第十六章　重积分

§1　二重积分的概念

平面图形的面积 可求面积?

P : 平面有界图形

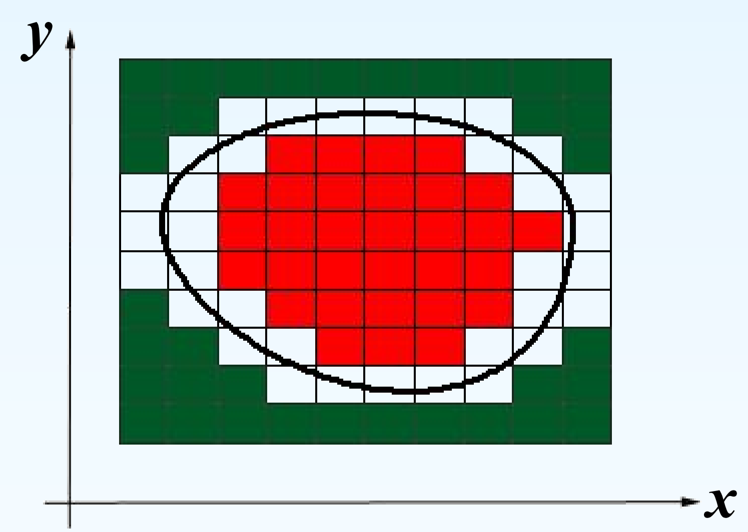
T : 平行于坐标轴的直线网

小矩形Δ_i分三类：

(*i*) $\Delta_i \subset P^o$;

(*ii*) $\Delta_i \cap \overline{P} = \Phi$;

(*iii*) $\Delta_i \cap \partial P \neq \Phi$.



记： $s_p(T)=$ 所有第(i)类矩形的面积的和，

$S_p(T)=$ 所有第$(i),(iii)$类矩形的面积的和，

易见 $0\le s_p(T)\le S_p(T)\le \Delta(\text{矩形})$

故 对所有的直线网 $\begin{cases}\text{数集 }\{s_p(T)\}\text{有上确界，}\\ \text{数集 }\{S_p(T)\}\text{有下确界.}\end{cases}$

记： $\underline{I}_P=\sup\limits_T\{s_p(T)\}$， P 的内面积

$\overline{I}_P=\inf\limits_T\{S_p(T)\}$， P 的外面积

显然： $0\le \underline{I}_P\le \overline{I}_P$.

定义1.1

给定平面图形P,若$\underline{I}_P=\overline{I}_P$,则称$P$为可求面积的.

称其共同值$I_P=\underline{I}_P=\overline{I}_P$为$P$的面积.

定理1.1 平面有界图形P为可求面积的$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0, \exists \text{直线网} T, s.t\ S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon.$$

推论1.2 $I_P=0 \Leftrightarrow \overline{I}_P=0.$

即对$\forall \varepsilon>0, \exists$直线网$T, s.t\ S_P(T)<\varepsilon.$

证 “$\Rightarrow$” 设P的面积为I_P. 由定义 $I_P=\underline{I}_P=\overline{I}_P$.

故对$\forall\varepsilon>0$, 分别存在直线网 T_1,T_2, 使得

$$s_P(T_1)>I_P-\frac{\varepsilon}{2},\ S_P(T_2)<I_P+\frac{\varepsilon}{2}.$$

记 $T=T_1+T_2$, 可证

$$s_P(T_1)\le s_P(T),\ S_P(T_2)\ge S_P(T).$$

于是 $$s_P(T)>I_P-\frac{\varepsilon}{2},\ S_P(T)<I_P+\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而对直线网 T, $S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon$.

"$\Leftarrow$"

设对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$直线网T，$s.t\ S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon$.

由 $s_P(T)\le \underline{I}_P\le \overline{I}_P\le S_P(T)$.

于是 $\overline{I}_P-\underline{I}_P\le S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon$.

由ε的任意性，因此$\underline{I}_P=\overline{I}_P$，$P$可求面积.

定理1.3 平面有界图形P为可求面积的 $\Leftrightarrow$ $I_{\partial P}=0$

证 由定理1.1知，P可求面积的充要条件是：

对$\forall\varepsilon>0,\exists$直线网$T$, $s.t\ S_P(T)-s_P(T)<\varepsilon.$

由于 $S_{\partial P}(T)=S_P(T)-s_P(T),$

所以 $S_{\partial P}(T)<\varepsilon.$

由上面的推论可知 $I_{\partial P}=0.$

定理1.4 设 $f:[a,b]\to R$连续，曲线$L: y=f(x)$ 的面积为零.

推论1.5 分段光滑曲线 L: $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} (\alpha\le t\le\beta)$

所表示的平面光滑曲线 或分段光滑曲线的面积为零 .

推论1.6 由平面上光滑或分段光 滑的曲线所围成的有界闭区域是可求面 积的.

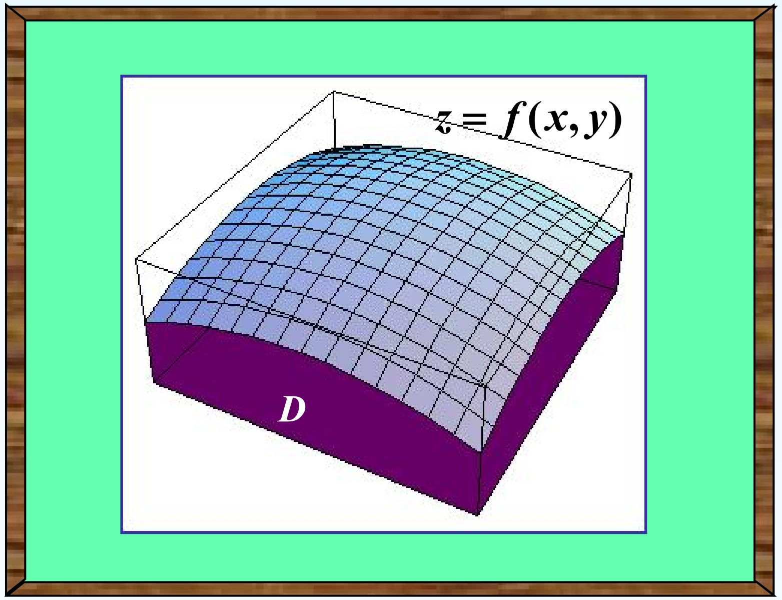
二重积分的概念

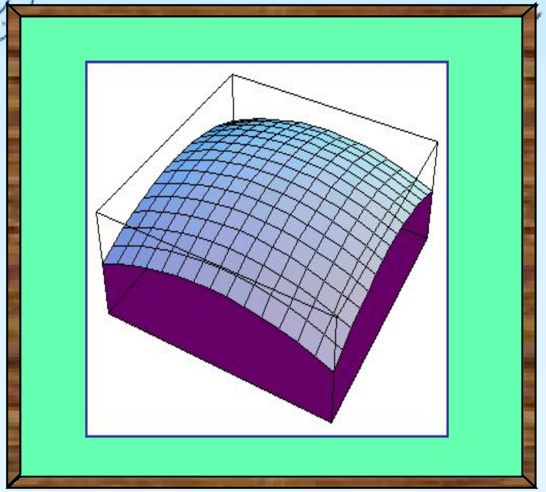
几何问题：曲顶柱体的体积

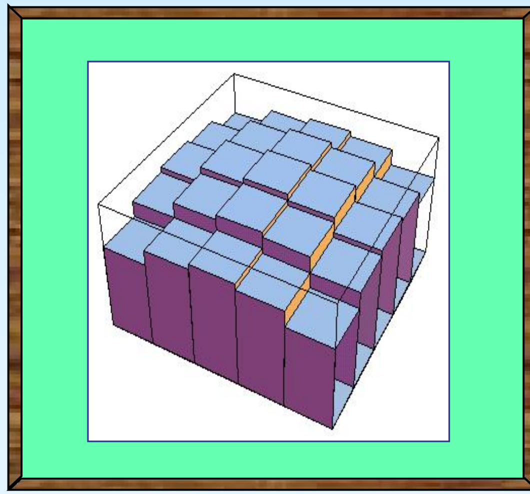
曲面$z = f(x, y)$为顶, D为底的柱体

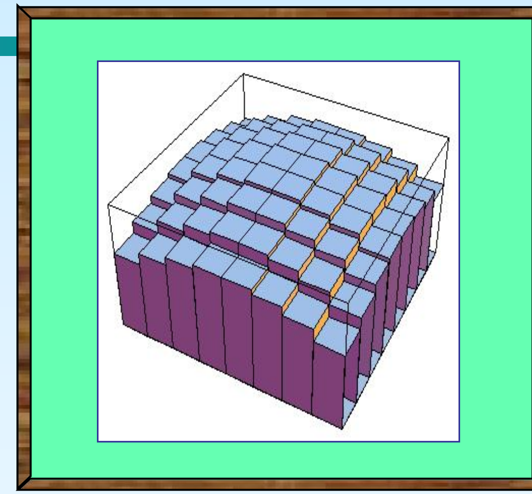
其中: D为可求面积的有界闭区 域,

$f(x, y)$在D上非负连续.

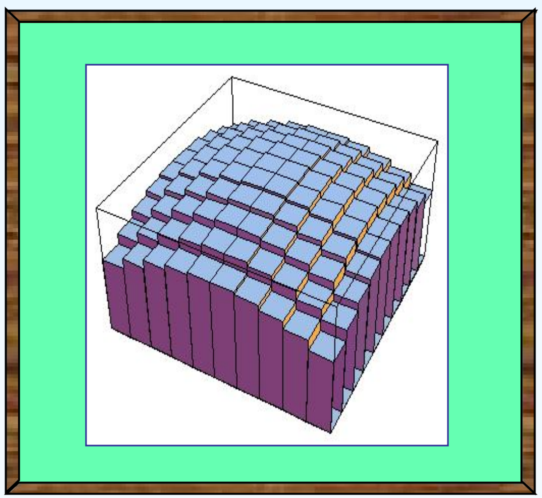


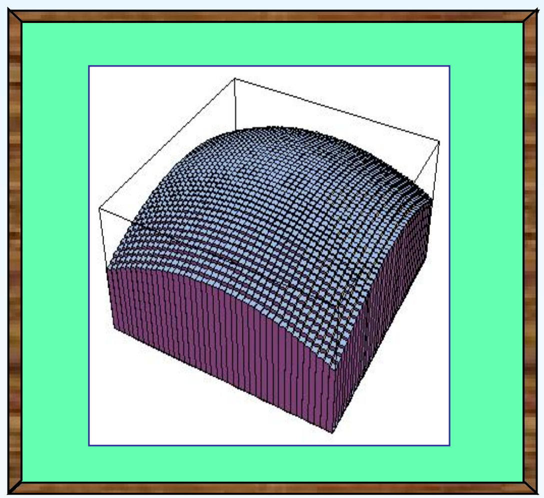


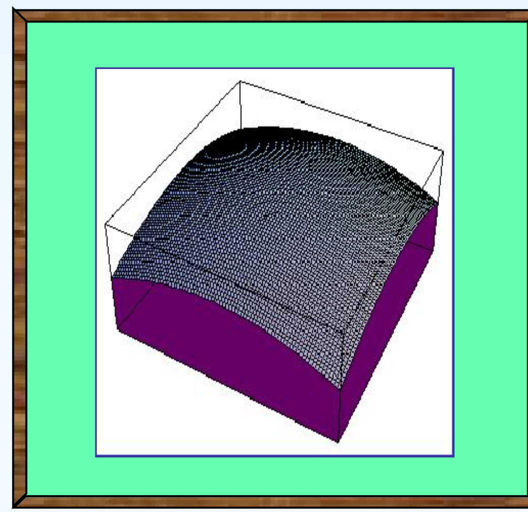




体积=?

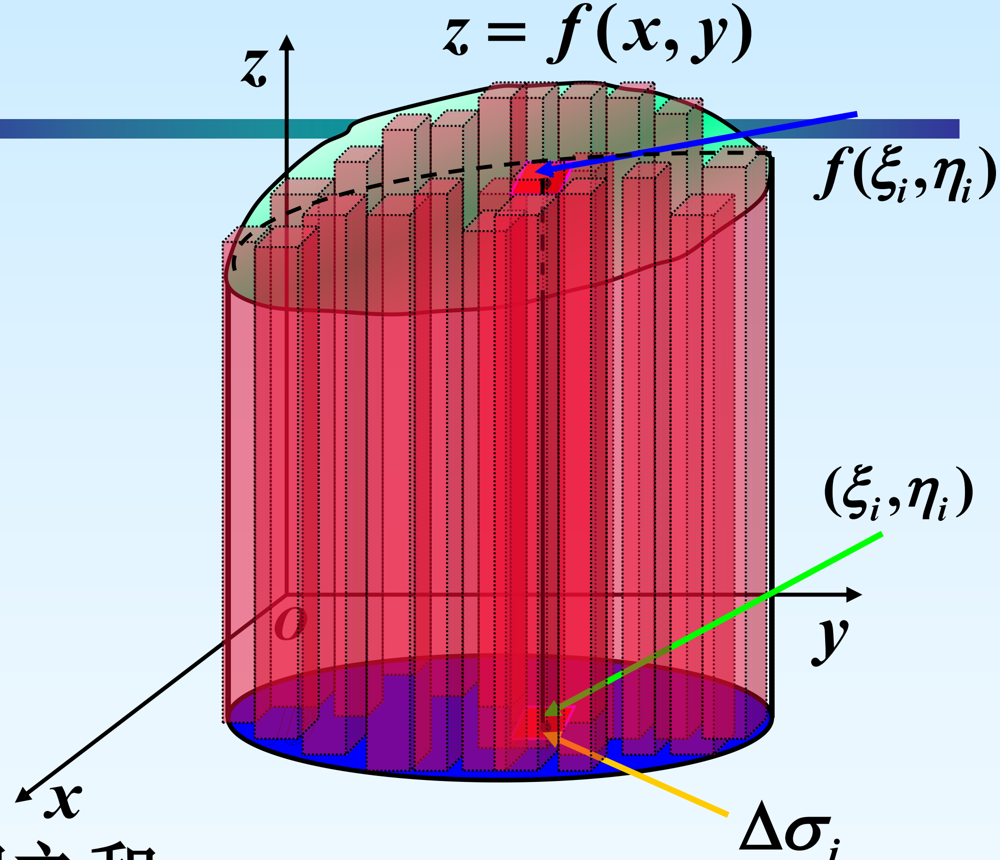






采用“分割、求和、取极限”的方法

步骤如下：



先分割曲顶柱体的底，
并取典型小区域，

小平顶柱体体积

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

用若干个小平顶柱体体积之和

近似表示曲顶柱体的体积，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

曲顶柱体的体积

$$\boxed{V = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .}$$

定义 1. 2 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$， $(i=1,2,\cdots,n)$，

并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域 D 上的**二重积分**，

记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，

即$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

积分区域　被积函数　积分变量　被积表达式　面积元素　积分和

对二重积分定义的说明

(1) 在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的.

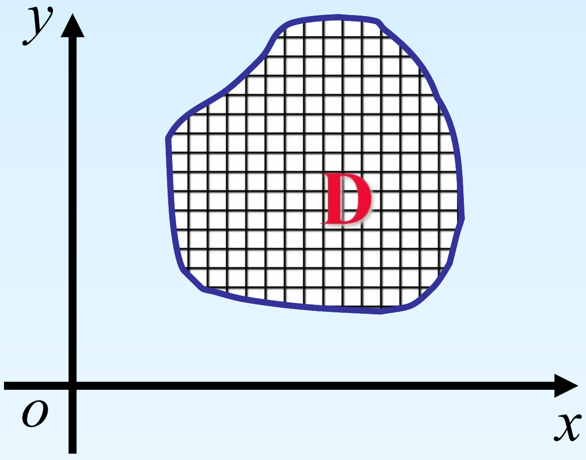
(2)当 $f(x,y)$在闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在，即二重积分必存在.

二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域D，



则面积元素为 $d\sigma = dxdy$

故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

特别地，区域D的面积 $S(D) = \iint_D 1d\sigma = \iint_D d\sigma.$

设 $f(x,y)$在D上有界,

$T:\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$为$D$的一个分割,

令 $M_i=\sup\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y), m_i=\inf\limits_{(x,y)\in\sigma_i} f(x,y).$

作和式 $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i$, f关于分割T的上和;

$s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i$, f关于分割T的下和.

二重积分存在定理

定理1.4 $f(x,y)$在可求面积闭区域 D上有定义，则

(1) $f(x,y)$在D上可积 $\Rightarrow f(x,y)$在D上有界；

(2) $f(x,y)$在D上可积 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T) = \lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)$.

(3) $f(x,y)$在D上可积 $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T, s.t\ S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

(4) $f(x,y)$在有界闭区域D上连续 $\Rightarrow f(x,y)$在D上可积.

(5)设 $f(x,y)$在D上有界, 若$f(x,y)$的不连续点都落在有限条的光滑曲线上，则$f(x,y)$在D上可积.

二重积分的性质

（二重积分与定积分有类似的性质）

性质1.1 若$f(x,y)$，$g(x,y)$在D上可积，则对任意α，β，$\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$在$D$上也可积，且

$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma$$

$$=\alpha\iint_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质1.2(保号性和保序性)

(1)若$f(x,y)$在D上可积，且 $f(x,y)\geq 0$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geq 0$$

特别若$f(x,y)$在D上非负连续，且不恒为 零，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma > 0$$

(2)若$f(x,y)$，$g(x,y)$在D上可积，且在 D上 $f(x,y)\geq g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \geq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质1.3(区域可加性)

若$f(x,y)$在D_1,D_2上都可积， D_1,D_2无公共内点，则$f(x,y)$在$D=D_1\cup D_2$上也可积，且

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质1.4(绝对可积性)

若$f(x,y)$在D上可积，则$|f(x,y)|$在D上也可积，且

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D \left|f(x,y)\right|d\sigma.$$

性质1.5(估值不等式)

若$f(x,y)$在D上可积，且$m \le f(x,y) \le M$，则

$$mS(D) \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MS(D)$$

其中$S(D)$为区域D的面积.

性质1.6(积分中值定理)

若$f(x,y)$在有界闭区域 D上连续，则存在$(\xi,\eta) \in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S(D)$$

例 1 不作计算，估计 $I=\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的范围，

其中 D 是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ $(0<b<a)$.

解 区域 D 的面积 $\sigma=ab\pi$ ，

在 D 上 $\because 0\le x^2+y^2\le a^2$,

$$\therefore 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2},$$

$$\sigma\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2},$$

$$ab\pi\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le ab\pi e^{a^2}.$$

例 2 估计 $I=\iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的范围

其中 D: $0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2.$

解 $\because f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$, 区域面积 $\sigma=2,$

在 D 上 $f(x,y)$ 的最大值 $M=\dfrac{1}{4}\quad (x=y=0)$

$f(x,y)$ 的最小值 $m=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{1}{5}\quad (x=1,y=2)$

故 $\dfrac{2}{5}\le I\le\dfrac{2}{4}\quad\Rightarrow 0.4\le I\le 0.5.$

例 3 判断 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$ 的符号.

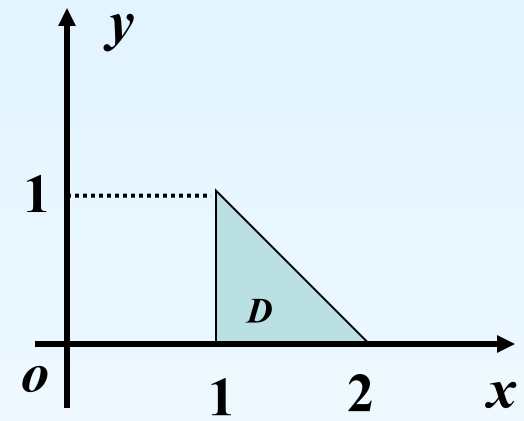
解 当$r\le|x|+|y|\le 1$时, $0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1,$

故 $\ln(x^2+y^2)\le 0;$

又当 $|x|+|y|<1$时, $\ln(x^2+y^2)<0,$

于是 $\iint\limits_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)dxdy<0.$

例 4 比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ 的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为(1,0) (1,1), (2,0).



解 三角形斜边方程 $x+y=2$

在 D 内有 $1 \le x+y \le 2 < e$,

故 $0 \le \ln(x+y) < 1$

于是 $\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2$,

因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma.$

例5 设 $f(x,y)$ 是连续函数，求

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 根据积分中值定理 $\exists(\xi,\eta)\in D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le\rho^2\}$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}f(\xi,\eta)\sigma$$

$$=\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}f(\xi,\eta)\pi\rho^2 \;=f(0,0).$$

小结

二重积分的基本概念

二重积分的几何意义：曲顶柱体的体积

二重积分可积的条件

二重积分的基本性质

线性性质、保序性、保号性、区域可加性、
绝对可积性、估值不等式、积分中值定理