BEIHANG UNIVERSITY

北京航空航天大學


离散数学-数理逻辑

第二章 命题逻辑语义

杜博文

主要内容

- 2.1 命题合式公式语义
- 2.2 推论式与等价式的语义
- 2.3 变换合式公式的语义
- 2.4 命题公式范式
- 2.5 等式演算
- 2.6 完全集

命题逻辑公式的真值

- 对于一个命题逻辑合式公式，其逻辑真值是什么？
  - 什么情况下为真？
  - 什么情况下为假？
- 一个合式公式与逻辑真值之间的对应关系。

指派函数

- **定义 2.1.1 指派函数**（简称**指派**）是一种从合式公式到集合$\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$的函数，记为$\boldsymbol{\sigma}$。
- $\boldsymbol{\sigma}$: $\boldsymbol{Q} \rightarrow \{\mathbf{0}，\mathbf{1}\}$

- **定义 2.1.2** 设$\boldsymbol{Q}$是命题变元，$\boldsymbol{\sigma}$是指派，则$\boldsymbol{Q}$的语义是指定$\boldsymbol{Q}$的真值（表示$\boldsymbol{\sigma}$赋给命题变元$\boldsymbol{Q}$的真值），即$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}}$，其中$\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}} \in \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$。

合式公式语义

- **定义2.1.3** 设$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$是命题公式，$\boldsymbol{\sigma}$是指派，合式公式联结词的语义指定为对应的逻辑运算。

(1) $(\neg \boldsymbol{Q})$是合式公式，$\boldsymbol{\sigma}(\neg \boldsymbol{Q}) = \neg \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q})$

(2) $(\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})$是合式公式，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$

(3) $(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})$是合式公式，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$

(4) $(\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R})$是合式公式，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$

(5) $(\boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R})$是合式公式，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q} \leftrightarrow \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$

(6) $(\boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{R})$是合式公式，$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q} \oplus \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \oplus \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$

合式公式语义

- 合式公式的联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，$\oplus$的语义解释为对应的逻辑域集合上的运算
- 符号$\mathbf{0}$和$\mathbf{1}$的语义解释为逻辑真值集合上的对象，即$\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$。
- 指派将命题变元指定为一个真值，将合式公式中的联结词变换为对应的逻辑运算，任意命题逻辑合式公式，经过指派求值运算，可得到对应的一个真值

推论式和等价式语义

- **定义 2.1.4 （推论式）**

  若$\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$是合式公式，$\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{Q} \vDash \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \vDash \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$

- **定义 2.1.5 （等价式）**

  若$\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$是合式公式，

$$\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{R})$$

- 推论式和等价式的$\vDash$和$\Leftrightarrow$解释为逻辑域上相应的逻辑关系判断，符号$\Leftrightarrow$有时也表示为$=$

命题逻辑公式语义求值

- **例 2.1.1** 求合式公式$s = P \to (Q \to R)$的真值。

设指派函数$P^\sigma = 1, Q^\sigma = 1, R^\sigma = 0$	设指派函数$P^\sigma = 0, Q^\sigma = 1, R^\sigma = 0$
$\sigma(P \to (Q \to R))$ $= \sigma(P) \to \sigma(Q \to R)$ $= \sigma(P) \to (\sigma(Q) \to \sigma(R))$ $= \sigma(P) \to (\sigma(Q) \to \sigma(R))$ $= P^\sigma \to (Q^\sigma \to R^\sigma)$ $= 1 \to (1 \to 0)$ $= 0$	$\sigma(P \to (Q \to R))$ $= \sigma(P) \to \sigma(Q \to R)$ $= \sigma(P) \to (\sigma(Q) \to \sigma(R))$ $= P^\sigma \to (Q^\sigma \to R^\sigma)$ $= 0 \to (1 \to 0)$ $= 1$

在不同的指派情况下，同一个合式公式的真值可能不同。

在不同的指派下，什么情况下同一公式的真值一定相同？

- **例 2.1.2**：求合式公式$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}$真值
- 设$\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$或$\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{\sigma}(\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q})$

$= \neg(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) \wedge \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q})) \rightarrow \neg \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) \vee \neg \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q})$

$= \neg(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) \wedge \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q})) \rightarrow \mathbf{1}$

$= \mathbf{1}$

- 设$\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{1}$且$\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{\sigma}(\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q})$

$= \neg(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) \wedge \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q})) \rightarrow \neg \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}) \vee \neg \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{q})$

$= \neg \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{0} \vee \mathbf{0}$

$= \mathbf{1}$

真值表

- 真值表由逻辑变量每种取值组合以及相对应的唯一值列表组成。
  - 每个逻辑变量均有0、1两种取值
  - 按二进制数递增方式排列起来
  - 每个逻辑公式为一列
  - 将对应的逻辑函数值写相应位置上
- 真值表用来定义联结词
- 真值表用来验证合式公式

真值表				
p	q	r	f_0	f_1
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

真值表求公式真值

- **例 2.1.3** 求公式$\neg(q \wedge r) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$真值
- 首先将公式逐次分解成子公式：

$$q \wedge r, \neg(q \wedge r), \neg q, \neg r, \neg q \vee \neg r$$

- 最后求得公式$\neg(q \wedge r) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$真值。

q	r	$q \wedge r$	$\neg(q \wedge r)$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \vee \neg r$	$\neg(q \wedge r) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

- 真值表求合式公式逻辑值有容易、直观的优点。
- 当命题变量较多时，命题变量真值有组合数大，公式复杂，难以计算等缺点。

Python程序赋值函数

- 命题逻辑公式的语义都能够通过程序实现
- 设计Python程序求命题逻辑公式的真值。
- [Q，R]=[0，0]作为赋值。
- **例 2.1.2** 求$(\neg(\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})) \rightarrow ((\neg \boldsymbol{Q}) \vee (\neg \boldsymbol{R}))$

<table>
<tr><td>赋值σ</td><td>真值表：任意赋值σ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">s='(¬(Q∧R))→((¬Q)∨(¬R))'
s='(not(not(Q&R)))|((not Q)|(not R))'
[Q,R]=[0,0]
tv1=eval(s)
[Q,R]=[1,0]
tv2=eval(s)
print(tv1)
print(tv2)</td><td>import dmath.logic as dml
s='((not(not(Q&R)))|((not Q)|(not R)))'
dml.truthtable2(s)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">'Q R ((not(not(Q&R)))|((not Q)|(not R)))'
0 0 1
0 1 1
1 0 1
1 1 1</td></tr>
<tr><td>True
True</td></tr>
</table>

求语义方法

- 指派函数求真值法
- 真值表求真值法
- Python程序求真值法

命题逻辑是可判定的。

公式的可满足性和有效性

- **定义 2.1.6** 设$\boldsymbol{Q}$是公式。

(1)如果真值指派$\boldsymbol{\sigma}$使得$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{Q}) = \mathbf{1}$，则称$\boldsymbol{\sigma}$**满足**$\boldsymbol{Q}$。

(2)如果每个真值指派都满足$\boldsymbol{Q}$，则称$\boldsymbol{Q}$为**有效式**，或称为**永真式**，也称为**重言式**。

(3)如果每个真值指派都不满足$\boldsymbol{Q}$，则称Q为**永假式**，也称为**矛盾式**，**不可满足式**。

(4)如果至少有一个真值指派满足$\boldsymbol{Q}$，则称Q为**可满足式**。

应用*

- 自然语言翻译
- 系统需求规范说明的一致性（无矛盾）
  - “诊断消息存储在缓冲区或者被重传”
  - “诊断消息没有存储在缓冲区”
  - “如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传”

$\boldsymbol{P}$：诊断消息存储在缓冲区

$\boldsymbol{Q}$：诊断消息被重传

上述表示为：

$$\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}, \neg \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$$

若一致，则有$\boldsymbol{\sigma}$使得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})=\boldsymbol{\sigma}(\neg \boldsymbol{P})=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q})=1$$

有：$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{1}$

故一致。