北京航空航天大学 2006-2007 学年第一学期

线性代数试题　2007，1，24

一、选择题，从下列各题中选择一个正确答案（本题共 24 分，每小题各 3 分）。

1．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 t 的值为 ________。

a. $t=-3$；　b. $t=9$；　c. $t\neq -3$；　d. $t\neq 9$。

2．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，C 为 n 阶可逆矩阵，$R(A)=r$，矩阵 $B=AC$，$R(B)=r_1$，则________，这里 $R(A)$ 表示 A 的秩。

a. $r_1<r$；　b. $r_1>r$；　c. $r_1=r$；　d. r_1 和 r 的关系依 C 而定。

3．设 A 为任一 $n(n\geq 3)$ 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，k 为常数，且 $k\neq 0,\ \pm 1$，则必有 $(kA)^*=$________。

a. kA^*；　b. $k^{n-1}A^*$；　c. k^nA^*；　d. $k^{-1}A^*$。

4．设 A 为 n 阶方阵，且 $R(A)=\ r<n$，那么在 A 的 n 个行向量中________。

a. 必有 r 个行向量线性无关；
b. 任意 r 个行向量线性无关；
c. 任意 r 个行向量都构成最大线性无关组；
d. 任何一个行向量都可由其它 r 个行向量线性表出。

5．设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=E$，则________。

a. A 的行列式为 1；　b. A 的特征值都是 1；
c. A 的秩为 n；　d. A 一定是对称矩阵。

6．设 α_1，α_2，…，α_s 与 β_1，β_2，…，β_t 为同维向量组，且

$R(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_s)=a$，$R(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_t)=b$。

则 $R(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_s,\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_t)=$______________。

a. $\leq a+b$； b. $>a+b$；

c. $\leq \max\{a,\ b\}$； d. $<\min\{a,b\}$。

7．n 阶实对称矩阵 A 合同于矩阵 B 的充要条件是________________。

a. $R(A)=R(B)$； b. A 与 B 的正惯性指数相等；

c. $A,\ B$ 为正定矩阵； d. a, b 同时成立。

8．设 $A,\ B$ 均为 n 阶方阵，则必有______________。

a. $|A+B|=|A|+|B|$； b. $AB=BA$；

c. $|AB|=|BA|$； d. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$。

二、填空题，在每小题空白处填写一个正确答案（本题共 27 分，每空 3 分）。

1．设 A 为三阶矩阵，A 的三个列向量分别为 α，β，γ，即 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$，则 $|\gamma-2\alpha,\ 3\beta,\ \alpha|=$ __-3|A|__。

2．A 为四阶矩阵，$|A|=3$，则 $|(2A)^{-1}|=$__1/48__。

3．设 A 为二阶方阵，B 为三阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{|B|}=\frac{1}{2}$，则 $\begin{vmatrix} -B & O \\ O & 2A^{-1} \end{vmatrix}=$

__-16__。

4. 设矩阵 A 满足 $A^2-3A-2E=O$，其中 E 为与 A 同阶的单位矩阵，则

$A^{-1}=$ ___1/2A-3/2E___。

5．设 A 为 3 阶方阵，其特征值分别为 1，- 2，3，与之对应的特征向量依次为 p_1， p_2， p_3，设 $P=(p_3,p_1,p_2)$，则 $P^{-1}AP=$ _〔3 1 -2〕三阶对角形_。

6．已知向量组

$\alpha_1=(1,2,2,0)^T,\alpha_2=(1,1,-1,2)^T,\alpha_3=(1,0,-4,4)^T,\alpha_4=(0,2,-3,-3)^T$，

它的秩为_3__，它的一个极大线性无关组为___a1, a2, a4___。

7．设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 a 满足_a>1 或 a<-2__。

8. 若 A 相似于对角形矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $|-A|=$ _2_。

三、(9 分) 设 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 X 。

四、(8 分) 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3+2x_4=0\end{cases}$$

的解空间的维数与一组基底。

五、(12 分) 当 a 取何值时，下面的线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\ 2x_1+3x_2+ax_3=3,\\ x_1+ax_2+3x_3=2\end{cases}$$

无解？有惟一解？有无穷多组解？当有无穷多组解时，求出其通解。

六、（10 分）已知实二次型 $f = X^T AX$ 经过正交代换 $X = QY$ 化为标准形 ${y_1}^2 + {y_2}^2 - 4{y_3}^2$，

其中 $Q = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，且 $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求所用的正交代换。

七、（10 分）设向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系，向量 β 满足 $A\beta \neq 0$。 证明：向量组

$$\beta + \alpha_1,\ \beta + \alpha_2,\ \cdots,\ \beta + \alpha_r, \beta$$

线性无关.