北京航空航天大学

2019 - 2020 学年 第一学期期末考卷

《 工科数学分析（ Ⅰ ）》

（A卷）

班号 ____________　　学号__________　　姓名____________

主讲教师_________　　考场__________　　成绩____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2020 年 1 月 6 日

一、 选择题（每题 4 分，满 24 分）

1. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx=$（ A ）.

A. 2； B. 6； C. 5； D. 1.

2. 设 $f(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$, 则曲线 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的弧长为 (D).

A. 1 B. $\ln 2$ C. $\ln 3$ D. 4.

3. 下列广义积分中，收敛的是 (C).

A. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$ B. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$ C. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$ D. $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3}}$.

4. 曲线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ $(a>0)$ 在 $x=0$ 处的曲率 $k=$ （ C ）

A. $\sqrt{2}a$ B. $2a$ C. $\frac{1}{a}$ D. 0

5. 设函数 $f(u)=\int_0^u\cos(u-t)^2\mathrm{d}t$,令 $F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，则 $F''(x)=$(B).

A. $\int_0^x\cos(u-t)\mathrm{d}t$ B. $\cos x^2$ C. $-\cos x^2$ D. 1.

6. 下列叙述中正确的是 （ A ）

A. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调递增的函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

B. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在原函数

C. 若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则有 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

D. 若对任意 $A>0$, 积分 $\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界，且有 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$，则广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

二、 计算题（每题 6 分，满分 18 分）

1. $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x.$

解：$\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$ -------------------3 分

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x + C$$ --------------------------------6 分

2. $\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

解：**法一：**

$\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^2\frac{(1+e^x-e^x)}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)\ \mathrm{d}x$ -------------------3 分

$=[x-\ln(1+e^x)]\big|_0^2 = 2+\ln\frac{2}{1+e^2}.$ ----------------------6 分

法二：$\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^2\frac{e^{-x}\,dx}{e^{-x}+1}=-\int_0^2\frac{1}{e^{-x}+1}d(e^{-x}+1)$ -------------------3 分

$=-\ln(e^{-x}+1)\big|_0^2=\ln 2-\ln(1+e^{-2})$ ---------------------6 分

法三：令 $e^x=t$， $\int_0^2\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_1^{e^2}\frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ -------------------3 分

$=\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\ \mathrm{d}t=[\ln t-\ln(1+t)]\big|_1^{e^2}=2+\ln\left(\frac{2}{1+e^2}\right)$ -------------6 分

注：答案写成 $2-\ln(1+e^2)+\ln 2.$ 等不同形式

3. $\int_{-1}^{1}\left(\sin x^{2019}+x^{2020}\right)\cos(x^{2021})\mathrm{d}x$

解：由 $\sin x^{2019}\cos(x^{2021})$ 是奇函数及**对称性知** $\int_{-1}^{1}\left(\sin x^{2019}\right)\cos(x^{2021})\mathrm{d}x=0$ -------------2 分

所以

$\int_{-1}^{1}\left(\sin x^{2019}+x^{2020}\right)\cos(x^{2021})\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^{2020}\cos(x^{2021})\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}\int_{-1}^{1}\cos(x^{2021})\mathrm{d}x^{2021}$ ------------4 分

$=\frac{1}{2021}(\sin(x^{2021}))\big|_{-1}^{1}=\frac{2\sin 1}{2021}$ ------------6 分

三、　计算证明题（每小题 6 分，满分 18 分）

1. 指出瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ 中的瑕点并计算积分值.

解：$x=1$ 是瑕点　　------------------------2 分

令 $\sqrt{1-x}=t$　　原式 $=\int_1^0 \frac{-2t}{(1+t^2)t}dt$

$=2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=2\left(\arctan t\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$　　------------------------6 分

2. 求方程 $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2}$ 的通解.

解：此为一阶线性微分方程　其中 $P(x)=-\frac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^2$ ---------------2 分

带入公式

$y(x)=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C].$　　$y(x)=(x+1)^2(x+C).$　　----6 分

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

解法 1：$0\le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\le x^n \Rightarrow 0\le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx\le \int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$，夹逼定理得极限为 0

解法 2：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\int_0^1 x^n dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cdot\frac{1}{1+n}=0$

四、(本题 8 分) 求微分方程 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$ 的通解.

解：该方程对应的特征方程 $p^2-p-2=0$ 的解为 $p_1=-1$，$p_2=2$，

所以齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$　------------------------------3 分

因为 λ=1 不是特征方程的根，所以设非齐次微分方程的特解为

$$y^*=(Ax+B)e^x$$　-----------------------------4 分

将 $(y^*)'=Ae^x+(Ax+B)e^x$，　$(y^*)''=2Ae^x+(Ax+B)e^x$

代入非齐次方程，整理后得：$-2Ax+(A-B)=1-2x$

解得：A=1，$B=0$　------------------------------7 分

所以所求方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$　-----------8 分

五.（本题 12 分） 求圆 $(x-b)^2+y^2\le a^2(0<a<b)$, 绕 y 轴旋转一周，所得旋转体的**体**

积和表面积.

解：以 y 作为积分变量，$-a\le y\le a$, 记 $x_1(y)=b+\sqrt{a^2-y^2}$, $x_2(y)=b-\sqrt{a^2-y^2}$,

旋转体体积为：

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-y^2})^2dy-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-y^2})^2dy$$ ------2 分

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy=8\pi b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy=2\pi^2a^2b.$$ -------6 分

旋转体表面积为：

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}x_1(y)\sqrt{1+(x_1')^2}dy+2\pi\int_{-a}^{a}x_2(y)\sqrt{1+(x_2')^2}dy$$ -------8 分

$$=2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-y^2})\sqrt{1+(\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}})^2}dy+2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-y^2})\sqrt{1+(\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}})^2}dy$$

$$=8\pi ab\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}}=8\pi ab\arcsin\frac{y}{a}\Big|_0^a=4\pi^2ab$$ -------12 分

六、（**本题 10 分**）设广义积分为

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x\mathrm{d}x\ \ (p>0)$$

指出并证明无穷广义积分绝对收敛和条件收敛时所对应的参数 p 的取值范围.

解：

(1) 当 $p>1$ 时，由于 $\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x\right|\le\frac{e}{x^p}$,

由比较判别法可知，此时广义积分绝对收敛. ---------------------3 分

（2） 当 $0\le p\le 1$ 时，

对任意 $A>1$, $|\int_1^A e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x|=|e^{\sin x}|_1^A=|e^{\sin A}-e^{\sin 1}|<2e$，有界

当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x^p}$ 单调递减且极限为0

由 $Dirichlet$ 判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 收敛，

---------------------5 分

$(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调有界，

由 Abel 判别法可知，此时广义积分收敛. ---------------------6 分

$$③\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}(1+\frac{1}{x})^x\right|>\frac{1}{e}\frac{\cos^2 x}{x^p}=\frac{1}{2ex^p}+\frac{\cos 2x}{2ex^p}$$

------------8 分

当$0 \le p \le 1$时，$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p} dx$发散，由Dirichlet判别法可知$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$收敛，

所以当$0 < p \le 1$时，$\int_1^{+\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})^x \cos x}{x^p} dx$发散.

即$0 < p \le 1$时，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x(9+\arctan x)}{x^p} dx$条件收敛.

------------------------10 分

七、（本题 10 分, 每题 5 分）

⑴ 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，证明$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证明 根据有限闭区间上连续函数的性质，若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则必一致连续. 根据一致连续函数的性质,任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，对$[a,b]$中任意两点x', x''，只要$|x'-x''| < \delta$，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

--------------------- 2 分

因此只要$[a,b]$上的分割T满足$\|T\| < \delta$，则 $f(x)$在任一小区间Δ_i上的振幅满足

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x',x''\in\Delta_i} |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

所以有 $\sum_T \omega_i \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_T \Delta x_i = \varepsilon \cdot$

所以$f(x)$在$[a,b]$上可积. --------------------5 分

（2）求极限 $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1+\frac{k}{n}) \sin \frac{k\pi}{n^2}$

解： 对于一切$k < n, n > 3$,

$0 \le \frac{k\pi}{n^2} - \sin\frac{k\pi}{n^2} \le \tan\frac{k\pi}{n^2} - \sin\frac{k\pi}{n^2} \le \tan\frac{k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right) \le \frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$, ----2 分

所以

$0 \le \sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})(\frac{k\pi}{n^2} - \sin\frac{k\pi}{n^2}) \le \sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \le 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \to 0.$

则有 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2} = \int_0^1 (1+x)\pi x dx = \frac{5\pi}{6}$---------5 分