主要内容

- 1.1 逻辑运算
  - 对象、运算、关系
- 1.2 命题逻辑合式公式
- 1.3 谓词逻辑合式公式
- 1.4 自然语言命题

从自然语言说起

- 自然语言丰富多彩，对于同一词语，往往有不同的含义或理解。例：
  - 难过：我家门前有条小河，很难过
- 显然自然语言容易有歧义，而这是逻辑演绎所不允许的，因此数理逻辑要引入“符号”语言

自然语言与命题

- 自然语言由各种句式组成，如陈述句、疑问句、感叹句、祈使句等等。
- 陈述句是陈述一个事实或者说话人的看法，它包括肯定句和否定句两种。一般来说，仅有陈述句能够确定句子的意义是真还是假。

命题的抽象表示

- 命题的抽象
  - 用小写英文字母表示命题，取值为{0,1}。
  - 例如：p＝“雪是白色的”，则p取值1

- 命题逻辑的研究对象———命题。

命题判断

- (1) 北京是中国首都。
- (2) 8是奇数。
- (3) 人类于21世纪在月球居住
- (4) 我正在说谎。
- (5) $x < 9$。
- (6) $10 > 12$。

- (1) 真命题。
- (2) 假命题。
- (3) 命题。
- (4) 悖论，不是命题
- (5) 不是命题。
- (6) 假命题。

简单命题

- 由简单陈述句表述的命题称为简单命题（Simple Proposition，也称为原子命题）。
  - 例如“雪是白的”
  - 命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构，谓词逻辑分析简单命题的内部结构。

复合命题

- 自然语言中使用联结词将简单句组合成复合句
  - 例如“北京在广州的南边，并且北航在北京”

- 复合句表述的命题称为复合命题（Compound Proposition）。
  - 1.组成这个复合句的简单句表述的命题称为它的支命题。
  - 2.复合命题的真值由其支命题的真值和联结词组成。
  - 3.若每个支命题真值已确定，则联结词就为复合命题指定了唯一的真值，因此可以把联结词的意义看做真值函数。

命题合式公式(well-formed formula)

- **0 和 1 是常量。**
- 值取为逻辑真值的变量称为命题变量，为原子公式。
  - 表示为大写英文字母$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{T}$等
- **定义1.2.1**

(1) 常量**0**和**1**是合式公式；

(2) 命题变量是合式公式；

(3) 若$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$是合式公式，则$(\neg \boldsymbol{Q})$、$(\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})$、$(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})$、$(\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R})$、$(\boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R})$、$(\boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{R})$是合式公式；

(4) 只有有限次应用(1)—(3)构成的公式是命题合式公式。

归纳定义

- **归纳定义：定义集合的一种方法。**

给出若干规则用于生成集合中的元素；再说明只有由这些规则生成的对象才是这个集合中的元素。

- **例如：自然数N归纳定义**

（1）$0 \in N$

（2）对于任何n，如果$n \in N$，n'是n的唯一后继， 则$n' \in N$

（3）只有由(有限次使用)上述（1）和（2）生成的$n \in N$

归纳证明

- **设R是一个性质，R(x)表示x有R性质。**
- **归纳证明步骤**
  - 归纳基础
    - » **R(0)**
  - 归纳假设
    - » **对于任何k∈N, R(k);**
  - 证明
    - » **R(k');**
  - 归纳结论
    - » **对于任何n∈N，R(n)。**

命题合式公式

- 合式公式是命题逻辑的语法概念，它仅仅是符合语法结构的公式，是没有任何意义的符号串。
  - 1）0和1是符号，没有表示逻辑真值的意思
  - 2）$\wedge$、$\vee$、$\neg$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$和$\oplus$是逻辑运算符号，也没有表示逻辑运算的意思；
  - 3）命题变元也是符号。
- 合式公式的定义具有抽象性和严格性
  - 对于一个合式公式的理解是相同的，不会产生二义性。

合式公式举例

- $(\boldsymbol{Q} \to \mathbf{0}) \vee (\boldsymbol{Q} \to \mathbf{1})$
- $\neg \boldsymbol{Q} \wedge (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \to \neg \boldsymbol{P}$
- $(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}) \to (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})$
- $(\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}) \to (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{P})$

合式公式判断

- 判断$(\boldsymbol{P} \to \mathbf{0}) \land (\boldsymbol{Q} \to \mathbf{1})$是合式公式

- $\mathbf{0}, \mathbf{1}$合式公式
- $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$是合式公式
- $(\boldsymbol{P} \to \mathbf{0}), (\boldsymbol{Q} \to \mathbf{1})$是合式公式
- $(\boldsymbol{P} \to \mathbf{0}) \land (\boldsymbol{Q} \to \mathbf{1})$是合式公式

合式公式判断（续）

- 判断$\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q})$是否是合式公式

- $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$是合式公式
- $\neg \boldsymbol{P}, \neg \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$是合式公式
- $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}), \neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q}$是合式公式
- $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q})$ 是合式公式

联结词的优先级

- 联结词的优先级
  - 从高到低的顺序排列为：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\oplus$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$
  - 同一个联结词连续多次出现且无括号，则按从左至右的顺序运算
- 在满足运算次序不变的情况下，运用联结词的优先级规则可以减少合式公式括号

联结词的优先级

- $(((((P \wedge Q) \vee R) \vee Q) \to P) \oplus Q) \leftrightarrow R$

$= ((((P \wedge Q \vee R) \vee Q) \to P) \oplus Q) \leftrightarrow R$

$= (((P \wedge Q \vee R \vee Q) \to P) \oplus Q) \leftrightarrow R$

$= ((P \wedge Q \vee R \vee Q \to P) \oplus Q) \leftrightarrow R$

$= (P \wedge Q \vee R \vee Q \to P) \oplus Q \leftrightarrow R$

关系式

- **定义1.2.2-1.2.4 推论式**

  若Q，R是合式公式，则$Q \vDash R$是推论式

  若Γ是合式公式集合， R是合式公式，则$\Gamma \vDash R$是推论式

  若Γ={Q1,…,Qn}，可记为$Q1,\ldots,Qn \vDash R$

  若Γ为空集合，则记为$\vDash R$

- **定义1.2.5 等价式**

  若Q，R是合式公式，则$Q \Leftrightarrow R$是等价式，也表示为$Q = R$

推论式

- 肯定前件
  - $(Q \rightarrow R), Q \vDash R$
- 否定后件
  - $(Q \rightarrow R), \neg Q \vDash \neg R$
- 析取三段论
  - $(Q \vee R), \neg Q \vDash R$
- 假言三段论
  - $(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \vDash (P \rightarrow R)$
- 简化式
  - $Q \wedge R \vDash Q$
- 组合式
  - $Q, R \vDash Q \wedge R$
- 附加式
  - $Q \vDash Q \vee R$
- 二难构成式
  - $(P \vee Q), (P \rightarrow R), (Q \rightarrow S) \vDash R \vee S$
- 双重否定
  - $Q \vDash \neg\neg Q$
- 德摩根律
  - $\neg(Q \vee R) \vDash (\neg Q \wedge \neg R)$
  - $\neg(Q \wedge R) \vDash (\neg Q \vee \neg R)$
- 交换律
  - $(Q \vee R) \vDash (R \vee Q)$
  - $(Q \wedge R) \vDash (R \wedge Q)$
- 结合律
  - $(P \vee (Q \vee R)) \vDash ((P \vee Q) \vee R)$
  - $(P \wedge (Q \wedge R)) \vDash ((P \wedge Q) \wedge R)$
- 分配律
  - $(P \wedge (Q \vee R)) \vDash ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
  - $(P \vee (Q \wedge R)) \vDash ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
- 移位律
  - $(Q \rightarrow R) \vDash (\neg R \rightarrow \neg Q)$
- 移出律
  - $(P \wedge Q) \rightarrow R \vDash (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$

等价式

交换律	$Q \lor R \Leftrightarrow Q \lor R$	$Q \land R \Leftrightarrow R \land Q$	$Q \oplus R \Leftrightarrow R \oplus Q$
结合律	$(P \lor Q) \lor R \Leftrightarrow P \lor (Q \lor R)$	$(P \land Q) \land R \Leftrightarrow P \land (Q \land R)$	$(P \oplus Q) \oplus R$ $\Leftrightarrow P \oplus (Q \oplus R)$
分配律	$P \lor (Q \land R)$ $\Leftrightarrow (P \lor Q) \land (P \lor R)$	$P \land (Q \lor R)$ $\Leftrightarrow (P \land Q) \lor (P \land R)$	$P \land (Q \oplus R)$ $\Leftrightarrow (P \land Q) \oplus (P \land Q)$
德•摩根律	$\neg(Q \lor R) \Leftrightarrow \neg Q \land \neg R$	$\neg(Q \land R) \Leftrightarrow \neg Q \lor \neg R$	
幂等律	$Q \lor Q \Leftrightarrow Q$	$Q \land Q \Leftrightarrow Q$	
同一律	$Q \land 1 \Leftrightarrow Q$	$Q \lor 0 \Leftrightarrow Q$	
吸收律	$Q \lor (Q \land R) \Leftrightarrow Q$	$Q \land (Q \lor R) \Leftrightarrow Q$	
零律	$Q \lor 1 \Leftrightarrow 1$	$Q \land 0 \Leftrightarrow 0$	
排中律	$Q \lor \neg Q \Leftrightarrow 1$	双重否定律	$\neg\neg Q \Leftrightarrow Q$
矛盾律	$Q \land \neg Q \Leftrightarrow 0$	假言易位	$Q \to R \Leftrightarrow \neg R \to \neg Q$

注意：上面的P、Q、R表示合式公式

命题逻辑语言

- **定义1.2.6** 所有的命题合式公式集合构成了命题逻辑语言，记为L，可以表示为$L = < \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \bigoplus\}, \{\Leftrightarrow, \vDash\}, \varphi >$，其中$\varphi$为命题变元集合

- 一般来说，命题逻辑语言 L 是无穷集合，也就是说合式公式有无穷多个。

公式复杂度及合式公式序

- **定义1.2.7** 公式$\boldsymbol{P}$的复杂度表示为$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{P})$
  - 常量**0**和**1**，复杂度为0。
  - 命题变量复杂度为0，如果$\boldsymbol{P}$是命题变量，则$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{P}) = 0$。
  - 如果公式$\boldsymbol{P} = \neg \boldsymbol{Q}$，则$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{Q}) + 1$。
  - 如果公式$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}$，或

    $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}$，或

    $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$，或

    $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R}$，或

    $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{R}$

    则$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{P}) = max\{\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{Q}), \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{R})\} + 1$。

合式公式的三种变换

- 三种变换式：代换、替换、对偶
- **定义1.2.8** 设p_k为命题变元，Q和R_k为合式公式，将 Q 中的p_k用R_k表示，记为$Q[p_k/R_k]$，称为Q的代换，$Q[p_k/R_k]$称为代换式
- 代换产生新的公式，例如

$$(p \to (q \wedge \neg r))[r/(p \to r)] = p \to (q \wedge \neg(p \to r))$$

合式公式的三种变换式

- 三种变换式：代换、替换、对偶
- **定义1.2.9** 设Q和R_k为合式公式，Q_k是Q的子公式，将Q中的Q_k用R_k表示，记为 $Q[Q_k/R_k]$，称为Q的替换，$Q[Q_k/R_k]$ 称为替换式
- 替换产生新的公式，例如

$$((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge \neg r))[(p \wedge r)/(p \rightarrow r)]$$
$$= (p \rightarrow r) \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

合式公式的三种变换式

- 三种变换式：代换、替换、对偶
- **定义1.2.10**
  - 设$\boldsymbol{Q}$是由$\{\mathbf{0},\mathbf{1},\neg,\vee,\wedge\}$生成的公式，将$\boldsymbol{Q}$中的$\vee$和$\wedge$互换，$\mathbf{0}$和$\mathbf{1}$互换得到$\boldsymbol{Q}^*$，运算次序不变，称$\boldsymbol{Q}^*$与$\boldsymbol{Q}$互为对偶式。

对偶式真值之间的关系

- 设Q是由$\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \neg, \vee, \wedge\}$生成的公式，$Q^*$与$Q$互为对偶式：
  - 若Q为$\mathbf{0}$或$\mathbf{1}$，则$Q^* = \neg Q$；
  - 若Q为原子命题，则$Q^* = Q$；
  - 若Q为$\neg Q_1$，则$Q^* = (\neg Q_1)^* = \neg Q_1^*$
  - 若Q为$Q_1 \vee Q_2$，则$Q^* = (Q_1 \vee Q_2)^* = Q_1^* \wedge Q_2^*$
  - 若Q为$Q_1 \wedge Q_2$，则$Q^* = (Q_1 \wedge Q_2)^* = Q_1^* \vee Q_2^*$

Python

```
def dualformula(s):
    s1=s.replace('∨','|')
    s1=s1.replace('∧','∨')
    s1=s1.replace('|','∧')
    s1=s1.replace('0','F')
    s1=s1.replace('1','0')
    s1=s1.replace('F','1')
    return s1
```

```
import logic.logic as ll
s0='((p∨q∨0)∧(¬r)∧1)'
print("s0",s0)
s1=ll.dualformula(s0)
print("s1",s1)
```

```
s0 ((p∨q∨0)∧(¬r)∧1)
s1 ((p∧q∧1)∨(¬r)∨0)
```

主要内容

- 1.1 逻辑运算
  - 对象、运算、关系
- 1.2 命题逻辑合式公式
- 1.3 谓词逻辑合式公式
- 1.4 自然语言命题

命题逻辑表达的局限性

- 自然语言：“北京是大城市” “上海是大城市”，“西安是大城市”
- 命题逻辑：三个原子命题p、q、r
- 存在问题：虽然这三个命题表达了相同类型的断言，但是从p, q, r三个命题变元看不出来他们代表的断言类型是相同的。
- 命题逻辑在知识的表达和推理上有一定的局限性，因此需要引入谓词逻辑。

谓词

- **定义1.3.1** 表示事物性质和事物关系的词统称为谓词
  - n 元谓词表示成 $\boldsymbol{Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$，其中$\boldsymbol{Q}$是谓词，$\boldsymbol{x_i}$是个体
  - $\boldsymbol{Q(x)}$表示一元谓词，$\boldsymbol{Q(x, y)}$表示二元谓词

- **定义1.3.2** 表示所有个体都具有某种性质的词称为全称量词，记为∀；表示至少有一个个体具有某种性质的词称为存在量词，记为∃。

谓词

- 在逻辑学中，将命题中表示思维对象的词称为主词，将表示对象性质的词称为谓词。
- 例1.1 考察下面的命题：

1. 张华是学生。
2. 李明是学生。
   - 两个命题的主词分别是“张华”和“李明”，
   - 谓词都是“是学生”。
   - a：张华　　b：李明　　$H(x)$：x 是学生
- 这两个命题分别表示为 $H(a)$ 和 $H(b)$，这样的表示就显示了这两个命题有相同谓词的特征 。

论域、个体（常元、变元）

- 研究的对象组成了一个非空集合，称这个非空集合为论域。例如，点、线、面、体组成了几何学的论域，数论的论域是正整数集合。对论域的唯一要求是它不能为空集。
- 论域中的元素称为个体。
- 论域的子集可看做从论域到集合 $\{0, 1\}$ 的函数，称这样的函数为论域上的一元谓词。例如，设论域是自然数集，偶数集可看作如下定义的一元谓词 E：

$$E(x)=\begin{cases}1 & \text{若}\,x\,\text{是偶数}\\ 0 & \text{若}\,x\,\text{是奇数}\end{cases}$$

- 其中的变元 x 取论域中的元素，即个体为值，故称其为个体变元。表示具体个体的符号，称为常元。

二元谓词

- 考察下面的命题：

  张华的父亲爱张华。

  a：张华　　$f(x) = x$ 的父亲　　$L(x, y)$：x 爱 y

  - 该命题表示为 $L(f(a), a)$。
  - 取所有人组成的集合为论域 D。
  - L 表示人与人之间的关系，可看作从 D^2 到 $\{0, 1\}$的函数，称为二元谓词。若 x 爱 y，则 $L(x, y) = 1$，否则 $L(x, y) = 0$。
  - f 表示从论域 D 到 D 的一元函数，对每个人 x，f (x) 是 x 的父亲。
  - 函数与谓词的区别在于：对于一元函数 f，$f(x)$ 是论域中的元素；对于一元谓词 P，$P(x)$ 是 0 或 1。