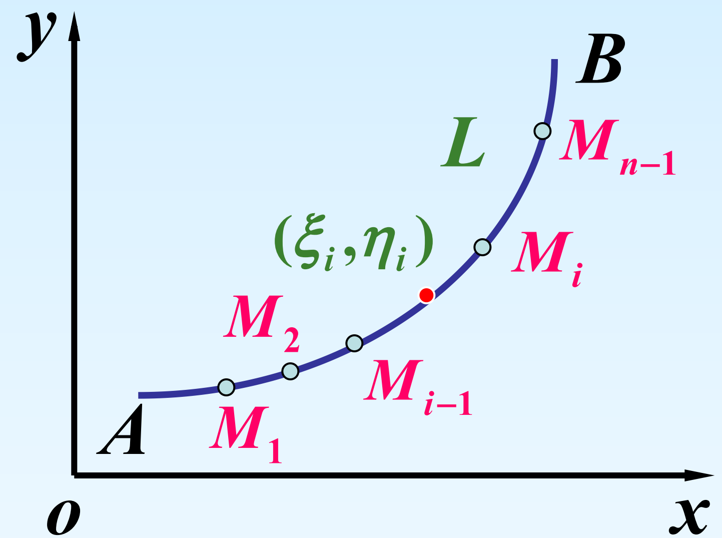
第十七章　曲线积分

§17.1　第一型曲线积分

一、问题的提出



实例:曲线形构件的质量

匀质: $M=\rho\cdot s.$

分割 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}\to L_i,$

取 $(\xi_i,\eta_i)\in L_i,\quad \Delta M_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$

求和 $M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$ 近似值

取极限 $M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$ 精确值

二、第一型曲线积分的概念

1. 定义 设L为平面上可求长的曲线 弧，函数

$f(x, y)$在L上有界．用L上的点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$

把L分成n个可求长度的小曲线段 L_i, L_i的弧长

记为Δs_i, 任取$(\xi_i, \eta_i) \in L_i, (i = 1,2,\cdots,n)$, 若极限

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i = A$$

其中A为有限数,且取值与分割及 (ξ_i, η_i)的选取

无关, 则称 $f(x,y)$ 在 L 上可积，称极限A为函数 $f(x,y)$在曲线弧L上对弧长的曲线积分或 第一型曲线积分，记作$\int_L f(x,y)ds$.

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta s_i$$

类似定义： 函数 $f(x,y,z)$在空间曲线弧 Γ上的第一型曲线积分为：

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot \Delta s_i .$$

曲线形构件的质量

$$M=\int_L \rho(x,y)ds,\quad M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds.$$

曲线弧长 $s(L)=\int_L ds,\quad s(\Gamma)=\int_\Gamma ds.$

2. 存在条件

当$f(x,y)$在光滑曲线弧 L上连续时,第一型曲线积分$\int_L f(x,y)ds$存在.

3. 性质

(1) 若 $\int_L f_i(x,y)ds$ 存在, c_i 为常数, $i=1,2,\cdots,k$, 则 $\int_L \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x,y)ds$ 也存在, 且

$$\int_L \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x,y)ds = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_L f_i(x,y)ds,$$

(2) 若曲线段 L 由曲线段 L_i 首尾相接而成, 且 $\int_{L_i} f(x,y)ds$ $(i=1,2,\cdots,k,)$ 都存在, 则 $\int_L f(x,y)ds$ 也存在，且

$$\int_L f(x,y)ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{L_i} f(x,y)ds.$$

(3) 若$\int_L f(x,y)ds$与$\int_L g(x,y)ds$都存在，且在L上

$f(x,y)\le g(x,y)$, 则

$$\int_L f(x,y)ds \le \int_L g(x,y)ds.$$

(4) 若$\int_L f(x,y)ds$存在，则$\int_L |f(x,y)|ds$也存在，且

$$\left|\int_L f(x,y)ds\right| \le \int_L |f(x,y)|ds.$$

(5) 若$\int_L f(x,y)ds$存在，L的弧长为s，则存在常数c，

使得 $\int_L f(x,y)ds = cs,$

其中$\inf\limits_L f(x,y) \le c \le \sup\limits_L f(x,y).$

如L光滑，$f(x,y)$在L上连续，则存在$(x_0, y_0) \in L$，

使得 $\int_L f(x,y)ds = f(x_0, y_0)s.$

约定： L为闭曲线时，函数$f(x,y)$在L上的第一型

曲线积分记为$\oint_L f(x,y)ds.$

三、第一型曲线积分的计算

定理 设有光滑曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in[\alpha,\beta],$

$f(x,y)$在L上有定义且连续，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

分析: $\lim\limits_{\max \Delta s_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\Delta t_i$$

证明 易知 $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$, 由积分中值定理及 $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ 的连续性, 有

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(\tau_i') + \psi'^2(\tau_i')}\Delta t_i \quad (t_{i-1} \le \tau_i' \le t_i).$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i''), \psi(\tau_i'')]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i') + \psi'^2(\tau_i')}\Delta t_i,$$

此处 $t_{i-1} \le \tau_i', \tau_i'' \le t_i$.

$$\text{设}\ \sigma = \sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i''),\psi(\tau_i'')][\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')} - \sqrt{\varphi'^2(\tau_i'')+\psi'^2(\tau_i'')}]\Delta t_i,$$

则有 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta s_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\tau_i''),\psi(\tau_i'')]\sqrt{\varphi'^2(\tau_i'')+\psi'^2(\tau_i'')}\Delta t_i + \sigma,$$

令 $\Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$, 则当 $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta s_i \to 0$时,

必有$\Delta t \to 0$, 现证 $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \sigma = 0.$

由 $f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在$[\alpha,\beta]$上连续，所以存在$M>0$,

使得 $|f[\varphi(t),\psi(t)]|\le M, t\in[\alpha,\beta]$.

由 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 在$[\alpha,\beta]$上连续，知一致连续，

即：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, s.t\ \Delta t<\delta$时，有

$$\left|\sqrt{\varphi'^2(\tau_i')+\psi'^2(\tau_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i'')+\psi'^2(\tau_i'')}\right|<\varepsilon,$$

从而$|\sigma|\le\varepsilon M\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\varepsilon M(\beta-\alpha)$，故 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\sigma=0$.

对蓝色式子取极限 ，得所证结果 .

注意 1. 定积分的下限 α 一定要小于上限 β;

2. $f(x,y)$ 中 x,y 不彼此独立，而是相互关联的.

特殊情形

(1) $L: y = y(x) \qquad a \le x \le b.$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$$

(2) $L: x = x(y) \qquad c \le y \le d.$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f[x(y), y]\sqrt{1 + x'^2(y)}dy.$$

(3) $L: r = r(\theta) \qquad \alpha \le \theta \le \beta.$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.$$

空间曲线上的曲线积分

$$\Gamma: x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ z = \omega(t). \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

$$(\alpha < \beta)$$

计算第一型曲线积分的基本步骤

(1) 求出L的一个参数方程表达：

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in[\alpha,\beta],$$

(2) 计算弧长微分 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,$

(3) 计算定积分

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

例1 求 $I=\int_L xyds$, L: 椭圆 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ (第I象限).

解 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}dt$

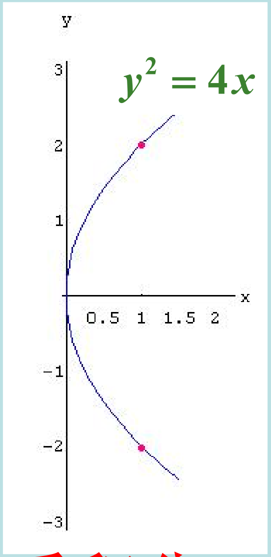
$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{ab}{a^2-b^2}\int_b^a u^2du \qquad (令 u=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t})$$

$$=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

例2 求$I=\int_L y\,ds$,

其中$L: y^2=4x$,从(1,2)到(1,−2)一段.



解 $$I=\int_{-2}^{2} y\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}\,dy=0.$$

平面曲线上的第一型曲线积分其对称性类似于二重积分

例3 求$I=\int_\Gamma xyz\,ds$, 其中$\Gamma: x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,$

$z=k\theta$的一段. $(0\le\theta\le 2\pi)$

解 $$I=\int_0^{2\pi} a^2\cos\theta\sin\theta\cdot k\theta\sqrt{a^2+k^2}\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\pi k a^2\sqrt{a^2+k^2}.$$

例4 求$I=\int_\Gamma xyds$, 其中Γ为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

解 由轮换对称性，知 $\int_\Gamma xyds=\int_\Gamma yzds=\int_\Gamma zxds$.

故 $I=\dfrac{1}{3}\int_\Gamma (xy+yz+zx)ds$

$$=\frac{1}{6}\int_\Gamma [(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]ds$$

$$=-\frac{1}{6}\int_\Gamma ds=-\frac{\pi}{3}.$$

也可以写出空间曲线的参数方程, 但过程比较麻烦

$$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

联立方程得$(x^2+y^2)+(-x-y)^2=1$

即$x^2+y^2+xy=\dfrac{1}{2}$, 令$\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$,

上面方程变为 $3u^2+v^2=\dfrac{1}{2}$,

令$u = \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta, v = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,$

可得曲线 Γ的参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ z = -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta \end{cases}$

例5 计算 $I=\int_L |y|\,ds,$

L 为右半个单位圆 $x^2+y^2=1,\quad x\geq 0.$

解1（用直角坐标） $L: y=\pm\sqrt{1-x^2},\quad 0\leq x\leq 1.$

$$ds=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用对称性

$$I=\int_L |y|\,ds=2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2$$

解2 （用参数方程）

$$L:\ x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

$$I=\int_L |y|\,ds = 2\int_0^{\pi/2}|\sin t|\cdot\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt \quad =2$$

解3 （用极坐标） $L: r=1,\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_L |y|\,ds \ =\int_L|\sin\theta|\,ds = 2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot\sqrt{1^2+0^2}\,d\theta$$

$$=2$$

例6 计算 $I=\int_L(2+x^2y)\,ds$, L 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 的上半部.

解 设单位圆的参数方程为

$$L:\ x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\le t\le \pi.$$

$$I=\int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{(\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)dt$$

$$=2\pi+\frac{2}{3}.$$

四、应用例子

(1) 质量 $M=\int_L \rho(x,y)ds$;

(2) 弧长 $s(L)=\int_L ds$;

(3) 曲线弧对 x轴及 y轴的转动惯量，

$$J_x=\int_L y^2\rho ds,\qquad J_y=\int_L x^2\rho ds;$$

(4) L的重心坐标

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho ds}{\int_L \rho ds},\qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho ds}{\int_L \rho ds}.$$

例7 一条金属丝形状为半圆形的$x^2+y^2=1$，$y\geq 0$, 且底部要比顶部粗. 如果每点的线密度正比于它距离直线$y=1$的距离，求金属丝的质心.

解 设上半圆形的参数方程为

$$L:\ x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\leq t\leq \pi.$$

则

$$ds=\sqrt{(\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=dt$$

又因为线密度为

$$\rho(x,y)=k(1-y),$$

其中k是一个常数，因此金属丝的质量为

$$M=\int_L \rho(x,y)ds=\int_L k(1-y)ds=k(\pi-2).$$

于是我们有 $\bar{y}=\dfrac{\int_L y\rho ds}{\int_L \rho ds}=\dfrac{1}{k(\pi-2)}\int_L yk(1-y)ds$

$$=\frac{1}{\pi-2}\int_L(\sin t-\sin^2 t)ds$$

$$=\frac{4-\pi}{2(\pi-2)},$$

又由对称性得到 $\bar{x}=0$，因此质心坐标为

$$(\bar{x},\bar{y})=(0,\frac{4-\pi}{2(\pi-2)}).$$

小结

1、第一型曲线积分的概念、性质;

2、第一型曲线积分的计算.