北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

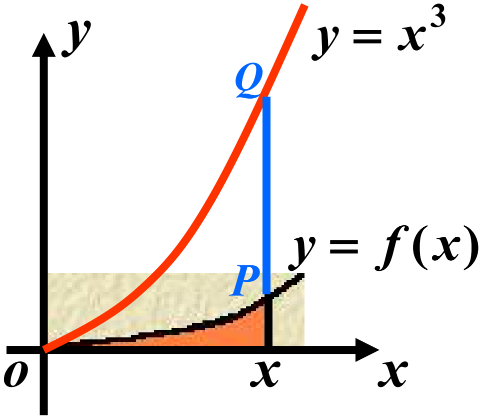
工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

常微分方程的应用

【例1】如图所示，平行于 y轴的动直线被曲线$y=f(x)$与$y=x^3$ $(x\ge 0)$截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线$f(x)$.



【解】 $\int_0^x y(t)dt = x^3 - y,$

两边求导得 $y' + y = 3x^2,$

$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx} dx\right]$$

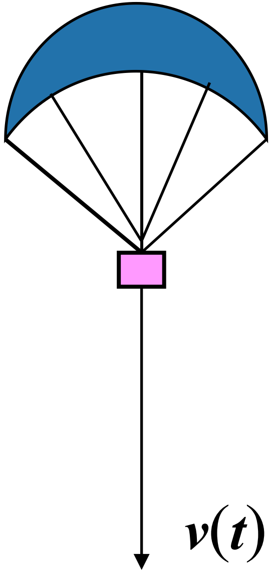
$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$，得 $C = -6$，$y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2).$

常微分方程的应用

【例2】 设降落伞系统的质量为m，受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开飞机时的速度为零. 求降落伞降落的速度.

【解】 建立坐标系如图. 所受的力$F = mg - kv$



$$\therefore \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \qquad v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{k}.$$

常微分方程的应用

【例3】 设方程 $[e^x + f(x)]ydx + f(x)dy = 0$为全微分方程，且

$f(0) = \frac{1}{2}$，求$f(x)$.

【解】 由题设知 $e^x + f(x) = f'(x)$

$$y = e^{\int 1dx}[\int e^x e^{\int -1dx}dx + C]$$

$$= e^x[x + C]$$

$$\because f(0) = \frac{1}{2} \qquad \therefore f(x) = e^x[x + \frac{1}{2}]$$

常微分方程的应用

【例4】 求幂级数$x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$的和函数.

【解】 幂级数的收敛区间为 $(-\infty,\infty)$

设和函数为 $s(x)$

$$s'(x)=1+x^2+\frac{x^4}{1\cdot 3}+\frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots=1+xs(x)$$

$$s'(x)-xs(x)=1,\quad s(0)=0$$

通解为 $s(x)=e^{\frac{x^2}{2}}[\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx+C]$

$$s(0)=0\Rightarrow s(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

常微分方程的应用

【例5】设$f(0)=1, f'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-f(t)]dt$,求$f(x)$.

【解】等式两边求导得 $f''(x)=6\sin^2 x-f(x)$,

$y''+y=6\sin^2 x=3-3\cos 2x.$

对应的齐次常系数方程通解为$y=c_1\cos x+c_2\sin x$

设$y''+y=3$的特解为$y_1^*=A$ 代入此方程得$A=3$

设$y''+y=-3\cos 2x$的特解为$y_2^*=B\cos 2x+C\sin 2x$

代入此方程得$B=\dfrac{3}{4}, C=0$

常微分方程的应用

故$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{3}{4}\cos 2x+3$

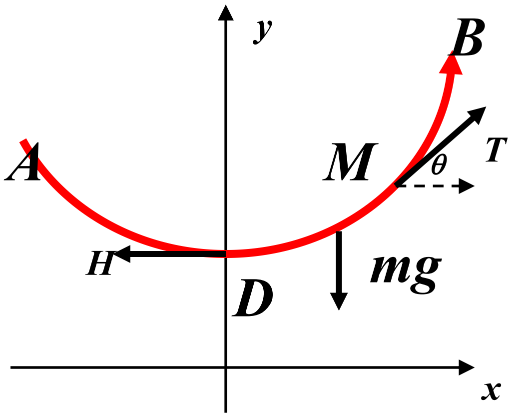
$$f(0)=1\Rightarrow c_1=-\frac{11}{4}$$

$$f'(0)=1\Rightarrow c_2=1$$

从而 $f(x)=-\frac{11}{4}\cos x+\sin x+\frac{3}{4}\cos 2x+3$

常微分方程的应用

【例6】设一条质量均匀、柔软的绳索,两端被固定,在重力的作用下处于平衡状态.求绳索对应的方程.



【解】如图建立坐标系,

设曲线方程 $y = y(x)$,

$$T\sin\theta = \rho g s,\quad T\cos\theta = H,$$

s为弧DM的长度

$$\tan\theta = \frac{\rho g}{H} s = \frac{s}{a}$$

常微分方程的应用

$$y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$$

设$y' = p$, $\quad p' = \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C_1,$$

$$y'(0) = 0, \quad \ln(p+\sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} \quad ,$$

常微分方程的应用

$$p=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2},\quad y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}+C_2,$$

若$y(0)=a$，$\quad y=a\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}.$

$$y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=a\left(1+\frac{1}{2a^2}x^2\right)+o(x^2).$$

一个完美均匀且灵活的平衡链被它的两端悬挂，并只受重力的影响，这个链子形成的曲线形状被称为**悬链线**。1690年，荷兰物理学家、数学家、天文学家、发明家克里斯蒂安·惠更斯（Christiaan Huygens）在给德国著名博学家戈特弗里德·莱布尼茨（Gottfried Leibniz）的一封信中创造了这个名字。

悬链线与抛物线相似。意大利伟大的天文学家、物理学家和工程师伽利略是第一个研究悬链线的人，并错误地将其形状认定为抛物线。1691年，莱布尼茨、惠更斯和瑞士数学家约翰·伯努利分别得出了正确的形状。他们都是为了响应瑞士数学家**雅各布•伯努利**（约翰的哥哥）提出的一项挑战，即得到“悬链线”方程。

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院