2020-2021年考试题目

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$，$I_2=\iiint\limits_{\Omega}[\cos^4(x+y+z)+z^3]dxdydz$，$I_3=\iiint\limits_{\Omega}[\ln(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 之间的大小关系为（ C ）.

三重积分的性质---保序（号）性

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$.　　(D) $I_2<I_1<I_3$.

2. 设 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$ 则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下为（ B ）.

二重积分的计算---极坐标变换

(A) $\int_0^a dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.　　(B) $\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.　　(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

二重积分的计算---广义极坐标变换

计算二重积分 $\iint\limits_D \sin(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, 且 y\ge 0\}$.

解：取广义极坐标变换 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$，则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$. 在广义极坐标系下，积分区域 D 为

$\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi\}$，因此

原式 $=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 abr\sin r^2 dr=\frac{\pi}{2}ab(1-\cos 1)$

建议评分标准：广义极坐标变换 2 分，雅各比行列式 1 分，积分区域 1 分，结果 1 分.

3. 曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与坐标面所围成立体的体积为（ B ） **三重积分的计算**

(A) $\frac{4\pi}{3}$.　　(B) $\frac{\pi}{2}$.

(C) π.　　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数， L 是以 $M(x_0,y_0)$ 为中心，半径为 r 的圆周，极限

$\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_L f(x,y)ds=$（ A ）. **第一型曲线积分的性质---中值定理**

(A) $2\pi f(x_0,y_0)$　　(B) $f(0,0)$

(C) $2\pi f(0,0)$　　(D) $f(x_0,y_0)$

5. 抛物面 $2z=x^2+y^2$ 位于平面 $z=2$ 下方的面积为(D).

(A) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}+1)$.　　(B) $\pi(5\sqrt{5}-1)$.

(C) $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.　　(D) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.

重积分的应用\第一型曲面积分的计算

求极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\cos(x-y+z)e^{x^2+y^2+z^2+3xyz}dxdydz$.

解： 由积分中值定理，存在 (ξ,η,ς)，$\xi^2+\eta^2+\varsigma^2\le r^2$，使得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le r^2}\cos(x-y+z)e^{x^2+y^2+z^2+3xyz}dxdydz=\frac{4}{3}\pi r^3\cos(\xi-\eta+\varsigma)e^{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2+3\xi\eta\varsigma}$$

因此，原式 $=\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{4}{3}\pi\cos(\xi-\eta+\varsigma)e^{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2+3\xi\eta\varsigma}=\frac{4}{3}\pi$.

建议评分标准：积分中值定理 3 分，结果 2 分.

设$f(u)$具有连续导数，$f(0)=0$，区域$\Omega: x^2+y^2+z^2\le t^2$，计算极限

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz}{\ln(1+t^4)}.$$

解：由等价代换，球面坐标变换可得

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{t}f(r)r^2\sin\varphi dr}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^{t}f(r)r^2dr}{t^4}$$

再由洛必达法则，可得

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi f(t)t^2}{4t^3}=\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\pi f'(0)$$

已知球面$x^2+y^2+z^2=1$, Σ是上半球面, Σ_1是Σ位于第一卦限的部分, 则 (　　).

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} x\,\mathrm{d}S$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S$

答案(C)

设Σ为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取上侧, 则以下结论错误的是 (　　).

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

答案: (C)

给定曲面Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，已知其在第一卦限内的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则曲面积分 $\oiint_{\Sigma}(|x|+y)\,dS=$ (　B　)

A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$;　　B. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$;　　C. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$;　　D. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$.

5. 设f(x)为连续函数，$F(z)=\int_1^z dy\int_y^z f(x)dx$，则$F'(z)=$ (　D　)

A. $f(z)$;　　B. $f(z)z$;　　C. $f(z)(1-z)$;　　D. $f(z)(z-1)$.

二、计算题（每小题 5 分，满分 15 分）

1. 设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=(xyz^2, z\sin y, x^2e^y)$,求散度 $div\vec{F}$,旋度 $rot\vec{F}$.

场论部分

解：$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)=yz^2+z\cos y$，

$$rot\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xyz^2 & z\sin y & x^2e^y \end{vmatrix}=(x^2e^y-\sin y, 2xyz-2xe^y, -xz^2).$$

设定义在全空间R^3上的数量值函数$f(x,y,z)$具有二阶连续偏导数，求 $rot(grad\, f)$.

解析： $grad\, f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$，则

$$rot(grad\, f)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}=\left(f_{zy}-f_{yz}\right)\vec{i}+\left(f_{xz}-f_{zx}\right)\vec{j}+\left(f_{yx}-f_{xy}\right)\vec{k}$$

由于$f(x,y,z)$的所有二阶偏导数连续，故 $rot(grad\, f)=(0,0,0)$.

证明向量场$\vec{F}=(yz(2x+y+z),xz(x+2y+z),xy(x+y+2z))$是有势场,并求其势函数.

证

因为 $rot\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz(2x+y+z) & xz(x+2y+z) & xy(x+y+2z) \end{vmatrix}=(0,0,0).$

所以$\vec{F}$ 是有势场.

势函数$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} yz(2x+y+z)dx+xz(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz$

$$=\int_{x_0}^{x} y_0z_0(2x+y_0+z_0)dx+\int_{y_0}^{y} xz_0(x+2y+z_0)dy+\int_{z_0}^{z} xy(x+y+2z)dz$$

$$=x^2yz+xy^2z+xyz^2-x_0^2y_0z_0-x_0y_0^2z_0-x_0y_0z_0^2$$

若取$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$, 则$\varphi(x,y,z)=\int_0^z xy(x+y+2z)dz=x^2yz+xy^2z+xyz^2$

2.设$D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}$，$f(x)$连续且恒正，$a,b$是常数,计算$\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy$.

二重积分的计算---轮换对称性

解：利用区域对称性可知,$\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint\limits_D \frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy$.

所以$\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{(a+b)[f(x)+f(y)]}{f(y)+f(x)}dxdy=\frac{1}{2}(a+b)$.

3. 计算曲线积分 $\int_L (x+y^2)ds$ 其中L是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

第一型曲线积分的计算---轮换对称性

解：利用轮换对称性可得

$$\int_L (x+y^2)ds=\frac{1}{3}\int_L (x+y+z+x^2+y^2+z^2)ds=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS$，$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解：由于 Σ 关于 xoy 平面对称，$\frac{yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 z 的奇函数，因此 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$，又

由于 Σ 关于 xoz 平面对称，$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 y 的奇函数，因此 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$，因此

$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=0$. （建议评分标准：过程及答案正确 5 分）

三、计算题（每题 5 分，共 15 分）

1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(2z+3xy^2)dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成.

三重积分的计算

解：由于Ω 关于 yoz 平面对称，$f(x,y,z)=3xy^2$ 为 x 的奇函数，故 $\iiint\limits_{D}3xy^2dV=0$

再利用球面坐标，得到

$$\iiint\limits_{D}(3xy^2+2z)dxdydz=\iiint\limits_{D}2zdxdydz=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\quad\int_0^1 r\cos\quad\cdot r^2\sin\quad dr=\frac{\pi}{4}.$$

2. 计算积分 $I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$，其中 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(y\geq 0)$ 上从点 $A(a,0)$

第二型曲线积分的计算

到 $B(-a,0)$ 的一段弧.

解：$L:x=a\cos\theta,y=b\sin\theta,0\leq\theta\leq\pi,$

$$I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(-a\sin\theta)+2b\sin\theta(b\cos\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{2}{3}a(a^2+2b^2).$$

利用对称性计算三重积分 $\iiint\limits_V (z^2 + x\cos(xy))dxdydz$，其中

$V = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 2, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$.

解：由于积分区域 V 关于 yoz 平面对称，$x\cos(xy)$ 为关于 x 的奇函数，因此

$\iiint\limits_V x\cos(xy)dxdydz = 0$. 下面计算 $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，采用球极坐标系 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，则此时

$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| = r^2\sin\varphi$，被积区域 V 为 $\{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{2}\}$，因此

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2\cos^2\varphi\, r^2\sin\varphi dr = \dfrac{4\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.

3. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是上半球面$x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$;

第一型曲面积分的计算

解:在曲面上$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,法向量为$n=(-\frac{x}{z},-\frac{y}{z},-1)$,所以$\mathrm{d}S=|n|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

则

$$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3.$$

四、（10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(3y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le b$，的外侧.

第二型曲面积分的计算

解：曲面方程为：$z=\sqrt{x^2+y^2}$，法向量为 $\vec{n}_z=(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1)$，曲面在 xOy 平面的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\le b^2$，$\vec{A}=(3y-z,z-3x,x-y)$，所以

$$\iint\limits_{\Sigma}(3y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}[-(\frac{3xy-xz+zy-3xy}{\sqrt{y^2+x^2}})+x-y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}[\frac{z(x-y)}{\sqrt{y^2+x^2}}+x-y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\text{（对称性）}.$$

（10）计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}[2yf(x,y,z)+x]dydz+[-2xf(x,y,z)+y]dzdx+2zdxdy$ ，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数， Σ 为曲面 $x^2+y^2+z=1$ 在第一卦限的部分，指向上侧.

解： Σ 投影到 xoy 平面为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$. Σ 的表达式为 $z=1-x^2-y^2$， $(x,y)\in D_{xy}$. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma}[2yf(x,y,z)+x]dydz+[-2xf(x,y,z)+y]dzdx+2zdxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[(2yf(x,y,z)+x)(2x)+(-2xf(x,y,z)+y)(2y)+2-2x^2-2y^2]dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}2dxdy$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

五、(10 分) 设函数$f(x),g(y)$在R上具有一阶连续导数,且$f(0)=0$,已知积分

$\int_L 2xydx+[f(x)+g(y)]dy$与路径无关，且对任意 t 恒有

平面曲线积分与路径无关

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+[f(x)+g(y)]dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+[f(x)+g(y)]dy$$

求 $f(x),g(y)$.

解:由积分与路径无关的充要条件,

$$f'(x)=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x,\quad f(x)=x^2+C,$$

又因为$f(0)=0\Rightarrow C=0$,

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+[x^2+g(y)]dy=\int_0^1[t^2+g(y)]dy=t^2+\int_0^1 g(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+[x^2+g(y)]dy=\int_0^t[1+g(y)]dy=t+\int_0^t g(y)dy$$

所以$t^2+\int_0^1 g(y)dy=t+\int_0^t g(y)dy$,，两边关于 t 求导得$2t=1+g(t)$，$g(t)=2t-1$.

即 $f(x)=x^2$，　$g(y)=2y-1$.

（10 分）设φ,ψ有连续导数，积分

$$I=\int_L 2(x\varphi(y)+\psi(y))dx+(x^2\psi(y)-2x\varphi(y))dy$$ 与路径无关,

(1)当 $\varphi(0)=0,\ \psi(0)=1$ 时,求$\varphi(x),\psi(x)$;

(2)设 L 是从 $O(0,\ 0)$到 $N(\pi,\ \dfrac{\pi}{2})$ 的分段光滑曲线，计算 I。

解(1).由题设得 $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2\psi(y)-2x\varphi(y))=\dfrac{\partial}{\partial y}2(x\varphi(y)+\psi(y))$ 即

$2x\psi(y)-2\varphi(y)=2x\varphi'(y)+2\psi'(y)$对任何$(x,y)$都成立,

令 $x=0$, 有$\varphi(y)+\psi'(y)=0$,代入上式得$\psi(y)=\varphi'(y)$,

$\therefore\ \varphi''(y)+\varphi(y)=0$,其通解为$\varphi(y)=C_1\cos y+C_2\sin y$,

由$\varphi(0)=0$及$\psi(0)=\varphi'(0)=1$ 解得 $C_1=0,C_2=1$

$\therefore\quad \varphi(y)=\sin y,\quad \psi(y)=\varphi'(y)=\cos y.$

(2)取折线OMN为积分路线,$M(0,\ \dfrac{\pi}{2})$,

$$I=0+\int_0^{\pi}2(x\varphi(\frac{\pi}{2})+\psi(\frac{\pi}{2}))dx=\int_0^{\pi}2x(1+0)dx=\pi^2.$$

（15）设函数 $f(x),g(x)$ 具有 2 阶连续导数，并且积分

$$\oint_C (y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x))dx+2(yg(x)+f(x))dy=0$$

对平面上任一条封闭曲线 C 成立．求 $f(x),g(x)$.

解：由积分与路径无关的等价条件知：$\dfrac{\partial}{\partial x}[2(yg(x)+f(x))]=\dfrac{\partial}{\partial y}[y^2 f(x)+2ye^x+2yg(x)]$，因

此 $f(x),g(x)$ 应满足 $2yg'(x)+2f'(x)=2yf(x)+2e^x+2g(x)$，因此 $g'(x)=f(x)$，

$f'(x)=e^x+g(x)$ 成立，由 $f'(x)=g''(x)$ 得 $g''(x)=e^x+g(x)$，解微分方程得

$g(x)=\dfrac{1}{2}xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$，$f(x)=g'(x)=\dfrac{1}{2}xe^x+\dfrac{1}{2}e^x+C_1e^x-C_2e^{-x}$.

建议评分标准：积分与路径无关 7 分，得到两个常微分方程 3 分，求解 5 分.

计算曲线积分$\int_L \frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$是沿曲线$y=\pi\cos\frac{x}{2}$从$A(0,\pi)$到$B(\pi,0)$的一段.

解：　设$P(x,y)=\frac{3x+y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{3y-x}{x^2+y^2}$，则$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}, (x,y)\neq(0,0)$

所以在不含$(0,0)$点的单连通区域上$\int_L \frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}$与路径无关.

取$A(0,\pi)$到$B(\pi,0)$的圆周$C: x^2+y^2=\pi^2, x\geq 0, y\geq 0$，参数方程$\begin{cases} x=\pi\cos\theta \\ y=\pi\sin\theta \end{cases}, \theta: \frac{\pi}{2}\to 0$

$$则\int_L \frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}=\int_C \frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\int_C (3x+y)dx-(x-3y)dy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[(3\pi\cos\theta+\pi\sin\theta)\cdot(\pi\cos\theta)'-(\pi\cos\theta-3\pi\sin\theta)\cdot(\pi\sin\theta)']d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\pi^2)d\theta=\frac{\pi}{2}$$

六、（10 分）利用 **Gauss** 公式计算

$$\iint_S x(x-2y+x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(y-2z+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z(z-2x+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot$$

Gauss公式

其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：取 Σ： $z=0$， $(x^2+y^2\le a^2)$ 下侧. 利用高斯公式，得

$$\iint_S x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dzdx+z(z-2x+z^2)dxdy$$

$$+\iint_\Sigma x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dzdx+z(z-2x+z^2)dxdy$$

$$=\iiint_\Omega(2x-2y+3x^2+2y-2z+3y^2+2z-2x+3z^2)dxdydz$$

其中Ω为 S，Σ 所围区域

$$=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=\frac{6\pi}{5}a^5$$

又 $\because \iint_\Sigma x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dxdz+z(z-2x+z^2)dxdy=0$

$\therefore \iint_S x(x-2y+x^2)dydz+y(y-2z+y^2)dxdz+z(z-2x+z^2)dxdy=\frac{6\pi}{5}a^5$

计算 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$, 其中$r = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2}$,

S 为长方体$V = \{(x, y, z) \mid |x| \le 1, |y| \le 3, |z| \le 3\}$的表面，并取外侧.

解：因为 $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{r^2 - 3(y-2)^2}{r^5}, \dfrac{\partial R}{\partial z} = \dfrac{r^2 - 3(z+2)^2}{r^5}$,

$\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$,因为$V$中有奇点$(0,2,-2)$,不能直接使用高斯公式.

挖去一个小球 $V_1 : x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 \le \varepsilon^2$,

ε充分小,使得$V_1 \subset V$,且V_1的边界记为S_1,取外侧，记S与S_1所围区域为Ω,则

$$\iint\limits_{S-S_1} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3} = \iiint\limits_{\Omega} 0 dxdydz = 0$$

$$\iint\limits_{S} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3} = \iint\limits_{S_1} \frac{xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy}{(\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2})^3}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \iint\limits_{S_1} xdydz + (y-2)dzdx + (z+2)dxdy = \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint\limits_{S_\varepsilon^2} 3dxdydz = \frac{3}{\varepsilon^3} \frac{4}{3} \pi\varepsilon^3 = 4\pi.$$

七、（10 分）利用 Stokes 公式计算

Stokes公式

$$\int_{\Gamma}(5y-2e^{x})\mathrm{d}x+(5z-2y^{2})\mathrm{d}y+(5x+e^{2z})\mathrm{d}z$$

其中 Γ 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y-z=0.\end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解：设 Σ 为平面 $x+y-z=0$ 上被曲线 Γ 所围成的部分，并取 Σ 的法向量向上，则 Σ

法向量的方向余弦 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$，由 Stokes 公式

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 5y-2e^{x} & 5z-2y^{2} & 5x+e^{2z}\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}5\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}S=\frac{5}{3}\sqrt{3}\pi R^{2}.$$

注：也可利用

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5y-2e^{x} & 5z-2y^{2} & 5x+e^{2z} \end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma}5\mathrm{d}y\mathrm{d}z+5\mathrm{d}z\mathrm{d}x+5\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ 展开计算

$(-z_x,-z_y,1)=(-1,-1,1)$, 投影区域

$D_{xy}:x^2+y^2+(x+y)^2\le R^2$，令 $\begin{cases} u=x+\dfrac{y}{2} \\ v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$, $|J|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, D_{xy} 变为 $D_{uv}:u^2+v^2\le\dfrac{R^2}{2}$,

$$\text{原式}=\iint_{D_{xy}}5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{uv}}5\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{5}{3}\sqrt{3}\pi R^2$$

注记：曲面也可以取做球面，法向量求对得 4 分。

八、（10 分）利用 Green 公式　　**Green公式**

证明积分 $I=\oint_L \frac{e^x}{x^2+y^2}[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]=2\pi$，

其中 L 为任意包含原点在其内部的分段光滑闭曲线, L 取逆时针方向.

证明：设 $P(x,y)=\frac{e^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}, Q=\frac{e^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}$, 则当 $(x.y)\neq(0,0)$ 时,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\frac{[(x^2+y^2)x+y^2-x^2]\cos y+(x^2+y^2-2x)y\sin y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

因为闭曲线 L 的方向为逆时针方向，在 L 内添加闭曲线 L_1: $x^2+y^2=a^2$, ($a>0$ 充分小),方向

逆时针方向，在 $L-L_1$ 上利用格林公式，积分为 0. 故原积分

$$I=\oint_{L_1}\frac{\mathrm{e}^x}{a^2}[(x\sin y-y\cos y)]\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]=\frac{1}{a^2}\iint_{x^2+y^2\le a^2}2e^x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}(2e^{\xi}\cos\eta)\pi a^2=2\pi e^{\xi}\cos\eta,$$

令 $a\to 0, I=\lim\limits_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to 0}}(2\pi e^{\xi}\cos\eta)=2\pi$.

已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，$L$ 为 D 的正向边界，$f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，证明：

（1）$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx=\oint_L xe^{-f(y)}dy-ye^{f(x)}dx$;

（2）$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx\ge 2$.

证明：1). 由 Green 公式知

$$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx=\iint_D(e^{f(y)}+e^{-f(x)})dxdy,$$

$$\oint_L xe^{-f(y)}dy-ye^{f(x)}dx=\iint_D(e^{-f(y)}+e^{f(x)})dxdy,$$

又由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，有 $\iint_D(e^{f(y)}+e^{-f(x)})dxdy=\iint_D(e^{f(x)}+e^{-f(y)})dxdy$，因此

$\oint_L xe^{f(y)}dy-ye^{-f(x)}dx=\oint_L xe^{-f(y)}dy-ye^{f(x)}dx$ 成立.

2）. 由 1）的结论

$$\oint_L xe^{f(y)}dy - ye^{-f(x)}dx = \frac{1}{2}(\iint_D (e^{f(y)} + e^{-f(x)})dxdy + \iint_D (e^{f(x)} + e^{-f(y)})dxdy)$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (e^{f(y)} + e^{-f(y)} + e^{f(x)} + e^{-f(x)})\,dxdy$$

$$\geq \frac{1}{2}\iint_D 4\,dxdy = 2$$

建议评分标准：第一小题 6 分，用了格林公式 4 分，对称性部分 2 分，第二小题 4 分.

设 $f(x,y)$ 是 R^2 上的连续可微函数，且对圆 $x^2+y^2=1$ 上的任一点均有 $f(x,y)=0$，求极限 $\lim\limits_{r\to 0+}\iint\limits_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\dfrac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy$.

解法一： 我们采用极坐标变换 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，设 $z=f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$，

则易知 $\dfrac{\partial z}{\partial\rho}=\dfrac{xf_x+yf_y}{\rho}$. 因此

$$\lim_{r\to 0+}\iint\limits_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}d\theta\int_r^1\frac{\partial z}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\rho d\rho$$

$$=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}d\theta\int_r^1\frac{\partial z}{\partial\rho}d\rho=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}f(\cos\theta,\sin\theta)-f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$$

$$=\lim_{r\to 0+}\int_0^{2\pi}-f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta=\lim_{r\to 0+}-2\pi f(r\cos\theta_0,r\sin\theta_0)=-2\pi f(0,0).$$

解法二：记L为单位圆周$x^2+y^2=1$，方向为逆时针，L_r为圆周$x^2+y^2=r^2$，方向为顺时针. 则由 Green 公式，$\oint\limits_{L+L_r}\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)dy-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)dx=\iint\limits_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy$，

又由于在L上均有$f(x,y)=0$，因此$\oint\limits_{L}\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)dy-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)dx=0$，因此

$$\iint\limits_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\oint\limits_{L_r}\frac{x}{x^2+y^2}f(x,y)dy-\frac{y}{x^2+y^2}f(x,y)dx=-\oint\limits_{L_r}f(x,y)ds=-2\pi f(x_0,y_0)$$

其中$(x_0,y_0)\in L_r$.

因此$\lim\limits_{r\to 0+}\iint\limits_{r^2\le x^2+y^2\le 1}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy=\lim\limits_{r\to 0+}-2\pi f(x_0,y_0)=-2\pi f(0,0)$.