2019 年工科高代pro max重制版

一. 选择题 (每题 2 分，共 24 分）

1. 若 3 阶方阵 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 的行列式 $|A|=1$，则 $|2\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3-5\alpha_1|=$ (　　).

(A) -3　　**(B)** 8　　**(C)** 3　　**(D)** 2

2. 设 A、B 是 n 阶可逆方阵（$n>1$），A^*、B^* 为其伴随矩阵，则下列运算正确的是 (　　).

(A) $(AB)^*=A^*B^*$　　**(B)** $|-A|=-|A|$　　**(C)** $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$　　**(D)** $(kB)^*=k^nB^*$

3. 若 A、B 是两个不同的 n 阶方阵，且 A 与 B 相似，则 A、B 之间不同的是 (　　).

(A) 特征值　　**(B)** 行列式值　　**(C)** 秩　　**(D)** 特征向量

4. 若 A、B 为 n 阶实对称阵，则 A 与 B 合同的充要条件是 (　　).

(A) A 与 B 有相同的特征值　　**(B)** A 与 B 有相同的秩

(C) A 与 B 有相同的正、负惯性指数　　**(D)** A 与 B 有相同的行列式值

5. 设 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$，其中 B、C 为方阵，O 为零矩阵，若 A 可逆，则 (　　).

(A) 只有 B 可逆　　**(B)** 只有 C 可逆　　**(C)** B、C 可逆性不定　　**(D)** B 与 C 都可逆

6. 下列变换 σ 是线性变换的是 (　　).

(A) 在 R^3 中，$\sigma[(x_1,x_2,x_3)^T]=(x_1-x_3,x_2{}^2,x_3)^T$

(B) 在 R^3 中，$\sigma[(x_1,x_2,x_3)^T]=(x_1+x_2,x_1-x_2,2x_3)^T$

(C) 在 R^3 中，$\sigma[(x_1,x_2,x_3)^T]=(x_1+1,x_2,x_3)^T$

(D) 在 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 中，A 为给定的 n 阶非零方阵，$\forall X\in\mathrm{R}^{n\times n}$，$\sigma[X]=AX+A$

7. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，令 $W=\{x\in R^n \mid Ax=0\}$，则维数 $\dim(W)+\mathrm{R}(A)=$ (　　).

(A) n　　**(B)** m　　**(C)** n-1　　**(D)** m-1

8. 设 A 为 n 阶正交矩阵，下列说法**不正确**的是 (　　) .

(A) $A^{-1}=A^T$　　**(B)** A 的列向量组是单位正交的向量组

(C) $A^{-1}=A^*$(伴随矩阵)　　**(D)** $|A|=-1$ 或 1

9. 设 M_n 是所有 n 阶矩阵在矩阵的加法和数乘运算下构成的线性空间，下列集合中能构成 M_n 子空间的是（　　）.

(A) 所有 n 阶可逆矩阵的全体　　**(B)** 所有 n 阶对称矩阵的全体

(C) 所有 n 阶正定矩阵的全体　　**(D)** 所有 n 阶正交矩阵的全体

10. 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，B 是 $n\times m$ 阶矩阵，则（　　）.

(A) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$　　**(B)** 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$

(C) 当 $m<n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$　　**(D)** 当 $m<n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$

11. A 为任意　　阶实矩阵，下列说法**正确**的是（　　）.

(A) A^TA 不一定能相似于对角阵　　**(B)** A^TA 是正交矩阵

(C) A^TA 与 AA^T 有相同的迹　　**(D)** A^TA 是正定矩阵

12. 设 A 是 n 阶方阵，α 是 n 维列向量，若秩 $\mathrm{R}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix}=\mathrm{R}(A)$，则线性方程组（　　）.

(A) $Ax=\alpha$ 必有无穷多解　　**(B)** $Ax=\alpha$ 必有唯一解

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 只有零解　　**(D)** $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解

二. 填空题 (每题 2 分，共 12 分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^n=$ __

2. 若 3 阶方阵 A 有两个特征值 0 和 1，$A+\mathrm{I}$ 的秩为 2，其中 I 为单位阵，则行列式

$|A^2+\mathrm{I}|=$ __________________

3. 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，I 为 2 阶单位阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2\mathrm{I}$，则 $B=$ ____

4. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=t\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ 线性相关，则 $t=$ _______________

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & n^n \end{vmatrix}$

6. 设 3 阶方阵 A 有特征值 2, 2, 1 且**不可相似**于对角阵，则其若当标准形为__

三. 判断题 (每题 1 分，共 11 分) (正确的在括号内打“√”，错误的在括号内打“X”)

1. 任意线性变换都可以把线性空间的一组基映射为一组基. (　　)

2. 若 V_1, V_2 是 n 维线性空间中的两个 m 维子空间（$0<m<n$），则 $V_1 = V_2$. (　　)

3. 若 A 是正交矩阵，则 $A^{-1}A^*$ 不一定是正交矩阵. (　　)

4. 任何两个维数相等的欧氏空间都是同构的. (　　)

5. 若矩阵 C 与 D 有相同的秩，则 C 经过初等变换可以得到 D. (　　)

6. 若 A 与 B 相似， $f(x)$ 是非零多项式，则 $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似. (　　)

7. 若 A 与 B 合同，A 是正定矩阵，则 B 也是正定矩阵. (　　)

8. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个向量线性无关，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 一定线性无关. (　　)

9. 设 A、B、C 是三个 4 阶方阵，其中行列式 $|C| \neq 0$，且满足 $ACB = O$，　为零矩阵，则秩 $\mathrm{R}(A)+\mathrm{R}(B)+\mathrm{R}(C)$ 可能为 9. (　　)

10. 若矩阵 $A \neq O,\ B \neq O$，则 $AB \neq O$. (　　)

11. 若 n 元线性方程组 $A_{m\times n}\boldsymbol{x}=0$ 只有零解，则 $A_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解. (　　)

四. 计算下列各题（每题 6 分，共 18 分）

1. 设四维向量空间 R^4 中由 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 生成的空间为 W，

(1) 求 W 的维数与一组基；(2) 求 W 的一组标准正交基.

2. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，α,β 均为 n 维列向量. 记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & O \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} A & \beta \\ \alpha^T & 1 \end{pmatrix},$$

其中 I 为 n 阶单位阵，A^* 为 A 的伴随矩阵.

(1) 计算并化简 PQ 为分块上三角阵；(2) 求行列式 $|Q|$.

3. 设 3 阶实对称阵的各行元素之和均为 2，向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解向量. (1) 求 A 的特征值与特征向量；(2) 求 $(A-\mathrm{I})^{10}$.

五. 求解下列题目 (每题 9 分，共 27 分)

1. 由所有二阶方阵在矩阵的加法和数乘运算下构成的线性空间中，设

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 7\end{pmatrix},$$

W_1 是由 A_1, A_2 生成的子空间，W_2 是由 B_1, B_2 生成的子空间.

(1) 求 $W_1 \cap W_2$ 的维数与一组基；(2) 求 $W_1 + W_2$ 的维数与一组基.

2. 设数域 F 上的三维线性空间 V，定义在 V 上的线性变换 σ 对基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的作用如下：

$$\begin{aligned}&\sigma(\varepsilon_1)=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\\&\sigma(\varepsilon_2)=2\varepsilon_2,\\&\sigma(\varepsilon_3)=-\varepsilon_2+\varepsilon_3.\end{aligned}$$

(1) 求线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A；

(2) 判断 A 可否对角化；若可以对角化，试求出相应的可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵；

(3) 求 V 的一组基，使得 σ 在这组基下的矩阵为对角阵.

3. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^{\ 2}+(2+\frac{a}{2})x_2^{\ 2}+(2+\frac{a}{2})x_3^{\ 2}+(4-a)x_2x_3$.

(1) 求此二次型的矩阵及它的秩;

(2) 当此二次型的秩为 2 时,求正交变换 $x=Qy$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形,并写出此标准形;

(3) 说明此二次型是否为正定二次型.

六. 证明题 (每题 4 分，共 8 分)

1. 设 A 为 n 阶实反对称阵，求证：对任何 n 维列向量 x，均有 $x^T Ax = 0$，且 $A + \mathrm{I}$ 可逆.

2. 设实的 3 维单位列向量 α 与 β 正交，令 $A = \alpha\beta^T + \beta\alpha^T$，求证：1 和 0 是 A 的特征值.