2.6 子空间

子集生成的子空间

定义2.6.1　向量空间F^n的非空子集W如果满足一下两个条件：

$$(1)\ u,v\in W \qquad u+v\in W,$$

$$(2)\ u\in W,\ \lambda\in F \qquad \lambda u\in W,$$

就称W是F^n的子空间。如果F^n的子空间W_1是子空间W_2的子集，则称W_1是W_2的子空间。

定义2.6.2　设W是F^n的子空间，如果W中存在r个线性无关向量，并且任意$r+1$个向量线性相关，就称W的**维数**为r，记为$\dim W=r$.

如果W中存在一组向量$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$，使$W$中每个向量$\alpha$都能写成$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$在$F$上的线性组合

$$\alpha=x_1\alpha_1+\ldots+x_r\alpha_r, \qquad (2.3.6)$$

其中的系数$x_1,\ldots,x_r$由α唯一决定，则M称为W的一组**基**。α的线性组合表达式(2.3.6)中的系数组成的有序数组$(x_1,\ldots,x_r)$称为α在基M下的**坐标**。

定理（引理2.6.1） 设W是F^n的子空间.

$$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}\subset W,\text{ 则}$$

(1)M是W的基 $\Leftrightarrow$ M是W的极大线性无关组.

(2)W的基M所含向量个数$|M|=\dim W$.

证明 (1)先设M是W的极大线性无关组，则W中每个向量α都能写成M的线性组合：

$$\alpha=x_1\alpha_1+\ldots+x_r\alpha_r, \qquad (2.3.7)$$

若还有

$$\alpha=y_1\alpha_1+\ldots+y_r\alpha_r, \qquad (2.3.8)$$

将等式(2.3.7)与(2.3.8)相减得,

$$(x_1-y_1)\alpha_1+(x_2-y_2)\alpha_2+\ldots+(x_r-y_r)\alpha_r=0$$

由$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性无关得

$$x_1-y_1=\ldots=x_n-y_n=0$$

从而$x_i=y_i$对$1\le i\le r$成立.可见$(x_1,\ldots,x_r)\in F^r$由α唯一决定。

这说明M是W的基。

再设M是W的基。设$\lambda_1,\ldots,\lambda_r\in F$满足条件

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_r\alpha_r=0 \qquad (2.3.9)$$

另一方面有

$$0\alpha_1+\ldots+0\alpha_r=0 \qquad (2.3.10)$$

(2.3.9)与(2.3.10)都是将零向量0表示为$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$的线性组合的等式，由于M是基，表示的系数具有唯一性，这使得$(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)=(0,\ldots,0)$

这说明M线性无关.

由于W中所有的向量都是M的线性组合，因此M是W的极大线性无关组。

(2)设$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ 是W的基，由r个向量组成.则M中的向量就是W中r个线性无关的向量.W中任意$r+1$个向量$\beta_1,\ldots,\beta_{r+1}$都是$M$中$r$个向量的线性组合，由定理2.2.5知$\beta_1,\ldots,\beta_{r+1}$线性相关.可见$\dim W=r=|M|$。

推论　F^n的子空间W的所有的基所含向量个数相等，等于向量组W的秩$\text{rank}W$。

$\text{rank}W=\dim W$。

引理2.6.2 设F^n的子空间W的维数为r，则W中任意一个线性无关子集S都能扩充为W的一组基，S所含向量个数都不超过r。如果W_0是W的子空间，则W_0的任何一组基都能扩充为W的一组基，$\dim W_0 \le \dim W$，且$W_0=W \Leftrightarrow \dim W_0=\dim W$。

证明： W的线性无关子集S可以扩充为W的一个极大线性无关组M，M是W的基，含有r个向量，当然S所含向量个数不超过r。

W的子空间W_0的基$M_0=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$是$W$中的线性无关子集，当然可以扩充为$W$的一组基$M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$，且$\dim W_0= k\le r =\dim W$ 显然成立.

显然$W_0=W \Rightarrow \dim W_0=\dim W$.

而由$M_0 \subseteq M$知 $\dim W_0= k = \dim W = r \Rightarrow$ $M_0=M$ $W_0=W$

定理2.3.4 设F^n的子空间W的维数为r， $M=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ $\subset W$， 则M线性无关$\Leftrightarrow$ M是W的基 $\Leftrightarrow$ W中所有的向量都是M的线性组合。

证明：如果M是W的基，当然“M线性无关”与“W中所有的向量都是M的线性组合”这两个条件同时满足。反之，当M所含向量个数r 等于$\dim W$ 时，只要满足这两个条件之一，M就是W的基。

先设M线性无关，则M可以扩充为W的一组基M_1。M_1包含M，且M_1中所含的向量个数也是r，与M一样多。因此M_1=M，M是W的基。

再设W中所有的向量都是M的线性组合。取M的极大线性无关组M_0，则M是M_0的线性组合。由线性组合的传递性知W中所有的向量也都是M_0的线性组合。

而M_0线性无关，因此是W的极大线性无关组. 从而M_0是W的基，含有r个向量。M_0是M的子集而且所含向量个数与M一样多，因此$M_0=M$，M是W的基。

引理2.6.3 F^n的任意非空子集S的全体线性组合组成的集合$V(S)$是F^n的子空间。F^n的子空间如果包含S，必然包含$V(S)$。

证明： $V(S)$就是S的有限子集的线性组合的全体组成的集合。即

$V(S)=\{\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_k\alpha_k | k$是正整数, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in S$, $\lambda_1,\ldots, \lambda_k\in F\}$

设$u,v\in V(S)$,则

$$u=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_ku_k,\quad v=\mu_1v_1+\ldots+\mu_mv_m$$

其中$u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_m\in S$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, $\mu_1,\ldots\mu_m\in F$。于是

$$u+v=\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_k u_k+\mu_1 v_1+\ldots+\mu_m v_m$$

与 $\lambda u=\lambda\lambda_1 s_1+\ldots+\lambda\lambda_k s_k$ (对任意$\lambda\in F$)

都是S中有限个向量的线性组合，含于$V(S)$。这就证明了$V(S)$是F^n的子空间。

如果W是F^n中包含S的子空间，则W包含S中向量的所有线性组合，也就是包含$V(S)$。这说明$V(S)$是F^n中包含S的最小子空间。

定义2.6.3 F^n的非空子集S的全体线性组合组成的子空间，称为**S生成的子空间**，记作$L(S)$。当S是有限子集$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$时，也将$L(S)$记作$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$。

设S_1,S_2,S_3是F^n的非空子集。求证：

(1) S_2是S_1的线性组合$\Leftrightarrow$ $L(S_2)\subseteq L(S_1)$。

S_1与S_2等价 $\Leftrightarrow$ $L(S_2)=L(S_1)$。

(2) 设S_0是S_1的极大线性无关组，则S_0是$L(S_1)$的基。$\mathrm{rank}S_1=\dim L(S_1)$。

证明：(1)$L(S_1)$包含了S_1的全体线性组合。因此，S_2是S_1的线性组合 $\Leftrightarrow S_2 \subseteq L(S_1)$。

由于$L(S_1)$是子空间，如果它包含S_2，必然包含S_2的全体线性组合组成的集合$L(S_2)$。

故，S_1与S_2互为线性组合 $\Leftrightarrow$ $L(S_1)$与$L(S_2)$相互包含 $\Leftrightarrow L(S_1)=L(S_2)$。

(2) S_1的极大线性无关组S_0与S_1等价。因而$L(S_0)=L(S_1)$。$L(S_1)$是S_0的线性组合，并且S_0线性无关，因此S_0是$L(S_1)$的极大线性无关组，S_0是$L(S_1)$基。$\dim L(S_1)=|S_0|=\mathrm{rank}S_1$，这里$|S_0|$表示$S_0$所含元素个数。

齐次线性方程组的解空间

例4 求证：数域F上n元齐次线性方程组$AX=0$的全体解向量组成的集合V_A是F^n的子空间。

证明：

$$X_1, X_2 \in V_A \Rightarrow \begin{cases} AX_1 = 0 \\ AX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A(X_1 + X_2) = 0 \\ A(\lambda X_1) = \lambda AX_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 \in V_A \\ \lambda X_1 \in V_A \end{cases}$$

证明了V_A是F^n的子空间.

齐次线性方程组的解集合称为解空间。

例5 求以下解空间W的维数及一组基。

(1)三元一次方程$x+y+z=0$的解空间W。

解：(1)方程$x+y+z=0$的通解是：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别取$(t_1,t_2)=(1,0)$，$(t_1,t_2)=(0,1)$，得到两个解

$$X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

通解$X=t_1X_1+t_2X_2$是X_1，X_2的线性组合。显然X_1，X_2不成比例，因此线性无关，是解空间W的一组基。

解空间W的维数是2。

(2)三元一次方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{cases}$$

的解空间W。

解：方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t \\ 3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

取t=1得一个解 $x_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

通解为tX_1，是X_1的线性组合。X_1不等于0，线性无关，单独组成解空间W的一组基。

(3) 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 + 8x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 24x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间W。

解： 方程组的系数矩阵A经过一系列初等行变换化为最简形式：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -3 & -19 & 8 \\ 3 & 6 & -3 & -24 & 9 \end{pmatrix} \to B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以A为系数矩阵的原方程简化为以B为系数矩阵的齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 5x_4 - x_5 \\ x_3 = -3x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

x_2, x_4, x_5是三个自由变量，使用3个自由变量t_1，t_2，t_3决定了其余x_1、x_3，从而确定通解：

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 + 5t_2 - t_3 \\ t_1 \\ -3t_2 + 2t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

取$(t_1,t_2,t_3)=(1,0,0)$或$(0,1,0)$或$(0,0,1)$，可得

$$X_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\\1\\0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\quad(2.3.12)$$

方程组的所有解都是以上X_1,X_2,X_3的线性组合。以下说明X_1,X_2,X_3线性无关，组成W的一组基。

设 $t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3=0$ (2.3.13)

即

$$\begin{pmatrix} -2t_1+5t_2-t_3 \\ t_1 \\ -3t_2+2t_3 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

上式成立仅当$t_1=t_2=t_3=0$，可见X_1,X_2,X_3线性无关，组成W的一组基。W的维数等于3。

齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.3.15)$$

中的各方程的变量系数组成**系数矩阵**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

定理2.6.1 设数域F上n元齐次线性方程组的系数矩阵为A，则它的**解空间的维数$\dim V_A=n-\mathrm{rank}A$**

证明： 系数矩阵A可以经过初等行变换化为

$$B=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & b_{1n} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2j_2} & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

其中 $b_{1j_1}=b_{2j_2}=\cdots=b_{rj_r}=1, 1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n,$

B是最简行阶梯型。故$r=\text{rank}B=\text{rank}A$。

设n个数中除了$j_1,j_2,\ldots,j_r$之外剩下的数从小到大依次是$j_{r+1},\ldots,j_n$。

将A经过初等行变换化为B，也就是将方程组(2.3.1)经过同解变形化为

$$\begin{cases} x_{j_1}+b_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}}+\cdots+b_{1j_n}x_{j_n}=0 \\ x_{j_2}+b_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}}+\cdots+b_{2j_n}x_{j_n}=0 \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r}+b_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}}+\cdots+b_{rj_n}x_{j_n}=0 \end{cases} \qquad (2.3.17)$$

将方程组(2.3.17)中变为

$$\begin{cases} x_{j_1} = -b_{1j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - b_{1j_n} x_{j_n} \\ x_{j_2} = -b_{2j_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - b_{2j_n} x_{j_n} = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_{j_r} = -b_{rj_{r+1}} x_{j_{r+1}} - \cdots - b_{rj_n} x_{j_n} = 0 \end{cases} \quad (2.3.18)$$

将独立变量 $x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}$ 取任意值，每一组值代入就可计算出 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_r}$ 的唯一一组值，得到原方程(2.3.1)的一个解X=(x_1,...,x_n)。这组解X由n-r元数组 $(x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n})$唯一决定，可记为：

$$u = (x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n}) \in F^{n-r} \qquad X = f(u) = f(x_{j_{r+1}}, \cdots, x_{j_n})$$

对每个$1\le i\le n-r$，记e_i是F^{n-r}中第i分量为1、其余分量为0的数组向量，则$\{e_1,\ldots,e_{n-r}\}$是F^{n-r}的自然基。

$$u=(x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n})=x_{j_{r+1}}e_1+\cdots x_{j_n}e_{n-r}$$

$$X=f(u)=f(x_{j_{r+1}}e_1+\cdots+x_{j_n}e_{n-r})$$

$$=x_{j_{r+1}}f(e_1)+\cdots+x_{j_n}f(e_{n-r})$$

$$=x_{j_{r+1}}X_1+\cdots+x_{j_n}X_{n-r}\quad(2.3.19)$$

其中$X_1,\ldots,X_{n-r}$分别等于$f(e_1),\ldots,f(e_{n-r})$，是方程组的$n-r$个解，以下说明方程组所有的解X都是这$n-r$个解的线性组合。

设 $x_{j_{r+1}}X_1+\cdots x_{j_n}X_{n-r}=0(2.3.20)$

即
$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=f(x_{j_{r+1}},\cdots,x_{j_n})=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(2.3.21)$$

(2.3.20)成立仅当*X*的分量 $x_{j_{r+1}}=\cdots=x_{j_n}=0$，这说明$X_1,\ldots,X_{n-r}$线性无关，组成解空间$V_A$的一组基。这组基由*n*-*r*个向量组成，因此

$$\dim V_A=n-r=n-\mathrm{rank}A$$

齐次线性方程组的解空间的一组基称为这个方程组的一个基础解系.

例6　已知F^5中的向量

$$X_1=(1,2,3,4,5)，X_2=(1,3,2,1,2)$$

求一个齐次线性方程组，使X_1，X_2组成这个方程组的基础解系。

解：设

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4+a_{i5}x_5=0$$

是方程组$AX=0$的任意一个方程。将X_1，X_2的坐标代入得

$$\begin{cases} a_{i1}+2a_{i2}+3a_{i3}+4a_{i4}+5a_{i5}=0 \\ a_{i1}+3a_{i2}+2a_{i3}+a_{i4}+2a_{i5}=0 \end{cases} \quad (2.3.22)$$

将上式看作以$a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4},a_{i5}$为变量的线性方程组来解。系数矩阵如下：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

对B作初等行变换得

$$B\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

方程组(2.3.22)化为

$$\begin{cases} a_{i1} = -5a_{i3} - 10a_{i4} - 11a_{i5} \\ a_{i2} = a_{i3} + 3a_{i4} + 3a_{i5} \end{cases}$$

因此

$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, a_{i5})$

$=(-5a_{i3}-10a_{i4}-11a_{i5},\ a_{i3}+3a_{i4}+3a_{i5},\ a_{i3}, a_{i4}, a_{i5})$

$=a_{i3}(-5,1,1,0,0)+a_{i4}(-10,3,0,1,0)+a_{i5}(-11,3,0,0,1)$

方程组(2.3.22)的一组基础解系是

(-5,1,1,0,0)，(-10,3,0,1,0)，(-11,3,0,0,1).

以这组基础解系为各行组成矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -11 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当然rank$A$=3。以A为系数矩阵的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} -5x_1+x_2+x_3=0 \\ -10x_1+3x_2+x_4=0 \\ -11x_1+3x_2+x_5=0 \end{cases} \quad (2.3.23)$$

其解空间的维数为5-rank$A$=5-3=2。而X_1,X_2是方程组的两个线性无关解，因此组成基础解系。

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

方程组的增广矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

非齐次方程组的向量形式

令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta} \quad (2.4.2)$$

几何意义：已知F^m中的向量$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}$，将$\boldsymbol{\beta}$表示成$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\cdots$、$\boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合，求组合系数。

非齐次线性方程组有解的充要条件

定理2.4.1 非齐次线性方程组有解 $\Leftrightarrow$ 其系数矩阵与增广矩阵的秩相同。

证明：记 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n\}$

$$(2.4.1)\text{有解}\Leftrightarrow(2.4.2)\text{有解}\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}\text{是}S\text{的线性组合}$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}\in L(S)\Leftrightarrow L(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=L(S)$$

$$L(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=L(S)\Leftrightarrow\dim L(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=\dim L(S)$$

$$S\text{是}A\text{的列向量组}\Rightarrow\dim L(S)=\operatorname{rank}\ \mathrm{S}=\operatorname{rank}\ A$$

$$S\cup\{\boldsymbol{\beta}\}\text{是}\tilde{A}\text{的列向量组}\Rightarrow\dim L(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=\operatorname{rank}(\mathrm{S}\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=\operatorname{rank}\ A$$

$$\dim L(S\cup\{\boldsymbol{\beta}\})=\dim L(S)\text{，即}\operatorname{rank}\ A=\operatorname{rank}\ \tilde{A}$$

非齐次线性方程组解集的结构

定理2.4.2 任意取定非齐次线性方程组(2.4.1)的一个特解η，则(2.4.1)的通解为$X=\eta+Y$，其中Y是与(2.4.1)对应的齐次线性方程组(2.4.5)的通解。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0 \qquad (2.4.5)$$

也就是说，若 $X_1,\cdots,X_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组（2.4.5）的一个基础解系。则非齐次线性方程组（2.4.1）的通解为

$$X=\eta+t_1X_1+\cdots+t_{n-r}X_{n-r}$$

其中 $t_1,\cdots,t_{n-r}$ 是F中的任意常数。

例7 设4元线性方程组的系数矩阵A的秩 rankA=3. α_1, α_2, α_3是它的3个解，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\4\end{pmatrix},\quad 5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\8\end{pmatrix}$$

求这个线性方程组的通解。

机动 目录 上页 下页 返回 结束

解： 以A为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间V_A的维数$\dim V_A=4-\text{rank}\,A=4-3=1$。如果原方程组是齐次线性方程组，则$\alpha_1$，$5\alpha_2-2\alpha_3$都是它的解，都在1维空间$V_A$中。

但α_1，$5\alpha_2-2\alpha_3$线性无关，不在同一个1维子空间中。因此原方程组是非齐次线性方程组。

原线性方程组的任意两个解的差是对应的齐次线性方程组的解，含于V_A。因此V_A包含$\alpha_2-\alpha_1$，$\alpha_3-\alpha_1$，从而包含它们的线性组合

$$X_1 = 5(\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1) - 2(\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1) = (5\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3) - 3\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

因此，方程组的通解为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 + tX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$