惯性定理

1、二次型的标准形是否唯一?

2、与对称矩阵相合的对角形矩阵是否唯一?

例如：对于二次型 $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3,$

经可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

可化为标准形 $g\left(y_1, y_2, y_3\right) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2.$

若用可逆线性变换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

化为标准形

$$h(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 \qquad + \frac{2}{3}z_3^2.$$

二次型的标准形不唯一.

但是, 系数非零的项数相同, 系数为正的项数相同.

巧合吗?

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个实二次型, 由可逆线性变换

可将之化为

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

其中, $d_i\in\mathrm{R}, i=1,2,\cdots,n.$

相应地, 二次型 的矩阵经过相合变换化为对角形

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

由于**相合**的矩阵具有相同的秩, 而 B 的秩就是主对角线上非零元素的个数, 故标准形中系数**非零的平方项个数是确定的**，就等于 A 的秩 r, 它不会因不同的可逆线性变换而改变。

适当排列变元次序后，f 的标准形可写为

$$d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$

其中，$d_i>0(i=1,2,\cdots,r)$为正实数，$\boldsymbol{r}\leq\boldsymbol{n}$

不为零的平方项系数有些大于零，有些小于零。

由于在实数域上正数总可开平方，继续作下列可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{d_2}} z_2, \\ \quad \vdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \quad \vdots \\ y_n = z_n. \end{cases}$$

则 f 的标准形化为 $z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$

称为实二次型 f 的规范形, 完全由r, p决定。

r完全由 f 确定.

p是否可由 f 唯一确定呢?

定理5.4.1（惯性定理）任意一个实二次型 f 经过适当的可逆线性变换必可化为规范形, 且规范形是唯一的.

证明：实二次型对应的n阶对称方阵S相合于规范型，S定义了二次型 $f=X^TSX$

设有可逆方阵P_1，P_2分别将S相合于

$$\Lambda_1 = P_1^{\mathrm{T}} S P_1 = \mathrm{diag}(I_{(p)}, -I_{(r-p)}, O_{(n-r)})$$

$$\Lambda_2 = P_2^{\mathrm{T}} S P_2 = \mathrm{diag}(I_{(s)}, -I_{(r-s)}, O_{(n-r)})$$

Λ_1，Λ_2分别定义了二次型

$$Q_1(Y) = Y^{\mathrm{T}} \Lambda_1 Y = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2$$

$$Q_2(Z) = Z^{\mathrm{T}} \Lambda_2 Z = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

假如 $p \neq s$， 不妨设 $p > s$

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2$$

由于$X=P_2Z$，则$Z=P^{-1}_2X$，从而

$$Z=(P^{-1}_2P_1)Y$$

$G=(P^{-1}_2P_1)$给出了由Z到Y的可逆线性变换。考虑线性方程组

$$g_{11}y_1+\dots+g_{1n}y_n=0$$

$$\dots$$

$$g_{s1}y_1+\dots+g_{sn}y_n=0$$

$$y_{p+1}=0$$

$$\dots$$

$$y_n=0$$

由于 $p>s$，故以上方程组一定有非零解，且最后$n-p$个变量取0。

此时，取非零解（$k_1,k_2,\ldots,k_p,0,\ldots,0$）满足：

$$k_1^2+k_2^2+\ldots+k_p^2>0,$$

将这一组解代入到Z=GY中，可以有：

$$z_1=z_2=\ldots=z_s=0，且 -z_{s+1}^2-z_{s+2}^2-\ldots-z_r^2\leq 0$$

矛盾，故$p\leq s$。同理，假设$p<s$时也矛盾。也即$p=s$。

定义5.4.1 实二次型 f 的规范形中正平方项的个数 p 称为 f 的**正惯性指数**; 负平方项的个数 $r-p$ 称为 f 的**负惯性指数**; 二者的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为 f 的**符号差**。

另一描述 实二次型 f 的标准形中系数为正的平方项个数是唯一确定的, 它等于 f 的正惯性指数; 系数为负的平方项个数也是唯一确定的, 它等于 f 的负惯性指数。

惯性定理的矩阵描述：

定理6.4.2 任一实对称矩阵 A 必相合于一个如下形状的对角矩阵

$$B=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中，B的主对角线上1的个数 p 及－1的个数 $r-p$ (r是 A的秩)都是唯一确定的，分别称为 A的正、负惯性指数。它们的差$2p-r$ 称为 A 的符号差。

推论 两个n阶实对称矩阵相合的**充分必要条件**是它们有相同的秩和相同的正惯性指数 (或相同的符号差)。

例5.4.1 求实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$$

的正、负惯性指数。

解 用配方法得

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2$$

$$=2{y_1}^2+\frac{3}{2}{y_2}^2$$

故实二次型的正、负惯性指数分别为2, 0.

复数域上二次型的规范形

考虑复数域上二次型的标准形。

复数域上的n元二次型 f 的标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,$$

其中, r 为 f 的秩.

由于在复数域内任何数皆可开平方, 再进行线性变换

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \quad\vdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \quad\vdots \\ y_n = z_n. \end{cases}$$

则得到标准形 $z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$.

称为复二次型 f 的规范形, 完全由r决定。

定理5.4.3 任意一个复数域上的n元二次型 f 必可经过可逆线性变换化为规范形，且规范形由 f 的秩r唯一确定.

定理5.4.4 任一个复数域上的对称矩阵 A 必相合于一个如下形状的对角形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

且主对角线上1的个数等于 A 的秩.

两个复对称矩阵合同的充分必要条件是**秩相等**。

正定二次型和正定矩阵

定义5.4.2 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为n元实二次型。若对于任意非零实向量 X,都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX>0,$$

则称实二次型 f 为正定二次型;

相应的实对称矩阵 A 称为正定矩阵。

定理5.4.5 n元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}d_i x_i^2$,

正定的充要条件是$d_1,d_2,\cdots,d_n$全都大于零.

证 必要性 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}d_i x_i^2$ 正定,

取一组数 $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, 代入得

$$f(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)=d_i>0,$$

进而得 $d_1,d_2,\cdots,d_n$全都大于零.

充分性 若 $d_1, d_2, \cdots d_n$ 全都大于零, 则对任一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 有

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n) = d_1c_1^2 + d_2c_2^2 + \cdots + d_nc_n^2$$

因为至少有一个 $c_i \neq 0$, 得 $d_ic_i^2 > 0$, 而其余的 $d_jc_j^2 \geq 0$, 所以

$$f(c_1, c_2, \cdots, c_n) = d_1c_1^2 + d_2c_2^2 + \cdots + d_nc_n^2 > 0$$

即 f 是正定二次型. 证毕.

二次型是规范形时：正惯性指数是n的n元二次型

是正定的.

二次型非规范形时：难以观察。

用可逆线性变换化为规范形，

但正定性是否保持呢？

定理5.4.6 可逆线性变换不改变实二次型的正定性.

设S是n阶正定实对称方阵.

则对任意$O \neq X$，有$X^T SX > 0$.

对任意$O \neq Y$有$X = PY \neq O$，从而

$Y^T S_1 Y = Y^T P^T SPY = X^T SX > 0$. 可见$S_1$正定.

性质1 n元实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$正定的充要条件是其正惯性指数等于n.

性质2 实对称矩阵 A 为正定的充要条件是 A相合于单位矩阵E

性质3 实对称矩阵 A 为正定的充要条件是存在可逆矩阵 C ，使 $A=C^TC$.

证 由**性质2**可知，存在可逆矩阵 C ，使

$$A=C^TEC=C^TC.$$

定义5.4.3 设 $A=(a_{ij})$ 是n阶矩阵, 依次取 A 的前k行和前k列所构成的k阶矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

称其为矩阵 A 的k阶**顺序主子式**.

性质4 实对称矩阵 A 正定的充要条件是 A 的各阶顺序主子式全大于零。

例 试问 t 取何值时，二次型为正定二次型？

$$f(x_1,x_2,x_3)= x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

解 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

要使 f 正定, 只需让 A 的各阶顺序主子式大于零, 即

$$|A_1| = 1 > 0,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2 > 0,\ \text{即} -1 < t < 1,$$

$$|A_3| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5t^2 - 4t > 0,\ \text{即} -\frac{4}{5} < t < 0.$$

于是当 $-\frac{4}{5} < t < 0$ 时, f 为正定二次型.

定义5.4.4 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为n元实二次型，$X=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 为任一非零的实向量，

若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0$，则称 f 为**半正定 二次型**；

若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$，则称 f 为**负定二次型**；

若恒有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leq 0$，则称 f 为**半负定 二次型**。

上述二次型对应的矩阵 A 分别称为**半 正定矩阵，负定矩阵和半负定矩阵**.

A为负定矩阵的充要条件是$(-A)$为正定矩阵；

A为半负定矩阵的充要条件是$(-A)$为半正定矩阵；

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 既不是半正定，又不是半负定，

则称 f 为不定二次型，相应的矩阵 称为不定矩阵。

A为不定矩阵：存在X，使得$f = X^T AX > 0$；

也存在X，使得$f = X^T AX < 0$.

定理5.4.7 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为实二次型，

则下列命题等价：

① $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是负定二次型；

② $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的负惯性指数为n；

③ A合同于$(-E)$；

④ A 的奇数阶顺序主子式小于零，

偶数阶顺序主子式大于零。

定理5.4.8 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 为实二次型,

则下列命题等价:

① $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是半正定二次型;

② $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数 $p=r\le n$,

其中 r 是 A 的秩;

③ A合同于矩阵 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{n\times n}$;

④ A的特征值均非负.

注意：实对称矩阵 A 的所有顺序主子式非负时，A 未必是半正定的. $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 半负定.

例 判断下列二次型的类型：

① $f_1(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

② $f_2(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

解 ① 二次型 f_1 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$

A的顺序主子式

$$|A_1| = -2 < 0,\ |A_2| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -38 < 0$$

所以 f_1 为负定二次型.

② 二次型 f_2 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

A的顺序主子式 $|A_1| = 1 > 0$，$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0$，

所以 f_2 是不定二次型。