§15.7 条件极值

问题　将正数 12 分成三个正数 x, y, z 之和, 使得 $u=x^3y^2z$ 为最大.

问题实质： 求 x^3y^2z 的最大值

同时 x,y,z 满足 $x+y+z=12$

条件极值：对自变量有附加条件的极值.

Lagrange 乘子法

要找函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点，先构造函数

$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，称为 *Lagrange* 函数，$\lambda$为某一常数，称为 *Lagrange* 乘子，可由

$$\begin{cases} L_x(x,y)=0, \\ L_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

解出x,y,λ，其中x,y就是可能的极值点的坐标.

一般形式:

在约束条件$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ k=1,2,\cdots,m,\ (m<n)$的限制下,求目标函数$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值.

其$Lagrange$函数是:

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m)$$

$$=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_1,\cdots,x_n)$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ 为$Lagrange$乘子.

$$\begin{cases} L_{x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0 \\ L_{\lambda_1} = \varphi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{\lambda_m} = \varphi_m(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

求解此方程组得到的解$(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \cdots, \lambda_m^{(0)})$ 称为 *Lagrange*函数的驻点

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

定理7.1

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(k=1,2,\cdots,m)$分别为目标函数和约束条件，且都有一阶偏导数，若点 $P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$是$f$的条件极值点，且在$P_0$点矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

的秩为m，则存在m个常数$\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)}$，使得$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为$Lagrange$函数的驻点.

定理7.2

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(k=1,2,\cdots,m)$ 分别为目标函数和约束条件,若点$(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},\lambda_1^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为$Lagrange$函数的驻点,记

$$P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),\ H(P_0)=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_j\partial x_k}\right)_{n\times n}(P_0),则$$

(1)若$H(P_0)$正定,则点P_0为极小值点;

(2)若$H(P_0)$负定,则点P_0为极大值点.

用*Lagrange*乘子法求解条件极值的 一般步骤：

1. 根据问题确立目标函数 和约束条件;

2. 作*Lagrange*函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m)=f+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k$$

3. 求出*Lagrange*函数的所有驻点;

4. 对每个驻点判断是否极值点.

特别的,若只有唯一驻点, 在定义域的边界上不取极值, 且所求问题的极值或最值存在,则此驻点即为所求极值点或最值点.

例 1 将正数 12 分成三个正数 x, y, z之和，使得 $u = x^3y^2z$ 为最大.

解 *Lagrange* 函数为

$$L(x,y,z) = x^3y^2z + \lambda(x+y+z-12)$$

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2y^2z + \lambda = 0 \\ L'_y = 2x^3yz + \lambda = 0 \\ L'_z = x^3y^2 + \lambda = 0 \\ x+y+z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2y^2z = -\lambda, & (1) \\ 2x^3yz = -\lambda, & (2) \\ x^3y^2 = -\lambda, & (3) \\ x+y+z = 12, & (4) \end{cases}$$

由(1), (2)得 $\quad y = \dfrac{2}{3}x, \quad (5)$

由(1), (3)得 $\quad z = \dfrac{1}{3}x, \quad (6)$

将(5), (6)代入(4)得: $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x=12$

$\therefore x=6, y=4, z=2$ 唯一驻点

由问题本身可知，最大值一定存在，

所以，最大值就在这个可能的极值点处取得。

$$u_{\max}=6^3\cdot 4^2\cdot 2=6912.$$

例 2 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

解 设$P(x_0,y_0,z_0)$为椭球面上一点，

$$令F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

$$则F_x|_P=\frac{2x_0}{a^2},\quad F_y|_P=\frac{2y_0}{b^2},\quad F_z|_P=\frac{2z_0}{c^2}$$

过$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

化简为 $\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}+\dfrac{z\cdot z_0}{c^2}=1,$

该切平面在三个轴上的截距各为

$$x=\frac{a^2}{x_0},\quad y=\frac{b^2}{y_0},\quad z=\frac{c^2}{z_0},$$

所围四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0},$

在条件$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$下求 V 的最小值,

令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$,

$$L(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right),$$

由$\begin{cases} L'_{x_0}=0, \quad L'_{y_0}=0, \quad L'_{z_0}=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{y_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$,

可得 $\begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \\ z_0 = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$ 此为唯一的驻点

根据实际情况四面体体积有最小值

从而当切点坐标为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时，

四面体的体积最小 $V_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc.$

例3 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

解 设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点,则 P 到平面 $x+y-2z-2=0$ 的距离为 d,

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|x+y-2z-2\right|.$$

分析: 本题变为求一点 $P(x,y,z)$,使得 x,y,z

满足 $x^2+y^2-z=0$ 且使 $d=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left|x+y-2z-2\right|$

(即 $d^2=\dfrac{1}{6}(x+y-2z-2)^2$) 最小.

令$L(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$, 得

$$\begin{cases} L_x=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x=0, & (1)\\ L_y=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y=0, & (2)\\ L_z=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0, & (3)\\ z=x^2+y^2, & (4)\end{cases}$$

解此方程组得 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{8}$.

即得唯一驻点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$,

根据题意距离的最小值一定存在，且有唯一驻点，故必在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ 处取得最小值.

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2\right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

例4 求曲线C: $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ 上距离 xOy 面最远和最近的点.

解 曲线到平面的距离为 $|z|$,因此 *Lagrange* 函数为

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2-\lambda(x^2+y^2-2z^2)-\mu(x+y+3z-5)$$

$$\begin{cases} L_x=-2\lambda x-\mu=0 \\ L_y=-2\lambda y-\mu=0 \\ L_z=2z+4\lambda z-3\mu=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-2z^2=0 \\ L_\mu=x+y+3z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,\ y=1, \\ x=-5,\ y=-5 \end{cases}$$

$$|z|_{\min}=1$$

$$|z|_{\max}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}=5$$

例 5 在曲面 $2x^2+y^2+z^2=1$ 上求距离平面 $2x+y-z=6$ 的最近点和最远点.

解 $L(x,y,z)=(2x+y-z-6)^2+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$,

则
$$\begin{cases} L_x=4(2x+y-z-6)+4\lambda x=0 \\ L_y=2(2x+y-z-6)+2\lambda y=0 \\ L_z=-2(2x+y-z-6)+2\lambda z=0 \\ 2x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda=0$或$x=y=-z$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow |x| \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}, |y| \le 1, |z| \le 1, \\ 2x + y - z = 6 \quad \Rightarrow |2x + y - z| \le 4 \end{cases}$$

$\therefore \lambda = 0$不成立

解得两个驻点$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

故最大值为 $d_{\max} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}, d_{\min} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

例6 设$\alpha_i > 0, x_i > 0, i = 1,2,3,\ldots\ldots n$

证明：$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} \le \left(\dfrac{\alpha_1 x_1 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n}$

证明 $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} \le \left(\dfrac{\alpha_1 x_1 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i \le (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n) \ln \frac{\alpha_1 x_1 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n}$$

故只需证明$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i$在约束条件

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = c$下的极值小于等于$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln \dfrac{c}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$

令$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln x_i+\lambda(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i-c)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{\alpha_i}{x_i}+\lambda\alpha_i=0,\Rightarrow \alpha_i=-\lambda\alpha_i x_i$$

两端相加得$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=-\lambda c$

所以驻点为$\lambda=-\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{c},x_i=\frac{c}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\alpha_i}{x_i^2}\delta_{ij},$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{c}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i},\cdots,\frac{c}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right) = -\frac{\left(\sum\alpha_i\right)^2}{c^2}\begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{vmatrix}$$

为负定矩阵

取极大值，且唯一，所 以为最大值

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln x_i \le \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \ln\frac{c}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$