北京航空航天大学

2020－2021 学年 第一学期期末考卷

《工科数学分析（Ⅰ）》

(A 卷)

班号 ＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿

主讲教师＿＿＿＿＿ 考场＿＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2021 年 1 月 8 日

一、 选择题（每题 4 分，满分 20 分）

1. 曲线$\begin{cases} x = 3\int_1^t e^u du, \\ y = 4e^t + 5, \end{cases}$ $1 \le t \le 2$ 的弧长为（　　　　）.

A. $5(e-1)$；　　B. $5(e^2-1)$；　　C. $5(e^2-e)$；　　D. $5e$.

2. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$F(x)=\int_a^x f(t)dt$,则下列说法错误的是（　　　　）.

A. $F(x)$在$[a,b]$上连续；

B. $F(x)$在$[a,b]$上可导；

C. 若$G(x)$为$f(x)$的一个原函数, 则$F(x)-G(x)$在$[a,b]$上为常数；

D. $\dfrac{d}{dx}F(2x)=f(2x)$.

3. 设$f(-x)=-f(x), x\in[-2,2]$,则$\int_{-2}^{2}(f^3(x)+xf^2(x)+\sqrt{4-x^2})dx=$（　　　　）.

A. 0；　　B. 2π；　　C. 4π；　　D. 条件不足, 无法计算.

4. 下列广义积分中，收敛的是（　　　　）.

A. $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x}dx$；　　B. $\int_2^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$；　　C. $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(x-1)^2}dx$；　　D. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$.

5. 设$y_1=e^x, y_2=e^x+e^{2x}, y_3=e^x+e^{3x}$是一个二阶非齐次线性微分方程的三个特解, 则此方程的表达式为（　　　　）.

A. $y''-3y'+2y=e^x$；　　B. $y''-4y'+3y=2e^x$；

C. $y''-6y'+5y=e^x$；　　D. $y''-5y'+6y=2e^x$.

二、 计算题（每题 6 分，满分 30 分）

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\int_1^x e^{(t-1)^2}dt}{\sin^2(x-1)\ln x}$.

2. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

3. 计算$\int\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

4. 计算$\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}(1-x^2)}dx$.

5. 设$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 tf(t)dt$,求$f(x)$的表达式.

三、（本题 10 分）

设$y''+2y'+y=2e^{-x}x$,求此微分方程的通解.

四、（本题 10 分）

设直线$y=ax$与曲线$y=\sqrt{x}$所围成的图形面积为A_1,由直线$y=ax,x=1$和$y=\sqrt{x}$所围成的图形面积为A_2.假设$a>1$,当a取何值时两图形的面积之和A_1+A_2达到最小.

五．（本题 10 分）

假设$p>0$,讨论积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$的敛散性. 若积分收敛，请指出是绝对收敛还是条件收敛.

六、（本题 10 分）

设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导，记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，若$\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 F(x)dx=0.$

证明：(1) $\int_0^1 xf(x)dx=0;$　　　(2) 存在$\xi\in(0,1),$使 $f'(\xi)=0.$

七、（本题 10 分）

证明：若有界函数$f(x)$在$[a,b]$上仅有间断点b，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.