北京航空航天大学

2020－2021 学年 第一学期期末考卷

《 工科数学分析 （Ⅰ）》

(A 卷)

班号 ___________　　学号__________　　姓名___________

主讲教师_________　　考场__________　　成绩___________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2021 年 1 月　8 日

一、 选择题（每题 4 分，满分 20 分）

1. 曲线 $\begin{cases} x = 3\int_1^t e^u du, \\ y = 4e^t + 5, \end{cases}$ $1 \le t \le 2$ 的弧长为（ C ）.

A. $5(e-1)$；　B. $5(e^2-1)$；　C. $5(e^2-e)$；　D. $5e$.

2. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则下列说法错误的是（ D ）.

A. $F(x)$在$[a,b]$上连续；

B. $F(x)$在$[a,b]$上可导；

C. 若$G(x)$为$f(x)$的一个原函数, 则$F(x)-G(x)$在$[a,b]$上为常数；

D. $\dfrac{d}{dx}F(2x)=f(2x)$.

3. 设$f(-x)=-f(x), x\in[-2,2]$, 则$\int_{-2}^{2}(f^3(x)+xf^2(x)+\sqrt{4-x^2})dx=$（ B ）.

A. 0；　B. 2π；　C. 4π；　D. 条件不足, 无法计算.

4. 下列广义积分中，收敛的是（ B ）.

A. $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x}dx$；　B. $\int_2^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$；　C. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(x-1)^2}dx$；　D. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$.

5. 设$y_1=e^x, y_2=e^x+e^{2x}, y_3=e^x+e^{3x}$是一个二阶非齐次线性微分方程的三个特解, 则此方程的表达式为（ D ）.

A. $y''-3y'+2y=e^x$；　B. $y''-4y'+3y=2e^x$；

C. $y''-6y'+5y=e^x$；　D. $y''-5y'+6y=2e^x$.

二、 计算题（每题 6 分，满分 30 分）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\int_1^x e^{(t-1)^2}dt}{\sin^2(x-1)\ln x}$.

解：$\lim\limits_{x\to1}\left(x-1-\int_1^x e^{(t-1)^2}dt\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\sin^2(x-1)\ln x\right)=0$, 故此极限为$\dfrac{0}{0}$型不定型--------1 分

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1-\int_1^x e^{(t-1)^2}dt}{\sin^2(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x-1-\int_1^x e^{(t-1)^2}dt}{(x-1)^3}$$ --------1 分

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-e^{(x-1)^2}}{3(x-1)^2}$$ --------2 分

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x-1)^2}{3(x-1)^2}=-\dfrac{1}{3}$ --------2 分

（也可以通过两次 L’Hospital 法则求出极限）

2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

解： $\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]$ ------1 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1\ln(1+x)dx$ --------2 分

$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx$

$=\ln2-(x-\ln(1+x))\Big|_0^1=2\ln2-1$ --------2 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=e^{2\ln2-1}=4e^{-1}.$ --------1 分

3. 计算 $\int\dfrac{\arctan x}{x^2}dx.$

解:原积分 $=-\int\arctan x\,d(\dfrac{1}{x})=-\dfrac{\arctan x}{x}+\int\dfrac{1}{x(1+x^2)}dx$ --------2 分

$=-\dfrac{\arctan x}{x}+\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)dx$ --------2 分

$=-\dfrac{\arctan x}{x}+\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ --------2 分

4. 计算 $\int_2^3\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x^2)}dx.$

解:令 $u=\sqrt{x},\int_2^3\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-x^2)}dx=\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\dfrac{2}{1-u^4}du$ --------2 分

$=\int_{\sqrt2}^{\sqrt3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1+u^2}\right)du$ --------2 分

$=\left(\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+u}{1-u}\right|+\arctan u\right)\Bigg|_{\sqrt2}^{\sqrt3}=\ln\dfrac{\sqrt3+1}{\sqrt2+1}-\dfrac{1}{2}\ln2+\arctan\sqrt3-\arctan\sqrt2$ --------2 分

5. 设 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 tf(t)dt$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解：记 $A=\int_0^1 tf(t)dt$, 则 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}A.$

$A=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(x^2+x\sqrt{1-x^2}A)dx$ --------1 分

$=\frac{1}{3}+A\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{3}+A\cdot\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}A$ --------3 分

$A=\frac{1}{2}$，$f(x)=x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ --------2 分

三、(本题 10 分)

设$y''+2y'+y=2e^{-x}x$,求此微分方程的通解.

解： 对应齐次方程的特征方程为$r^2+2r+1=0$,特征根为$r_1=r_2=-1$. --------3 分

齐次方程的通解为$Y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$ --------2 分

设原方程的特解为$y^*=x^2e^{-x}(Ax+B)$ --------2 分

$y^{*\prime}=e^{-x}[-Ax^3+(3A-B)x^2+2Bx]$,

$y^{*\prime\prime}=e^{-x}[Ax^3-(6A-B)x^2+(6A-4B)x+2B]$,

代入原方程得$e^{-x}(6Ax+2B)=2xe^{-x}$,故$A=\frac{1}{3},B=0,y^*=\frac{1}{3}e^{-x}x^3$ --------2 分

方程通解为$C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{3}e^{-x}x^3$ --------1 分

四、(本题 10 分)

设直线$y=ax$ 与曲线$y=\sqrt{x}$ 所围成的图形面积为A_1,由直线$y=ax,x=1$和$y=\sqrt{x}$ 所围成的图形面积为A_2.假设$a>1$,当a 取何值时两图形的面积之和A_1+A_2 达到最小.

解： 直线$y=ax$和$y=\sqrt{x}$的交点为$(0,0),(\frac{1}{a^2},\frac{1}{a})$ --------2 分

$A_1=\int_0^{\frac{1}{a^2}}(\sqrt{x}-ax)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}ax^2\right)_0^{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{6a^3}$ --------2 分

$A_2=\int_{\frac{1}{a^2}}^1(ax-\sqrt{x})dx=\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)_{\frac{1}{a^2}}^1=\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}+\frac{1}{6a^3}$ --------2 分

$A_1+A_2=\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}+\frac{1}{3a^3}=f(a),f'(a)=\frac{1}{2}-\frac{1}{a^4}$ --------2 分

$\Rightarrow$当$a<\sqrt[4]{2}$时$f(a)$单调减，当$a>\sqrt[4]{2}$时$f(a)$单调增,在$a=\sqrt[4]{2}$取最小 --------2 分

五.(本题 10 分)

假设$p>0$,讨论积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$的敛散性.若积分收敛，请指出是绝对收敛还是条件收敛.

解：$\left|\dfrac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right| \le \dfrac{1}{x^p}$，故$p>1$时此积分绝对收敛 --------2 分

$0<p\le 1$时,$\left|\dfrac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right| \ge \dfrac{\sin^2 x\cos 1}{x^p} = \left(\dfrac{1}{2x^p}-\dfrac{\cos 2x}{2x^p}\right)\cos 1,$ --------1 分

$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{2x^p}dx$发散， --------1 分

因为$\left|\int_1^A \cos 2x dx\right| \le 1$有界,$\dfrac{1}{2x^p}$单调且趋于0，故由$Dirichlet$判别法可知$\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{2x^p}dx$收敛

--------2 分

$0<p\le 1$时,$\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}\right|dx$发散，即原积分不是绝对收敛 --------1 分

又因为$\cos\dfrac{1}{x}$在$[1,+\infty)$单调有界，由$Dirichlet$判别法可知$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}dx$收敛, 故由$Abel$判别法可知$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$收敛

--------2 分

故$0<p\le 1$时 原积分条件收敛 --------1 分

六、（本题 10 分）

设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导，记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，若$\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 F(x)dx=0.$

证明：（1）$\int_0^1 xf(x)dx=0;$ （2）存在$\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=0.$

证明：

(1)$\int_0^1 F(x)dx = xF(x)\big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x)dx = -\int_0^1 xf(x)dx = 0$，结论得证. --------3 分

(2)

若$f(x)\ge 0$或$f(x)\le 0$在$[0,1]$上恒成立,则$\int_0^1 f(x)dx=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0,\ f'(x)\equiv 0,$结论显然

--------1 分

若$\exists a,b\in[0,1]$,使得$f(a)>0,\ f(b)<0,$则Rolle定理可得$\exists c\in(a,b)$使得$f(c)=0$

若$c\in(a,b)$为$f(x)$的唯一零点 --------1 分

不妨设$x<c$时$f(x)>0, x>c$时$f(x)<0$

故$(x-c)f(x)\le 0$且不恒为0，因此$\int_0^1 (x-c)f(x)dx<0$ --------2 分

但$\int_0^1 (x-c)f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx-c\int_0^1 f(x)dx=0,$矛盾，故$f(x)$在$[0,1]$区间上至少有两个零点

--------2 分

在两个零点之间应用微分中值定理即得结论 --------1 分

七、（本题 10 分）

证明:若有界函数$f(x)$在$[a,b]$上仅有间断点b, 则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明：

设$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), m<M,$ --------2 分

$\forall\varepsilon>0,$取$\delta'=\min\{\frac{\varepsilon}{2(M-m)}, b-a\}$ --------2 分

则f在$[a,b-\delta']$上可积，$\exists$分割T',使得$\sum\limits_{T'}\omega_i\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon$ --------2 分

在$\Delta'=[b-\delta',b]$上的振幅$\omega'\Delta'<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}\cdot(M-m)=\frac{1}{2}\varepsilon$ --------2 分

令分割$T=T'\cup\Delta', \sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i=\sum\limits_{T'}\omega_i\Delta x_i+\omega'\Delta'<\varepsilon$ --------2 分

故$f(x)$在$[a,b]$上可积.

注：本题若用零测集性质或其它超出教材范围的定理进行证明，证明过程正确，只给 1 分