北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

第二节 Fourier级数收敛判别法

任课老师：苑 佳

数学科学学院

Fourier级数收敛判别法

一、Dirichlet积分

二、Riemann引理及推论

三、Fourier级数收敛判别法

一、Dirichlet积分

设$f(x)$周期2π，可积或绝对可积（反常），则其傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

问题：$f(x)$的傅里叶级数是否收敛？　　是否收敛于$f(x)$?

即Fourier级数的部分和序列$\{S_m(x)\}$:

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\to f(x)\,?\,(m\to\infty)$$

注意到，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt,b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt.$

一、Dirichlet积分

$$S_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}[(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t)\cos nx+(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t)\sin nx]$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}(\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx)\right]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n(t-x)\right]\mathrm{d}t$$

注意到，$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n\theta=\sin(\frac{2m+1}{2}\theta)\Big/2\sin\frac{\theta}{2},\theta\neq 0$

当$\theta=0$时，将等式右端理解为当$\theta\to 0$时的极限值，则等式依然成立.

因此，上式对任意$\theta\in[-\pi,\pi]$都是正确的.

一、Dirichlet积分

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}\mathrm{d}t \overset{t-x=u}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)\cdot\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\cdot\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$ 此积分为Dirichlet积分

注意到 $\int_{-\pi}^{0} f(u+x)\cdot\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u \overset{u=-y}{=} \int_{0}^{\pi} f(x-y)\cdot\frac{\sin\frac{2m+1}{2}y}{2\sin\frac{y}{2}}\mathrm{d}y$

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\cdot\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

一、Dirichlet积分

又注意到 $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\sin\dfrac{2m+1}{2}u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nu\right)\mathrm{d}u=1.$

$$S_m(x)-\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)]\cdot\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

记 $F_\sigma(u)=\begin{cases}\dfrac{f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)}{2\sin\dfrac{u}{2}}, & u\neq 0\text{时}\\ 0, & u=0\text{时}\end{cases}$

所以，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_m(x)=\sigma(x)\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F_\sigma(u)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)u\,du=0.$

问题：$F_\sigma(u)$在$[0,\pi]$上需要满足什么条件才能使得上式成立？

二、Riemann引理及推论

定理2.1 设$\psi(x)$在$[a,b]$上可积或绝对（反常）可积，

$$\text{则} \lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\sin px\,dx = \lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\cos px\,dx = 0.$$

【证明】 设$\psi(x)$在$[a,b]$上有界（可积），则$\forall\varepsilon>0$，存在$[a,b]$的划分：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\text{使得}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

其中，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta x_i$为$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅.

对于固定的划分，记$m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\psi(x)$，则有

$$\left|\int_a^b \psi(x)\sin px\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi(x)\sin px\,dx\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\psi(x)-m_i)\sin px\,dx\right| + \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i \sin px\,dx\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{p}\sum_{i=1}^{n}|m_i| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{p}\sum_{i=1}^{n}|m_i|$$

二、Riemann引理及推论

取 $P=\dfrac{2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}|m_i|$，则当 $p>P$ 时， $\left|\int_a^b \psi(x)\sin px\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 结论得证.

设 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界（绝对可积）.不妨设 b 为瑕点，由绝对可积性

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $\eta\in(0,\delta)$ 时，有 $\int_{b-\eta}^{b}|\psi(x)|\mathrm{d}x<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

对于上述固定的 η，$\psi(x)$ 在 $[a,b-\eta]$ 上正常可积，由上面的结论知，

存在 $P>0$，当 $p>P$ 时，$\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是，$\left|\int_a^b\psi(x)\sin px\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{b-\eta}^{b}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x\right|$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}+\int_{b-\eta}^{b}|\psi(x)|<\varepsilon.$$

结论得证.

同理可证： $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b\psi(x)\cos px\mathrm{d}x=0.$

二、Riemann引理及推论

推论： 设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积，则函数$f(x)$的Fourier系数a_n,b_n满足：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

根据Riemann引理，若函数$F_\sigma(u)$在$[0,\pi]$上可积或绝对可积，则

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi} F_\sigma(u)\sin(m+\frac{1}{2})u\,du = 0.$$ 从而，$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \sigma(x).$

二、Riemann引理及推论

$f(x)$的Fourier级数在x点收敛于$\sigma(x)$的问题转化为：$\sigma(x)$取何值？

$f(x)$附加何条件？才能够使得$F_\sigma(u)$在$[0,\pi]$上可积.

由 $F_\sigma(u)=\begin{cases}\dfrac{f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)}{2\sin\dfrac{u}{2}}, & u\neq 0\text{时}\\ 0, & u=0\text{时}\end{cases}$ 瑕积分$\int_0^\pi F_\sigma(u)\mathrm{d}u$存在，

必要条件是：$\lim\limits_{u\to 0}[f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)]=0.$

所以，$2\sigma(x)=f(x+0)+f(x-0).$

为此，取定$\sigma(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$

$f(x)$附加何不同条件，可以得到Fourier级数收敛的不同的判别法.

下面证明一个关于Fourier级数的收敛定理（判别法之一）.

三、Fourier级数收敛判别法

定义 (分段光滑函数)

若$f(x)$在$[a,b]$上至多有有限个第一类间断点 $x_i, i=1,2,\ldots,n$, 其导函数除有限个点外都存在且连续，且在这有限个点处导函数的左右极限存在，则称$f(x)$是$[a,b]$上的分段光滑函数.

注 (1) $f(x)$的导函数在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上光滑.

(2) 区间$[a,b]$上的分段光滑函数，是由有限个光滑弧段组成，至多有有限个第一类间断点和角点.

三、Fourier级数收敛判别法

在$[a, b]$上分段光滑的函数 $f(x)$，有如下重要性质：

(i) f在 $[a, b]$上可积.

(ii) 在 $[a, b]$上每一点都存在 $f(x \pm 0)$, 如果在不连续点补充定义 $f(x) = f(x+0)$，或 $f(x) = f(x-0)$，则

还有

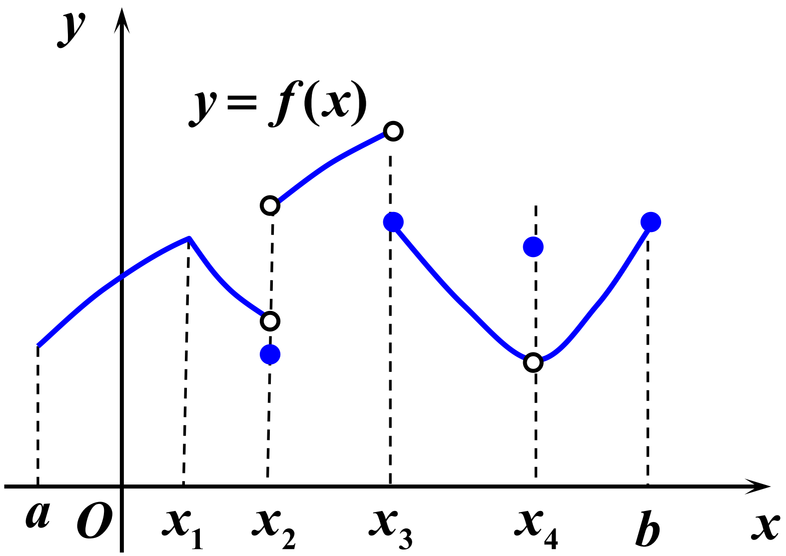
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'(x+0),$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} = f'(x-0),$$

三、Fourier级数收敛判别法

(iii) 在补充定义 f' 在 $[a, b]$ 上那些至多有限个不存在导数的点上的值后 (仍记为 f'), f' 在 $[a, b]$ 上可积.

从几何图形上讲, 在区间 $[a, b]$ 上按段光滑函数, 是由有限个光滑弧段所组成, 它至多有有限个第一类间断点和角点.



三、Fourier级数收敛判别法

定理2.2 设$f(x)$是以2π为周期的函数，且在$[-\pi,p]$上分段光滑，则$f(x)$的Fourier级数处处收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点时} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{为间断点时} \end{cases}$$

【证明】

根据$f(x)$分段光滑的条件，只需证明$F_\sigma(u)$在$[0,\pi]$上可积就行.

事实上，由$\sigma(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$,则对$\forall x\in(-\infty,\infty)$,有

$$F_\sigma(u)=\begin{cases} \left[\dfrac{f(x+u)-f(x+0)}{u}+\dfrac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\right]\dfrac{u}{2\sin\frac{u}{2}}, (u\neq 0) \\ 0, u=0 \end{cases}$$

三、Fourier级数收敛判别法

因$f(x)$是分段光滑的，显然$f'(x)$的间断点都是第一类间断点，在这些间断点处，则有

$$f'_+(x+0)=\lim_{u\to0+}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u},\ f'_-(x-0)=\lim_{u\to0+}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{-u}$$

都存在，从而$\lim\limits_{u\to0+}F_\sigma(u)=f'_+(x+0)-f'_-(x-0)$.

易见，对于任意的$\delta\in(0,\pi)$，$F_\sigma(u)$在$[0,\delta]$上分段连续，从而在$[0,\pi]$上分段连续，故$F_\sigma(u)$在$[0,\pi]$上可积.由Riemann引理

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_\sigma(u)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)u\,\mathrm{d}u=0.$$

$$\lim_{m\to+\infty}S_m(x)=\sigma(x)=\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}.$$

结论得证.

三、Fourier级数收敛判别法

收敛定理告诉我们，若收敛条件满足，则的Fourier级数在连续点收敛于函数值本身，而在第一类不连续点收敛于它左右极限的算术平均值。所以，对于连续的周期函数，应将与它的Fourier级数间的"~"改为"=".

例2.1将$f(x)=x(x\in[0,\pi])$分别展开为余弦级数和正弦级数。

$f(x)$的余弦级数可以直接写成

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\cdots\right)=x, x\in[0,\pi]$$

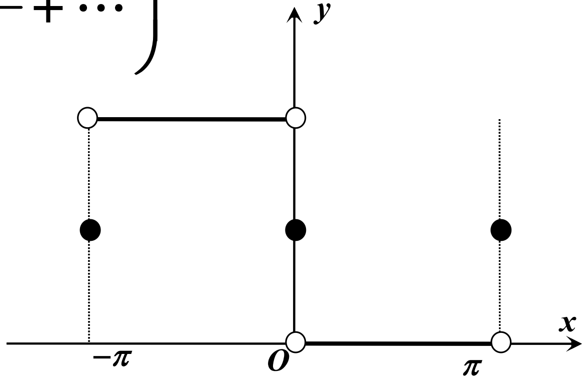
三、Fourier级数收敛判别法

若周期函数$f(x)$有第一类不连续点，那么展成Fourier级数后，要对这些点予以特别说明，画图时也要将它们的函数值标为其左右极限的算术平均值。例如

例2.2 求$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}$的Fourier级数。

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+\cdots\right)$$

$$=\begin{cases}1, & x\in(-\pi,0),\\ \frac{1}{2}, & x=0,\ \pm\pi,\\ 0, & x\in(0,\ \pi).\end{cases}$$



Fourier级数的图像为图16.2.1

三、Fourier级数收敛判别法

取$x=\dfrac{\pi}{2}$，得到

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+\cdots\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

整理得到

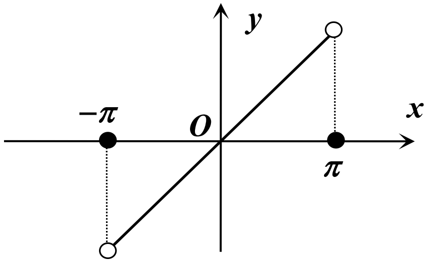
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots+(-1)^k\frac{1}{2k+1}+\cdots$$

这与在$y=\arctan x$的幂级数展开中取$x=1$得到的结果相同.

例2.1中$f(x)$的正弦级数应该写成

$$f(x)\sim 2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\cdots\right)$$

$$=\begin{cases} x, & x\in(-\pi,\ \pi),\\ 0, & x=0,\ \pm\pi.\end{cases}$$



Fourier级数的图像为图16.2.2

三、Fourier级数收敛判别法

例2.3 求$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0),\\ x^2, & x\in[0,1)\end{cases}$的Fourier级数。

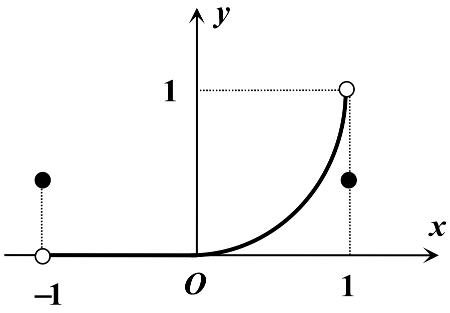
$f(x)$的傅氏级数应该写成

$$f(x)\sim\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+2\frac{(-1)^n-1}{n^3\pi^2}\right]\sin n\pi x$$

$$=\begin{cases}0, & x\in(-1,0],\\ \frac{1}{2}, & x=\pm 1,\\ x^2, & x\in(0,\ 1).\end{cases}$$

令$x=1$,可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$



Fourier级数的图像为图16.2.3

三、Fourier级数收敛判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

由此可以得到系列级数的和：

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12},\qquad 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

这些等式可以应用于某些计算问题，如

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}.$$

对于 $\cos x$ 的全部零点 $\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\ldots,\pm\frac{(2k-1)\pi}{2},\ldots$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[\frac{(2k-1)}{2}]\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[-\frac{(2k-1)}{2}]\pi^2}=2\cdot\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=2\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8}=1$$

$\cos x$ 全部零点的倒数的平方和恰为1.

作业

习题13.2： 1（2，3），4

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院