北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

Fourier级数的定义及展开

1、问题提出

2、三角函数系的正交性

3、以2Π为周期的函数的Fourier级数展开

问题的提出

简谐波：$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$　　**最简单的周期波**

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: 周期；　ω: 角频率；

φ: 初相；　a: 振幅.

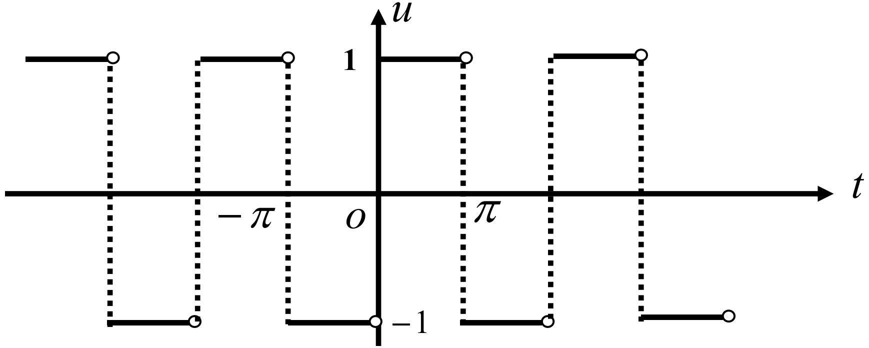
$x_1(t) = \sin t$，　$x_2(t) = \sin 3t$，

$x_1(t) + x_2(t)$?

注 不同频率简谐波的叠加不是简谐波，是周期波.

问题的提出

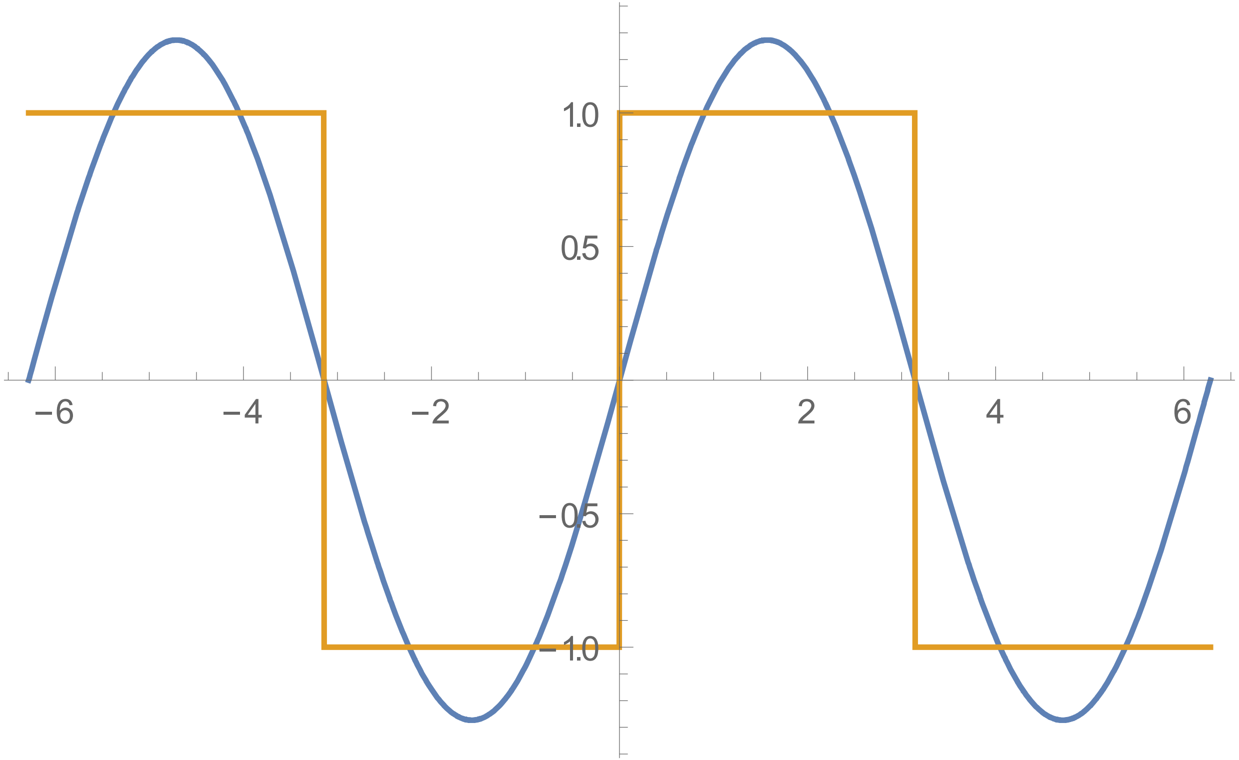
非正弦周期函数：矩形波 $u(t)=\begin{cases}-1, & 当-\pi\le t<0\\ 1, & 当0\le t<\pi\end{cases}$



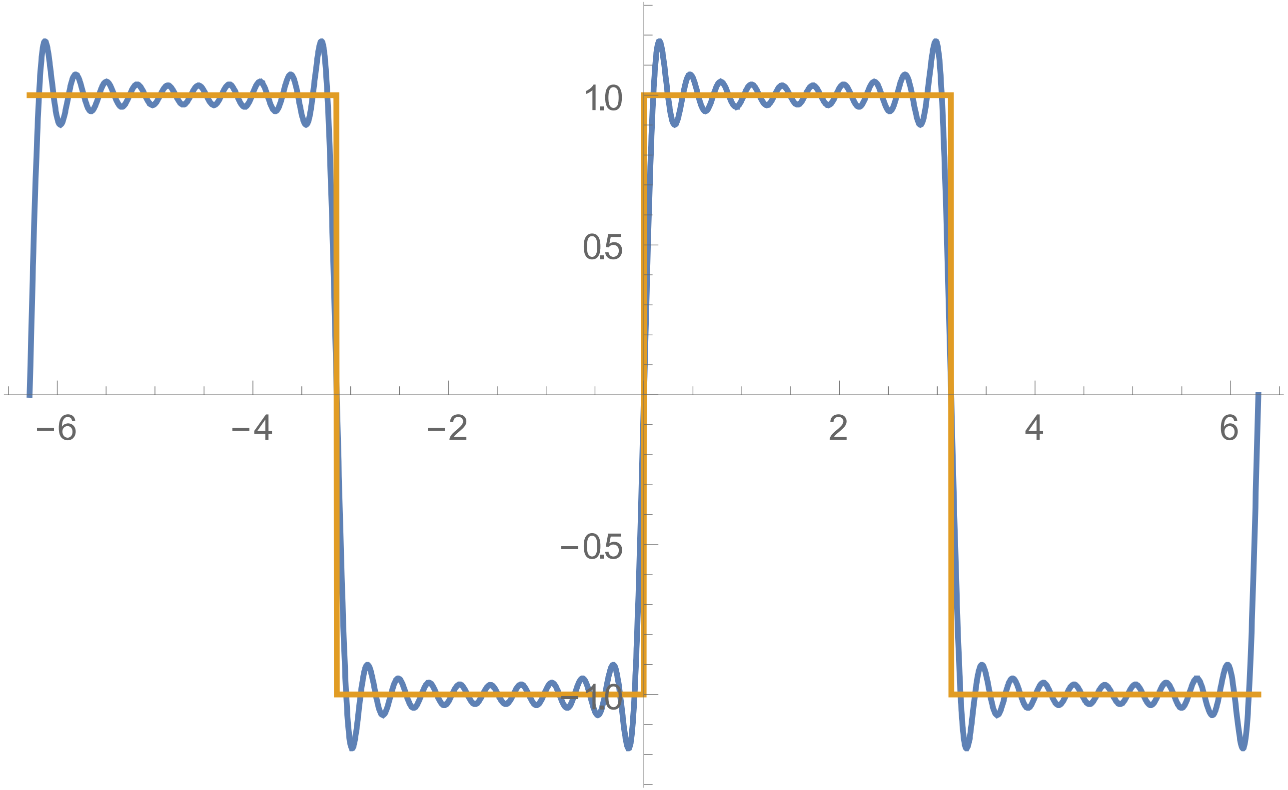
不同频率正弦波逐个叠加

$$\frac{4}{\pi}\sin t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin(3t),\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin(5t),\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin(7t),\ \cdots$$

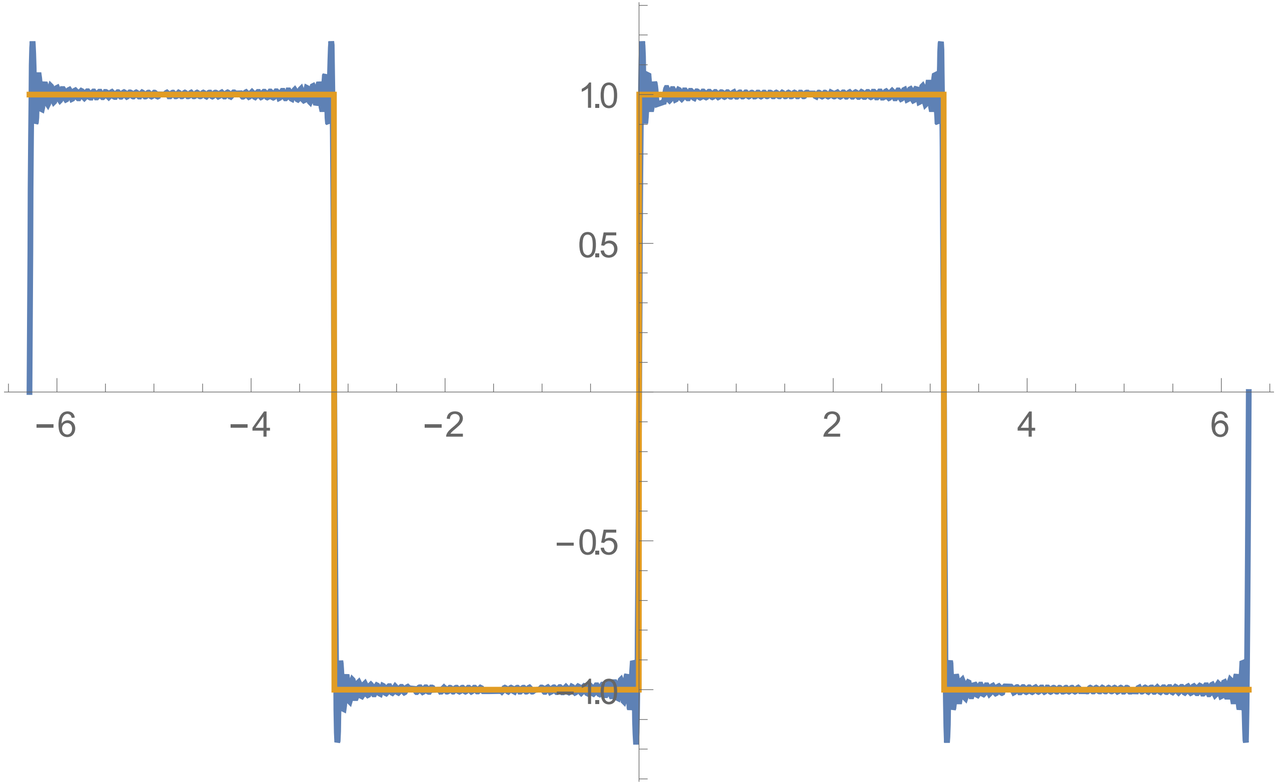
问题的提出



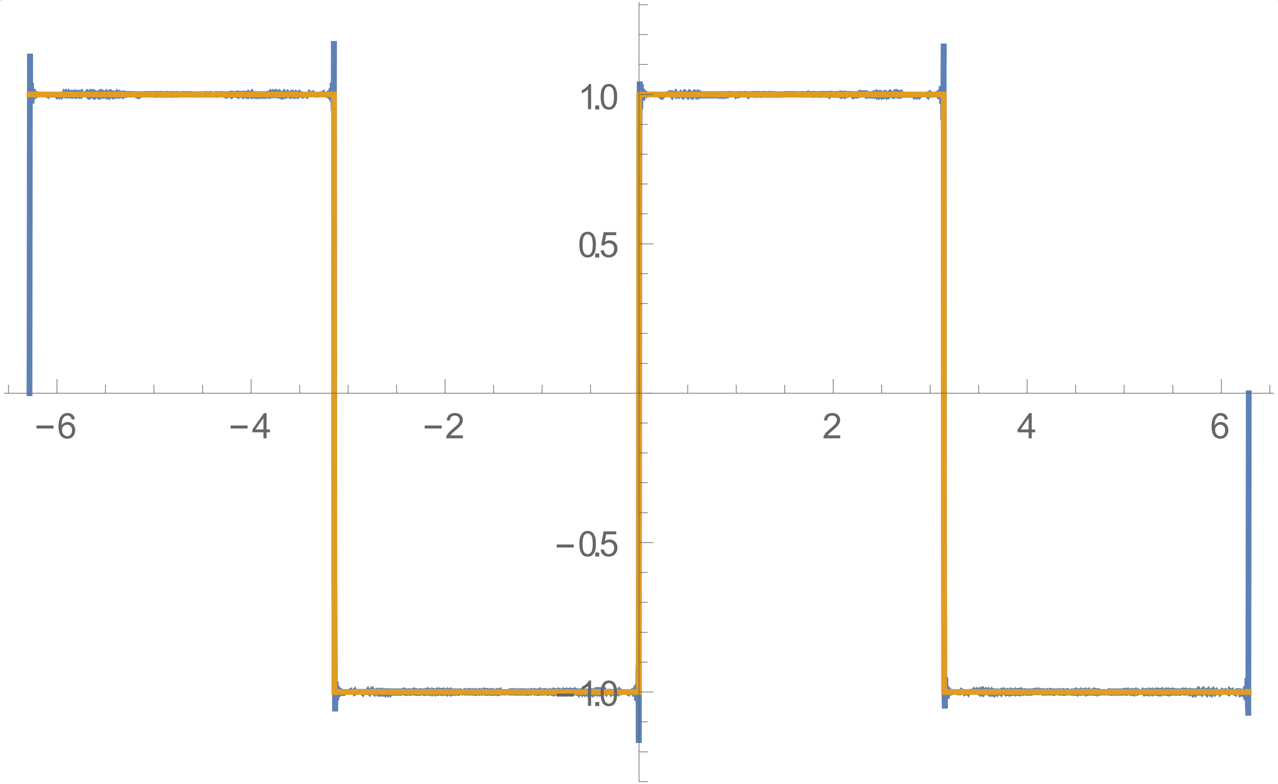
问题的提出



问题的提出



问题的提出



问题的提出

$$u(t)=\frac{4}{\pi}[\sin t+\frac{1}{3}\sin(3t)+\frac{1}{5}\sin(5t)+\frac{1}{7}\sin(7t)+\cdots]$$

$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

问题 $f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)?$

三角函数系的正交性

1. 三角级数

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t)$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0, a_n = A_n \sin\varphi_n, b_n = A_n \cos\varphi_n, \omega t = x,$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ 三角级数

三角函数系的正交性

2. 两个函数的内积

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，定义它们的内积为

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

定义1.1 我们称两个函数正交,如果

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

3. 三角函数系的正交性

三角函数系$:1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$

三角函数系的正交性

正交性：任意两个不同函数正交.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot 1dx=0,\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot 1dx=0,\ (n=1,2,3,\cdots)$$

记$\delta_{mn}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$，则

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\pi\delta_{mn}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$，

(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\pi\delta_{mn}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$，

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=0.$ (其中$m,n=1,2,\cdots$)

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

问题 (1)给定周期为2π的函数$f(x)$,若存在三角级数收敛于$f(x)$,即：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则a_n,b_n的值是什么？

(2)三角级数的表达式是否唯一?

(3)函数能够表示成三角级数的条件是什么?

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

假设级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 一致收敛于 $f(x)$, 则

(1) 求 a_0.

假设此级数一致收敛

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

(2) 求a_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

假设此级数一致收敛

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cos nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx dx\right)$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = a_n \pi$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

(3) 求 b_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

假设此级数一致收敛

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\sin nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \sin nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \sin nx dx\right)$$

$$= b_n \pi$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

定义1.2

$Riemann$可积

设周期为2π的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,n=1,2,\cdots$$

若$f(x)$无界,则其瑕积分绝对可积

为$f(x)$的$Fourier$系数，并称以$Fourier$系数a_n,b_n

为系数的三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$称为$f(x)$的

$Fourier$级数，记为$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

注　以2π为周期的函数$f(x)$, Fourier系数中的积分区间可以改成长度为 2π的任意区间,不影响a_n, b_n的值，即有$\forall c$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1,2,\cdots$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

【例1】 若函数$\varphi(-x)=\psi(x)$，问：$\varphi(x)$与$\psi(x)$的 Fourier 系数a_n,b_n与α_n,β_n $(n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

解

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos(-nt)d(-t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx=\alpha_n$$

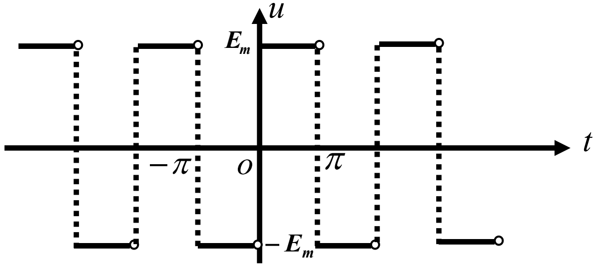
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\sin(-nt)d(-t)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\sin nx dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx=-\beta_n.$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

【例2】 以2π为周期的矩形脉冲波 $u(t)=\begin{cases} E_m, & 0\le t<\pi \\ -E_m, & -\pi\le t<0 \end{cases}$,

求此函数的 Fourier 级数.



解 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos ntdt=0,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin ntdt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-E_m)\sin ntdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_m\sin ntdt$$

$$=\frac{2E_m}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

$$b_n = \frac{2E_m}{n\pi}[1-\cos n\pi] = \frac{2E_m}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4E_m}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$\therefore u(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E_m}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)t.$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

若 f 是以 2π为周期的可积或绝对可 积函数，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

问题： $$f(x) \overset{?}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ 等号成立时称"展开"

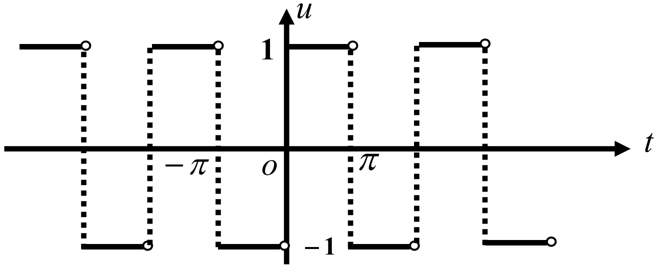
收敛定理 若f 以 2π为周期,在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,那么f的Fourier级数在每点x_0处收敛于$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

特别地,在 f 的连续点处, 它收敛于$f(x_0)$.

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

【例3】以2π为周期的矩形脉冲的波形

$$u(t)=\begin{cases}-1, & -\pi\le t<0\\ 1, & 0\le t<\pi\end{cases}$$



将它展开成Fourier级数.

解 $u(t)$相应的Fourier级数为:

$$u(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)t$$

在$u(t)$的不连续点 $t=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处,级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0,$

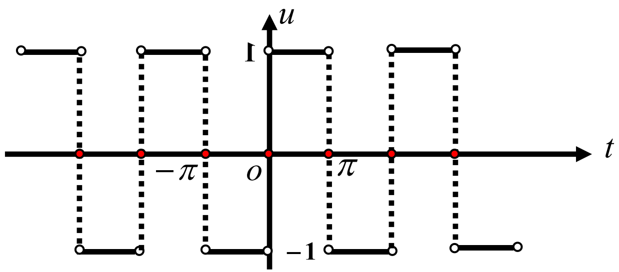
以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

在连续点处，收敛到 $u(t)$,

所以函数的Fourier展开式为:

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)t \qquad (-\infty<t<+\infty;t\neq 0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots)$$

和函数图象为



以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

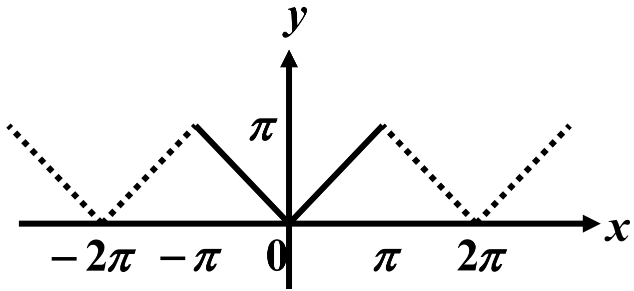
注 若$f(x)$为非周期函数,在$[-\pi,\pi)$上有定义,且满足收敛条件,则也可以展开成*Fourier*级数.

作法: 周期延拓($T=2\pi$) $F(x)=f(x), x\in[-\pi,\pi)$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

【例4】 将$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$展开成$Fourier$级数.

解 将$f(x)$延拓为以2π为周期的周期函数$F(x)$



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi,$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1, k=1,2,\cdots \\ 0, & n=2k, k=1,2,\cdots\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0$$

$$\therefore F(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\in(-\infty,\infty)$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x, x\in[-\pi,\pi]$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

注 可利用Fourier展开式求级数的和

$$\because\ f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,$$

$$\therefore f(0)=0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sigma_1$$

记 $\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots,\quad \sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sigma_1+\sigma_2,$

则 $\sigma_2=\frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}\Rightarrow \sigma_2=\frac{\pi^2}{24},\ \sigma=\frac{\pi^2}{6}$

$$\sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=2\sigma_1-\sigma=\frac{\pi^2}{12}.$$

以 2π 为周期的函数的Fourier级数展开

【例5】 设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\le x<0 \\ ax, & 0\le x<\pi \end{cases} \quad (\text{常数} a>b>0)$$

求其 $Fourier$ 级数的和函数 $S(x)$,$S(6)S(5\pi)$.

解

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq(2k+1)\pi \\ \dfrac{(a-b)\pi}{2}, & x=(2k+1)\pi \end{cases}$$

$$S(6)S(5\pi)=b(6-2\pi)\frac{(a-b)\pi}{2}$$

作业

习题13.1： 2（1，2，3），3，6（1）

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院