的泰勒(Taylor)级数.

记为：$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$,

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为$f(x)$生成的麦克劳林(Maclaurin)级数.

函数$f(x)$生成的Taylor级数收敛且收敛到的和函数为$f(x)$时才能称为展开.

$f(x)$ 的幂级数展开式是唯一的.

函数展开成幂级数的方法

(1) 直接法

步骤： (1) 求$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 或$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$,

则级数在收敛区间内收 敛于 $f(x)$.

(2) 间接法

根据唯一性，利用常见展开式， 通过变量代换，四则运算，恒等变形，逐项求导，逐项积分等方法，求展开式.

常用的函数幂级数展开式

$$(1)\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^n,\quad x\in(-1,1)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$$

$$(3)\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$(4)\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$(5)\ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$(6)\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1]$$

$$(7)\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in[-1,1)$$

$$(8)\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

(9) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

若$\alpha \le -1$,则 上式仅在$(-1,1)$中成立;

若$-1<\alpha<0$,则上式在$(-1,1]$中成立;

若$\alpha>0$,则上式在$[-1,1]$中成立;

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n, \quad x\in[-1,1];$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n, \quad x\in(-1,1];$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad x\in(-1,1];$$

(10) $\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x\in[-1,1];$

例1 设函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$，求$f^{(100)}(0), f^{(101)}(0), f^{(102)}(0)$.

解

$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1} \qquad x\in(-1,1)$$

$$f^{(3n)}(0)=(3n)! \qquad f^{(3n+1)}(0)=-(3n+1)! \qquad f^{(3n+2)}(0)=0$$

$$f^{(100)}(0)=-100! \qquad f^{(101)}(0)=0 \qquad f^{(102)}(0)=102!$$

例2 将 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数.

解 $\because\quad \ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1]$

$\therefore\quad \ln(1+x^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n},\ (-1\le x\le 1)$

又 $\arctan x=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt\ =\int_0^x[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}]dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

所以

$$x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.\quad(-1\le x\le 1)$$

例3 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

分析 $\because \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 是 $\sin x$ 的展开式，设法用已知展开式来解.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(\frac{x}{\sqrt{2}})^{2n-1}$

$$=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\frac{x-1+1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$+ \sqrt{2}\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}$$

$$= \sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot(2n)!}(x-1)^{2n}$$

$$+ \cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n+1} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

例4 将 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 在$x=1$点展开为幂级数.

解 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}=\dfrac{1}{2}[1-(\dfrac{x-1}{2})^2]^{-\frac{1}{2}}$

$$f(x)=\frac{1}{2}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}[-(\frac{x-1}{2})^2]^n\}$$

$$x\in(-1,3]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in(-1,1];$$

例5 求函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的麦克劳林级数.

解 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in(-1,1];$$

$$f(x)=\int_0^x[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}]dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad x\in[-1,1]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\quad x\in(-1,1];$$

例6 将$f(x)=e^{2x-x^2}$展开成Maclaurin级数.

解 因为 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots,$

所以

$$e^{2x-x^2}=1+(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\cdots$$

$$=1+(2x-x^2)+\frac{4x^2-4x^3+x^4}{2!}+\frac{8x^3-12x^4+6x^5}{3!}$$

$$+\frac{16x^4-32x^5}{4!}+\frac{32x^5}{5!}+\cdots,$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^4}{6}-\frac{x^5}{15}+\cdots.$$

例7 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$的和.

解 $S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2}$

由$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad x\in(-\infty,+\infty)$

知$x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$

求导得 $\sin x+x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

令$x=1$得: $\sin 1+\cos 1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}=2S$

$\therefore S=\frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1)$

例8 求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

解 令$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$

$$[xS(x)]'=[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)}]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x) \quad x\in(-1,1)$

所以 $[xS(x)]'=-x\ln(1-x)$

$$xS(x)=\int_0^x[-t\ln(1-t)]\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left[x^2\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}-\ln(1-x)\right]$$

$$\therefore S=S(\frac{1}{2})=-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\ln\frac{1}{2}\right]=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$