§18.3 Gauss公式与Stoks公式 (1)

设Ω 为空间上的一个区域,如果Ω 内的任何一张封闭曲面所围的立体仍属于Ω, 那么称Ω 为二维单连通区域，否则称Ω 为二维复连通区域.

二维单连通区域之中不含有“洞”

二维复连通区域之中含有“洞”.

例如 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2<1\}$ 是二维单连通区域,

$\{(x,y,z)\,|\,\frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<1\}$ 是二维复连通区域.

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

Gauss公式

定理3.1

设空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成, 函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在 V 上连续, 且具有一阶连续偏导数, 则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

其中 S 取外侧. 此式称为高斯公式.

分析

只证 $\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oint\!\!\oint\limits_S Rdxdy$? ……

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{\cdots}^{\cdots} \frac{\partial R}{\partial z} dz \qquad \pm \iint\limits_{D_{xy}} Rdxdy$$

$$\downarrow$$

平行于 z 轴且通过 D_{xy} 的内点的直线与 V 的边界相交不多于两点.

证

先设V是一个xy型区域,即其边界曲面S由曲面

$S_1: z = z_1(x,y), (x,y) \in D_{xy}$,

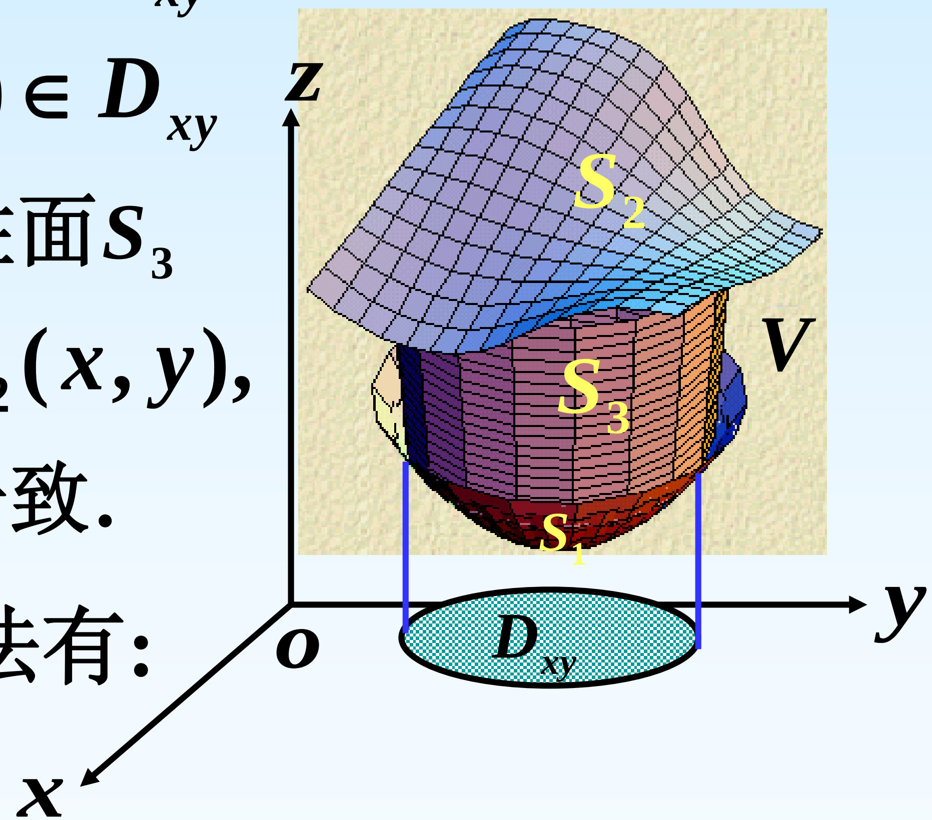
$S_2: z = z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}$

及垂直于D_{xy}的边界的柱面S_3

构成,其中 $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$,

S_1, S_2, S_3的侧与S的侧一致.

根据三重积分的计算法有:



$$\iiint\limits_{V}\frac{\partial R}{\partial z}dy=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}R[x,y,z_2(x,y)]dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}R[x,y,z_1(x,y)]dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_2}R(x,y,z)dxdy+\iint\limits_{S_1}R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint\limits_{S_2}R(x,y,z)dxdy+\iint\limits_{S_1}R(x,y,z)dxdy$$

$$+\iint\limits_{S_3}R(x,y,z)dxdy$$

即得 $$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint_S Rdxdy$$

对于不是 xy 型区域的情形，可用有限个光滑

曲面将它分割成若干个 xy 型区域来讨论.

类似,分别考虑yz,zx型区域,得到另外两个关系

式成立，故

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Gauss公式的实质

表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

使用Gauss公式时应注意:

1. P,Q,R是对什么变量求偏导数;

2. 是否满足高斯公式的条件;

3. S是取闭曲面的外侧;

4. Gauss公式对于二维复连通区域也成立. 这时区域外面的边界取外侧, 内部的边界取内测. 相对于区域来说,整体取外侧.

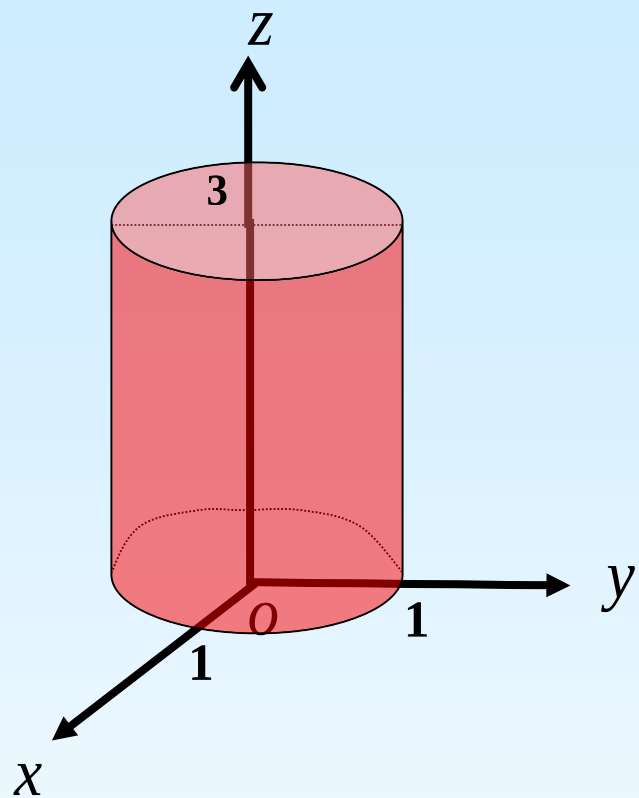
利用 *Gauss* 公式,可以通过第二型 曲面积分来表示闭曲面所围成的立体的体积.

$$\Delta V = \frac{1}{3}\iint_{\partial V} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

例1 计算曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

其中S为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0, z=3$所围成的空间闭区域V的整个边界曲面的外侧.



解 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y.$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=y-z, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

$$原式=\iiint\limits_V (y-z)dxdydz$$ (利用柱面坐标得)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^3 (r\sin\theta-z)rdz=-\frac{9\pi}{2}.$$

例 2 计算曲面积分

$\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，其中 S 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=h(h>0)$ 之间的部分的下侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 在 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

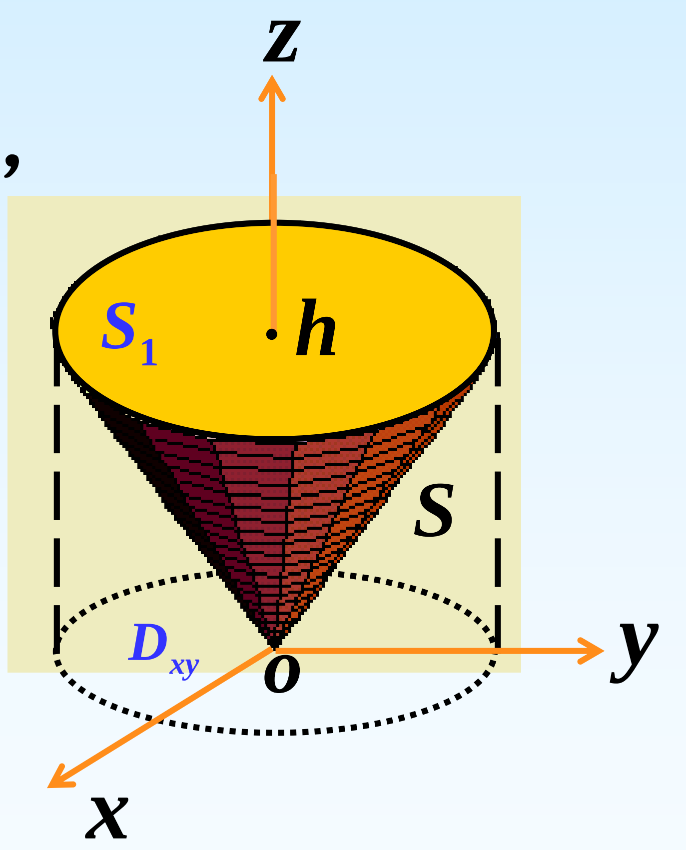
解 空间曲面在 xoy 面上的投影域为 D_{xy}

曲面 S 不是封闭曲面, 为利用高斯公式

补充 S_1 : $z = h$, $(x^2 + y^2 \le h^2)$.

S_1取上侧, $S + S_1$构成封闭曲面,

围成空间区域 V, 由高斯公式,



$$\iint_{S+S_1}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$$

$$= \iint_{S+S_1} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

$$= 2\iiint_V (x+y+z)dV = 2\iiint_V zdV$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz$$

其中 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le h^2\}.$

$$= \iint_{D_{xy}} (h^2 - x^2 - y^2) dxdy = \frac{1}{2}\pi h^4.$$

$$\because \quad \iint_{S_1} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS = \iint_{S_1} z^2 dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} h^2 dxdy = \pi h^4.$$

故所求积分为

$$\iint_{S} (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS = -\frac{1}{2}\pi h^4.$$

例3 计算$A=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$

$\Sigma=\{(x,y,z): x,y,z\geq 0, x+y+z=1\}$,

法向量与(1,1,1)同.

解 补上三个坐标面上的三角形,得到一个四面体.

四面体区域记为Ω,四面体的表面记为$\partial\Omega$,

由于每个坐标面上$xdydz+ydzdx+zdxdy=0$,

所以$A=\iint\limits_{\partial\Omega} xdydz+ydzdx+zdxdy=3\iiint\limits_{\Omega} d\sigma=\frac{1}{2}$

例4 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$

其中Σ是曲面 $z=2-x^2-y^2\ (1\le z\le 2)$的上侧

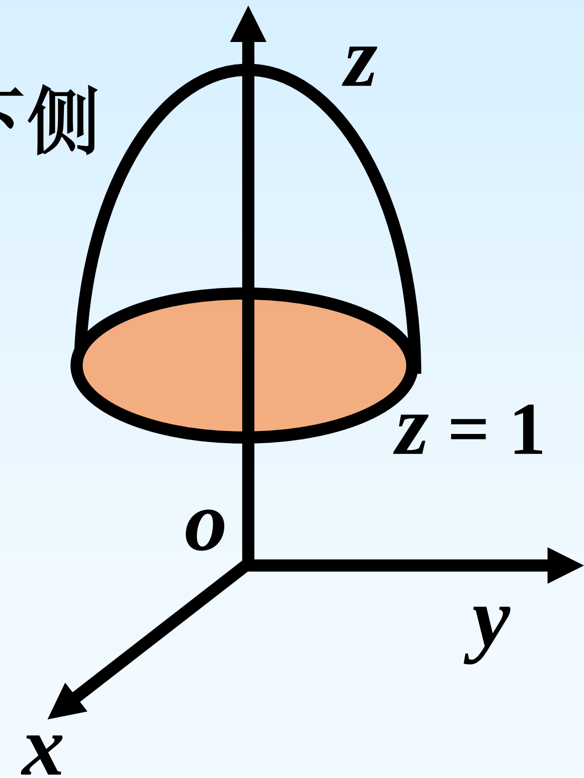
解 记$\Sigma_0: z=1, (x,y)\in D: x^2+y^2\le 1$ 取下侧

$\Omega:\Sigma+\Sigma_0$所围成的闭区域

由Gauss 公式得

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\Big(\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}\Big)Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$



其中$P=y^2-x, Q=z^2-y, R=x^2-z$

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \quad (\Sigma+\Sigma_0\text{取外侧})$$

$$=\iiint_{\Omega}(-1-1-1)dv \;=-3\cdot\text{体积}$$

而曲顶柱体的体积（用柱坐标）

$$V=\iiint_{\Omega} dV \;=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_1^{2-r^2}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr \;=\frac{\pi}{2}$$

或用截面法来计算

$$V=\int_1^2 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z} dxdy=\pi\int_1^2(2-z)dz=\frac{\pi}{2}$$

而$\iint\limits_{\Sigma_0}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$

$$=\iint\limits_{\Sigma_0}(x^2-z)dxdy=-\iint\limits_{D}(x^2-1)dxdy$$

$$=-[\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma-\iint\limits_{D}d\sigma]$$

$$=-[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr-\pi]=\frac{3\pi}{4}$$

故原式$=-3\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{9\pi}{4}$

例5 计算 $\oiint\limits_{S}\frac{x-1}{r^3}dydz+\frac{y-2}{r^3}dzdx+\frac{z-3}{r^3}dxdy,$

其中 $r=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$，$S$为长方体 $V=\{(x,y,z)\,||\,x|\le 2,|y|\le 3,|z|\le 4\}$的表面并取外侧.

分析： $Gauss$公式?

$\frac{1}{r^3}$ 请出去?

解 取充分小的$R>0$, 作球面

$$\Sigma:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=R^2,$$

使得Σ包含在S的内部, 并取Σ为外侧.

$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3(x-1)^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3(y-2)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3(z-3)^2}{r^5},$$

$\therefore$ 在 S 和 Σ 围成的区域上满足Gauss公式的条件,

所以 $\displaystyle\oiint_{S}\frac{x-1}{r^3}dydz+\frac{y-2}{r^3}dzdx+\frac{z-3}{r^3}dxdy$

$$=\oiint_{S-\Sigma}\frac{x-1}{r^3}dydz+\frac{y-2}{r^3}dzdx+\frac{z-3}{r^3}dxdy$$

$$+\oiint_{\Sigma}\frac{x-1}{r^3}dydz+\frac{y-2}{r^3}dzdx+\frac{z-3}{r^3}dxdy$$

$$=0+\oiint_{\Sigma}\frac{x-1}{r^3}dydz+\frac{y-2}{r^3}dzdx+\frac{z-3}{r^3}dxdy$$

$$=\frac{1}{R^3}\oiint_{\Sigma}(x-1)dydz+(y-2)dzdx+(z-3)dxdy$$

$$=4\pi.$$

例6 证明 $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{r} = \frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \cos(\vec{r},\vec{n})\,dS$

Σ是包围 V 的曲面，$\vec{n}$为Σ的单位外法向量，

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \vec{r} = (x,y,z) \quad (0,0,0) \notin \Sigma$

证明 记 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

则$\cos(\vec{r},\vec{n}) = \frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma$

$$\frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} \cos(\vec{r},\vec{n})dS = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(\frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma)dS$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma} \frac{x}{r}dydz + \frac{y}{r}dzdx + \frac{z}{r}dxdy$$

1) 若$(0,0,0)\notin V$,由Gauss公式

$$\frac{1}{2}\oiint_{\Sigma}\cos(\vec{r},\vec{n})dS=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\frac{x}{r}dydz+\frac{y}{r}dzdx+\frac{z}{r}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_{V}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint_{V}\frac{dxdydz}{r}$$

2) 若$(0,0,0)$在V的内部,取充分小的ε

记$S_{\varepsilon}: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 取内侧

$$V_{\varepsilon}: x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2$$

在Σ和S_ε所围的区域上应用Gauss公式

$$\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{dxdydz}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma+S_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})dS$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\cos(\vec{r},\vec{n})dS+\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{S_\varepsilon}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\cos(\vec{r},\vec{n})dS+\frac{3}{2\varepsilon}\iiint\limits_{V_\varepsilon}dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\cos(\vec{r},\vec{n})dS+2\pi\varepsilon^2$$

令$\varepsilon\to 0$,即可证明结论.