本章内容

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言
- 论域、结构与模型

一阶理论语言

- **定义3.4.1** 给定领域知识符号集合，即给定领域的谓词和函词语言，称为一阶理论语言。
- 一阶理论语言

$$\boldsymbol{L_0^2} =< \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus\}, \{\forall, \exists\}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C} >$$

其中$\boldsymbol{P}$是谓词符号集合，$\boldsymbol{F}$是函词符号集合，$\boldsymbol{C}$是常元符号集合。

一阶理论语言

- **定义3.4.2** 语言L_0^2中合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串：

1）若$t_1, \dots, t_n$是项,Q_i^n是n元谓词,则$Q_i^n(t_1, \dots, t_n)$是合式公式；

2）若Q是合式公式，则$(\neg Q)$是合式公式；

3）若Q和R是合式公式，则$(Q \wedge R)$，$(Q \vee R)$，$(Q \rightarrow R)$，$(Q \leftrightarrow R)$及$(Q \oplus R)$是合式公式；

4）若Q是合式公式,x是变元,则$(\forall x Q)$及$(\exists x Q)$是合式公式；

5）只有有限次应用（1）～（4）构成的公式是合式公式。

一阶理论语言

- 一阶谓词逻辑语言$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{1}} =< \{\neg, \rightarrow\}, \{\forall\}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C} >$
- **定义3.4.3** 语言$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{1}}$中合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串：

1）若$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}$是项，$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}$是$\boldsymbol{n}$元谓词，则$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}})$是合式公式；

2）若$\boldsymbol{Q}$是合式公式，则$(\neg\boldsymbol{Q})$是合式公式；

3）若$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是合式公式，则$(\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R})$是合式公式；

4）若$\boldsymbol{Q}$是合式公式，$\boldsymbol{x}$是变元，则$(\forall\boldsymbol{x}\boldsymbol{Q})$是合式公式；

5）只有有限次应用（1～4）构成的公式是合式公式。

一阶理论语言

- 具有等词的一阶谓词逻辑语言

  $\boldsymbol{L}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{1}} =< \{\neg, \rightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C} >$，其中$= \in \boldsymbol{P}$。

- 例：

自然数语言$\boldsymbol{L} =< \{\neg, \rightarrow\}, \{\forall\}, \{=\}, \{+, \circ, \boldsymbol{s}\}, \{\mathbf{0}\} >$，其中+，∘是二元运算符（加函词和乘函词），$\boldsymbol{s}$是一元函数符（后继函词），0为常元。

本章内容

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言
- 论域、结构与模型

论域

- 通常，我们将研究的整体称为论域。在论域中，研究有哪些对象，对象之间的基本运算以及对象之间的基本关系。在论域上，研究用谓词逻辑语句表示的命题以及逻辑真值。

- **定义3.5.1** 论域是一个数学系统，记为 D。它由三部分组成：
  - 一个非空对象集合，每个对象也称为个体；
  - 一个关于D的函数集合，也称运算；
  - 一个关于D的关系集合。

量词的语义

- 量词 ∀, ∃ 的语义在论域上解释为逻辑量词∀, ∃。
- $\boldsymbol{\sigma}(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}))$语义表示：
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)=\mathbf{1}$，对论域上$\boldsymbol{D}$任意$\boldsymbol{d}$，使$\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{d}]=\mathbf{1}$
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)=\mathbf{0}$，对论域上$\boldsymbol{D}$存在$\boldsymbol{c}$，使$\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{c}]=\mathbf{0}$
- $\boldsymbol{\sigma}(\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}))$语义表示：
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)=\mathbf{1}$，对论域上$\boldsymbol{D}$存在$\boldsymbol{c}$，使$\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{c}]=\mathbf{0}$；
  - $\boldsymbol{\sigma}\big(\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)=\mathbf{0}$，对论域上$\boldsymbol{D}$任意$\boldsymbol{d}$，使$\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{d}]=\mathbf{1}$
- $\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{x})$简记为$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$。

逻辑关系

- 在自然数论域中，有自然数集合$\boldsymbol{N}$；有运算集合$\{+,\times\}$，其中$+$表示加法，$\times$表示乘法；有关系集合$\{=,\leq\}$，其中$=$表示相等关系，$\leq$表示小于或等于关系。
- 在整数论域中，有整数集合$\boldsymbol{Z}$；有运算集合$\{+,-,\times\}$，其中$+$表示加法，$-$表示减法，$\times$表示乘法；有关系集合$\{=,\leq\}$，其中$=$表示相等关系，$\leq$表示小于或等于关系。

逻辑关系

- 每个关系表示论域$\boldsymbol{D}$的对象之间、函数之间以及对象与函数之间的逻辑关系。
  - 在自然数论域中，表示对象之间逻辑关系，$3 \le 5$是真，$3 = 5$是假。
  - 表示函数之间逻辑关系$6 + 8 = 8 + 6$是真；
  - 表示对象与函数之间逻辑关系，$3×5 \le 4$是假。

- 通常一个合式公式可能没有自由变元，也可能有自由变元。通过对变元的指派，合式公式的一个自由变元指定一个常元。

指派与解释

- **定义3.5.2** 命题形式的自由变元被指定为集合中的一个常元称为**指派**，记为 $\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{C}$。
- **定义3.5.3** 设L是语言，$\boldsymbol{D}$是论域，一个**解释**$\boldsymbol{I}$由以下四部分组成：
  - 对于每个常元$\boldsymbol{c}$，指派为$\boldsymbol{D}$上一个常量$\boldsymbol{c}$；
  - 对于每个$\boldsymbol{n}$元函词$\boldsymbol{f}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个$\boldsymbol{n}$元函数$\boldsymbol{f}$；
  - 对于每个$\boldsymbol{m}$元谓词符$\boldsymbol{Q}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个$\boldsymbol{m}$元关系$\boldsymbol{Q}$；
  - 对于每个自由变元$\boldsymbol{x}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个常量$\boldsymbol{c}$，也称为赋值函数。
- **定义3.5.5** 解释和指派统称为指派函数（简称指派），对于合式公式$\boldsymbol{Q}$，记为$\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{Q} \rightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$。

指派为合式公式$\boldsymbol{Q}$确定一个真值，即语义

结构与模型

- **定义3.5.4** 给定语言$\boldsymbol{L}$以及论域$\boldsymbol{D}$和解释$\boldsymbol{I}$，偶对$<\boldsymbol{D},\boldsymbol{I}>$称为$\boldsymbol{L}$的结构，记为$\boldsymbol{S}=<\boldsymbol{D},\boldsymbol{I}>$。
- **定义3.5.6** 设$\boldsymbol{L}$是语言，$\boldsymbol{D}$是论域，$\boldsymbol{\sigma}$是$\boldsymbol{D}$上的指派，则$<\boldsymbol{D},\boldsymbol{\sigma}>$称为语言$\boldsymbol{L}$的模型，记为$\boldsymbol{M}=<\boldsymbol{D},\boldsymbol{\sigma}>$。
- **定义3.5.7** 设$\boldsymbol{L}$是语言，$\boldsymbol{M}=<\boldsymbol{D},\boldsymbol{\sigma}>$是语言$\boldsymbol{L}$的模型，$\boldsymbol{Q}$是合式公式，并且$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q})=1$，则称$\boldsymbol{Q}$在$\boldsymbol{D}$上有模型。

结构与模型

- 在论域上，我们研究命题的真伪，这些命题可以表示为一阶谓词逻辑的逻辑语句。通常，相同的逻辑语句可能来自不同的论域。
- 一般来说，首先选择确定一个论域，经过解释I：
  - 合式公式的常元解释为论域上的常量；
  - 合式公式的函词解释为论域上的一个函数；
  - 合式公式的谓词符解释为论域上的一个性质或关系。
- 公式中的常元、函词和谓词在论域上就具有明确、唯一的含义，公式的意义理解具有唯一性，不会产生二义性。

逻辑语句与命题

- 通过指派，一个逻辑语句变换为确定的论域上的命题，命题就具有确定真假意义了。
  - 在自然数论域中，$\forall y(0 \le y)$是真，$\exists x \forall y(x \le y)$是真，$\forall x \forall y(x + y = y + x)$是真，$\forall x \forall y(x + y \le y)$是假；
  - 在整数论域中，$\forall y(0 \le y)$是假，$\exists x \forall y(x \le y)$是假，$\forall x \forall y(x + y = y + x)$是真，$\forall x \forall y(x + y \le y)$是假。

逻辑语句与命题

- 通常，逻辑语句的真值与论域有关。有些逻辑语句在不同的论域上都为真，而有些逻辑语句仅在某些论域上为真，而在另一些论域上为假。

- 数理逻辑中一个重要研究内容就是求证一个合式公式在所有的模型下为真还是为假，或者求证一个合式公式在什么模型下为真或为假。

结构与模型

- 有些合式公式在一些模型下为真，而在另一些模型下为假。
- 例如，对于合式公式$\exists x \forall y R(x,y)$和$\forall y \exists x R(x,y)$，若将谓词$R(x,y)$分别解释为自然数论域和整数论域上的关系≤，则公式变换为$\exists x \forall y(x \leq y)$和$\forall y \exists x(x \leq y)$。
  - 在自然数论域中，最小数为0，所以$\forall y(0 \leq y)$。
  - 在自然数论域上，有模型$M=<D_N,\sigma>$，使得$\sigma\big(\exists x \forall y(x \leq y)\big)=1$和$\sigma\big(\forall y \exists x(x \leq y)\big)=1$。
  - 在整数论域上，有模型$M=<D_I,\sigma>$，使得$\sigma\big(\forall y \exists x(x \leq y)\big)=1$，$\sigma\big(\exists x \forall y(x \leq y)\big)=0$。

有效式和矛盾式

- 有些合式公式在任意模型下都为真。
  - 如$\forall x Q(x) \vee \neg \forall x Q(x)$；
- 有些合式公式在任意模型下都为假。
  - 如$\forall x Q(x) \wedge \neg \forall x Q(x)$ 。
- 在数理逻辑中，用可满足性和有效性表示合式公式的逻辑真值性质，它们是重要的语义概念。

模型与公式的语义

- **定义3.5.8** 给定合式公式$\boldsymbol{Q}$，模型$\boldsymbol{M} = < \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$使得$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{1}$成立，称公式$\boldsymbol{Q}$关于模型$\boldsymbol{M}$是可满足的，简称在模型$\boldsymbol{M}$上$\boldsymbol{Q}$可满足，记为$\vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{Q}$。
- **例如：**
  - 在自然数论域中，在模型$\boldsymbol{M}_1 = < \boldsymbol{D}_N, \boldsymbol{\sigma} >$上，$\vDash_{\boldsymbol{M}_1} \exists \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} (\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y})$。
  - 在整数论域中，在模型$\boldsymbol{M}_2 = < \boldsymbol{D}_Z, \boldsymbol{\sigma} >$上，$\vDash_{\boldsymbol{M}_2} \forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x} (\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y})$。

模型与公式的语义

- **定义3.5.9** 给定合式公式Q，模型$M=<D,\sigma>$使得$\sigma(Q)=0$成立，称公式Q关于模型M是不可满足的，记为$\nvDash_M Q$。
- **例如：**
  - 在整数论域中，在模型$M_2=<D_Z,\sigma>$上，$\nvDash_{M_2} \exists x\forall y(x\leq y)$。

公式集合与模型

- **定义3.5.10** 给定合式公式集合$\boldsymbol{\Gamma} = \{\boldsymbol{Q_1}, \ldots, \boldsymbol{Q_n}\}$，模型$\boldsymbol{M} =< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$使得对于每个公式$\boldsymbol{Q_k} \in \boldsymbol{\Gamma}$，有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q_k}) = \boldsymbol{1}$成立，则称公式集合$\boldsymbol{\Gamma}$关于模型$\boldsymbol{M}$是可满足的，简称$\boldsymbol{\Gamma}$可满足。也称模型$< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$满足$\boldsymbol{\Gamma}$，记为$\vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\Gamma}$。

- **定理3.5.1** 给定一个语言$\boldsymbol{L}$，设$\boldsymbol{\Gamma} = \{\boldsymbol{Q_1}, \ldots, \boldsymbol{Q_n}\}$，$\boldsymbol{Q_1}, \ldots, \boldsymbol{Q_n}$是它的$\boldsymbol{n}$个公式$(\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1})$，$\boldsymbol{M} =< \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma} >$是模型，则$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{1}$当且仅当$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q_1} \wedge \ldots \boldsymbol{Q_1} \wedge \boldsymbol{Q_n}) = \boldsymbol{1}$

谓词合式公式的逻辑推论

- **定义3.5.11** $\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是谓词合式公式，若存在模型$\boldsymbol{M} = <\boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma}>$，使得当$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{1}$时，有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}$，则称$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{Q}$关于模型$\boldsymbol{M}$上的逻辑推论，记为$\boldsymbol{Q} \vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{R}$。

- **定义3.5.12** 设$\boldsymbol{\Gamma}$是谓词合式公式集合， $\boldsymbol{R}$是谓词合式公式，若存在模型$\boldsymbol{M} = <\boldsymbol{D}, \boldsymbol{\sigma}>$，使得当$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{1}$时，有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}$，则称$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{\Gamma}$关于模型$\boldsymbol{M}$上的逻辑推论，记为$\boldsymbol{\Gamma} \vDash_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{R}$。

小结

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言、论域、结构与模型