工科数学分析：一元微分学

一、极限

二、连续

三、微分学

一、极限：确界存在定理

定义：设S是一个非空有上（下）界集合,如果存在一个实数β（α），满足：

$(1)\forall x \in S, x \le \beta;(x \ge \alpha)$

$(2)\forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in S, s.t.\ y_\varepsilon > \beta - \varepsilon(y_\varepsilon < \beta + \varepsilon);$

则称$\beta(\alpha)$为集合S的上（下）确界，记为$\beta = \sup S.(\alpha = \inf S)$

定理4.3（确界存在定理---实数连续性定理）

非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

一、极限：数列的极限

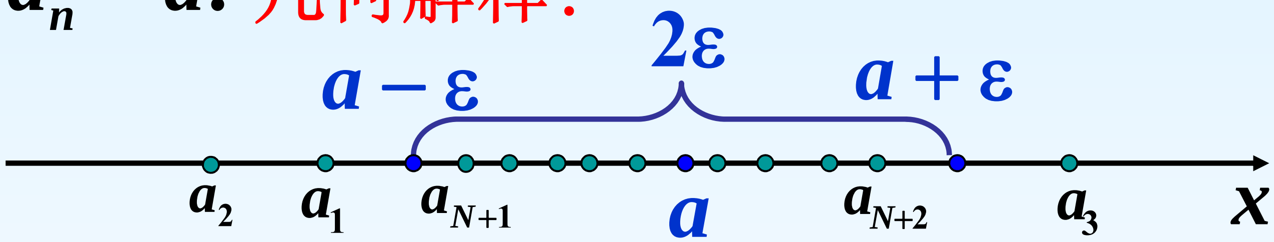
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 的表述：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$ 的表述：

$\exists \varepsilon_0 > 0$，对一切 $N \in N^*$，$\exists n_0 > N$，使得 $|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 几何解释：



当 $n > N$ 时，所有的点 a_n 都落在 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 内.

只有有限个(至多只有 N 个)落在其外.

一、极限：运算与性质

1.收敛数列基本性质：唯一性、有界性、保（序）号性

2.子列：数列收敛 $\Rightarrow$ 任何子列均收敛

若存在极限不同的子列 $\Rightarrow$ 数列发散

3.四则运算法则：注意使用条件

4.夹逼准则：适当放缩

1.无穷小$\{a_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

定理3.1

(1) $\{a_n\}$为无穷小的充要条件是 $\{|a_n|\}$为无穷小；

(2) 两个无穷小之和 (或差)仍是无穷小；

(3) 设$\{a_n\}$为无穷小，$\{c_n\}$为有界数列，那么$\{c_n a_n\}$为无穷小；

(4) 设$0 \le a_n \le b_n, n \in N^*$，如果$\{b_n\}$为无穷小，那么$\{a_n\}$也是无穷小；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的充要条件是$\{a_n - a\}$为无穷小.

2.无穷大$\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N, s.t., n > N, |a_n| > M.$$

性质3.1 (1) 如果$\{a_n\}$是无穷大，那么$\{a_n\}$无界.

无界不一定是无穷大，例如 $1,0,2,0,3,0,\cdots,n,0,\cdots$

(2) 任意无界数列都有无穷大的子列.

(3) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty), \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty\ (-\infty),\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty.$$

性质3.2

已知$a_n \neq 0 (n = 1,2,\cdots)$, 则$\{a_n\}$是无穷大的充要条件

是$\{\dfrac{1}{a_n}\}$为无穷小.

3.Stolz定理：

定理3.2 (Stolz定理$\frac{\infty}{\infty}$型)

设$\{b_n\}$严格递增，趋近于$+\infty$，

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A.$

（A可以为有限数，也可以 是$+\infty$或$-\infty$）

定理3.3 $\frac{0}{0}$型Stolz定理

设$a_n\to 0,\ b_n\to 0\ (n\to\infty)$，且$\{b_n\}$严格单调，

若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$， 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A.$

一、极限：单调数列

定理：单调有界数列必有极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

定理4.2

(1) 若单调数列的一个子列收敛，则这个数列收敛；

(2) 若单调数列的一个子列趋向 $\pm\infty$，则此数列趋向于 $\pm\infty$；

(3) 一个单调数列要么极限存在，要么趋向 $\pm\infty$；

(4) 单调数列收敛的充分必要条件是数列有界.

一、极限：基本定理

闭区间套定理

定理5. 1 设$I_n=[a_n,b_n], n\in N^*$,为一列闭区间,满足

(1) $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots$

(2)区间长度 $|I_n|=b_n-a_n\to 0\,(n\to\infty)$,

则存在唯一一点 ξ满足 $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$

列紧性定理

定理5.2 任意有界数列都存在收敛的子列.

一、极限：基本定理

柯西基本列

定义5.1 对给定数列 $\{a_n\}$, 如 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}^*$,

s.t 当 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m, n > N$ 时，都有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$,

则称 $\{a_n\}$ 为基本列，也称Cauchy列.

或 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 对一切 $p \in \mathbf{N}^*$, 有 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

柯西收敛准则

定理5.3 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 是基本列.

有限覆盖定理（简单了解）

定理5.4 若有限闭区间 $[a,b]$ 被一族开区间 $\{I_\lambda\}$ 覆盖，则必可从中选出有限个开区间来覆盖 $[a,b]$.

一、极限：

求解或证明数列极限的常用方法

一、定义法

二、利用四则运算法则

三、利用夹逼定理

四、利用单调有界定理

五、**Cauchy**收敛原理

六、利用**Stolz**定理

一、极限：函数极限

$\varepsilon-\delta$ 定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时},$$
$$\text{恒有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\text{对}\forall\delta>0,\exists x'$$
$$\text{满足}0<|x'-x_0|<\delta,\text{但}|f(x')-A|\geq\varepsilon_0.$$

左极限

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{使当}x_0-\delta<x<x_0\text{时},$$
$$\text{恒有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

定理1.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A.$

一、极限：极限性质与运算

函数极限的基本性质 唯一性，有界性，保序性

函数极限的运算性质 四则运算，夹逼定理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

海涅定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\{x_n\}\subset U_\delta^0(x_0)\to x_0, x_n\neq x_0$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

定理1. 10 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是任意以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}, x_n\neq x_0$,其相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛.

一、极限：极限性质与运算

柯西收敛定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$

对$\forall x_1,x_2$满足$,0<|x_1-x_0|<\delta,0<|x_2-x_0|<\delta,$

都有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon.$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$

对$\forall x_1,x_2$满足$,|x_1|>X,|x_2|>X,$

都有$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon.$

复合函数的极限

设 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A,\quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0,$

且在某个$U_\delta^o(x_0)$内$g(x)\neq u_0,$则

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f\left[g(x)\right]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.}$$

一、极限：其它极限形式

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$　　(3) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$　　(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$　　(6) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

注　关于函数极限的性质：

夹逼定理，　　函数极限的保号性，　　海涅原理，

复合函数的定理，四则运算法则，　　柯西收敛定理，

对所有极限形式都成立.

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

二、连续：定义与性质

函数连续： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0,$ 当$|x - x_0| < \delta$时,有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

定理3.1 函数 $f(x)$在 x_0 处连续$\Leftrightarrow$既左连续又右连续.

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

定理3.2 若$f(x)$在x_0连续,则$f(x)$在x_0的某邻域内有界.

定理3.3 若$f(x)$在x_0连续,且$f(x_0) > 0(< 0)$,则

$\exists\delta,$ 当$|x - x_0| < \delta$,有$f(x) > 0(< 0).$

定理3.4 若函数 $f(x),\ g(x)$在点 x_0处连续,则

$f(x) \pm g(x), f(x)\cdot g(x), f(x)/g(x), (g(x_0) \neq 0)$在$x_0$处也连续

定理3.5 （复合函数的连续性）

若函数 g 在 x_0 处连续，f 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

定理3.6（反函数的连续性） 设 $f(x)$ 是在区间 $I = [a,b]$ 上严格单调递增(递减)的连续函数，则 f^{-1} 是区间 $f(I)$ 上，严格单调递增(递减)的连续函数.

二、连续：间断点

第一类间断点： $f(x_0-0), f(x_0+0)$均存在.

(1) $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$,

则称点x_0为函数 $f(x)$的跳跃间断点 .

（2） $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$,

或$f(x_0-0)=f(x_0+0)$但$f(x)$在点x_0无定义,

则称点x_0为函数 $f(x)$的可去间断点 .

第二类间断点： $f(x_0-0), f(x_0+0)$至少一个不存在.

振荡间断点，无穷间断点. . . .

二、连续：无穷小、大比较

无穷小　设 $f(x)$在$U^0(x_0;\delta)$内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,

则称$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

1.若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称$x\to x_0$时, f是g的高阶无穷小 ；

2.若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$,则称$x\to x_0$时, f是g的同阶无穷小 ；

3.若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称$x\to x_0$时, f是g的等价无穷小 ，

记为：$f(x)\sim g(x)\quad(x\to x_0)$

二、连续：无穷小、大比较

无穷大 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

注意：无穷大和无界量的区别.

设$f(x),g(x)$为$x\to x_0$时的无穷大，

1.若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称$x\to x_0$时,$g$是$f$的高阶无穷大；

2.若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$,则称$x\to x_0$时,$f$是$g$的同阶无穷大；

3.若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称$x\to x_0$时,$f$是$g$的等价无穷大,

记为：$f(x)\sim g(x)\quad (x\to x_0)$

等价代换定理

定理4.2 若函数$f(x),g(x),h(x)$在x_0某邻域有定义，

且$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)=a$，则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)=a$. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=a$，则

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=a$ (x_0附近$g(x)\neq 0$, $f(x)\neq 0$).

二、连续：无穷小、大比较

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时,

$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$,

$\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$,

$e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$,

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $(1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x$,

注意 正确使用： 多用于乘除慎用于加减

二、连续：一致连续

定义5.1（函数一致连续定义） 设f在I上有定义，

若对$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$,总有：

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 f在I上一致连续．

定义5.2 （函数不一致连续定义）

$\exists \varepsilon_0 > 0$,对$\forall \delta > 0, \exists x', x'' \in I$,虽然$|x' - x''| < \delta$,但

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0.$$

或$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathrm{N}^*, \exists x_n', x_n'' \in I$, 虽然$|x_n' - x_n''| < \dfrac{1}{n}$，但

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0.$$

二、连续：一致连续

定理5.1

$f(x)$在区间I上一致连续$\Leftrightarrow$

$\forall\{x_n'\},\{x_n''\}\in I$,满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,都有

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$$

用这个定理来判断不一致连续性非常便利.

f在I上不一致连续

$\Leftrightarrow$ 存在I中的数列$\{x_n'\},\{x_n''\},\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0,$

但$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))\neq 0.$

二、连续：闭区间连续函数

Cantor定理：在$[a,b]$上，$f(x)$连续 $\Leftrightarrow$ 一致连续.

在(a,b)上，$f(x)$连续且$f(a+0)$，$f(b-0)$存在 $\Leftrightarrow$ 一致连续.

有界性定理：

最值定理：

介值定理：零点定理

这些定理可否推广到无界区间？如何推？

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

二、连续：函数求极限方法

函数求极限或证明极限常用方法

1. 利用定义求极限　　2. 利用Cauchy收敛原理

3. 利用Heine定理

4. 利用极限四则运算和复合运算性质　5. 利用夹逼定理

6. 利用左右极限和函数极限的关系

常用于分段函数求分点处的极限

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　$\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$　1^∞

7. 利用两个重要极限

8. 利用等价替换

常用于$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},1^\infty$等不定型

9. 利用函数连续性　常用于初等函数和分段函数非分界点

三、微分学：导数定义

导数 $$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

记为 $f'(x_0)$或 $y'\big|_{x=x_0}$，或$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

其他形式：$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

右导数 $f_+'(x_0)$或者$f'(x_0+)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

左导数 $f_-'(x_0)$或者$f'(x_0-)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

定理1.1 $f(x)$在x_0可导$\Leftrightarrow f_-'(x_0)=f_+'(x_0)$.

导数几何意义 $f'(x_0)=k=\tan\alpha$切线斜率

三、微分学：导数运算法则

可导与连续的关系

定理1.2　若$f(x)$在点x_0处可导，则$f(x)$在点x_0处连续.

四则运算

复合函数的求导法则

定理2.2　设函数$u=g(x)$在点x可导，而函数$f(u)$在点$u=g(x)$可导，则复合函数$y=f[g(x)]$在点x可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot g'(x).$$

反函数的导数

定理2.3　如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，那么它的反函数$y=f(x)$在对应区间I_x内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

隐函数的导数

隐函数求导法则：

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

由参数方程所确定的函数的导数

在方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

$\therefore y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$ 再设函数$x=\varphi(t), y=\psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t)\neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\boxed{\frac{dt}{dx}}=\frac{dy}{dt}\cdot\boxed{\frac{1}{\frac{dx}{dt}}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

莱布尼兹公式

设函数$f(x)$和$g(x)$具有n阶导数，则

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}}$$

常用高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a\quad(a>0)\qquad(e^x)^{(n)}=e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

递推公式

(3) $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\qquad(\frac{1}{x})^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

三、微分学：中值定理

Fermat定理

Rolle中值定理

Lagrange中值定理

Cauchy中值定理

用中值定理证明：等式、不等式、求极限

注意：构造辅助函数

单调性

定理6.1 $f\in C[a,b]$,在(a,b)可导,则

$$f\text{在}[a,b]\text{上递增(减)}\Leftrightarrow f'(x)\geq 0\ (\leq 0), x\in(a,b).$$

定理6.2 $f\in C[a,b]$,在(a,b)可导,

则 $f'(x)>0(<0), x\in(a,b)\Rightarrow f$在$[a,b]$上严格递增(减).

定理6.3 $f\in C[a,b]$,在(a,b)内除有限个点外，

$f'(x)>0(<0)$,则f在$[a,b]$上严格增(减).

定理6.4 设f在$[a,b]$连续,(a,b)可导,则f在$[a,b]$为严格单调增函数

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1^\circ\ f'(x)\geq 0,\forall x\in(a,b);\\ 2^\circ\ \text{在}(a,b)\text{的任意子开区间内},f'(x)\text{不恒为零}.\end{cases}$$

(2° 可表述为: $\forall(c,d)\subset(a,b),\exists\xi\in(c,d)$,使 $f'(\xi)>0$)

极值

定理6.5（极值判定1）

$f \in C[a,b],\quad x_0 \in (a,b)$

(i) 若在 $\left.\begin{array}{l}(x_0-\delta, x_0)\text{内}, f'(x)>0 \\ (x_0, x_0+\delta)\text{内}, f'(x)<0\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$是严格极大值；

(ii) 若在 $\left.\begin{array}{l}(x_0-\delta, x_0)\text{内}, f'(x)<0 \\ (x_0, x_0+\delta)\text{内}, f'(x)>0\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)$是严格极小值.

(iii) 若在x_0两侧 f' 不变号, $f(x_0)$不是极值.

定理6.6（极值判定2） $f \in C[a,b], x_0$是驻点, $f''(x_0)$存在.

(i) 若 $f''(x_0)<0$, $f(x_0)$是严格极大；

(ii) 若 $f''(x_0)>0$, $f(x_0)$是严格极小；

(iii) 若 $f''(x_0)=0$, $f(x_0)$不定.

最值

最值 求 $f(x)$在$[a,b]$上最大最小值

步骤：

1. 求驻点和不可导点；

2. 求区间端点及驻点和不可导点的函数值，比较大小，那个大那个就是最大值，那个小那个就是最小值；

注意：如果区间内只有一个极值，则这个极值就是最值.（最大值或最小值）

三、微分学：函数凸凹

凸函数与凹函数

$y=f(x), x\in I$，如对$\forall x_1, x_2\in I, x_1\neq x_2$，
$\forall \lambda_1, \lambda_2>0, \lambda_1+\lambda_2=1.$

都有 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$，称 f在I上凸；

如 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$，称 f在I上严格凸.

等价形式：$f((1-t)x_1+t x_2)\le(1-t)f(x_1)+t f(x_2),\quad t\in(0,1).$

函数凸与凹判定

定理6.8 $f\in C[a,b]$，(a,b)内可导，则

f在$[a,b]$凸（严格凸）$\Leftrightarrow f'(x)$在(a,b)增（严格增）.

凹（严格凹）　　　　减（严格减）

推论6.9 设f在$[a,b]$连续，(a,b)二阶可导，则

f在$[a,b]$凸函数$\Leftrightarrow f''(x)\ge 0, \forall x\in(a,b).$

三、微分学：拐点

拐点 连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点.**

Jensen不等式

定理6. 7 f 在I上凸,则$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I, \lambda_1, \cdots, \lambda_n > 0, \sum_1^n \lambda_i = 1,$

都有 $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$

(严格凸，且 $x_1, \cdots, x_n$不全相等时，取 $<$)

推论 f 在I上凸,$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in I, \forall \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n > 0$

都有 $f\left(\frac{\sum \beta_i x_i}{\sum \beta_i}\right) \le \frac{\sum \beta_i f(x_i)}{\sum \beta_i}.$ $\beta_i / \sum_{k=1}^n \beta_k = \lambda_i$

(严格凸，且 $x_1, \cdots, x_n$不全相等时，取 $<$)

洛必达：$\frac{0}{0}$型

定理7.1 设 f,g在区间$(x_0,x_0+\delta)$有定义,$g(x)\neq 0$,满足

(i) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=0;$

(ii) f,g在区间$(x_0,x_0+\delta)$可导,且$g'(x)\neq 0;$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a,\quad (a$有限或无穷大).

则有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a.$

说明: $x\to x_0^-, x\to x_0, x\to\infty, x\to\pm\infty$ 也成立 .

洛必达：$\frac{\infty}{\infty}$型

定理7.3 设 f,g在 $(x_0,x_0+\delta)$内满足：

$$(i)\quad \lim_{x\to x_0^+} g(x)=\infty,$$

$$(ii)\quad f,g在(x_0,x_0+\delta)可导,且g'(x)\neq 0,$$

$$(iii)\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\quad (有限或无穷).$$

则 $$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

说明:(1) 并未要求: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$

(2) 可推广到$x\to x_0^-, x\to x_0, x\to\pm\infty, x\to\infty$

三、微分学：Taylor公式

定理1（带Peano余项的Taylor公式） 设$f(x)$在x_0处有n阶导数，则存在x_0的一个邻域，对于该邻域中的任一点x，成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中余项$r_n(x)$满足 $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$.

该公式称为$f(x)$在$x=x_0$处的**带Peano余项的Taylor公式**

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为$f(x)$的n**次Taylor多项式**,

余项$r_n(x)=o((x-x_0)^n)$称为**Peano余项**。

三、微分学：Taylor公式

定理2（带Lagrange余项的Taylor公式） 设 $f(x)$在$[a,b]$上具有n阶连续导数，且在(a,b)上有$n+1$阶导数。设$x_0\in[a,b]$为一定点，则对于任意$x\in[a,b]$，成立

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

其中

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

ξ在x和x_0之间。

三、微分学：Maclaurin公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

北京航空航天大学

2021－2022 学年第一学期期中

试卷

考试课程 工科数学分析 (I)　　任课老师________________

班级______________ 学号_______________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									
校对人									

一．单项选择题(每小题 4 分，本题 20 分)

1.若$x \to 0$时，$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=(C)$

(A)1;　　(B)2;　　(C)3;　　(D)4.

解一、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan^2 x}{kx^{k-1}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{kx^{k-1}}=-\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-3}} \quad \Rightarrow k=3$$

解二、用*Taylor*公式:

$$(\tan x)'=\sec^2 x,(\tan x)''=2\sec^2 x\tan x$$
$$(\tan x)'''=2(\sec^2 x)'\tan x+2\sec^4 x$$

$$\tan x=x+\frac{2}{3!}x^3+o(x^3) \qquad x-\tan x=-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

2.设函数$f(x)$在$x=0$连续,下列命题错误的是(D)

(A)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f(0)=0$; $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0, \therefore\ f(0)=0$

(B)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2x}$存在,则$f(0)=0$;

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0, \therefore\ f(0)=0$

(C)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则$f'(0)$存在; $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0, \therefore\ f(0)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$存在,$\therefore\ f'(0)$存在

(D)若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$, 则$f'(0)$存在.

例如$f(x)=\ln|x|, x=0$处不可导

但是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=0$

3.设$f(x)=(1-x^2)(2-x^2)(3-x^2)\cdots(2021-x^2)$,则$f'(-1)=($ C $)$

$(A)2020!$; $(B)2021!$; $(C)2(2021!)$; $(D)-2(2021!)$.

解：求$f'(x)$,再求$f'(-1)$，麻烦！

正解：注意到$(1-x^2)=(1+x)(1-x)$

$$f'(-1)=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(1-x)(2-x^2)(3-x^2)\cdots(2021-x^2)=2(2020!)$$

4.设函数$y=f(x)$由方程$e^y-xy-e=0$确定,则$\lim\limits_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=(\ B\ )$

(A)$\frac{1}{e}$;　(B)$\frac{2}{e}$;　(C)2;　(D)-2.

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0)$

解：由方程$e^y-xy-e=0$知，$x=0, y=1$　$\Rightarrow f(0)=1$

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1] = 2\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0)$$

方程$e^y-xy-e=0$两边求导得到 $e^y y'-y-xy'=0$

把$x=0, y=1$代入得到　$y'(0)=\dfrac{1}{e}=f'(0)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=\frac{2}{e}$$

5.已知函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$,则$f(x)$的可去间断点的个数为(C)

(A)1;　(B)2;　(C)3;　(D)无穷多个.

解: $\sin\pi x$的零点: $x=n\in Z$

$x-x^3=x(1+x)(1-x)$的零点$x=-1,0,1$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(1+x)(1-x)}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{(t-1)t(2-t)}{-\sin\pi t}=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)(1-x)}{\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x(1+x)(1-x)}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)(2+t)(-t)}{\sin\pi(t+1)}=\frac{2}{\pi}$$

$\therefore f(x)$的可去间为$x=-1,0,1$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

二．计算证明题(每小题5分, 本题30分)

1.设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\ (a\neq 0)$,用数列极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{a}$.

证明：因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\ (a\neq 0)$,由极限定义,

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$, $\Rightarrow |x_n|\geq\frac{1}{2}|a|>0$

对$\forall\varepsilon>0$,存在$N_1\in N^*$,当$n>N_1$时,$|x_n-a|<\dfrac{a^2}{2}\varepsilon$.

特别地,对$\varepsilon=\dfrac{|a|}{2}$,存在$N_2\in N^*$,当$n>N_2$时,$|x_n-a|<\dfrac{|a|}{2}$,

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时，从而$|x_n|>\dfrac{|a|}{2}$.

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x_n-a|}{|x_n||a|}<\frac{2}{a^2}|x_n-a|<\varepsilon.$$

由极限定义可得,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{a}$.

2.求函数$f(x)=x^2 3^x+\ln(1+2x)$在$x=0$点的n阶导数$f^{(n)}(0)$.

Leibniz公式

$$\text{解}:(x^2 3^x)^{(n)}=(3^x)^{(n)}x^2+C_n^1(3^x)^{(n-1)}(x^2)'+C_n^2(3^x)^{(n-2)}(x^2)''$$

$$=x^2 3^x(\ln 3)^n+2nx3^x(\ln 3)^{n-1}+n(n-1)3^x(\ln 3)^{n-2}$$

$[\ln(1+2x)]'=(1+2x)^{-1}\cdot 2$

$[\ln(1+2x)]''=(-1)((1+2x)^{-2}\cdot 2\cdot 2$

$[\ln(1+2x)]'''=(-1)(-2)\cdot(1+2x)^{-3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$$(\ln(1+2x))^{(n)}=\frac{2^n(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+2x)^n}$$

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 3)^{n-2}+2^n(-1)^{n-1}(n-1)!$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

3.设$y=y(x)$是由参数方程$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$所确定的函数,

求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解:$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$$ t(x)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$

4.求函数极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$ $= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\ln(1+x))-\ln x}{e^x-1}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{e^x-1}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{e^x-1}\right]}$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\dfrac{1}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{e^x-1}$ $e^x-1\sim x$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln 1+x}\dfrac{1}{(1+x)}-\dfrac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln 1+x}{x(1+x)\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln 1+x}{x}$

$=-\dfrac{1}{2}$

5.讨论$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$在区间$(1,+\infty)$的一致连续性，并给出依据.

解一、：$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$, $f(x_1)-f(x_2)$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le\left|(x_1-x_2)\sin\frac{1}{x_1}\right|+\left|x_2(\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2})\right|$$

$$\le|x_1-x_2|+x_2\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=(1+\frac{1}{x_1})|x_1-x_2|<2|x_1-x_2|$$

$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

所以对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,当$|x_1-x_2|<\delta$时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

函数$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上一致连续.

5.讨论$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$在区间$(1,+\infty)$的一致连续性，并给出依据.

解二：由于$f'(x)=(x\sin\frac{1}{x})'=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$,

可知$|f'(x)|\le 2,\ x\in(1,+\infty)$

由Lagrange中值定理知,对$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$,存在介于$x_1,x_2$之间的$\xi$,使得,$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|\le 2|x_1-x_2|$

所以对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,当$|x_1-x_2|<\delta$时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

函数$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上一致连续.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

三．证明题(本题8分)

已知$x_0=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4}(n=0,1,2,\cdots)$,叙述*Cauchy*收敛原理

并用它证明数列$\{x_n\}$收敛.

1）解：*Cauchy*收敛原理：

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是数列$\{x_n\}$是基本列。

2）证明：　(1) 用归纳法易知：$0\le x_n\le\dfrac{1}{4}, n=1,2,\cdots$

$0\le x_1=\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{4}$成立，　设$0\le x_n\le\dfrac{1}{4}$,

$$x_{n+1}=\frac{1}{4+x_n^3}\le\frac{1}{4+0}=\frac{1}{4},\qquad x_{n+1}=\frac{1}{4+x_n^3}\ge\frac{1}{4+\frac{1}{4}}=0,$$

$$\therefore\quad 0\le x_n\le\frac{1}{4}.$$

$$(2)\ \left|x_{n+1}-x_n\right| = \left|\frac{1}{4+x_n^3}-\frac{1}{4+x_{n-1}^3}\right| = \frac{\left|x_n-x_{n-1}\right|\left|x_n^2+x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2\right|}{(4+x_n^3)(4+x_{n-1}^3)}$$

$$\leq \frac{\left|x_n-x_{n-1}\right|}{4\cdot 4}3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|$$

$|x_m - x_n|$

$$\leq \frac{1}{2^2}\left|x_{n-1}-x_{n-2}\right| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right| < \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2^n},$$

$$\forall \varepsilon>0, \text{取} N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,\ \text{当} n>N \text{时},$$

$|x_m - x_n|$

$\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}|$

$+ |x_{n+1} - x_n|$

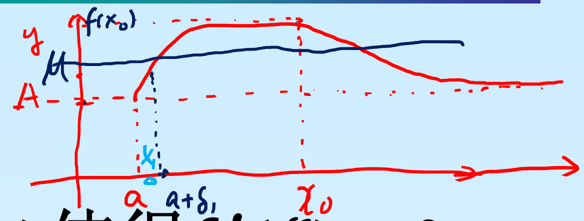
$$\left|x_{n+p}-x_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{p}(x_{n+k}-x_{n+k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{p}\left|x_{n+k}-x_{n+k-1}\right| < \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k-1}}$$

$\leq$

$$< \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

即: $\{x_n\}$是基本列.

四．证明题(本题8分)



设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导,证明若满足

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,\text{则存在}\xi\in(a,+\infty)\text{使得}f'(\xi)=0.$$

证明：若$f(x)\equiv A$,则$\forall\xi\in(a,+\infty),\ f'(\xi)=0.$

否则至少$\exists x_0\in(a,+\infty),s.t.\quad f(x_0)\neq A$,不妨设$f(x_0)>A.$

$$\text{取}\mu=\frac{f(x_0)+A}{2},\text{则}A<\mu<f(x_0).$$

$$\text{因为}\lim_{x\to a^+} f(x)=A,\text{取}\varepsilon=\frac{f(x_0)-A}{2},\text{则}\exists\delta_1>0\left(\delta_1<\frac{x_0-a}{2}\right),s.t.$$

$<\mu$

当$a<x<a+\delta_1$时,$|f(x)-A|<\varepsilon.$

$$\text{所以}f(x)<A+\varepsilon=\frac{f(x_0)+A}{2}=\mu.$$

所以取$x_1\in(a,a+\delta_1)$,则$f(x_1)<\mu.$

设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导,证明若满足

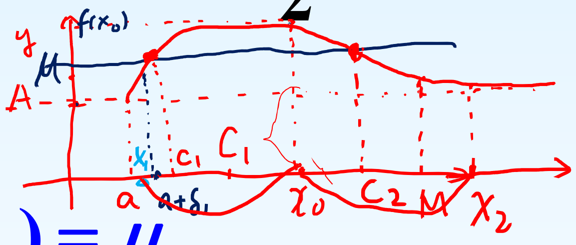
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,\text{则存在}\xi\in(a,+\infty)\text{使得}f'(\xi)=0.$$

证明：由零点存在定理，$\exists c_1\in(x_1,x_0),s.t.f(c_1)=\mu.$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$\exists M>0(M>x_0),s.t.$

当$x>M$时,$|f(x)-A|<\varepsilon.$ 所以$f(x)<A+\varepsilon=\dfrac{f(x_0)+A}{2}=\mu.$

所以取$x_2\in(M,+\infty)$,则$f(x_2)<\mu.$



由零点存在定理，$\exists c_2\in(x_0,x_2),s.t.f(c_2)=\mu.$

由罗尔中值定理，$\exists\xi\in(c_1,c_2),s.t.f'(\xi)=0.$

五. 计算证明题(本题10分)

已知$x_0=1, x_{n+1}=\arctan x_n (n=0,1,2,\cdots)$

1）证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限;2）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n$.

1)证明：　用归纳法易知：　$0<x_n<\dfrac{\pi}{2}, n=1,2,\cdots$

记$f(x)=x-\arctan x$, 则$f'(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}\geq 0$, 且只有$f'(0)=0$,

所以$f(x)$严格单增。

所以$f(x)\geq 0$, 即$x\geq \arctan x$.　所以$x_{n+1}=\arctan x_n \leq x_n$。

$\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$

又$\{x_n\}$有界，故$\{x_n\}$有极限，设为C。

$\lim\limits_{n\to\infty} n x_n^2$

两边取极限得$C=\arctan C$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}$

由前$f(x)$严格单调递增，且$f(0)=0$, 故$C=0$.

五. 计算证明题(本题10分)

已知$x_0=1, x_{n+1}=\arctan x_n (n=0,1,2,\cdots)$

1）证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限;2）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n$.

2)解:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}{1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2-x_n^2}{x_n^2x_{n-1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2-(\arctan x_{n-1})^2}{(\arctan x_{n-1})^2x_{n-1}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\arctan x)^2}{x^4}$$

2arctanx

2x(1+x²)

4x³ $\boxed{1+x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2x^3-2(\arctan x)}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+6x^2-2\frac{1}{1+x^2}}{12x^2}=\frac{2}{3}$$

所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

六．证明题(本题8分)

设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导, $f(0)=0,\ f(1)=\dfrac{1}{3}$,

证明:存在$\xi\in(0,\dfrac{1}{2}),\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$,使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

$f'(\xi)-\xi^2=\eta^2-f'(\eta)$

证明：设$F(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}$,则由题设及拉格朗日中值定理得

$\left[f(x)-\frac{1}{3}x^3\right]'_{\xi} = -\left[\frac{1}{3}x^3-f(x)\right]'_{\eta}$

$F'(\xi) = -F'(\eta)$

$F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$

$F'(x)=f'(x)-x^2$

$$F(\frac{1}{2})-\underbrace{F(0)}_{=0}=\frac{1}{2}F'(\xi),\xi\in(0,\frac{1}{2})$$

$$\underbrace{F(1)}_{=0}-F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}F'(\eta),\eta\in(\frac{1}{2},1)$$

$\Rightarrow F'(\xi)=-F'(\eta)$

所以$F(1)-F(0)=0=\dfrac{1}{2}F'(\xi)+\dfrac{1}{2}F'(\eta)$.

也即$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

七．计算题(本题8分)

已知函数$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$，试求该函数的单调区间、极值点与极值、凹凸区间与拐点.

$x\neq-1$ $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

解：$f'(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^3}$, $f''(x)=\dfrac{2-4x}{(x+1)^4}$

令$f'(x)=0$得$x_1=0$, 令$f''(x)=0$得$x_1=\dfrac{1}{2}$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+$
$f'(x)$	+	不	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	不	+	+	+	0	-
$f(x)$	增、凸		减、凸	极小 0	增、凸	拐点$(\frac{1}{2},\frac{1}{9})$	增、

七．计算题(本题8分)

已知函数$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$，试求该函数的单调区间、极值点与极值、凹凸区间与拐点.

解：所以，$f(x)$在$(-1,0]$单减，在$(-\infty,-1)$与$[0,+\infty)$上单增，在$x=0$取极小值$f(0)=0$.

$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,0]$及$[0,\dfrac{1}{2}]$上凸，在$[\dfrac{1}{2},+\infty)$上凹，

$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{9})$为拐点.

八.证明题(本题8分)

设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数,$|f(x)|\le 1$,$|f''(x)|\le 1$,

证明:当$x\in[a,b]$时,$|f'(x)|\le \dfrac{2}{b-a}+\dfrac{b-a}{2}$.

证明:$\forall x\in[a,b]$, $\underline{f(t)}=\underline{f(x)}+\underline{f'(x)(t-x)}+\underline{\dfrac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2}$.

$$\text{所以} f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2,$$

$$f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2,$$

当$x\ne a,b$时,

$$f(a)-f(b)=f'(x)(a-b)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2,$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2(a-b)}(a-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2(a-b)}(b-x)^2,$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2(a-b)}(a-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2(a-b)}(b-x)^2,$$

$$\therefore |f'(x)|\le\frac{|f(a)-f(b)|}{b-a}+\frac{|f''(\xi_1)|}{2(b-a)}(a-x)^2+\frac{|f''(\xi_2)|}{2(b-a)}(b-x)^2$$

$$\le\frac{2}{b-a}+\frac{1}{2(b-a)}[(a-x)^2+(b-x)^2]$$

$$\le\frac{2}{b-a}+\frac{1}{2(b-a)}[(a-x)^2+(b-x)^2]_{\max}\le\frac{2}{b-a}+\frac{b-a}{2}.$$

当$x=b$时， $f(a)-f(b)=f'(b)(a-b)+\dfrac{f''(\xi_3)}{2}(a-b)^2,$

所以$|f'(b)|\le\dfrac{1}{b-a}|f(a)-f(b)|+\dfrac{|f''(\xi_3)|}{2}(b-a)\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{b-a}{2}$。

类似地，$|f'(a)|\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{b-a}{2}$。