北京航空航天大学

2018－2019 学年 第一学期期末考试

《 工科数学分析（Ⅰ）》

(A 卷)

班号 ____________ 学号__________ 姓名____________

主讲教师__________ 考场__________ 成绩____________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2019 年 01 月 11 日

一、 选择题（每题 4 分，满 20 分）

1. 曲线 $\begin{cases} x=\sin t - t\cos t \\ y=\cos t + t\sin t \end{cases}, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}$ 的弧长为（ D ）.

A. π^2; B. $\dfrac{\pi^2}{2}$; C. $\dfrac{\pi^2}{4}$; D. $\dfrac{\pi^2}{8}$.

2. 设 $f(x)$ 满足等式 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+e^{-x}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$=（ D ）.

A. $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{e^{1-x}}{2}$; B. $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{e^{1-x}}{4}$;

C. $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{\pi}{2}e^{1-x}$; D. $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{\pi}{4}e^{1-x}$.

3. 设函数 $f(x)$ 可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{e^x} xf(t)dt\right)=$（ C ）.

A. $xf(e^x)$; B. $xe^x f(e^x)$;

C. $xe^x f(e^x)+\int_0^{e^x} f(t)dt$; D. $xf(e^x)+\int_0^{e^x} f(t)dt$..

4. 下列广义积分中，收敛的是（ B ）.

A. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{2x+1}}dx$; B. $\int_{+\infty}^{0}\dfrac{x\arctan x}{2+x^3}\mathrm{d}x$;

C. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}dx$; D. $\int_1^{+\infty}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则下列 4 个结论中正确的是（ A ）.

(1) 若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int dF(x)=F(x)+C$；

(2)若 $[a,b]\supseteq[c,d]$，则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_c^d f(x)dx$；

(3)若 $f(x)$ 为奇函数，则其原函数 $F(x)$ 必为偶函数；

(4) 若 $f(x)$ 为周期函数，则其原函数 $F(x)$ 必为周期函数；

A. (1)(3)； B. (2)(4)； C. (1)(2)(3)； D. (1)(2)(3)(4).

二、　计算题（每题 6 分，满分 30 分）

1. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\mathrm{d}x$

解：$\frac{2x+3}{x^2+3x-10}=\frac{2x+3}{(x+5)(x-2)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-2}$，计算可得 $A=1,B=1$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=\int\frac{A}{x+5}dx+\int\frac{B}{x-2}dx=\ln|x+5|+\ln|x-2|+C$$

2. $\int \arcsin^2 x\mathrm{d}x$

解：$\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x-\int\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x\arcsin^2 x-2\int\arcsin x d(-\sqrt{1-x^2})$$

$$=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

3. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2-\sin^{2019}x\cos^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解：　由对称性，$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-\sin^{2019}x\cos^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=(x-\arctan x)\Big|_{-1}^{1}=2-\frac{\pi}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}e^{2t}\,\mathrm{d}t}{\cos(2x)\sin x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}e^{2t}\,\mathrm{d}t}{\cos(2x)\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}e^{2t}\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2xe^{2x^2}}{2x}=1$

5. 计算瑕积分 $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x.$

解：　2 是瑕点，$\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon}=\frac{\pi}{2}$

三、 （本题 10 分，每题 5 分）

(1)利用定积分定义，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+(\frac{3}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2]$$

$$=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

解法 1：$0\le\frac{x^n}{1+x}\le x^n\Rightarrow 0\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\le\int_0^1 x^ndx=\frac{1}{n+1}$，夹逼定理得到极限为 0

解法 2：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^ndx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{1+n}=0$

解法 3：$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}dx+\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^n}{1+x}dx,\varepsilon$为任意小于1的正数

$0\le\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x^n}{1+x}=\frac{\xi^n}{1+\xi}(1-\varepsilon)\le(1-\varepsilon)^n$，夹逼定理得到此部分极限为 0

$0\le\int_{1-\varepsilon}^1\frac{x^n}{1+x}dx\le\int_{1-\varepsilon}^1 dx\le\varepsilon,$由$\varepsilon$的任意性可得此极限为0。故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0$

四、 （本题 8 分）

(1)求二阶线性非齐次常微分方程 $y''-3y'+2y=e^{3x}$ 的通解；

(2)求上述方程满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解 .

解： （1）对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根为 1,2

故对应齐次方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$

设非齐次方程的特解为 $y^*=Ae^{3x}$，代入原方程得 $A=\frac{1}{2}$,

故此非齐次方程通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}$

（2）将初始条件代入方程通解得 $c_1+c_2+\frac{1}{2}=0, c_1+2c_2+\frac{3}{2}=1$，解得

$c_1=-\frac{1}{2}, c_2=0$，故特解为 $y=-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{3x}$

五、　（本题 10 分）

过点 $(1,1)$ 作抛物线 $y=2-x^2$ 的切线，求由此切线，抛物线以及 x 轴所围成的公共区域的面积以及此区域绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：(1) $y'\big|_{x=1}=-2x\big|_{x=1}=-2$，切线方程为 $y=-2x+3$，切线与 x 轴交于点（$\frac{3}{2},0$），抛物线与 x 轴交于点（$\pm\sqrt{2},0$）

所围成的曲边三角形面积为

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3)dx-\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx=\left(-x^2+3x\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}}-\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{23}{12}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(2) $$V=\pi\left[\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3)^2dx-\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)^2dx\right]=\pi\left[-\frac{1}{6}(-2x+3)^3\Big|_1^{\frac{3}{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}(4+x^4-4x^2)dx\right]$$

$$=\pi\left[\frac{1}{6}-\left(4x+\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{1}{6}+\frac{43}{15}-\frac{32}{15}\sqrt{2}\right]$$

$$=\pi\left[\frac{91}{30}-\frac{32}{15}\sqrt{2}\right]$$

六、　（本题 10 分）

讨论无穷广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}(1+\arctan x)\mathrm{d}x$ 的敛散性，若收敛，说明是绝对还是条件收敛 .

解：积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}\mathrm{d}x$ 中，$F(A)=\int_1^{A}\sin(2x)\mathrm{d}x$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界

$\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \le 0$,当$x \ge 1$，故$\frac{\sqrt{x}}{x+1}$在$[1,+\infty)$上单调且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1}=0$，

由 Dirichlet 判别法可知$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}\mathrm{d}x$收敛

又由于$1+\arctan x$在$[1,+\infty)$上单调有界，故由 Abel 判别法可知

$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}(1+\arctan x)\mathrm{d}x$ 收敛

$$\because \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}(1+\arctan x)\right|\mathrm{d}x \ge \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}\right|\mathrm{d}x \ge \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin^2(2x)}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos(4x)}{2(x+1)}\mathrm{d}x$$

$x\to+\infty$时，$\frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$，比较判别法得出积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\mathrm{d}x$发散，

类似于$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}\mathrm{d}x$的收敛判别法得到$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos(4x)}{2(x+1)}\mathrm{d}x$收敛

故$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\sin(2x)}{x+1}(1+\arctan x)\right|\mathrm{d}x$发散，原积分条件收敛

七、 （本题 12 分, 每题 6 分）

(1)设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有一阶导数，且满足 $f(0)=0, 0\le f'(x)\le 1$.

证明： $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x \le \left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， 在 (a,b) 内可导， 且满足 $f(a)=a$ ，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$. 证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

证明：（1）设$F(t)=\int_0^t f^3(x)dx-\left[\int_0^t f(x)dx\right]^2$，则

$$F'(t)=f^3(t)-2f(t)\int_0^t f(x)dx = f(t)(f^2(t)-2\int_0^t f(x)dx)$$

设$G(t)=f^2(t)-2\int_0^t f(x)dx$，则

$G'(t)=2f(t)f'(t)-2f(t)=2f(t)(f'(t)-1)\le 0$，即$G(t)$单调减，

$G(t)\le G(0)=0$

$\therefore F'(t)=f(t)G(t)\le 0$，$\therefore F(t)$**单调减，**$F(t)\le F(0)=0$，原不等式成立

（2）设$F(x)=e^{-x}(f(x)-x)$，则$F(a)=0$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\int_a^b x\mathrm{d}x\Rightarrow\int_a^b (f(x)-x)\mathrm{d}x=0$$

由微分中值定理，存在一点$\eta\in[a,b]$,使得$f(\eta)-\eta=0$.

若上式只对$\eta=a$成立，则在$[a,b]$上$f(x)-x$恒$\ge$（或$\le$）0, 且不恒为0，故积分$\int_a^b (f(x)-x)\mathrm{d}x>0$或$<0$，这与$\int_a^b (f(x)-x)\mathrm{d}x=0$矛盾，故存在$\eta\ne a$，使得$f(\eta)=\eta$,即$F(\eta)=0$. 在$[a,\eta]$上对$F(x)$应用 Rolle 定理得到结论