第八章　Maxwell 电磁场理论

§8-1 Maxwell 方程组

§8-2 电磁波*

§8-1 Maxwell 方程组

电磁学里程碑（100年左右的时间）

1785年	*Coulomb Law*		静电规律
1820年	*Oersted*	电⇒磁	稳恒磁场
1831年	*Faraday*	磁⇒电	电磁感应
1865年	*Maxwell*		完善

方法论：归纳法. 继承 + 创新.

- **有目的探索: Coul. , B-S, Far. ; 偶然机遇: Ostered**
- **精巧实验: Ampère** **数学理论: Gauss**
- **理想模型: 场, 位移电流**

§8-1 Maxwell 方程组

一. 位移电流

复习：**静电场**和**恒定磁场**的基本性质和普遍规律

静电场的高斯定理：$\oint\!\!\oint_S \vec{D}^{(1)} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$

稳恒磁场中的高斯定理：$\oint\!\!\oint_S \vec{B}^{(1)} \cdot d\vec{S} = 0$

静电场的环流定理：$\oint_L \vec{E}^{(1)} \cdot d\vec{l} = 0$

稳恒磁场安培环路定理：$\oint_L \vec{H}^{(1)} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$

涡旋电场假说：变化磁场产生涡旋电场且有

$$\oint_L \vec{E}^{(2)} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

§8-1 Maxwell 方程组

如果 $\vec{E}=\vec{E}^{(1)}+\vec{E}^{(2)}$

上面四个基本方程变为：

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}^{(1)}\cdot d\vec{S}=\sum q_0 \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{B}^{(1)}\cdot d\vec{S}=0 \qquad \oint_l \vec{H}^{(1)}\cdot d\vec{l}=\sum I_0$$

- 第一种不对称是两个高斯定律，原因：自然界不存在磁单极（“磁荷”）。
- 第二种不对称是两个环流定律：

$$\begin{cases} E\text{的环流中有}\ \dfrac{d\Phi_m}{dt},\text{但没有"磁流"} \\ B\text{的环流中有电流}\ \sum I_0,\ \text{但没有}\ \dfrac{d\Phi_D}{dt} \end{cases}$$

§8-1 Maxwell 方程组

1.回顾和问题

回顾1：

(1)电场	静电场	感生电场
产生源：	静止电荷	$\dfrac{d\vec{B}}{dt}$
(2)磁场	稳恒磁场	感生磁场?
产生源：	恒定电流	$\dfrac{d\vec{E}}{dt}$?

宏观电磁场理论有待进一步研究?

§ 8-1 Maxwell 方程组

回顾2：

关于 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i内传导电流}$

(1) 从稳恒电路中推出

最初目的：避开磁化电流的计算

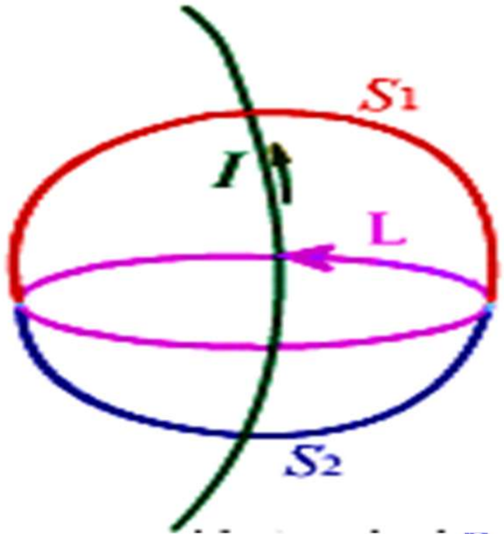
(2) 传导电流

(电荷定向移动) 热效应 产生磁场

(3) $\sum_i I_{i内}$ ：回路L所包围的传导电流

取值：通过以回路L为边界的任一曲面的电流

$$\sum_i I_{i内} = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

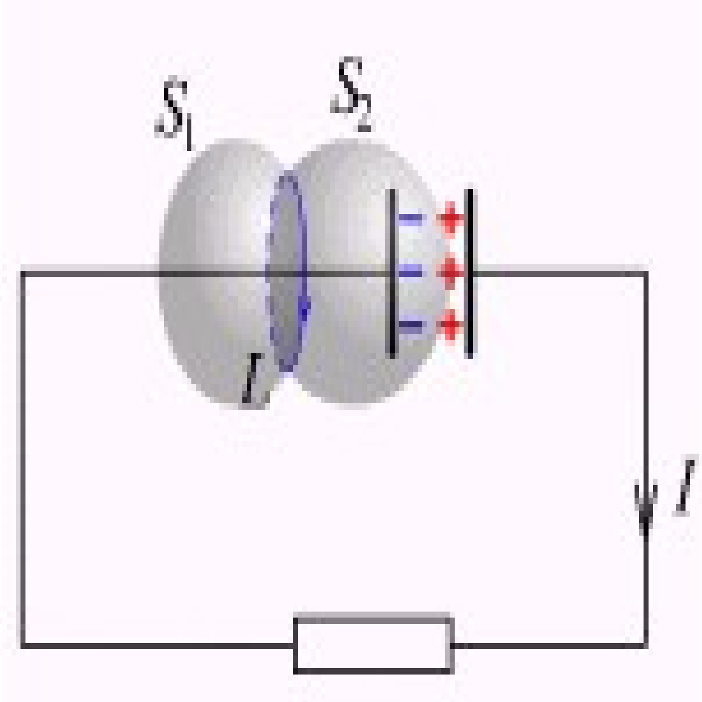


§ 8-1 Maxwell 方程组

- **在电容器充(放)电过程中：**

设某时刻回路中传导电流强度为I

取L如图求H的环流，



取S_1 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i内} = \iint_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = I$

取S_2 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_{i内} = \iint_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$

把安培环路定理推广到非恒定电流的回路时出现了矛盾

问题：1.场是客观存在，环流值必须唯一

2.定理应该普适

能否假设：两板间存在一种类似电流的物理量?

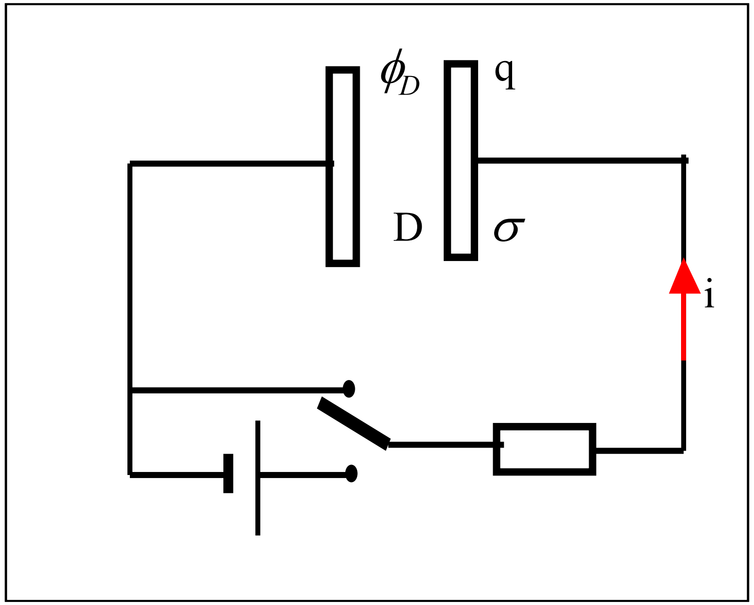
§ 8-1 Maxwell 方程组

回顾3： 平行板电容器在充(放)电过程中：传导电流在两板间中断。

但随着极板上电量变化 $q=q(t)$ 或 $\sigma=\sigma(t)$,两板间电场随之变化 $E=E(t)$, $D=D(t)$ 而 $D=\sigma$, 且任一时刻的传导电流：

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d}{dt}\int\sigma\,dS$$

$$=\frac{d}{dt}\int D\,dS=\frac{d\Phi_D}{dt}$$



极板上的传导电流强度与极板间电位移通量的时间变化率相等。 $\frac{d\Phi_D}{dt}$ 是否是电流强度?

2. 位移电流 全电流 全电流定理

(1) 位移电流和位移电流密度

- 变化电场中穿过某个截面的位移电流强度等于穿过该截面的电位移通量的时间变化率：

$$\boxed{I_D=\frac{d}{dt}\iint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\frac{d\Phi_D}{dt}}$$

- 变化电场中某点的位移电流密度等于该点电位移矢量的时间变化率，

$$I_D=\frac{d\phi_D}{dt}=\frac{d}{dt}\iint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\qquad\boxed{I_D=\iint_S\vec{j}_D\cdot d\vec{S}}$$

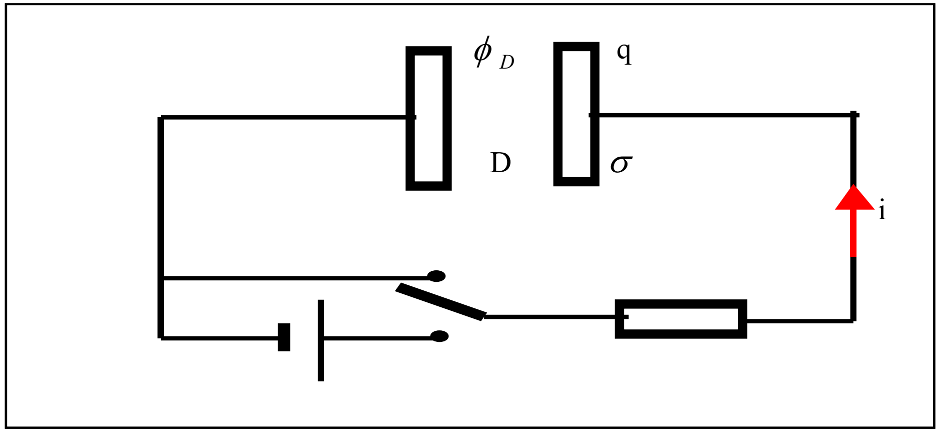
$$\boxed{\vec{j}_D=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$$

(2) 全电流

通过某一截面的传导电流和位移电流之代数和称作通过该截面的全电流，即

$$\boxed{I_{全}=I_0+I_D=I_0+\frac{d\Phi_D}{dt}}$$

在电容器充(放)电的整个电路中,全电流是连续的。



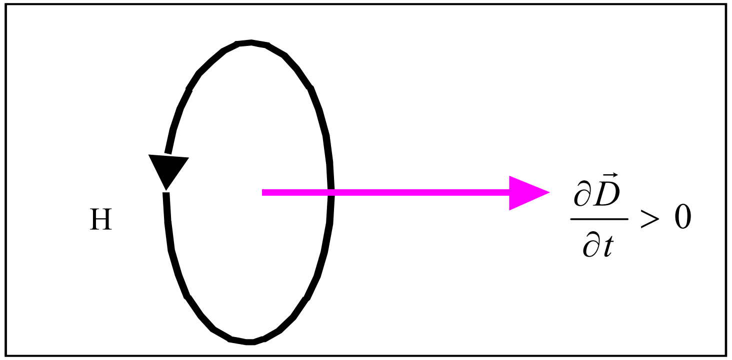
§8-1 Maxwell 方程组

(3) 位移电流的磁场

位移电流和传导电流一样，也会在其周围空间激发起涡旋磁场，且服从安培环路定理：

$$\boxed{\oint_L \vec{H}^{(2)} \cdot d\vec{l} = \sum_S I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

位移电流激发的涡旋磁场的磁力线，是一些环绕着变化电场的闭合线且 $\vec{H}^{(2)}$ 与 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 之间也遵从右手螺旋关系。



(4) 全电流定理

电流概念的推广：能产生磁场的物理量

$$I_{全}=I_0+I_D=I_0+\frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$\oint_L \vec{H}^{(1)}\cdot d\vec{l}=\sum I_0=\iint_S \vec{j}_0\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H}^{(2)}\cdot d\vec{l}=\sum_S I_D=\frac{d\Phi_D}{dt}=\frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

总磁场强度 $\vec{H}=\vec{H}^{(1)}+\vec{H}^{(2)}$

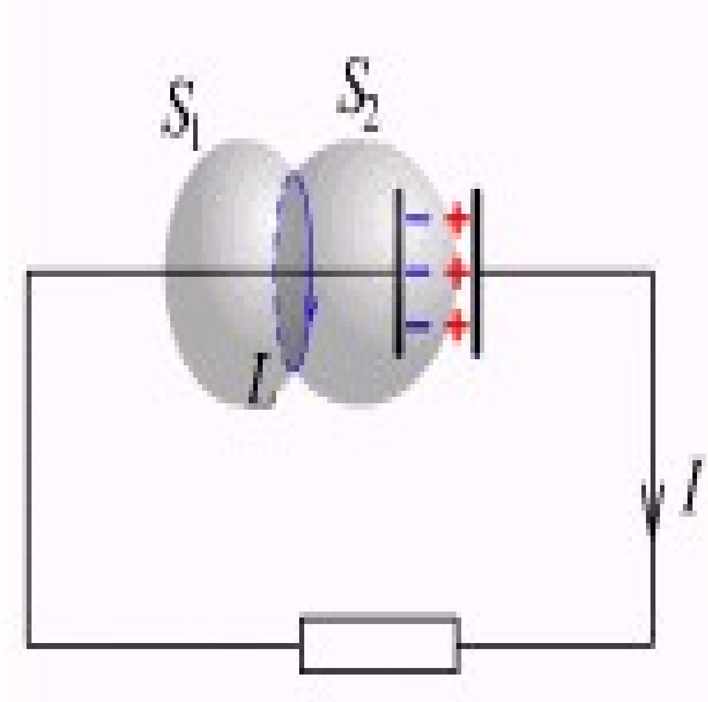
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I_{全}=\iint_S\left(\vec{j}_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

全电流定理

§ 8-1 Maxwell 方程组

- **用全电流定理就可以解决前面的**

平行板电容器充(放)电电路中的矛盾



S_1 **只有传导电流** $\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = i}$

S_2 **只有位移电流** $\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_D}$

平行板电容器板面积为 S，

$$\Phi_D = DS = \sigma S = q$$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{dq}{dt} = i$$

(5) 位移电流与传导电流比较

•相同处：

都可激发磁场，且都遵从安培环路定理。

•不同处：

(*A*)本质 $I_{传}$:大量电荷的宏观定向运 动

I_D :变化的电场

(*B*) 存在 $I_{传}$:一般只存在于导体中

I_D : 一般存在于电介质或真空中

(*C*) 作功 $I_{传}$:在导体中产生焦耳热

I_D :不产生焦耳热

•位移电流只是电流概念的推广：**仅仅从产生磁场的能力上定义——仅此而已。**

§8-1 Maxwell 方程组

二. 麦克斯韦电磁场方程组(积分形式)

一般情况下:

$$\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} \qquad \vec{D} = \vec{D}^{(1)} + \vec{D}^{(2)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)} \qquad \vec{H} = \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}$$

静电场和恒定磁场规律 + Maxewell涡旋电场理论 + Maxewell位移电流理论,得:

$$\boxed{\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}}$$

—— **Maxewell 电磁场方程组的积分形式**

宏观电磁现象的普遍规律。

§8-1 Maxwell 方程组

微分形式的麦克斯韦电磁场方程组

数学上的定理：

Gauss定理

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dV$$

Stokes定理

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S}$$

∇ 梯度算符

$\nabla\cdot$ 散度算符

$\nabla\times$ 旋度算符

直角坐标系中：

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

§8-1 Maxwell 方程组

积分形式

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

微分形式

$$\begin{cases} div\vec{D} = \rho \\ rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} = 0 \\ rot\vec{H} = \vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

直角坐标系中：

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \quad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

§8-1 Maxwell 方程组

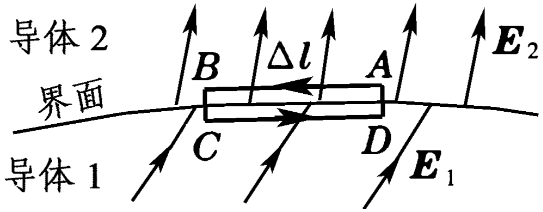
有介质时还需要 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E};\ \vec{B}=\mu\vec{H};\ \vec{j}=\sigma_0\vec{E}.$

逐点描述 $\Rightarrow$ Maxwell 方程的微分形式:

$$\begin{cases} div\vec{D}=\nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ rot\vec{H}=\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ rot\vec{E}=\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B}=\nabla\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

三. 电磁场的边界条件

ε、μ、σ不同的两种介质的分界面上，相应地有三组边界条件



- 磁介质界面上，B法向连续，H切向连续

$$n\cdot(B_2-B_1)=0 \qquad n\times(H_2-H_1)=0$$

- 电介质界面上，D法向连续，E切向连续

$$n\cdot(D_2-D_1)=0 \qquad n\times(E_2-E_1)=0$$

- 以上设界面上没有自由电荷和无传导电流
- 两种导体界面上，j法向连续，E切向连续

$$n\cdot(j_2-j_1)=-\frac{\partial\sigma_0}{\partial t} \qquad n\times(E_2-E_1)=0$$

§8-1 Maxwell 方程组

例1 试证：平行板电容器中的位移电流可写为

$$I_d = C\frac{dU}{dt}$$

式中C是电容器的电容，U是极板间的电势差

解:

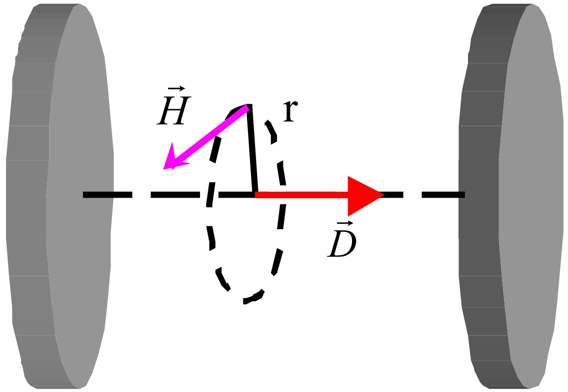
$$\because I_d = \frac{d\phi_D}{dt}$$

而在平行板电容器两极板之间

$$\phi_D = D \cdot S = \sigma S = q$$

$$\because \quad q = CU \qquad \therefore I_d = \frac{d\phi_D}{dt} = c\frac{dU}{dt}$$

例2 半径为R的两块圆板构成平行板电容器放在真空中，今对电容器匀速充电，使两板间电场的变化率为dE/dt，求两板间的位移电流，并计算电容器内离两板中心连线距离为r ($r<R$) 的P点的磁感应强度。



解： 分析对称性:变化电场在两板中心连线附近产生的磁场的磁力线是以中心连线为垂直轴的同心圆。

过P点以两板中心连线为垂直对称轴作一半径为r的圆形回路，则有:

§8-1 Maxwell 方程组

$$\because \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(\varepsilon_0 E s) = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\cdot \pi r^2$$

由于磁场对称分布，圆周上各点H值相等，所以：

$$H\cdot 2\pi r = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\cdot \pi r^2$$

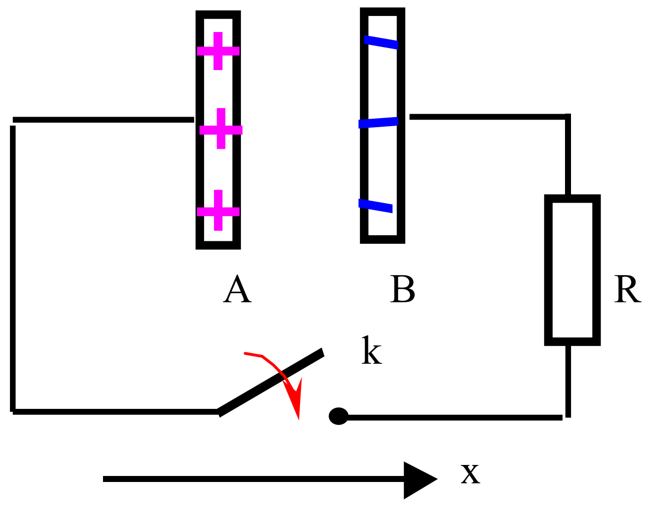
$$\therefore B = \mu_0 H = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\cdot r$$

两板间总的位移电流强度：

$$I_{d总} = \frac{d\Phi_{D总}}{dt} = \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

例3 图示为一充电后的平行板电容器，A板带正电，B板带负电，将开关K合上时，A、B之间的电场方向为__________，位移电流密度方向为__________（按图上所标X轴正方向回答）

答： X轴正向， X轴负向



§ 8-2 电磁波*

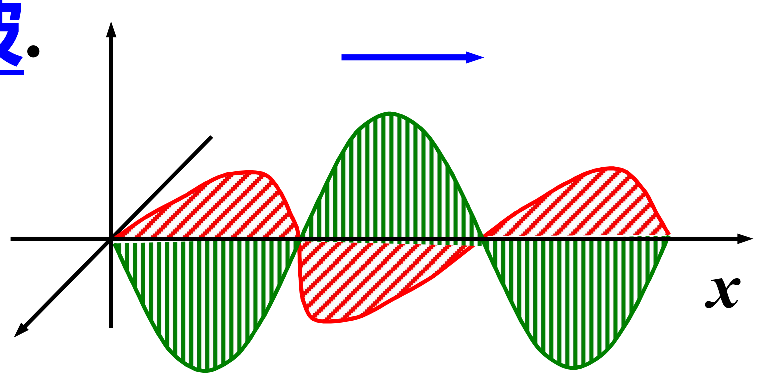
一. 平面电磁波

由M-方程组可推出:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2};\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}=\varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}\qquad u=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

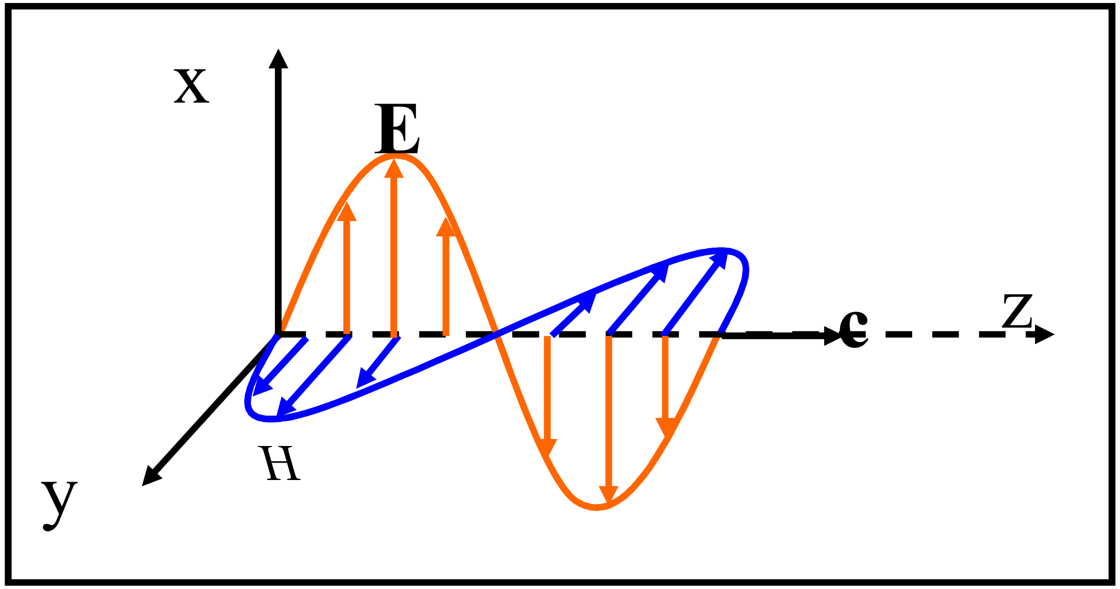
所有复杂波形只是平面波的叠加

解为沿x方向传播的变化的电场E_y和磁场H_z,作为整体⇒平面电磁波.



二. 平面电磁波的性质

(1) E、H是同频率简谐振动且位相相同；



(2) 电磁波是横波：

$$\vec{E} \perp \vec{v}, \vec{H} \perp \vec{v}$$

且 $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\vec{E} \times \vec{H}$的方向沿 $\vec{v}$的方向,三者成右旋关系.

(3) 电磁波是偏振的：$\vec{E}$和 $\vec{H}$分别在各自平面上振动；

(4) 同一点E、H之间存在正比关系： $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$

§8-2 电磁波*

(5) 电磁波的传播速度由介质的性质决定：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

则真空中电磁波速度：$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3\times 10^8 m\cdot s^{-1}$

介质的折射率： $n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$

(6)电磁波的传播过程就是电磁场能量的传播过程

单位时间内通过垂直于传播方向的单位面积的辐射能——辐射强度或能流密度(坡印亭矢量)：

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

课后作业

课后习题：8.1，8.2，8.4

截止日期：2025-06-20

谢 谢!