§3 二阶常系数线性微分方程求解

二阶齐次线性方程解的结构

定义 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为定义在区间 I 内的两个函数. 如果存在两个不全为零的常数 k_1, k_2，使得 $k_1y_1 + k_2y_2 \equiv 0$，那么称 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 I 内线性相关. 否则称线性无关.

注 若在 I 上有 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，则 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理 1 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的特解，那么 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是方程(1)的通解.

二阶非齐次线性方程的解的结构

定理 2 设 y^* 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

的一个特解，Y 是与(2)对应的齐次方程(1)的通解，那么 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理 3 设非齐次方程(2)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程，

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

解的叠加原理

的特解，那么 $y_1^* + y_2^*$ 就是原方程的特解.

常系数齐次线性微分方程

n阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = 0$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

特征方程法

$$y'' + py' + qy = 0$$

设 $y = e^{rx}$，将其代入上方程, 得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$\because e^{rx} \neq 0,$$

故有 $r^2 + pr + q = 0$ 特征方程

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$,

有两个不相等的实根$(\Delta > 0)$

特征根为$r_1 = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $r_2 = \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$,

两个线性无关的特解

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x},$$

得齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

有两个相等的实根 $(\Delta = 0)$

特征根为 $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$, 一特解为 $y_1 = e^{r_1 x}$,

设另一特解为 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$,

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入原方程并化简，

$$u'' + \underline{(2r_1 + p)}u' + \underline{(r_1^2 + pr_1 + q)}u = 0,$$

知 $u'' = 0$, 取 $u(x) = x$, 则 $y_2 = xe^{r_1 x}$,

得齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$;

有一对共轭复根 $(\Delta < 0)$

特征根为 $r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \qquad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x},$$

重新组合 $\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

得齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad r^2 + pr + q = 0$$

特征根的情况	通解的表达式
实根$r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根$r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例1 求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+4r+4=0$,

解得 $r_1=r_2=-2$,

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

例2 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

解得 $r_{1,2}=-1\pm 2i$,

故所求通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

n阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程为 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

特征方程的根	线性无关的特解
若是k重根r	$e^{rx},xe^{rx},\cdots,x^{k-1}e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x,xe^{\alpha x}\sin\beta x.\cdots.x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

注意 n次代数方程有n个根, 而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项, 且每一项各一个任意常数.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

例3 求方程 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$,

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\quad r_2=r_3=i,\quad r_4=r_5=-i,$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0,$

通解结构 $y = Y + y^*,$

难点： 如何求特解？

方法： 待定系数法.

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$

m次
多项式

设非齐方程特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根，$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$,

可设 $Q(x)=Q_m(x)$, $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$;

m次
多项式

(2) 若λ是特征方程的单根，

$\lambda^2+p\lambda+q=0$, $2\lambda+p\neq 0$,

可设 $Q(x)=xQ_m(x)$, $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$;

(3) 若λ是特征方程的重根，

$\lambda^2+p\lambda+q=0$, $2\lambda+p=0$,

可设 $Q(x)=x^2Q_m(x)$, $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$.

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$, $\quad k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根}, \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

注意 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程(k是重根次数).

例4 求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $r^2-3r+2=0,$

特征根 $r_1=1,\ r_2=2,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x},$

$\because \lambda=2$ 是单根，设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x},$

代入方程, 得 $2Ax+B+2A=x$ $\quad \therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases},$

于是 $y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

$$2.\ f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l\cos\omega x+P_n\sin\omega x]$$ 利用欧拉公式

$$=e^{\lambda x}[P_l\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}]$$

$$=(\frac{P_l}{2}+\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda+i\omega)x}+(\frac{P_l}{2}-\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x},\quad m=\max\{l,n\}$$

设 $y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$, $\quad y_1{}^*=x^kQ_me^{(\lambda+i\omega)x}$,

$$y''+py'+qy=\overline{P}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x}，\ y_2{}^*=x^k\overline{Q}_m e^{(\lambda-i\omega)x},$$

$$\therefore y^*=x^k e^{\lambda x}[Q_m e^{i\omega x}+\overline{Q}_m e^{-i\omega x}]$$

$$=x^k e^{\lambda x}[Q_m(\cos\omega x+i\sin\omega x)+\overline{Q}_m(\cos\omega x-i\sin\omega x)]$$

$$=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式，$m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是根}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是单根}\end{cases},$$

注意上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程(k是重根次数).

例5 求方程 $y''+y=4\sin x$ 的通解.

解 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$,

特征根为$r=\pm i$,齐次方程通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

因为$\lambda=i$ 是特征方程的单根,

故设齐次方程的一个特解为 $y^*=x[A\cos x+B\sin x]$,

代入方程得 $2A=-4,\ 2B=0\ \therefore\ A=-2, B=0$

所求非齐方程特解为 $y^*=-2x\cos x$,

原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$.

例6 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

解 对应齐次方程通解为 $Y = C_1\cos x + C_2\sin x$,

$\because \lambda = 2i$ 不是特征方程的根,

设 $y^* = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$,

$$\begin{cases} -4A - 3D = 0 \\ -3B + 4C = 0 \\ -3C = 0 \\ -3A = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \therefore C = 0,\ A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0,\ D = \frac{4}{9}$$

$$\therefore y^* = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x,$$

原方程通解为$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x.$

例7 求微分方程 $y''-4y'+4y=6x^2+8e^{2x}$ 的特解.

解 设 $y''-4y'+4y=6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y''-4y'+4y=8e^{2x}$ 的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$

$\because r^2-4r+4=0$ $\therefore$ 特征根 $r_{1,2}=2$

$\therefore y_1^*=Ax^2+Bx+C$ $y_2^*=Dx^2e^{2x}$（重根）

$$A=\frac{3}{2}, B=3, C=\frac{9}{4}, D=4$$

$$y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{4}+4x^2e^{2x}.$$

作业

习题10.3

(2, 4, 6)