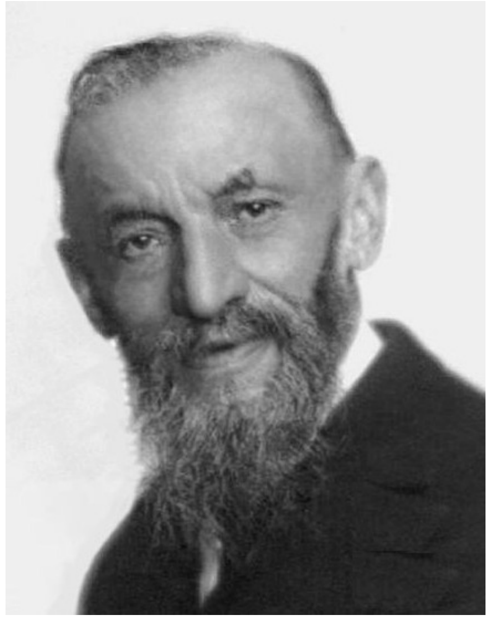
提纲

- 4.1 形式系统
- 4.2 命题逻辑公理系统
- 4.3 一阶谓词逻辑公理系统
- 4.4 一阶理论公理系统*
- 4.5 命题逻辑证明
- 4.6 一阶谓词逻辑证明
- 4.7 理论证明*

逻辑公理—表达思想的初始概念

- 自然数公理
  - $\forall x(s(x) \neq x)$
  - $\forall x \forall y\ (x \neq y \rightarrow s(x) \neq s(y))$
  - $\forall x(x + 0 = x)$
  - $\forall x \forall y(x + s(y) = s(x + y))$
  - $\forall x(x \circ 0 = 0)$
  - $\forall x \forall y(x \circ s(y) = x \circ y + x$
- 自然数公理是实质公理
  - 具体概念：后继(s)，0，$+$，$\circ$，Q
- 自然数公理是所有的自然数命题真值的依据.
- 从自然数公理能推导出所有的自然数命题真值.



Giuseppe Peano
（1858-1932）

形式系统

- 一个形式系统应当包括以下几部分.
  - (1)**各种初始符号**. 初始符号是一个形式系统的“字母”，经解释后其中一部分是初始概念.
  - (2)**形成规则**. 规定初始符号组成各种合适符号序列的规则. 经解释后合式符号序列是一子句，称为系统里的合式公式或命题.
  - (3)**公理**. 把某些所要肯定的公式选出，作为推导其它所要肯定的公式的出发点，这些作为出发点的公式称为公理.
  - (4)**变形规则**. 变形规则规定如何从公理和已经推导出的一个或几个公式经过符号变换而推导出另一公式. 经过解释，变形规则就是推理规则.
  - 应用变形规则进行推导可以得到一系列公式，这些公式经过解释是系统的定理.
- 形式系统完全由一套**表意符号**建立，它能**克服日常语言的歧义性，使概念、判断、推理精确化**.

希尔伯特证明论

David Hilbert
1862-1943

- 通过形式化第一次使证明本身成为数学研究对象.
- 给出**初始符号**集合
- 构造**合式公式**规则
- $\boldsymbol{\Gamma \vdash Q}$**的证明**，构造出$\boldsymbol{1\sim m}$个合式公式序列，其中，第$\boldsymbol{m}$个合式公式是$\boldsymbol{A}$，并且$\boldsymbol{1\sim m}$合式公式
  - 或者是前提
  - 或者是公理
  - 或者是推导规则
- 形式证明的正确性是可验证的.

公理系统

定义4.1.1 从一些公理出发，根据演绎定理，推导出一系列定理，由此形成的演绎体系，称为公理系统.

- 公理系统的组成：
  - **符号集**；
  - **公式集**，公式是用于表达命题的符号串；
  - **公理集**，是公式集的真子集
    - 公理是用于表达推理由之出发的初始肯定命题；
  - **推理规则集**
    - 推理规则是由公理及已证定理得出新定理的规则；
  - **定理集**，表达了本系统肯定的所有命题.

提纲

- 4.1 形式系统
- 4.2 命题逻辑公理系统
- 4.3 一阶谓词逻辑公理系统
- 4.4 一阶理论公理系统*
- 4.5 命题逻辑证明
- 4.6 一阶谓词逻辑证明
- 4.7 理论证明*

主要内容

- 命题逻辑公理系统
  - 公理系统
  - 形式推演
  - 演绎定理

命题逻辑公理系统

命题逻辑的公理系统定义如下:

(1) **符号集合**:

- **命题变元**: $p_1, p_2, \dots,$
- **联结词符号**: $\neg, \rightarrow$
- **括号**: (,)

(2) **形成规则**(公式定义):

- 若Q是**命题变元**，则Q是公式;
- 若Q是公式，则$\neg Q$是公式;
- 若Q, R是公式，则 $Q \rightarrow R$ 是公式.

命题逻辑公理系统

命题逻辑的公理系统定义如下：

(3) **公理**：设Q, R, P为任意公式

- 公理模式$\mathscr{A}_1$：$Q \to (R \to Q)$ **肯定后件律**
- 公理模式$\mathscr{A}_2$：$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ **蕴含词分配律**
- 公理模式$\mathscr{A}_3$：$(\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$ **换位律**

(4) **推理规则**：(分离规则，MP(Modus Ponents)规则)

- 若Q和$Q \to R$成立，则R成立.
- Q和$Q \to R$称为**前提**，R称为**结论**.

(5) **定理集**

- 公理集和推理规则集给定后，定理集就完全确定了，因此可省略定理集

命题逻辑公理系统

命题逻辑的公理系统定义如下:

(1) 符号集合：

- 命题变元：$p_1, p_2, \dots,$
- 联结词符号：$\neg, \rightarrow$
- 括号：(,)

(2) 形成规则(公式定义):

- 若p是命题变元，则p是公式；
- 若Q是公式，则$\neg Q$是公式；
- 若Q, R是公式，则$Q \rightarrow R$是公式

(3) 公理：设Q, R, P为任意公式

- 公理模式$\mathscr{A}_1$：$Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$ 肯定后件律
- 公理模式$\mathscr{A}_2$：$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ 蕴含词分配律
- 公理模式$\mathscr{A}_3$：$(\neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow (R \rightarrow Q)$ 换位律

(4) 推理规则：(分离规则，MP(Modus Ponents)规则)

- 若Q和$Q \rightarrow R$成立，则R成立．其中，Q和$Q \rightarrow R$称为前提，R称为结论．

(5) 定理集（公理集和推理规则集给定后，定理集就完全确定了，因此可省略定理集）

缩写定义

- 命题公理系统中仅使用了¬、→联结词符号，

而其他联结词符号∨,∧,↔,⊕**可以认为是缩写公式**，

用≡表示缩写定义

(1) $\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R} \equiv \neg \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$

(2) $\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R} \equiv \neg(\boldsymbol{Q} \to \neg \boldsymbol{R})$

(3) $\boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R} \equiv (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}) \wedge (\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Q})$

(4) $\boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{R} \equiv \neg(\boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R})$

公理模式

- 公理模式是**相同形式的公式的集合**

公理：设Q, R, P为任意公式

公理模式$\mathscr{A}_1$：$Q \to (R \to Q)$

公理模式$\mathscr{A}_2$：$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

公理模式$\mathscr{A}_3$：$(\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$

- 公理都是**永真式**，是不加证明而肯定的永真式
- 除了以上公理外，有时还需要**其他推理前提**，记为**公式集合Γ**.
- 已证明过的定理可以用作以后推理的前提.

记号：用Γ或加下标的Γ表示公式集，用Q, R, P或加下标的Q, R, P表示公式.

公理系统

- 弗雷格公理系统
  - $Q \to (R \to Q)$
  - $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$
  - $(Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$
  - $\neg\neg Q \to Q$
  - $Q \to \neg\neg Q$
- 卢卡西维茨公理系统
  - $Q \to (R \to Q)$
  - $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
  - $(\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$
- 罗素公理系统
  - $Q \vee Q \to Q$
  - $Q \to Q \vee R$
  - $Q \vee R \to R \vee Q$
  - $(P \to Q) \to (P \vee R \to Q \vee R)$

推演(演绎)

- 设Γ是合式公式集合，Q是合式公式

(1) **如果Γ成立，则Q必然成立**，则称**Γ推演(演绎)出Q**，记为$\Gamma \vdash Q$

(2) Γ称为推演的**前提集**，称Q为**结论**.

- 推演（演绎）
  - 命题逻辑公理系统
  - 谓词逻辑公理系统

证明

- **证明（Proof）**是指**从前提开始必然到达结论的一系列推理步骤**
  - 推理步骤可以是前提、公理、或由推导规则推演出的公式.
- **有效证明**的特征：
  - 如果前提成立，则结论必然成立.
- **可靠证明**的特征：
  - 前提是成立，并且推理有效.

形式推演

定义4.2.1 设Γ是公式集．若公式序列$A_1, A_2, \ldots, A_n$中的**每个公式A_i**满足以下条件之一：

(1) A_i是公理；

(2) $A_i \in \Gamma$；

(3) 有j，$k < i$，使A_i由A_j，A_k用MP规则推出．

若A_j和$A_k = A_j \to A_i$成立，则A_i成立

则称该序列为**公式A_n的从公式集Γ的一个推演**，

记为$\Gamma \vdash A_n$．其中，Γ称为推演的**前提集**，A_n称为**结论**．

形式推演

定义4.2.1 设Γ是公式集．若公式序列$A_1, A_2, \dots, A_n$中的**每个公式**A_i满足以下条件之一：

(1) A_i是公理；

(2) $A_i \in \Gamma$；

(3) 有j，$k < i$，使A_i由A_j，A_k用MP规则推出．

则称该序列为**公式A_n的从公式集Γ的一个推演**，

记为$\Gamma \vdash A_n$．其中，Γ称为推演的**前提集**，A_n称为**结论**．

- 每个公理本身即是它的一个证明
- 每个公理都是定理
- Γ中每个公式A本身即是它的一个从Γ的推演
- 如果公式Q和$Q \to R$ 都是Γ的逻辑推论，则R也是Γ的逻辑推论