北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

含参变量的常义积分

一、 含参变量的常义积分的定义

二、 含参变量的常义积分的分析性质

1. 连续性定理

2. 积分次序交换顺序

3. 积分号下求导定理

一、含参变量的常义积分的定义

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $(b>a>0, t\in[0,2\pi]$,

则曲线的弧长为

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

这个积分除了含有积分 变量 t,还可以将 a,b 看做变量,

此时 a,b 称为参变量. 这样的积分称为含参变量的积分.

椭圆的偏心率

$$k=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ 是含参量 k 的积分，称为第二类完全椭圆积分.

一、含参变量的常义积分的定义

【定义1】设$f(x,y)$是定义在$I=[a,b]\times[c,d]$上的连续函数，则对于任意固定的 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$是$[a,b]$上关于x的一元连续函数,因此它在 $[a,b]$上可积，且积分值 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 由y唯一确定,即

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx, \qquad y\in[c,d],$$

称为含参变量y的积分.

一、含参变量的常义积分的定义

同理可以定义含参变量 x 的积分

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy,\quad x\in[a,b],$$

它们统称为**含参变量常义积分**,一般就称为**含参变量积分**.

二、含参变量的常义积分的性质

【定理1】设$f(x,y)$是定义在$I=[a,b]\times[c,d]$上的连续函数，

则函数
$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\qquad y\in[c,d],$$

在$[c,d]$上连续.

------连续性定理

【证】因为$f(x,y)$在闭区域上连续，所以 一致连续,所以

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$使得$\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D,$当

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$时,成立

$$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|<\varepsilon.$$

$\forall y_0\in[c,d],$只要$|y-y_0|<\delta$时,就有

二、含参变量的常义积分的性质

$$|I(y)-I(y_0)|=\left|\int_a^b [f(x,y)-f(x,y_0)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\le \int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|\,\mathrm{d}x \le (b-a)\varepsilon$$

所以$I(y)$在[c,d]上连续.

$\forall y\in[c,d],\ I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$连续,所以

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx,\quad y_0\in[c,d].$$

即极限运算和求积分运 算可交换次序.

二、含参变量的常义积分的性质

【例1】 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2\cos\alpha x}$.

【解】函数 $f(x,\alpha)=\dfrac{1}{1+x^2\cos\alpha x}$ 在矩形区域 $[0,1]\times[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 上连续.

$$所以\ \lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x}=\int_0^1 \lim_{\alpha\to 0}\frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

二、含参变量的常义积分的性质

【定理2】设$f(x,y)$是定义在$I=[a,b]\times[c,d]$上的连续函数，则

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

-------积分交换次序定理

【例2】求$I=\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$，$b>a>0.$

【解】$\because \int_a^b x^y dy=\frac{x^b-x^a}{\ln x}$，　$\therefore I=\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})dx\int_a^b x^y dy$,

由于函数$g(x)=\sin(\ln\frac{1}{x})x^y$在$[0,1]$上连续(可定义$g(0)=0$),

所以交换积分次序可得　$I=\int_a^b dy\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx$

二、含参变量的常义积分的性质

$$\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx = -\int_0^1 \sin(\ln x)x^y dx = \frac{1}{y+1}\int_0^1 \sin(\ln x)\mathrm{d}x^{y+1}$$

$$= \frac{1}{y+1}[\sin(\ln x)x^{y+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\ln x)x^y \mathrm{d}x] = -\frac{1}{y+1}\int_0^1 \cos(\ln x)x^y \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{(y+1)^2}[\cos(\ln x)x^{y+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\ln x)x^y \mathrm{d}x]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})x^y dx = -\frac{1}{1+(1+y)^2},$$

$$\therefore I = \int_a^b -\frac{1}{1+(1+y)^2}dy = \arctan(1+a) - \arctan(1+b).$$

二、含参变量的常义积分的性质

【例3】计算$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$和$\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$

【解】$\because \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \overset{y=x\tan t}{=} \int_0^{\arctan\frac{1}{x}} \frac{x^2(1-\tan^2 t)}{x^4(1+\tan^2 t)^2} x \frac{1}{\cos^2 t}dt$

$$=\int_0^{\arctan\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\cos 2t dt = \boxed{\frac{1}{2x}\sin 2(\arctan\frac{1}{x})} = \frac{1}{2x}\frac{2\frac{1}{x}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

函数不连续，积分不一定可交换次序

二、含参变量的常义积分的性质

$$\therefore \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \quad = \arctan x \big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

同理

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx \overset{x=y\tan t}{=} \int_0^{\arctan\frac{1}{y}} \frac{y^2(\tan^2 t-1)}{y^4(1+\tan^2 t)^2} y \frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$= -\int_0^{\arctan\frac{1}{y}} \frac{1}{y}\cos 2t dt$$

$$= -\frac{1}{2x}\sin 2(\arctan\frac{1}{x})$$

二、含参变量的常义积分的性质

即 $$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{1}{2y}\frac{2\frac{1}{y}}{1+(\frac{1}{y})^2} = -\frac{1}{1+y^2},$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = -\frac{\pi}{4}$$

显然 $$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \neq \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

这是因为函数在 $[0,1]\times[0,1]$ 上不连续，所以积分交 换次序不成立．

二、含参变量的常义积分的性质

【定理3】设$f(x,y), f_y(x,y)$在$I=[a,b]\times[c,d]$上连续函数，则

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx \text{ 在[c,d]上 可导. 并且 } \frac{dI(y)}{dy}=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

【证】$\forall y, y+\Delta y\in[c,d]$,利用微分中值定理得---积分号下求导定理

$$\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)\mathrm{d}x,\quad \text{其中} 0<\theta<1.$$

$$\frac{dI(y)}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)\mathrm{d}x$$

二、含参变量的常义积分的性质

因为$f_y(x,y)$连续，所以

$$\frac{dI(y)}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \lim_{\Delta y\to 0} f_y(x,y+\theta\Delta y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)dx.}$$

二、含参变量的常义积分的性质

【定理4】设$f(x,y), f_y(x,y)$在$I=[a,b]\times[c,d]$上连续函数，则又设$a(y),b(y)$在$[c,d]$上可导，满足$a\le a(y),b(y)\le b$，则函数

$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

在[c,d]上 可导. 并且

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y)dx+f(b(y),y)b'(y)-f(a(y),y)a'(y).$$

【证】将$F(y)$写出复合函数 $F(y)=\int_u^v f(x,y)dx=I(y,u,v)$,

$$u=a(y), v=b(y),$$

二、含参变量的常义积分的性质

则 $$F'(y)=\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dy}+\frac{\partial I}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{\partial I}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy},$$

$$\frac{\partial I}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f_y(x,y)dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial u}=-f(u,y),\qquad \frac{\partial I}{\partial v}=f(v,y),$$

$$\Rightarrow F'(y)=\int_a^b f_y(x,y)dx+f(b(y),y)b'(y)-f(a(y),y)a'(y).$$

显然$F(y)$在$[c,d]$上连续.

二、含参变量的常义积分的性质

【例4】 设$F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$，求$F'(x)$.

【解】 $F'(x)=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy^2})dy+e^{-x\cdot x^4}\cdot(x^2)'-e^{-x\cdot x^2}(x)'$

$$=\int_x^{x^2}(-y^2e^{-xy^2})dy+2xe^{-x^5}-e^{-x^3}$$

【例5】 设$f(x)$在$[a,A]$上连续，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x(f(t+h)-f(t))dt=f(x)-f(a),\ a<x<A.$$

二、含参变量的常义积分的性质

【证】
$$\frac{1}{h}\int_a^x (f(t+h)-f(t))dt = \frac{1}{h}\int_a^x f(t+h)dt - \frac{1}{h}\int_a^x f(t)dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_{a+h}^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_a^x f(t)dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x (f(t+h)-f(t))dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+\theta_1 h) - \lim_{h\to 0} f(a+\theta_2 h) \qquad \boxed{0<\theta_1,\theta_2<1.}$$

$$= f(x)-f(a) \qquad a<x<A.$$

二、含参变量的常义积分的性质

【例6】设$f(x)$在$[0,a]$上连续，且对$t\in[0,a]$时，$(x-t)^2+y^2+z^2\neq 0$

证明：函数$u(x,y,z)=\int_0^a \frac{f(t)dt}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}$满足$\Delta u=0.$

【证】由于求导是局部性质，所以这里可以进行积分 下求导

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z)=\int_0^a f(t)[-\frac{1}{2}((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2(x-t)]dt$$

$$=\int_0^a f(t)[-((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x-t)]dt$$

二、含参变量的常义积分的性质

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^a f(t)[-((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x-t)^2]dt$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \int_0^a f(t)[-((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}y^2]dt$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \int_0^a f(t)[-((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3((x-t)^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}z^2]dt$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

二、含参变量的常义积分的性质

【例7】 计算 $I(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x$， $(|\theta|<1)$.

【解】 $\forall|\theta|<1,\exists 0<a<1,$ 使得 $|\theta|\le a$.记 $f(x,\theta)=\ln(1+\theta\cos x)$,

则 $f(x,\theta),f_\theta(x,\theta)=\dfrac{\cos x}{1+\theta\cos x}$ 在 $[0,\pi]\times[-a,a]$ 上连续函数，则

$$I'(\theta)=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta}\int_0^{\pi}(1-\frac{1}{1+\theta\cos x})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\boxed{\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x}$$

二、含参变量的常义积分的性质

$$\because \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\theta\cos x} dx \overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2+\theta(1-t^2)} = \frac{2}{1+\theta} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1-\theta}{1+\theta}t^2}$$

$$= \frac{2}{1+\theta} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{1-\theta}{1+\theta}t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \left(\arctan \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} t \right) \Big|_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \quad I'(\theta) = \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\theta^2}}.$$

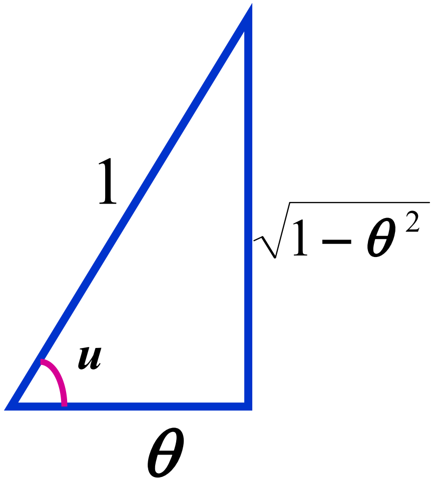
二、含参变量的常义积分的性质

$$\Rightarrow \quad I=\int I'(\theta)d\theta=\int\left(\frac{\pi}{\theta}-\frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right)d\theta \qquad \boxed{\theta=\cos u, d\theta=-\sin u du}$$

$$=\pi\ln|\theta|-\pi\int\left(\frac{1}{\cos u\sin u}\right)d\cos u$$

$$=\pi\ln|\theta|+\pi\boxed{\int\left(\frac{1}{\cos u}\right)du}$$

$$\int\left(\frac{1}{\cos u}\right)du=\int \sec u du \ =\ln|\sec u+\tan u|+C$$



$$=\ln\left|\frac{1}{\theta}+\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}\right|+C \ =\ln|1+\sqrt{1-\theta^2}|-\ln|\theta|+C$$

二、含参变量的常义积分的性质

$$I=\pi\ln|\theta|+\pi\int\left(\frac{1}{\cos u}\right)du$$

$$=\pi\ln|\theta|+\pi\ln|1+\sqrt{1-\theta^2}|-\pi\ln|\theta|+C$$

$$=\pi\ln(1+\sqrt{1-\theta^2})+C.$$

由$I(0)=0$,代入可得　$C=-\pi\ln(2).$

$$I(\theta)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

作业

习题19.1： 1，2（2，3），3，4（3，4）

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院