第18章 习题课

例1 求 $\iint\limits_{\Sigma}(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\,dS$, 其中 α,β,γ 为实数,

且 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=a^2\}$.

例2 已知曲面壳 $z=3-(x^2+y^2)$ 的密度函数为 $\mu=x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 $z=1$ 以上部分 Σ 的质量 M .

例3 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1, z=2$ 所围成的立体的表面外侧 .

例4 计算$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx$

$+[f(x,y,z)+z]dxdy$, 其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数,

Σ 为平面 $x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧.

例5 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

其中Σ是由$\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$绕y轴旋转一周所成

的曲面，法向量与y轴正方向夹角大于$\dfrac{\pi}{2}$.

例6 求$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

Σ为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧面.

例7 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dS$， 其中

Σ是曲面$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(z-3)^2}{25}=1$的外侧,

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦.

例8 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$S$是

$1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}(z\geq 0)$,取上侧.

例9 求$I=\oint_{\Gamma}(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(y^2+x^2)dz$, 其中$\Gamma$是球面$x^2+y^2+z^2=2bx$与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$的交线($z\geq 0$)，Γ的方向规定为沿Γ的方向运动时，从z轴正向往下看，曲线Γ所围球面部分总在左边.

例10 求$I=\oint_{L}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$,其中$L$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从$z$轴正向看去,$L$为逆时针方向.

例11 设V是$Gauss$公式中的闭区域, $u,v\in C^1(V)$,

$\vec{n}$表示V的边界曲面S的单位外法向量场,求证:

(1) $\displaystyle\oiint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_V \Delta u dV$;

(2) $\displaystyle\oiint_S v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v dV+\iiint_V v\Delta u dV$;

(3) $\displaystyle\oiint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} dS=\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dV$.

例12 设Σ是分片光滑的闭曲面,$\vec{n}$为Σ的单位外法向量,证明

$$I=\oiint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos(\vec{n},x) & \cos(\vec{n},y) & \cos(\vec{n},z)\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=0$$

在下面两种情况下都成立

(1)P,Q,R在$\overline{\Omega}$上二阶连续可微,Ω是Σ所围的立体;

(2)P,Q,R在Σ上一节连续可微.