工科数学分析 2022-2023 (2) 期中试题解答

一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1．曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=10 \end{cases}$ 在点 $(1,1,3)$ 处的法平面方程是（　B　）.

(A) $3x+3y+z=9$　　　　(B) $3x+3y-z=3$

(C) $3x-3y+z=3$　　　　(D) $3x-3y-z=-3$

2．设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内可微，且在 $(0,0)$ 处的梯度为 $(2,4)$，则下面选项中错误的是（　B　）.

(A) 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴负向的方向导数为 -2

(B) 沿方向 $\vec{l}=(1,1)$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=6$　　　　(C) $f_x(0,0)=2, f_y(0,0)=4$

(D) 在 $(0,0)$ 点沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数都有 $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|\le 2\sqrt{5}$

3．下列级数中发散的是（　D　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \ln(1+\dfrac{1}{3^n})$　　　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n}{n^2+1}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 3^{\ln n}}$　　　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

4．已知定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开式为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，记此级数的和函数为 $S(x)$. 若当 $0\le x<\pi$ 时 $f(x)=x$，则 $S(\pi)\cdot S(\dfrac{\pi}{2})=$（　A　）.

(A) 0　　　　(B) $\dfrac{\pi^2}{2}$　　　　(C) $-\dfrac{\pi^2}{2}$　　　　(D) π^2

5．设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=1$，则下列说法错误的是（　C　）.

(A) 沿路径 $y=x, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{2}$　　　　(B) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 不存在

(C) $f(0,y)$ 在 $(0,0)$ 点取到极大值　　　　(D) $f(x,0)$ 在 $(0,0)$ 点取到极小值

二、计算题(每小题 6 分，共 30 分)

1. 研究函数列 $f_n(x)=\dfrac{n+x^2}{nx}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解： $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\dfrac{1}{x}$

取$x_n=n, \beta_n=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}|f_n(x)-\dfrac{1}{x}|=\sup\limits_{x\in(0,+\infty)}\left|\dfrac{x}{n}\right|\ge\left|\dfrac{x_n}{n}\right|=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\ne 0,$此函数列非一致收敛

2. 设 $u=f(x,xy,xyz)$，其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 u_x,u_{xy}.

解： $u_x=f_1+f_2y+f_3yz$

$$\begin{aligned}u_{xy}&=f_{12}x+f_{13}xz+f_2+(f_{22}x+f_{23}xz)y+f_3z+(f_{32}x+f_{33}xz)yz\\&=f_2+f_3z+f_{12}x+f_{13}xz+f_{22}xy+2f_{23}xyz+f_{33}xyz^2\end{aligned}$$

3. 设 $\begin{cases}u=e^{x+y}+w,\\ v=e^{x-y}-w,\\ \quad w=uv,\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解： $\begin{cases}u_x=e^{x+y}+w_x,\\ v_x=e^{x-y}-w_x,\\ w_x=u_xv+uv_x,\end{cases}$ 解得 $u_x=\dfrac{(1+u)e^{x+y}+ue^{x-y}}{1-v+u}$

4. 求函数 $z=(x^2+y^2)(1-x-y)$ 的极值.

解： $\begin{cases}z_x=2x(1-x-y)-(x^2+y^2)=0\\ z_y=2y(1-x-y)-(x^2+y^2)=0\end{cases}$ 解得驻点 $(0,0),(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$

$z_{xx}=2(1-3x-y), z_{yy}=2(1-x-3y), z_{xy}=-2(x+y)$

在 $(0,0)$ 处 $A=C=2, B=0, AC-B^2>0,$ 故$(0,0)$点为极小值点，极小值为0

在 $(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$ 处 $A=C=-\dfrac{2}{3}, B=-\dfrac{4}{3}, AC-B^2<0,$ 故此点非极值点

5. 求函数 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在 $(1,-1)$ 处的带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式.

解法 1：

$$e^{x+y}=e^{x-1}e^{y+1}=(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)(1+(y+1)+\frac{(y+1)^2}{2}+o((y+1)^2)$$

$$=[1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2+(y+1)^2)][1+(y+1)+\frac{(y+1)^2}{2}+o((x-1)^2+(y+1)^2)]$$
$$=1+(x-1)+(y+1)+\frac{(x-1)^2}{2}+(x-1)(y+1)+\frac{(y+1)^2}{2}+o((x-1)^2+(y+1)^2)$$

解法二：

$$f(1,-1)=1, f_x(1,-1)=f_y(1,-1)=e^{x+y}\Big|_{(1,-1)}=1, f_{xx}(1,-1)=f_{xy}(1,-1)=f_{yy}(1,-1)=e^{x+y}\Big|_{(1,-1)}=1,$$

$$e^{x+y}=1+(x-1)+(y+1)+\frac{1}{2}[(x-1)^2+2(x-1)(y+1)+(y+1)^2]+o((x-1)^2+(y+1)^2)$$
$$=1+(x-1)+(y+1)+\frac{(x-1)^2}{2}+(x-1)(y+1)+\frac{(y+1)^2}{2}+o((x-1)^2+(y+1)^2)$$

解法三：

令$t=x-1+y+1, e^{x+y}=e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$

$$=1+(x-1)+(y+1)+\frac{(x-1)^2}{2}+(x-1)(y+1)+\frac{(y+1)^2}{2}+o((x-1)^2+(y+1)^2)$$

三．(10 分) 讨论数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)$的敛散性，若收敛，判别其是绝对收敛还是条件收敛.

解：(第一部分收敛性，5 分)

因为$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(2k)\right|\le\frac{1}{\sin 1}$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2n)$的部分和有界，---------1 分

又$(\frac{x}{x^2+1})'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\le 0\ (x\ge 1)$，故$\{\frac{n}{n^2+1}\}$单调递减，且易见$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$，

---------1 分

由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)$收敛. ---------1 分

又因为 arctan(5+n)单增，且有界: 1 < arctan(5+n) < π/2， ---------1 分

再由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)$收敛. ---------1 分

(第二部分不绝对收敛，从而条件收敛，5 分)，由于

$$\left|\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)\right|\ge\frac{n}{n^2+1}\cos^2(2n)=\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1+\cos(4n)}{2}=\frac{n}{2(n^2+1)}+\frac{n}{2(n^2+1)}\cos(4n)$$

---------1 分

同样由 Dirichlet 判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n^2+1)}\cos(4n)$收敛，　　　　---------1 分

而$\frac{n}{2(n^2+1)}\sim\frac{1}{2n}(n\to\infty)$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n^2+1)}$ 发散，　　　　---------1 分

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)\right|$ 发散，　　　　---------1 分

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)$条件收敛.　　　　---------1 分

第二部分另证：由于

$$\left|\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)\right|\geq\frac{n}{n^2+1}\cos^2(2n)\arctan(5+n)=\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1+\cos(4n)}{2}\arctan(5+n)$$

$$=\frac{n}{2(n^2+1)}\arctan(5+n)+\frac{n}{2(n^2+1)}\cos(4n)\arctan(5+n)$$

---------1 分

同样由 Dirichlet 和 Abel 判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n^2+1)}\cos(4n)\arctan(5+n)$收敛，

---------1 分

而$\frac{n}{2(n^2+1)}\arctan(5+n)\sim\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n}(n\to\infty)$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2(n^2+1)}\arctan(5+n)$ 发散，

---------1 分

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)\right|$ 发散，　　　　---------1 分

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos(2n)\arctan(5+n)$条件收敛.　　　　---------1 分

四. (10 分) 证明: 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}$ 在[0, 1]上一致收敛, 且它的和函数 $S(x)$在[0, 1]上具有连续的导函数.

证：(第一部分证明，5 分)

易见， $\forall n$, $u_n(x)=\frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}$是[0,1]上的单增函数，从而

$$u_n(x) \le u_n(1) = \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2), \quad n=1,2,\cdots; \qquad \text{------- 2 分}$$

而当 $t \ge 0$ 时, $\ln(1+t^2) \le t$, 事实上，令 $g(t) = \ln(1+t^2) - t$，由于

$$g'(t) = [\ln(1+t^2) - t]' \le \frac{2t}{1+t^2} - 1 \le 0, (t \ge 0)$$

故 $g(t)$在$[0, +\infty)$上单调递减，从而当 $t \ge 0$ 时, $g(t) \le g(0) = 0$, 即 $\ln(1+t^2) \le t$.
于是 $\forall x \in [0,1]$,

$$u_n(x) \le \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2) \le \frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,\cdots. \quad \text{而} \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{收敛}, \qquad \text{------- 2 分}$$

(或者，取 $0 < \alpha < 2$, 此时 $1 < 3-\alpha < 3$, 由于

$$\lim_{n\to\infty} n^{3-\alpha} \cdot \frac{\ln(1+n^2)}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{n^\alpha},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)\cdot\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$

由海涅定理可知， $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3-\alpha} \cdot \frac{\ln(1+n^2)}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{n^\alpha} = 0,$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-\alpha}}$ $(0 < \alpha < 2)$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{n^3}$ 收敛， ------- 2 分)

由控制判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}$ 在$[0, 1]$上一致收敛. ------- 1 分

(第二部分证明，5 分)

$$u_n'(x) = [\frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}]_x' = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{2n^2x}{1+n^2x^2} = \frac{2x}{n(1+n^2x^2)}, \qquad \text{------- 1 分}$$

因此 $\forall x \in [0,1]$,

$$u_n'(x) = \frac{2x}{n(1+n^2x^2)} \le \frac{2x}{n\cdot 2nx} \le \frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,\cdots; \quad \text{而} \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{收敛}, \qquad \text{------- 2 分}$$

由控制判别法可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n(1+n^2x^2)}$ 在$[0, 1]$上一致收敛. ------- 1 分

又$u_n'(x) = \frac{2x}{n(1+n^2x^2)}$在$[0,1]$上连续，由逐项求导定理可知，

故$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}$的和函数具有连续的导函数，且

$$[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \qquad \text{------- 1 分}$$

五．(10 分) 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$的收敛域与和函数, 并计算数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}$的和.

解：(计算收敛域, 3 分) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{(2n+3)!}\left|x^{2n+3}\right|\cdot\frac{(2n+1)!}{2n+2}\frac{1}{\left|x^{2n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{(2n+3)(2n+2)^2}x^2=0<1,$$

------- 2 分

因此∀x∈(–∞, +∞), 所求幂级数都绝对收敛, 故所求幂级数的收敛域为 (–∞, +∞).

------- 1 分

(或者, 注意到 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n}$，

对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n}$，令 $t=x^2$, 得到幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}t^n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{(2n+3)(2n+2)^2}=0, \qquad \text{------- 2 分}$$

故幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}t^n$的收敛半径为+∞，由此易知$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n}$的收敛半径也为+∞，从而其收敛域为 (–∞, +∞), 故所求幂级数的收敛域也为 (–∞, +∞).)

------- 1 分

(计算和函数, 5 分) 根据幂级数的逐项求导性质，可知 ∀x∈(–∞, +∞),

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^{2n+2})'}{(2n+1)!}=[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}]' \qquad \text{------- 2 分}$$

$$=[x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}]'=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x, \qquad \text{------- 3 分}$$

(计算数项级数的和, 2 分)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1).$$

------- 2 分

六．(10 分) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0, 0)处的连续性、偏导数的存在性与可微性.

解：(连续性，3 分)

由于 $0\le |f(x,y)|=\left|\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}\right|=\left|\dfrac{xy^2\cdot y}{x^2+y^4}\right|\le \dfrac{1}{2}|y|\to 0\ ((x,y)\to(0,0))$ ------- 2 分

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$， 从而函数 $f(x,y)$ 在(0,0)点连续. ------- 1 分

(偏导数的存在性，4 分) 由偏导数的定义

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0,$$ -------2 分

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot(\Delta y)^2}{0+(\Delta y)^4}-0}{\Delta y}=0.$$ ------- 2 分

(可微性，3 分) 注意

$$\Delta z-dz=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot\Delta x-f_y(0,0)\cdot\Delta y=f(\Delta x,\Delta y),$$

由于

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{(\Delta x)(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^4}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$ ------- 2 分

$$=\lim_{\substack{\Delta y\to 0+0\\ \Delta x=k(\Delta y)^2\\ k>0}}\frac{\dfrac{k(\Delta y)^2(\Delta y)^3}{k^2(\Delta y)^4+(\Delta y)^4}}{\sqrt{k(\Delta y)^4+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0+0\\ k>0}}\frac{\dfrac{k}{k^2+1}}{\sqrt{k(\Delta y)^2+1}}=\frac{k}{k^2+1},$$

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}$ 不存在，因此 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-dz}{\rho}\neq 0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在(0,0)点不可微. ------- 1 分

七. (10 分) 设有 xoy 坐标面上的区域 $D=\{(x,y)|\,x^2+y^2-xy\le 75\}$, $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$ 为定义在区域 D 上的二元函数.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$为区域 D 的一个点，问 $h(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$的表达式.

(2) 在 D 的边界曲线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x, y)$达到最大值的点.

解：(1) (3 分) 由梯度的几何意义知, $h(x, y)$在点 $M(x_0, y_0)$处沿梯度

$$\mathrm{grad}h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\vec{i}+(x_0-2y_0)\vec{j}$$ ------- 2 分

方向的方向导数最大, 方向导数的最大值为梯度的模, 所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}$$ ------- 1 分

(2) (7 分) 令 $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$

由题意, 只需求 $f(x, y)$在约束条件 $x^2+y^2-xy=75$ 下的最大值点.

构造 Lagrange 函数 $L(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy)$ ------- 2 分

则
$$\begin{cases} L_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0 & (1)\\ L_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0 & (2)\\ 75-x^2-y^2+xy=0 & (3)\end{cases}$$ ------- 1 分

(1)与(2)相加可得 $(x+y)(2-\lambda)=0$, 从而 $y=-x$ 或 $\lambda=2$.

若$\lambda=2$, 由(1)得 $y=x$, 再由(3)可得 $x=\pm5\sqrt{3}, y=\pm5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$, 由(3)可得 $x=\pm5, y=\mp5$.

于是得到四个可能的极值点

$$M_1=(5,-5),\ M_2(-5,5),\ M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),\ M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}),$$ ------- 2 分

由 $f(M_1)=f(M_2)=450$, $f(M_3)=f(M_4)=150$,

故 M_1, M_2 为所求的使 $g(x, y)$达到最大值的点. ------- 2 分