北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳
数学科学学院

函数插值问题

一、插值多项式

二、Lagrange插值多项式

三、插值多项式的余项

四、分段线性插值

一、插值多项式

数学问题

已知函数$y=f(x)$在$[a,b]$上若干点处的函数(导数)值

或函数$y=f(x)$的表达式已知(但某点函数值很难求)

求$y=f(x)$在$[a,b]$上任一点处函数值的近似值

解决思路

根据$f(x)$在已知点的值,求一个足够光滑又比较简单的函数$\varphi(x)$作为$f(x)$的近似表达式,然后计算$\varphi(x)$在$[a,b]$上点x处的函数值作为原来函数$f(x)$在此点函数值的近似值

一、插值多项式

定义1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义，且已知在$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$点上的值$y_0, y_1, \cdots, y_n$. 若存在一简单函数$p(x)$，使得

$$p(x_i) = y_i, i = 0,1,2,\cdots,n \qquad (1.1)$$

成立，则称$p(x)$为$f(x)$的插值函数.

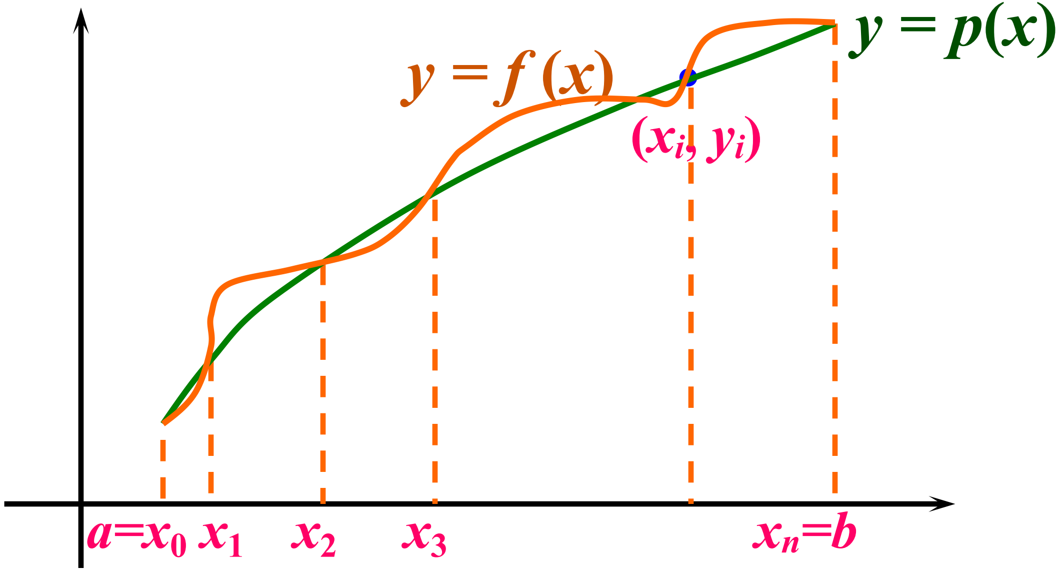
点$x_0, x_1, \cdots, x_n$称为插值节点，(1.1)式称为插值条件，$f(x)$称为被插值函数，$[a,b]$称为插值区间，求$p(x)$的方法称为插值法.

若$p(x)$是次数不超过n的实系数代数多项式，即$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，则称$p(x)$为$n$次插值多项式，相应的插值法称为多项式插值法.

简单函数：代数多项式、三角多项式、分式有理函数

一、插值多项式

从几何上看



研究问题

1.满足插值条件的$p(x)$是否存在唯一？

2.若满足插值条件的$p(x)$存在, 如何构造$p(x)$?

3.如何估计用$p(x)$近似替代$f(x)$产生的误差？

一、插值多项式

插值多项式的存在唯一性

设$p_n(x)$是$f(x)$的插值多项式，称插值多项式存在且唯一，即指在H_n中有且仅有一个$p_n(x)$满足(1.1)式.

由(1.1)可得
$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \quad\quad\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \tag{1.2}$$

插值多项式的存在唯一性$\Leftrightarrow$方程组(1.2)有唯一解

一、插值多项式

$$\text{系数行列式} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式

$$= \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

$$\neq 0 \ (x_i \neq x_j)$$

二、Lagrange插值多项式

求通过$n+1$个节点的n次插值多项式$L_n(x)$,满足插值条件$L_n(x_j)=y_j$,

$j=0,1,\cdots,n$

定义2 若n次多项式$l_k(x),k=0,1,\cdots,n$在各节点$x_0<x_1<\cdots<x_n$上满足条件:

$$l_k(x_j)=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases} \quad j,k=0,1,\cdots,n,$$

则称这$n+1$个n次多项式为这$n+1$个节点上的n次插值基函数.

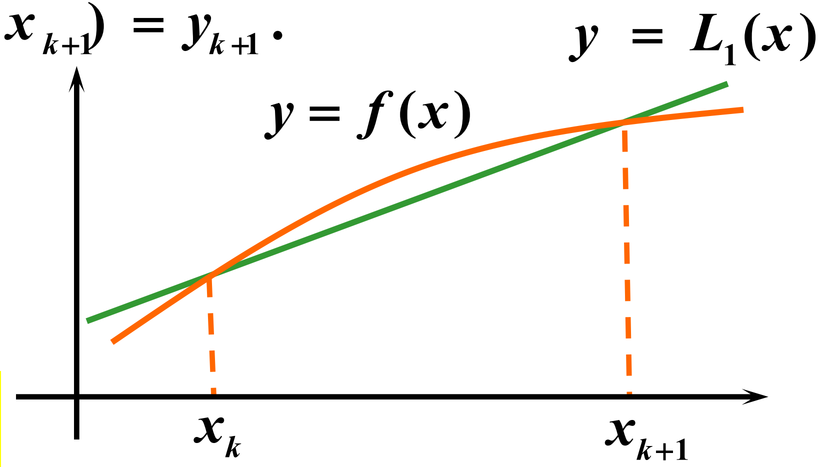
猜测 $$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)$$

二、Lagrange插值多项式

线性插值（n=1）

设已知区间$[x_k, x_{k+1}]$端点处的函数值$y_k = f(x_k), y_{k+1} = f(x_{k+1})$,

求多项式$L_1(x)$,使其满足$L_1(x_k) = y_k, L_1(x_{k+1}) = y_{k+1}$.

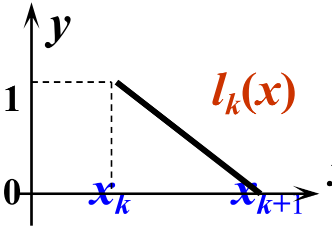


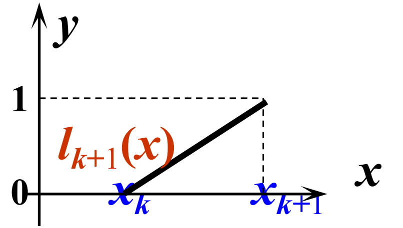
$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$

$$= \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1}$$

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$= y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$





二、Lagrange插值多项式

抛物线插值(n=2)

设插值节点为：x_{k-1}, x_k, x_{k+1}，求$L_2(x)$，使得$L_2(x_j)=y_j, j=k-1,k,k+1$

即求过三点$(x_{k-1},y_{k-1}),(x_k,y_k)$与$(x_{k+1},y_{k+1})$的抛物线

先求插值基函数$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$

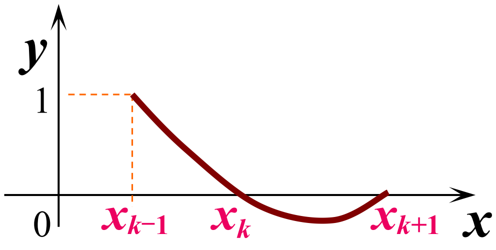
即在节点满足$\begin{cases} l_{k-1}(x_{k-1})=1,\ l_{k-1}(x_k)=l_{k-1}(x_{k+1})=0, \\ l_k(x_k)=1, \quad l_k(x_{k-1})=l_k(x_{k+1})=0, \\ l_{k+1}(x_{k+1})=1,\ l_{k+1}(x_{k-1})=l_{k+1}(x_k)=0, \end{cases}$的二次函数

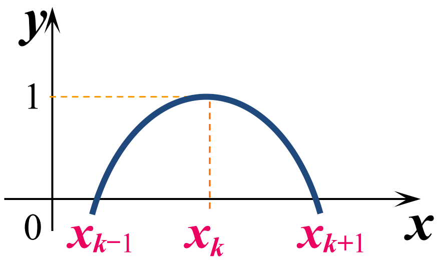
令$l_{k-1}(x)=A(x-x_k)(x-x_{k+1}) \Rightarrow A=\dfrac{1}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$

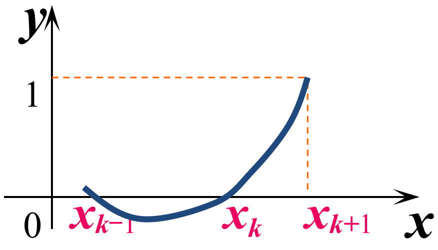
$$\therefore l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$$

二、Lagrange插值多项式

同理可得$l_k(x)=\dfrac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}, l_{k+1}(x)=\dfrac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$







$$L_2(x)=y_{k-1}l_{k-1}(x)+y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

$$=y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}+y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

$$+y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

二、Lagrange插值多项式

n次Lagrange插值

令$l_k(x)=A(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$,

$$A=\frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},k=0,1,\cdots,n.$$

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)l_k(x)$$

二、Lagrange插值多项式

定理1 设$y=f(x)$函数表$(x_i, f(x_i)), i=0,1,\ldots,n$ $(x_i \neq x_j$, 当$i\neq j$时), 则满足插值条件$L_n(x_i)=f(x_i),(i=0,1\ldots n)$的插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x),$$

其中 $l_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}, k=0,1,\ldots,n$.

注 令$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$,则

$$\omega'_{n+1}(x_k)=\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(x_k-x_i), L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

三、插值多项式的余项

$R_n(x)=f(x)-L_n(x)$称为截断误差

定理2（插值多项式余项）

已知$y=f(x)$函数表$(x_i,f(x_i)), i=0,1,\ldots,n(x_i\neq x_j$,当$i\neq j), x_i\in[a,b]$,

设$L_n(x)$为满足插值条件的 n次插值多项式. 若$f^{(n)}(x)$在$[a,b]$上连续，

$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在,则对任何$x\in[a,b]$,插值多项式余项为

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

其中$\xi\in(a,b)$且ξ依赖于x.

三、插值多项式的余项

线性插值：

$$余项R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_k)(x-x_{k+1}),\xi\in(a,b)$$

抛物线插值：

$$余项R_2(x)=f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1}),\xi\in(a,b)$$

三、插值多项式的余项

例1 设 $y=\ln x$，且有函数表

x	0. 40	0. 50	0. 70	0.80
$\ln x$	−0. 916291	−0. 693147	−0. 356675	−0. 223144

试计算 $f(0.6)=\ln 0.6$ 的近似值，并估计误差.

解 (1)线性插值 选取插值节点：$x_1=0.50,\ x_2=0.70$

$$f(0.6)\approx L_1(0.6)=\left[y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right]_{x=0.6}=-0.524911$$

误差 $R_1(0.6)=\dfrac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(0.6-0.5)(0.6-0.7)=\dfrac{0.01}{2}\cdot\dfrac{1}{\xi^2},\ 0.5<\xi<0.7$

故 $0.01<R_1(x)<0.02$

三、插值多项式的余项

(2)抛物线插值

选取插值节点：$x_1 = 0.50,\ \ x_2 = 0.70,\ \ x_3 = 0.80$

$$\ln 0.6 \approx L_2(0.6) = [y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)]_{x=0.6} = -0.513343$$

误差$R_2(0.6) = \dfrac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(0.6-0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8) = \dfrac{2}{3}\dfrac{10^{-3}}{\xi^3}$，$x_1 < \xi < x$

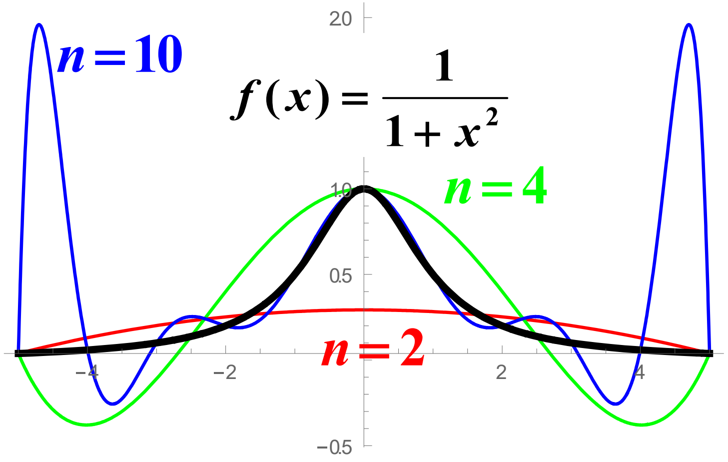
$$\therefore 1.3 \times 10^{-3} < R_2(0.6) < 5.34 \times 10^{-3}$$

$f(0.6) = \ln 0.6$ 的真值为：-0.510826 —— 抛物插值更精确

四、分段线性插值

在区间[-5,5]上考察$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的$Lagrange$插值多项式

取$x_i=-5+\dfrac{10}{n}i, i=0,1,2,\cdots,n$



$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,\quad x\in[-3.63,3.63]$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)\neq 0,\quad x\in[-5,-3.63)\cup(3.63,5]$$

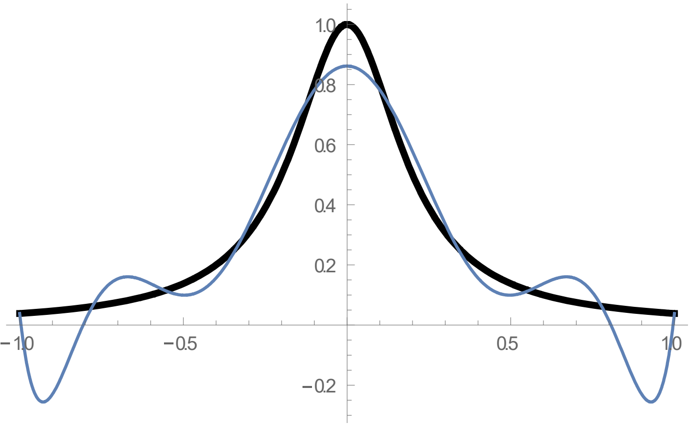
$$L_n(x) \not\Rightarrow f(x)$$

端点处严重振荡，误差急剧加大

四、分段线性插值

Runge现象（1901年，Carl Runge）

$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}, x\in[-1,1]$,利用等距节点构造10次$Lagrange$插值多项式$L_{10}(x)$.



x	-0.90	-0.70	-0.50	-0.30
$f(x)$	0.04706	0.07547	0.13793	0.30769
$L_{10}(x)$	1.57872	-0.22620	0.25376	0.23535

四、分段线性插值

分段线性插值

已知$(x_i, f(x_i))$函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

，其中

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, h_k = x_{k+1} - x_k > 0, h = \max_k h_k$$

定义2（分段线性插值）如果$I_h(x)$满足

(1)$I_h(x) \in C[a,b]$;

(2)$I_h(x)$在每个区间$\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$上为线性多项式$I_k(x)$;

(3)$I_h(x)$满足插值条件:$I_h(x_k) = f(x_k), k = 0,1,\cdots,n-1$, 即当$x \in \Delta_k$时

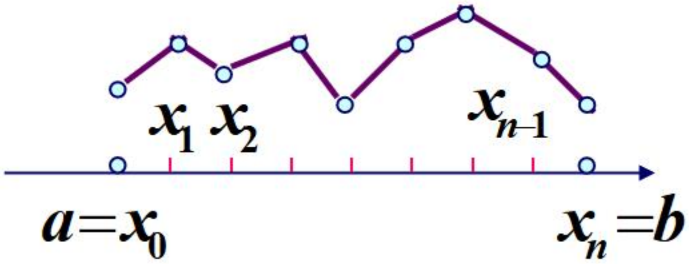
$$I_h(x) = I_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1}), k = 0,1,\cdots,n-1,$$

则称$I_h(x)$为数据$(x_i, f(x_i)), i = 0,1,\cdots,n$的分段线性插值函数.

四、分段线性插值

几何意义

相邻两节点间的函数为一次线性函数, 图象为直线, 在整个区间$[a, b]$上函数图像为折线



注 $I_h(x)$在节点处光滑性较差, 可通过分段三次*Hermite*插值提高光滑性

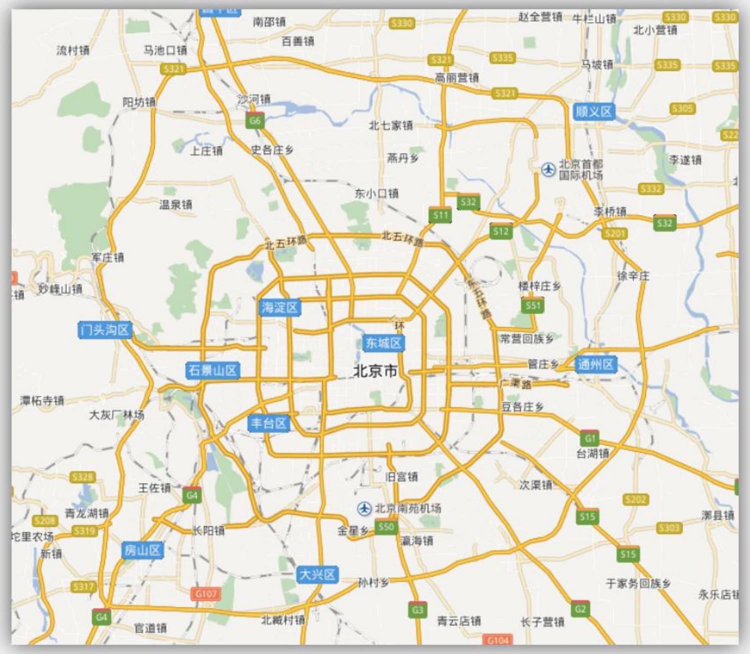
结论

设$f(x)\in C[a,b]$, *Taylor*展开得：$f(x)-I_h(x)=O(h^2), x\in[a,b]$

$$\Rightarrow \text{当} h\to 0 \text{时}, I_h(x)\overset{uni}{\longrightarrow} f(x),\quad x\in[a,b]$$

五、插值应用---北京的二十环问题

问题 北京的二十环在哪里？



环数	长度(km)
2	32.7
3	48.3
4	65.3
5	98.6
6	187.6

分析 环线数 x $\xleftrightarrow{y=f(x)}$ 环线长度 y　二十环的长度为 $f(20)$

环数较大时,环线形状 $\approx$ 以市中心为圆心的圆　半径 $=\dfrac{\text{环线长度}}{2\pi}$

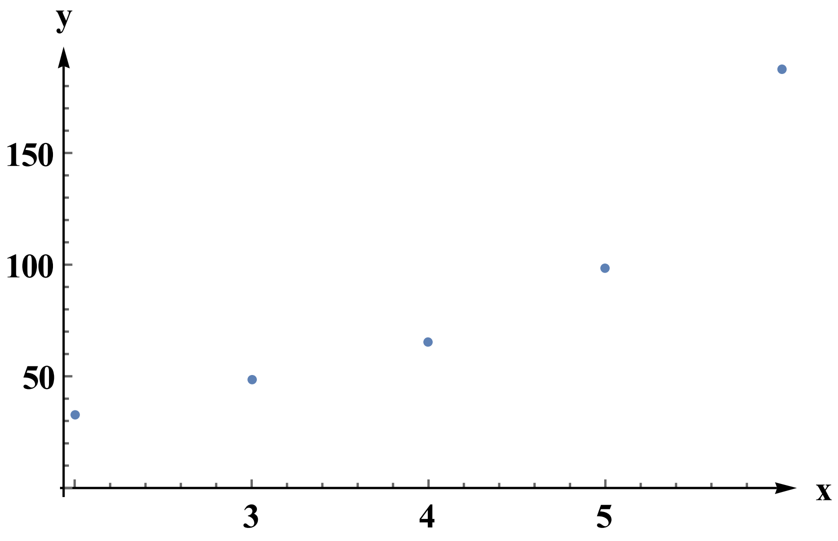
最小二乘逼近

寻求$P_n^*(x) \in H_n$,使得 $\min\limits_{P_n(x)\in H_n} \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i (f(x_i) - P_n(x_i))^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i (f(x_i) - P_n^*(x_i))^2$

若 $P_n^*(x)$存在，则称 $P_n^*(x)$为$\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{m}$的最小二乘逼近(拟合)多项式

$(x_i, f(x_i))$函数表:

x_i	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	32.7	48.3	65.3	98.6	187.6



取$\omega_i=1$,寻求$(a_0,a_1,\cdots,a_n)$和$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,使得

$$F(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{5}(f(x_i)-P_n(x_i))^2$$达到最小　　**多元函数求最值问题**

设拟合多项式为$P_2(x)=ax^2+bx+c$

$$F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{5}(f(x_i)-ax_i^2-bx_i-c)^2$$

求驻点：$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=-2\sum\limits_{i=1}^{5}(f(x_i)-ax_i^2-bx_i-c)x_i^2=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=-2\sum\limits_{i=1}^{5}(f(x_i)-ax_i^2-bx_i-c)x_i=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=-2\sum\limits_{i=1}^{5}(f(x_i)-ax_i^2-bx_i-c)=0.\end{cases}$$

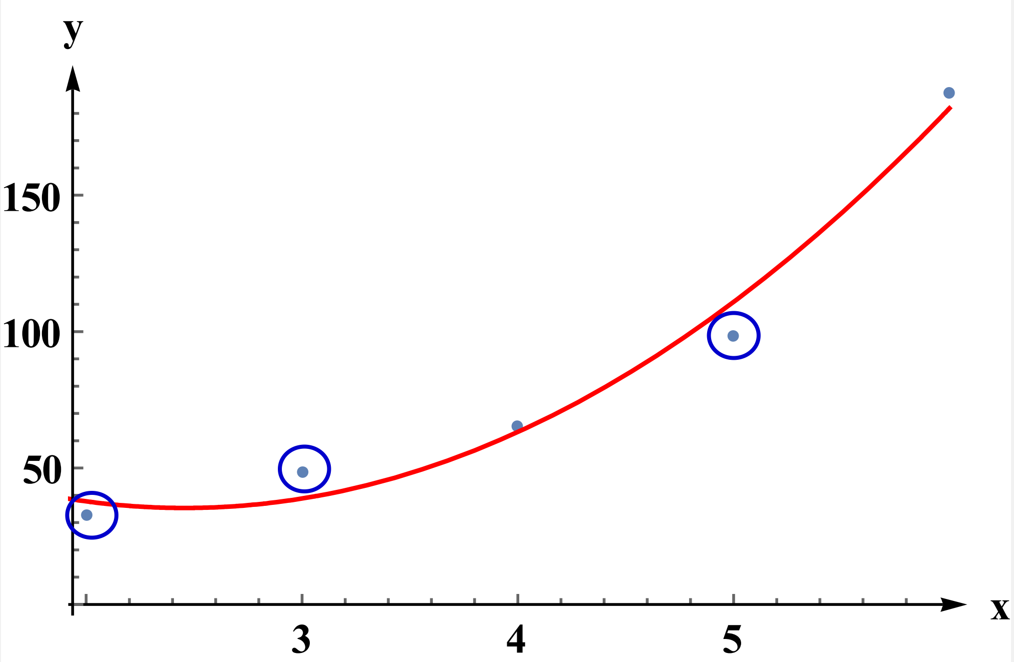
即$$\begin{cases}(\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^4)a+(\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3)b+(\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2)c=\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 y_i, \\ (\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3)a+(\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2)b+(\sum\limits_{i=1}^{5} x_i)c=\sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i, \\ (\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2)a+(\sum\limits_{i=1}^{5} x_i)b+5c=\sum\limits_{i=1}^{5} y_i.\end{cases}$$

解得唯一驻点$$\begin{cases}a^*=11.65, \\ b^*=-57.20, \\ c^*=105.58.\end{cases}$$

实际问题中最值问题的 简化步骤

若区域内部只有一个驻点,且实际问题中的最值存在,则驻点即最值点

$$P_2(x) = 11.65x^2 - 57.20x + 105.58$$



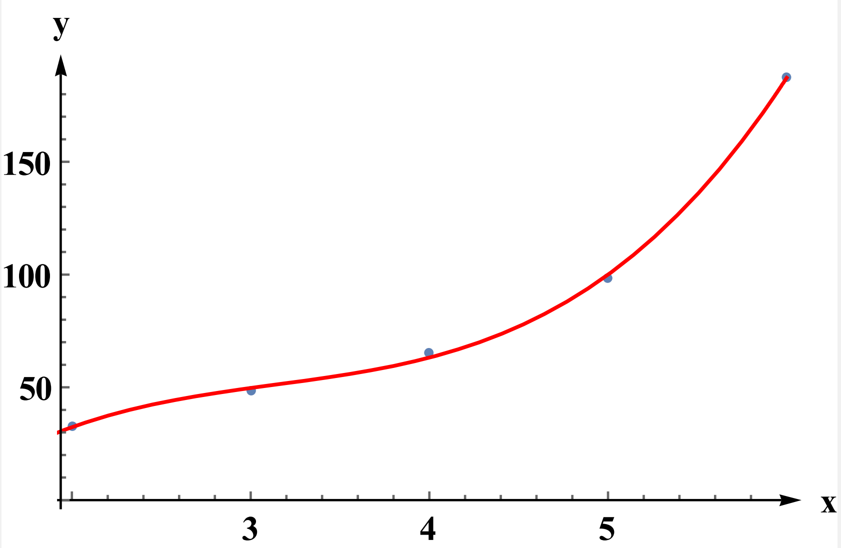
拟合结果与实际数据结果误差 $> 5km$

设拟合多项式为三次多项式$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$F(a,b,c,d) = \sum_{i=1}^{5}(f(x_i) - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i - d)^2.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial d} = 0, \end{cases} \Rightarrow \text{唯一驻点为} \begin{cases} a^* = 4.53, \\ b^* = -42.69, \\ c^* = 144.76, \\ d^* = -122.64. \end{cases}$$

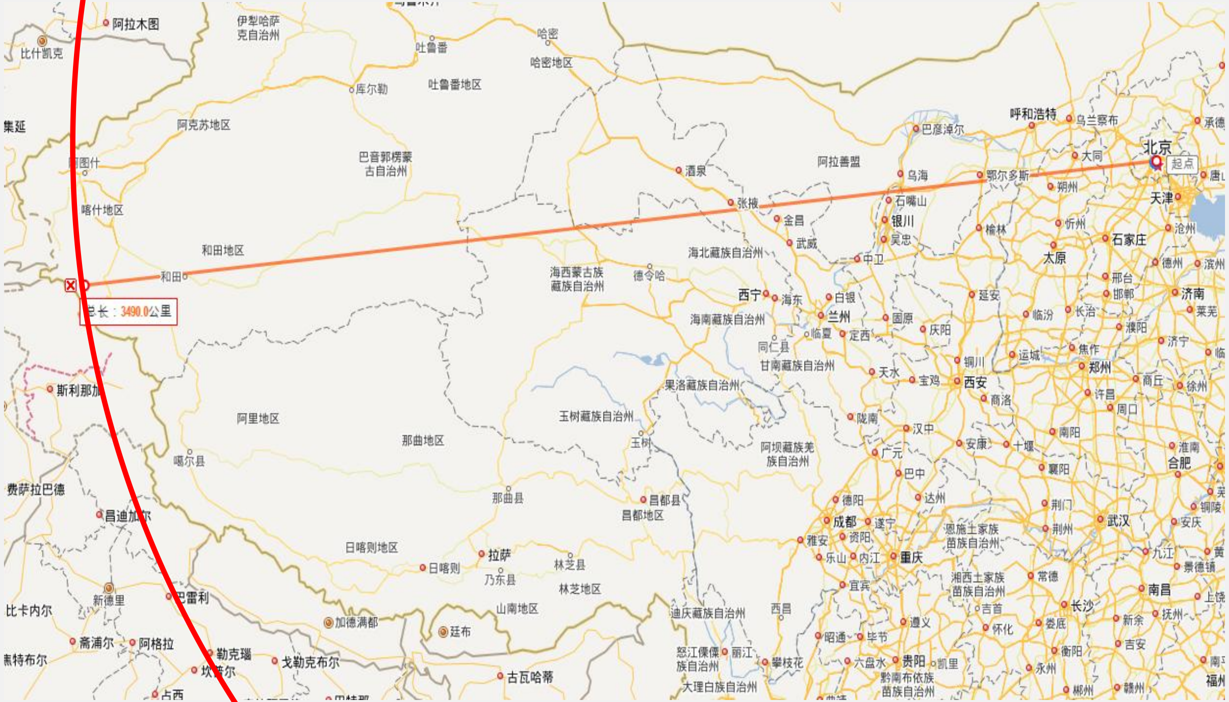
$$P_3(x) = 4.53x^3 - 42.69x^2 + 144.76x - 122.64$$



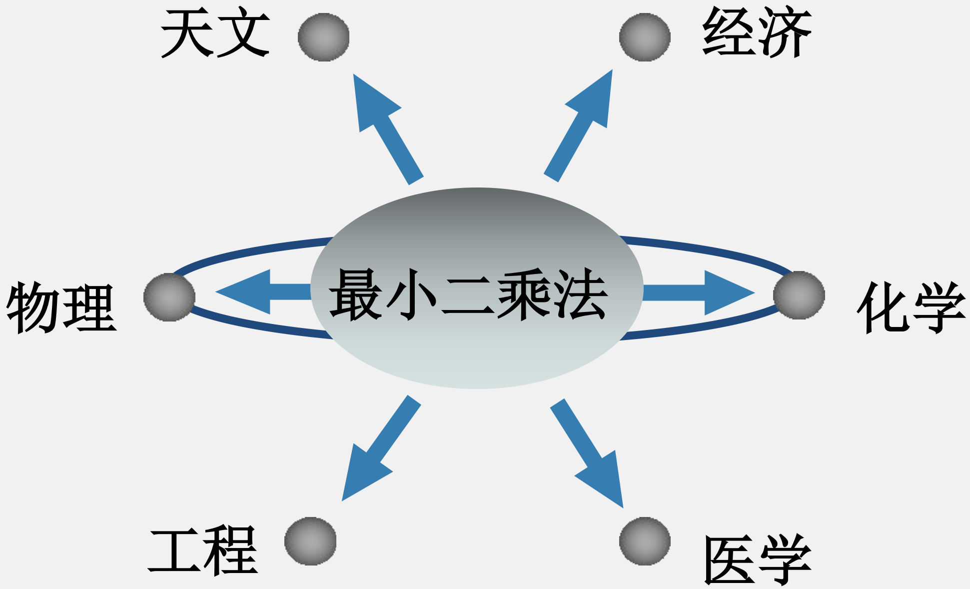
北京的二十环长度近似为$P_3(20) = 21923.8km$

$$二十环的半径 = \frac{21923.8}{2\pi} \approx 3490(km).$$


哈萨克斯坦
蒙古
北京
起点
朝鲜
日本
韩国
土库曼斯坦
阿富汗
伊拉克
伊朗
中华人民共和国
巴基斯坦
沙特阿拉伯
阿曼
印度
缅甸
泰国
也门
阿拉伯海
越南
菲律宾
索马里
马尔代夫



总长：3490.0公里
北京
起点
天津
阿拉木图
比什凯克
伊犁哈萨克自治州
吐鲁番
哈密
哈密地区
库尔勒
吐鲁番地区
阿克苏地区
巴音郭楞蒙古自治州
喀什地区
和田地区
和田
酒泉
张掖
金昌
武威
阿拉善盟
乌海
石嘴山
银川
吴忠
中卫
巴彦淖尔
呼和浩特
乌兰察布
大同
鄂尔多斯
朔州
榆林
忻州
太原
石家庄
沧州
德州
滨州
邢台
邯郸
济南
莱芜
海北藏族自治州
海西蒙古族藏族自治州
德令哈
西宁
海东
白银
兰州
海南藏族自治州
临夏
定西
固原
庆阳
延安
临汾
长治
濮阳
济宁
同仁县
甘南藏族自治州
天水
宝鸡
铜川
西安
运城
焦作
郑州
商丘
徐州
果洛藏族自治州
商洛
许昌
周口
斯利那加
阿里地区
那曲地区
玉树藏族自治州
玉树
阿坝藏族羌族自治州
陇南
汉中
安康
十堰
南阳
广元
巴中
襄阳
淮南
合肥
噶尔县
费萨拉巴德
那曲县
昌都县
昌都地区
德阳
达州
荆门
铜陵
成都
遂宁
恩施土家族苗族自治州
荆州
武汉
安庆
雅安
资阳
日喀则地区
拉萨
林芝县
乐山
内江
重庆
九江
景德镇
日喀则
乃东县
林芝地区
湘西土家族苗族自治州
常德
宜宾
南昌
新德里
巴雷利
山南地区
迪庆藏族自治州
西昌
吉首
长沙
比卡内尔
加德满都
廷布
遵义
怀化
娄底
新余
抚州
斋浦尔
阿格拉
昭通
毕节
衡阳
吉安
勒克瑙
戈勒克布尔
怒江傈僳族自治州
丽江
攀枝花
六盘水
贵阳
凯里
永州
坎普尔
古瓦哈蒂
黔南布依族苗族自治州
大理白族自治州
郴州
赣州
福州
占西


天文
经济
物理
最小二乘法
化学
工程
医学

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院