一、计算题(每题 8 分，共 16 分)

1. 求不定积分 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$

解： $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x + \int e^x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \int \frac{e^x}{x+1}\mathrm{d}x + \frac{e^x}{x+1} - \int \frac{e^x}{(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + C.$$

2. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

解： $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + 3}\sec^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + 3}\mathrm{d}(\tan x)$

$$= \int_0^1 \frac{1}{u^2+3}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

备注：如果用万能代换，化为 $2\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1+u^2}{3u^4-2u^2+3}\mathrm{d}u$ 再计算，计算量比较大。

二、计算题(每题 8 分，共 16 分)

1. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解： 令 $t = \arctan x$，则 $x = \tan t$，$\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$. 于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\cdot\sec^2 t}{\sec^3 t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= \left(t\cdot\sin t + \cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2. 求方程 $y' + y\tan x = \sin 2x\ (0 < x < \frac{\pi}{2})$ 的通解。

解：记 $P(x) = \tan x$，$Q(x) = \sin 2x$. 于是根据题设可得

$$\int P(x)\mathrm{d}x=\int \tan x\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x=-\ln\cos x$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int \sin 2x\, e^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x=2\int \sin x\mathrm{d}x=-2\cos x+C$$

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=e^{\ln\cos x}\left(-2\cos x+C\right)=-2\cos^2 x+C\cos x.$$

三、计算题(每题 10 分，共 20 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left(t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right)\mathrm{d}t}{x}$.

解：
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left(t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right)=\lim_{u\to0}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=\frac{1}{2}$$

2. 利用定积分的定义求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}$.

解：
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{t}{1+t}\mathrm{d}x=2-2\ln 2$$

四、（本题12分）考虑广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$，试证明以下结论：

1). $p>1$时，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛；

2). $0<p\le1$时，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛。

解： (1) 当$p>1$时。由于 $\left|\dfrac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}\right|\le\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}$，且

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{p+1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{p-1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{p-1}{2}x^{\frac{p-1}{2}-1}}=\frac{2}{p-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+x)x^{\frac{p-1}{2}}}=0,$$

广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}dx$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$收敛，从而$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}\right|dx$ 也收敛，

即 $p>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}dx$绝对收敛。

(2) 当$0<p\le 1$时。令 $y=\frac{\ln(1+x)}{x^p}$, 则$y'=\frac{x-p(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^{p+1}}$，当$x$足够大时，$y'<0$,

$\left(例如，x>e^{\frac{1}{p}}-1时，p(1+x)\ln(1+x)>1+x>x\right)$，即当$x$充分大时，

$\frac{\ln(1+x)}{x^p}$是x的单减函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{px^{p-1}(1+x)}=0.$ 又

$$\left|\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x\right|\le 2,\ \ \forall A\in[1,+\infty),$$

由Dirichlet判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}dx$ 收敛。另一方面，

$$\left|\frac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}\right|\ge\ln 2\cdot\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{\ln 2}{2}\left(\frac{1}{x^p}-\frac{\cos 2x}{x^p}\right)\ge 0,\ \ \forall x\ge 1.$$

此时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$发散，由Dirichlet判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}dx$ 收敛，故$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$发散，

所以当$0<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛。

五、(本题12分)求二阶非齐次线性常微分方程 $y''-2y'+y=e^x\cos x$ 的通解。

解： 特征方程 $r^2-2r+1=0$，特征根$r_1=r_2=1$. 齐次方程的通解

$$y=(C_1+C_2x)e^x$$

因为$\lambda=1+i$不是特征根，设非齐次方程特解 $y^*=e^x(A\cos x+B\sin x)$. 于是

$$(y^*)'=e^x[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x]$$

$$(y^*)''=2e^x(B\cos x-A\sin x)$$

代入方程，可得

$$e^x(-A\cos x-B\sin x)=e^x\cos x$$

比较系数，解得 $A=-1, B=0$. 所以，非齐次方程的通解为$y=(C_1+C_2x-\cos x)e^x$.

或：求解辅助方程 $y''-2y'+y=e^{(1+\mathrm{i})x}$，设特解 $y^{\#}=Ae^{(1+\mathrm{i})x}$，代入方程，得到

$$A[(1+\mathrm{i})^2-2(1+\mathrm{i})+1]e^{(1+\mathrm{i})x}=e^{(1+\mathrm{i})x}$$

解得 $A=-1$, 特解 $y^{\#}=-e^{(1+\mathrm{i})x}$. 故原方程特解 $y^*=-e^x\cos x$. 所求方程通解为

$$y=(C_1+C_2x-\cos x)e^x.$$

六、（本题12分）设曲线L是圆弧$y=1-\sqrt{1-x^2}$，$0\le x\le 1$.

1). 将曲线L绕x轴在空间中旋转一周产生旋转曲面Σ，求Σ的面积；

2). 设D为曲线L、直线$x=1$及x轴围成的平面区域，将D绕x轴旋转一周产生旋转体，求该旋转体的体积。

解：由题设可得$y=f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$，$0\le x\le 1$. 旋转曲面Σ的面积为

$$S=2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)\mathrm{d}x=\pi^2-2\pi$$

旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi^2}{2}$$

或：参数方程$x=\cos t, y=1+\sin t, -\dfrac{\pi}{2}\le t\le 0$,

$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0|y(t)|\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi(t-\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0=\pi^2-2\pi$$

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0|y(t)|^2\,|x'(t)|\,\mathrm{d}t=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0|1+\sin t|^2\,|\sin t|\,\mathrm{d}t=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0|1+\sin t|^2\,\mathrm{d}\cos t$$

$$=\pi\left[1-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\cos^2 t+\cos t^2 t\sin t\right)dt\right]$$

$$=\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=\pi-2\pi\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\cos^2 t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi^2}{2}$$

或：L的极坐标为$r=2\sin\theta, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$,则$x=2\sin\theta\cos\theta, y=2\sin\theta\sin\theta,$

$$S=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\,y(\theta)\,|\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\pi^2-2\pi$$

七、（本题12分）设函数$f(x)$在$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导函数，且$f(0)=0.$

1). 记$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，试写出$F(x)$在$x=0$处带Lagrange余项的二阶Taylor公式；

2). 证明：至少存在一点$\eta\in(-a,a)$，使得$3\int_{-a}^{a}f(x)dx=a^3f''(\eta).$

(1) 解：由题设可得$F'(x)=f(x), F'(0)=f(0)=0, F''(x)=f'(x), F'''(x)=f''(x),$

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2}x^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}x^3=\frac{f'(0)}{2}x^2+\frac{f''(\xi)}{3!}x^3,$$ ξ介于0与x之间

(2) 证明：由第一问可知，分别存在$\xi_1\in(0,a)$和$\xi_2\in(-a,0)$，使得

$$F(a)=\frac{f'(0)}{2}a^2+\frac{f''(\xi_1)}{6}a^3,\qquad F(-a)=\frac{f'(0)}{2}a^2-\frac{f''(\xi_2)}{6}a^3,$$

$$\Rightarrow\ \int_{-a}^{a}f(x)dx=F(a)-F(-a)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{6}a^3.$$

由于$f''(x)$在$[-a,a]$上连续，由连续函数介值性定理，存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$$f''(\eta)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}.$$

$$\Rightarrow\ \int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{f''(\eta)}{3}a^3\ \Leftrightarrow\ 3\int_{-a}^{a}f(x)dx=a^3f''(\eta)$$