第五章 Taylor公式

§1　函数的微分

问题的提出

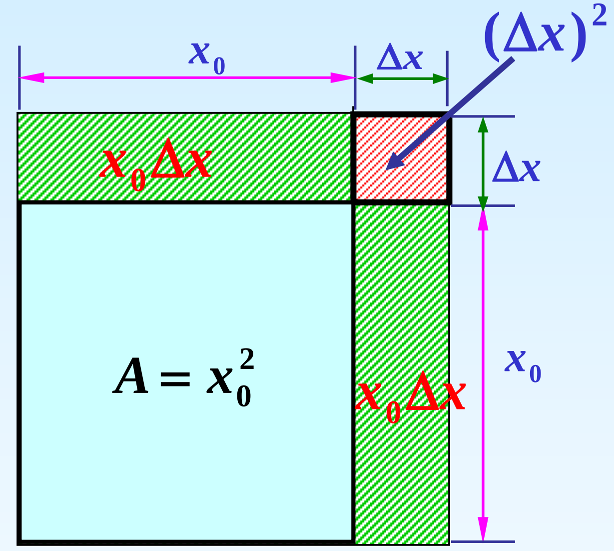
实例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积 $A = x_0^{\ 2}$,

$$\therefore \Delta A = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2$$

$$= \underbrace{2x_0 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1): Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2): Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

再例如,设函数 $y = x^3$在点 x_0处的改变量为Δx时,求函数的改变量 Δy.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3$$

$$= \underbrace{3x_0^2 \cdot \Delta x}_{(1)} + \underbrace{3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当$|\Delta x|$很小时,(2)是Δx的高阶无穷小$o(\Delta x)$,

$\therefore \Delta y \approx 3x_0^2 \cdot \Delta x.$ 既容易计算又是较好的近似值

问题 是否所有函数的增量都可表示为(1)、(2)这样两部分的和?

二、 微分的定义

定义1.1 设函数 $y=f(x)$在x_0的邻域内有定义，Δx是自变量改变量，如果

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数), 则称函数 $y=f(x)$在点x_0可微，并且称$A\cdot\Delta x$为函数 $y=f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分, 记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即$dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部. **(微分的实质)**

注 (1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时, dy与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (\Delta x \to 0).$$

(4) 当$|\Delta x|$很小时, $\Delta y \approx dy$(线性主部).

三、可微的条件

定理1.1 函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证明 (1) 必要性

$\because f(x)$在点x_0可微,

$$\therefore \Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x),\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$在点 x_0可导，且$A = f'(x_0)$.

(2) 充分性 $\because$ 函数$f(x)$在点x_0可导,

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),\ \text{即}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,\ \alpha\to 0(\Delta x\to 0),$$

从而 $\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot(\Delta x),$

$$=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x),$$

函数 $f(x)$在点 x_0可微, 且 $f'(x_0)=A.$

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微, $A=f'(x_0).$

函数 $y=f(x)$在任意点x的微分, 称为函数的微分, 记作 dy或$df(x)$, 即 $dy=f'(x)\Delta x.$

注 1. 函数 $y=x$ 的微分为 $dy=dx=1\Delta x$，即 $dx=\Delta x$.

$$\therefore dy=f'(x)dx.\ \text{即}\ \frac{dy}{dx}=f'(x).$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数. 导数也叫“微商”.

2.微分学所要解决的两类问题:

函数的变化率问题 $\longrightarrow$ 导数的概念

函数的增量问题 $\longrightarrow$ 微分的概念

3.导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

例1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$, $\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $dy = (x^3)'\Delta x$

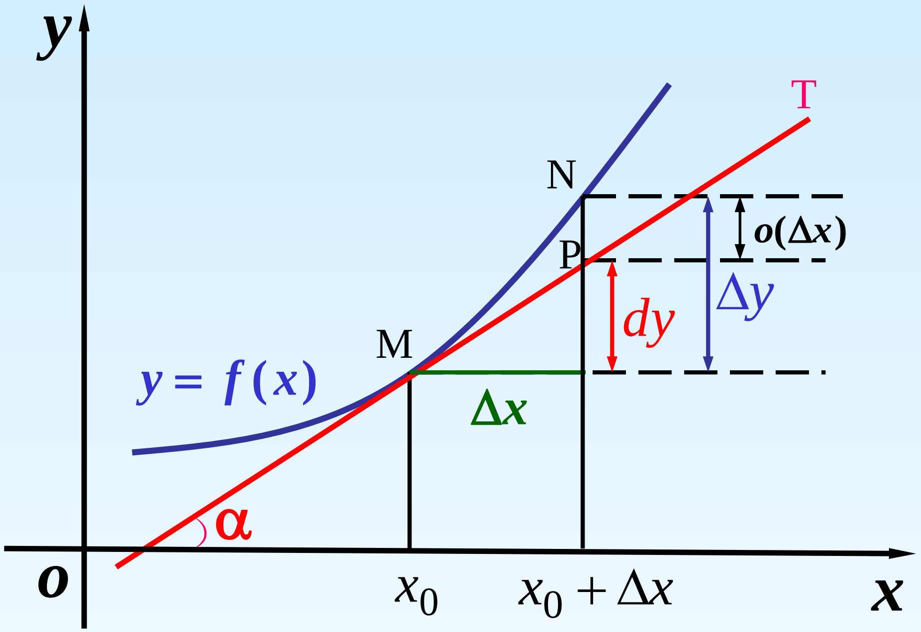
$= 3x^2\Delta x$

$= 0.24.$

四、微分的几何意义

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.

当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，切线段MP可近似代替曲线段MN.



$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x. \quad (|\Delta x| \text{很小时})$$

五、 基本微分公式与微分运算法则

$d(c)=0$

$d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$

$d(\sin x)=\cos x dx$

$d(\cos x)=-\sin x dx$

$d(\tan x)=\sec^2 x dx$

$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$

$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$

$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$

$d(a^x)=a^x\ln a dx$

$d(e^x)=e^x dx$

$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$

$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$

$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

由导数的四则运算性质，不难得到

定理1.2 （微分的四则运算性质）

设函数 $f(x)$, $g(x)$在点x可微,则

(1) $d(f(x)+g(x))=df(x)+dg(x)$;

(2) $d(f(x)g(x))=df(x)g(x)+f(x)dg(x)$;

(3) $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)},(g(x)\neq 0)$.

例2 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解 $\because\ y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, $\therefore\ dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx.$

例3 设 $y=e^{1-3x}\cos x$, 求dy.

解 $dy=\cos x\cdot d(e^{1-3x})+e^{1-3x}\cdot d(\cos x)$

$\because\ (e^{1-3x})'=-3e^{1-3x},\quad (\cos x)'=-\sin x.$

$\therefore\ dy=\cos x\cdot(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}\cdot(-\sin x)dx$

$=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$

六、 微分形式的不变性

设函数 $y = f(x)$ 有导数 $f'(x)$,

(1) 若 x 是自变量时, $dy = f'(x)dx$;

(2) 若 x 是中间变量时, 即另一变量 t 的可微函数

$x = \varphi(t)$, 则 $dy = f'(x)\underbrace{\varphi'(t)dt}_{= dx} = f'(x)dx.$

结论: 无论 x 是自变量还是中间变量，函数

$y = f(x)$ 的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

微分形式的不变性

例4 设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

解 $\because y=\sin u,\ u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du \quad =\cos(2x+1)d(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

例5 设 $y=e^{-ax}\sin bx$, 求dy.

解 $dy=e^{-ax}\cdot\cos bx d(bx)+\sin bx\cdot e^{-ax}d(-ax)$

$$=e^{-ax}\cdot\cos bx\cdot bdx+\sin bx\cdot e^{-ax}\cdot(-a)dx$$

$$=e^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)dx.$$

例6 设 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, 求$dy$.

解

$$dy = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} d(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} (dx + d\sqrt{1 + x^2})$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} (dx + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} d(1 + x^2))$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} (dx + \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

七、 高阶微分

二阶微分及高阶微分

一阶微分： $dy = df(x) = f'(x)dx$ （有形式不变性）

二阶微分： $d^2y = d^2f(x) = f''(x)dx^2$ （没有形式不变性）

n阶微分： $d^ny = d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$

见后面例子

$$d^2f = d(df) = d[f'(x)dx]$$

$$= f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2$$

例7 $(1)y=e^x,(2)y=e^x,x=t^2$,分别求 d^2y

解(1) $d^2y=(e^x)''dx^2=e^xdx^2$

(2) $d^2y=(e^{t^2})''dt^2=(2e^{t^2}+4t^2e^{t^2})dt^2$

对复合函数有$\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2=(2t\mathrm{d}t)^2=4t^2\mathrm{d}t^2$,

$$\therefore \mathrm{d}^2y=2e^{t^2}\mathrm{d}t^2+e^{t^2}4t^2\mathrm{d}t^2=\frac{e^x}{2x}\mathrm{d}x^2+e^x\mathrm{d}x^2.$$

注: 该例说明高阶微分没有不变性.

dx^2 指 $(dx)^2$; d^2x表示x的二阶微分;

八、近似计算

1、计算函数增量的近似值

$$\Delta y\big|_{x=x_0} \approx dy\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$ （以直代曲）

2、计算函数的近似值

求$f(x)$在点$x = x_0$附近的近似值;

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$ ($|\Delta x|$很小时)

例8 计算$\cos 60^o 30'$的近似值.

解 设$f(x)=\cos x$, $\therefore f'(x)=-\sin x$, (x为弧度)

$$\because x_0=\frac{\pi}{3},\quad \Delta x=\frac{\pi}{360},$$

$$\therefore f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2},\quad f'(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^o 30'=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360})\approx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.4924.$$

例9 证明常用的近似公式

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$;　　(2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度); (4) $e^x \approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, $f'(x)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)x = 1+\frac{x}{n}.$$

(2) − (5) 证明方法类似,略.

例10 利用微分计算下列各数的近似值.

(1) $\sqrt[3]{998.5}$; (2) $e^{-0.03}$.

解 (1) $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}$

$$=\sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)}=10\sqrt[3]{1-0.0015}$$

$$\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\times 0.0015\right)=9.995.$$

(2) $e^{-0.03}\approx 1-0.03=0.97.$

本节小结

微分的概念

微分的几何意义

导数与微分的区别与联系:

微分的性质

微分的计算

习题5.1

1(1,3,5,7,9,11)、2(1,3,5,7,9,11)、3(2,4).