§4　幂级数

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$ 的函数项级数为**幂级数**.

特别地， $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

幂级数的收敛半径与收敛域

定理4.1(Abel定理) 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

(1) 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛,则

对一切 $|x| < |x_0|$, 级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛;

(2) 若级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_1 \neq 0$处发散,则

对一切 $|x| > |x_1|$, 级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散.

证明 ① $\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$收敛

$\therefore \{a_n x_0^n\}$有界,即$\exists M>0, s.t., \left|a_n x_0^n\right| \le M, n=1,2,\cdots$

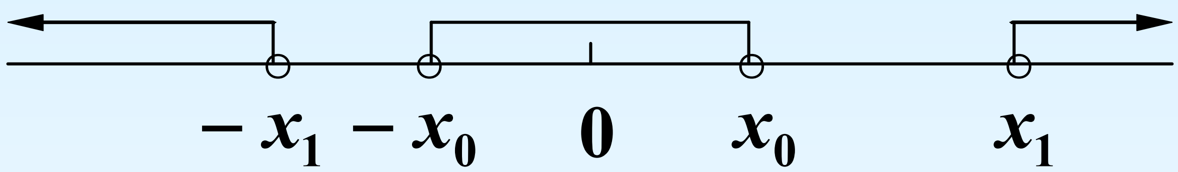
当$|x|<|x_0|$时, $\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$,

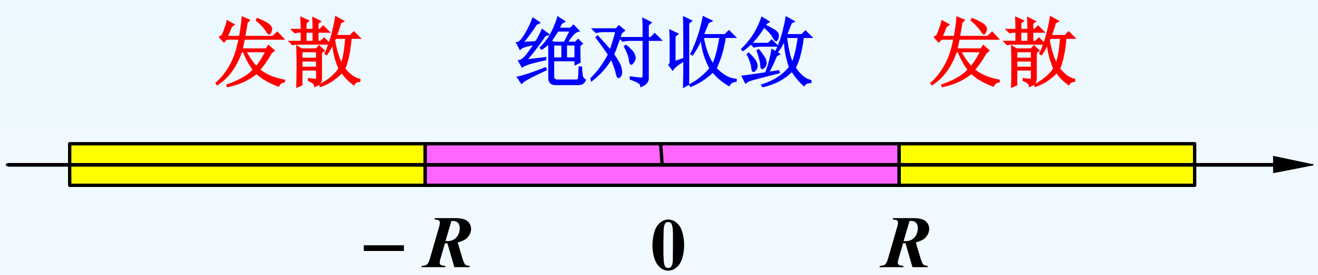
$\because \left|\frac{x}{x_0}\right| = r < 1$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$收敛,$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛.

② 若不然, $\exists x_2, |x_2|>|x_1|$,但$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_2^n$收敛.

由①知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$绝对收敛 矛盾!

定理的意义：





假设$R=\sup\{x|\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛点$\}$, 则$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$上绝对收敛，在$(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$上发散.

称R为幂级数的收敛半径.

推论4. 2 设R为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，则对任意闭子区间$I\subset(-R,R)$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$I$上一致收敛.

定理4. 3 （Cauchy-Hadamard ）

记$A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径

$$R=\begin{cases}0, & 若A=+\infty,\\ \dfrac{1}{A}, & 若A\in(0,+\infty),\\ +\infty, & 若A=0.\end{cases}$$

定理4. 4

记$A=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径

$$R=\begin{cases}0, & 若A=+\infty,\\ \dfrac{1}{A}, & 若A\in(0,+\infty),\\ +\infty, & 若A=0.\end{cases}$$

证明 令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$, 由比值判别法知,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

① 若 $0 < A < +\infty$，则

$$\rho = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A|x|,$$

当 $|x| < \frac{1}{A}$ 时，级数收敛，当 $|x| > \frac{1}{A}$ 时，级数发散.

因此 $R = \frac{1}{A}$.

② 若$A=+\infty$，则

$$\rho=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty(x\neq 0),$$ 所以级数发散 .

因此 $R=0.$

③ 若$A=0$，则

$$\rho=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0,$$ 所以级数在 $(-\infty,+\infty)$上收敛 .

因此 $R=+\infty.$

收敛半径与收敛区间

定义 设R为幂级数$\sum a_n x^n$的**收敛半径**，

$(-R, R)$称为**收敛区间**,

考虑端点的收敛性,可得**收敛域**.

收敛半径公式:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

例1 求下列幂级数的收敛域

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)3^n}$

解 记$a_n=\frac{1}{(n+2)3^n}$,因为$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)3^n}{(n+3)3^{n+1}}=\frac{1}{3}$,

所以收敛半径$R=3$,从而收敛区间为$(-3,3)$,

且当$x=-3$时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$收敛;当$x=3$时,$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$发散;

故收敛域为$[-3,3)$

另外:$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\sqrt[n]{n+2}}=\frac{1}{3}$, $R=\frac{1}{\rho}=3$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

解 记$a_n=\frac{1}{n!}$,则$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$

所以收敛半径 $R=+\infty$,收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$

解 记$a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$,则$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}\right]=3$

所以收敛半径 $R=\frac{1}{3}$,

中心在$x_0=1$处

$$1-\frac{1}{3} \qquad 1 \qquad 1+\frac{1}{3}$$

故收敛区间为 $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，

$$当x=\frac{2}{3}时,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}收敛;$$

$$当x=\frac{4}{3}时,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{n}发散;$$

故收敛域为 $[\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(n+1)^2}$（缺项）

解法1 $R=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$ $a_{2n}=\frac{1}{4^n(n+1)^2}, a_{2n+1}=0$

解法2 令$x^2=y$ (知$y\geq 0$),

原级数 $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{4^n(n+1)^2}$,

$R_y=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}(n+2)^2}{4^n(n+1)^2}=4$, 即当$x^2<4$时级数收敛.

因此当$-2<x<2$时，所给级数收敛.

故收敛区间（−2, 2）.

解法3　直接使用比值判别法

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+2}}{4^{n+1}(n+2)^2}\cdot\dfrac{4^n(n+1)^2}{x^{2n}}\right| = \dfrac{|x|^2}{4}$

当 $|x|^2 < 4$ 时，$|x| < 2$ 时收敛；

当 $|x|^2 > 4$ 时，$|x| > 2$ 时发散；

所以 $R = 2$，故收敛区间为（$-2, 2$）.

而当 $x = \pm 2$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n}{4^n(n+1)^2}$ 收敛.

故收敛域为 $[-2, 2]$.

当幂级数为缺项情形

1. 用Cauchy-Hadamard公式, 辨清 a_n

2.先利用变量代换化为非缺项情形后再用公式求收敛半径及收敛区间, 之后再通过逆代换求出原幂级数的收敛区间及收敛半径.

3.用比值审敛法或根值审敛法及幂级数收敛域的结构特点来求.

幂级数的性质

定理4. 5　运算性质----(代数性质)

设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$R_a$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径为$R_b$，

记$R=\min\{R_a, R_b\}$，则当$x\in(-R,R)$时，

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$收敛，且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的Cauchy乘积$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$收敛,

其中$c_n=a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\cdots+a_n b_0$.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \quad x\in(-R,R)$$

(其中 $c_n = a_0\cdot b_n + a_1\cdot b_{n-1}+\cdots+a_n\cdot b_0$)

柯西乘积

1	x	x^2	x^3	$\cdots$
a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3	$\cdots$
a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	$\cdots$
a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	$\cdots$
a_3b_0	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

注 两个幂级数相除：

$$\frac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n} = \sum c_n x^n \quad (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0)$$

在$(-R, R)$的某个子区间上成立 $(R \le \min\{R_a, R_b\})$;

可利用：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)\text{解出}c_n$$

内闭一致收敛性——Abel第二定理

定理4.6 设$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R$，$0 < R < +\infty$，则

(1) 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = R$处收敛，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[0, R]$一致收敛；

(2) 若$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = -R$处收敛，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[-R, 0]$一致收敛；

证明 下面只证明(1)，(2)类似可得.

对$x \in [0, R]$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n R^n)(\frac{x}{R})^n$.

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$收敛，而$(\frac{x}{R})^n$在$[0, R]$上一致有界，

且对任意的$x \in [0, R]$，$\{(\frac{x}{R})^n\}$关于n单调，

由Abel判别法知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[0, R]$上一致收敛.

分析性质----连续、可导、可积

定理4. 7 （连续性定理）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,

则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在$(-R, R)$连续；

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在$x = R$处左连续，即

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n;$$

若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数在$x = -R$右连续，即

$$\lim_{x \to -R^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

定理4. 8(逐项积分)

设级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$,则

对$\forall x \in (-R, R)$,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

注　积分后幂级数收敛半径不变,

但收敛域可能会改变, 在端点处的收敛性可能变 “好”， 但不可能变 “坏”．

定理4.9 设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径为$R$,和函数为$S(x)$,

则$S(x)$在$(-R,R)$内连续, 而且在$(-R,R)$中有

任意阶导数:

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \quad k=1,2,\cdots$$

注 1. 更精确的说, 是在收敛域内连续;

2. 尽管$S^{(k)}(x)$的 收敛半径不变,

但收敛域可能会改变, 在端点处的收敛性可能变"坏", 但不可能变"好".

求和函数应用举例

常用公式

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, |x| < 1; \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, |x| < 1; \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots, |x| < 1; \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, |x| < 1. \end{cases}$$

例2 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 .

解 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x|<1$

因此有，

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)'$$

$$= x(\frac{1}{1-x} - 1)' = x(\frac{1}{1-x})^2, \quad |x|<1.$$

解二 设$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = S(x)$,则$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xS(x)$,从而

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1})dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^x nt^{n-1}dt) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1, \quad |x| < 1.$$

上面式子两边关于x求导，可得

$$S(x) = (\frac{1}{1-x} - 1)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xS(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

例3 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n$的和函数.

解 设$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = S(x)$, $(|x|<1)$,则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = [\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}]'$$

$$=[x\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})']' = [x(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1})']'$$

$$=[x(\frac{x}{1-x})']' = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \ |x|<1.$$

函数的幂级数展开

如果 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in(x_0-R,x_0+R),$

则称$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)上可以幂级数展开.

1. 若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,\ x\in(x_0-R,x_0+R)$

则$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)中有任意阶导数. 且有

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},n=0,1,2,\cdots.$$

$$\therefore\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,x\in(x_0-R,x_0+R)$$

由此说明：$f(x)$ 的幂级数展开式是唯一的.

定义4.1 如果$f(x)$有任意阶导数，即 $f(x)\in C^{\infty}$

形式上：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad x\in(x_0-R,x_0+R)$

——$f(x)$在x_0处的泰勒(Taylor)级数.

记为：$\displaystyle f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$,

特别地，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$称为$f(x)$的麦克劳林级数.

问题：$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$是否收敛？$f(x)=S(x)$

级数收敛且收敛的和函数为$f(x)$时才能称为展开

如 (1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$, $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2^n x)}{n!}2^n$,

$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{\sin(2^n x)}{n!}2^{2n}$, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{2^{2k+1}}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, 除$x=0$点外处处发散.

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0 & x=0. \end{cases}$ $f^{(n)}(0)=0$

定理 $f(x)$在(x_0-R,x_0+R)上能展成$Taylor$级数

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, \forall x\in(x_0-R,x_0+R)$$

证明 由Taylor公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

$$=S_{n+1}(x)+R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x)=f(x)\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

定理4. 10 设$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内有任意阶导数，

若$\{f^{(n)}(x)\}$在(x_0-R,x_0+R)内一致有界，即$\exists M>0$,

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M,\ \forall n\in N^*,\ \forall x\in(x_0-R,x_0+R).$$

则$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内能展成$Taylor$级数.

证明 $$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}R^{n+1}$$

$$\because \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{(n+1)!}R^{n+1}\text{收敛}, \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{M}{(n+1)!}R^{n+1} \to 0.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{R^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{R}{n+2} = 0$$

先直接展开, 再证 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$

幂级数展开 $\begin{cases}\text{直接法} \\ \text{间接法}\end{cases}$

很少用

从已知的展式出发,通过变量代换、四则运算、逐项求导、 逐项积分等方法求得函数的幂级数 展式.

用到幂级数展开的唯一 性

例4 将e^x展成*Maclaurin*级数 (直接展开).

解 易见 $e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

对任取正数 R, 当 $|x| < R$时, 对$\forall n \in N^*$,

$|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^R$. 故 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-R, R)$.

由R的任意性, 知在$(-\infty, +\infty)$中成立.

即 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$.

例5 将 $\sin x$ 展成 *Maclaurin* 级数 (直接展开).

解 令 $f(x)=\sin x$, 则 $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$

$$f^{(n)}(0)=\sin(n\cdot\frac{\pi}{2})=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}$$

且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $n\in N^*$, $\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1$

故可展成幂级数

$$\therefore \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

例6 将 $\cos x$ 展成 *Maclaurin* 级数 （间接展开）.

解 $$\cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例7 将 $\ln(1+x)$ 展成 *Maclaurin* 级数.

解 $$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \qquad x \in (-1,1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad x \in (-1,1]$$

例8 将 $\ln(1-x)$展成幂级数．

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1,1)$$

例9 求$\arctan x$的*Maclaurin*展式.

解 $\because \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t$

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad t \in (-1,1)$$

$$\therefore \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$x \in [-1,1].$$

例10 将$f(x)=\dfrac{1}{1-x-2x^2}$展开成x的幂级数

解 $\because f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1-2x)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1-2x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$$

$$x\in(-1,1) \qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{3}x^n,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

例11 将 $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$ 展成 *Maclaurin* 级数.

解 $\because e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty).$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1).$$

$$\therefore f(x)=e^x\frac{1}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)x^n,\ (-1<x<1).$$

例12 将 $\ln x$ 在 $x_0 = 2$ 处展成 *Taylor* 级数

解

$$\ln x = \ln[2+(x-2)] = \ln[2(1+\frac{x-2}{2})]$$

$$= \ln 2 + \ln(1+\frac{x-2}{2})$$

因为 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x \in (-1,1]$

所以 $\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n} \qquad x \in (0,4].$

例13 $f(x)=(1+x)^{\alpha}\quad(\alpha\in R)$展成$x$的幂级数

解 ① $f(x)=(1+x)^{\alpha}$,

$$f(0)=1,\qquad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

$$\therefore f(x)\sim 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$$

$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

② $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1,$ 收敛区间$(-1,1)$.

③ 证明$R_n(x)\to 0$比较繁难． 略去！

考虑端点, 可知下式范围与 α 有关

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

若 $\alpha\le -1$, 则 上式仅在 $(-1,1)$ 中成立;

若 $-1<\alpha<0$, 则上式在 $(-1,1]$ 中成立;

若 $\alpha>0$, 则上式在 $[-1,1]$ 中成立;

特别地，

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n,\quad x\in[-1,1];$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\quad x\in(-1,1];$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in(-1,1);$$

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1];$$

常用的函数幂级数展开式

$$(1)\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)x^n,\quad x\in(-1,1)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},\quad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$$

$$(3)\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$(4)\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$(5)\ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$(6)\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1]$$

$$(7)\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in[-1,1)$$

$$(8)\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

例14 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的和函数.

解 易知所给级数的收敛区 间为$(-\infty,+\infty)$,

由于$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\therefore \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad (-\infty,+\infty).$$

例15 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$的和.

解 由于$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

求导: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n$,

$$\therefore xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n.$$

再求导: $e^x+xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$

令$x=1$,可得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2e$

例16 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots\frac{n}{a^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}=?$ $a>1$

解

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$$

$$=x(\frac{1}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2},\ (-1<x<1).$$

$$\therefore \text{原式}=S(\frac{1}{a})=\frac{\frac{1}{a}}{(1-\frac{1}{a})^2}=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

小结

1.幂级数的概念:

2.幂级数的收敛性: 收敛半径R

3.幂级数的运算: 分析运算性质

4.如何求函数的泰勒级数;

5.泰勒级数收敛于函数的条件;

6.函数展开成泰勒级数的方法.

7.幂级数的应用.