北京航空航天大学

2018－2019 学年第一学期期中

试卷

考试课程 工科数学分析（I） 任课老师________________

班级______________ 学号_______________ 姓名________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
成绩									
阅卷人									
校对人									

2018 年 12 月 2 日

一．单项选择题(每小题 4 分，本题 20 分)

1. (　A　)若对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 是，有 $|a_n|<\varepsilon$，则可断定

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0.$　　(B) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\neq 0.$　　(C) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty.$　　(D) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty.$

2. (　D　) 设函数 $y(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-2)\cdots(\mathrm{e}^x-2018)$，则 $y'(0)=$

(A) $2018!.$　　(B) $-2018!.$　　(C) $2017!.$　　(D) $-2017!.$

3. (　C　) 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且满足对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)>0$，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x).$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x).$

(C) $f(x)g(x)>f(a)g(a).$　　(D) $f(x)g(x)>f(b)g(b).$

4. (　C　) 关于函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)} & x\neq-1,0,1\\ 1 & x=-1,0,1\end{cases}$ 的间断点描述正确的是

（A） $x=-1$ 是可去间断点， $x=0$ 是跳跃间断点，$x=1$ 是可去间断点.

（B） $x=-1$ 是可去间断点， $x=0$ 是跳跃间断点，$x=1$ 是第二类间断点.

（C） $x=-1$ 是第二类间断点， $x=0$ 是跳跃间断点，$x=1$ 是可去间断点.

（D） $x=-1$ 是第二类间断点， $x=0$ 是第二类间断点，$x=1$ 是可去间断点.

5. (　A　)设函数 $f(x)$ 二阶可导，$F(x)=f(\cos x)$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f'(1)<0.$　　(B) $f'(1)>0.$　　(C) $f''(1)<0.$　　(D) $f''(1)>0.$

二．计算题(每小题 5 分，本题 15 分)

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}\right)$.

解：$\because n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}\le n\cdot\dfrac{1}{n}=1$

而$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$，

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\frac{1}{n}}}\right)=1$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\sqrt{2}-2\sin x}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(1+(\tan x-1))^{\frac{1}{\tan x-1}}\right]^{\frac{\tan x-1}{\sqrt{2}-2\sin x}}$. 令$u=\tan x, v=\dfrac{1}{\sqrt{2}-2\sin x}$，则

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(u-1)v=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sqrt{2}-2\sin x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x}{-2\cos x}=-\sqrt{2}$

故原式$=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$

3. 设函数$y=f(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{dx}\Big|_{x=1},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=1}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=0.$

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=1}=\dfrac{1}{2}.$

三．计算题(每小题 5 分，本题 10 分)

1．设函数由参数方程$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t-\cos t \end{cases}$确定，计算 y对x 的前两阶导数 y', y''.

解： $y'=\dfrac{(\sin t-\cos t)'}{(\cos t)'}=\dfrac{\cos t+\sin t}{-\sin t}=-\cot t-1$

$y''=（y'）'=\dfrac{(-\cot t-1)'}{(\cos t)'}=\dfrac{\csc^2 t}{-\sin t}=-\csc^3 t$.

2. 求函数 $f(x)=\ln(\cos x)$ 带 Peano 余项的 Maclaurin 展开式到含 $\mathrm{o}(x^4)$ 的项.

解：

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\ln(\cos x)=\ln(1+[\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2}+o(x^5)])$$

$$=[\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2}+o(x^5)]-\frac{1}{2}[\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2}+o(x^5)]^2+o(x^4)$$

$$=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

四．计算证明题(本题 10 分)

求出函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的单调性和凹凸性区间，并求出函数的极值点，极值，拐点，及函数的最大值.

解：由$f'(x)=e^{-x^2}(-2x)=0$,和$f''(x)=e^{-x^2}(-2x)^2-2e^{-x^2}=0$,

解得函数的驻点为$x=0$，二阶导数等于零的点为$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

导数的符号和二阶导数的区间及符号如下表所示

x	$(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0)$	0	$(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	0	−	−	−	+	+
$f(x)$	增凸	拐点	增凹	极大值点	减凹	拐点	减凸

显然：1.极值点为$x=0$，极值为 1，

2. 拐点为$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 因为 $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=f(\frac{\sqrt{2}}{2})$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 单调递增，在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty)$ 单调递增，因此 $f(x)$ 在$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$上的最大值就是函数在 R 上的最大值，显然最大值为 1.

五、计算证明（本题 12 分）设数列$\{x_n\}$满足，$0 < x_1 < \dfrac{1}{3}$，并且$x_{n+1} = x_n(1-3x_n)$.

(1) 证明数列$\{x_n\}$收敛，且求其极限；

(2) 指出并证明集合$\{x_n\}$的下确界；

(3) 求数列$\{nx_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

解：

（1）解：$\because 0 < x_1 < \dfrac{1}{3}$，$\therefore 0 < x_2 \le x_1 < \dfrac{1}{3}$，由数学归纳法，有：$0 < x_{n+1} \le x_n < \dfrac{1}{3}$，

所以，$\{x_n\}\downarrow$有下界0。

设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，则$x = x(1-3x)$，$x=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

（2）集合的下确界为 0；

首先根据（1）知 0 为下界；

其次因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,所以对$\forall \varepsilon > 0$,存在N,使得$x_{N+1} < 0+\varepsilon$,即$0+\varepsilon$不是集合的下界，所以集合的下确界为 0.

(3) $$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n-1}(1-3x_{n-1})}-\frac{1}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-3x_{n-1}}{3} = \frac{1}{3}$$

六．证明题(本题 10 分)

（1）证明不等式$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\le\sqrt{x_2-x_1},(x_2>x_1\ge 0)$；

（2）证明函数 $y=\sin\sqrt{x}$ 在区间$[0,+\infty)$ 上一致连续.

证：（1）

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}\le\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}}\le\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2-x_1}}=\sqrt{x_2-x_1}\ ,$$

（2）证明： $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty),$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sin\sqrt{x_1}-\sin\sqrt{x_2}\right|\le\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\left|\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|\le\sqrt{|x_1-x_2|}$$

所以$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$, $|f(x_1)-f(x_2)|\le\sqrt{|x_1-x_2|}$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon^2$，则$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且$|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

七．证明题(本题 12 分)

（1）若数列$\{x_n|n=0,1,2,\cdots\}$满足，对任意的$n\ge1$，存在$0<q<1$，使得

$$|x_{n+1}-x_n|\le q|x_n-x_{n-1}|$$

证明数列$\{x_n\}$是 Cauchy 列;

（2）设$x_0=1$，$x_{n+1}=1+\frac{1}{3}\sin^2 x_n, n=0,1,2,\cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛.

（1）证：$|x_{n+1}-x_n|\le q|x_n-x_{n-1}|\le q^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\cdots\le q^n|x_1-x_0|$

$$|x_{n+p}-x_n|=|x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-x_{n+p-2}+\cdots+x_{n+1}-x_n|$$
$$\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$
$$\le(q^{n+p}+q^{n+p-1}+\cdots+q^n)|x_2-x_1|$$
$$\le q^n\frac{|x_2-x_1|}{1-q}$$

令$A=\frac{|x_2-x_1|}{1-q}$

所以对任意的$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\left|\frac{\ln\varepsilon A}{\ln q}\right|\right]+2$,使得对任意$n>N$和任意$p\in N^*$都有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

(2) 证明：因为$x_0=1$，$x_{n+1}=1+\frac{1}{3}\sin^2 x_n$，当$n>1$时，

$$\because|x_{n+1}-x_n|=|(1+\frac{1}{3}\sin^2 x_n)-(1+\frac{1}{3}\sin^2 x_{n-1})|=\frac{1}{3}|\sin^2 x_n-\sin^2 x_{n-1}|$$
$$=\frac{1}{3}|(\sin x_n-\sin x_{n-1})(\sin x_n+\sin x_{n-1})|\le\frac{2}{3}|\sin x_n-\sin x_{n-1}|$$
$$=\frac{2}{3}|2\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}|\le\frac{2}{3}|x_n-x_{n-1}|.$$

即

$$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{2}{3}|x_n-x_{n-1}|$$

根据（1）可知，该数列是柯西列，所以收敛。

八．证明题(第 1 题 6 分，第 2 题 5 分，共 11 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三次可导，且有 $f(-1)=-1, f(0)=0, f(1)=1$，

若 $f(x)$ 在 0 点取得极小值，则存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)\ge 6$.

证：在零点展开，求$-1,1$处的值得

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_1)}{6},-1<\xi_1<0$$

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_2)}{6},0<\xi_2<1$$

两式相减得

$$f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=12,$$

取 $f'''(\xi_1)$，$f'''(\xi_2)$ 中的较大者所对应的点为 ξ，可得 $f'''(\xi)\ge 6$.

2. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，若

$f(a)=f(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$$

证：做辅助函数 $F(x)=e^{g(x)}f(x)$

则$F'(x)=e^{g(x)}f'(x)+e^{g(x)}g'(x)f(x)$

由 $f(a)=f(b)=0$ 知$F(a)=F(b)=0$,

由罗尔中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即

$e^{g(\xi)}f'(\xi)+e^{g(\xi)}g'(\xi)f(\xi)=0$

由$e^{g(\xi)}\neq 0$知，结论成立.