基础物理学A1 2025年春季学期

谢柯盼 kpxie@buaa.edu.cn 物理学院

第八章 相对论

- § 8-1 相对论以前的力学和时空观
- § 8-2 电磁场理论建立以后呈现的新局面
- § 8-3 爱因斯坦的假设与洛伦兹变换
- § 8-4 相对论时空观
- § 8-5 相对论多普勒效应*(基物2讲授,本课程不讲)
- § 8-6 速度变换公式
- § 8-7 质量、能量和动量
- § 8-8 广义相对论简介

上次课已经得出相对论力学的重要关系

- 质量 $m = m_0/\sqrt{1 v^2/c^2}$
- 动量 $\overrightarrow{p}=m\overrightarrow{v}=m_0\overrightarrow{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$

相对论版的牛顿第三定律可表述为孤立体系动量守恒相对论版的牛顿第二定律可写为

$$\overrightarrow{F} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}$$

这就建立起了相对论的力学三定律

<mark>注意</mark>,这些定律并非推导得到,而是理论的公设,其 准确性是由实验所验证的

如何验证相对论力学?实验中很难把宏观物体加速到接近光速,故要考虑微观粒子的现象

对微观粒子而言,比起直接测量速度,更方便的是测量能量;故将相对论力学表述为能量形式会更方便

即是说,我们要研究相对论中的动能定理物理考虑:外力对质点做的功应等于其动能变化量

$$\Delta E_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \vec{v} \cdot d\vec{p}$$

分部积分,将积分元变换为

$$ec{v} \cdot dec{p} = d(ec{v} \cdot ec{p}) - ec{p} \cdot dec{v} = d(mv^2) - m(ec{v} \cdot dec{v})$$
 其中 $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$,且 $ec{v} \cdot dec{v} = d(v^2)/2$
$$\Delta E_k = \Delta(mv^2) - \frac{m_0}{2} \int \frac{dv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \Delta(mc^2)$$

即相对论动能的表达式为 $E_k=mc^2+$ 常数 质点静止时无动能,定下常数,得 $E_k=mc^2-m_0c^2$

对比第四章第2节经典力学的动能定理推导,加深理解

如前所述,相对论动能表达式为

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$

其物理意义:

- 当质点静止时, v=0, $E_k=0$
- 当质量速度远小于光速时,回归到牛顿力学

$$E_k \approx \left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots\right) - m_0 c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

根据动能表达式可以进一步看出

- 质量和能量等价,质点静止时具有总能量 $E_0 = m_0 c^2$,运动时具有总能量 $E = mc^2$
- $E_k = E E_0$ 为运动与静止能量之差,即动能 质点运动时质量增加,从质能等价性来说是<u>运动时的</u> 能量较高,即此时具有动能

质能等价性统一了化学中的质量守恒定律和经典物理 学中的能量守恒定律



拉瓦锡 1743-1794

近耶 1814-1878

焦耳 1818-1889



(化学) 质量守恒定律

(经典物理学) 能量守恒定律

质能守恒定律

一些微观粒子反应中存在质量盈余或亏损现象,即反应前后粒子的总静止质量之和不一致这意味着存在静止质量能 Δmc^2 与其他形式的能量之间的转化。由于巨大的因子 c^2 ,微小的静质量变化可以导致巨大的能量转化

衰变。例: 铀238(半衰期45亿年)

衰变产物静质量之和比母核小,存在质量亏损 $\Delta m \approx 0.0076 \times 10^{-27} \ \mathrm{kg}$

释放能量 $\Delta E = \Delta mc^2 \approx 6.83 \times 10^{-13}$ J, 合4.27 MeV

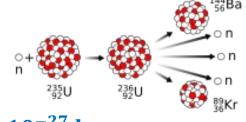
· 注意这一能量远大于化学反应,后者约在eV量级 1896年,法国物理学家贝克勒尔发现了铀盐的天然放射性,为核物理学的诞生奠定了早期实验基础 _____



.....我们还不知道铀从哪儿取得它那不断发射出的能量.....

1898年,波兰裔法国物理学家玛丽·居里通过大量实验证实了放射性是单个原子的特性

重核裂变。例: 铀235被中子轰击



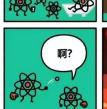
反应产物静质量之和比参与反应的粒子小,存在质量 亏损 $\Delta m \approx 0.3104 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 释放能量 $\Delta E = \Delta mc^2 \approx 2.80 \times 10^{-11}$ J,合174 MeV

每次反应产物不太一样,平均释能202.5 MeV 裂变产生额外的中子,中子又使其他铀235核裂变,会

导致自持的链式反应

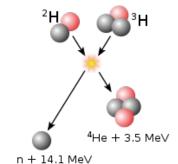
1克铀235完全裂变释放能量约830亿焦耳 相当于2.83吨标准煤燃烧

应用:原子弹、核电站





轻核聚变。例: 氘氚反应



反应存在质量亏损 $\Delta m \approx 0.03137 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 放能 $\Delta E = \Delta m c^2 \approx 2.82 \times 10^{-12} \text{ J}$,合17.6 MeV 0.4克氘和0.6克氚聚变,可放能约3390亿焦耳,相当于11.6吨标准煤燃烧

可见在反应物同等质量的情况下,聚变比裂变具有更高的能量释放效率

但聚变比裂变更难发生(要克服静电排斥力)也更难 控制(一旦发生就容易失控)

应用:恒星发光,热核武器(俗称氢弹),可控聚变堆(研制中,仍未成功)

例:已知中子的静止质量为 m_n 。今有两中子沿同一直线相向运动,在实验室系中的速率均为 βc ,求在中子1的静止系中测得的中子2的总能量。

解:利用速度叠加律,在中子1参考系中,中子2的速度为

$$v_2 = \frac{\beta c + \beta c}{1 + (\beta c)^2/c^2} = \frac{2\beta c}{1 + \beta^2}$$

据此,得其能量

$$E_2 = \frac{m_n c^2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} m_n^2 c^2$$

要注意看题目所问的是能量还是动能。能量是 mc^2 ,动能则是 $mc^2 - m_0c^2$

核反应释放的能量在MeV量级,只占核原子核总质量能的一小部分

例如,铀235的总静质量能约为235 GeV,裂变放能约200 MeV,仅占其千分之一。

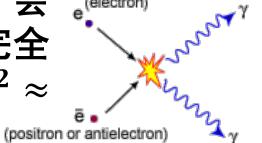
有没有办法将静质量能完全释放出来呢?

1928年,英国物理学家保罗·狄拉克将狭义相对论应用到量子力学,提出了电子的相对论性 波动方程

该方程预言(1931),存在一种与电子质量相等、电荷相反的基本粒子,即正电子,或称反电子

当正反电子相遇时,会湮灭为一对光子,完全 溧灰为一对光子,完全 释放静质量能 $2m_ec^2 \approx$

1.02 MeV





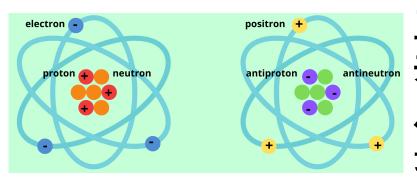
文艺作品中的"阳电子炮"

1902-1984

1932年,美国安德森在宇宙射线中发现正电子,这是人类首次发现反物质

我国赵忠尧于1929年首次在铅中观测到正负电子湮灭迹象,可惜没引起广泛关注

现代物理学认为,任何一种基本粒子都有伴随的反粒子,正反粒子质量、寿命相同,但电荷相反



正反物质相遇时会湮灭为辐射并完全释放出其静质量能从而实现对质能方程 $E = mc^2$ 最彻底的验证

幸运的是,宇宙中几乎没有反物质,我们不必担心哪一天撞上一个"反星球"而灰飞烟灭

宇宙为何由物质主导,而不是正反物质各一半?这至今是未解之谜。详见绪论

在相对论中,质点动量为 $\vec{p}=m\vec{v}=m_0\vec{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 总能量则为 $E=mc^2=m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ 直接计算,可得能量动量关系

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

当 $pc \ll m_0c^2$ 时,属于<u>极端非相对论</u>情形,

$$E\approx m_0c^2+p^2/(2m_0)$$

第二项即为牛顿力学中的动能动量关系式 当 $pc \gg m_0c^2$ 时,属于<u>极端相对论</u>情形, $E \approx pc$ 对于光, $m_0 = 0$ 及v = c,不适用普通质点质速公式,但可以应用能量动量关系式,取 $m_0 = 0$ 得到E = pc

由定义可看出,能量、动量及速率之间还满足一关系式 $v = |p|c^2/E$,这在有些问题中特别方便

例:静止的钚238核可衰变为一个 α 粒子(氦核)和一

个铀234核。求末态 α 粒子的速度。

 $m_{\rm Pu} = 3.95291 \times 10^{-25} \text{ kg}$ $m_{\rm U} = 3.88634 \times 10^{-25} \text{kg}$ $m_{\alpha} = 6.645 \times 10^{-27} \text{ kg}$

解:动量守恒 $p_{\alpha}-p_{\mathrm{U}}=0$

能量守恒 $E_{\alpha}+E_{\rm U}=m_{\rm Pu}c^2$,且

$$E_{\alpha} = \sqrt{m_{\alpha}^2 c^4 + p_{\alpha}^2 c^2} \pi E_{\mathrm{U}} = \sqrt{m_{\mathrm{U}}^2 c^4 + p_{\mathrm{U}}^2 c^2}$$

联立可得 p_{α} ,进而得出

$$E_{\alpha} = \frac{c^2}{2m_{\rm Pu}}(m_{\rm Pu}^2 - m_{\rm U}^2 + m_{\alpha}^2)$$

最终给出速度 $v_{\alpha}=p_{\alpha}c^2/E_{\alpha}\approx 1.8\times 10^7~\mathrm{m/s}$

* $v_{\alpha} \ll c$, 用牛顿力学动能和动量公式也近似正确; 可对比第三章PPT第19页的图景加深理解

放射性元素的衰变是核电池的能量来源, 因稳定耐用常被用于航天器等设备。但其功率不高, 故应用不多

例: 质点1静止质量为 m_0 ,以速度v = 3c/5运动;质点2静止,质量为2 m_0 。二质点发生完全非弹性碰撞,聚合为一新质点,且该过程无热量散失。求新质点的静止质量M及运动速度v'。

 \mathbf{m} : 假定新质点的动量为P,能量为E则动量守恒给出

$$P = p_1 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{3}{4} m_0 c$$

能量守恒则给出

$$E=E_1+E_2=\sqrt{m_0^2c^4+p_1^2c^2}+2m_0c^2=rac{13}{4}m_0c^2$$

且由能量动量关系有 $E=\sqrt{M^2c^4+P^2c^2}$
联立可得 $M=\sqrt{10}m_0$, $v'=Pc^2/E=3c/13$

例:一质点初始时静止,质量为 m_0 。今对其施加一恒力F,求其t时刻其速度、动量和能量。

解:相对论力学F = dp/dt,得p = Ft利用能量动量关系得

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + F^2 c^2 t^2}$$

又利用 $v = pc^2/E$ 得

$$v = \frac{Ftc^2}{\sqrt{m_0^2c^4 + F^2c^2t^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + m_0^2c^2/(F^2t^2)}}$$

若一开始就把动量定义展开去求v, 计算会较繁复。先求动量, 再结合能量来求速度, 会很简单

- 该物理场景可以由恒定电场中的电子运动来实现
- 对比牛顿力学的类似场景,比较两者的差别

相对论的相应公式似乎总是比牛顿力学中的更加复杂 其实不然,这是因为我们没有选对正确的表述方式



1908年,德国数学家闵可夫斯基将狭义相对论 表述为四维协变形式

1864-1909 时空坐标写为 $x^{\mu}=(ct,x,y,z)$,其中 $\mu=0123$

四维坐标 x^{μ} 、速度 v^{μ} 、加速度 a^{μ} 变换可写为

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} L^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}, \ v'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} L^{\mu}_{\ \nu} v^{\nu}, \ a'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} L^{\mu}_{\ \nu} a^{\nu}$$
 形式一样且简单。而相对论版的牛顿第二定律则写为 $f^{\mu} = m_0 \ \mathrm{d}^2 x^{\mu} / \mathrm{d} \tau^2 = m_0 a^{\mu}$

即四维力等于质量乘以四维加速度

*四维速度、加速度、力与三维的 \vec{v} 、 \vec{a} 、 \vec{F} 略有差别物理定律也可以改写为协变形式,如麦克斯韦方程组 $\partial_{\nu}F^{\mu\nu}=J^{\mu},\qquad \partial_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}=0$

在四维时空的语言下,相对论特别简单(了解即可)

狭义相对论是现代物理学的基本语言,任何基本理论 均需要满足洛伦兹变换下的不变性

1930年代,人们将<u>狭义相对论与量子力学</u>相结合,得到了量子场论;1940年代,量子电动力学完善;1960至70年代,标准模型建立;……2012年,希格斯玻色子被发现,补齐了标准模型最后一块拼图

<mark>2025年</mark>,狭义相对论依然是<mark>基础物理学A1</mark>期末考查的 重点,且人们发现有<u>两大题型</u>

时空变换类:给定若干事件,问其时空坐标间隔

· 列出表格,代入洛伦兹变换<u>必定可解</u>。典型例题见 上次课PPT第3页

能量动量类: 求解1 → 2或2 → 1型粒子反应

代入能量和动量守恒<u>必定可解</u>,常常会用到能量动量关系。典型例题见本PPT第13页及第14页

§ 8-8 广义相对论简介

提出狭义相对论(1905)之后,爱因斯坦很快意识到

这个理论并不完善,遗留了两个重要问题

问题I: 变速的参考系怎么处理?

相互作用的速度传递上限为真空中的光速,变速的标架不可能保持刚性

时空标架本身在蠕动,不存在优越的直角坐标,必须使用最一般的<u>广义坐标</u> $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

问题II: 万有引力怎么处理?

牛顿理论认为,引力是瞬时超距作用 (见第二章第1次课PPT第17-18页) 传递速度是无穷大,这与狭义相对论 直接矛盾



思想实验:如果太阳突然消失,会发生什么事?

1907年,爱因斯坦获得了一个灵感,他称之为<mark>一生中</mark> 最幸福的思考:

在半空中坠落的人感受不到自己的重量



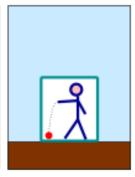
从牛顿力学非惯性系的角度看来,这 是因为惯性力正好抵消了重力 根源在于惯性质量等于引力质量

两种质量的相等(等效原理)是一个实验事实,当前精度为10⁻¹⁵(MICROSCOPE卫星,2017)

爱因斯坦意识到:

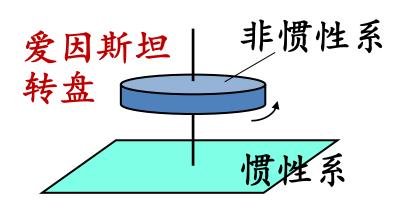
加速与引力某种意义上是等效的,即 狭义相对论遗留的<mark>两个</mark>问题实际上是 同一个问题





因而有可能将它们同时解决,建立起一个既能处理一切参考系又能处理引力的优雅理论

爱因斯坦进一步意识到,需要非欧几何来描述加速参考系或引力(爱因斯坦&格罗斯曼,1913)



转盘上的观测者用尺去量盘的 周长与半径时:

沿直径方向的尺子不变,但沿圆周方向的尺子缩短 故测出圆周率 $C/D>\pi$

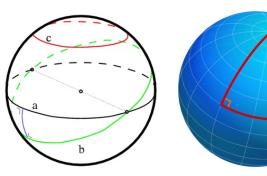
即转盘上的几何学与我们熟悉的欧氏几何不一样 爱因斯坦指出,存在引力或加速参考系中的时空区域, 需要用黎曼几何来描述



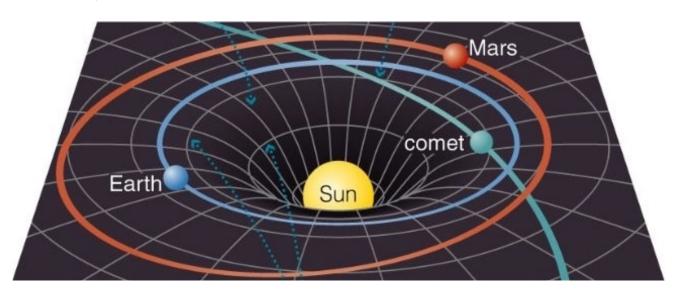
1826-1866

直观例子:二维球面上的非欧几何

- 圆周率<π
- 任何两条直线必相交



广义相对论的基本思想:引力不是真实的力,而是一种时空几何效应



物质和能量会影响时空,使之弯曲

质点在时空中沿最短路径运动,如果时空本身是弯曲的,则路径也会随之弯曲,表观上就像是受到了引力 这很自然地解释了等效原理,因为自由落体的运动只 和时空性质有关,与质点自身无关

注意: 时空并没有扭曲。扭曲时空中等效原理不成立

基于非欧几何,根据能量动量守恒等物理考虑,爱因 斯坦于1915年给出了广义相对论的场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

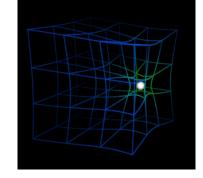
张量方程 时空曲率 物质的能量动量张量

←读:物质决定时空的曲率,即物质产生引力场

→读:弯曲时空影响物质运动,即物质受引力作用

物质告诉时空如何弯曲, 时空告诉物质 如何运动。

——[美] 约翰·惠勒

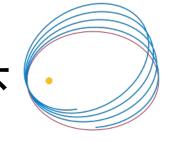


在低速、小质量极限下,场方程可以退化到牛顿引力 定律, 弯曲时空效应表现为瞬时的平方反比力 也就是说,广义相对论提供了平方反比力的物理解释

广义相对论的三大实验验证

I·水星近日点进动

在扣除所有已知行星的影响之后,水星仍剩下每世纪43"的进动无法解释(40余年的谜团)



1915年,爱因斯坦发现他新建立的理论可以解释这一进动,对此喜不自胜,写信给友人分享

II·太阳附近光线偏折

相对论预言的偏折角是牛顿理论的2倍,可作为判决性实验

但太阳光过于强烈,只有日全食时可观测

1919年,英国的爱丁顿带领远征队在西非利用日全食

测量,验证了相对论的预言,引起轰动

III·引力红移

引力导致电磁波频率变化。1960年代高塔实验验证

广义相对论的重要预言·I: 黑洞

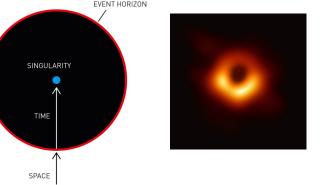
极致密、引力极强,以至于光都无法逃逸的天体

不同于牛顿引力理论下"第二宇宙速度大于光速"的暗星,因为在牛顿的世界观下,光速并不特殊

经典理论下的暗星:致密天体,逃逸速度大于光速,

仅此而已, 只要超光速就能逃逸

相对论中的黑洞:事件视界包裹着中心的时空奇点,视界之内时间和 空间互换



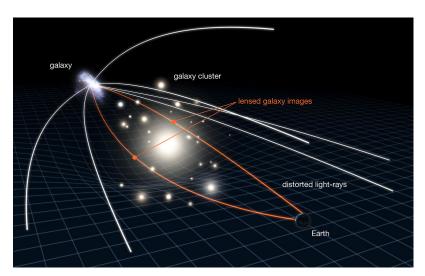
黑洞可能来源于大质量恒星燃尽之后的引力坍缩 也可能来源于大爆炸之后极短时间内的一些激烈物理 过程——称为"原初黑洞"

1970年代,霍金等人利用广义相对论和热力学、量子场论证明了黑洞会向外发出辐射,即霍金辐射

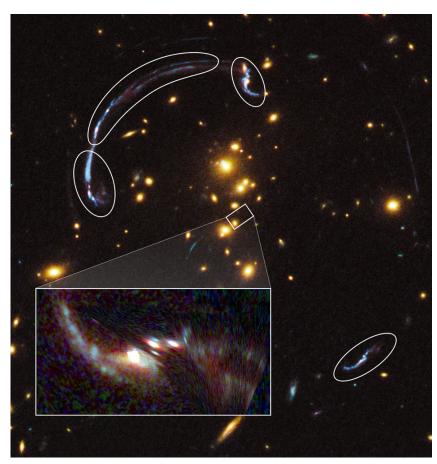
广义相对论的重要预言·II:引力透镜

光线会被大质量物质集团(如天体、星间气体等)偏

折,出现透镜效应





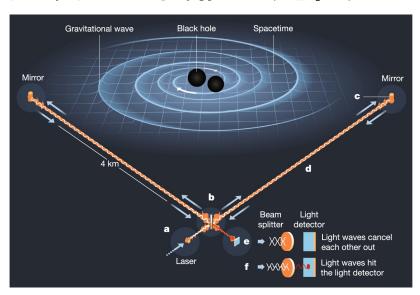


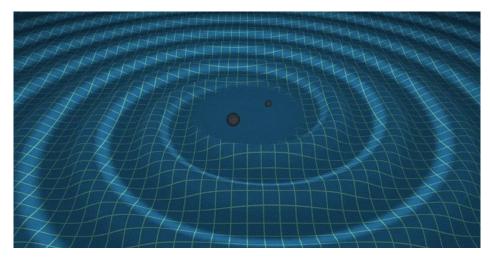
可用于测量不发光物质的分布, 如暗物质

广义相对论的重要预言·III:引力波

在引力场发生变化时,扰动以光速向外传播,荡起时空的涟漪,即引力波

由于引力的微弱性,只有像黑洞或中子星并合之类的大质量、高能量过程产生的引力波才能被探测到





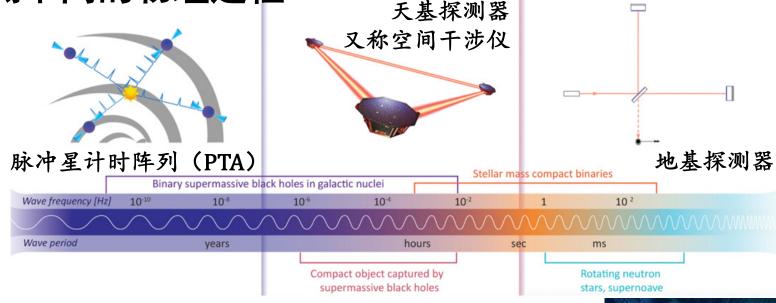
此外,大爆炸后极短时间内发生的激烈物理过程(如一级相变)会为今天留下宇宙引力波辐射背景 因而,引力波还可用于探测早期宇宙历史

2015年,美意联合的LIGO-Virgo天文台首次探测到黑洞并合引力波(2016年发表)

引力波天文学就此诞生

不同频段的引力波用不同的实验手段来观测,可用于

探测不同的物理过程



中国在空间引力波探测领域有"天琴"和"太极"等计划(2030年代)

在PTA领域依托"贵州天眼"进行研究



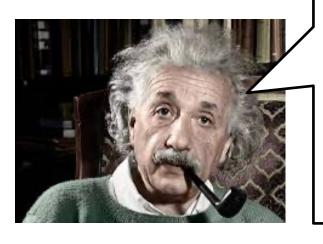
广义相对论是现代宇宙学的基础

在1917年,爱因斯坦首次将广义相对论应用于整个宇宙,发现解出来的宇宙不稳定 为维持稳恒宇宙,爱因斯坦为场方程添加了一项

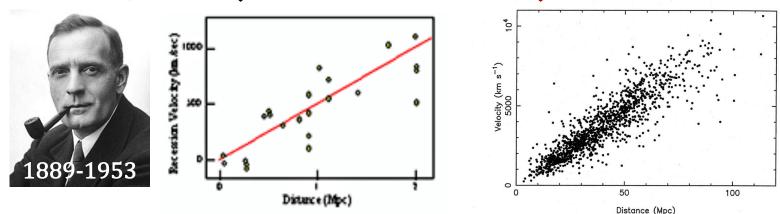
$$R_{\mu\nu}-rac{1}{2}g_{\mu
u}R+\Lambda g_{\mu
u}=rac{8\pi G}{c^4}T_{\mu
u}$$

这就是著名的宇宙学常数项

但爱因斯坦对此一直不满意,认为这一项是人为添加的,破坏了方程的和谐



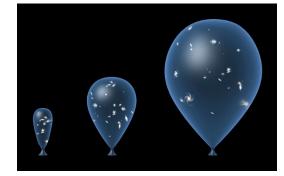
自从(在方程中)引进这一项以来,我一直心存愧疚……我无法相信大自然中竟然存在如此丑陋的事情。 Since I introduced this term, I had always a bad conscience... I am unable to believe that such an ugly thing is actually realized in nature. 1929年,美国天文学家哈勃通过大量观测发现,星系都在离我们远去,宇宙不是静态的,它在膨胀



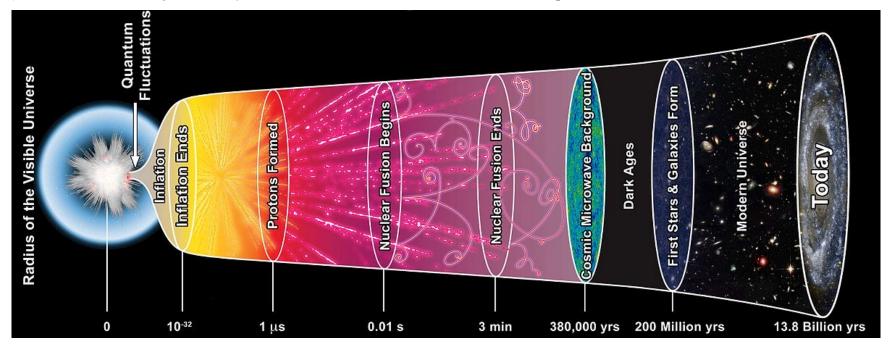
星系远离我们的速度正比于与我们的距离 $v_r = H_0 r$, $H_0 \approx 70 \text{ km/(s·Mpc)}$ 称为哈勃常数 *空间均匀各向同性,宇宙中的任何一个地方都同样能观测到宇宙膨胀,地球并不特殊

爱因斯坦接受了宇宙并非永恒不变的 事实,并认为加入宇宙学常数项是他 一生中最大的错误

——事实果真如此吗?



现代宇宙学:以广义相对论为基础的ACDM模型



宇宙历史的不同阶段:

大爆炸→暴胀→辐射主导→物质主导→暗能量主导

约10⁻³²秒

约4万年

约98亿年

至今(约138亿年)

当今宇宙正在暗能量的作用下加速膨胀 暗能量可以由宇宙学常数A描述——它又回来了!

但这一项的物理起源至今仍是未解之谜,详见绪论

波兰物理学家英菲尔德记叙过一场对话:

英菲尔德:无论您是否提出,我相信狭义相对论的问世都不会有什么延误,因为时机已经成熟了。

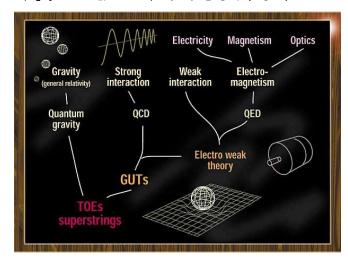
爱因斯坦:是的,这没错,但广义相对论的情形不是这样,我怀疑直到现在也未必会有人提出。

沿着广义相对论的思路,爱因斯坦寻求统一场论,想把引力与电磁力自然地结合起来

但他没有关注1940年代开始蓬勃发展的量子场论特别 是强力、弱力的进展,统一场论的研究最终没有成功

时至今日,广义相对论的量子化 依然是理论研究最前沿,超弦是 主流方案,但<mark>离成功还非常远</mark>

我们还需要更清晰的图景、更好的理论和更多的实验数据!



18世纪,英国诗人蒲柏(A. Pope)曾写道:

God said, Let Newton be! 上帝说: 让牛顿来吧! and all was light. 于是霞光满天。

20世纪,诗人斯奎尔(J.C. Squire)也写了一首诗:

It did not last: the Devil 老天待不下去了,howling "Ho! 魔鬼说: 嗬!
Let Einstein be!" restored 让爱因斯坦来吧!
the status quo. 于是一切恢复了原状。

爱因斯坦带来了一个充满谜团的宇宙, 让人们意识到自己的无知 沿着爱因斯坦开创的道路,物理学家们 依然在努力寻求自然界的真理



本节课小结

狭义相对论中的质量和动量表达式相对论动能定理,质能方程 $E = mc^2$ 的推导核反应过程中的质量亏损和能量释放的计算能量动量关系式,以及用之灵活解题的技巧

广义相对论的基本概念(了解即可)

补: 牛顿与广义相对论的引力观

牛顿力学认为:

- 引力是真实存在、瞬时起作用的超距吸引力
- 质点不受包括引力在内的一切力的作用时,称为自由质点,会保持静止或匀速直线运动
- 质点受引力作用时,运动状态会改变,其定量描述 由牛顿第二定律结合万有引力定律给出

广义相对论则认为:

- 引力不是真实力,而是时空曲率的体现
- 质点只受引力作用时,称为自由质点,会沿四维时空的直线(称测地线)运动,但该路径在三维空间中不一定是直线
- 引力以外的力会使质点偏离测地线,同样由场方程 描述,即场方程对标"牛顿引力+牛顿第二定律"

第八章作业

《近代物理》分册 1.2, 1.4, 1.6, 1.10, 1.12, 1.14, 1.15, 1.16, 1.18

作业扫描提交至spoc.buaa.edu.cn, 助教线上批改

提交时间段: 4月11日0:00至4月25日00:00 以系统时间戳为准,原则上不接受其他解释

时间节点:下周二(4月22日)开始,由周阳老师讲授电磁学(第9-16周)