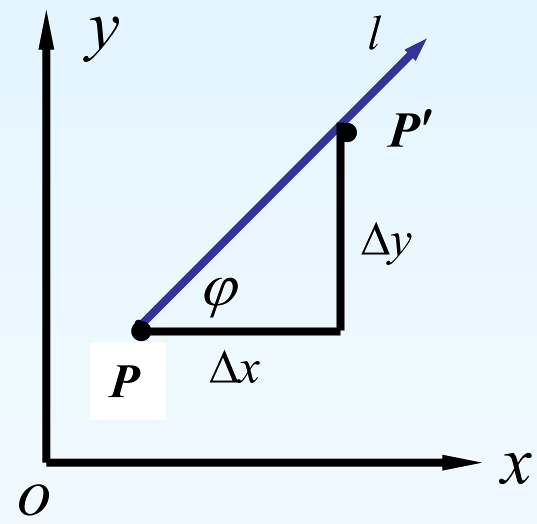
北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

§15.1(3) 方向导数与梯度

方向导数

讨论函数 $z=f(x,y)$在一点P沿某一方向的变化率问题.

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义，自点 P 引射线 l.



设 x 轴正向到射线 l 的转角为 φ ,并设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为 l 上的另一点且 $P'\in U(P)$. （如图）

$$\because |PP'| = \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

当 P' 沿着 l 趋于 P 时，

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\rho}$$ 是否存在？

定义 设$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$是从$P(x,y)$引出的射线 l上的点，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，若

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

存在，则称这极限为函 数在点 P 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数.

记为$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$,即$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$.

不同表示 $$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t\cos\varphi,\ y+t\sin\varphi)-f(x,y)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{\substack{\Delta y=k\Delta x\\ \Delta x\to 0^{\pm}}}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}, k=\tan\varphi$$

若偏导数存在，则函数$f(x,y)$在点P沿着x轴、y轴正向($\vec{e}_1=(1,0)$、$\vec{e}_2=(0,1)$)的方向导数分别为f_x, f_y；

沿着x轴负向、y轴负向的方向导数是 $-f_x, -f_y$.

给定一个向量$\vec{n}$,此向量与各坐标轴正向所成的角称为方向角, 方向角的余弦称为此向量的方向余弦.

将向量$\vec{n}$单位化后的单位向量, 其各个分量即为方向余弦.

例如, $\vec{n}=(1,-1,0)$ 单位化后的向量$\vec{n}^0=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$

方向余弦分别为$\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0$; 方向角分别为$\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}$.

定理 如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微，那么函数在该点沿任意方向$\vec{l}$的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta$是方向$\vec{l}$的方向余弦.

证明 由于函数可微，则增量可表示为

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\rho)$$

两边同除以ρ，得到

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\Delta x}{\rho}}_{\cos\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\Delta y}{\rho}}_{\cos\beta}+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

故有方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$$

注 (1) 若设x轴正向到方向$\vec{l}$的转角为φ，则

$$\cos\alpha = \cos\varphi, \quad \cos\beta = \sin\varphi.$$

(2) 用$\vec{l}^{\,-}$表示过P点与$\vec{l}$相反的方向,则$\vec{l}^{\,-}$ 的方向余弦与$\vec{l}$的方向余弦只差一个负号,即若$z=f(x,y)$在P可微,则$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}^{\,-}} = -\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.

(3) 若记在点P沿平行于x轴正向$(\alpha=0,\beta=\dfrac{\pi}{2})$的方向导数为$\dfrac{\partial f}{\partial x^+}$,沿平行于$x$轴负向$(\alpha=\pi,\beta=\dfrac{\pi}{2})$的方向导数为$\dfrac{\partial f}{\partial x^-}$,

则函数$z=f(x,y)$在P存在偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}$的充分必要条件是

$\dfrac{\partial f}{\partial x^-} = -\dfrac{\partial f}{\partial x^+}$. 同理，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$存在的充分必要条件是$\dfrac{\partial f}{\partial y^-} = -\dfrac{\partial f}{\partial y^+}$.

（4）推广可得三元及三元以上函数方向导数的定义

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，它在空间一点$P(x,y,z)$沿着方向$\vec{l}$的方向导数，可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho},$$

$$(\text{其中 } \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2})$$

设方向$\vec{l}$的方向余弦为$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$

$$\Delta x=\rho\cos\alpha,\quad \Delta y=\rho\cos\beta,\quad \Delta z=\rho\cos\gamma,$$

同理：当函数在此点可微时，那么函数在该点沿任意方向$\vec{l}$的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

例 1 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}$ 连续，则函数在点 P 可微.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)}=2,$$

这里方向 $\vec{l}$ 即为 $\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$.

故方向 $\vec{l}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所求方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=\cos\alpha+2\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例2 设由原点到点(x,y)的向径为$\vec{r}$，x轴正向到$\vec{r}$的转角为θ，x轴正向到向量$\vec{l}$的转角为φ，

求$\dfrac{\partial r}{\partial \vec{l}}$，其中$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$.

解 $$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta,$$

故$$\frac{\partial r}{\partial \vec{l}}=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=\cos(\theta-\varphi).$$

例3 求 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处沿点的向径 r_0 的方向导数.

解 $\because \quad r_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad |r_0|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{|r_0|},\quad \cos\beta=\frac{y_0}{|r_0|},\quad \cos\gamma=\frac{z_0}{|r_0|}.$$

$\therefore$ 在点 M 处的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r_0}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos\gamma$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}\frac{x_0}{|r_0|}+\frac{2y_0}{b^2}\frac{y_0}{|r_0|}+\frac{2z_0}{c^2}\frac{z_0}{|r_0|}=\frac{2}{|r_0|}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

例 4 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿与 x 轴方向转角为 α 的方向 $\vec{l}$ 的方向导数. 并问在怎样的方向上此方向导 数有

（1）最大值； （2）最小值； （3）等于零？

解 由方向导数的计算公式知

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(1,1)} = f_x(1,1)\cos\alpha + f_y(1,1)\sin\alpha$$

$$=\left.(2x-y)\right|_{(1,1)}\cos\alpha+\left.(2y-x)\right|_{(1,1)}\sin\alpha,$$

$$=\cos\alpha+\sin\alpha \ =\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}),$$

$$= \cos\alpha + \sin\alpha \quad = \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}),$$

故（1）当$\alpha = \frac{\pi}{4}$时， 方向导数达到最大值$\sqrt{2}$；

（2）当$\alpha = \frac{5\pi}{4}$时， 方向导数达到最小值$-\sqrt{2}$；

（3）当$\alpha = \frac{3\pi}{4}$和$\alpha = \frac{7\pi}{4}$时， 方向导数等于 0.

例5 讨论函数$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$点处的偏导数是否存在？方向导数是否存在？

解 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

同理：$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

故两个偏导数均不存在.

沿任意方向$\vec{l}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$的方向导数,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\varphi,t\sin\varphi)-f(0,0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{(t\cos\varphi)^2+(t\sin\varphi)^2}}{t}=1$$

故沿任意方向的方向导数均存在且相等.

注 (1) 函数在一点沿任意方向的方向导数存在不能保证函数在该点具有偏导数.

偏导数存在的充要条件:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\text{存在} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x^{+}}, \frac{\partial f}{\partial x^{-}}\text{都存在且}\frac{\partial f}{\partial x^{+}} = -\frac{\partial f}{\partial x^{-}}$$

(2) 函数在某点不可微，但在该点沿任意方向的方向导数也可能存在.

例6 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$

求函数在原点处的连续 性,可微性,偏导数和方向导数的存在性.

解 当沿$y=x$趋向于原点时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2=0.$$

当沿$y=x^4$趋向于原点时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x}=\infty.$$

$\therefore$ 在原点不连续，因此在 原点不可微

$$\because f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

$\therefore$ 偏导数存在．

沿着方向 $\vec{l}:(\cos\varphi,\sin\varphi),\sin\varphi\neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\varphi,t\sin\varphi)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t\cos^3\varphi}{\sin\varphi}=0$$

因为$f_y(0,0)=0$,所以沿y轴方向的方向导数也为 0.

梯度

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$\vec{g}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与$\vec{l}$同向的单位向量，则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\vec{g}\cdot\vec{l}^{\,0}=\|\vec{g}\|\cos<\vec{g},\vec{l}^{\,0}>.$$

定义 设函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微，则称向量$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$或$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的梯度，记为$gradz=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

梯度的含义

由方向导数公式知 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \|gradz\|\cos < gradz, \vec{l}^{\,0} >$,

故$gradz$与$\vec{l}^{\,0}$同向时,方向导数最大；两者垂 直时,方向导数为零；两者负向时,方向导数最小.

结论 函数在某点的梯度是这样一个向量,在它的方向上，函数取得最大方向导数,而它的模为方向导数的最大值．梯度的模为

$$\|gradz\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

例 7 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $P(1,2)$ 处的梯度，并求函数从 $P(1,2)$ 到点 $P'(2,2+\sqrt{3})$ 的方向的方向导数以及函数在 $P(1,2)$ 点处的最大方向导数.

解 $\because \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2x|_{(1,2)} = 2;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 2y|_{(1,2)} = 4,$

$$gradz|_{(1,2)} = (2,4)$$

$$\overrightarrow{PP'} = (1,\sqrt{3})\qquad \overrightarrow{PP'^o} = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

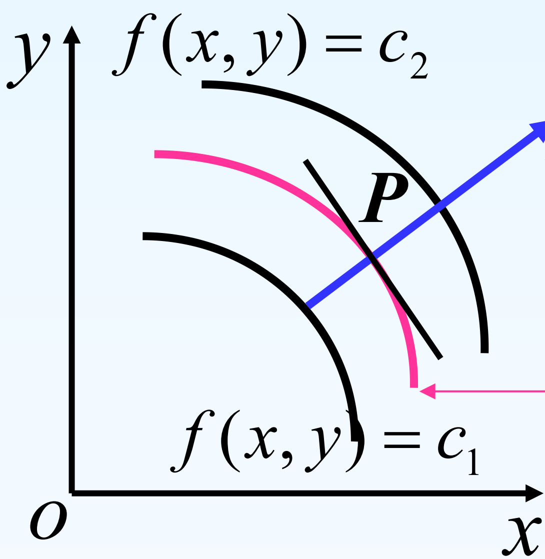
$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = gradz|_{(1,2)}\cdot\overrightarrow{PP'^o} = 1+2\sqrt{3}.$$

最大方向导数是 $\|(2,4)\| = 2\sqrt{5}.$

在几何上 $z = f(x, y)$ 表示一个曲面

曲面被平面 $z = c$ 所截得 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c \end{cases}$,

所得曲线在*xoy*面上投影如图



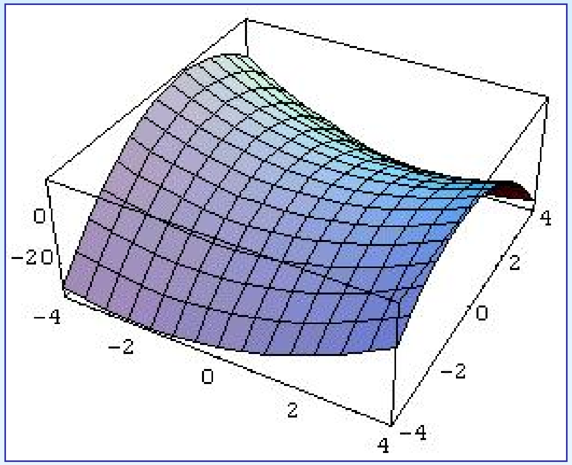
$\mathbf{grad} f(x, y)$

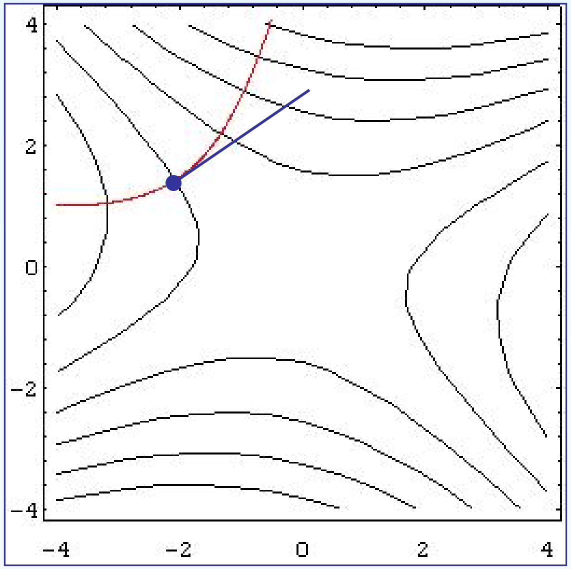
梯度为等量线上的法向量,沿此方向的方向导数为梯度的模.

$\boxed{f(x, y) = c}$ 等量线

梯度与等量线的关系

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度的方向与点 P 的等量线 $f(x,y)=c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等量线指向数值较高的等量线.





梯度的概念可以推广到三元函数

三元函数$u=f(x,y,z)$在点$P(x,y,z)$可微，则可定义一个向量(梯度)

$$gradu=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k},\text{或}gradu=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

类似于二元函数，此梯度也是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值. 关于等量面$f(x,y,z)=c$，我们也能得到类似二元函数的结论.

例 8 设在空间的原点处放置单位正电荷，则空间各点有电位 $u(x,y,z)=\dfrac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $gradu$.

解 $$gradu(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$=-\frac{x}{r^3}\vec{i}-\frac{y}{r^3}\vec{j}-\frac{z}{r^3}\vec{k}$$

$$=-\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

梯度的运算法则

设u,v是可微分函数，则

(1) $grad(u \pm v) = gradu \pm gradv;$

(2) $grad(uv) = vgradu + ugradv;$

(3) $gradf(u) = f'(u)gradu$（f可微）.