第六章　电磁感应

§6-1 电磁感应的基本规律

§6-2 动生电动势

§6-3 感生电动势、涡旋电场

§6-4 自感与互感

§6-5 磁场的能量

电磁感应

1831年8月29日, Faraday
做了第一个电磁感应实验并取得成功。

Michael Faraday
(1791-1867)

产生电磁感应有五类情况:

①变化的电流;
②运动的稳恒电流;
③磁场中运动的导体;
④变化的磁场;
⑤运动的磁铁

§6-1 电磁感应的基本规律

一. 电磁感应现象

第一类 导体相对于磁场运动

或 二者兼有

第二类 导体相对于磁场静止，但磁场瞬变

回路中磁通量变化 → **感应电流**

产生电磁感应的条件

本质是感应电动势 electromotive force (emf)

二. Lenz定律——定性（俄，1833）

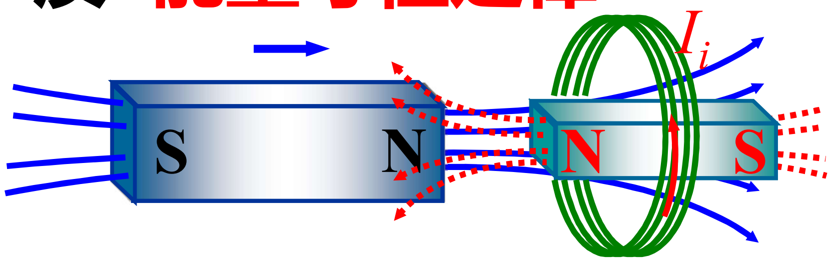
感应电流总是企图产生一个磁场阻碍穿过线圈的磁通的变化.

即：感应电流$I_i \rightarrow \Phi_{mi}$

$\rightarrow$反抗原Φ_m的变化.

"结果"阻碍"原因"

本质: 能量守恒定律



楞次，Э. Х.

(1804-1865)

三. Faraday 定律 —— 定量 (1851)

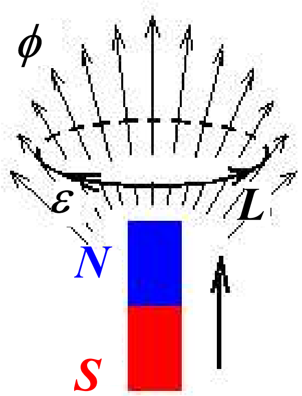
闭合导体回路内感应电动势：$\boxed{\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}}$ SI: V

方向

ε_i 方向：规定回路方向 → 右旋定正法向 $\vec{n}^0$，

→ 回路内 $\Phi_m \uparrow\uparrow \mathrm{n}^0$ 为正，$\uparrow\downarrow \mathrm{n}^0$ 为负，

$$\rightarrow \frac{d\Phi_m}{dt}\begin{cases} > 0 \Leftrightarrow \varepsilon_i < 0; \text{与回路方向相反} \\ < 0 \Leftrightarrow \varepsilon_i > 0; \text{与回路方向相同} \end{cases}$$



- 定方向用Lenz 定律简便
- 推论：闭合回路通过的电量与 Φ_m 的变化快慢无关.

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon_i}{R} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi_m}{R} = \frac{1}{R}(\Phi_{m1} - \Phi_{m2})$$

§6-1 电磁感应的基本规律

- **对N匝线圈，Φ_m用全磁通Ψ_m代替.**

即：各匝Φ_{mi}不同时，$\psi_m = \sum_i \Phi_{mi}$

各匝Φ_{mi}相同时，$\psi_m = N\Phi_{mi}$ ←—磁链

注意各圈法向协调！正绕向→各匝$\vec{n}^0 \rightarrow \Phi_{mi} \rightarrow \Psi_m$

电磁感应的应用：

交流发电机，直流发电机，变压器，

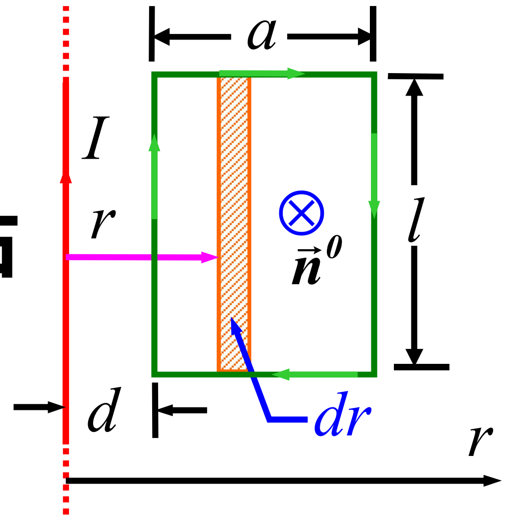
导航系统，加速度表，机场金属探测器

磁卡，磁头，扬声器，电子乐器……

§6-1 电磁感应的基本规律

例: 如图, 已知∞长线有电流I, 线圈的l, a, d, R, 若

1. 稳恒I, 线圈速度v向右
2. $I=\alpha t\ (\alpha>0)$, 线圈不动
3. $I=\alpha t\ (\alpha>0)$, 线圈速度v向右



求线圈内的ε_i, 方向和感应电流I_i.

解: 定$\vec{n}^0$, 求Φ_m, 求ε_i, 求I_i

1. 稳恒I: $I_\infty \Rightarrow B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$; 方向: $\otimes$

取$\vec{n}^0$与$\vec{B}$同向$\Rightarrow$回路顺时针, 设t时线圈在x, 取ldr

$$\Phi_m=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_x^{x+a}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr=\boxed{\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x}}$$

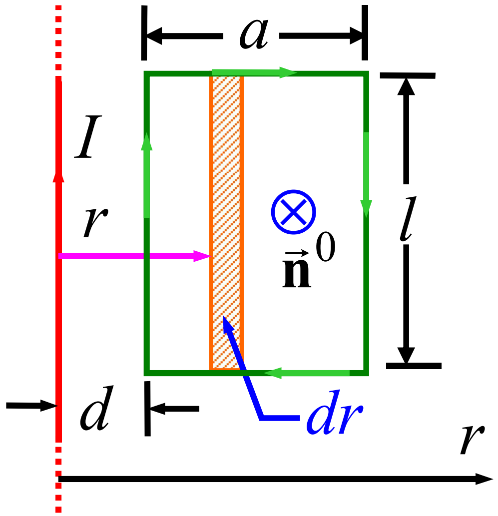
§6-1 电磁感应的基本规律

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x}$$

注意x是 t 的函数,

$$\therefore\ \varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 Ila}{2\pi(x+a)x}v$$

在$x=d$ 时刻: $\varepsilon_i = \dfrac{\mu_0 Ila}{2\pi(d+a)d}v > 0$



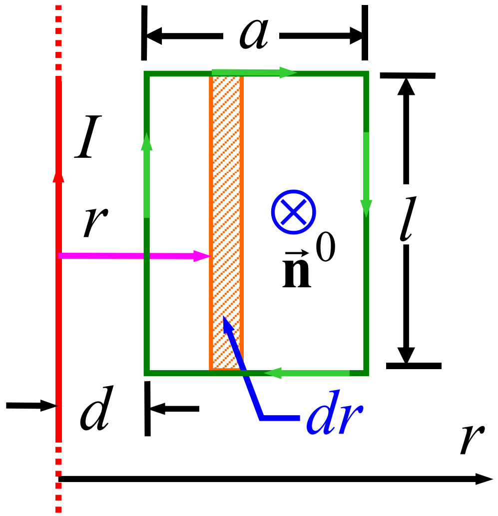
$$\Rightarrow\quad I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\mu_0 Ilav}{2\pi(d+a)dR}$$

2. $I=\alpha t,\ v=0$

由1.有 $\Phi_m\big|_{x=d}=\dfrac{\mu_0\alpha tl}{2\pi}\ln\dfrac{d+a}{d}$

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi_m}{dt}=\frac{-\mu_0\alpha l}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}<0$$

$$I_i=\frac{-\mu_0\alpha l}{2\pi R}\ln\frac{d+a}{d}$$，沿L反向



3. $I=\alpha t,\ v\neq 0$

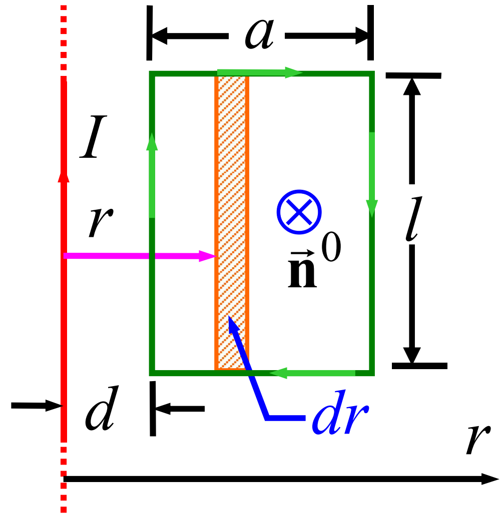
$$\Phi_m(x)=\frac{\mu_0\alpha tl}{2\pi}\ln\frac{x+a}{x};\quad x=vt+d$$

$$\varepsilon_i\big|_{x=d}=-\frac{d\Phi_m}{dt}\bigg|_{x=d}=-\frac{\mu_0\alpha l}{2\pi}\left[\ln\frac{d+a}{d}-\frac{tav}{(d+a)d}\right]=(1)+(2)$$

讨论：

- 1,2中　**线圈内Φ_m均变, 但原因不同:**

1. 中$\vec{B}$不变, 线圈动, 切割磁力线
2. 中$\vec{B}$变, 线圈不动, 不切割磁力线



$\Rightarrow$ **感应电动势分为:**

$$\begin{cases} \text{动生电动势} \leftarrow \text{磁场恒定, 导体运动, Lorentz 力} \\ \text{感生电动势} \leftarrow \text{导体不动, 磁场瞬变, 感生电场} \end{cases}$$

§6-2 动生电动势

一. 动生电动势产生的微观机理

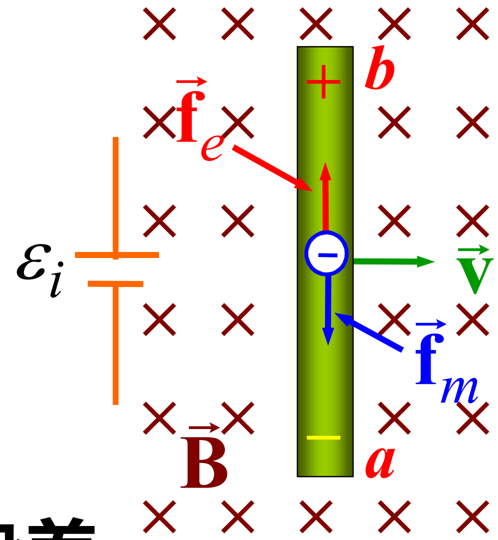
导体棒 *ab* 运动时，电子受力：

洛仑兹力 $\vec{f}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$

电 场 力 $\vec{f}_e = -e\vec{E}$

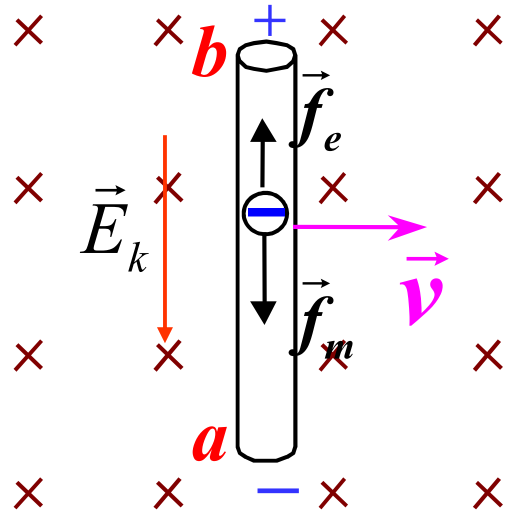
达到平衡时：棒两端形成恒定电势差
棒*ab*就相当于一个电源

洛仑兹力：产生动生电动势根本原因它就是电源中的非静电力



§6-2 动生电动势

二. 动生电动势及其计算



1.由定义: $\varepsilon = \int_{+}^{-} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

$$\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_K}{q} = \frac{-\vec{f}_m}{-e} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

动生电动势: $\boxed{\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}$

若ab导体为闭合回路

动生电动势: $\boxed{\varepsilon_i = \oint_{ab} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}$

(导体在磁场中运动产生动生电动势的普遍公式)

§6-2 动生电动势

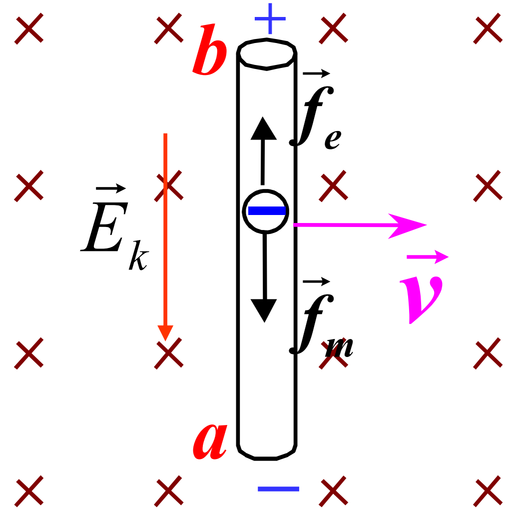
注: (1)图中$U_a < U_b$,电动势正向：从负极a→正极b;

(2)积分是沿着运动导线进行的。

(3)动生电动势方向的判定(两种方法)

(a)楞次定律;

(b)利用 $\vec{v}\times\vec{B}$ 的方向。

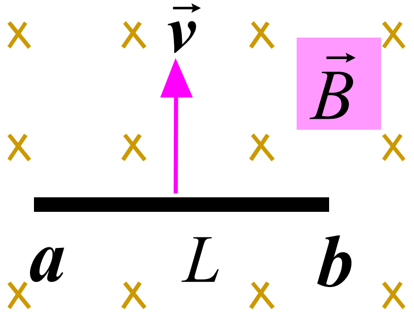


$$\boxed{\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$

特例：若满足：匀强磁场、直导线、导线各处运动速度v相同，且$\vec{v}$, $\vec{B}$ 和 $d\vec{l}$ 三者互相垂直，则：

$$\varepsilon_i = \int_L Bvdl = BLv$$

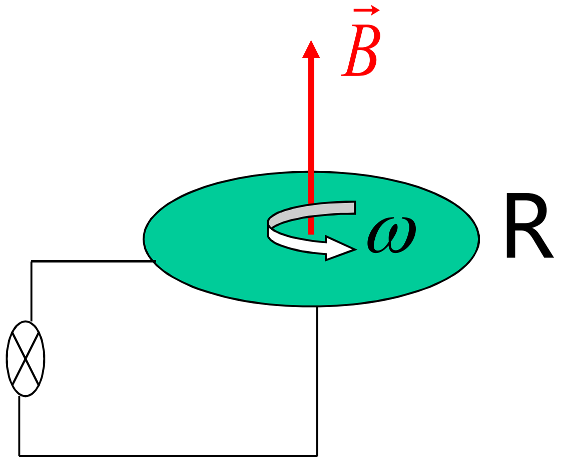
右图ε_i方向：$b \rightarrow a$

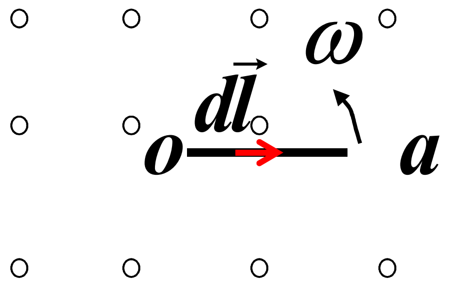


例 法拉弟圆盘发电机

$$\varepsilon=\int_{o}^{a}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int_{0}^{R}l\omega B dl$$

$$=\frac{1}{2}R^{2}\omega B \qquad o\longrightarrow a$$





并联 $\varepsilon=\frac{1}{2}R^{2}\omega B$

思考：能否用法拉弟电磁感应定律求解？

可以！自己完成

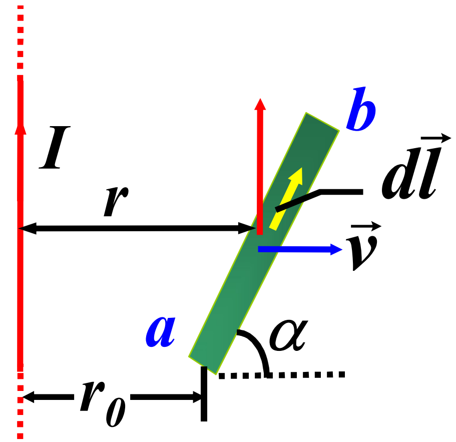
交流发电机

三峡水电站

§6-2 动生电动势

例：如图，细直金属线长L，已知：α，$\vec{v}$

求a端距导线r_0时的 ε_i



解：$B = \mu_0 I / 2\pi r$，方向：$\otimes$

$$\varepsilon_{i,ab} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{\mu_0 I v}{2\pi r} \sin\alpha dl$$

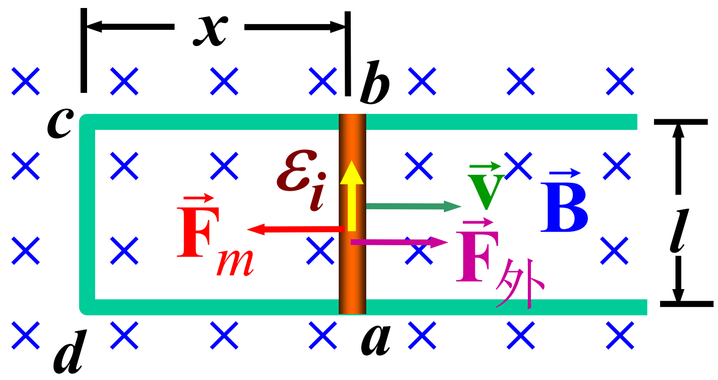
$$= \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \sin\alpha \int_0^L \frac{dl}{r_0 + l\cos\alpha} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} tg\alpha \ln\frac{r_0 + L\cos\alpha}{r_0}$$

$$\alpha = 0,\ \varepsilon_i = 0;\quad \alpha < \pi/2,\ U_b > U_a$$

$$\alpha = \pi/2,\ \varepsilon_{iab} = \lim_{\alpha \to \pi/2} \frac{\mu_0 I v}{2\pi} tg\alpha \ln\frac{r_0 + L\cos\alpha}{r_0} = BvL$$

三. 电磁感应中的功和能

从能量角度考虑右图系统:



1. ab**匀速向右**$\Rightarrow \varepsilon_i \Rightarrow abcd$**回路电流**$I_i \Rightarrow$**作功**$\Rightarrow$**能量从哪来?**

解释:

- I_i **(单位时间内) 作功:**

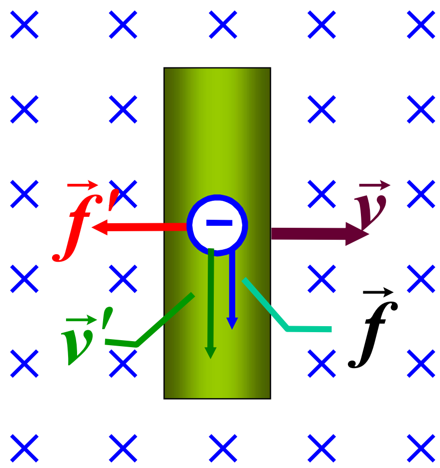
$$P_i = I_i \varepsilon_i = I_i vBl$$

- ab**因**I_i**受安培力向左:** $F_m = I_i Bl$
- **为保持匀速,需外力** $\vec{F}_外 = -\vec{F}_m$**, 向右**
- $P_外 = \vec{F}_外 \cdot \vec{v} = I_i Blv = P_i$ **(机→电)**

§6-2 动生电动势

2. **动生**: L-力 $\Rightarrow \varepsilon_i \Rightarrow abcd$回路电流$I_i \Rightarrow$作功,

但L-力应恒不作功, 怎样解释?



解释: 如图, $-e$受力$\vec{f} = -e\vec{v} \times \vec{B}$, 向下

$\Rightarrow$ 向下速度分量$\vec{v}'$

$\Rightarrow$L-力$\vec{f}' = -e\vec{v}' \times \vec{B}$, 向左.

L-合力$(\vec{f} + \vec{f}')$与$-e$的合速度$(\vec{v} + \vec{v}')$

$\Leftrightarrow$ 作功功率:

$$P_{总} = (\vec{f} + \vec{f}') \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = \vec{f} \cdot \vec{v}' + \vec{f}' \cdot \vec{v} = -evBv' + ev'Bv = 0$$

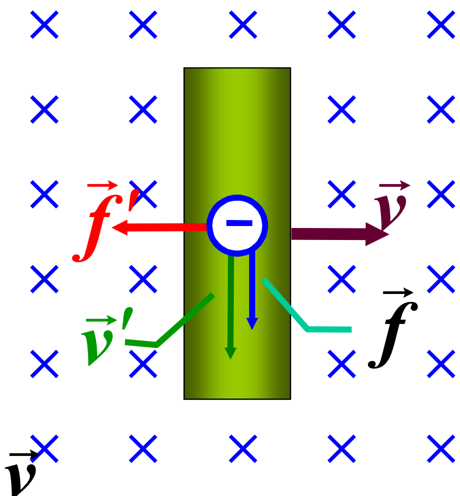
即: **总的Lorentz力确实不作功**!

3. Lorentz力到底起什么作用?

为使$-e$向右匀速运动,

需外力 $\vec{f}_{外}$ (向右)抵消$\vec{f}'$:

$$\vec{f}_{外} = -\vec{f}'$$



代入$\vec{f}\cdot\vec{v}' + \vec{f}'\cdot\vec{v} = 0$, 得:

$$\underbrace{\vec{f}\cdot\vec{v}'} = -\vec{f}'\cdot\vec{v} = \underbrace{\vec{f}_{外}\cdot\vec{v}}$$

微观: L-力的分量使$-e$沿导线运动所作的功 = 外力反抗L-力的另一分量$\vec{f}'$所作的功

宏观: 感应电动势所作的功 = 外力拉导线所作功

$\Rightarrow$ L-力转换能量, 接受外力$\vec{f}'$的功, $\vec{f}$对电荷作功

导体不动,无Lorentz力, 如何解释?

1861，Maxwell：

产生 ε_i 需要非静电力

静止电荷只受电场力作用

⇒这时的非静电力应是一种电场力.

⇒变化磁场会产生一种非静电场

⇒ 没有导体时，该电场也应存在

Maxwell假设:

不论有无导体（回路），变化磁场都会在其周围产生具有闭合电场线的电场— 涡旋电场 $\vec{E}_{旋}$

如何定量描述?

对于导体回路, 由电动势的普遍定义可得:

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l}$$

即**感生电动势等于涡旋电场强度的环流。**

由Faraday定律 $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$

$$\Rightarrow \oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \neq 0$$

即$\vec{E}_{旋}$是**有旋电场 (curl electric field)**

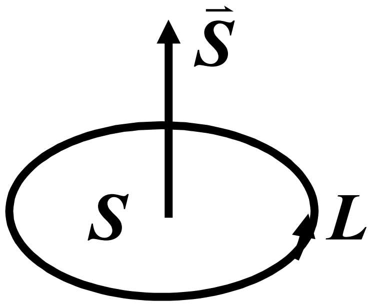
代入 $\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 得:

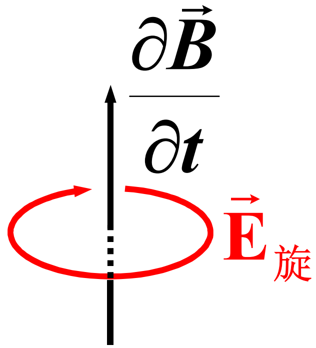
§6-3 感生电动势　涡旋电场

$$\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- $\vec{E}_{旋}$完全是磁场随t变化的结果，$\vec{B}$变⇔**有旋**
- $\vec{E}_{旋}$的存在与有无导体无关
- $d\vec{S}$的正方向与L成**右**手螺旋关系
- **负号**⇒与 $\vec{E}_{旋}$成**左**手螺旋
- **涡旋电场无源⇒其电场线是闭合的**

$$\oint_S \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{S} = 0$$





比较：

	静电场	涡旋电场
场的起源	电 荷	时变磁场
环流	$\oint_L \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0$	$\boxed{\oint_L \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$
通量	$\oint_S \vec{E}_{静} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$	$\boxed{\oint_S \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{S} = 0}$

一般情况下，$\vec{E} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{感}$

感生电动势的计算：

方法之一：根据电磁感应定律

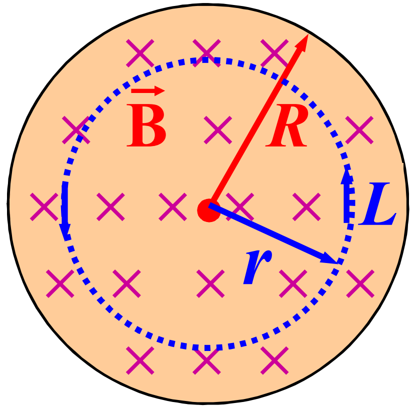
$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

先求穿过回路的磁通，再求磁通的时间变化率，进而求回路中的感生电动势。

方法之二：根据定义

$$\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l} \qquad \varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}$$

例: 如图, 无限长直圆柱区域(R)内, $\vec{B}=\vec{B}(t)$, 均匀分布, 求 $\vec{E}_{旋}$分布.



解: 基本公式 $\oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

轴对称 $\Rightarrow$同r各点 $\vec{E}_{旋}$ 大小相等

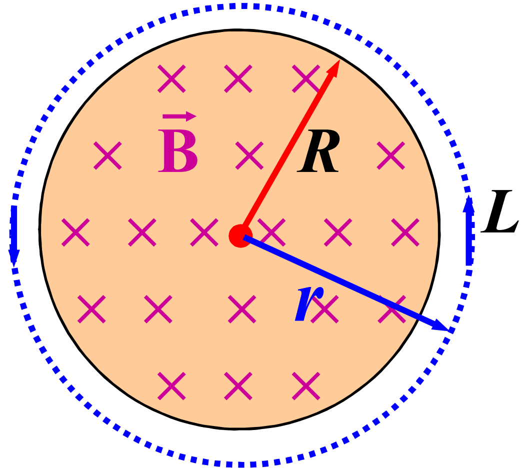
闭合$\Rightarrow$ $\vec{E}_{旋}$方向沿切向

$r \le R$： 选L, 走向如图, 则L所围S的法向从纸内向外,

$$\vec{B} = -B(t)\vec{n}^0 \quad \Rightarrow \quad E_{旋}\cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2$$

$\therefore$ $E_{旋} = \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$; 方向: $\frac{\partial B}{\partial t}\begin{cases} > 0, \vec{E}_{旋}与L同向 \\ < 0, \vec{E}_{旋}与L反向 \end{cases}$ (左旋)

例: 如图, 无限长直圆柱区域(R)内, $\vec{B}=\vec{B}(t)$, 均匀分布, 求 $\vec{E}_{旋}$分布.



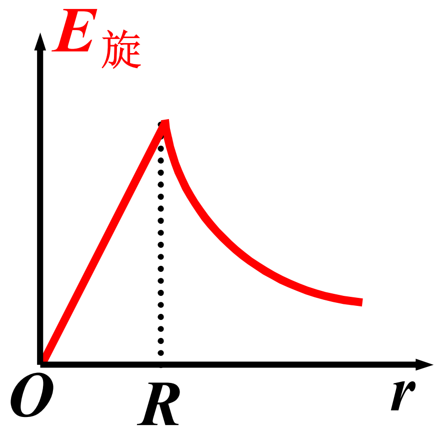
$r \geq R$: $\vec{B}=0$, 但$\vec{E}_{旋} \neq 0$

选L同上，但 $r \geq R$

$$\Rightarrow \quad E_{旋} \cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t}\pi R^2$$

$$\therefore \boxed{E_{旋} = \frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t}} \text{；方向同前}$$

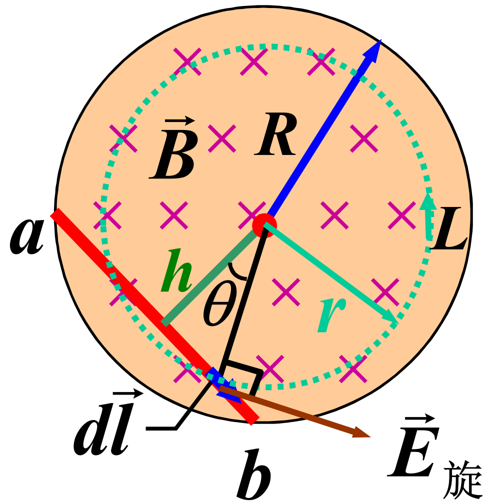
• 涡旋电场随 r 的变化:



例: 同上, 如图放入导体杆, $\overline{ab} = l$

与轴的垂直距离为h, 且

$$B = B_0 + \alpha t(\alpha > 0)$$, 求 ε_{iab}



解: $E_{旋} = \dfrac{r}{2}\dfrac{\partial B}{\partial t}\ (r \le R)$, 方向: ↻

由电动势定义得:

$$\varepsilon_{iab} = \int_{(a)}^{(b)} \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = \int_{(a)}^{(b)} \frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\cos\theta dl$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial t}\int_0^l \frac{h}{\cos\theta}\cos\theta dl = \frac{\alpha}{2}hl > 0$$

回路中磁通φ变 → 感应电动势

基本规律

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \int_s \vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$$

感生　　动生

机理：涡旋电场$E_{旋}$

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

or

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}$$ 一段导体

机理:洛仑兹力

$$\varepsilon_i = \oint_{ab} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

电磁感应的应用：

电子感应加速器：

涡电流： 大块导体在磁场中运动或处于变化磁场中时，其内部产生涡旋状感应电流——涡流。(很多应用)

有利有弊

- 电磁阻尼
- 感应加热 　　金属熔炼、焊接、表面淬火等高效节能无污染。
- 耗能；过热→事故

电气列车的电磁制动：

磁记录： 一种现代信息技术，利用铁磁材料(磁带、磁盘或磁鼓)的特性和电磁感应的规律等。

§6-4 自感与互感

一. 自感

$$\Phi_m\text{变} \rightarrow \varepsilon_i \rightarrow I_i \rightarrow \Phi'_m$$

回路中电流变化时，其全磁通随之变化，在回路自身激起感应电动势 —— 自感电动势.

物理意义(定性):

导体回路

自感电动势 $\Rightarrow$ 自感电流

$\Rightarrow$ 磁场, 反抗原有 Φ_m 的变化

$\Rightarrow$ 反抗电流变化, 企图使其保持不变

$\Rightarrow$ 自感电动势也称为反电动势。

自感系数:

设电流为I, 则回路中的$\Phi_m \propto I$，若无铁磁质引入自感系数L，有$\boxed{\Phi_m = LI}$

SI: 亨(利), H = Wb/A, 常用mH, μH.

L在数值上等于线圈通有单位电流强度时,通过线圈自身的全磁通的大小。

- I是产生Φ_m的电流.
- 简单回路里常可略, 匝数较多或有铁磁质时显著.
- 以后讨论限于回路形状不变且无铁磁质的情况, (否则L不是常量).

自感电动势:

由Faraday定律, 有

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

回路形状不变, μ_r不变时:

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}} \quad \text{或:} \quad \boxed{L = -\frac{\varepsilon_L}{dI/dt}}$$

L = 单位电流变化率时的自感电动势.

- L与回路/线圈的结构(形状、介质等)有关, 有铁磁质时还和电流 I 及其变化率有关,
- 对N匝线圈, $\Psi = N\Phi_m$, L为单匝时的N倍.

§6-4 自感与互感

自感现象(定量):

K接a时, $\varepsilon - L\dfrac{dI}{dt} = IR$

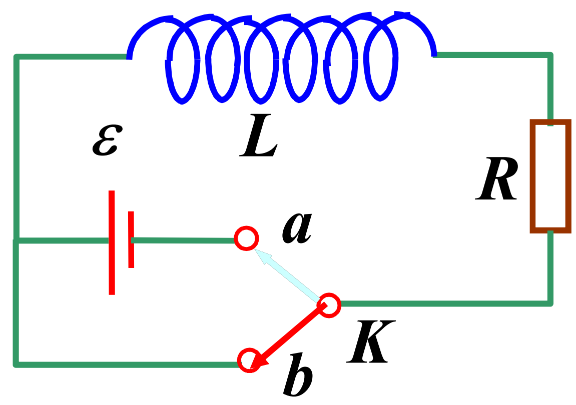
分离变量求解: $\boxed{I = \dfrac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-Rt/L})}$

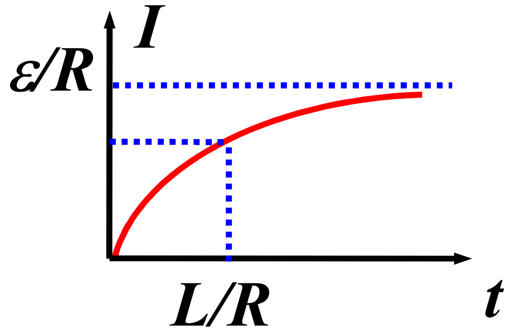
弛豫时间: $\boxed{t = L/R}$

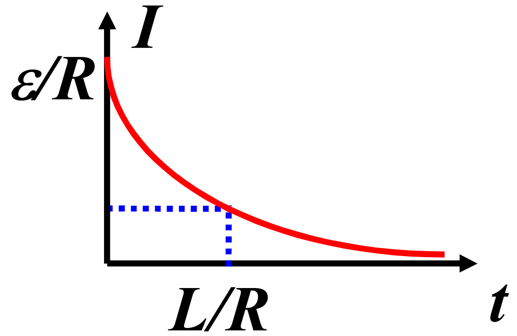
这时 $I = \dfrac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-1}) \approx 0.63 I_{\max}$

K接b时, $-L\dfrac{dI}{dt} = IR$

解得 $\boxed{I = \dfrac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}}$







- **自感现象的应用：**

  镇流器，扼流圈等。

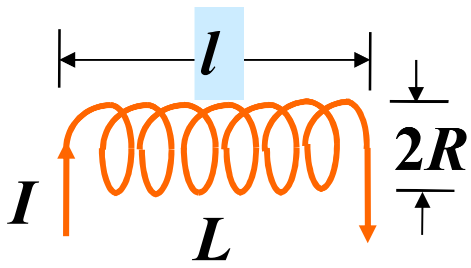
  不利：大电流的电路拉闸时要小心。

自感一般由实验测定，对简单情况也可以计算。

- **计算思路: 设**$I \rightarrow B \rightarrow \psi \rightarrow L$

例: 如图, 密绕长直螺线管, 已知R, N, l, 求L.

解: 设通过电流 I



$$\Rightarrow \quad B=\mu_0 nI=\mu_0 NI/l$$

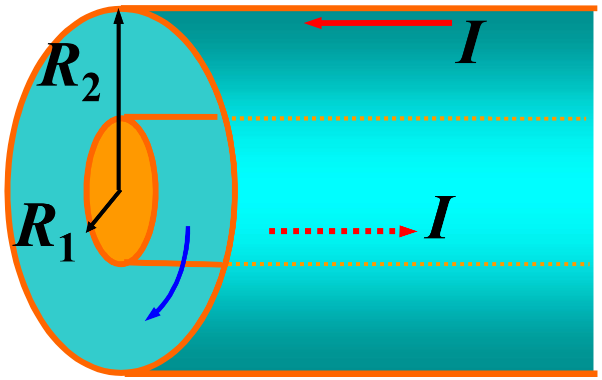
$$\Rightarrow \quad \Psi=N\Phi_m=\mu_0 N^2 I\pi R^2/l$$

$$I\text{变}\Rightarrow \varepsilon_{\text{总}}=-\frac{d\Psi}{dt}=-\frac{\mu_0\pi R^2 N^2}{l}\frac{dI}{dt}$$

$$\therefore \quad L=-\frac{\varepsilon_{\text{总}}}{dI/dt}=\frac{\mu_0\pi R^2 N^2}{l}=\mu_0 n^2 V$$

- 加入磁芯后, $L'=\mu_r L$, 对铁磁质, μ_r与I有关.
- 对螺绕环有相同结果.
- $l=30\text{cm}$, $N=1000$, $S=2\text{cm}^2\Rightarrow L=0.84\text{mH}$.

例: 同轴电缆, 已知R_1, R_2, μ, 内外表面电流I, 求单位长度的L.



解: 由安培环路定理有

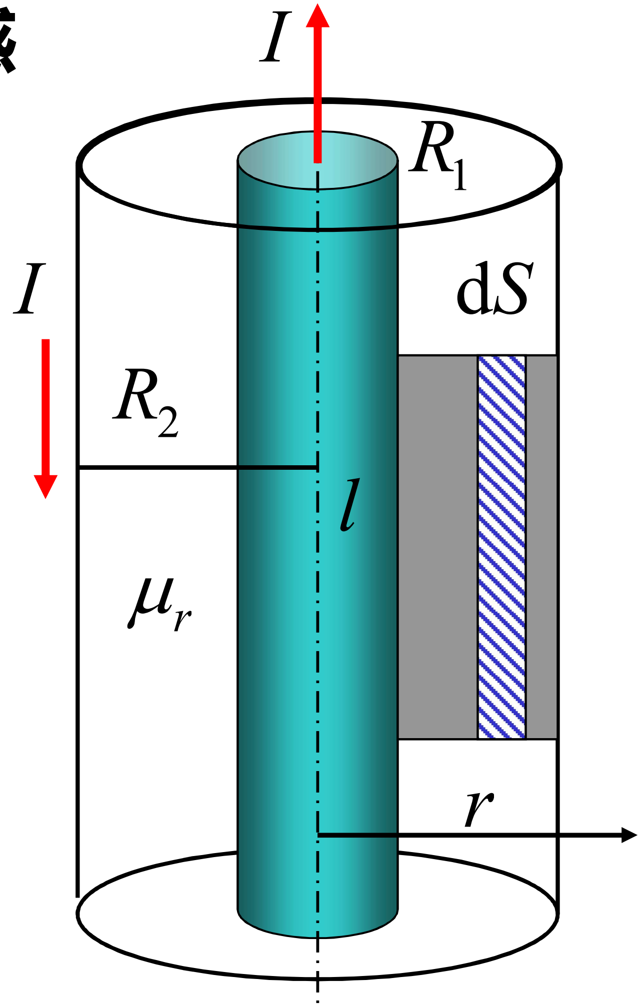
$$r < R_1 \text{或} r > R_2: \quad B = 0$$

$$R_1 < r < R_2: \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r}; \text{方向如图}$$

例:同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴导体柱面组成

求:无限长同轴电缆单位长度上的自感

解:由安培环路定理可知



$$R_1 < r < R_2 \qquad B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$r < R_1, r > R_2 \qquad B = 0$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l\mathrm{d}r$$

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

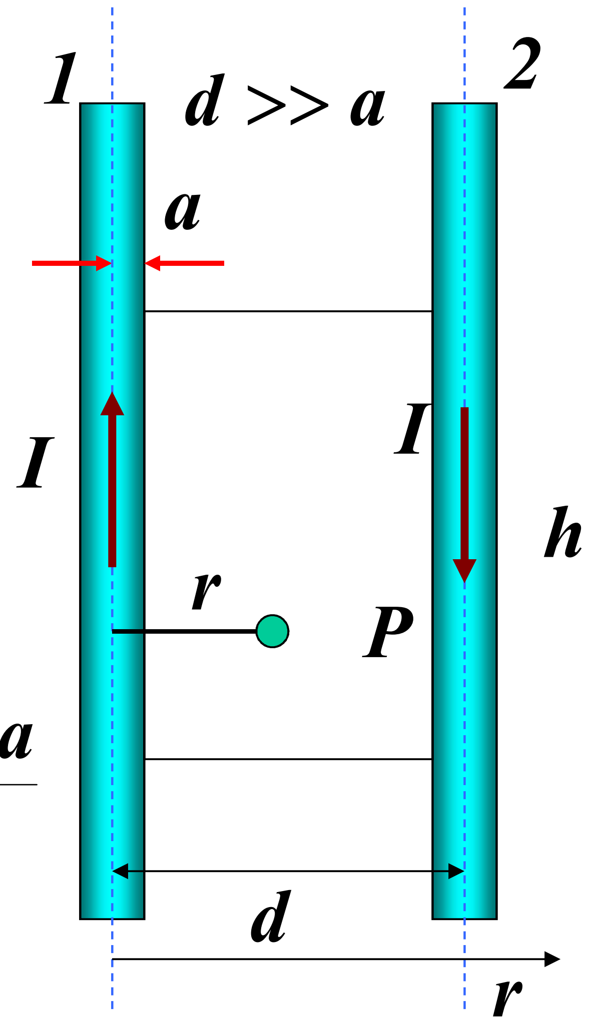
例　设一载流回路由两根平行的长直导线组成。
求　这一对导线单位长度的自感 L
解　由题意，设电流回路 I

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

取一段长为 h 的导线　$\Phi = \int_a^{d-a} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\Phi = \int_a^{d-a} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right] h \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \Rightarrow L = \frac{\Phi}{Ih} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$



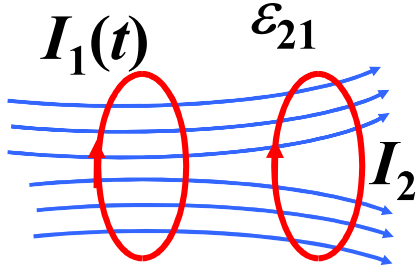
二. 互感

两相邻回路, 其中一个电流变化 $\Rightarrow$ $\vec{B}$变 $\Rightarrow$ Φ_m变 $\Rightarrow$ 在另一回路中产生ε_i —— 互感现象.

设两回路的形状,位置和μ 均不变,则I_1引起的磁场在回路2中的磁通 Φ_{21}与I_1成正比:

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$



定义互感系数: (简称互感)

$$\boxed{M_{21} = -\varepsilon_{21} \Big/ \frac{dI_1}{dt}}$$

SI: 亨利(H)

M_{21}—线圈1对线圈2的互感系数

- M_{21}与线圈结构的大小、形状、匝数、相对位置和周围磁介质分布有关, 有铁磁质时还和I_1有关.

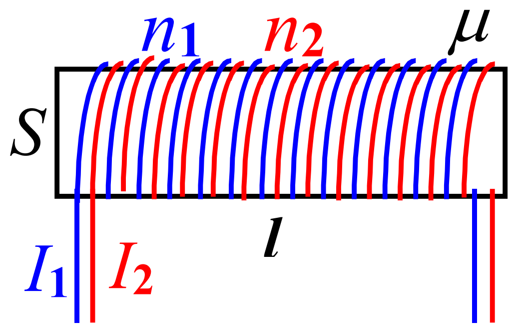
同理

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

或: $\boxed{M_{12} = -\varepsilon_{12} \Big/ \frac{dI_2}{dt}}$

- 可证, $M_{12}=M_{21}=M$ (自学)
- 若回路有N匝, $\Phi \to \Psi = N\Phi_i$, M总 $= NM_i$
- 计算思路：选定一个线圈，设$I \to \mathrm{B} \to \Psi \to M$

例: 长直管上(体积V)有两个密绕线圈, 匝数密度为n_1, n_2。管内部充满磁介质(μ)。求互感系数M。



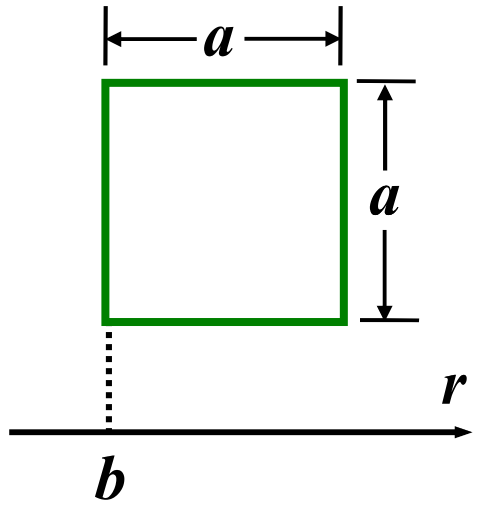
解: 设I_1 有 $B_1 = \mu n_1 I_1$

$$\Rightarrow \quad \psi_{21} = N_2 \phi_{21} = N_2 B_1 S = N_2 \mu n_1 I_1 S$$

$$= N_2 \mu n_1 I_1 S \, (l/l) = n_2 \mu n_1 I_1 Sl$$

$$= \mu n_1 n_2 I_1 V$$

$$\Rightarrow \quad M = \psi_{21}/I_1 = \mu n_1 n_2 V$$ (与i_1无关)。



例: 如图, 已知I, a, b, 求M

解: $B=\dfrac{\mu I}{2\pi r}$; 方向 :⊗

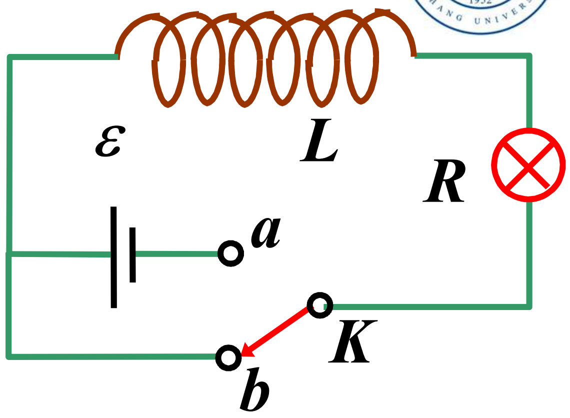
$$\Phi_m=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_b^{a+b}\frac{\mu I}{2\pi r}adr$$

$$=\frac{\mu Ia}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

$$\therefore \quad M=\frac{\mu a}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

- **原则上可设□中通I 认为长直导线在∞处形成回路, 但这样难以计算.**

§6-5 磁场能量



一. 自感能

实验：如图，K由a接b时，

灯反而瞬间亮，然后渐暗，为什么？

线圈中能储藏能量！（或：自感电动势作了功）

已知I, L, 如何求W_L？

$K = a$时，$i = 0 \rightarrow i = \dfrac{\varepsilon}{R}$

物理: 电源供能 →反抗感应电动势作功+焦耳热

这时有 $\varepsilon - L\dfrac{di}{dt} = iR$

§6-5 磁场能量

$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = iR$$

同乘以i, 从$t = 0$到$t = \tau$积分:

$$\int_0^{\tau} i\varepsilon dt = \int_0^{\tau} iL\frac{di}{dt}dt + \int_0^{\tau} i^2 R dt$$

其中右边第一项对应**磁场能**:

$$W_L = \int_0^I iLdi = \frac{1}{2}LI^2 > 0$$

可证, 当K从$a \rightarrow b$时, 放出的能量正是该能量

$K = b$时，设dt内通过灯泡的电流为i，则dt内自感电动势作的功为

§ 6-5 磁场能量

$$dA = \varepsilon(i \cdot dt) = -L\frac{di}{dt}(i \cdot dt) = -Li \cdot di$$

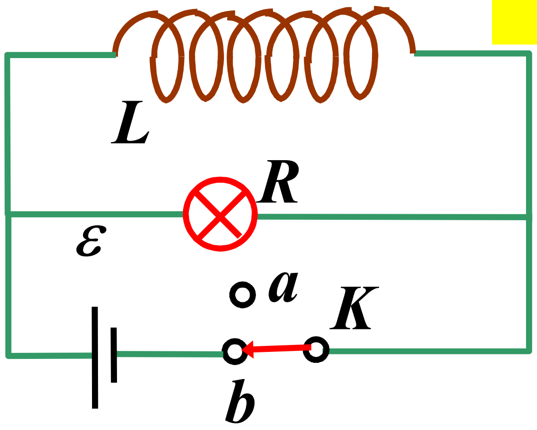
$$A = \int dA = \int_I^0 - Li \cdot di = \frac{1}{2}LI^2$$

正是自感线圈的磁能: $\boxed{W_L = \frac{1}{2}LI^2}$ **称为自感能**

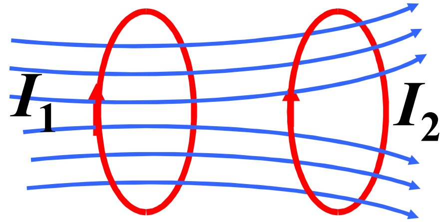
对一般情况均适用.

若知道自感能，也可用于求自感系数: $\boxed{L = \frac{2W_L}{I^2}}$

练习：试分析右图。



二. 互感能



特例如图, 建立I_1, I_2时, 除反抗自感电动势作功(自感能)外, 还要反抗互感电动势作功(互感能).

由上节例2, $L = L_1 + L_2 \pm 2M$

$\Rightarrow$ 系统贮存总磁能为: $W = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{1}{2}(L_1 + L_2 \pm 2M)I^2$

$\Rightarrow$ 由于互感导致的附加能(互感能)为$\pm MI^2$.

一般情况: I_1, I_2不等, 规定同向时$M > 0$, 反向时$M < 0$.

系统总磁能: $W = \dfrac{1}{2}L_1I_1^2 + \dfrac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$ 互感能

§6-5 磁场能量

- **自感能是载流线圈的固有磁能, 恒为正.**
- **互感能是载流线圈间的相互作用能, 可正可负.**
- **可证, 总磁能恒为正.**

三. 磁能密度

特例: 长密绕螺线管, 长l, 截面积S, 总匝数N, 由前例有

$$L = \mu n^2 V$$

若通电流I, 则 $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{1}{2}\mu n^2 V I^2 = \dfrac{B^2}{2\mu}V \quad (B = \mu n I)$

$\therefore$ **可引入磁能密度:** $\boxed{w_m = \dfrac{B^2}{2\mu} = \dfrac{1}{2}BH}$

§6-5 磁场能量

或用矢量表示,为: $\boxed{w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}}$

此公式虽由长直密绕螺线管特例导出,但却普遍适用

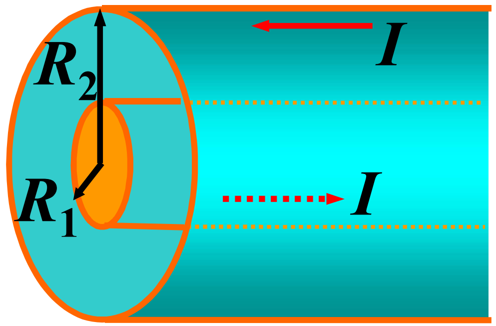
若已知w_m, 可求总磁能:

$$\boxed{W_m = \int w_m dV = \frac{1}{2}\int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV}$$

- 积分对整个磁场空间进行.
- 除含**铁磁质**的情况外, 普遍成立.

§6-5 磁场能量

例: 同轴电缆, 已知R_1, R_2, μ,内外表面电流I, 求单位长度的磁能.



解:$R_1 < r < R_2$时,$B = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$; 其余为零.

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V BHdV = \frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi rldr$$

单位长度的磁能: $W_0 = \dfrac{\mu I^2}{4\pi}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$

再由 $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2$ 可得单位长度的自感为:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

课后作业

课后习题：

6.1，6.2，6.3，6.4，6.5，6.6，6.7，6.9，6.10
6.12，6.13

截止日期：2025-06-17 24:00

谢 谢！