2. 4 坐标变换

求向量坐标

例1 求向量e_1=(1,0,0)在F^3的基T={α_1=(1,1,1), α_2=(1,2,3), α_3=(1,4,9)下的坐标。

解：设e_1在T下的坐标为(x_1,x_2,x_3)满足$e_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$转化为列向量形式$e_1=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3$即AX=$e_1$由方程**增广矩阵**求解.

$$(A,e_1)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&0\\1&3&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&-1\\0&1&5&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2&2\\0&1&3&-1\\0&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-\frac{5}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所得方程组的解X=(3,-5/2,1/2)就是所求坐标。

例2 求自然基向量ε_1=(1,0,0), ε_2=(0,1,0), ε_3=(0,0,1)在F^3的基T={α_1=(1,1,1), α_2=(1,2,3), α_3=(1,4,9)下的坐标。

解：将6个向量写成列向量排成M，经过例1中的初等行变换化为最简阶梯形矩阵

$$(A,e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&4&0&1&0\\1&3&9&0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&3&-3&1\\0&1&0&-\frac{5}{2}&4&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

所得后三列为ε_1, ε_2, ε_3在T下的坐标(3,-5/2,1/2),(-3,4,-1),(1,-3/2,1/2)。

例3 求向量$\beta=(y_1,y_2,y_3)$在F^3的基$T=\{\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,2,3),\alpha_3=(1,4,9)$下的坐标。

解:已知自然基向量在T下的坐标，而β是自然基向量的线性组合$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+y_3\varepsilon_3$，$\beta$在T下的坐标也就是$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$在T下的坐标的相应的线性组合

$$y_1(3,-\frac{5}{2},\frac{1}{2})+y_2(-3,4,-1)+y_3(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$$

$$=\left(3y_1-3y_2+y_3,-\frac{5}{2}y_1+4y_2-\frac{3}{2}y_3,\frac{1}{2}y_1-y_2+\frac{1}{2}y_3\right).$$

坐标变换公式

设V是数域F上有限维线性空间,它的两组基是$M_1=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$,$M_2=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$. 设第二组基$M_2$中的每个向量$\beta_j(1\le j\le n)$在第一组基$M_1$下的坐标为

$$\Pi_j=(p_{1j},\cdots,p_{nj})^T$$

依次以这些坐标为列向量组成矩阵:

$$P=(\Pi_1,\cdots,\Pi_n)=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

则$\boldsymbol{P}$称为基M_1到M_2的过渡矩阵. 它可以由等式

$(\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\boldsymbol{P}$ 定义,称为基变换公式.

设$M_1=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$,$M_2=\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$是$V$的基, P是M_1到M_2的过渡方阵. 设$\alpha\in V$在基M_1,M_2下的坐标分别是$X=(x_1,\ldots,x_n)$, $Y=(y_1,\ldots,y_n)$. 从而 $\alpha=y_1\beta_1+\ldots+y_n\beta_n$, 将等式两端用坐标代替，得到坐标等式:

$$X=y_1\Pi_1+\cdots+y_n\Pi_n=(\Pi_1,\ldots,\Pi_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=PY$$

即 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

称为**坐标变换公式**,也就是一个向量在两组不同基下的坐标X,Y之间的关系.

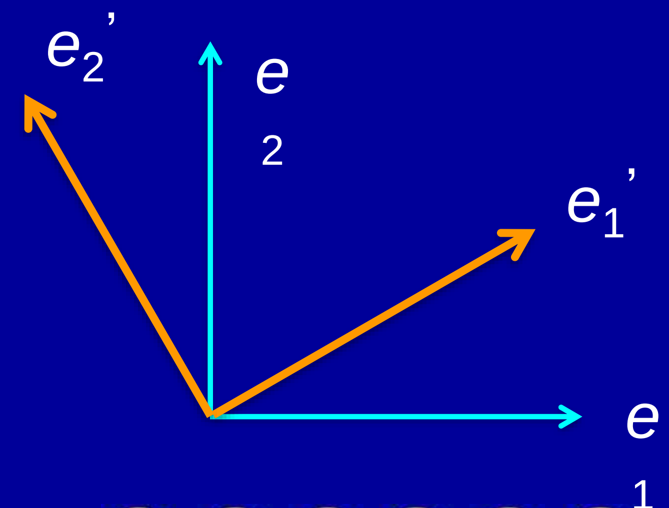
上述内容总结为**定义2.4.1，定理2.4.1。**

例5 描述平面直角坐标系中方程$2x^2+4xy+5y^2=6$的图像曲线的形状。

解：将平面直角坐标系绕原点旋转α角，将方程化为标准型.

自然基$\{e_1, e_2\}$绕原点旋转α角为$\{e_1', e_2'\}$仍为一组基过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



因此有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \text{即} \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

代入曲线方程$2x^2+4xy+5y^2=6$得

$$2\left(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\right)^2 + 4\left(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\right)\left(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\right)$$

$$+5\left(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\right)^2 = 6,$$

整理得

$$x'^2\left(\frac{7}{2} + 2\sin 2\alpha - \frac{3}{2}\cos 2\alpha\right) + x'y'\left(3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha\right)$$

$$+y'^2\left(\frac{7}{2} - 2\sin 2\alpha + \frac{3}{2}\cos 2\alpha\right) = 6.$$

选择α使3sin2 α+4cos2 α=0,即tan2 α=-4/3.
选2 α在第二象限,

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}} = -\frac{3}{5}, \sin 2\alpha = \frac{4}{5}.$$

代入曲线整理得

$$6x'^2 + y'^2 = 6, \text{即} x'^2 + \frac{y'^2}{6} = 1.$$

图像曲线为椭圆，长半轴为√6，短半轴为1.

2.5 向量组的秩

例 1 以下方程组在空间直角坐标系中各是什么形状?

$$(1)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \\ 3x+2y+6z=0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$(2)\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

（1）方程组 (1.1) 中的第 3 个方程可看成是“多余的”，方程组 (1.1) 实质上与 (1.3) 相同，只有两个方程。图像为一条直线。

（2）方程组 (1.2) 中的3个方程后两个是第一个方程的常数倍线性，也都是“多余的”。方程组实质上只有一个方程。图像为一个平面。

那怎样知道方程组中有用的方程有哪些呢？

定义2.5.1（极大线性无关组） 设S是向量组。如果S的子集$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性无关，并且将$S$任一向量$\alpha$添加在$M$上所得的向量组$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha\}$线性相关，就称$M$是$S$的**极大线性无关组**。

引理2.5.2 设S是向量组，$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$是$S$的线性无关子集，则$M$是$S$的极大线性无关组

$\Longleftrightarrow$ S中所有的向量都是M的线性组合。

证明　先设M是S的极大线性无关组.

任取$\alpha\in S$。**当$\alpha\in M$时当然α是M的线性组合：**

$$\alpha = \alpha + \sum_{\beta\in M,\beta\neq\alpha} 0\beta$$

设α不属于M，则$\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha$线性相关，$F$中存在不全为0的数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\lambda$使得

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m+\lambda\alpha=0 \qquad (2.2.1)$$

如果$\lambda=0$，则(2.2.1)成为

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0$$

其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$不全为0，这意味着$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关，矛盾。

因此$\lambda\neq 0$，由(2.2.1)得

$$\alpha=-\frac{\lambda_1}{\lambda}-\cdots-\frac{\lambda_m}{\lambda}\alpha_m$$

这说明α是M的线性组合，其实还是唯一表示。

引理2.5.2　设$S_2=\{v_1,\ldots,v_s\}$是$S_1=\{u_1,\ldots,u_t\}$的线性组合，并且$s>t$，则S_2线性相关.

证明　对每个$1\le j\le s$,记

$$v_j=a_{1j}u_1+\ldots+a_{tj}u_t \qquad (2.2.11)$$

考虑使$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_s v_s=0$　　(2.2.12)

将(2.2.11)代入(2.2.12),得

$\lambda_1(a_{11}u_1+\ldots+a_{t1}u_t)+\ldots+\lambda_j(a_{1j}u_1+\ldots+a_{tj}u_t)+\ldots+\lambda_s(a_{1s}u_1+\ldots+a_{ts}u_t)=0$

整理得

$(a_{11}\lambda_1+\ldots+a_{1s}\lambda_s)u_1+\ldots+(a_{i1}\lambda_1+\ldots+a_{is}\lambda_s)u_i+\ldots+(a_{t1}\lambda_1+\ldots+a_{ts}\lambda_s)u_t=0$ (2.2.13)

选择$\lambda_1,\ldots,\lambda_s$使

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1+\cdots a_{1s}\lambda_s=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{t1}\lambda_1+\cdots a_{ts}\lambda_s=0 \end{cases} \qquad (2.2.14)$$

成立,则(2.2.13)成立.从而(2.2.12)成立。

(2.2.14)是以$\lambda_1,\ldots,\lambda_s$为未知数的齐次线性方程组，有$s$个未知数，$t$个方程.由于$s>t$，(2.2.14)有非零解，这也是(2.2.12)的非零解。因此$v_1,\ldots,v_s$线性相关。

推论　如果$S_2=\{v_1,\ldots,v_s\}$是$S_1=\{u_1,\ldots,u_t\}$的线性组合，并且S_2线性无关，则$s\le t$。

推论2.5.1　如果线性无关向量组$S_1=\{u_1,\ldots,u_s\}$与$S_2=\{v_1,\ldots,v_t\}$等价，即互为线性组合，那么它们所含向量个数s与t相等。特别地，同一向量组S的两个极大线性无关子集所含向量个数相等。

定义2.5.2 任一向量组S的任一极大线性无关组所含向量个数r称为向量组S的**秩**，记作rank$S$。

任一矩阵A的行向量组的秩称为这个矩阵的**行秩**，A的列向量组的秩称为A的**列秩**。

推论2.5.2 如果向量组S_2是S_1的线性组合，则rankS_2≤rankS_1。互为线性组合的向量组秩相等。

证明 设T_1,T_2分别是S_1,S_2的极大线性无关组，则$|T_1|=\text{rank}S_1$, $|T_2|=\text{rank}S_2$。

T_1与S_1等价，T_2与S_2等价，S_1是T_1的线性组合，T_2是S_2的线性组合。由线性组合的传递性知：T_2是T_1的线性组合。而T_2线性无关，由推论2.2.2知$|T_2|\le|T_1|$，即$\mathrm{rank}S_2\le\mathrm{rank}S_1$。

如果S_1与S_2等价，互为线性组合，则$\mathrm{rank}S_2\le\mathrm{rank}S_1$与$\mathrm{rank}S_1\le\mathrm{rank}S_2$同时成立，从而$\mathrm{rank}S_1\le\mathrm{rank}S_2$.

定义2.5.3 设S_1与S_2是同一个向量空间V中的两个向量组。如果S_1与S_2 互为线性组合，就称S_1与S_2等价。如果矩阵A与B的行(列)向量组等价，就称A与B行(列)等价。

引理2.5.3 初等行变换不改变矩阵的行秩

证明： 每次初等行变换前后的矩阵的行向量组等价。由等价的传递性知道：矩阵A经过若干次初等行变换得到的矩阵B的行向量组与A的行向量组等价。由此知：A与B的行秩相等。

重点在于彼此互为线性组合。

还是那句话：考察向量组之间的线性组合关系是本章关键。

不难理解，如果数域F上的向量组S_2是S_1的线性组合，S_3是S_2的线性组合，那么S_3是S_1的线性组合。

推论2.5.4　如果向量组S_2与S_1等价，S_3与S_2等价，那么S_3与S_1等价.

用初等行变换计算秩

例2 求线性方程组的秩

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 9 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 15 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 17 \end{cases} \quad (2.5.1)$$

解： 将方程表成增广矩阵M。方程组的秩就是M的行秩。用初等行变换化为**行阶梯形**

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&3&4&5\\1&3&5&7&9\\1&5&8&10&15\\1&4&9&16&17\end{pmatrix}\longrightarrow T=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\\0&0&-1&-3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于rank(M)=rank(T)=3，方程组的秩为3。

用初等行变换求极大线性无关组

例： 求由下列向量组成的向量组的一个极大线性无关组：

$\alpha_1=(1,2,3,4,-3)$ $\alpha_2=(1,2,0,-5,1)$

$\alpha_3=(2,4,-3,-19,6)$ $\alpha_4=(3,6,-3,-24,7)$

解: 考虑关于$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$的方程

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4\alpha_4=0 \qquad (2.2.2)$$

此方程即齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+3\lambda_4=0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3+6\lambda_4=0 \\ 3\lambda_1-3\lambda_3-3\lambda_4=0 \\ 4\lambda_1-5\lambda_2-19\lambda_3-24\lambda_4=0 \\ -3\lambda_1+\lambda_2+6\lambda_3+7\lambda_4=0 \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

对(2.2.3)的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4 & 6\\ 3 & 0 & -3 & -3\\ 4 & -5 & -19 & -24\\ -3 & 1 & 6 & 7\end{pmatrix}$$

作一系列初等行变换，化为

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

对应的方程组为

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_3-\lambda_4=0\\ \lambda_2+3\lambda_3+4\lambda_4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_2=-3\lambda_3-4\lambda_4\end{cases}$$

通解为

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)=(\lambda_3+\lambda_4, -3\lambda_3-4\lambda_4, \lambda_3, \lambda_4) \qquad (2.2.4)$$

在通解(2.2.4)中取$(\lambda_3,\lambda_4)=(1,0)$，得

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)=(1,-3,1,0)$，这说明

$$\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3=0，\alpha_3=-\alpha_1+3\alpha_2 \qquad (2.2.5)$$

在通解(2.2.4)中取$(\lambda_3, \lambda_4)=(0,1)$，得$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)=(1,-4,0,1)$，这说明

$$\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4=0，\alpha_4=-\alpha_1+4\alpha_2 \qquad (2.2.6)$$

(2.2.5)和(2.2.6)说明α_3, α_4是α_1, α_2的线性组合. 显然α_1, α_2线性无关，因此$\{\alpha_1, \alpha_2\}$就是$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$的一个极大线性无关组。

算法2.5.2 求F^n中有限个向量$\alpha_1,\dots,\alpha_m$组成的向量组的极大线性无关组.

(1)将各向量$\alpha_1,\dots,\alpha_m$写成列向量的形式，依次以它们为各列排成矩阵A.

(2)将A经过一系列初等行变换化成如下的阶梯形

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & b_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & b_{rj_r} & \cdots \\ & & & & & & & & O \end{pmatrix}$$

其中$1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_r \le n$，而$b_{1j_1}, b_{2j_2}, \cdots, b_{rj_r}$ 都不为0。

于是B的第$j_1, j_2, \dots, j_r$列组成B的列向量组的一个极大线性无关组，相应的，A的第$j_1, j_2, \dots, j_r$列组成$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$的一个极大线性无关组。

例 求 $\alpha_1=(1,2,0,-5,1)$, $\alpha_2=(1,2,3,4,-3)$,

$\alpha_3=(2,4,-3,-19,6)$, $\alpha_4=(1,1,1,1,1)$,

$\alpha_5=(3,6,-3,-24,7)$向量组S的一个极大线性无关组。

解：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -3 \\ -5 & 4 & -19 & 1 & -24 \\ 1 & -3 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{系列初等行变换}} B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

观察可得：B 的第1,2,4列组成B的列向量组的极大线性无关组，因此$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$是$S$的一个极大线性无关组。

引理2.5.3'　初等行变换不改变矩阵的列秩。

证明：设$A\in F^{m\times n}$。则A可以经过一系列初等行变换变成最简阶梯形矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & c_{2j_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & c_{rj_r} & \cdots \\ & & & & & & & & O \end{pmatrix}$$

其中$1\le j_1<j_2<\dots<j_r\le n$，而 $c_{1j_1}=c_{2j_2},\cdots,c_{rj_r}=1$

C的最后$n-r$行全为0，第i行的$c_{ij}(j<j_i)$也都为0.

初等行变换将矩阵列向量组的极大无关组化为极大线性无关组，故C与A的列秩相等。

C的第$j_1,j_2,\ldots,j_r$列组成C的列向量组的极大线性无关组，C的列秩是r。

C的列秩与行秩相等，都等于r。于是A的列秩与行秩也相等，都等于r。

定义　矩阵A的行秩和列秩称为A的秩，记作rank$A$.

引理2.5.4　设F^n的任意一个线性无关子集S都能扩充为F^n的一组基。

证明： F^n的线性无关子集S可以扩充为F^n的一个极大线性无关组M，M是F^n 的基。

例4： 试将F^4的线性无关向量$\alpha_1=(1,1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3,3)$扩充成一组基。