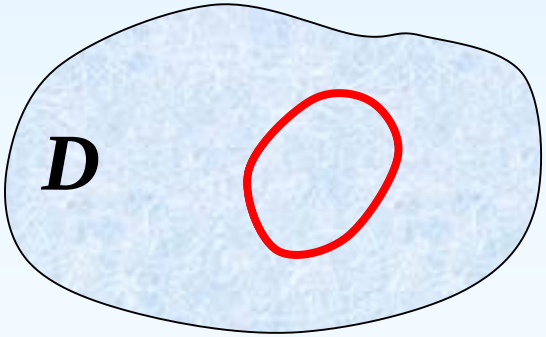
§17.3 Green 公式 (1)

（George Green，1793—1841）

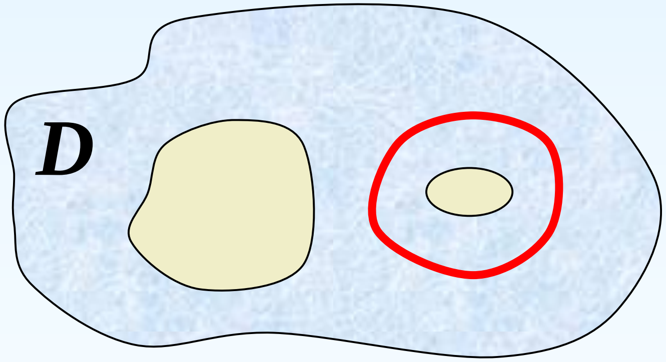
一、Green公式及简单应用

1. 区域连通性的分类

设 D 为平面区域, 如果 D 内任一闭曲线所围成的部分都属于 D, 则称 D 为平面单连通区域; 否则称为复连通区域.



单连通区域



复连通区域

2. Green公式

定理3.1 设闭区域D由分段光滑的曲线L围成, 函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数,则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

其中L是D的取正方向的边界曲线.

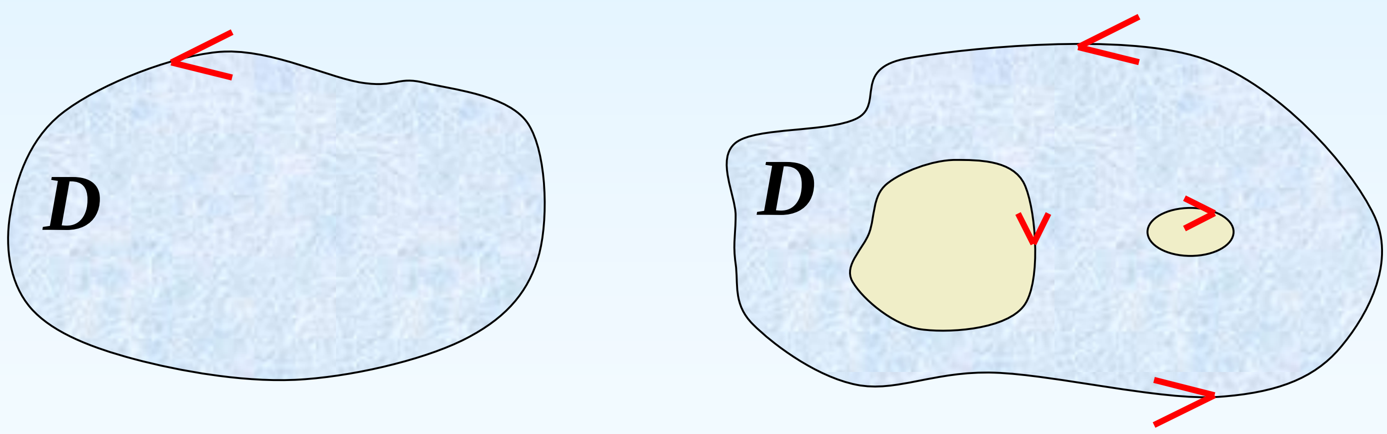
Green 公式

注： D的边界曲线L的正方向？

负方向

当人沿边界行走时, 区域D总在她(他)的左侧.

右侧



分析:

待证表达式 $\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

等价于证明

$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Qdy,$　　　$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L Pdx$

$\downarrow$　　　$\downarrow$

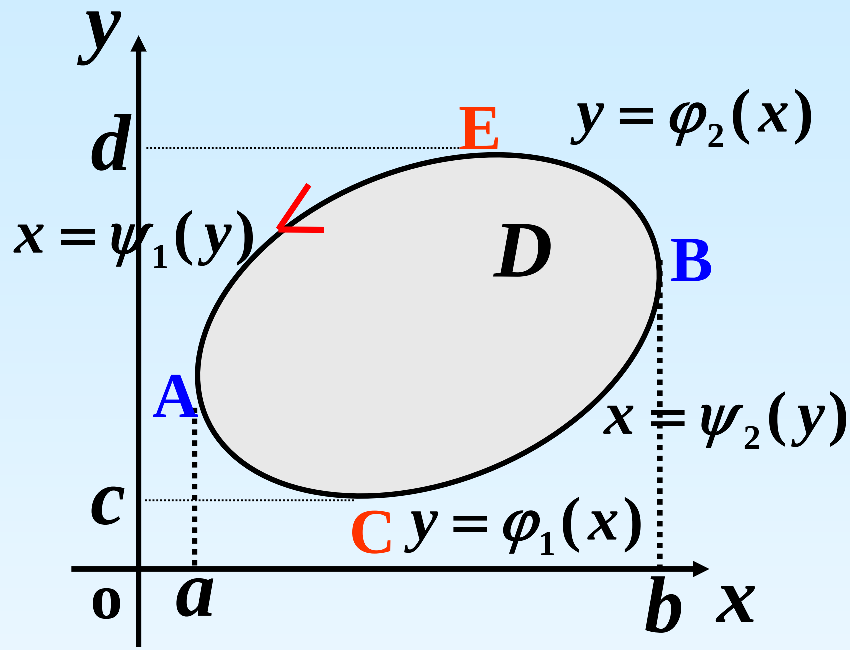
y型区域　　　x型区域

证明依赖于区域的形状 $\begin{cases} \text{单连通} \begin{cases} \text{既 } x \text{ 又 } y \text{型} \\ \text{一般区域} \end{cases} \\ \text{复连通} \end{cases}$

证明

1. 若区域D既是$x-$型又是$y-$型区域,

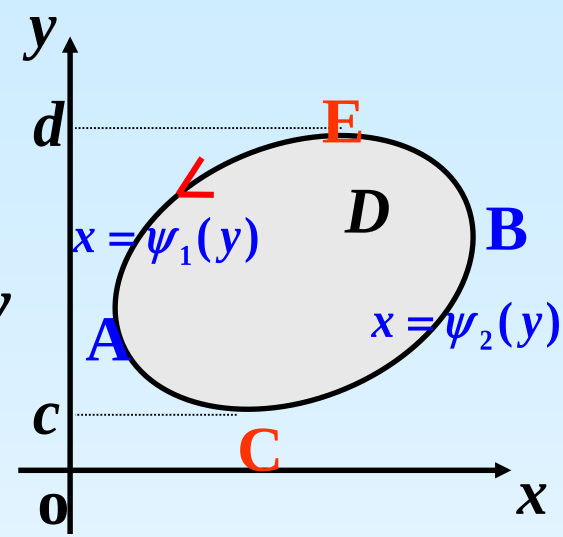
即平行于坐标轴的直线和L至多交于两点.



$$D=\{(x,y)\mid\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}$$

$$D=\{(x,y)\mid\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),c\le y\le d\}$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx$$



$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)dy$$

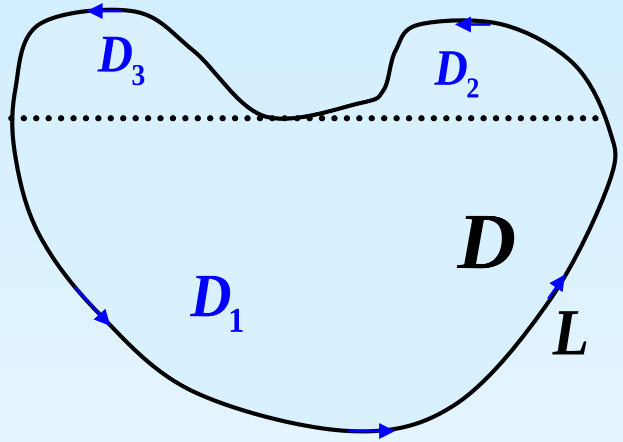
$$= \int_{CBE} Q(x, y)dy - \int_{CAE} Q(x, y)dy$$

$$= \int_{CBE} Q(x, y)dy + \int_{EAC} Q(x, y)dy = \oint_L Q(x, y)dy$$

同理可证 $$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \oint_L P(x, y)dx$$

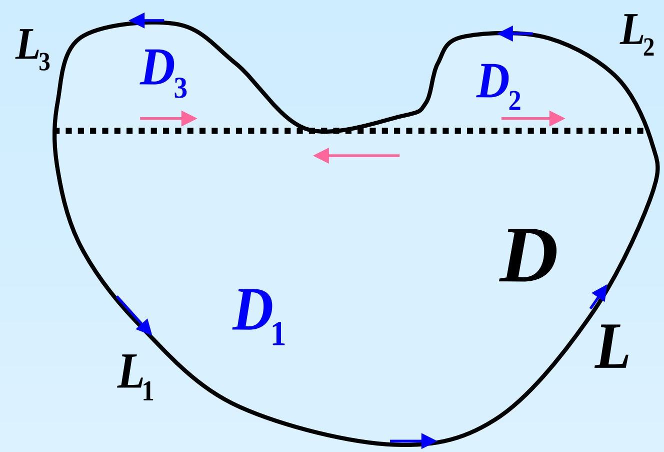
两式相加得 $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

2. 若区域D由一条按段光滑的闭曲线围成.



用光滑曲线将D分成三个既是$x-$型又是$y-$型的区域 D_1, D_2, D_3.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D_1+D_2+D_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



$$= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \iint_{D_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

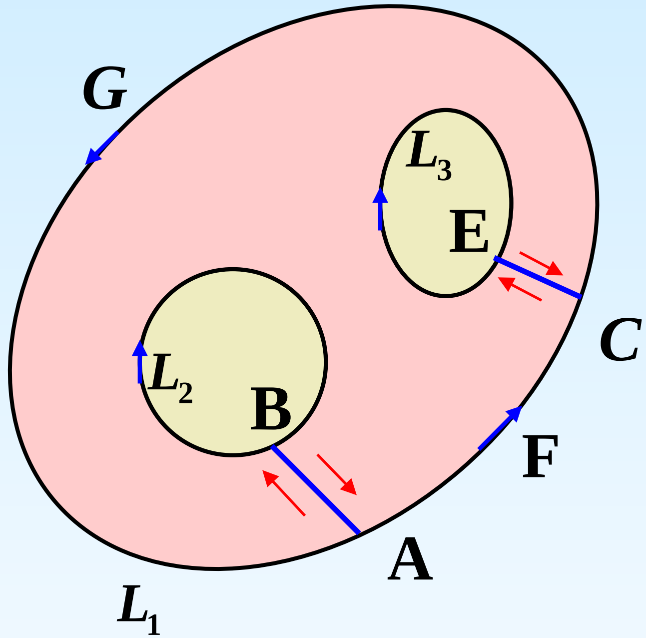
$$= \oint_{L_1} Pdx + Qdy + \oint_{L_2} Pdx + Qdy + \oint_{L_3} Pdx + Qdy$$

$$= \oint_{L} Pdx + Qdy$$

3. 若区域不止由一条闭曲线所围成.

添加直线段 AB, CE.

则 D 的边界线由 AB, L_2, BA, AFC, CE, L_3, EC 及 CGA 构成.



由2知, $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

$$=\left\{\int_{AB}+\int_{L_2}+\int_{BA}+\int_{AFC}+\int_{CE}+\int_{L_3}+\int_{EC}+\int_{CGA}\right\}\cdot(Pdx+Qdy)$$

$$=(\oint_{L_2}+\oint_{L_3}+\oint_{L_1})(Pdx+Qdy)$$

$$=\oint_{L} Pdx+Qdy$$

格林公式的实质：　沟通了沿闭曲线的曲线积分与二重积分之间的联系.

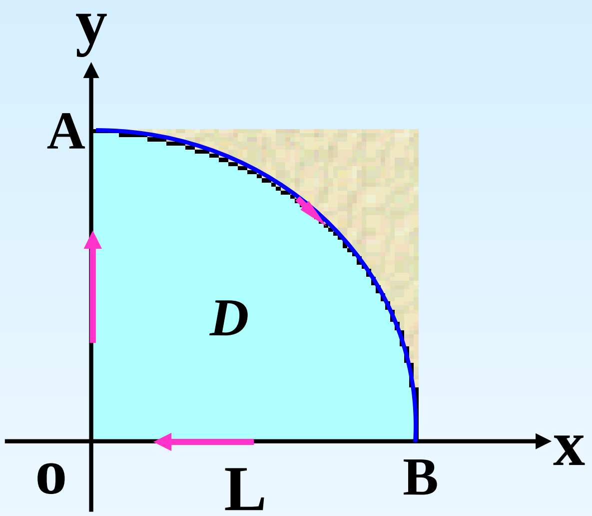
便于记忆的形式：

$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy=\oint_L Pdx+Qdy.$$

3. 简单应用

(1) 简化曲线积分

例 1 计算 $\int_{AB} xdy$, 其中曲线 AB 是半径为 r 的圆在第一象限部分.



解 引入辅助曲线 L,

$$L = \overline{OA} + \overset{\frown}{AB} + \overline{BO}$$

应用格林公式有:

$$-\iint_D dxdy = \oint_L xdy = \int_{OA} xdy + \int_{AB} xdy + \int_{BO} xdy$$

$$\therefore \int_{AB} xdy = -\iint_D dxdy = -\frac{1}{4}\pi r^2.$$

例 2 设L取正向的圆周 $x^2+y^2=9$,

求$I=\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy.$

解 令$P(x,y)=2xy-2y, Q(x,y)=x^2-4x,$

则$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2, \frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4, \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2,$

由Green公式,可得

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 9}(-2)dxdy=-18\pi.$$

例3 求$I=\int_L (e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$

其中L从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{2ax-x^2}$到$O(0,0)$.

解 令$P(x,y)=e^x\sin y-b(x+y), Q(x,y)=e^x\cos y-ax,$

则$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=b-a,$

$AO: y=0,\ x:0\to 2a,$记L和OA围成的区域为$D,$

由Green公式,可得

$$I=\int_{L+OA-OA}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$I=\int_{L+OA-OA}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\iint_D(b-a)dxdy-\int_{OA}(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=(b-a)\frac{\pi a^2}{2}-\int_0^{2a}(-bx)dx$$

$$=\frac{(b-a)}{2}\pi a^2+2a^2b$$

例 4　计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$，其中$L$为一条无重点，分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，$L$的方向为逆时针方向.

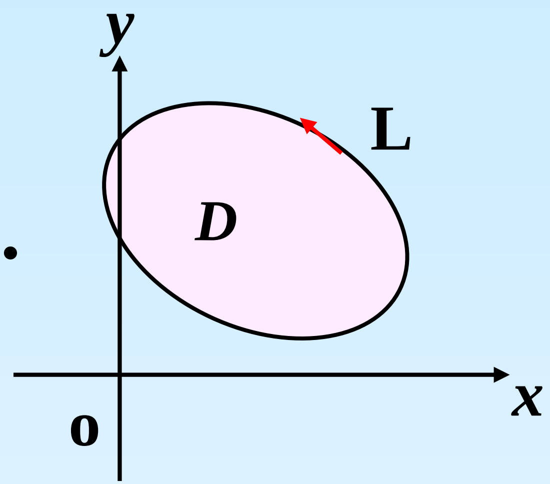
解 记L所围成的闭区域为D，

令 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$，　$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$，

则当$x^2 + y^2 \neq 0$时，

有 $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

(1) 当$(0,0)\notin D$时,



由格林公式知 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0.$

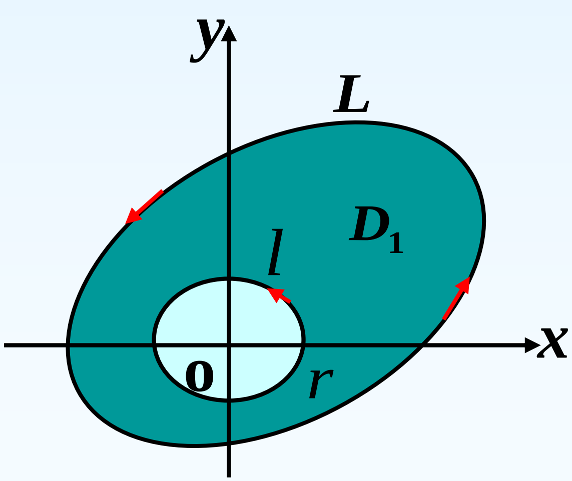
(2) 当$(0,0)\in D$时,

作位于D内圆周 l: $x^2+y^2=r^2$,

记D_1由L和l所围成,

(其中l的方向取逆时针方向)

应用格林公式, 得

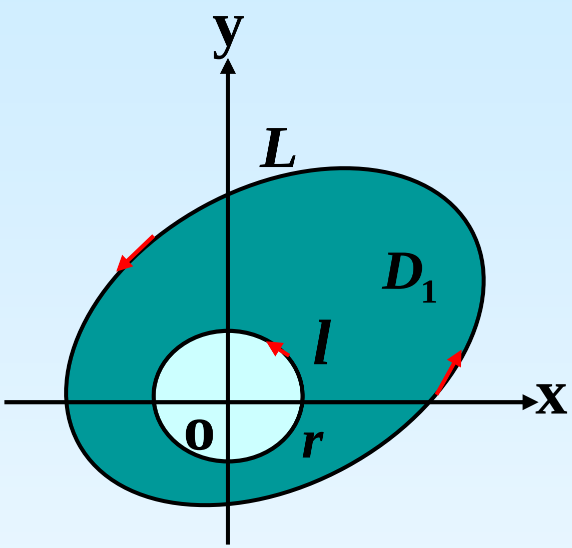


$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0$$

所以

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2} d\theta \quad = 2\pi.$$



或 $\oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2}\oint_l xdy - ydx = \frac{1}{r^2} \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} 2\,dxdy = 2\pi.$

(注意格林公式的条件)

例5 计算$\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$,其中$L$是以点$(1,0)$为中心,$R$为半径的圆周$(R > 1)$, 取逆时针方向.

2000年考研试卷一、五

解 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\ (x, y) \neq (0,0).$$

在L内取一小椭圆$l: 4x^2 + y^2 = a^2$,

并取l方向为逆时针方向

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

由*Green*公式知

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = \oint_l \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} \oint_l xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{a^2} \iint_{4x^2 + y^2 \le a^2} 2dxdy$$

$$= \pi.$$

Green公式应用技巧:

不闭则补，出奇则挖

1. 如L是封闭曲线, 所围区域为D,则

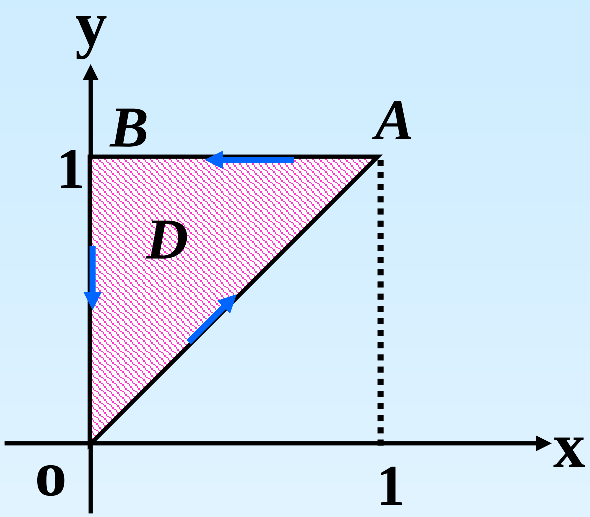
(i) D内无奇点, 直接用;

(ii) D内有奇点, 挖掉再用;

2. 如L是非封闭曲线, 先补再用.

(2) 计算二重积分

例 6 计算 $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以 $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域.

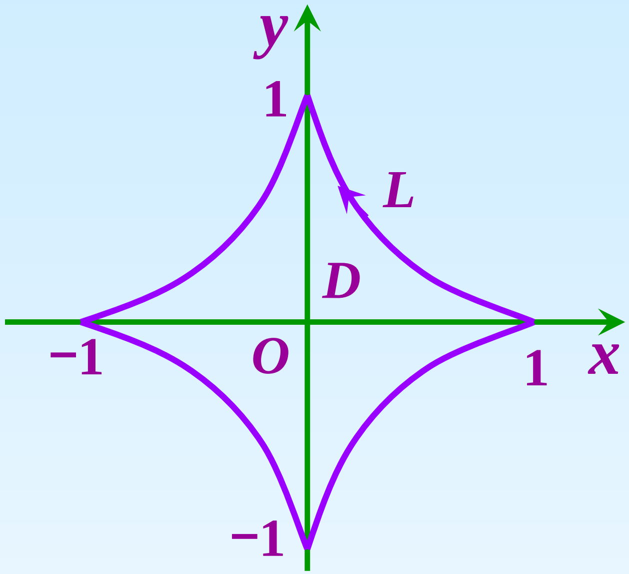


解　令 $P=0$，$Q=xe^{-y^2}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$，

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int_{OA+AB+BO} xe^{-y^2}dy$$

$$=\int_{OA} xe^{-y^2}dy=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

例7 求星形线 L：$x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ 所界图形的面积.



解 $A=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\oint_L x\mathrm{d}y=3\int_0^{2\pi}\cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos^4 t-\cos^6 t]\mathrm{d}t$$

$$=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{8}$$

(3) 计算平面面积

格林公式 $$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

推论： 正向闭曲线L所围区域D的面积

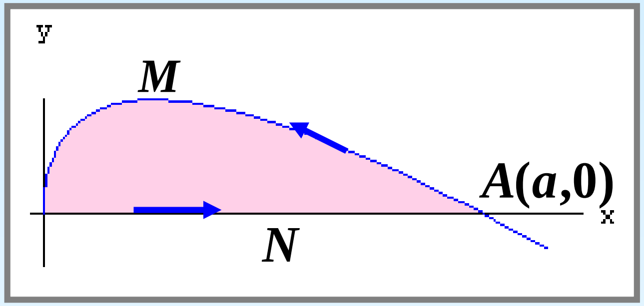
$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x,\ A=\oint_L x\mathrm{d}y,\ A=\oint_L -y\mathrm{d}x.$$

例如，椭圆 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$ 所围面积.

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\pi ab$$

例 8　计算抛物线$(x+y)^2 = ax (a>0)$与x轴所围成的面积.

解　ONA为直线$y=0$.



曲线AMO:

$y=\sqrt{ax}-x$, x从a变到0.

$$\therefore A = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{ONA} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{AMO} xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{AMO} xdy - ydx = -\frac{\sqrt{a}}{4}\int_a^0 \sqrt{x}dx = \frac{1}{6}a^2.$$

思考题

习题17.3.第2题

计算$I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{b^2x^2+a^2y^2}(a,b>0)$，$L$同例4

$$I=\begin{cases}0, & (0,0)\notin D\\ \frac{2\pi}{ab}, & (0,0)\in D\end{cases}$$