二、

1.解：由链式法则可得

$$z_x = F_1 \cdot (1 + z_x),$$

即

$$z_x = \frac{F_1}{1 - F_1}.$$

在对y求导得

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{(F_1)_y(1 - F_1) - F_1(1 - F_1)_y}{(1 - F_1)^2} \\ &= \frac{(F_{11}z_y + F_{12})(1 - F_1) - F_1(-(F_{11}z_y + F_{12}))}{(1 - F_1)^2} \\ &= \frac{F_{11}z_y + F_{12}}{(1 - F_1)^2} \end{aligned}$$

只需计算z_y. 由链式法则可得

$$z_y = F_1 \cdot z_y + F_2$$

即

$$z_y = \frac{F_2}{1 - F_1}.$$

可知

$$z_{xy} = \frac{F_{11}F_2 + F_{12} - F_1F_{12}}{(1 - F_1)^3}.$$

2.解：求偏导数得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \frac{\partial u}{\partial z} = xy.$$

所以u在$M(1,1,1)$的梯度向量为

$$\mathrm{grad}(u)|_M = (1, 1, 1).$$

对应l的单位向量为$(\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{3\sqrt{14}}{14})$, 所以方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathrm{grad}(u)|_M \cdot (\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{3\sqrt{14}}{14}) = \frac{2\sqrt{14}}{7}.$$

3.解：记$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 50, G(x,y,z) = x + y + z, M = (5, 0, -5)$. 则可得

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}|_M = (2y - 2z)|_M = 10 \neq 0.$$

由隐函数定理，可以视y, z为定义在区间$(-\delta+5, 5+\delta)(0<\delta<<1)$上关于$x$函数,使得

$$y(5)=0, z(5)=-5, F(x, y(x), z(x))=0, G(x, y(x), z(x))=0.$$

所以曲线在点M的切向量为$(1, y'(5), z'(5))$. 利用隐函数求导得

$$2x+2yy'+2zz'=0, 1+y'+z'=0$$

上述式子中令$x=5$,解得

$$y'(5)=-2, z'(5)=1.$$

可见曲线在点M的切线方程为

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+5}{1},$$

法平面方程为 $1(x-5)-2(y-0)+1(z-(-5))=0$,即

$$x-2y+z=0.$$

4.解：因为$f(x)$是偶函数，所以

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t=0,$$

而

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\mathrm{d}t=\frac{2\pi^2}{3},\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos nt\mathrm{d}t\\
&=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\mathrm{d}t\\
&=\frac{4}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

因为$f(\pi)=f(-\pi)$, 可以将f唯一地延拓为$(-\infty,+\infty)$上以2π为周期的连续函数，仍记为f. 因为连续函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$分段可微，所以有以下展式

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx.$$

令$x=\pi$得

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

即$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

5.解：记

$$u_n(x)=(-1)^n, v_n(x)=\frac{1}{n}(1+\frac{x}{n})^n.$$

原级数即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$.

显然，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和序列一致有界.

注意到

$$v_n(x)=\frac{1}{n}(1+\frac{x}{n})^n\leq\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^n<\frac{1}{n}e$$

即$\{v_n(x)\}$一致收敛于0.

固定x,数列$\{v_n(x)\}$单调递减：

$$\frac{v_n(x)}{v_{n+1}(x)}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n+1}}(\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n+1}})^n>1.$$

由狄利克雷判别法，原级数一致收敛.

六、解：设盒子的长、宽、高分别为x,y,z (单位为m). 由于盒子的体积为$1\mathrm{m}^3$, 即$xyz=1$. 问题即求函数

$$F(x,y,z)=xy+2xz+2yz, x>0, y>0, z>0$$

在条件

$$xyz=1$$

下的极值.

为此，令

$$S(x,y)=xy+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}).$$

问题转化为求函数$S(x,y)(x>0,y>0)$的最小值问题. 由

$$\frac{\partial S}{\partial x}=y-\frac{2}{x^2},\frac{\partial S}{\partial y}=x-\frac{2}{y^2}$$

得函数$S(x,y)$唯一的驻点$(x,y)=(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$.

注意到该实际问题总是存在最小值的，且$(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$是$S(x,y)$唯一的驻点, 所以$S(x,y)$必在该点取得最小值. 所以当长、宽、高分别为$\sqrt[3]{2}\mathrm{m}$, $\sqrt[3]{2}\mathrm{m}$, $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\mathrm{m}$时,用料最省.