第五章 元定理、理论与判定问题

北京航空航天大学

《离散数学》课程组2022-7

主要内容

- 元定理
- 理论与模型
- 判定问题

元定理

- 逻辑系统：
  - 推论$\Gamma \vDash Q$
  - 演绎$\Gamma \vdash Q$

- 可靠性
- 完全性
- 一致性
- 独立性

协调性

- **定义5.2.2** 如果对于任意公式$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{Q}$，则$\boldsymbol{\Gamma}$称不协调，否则称Γ协调。

- **定理5.2.6** 若$\boldsymbol{\Gamma} \vdash \neg \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{Q}$，则$\boldsymbol{\Gamma}$不协调。

- **定理5.2.7** 若$\boldsymbol{\Gamma}$协调，则$\boldsymbol{\Gamma}$可满足。

协调性

- **定理5.2.6** 若$\Gamma \vdash \neg Q \wedge Q$，则$\Gamma$不协调。
- 证明：下面我们证明对任意合式公式R，$\Gamma \vdash R$
  - $A_1 = \neg Q \wedge Q$ $\quad \Gamma \vdash \neg Q \wedge Q$
  - $A_2 = \neg(\neg Q \to \neg Q)$ $\quad P \wedge Q \equiv \neg(P \to \neg Q)$
  - $A_3 = \neg(\neg Q \to \neg Q) \to (\neg R \to \neg(\neg Q \to \neg Q))$ $\quad \mathscr{A}_1$
  - $A_4 = \neg R \to \neg(\neg Q \to \neg Q)$ $\quad A_3 = A_2 \to A_4$
  - $A_5 = (\neg R \to \neg(\neg Q \to \neg Q)) \to ((\neg Q \to \neg Q) \to R)$ $\quad \mathscr{A}_3$
  - $A_6 = (\neg Q \to \neg Q) \to R$ $\quad A_5 = A_4 \to A_6$
  - $A_7 = \neg Q \to \neg Q$ $\quad \vdash Q \to Q$
  - $A_8 = R$ $\quad A_6 = A_7 \to A_8$
  - 因此， Γ不协调

可靠性定理(1)—公理1～3

- **定理5.2.2** 如果$\Gamma \vdash Q$，则$\Gamma \vDash Q$。
- 证明：

(1) $n = 1$时，若Q_i是公理，则Q_i是永真式。

- 公理模式$\mathscr{A}_1$
  - $\sigma(Q \to (R \to Q))$
  - $\sigma(Q) \to (\sigma(R) \to \sigma(Q))$
  - 如果$\sigma(Q) = 1$，则$\sigma(Q) \to (\sigma(R) \to \sigma(Q)) = 1$
  - 如果$\sigma(Q) = 0$，则$\sigma(Q) \to (\sigma(R) \to \sigma(Q)) = 1$
- 公理模式$\mathscr{A}_2$
  - $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - 同理$\sigma((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))) = 1$
- 公理模式$\mathscr{A}_3$
  - $(\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$
  - 同理$\sigma((\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)) = 1$

可靠性定理(2)—公理4

- 设$\boldsymbol{Q_i}$是**公理模式**$\mathscr{A}_4$的实例$\forall x Q(x) \to Q(x)[x/d]$
  - 任取解释$\boldsymbol{I}$和赋值$\boldsymbol{\sigma}$
  - 若$\boldsymbol{\sigma}(\forall x Q(x)) = 0$，则$\boldsymbol{\sigma}(\forall x Q(x) \to Q(x)[x/d]) = 1$
  - 若$\boldsymbol{\sigma}(\forall x Q(x)) = 1$，则对于每个$d \in D$，$\boldsymbol{\sigma}(Q(x)[x/d]) = 1$
  - 所以$\boldsymbol{\sigma}(Q(x)[x/d]) = 1$
  - 这表明$\boldsymbol{Q_i}$是永真式，即$\boldsymbol{\Gamma} \vDash \boldsymbol{Q_i}$

可靠性定理(3)—公理5

- 设Q_i是公理模式$\mathscr{A}_5$的实例$\forall x(Q \to R(x)) \to (Q \to \forall xR(x))$，其中$x$不是公式$Q$的自由变元
  - 若$\sigma(\forall x(Q \to R(x))) = 0$，
    则$\sigma(\forall x\big(Q \to R(x)\big) \to (Q \to \forall xR(x))) = 1$
  - 若$\sigma(\forall x(Q \to R(x))\,) = 1$，且$\sigma(Q) = 0$，
    则$\sigma(Q \to \forall xR(x)) = 1$，
    所以$\sigma(\forall x(Q \to R(x)) \to (Q \to \forall xR(x))) = 1$
  - 若$\sigma(\forall x(Q \to R(x))\,) = 1$，且$\sigma(Q) = 1$，
    则对于任意$d \in D$，$\sigma(Q{\to}R(x)[x/d]) = 1$。
    因为$\sigma(Q) = 1$，所以$\sigma(R(x)[x/d]) = 1$。
    从而$\sigma(\forall xR(x)) = 1$，即$\sigma((Q \to \forall xR(x))) = 1$，
    因此有$\sigma(\forall x(Q \to R) \to (Q \to \forall xR(x))) = 1$

可靠性定理(4)—MP规则

- 若$\boldsymbol{Q_i \in \Gamma}$，则$\boldsymbol{\Gamma \vdash Q_i}$，
  - 对于$\boldsymbol{\sigma(\Gamma) = 1}$，$\boldsymbol{Q_i \in \Gamma}$有$\boldsymbol{\sigma(Q_i) = 1}$，
  - 所以$\boldsymbol{\Gamma \vDash Q_i}$

(2) 假设$\boldsymbol{m < n}$时，定理成立。

- 证明$\boldsymbol{m = n}$时，
  - 设$\boldsymbol{Q_i}$由$\boldsymbol{Q_j}$，$\boldsymbol{Q_k}$用MP规则推出，其中$\boldsymbol{j, k < i}$，
  - $\boldsymbol{Q_j}$

    $\boldsymbol{Q_k = Q_j \to Q_i}$。
  - 由归纳假设知，$\boldsymbol{\Gamma \vdash Q_j}$且$\boldsymbol{\Gamma \vdash Q_j \to Q_i}$，

    所以$\boldsymbol{\Gamma \vDash Q_j}$，$\boldsymbol{\Gamma \vDash Q_j \to Q_i}$，$\boldsymbol{\Gamma \vDash Q_i}$。
  - 因此$\boldsymbol{\Gamma \vDash Q}$
- 即$\boldsymbol{\Gamma \vDash Q}$

可靠性定理(5)—UG规则

- 证明$i = n$时，
  - 设Q_i由Q_k用UG规则推出，其中$k < i$，
  - Q_k
  - $Q_i = \forall x Q_k$
  - 由归纳假设知，$\Gamma \vdash Q_k$，所以$\Gamma \vDash Q_k$。
  - 因为$Q_i = \forall x Q_k$，对于任意$d \in D$，$Q_k(x)[x/d] = 1$，所以，$\sigma(\forall x Q_k) = 1$
  - 因此$\Gamma \vDash Q_n$
- 即$\Gamma \vDash Q$。

完全性定理

- **定理5.2.3** 若$\Gamma \vDash Q$，则$\Gamma \vdash Q$。
- 证明：
  - 若真值指派σ满足Γ，则它必满足Q，即不可满足$\neg Q$，
  - 所以$\Gamma \cup \{\neg Q\}$不可满足。
  - 因此，$\Gamma \cup \{\neg Q\}$不协调。
  - 所以有$\Gamma \cup \{\neg Q\} \vdash Q$。
  - 由演绎定理有$\Gamma \vdash \neg Q \to Q$。
  - 由$\vdash (\neg Q \to Q) \to Q$，因此，$\Gamma \vdash Q$

完全性定理—谓词

- **定理5.2.3** 若$\Gamma \vDash Q$，则$\Gamma \vdash Q$
- 证明：
  - 设R是Q的闭包。
  - 若解释I满足Γ，必然满足R，即不满足$\neg R$，
  - 所以$\Gamma \cup \{\neg R\}$不可满足，$\Gamma \cup \{\neg R\}$不协调，
  - $\Gamma \cup \{\neg R\} \vdash R$ 。
  - 由演绎定理知，$\Gamma \vdash \neg R \rightarrow R$，
  - 因为$\vdash (\neg R \rightarrow R) \rightarrow R$，故$\Gamma \vdash R$，
  - 因此，$\Gamma \vdash Q$。

一致性

- **定义5.2.3** 关于公理系统的一致性，有几种定义：

  (1) **一致性的古典定义**：一公理系统是一致的，当且仅当，不存在任何公式Q，Q和非Q都在该系统里可证

  (2) **一致性的语义定义**：一公理系统是一致的，当且仅当，一切在该系统里可证的公式都是真的

  (3) **一致性的语法定义**：一公理系统是一致的，当且仅当，并非任一公式都在该系统里可证

- 命题演算的一致性
  - 是在古典的意义下一致的：对任一公式Q，Q和非Q不能都是命题演算定理
  - 是语义一致的：命题演算的定理都是重言式
  - 是语法一致的，并非任一公式都是命题演算的定理

- 一致性在公理系统内不可证

独立性

- **定义5.2.4** 一公式集合M是独立的，如果M中的任一公式Q都不能根据给定的推演规则从M中其他公式推演出来。
- 命题逻辑公理与谓词逻辑公理都是独立的
- 弗雷格公理系统不是独立的
  - $Q \to (R \to Q)$
  - $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$
  - $(\mathrm{Q} \to \mathrm{R}) \to (\neg \mathrm{R} \to \neg \mathrm{Q})$
  - $\neg\neg Q \to Q$
  - $Q \to \neg\neg Q$

带等词的一阶公理系统

- $t = t$
- $t_{11} = t_{21} \wedge \ldots \wedge t_{1n} = t_{2n} \rightarrow f(t_{11}, \ldots, t_{1n}) = f(t_{21}, \ldots, t_{2n})$
- $t_{11} = t_{21} \wedge \ldots \wedge t_{1n} = t_{2n} \rightarrow R(t_{11}, \ldots, t_{1n}) = R(t_{21}, \ldots, t_{2n})$

- 可靠性定理
  - 若$\Gamma \vdash Q$，则$\Gamma \vDash Q$
- 完全性定理
  - 若$\Gamma \vDash Q$，则$\Gamma \vdash Q$