

2021-2022 学年第一学期期中

考试课程 工科数学分析 (I) 任课老师

班级_____学号_____姓名_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									
校对入									

1

一. 单项选择题(每小题 4 分, 本题 20 分)

1. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ (C)

- (A) 1; (B) 2;
(C) 3; (D) 4.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 下列命题错误的是(D)

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$;
(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{2x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$;
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在;
(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

3. 设函数 $f(x) = (1-x^2)(2-x^2)(3-x^2) \cdots (2021-x^2)$, 则 $f'(-1) =$ (C)

- (A) $2020!$; (B) $2021!$;
(C) $2(2020!)$; (D) $-2(2021!)$.

4. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^y - xy - e = 0$ 确定, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(\frac{2}{n}) - 1] =$ (B)

- (A) $\frac{1}{e}$; (B) $\frac{2}{e}$;
(C) 2; (D) -2.

5. 已知函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$, 则 $f(x)$ 的可去间断点的个数为(C)

- (A) 1; (B) 2;
(C) 3; (D) 无穷多个.

二. 计算证明题(每小题 5 分, 本题 30 分)

1. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (a \neq 0)$, 用数列极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

证明: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (a \neq 0)$, 由极限定义,

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n - a| < \frac{a^2}{2} \varepsilon$.

特别地, 对 $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$, 存在 $N_2 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_2$ 时, $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$, 从而 $|x_n| > \frac{|a|}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|x_n - a|}{|x_n||a|} < \frac{2}{a^2} |x_n - a| < \varepsilon$.

由极限定义可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

2. 求函数 $f(x) = x^2 3^x + \ln(1+2x)$ 在 $x=0$ 点的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

$$\begin{aligned} \text{解: } (x^2 3^x)^{(n)} &= (3^x)^{(n)} x^2 + C_n^1 (3^x)^{(n-1)} (x^2)' + C_n^2 (3^x)^{(n-2)} (x^2)'' \\ &= x^2 3^x (\ln 3)^n + 2nx 3^x (\ln 3)^{n-1} + n(n-1) 3^x (\ln 3)^{n-2} \end{aligned}$$

$$(\ln(1+2x))^{(n)} = \frac{2^n (-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+2x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(\ln 3)^{n-2} + 2^n (-1)^{n-1} (n-1)!$$

3. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

4. 求函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

$$\text{解: 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln(1+x)-x}{x} \right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x} \cdot \frac{\ln(1+x)-x}{x} \cdot \frac{1}{e^x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)-x}{x} \cdot \frac{1}{e^x-1} \right]}$$

$$\text{因为} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)-x}{x} \cdot \frac{1}{e^x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{所以} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

5. 讨论 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 的一致连续性, 并给出依据.

解一: $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| = \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \sin \frac{1}{x_2} + x_1 \sin \frac{1}{x_2} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| + \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| |x_1 - x_2| \leq |x_1| \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{|x_2|} \right) |x_1 - x_2| \leq 2 |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

所以对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致连续

解二: 由于 $f'(x) = (x \sin \frac{1}{x})' = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$, 可知 $|f'(x)| \leq 2, x \in (1, +\infty)$

由Lagrange中值定理知, 对 $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 存在介于 x_1, x_2 之间的 ξ , 使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| \leq 2 |x_1 - x_2|$$

所以对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

所以函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致连续

三. 证明题(本题 8 分) 已知 $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3 + 4} (n = 0, 1, 2, \dots)$, 叙述 Cauchy 收敛

原理并用它证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

1) 解 Cauchy 收敛原理 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是数列 $\{x_n\}$ 是基本列。 1 分

2) 证明:

(1) 用归纳法易知: $0 \leq x_n \leq \frac{1}{4}, n = 1, 2, \dots$

$$0 \leq x_1 = \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4} \text{ 成立,}$$

$$\text{设 } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{4}, x_{n+1} = \frac{1}{4 + x_n^3} \leq \frac{1}{4 + 0} = \frac{1}{4},$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{4 + x_n^3} \geq \frac{1}{4 + \frac{1}{4}} = 0, \therefore 0 \leq x_n \leq \frac{1}{4}. \quad 2 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} (2) |x_{n+1} - x_n| &= \left| \frac{1}{4 + x_n^3} - \frac{1}{4 + x_{n-1}^3} \right| = \frac{|x_n - x_{n-1}| |x_n^3 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^3|}{(4 + x_n^3)(4 + x_{n-1}^3)} \\ &\leq \frac{|x_n - x_{n-1}|}{4 \cdot 4} 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{1}{2^2} |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1| < \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2^n}, \end{aligned} \quad 2 \text{ 分}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, \text{ 当 } n > N \text{ 时,}$$

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \sum_{k=1}^p (x_{n+k} - x_{n+k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^p |x_{n+k} - x_{n+k-1}| < \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^{n+k-1}} \\ &< \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \end{aligned} \quad 2 \text{ 分}$$

即: $\{x_n\}$ 是基本列.

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛。 1 分

四. 计算证明题(本题 10 分) 已知 $x_0 = 1, x_{n+1} = \arctan x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$

1) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限; 2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}x_n$.

1) 证明

用归纳法易知: $0 < x_n < \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \dots$ 1 分

记 $f(x) = x - \arctan x$, 则 $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$, 且只有 $f'(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 严格单增。

1 分

所以 $f(x) \geq 0$, 即 $x \geq \arctan x$. 所以 $x_n = \arctan x_n \leq x_n$.

1 分

又 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 C .

1 分

两边取极限得 $C = \arctan C$.

由前 $f(x)$ 严格单调递增, 且 $f(0) = 0$, 故 $C = 0$.

1 分

2) 解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}}{1}$ 1 分

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}^2 - x_n^2}{x_n^2 x_{n-1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}^2 - (\arctan x_{n-1})^2}{(\arctan x_{n-1})^2 x_{n-1}^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (\arctan x)^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2(\arctan x) \frac{1}{1+x^2}}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2x^3 - 2(\arctan x)}{4x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 6x^2 - 2 \frac{1}{1+x^2}}{12x^2} = \frac{2}{3}$$
 3 分

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}x_n = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 1 分

五. 证明题(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 证明若满足

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则存在 $\xi \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明 若 $f(x) \equiv A$, 则 $\forall \xi \in (a, +\infty), f'(\xi) = 0$. 1 分

否则至少 $\exists x_0 \in (a, +\infty), s.t. f(x_0) \neq A$, 不妨设 $f(x_0) > A$. 1 分

取 $\mu = \frac{f(x_0) + A}{2}$, 则 $A < \mu < f(x_0)$. 1 分

因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, 取 $\varepsilon = \frac{f(x_0) - A}{2}$, 则 $\exists \delta_1 > 0 (\delta_1 < \frac{x_0 - a}{2}), s.t.$

当 $a < x < a + \delta_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$. 所以 $f(x) < A + \varepsilon = \frac{f(x_0) + A}{2} = \mu$. 2 分

所以取 $x_1 \in (a, a + \delta_1)$, 则 $f(x_1) < \mu$.

由介值定理可知, $\exists c_1 \in (x_1, x_0), s.t. f(c_1) = \mu$.

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\exists M > 0 (M > x_0), s.t.$

当 $x > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$. 所以 $f(x) < A + \varepsilon = \frac{f(x_0) + A}{2} = \mu$. 2 分

所以取 $x_2 \in (M, +\infty)$, 则 $f(x_2) < \mu$.

由介值定理可知, $\exists c_2 \in (x_0, x_2), s.t. f(c_2) = \mu$.

由罗尔中值定理, $\exists \xi \in (c_1, c_2), s.t. f'(\xi) = 0$. 1 分

六. 证明题(本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续, 在 $[0, 1]$ 内可导,

$f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$, 证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

证明 设 $F(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}$, 则由题设及拉格朗日中值定理得 2 分

$F(\frac{1}{2}) - F(0) = \frac{1}{2} F'(\xi), \xi \in (0, \frac{1}{2})$ 4 分

$F(1) - F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} F'(\eta), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$

所以 $F(1) - F(0) = 0 = \frac{1}{2} F'(\xi) + \frac{1}{2} F'(\eta)$. 2 分

也即 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

七. 计算题(本题 8 分) 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x+1}$, 试求该函数的单调区间、

极值点与极值、 凹凸区间与拐点.

解 $f'(x)=\frac{2x}{(x+1)^3}, f''(x)=\frac{2-4x}{(x+1)^4}$ 2 分

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=0$, 令 $f''(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{2}$. 2 分

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	不	+	+	+	0	-
$f(x)$	增、凸		减、凸	极小 0	增、凸	拐点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$	增、凹

所以, $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 单减, 在 $(-\infty, -1)$ 与 $[0, +\infty)$ 上单增, 在 $x=0$ 取极小值 $f(0)=0$. 2 分

$f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, 0]$ 及 $[0, \frac{1}{2}]$ 上凸, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上凹, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$ 为拐点. 2 分

八. 证明题(本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1$, 证

明: 当 $x \in [a, b]$ 时, $|f'(x)| \leq \frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2}$.

证明 $\forall x \in [a, b], f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$. 2 分

所以 $f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2$, 1 分

$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2$,

当 $x \neq a, b$ 时, $f(a)-f(b) = f'(x)(a-b) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2$,

所以 $|f'(x)| \leq \frac{1}{b-a} |f(a)-f(b)| + \frac{1}{2(b-a)} \leq \frac{1}{b-a} |f(a)-f(b)| + \frac{1}{2(b-a)} |f''(\xi_1)|(a-x)^2 + \frac{1}{2(b-a)} |f''(\xi_2)|(b-x)^2$
 $\leq \frac{2}{b-a} + \frac{1}{2(b-a)} [(a-x)^2 + (b-x)^2] \leq \frac{2}{b-a} + \frac{1}{2(b-a)} [(a-x)^2 + (b-x)^2]_{\max} \leq \frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2}$.

3 分

当 $x=b$ 时, $f(a)-f(b) = f'(b)(a-b) + \frac{f''(\xi_3)}{2}(a-b)^2$,

所以 $|f'(b)| \leq \frac{1}{b-a} |f(a)-f(b)| + \frac{|f''(\xi_3)|}{2}(b-a) \leq \frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2}$. 类似地, $|f'(a)| \leq \frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2}$. 1 分