内容

§1.1 命题和联结词

§1.2 公式和真值赋值

§1.3 等值演算

§1.4 对偶定理

§1.5 联结词的完全集

§1.6 范式

§1.7 逻辑推论

前情提要

- 公式取值，$v(Q)=?$
  - 若有真值赋值v使$v(Q)=1$，则称v满足Q
  - 若每个真值赋值都满足Q，则称Q为永真式
  - 若每个真值赋值都不满足Q，则称Q为不可满足式
  - 若至少有一个真值赋值满足Q，则称Q为可满足式

特点：这些都是对一个公式而言的！
如果我们拓展一下，对一个公式集合呢？

定义1.20

对v而言

- 设$\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$是公式集合:
- 若真值赋值v满足Γ中的每一个公式，则称v满足Γ,
- 若有真值赋值满足Γ，则称Γ是可满足的，
- 否则称Γ是不可满足的。

对Γ而言

$$v\text{满足}\Gamma \Leftrightarrow v(A_1)=v(A_2)=\ldots=v(A_n)=1$$

定义1.21

- 设R是公式，如果每个满足公式集合Γ的真值赋值都满足R，则称R是Γ的逻辑推论，记为$\Gamma \vDash R$，读作“Γ推出R”。若$\Gamma \vDash R$不成立，记作$\Gamma \nvDash R$
  - 只要前提真，结论一定真
  - $\Gamma \vDash R \Leftrightarrow$如果 $v(\Gamma)=1$, 则$v(R)=1$
- 若 $\Gamma=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$,则$\Gamma \vDash R$也记为$A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash R$

定理1.11

设A是公式，则$\models A$ 当且仅当A是永真式

证明：

充分性：设$\models A$ (即$\Phi\models A$)，取任意真值赋值v，因为空集Φ中没有公式，因此可以说使得空集Φ中所有公式都为真（根据定义），又$v(A)=1$，因此是永真式

必要性：设A是永真式，显然$\models A$

证毕

思路整理1：逻辑关系与逻辑运算

真值表			
A	B	A→B	A↔ B
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

- 逻辑关系与逻辑运算

$A \Leftrightarrow B$ “当且仅当” $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

$A \models B$ “当且仅当” $A \rightarrow B$ 是永真式。

定理1.13：

- 设Q，R是公式。$Q \Leftrightarrow R$当且仅当 $Q \models R$且$R \models Q$。
- 证明
  - $Q \Leftrightarrow R$
  - 当且仅当 $Q \leftrightarrow R$是永真式
  - 当且仅当 $Q \rightarrow R$和$R \rightarrow Q$都是永真式
  - 当且仅当 $Q \models R$且$R \models Q$
- 证毕

三段论

日常生活中的例子：

李雷对韩梅梅说："如果今天下雨我就去接你。"

问题：

今天确实下雨了，问李雷是不是去接了韩梅梅?

如果现在让你用形式化方法，你怎么表达呢?

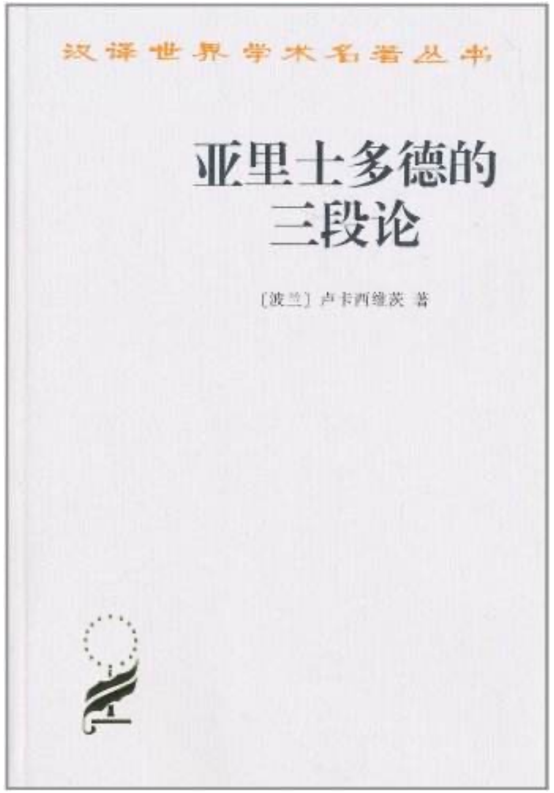
Q： 今天下雨

R： 我去接你

$Q \rightarrow R$： 如果今天下雨，则我去接你

三段论

如果"苏格拉底是人"和"如果苏格拉底是人，则他会死"同时成立，可以推出苏格拉底会死



$Q \rightarrow R$:如果苏格拉底是人，则苏格拉底会死

Q:苏格拉底是人

R:苏格拉底会死

$$Q, Q \rightarrow R \models R$$

三段论

- $Q, Q \to R \models R$
- 证明:
  - 若真值赋值v使得$v(Q)=1$,
    $v(Q \to R)=v(Q) \to v(R)=1$
  - 根据真值表，$v(R)=1$
  - 因此$Q, Q \to R \models R$成立
- 证毕

Q	R	Q→R
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

传递律

若“如果今天下雨，则李雷要开车”和“如果李雷要开车，则李雷去接韩梅梅”同时成立，可以推出“如果今天下雨，则李雷去接韩梅梅”。

$P \to Q$:如果今天下雨，则李雷要开车

$Q \to R$:如果李雷要开车，则李雷去接韩梅梅

$P \to R$:如果今天下雨，则李雷去接韩梅梅

$$P \to Q, Q \to R \models P \to R$$

传递律

$$Q \to R, R \to S \models Q \to S$$

- 证明:
  - 若真值赋值v使得$v(Q\to R)= v(R\to S)= 1$
  - 根据真值表，若 $v(Q)=1$,则 $v(R)=1$，又因为 $v(R\to S)=v(R) \to v(S)= 1$,因此$v(S)= 1$，继而 $v(Q\to S)=1$
  - 根据真值表，若$v(Q)=0$,则$v(Q \to S)=1$
  - 因此$Q \to R, R \to S \models Q \to S$成立
- 证毕

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

逻辑运算和逻辑定理

- 三段论：$Q, Q\rightarrow R \models R$
- 传递律：$P\rightarrow Q, Q\rightarrow R \models P\rightarrow R$
- 排中律：$\models (Q\vee\neg Q)$
- 矛盾律：$\models \neg(Q\wedge\neg Q)$
- 反证律：
- 如果$\Gamma,\neg Q \models R, \Gamma,\neg Q \models \neg R$,则$\Gamma \models Q$

逻辑推论 — 从三段论看

- 公式取值，$\sigma(Q)=?$
  - 任意赋值函数为真
  - 任意赋值函数为假
  - 有的赋值函数为真，有的赋值函数为假
- 可满足的公式之间的关系?
  - 当$\sigma(Q\to R)=1$，$\sigma(Q)=1$，$\sigma(R)=??$

Q	R	Q	$Q\to R$	R
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

逻辑推论 — 从传递律看

- 当$\sigma(Q \rightarrow R) = 1$，$\sigma(R \rightarrow S) = 1$，$\sigma(Q \rightarrow S) =$??

Q	R	S	$Q \rightarrow R$	$R \rightarrow S$	$Q \rightarrow S$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

定理1.12

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$, B都是公式，则$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$当且仅当$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$是永真式。

- 证明：
  - 充分性：设$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$成立，取任意真值赋值$v$，若$v(A_1) = v(A_2) = \ldots = v(A_n) = 1$，有$v(B)=1$，则$v(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B) = v(A_1) \wedge v(A_2) \wedge \ldots \wedge v(A_n) \rightarrow v(B) = 1$

定理1.12

设$A_1, A_2, \ldots, A_n, B$都是公式，则$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$当且仅当$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$是永真式。

- 必要性：设$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$是永真式，取任意真值赋值$v$，若$v(A_1) = v(A_2) = \ldots = v(A_n) = 1$，有$v(B)=1$，因此有$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$成立。

- 证毕

思路整理2：推理形式

- 每一个推理形式都相当于一个真值形式
  - 正确的推理形式相当于一个永真式
  - 错误的推理形式虽然有其真值形式，但不是永真式
  - 要判断一个推论是否正确，就判断其对应的蕴含式是不是一个永真式

除了定义证明后的另一种证明方法

思路整理2：推理形式

- 例：判断$P \to Q, P \models Q$是否成立
  - 将其化成真值形式（蕴含式）$((P \to Q) \wedge P) \to Q$
  - 判断其真值形式是否为永真式，如果发现该蕴含式是永真式，推论成立

$$(P \to Q \wedge P) \to Q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow (1 \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg Q \vee \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow 1 \vee \neg P$$

$$\Leftrightarrow 1$$

例：Q→R，S→W，Q∨S ⊨ R∨W

- 证明(定义法)：
  - 设真值赋值v使$v(Q \to R) = v(S \to W) = v(Q \vee S) = 1$,则有两种可能：$v(Q)=1$，$v(S)=1$
  - 若$v(Q)=1$，则由$v(Q \to R)=1$得出$v(R)=1$
  - 若$v(S)=1$，则由$v(S \to W)=1$得出$v(W)=1$
  - 无论哪种情况皆有$v(R \vee W)=1$

例：Q→R，S→W，Q∨S ⊨ R∨W

要证明原推论成立，即$((Q\to R)\land(S\to W)\land(Q\lor S))\to(R\lor W)=1$

- 证明
  - $((Q\to R)\land(S\to W)\land(Q\lor S))\to(R\lor W)$
  - $\Leftrightarrow\neg((\neg Q\lor R)\land(\neg S\lor W)\land(Q\lor S))\lor R\lor W$ (1)
  - $\Leftrightarrow\neg(\neg Q\lor R)\lor\neg(\neg S\lor W)\lor\neg(Q\lor S)\lor R\lor W$ (2)
  - $\Leftrightarrow(Q\land\neg R)\lor(S\land\neg W)\lor(\neg Q\land\neg S)\lor R\lor W$ (3)
  - $\Leftrightarrow(Q\land\neg R)\lor((S\lor W)\land(W\lor\neg W))\lor(\neg Q\land\neg S)\lor R$ (4)
  - $\Leftrightarrow(Q\land\neg R)\lor(\neg Q\land\neg S)\lor R\lor S\lor W$ (5)
  - $\Leftrightarrow Q\lor R\lor S\lor W\lor(\neg Q\land\neg S)$ (6)
  - $\Leftrightarrow Q\lor R\lor W\lor S\lor\neg Q$ (7)
  - $\Leftrightarrow 1$ (8)
- 证毕

定理1.14

设Γ是公式的集合，Q和R是公式，则$\Gamma\cup\{Q\}\models R$当且仅当$\Gamma\models Q\rightarrow R$。

- 证明

  - 充分性：若$\Gamma\cup\{Q\}\models R$，则有真值赋值v使Γ中公式皆真且$v(Q)=1$，$v(R)=1$。所以$v(Q\rightarrow R)=1$，$\Gamma\models Q\rightarrow R$。

  - 必要性：若$\Gamma\models Q\rightarrow R$，则有真值赋值$v$使$\Gamma$中公式皆真且$v(Q\rightarrow R)=1$。又如果$v(Q)=1$，则$v(R)=1$。所以$\Gamma\cup\{Q\}\models R$。

- 证毕

定理1.15

设n是正整数。公式的集合$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$是可满足当且仅当$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$是可满足式。

- 证明
  - 充分性：设有真值赋值v满足公式集合，则$v(A_1) = v(A_2) = \ldots = v(A_n) = 1$，因此$v(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = v(A_1) \wedge v(A_2) \wedge \ldots \wedge v(A_n) = 1$，故$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$是可满足式
  - 必要性：设有真值赋值v满足$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$，则$v(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = v(A_1) \wedge v(A_2) \wedge \ldots \wedge v(A_n) = 1$，有$v(A_1) = v(A_2) = \ldots = v(A_n) = 1$，即该公式是可满足式
- 证毕

定理1.16

设Γ是公式的集合，Γ是不可满足的，当且仅当每个公式都是Γ的逻辑推论。

- 证明：
  - 充分性：假设公式集合Γ不可满足，取任意真值赋值$\boldsymbol{v}$，有$\boldsymbol{v}(\Gamma)=\mathbf{0}$，那么对任取公式A，$\boldsymbol{v}(\Gamma\to A)=\boldsymbol{v}(\Gamma)\to\boldsymbol{v}(A)=0\to\boldsymbol{v}(A)=\mathbf{1}$，因此$\Gamma\to A$是永真式，即$\Gamma\models A$，$A$是$\Gamma$的逻辑推论。

定理1.16

设Γ是公式的集合，Γ是不可满足的，当且仅当每个公式都是Γ的逻辑推论。

- 必要性：设任一公式A是Γ的逻辑推论，有$\Gamma \models A$，即$\Gamma \rightarrow A$是永真式，假设存在真值赋值v使得$v(\Gamma)=1$，此时若A是永假式(A是任意公式)，则有$v(\Gamma \rightarrow A)= v(\Gamma) \rightarrow v(A) = 1 \rightarrow 0 = 0$和$\Gamma \rightarrow A$是永真式矛盾，因此原假设不成立。即$\Gamma$不可满足。

■ 证毕

谢谢大家！

杜博文

dubowen@buaa.edu.cn