一．单项选择题(每小题 4 分，本题 20 分)

1.下列级数中发散的是(D)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$； (B) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$； (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$ ； (D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$.

2. 设级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则级数$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为(C)

（A）$(-2,2)$； （B）$(-3,3)$； （C）$(-2,4)$； （D）$(-4,2)$.

3.设$f(x,y)=\frac{1}{xy}\tan\frac{xy}{1+xy}(xy\neq 0)$,则$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}f(x,y)-\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=$ （ A ）

（A）-1 （B）0 （C）1 （D）不存在

4.设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且有$\|gradf(0,0)\|=\sqrt{2}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数中不可能取到的值是（ A ）

（A）$-\sqrt{2}-1$ （B）$-\sqrt{2}$ （C）$\sqrt{2}-1$ （D）$\sqrt{2}$

5.设函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$，则（ B ）

（A）$(0,0)$ 是极小值点; （B）$(0,0)$ 是极大值点;

（C）$(2,2)$ 是极小值点; （D）$(2,2)$ 是极大值点.

二．填空题(每空 3 分，本题 18 分)

1.设 $f(x)$是以2π 为周期的函数,且 $f(x)=\begin{cases}2, & x\in(-\pi,0],\\ 1, & x\in(0,\pi],\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为$\underline{\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\sin nx}$, 或$\underline{\frac{3}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x}$

傅里叶级数在$x=\pi$ 处收敛于$\frac{3}{2}$.

2.函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$在 $x=0$ 展开的幂级数为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n,x\in(-1,1)$.

3.设 $\mathrm{d}z=(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+ay\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$, ($a$ 为常数),则 $a=$________. -2

4.设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$确定的函数，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}}=$__________. $-\frac{1}{2}$

5.$\frac{\cos y}{1-x}=\underline{1+x+x^2-\frac{y^2}{2}}+o(\rho^2)$, 其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

三．计算题(每小题 6 分，本题 24 分)

1.设函数 $g(x,y)=f(xy,\dfrac{x^2-y^2}{2})$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，求 g_{xy},g_{yy}.

解： $g'_x=yf_u'+xf_v'$，$g'_y=xf_u'-yf_v'$，……………2 分

$g''_{xy}=f_u'+y\left[xf''_{uu}-yf''_{uv}\right]+x\left[xf''_{vu}-yf''_{vv}\right]=f_u'+xyf''_{uu}+(x^2-y^2)f''_{uv}-xyf''_{vv}$ …….2 分

$g''_{yy}=x\left[xf''_{uu}-yf''_{uv}\right]-f_v'-y\left[xf''_{vu}-yf''_{vv}\right]=x^2f''_{uu}-2xyf''_{uv}+y^2f''_{vv}-f_v'$ …….2 分

2. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2y=4\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $P_0(1,1,-2)$ 处的切线方程和法平面方程.

解： 利用公式法求解. 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2y-4=0,G(x,y,z)=x+y+z$,

$$\tau=\begin{vmatrix} i & j & k\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}_{P_0}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)_{P_0}=(4,-6,2)$$ …….2 分

于是切线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z+2}{2}$，即 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$.…….2 分

法平面方程为 $2(x-1)-3(y-1)+z+2=0$，即 $2x-3y+z+3=0$. …….2 分

或依照推导公式的方法来解，略

3. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和函数, 并求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$和.

解 设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, 其收敛域为$[-1,1]$. ----------1 分

则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^{2n+1})'}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ----------1 分

$=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in(-1,1)$ ----------1 分

注意到 $S(0)=0$, 于是

$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,\ x\in(-1,1)$ ----------1 分

由于级数在点 $x=1$ 收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\lim_{x\to1^-}S(x)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}\cdot$ ----2 分

4. 讨论函数序列$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$在区间$(0,1)$上是否一致收敛.

解 函数序列的极限函数$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\quad x\in(0,1)\cdot$ ----------2 分

则 $\beta_n=\sup_{x\in(0,1)}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in(0,1)}|f_n(x)|$ ----------2 分

$\geq\left|f_n(\frac{1}{n})\right|=\frac{1}{2}.$ ----------2 分

因此 $\lim_{n\to\infty}\beta_n\neq0$，所以函数序列$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$在区间$(0,1)$上不一致收敛.

四．(10 **分**) 讨论数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$的敛散性,若收敛, 判别其是绝对收敛还是条件收敛.

解 因为$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\right|\le\frac{1}{\sin 1}$, 即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n$的部分和有界，

又$\frac{1}{\sqrt{n}}$单调且$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}$收敛. ----------3 分

又因为$(1+\frac{1}{n})^n$单调有界，由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$收敛. ----------3 分

而 $\left|\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n\right|\ge\frac{\sin^2 2n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{1-\cos 4n}{2\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$ --------1 分

同样由 Dirichlet 判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$收敛， --------1 分

而$\frac{1}{2\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n\sim\frac{e}{2\sqrt{n}}(n\to\infty)$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$ 发散， --------1 分

由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n\right|$ 发散，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^n$条件收敛. --------1 分

五．(10 **分**) 证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在$(0,2\pi)$上连续，且有连续的导函数.

证明 （1）$\frac{\cos nx}{n^2+1}$在区间$(0,2\pi)$上连续，且

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2+1}\right|\le\frac{1}{n^2}$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛以及 Weierstrass 判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上一致收敛，从而

其和函数$f(x)$在$(0,2\pi)$上连续. --------4 分

（2）$(\frac{\cos nx}{n^2+1})'=-\frac{n}{n^2+1}\sin nx$, $\frac{n}{n^2+1}\sin nx$在$(0,2\pi)$上连续，

对任意的$0<\delta<\pi$，$\forall x\in[\delta,2\pi-\delta]$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},\quad n=1,2,\cdots$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和序列一致有界，又因为$\frac{n}{n^2+1}$单调，$n\to\infty$一致收敛于 0,

由 Dirichlet 判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin nx$ 在$[\delta,2\pi-\delta]$一致收敛. --------4 分

由函数项级数的逐项可导定理可知，和函数$f(x)$在$[\delta,2\pi-\delta]$上可导，

由δ的任意性可知$f(x)$在$(0,2\pi)$可导，且导数连续. --------2 分

六．(10 **分**) 在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向$\vec{l}=\{1,-1,0\}$的方向导数最大.

解：函数$f(x,y,z)$的方向导数为$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2}(x-y)$. ………..2 分

由题意知，即求函数$\sqrt{2}(x-y)$在条件$2x^2+2y^2+z^2=1$下的最大值. 令

$$L(x,y,z)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1) \quad …..2 \text{ 分}$$

则$\begin{cases} L_x=\sqrt{2}+4\lambda x=0 \\ L_y=-\sqrt{2}+4\lambda y=0 \\ L_z=2\lambda z=0 \\ 2x^2+2y^2+z^2=1 \end{cases}$， ………..2 分

解得$P_1(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$和$P_2(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)$ ………..2 分

因最大值存在，比较$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_1}=-\sqrt{2},\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_2}=\sqrt{2}$, 可知$P_2(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0)$为所求. ………..2 分

七. (8 **分**) 设函数$f(x,y)=|x-y|g(x,y)$, 其中$g(x,y)$在点$(0,0)$的一个邻域内连续. 证明: $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的充分必要条件是$g(0,0)=0$.

证明：（必要性）若$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，则$f_x'(0,0),f_y'(0,0)$存在. 由于

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|g(x,0)}{x},$$

且$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|g(x,0)}{x}=g(0,0),\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|g(x,0)}{x}=-g(0,0)$, 故有$g(0,0)=0$. ……….4 分

（充分性）若$g(0,0)=0$, 可知$f_x'(0,0)=0,f_y'(0,0)=0$, 又………..2 分

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x-y|g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

且$\dfrac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 2$, ………..2 分

所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x-y|g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=g(0,0)=0$, 由定义可知$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.