

12章 习题课（一）

函数序列\函数项级数的一致收敛性

例1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)x^{2n-1}$ 收敛域.

例2 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{3x+1} \right)^n$ 收敛域.

例3 给定函数序列: $f_n(x) = \frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x}, n = 2, 3, \dots$

问 α 取何值时, $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛

例4 判断下列函数列在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性.

$$(1) f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}; \quad (2) f_n(x) = nx(1-x)^n$$

例5 讨论以下函数序列在相应区间上的一致收敛性.

(1) $S_n(x) = (1-x)x^n, x \in [0,1];$

(2) $S_n(x) = nx(1-x^2)^n, x \in [0,1].$

例6 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x} \sin \frac{n}{x}$ 在 $(0,1)$ 上的一致收敛性.

例7 讨论 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 和 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上的一致收敛性.

例8 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + x^{2n} - 2x^{3n})$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

例9 用Cauchy收敛定理判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 - nx + n^2}$ 在 $(1, +\infty)$ 上的不一致收敛性.

例10 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$ 在 $[0,1]$

上不一致收敛.

例11 设 $u_n(x) = \frac{1}{n^3} \ln(1 + n^2 x^2)$. $n = 1, 2, \dots$

证明函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

例12 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{n^2 + 1}$ 在区间(1) $(0, +\infty)$; (2) $[\delta, +\infty)$

上的一致收敛性.

12章 习题课（二）

幂级数求收敛域及和函数
幂级数的展开及应用

例1 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-nx)^n; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n; \quad (5) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}.$$

例2 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-1)^n$ 收敛域及和函数.

例3 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)x^{2n-1}$ 收敛域及和函数.

例4 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{\frac{n}{2}} x^{3n-1}$ 收敛域及和函数.

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$ 的和函数.

例6 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的和函数.

例7 证明等式 $\int_0^1 \left[-\frac{\ln(1-x)}{x} \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

例8 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

例1 设函数 $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$, $f^{(101)}(0)$, $f^{(102)}(0)$.

例2 将 $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数.

例3 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

例4 将 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 在 $x=1$ 点展开为幂级数.

例5 求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的麦克劳林级数.

例6 将 $f(x) = e^{2x-x^2}$ 展开成Maclaurin级数.

例7 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和.

例8 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.