

A

北京航空航天大学

2013-2014 学年 第二学期期末

《 工科数学分析 (2) 》

试 卷 (A)

班号_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对入								

2014 年 06 月 27 日

一、求解下面问题（每小题 6 分，满分 48 分）

1. 设 $u(x, y, z)$ 为连续函数， Σ 是以 $M(x_0, y_0, z_0)$ 为中心，半径为 R 的球面，求极限

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma} u(x, y, z) dS.$$

解 $\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Sigma} u(x, y, z) dS = u(x_0, y_0, z_0)$ 建议：中间过程 4 分

2. 计算 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是由 $x=0, y=1$ 及 $y=x$ 所围成的区域.

解：因为 $\int e^{-y^2} dy$ 无法用初等函数表示，所以必须考虑积分的顺序。

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{3} dy \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{6} dy^2 \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{2}{e}\right). \end{aligned}$$

建议：中间过程 4 分，结果 2 分

3. 已知椭圆型区域 $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. 利用广义极坐标变换计算积分

$$I = \iint_D (b^2 x^2 + a^2 y^2) dx dy.$$

解 做广义的坐标变换 $T: \begin{cases} x = ar \cos \theta, \\ y = br \sin \theta, \end{cases}$

$$\text{则 } J = abr. \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (b^2 x^2 + a^2 y^2) dx dy \\ &= a^2 b^2 \iint_D r^2 abr dx dy \\ &= a^3 b^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} a^3 b^3 \pi. \end{aligned}$$

4. 求曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 2$) 的面积.

解 由于 $z_x = 2x$, $z_y = 2y$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, 且 $D_{xy} = x^2 + y^2 \leq 4$,
所以

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Sigma} dS \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \sqrt{1 + 4r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{6} (27^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

5. 计算三重积分 $\iiint_V [(\cos y)^{2012} x + 3] dx dy dz$, 其中 V 由 $z = 1$ 与 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所成的立.

解: 由于 V 是关于 $yo z$ 平面对称的, 且 $(\cos y)^{2012} x$ 是关于 x 的奇函数, 所以

$$\begin{aligned} \iiint_V (\cos y)^{2012} x dx dy dz &= 0, \text{ 于是} \\ \iiint_V [(\cos y)^{2012} x + 3] dx dy dz &= 3 \iiint_V dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 dz = \pi. \end{aligned}$$

(写出对称性给 2 分, 计算过程适当给分)

6. 计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS$, 其中 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$),

其中 $a > 0$. (可利用对称性)

解: 因为 $\iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz) dS$, 且由于 Σ 关于坐标面

xoz 和 zoy 对称, 且函数 $2xy + 2yz$ 关于 y 是奇函数, $2xz$ 关于 x 是奇函数, 所以

$$\iint_{\Sigma} (2xy + 2yz) dS = 0, \quad \iint_{\Sigma} 2xz dS = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz) dS, \\ &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = a^2 \iint_{\Sigma} dS = 2\pi a^4. \end{aligned}$$

7. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} z \, ds$, 其中 Γ 为圆锥螺线 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, t \in [0, 2\pi]$.

解: 因为 $x' = \cos t - t \sin t, y' = \sin t + t \cos t, z' = 1$, 所以

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} = \sqrt{2 + t^2}, \text{-----3 分}$$

于是

$$\int_{\Gamma} z \, ds = \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} \, dt = \frac{1}{3} [(2 + 4\pi^2)^{3/2} - (2)^{3/2}]. \text{-----3 分}$$

8. 计算第二型曲面积分 $\iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$,

其中 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 取上侧.

解: 由于曲面的法向量为 $\vec{n} = \{1, 1, 1\}$, $D_{xy} = \{(x, y) | x + y \leq 1\}$, -----2 分

于是

$$\iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} [x + y + (1 - x - y)] \, dx \, dy = \frac{1}{2}. \text{-----4 分}$$

二、(本题 10 分) 求方程 $y'' + 3y' - 4y = xe^{2x}$ 的通解.

解: 齐次方程的特征方程为 $r^2 + 3r - 4 = 0$, 解得

$$r_1 = -4, \quad r_2 = 1.$$

所以齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x$, 其中 C_1, C_2 是任意常数.

又因为 $\lambda = 2$ 不是特征方程的根, 所以可设非齐次方程的特解为

$$y^* = (Ax + B)e^{2x},$$

$$\text{再求得 } y^{*'} = (2Ax + 2B + A)e^{2x}, \quad y^{*''} = (4Ax + 4B + 4A)e^{2x}$$

$$\text{将 } y^*, y^{*'}, y^{*''} \text{ 代入原方程, 得 } \begin{cases} 6A = 1, \\ 6B + 7A = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得 } A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{7}{36}. \text{ 于是原方程的通解为}$$

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x + \left(\frac{1}{6}x - \frac{7}{36}\right)e^{2x}.$$

三、(本题 10 分) 设曲线积分 $I = \int_L \frac{(x+2y)dx + (ax+y)dy}{x^2+y^2}$ 在区域 D 内与路径无关,

(1) 写出满足题设的区域 D 的条件, 并求常数 a ;

(2) 设曲线 L 为从点 $A(1,0)$ 沿上半平面到点 $B(2,0)$ 的一段弧, 求曲线积分 I .

解: (1) 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y(x+2y)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{a(x^2+y^2) - 2x(ax+y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

所以由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow a = -2.$

D : 任意一个不包含原点的单连通区域.

(2) $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2.$

建议: (1) 7 分; (2) 3 分。

四、(本题 12 分) (利用 Green 公式)

计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + 9y^2}$, 其中 L 是以 $(1,1)$ 为中心, 4 为半径的圆周, 取顺时针方向.

解: 记 L 所围成的闭区域为 D , 令 $P = \frac{-y}{4x^2+9y^2}, Q = \frac{x}{4x^2+9y^2},$

则当 $4x^2+9y^2 \neq 0$ 时, 有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{9y^2-4x^2}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$

作位于 L 所围区域内部的椭圆 $l: 4x^2+9y^2 = \varepsilon^2$, 记 L 和 l 所围成的区域为 D , (其中 l 的方向取逆时针方向)。由 Green 公式得:

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + 9y^2} + \oint_l \frac{xdy - ydx}{4x^2 + 9y^2} = - \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

即:

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + 9y^2} &= - \oint_l \frac{xdy - ydx}{4x^2 + 9y^2} = - \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_l xdy - ydx = - \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{4x^2+9y^2 \leq \varepsilon^2} 2dx dy \\ &= - \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\pi \varepsilon^2}{6} = - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

注：最后计算又使用一次 Green 公式，也可以直接计算

$$l: \begin{cases} x = \frac{\varepsilon}{2} \cos t \\ y = \frac{\varepsilon}{3} \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\oint_l xdy - ydx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\varepsilon}{2} \cos t \cdot \left(\frac{\varepsilon}{3} \sin t\right)' - \frac{\varepsilon}{3} \sin t \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \cos t\right)' \right] dt = \frac{\varepsilon^2}{6} \int_0^{2\pi} dt = \frac{\pi \varepsilon^2}{3}$$

(建议：计算 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 2 分，做辅助曲线挖点 2 分，应用 Green 公式 2 分，曲线积分的计算 4 分.)

五、(10 分) (利用 Gauss 公式)

计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) dydz + (y^2 + x^2) dzdx + (z^2 + y^2) dxdy$ ，其中 Σ 是曲面

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ，取上侧.

解：添加平面 $\Sigma_1: z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq 1$)，方向取下侧.

则 Σ, Σ_1 构成闭曲面，假定它们所围区域为 Ω ，由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) dydz + (y^2 + x^2) dzdx + (z^2 + y^2) dxdy \\ &= \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} (x^2 + z^2) dydz + (y^2 + x^2) dzdx + (z^2 + y^2) dxdy \\ & \quad - \iint_{\Sigma_1} (x^2 + z^2) dydz + (y^2 + x^2) dzdx + (z^2 + y^2) dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 2(x + y + z) dxdydz - \iint_{\Sigma_1} y^2 dxdy \end{aligned}$$

由对称性 $\iiint_{\Omega} x dxdydz = \iiint_{\Omega} y dxdydz = 0$ ，则

$$\iiint_{\Omega} 2(x + y + z) dxdydz = 2 \iiint_{\Omega} z dxdydz = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} dxdy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z dz = \frac{\pi}{2}$$

(也可以“先二后一” $2\iiint_{\Omega} z dx dy dz = 2 \int_0^1 z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1-z^2} dx dy = 2 \int_0^1 \pi(1-z^2)z dz = \frac{\pi}{2}$)

$$\text{又 } \iint_{\Sigma_1} y^2 dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta \cdot r dr = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{所以 } \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) dy dz + (y^2 + x^2) dz dx + (z^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$$

(建议：做辅助平面 2 分，应用 Gauss 公式 2 分，重积分及辅助面上积分各 3 分.)

六、(10 分) (利用 Stokes 公式)

计算 $\oint_{\Gamma} y dx + (z - \cos x) dy + (x + e^z) dz$, 其中 Γ 是 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解：设 Σ 为平面 $x + y + z = 0$ 上被曲线 Γ 所围成的部分，并取 Σ 的法向量向上，则 Σ

法向量的方向余弦 $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$,

由 Stokes 公式

$$\oint_{\Gamma} y dx + (z - \cos x) dy + (x + e^z) dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z - \cos x & x + e^z \end{vmatrix} dS = - \iint_{\Sigma} (\sqrt{3} + \sin x) dS,$$

由对称性 $\iint_{\Sigma} \sin x dS = 0$, 所以原积分 $= -\sqrt{3}\pi R^2$.

注：Stokes 公式同样可以写成

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z - \cos x & x + e^z \end{vmatrix} = - \iint_{\Sigma} dy dz + dz dx + (1 - \sin x) dx dy.$$

(建议：应用 Stokes 公式转化成曲面积分 6 分，其余计算 4 分.)

七、附加题（本题 10 分）

设 Σ 是分片光滑的闭曲面， Σ 上的单位外法向量 \vec{n} 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ，分别证明对于以下两种情形，

- (1) P, Q, R 在 $\bar{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数， Ω 为 Σ 所围的立体；
- (2) P, Q, R 在 Σ 上具有一阶连续偏导数.

都成立
$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = 0.$$

证明：对情形（1）用 Gauss 公式，

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dxdydz \\ &= 0 \end{aligned}$$

对情形（2），在 Σ 上任取一条分段光滑的闭曲线 Γ ， Γ 把 Σ 分成两部分 Σ_1, Σ_2 ，在 Σ_1, Σ_2 上分别应用 Stokes 公式，得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS + \iint_{\Sigma_2} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \\ &= \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz + \oint_{-\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中 $\Gamma, -\Gamma$ 表示同一条曲线，但方向相反.

（建议：两种情形各 5 分.）