五个常用二元逻辑联结词（回顾）

- 定义1.3 二元联结词∧（合取），∨（析取），⊕（异或），→（蕴涵），↔（等价）的真值表如下。

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$	$p\oplus q$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0
		一假则假 全真则真	一真则真 全假即假	假可推真 真不可推假	同真同假则真 一假一真即假	一真则真 全假全真即假

(命题逻辑)合式公式定义（回顾）

- (1) 常元0和1是合式公式；
- (2) 命题变元是合式公式；
- (3) 若Q, R是合式公式，则：
  - $(\neg Q)$、$(Q \wedge R)$、$(Q \vee R)$、
  - $(Q \rightarrow R)$、$(Q \leftrightarrow R)$、$(Q \oplus R)$是合式公式；
- (4) 只有有限次应用规则(1)—(3)构成的公式是合式公式。

等价真值赋值（回顾）

- 定理1.1设Q是公式，v_1和v_2是真值赋值，对于Q中出现的每个命题变元p，$p^{v_1} = p^{v_2}$；则$v_1(Q)=v_2(Q)$。
- 证明 对Q的长度(复杂度)进行归纳。
- 若Q的长度是0，则Q是命题变元或0元联结词。
  - (1)若Q是0元联结词c，则$v_1(Q)=c=v_2(Q)$。
  - (2)若Q是命题变元p，

    则$v_1(Q) = p^{v_1} = p^{v_2} = v_2(Q)$。

等价真值赋值（回顾）

- 设m大于0，对于每个复杂度小于m的由S生成的公式B，$v_1(B)=v_2(B)$。
- (3)若Q是$FQ_1\ldots Q_n$，其中$n\geqslant 1$，F是S中的n元联结词，则$Q_1,\ldots,Q_n$的复杂度都小于m，由归纳假设知道，$v_1(Q_i)=v_2(Q_i)$ $i=1,\ldots,n$
  - $v_1(FQ_1\ldots Q_n)$
  - $=F\ v_1(Q_1)\ldots v_1(Q_n)$
  - $=F\ v_2(Q_1)\ldots v_2(Q_n)$
  - $=v_2(FQ_1\ldots Q_n)$
  - 因此，$v_1(FQ_1\ldots Q_n))= v_2(FQ_1\ldots Q_n)$
- 证毕

定理1.1的含义

- 若公式Q中出现的命题变元为$p_1,\cdots,p_n$，v是真值赋值，则v(Q)只与 p_k^v 有关。
- 用$(p_1/a_1,\ldots p_n/a_n)$表示满足$p_1^v,\ldots,p_n^v$的真值赋值v

$$p_1^v = a_1,\ldots,p_n^v = a_n$$

- 例1 设公式Q为p∨0→q∧1,真值赋值v=(p/1,q/0)
  - **v(Q)=v(p∨0→q∧1)**
  - **=v(p)∨ v(0)→v(q)∧ v(1)**
  - **= 1∨ 0→0∧ 1**
  - **=1→0**
  - **=0**

定理1.1的含义（续）

- 如果对公式中出现的每个命题变元都指派了确定的真值，则该公式的真值也就唯一确定了。因此，可将公式看做真值函数。
- $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q$

- $v(p)=0, v(q)=0$
- $v(\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q)$
- $=\neg(v(p)\wedge v(q))\leftrightarrow\neg v(p)\vee\neg v(q))$
- $=\neg(0\wedge 0)\leftrightarrow\neg 0\vee\neg 0$
- $=\neg 0\leftrightarrow 1\vee 1$
- $=1\leftrightarrow 1$
- $=1$

- $(p/0, q/1)$
  - $v(\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q)=1$
- $(p/1, q/0)$
  - $v(\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q)=1$
- $(p/1, q/1)$
  - $v(\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q)=1$

请大家观察特点

可满足性和有效性

- 定义1.7 设Q是公式。
- (1)如果真值赋值v使得v(Q)=1，则称v满足Q。
- (2)如果每个真值赋值都满足Q，则称Q为有效式，或称为永真式，也称为重言式。
- (3)如果每个真值赋值都不满足Q，则称Q为永假式，也称为矛盾式，不可满足式。
- (4)如果至少有一个真值赋值满足Q，则称Q为可满足式。

代换和替换

- 定义1.8用 $B_1,\dots,B_n$ 公式分别代换公式Q中的不同命题变元 $p_1,\dots,p_n$ 得到的公式记为 $[p_1/B_1,p_2/B_2,\cdots,p_n/B_n]Q$ 或 $Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n}$，称为Q的代换实例。
- 代换产生新的公式

$$(p \wedge \neg p \to q)^{p,q}_{r\to p,r}$$

- $= (r \to p)\wedge\neg(r \to p) \to r$ $\qquad$ $(p/r \to p,\ q/r)$

代换

- 定理1.2 设$p_1,\ldots,p_n$ 是不同命题变元，$Q,B_1,\ldots,B_n$ 是公式。则对于每个真值赋值v，

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v([p_1/v(B_1),\ldots,p_n/v(B_n)]Q)$$

- 其中真值赋值$v'=v[p_1/v(B_1),\ldots\ldots,p_n/v(B_n)]$定义如下：

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{p}) = v^{v'} = \begin{cases} v(B_1). & 若\boldsymbol{p}是\boldsymbol{p_1} \\ & \cdots \\ v(B_n). & 若\boldsymbol{p}是\boldsymbol{p_n} \\ \boldsymbol{p}^v & 否则 \end{cases}$$

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v'(Q)$$

代换

- **证明：** 对**Q**进行归纳。
- (1)若**Q**是$\mathbf{p_i}$，其中**1≤i≤n**，则 $Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n}$ 是$\mathbf{B_i}$，

$$v(Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n}) = v(B_i) = v'(Q)$$

代换

- 证明：对Q进行归纳。
- (1)若Q是p_i，其中$1 \le i \le n$，则 $Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}$ 是B_i，

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v(B_i) = v'(Q)$$

- (2)若Q是除$p_1,\ldots,p_n$之外的命题变元p，则$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n})$仍是p，

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v(p) = v'(Q)$$

代换

- 证明：对**Q**进行归纳。
- (1)若**Q**是**p$_i$**，其中**1≤i≤n**，则 $Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n}$ 是**B$_i$**，

$$v(Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n}) = v(B_i) = v'(Q)$$

- (2)若Q是除$p_1,\dots,p_n$之外的命题变元p，则$v(Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n})$仍是p，

$$v(Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n}) = v(p) = v'(Q)$$

- (3)若Q是0元联结词c，则$v(Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n})$ 仍是c，

$$v(Q^{p_1,\dots,p_n}_{B_1,\dots,B_n}) = v(c) = v'(Q)$$

代换

- (4)设$Q_1,\ldots,Q_k$是复杂度小于m的公式，并且

$$v(Q_{i}{}^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v'(Q_i)$$

代换

- (4)设$Q_1,\ldots,Q_k$是复杂度小于m的公式，并且

$$v(Q_i{}^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = v'(Q_i)$$

- 若Q是**F** $Q_1,\ldots,Q_k$，其中**F**是k元联结词，是长度等于m的公式,则是

$$v(Q^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}) = F(v((Q_1)^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}),\ldots,v((Q_{k1})^{p_1,\ldots,p_n}_{B_1,\ldots,B_n}))$$

$$= F(v'(Q_1),\ldots,v'(Q_k)) = v'F(Q_1,\ldots,Q_k) = v'(Q)$$

代换

- 定理1.3设Q是公式，
- (1)若Q是永真式，则Q的每个代换实例都是永真式。
- (2)若Q是永假式，则Q的每个代换实例都是永假式。
- 证明
- (1)任取永真式Q的代换实例$Q_{B_1,\dots,B_n}^{p_1,\dots,p_n}$，对于每个真值赋值v，

$$v(Q_{B_1,\dots,B_n}^{p_1,\dots,p_n}) = v[p_1/v(B_1),\dots p_n/v(B_n)](Q) = 1$$

- 所以$Q_{B_1,\dots,B_n}^{p_1,\dots,p_n}$是永真式。
- (2)可同样证明。
- 证毕

代换-例题

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$是永真式
- 设Q, R是任意公式
- $[p/Q, q/R]$
  - $Q = \neg p \lor \neg q$, $R = \neg(p \lor r)$
  - $(\neg p \lor \neg q) \rightarrow (\neg(p \lor r) \rightarrow (\neg p \lor \neg q))$是永真式

替换

- 定义1.8用 $B_1,\ldots,B_n$ 公式分别替换公式Q中的不同合式公式 $Q_1,\ldots,Q_n$ 得到的公式记为 $Q^{Q_1,\ldots,Q_n}_{B_1,\ldots,B_n}$ ，称为Q的替换实例。

替换

- 定理：设Q是合式公式，R_1是Q的子公式，若$R_1 \Leftrightarrow R_2$，则$Q \Leftrightarrow [R_1/R_2]Q$。
- 证明：
- 因为$R_1 \Leftrightarrow R_2$，所以，$v(R_1)= v(R_2)$。
- 首先选择一个不是公式Q中的命题变元p。不妨设命题变元p取代公式Q中的一个R_1而得公式为Q'。
- 因此，有 $[p/R_1]Q'=Q$，$[p/R_2]Q'= [R_1/R_2]Q$。

- 又因为$v([p/R_1]Q')= v([p/v(R_1)]Q')$，
- $v([p/R_2]Q')= v([p/v(R_2)]Q')$
- 因此，有$v([p/v(R_1)]Q')= v([p/v(R_2)]Q')$。
- 有$v([p/R_1]Q')= v([p/R_2]Q')$
- 有$v(Q)= v([R_1/R_2]Q)$。
- 有$Q \Leftrightarrow [R_1/R_2]Q$。
- 因此，若$R_1 \Leftrightarrow R_2$，有$Q \Leftrightarrow [R_1/R_2]Q$

python程序赋值函数

- 命题逻辑公式的语义都能够通过程序实现
- 设计python程序求命题逻辑公式的真值。
- 例题：求$\neg(Q \wedge R) \rightarrow (\neg Q \vee \neg R)$

```
def assignmentfunction(sigma):
  Q=sigma[0]
  R=sigma[1]
  tv=(not(not(Q&R))) | ((not Q) | (not R))
  return tv
```

```
def main():
  sigma=[1,1]
  tv=assignmentfunction(sigma)
  return tv
```

```
main()
True
```

内容

等值演算

逻辑域：　$L = \{ \{0, 1\}, \{\neg, \vee, \wedge, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \{\models, =, \Leftrightarrow\} \}$

在自然语言中:

无论天是否下雨，我都去上学。

p: 天下雨，q: 我去上学

可形式化为三种形式:

A: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$

B: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

C: q

三个公式语义相同

三个公式真值相等

$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$

- 我不是不会 ⇔ 我会
- 我不是不干 ⇔ 我干
- 我不是不能 ⇔ 我能

$A \Leftrightarrow \neg\neg A$

双重否定律

等值演算

- 定义1.9　设 A, B 是公式。如果对于每个真值赋值 v,
- $$v(A) = v(B),$$
- 则称 A 和 B 等值，也称 A 与 B “逻辑等价”，
- 记为 $A \Leftrightarrow B$。
- $A \Leftrightarrow B$ 的意思是：A 和 B 的逻辑语义相同，即
- 不论公式中的命题变元取什么赋值，公式A 和 B 的逻辑真值都是一样的，要真都真，要假都加。

$A \Leftrightarrow B$ “当且仅当” $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

判断逻辑等价
方法！
问：为什么?

A	B	A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

等值演算

$A \Leftrightarrow B$ 与
$A \leftrightarrow B$
一样吗?

$A \Leftrightarrow B$是两个
公式的关系

1、对于任意公式 A， $A \Leftrightarrow A$ 。 （自反）

2、若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $B \Leftrightarrow A$ 。 （对称）

3、若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$ 。 （传递）

$A \leftrightarrow B$只是
一个公式

$A \leftrightarrow B$永真
才说 $A \Leftrightarrow B$

等值演算

例 1.4： 用真值表判断如下两公式是否等值

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

从真值表可以看到，对任意的真值赋值 v 都有

$$v(\neg(p \vee q)) = v(\neg p \wedge \neg q)$$

也可看出：$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ 是永真式。

所以， $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

再由代换原理可知：

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

公式等值演算的重要依据

- 重要依据：定理1.3：
- 设A是公式
  - （1）若A是永真式，则A的每个代换实例都是永真式
  - （2）若A是永假式，则A的每个代换实例都是永假式
- 所以有：
  - $\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \leftrightarrow \neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}$ 是永真式
  - $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$是上式的代换实例
  - 所以$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$也是永真式
  - 进而，可以得到逻辑等值关系：
  - $\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \Leftrightarrow \neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$

用真值表分析寻找等值式

- 比如，析取式的“结合律”： $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

p	q	r	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

同理，合取、异或也有结合律：

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$，$(P \oplus Q) \oplus R \Leftrightarrow P \oplus (Q \oplus R)$

用真值表分析寻找等值式

- 例： 证明蕴含连接词的等价命题
- $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ 请大家试试
- 证：

p	q	¬p∨q	p→q	p→q↔¬p∨q
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

由于 $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$ 是永真式

用代换实例进行代换，$A \to B \leftrightarrow \neg A \vee B$也是永真

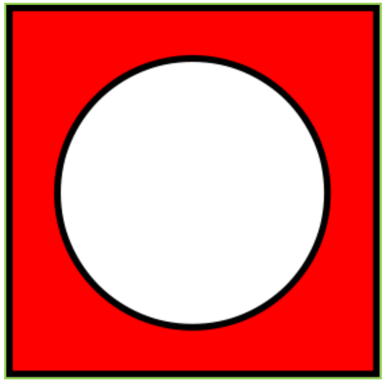
因此： $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等值式模式

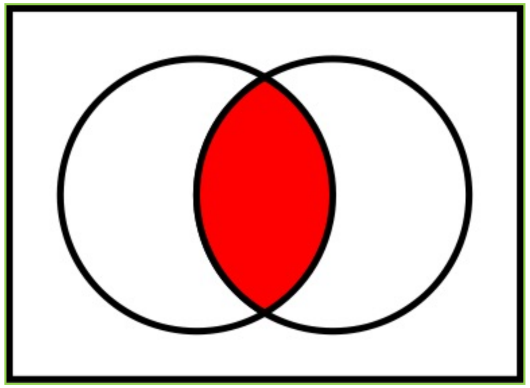
交换律	$Q\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$	$Q\wedge R\Leftrightarrow R\wedge Q$	$Q\oplus R\Leftrightarrow R\oplus Q$
结合律	$(P\vee Q)\vee R$ $\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$	$(P\wedge Q)\wedge R$ $\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$	$(P\oplus Q)\oplus R$ $\Leftrightarrow P\oplus(Q\oplus R)$
分配律	$P\vee(Q\wedge R)$ $\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	$P\wedge(Q\vee R)$ $\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	$P\wedge(Q\oplus R)$ $\Leftrightarrow(P\wedge Q)\oplus(P\wedge R)$
德•摩根律	$\neg(Q\vee R)\Leftrightarrow\neg Q\wedge\neg R$	$\neg(Q\wedge R)\Leftrightarrow\neg Q\vee\neg R$	
幂等律	$Q\vee Q\Leftrightarrow Q$	$Q\wedge Q\Leftrightarrow Q$	
同一律	$Q\wedge 1\Leftrightarrow Q$	$Q\vee 0\Leftrightarrow Q$	
吸收律	$Q\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow Q$	$Q\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow Q$	
零　律	$Q\vee 1\Leftrightarrow 1$	$Q\wedge 0\Leftrightarrow 0$	
排中律	$Q\vee\neg Q\Leftrightarrow 1$	双重否定律	$\neg\neg Q\Leftrightarrow Q$
矛盾律	$Q\wedge\neg Q\Leftrightarrow 0$	假言易位	$Q\rightarrow R\Leftrightarrow\neg R\rightarrow\neg Q$

通过观察文氏图，可以更直观地理解这个等价模式

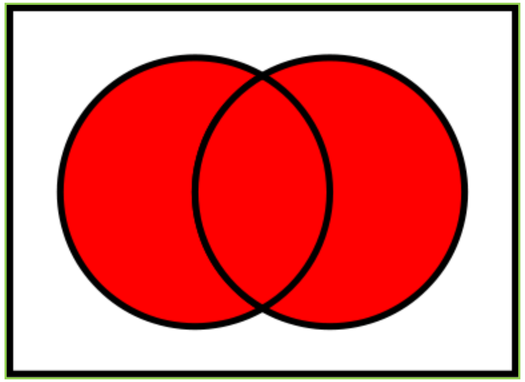
直观解释：逻辑运算的文氏图



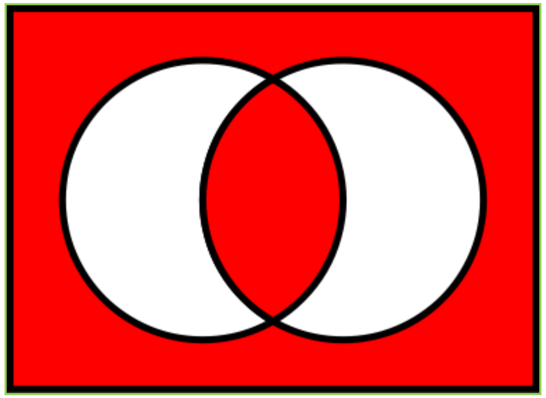
$\neg P$



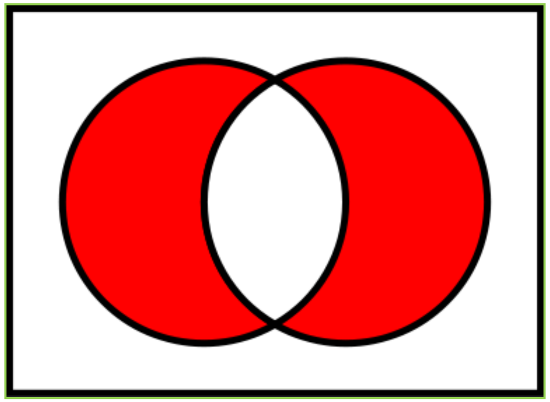
$P \wedge Q$



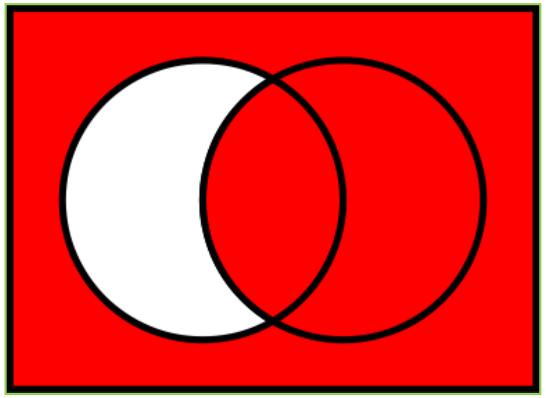
$P \vee Q$



$P \leftrightarrow Q$



$P \oplus Q$



$P \rightarrow Q$

等值模式

面对这么多公式

＞怎么才能尽快记住他们呢？

＞有什么方式去证明他们呢？

＞他们有什么用？怎么应用他们呢？

- 记忆这些公式，有如下建议：
- （1）形象化：用图形帮助进行直观的记忆
- （2）类　比：找到已熟悉的集合知识，知识迁移
- （3）分　组：分成有共同特点的若干组
- （4）找重点：会的不用记，专记那些不熟的

常用的等值式模式 1

（逻辑公式的演算法则）

- 交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
- $A \oplus B \Leftrightarrow B \oplus A$
- 结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \oplus B) \oplus C \Leftrightarrow A \oplus (B \oplus C)$
- 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \wedge (B \oplus C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \oplus (A \wedge C)$

$\vee\ \wedge\ \oplus$ 的等值演算规则

常用的等值式模式 2

（逻辑公式的演算法则）

- 双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg\neg A$
- 排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
- 矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
- 假言易位 $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$
- 幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$
- $A \wedge A \Leftrightarrow A$
- 德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
-

关于“否定”的等值演算规则

常用的等值式模式 3

（逻辑公式的演算法则）

- 吸收律　$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
- $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

有关“吸收”的
等值演算规则

- 同一律　$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
- $A \vee 0 \Leftrightarrow A$
- $A \oplus 0 \Leftrightarrow A$

- 零　律　$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
- $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

常用的等值式模式 4

（逻辑公式的演算法则）

- （1） $A \oplus A \Leftrightarrow 0$
- （2） $A \oplus 1 \Leftrightarrow \neg A$
- （3） $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- 蕴含的另一种形式
- （4） $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
- （5） $A \oplus B \Leftrightarrow \neg (A \leftrightarrow B)$
- （6） $A \oplus B \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

关于$\rightarrow \Leftrightarrow \oplus$的等值演算规则

例题

- 例： 证明德摩根律：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- 证： 用真值表可验证，$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$。

直接用真值表验证

- 德摩根律：$\neg(Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg R$

  $\neg(Q \wedge R) \Leftrightarrow \neg Q \vee \neg R$

p	q	$\neg(q \vee r)$	$\neg q \wedge \neg r$	$\neg(q \vee r) \leftrightarrow \neg q \wedge \neg r$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

p	q	$\neg(q \wedge r)$	$\neg q \vee \neg r$	$\neg(q \wedge r) \leftrightarrow \neg q \vee \neg r$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

例题

- 例：　证明德摩根律：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

- 证：　用真值表可验证，$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$。
- 因为 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ 是永真式，
- 它的任意代换实例
- $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- 也是永真式。
- 所以，$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$。

- 同学们也可以通过自己编写 python 程序，计算出相应的真值表，完成以上这些等值式的验证。

等值演算

- 对合式公式Q 和R，
- 存在等值式的序列 $Q_0, \cdots, Q_n$，
- 其中，$Q \Leftrightarrow Q_0$，$R \Leftrightarrow Q_n$，并且 $Q_k \Leftrightarrow Q_{k+1}$，
- 则称 $Q_0, \cdots, Q_n$为等值演算。

利用逻辑等价关系的传递性，一步步等值演算下去，就像代数式的演算一样。

目的：用于 $Q \Leftrightarrow R$ 的证明

等值演算

- 例： 通过等值演算证明
- $p \to (q \to r) \Leftrightarrow p \wedge q \to r$

- 证明： $p \to (q \to r)$
- $\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$
- $\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ 结合律
- $\Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee r$ 对偶律
- $\Leftrightarrow p \wedge q \to r$
- 所以
- $p \to (q \to r) \Leftrightarrow p \wedge q \to r$ 传递性
- 证毕。

例子

- 例：用等值演算证明
  - $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

请大家想一下思路

例子

- 例：用等值演算证明
  - $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
- 证明：
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
- $\vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge r)$ 排中律＋同一律
- $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
- $\vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$ 分配律
- $\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r))$
- $\vee ((\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r))$ 结合律
- $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ 吸收律
- 证毕。

例子

- 例 用等值演算证明 $p\oplus(q\wedge r)\rightarrow p\vee q\vee r$ 是永真式。
-

请大家试一试