3.4 展开定理

引理3.4.1 证明

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1r} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{r1} & \cdots & a_{rr}
\end{vmatrix}
\bullet
\begin{vmatrix}
a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

分析：　每一项的特点,得到

$$\Delta = \sum_{(i_1\cdots i_r i_{r+1}\cdots i_n)} \mathrm{sgn}(i_1\cdots i_r i_{r+1}\cdots i_n) a_{1i_1}\cdots a_{ri_r} a_{r+1,i_{r+1}}\cdots a_{ni_n}.$$

排列 $(i_1\ldots i_r i_{r+1}\ldots i_n)$的逆序数是

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ i_{r+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \text{的和。}$$

例1 计算

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 2 & 3 & 0 & 0 \\ * & 4 & 5 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1 & 3 \\ * & * & * & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\Delta = -1 \bullet \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

如果n阶行列式的第一行或第一列除了第一个元以外全都为0，就可以利用公式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot M_{11}$$

如果行列式的第一行只有一个非零元，但不在第1列而在另外一列，则可以通过列的互换将这个非零元换到第1列来计算。

行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1j} & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第1行除了第j列的a_{1j} 以外，其余元都是0，试将Δ化为n-1阶行列式来计算。

解： 将Δ 的第 j 列依次与它左边的j-1列互换位置，经过j-1次变号变为

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{1j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1j} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j} M_{1j}$$

从而 $\Delta = (-1)^{j-1}\Delta_1 = a_{1j} \cdot (-1)^{j-1} M_{1j}$

$(-1)^{1+j}M_{1j}$称为a_{1j}在Δ中的代数余子式，记做A_{1j}。这样，上式就成为:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j}$$

而对于一般的行列式，可以将第一行$(a_{11},\ldots,a_{1n})$拆成n个至少含有$n-1$个0向量的和:

$$(a_{11},\ldots,a_{1n})=(a_{11},0,\ldots 0)+(0,a_{12},\ldots,0)+\ldots+(0,\ldots,0,a_{1n})$$

按照行列式的性质2有:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+\dots+a_{1j}A_{1j}+\dots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

这就得出了

引理3.4.2　行列式Δ的值，等于它的第1行各元素分别乘以它们的代数余子式所得的乘积之和：

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

这称为行列式按第一行展开。

行列式也可按第i行展开：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot(-1)^{1+j}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}M_{ij}$$

M_{ij}称为a_{ij}的余子式，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子式，同样可以得到行列式按列展开的公式：

引理3.4.3　行列式Δ的值，等于它的任意一行各元素分别乘以各自的代数余子式的乘积之和：

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

也等于它的任意一列各元素分别乘以各自的代数余子式的乘积之和：

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

对于等式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \chi_1 & \cdots & \chi_j & \cdots & \chi_n \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \chi_1 A_{i1} + \ldots + \chi_j A_{ij} + \ldots + \chi_n A_{in}$$

将两边的$(x_1, \ldots, x_n)$取作Δ的另外一行$(a_{k1},\ldots,a_{kn})(k\neq i)$,
则等式左边行列式的第i行与第k行相等，行列式值为0.于是

$$a_{k1}A_{i1}+\ldots+a_{kj}A_{ij}+\ldots+a_{kn}A_{in}=0$$

对行列式的列也有类似的结果:

$$a_{1k}A_{1j}+\ldots+a_{ik}A_{ij}+\ldots+a_{nk}A_{nj}=0, \forall k\neq j.$$

这样就得到:

定理3.4.1

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}=\begin{cases}\Delta, & 当\ k=i\\ 0, & 当\ k\neq i\end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij}=\begin{cases}\Delta, & 当\ k=j\\ 0, & 当\ k\neq i\end{cases}$$

$M = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix}$是$|A|$中第1,2, …, r行和第k_1, …, k_r

列交叉处的元组成的子式$A\begin{pmatrix} r+1 & \dots & n \\ k_{r+1} & \dots & k_n \end{pmatrix}$是在$|A|$中将$M$所在

的r行和r列全部删去剩下的元按原来的顺序排成的子式，称为M

的余子式，M的余子式与$(-1)^{1+2+\dots+r+k_1+\dots k_r}$的乘积成为M的代数余子式，

由此我们得到：

机动 目录 上页 下页 返回 结束

引理 3.4.4 对任意正整数 $r<n$，n 阶行列式 $|A|$ 的值，等于它的前 r 行元组成的所有的 r 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和. 即

$$|A|=\sum_{1\le k_1<\ldots<k_r\le n} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & r\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_r\end{pmatrix}\cdot(-1)^{1+2+\ldots+r+k_1+\ldots+k_r} A\begin{pmatrix}r+1 & \ldots & n\\ k_{r+1} & \ldots & k_n\end{pmatrix}$$

更一般的，我们有关于行列式按任意 r 行（或列）展开的如下定理:

定理3.4.5（Laplace展开定理） 设 $|A|$ 是 n 阶行列式，对任意正整数 $r<n$，任意取定 r 个指标 $i_1<i_2<\ldots<i_r\le n$，则 $|A|$ 的值等于它的第 i_1，i_2,…i_r 行（或列）元组成的所有的 r 阶子式分别与它们的代数余子式的乘积之和，得

机动 目录 上页 下页 返回 结束

$$|A| = \sum_{1\le k_1<\dots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} \cdot (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+k_1+\dots k_r} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & \dots & i_n \\ k_{r+1} & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\le k_1<\dots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r \end{pmatrix} \cdot (-1)^{k_1+\mathrm{k}_2+\dots+\mathrm{k}_r+i_1+\dots i_r} A\begin{pmatrix} k_{r+1} & \dots & k_n \\ i_{r+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

证明　通过互换行和列得

$$|A| = (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\dots+(i_r-r)}|B|$$

$$= (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\dots+(i_r-r)} \sum_{1\le k_1<\dots<k_r\le n} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} \cdot$$

$$(-1)^{1+2+\dots+\mathrm{r}+k_1+\dots k_r} B\begin{pmatrix} r+1 & \dots & n \\ k_{r+1} & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\le k_1<\dots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k_1 & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} \cdot (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+k_1+\dots k_r} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & \dots & i_n \\ k_{r+1} & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

将$|A|$的转置$|A^T|$按第$i_1,i_2,\ldots,i_r$列展开，就得到$|A|$按第$i_1,i_2,\ldots,i_r$行展开的结论。

例3 设$|A|$是n阶行列式，正整数$r<n$.如果$|A|$的所有的r阶子式都等于0.求证:$|A|=0.$

证明 $|A|$等于前r行元组成的所有的r阶子式与它们的代数余子式的乘积之和，由于所有的r阶子式都等于0.它们与各自的代数余子式的成绩之和也是0.因此$|A|=0.$