2014 年线代考题

一、 单项选择题

1. 设 A,B 为 n 阶方阵，则必有（ ）

A. |A+B|=|A|+|B| B. |AB|=|BA| C. AB=BA D. $(A+B)^{-1}$=A^{-1}+B^{-1}

2. 设 A= $\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_3 & & \end{pmatrix}$,其中$A_1$,$A_2$,$A_3$为方阵，且|A|≠0,则$A^{-1}$=( )

A. $\begin{pmatrix} & & A_1^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ A_3^{-1} & & \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} {A_1}^{-1} & & \\ & {A_2}^{-1} & \\ & & {A_3}^{-1} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} & & {A_3}^{-1} \\ & {A_2}^{-1} & \\ {A_1}^{-1} & & \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} {A_3}^{-1} & & \\ & {A_2}^{-1} & \\ & & {A_1}^{-1} \end{pmatrix}$

3. 向量组（a+1,2，-6），（1，a，-3），（1,1，a-4）线性无关，则 a 的取值范围为（ ）

A. 0 B. 不等于 0 C. 1 D. 不等于 1

4. 若非齐次线性方程组 AX=b 未知数的个数为 n，方程的个数为 m，系数矩阵的秩为 r，则（ ）

A. 当 r=m 时，方程组 AX=b 有解

B. 当 r=n 时，方程组 AX=b 必有唯一解

C. 当 m=n 时，方程组 AX=b 必有唯一解

D. 当 r<n 时，方程组 AX=b 有无穷多组解

5. 设 A,B 均为 3 阶方阵，且 A 与 B 相似，A 的特征值为 2,3,4，则 $(3B)^{-1}$的特征值为(　)

A. $\frac{3}{2}$,1,$\frac{3}{4}$　　B. 6,9,12　　C. $\frac{2}{3}$, 1 , $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}$

6. 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 R(A)=R(B),则（　）

A. AB=BA

B. 存在可逆矩阵 P,Q,使得 PAQ=R

C. 存在可逆矩阵 P,使P^{-1}AP=B

D. 存在可逆矩阵 C,使C^TAC=B

7. 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$均为 n 维列向量，A 为 m×n 矩阵，下列选项正确的是(　)

A. 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$线性相关；

B. 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$线性无关；

C. 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$线性相关；

D. 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$线性无关；

8. 设 A 为 n（n≥ 2）阶可逆矩阵，交换 A 的第一行与第二行得 B，A^*，B^*分别为 A,B 的伴随矩阵，则(　)

A. 交换A^*的第 1 列与第 2 列得B^*

B. 交换A^*的第 1 列与第 2 行得B^*

C. 交换A^*的第 1 列与第 2 列得$-B^*$

D. 交换A^*的第 1 行与第 2 行得$-B^*$

二．填空题（本题共 8× 3 = 24 分）

1. n 阶方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量是 A 与对角形矩阵相似的____________条件；

2. 设 n 阶矩阵 A 满足A^2-A-2E=0,则A^{-1}=__________.

3. 设 a，b，c 是互不相等的数，则向量组$(1, a, a^2, a^3)$，$(1, b, b^2, b^3), (1, c, c^2, c^3)$是线性_______的。

4. 设 A 为 n 阶方阵，若 A 有特征值λ_1，λ_2，……, λ_n,则|A-E|=____________________.

5. 设$a_1=(0,0,-1,1)^T$, $a_2=(1,1,-1,0)^T$, $a_3=(-5,-5,5,0)^T$, 则a_1, a_2, a_3的一个最大线性无关为____________________.

6. R^3的子空间 W=$\left\{(x_1, x_2, x_3): \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}\right\}$的一组基为______________

7. 从R^2的基$\alpha_1\binom{1}{0}$，$\alpha_2=\binom{1}{-1}$到基$\beta_1\binom{1}{1}$，$\beta_2\binom{1}{2}$的过渡矩阵为$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$______________

8. 设α 为3 维列向量，α^T是α的转置, 若 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则$\alpha^T\alpha$=_______.

三.（本题满分 10 分）已知 A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, X=AX+B，求 X

四． 设方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

问当λ取何值时，

1）方程组有唯一解；

2）方程组无解；

3）方程组有无数个解，求其通解(用解向量形式表示)。

五.（本题满分 16 分）。

已 知 二 次 型 ， $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+ax_2^2+6x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 通 过 正 交 变 换 将 二 次 型 化 成 标 准 型 $f=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$,

1）写出此二次型对应的矩阵 A;

2）确定 a 的值；

3）求一个正交换 x=Qy,将二次型化为标准型 $f=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$。

六. 证明题

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，若$A^3=0$,则必有 A=0
2. 设 A 是 n 阶实反对称矩阵，试证：$aE=A^2$为正定矩阵(其中 E 为 n 阶单位矩阵，a> 0)