一、 计算题（20 分）

1. 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$，求 $\iint\limits_{D} \dfrac{1 + xy^2}{1 + x^2 + y^2} dxdy$.

解： $\iint\limits_{D} \dfrac{1 + xy^2}{1 + x^2 + y^2} dxdy = \iint\limits_{D} \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$ （由对称性）

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \dfrac{r}{1 + r^2} dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \dfrac{1}{2} \ln(1 + r^2) \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \dfrac{1}{2} \ln 2 d\theta = \pi \ln 2.$$

2. 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$，求 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdydz$.

解法 1： $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdydz = \iint\limits_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dxdy \int_{-\sqrt{1 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dz$ （或利用对称性）

● $= 2 \iint\limits_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} dr$

$(\diamondsuit r = \sin t) = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^2 t dt = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 1) \cos^2 t d \cos t$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \dfrac{3 \cos^5 t - 5 \cos^3 t}{15} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \dfrac{2}{15} d\theta = \dfrac{8\pi}{15}.$$

解法 2：

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin^3 \varphi dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \dfrac{\sin^3 \varphi}{5} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \dfrac{\cos^2 \varphi - 1}{5} d \cos\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \dfrac{\cos^3 \varphi - 3\cos\varphi}{15} \Big|_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \dfrac{4}{15} d\theta = \dfrac{8\pi}{15},$$

解法 3：

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz \quad \text{(或利用对称性)}$$

$$= 2\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr \quad \boxed{\sqrt{1-r^2}=t}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\cdot t\cdot(-\frac{t}{r})dt = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-t^2)\cdot t^2 dt$$

$$= \frac{8}{15}\pi.$$

3. 计算 $\int_L(2+x^2y)ds$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$ 的右半部分.

解：由对称性可得，

$$\int_L(2+x^2y)ds = \int_L 2ds = 2\pi.$$

二，计算题（15分）

1. 求函数$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 2y$的极值.

解：

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y - 2 = 0, \\ f_y = -2x + 6y + 2 = 0, \end{cases} \qquad \text{解得驻点为}(1,0)$$

$A = f_{xx}(1,0) = 2, B = f_{xy}(1,0) = -2, C = f_{yy}(1,0) = 6,$

$AC - B^2 = 8 > 0, A > 0,$故$(1,0)$为极小值点，$f(1,0) = -1.$

2. 设函数$f(x) = 1 - x^2 \ (0 \le x \le \pi),$

(1) 将函数$f(x)$展成余弦级数；(2) 求$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

解：(1)将函数偶延拓，延拓后的函数为连续函数

$$b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-x^2)dx = \frac{6-2\pi^2}{3},$$

$$n \ge 1\text{时}, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-x^2)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1-x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)' dx$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{2x\sin nx}{n}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{2x}{n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)' dx$$

$$= -\frac{4x\cos nx}{n^2\pi}\Big|_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\,dx$$

$$= \frac{4 \cdot (-1)^{n-1}}{n^2\pi}.$$

$$\therefore f(x) = \frac{3-\pi^2}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx, 0 \le x \le \pi, \text{li}$$

(2) 由(1)可知：$1 = f(0) = \dfrac{3-\pi^2}{3} + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$，故$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^3}{12}.$

三、（12分）

设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ ， 讨论：（1）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性；

(2) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性;(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的可微性.

解：(1) $\because \left| \dfrac{2x^3y}{x^4+y^2} \right| \leq |x|, \therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ ，

即函数在 $(0,0)$ 点连续.

(2) $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0,$

当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，可计算得

$$f_x(x,y) = \frac{6x^2y(x^4+y^2)-2x^3y\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{6x^2y^3-2x^6y}{(x^4+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{2x^3(x^4+y^2)-2x^3y\cdot 2y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2x^7-2x^3y^2}{(x^4+y^2)^2},$$

又因为 $\lim\limits_{\substack{y=x^2 \\ x\to 0}} f_x(x,y) = \lim\limits_{\substack{y=x^2 \\ x\to 0}} \dfrac{6x^8-2x^8}{(x^4+x^4)^2} = 1 \neq f_x(0,0),$

$$\lim\limits_{\substack{y=2x^2 \\ x\to 0}} f_y(x,y) = \lim\limits_{\substack{y=2x^2 \\ x\to 0}} \dfrac{2x^7-2x^3 4x^4}{(5x^4)^2} = \infty \neq f_y(0,0),$$

所以 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的不连续.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

沿路径 $y=x^2$，上述极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+x^2}}$ 不存在，

因此函数在 $(0,0)$ 处不可微。

四、证明题（10分）

证明函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(0, 2\pi)$ 内可导.

证明： $\forall 0 < \delta < \pi$，考虑区间 $[\delta, 2\pi - \delta] \subset (0, 2\pi)$，

$$\left(\frac{\sin nx}{n^2} \right)' = \frac{\cos nx}{n} \text{ 为} [\delta, 2\pi - \delta] \text{ 上的连续函数，}$$

$\because \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leq \dfrac{1}{\left| \sin \dfrac{x}{2} \right|} \leq \dfrac{1}{\left| \sin \dfrac{\delta}{2} \right|}$，$n = 1, 2, \cdots$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ 的部分和序列在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致有界，

又 $\because \left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$ 单调且一致收敛于0，

$\therefore$ 由 $Dirichlet$ 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛.

又 $\because \left| \dfrac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$，故由 $Weirstrass$ 判别法知，$\exists x_0 \in [\delta, 2\pi - \delta]$，

使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx_0}{n^2}$ 收敛.

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx_0}{n^2}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上可导，由 δ 的任意性，此级数在 $(0, 2\pi)$ 上可导.

五、（用 Green 公式计算 12 分）

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\,dx+(x^3+x-2y)\,dy$.

解：补充从点 $(0,2)$ 到 $(0,0)$ 的直线段 C, L 和 C 所围成的平面区域

记为 D, 由 **Green** 公式，

$$\int_{L+C} 3x^2y\,dx+(x^3+x-2y)\,dy = \iint_D dxdy = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} - \int_C 3x^2y\,dx+(x^3+x-2y)\,dy = \frac{\pi}{2} - \int_2^0 (-2y)\,dy = \frac{\pi}{2} - 4.$$

六、（计算题 17 分）

设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，

（1）利用 Gauss 公式计算 $\iint_{\Sigma} xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy$;

（2）求 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{2}(x^2y+xy+x^2z)\,dS$.

解：（1）补充曲面 Σ_1: $x^2+y^2 \leq 4, z=0$, 方向指向下侧

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy = \iiint_{上半球} y\,dxdydz = 0(由对称性)$$

$$\iint_{\Sigma} xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy = -\iint_{\Sigma_1} xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy$$

$$= -\iint_{\Sigma_1} x^2\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\leq 4} x^2\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3\cos^2\theta\,dr$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 4\pi$$

（2）Σ 的单位法向量为 $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$原积分 = \iint_{\Sigma} xy\cos\alpha\,dS + x\cos\beta\,dS + x^2\cos\gamma\,dS$$

$$= \iint_{\Sigma} xy\,dydz+x\,dxdz+x^2\,dxdy = 4\pi.$$

七、（计算题　17分）

(1) 利用Stokes公式 计算 $\oint_{\Gamma}(y+x^2)dx+(z+y^2)dy+(2x+z^2)\,dz$，其中

Γ 为平面 $x+y+z=1$ 与柱面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的交线，从 z 轴正向看向

原点时Γ为顺时针方向.

(2) 求曲线积分 $\int_{L}xdx-y^2dy-z^2dz$，其中L为曲线 Γ 从 $(2,0,-1)$ 到 $(-2,0,3)$ 的一段.

解：（1） 令平面Σ为$x+y+z=1$在柱面内的部分，方向指向下侧.

$$Stokes公式 \Rightarrow 原积分 = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+x^2 & z+y^2 & 2x+z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma}-dydz-2dzdx-dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma}-4dxdy = 4\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1}dxdy = 24\pi.$$

另解

令平面Σ为$x+y+z=1$在柱面内的部分，方向指向下侧.

$$Stokes公式 \Rightarrow 原积分 = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+x^2 & z+y^2 & 2x+z^2 \end{vmatrix}dS = \iint_{\Sigma}\dfrac{4\sqrt{3}}{3}dS,$$

$$= 4\iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1}dxdy = 24\pi.$$

(2) 令$P = x, Q = -y^2, R = -z^2$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \therefore 积分与路径无关,$$

积分计算方法 1：

$xdx - y^2dy - z^2dz$的原函数为$u(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{z^3}{3} + C$,

故此积分$= u(-2,0,3) - u(2,0,-1) = -\dfrac{28}{3}$.

积分计算方法 2：

取路径$(2,0,-1) \rightarrow (-2,0,-1) \rightarrow (-2,0,3)$

原积分 $= \displaystyle\int_{2}^{-2} xdx - \int_{-1}^{3} z^2dz = -\frac{28}{3}$.