第九章 广义积分

§1 无穷区间上广义积分的概念和计算

无穷区间上的积分的基本概念和计算

定义1.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义，对于

对于 $\forall[a,b]\subset[a,+\infty)$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A(A<+\infty)$，则称 A 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$

上的广义积分(也称无穷积分)，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，并称

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则为发散. 这时

$$\boxed{\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.}$$

同理可定义： $(1)\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x}$

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,\quad \forall c\in R.$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\cancel{=} \lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{a} f(x)\mathrm{d}x\right)$$

当两个积分都收敛时，称 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上积分收敛.

（不依赖于 c）

两个积分至少有一个不收敛时，称该积分发散.

实际上， 记 $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}F(A).$$

如果 $\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)<+\infty$， 称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例1 计算广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x}$

解 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1$

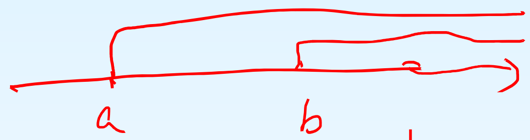
$$= -\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{2}{\pi}}^{b} \sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{x}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{b}$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\cos\frac{1}{b} - \cos\frac{\pi}{2}\right] = 1.$$

性质1.1 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x, \int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 收敛， k_1, k_2 为任意实数，则 $\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x$ 收敛，且有

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$



性质1.2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积，则对于 $\forall b>a$，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛和发散．

正常

$\int_a^{+\infty} = \int_a^b + \int_b^{+\infty}$

定理1.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积分，且有原函数 $F(x)$，则有 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a)$, $= F(x)\Big|_a^{+\infty}$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$

同理：$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(-\infty)$, $= F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(-\infty), \quad = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

这里，$F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x), F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x).$

广义积分的牛—莱公式,换元,分部也有相应的推广.

例2 证明广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$当$p>1$时收敛，当 $p\le 1$时发散.

记住

$0 \quad a$

证明 当$p=1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty$;

当$p\ne 1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & p<1,\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\text{敛} & p>1\\ \text{散} & p\le 1\end{cases}$$

命题得证.

所以广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

当$p>1$时收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

当$p\le 1$时发散.

例3 计算无穷广义积分

$$(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx,\quad (2)\ \int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx.$$

解

$$(1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan]_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\arctan]_0^b$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b=\pi.$$

$$(2)\ \int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=[-\frac{1}{2}e^{-x^2}]_0^{+\infty}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

例 4 证明无穷积分$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx$当$p > 0$时收敛，当$p < 0$时发散.

证明 $$\int_a^{+\infty} e^{-px}dx = -\frac{e^{-px}}{p}\bigg|_a^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{e^{-ap}}{p}, & p > 0 \\ \infty, & p < 0 \end{cases}$$

即当$p > 0$时收敛，当$p < 0$时发散.

例5 计算无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \int_{-\infty}^{0} x dx + \int_{0}^{+\infty} x dx$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{0} x dx + \int_{0}^{a} dx\right)$$

$$\cancel{= \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{0} x\,dx + \lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a} f(x)\,dx}$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{a} x\,dx\right)$$

$$= \lim_{a\to+\infty} 0 = 0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b \quad \text{发散}$$

√

例6 求$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x\,,\forall\alpha\in R$

$=\int_0^1+\int_1^{+\infty}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=}-\int_1^0\frac{t^\alpha\,dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^1\frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$

解 令$x=\frac{1}{t}$，$I=\int_{+\infty}^0\frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})}\frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$

$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2020})}}$?

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha+1-1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$$

$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{\sqrt{2}})}$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$$

§2　非负函数无穷积分的收敛性判别法

非负函数无穷积分的收敛性判别法

$[a\ A] \subset [a, +\infty)$

设f定义于$[a,+\infty)$且在任意有限区间 $[a,A]$ 上黎曼可积，

记 $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$

$= \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$

如果 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)<+\infty$, 称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

设$f \ge 0$, 则$F(A)$是关于A的增函数, 故有：

定理2.1 设$f \geq 0$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow F(A)\text{在}[a,+\infty)\text{上有界.}$$

定理2.2（比较判别法）

设$0 \leq f(x) \leq g(x)$, (充分大的 x), 那么

1^o 若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛

2^o 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散

$(a>1)$, $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\le 1\end{cases}$

常用的比较对象:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\ (a>0)\ \begin{cases}当\ p>1\ 时收敛;\\ 当\ p\le 1\ 时发散.\end{cases}$$

例1 判别广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4-\frac{1}{2}}}$

解 $\because 0<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{x^{4/3}},\quad p=\frac{4}{3}>1,$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4-\frac{1}{2}}}>\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$

根据比较判别法

广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4-\frac{1}{2}}}dx$ 呢?

定理2. 3（比较判别法的极限形式）

设$f(x), g(x) \geq 0$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$，则

$\frac{1}{2}l \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}l$

1° 若$0 < l < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$与$\int_a^{+\infty} g(x)dx$同敛散; $\frac{l}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}l\,g(x)$

2° 若$l=0$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)dx$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛;

$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ $f(x) \leq C g(x)$

3° 若$l=+\infty$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)dx$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散.

$\frac{g}{f} \to 0$ $g(x) \leq k f(x)$ $\frac{1}{k}g(x) \leq f(x)$

例2 判断$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$的敛散性.

$\to \frac{\pi}{2}$ $\sim x^3$

$x \to +\infty$

$f \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3}$

解

当$x \to +\infty$时,

$$f(x)=\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^3}=g(x)$$

$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^3}} \to \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 该广义积分收敛 .

例3 讨论$\int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x \quad (p>0)$的敛散性

解 由于当$x\to+\infty$时，$f(x)=x^{p-1}e^{-x}$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x}=0,$$

于是由$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，知原积分收敛.

例4 讨论下列积分的敛散性.

$$(1)\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx,\qquad (2)\ \int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\ (m,n>0).$$

$\sim x^{m-n}$

$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}=\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha-s}\cdot x^s}$

解 (1) 若$\alpha>1$,取$s:\alpha>s>1$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}}{\dfrac{1}{x^s}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha-s}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x}}{(\alpha-s)x^{\alpha-s}}=0,$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^s}dx$收敛, 因此$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$收敛.

若$\alpha\le 1$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}=+\infty$, 因此$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$发散.

$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\geq\frac{1}{x^\alpha}$

$$\left(\frac{x^m}{1+x^n}\right) \Big/ \left(\frac{1}{x^{m-n}}\right)$$

(2) $$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx=\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$$

$\therefore \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$与$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$同时敛散。

由于 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}=1,$

而$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{n-m}}dx\begin{cases}收敛，& n-m>1\\ 发散，& n-m\le 1\end{cases}$

故当$n-m>1$时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$收敛;

故当$n-m\le 1$时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$发散.

小结

(1) 无穷积分的定义和性质;

(2) 无穷积分的计算;

(3) 非负函数无穷积分的比较判别法.

作业

9.1

1（1, 3, 5, 7），2, 3, 6

9.2

1（1, 3, 5, 7），2, 4