第4章 矩阵的代数运算

4. 1 矩阵运算的定义与运算律

1. 矩阵的线性运算（加法+数乘）

$F^{m\times n}$ 中矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 相加，得到的**和是** $A+B$ 矩阵，它的第 (i,j) 元等于

A,B 的第 (i,j) 元之和 $a_{ij}+b_{ij}$ ，即：

$$(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

(1) 交换律： $A+B=B+A$

(2) 结合律： $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 零矩阵的性质： $m\times n$ 矩阵的所有元素都为 0，记作 O.

且对任意 $A\in F^{m\times n}$，都有 $A+O=O+A=A.$

(4) 负元： $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$, $A+(-A)=(-A)+A=O.$

由加法可以定义减法：

$$A-B=A+(-B),(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

具有相同的行与列的矩阵（型号），才能相加减。

矩阵的线性运算-矩阵的数乘

对任意 $A \in F^{m\times n}, \lambda \in F,$ 相乘得

$$\lambda A = \lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

具有如下性质：

(1) 对数的加法的分配律)

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \forall A \in F^{m\times n}, \lambda, \mu \in F.$$

(2) 对矩阵加法的分配律

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \forall A, B \in F^{m\times n}, \lambda \in F.$$

(3) $1A = A, \forall A \in F^{m\times n}.$

(4) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \forall A \in F^{m\times n}, \lambda, \mu \in F.$

$F^{m\times n}$在**加法和数乘**运算下满足线性空间的8条运算律，它为**线性空间**。

例 1 求数域 F 上线性空间 $F^{m\times n}$ 的**维数并求一组基**。

解: 记 $E_{ij} \in F^{m\times n}$ 表示第(i,j)个元素为1，其余元素为0的矩阵, 这里 $1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$

对任意一组 $\lambda_{ij} \in F$,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij} = (\lambda_{ij})_{m\times n} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{ij} = 0, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$$

即集合 $\varepsilon = \{E_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 中的元素线性无关。

$\forall A = (a_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$ 可以唯一地写成 ε 的线性组合

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

可见 ε 是 $F^{m\times n}$ 的一组基，包含 mn 个元素，因此，$F^{m\times n}$ 的维数等于 mn。

2、矩阵的乘法

定义： 对任意正整数 m,n,p，任意的数域 F，任意的矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}\in F^{n\times p}$ 可以相乘，得到的**乘积** $AB=(c_{ij})_{m\times p}\in F^{m\times p}$。它的第 (i,j) 个元

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

注意：(1) A,B 可以相乘的条件为：A 的**列数**与 B 的**行数相等**。

(2) A 的第 i **行**与 B 的第 j **列**相乘得到的**数**为 AB 的**第** (i,j) **个元素**。

例2 设$A\in F^{m\times n}, B\in F^{p\times q}$。给出发生下列情况的充分必要条件。

(1) 矩阵A与B可以相乘，但B与A不能相乘。

(2) 矩阵A与B可以相乘，B与A也能相乘，但乘积AB与BA不能相加。

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$ 求 $AB, BA.$

解: $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$

注意:(所有元素是0的矩阵称为零矩阵，记为O)

(1) 矩阵乘法的交换律不成立： $AB \neq BA.$

(2) $A \neq O, B \neq O,$ 但是 $AB = O.$

(3) 在矩阵乘法下，消去律不成立：

$A \neq O, AB = AO,$ 但 $B \neq O.$

矩阵的分块运算

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}=(\beta_1,\cdots,\beta_p)$$

$$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}(\beta_1,\cdots,\beta_p)=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_1\beta_p\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_m\beta_1 & \cdots & \alpha_m\beta_p\end{pmatrix}$$

特别的A与β_j的乘积就是AB的第*j*列，即

$$A\beta_j=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}\beta_j=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_j\\ \alpha_2\beta_j\\ \vdots\\ \alpha_m\beta_j\end{pmatrix},\quad AB=A(\beta_1,\cdots,\beta_p)=(A\beta_1,\cdots,A\beta_p)$$

我们还有

$$A\beta_j=\begin{pmatrix} a_{11}b_{1j}+\cdots+a_{1n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1j}+\cdots+a_{mn}b_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}b_{1j}+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}b_{nj}$$

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}=\alpha_1 b_{1j}+\cdots+\alpha_n b_{nj}$$

一般地，在作矩阵的运算时，可以用一些横线和竖线将任一矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 划分成一些矩形小块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

分块的方法是：想象用横线把A的m行分成若干组，每组依次包含 $m_1, m_2, \cdots,\ m_p$ 行，满足

$m_1+m_2+\cdots+m_p=m$；用竖线将A的n列分成

若干组，每组依次包含 $n_1, n_2, \cdots, n_q$ 列，满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_q = n$ 。则A被分成pq个小的矩阵 $A_{ij} \in F^{m_i \times n_j}, 1 \le i \le p, 1 \le j \le q.$ 这就称对矩阵A进行了**分块(partitioning)**，进行了分块的矩阵A被称为**分块矩阵(partitioning matrix)**。

在进行矩阵运算时可以暂时将每一块 A_{ij} 作为一个整体，看作一个元，将A看作由这些元组成的 $p \times q$ 矩阵 $A = (A_{ij})_{p \times q}$ 来进行运算。

分块矩阵的加法和数乘

将两个 $m \times n$ 矩阵A，B相加，可以将A，B进行同样方式的分块：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

使处于同一位置的块 A_{ij}与B_{ij} 的行数相等列数也相等。将A，B中处于同一位置的块 A_{ij}, B_{ij}

相加，得到的 $(A_{ij}+B_{ij})_{p\times q}$

$$\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1q}+B_{1q} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2q}+B_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1}+B_{p1} & A_{p2}+B_{p2} & \cdots & A_{pq}+B_{pq} \end{pmatrix}$$

就是A+B的分块形式。

对任意的 $\lambda \in F$ ，还容易看出

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1q} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda A_{p1} & \lambda A_{p2} & \cdots & \lambda A_{pq} \end{pmatrix}$$

分块矩阵的乘法

将矩阵 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{n\times r}$ 相乘，可以将A，B进行分块

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{ps} \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sq} \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

其中 $A_{ij}\in F^{m_i\times n_j}, B_{ij}\in F^{n_i\times r_j}, m_1+m_2+\cdots+m_p=m,$

$n_1+n_2+\cdots+n_s=n, r_1+r_2+\cdots+r_q=r.$

A，B可以看作以它们的块为元的矩阵来相乘得到分块矩阵

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & \cdots & C_{pq} \end{pmatrix} \qquad (4.2.4)$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{is}B_{sj}.$

可以验证，这样得到的C就等于AB。

例4. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}.$ 求 $AB, BA.$

解:

$$AB=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_1 & \lambda_1 b_1\\ \lambda_2 a_2 & \lambda_2 b_2\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}a_1\lambda_1 & b_1\lambda_2\\ a_2\lambda_1 & b_2\lambda_2\end{pmatrix}.$$

注意 (1) AB 可由 B 的两行分别乘 λ_1,λ_2 得到，

BA 可由 B 的两列分别乘 λ_1,λ_2 得到。

(2) 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，且 $b_1\neq 0$ 或 $a_2\neq 0$，那么 $AB\neq BA.$

(3) 若 $\lambda_1=\lambda_2$, $AB=BA=\lambda B$.

定义 方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的第 (i,i) 元称为方阵的**对角元**

n 个对角元 $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ 所在位置组成的一条线称为方阵 A的**主对角线**.

定义 如果A 的所有非对角元$a_{ij}(i\neq j)$ 都为0, 称 A 为**对角阵**:

$$\operatorname{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})=A=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

例5 设$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶方阵, 求 ΛA, $A\Lambda$.

解: $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, 则 $\Lambda A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 \\ \vdots \\ \lambda_n A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix},$$

即将A 的各行分别乘以$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 就得到ΛA.

$A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, 则

$$A\Lambda=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\alpha_1,\ldots,\lambda_n\alpha_n)$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn}\end{pmatrix},$$

即将 A **的各列分别乘以** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ **就得到** $A\Lambda$.

定义 若 $a_{11}=\ldots=a_{nn}=\lambda$ 称

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda,\ldots,\lambda) \tag{4.1.2}$$

为**数量阵**。

定义 对任意方阵 B，有 $\Lambda B=B\Lambda=\lambda B.$

$$I=\mathrm{diag}(1,\ldots,1) \tag{4.1.3}$$

称为**单位阵**, 有时写成 $I_{(n)}$.

对任意的 $m\times n$ 矩阵 B，有

$$(\lambda I_{(m)})B=\lambda B,\qquad B(\lambda I_{(n)})=\lambda B.$$

矩阵乘法满足以下与**数的乘法类似的性质：**

(1) 结合律 $C(BA)=(CB)A$

证明： 设 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{p\times m},C=(c_{ij})_{q\times p}.$

则 $BA = D = (d_{ij})_{p\times n}$， 其中

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj},$$

从而 $C(BA) = CD = G = (g_{ij})_{q\times n}$， 其中

$$g_{ij} = \sum_{s=1}^{p} c_{is} d_{sj} = \sum_{s=1}^{p} c_{is} (\sum_{k=1}^{m} b_{sk} a_{kj}) = \sum_{1\le s\le p, 1\le k\le m} c_{is} b_{sk} a_{kj}, \quad \textbf{(4.1.4)}$$

另外，$CB = U = (u_{ij})_{q\times m}$， 其中

$$u_{ij} = \sum_{s=1}^{p} c_{is} b_{sj},$$

从而 $(CB)A = UA = H = (h_{ij})_{q\times n}$， 其中

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{m} u_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{s=1}^{p} c_{is} b_{sk}) a_{kj} = \sum_{1\le s\le p, 1\le k\le m} c_{is} b_{sk} a_{kj}, \quad \textbf{(4.1.5)}$$

比较以上两式，即得结论。

利用矩阵乘法可将线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1.6)$$

写成矩阵方程的形式，记矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

称 A 为方程组(4.1.6)的系数矩阵.

则按照矩阵乘法的法则， 有

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

因此，方程组(4.1.6)可写成

$$AX = \beta \qquad (4.1.7)$$

(2) 与数乘的结合律

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

(3) 乘法对于加法的分配律

$$A(B + C) = AB + AC, (B + C)A = BA + CA$$

例6 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\-1&-2&-1&-2\\1&2&1&2\\-1&-2&-1&-2\end{pmatrix}$, 求 A^{10}.

解 记 $X=(1,2,1,2)$, 则

$$A=\begin{pmatrix}X\\-X\\X\\-X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}X=YX,$$ 于是

$$A^{10}=\underbrace{(YX)(YX)\cdots(YX)}_{10\text{个}YX}=Y\underbrace{(XY)(XY)\cdots(XY)}_{9\text{个}XY}X$$

$$=Y(XY)^9X.$$

由

$$XY = (1,2,1,2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2,$$

得 $A^{10} = Y(-2)^9 X = -512A$

$$= \begin{pmatrix} -512 & -1024 & -512 & -1024 \\ 512 & 1024 & 512 & 1024 \\ -512 & -1024 & -512 & -1024 \\ 512 & 1024 & 512 & 1024 \end{pmatrix}.$$

例7 设方阵A的秩为1，对角元之和为λ，求证：$A^n=\lambda^{n-1}A$。

证明： rank A=1，则其行向量组的极大线性无关组由一个非零向量$\beta=(b_1,\ldots,b_n)$组成。A的每一行α_i都是β的常数倍: $\alpha_i=a_i\beta$。于是

$$A=\begin{pmatrix} a_1\beta \\ \vdots \\ a_n\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\beta=\alpha\beta=\begin{pmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

注：方阵A对角元之和称为A的**迹**，记作tr$A$。

$$A^n=\underbrace{(\alpha\beta)(\alpha\beta)\cdots(\alpha\beta)}_{n}=\alpha\underbrace{(\beta\alpha)(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)}_{n-1}\beta$$

$$=\alpha\lambda^{n-1}\beta=\lambda^{n-1}\alpha\beta=\lambda^{n-1}A$$

其中$\lambda=\beta\alpha=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

方阵的多项式

由矩阵的乘法可以定义方阵 A 的各次幂：

$$A^1 = A, A^2 = AA, A^3 = (A^2)A, \cdots, A^{k+1} = (A^k)A, \forall k \in N$$

由矩阵乘法的结合律，对 $\forall m, n \in N$,

有

$$A^m A^n = A^{m+n}$$

设关于 x 的多项式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \in F[x]$$

设 A 是任一 n 阶方阵，

则

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m \in F^{n\times n}$$

$\forall f(x), g(x) \in F[x]$, 设 $s(x) = f(x)+g(x), p(x) = f(x)g(x)$

则 $s(A) = f(A)+g(A), p(A) = f(A)g(A)$

转置与共轭

定义　将$m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到$n\times m$ 矩阵，称为A 的**转置矩阵**，记作A^T. 即

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T的第(i,j)元等于A 的第(j,i)元.

矩阵的转置满足如下运算律：

(1) $(A^T)^T = A.$

(2) 对 n 阶方阵 A, $|A^T| = |A|$.

(3) $(A+B)^T = A^T + B^T.$

(4) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda$ 是任意数。

(5) $(AB)^T = B^T A^T.$

证明(5)：设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{n\times p}, AB = C = (c_{ij})_{m\times p},$

另外, 则 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$ 其中,

$A^T = (a'_{ij})_{n\times m}, B^T = (b'_{ij})_{p\times n},$ $a'_{ij} = a_{ji}, b'_{ij} = b_{ji}.$

设 $B^T A^T = D = (d_{ij})_{p\times m}.$ 则

$$d_{ji}=\sum_{k=1}^{n} b'_{jk}a'_{ki}=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}=c_{ij},$$

于是 $D=C^T$. 即 $(AB)^T=B^T A^T$.

(6)设分块矩阵 $A\in F^{m\times n}$ 则A的转置

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{p1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{p2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1q}^T & A_{2q}^T & \cdots & A_{pq}^T \end{pmatrix}$$

定义 设 A 是方阵，若 $A = A^T$,则称 A 为**对称方阵。**

若 $A^T = -A$, 就称 A 是**反对称方阵**，也称**斜对称方阵.**

例8 设*A*是任意矩阵，求证:(1)*AA*^{T}是对称方阵;

(2) 任意方阵*A*可以写成**对称方阵*S*与反对称方阵*K*之和，**即*A*=*S*+*K*。

例9 设 A 是 n 阶反对称矩阵，X 是 n 维列向量。

求证：$X^T AX = 0.$

证明 $X^T AX$ 由一个元组成，因此

$$X^T AX = (X^T AX)^T = X^T A^T (X^T)^T = X^T(-A)X = -X^T AX$$

即有 $X^T AX = 0.$

定义 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的**共轭矩阵**为 $\left(\overline{a_{ij}}\right)_{m\times n}$，记作 $\overline{A}$.

矩阵共轭的性质

(1) $\forall A, B \in C^{m\times n}, \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B};$

(2) $\forall \lambda \in C, A \in C^{m\times n}, \overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\,\overline{A};$

(3) $\forall A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times p}, \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B};$

(4) $\forall A \in C^{m\times n}, \overline{A}^T = \overline{A^T}.$

定义 设 $A \in C^{m\times n}$,若 $\overline{A}^T = A$, 则称 A 为**Hermite方阵。**

若 $\overline{A}^T = -A$, 就称 A 是**反Hermite方阵。**

复矩阵A的共轭转置记为A^*则如下性质成立:

$$(1)(A^*)^* = A;$$

$$(2)(A+B)^* = A^* + B^*;$$

$$(3)(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*;$$

$$(4)(AB)^* = B^* A^*;$$

$$(5)\left|A^*\right| = \overline{|A|}.$$

例10 A是复数域上的非零矩阵。求证：$A\overline{A}^T \neq 0.$

证明 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $\overline{A}^T=\left(\overline{a'_{ij}}\right)_{n\times m}$，其中 $a'_{ij}=a_{ji}.$

于是 $B=A\overline{A}^T=(b_{ij})_{m\times m}$， 其中

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a'}_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{jk}.$$

特别 $b_{ii}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a'}_{ki}=\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2.$

由于 $A\neq 0$， 必存在某个元$a_{rs}\neq 0$， 对应的

$b_{rr}>|a_{rs}|^2>0$， 因此，$A\overline{A}^T=B\neq 0.$