一、 计算题（20 分）

1. 设区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，求$\iint\limits_D \dfrac{1+xy^2}{1+x^2+y^2}dxdy.$

解：$\iint\limits_D \dfrac{1+xy^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ (由对称性)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln 2d\theta=\pi\ln 2.$$

2. 设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，求$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz.$

解法 1：$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz$ (或利用对称性)

● $=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr$

(令$r=\sin t$)$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^2 tdt=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-1)\cos^2 td\cos t$

$$=2\int_0^{2\pi}\frac{3\cos^5 t-5\cos^3 t}{15}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=2\int_0^{2\pi}\frac{2}{15}d\theta=\frac{8\pi}{15}.$$

解法 2：

$$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin^3\varphi dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\varphi}{5}d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\varphi-1}{5}d\cos\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\varphi-3\cos\varphi}{15}\Big|_0^{\pi}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{4}{15}d\theta=\frac{8\pi}{15},$$

解法 3：

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz \quad (\text{或利用对称性})$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr \quad \boldsymbol{\sqrt{1-r^2}=t}$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\cdot t\cdot(-\frac{t}{r})dt=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-t^2)\cdot t^2dt$$

$$=\frac{8}{15}\pi.$$

3. 计算$\int_L(2+x^2y)\mathrm{d}s$，其中$L$为单位圆周$x^2+y^2=1$的右半部分.

解：由对称性可得，

$$\int_L(2+x^2y)ds=\int_L 2ds=2\pi.$$

二， 计算题（15 分）

1. 求函数$f(x,y)=x^2-2xy+3y^2-2x+2y$的极值.

解：

$$\begin{cases} f_x=2x-2y-2=0, \\ f_y=-2x+6y+2=0, \end{cases}$$ 解得驻点为(1,0)

$A=f_{xx}(1,0)=2, B=f_{xy}(1,0)=-2, C=f_{yy}(1,0)=6,$

$AC-B^2=8>0, A>0,$ 故(1,0)为极小值点，$f(1,0)=-1.$

2. 设函数$f(x)=1-x^2\ (0\le x\le \pi),$

(1) 将函数$f(x)$展成余弦级数；(2) 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

解：（1）将函数偶延拓，延拓后的函数为连续函数

$$b_n=0, a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=\frac{6-2\pi^2}{3},$$

$$n\ge 1\text{时}, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx$$

$$=\frac{2}{\pi}(1-x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2x}{n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx$$

$$=-\frac{4x\cos nx}{n^2\pi}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx$$

. $$=\frac{4\cdot(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

$$\therefore f(x)=\frac{3-\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx, 0\le x\le \pi,$$ li

（2）由（1）可知： $1=f(0)=\frac{3-\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, 故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$

三、（12 分）

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \quad\quad x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论：（1）$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性；

(2) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性;(3) $f(x,y)$在$(0,0)$点的可微性.

解： $(1)\because \left|\dfrac{2x^3y}{x^4+y^2}\right|\leq|x|,\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0),$

即函数在$(0, 0)$点连续.

(2) $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，可计算得

$$f_x(x,y)=\frac{6x^2y(x^4+y^2)-2x^3y\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2}=\frac{6x^2y^3-2x^6y}{(x^4+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{2x^3(x^4+y^2)-2x^3y\cdot 2y}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2x^7-2x^3y^2}{(x^4+y^2)^2},$$

又因为 $\lim\limits_{\substack{y=x^2\\x\to 0}} f_x(x,y)=\lim\limits_{\substack{y=x^2\\x\to 0}}\dfrac{6x^8-2x^8}{(x^4+x^4)^2}=1\neq f_x(0,0),$

$$\lim_{\substack{y=2x^2\\x\to 0}} f_y(x,y)=\lim_{\substack{y=2x^2\\x\to 0}}\frac{2x^7-2x^3 4x^4}{(5x^4)^2}=\infty\neq f_y(0,0),$$

所以$f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的不连续.

(3) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^3y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

沿路径$y=x^2$,上述极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+x^2}}$不存在,

因此函数在$(0, 0)$处不可微。

四、证明题（10 分）

证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(0,2\pi)$ 内可导.

证明： $\forall 0<\delta<\pi$，考虑区间 $[\delta,2\pi-\delta]\subset(0,2\pi)$，

$$\left(\frac{\sin nx}{n^2}\right)'=\frac{\cos nx}{n}\text{为}[\delta,2\pi-\delta]\text{上的连续函数，}$$

$$\because\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\left|\sin\frac{\delta}{2}\right|},\quad n=1,2,\cdots$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 的部分和序列在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致有界，

又 $\because\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调且一致收敛于0，

$\therefore$ 由 *Dirichlet* 判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

又 $\because\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, 故由 *Weirstrass* 判别法知，$\exists x_0\in[\delta,2\pi-\delta]$,

使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx_0}{n^2}$ 收敛.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx_0}{n^2}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上可导, 由 δ 的任意性,此级数在 $(0,2\pi)$ 上可导.

五、（用 Green 公式计算 12 分）

已知L是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点$(2,0)$，再沿$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的曲线，计算曲线积分$I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y.$

解： 补充从点(0,2)到(0,0)的直线段 C， L 和 C 所围成的平面区域记为 D， 由$Green$公式，

$$\int_{L+C}3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\iint_D dxdy=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore I=\frac{\pi}{2}-\int_C 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\frac{\pi}{2}-\int_2^0(-2y)dy=\frac{\pi}{2}-4.$$

六、（计算题 17 分）

设曲面Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，

（1）利用Gauss公式计算$\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

（2）求$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{2}(x^2y+xy+x^2z)\mathrm{d}S.$

解：（1） 补充曲面Σ_1：$x^2+y^2\le 4, z=0$，方向指向下侧

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}xydydz+xdzdx+x^2dxdy=\iiint_{上半球}ydxdydz=0(由对称性)$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy&=-\iint_{\Sigma_1}xydydz+xdzdx+x^2dxdy\\&=-\iint_{\Sigma_1}x^2dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 4}x^2dxdy\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3\cos^2\theta dr\\&=4\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=4\pi\end{aligned}$$

(2) Σ的单位法向量为$(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

原积分$=\iint_{\Sigma}xy\cos\alpha dS+x\cos\beta dS+x^2\cos\gamma dS$

$=\iint_{\Sigma}xydydz+xdxdz+x^2dxdy=4\pi.$

七、（计算题　17 分）

(1) 利用Stokes公式 计算$\oint_{\Gamma}(y+x^2)\mathrm{d}x+(z+y^2)\mathrm{d}y+(2x+z^2)\,\mathrm{d}z$,其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 与柱面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$的交线，从 z 轴正向看向原点时Γ为顺时针方向.

(2) 求曲线积分 $\int_{L}\ x\mathrm{d}x-y^2\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$，其中$L$为曲线$\Gamma$从 $(2,0,-1)$ 到 $(-2,0,3)$ 的一段.

解：（1） 令平面Σ为$x+y+z=1$在柱面内的部分，方向指向下侧.

$$Stokes\text{公式}\Rightarrow\text{原积分}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+x^2 & z+y^2 & 2x+z^2 \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}-dydz-2dzdx-dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}-4dxdy=4\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1}dxdy=24\pi.$$

另解 令平面Σ为$x+y+z=1$在柱面内的部分，方向指向下侧.

$$Stokes\text{公式}\Rightarrow\text{原积分}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+x^2 & z+y^2 & 2x+z^2 \end{vmatrix}dS=\iint_{\Sigma}\frac{4\sqrt{3}}{3}dS,$$

$$=4\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1}dxdy=24\pi.$$

(2)　令$P=x,Q=-y^2,R=-z^2$,

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=0\therefore$ 积分与路径无关,

积分计算方法 1：

$xdx-y^2dy-z^2dz$的原函数为$u(x,y,z)=\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{z^3}{3}+C,$

故此积分=$u(-2,0,3)-u(2,0,-1)=-\frac{28}{3}.$

积分计算方法 2：

取路径$(2,0,-1)\to(-2,0,-1)\to(-2,0,3)$

原积分 $=\int_{2}^{-2}xdx-\int_{-1}^{3}z^2dz=-\frac{28}{3}.$