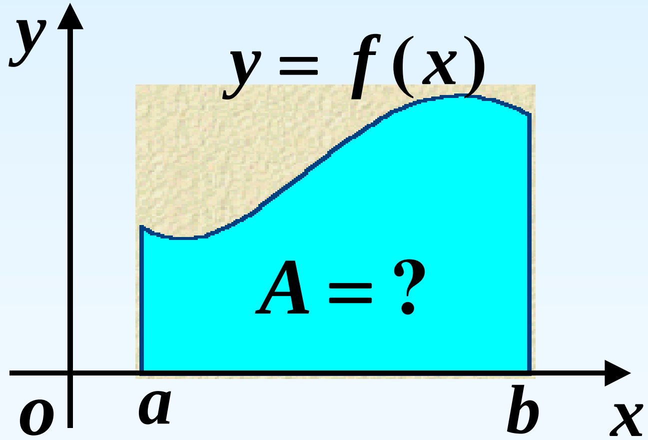
第七章　定积分

§1 定积分的基本概念

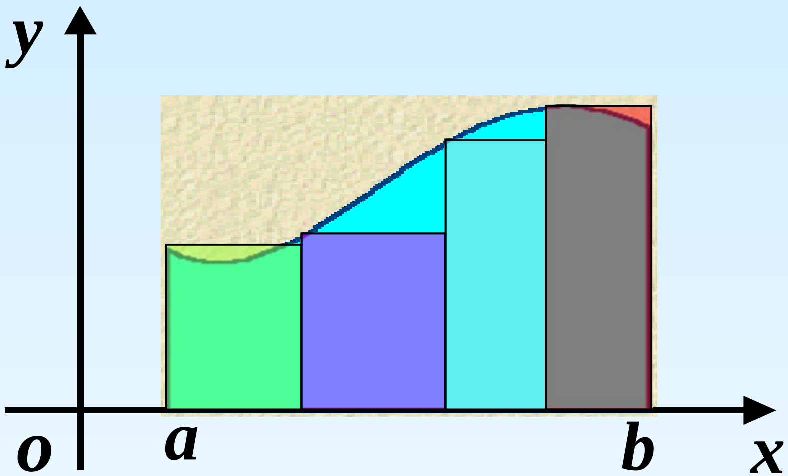
问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积）

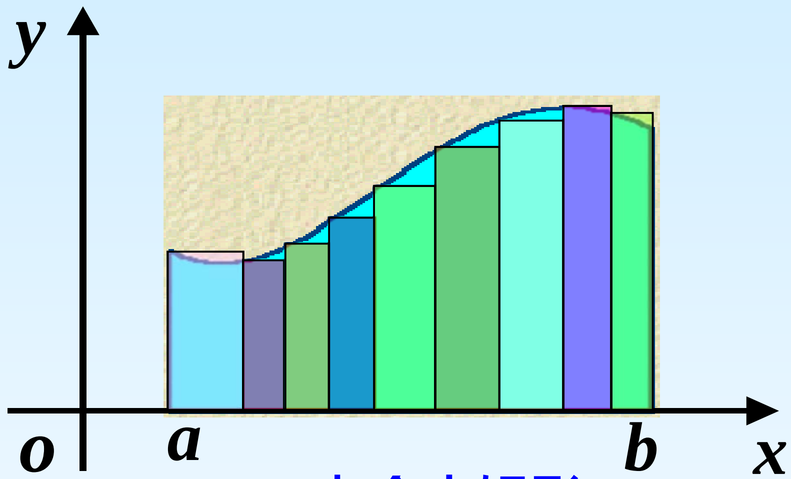
曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$、x轴与两条直线$x=a$、$x=b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积



（四个小矩形）

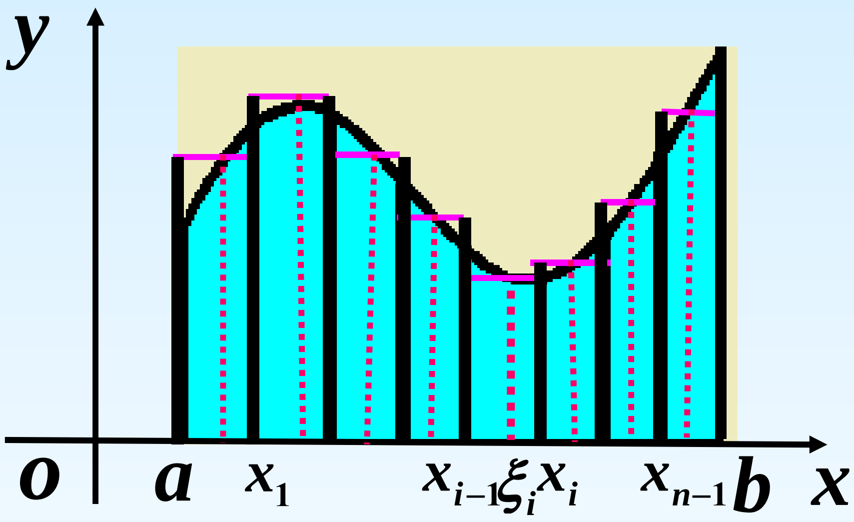


（九个小矩形）

可以看出，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

曲边梯形如图所示，在区间$[a,b]$内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，

把区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$，长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$；



在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，

以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细 ,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\} \to 0$时,

曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

（2）近似 $\underbrace{\Delta s_i}_{\text{部分路程值}} \approx \underbrace{v(\tau_i)}_{\text{某时刻的速度}} \Delta t_i$

（3）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（4）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

定积分的定义

定义1.1 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有定义,在$[a,b]$中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，各小区间的长度依次为

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取

一点ξ_i（$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$

并作和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$

怎样的分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda\to 0$时，和S总趋于确定的极限I，我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的 Riemann 积分或定积分，记为

积分上限

$$\int_a^b \underline{f(x)}dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

（Riemann和）积分和

$[a,b]$ 积分区间

注意：

(1) 积分值仅与被积函数及积分区间有关，

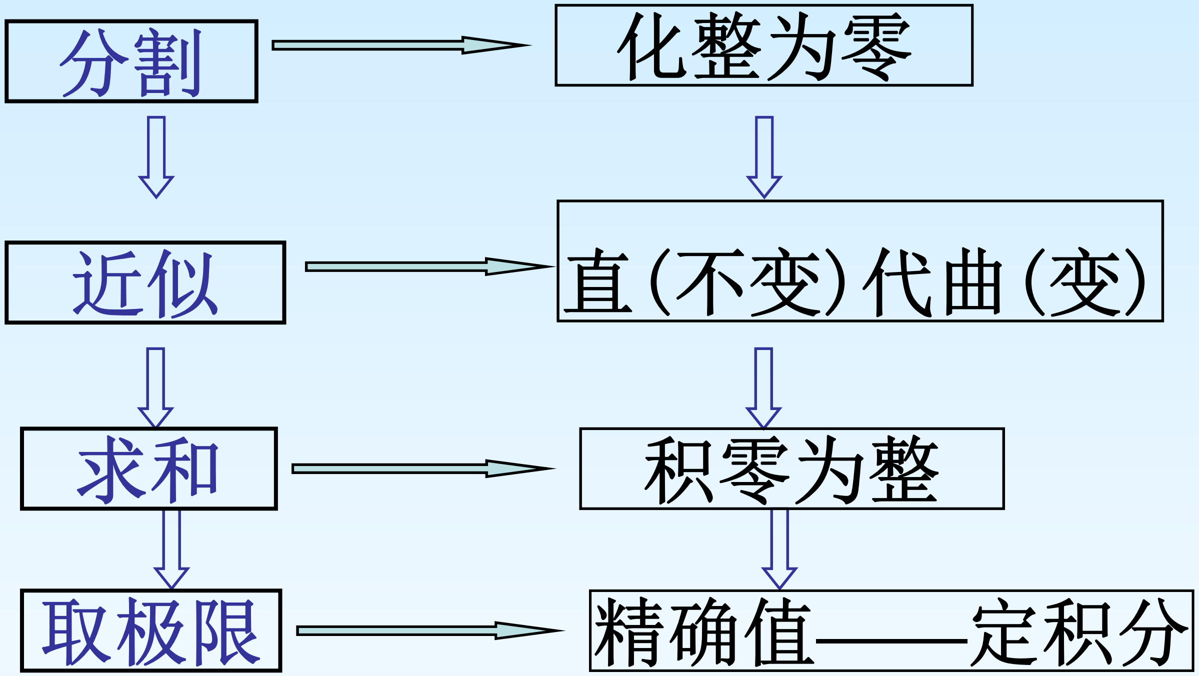
而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

(2) 定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

(3)规定：若$a > b, \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(4)定积分的思想和方法



定义1.2 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界,I为一个确定的实数. 若对任意给定的$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$,使得对$[a,b]$上的任意分割T和任意$\xi_i \in \Delta x_i$,当$\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} < \delta$时,

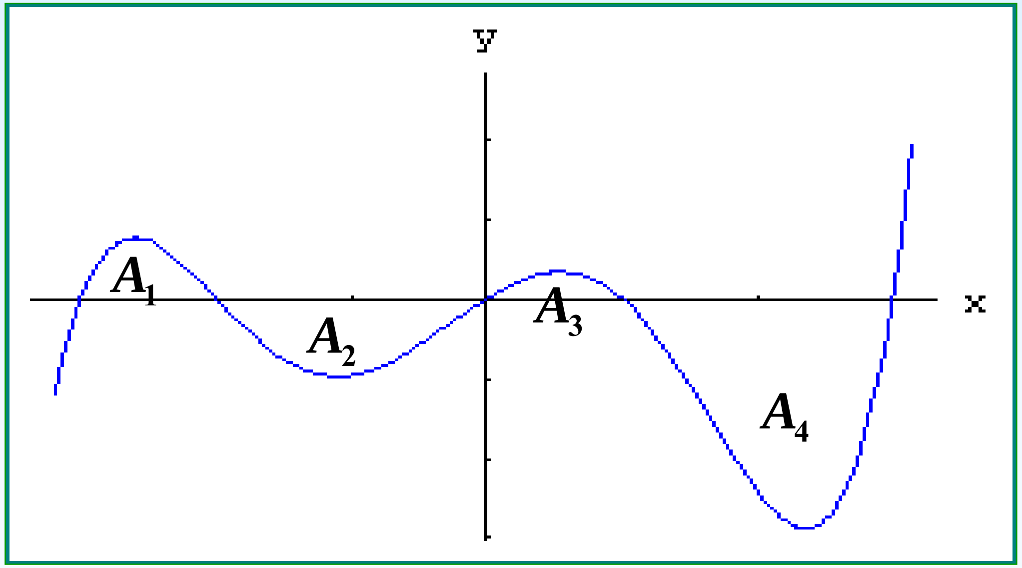
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积或黎曼可积,I称为函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分或黎曼积分.

几何意义

$f(x) \geq 0,\quad \int_a^b f(x)dx = A$ 曲边梯形的面积

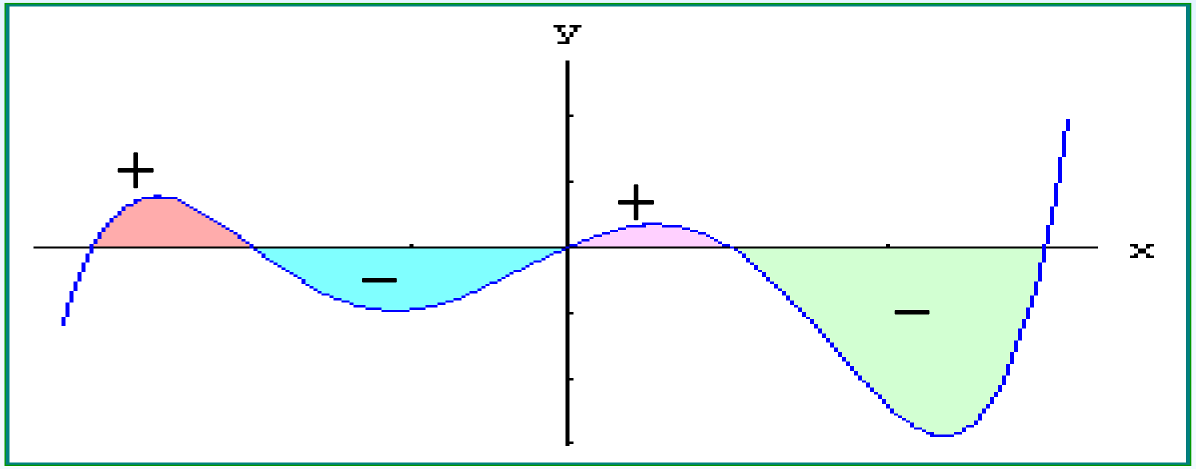
$f(x) \leq 0,\quad \int_a^b f(x)dx = -A$ 曲边梯形的面积的负值



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

几何意义

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和. 在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



求简单函数积分

例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx.$

解 将$[0,1]$ n等分，分点为$x_i = \frac{i}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i = \frac{1}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

取$\xi_i = x_i$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{3}}\sum_{i=1}^{n}i^{2}=\frac{1}{n^{3}}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

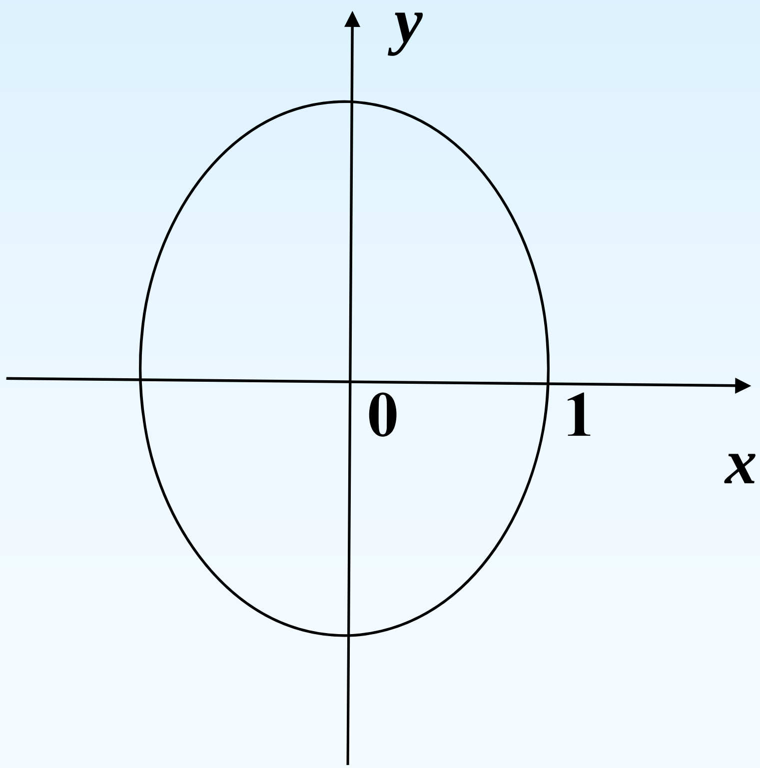
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\qquad \lambda\to 0\Rightarrow n\to\infty$$

$$\int_{0}^{1}x^{2}dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_{i}^{2}\Delta x_{i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

例2 利用定积分的几何意义计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

解 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{4}$



例3 将和式极限表示成定积分.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

解 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\Bigg)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx.$$

例 4 设函数 $f(x)$在区间[0,1]上连续，且取正值.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$.

证 利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)dx$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}.$$

作业:

习题7.1

1，2(1)