第15章 习题课

例1 设 $u=f(xyz)$，其中f有三阶连续导数，

$$f(1)=0, f'(1)=1, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z\partial y\partial x}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$$

求$f(x)$.

例2 设$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, f, φ具有二阶连续偏导数，

求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

例3 若 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z),(t\in R)$,

证明$x\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+y\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}+z\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=kf(x,y,z)$.

例4 设 $u=f(x,y,z), y=\varphi(x,t), t=\psi(x,z)$

各函数满足求偏导条件，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

例5 已知 $u=\dfrac{x+y}{x-y}$, 求 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial y^n \partial x^m}$.

例6 设$u(x,y)=\int_0^{xy} f(t)(xy-t)\mathrm{d}t$,其中$f(t)$连续,求$u_{xx}+u_{yy}$.

例7 设$f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, $\varphi(x,y)$在$(0,0)$的某个邻域内连续,且$\varphi(0,0)=0$,证明 $f(x,y)$在原点处可微 .

例8 讨论下列函数在原点的连续性、可微分性以及偏导数的存在性、连续性.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

例9 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

验证函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 沿任意方向的方向导数都存在，但不能应用公式求该点的方向导数，并说明理由.

例10 求方程组$\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ x^2+2y^2+3z^2=4a^2 \end{cases}$所确定的 y, z 关于x的

隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$.

例11 试证锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}+3$ 的所有切平面都通过

锥面的顶点.

例12 设$z=g(x,y)=f(e^{x+y}, x^2+y^2)+1$, $f(x,y)$具有

二阶连续偏导数，且$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-x-y+1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$,

求曲面$z=g(x,y)$在点$(0,0)$处的切平面和法线方程.

例13 求$f(x,y,z)=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}$

$(x,y,z,r>0)$下的极小值.

例14 证明$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$与平面$Ax+By+Cz=0$相交

所截得的椭圆面积为$\pi\sqrt{\frac{(A^2+B^2+C^2)a^2b^2c^2}{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}}$.

例15 写出下列函数在(0,0)的带peano型余项的Taylor公式

(1) $z=\frac{\cos y}{1-x}$, 2阶; (2) $z=\sin x\cos y$, 3阶;

(3) $z=xye^{-(x^2+y^2)}$, 4阶.