北京航空航天大学

2021－2022 学年第一学期期中

试卷

考试课程 工科数学分析（I）　　任课老师________________

班级______________ 学号______________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									
校对人									

2021 年 12 月 5 日

一．单项选择题（每小题 4 分，本题 20 分）

1. 若 $x \to 0$ 时，$x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$ （ C ）

(A) 1;　　　　(B) 2;

(C) 3;　　　　(D) 4.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,下列命题**错误**的是(D)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$;

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2x}$ 存在,则 $f(0)=0$;

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$存在;

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

3. 设函数 $f(x)=(1-x^2)(2-x^2)(3-x^2)\cdots(2021-x^2)$，则 $f'(-1)=$(C)

(A) $2020!$;　　　　(B) $2021!$;

(C) $2(2020!)$;　　　　(D) $-2(2021!)$.

4. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y - xy - e = 0$ 确定,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=$(B)

(A) $\dfrac{1}{e}$;　　　　(B) $\dfrac{2}{e}$;

(C) 2;　　　　(D) -2.

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$，则 $f(x)$ 的可去间断点的个数为(C)

(A) 1;　　　　(B) 2;

(C) 3;　　　　(D) 无穷多个.

二．计算证明题（每小题 5 分，本题 30 分）

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\ (a \neq 0)$，用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{a}$.

证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\ (a \neq 0)$，由极限定义，

对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in N^*$, 当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \dfrac{a^2}{2}\varepsilon$.

特别地，对 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$，存在 $N_2 \in N^*$，当 $n > N_2$ 时，$|x_n - a| < \dfrac{|a|}{2}$，从而 $|x_n| > \dfrac{|a|}{2}$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，$\left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{|x_n||a|} < \dfrac{2}{a^2}|x_n - a| < \varepsilon.$

由极限定义可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{a}$.

2. 求函数 $f(x) = x^2 3^x + \ln(1+2x)$ 在 $x = 0$ 点的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

解：$(x^2 3^x)^{(n)} = (3^x)^{(n)} x^2 + C_n^1 (3^x)^{(n-1)} (x^2)' + C_n^2 (3^x)^{(n-2)} (x^2)''$

$$= x^2 3^x (\ln 3)^n + 2nx 3^x (\ln 3)^{n-1} + n(n-1) 3^x (\ln 3)^{n-2}$$

$$(\ln(1+2x))^{(n)} = \frac{2^n (-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+2x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(\ln 3)^{n-2} + 2^n (-1)^{n-1} (n-1)!$$

3. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \dfrac{t}{2}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

4. 已知 $f(1)=0,\ f'(1)=1$，求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$$=3\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}\right]$$

$$=3f'(1)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\cos x-1}{x^2}\right)=\frac{3}{2}f'(1)=\frac{3}{2}$$

5. 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{e^x-1}\right]}$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\dfrac{1}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{-\frac{1}{2}}$

6. 讨论 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 的一致连续性，并给出依据.

解一：$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|=\left|x_1\sin\frac{1}{x_1}-x_1\sin\frac{1}{x_2}+x_1\sin\frac{1}{x_2}-x_2\sin\frac{1}{x_2}\right|$$

$$\le|x_1|\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|+\left|\sin\frac{1}{x_2}\right||x_1-x_2|\le|x_1|\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|+|x_1-x_2|$$

$$\le\left(1+\frac{1}{|x_2|}\right)|x_1-x_2|\le 2|x_1-x_2|$$

所以对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当$|x_1-x_2|<\delta$时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

函数$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上一致连续.

解二：由于$f'(x)=\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)'=\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$, 可知$|f'(x)|\le 2,\ x\in(1,+\infty)$

由Lagrange中值定理知, 对$\forall x_1,x_2\in(1,+\infty)$,存在介于$x_1,x_2$之间的$\xi$,使得

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)(x_1-x_2)|\le 2|x_1-x_2|$

所以对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当$|x_1-x_2|<\delta$时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

所以函数$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上一致连续.

三．证明题（本题 8 分） 已知 $x_0=1, x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4}(n=0,1,2,\cdots)$，叙述 Cauchy 收敛原理并用它证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

1）解　Cauchy 收敛原理　数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是数列 $\{x_n\}$ 是基本列。 1 分

2）证明：

(1) 用归纳法易知： $0\le x_n\le\dfrac{1}{4}, n=1,2,\cdots$

$0\le x_1=\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{4}$ 成立,

设 $0\le x_n\le\dfrac{1}{4}$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{4+x_n^3}\le\dfrac{1}{4+0}=\dfrac{1}{4}$,

$x_{n+1}=\dfrac{1}{4+x_n^3}\ge\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4}}=0$, $\therefore$ $0\le x_n\le\dfrac{1}{4}$.

2 分

$$(2)\ |x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{1}{4+x_n^3}-\frac{1}{4+x_n^3}\right|=\frac{|x_n-x_{n-1}||\,x_n^3+x_nx_{n-1}+x_{n-1}^3\,|}{(4+x_n^3)(4+x_{n-1}^3)}$$

$$\le\frac{|x_n-x_{n-1}|}{4\cdot 4}3\bullet\left(\frac{1}{4}\right)^2\le\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$

$$\le\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\cdots\le\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|<\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2^n},$$

2 分

$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$|\boldsymbol{x}_{n+p}-\boldsymbol{x}_n|=\left|\sum_{k=1}^{p}(\boldsymbol{x}_{n+k}-\boldsymbol{x}_{n+k-1})\right|\le\sum_{k=1}^{p}|\boldsymbol{x}_{n+k}-\boldsymbol{x}_{n+k-1}|<\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^{n+k-1}}$$

$$<\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}\le\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

2 分

即：$\{x_n\}$ 是基本列.

所以数列 $\{x_n\}$ 收敛。 1 分

四. 计算证明题（本题 10 分） 已知 $x_0 = 1, x_{n+1} = \arctan x_n (n = 0,1,2,\cdots)$

1）证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限；2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n$.

1）证明

用归纳法易知： $0 < x_n < \dfrac{\pi}{2}, n = 1,2,\cdots$ 1 分

记 $f(x) = x - \arctan x$, 则 $f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} \geq 0$, 且只有 $f'(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 严格单增。

1 分

所以 $f(x) \geq 0$, 即 $x \geq \arctan x$. 所以 $x_n = \arctan x_n \leq x_n$。 1 分

又 $\{x_n\}$ 有界，故 $\{x_n\}$ 有极限，设为 C。 1 分

两边取极限得 $C = \arctan C$.

由前 $f(x)$ 严格单调递增，且 $f(0) = 0$, 故 $C = 0$. 1 分

2）解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}}{1}$$ 1 分

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2 - x_n^2}{x_n^2 x_{n-1}^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2 - (\arctan x_{n-1})^2}{(\arctan x_{n-1})^2 x_{n-1}^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - (\arctan x)^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x - 2(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x + 2x^3 - 2(\arctan x)}{4x^3}$$

3 分

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2 + 6x^2 - 2\frac{1}{1+x^2}}{12x^2} = \frac{2}{3}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 1 分

五．证明题（本题 8 分） 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导,证明若满足

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

证明　若 $f(x)\equiv A$,则$\forall\xi\in(a,+\infty), f'(\xi)=0.$　　1 分

否则至少$\exists x_0\in(a,+\infty), s.t.\ f(x_0)\neq A$,不妨设$f(x_0)>A$.　　1 分

取$\mu=\dfrac{f(x_0)+A}{2}$,则$A<\mu<f(x_0)$.　　1 分

因为$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$，取$\varepsilon=\dfrac{f(x_0)-A}{2}$,则$\exists\delta_1>0(\delta_1<\dfrac{x_0-a}{2}), s.t.$

当$a<x<a+\delta_1$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$. 所以$f(x)<A+\varepsilon=\dfrac{f(x_0)+A}{2}=\mu$.　　2 分

所以取$x_1\in(a,a+\delta_1)$,则$f(x_1)<\mu$.

由介值定理可知，$\exists c_1\in(x_1,x_0), s.t. f(c_1)=\mu$.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$\exists M>0(M>x_0), s.t.$

当$x>M$时,$|f(x)-A|<\varepsilon$. 所以$f(x)<A+\varepsilon=\dfrac{f(x_0)+A}{2}=\mu$.　　2 分

所以取$x_2\in(M,+\infty)$,则$f(x_2)<\mu$.

由介值定理可知，$\exists c_2\in(x_0,x_2), s.t. f(c_2)=\mu$.

由罗尔中值定理，$\exists\xi\in(c_1,c_2), s.t. f'(\xi)=0$.　　1 分

六．证明题（本题 8 分） 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有连续，在$[0,1]$内可导,

$f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{3}$,证明：存在$\xi\in(0,\dfrac{1}{2}),\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$,使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

证明　设$F(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}$,则由题设及拉格朗日中值定理得　　2 分

$F(\frac{1}{2})-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi),\xi\in(0,\frac{1}{2})$

$F(1)-F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}F'(\eta),\eta\in(\frac{1}{2},1)$　　4 分

所以$F(1)-F(0)=0=\dfrac{1}{2}F'(\xi)+\dfrac{1}{2}F'(\eta)$.　　2 分

也即$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

七．计算题（本题 8 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$，试求该函数的单调区间、极值点与极值、 凹凸区间与拐点.

解 $f'(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^3}, f''(x)=\dfrac{2-4x}{(x+1)^4}$ 2 分

令$f'(x)=0$得$x_1=0$, 令$f''(x)=0$得$x_1=\dfrac{1}{2}$. 2 分

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	不	-	0	+	+	+
$f''(x)$	+	不	+	+	+	0	-
$f(x)$	增、凸		减、凸	极小 0	增、凸	拐点$(\frac{1}{2},\frac{1}{9})$	增、凹

所以，$f(x)$在$[-1,0]$单减，在$(-\infty,-1)$与$[0,+\infty)$上单增，在 $x=0$取极小值$f(0)=0$. 2分

$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,0]$及$[0,\frac{1}{2}]$上凸，在$[\frac{1}{2},+\infty)$上凹，$(\frac{1}{2},\frac{1}{9})$为拐点. 2 分

八. 证明题（本题 8 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, $|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$,证明:当 $x\in[a,b]$ 时, $|f'(x)|\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{b-a}{2}$.

证明 $\forall x\in[a,b], f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$. 2 分

所以$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2$,

1 分

$f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2$,

当 $x\neq a,b$时，$f(a)\text{-}f(b)=f'(x)(a-b)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2$,

所以$|f'(x)|\le\dfrac{1}{b-a}|f(a)\text{-}f(b)|+\dfrac{1}{2(b-a)}|\le\dfrac{1}{b-a}|f(a)\text{-}f(b)|+\dfrac{1}{2(b-a)}|f''(\xi_1)|(a-x)^2+\dfrac{1}{2(b-a)}|f''(\xi_2)|(b-x)^2$

$\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{1}{2(b-a)}[(a-x)^2+(b-x)^2]\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{1}{2(b-a)}[(a-x)^2+(b-x)^2]_{\max}\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{b-a}{2}$.

3 分

当 $x=b$时，$f(a)\text{-}f(b)=f'(b)(a-b)+\dfrac{f''(\xi_3)}{2}(a-b)^2$,

所以$|f'(b)|\le\dfrac{1}{b-a}|f(a)\text{-}f(b)|+\dfrac{|f''(\xi_3)|}{2}(b-a)\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{b-a}{2}$。类似地,$|f'(a)|\le\dfrac{2}{b-a}+\dfrac{b-a}{2}$。1 分