一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1. 设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2z\}$,则下列累次积分中与重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ **相等**的个数为（ D ）.

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z$;　　(2) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r\cos\varphi+1)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$;

(3) $\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2z-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}(r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$.

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

2. 曲面Σ为椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$，方向取外侧, Σ_1 为上半椭球面,方向取上侧,则（ A ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　B. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1} z\,\mathrm{d}S$;

C. $\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_1} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　D. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

3. 设$u(x,y,z)$为连续函数, Σ是以$M(x_0,y_0,z_0)$为中心,半径为 R 的球面，则极限

$\lim\limits_{R\to 0^+}\dfrac{1}{2\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 为（ D ）.

A. $u(0,0,0)$;　　B. $u(x_0,y_0,z_0)$;　　C. $2u(0,0,0)$;　　D. $2u(x_0,y_0,z_0)$.

4. 设区域$D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2\le 1, x+y\le 2, y\ge 0\}$, 则$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与下列哪些**不相等**（ B ）.

(1) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

A. (1) (2);　　B. (3) (4);　　C. (1) (4);　　D. (2) (3).

5. 设$I=\iint\limits_{D}(\sin x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}\sigma$, $I_1=\iint\limits_{D_1} y\cos x\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是以(1, 1),

(–1, 1), (–1, –1)为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 I 与 I_1 之间的关系为 (　B　).

A. $I = I_1$;　　B. $I = 2I_1$;　　C. $I = 3I_1$;　　D. $I = 4I_1$.

二、计算题(每小题 5 分，共 30 分)

1. 求向量场 $\vec{F}(x,y,z)=(z^2+xy, x^2+yz, y^2+xz)$ 在点(1, 1, 2)处的散度和旋度.

解：散度 $\operatorname{div}\vec{F}\Big|_{(1,1,2)}=\nabla\cdot\vec{F}\Big|_{(1,1,1)}=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\Big|_{(1,1,2)}=(y+z+x)\Big|_{(1,1,2)}=4.$ ----3 分

旋度

$$\operatorname{rot}\vec{F}\Big|_{(1,1,2)}=\nabla\times\vec{F}\Big|_{(1,1,2)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^2+xy & x^2+yz & y^2+xz\end{vmatrix}_{(1,1,2)}=(y,z,x)\Big|_{(1,1,2)}=(1,2,1).$$

-----3 分

2. 计算球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 含在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 中的那部分球冠的表面积.

解：联立两曲面方程求得两曲面的交线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=\sqrt{2}\end{cases}$,

故所求球冠在 xOy 面上的投影区域为 D： $x^2+y^2\le 2$,　-----2 分

因此所求球冠 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ ($x^2+y^2\le 2$)的表面积为：

$$S=\iint_D\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ -----2 分

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,\mathrm{d}r=2\pi\cdot(-2\sqrt{4-r^2})\Big|_0^{\sqrt{2}}=(8-4\sqrt{2})\pi.$$ -----2 分

3. 计算三重积分 $I=\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $x=y^2+z^2$ 及平面 $x=1$ 所围成的封闭区域.

解：法 1：作柱坐标代换 $\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta, \\ z = r\sin\theta \end{cases}$ $(0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, r^2 \le x \le 1)$-----3 分

则 $I = \iiint\limits_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_{r^2}^1 x^2 \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \frac{1}{3}\int_0^1 r(1-r^6)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}.$ -----3 分

法 2：用截面法：区域向 x 轴投影得 $0 \le x \le 1,$ -----2 分

过$(x, 0, 0)$作平行于 yOz 面的平面截区域的截面 D_x 方程为：$y^2 + z^2 \le x$，-----2 分

从而 $I = \iiint\limits_{\Omega} x^2 \, \mathrm{d}V = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \iint\limits_{D_x} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 x^2 \cdot \pi x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$ -----3 分

4. 求 $I = \int_\Gamma (x^2 + z^2) \, \mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为圆周：$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

解：由于曲线关于平面 $y = x, y = z, x = z$ 都对称，根据轮换对称性,

$$\int_\Gamma x^2 \mathrm{d}s = \int_\Gamma y^2 \mathrm{d}s = \int_\Gamma z^2 \mathrm{d}s, \qquad \text{----- 2 分}$$

从而 $I = \int_\Gamma (x^2 + z^2) \, \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\int_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}s$ ----- 2 分

$$= \frac{2}{3}\int_\Gamma 9 \, \mathrm{d}s = 6 \cdot 6\pi = 36\pi. \qquad \text{----- 2 分}$$

5. 计算力场 $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$ 对质点从点 $A\,(2, 0, 0)$ 沿曲线 $\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t \end{cases}$

(从 z 轴正向看向原点为逆时针方向) 移动到点 $B\,(2, 0, 2\pi)$ 所做的功.

解：$W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_\Gamma y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$ ----- 2 分

$$= \int_0^{2\pi} [2\sin t(-2\sin t) - 2\cos t(2\cos t) + t] \, \mathrm{d}t \quad \text{----- 2 分}$$

$$= \int_0^{2\pi} (t - 4) \, \mathrm{d}t = 2\pi^2 - 8\pi. \quad \text{----- 2 分}$$

三、（10 分）

将长为 2 米的铁丝分成三段,分别围成正方形，圆和等腰直角三角形，应该如何分割才能使三个图形的面积之和最小.

解:

设正方形边长为 x, 圆的半径为 y, 等腰直角三角形的直角边为 z, 则

$$4x+2\pi y+(2+\sqrt{2})z=2$$

三个图形的面积和为 $f(x,y,z)=x^2+\pi y^2+\frac{1}{2}z^2$

设 Lagrange 函数为 $L(x,y,z,\lambda)=x^2+\pi y^2+\frac{1}{2}z^2+\lambda(4x+2\pi y+(2+\sqrt{2})z-2)$

$$\begin{cases} L_x=2x+4\lambda=0 \\ L_y=2\pi y+2\pi\lambda=0 \\ L_z=z+(2+\sqrt{2})\lambda=0 \\ L_\lambda=4x+2\pi y+(2+\sqrt{2})z-2=0 \end{cases}$$

解得驻点为 $x=\dfrac{2}{7+2\sqrt{2}+\pi},y=\dfrac{1}{7+2\sqrt{2}+\pi},z=\dfrac{2+\sqrt{2}}{7+2\sqrt{2}+\pi}$,

根据实际意义可知，面积的最小值存在，故驻点即最小值点，将铁丝分成三段的长度分别为

$$\frac{8}{7+2\sqrt{2}+\pi},\frac{2\pi}{7+2\sqrt{2}+\pi},\frac{6+4\sqrt{2}}{7+2\sqrt{2}+\pi}$$

四、（10 分）（利用 Green 公式）

计算曲线积分 $I=\int_L \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$, 其中 $L:(x-1)^2+y^2=4$, 方向为 逆时针.

解：补充 $L_1:x^2+y^2=a^2$, 方向逆时针, $a>0$ 足够小, 使得 L_1 在 L 内部

记两曲线所包围的区域为 D, 则

$$\int_{L-L_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y=\iint_D \frac{2xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}dxdy(\text{利用Green公式})=0(\text{利用对称性奇偶性})$$

$$I=\int_{L_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\int_{L_1}x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\le a^2}0dxdy(\text{利用Green公式})=0$$

五、（10 分）（利用 Gauss 公式）

设 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，计算

$$\iint_S x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dxd\,z+z(z-2x+z^2)dxdy\cdot$$

解：取$\sum$: $z=0,\quad (x^2+y^2\le a^2)$ 下侧. 利用高斯公式，得

$$\iint_S x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dzdx+z(z-2x+z^2)dxdy$$

$$+\iint_\Sigma x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dzdx+z(z-2x+z^2)dxdy$$

$$=\iiint_\Omega (2x-2y+3x^2+2y-2z+3y^2+2z-2x+3z^2)dxdydz$$

其中Ω为 S，Σ 所围区域

$$=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=\frac{6\pi}{5}a^5$$

又 $\because$ $\iint_\Sigma x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dxdz+z(z-2x+z^2)dxdy=0$

$\therefore$ $\iint_S x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dxdz+z(z-2x+z^2)dxdy=\frac{6\pi}{5}a^5$

六、（10 分）（利用 Stokes 公式）

设$C:\begin{cases}z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\\ x^2+y^2=Rx\end{cases}$ $(R>0)$, 从 z 轴正向看向原点, C 为逆时针方向,计算

$$\oint_c y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z.$$

解 1:

设球面上由曲线C围成的部分曲面为Σ，则单位法向量为 $\vec{\boldsymbol{n}}=\{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{R}},\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{R}},\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{R}}\}$，

由 stokes 公式并利用对称性得

$$\oint_c y^2dx+z^2dy+x^2dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}dS$$

$$=-\frac{2}{R}\iint_\Sigma\left(zx+xy+zy\right)dS=-\frac{2}{R}\iint_\Sigma zx\,dS=-2\iint_{D_{xy}}xdxdy\ =-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\rho^2\cos\theta d\rho=-\frac{\pi}{4}R^3$$

解 2：

设球面上由曲线C围成的部分曲面为Σ，方向指向上侧，则

由 stokes 公式：

$$\oint_c y^2dx+z^2dy+x^2dz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}=-\iint_\Sigma\left(zdydz+xdzdx+ydxdy\right)$$

$$=-\iint_{\Sigma}\left(z\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+x\cdot\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+y\right)dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left(x+\frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+y\right)dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}x\,dxdy=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\rho^2\cos\theta d\rho$$

$$=-\frac{\pi}{4}R^3$$

七、（10 分）

(1)证明积分$\int_L\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$与路径无关,其中$L$是上半空间$\{(x,y,z)\mid z>0\}$内连接两点$A$和$B$的一条曲线;

(2)求$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在上半空间内的原函数.

解：（1）由于$P=\frac{x}{r},Q=\frac{y}{r},R=\frac{z}{r},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则

$P_y=Q_x=-\frac{xy}{r^3},Q_z=R_y=-\frac{zy}{r^3},R_x=P_z=-\frac{xz}{r^3}$,故积分与路径无关

（2）选择平行于坐标轴的折线作为积分路线

$(0,0,1)\to(x,0,1)\to(x,y,1)\to(x,y,z)$,可得原函数.

$$F(x,y,z)=\int_{(0,0,1)}^{(x,y,z)}\frac{\mathrm{udu}+v\mathrm{dv}+w\mathrm{dw}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}=\int_0^x\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\mathrm{du}+\int_0^y\frac{v}{\sqrt{x^2+1+v^2}}\mathrm{d}v+\int_1^z\frac{\mathrm{wdw}}{\sqrt{x^2+y^2+w^2}}$$

$$=\sqrt{u^2+1}\,\Big|_0^x+\sqrt{x^2+1+v^2}\,\Big|_0^y+\sqrt{x^2+y^2+w^2}\,\Big|_0^z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1$$

（还可以通过解微分方程组或观察法得到原函数$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）