不定积分习题课

例1 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（　）

当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数；

(B) 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数；

(C) 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数；

(D) 当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数；

解 $F'(x) = f(x), F'(-x) = -f(-x).$

(A) 若$f(x)$为奇函数，则$(F(x) - F(-x))' = 0$

$\therefore F(x) - F(-x) \equiv C$

$C = F(0) - F(0) = 0 \Rightarrow F(x) = F(-x), A$正确.

(B) 若$f(x)$为偶函数，则$(F(x)+F(-x))'=0$

$F(x)+F(-x)\equiv C$,不能确定奇偶性.

(C) 取$f(x)=\sin^2 x, F(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$

(D) $f(x)=x, F(x)=\dfrac{x^2}{2}+C.$

例2 求 $\int \max\{1, |x|\} dx$.

解 设 $f(x) = \max\{1, |x|\}$,

则 $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x \le 1, \\ x, & x > 1 \end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，则必存在原函数 $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1 \\ x+C_2, & -1\le x\le 1. \\ \dfrac{1}{2}x^2+C_3, & x>1 \end{cases}$$

又 $\because F(x)$须处处连续，有

$$\lim_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim_{x\to -1^-}\left(-\frac{1}{2}x^2+C_1\right)$$

即 $-1+C_2=-\dfrac{1}{2}+C_1$,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2}x^2+C_3\right)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_2)$$

即 $\dfrac{1}{2}+C_3=1+C_2$,

联立并令 $C_1 = C$,

可得 $C_2 = \frac{1}{2} + C$, $C_3 = 1 + C$.

故 $$\int \max\{1, |x|\} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < -1 \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \le x \le 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$$

例 3　下列积分能用初等函数表出的是（　　）

（A）$\int e^{-x^2}dx$；　　（B）$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$；

（C）$\int \frac{1}{\ln x}dx$；　　$\int \frac{\ln x}{x}dx$.

例 4　$\int f(x)dx = F(x)+C$，且 $x = at+b$，则

$\int f(t)dt =$（　　）

（A）$F(x)+C$；

$F(t)+C$；

（C）$\frac{1}{a}F(at+b)+C$；

（D）$F(at+b)+C$　.

例5 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$,求 $f(x)$

解 令 $u = \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - u$,

$$f'(u) = 1 - u,$$

$$f(u) = \int (1 - u) du = u - \frac{1}{2}u^2 + C,$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

例6 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx.$

解 原式 $= \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{d\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1}$

$$\xlongequal[\text{令}\left(\frac{3}{2}\right)^x = t]{} \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln\left|\frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}\right| + C.$$

例7 求 $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx.$

解 原式 $= \int \frac{e^x(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$$= \int (e^x \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + e^x \tan\frac{x}{2})dx$$

$$= \int [(e^x d(\tan\frac{x}{2}) + \tan\frac{x}{2} de^x] = \int d(e^x \tan\frac{x}{2})$$

$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C.$$

例8 求 $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\because [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]'$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

原式 $= \int \sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5} \cdot d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

$$= \frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}} + C.$$

例9 求 $\int \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$

解 令$x=\frac{1}{t}$, (倒代换)

原式 $=\int \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}}(-\frac{1}{t^2})dt=-\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$

$$=-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

例10　求 $\int x\tan^2 xdx.$

解　$\text{原式} = \int x(\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int x\,d\tan x - \int xdx$$

$$= x\tan x - \int \tan xdx - \int xdx$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

例11 求$\int \sec^3 x dx$.

解 $\int \sec^3 x dx = \int \sec x \sec^2 x dx = \int \sec x d\tan x$

$= \sec x \tan x - \int \tan x d\sec x$

$= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx$

$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x dx$

$= \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

例12 求 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx.$

解 $\because \int x\ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2)$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$\text{原式} = \int \arctan x d[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2]\arctan x$$

$$-\frac{1}{2}\int [\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}]dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2 - 3]$$

$$-\frac{x}{2}\ln(1+x^2) + \frac{x}{2} + C.$$

例13 求$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x(\tan^2 x + 2)}$$

$$= \int \frac{d\tan x}{\tan^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

例14 求$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx.$

解 $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int \frac{d\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x}{\sqrt{3\left(1-\frac{2}{3}\sin^2 x\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x+C$$

例15 求$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

解

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$$

$$= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin x \cos^3 x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\left|\tan x\right| + c$$

例16 求$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

解 $$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}(\int dx+\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx)$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

例17 求积分 $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$

解 $$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$\therefore I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$ 递推公式

由$I_1 = \arctan x + C$,可求出I_n的表达式.

例18 求 $\int \frac{1-x+x^2}{x(1+x^2)^2}dx.$

解 原式 $=\int (\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2})dx$

$$=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{x}{1+x^2}dx-\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\int \frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)-\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$令 I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx,$$

$$有 I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \qquad I_1 = \arctan x + C.$$

$$则 \int \frac{1}{(1+x)^2} dx = I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1$$

$$= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{C}{2}$$

$$\therefore 原式 = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\arctan x + C_1$$

例19 求 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

解 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{2}}+C$$

类似可求 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

例20 设 $f(x)+\sin x=\int f'(x)\sin x dx$,求$f(x)$.

解 两边求导可得$f'(x)+\cos x= f'(x)\sin x$

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$$

（一）$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{\cos x}{\sin x-1}dx \qquad u=\sin x$

$$=\int \frac{1}{u-1}du=\ln|u-1|+C=\ln|\sin x-1|+C$$

（二）$f(x)=\int f'(x)\sin x dx-\sin x$

$$=\int \frac{\cos x\sin x}{\sin x-1}dx-\sin x=\int \frac{u}{u-1}du-\sin x$$

$$=\int du+\int \frac{1}{u-1}du-\sin x=u+\ln|u-1|+C-\sin x$$

$$=\ln|\sin x-1|+C$$

例21 已知$\dfrac{\sin x}{x}$是$f(x)$的原函数，求$\int xf'(x)dx$.

解 由已知条件知

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},\int f(x)dx=\frac{\sin x}{x}+C$$

所以 $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)$

$$=xf(x)-\int f(x)dx$$

$$=x\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+C$$

$$=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$$