合式公式语义

- 量词∀, ∃解释为逻辑量词∀, ∃
  - $\forall x\, \sigma\big(Q(x)\big)$表示：对于任意$d$，都有$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$
  - $\exists x\, \sigma\big(Q(x)\big)$表示：存在$d$，使得$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$
  - 取值为0的情况与之类似
- 通过指派函数，将一个合式公式的联结词符号指派为逻辑联结词，将量词符号指派为逻辑量词，将谓词符号指派为谓词，将函词符号指派为函数，将个体符号指派为对象，即将合式公式逐步指派为有语义的逻辑公式。

公式的语义

- 定义3.1.1 设 v 是解释 I 中的赋值，公式 A 在解释 I 和赋值 v 下的意义 I(A)(v) 定义如下：

1. 若 A 是 $P(t_1,\cdots,t_n)$，其中 P 是 n 元谓词符号，$t_1,\cdots,t_n$ 是项，则

$$I(A)(v) = P^I(I(t_1)(v),\cdots,I(t_n)(v))$$

2. 若 A 是 $\neg B$，其中 B 是公式，则 $I(A)(v) = \neg I(B)(v)$ 。
3. 若 A 是 $B \to C$，其中 B, C 是公式，则

$$I(A)(v) = I(B)(v) \to I(C)(v)$$

4. 若 A 是 $\forall xB$，其中 B 是公式，x 是变元，则

$$I(A)(v) = \begin{cases} 1 & \text{若对于每个 } d \in D_I,\ I(B)(v[x/d]) = 1 \\ 0 & \text{若存在 } d \in D_I \text{ 使得 } I(B)(v[x/d]) = 0 \end{cases}$$

被定义符号的公式的语义定理

- **定义3.1.2** 设 v 是解释 I 中的赋值， A 和 B 是公式。

1. $I(A \vee B)(v) = I(A)(v) \vee I(B)(v)$
2. $I(A \wedge B)(v) = I(A)(v) \wedge I(B)(v)$
3. $I(A \leftrightarrow B)(v) = I(A)(v) \leftrightarrow I(B)(v)$
4. $I(A \oplus B)(v) = I(A)(v) \oplus I(B)(v)$
5.

$$I(\exists x A)(v) = \begin{cases} 1 & \text{若有 } d \in D_I \text{ 使得 } I(A)(v[x/d]) = 1 \\ 0 & \text{若对于每个 } d \in D_I, I(A)(v[x/d]) = 0 \end{cases}$$

关键证明思路：$\exists x A = \neg \forall x \neg A$

全称和存在量词语义

- 设解释 I 的论域 $D_I = \{a_1,\ldots, a_n\}$ 是有穷集合，v 是 I 中赋值，则
  - $I(\forall xA)(v) = I(A)(v[x/a_1]) \wedge \ldots \wedge I(A)(v[x/a_n])$
  - $I(\exists xA)(v) = I(A)(v[x/a_1]) \vee \ldots \vee I(A)(v[x/a_n])$
- 全称量词是合取的推广，存在量词是析取的推广。
- 对于论域是有穷集合的情况，计算公式的真值时可用这两个公式消去量词。

合式公式的语义

- 我们可以用指派函数方法证明合式公式的语义
- **例题3.1.1** 判断$\forall x Q(x) \rightarrow \exists x Q(x)$的真值

$$\sigma\big(\forall x Q(x) \rightarrow \exists x Q(x)\big) = \sigma\big(\forall x Q(x)\big) \rightarrow \sigma\big(\exists x Q(x)\big)$$

$$= \forall x \sigma\big(Q(x)\big) \rightarrow \exists x \sigma\big(Q(x)\big)$$

$$= \forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x)$$

- 若 $\forall x Q^{\sigma}(x) = 0$，则$\forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x) = 1$；
- 若 $\forall x Q^{\sigma}(x) = 1$，则对于任意$d$，都有$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$，所以，存在$d$，使得$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$，即$\exists x Q^{\sigma}(x) = 1$，所以，$\forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x) = 1$
- 综上，$\forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x) = 1$，可得

$$\sigma\big(\forall x Q(x) \rightarrow \exists x Q(x)\big) = 1$$

例

- 设 P 是二元谓词符号，给定解释 I 如下：

$D_I = \{a, b\}$， $P^I(a, a) = P^I(b, b) = 0$， $P^I(a, b) = P^I(b, a) = 1$

- 确定公式$\forall x\exists yP(x, y)$和$\exists y\forall xP(x, y)$在赋值 v下的真值。

$$I(\forall x\exists yP(x, y))(v)$$

$$= I(\exists yP(x, y))(v[x/a]) \wedge I(\exists yP(x, y))(v[x/b])$$

$$= (I(P(x, y))(v[x/a][y/a]) \vee I(P(x, y))(v[x/a][y/b]))$$

$$\wedge (I(P(x, y))(v[x/b][y/a]) \vee I(P(x, y))(v[x/b][y/b]))$$

$$= (P^I(a, a) \vee P^I(a, b)) \wedge (P^I(b, a) \vee P^I(b, b))$$

$$= (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1$$

全称和存在量词语义

- 计算语句$\forall x\exists yP(x,y)$ 和语句 $\exists y\forall xP(x,y)$ 的真值时，实际上并没有用到赋值v对变元 x 和 y 的赋值，只有自由变元的值才由赋值指定。

- 展开后可以看出，$I(\forall x\exists yP(x, y))(v) \neq I(\exists y\forall xP(x, y))(v)$

也就是说，全称量词与存在量词不能交换顺序。事实上，对于任意解释 I 和 I 中任意赋值 v，若 $I(\exists y\forall xP(x, y))(v) = 1$，则 $I(\forall x\exists yP(x, y))(v) = 1$。反之不一定成立。

自由变元、基项与语句

- **定义：**
  - 如果变元x在公式Q中的出现不是约束出现，则称x在Q中为自由出现。
  - 在公式Q中有自由出现的变元称为Q的自由变元，将Q中自由变元的集合记为Var(Q)。
  - 例如变元z在公式$\forall x\ (Q(x,z) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y))$中是自由出现，变元x,y都是约束出现。
  - x有两次约束出现，表示它们是同名的两个不同变元。
    - 其中一个变元x的辖域是$Q(x,z) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y)$，而另一个变元x的辖域是$\exists y R(x, y)$。
    - 辖域是$Q(x,z) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y)$的x与辖域是$\exists y R(x, y)$的x是同名的不同变元。

基项和语句的赋值

- **定义2.7-1：** 不出现变元的项称为**基项**。
- **定义2.7-2：** 没有自由变元的公式称为**语句**。
- **定义2.7-3：** 没有约束变元的公式称为**开公式**。

- **基项** t 中不出现变元，所以对于解释 I 中的任意赋值 v_1 和 v_2，$I(t)(v_1) = I(t)(v_2)$，即基项的意义与赋值无关，将 $I(t)(v)$ 简记为 $I(t)$。
- **语句** A 中没有自由变元，所以对于解释 I 中的任意赋值 v_1 和 v_2，$I(A)(v_1) = I(A)(v_2)$，即语句的意义与赋值无关，将 $I(A)(v)$ 简记为 $I(A)$。

公式代入语义

- **定理3.1.2** 设Q是合式公式，t是项，σ是指派函数，若对于公式Q中的x是可代入的，则

$$\sigma(Q[x/t]) = \sigma(Q[x/\sigma(t)])$$

- 代入与可代入：考虑z是公式$\forall y \exists x Q(x, y, z)$的自由变元，代入$\forall y \exists x Q(x, y, z)[z/x]$，$x$是项。
  - 由于公式$\forall y \exists x Q(x, y, z)$中有约束变元$x$，因此，在公式$\forall y \exists x Q(x, y, z)$中$x$是不可代入的。
  - 将公式$\forall y \exists x Q(x, y, z)$中不可代入的约束变元$x$替换为另一个未出现的变元$w$，即$\forall y \exists w Q(w, y, z)$，此时，$\forall y \exists w Q(w, y, z)[z/x]$是可代入的。

语义与公式替换

- **定义3.1.3** 设$\boldsymbol{Q}$是谓词合式公式，$\boldsymbol{R_1}$是$\boldsymbol{Q}$的子公式，若$\boldsymbol{Q}$中子公式$\boldsymbol{R_1}$换为$\boldsymbol{R_2}$，则称$\boldsymbol{R_2}$替换$\boldsymbol{R_1}$，记为$\boldsymbol{Q[R_1/R_2]}$。
- 例如，在公式$\left(\boldsymbol{Q} \to \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right) \leftrightarrow \left(\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right)$中，$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$是子公式。若$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$用公式$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$替换，则有新的公式
$\left(\boldsymbol{Q} \to \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right) \leftrightarrow \left(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right)$

替换定理

- **定理3.1.3** 设Q是谓词合式公式， R_1是Q的子公式，若$R_1 \Leftrightarrow R_2$，则称$Q \Leftrightarrow Q[R_1/R_2]$。
- 根据替换定理，公式中的子公式做等值替换具有保真值性。在公式Q中，做等值替换后生成公式Q'，那么，$Q \Leftrightarrow Q'$。

有效式与矛盾式

- **定义3.1.4** 设$\boldsymbol{Q}$是谓词合式公式，则对于任意指派，都有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{1}$，则称$\boldsymbol{Q}$为有效式，记为$\vDash \boldsymbol{Q}$。
- 若$\boldsymbol{Q}$是有效式，并且指派σ仅由联结词性质确定，则$\boldsymbol{Q}$也称为**重言式**。
- **定义3.1.5** 设$\boldsymbol{Q}$是谓词合式公式，则对于任意指派，都有$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{0}$，则称$\boldsymbol{Q}$为矛盾式，记为$\nvDash \boldsymbol{Q}$。

永真式

- 设A是公式.
  - （1）如果A在每个解释中为真，则称A为永真式，也称A为逻辑有效的公式.
  - （2）如果A在每个解释中为假，则称A为永假式，也称A为矛盾式，不可满足式.
  - （3）如果有解释I和I中的赋值v使$I(A)(v) = 1$，则称A为可满足式，并称解释I和赋值v满足A.

定义

- (1) 若对该语言的任意解释I及解释I下的任意赋值v 都有$I(A)(v) = 1$，则称A为永真式。
  也称A恒真的、逻辑有效的
- (2) 若对该语言的任意解释I及解释I下的任意赋值v 都有$I(A)(v) = 0$，则称A为永假式。
  也称A为矛盾的、不可满足的
- (3) 若对该语言存在解释I及解释I下的赋值v，使 $I(A)(v) = 1$，则称A为可满足式。

蕴含式的永真性

- **对给定谓词公式A，B，A→B永真当前仅当对任意解释I及任意赋值v，都有**

  若$v^I(A) = 1$ 则$v^I(B) = 1$

- **例：$\forall xP(x,y) \rightarrow \forall xP(x,y)$**

  $\forall xP(x,y) \rightarrow \exists xP(x,y)$

  $\forall xQ(x,y) \rightarrow Q(x,y)$

大家发现什么规律了吗?

重言式

- 谓词逻辑公式永真式有两类，一类公式的永真性由联结词的性质决定，它与量词的意义无关，这类永真式也称为重言式，如

$$\forall x Q(x) \to \left(\exists x R(x) \to \forall x Q(x)\right)$$

- 它与谓词意义无关，仅由联结词的性质决定，$Q \to (R \to Q)$是永真式，也是重言式；
- 另一类永真式的永真性由量词的意义决定的，如$\forall x Q(x) \to \ Q(t)$，由于$Q \to R$不是永真式，公式$\forall x Q(x) \to \ Q(t)$的真值性是由谓词意义决定的，这类永真式不是重言式。

重言式

- $\forall x P(x,y) \to \forall x P(x,y)$是永真式.
- 该公式的永真性是由联结词的性质决定的，与谓词和量词的意义无关. 这类永真式称为**重言式**.

如何判断一个公式是不是重言式？

- 把原子谓词公式P和$\forall x$A 统称为初等公式，把初等公式看作命题变元，不同于初等公式看作不同的命题变元
- 若该公式是**命题逻辑的永真式**，则该公式是重言式
- 例:
- $\forall x P(x,y) \rightarrow \forall x P(x,y)$
- $\forall x P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \forall x P(x))$
- 是重言式，因为它是命题逻辑永真式$p \rightarrow (q \rightarrow p)$的替换实例.

定义

- 用谓词逻辑公式B_1，…B_n分别替换命题逻辑公式A中命题变元$p_1, \ldots, p_n$得到的谓词逻辑公式记为$A^* = A^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}$，称为A的替换实例。**命题逻辑永真式的替换实例**称为**重言式**。

永真式和重言式实例

- 例：$P(x) \to P(x)$　　$p \to p$

  $P(x) \to (Q(x) \to P(x))$

  $P(x) \to \boxed{(Q(x) \land P(x)} \to P(x))$　　$p \to (q \to p)$

  $\forall x P(x) \to \forall y P(y)$

  $\forall x P(x,y) \to \exists x P(x,y)$　　$p \to q$

例 全称蕴含存在

- 例：对于一阶语言公式A，x是变元，则
  $\forall xA \to \exists xA$是永真式

-

- 证明：对一阶语言中的任意解释I 及其任意赋值v，
  若$v^I(\forall xA) = 1$，则对任意$d \in D_I$，$v[x/d]^I(A) = 1$，

即

  存在$d \in D_I$，使得$v^I(A) = 1$，因此，$v^I(\exists xA) = 1$。
  所以$\forall xA \to \exists xA$是永真式

例 存在与全称换序

- **例：A是一阶语言中的公式，x，y是不同的变元**

  则 $\exists x\forall yA \to \forall y\exists xA$ 是永真的。

- **证明：对一阶语言中的任意解释I**

  设$D_I=\{d_1,\ldots,d_n\}$，若I ($\exists x\forall yA$)=1，则存在$d\in D_I$，

$I(\forall y A^x_d)=1$.因此有$I(A^{x,y}_{d,d_1})=1,\ldots,I(A^{x,y}_{d,d_n})=1$.

  对任意d_i， $I(A^x_d)=1$，因此，对任意y，存在x使得

A为真，即$I(\forall y\exists xA)=1$。

  思考：$\forall y\exists xP(x,y)\to\exists x\forall yP(x,y)$是不是永真的

例

（2）$\forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

分析一下，能否找到解释 I 使 $I(\exists x \forall y P(x,y)) = 0$ ，且 $I(\forall y \exists x P(x,y)) = 1$ 。若 $I(\forall y \exists x P(x,y)) = 1$，则对于每个 $d \in D_I$ ，总可找到 $c_d \in D_I$ 使 $P^I(d,c) = 1$，这里 c_d 依赖于 d，对于不同的 d，c_d 可能不同。因此，$I(\exists x \forall y P(x,y)) = 0$ 是可能的。根据上面的分析，给出一个是该语句为假的解释 I 如下：

D_I 为整数集合，对任意整数 m，n，

$P^I(m,n) = 1$ 当且仅当 $m < n$

则对于每个整数 y ，总有 $y-1 < y$ ，但没有一个整数小于每个整数。因此 $I(\forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)) = 0$，因此它显然不是永真式。

例

（3）$\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$

先看能否找到一个解释I，
使$I(\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))) = 0$，
即$I(\exists x P(x) \to Q(x)) = I(\exists x P(x)) = 1$且$I(\exists x Q(x)) = 0$。$I(\exists x P(x)) = 1$
表明有$a \in D_I$使$P^I(a) = 1$，而$I(\exists x Q(x)) = 0$要求对每个$x \in D_I$，
$Q^I(x) = 0$。若D_I中还有一个元素b使$P^I(b) = 0$，则
$I(\exists x(P(x) \to Q(x))) = 1$。可以看出，如果$D_I$中至少有两个元素
，则I有可能满足这三个条件。

可给出是该语句为假的解释I如下：

$$D_I = \{a,b\}, P^I(a) = 1, P^I(b) = 0, Q^I(a) = Q^I(b) = 0$$

则$I(\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))) = 0$，故该公式不是
永真式。
显然该公式是可满足式。例如取解释I如下：

$$D_I = \{a\}, P^I(a) = Q^I(a) = 1$$