例子

- 例1.6　用等值演算证明 $p \oplus (q \wedge r) \to p \vee q \vee r$ 是永真式。
-
- 证明：　思路：公式 A 是永真式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$。
- $\quad p \oplus (q \wedge r) \to p \vee q \vee r$
- $\Leftrightarrow \neg (p \oplus (q \wedge r)) \vee p \vee q \vee r$
- $\Leftrightarrow \neg ((p \wedge \neg(q \wedge r)) \vee (\neg p \wedge (q \wedge r)) \vee p \vee q \vee r$
- $\Leftrightarrow ((\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \vee p \vee q \vee r$
- $\Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r) \vee p \vee q \vee r)$
- $\quad \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee p \vee q \vee r)$
- $\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$
- 所以，$p \oplus (q \wedge r) \to p \vee q \vee r$ 是永真式。
-

例子

- 例1.7　用等值演算证明 $\neg(p\to q)\wedge q$ 是永假式
- （思路：公式 A 是永假式当且仅当 $A\Leftrightarrow 0$）
- 证明1：任给真值赋值 v，若 $v(q)=1$，则
- $v(p\to q)=1$，$v(\neg(p\to q))=0$，进而 $v(A)=0$，
- 若 $v(q)=0$，显然也有 $v(A)=0$，
- 所以 $\neg(p\to q)\wedge q$ 是永假式。

- 证明2：使用等值演算：
- $\neg(p\to q)\wedge q$
- $\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q$
- $\Leftrightarrow p\wedge\neg q\wedge q$
- $\Leftrightarrow 0$
- 所以 $\neg(p\to q)\wedge q$ 是永假式。

应用实例

- 例1.8　世界冰球赛在激烈地进行，看台上三位观众正在热烈地议论着比赛结果。
- 　甲说：“中国第一，匈牙利第三。”
- 　乙说：“奥地利第一，中国第三。”
- 　丙说：“匈牙利第一，中国第二。”
- 比赛结束后，发现这三位观众各猜对了一半，并且没有发生多个国家名次并列的情况。
- 问：中国、奥地利、匈牙利各得第几?

请大家想一下思路

应用实例

- 例1.8　世界冰球赛在激烈地进行，看台上三位观众正在热烈地议论着比赛结果。
- 甲说：“中国第一，匈牙利第三。”
- 乙说：“奥地利第一，中国第三。”
- 丙说：“匈牙利第一，中国第二。”
- 比赛结束后，发现这三位观众各猜对了一半，并且没有发生多个国家名次并列的情况。
- 问：中国、奥地利、匈牙利各得第几？

重点：每个人只说对一半！

- 解：　用字母表示命题如下：
- p_1：中国第一　p_2：中国第二　p_3：中国第三
- q_1：奥地利第一
- r_1：匈牙利第一　r_3：匈牙利第三

应用实例

- 甲说的两句话一对一错：$p_1 \oplus r_3 = 1$
- 乙说的两句话一对一错：$q_1 \oplus p_3 = 1$
- 丙说的两句话一对一错：$r_1 \oplus p_2 = 1$
- 没有并列第一：$p_1 \wedge r_1 = p_1 \wedge q_1 = q_1 \wedge r_1 = 0$
- 没有并列第三：$p_3 \wedge r_3 = 0$
- 中国只能得一个名次：$p_1 \wedge p_2 = p_2 \wedge p_3 = p_1 \wedge p_3 = 0$
- 匈牙利只能得一个名次：$r_1 \wedge r_3 = 0$
- 将方程 $p_1 \oplus r_3 = 1$ 两端 $\wedge p_3$ 得到：
- p_3字母 p 是 p_1中的字母，p_3 下标是 r_3 的下标。
- $p_3 = p_3 \wedge (p_1 \oplus r_3) = (p_3 \wedge p_1) \oplus (p_3 \wedge r_3) = 0 \oplus 0 = 0$

- 类似，也可以将方程 $p_1 \oplus r_3 = 1$ 两端 $\wedge r_1$。

应用实例

- 由 $p_3=0$ 和 $q_1 \oplus p_3=1$ 得出 $q_1=1$，
- 由 $q_1=1$ 和 $p_1 \wedge q_1=0$ 得出 $p_1=0$，
- 由 $p_1=0$ 和 $p_1 \oplus r_3=1$ 得出 $r_3=1$，
- 由 $r_3=1$ 和 $r_1 \wedge r_3=0$ 得出 $r_1=0$，
- 由 $r_1=0$ 和 $r_1 \oplus p_2=1$ 得出 $p_2=1$。
- 将 $q_1=r_3=p_2=1$， $p_1=p_3=r_1=0$ 代入上述 11 个方程，发现它们满足这 11 个方程组成的方程组。
- 因此，奥地利第一，中国第二，匈牙利第三。

小结

- 1、什么是“两个逻辑公式的逻辑等价 $\Leftrightarrow$ ”？
- 2、逻辑公式等值： $v(A) = v(B)$
- 两个公式逻辑等价：$A \Leftrightarrow B$
- 逻辑公式 $A \leftrightarrow B$ 永真
- 三者是什么关系？有什么联系？什么区别？
- 3、什么是等值式模式？有多少个常用的等值式？
- 命题逻辑公式的等值式，是逻辑等值演算规则。
- （作用类比中学代数的运算法则和代数恒等式）
- 4、本节特点：都是常用的逻辑等值演算公式！
- 要求1：熟悉、记住、用活；提高演算技巧！
- 要求2：逻辑演算要步步有依据，不要“自创”法则

小结

- 5、 等值演算有以下应用：
- （1）证明两个公式等值。
- （2）通过证明 $A \Leftrightarrow 1$，证明公式 A 是永真式。
- （3）通过证明 $A \Leftrightarrow 0$，证明公式 A 是永假式。
- （4）用于解决某些实际逻辑问题：
- 用字母表示需要确定真值的命题，
- 由已知条件列出这些命题满足的方程组，
- 求解方程组，得出实际问题的解。

内容

§1.1 命题和联结词

§1.2 公式和真值赋值

§1.3 等值演算

§1.4 对偶定理

§1.5 联结词的完全集

§1.6 范式

§1.7 逻辑推论

问题提出：观察等值式模式特点

交换律	$Q\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$	$Q\wedge R\Leftrightarrow R\wedge Q$	$Q\oplus R\Leftrightarrow R\oplus Q$
结合律	$(P\vee Q)\vee R \Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$	$(P\wedge Q)\wedge R \Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$	$(P\oplus Q)\oplus R \Leftrightarrow P\oplus(Q\oplus R)$
分配律	$P\vee(Q\wedge R) \Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	$P\wedge(Q\vee R) \Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	$P\wedge(Q\oplus R) \Leftrightarrow(P\wedge Q)\oplus(P\wedge R)$
德•摩根律	$\neg(Q\vee R)\Leftrightarrow\neg Q\wedge\neg R$	$\neg(Q\wedge R)\Leftrightarrow\neg Q\vee\neg R$	
幂等律	$Q\vee Q\Leftrightarrow Q$	$Q\wedge Q\Leftrightarrow Q$	
同一律	$Q\wedge 1\Leftrightarrow Q$	$Q\vee 0\Leftrightarrow Q$	
吸收律	$Q\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow Q$	$Q\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow Q$	
零　律	$Q\vee 1\Leftrightarrow 1$	$Q\wedge 0\Leftrightarrow 0$	
排中律	$Q\vee\neg Q\Leftrightarrow 1$	双重否定律	$\neg\neg Q\Leftrightarrow Q$
矛盾律	$Q\wedge\neg Q\Leftrightarrow 0$	假言易位	$Q\rightarrow R\Leftrightarrow\neg R\rightarrow\neg Q$

本节深入研究等值式模式的相关问题

对偶定理

- 定义1.10 设 A 是由 $\{0, 1, \neg, \vee, \wedge\}$ 生成的公式，
- 将 A 中的 $\vee$和 $\wedge$互换，0和 1互换得到 A^*，
- 称 A^* 与 A 互为对偶式。
- 比如： $(p \vee q) \wedge r$ 与 $(p \wedge q) \vee r$ 互为对偶式，
- $\neg(p \vee 0) \wedge 1$ 与 $\neg(p \wedge 1) \vee 0$ 互为对偶式。

注意：
0 与 1 互换
$\vee$与 $\wedge$ 互换
$\neg$ 保持不动

相反的赋值

- 定义1.11　如果真值赋值 v_1 和 v_2 满足：
- 对于每个命题变元 p， $v_1(p) \neq v_2(p)$ ，
- 则称 v_1 和 v_2 是相反的赋值。
- 相反赋值的含义理解为：$v_1(p) = \neg\, v_2(p) = v_2(\neg\, p)$。
- 若 $v_1(A)$ 已知，$v_2(A)$ 是对 $v_1(A)$ 所有命题变元取
- 相反赋值。
- 定理1.4　设 A 是由 $\{0, 1, \neg, \vee, \wedge\}$ 生成的公式，
- A^* 与 A 互为对偶式，v 和 v' 是相反的，则
  - $v(A^*) = \neg\, v'(A)$

原公式的变元取相反赋值后再取相反

公式里面否完外面再否

定理1.4

- 证明： 对 A 的长度进行归纳。当A长度为 1 时：
- 1、若 A 为命题变元 p，则 A^* 也是 p，$v(p) = \neg\, v'(p)$
- 2、若 A 为 0，则 A^* 是 1，$v(1) = 1 = \neg 0 = \neg\, v'(0)$
- 3、若 A 为 1，则 A^* 是 0，$v(0) = 0 = \neg 1 = \neg v'(1)$
- 假设：长度不超过 n 的公式B，$v(B^*) = \neg\, v'(B)$
- 当A长度为 n+1 ，
- 4、若A为 $\neg B$，A^* 是 $\neg B^*$，B的长度为 n。则有
- 根据归纳假设，$v(B^*) = \neg\, v'(B)$，因此
- $v(A^*) = v(\neg\, B^*) = \neg v(B^*)$
- $= \neg\, \neg\, v'(B) = \neg\, v'(\neg\, B) = \neg v'(A)$。

定理1.4

- 5、若 A 为 $B\wedge C$，则 A^* 是 $B^*\vee C^*$，根据归纳假设，
- $v(B^*)=\neg v'(B)$， $v(C^*)=\neg v'(C)$，所以
  $v(A^*)=v(B^*)\vee v(C^*)=\neg v'(B)\vee\neg v'(C)$
  $=v'(\neg B\vee\neg C)=\neg v'(B\wedge C)=\neg v'(A)$。
- 6、若 A 为 $B\vee C$，则 A^* 是 $B^*\wedge C^*$，根据归纳假设，
- $v(B^*)=\neg v'(B)$， $v(C^*)=\neg v'(C)$，所以
  $v(A^*)=v(B^*)\wedge v(C^*)=\neg v'(B)\wedge\neg v'(C)$
  $=v'(\neg B\wedge\neg C)=\neg v'(B\vee C)=\neg v'(A)$。
- 证毕。

相反的赋值：德摩根律

- 定理理解： $v(A^*) = \neg v'(A)$； $v(A) = \neg v'(A^*)$
- 练习： $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $v(p \vee q) = \neg v'(p \wedge q) = \neg(v'(p) \wedge v'(q))$
- $= \neg(v(\neg p) \wedge v(\neg q)) = \neg v(\neg p \wedge \neg q)$
- $\neg(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \Leftrightarrow \neg \mathrm{p} \wedge \neg \mathrm{q}$
- 用代换原理有：$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$,

相反的赋值:

- 定理理解: $v(A^*) = \neg v'(A)$; $v(A) = \neg v'(A^*)$
- 练习 $((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C)$
- $v((p \vee q) \wedge r) = \neg v'((p \wedge q) \vee r)$
- $= \neg v((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r)$
- $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r)$
- 用代换原理有:
- $((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow \neg((\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C)$

公式等值,其对偶式是否等值?

定理1.5 （对偶定理）

- 设 A, B 是由 $\{0, 1, \neg, \vee, \wedge\}$ 生成的公式， 且
- A^* 与 A 互为对偶式， B^* 与 B 互为对偶式。
- 如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

等值的公式
其对偶式
也等值！

- 证明：
- 任取真值赋值 v,
- 令 v' 是与 v 相反的真值赋值。
- 因为 $A \Leftrightarrow B$，所以 $v'(A) = v'(B)$。因此，
  - $v(A^*) = \neg v'(A) = \neg v'(B) = v(B^*)$
- 因而， $A^* \Leftrightarrow B^*$。

定理1.5 （对偶定理）

- 例1.9 证明以下等值式：
- (1) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee (\neg p \vee q)) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- (2) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$
- 证明：
- (1) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee (\neg p \vee q))$
- $\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \neg p \vee q$ 吸收律
- $\Leftrightarrow \neg p \vee ((p \wedge q) \vee q)$ 交换律+结合律
- $\Leftrightarrow \neg p \vee q$ 吸收律
-
- (2) 是 (1) 的对偶式，由对偶定理得出，
- $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$

定理1.5 （对偶定理）

- 根据对偶定理，由 $\wedge$ 满足交换律、结合律，可得出 $\vee$ 满足交换律、结合律。
- $\wedge$ 的交换律：$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- $\vee$ 的交换律：$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
- $\wedge$ 的结合律：$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
- $\vee$ 的结合律：$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

- 根据对偶定理，若一个德摩根律成立，则另一个德摩根律也成立。
- $\vee$ 的摩根律：$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- $\wedge$ 的摩根律：$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

- 对偶定理是把德摩根律推广到更一般的形式。

内容

§1.1 命题和联结词

§1.2 公式和真值赋值

§1.3 等值演算

§1.4 对偶定理

§1.5 联结词的完全集

§1.6 范式

§1.7 逻辑推论

问题提出

- 例：
  - $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

    $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
  - $p \oplus q \Leftrightarrow \neg (p \leftrightarrow q)$

    $\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q))$

    $\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

部分联结词并不是必不可少,独立的

最少联结词是 ？

相关定义

- 定义1.12：设F是n元联结词，$p_1, p_2, \ldots, p_n$是不同的命题变元。如果公式A中不出现除$p_1, p_2, \ldots, p_n$之外的命题变元，并且$Fp_1, p_2, \ldots, p_n \Leftrightarrow A$，则称A定义F。

例：

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
- $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

相关定义

- 定义1.12：设F是n元联结词，$p_1, p_2, \ldots, p_n$是不同的命题变元。如果公式A中不出现除$p_1, p_2, \ldots, p_n$之外的命题变元，并且$Fp_1, p_2, \ldots, p_n \Leftrightarrow A$，则称A定义F。

即，A中变元集合是F中出现的变元集合的子集，

二者并不一定是完全相同的。

拓展定义

- 如果存在由联结词集合S生成的公式来定义F，则称**F可由S定义**。

例:

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
- $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

若令$S = \{\neg, \wedge, \vee\}$，则上述三个联结词可由S定义。

真值表的启示

p	q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- **F_4 p q ?**
- **F_4为真 当且仅当 p为假且q为假 或 p为假且q为真**

  $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

- **$F_4\ p\ q \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$?**

真值表的启示

p	q	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- **证 $F_4\ p\ q \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$**
  - **(p/0,q/0), (p/0,q/1)**
  - **(p/1,q/0),(p/1,q/1)**

  代入得证

真值表的启示：其它联结词推广

p	q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- **F_1 p q ?**
- **F_1 p q $\Leftrightarrow$ 0**

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \wedge q$$

真值表的启示

- 任意二元联结词都可由{¬,∧,∨}定义。
  - 永假用其任意一个变元的矛盾式定义
  - 其它任意二元联结词，看真值表中有多少组结果为真则其定义公式**A**中就有多少个公式**B**的析取构成，其中每个**B**是关于变元**p**、**q**的合取，变元取假，则用其否定式；为真，取其肯定式。

推广到n元联结词

p^1	…	p_n	F_1	F_2	…	F_i	…	F_j	…	F_N
0	…	0	0	0	…	0	…	1	…	1
0	…	1	0	1	…	1	…	0	…	…
…	…	…	0	0	…	…	…	…	…	…
1	…	1	0	0	…	0	…	1	…	1

-
- **n(n≥1)元联结词共有 $N = 2^{2^n}$ 个**
- **Fi $p_1 \ldots p_n \Leftrightarrow ?\ A$**

公式A的一般形式

- 公式A可如下构造：
  - 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是永假式，取A为$p_1 \wedge \neg p_1$。
  - 若$Fp_1p_2\ldots p_n$是可满足式，设满足$Fp_1p_2\ldots p_n=1$的**真值赋值有m组**，分别为：$(p_1/a_1^1, \ldots, p_n/a_n^1), \ldots, (p_1/a_1^m, \ldots, p_n/a_n^m)$，

  则取A为：$(\widetilde{p_1^1} \wedge \ldots \wedge \widetilde{p_n^1}) \vee \ldots \vee (\widetilde{p_1^m} \wedge \ldots \wedge \widetilde{p_n^m})$

  其中

$$\widetilde{p_j^i} = \begin{cases} p_j & 若 a_j^i = 1 \\ \neg p_j & 若 a_j^i = 0 \end{cases} \quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$$

- 往证F $p_1 \ldots p_n \Leftrightarrow A$

任取真值赋值ν，ν(A)= 1

- 当且仅当有1≤i≤m，使$\nu(\widetilde{p_1^i} \wedge \ldots \wedge \widetilde{p_n^i})=1$
- 当且仅当有1≤i≤m，使$\nu(\widetilde{p_1^i})=\ldots=\nu(\widetilde{p_n^i})=1$
- 当且仅当有1≤i≤m，使$\nu=(p_1/a_1^i, \ldots, p_n/a_n^i)$

因 此，F $p_1 \ldots p_n \Leftrightarrow A$

结论

- 任意**n**元联结词都可由{¬,∧,∨}定义。
  - 永假则用其任意一个变元的矛盾式定义
  - 其它任意**n**元联结词，真值表中有多少组为真，则其定义公式**A**是由多少个公式**B**的析取构成。每个公式**B**均是**n**个项的合取组成，每项对应每个变元，变元取假，则用其否定式；为真，取其肯定式。

应用*

- 是后续数理逻辑的基础，也是计算机硬件设计基础，可用于设计各种逻辑功能的组合逻辑电路。（《数字逻辑》）
  - 在电路中，电路开关相当于真值表中的真假值，当开关闭合时，电路通电，电灯亮，值为1。开关打开时，电路断电，电灯灭，值为0.
  - 在计算机硬件中，与门、或门、非门是是数字逻辑电路中的基本元件，各种复杂功能的逻辑电路可由上述三种基本元件组成。组成的过程即可用前述方法来构造。

- 例：如下表，电路输出为S，求S的设计函数。

输入			输出
A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\mathbf{S : (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$$