北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

Fourier级数的定义及展开

1. 正弦级数与余弦级数
2. 以 2l 为周期的函数的Fourier级数展开

正弦级数与余弦级数

1. 奇函数和偶函数的 Fourier 级数

定理 (1)周期为2π的奇函数$f(x)$的$Fourier$系数为

$$a_n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

(2)周期为2π的偶函数$f(x)$的$Fourier$系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0 \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

正弦级数与余弦级数

定义

若$f(x)$为奇函数，则其*Fourier*级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$称为正弦级数；

若$f(x)$为偶函数，则其*Fourier*级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$称为余弦级数.

正弦级数与余弦级数

【例1】设$f(x)$是周期为2π的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$,将$f(x)$展开成Fourier级数.

解 $\because f(x)$为2π为周期的奇函数

$$\therefore a_n = 0, \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$$

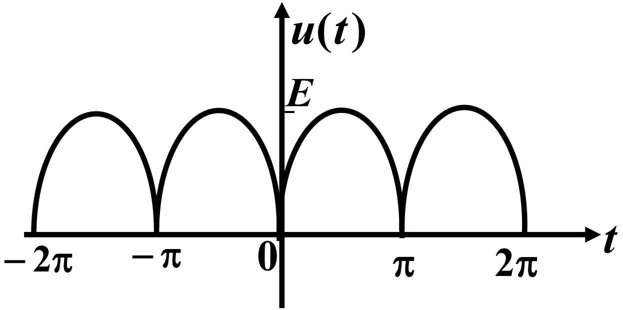
$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \quad (-\infty < x < +\infty; x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots)$$

正弦级数与余弦级数

【例2】将周期函数$u(t)=E|\sin t|$展开成$Fourier$级数,其中

$E>0$为常数.



解

$\because f(x)$为偶函数

$\therefore b_n=0,\quad (n=1,2,\cdots)$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t dt=\frac{4E}{\pi},$$

正弦级数与余弦级数

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\cos nt dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} E\sin t\cos nt dt$$

$$= \frac{E}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^{\pi} \qquad (n \neq 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{[(2k)^2-1]\pi}, & \text{当} n = 2k \\ 0, & \text{当} n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\cos t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} E\sin t\cos t dt = 0,$$

$$u(t) = \frac{2E}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}\right] \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

正弦级数与余弦级数

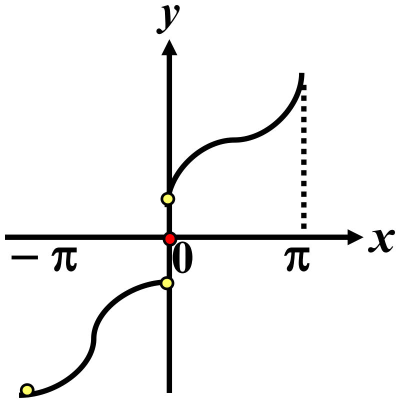
2.非周期函数的周期性延拓

设$f(x)$定义在$[0,\pi]$上，延拓成以2π为周期的函数$F(x)$.

令 $F(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x\le \pi \\ g(x) & -\pi<x<0 \end{cases}$，且$F(x+2\pi)=F(x)$，

则有如下两种延拓方式:

奇延拓: $g(x)=-f(-x)$，　$F(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\le \pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$

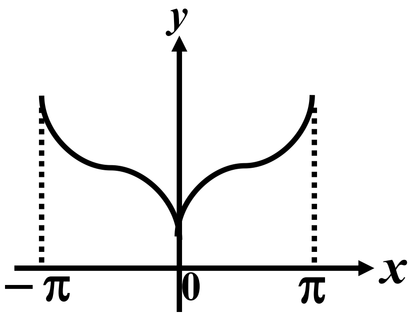


$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0\le x\le \pi)$$

正弦级数与余弦级数

偶延拓： $g(x) = f(-x)$

则$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$



$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 \le x \le \pi)$$

非周期函数，不同延拓下*Fourier*级数表达式不唯一.

正弦级数与余弦级数

【例3】 将$f(x)=x+1\,(0\le x\le \pi)$分别展开为正弦级数和余项级数.

解 (1)求正弦级数. 对$f(x)$进行奇延拓和周期延拓

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k+1} & \text{当} n=2k+1\\ -\dfrac{1}{k} & \text{当} n=2k\end{cases}$$

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\cdots\right]$$

$$(0<x<\pi)$$

正弦级数与余弦级数

(2)求余弦级数. 对$f(x)$进行偶延拓和周期延拓

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)dx=\pi+2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0 & \text{当}n=2k\\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi} & \text{当}n=2k+1\end{cases}$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots] \quad (0\le x\le\pi)$$

正弦级数与余弦级数

【例4】如何将定义在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的可积函数$f(x)$延拓，使其*Fourier*级数为$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x$.

解 $\because f(x)$的*Fourier*级数缺少$\sin nx$项

$\therefore f(x)$是以2π为周期的偶函数.

$$a_{2n}=0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nxdx]$$

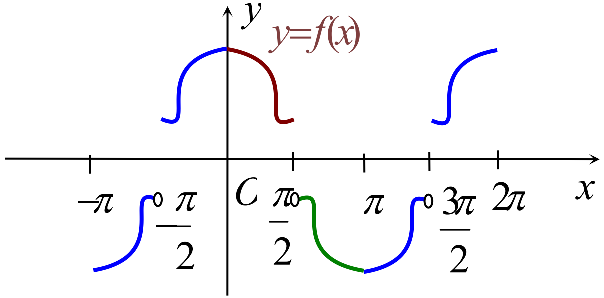
$$\overset{u=\pi-x}{=}-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-u)\cos 2n(\pi-u)du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos 2nxdx$$

正弦级数与余弦级数

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(\pi - x) + f(x)] \cos 2nx dx = 0.$$

故可令 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi],\ \ f(x) = -f(\pi - x).$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -f(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x \le \pi, \\ f(-x), & -\frac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ -f(\pi + x), & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



以2l为周期的函数的Fourier级数

定理 设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理的条件，
则它的$Fourier$级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中 $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\qquad (n=1,2,\cdots)$$

以2l为周期的函数的Fourier级数

注 如果$f(x)$为奇函数,则其Fourier级数展开式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, (n = 1,2,\cdots)$

如果$f(x)$为偶函数,则其Fourier级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, (n = 0,1,2,\cdots)$

以2l为周期的函数的Fourier级数

证明 令$z=\dfrac{\pi x}{l}, -l\le x\le l \quad \Rightarrow -\pi\le z\le \pi,$

设$f(x)=f(\dfrac{lz}{\pi})=F(z)$, $F(z)$以2π为周期.

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

其中$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz dz, b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz dz.$

$$\therefore\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz dz=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx, (z=\frac{\pi x}{l})$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz dz=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx.$$

以2l为周期的函数的Fourier级数

【例5】设$f(x)$是周期为4的周期函数,它在$[-2,2)$上的表达式

为$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}$,将它展开成Fourier级数.

解 $\because l=2 \quad \therefore a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx \;=k,$

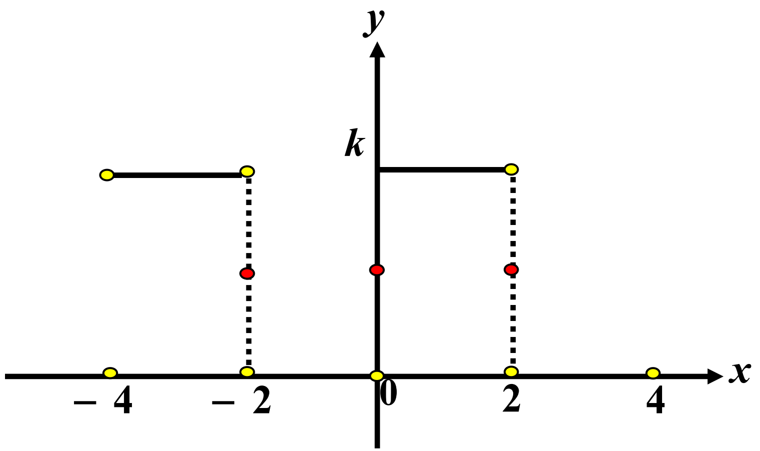
$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}xdx \;=0,\quad (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\sin\frac{n\pi}{2}xdx \;=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\frac{2k}{n\pi} & \text{当}n=1,3,5,\cdots\\ 0 & \text{当}n=2,4,6,\cdots\end{cases},$$

以2l为周期的函数的Fourier级数

$$\therefore f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right)$$

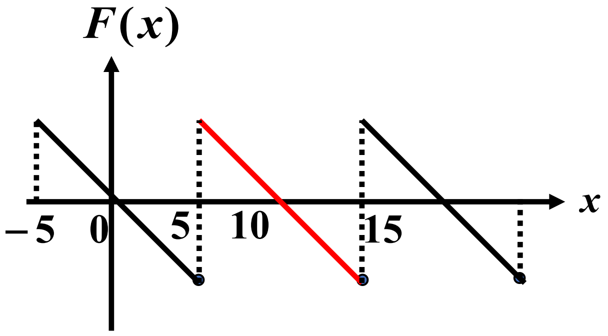
$$(-\infty<x<+\infty;x\neq 0,\pm 2,\pm 4,\cdots)$$



以2l为周期的函数的Fourier级数

【例6】将函数$f(x)=10-x,5<x<15$展开为$Fourier$级数.

解1　对$f(x)$作周期为10的周期延拓,得周期函数$F(x)$



$$F(x)=-x,-5<x<5$$

$$a_n=0,\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5(-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx=(-1)^n\frac{10}{n\pi},$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore F(x)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5},\quad x\neq 5(2k+1)$$

$$\therefore 10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5},5<x<15$$

解2 $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

令$t = x + 10$ $$= \frac{1}{5}\int_{5}^{15} F(t-10)\sin\frac{n\pi t}{5}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int_{5}^{15} F(t)\sin\frac{n\pi t}{5}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int_{5}^{15} (10-t)\sin\frac{n\pi t}{5}dx \quad = (-1)^n\frac{10}{n\pi},$$

所以$10 - x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x, \quad 5 < x < 15$

作业

习题13.1：4（2，3，4），5（2），7

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院