北京航空航天大学

2016－2017 学年 第二学期期中

《 工科数学分析（2） 》

试 卷

班号__________ 学号____________ 姓名__________ 成绩___________

任课教师___________ 考 场___________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2017 年 05 月 7 日

一、　选择题（每小题 4 分，共 24 分）ACCDDA

1. 已知数列a_n满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=q$，下面命题正确的是（ A ）

① 当$q>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；　② 当$q<1$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

③ 当 $q>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；　④ 当$q<1$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

⑤ 当$q<1$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不一定发散.

A. ①②　　B. ③④　　C. ①⑤　　D. ③④⑤

2. 已知集合$E=\{(x,y)|xy\neq 0\}$，下面命题正确的是（ C ）

① 集合E是开集；　② 集合E是闭集；　③ 集合E是有界集；

④ 集合E是区域；　⑤ 集合E的导集$E'=R^2$.

A. ①②③　　B. ②③④　　C. ①⑤　　D. ②④⑤

3. 已知二元函数$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y}$，下面命题正确的是（ C ）

①$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$；　②$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=1$；

③$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$；　④$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$不存在.

A. ①③　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

4. 二元函数$z=xy(3-x-y)$的极值点为（ D ）

A. （0, 0）；　　B. (0, 3)；　　C. (3, 0)；　　D. (1, 1).

5. 设$f(x,y)$具有一阶偏导数，且在任意的(x,y)，都有$f_x(x,y)>0$，$f_y(x,y)<0$，则（ D ）

A. $f(0,0)>f(1,1)$；　　B. $f(0,0)<f(1,1)$；

C. $f(0,1)>f(1,0)$；　　D. $f(0,1)<f(1,0)$.

6. 函数$z=\sin x\cos y$在$(0,0)$ 点的 Taylor 公式为（ A ）

A. $x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}xy^2+o(\rho^4)$；

B. $x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}xy^2+o(\rho^3)$；

C. $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}x^2y^2+o(\rho^4)$；

D. $xy-\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{6}xy^3+o(\rho^4)$.

二、填空题（每空 3 分，满分 30 分）

1. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n\cdot n}$的收敛域为__$(-2,\ 2)$____，和函数为___$-\ln(1-\frac{x^2}{4})$______.

2. 函数$f(x)=x\cos x$ 在区间$(-\pi,\pi)$的傅立叶展开式为_$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, 其中 $b_1=-\frac{1}{2}$，$b_n=(-1)^n\frac{2n}{n^2-1}, n\geq 2,$_.

3. 设二元函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(\sqrt{xy},\ y)(x>0,y>0)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_ $\frac{1}{4}f_{11}+\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}f_{12}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}f_1$ _.

4. $A\,(1,1,1)$ 和 $B\,(2,3,4)$ 是 R^3 中的两点，则函数$u=xyz$在A点的梯度为 ___(1,1,1)___，在A点沿方向AB的方向导数为_ $\frac{6}{\sqrt{14}}$__.

5. 曲面$z=x^2+y^2$与曲面$2x^2+2y^2-z^2=0$的交线在点$(1,1,2)$ 处的切线方程为 ___$\frac{(x-1)}{1}=\frac{(y-1)}{-1}=\frac{z-2}{0}$____，法平面方程为___$x-y=0$____________________.

6. 已知函数$z=z(x,y)$ 由隐函数$F(x+y,\ y+z,\ z+x)=0$确定（其中$F(u,v,w)$可微），则$z_x=$___$-\frac{F_1+F_3}{F_2+F_3}$_____，z_y=___$-\frac{F_1+F_2}{F_2+F_3}$____.

三、(**本题 14 分**)讨论下面三个数项级数的收敛性，若收敛，是否是绝对收敛：(1).
证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}$ 条件收敛;

证明：由$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin n$的部分和有界，$\frac{1}{n}$单调递减趋于$0$， 使用狄利克雷判别法，可知$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$收敛，又$\cos\frac{1}{n}$单调，所以由阿贝尔判别法知道该级数收敛。

因为$\frac{\left|\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}\right|}{\left|\frac{\sin n}{n}\right|}$趋于 1，故$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}\right|$与$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin n}{n}\right|$有相同的敛散性。又由于

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|>\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1-\cos 2n}{2n}.$$

以及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$收敛，知$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin n}{n}\right|$发散，因此所讨论级数不绝对收敛，为条件收敛。

(2)证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}$ 绝对收敛;

证明：因为$\left|\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}\right|\le\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$，而$\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$与$\frac{1}{n^2}$为等价无穷小，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以原级数绝对收敛

(3)讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{n}$的收敛性.

解：因为$\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{n}=\frac{\sin n cos\frac{1}{n}}{n}+\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{n}$，由（1）（2）知，该级数收敛，如果该级数绝对收敛，则由（2）知道，$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}$绝对收敛，这矛盾于（1)，故该级数条件收敛。

建议标准：第 1 题 6 分，第 2 题 4 分，第 3 题 4 分.

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n}$ 的收敛性也可采用如下方法：$\sum_{n=1}^{+\infty}\sin n$ 的部分和有界，$\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}$ 单调递减趋于 0.（单调性部分使用导数验证）然后使用 Dirichlet 判别法。

四、（本题 10 分）设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$$

求证：（1）$f(x)$在$[0,+\infty)$ 连续；（2）$f(x)$在$(0,+\infty)$ 可导.

证明：（1）记$u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$， 则$u_n(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续，且

$$|u_n(x)|=\left|\frac{e^{-nx}}{n^2+1}\right|<\frac{1}{n^2}.$$

由 M − 判别法可知$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$在区间$[0,+\infty)$上一致收敛，因此和函数$f(x)$在区间

$[0,+\infty)$上连续。

(2) $u'_n(x)=\frac{-ne^{-nx}}{n^2+1}$. 任给 $\delta>0$, 在区间$[\delta,+\infty)$上有

$$|u'_n(x)|=\left|\frac{ne^{-nx}}{n^2+1}\right|<\frac{ne^{-\delta n}}{n^2+1},$$

由于正项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne^{-\delta n}}{n^2+1}$$

收敛，因此$\sum_{n=1}^{+\infty}u'_n(x)$ 在区间$[\delta,+\infty)$上一致收敛. 因此$f(x)$在区间$[\delta,+\infty)$

上可导，由δ的任意性，$f(x)$在$(0,+\infty)$ 可导.

建议标准：第 1 题 4 分，第 2 题 6 分

五、（本题 12 分）设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：（1） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续； （2） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点两个偏导数都存在；（3） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微； （4） $f(x,y)$ 的两个偏导数在 $(0,0)$ 点不连续.

证明：（1） 易见对任意的$(x,y)\neq(0,0)$，不等式

$$|f(x,y)|\leq\frac{|x^2y|}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}|x|$$

成立，因此任取$\varepsilon>0$， 可取$\delta=2\varepsilon$，则当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时

$$|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}|x|\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$. 因此$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(2)

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\ \ f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点两个偏导数都存在.

(3) 记$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$因为

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin x^2y}{\rho^3}$$

不存在（(x,y)沿着曲线$y=0$与曲线$y=x$趋于$(0,0)$的极限不一致），所以$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

(4) 因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微，所以$f(x,y)$ 的两个偏导数在 $(0,0)$ 点不连续.（注意此处使用结论：若二元函数在一点处关于 x 的偏导数存在，关于 y 的偏导数连续，则在该点处可微。）

建议标准：每小题各 3 分。

六 、（本题 10 分）设$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是给定的n个正数。求函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

在条件$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1$下的最小值，并据此证明 Cauchy 不等式

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

解：构造拉格朗日函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - 1).$$

求解$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)$的稳定点所满足的方程组：

$$\begin{cases} L_{x_1} = 2x_1 + \lambda a_1 = 0 \\ L_{x_2} = 2x_2 + \lambda a_2 = 0 \\ \cdots \\ L_{x_n} = 2x_n + \lambda a_n = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1 \end{cases}$$

可得唯一的一组稳定点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中

$$x_i = \frac{a_i}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2}.$$

由于$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$在所考虑条件下一定有最小值，且这个最小值一定在稳定点达到，因此$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在$x_i = \frac{a_i}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2}$时取到最小值

$$\frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2}.$$

由上述结论可知，当$a_i > 0, x_i > 0$，且$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1$时，

$$\frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2} \le x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

则对任给$b_i > 0, x_i > 0$，令$a_i = \frac{b_i}{b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots b_nx_n}$，则$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1$，由上述不等式可知

$$(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)^2 \le (b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

建议标准：前面求最小值 7 分，证明 Cauchy 不等式 3 分。

七、（附加题，本题 10 分）设数列$\{a_n\}$满足：$a_0 = 1$，$a_1 = 0$，$(n+1)a_{n+1} = na_n + a_{n-1}(n > 1$ 时$)$. 由$\{a_n\}$为系数生成幂级数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

证明：（1） 该幂级数收敛半径不小于1.

(2) 幂级数的和函数$S(x)$满足$(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$，并据此求出$S(x)$.

证明：（1） 使用数学归纳法可以证明$0 \le a_n \le 1$对所有$n = 1,2,3,\cdots$成立．因此当$|x| < 1$时，

$$|a_n x^n| \le |x|^n;$$

由于$\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$收敛，因此$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$绝对收敛. 由此可知$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$的收敛半径不小于 1.

（2）由幂级数的逐项可导性质知，

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1},$$

代入可知

$$(1-x)S'(x) - xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_n - a_{n-1}]x^n = 0.$$

求解常微分方程$(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$，$S(0) = 1$可得$S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

建议标准：第 1 题 4 分，第 2 题 6 分

第 1 问的另一种方法：由递推公式可得：$(n+1)(a_{n+1} - a_n) = -(a_n - a_{n-1})$．由递归易得 $(a_{n+1} - a_n) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1 - a_0) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. 因此可求得 a_n的通项公式为

$$a_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

不难算出 $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$. 因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$. 因此收敛半径为 1.

此题若对学生提高标准，则还需要求出级数的收敛域$(-1,1)$，此时需求出a_n的表达式，按参考答案中方法，可将$S(x)$泰勒展开求出a_n.