

## § 10.2 一阶微分方程求解



## § 2.1 变量分离方程

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (1) \quad \text{可分离变量的微分方程}$$

例如  $\frac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}} dy = 2x^2 dx.$

**分析:** 设函数  $f(x)$  和  $g(y)$  是连续的,  $y = \varphi(x)$  是方程(1)的解, 则

$$g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(x)dx$$



## 两端积分

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(x)dx$$

利用  $y = \varphi(x)$  作代换, 引入变量  $y$ , 则

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

设  $G(y)$  和  $F(x)$  是依次为  $g(y)$  和  $f(x)$  的原函数,

于是 
$$G(y) = F(x) + C \quad (2)$$

**说明:** 方程(1)的解满足关系式 (2).



反之：

如果  $y = \varphi(x)$  是由关系式(2)确定的隐函数，

由隐函数求导法可知，当  $g(y) \neq 0$  时，

$$\varphi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(y)} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

表明  $y = \varphi(x)$  满足方程(1)，所以  $y = \varphi(x)$

是方程(1)的解。



**解法**  $f(x), g(y)$  连续,  $g(y) \neq 0$ .

在上面的假设条件下, 通过两端积分

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

得到的关系式

$$G(y) = F(x) + C$$

就是方程(1)的隐式解. 隐式通解



**例1** 求解微分方程  $\frac{dy}{dx} = 2xy$  的通解.

**解** 分离变量  $\frac{dy}{y} = 2x dx,$

两端积分  $\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx,$

$$\ln |y| = x^2 + C_1$$

$\therefore y = Ce^{x^2}$  为所求通解.



**例 2** 衰变问题:衰变速度与未衰变原子含量 $M$ 成正比,已知  $M|_{t=0} = M_0$ ,求衰变过程中铀含量  $M(t)$ 随时间 $t$ 变化的规律.

**解** 衰变速度  $\frac{dM}{dt}$ , 由题设条件

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M \quad (\lambda > 0 \text{ 衰变系数}) \quad \frac{dM}{M} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{dM}{M} = \int -\lambda dt, \quad \ln M = -\lambda t + \ln C, \quad \text{即 } M = Ce^{-\lambda t},$$

$$\text{代入 } M|_{t=0} = M_0 \text{ 得 } M_0 = Ce^0 = C,$$

$$\therefore M = M_0 e^{-\lambda t}$$

衰变规律



**例3** 某车间体积为12000立方米,开始时空气中含有0.1%的 $\text{CO}_2$ ,为了降低车间内空气中 $\text{CO}_2$ 的含量,用一台风量为每分2000立方米的鼓风机通入含0.03%的 $\text{CO}_2$ 的新鲜空气,同时以同样的风量将混合均匀的空气排出,问鼓风机开动6分钟后,车间内 $\text{CO}_2$ 的百分比降低到多少?

**解** 设鼓风机开动后  $t$  时刻  $\text{CO}_2$  的含量为  $x(t)\%$  在  $[t, t + dt]$  内,

$$\text{CO}_2 \text{ 的通入量} = 2000 \cdot dt \cdot 0.03,$$

$$\text{CO}_2 \text{ 的排出量} = 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$



$\text{CO}_2$ 的改变量 =  $\text{CO}_2$ 的通入量 -  $\text{CO}_2$ 的排出量

$$12000dx = 2000 \cdot dt \cdot 0.03 - 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(x - 0.03), \Rightarrow x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t},$$

$$\because x|_{t=0} = 0.1, \therefore C = 0.07, \Rightarrow x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$$

$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

6分钟后, 车间内 $\text{CO}_2$ 的百分比降低到0.056%.

## 思考题

求解微分方程  $\frac{dy}{dx} + \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{x+y}{2}.$



## 思考题解答

$$\frac{dy}{dx} + \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} + 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = 0, \quad \int \frac{dy}{2 \sin \frac{y}{2}} = -\int \sin \frac{x}{2} dx,$$

$$\ln \left| \csc \frac{y}{2} - \cot \frac{y}{2} \right| = 2 \cos \frac{x}{2} + C, \quad \text{为所求解.}$$



## § 2.2 齐次方程

**1. 定义** 形如  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$  的微分方程称为**齐次方程**.

**2. 解法** 作变量代换  $u = \frac{y}{x}$ , 即  $y = xu$ ,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}, \quad dy = udx + xdu,$$

代入原式  $u + x \frac{du}{dx} = f(u),$

即  $\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}.$

可分离变量的方程

分离变量, 积分得  $\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|C_1 x|,$

即  $x = Ce^{\varphi(u)},$        $(\varphi(u) = \int \frac{du}{f(u) - u})$

将  $u = \frac{y}{x}$  代入,      得通解  $x = Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}.$



## 例1 求解微分方程

$$(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0.$$

**解** 令  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $dy = xdu + udx$ ,

$$(x - ux \cos u)dx + x \cos u(udx + xdu) = 0,$$

$$\cos u du = -\frac{dx}{x}, \quad \sin u = -\ln |x| + C,$$

微分方程的解为  $\sin \frac{y}{x} = -\ln |x| + C.$



## 可化为齐次方程的方程

**1. 定义** 形如  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$  的微分方程

当  $c = c_1 = 0$  时, 为齐次方程. 否则为非齐次方程.

**2. 解法** 令  $x = X + h$ , (其中  $h$  和  $k$  是待定的常数)

$$y = Y + k, \quad dx = dX, \quad dy = dY$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + \underline{ah + bk + c}}{a_1X + b_1Y + \underline{a_1h + b_1k + c_1}}\right)$$



$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0, \end{cases}$$

(1)  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ , 有唯一一组解.

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}\right) \text{ 得通解代回 } \begin{cases} X = x - h, \\ Y = y - k, \end{cases}$$

(2)  $\Delta = 0$ , 未必有解, 上述方法不能用.

当  $b_1 = 0$  时,  $a_1$  与  $b$  中必至少有一个为零.





若  $b = 0$ , 可分离变量的微分方程.

若  $b \neq 0, a_1 = 0$ , 令  $z = ax + by$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$ ,

$\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = f(\frac{z+c}{c_1})$  可分离变量的微分方程.

当  $b_1 \neq 0$  时, 令  $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ ,

方程可化为  $\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1})$ , 令  $z = ax + by$ ,

则  $\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a) = f(\frac{z+c}{\lambda z + c_1})$ . 可分离变量.



**例2** 求  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$  的通解.

**解**  $\because \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$

方程组  $\begin{cases} h-k+1=0 \\ h+k-3=0, \end{cases} \Rightarrow h=1, k=2,$

令  $x = X + 1, y = Y + 2.$       代入原方程得

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}, \quad \text{令 } u = \frac{Y}{X},$$

方程变为  $u + X \frac{du}{dX} = \frac{1-u}{1+u}$ , 分离变量法得

$$X^2(u^2 + 2u - 1) = c, \quad \text{即 } Y^2 + 2XY - X^2 = C,$$

将  $X = x - 1, Y = y - 2$  代回,

得原方程的通解

$$(y-2)^2 + 2(x-1)(y-2) - (x-1)^2 = C,$$

$$\text{或 } x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1.$$

## 小结

齐次方程  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$

齐次方程的解法 令  $u = \frac{y}{x}.$

可化为齐次方程的方程 令  $x = X + h,$   
 $y = Y + k.$

直接使用变量代换简化计算

## 思考题

方程  $\int_0^x [2y(t) + \sqrt{t^2 + y^2(t)}] dt = xy(x)$

可否化为齐次方程？

## 思考题解答

方程两边同时对  $x$  求导:

$$2y + \sqrt{x^2 + y^2} = y + xy',$$

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y' = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x},$$

原方程是齐次方程.



## § 2.3 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

例如  $\frac{dy}{dx} = y + x^2$ ,  $\frac{dx}{dt} = x \sin t + t^2$ , 线性的;

$yy' - 2xy = 3$ ,  $y' - \cos y = 1$ , 非线性的.

当  $Q(x) \equiv 0$ , 上方程称为齐次的.

当  $Q(x) \not\equiv 0$ , 上方程称为非齐次的.



## 一阶线性微分方程的解法

1. 线性齐次方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ .

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx,$$

$$\ln |y| = -\int P(x)dx + \ln C_1,$$

齐次方程的通解为  $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ .





2. 线性非齐次方程  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ .

讨论  $\therefore \frac{dy}{y} = \left[ \frac{Q(x)}{y} - P(x) \right] dx,$

两边积分  $\ln|y| = \int \frac{Q(x)}{y} dx - \int P(x) dx,$

设  $\int \frac{Q(x)}{y} dx$  为  $u(x)$ ,  $\therefore \ln|y| = u(x) - \int P(x) dx,$

即  $y = e^{u(x)} e^{-\int P(x) dx}.$  非齐次方程通解形式

与齐次方程通解相比:  $C \Rightarrow u(x)$

## 常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

**实质:** 未知函数的变量代换.

新未知函数  $u(x) \Rightarrow$  原未知函数  $y(x)$ ,

作变换  $y = \underline{u(x)} e^{-\int P(x) dx}$

$$y' = u'(x) e^{-\int P(x) dx} + u(x) [-P(x)] e^{-\int P(x) dx},$$



将 $y$ 和 $y'$ 代入原方程得  $u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$

积分得  $u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C,$

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y = \left[ \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] e^{-\int P(x)dx}$$
$$= \underbrace{C e^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

对应齐次  
方程通解

非齐次方程特解



**例1** 求方程  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$  的通解.

**解**  $P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{\sin x}{x},$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( \int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\ln x} \left( \int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} (\int \sin x dx + C) = \frac{1}{x} (-\cos x + C).$$



## § 2.4 伯努利方程

**Jacob Bernoulli**  
**( 1654 –1705)**

许多数学成果与雅各布的名字相联系。

悬链线问题（**1690年**），  
曲率半径公式（**1694年**），  
“伯努利双纽线”（**1694年**），  
“伯努利微分方程”（**1695年**），  
“等周问题”（**1700年**）等。





## 伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\lambda \quad (\lambda \neq 0, 1)$$

当 $\lambda = 0, 1$ 时，方程为线性微分方程.

当 $\lambda \neq 0, 1$ 时，方程为非线性微分方程.

**解法：**需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以 $y^\lambda$ ，得  $y^{-\lambda} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\lambda} = Q(x)$ ,



$$\text{令 } z = y^{1-\lambda}, \text{ 则 } \frac{dz}{dx} = (1-\lambda)y^{-\lambda} \frac{dy}{dx},$$

$$\text{代入上式 } \frac{dz}{dx} + (1-\lambda)P(x)z = (1-\lambda)Q(x),$$

求出通解后，将  $z = y^{1-\lambda}$  代入即得

$$y^{1-\lambda} = z$$

$$= e^{-\int (1-\lambda)P(x)dx} \left( \int Q(x)(1-\lambda)e^{\int (1-\lambda)P(x)dx} dx + C \right).$$



**例1** 求方程  $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^2\sqrt{y}$  的通解.

**解** 两端除以  $y^{\frac{1}{2}}$ , 得  $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x^2$ ,

$$\text{令 } z = \sqrt{y}, \quad 2\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = x^2,$$

$$\text{解得 } z = x^2\left(\frac{x}{2} + C\right), \quad \text{即 } y = x^4\left(\frac{x}{2} + C\right)^2.$$





**例2** 用适当的变量代换解下列微分方程:

1.  $2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2};$

**解**      令  $z = y^2$ ,      则  $\frac{dz}{dx} = 2y \frac{dy}{dx},$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2},$$

$$z = e^{-\int 2x dx} \left[ \int xe^{-x^2} e^{\int 2x dx} dx + C \right]$$

所求通解为  $y^2 = e^{-x^2} \left( \frac{x^2}{2} + C \right).$



$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sin^2(xy)} - \frac{y}{x};$$

**解** 令  $z = xy$ , 则  $\frac{dz}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}$ ,

$$\frac{dz}{dx} = y + x \left( \frac{1}{x \sin^2(xy)} - \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得  $2z - \sin 2z = 4x + C$ ,

将  $z = xy$  代回,

所求通解为  $2xy - \sin(2xy) = 4x + C$ .



3 求  $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$  的通解.

**解** 令  $x + y = u$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$  代入原方程

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2 \quad \text{解得 } \arctan u = x + C,$$

代回  $u = x + y$ , 得  $\arctan(x + y) = x + C$ ,

原方程的通解为  $y = \tan(x + C) - x$ .

## 思考题

求微分方程  $y' = \frac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$  的通解.



## 思考题解答

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos y \sin 2y - x \sin y}{\cos y} = \sin 2y - x \tan y,$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} + (\tan y) \cdot x = \sin 2y,$$

$$x = e^{\ln|\cos y|} \left[ \int \sin 2y \cdot e^{-\ln|\cos y|} dy + C \right]$$

$$= \cos y \left[ \int \frac{2 \sin y \cos y}{\cos y} dy + C \right] = \cos y [C - 2 \cos y].$$

# 作业

## 习题10.2

$1(1, 3), 2(2, 4), 3(2, 4), 4(1, 3), 5(2)$