§15.1 全微分与偏导数(2)

全微分的定义与计算

问题 对于一元函数，函数在某点可导表明函数在这一点连续；

对于多元函数，是否也能由某种性质保证函数的连续性？

一元函数微分学中,

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f_x(x_0)\Delta x$$

类似的，对于二元函数，我们有

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0) &\approx f_x(x_0,y_0)\Delta x \\ f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) &\approx f_y(x_0,y_0)\Delta y \end{aligned}$$

二元函数
对 x 和对 y 的**偏增量**

二元函数
对 x 和对 y 的**偏微分**

全增量的概念

如果函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，并设$P'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

为函数在点P对应于自变量增量$\Delta x,\Delta y$的全增量，记为Δz，

即 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$.

全微分的定义

如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义. 若函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全增量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$可以表示为$\underline{\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)}$，其中$A, B$不依赖于$\Delta x,\Delta y$而仅与$x_0,y_0$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$可微，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$的全微分，记为$dz$，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

函数若在某区域 D 内各点处处可微分，则称这函数在 D 内可微分.

如果函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微分，则函数在该点连续.

事实上 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z = 0$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \lim_{\rho\to 0}[f(x_0,y_0)+\Delta z]$$

$$= f(x_0,y_0)$$

故函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

定理 1（必要条件） 如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微分，则该函数在点(x_0,y_0)的两个偏导数必存在，且函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全微分为

$$dz=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

证 如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$可微分,

$$P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in P\text{的某个邻域}$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

当$\Delta y=0$时，上式仍成立， 此时$\rho=|\Delta x|$,

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|),$$

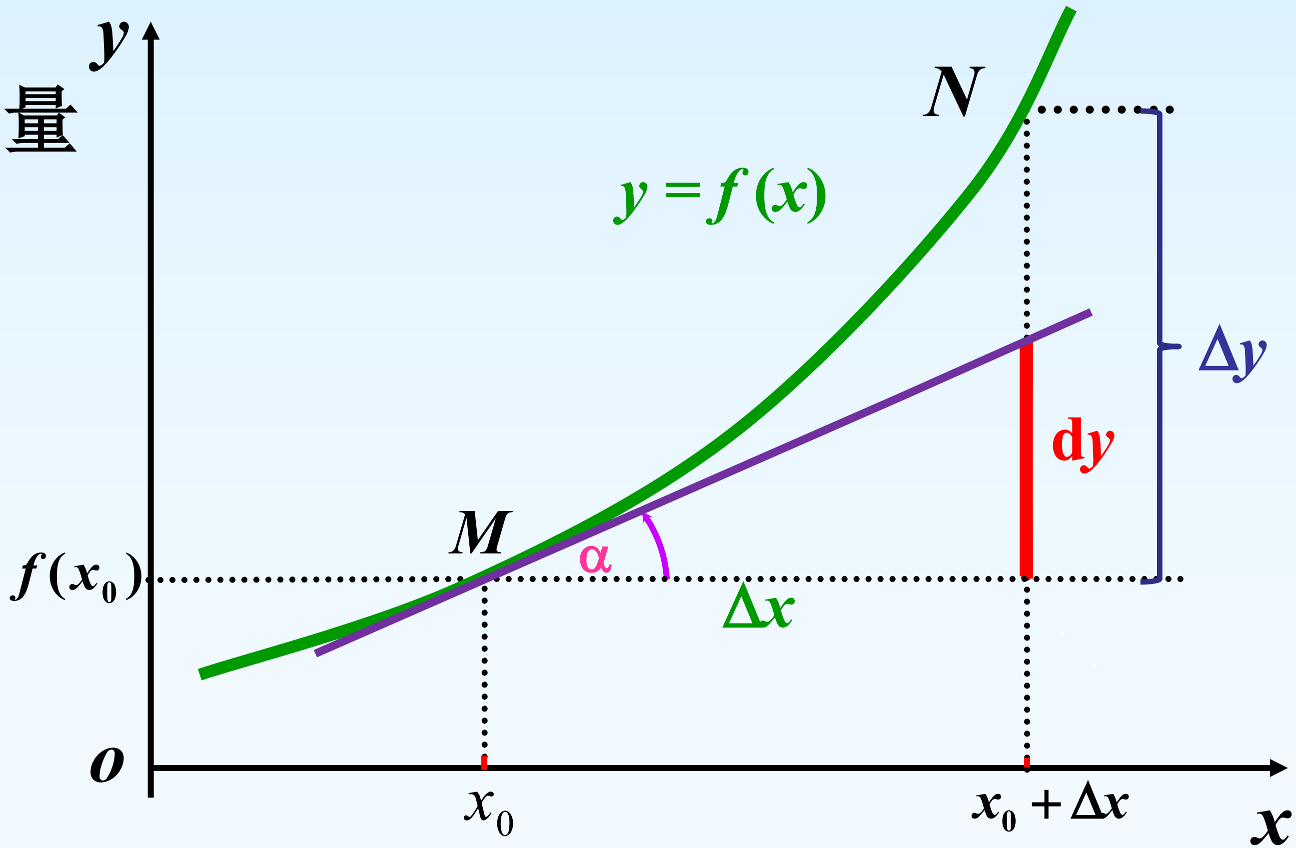
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A=f_x(x_0,y_0),$$

同理可得 $B=f_y(x_0,y_0)$.

微分的几何意义

切线纵坐标的增量

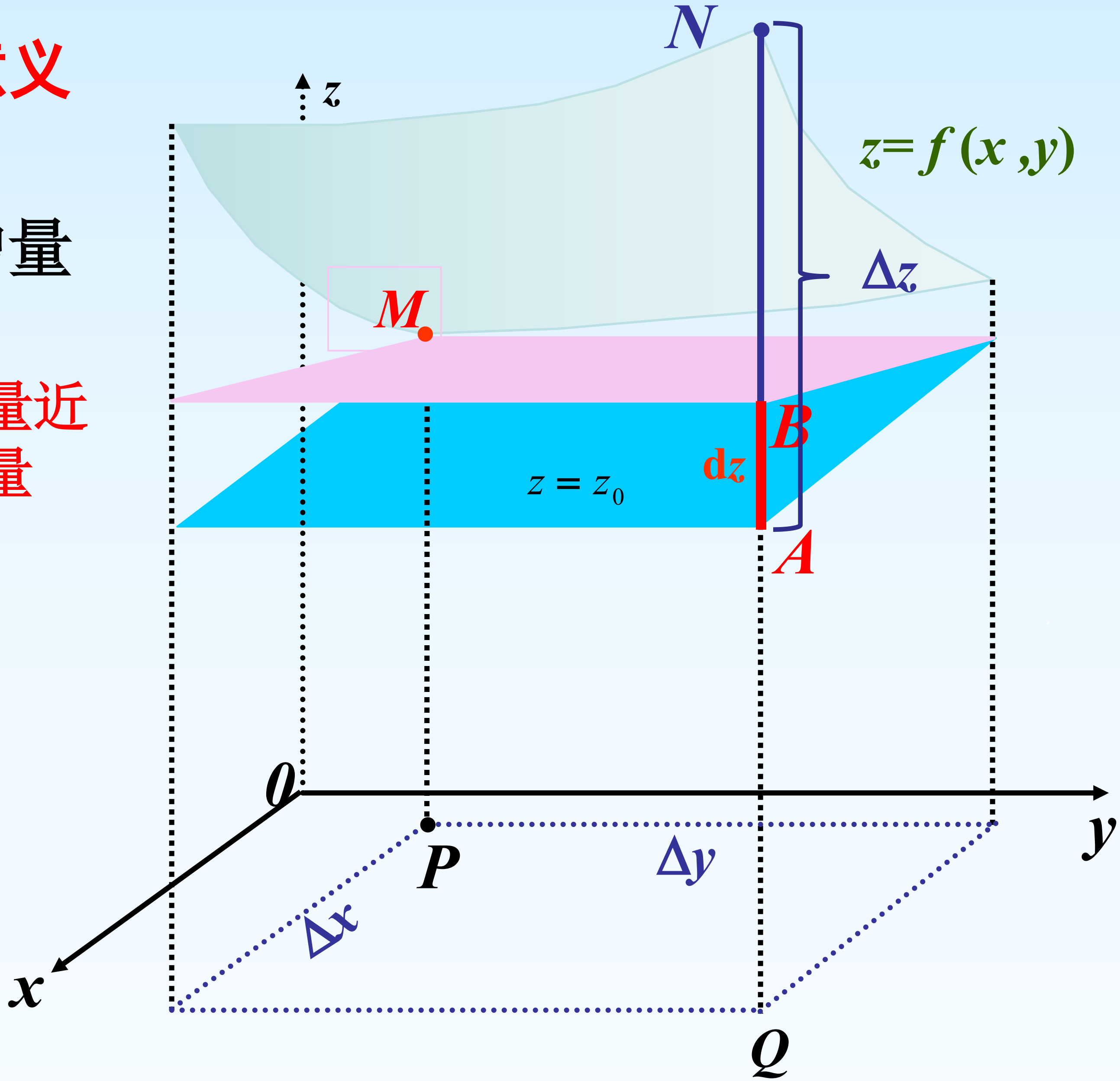
用切线增量
近似曲线增量



全微分的几何意义

切平面立标的增量

用切平面立标的增量近似曲面立标的增量



一元函数在某点的微分存在 $\Longleftrightarrow$ 导数存在.

多元函数的全微分存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 各偏导数存在.

例如，

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

在点(0,0)处有

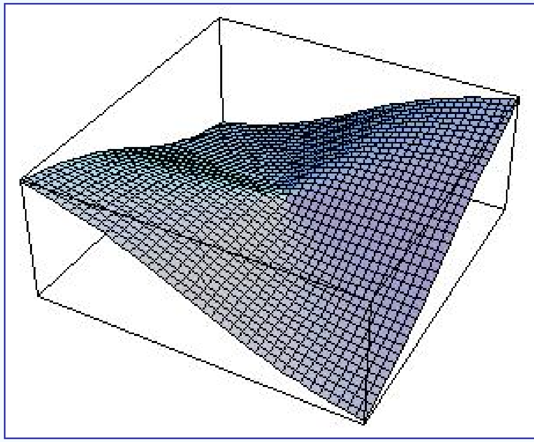
$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)}}=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\lim_{\substack{\Delta y=k\Delta x\\ \Delta x\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{k}{1+k^2}$$,随着k不同极限不同

所以$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)}}$不存在,

函数$f(x,y)$在$(0,0)$点不可微.



定理２（充分条件） 如果函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域存在偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，且两偏导数在点$(x_0,y_0)$连续，则该函数在点$(x_0,y_0)$可微分.

证

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
&= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - \underline{f(x_0, y_0+\Delta y)}] \\
&\qquad + [\underline{f(x_0, y_0+\Delta y)} - f(x_0,y_0)],
\end{aligned}
$$

在第一个方括号内，应用拉格朗日中值定理

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)$$

$$=f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x \qquad (0<\theta_1<1)$$

$$=(f_x(x_0, y_0)+\varepsilon_1)\Delta x$$ （依偏导数的连续性）

其中ε_1为Δx，Δy的函数,

且当$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$时，$\varepsilon_1\to 0$.

同理 $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2)\Delta y,$

当$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$时,$\varepsilon_2\to 0.$

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x+ f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y$$

$$\because \quad \left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right| \le |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2| \xrightarrow{\rho\to 0} 0,$$

故函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微

注 定理条件可以减弱为一个偏导连续，另一个偏导存在即可.

注 1、习惯上，记全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$

2、全微分的定义可推广到三元及三元以上函数

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

3、当函数可微时，其偏导数不一定连续.

4、多元初等函数若在定义域内存在偏导数，则在定义域内可微.

例 1 计算函数$z=e^{xy}$在点$(2,1)$处的全微分.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^{2}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^{2},$$

所求全微分 $dz=e^{2}dx+2e^{2}dy.$

例 2 求函数 $z = y\cos(x-2y)$，当 $x=\dfrac{\pi}{4}$， $y=\pi$，$dx=\dfrac{\pi}{4}$， $dy=\pi$ 时的全微分.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -y\sin(x-2y)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} = -\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos(x-2y) + 2y\sin(x-2y)$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\pi$,

$$\left. dz\right|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} dy = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi(4-7\pi).$$

例 3 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz},$

$\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz},$

所求全微分

$$du = dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)dy + ye^{yz}dz.$$

例 4 试证函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$ 在

点(0,0)连续且偏导数存在，但偏导数在点(0,0)不连续，而 f 在点(0,0)可微.

证 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 = f(0,0)$,

故函数在点(0,0)连续,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同理 $f_y(0,0)=0.$

$$f_x(x,y)$$

$$=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \qquad (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

当点$P(x,y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to0}} f_x(x,y)=\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right),$$

不存在. 所以$f_x(x,y)$在$(0,0)$点重极限不存在,

从而不连续.

同理可证$f_y(x,y)$在$(0,0)$不连续.

$$\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

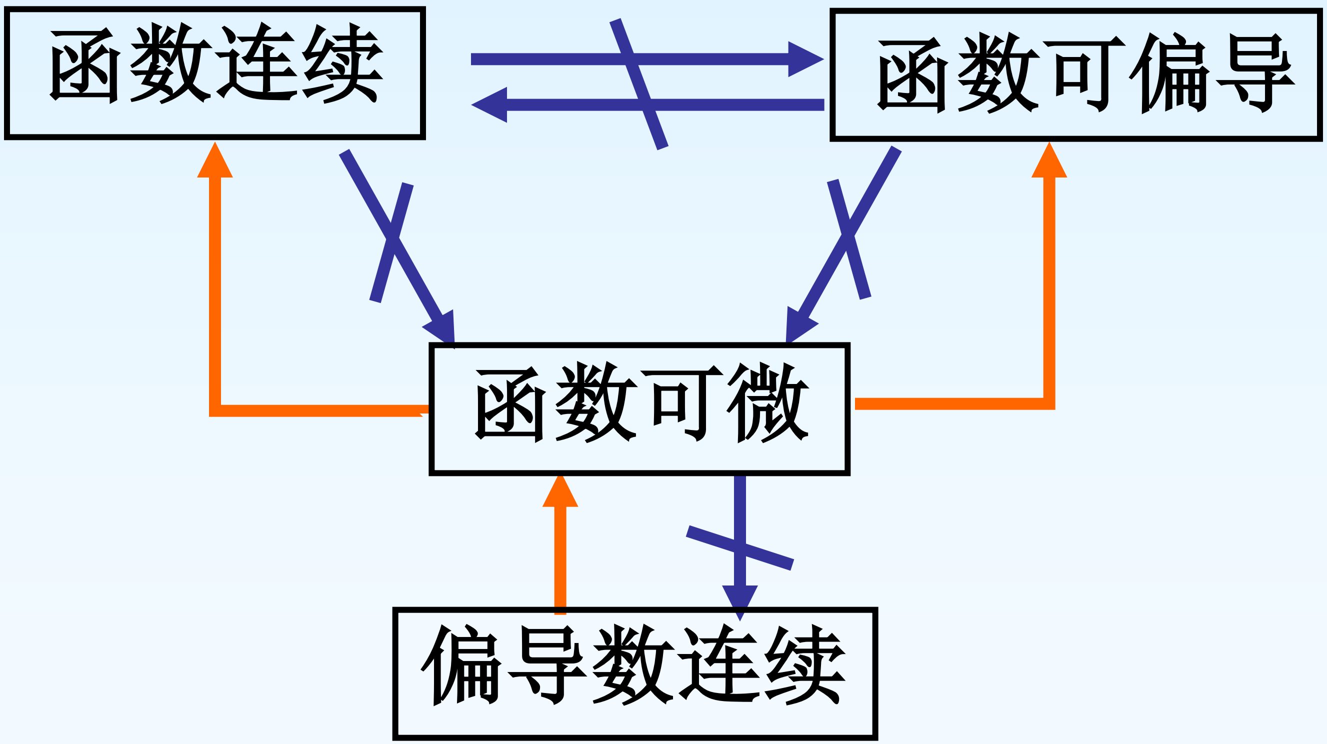
$$= \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$= \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$\to 0 \qquad\qquad (\rho \to 0)$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微 $\quad df\big|_{(0,0)} = 0.$

多元函数连续、可偏导、可微的关系



全微分在近似计算中的应用

当二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 可微，

则有 $\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho)$.

当 $|\Delta x|, |\Delta y|$ 都较小时，有近似等式

$$\Delta z \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

也可写成

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

或 $f(x, y) \approx \underline{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$.

函数的近似表示

例 5 计算$(1.04)^{2.02}$的近似值.

解 设函数 $f(x, y) = x^y$.

取 $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ \Delta x = 0.04,\ \Delta y = 0.02$.

$\because \quad f(1,2) = 1,$

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \ln x,$$

$$f_x(1,2) = 2, \qquad f_y(1,2) = 0,$$

由公式 $f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$

$$(1.04)^{2.02} \approx 1 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08.$$