第六章　不定积分

§1 不定积分的概念

一、原函数与不定积分的概念

定义1.1 如果对$\forall x \in I$，都有$F'(x) = f(x)$，那么$F(x)$就称为$f(x)$在区间I上的一个原函数

例

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

$\ln x$是$\frac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$\tan x$是$\sec^2 x$的原函数.

问题1 原函数是否存在?

原函数不一定存在

例如, 符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

假设有原函数 $F(x)$, 则 $F(x)=\begin{cases}x+C, & x>0\\ C, & x=0\\ -x+C, & x<0\end{cases}$

但 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 故假设错误.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在原函数.

原函数存在定理

如果函数 $f(x)$在区间I内连续，那么在区间I内存在可导函数$F(x)$，使$\forall x \in I$，都有$F'(x) = f(x)$.

连续函数一定有原函数.

问题2 (1) 原函数是否唯一？

(2) 若不唯一它们之间有什么联系？

答案

（1）若 $F'(x) = f(x)$，则对于任意常数 C，

$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

（2）若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，

则 $F(x)-G(x)=C$

（C为任意常数）

定义1.2 在区间I上，函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$在区间I内的不定积分，记为$\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的**积分曲线**.

求不定积分得到一积分曲线族.

例1 求 $\int \frac{1}{1+x^2}dx.$

解

$$\because \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C.$$

二、 基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C \quad$ (k是常数)

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$;

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$;

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$

(12) $\int e^x dx = e^x + C;$

(13) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

(14) $\int \sinh x dx = \cosh x + C;$

(15) $\int \cosh x dx = \sinh x + C;$

例2 求积分 $\int x^2\sqrt{x}dx$.

解 $\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx$

根据积分公式（2） $\int x^{\mu}dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C.$$

三、不定积分的性质

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x),\qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,\qquad \int dF(x)=F(x)+C.$$

结论　微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

先积后导全消掉先导后积常数要

定理1.1 $\int [k_1 f(x)+k_2 g(x)]dx = k_1\int f(x)dx + k_2\int g(x)dx$

证 $\because \left[k_1\int f(x)dx + k_2\int g(x)dx\right]'$

$$= k_1\left[\int f(x)dx\right]' + k_2\left[\int g(x)dx\right]' = k_1 f(x)+k_2 g(x).$$

$\therefore$ 等式成立.

注 (1) 定理不包含 $k_1 = k_2 = 0$ 的情形；

(2) 定理可以推广到有限多个函数线性组合的情形.

例3 求积分 $\int\left(\frac{3}{1+x^{2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)dx.$

解

$$\int\left(\frac{3}{1+x^{2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)dx$$

$$=3\int\frac{1}{1+x^{2}}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例4 求积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

例5 求积分 $\int \frac{1}{1-\cos 2x} dx.$

解 $\int \frac{1}{1-\cos 2x} dx = \int \frac{1}{1-(1-2\sin^2 x)} dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cot x + C.$$

注 以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形,才能使用基本积分表.

例6 已知一曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率为 $\sec^2 x + \sin x$，且此曲线与 y 轴的交点为 $(0,5)$，求此曲线的方程.

解 $\because \quad \dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sin x,$

$$\therefore \quad y = \int \left(\sec^2 x + \sin x\right) dx$$

$$= \tan x - \cos x + C,$$

$\because \quad y(0) = 5, \qquad \therefore \quad C = 6,$

所求曲线方程为 $y = \tan x - \cos x + 6.$

例7 求积分

$$\int f(x)dx,\quad 其中f(x)=\begin{cases}1 & -\infty<x<0\\ x+1 & 0\le x\le 1\\ 2x & 1<x<+\infty\end{cases}.$$

解

$$F(x)=\int f(x)dx=\begin{cases}x+C_1 & -\infty<x<0\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2 & 0<x<1\\ x^2+C_3 & 1<x<+\infty\end{cases}$$

由$F(x)$在$x=0$和$x=1$处的连续性知

$$C_1=C_2,\frac{3}{2}+C_2=1+C_3\Rightarrow C_1=C_2,C_3=C_2+\frac{1}{2}.$$

$$F(x)=\begin{cases} x+C_2 & -\infty<x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2 & 0\le x\le 1 \\ x^2+C_2+\dfrac{1}{2} & 1<x<+\infty \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x & -\infty<x<0 \\ \dfrac{x^2}{2}+x & 0\le x\le 1 \\ x^2+\dfrac{1}{2} & 1<x<+\infty \end{cases}+C_2$$

作业

习题6. 1

2（双数）