

基础物理学 A1

2025年春季学期

谢柯盼

kpxie@buaa.edu.cn

物理学院

第四章 动能与势能

§ 4-1 功、功率

§ 4-2 动能定理

§ 4-3 质点系的势能

§ 4-4 功能原理，机械能守恒定律

§ 4-5 两体碰撞

功的一般特性：与参考系有关；与路径有关

- 注意，一对内力**做功之和**与参考系无关
- 注意，保守力做功与路径无关

保守力的特性隐含着一个状态量**势能**的存在，它可表述为保守力的**积分**。对单质点而言

$$E_p(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

双质点则有

$$E_p(\vec{r}_A, \vec{r}_B) = - \int_{(\vec{r}_{A0}, \vec{r}_{B0})}^{(\vec{r}_A, \vec{r}_B)} \vec{F}_A \cdot d\vec{r}_A + \vec{F}_B \cdot d\vec{r}_B$$

可推广至更多质点

保守力的功可以由势能的**负增量**给出，不需要沿着路径积分，这可大大简化计算

保守力与势能之间存在**积分与微分**的关系，二者可以相互导出

考虑最简单的情形：单质点，一维问题

$$E_p(x) = - \int_{x_0}^x F \cdot dx$$

即势能是保守力的**负**原函数，而

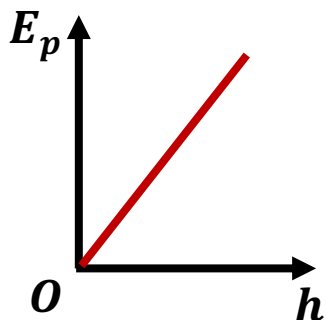
$F = -dE_p/dx$ ，保守力是势能的**负**导数

据此可以有**势能曲线**的概念：

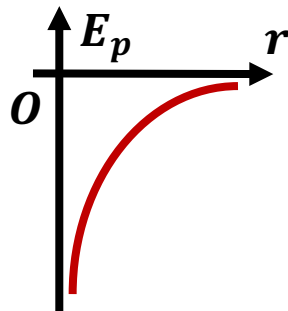
- 质点势能 E_p 是其位置 x 的函数，称为势能曲线
- 其所受的保守力由曲线的**切线的负斜率**给出
- 势能曲线（**标量**）刻画质点受保守力（**矢量**）作用的情况
- 保守力的作用效果总是倾向于让**势能降低**

势能曲线示例： E_p 作为坐标的**单值函数**

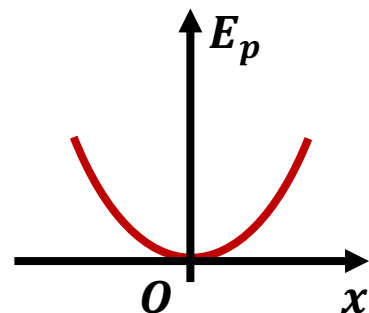
重力势能



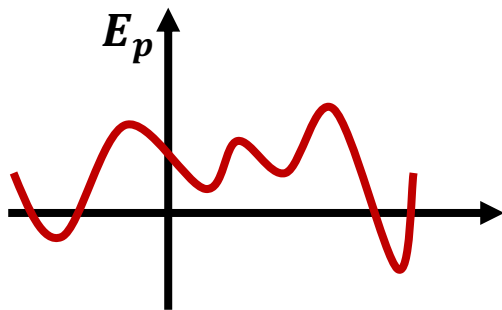
万有引力势能



弹性势能



一般情况：



斜率不为零处→受力

- 受力的效果倾向于让 E_p 变小

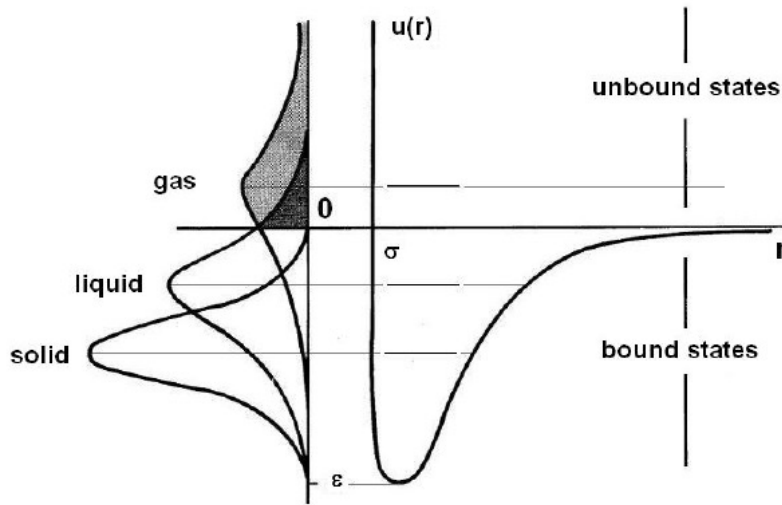
斜率为零处→不受力，平衡点

- 峰顶为**不稳定平衡**，称为势垒

- 谷底为**稳定平衡**，称为势阱

基本物理定律给出的势能通常是简单函数，如 $E_p \sim r^{-1}$ 或 r^2 ，但其恰当**叠加**可给出复杂的 E_p

复杂势能曲线示例

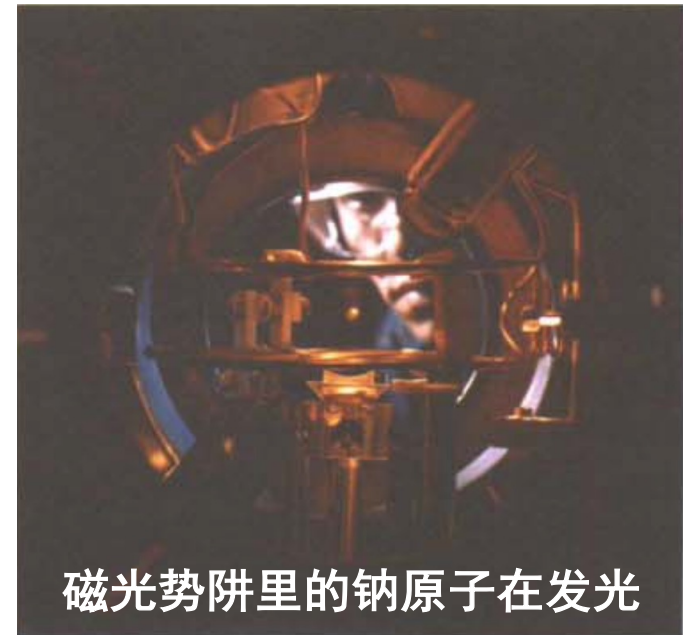
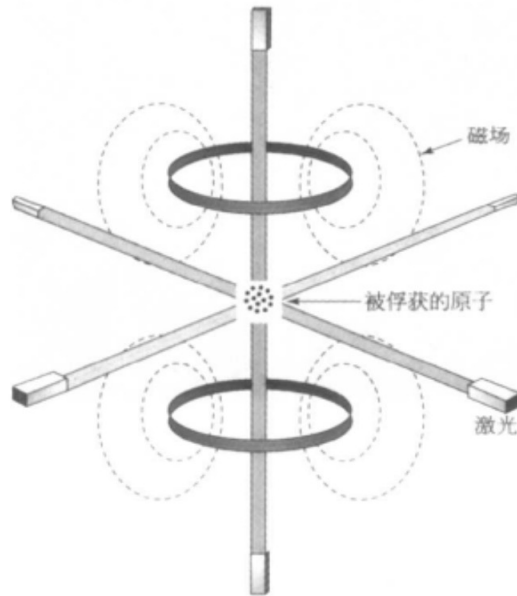


分子间的范德华尔斯力

$$E_p(r) \sim \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$$

固态、液态和气态，及它们的相互转化

实验室中精心调配的电磁场势阱可以困住单个原子



磁光势阱里的钠原子在发光

如果单质点在**二维平面**内运动，情况会如何？

此时，保守力 $\vec{F} = (F_x, F_y)$ 是坐标 (x, y) 的二维**矢量**函数
而势能则是二元**标量**函数

$$E_p(x, y) = - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (F_x dx + F_y dy)$$

元过程为 $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy$

若令质点从 (x, y) 运动到 $(x + dx, y)$ ，则势能的变化为
 $dE_p = -F_x dx$ ，得 $F_x = -dE_p/dx|_y$

下标表示导数在**保持y不变**的情况下计算，称**偏导数**

$$F_x = - \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_y \equiv - \frac{\partial E_p}{\partial x}$$

亦即x方向的受力等于势能在x方向的**偏导数**的相反数

类似地，可得y方向的力；合起来就有

$$\vec{F} = (F_x, F_y) = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y} \right)$$

因而知道了单质点**势能**即可通过求**偏导数**得到保守力

多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 对某个变量 x_i 求偏导，相当于将其他自变量**视为常数**，只对 x_i 求导

例： $f(x, y) = 2x^2 \sin(xy^2)$ ，求 $\partial f / \partial x$ 与 $\partial f / \partial y$

解： $\partial f / \partial x = 4x \sin(xy^2) + 2x^2 y^2 \cos(xy^2)$

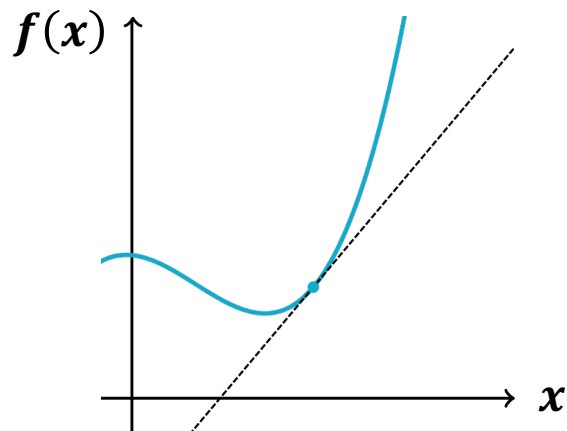
以及 $\partial f / \partial y = 4x^3 y \cos(xy^2)$

更高阶偏导如 $\partial^2 f / \partial x^2$ 均可求。**混合偏导**顺序可交换

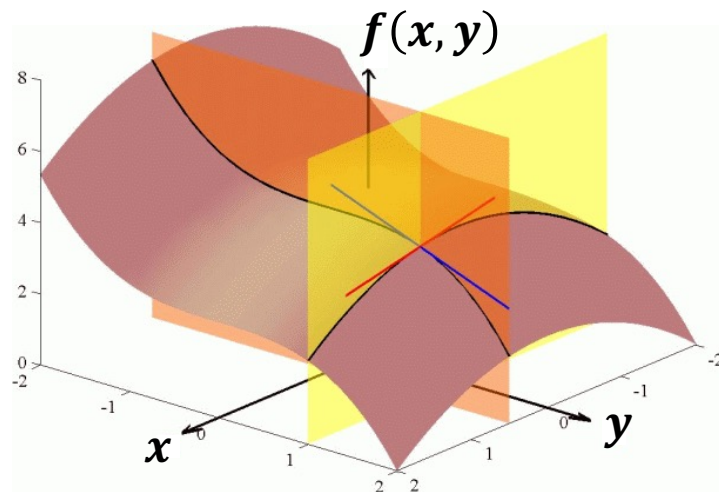
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

上例 f 的混合偏导为 $12x^2 y \cos(xy^2) - 4x^3 y^3 \sin(xy^2)$

一元函数导数的几何意义
为给定点的**切线斜率**



偏导数的几何意义为某个
平面**切片**内的切线斜率



红直线的斜率为 $\partial f / \partial x$ ；**蓝直线**的斜率为 $\partial f / \partial y$ ，它们分别是两个竖直平面内的切线

一维时，若给定某点 $f(x_0) = y_0$ 及 $f'(x_0) = k$ ，可写下**切线方程** $y = k(x - x_0) + y_0$

可刻画函数的局域性质：将曲线近似为直线

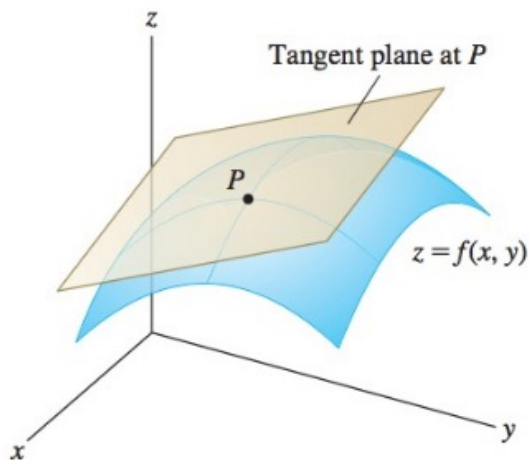
二维时的对应情景和公式是？

二维时，给定某点的函数值 $f(x_0, y_0) = z_0$ 以及两个偏导数 $k_1 = \partial f / \partial x$ 和 $k_2 = \partial f / \partial y$

可写下切平面方程

$$z = k_1(x - x_0) + k_2(y - y_0) + z_0$$

刻画函数的局域性质：将曲面近似为平面



根据切平面方程，坐标有微小增量 $d\vec{r} = (dx, dy)$ 时，函数变化

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

写为矢量内积 $dz = \nabla f \cdot d\vec{r}$

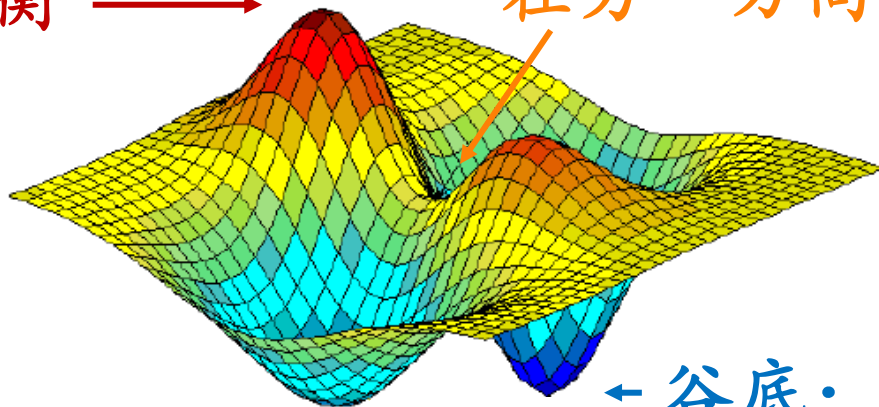
其中 $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$ 称梯度矢量， ∇ 称梯度算符
当 $d\vec{r}$ 与梯度 ∇f 同向时，内积最大，函数增加最快
或称梯度指向函数增加最快的方向

将前述讨论应用到二维势能 $E_p(x, y)$ ，推论：

- 保守力是势能的**负梯度**， $\vec{F} = -\nabla E_p$
 - \vec{F} 指向势能减少最快的方向
 - \vec{F} 的作用效果总是令势能**尽最大可能地**减少
- 二维的“势能曲线”实际上是**势能曲面**

峰顶：局域极大值
不稳定平衡 \longrightarrow

鞍点：某方向是极小值，
在另一方向却是极大值



\longleftarrow 谷底：局域极小值
稳定平衡

\vec{F} 指向曲面“最快下山”的方向

*掌握该图景对理解**深度学习**中的梯度下降法亦有帮助

最后讨论**三维**的单质点情形，质点坐标为 $\vec{r} = (x, y, z)$
此时，保守力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ 是三维**矢量**函数
而势能则是三元**标量**函数

$$E_p(x, y, z) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

由元功表达式仍可得

$$\vec{F} = -\nabla E_p = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$$

在三维时， $E_p(\vec{r})$ 为**空间分布函数**，不易想象，但以下结论仍成立

- 保守力 \vec{F} 是势能的负梯度
- \vec{F} 总是指向势能减少最快的方向
- \vec{F} 的作用效果总是令势能**尽最大可能地**减少

势能概念的好处：**标量**函数描述三分量的**矢量**场

- 这同时也意味着保守力的三个分量之间相互关联，并非完全独立

由于混合偏导的求导顺序可变，可以发现

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

同理有 $\partial F_y / \partial z = \partial F_z / \partial y$ 和 $\partial F_z / \partial x = \partial F_x / \partial z$

这三个关系式可以紧凑地写为 $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$

读作“力 \vec{F} 的**旋度**为零”，其中“ $\nabla \times$ ”为**旋度算符**，作用于矢量函数给出其旋度

可以证明下述命题**等价**（详见数学课）：

\vec{F} 为保守力 \Leftrightarrow 力的旋度 $\nabla \times \vec{F}$ 为零 \Leftrightarrow 力 \vec{F} 可写为某个标量场的负梯度，即 $\vec{F} = -\nabla E_p$

前述讨论均假定是**单质点**在空间中固定的力场内运动

- 质点位矢 \vec{r} ，势能 $E_p(\vec{r})$ ，受力 $\vec{F} = -\nabla E_p$

势能实际上是**位形空间**的函数。对于双质点系统

- 质点1的位矢 $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，质点2的位矢 $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，体系势能写为 $E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$
- 质点1受力 $\vec{F}_1 = -\nabla_1 E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1}, \frac{\partial E_p}{\partial y_1}, \frac{\partial E_p}{\partial z_1}\right)$
- 质点2受力 $\vec{F}_2 = -\nabla_2 E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_2}, \frac{\partial E_p}{\partial y_2}, \frac{\partial E_p}{\partial z_2}\right)$

对于绝大多数情况，势能只和两质点之间的相对距离有关，故 $E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv E_p(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ ，给出 $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ，与牛顿第三定律相容

对于多质点体系，势能写为 $E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ ，可参考上节课课件最后一页，不再赘述

例：二维平面中的质点受力 $\vec{F} = 2y\vec{i} + 4x^2\vec{j}$ [N]，求证这不是保守力。P.S. 此为上次课例题里的力

解： $\partial F_x/\partial y = 2 \neq \partial F_y/\partial x = 8x$ ，得证

例：质点受力与位矢 \vec{r} 同向，代数值为 $F(r)$ ，求证此力为保守力，并求出其势能

解： $\vec{F} = F(r) \vec{r}/r = F(r) \hat{r}$ ，其中 $F(r)$ 可正可负

注意到 $\nabla r = \nabla \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \vec{r}/r = \hat{r}$

可凑出 $\vec{F} = -\nabla E_p$ ，其中

$$E_p(r) = - \int_{r_0}^r F(r) dr$$

这实际上是说**中心对称有心力**必为**保守力**

• 引力 $F = -GMm/r^2$ ，得 $E_p = -GMm/r$

§ 4-4 功能原理，机械能守恒

回忆质点系的动能定理

$$dE_k = dW_{\text{int}} + dW_{\text{ext}}$$

即**总动能的增量**等于外力做功与内力做功之和

质点系内力可分为**保守内力** (c) 和**非保守内力** (n)

• 因而内力的功可写为 $dW_{\text{int}} = dW_{\text{int},c} + dW_{\text{int},n}$

• 保守内力做功是势能的负增量 $dW_{\text{int},c} = -dE_p$

代入并移项，得

$$d(E_k + E_p) = dW_{\text{int},n} + dW_{\text{ext}}$$

定义**机械能**为动能与势能之和

得到**功能原理**：质点系机械能的增量等于外力做的功与非保守内力做的功之和

积分形式： $\Delta(E_k + E_p) = W_{\text{int},n} + W_{\text{ext}}$

若对每一个微过程均有 $dW_{\text{int},n} + dW_{\text{ext}} = 0$

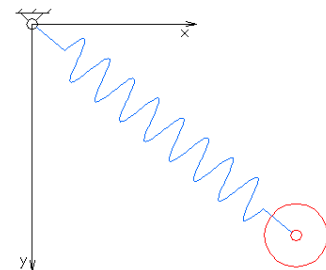
则 $d(E_k + E_p) \equiv 0$ ，即**机械能守恒**

- 注意“机械能守恒”与“机械能在一段过程前后增量为零”的区别

前者 $dW_{\text{int},n} + dW_{\text{ext}} = 0$ ，后者 $W_{\text{int},n} + W_{\text{ext}} = 0$

机械能守恒的体系动能和势能可以**相互转化**，但其和保持不变

- 孤立保守体系**的机械能一定守恒，但机械能守恒的体系**不一定**孤立且保守，它可以与外界交换能量
- 体系在某惯性系中机械能守恒，其在另一个惯性系**不一定**机械能守恒



机械能守恒的相对性：

假定质点系在某惯性系 S 中满足**机械能守恒**，即

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) = E_M \quad \text{常量}$$

令 S' 为相对于 S 以牵连速度 \vec{u} 运动的另一惯性系

则在 S' 中看来，质点 i 的速度为 $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{u}$

势能满足 $E'_p(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots) = E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$

因为势能只与质点的**相对位置**有关。故在 S' 系中

$$\begin{aligned} E'_M &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{u})^2 + E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \\ &= E_M + \sum_i \frac{1}{2} m_i u^2 - \boxed{\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{u}} \end{aligned}$$

是 $\vec{P} \cdot \vec{u}$ ，而 \vec{P} 不一定守恒。故 E'_M 不一定守恒！

例：光滑水平面上，两滑块由轻弹簧相连。初始弹簧处于原长，左边的滑块有初速度。问在后续运动中两滑块的最近距离。

解：两个滑块距离最近或最远时，其速度必相等

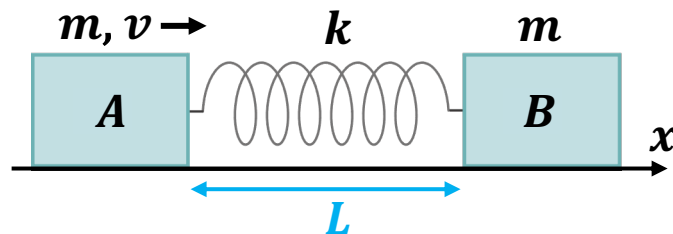
否则下一个 dt 内它们的距离还会减小或增加
结合动量守恒，知道它们距离最近/最远时
速度必为 $v' = v/2$

体系机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2 \times \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

其中 Δx 为弹簧的形变量。解得 $\Delta x = v\sqrt{m/(2k)}$

故最近/最远时距离为 $L \mp v\sqrt{m/(2k)}$



功能原理只涉及了机械能的转化：

$$d(E_k + E_p) = dW_{\text{int},n} + dW_{\text{ext}}$$

机械能增量等于非保守内力做功及外力做功之和

非保守内力做功导致**非机械能**的转化，可写为

$$dW_{\text{int},n} = -dE'$$

其中 E' 是**其他种类**的能量

- 摩擦生热，摩擦力做功对应的 E' 是热量
- 化学反应（如**燃烧/爆炸**）对应的 E' 是化学能

顾及这一点，有 $d(E_k + E_p + E') = dW_{\text{ext}}$

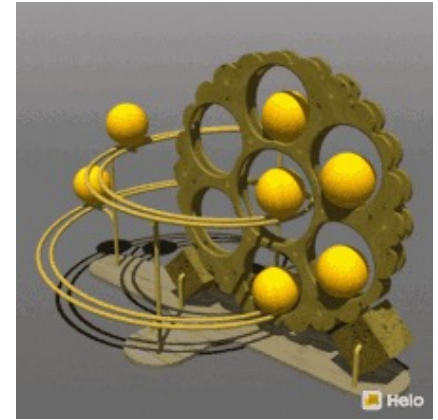
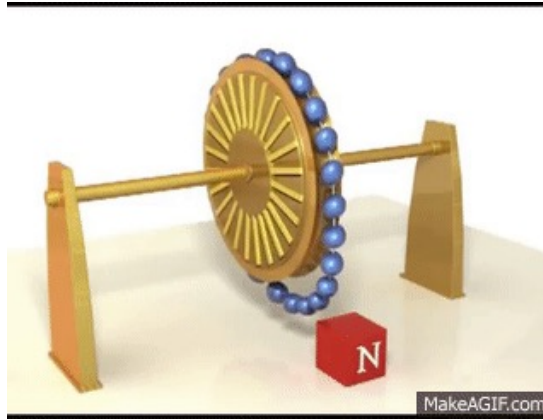
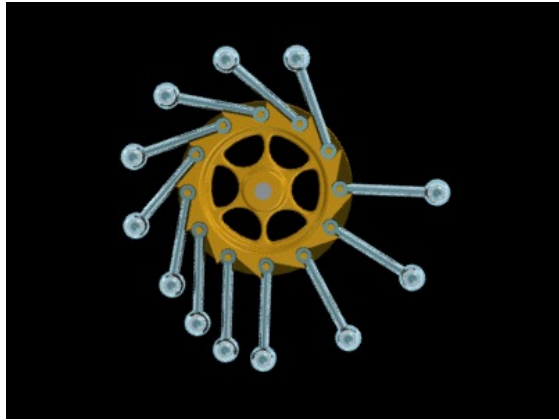
称为广义功能原理，即

在没有热交换的情况下，外界对体系做的功等于体系**总能量的增量**

- 若微过程恒满足 $dW_{\text{ext}} = 0$ ，则体系**能量守恒**

能量守恒意味着一切机器都需要获取能源才可能对外做功，或者说**永动机不存在**

- 历史上，人们对永动机的种种尝试均告失败



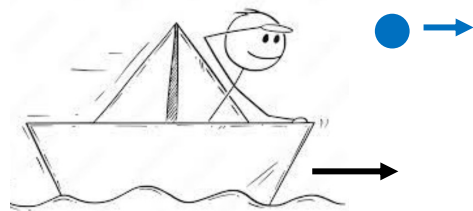
自从17世纪开始，随着对运动定律的理解加深，很多人已经提出了朴素的能量守恒概念

1775年法国科学院通过决议，宣布不再审查关于永动机的一切设计

现代意义上的能量守恒定律是于19世纪40年代由迈耶、焦耳、亥姆霍兹等人完整表述的

例：船的初始速度为 V ，人在船上与之相对静止。现人向前抛出一物体，物体离手后相对船的速度为 v' ，求人所做的功。已知人和船的总质量为 M ，物体质量为 m ，不计水的阻力。

解：以地面为参考系，假设抛出物体之后船速为 V'



动量守恒给出 $(m + M)V = MV' + m(v' + V')$

解得 $V' = V - mv'/(M + m)$

抛出物体前后，体系动能变化为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}m(v' + V')^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2$$

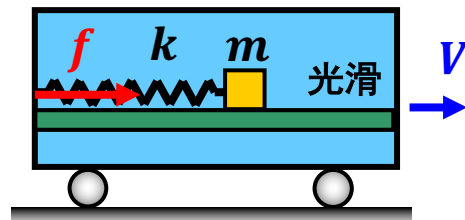
动能的增量来源于人做功，故 $\Delta E_k = W$ ，得

$$W = \frac{1}{2} \frac{mM}{M + m} v'^2$$

正比于 v'^2 ，符合预期

例：车一直保持匀速 V 运动，将滑块 m 向左压缩一段距离，相对车静止释放。已知 m 与弹簧分离时相对车的速度为 v' ，求从释放到分离的过程中车厢壁对弹簧的力所做的功（地面参考系）。

解：在地面参考系中，以弹簧和滑块为系统，功能原理给出
车厢壁对体系做的功等于体系机械能增量，即



$$W = \Delta E_s + \frac{1}{2} m(V + v')^2 - \frac{1}{2} mV^2$$

车为惯性系，在车厢内机械能守恒给出

$$\Delta E_s + \frac{1}{2} m v'^2 = 0$$

联立得 $W = mVv'$

广义功能原理可再推广为**热力学第一定律**：

体系**总能量**的增量等于外界对体系做的功加上传递给体系的热量，即 $dE = dW_{\text{ext}} + dQ$

此即**能量守恒定律**，其适用性远超出牛顿力学甚至经典物理，在相对论、量子论中同样成立

诺特定理（1915）：

物理的每一个可微的对称性，都对应着一个守恒量。



如果物理定律在**时间平移**下不变，则**能量守恒**

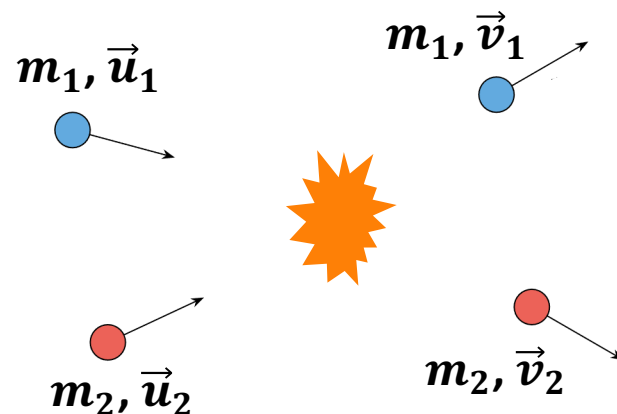
更具体地说，只要时间是均匀的，则基本物理理论中一定可以定义一个叫“能量”的量，它是守恒的

此时能量的定义**不一定**是牛顿力学中的形式，但这样一个物理量必定存在

能量守恒定律是时间本身性质的体现，极为普适

§ 4-5 两体碰撞

碰撞前后，两物体均可视为匀速运动；作用时间极短，内力极大，位移可忽略，外力冲量可忽略



该过程**动量必定守恒**

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

但动能不一定守恒。据此分类：

弹性碰撞，又称完全弹性碰撞，碰撞后动能之和不变
非弹性碰撞，碰撞后动能损失——

- 对宏观物体来说一般是转化为热能
- 对微观粒子来说可能是转化为原子和分子化学能、原子核结合能等

弹性碰撞：动量和动能均守恒

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

三维情形 给定初态后末态 \vec{v}_1 和 \vec{v}_2 未知，即未知量有6个，方程只有4个，需要补充条件才可求解

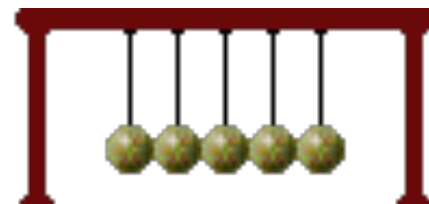
一维情形，2未知量+2方程可**直接求解**：

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)u_1 + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)u_2 + 2m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

满足 $v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$

- 同质量粒子一维碰撞则**交换速度**
- 注意一维时 u 和 v 为速度的代数值，可正可负



完全非弹性碰撞：碰后不分离， $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ ，速度可直接求解

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

据此可得动能增量

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \right) \\ &= - \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^2 < 0 \end{aligned}$$

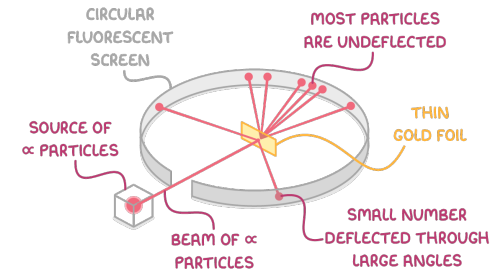
因此动能**一定损失**

一般的碰撞介于弹性和完全非弹性之间，属于**非完全弹性碰撞**：碰后分离，动能有损失

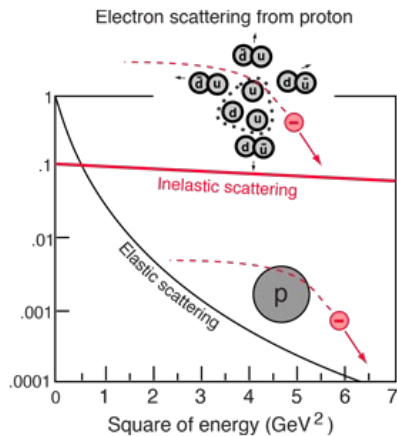
$$\text{恢复系数 } e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = \begin{cases} 1 & \text{完全弹性} \\ 0 & \text{完全非弹性} \\ \text{其他} & \text{非完全弹性} \end{cases}$$

碰撞是人们探测微观物质结构的极重要手段

1909年，英国物理学家卢瑟福领导的团队用 α 粒子轰击金箔，发现了原子核



1968年，美国斯坦福直线加速中心的深度非弹性散射实验证实质子由夸克构成



3.2公里长的斯坦福直线加速器

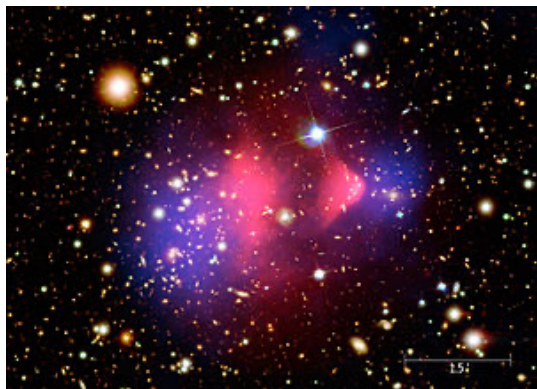


周长27公里的大型强子对撞机

2012年，欧洲的大型强子对撞机利用高能质子对撞产生并探测到了希格斯玻色子

碰撞也是人们探测宇宙成分的重要手段

子弹星系团（成百上千个星系的集团）的碰撞：



距离地球37亿光年

总质量**百万亿倍**太阳质量

碰撞在1.5亿年前就已经开始，现在仍在进行中

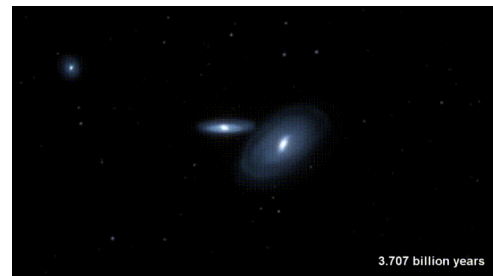
穿行速度约 10^7 km/h

红色区域：由X光拍摄到的可见物质分布

蓝色区域：引力透镜计算出的完整质量分布

两种区域不重叠，强烈支持了不发光的暗物质的存在

数值模拟显示，距今约40亿年以后，
银河系可能会和仙女座星系碰撞，并
融合为一体



例：小球 m 以初速度 v_0 平抛，下降 h 后与由细绳 l 悬挂的重物 M 发生完全非弹性碰撞，求撞后重物摆角的最大值 θ_{\max} 。

解：碰撞过程的水平动量守恒

$$mv_0 = (M + m)v$$

撞后 $(M + m)$ 作为整体上升

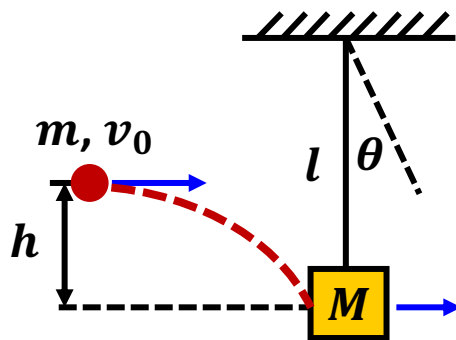
体系机械能守恒，给出

$$\frac{1}{2}(M + m)v^2 = (M + m)gl(1 - \cos \theta_{\max})$$

解得摆角最大值

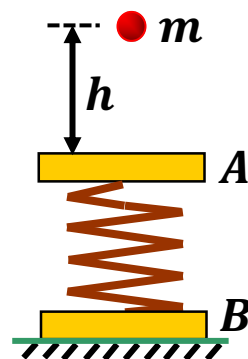
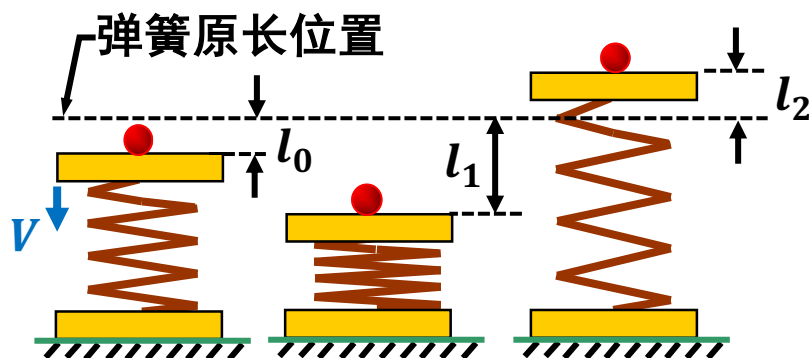
$$\theta_{\max} = \arccos \frac{m^2}{2gl(M + m)^2}$$

m 在竖直方向的下落与结果无关。



例：质量均为 M 的 A 和 B 两板由弹性系数 k 的弹簧相连，初始时处于稳定状态。现在 A 板上方 h 处由静止释放一重物 m ，其下落后将撞击 A 板，并与之粘连。问 h 多大时， B 恰好能离开地面。

解：分析体系接下来的运动状态



1. 撞后瞬间，球板整体以速度 v 向下运动
2. 达到最大压缩量 l_1
3. 向上运动，达到最大拉伸量 l_2

在**第3步**， B 所受弹簧拉力恰好等于其自身重力

解： 最终弹簧的拉伸量 $l_2 = Mg/k$ 。此时体系机械能

$$E_f = \frac{1}{2}kl_2^2 + (M + m)gl_2$$

重物与木板碰撞后瞬间，体系的机械能为

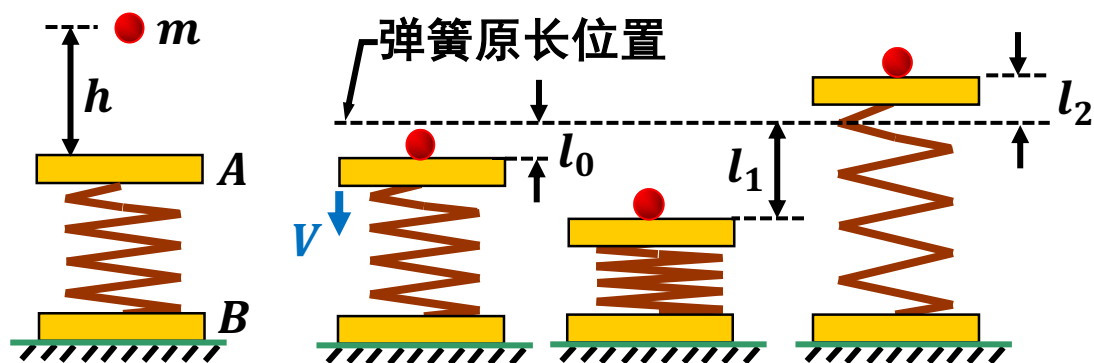
$$E_i = \frac{1}{2}(M + m)V^2 + \frac{1}{2}kl_0^2 - (M + m)gl_0$$

其中 $l_0 = Mg/k$ 为初始位置的弹簧压缩量

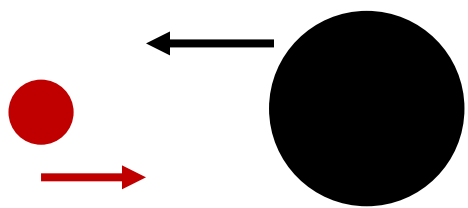
碰撞过程动量守恒给出 $(M + m)V = m\sqrt{2gh}$

在碰撞后，体系机械能守恒，故 $E_f = E_i$

联立，得 $h = 2Mg(M + m)^2/km^2$



太空中的“碰撞”——弹弓效应（又称引力助推）



小天体 m 、大天体 M ，以向右为正：
碰前速度分别为 $u_1 > 0$ 和 $u_2 < 0$
碰后速度分别为 v_1 和 v_2

非接触式的一维完全弹性碰撞

$$v_1 = \frac{(m - M)u_1 + 2Mu_2}{M + m}$$
$$v_2 = \frac{(M - m)u_2 + 2mu_1}{M + m}$$

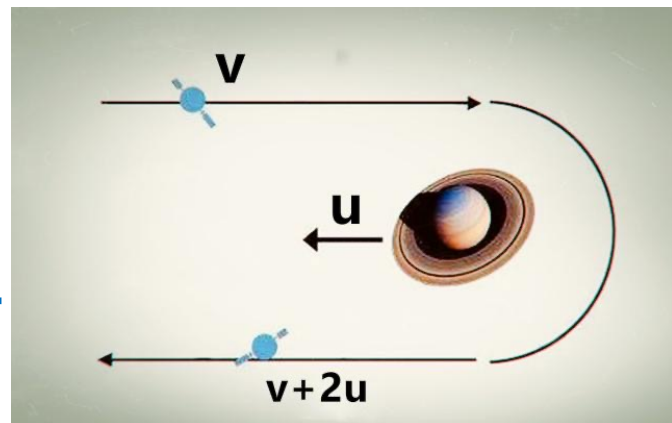
*现实中的弹弓效应是二维甚至三维过程，更复杂一些

由于 $m/M \ll 1$ ，泰勒展开得

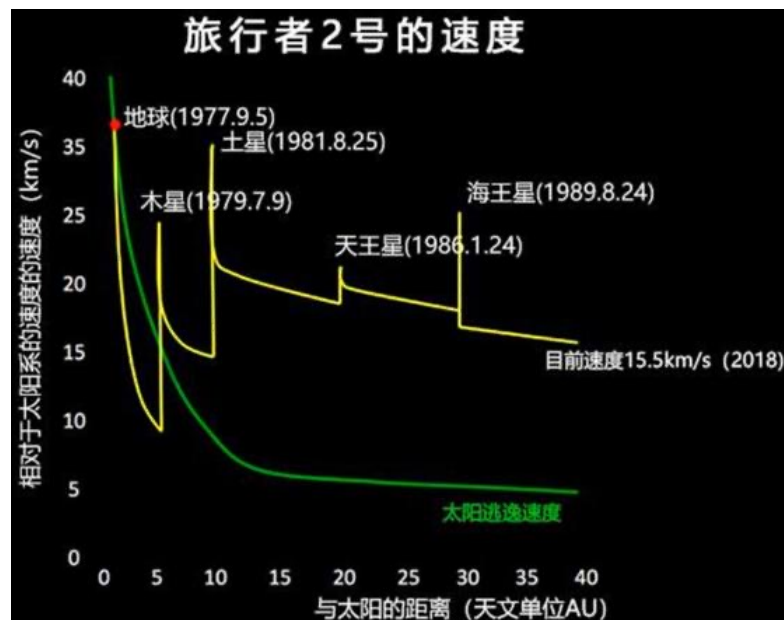
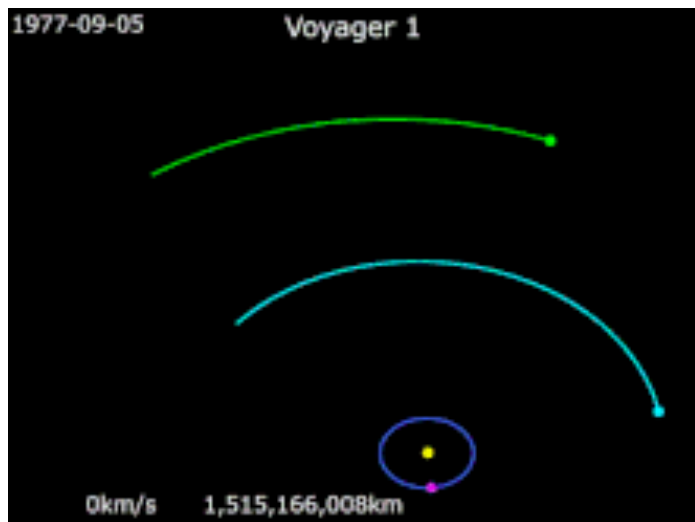
$$v_1 \approx -u_1 + 2u_2 \text{ 和 } v_2 \approx u_2$$

即大天体速度几乎不变，

小天体速度则**反向**，且叠加上**2倍的大天体速度**：被加速了！



例：旅行者号系列航天器



思考：航天器动能增加，行星速度却不变，是否破坏了能量守恒？

解答：否。航天器动能增量 $\Delta E_k \approx -2mu_1u_2 + 2mu_2^2$ 是一阶无穷小量，将行星速度展开

$$v_2 \approx u_2 + 2(u_1 - u_2) \frac{m_1}{m_2}$$

代入，得行星所损失的（一阶无穷小）动能恰为 ΔE_k

本节课小结

保守力做的功可视为势能的负增量

- 把过程量转化为状态量计算，大大简化
- 势能曲线的概念

二维、三维空间的势能“曲线”需偏导数、梯度和旋量等数学知识

功能原理和机械能的引入

- 机械能守恒的条件及其相对性（依赖于参考系）

能量概念的扩充，广义功能原理

广义功能原理的进一步扩充和能量守恒定律

两体碰撞模型及其应用

- 动量守恒；动能守恒与否取决于碰撞类型

第四章作业

4.1, 4.3, 4.4, 4.6, 4.9, 4.10, 4.12, 4.14, 4.16

作业扫描提交至 spoc.buaa.edu.cn，助教线上批改

提交时间段：3月14日0:00至3月28日23:59

以系统时间戳为准，原则上不接受其他解释

时间节点：3月21日（周五）讲第五章