北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数学分析内容梳理：

一、不定积分

二、定积分

三、定积分几何应用

四、反常积分

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

一、不定积分

定义1.1 如果对 $\forall x \in I$,都有 $F'(x) = f(x)$,那么 $F(x)$就称为$f(x)$在区间 I上的一个原函数 .

原函数存在定理

如果函数$f(x)$在区间I内连续, 那么在区间I内存在可导函数$F(x)$, 使$\forall x \in I$, 都有$F'(x) = f(x)$.

连续函数一定有原函数.

（1）若$F'(x) = f(x)$，则对于任意常数C，$F(x)+C$都是$f(x)$的原函数.

（2）若 $F(x)$和$G(x)$都是$f(x)$ 的原函数,

则 $F(x)-G(x)=C$

一、不定积分

定义1.2 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 内的不定积分，记为 $\int f(x)dx$.

$= F(x) + C$

不定积分的性质

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x), \quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$$

一、不定积分

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

第一类换元公式

$u=\varphi(x)$ $\int g(u)du$

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = [\int g(u)du]_{u=\varphi(x)}$$

第二类换元公式

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

三角代换：

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec t$.

倒代换：分母的阶较高时，$x=\dfrac{1}{t}$.

有两种或两种以上的根式：$\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$

可采用最小公倍数）$\sqrt[n]{x}=t$

一、不定积分

分部积分公式 $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

或 $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$

选u和v的总原则： 1. v易求；

2. $\int v\,du$比$\int u\,dv$易求.

函数u的选取一般优先级：

反（三角函数)、对（数函数）、幂（函数）、

三（角函数）、指（数函数),

即排列次序在前面的函 数优先取为$u(x)$.

一、不定积分

有理函数的积分

真分式有理函数化为部分分式之和

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

简单无理式的不定积分

$$R(\sqrt[n]{x},\sqrt[m]{x}),\qquad R(x,\sqrt[n]{ax+b}),\qquad R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

一、不定积分

例1 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（　）

当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数；

(B) 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数；

(C) 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数；

(D) 当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数；

解 $F'(x)=f(x),\ [F(-x)]'=f(-x)\cdot(-x)'=-f(-x).$

(A) 若$f(x)$为奇函数，则$[F(x)-F(-x)]'=0$

$\therefore F(x)-F(-x)\equiv C$

$C=F(0)-F(0)=0\Rightarrow F(x)=F(-x)$，A正确.

一、不定积分

(B) 若$f(x)$为偶函数，则$(F(x)+F(-x))'=0$

$F(x)+F(-x)\equiv C$，不能确定奇偶性.

(C) 取$f(x)=\sin^2 x, F(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$

(D) $f(x)=x, F(x)=\dfrac{x^2}{2}+C.$

一、不定积分

例2 求 $\int \max\{1,|x|\}dx.$

解 设 $f(x)=\max\{1,|x|\}$, 则 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 1, & -1\le x\le 1,\\ x, & x>1\end{cases}$

$\because f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续, 则必存在原函数 $F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C_1, & x<-1\\ x+C_2, & -1\le x\le 1.\\ \frac{1}{2}x^2+C_3, & x>1\end{cases}$$

又 $\because F(x)$须处处连续，有

一、不定积分

$$\lim_{x\to -1^+}(x+C_2)=\lim_{x\to -1^-}(-\frac{1}{2}x^2+C_1)$$ 即 $-1+C_2=-\frac{1}{2}+C_1$，

$$\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{2}x^2+C_3)=\lim_{x\to 1^-}(x+C_2)$$ 即 $\frac{1}{2}+C_3=1+C_2$，

联立并令 $C_1=C$， 可得 $C_2=\frac{1}{2}+C$， $C_3=1+C$.

故 $$\int \max\{1,|x|\}dx=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+C, & x<-1\\ x+\frac{1}{2}+C, & -1\le x\le 1.\\ \frac{1}{2}x^2+1+C, & x>1\end{cases}$$

一、不定积分

例3 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$,求 $f(x)$

解 令 $u=\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x=1-u$,

$$f'(u)=1-u,$$

$$f(u)=\int(1-u)du=u-\frac{1}{2}u^2+C,$$

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C.$$

一、不定积分

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

例4 求 $\int \frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ $= d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

注意:$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

解 $\because [\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]'$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{原式} = \int \sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}\cdot d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$$

$$= \frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}} + C.$$

一、不定积分

例5 求$\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}\,x.(x>1)$ (倒代换)

解 令$x=\dfrac{1}{t}$,

$$\text{原式}=\int\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=-\int\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt-\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int\frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\frac{1}{x}-\int\frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\frac{1}{x}$$

$$=-\arcsin\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C$$

当$x<-1$时，结果如何？

一、不定积分

例6　求 $\int x\tan^2 xdx$.

解　原式 $= \int x(\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int x\,d\tan x - \int xdx$$

$$= x\tan x - \int \tan xdx - \int xdx$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

例7 求$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$.

解

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$$

$$= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin x \cos^3 x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$\tan x \cdot \cos^2 x$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\left|\tan x\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x}$$

$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\tan x$

$$= \int \frac{d\tan x}{\tan x \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{(1+u^2)du}{u}$$

$$= \int [\frac{1}{u} + u]du$$

$$= \ln|u| + \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \ln|\tan x| + \frac{1}{2}\tan^2 x + C$$

例8 求$\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx.$

$[\sin x+\cos x]'=\cos x-\sin x$

解 $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C$$

$$\int\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=?$$

例9　求 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

解　$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{2}}+C$$

类似可求 $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ $$= \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} = \int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$\int \frac{du}{(u+\sqrt{2})(u-\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

$\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}dx = ?$

例10 设 $f(x)+\sin x=\int f'(x)\sin x dx$,求$f(x)$.

解 两边求导可得$f'(x)+\cos x=f'(x)\sin x$

$$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x-1}$$

（一） $f(x)=\int\frac{\cos x}{\sin x-1}dx$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-1)}{\sin x-1}=\ln|\sin x-1|+C$$

（二） $f(x)=\int f'(x)\sin x dx-\sin x$

$$=\int\frac{\cos x\sin x}{\sin x-1}dx-\sin x=\int\frac{u}{u-1}du-\sin x$$

$$=\int du+\int\frac{1}{u-1}du-\sin x=u+\ln|u-1|+C-\sin x$$

$$=\ln|\sin x-1|+C$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例11 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，求 $\int xf'(x)dx$.

$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'$, $\int f(x) = \frac{\sin x}{x}+C$

解 由已知条件知

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},\int f(x)dx=\frac{\sin x}{x}+C$$

所以 $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)$

$$=xf(x)-\int f(x)dx$$

$$=x\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}+C$$

$$=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$$

二、定积分

定义：$\int_a^b f(x)dx = I = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(1) 积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

(2) 定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

(3)规定：若$a > b, \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

定理2.1（可积的必要条件）

若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

二、定积分

定理 设$f(x)$在$[a,b]$上有界，则下列命题等价：

1) $f(x)$在$[a,b]$可积；

2) $\overline{I} = \underline{I}$；

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使得对任意分割$T$，当$\|T\| < \delta$，有$S(T) - s(T) < \varepsilon$. 即，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

4) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$分割T，使得$S(T) - s(T) < \varepsilon$. 即，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$.

5) 对于$[a,b]$上的任何一个分割T，$\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$；

这里$\omega_i = M_i - m_i$为$f(x)$在区间$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

二、定积分

性质2.1（线性性质）

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx.$$

性质2.2（保号性和保序性）

如果$\forall x \in [a,b], f(x) \geq g(x)$,则$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$;

特别的,如果$\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$,则$\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

性质2.3（估值不等式） $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

性质2.4（乘积可积性）

假设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上可积, 则$f(x)g(x)$在$[a,b]$上也可积.

性质2. 5（绝对可积性）

若f在$[a,b]$上可积，那么$|f|$也在$[a,b]$上可积,

并且$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

二、定积分

性质2.6（积分区间可加性）

若f在$[a,b]$上可积，则$\forall c\in(a,b)$，f在$[c,b]$与$[a,c]$上可积，且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

定理2.7 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

定理2.8 若$f(x)$在$[a,b]$有界，且有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

定理2.9 设$f(x)$是$[a,b]$上单调有界函数，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

定理2.10（积分第一中值定理）

假设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续.$g(x)$在$[a,b]$上不变号

则存在$\xi\in[a,b]$满足：$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

$\xi\in(a,b)$ 也对

二、定积分

定理3.1 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$连续.

定理3.2 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 则

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x),\qquad x\in[a,b]$$

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$$

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right]'=f(\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-f(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)$$

定理3.4（Newton-Leibniz公式）

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b=[F(x)]_a^b$$

定理3.5(换元公式)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

二、定积分

定理3.6(分部积分公式)

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

例 11

(1)若 $f(x)$为偶函数，且在$[-a,a]$上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$

(2)若 $f(x)$为奇函数，且在$[-a,a]$上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

(3)若$f(x)$是R上的周期为T的连续函数，则对任意实数a,成立

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

二、定积分

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

并由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

二、定积分

例1 已知$a=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^4 x}{1+x^2}dx, b=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx,$

$c=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx,$ 则（ ）

(A) $b<c<a$ (B) $a<c<b$

(C) $b<a<c$ (D) $c<a<b$

解 $a=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos^4 x}{1+x^2}dx=0,$ 因为被积函数是奇函数.

$$b=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx>0,$$

$$c=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx<0,$$

$\therefore c<a<b.$

二、定积分

例2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2+\dfrac{\pi i}{n}}$.

注意: $\sin\dfrac{\pi}{n}\approx\dfrac{\pi}{n}\,(n\to\infty)$

解 $$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{\pi i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{\pi i}{n}}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2+x}dx=\ln(1+\frac{\pi}{2}),$$

或原式 $$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2+\frac{\pi i}{n}}=\int_0^{1}\frac{\pi}{2+\pi x}dx=\ln(1+\frac{\pi}{2}),$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{2+\frac{\pi i}{n}}=\ln(1+\frac{\pi}{2}).$$

二、定积分

例3 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\cdot\frac{k\pi}{n^2}$?

解 $\because 0<x-\sin x<\frac{1}{6}x^3,\quad x\in(0,\frac{\pi}{2}).$

$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots \Rightarrow \sin x > x-\frac{x^3}{6}$

$$n>3,0<\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}<\frac{1}{6}(\frac{k\pi}{n^2})^3\le\frac{\pi^3}{6n^3}$$

$\sum\limits_{k=1}^{n}1=n$

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$$\therefore 0<\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})[\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}]<\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{\pi^3}{6n^3}$$

$$=\frac{\pi^3}{6n^3}[n+\frac{n+1}{2}]\to 0(n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k\pi}{n^2}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\frac{k}{n}=\pi\int_0^1 x(1+x)dx=\frac{5}{6}\pi$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{5}{6}\pi$$

二、定积分

例4 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$

解 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

则 $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$

$-\ln(\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = 0$$

故得 $2I = \frac{\pi}{2}$, 即 $I = \frac{\pi}{4}$.

二、定积分

例5 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}]dx.$

奇偶函数在对称区间上积分的性质！

解 $$原式 = 0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}.$$

二、定积分

例6 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，

$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)dx$.

解 $\int_0^1 xf''(2x)dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 xdf'(2x)$

$$= \frac{1}{2}\left[xf'(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx = \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2x)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = 2.$$

二、定积分

例7 设 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 tf(t)dt$, 求 $f(x)$.

注意:$\int_0^1 tf(t)dt$为常数!

解 设$\int_0^1 tf(t)dt=C$ 则$f(x)=x+C\sqrt{1-x^2}$

$=\int_0^1 xf(x)dx \quad =C$

$$xf(x)=x^2+Cx\sqrt{1-x^2}$$

$$C=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 Cx\sqrt{1-x^2}$$

$$=\int_0^1 x^2dx+C\cdot\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}C \qquad C=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore f(x)=x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

二、定积分

例8 设$f(x)$满足$\int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x\sin x,\ f(\pi) = 0,$

且有一阶导数，求$f(x)$（$x \neq 0$）.

合 x

t <-> y

解 设 $y = tx$，则 将被积函数的x变到积分限上

常

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy = f(x) + x\sin x$$

$$\int_0^x f(y)dy = xf(x) + x^2\sin x$$ 两边对x求导可得

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x\sin x + x^2\cos x.$$

则 $f'(x) = -2\sin x - x\cos x.$ 微分方程

$$f(x) = \int[-2\sin x - x\cos x]dx = 2\cos x - \int xd\sin x$$

$$= 2\cos x - x\sin x + \int \sin x dx = \cos x - x\sin x + C$$

由$f(\pi) = 0$，$c = 1$. $\quad \therefore f(x) = \cos x - x\sin x + 1.$

二、定积分

例9 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$,求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$.

不要计算$f(x)$,徒劳！ 但是$f'(x)=e^{-x^2+2x}$

解 原式 $=\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,d(x-1)^3$

$f(x)$

$$=[\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3 e^{-x^2+2x}dx$$

$f(x)$

$(x-1)\,dx$

$=\frac{1}{2}d(x-1)^2$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}d[(x-1)^2]$$

$$\overset{令\ (x-1)^2=u}{\equiv\equiv}-\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=-\frac{1}{6}(e-2).$$

二、定积分

例10 设$F(x)=\int_0^x[\underbrace{\int_0^u \sin(u-t)^2 dt}_{g(u)}]du$，求$F''(x)$.

解 $F'(x)=\underbrace{\int_0^x \sin(x-t)^2 dt}$ $=g(x)$

将被积函数的x变到积分限上

令 $x-t=y$, t y

$F'(x)=\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=-\int_x^0 \sin y^2 dy=\int_0^x \sin y^2 dy.$

$F''(x)=\sin x^2.$

二、定积分

例11 设$f(x)$在$x=1$处可导，且$f(1)=0$，$f'(1)=1$，求极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x}\left(t\int_t^1 f(u)du\right)dt}{(1-x)^3}.$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1 f(u)du - x\cdot f(x)}{-6(x-1)}$$

麻烦

解 应用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x}\left(t\int_t^1 f(u)du\right)dt}{(1-x)^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x\int_x^1 f(u)du}{-3(1-x)^2}$$

1

极限为非零常数的因子先求极限(考试时最好说明一下)

$$=\left(\lim_{x\to 1}x\right)\left(\lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1 f(u)du}{-3(1-x)^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1 f(u)du}{-3(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-f(x)}{-6(x-1)}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{6}f'(1)=\frac{1}{6}$$

为何不能够继续洛必达?

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

二、定积分

例12 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \quad (n>0).$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}$

解一 $0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\sin^n\xi_n\cdot\frac{\pi}{2}\to 0\ (n\to\infty)$ ？ $\in(0,\frac{\pi}{2})$

反例：$\xi_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\in(0,\frac{\pi}{2})$， 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\xi_n=1.$ **解法错误**

解二 $\forall\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2}),\exists N$，当 $n>N$ 时，$\left|\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\cdot(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\right|<\varepsilon$，

$\to 0\ (n\to\infty)$

$0\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

$0 \quad \frac{\pi}{2}-\varepsilon \quad \frac{\pi}{2}$

$\le\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\cdot(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)+1\cdot\varepsilon<2\varepsilon.$

$\sin^n\xi=\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\cdot ... <1$

二、定积分

例13 $f(x)$在$[0,1]$连续、单调减少，证明对$\forall\alpha\in[0,1]$,有

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx$$

解1. 问题等价于对$\forall\alpha\in[0,1]$,有

积分中值定理

$$(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)dx \ge \alpha\int_{\alpha}^{1} f(x)dx$$

两端分别使用积分中值定理得

$$(1-\alpha)\alpha f(x_1)\ge(1-\alpha)\alpha f(x_2),\ x_1\in(0,\alpha),\ x_2\in(\alpha,1)$$

显然有$f(x_1)\ge f(x_2)$，所以结论成立.

$f(\alpha t)\geqslant f(t)$

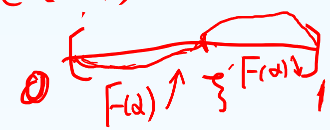
或解2: $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^1 f(\alpha t)d(\alpha t)=\alpha\int_0^1 f(\alpha t)dt\ge\alpha\int_0^1 f(t)dt$

$x=\alpha t$

或解3：令$\displaystyle F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)dx-\alpha\int_0^1 f(x)dx$，则$F(0)=F(1)=0.$

$\xi\in(0\ 1)$

$$F'(\alpha)=f(\alpha)-\int_0^1 f(x)dx=f(\alpha)-f(\xi),$$



$\therefore \alpha<\xi, F'(\alpha)\ge 0;\ \alpha>\xi, F'(\alpha)\le 0.$

$$\therefore F(\alpha)\ge F_{\min}=F(0)=F(1)=0.$$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

二、定积分

例14 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$.

$$\int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{dt}{f(t)} - (b-a)^2 \geq 0$$

证明 $\displaystyle \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$

$= F(b)$

证 作辅助函数 将不等式看做函数在 $x=b$ 的值

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_a^x \frac{dt}{f(t)} - (x-a)^2,$$

$F(a)=0$

$$\because F'(x) = f(x)\int_a^x \frac{1}{f(t)}dt + \int_a^x f(t)dt \cdot \frac{1}{f(x)} - 2(x-a)$$

$$= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)}dt + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)}dt - \int_a^x 2dt,$$

$$= \int_a^x \left[\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2 \right] dt$$

二、定积分

$$\because f(x)>0, \quad \therefore \frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}\ge 2$$

$a+\frac{1}{a}\geq 2$

即 $F'(x)=\int_a^x\left(\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right)dt\ge 0$ $\quad F(x)$ 单调增加.

又 $\because F(a)=0, \quad \therefore F(b)\ge F(a)=0,$

即 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge(b-a)^2.$

$\int_a^b |fg| dx \le \left(\int_a^b f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\left(\int_a^b f g\, dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2 dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x) dx\right)$

$\sqrt{f}\cdot\frac{1}{\sqrt{f}}$

直接用Holder(Cauchy)不等式:

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\ge\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=(b-a)^2$$

二、定积分

例15设 $f(x)$在$[0,1]$上连续可导，且$\int_0^1 f(x)dx=0$,

$F(1)=0$

记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,证明：若 $\int_0^1 F(x)dx=0$,

则存在$\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

$f'(\xi)=0$

$f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$

$F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$

$0=F(x_1)=F(x_2)=F(x_3)$

证 记 $G(x)=\int_0^x F(t)dt$,则 $G(1)=G(0)=0$,且

$$G'(x)=F(x),G''(x)=F'(x)=f(x)$$

由微分中值定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$使 $G'(\xi_1)=0$,即$F(\xi_1)=0$.

$F(0)=0$ $F(\xi_1)=0=F(1)$

由$F(0)=F(\xi_1)=F(1)=0$知

$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$， $\xi_3\in(\xi_1,1)$使

$$F'(\xi_2)=f(\xi_2)=0,F'(\xi_3)=f(\xi_3)=0.$$

$\therefore$ 存在$\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

二、定积分

例16 设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导，且$f(1)=\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx$

要证：$e^{-\xi}(f'(\xi)-f(\xi))=0$, 即$[e^{-\xi}f(\xi)]'=0$,

证明：$\exists\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=f(\xi)$.

$f'(\xi)-f(\xi)=0$

证 设$F(x)=e^{-x}f(x)$, 则$F(x)$在$[0,1]$上连续可导.

而$F(1)=e^{-1}f(1)=e^{-1}\int_0^1 e^{1-x}f(x)dx=\int_0^1 e^{-x}f(x)dx=\int_0^1 F(x)dx.$

$\therefore\int_0^1[F(1)-F(x)]dx=0.$

这里直接用积分中值定理, 得不到：$\exists\xi_1\in[0,1)$, 使得, $F(1)=F(\xi_1)$? $F(\xi_1)$ $F(1)$ ξ_1

令$H(x)=F(1)-F(x)$, 则$H(1)=0$且$\int_0^1 H(x)dx=0.$ $H(\xi_1)$

可证：$\exists\xi_1\in[0,1)$, 使得, $H(\xi_1)=0$

事实上, 若$H(x)>0, x\in[0,1)$, 则$\int_0^1[F(1)-F(x)]dx>0$. 矛盾！

$\therefore\exists\xi_1\in[0,1)$, 使得令$F(\xi_1)=F(1)$

在$[\xi_1,1]$上用洛尔定理, $\exists\xi\in(\xi_1,1)$, 使得$F'(\xi)=0$

即$\exists\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$使得$f'(\xi)-f(\xi)=0$.

二、定积分

例17 $f(x)$在[0,1]上连续，且

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

证明：至少存在一个$\xi \in (0,1)$,

$$s.t.\, f(\xi) = 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$f(\xi) = 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left(\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' - 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\xi^2}\left\{\left(\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' - 2\xi\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-\xi^2}\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = 0$$

B1 BH, 2021/12/31

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

$$f'(x)+kf(x)=0$$

$$\Leftrightarrow e^{kx}[f'(x)+kf(x)]=\left[e^{kx}f(x)\right]'=0$$

F

$f'(\xi)-f(\xi)=0$

$\left(e^{-\xi}f(\xi)\right)'=0$

$$f'(x)+xf(x)=0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x^2}[f'(x)+xf(x)]=\left[e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)\right]'=0$$

F

$f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$

$\left[e^{\frac{1}{2}\xi^2}f(\xi)\right]'=0$

$$f'(x)+\varphi(x)f(x)=0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow e^{\int_0^x \varphi(t)dt}[f'(x)+\varphi(x)f(x)]=\left[e^{\int_0^x \varphi(t)dt}f(x)\right]'=0$$

F(x)

二、定积分

例18 设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导, 且 $f''(x)>0$, 证明

泰勒公式

$x_0=\frac{a+b}{2}$

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2})\le\int_a^b f(x)dx.$$

证

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

$$\ge f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]dx$$

$$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

积分!!0

二、定积分

例19 设 $f(x)$在$[a,b]$上有连续二阶导数，证明$\exists\xi\in[a,b]$，

满足$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$.

$F(a)=0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt$

证 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

$x_0=\frac{a+b}{2}$

则$F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x), F'''(x)=f''(x)$.

$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{6}F'''(\xi)(x-x_0)^3$

ξ介于x与x_0

将$F(x)$在$x_0=\frac{a+b}{2}$展开为二阶Taylor公式，代入a,b点的值，得

$$F(b)=F(x_0)+F'(x_0)(b-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2+\frac{F'''(\xi_1)}{3!}(b-x_0)^3$$

$\frac{(b-a)^3}{8}$

$$F(a)=F(x_0)+F'(x_0)(a-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}(a-x_0)^3$$

$-\frac{(b-a)^3}{8}$

其中$x_0<\xi_1<b, a<\xi_2<x_0$.

二、定积分

上面两式相减得，

$$F(b)-F(a)=F'(x_0)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)].$$

由介质定理得，$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]$，使得

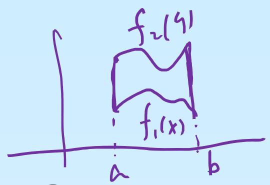
$$\frac{F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)}{2}=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=f''(\xi),$$

又$F'(x_0)=f(x_0)=f(\frac{a+b}{2})$，

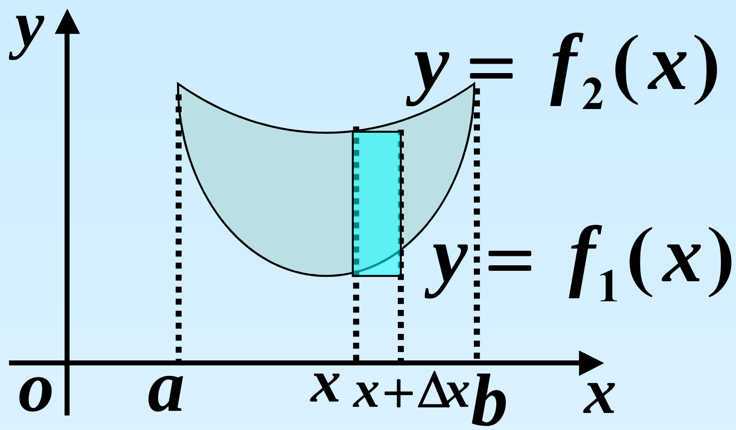
所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$

三、定积分几何应用

平面图形的面积



$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

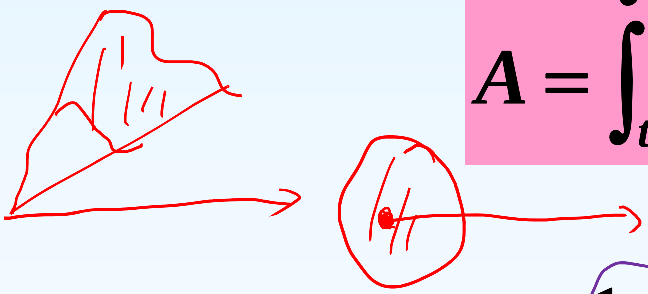


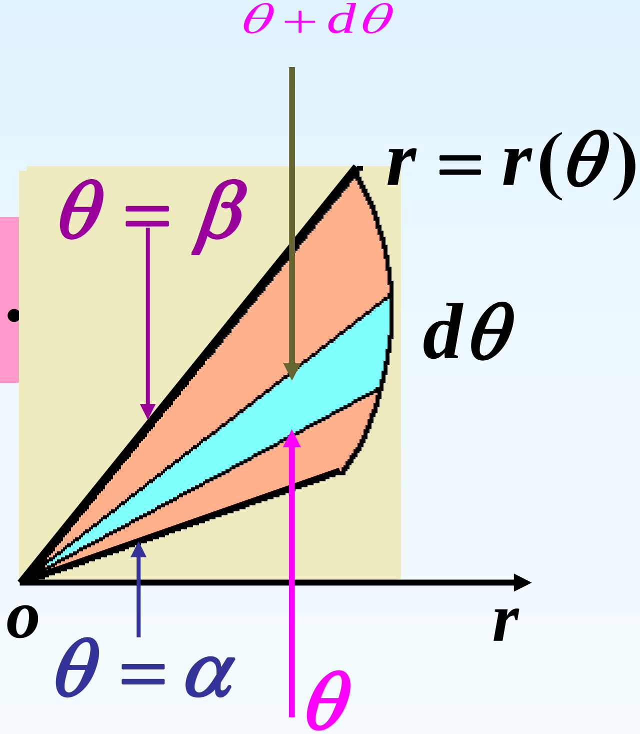
参数方程情形

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}, \quad t\in[t_1,t_2]$$

曲边梯形的面积 $A=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx.$

$$A=\int_{t_1}^{t_2}|\psi(t)\varphi'(t)|dt.$$





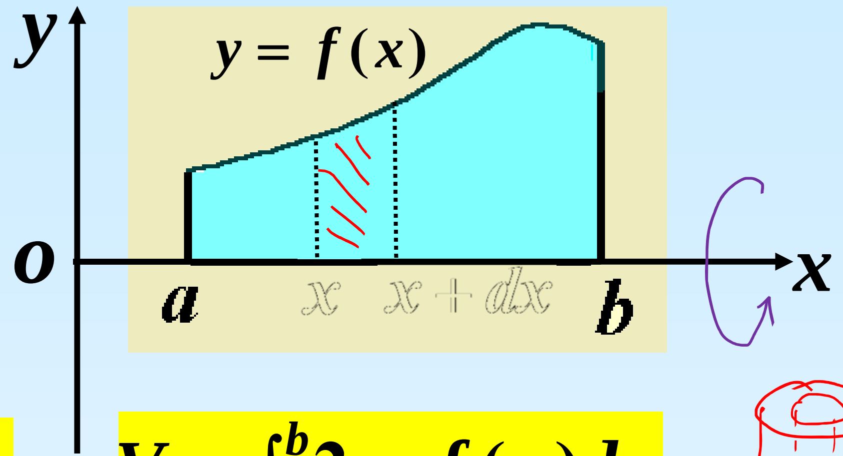
极坐标情形 $A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[r(\theta)]^2 d\theta.$

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

三、定积分几何应用

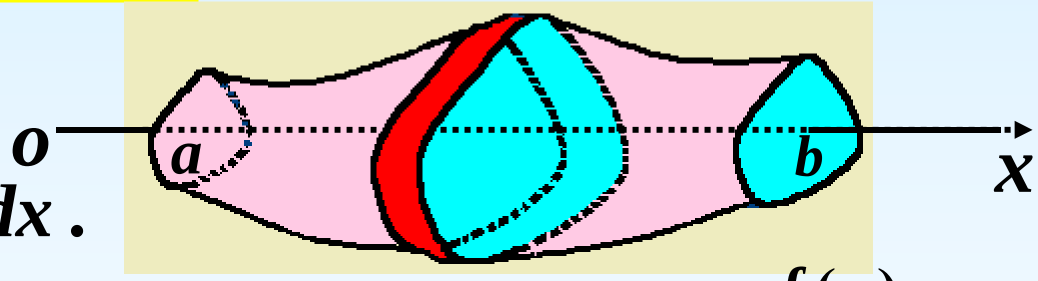
旋转体的体积

$$V_x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

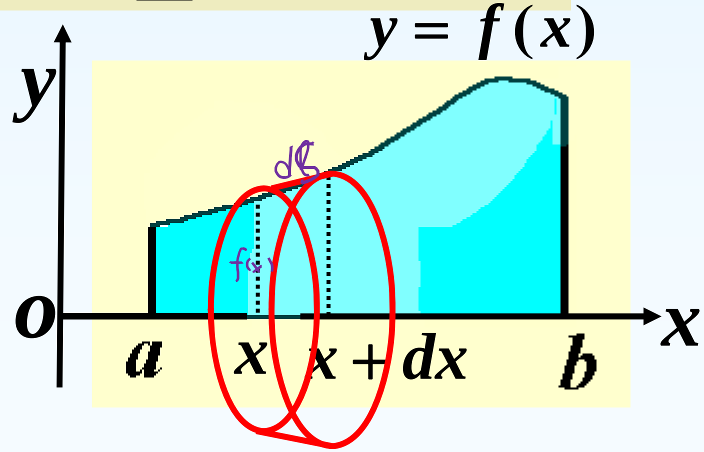


绕y轴旋转一周而成的立体的体积：

$$V_y = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$



立体体积 $V = \int_a^b A(x) dx.$



$$S_{侧} = \int_a^b 2\pi f(x) \underbrace{\sqrt{1 + f'^2(x)}dx}_{ds}$$

三、定积分几何应用

设$L\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$为光滑曲线,则L可求长且

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt, ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

(1)$L: y = f(x) \quad (a \le x \le b)$,

$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases}$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

ds

（2）设曲线弧为 $r = r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

弧长 $$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta.$$

ds

曲率的计算公式

$$K = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

$$\therefore k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

三、定积分几何应用

	直角坐标显式方程 $y=f(x),x\in[a,b]$	直角坐标参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} t\in[T_1,T_2]$	极坐标方程 $r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$
平面图形面积	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$\int_{T_1}^{T_2} \lvert y(t)x'(t)\rvert\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$
弧长的微分	$\mathrm{d}l=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}l=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}l=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$
曲线弧长	$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$	$\int_{T_1}^{T_2} \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$	$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$
旋转体体积	$\pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x$	$\pi\int_{T_1}^{T_2} y^2(t)\lvert x'(t)\rvert\mathrm{d}t$	$\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$
旋转曲面面积	$2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$	$2\pi\int_{T_1}^{T_2} \lvert y(t)\rvert\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$	$2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

四、反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,(\forall c)$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$a>0,\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\text{收敛，} & p>1\\ \text{发散，} & p\le 1\end{cases}$$

$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $\int_{1/2}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$?

四、反常积分

非负函数无穷积分的收敛性判别法

定理2.1 设$f \geq 0$,则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\text{收敛} \Leftrightarrow F(A)\text{在}[a,+\infty)\text{上有界}.$$

定理2.2（比较判别法）

设$0 \leq f(x) \leq g(x)$, (充分大的 x),那么

1^o 若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛

2^o 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散

四、反常积分

非负函数无穷积分的收敛性判别法

定理2.3（比较判别法的极限形式）

设$f(x), g(x) \geq 0$, 且$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, 则

1° 若$0 < l < +\infty$, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同敛散;

2° 若$l = 0$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛;

3° 若$l = +\infty$, 且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

四、反常积分

一般函数无穷积分的收敛性判别法

定理3.1（Cauchy收敛原理） **Cauchy收敛原理的反面叙述！**

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} \Leftrightarrow \text{对} \forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a,$$

发散　　$\exists \varepsilon_0 > 0$　$\forall A_0 > a$

$$\text{只要} A', A'' > A_0, \text{总有} \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

$\exists A', A''$　　$\geq \varepsilon_0$

定理3.2（绝对收敛）

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}$$

定理3.3　$g(x)$在$[a,+\infty)$上有界，若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$绝对收敛，且有

$$\int_a^{+\infty} |f(x)g(x)|dx \leq M \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

四、反常积分

一般函数无穷积分的收敛性判别法

定理3.4(Dirichlet判别法)

设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ 在$(a,+\infty)$上有界;

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调,且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$收敛性

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}dx$收敛性

定理3.5(Abel判别法)

设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界.

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\arctan x dx$收敛性

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^p}(1+\frac{1}{x})^x\arctan x dx$收敛性

$p>0$, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x\arctan x\cos\frac{1}{x}dx$收敛性

四、反常积分

无界函数的广义积分

a称为**瑕点**：$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

$$b>0, \int_0^b \frac{1}{x^q}\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{收敛，} & q<1 \\ \text{发散，} & q\ge 1 \end{cases}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ ✓

几乎可以将无穷区间上的广义积分的理论移植过来！

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

四、反常积分

例1.计算：$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+\sqrt[3]{x})} = \frac{\pi}{4}$

解：注意：$\forall\alpha\in\mathrm{R},\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\frac{\pi}{4}$

例2.设$f(x)$在$[a,+\infty)$连续，且$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，

证明存在数列$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$。

A_0 $[A_0]+1$ A'' A'

a

证明：$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists A_0\geq a,s.t.,\forall A''\geq A'\geq A_0$，有$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|<\varepsilon.$

$>A_0$

取$N=[A_0]+1$，则$n>N$时$\left|\int_n^{n+1}f(x)dx\right|<\varepsilon.$

即，$|f(x_n)|<\varepsilon$，其中$x_n\in(n,n+1)$.

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$。

例3.判断：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^q dx}{1+x^p}$敛散性

$\dfrac{1}{1+x^p} \sim \dfrac{1}{x^p}$

解：$\dfrac{x^q}{1+x^p} \sim \dfrac{1}{x^{p-q}}(x \to +\infty)$, $p-q>1$时，收敛

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$

例4.$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，是否有且$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$?

证明：$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，且$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$, 则$b=0$.

解：$\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin x^2 dx \overset{x=\sqrt{t}}{=} \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$收敛, 但是$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin x^2$不存在.

证明：假设$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=b>0$

$0 \quad \frac{b}{2} \quad b \qquad f(x) \geq \frac{b}{2}$

$a \quad X_0$

$\exists X_0 \geq a, s.t., x \geq X_0$时, $f(x)>b/2>0.$

$\forall A' \geq X_0$, 有 $\displaystyle\int_{A'}^{A'+1} f(x)dx \geq \frac{b}{2}$

由Cauchy收敛准则, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散.

四、反常积分

例5.设$f(x)$单减非负，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，

证明：$f(x) = o(\frac{1}{x}), (x \to +\infty.)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$

max{a, 0}

证明：假$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，$\therefore \varepsilon > 0, \exists A_0 \geq 0, s.t.,$

$\forall A'' \geq A' \geq A_0$，有$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

当$\overset{\forall}{A} \geq 2A_0$时，$\left|\int_{A/2}^{A} f(x)dx\right| < \varepsilon.$　即，$0 \leq \int_{A/2}^{A} f(x)dx < \varepsilon$

$\frac{A}{2} \le x \le A$

$f(\frac{A}{2}) \ge f(x) \ge f(A)$

又因为，$0 \leq \frac{A}{2} f(A) \leq \int_{A/2}^{A} f(x)dx < \varepsilon$

$0 \le Af(A) < 2\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{A\to+\infty} Af(A) = 0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$

例6.设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续可微，当$x\to+\infty$, $f(x)$单减趋于0,

则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充分必要条件$\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$收敛.

证明：由上一题结论：$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$

$$\therefore \int_a^{+\infty} xf'(x)dx=\int_a^{+\infty} xdf(x)=xf(x)\Big|_1^{+\infty}-\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\lim_{x\to+\infty} xf(x)-f(1)-\int_a^{+\infty} f(x)dx=-f(1)-\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

四、反常积分

例7.若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$.证明:$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$绝对收敛.

若改为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$条件收敛收敛，结论如何？

证明:$\because \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=A$，故$|g(x)|\le M$.由定理知，

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$绝对收敛.

若改为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$条件收敛收敛，

不能够推出$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

例如:$\int_1^{+\infty} \frac{\sin xdx}{\sqrt{x}}$条件收敛. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$

但是$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 xdx}{x}$发散. $=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right)dx$

四、反常积分

例8.若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，$g(x)$有界.问能否推出:$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

Abel

（Abel条件中，缺少$g(x)$单调）

解：不能够推出$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

例如:$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x}}$条件收敛. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

但是$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x}$发散.

四、反常积分

例9.若$[a,+\infty)$上$f(x)$单调趋于0,

证明:$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx, \int_a^{+\infty} f(x)\cos^2 xdx$同时敛散.

证明:$\left|\int_a^A \cos 2xdx\right| = \left|\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_1^A\right| \le 1$,$[a,+\infty)$上$f(x)$单调趋于0,

由Dirichlet判别法:$\int_a^{+\infty} f(x)\cos 2xdx$收敛

若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\cos^2 xdx$

$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\int_a^A [f(x)+f(x)\cos 2x]dx = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}[\int_a^A f(x)dx + \int_a^A f(x)\cos 2xdx]$$

$$= \frac{1}{2}[\int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)\cos 2xdx]\text{收敛.}$$

若$\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx$收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$

$$= \lim_{A\to+\infty}\int_a^A [2f(x)\sin^2 x + f(x)\cos 2x]dx = \lim_{A\to+\infty}[\int_a^A 2f(x)\sin^2 xdx + \int_a^A f(x)\cos 2xdx]$$

$$= 2\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx + \int_a^{+\infty} f(x)\cos 2xdx]\text{收敛.}$$

四、反常积分

例10.判断反常积分$\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q dx, q \neq 0$。

解: $\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q dx = \int_0^1 x^p \sin x^q dx + \int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$

(1)： $x^p \sin x^q dx \sim \dfrac{1}{x^{-p-q}} (x \to 0+, \sin x > 0)$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$

所以，当$-p-q<1$时，$\int_0^1 x^p \sin x^q dx$（绝对）收敛；

当$-p-q \geq 1$时，$\int_0^1 x^p \sin x^q dx$（绝对）发散.

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

四、反常积分

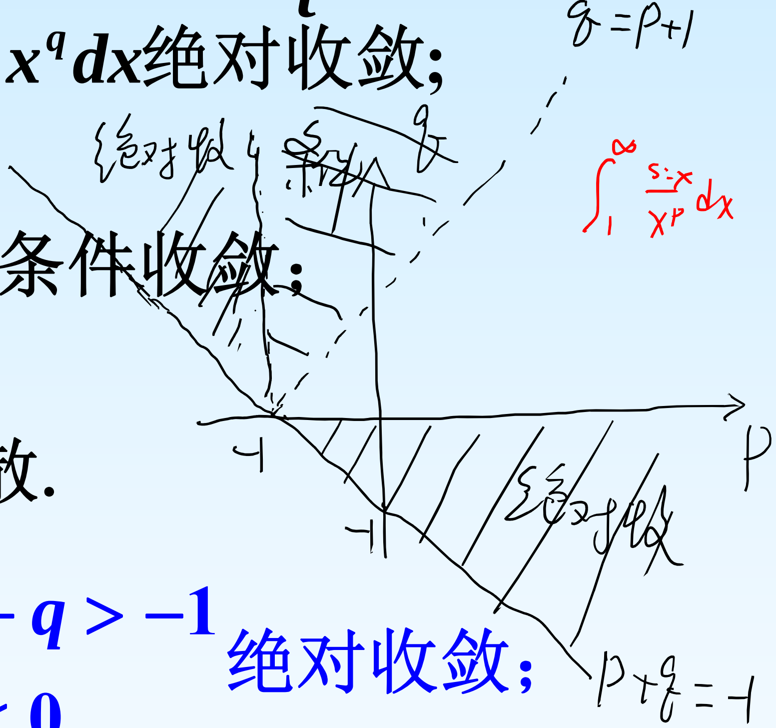
t　$x=t^{\frac{1}{q}}$

（2） $\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx = \int_1^{+\infty} t^{p/q} \sin t dt^{1/q} = \dfrac{1}{q}\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^{\frac{q-p-1}{q}}} dt$

所以，当 $\dfrac{q-p-1}{q} > 1$时，$\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$绝对收敛；

当$0 < \dfrac{q-p-1}{q} \le 1$时$\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$条件收敛；

当$\dfrac{q-p-1}{q} \le 0$时$\int_1^{+\infty} x^p \sin x^q dx$发散.



$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

总上所述： (1)$\begin{cases} p+q>-1 \\ p<-1 \end{cases}$或$\begin{cases} p+q>-1 \\ q<0 \end{cases}$绝对收敛；

(2)$\begin{cases} q>p+1 \\ p\ge -1 \end{cases}$条件收敛； （3）其他，发散。