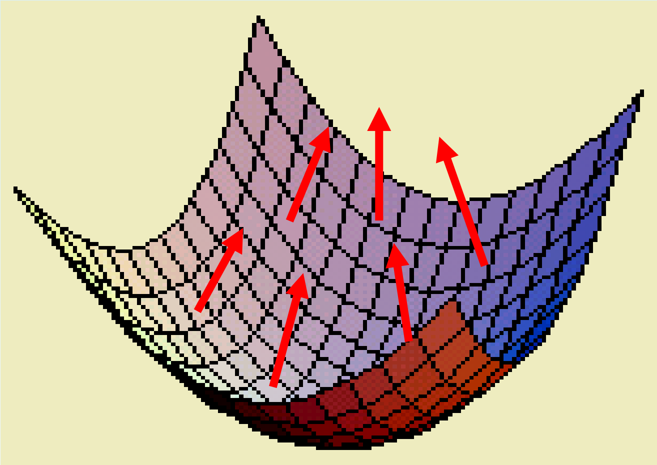
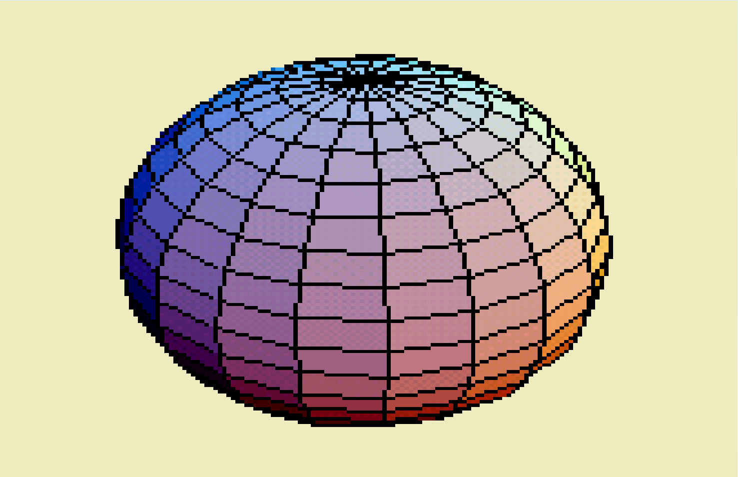
§18.2 第二型曲面积分

BEIHANG UNIVERSITY

曲面的侧

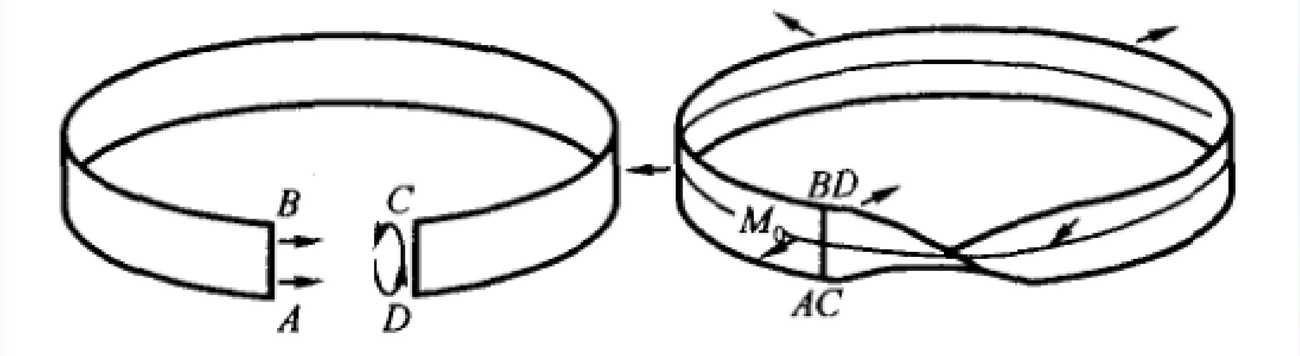
1. 双侧曲面



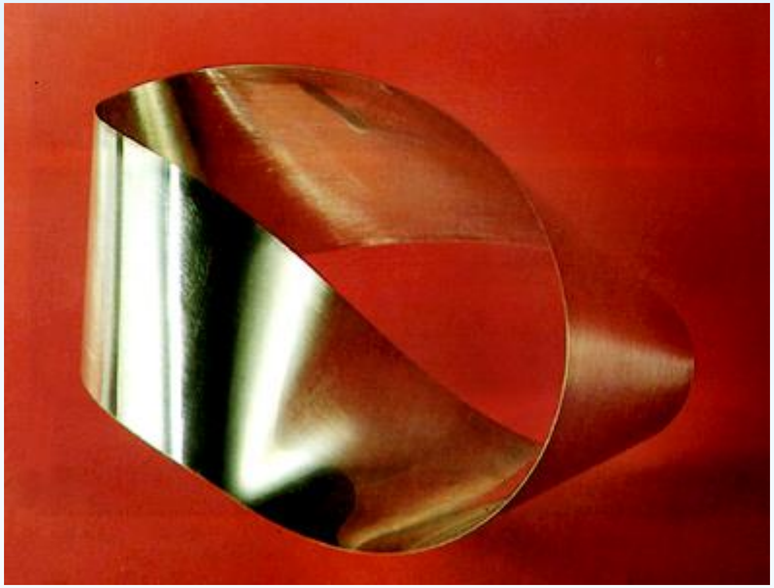


曲面法向量的指向决定曲面的侧.

2. 单侧曲面　莫比乌斯带

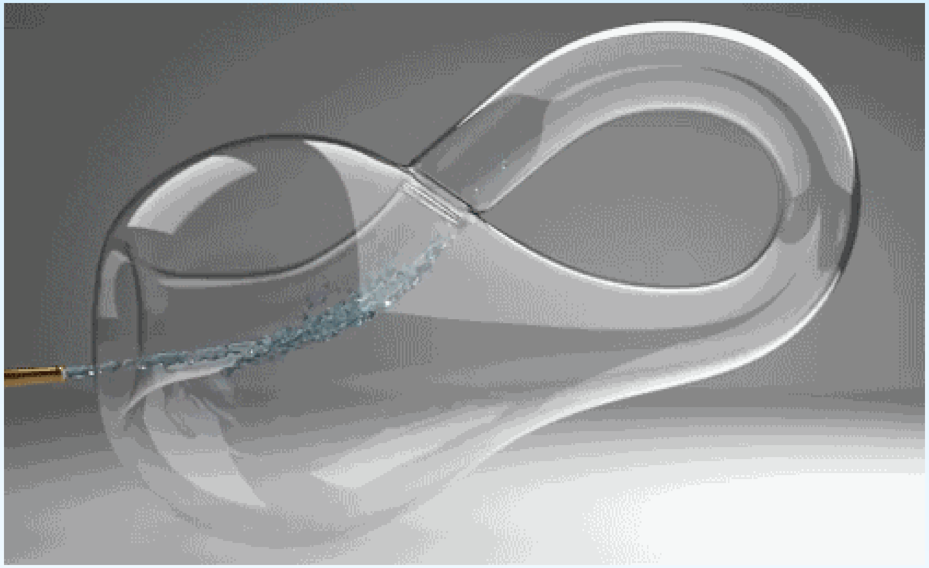


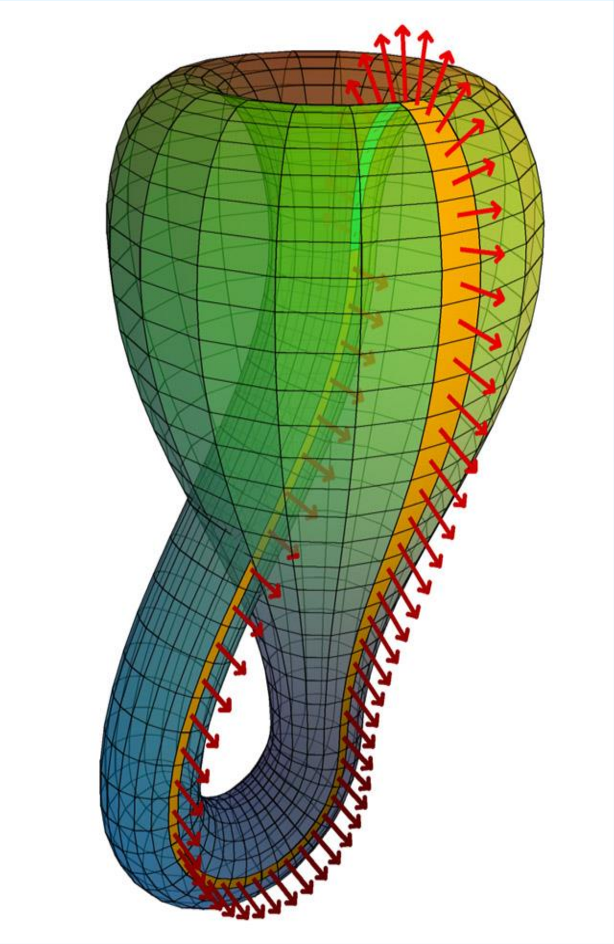
1858德国数学家
莫比乌斯



3.单侧曲面　克莱因瓶(Klein bottle)

不可定向的封闭曲面，没有“内部”和“外部”之分

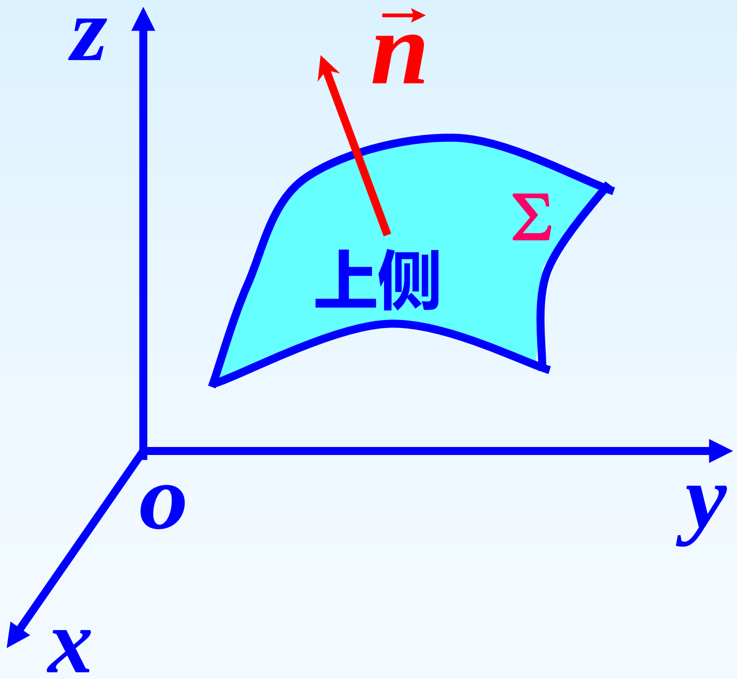


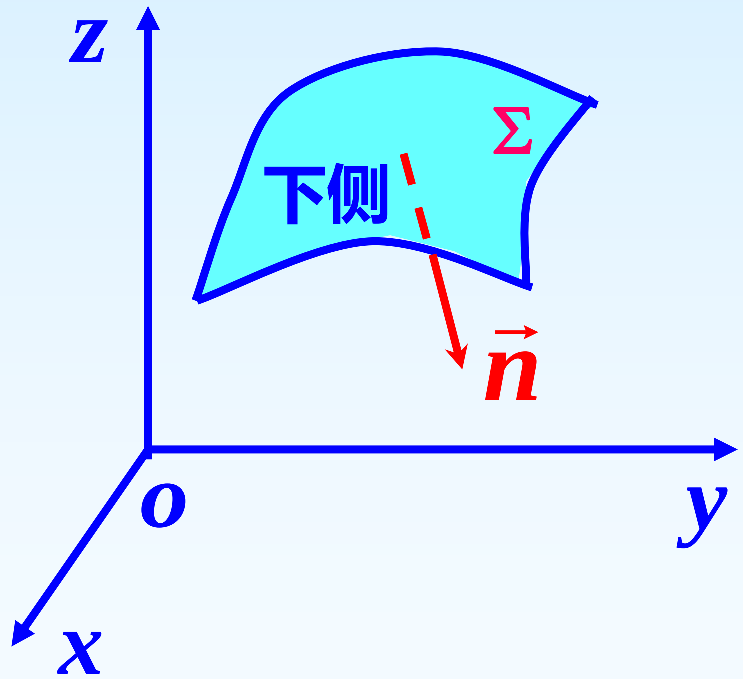


1882年德国数学家菲利克斯•克莱因(Felix Klein)

对于双侧曲面，可通过曲面上法向量的指向来确定曲面的侧。取定了法向量指向的曲面，称为**有向曲面**。

对于Σ：$z=f(x,y)$ 若法向量 $\vec{n}$ 与 z 轴的正向成锐角，则取定了曲面的上侧。 若法向量 $\vec{n}$ 与 z 轴的正向成钝角，则取定了曲面的下侧。





曲面Σ： $z=z(x,y)$ 有上侧与下侧之分；

曲面Σ： $x=x(y,z)$ 有前侧与后侧之分；

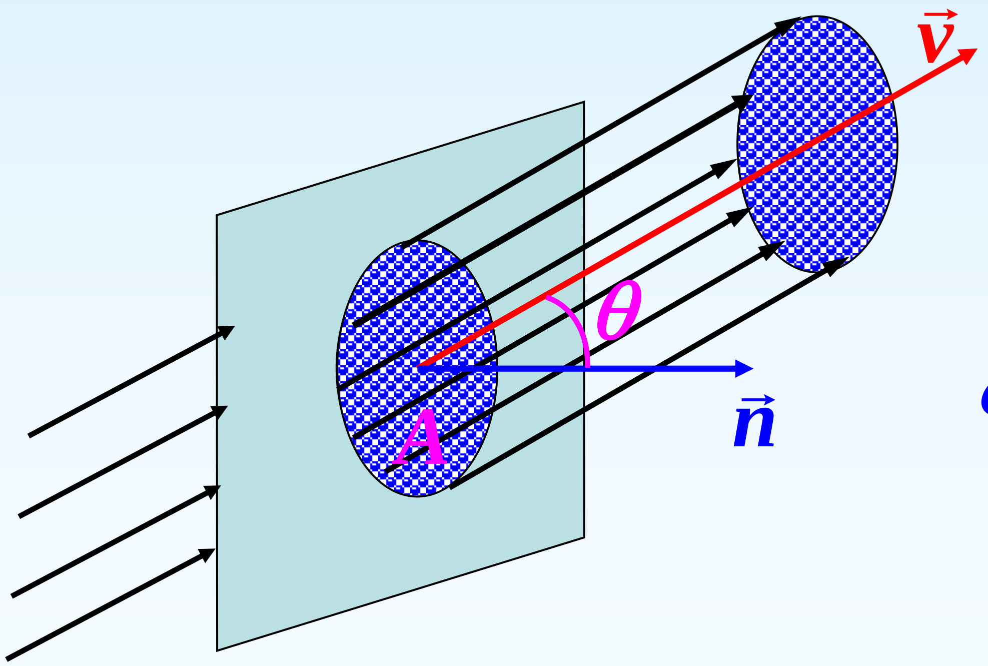
曲面Σ： $y=y(x,z)$ 有左侧与右侧之分。

一般封闭曲面有内侧与外侧之分。

第二型曲面积分的概念与计算

1. 流量问题 ——→流向曲面一侧的流量

(1)　流速场为常向量 $\vec{v}$, 有向平面区域A, 求单位时间流过A的流体的流量Φ.

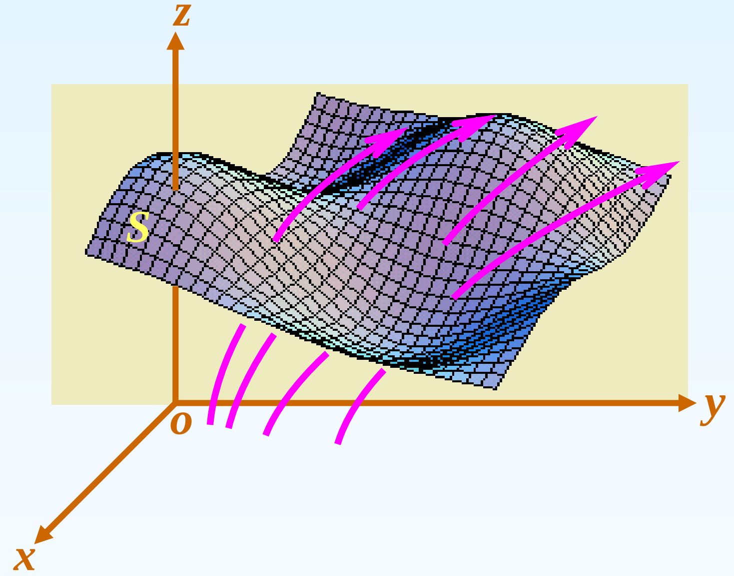


$$\Phi = |\vec{v}|\cos\theta\,\Delta A$$
$$= \vec{v}\cdot\vec{n}\,\Delta A.$$

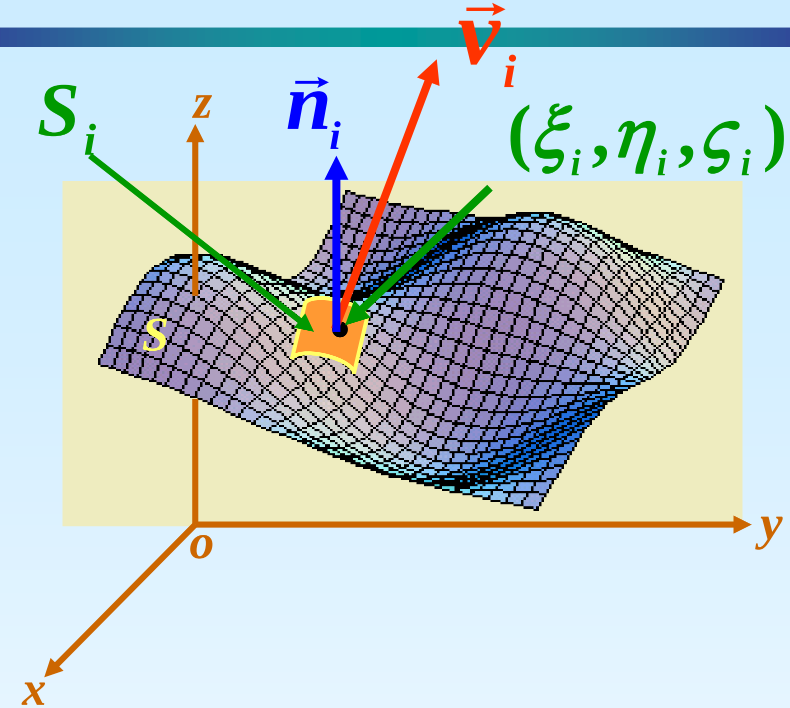
(2) 流速场

$$\vec{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

S是流速场中的一有向曲面, $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$在$S$上连续, 求单位时间内流经曲面$S$的流量?



1. 分割



把曲面S分成n小块S_i,

ΔS_i表示S_i的面积,

任取$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$,

则该点的流速

$$\vec{v}_i=(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i),Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i),R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)),$$

单位法向量 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$,

通过S_i流向指定侧的流量$\approx \vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\Delta S_i$.

2. 求和　通过S流向指定侧的流量

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\beta_i$$

$$+ R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{yz}} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{xz}}$$

$$+ R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

3. 取极限　$\|T\| \to 0$ 得到流量Φ的精确值.

$\Delta S_{i_{yz}} = \Delta S_i \cos\alpha_i \longrightarrow$ S_i的指定侧在坐标面yz上投影区域的面积的近似值;

$\Delta S_{i_{zx}} = \Delta S_i \cos\beta_i \longrightarrow$ zx

$\Delta S_{i_{xy}} = \Delta S_i \cos\gamma_i \longrightarrow$ xy

2. 定义

设P,Q,R为定义在双侧曲面S上的函数, 在S指定的一侧作分割T, 把S分成n个小曲面$S_1,S_2,\cdots,S_n$, 分割T的细度$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{S_i$的直径$\}$, $\Delta S_{i_{yz}}$, $\Delta S_{i_{zx}}$, $\Delta S_{i_{xy}}$ 分别表示S_i在三个坐标面上的投影区域的面积, 它们的符号由S_i的方向来确定,

任取$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in S_i$, 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}$$

$$+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在， 且与分割 T 和 (ξ_i,η_i,ζ_i) $(i=1,2,\cdots,n)$

的取法无关，则称此 极限为P,Q,R在曲面S所

指定的一侧上的 第二型曲面积分. 记为

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

或 $$\iint_S Pdydz+\iint_S Qdzdx+\iint_S Rdxdy$$

注

(1) 存在条件；当P,Q,R在有向光滑曲面Σ上连续

(2) 物理意义；

(3) 性质； $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2}$

(4) 若用$-S$表示曲面S的另一侧，则

$$\iint\limits_{-S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= -\iint\limits_{S} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

3. 计算

设R是定义在光滑曲面

$$S:\quad z=z(x,y),\quad (x,y)\in D_{xy}$$

上的连续函数，指定上侧为积分曲面S的侧,则有

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy,$$

如取下侧,则有

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

上侧取正，下侧取负

分析：$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_{i_{xy}})$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))(\Delta S_{i_{xy}}) \quad \Delta S_{ixy} = \sigma_{xy}$$

$$\stackrel{?}{=} \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

$\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{S_i\text{的直径}\}\to 0$

$\Longrightarrow d = \max\limits_{1\le i\le n}\{S_{i_{xy}}\text{的直径}\}\to 0$

R在S上连续，z在D_{xy}上连续，

故$R(x,y,z(x,y))$在D_{xy}上连续.

类似地

如果S由$x=x(y,z)$给出，则有 前侧取正，后侧取负

$$\iint_S P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

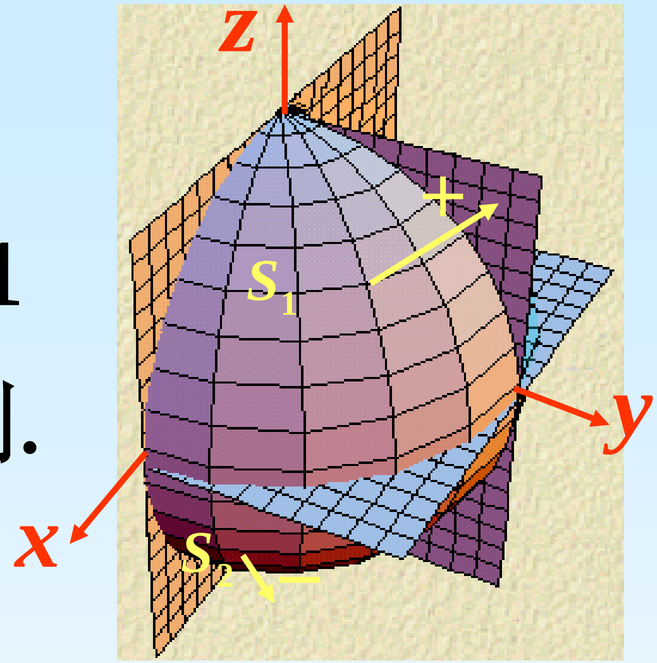
如果S由$y=y(z,x)$给出，则有

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$$

右侧取正，左侧取负

注意：必须注意曲面所取的侧.

例 1 计算 $\iint\limits_{S} xyz\,dxdy$



其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在 $x\ge 0, y\ge 0$ 的部分, 取外侧.

解 把S分成S_1和S_2两部分

$$S_1: \quad z_1=\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad S_2: \quad z_2=-\sqrt{1-x^2-y^2},$$

它们在xy平面上的投影区域都是单位圆在第一象限的部分.

$$\iint\limits_{S} xyzdxdy = \iint\limits_{S_1} xyzdxdy + \iint\limits_{S_2} xyzdxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}rdrd\theta = \frac{2}{15}.$$

设光滑曲面S的方程为$\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in\Delta$,

函数$\vec{F}=\{P,Q,R\}$在 S 上连续, 则

$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_\Delta \vec{F}\circ\vec{r}\cdot\pm\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|dudv$$

$$=\pm\iint_\Delta \vec{F}\circ\vec{r}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)dudv$$

$$=\pm\iint_\Delta (P\circ\vec{r}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\circ\vec{r}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\circ\vec{r}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})dudv$$

如$(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)$和指定的曲面的侧一致, 取正, 否则取负.

若$S:\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in D$，则

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \pm\iint_{\Delta}(P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$

$$+ Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

$$+ R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})dudv$$

$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$与$S$指定侧的法向量方向一致时取$+$，否则取$-$.

特殊地： $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$. D是有面积的平面闭区域，z_x, z_y在D上连续．则

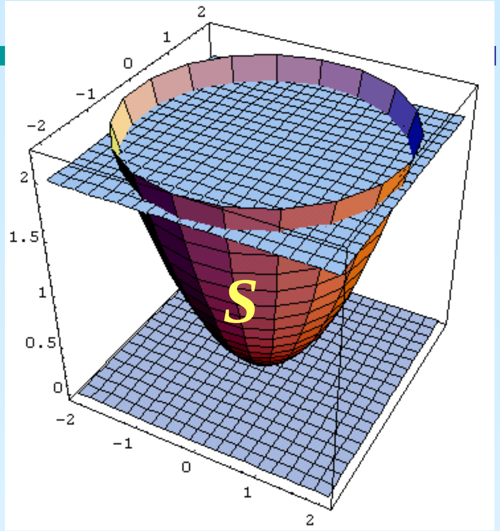
$$\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\pm\iint_D \left[(P(x,y,z(x,y))\cdot(-z_x)+Q\cdot(-z_y)+R\cdot 1\right]dxdy$$

上侧取正，下侧取负

例 2 计算 $\iint\limits_S (z^2+x)dydz - zdxdy$

其中 S 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.



解 投影区域 $D_{xy}: x^2+y^2\le 4$, $(-z_x,-z_y,1)=(-x,-y,1)$

$$\iint\limits_S (z^2+x)dydz - zdxdy$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} \{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot(-x) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot 1\}dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} [x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]dxdy = 8\pi.$$

例3 计算 $\iint\limits_{S} x^3 dydz$,

S为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的上半部并选取外侧.

解 把曲面表示成参数方程

$$x=a\sin\varphi\cos\theta, y=b\sin\varphi\sin\theta, z=c\cos\varphi$$

$$(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi)$$

$\because\ \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta$, 且$S$取外侧,

$$\vec{n} = (bc\sin^2\varphi\cos\theta, ac\sin^2\varphi\sin\theta, ab\cos\varphi\sin\varphi)$$

$$\therefore \iint\limits_{S} x^3 dydz = \iint\limits_{\Delta} a^3\sin^3\varphi\cos^3\theta \cdot bc\sin^2\varphi\cos\theta d\varphi d\theta$$

$$= a^3 bc\iint\limits_{\Delta}\sin^5\varphi\cos^4\theta d\varphi d\theta$$

$$= a^3 bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{5}\pi a^3 bc.$$

不用计算,猜 $\iint\limits_{S} y^3 dzdx$,及 $\iint\limits_{S} z^3 dxdy$,

$\frac{2}{5}\pi ab^3c.$ $\frac{2}{5}\pi abc^3.$

若S改为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 并选取外侧

此时 $(0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi)$

$$\vec{n}=(bc\sin^2\varphi\cos\theta, ac\sin^2\varphi\sin\theta, ab\cos\varphi\sin\varphi)$$

$$\therefore \iint\limits_{S} x^3 dydz=\iint\limits_{\Delta} a^3\sin^3\varphi\cos^3\theta\cdot bc\sin^2\varphi\cos\theta d\varphi d\theta$$

$$=a^3bc\int_0^{\pi}\sin^5\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta=\frac{4}{5}\pi a^3bc.$$

用平面直角坐标方程来计算

$$S_1 : x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}, S_2 : x = -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$$

yz平面的投影区域$D_{yz} : \{(x, y) \mid \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1, z \ge 0\}$

$$\iint_S x^3 dydz = \iint_{S_1} x^3 dydz + \iint_{S_2} x^3 dydz = 2\iint_{D_{yz}} (a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}})^3 dydz$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 a^3 (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \cdot bcr\, dr = \frac{2}{5}\pi a^3 bc.$$

两类曲面积分之间的联系

设曲面S由 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$给出,

其单位法向量的方向余弦为:

$$\cos\alpha = \frac{\mp z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\mp z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_D R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

$$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS = \pm\iint_D R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

所以 $$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS$$

对曲面的两侧均成立.

两类曲面积分之间的联系

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

$$dydz = \cos\alpha dS$$

$$dzdx = \cos\beta dS$$

$$dxdy = \cos\gamma dS$$

例4 计算 $A=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧.

解 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{R},\cos\beta=\frac{y}{R},\cos\gamma=\frac{z}{R},$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=R\iint\limits_{\Sigma}dS=4\pi R^3.$$

小结

1、第二型曲面积分的概念、性质

2、第二型曲面积分的计算

注意以下两点

★ 曲面的侧

★ “一投, 二代, 三定号”