北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

函数逼近与数据逼近

一、函数逼近

二、数据逼近

三、方法改进

四、连续函数空间，正交多项式理论

一、函数逼近

目标 用性质较好的函数逼近已知函数

尝试 若$f(x)$在$[a,b]$上有直到$n+1$阶连续导数,则可在$x=x_0\in[a,b]$处进行n阶$Taylor$公式展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$=P_n(x)+R_n(x)$$

$$x\in[a,b],f(x)\approx P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$Taylor$多项式逼近已知函数

$$\begin{cases} f(x_0)=P_n(x_0) \\ f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0),(k=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

一、函数逼近

误差：$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$

当$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_n$时,误差估计$\left|R_n(x)\right|\le\dfrac{M_n}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}, x\in[a,b]$

优点　方法简单

不足　对函数要求高(具有高阶导数)

若x偏离x_0过多,误差偏大

误差分配不均匀

当n较大时,计算量增加

一、函数逼近

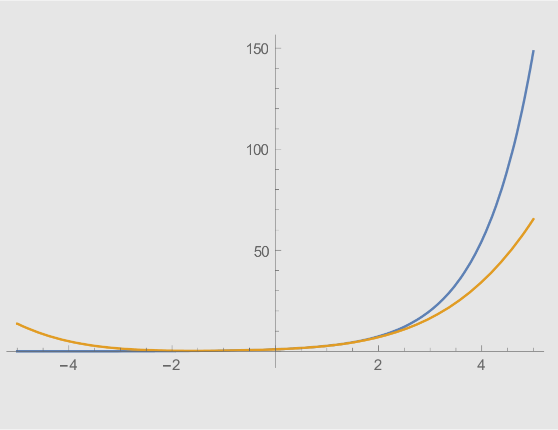
例1 设$f(x)=e^x, x\in[-1,1]$,考察用4次$Taylor$多项式$P_4(x)$逼近$f(x)$的误差.

解 在$x=0$处进行$Taylor$公式展开:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{x^5}{5!}f^{(5)}(\xi)$$

$$R_4(x)=\frac{x^5}{5!}f^{(5)}(\xi)=\frac{1}{120}x^5\cdot e^{\xi}, x\in[-1,1]$$

其中ξ在0和x之间



$$\therefore \frac{1}{120}|x|^5\le|R_4(x)|\le\frac{e}{120}|x|^5,$$ $R_4(x)$随$|x|$的增加而增加

二、数据逼近

目标 已知$y=f(x)$的实验数据：

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
$f(x)$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

用较简单和合适的函数来逼近(或拟合) 实验数据

尝试 多项式逼近：$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

其中$P_n(x_i)=f(x_i),i=0,1,\cdots,m$

$$\text{即}\begin{cases} a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ a_0+a_1x_2+\cdots+a_nx_2^n=y_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_m+\cdots+a_nx_m^n=y_m \end{cases}$$

$n+1$个未知量,m个方程

二、数据逼近

若$n+1\neq m$,则方程组的解不一定存在唯一

不能要求$P_n(x_i)=f(x_i), i=1,2,\cdots,m$,精确成立

只能要求多项式尽可能接近给定的数据

不足 可能无法精确逼近

误差分配不均匀

三、方法改进

函数逼近 设$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数,寻求一个近似函数$P(x)$,
使其在$[a,b]$上均匀逼近$f(x)$

方法 最佳逼近

函数逼近的两种常用度量

1.最佳一致逼近 $P_n^*(x)$是$f(x)$和$P_n(x)$之间的最大绝对误差最小的多项式

寻求次数$\le n$的多项式$P_n^*(x) \in H_n = \{P_n(x) \mid P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i\text{为实数}\}$,

使得 $\min\limits_{P_n(x)\in H_n} \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)-P_n(x)| = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)-P_n^*(x)|$

若 $P_n^*(x)$存在，则称 $P_n^*(x)$为 $f(x)$的n次最佳一致逼近多项式

三、方法改进

相应的逼近问题称为最佳一致逼近问题(或极大极小逼近, 或切比雪夫(Chebyshev)逼近)

可以证明, $\forall f(x)\in C[a,b]$, $f(x)$的n次最佳一致逼近多项式存在且唯一

2.最佳平方逼近

寻求$P_n^*(x)\in H_n$, 使得

$$\min_{P_n(x)\in H_n}\sqrt{\int_a^b \omega(x)(f(x)-P_n(x))^2dx}=\sqrt{\int_a^b \omega(x)(f(x)-P_n^*(x))^2dx}$$

其中$\omega(x)$(称为权函数)满足:

$\omega(x)\geq 0$, 在$[a,b]$上可积, 且在$[a,b]$的任意子区间上不恒为0

若 $P_n^*(x)$存在，则称 $P_n^*(x)$为 $f(x)$的最佳平方逼近多项式

三、方法改进

数据逼近 已知$(x_i, f(x_i)), i=0,1,\cdots,m$，寻求$n$次多项式$P_n(x), n<m$，使其更好地逼近$(x_i, f(x_i))$

方法 最小二乘逼近

最小二乘逼近的度量

寻求$P_n^*(x)\in H_n$，使得 $\min\limits_{P_n(x)\in H_n}\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(f(x_i)-P_n(x_i))^2=\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i(f(x_i)-P_n^*(x_i))^2$

若 $P_n^*(x)$存在，则称 $P_n^*(x)$为$\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{m}$的最小二乘逼近(拟合)多项式

四、连续函数空间，正交多项式理论

连续函数空间={连续函数集合上定义加法、数乘}

若 $f(x)\in C[a,b]$，则$f(x)$是连续函数空间的元素

1. 内积

$\forall f,g\in C[a,b]$，称实数 $(f,g)\equiv\int_a^b\omega(x)f(x)g(x)dx$为$f$，$g$关于权

$\omega(x)$在$[a,b]$上的内积（即是一实数）.

性质 (a) 对称性：$(f,g)=(g,f)$，$\forall f,g\in C[a,b]$；

(b) 数乘性：$(cf,g)=c(f,g)$，c为常数；

(c) 可加性：$(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$；

(d) 非负性(正定性)：$(f,f)\ge 0$，且$(f,f)=0\Leftrightarrow f\equiv 0$.

四、连续函数空间，正交多项式理论

2. 范数

定义1 关于函数 $f(x)\in C[a,b]$ 的某个实值非负函数 $N(f)\equiv\|f\|$，满足:

1^0 非负性：$\|f\|\geq 0$, $\|f\|=0 \Leftrightarrow f\equiv 0$;

2^0 齐次性：$\|cf\|=|c|\|f\|\,(c\in R)$;

3^0 三角不等式：$\forall f, g\in C[a,b]$，有 $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$.

称 $N(f)\equiv\|f\|$ 为 $f(x)$ 的范数或模.

范数是C[a,b]中的一种度量.

四、连续函数空间，正交多项式理论

定义2 $\forall f \in C[a,b]$,

(1) 称 $N_\infty(f) \equiv \| f \|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ 为 f 的 "∞" 范数(或Chebyshev范数)

(2) 称 $N_2(f) = \| f \|_2 = (f,f)^{1/2} = [\int_a^b \omega(x) f^2(x) dx]^{1/2}$ 2—范数

(3) 称 $N_2(f) = \| f \|_1 = [\int_a^b |f(x)| dx]$ 1—范数

定理1 $f, g \in C[a,b]$, 则有

(1) 柯西-许瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式: $|(f,g)| \le \| f \|_2 \cdot \| g \|_2$;

(2) 三角不等式: $\| f + g \|_2 \le \| f \|_2 + \| g \|_2$.

四、连续函数空间，正交多项式理论

【证明】（1）对 $\forall f, g\in C[a,b]$，$\forall t\in R$，

$$0\le (f-tg, f-tg)=(f,f)-2t(f,g)+t^2(g,g)$$

则有 $\Delta=b^2-4ac=4(f,g)^2-4(g,g)\cdot(f,f)\le 0$

即 $|(f,g)|\le \|f\|_2\cdot\|g\|_2$． $\forall f,g\in C[a,b]$

（2）因为$\|f+g\|_2^2=(f+g,f+g)=(f,f)+2(f,g)+(g,g)$

则 $\|f+g\|_2^2\le\|f\|_2^2+2|(f,g)|+\|g\|_2^2$

$\le\|f\|_2^2+2\|f\|_2\|g\|_2+\|g\|_2^2$

柯西-许瓦兹不等式

$=(\|f\|_2+\|g\|_2)^2$． 即$\|f+g\|_2\le\|f\|_2+\|g\|_2$

四、连续函数空间，正交多项式理论

3．距离概念

定义3 若 $f,g\in C[a,b]$，称 $d(f,g)=\|f-g\|_\alpha$ 为 f,g 之间的距离

$(\alpha=\infty$ 或 $2)$

4．正交函数组

定义4（1）若 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，$(f,g)=\int_a^b \omega(x)f(x)g(x)dx=0$，

称 f 和 g 在 $[a,b]$ 上带权 $\omega(x)$ 为正交.

四、连续函数空间，正交多项式理论

(2) $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n} \subset C[a,b]$，若$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \omega(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0, & \text{当} i\neq j\\ A_i>0, & \text{当} i=j\end{cases}$

称$\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$为$[a,b]$上带权正交函数组.

(3)若 $(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, \text{当} i\neq j\\ 1, \text{当} i=j\end{cases}$,

称$\{\varphi_i\}$为$[a,b]$上带权标准正交组.

四、连续函数空间，正交多项式理论

【例2】 三角函数组$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx\}$在$[-\pi,\pi]$上关于权函数1的正交组.

$$(1)\ (\cos ix,\cos jx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos ix\cos jx dx=\begin{cases}0, & \text{当} i\neq j,\text{且} i,j\geq 1\\ \pi, & \text{当} i=j\neq 0\end{cases};$$

$$(2)\ (\sin ix,\sin jx)=\begin{cases}0, & \text{当} i\neq j,\text{且} i,j\geq 1\\ \pi, & \text{当} i=j\neq 0\end{cases};$$

$$(3)\ (\sin ix,\cos jx)=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

四、连续函数空间，正交多项式理论

(4) $(1,1)=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi$；$(1,\sin ix)=0,(1,\cos ix)=0,\quad i=1,\cdots,n.$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]$$

$$\cos mx\sin nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x]$$

四、连续函数空间，正交多项式理论

5．函数组的线性无关

定义5 设$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n} \subset C[a,b]$，

（1）若存在不全为零数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使

$$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)=0, \quad \forall x\in[a,b]$$

称函数组$\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$在$[a,b]$上为线性相关.

（2）如果 $a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)=0, \quad \forall x\in[a,b]$

则$a_0=a_1=\cdots=a_n=0$，称$\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$在$[a,b]$上是线性无关.

四、连续函数空间，正交多项式理论

【例3】 函数组$\{1, x \cdots, x^n\}$,其中 $x^i \in C[a,b]$ $(i = 0,1,\cdots,n)$

于$[a,b]$ 线性无关.

【证明】 反证法

设$\{x^i\}_{i=0}^n$于$[a,b]$线性相关，即存在不全为零的数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$,使

$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$对所有的 $x \in [a,b]$成立,

而$P_n(x)$为次数$\leq n$的多项式,最多有 n 个 0 点,而上式说明 $P_n(x)$有

无穷多个0点，矛盾. #

四、连续函数空间，正交多项式理论

定理2 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}\subset C[a,b]$，则$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$线性无关的充要条件是

行列式 $$G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=\begin{vmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\(\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{vmatrix}\neq 0$$

行列式$G(\varphi_0,\cdots,\varphi_n)$称为函数组 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ 的Gram行列式.

四、连续函数空间，正交多项式理论

【证明】 必要性(若 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ 线性无关 $\Rightarrow G(\varphi_0,\cdots,\varphi_n)\neq 0)$

反证法 假设行列式 $G(\varphi_0,\cdots,\varphi_n)=0$, 于是齐次方程组

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)c_j=0,(i=0,1,\cdots,n)$$ $\Rightarrow \{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ 于 $[a,b]$ 线性相关

有非零解 $\{c_0^*,c_1^*,\cdots c_n^*\}$，即存在不全为零解 $\{c_j^*\}(j=0,1,\cdots n)$ 使

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_i,\varphi_j)c_j^*=0,(i=0,1,\cdots n)$$ 记 $y=\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j(x)$

$$(y,\varphi_i)=(\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j(x),\varphi_i)=\sum_{j=0}^{n}c_j^*(\varphi_j,\varphi_i)=0,\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

四、连续函数空间，正交多项式理论

从而，有$(y,y)=(y,\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j(x)) = \sum_{j=0}^{n}c_j^*(y,\varphi_j)=0$

故 $y\equiv 0,\quad \forall x\in[a,b]$,

即存在不全为零数$\{c_j^*\}$,使 $y=\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j(x)=0$,当 $x\in[a,b]$

说明$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$于$[a,b]$线性相关，矛盾．故$G(\varphi_0,\cdots,\varphi_n)\neq 0$.

充分性　(若$G(\varphi_0,\cdots,\varphi_n)\neq 0 \Rightarrow \{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$线性无关)

设$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$于$[a,b]$线性相关，于是存在不全为零数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$,

使 $c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=0, x\in[a,b]$

四、连续函数空间，正交多项式理论

上式两端与 φ_i 作内积得到

$$c_0(\varphi_i,\varphi_0)+c_1(\varphi_i,\varphi_1)+\cdots+c_n(\varphi_i,\varphi_n)=0,(i=0,1,\cdots,n)$$

由于 $\{c_i\}$ 不全为零，说明齐次方程组有非零解 $c_0,c_1,\cdots,c_n$,

故系数矩阵的行列式为零,即 $G\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}=0.$

与题设矛盾． #

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院