A

北京航空航天大学

2020－2021 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班 号__________学号____________姓名_______

任课教师__________考场____________成绩_______

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成 绩									
阅卷人									
校对人									

2021 年 06 月 25 日

A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则积分 $I_1=\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$，$I_2=\iiint\limits_{\Omega}[\cos^4(x+y+z)+z^3]dxdydz$，$I_3=\iiint\limits_{\Omega}[\ln(x^2+y^2+z^2)\mathrm{dxdydz}$ 之间的大小关系为（　　）.

（A） $I_1<I_2<I_3$.　　（B） $I_1>I_2>I_3$.

（C） $I_2>I_1>I_3$.　　（D） $I_2<I_1<I_3$.

2. 设 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$ 则 $\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$ 在极坐标系下为（　　）.

（A） $\int_0^a dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.　　（B） $\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$.

（C） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.　　（D） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

3. 曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与坐标面所围成立体的体积为（　　）

(A) $\frac{4\pi}{3}$.　　(B) $\frac{\pi}{2}$.

(C) π.　　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，L 是以 $M(x_0,y_0)$ 为中心，半径为 r 的圆周，极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\int_L f(x,y)ds=$（　　）.

（A） $2\pi f(x_0,y_0)$　　（B） $f(0,0)$

（C） $2\pi f(0,0)$　　（D） $f(x_0,y_0)$

5. 抛物面 $2z=x^2+y^2$ 位于平面 $z=2$ 下方的面积为（　）.

(A) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}+1)$.　　(B) $\pi(5\sqrt{5}-1)$.

(C) $\frac{4}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.　　(D) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$.

二、计算题（每小题 5 分，满分 15 分）

1．设向量场 $\vec{F}(x,y,z)=(xyz^2,z\sin y,x^2e^y)$,求散度$div\vec{F}$,旋度$rot\vec{F}$.

2.设$D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}$，$f(x)$连续且恒正，$a,b$是常数,计算 $\iint\limits_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy.$

3．计算曲线积分 $\int\limits_L (x+y^2)ds$ 其中L是$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

三、计算题（每题 5 分，共 15 分）

1 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(2z+3xy^2)dxdydz$，其中 Ω 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成.

2. 计算积分 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y$，其中 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(y\geq 0)$ 上从点 $A(a,0)$ 到 $B(-a,0)$ 的一段弧.

3. $\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S$,其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$;

四、（10 分） 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(3y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le b$, 的外侧.

五、（10 分） 设函数 $f(x),g(y)$ 在 R 上具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，已知积分 $\int\limits_L 2xydx+[f(x)+g(y)]dy$ 与路径无关，且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+[f(x)+g(y)]dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+[f(x)+g(y)]dy$$

求 $f(x),g(y)$.

六、（10 分）利用 **Gauss** 公式计算

$$\iint\limits_S x(x-2y+x^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(y-2z+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z(z-2x+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\cdot$$

其中 S 为上半球面 $\boldsymbol{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$ 的上侧.

七 、（**10** 分）利用 **Stokes** 公式计算

$$\int_\Gamma (5y-2e^x)\mathrm{d}x+(5z-2y^2)\mathrm{d}y+(5x+e^{2z})\mathrm{d}z$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y-z=0.\end{cases}$ 从 $\boldsymbol{z}$ 轴正向看 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为逆时针方向.

八、（10 分）利用 Green 公式

证明积分 $I=\oint_L \frac{e^x}{x^2+y^2}[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]=2\pi$,

其中 L 为任意包含原点在其内部的分段光滑闭曲线, L 取逆时针方向.