北京航空航天大学

2015－2016 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ） 》

(A 卷)

班号 ________　　学号________　　姓名________

主讲教师________　　考场________　　成绩________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成　绩									
阅卷人									
校对人									

2016 年 01 月 20 日

一、 选择题（每题 4 分，满 20 分）

1. 下列命题中错误的是 （ D ）

A. 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的原函数是常数，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒为 0；

B. 若 $f(x)$在$[a,b]$上可积, 则 $f(x)$在$[a,b]$上必有界 ；

C. 若 $f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$|f(x)|$在区间$[a,b]$上也可积 ；

D. 若 $f(x)$在$[a,b]$上不连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上必不可积 .

2. 设 $f(x)$满足等式 $f(x)=x^2-2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$（ B ）

A. 1； B. $\frac{1}{9}$； C. -1； D. $-\frac{1}{3}$.

3. 设函数 $f(x)$ 可导，则（ C ）

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$； B. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$；

C. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)$; D. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)=f(x)+C$.

4. 下列广义积分中，发散的是（ C ）

A. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$； B. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$；

C. $\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin x}{x}\mathrm{d}x$； D. $\int_1^{+\infty}e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

5. 瑕积分 $\int_1^3\frac{dx}{x\ln x}=$（ C ）

A. $\ln\ln 3$； B. 0； C. $+\infty$； D. 1.

二、　计算题（每题 6 分，满分 30 分）

1. $\int \frac{2x-3}{x^2+2x+5}dx$

解：

$$\int \frac{2x-3}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{(2x+2)-5}{x^2+2x+5}dx$$

$$= \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} - 5\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$$

$$= \ln(x^2+2x+5) - 5\int \frac{1}{(x+1)^2+2^2}dx$$

$$= \ln(x^2+2x+5) - \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

建议：拆成两项 2 分，积分计算各 2 分。

2. $\int_{-1}^{1}(x^5\sin^6 x\cos^3 x+2)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

解：由对称性：$\int_{-1}^{1}x^5\sin^6 x\cos^3 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 0,$

$$\text{原式} = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\times\frac{1}{2}\pi = \pi$$

（其中 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$ 可以看做圆心在原点，半径为 1 的上半圆的面积，

也可以利用公式 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ 来计算.）

建议：对称性 3 分，剩下计算 3 分。

3. $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

解：令 $\sqrt{x} = t$，即 $x = t^2$，则 $dx = 2tdt$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t}2tdt = \int_0^1\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dx = 2-2\ln(1+t)\Big|_0^1 = 2-2\ln 2$$

建议：根式带换 3 分，剩下计算 3 分。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^2(1-\cos x)}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)\cdot 2x}{2x^3}=1$

建议：等价代换 2 分，变上限求导 3 分，结果 1 分。

5. 已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\,dx$, 求 $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

解：

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)=\frac{1}{2}\left[x^2f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

建议：分部积分 2 分， $f'(x)$ 计算 2 分，结果 2 分。

三、 （本题 8 分）

利用定积分定义，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln 1+\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots\ln(1+\frac{n-1}{n})\right)$$ -------2 分

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx$$ -------2 分

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln 2-\left[1-\ln(1+x)\Big|_0^1\right]=2\ln 2-1,$$ -------2 分

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}\right)}=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}.$$ -------2 分

四、 （本题 10 分）

求二阶线性非齐次常微分方程 $y''+2y'-3y=xe^{-x}$ 的通解.

解： 特征方程：$\lambda^2+2\lambda-3=0$. -------2 分

容易求得两个特征根为：$\lambda_1=-3,\lambda_2=1$. -------1 分

对应齐次方程的通解为：$Y=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}$. -------1 分

因为-1不是特征根，我们设非齐次方程的特解 $y^*=(Ax+B)e^{-x}$. -------2 分

带入方程，我们有 $(-4Ax-4B)e^{-x}=xe^{-x}$.

所以，$A=-\dfrac{1}{4},B=0$, -------2 分

于是非齐次方程的特解为 $y^*=-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$. -------1 分

非齐次方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$. -------1 分

五、 （本题 12 分，每小题 6 分）

判断下列广义积分的敛散性，若收敛，并判别是绝对收敛或条件收敛.

（1）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$； （2）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx$.

解：注意到：

$$\left|\frac{\ln x}{x^2}\arctan x\right|\le\frac{\pi}{2}\left|\frac{\ln x}{x^2}\right|=\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x^2},\qquad \forall x\in(1,\infty).$$ -------2 分

对于任意的 $\alpha\in(1,2)$，我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{2-\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(2-\alpha)x^{1-\alpha}}=\frac{1}{2-\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{2-\alpha}}=0.$$ -------2 分

因为 $\alpha\in(1,2)$，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ 收敛．由比较判别法，我们可知无穷积分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 收敛.进而，

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\arctan x dx$ 绝对收敛．-----2 分

(注：$x\to\infty$ 时，$\frac{\ln x}{x^2}\arctan x\sim\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x^2}$，原广义积分与 $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 具有相同的敛散性.)

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx$.

解：首先，令 $F(A)=\int_1^{A}\cos 2x dx=\frac{1}{2}[\sin 2A-\sin 2]$，$|F(A)|\le 1$. -------1 分

另一方面，我们注意到函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调递减并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0,$ -------1 分

由 Dirchilet 判别法可知，无穷积分 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛. -------1 分

其次，注意到 $\left|\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\right|\ge\frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x}}=\frac{\cos 4x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos 4x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. -------1 分

类似于 $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 的证明，我们可知无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{2\sqrt{x}}dx$ 收敛. -------1 分

又因为无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 发散，于是，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|dx$ 发散. -------1 分

进而，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}dx$ 条件收敛。

六、 （本题 10 分）

过坐标原点 $(0,0)$ 作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成一平面图形 D，计算（1）D 的面积；（2）D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解：假设切点坐标为 (x_0,y_0)， -------1 分

则由曲线方程及 (x_0,y_0) 处切线方程 $\begin{cases}y_0=\ln x_0\\ y_0=\frac{1}{x_0}x_0=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=e\\ y_0=1\end{cases}$， -------2 分

从而切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$. -------1 分

则平面图形 D 的面积为 $S=\int_0^1\frac{x}{e}dx-\int_1^e(\frac{x}{e}-\ln x)dx=\frac{e}{2}-1;$

-------3 分（积分公式 2 分，结果 1 分）

D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

$$V=\pi\left[\int_0^e(\frac{x}{e})^2dx-\int_1^e(\ln x)^2dx\right]=(2-\frac{2e}{3})\pi.$$

-------3 分（积分公式 2 分，结果 1 分）

七、　（本题 10 分）

设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，满足$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$，证明：

函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个零点.

证明:

方法一：　若 $f(x)\equiv 0$, 则结论成立；　-------1 分

若连续函数 $f(x)$ 不恒为 0，则 $f(x)$ 必在 $(0,\pi)$ 内存在零点.

否则若函数在区间$[0,\pi]$上不变号，这与已知条件$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.　-------2 分

(或由积分中值定理，$\exists\xi\in(0,\pi)$，满足$0=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(\pi-0)$，即 $f(\xi)=0.$)

假定 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内只有唯一零点 x_0，$f(x_0)=0$,　-------1 分

则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 及 (x_0,π) 上异号,　-------1 分

从而 $g(x)=f(x)(\cos x-\cos x_0)$ 在$[0,\pi]$上不变号, -------1 分

且 $g(x)$ 不恒为 0，所以$\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos x_0)\mathrm{d}x$ 严格大于 0 或小于 0，-------2 分

而由已知条件

$\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos x_0)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x-\cos x_0\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$，矛盾, -------1 分

所以假设不成立，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个零点.　-------1 分

方法二：　设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，　-------1 分

则由已知条件知 $F(0)=F(\pi)=0$，　-------1 分

又由 $f(x)$在$[0,\pi]$的连续性可知 $F(x)$ 在$[0,\pi]$上可导，且 $F'(x)=f(x)$，　-------1 分

则 $0=\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x$,

-------2 分

由积分第一中值定理，$\exists\xi\in(0,\pi)$，满足

$\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=F(\xi)\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=2F(\xi)=0$.　-------2 分

即 $\exists\xi\in(0,\pi)$ $F(0)=F(\xi)=F(\pi)$，　-------1 分

在 $[0,\xi],[\xi,\pi]$ 上分别应用罗尔定理，可得 $F'(x)$ 即 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个零点.

-------2 分

八、 附加题(本题 10 分)

设在 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，又 $f(x)$ 不恒为零，

证明：$\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \ge 4\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$.　　(提示：$|f(x)|$ 在 $(0,1)$ 内取到最大值)

证 明 ： 由 条 件 知 $|f(x)|$ 在 $(0,1)$ 内 取 到 最 大 值 ， 假 定 $x_0 \in (0,1)$ 为 最 大 值 点 ， 即 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. **-------1 分**

在 $[0,x_0],[x_0,1]$ 上分别对 $f(x)$ 使用 Lagrange 中值定理可得 $\exists \xi \in (0,x_0), \eta \in (x_0,1)$, 满足

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi), \quad \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\eta).$$ **------4 分（每个公式 2 分）**

则

$$\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \ge \int_\xi^\eta |f''(x)|\mathrm{d}x \ge \left|\int_\xi^\eta f''(x)\mathrm{d}x\right|$$ **-------2 分（每个不等式放缩 1 分）**

$$=|f'(\eta)-f'(\xi)|$$ **-------1 分**

$$=\left|\frac{-f(x_0)}{1-x_0}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|=|f(x_0)|\left(\frac{1}{1-x_0}+\frac{1}{x_0}\right)$$

$$=|f(x_0)|\frac{1}{x_0(1-x_0)}\ge 4|f(x_0)|.$$ **-------2 分**

故有　$\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \ge 4\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$.