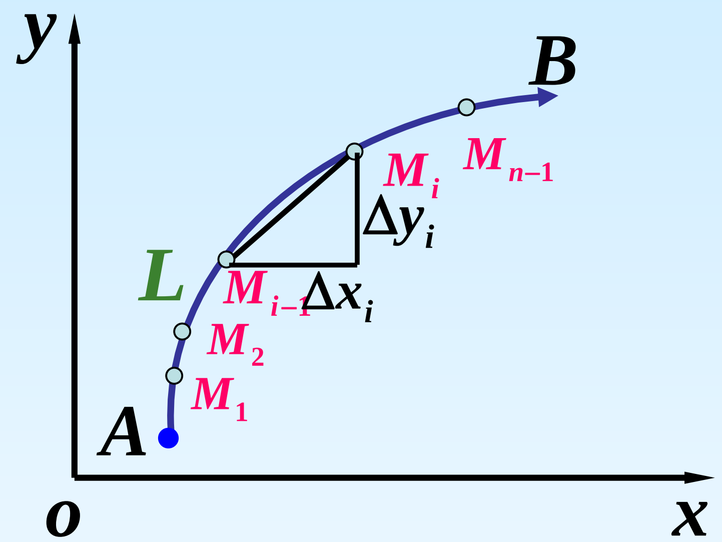
§17.2 第二型曲线积分

一、问题的提出



实例：　变力沿曲线作功

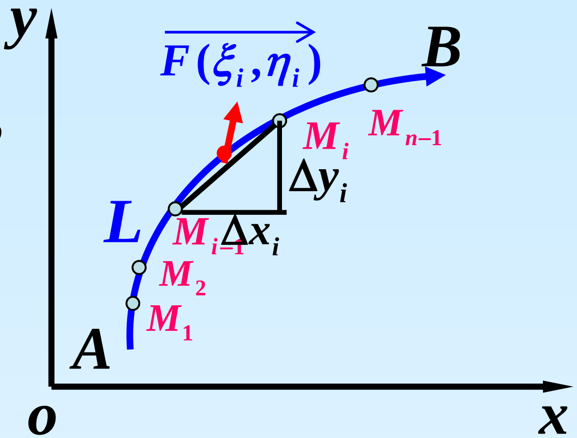
$L: A \to B$ 有向可求长曲线，

常力　　$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$

变力　　$\overrightarrow{F(x,y)} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

分割 $A = M_0, M_1(x_1, y_1), \cdots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), M_n = B.$

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\vec{i} + (\Delta y_i)\vec{j}.$$



取 $\overrightarrow{F(\xi_i,\eta_i)} = P(\xi_i,\eta_i)\vec{i} + Q(\xi_i,\eta_i)\vec{j}$,

近似 $\Delta W_i \approx \overrightarrow{F(\xi_i,\eta_i)} \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$,

即 $\Delta W_i \approx P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$.

求和 $W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i].$$

近似值

取极限 $W = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta y_i].$

精确值

二、第二型曲线积分的概念

1. 定义

设L为平面内从点A到点B的一条有向可求长的曲线弧，函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$定义在L上，对L的任一分割T，它把L分成n个有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中$M_0=A$，$M_n=B$.

记各小曲线段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$的弧长为$\Delta s_i$，

分割T的细度$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta s_i$.

设分点M_i的坐标为(x_i, y_i),

并记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $(i = 1,2,\cdots,n)$,

任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在, 且与分割T及(ξ_i, η_i)的取法无关, 称此极限为函数$P(x, y)$,$Q(x, y)$沿有向曲线L上的第二型曲线积分. 记为:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \text{ 或 } \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

也写成 $\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy$

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i \qquad \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

$P(x,y)$在有向曲线L上对坐标x的曲线积分

$Q(x,y)$在有向曲线L上对坐标y的曲线积分

常简记为: $\int_L Pdx + Qdy$ 或 $\int_{AB} Pdx + Qdy.$

如L是封闭的有向曲线,则记为$\oint_L Pdx + Qdy.$

若记 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}, d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, 则又可写成

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{或} \quad \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

于是,力$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$沿有向曲线$L$所作的功为:

$$W = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2. 存在条件

当$P(x,y)$, $Q(x,y)$在有向光滑曲线弧 L上连续时,

第二类曲线积分存在 .

3. 推广

空间有向曲线弧 Γ, $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$.

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_{\Gamma} Q(x,y,z)dy = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_{\Gamma} R(x,y,z)dz = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

4. 性质

(1) 若$\int_L P_i dx + Q_i dy \ (i = 1,2,\cdots,k)$存在, 则

$$\int_L (\sum_{i=1}^{k} c_i P_i)dx + (\sum_{i=1}^{k} c_i Q_i)dy$$ 也存在, 且

$$\int_L (\sum_{i=1}^{k} c_i P_i)dx + (\sum_{i=1}^{k} c_i Q_i)dy =$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i (\int_L P_i dx + Q_i dy),$$

其中$c_i (i = 1,2,\cdots,k)$为常数.

(2) 若有向曲线L由有向曲线L_i首尾相接而成,且 $\int_{L_i} Pdx + Qdy\ (i = 1,2,\cdots,k,)$都存在,则$\int_L Pdx + Qdy$ 也存在，且

$$\int_L Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} Pdx + Qdy\ .$$

(3) 设$-L$是与L方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} Pdx + Qdy = -\int_L Pdx + Qdy.$$

即第二型曲线积分与曲线的方向有关.

三、第二型曲线积分的计算

定理 设平面曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,

且当参数t单调地由α变到β时, 点$M(x,y)$从L的起点A沿L运动到终点B, $\varphi(t),\psi(t)$在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数,再设$P(x,y),Q(x,y)$在L上连续, 则第二型曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$存在,且

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

特殊情形

(1) $L: y = y(x)$　　x起点为a，终点为b.

则 $\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx.$

(2) $L: x = x(y)$　　y起点为c，终点为d.

则 $\int_L Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\}dy.$

(3) 推广 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$ t起点α,终点β.

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

四、两类曲线积分之间的联系

设有向平面曲线弧为 L： $\begin{cases} x=\varphi(s) \\ y=\psi(s) \end{cases}$, $0\le s\le l.$

弧长增长方向为L的方向.

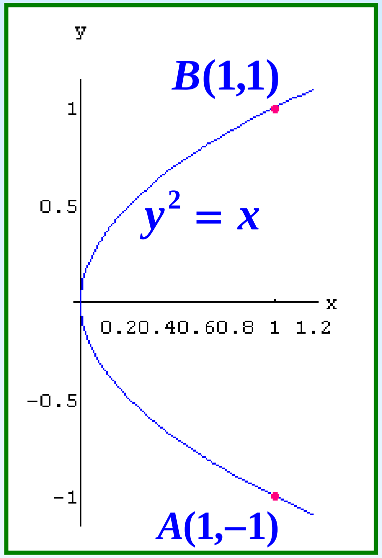
设L上点(x, y)处的切线向量的方向角为α, β,

则 $$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\qquad \cos\beta=\frac{dy}{ds}.$$

故 $\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$

（可以推广到空间曲线 Γ 上）

例1 计算$\int_L xydx$,其中L为抛物线 $y^2=x$上从 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.



解 (1) 化为对x的定积分，$y=\pm\sqrt{x}$.

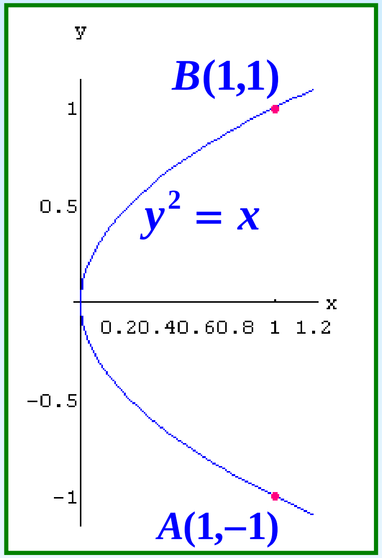
$$\int_L xydx=\int_{AO}xydx+\int_{OB}xydx$$

$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})dx+\int_0^1 x\sqrt{x}dx$$

$$=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}.$$

(2) 化为对y的定积分，

$$x = y^2, \qquad y\text{从}-1\text{到}1.$$



$$\int_L xydx = \int_{AB} xydx$$

$$= \int_{-1}^{1} y^2 y (y^2)' dy$$

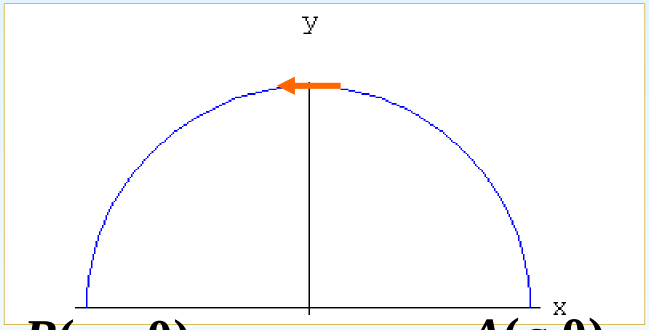
$$= 2\int_{-1}^{1} y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

例2 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

解 (1) $L:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$,



θ 从 0 变到 π,

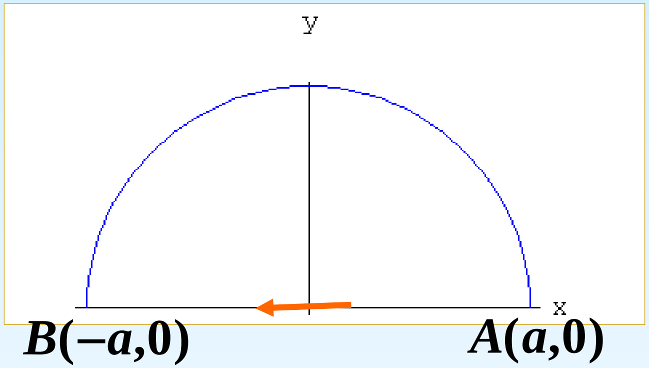
$$\text{原式} = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d(\cos\theta) = -\frac{4}{3}a^3.$$

(2) $L: y = 0,$

x 从 a 变到 $-a,$

原式 $= \int_a^{-a} 0dx = 0.$



问题： 被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同积分结果不同.

例3 计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

(2) 抛物线 $x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧;

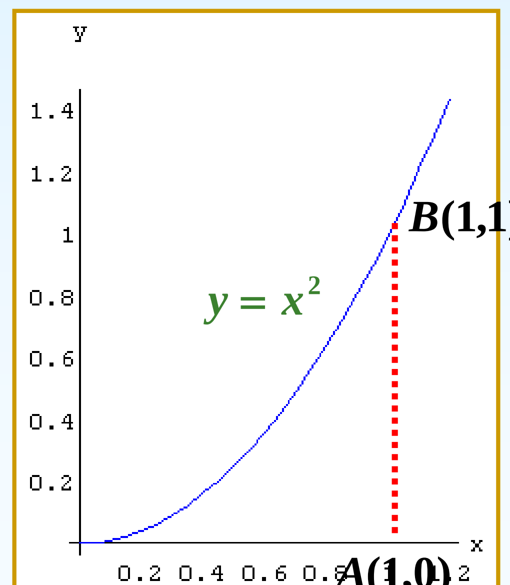
(3) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0)$
$(1,0),(1,1)$.

解 (1) 化为对 x 的积分.

$L: y = x^2$, x从0变到1,

$$\text{原式} = \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx$$

$$= 4\int_0^1 x^3 dx = 1.$$

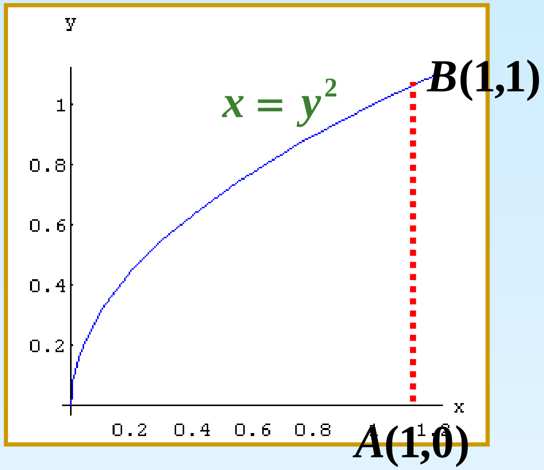


(2) 化为对 y 的积分.

$L: x = y^2$, y从 0 变到 1 ,

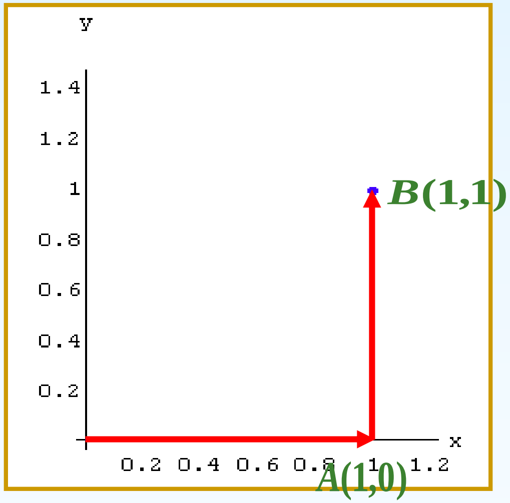
$$原式 = \int_0^1 (2y^2 \cdot y \cdot 2y + y^4) dy$$

$$= 5\int_0^1 y^4 dx = 1.$$



(3) $原式 = \int_{OA} 2xydx + x^2dy$

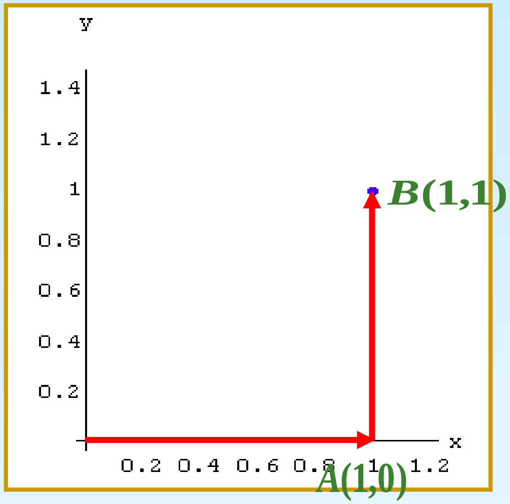
$$+ \int_{AB} 2xydx + x^2dy$$



在 OA 上，$y=0$, x从 0 变到 1，

$$\int_{OA} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x\cdot 0 + x^2\cdot 0)dx$$

$$= 0.$$



在 AB 上，$x=1$, y 从 0 变到 1，

$$\int_{AB} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2y\cdot 0 + 1)dy = 1.$$

$\therefore$ 原式 $= 0 + 1 = 1.$

问题： 被积函数相同，起点和终点也相同，但路径不同而积分结果相同.

例4 计算积分$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$， 其中$\Gamma$为圆周

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$从$z$轴正向看过去,$\Gamma$为逆时针方向.

解

Γ的参数方程为
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ z=-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta \end{cases} \qquad \theta:0\to 2\pi$$

$$I=\int_{\Gamma} zdx+xdy+ydz$$

$$=\int_0^{2\pi}\{(\frac{-2\sin\theta}{\sqrt{6}})\cdot(\frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})'+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})\cdot(\frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})'$$

$$+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})\cdot(\frac{-2\sin\theta}{\sqrt{6}})'\}d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi}\{(\frac{-2\sin\theta}{\sqrt{6}})\cdot(\frac{\cos\theta}{\sqrt{6}}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})\cdot(\frac{\cos\theta}{\sqrt{6}}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})$$

$$+(\frac{\sin\theta}{\sqrt{6}}-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}})\cdot(\frac{-2\cos\theta}{\sqrt{6}})\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}})d\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\sqrt{3}\pi$$

小结

1、第二型曲线积分的概念、计算;

2、两类曲线积分之间的联系.