A

北京航空航天大学

2013－2014 学年 第二学期期末

《 工科数学分析（2） 》

试 卷（A）

班号__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成 绩								
阅卷人								
校对人								

2014 年 06 月 27 日

A

一、 求解下面问题（每小题 6 分，满分 48 分）

1. 设$u(x,y,z)$为连续函数，$\sum$是以$M(x_0,y_0,z_0)$为中心，半径为R的球面，求极限

$$\lim_{R\to 0^+}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}u(x,y,z)dS.$$

解 $\lim\limits_{R\to 0^+}\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}u(x,y,z)dS=u(x_0,y_0,z_0)$ 建议：中间过程 4 分

2. 计算$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy$, 其中$D$是由$x=0,y=1$及$y=x$所围成的区域.

解：因为$\int e^{-y^2}dy$无法用初等函数表示，所以必须考虑积分的顺序。

$$\begin{aligned}\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy&=\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx\\&=\int_0^1 e^{-y^2}.\frac{y^3}{3}dy\\&=\int_0^1 e^{-y^2}.\frac{y^3}{6}dy^2\\&=\frac{1}{6}(1-\frac{2}{e}).\end{aligned}$$

建议：中间过程 4 分，结果 2 分

3. 已知椭圆型区域$D=\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$. 利用广义极坐标变换计算积分

$$I=\iint_D(b^2x^2+a^2y^2)d\,x\,d.$$

解 做广义的坐标变换 $T:\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\y=br\sin\theta,\end{cases}$

则 $\mathrm{J}=abr.\quad 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,$

$$\begin{aligned}I&=\iint_D(b^2x^2+a^2y^2)dxdy\\&=a^2b^2\iint_D r^2abrdxdy\\&=a^3b^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr\\&=\frac{1}{2}a^3b^3\pi.\end{aligned}$$

4. 求曲面 Σ: $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 2)$ 的面积.

解　由于 $z_x=2x,\quad z_y=2y,\quad \sqrt{1+z_x^2+z_{y_y}^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$，且 $Dxy=x^2+y^2\le 4,$

所以

$$
\begin{aligned}
A&=\iint_{\Sigma} dS\\
&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_{y_y}^2}\,dxdy\\
&=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy\\
&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt{1+4r^2}\,dr\\
&=\frac{\pi}{6}(27^{3/2}-1)=\frac{13}{3}\pi.
\end{aligned}
$$

5. 计算三重积分 $\iiint_V\left[(\cos y)^{2012}x+3\right]dxdydz$，其中 **V** 由 $z=1$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所成的立.

解： 由于 **V** 是关于 **yoz** 平面对称的，且 $(\cos y)^{2012}x$ 是关于 **x** 的奇函数，所以

$\iiint_V(\cos y)^{2012}x\,dxdydz=0$，于是

$$\iiint_V\left[(\cos y)^{2012}x+3\right]dxdydz=3\iiint_V dxdydz=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 dz=\pi。$$

（写出对称性给 2 分，计算过程适当给分）

6. 计算第一型曲面积分 $\iint_\Sigma(x+y+z)^2dS$，其中 Σ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$（$z\ge 0$），

其中 $a>0$. （可利用对称性）

解： 因为 $\iint_\Sigma(x+y+z)^2dS=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)dS$，且由于 Σ 关于坐标面

xoz 和 zoy 对称，且函数 $2xy+2yz$ 关于 y 是奇函数，$2xz$ 关于 x 是奇函数，所以

$$\iint_\Sigma(2xy+2yz)dS=0,\qquad \iint_\Sigma 2xzdS=0.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\iint_\Sigma(x+y+z)^2dS&=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)dS,\\
&=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)dS=a^2\iint_\Sigma dS=2\pi a^4.
\end{aligned}
$$

7. 计算曲线积分$\int_{\Gamma} z\,ds$,其中Γ为圆锥螺线$x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in[0,2\pi]$.

解： 因为 $x' = \cos t - t\sin t,\quad y' = \sin t + t\cos t,\quad z' = 1,$ 所以

$$ds = \sqrt{2+t^2} \qquad ,\text{-----3 分}$$

于是

$$\int_{\Gamma} z\,ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{3}[(2+4\pi^2)^{3/2}-(2)^{3/2}]. \quad \text{----------------3 分}$$

8. 计算第二型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy,$

其中$\Sigma=\{(x,y,z)\big|x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$，取上侧.

解： 由于曲面的法向量为$\vec{n}=\{1,1,1\},\quad D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x+y\leq 1, x>=0, y>=0\}$ -----2 分

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} [x+y+(1-x-y)]dxdy = \frac{1}{2}. \quad \text{-----------4 分}$$

二、（本题 10 分）求方程 $y''+3y'-4y=xe^{2x}$ 的通解.

解： 齐次方程的特征方程为$r^2+3r-4=0,$ 解得

$$r_1=-4,\quad r_2=1.$$

所以齐次方程的通解为$y=C_1e^{-4x}+C_2e^x$,其中C_1,C_2是任意常数.

又因为$\lambda=2$不是特征方程的根，所以可设非齐次方程的特解为

$$y^*=(Ax+B)e^{2x},$$

再求得 $y^{*\prime}=(2Ax+2B+A)e^{2x}$ $\quad y^{*\prime\prime}=(4Ax+4B+4A)e^{2x}$

将$y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入原方程，得 $\begin{cases} 6A=1, \\ 6B+7A=0. \end{cases}$

解得$A=\dfrac{1}{6},\quad B=-\dfrac{7}{36}$. 于是原方程的通解为

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^x+(\frac{1}{6}x-\frac{7}{36})e^{2x}.$$

三、(本题 10 分) 设曲线积分 $I=\int_L \frac{(x+2y)dx+(ax+y)dy}{x^2+y^2}$ 在区域 D 内与路径无关，

(1) 写出满足题设的区域 D 的条件，并求常数 a；

(2) 设曲线 L 为从点 $A(1,0)$ 沿上半平面到点 $B(2,0)$ 的一段弧，求曲线积分 I .

解： (1) 由于

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2(x^2+y^2)-2y(x+2y)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{a(x^2+y^2)-2x(ax+y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

所以由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow a=-2.$

D:任意一个不包含原点的单连通区域.

(2) $I=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln 2.$

建议：(1) 7 分；(2) 3 分。

四、(本题 12 分) (利用 Green 公式)

计算 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}$, 其中 L 是以 $(1,1)$ 为中心, 4 为半径的圆周, 取顺时针方向.

解： 记 L 所围成的闭区域为 D, 令 $P=\frac{-y}{4x^2+9y^2}$, $Q=\frac{x}{4x^2+9y^2}$,

则当 $4x^2+9y^2\neq 0$ 时, 有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{9y^2-4x^2}{(4x^2+9y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

作位于 L 所围区域内部的椭圆 l: $4x^2+9y^2=\varepsilon^2$, 记 L 和 l 所围成的区域为 D, (其中 l 的方向取逆时针方向)。由 Green 公式得:

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}+\oint_l \frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

即:

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}=-\oint_l \frac{xdy-ydx}{4x^2+9y^2}=-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_l xdy-ydx=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{4x^2+9y^2\le\varepsilon^2}2dxdy$$
$$=-\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\pi\varepsilon^2}{6}=-\frac{\pi}{3}.$$

注：最后计算又使用一次 Green 公式，也可以直接计算

$$l:\begin{cases} x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t \\ y=\frac{\varepsilon}{3}\sin t \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\oint_l xdy-ydx=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\varepsilon}{2}\cos t\cdot(\frac{\varepsilon}{3}\sin t)'-\frac{\varepsilon}{3}\sin t\cdot(\frac{\varepsilon}{2}\cos t)'\right]dt=\frac{\varepsilon^2}{6}\int_0^{2\pi}dt=\frac{\pi\varepsilon^2}{3}$$

(建议：计算 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 2 分，做辅助曲线挖点 2 分，应用 Green 公式 2 分，曲线积分的计算 4 分.)

五 、(10 分) (利用 Gauss 公式)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧.

解： 添加平面 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧.

则 Σ,Σ_1 构成闭曲面，假定它们所围区域为 Ω，由 Gauss 公式得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\qquad-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

由对称性 $\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega}ydxdydz=0$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}zdz=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}zdz=\frac{\pi}{2}$$

（也可以“先二后一”　$2\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = 2\int_0^1 zdz \iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} dxdy = 2\int_0^1 \pi(1-z^2)zdz = \frac{\pi}{2}$）

又 $\iint\limits_{\Sigma_1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot rdr = -\frac{\pi}{4}$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} (x^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^2+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$

(建议：做辅助平面 2 分，应用 Gauss 公式 2 分，重积分及辅助面上积分各 3 分.)

六、(10 分) (利用 Stokes 公式)

计算 $\oint_{\Gamma} ydx + (z-\cos x)dy + (x+e^z)dz$, 其中 Γ 是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$ 从 z 轴正向看 Γ 为逆时针方向.

解：设 $\sum$ 为平面 $x+y+z=0$ 上被曲线 Γ 所围成的部分，并取 $\sum$ 的法向量向上，则 $\sum$ 法向量的方向余弦 $\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$，

由 Stokes 公式

$$\oint_{\Gamma} ydx + (z-\cos x)dy + (x+e^z)dz = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z-\cos x & x+e^z \end{vmatrix} dS = -\iint\limits_{\Sigma} (\sqrt{3}+\sin x)dS,$$

由对称性 $\iint\limits_{\Sigma} \sin x dS = 0$，所以原积分 $= -\sqrt{3}\pi R^2$.

注：Stokes 公式同样可以写成

$$\iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z-\cos x & x+e^z \end{vmatrix} = -\iint\limits_{\Sigma} dydz + dzdx + (1-\sin x)dxdy.$$

(建议：应用 Stokes 公式转化成曲面积分 6 分，其余计算 4 分.)

七、附加题（本题 10 分）

设$\sum$是分片光滑的闭曲面，$\sum$上的单位外法向量$\vec{n}$的方向余弦为$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，分别证明对于以下两种情形，

(1) P,Q,R在$\overline{\Omega}$上具有二阶连续偏导数，Ω为$\sum$所围的立体；

(2) P,Q,R在$\sum$上具有一阶连续偏导数.

都成立 $$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=0.$$

证明：对情形（1）用 Gauss 公式，

$$I=\oiint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\right]dxdydz$$

$$=0$$

对情形（2），在$\sum$上任取一条分段光滑的闭曲线Γ，Γ把$\sum$分成两部分$\sum_1,\sum_2$，在$\sum_1,\sum_2$上分别应用 Stokes 公式，得

$$I=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS+\iint_{\Sigma_2}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

$$=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz+\oint_{-\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=0$$

其中$\Gamma,-\Gamma$表示同一条曲线，但方向相反.

(建议：两种情形各 5 分.)