

A

北京航空航天大学

2020—2021 学年 第二学期期末

《 工科数学分析 (2) 》

试 卷 (A)

班 号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

任课教师 _____ 考场 _____ 成绩 _____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2021 年 06 月 25 日

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则积分 $I_1 = \iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz$,
 $I_2 = \iiint_{\Omega} [\cos^4(x + y + z) + z^3] dx dy dz$, $I_3 = \iiint_{\Omega} [\ln(x^2 + y^2 + z^2)] dx dy dz$ 之间的大小关系为
 (C).

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_1 > I_2 > I_3$.

(C) $I_2 > I_1 > I_3$.

(D) $I_2 < I_1 < I_3$.

2. 设 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$ 则 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 在极坐标系下为 (B).

(A) $\int_0^a dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta$.

(B) $\int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta$.

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.

(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$.

3. 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 与坐标面所围成立体的体积为 (B)

(A) $\frac{4\pi}{3}$.

(B) $\frac{\pi}{2}$.

(C) π .

(D) $\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, L 是以 $M(x_0, y_0)$ 为中心, 半径为 r 的圆周, 极限

$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_L f(x, y) ds = (A)$.

(A) $2\pi f(x_0, y_0)$

(B) $f(0, 0)$

(C) $2\pi f(0, 0)$

(D) $f(x_0, y_0)$

5. 抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 位于平面 $z = 2$ 下方的面积为 (D).

(A) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} + 1)$.

(B) $\pi(5\sqrt{5} - 1)$.

(C) $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$.

(D) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$.

二、计算题（每小题 5 分，满分 15 分）

1. 设向量场 $\vec{F}(x, y, z) = (xyz^2, z \sin y, x^2 e^y)$, 求散度 $\text{div} \vec{F}$, 旋度 $\text{rot} \vec{F}$.

解: $\text{div} \vec{F}(x, y, z) = yz^2 + z \cos y$,

$$\text{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz^2 & z \sin y & x^2 e^y \end{vmatrix} = (x^2 e^y - \sin y, 2xyz - 2xe^y, -xz^2).$$

2. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$, $f(x)$ 连续且恒正, a, b 是常数, 计算 $\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy$.

解: 利用区域对称性可知, $\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy = \iint_D \frac{af(y) + bf(x)}{f(y) + f(x)} dx dy$.

$$\text{所以} \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{(a+b)[f(x) + f(y)]}{f(y) + f(x)} dx dy = \frac{1}{2} (a+b).$$

3. 计算曲线积分 $\int_L (x + y^2) ds$ 其中 L 是 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

解: 利用轮换对称性可得

$$\int_L (x + y^2) ds = \frac{1}{3} \int_L (x + y + z + x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

三、计算题（每题 5 分，共 15 分）

1 计算 $\iiint_{\Omega} (2z + 3xy^2) dx dy dz$ ，其中 Ω 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围

成.

解：由于 Ω 关于 $yo z$ 平面对称， $f(x, y, z) = 3xy^2$ 为 x 的奇函数，故 $\iiint_D 3xy^2 dv = 0$

再利用球面坐标，得到

$$\iiint_D (3xy^2 + 2z) dx dy dz = \iiint_D 2z dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{4}.$$

.

2. 计算积分 $I = \int_L (x^2 + y^2) dx + 2y dy$ ，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (y \geq 0)$ 上从点 $A(a, 0)$ 到

$B(-a, 0)$ 的一段弧.

解： $L: x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$,

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x^2 + y^2) dx + 2y dy = \int_0^\pi [(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(-a \sin \theta) + 2b \sin \theta (b \cos \theta)] d\theta \\ &= -\frac{2}{3} a(a^2 + 2b^2). \end{aligned}$$

3. $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$;

解：在曲面上 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ，法向量为 $n = (-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, 1)$ ，所以 $dS = |n| dx dy = \frac{a}{z} dx dy$ ，

则

$$\iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} a dx dy = \pi a^3.$$

四、(10 分) 计算 $\iint_{\Sigma} (3y-z)dydz + (z-3x)dzdx + (x-y)dxdy$, 其中 Σ 为

$z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq b$, 的外侧.

解: 曲面方程为: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 法向量为 $\vec{n}_z = (-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$, 曲面在 xOy

平面的投影为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq b^2$, $\vec{A} = (3y-z, z-3x, x-y)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (3y-z)dydz + (z-3x)dzdx + (x-y)dxdy &= \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n}_z dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} [-(\frac{3xy - xz + zy - 3xy}{\sqrt{y^2 + x^2}}) + x - y] dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} [\frac{z(x-y)}{\sqrt{y^2 + x^2}} + x - y] dxdy = 2 \iint_{\Sigma} (x-y) dxdy = 2 \iint_{D_{xy}} (y-x) dxdy = 0. \text{ (对称性) }. \end{aligned}$$

五、(10 分) 设函数 $f(x), g(y)$ 在 R 上具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 已知积分

$\int_L 2xydx + [f(x) + g(y)]dy$ 与路径无关, 且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + [f(x) + g(y)]dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + [f(x) + g(y)]dy$$

求 $f(x), g(y)$.

解: 由积分与路径无关的充要条件,

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x, \quad f(x) = x^2 + C,$$

又因为 $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$,

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + [x^2 + g(y)]dy = \int_0^1 [t^2 + g(y)]dy = t^2 + \int_0^1 g(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + [x^2 + g(y)]dy = \int_0^t [1 + g(y)]dy = t + \int_0^t g(y)dy$$

所以 $t^2 + \int_0^1 g(y)dy = t + \int_0^t g(y)dy$, 两边关于 t 求导得 $2t = 1 + g(t)$, $g(t) = 2t - 1$.

即 $f(x) = x^2$, $g(y) = 2y - 1$.

六、(10 分) 利用 Gauss 公式计算

$$\iint_S x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dzdx + z(z-2x+z^2)dxdy.$$

其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解: 取 $\Sigma: z=0, (x^2+y^2 \leq a^2)$ 下侧. 利用高斯公式, 得

$$\begin{aligned} & \iint_S x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dzdx + z(z-2x+z^2)dxdy \\ & + \iint_{\Sigma} x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dzdx + z(z-2x+z^2)dxdy \\ & = \iiint_{\Omega} (2x-2y+3x^2+2y-2z+3y^2+2z-2x+3z^2)dxdydz \end{aligned}$$

其中 Ω 为 S, Σ 所围区域

$$= \iiint_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{6\pi}{5} a^5$$

$$\text{又 } \because \iint_{\Sigma} x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dzdx + z(z-2x+z^2)dxdy = 0$$

$$\therefore \iint_S x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dzdx + z(z-2x+z^2)dxdy = \frac{6\pi}{5} a^5$$

七、(10 分) 利用 Stokes 公式计算

$$\int_{\Gamma} (5y-2e^x)dx + (5z-2y^2)dy + (5x+e^{2z})dz$$

其中 Γ 是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y-z=0. \end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解: 设 Σ 为平面 $x+y-z=0$ 上被曲线 Γ 所围成的部分, 并取 Σ 的法向量向上, 则 Σ

法向量的方向余弦 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, 由 Stokes 公式

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5y-2e^x & 5z-2y^2 & 5x+e^{2z} \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} 5\frac{\sqrt{3}}{3} dS = \frac{5}{3}\sqrt{3}\pi R^2.$$

注: 也可利用

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5y-2e^x & 5z-2y^2 & 5x+e^{2z} \end{vmatrix} = -\iint_{\Sigma} 5dydz + 5dzdx + 5dxdy \text{ 展开计算.}$$

$\vec{n}_z = (-1, -1, 1), F = (1, 1, 1)$, 所以 原式 $= \iint_{\Sigma} 5 dx dy = \iint_{D_{xy}} 5 dx dy$.

$$D_{xy}: x^2 + y^2 + (x+y)^2 \leq R^2, \text{ 令 } \begin{cases} u = x + \frac{y}{2} \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2} y \end{cases}, |J| = \frac{2}{\sqrt{3}}, D_{xy} \text{ 变为 } D_{uv}: u^2 + v^2 \leq \frac{R^2}{2},$$

$$\text{原式} = - \iint_{\Sigma} 5 dx dy = \iint_{D_{xy}} 5 dx dy = \iint_{D_{uv}} 5 \frac{2}{\sqrt{3}} du dv = \frac{5}{3} \sqrt{3} \pi R^2$$

注记：曲面也可以取做球面，法向量求对得 4 分。

八、(10 分) 利用 Green 公式

$$\text{证明积分 } I = \oint_L \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy] = 2\pi,$$

其中 L 为任意包含原点在其内部的分段光滑闭曲线, L 取逆时针方向.

证明：设 $P(x, y) = \frac{e^x(x \sin y - y \cos y)}{x^2 + y^2}, Q = \frac{e^x(x \cos y + y \sin y)}{x^2 + y^2}$, 则当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \frac{[(x^2 + y^2)x + y^2 - x^2] \cos y + (x^2 + y^2 - 2x)y \sin y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

因为闭曲线 L 的方向为逆时针方向, 在 L 内添加闭曲线 $L_1: x^2 + y^2 = a^2, (a > 0 \text{ 充分小})$, 方向

逆时针方向, 在 $L - L_1$ 上利用格林公式, 积分为 0. 故原积分

$$I = \oint_{L_1} \frac{e^x}{a^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy] = \frac{1}{a^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} 2e^x \cos y dx dy$$

$$= \frac{1}{a^2} (2e^{\xi} \cos \eta) \pi a^2 = 2\pi e^{\xi} \cos \eta,$$

$$\text{令 } a \rightarrow 0, I = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} (2\pi e^{\xi} \cos \eta) = 2\pi.$$