北京航空航天大学

2022－2023 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2023 年 06 月 15 日

一、 选择题（每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设$D: x^2+y^2 \le ay\ (a>0)$, $f(x,y)$是D上的连续函数, $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ($ $\qquad)$.

(A) $\int_0^a \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}\theta$ (B) $\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^a \mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}\theta$ (D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

2. 设 $c = 8xi + 2yj - z\vec{k}$，数量场$h(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$，则$div(hc) = ($ $\qquad)$.

(A) $\dfrac{8x^2+2y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ (B) $\dfrac{8x^2+2y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} + 9\ln(x^2+y^2+z^2)$

(C) $\dfrac{16x^2+4y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2}$ (D) $\dfrac{16x^2+4y^2-2z^2}{x^2+y^2+z^2} + 9\ln(x^2+y^2+z^2)$

3.设曲线积分 $\int_L xf(y)\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 f 具有一阶连续的导数,且 $f(0)=0$,则$\int_{(0,0)}^{(1,2)} xf(y)\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y = ($ $\qquad)$.

(A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

4.已知球面$x^2+y^2+z^2=1$，Σ是上半球面，Σ_1是Σ位于第一卦限的部分，则（ ）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$ (B) $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$ (D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S$

5. 设Σ为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧，则以下结论**错误**的是（ ）.

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$ (B) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$ (D) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$

二、 计算题（每小题 6 分，满分 30 分）

1. 设定义在全空间R^3上的数量值函数$f(x,y,z)$具有二阶连续偏导数, 求$rot(grad\ f)$.

2. 计算$\iint\limits_{D}(x^2+y^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是由直线$y=x, y=2x$和$y=2$所围成的有界闭区域.

3. 计算$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$: $\pi^2\le x^2+y^2+z^2\le 4\pi^2$.

4. 计算$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$是曲线$\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}, 0\le\theta\le\pi$，常数$a>0$.

5. 计算$\iint\limits_{\Sigma}\left[4x^2+5y^2-\sin(xz^2)\right]\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$.

三、（10 分）

计算第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[g(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2g(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[g(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$g(x,y,z)$为连续函数，Σ为平面$x-2y+3z=4$在第四卦限部分的上侧.

四、（10 分）(利用 Green 公式)

计算曲线积分$I=\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$,其中$L:x^2+y^2=2$,顺时针方向.

五、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$,其中$r=\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$,

Σ为长方体$V=\{(x,y,z):|x|\le 1,|y|\le 3,|z|\le 3\}$的表面,并取外侧.

六 、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算曲线积分$\oint_{\Gamma}(2e^{x}+y^{2}-z^{2})\mathrm{d}x+(y^{2}+z^{2}-x^{2})\mathrm{d}y+(x^{2}-y^{2}+4\ln z^{2})\mathrm{d}z$,

其中Γ是平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$截立方体$:0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$的表面所得截痕,

从x轴的正向看向原点时取逆时针方向.

七、（**10 分**）设φ,ψ有连续导数,曲线积分

$$I=\int_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\psi(y)-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y$$ 与路径无关,

(1)当$\varphi(0)=0,\psi(0)=1$时,求$\varphi(y),\psi(y)$;

(2)设 L 是从 $O(0,0)$到 $N(\pi,\dfrac{\pi}{2})$的分段光滑曲线,计算 I .