§4 瑕积分

一、无界函数的广义积分

定义5. 1 设$f(x)$在区间$(a,b]$上有定义，而在点 a的右邻域内无界 ,但对$\forall \varepsilon \in (0,b-a)$, $f(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\boxed{\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx}$存在，则称此极限为 $f(x)$在$(a,b]$上的广义积分（也称瑕积分），记为$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$

即：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

这时也称瑕积分收敛, a称为瑕点.

当上述的极限不存在时, 称瑕积分发散.

类似地，可以定义

(1) $f(x)$在区间$[a,b)$上瑕积分， b为瑕点，

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

(2) 若$c \in (a,b)$, 且$f(x)$在c点无界，则$f(x)$在$[a,b]$上的积分为

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon' \to 0+} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx$$

当上述右边的两个极限都存在时，称该瑕积分收敛；

当上述右边的其中的一个极限不存在时，称该瑕积分发散.

例1 讨论瑕积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}\,x(p>0)$的收敛性.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}\begin{cases}散 & p\geq 1\\ 收 & p<1\end{cases}$

解 由于$x=0$是瑕点，且

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}\frac{1}{1-p}(1-\varepsilon^{1-p}), & p\neq 1,\\ -\ln\varepsilon, & p=1.\end{cases}\quad (0<\varepsilon<1),$$

$1-p>0$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\begin{cases}收 & p>1\\ 散 & p\leq 1\end{cases}$

故当$0<p<1$时，瑕积分收敛，且

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p};$$

当$p\geq 1$时,瑕积分发散于$+\infty$.

例2 计算广义积分 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

$x \to 1 \quad (x-1)^{\frac{2}{3}} \to 0$

解 由于 $x=1$ 为瑕点，所以

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \left(\int_0^1 + \int_1^3\right) \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$3\sqrt[3]{x-1}\Big|_0^{1-\varepsilon} = -3\sqrt[3]{\varepsilon} + 3$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \boxed{\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon' \to 0+} \int_{1+\varepsilon'}^3 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x = 3 \cdot \sqrt[3]{2},$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(1+\sqrt[3]{2}).$$

例3 计算广义积分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

解
$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln x)\right]_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln(\ln 2) - \overbrace{\ln(\underbrace{\ln(1+\varepsilon)}_{\to 0^+})}^{\to -\infty}\right] = +\infty$$

$$= \infty.$$ 故原广义积分发散.

注意

（1） 瑕积分与定积分表达方式相同，遇到有限区间上的积分时，要仔细检查是否有瑕点。

（2） 瑕积分N-L公式，换元积分公式、分部积分公式仍然成立，代入上、下限时对应的是极限值。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[F(b)-F(a+\varepsilon)\right]$$

$$= F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0^+} F(a+\varepsilon) = F(b) - F(a+0)$$

$$= F(x)\Big|_{a+0}^b$$

问题： 如何判断瑕积分的敛散 性?

设a是$f(x)$ 的瑕点， 作代换$x=a+\frac{1}{y}$,则

$x\to a \Leftrightarrow y\to\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx=-\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}}f(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}dy$$

$$=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}f(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}dy$$

瑕积分 $\to$ 无穷积分

约定：积分下限a是瑕点, $f(x),g(x)\in R[a+\varepsilon,b]$

瑕积分与无穷积分有平行的理论和结果 .

二. 瑕积分的性质

性质5.1 若$f_1(x), f_1(x)$的瑕点同为 $x=a, k_1, k_2$为任意常数，

则当瑕积分$\int_a^b f_1(x)dx$与$\int_a^b f_2(x)dx$都收敛时，

瑕积分$\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx$也收敛，且

$$\int_a^b [k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

性质5.2 若$f(x)$的瑕点为 $x=a$，且 $c\in(a,b)$为任意常数，

则瑕积分$\int_a^b f(x)dx$与$\int_a^c f(x)dx$同敛散，且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

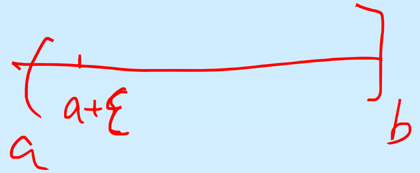
a c b

$\int_a^b = \int_a^c + \boxed{\int_c^b}$

$\int_a^{+\infty} = \int_b^{+\infty} + \int_b^a$

北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

三、瑕积分收敛的判别法



1．定理5.1（柯西准则）

若$f(x)$在$(a,b]$上有定义，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty, \forall\varepsilon>0, f(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，则$\int_a^b f(x)dx$ (a为瑕点)收敛的充要条件是

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$只要当$\forall a<u_1<u_2<a+\delta,$有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

$\boxed{\int_a^b f dx} = \lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x) = \lim\limits_{u\to a^+}[F(b)-F(u)]$

$= F(b) - \boxed{\lim\limits_{u\to a^+} F(u)}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$

s.t. $\forall u_1, u_2\in(a,a+\delta)$

有 $|F(u_1)-F(u_2)|<\varepsilon$

即 $\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$

2. 性质5.3

若$f(x)$在$(a,b]$上有定义, a为瑕点,且$\int_a^b |f(x)|dx$收敛,

则$\int_a^b f(x)dx$收敛,$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

绝对收敛$\Rightarrow$收敛;　收敛 $\not\Rightarrow$ 绝对收敛.

3. 定理5.2（比较判别法）

设$f(x)$, $g(x)$在$(a,b]$上有定义，瑕点同为 $x=a$,且对$\forall \varepsilon>0$, $f(x), g(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，对充分靠近 a的 $x\ (x>a)$,如果有$0\le f(x)\le g(x)$,则

1^o 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

2^o 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散.

$\int_0^1 \frac{dt}{t^p}$ $\begin{cases} 收敛, p<1 \\ 发散\ p\ge 1 \end{cases}$

常用的比较对象：

$x-a=t$

$\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^p}$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}\ (a>0) \begin{cases} 当 p<1 时收敛; \\ 当 p\ge 1 时发散. \end{cases}$$

4. 定理5.3（比较判别法极限形式）

$$\text{设} f(x), g(x) \geq 0, \text{且} \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \quad \text{则}$$

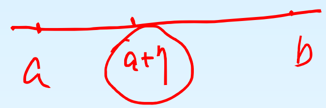
1° 当$0 < l < +\infty$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散；

2° 当$l = 0$时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

3° 当$l = +\infty$时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

5. 定理5.4(Dirichlet判别法)

设$f(x), g(x)$在$(a,b]$上有定义，且$f(x)$有唯一瑕点$x=a$，$\forall \varepsilon>0, f(x), g(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，如果$f(x),g(x)$满足下列条件：



1° $\exists M>0$, 使得对$\forall 0<\eta<b-a$，有 $\left|\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right|<M$;

2° g在$(a,b]$上单调,且$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$,

则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

6. 定理5.5(Abel判别法)

设$f(x),g(x)$在$(a,b]$上有定义，且$f(x)$有唯一瑕点$x=a$，$\forall\varepsilon>0$，$f(x),g(x)$在$[a+\varepsilon,b]$上可积，如果$f(x),g(x)$满足下列条件：

1° $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

2° $g(x)$在$(a,b]$中单调有界．

则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

瑕点为积分上限或者中间值时,有类似的结果.

例4 $\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)}dx$

解 $\because \frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)} \sim \frac{\ln x \ln(1+x)}{x} \sim \ln x (x \to 0+)$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -2\lim_{x\to 0+}\sqrt{x} = 0$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$收敛 $\therefore \int_0^1 \frac{\ln x \ln(1+x)}{x(1+x)}dx$收敛

例5 判别广义积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解 $\because$ 被积函数在点 $x=1$ 的右邻域内无界.

由洛必达法则知:

$$\lim_{x\to 1+0}(x-1)\frac{1}{\ln x}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1>0,$$

而 $\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$ 发散,

根据判别法极限形式, $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 发散.

例6 研究 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 的敛散性.

解 当$p<1$时, $x=0$是瑕点; 当$q<1$时, $x=1$是瑕点.

故取 $a\in(0,1)$, 把积分拆成两部分 :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

当$x\to 0+$, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}$,

故当 $p>0$时, 第一个积分收敛 ;

当$x\to 1-$时, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}$,

故当$q>0$时, 第二个积分收敛 ;

综上，原积分在 $p>0, q>0$时收敛 .

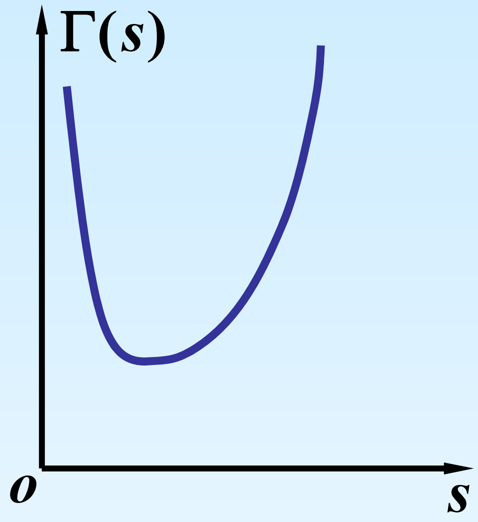
故积分定义了一个二元函数$B(p,q)$. ——Beta函数

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

例7 研究积分$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0)$的敛散性.

解 当$s<1$时, $x=0$是瑕点,

但它又是无穷积分.



下面我们把它拆成两个部分来讨论：

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx=\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx+\int_1^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$$

当$x\to 0$时, $e^{-x}x^{s-1}\sim x^{s-1}$,

所以第一个积分当$s>0$时收敛.

当$x\to+\infty$时, $x^2e^{-x}x^{s-1}\to 0$,

所以第二个积分不论s为何值都收敛.

因此原积分当$s>0$时收敛.

该积分定义了一个以s为变量的函数$\Gamma(s)$. ---Γ-函数

Γ 一函数的几个重要性质：

１． 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ (s>0).$

２． 当 $s\to+0$ 时, $\Gamma(s)\to+\infty.$

3. 余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}\ (0<s<1).$

４． 在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ 中，作代换 $x=u^2$,

有 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2s-1}du.$

例8 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$

解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx=\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}x^{m-2}\left(\frac{\sin^2 x}{x^m}\right)=1, m-2<1, m<3$ $\quad\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$ 收敛

由于$\displaystyle\left|\frac{\sin^2 x}{x^m}\right|\le\frac{1}{x^m},\quad m>1$ $\quad\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$ 收敛

$\displaystyle m\le 1,\frac{\sin^2 x}{x^m}=\frac{1-\cos 2x}{2x^m}$ $\quad\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx$ 发散

$\displaystyle\therefore\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^m}dx\quad 1<m<3$,收敛

例9 设$p>0$, 讨论积分$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx$的敛散性.

解 易见 $x=0$ 是瑕点, 作变换 $\frac{1}{x}=t$, 得

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}dt,$$

1^o. 当$p\geq 2$时, 积分发散.

$2-p\leq 0$

这是因为若取$A'=2k\pi, A''=2(k+1)\pi$,则当$k\to\infty$时,

$$\left|\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} t^{p-2}\sin t dt\right|\geq(2k\pi)^{p-2}\int_0^{\pi}\sin t dt$$

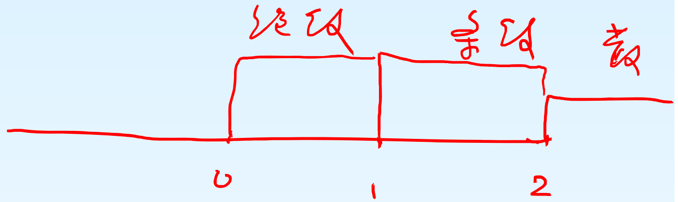
$$=2(2k\pi)^{p-2}\geq 2,$$

所以由Cauchy收敛原理,当$p\geq 2$时,积分发散.

2^o. 当$0 < p < 1$时，积分绝对收敛.

$\because \left|\dfrac{\sin t}{t^{2-p}}\right| \le \dfrac{1}{t^{2-p}}$，$\therefore$ 由比较判别法可知 .

3^o. 当$1 \le p < 2$时，积分条件收敛.



$\because$ 当$1 \le p < 2$时，t^{p-2}单调地趋于0，

$\therefore$ 由Dirichlet判别法，积分收敛 .

而此时，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^{2-p}}dt$是发散的，所以$\cdots$

例10 判断积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$的敛散性.

解 由于

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx,$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}$,

所以, $x=1$不是瑕点，因此 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$存在.

对于$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$，由于对充分小的 x,$\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right|\le 2|\ln x|$,而

$\sim \ln x$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[x\ln x-x]_\varepsilon^{\frac{1}{2}}存在,$$

故所给积分收敛 .

例11 设$\alpha>0$,讨论积分$\int_0^{\infty}[(1-\frac{\sin x}{x})^{-\alpha}-1]dx$的收敛性.

解 易见 $x=0$ 是瑕点，为此,把积分分成两部分：

$$I=\int_0^1\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]dx+\int_1^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]dx$$

$$=I_1+I_2$$

现讨论 I_1 的收敛性：

显然 I_1 的收敛性和 $I_1'=\int_0^1\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}dx$的收敛性相同.

因为当$x\to0+$时， $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^5)$,

所以，

$$1-\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3!}x^2+O(x^4)=\frac{1}{6}x^2(1+O(x^2)).$$

因而当$x\to 0+$时，

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}\sim\left(\frac{1}{6}\right)^{-\alpha}x^{-2\alpha}.$$

故当$\alpha<\dfrac{1}{2}$时，I_1'收敛.

由于$\dfrac{\sin x}{x}\le 1$，故I_1'绝对收敛.

再讨论I_2的收敛性： $\because |\frac{\sin x}{x}|<1$, 由二项式展开得，

因为当$x\to+\infty$时，

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}=1+\alpha\frac{\sin x}{x}+O(\frac{1}{x^2}).$$

所以，

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1=\alpha\frac{\sin x}{x}+O(\frac{1}{x^2}).$$

因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$条件收敛，

$\int_1^{+\infty}O(\frac{1}{x^2})dx$ 绝对收敛，

所以 I_2条件收敛.

故 I当$0<\alpha<\frac{1}{2}$时条件收敛.

例12 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$ 的收敛性.

解 原积分 $=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$

由 $\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$ 可知，　$\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}dx$

$p-1<1$

当 $p<2$ 时第一项积分（绝对）收敛； $p\geq 2$ $(p-1\geq 1)$ 发散

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

由 $\frac{\arctan x}{x^p}\sim\frac{\pi}{2x^p}\ (x\to\infty)$ 可知，

当 $p>1$ 时第二项积分收敛 .

所以当 $1<p<2$ 时积分收敛，其他情况 发散.

例13 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 的敛散性.

解 原积分 $=\int_0^1\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$

（1）由 $\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^p}(x\to 0+)$ 可知，

当 $p<1$ 时第一项积分（绝对）收敛；$p\geq 1$, 发散.

（2）又当 $p\leq 0$ 时 $\int_1^{+\infty}\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$ 发散，

这是因为若取 $A'=2k\pi, A''=2k\pi+\pi/6$, 则当 $k\to\infty$ 时，

$$\left|\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/6}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx\right|\geq(2k\pi)^{-p}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/6}e^{\sin x}\cos x dx\geq\sqrt{e}-1$$

当$0<p<1$时，$\forall A>1, \left|\int_1^A e^{\sin x}\cos x dx\right|<2e,$

$$\frac{1}{x^p}\text{单调减少} \to 0\ (x\to+\infty).$$

由Dirichlet判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}dx$收敛.

另一方面，当$0<p<1$时 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\left|\cos x\right|}{x^p}dx$发散，

事实上，$\frac{e^{\sin x}\left|\cos x\right|}{x^p}\geq e^{-1}\frac{\left|\cos x\right|}{x^p}\geq e^{-1}\frac{\cos^2 x}{x^p}=\frac{e^{-1}}{2}[\frac{1}{x^p}+\frac{\cos 2x}{x^p}]$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\text{发散，而}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^p}dx\text{收敛}$$

综上，$0<p<1$时积分条件收敛，其他情况发散.

五、小结

一. 瑕积分的性质

二. 暇积分收敛的判别法

1 . 柯西准则

2 . 比较判别法

3 . 柯西判别法

4 . 狄利克雷判别法

5 . 阿贝尔判别法

作业

9.4

1（1，3，5，7），2(2，4，6，8)，
3（1，3，5）