§3 三重积分的定义与计算(1)

三重积分的概念与基本性质

设$f(x,y,z)$为定义在三维空间可求 体积的有界区域 V上的有界函数. 用若干光滑曲面所组成的曲面网 T来分割V, 把 V 分成n个小区域 $V_1, V_2, \cdots, V_n$. 以 $\Delta V_i (i=1,2,\cdots,n)$表示$V_i$的体积, $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{V_i\text{的直径}\}$. 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in V_i$,

作积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$.

定义3.1 设$f(x,y,z)$为定义在三维空间可求 体积的有界闭区域V上的函数，A是一个确定的常数．

如对$\forall\varepsilon>0$，都$\exists\delta>0$， 使得对于V的任何分割，无论$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in V_i$如何取， 只要$\|T\|<\delta$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i - A\right|<\varepsilon,$$

则称$f(x,y,z)$在V上可积，数A称为$f(x,y,z)$在V上的三重积分.

记为：$$A=\iiint\limits_V f(x,y,z)dV,$$

或 $$A=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

其中：$f(x,y,z)$-------被积函数，

x,y,z-------积分变量，

V-------积分区域.

当 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时，$\iiint\limits_V dV$ 在数值上等于 V 的体积.

可积性条件和性质，完全类似于二重积分情 形.

三重积分的可积性条件和相关性质与二重积分类似，例如

可积性条件

(1)有界闭区域上的连续函数必可积；

(2)有界闭区域V上的有界函数$f(x,y,z)$，若其不连续点集中在有限多个光滑曲面上，则$f(x,y,z)$在V上可积.

积分中值定理

设函数$f(x,y,z)$在有界闭区域 Ω上连续，则存在$(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V(\Omega)$$

其中$V(\Omega)$为区域Ω的面积 .

直角坐标系下三重积分的计算

直角坐标系中将三重积分化为三次积分

1. 长方体区域

定理3. 1 设 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ 上的三重积分存在，且对任意 $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]=D$, $g(x,y)=\int_e^h f(x,y,z)dz$ 存在，则积分 $\iint\limits_D g(x,y)dxdy$ 也存在，且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iint\limits_D dxdy\int_e^h f(x,y,z)dz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^h f(x,y,z)dz$$

定理3.2 设 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ 上的三重积分存在，且对任何 $x\in[a,b]$，$h(x)=\iint\limits_{D} f(x,y,z)dydz$ 存在，$D=[c,d]\times[e,h]$，则积分 $\int_a^b h(x)dx$ 也存在，且

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\iint\limits_{D} f(x,y,z)dydz$$
$$=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^h f(x,y,z)dz$$

若 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ 上连续,则

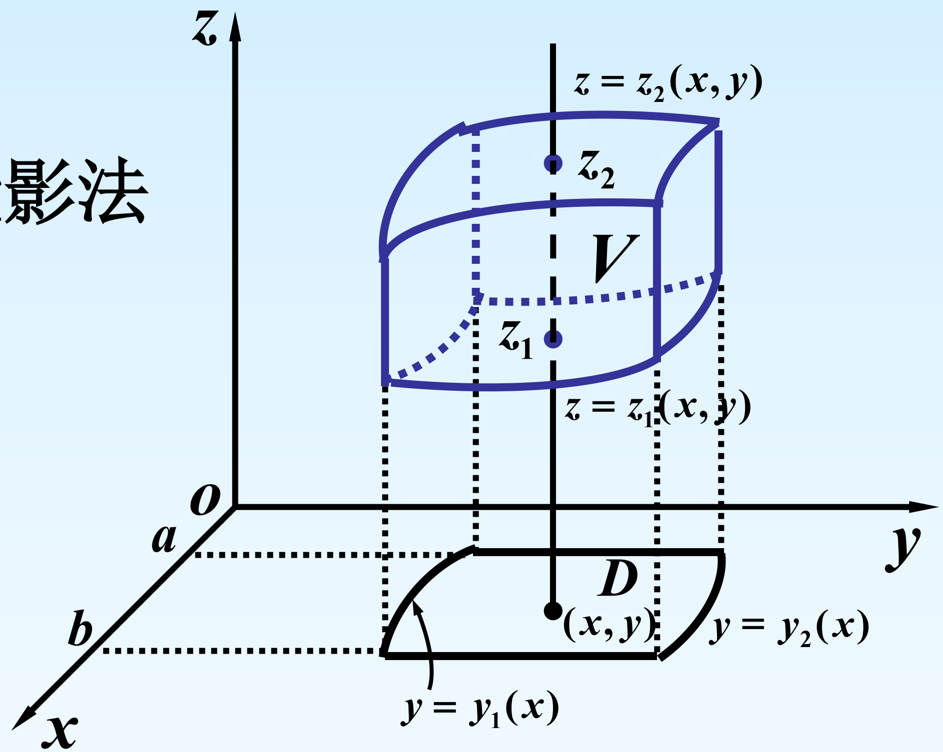
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_e^h f(x,y,z)dz$$

$$=\int_e^h dz\iint_D f(x,y,z)dxdy$$

$$=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^h f(x,y,z)dz$$

2. 一般区域

(1) "先一后二法"——投影法



特点：

平行于 z 轴且通过 D 的内点的直线与 V 的边界相交不多于两点.

$$V = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y),$$

$$y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\ \}$$

定理3.3 设 $f(x,y,z)$ 在 V 上连续，$z_1(x,y),z_2(x,y)$ 在 D 上连续，$y_1(x),y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

D 为 y 型区域，

$$=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

当 V 投影到 zx 平面或 yz 平面上时，结果类似.

例1 计算$\iiint\limits_V z\,dV$，其中V为由$x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$围成的区域.

解 $V = \{(x, y, z) \mid 0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$

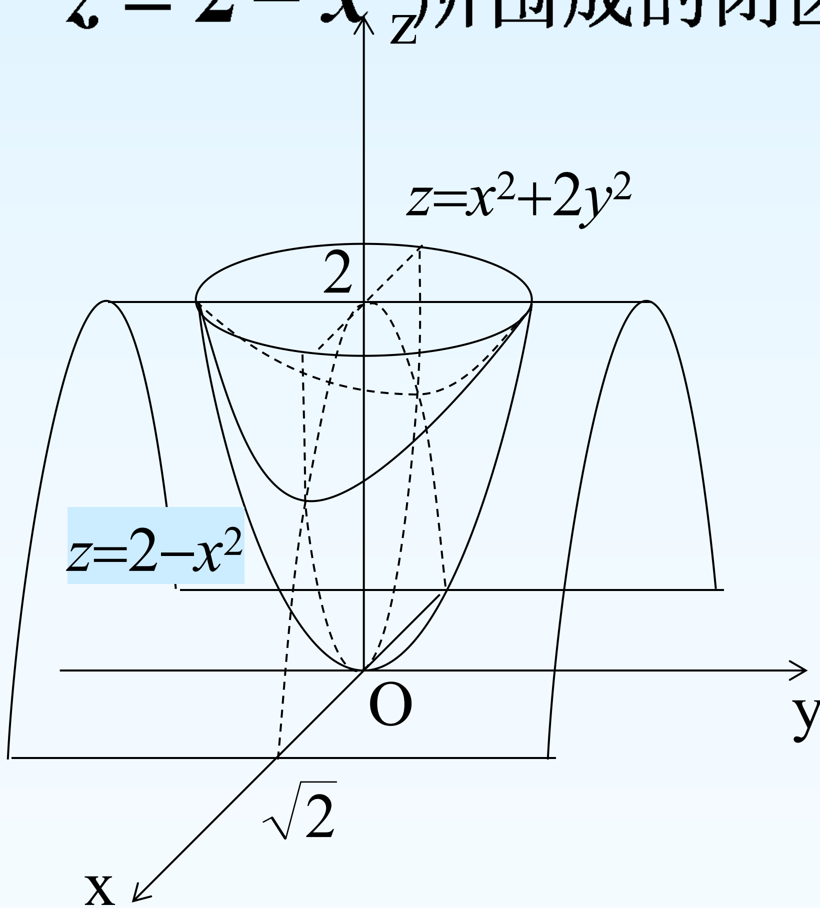
$0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \le x \le R\}$

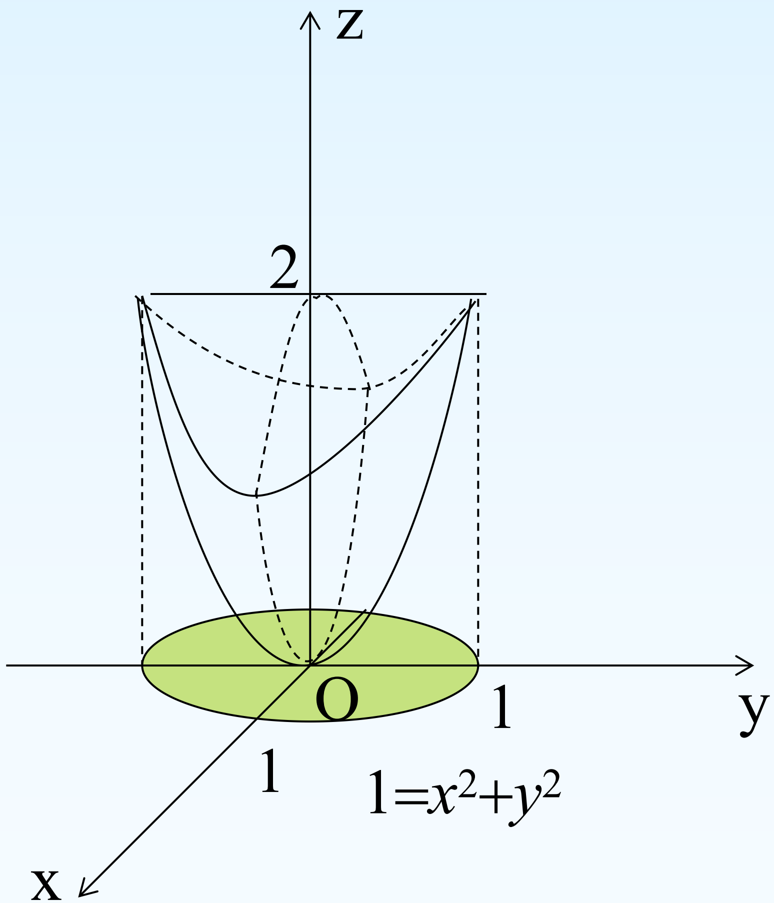
$$\iiint\limits_V z\,dV = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} (R^2 - x^2 - y^2)\,dy$$

$$= \cdots\cdots = \frac{1}{16}\pi R^4.$$

例 3 化三重积分 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域 V 为由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域.





解 由 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$，

得投影区域 $x^2 + y^2 \le 1$,

故 V: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ x^2 + 2y^2 \le z \le 2 - x^2 \end{cases}$

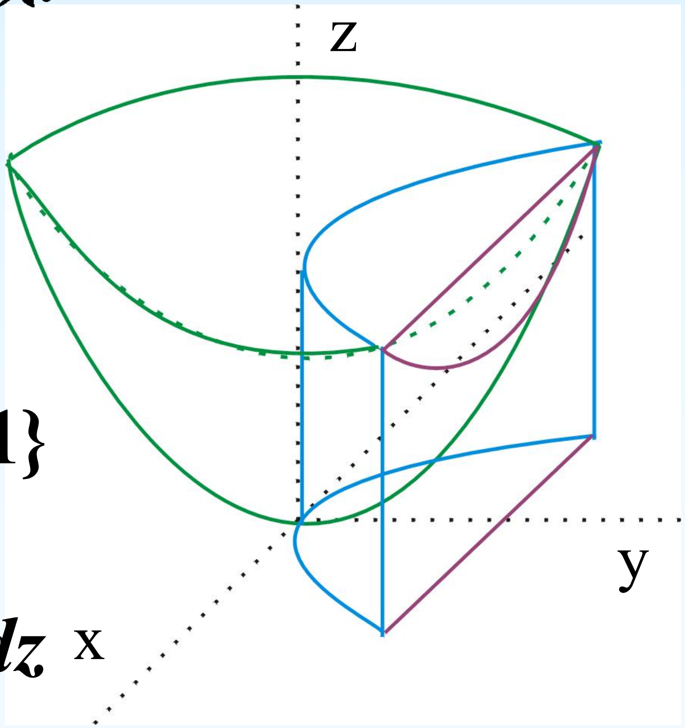
$$\therefore I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z) dz.$$

例 4 化 $I=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，

其中积分区域 V 为由曲面 $z=x^2+y^2,\ y=x^2,$

$y=1,\ z=0$ 所围成的空间闭区域.

解

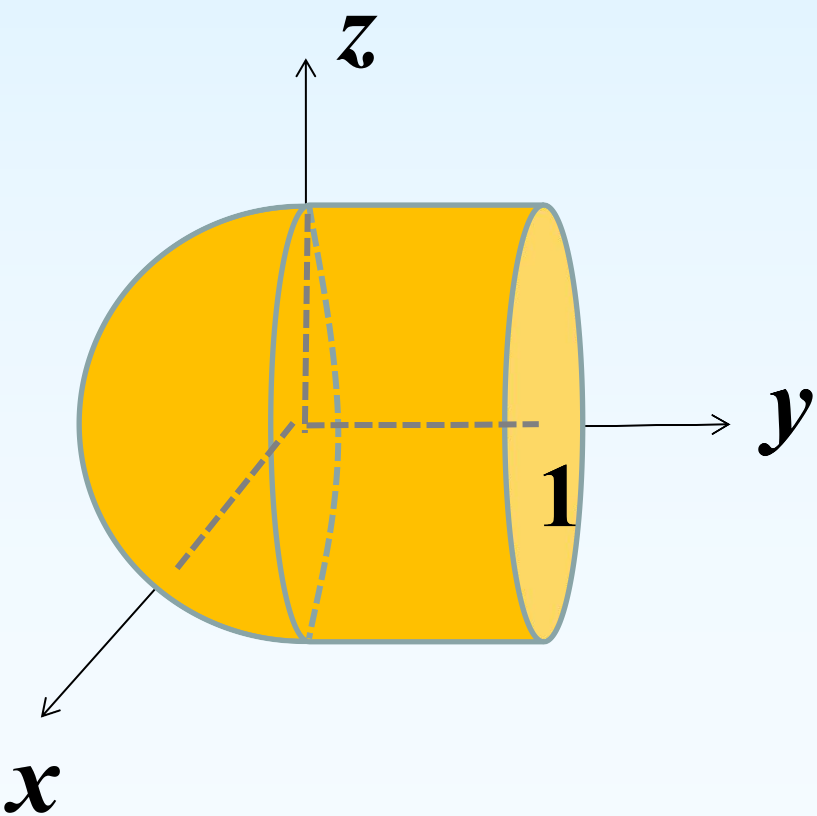


$$V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le x^2+y^2,$$

$$x^2\le y\le 1,\ -1\le x\le 1\}$$

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz$$

例 5 计算三重积分$\iiint\limits_V y\sqrt{1-x^2}dxdydz$，其中$V$由曲面$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$所围成.



解 将V向zx平面作投影， $D_{xz}: x^2+z^2\le 1$

$$\text{原式}=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\,dxdz\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,\frac{x^2+z^2}{2}\,dz$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left(x^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\,dx=\frac{28}{45}.$$

例6 证明

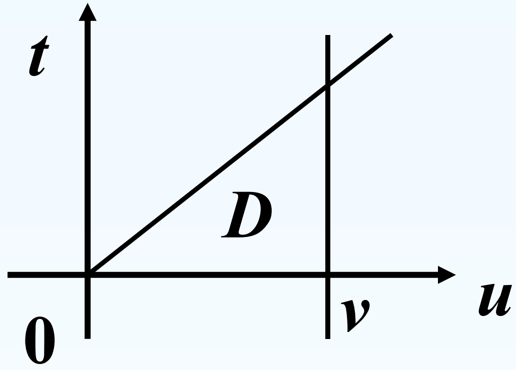
$$\int_0^x \left[\int_0^v \left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

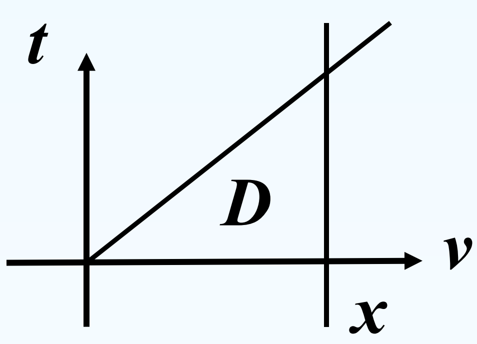
证 思路：从改变积分次序入手.

$$\because \int_0^v du \int_0^u f(t)dt = \int_0^v dt \int_t^v f(t)du = \int_0^v (v-t)f(t)dt,$$

$$\therefore \int_0^x \left[\int_0^v \left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv = \int_0^x dv \int_0^v (v-t)f(t)dt$$

$$= \int_0^x dt \underline{\int_t^x (v-t)f(t)dv} = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

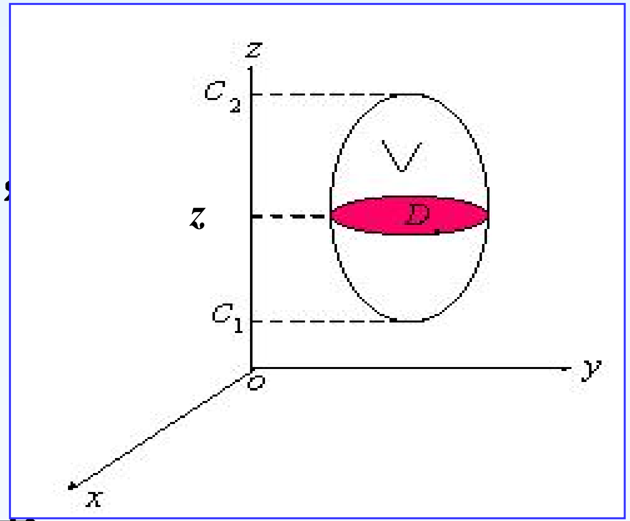




(2)“先二后一法”——截 面法

(a) 把积分区域V向某轴（例如 z 轴）投影，得投影区间$[c_1,c_2]$;

(b) 对$z\in[c_1,c_2]$用过点$(0,0,z)$且垂直于z轴的平面去截V，得截面D_z;



(c) 计算二重积分$\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$，

其结果为z的函数$F(z)$;

(d) 最后计算$\int_{c_1}^{c_2} F(z)dz$即得三重积分值.

定理3.3

设 $f(x,y,z)$ 在V上连续，则有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

当 V 向 x 轴，y轴投影时，有类似的结果.

例 7 计算三重积分$\iiint\limits_V zdxdydz$，其中V为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的闭区域.

解 $\iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z} dxdy,$

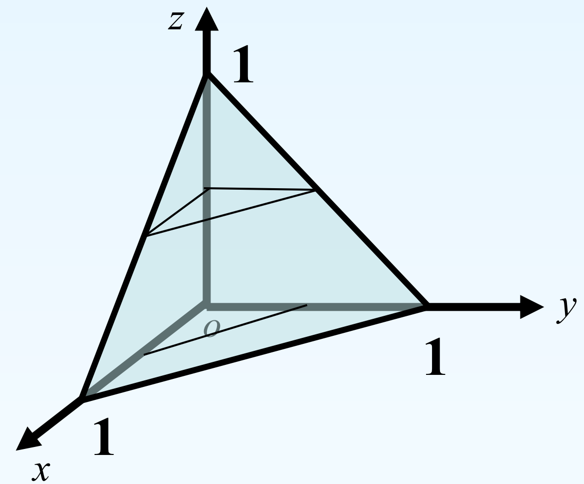
$$D_z = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1 - z\}$$

可化为三次积分 $\int_0^1 zdz\int_0^{1-z} dy\int_0^{1-y-z} dx$来求.

$$\because \iint\limits_{D_z} dxdy = \frac{1}{2}(1-z)(1-z)$$

$$\therefore \iiint\limits_V zdxdydz$$

$$= \int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2 dz = \frac{1}{24}.$$



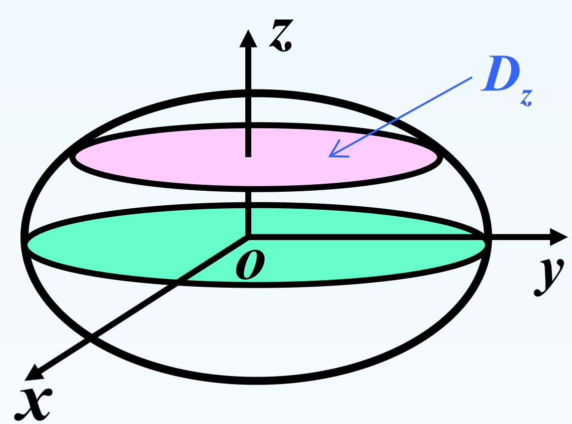
例8 计算三重积分 $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$，其中 V 是椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ 所围成的区域．

解 先二后一

$$V:\ \{(x,y,z)\,|\,-c\le z\le c,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\}$$

原式 $=\int_{-c}^{c} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy$，



$$D_z = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{z^2}{c^2}\}$$

$$\therefore \iint_{D_z} dxdy = \pi\sqrt{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} \cdot \sqrt{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}$$

$$= \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2}),$$

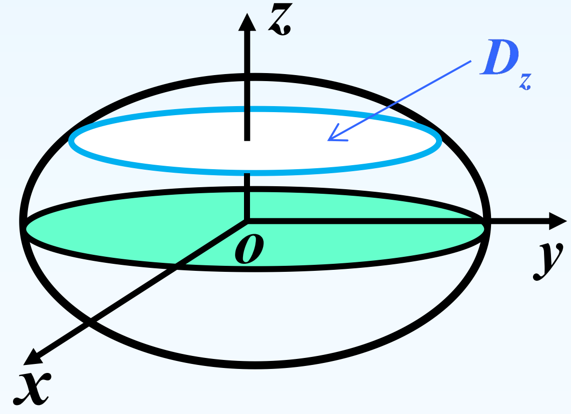
$$原式 = \int_{-c}^{c} \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2}) z^2 dz = \frac{4}{15}\pi abc^3.$$

先一后二

$$V=\{(x,y,z)\,|\,-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\le z\le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$$

$$原式=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} dxdy\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z^2dz$$



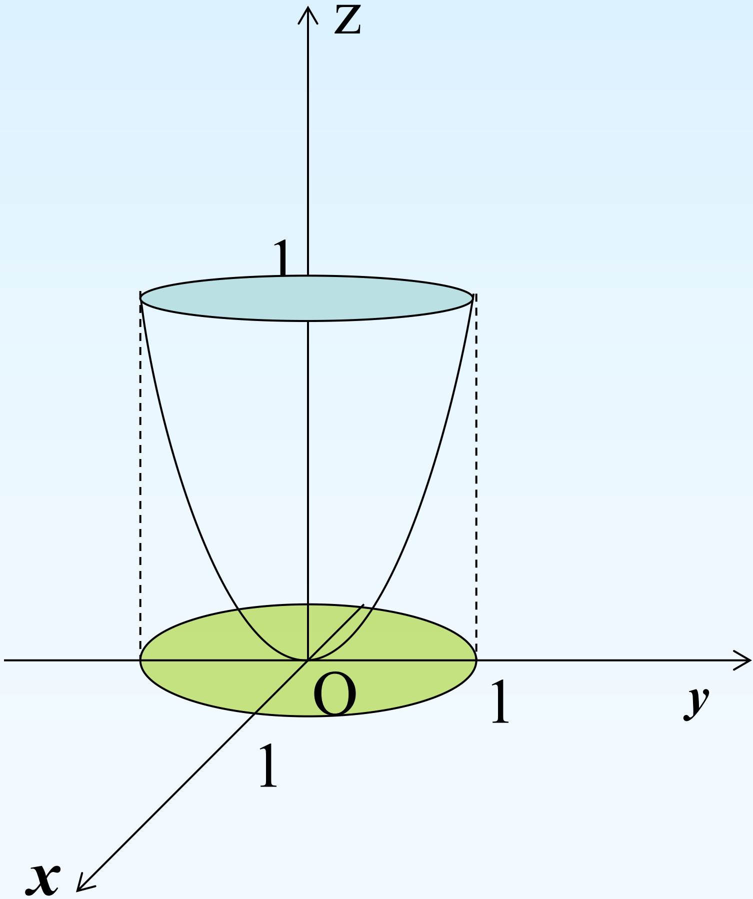
例9 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 所围成的闭区域.

解 先一后二

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

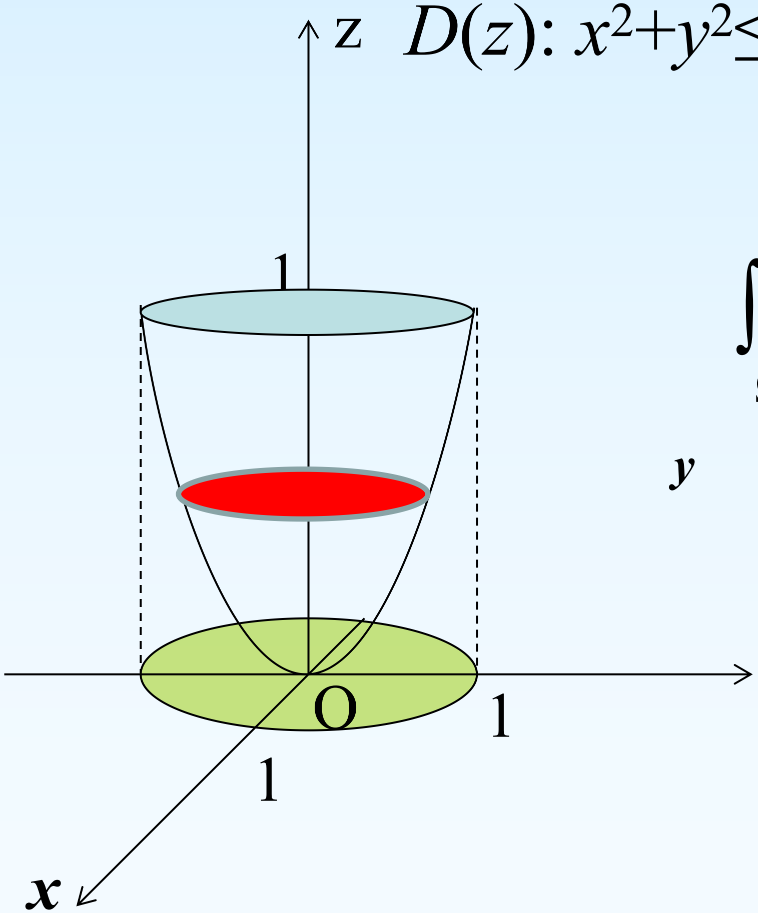
$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D} dxdy\int_{x^2+y^2}^{1} zdz$$

$$=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{D}\frac{(x^2+y^2)^2}{2}dxdy=\frac{\pi}{3}$$



先二后一　$0 \le z \le 1$

$D(z)$: $x^2+y^2 \le z$



$\pi(\sqrt{z})^2 = \pi z$

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 z\mathrm{d}z \boxed{\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi z\mathrm{d}z = \pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

小结

三重积分的概念和基本性质

直角坐标系下三重积分的计算

1. 长方体区域：化为三次积分

2. 一般区域：投影法 (先一后二法)

截面法 (先二后一法)