§3 多元函数的极限和连续

定义3.1 设$D \subset \mathbf{R}^n$, 映射$f: D \to \mathbf{R}$称为n元函数，

点$\boldsymbol{x} \in D$, 记$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \vec{x}$

f 在 $\boldsymbol{x}$点 的 值 记 为$f(\boldsymbol{x})$, 或$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

D称为函数的定义域，$f(D) \subset R$称为值域.

定义3.2 设$D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}$. 点$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$是$D$的聚点，$A$是一个实数. 如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任意的$\boldsymbol{x}\in D$，当$0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$时，都有

$$|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$$

我们就称函数f在点$\boldsymbol{a}$处有极限A, 记作

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A,\quad \text{或}\quad f(\boldsymbol{x})\to A\ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a})$$

$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当$\boldsymbol{x}\in D$，且$0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$时，

总有$|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$.

二元函数极限具体可表述为：

$$(x_0, y_0) \in D', \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$(x,y) \in D$，且$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$时，

总有$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$

二重极限也可以记为：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$

例 1 下列叙述能否作为二元函数极限的定义？

1、 对$(x_0,y_0)\in D'$，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$x\in D$且$0<|x-x_0|+|y-y_0|<\delta$时总有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$

2、 对$(x_0,y_0)\in D'$，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$x\in D$且$0<\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}<\delta$时，总有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则.

3、对$(x_0,y_0)\in D'$，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$x\in D$且$0<|x-x_0|<\delta$且$0<|y-y_0|<\delta$时，总有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则.

例2 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$

解 函数在 $\mathbf{R}^2\setminus(0,0)$ 内有定义，

由于 $\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right| \le \dfrac{x^2+y^2}{4} < \|(x,y)-(0,0)\|^2$，

因此对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ 时，

$\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon.$ 结论得证！

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y}\cdot\frac{x^2 y}{x^2+y^2},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \xlongequal{u=x^2 y} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1,$

$$0\le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

于是，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0.$

例4 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

解

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1}\right| \le \frac{\left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{y}\right|}{\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right|-1} \le \left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{y}\right|$$

于是， $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$

定理3.1(海涅)

$z=f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\in D\subset \mathbf{R}^n$，点$\boldsymbol{a}\in \mathbf{R}^n$为$D$的聚点，则

$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=A \Leftrightarrow$

$\forall\{\boldsymbol{x}_k\}\subset D$, $\boldsymbol{x}_k\to \boldsymbol{a}(k\to\infty)$且$\boldsymbol{x}_k\neq \boldsymbol{a}(k=1,2,\cdots)$, 都有

$$\lim_{k\to\infty} f(\boldsymbol{x}_k)=A$$

例5 设$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

证明 对函数作坐标变换$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi,$

这时$(x,y)\to(0,0)$等价于对任何φ都有$r\to 0,$

由于$|f(x,y)-0|=|xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}|=\frac{1}{4}r^2|\sin 4\varphi|\le\frac{1}{4}\ r^2$

因此，对任何$\varepsilon>0$，只须取$\delta=2\sqrt{\varepsilon}$，

当$0<r=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，不管$\varphi$取什么值

都有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

例6 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0, & x=0,\ y=0.\end{cases}$ 研究 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 的存在性.

解 沿着直线$y=kx$趋近于$(0,0)$时

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

其值随k取值不同而变化，所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在.

注 虽然$\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$, $\lim\limits_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$,
保证不了重极限存在.

累次极限

定义3. 3 设D是$\mathbf{R}^2$上的开集,$(x_0, y_0) \in D$为一定点,$z = f(x, y)$为定义在$D\backslash\{(x_0, y_0)\}$上的二元函数，如果对于每个固定的$y \neq y_0$,极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$存在,并且极限$\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$存在，那么称此极限为函数$f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$先对$x$后对$y$的累次极限.

类似可以定义先对y后对x的累次极限$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$.

例7 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}, & x\neq 0且y\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$

解 因为$|f(x,y)|\leq x^2+y^2$,

由重极限的定义不难证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

而$x\to 0$或者$y\to 0$时，$(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$的极限都不存在，

所以累次极限$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y),\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$都不存在.

例8 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\text{且}y\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

解 因为$0\le\left|y\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|y|$,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$,

即二重极限存在.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} 0=0,$$

而$\lim\limits_{x\to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$不存在，所以$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在.

定理 若二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，则累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，且与重极限相等.

定理3.2 若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 和重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 都存在,则三者相等.

推论 若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在但不相等，则重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 必不存在.

例 9 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x-y^2+y^3}{2x+y^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x-y^2+y^3}{2x+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2+y^3}{y^2} = -1$$

累次极限存在但不相等，所求重极限不存在.

多元函数的连续性

定义3.4 设n元函数$f(\boldsymbol{x})$定义于$D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in D$为给定的聚点，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$\boldsymbol{x}\in D$且$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$时，总有

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})$，则称$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{a}$点连续.

不连续的点称为间断点，在D上每点都连续称为在D上连续.

当a是D的孤立点时，我们规定函数在孤立点是连续的.

当D为有限点集时，D中的点都是孤立点，因此D上的函数都是连续的.

注 (1) 若$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续，则$f(x,y_0)$在x_0连续，$f(x_0,y)$在y_0连续.

(2) $f(x,y)$在一点处对单个变量连续，不能保证函数在这点连续.

例如 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0.\end{cases}$

$f(x,0)=0=f(0,y)$在$(0,0)$点分别关于变量x,y连续，

但是$f(x,y)$在$(0,0)$点极限不存在，从而不连续.

例10 常值函数在其定义域上是连续的.

例11 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 定义$f_i(\boldsymbol{x})=x_i(i=1,2,\cdots,n)$.

称为$\boldsymbol{x}$在第i个坐标轴上的投影，则所有f_i 都在$\mathbf{R}^n$上连续.

证明 取$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,则$f_i(\boldsymbol{a})=a_i$，于是

$$\left|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{a})\right|=\left|x_i-a_i\right|\le\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\right\|.$$

连续函数的和差积商及复合函数性质等可以推广到多元.

例12 设$P(\boldsymbol{x})=P(x_1,x_2,\cdots x_n),Q(\boldsymbol{x})=Q(x_1,x_2,\cdots x_n)$，$n$元多项式

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}P(\boldsymbol{x})Q(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{a})Q(\boldsymbol{a}),\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\frac{P(\boldsymbol{x})}{Q(\boldsymbol{x})}=\frac{P(\boldsymbol{a})}{Q(\boldsymbol{a})},(Q(\boldsymbol{a})\neq 0)$$

多元初等函数

- 由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的可用一个式子所表示的多元函数叫**多元初等函数**.
- 一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

例13 设$f(x,y,z)=\sin(xy+z)$, 则f在$\mathbf{R}^3$上连续.

证明 $xy+z$是三元多项式，在$\mathbf{R}^3$上连续，令$\varphi(t)=\sin t$

则φ在$\mathbf{R}$上连续，经过复合之后得f在$\mathbf{R}^3$上连续.

例14 $f(x,y)=\dfrac{xy}{y-x^2}$.

当$y=x^2$时，$f(x,y)$无定义，

$y=x^2$上的所有点均是间断点，此外所有点处连续.

例15 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}$$

例16 若$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$在某一区域$G$内对变量$\boldsymbol{x}$为连续，对变量$\boldsymbol{y}$满足李普希兹条件，即

$$\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}'),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}'')\in G,\ \exists \text{常数} L,\ \text{有} \left|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}')-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}'')\right|\le L\left|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y}''\right|$$

则f在G连续.

证明 因为$f(x,y)$对变量x连续，所以$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$, $s.t.$当$|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$

取$\delta=\min\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{2L}\}$，当$|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$时

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|=\left|f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|$$

$$\le\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|+\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|$$

$$\le L\left|y-y_0\right|+\frac{\varepsilon}{2}<L\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

例17 设定义在D上的二元函数$f(x,y)$分别对变量x,y连续，并且对变量x的连续关于y是一致的，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)>0,|x-x_0|<\delta,\forall(x,y)\in D,|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$$

证明$f(x,y)$在D上连续.

证明 因为$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|$ (1)

又因为$f(x,y)$分别对x,y连续，所以

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1(\varepsilon)>0,|x-x_0|<\delta_1,\forall(x,y)\in D,|f(x,y)-f(x_0,y)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

$$\exists\delta_2>0,|y-y_0|<\delta_2,|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，$|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$时，$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$ 得证.

§4 多元函数连续的性质

定义4.1 $D \subset \mathbf{R}^n$, $f: D \to \mathbf{R}$, 如果对$\forall \varepsilon > 0$, 总存在$\delta > 0$, 使得对任意的$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, 当$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta$时，都有$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$, 则称$f$在$D$上一致连续.

f在D上一致连续

$\Leftrightarrow$ 对任意点列$\{\boldsymbol{x}_k\}, \{\boldsymbol{y}_k\} \subset D$, 当$\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{y}_k\| \to 0, k \to \infty$

有$|f(\boldsymbol{x}_k) - f(\boldsymbol{y}_k)| \to 0$, $k \to \infty$.

例1 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2},x^2+y^2>0$,在其定义域上不一致连续.

证明 取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}$, 对任意$\delta>0$,总存在$x$满足,

$$\|(x,x)-(x,0)\|=|x|<\delta,$$

但是$|f(x,x)-f(x,0)|=\dfrac{1}{2}>\varepsilon_0$,

所以$f(x,y)$在其定义域上不一致连续.

方法二 取点列$\{(\frac{1}{k},\frac{1}{k})\}\{(\frac{1}{k},0)\}$, $\|(\frac{1}{k},\frac{1}{k})-(\frac{1}{k},0)\|=\frac{1}{k}\to 0$, $k\to\infty$

但是 $|f(\frac{1}{k},\frac{1}{k})-f(\frac{1}{k},0)|=\frac{1}{2}$, $k\to\infty$时不收敛于0.

定义 $D\subset \mathbf{R}^n$，$f:D\to \mathbf{R}^m$是D到$\mathbf{R}^m$的映射.

$m=1$时，f是n元函数，进一步若$n=1$,则f是一元函数.

$m>1$时，f称为向量值函数. $\boldsymbol{z}=f(\boldsymbol{x})$可以表示为向量形式

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots x_n) \end{pmatrix}.$$

定义4.2 $D\subset \mathbf{R}^n$，$f:D\to \mathbf{R}^m$. 给定$\boldsymbol{x}_0\in D$，如果对$\forall\varepsilon>0$,总$\exists\delta>0$,使得对任意的$\boldsymbol{x}\in D$,当$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$时，都有

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon,$$

则称f在$\boldsymbol{x}_0$点连续. 如果f在D上每一都点都连续，则称f是D上的连续映射.

定理4.1 $D\subset\mathbf{R}^n$，$f:D\to\mathbf{R}^m$. 则f是D上的连续映射的充要条件是f的每一个分量$f_i(x_1,\cdots x_n)$都是D上的连续函数.

定理4.2 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, 则以下条件等价

（1）f是连续映射；

（2）对$\mathbf{R}^n$上的任意收敛点列$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0(n\to\infty)$，都有

$$f(\boldsymbol{x}_n)\to f(\boldsymbol{x}_0)(n\to\infty);$$

（3）对任意开集$E\subset\mathbf{R}^m$，$f^{-1}(E)$是$\mathbf{R}^n$中的开集.

定理4.3 连续映射将紧致集映射成紧致集.

定理4.4 设D为$\mathbf{R}^n$中的紧致集，f是D上的连续函数，则以下结论成立

（1）（有界性）f在D上有界；

（2）（最值性）f在D上可以取到最大值和最小值；

（3）（一致连续性）f在D上一致连续.

定理4.5 设D为$\mathbf{R}^n$中的紧致集，$f:D\to\mathbf{R}^m$是连续映射，则f在D上一致连续.

定理4.6 连续映射将道路连通集合映射为道路连通集合.

推论 (1) 连续函数将道路连通的紧致集映射成闭区间;
(2) 连续函数将闭区域映射成闭区间.

定理4.7 设D为$\mathbf{R}^n$中连通的紧致集，f是D上的连续函数，则对于满足条件 $f(\boldsymbol{x}_1) \le y \le f(\boldsymbol{x}_2)$ 的任意 y，一定存在 $\boldsymbol{x} \in D$，使得$y = f(\boldsymbol{x})$.