A

北京航空航天大学

2018－2019 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班　　号______________学号_________________姓名_________

任课教师______________考场_________________成绩_________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2019 年 06 月 24 日

A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 将 $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ 化为极坐标下的二次积分为（ **B** ）.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,dr$　　B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,r\,dr$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,r\,dr$　　D. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{\frac{2}{\sin\theta}} f(r)\,dr$

2. 下列论断中正确的是（**B** ）

A. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$, 其中$f(x,y)$是连续函数；

B. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2} f(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^a f(r^2)r^2\sin\varphi dr$, 其中$f(t)$是连续函数；

C. 有界闭区域D由分段光滑的闭曲线L围成， $P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续的偏导数，则 $\oint_L P(x,y)dy+Q(x,y)dx=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$；

D. 若空间有界区域 V 关于 xOy 平面对称，函数 $f(x,y,z)$在V上连续，且 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$，则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=0$.

3. 设 $f(x,y)$ 连续， $L=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2=R^2\}$，则 $\lim\limits_{R\to0^+}\dfrac{\int_L f(x,y)ds}{2\pi R}=$（ C ）.

A. $f(0,0)$;　　B. $2f(0,0)$;

C. $f(1,1)$;　　D. $2f(1,1)$.

4. 设$F(x)=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^x f(t)dt$，其中 $f(t)$ 为连续函数，则 $F'(x)=$（ C ）.

A. $f(x)$;　　B. $\pi f(x)$;

C. $2\pi f(x)$;　　D. 0.

5. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=$（ D ）.

A. $\dfrac{2\pi}{3}$;　　B. $\dfrac{4\pi}{3}$;

C. 2π;　　D. $\dfrac{8\pi}{3}$.

二、计算题（每小题 5 分，满分 30 分）

1. 设数量场 $f(x,y,z)=x^2+2yz+xz$，求 f 的梯度 $gradf$ 以及向量场 $gradf$ 的旋度.

解：$f_x=2x+z,\ f_y=2z,\ f_z=2y+x,\ gradf=(2x+z,2z,2y+x)$

$$rot(gradf)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & 2z & 2y+x \end{vmatrix}=(0,0,0)$$

2. 计算 $\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$，其中 $D:1\le x^2+y^2\le 4.$

解：$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{r}{1+r^2}dr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\Big|_1^2 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}d\theta=\pi\ln\frac{5}{2}$

3. 计算 $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$.

解：$\iiint\limits_\Omega (x+y+z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega zdxdydz$(对称性)

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 zdz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{2}(1-r^2)rdr$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}d\theta=\frac{\pi}{4}$

4. 计算第一型曲线积分 $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 $L: x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=4t,$ $0\le t\le 2\pi$.

解：$\int_L (x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}5(9+16t^2)dt=90\pi+\frac{640\pi^3}{3}$

5. 计算第二型曲线积分 $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中 L 为从 $(2,0)$ 沿上半椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 到 $(-2,0)$ 的曲线.

解： 曲线的参数方程为$x=2\cos t, y=3\sin t, t$从0到π

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy=\int_0^{\pi}(2\cos t+3\sin t)(-2\sin t)dt+(3\sin t-2\cos t)3\cos t dt$$

$$=\int_0^{\pi}(5\sin t\cos t-6)dt=\int_0^{\pi}(\frac{5}{2}\sin 2t-6)dt=(-\frac{5}{4}\cos 2t-6t)\Big|_0^{\pi}=-6\pi$$

注：也可用 Green 公式

6. 设 Σ 是平面 $6x+4y+3z=12, x,y,z\geq 0$，计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)dS$.

解： $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)dS=\iint\limits_{\Sigma}\frac{6x+4y+3z}{12}dS=\iint\limits_{\Sigma}dS$

$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$（其中$D_{xy}$是由$x$轴, y轴和直线$3x+2y=6$所围成的平面区域）$=\sqrt{61}$

三、（10 分） 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^3z^2dydz+(z+1)dxdy$，其中 Σ 为 上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧.

解： $dydz=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

$$\iint\limits_{\Sigma} y^3z^2dydz+(z+1)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(y^3z^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\sqrt{1-x^2-y^2}+1)dxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(y^3z^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\sqrt{1-x^2-y^2}+1)dxdy$$

（对称性）$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr+\pi$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta+\pi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\theta+\pi=\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{5\pi}{3}$$

注：也可用 Gauss 公式

四、（10 分）（利用 Green 公式）

设 L 是以 $(2,0)$ 为中心，半径为 4 的圆周, 方向取逆时针，计算 $\oint_L\dfrac{ydx+(2-x)dy}{(x-2)^2+y^2}$.

解： 设 L_1 为包含在 L 内部的圆周 $(x-2)^2+y^2=r^2$，方向取顺时针

设 Ω 为 L 和 L_1 所围成的封闭区域

$$P=\frac{y}{(x-2)^2+y^2},Q=\frac{2-x}{(x-2)^2+y^2}$$

$$\oint_{L+L_1}\frac{ydx+(2-x)dy}{(x-2)^2+y^2}=\iint\limits_{\Omega}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$$

$$\oint_L\frac{ydx+(2-x)dy}{(x-2)^2+y^2}=-\int_{L_1}\frac{ydx+(2-x)dy}{(x-2)^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{-L_1}ydx+(2-x)dy$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint\limits_{(x-2)^2+y^2\le r^2}-2dxdy=\frac{1}{r^2}\cdot(-2\pi r^2)=-2\pi$$

五、（10 分）(利用 Gauss 公式)

计 算 $\iint\limits_S (y-z+x^2)dydz+(z-x+y^2)dzdx+(x-y+z^2)dxdy$ ，其 中 S 为 锥 面

$z=\sqrt{x^2+y^2},0\le z\le 1$，方向取下侧.

解： 补充平面 $S_1: z=1$, 方向取上侧， 设Ω为S和S_1所围成的封闭区域

$$\iint\limits_{S+S_1} (y-z+x^2)dydz+(z-x+y^2)dzdx+(x-y+z^2)dxdy=\iiint\limits_{\Omega} 2(x+y+z)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} 2zdxdydz \quad （对称性）$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 2zdz=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\iint\limits_S (y-z+x^2)dydz+(z-x+y^2)dzdx+(x-y+z^2)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{S_1}(y-z+x^2)dydz+(z-x+y^2)dzdx+(x-y+z^2)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{S_1}(x-y+1)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x-y+1)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{2}-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy \quad (由对称性）$$

$$=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$$

六、(**10 分**)已知$\int_L xy^2dx + yf(x)dy$与路径无关，$f(x)$具有连续导数，且$f(0)=0$，计算$\int_{(0,0)}^{(2,2)} xy^2dx + yf(x)dy$.

解：积分与路径无关$\Rightarrow 2xy = yf'(x) \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x^2 + C$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0, f(x) = x^2$

$\int_{(0,0)}^{(2,2)} xy^2dx + yx^2dy = \int_0^2 4xdx = 8$

注：也可以采用求原函数的方法计算$\int_{(0,0)}^{(2,2)} xy^2dx + yx^2dy = \left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_{(0,0)}^{(2,2)} = 8$

七、(10 分) **(利用 Stokes 公式)**

计算$\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$，其中$L$为$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$为顶点的三角形边界，从$x$轴正向看过去，方向取逆时针.

解：取Σ为平面$x+y+z=1$在第一卦限的部分，方向指向上侧

单位法向量为$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$$\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} dS$$

$=\iint_\Sigma \frac{6}{\sqrt{3}} dS = \iint_D \frac{6}{\sqrt{3}} \sqrt{3} dxdy$（其中 D 为直线 x+y=1，x 轴，y 轴所围成的三角形）

=3