A

北京航空航天大学

2014－2015 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2015 年 07 月 10 日

A

一、 选择（每小题 4 分，共 20 分）

1. 向量场 $\vec{F}=(x-z,x^3+yz,-3xy^2)$ 的旋度为 (A)

A. $(-6xy-y,3y^2-1,3x^2)$； B. $(-6xy-y,3y^2+1,3x^2)$；

C. $(-6xy+y,3y^2-1,-3x^2)$； D. $(-6xy-y,3y^2-1,3x^2+1)$.

2. 已知 $f(x,y,z)$ 为连续函数，则极限 $\lim\limits_{r\to0^+}\dfrac{1}{\pi r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}f(x,y,z)dxdydz=$ (B)

A. $f(0,0,0)$； B. $\dfrac{4}{3}f(0,0,0)$； C. $4f(0,0,0)$； D. $\dfrac{3}{4}f(0,0,0)$.

3. 改变积分次序：$\int_0^1dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)dx=$（ C ）

A. $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy$；

B. $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy$；

C. $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy$；

D. $\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^2dx\int_1^{2-x}f(x,y)dy$.

4. 已知 $I_1=\iint\limits_D(x+y)dxdy,\ I_2=\iint\limits_D\ln(x+y)dxdy,\ I_3=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2dxdy$

其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为 $(1,0),(1,1),(2,0)$，则大小顺序为（ A ）

A. $I_1>I_2>I_3$； B. $I_1>I_3>I_2$； C. $I_2>I_1>I_3$； D. $I_3>I_2>I_1$.

5. 设 L 是上半平面 $(y>0)$ 有向分段光滑曲线，如果积分 $\int_L\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+ydy}{x^2+y^2}$ 与路径无关，则 a 的值为（ B ）

A. -1； B. 0； C. 1； D. 2 .

二、计算（每小题 5 分，满分 30 分）

1. 已知椭圆型区域 $D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+y^2\le 1\}$ 利用广义极坐标变换计算积分 $I=\iint\limits_D (x^2+4y^2)dxdy$.

解： 做广义坐标变换 $T:\begin{cases} x=2r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases}$ --------2 分

则 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=2r,$ --------1 分

$$I=\iint\limits_D (x^2+4y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 4r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cdot 2rdr$$ --------1 分

$$=8\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$$ --------1 分

$$=4\pi.$$

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma zdS$，其中曲面 Σ 为锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$.

解：由于 $z_x=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2},$ --------1 分

投影区域 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2\le 1\right\},$ --------1 分

所以

$$\iint\limits_\Sigma zdS=\iint\limits_{D_{xy}}(1-\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dxdy$$ --------1 分

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(1-\sqrt{x^2+y^2})\ dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\ d\theta\int_0^1(1-r)r\ dr$$ ---------2 分 (二重积分计算共 2 分)

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

3. 利用对称性计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}[(xy^3\cos z - x^3e^{-z^2})+5]\,dxdydz$，其中$\Omega$是上半球面 $x^2+y^2+z^2=4\,(z\geq 0)$ 和旋转抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的区域.

解：由于Ω关于 **yoz** 平面对称的，且 $xy^3\cos z - x^3e^{-z^2}$ 是关于 **x** 的奇函数，所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(xy^3\cos z - x^3e^{-z^2})\,dxdydz = 0,$$ **--------2 分**

由 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$，得交线为 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$ **--------1 分**

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}[(xy^3\cos z - x^3e^{-z^2})+5]\,dxdydz = 5\iiint\limits_{\Omega}\,dxdydz$$

$$=5\iint\limits_{x^2+y^2\leq 3}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dz$$

$$=5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}rdr\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}dz$$ **--------2 分（三重积分计算共 3 分）**

$$=10\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)rdr$$

$$=\frac{95}{6}\pi.$$

4. 计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\left[(2x^2+y^2)+3xyz\right]dS$，其中$\Sigma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，其中 $a>0$．（可利用对称性）

解：由轮换对称性可知，$\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS,$ **--------1 分**

所以 $\iint\limits_{\Sigma}(2x^2+y^2)dS=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=a^2\iint\limits_{\Sigma}dS=4\pi a^4,$ **--------2 分**

又Σ关于 yoz 坐标平面对称，且函数 $3xyz$ 关于 x 是奇函数，

所以 $\iint\limits_{\Sigma}3xyz\,dS=0,$ **--------2 分**

于是 $\iint\limits_{\Sigma}\left[(2x^2+y^2)+3xyz\right]dS=4\pi a^4.$

5. 计算第一型曲线积分 $\int_\Gamma xyz\ ds$, 其中 $\Gamma: x=\cos t, y=\sin t, z=t, 0\le t\le 2\pi$.

解： 因为 $x'(t)=-\sin t,\ y'(t)=\cos t,\ z'(t)=1,$ **--------1 分**

所以 $ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt=\sqrt{2}dt,$ **--------1 分**

于是

$$\int_\Gamma xyz\ ds=\int_0^{2\pi} t\cos t\sin t\sqrt{2}dt$$ **--------1 分**

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} td(\cos 2t)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left[t\cos 2t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos 2t\ dt\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\times 2\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$ **--------2 分 (定积分计算共 2 分)**

6. 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_\Sigma z^2dydz+dzdx-y^2dxdy$,其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0, z=4$ 之间的部分，取下侧.

解： 曲面方程 $\Sigma: z=x^2+y^2$， $(x,y)\in D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x+y\le 4\},$ **--------1 分**

于是

$$\iint\limits_\Sigma z^2dydz+dzdx-y^2dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}[(x^2+y^2)^2(-z_x)+1\cdot(-z_y)-y^2\cdot 1]dxdy$$ **--------2 分**

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}[-2x(x^2+y^2)^2-2y-y^2]dxdy$$

由于 D_{xy} 关于 y 轴， x 轴对称， $x(x^2+y^2)^2, y$ 分别关于 x,y 是奇函数，所以

$$\iint\limits_{D_{xy}}[2x(x^2+y^2)^2+2y]dxdy=0,$$ **-------1 分**

$$\iint\limits_\Sigma z^2dydz+dzdx-y^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}} y^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r\sin\theta)^2r\,dr=4\pi$$ **-------1 分**

(也可以补面用 Gauss 公式计算)

三（1）、（本题 8 分）求方程 $y''-2y'-3y=e^{-x}$ 的通解.

解： 齐次方程的特征方程为 $r^2-2r-3=0,$ --------------2 分

解得 $r_1=3,\quad r_2=-1.$ --------------1 分

所以齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$，其中 C_1,C_2 是任意常数 .--------------1 分

又因为 $\lambda=-1$ 是特征方程的根，所以可设非齐次方程的特解为

$$y^*=Axe^{-x},$$ --------------2 分

再求得 $y^{*\prime}=(A-Ax)e^{-x}$ $\quad y^{*\prime\prime}=(-2A+Ax)e^{-x}$

将 $y^*,y^{*\prime},y^{*\prime\prime}$ 代入原方程，得 $-4A=1$ 解得 $A=-\frac{1}{4}$， --------------1 分

于是原方程的通解为 $$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{1}{4}xe^{-x}.$$ --------------1 分

三(2)、（本题 10 分） 已知 $I=\int_{\Gamma}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，

（1）证明曲线积分 I 与路径无关;

（2）设曲线 Γ 为从点 $A(0,0,0)$ 到点 $B(1,1,1)$ 的有向曲线，求曲线积分 I .

（1）证明：令 $P(x,y,z)=y+z,\ Q(x,y,z)=z+x,\ R(x,y,z)=x+y,$ 则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}=1,$$

即满足 $$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

所以曲线积分与路径无关.

（2）因为曲线积分与路径无关，沿 A(x_0,y_0,z_0) 到 B(x,y,z) 的任意曲线的积分都相等，取折线路径可得

$$I=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$$
$$=\int_{x_0}^{x}(y_0+z_0)dx+\int_{y_0}^{y}(z_0+x)\,dy+\int_{z_0}^{z}(x+y)\,dz$$
$$=xy+xz+yz-(x_0y_0+x_0z_0+y_0z_0)$$

取点 $A(0,0,0)$，$B(1,1,1)$，则所求积分 $I=1$.

建议：（1）4 分，（2）折线路径积分转化为定积分 4 分，结果 2 分.

四、（本题 12 分）(利用 Green 公式)

计算 $\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$，其中 L 是上半椭圆：$\frac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1\ (y \ge 0)$，**方向为逆时针方向.**

解：记 L 所围成的闭区域为 D，令 $P = \frac{y}{x^2+y^2}$，$Q = \frac{-x}{x^2+y^2}$，

则当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时，有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

作 L 与 X 轴所围区域内部的圆 l_1: $x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon>0$ 充分小，顺时针方向），以及 l_2: $y=0\,(x:-2\mapsto -\varepsilon)$，$l_3$: $y=0\,(x:\varepsilon\mapsto 4)$，记 L 和 l_1, l_2, l_3 所围成的区域为 D，由 Green 公式得：

$$\oint_{L+l_1+l_2+l_3} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

又由 $l_1: \begin{cases} x = \varepsilon\cos t \\ y = \varepsilon \sin t \end{cases}$，$t:\pi \mapsto 0$，可得

$$\begin{aligned}\int_{l_1} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{l_1} ydx - xdy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\pi}^{0}\left[\varepsilon\sin t\cdot(\varepsilon\cos t)' - \varepsilon\cos t\cdot(\varepsilon \sin t)'\right]dt \\ &= \pi.\end{aligned}$$

（也可以与 X 轴补成封闭曲线再使用一次 Green 公式）

而 $\int_{l_2} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = \int_{l_3} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = 0,$

所以 $\int_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = -\int_{l_1} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} - \int_{l_2} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} - \int_{l_3} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = -\pi.$

（建议：计算 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 2 分，做辅助曲线挖点 2 分，应用 Green 公式 2 分，曲线积分的计算 4 分.）

五 、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于

$z=0, z=h\,(h>0)$之间的部分，取下侧.

解： 添加平面$\Sigma_1 : z=h\ (x^2+y^2\le h^2)$，方向取上侧.

则$\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Sigma_1}$ 构成闭曲面，假定它们所围区域为$\boldsymbol{\Omega}$，由 Gauss 公式得

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3\,dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}(h-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h rdr\int_r^h dz=\frac{\pi}{3}h^3$$

（**也可以“先二后一”** $\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\int_0^h dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}dxdy=\int_0^h \pi z^2dz=\frac{\pi}{3}h^3$）

又由重积分对称性，$\iint\limits_{\Sigma_1}(h-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}(h-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le h^2}h\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^3$

所以 $\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\cdot\frac{\pi}{3}h^3-\pi h^3=0$

(建议：做辅助平面 2 分，应用 Gauss 公式 2 分，三重积分及辅助面上积分各 3 分.)

六、（10 分）(利用 Stokes 公式)

计算$\oint_{\Gamma}(y+x)dx+(z-\sin y)dy+2xdz$,其中$\Gamma$为柱面$x^2+y^2=1$与平面$x+y+z=1$的交线，从 z 轴正向看$\Gamma$为顺时针方向.

解：设$\sum$为平面$x+y+z=1$上被曲线Γ所围成的部分，并取$\sum$的法向量向下，则$\sum$

法向量的方向余弦$\vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})$，

由 Stokes 公式

$$\oint_{\Gamma}(y+x)dx+(z-\sin y)dy-2xdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+x & \text{z-siny} & +2x\end{vmatrix}dS=\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}dS,$$

而$\sum: z=1-x-y\ \ (x^2+y^2\le 1)$

$$\iint_{\Sigma}dS=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{dxdy}=\sqrt{3}\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{dxdy}=\sqrt{3}\pi,$$

所以$\oint_{\Gamma}(y+x)dx+(z-\sin y)dy+2xdz=4\pi.$

注：Stokes 公式同样可以写成如下形式

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+x & \text{z-siny} & +2x\end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma}dydz+2dzdx+dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}[(-z_x)+2(-z_y)+1]\,\mathrm{dxdy}$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}(1+2+1)\,\mathrm{dxdy}=4\pi.$$

(建议：应用 Stokes 公式转化成曲面积分 6 分，其余计算 4 分.)

七、附加题（本题 10 分）

已知平面区域 $D=\{(x,y)|\,0\le x\le\pi,\,0\le y\le\pi\}$, L 为 D 的正向边界，试证明：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx;$

（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2.$

证明： 1). 由 Green 公式知

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy,$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})dxdy,$$

又由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，有 $\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin y})dxdy$，因此

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx;$ 成立.

2）. 方法（一）由于 $e^t+e^{-t}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\ge 2+t^2$, 故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})dxdy$$
$$\ge\frac{5}{2}\pi^2$$

方法（二）由于 $e^{\sin y}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x,$ 故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge\frac{5}{2}\pi^2.$$

建议评分标准：第一小题 6 分，用了格林公式 4 分，对称性部分 2 分，第二小题 4 分.