2017-2018年工科高等代数期末练习题

一. 选择题(共 30 分）

1. 设 A 是 $m\times n$，则 m<n 是齐次线性方程组 AX＝0 有非零解的(　　)

(a) 充分条件； (b) 必要条件; (c)充要条件; (d)以上都不对

2.设 $A=A_{3\times1}, B=B_{1\times3}$ 　则必有 $|AB|=$ (　　　)

(a) $|AB|=0$; (b) $|A||B|$; (c) $|BA|$; (d)以上都不正确

3.若 3 阶阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的行列式$|A|=1$, 则$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-\alpha_1|=$（　　）

(a). 2; (b) 0; (c) 1; (d) -1

4.向量组 a_1 =（1, 0, 0）, a_2 =（0, 1, 0）, a_3 =(1, 1 , 1), a_4 =（1, 1, 0）的一个极大线性无关组是 (　　)

(a) a_1,a_2, (b) a_1,a_2,a_3, (c) a_1,a_2,a_4, (d) a_1,a_2,a_3,a_4

5.若 A 是 n 阶实方阵，x 是 R^n 中的列向量, 则 $x^TA^TAx=$（　　　）

a. 长度|Ax|; b. 正数; c. 长度 |x|; d. $|Ax|^2$.

6.设 $A=A_{m\times n}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，令 $W=\{x\in\mathbf{R}^n \mid Ax=0\}$，则 $\dim(W)+\mathrm{rank}(A)=($　　$)$.

a. $n-1$; b. $\mathbf{m-n}$; c. $\mathbf{n}$; d. $\mathbf{m}$.

7.设 A,B 分别是 m 阶与 n 阶方阵，则行列式$\begin{vmatrix} B & 0 \\ C & A \end{vmatrix}=$（　　　）

(a) $|A||B|$; (b) $-|AB|$; (c)0; (d) $(-1)^{m\cdot n}|A||B|$

8.实对称阵 A 为正定阵的充分必要条件是(　　)

a. A 的全体特征根为正数; b. A 可逆; c. |A|为正; d. A 满秩

9. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}-a_{21} & a_{32}-a_{22} & a_{33}-a_{23} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，设

$P_2P_1A=B$，则初等阵 $P_2=$（　　　）

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （b）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （c）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （d）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. A，B 都是 n 阶矩阵，且 $AB=0$，则秩数的和 $\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$ 必定（　　　）

(a) 小于或等于 n; (b) 大于 n; (c)等于 n (d) 小于 n

11.设 A 为 n 阶正交阵，下列说法正确的是(　　　)

a．$A^{-1}=A^T$;　　b．$A^T=A^*$(伴随阵);　　c．$|A|=-1$;　　d．$|A|=1$

12. 设 A，B 都是 n 阶非 0 矩阵，且 $AB=0$，则 A 和 B 的秩（　　）

（a）必有一个等于零 ;（b）都小于 n; （c）一个小于 n，一个等于 n; （d）都等于 n

13．设 A 是 n 阶实矩阵，A^T 为 A 的转置，对于方程组(I) AX = 0 与(II) $A^TAX=0$ 必有(　)

(a).(II)的解是(I)的解, 但(I)的解不是(II)的解; (b).(II)的解与(I)的解相同

(c).(I)解是(II)的解但(II)解不是(I)的解

14．设 α_1，α_2，α_3 是四元齐次线性方程组 AX＝b 的三个解向量，且 $r(A)=3$,

$\alpha_1=(1,2,3,4)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，k 为任意数，则方程组 AX＝b 的通解 X＝(　　　)

(a) $(1,2,3,4)^T+k(1,1,1,1)^T$;　(b) $(1,2,3,4)^T+k(0,1,2,3)^T$; (c) $(1,2,3,4)^T+k(2,3,4,5)^T$

15．设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表成(　　)

(a) ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等价向量组; (b) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$;　(c) $\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

二. 填空(共 5 分)

1. 设 A 为 3 阶矩阵，则行列式 $|-3A|+27|A|$ ＝___ _____

2. A，B 都是 n 阶矩阵，且 $AB=0$，则秩数和 $r(A)+r(B)-n\le$__ ____

3. 若 $P^{-1}AP$ 有定义, $f(x)$ 是多项式，则 $f(P^{-1}AP)=P^{-1}($______P

4. $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

5. 设可逆方阵 A 与 B 相似，则 A^{-1} 与 B^{-1}____　_____（相似，不相似）

三. 判断题(10 分)(正确的在括号内打“√(T)”，错误的在括号内打“X (F)”)

1.初等变换不改变矩阵的秩（　　　）

2. n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$ $\Leftrightarrow$ rank(A)< n $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 有非零解 (　)

3.若方阵 A,B 相似，则 A,B 有相同的特征向量(　　　　)

4.设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 是非齐次方程组 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的 s 个解, 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 也是 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的解, 则 $k_1+\cdots+k_s$ 等于 1；特别 $(\alpha_1+\cdots+\alpha_s)/s$ 也是 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的解(　)

5.若 n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量, 则 A 必相似于对角阵(　　　)

6.设 3 阶可逆阵 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 A^{-1} 的特征值是 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1}$ (　　)

7.若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 v_1,v_2 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一定线性相关(　)

8.若 n 元方程组 $A_{m\times n}\,\mathbf{x}=0$ 只有零解，则 $A_{m\times n}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解 (　　　)

9. 实对称阵 A 不一定相似于对角阵（　）

10.若矩阵 $\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$，则 $\mathbf{AB}\neq\mathbf{0}$ (　　)

四. **计算下列各题（共 20 分）**

1. 设 4 阶方阵 $A=A_{4\times4}$ 的元素全是 1，(1)把 A 分解为列向量与行向量的积，并计算 $\mathbf{A}^{2014}$；(2)求全体特征根与特征多项式；(3)求出非 0 特征根对应的全体特征向量.

2. $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ 利用初等变换计算 A^{-1}，并利用 A^{-1} 写出伴随阵

五.（10 分）1.设 R^4 中列向量 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ,矩阵 $A = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$，已知：

$$A=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)\xrightarrow{\text{经过初等行变换后}}B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

求向量组 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 的一个极大无关组，并用它表示向量 v_5 与 v_3

2. 设 2 个 n 阶方阵 A, B 都可逆，求 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}$ 与 $\begin{pmatrix}0&A\\B&D\end{pmatrix}^{-1}$

六. (13 分) $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$.(1)求特征多项式 $|\lambda I-A|$；(2)求出 3 个互相正交的特征向量; (3)求正交阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵; (4)写出二次型 $\mathbf{f}=\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的普通表达式, 并且利用(3)的结论直接写出二次型 $\mathbf{f}=\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ 的一个标准形

七. 证明题 (共 12 分)

1. 已知秩 $r(a_2,a_3,a_4)=3$, $r(a_1,a_2,a_3)=2$， 证明

(1) a_1 能由 a_2,a_3 线性表示;　　(2) a_4 不能由 a_1,a_2,a_3 线性表示

2.若 A 是 n 阶正交阵, 行列式 $|A|=-1$. 证明： -1 是 A 的一个特征根；而且对于列向量 $x\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$， $\mathbf{A}x$ 的长度必满足 $|\mathbf{A}x|^2=|x|^2$， 其中 $|x|=\sqrt{x_1{}^2+\cdots+x_{\mathbf{n}}{}^2}$ 代表 x 的长度.

3. 已知 3 阶方阵 $A=A_{3\times3}$ 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$，其伴随阵 $A^*=(B_1,B_2,B_3)$ 的列向量为 B_1,B_2,B_3.证明：(1) $r(A^*)=1$

(2) $\mathbf{X}$ 是方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的解 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{X}$ 可写成 $\mathbf{X}=k_1B_1+k_2B_2+k_3B_3$