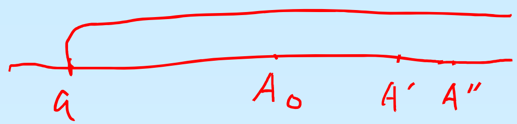
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

§3 一般函数无穷积分的收敛性判别法

定理3. 1（Cauchy收敛原理）



$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \text{对} \forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a,$$

$$\text{只要} A', A'' > A_0, \text{总有} \quad \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ 存在

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists X$, s.t

$\forall x', x'' > X$ 时

有 $|F(x')-F(x'')| < \varepsilon$

证明： $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) \text{存在，其中} F(A) = \int_a^A f(x)dx,$$

$A > a$

$$\Leftrightarrow \quad \text{对} \forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a, \quad \text{只要} A', A'' > A_0, \text{总有}$$

$$|F(A'') - F(A')| < \varepsilon, \qquad \text{Cauchy收敛准则，}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

定理3.2 如果任给$A > a$，$\int_a^A f(x)dx$存在，则

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ 收敛} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}$$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛

证明： $\because \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛，

对$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$，只要$A'' > A' > A_0$，总有

$$\int_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon,$$

$$\therefore \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| \le \int_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

$$\therefore \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}$$

定义： 如果$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是绝对收敛.

如果$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，但$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，

称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$是条件收敛.

注： 绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛

收敛 $\not\Rightarrow$ 绝对收敛 .

反例：$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ ——条件收敛

定理3.3 设$g(x)$在$[a,+\infty)$上有界，$|g(x)| \le M, \forall x \in [a,+\infty)$.

若$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛，且

$$\int_a^{+\infty} |f(x)g(x)|dx \le M\int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

证明： $\because \int_a^{+\infty} |f(x)|dx$收敛，

对$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$，只要$A'' \ge A' > A_0$，总有

$$\int_{A'}^{A''} |f(x)|dx < \varepsilon,$$

$$\therefore 0 \le \int_{A'}^{A''} |f(x)g(x)|dx \le M\int_{A'}^{A''} |f(x)|dx < M\varepsilon.$$

$\therefore \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛.

例1 判别广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ (a,b 都是常数$a>0$)的收敛性.

解 $\because \left|e^{-ax}\sin bx\right| \le e^{-ax}$，而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$收敛（绝对收敛）.

$\therefore \int_0^{+\infty}\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx$ 收敛.

所以，所给广义积分绝对收敛.

例2 证明无穷积分 $\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx$ 收敛.

证明 令 $t = x^2$,

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} d(\cos t)$

cos t在$[1,+\infty)$上有界,

$[1, A]$上可积

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_1^{+\infty} - \frac{1}{4}\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt}$$

绝对收敛

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} dt$ 绝对收敛

所以所给广义积分收敛.

例3 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续可微, $x\to+\infty$时, $f(x)$递减趋于0, 证明$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛的充要条件是$\int_1^{+\infty}xf'(x)dx$收敛.

证明 $\Rightarrow$: 若$\int_1^{\infty}f(x)dx$收敛, 可证: $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=0.$

事实上$\int_1^{\infty}f(x)dx$收敛, 则$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>1, A>A_0, \int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)dx<\varepsilon.$

$$0\le\frac{A}{2}f(A)=\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(A)dx\le\int_{\frac{A}{2}}^{A}f(x)dx<\varepsilon\Rightarrow\lim_{A\to\infty}\frac{A}{2}f(A)=0$$

即, $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=0.$ $\quad\therefore\exists\bar{A}>1. s.t.\forall A>\bar{A}$有$|Af(A)|<\varepsilon$

再由$\int_1^{\infty}f(x)dx$收敛, $\therefore\exists\tilde{A}, s.t., \forall A_1,A_2>\tilde{A}$, 有$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$

$\forall A_1,A_2>\max\{\bar{A},\tilde{A}\}$, 有

$$\int_{A_1}^{A_2}xf'(x)dx=A_2f(A_2)-A_1f(A_1)-\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx$$

$$\Rightarrow\left|\int_{A_1}^{A_2}xf'(x)dx\right|\le|A_2f(A_2)|+|A_1f(A_1)|+\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<3\varepsilon$$

$\Leftarrow$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx = xf(x)\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} xf'(x)dx$

问题归结为证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$存在.

$\because \displaystyle\int_1^{+\infty} xf'(x)dx$收敛

A''

$A_1 > A_2$ $+\infty$

$$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists A''>0, A_1 > A_2 > A'', \left|\int_{A_2}^{A_1} xf'(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|A_2 f(A_2) - A_2 f(A_1)\right| = \left|A_2\int_{A_2}^{A_1} f'(x)dx\right| \le \left|\int_{A_2}^{A_1} xf'(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$A_1 \to +\infty \Rightarrow \left|A_2 f(A_2)\right| \le \varepsilon$$

$A_1 f'(x) \le xf'(x) \le A_2 f'(x) \le 0$

由ε的任意性可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$

回忆：第二、三积分中值定理

第二积分中值定理

① 若$f(x)\in R[a,b]$，且$g(x)$是$[a,b]$上非负递减函数，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx;$$

② 若$f(x)\in R[a,b]$，且$g(x)$是$[a,b]$上非负递增函数，则$\exists\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_{\eta}^b f(x)dx.$$

第三积分中值定理

设$f(x)\in R[a,b]$，且$g(x)$是$[a,b]$上的单调函数，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx+g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

考虑$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛性.

$f(x)$和$g(x)$应满足什么条件?

分析：当$g(x)$单调时，

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx$$

$$\xi \in [A', A'']$$

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right|$$

$<\varepsilon$　　当$A'' > A'$充分大时.

要求$F(A) = \int_a^A f(x)dx$?　　$g(x)$?

定理3.4(Dirichlet判别法)

设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ 在$(a,+\infty)$上有界;

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

证明 由第三积分中值定理有:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx=\underset{0<\xi}{g(A')}\underbrace{\boxed{\int_{A'}^{\xi} f(x)dx}}_{有界}+\underset{0<\xi}{g(A'')}\underbrace{\boxed{\int_{\xi}^{A''} f(x)dx}}_{有界},$$

其中$\xi\in[A',A'']$.

所以有 $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \le |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right|$

由1°, $\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right| = |F(\xi)-F(A')| \le 2M,$

$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right| = |F(A'')-F(\xi)| \le 2M,$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} g(A)=0$

由2°, $\forall \varepsilon>0, \exists A_0>a, \forall A', A''>A_0$, 总有

$$|g(A')|<\varepsilon, |g(A'')|<\varepsilon.$$

因此当$A', A''>A_0$时, $\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| \le 4M\varepsilon,$

由Cauchy收敛原理知$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛.

例4 证明$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是条件收敛．

证明 (1) 由于$\left|\int_1^A \sin x dx\right| = |\cos A - \cos 1| \le 2$，满足$1^\circ$

又$g(x)=\frac{1}{x}$,递减趋向于0,满足2°,故$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛.

(2) 由于$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$,

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$收敛，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$发散,

事实上,$\left|\int_1^A \cos 2x dx\right| = \left|\frac{\sin 2A - \sin 2}{2}\right| \le 1$，$\frac{1}{2x}$单调递减趋于0.

故$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$发散.　　综上$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$是条件收敛.

思考： 考虑无穷积分：$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$

证明：(1) $p>1$时绝对收敛；(2) $0<p\le 1$时条件收敛；(3) $p\le 0$时发散。

证明： (1) $p>1$时，$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$. 而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$收敛，

$$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\text{绝对收敛.}$$

(2)的证明类似于例4

(3)当$p\le 0$时，

考虑：$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x^p}dx\ge(2n\pi)^{-p}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=\frac{1}{2}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x^p}dx\ne 0$$

由Cauchy收敛原理知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$发散。

定理3.5(Abel判别法)

设$f(x)$和$g(x)$满足下面两个条件：

1° $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, $F(+\infty)$ 收敛

2° $g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界,

则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

证明 由1°, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0$, 当$A', A'' > A_0$时, 总有$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$;

ξ

$A_0 \quad A' \quad A''$

由2°, $|g(x)| \le M$,

$$\therefore \left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \le \underbrace{|g(A')|}_{\le M}\underbrace{\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|g(A'')|}_{M}\underbrace{\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right|}_{<\varepsilon},$$

$$\le M\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon, \text{其中}\ \xi \in [A', A''],$$

由$Cauchy$收敛原理知, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

例5 讨论积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x\arctan x}{x^p}dx\ (p>0)$的敛散性.

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ $\qquad \arctan x \nearrow \frac{\pi}{2}$

解 (1) 当$p>1$时,

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛

$$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|\le\frac{\pi}{2x^p},$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 收敛 $(p>1)$

$\Downarrow$

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\arctan x\,dx$ 由比较判别法知，原积分绝对收敛;

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$ 收敛

(2) 当$0<p\le 1$时,

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}dx$ 收敛

$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}$收敛，$\arctan x$在［1, ＋∞］单调有界,

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|\ge\frac{\arctan x}{x^p}\cdot\sin^2 x=\frac{\arctan x}{2x^p}-\frac{\arctan x\cos 2x}{2x^p}$

由Abel判别法知，原积分收敛;

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

但当$0<p\le 1$时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^p}\left|\sin x\right|dx$发散,

$\sim\frac{\pi}{4x^p}$

所以此时条件收敛 .

作业

习题9.3

4，5，7（1,3,5,7,9）,8（1,3,4），9