北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

数值积分简介

一、数值求积公式

二、插值型求积公式

三、Newton-Cotes求积公式

四、Gauss型求积公式

一、数值求积公式

问题： 当$I[f]=\int_a^b f(x)dx$无法通过解析方法求解时,如何估算此积分的值？

方法： 数值计算

设$f(x)$在节点$a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$上的函数值为$f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$,

则有$\mathrm{I}[f]\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)\triangleq Q[x]$, (1.1)

或$I[f]=Q[f]+R[f]$ (1.2)

(1.1)和(1.2)都称之为数值求积公式或机械求积公式

其中余项$R[f]$也称为求积公式的截断误差(方法误差)

一、数值求积公式

衡量某种方法好坏的标准

代数精度

对几次多项式该方法无误差

数值稳定性

舍入误差对计算结果影响的大小

收敛性

截断误差的大小

一、数值求积公式

代数精度

定义1 若求积公式(1.1)对任意不高于m次的代数多项式都精确成立，而对x^{m+1}不能精确成立，则称该求积公式具有m次代数精度.

注 只要验证对$1, x, \ldots, x^m$ 精确成立即可

等价定义1 若求积公式(1.1)对$1, x, \ldots, x^m$都精确成立，对x^{m+1}不精确成立，则称(1.1)的代数精度为m.

定价定义2 若(1.2)中 $R[x^i]=0, (i=0,1,\ldots,m)$，而$R[x^{m+1}]$不为0，则称(1.2)的代数精度为$m$.

一、数值求积公式

例1 确定求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$的代数精度

解 $I_k = \int_{-1}^{1} x^k dx = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} 0, & k\text{为奇数} \\ \frac{2}{k+1}, & k\text{为偶数} \end{cases}$

当$f(x)=1$时$(k=0)$，$\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] = \frac{1}{3}(1+4\times1+1) = 2 = I_0$

当$f(x)=x$时$(k=1)$，$\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] = \frac{1}{3}(-1+4\times0+1) = 0 = I_1$

当$f(x)=x^2$时$(k=2)$，$\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] = \frac{1}{3}(1+0+1) = \frac{2}{3} = I_2$

当$f(x)=x^3$时$(k=3)$，$\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] = \frac{1}{3}(-1+0+1) = 0 = I_3$

当$f(x)=x^4$时$(k=4)$，$\frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] = \frac{1}{3}(1+0+1) = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5} = I_4$ $\quad \therefore m=3$

二、插值型求积公式

问题

当给定节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$及$f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$,如何选择求积系数$A_0,\cdots,A_n$，使求积公式代数精度尽量高?

解决方法　利用*Lagrange*插值多项式

已知$(x_i, f(x_i))$,记$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$, 其中$l_i(x)=\prod_{\substack{l=0\\l\neq i}}^{n}\frac{x-x_l}{x_i-x_l}$,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad i=0,1,\cdots,n$$

二、插值型求积公式

定义2 对给定互异求积节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$,若求积系数

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx,\ l_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \ne i}}^{n} \frac{x - x_l}{x_i - x_l}, i = 0,1,\cdots,n$$,则称此公式是插值型的,

此时数值求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$称为插值型求积公式.

定理1

数值求积公式(1.1)或(1.2)是插值型的当且仅当它的代数精度$m \ge n$.

插值型求积公式优点

二、插值型求积公式

证明 “$\Rightarrow$” 设求积公式(1.1)是插值型的 $\Rightarrow f(x) \approx L_n(x)$

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \int_a^b l_i(x) f(x_i) dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) dx = \int_a^b [f(x) - L_n(x)]dx$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)dx$$

$\because f(x)$为次数$\le n$的多项式时, $f^{(n+1)}(x)=0$

$\therefore$ 此公式对次数 $\le n$的代数多项式精确成立

$\therefore m \ge n$

二、插值型求积公式

"$\Leftarrow$" 将$f(x)=l_k(x)$代入(1.1)

$\because m \geq n, l_k(x)$的次数为$n$

$$\therefore \int_a^b l_k(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i l_k(x_i) = A_k \quad (k=0,\cdots,n),$$

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$$

二、插值型求积公式

推论1 对给定求积节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，代数精度最高的求积公式是插值型求积公式.

推论2 若$f \in C^{(n+1)}[a,b]$，(1.2)是插值型求积公式，则有余项公式

$$R[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx \text{，其中 } \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

二、插值型求积公式

例2 求插值型求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{1}{2}) + A_1 f(\frac{1}{2})$并确定其代数精度.

解1 $x_0 = -\frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{2}, n = 1$

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

$$A_0 = \int_{-1}^{1} l_0(x)dx = \int_{-1}^{1}(-x + \frac{1}{2})dx = 1,$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)dx = \int_{-1}^{1}(x + \frac{1}{2})dx = 1$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$$

验证代数精度从m=2开始

对$f(x) = x^2, f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \quad \therefore m = 1$

二、插值型求积公式

解2　因为是插值型的，所以代数精度大于或等于1

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1, & \text{当} f(x) = 1 \text{时} \\ 0 = -\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_1, & \text{当} f(x) = x \text{时} \end{cases} \Rightarrow A_0 = A_1 = 1$$

确定代数精度方法同解1

三、Newton-Cotes求积公式

若取x_i为等距节点：$x_i = a + i\dfrac{b-a}{n} = a + ih, h = \dfrac{b-a}{n}, i = 0,1,\cdots,n,$

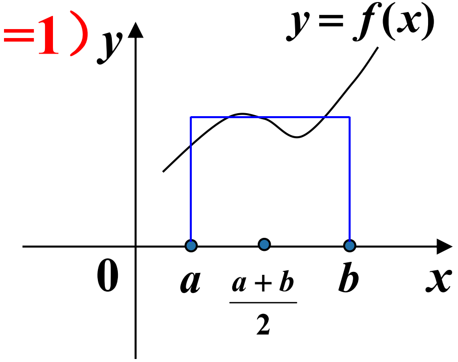
则插值型求积公式称为$Newton-Cotes$求积公式

常用的N—C公式及名称

$n=0$时 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\dfrac{a+b}{2})$ —中矩形公式（m=1）

$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a)$—左矩形公式

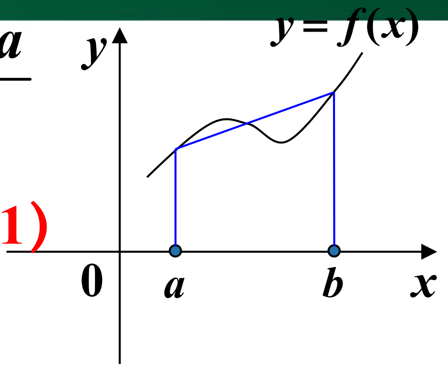
$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b)$ —右矩形公式



左矩形公式与右矩形公式的精度不如中矩形公式

三、Newton-Cotes求积公式

$n=1$时，$A_0=\int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx=\frac{b-a}{2}, A_1=\int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx=\frac{b-a}{2}$



$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$ 一梯形公式（m=1）

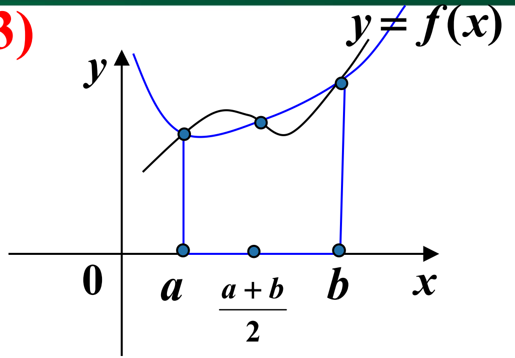
注 实质是用1次*Lagrange*插值公式近似$f(x)$计算

定理2 若$f(x)\in C^2[a,b]$,则梯形公式的余项为$R_1[f]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$,

$\xi\in(a,b)$.

三、Newton-Cotes求积公式

$n=2$时　称为*Simpson*公式或抛物线公式　**(*m*=3)**



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

注 实质是用插值抛物线

$$y=P_2(x) \quad (P_2(x_i)=f(x_i), i=0,1,2)$$

为曲边的曲边梯形的面积来近似

定理3

若$f(x)\in C^4[a,b]$,则*Simpson*公式的余项为$R_2[f]=-\frac{1}{90}(\frac{b-a}{2})^5 f^{(4)}(\xi)$,

$\xi\in(a,b)$.

三、Newton-Cotes求积公式

$n=3$时

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{8}\left[f(a)+3f(a+\frac{b-a}{3})+3f(a+\frac{2(b-a)}{3})+f(b)\right] \qquad (m=3)$$

$$=\frac{3}{8}h\left[f(a)+3f(\frac{2a+b}{3})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)\right] \qquad Simpson\ \frac{3}{8}\text{法则}$$

$n=4$时

$$\int_a^b f dx \approx \frac{(b-a)}{90}\left[7f(a)+32f(a+\frac{b-a}{4})+12f(a+\frac{b-a}{2})+32f(a+\frac{3(b-a)}{4})+7f(b)\right]$$

$$=\frac{4}{90}h\left[7f(a)+32f(\frac{3a+b}{4})+12f(\frac{a+b}{2})+32f(\frac{a+3b}{4})+7f(b)\right] \qquad (m=5)$$

$Cotes$公式

三、Newton-Cotes求积公式

一般地，

$$R_n[f]=\begin{cases}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx, & (n\text{为奇数})\\[2ex] \dfrac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_a^b \left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)\omega_{n+1}(x)dx, & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

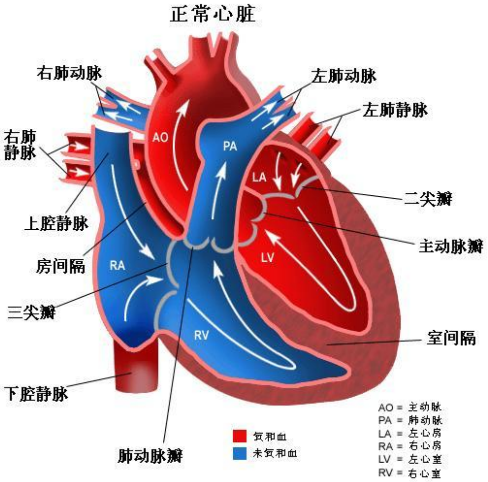
其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，$\xi\in(a,b)$。

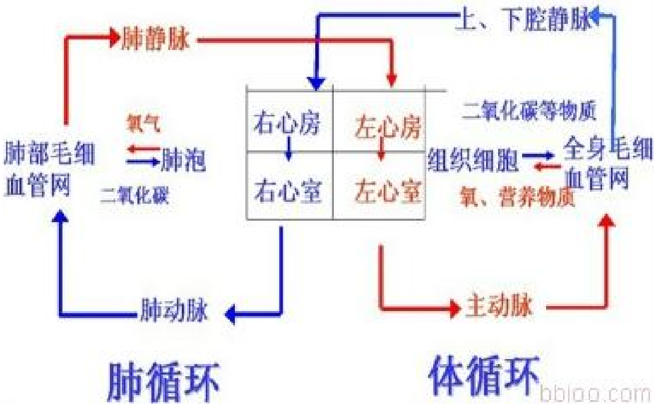
注 为了既保证精度又节约时间，尽量选用n是偶数的情形

三、Newton-Cotes求积公式

心输出量(*cardiac output*):每分钟左心室或右心室射入主动脉或肺动脉的血量

评价循环系统效率高低的重要指标





三、Newton-Cotes求积公式

测定方法　染料稀释法

$$F = \frac{A}{\int_0^T f(x)\,dx}$$

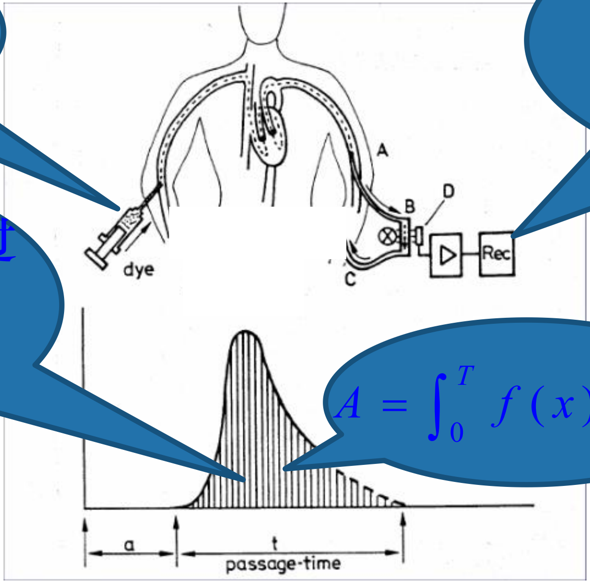
已知量

无解析表达式

可测量

注入总量为A的染料

监测x时刻时心脏内染料浓度$f(x)$和浓度降为零的时刻T



在x到$x+\Delta x$阶段流过测量点的染料量近似为$f(x)\cdot F\Delta x$

$$A = \int_0^T f(x)\cdot F\,dx$$

三、Newton-Cotes求积公式

数据采集与数值计算

将5ml染料丸注入某病人的右心室，右表为每隔1秒后在大动脉测量的染料浓度（单位：ml/L），计算此病人的心输出量.

x (单位: s）	$f(x)$ (单位: ml/L）
0	0
1	0.7
2	2.8
3	6.5
4	9.8
5	8.9
6	6.1
7	4.0
8	2.3
9	1.1
10	0

三、Newton-Cotes求积公式

$$\int_0^{10} f(x)dx \quad \text{梯形公式} \approx 1\cdot(\frac{0+0}{2}+0.7+2.8+6.5+9.8+8.9$$
$$+6.1+4.0+2.3+1.1)=42.2$$

$$\text{Simpson公式} \approx \frac{1}{3}[0+4\cdot 0.4+2\cdot 2.8+4\cdot 6.5+2\cdot 9.8$$
$$+4\cdot 8.9+2\cdot 6.1+4\cdot 4.0+2\cdot 2.3+4\cdot 1.1+0]$$
$$=41.87$$

$$F=\frac{5}{\int_0^{10} f(x)dx} \approx 0.118L/s=7.11L/\min \qquad \text{梯形公式}$$

$$\approx 0.119L/s=7.17L/\min \qquad \text{Simpson公式}$$

四、Gauss型求积公式

问题 设有n+1个节点，插值型多项式能达到的最大代数精度是多少？

如何确定？

结论 由求积系数及n+1个节点的分布确定

例3 求节点x_0, x_1,使插值型求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

具有尽可能高的代数精度.

分析 有四个未知量x_0, x_1, A_0, A_1,并知道插值型求积公式的代数精度最高,

因此按插值型求积公式求A_0, A_1.

四、Gauss型求积公式

解 $A_0=\int_{-1}^{1}\frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx=\frac{2x_1}{x_1-x_0}$， $A_1=\int_{-1}^{1}\frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx=-\frac{2x_0}{x_1-x_0}$

$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)\overset{\text{插值型}}{\Rightarrow}$ 代数精度 $m\geq 1$

$I[f]=Q[f]+R[f]$

令$f(x)=x^2$，得$\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$

$Q(f)=A_0x_0^2+A_1x_1^2\overset{\text{把}A_0,A_1\text{代入}}{=}-2x_0x_1$

令$f(x)=x^3$，得$\int_{-1}^{1}x^3dx=0$

$Q(f)=A_0x_0^3+A_1x_1^3\overset{\text{把}A_0,A_1\text{代入}}{=}-2x_0x_1(x_0+x_1)=\frac{2}{3}(x_0+x_1)$

四、Gauss型求积公式

$$\begin{cases} x_0 x_1 = -\dfrac{1}{3}, \\ x_0 + x_1 = 0 \end{cases} \quad 得 \begin{cases} x_0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\therefore A_0 = A_1 = 1,$$

$$\Rightarrow Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

求积公式为$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}),$

四、Gauss型求积公式

对于$f(x)=x^4, I(f)=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}\neq Q(x)=(-\frac{\sqrt{3}}{3})^4+(\frac{\sqrt{3}}{3})^4=\frac{2}{9}$

$\therefore m=3$

注 一般地，对于任意求积节点$a\leq x_0<x_1<\cdots<x_n\leq b$和任意求积系数，

求积公式$I(f)=\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$的代数精度$m<2n+2$.

对于$2n+2$次多项式

$$f(x)=[(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)]^2=\omega_{n+1}^2(x)\geq 0,$$

$$Q(f)=\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=0,\quad \therefore m<2n+2$$

此例中$m=3=2\times1+1$是最高能达到的精度

四、Gauss型求积公式

定义3 若具有$n+1$个节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$的代数精度为$m = 2n+1$, 即达到最高,

则称之为$Gauss$型求积公式,并称其节点为$Gauss$点.

定理4 求积公式$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$是$Gauss$型求积公式的充要条件是$Gauss$节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$是$[a, b]$上关于权函数$\rho(x)$的$n+1$次正交多项式$\omega_{n+1}(x)$的根.

注 本定理说明$Gauss$求积公式的唯一性.

四、Gauss型求积公式

定理5 若$f(x)\in C^{2n+2}[a,b]$,则求积公式$\int_a^b \rho(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$的余项为

$$R_{n+1}[f]=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)\,\omega_{n+1}^2(x)dx,\ \xi\in(a,b).$$

Gauss型求积公式优点

收敛,稳定

计算量小,代数精度高

不足　　*Gauss*点难求（即求多项式的根）

*Gauss*点是无理数,*Gauss* 求积系数也是无理数

使用情况　$f(x)$赋值量大,计算的积分多

四、Gauss型求积公式

常用Gauss型求积公式

1.*Gauss-Legendre*（勒让德）求积公式

$$\rho(x)=1,[a,b]=[-1,1],\quad \int_{-1}^{1} f(x)dx=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

$x_i(i=0,1,\cdots,n)$是勒让德正交多项式$P_n(x)$的根

$$A_k=\frac{2}{(1-x_k^2)[P'(x_k)]^2},k=0,1,\cdots,n$$

若区间$[a,b]\neq[-1,1]$,则可用变量替换把区间$[a,b]\to[-1,1]$,再进行计算

四、Gauss型求积公式

2.*Gauss-chebyshev* （切比雪夫）求积公式

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},[a,b]=[-1,1],\quad \int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi)$$

3.Gauss-Laguerre （拉盖尔）求积公式

$\rho(x)=e^{-x},[a,b]=[0,+\infty),Gauss$点为$Laguerre$多项式$L_n(x)$的零点

4.Gauss-Hermite求积公式

$\rho(x)=e^{-x^2},[a,b]=(-\infty,+\infty),Gauss$点为$Hermite$多项式$H_n(x)$的零点

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院