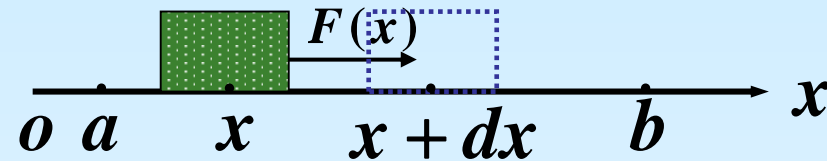




§ 4 定积分的物理应用



一、功

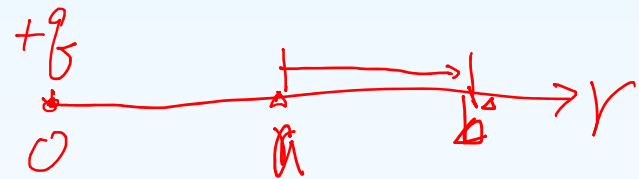


如果物体在作直线运动的过程中有一个不变的力 F 作用在这物体上，且力的方向与物体的运动方向一致，那么，在物体移动了距离 s 时，力 F 对物体所作的功为 $W = F \cdot s$ 。

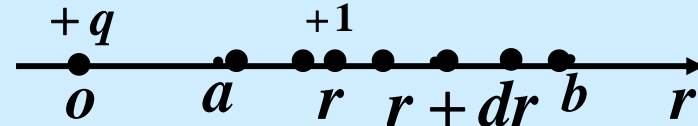
如果物体在运动的过程中所受的力是变化的，应采用“**微元法**”思想。



例 1 把一个带 $+q$ 电量的点电荷放在 r 轴上坐标原点处, 它产生一个电场. 这个电场对周围的电荷有作用力. 由物理学知道, 如果一个单位正电荷放在这个电场中距离原点为 r 的地方, 那么电场对它的作用力的大小为 $F = k \frac{q}{r^2}$ (k 是常数), 当这个单位正电荷在电场中从 $r = a$ 处沿 r 轴移动到 $r = b$ 处时, 计算电场力 F 对它所作的功.





解 取 r 为积分变量, 

$$r \in [a, b],$$

取任一小区间 $[r, r + dr]$, 功元素 $dw = \frac{kq}{r^2} dr$,

$$\text{所求功为 } w = \int_a^b \frac{kq}{r^2} dr = kq \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

如果要考虑将单位电荷移到无穷远处

$$w = \int_a^{+\infty} \frac{kq}{r^2} dr = kq \left[-\frac{1}{r} \right]_a^{+\infty} = \frac{kq}{a}.$$



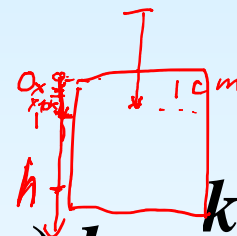
例2 用铁锤把钉子钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉进入木板的深度成正比，铁锤在第一次锤击时将铁钉击入1厘米，若每次锤击所作的功相等，问第 n 次锤击时又将铁钉击入多少？

解 设木板对铁钉的阻力为 $f(x) = kx$,

第一次锤击时所作的功为 $w_1 = \int_0^1 \underline{f(x)} dx = \frac{k}{2}$,

设 n 次击入的总深度为 h 厘米

n 次锤击所作的总功为 $w_h = \int_0^h f(x) dx.$





$$w_h = \int_0^h kx dx = \frac{kh^2}{2},$$

依题意知，每次锤击所作的功相等。

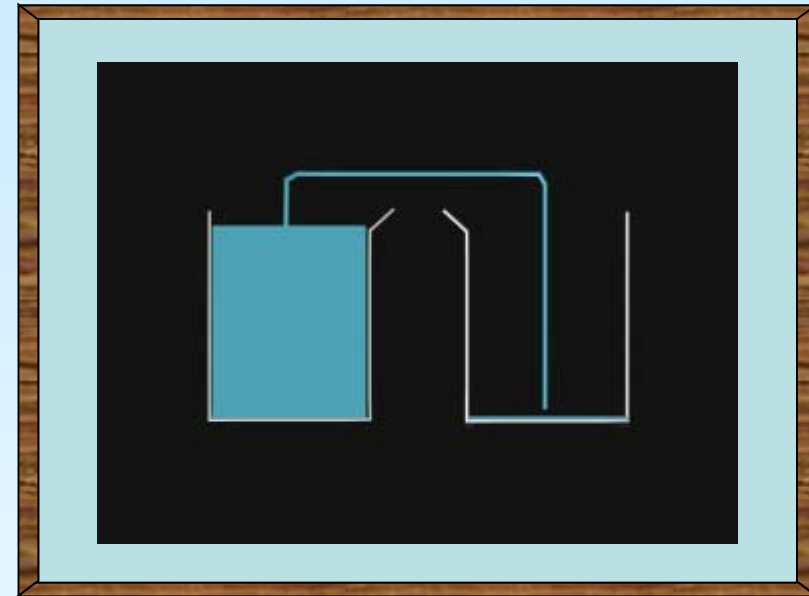
$$w_h = nw_1 \Rightarrow \frac{kh^2}{2} = n \cdot \frac{k}{2},$$

n 次击入的总深度为 $h = \sqrt{n}$,

第 n 次击入的深度为 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.



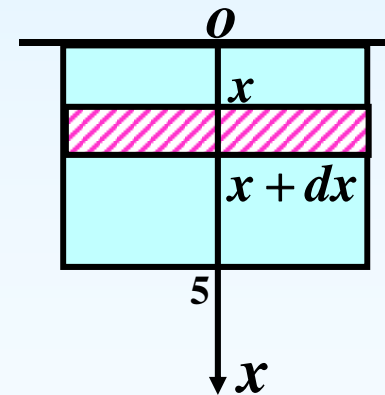
例 3 一圆柱形蓄水池高为 5 米，底半径为 3 米，池内盛满了水. 问要把池内的水全部吸出，需作多少功？



解 建立坐标系如图

取 x 为积分变量， $x \in [0, 5]$

取任一小区间 $[x, x + dx]$,





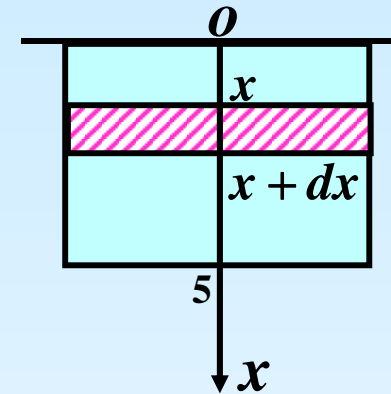
这一薄层水的重力为

$$\underline{9.8\pi \cdot 3^2 dx} \quad mg$$

功元素为 $dw = 88.2\pi \cdot \textcircled{x} \cdot dx,$

$$w = \int_0^5 88.2\pi \cdot x \cdot dx$$

$$= 88.2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 \approx 3462 \text{ (千焦).}$$





例4 以每秒 a 的流量往半径为 R 的半球形水池内注水. (1) 求在池中水深 h ($0 < h < R$) 时水面上升的速度; (2) 若再将满池水全部抽出, 至少需作功多少?

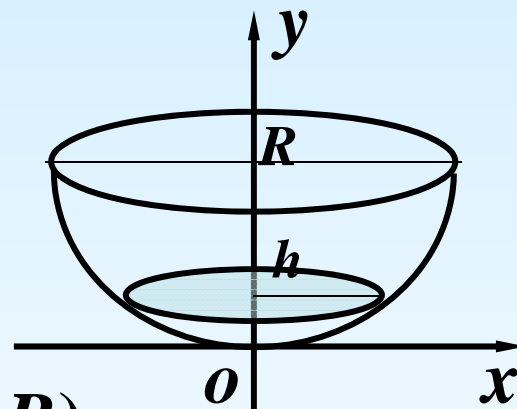
解 如图所示建立坐标系.

半圆的方程为

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad (0 \leq y \leq R).$$

于是对半圆上任一点, 有

$$x^2 = R^2 - (R - y)^2 = 2Ry - y^2 \quad (0 \leq y \leq R).$$





(1) 因已知半球可看作此半圆绕 y 轴旋转而成的立体, 故半球内高为 h 的球缺的体积即水深为 h 时水池内水的体积为

$$V(h) = \int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^h \pi(2Ry - y^2) dy$$

又设水深 h 时已注水的时间为 t , 则有 $V(h) = at$,

$$\text{即 } \int_0^h \pi(2Ry - y^2) dy = at$$

两边对 t 求导, 得 $\pi(2Rh - h^2) \frac{dh}{dt} = a,$



故所求速度为 $\frac{dh}{dt} = \frac{a}{\pi(2Rh - h^2)}.$

(2) 将满池的水全部抽出所需的最小功即将池内水全部提升到池沿高度所需的功.

抽水时使水位从 y ($0 \leq y \leq R$) 降到 $y - dy$ 所需的功约为 $\rho g \pi x^2 dy (R - y)$, (ρg 为水的比重)

$$\text{又 } x^2 = 2Ry - y^2,$$

$$\text{即功元素 } dW = \rho g \pi (2Ry - y^2)(R - y)dy.$$



故将满池水全部提升到池沿高度所需功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R \rho g \pi (2Ry - y^2)(R - y) dy \\ &= \rho g \pi \int_0^R (2R^2 y - 3Ry^2 + y^3) dy \\ &= \frac{\pi}{4} \rho g R^4. \end{aligned}$$



二、水压力

由物理学知道，在水深为 h 处的压强为 $p = \gamma h$ ，这里 $\gamma = \rho g$ 是水的比重．如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处，那么，平板一侧所受的水压力为 $P = p \cdot A$ ．

如果平板垂直放置在水中，由于水深不同的点处压强 p 不相等，平板一侧所受的水压力就不能直接使用此公式，宜采用“微元法”思想．



例 5 一个横放着的圆柱形水桶，桶内盛有半桶水，设桶的底半径为 R ，水的比重为 γ ，计算桶的一端面上所受的压力。

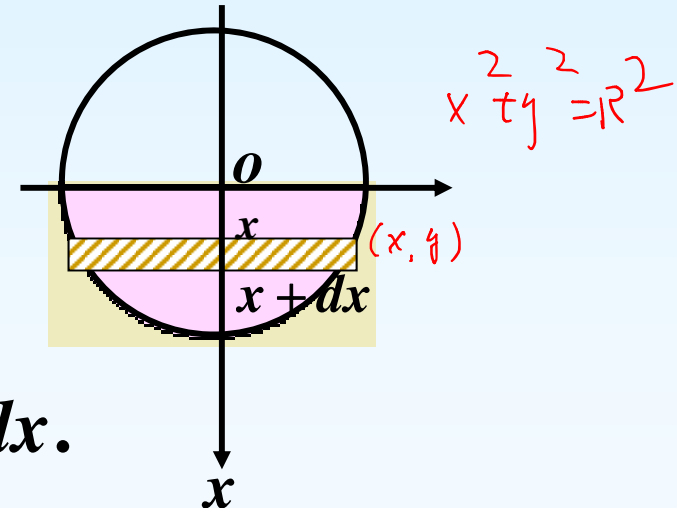
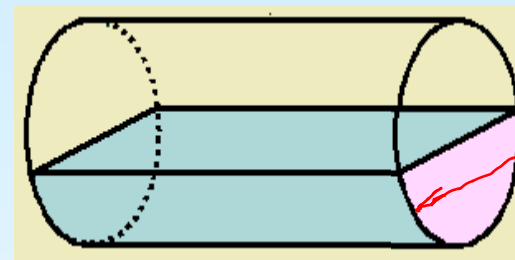
解 在端面建立坐标系如图

取 x 为积分变量， $x \in [0, R]$

取任一小区间 $[x, x + dx]$

小矩形片上各处的压强近似相等 $p = \gamma x$,

小矩形片的面积为 $2\sqrt{R^2 - x^2}dx$.





小矩形片的压力元素为 $dP = 2\gamma x \sqrt{R^2 - x^2} dx$

端面上所受的压力

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R 2\gamma x \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= -\gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} d(R^2 - x^2) \\ &= -\gamma \left[\frac{2}{3} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^3 \right]_0^R = \frac{2\gamma}{3} R^3. \end{aligned}$$



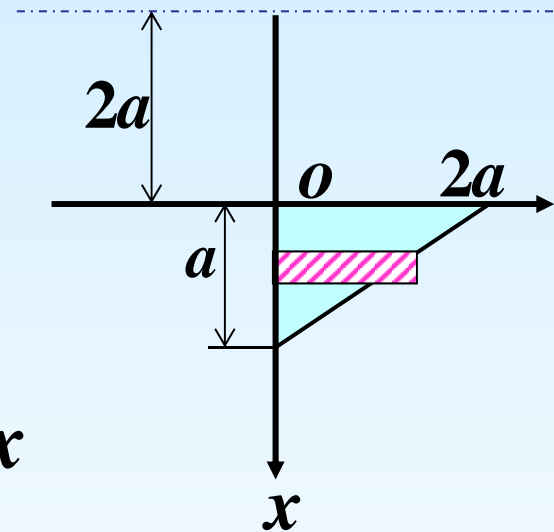
例 6 将直角边各为 a 及 $2a$ 的直角三角形薄板垂直地浸入水中，斜边朝下，直角边的边长与水面平行，且该边到水面的距离恰等于该边的边长，求薄板所受的侧压力。

解 建立坐标系如图

面积微元 $2(a - x)dx$,

$$dP = (x + 2a) \cdot 2(a - x) \cdot \gamma dx$$

$$P = \int_0^a 2(x + 2a)(a - x)\gamma dx = \frac{7}{3}\gamma a^3.$$





三、引力

由物理学知道，质量分别为 m_1, m_2 相距为 r 的两个质点间的引力的大小为 $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ，其中 k 为引力系数，引力的方向沿着两质点的连线方向。

如果要计算一根细棒对一个质点的引力，那么，由于细棒上各点与该质点的距离是变化的，且各点对该质点的引力方向也是变化的，就不能用此公式计算。



例 7 有一长度为 l 、线密度为 ρ 的均匀细棒，在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M ，计算该棒对质点 M 的引力。

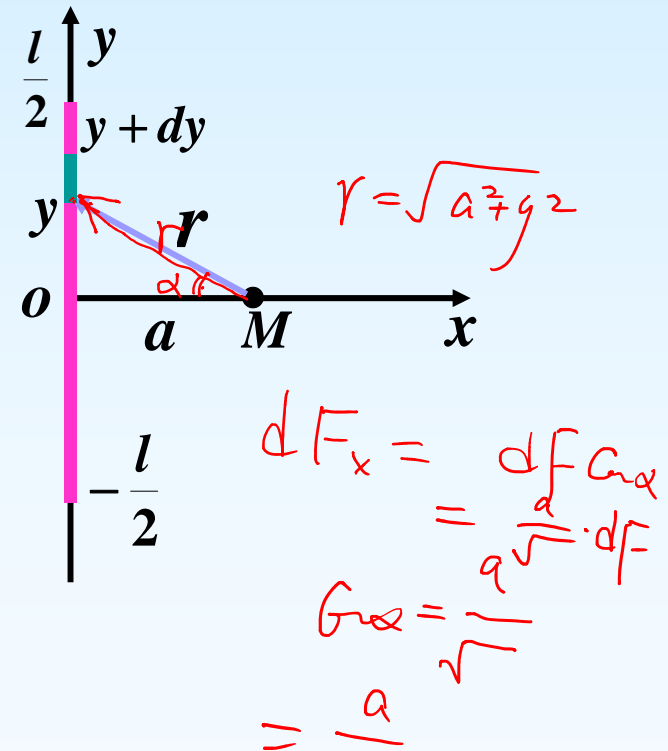
解 建立坐标系如图

取 y 为积分变量 $y \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$,

取任一小区间 $[y, y + dy]$

将典型小段近似看成质点

小段的质量为 ρdy ,





小段与质点的距离为 $r = \sqrt{a^2 + y^2}$,

引力 $\Delta F \approx k \frac{m \rho dy}{a^2 + y^2}$,

$$dF_y = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \cdot k \frac{\rho dy \cdot m}{a^2 + y^2}$$

水平方向的分力元素 $dF_x = -k \frac{am \rho dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$F_x = -\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} k \frac{am \rho dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2km \rho l}{a(4a^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}},$$

由对称性知，引力在铅直方向分力为 $F_y = 0$.



例8 有一线密度为 ρ ,形为半径为 R 的四分之一圆周的均匀细丝,在其圆心处有一质量为 m 的质点,计算该细丝对质点的引力.

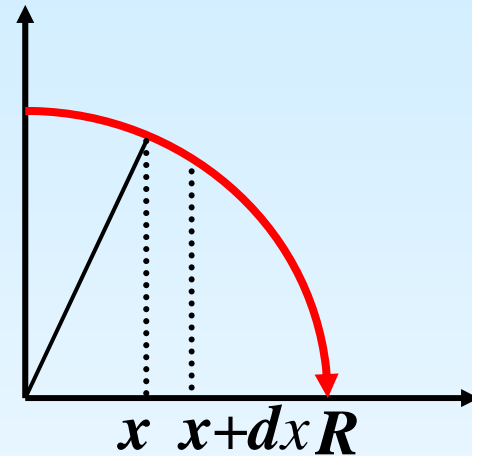
解 建立坐标系如图

取任一小区间 $[x, x + dx]$, $x \in [0, R]$,

质量微元为 $\rho\sqrt{1+(y')^2}dx$,

引力微元 $|dF| = k \frac{m\rho\sqrt{1+(y')^2}dx}{R^2}$,

水平方向 $|dF_x| = k \frac{m\rho x\sqrt{1+(y')^2}dx}{R^3}$,





$$F_x = \int_0^R k \frac{m \rho x \sqrt{1 + (y')^2} dx}{R^3} = \int_0^R k \frac{m \rho x dx}{R^2 \sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{km \rho}{R}.$$

由对称性可知 $F_y = F_x = \frac{km \rho}{R}$