12章 习题课（一）

一、函数列一致收敛的定义和判别

1. 定义在I 上函数列 $\{f_n(x)\}$ 的一致收敛

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N^*, s.t. \forall n > N, \quad \forall x \in I,$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2. Cauchy收敛定理

$\{f_n(x)\}$ 在I上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N^*,$

$s.t. \forall n > N, \forall p \in N^*$，$\forall x \in I, \ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

3. 上确界方法

$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0.$

二、函数项级数一致收敛定义和判别法的叙述

1．函数项级数的一致收敛定义

设$S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$, 若$\{S_n(x)\}$在$I$上一致收敛于$S(x)$, 则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\overset{uni}{=}S(x), n\to\infty$

2．Cauchy收敛定理

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in N^*,s.t.\ \forall n>N,\forall p\in N^*,\forall x\in I,\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_n(x)\right|<\varepsilon.$$

否定形式

$$\exists\varepsilon_0>0,\ s.t.\ \forall N\in N^*,\exists n_0>N,\exists p_0\in N^*,\ \exists x_0\in I,$$

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}u_k(x_0)\right|\geq\varepsilon_0 .$$

3. 转化为函数列（部分和）此时函数列一致收敛方法都适用，如

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0.$$

4. 必要条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\text{在}I\text{上一致收敛，则}u_n(x)\xrightarrow{uni.}0(n\to\infty).$$

逆否

若$u_n(x)$一致收敛于0，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上不一致收敛

5. Weierstrass判别法

若存在收敛的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，使得对$\forall x\in I$，$\forall$正整数$n$

都有$|u_n(x)|\le a_n$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛.

6、Dirichlet判别法

若区间I上定义的函数$a_n(x),b_n(x)$满足：

(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$的部分和序列在区间$I$上一致有界，

(2) $\forall x \in I, \{b_n(x)\}$单调，且$b_n(x) \xrightarrow{uni.} 0$；

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$在区间$I$上一致收敛.

7、Abel判别法

(1) 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$在区间$I$上一致收敛，

(2) $\forall x \in I$,数列$\{b_n(x)\}$单调，且函数列$\{b_n(x)\}$在区间I上一致有界；

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$在区间$I$上一致收敛.

8. 端点级数发散法判别开区间上不一致收敛

设$u_n(x)\in C[a,b]$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛,则

(1)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$收敛;(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

$u_n(x)\in C[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$发散

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$上不一致收敛.

例如:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$在$(0,2\pi)$上不一致收敛　　$x=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上不一致收敛　　$x=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散

一致收敛性的判别法小结

1. 一致收敛的判别法

Weierstrass判别法

Dirichlet判别法

Abel判别法

函数列 $\{f_n(x)\}$

定义

Cauchy收敛定理

上确界方法:

$$\beta_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

定义

Cauchy收敛定理

转换为部分和序列

$$\beta_n = \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \to 0$$

2. 不一致收敛的判别法

函数列 $\{f_n(x)\}$

定义

Cauchy收敛定理（否定形式）

上确界方法：

$$\beta_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \text{不} \to 0$$

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

通项不一致收敛于0

$$(\beta_n = \sup_{x\in I} |u_n(x) - 0| \text{不} \to 0)$$

定义

Cauchy收敛定理（否定形式）

转换为部分和序列

$$(\beta_n = \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \text{不} \to 0)$$

端点级数发散法

三、函数序列极限函数的分析性质

1. 连续性

设$S_n(x)\in C[a,b], n=1,2,\ldots,$ 且$\{S_n(x)\}\overset{uni}{\longrightarrow}S(x)(n\to\infty)$,

则$S(x)$在I上连续. 即$\forall x_0\in I$, $\lim\limits_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$,

也即是

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty}S_n(x))=\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0}S_n(x)).}$$

2. 可积性

设$S_n(x)\in C[a,b], n=1,2,\ldots$且$\{S_n(x)\}\overset{uni}{\longrightarrow}S(x)(n\to\infty)$,

则$S(x)\in R[a,b]$,且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\boxed{\int_a^b(\lim_{n\to\infty}S_n(x))\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x}$$

3. 可导性

设函数列$\{S_n(x)\}, n=1,2,\cdots$在$[a,b]$上可导,且

(1) $S_n'(x)\in C[a,b]$,

(2) $\{S_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $g(x)$,

(3) 至少存在某个$x_0\in[a,b]$,使得$\{S_n(x_0)\}$收敛,

则$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于某个函数 $S(x)$, $S(x)$可导且导数连续,满足$S'(x)=g(x)$,即

$$\boxed{[\lim_{n\to\infty} S_n(x)]' = \lim_{n\to\infty} S_n'(x)}$$

四、函数项级数和函数的分析性质

1. 连续性

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$,且$u_n(x)$在$I$上连续,

则$S(x)$在I上连续. 即$\forall x_0 \in I$, $\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$,

也即是

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).}$$

2. 可积性 （逐项积分定理）

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$,且$u_n(x)$在$[a,b]$上连续,

则$S(x) \in R[a,b]$,且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \boxed{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x}.$$

3. 可导性（逐项求导定理）

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上满足下面条件：

(1) $u_n'(x) \in C_I$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$I$上一致收敛于$g(x)$,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$至少在一点$x_0$处收敛,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛,其和函数$S(x)$可导且导数连续,

满足$S'(x) = g(x)$, 即

$$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)}$$

内闭一致收敛

若函数项级数在 (a, b) 上不一致收敛，但是在该开区间内的任意闭子区间 $[c, d]$ 上都是一致收敛，称函数项级数在开区间 (a, b) 上内闭一致收敛.

因为连续性和可导性都是逐点定义的，函数项级数和函数的连续性和逐项求导定理中的一致收敛条件，都可以改为内闭一致收敛，结论依然成立.

四、典型例子

例1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)x^{2n-1}$ 收敛域.

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|(3n+2)x^{2n+1}|}{|(3n-1)x^{2n-1}|}=x^2$$

当$x^2<1$，即$x\in(-1,1)$时级数收敛；

当$x^2>1$，级数发散；

当$x^2=1$时，级数通项不收敛于0，从而发散.

所以级数收敛域为 $x\in(-1,1)$.

例2 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$收敛域.

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}\left|\frac{x}{3x+1}\right|=\left|\frac{x}{3x+1}\right|$

$$\begin{cases}\left|\frac{x}{3x+1}\right|<1\text{时收敛}, x<-\frac{1}{2},\quad x>-\frac{1}{4} \\ \left|\frac{x}{3x+1}\right|>1\text{时发散}, -\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}\end{cases},$$

$x=-\frac{1}{2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散; $x=-\frac{1}{4},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$收敛,

收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup[-\frac{1}{4},+\infty)$

例3 给定函数序列：$f_n(x)=\dfrac{x(\ln n)^{\alpha}}{n^{x}},n=2,3,\cdots$

问 α 取何值时，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$

$$f_n'(x)=\frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{n^{x}}\left(\frac{1}{\ln n}-x\right)\Rightarrow x=\frac{1}{\ln n} \text{为最大值点}$$

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|f_n(x)-f(x)|=\max_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)|=f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}\begin{cases}\neq 0,\alpha\geq 1\\ =0,\alpha<1\end{cases}$$

当且仅当 $\alpha<1$ 时，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

例4 判断下列函数列在[0,1]上的一致收敛性.

(1) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$; (2) $f_n(x)=nx(1-x)^n$

解（1） 计算**极限函数**得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n+x}=x,\ x\in[0,1]$$

因此$x\in[0,1]$时,

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|=\frac{x+x^2}{1+n+x}\le\frac{2}{n},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0.$

从而$\{f_n(x)\}$在[0,1]上一致收敛.

(2) 计算极限函数得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n \ =0,\ x\in[0,1]$$

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|nx(1-x)^n|$$

$$\geq n\cdot\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{e}(n\to\infty)$$

上确界大于某点处的取值

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\neq 0$,从而$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛.

令$\varphi(x)=nx(1-x)^n$，则$\varphi'(x)=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$,

$\varphi(x)$在$x=\dfrac{1}{n+1}$处取到最大值，

因此$\beta_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}\varphi(x)=\dfrac{n}{n+1}(1-\dfrac{1}{n+1})^n\to\dfrac{1}{e}$.

例5 讨论以下函数序列在相应区间上的一致收敛性.

(1) $S_n(x)=(1-x)x^n, x\in[0,1]$;

解 函数序列的极限函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,\quad x\in[0,1]$$

则 $\beta_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\sup\limits_{x\in[0,1]}(1-x)x^n$

$$=(1-\frac{n}{n+1})(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^{-n}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$

所以函数序列 $S_n(x)=(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(2) $S_n(x)=nx(1-x^2)^n, x\in[0,1].$

解 函数序列的极限函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,\quad x\in[0,1]$$

则 $$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}\left|S_n(x)-S(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} nx(1-x^2)^n$$

$$\geq n\cdot\frac{1}{n}\cdot(1-\frac{1}{n^2})^n=(1-\frac{1}{n^2})^n$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\neq 0$

所以函数序列在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

例6 判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x}\sin\dfrac{n}{x}$在$(0,1)$上的一致收敛性.

解 注意到函数$\dfrac{x^2}{1+n^2x}$在$(0,1)$上递增，可得

$$|u_n(x)|\le\frac{x^2}{1+n^2x}\le\frac{1}{1+n^2},\quad x\in(0,1).$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$收敛,所以由Weierstrass判别法知,

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x}\sin\dfrac{n}{x}$在$(0,1)$上一致收敛.

例7 讨论$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$在$(0,2\pi)$和$[\delta,2\pi-\delta]$上的一致收敛性.

端点级数发散法
例12. 1. 10的逆否

解（1） 因为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n(0)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散.

所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$在$(0,2\pi)$上不一致收敛;

（2） 取$a_n(x)=\cos nx,\ b_n(x)=\dfrac{1}{n\ln n}$,则

$$\forall x\in[\delta,2\pi-\delta],\forall n,\ \left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和一致有界,又$\{b_n(x)\}$单调,一致收敛于0.

由Dirichlet判别法知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致收敛.

例8 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$(0,2\pi)$上不一致收敛.

在任意$[\delta,2\pi-\delta]$上一致收敛$0<\delta<\pi$ -- *Dirichlet*

证 设 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$,

取 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\forall n$, 取 $p=n$, $x=\frac{\pi}{4n}$, 则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k\left(\frac{\pi}{4n}\right)\right|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin(k\cdot\frac{\pi}{4n})}{k}\geq\sin\frac{\pi}{4}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

$$\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{n}{2n}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\varepsilon_0$$

由Cauchy收敛定理知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$(0,2\pi)$上不一致收敛.

例9 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n+x^{2n}-2x^{3n})$在$[0,1]$上不一致收敛.

证 令$u_n(x)=x^n+x^{2n}-2x^{3n}$，则 $\lim_{n\to\infty}u_n(x)=0,\ x\in[0,1]$

且$u_n'(x)=nx^{n-1}+2nx^{2n-1}-6nx^{3n-1}$，可得

$x_0=\sqrt[n]{\dfrac{\sqrt{7}+1}{6}}$是$u_n(x)$的最大值点，所以$\beta_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}|u_n(x)-0|=u_n(x_0)$

$$u_n(x_0)=x_0^{\ n}+x_0^{\ 2n}-2x_0^{\ 3n}=x_0^{\ n}(1-x_0^{\ n})(1+2x_0^{\ n})$$

$$=\frac{\sqrt{7}+1}{6}\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{6}\cdot\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

因此$\{u_n(x)\}$在$[0,1]$上不一致收敛于0,

从而$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n+x^{2n}-2x^{3n})$在$[0,1]$上不一致收敛.

例10 用Cauchy收敛定理判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2-nx+n^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上不一致收敛.

解 设 $u_n(x)=\frac{x}{x^2-nx+n^2}$,

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{5}$, $\forall n$, 取 $p=n$, $x=n$, 则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n}u_k(n)\right|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{n^2-kn+k^2}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

$$\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{n^2+(2n)^2}=\frac{1}{5}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n}=\frac{1}{5}=\varepsilon_0,$$

因此由Cauchy收敛定理知,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2-nx+n^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上不一致收敛.

例11 讨论下列函数项级数在给定区间上的一致收敛性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n},\ x\in(-\infty,+\infty)$

解 设 $u_n(x)=(-1)^{n-1}\quad v_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

显然 $\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\le 1,\forall x\in(-\infty,+\infty),\forall n$

$\forall x\in(-\infty,+\infty),v_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$单调递减,

由于 $0\le\frac{x^2}{(1+x^2)^n}\le\frac{x^2}{1+nx^2}\le\frac{x^2}{nx^2}=\frac{1}{n}$

则$\beta_n=\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|v_n(x)-0|\le\frac{1}{n}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$,从而$v_n(x)\xrightarrow{uni}0$

由狄利克雷判别法 $\sum\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}},\ x\in[0,1]$$

解 记 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}, v_n(x)=(1+\dfrac{x}{n})^n$

则$\sum u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛,

$\forall x\in[0,1], \{v_n(x)\}$单调且在$[0,1]$上一致有界 $(1\le v_n(x)\le e)$

由阿贝尔判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}\text{在}[0,1]\text{上一致收敛.}$$

以下题目只需要关注相关函数项级数的一致收敛性

例1 证明：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $(-1,1)$ 上连续.

证 $\forall q\in(0,1)$，考察 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $[-q,q]$ 上的一致收敛性. 由于

$$|(x+\frac{1}{n})^n|\le(q+\frac{1}{n})^n,\quad x\in[-q,q],$$

由于 $\sum(q+\frac{1}{n})^n$ 收敛(根植判别法)，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $[-q,q]$ 上一致收敛，

因而 $f(x)\in C[-q,q]$，由 q 的任意性，$f(x)\in C(-1,1)$.

Weierstrass判别法判别函数项级数的(内闭)一致收敛性

一致收敛是和函数连续的充分但非必要条件

例2 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛, 但其和函数在 $[0,1]$ 上连续.

证明 设 $u_n(x)=nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}$, 则

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]=nxe^{-nx}$$

当 $x\in(0,1]$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{tx}{e^{tx}}=0$$

当$x = 0$时，$S(0) = 0$， 故$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$， $x \in [0,1]$

记 $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$， $x \in [0,1]$

显然 $S(x) \equiv 0$在$[0,1]$上连续.

考虑此函数项级数的部分和序列$S_n(x) = nxe^{-nx}$，

对任意自然数n，取$x_n = \dfrac{1}{n}$，

$$S_n(x_n) = n\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}} = e^{-1},$$

从而 $\beta_n = \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| \geq |S_n(x_n)| = \dfrac{1}{e}$，

于是 $\lim_{n\to\infty} \beta_n \neq 0$，所以原级数在 $[0,1]$上不一致收敛 .

例3 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx$，（$|r|<1$）计算 $\int_0^{2\pi} S(x)dx$.

解 因为 $|r^n \cos nx| \le |r|^n$， $|r|<1$， 由 $Weierstrass$ 判别法知

$\boxed{\sum r^n \cos nx \text{ 在 } [0,2\pi] \text{ 上一致收敛，因而}}$

$$\int_0^{2\pi} S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} r^n \cos nx dx ,$$

又因为 $\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$， $n=1,2,\cdots$， 故 $\int_0^{2\pi} S(x)dx = 2\pi$.

例4 证明函数项级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-x^2n^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛，

但是和函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

解 利用以下结论：

设 $u_n(x)\in C[a,b], n=1,2,3,\ldots\ldots \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛，则：

1）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a),\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 收敛，2）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

端点级数发散法判别开区间内不一致收敛

Weierstrass判别法判别内闭一致收敛

下面讨论和函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的连续性.

$$\forall x_0 \in (0,+\infty), \exists \delta > 0, 0 < \delta < x_0,$$

由于 $x_0 \in [\delta,+\infty)$, 故当 n 充分大时，有

$$\frac{1}{n} e^{-n^2 x^2} \le \frac{1}{n} e^{-n^2 \delta^2} \quad x \in [\delta,+\infty)$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} e^{-n^2\delta^2}} = 0 < 1$，由 $Cauchy$ 收敛原理可知 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{-n^2\delta^2}$ 收敛，

因此 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 x^2}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

所以 $f(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上连续， $f(x)$ 在 x_0 处连续，又由 x_0 的任意性，

故和函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

例5 设 $u_n(x)=\dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$. $n=1,2,\cdots$

证明函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在[0,1]上一致收敛, 并讨论和函数在[0,1]上的连续性、可积性和可微性.

证 对每一个 n, 易见 $u_n(x)$ 为 $[0,1]$ 上的增函数,

故有 $u_n(x)\le u_n(1)=\dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2)$, $n=1,2,\cdots$.

又当 $t\ge 0$ 时, 有不等式 $\ln(1+t^2)<t$, 所以

$$u_n(x)\le\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2)<\frac{1}{n^3}\cdot n=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

而 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 由Weierstrass判别法,

$\boxed{\text{级数}\sum u_n(x)\text{在}[0,1]\text{上一致收敛.}}$

由于每个$u_n(x)$在$[0,1]$上连续,

所以$\sum u_n(x)$的和函数$S(x)$在$[0,1]$上连续且可积.

又由$u_n'(x) = \dfrac{2x}{n(1+n^2x^2)} \le \dfrac{2x}{n \cdot 2nx} = \dfrac{1}{n^2}$, $\quad n = 1, 2, \cdots,$

即$\sum \dfrac{1}{n^2}$也是$\sum u_n'(x)$的优级数,

$\boxed{\text{所以}\sum u_n'(x)\text{ 在}[0,1]\text{上一致收敛,}}$

从而$S(x)$在$[0,1]$上可微.

例6 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$,

求证:(1) $f(x)$在$[0,+\infty)$ 连续;(2) $f(x)$在$(0,+\infty)$ 可导.

证明(1)记$u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$, 则$u_n(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续,且

$$|u_n(x)|=\left|\frac{e^{-nx}}{n^2+1}\right|<\frac{1}{n^2}.$$

由 M – 判别法可知$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$在区间$[0,+\infty)$上一致收敛,

因此和函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续.

(2) $$u'_n(x) = \frac{-ne^{-nx}}{n^2+1}.$$

任给 $\delta > 0$, 在区间$[\delta, +\infty)$上有

$$|u'_n(x)| = \left|\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}\right| < \frac{ne^{-\delta n}}{n^2+1},$$

由根值判别法知级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne^{-\delta n}}{n^2+1}$收敛,

因此$\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$ 在区间$[\delta, +\infty)$上一致收敛.

从而$f(x)$在区间$[\delta, +\infty)$上可导,

由δ的任意性，$f(x)$在$(0, +\infty)$ 可导.