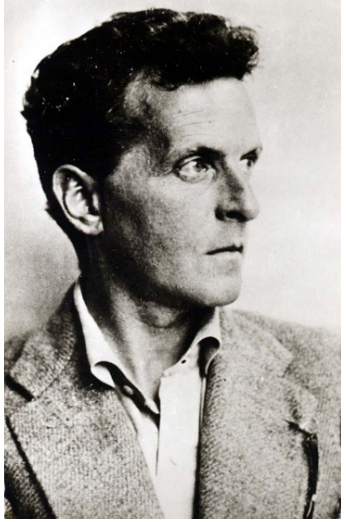
主要内容

- 1.1 逻辑运算
  - 对象、运算、关系
- 1.2 命题逻辑合式公式
- 1.3 谓词逻辑合式公式
- 1.4 自然语言命题

自然语言与原子命题（回顾）

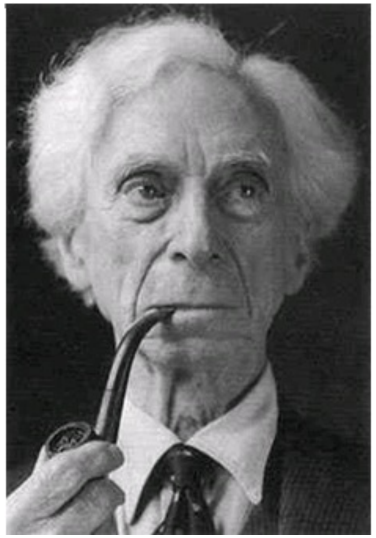
- 自然语言是人们思维和交际的工具，也是一种表达观念的符号系统。
- 自然语言由各种句式的语句组成，如陈述句、疑问句、感叹句、祈使句等等。
- 陈述句是表达一个的语句。
- 陈述句的意义就是对一个事实的判断，即确定陈述句是真，还是假。
- **定义 1.4.1** 具有确定真或假含义的陈述句称为原子命题，或简单命题。

逻辑哲学



维特根斯坦

- 世界是由事实构成的
  - 《逻辑哲学论》
- 事实是事物的性质，以及事物之间的关系
  - 《我们关于外间世界的知识-哲学上科学方法应用的一个领域》



罗素

- 根据维特根斯坦和罗素的哲学思想，事实是表达事物的性质或表达一些事物之间的关系。
- 命题是事实概括。
- 事实使一个命题为真或为假。最简单的事实称为原子事实，与原子事实对应的是原子命题。
- 原子命题的真或假取决于它与相应的原子事实是否符合。

何谓事实，何谓命题

- 自然数事实
  - （1）0是自然数；1是自然数；2是自然数；……
  - （2）0大于等于0； 1大于等于0； 2大于等于0；……
- 自然数命题
  - 对于任意$\boldsymbol{x}$，若$\boldsymbol{x}$是自然数，则$\boldsymbol{x}$大于等于$\mathbf{0}$。
  - 对于任意$\boldsymbol{x}$，若$\boldsymbol{x}$是自然数，则$\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$是自然数。
- 事实逻辑表示
  - $\boldsymbol{N}(\mathbf{0}), \boldsymbol{N}(\mathbf{1}), \boldsymbol{N}(\mathbf{2})$
  - $\geq(\mathbf{0},\mathbf{0}), \geq(\mathbf{1},\mathbf{0}), \geq(\mathbf{2},\mathbf{0})$
- 谓词逻辑表示
  - $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \geq(\boldsymbol{x},\mathbf{0}))$
  - $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1}))$
  - $\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{y}(\boldsymbol{N}(\boldsymbol{y} \rightarrow \geq(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})))$

命题判断（回顾）

- (1) 北京是中国首都。
- (2) 8是奇数。
- (3) 人类于21世纪在月球居住
- (4) 我正在说谎。
- (5) $x < 9$。
- (6) $10 > 12$。

- (1) 真命题。
- (2) 假命题。
- (3) 命题。
- (4) 悖论，不是命题
- (5) 不是命题。
- (6) 假命题。

命题逻辑表示

- 在自然语言中，‘并且’、‘或’、‘并非’、‘如果…，则…。’、‘当且仅当’等连词。
- 命题用'并且'、'或'、'并非'、'如果…，则…'、'当且仅当‘等连词联接的语句为复合命题
- 如果Q和R是命题，则命题表示形式为

(1) ‘Q并且R'，表示为$Q \wedge R$

(2) ‘Q或R'，表示为$Q \vee R$

(3) ‘并非Q’,表示为$\neg Q$

(4) ‘如果Q，则R’, 表示为$Q \rightarrow R$

(5) ‘Q当且仅当R’ ,表示为$Q \leftrightarrow R$

命题关联例

- 今天下雨了并且会议室有人在开会。
- 今天晚上我在家看电视或去剧场看戏。
- 我若今天回来得早或不累就去找你。
- 如果太阳从西边出来，则雪是黑的。
- 如果明天下雨，则不开运动会。
- 两个三角形全等，当且仅当它们的三组对应边相等。
- 2+2=4当且仅当雪是白的

命题逻辑表示(续)

- 如果$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是命题，则命题表示形式为

(6) '既不$\boldsymbol{Q}$，也不$\boldsymbol{R}$'，表示为$\neg \boldsymbol{Q} \wedge \neg \boldsymbol{R}$

(7) '要么$\boldsymbol{Q}$，要么$\boldsymbol{R}$'，表示为

(8) '只有$\boldsymbol{Q}$，才能$\boldsymbol{R}$'，表示为

(9) '除非$\boldsymbol{Q}$，否则$\boldsymbol{R}$'。表示为

命题逻辑表示(续)

- 如果$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{R}$是命题，则命题表示形式为

  (6) '既不$\boldsymbol{Q}$，也不$\boldsymbol{R}$'，表示为$\neg \boldsymbol{Q} \wedge \neg \boldsymbol{R}$

  (7) '要么$\boldsymbol{Q}$，要么$\boldsymbol{R}$'，表示为$(\neg \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}) \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \neg \boldsymbol{R})$

  (8) '只有$\boldsymbol{Q}$，才能$\boldsymbol{R}$'，表示为$\neg \boldsymbol{Q} \rightarrow \neg \boldsymbol{R}$。

  (9) '除非$\boldsymbol{Q}$，否则$\boldsymbol{R}$'。表示为$\neg \boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R}$。

命题符号化示例

- 李明是计算机系的学生，他住在312室或313室。

  p：李明是计算机系的学生

  q：他住在312室

  r：他住在313室

  $p \wedge (q \oplus r)$

- 燕子飞回来是春天来了的必要条件。

  p：燕子飞回来

  q：春天来了

  $q \rightarrow p$

命题符号化示例

- 如果我下班早且不累，就去商店看看。

  p：我下班早

  q：我累了

  r：我去商店看看

  $(p \land (\neg q)) \rightarrow r$

- 如果明天下雨，就不开运动会而照常上课。

  p：明天下雨

  q：明天开运动会

  r：明天照常上课

  $p \rightarrow ((\neg q) \land r)$

命题符号化

- 例2.7　将下面命题符号化：

  张华是我们班学习成绩最好的学生。

  取论域为所有学生的集合。

  $S(x)$ ：x 是我们班的学生。

  $G(x, y)$：x 比 y 学习好。

  a：张华。

- 将该命题符号化为$\forall x\,(S(x) \rightarrow G(a, x))$对吗？如果不对有什么问题？

1. 张华不能比自己学习好。
2. 张华也应当是我们班的学生。

命题符号化

该命题意思：张华是我们班的学生，并且对于我们班的每个学生 x，若 x 不是张华，则 x 的学习成绩不如张华。

$S(x)$ ：x 是我们班的学生。

$G(x, y)$：x 比 y 学习好。

$D(x, y)$：x 和 y 是同一个学生。

a：张华。

该命题符号化为

$$S(a) \wedge \forall x\,(S(x) \wedge \neg D(x, a) \rightarrow G(a, x))$$

推论式

- Q：天下雨； R：地面湿
- 肯定前件推论式
  - 前提：(1) 如果天下雨，则地面湿；(2) 天下雨
  - 结论：地面湿

  表示为： $Q \to R$，$Q \vDash R$
- 肯定后件推论式
  - 前提：(1) 如果天下雨，则地面湿；(2) 地面湿
  - 结论：天下雨

  表示为： $Q \to R$，$R \vDash Q$

三段论

日常生活中的例子：

李雷对韩梅梅说："如果今天下雨我就去接你。"

问题：

今天确实下雨了，问李雷是不是去接了韩梅梅？

如果现在让你用形式化方法，你怎么表达呢？

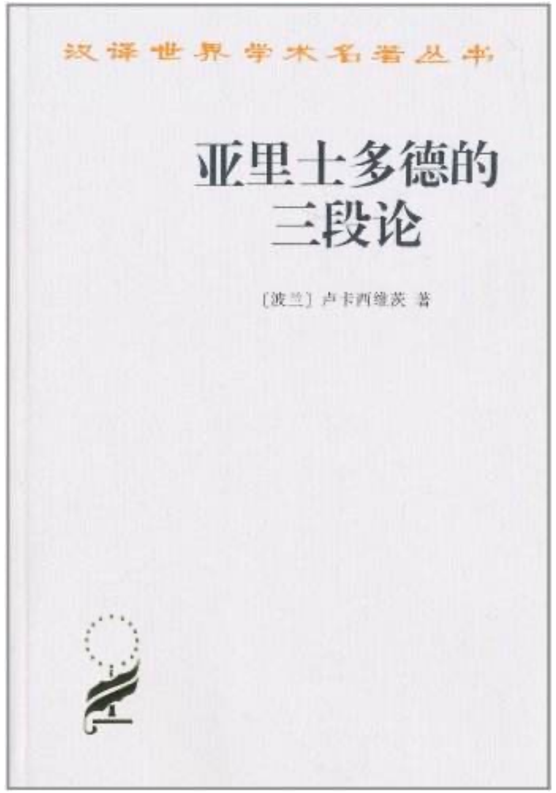
Q：今天下雨

R：我去接你

$Q \rightarrow R$：如果今天下雨，则我去接你

三段论

如果“苏格拉底是人”和“如果苏格拉底是人，则他会死”同时成立，可以推出苏格拉底会死



$Q \rightarrow R$: 如果苏格拉底是人，则苏格拉底会死

Q: 苏格拉底是人

R: 苏格拉底会死

$$Q, Q\rightarrow R \models R$$

命题逻辑说明

- 复合句表述的命题称为复合命题（Compound Proposition）。
  - 组成这个复合句的简单句表述的命题称为它的支命题。
  - 复合命题的真值由其支命题的真值和连接词的意义共同决定->真值表。
  - 若每个支命题真值已确定，则连接词就为复合命题指定了唯一的真值，因此可以把连接词的意义看做真值函数。
  - 公式：必须合法，且有意义：语法、语义分析
- 2）公式怎么算？
  - 公式演算：做的是等值演算->本质是命题等价（值相等就可以变化）->公式演算体系（本质是运算）
  - 运算规则->逻辑上的等价模式

命题逻辑说明

- 3）公式怎么论证？
  - 不是公式运算，其实是另外一个体系，基本关系是推论->论证模式（例子：三段论，传递律）
  - 引入新的符号-推论关系 $\vdash$
  - 公式集 Γ 可满足的含义？
  - 如何验证 Γ 是可满足还是不可满足？
  - A是 Γ 的逻辑推论， $\Gamma \vdash A$ ，如何定义？
  - 推论关系 $\vdash$ ，如何保证推论关系的正确性？
  - 常用的推理模式有哪些？
- **命题逻辑**不再进一步分析命题的**内部结构**。
- **谓词逻辑**分析**命题的内部结构**。

复合命题、量化命题及命题

- 量化语句是用'任意'、'存在'等量词约束陈述句或复合语句。
- **定义1.4.2** 用'所有'和'存在'量词约束的原子命题或复合命题称为量化命题。
- **定义1.4.3** 原子命题、复合命题和量化命题统称为命题。

个体、谓词、量词与命题

- 研究的对象统称为个体
  - 记为$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$等，或$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$等
- 表达个体的变量称为个体变量，简称变量。
  - 记为$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$等，或$\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$等
- 表示个体的性质，或表示个体之间的关系的词，称为谓词
- 由谓词和个体构成了简单命题；由谓词和个体变元构成了简单命题形式
  - 命题：$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
  - 命题形式：$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

个体、谓词、量词与命题（续）

- **全称量词(∀)**：表达所有客体具有某性质或关系的词
  - $\forall x$是量词，表示所有x
    - $\forall x Q(x)$：表示所有客体x都有Q性质；
    - $\forall x \forall y R(x,y)$：表示所有客体(对)$x,y$都有$R$关系
- **存在量词(∃)**：表达至少存在个体具有某性质或关系的词
  - $\exists x$是量词，表示存在x
    - $\exists x Q(x)$：表示存在个体x有Q性质；
    - $\exists x \exists y R(x,y)$：表示存在个体$x,y$有$R$关系
- 由谓词和量词也构成了命题
  - 命题：$\forall x Q(x)$

一个关于桃子的故事

- 例1.6 考察下面的命题：

第一筐桃子都是好的，并且第二筐桃子中有坏的。

论域应当包括所有的讨论对象，这里既涉及了第一筐桃子，又涉及了第二筐桃子，因此，论域应当既包括第一筐桃子，又包括第二筐桃子，可取世界上所有桃子的集合为论域。令

$P(x)$：x 是第一筐中的桃子。

$Q(x)$：x 是第二筐中的桃子。

$G(x)$：x 是好桃子。

$B(x)$：x 是坏桃子。

一个关于桃子的故事

- 如何表示“第一筐桃子都是好的”呢？

$\forall x G(x)$ 表示“世界上所有桃子都是好的”。第一筐桃子的集合是论域的真子集，需要引进表达这个真子集的一元谓词 P。“第一筐桃子都是好的”的意思是：对于世界上的每个桃子 x，若 x 在第一筐中，则 x 是好的。因此，“第一筐桃子都是好的”可表示为

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow G(x))$$

一个关于桃子的故事

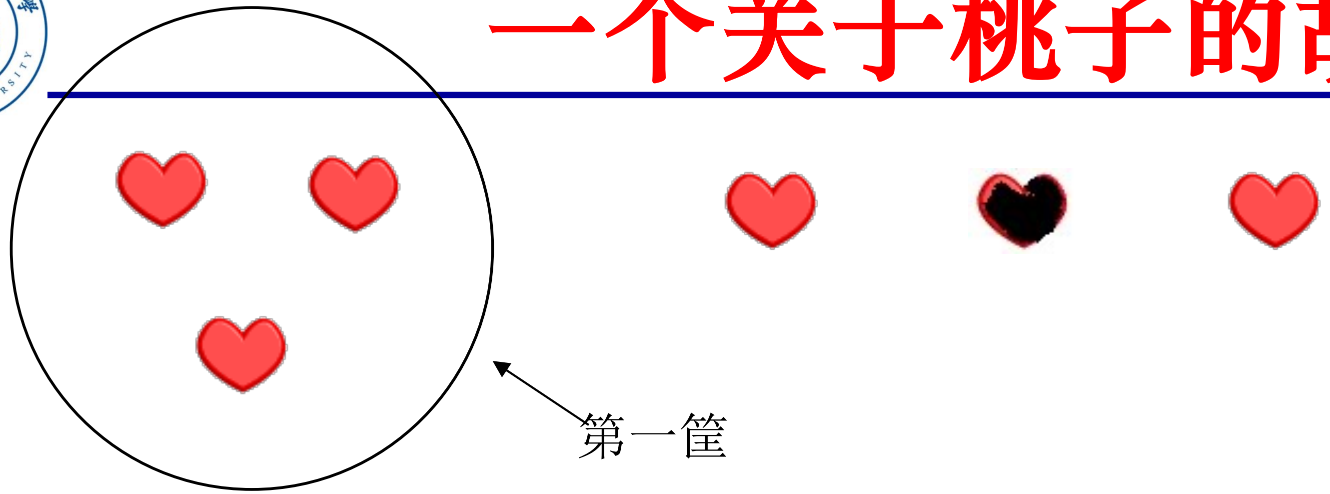
- 如何表示"第二筐桃子中有坏的"呢？

$\exists x B(x)$ 表示"世界上有坏桃子"，但是并没有指出坏桃子在第二筐中。第二筐桃子的集合是论域的真子集，需要引进表达这个真子集的一元谓词 Q。"第二筐桃子中有坏的"的意思是：世界上至少有一个桃子 x，它在第二筐中，并且是坏的。因此，"第二筐桃子中有坏的"可表示为

$$\exists x\,(Q(x) \wedge B(x))$$

- 原命题就表示为：$\forall x\,(P(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x\,(Q(x) \wedge B(x))$

一个关于桃子的故事



- 如何表达“第一筐桃子都是好的”？
- 核心：看表达式是否能够准确表达成真假命题。

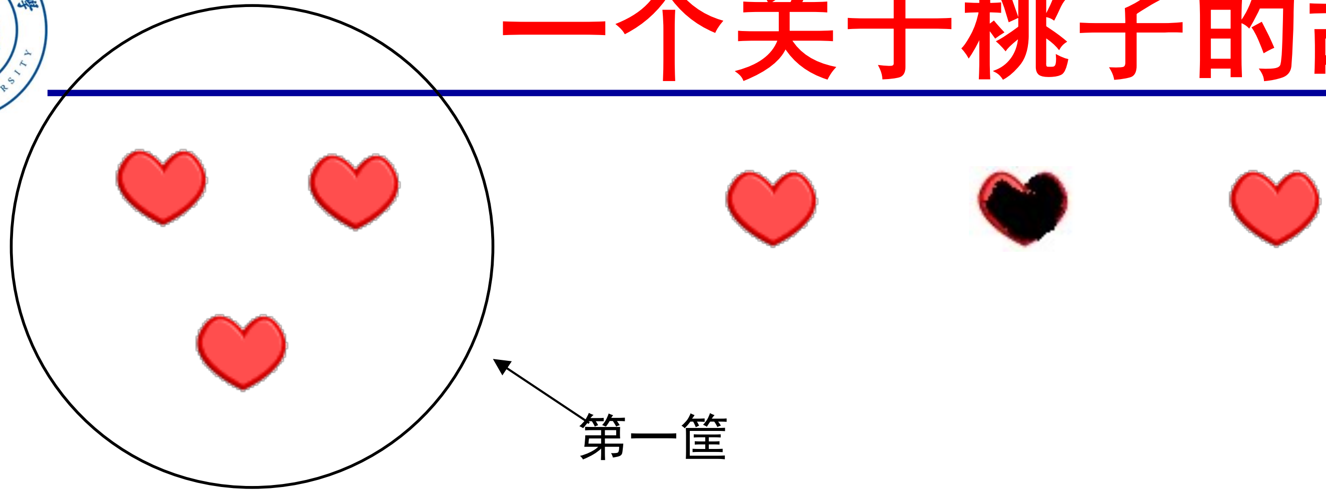
任取世界上一个桃子 x，

1. x 在第一筐中，$P(x) \to G(x)$ 为真，因为 $G(x)$ 为真。

   所以，$\forall x\,(P(x) \to G(x))$ 表达真命题。

2. 假设x 在第一筐中但是坏桃子，$P(x) \to G(x)$ 为假，因为 $G(x)$ 为假。而$\forall x\,(P(x) \to G(x))$ 可表达假命题。

一个关于桃子的故事



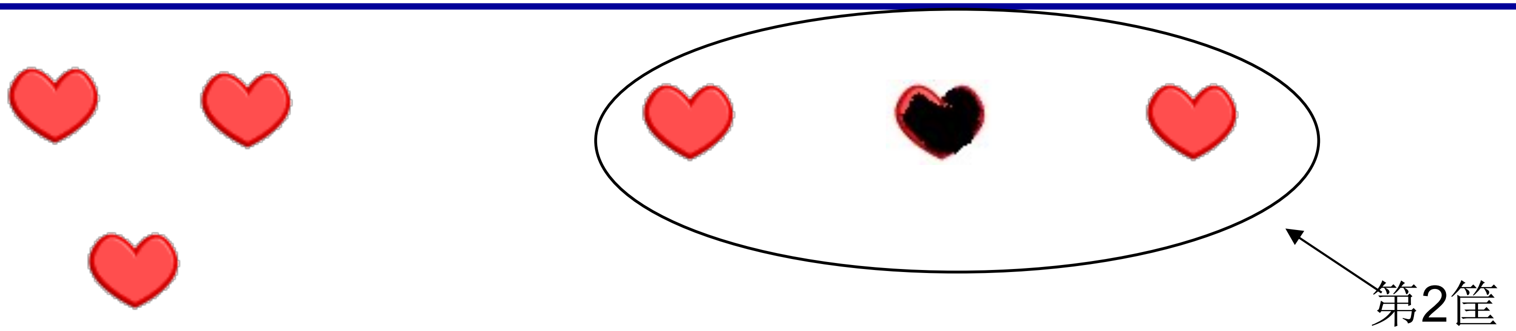
- 如何表达“第一筐桃子都是好的”？
- 核心：对子集成立是否也对全集成立?

任取世界上一个桃子 x,

1. x 在第一筐且都是好桃子，$P(x)\wedge G(x)$ 为真，表达的是真命题。
2. x 不一定在第一筐中，$P(x)\wedge G(x)$ 为假，因为 $P(x)$ 为假，但“第一筐桃子都是好的”是真命题

所以，$\forall x(P(x)\wedge G(x))$ 表达假命题。

一个关于桃子的故事

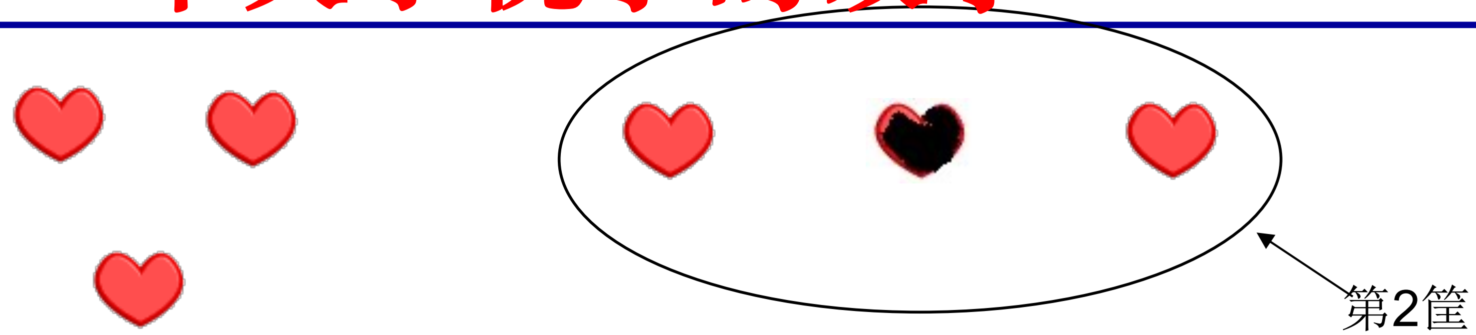


- 如何表达“第二筐桃子中有坏的”？
- 核心：看表达式是否能够表达成一个真命题。

任取世界上一个桃子 x，

1. $\exists x B(x)$？错，只是断定了世界上至少有一个坏桃子，并没有指出它就在第二筐内。
2. x 在第二筐中且都是好桃子，$Q(x) \wedge B(x)$ 为假，因为 $B(x)$ 为假。
3. x 只有在第二筐中且存在坏桃子 $Q(x) \wedge B(x)$ 为真，表达真命题

一个关于桃子的故事



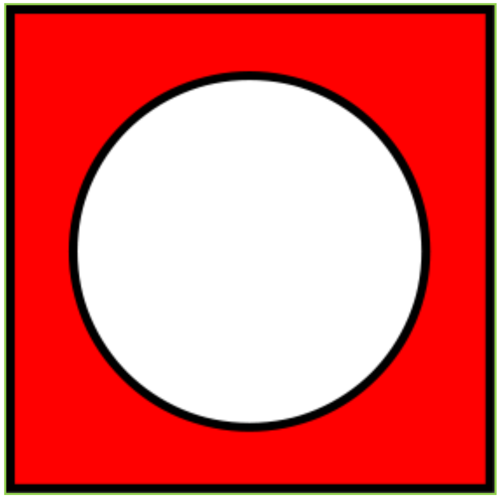
- 如何表达“第二筐桃子中有坏的”？
- 核心：对子集成立是否也对全集成立？

任取世界上一个桃子 x，

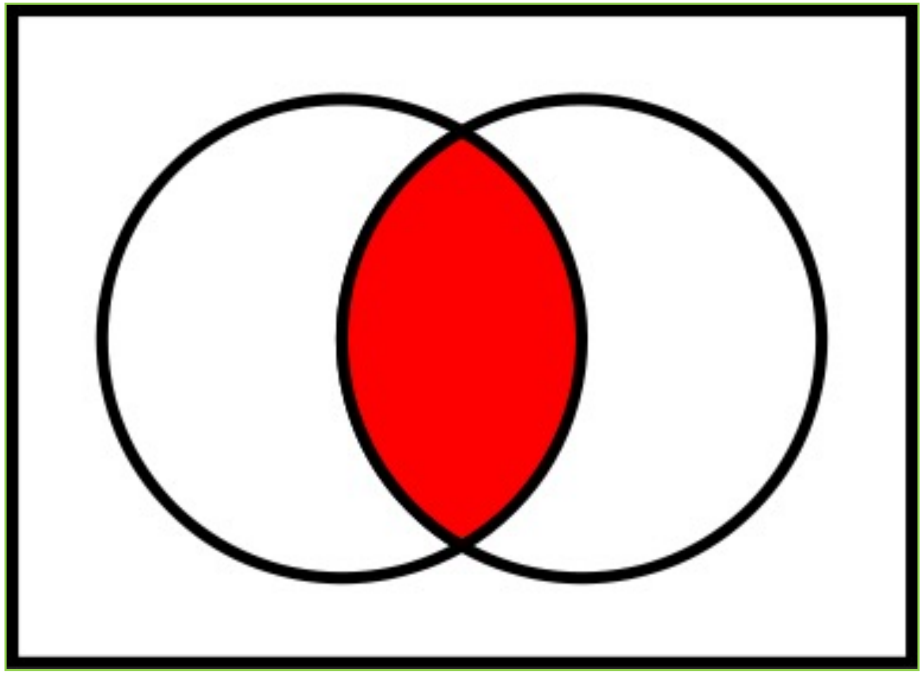
1. $Q(x) \rightarrow B(x)$ 为真，所以，$Q(x) \rightarrow B(x)$表达真命题。
2. 假如1～10号桃子都是好桃子，是个假命题
3. 但$Q(x) \rightarrow B(x)$ 为永真，因为 $Q(x)$ =0，表达式为永真，所以不能准确表达

所以有 $\forall x\big(P(x) \rightarrow G(x)\big) \wedge \exists x(Q(x) \wedge B(x))$

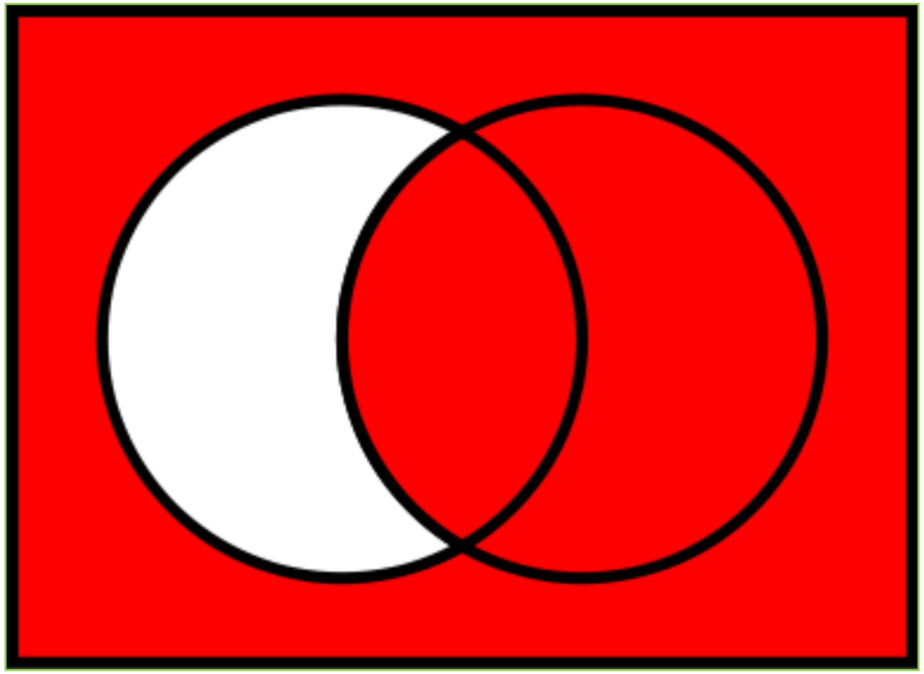
全称和存在量词的关系



$\neg P$



$P \wedge Q$



$P \rightarrow Q$

一个关于桃子的故事（特征分析）

- 如果我们不对整个论域做全称判断或存在判断，而是对论域的一部分，即论域的真子集做全称判断或存在判断，则需要引进一个一元谓词表示这个真子集，我们称这个一元谓词为特征谓词。
- 如果是全称判断，特征谓词后应该用蕴涵联结词 $\rightarrow$；如果是存在判断，特征谓词后应该用合取联结词 $\wedge$。

全称和存在量词的关系

- $\exists x G(x)$ 表达命题“世界上至少有一个好桃子”。$\neg\forall x \neg G(x)$ 表达命题“世界上的桃子都不好是不对的”。它们表达同样的意思。这表明用 $\neg$ 和 $\forall x$ 可以表达 $\exists x$。
- $\forall x G(x)$表达命题“世界上的桃子都是好的”，$\neg\exists x \neg G(x)$ 表达命题“世界上有不好的桃子是不对的”。它们表达了同样的意思。这表明也可以用 $\neg$ 和 $\exists x$ 表达 $\forall x$ 。

自然语言的逻辑表达（1）

- 例题：每个自然数都大于0。
- 语句规范过程：
  - (1) 因为量词'任意'与词'每个'含义相同，所以语句改为
    - '任意自然数都大于**0**'。
  - (2) 量词‘任意‘是约束个体（实际约束群体/集合）
    - 语句'任意自然数都大于**0**'的含义不是‘任意个体***x***，***x***大于**0**'，而是满足约束条件'*x*是自然数‘的任意个体***x***，具有性质'***x***大于**0**'。
- 语句应改为
- ‘对任意***x***，如果***x***是自然数，那么，***x***大于**0**'。

自然语言的逻辑表达（2）

- 例题：存在自然数等于$\mathbf{0}$。
- 语句规范过程：
- (2) 量词‘存在’约束个体（元素）
  - 语句'存在自然数等于0'的含义是
    ‘存在个体$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$是自然数，并且$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$'。
- 语句应改为
- '存在$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$是自然数，并且$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$'。
- $\boldsymbol{Q_0(x)}$表示：$\boldsymbol{x}$是自然数；$\boldsymbol{Q_1(x,y)}$表示：$\boldsymbol{x=y}$。
- $\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Q_0(x)} \wedge \boldsymbol{Q_1(x,0)})$

符号化一般方法（1）

- 自然知识可以表示为命题，所有的自然律也可以表达为命题。
- 自然语言的命题符号化方法：
  - (1) 在复合语句中识别出陈述句，并用下划线标出
  - (2) 陈述语句符号化
    - 相同（不同）的个体用相同(不同)常元或变元符号表示
    - 相同（不同）函数用相同（不同）函数符号表示
    - 相同（不同）性质或关系用相同（不同）谓词符号表示
  - (3) 联接词及量词符号化
    - '并且'表示为'∧'，'或'表示为'∨'，'并非'表示为'¬'，'如果…，则…。'表示为'→'，'当且仅当'表示为'↔'
    - '任意'表示为'∀'，'存在'表示为'∃'，形成符号化的命题。

符号化一般方法（2）

- 例题：对于任意x，如果x是自然数，则存在y，y是自然数，并且y大于x。
- (1) 陈述句识别
  - 对于任意x，如果x是自然数，则存在y，y是自然数，并且y大于x。
- (2) 陈述句符号化
  - 对于任意x，如果$Q(x)$，则存在y，$Q(y)$，并且$R(y,x)$。
- (3) 联接词和量词符号化
  - $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \land R(y,x)))$

符号化机械过程

- 自然语言的命题符号化方法是机械式过程，无需理解具体概念的含义，仅仅将相同的个体、函数、性质或关系分别用相同符号表示。
- 复合语句由简单语句、联接词及量词构成。
  - 首先，识别出简单语句，而后，简单语句符号化
  - 复合语句由符号化的简单命题形式和联接词及量词构成。
  - 复合语句就可以根据联接词及量词的含义，形成符号化的命题。

命题与论域

- 通常，对各种不同论域的命题进行逻辑分析，其结果能应用于各种不同论域。因此，个体变元不仅仅作用于某一个论域，而作用于所用的论域。

- 命题：存在自然数x是素数。
  - 存在x，x是自然数并且x是素数。
  - $Q(x)$：x是自然数；$R(x)$：x是素数；
  - $\exists x(Q(x) \land R(x))$
- 命题：所有自然数x，都有$x = x$。
  - 所有x，如果x是自然数，那么$x = x$。
  - $Q(x)$：x是自然数；
  - $\forall x(Q(x) \to x = x))$

数学分析概念

- 在研究过程中，首先用定义的方式给出概念，而后研究概念的性质以及概念之间的关系，形成定理。
- 概念的定义是复合语句，也能够用机械方式符号化
- 自然语言表达序列极限、函数极限、连续、一致连续、导数等概念，人们可能有二义性理解，即人们对这些概念含义会有不同的理解。
- 如果这些概念符号化，那么，人们对这些概念的理解就会相同。

极限的定义

- 柯西：当属于一个变量的相继值无限地趋近某个固定值时，如果以这样一种方式告终，变量值同固定值之差，小到我们希望的任意小，那么这个固定值就称为其他所有值的极限。
- 维尔斯特拉斯：

  对于任意$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，使得只要$\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \boldsymbol{\delta}$，就有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \boldsymbol{\varepsilon}$。

  《微积分的历程—从牛顿到勒贝格》
- 数学语言

  $$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \Leftrightarrow$$

  $\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，$\exists \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，$\forall \boldsymbol{x}(\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \boldsymbol{\delta} \to |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}|$

函数极限

- 定义：设$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是函数，对于任意$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \boldsymbol{\varepsilon}$，则称$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时，函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的极限为$\boldsymbol{A}$。
- (1) 陈述句识别：
  - 对于任意$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \boldsymbol{\varepsilon}$。
- (2) 陈述句符号化：
  - 对于任意$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任意$\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \boldsymbol{\varepsilon}$。
- (3) 联接词和量词符号化
  - $\forall \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0} \rightarrow \exists \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} \wedge \forall \boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \boldsymbol{\delta} \rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \boldsymbol{\varepsilon})))$

连续和一致连续

- 定义：对于任意$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})| < \boldsymbol{\varepsilon}$，则称$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x_0}$时，函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x_0}$点连续，$\boldsymbol{x_0}$点为连续点。
- 定义：对于任意$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x_1}$和$\boldsymbol{x_2}$，当$|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})| < \boldsymbol{\varepsilon}$，则称函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$一致连续
-

连续

- 定义：对于任意$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})| < \boldsymbol{\varepsilon}$，则称$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x_0}$时，函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x_0}$点连续，$\boldsymbol{x_0}$点为连续点。
- (1) 陈述句识别：
  - 对于任意$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})| < \boldsymbol{\varepsilon}$。
- (2) 陈述句符号化：
  - 任意$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x}$，当$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})| < \boldsymbol{\varepsilon}$。
- (3) 联接词和量词符号化
  - $\forall \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0} \rightarrow \exists \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} \wedge \forall \boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta} \rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})| < \boldsymbol{\varepsilon})))$

一致连续

- 定义：对于任意$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x_1}$和$\boldsymbol{x_2}$，当$|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})| < \boldsymbol{\varepsilon}$，则称函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$一致连续
- (1) 陈述句识别：
  - 对于任意$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x_1}$和$\boldsymbol{x_2}$，当$|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})| < \boldsymbol{\varepsilon}$。
- (2) 陈述句符号化：
  - 对任意$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$，存在$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0}$，对于任何$\boldsymbol{x_1}$和$\boldsymbol{x_2}$，当$|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}| < \boldsymbol{\delta}$时，都有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})| < \boldsymbol{\varepsilon}$。
- (3) 联接词和量词符号化
  - $\forall \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0} \rightarrow \exists \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} \wedge \forall \boldsymbol{x_1} \forall \boldsymbol{x_2}(|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}| < \boldsymbol{\delta} \rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})| < \boldsymbol{\varepsilon})))$

导数

- 定义：对于任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，对于任何x，当$|\Delta x| < \delta$时，都有$|\Delta f(x)/\Delta x - A| < \varepsilon$，则称函数$f(x)$在$x$点可导，导数为$A$。
- (1) 陈述句识别：
  - 对于任意ε，$\varepsilon > 0$，存在δ，$\delta > 0$，对于任何x，当$|\Delta x| < \delta$时，都有$|\Delta f(x)/\Delta x - A| < \varepsilon$。
- (2) 陈述句符号化：
  - 任意ε，$\varepsilon > 0$，存在δ，$\delta > 0$，对于任何x，当$|\Delta x| < \delta$时，都有$|\Delta f(x)/\Delta x - A| < \varepsilon$。
- (3) 联接词和量词符号化
  - $\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta(\delta > 0 \land \forall x(|\Delta x| < \delta \rightarrow |\Delta f(x)/\Delta x - A| < \varepsilon)))$

唯一性

- 定理：若序列的极限存在，则极限值唯一。
- $\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists N_1(N_1 > 0 \land \forall n(n > N_1 \to |x_n - a| < \varepsilon))), \forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists N_2(N_2 > 0 \land \forall n(n > N_2 \to |x_n - b| < \varepsilon))) \vdash a = b$

有界性

- 定理：若序列$\{x_n\}$有极限，则$\{x_n\}$有界。
- $\forall \varepsilon(\varepsilon > 0 \rightarrow \exists N(N > 0 \wedge \forall n(n > N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon))) \vdash \exists M(M > 0 \wedge \forall n(n > 0 \rightarrow |x_n| < M))$

符号化作用

- 理解了联接词$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$的含义以及量词$\forall, \exists$的含义
- 理解了符号化的原子命题含义是真值
- 准确表达定义
  - 准确地描述符号化的序列极限、函数极限、连续、一致连续、导数等概念
- 各个论域上的命题具有一般的表达方式。

判断命题问题

- 如何判断简单命题的真值？
- 如何判断复合命题的真值？

命题的逻辑构造

- 命题：
  - 概念定义是命题。
  - 运算定义是命题。
  - 关系定义是命题。
  - 定理是命题。
- 逻辑命题能由自然语言描述机械式的变换为逻辑描述
  - 联接词$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - 量词$\forall, \exists$
  - 谓词、函词和常元
- 逻辑命题是形式的


谢谢