§2　函数项级数一致收敛的判别法

Weierstrass判别法

定理2.1（Weierstrass判别法）

若存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得对 $\forall x \in I$, $\forall$ 正整数 n 都有 $|u_n(x)| \le a_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证明 $\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, n > N$ 时, 对 $\forall p \in N^*, a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon, \forall x \in I$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$称为是$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的 **优级数，强级数，控制级数**.

注 (1)若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$能用$Weierstrass$判别法

得到一致收敛性，则$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$一致收敛.

(2)存在一致收敛但不绝对收敛的级数，或者虽然

一致收敛且绝对收敛，但是$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$不一致收敛

$Weierstrass$判别法都不能适用.

例如：习题12. 2第2题

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$在$[0,1]$上一致收敛,

而$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x) x^n$在$[0,1]$上不一致收敛.

例1 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性.

解 $\because \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, x \in (-\infty,+\infty)$, 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

例2 讨论$\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,a](0<a<1)$上的一致收敛性.

解 $\because |u_n(x)| \le a^n, x \in [0,a]$. 而$\sum_{n=1}^{\infty}a^n(0<a<1)$收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,a](0<a<1)$上一致收敛.

例3 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$和$[\delta,+\infty)(\delta>0)$上的一致收敛性.

通项不一致收敛于0

解 上节已证$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

但是在$[\delta,+\infty)$上, $u_n(x)\le ne^{-n\delta}$,

因为$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)\delta}}{ne^{-n\delta}}=e^{-\delta}<1$, 所以$\sum ne^{-n\delta}$收敛.

所以由Weierstrass判别法知,

$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$[\delta,+\infty)(\delta>0)$上一致收敛.

例4 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx} (\alpha > 0)$在$[0, +\infty)$上的一致收敛性.

解 设$u_n(x) = x^{\alpha} e^{-nx}$， $u_n'(x) = x^{\alpha-1} e^{-nx} (\alpha - nx)$

$\therefore u_n(x)$在$(-\infty, \frac{\alpha}{n}]$上单调递增，在$[\frac{\alpha}{n}, +\infty)$上单调递减

$$\therefore 0 \le u_n(x) \le \max u_n(x) = u_n(\frac{\alpha}{n}) = (\frac{\alpha}{e})^{\alpha} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$\therefore$当$\alpha > 1$时，由Weierstrass判别法知级数一致收敛.

$0<\alpha\leq 1$时,

由$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)\right| = x^{\alpha}[e^{-(n+1)x} + e^{-(n+2)x} + \cdots e^{-2nx}] \geq nx^{\alpha}e^{-2nx}$,

取$\varepsilon_0 = e^{-2}$,对$\forall N \in N^*, n > N$,取$p = n, x = \dfrac{1}{n}$,

则$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(\frac{1}{n})\right| \geq n(\frac{1}{n})^{\alpha} e^{-2} \geq e^{-2} = \varepsilon_0$.

$\therefore$由Cauchy收敛原理知$0<\alpha\leq 1$时, 级数不一致收敛.

函数项级数一致收敛的Cauchy收敛原理

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$正整数$N = N(\varepsilon), s.t. \forall n > N, \forall$ 正整数p,

都有$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon$对所有$x \in I$都成立.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上不一致收敛

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N(\varepsilon) \in N^*, \exists n_0 > N, \exists p_0 \in N^*,$

$\exists x_0 \in I, \text{s.t.} |\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0} u_k(x_0)| \geq \varepsilon_0.$

Dirichlet判别法

数列$\{a_n\}$有界：$\exists M>0,\forall n,|a_n|\le M.$

定义2.1（函数列的有界性）

$\{f_n(x)\}$在I上逐点有界：

任给$x\in I,\exists M(x)>0,\forall n,|f_n(x)|\le M(x).$

$\{f_n(x)\}$在I上一致有界：

$\exists M>0,\forall x\in I,|f_n(x)|\le M, n=1,2\cdots$

例5 $f_n(x)=x^n, x\in(0,1), 0<f_n(x)<1$ 一致有界

$f_n(x)=nx^n, x\in(0,1)$, 逐点有界, 不一致有界.

若不然, 设$|nx^n|\le M$, 令$x\to 1^- \Rightarrow n\le M$.

矛盾！

定理2.2（Dirichlet判别法）

若区间I上定义的函数$a_n(x), b_n(x)$满足：

(1)函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$的部分和序列在区间$I$上一致有界；

(2)$\forall x \in I$,数列$\{b_n(x)\}$单调，且函数列$\{b_n(x)\}$在区间I上一致收敛于0,

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在区间$I$上一致收敛.

证明

$$\because \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right|$$

$$\le \left|\sum_{k=1}^{n+p} a_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le 2M$$

$\therefore$ 由$Abel$引理：

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le 2M(|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+p}(x)|)$$

$\because \{b_n(x)\}$一致收敛于 0,

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), n > N(\varepsilon)$,对$\forall x \in I, |b_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{8M}$.

$$\therefore \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le 2M\left(\frac{\varepsilon}{8M} + 2\frac{\varepsilon}{8M}\right) < \varepsilon,\ \forall x \in I, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

由Cauchy收敛原理, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在$I$上一致收敛.

例6 证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$在$[\delta,2\pi-\delta](\delta>0)$上一致收敛.

证明 取$a_n(x)=\cos nx, b_n(x)=\frac{1}{n}$,

$b_n(x)$单调一致收敛于0.

关于n

由$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}, x\in[\delta,2\pi-\delta]$

可知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和序列一致有界,

由Dirichlet判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致收敛.

Abel判别法

定理2.3（Abel判别法）

若区间I上定义的函数$a_n(x),b_n(x)$满足：

(1)函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在区间$I$上一致收敛；

(2)$\forall x\in I$,数列$\{b_n(x)\}$单调，且函数列$\{b_n(x)\}$在区间I上一致有界,

则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在区间$I$上一致收敛.

证明 $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$I$上一致收敛, $\therefore \forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$,

$$n>N(\varepsilon),\quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3M},\forall p,\forall x\in I.$$

由$Abel$引理,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3M}(|b_{n+1}(x)|+2|b_{n+p}(x)|)<\varepsilon, \forall x, \forall p$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$一致收敛.

例7 讨论一致收敛性 : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(2+x^n)}{\ln n(1+x^n)} \arctan nx, x\in[0,+\infty)$

解 $\because \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$一致收敛

$b_n(x)=\frac{2+x^n}{1+x^n}=1+\frac{1}{1+x^n}$,任意$x\in[0,1]$,$b_n(x)$递增小于2.

$\therefore$ 由Abel判别法, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\cdot\frac{2+x^n}{1+x^n}$ 在$[0,1]$上一致收敛.

任意$x\in[1,+\infty)$, $b_n(x)$递减小于等于2, 从而一致有界

$\therefore$ 由Abel判别法, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\cdot\frac{2+x^n}{1+x^n}$ 在$[1,+\infty)$一致收敛.

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\cdot\frac{2+x^n}{1+x^n}$ 在$[0,+\infty)$一致收敛.

又对任意固定的x, $\{\arctan nx\}$单增, 小于$\frac{\pi}{2}$,

$\therefore$ 再由Abel判别法, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}\frac{2+x^n}{1+x^n}\arctan nx$ 在$[0,+\infty)$

上一致收敛

小结

函数项级数一致收敛的判别法

1. **Weierstrass 判别法**
2. **Cauchy收敛准则**
3. **Dirichlet判别法**
4. **Abel判别法**