北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑　佳

数学科学学院

10.2 一阶微分方程求解

1. 可分离变量的微分方程

2. 齐次方程

3. 可化为齐次的方程

4. 一阶线性微分方程

5. 伯努利方程

一、可分离变量的微分方程

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \boxed{(1)} \quad \text{可分离变量的微分方程}$$

例如 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}dy = 2x^2 dx.$

分析: 设函数 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是连续的， $y = \varphi(x)$

是方程 (1) 的解，则

$$g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(x)dx$$

一、可分离变量的微分方程

两端积分

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(x)dx$$

利用 $y=\varphi(x)$ 作代换，引入变量 y，则

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

设 $G(y)$ 和 $F(x)$ 是依次为 $g(y)$ 和 $f(x)$ 的原函数

于是 $$G(y) = F(x) + C \qquad (2)$$

说明: 方程(1)的解满足关系式(2).

一、可分离变量的微分方程

反之

如果 $y=\varphi(x)$ 是由关系式(2)确定的隐函数，

由隐函数求导法可知，当 $g(y)\neq 0$ 时，

$$\varphi'(x)=\frac{F'(x)}{G'(y)}=\frac{f(x)}{g(y)}$$

表明 $y=\varphi(x)$ 满足方程(1)，所以 $y=\varphi(x)$

是方程(1)的解.

一、可分离变量的微分方程

解法　　$f(x), g(y)$ 连续，$g(y) \neq 0.$

在上面的假设条件下，通过两端积分

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

得到关系式

$$G(y) = F(x) + C$$

就是方程(1)的隐式解.　　隐式通解

一、可分离变量的微分方程

例1 求解微分方程 $\dfrac{dy}{y} = 2xdx$ 的通解

解 分离变量 $\dfrac{dy}{y} = 2xdx,$

两端积分 $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx,$

$$\ln|y| = x^2 + C_1$$

$\therefore\ y = Ce^{x^2}$ 为所求通解.

一、可分离变量的微分方程

例 2 衰变问题:衰变速度与未衰变原子含量M成正比,已知$M\big|_{t=0}=M_0$,求衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t变化的规律.

解 衰变速度 $\dfrac{dM}{dt}$, 由题设条件

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M \quad (\lambda>0 \quad 衰变系数) \qquad \frac{dM}{M}=-\lambda dt$$

$$\int\frac{dM}{M}=\int-\lambda dt,\quad \ln M=-\lambda t+\ln C,\ 即\ M=Ce^{-\lambda t},$$

代入 $M\big|_{t=0}=M_0$ 得 $M_0=Ce^0=C$,

$$\therefore M=M_0e^{-\lambda t}$$

衰变规律

一、可分离变量的微分方程

例3 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有 0.1% 的 CO_2, 为了降低车间内空气中CO_2的含量, 用一台风量为每分2000立方米的鼓风机通入含 0.03% 的CO_2的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内 CO_2 的百分比降低到多少?

解 设鼓风机开动后t 时刻 CO_2的含量为$x(t)\%$

在 $[t, t+dt]$ 内,

CO_2的通入量 $= 2000 \cdot dt \cdot 0.03,$

CO_2的排出量 $= 2000 \cdot dt \cdot x(t),$

一、可分离变量的微分方程

CO_2的改变量 = CO_2的通入量 − CO_2的排出量

$$12000dx = 2000 \cdot dt \cdot 0.03 - 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(x - 0.03), \quad \Rightarrow x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t},$$

$$\because x|_{t=0} = 0.1, \quad \therefore C = 0.07, \quad \Rightarrow x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$$

$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

6分钟后，车间内 CO_2 的百分比降低到 0.056%.

一、可分离变量的微分方程

思考题

求解微分方程 $$\frac{dy}{dx}+\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}.$$

一、可分离变量的微分方程

思考题解答

$$\frac{dy}{dx}+\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}+2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0, \qquad \int\frac{dy}{2\sin\frac{y}{2}}=-\int\sin\frac{x}{2}dx,$$

$$\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=2\cos\frac{x}{2}+C,$$ 为所求解.

二、齐次方程

1.定义 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次方程.

2. 解法 作变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$， 即 $y=xu$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}, \quad dy=udx+xdu,$$

代入原式 $u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$,

即 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}$.

可分离变量的方程

二、齐次方程

分离变量，积分得 $\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|C_1 x|$,

即 $x = Ce^{\varphi(u)}$, $\left(\varphi(u) = \int \frac{du}{f(u)-u}\right)$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入，得通解 $x = Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$.

二、齐次方程

例1 求解微分方程

$$(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$$

解 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $dy = xdu + udx$,

$$(x - ux\cos u)dx + x\cos u(udx + xdu) = 0,$$

$$\cos u du = -\frac{dx}{x}, \quad \sin u = -\ln|x| + C,$$

微分方程的解为 $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C.$

三、可化为齐次的方程

1. 定义 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ 的微分方程

当 $c=c_1=0$ 时，为齐次方程．否则为非齐次方程．

2. 解法 令 $x=X+h,$ （其中 h 和 k 是待定的常数）

$y=Y+k,$ $\boxed{dx=dX,\quad dy=dY}$

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX+bY+\underline{ah+bk+c}}{a_1X+b_1Y+\underline{a_1h+b_1k+c_1}}\right)$$

三、可化为齐次的方程

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \end{cases}$$

(1) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ 有唯一一组解.

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1 X + b_1 Y}\right)$$ 得通解代回 $\begin{cases} X = x - h, \\ Y = y - k, \end{cases}$

(2) $\Delta = 0,$ 未必有解, 上述方法不能用.

当 $b_1 = 0$ 时, a_1与 b 中必至少有一个为零.

三、可化为齐次的方程

若 $b=0$, 可分离变量的微分方程.

若 $b\neq 0, a_1=0$, 令 $z=ax+by$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)$,

$\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)=f(\dfrac{z+c}{c_1})$ 可分离变量的微分方程.

当 $b_1\neq 0$ 时, 令 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$,

方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1})$, 令 $z=ax+by$,

则 $\dfrac{dz}{dx}=a+b\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)=f(\dfrac{z+c}{\lambda z+c_1})$. 可分离变量.

三、可化为齐次的方程

例2 求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 $\because \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0,$

方程组 $\begin{cases}h-k+1=0\\ h+k-3=0,\end{cases}\Rightarrow h=1,k=2,$

令 $x=X+1,y=Y+2.$ 代入原方程得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y},$$ 令 $u=\dfrac{Y}{X},$

三、可化为齐次的方程

方程变为 $u + X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{1-u}{1+u}$， 分离变量法得

$$X^2(u^2+2u-1)=c, \text{ 即 } Y^2+2XY-X^2=C,$$

将 $X=x-1, Y=y-2$ 代回，

得原方程的通解

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C,$$

或 $x^2+2xy-y^2+2x+6y=C_1.$

三、可化为齐次的方程

小结

齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x}).$

齐次方程的解法 令 $u=\dfrac{y}{x}.$

可化为齐次方程的方程 令 $\begin{aligned} x&=X+h, \\ y&=Y+k. \end{aligned}$

直接使用变量代换简化计算

三、可化为齐次的方程

思考题

方程 $\int_0^x \left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]dt = xy(x)$

可否化为齐次方程?

三、可化为齐次的方程

思考题解答

方程两边同时对 x 求导:

$$2y+\sqrt{x^2+y^2}=y+xy',$$

$$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y, \qquad y'=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x},$$

原方程是齐次方程.

四、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

例如 $\frac{dy}{dx}=y+x^2$, $\frac{dx}{dt}=x\sin t+t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

当 $Q(x)\equiv 0$, 上方程称为齐次的.

当 $Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

四、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的解法

1. 线性齐次方程 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx, \qquad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln C_1,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

四、一阶线性微分方程

2. 线性非齐次方程 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$$

讨论 $$\because \frac{dy}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]dx,$$

两边积分 $$\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx,$$

设 $\int\frac{Q(x)}{y}dx$ 为 $u(x)$ $\therefore \ln|y|=u(x)-\int P(x)dx,$

即 $y=\boxed{e^{u(x)}}e^{-\int P(x)dx}.$ 非齐次方程通解形式

与齐次方程通解相比： $C\Rightarrow u(x)$

四、一阶线性微分方程

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

实质: 未知函数的变量代换.

新未知函数 $u(x) \Rightarrow$ 原未知函数 $y(x)$

作变换 $$y = \underline{u(x)}e^{-\int P(x)dx}$$

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx},$$

四、一阶线性微分方程

将 y 和 y' 代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$,

积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$,

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

四、一阶线性微分方程

例1 求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解

解 $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right)$$

$$= e^{-\ln x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int \sin x dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(-\cos x + C\right).$$

五、伯努利方程

Jacob Bernoulli
（ 1654 –1705）

许多数学成果与雅各布的名字相联系

悬链线问题（1690年），
曲率半径公式（1694年），
“伯努利双纽线”（1694年），
“伯努利微分方程”（1695年），
“等周问题”（1700年）等。

五、伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\lambda} \qquad (\lambda \neq 0,1)$$

当 $\lambda=0,1$ 时， 方程为线性微分方程.

当 $\lambda \neq 0,1$ 时，方程为非线性微分方程.

解法：需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以 y^{λ}，得 $y^{-\lambda}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\lambda}=Q(x)$,

五、伯努利方程

令 $z = y^{1-\lambda}$，$\quad \dfrac{dz}{dx} = (1-\lambda)y^{-\lambda}\dfrac{dy}{dx}$,

代入上式 $\quad \dfrac{dz}{dx} + (1-\lambda)P(x)z = (1-\lambda)Q(x)$,

求出通解后，将 $z = y^{1-\lambda}$ 代入即得

$$y^{1-\lambda} = z$$

$$= e^{-\int (1-\lambda)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-\lambda)e^{\int (1-\lambda)P(x)dx}dx + C\right).$$

五、伯努利方程

例 1　求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解　两端除以 $y^{\frac{1}{2}}$，得 $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x^2,$

令 $z=\sqrt{y},\quad 2\frac{dz}{dx}-\frac{4}{x}z=x^2,$

解得 $z=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right),$　即　$y=x^4\left(\frac{x}{2}+C\right)^2.$

五、伯努利方程

例2 用适当的变量代换解下列微分方程:

1. $2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$;

解 令 $z = y^2$, 则 $\dfrac{dz}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$,

$$\therefore \frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}, \quad z = e^{-\int 2xdx}\left[\int xe^{-x^2} e^{\int 2xdx} dx + C\right]$$

所求通解为 $y^2 = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right).$

五、伯努利方程

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$;

解 令 $z=xy$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=y+x\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得 $2z-\sin 2z=4x+C$,

将 $z=xy$ 代回

所求通解为 $2xy-\sin(2xy)=4x+C.$

五、伯努利方程

3. 求 $\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$ 的通解.

解　令 $x+y=u$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ 代入原方程

$\dfrac{du}{dx}=1+u^2$ 解得 $\arctan u = x + C$,

代回 $u=x+y$ 得, $\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$.

思考题

求微分方程 $y' = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$ 的通解.

五、伯努利方程

思考题解答

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\cos y\sin 2y-x\sin y}{\cos y}=\sin 2y-x\tan y,$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dy}+(\tan y)\cdot x=\sin 2y,$$

$$x=e^{\ln|\cos y|}\left[\int \sin 2y\cdot e^{-\ln|\cos y|}dy+C\right]$$

$$=\cos y\left[\int \frac{2\sin y\cos y}{\cos y}dy+C\right]=\cos y\left[C-2\cos y\right].$$

作业

习题10.1： 1(2, 3)，2(2)，3(4)，5(3)，6(1, 4)

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院