

2020-2021年考试题目

一、选择题（每小题4分，共20分）

1. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则积分 $I_1 = \iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz$,

$I_2 = \iiint_{\Omega} [\cos^4(x + y + z) + z^3] dx dy dz$, $I_3 = \iiint_{\Omega} [\ln(x^2 + y^2 + z^2)] dx dy dz$ 之间的大小关系为

(C).

三重积分的性质——保序(号)性

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

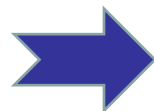
(B) $I_1 > I_2 > I_3$.

(C) $I_2 > I_1 > I_3$.

(D) $I_2 < I_1 < I_3$.

2. 设 $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$ 则 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 在极坐标系下为 (B).

二重积分的计算——极坐标变换



(A) $\int_0^a dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta$.

(B) $\int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta$.

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.

(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.

二重积分的计算——广义极坐标变换

➡ 计算二重积分 $\iint_D \sin\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \text{ 且 } y \geq 0\}$.

解: 取广义极坐标变换 $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$, 则 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = abr$. 在广义极坐标系下, 积分区域 D 为

$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, 因此

$$\text{原式} = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 abr \sin r^2 dr = \frac{\pi}{2} ab(1 - \cos 1)$$

建议评分标准: 广义极坐标变换 2 分, 雅各比行列式 1 分, 积分区域 1 分, 结果 1 分.

3. 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 与坐标面所围成立体的体积为 (B) **三重积分的计算**

(A) $\frac{4\pi}{3}$.

(B) $\frac{\pi}{2}$.

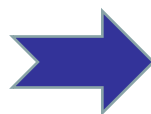
(C) π .

(D) $\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, L 是以 $M(x_0, y_0)$ 为中心, 半径为 r 的圆周, 极限

$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_L f(x, y) ds = (\text{ A }).$

第一型曲线积分的性质---中值定理



(A) $2\pi f(x_0, y_0)$

(B) $f(0, 0)$

(C) $2\pi f(0, 0)$

(D) $f(x_0, y_0)$

5. 抛物面 $2z = x^2 + y^2$ 位于平面 $z = 2$ 下方的面积为 (D).

(A) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} + 1)$.

(B) $\pi(5\sqrt{5} - 1)$.

(C) $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$.

(D) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$.

重积分的应用\第一型曲面积分的计算

➡ 求极限 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \cos(x-y+z) e^{x^2+y^2+z^2+3xyz} dx dy dz$.

解：由积分中值定理，存在 (ξ, η, ζ) , $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq r^2$ ，使得

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \cos(x-y+z) e^{x^2+y^2+z^2+3xyz} dx dy dz = \frac{4}{3} \pi r^3 \cos(\xi - \eta + \zeta) e^{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 3\xi\eta\zeta}$$

因此，原式 $= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{4}{3} \pi \cos(\xi - \eta + \zeta) e^{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 3\xi\eta\zeta} = \frac{4}{3} \pi$.

建议评分标准：积分中值定理 3 分，结果 2 分.



设 $f(u)$ 具有连续导数, $f(0)=0$,区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$,计算极限

$$I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz}{\ln(1+t^4)}.$$

解：由等价代换, 球面坐标变换可得

$$I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(r) r^2 \sin \varphi dr}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr}{t^4}$$

再由洛必达法则, 可得

$$I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi f(t)t^2}{4t^3} = \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \pi f'(0)$$

已知球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Σ 是上半球面, Σ_1 是 Σ 位于第一卦限的部分, 则 ().

(A) $\iint_{\Sigma} x \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyz \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz \, dS$

答案(C)

设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 取上侧, 则以下结论错误的是 ().

(A) $\iint_{\Sigma} x^2 \, dydz = 0$

(B) $\iint_{\Sigma} y^2 \, dydz = 0$

(C) $\iint_{\Sigma} x \, dydz = 0$

(D) $\iint_{\Sigma} y \, dydz = 0$

答案: (C)

➡ 给定曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, 已知其在第一卦限内的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (|x| + y) dS = (\text{ B })$

- A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; B. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; C. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$; D. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$.

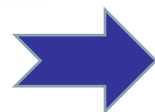
5. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(z) = \int_1^z dy \int_y^z f(x) dx$, 则 $F'(z) = (\text{ D })$

- A. $f(z)$; B. $f(z)z$; C. $f(z)(1-z)$; D. $f(z)(z-1)$.

二、计算题（每小题 5 分，满分 15 分）

1. 设向量场 $\vec{F}(x, y, z) = (xyz^2, z \sin y, x^2 e^y)$, 求散度 $\operatorname{div} \vec{F}$, 旋度 $\operatorname{rot} \vec{F}$.

场论部分



解: $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = yz^2 + z \cos y$,

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz^2 & z \sin y & x^2 e^y \end{vmatrix} = (x^2 e^y - \sin y, 2xyz - 2xe^y, -xz^2).$$

➡ 设定义在全空间 R^3 上的数量值函数 $f(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $rot(grad f)$.

解析: $grad f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, 则

$$rot(grad f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\vec{i} + (f_{xz} - f_{zx})\vec{j} + (f_{yx} - f_{xy})\vec{k}$$

由于 $f(x, y, z)$ 的所有二阶偏导数连续, 故 $rot(grad f) = (0, 0, 0)$.

➡ 证明向量场 $\vec{F} = (yz(2x + y + z), xz(x + 2y + z), xy(x + y + 2z))$ 是有势场, 并求其势函数.

证

$$\text{因为 } \text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz(2x + y + z) & xz(x + 2y + z) & xy(x + y + 2z) \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

所以 \vec{F} 是有势场.

$$\begin{aligned} \text{势函数 } \varphi(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} yz(2x + y + z)dx + xz(x + 2y + z)dy + xy(x + y + 2z)dz \\ &= \int_{x_0}^x y_0 z_0 (2x + y_0 + z_0)dx + \int_{y_0}^y x z_0 (x + 2y + z_0)dy + \int_{z_0}^z xy(x + y + 2z)dz \\ &= x^2 yz + xy^2 z + xyz^2 - x_0^2 y_0 z_0 - x_0 y_0^2 z_0 - x_0 y_0 z_0^2 \end{aligned}$$

若取 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, 则 $\varphi(x, y, z) = \int_0^z xy(x + y + 2z)dz = x^2 yz + xy^2 z + xyz^2$

2. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$, $f(x)$ 连续且恒正, a, b 是常数, 计算 $\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy$.

二重积分的计算——轮换对称性

解: 利用区域对称性可知, $\iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy = \iint_D \frac{af(y) + bf(x)}{f(y) + f(x)} dx dy$.

$$\text{所以 } \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \frac{(a+b)[f(x) + f(y)]}{f(y) + f(x)} dx dy = \frac{1}{2}(a+b).$$

3. 计算曲线积分 $\int_L (x + y^2) ds$ 其中 L 是 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$.

第一型曲线积分的计算——轮换对称性

解: 利用轮换对称性可得

$$\int_L (x + y^2) ds = \frac{1}{3} \int_L (x + y + z + x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3} \pi R^3.$$



计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$, Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

解: 由于 Σ 关于 xoy 平面对称, $\frac{yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 为 z 的奇函数, 因此 $\iint_{\Sigma} \frac{yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0$, 又

由于 Σ 关于 xoz 平面对称, $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 为 y 的奇函数, 因此 $\iint_{\Sigma} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0$, 因此

$$\iint_{\Sigma} \frac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS = 0. \quad (\text{建议评分标准: 过程及答案正确 5 分})$$

三、计算题（每题 5 分，共 15 分）

1. 计算 $\iiint_{\Omega} (2z + 3xy^2) dx dy dz$, 其中 Ω 由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 围成.

三重积分的计算



解: 由于 Ω 关于 $yo z$ 平面对称, $f(x, y, z) = 3xy^2$ 为 x 的奇函数, 故 $\iiint_D 3xy^2 dV = 0$

再利用球面坐标, 得到

$$\iiint_D (3xy^2 + 2z) dx dy dz = \iiint_D 2z dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{4}.$$

2. 计算积分 $I = \int_L (x^2 + y^2) dx + 2y dy$, 其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (y \geq 0)$ 上从点 $A(a, 0)$

第二型曲线积分的计算

到 $B(-a, 0)$ 的一段弧.

解: $L: x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi,$

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x^2 + y^2) dx + 2y dy = \int_0^{\pi} [(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(-a \sin \theta) + 2b \sin \theta (b \cos \theta)] d\theta \\ &= -\frac{2}{3} a(a^2 + 2b^2). \end{aligned}$$

➡ 利用对称性计算三重积分 $\iiint_V (z^2 + x \cos(xy)) dx dy dz$, 其中

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

解: 由于积分区域 V 关于 $yo z$ 平面对称, $x \cos(xy)$ 为关于 x 的奇函数, 因此

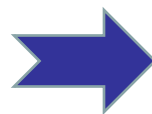
$$\iiint_V x \cos(xy) dx dy dz = 0. \text{ 下面计算 } \iiint_V z^2 dx dy dz, \text{ 采用球极坐标系 } \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}, \text{ 则此时}$$

$|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)}| = r^2 \sin \varphi$, 被积区域 V 为 $\{(r, \varphi, \theta) | 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$, 因此

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin \varphi dr = \frac{4\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1).$$

3. $\iint_{\Sigma} z \, dS$, 其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$;

第一型曲面积分的计算



解: 在曲面上 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 法向量为 $n = (-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, -1)$, 所以 $dS = |n| \, dxdy = \frac{a}{z} \, dxdy$,

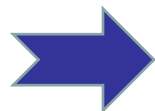
则

$$\iint_{\Sigma} z \, dS = \iint_{D_{xy}} a \, dxdy = \pi a^3.$$

四、(10分) 计算 $\iint_{\Sigma} (3y-z)dydz + (z-3x)dzdx + (x-y)dxdy$, 其中 Σ 为

$z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq b$, 的外侧.

第二型曲面积分的计算



解: 曲面方程为: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 法向量为 $\vec{n}_z = (-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$, 曲面在 xOy

平面的投影为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq b^2$, $\vec{A} = (3y-z, z-3x, x-y)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (3y-z)dydz + (z-3x)dzdx + (x-y)dxdy &= \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n}_z dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} \left[-\left(\frac{3xy - xz + zy - 3xy}{\sqrt{y^2 + x^2}} \right) + x - y \right] dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} \left[\frac{z(x-y)}{\sqrt{y^2 + x^2}} + x - y \right] dxdy = 2 \iint_{\Sigma} (x-y) dxdy = 2 \iint_{D_{xy}} (y-x) dxdy = 0. \text{ (对称性) } . \end{aligned}$$

➡ (10) 计算第二型曲面积分 $\iint_{\Sigma} [2yf(x, y, z) + x]dydz + [-2xf(x, y, z) + y]dzdx + 2zdx dy$, 其中

$f(x, y, z)$ 为连续函数, Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z = 1$ 在第一卦限的部分, 指向上侧.

解: Σ 投影到 xoy 平面为 $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Σ 的表达式为

$z = 1 - x^2 - y^2, (x, y) \in D_{xy}$. 因此

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [2yf(x, y, z) + x]dydz + [-2xf(x, y, z) + y]dzdx + 2zdx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} [(2yf(x, y, z) + x)(2x) + (-2xf(x, y, z) + y)(2y) + 2 - 2x^2 - 2y^2]dxdy \\ &= \iint_{D_{xy}} 2dxdy \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

五、(10 分) 设函数 $f(x), g(y)$ 在 R 上具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 已知积分

$\int_L 2xydx + [f(x) + g(y)]dy$ 与路径无关, 且对任意 t 恒有

平面曲线积分与路径无关

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + [f(x) + g(y)]dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + [f(x) + g(y)]dy$$

求 $f(x), g(y)$.

解: 由积分与路径无关的充要条件,

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x, \quad f(x) = x^2 + C,$$

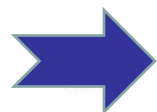
又因为 $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$,

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx + [x^2 + g(y)]dy = \int_0^1 [t^2 + g(y)]dy = t^2 + \int_0^1 g(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx + [x^2 + g(y)]dy = \int_0^t [1 + g(y)]dy = t + \int_0^t g(y)dy$$

所以 $t^2 + \int_0^1 g(y)dy = t + \int_0^t g(y)dy$, 两边关于 t 求导得 $2t = 1 + g(t)$, $g(t) = 2t - 1$.

即 $f(x) = x^2$, $g(y) = 2y - 1$.



(10 分) 设 φ, ψ 有连续导数, 积分

$$I = \int_L 2(x\varphi(y) + \psi(y))dx + (x^2\psi(y) - 2x\varphi(y))dy \text{ 与路径无关,}$$

(1) 当 $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 1$ 时, 求 $\varphi(x), \psi(x)$;

(2) 设 L 是从 $O(0, 0)$ 到 $N(\pi, \frac{\pi}{2})$ 的分段光滑曲线, 计算 I 。

解(1). 由题设得 $\frac{\partial}{\partial x}(x^2\psi(y) - 2x\varphi(y)) = \frac{\partial}{\partial y}2(x\varphi(y) + \psi(y))$ 即

$2x\psi(y) - 2\varphi(y) = 2x\varphi'(y) + 2\psi'(y)$ 对任何 (x, y) 都成立,

令 $x = 0$, 有 $\varphi(y) + \psi'(y) = 0$, 代入上式得 $\psi(y) = \varphi'(y)$,

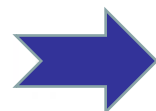
$\therefore \varphi''(y) + \varphi(y) = 0$, 其通解为 $\varphi(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y$,

由 $\varphi(0) = 0$ 及 $\psi(0) = \varphi'(0) = 1$ 解得 $C_1 = 0, C_2 = 1$

$\therefore \varphi(y) = \sin y, \psi(y) = \varphi'(y) = \cos y$.

(2) 取折线 OMN 为积分路线, $M(0, \frac{\pi}{2})$,

$$I = 0 + \int_0^\pi 2(x\varphi(\frac{\pi}{2}) + \psi(\frac{\pi}{2}))dx = \int_0^\pi 2x(1 + 0)dx = \pi^2.$$



(15) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有 2 阶连续导数, 并且积分

$$\oint_C (y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x))dx + 2(yg(x) + f(x))dy = 0$$

对平面上任一条封闭曲线 C 成立. 求 $f(x), g(x)$.

解: 由积分与路径无关的等价条件知: $\frac{\partial}{\partial x}[2(yg(x) + f(x))] = \frac{\partial}{\partial y}[y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)]$, 因

此 $f(x), g(x)$ 应满足 $2yg'(x) + 2f'(x) = 2yf(x) + 2e^x + 2g(x)$, 因此 $g'(x) = f(x)$,

$f'(x) = e^x + g(x)$ 成立, 由 $f'(x) = g''(x)$ 得 $g''(x) = e^x + g(x)$, 解微分方程得

$$g(x) = \frac{1}{2}xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}, \quad f(x) = g'(x) = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + C_1e^x - C_2e^{-x}.$$

建议评分标准: 积分与路径无关 7 分, 得到两个常微分方程 3 分, 求解 5 分.

➡ 计算曲线积分 $\int_L \frac{(3x+y)dx - (x-3y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是沿曲线 $y = \pi \cos \frac{x}{2}$ 从 $A(0, \pi)$ 到 $B(\pi, 0)$ 的一段.

解: 设 $P(x, y) = \frac{3x+y}{x^2+y^2}$, $Q(x, y) = \frac{3y-x}{x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 - 6xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, (x, y) \neq (0, 0)$

所以在不含 $(0, 0)$ 点的单连通区域上 $\int_L \frac{(3x+y)dx - (x-3y)dy}{x^2+y^2}$ 与路径无关.

取 $A(0, \pi)$ 到 $B(\pi, 0)$ 的圆周 $C: x^2 + y^2 = \pi^2, x \geq 0, y \geq 0$, 参数方程 $\begin{cases} x = \pi \cos \theta \\ y = \pi \sin \theta \end{cases}, \theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

$$\text{则} \int_L \frac{(3x+y)dx - (x-3y)dy}{x^2+y^2} = \int_C \frac{(3x+y)dx - (x-3y)dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi^2} \int_C (3x+y)dx - (x-3y)dy$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [(3\pi \cos \theta + \pi \sin \theta) \cdot (\pi \cos \theta)' - (\pi \cos \theta - 3\pi \sin \theta) \cdot (\pi \sin \theta)'] d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-\pi^2) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

六、(10分) 利用 Gauss 公式计算

$$\iint_S x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dx dz + z(z-2x+z^2)dx dy.$$

Gauss公式

其中 S 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

解: 取 $\Sigma: z=0, (x^2+y^2 \leq a^2)$ 下侧. 利用高斯公式, 得

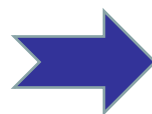
$$\begin{aligned} & \iint_S x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dzdx + z(z-2x+z^2)dx dy \\ & + \iint_{\Sigma} x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dzdx + z(z-2x+z^2)dx dy \\ & = \iiint_{\Omega} (2x-2y+3x^2+2y-2z+3y^2+2z-2x+3z^2)dx dy dz \end{aligned}$$

其中 Ω 为 S, Σ 所围区域

$$= \iiint_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)dx dy dz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{6\pi}{5} a^5$$

$$\text{又 } \because \iint_{\Sigma} x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dx dz + z(z-2x+z^2)dx dy = 0$$

$$\therefore \iint_S x(x-2y+x^2)dydz + y(y-2z+y^2)dx dz + z(z-2x+z^2)dx dy = \frac{6\pi}{5} a^5$$



计算 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{r^3}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2}$,

S 为长方体 $V = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 3, |z| \leq 3\}$ 的表面, 并取外侧.

解: 因为 $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r^2 - 3(y-2)^2}{r^5}$, $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{r^2 - 3(z+2)^2}{r^5}$,

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$, 因为 V 中有奇点 $(0, 2, -2)$, 不能直接使用高斯公式.

挖去一个小球 $V_1: x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 \leq \varepsilon^2$,

ε 充分小, 使得 $V_1 \subset V$, 且 V_1 的边界记为 S_1 , 取外侧, 记 S 与 S_1 所围区域为 Ω , 则

$$\iint_{S-S_1} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3} = \iiint_{\Omega} 0 dxdydz = 0$$

$$\iint_S \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3} = \iint_{S_1} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{S_1} xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy = \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{S_1^2} 3 dxdydz = \frac{3}{\varepsilon^3} \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 4\pi.$$

七、(10 分) 利用 Stokes 公式计算

Stokes公式

$$\int_{\Gamma} (5y - 2e^x)dx + (5z - 2y^2)dy + (5x + e^{2z})dz$$

其中 Γ 是 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解: 设 Σ 为平面 $x + y - z = 0$ 上被曲线 Γ 所围成的部分, 并取 Σ 的法向量向上, 则 Σ

法向量的方向余弦 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, 由 Stokes 公式

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5y - 2e^x & 5z - 2y^2 & 5x + e^{2z} \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma} 5\frac{\sqrt{3}}{3} dS = \frac{5}{3}\sqrt{3}\pi R^2.$$

注：也可利用

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5y - 2e^x & 5z - 2y^2 & 5x + e^{2z} \end{vmatrix} = - \iint_{\Sigma} 5dydz + 5dzdx + 5dxdy \quad \text{展开计算}$$

$(-z_x, -z_y, 1) = (-1, -1, 1)$, 投影区域

$$D_{xy} : x^2 + y^2 + (x+y)^2 \leq R^2, \quad \text{令} \begin{cases} u = x + \frac{y}{2} \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}, \quad |J| = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad D_{xy} \text{ 变为 } D_{uv} : u^2 + v^2 \leq \frac{R^2}{2},$$

$$\text{原式} = \iint_{D_{xy}} 5dxdy = \iint_{D_{uv}} 5 \frac{2}{\sqrt{3}} du dv = \frac{5}{3} \sqrt{3} \pi R^2$$

注记：曲面也可以取做球面，法向量求对得 4 分。

八、(10分) 利用 Green 公式

Green公式

证明积分 $I = \oint_L \frac{e^x}{x^2 + y^2} [(x \sin y - y \cos y)dx + (x \cos y + y \sin y)dy] = 2\pi$,

其中 L 为任意包含原点在其内部的分段光滑闭曲线, L 取逆时针方向.

证明: 设 $P(x, y) = \frac{e^x(x \sin y - y \cos y)}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{e^x(x \cos y + y \sin y)}{x^2 + y^2}$, 则当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \frac{[(x^2 + y^2)x + y^2 - x^2] \cos y + (x^2 + y^2 - 2x)y \sin y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

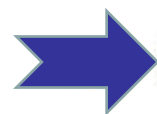
因为闭曲线 L 的方向为逆时针方向, 在 L 内添加闭曲线 $L_1: x^2 + y^2 = a^2$, ($a > 0$ 充分小), 方向

逆时针方向, 在 $L - L_1$ 上利用格林公式, 积分为 0. 故原积分

$$I = \oint_{L_1} \frac{e^x}{a^2} [(x \sin y - y \cos y)]dx + (x \cos y + y \sin y)dy = \frac{1}{a^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} 2e^x \cos y dx dy$$

$$= \frac{1}{a^2} (2e^\xi \cos \eta) \pi a^2 = 2\pi e^\xi \cos \eta,$$

$$\text{令 } a \rightarrow 0, I = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} (2\pi e^\xi \cos \eta) = 2\pi.$$



已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, L 为 D 的正向边界, $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 证明:

$$(1) \oint_L x e^{f(y)} dy - y e^{-f(x)} dx = \oint_L x e^{-f(y)} dy - y e^{f(x)} dx;$$

$$(2) \oint_L x e^{f(y)} dy - y e^{-f(x)} dx \geq 2.$$

证明: 1). 由 Green 公式知

$$\oint_L x e^{f(y)} dy - y e^{-f(x)} dx = \iint_D (e^{f(y)} + e^{-f(x)}) dx dy,$$

$$\oint_L x e^{-f(y)} dy - y e^{f(x)} dx = \iint_D (e^{-f(y)} + e^{f(x)}) dx dy,$$


又由于 D 关于直线 $y = x$ 对称, 有 $\iint_D (e^{f(y)} + e^{-f(x)}) dx dy = \iint_D (e^{f(x)} + e^{-f(y)}) dx dy$, 因此

$$\oint_L x e^{f(y)} dy - y e^{-f(x)} dx = \oint_L x e^{-f(y)} dy - y e^{f(x)} dx \text{ 成立.}$$

2) . 由 1) 的结论

$$\begin{aligned}\oint_L xe^{f(y)}dy - ye^{-f(x)}dx &= \frac{1}{2}(\iint_D (e^{f(y)} + e^{-f(x)})dxdy + \iint_D (e^{f(x)} + e^{-f(y)})dxdy) \\ &= \frac{1}{2}\iint_D (e^{f(y)} + e^{-f(y)} + e^{f(x)} + e^{-f(x)})dxdy \\ &\geq \frac{1}{2}\iint_D 4dxdy = 2\end{aligned}$$

建议评分标准：第一小题 6 分，用了格林公式 4 分，对称性部分 2 分，第二小题 4 分.

 设 $f(x, y)$ 是 R^2 上的连续可微函数, 且对圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的任一点均有 $f(x, y) = 0$, 求

$$\text{极限 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy.$$

解法一: 我们采用极坐标变换 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 设 $z = f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$,

则易知 $\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{xf_x + yf_y}{\rho}$. 因此

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1} \frac{xf_x + yf_y}{x^2 + y^2} dx dy &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \rho d\rho \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^1 \frac{\partial z}{\partial \rho} d\rho = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) - f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} -f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = \lim_{r \rightarrow 0^+} -2\pi f(r \cos \theta_0, r \sin \theta_0) = -2\pi f(0, 0). \end{aligned}$$

解法二：记 L 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ ，方向为逆时针， L_r 为圆周 $x^2 + y^2 = r^2$ ，方向为顺时

针。则由 Green 公式，
$$\oint_{L+L_r} \frac{x}{x^2+y^2} f(x,y) dy - \frac{y}{x^2+y^2} f(x,y) dx = \iint_{r^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{xf_x + yf_y}{x^2+y^2} dx dy,$$

又由于在 L 上均有 $f(x,y) = 0$ ，因此 $\oint_L \frac{x}{x^2+y^2} f(x,y) dy - \frac{y}{x^2+y^2} f(x,y) dx = 0$ ，因此

$$\begin{aligned} & \iint_{r^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{xf_x + yf_y}{x^2+y^2} dx dy \\ &= \oint_{L_r} \frac{x}{x^2+y^2} f(x,y) dy - \frac{y}{x^2+y^2} f(x,y) dx = - \oint_{L_r} f(x,y) ds = -2\pi f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

其中 $(x_0, y_0) \in L_r$.

因此 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{r^2 \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{xf_x + yf_y}{x^2+y^2} dx dy = \lim_{r \rightarrow 0^+} -2\pi f(x_0, y_0) = -2\pi f(0,0).$