北京航空航天大学

2021－2022 学年 第一学期期末考卷

《 工科数学分析 (Ⅰ)》

(A 卷)

班号 ___________ 学号__________ 姓名___________

主讲教师_________ 考场__________ 成绩___________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2022 年 1 月 10 日

一、 选择题（每题 4 分，满分 20 分）

1. 设$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\mathrm{d}x, I_3=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x$,则（　　）.

A. $I_1<I_2<I_3$;　　B. $I_3<I_2<I_1$;

C. $I_1<I_3<I_2$;　　D. $I_3<I_1<I_2$.

2. 设$f'(\sin x)=\cot^2 x$,则$f(x)=$（　　）.

A. $\frac{1}{x^2}-1+C$；　　B. $\frac{x^2}{1-x^2}+C$；

C. $-\frac{1}{x}-x+C$；　　D. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-x+C$.

3. 在$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1+x)\mathbf{d}x=0$的证明中,下列证明方法**错误**的是（　　）**.**

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1+x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Big|_0^1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=0$；

B. $0\le\int_0^1 x^n(1+x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 2x^n\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}$,故由夹逼定理可知极限为0；

C. 由积分中值定理$\Rightarrow\int_0^1 x^n(1+x)\mathrm{d}x=\xi^n\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\xi^n\to 0$(当$n\to\infty$时)；

D. 由积分中值定理$\Rightarrow\int_0^1 x^n(1+x)\mathrm{d}x=(1+\xi)\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1+\xi}{n+1}\to 0$(当$n\to\infty$时).

4. 广义积分 (1) $\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$;　(2) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$;　(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x}\mathrm{d}x$中，收敛的是（　　）.

A. (1) (2)；　　B. (1) (3)；

C. (2) (3)；　　D. (1) (2) (3) .

5. 以$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\cos x$(其中$C_1,C_2$为任意常数)为通解的微分方程是（　　）.

A. $y''+y'-2y=-\sin x-3\cos x$；　　B. $y''-y'-2y=\sin x-4\cos x$；

C. $y''-2y'+y=2\sin x$；　　D. $y''+4y'+4y=-4\sin x+3\cos x$.

二、 计算与证明题（每题 6 分，满分 30 分）

1. 计算$\int e^{\sqrt{x}}dx$.

2. 计算$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$.

3. 设$f''(x)=af^2(x)g(x), g''(x)=bg^2(x)f(x)$, 且$a\neq b$为两个常数.

证明:$\int f^2(x)g^2(x)dx=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{a-b}+C$，其中$C$为任意常数.

4. 已知函数$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续, $F(x)=\int_0^x t\varphi(x-t)\mathrm{d}t$, 求$F''(x)$.

5. 设$f(x)$在$[0,2]$上二阶可导, $f(2)=\dfrac{1}{2}$, $f'(2)=0$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$, 求$\int_0^1 x^2 f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

三、（本题 10 分）

设函数$f(x)$满足$f'(x)+2f(x)+5\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=10\sin x$, 且$f(0)=f'(0)=0$.

(1)求$f(x)$所满足的二阶微分方程;

(2)求$f(x)$的表达式.

四、（本题 10 分）

设曲线$y=3ax^2+2bx+\ln c$经过原点, 且当$0\le x\le 1$时$y\ge 0$. 设此曲线与直线$x=1$, x轴所围成的平面图形为D. 已知D的面积为1, 求常数a,b,c的值, 使得D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

五.（本题 10 分）

设$p>0,q>0,$求p,q满足的条件,使得积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin 2x}{x^p(1+x^q)}\mathrm{d}x$条件收敛.

六、（本题 10 分）

设$f(x)$连续,且$f(0)=0,\ f'(0)=1,$求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[(2-t)^2\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{x^3}.$

七、（本题 10 分）

设$f(x)$为$[0,1]$上的可导函数, $f(0)>0,\ f(1)>0, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$

证明：(1) $f(x)$在$[0,1]$上至少有两个零点；

(2) 在$(0,1)$内至少存在一点ξ, 使得$f'(\xi)+3f^3(\xi)=0.$