北京航空航天大学

2019－2020 学年第一学期期中

试卷

考试课程 工科数学分析 (I) 任课老师________________

班级______________ 学号_______________ 姓名_________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									
校对人									

2019 年 11 月 24 日

一．(本题 20 分，每小题 4 分)单项选择题。

1. 设数列$\{a_n\}$收敛，数列$\{b_n\}$发散，以下论断正确的是(B)

(A) 数列$\{a_n+b_n\}$一定是收敛的。 (B) 数列$\{a_n+b_n\}$一定是发散的。

(C) 数列$\{a_n\cdot b_n\}$一定是收敛的。 (D) 数列$\{a_n\cdot b_n\}$一定是发散的。

2. 已知函数$f:[a,b]\to[c,d]$，函数$g:[c,d]\to[\alpha,\beta]$，以下论断正确的是(C)

(A) 如果$y=f(x)$在$x_0\in(a,b)$处不连续，$z=g(y)$在$y_0=f(x_0)\in(c,d)$处连续，则复合函数$z=g(f(x))$在$x_0\in(a,b)$处必定不连续。

(B) 如果$y=f(x)$在$x_0\in(a,b)$处不连续，$z=g(y)$在$y_0=f(x_0)\in(c,d)$处不连续，则复合函数$z=g(f(x))$在$x_0\in(a,b)$处必定不连续。

(C) 如果$y=f(x)$在$x_0\in(a,b)$处连续，$z=g(y)$在$y_0=f(x_0)\in(c,d)$处连续，则复合函数$z=g(f(x))$在$x_0\in(a,b)$处必定连续。

(D) 如果$y=f(x)$在$x_0\in(a,b)$处连续，$z=g(y)$在$y_0=f(x_0)\in(c,d)$处不连续，则复合函数$z=g(f(x))$在$x_0\in(a,b)$处必定连续。

3. 已知连续曲线$y=f(x)$与$y=\ln(1+2x)$在原点相切，则$\lim\limits_{n\to\infty} n\,f(\dfrac{2}{n+1})=$(D)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

4. 设函数$y=y(x)$由方程$xe^{f(y)}=e^y\ln 2019$确定，其中f具有二阶导数，$f'\neq 1$，则$\mathrm{d}y=$(A)

(A) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1-f'(y))}$ (B) $\dfrac{1}{x(1-f'(y))}$ (C) $\dfrac{\mathrm{d}x}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$ (D) $\dfrac{1}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$

5. 已知$f(x)$可导，且$f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$f(1)=3$，则$f(2)=$(D)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6

二．(本题 30 分，每小题 5 分)计算、证明题：

1. 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解 因为$1\le n!\le n^n$, 故$1\le (n!)^{\frac{1}{n^2}}\le n^{\frac{1}{n}}$, 由夹逼定理可知极限为 1

2. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$

3. 已知参数方程$\begin{cases} x=e^t-t, \\ y=e^t-\sin t, \end{cases}$ $t\in[1,+\infty)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dx}{dt}=e^t-1, \dfrac{dy}{dt}=e^t-\cos t,$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t-\cos t}{e^t-1}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e^t-\cos t}{e^t-1}\right)\dfrac{dt}{dx}$

$$=\frac{(e^t+\sin t)(e^t-1)-e^t(e^t-\cos t)}{(e^t-1)^3}=\frac{(\sin t+\cos t-1)e^t-\sin t}{(e^t-1)^3}$$

4. 设 $y=x^2\sin 3x$，求 $y^{(10)}$.

解 $y^{(10)}=(x^2\sin 3x)^{(10)}=x^2(\sin 3x)^{(10)}+10\cdot 2x\cdot(\sin 3x)^{(9)}+45\cdot 2\cdot(\sin 3x)^{(8)}$

$=x^2\cdot 3^{10}\sin(3x+10\cdot\dfrac{\pi}{2})+10\cdot 2\cdot 3^9x\cdot\sin(3x+9\cdot\dfrac{\pi}{2})+45\cdot 2\cdot 3^8\sin(3x+8\cdot\dfrac{\pi}{2})$

$=-3^{10}x^2\sin 3x+20\cdot 3^9x\cdot\cos 3x+90\cdot 3^8\sin 3x$

5. 计算函数 $f(x)=e^{1-\cos x}$ 的 Maclaurin 公式直到 x^4 项

解 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$f(x)=e^{1-\cos x}=1+(1-\cos x)+\frac{1}{2!}(1-\cos x)^2+o((1-\cos x)^2)$$

$$=1+\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{8})x^4+o(x^4)$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

6\. 设 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{(\tan x+\sin x)f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$，其中 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$.判断函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？若它在 $x=0$ 处不连续，请指出间断点的类型.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x+\sin x)f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2f'(0)\neq f'(0)$

所以函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，且为第一类间断点（可去间断点）

三. (**本题 6 分**) 用定义证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上一致连续。

证明： $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\sin\frac{1}{x_2}\right|\le\left|\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\sin\frac{1}{x_1}\right|+\left|\frac{1}{x_2}\sin\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\le\left|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right|+\frac{1}{x_2}\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\le 2|x_1-x_2|,$$

所以, $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$, $|f(x_1)-f(x_2)|\le 2|x_1-x_2|$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{2}\varepsilon$，则 $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

四. (**本题 10 分**) 设数列 $\{x_n\}$ 满足： $x_1>0, x_{n+1}=\sin x_n>0, n=1,2,\cdots$.

1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限值;

2) 指出 $\{x_n\}$ 的下确界，并证之;

3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$.

证明：$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，所以数列$\{x_n\}$单调递减，且有下界为 0，根据单调有界定理可知数列$\{x_n\}$收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则$A=\sin A,\Rightarrow A=0.$

2） $\inf\{x_n\}=0.$ 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,\ \forall\varepsilon>0,\exists N>0,$使$n>N$时，有$0<x_n<\varepsilon.$

3）$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sin x_{n-1})^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-(\sin x_{n-1})^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)^2x^2}{x^2-(\sin x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\sin x}=3$$

五．(**本题** 8 **分**) 设数列$\{x_n\}$如下：

$$x_n=\frac{\cos1!}{1\cdot(1+1+\cos1!)}+\frac{\cos2!}{2\cdot(2+1+\cos2!)}+\cdots+\frac{\cos n!}{n\cdot(n+1+\cos n!)},\ n=1,2,\cdots$$

试证明$\{x_n\}$是基本列.

证明：$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)\cdot(n+1+1+\cos(n+1)!)}+\frac{\cos(n+2)!}{(n+2)\cdot(n+2+1+\cos(n+1)!)}+\cdots+\frac{\cos(n+p)!}{(n+p)\cdot(n+p+1+\cos(n+1)!)}\right|$$

$$\le\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)\cdot(n+p)}$$
$$\le\frac{1}{(n+1)\cdot n}+\frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)\cdot(n+p-1)}$$
$$\le\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

故对$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$使$n>N$时，对任意的$p\in N^*$，有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ 结论得证.

六．(**本题** 8 **分**) 已知函数$f(x)=xe^x$，试求该函数的单调区间、极值点与极值、凹凸区间和拐点(请列表).

解 $f'(x)=(1+x)e^x$，令$f'(x)=0$，解得$x=-1$

$f''(x)=(2+x)e^x$，令$f''(x)=0$，解得$x=-2$

单调递减区间为$(-\infty,-1)$；单调递减区间为$(-1,+\infty)$；

$x=-1$是极小值点，极小值为$f(-1)=-e^{-1}$；

凹区间为$(-\infty,-2),$；凸区间为$(-2,+\infty)$；拐点为$(-2,-2e^{-2})$。

本题最好列表

七．(本题 10 分) 已知函数$f(x)\in C[0,1]$, 它在$(0,1)$内可导, $f(0)=f(1)=0$, 且$f(\frac{1}{2})=1$. 试证明：

1) 存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得$f(\eta)=\eta$；

2) 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)+2\xi\left(f(\xi)-\xi\right)=1$.

证明：1）设$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$内可导，且

$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}>0,\ F(1)=f(1)-1=-1<0,$$

所以存在$\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得$f(\eta)=\eta$。

2）设$G(x)=e^{x^2}(f(x)-x)$，则$G(x)\in C[0,1]$，在$(0,1)$内可导，且

$$G(\eta)=e^{\eta^2}(f(\eta)-\eta)=0,\quad G(0)=f(0)-0=0,$$

则有存在$\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$, 使得

$$G'(\xi)=0,\ \text{即}\ f'(\xi)+2\xi\left(f(\xi)-\xi\right)=1\text{。}$$

八．(本题 8 分) 函数$f(x)$在$[0,2]$上具有三阶连续的导数, 且

$$f(0)=0,\quad f(2)=2,\ f'(1)=0.$$

证明: 至少存在一点$\xi\in(0,2)$, 使$f'''(\xi)=6$.

证明：将函数$f(x)$在$x_0=1$处展开成 2 阶带拉格朗日型余项的泰勒公式

$$\begin{aligned}f(x)&=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(\eta)}{6}(x-1)^3\\&=f(1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(\eta)}{6}(x-1)^3\end{aligned}$$

把$x=0,2$分别代入上式得

$$f(0)=f(1)+\frac{f''(1)}{2}-\frac{f'''(\eta_1)}{6},\qquad f(2)=f(1)+\frac{f''(1)}{2}+\frac{f'''(\eta_2)}{6}$$

两式相减得

$$2=\frac{f'''(\eta_1)}{6}+\frac{f'''(\eta_2)}{6}\Leftrightarrow\frac{f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)}{2}=6$$

利用连续函数的介值性可知结论成立