

# 基础物理学 A1

## 2025年春季学期

谢柯盼

kpxie@buaa.edu.cn

物理学院

# 第五章 角动量变化定理与角动量守恒

§ 5-1 角动量与力矩

§ 5-2 质点的角动量变化定理与角动量守恒

§ 5-3 质点组的角动量

§ 5-4 有心运动

## § 5-0 引子

**例：**轻绳一端系着小球 $m$ ，另一端穿过水平光滑桌面中央的小洞 $O$ 由竖直向下的力 $f$ 拉着。起初小球作半径 $r_0$ 、速度为 $v_0$ 的匀速圆周运动，现缓慢向下拉绳子，求半径为 $r$ 时 $f$ 的大小。

试用第二章的方法求解

**解：**缓慢拉绳的含义是每一瞬间小球均可视为匀速圆周运动

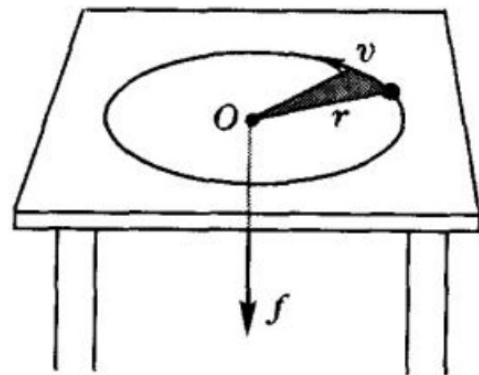
$$f = mr\omega^2 = mv^2/r$$

绳子做功导致质点动能改变，

$$-fdr = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mvdv$$

联立得 $-v^2 dr/r = vdv$

可分离变量求出 $v = v_0 r_0 / r$



最终给出

$$f = \frac{mv_0^2 r_0^2}{r^3}$$

有没有更简便的方法？

## § 5-1 角动量与力矩

**角动量**：选一固定参考点 $O$ ，运动质点位矢为 $\vec{r}$ ，动量为 $\vec{p}$ ，则质点对 $O$ 点的角动量为

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

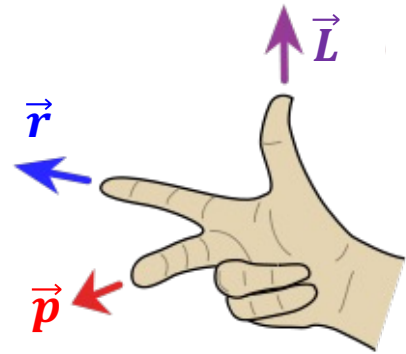
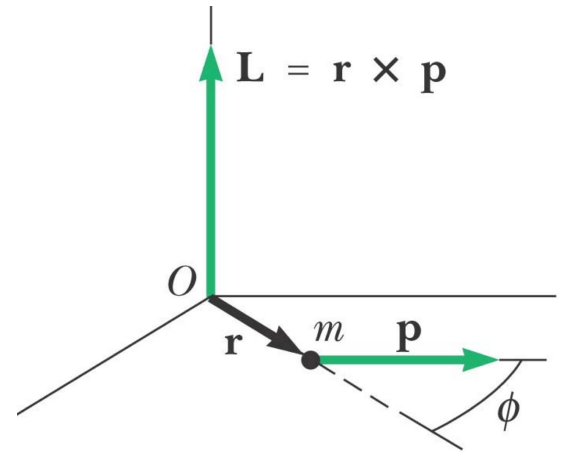
又称为动量矩

角动量是矢量，是状态量，且必须指明**参考点**

- 大小： $L = rp \sin \phi = rp_{\perp}$ ，单位为 $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$
- 方向垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 构成的平面，由**右手螺旋法则**确定

角动量描述质点绕 $O$ **转动**的状态

- 运动过程中， $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$ 时刻变化， $\vec{L}$ 的大小和方向也时刻变化
- 径向运动 $\phi = 0$ 或 $\pi$ ，则 $L = 0$

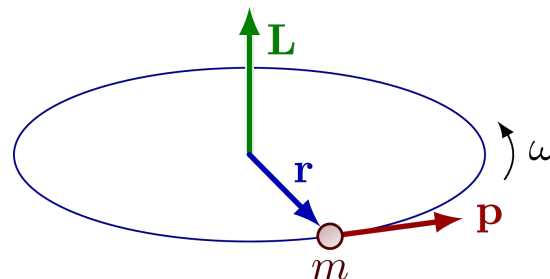


**例：**质点做半径为 $r$ 的匀速圆周运动，角速度大小为 $\omega$ ，求其相对圆心的角动量 $\vec{L}$ 。

**解：**圆周运动 $\vec{r} \perp \vec{p}$ ，故

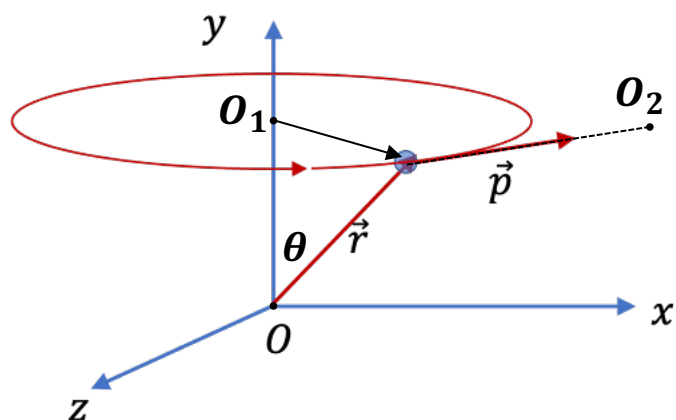
$$L = rp = rmv = mr^2\omega$$

方向垂直运动平面向上



匀速圆周运动的质点，位置、动量时刻在变化，但对圆心的角动量是常矢量，且与角速度同向： $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$

**特别注意：**讨论角动量时一定要指明参考点在哪里！



1. 对 $O_1$ 的角动量沿 $y$ 轴方向，大小 $L_1 = rp \sin \theta$
2. 对 $O_2$ 的角动量为零矢量
3. 对 $O$ 的角动量与 $y$ 轴夹角为 $(\pi/2 - \theta)$ ，大小 $L = rp$

若质点作**平面运动**，以参考点为极点建立平面极坐标系，则坐标 $\vec{r} = r\vec{e}_r$

- 动量 $\vec{p} = m(v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta) = m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

直接计算给出角动量

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_k, \text{ 垂直于运动平面}$$

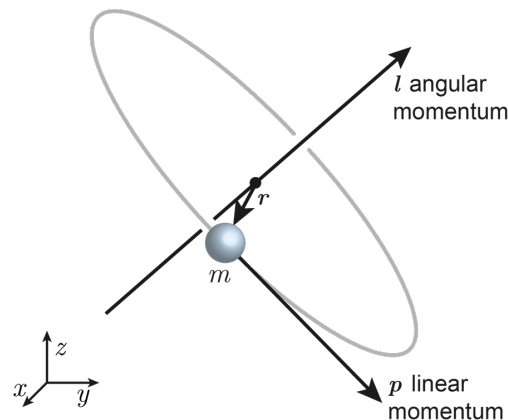
若质点作**一般空间运动**，直角坐标下

- 坐标 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

- 动量 $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$

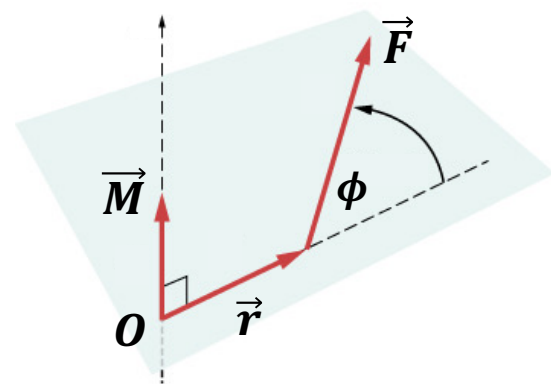
则角动量（注意叉乘的顺序）

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases}$$



**力矩**：选一固定参考点 $O$ ，力 $\vec{F}$ 作用于位矢 $\vec{r}$ 处，则该力**对 $O$ 点的力矩**为

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

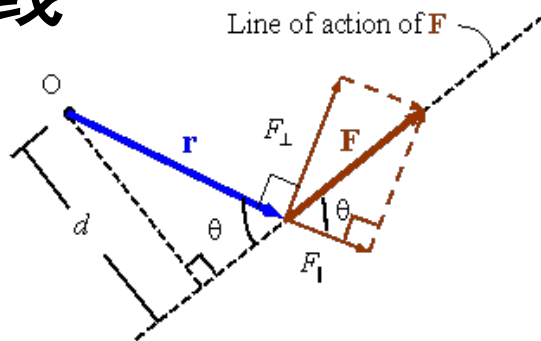


力矩是矢量，是状态量，且必须指明**参考点**

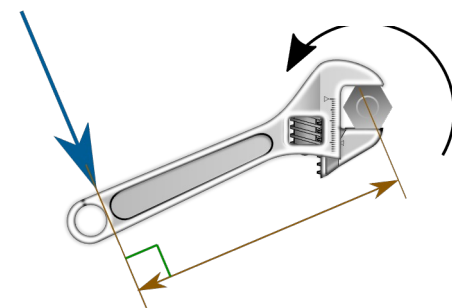
- 大小： $M = rF \sin \phi$ ，单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$
- 方向垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 构成的平面，由**右手螺旋法则**确定

过 $O$ 点向 $\vec{F}$ 所在直线作垂线，得力臂

$$d = r \sin \theta$$



则 $M = Fd$ ，即力矩等于力臂乘以力



力矩描述 $\vec{F}$ 作用的**转动效应**

## 同一参考点的力矩具有可加性

$$\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

- 若力与位矢平行，且力矩为零
- 一般而言，位矢 $\vec{r}$ 、动量 $\vec{p}$ 、受力 $\vec{F}$ 并不共面

若质点作一般空间运动，在直角坐标下

- 坐标 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- 受力 $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

则力矩（注意叉乘的顺序）

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

若质点的受力和运动都局限于某一平面内，则力矩及角动量都垂直于该平面



**例：**质量为  $m = 2 \text{ kg}$  的质点，其位矢  $\vec{r}$ 、速度  $\vec{v}$ 、所受外力  $\vec{F}$  均在同一平面内，且大小为  $r = 3 \text{ m}$ ， $v = 4 \text{ m/s}$ ， $F = 2 \text{ N}$ 。求该质点对原点的角动量以及该力相对于原点的力矩。

**解：**角动量大小为

$$L = r m v \sin 150^\circ = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

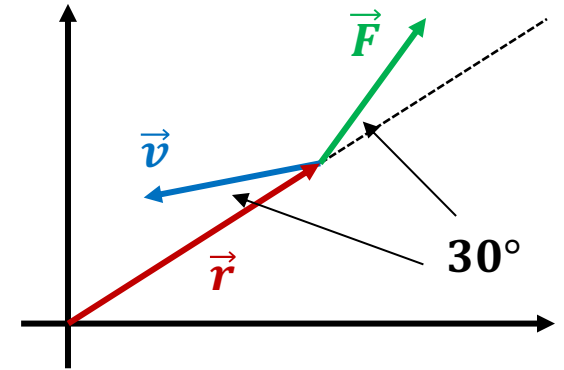
方向垂直纸面向外；

力矩大小为

$$M = r F \sin 30^\circ = 3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

方向垂直纸面向外。

若题目问的是“角动量/力矩”而不是“角动量/力矩大小”，别忘记描述方向



## § 5-2 质点的角动量定理与角动量守恒

将质点的角动量对时间求导

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

考虑到  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ , 而  $\vec{p} = m\vec{v}$ , 可知

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \propto \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$

故得到

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

用到了牛顿第二定律  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$

上述推导中,  $\vec{L}$  与  $\vec{M}$  必须为惯性系中的同一固定参考点计算得到的值

角动量定理（**微分形式**）：

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

质点所受合外力矩等于其角动量对时间的变化率

对比牛顿第二定律：质点所受合外力等于动量变化率

角动量定理（**积分形式**）：

$$\text{角冲量} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L} \Big|_{t_1}^{t_2} = \Delta \vec{L}$$

质点角动量的增量等于其所受角冲量

对比动量定理：质点动量的增量等于其所受冲量

定理适用条件：

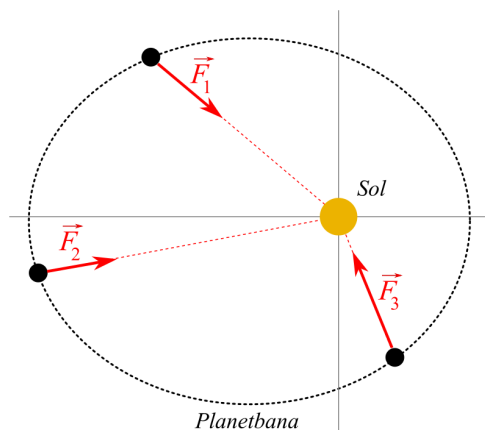
- 角动量和力矩的参考点必须为**同一固定点**
- **惯性系**（因为用到了牛顿第二定律）
- 如果要在非惯性系中应用，则需要加入**惯性力**

若 $\vec{M} = \vec{0}$ ，则 $d\vec{L}/dt = \vec{0}$ ，故 $\vec{L}$ 为常矢量

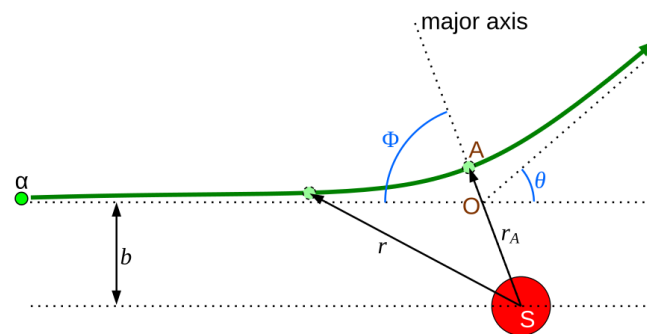
如果质点所受的**力矩**为零，则其角动量不随时间改变，  
或称**角动量守恒**

由于 $|\vec{M}| = rF \sin \theta$ ，故 $\vec{M} = \vec{0}$ 有三种可能

1. 质点静止于原点， $r = 0$
2. 质点不受外力， $F = 0$
3. 质点所受外力为**有心力**， $\theta = 0$ 或 $\pi$ ， $\sin \theta = 0$



太阳近似视为静止于  
原点，**万有引力** $\theta \equiv \pi$



原子核近似视为静止于  
原点，**库仑斥力** $\theta = 0$

**例：**轻绳一端系着小球 $m$ ，另一端穿过水平光滑桌面中央的小洞 $O$ 由竖直向下的力 $f$ 拉着。起初小球作半径 $r_0$ 、速度为 $v_0$ 的匀速圆周运动，现缓慢向下拉绳子，求半径为 $r$ 时 $f$ 的大小。

**解：**缓慢拉绳的含义是**每一瞬间**小球均可视为匀速圆周运动

$$f = mr\omega^2 = mv^2/r$$

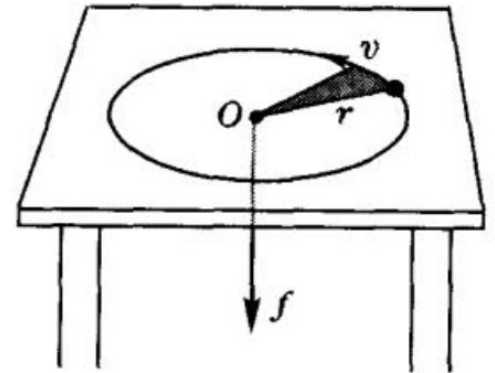
绳子拉力为有心力，故小球对力心的角动量守恒

$$mvr = mv_0r_0$$

代入给出 $v = v_0r_0/r$ ，解得

$$f = \frac{mv_0^2r_0^2}{r^3}$$

无需求解微分方程



## § 5-3 质点组的角动量

考虑一对质点构成的体系，其内力的力矩之和

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21}$$

牛顿第三定律  $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ ，得

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{f}_{21}$$

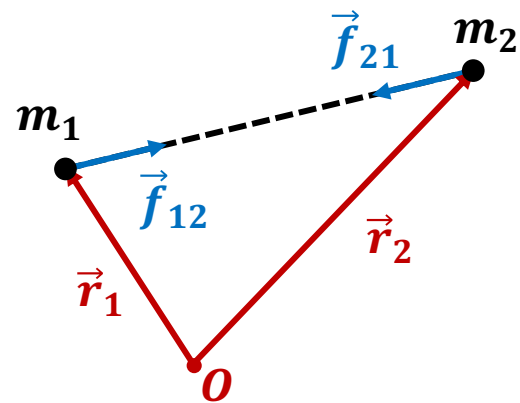
若两质点相互接触，如摩擦力、刚体内力、正压力，则  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{0}$

若两质点有远程作用，如绳子拉力、万有引力、静电力，但作用力**沿其连线方向**，则  $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \parallel \vec{f}_{21}$

两种情况均给出  $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{0}$

换句话说，一对内力的**力矩之和**为零

该结论易于推广到多质点体系



定义质点组的总角动量为 $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ （对同一点）

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i$$

任一质点*i*所受力矩均可分解为外力、内力贡献

$$\vec{M}_i = \vec{M}_{i,\text{ext}} + \vec{M}_{i,\text{int}}$$

内力力矩**两两抵消**，最终给出

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{i,\text{ext}} = \vec{M}_{\text{ext}}$$

**质点组角动量定理**（微分形式）：质点组角动量变化率等于所受合外力矩

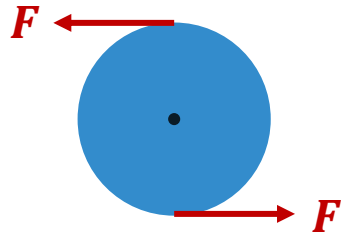
对时间积分，可得定理的**积分形式**  $\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{\text{ext}} dt$

合外力矩的断句是合·外力矩，而不是合外力·矩

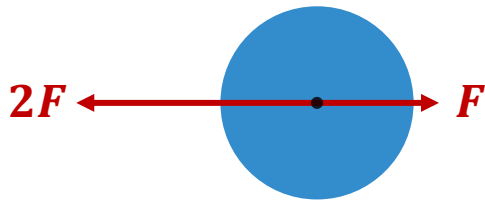
$$\vec{M}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

外力 $\vec{F}_i$ 作用于质点 $i$ 所在位置 $\vec{r}_i$ ，即诸外力的作用点并不一样

- 合外力矩 $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ 与合外力 $\sum_i \vec{F}_i$ 无直接关联



合外力为零，但对圆心的  
合外力矩不为零



对圆心的合外力矩为零，  
但合外力不为零

若合外力为零，则合外力矩与参考点无关，自行证明



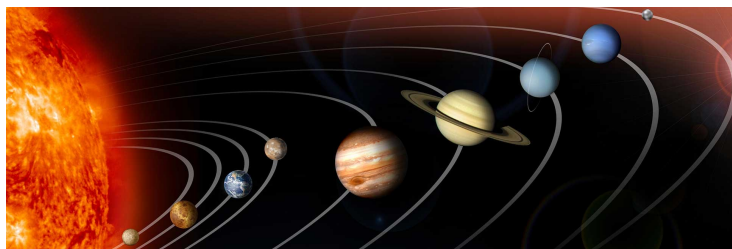
若 $\vec{M}_{\text{ext}} = \vec{0}$ ，则 $d\vec{L}/dt = \vec{0}$ ，故 $\vec{L}$ 为常矢量  
即质点组所受的**合外力矩**为零时，**角动量守恒**

- 孤立体系角动量必守恒

若体系在旋转，则 $L \sim mvr$ ，当 $r$ 缩小时，为使 $L$ 不变， $v$ 必增加，即旋转会**加速**

此为天体旋转的普遍成因

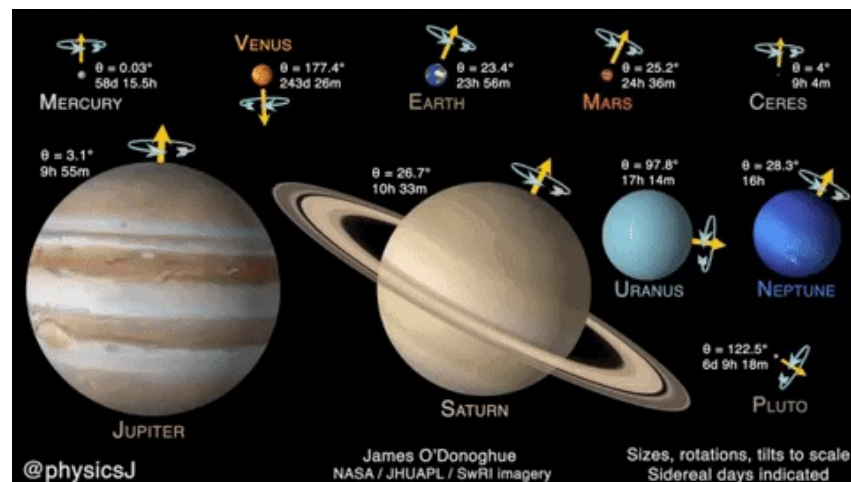
**例**：太阳系起源于同一片星尘



行星绕太阳自西向东**公转**

行星**自转**方向与公转一致

- 仅金星和天王星例外（碰撞改变原自转轴）



**例：**牛顿力学中，下列物理量：质量、动量、冲量、动能、势能的变化量、功、角动量、力矩，与参考系的选取有关的物理量是\_\_\_\_\_。

**解：**动量、动能、功、角动量、力矩。

**例：**考虑双质点体系，若内力只有万有引力，且系统所受外力的矢量和为零，则此系统

- A. 动量、机械能以及某一方向的角动量守恒
- B. 动量和机械能守恒，但角动量是否守恒未知
- C. 动量守恒，但机械能和角动量是否守恒未知
- D. 动量和角动量守恒，但机械能是否守恒未知

**解：**外合力为零则动量必守恒。

但并不知道外力的做功情况以及力矩，故其他量不能判断守恒性。故选**C**

**例：**轻绳跨过无摩擦定滑轮，一端趴着质量 $m_1$ 的猴子，另一端绑着质量 $m_2$ 的香蕉。从 $t = 0$ 时刻开始，猴子相对于绳子以恒定速度 $v'_1$ 向上爬，问猴子能否成功把香蕉拉到自己的一侧。

**解：**设滑轮半径为 $R$ ，以轮轴为参考点，垂直纸面向外为正，系统受合外力矩

$$M = (m_1 - m_2)gR$$

设香蕉上升的速度为 $V$ ，

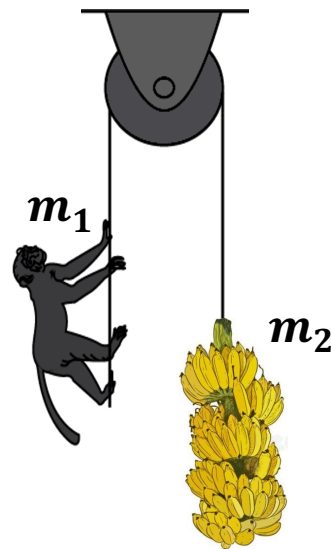
猴子对地速度 $v_1 = v'_1 - V$

体系角动量 $L = -m_1(v'_1 - V)R + m_2VR$

$M = dL/dt$ ，给出 $(m_2 + m_1) dV/dt = (m_1 - m_2)g$

$$V = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt$$

若 $m_1 > m_2$ 则香蕉会上升，最终到达左侧



**例：**两猴 $m_1$ 和 $m_2$ 于 $t = 0$ 时刻开始沿轻绳和无摩擦定滑轮构成的系统向上爬，相对于绳子的速度恒定为 $v'_1$ 和 $v'_2$ ，求其对地速度 $v_1$ 和 $v_2$ 。

**解：**设滑轮半径为 $R$ ，系统受合外力矩

$$M = (m_1 - m_2)gR$$

设右端绳子速度为 $V$ （以向上为正）

两猴相对地面的速度分别为

$$v_1 = v'_1 - V \text{ 和 } v_2 = v'_2 + V$$

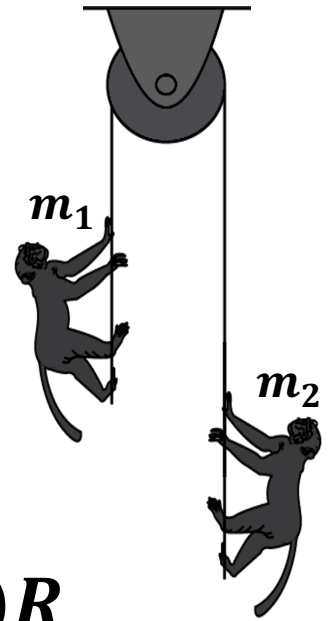
体系角动量 $L = -m_1(v'_1 - V)R + m_2(v'_2 + V)R$

$M = dL/dt$ ，给出 $(m_2 + m_1) dV/dt = (m_1 - m_2)g$

积分得 $V(t)$ ，最终给出

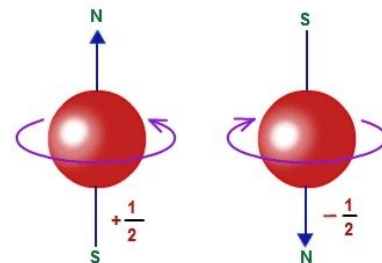
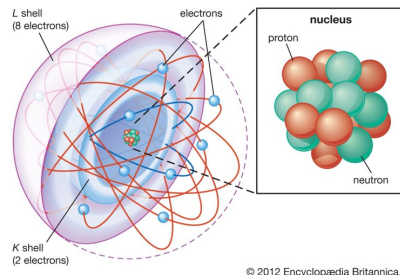
$$v_1 = v'_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt, \quad v_2 = v'_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt$$

在足够长的时间后，更重的猴最终会下坠



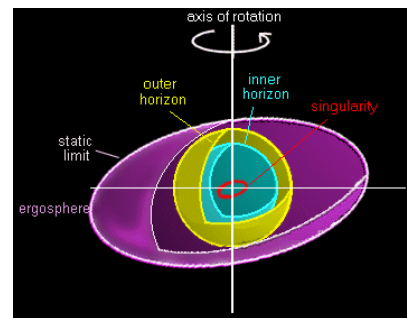
# 角动量概念的应用范围远远超出牛顿力学

**例：**电子具有绕核的**轨道角动量**以及**自旋角动量**



电子自旋导致其具有磁矩，当前的量子场论理论计算与实验测量结果在**十亿分之一**的精度内相符（2010）  
这是科学对自然界最精确的预测

**例：**黑洞也可以拥有自旋，从而具有**角动量**



霍金等人利用广义相对论证明（1973），黑洞只有质量、电荷、角动量三个物理量

# 为什么**角动量**及**角动量守恒**的概念如此普适？

诺特定理（1915）：

物理的每一个可微的对称性，都对应着一个守恒量。



如果物理定律在**空间转动**下不变，则**角动量守恒**  
角动量是空间各向同性的推论，是空间本身的性质体现，因此适用性远超出牛顿定律和经典物理学

## **小结**对称性与守恒律：

- 时间的平移不变性（均匀性）导致能量守恒；
- 空间的平移不变性（均匀性）导致动量守恒；
- 空间的转动不变性（各向同性）导致角动量守恒

在经典力学的框架里，这些物理量守恒是由牛顿三定律推导出来的**定理**

但它们实际上是更普遍的**定律**，反映了**时空的性质**



## § 5-4 有心运动

**有心力**：方向始终指向或者背向固定中心的力

**有心力场**：有心力所存在的空间

**中心对称**有心力：其大小仅与质点到力心 $O$ 的距离 $r$ 有关，即 $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r$ ，这里 $F(r)$ 可正可负  
此种力必为**保守力**，其对应的势能为

$$E_p(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr'$$

由 $\nabla r = \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \vec{r}/r = \vec{e}_r$ ，结合链式法则可得 $-\nabla E_p = -(\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}r)\nabla r = F(r)\vec{e}_r = \vec{F}$

- 万有引力 $F = -GMm/r^2$ ，得 $E_p = -GMm/r$
- 静电力 $F = ke_1e_2/r^2$ ，得 $E_p = ke_1e_2/r$

很多问题可以归结为**有心力场**中的单体运动问题

- 太阳质量占整个太阳系的99.86%以上，可视为静止于原点提供引力场，行星在其中运动
- $\alpha$ 粒子和金原子核分别由4和197个核子构成，在卢瑟福散射实验中可视金核为静止于原点，提供静电场， $\alpha$ 粒子在其中运动

**两体问题**（双质点体系不受外力）均可通过惯性力的概念**约化为**单体问题，将于第六章证明

有心力场单体问题的普遍方程 $m\ddot{\vec{r}} = F(r)\vec{e}_r$

形式上是三维方程，但实际上质点只在由初位矢 $\vec{r}_0$ 和初速度 $\vec{v}_0$ 所确定的平面内运动，是**二维**问题

- 质点所受力是保守力，故**机械能守恒**
- 质点相对于力心的**角动量守恒**
- 注意，质点**动量不守恒**，因为体系不具备平移不变



在**平面极坐标**下描述有心运动，取力心作为极点

质点坐标  $\vec{r} = r\vec{e}_r$

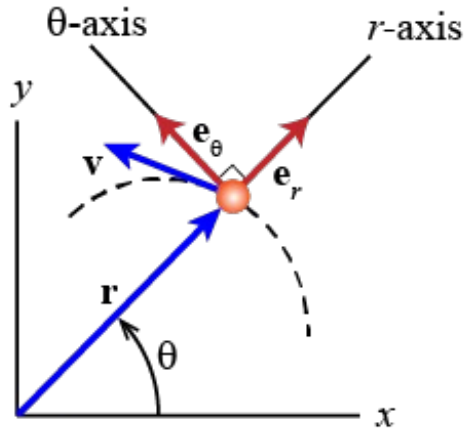
求导得（参考第一章PPT）

速度  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

加速度  $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$

受力  $\vec{F} = F\vec{e}_r$ ，牛顿第二定律立即给出

$F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$  和  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$



后者可以**凑微分**给出

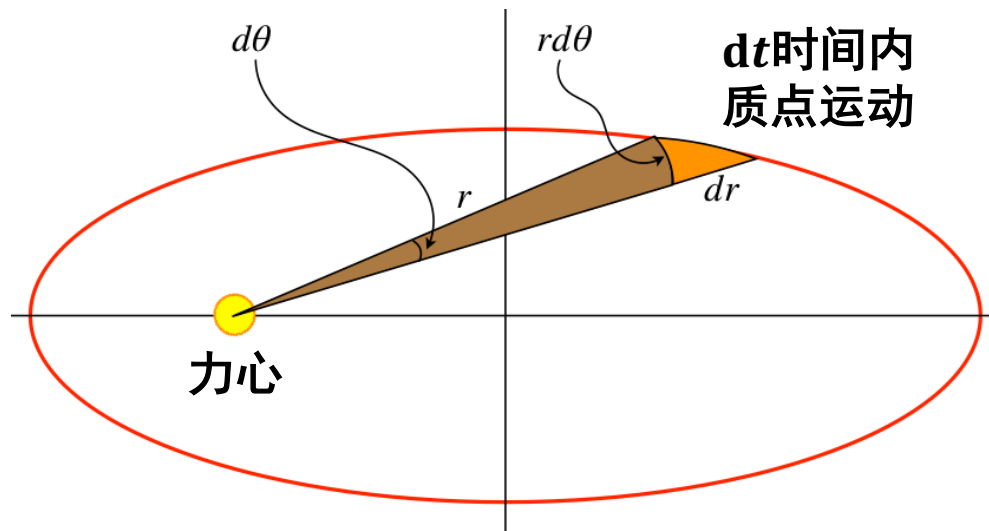
$$0 = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

$r^2\dot{\theta}$  为常量；由于  $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_k$ （本PPT第5页），

这意味着质点**对极点的角动量**守恒

符合预期，因为有心力对极点的力矩为零

$r^2 \dot{\theta} = \text{常量}$  有另一层几何含义



质点位矢扫过的面积约为  $r^2 d\theta / 2 = r^2 \dot{\theta} dt / 2$

故  $r^2 \dot{\theta} / 2$  为单位时间扫过的面积

——开普勒第二定律：面积律

行星与太阳的连线在相同时间扫过相同面积（1609）

隐含着**角动量守恒**，以及**行星受力指向太阳**

构成了牛顿提出万有引力的重要实验基础

角动量  $L = mr^2\dot{\theta} = \text{常量}$ ，可消去  $\dot{\theta}$  得径向运动方程

$$F(r) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3}$$

若不关心时间，只求**轨迹形状**  $r(\theta)$ ，则可以利用

$$\frac{d}{dt} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta}$$

本页内容  
理解即可

消去时间导数，最终给出轨迹方程

$$F(r) = \frac{L^2}{m^2 r^5} [rr'' - 2(r')^2 - r^2]$$

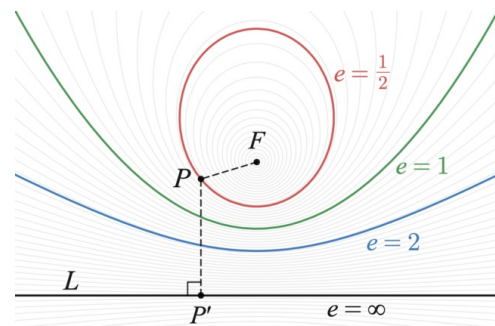
其中  $r' = dr/d\theta$ ， $r'' = d^2r/d\theta^2$ 。

只要给定有心力的公式  $F(r)$ ，轨迹形状即可求解  
对万有引力  $F = -GMm/r^2$ ，可证明

**典型的圆锥曲线方程**  $r = \frac{C}{1 + e \cos \theta}$   **$C$  和  $e$  由初始条件决定**

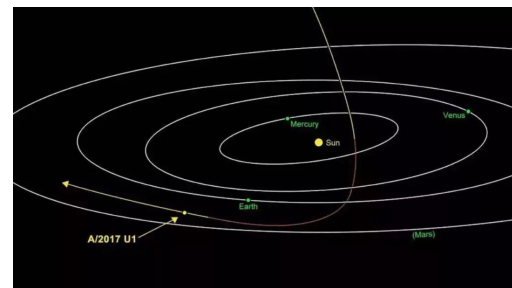
极坐标方程 $r = C/(1 + e \cos \theta)$ 对应着圆锥曲线，偏心率 $e$ 由质点的初始机械能 $E_m$ 确定

- $E_m < 0$ 对应 $0 \leq e < 1$ ，椭圆
- $E_m = 0$ 对应 $e = 1$ ，抛物线
- $E_m > 0$ 对应 $e > 1$ ，双曲线



即平方反比力必然导致圆锥曲线轨迹

太阳系里的“长期居民”轨迹为椭圆，而“过客”轨迹为抛物线或双曲线

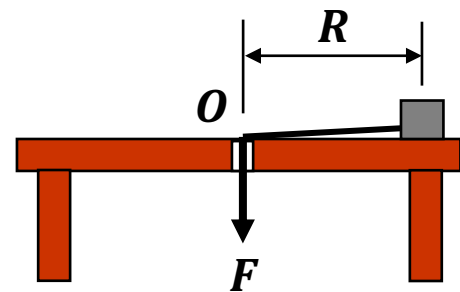


此性质在17世纪后半叶逐渐为人所知，包括胡克、哈雷等人均掌握此知识

- 牛顿首先证明了只有平方反比力才能导致椭圆轨迹（回忆第一章利用轨迹反推加速度的计算）
- 牛顿首先清晰明确地提出了力与运动的关系、引力的平方反比性和普适性（《原理》1687）

**例：**物体与光滑水平桌面的轻绳一端相联结，绳的另一端穿过桌面中心的小孔 $O$ 。物体原本在绕 $O$ 圆周运动，现将绳缓慢往下拉，则物体会

- A. 角动量改变，动能改变，动量改变
- B. 角动量不变，动能、动量都不变
- C. 角动量不变，动能、动量都改变
- D. 角动量不变，动能不变，动量改变



**解：**中心对称有心力场，质点对力心的角动量守恒  
缓慢向下拉的过程中 $F$ 做功，动能会增加。选**C**

**例：**宇宙飞船去考察一质量 $M$ 、半径 $R$ 的行星，当飞船静止于距行星中心 $r_0 = 4R$ 处时，以速度 $v_0$ 发射一质量为 $m$ 的探测器。要使这探测器恰好掠着行星的表面着陆， $\theta$ 角应是多少？其着陆滑行初速度 $v$ 多大？

**解：**探测器对星球中心的角动量守恒给出

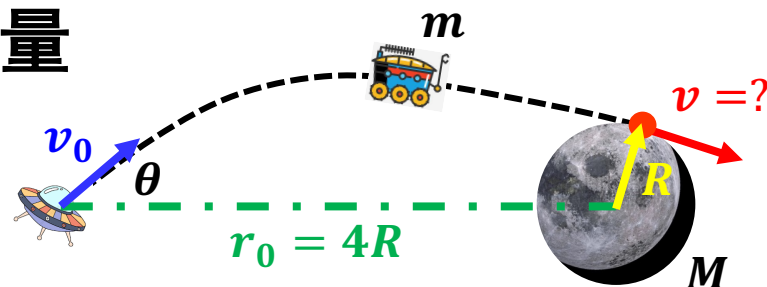
$$mv_0 r_0 \sin \theta = mvR$$

机械能守恒给出

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

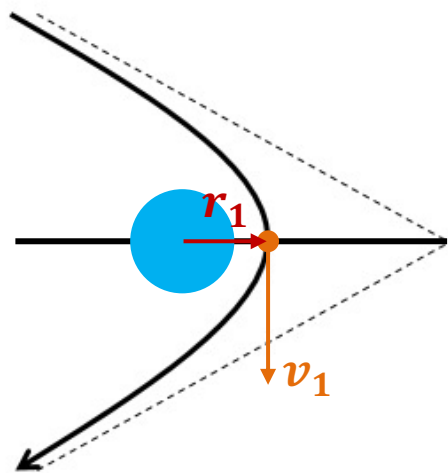
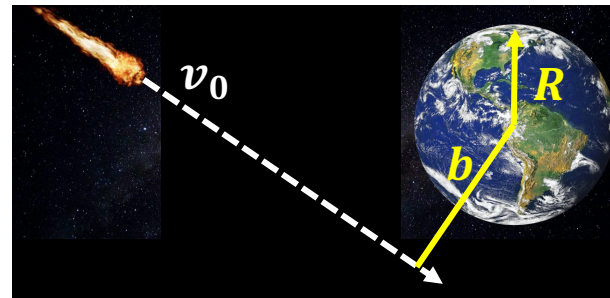
代入 $r_0 = 4R$ ，解出

$$\sin \theta = \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2}}, \quad v = v_0 \sqrt{1 + \frac{3GM}{2Rv_0^2}}$$



**例：**小行星自无穷远处以初速度 $v_0$ 飞向地球，问瞄准参数为 $b$ 为多大时才不撞上地表？假定地球质量为 $M$ ，半径为 $R$ 。

**解：**小行星自无穷远飞来，机械能大于零，故其轨迹为双曲线  
记其近地点到地心距离为 $r_1$



近地点时**径向速度**必为零，此时速度垂直于地心与小行星连线

角动量守恒 $mr_1v_1 = mv_0b$

机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

令 $r_1 > R$ ，得到**不相撞条件**为 $b > R\sqrt{1 + 2GM/(Rv_0^2)}$

# 本节课小结

## 角动量和力矩的定义

- 叉乘的计算，注意相乘因子的顺序
- 注意参考点的选取

## 角动量定理

- 微分形式类比牛顿第二定律
- 积分形式类比冲量定理
- 质点系的角动量定理，角动量守恒

## 中心对称有心力场

- 必为二维运动，可用平面极坐标求解
- 灵活运用各个守恒律



# 第五章作业

5.1, 5.4, 5.6, 5.9

作业扫描提交至 [spoc.buaa.edu.cn](http://spoc.buaa.edu.cn)，助教线上批改

提交时间段：3月21日0:00至4月4日00:00

以系统时间戳为准，原则上不接受其他解释

时间节点：3月25日（下周二）讲第六章