基础物理学 A1
2025年春季学期

谢柯盼
kpxie@buaa.edu.cn
物理学院

第一章 质点运动学

§1-1 质点、参考系与坐标系

§1-2 位置矢量与轨道方程

§1-3 位移、速度、加速度

§1-4 质点运动学的两类问题

§1-5 圆周运动与一般曲线运动

§1-6 相对运动

质点运动学的第三类问题（极重要）——

采用微积分处理问题的一个常用技巧

如下形式的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=F(f)T(t)$$

可以分离变数为$\mathrm{d}f/F(f)=T(t)\mathrm{d}t$，并两边积分

$$\int_{f_1}^{f_2}\frac{\mathrm{d}f}{F(f)}=\int_{t_1}^{t_2}T(t)\mathrm{d}t$$

即可求出$f(t)$。右边积分限为时刻t_1和t_2，左边积分限为$f_1=f(t_1)$和$f_2=f(t_2)$，由初始条件给出

该技巧可用于求解一大类运动学或动力学问题

但要注意，该技巧只适用于一阶方程，不能用于二阶方程。例如$\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}t^2=F(f)T(t)$，不能分离变数为$\mathrm{d}^2f/F(f)=T(t)\mathrm{d}t^2$

例：质点作直线运动，初始时刻在原点，初速度为$\boldsymbol{v_0}$，加速度为$\boldsymbol{a=-kv^2}$，问任意时刻质点的位置$\boldsymbol{x}$。

解：由题知速度变化率

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a=-kv^2$$

可得$\mathrm{d}v/v^2=-k\mathrm{d}t$，故

$$\int_{v_0}^{v(t)}\frac{\mathrm{d}v'}{v'^2}=-k\int_0^t\mathrm{d}t'$$

得到$v(t)=v_0/(1+v_0kt)$，从而

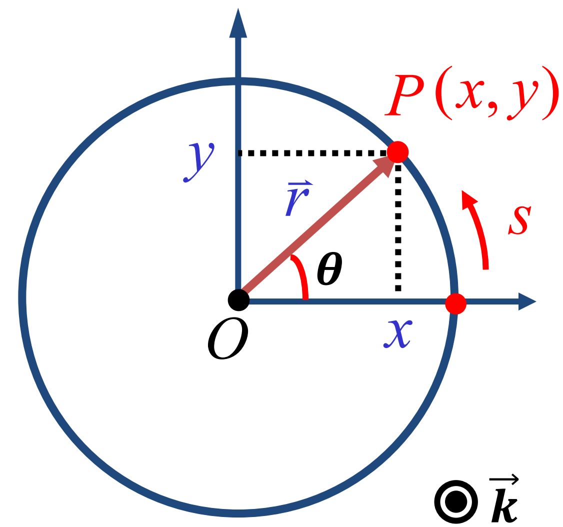
$$x(t)=\int_0^t v(t')\mathrm{d}t'=\frac{1}{k}\ln(1+v_0kt)$$

注意在一维问题中，所有矢量$\vec{A}$均可写为$A\vec{i}$，此时A为代数值，可正可负，其符号表示方向

§ 1-5 圆周运动与一般曲线运动

若质点的轨迹为圆，转动角θ一个参数即可确定其位置

一段时间内，角位置θ的变化$\Delta\theta$称为角位移



平均角速度$\bar{\omega} = \Delta\theta/\Delta t$

瞬时角速度（简称角速度）为

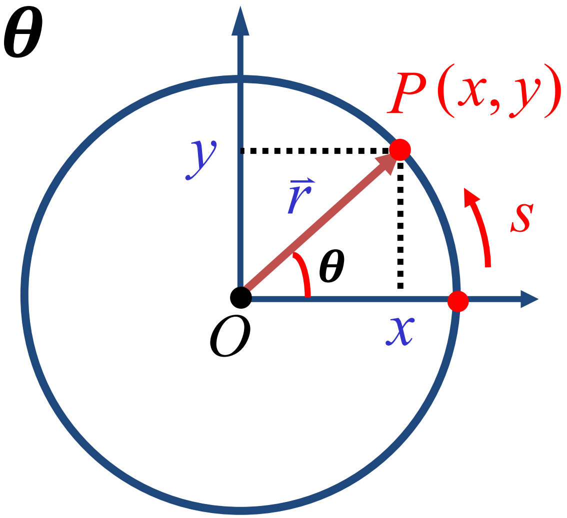
$$\vec{\omega} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\vec{k} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{k} \equiv \omega\vec{k}$$

角加速度

$$\vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\vec{k} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\vec{k} = \beta\vec{k}$$

注意：$\vec{\omega}$和$\vec{\beta}$均为垂直于运动平面的矢量，由右手法则定出其具体方向

角量与线量的关联：核心关系$\Delta s = r\Delta\theta$



又由一阶无穷小意义下$\Delta s \approx |\Delta\vec{r}|$

可知$v = r\omega$

考虑方向之后写为$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

此时加速度的“切法向”和“径横向”分解方式重合，

$$\vec{a} = a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n$$

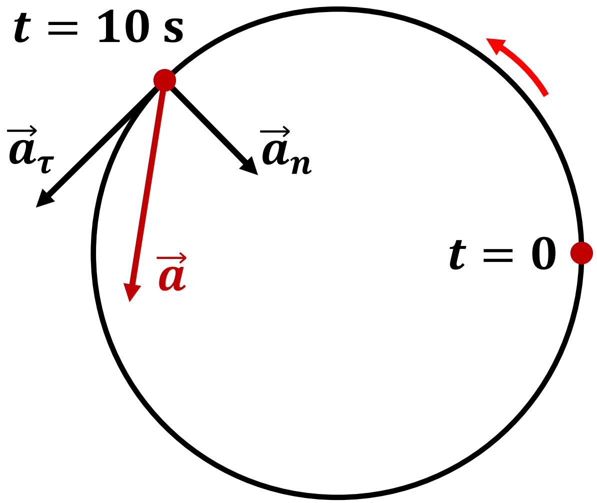
切向加速度$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\beta$

法向加速度$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

上述公式适用于任意圆周运动

- 匀速圆周运动为特例：$a_\tau \equiv 0$，$\vec{a}$指向圆心
- 一般圆周运动$\vec{a}$不一定指向圆心（特别注意）

例：质点在半径为10 m的圆轨道上运动，切向加速度大小为$0.2\ \mathrm{m/s^2}$。质点初速度为零，求$t = 10\ \mathrm{s}$时的法向加速度和总加速度的大小。



解：$a_\tau = \dot{v}$为常量，故t时刻的速率

$$v = a_\tau t = 2\ \mathrm{m/s}$$

据此可得出此时的法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a_\tau^2 t^2}{R} = 0.4\ \mathrm{m/s^2}$$

以及总加速度大小

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \approx 0.45\ \mathrm{m/s^2}$$

如果题目问的是总加速度矢量，则需要用路程除以半径来得到走过的角度，并据此指出总加速度的方向

例：质点沿半径为R的圆周运动，运动学方程为

$$\theta = 3 + 2t^2 \text{ (SI)}$$

则t时刻质点法向加速度大小为$a_n =$_______；切向加速度大小为$a_\tau =$_______。

解：由角量可推知线量

$$v = R\dot{\theta} = 4Rt$$

故法向加速度

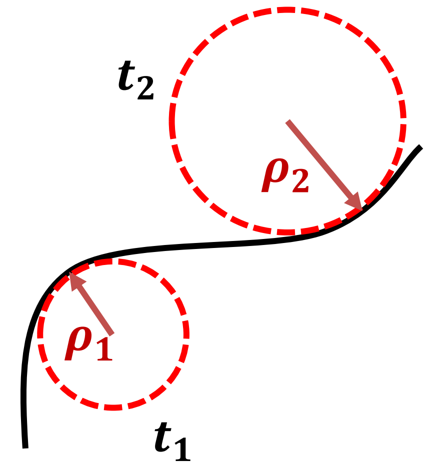
$$a_n = \frac{v^2}{R} = 16Rt^2$$

切向加速度

$$a_\tau = \dot{v} = 4R$$

可看出加速度并非指向圆心，因为并非匀速圆周运动

一般曲线运动，在给定时刻t的邻域内，轨迹总可近似为一个圆，其半径ρ称为曲率半径



故仍可存在速度关系$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}$

加速度分解$\vec{a} = a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n$

切向$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \rho\beta$

法向$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\omega^2$

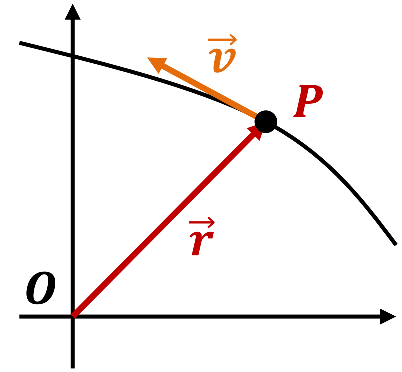
只是要注意ρ也会**随时间变化**

若已知速度及加速度，可求曲率半径

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}$$

例：习题1.14，无阻力抛体运动的总加速度大小为g，切向加速度可用几何分解给出，任一点曲率半径可解

一个经典实例：若质点与原点连线在相同时间内扫过相同的面积，求其加速度性质。

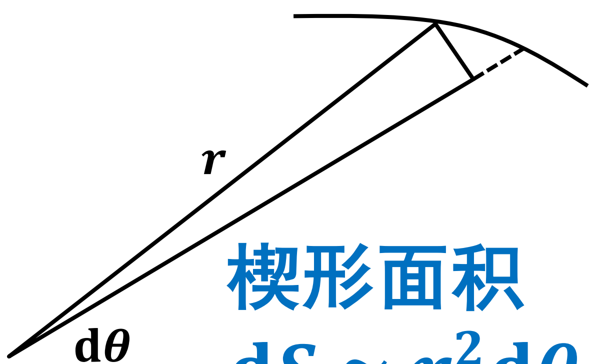


求解思路：建立平面极坐标，以(r,θ)来描述质点位置

并写下其速度和加速度的径横向分解

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$



楔形面积

$\mathrm{d}S \approx r^2\mathrm{d}\theta/2$

面积律即是说$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$为常量，

因而$r^2\dot{\theta}$为常量

注意到横向加速度

$$\vec{a}_\theta = \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)\right]\vec{e}_\theta$$

故隐含着$\vec{a}_\theta = \vec{0}$

故面积律隐含着质点**加速度只有径向分量**的重要结论

若面积律成立，则横向加速度$a_\theta = 0$，径向加速度$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$可利用以下特性化简：
$r^2\dot{\theta}$为常量；$\mathrm{d/dt} \equiv \dot{\theta}\,\mathrm{d/d}\theta$。最终可消去时间，得出

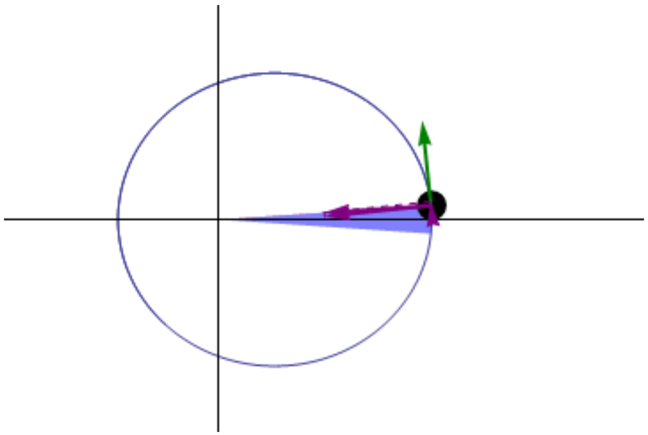
$$a_r \propto \frac{1}{r^5}\left(rr'' - 2(r')^2 - r^2\right)$$

理解即可

其中撇号代表r对θ的导数。给定$r(\theta)$，可求出a_r

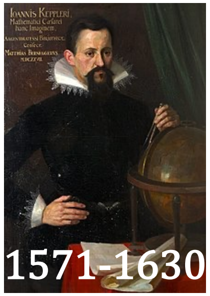
若质点轨迹为椭圆，极坐标方程

$$r(\theta) = \frac{l}{1 + e\cos\theta}$$



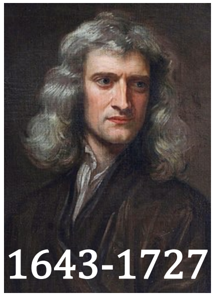
其中$0 < e < 1$为偏心率

则可解出$a_r \propto -1/r^2$，平方反比



开普勒给出了行星位置及速度的规律

牛顿解出了其隐藏的加速度规律，这是他提出万有引力定律的重要依据。



§1-6 相对运动

坐地日行八万里，巡天遥看一千河。

——毛泽东《送瘟神·其一》

赤道周长约4万公里，以**地心为参考系**，坐在赤道上的人一昼夜运动路程为赤道周长8万里

地球公转速度约为30 km/s，**以太阳为参考系**，坐地日行约500万里

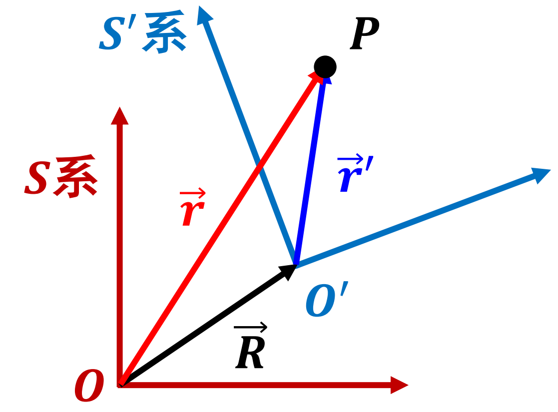
太阳系绕银河系中心的公转速度约为230 km/s，**以银心为参考系**，坐地日行多少里？

同一运动在**不同参考系**内的描述很不一样

但它们必定存在**关联**，因为是对同一客观现象的描述

质点P在空间中运动，用两种不同的坐标系来描述之

- 在S系中：t，$\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{a}$
- 在S'系中：t'，$\vec{r}'$，$\vec{v}'$，$\vec{a}'$



S'相对于S的位矢为$\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$

由几何关系得$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$

求导得$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$，其中$\vec{V} = \dot{\vec{R}}$称为牵连速度

再求导$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$，其中$\vec{A} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{R}}$称为牵连加速度

上述运算隐含着经典力学的绝对时空观：

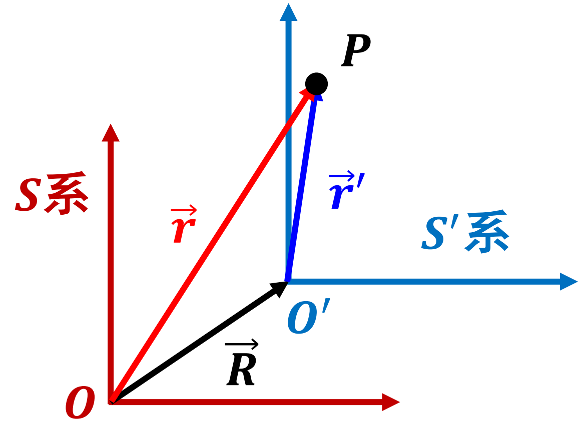
1. $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$，不同参考系的时间度量相同；
2. 在S'系度量的位矢$\vec{r}'$可以直接应用到S系的计算中，即不同参考系的空间度量相同

《力学》前七章均用此假定，第八章（相对论）例外

S系：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

S'系：$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$

要得到坐标关系式，则还需要$\vec{i}'(t)$、$\vec{j}'(t)$、$\vec{k}'(t)$的信息，即在S系中测得的S'系方向矢量（坐标轴）运动情况



若在S系看来，$\vec{i}'$、$\vec{j}'$、$\vec{k}'$不随时间变化，则称S'系平动

此时可取$\vec{i}' = \vec{i}$，$\vec{j}' = \vec{j}$，$\vec{k}' = \vec{k}$，使两系坐标轴平行

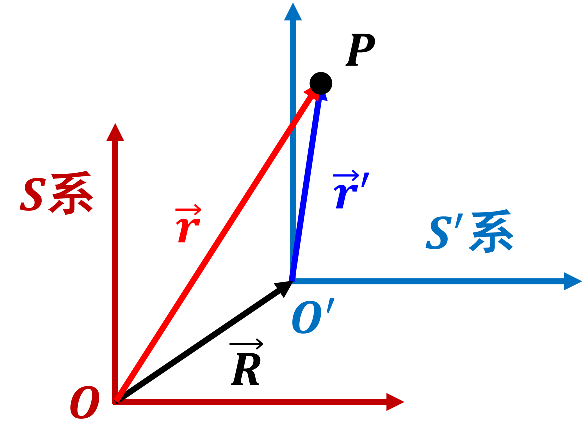
此时令$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$，则可得坐标关系

- $x = x' + R_x$，$y = y' + R_y$，$z = z' + R_z$
- $v_x = v'_x + V_x$，$v_y = v'_y + V_y$，$v_z = v'_z + V_z$
- $a_x = a'_x + A_x$，$a_y = a'_y + A_y$，$a_z = a'_z + A_z$

其中(V_x, V_y, V_z)和(A_x, A_y, A_z)分别为牵连速度和牵连加速度在S系的分量

特例： S'相对于S匀速直线运动，且初始时刻原点重合

则$\vec{R}=\vec{V}t$且$\vec{V}$为常量，给出



$$x=x'+V_xt$$
$$y=y'+V_yt$$
$$z=z'+V_zt$$

称为伽利略变换，是惯性系之间的坐标变换式

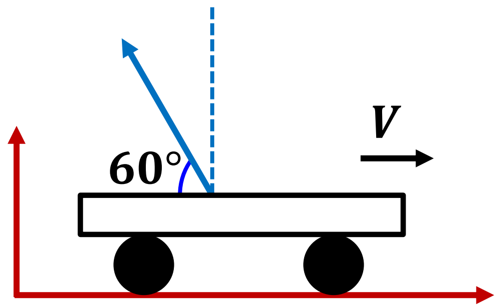
亦是经典时空观的数学体现

相应的速度、加速度变换为

$$v_x=v'_x+V_x,\quad v_y=v'_y+V_y,\quad v_z=v'_z+V_z;$$
$$a_x=a'_x,\quad a_y=a'_y,\quad a_z=a'_z;$$

即加速度在伽利略变换下保持不变。

例：如图，车以10 m/s的速度水平前进，车上乘员向后上方以60°角斜抛一石块，地上观察者看到石块铅直向上运动。求其上升高度。



解：以地面为S系，车为S'系，牵连速度

$$\vec{V}=(V,0)=(10\ \mathrm{m/s},0)$$

在车上乘员看来，石块速度为

$$\vec{v}'=\left(-\frac{v'}{2},\frac{\sqrt{3}v'}{2}\right)$$

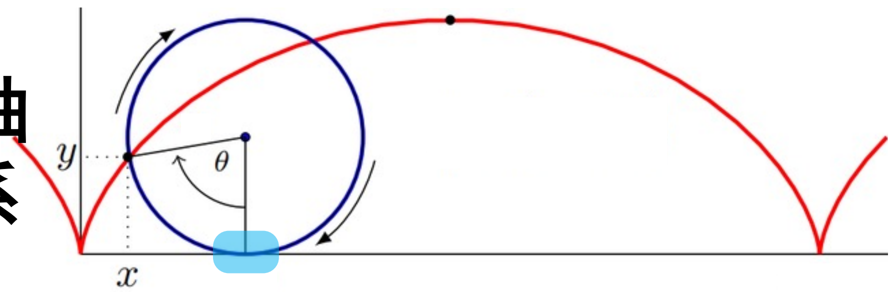
计 算 题 默 认 取
$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$

在地面观察者看来，石块速度为

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{V}=\left(V-\frac{v'}{2},\frac{\sqrt{3}v'}{2}\right)=(0,v)$$

可得$v'=2V$，且地面观测者认为竖直初速$v=\sqrt{3}V$竖直上抛，上升高度$h=v^2/(2g)\approx 15.3\ \mathrm{m}$

例：半径为R的车轮转速为ω，在平直路面上作纯滚动匀速前进。求地面系测得的车轮边沿点P的速度、加速度和运动轨迹。



解：以地面为S系，以轮轴为S'系原点建立平动坐标系

则原点的相对位置

$$\vec{R} = \omega R t \vec{i} + R\vec{j}$$ ← y向没有运动

x向匀速，且纯滚动即接触点对地速度为零，$v = \omega R$

S'系中，P点位置为$\vec{r}' = -R\sin\omega t\,\vec{i} - R\cos\omega t\,\vec{j}$

联立得$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} = R(\omega t - \sin\omega t)\vec{i} + R(1-\cos\omega t)\vec{j}$

故速度$\vec{v} = \omega R(1-\cos\omega t)\vec{i} + \omega R\sin\omega t\,\vec{j}$

加速度$\vec{a} = \omega^2 R\sin\omega t\,\vec{i} + \omega^2 R\cos\omega t\,\vec{j}$

轨迹为**摆线**：令$\omega t \to \theta$，得到参数方程

$x = R(\theta - \sin\theta)$，$y = R(1-\cos\theta)$，此即运动轨迹

本节课小结

分离变数法求解简单的一阶常微分方程

圆周运动角量与线量的关系

- 特别注意角速度**垂直**于运动平面
- 线速度、角速度、位矢之间存在**叉乘**关系

一般运动局域近似为圆周运动，曲率半径

不同参考系对同一运动的描述之间的关联

牵连速度和加速度

特殊的参考系变换：惯性系之间的伽利略变换

第一章作业

1.1, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 1.11, 1.12, 1.16, 1.18, 1.19

作业扫描提交至spoc.buaa.edu.cn，助教线上批改

提交时间段：2月28日0:00至3月14日00:00
以系统时间戳为准，原则上不接受其他解释