北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

微分方程的综合应用

一、求解函数表达式问题

二、微分方程求级数和

三、微分方程的几何应用和建模

一、求解函数表达式问题

例1 设$f(x)$在R上可微,且对$\forall$实数x,y,$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$,

$f(1)=\dfrac{2}{3}$,求$f(x)$.

解 $$f'(x)=\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\left[\frac{f(y)}{y}+x(x+y)\right]$$

取$x=y=0$代入原式得$f(0)=0$ $$=\lim_{y\to0}\left[\frac{f(y)-f(0)}{y}+x(x+y)\right]$$

$$=f'(0)+x^2$$

$$\therefore f(x)=f'(0)x+\frac{x^3}{3}+C$$

一、求解函数表达式问题

将$x=x, y=-x$代入原式得

$$0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=2C$$

$\therefore C=0$

$$\therefore f(x)=f'(0)x+\frac{x^3}{3}$$

将$y=1$代入原式得

$$f'(0)+\frac{1}{3}+x^2+x=f(x+1)-f(x)=f(1)+x+x^2=\frac{2}{3}+x+x^2$$

$\therefore f'(0)=\frac{1}{3}$，解得$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}$

一、求解函数表达式问题

例2 设$f(0)=1, f'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-f(t)]dt$,求$f(x)$.

解 等式两边求导得 $f''(x)=6\sin^2 x-f(x)$,

$y''+y=6\sin^2 x=3-3\cos 2x.$ 二阶常系数非齐次线性方程

对应的齐次常系数方程通解为$y=c_1\cos x+c_2\sin x$

设$y''+y=3$的特解为$y_1^*=A$　代入此方程得$A=3$

设$y''+y=-3\cos 2x$的特解为$y_2^*=B\cos 2x+C\sin 2x$

代入此方程得$B=\dfrac{3}{4}, C=0$

故$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\dfrac{3}{4}\cos 2x+3$

$f(0)=1\Rightarrow c_1=-\dfrac{11}{4}$

$f'(0)=1\Rightarrow c_2=1$

一、求解函数表达式问题

例3 设$f(x)$为连续函数，Ω为曲面$z=x^2+y^2$与$z=t(t>0)$所围成的立体，L为两曲面交线. 已知$\forall t>0$，都有

$$\iiint_{\Omega} f(z)dV=\pi f(t)+\oint_L (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}ds$$，求$f(x)$的表达式.

解 $$\iiint_{\Omega} f(z)dV=\int_0^t f(z)dz\iint_{x^2+y^2\le z}dxdy=\int_0^t \pi z f(z)dz$$

$$L:\begin{cases} x^2+y^2=z \\ z=t \end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases} x=\sqrt{t}\cos\theta \\ y=\sqrt{t}\sin\theta \\ z=t \end{cases}$$

$$\oint_L (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}ds=\int_0^{2\pi} t^2 d\theta=2\pi t^2$$

一、求解函数表达式问题

$$\therefore \int_0^t \pi z f(z)dz = \pi f(t) + 2\pi t^2$$

两边求导得：$f'(t) - tf(t) = -4t$ 且 $f(0) = 0$

解得 $f(x) = 4 - 4e^{\frac{t^2}{2}}$

一、求解函数表达式问题

例4 设$u=f(xyz)$,其中f具有三阶连续导数,且$f(1)=0, f'(1)=1$,
$u_{xyz}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$,求$f(x)$的表达式.

解 令$t=xyz$，则$u_x=yzf'(t)$,

$$u_{xy}=zf'(t)+xyz^2f''(t),$$

$$u_{xyz}=f'(t)+3xyzf''(t)+x^2y^2z^2f'''(t).$$

$$\therefore\ f'(t)+3xyzf''(t)=f'(t)+3tf''(t)=0.$$

可降阶的二阶线性方程

一、求解函数表达式问题

令$p(t)=f'(t) \Rightarrow p(t)+3tp'(t)=0.$

解得$p(t)=ct^{-\frac{1}{3}}$

$f'(1)=1 \Rightarrow c=1$

$\therefore f'(t)=t^{-\frac{1}{3}}$

$f(t)=\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$

$f(1)=0 \Rightarrow C=-\frac{3}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}$

一、求解函数表达式问题

例5

设$f(x,y)$可微，且$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-f(x,y)$，$f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$；

求$f(x,y)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}}=e^{\frac{\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}}{f(0,y)}}\quad\therefore\frac{\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}}{f(0,y)}=\cot y$$

一、求解函数表达式问题

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -f(x,y) \Rightarrow f(x,y) = C(y)e^{-x}$$

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial y} = f(0,y)\cot y \Rightarrow \frac{C'(y)}{C(y)} = \cot y \Rightarrow C(y) = C\sin y$$

$$f(0,\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$f(x,y) = \sin y \cdot e^{-x}$$

一、求解函数表达式问题

例6 设曲线积分$\int_L (f(x)-e^x)\sin y dx - f(x)\cos y dy$与路径无关，$f(x$
有一阶连续导数，$f(0)=0$，求$f(x)$.

解 积分与路径无关$\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}[(f(x)-e^x)\sin y] = \dfrac{\partial}{\partial x}[-f(x)\cos y]$

$$\therefore f'(x)+f(x)=e^x$$ 一阶线性微分方程

$$\Rightarrow f(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right),$$

由$f(0)=0$可得$C=-\dfrac{1}{2}$,

故 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

一、求解函数表达式问题

例7 已知曲线积分$\int_L F(x,y)(y\sin x dx-\cos x dy)$与路径无关，其中$F\in C^1$，$F(0,1)=0$，求由$F(x,y)=0$所确定的隐函数$y=f(x)$.

解 $\because \dfrac{\partial}{\partial x}(-F(x,y)\cos x)=\dfrac{\partial}{\partial y}(F(x,y)y\sin x)$

$\therefore -F_x\cos x=F_y y\sin x$

$\Rightarrow y\tan x=-\dfrac{F_x}{F_y}=y'$ 隐函数求导公式

$F(0,1)=0\Rightarrow y(0)=1$

解得$y=\sec x$

一、求解函数表达式问题

定义　若有全微分形式 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$称为全微分方程或恰当 方程.

$$\text{全微分方程} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

解法　设$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$为全微分方程,

$\therefore$存在$u(x,y)$,有$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

原方程变为 $du(x,y)=0$

通解为$u(x,y)=C$.

一、求解函数表达式问题

例8 求方程$(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$的通解.

解 $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^3-3xy^2)=-6xy=\dfrac{\partial}{\partial x}(y^3-3x^2y)$, 全微分方程

$\Rightarrow$ 其通解为$u(x,y)=C$

其中$u(x,y)$是$(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy$的原函数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^3-3xy^2 \Rightarrow u(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2y^2}{2}+\varphi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3x^2y+\varphi'(y)=y^3-3x^2y \Rightarrow \varphi(y)=\frac{y^4}{4}$$

方程的通解为 $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{y^4}{4}=C.$

一、求解函数表达式问题

例9 已知$f(0)=\Phi(0)$,试确定函数$f(x),\Phi(x)$,使得曲线积分

$$\int_L\left[\frac{\Phi(x)}{2}y^2+(x^2-f(x))y\right]dx+\left[f(x)y+\Phi(x)\right]dy+zdz\text{与路径无关.}$$

解 $P=\dfrac{\Phi(x)}{2}y^2+(x^2-f(x))y,\ Q=f(x)y+\Phi(x),\ R=z$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\Rightarrow f'(x)y+\Phi'(x)=\Phi(x)y+x^2-f(x)$$

$$\begin{cases}f'(x)=\Phi(x)\\ \Phi'(x)=x^2-f(x)\end{cases}\qquad \therefore\ f''(x)+f(x)=x^2$$

一、求解函数表达式问题

$$f(x)=c_1\sin x-c_2\cos x+x^2-2$$

$$\Phi(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+2x$$

$$f(0)=\Phi(0)\Rightarrow -c_2-2=c_1$$

$$\therefore\ f(x)=-c_2(\sin x+\cos x)-2\sin x+x^2-2$$

$$\Phi(x)=-c_2(\cos x-\sin x)-2\cos x+2x$$

二、微分方程求级数和

例10 求幂级数$x+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$的和函数.

解 幂级数的收敛区间为 $(-\infty,\infty)$

设和函数为$s(x)$

$$s'(x)=1+x^2+\frac{x^4}{1\cdot 3}+\frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots \quad =1+xs(x)$$

$$s'(x)-xs(x)=1,$$

$$s(0)=0$$

通解为 $s(x)=e^{\frac{x^2}{2}}[\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx+C]$

$$s(0)=0\Rightarrow s(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

二、微分方程求级数和

例11 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的值.

解1 易知所给级数的收敛区 间为$(-\infty,+\infty)$,

由于$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\therefore \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad (-\infty,+\infty).$$

二、微分方程求级数和

解2 记$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

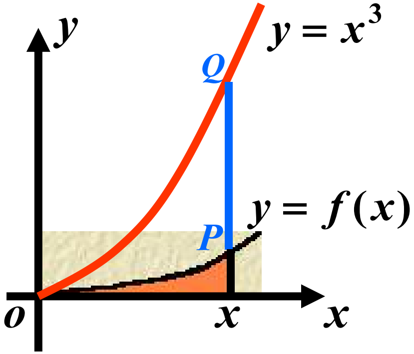
则$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=S(x)$$

$$\begin{cases} S''(x)=S(x), \\ S(0)=1, S'(0)=0 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow S(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x} \\ \Rightarrow C_1=C_2=\frac{1}{2} \end{array}$$

三、微分方程的几何应用和建模

例12 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.



解 $\int_0^x y(t)dt = x^3 - y,$

两边求导得 $y' + y = 3x^2,$

$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx} dx\right] = Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

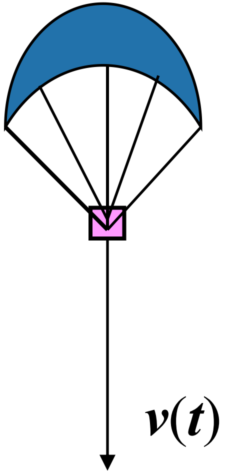
由 $y|_{x=0} = 0$，得 $C = -6,$

$$y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2).$$

三、微分方程的几何应用和建模

例13 设降落伞系统的质量为m，受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开飞机时的速度为零. 求降落伞降落的速度.

解 建立坐标系如图. 所受的力$F = mg - kv$



$$\therefore \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

$$v(t) = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mg}{k}.$$

例14 某车间体积为12000立方米,开始时空气中含有0.1%的CO_2,为了降低车间内空气中CO_2的含量,用一台风量为每分2000立方米的鼓风机通入含0.03%的CO_2的新鲜空气,同时以同样的风量将混合均匀的空气排出,问鼓风机开动6分钟后,车间内CO_2的百分比降低到多少?

解 设鼓风机开动后t时刻的CO_2含量为$x(t)\%$

在$[t, t+dt]$内 CO_2的通入量$= 2000 \cdot dt \cdot 0.03$

CO_2的排出量$= 2000 \cdot dt \cdot x(t)$

CO_2的改变量$=$通入量$-$排出量

$$12000dx = 2000 \cdot dt \cdot 0.03 - 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$

三、微分方程的几何应用和建模

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(x-0.03), \Rightarrow x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t},$$

$$\because x|_{t=0} = 0.1,$$

$$\therefore C = 0.07, \quad \Rightarrow x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$$

$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

即鼓风机开动6分钟后,车间内CO_2的百分比降低到0.056%

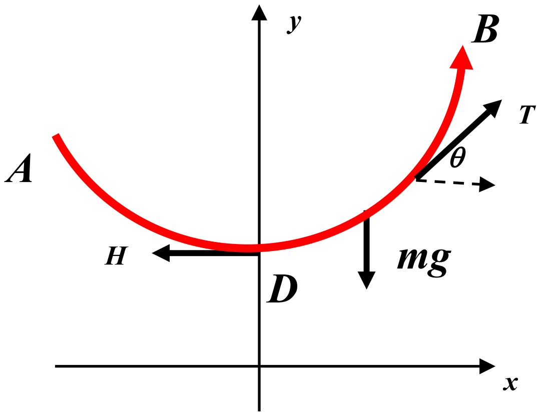
三、微分方程的几何应用和建模

例15 设一条质量均匀、柔软的绳索,两端被固定,在重力的作用下处于平衡状态.求绳索对应的方程.

解 如图建立坐标系, 设曲线方程 $y = y(x)$,

$$T\sin\theta = \rho g s, \quad T\cos\theta = H,$$

s为弧DM的长度 $\tan\theta = \dfrac{\rho g}{H} s = \dfrac{s}{a}$



$$y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$$

设$y' = p$, $\quad p' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1+p^2} \quad \ln(p+\sqrt{1+p^2}) = \dfrac{x}{a} + C_1,$

$$y'(0) = 0, \quad \ln(p+\sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} \quad ,$$

三、微分方程的几何应用和建模

$$p=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2},\qquad y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}+C_2,$$

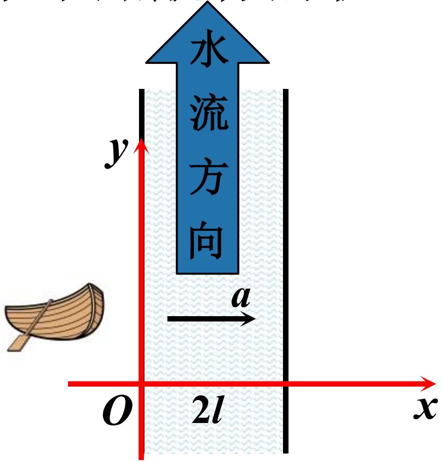
$$\text{若}y(0)=a,\quad y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}=a\,ch\frac{x}{a}.$$

$$y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}=a\,ch\frac{x}{a}=1+\frac{1}{2a^2}x^2+o(x^2).$$

悬链线问题

三、微分方程的几何应用和建模

例16 有一艘小船从岸边某点出发驶向对岸,假设河流两岸是互相平行的直线,设船速为a,方向始终垂直于对岸.又设河宽为$2l$,河面上任一点处的水速与该点到两岸距离之积成正比,比例系数为k,求小船航行的轨迹方程.



解 建立如图所示的坐标系

在任意时刻,船所在位置为(x, y).

船的水平方向速度$v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a$

船的垂直方向速度$v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kx(2l - x)$

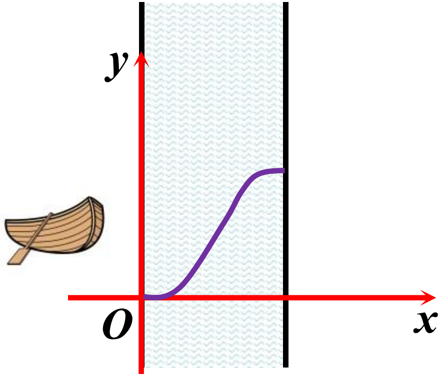
$\therefore \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{k}{a}x(2l - x).$ 变量可分离方程

三、微分方程的几何应用和建模

解得$y = C + \dfrac{k}{3a}(3lx^2 - x^3)$

$x = 0$时, $y = 0 \Rightarrow C = 0$

$\therefore$ 小船的运动轨迹为 $y = \dfrac{k}{3a}(3lx^2 - x^3), 0 \le x \le 2l$.



本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院