§3 一致收敛函数列与一致收敛函数项级数的分析性质

---了解基本结论

连续性

定理3. 1（函数列极限函数的连续性） 设函数列 $S_n(x), n=1,2,\ldots$在I上连续，且$\{S_n(x)\}$在I上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$在I上连续. 即$\forall x_0 \in I$，

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0),$$

也即是

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} S_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} S_n(x)).$$

两个极限运算交换顺序

定理3.2(函数项级数和函数的连续性) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且若 $u_n(x)$ 在 I 上连续，则 $S(x)$ 在 I 上连续. 即 $\forall x_0 \in I$,

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

求极限运算与无限求和运算交换顺序

定理3.1的证明 $\forall x_0 \in I$, 由于

$$|S(x)-S(x_0)| \le |S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|$$

又因为$S_n(x)$一致收敛到$S(x)$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$, $s.t.$ $\forall n > N, \forall x \in I$,有

$|S_n(x)-S(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}, |S_n(x_0)-S(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$成立,

取定一个$n > N$,由$S_n(x) \in C_I$,则$\exists \delta > 0$,

当 $|x-x_0| < \delta$时,有 $|S_n(x)-S_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$,

$\therefore |S(x)-S(x_0)| < \varepsilon$. **定理得证.**

例1 (1) 设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$,证明$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

证明 由于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，且$\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

(2) 已知$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$,求$\lim_{x\to 1}S(x)$

解 因为$|u_n(x)|\le\left(\frac{|x|}{3}\right)^n$,所以当$|x|<2$时,$|u_n(x)|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[-2,2]$上一致收敛, 于是$S(x)$在$[-2,2]$上连续,

$$\therefore\lim_{x\to 1}S(x)=S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}.$$

例2（内闭一致收敛）

(1) 证明$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上连续.

证明 虽然$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛，但任取$\delta>0$，它在$[\delta,+\infty)$上一致收敛. 因此$S(x)$在$[\delta,+\infty)$上连续. 由于$\delta$的任意性，因此$S(x)$在$(0,+\infty)$上连续.

(2) 证明：$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{x}{\ln n})^n$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

证明 记$u_n(x)=(\frac{x}{\ln n})^n$，则其极限函数为0，

$$\beta_n=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|u_n(x)-0|\geq u_n(\ln n)=1$$

因此$u_n(x)$不一致收敛于0,级数在$(-\infty,+\infty)$不一致收敛.

但在任意的区间$[-M,M](M>0)$上，由$\left|(\frac{x}{\ln n})^n\right|\leq(\frac{M}{\ln n})^n$,

而$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{M}{\ln n})^n$收敛，可知$\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{x}{\ln n})^n$在$[-M,M]$上一致收敛.

由M的任意性，$S(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

内闭一致收敛

若函数项级数在(a, b)上不一致收敛，但是在该开区内的任意闭子区间$[c, d]$上都是一致收敛，称函数项级数在开区间(a, b)上**内闭一致收敛**.

因为连续性是逐点定义的，函数项级数和函数的连续性定理(定理3.2)中的一致收敛条件，改为**内闭一致收敛**，结论依然成立.

定理3.3 (Dini定理)

设$S_n(x)\in C[a,b], n=1,2,\ldots,$ 且函数列收敛于$S(x)$,

$S(x)\in C[a,b]$, 若对任意给定x, $\{S_n(x)\}$单调,

则$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$.

定理（级数形式）

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$定义在$[a,b]$上, 且$u_n(x)\in C[a,b], u_n(x)\geq 0.$

若其和$S(x)\in C[a,b]$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛 .

可积性

定理3.4（函数列极限函数的可积性）

设$S_n(x)\in C[a,b], n=1,2,\ldots,$ 且$\{S_n(x)\}\xrightarrow{uni}S(x)(n\to\infty)$,

则$S(x)\in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(\lim_{n\to\infty}S_n(x))\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x$$

极限运算与积分运算交换顺序

证明　由定理3. 1知，$S(x)\in C[a,b]$, $\therefore S(x)\in R[a,b]$.

由于$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收于$S(x)$,因此$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N(\varepsilon)>0$，$s.t.\ \forall n>N,\forall x\in[a,b]$,有$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

所以当$n>N$时，

$$\left|\int_a^b S_n(x)dx-\int_a^b S(x)dx\right|=\left|\int_a^b [S_n(x)-S(x)]dx\right|\le(b-a)\varepsilon.$$

于是有，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

定理3.5(函数项级数的逐项积分)

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$,

且$u_n(x)\in C[a,b]$, $n=1,2,\ldots$, 则$S(x)\in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x .$$

求积分运算与无限求和运算交换顺序

注 定理3.4与定理3.5的连续条件改为可积,

结论仍然成立.

基本要求: 一致收敛+可积 $\Rightarrow$ 可逐项积分

例3 设$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$,求$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

解 因为$\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}, n=1,2,\ldots$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,

由Weierstrass判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$在$[0,\pi]$上一致收敛,

且$\dfrac{\cos nx}{n^2}\in C[0,\pi], n=1,2,\ldots$

故在$[0,\pi]$上可逐项积分，于是

$$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x=0.$$

可导性

定理3.6（函数列极限函数的可导性）

设函数列$\{S_n(x)\}, n=1,2,\cdots$在$[a,b]$上可导，且

（1）$S_n'(x)\in C[a,b]$,

（2）$\{S_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于某个 $g(x)$,

（3）至少存在某个 $x_0\in[a,b]$,使得$\{S_n(x_0)\}$收敛，

则$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于某个可导 函数$S(x)$,且有

$$S'(x)=g(x)$$

$S'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续

即 $$[\lim_{n\to\infty} S_n(x)]' = \lim_{n\to\infty} S_n'(x).$$

极限运算与求导运算交换顺序

证明 ① 首先证明$S_n(x)$一致收敛,

由条件(1),对任意$x\in[a,b]$,总有

$$S_n(x)-S_n(x_0)=\int_{x_0}^{x}S_n'(t)\mathrm{d}t,\ S_m(x)-S_m(x_0)=\int_{x_0}^{x}S_m'(t)\mathrm{d}t$$

由条件(3)以及数列的Cauchy收敛原理

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N^*,\ s.t,\ \forall m,n>N_1,\text{有}\left|S_m(x_0)-S_n(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

再由条件(2),$\forall\varepsilon>0,\exists N_2\in N^*,\ s.t,\ \forall m,n>N_2$,有

$$\left|S_n'(x)-S_m'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{b-a},$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$m,n>N$时,有

$$|S_m(x)-S_n(x)| \le |S_m(x_0)-S_n(x_0)| + \left|\int_{x_0}^{x}(S_m'(t)-S_n'(t))\mathrm{d}t\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}+\int_{x_0}^{x}|S_m'(t)-S_n'(t)|dt \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{|x_0-x|}{b-a}<\varepsilon.$$

由Cauchy收敛原理知 $S_n(x)$一致收敛 .

② 设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$ 由积分换序定理:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} S_n'(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t,$$

$$=\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-S_n(x_0)]=S(x)-S(x_0).$$

$$\therefore S(x)=S(x_0)+\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

$$\therefore S'(x)=g(x)$$

定理3.7(函数项级数的逐项求导)

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上满足下面条件：

(1) $u_n'(x)\in C[a,b]$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$g(x)$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$至少在一点$x_0$处收敛,

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，其和 $S(x)$,

满足$S'(x)=g(x)$, 且$S'(x)\in C[a,b]$, 即有：

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$$

求导运算与无限求和运算交换顺序

注意:级数一致收敛并不能保证可以逐项求导.

例如，级数 $$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2^2 x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^2 x}{n^2}+\cdots$$

在任何区间$[a,b]$上都是一致收敛的.

逐项求导后得级数:

$$\cos x+\cos 2^2 x+\cdots+\cos n^2 x+\cdots,$$

因其一般项不趋于零，所以对于任意值 x 都是发散的.

所以原级数不可以逐项求导.

例4 证明$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导函数,并求$f''(x)$.

解 易知$\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\frac{\cos nx}{n^3}$,$\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)''=-\frac{\sin nx}{n^2}$

$\because \left|\frac{\sin nx}{n^4}\right|\le\frac{1}{n^4}$, $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$, $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$,且

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$均在$(-\infty,+\infty)$上收敛,

则由Weierstrass判别法知,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$,$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\sin nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

$$\therefore\ f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}\qquad f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

导函数的连续性由定理 3.7立得，

$\therefore\ f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上由二阶连续导数，

且$f''(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$.

例5 证明 *Riemann* 函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中连续，且各阶导函数在区间 $(1,+\infty)$ 连续.

证明 设 $u_n(x)=\frac{1}{n^x}$，则 $u_n'(x)=-\frac{\ln n}{n^x}$，

1. 易证 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上逐点收敛，

但不一致收敛．　所以不能直接用定理4. 2

2. $\forall[a,b]\subset(1,+\infty), a>1, \forall x\in[a,b]$，有

$$\left|u_n'(x)\right|=\frac{\ln n}{n^x}\le\frac{\ln n}{n^a}$$

又因为$a>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$收敛，

内闭一致收敛

所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{\ln n}{n^x}$在$[a,b]$上一致收敛.

从而$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'(x)$在$[a,b]$上连续，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$$

由$[a,b]$的任意性可知$f'(x)$在$(1,+\infty)$上连续.

其他阶导数的连续性类似可证.

注　因为可导也是逐点定义的，函数项级数逐项求导定理(定理3.7)中的一致收敛条件，也可改为内闭一致收敛.

小结

1. 一致收敛函数列的极限函数的分析性质
2. 一致收敛函数项级数的和函数的分析性质
3. 内闭一致收敛性