§18.4 场论初步

一、场的概念

1. 数量场

若在全空间或者其中某一区域 V 中的每一点，都有一个数量与之对应，则称在 V 上定义了一个数量场；$\longrightarrow$ 数量函数 $f(x,y,z)$.

2. 向量场

若在 V 中的每一点，都有一个向量与之对应，则称在 V 上定义了一个向量场；$\longrightarrow$ 向量函数

$$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)).$$

二、梯度场

1. 梯度

设$V\subset R^3$为一开集,函数 f 连续可微. $\vec{p}_0\in V$.

$$gradf(\vec{p}_0)=\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\left(\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial x},\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial y},\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial z}\right)$$

称为 f 在 $\vec{p}_0$ 的梯度.

沿此方向,方向导数取最大值$\|gradf(\vec{p}_0)\|$.

设$\vec{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\in R^3$是一个方向, 则

方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{u}}(\vec{p}_0)$

$$=\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

2. 等值面

称$\{\vec{p}\in V: f(\vec{p})=c, c$为常数$\}$为数量场 f 的 $c-$等值面.

易见 $grad f$ 正是 f 的等值面的法向量.

3. Nabla算子∇

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad \boxed{\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).}$$

梯度的另一表示.

性质：

(1) $\nabla(cf)=c\nabla(f)$, 其中 c 为常数;

(2) $\nabla(f\pm g)=\nabla(f)\pm\nabla(g)$;

(3) $\nabla(fg)=f\nabla(g)+g\nabla(f)$;

(4) 设 φ 是单变量函数, 则 $\nabla(\varphi\circ f)=(\varphi'\circ f)\nabla f$.

例1 设径向量 $\vec{p}=(x,y,z)$, 令$p=\|\vec{p}\|$, 求梯度∇p.

解 $\because p^2=\vec{p}\cdot\vec{p}=x^2+y^2+z^2,$

$$\therefore 2p\nabla p=\nabla p^2$$

$$=\nabla(x^2+y^2+z^2)=2(x,y,z)=2\vec{p},$$

因此, 当$p\neq 0$时,

$$\nabla p=\frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}=\frac{\vec{p}}{p}.$$

例2 设 f,g 是数量场,证明

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g\nabla f-f\nabla g).$$

解 因为 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{1}{g^2}\left(g\dfrac{\partial f}{\partial x}-f\dfrac{\partial g}{\partial x}\right),$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial f}{\partial y}-f\frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial f}{\partial z}-f\frac{\partial g}{\partial z}\right),$$

所以……

三、散度场

设 $\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

为空间区域V上的向量值函数，定义数量函数

$$D(x,y,z)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量函数$\vec{F}$在(x,y,z)处的散度，记为 $div\vec{F}$.

divergence

即：$$\boxed{div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Gauss公式

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\oiint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

其中 S 取外侧, $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为$S$的外侧上的单位法向量. 定义面积向量元素:

$$d\vec{S}=\vec{n}dS \ =(dydz,dzdx,dxdy)$$

于是 *Gauss* 公式可写成：

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz = \oiint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

向量场 $\vec{F}$ 通过定向曲面 S 的通量.

任取 $M_0\in V$，对上式左侧用中值定理，得

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz = \mathrm{div}\vec{F}(M^*)\cdot \Delta V = \oiint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

其中 M^* 为 V 中某一点，于是

$$div\vec{F}(M^*) = \frac{\oint\!\!\!\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

令 V 收缩到点 M_0，则 M^* 也趋向于点 M_0，因此

$$div\vec{F}(M_0) = \lim_{V\to M_0} \frac{\oint\!\!\!\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

表明 $div\vec{F}(M_0)$ 是流量对体积V的变化律.

$div\vec{F}(M_0) > 0$，流出，称 M_0 为源;

$div\vec{F}(M_0) < 0$，吸收，称 M_0 为汇.

若对向量场 $\vec{F}$ 中每一点，都有 $div\vec{F} = 0$，称 $\vec{F}$ 无源场.

利用*Nabla*算子,散度可以写成

$$\boxed{div\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}.}$$

性质：

(1) $\nabla\cdot(c\vec{F}) = c\nabla\cdot\vec{F}$, c为常数;

(2) $\nabla\cdot(\vec{F}_1+\vec{F}_2) = \nabla\cdot\vec{F}_1+\nabla\cdot\vec{F}_2$;

(3) 设$\varphi=\varphi(x,y,z)$是数量场,则

$$\nabla\cdot\varphi\vec{F} = \varphi\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla\varphi.$$

例3 设径向量 $\vec{p}=(x,y,z)$，令 $p=\|\vec{p}\|$，求 $div\, p^{\alpha}\vec{p}$.

解 $\because \nabla\cdot\vec{p}=\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial z}=3,$

$$\nabla p^{\alpha}=\alpha p^{\alpha-1}\nabla p=\alpha p^{\alpha-1}\frac{\vec{p}}{p}=\alpha p^{\alpha-2}\vec{p},$$

利用性质3,

$$\nabla\cdot p^{\alpha}\vec{p}=p^{\alpha}\nabla\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\nabla p^{\alpha}$$

$$=3p^{\alpha}+\vec{p}\cdot\alpha p^{\alpha-2}\vec{p}$$

$$=(3+\alpha)p^{\alpha}.$$

(4) 设$\varphi=\varphi(x,y,z)$是数量场,则

$$\boxed{\nabla\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}$$

记 $\boxed{\nabla\cdot\nabla=\Delta,}$ $\longrightarrow$ *Laplace*算子

于是 $\nabla\cdot\nabla\varphi=\Delta\varphi.$

设V为一区域,如果V上的数量场 f 满足Laplace

方程 $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0,$ 则称 f 是V 上

的调和函数.

例4 设径向量 $\vec{p}=(x,y,z)$, 令 $p=\|\vec{p}\|$,

证明 $\dfrac{1}{p}(p>0)$ 是一调和函数.

证

$$\Delta\frac{1}{p}=\nabla^2\frac{1}{p}=\nabla\cdot\nabla\frac{1}{p}$$

$$=-\nabla\cdot\frac{\vec{p}}{p^3}=0.$$

例5 设 V 是Gauss 公式中的闭区域, $u,v\in C^1(V)$,

$\vec{n}$表示 V 的边界曲面 S 的单位外法向量场,求证:

$$(1)\ \oiint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS = \iiint_V \Delta u dV;$$

$$(2)\ \oiint_S v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS = \iiint_V \nabla u\cdot\nabla v dV + \iiint_V v\Delta u dV;$$

$$(3)\ \oiint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} dS = \iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dV.$$

证 (1) $\displaystyle\oiint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$

$$= \oiint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n}, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{n}, z)\right) dS$$

$$= \oiint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot d\vec{S}$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dV$$

$$= \iiint_V \Delta u dV.$$

(2) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS$

$$=\oint\!\!\!\oint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\vec{n},x)+v\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\vec{n},y)+v\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\vec{n},z)\right)dS$$

$$=\oint\!\!\!\oint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial x},v\frac{\partial u}{\partial y},v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$=\iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)dV$$

$$=\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v dV+\iiint_V v\Delta u dV.$$

(3) 由(2)知：

$$\oiint_S v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v dV+\iiint_V v\Delta u dV,$$

$$\oiint_S u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}dS=\iiint_V \nabla u\cdot\nabla v dV+\iiint_V u\Delta v dV,$$

两式相减,即得

$$\oiint_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}} \\ u & v \end{vmatrix} dS=\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dV.$$

四、旋度场

设 $\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

为空间区域V上的向量值函数，对$\forall(x,y,z)\in V$，

定义向量函数：

$$\boxed{rot\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),}$$

称$rot\vec{F}$为向量场$\vec{F}$在(x,y,z)处的旋度. 由$rot\vec{F}$定义的向量场，称为旋度场.

便于记忆的形式：
$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}}$$

也可写成向量积的形式： $\boxed{\mathrm{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}}$

设 S 为双侧曲面，Γ 为其边界曲线，其中 S 的侧和 Γ 的方向满足 右手法则.

设 $\vec{t}=(\cos\alpha_t,\cos\beta_t,\cos\gamma_t)$ 是曲线 Γ 正向上的单位切向量，定义弧长元素向量：

$$d\vec{s} = (\cos\alpha_t, \cos\beta_t, \cos\gamma_t)ds = \vec{t}ds$$

则斯托克斯公式

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

可写成 $\iint_S rot\vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s},$

向量场 $\vec{F}$ 沿封闭曲线 Γ 的环流量,

反映了流体沿Γ的旋转强弱程度.

斯托克斯公式的物理意义：

向量场 $\vec{F}$ 沿封闭曲线 Γ 的环流量，等于 $\vec{F}$ 的旋度场 $rot\vec{F}$ 通过 Γ 张成的曲面的通量.

性质： (1) $\nabla\times(c\vec{F})=c\nabla\times\vec{F}$, 其中$c$为常数;

(2) $\nabla\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=\nabla\times\vec{F}_1+\nabla\times\vec{F}_2$;

(3) 设φ是数量函数,则有

$$\nabla\times(\varphi\vec{F})=\varphi\nabla\times\vec{F}+\nabla\varphi\times\vec{F};$$

(4) $\nabla\cdot(\vec{F}_1\times\vec{F}_2)=(\nabla\times\vec{F}_1)\cdot\vec{F}_2-(\nabla\times\vec{F}_2)\cdot\vec{F}_1$.

例6 设径向量 $\vec{p}=(x,y,z)$, 令 $p=\|\vec{p}\|$, 求证向量场 $\vec{F}(x,y,z)=f(p)\vec{p}$ 的旋度 $rot\vec{F}=\vec{0}$, 其中 f 是单变量函数, $p>0$.

证 $\because \nabla\times\vec{p}=\vec{0}$,

$$\therefore \nabla\times(f\,\vec{p})=f\nabla\times\vec{p}+\nabla f\times\vec{p}=\nabla f\times\vec{p}$$

$$=f'(p)\nabla p\times\vec{p}=f'(p)\frac{\vec{p}}{p}\times\vec{p}=\vec{0}.$$

例7 设 $u(x,y,z)$ 是数量场, 且二阶偏导连续 ,求

(1) $rot(grad u)$; (2) $div(grad u)$.

证

(1) $$rot(grad u) = \nabla \times (\nabla u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

(2) $$div(grad u) = \nabla \cdot \nabla u = \Delta u.$$

例8 设$\vec{F}=(P,Q,R)$是向量场，P,Q,R具有二阶连续偏导，证明

(1) $div(rot\vec{F})=0$;　　(2) $rot(rot\vec{F})=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\Delta\vec{F}$.

证　(1) $div(rot\overrightarrow{F})=\nabla\cdot(\nabla\times\overrightarrow{F})$

$$=\nabla\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$$

$$(2)\quad rot(rot\vec{F})=\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z} & \dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x},\ \frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2},\right.$$
$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}\right)$$

$$=\cdots=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\Delta\vec{F}.$$

五、有势场和势函数

定义1 设$V\subset R^3$为一区域, 在V上定义了一个向量场$\vec{F}=(P,Q,R)$. 如果存在V上的一个数量场$\varphi(x,y,z)$, 使得$grad\varphi=\vec{F}=(P,Q,R)$在$V$上恒成立, 则称向量场$\vec{F}$是**有势场**, 数量场$\varphi$称为向量场$\vec{F}$的一个**势函数**.

$$grad\varphi=\vec{F}=(P,Q,R)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=P,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=R.$$

定义 2 设 $\vec{F}$ 是定义在区域 $V\subset R^3$ 上的一个向量场，如果对含于 V 中的任一条封闭曲线 Γ，都有 $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}=0$，则称 $\vec{F}$ 是V上的一个**保守场.**

定义 3 设 $\vec{F}$ 是定义在区域 $V\subset R^3$ 上的一个向量场，如果 $rot\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$ 在V上恒成立，则称 $\vec{F}$ 是V上的一个**无旋场.**

定理1 设 $\vec{F}$ 是定义在区域 $V\subset R^3$ 上的一个向量场，则如下三个论断等价：

(1) $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是有势场;

(2) $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是无旋场;

(3) $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是保守场.

分析：(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(1).

$$grad\varphi=\vec{F}=(P,Q,R)\qquad rot\vec{F}=\vec{0}\qquad \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}=0$$

构造 φ　　求偏导　　斯托克斯公式

证：$(1)\Rightarrow(2)$

由(1)知, 存在函数 φ 使得 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=P,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=R.$

于是有：

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{0}$$

故 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是无旋场.

$(2)\Rightarrow(3)$ 设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是无旋场,

在 V 中任取一条封闭曲线 Γ，并在 V 内做一个

以 Γ 为边界的曲面 S, 则由斯托克斯公式可知：

$$\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_{S} rot\vec{F}\cdot d\vec{S}=0.$$

故 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是保守场.

$(3)\Rightarrow(1)$ 设 $\vec{F}=(P,Q,R)$ 是保守场, $\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{s}=0.$

根据第18章的积分与路径无关性定理, 知

在V内存在$\varphi(x,y,z)$,使$d\varphi = Pdx + Qdy + Rdz$,

即存在φ满足$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = R.$

注 求势函数的方法

(1) 第18章定理中的方法,选择特殊路径;

(2) 根据 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = R$ 之一,

解出一个φ(含有待定的一个二元函数),

然后逐个代入剩下的两个方程, 解出φ.

例9 求 $\vec{F}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2},-\frac{xy}{z^2})$的势函数.

证 先验证是有势场

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{0}.$$

由 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}$，得

$$\varphi(x,y,z)=x(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z})+\varphi_1(y,z),$$

代入 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{x}{z}+\dfrac{x}{y^2}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=-\dfrac{xy}{z^2}$,

得 $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}=0.$

所以 $\varphi_1(y,z)=C$,

$$\varphi(x,y,z)=x(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z})+C.$$

也可以按照一般的方法求解,注意起点的选取.

例10 证明向量

$$\vec{F}=(yz(2x+y+z),xz(x+2y+z),xy(x+y+2z))$$

是有势场,并求其势函数.

证 先验证是有势场 $rot\vec{F}=$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz(2x+y+z) & xz(x+2y+z) & xy(x+y+2z) \end{vmatrix}=\vec{0}.$$

故 $\vec{F}$ 是有势场.

再计算

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}(Pdx+Qdy+Rdz)$$

选择合适的路径,得出结果

$$\varphi(x,y,z)=x^2yz+xy^2z+xyz^2+C.$$

也可以采用例9中类似的方法,求出φ.

小结

1、数量场、向量

2、梯度场、散度场、旋度场

3、有势场和势函数