北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳
数学科学学院

10.3 二阶常系数线性微分方程求解

一、二阶齐次线性方程解的结构

定义 设$y_1(x)$, $y_2(x)$ 为定义在区间I内的两个函数．如果存在两个不全为零的常数k_1，k_2使得$k_1y_1+k_2y_2=0$，那称$y_1(x)$, $y_2(x)$ 在区间I内线性相关．否则称线性无关.

注 若在 I 上有$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$ 常数,则$y_1(x),y_2(x)$线性无关.

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

定理 1 如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程（1）的两个线性无关的特解，那么$y=C_1y_1+C_2y_2$就是方程（1）的通解.

二、二阶非齐次线性方程的解的结构

定理 2 设 y^*是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

的一个特解，Y是与(2)对应的 齐次方程(1)的通解，那么 $y = Y + y^*$是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理 3 设非齐次方程(2)的右端$f(x)$是几个函数之和，如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ ，而y_1^*, y_2^*分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

解的叠加原理

的特解, 那么$y_1^* + y_2^*$就是原方程的特解.

三、常系数齐次线性微分方程

n 阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=0$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=f(x)$$

三、常系数齐次线性微分方程

特征方程法

$$y'' + py' + qy = 0$$

设 $y = e^{rx}$，将其代入上面方程得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

因为 $e^{rx} \neq 0$, 所以有 $r^2 + pr + q = 0$

特征方程

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$,

三、常系数齐次线性微分方程

有两个不相等的实根 $(\Delta > 0)$

特征根为 $r_1 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$，$r_2 = \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$，

两个线性无关的特解

$$y_1 = e^{r_1 x}，\ y_2 = e^{r_2 x}，$$

得齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$；

三、常系数齐次线性微分方程

有两个相等的实根 $(\Delta = 0)$

特征根为 $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$，一特解为 $y_1 = e^{r_1 x}$，

设另一特解为 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$，

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入原方程并化简，

$$u'' + \underline{(2r_1 + p)}u' + \underline{(r_1^2 + pr_1 + q)}u = 0,$$

知 $u'' = 0$，取 $u(x) = x$，则 $y_2 = xe^{r_1 x}$，

得齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$；

三、常系数齐次线性微分方程

有一对共轭复根$(\Delta < 0)$

特征根为 $r_1 = \alpha + i\beta,\quad r_2 = \alpha - i\beta,$

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x},\qquad y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x},$$

重新组合 $\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

得齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

三、常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad r^2 + pr + q = 0$$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

三、常系数齐次线性微分方程

例1 求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+4r+4=0$，解得 $r_1=r_2=-2$，

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

例2 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+2r+5=0$， 解得 $r_{1,2}=-1\pm 2i$，

故所求通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

三、常系数齐次线性微分方程

n 阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程为 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

特征方程的根	线性无关的特解
若是 k 重根 r	$e^{rx},xe^{rx},\cdots,x^{k-1}e^{rx}$
若是k重共轭 复根$\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos\beta x,xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x,xe^{\alpha x}\sin\beta x.\cdots.x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

三、常系数齐次线性微分方程

注意 n次代数方程有n个根，而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项，且每一项各一个任意常数.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

三、常系数齐次线性微分方程

例3 求方程 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$,

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\quad r_2=r_3=i,\quad r_4=r_5=-i,$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

四、常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0,$

通解结构 $y = Y + y^*,$

难点：如何求特解?

方法：待定系数法.

四、常系数非齐次线性微分方程

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$

m次多项式

设非齐方程特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根, $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0,$

可设 $Q(x)=Q_m(x),$ $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x};$

m 次多项式

(2) 若λ是特征方程的单根,

$$\lambda^2+p\lambda+q=0, \qquad 2\lambda+p\neq 0,$$

可设 $Q(x)=xQ_m(x),$ $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x};$

四、常系数非齐次线性微分方程

(3) 若λ是特征方程的重根,

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad 2\lambda + p = 0,$$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$, $y^* = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}$.

总结 设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$, $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$,

注意 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程

(k是重根次数).

四、常系数非齐次线性微分方程

例4 求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $r^2-3r+2=0$, 特征根 $r_1=1,\ r_2=2,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x},$

因为 $\lambda=2$ 是单根, 设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x},$

代入方程, 得 $2Ax+B+2A=x$ 可得 $\begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1 \end{cases}$

于是 $y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}.$

四、常系数非齐次线性微分方程

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l\cos\omega x+P_n\sin\omega x]$$

$$=e^{\lambda x}[P_l\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}]$$ 利用欧拉公式

$$=(\frac{P_l}{2}+\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda+i\omega)x}+(\frac{P_l}{2}-\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P}_m(x)e^{(\lambda-i\omega)x},\qquad m=\max\{l,n\}$$

设 $y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$， $y_1{}^*=x^kQ_me^{(\lambda+i\omega)x}$，

四、常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = \overline{P}_m(x)e^{(\lambda - i\omega)x}, \quad y_2^* = x^k \overline{Q}_m e^{(\lambda - i\omega)x},$$

$$\therefore y^* = x^k e^{\lambda x}[Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q}_m e^{-i\omega x}]$$

$$= x^k e^{\lambda x}[Q_m(\cos\omega x + i\sin\omega x) + \overline{Q}_m(\cos\omega x - i\sin\omega x)]$$

$$\underline{= x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],}$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式， $m = \max\{l, n\}$

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda \pm i\omega\text{不是根} \\ 1 & \lambda \pm i\omega\text{是单根} \end{cases},$$

注意 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程（k是重根次数）.

四、常系数非齐次线性微分方程

例5 求方程 $y''+y=4\sin x$ 的通解.

解　对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0,$

特征根为$r=\pm i$,齐次方程通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x,$

因为$\lambda=i$ 是特征方程的单根,

设非齐次方程的一个特解为 $y^*=x[A\cos x+B\sin x],$

代入方程得　$2A=-4,\ 2B=0\quad \therefore\ A=-2,\ B=0$

所求非齐方程特解为　$y^*=-2x\cos x,$

原方程通解为　$y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x.$

四、常系数非齐次线性微分方程

例6 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解 对应齐次方程通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$,

$\because \lambda=2i$ 不是特征方程的根,

设 $y^*=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$,

$$\begin{cases}-4A-3D=0\\-3B+4C=0\\-3C=0\\-3A=1\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{l}C=0,\ A=-\dfrac{1}{3},\\ B=0,\ D=\dfrac{4}{9}\end{array}\qquad \therefore\ y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x,$$

原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{1}{3}x\cos 2x+\dfrac{4}{9}\sin 2x.$

四、常系数非齐次线性微分方程

例7 求微分方程 $y''-4y'+4y=6x^2+8e^{2x}$ 的特解.

解 设 $y''-4y'+4y=6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y''-4y'+4y=8e^{2x}$ 的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$

$\because r^2-4r+4=0$ $\therefore$ 特征根 $r_{1,2}=2$

$\therefore y_1^*=Ax^2+Bx+C$ $\quad y_2^*=Dx^2e^{2x}$ （重根）

$$A=\frac{3}{2},B=3,C=\frac{9}{4},D=4$$

$$y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{3}{2}x^2+3x+\frac{9}{4}+4x^2e^{2x}.$$

作业

习题10.3：　（1）（4）（5）（7）

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院