回顾：谓词逻辑语言

- 谓词逻辑语言，又称一阶逻辑语言
  - 逻辑符号：包括变元、联接词、量词；
  - 非逻辑符号：包括常元、函数、谓词；
  - 仅有个体变元；
  - 按形成规则构成的合式公式集合
- 谓词逻辑，也称为狭义谓词逻辑
  - 谓词都是关于个体的性质或关系，而不涉及关系的性质或关系之间的关系；
  - 函数是关于个体的函数；
  - 量词只作用于个体变元。
- 谓词逻辑语言适用于分析和表示所研究的各种命题或命题形式。

语法：字符集

- **逻辑符号**，包括变元、联接词、量词、逗号以及括号等：
  - 变　元：$x_1, x_2, \ldots$
  - 联接词：$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus$
  - 量　词：$\forall, \exists$
  - 逗　号：,
  - 括　号：(,)
- **非逻辑符号**，包括常元、**函数、谓词**等：
  - 常　元：$c_1, c_2, \ldots$
  - 函　数：$f_1^1, f_2^1, \ldots\ldots$；　$f_1^2, f_2^2, \ldots\ldots$
  - 谓　词：$P_1^1, P_2^1, \ldots\ldots$；　$P_1^2, P_2^2, \ldots.$

语法：项形成规则

- **定义：项**
  - (1) 个体常元是项；
  - (2) 个体变元是项；
  - (3) 若是$t_1, \ldots, t_n$项，f_i^n是n元函数，则$f_i(t_1,\ldots,t_n)$是项。

- **注：个体常元、个体变元和函数都是不表示任何意义的抽象符号 – 区别于语义。**
  - a, b, c是个体常元；
  - x, y是个体变元；
  - f_1^1是1元函数，f_1^2是2元函数
  - $f_1^2(a, f_1^1(x))$是项；而$f_1^2(a, b, c)$不是项，$f_1^3(a, b)$不是项

语法：合式公式形成规则

- 定义：合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串。
- (1) 若$t_1,\ldots,t_n$是项，Q_i^n是n元谓词，则$Q_i^n(t_1,\ldots,t_n)$是合式公式;
- (2) 若Q是合式公式，则$(\neg Q)$是合式公式；
- (3) 若Q和R是合式公式，则$(Q \wedge R)$、$(Q \vee R)$、$(Q \to R)$ 、$(Q \leftrightarrow R)$及$(Q \oplus R)$是合式公式；
- (4) 若Q是合式公式，x是变元，则$(\forall xQ)$,$(\exists xQ)$是合式公式。
- (5)只有有限次应用(1)—(4)构成的公式是合式公式。

本章内容

- 谓词合式公式语义
- 推论关系和相等关系
  - 推论与等价关系的语义
  - 推论判断的方法
  - 重要定理
- 前束范式与斯科伦范式
- 一阶理论语言
- 论域、结构与模型

命题真值赋值函数

- 从合式公式到逻辑集合{0,1}的函数称为真值赋值函数。
- V：A $\to$ {0,1}
- 设v是真值赋值函数，用p^v表示v赋给命题变元p的真值, $v \in \{0, 1\}$。
- 合式公式的语义是逻辑真值。
- 合式公式的常元0和1的语义分别对应逻辑真值0和1；

命题真值赋值

- 由S生成的公式Q在真值赋值v下的真值v(Q)定义如下：
- (1)若Q是S中的0元联结词c，则v(Q)=c。
- (2)若Q是命题变元p，则$v(Q)= p^v$。
- (3)若Q是$FQ_1\ldots,Q_n$，其中$n\geq1$， F是S中的n元联结词， Q_i是公式，则

$v(Q)=v(FQ_1\ldots Q_n)=Fv(Q_1)\ldots v(Q_n)$。

命题合式公式语义

- 设S是联结词的集合是{¬， ∧， ∨， ⊕ ， →， ↔}。
- 由S生成的合式公式Q在真值赋值v下的**真值指派** v(Q) ：
- (1) $v(0)=0$, $v(1)=1$。
- (2) 若Q是命题变元p，则 $v(Q)= p^v$。
- (3) 若 Q_1,Q_2 是合式公式
  - 若 $Q= \neg Q_1$， 则 $v(Q)= \neg v(Q_1)$
  - 若 $Q=Q_1 \wedge Q_2$， 则 $v(Q)=v(Q_1)\wedge v(Q_2)$
  - 若 $Q=Q_1 \vee Q_2$， 则 $v(Q)=v(Q_1)\vee v(Q_2)$
  - 若 $Q=Q_1\rightarrow Q_2$， 则 $v(Q)=v(Q_1)\rightarrow v(Q_2)$
  - 若 $Q=Q_1 \leftrightarrow Q_2$， 则 $v(Q)=v(Q_1)\leftrightarrow v(Q_2)$
  - 若 $Q=Q_1\oplus Q_2$， 则 $v(Q)=v(Q_1)\oplus v(Q_2)$

谓词公式的真值

- 例：公式 $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$
  - 在实数域上，该公式为真
  - 在自然数域上，该公式为假

论域

- 例：公式 $\forall x \forall y(P(x,y) \to \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)))$

  论域为整数域
  - P解释为整数上的“小于关系”，则该公式为假
  - P解释为整数上的“小于等于关系”，则该公式为真

谓词

- 例：公式$\forall x(f(x,a) = x)$

  论域为实数域
  - f函数解释为实数上的加法函数，a解释为0，该公式为真
  - f函数解释为实数上的乘法函数，a解释为0，该公式为假
  - f函数解释为实数上的乘法函数，a解释为1，该公式为真

常元，函数

- 例：公式 $\forall y(P(x,y))$ 自由变元
  - P 解释为自然数域上的小于等于关系。
- 当公式中没有自由变元时，通过指定论域、谓词解释、函数和常元，该公式成为一个命题。
- 当公式中有自由变元时，通过指定论域、谓词解释、函数和常元，该公式成为一个命题函数（命题形式）。只有在对个体变元指定确定的值（个体域中的个体）后，才得到一个命题。

谓词语义与命题语义间差别？

谓词逻辑下语义：解释

- **定义：一个解释I 由以下四部分组成：**
  - (1)指定一个非空集合 D_I，称为 I 的论域
  - (2) 对于每个常元c，指派D_I中一个元素c^I。
  - (3) 对于每个n元函数f，指派一个D 上的一个n元运算f^I。
  - (4) 对于每个n元谓词Q，指派一个D 上的一个n元关系Q^I。

- **解释作用**
  - 常元c，指派一个论域上的常量；
  - n元函数，指派一个论域上的n元计算；
  - n元谓词，指派一个论域上的n元性质（关系）；
  - 经过解释以后确定了合式公式中的常元、函数和谓词到论域中常量、函数和关系之间的对应。

语义：解释

- 论域也称为个体域，其中的元素称为个体。论域是变元的取值范围，它规定了全称量词的意义。
- 解释规定了常元、函数符号、谓词符号的具体意义，但并没有为变元规定具体的值。变元的取值由赋值规定。
- 一个解释是由四部分构成的，即使两个解释的论域相同，而对常元、函数符号、谓词符号的解释不完全相同，也不能认为它们是同样的解释。

谓词逻辑下赋值

■**定义** 设I是一个解释，从所有变元组成的集合到论域 D_I 的函数称为 I 中的赋值（指派）。

■赋值的更新：设 v 是解释 I 中的赋值，$x_1,\ldots, x_n$ 是不同变元， $d_1,\ldots, d_n$ 是 D_I 中元素，则赋值 $v[x_1/d_1,\ldots, x_n/d_n]$ 表示将$d_1,\ldots, d_n$ 分别赋予变元 $x_1,\ldots, x_n$，而对其它变元的赋值与 v 赋予该变元的值相同，即

$$v[x_1/d_1,\cdots,x_n/d_n](y)=\begin{cases} d_1 & \text{若}y\text{是}x_1 \\ \vdots & \vdots \\ d_n & \text{若}y\text{是}x_n \\ v(y) & \text{否则} \end{cases}$$

谓词逻辑下项和公式的语义

- 给定一个解释 I 以后，还不能确定项 t 指哪个个体，因为 t 中变元的值还没有确定。t 在解释 I 下的意义 $I(t)$ 看做从赋值集合到论域 D_I 的函数，一旦给定了赋值 v，所指的个体就唯一确定了，即函数 $I(t)$ 在自变量 v 处的值 $I(t)(v)$。
- 给定一个解释 I 以后，还不能确定公式 A 指哪个命题，因为 A 中自由变元的值还没有确定。A 在解释 I 下的意义 $I(A)$ 看做从赋值集合到真值集合 $\{0, 1\}$ 的函数，一旦给定了赋值 v，所指的命题的真值就唯一确定了，即函数 $I(A)$ 在自变量 v 处的值 $I(A)(v)$。

解释和赋值共同规定了项和公式的语义。

指派与解释

- **定义3.5.2** 命题形式的自由变元被指定为集合中的一个常元称为**指派**，记为 $\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{C}$。
- **定义3.5.3** 设L是语言，$\boldsymbol{D}$是论域，一个**解释**$\boldsymbol{I}$由以下四部分组成：
  - 对于每个常元$\boldsymbol{c}$，指派为$\boldsymbol{D}$上一个常量$\boldsymbol{c}$；
  - 对于每个$\boldsymbol{n}$元函词$\boldsymbol{f}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个$\boldsymbol{n}$元函数$\boldsymbol{f}$；
  - 对于每个$\boldsymbol{m}$元谓词符$\boldsymbol{Q}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个$\boldsymbol{m}$元关系$\boldsymbol{Q}$；
  - 对于每个自由变元$\boldsymbol{x}$，指派为$\boldsymbol{D}$上的一个常量$\boldsymbol{c}$，也称为赋值函数。
- **定义3.5.5** **解释和指派统称为指派函数（简称指派）**，对于合式公式$\boldsymbol{Q}$，记为$\boldsymbol{\sigma}: \boldsymbol{Q} \rightarrow \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$。

指派为合式公式$\boldsymbol{Q}$确定一个真值，即语义

- **例：** 自然数论域， f^σ:自然数乘法， g^σ为自然数加法， a^σ=2，σ(x)=1，求项f(g(a,x),a)的值。
  - $\sigma\big(f(g(a,x),a)\big)$
  - $= f^\sigma(g(a,x),a)$
  - $= f^\sigma(g^\sigma(a,x),a^\sigma)$
  - $= f^\sigma(g^\sigma(a^\sigma,x^\sigma),a^\sigma)$
  - $= \times(+(2,1),2)$
  - $= (2+1)\times 2$
  - $= 6$

语义：项的语义

- 设 v 是解释 I 中的赋值，项 t 在解释 I 和赋值 v 下的意义 I(t)(v) 定义如下：

1. 若 t 是变元 x，则 I(t)(v) = v(x)。
2. 若 t 是常元 a，则 $I(t)(v) = a^I$ 。
3. 若 t 是 $f(t_1,\ldots,t_n)$，其中 f 是 n 元函数符号，$t_1,\ldots,t_n$ 是项，则 $I(t)(v) = f^I(I(t_1)(v),\ldots,I(t_n)(v))$

- 定义递归地定义了项的语义

- 给常元a指派论域上一个个体a^I来表示它的语义；(常元的值由解释指定)
- 给变元x指派论域上一个个体v(x)来表示它语义；(变元的值由赋值指定)
- 给函数$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$的函数符f指派一个函数f^I，给项$t_1, t_2, \ldots, t_n$指派$I(t_1)(v), I(t_2)(v), \ldots, I(t_n)(v)$来表示它的语义。(函数的意义由解释指定)

项求值

- 设σ是指派函数，项t在σ下的值t^{σ}定义为:
  (1) 若t是常元a，则$t^{\sigma} = \sigma(t)$=a
  (2) 若t是变元x，则$t^{\sigma} = \sigma(t) = \sigma(x)$
  (3) 若t是f(t_1,t_2,…, t_n)，则
  $$t^{\sigma} = \sigma(t) = f^{\sigma}(\sigma(t_1) \ldots, \sigma(t_1))$$

项的语义举例

- 设f, g是二元函数，I是解释：论域是自然数论域，f^I是自然数加法，g^I是自然数乘法，$a^I=3$，$v(x)=4$。
- $I(f(g(x, a), f(a,x)))(v)$

$=f^I(I(g(x,a))(v), I(f(a,x))v)$

$=f^I(g^I(I(x)(v), I(a)(v)), f^I(I(a)(v), I(x)(v)))$

$=f^I(g^I(v(x), a^I), f^I(a^I, v(x)))$

$=f^I(g^I(4, 3), f^I(3, 4))$

$=+(\times(4, 3), +(3, 4))$

$=+(12, 7)$

$=19$

公式的语义

- 定义3.1.1 设 v 是解释 I 中的赋值，公式 A 在解释 I 和赋值 v 下的意义 I(A)(v) 定义如下：

1. 若 A 是 $P(t_1,\cdots,t_n)$，其中 P 是 n 元谓词符号，$t_1,\cdots,t_n$ 是项，则
$$I(A)(v) = P^I(I(t_1)(v),\cdots,I(t_n)(v))$$
2. 若 A 是 $\neg B$，其中 B 是公式，则 $I(A)(v) = \neg I(B)(v)$ 。
3. 若 A 是 $B \to C$，其中 B, C 是公式，则
$$I(A)(v) = I(B)(v) \to I(C)(v)$$
4. 若 A 是 $\forall xB$，其中 B 是公式，x 是变元，则

$$I(A)(v) = \begin{cases} 1 & \text{若对于每个 } d \in D_I,\ I(B)(v[x/d]) = 1 \\ 0 & \text{若存在 } d \in D_I \text{ 使得 } I(B)(v[x/d]) = 0 \end{cases}$$

被定义符号的公式的语义定理

- **定义3.1.2** 设 v 是解释 I 中的赋值， A 和 B 是公式。
  1. $I(A \vee B)(v) = I(A)(v) \vee I(B)(v)$
  2. $I(A \wedge B)(v) = I(A)(v) \wedge I(B)(v)$
  3. $I(A \leftrightarrow B)(v) = I(A)(v) \leftrightarrow I(B)(v)$
  4. $I(A \oplus B)(v) = I(A)(v) \oplus I(B)(v)$
  5.

$$I(\exists x A)(v) = \begin{cases} 1 & \text{若有 } d \in D_I \text{ 使得 } I(A)(v[x/d]) = 1 \\ 0 & \text{若对于每个 } d \in D_I, I(A)(v[x/d]) = 0 \end{cases}$$

关键证明思路：$\exists x A = \neg \forall x \neg A$

证明

$$I(\exists xA)(v)=\begin{cases}1 & 若有\, d\in D_I\, 使得\, I(A)(v[x/d])=1\\ 0 & 若对于每个\, d\in D_I, I(A)(v[x/d])=0\end{cases}$$

5. $\exists xA = \neg\forall x\neg A$

- **若有 $d\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d\,])=1$，**

  则有 $d\in D_I$ 使得 $I(\neg A)(v[x/d\,])=0$，

即 $I(\forall x\neg A)(v)=0$，所以$I(\neg\forall x\neg A)(v)=1$ 。

- **若对于每个 $d\in D_I$， $I(A)(v[x/d\,])=0$，**

  则对于每个 $d\in D_I$， $I(\neg A)(v[x/d\,])=1$，

即$I(\forall x\neg A)(v)=1$，所以$I(\neg\forall x\neg A)(v)=0$ 。

合式公式语义

- **定义3.1.2** 设合式公式 $\exists x Q(x)$，σ是**指派**，则

$$\sigma\big(\exists x Q(x)\big) = \exists x\, \sigma\big(Q(x)\big)$$

其中，$\sigma\big(\exists x Q(x)\big)$定义为：

- $\sigma\big(\exists x Q(x)\big) = 1$，存在$d$，使得$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$
- $\sigma\big(\exists x Q(x)\big) = 0$，对于任意$d$，都有$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 0$

合式公式语义

- 量词∀, ∃解释为逻辑量词∀, ∃
  - $\forall x\,\sigma\big(Q(x)\big)$表示：对于任意$d$，都有$Q^{\sigma}(x)[x/d]=1$
  - $\exists x\,\sigma\big(Q(x)\big)$表示：存在$d$，使得$Q^{\sigma}(x)[x/d]=1$
  - 取值为0的情况与之类似
- 通过指派函数，将一个合式公式的联结词符号指派为逻辑联结词，将量词符号指派为逻辑量词，将谓词符号指派为谓词，将函词符号指派为函数，将个体符号指派为对象，即将合式公式逐步指派为有语义的逻辑公式。

全称和存在量词语义

- 设解释 I 的论域 $D_I = \{a_1,\ldots, a_n\}$ 是有穷集合，v 是 I 中赋值，则
  - $I(\forall xA)(v) = I(A)(v[x/a_1]) \wedge \ldots \wedge I(A)(v[x/a_n])$
  - $I(\exists xA)(v) = I(A)(v[x/a_1]) \vee \ldots \vee I(A)(v[x/a_n])$
- 全称量词是合取的推广，存在量词是析取的推广。
- 对于论域是有穷集合的情况，计算公式的真值时可用这两个公式消去量词。

合式公式的语义

- 我们可以用指派函数方法证明合式公式的语义
- 例题3.1.1 判断$\forall x Q(x) \rightarrow \exists x Q(x)$的真值

$$\sigma\big(\forall x Q(x) \rightarrow \exists x Q(x)\big) = \sigma\big(\forall x Q(x)\big) \rightarrow \sigma\big(\exists x Q(x)\big)$$

$$= \forall x \sigma\big(Q(x)\big) \rightarrow \exists x \sigma\big(Q(x)\big)$$

$$= \forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x)$$

- 若 $\forall x Q^{\sigma}(x) = 0$，则$\forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x) = 1$；
- 若 $\forall x Q^{\sigma}(x) = 1$，则对于任意$d$，都有$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$，
  所以，存在d，使得$Q^{\sigma}(x)[x/d] = 1$，即$\exists x Q^{\sigma}(x) = 1$，
  所以，$\forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x) = 1$
- 综上，$\forall x Q^{\sigma}(x) \rightarrow \exists x Q^{\sigma}(x) = 1$，可得

$$\sigma\big(\forall x Q(x) \rightarrow \exists x Q(x)\big) = 1$$