A

北京航空航天大学

2016－2017 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷

学 号____________ 姓名__________ 成绩___________

任课教师_____________ 班次__________ 考场____________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2017 年 06 月 26 日

A

一、 选单项择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设$I_1=\iint_D \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_2=\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$I_3=\iint_D \sin[(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\mathrm{D}=\{(\mathrm{x},\mathrm{y})|x^2+y^2\le 1\}$, 则（ A ）.

A. $I_1>I_2>I_3$； B. $I_3>I_2>I_1$； C． $I_2>I_1>I_3$； D. $I_3>I_1>I_2$.

2. 设V_r表示球体$x^2+y^2+z^2\le r^2$,则极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^3}\iiint_V \cos(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = (\quad \text{C} \quad).$$

A. 0 B. $\frac{5}{3}\pi$ C. $\frac{4}{3}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi$

3. 设曲线Γ为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$ 则曲线积分$\int_\Gamma (x+y^2)\,ds=$ (C)

A. $\dfrac{2\pi a^2}{3}$. B. $\dfrac{4\pi a^2}{3}$. C. $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. D. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

4. 给定曲面Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，已知其在第一卦限内的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则曲面积分 $\oiint_\Sigma (|x|+y)\,\mathrm{dS}=$ (B)

A. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; B. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; C. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$; D. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$.

5. 设f(x)为连续函数，$\mathrm{F}(z)=\int_1^z \mathrm{d}y\int_y^z f(x)\mathrm{d}x$，则$\mathrm{F}'(z)=$ (D)

A. $f(z)$; B. $f(z)z$; C. $f(z)(1-z)$; D. $f(z)(z-1)$.

A

二、计算题（每空 6 分，满分 30 分）

1. 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{1+x+y}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

解：根据对称性知 $\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}dxd\mathrm{y}=\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}dxd\mathrm{y}=0.$

所以，积分 $=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxd\mathrm{y}$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\pi\int_0^1\frac{1}{1+r^2}\mathrm{d}r^2=\pi\ln 2$$

2. 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x+y)^2 dxdydz$，其中 **V** 由 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体.

解：由对称性知 $\iiint_V (\mathrm{xy})\mathrm{dxdydz} \quad =0$

所以：

$$\iiint\limits_V（x^2+2\mathrm{xy}+y^2）\mathrm{dxdydz} \quad =\iiint\limits_V（x^2+y^2）\mathrm{dxdydz}$$

$$\int_0^1\mathrm{dz}\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}(x^2+y^2)\mathrm{dxdy}=\int_0^1\mathrm{dz}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z r^2rdr=\frac{\pi}{10}$$

或

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{dxdy}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1\mathrm{dz}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2r（1-r）dr=\frac{\pi}{10}$$

3. 计算第一型曲线积分$\oint_L x^{2017}y\mathrm{d}s$, 其中$L$为单位圆周.

解：$\oint_L x^{2017}y\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\cos\theta^{2017}\sin\theta\sqrt{sin^2\theta+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=0$

4. 设L为椭圆$x^2+2y^2=2$的上半部分逆时针，计算第二型曲线积分

$$I=\int_L xdy-ydx.$$

解：$\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\sqrt{2}cos\theta dsin\theta-sin\theta d\sqrt{2}cos\theta$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2(}\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=\sqrt{2}\pi.$$

或用 Greeng 公式，补从$\left(-\sqrt{2},0\right)$到$\left(\sqrt{2},0\right)$的线段L_2, 得

$\oint_{L+L_2}\mathrm{xdy}-\mathrm{ydx}=\iint_D 2dxdy=\sqrt{2}\pi,$

由 L_2 上 y=0 知 $\oint_{L_2}\mathrm{xdy}-\mathrm{ydx}$=0，所以$\mathrm{I}=\sqrt{2}\pi$

5. 计算第一型曲面积分$\iint_\Sigma(x^2+y^2)dS$，其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于$\mathrm{z}=0$ 与$\mathrm{z}=1$ 之间的部分.

解：

$$\textbf{原积分}=\iint_{\mathbf{x^2+y^2\le 1}}(\mathbf{x^2+y^2})\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{dxdy}=\sqrt{\mathbf{2}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}}\boldsymbol{d\theta}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\mathbf{r^3}\boldsymbol{dr}=\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}.$$

三、（本题 8 分） 设Σ是平面$x-2y+z=1$在第四卦限内的部分，方向取与 z 轴正向夹角为锐角，求

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解：由$z=-x+2y-1$ 知$z_{\mathrm{x}}=-1$，$z_{\mathrm{y}}=2$, 所以

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\{[f(x,y,z)+x](1)+[2f(x,y,z)+y](-2)+[f(x,y,z)+z]\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{2y}+\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

四、（本题 8 分）（利用 Green 公式） 设L为**上半圆周** $x^2+y^2=9$，方向为逆时针方向，求$\int_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值.

解：补曲线 C 为从（-3, 0）到（3, 0）的线段，则根据 Green 公式

$$\oint_{L+C}=\iint_{\substack{x^2+y^2\le 9\\ y>0}}[2x-4-(2x-2)]dxdy=-2\iint_{\substack{x^2+y^2\le 9\\ y>0}}dxdy=-9\pi$$

又因为在 C 上 y=0，所以

$\oint_{L+C}(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=0,$

所以原积分$=-9\pi$

A

五、（本题 10 分）(利用 Gauss 公式) 计算

$$\iint_S y^2 z\ dydz + 3(x^2+z^2)y\ dzdx + x^2 y\ dxdy,$$

其中 S 为曲面 $\boldsymbol{4 - y = x^2 + z^2\ \ (y > 0)}$ 的外侧.

解：添加平面 $\boldsymbol{S_1 : x^2 + z^2 \le 4\ \ (y = 0)}$，方向向左侧，则 $\boldsymbol{S, S_1}$ 构成闭曲面，由 **Gauss** 公式得

$$\iint_S y^2 z\ dydz + 3(x^2+z^2)y\ dzdx + x^2 y\ dxdy$$

$$= \oiint_{S+S_1} y^2 z\ dydz + 3(x^2+z^2)y\ dzdx + x^2 y\ dxdy - \iint_{S_1} y^2 z\ dydz + 3(x^2+z^2)y\ dzdx + x^3 y\ dxdy$$

$$= \iiint_\Omega 3(x^2+z^2)dxdydz - \iint_{S_1} y^3 z\ dydz + 3(x^2+z^2)y\ dzdx + x^2 y\ dxdy$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_0^{4-r^2} dy = 32\pi.$$

六 、（本题 14 分）(利用 Stokes 公式) 计算

$$\oint_\Gamma (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz,$$

其中Γ为上半球面$x^2+y^2+z^2=2Rx(z\geq 0, R>1)$与圆柱面$x^2+y^2=2x$的交线，从$z$轴正向看$\Gamma$为逆时针方向.

解：设在上半球面$x^2+y^2+z^2=2Rx\,(z\geq 0)$上由$\Gamma$所围的曲面为$\sum$，并取$\sum$的法向量向上，则$\sum$法向量的方向余弦$\vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R})$，

由 Stokes 公式

$$\oint_\Gamma (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} dS$$

$$=2\iint_\Sigma [(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]dS$$

$$=\iint_\Sigma (z-y)dS$$

$$=\iint_\Sigma zdS-\iint_\Sigma ydS$$

由于曲面$\sum$关于xz平面对称，因此 $\iint_\Sigma ydS=0$

而在上半球面$x^2+y^2+z^2=2Rx\,(z\geq 0)$上，$z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$，所以在$\sum$上有

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{R}{z},$$

因此

$$2\iint_\Sigma zdS=2\iint_{(x-1)^2+y^2\leq 1} z\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2R\iint_{(x-1)^2+y^2\leq 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R,$$

因此 $\oint_\Gamma (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz=2\pi R.$

七、（附加题，本题 10 分）若在右半平面内，

曲线积分$\int_L \frac{\varphi(y)dx + xdy}{x^2+y^2}$与路径无关，其中φ(y)连续可导.

（1）求函数φ(y)的表达式.

（2）对（1）中的φ(y)，求满足全微分

$du(x,y)=\frac{\varphi(y)}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ 且 $u(1,0)=0$ 的函数 $u(x,y)$.

解：（1）对 $P(x,y)=\frac{\varphi(y)}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$， 由积分与路径无关知：

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}，\text{可得}$$

$$\frac{\varphi'(y)(x^2+y^2)-2y\varphi(y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

由 $x>0$ 知 $\varphi'(y)=-1$，再由 $\varphi'(y)y^2-2y\varphi(y)=y^2$ 得

$$\varphi(y)=-y$$

（2）由（1）知 $\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ 是右半平面内函数 $u(x,y)$ 的全微分，

由 $u(1,0)=0$ 知，

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,0)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

$$\int_0^y \frac{x}{x^2+y^2}dy=\arctan\frac{y}{x}.$$