§16.4　重积分的应用

一、曲面的面积

1. 设曲面的方程为：$z=f(x,y),\ (x,y)\in D$，

其中 D 是可求面积的平面有界 区域，

$f(x,y)$在D上有连续 的一阶偏导数，

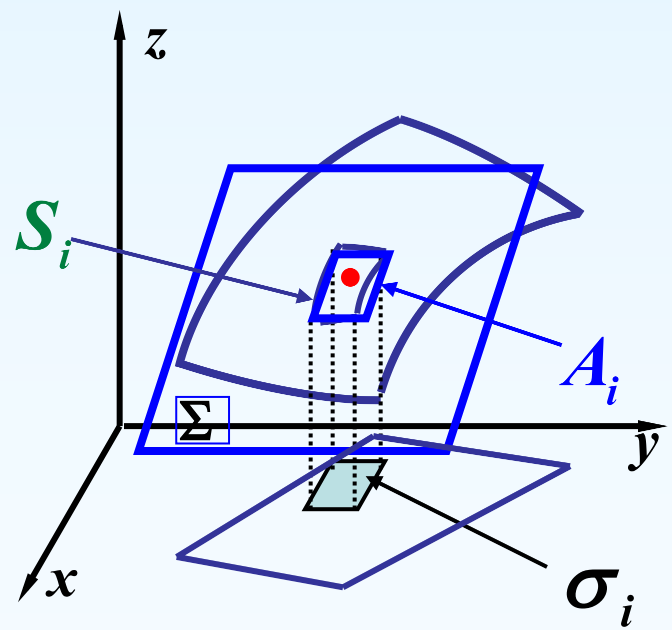
求曲面的面积？

$$D \xrightarrow{\text{分割}} \sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$S \xrightarrow{\text{分割}} S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$\forall M_i\in S_i$，作此点的切平面 Σ，

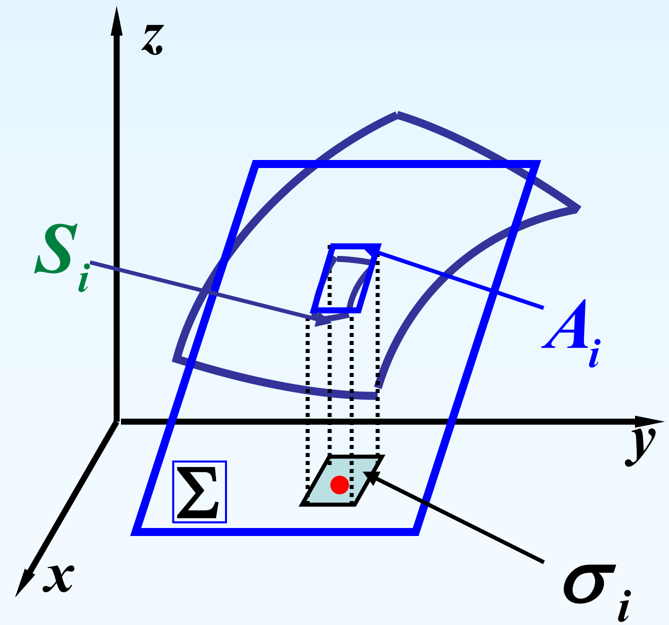
并在 Σ 上取一小块 A_i，



使得A_i与S_i的投影区域都是σ_i, 那么在点M_i附近, 用切平面 A_i代替小曲面片S_i, 故当$\|T\|<\delta$时, 有

$$\Delta S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i,$$

故 $\Delta S=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i.$



下面计算A_i的面积：

$\because \sigma_i$ 为 A_i 在 xoy 面上的投影,

$\therefore\ \Delta\sigma_i=\Delta A_i\cdot\cos\gamma_i,$

Σ的法向量与z轴的夹角

$$\Delta\sigma_i = \Delta A_i \cdot \cos\gamma_i, \quad \because \cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\therefore \Delta A_i = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\Delta\sigma_i.$$

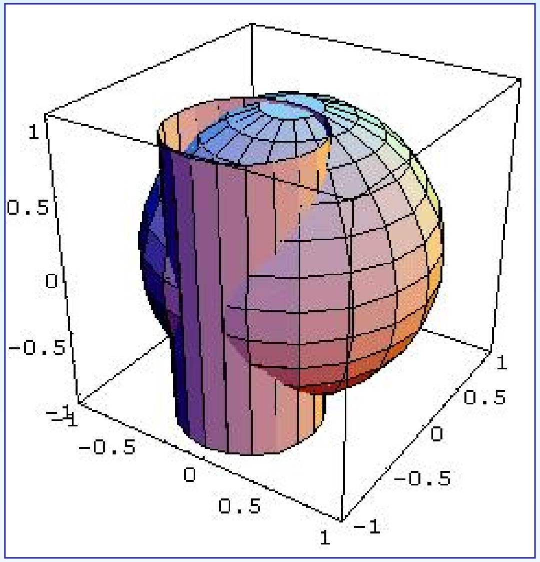
故 $\Delta S = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta A_i = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\Delta\sigma_i$

$$= \iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

曲面方程为$x = g(y,z)$, $y = h(z,x)$时，结果类似.

例 1 求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，含在圆柱体$x^2+y^2=ax$内部的那部分面积.



解 由对称性知$\Delta S=4\Delta S_1$

$$D_1:\ x^2+y^2\le ax\quad (x,y\ge 0)$$

曲面方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

于是 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，

$$\Delta S = 4\iint_{D_1} \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\,dxdy$$

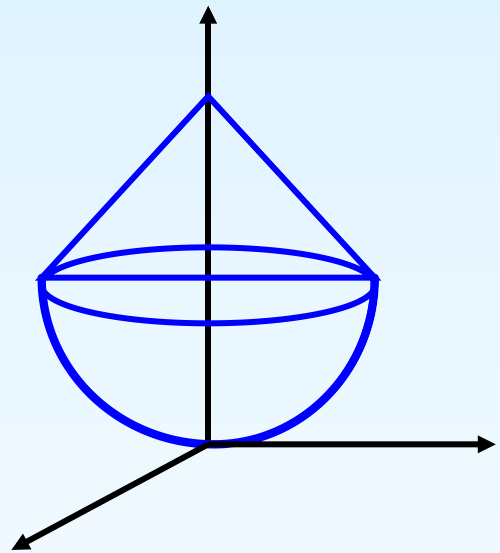
$$= 4\iint_{D_1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,rdr$$

$$= 2\pi a^2 - 4a^2.$$

例 2 求由曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$所围立体的表面积.

解 解方程组$\begin{cases} x^2+y^2=az \\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$,



得两曲面的交线为圆周

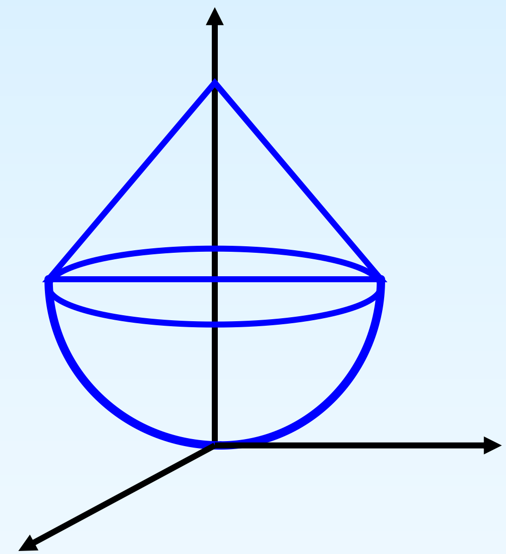
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=a \end{cases},$$

在xy平面上的投影域为 $D_{xy}:\ x^2+y^2\le a^2$,

由 $z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)$ 得 $z_x=\frac{2x}{a},\quad z_y=\frac{2y}{a},$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2y}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2},$$



则旋转抛物面部分的表面积为：

$$\iint_{D_{xy}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

由 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 知 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$,

则圆锥面部分的表面积为: $\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy$

$$\text{故}\Delta S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}dxdy+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4r^2}\cdot rdr+\sqrt{2}\pi a^2$$

$$=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1).$$

2. 曲面为参数方程形式

设空间曲面 S 由 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),$

$(u,v)\in D$表示，其中 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$在可求

面积的有界区域D上具有连续的一阶偏导 数, 且

$\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$中至少一个不为零,则曲面

S的面积为 $\Delta S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}dudv,$

其中: $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v,$

$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$ 曲面的第一基本量

二、质心

1.平面区域的质心

设xoy平面上有n个质点，它们分别位于(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots,(x_n,y_n)$处，质量分别为$m_1,m_2,\cdots,m_n$. 则该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

M_y,M_x分别表示质点系对 y 轴,x 轴的静矩.

设 D 是密度为 $\rho(x,y)$ 的平面薄板，$\rho(x,y)$ 在 D 上连续，则 D 的质心坐标为:

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D} x\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_{D} \rho(x,y)d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{D} y\rho(x,y)d\sigma}{\iint\limits_{D} \rho(x,y)d\sigma}.$$

当薄片是均匀的，质心称为**形心**.

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} x\,d\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} y\,d\sigma.$$ 其中 $A=\iint\limits_{D} d\sigma$

2. 空间区域的质心

设V是密度为$\rho(x,y,z)$的空间物体，$\rho(x,y,z)$在V上连续，则V的质心坐标为:

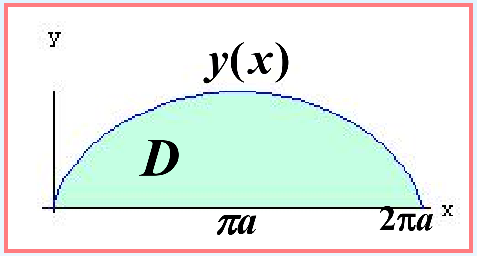
$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{V} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z};\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{V} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z};$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{V} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{V} \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

例 3 设平面薄板由 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，$(0 \le t \le 2\pi)$

与 x 轴围成，它的面密度 $\mu = 1$，求形心坐标.

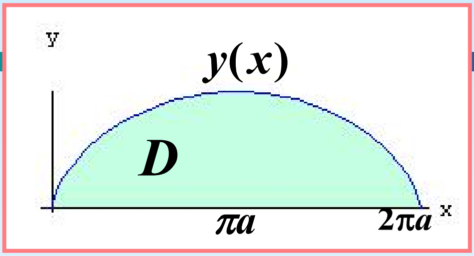
解 先求区域 D 的面积 A，



$\because 0 \le t \le 2\pi, \quad \therefore 0 \le x \le 2\pi a$

$$A = \int_0^{2\pi a} y(x)dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)d[a(t-\sin t)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$



由于区域关于直线$x=\pi a$对称，

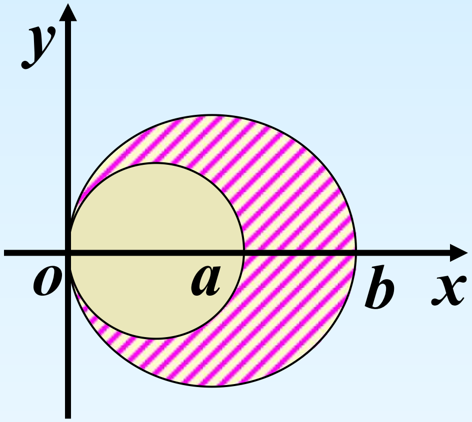
所以形心在$x=\pi a$上， 即 $\bar{x}=\pi a,$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D ydxdy=\frac{1}{A}\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}ydy$$

$$=\frac{1}{6\pi a^2}\int_0^{2\pi a}[y(x)]^2dx=\frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}[1-\cos t]^3dt=\frac{5\pi}{6}.$$

所求形心坐标为 $(\pi a,\frac{5}{6}\pi)$.

例4 求位于两圆 $r = a\cos\theta, r = b\cos\theta \quad (0 < a < b)$ 之间的均匀薄片的质心.



解 薄片关于 x 轴对称

则 $\bar{y} = 0,$

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho d\sigma}{\iint\limits_D \rho d\sigma} = \frac{2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta} r\cos\theta \cdot r dr}{\rho \cdot D}$$

$$= \frac{\frac{\pi\rho}{8}(b^3 - a^3)}{\frac{\pi\rho}{4}(b^2 - a^2)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{2(b + a)}.$$

所求质心坐标为 $\left(\frac{b^2 + ba + a^2}{2(b + a)}, 0\right).$

三、转动惯量

质点A对于轴l的转动惯量 $J=mr^2$，其中 m 为质点A的质量，r为A与轴l的距离.

设xoy平面上有n个质点，它们分别位于(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n)处，质量分别为$m_1,m_2,\cdots,m_n$.

则该质点系对于x轴和y轴的转动惯量依次为 $J_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$，$J_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$.

设 D 是密度为 $\rho(x,y)$ 的平面薄板，$\rho(x,y)$ 在 D 上连续，则 D 对 x 轴，y 轴的转动惯量分别为:

$$J_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,$$

$$J_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma.$$

D 对一般的转动轴 l 的转动惯量为：

$$J_l=\iint_D r^2(x,y)\rho(x,y)d\sigma,$$

其中 $r(x,y)$ 为 D 中点 (x,y) 到 l 的距离函数.

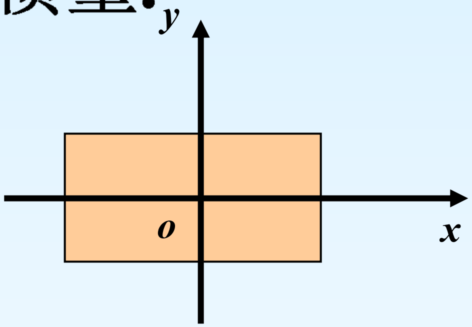
设V是密度为$\rho(x,y,z)$的空间物体，$\rho(x,y,z)$在V上连续，则V对x轴,y轴和z轴的转动惯量分别为:

$$J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$J_y=\iiint\limits_V (z^2+x^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$J_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$$

例 5 已知均匀矩形板（面密度为常数ρ）的长和宽分别为b和h，计算此矩形板对于通过其形心且分别与一边平行的两轴的转动惯量.



解 建立坐标系如图

因为矩形板均匀,

由对称性知形心坐标 $\bar{x}=0$ ， $\bar{y}=0.$

对x轴的转动惯量

$$J_x=\rho\iint_D y^2dxdy=\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y^2dy\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}dx=\frac{bh^3\rho}{12}.$$

对y轴的转动惯量 $J_y=\rho\iint_D x^2dxdy=\frac{b^3h\rho}{12}.$

四、引力

设V是密度为$\rho(x,y,z)$的空间物体，$\rho(x,y,z)$在V上连续，则V对其外质量为1的质点$A(\xi,\eta,\zeta)$的引力为：

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

其中

$$F_x = k\iiint_V \frac{x-\xi}{r}\frac{1}{r^2}\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_y = k\iiint_V \frac{y-\eta}{r^3}\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad F_z = k\iiint_V \frac{z-\zeta}{r^3}\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$，$k$为引力系数．

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

设D是密度为$\rho(x,y)$的平面薄板，$\rho(x,y)$在D上连续，则D对位于z轴上的点$M_0(0,0,a)(a>0)$处的单位质点的引力为：

$$F_x = k\iint_D \frac{\rho(x,y)x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma,$$

$$F_y = k\iint_D \frac{\rho(x,y)y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma,$$

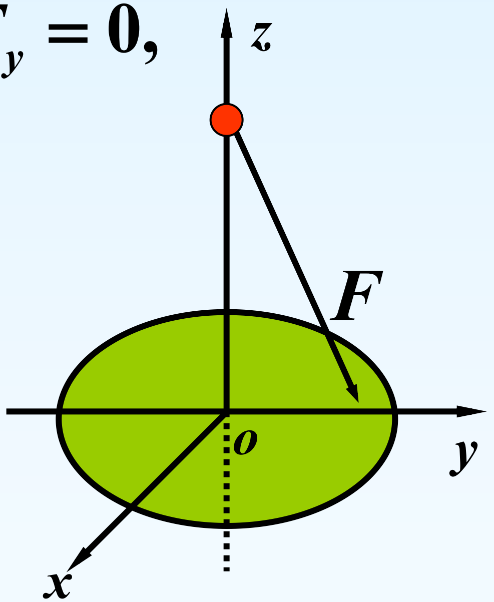
$$F_z = -ak\iint_D \frac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma.$$ k为引力常数

例5 求面密度为常量、半径为R的均匀圆形薄片：$x^2+y^2\le R^2$，$z=0$对位于 z轴上的点$M_0(0,0,a)$处的单位质点的引力．$(a>0)$

解 由积分区域的对称性知 $F_x=F_y=0$,

$$F_z=-ak\iint_D\frac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$=-ak\rho\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$



$$= -ak\rho\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{1}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} rdr$$

$$= 2\pi ka\rho\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{1}{a}\right).$$

所求引力为

$$\left\{0,\ 0,\ 2\pi ka\rho\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}} - \frac{1}{a}\right)\right\}.$$

小结

几何应用：曲面的面积

物理应用：重心、转动惯量、引力

（注意审题，熟悉相关物理知识）