北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

§2　二重积分的计算(2)

二重积分的变量代换

定积分换元：

被积函数变简单,易于求出原函数;

积分区间经换元后仍为积分区间.

二重积分换元：

被积函数简化；

积分域简化. $\longrightarrow$ 优先

定理2.6 设$f(x,y)$在有界闭区域 D上可积, 若变换 $T: x=x(u,v), y=y(u,v)$ 将 uv平面上按段光滑封闭曲线所围的区域 Δ (1) 一对一的映成 xy平面上的闭区域 D, 函数 $x=x(u,v), y=y(u,v)$在 Δ 内分别具有(2) 一阶连续偏导数,且

(3) $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,\ (u,v)\in\Delta$

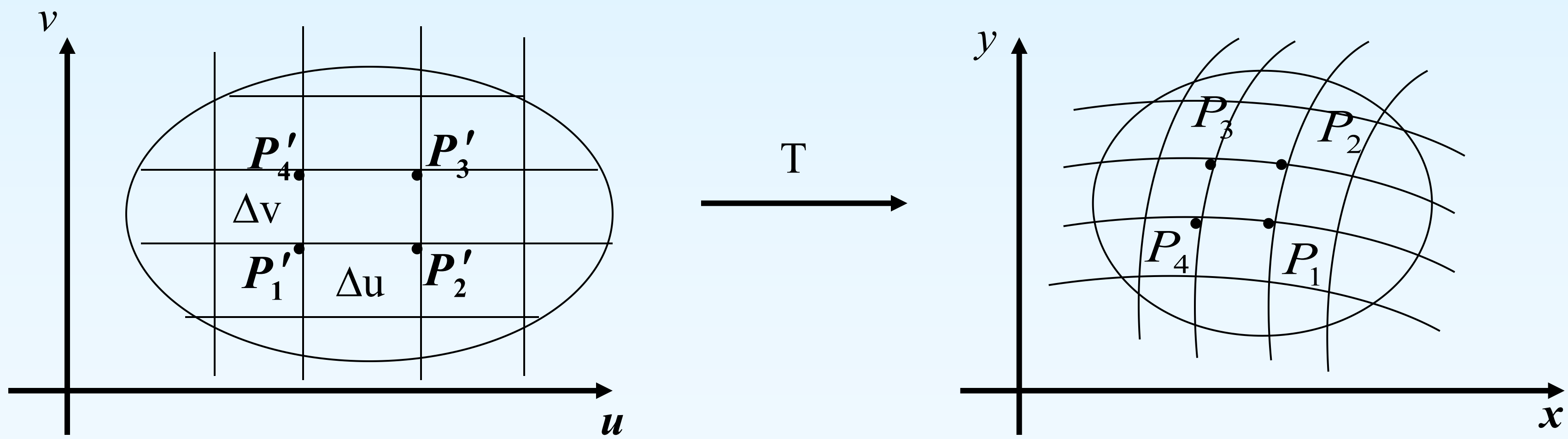
则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv$$

定理的直观分析

首先两边二重积分都存在

1）分割*uv*所在区域(特殊分法)



$$\begin{array}{l} P_1'(u,v) \\ P_2'(u+\Delta u,v) \\ P_3'(u+\Delta u,v+\Delta v) \\ P_4'(u,v+\Delta v) \end{array} \xrightarrow{\ T\ } \begin{array}{l} P_1(x_1,y_1) \\ P_2(x_2,y_2) \\ P_3(x_3,y_3) \\ P_4(x_4,y_4) \end{array}$$

2） 考虑xoy平面上内任一小区域$\Delta\sigma_k$

$$\Delta\sigma_k \approx s_\Diamond = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_4}\right\|$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$= [x(u+\Delta u, v) - x(u,v)]\vec{i} + [y(u+\Delta u, v) - y(u,v)]\vec{j}$$

$$\approx x_u\Delta u\vec{i} + y_u\Delta u\vec{j}$$

类似地 $\overrightarrow{P_1P_4} \approx x_v\Delta v\vec{i} + y_v\Delta v\vec{j}$

$$\Delta\sigma_k \approx \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_4}\right\| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u\Delta u & y_u\Delta u & 0 \\ x_v\Delta v & y_v\Delta v & 0 \end{matrix}\right\| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$$

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \quad 或 \quad d\sigma = |J| d\sigma'$$

面积变化率 $J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

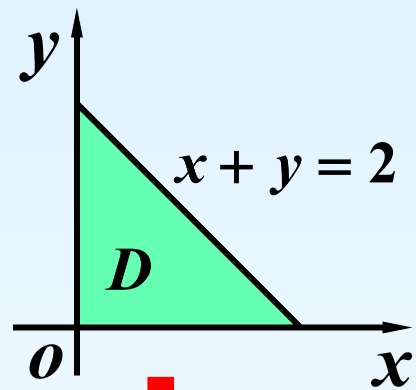
$$\sum f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \approx \sum f(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|\,dudv$$

若$J = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 在Δ内个别点上或在一条曲线

上为零而在其他点上不为零公式仍成立

例10 计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$，其中 D 由 x 轴、y轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.



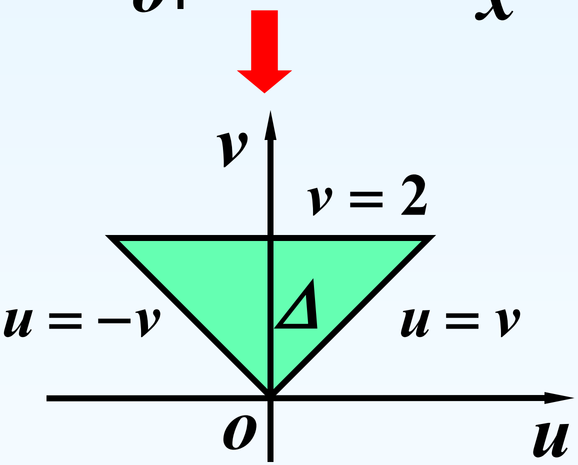
解 令 $u=y-x,\quad v=y+x,$

则 $\quad x=\dfrac{v-u}{2},\quad y=\dfrac{v+u}{2}.$

$D\to\varDelta$, 即 $\quad x=0\to u=v;$

$y=0\to u=-v;$

$x+y=2\to v=2.$



$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

故 $$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy=\iint_\Delta e^{\frac{u}{v}}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}du$$

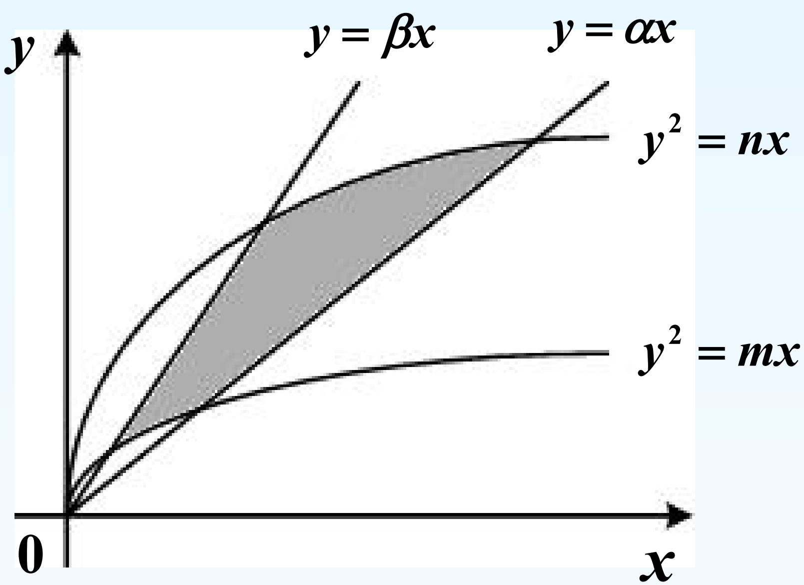
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(e-e^{-1})vdv=e-e^{-1}.$$

例11 求抛物线 $y^2 = mx, y^2 = nx$, 和直线 $y = \alpha x$, $y = \beta x$ 所围成的区域 D 的面积 $\mu(D)$.

$(0 < m < n,\ 0 < \alpha < \beta)$

解 D 的面积

$$\mu(D) = \iint_D dxdy$$



做变换 $u = \dfrac{y^2}{x}, v = \dfrac{y}{x}$,

即 $x = \dfrac{u}{v^2}, y = \dfrac{u}{v}$.

D 对应 uv 平面上的矩形区域 $\varDelta = [m, n] \times [\alpha, \beta]$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{v^2} & -\frac{2u}{v^3}\\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2}\end{vmatrix}=\frac{u}{v^4}>0,\ (u,v)\in\Delta.$$

所以

$$\mu(D)=\iint_D dxdy=\iint_\Delta \frac{u}{v^4}dudv$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{dv}{v^4}\int_m^n udu=\frac{(n^2-m^2)(\beta^3-\alpha^3)}{6\alpha^3\beta^3}.$$

极坐标系下二重积分的计算

当$f(x,y)$中含有x^2+y^2项，或者D的边界

表达式中有x^2+y^2项时，通常利用极坐标 变换

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

将积分化为极坐标下的二重积分，然后化为

关于r和θ的累次积分去求解 .

定理2.7 设$f(x,y)$在有界闭区域 D上可积，在极坐标变换

$$T: x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$$

$$(r,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]$$

下，xy坐标平面上区域 D与$r\theta$平面上的区域Δ相对应，则

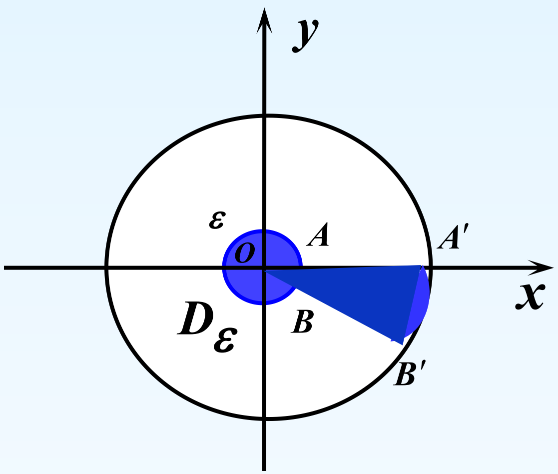
$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

$$\iint_D f(x,y)\underline{dxdy}=\iint_\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)\underline{rdrd\theta}$$

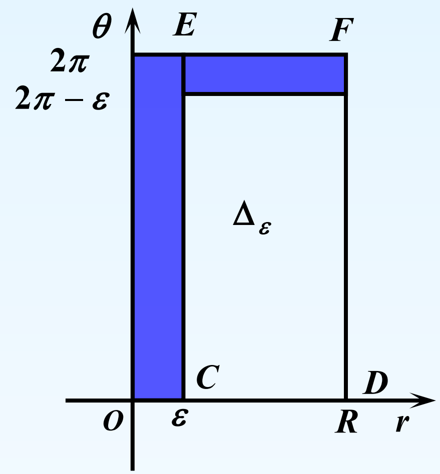
(1)$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$圆形区域

T将$r\theta$平面上的矩形区域$\Delta:[0,R]\times[0,2\pi]$

变换成D,但这个变换不是一一映射.



(a)

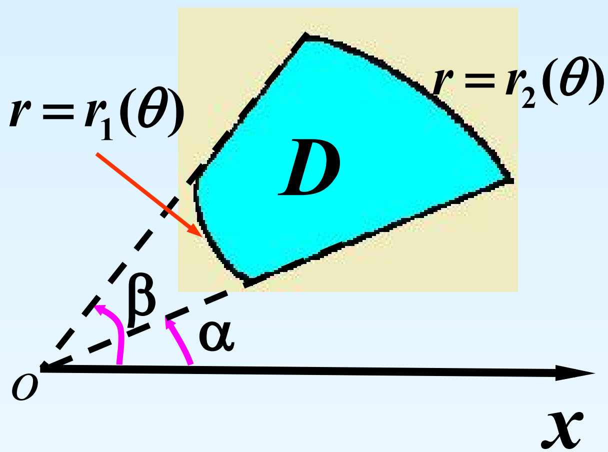


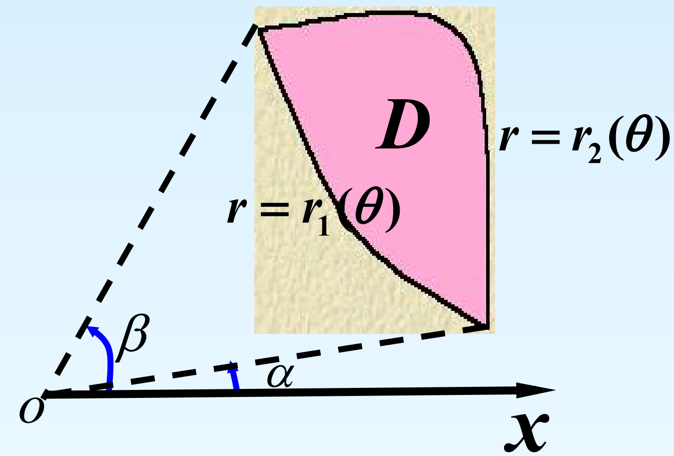
(b)

(2)D为一般区域,则可取圆形区域包含D

如何化为累次积分?

(i)





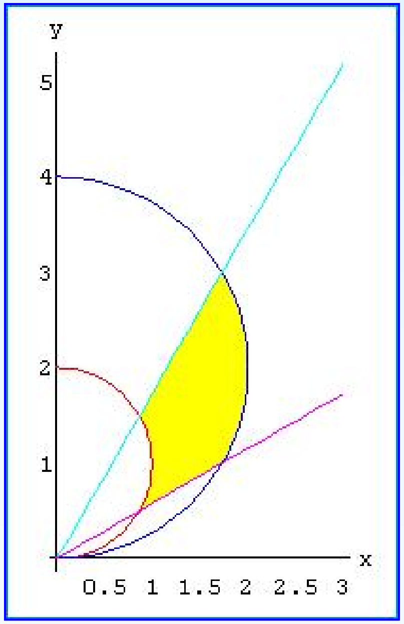
特点：$o \notin D, \theta =$ 常数与 D 的边界至多交于两点.

Δ可表示成：$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta.$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

例 12 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$，$y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

解



$$y-\sqrt{3}x=0 \Rightarrow \theta_2=\frac{\pi}{3}$$

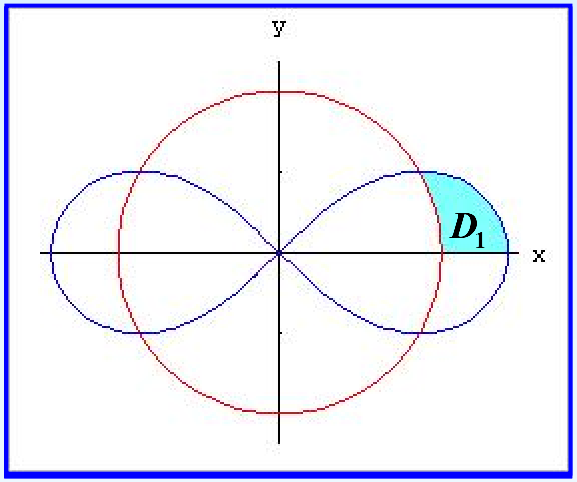
$$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$$

$$x-\sqrt{3}y=0 \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}$$

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r dr=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right).$$

例 13 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\ge a^2$ 所围成的图形的面积.



解 根据对称性有 $D=4D_1$

在极坐标系下

$$x^2+y^2=a^2 \Rightarrow r=a,$$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2) \Rightarrow r=a\sqrt{2\cos 2\theta},$$

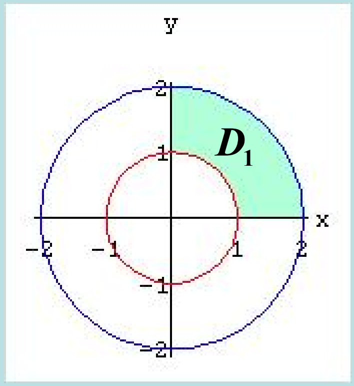
由 $\begin{cases} r=a\sqrt{2\cos 2\theta} \\ r=a \end{cases}$, 得交点 $A=(a,\frac{\pi}{6})$,

$$\iint_D dxdy=4\iint_{D_1} dxdy=4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr=a^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}).$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例 14 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$,

其中积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.



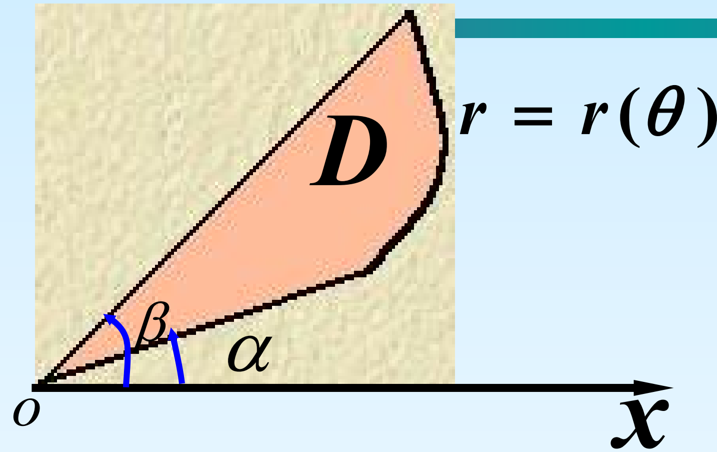
解 由对称性，可只考虑第一象限部分，

注意：被积函数也要有对称性.

$$\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 4\iint\limits_{D_1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\sin\pi r}{r}rdr=-4.$$

(ii)



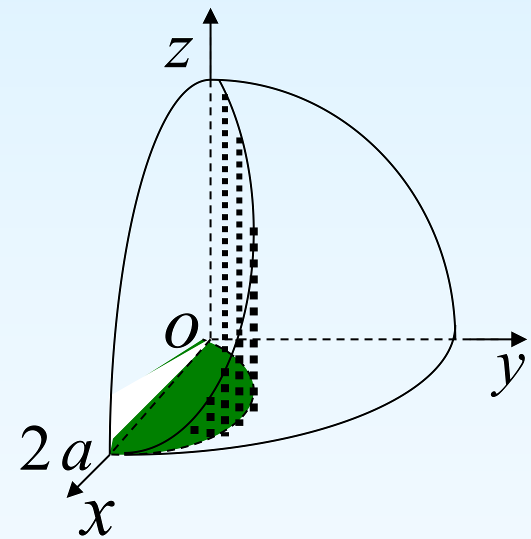
特点： 原点 o 在 D 的边界上

Δ可表示成： $0 \le r \le r(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta.$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

例15 求球体$x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解 设 $D: x^2+y \le 2ax$



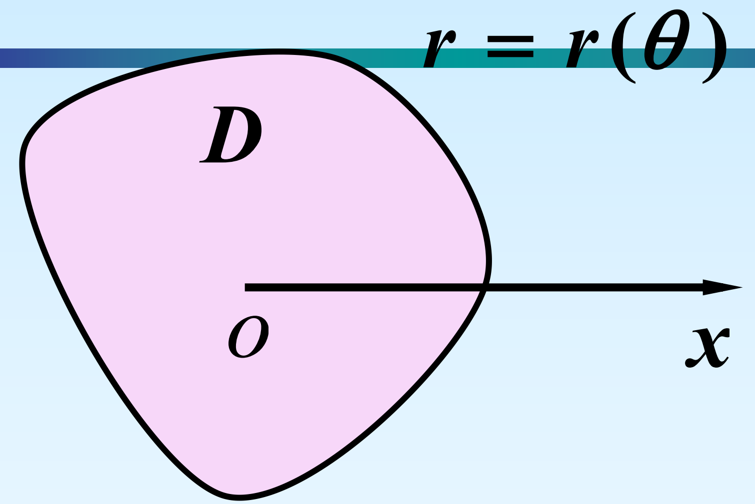
由对称性可知

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

(iii)



特点： 原点 o 为 D 的内点

Δ可表示成： $0 \le r \le r(\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi.$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

例16 计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: x^2+y^2\le a^2$.

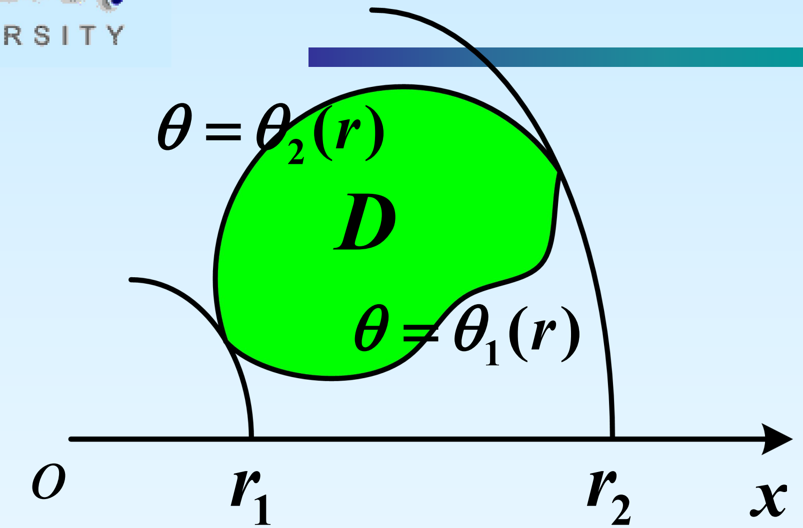
解 在极坐标系下 $D:\begin{cases}0\le r\le a\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$, 故

原式 $=\iint_D e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a re^{-r^2}\,\mathrm{d}r$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$$

由于e^{-x^2}的原函数不是初等函数，故本题无法用直角坐标计算.

(*iv*)



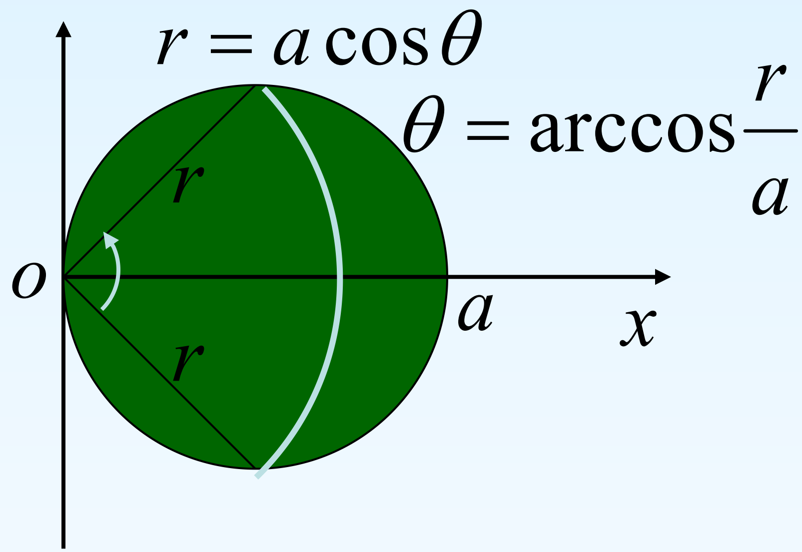
特点： $r=$常数与D的边界至多交于两点 .

Δ可表示成： $\theta_1(r)\le\theta\le\theta_2(r),\ r_1\le r\le r_2.$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{r_1}^{r_2} rdr\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta.$$

例17 交换积分顺序 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\,\mathrm{d}r \quad (a>0)$

提示: 积分域如图



$$I=\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

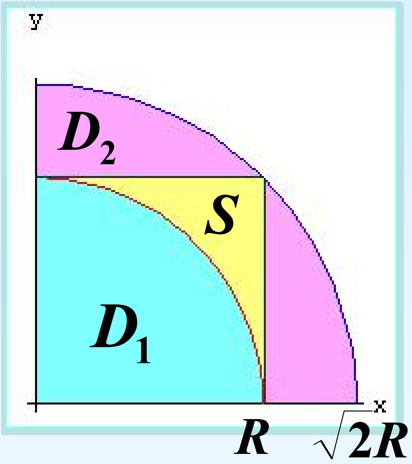
例18 求广义积分$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$

解 在第一象限内，设

$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 2R^2\}$$

$$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le R, 0 \le y \le R\}$$



显然有 $D_1 \subset S \subset D_2$

$\because \quad e^{-x^2-y^2} > 0,$

$$\therefore \quad \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \iint_{S} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

又$\because \; I = \iint\limits_{S} e^{-x^2-y^2} dxdy$

$$= \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2;$$

由例16 $I_1 = \iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2} dxdy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2});$$

同理$I_2 = \iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2});$

$$\because I_1 < I < I_2,$$

$$\therefore \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2});$$

当$R \to \infty$时，$I_1 \to \dfrac{\pi}{4}$， $I_2 \to \dfrac{\pi}{4}$，

故当$R \to \infty$时，$I \to \dfrac{\pi}{4}$， 即$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$，

所求广义积分$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

广义极坐标变换

$$T:\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \end{cases}$$

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$J(r,\theta) = abr.$$

注 与极坐标变换不同，θ表示离心角.

例19 计算 $\iint\limits_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}dxdy$, 其中 D 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的闭区域.

解 作广义极坐标变换 $\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \end{cases}$

其中 $a > 0,\quad b > 0,\quad r \geq 0,\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

在此变换下 $D \to D' = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$,

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = abr.$$

J 在 D' 内仅当 $r = 0$ 处为零，故换元公式仍成立，

$$\therefore \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, abr\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi ab.$$

例20 试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 V.

解 取 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2c\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

令 $x=ar\cos\theta$, $y=br\sin\theta$,

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=abr$$

$$\therefore \quad V = 2c\iint_D \sqrt{1-r^2}\, abr\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

$$= 2abc\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc$$

小结

二重积分的变量代换

极坐标系下二重积分的计算

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \quad J(r,\theta) = r$$

广义极坐标变换

$$T:\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \quad J(r,\theta) = abr$$