11 章习题课（一）

判别级数的敛散性方法小结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用正项级数判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

满足

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$

根值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$

$\xrightarrow{q=1}$ 不定

用它法判别

- 比较判别法
- 部分和极限
- 积分判别法

$q<1$ 收 敛

$q>1$ 发 散

例1 $\{x_n\}$是单调增加有界的正值数列，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})\text{收敛.}$$

证 $$(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})=\frac{(x_{n+1}-x_n)}{x_{n+1}}\leq\frac{(x_{n+1}-x_n)}{x_1},$$

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$,部分和$S_n=\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=x_{n+1}-x_1$,

$\{x_n\}$单调有界必有极限，所以S_n收敛.级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛,

由比较判别法知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x_n}{x_{n+1}})$收敛.

例2 设$x_1=1, x_{n+1}=x_n+x_n^2$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n}$收敛

证明 $x_{n+1}=x_n+x_n^2 \Rightarrow x_{n+1}=x_n(1+x_n)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{1+x_n} \Rightarrow \frac{1}{1+x_n}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}$$

部分和：$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k}=\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}]=1-\frac{1}{x_{n+1}}$

又$x_{n+1}=x_n+x_n^2 \Rightarrow x_{n+1}>x_n\geq 1 \Rightarrow \{\frac{1}{x_n}\}\downarrow$有下界0

所以S_n收敛，从而原级数收敛.

例3 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=S$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

证明 令 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+2(S_2-S_1)+\cdots+n(S_n-S_{n-1})}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nS_n-(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\right)=0.$$

例4 设$a_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，试判断敛散性

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n},\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$$

解 $(1)\dfrac{a_n}{1+n^2a_n}<\dfrac{a_n}{n^2a_n}=\dfrac{1}{n^2}\Rightarrow$ 收敛

(2)若$\{a_n\}$有界$,0<a_n\le M,\dfrac{a_n}{1+a_n}\ge\dfrac{1}{1+M}a_n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$发散

若$\{a_n\}$无界，则$\dfrac{a_n}{1+a_n}\not\to 0$，否则$\{a_n\}$有界

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}\text{发散.}$$

例5 判断级数敛散性:

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n};$$

解 设 $u_n=\dfrac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}}=e^0=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}u_n=1\neq 0,$$

根据级数收敛的必要条件，原级数发散.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cos^2\frac{n\pi}{4}}{3^n}$;

解 $u_n=\dfrac{n^3\cos^2\frac{n\pi}{4}}{3^n}<\dfrac{n^3}{3^n}$, 令 $v_n=\dfrac{n^3}{3^n}$,

$\because\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{v_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^3}{3^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\sqrt[n]{n})^3}{3}=\dfrac{1}{3}<1,$

$\therefore$ 由根植判别法知$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$收敛,

根据比较判别法,原级数收敛.

(3) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$

解 由于$x > 3$时，$\frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^p} > 0$且单调递减，

而$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^p} dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(\ln \ln x)^p} d(\ln \ln x)$

当$p > 1$时收敛，$p \le 1$时发散，

由*Cauchy*积分判别法知级数具有相同的敛散性.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

解 $\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}}=\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}$

$\because n^{\frac{\ln n}{n}}=e^{\frac{\ln^2 n}{n}}\to e^0=1(n\to\infty)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}}=0<1$

$\therefore$由$Cauchy$判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$收敛.

$$(5)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$$

解 $u_n=\dfrac{e^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}=1\Rightarrow \text{比值判别法不适用}$$

$$\text{但是}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1\Rightarrow\{u_n\}\uparrow$$

$\because u_1=e,\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 级数发散.

例6 若$\lim\limits_{n\to\infty} n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n=1$,讨论正项级数:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性

证明 $n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n \sim n^{p-1}a_n \to 1,\quad n\to\infty,$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{1}{n^{p-1}},\quad n\to\infty,$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n \begin{cases} 收敛，& p>2, \\ 发散，& p\le 2 \end{cases}$$

例7 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$的敛散性.

解 (1)$\alpha \le 0$时，$\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} \to \infty$，　$(n \to \infty) \Rightarrow$ 发散

(2)$0 < \alpha \le 2$时，$\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} \ge \frac{(n-1)\ln 2}{n^{\alpha}} \sim \frac{\ln 2}{n^{\alpha-1}} \ge \frac{\ln 2}{n} \Rightarrow$ 发散

(3)$\alpha > 2$时，$\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}} < \frac{n\ln n}{n^{\alpha}} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$，

取$\varepsilon > 0$,满足$\alpha - 1 - \varepsilon > 1$，则$\dfrac{\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}}{\frac{1}{n^{\alpha-1-\varepsilon}}} = \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} \to 0(n \to \infty) \Rightarrow$ 收敛

例8 判别$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$敛散性

解 $n\to\infty$时，$n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\dfrac{\ln n}{n^2+1}$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\ln n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}}=0$及$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$收敛知$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2+1}$收敛,

所以由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$收敛.

例9 判敛散：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}{\ln^p n}$， $(p>0)$

证明 $\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})=\sin[2\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]=\sin\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$$\sim\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{n}(n\to\infty)$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}{\ln^p n}\sim\frac{\pi}{n\ln^p n}(n\to\infty)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}{\ln^p n}\quad\begin{cases}\text{收敛，}p>1,\\\text{发散，}0<p\le 1\end{cases}$$

例10 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)$的敛散性.

解 由 $x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$

可得

$$\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}=\frac{1}{6}(\frac{\pi}{n})^3+o((\frac{\pi}{n})^4)\sim\frac{1}{6}(\frac{\pi}{n})^3, n\to\infty$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{n})^3$收敛，所以原级数也收敛.

例11 设$f(x)$为偶函数，在0点的某邻域内有连续二阶导数，且$f(0)=1, f''(0)=2$, 证明$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})-1\right|$收敛

证明

$$f(\frac{1}{n})=f(0)+f'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}f''(\xi)\frac{1}{n^2},\quad \xi\in(0,\frac{1}{n})$$

$$f(0)=1, f''(0)=2, f'(0)=0$$

$$\left|f(\frac{1}{n})-1\right|=\frac{1}{2n^2}f''(\xi)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f(\frac{1}{n})-1\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}f''(\xi)=1$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})-1\right|\text{收敛}$$

例12 设$f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$收敛

解 $f(0)=1,\quad f'(0)=1$，且$(1-x-x^2)f(x)=1$

求n阶导数：$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\dfrac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!},\quad n\geq 2$

记$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，则$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

又$a_0=a_1=1$，则$\dfrac{3}{2}a_1\leq a_2\leq 2a_1$，由归纳法可证：$\dfrac{3}{2}a_{n-1}\leq a_n\leq 2a_{n-1}$，

$$\frac{n!}{f^{(n)}(0)}=\frac{1}{a_n}\leq\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}\leq\cdots\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}\text{收敛}$$

例13 判敛散：$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n}$， α,β为实数， $\beta > 0$

证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{\alpha}\beta^{n}} = \beta$

$\therefore 0 < \beta < 1$时， 收敛； $\beta > 1$时， 发散

$$当\beta = 1时, \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \begin{cases} 收敛， & \alpha < -1 \\ 发散， & \alpha \geq -1 \end{cases}$$

例14 判敛散：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$， $a\geq 0$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n+1})}}{\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}a, & 0<a<1\\ \dfrac{1}{2}, & a=1\\ 0, & a>1\end{cases}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0)\text{收敛}$$

例15 设$0 < u_1 < 1, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n(u_n^2 + 1)$,讨论$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛性

证明 显然,$0 < u_n < 1$ $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}(u_n^2 + 1) < 1$

$\{u_n\}\downarrow$有界 $\quad$ 设$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A < 1$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}A(A^2 + 1) \Rightarrow A = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(u_n^2 + 1) = \frac{1}{2} < 1$$

由比值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.