矩阵的相似对角化

- **相似矩阵的性质**

A和B相似简记为：$A \sim B$

- **矩阵的相似对角化**

矩阵的相似具有以下运算性质:

(1) 若 $P^{-1}A_1P = B_1$，$P^{-1}A_2P = B_2$，

则 $P^{-1}(A_1 + A_2)P = B_1 + B_2$;

(2) 对数域P上的矩阵A、B，若A 与B 相似，则

$kA \sim kB$，对任意$k \in$ P成立;

(3) 若$P^{-1}A_1P = B_1$，$P^{-1}A_2P = B_2$，则

$P^{-1}(A_1A_2)P = P^{-1}A_1PP^{-1}A_2P = B_1B_2$。

特别，若$A \sim B$，则$A^r \sim B^r$，r为正整数;

(4) 若$A \sim B$，$f(x)$是数域P上的一个多项式，则 $f(A) \sim f(B)$。

以上运算性质可用来简化矩阵的计算。

矩阵的相似不变性：

定理5.5.10 设$A\sim B$，则有

(1) $r(A)=r(B)$;

(2) $|A|=|B|$;

(3) A， B可逆性一致，且当A可逆时

$A^{-1}\sim B^{-1}$.

证明： (1)和(2) 显然，只证(3)。

由于$|A|=|B|$, 故$|A|\neq 0$等价于$|B|\neq 0$，即得A，B可逆性一致。 且

$$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P,$$

即 $A^{-1}\sim B^{-1}$。

定理5.5.11 相似的矩阵有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。

证明： 设$A\sim B$，则有可逆阵P，使$P^{-1}AP=B$，

从而

$$|\lambda I-B|=|\lambda I-P^{-1}AP|=|P^{-1}(\lambda I-A)P|$$

$$=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|P^{-1}P||\lambda E-A|=|\lambda E-A|$$

可见，A与B有相同特征多项式及相同的特征值。

定理5.5.11的逆不成立。

特征多项式相同的矩阵未必是相似的. 如

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^2$，但$A$与$B$不相似。

因为与单位阵相似的矩阵只能是其本身

矩阵的相似对角化

给定n阶方阵A，如何寻找可逆方阵 P 使

$P^{-1}AP= B$具有对角形式？（一组基）

定义5.5.6 设A是数域P上的n阶方阵, 如果存在

P域上可逆阵P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}, \lambda_i\in \mathrm{P},\quad i=1,2,\cdots,n$$

则称A是可相似对角化的方阵，简称为A可对角化

并非所有方阵都能对角化

例5.5.5 取数域P上的二阶矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

则A在数域P上不能对角化。

反证: 设$P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$可逆,使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$

乘出，比较两边元素，利用P可逆，得矛盾！

如果A可相似对角化，则存在可逆阵P，使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

从而有

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

记α_1,α_2，…，α_n为**P的列向量**，则有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

即 $$(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)$$

得到 $$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

由于P可逆，α_1，…，α_n是线性无关的。说明A可对角化，A必须有n个线性无关的特征向量，而与A相似的对角形矩阵中的$\lambda_i(i=1, \ldots, n)$ 则是A的特征值。

定理5.5.12 n阶矩阵A可相似对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

证明： 必要性已证。 下证充分性

设A有n个线性无关的特征向量α_1，α_2，…，α_n，分别属于特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n，则有

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

令$P=(\alpha_1$，α_2，…，$\alpha_n)$，则P是可逆阵。且

$$AP = (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

即

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

从而A可相似对角化。

推论1 若n阶矩阵A在数域P中有n个不同的特征值，则A可对角化。

证明： A有分属于n个不同特征值，从而线性无关的特征向量α_1，α_2，…，α_n。成立。

推论2 若A是复数域上的n阶矩阵，且A在复数域上的特征根都是单根，则A在复数域上可相似对角化。

证明： 由于复数域上的n次多项式必有n个根，如都是单根，则这n个根互不相同，由推论1知A可相似对角化.

推论给出的只是方阵可相似对角化的**充分**条件，不是必要条件。

定理5.5.12 说明，一个n阶方阵A是否可以相似对角化，在于它是否有n个线性无关特征向量。

如果A的特征值都是单根，则A就有n个线性无关特征向量，从而A可以相似对角化；

如果A的特征值有重根，只有属于它的每个重根的线性无关特征向量的个数都与对应根的重数相等时，A才有n个线性无关特征向量，A才可以相似对角化。

数域P上n阶矩阵A相似对角化步骤:

第一步: 求特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$, **若** $f(\lambda)$

在数域P上不能分解为一次因式之积,

则A不能对角化;

第二步: 若 $f(\lambda)$ **在数域P上可分解为一次因式**

之积, $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{s_1}(\lambda-\lambda_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{s_t}$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_t\in \mathrm{P}$, $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$**就是$A$的全部特征值.**

第三步: 对每个特征值λ_i，求$(\lambda_i I-A)X=0$的基础解系，得到属于λ_i的所有线性无关特征向量。如果这些特征向量的总个数等于n，则A可对角化，否则不能对角化;

第四步: 若方阵A的线性无关特征向量有n个，

设为$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$。令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, 则$P^{-1}AP$为对角阵，主对角线上的元素$\lambda_i$是特征向量$\alpha_i$ $(i=1, 2,\ldots, n)$所对应的特征值。

矩阵是否可对角化与所在数域有关. 没有明确指出时，一般默认是在复数域上讨论的.

例5.5.6 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 为实数域R上的三阶方阵，问*A*是否可以对角化? 若可对角化，求出可逆阵*P* 使$P^{-1}AP$为对角形。

解： 求出*A*的特征根 $\lambda_1=-1$(二重), $\lambda_2=5$,

属于λ_1 的线性无关特征向量为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

属于λ_2的线性无关特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

由定理5.5.12，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$A$的全部线性无关特征向量有3个，故$A$可以相似对角化。

令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 5\end{pmatrix}.$$

例 5.5.7 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵Λ，试确定常数a的值；并求可逆矩阵P 使$P^{-1}AP=\Lambda$。

解 矩阵A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-6)[(\lambda-2)^2-16]=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故*A*的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=-2.$

由于*A*相似于对角矩阵Λ, 故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$

应有两个线性无关的特征向量, 因此 *r*(6*I*–*A*)=1.

而

$$6I-A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & -a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得 *a* = 0.

于是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量

可取为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当$\lambda_3 = -2$时,

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

得对应于$\lambda_3 = -2$的特征向量 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

令
$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

则P可逆, 并有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}6 & & \\ & 6 & \\ & & -2\end{pmatrix}.$$

例 5.5.8 若有正整数k 使$A^k=0$, 则称A是**幂零矩阵**。证明非零的幂零矩阵A不与对角形矩阵相似。

证明 反证法.

若A与对角形矩阵相似, 则存在满秩矩阵P, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中λ_i ($i=1, 2, \ldots, n$)是A的特征值.

若$Ax_i=\lambda_i x_i$成立, 则 $A^k x_i=\lambda_i^k x_i$.

而 $A^k=0$, 故 $\lambda_i^k x_i=0$,

又因为$x_i \neq 0$, 因此$\lambda_i=0$. 而λ_i是A的任意特征值,

说明幂零矩阵的特征值全为零.

于是 $P^{-1}AP=0$, 即 $A=0$, 与A是非零矩阵矛盾。

例5.5.9 已知三阶矩阵A在实数域R上有3个不同特征值-1, 1, 2，矩阵$B=A^3+2A+I$，B在实数域上是否可对角化? 并求$|B|$。

解： 已知A有3个不同特征值，由定理推论1，A必可对角化，即有**可逆阵P**使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

从而

$$P^{-1}A^3P=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 8\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(2A)P = 2(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

于是

$$P^{-1}BP = P^{-1}\left(A^3 + 2A + I\right)P = P^{-1}A^3P + 2P^{-1}AP + I$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & 13 \end{pmatrix}$$

故B可对角化, 且B的特征值为-2, 4, 13.

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & & \\ & 4 & \\ & & 13 \end{vmatrix} = -104$$

实对称矩阵的相似对角化

定理5.5.12 实对称矩阵的特征值全为实数。

证明：设λ_0为A的特征值，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$为$\lambda_0$的特征向量，

从而

$$\bar{\alpha}^T(A\alpha)=\bar{\alpha}^T A^T\alpha=(A\bar{\alpha})^T\alpha=\left(\overline{A\alpha}\right)^T\alpha$$

$$=\left(\overline{\lambda_0\alpha}\right)^T\alpha=\left(\bar{\lambda}_0\bar{\alpha}^T\right)\alpha=\bar{\lambda}_0\left(\bar{\alpha}^T\alpha\right),$$

$$\bar{\alpha}^T(A\alpha)=\bar{\alpha}^T(\lambda_0\alpha)=\lambda_0\left(\bar{\alpha}^T\alpha\right),$$

故得 $\lambda_0(\overline{\alpha}^T\alpha)=\overline{\lambda_0}(\overline{\alpha}^T\alpha).$

由于

$$\overline{\alpha}^T\alpha=(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\cdots,\overline{a}_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

$$=\overline{a}_1a_1+\overline{a}_2a_2+\cdots+\overline{a}_na_n$$

$$=|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2>0$$

故 $\lambda_0-\overline{\lambda_0}=0$, λ_0为实数.

由λ_0是实数，得实对称矩阵的特征向量必然 (有)实向量。

注意 若A是一般实矩阵，则其可能有复特征值。

定理5.5.14 设A是实对称矩阵，则属于A的不同特征值的特征向量必正交。

证明： 设λ,μ是A的两个不同特征值，α,β是分别属于λ,μ的特征向量，则有

$$A\alpha=\lambda\alpha,\qquad A\beta=\mu\beta$$

对第一个等式两边转置并右乘β,得

$$\alpha^T A^T\beta=\lambda\alpha^T\beta,$$

由于$A=A^T$。又$A\beta=\mu\beta$，代入并移项得

$$(\lambda-\mu)\alpha^T\beta=0,$$

由于$\lambda\neq\mu$，故 $\alpha^T\beta=0$，即 α与β正交。

实对称矩阵的相似对角化

定理5.5.15 设A是n阶实对称矩阵，则必有n阶正交矩阵Q使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中Q的列是A的n个相互正交的单位特征向量，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的全部实特征值。

证明：　对A的阶数n，用数学归纳法。

$n=1$时，A本身就是对角阵，取正交矩阵Q为一阶单位阵I，即有

$$Q^{-1}AQ = A.$$

为对角阵，定理显然成立。

设对n-1阶的实对称方阵定理成立，

现考虑n阶实对称方阵A，由于A的特征值全为实数，故至少有一个实特征值λ_1，设α_1是A的属于λ_1的特征向量，则

$$\alpha_1 \neq 0, A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1.$$

现将α_1扩充为R^n的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。

由施密特正交化，由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$可得标准正交组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$。

β_1仍是A的属于λ_1的特征向量，而$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$仍是$\mathrm{R}^n$的基，有

$$A\beta_1=\lambda_1\beta_1,$$

$$A\beta_i=b_{1i}\beta_1+b_{2i}\beta_2+\cdots+b_{ni}\beta_n,\qquad i=2,3,\cdots,n.$$

令$S=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，则$S$是正交矩阵，且

$$AS=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

于是

$$S^{-1}AS=S^{-1}S\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}=B$$

由于A是对称阵，故

$$B^T=\left(S^{-1}AS\right)^T=\left(S^TAS\right)^T=S^TA^TS=S^TAS=B,$$

从而B也是对称阵，有$b_{12}=\cdots=b_{1n}=0$，且

$$B_1=\begin{pmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

是n-1阶实对称阵。

由归纳假定，存在n-1阶正交矩阵S_1使

$$S_1^{-1}B_1S_1=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

令 $S_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & S_1\end{pmatrix}$, 则$S_2$是$n$阶正交阵，且

$$S_2^{-1}BS_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

这样，有

$$S_2^{-1}S^{-1}ASS_2=(SS_2)^{-1}A(SS_2)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $Q=SS_2$,

$$Q^{-1}=(SS_2)^{-1}=S_2^{-1}S^{-1}=S_2^TS^T=(SS_2)^T=Q^T.$$

故Q为n阶正交矩阵，而$Q^{-1}AQ$为对角形。显然Q的列向量是A的特征向量，而$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的全部特征值。证毕。

由此定理可知，对任何实对称方阵A，必存在正交矩阵Q，使 $Q^{-1}AQ$为对角形。同时可看出，若A的特征值是k重的，则它必有k个线性无关特征向量。

因此，在具体把实对称阵A相似对角化时，关键是找出n个相互正交的特征向量。

例5.5.8 设4阶实对称方阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{pmatrix}$$

用正交矩阵把A相似对角化。

解：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\lambda-1&\lambda-1&1-\lambda^2\\0&\lambda-1&0&\lambda-1\\0&0&\lambda-1&\lambda-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & -1-\lambda\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^3(\lambda+3)$$

得A的**特征值**$\lambda_1=1$(三重), $\lambda_2=-3$;

把$\lambda=1$代入

$$\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

求得基础解系

$$\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 0,\quad 0)^T,\quad \alpha_2=(1,\quad 0,\quad 1,\quad 0)^T,\quad \alpha_3=(-1,\quad 0,\quad 0,\quad 1)^T$$

对之进行正交化，得

$$\beta_1=\alpha_1=(1,\quad 1,\quad 0,\quad 0)^T,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\left(\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad 1,\quad 0\right)^T,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\left(-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad 1\right)^T,$$

再单位化得

$$\gamma_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0,\quad 0\right)^T,\quad \gamma_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\quad -\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \frac{2}{\sqrt{6}},\quad 0\right)^T,$$

$$\gamma_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\quad \frac{1}{\sqrt{12}},\quad \frac{1}{\sqrt{12}},\quad \frac{3}{\sqrt{12}}\right)^T$$

再求 $\lambda=-3$ 的基础解系

$$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$$

将其单位化得

$$\gamma_4=\left(\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\right)^T$$

以$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$为列向量组成正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$$

正交相似

n维欧氏空间V中任取一组基M={$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$}，设$V$的内积在这组基下的度量矩阵$A=(s_{ij})_{n\times n}$，其中$s_{ij}=(\alpha_i, \alpha_j)$，$(1\leqslant i, j\leqslant n)$。则任意$\alpha$，$\beta$的内积可以由它们的在基M下的坐标X，Y按公式$(\alpha, \beta)=X^TAY$ 算出来。

设$M_1=\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$是V的另外一组基，V的内积在这组基下的度量矩阵为$B=(b_{ij})_{n\times n}$，其中$b_{ij}=(\beta_i, \beta_j)$，$(1\leqslant i, j\leqslant n)$。即算出$M_1$中任意两个基向量的内积$(\beta_i, \beta_j)$。由向量在基M下的坐标X，Y计算内积的公式计算$(\beta_i, \beta_j)$。

过渡矩阵P的各列$P_1,\dots,P_n$依次是M_1的各向量$\beta_1,\dots,\beta_n$在基M下的坐标。因此，$(\beta_i,\beta_j)=P_i^TAP_j$将这些$(\beta_i,\beta_j)$排成矩阵$B$，就得到

$$B=\begin{pmatrix} P_1^TAP_1 & P_1^TAP_2 & \cdots & P_1^TAP_n \\ P_2^TAP_1 & P_2^TAP_2 & \cdots & P_2^TAP_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_n^TAP_1 & P_n^TAP_2 & \cdots & P_n^TAP_n \end{pmatrix}=P^TAP$$

定理5.6.1 同一个内积在两组基M, M_1下的度量矩阵A，B相合：$B=P^TAP$，其中P是基M到M_1的过渡矩阵。

由于欧氏空间内积的**对称性和正定性**, 内积在任一基$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$下的矩阵$S$是正定实对称方阵, 因此$S$相合于单位阵$I$。 也就是说存在**可逆实方阵**$P$使$P^TSP=I$。

例1 设3维欧氏空间V在基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$下的度量矩阵为

$$S=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

求V的一组**标准正交基**。

解：将S相合到单位阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

得到

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

使得$P^TSP=I$，取$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$即可。

定义5.6.1 设A是n阶实方阵，若$A^T=A^{-1}$,则称A是**正交矩阵**(Orthogonal matrix)。

欧氏空间标准正交基之间的过渡矩阵为正交矩阵。若标准正交基M到另一组基M_1的过渡矩阵为正交矩阵，则M_1也标准正交基。

定义5.6.2 欧氏空间V上的线性变换σ如果保持**向量的内积不变**，也即(σ(x),σ(y))=(x,y),对所有的x,y∈V成立，就称σ是V上的正交变换。

保持图像的全等,就是变换前后的长度、角度保持不变。在建立了直角坐标系的空间上,长度和角度都可以由内积来计算,因此,只要变换前后的内积保持不变,就保持了图形的全等,这可以推广到一般的欧式空间。

定义5.6.3 设A, B是n阶实矩阵,若存在正交矩阵P, 使得$B=P^TAP=P^{-1}AP$成立，则称A与B正交相似。