A

北京航空航天大学

2021－2022 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿

任课教师＿＿＿＿＿＿考场＿＿＿＿＿＿＿＿成绩＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2022 年 06 月 24 日

A

一、计算题（每小题 6 分, 共 30 分）

1. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$的收敛域及和函数.

解:记$u_n(x)=\frac{x^{2n}}{2n+1}$,则$\lim_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+1}{2n+3}x^2)=x^2$, 当$x^2<1$时级数收敛,

又$x^2=1$时级数发散,所以收敛域为$(-1,-1)$

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$,则$(xS(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^{2n+1})'}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}, x\in(-1,1)$

则$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, 所以$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1\\ 1, & x=0\end{cases}$

(注:幂级数是缺项形式,求收敛半径 R 可令 $x^2=y$ 化为非缺项形式,

也可用上极限来求:$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}=1$,其中$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2k+1}, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}$)

2. 将$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, x\in[0,\pi]$展开为正弦级数,设该级数的和函数为$S(x)$, 求$S(\frac{\pi}{2}), S(\pi)$.

解：将函数进行奇延拓, 则 $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin nxdx-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$
$$=\frac{1-(-1)^n}{2n}+\frac{1}{n\pi}(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx)$$
$$=\frac{1-(-1)^n}{2n}+\frac{(-1)^n}{n}=\frac{1+(-1)^n}{2n}$$

所以由收敛定理$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n}\sin nx,\ 0<x<\pi,\ S(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=0, S(\pi)=\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=0$

3. 已知区域$D: x^2+y^2\le 2$, 求函数$f(x,y)=3x^2+3y^2-2x^3$ 在D上的最大值和最小值.

解：由$\begin{cases}f_x=6x-6x^2=0\\ f_y=6y^2=0\end{cases}$,可得驻点$(0,0),(1,0)$, 都在区域内部，且$f(0,0)=0, f(1,0)=1$.

在D的边界上$x^2+y^2=2$, 此时$f(x,y)=6-2x^3, x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$x=-\sqrt{2}$ 时, $f(-\sqrt{2},0)=6+4\sqrt{2}$为区域边界上的最大值;

$x=\sqrt{2}$ 时, $f(\sqrt{2},0)=6-4\sqrt{2}$为区域边界上的最小值.

比较四个函数值的大小, 可知$f(x,y)$在D上的最大值和最小值分别为$6+4\sqrt{2}$ 和0.

4. 已知$z=x^2f(x+y,x-y)+g(xy)$, 其中f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶导数, 计算

$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2(f_1+f_2)+yg'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}[2xf+x^2(f_1+f_2)+yg']=2x(f_1-f_2)+x^2(f_{11}-f_{12}+f_{21}-f_{22})+g'+xyg''$$

$$=2x(f_1-f_2)+x^2(f_{11}-f_{22})+g'+xyg''$$

5. 设$f(u)$具有连续导数, $f(0)=0$, 区域Ω: $x^2+y^2+z^2\le t^2$, 计算极限

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz}{\ln(1+t^4)}.$$

解: 由等价代换, 球面坐标变换可得

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi dr}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t f(r)r^2dr}{t^4}$$

再由洛必达法则, 可得

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi f(t)t^2}{4t^3}=\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\pi\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\pi f'(0)$$

二、（本题 10 分）

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}$, 证明$S(x)$在$[-2,2]$上连续.

证明: 对任意$x\in[-2,2]$, $\left|\sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}\right|\le\left|\frac{n!x^n}{x^2+n^n}\right|\le\frac{n!2^n}{n^n}$

对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$,因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$, 由达朗贝尔判别法知其收敛.

所以由Weierstrass判别法, 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}$在$[-2,2]$一致收敛,

又$\sin\frac{n!x^n}{x^2+n^n}$在$[-2,2]$上连续, 所以和函数$S(x)$ 在$[-2,2]$上连续.

注:判别级数收敛可以用 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot e^{-n}n^n \quad n\to\infty$

三、（本题 12 分）

设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微, 并求 $df(0,0)$.

证明: $f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{y\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1,\quad f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{-\sin y^2}{y^2}=-1,$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x-y}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)-x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-y)\sin(x^2+y^2)-(x-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sin(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right]$$

因为$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}|\le\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$,而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1]=0$

所以$f(x,y)$在$(0,0)$点可微,$df(0,0)=f_x(0,0)dx+f_y(0,0)dy=dx-dy.$

注:可微性也可以用偏导连续来判别

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\frac{2x(x-y)}{(x^2+y^2)^2}[(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2)], & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\{\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\frac{2x(x-y)}{(x^2+y^2)^2}[(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)-\sin(x^2+y^2)]\}$$

$$=1+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x(x-y)}{(x^2+y^2)^2}[(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!})(x^2+y^2)^3+o((x^2+y^2)^3)] \quad (Taylor)$$

$$=1=f_x(0,0)$$

同理 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)=-1=f_y(0,0)$

在$(0,0)$偏导连续,所以函数在$(0,0)$点可微.

四、(本题 12 分)

计算曲线积分$\int_L\frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}$, 其中$L$是沿曲线$y=\pi\cos\frac{x}{2}$从$A(0,\pi)$到$B(\pi,0)$的一段.

解: 设$P(x,y)=\frac{3x+y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\frac{3y-x}{x^2+y^2}$, 则$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},(x,y)\ne(0,0)$

所以在不含$(0,0)$点的单连通区域上$\int_L\frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}$与路径无关.

取$A(0,\pi)$到$B(\pi,0)$的圆周$C:x^2+y^2=\pi^2,x\ge 0,y\ge 0$,参数方程$\begin{cases}x=\pi\cos\theta\\ y=\pi\sin\theta\end{cases},\theta:\frac{\pi}{2}\to 0$

则$\int_L\frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}=\int_C\frac{(3x+y)dx-(x-3y)dy}{x^2+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\int_C(3x+y)dx-(x-3y)dy$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}[(3\pi\cos\theta+\pi\sin\theta)\cdot(\pi\cos\theta)'-(\pi\cos\theta-3\pi\sin\theta)\cdot(\pi\sin\theta)']\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-\pi^2)d\theta=\frac{\pi}{2}$$

五、（本题 12 分）

应用$Gauss$公式计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中$\Sigma$为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,取外侧.

解： 设$P(x,y,z)=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q(x,y,z)=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R(x,y,z)=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,

则$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,\quad (x,y,z)\neq(0,0,0)$

记$S:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$, 取外侧. 对充分小的$\varepsilon>0,S$ 位于Σ 所围区域内.Σ 与S 所围区域记为Ω,则由Gauss公式

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma-S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\iint\limits_{S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0dV+\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{S}xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2}3dV=4\pi.$$

六、（本题 12 分）

应用$Stokes$公式计算曲线积分$\oint_{\Gamma}(y^2-z)dx+(z-x^2)dy+(x+2y)dz$,其中$\Gamma$为柱面$\frac{x^2}{4}+y^2=1$与平面$x+y+z=2$的交线,从$z$ 轴正向看去为顺时针方向.

解一: 设$\sum$为$x+y+z=2$上被曲线Γ所围成的部分,取下侧

则$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3})$，由 Stokes 公式

$$\oint_{\Gamma}(y^2-z)dx+(z-x^2)dy+(x+2y)dz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z & z-x^2 & x+2y\end{vmatrix}dS=\iint\limits_{\Sigma}[\frac{1}{\sqrt3}+\frac{2}{\sqrt3}(x+y)]\mathrm{d}S$$

$\Sigma: z=2-x-y, dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$, 投影区域$D: \frac{x^2}{4}+y^2\le 1$,

$$\iint_{\Sigma}[\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y)]\mathrm{d}S=\iint_{\frac{x^2}{4}+y^2\le 1}[\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2(x+y)}{\sqrt{3}}]\sqrt{3}dxdy=\iint_{\frac{x^2}{4}+y^2\le 1}[1+2(x+y)]dxdy=\iint_{\frac{x^2}{4}+y^2\le 1}dxdy=2\pi$$

解二: $\Sigma: z=2-x-y, (-z_x,-z_y,1)=(1,1,1)$

$$\oint_{\Gamma}(y^2-z)dx+(z-x^2)dy+(x+2y)dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z & z-x^2 & x+2y \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}dydz-2dzdx+(-2x-2y)dxdy$$

$$=-\iint_{\frac{x^2}{4}+y^2\le 1}[-1-2(x+y)]dxdy=2\pi$$

七、(本题 12 分)

已知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^p})$条件收敛, 试讨论$p$的取值范围.

解: $n\to\infty$时, $\sin\frac{1}{n^p}\sim\frac{1}{n^p}$, 所以当且仅当$p>1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$绝对收敛.

又$n\to\infty$时, $\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^p})\sim\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$, 所以当且仅当$p\le\frac{3}{2}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^p})$发散;

由$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, 可得$\ln(1+\frac{1}{n^p})=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})$

从而$(-1)^n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^p})=(-1)^n\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}-(-1)^n\frac{1}{2n^{2p-\frac{1}{2}}}+(-1)^n o(\frac{1}{n^{2p-\frac{1}{2}}})$

$p>1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^p})$收敛,

所以当且仅当$1<p\le\frac{3}{2}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n^p}$绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^p})$条件收敛.