A

北京航空航天大学

2017 - 2018 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班 号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2018 年 06 月 28 日

A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2=2\}$，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下为（ C ）.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ B. $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}f(r\cos\theta+1,r\sin\theta+1)dr$

C. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ D. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

2. 积分 $\int_L xy^2dx+y\varphi(x)dy$ 与路径无关, 其中 φ 有连续导数, $\varphi(0)=0$. 则 $\varphi(x)=$（ A ）.

A. x^2 B. x^2+C; C. $2x^2$; D. 0.

3. Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$, 取外侧. Σ_1 为右半椭球面. 则（ B ）.

A. $\iint\limits_{\Sigma}ydS=2\iint\limits_{\Sigma_1}ydS$; B. $\iint\limits_{\Sigma}ydzdx=2\iint\limits_{\Sigma_1}ydzdx$;

C. $\iint\limits_{\Sigma}y^2dzdx=2\iint\limits_{\Sigma_1}y^2dzdx$; D. $\iint\limits_{\Sigma}ydzdx=0$.

4. Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 取外侧. Σ_1 为上半球面；Σ_2 为下半球面；Σ_3 为 xOy 平面上的圆盘 $x^2+y^2\le 1$, 取上侧. Γ 为 xOy 平面上的圆周 $x^2+y^2=1$, 从 z 轴正向来看为逆时针方向. 则与 $\int_\Gamma xydx+yzdy+zxdz$ **不相等**的为（ B ）.

A. $-\iint\limits_{\Sigma_1}ydydz+zdzdx+xdxdy$; B. $-\iint\limits_{\Sigma_2}ydydz+zdzdx+xdxdy$;

C. $\iint\limits_{\Sigma_2}ydydz+zdzdx+xdxdy$; D. $-\iint\limits_{\Sigma_3}ydydz+zdzdx+xdxdy$.

5. 设 $u(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是以 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为中心，半径为 R 的球面，极限 $\lim\limits_{R\to 0^+}\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}u(x,y,z)dS=$（ A ）.

A. $u(x_0,y_0,z_0)$; B. $u(0,0,0)$; C. $\frac{4u(x_0,y_0,z_0)}{3}$; D. $\frac{u(x_0,y_0,z_0)}{2}$.

答案：CABBA

二、计算题（每小题 5 分，满分 30 分）

1.. 设向量场 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(2x,-4y,8z)$，求此向量场的旋度.

解：$rot\overrightarrow{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & -4y & 8z \end{vmatrix}=(0,0,0)$

2. 计算 $\int_0^1 dx\int_x^1 x\sin(y^3)dy$

解：$\int_0^1 dx\int_x^1 x\sin(y^3)dy=\int_0^1 dy\int_0^y x\sin(y^3)dx$

$=\int_0^1 \dfrac{y^2}{2}\sin(y^3)dy$

$=\dfrac{1-\cos 1}{6}$

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(z+2x+3y)dxdydz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2z\}$.

解：由对称性，$\iiint\limits_{\Omega}(z+2x+3y)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$

（常用解法 1：直角坐标系）上式=$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}2\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=2\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}rd\theta$

$=4\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=-4\pi\left.\dfrac{\left(\sqrt{1-r^2}\right)^3}{3}\right|_0^1=\dfrac{4\pi}{3}$

（常用解法 2：球坐标）上式=$\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r\cos\varphi+1)r^2\sin\varphi dr$

$=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}(\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{4}+\dfrac{1}{3}\sin\varphi)d\theta=2\pi\int_0^{\pi}(\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{4}+\dfrac{1}{3}\sin\varphi)d\varphi$

$=2\pi(\dfrac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{8}-\dfrac{\cos\varphi}{3})\Big|_0^{\pi}=\dfrac{4\pi}{3}$

4. 计算 $\int_L (\frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{5}y^2)ds$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, l 是椭圆的周长.

解：$\oint_L (\frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{5}y^2)ds = \oint_L \frac{3x^2+4y^2}{10}ds = \int_L \frac{12}{10}ds = \frac{6}{5}\int_L ds = \frac{6}{5}l$

5. 计算 $\int_L 2xydx + x^2dy$，其中 L 为有向折线 OAB. 这里 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.

解：$\int_L 2xydx + x^2dy = \int_{OA} 2xydx + x^2dy + \int_{AB} 2xydx + x^2dy$

$$= 0 + \int_0^1 dy = 1$$

6. 设 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1\,(0 \le z \le 1)$，计算 $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{1-x^2}\,dS$

解：记 $\Sigma_1 : x = \sqrt{1-y^2}, 0 \le z \le 1$

由对称性, $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{1-x^2}\,dS = 2\iint\limits_{\Sigma_1} \sqrt{1-x^2}\,dS = 2\iint\limits_{\substack{-1\le y\le 1\\ 0\le z\le 1}} \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}dydz$

由对称性 $= 4\iint\limits_{\substack{0\le y\le 1\\ 0\le z\le 1}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dydz = 4\int_0^1 dz \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$

$= 4\int_0^1 dz = 4$

三、（10 分） 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\cos x dydz+\sqrt{1-y^2}dzdx+zdxdy$，其中 Σ 为 上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧.

解：法向量为 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\quad 1\right)$

$$\iint\limits_{\Sigma}\cos xdydz+\sqrt{1-y^2}dzdx+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+z\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}:\ x^2+y^2\le1}\left(\frac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+z\right)dxdy=\iint\limits_{D_{xy}:\ x^2+y^2\le1}zdxdy(\text{由对称性})$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}:\ x^2+y^2\le1}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr=\int_0^{2\pi}-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta=\frac{2\pi}{3}$$

四、（10 分）（利用 Green 公式）

计算 $\int_L\dfrac{xdy-ydx}{2x^2+3y^2}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 是以 $(1,1)$ 为中心，4 为半径的圆周，取逆时针方向.

解：$P=\dfrac{-y}{2x^2+3y^2}$，$Q=\dfrac{x}{2x^2+3y^2}$，则当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时，有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

作位于 $\boldsymbol{L}$ 所围区域内部的椭圆 l：$2x^2+3y^2=\varepsilon^2$，方向取瞬时值，记 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 所围成的区域为 $\boldsymbol{D}$，由 Green 公式得：$\oint_L\dfrac{xdy-ydx}{2x^2+3y^2}+\int_l\dfrac{xdy-ydx}{2x^2+3y^2}=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

$$\int_L\frac{xdy-ydx}{2x^2+3y^2}=-\int_l\frac{xdy-ydx}{2x^2+3y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-l}xdy-ydx(Green\text{公式})=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{2x^2+3y^2\le\varepsilon^2}2dxdy=\frac{\sqrt{6}\pi}{3}.$$

注：最后的积分也可以直接计算

$$-l:\begin{cases}x=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cos t\\ y=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\sin t\end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\int_{-l}xdy-ydx=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cos t\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\sin t\right)'-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\sin t\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cos t\right)'\right]dt=\frac{\sqrt{6}\pi\varepsilon^2}{3}$$

五、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{\Sigma} x(z-2y+1)dydz+y(x-z+2)dzdx+z(2y-x-1)dxdy$，其中$\Sigma$是曲面

$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$，取下侧.

解： 添加平面Σ_1:$z=1$ $(x^2+y^2\le 1)$，方向取上侧. 假设Σ,Σ_1所围区域为Ω

由 Gauss 公式得 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x(z-2y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(x-z+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(2y-x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iiint\limits_{\Omega} 2dxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2dz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 2(1-\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 2(1-r)rdr=\frac{2\pi}{3}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} x(z-2y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(x-z+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(2y-x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2y-x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi$$

故 $\iint\limits_{\Sigma} x(z-2y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(x-z+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(2y-x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2\pi}{3}+\pi=\dfrac{5\pi}{3}$

六 、(10 分)(利用 Stokes 公式) 计算 $\int_\Gamma (3y+2e^x)dx+(3z-y^2)dy+(3x+4e^z)dz$,其中$\boldsymbol{\Gamma}$是$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y-z=0.\end{cases}$从 $\boldsymbol{z}$ 轴正向看 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为逆时针方向.

解：设$\sum$为平面$\boldsymbol{x+y-z=0}$上被曲线$\boldsymbol{\Gamma}$所围成的部分，并取$\sum$的法向量向上，则$\sum$法向量的方向余弦$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})$，由 Stokes 公式

$$\text{原式}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3y+2e^x & 3z-y^2 & 3x+4e^z\end{vmatrix}dS=-\iint\limits_{\Sigma}3\frac{\sqrt3}{3}dS=-\sqrt3\pi R^2.$$

注：也可化为$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3y+2e^x & 3z-\cos y & 3x+4e^z\end{vmatrix}=-\iint\limits_{\Sigma}3dydz+3dzdx+3dxdy$ **进行计算.**

七、（10 分）确定函数$f(x),g(x)$满足$f(0)=0,g(0)=1$，且使得下面曲线积分与路径无关：$\int_L\left[\frac{g(x)}{2}y^2-4f(x)y\right]dx+\left[f(x)y+g(x)\right]dy+zdz$.

解: $P=\frac{g(x)}{2}y^2-4f(x)y,Q=f(x)y+g(x),R=z$

由积分与路径无关得：$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$

因此$f'(x)y+g'(x)=g(x)y-4f(x)$，故$\begin{cases}f'(x)=g(x)\\g'(x)=-4f(x)\end{cases}$

设$u=f(x)$，则得到一个二阶线性常系数微分方程$u''+4u=0$

其对应特征方程为$\lambda^2+4=0$

于是原方程(1)的通解为$f(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

代入$f(0)=0,g(0)=1$，得$c_1=0,c_2=\frac{1}{2}$，于是

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x,\quad g(x)=\cos 2x$$