第四章 恒定磁场

§4-1 Oersted实验

§4-2 Biot-Savart定律

§4-3 磁场的Gauss定理

§4-4 Ampère环路定理

§4-5 Ampère定律

§4-6 Lorentz力

§磁现象及其本质

- 电现象：物质吸引轻小物体的现象；

  电相互作用：物质由于具有电荷而产生的相互作用；

  “电”的本质：“电”即电子、质子等微观粒子，“带电”即正负粒子数目的失衡；

- 磁现象：磁石所具有的的吸引铁钴镍等铁质物体的性质；

  “磁”的本质：？

⟶ “磁荷”观点（类比电荷的概念提出）

磁极间相互作用：物质由于具有磁荷而产生的相互作用；

磁的库仑定律：$\vec{F}=\dfrac{1}{4\pi\mu_0}\dfrac{q_{1B}q_{2B}}{r^2}\vec{e}_r$ ⟶ 完整磁场理论

问题：自然界中不存在磁单极子

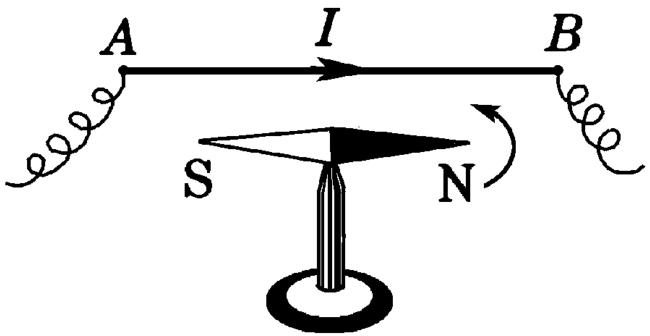
奥斯特实验及其意义

- 19世纪20年代前，磁和电是独立发展的
- 奥斯特,丹麦物理学家 ***Hans Christian Oersted*** 深受康德哲学关于“自然力”统一观点的影响，试图找出电、磁之间的关系

Hans Christian Oersted (1777–1851). Besides his work in electricity and magnetism, Oersted was the first to prepare pure metallic aluminum (1825).

奥斯特实验

•1820年7月



§4-1 奥斯特实验

奥斯特实验表明

- 长直载流导线与之平行放置的磁针受力偏转——电流的磁效应
- 磁针是在水平面内偏转的

  ——横向力
- 突破了非接触物体之间只存在有心力的观念——拓宽了作用力的类型

§4-1 奥斯特实验

意义

- 揭示了电现象与磁现象的联系
- 宣告电磁学作为一个统一学科诞生
- 历史性的突破
- 此后迎来了电磁学蓬勃发展的高潮

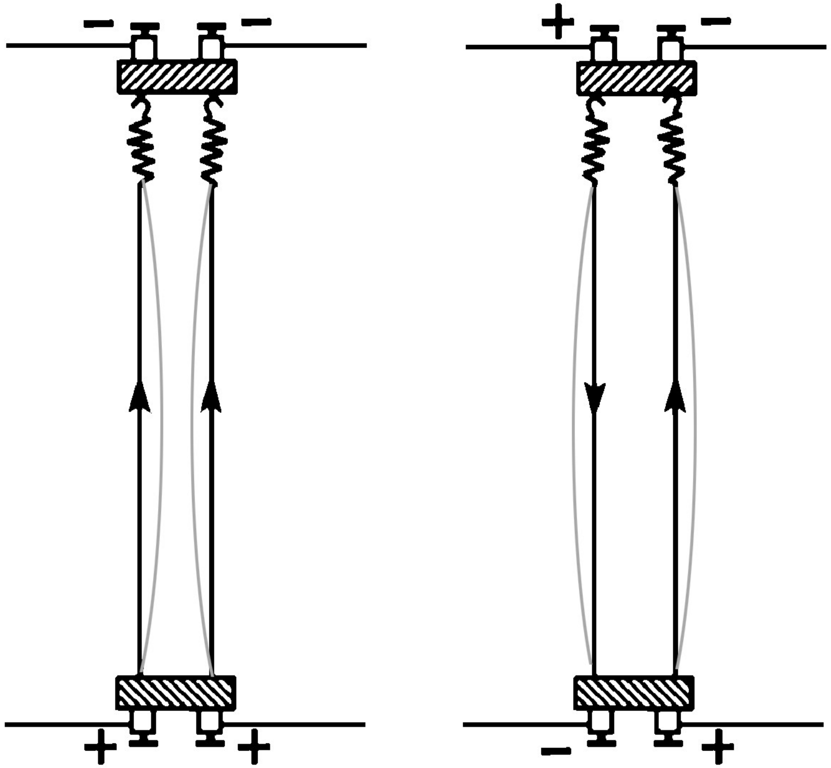
§4-1 奥斯特实验

评价

- **Ampere**写道：“**Oerster**先生……已经永远把他的名字和一个新纪元联系在一起了”.
- **Faraday**评论说：“它突然打开了科学中一个一直是黑暗的领域的大门，使其充满光明”.

§4-1 奥斯特实验

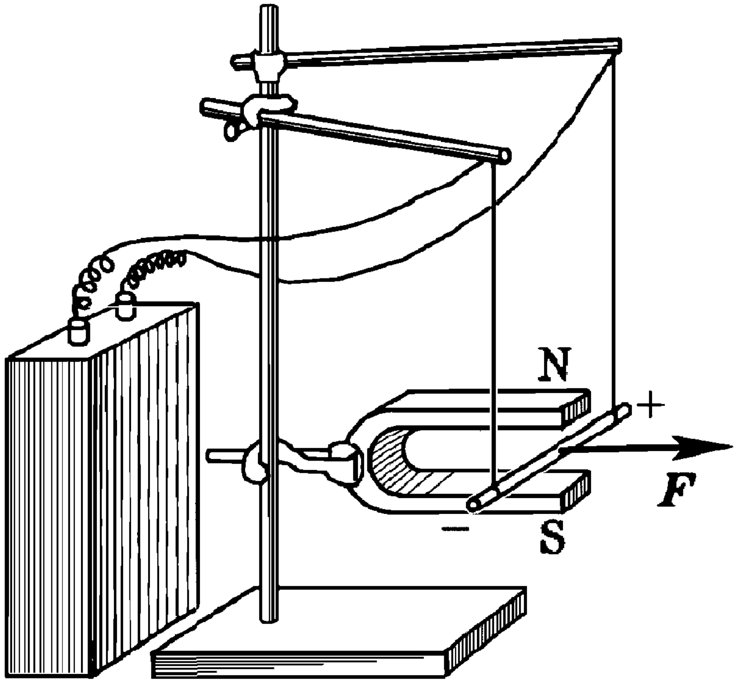
相关实验



- 9.18 Ampere 圆电流对磁针作用
- 9.25 Ampere平行电流间的相互作用
- 9.25Arago 钢片被电流磁化

§4-1 奥斯特实验

磁铁对电流的作用

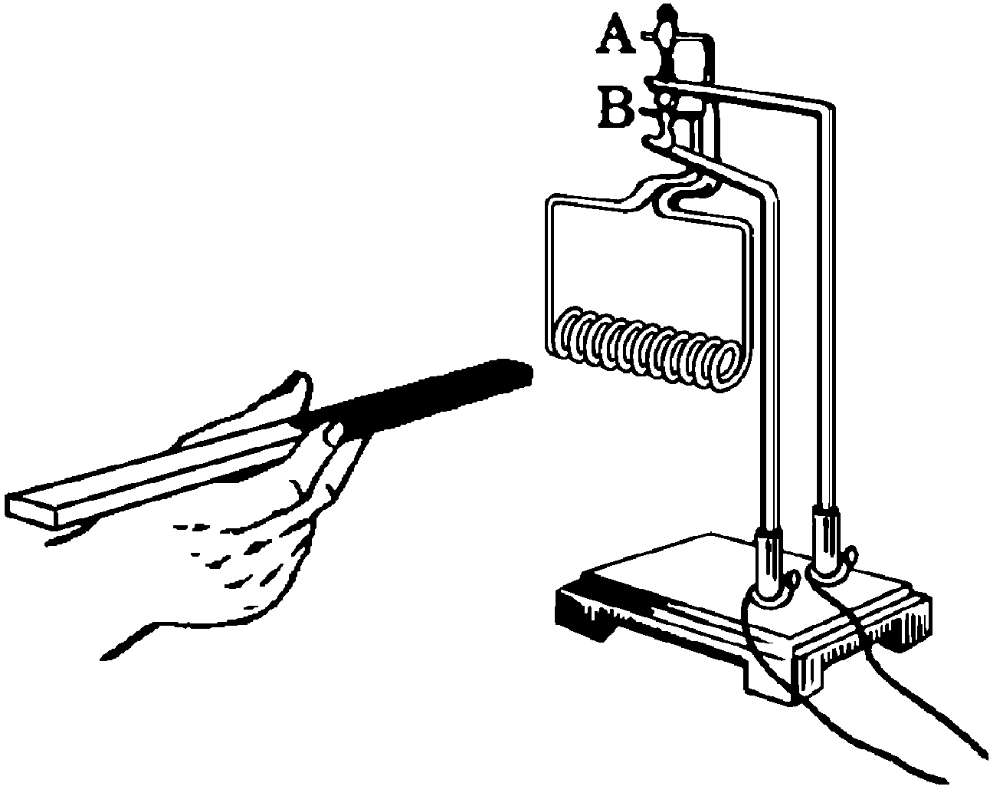


Ampere

通电导线受马蹄形磁铁作用而运动

§4-1 奥斯特实验

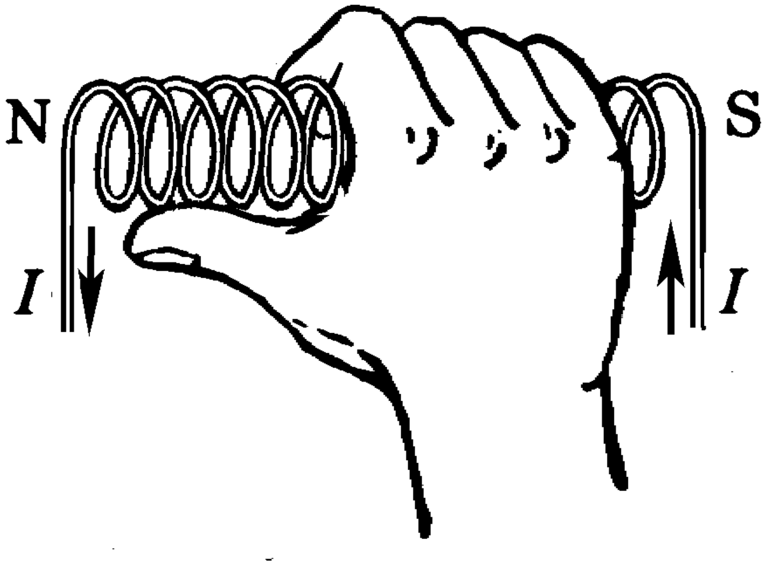
Ampere



螺线管与磁铁相互作用时显示出N极和S极

§4-1 奥斯特实验

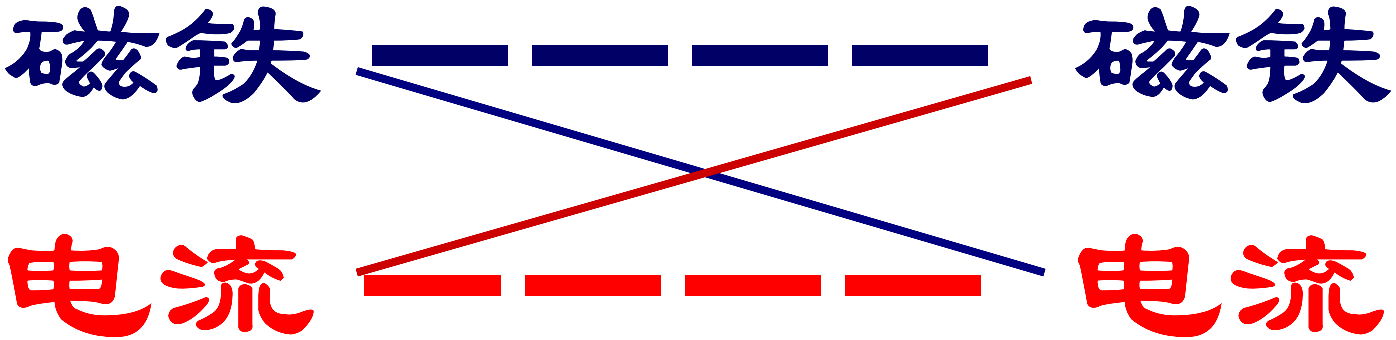
确定载流螺线管极性



实验表明载流螺线管相当于磁棒，螺线管的极性与电流成右手螺旋关系

§4-1 奥斯特实验

一系列实验表明



都存在相互作用

§4-1 奥斯特实验

不同观点

- 毕奥－萨筏尔：电流元对单位磁荷的作用力；

  →毕奥－萨筏尔定律

- 安培：任意两电流元间的相互作用；

  →安培定律

  →磁现象的本质是电流/运动的电荷，“分子电流”

  →可以解释自然界中不存在磁单极子

  →揭示了电、磁现象的内在联系

现代观点：磁性的来源为原子分子的固有磁矩

§4-2 Biot-Savart定律

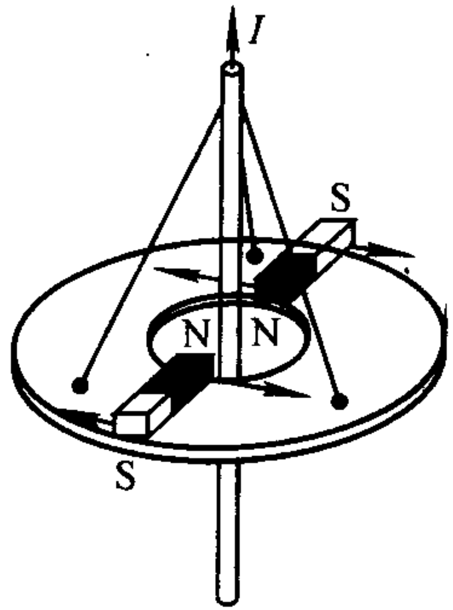
毕奥－萨筏尔的研究课题

- **寻找电流元对磁极作用力的定量规律**
- 认为电流对磁极的作用力是自然界基本力
- 受Oester横向力的影响，认为每一个电流元对磁极的作用力也垂直于导线与磁极构成的平面
- 力的大小 $df \propto Idl$ 还与几何因素 r,α 有关
- 关键是找到几何关系
- 困难是无孤立的电流元

§4-2 Biot-Savart定律

Biot首先重复Oester实验

- 实验一：测量长直载流导线对单位磁极的作用力
- 装置：如图，沿圆盘径向，对称放置一对相同的磁棒。



$$若 H \propto \frac{1}{r} \Rightarrow 力矩为 \mathrm{r} \times \mathrm{H} \quad 若 H 不 \propto \frac{1}{r} \quad H_1 r_1 \uparrow \neq H_2 r_2 \downarrow$$

每根磁棒两极受合力矩为零，圆盘静止

$$H_1 r_1 \propto \frac{r_1}{r_1} = C \quad \uparrow$$

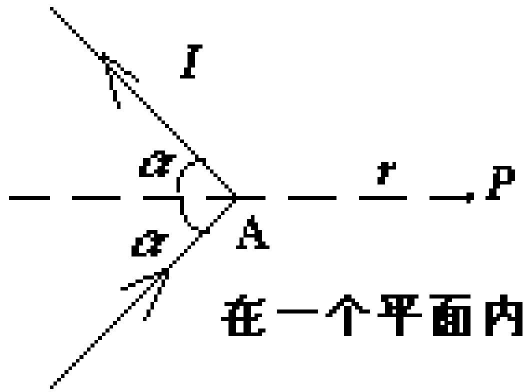
$$H_2 r_2 \propto \frac{r_2}{r_2} = C \quad \downarrow$$

总合力矩不为零， 圆盘应转

实验结果：示零——单位磁极受到的作用 $H \propto \frac{I}{r}$

§4-2 Biot-Savart定律

- 实验二：
- 设计实验：
  - 磁极所受作用力的方向垂直于折线与磁极构成的平面



$$\alpha = 0, H = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad H = H_{\max}\text{最大}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad H = 0.414 H_{\max} \qquad 0.414 = \tan 22^\circ 30' = \tan\frac{\alpha}{2}$$

结论：$H_{\text{折}} = k_{\text{折}} \dfrac{I}{r} \tan\dfrac{\alpha}{2}$

电流元对磁极的作用力的表达式

- 由实验证实电流元对磁极的作用力是横向力
- 整个电流对磁极的作用是这些电流元对磁极横向力的叠加
- 由对称性，上述折线实验结果中，折线的一支对磁极的作用力的贡献是$H_{折}$的一半

$$H = k\frac{I}{r}\tan\frac{\alpha}{2} \qquad k = \frac{1}{2}k_{折}$$

§4-2 Biot-Savart定律

毕奥—萨筏尔定律：

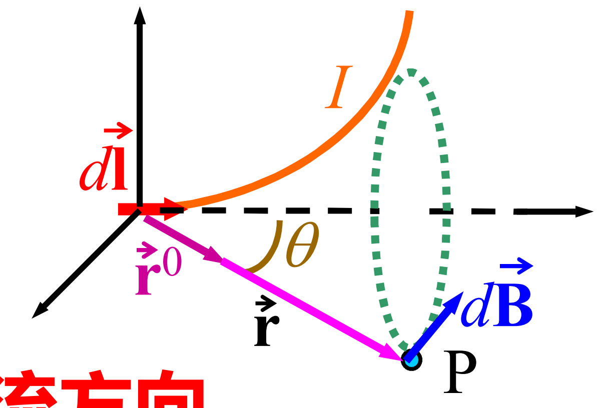
•**Biot**和**Savart**通过设计实验研究电流对磁极的作用力

•在**Laplace**的帮助下，得出**B-S**定律（早于安培）

• 现代观点：描述电流产生磁场的规律

磁感应强度B

- **电场E：定量描述电场分布**
- **磁场B：定量描述磁场分布**



取电流元$Id\vec{l}$，$d\vec{l}$**的方向: 沿电流方向**

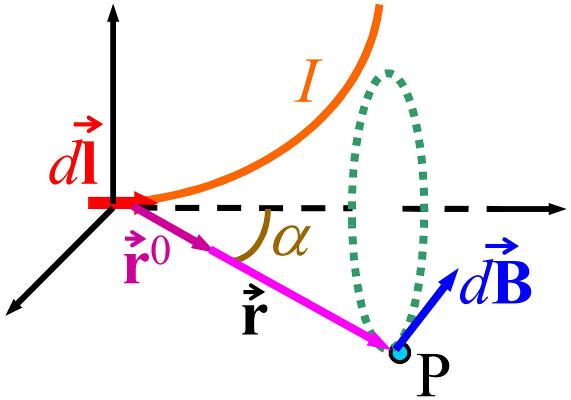
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

- 与Idl、$\sin\theta$成正比，与r^2成反比
- $d\vec{B}\perp d\vec{l},\vec{r}$构成的平面

§4-2 Biot-Savart定律

说明:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}^0}{r^2}$$



$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,Tm/A$$

- 单位：N/A·m；或特斯拉(T)
- 磁场B同样遵从矢量叠加原理 $\Rightarrow$ 对于任意电流分布有

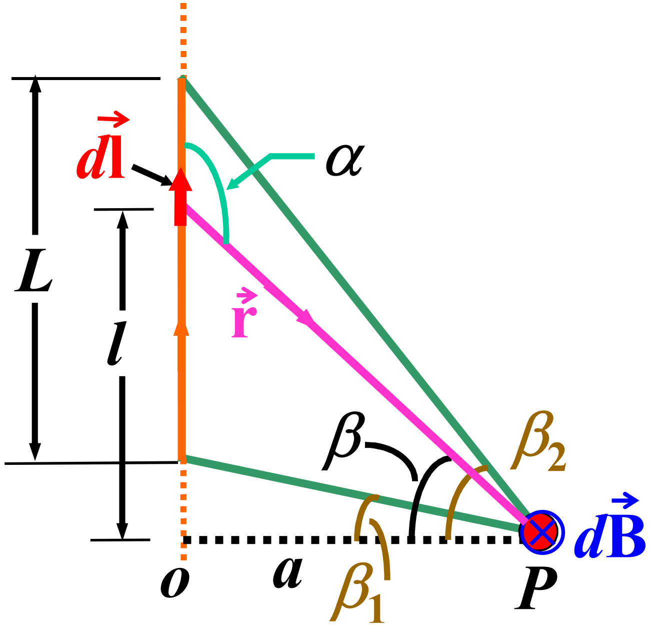
$$\vec{B} = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}^0}{r^2}$$

L — 电流分布的曲线.

§4-2 Biot-Savart定律

例: 如图, **载流直导线**, 已知

I, a, β_1, β_2, 求$\vec{B}$



解: $dB = \dfrac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}$; 方向: $\otimes$

$$B = \int dB = \int_L \frac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2}$$

统一变量: $\begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ r = a\sec\beta \\ l = a\,\mathrm{tg}\beta \rightarrow dl = a\sec^2\beta\, d\beta \end{cases}$

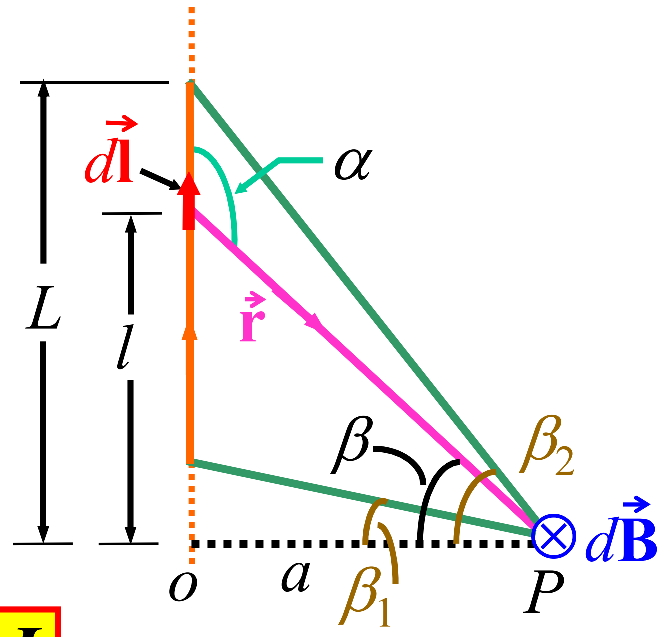
$$\Rightarrow \quad \boxed{B =} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\beta\, d\beta = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)}$$ 方向: $\otimes$

§4-2 Biot-Savart定律

$$\Rightarrow \quad B=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\beta d\beta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$

方向: $\otimes$



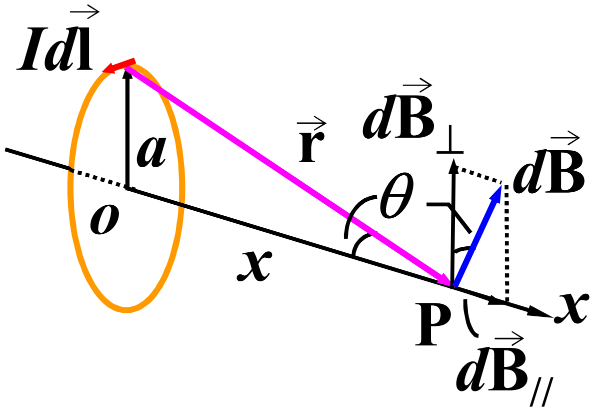
- $\beta_1,\beta_2\in[-\pi/2,\pi/2]$
- $\beta_1=-\pi/2,\beta_2=\pi/2$

  $\Leftrightarrow$ **∞长载流直线**: $\boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}}$

- $B\propto 1/a$, **同a处B相等(方向不同!).**
- $\beta_1=0,\beta_2=\pi/2 \Leftrightarrow$ **半∞长载流直线**: $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}$
- **延长线上**, $B=0$ ($Id\vec{l}\,//\,\vec{r}$).

§4-2 Biot-Savart定律

例：求**圆电流轴线上的磁场**.如图, 已知: *I*, *a*.



解：由图知: $Id\vec{l} \perp \vec{r}$;

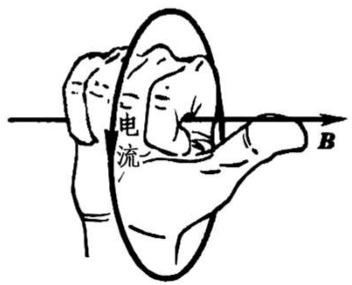
不同$Id\vec{l}$产生$d\vec{B}$方向不同,

由对称性：合 $\vec{B}$沿x轴正向,

$\Rightarrow$ 只需讨论 $d\vec{B}_{//}$

$$B = \int_L dB_{//} = \int_L dB \sin\theta = \int_0^{2\pi a} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin\theta$$

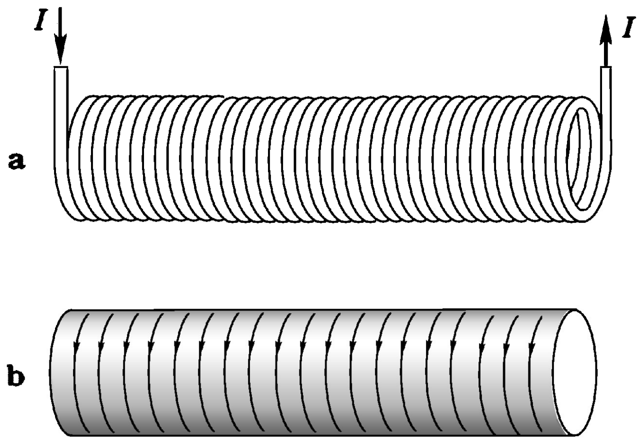
$$= \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \sin\theta = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

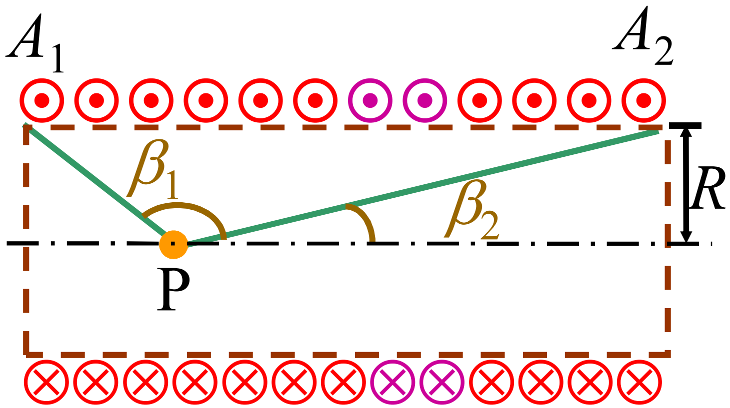


- $x\uparrow, B\downarrow, x = 0$时 $\Leftrightarrow$ 圆电流中心处： $\boxed{B_o = \dfrac{\mu_0 I}{2a}}$

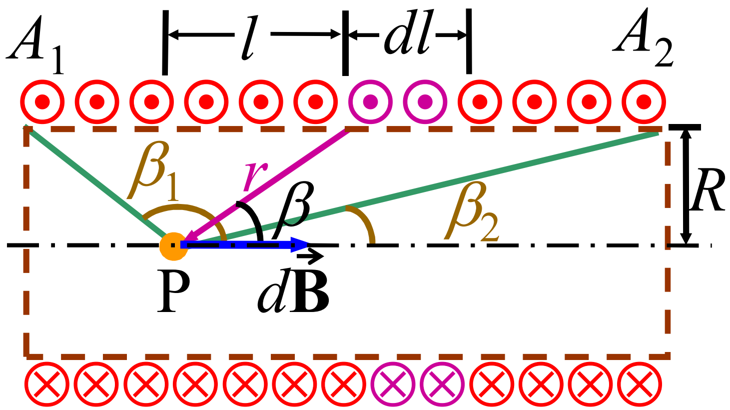
§4-2 Biot-Savart定律

例：如图, **载流密绕直螺线管**。已知:I, R, n, β_1 , β_2 ,
求轴线上P点的 $\vec{B}$





解： 由上例, dl上的线圈$Indl$ 产生的$d\vec{B}$ 为:



$$\therefore\ dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 Indl}{(R^2+l^2)^{3/2}}$$

方向: $\rightarrow$

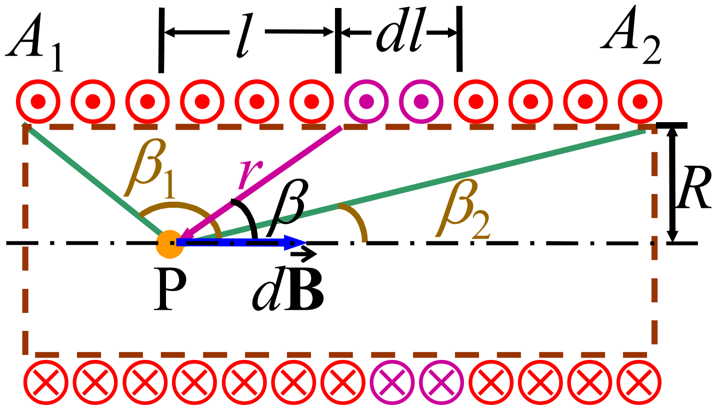
$$B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 Indl}{(R^2+l^2)^{3/2}} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0}{2} nI \sin\beta d\beta$$

统一变量: $\begin{cases} l = R\mathrm{ctg}\beta \Rightarrow dl = -R\csc^2\beta\, d\beta \\ R^2 + l^2 = R^2\csc^2\beta \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0}{2} nI(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)}$$

方向: $\rightarrow$

$$B=\frac{\mu_0}{2}nI(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$ 方向: →



- $\beta_1=\pi,\beta_2=0$

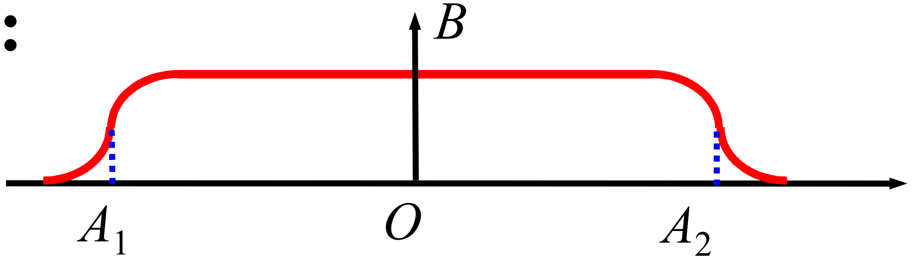
  ⇔ ∞长载流螺线管:

  $$\boxed{B=\mu_0 nI}$$

  $\beta_1=\pi/2,\beta_2=0$

  ⇔ 半∞长载流螺线管:

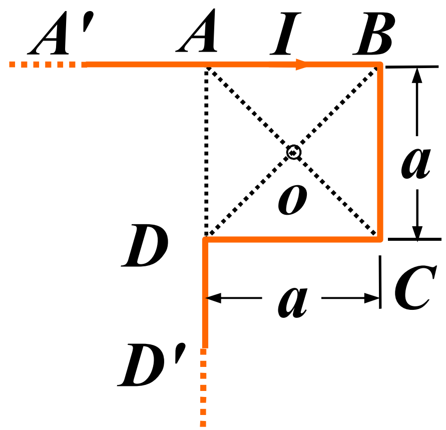
  $$B=\frac{\mu_0 nI}{2}$$



长直螺线管（L>>R）

§4-2 Biot-Savart定律

例: 如图, 求o点$\vec{B}$. 已知: I, a.



解: $\overline{A'A}$ 对o点: $\otimes$

$\overline{DD'}$ 对o点: $\odot$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A'A}\text{对}o\text{点}:\otimes\\ \overline{DD'}\text{对}o\text{点}:\odot\end{array}\right\}\vec{B}=0$$

$$\vec{B}_{AB}=\vec{B}_{BC}=\vec{B}_{CD}$$

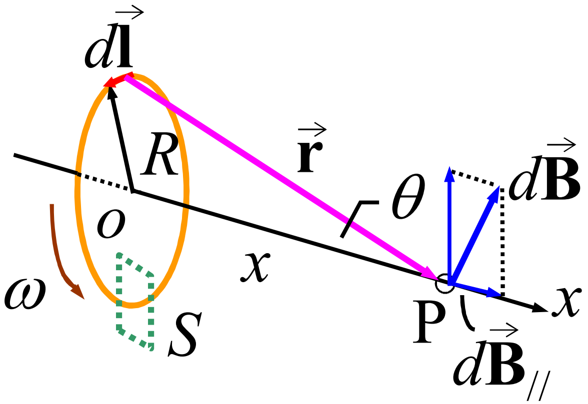
由前面例题结果: $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$

得: $B=3B_{AB}$

$$=\frac{3\mu_0 I}{4\pi a/2}\left[\sin\frac{\pi}{4}-\sin(\frac{-\pi}{4})\right]=\frac{3\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a}$$ **方向:** $\otimes$

§4-2 Biot-Savart定律

例: 如图, 均匀带电圆环, 已知R, λ, 以n转/秒绕 x 轴匀速旋转,求离环心 x 处的$\vec{\mathbf{B}}$



解: 带电体运动⇒ 形成电流:

圆电流: dt内通过截面S的电量为

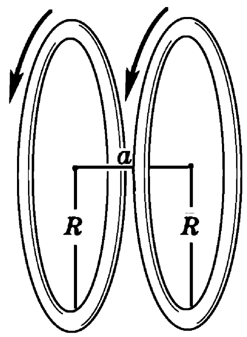
$$dq = \lambda v dt = \lambda 2\pi R n dt \Rightarrow I = \frac{dq}{dt} = 2\pi R n \lambda$$

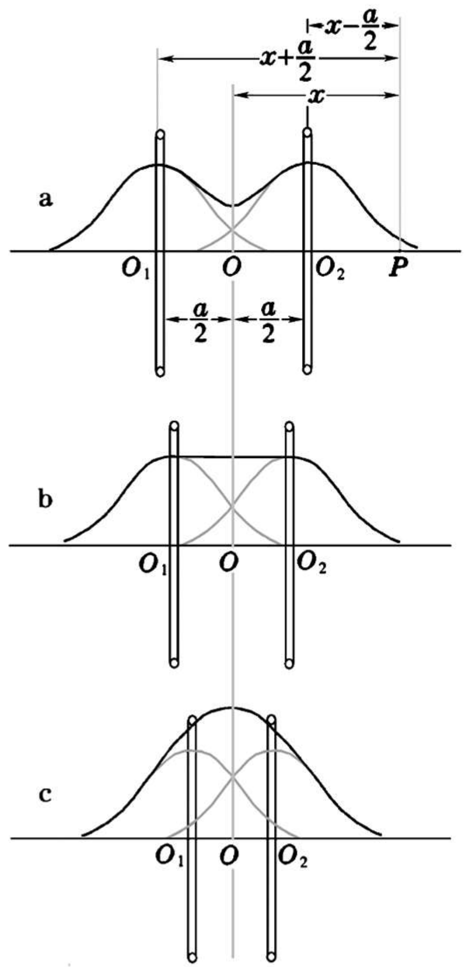
代入前面例题结果得:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}\vec{i} = \frac{\mu_0 \pi n \lambda R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

亥姆霍兹线圈

- 结构：一对间距等于半径的同轴载流圆线圈





- 命题：证明上述线圈在轴线中心附近的磁场最为均匀
  – 将两单匝线圈轴线上磁场叠加
  – 求极值 p135.
- 用处：在实验室中，当所需磁场不太强时，常用来产生均匀磁场

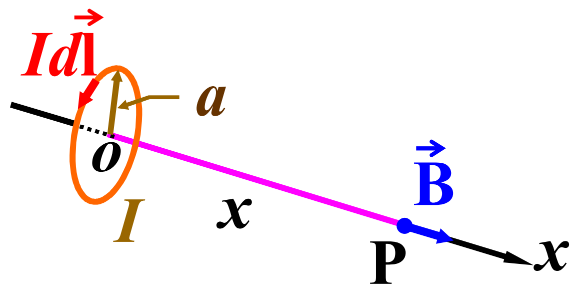
- **载流线圈的磁矩(磁偶极矩):**

定义: $\boxed{\vec{p}_m = IS\vec{n}^0}$

$\vec{n}^0$ —— 右手定则下**线圈平面的法向单位矢量**

$\therefore$ 前结果 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi(a^2+x^2)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}$

- $x>>a,\ x \approx r$ 时: $\boxed{\vec{B} \approx \dfrac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}}$



- 有N圈线圈时, $\boxed{\vec{p}_m = NIS\vec{n}^0}$

- **分子原子固有磁矩**: 电子绕核旋转的轨道磁矩

$\Rightarrow$ **分子电流**.

小结

- 原则上，B-S定理加上叠加原理可以求任何载流导线在空间某点的B
- 实际上，只在电流分布具有一定对称性,能够判断其磁场方向,并可简化为标量积分时,才易于求解；
- 为完成积分，需要利用几何关系，统一积分变量；
- 一些重要的结果应牢记备用；
- 如果对称性有所削弱，求解将困难得多
  - 如圆线圈非轴线上一点的磁场，就需要借助特殊函数才能求解
  - 又如在螺距不可忽略时，螺线管的电流既有环向分量又有轴向分量，若除去密绕条件，就更为复杂。

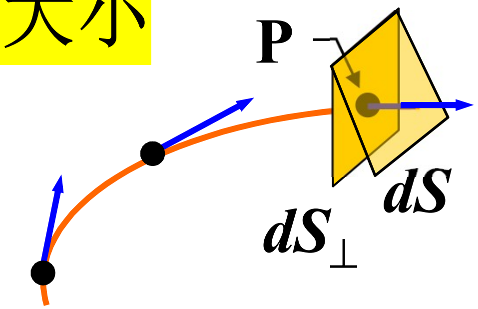
§4-3 磁场的Gauss定理 磁矢势

一. 磁场线

1. 定义(画法): 类比电场线.

一组有向曲线族 $\begin{cases} \text{正切向} \Leftrightarrow \vec{B}\text{的方向} \\ \text{疏密} \Leftrightarrow \vec{B}\text{的大小} \end{cases}$

$$dN \propto B dS_{\perp}$$



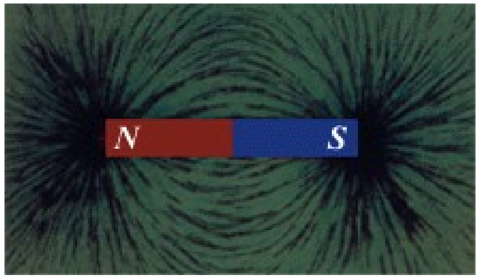
2. 磁场线性质:

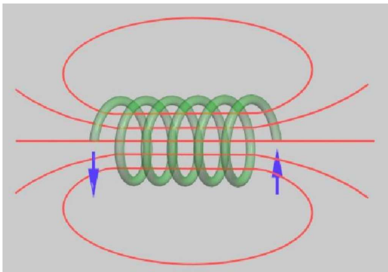
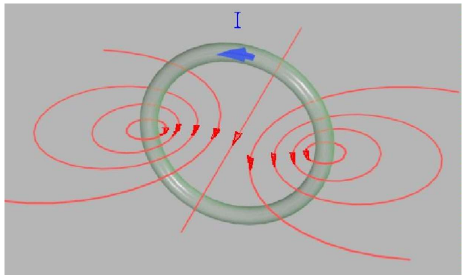
a)不相交;

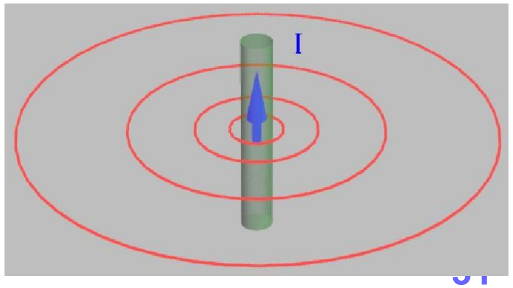
b)恒闭合 (无源/无磁荷, 形成涡旋) ;

无源有旋

c)线与电流成右旋关系.





§4-3 磁场的Gauss定理 磁矢势

二. 磁通量

类比电通量.

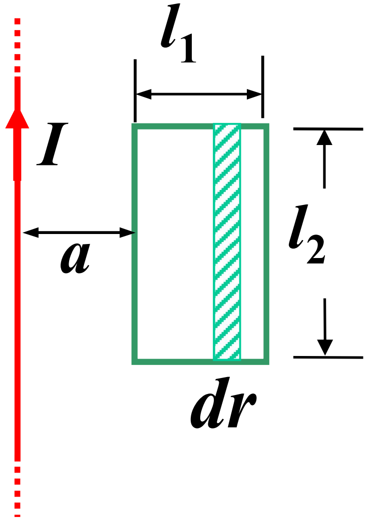
1. 面积元：取面积元的法向单位矢量 $\vec{n}$为$d\vec{S}$的方向，则通过面积元dS的磁通量：

$$\boxed{d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS\cos\theta \propto dN_m}$$

$$d\Phi_m \begin{cases} >0 & \vec{B}\text{线顺法向穿过}dS \\ <0 & \vec{B}\text{线逆法向穿过}dS \end{cases}$$

2. 有限曲面：$\boxed{\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}$

例：如图，无限长直载流线.一矩形线圈与之共面，已知：I, a, l_1, l_2. 求Φ_m.



解：对∞长载流直线有$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$；方向：$\otimes$

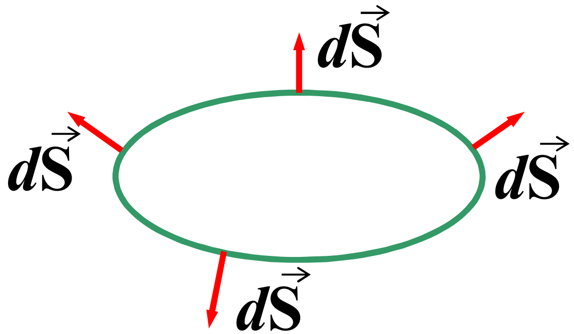
令$d\vec{S}\,//\,\vec{B}$，则 $d\Phi_m=\vec{B}\cdot d\vec{S}=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}l_2 dr$

$$\Rightarrow \Phi_m=\frac{\mu_0 I l_2}{2\pi}\int_a^{a+l_1}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 I l_2}{2\pi}\ln\frac{a+l_1}{a}$$

3. 对闭合曲面，取外法线为正法向

$\Rightarrow$ 穿出为正，穿入为负

这时 $\Phi_m=\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=?$



三. 磁场的Gauss定律(B-GL)

磁场线闭合⇒ 穿出 = 穿入

$$\Rightarrow \quad \boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$ 其中S为任意闭合曲面

称为磁场的Gauss定律。

- 说明磁场是无源的, 是磁场线闭合的数学表述

  ⇒ B-G.L.不能用于求$\vec{B}$

- 无源⇔没有发现磁荷, 不可证. 实际上, 现有理论

  不排除存在磁荷的可能性, 仍在寻找

磁高斯定理的微分形式

- 利用数学的高斯定理

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

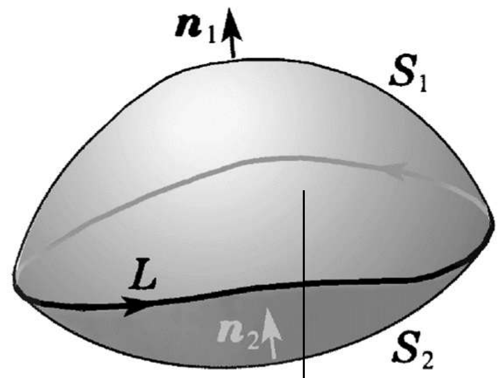
$$\Longrightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

§4-3 磁场的Gauss定理 磁矢势

- **磁高斯定理表明：对任意闭合面**

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$



磁通量仅由S_1和S_2的共同边界线所决定

可能找到一个矢量$\vec{A}$，它沿L作线积分等于通过S的通量

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \qquad (a)$$

数学上可以证明，这样的矢量$\vec{A}$的确存在，对于磁感应强度$\vec{B}$，$\vec{A}$叫做磁矢势，$\vec{A}$在空间的分布也构成矢量场，简称矢势

§4-3 磁场的Gauss定理 磁矢势

对任意矢量$\vec{A}$有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 矢势的特点：

满足$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$的$\vec{A}$不唯一

其实标势也不唯一，零点可选

- 如：对于任意标量场φ的梯度$\nabla \varphi$,有 $\nabla \times \nabla \varphi = 0$

$$\nabla \times (\vec{A} + \nabla \varphi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \times \varphi = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

描述同一个磁感应强度B

规范变换： $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \varphi$

- 为了确定矢势，需要添加附加条件，不同的附加条件即不同的规范；
- 通常选库仑规范： $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

§ 4-4 Ampère环路定理(ACL)

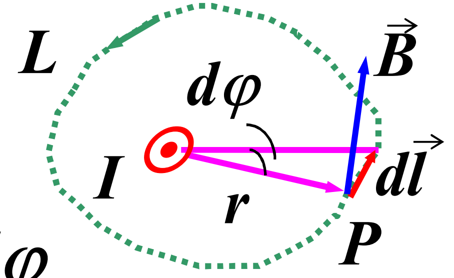
一. Ampère环路定理

Ampère环路定理 - 表示:

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}}$$

一般证明p141较复杂, 仅给出特殊情况下的证明.

(1) 闭合回路包围载流直导线



如图绕I作一任意闭合回路L.

P点处 $(d\vec{l}\wedge\vec{B}) = \theta \Rightarrow \left|d\vec{l}\right|\cos\theta = rd\varphi$

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = Brd\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}rd\varphi$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L d\varphi = \mu_0 I \qquad (*)$$

§4-4 Ampère环路定理(ACL)

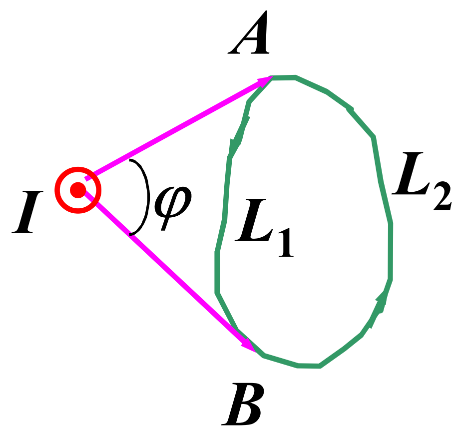
(2) 如I的方向相反(⊗), 则$\vec{B}$反向

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}d\varphi; \quad \boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\mu_0 I}$$

若规定电流 I 和L的方向满足右旋时为正, 否则为负, 则可以统一表示为(*)式.

(3) 闭合路径不包围电流时,如图,

可将L分为L_1, L_2图中A, B为切点.



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{L_1}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{L_2}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1} d\varphi + \int_{L_2} d\varphi\right) = 0$$

§4-4 Ampère环路定理(ACL)

Ampère环路定理的意义及几点说明:

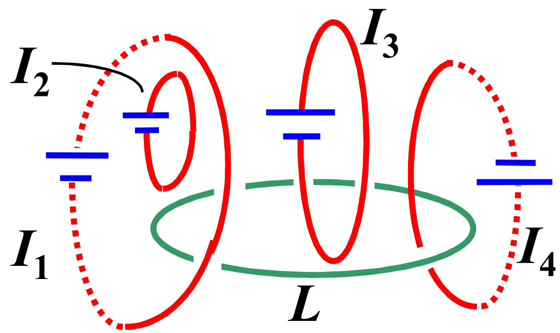
- $\vec{B}$ 不是保守场, 有旋(涡旋),电流是涡旋的轴心
- 定理右边是被L包围的电流的代数和, 左式中$\vec{B}$是所有电流产生的(包括没被L包围的电流).
- 所有电流都应是稳恒电流, 非稳恒电流时需修正.
- 安培环路定理只适用于闭合的载流导线，对于任意设想的一段载流导线不成立
- 螺旋线电流, 可认为每匝包围L一次, 这时

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$

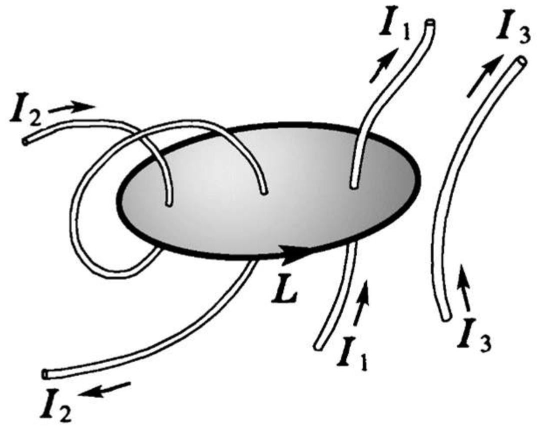
- 包围: 闭合稳恒电流与L形成铰链,

§ 4-4 Ampère环路定理(ACL)

如图所示, I_1, I_2, I_3, I_4, 包围?



$$\sum_{L内} I = I_1 - 2I_2$$



§ 4-4 Ampère环路定理(ACL)

二. 静电场与恒定磁场性质比较

静电场	恒定磁场
$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{i内}$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$
$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$
标势 $u_P = \int_P^{势能零点} \vec{\mathbf{E}}\cdot d\vec{\mathbf{l}}$	矢势 $\oint_L \vec{\mathbf{A}}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{S}$
$\vec{E} = -\nabla u$	$\vec{\mathrm{B}} = \nabla \times \vec{A}$

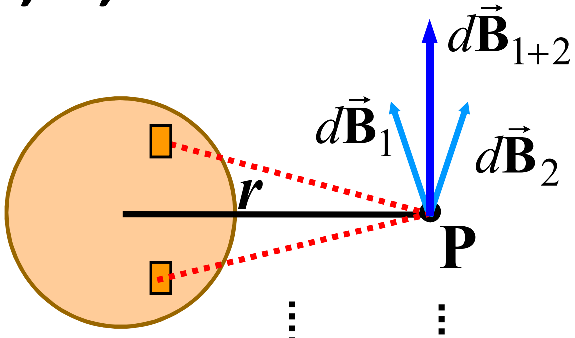
三. 用ACL求$\vec{\mathbf{B}}$

ACL含场源电流 $\Rightarrow$ 可在一定条件下求$\vec{\mathbf{B}}$

思路: I 对称性 $\rightarrow$ L 环路 $\rightarrow$ ACL $\rightarrow \vec{\mathbf{B}}$ 分布

§ 4-4 Ampère环路定理(ACL)

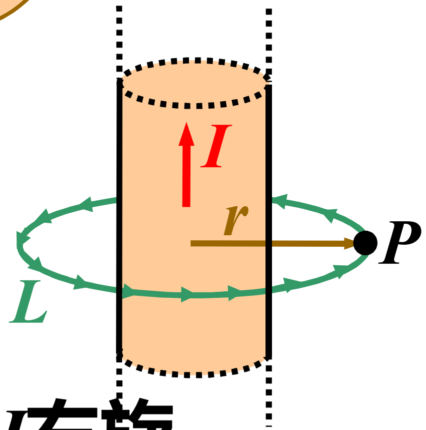
例：**无限长均匀载流直圆柱**，已知：I，R，
求磁感应强度的分布.



解：I 轴对称性：上下电流元对称

$\Rightarrow$ $d\vec{B}$方向与I成右旋

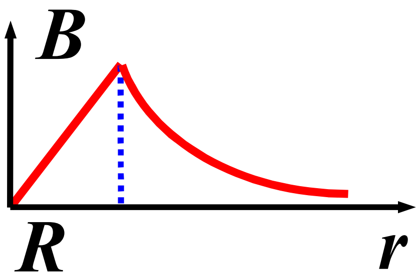
$\Rightarrow$ 过点P以r为半径作回路L，$\vec{B}$右旋



$$r < R: \quad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}; \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}}$$ ；方向：与I右旋.

同理 $r > R$: $\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$ ；方向：与I右旋.

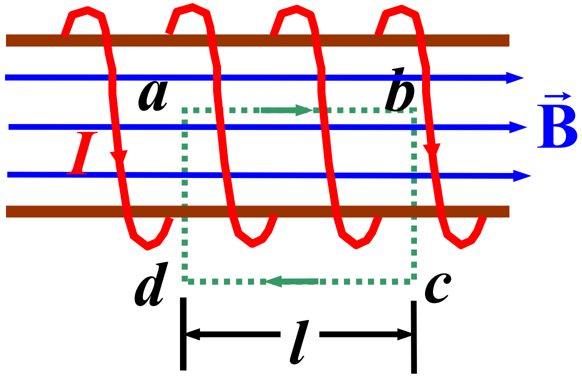


- 对载流无限长直筒，$r < R$时，$B = 0$

§ 4-4 Ampère环路定理(ACL)

例: **无限长密绕直螺线管**

解: 作回路$abcd$如图, 由ACL有



$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = \mu_0 n \overline{ab} I$$

$$B \cdot \overline{ab} + B' \cdot \overline{cd} = \mu_0 n \overline{ab} I$$

∞长管$\Rightarrow B' \approx 0 \quad \therefore \boxed{B = \mu_0 nI}$, 方向: //轴线, 与$I$右旋

ab可在螺线管内任取，同理可证 $\Rightarrow$ B均匀.

- nI 可看作管壁上绕行的面电流密度j, 即

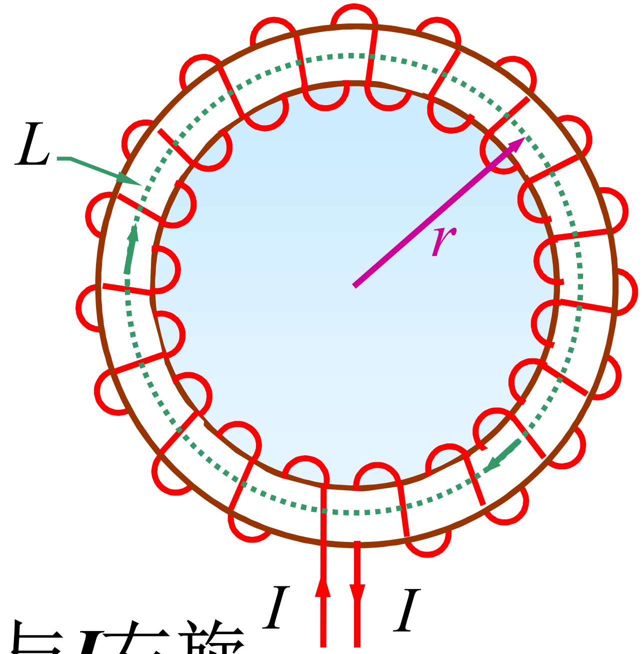
$$B = \mu_0 j$$

面电流密度：流经表面单位长度上的电流

例: 密绕细螺绕环($d << R$).

已知I, N, 求环内部的$\vec{B}$

解: 同一同心圆上各点: B大小相等,方向沿切向且与电流I右旋.
取L如图, 半径为r, 由ACL有

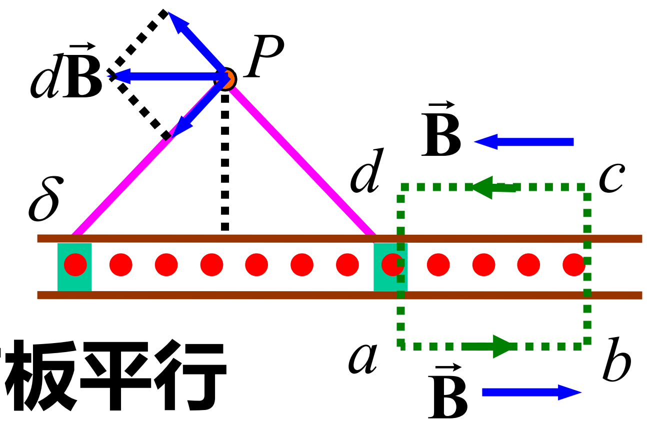


$$B\,2\pi r = \mu_0 NI$$

$$\begin{cases} B_{内} = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} & \text{方向：切向,} \perp r\text{, 与}I\text{右旋} \\ B_{外} = 0 \end{cases}$$

- 没涉及内外半径 r_1, r_2, 对任意截面形状成立.
- 若 $r_2 - r_1 << r$, $\dfrac{N}{2\pi r} = n \Rightarrow \boxed{B_{内} = \mu_0 nI}$

例：无限大平面电流，如图，已知面电流的线密度δ，求 $\vec{B}$



解：∞多平行排列长直载流线.

如图，任取P点，合 $\vec{B}$ 方向与板平行

$\Rightarrow$ 取L回路$abcd$与I右旋，

$ab = cd = l$, bc与ad被电流面平分

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B2l = \mu_0 \delta l$$

$$\therefore \boxed{B = \frac{\mu_0 \delta}{2}}$$，方向如图.

- 两边磁场均匀分布，等大反向，与距离无关.

§ 4-5 Ampère定律

安培的研究课题

- 几乎在与毕奥－萨筏尔同样的背景下，安培提出的磁相互作用问题更深入，显示出大师的风范：

  可将种种磁相互作用归结为电流之间的相互作用

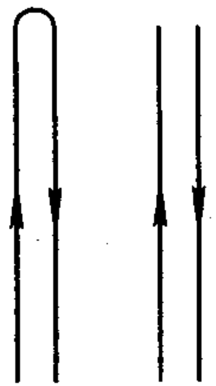
  提出寻找任意两个电流元之间作用力的定量规律——即可解决磁相互作用的问题

- 安培精心设计了四个示零实验来解决这些困难

§ 4-5 Ampère定律

- 实验一：
  - 用对折导线，在其中通以大小相等、方向相反的电流.
  - 把它移近任意载流回路，观察载流回路的反应
  - 结果：载流回路不动
  - 说明：当电流反向时，它产生的作用力也反向
  - 数学表达：

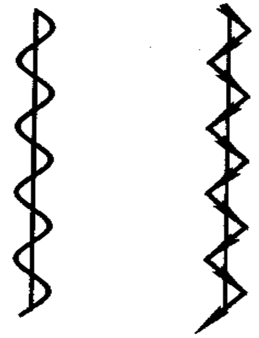
dF_{12}与I_1dl_1、I_2dl_2成线性关系



(a)　　(b)

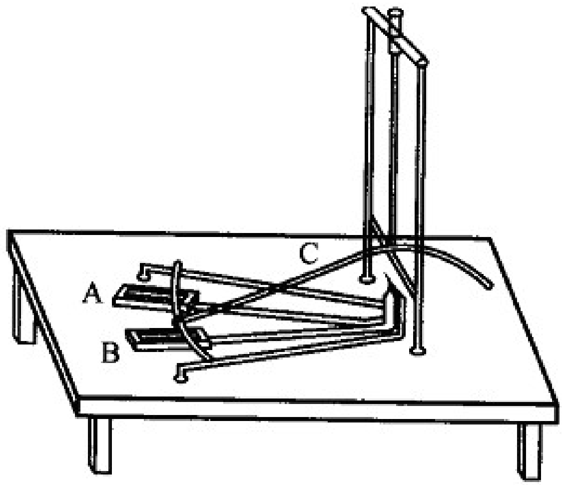
§ 4-5 Ampère定律

- **实验二：**
  - 用载流曲折线对任意载流回路作用，结果与载流直导线的作用一样
  - 说明电流元具有矢量性,表为 $I_1 d\vec{l}_1$、$I_2 d\vec{l}_2$



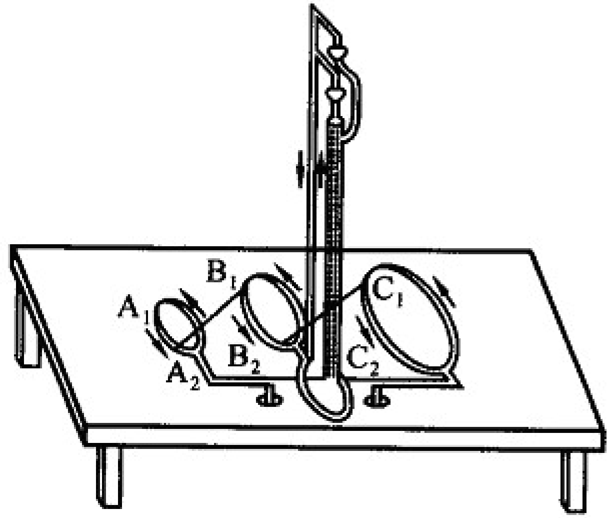
(a) (b)

- **实验三：** 装置如图
  - 只允许圆弧形导体沿其切线方向运动而不允许圆弧形导体沿着与其垂直的方向运动
  - 结果：圆弧导体不动
  - 说明：作用在电流元上的力是与它垂直的——横向力



$$d\vec{F}_{12} \perp d\vec{l}_2 \text{或} \oint_{l_1} d\vec{F}_{12} \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

- **实验四:**
  - 圆线圈A、B、C线度之比为1/n : 1 : n，A与B的距离以及线圈B与C的距离比为1 : n， A与C固定，并串联，其中电流相同，线圈B可以活动，通以另一电流
  - 结果：B不动
  - 结论：**所有几何线度增加同一倍数时，作用力的大小不变**



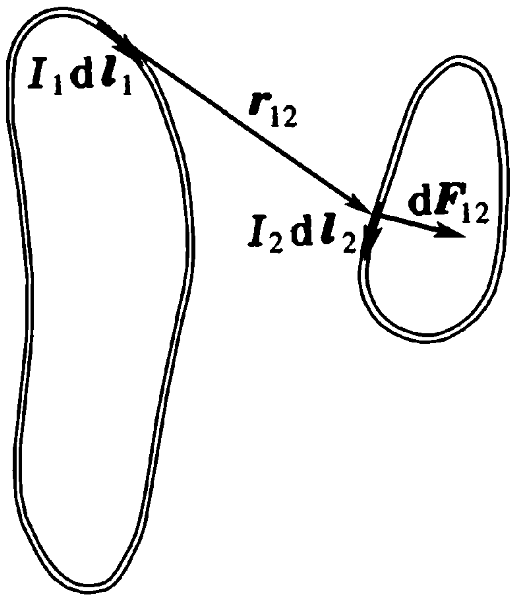
$$dF_{12} \propto \frac{I_1 dl_1 I_2 dl_2}{r_{12}^2}$$

当dl_1、dl_2、r_{12}增加同一倍数，

dF_{12}才能保持不变

§ 4-5 Ampère定律

- 安培从错综复杂的现象与联系中，提炼出磁现象的本质,给出了两电流元之间的作用力公式,经过后人的修正、加工,得到现在的安培定律形式:



$$d\vec{F}_{12} = k\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r^2_{12}}$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, N/A^2$$

§ 4-5 Ampère定律

一. Ampère定律

令$I_2 dl_2$为检验电流元, 则I_1对$I_2 dl_2$的作用=对L_1积分:

$$d\vec{F}_{12} = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}}_{\text{B-S Law}} I_2 d\vec{l}_2 \times \underbrace{\int_{L_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}^{\,0}}{r_{12}^2}}_{\text{B-S Law}} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}$$

载流导线元在磁场中受到**安培力**: $\boxed{d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}}$

注意: $\vec{B}$是 $d\vec{l}$ **所处位置**的磁感应强度

微观图象（经典）:

导体中载流子受磁力 $\Rightarrow$ 定向偏转

$\Rightarrow$ 限制在导体内 $\Rightarrow$ 冲量传递给晶格 $\Rightarrow$ 宏观力

§ 4-5 Ampère定律

- **安培力** $$d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$$
- **叠加原理** $$\vec{F}=\int_L d\vec{F}$$

计算各种载流回路受外磁场作用力

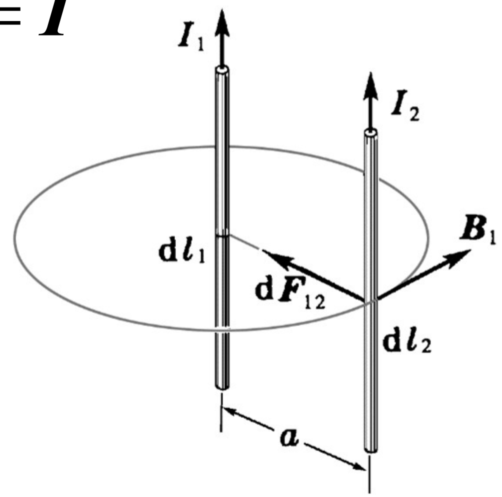
平行无限长直导线间的相互作用

$$I_1\xrightarrow{\text{产生}}B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\xrightarrow{\text{对}I_2\text{的作用}}dF_{12}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}I_2dl_2$$

$$I_1=I_2=I$$

单位长度受力：$$\frac{dF_{12}}{dl_2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

$$\frac{dF}{dl}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}$$



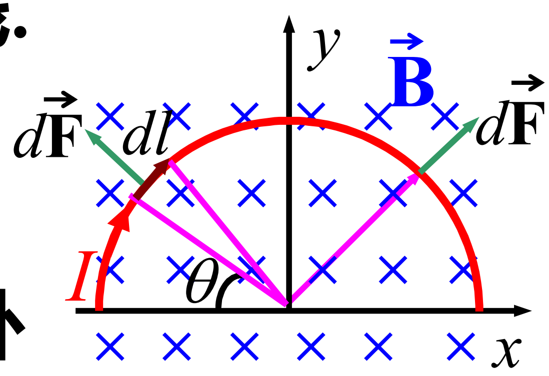
§ 4-5 Ampère定律

电流强度的单位“安培”的定义

规定：真空中两条平行长直载流导线通有相等的稳恒电流I，当二者相距一米、每根导线上每米长度受力为 $2\times10^{-7}\,N/m$ 时，则每根导线上的电流为1安培。即

$$I_1 = I_2 = I = \sqrt{2\pi a \cdot \frac{dF}{dl}\frac{1}{\mu_0}} = \sqrt{2\pi \cdot \frac{2\times 10^{-7}}{4\pi\times 10^{-7}}} = 1(A)$$

例: 如图, 均匀磁场中的半圆硬导线.
已知: $R, I, B \perp$ 导线平面. 求:$\vec{F}_m$



解：如图，取电流元 $Id\vec{l}$

则$dF_m = BIdl$，方向: 径向向外

由对称性, x方向合力为零,

$$F_m = \int_L dF_{m\,y}$$

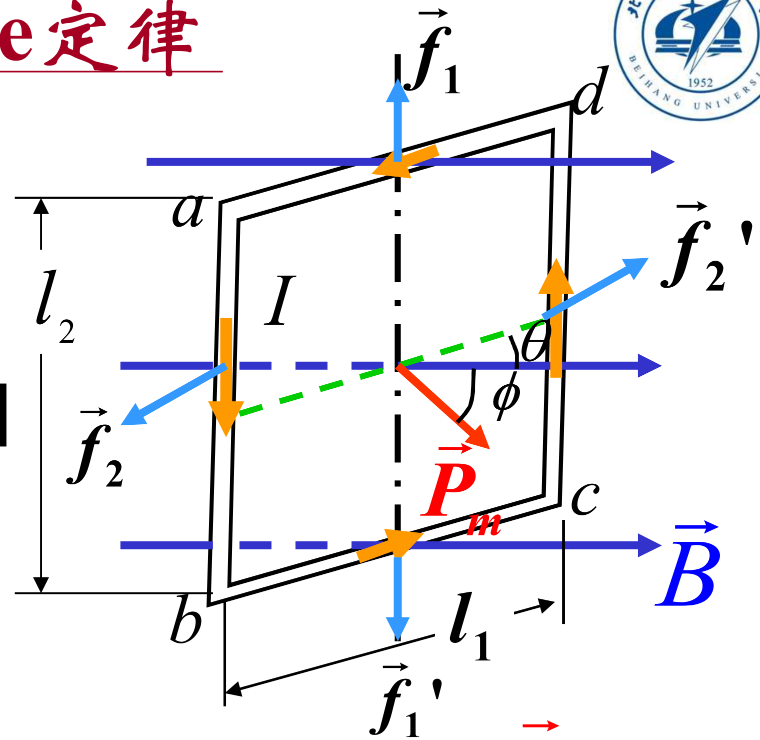
$$= \int_L BIdl\sin\theta$$

$$= \int_0^{\pi} BIR\sin\theta d\theta = 2BIR$$ 方向: ↑

• 对两端a、b在 x 轴上的任意曲线有 $F_m = BI\overline{ab}$

§ 4-5 Ampère定律

二. 磁场对载流线圈的作用



1. 匀强磁场中

匀强磁场中长方形通电线圈如图放置，

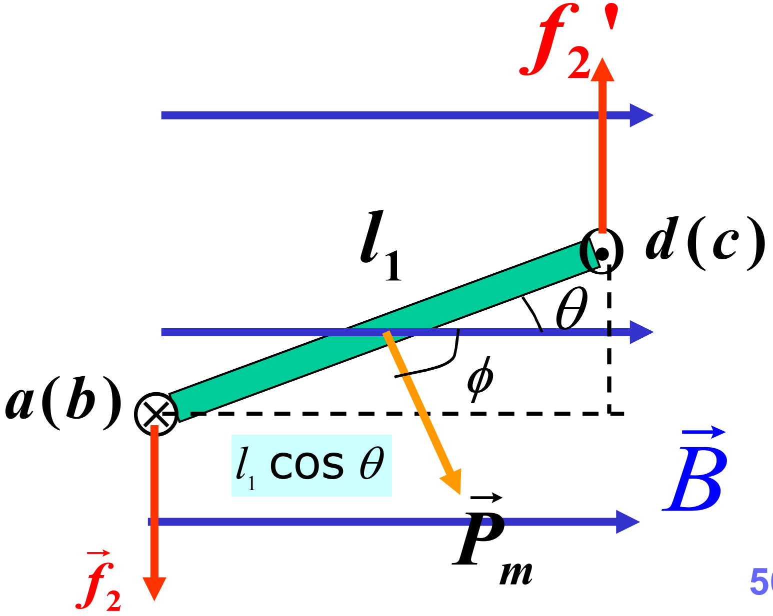
$\vec{f}_1$与$\vec{f}'_1$正好抵消．

$\vec{f}_2$与$\vec{f}'_2$**等值反向，但不在一条直线上，形成一对力偶：**

$$M = f_2 l_1 \cos\theta = BIl_2 \cdot l_1 \cos\theta$$

$$= BIS\cos\theta = P_m B\cos\theta$$

$$= P_m B\sin\phi$$

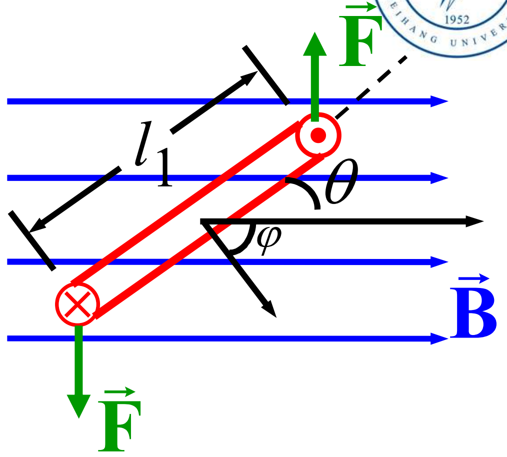


§ 4-5 Ampère定律

因此在**均匀磁场**中:(矩形线圈$l_1 \times l_2$)

合力为零，没有平动

有静力矩, **只有转动** 即: $\boxed{\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{p}}_m \times \vec{\mathbf{B}}}$



$\varphi = \pi/2, 0, \pi$ 时, $M = M_{\max}, 0$ (稳定), 0 (不稳)

磁力矩的作用是使线圈的磁矩转到磁场的方向

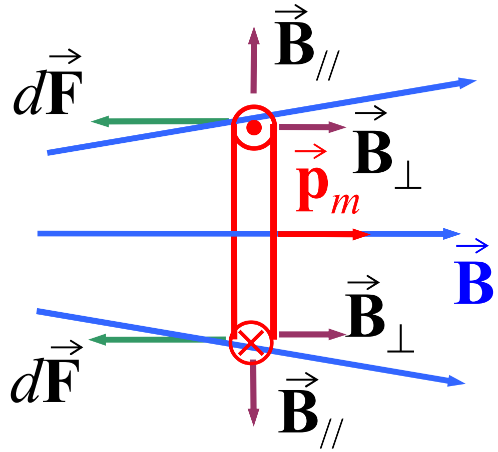
例: 磁电式电流计.

2. 非均匀磁场中: 转动 + 平动

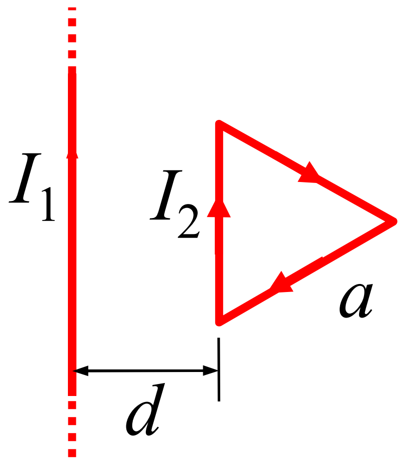
如图, 这时Idl和$B_{//}$作用

$\Rightarrow\ d\vec{F}\neq 0$

$\Rightarrow$ 平动(向B大的方向)



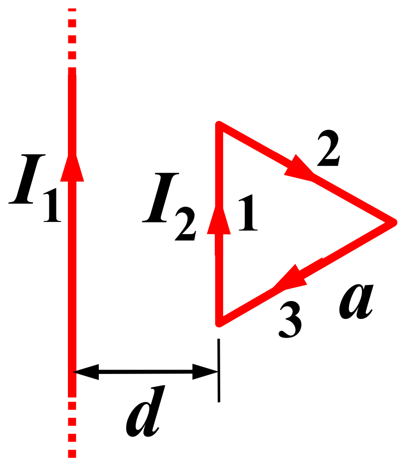
例: 如图,无限长载流直线 + 刚性正三角形线圈, 已知: a, d, I_1, I_2. 求线圈受力和对质心的力矩.



解: I_1场: $B=\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$; $\otimes$

1,2,3边受力:

$$F_1 = I_2 aB = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi d}$$ ；方向:←



$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^a \frac{\mathrm{d}l_2}{(d + l_2 \sin 60°)}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}a}{2d}\right) \qquad F_3 = F_2$$

合力 $\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i$

$$F = F_1 - 2F_2 \cos 60° = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\left[\frac{a}{2d} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}a}{2d}\right)\right]$$

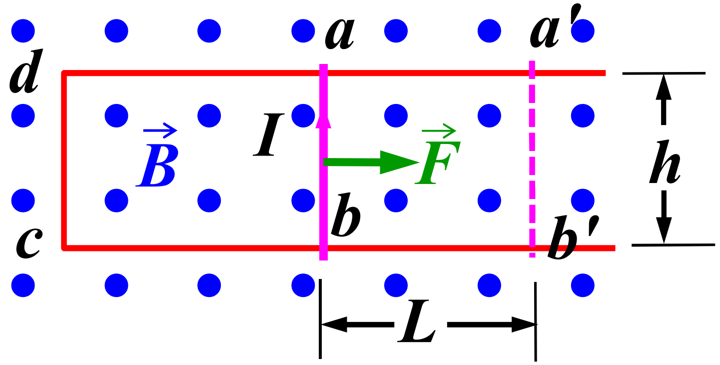
$\because$ $\vec{F}_1, \vec{F}_2 + \vec{F}_3$均过质心, $\therefore \vec{M} = 0$. 无转动.

非均匀场: $\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}\vec{p}_m \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{M} = 0$

§ 4-5 Ampère定律

三. 磁力的功

1. 导线在磁场中运动时，如图



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = BIh\mathrm{d}r$$

$$A = FL = BIhL$$

同时, 回路$abcd \to a'b'cd, \Phi_m$

$$\Delta\Phi_m = BhL \Rightarrow A = I\Delta\Phi_m$$

2. 导线在磁场中转动时，由 $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ 和力矩作功:

$$\mathrm{d}A = -M\mathrm{d}\varphi = -BIS\sin\varphi \mathrm{d}\varphi = BIS\mathrm{d}(\cos\varphi) = I\mathrm{d}\Phi_m$$

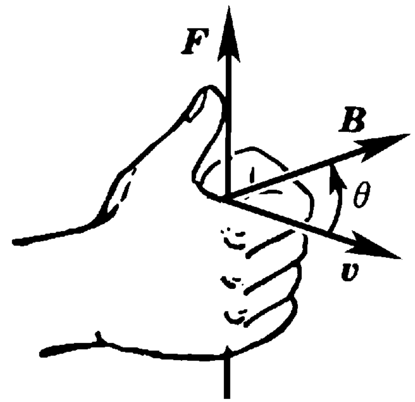
综上，$1+2 \;\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{d}A = I\mathrm{d}\Phi_m;\ A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I\mathrm{d}\Phi_m}$

§ 4-6. Lorentz力

一. Lorentz力

运动电荷在磁场中会受到

Lorentz力作用:



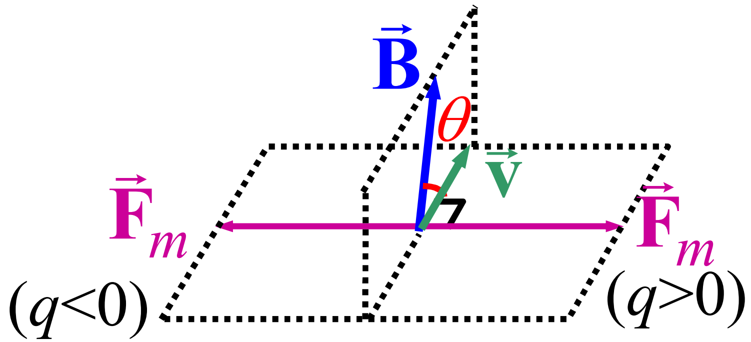
$$\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v}\times\vec{B}}$$

$$\vec{F}\perp\vec{v},\vec{F}\perp\vec{B}$$

⇒**磁力只偏转运动方向,**
不改变速度大小

⇒ **粒子动能不变.**

⇔ **Lorentz力恒不作功**



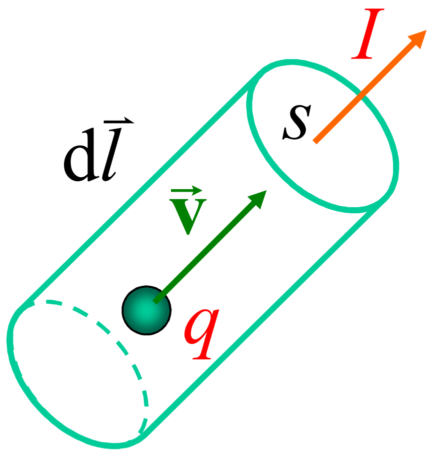
§ 4-6. Lorentz 力

- **安培力与洛伦兹力的关系**

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= nsqvd\vec{l} \times \vec{B} = dNq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{F}}{dN} = q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{f}$$



安培力是大量带电粒子洛伦兹力的叠加

§ 4-6. Lorentz 力

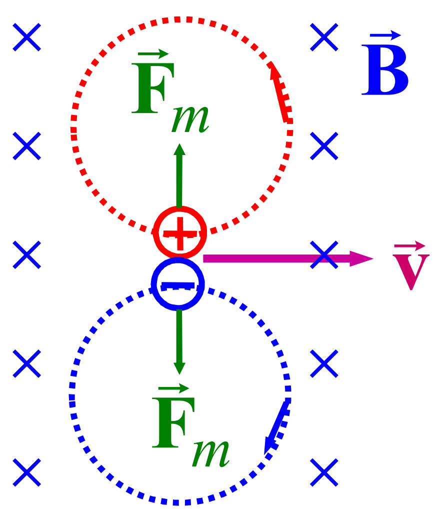
二. 带电粒子在均匀磁场中的运动

已知 $q, m, \vec{v}, \vec{B}$，**重力不计**(微观粒子：$F_m / F_{重} \sim 10^{14}$)

1. $\vec{v} \,//\, \vec{B}$:$\theta = 0$ 或 π $\Rightarrow$ $\vec{F} = 0$, **运动不受磁场影响.**

2. $\vec{v} \perp \vec{B}$ ：**这时** $F = qvB$ $\Rightarrow$ **匀速圆周运动, 如图**

$\vec{F}_m$ **提供向心力**: $qvB = \dfrac{mv^2}{R}$



轨道半径: $\boxed{R = \dfrac{mv}{qB}}$

周期: $\boxed{T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}}$

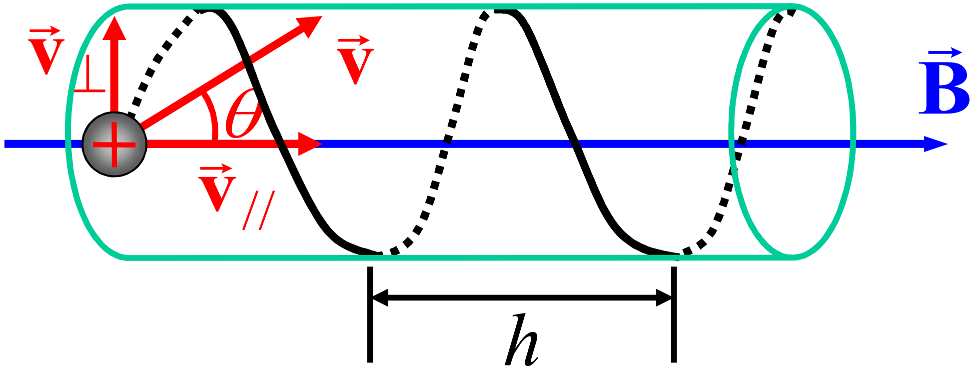
$\Rightarrow$ **磁捕获, 质谱(粒子识别)**

§ 4-6. Lorentz力

3. $\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 成θ角:

$\vec{v}$ 分解为// $\vec{B}$ 和⊥ $\vec{B}$,

⇔ 匀速圆周 + 匀速直线 = 螺旋运动



螺距: $h = v_{//} \cdot T = v_{//} \dfrac{2\pi m}{qB}$, 与θ无关!

磁聚焦: 发散角不太大, 速度大致相同, h相同, 经过T的整数倍, 重新会聚.

§ 4-6. Lorentz力

三. 带电粒子在非均匀磁场中的运动

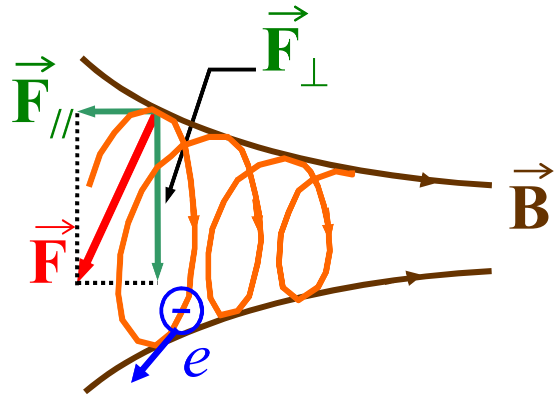
规律：绕磁场线作螺旋运动, 半径R与B成反比.

如图, 带电粒子向增强方向运动,

$R\downarrow \Rightarrow$ $\vec{F}$ **有反向分量**$\vec{F}_{//}$ $(\because \vec{F}\perp\vec{B})$

$\Rightarrow$ $\vec{B}$**方向减速-停止-反向加速**

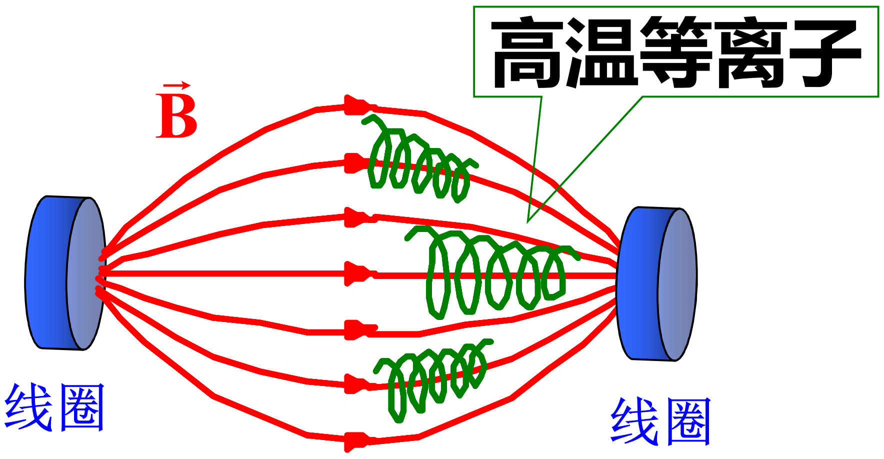
$\Rightarrow$ **回到弱** $\vec{B}$ **区域** $\rightarrow$ **"磁镜"** .



两端有磁镜⇒橄榄形

磁场分布⇒ "磁瓶"

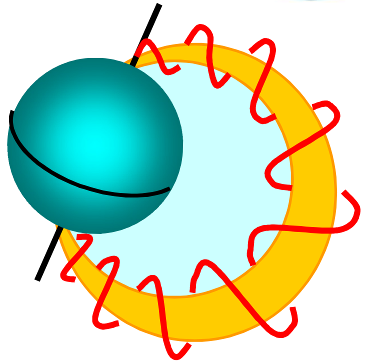
如：磁约束(如受控核聚变)

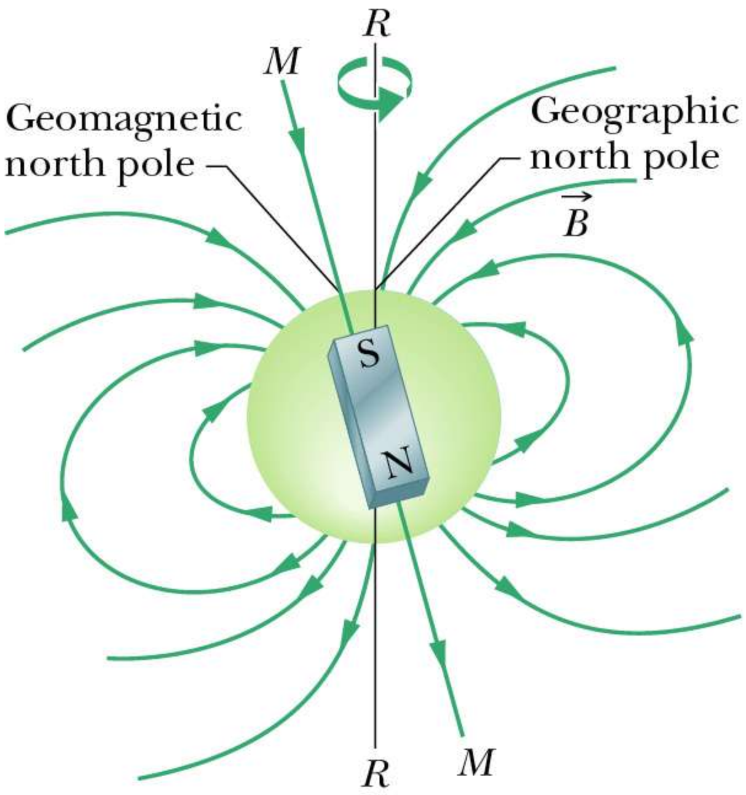


§ 4-6. Lorentz 力

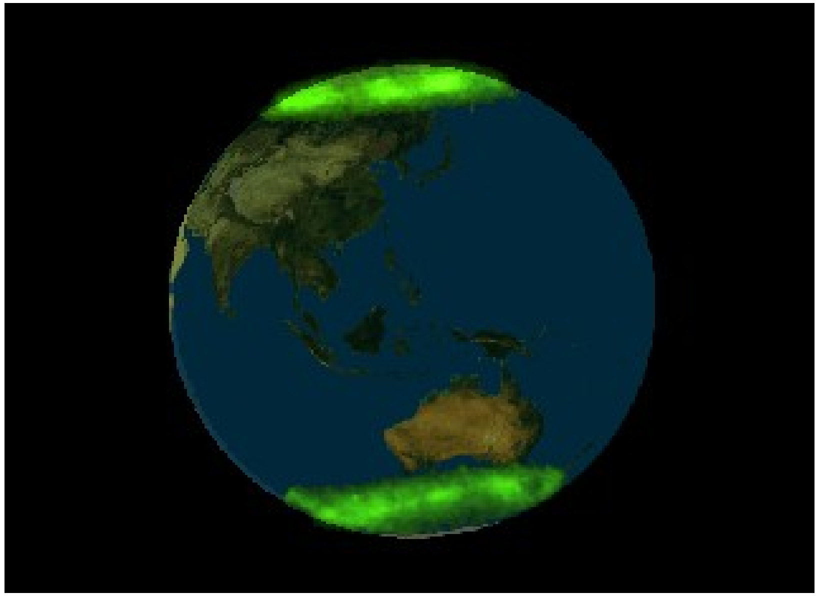
地球的磁约束效应 —— 天然磁瓶

地磁场的Van Allen辐射带和极光的形成.





地球自转轴与地磁场转动



2001年10月22日首次拍到
南北极光“同放光彩”

§ 4-6. Lorentz 力

出现在德国下萨可森州的极光景象

出现在美国北部的极光景象

出现在瑞典斯特哥尔摩的极光景象

§ 4-6. Lorentz力

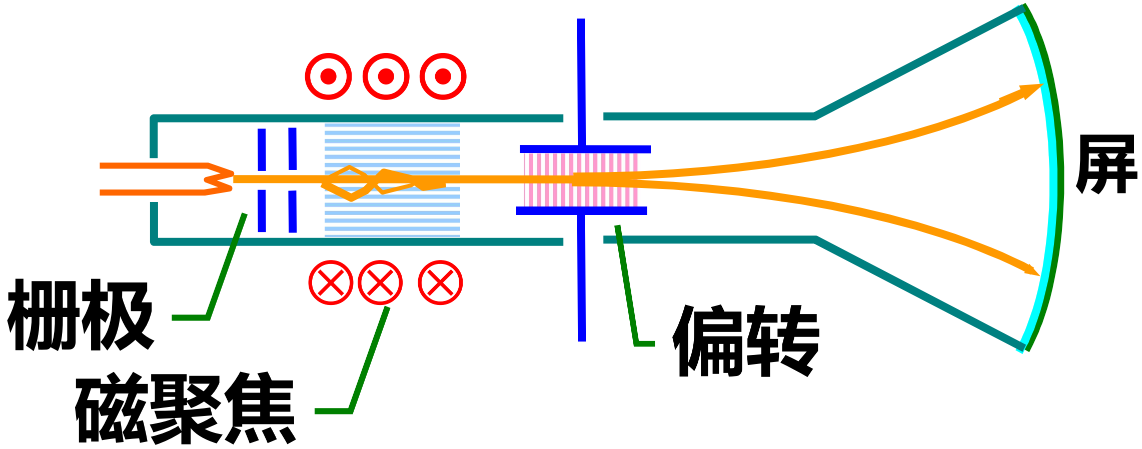
四． 带电粒子在电磁场中的运动

电力和磁力的合力:

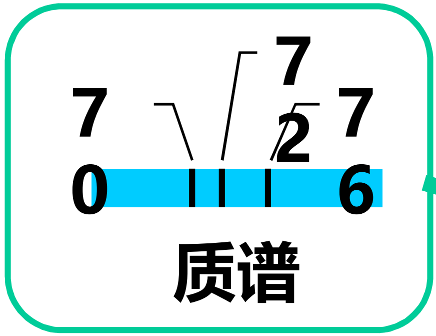
$$\boxed{\vec{F}=\vec{F}_e+\vec{F}_m=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}}$$

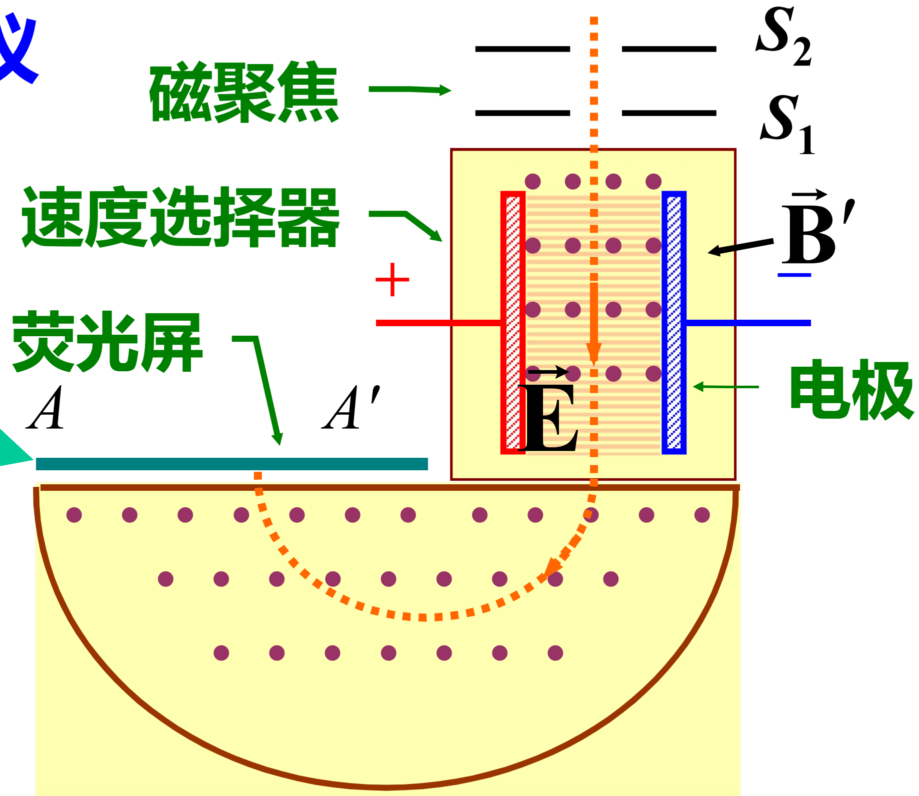
应用举例:

1. 阴极射线管（电磁透镜）



2. 速度选择器和质谱仪





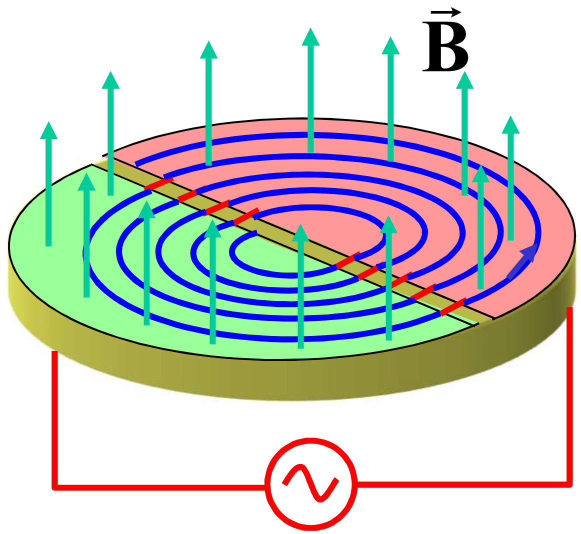
速度选择: $v = \dfrac{E}{B'}$

荷质比: $\dfrac{q}{M} = \dfrac{v}{RB} = \dfrac{E}{RBB'}$

§ 4-6. Lorentz 力

3. 回旋加速器

带电粒子经过空隙时，如电场方向正确，粒子获加速能量qV，



$$T = \frac{2\pi m}{qB},$$ 与v无关

$\Rightarrow$ 交变电压V的频率$f = 1/T$ 时粒子不断被加速.

$v\uparrow \rightarrow R\uparrow$, R达到一定数值时即可引出粒子束.

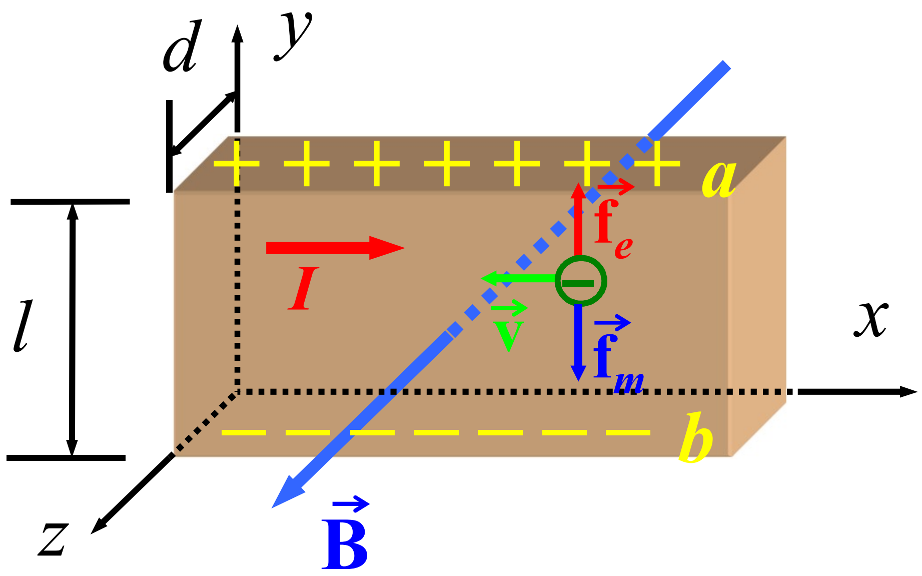
(相对论效应: $v\uparrow \Rightarrow m\uparrow$, 周期$T$将缓慢上升)

§ 4-6. Lorentz力

五. Hall效应

如图，导电板 $\perp \vec{B}$, 通I

$\Rightarrow$ ab侧产生电势差u_{ab}.



解释: $\vec{F}_m \Rightarrow$ 载流子偏转

$\Rightarrow$ ab面积累电荷 $\Rightarrow \vec{E}_{ab}$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_e \uparrow\downarrow \vec{F}_m \Rightarrow$ 达到u_{ab}时平衡: $qvB = qE = qu_{ab}/l$

设载流子浓度为n, 则 $I = qnvS = qnvld$

代入, 得: $\boxed{u_{ab} = \frac{1}{nq}\frac{IB}{d}}$

$K \equiv 1/nq$ —Hall系数

(可+可–, 与材料性质有关)

$q > 0$时， $u_a < u_b$; $q < 0$时， $u_a > u_b$

Hall效应的应用:

- 测定载流子的符号和浓度 (半导体技术等)
- 测磁场 、大电流 I 和功率P等
- 信号转换(磁电, 机电)

课后作业

课后习题：

4.2，4.3，4.6，4.9，4.12，4.13，4.14，4.15, 4.16，4.17，4.18，4.20，4.22，4.23

截止日期：2025-06-03 24:00

谢 谢！