第2章 向量空间

2.1 线性方程组的几何意义

2.2 线性相关与线性无关

2.3 基

2.4 坐标变换

2.5 向量组的秩

2.6 子空间

2.7 子空间的交与和

2.8 更多的例子*

2.1 线性方程组的几何意义

线性方程组的唯一解问题

例1 在平面上建立直角坐标系，(x_1,y_1), $(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$是任意$n$个横坐标不同的点。是否存在唯一的实系数多项式

$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$, 它的图形曲线经过这$n$个已知点？

分析

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_1^m & = & y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + \cdots + a_m x_2^m & = & y_2 \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m & = & y_n \end{cases}$$

变量个数$m+1$，方程个数为n。何时有唯一解，特别当$m+1=n$时，上述方程是否有唯一解。

二元一次方程组有唯一解的条件

例3 研究实系数二元一次方程组有唯一解的充分必要条件

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

解：方程组可写成向量形式

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

也就是 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ (2. 1. 3)

将 $\overrightarrow{OC}$ 表示成 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 的**线性组合**，求系数 *x*, *y* 。

当 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 不共线,

即 $a_1b_2\neq a_2b_1$ 时,有**唯一解**.

当 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 共线时

如果有解，一定有**无穷多个解**。

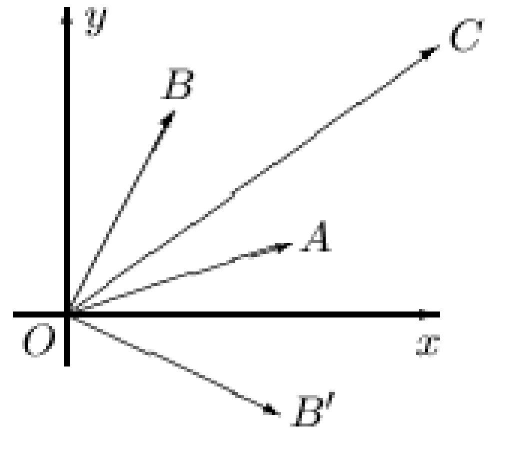

图 1

方程（2.1.1)有唯一解的充分必要条件是：

$$a_1b_2\neq a_2b_1$$

三元一次方程组有唯一解的条件

例4 研究实系数三元一次方程组有唯一解的充分必要条件

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

解：可写成

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = \delta \quad (2.1.6)$$

其中

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

都代表建立了直角坐标系的三维空间中的向量.

三元一次方程组(2. 1. 5)有唯一解的充要条件:以它的系数矩阵的3列为坐标的几何向量

$$\overrightarrow{OA}=\alpha,\ \overrightarrow{OB}=\beta,\ \overrightarrow{OC}=\gamma$$

不共面 $\longleftrightarrow$ 方程组 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=0$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

只有唯一解(0, 0, 0)，而没有非零解。

2.2 线性相关与线性无关

任意属于域F上的n元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

有唯一解的条件。

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=\beta$$

其中

$$\alpha_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \forall 1\le j\le n; \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

定义 将任意数域F上的 n维数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成向量，将这些数组的全体组成的集合F^n看成向量空间，称为n维数组空间。

n维数组空间中的向量的加法

设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$

是两个n维向量,将它们按分量相加得到的向量

$(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

称为这两个向量的和, 记作$\alpha+\beta$.

n维数组空间中的向量与数的乘法

F^n中任一向量$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$可以与F中任意常数c相乘得$F^n$中向量$ca=(ca_1, ca_2, \cdots, ca_n)$。

F^n中定义的**加法与数乘**两种运算满足如下的运算律：

(A1) 加法交换律：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

(A2) 加法结合律：

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\alpha)$$

(A3) 零向量：

$$0+\alpha=\alpha+0=\alpha \quad 0\text{称为零向量}$$

(A4) 负向量：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha=0 \quad \beta\text{称为}\alpha\text{的负向量}$$

(D1) 数乘对向量加法的分配律：

$$\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$$

(D2) 数乘对纯量加法的分配律：

$$(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$$

(M1) 数乘结合律：

$$\lambda(\mu\alpha)=\lambda\mu(\alpha)$$

(M2) 1乘向量：

$$1\alpha=\alpha$$

以上**8条**基本运算规律可以推出我们熟悉的其他一些运算性质。

n维数组空间中向量的线性组合

将一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 分别乘以数 $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ 再相加,得到的向量 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$ 称为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 的**线性组合**，也称为向量组 S={ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ }的线性组合。

由S的若干个线性组合 $b_i = c_{i1}a_1 + \cdots + c_{im}a_m$ 组成的向量组T也称为**S的线性组合**.

F^n的n维向量可以写成一行形式，称为n维行向量，其全体组成空间$F^{1\times n}$，称为F上n维行向量空间。

F^n的n维向量可以写成一列形式，称为n维列向量，其全体组成空间$F^{n\times 1}$，称为F上n维列向量空间。

矩阵的加法

$F^{m\times n}$ 中矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 相加，得到的和是$A+B$ 矩阵， 它的第 (i,j) 元等于

A,B 的第 (i,j) 元之和 $a_{ij}+b_{ij}$ ，即：

$$(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

矩阵与数的乘法 (矩阵的数乘)

对任意 $A\in F^{m\times n},\lambda\in F$,相乘得

$$\lambda A=\lambda(a_{ij})_{m\times n}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$$

定义 将 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的行列互换得到 $n \times m$ 矩阵，称为 A 的**转置矩阵**，记作 A^T. 即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A^T 的第 (i, j) 元等于 A 的第 (j, i) 元.

线性相关与线性无关

定义2.2.1　设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$是数域F上的n维向量，如果存在不全为0的数$x_1,\ldots,x_m \in F$，使

$$x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m=0$$

就称向量组$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性相关.

反过来，如果对于$x_1,\ldots,x_m \in F$，$x_1\alpha_1+\ldots+x_m\alpha_m=0$ 当且仅当$x_1=\ldots=x_m=0$时成立，就称向量组$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性无关.

定理2.2.1　设$m \geq 2$,则:

向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关$\Leftrightarrow$ 其中某个向量α_i是其余向量的线性组合.

证明　先设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关，即存在不全为0的$\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in F$满足条件

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0 \qquad (2.1.4)$$

设$\lambda_i \neq 0$。 将等式（2.1.4）左边除了$\lambda_i\alpha_i$之外的其余各项移到右边，再将所得的等式两边同除以非零数λ_i，得

$$\alpha_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\alpha_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i}\alpha_m \quad (2.1.5)$$

这就说明α_i是$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$中其余向量α_j（$1\le j\le m, j\ne i$）的**线性组合**.

再设某个α_i是$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$中其余向量α_j（$1\le j\le m, j\ne i$）的线性组合，即存在一组数t_j（ $1\le j\le m, j\ne i$ ）,使

$$\alpha_i = t_1\alpha_1 + t_{i-1}\alpha_{i-1} + t_{i+1}\alpha_{i+1} + \ldots + t_m\alpha_m \quad (2.1.6)$$

将等式右边的各项全部移到左边，得

$$-t_1\alpha_1-\ldots-t_{i-1}\alpha_{i-1}+1\alpha_i-t_{i+1}\alpha_{i+1}-\ldots-t_m\alpha_m=0 \quad (2.1.7)$$

等式左边是$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$的线性组合，其中α_i的系数$1\neq0$，可见存在不全为0的$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$使$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0$.

注意：一个向量组成的向量组｛α_1｝线性相关的充分必要条件是$\alpha_1=0$.

定理2.2.1' 向量组｛ $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ ｝线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中某个α_i是它前面的向量α_j（$j<i$）的线性组合.

证明 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关，则存在不全为0的$\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in F$使

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_m\alpha_m=0$$

设$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$中最后一个非零的数是$\lambda_i$，也就是：$\lambda_i\neq 0$,且$\lambda_j=0$对所有的$i<j\leq m$成立.则

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_i\alpha_i=0$$

当$i \geq 2$时，

$$\alpha_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\alpha_{i-1}$$

α_i是它前面的向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}$的线性组合.

当$i=1$时，$\lambda_1 \neq 0$，$\lambda_1\alpha_1=0$，这迫使$\alpha_1=0$.此时α_1“前面的向量”组成的集合是空集合，我们规定零向量是空集合的线性组合，因此零向量α_1仍然是它前面的向量的线性组合.

反过来，如果有某一个向量α_i是它前面的向量的线性组合，则由定理2.1.1即可知$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关.

推论2.2.1 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$是由非零向量组成的向量组，其中每个α_i（$2\le i\le m$）都不是它前面的向量α_j（$1\le j<i$）的线性组合，则$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性无关.

含有零向量的向量组都线性相关.设向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$中的向量$\alpha_i=0$，则

$$0\alpha_1+\ldots+0\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\ldots+0\alpha_m=0$$

且其中α_i的系数1不为0.

可见$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$线性相关.

引理2.2.1 如果向量组 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ 包含一个子集 $\left\{\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_k}\right\}$ 线性相关，那么整个向量组 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ 线性相关.如果向量组 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$线性无关，那么它的每个子集都线性无关.

证明 $\left\{\alpha_{i_1},\cdots\alpha_{i_k}\right\}$ 线性相关

$\Rightarrow$ 存在不全为0的$\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in F$使

$$\lambda_1\alpha_{i_1}+\cdots+\lambda_k\alpha_{i_k}=0$$

机动 目录 上页 下页 返回 结束

设 $\alpha_{i_{k+1}},\cdots,\alpha_{i_n}$ 是 { $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ } 中去掉 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_k}$ 之后剩下的那些向量，则

$$\lambda_1\alpha_{i_1}+\cdots+\lambda_k\alpha_{i_k}+0\alpha_{i_{k+1}}+\cdots+0\alpha_{i_m}=0$$

其中各向量的系数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,0,\ldots,0$ 不全为0，这说明 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_k},\alpha_{i_{k+1}},\cdots,\alpha_{i_m}$ 线性相关，也就是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性相关.

由于 { $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ } 的任何一个子集线性相关都将导致 { $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ } 线性相关，要使 { $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ } 线性无关，必须它的所有子集线性无关.

利用解线性方程组判定线性相关

定义向量组$u_1,\ldots,u_m$的线性相关或线性无关所用的等式

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0 \qquad (2.2.3)$$

可以看成以$\lambda_1 , \ldots , \lambda_m$为未知数的一个方程.

方程**至少有一组解** $(\lambda_1 , \ldots , \lambda_m)=(0,\ldots,0)$

因此, 线性相关和线性无关的定义可这样来理解:

(1)$u_1,\ldots,u_m$线性相关等价于方程 (2.2.3)有非零解

$(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\neq(0,\ldots,0)$

(2)$u_1,\ldots,u_m$线性无关等价于方程 (2.2.3)只有唯一解 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=(0,\ldots,0)$

设$u_1,\ldots,u_m$都是n维数组向量, 不妨将其中每个向量u_j $(1\leq j\leq m)$写成列向量的形式

$$u_j=(a_{1j},\ldots,a_{nj})^T$$

则 (2.2.3) 成为

$$\lambda_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_j\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_m\begin{pmatrix}a_{1m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

进而写成齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}\lambda_1+\cdots+a_{1j}\lambda_j+\cdots+a_{1m}\lambda_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\lambda_1+\cdots+a_{nj}\lambda_j+\cdots+a_{nm}\lambda_m=0\end{cases}\qquad(2.2.4)$$

这个齐次线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1m}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}$$

这个矩阵依次以$u_1,\ldots,u_m$为各列组成, 对矩阵A进行初等行变换消元可以得出方程组 (2.2.4) 的解.

例2 当b_1,b_2,b_3取什么实数值时，如下方程有唯一解：

$$(1)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+13z=b_3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+4z=b_3 \end{cases}$$

引理2.2.2 设F^n中的向量$u_1,\ldots,u_m$线性无关。如果在每个$u_j=(a_{1j},\ldots,a_{nj})(1\le j\le m)$上再任意添加一个分量成为$F^{n+1}$中的一个向量$v_j=(a_{1j},\ldots,a_{nj},a_{n+1,j})$，那么所得到的向量组$v_1,\ldots,v_m$线性无关.

证明 已经知道$u_1,\ldots,u_m$线性无关，即：F中满足条件

$$\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_m u_m=0 \qquad (2.1.12)$$

的数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$只能是$\lambda_1=\ldots=\lambda_m=0$.

而（2.1.12）即方程组

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases} \qquad (2.1.13)$$

因此，方程组（2.1.13）只有唯一解 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=(0,\ldots,0)$.

设F中m个数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$满足条件

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_m v_m = 0 \qquad (2.1.14)$$

即
$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1+\cdots+a_{1m}\lambda_m=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1+\cdots+a_{nm}\lambda_m=0 \\ a_{n+1,1}\lambda_1+\cdots+a_{n+1,m}\lambda_m=0 \end{cases} \qquad (2.1.15)$$

方程组（2.1.15）的前*n*个方程就是方程组（2.1.13）的全部方程，因此（2.1.15）的解一定是（2.1.13）的解.已经知道方程组（2.1.13）只有唯一解$(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=(0,\ldots,0)$，因此方程组（2.1.15）除了零解之外没有别的解.这说明$v_1,\ldots,v_m$线性无关.

例3 已知数域F上的向量组u_1,u_2,u_3线性无关。试判断u_1+u_2,u_2+u_3,u_3+u_1是线性相关还是线性无关？

解 设F中的数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足条件

$$\lambda_1(u_1+u_2)+\lambda_2(u_2+u_3)+\lambda_3(u_3+u_1)=0 \quad (2.1.1)$$

即

$$(\lambda_1+\lambda_3)u_1+(\lambda_1+\lambda_2)u_2+(\lambda_2+\lambda_3)u_3=0 \quad (2.1.2)$$

由于u_1,u_2,u_3线性无关，（2.1.2）成立仅当

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

（2.1.3）是以$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为未知数的方程组，解之得$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$.

这说明$u_1+u_2, u_2+u_3, u_3+u_1$线性无关.

2.3 基

例1 F^n中最多有多少线性无关的向量?

定理 设$u_1,\ldots,u_m$是n维向量空间F^n中的m个向量. 如果$m>n$，则$u_1,\ldots,u_m$线性相关.

证明 考虑关于F中m个未知数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$的方程

$$\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_m u_m=0 \qquad (2.1.18)$$

对每个$1\le j\le m$，记 $u_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

则（2.1.18）成为线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1m}\lambda_m = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{nm}\lambda_m = 0 \end{cases} \qquad (2.1.19)$$

此方程组有m个未知数，n个方程，由$m>n$知此方程组有非零解

可见$u_1,\ldots,u_m$线性相关.

对每个$1 \le i \le n$，记

$$e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

第i个分量

表示第i个分量为1、其余分量为0的数组向量.

证明：n个向量$e_1,e_2,\ldots,e_n$线性无关.

为此，只需证明：

$$\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n=0 \Longrightarrow (\lambda_1,\ldots\lambda_n)=(0,\ldots,0)$$

而$\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n=0$ 即

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_n\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\\vdots\\\lambda_n=0\end{cases}$$

如所证.

结论：n维数组空间F^n中线性无关的向量最多有n个，因此F^n称为n维空间。

基的定义

定义2.3.1(基与坐标)

如果F^n中存在一组向量$M=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$，使$F^n$中每个向量$\alpha$都能写成$\alpha_1,\dots,\alpha_m$在$F$上的线性组合

$\alpha=x_1\alpha_1+\dots+x_m\alpha_m$,

并且其中的系数$x_1,\dots,x_m$由α唯一决定，则M称为F^n的一组**基**. α的线性组合表达式中的系数组成的有序数组$(x_1,\dots,x_m)$称为α在基M下的**坐标**.

$E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ 是 F^n 中最简单然而重要的基，则 F^n 中任意一个向量 $b=(b_1,\ldots,b_n)$ 在这组基下的坐标就是 $(b_1,\ldots,b_n)$ 本身。$\{e_1,\ldots,e_n\}$称为F^n 的**自然基**，或**标准基**。

$F^{m\times n}$ 在**加法和数乘**运算下满足线性空间的8条运算律，它为**线性空间**.

例1. 求数域 F 上线性空间 $F^{m\times n}$ 的维数并求一组基.

解: 记 $E_{ij}\in F^{m\times n}$ 表示第 (i,j) 个元素为1，其余元为0的矩阵, 这里 $1\le i\le m, 1\le j\le n.$

对任意一组 $\lambda_{ij} \in F$,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij} = (\lambda_{ij})_{m\times n} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{ij} = 0, \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n.$$

即集合 $\varepsilon = \{E_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 中的元素线性无关.

$\forall A = (a_{ij})_{m\times n} \in F^{m\times n}$ 可以唯一地写成 ε 的线性组合

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

可见 ε 是 $F^{m\times n}$ 的一组基，包含 mn 个元素，因此，$F^{m\times n}$ 的维数等于 mn.

机动 目录 上页 下页 返回 结束

例2 在复数域C上的3维空间C^3中，向量$\mathbf{a}_1=(2,0,0)$，$\mathbf{a}_2=(a_2,3,0)$，$\mathbf{a}_3=(a_3,a_4,5)$是否组成一组基？

解 只要考虑方程$x\mathbf{a}_1+y\mathbf{a}_2+z\mathbf{a}_3=\mathbf{b}$即

$$\begin{cases} 2x+a_2y+a_3z=b_1 \\ \qquad 3y+a_4z=b_2 \\ \qquad\qquad 5z=b_3 \end{cases}$$

是否有唯一解。

对角元全不为0的n阶上(下)三角矩阵可以通过一系列初等行变换化成单位矩阵I，因而以其为系数矩阵的方程组有唯一解，其各列(行)组成F^n的一组基。

$$S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\} \xrightarrow{\text{“行向量”形式}} A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$$

$$b=x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m$$

$$\Big\downarrow \text{“行”列向量乘积}$$

$$b=AX=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_mx_m$$

引理2.3.1 设向量组B是A的线性组合, C 是B的线性组合, 则C是A的线性组合.

引理2.3.2 设向量组$b_1,\ldots,b_k$线性相关（无关）当且仅当他们在同一组基下的坐标$X_1,\ldots,X_k$线性相关（无关）。

基的判定定理

F^n的基$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$有以下两条性质刻画：

(1)(坐标的存在性)使F^n中每个向量α都能写成$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$在F上的线性组合$\alpha=AX$,其中$A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$。

(2)(坐标的唯一性)每个$b=AX$中的X由b唯一决定,即$AX=AY$当且仅当$X=Y$.

定理 设$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是$n$维向量空间$F^n$中任意$n$个线性无关的向量，则$F^n$中任何一个向量$\beta$都能写成$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$的线性组合的形式

$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n$并且其中的系数$x_1, x_2, \ldots, x_n$由$\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_n, \beta$唯一确定.

证明 $\alpha_1,\ldots, \alpha_n, \beta$是$F^n$中$n+1$个向量.由定理2.1.5知道它们线性相关，存在不全为0的数$\lambda_1,\ldots, \lambda_n, \lambda$使

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_n\alpha_n+\lambda\beta=0$$

如果$\lambda=0$，则$\lambda_1,\ldots, \lambda_n$不全为0且

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_n\alpha_n=0$$

这导致$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性相关，矛盾.故$\lambda\neq0$.由(2.1.20)得

$$\beta=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\alpha_1-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda}\alpha_n$$

可见β是$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的线性组合.

(由于$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性无关，其中每个向量都不是它前面的向量的线性组合.如果β不是$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的线性组合，则向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$中每个向量都不是它前面的向量的线性组合，由定理2.1.2的推论2.1.1知：这导致$\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta$线性无关，矛盾.因此$\beta$是$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$的线性组合.)

现证明表达式$\beta=x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n$中系数$x_1,\ldots,x_n$的唯一性.

假定有两组系数$x_1,\ldots,x_n$与$y_1,\ldots y_n$满足条件

$$\beta=x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n$$

$$\beta=y_1\alpha_1+\ldots+y_n\alpha_n$$

将两个表达式相减得

$$(x_1-y_1)\,\alpha_1+\ldots+(x_n-y_n)\,\alpha_n=0 \qquad (2.1.21)$$

由于$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$线性无关，向量等式(2.1.21)仅当

$$x_1-y_1=\ldots=x_n-y_n=0$$

时成立，也就是

$$x_1=y_1,\ldots,x_n=y_n$$

这就说明系数$x_1,\ldots,x_n$的唯一性.

定理2.3.1　F^n中的向量组S是基$\Leftrightarrow S=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$由$n$个线性无关向量组成.

判定线性方程组的唯一解

例3 在复数范围内求常数b_1,b_2,b_3,使线性方程组有唯一解。

$$\begin{cases} x+y+z=b_1 \\ x+2y+4z=b_2 \\ x+3y+9z=b_3 \end{cases}$$

解：原方程写成向量形式$xa_1+ya_2+za_3=b$.只要判定$A=(a_1,\ a_2,\ a_3)$代表的向量组S是否线性无关，就是S是否为C^3的一组基，方程组是否有唯一解。原方程组对任意b_1,b_2,b_3都有唯一解。

定理2.3.2 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

对任意一组$b_1,\ldots,b_m$组都有唯一解的充分必要条件是：$m=n$；且齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有唯一解(0,…,0)。

方程组的矩阵形式：$AX=b$

齐次方程组的矩阵形式：$AX=0$

如果X_1,X_2都是$AX=b$的解，则$AX_1=AX_2$
$AX_1-AX_2=A(X_1-X_2)=0$，X_1-X_2方程$AX=0$的解。

引理2.3.4 设F上n阶方阵A经过一系列初等行变换变成B，并经过一系列初等行变换变成阶梯形方阵T. 则A的各列组成F^n的基当且仅当B的各列组成F^n的基当且仅当T的对角元全不为0.

例4 当b_1,b_2,b_3取什么复数时，如下线性方程组有唯一解：

$$(1)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+13z=b_3 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+2y+z=b_1 \\ x+y-3z=b_2 \\ x+5y+4z=b_3 \end{cases}$$