§17.3 Green 公式 (2)

（George Green，1793—1841）

2. Green公式

定理3.1 设闭区域D由分段光滑的曲线L围成, 函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数,则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

其中L是D的取正方向的边界曲线.

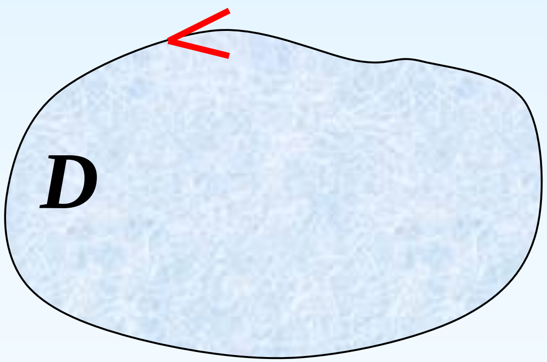
$Green$ 公式

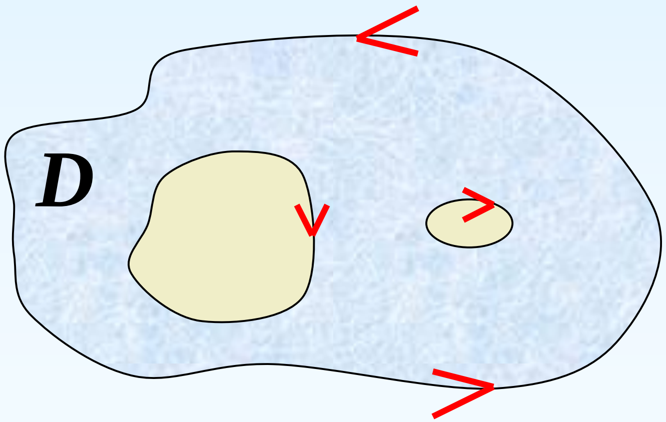
注：*D*的边界曲线*L*的正方向？

负方向

当人沿边界行走时, 区域*D*总在她(他)的左侧.

右侧



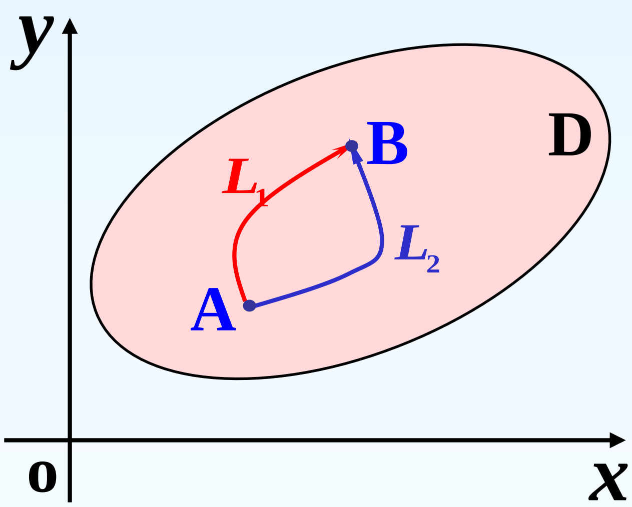


二、曲线积分与路径无关性

1. 定义

设D是一个区域，$P(x,y)$和$Q(x,y)$在D内有一阶连续偏导数，如果对D内任意给定的两点A和B，以及D内从A到B的任意两条曲线L_1, L_2，都有：

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$



则称曲线积分$\int_L Pdx + Qdy$在D内与路径无关.

2. 曲线积分与路径无关的条件

定理4. 2 设D是单连通闭区域. 若$P(x,y)$和$Q(x,y)$在D内有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1) 沿D内任一按段光滑封闭曲线L，有

$$\oint_L Pdx+Qdy=0.$$

$\Downarrow$

(2) 在D内$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关.

$\Downarrow$

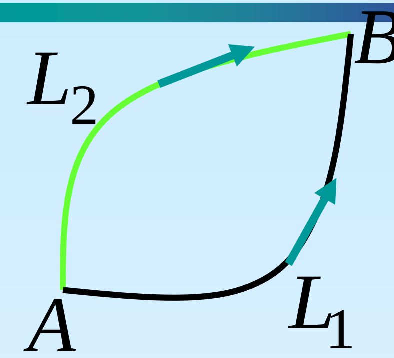
(3) 在D内存在$u(x,y)$，使$du=Pdx+Qdy$.

$\Downarrow$

(4) 在D内，$\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

证明

$(1)\Rightarrow(2)$ 设L_1, L_2是D内从A到B的任意两条按段光滑曲线,



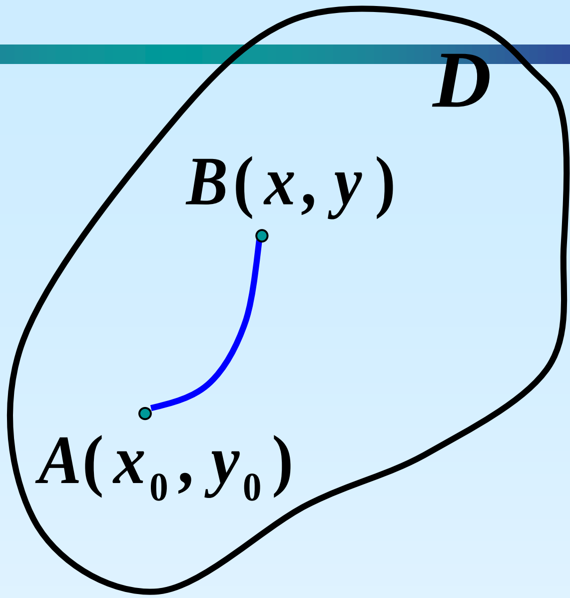
$$\int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{L_1+(-L_2)} Pdx + Qdy = 0.$$

所以

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

$(2) \Rightarrow (3)$



设$A(x_0, y_0)$为D内一定点,

$B(x, y)$为D内任一点,

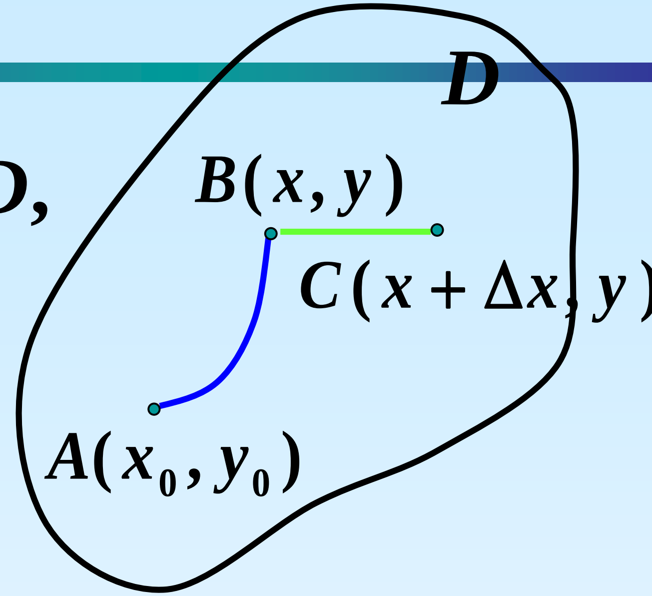
由(2), 曲线积分 $\int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关.

故当$B(x, y)$在D内变动时, 积分值是x, y的函数,

即: $u(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy.$

下证 $u(x, y)$满足要求.

取Δx充分小，使得$C(x+\Delta x, y)\in D$，



则 $u(x+\Delta x, y)-u(x, y)$

$$=\int_{AC} Pdx+Qdy-\int_{AB} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{BC} Pdx+Qdy=\int_{BC} Pdx \quad (\because dy=0)$$

$$=\int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)dx=P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x, \ (0<\theta<1)$$

根据$P(x, y)$在D上连续，于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x, y)=P(x, y).$$

同理 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$. 因此 $du=Pdx+Qdy$.

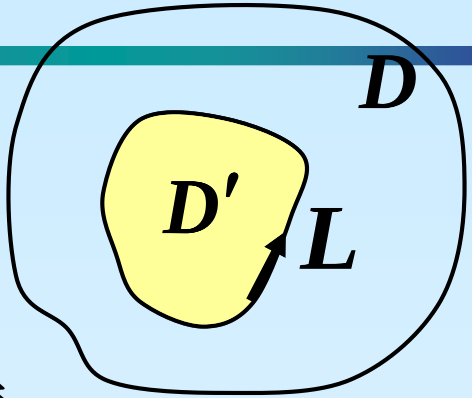
(3) ⇒ (4)

由(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y).$

进而 $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$

由 $P(x,y)$和$Q(x,y)$ 在D内有一阶连续偏导数,

知 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, 所以在$D$内, $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.



(4) ⇒ (1)

设L为D内任一按段光滑封闭曲线，

记 L 围成的区域为D'，由D是单连通闭区域，

所以$D' \subset D$. 应用Green公式和条件(4)，可知

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

注 (1) D的单连通性质很重要.

不包含原点的单连通区域D内任何封闭曲线L上,

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$$

当L为绕原点一周的封闭曲线时,

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

只能在挖去原点的区域上有定义, L必含在一个

复连通区域内, 此时 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$

(2) 若第二型曲线积分在D内与路径无关，

则D内以$A(x_0, y_0)$为起点，$B(x, y)$为终点的曲线

积分$\int_{AB} Pdx + Qdy$，也可记为

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

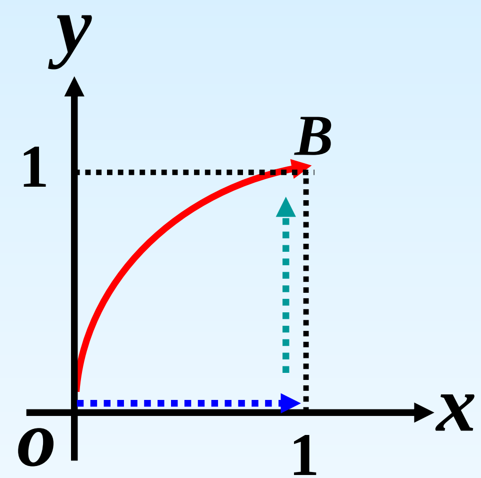
(3) 定理的两个条件都满足时，才可用.

例 9 计算 $\int_L (x^2+2xy)dx+(x^2+y^4)dy$. 其中

L 为由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线弧 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

在整个平面上成立.



故原式 $=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(1+y^4)dy$

$=\dfrac{23}{15}$.

例10 设曲线积分$\int_L [f(x)-e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$与路径无关,且$f$有一阶连续导数, $f(0)=0$,求$f(x)$.

解 由曲线积分与路径无关,知

$$\frac{\partial}{\partial y}[(f(x)-e^x)\sin y]=\frac{\partial}{\partial x}[-f(x)\cos y]$$

即 $f'(x)+f(x)=e^x$.

由一阶线性微分方程的通解公式, 可得

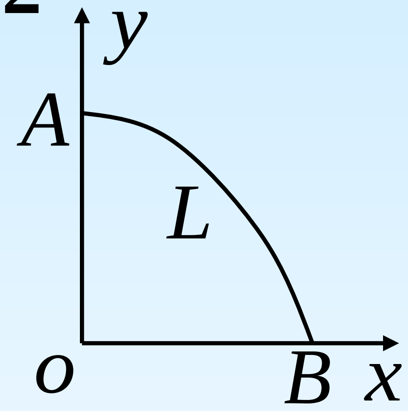
$$f(x)=e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x}+C),$$

由$f(0)=0$, 可知$C=-\frac{1}{2}$, 故 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

例11 设质点在力 $\vec{F}=\dfrac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L:

$y=\dfrac{\pi}{2}\cos x$ 由 $A(0,\dfrac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\dfrac{\pi}{2},0)$, 求所作功 W.

(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).



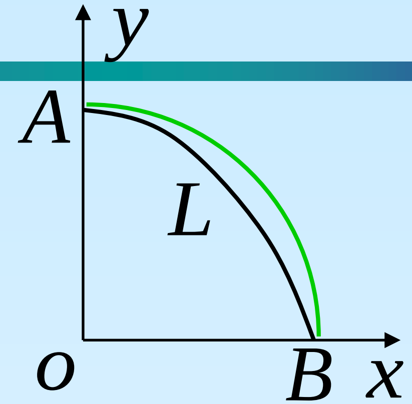
解

$$W=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$=\int_L \frac{k}{r^2}(y\,dx-x\,dy),\quad 令\ P=\frac{ky}{r^2},\ Q=-\frac{kx}{r^2},$$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

可见:在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.



取圆弧 $\overset{\frown}{AB}$: $x=\dfrac{\pi}{2}\cos\theta,\ y=\dfrac{\pi}{2}\sin\theta \quad (\theta: \dfrac{\pi}{2}\to 0)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=k\int_{\pi/2}^{0}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}k.$$

思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

三、全微分方程及其求法

1. 定义 若存在$u(x,y)$, 使得

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

则称 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 为全微分方程.

当$P(x,y)$和$Q(x,y)$在单连通区域D内有一阶连续偏导数时,

$$\text{全微分方程} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

全微分方程的通解为$u(x,y)=C$.

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

2. 求解方法

(1) 应用曲线积分与路径无关.

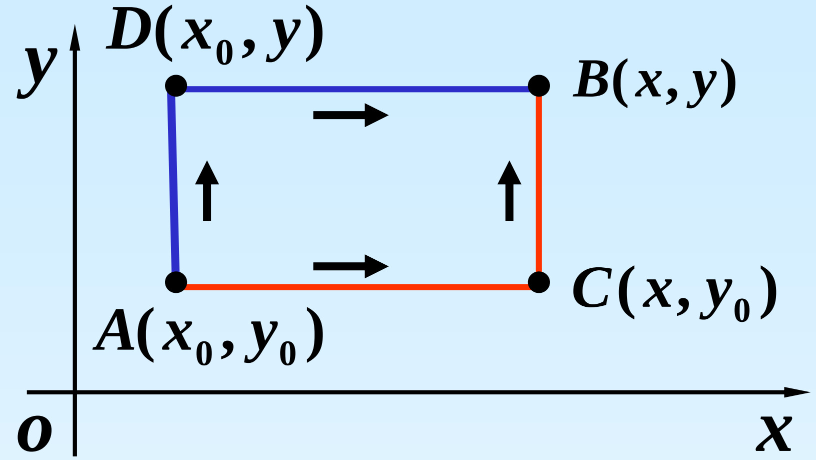
在D内存在$u(x,y)$,使$du = Pdx + Qdy$. 且

$$u(x,y) = \int_{AB} Pdx + Qdy,$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

而在D内曲线积分与路径无关,选用平行于坐标轴的折线作为积分曲线.

ACB



$$u(x,y)=\int_{ACB} Pdx+Qdy,$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

ADB

$$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx$$

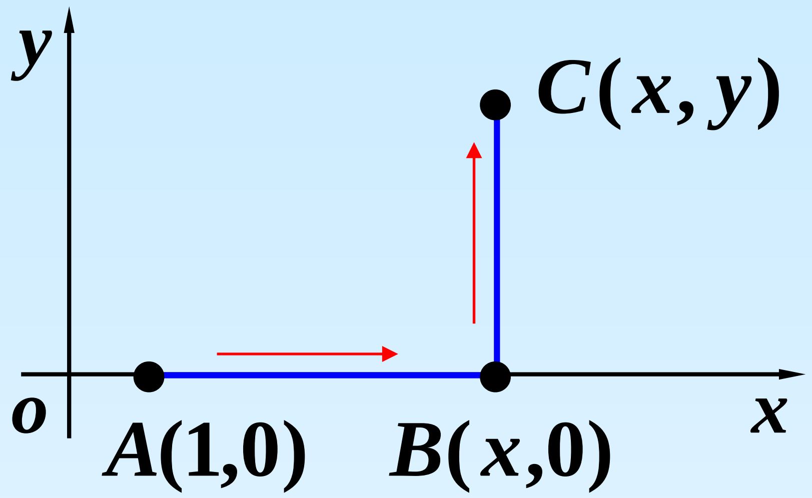
例11 验证 $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 在右半平面$(x>0)$内是某个函数的全微分,并求之.

解 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$,

可见 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在右半平面内恒成立,

因此,

在右半平面内 $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ 是某个函数的全微分.



取积分路线如右图

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^y \frac{x}{x^2+y^2}dy=[\arctan\frac{y}{x}]_0^y=\arctan\frac{y}{x}.$$

（2） 不定积分法

由 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 知

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=P(x,y),\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$$

令$v(x,y)=\int P(x,y)dx$,则 $u(x,y)=v(x,y)+c(y)$

从$\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)-c'(y)$解出$c(y)$即得

例12 求解方程$(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy=0$

解 $\because \dfrac{\partial u}{\partial x}=x^2+x^3+y,$

$$\therefore u(x,y)=\int(x^2+x^3+y)dx+C(y)$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+xy+C(y),$$

$\therefore \dfrac{\partial u}{\partial y}=x+C'(y),$ 又 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=1+x,$

$\therefore x+C'(y)=1+x,\ \ C'(y)=1,\ \ C(y)=y,$

原方程的通解为 $y+xy+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=C.$

(3) 用直接凑全微分的方法

例13 求方程 $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ 的通解.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{6x}{y^4}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 是全微分方程

将左端重新组合 $\dfrac{1}{y^2}dy+(\dfrac{2x}{y^3}dx-\dfrac{3x^2}{y^4}dy)$

$$=d(-\frac{1}{y})+d(\frac{x^2}{y^3})=d(-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}),$$

原方程的通解为 $-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{y^3}=C.$

例12的其他方法 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2 + x^3 + y}{1+x}$ 通解.

解1 整理得 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{1+x} y = -x^2,$

A 常数变易法: 对应齐方通解 $y = \dfrac{C}{1+x}.$

设 $y = \dfrac{C(x)}{1+x}.$ $C(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + C.$

B 公式法: $y = e^{-\int \frac{1}{1+x}dx}[\int -x^2 e^{\int \frac{1}{1+x}dx} dx + C],$

通解为 $y + xy + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} = C.$

解2 整理得 $(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy=0,$

$$\because \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \therefore \text{是全微分方程.}$$

A 用曲线积分法:

$$u(x,y)=\int_0^x (x^2+x^3)dx+\int_0^y (1+x)dy,$$

B 凑微分法:

$$dy+(xdy+ydx)+x^2dx+x^3dx=0,$$

$$dy+d(xy)+d\frac{x^3}{3}+d\frac{x^4}{4}=0,$$

$$d(y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})=0.$$

C 不定积分法: $\because \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 + x^3 + y,$

$$\therefore \int (x^2 + x^3 + y)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + C(y),$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y), \quad 又 \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + x,$$

$$\therefore x + C'(y) = 1 + x, \quad C'(y) = 1, \quad C(y) = y,$$

原方程的通解为 $y + xy + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} = C.$

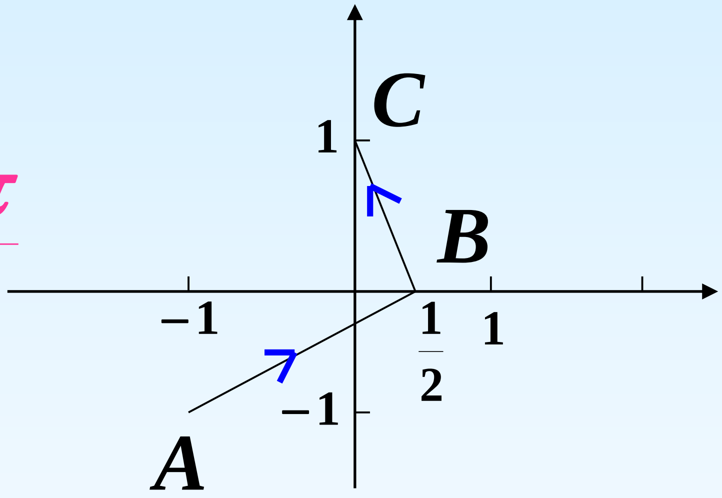
思考题：

1. 求 $I=\int_L \dfrac{(x+y)dx+(y-x)dy}{3(x^2+y^2)}$ $=-\dfrac{\pi}{3}$

L：从 $A(-2,0)$ 到 $B(2,0)$ 位于下半平面的一条简单光滑曲线.

2. 求 $I=\int_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, $\dfrac{5\pi}{4}$

L 如图.



3. 已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某个函数的全微分,则 $a=?$

4. 求微分方程（观察法）

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$$的通解.

解 $$2xdx+2x\sqrt{x^2-y}dx-\sqrt{x^2-y}dy=0,$$

$$d(x^2)+\sqrt{x^2-y}d(x^2)-\sqrt{x^2-y}dy=0,$$

将方程左端重新组合,有

$$d(x^2)+\sqrt{x^2-y}d(x^2-y)=0,$$

原方程的通解为 $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C.$

小结

1、单连通、复连通区域

2、Green公式

3、Green公式应用(1)：求曲线积分、求重积分、求平面区域的面积

4、 Green公式应用(2): 曲线与积分路径无关（计算曲线积分，求解全微分方程）