A

北京航空航天大学

2013－2014 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2014 年 06 月 27 日

A

一、 求解下面问题（每小题 6 分，满分 48 分）

1. 设$u(x,y,z)$为连续函数， 是以$M(x_0,y_0,z_0)$为中心，半径为R的球面，求极限

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma} u(x,y,z)dS.$$

2. 计算$\iint_D x^2 e^{-y^2}dxdy,$ 其中D是由$x=0, y=1$及$y=x$所围成的区域.

3. 已知椭圆型区域$D=\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$. 利用广义极坐标变换计算积分

$$I=\iint_D (b^2x^2+a^2y^2)d\,x\,d.$$

4. 求曲面Σ: $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 2)$的面积.

5. 计算三重积分$\iiint\limits_V \left[(\cos y)^{2012}x+3\right]dxdydz$，其中　由$z=1$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$所成的立.

6. 计算第一型曲面积分$\iint\limits_\Sigma (x+y+z)^2 dS$，其中　为上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2$（$z\ge 0$），

其中$a>0$.（可利用对称性）

7. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} z\,ds$, 其中 Γ 为圆锥螺线 $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, t \in [0,2\pi]$.

8. 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$,

其中 $\Sigma = \{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$，取上侧.

二、（本题 10 分）求方程 $y'' + 3y' - 4y = xe^{2x}$ 的通解.

三、(本题 10 分）设曲线积分$I=\int_L\frac{(x+2y)dx+(ax+y)dy}{x^2+y^2}$在区域$D$内与路径无关，

（1）写出满足题设的区域D的条件，并求常数a；

（2）设曲线L为从点$A(1,0)$沿上半平面到点$B(2,0)$的一段弧，求曲线积分I.

四、(本题 12 分)(利用 Green 公式)

计算 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}$, 其中 是以$(1,1)$为中心, 4 为半径的圆周, 取顺时针方向.

五 、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中　是曲面

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，取上侧.

六、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算 $\oint_{\Gamma} ydx+(\mathrm{z}-\cos x)dy+(x+e^{z})dz,$ 其中　是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+\mathrm{z}=0. \end{cases}$ 从 $\boldsymbol{z}$ 轴正向看为逆时针方向.

七、附加题（本题 10 分）

设 是分片光滑的闭曲面， 上的单位外法向量 $\vec{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，分别证明对于以下两种情形，

(1) P,Q,R 在 $\overline{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数，Ω 为 所围的立体；

(2) P,Q,R 在 上具有一阶连续偏导数.

都成立 $$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=0.$$