北京航空航天大学

2012－2013 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ） 》

(A 卷)

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
成 绩							
阅卷人							
校对人							

2013 年 01 月 17 日

一、 计算题（每题 5 分，满分 50 分）

1、 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}d\sqrt{x}$$
$$= 2\int \arctan\sqrt{x}\, d\arctan\sqrt{x}$$
$$= (\arctan\sqrt{x})^2 + C$$

建议：前面过程 4 分，结果 1 分（也可以先做变量代换 $t=\sqrt{x}$ ）

2 、 $\int \frac{x}{x^2-4x+5}dx$

$$\int \frac{x}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5} + 2\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + 2\arctan(x-2) + C$$

建议：分解成两个积分 3 分，结果 2 分

3、 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$， $x\in(0,+\infty)$，求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

$$f(\frac{1}{x}) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t}dt = \int_1^x \frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}\cdot(-\frac{1}{u^2})du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(u+1)}dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt - \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$$

$$f(x)+f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = \int_1^x \ln t d\ln t = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

建议： $f(\frac{1}{x})$ 换元两分，其他 3 分

4、 利用定积分定义求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\frac{1}{n+\sqrt{2n}}+\frac{1}{n+\sqrt{3n}}+\cdots\frac{1}{n+\sqrt{n\cdot n}})$.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}+\cdots\frac{1}{1+\sqrt{\frac{n}{n}}}) = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

$$令\sqrt{x}=t,即x=t^2,则dx=2tdt$$

$$\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{1}{1+t}2tdt=\int_0^1(2-\frac{2}{1+t})dx=2-2\ln(1+t)\Big|_0^1=2-2\ln 2$$

所以，原式=2-2ln2.

建议：写出对应的定积分 3 分，计算 2 分

5、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^{2013}+\sin^2 x)\cos xdx$

$$\text{原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xd\sin x=\frac{1}{3}\sin^3 x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

建议：对称性 2 分，其他 3 分

6、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^3}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{2x(1-\cos x)}$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{2x\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^3)\cdot 3x^2}{3x^2}=\frac{\pi}{4}$$

建议：变上限积分求导 2 分，其他 3 分

7、求曲线$\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$上相应于参数$t$从$0$到$\pi$的一段弧长.

$$\text{弧长}=\int_0^{\pi}\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}dt=\int_0^{\pi}tdt=\frac{\pi^2}{2}.$$

建议：弧长公式 2 分，其他 3 分

8、判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$的敛散性.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=4>1$$

$$\therefore 级数\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}发散.$$

建议：第一个等号 2 分，其他 3 分

9、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}))$的敛散性.

$\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$ ------------------------2 分

$\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$ ------------------2 分

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛知,$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}))$收敛.-----------------1 分

10、讨论广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$的敛散性.

$n>1$时，存在正数δ，满足$n-\delta>1$, 由

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^n}}{\frac{1}{x^{n-\delta}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{\delta}}=0$知广义积分收敛. ----------------3 分

$n<1$时，由

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^n}}{\frac{1}{x^n}}=+\infty$知广义积分发散 ---------------------2 分

二 、（本题 10 分）

设$f(x)$在[0，1]上有二阶连续导数，$f(0)=-f(1)$，证明

（1）$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx$

（2）$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{1}{12}\max_{0\le x\le1}|f''(x)|$

证明：（1）**由分部积分**

$\because\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx=x(x-1)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)(2x-1)dx$ ----------------2 分

$=-(2x-1)f(x)\Big|_0^1+2\int_0^1 f(x)dx$ ----------------2 分

$=2\int_0^1 f(x)dx$ ----------------1 分

$\therefore\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx.$

（2）**由（1）可得**

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\int_0^1 |x(x-1)||f''(x)|dx \le \frac{1}{2}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|\int_0^1 x(1-x)dx$$ ---------------3 分

$$=\frac{1}{12}\max_{0\le x\le 1}|f''(x)|$$ ---------------2 分

三、 （本题 15 分）

过点$(1,0)$作抛物线$y=\sqrt{x-2}$的切线，该切线与上述曲线及x轴围成一平面图形 A，求 A 的面积及其绕x轴旋转一周所成旋转体的体积。

解： 假设切点坐标为(x_0, y_0)，则由$\begin{cases} y_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x_0-1) \\ y_0=\sqrt{x_0-2} \end{cases}$解得$\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=1 \end{cases}$ --------------3 分

从而切线方程为$y=\dfrac{1}{2}(x-1)$.--------------2 分

切线与抛物线及x轴所围图形 A 的面积为$S=\int_1^3 \frac{1}{2}(x-1)dx-\int_2^3\sqrt{x-2}dx=\frac{1}{3}$ -----------5 分

A 绕x轴旋转一周所成旋转体的体积为$V=\pi\left[\int_1^3(\frac{x-1}{2})^2dx-\int_2^3\left(\sqrt{x-2}\right)^2dx\right]=\frac{\pi}{6}$ --------5 分

四、（本题 10 分）

设$f(x)$是$[1,+\infty)$上的单调且连续可微函数，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，如果$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\int_1^{+\infty} xf'(x)dx$收敛。

证明： $\int_1^{+\infty} xf'(x)dx = xf(x)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} f(x)dx$ -------------2 分

只需要证明在已知条件下$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$存在.

不妨假设$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减，由$\int_1^{+\infty} f(x)dx$收敛的 Cauchy 收敛定理

$\forall\varepsilon>0, \exists A>0, \forall A_1, A_2>A, \left|\int_{A_1}^{A_2} f(t)dt\right|<\varepsilon$.-------------4 分

特别取$\dfrac{x}{2}>A$，则由函数$f(x)$单调递减，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知对充分大的$x, f(x)\ge 0,$ 则

$\dfrac{x}{2}f(x)<\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt<\varepsilon$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.-------------4 分

得证！

五、（本题 15 分）

讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$ 的收敛性，如果收敛，要分析是绝对收敛还是条件收敛。

解： $p\le 0$时，通项$\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$当$n\to\infty$时不收敛于0，此时发散.----------2 分

$p>1$时，$\left|\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n\right|\le\frac{\mathrm{e}}{n^p}$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛及比较判别法知 ------------4 分

原级数绝对收敛.

（也可由$\left|\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n\right|\le\frac{1}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，$(1+\frac{1}{n})^n$单调有界，

由Abel判别法$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$收敛，从而原级数绝对收敛；）

$0<p\le 1$时，由Dirichlet判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$收敛；-----------2 分

而$\left|\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n\right|\ge\frac{\cos^2 n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1-\cos 2n}{2n^p}(1+\frac{1}{n})^n$，-----------2 分

对$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}(1+\frac{1}{n})^n$，$n\to\infty$时，$\frac{1}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n\sim\frac{\mathrm{e}}{n^p}$，$0<p\le 1$时发散；---------2 分

对$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n^p}(1+\frac{1}{n})^n$，由Dirichlet判别法知其当$0<p\le 1$时收敛；---------2 分

所以当$0<p\le 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n\right|$发散.

从而$0<p\le 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^p}(1+\frac{1}{n})^n$条件收敛.------------1 分

综上,原级数$p\le 0$时发散，$p>1$时绝对收敛，$0<p\le 1$时条件收敛.

六、 附加题（本题 10 分）

设函数当x充分大时可展开成$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\frac{a_n}{x^n}+\cdots$，式中$\{a_n\}$为非负有界数列，试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛当且仅当$a_0=a_1=0$.

证明：(1) 首先，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=0$,--------2 分

其中$f(n)=a_0+\dfrac{a_1}{n}+\dfrac{a_2}{n^2}+\cdots$

又$\{a_n\}$有界，则存在$M>0$, 使得$|a_n|\le M$,

从而$\left|\dfrac{a_1}{n}+\dfrac{a_2}{n^2}+\cdots\right|\le M\dfrac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\to 0(n\to\infty)$，所以$a_0=0$.-------2 分

若$a_1\ne 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{\frac{1}{n}}=a_1\ne 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$发散，矛盾！--------2 分

所以$a_0=a_1=0$.

(2) 若$a_0=a_1=0$，则n充分大时，$f(n)\le\dfrac{2M}{n^2}$.所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛.----4 分