北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY


工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

二阶线性微分方程其它解法

----刘维尔公式和常数变异法

二阶齐次线性方程求线性无关特解--降阶法

设y_1是方程(1)的一个非零特解，

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

令 $y_2 = u(x)y_1$ 代入(1)式，得

$$y_1u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' + \underline{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)u} = 0,$$

即 $y_1u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' = 0,$

令$v = u'$，则有 $y_1v' + (2y_1' + P(x)y_1)v = 0$，$v$ 的一阶方程 降阶

解得 $v = \dfrac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}$，$\therefore u = \displaystyle\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx$

二阶齐次线性方程求线性无关特解--降阶法

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx,$$ 刘维尔公式

齐次方程通解为 $y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx.$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(1) 若$P(x) + xQ(x) = 0$, 特解 $y = x$;

(2) 若$1 + P(x) + Q(x) = 0$, 特解 $y = e^{x}$;

(3) 若$1 - P(x) + Q(x) = 0$, 特解 $y = e^{-x}$.

二阶齐次线性方程求线性无关特解--降阶法

【例1】求方程 $y''+\dfrac{x}{1-x}y'-\dfrac{1}{1-x}y=0$ 的通解.

【解】 $\because 1+\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}=0,$

齐次方程一特解为 $y_1=e^x,$

由刘维尔公式 $y_2=e^x\int\dfrac{1}{e^{2x}}e^{-\int\frac{x}{1-x}dx}dx=-x,$

对应齐次方程通解为 $Y=C_1x+C_2e^x.$

二阶非齐次线性方程求特解--常数变异法

二阶非齐次线性方程：$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

对应齐次线性方程：$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

设对应齐次方程通解为 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

设非齐次方程通解为 $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

$$y' = c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$$

设 $\boxed{c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0}$

$$y'' = c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2''$$

二阶非齐次线性方程求特解--常数变异法

将 y, y', y'' 代入方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)$$
$$+ c_2(x)(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2) = f(x)$$

$$\Rightarrow c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \quad \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

系数行列式 $w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0,$

$$\therefore c_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{w(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{w(x)},$$

二阶非齐次线性方程求特解--常数变异法

积分可得

$$c_1(x) = C_1 + \int -\frac{y_2 f(x)}{w(x)} dx,$$

$$c_2(x) = C_2 + \int \frac{y_1 f(x)}{w(x)} dx,$$

非齐次方程通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w(x)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(x)} dx.$$

二阶非齐次线性方程求特解--常数变异法

【例2】求方程 $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$ 的通解.

【解】 特征方程为 $r^2-2r+1=0$，$r_1=r_2=1$，

故齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^x$.

设原方程的通解为 $y=u_1(x)e^x+u_2(x)xe^x$，

$$\begin{cases} u_1'(x)e^x+u_2'(x)xe^x=0, \\ u_1'(x)e^x+u_2'(x)(x+1)e^x=\frac{e^x}{x}, \end{cases}$$

$u_1'(x)=-1$， $u_2'(x)=\frac{1}{x}$， $u_1(x)=-x+C_1$， $u_2(x)=\ln x+C_2$，

原方程的通解为$y=C_1e^x+C_2xe^x-xe^x+xe^x\ln x$.

作业

1. 已知 $y_1 = x^2$是微分方程 $x^2\ y'' - 4xy' + 6y = 0$的一个特解，求该方程的通解.（利用刘维尔公式）

2. 用常数变异法求方程 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$的通解.

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院