第十二章 函数列与函数项级数

§1 函数列和函数项级数的收敛性

函数项级数的一般概念

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在$I \subseteq R$上的函数，则我们称之为区间$I$上的函数序列或函数列，记为$\{u_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$.

称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

为区间I上的函数项级数.

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$称为级数的前$n$项部分和.

$\{S_n(x)\}$称为部分和序列.

定义1.1 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$是$I$上的函数项级数,若给定$x_0 \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,即$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$存在,则称函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x_0$收敛，或称$x_0$为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个收敛点.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$发散,则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x_0$发散，或称$x_0$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个发散点.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体称为收敛域.

注 函数项级数在某点x的收敛问题,实质上是数项级数的收敛问题，函数项级数的这种收敛性称为逐点收敛性.

例：级数$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$,

当$|x| < 1$时,收敛；当$|x| \geq 1$时,发散;

收敛域$(-1,1)$;

在收敛域上,函数项级数的和是x的函数,

称为函数项级数的和函数,记为$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

例1 求级数$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$的收敛域及和函数.

解 因为$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)^n$，则

当$\frac{1}{e^x} < 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$收敛，

固定x，级数是几何级数

即当$x > 0$时，$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$收敛，

因此$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$的收敛域为$(0,+\infty)$，且和函数为$S(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

p −级数

例2 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$和级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$的收敛域.

解 (1) 因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$当$x>1$时收敛，当$x\le 1$时发散，

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$的收敛域为$(1,+\infty)$;

(2) 因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$当$x>1$时收敛，当$x\le 1$时发散，

因此$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$的收敛域为$(1,+\infty)$.

例 3 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$的收敛域.

解 由比值判别法

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{|1+x|}\to\frac{1}{|1+x|}\quad(n\to\infty)$$

(1) 当 $\frac{1}{|1+x|}<1,\quad\Rightarrow|1+x|>1,$

即 $x>0$或$x<-2$时, 原级数绝对收敛.

(2) 当 $\dfrac{1}{|1+x|} > 1, \Leftrightarrow |1+x| < 1,$

即 $-2 < x < 0$时，原级数发散.

(3) 当 $|1+x| = 1, \Rightarrow x = 0$或$x = -2,$

当 $x = 0$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$收敛；

当 $x = -2$时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$发散；

故级数的收敛域为$(-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$.

例4 求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$收敛域.

Raabe判别法或其他方法

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{2|x|}{1+x^2}$

$\frac{2|x|}{1+x^2}<1$时绝对收敛 $\Rightarrow x\neq\pm1$

$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散

$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛

Leibniz判别法

故收敛域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$u_n(x)$连续 $\xrightarrow{?}$ $S_n(x)$连续 $\xrightarrow{?}$ $S(x)$连续 ×

可导 $\xrightarrow{?}$ 可导 $\xrightarrow{?}$ 可导 ×

可积 $\xrightarrow{?}$ 可积 $\xrightarrow{?}$ 可积 ×

例 在[0,1]上的函数项级数$x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$，

它的部分和函序列 $S_n(x)=x^n, x\in[0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

（1）该函数项级数中的每一项都是[0,1]上的连续函数，

但和函数[0,1]上不是连续的.

(2) 该函数项级数中的每一项在都在[0,1]可导的，但和函数[0,1]上不是连续的，在$x=1$处更没有导数，和函数$S(x)$在[0,1]上也是不可导的.

说明：

如果函数项级数仅仅是逐点收敛到它的和函数，则它的和函数不一定具有该级数通项所满足的那些分析性质. --连续，可积，可导等

解决办法：逐点收敛---->一致收敛

函数列的一致收敛

设$\{S_n(x)\}$为区间I上的函数序列, 若$\forall x_0\in I,\{S_n(x_0)\}$收敛, 则称$\{S_n(x)\}$在区间$I$上收敛或逐点收敛.

若$\{S_n(x)\}$在区间I上逐点收敛于$S(x)$, 则$\forall x_0\in I$,
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)=S(x_0)$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists$正整数$N=N(\varepsilon,x_0)$, 使得当$n>N$时,
$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon.$

问题 是否存在与x_0无关的正整数$N=N(\varepsilon)$, 使得当$n>N$时,

$$\forall x\in I, |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon?$$

例5 $S_n(x)=x^n, x\in(0,1).$

解 $\forall x\in(0,1), \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=0.$

$$\forall \varepsilon>0, |S_n(x)-0|=x^n<\varepsilon \Rightarrow N(\varepsilon,x)=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$$

找不到与x无关的正整数$N=N(\varepsilon)$

例6 $S_n(x)=\dfrac{1}{n+x}, x\in(0,1).$

解 $\forall x\in(0,1), \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=0.$

$$\forall \varepsilon>0, |S_n(x)-0|=\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

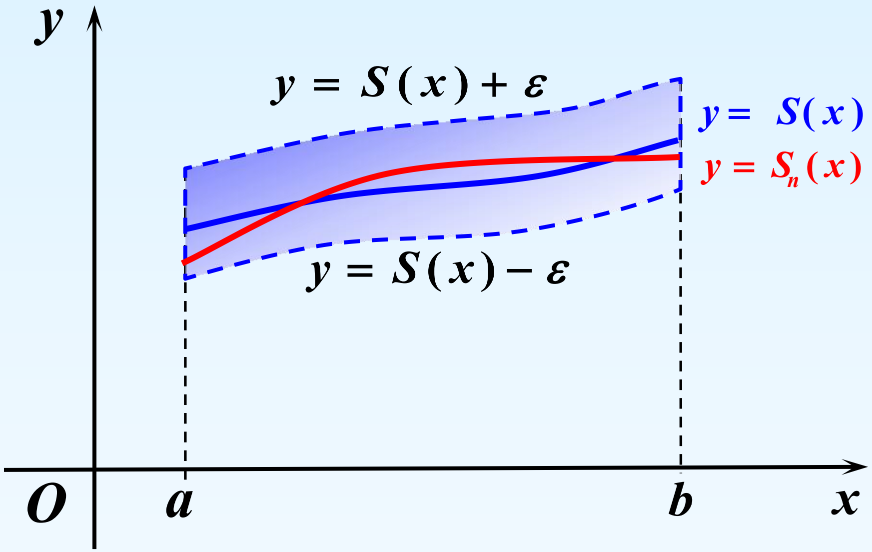
$$\Rightarrow N(\varepsilon,x)=N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

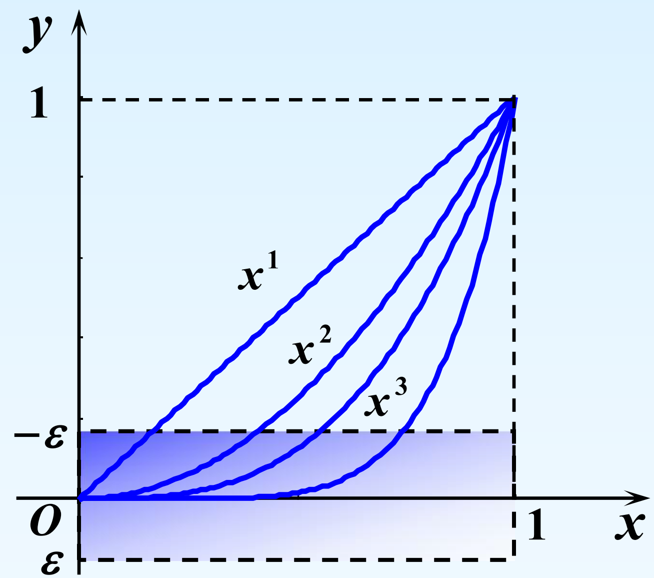
定义1.2 设$\{S_n(x)\}$为区间I上的函数列，$S(x)$是定义在区间I上的一个函数. 如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时，$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$对所有的$x\in I$都成立，则称$\{S_n(x)\}$在区间$I$上一致收敛于$S(x)$，记作

$$S_n(x)\xrightarrow{uni}S(x)(n\to\infty).$$

注 一致收敛性蕴含逐点收敛性.

几何意义





记$\beta_n = \sup\limits_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|$

定理1.1 $\{S_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$S(x)$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0.$

证明 $\Rightarrow$： 设$\{S_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$S(x)$,

则$\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon)>0,\ s.t.\ n>N(\varepsilon)$时,

$$\forall x\in I, |S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \beta_n=\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\beta_n=0.$$

$\Leftarrow$： 若$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0, \forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)>0, n>N(\varepsilon)$时

$$\beta_n<\varepsilon, \quad \therefore \forall x\in I, |S_n(x)-S(x)|\le\beta_n<\varepsilon$$

$\therefore \{S_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$S(x)$.

例7 证明$S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

证明 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n}$$

$$\therefore \beta_n=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|\le\frac{1}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\beta_n=0.$$

$\therefore \{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于0.

例8 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$上是否一致收敛？

解 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$

当$1<x<+\infty$时,

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\le\frac{nx}{n^2x^2}=\frac{1}{nx}<\frac{1}{n}$$

$$\therefore \beta_n=\sup_{x\in(1,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|\le\frac{1}{n}\quad \therefore \lim_{n\to\infty}\beta_n=0.$$

$S_n(x)$在$(1,+\infty)$上一致收敛

当$0<x<1$时， $\beta_n\ge|S_n(\frac{1}{n})-S(\frac{1}{n})|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\ne 0.$ $S_n(x)$在$(0,1)$上不一致收敛.

定理1.2（函数列一致收敛的Cauchy收敛原理）

函数列$\{S_n(x)\}$在区间I上一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$正整数$N = N(\varepsilon), \forall m, n > N$,

都有$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$对所有$x \in I$都成立.

证明 $\Rightarrow$：设$\{S_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$S(x)$,

则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$, $s.t.$ $n > N(\varepsilon)$时,

$$\forall x \in I, |S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore \forall m, n > N$,

$$|S_n(x) - S_m(x)| \le |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$： $\forall \varepsilon > 0, \exists$正整数$N = N(\varepsilon), \forall m, n > N$，

都有$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$对所有$x \in I$都成立.

$\therefore$对给定的$x \in I, \{S_n(x)\}$为$Cauchy$列.

设$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.

在$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$中令$m \to \infty$,

则$|S_n(x) - S(x)| \le \varepsilon$.

$\therefore$函数列$\{S_n(x)\}$在区间I上一致收敛.

函数项级数的一致收敛

定义1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$为定义在$I$上的函数项级数，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$，

若$\{S_n(x)\}$在I上一致收敛于$S(x)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$.

例9 证明：$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^2$在$[0,1]$上一致收敛，但

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

证明 首先考虑$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^2$.

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^2=\begin{cases}(1-x^n)(1-x), & x\in[0,1)\\ 0 & x=1\end{cases}$$

$$=(1-x^n)(1-x),x\in[0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)=\begin{cases}1-x, x\in[0,1)\\ 0 \quad x=1\end{cases}=1-x,\quad x\in[0,1]$$

$$\because \left|S_n(x)-S(x)\right| = x^n(1-x), x\in[0,1]$$

$$(x^n(1-x))' = x^{n-1}[n-(n+1)x^n]$$

$$\Rightarrow x^n(1-x)\text{的最大值在}x=\frac{n}{n+1}\text{取到}$$

$$\therefore \beta_n = \sup\left|S_n(x)-S(x)\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^2\text{在}[0,1]\text{上一致收敛.}$$

下面考虑$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$.

$$S_n(x)=\begin{cases}1-x^n, x\in[0,1)\\ 0 \qquad x=1\end{cases} \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x)=\begin{cases}1, \ x\in[0,1)\\ 0 \qquad x=1\end{cases}=S(x)$$

$$\because \left|S_n(x)-S(x)\right|=\begin{cases}x^n, x\in[0,1)\\ 0,\ x=1\end{cases}$$

$$\therefore \beta_n = \sup_{x\in[0,1]} \left|S_n(x)-S(x)\right| = 1(n\to\infty)$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

定理1.3（函数项级数一致收敛的Cauchy收敛原理）

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$正整数$N = N(\varepsilon), s.t. \forall n > N, \forall$正整数$p$,

都有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$对所有$x \in I$都成立.

推论1.4

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛,则$\{u_n(x)\}$在$I$上一致收敛于0.

注 若$\{u_n(x)\}$不一致收敛于0, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$不一致收敛.

例10 讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

解 记$u_n(x)=ne^{-nx}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=0$,

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |u_n(x)-0| \geq u_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{e} \not\to 0$$

所以$u_n(x)=ne^{-nx}$不一致收敛于0,

从而级数在$(0,+\infty)$上不一致收敛 .

例11 设$u_n(x)\in C[a,b]$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛,则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

证明 (1) $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛

$\therefore \forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数$N=N(\varepsilon)$, $s.t.\forall n>N$和

任意正整数p,都有$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon$对$\forall x\in(a,b)$都成立.

$\because u_n(x)$在a点右连续

$\therefore$ 在上式中令$x\to a+0$得到$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}u_k(a)\right|\le\varepsilon.$

由数项级数的Cauchy收敛原理得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$收敛. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$收敛性类似.

(2)证明与(1)类似.

注 (1)此例题说明函数项级数的一致收敛性可以延拓到区间的端点.

(2)此例题的逆否命题可用来证明函数项级数的不一致收敛性.

例如：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, x \in (0, 2\pi)$ 不一致收敛

假设此级数一致收敛，则此级数在$x = 0$处收敛.

当$x = 0$时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散　矛盾!

例如: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, x \in (1, +\infty)$上不一致收敛.

小结

函数项级数的收敛和发散

函数项级数的收敛域

函数序列一致收敛

函数项级数一致收敛