§3 三重积分的定义与计算(2)

三重积分的变量代换

定理3.5 设$f(x,y,z)$在有界闭区域 V 上可积, 若变换

$T: x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$, 将 uvw

空间中的区域 Δ 一对一的映成 xyz 空间中的区域 V,

函数 $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ 及它们的一阶偏

导数在Δ内连续, 且

$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}\neq 0,\quad (u,v,w)\in\Delta.$$

则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

$$=\iiint\limits_{\Delta} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudvdw$$

注 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}$

例10 计算$\iiint\limits_V (x+y+z)\cos(x+y+z)^2 dV$，其中

$$V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x-y\le 1, 0\le x-z\le 1, 0\le x+y+z\le 1\}.$$

解 引入坐标变换：

$$\begin{cases} u=x-y \\ v=x-z\,, \\ w=x+y+z \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3$$

$$\iiint_V (x+y+z)\cos(x+y+z)^2\,dV,$$

$$=\iiint_\Delta w\cos w^2\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

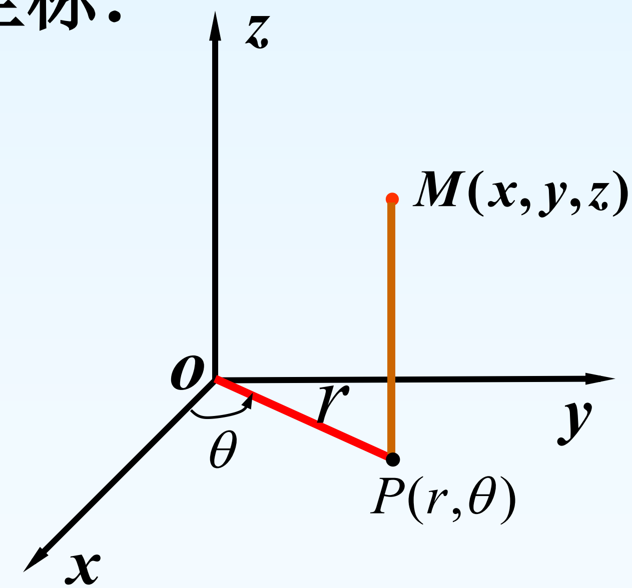
$$=\int_0^1 du\int_0^1 dv\int_0^1 w\cos w^2\cdot\frac{1}{3}dw$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 w\cos w^2 dw$$

$$=\frac{1}{6}\sin w^2\Big|_0^1=\frac{1}{6}\sin 1$$

（一）柱面坐标变换

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点，并设点 M 在 xoy 面上的投影 P 的极坐标为 r,θ，则这样的三个数 r,θ,z 就叫点 M 的柱面坐标.



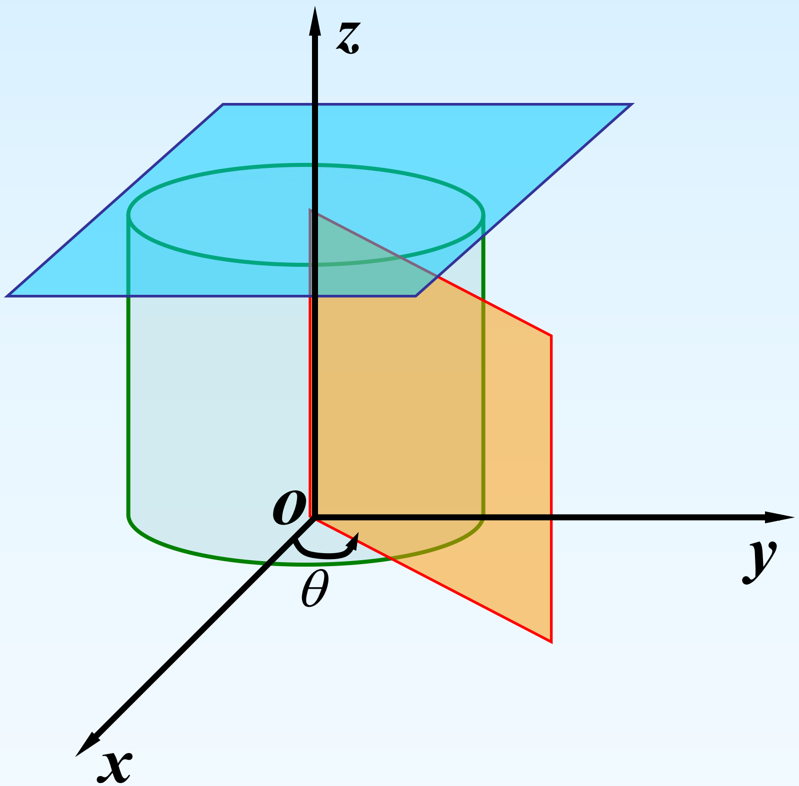
规定：
$$0 \le r < +\infty,$$
$$0 \le \theta \le 2\pi,$$
$$-\infty < z < +\infty.$$

如图，三坐标面分别为

r 为常数 $\Longrightarrow$ 圆柱面；

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面；

z 为常数 $\Longrightarrow$ 平　面.



柱面坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

柱面坐标变换的Jacobi行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r,$$

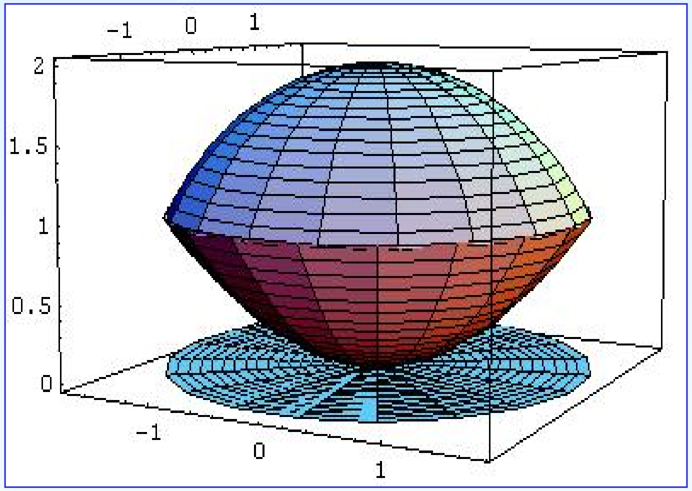
$$\therefore \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Delta} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\boxed{r}drd\theta dz.$$

定理条件？　　计算方法？

北京航空航天大學 BEIHANG UNIVERSITY

例11 计算$I=\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$，其中$V$是球面$x^2+y^2+z^2=4$与抛物面$x^2+y^2=3z$上侧所围的立体.



解 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$

知交线为 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$

把Ω投影到xoy面上, D： $x^2+y^2\le 3$

$$V:\quad \frac{r^2}{3} \le z \le \sqrt{4-r^2},$$

$$0 \le r \le \sqrt{3},$$

$$0 \le \theta \le 2\pi.$$

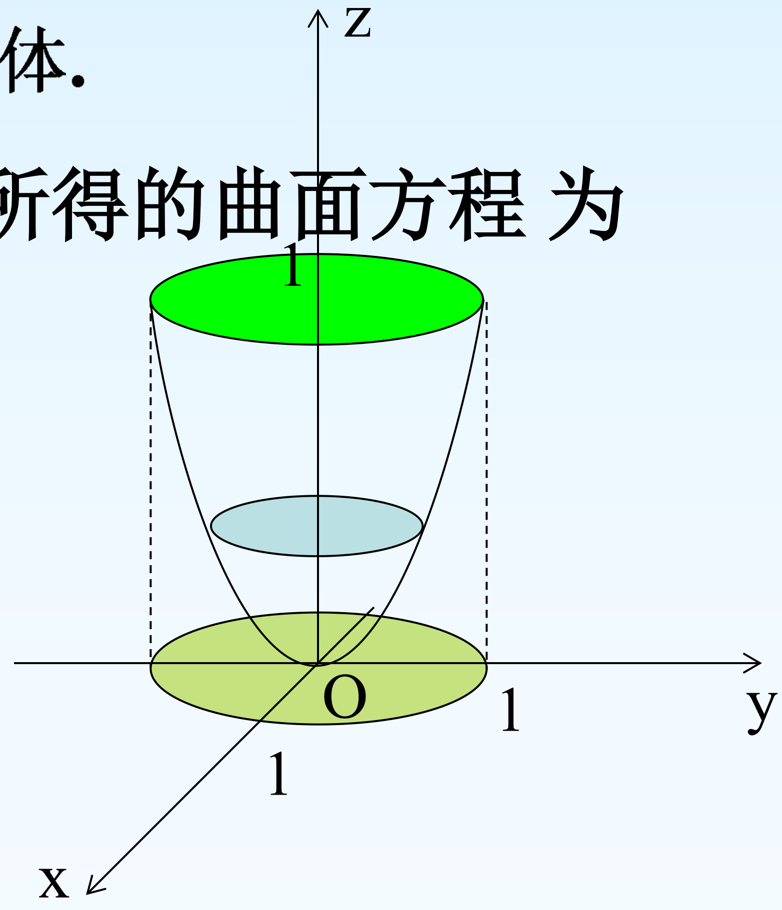
$$I = \iint_D dxdy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z \cdot r dz = \frac{13}{4}\pi.$$

例12 计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中$V$是曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕z轴旋转一周而成的曲面与两平面$z=2, z=8$所围的立体.

解 曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转所得的曲面方程为

$$x^2+y^2=2z,$$

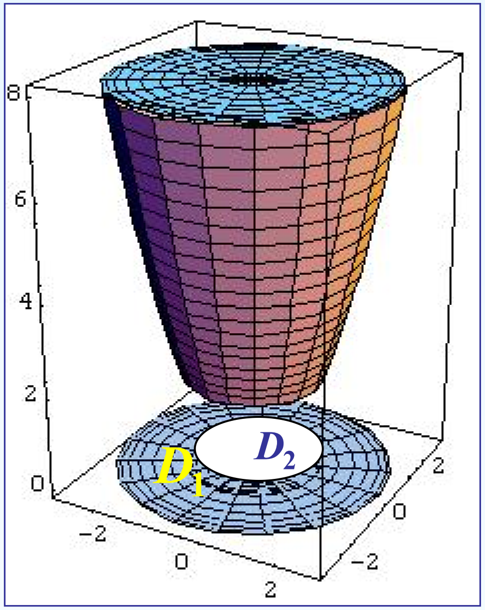


方法一

$$D_1: \quad x^2+y^2\le 16, \qquad V_1: \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 4 \\ \dfrac{r^2}{2}\le z\le 8 \end{cases},$$

$$D_2: \quad x^2+y^2\le 4,$$

$$V_2: \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 2 \\ \dfrac{r^2}{2}\le z\le 2 \end{cases}.$$



$$I = I_1 - I_2$$

$$= \iiint\limits_{V_1} (x^2 + y^2)dxdydz - \iiint\limits_{V_2} (x^2 + y^2)dxdydz,$$

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} dxdy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{8} (x^2 + y^2)dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 rdr \int_{\frac{r^2}{2}}^{8} r^2 dz = \frac{4^5}{3}\pi,$$

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} dxdy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{4} (x^2 + y^2)dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^2 dz = \frac{2^5}{6}\pi,$$

所以$I = \frac{4^5}{3}\pi - \frac{2^5}{6}\pi = 336\pi.$

方法二

$$V:\begin{cases} 2 \le z \le 8 \\ x^2 + y^2 \le 2z \end{cases} \Rightarrow V:\begin{cases} 2 \le z \le 8 \\ 0 \le r \le \sqrt{2z} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$I = \int_2^8 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le 2z} (x^2 + y^2)dxdy$$

$$= \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^2 \cdot r dr$$

$$= 2\pi \int_2^8 \frac{1}{4} \cdot (2z)^2 dz$$

$$= 336\pi$$

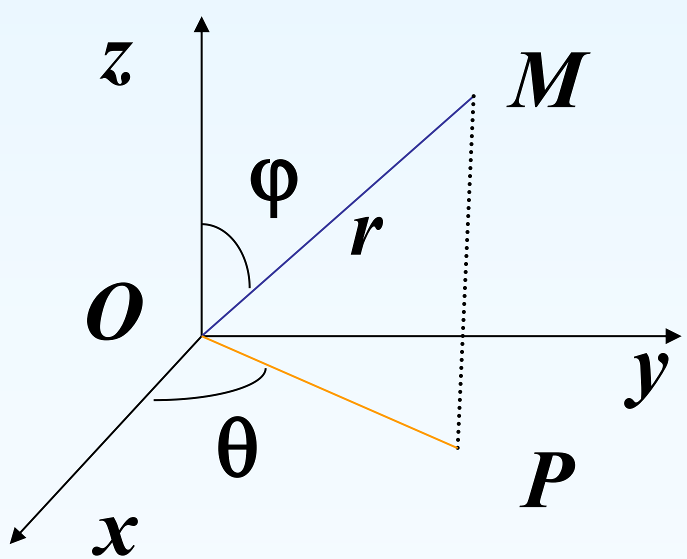
（二） 球面坐标变换

设 $M(x,y,z)$ 为空间内一点，则点 M 可用三个有次序的数 r，φ，θ 来确定，

其中 r 为原点 O 与点 M 间的距离，

φ 为有向线段 OM 与 z 轴正向所夹的角，

θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 OP 的角，



这里P为点 M 在 xoy 面上的投影， 这样的三个数r,φ,θ 就叫做点 M 的球面坐标.

规定：

$0 \le r < +\infty,\quad 0 \le \varphi \le \pi,$

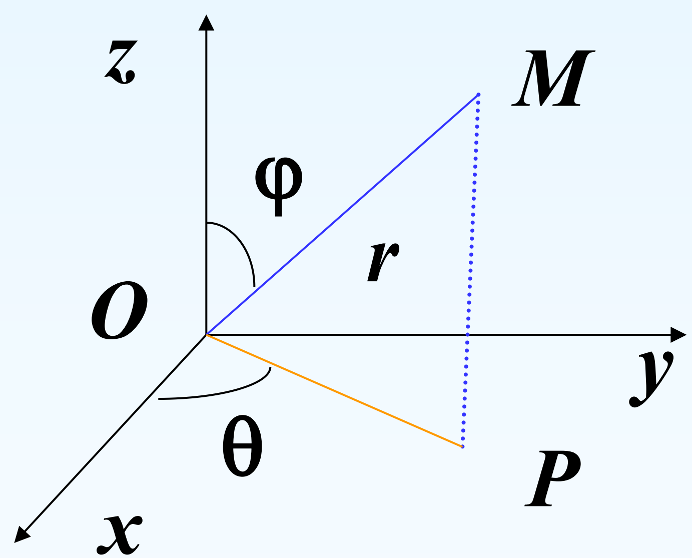
$0 \le \theta \le 2\pi.$

如图，三坐标面分别为

r 为常数 $\Longrightarrow$ 球 面；

φ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆锥面；

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面.

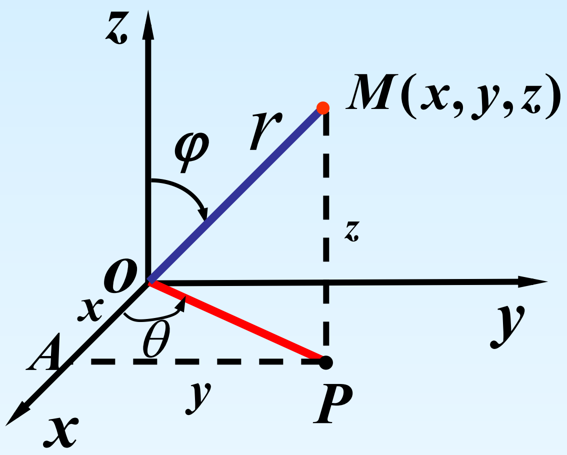


如图，

设点 M 在 xoy 面上的投影为 P，

点 P 在 x 轴上的投影为 A，

则 $OA = x,\ AP = y,\ PM = z.$



球面坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0 \le r < +\infty, \\ &0 \le \varphi \le \pi, \\ &0 \le \theta \le 2\pi. \end{aligned}$$

球坐标变换的Jacobi行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}$$

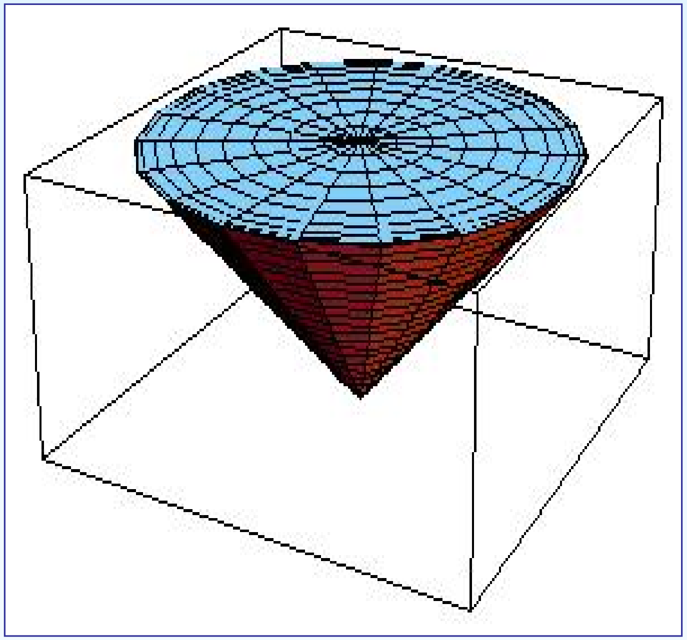
$$=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\varphi$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=$$

$$\iiint_\Delta f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\boxed{r^2\sin\varphi}drd\varphi d\theta.$$

例 13 计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$，其中$V$是锥面$x^2+y^2=z^2$，与平面$z=a \quad (a>0)$所围的立体.

解 1 采用球面坐标



$$\because \quad z=a$$

$$\Rightarrow r=\frac{a}{\cos\varphi},$$

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore V:\ 0\le r\le \frac{a}{\cos\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$I=\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{\cos^5\varphi}-0\right)d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{10}a^5.$$

解 2 采用柱面坐标

$$\because x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=r, \qquad D: \quad x^2+y^2 \le a^2,$$

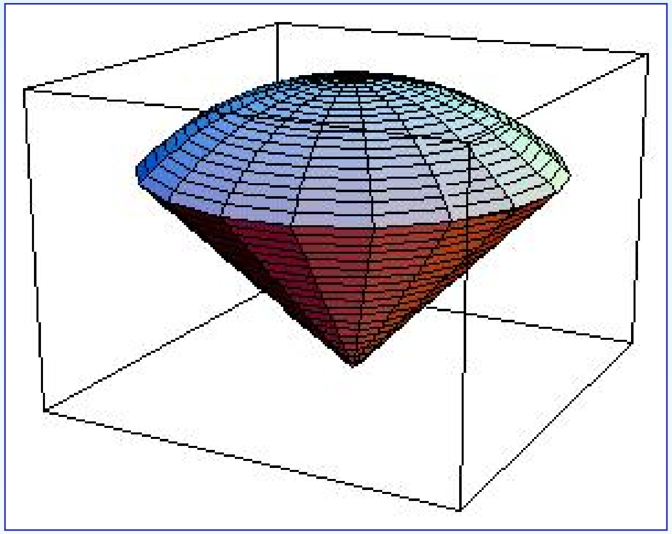
$$V: \quad r \le z \le a, \qquad 0 \le r \le a, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

$$I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_r^a r^2dz$$

$$=2\pi\int_0^a r^3(a-r)dr \;=2\pi[a\cdot\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}]=\frac{\pi}{10}a^5.$$

例 14 求曲面 $x^2+y^2+z^2\le 2a^2$ 与 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 所围 成的立体体积.

解 V 由锥面和球面围成，采用球面坐标，



由 $x^2+y^2+z^2=2a^2$

$$\Rightarrow \quad r=\sqrt{2}a,$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$V:\quad 0\le r\le\sqrt{2}a,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

由三重积分的性质知 $V=\iiint\limits_{V} dxdydz,$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{(\sqrt{2}a)^3}{3}d\varphi=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3.$$

用柱坐标亦不难计算！

广义球坐标变换

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$$

其中

$$0 \le r < +\infty$$

$$0 \le \varphi \le \pi$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

广义球坐标变换的Jacobi行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi,$$

例15 求 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围体积.

解 引入广义球坐标:

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = br\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = cr\cos\varphi$$

$$0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\pi \qquad J = abcr^2\sin\varphi,$$

$$V=\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} dxdydz = abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi dr=\frac{4\pi}{3}abc$$

利用对称性化简三重积分计算

1. 轮换对称性

若把x与y对调后，Ω不变，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(y,x,z)\mathrm{d}V$$

其他情况与此类似.

如$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2\}$，则

$$\iiint_{\Omega} f(x)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(y)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V.$$

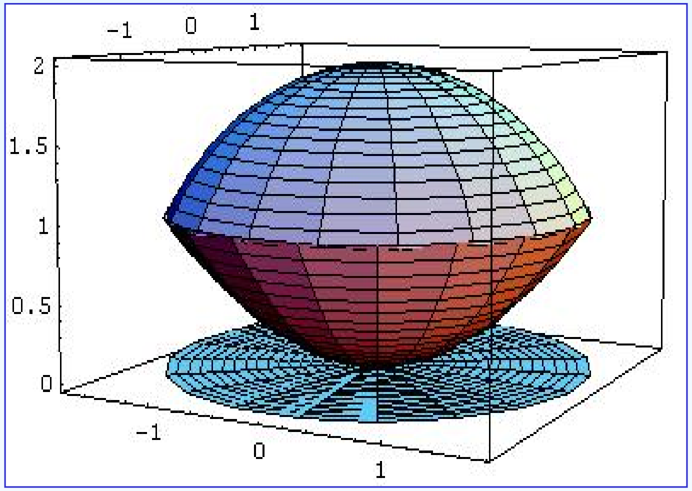
例16 计算$\iiint\limits_V x^2 dV$,

其中V是由上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$与抛物面$3z=x^2+y^2$上侧所围成的立体.

解 球面与抛物面的交线为:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$$

即:$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$



由对称性：

$$\iiint_V x^2 dV = \iiint_V y^2 dV = \frac{1}{2}\iiint_V (x^2+y^2)dV$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{3}} r^2\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)rdr$$

$$= \cdots\cdots = \frac{49}{30}\pi.$$

2. 奇偶对称性

若积分域V关于xoy面对称，

函数$f(x,y,z)$关于变量z是奇函数，

则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=0$;

函数$f(x,y,z)$关于变量z是偶函数，

则$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=2\iiint\limits_{V_上} f(x,y,z)dxdydz.$

区域关于其他坐标平面对称的情形有类似结论

例 17 计算 $\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz$

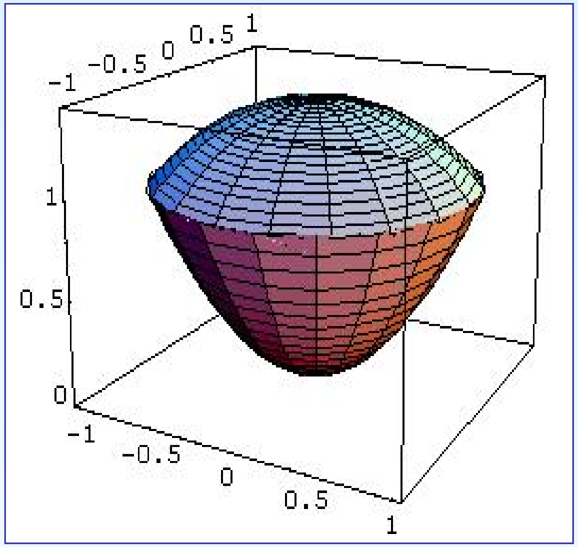
其中积分区域$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解 积分域关于三个坐标面都对称，

被积函数是z的奇函数,

$$\iiint\limits_V \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dxdydz=0.$$

例 18 计算 $\iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz$ 其中 V 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 上侧和球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 所围成的空间闭区域.



解 $\because (x+y+z)^2$

$= x^2+y^2+z^2+2(\underline{xy+yz}+zx)$

其中 $xy+yz$ 是关于 y 的奇函数,

且 V 关于 zox 面对称, $\therefore \iiint\limits_V (xy+yz)dV=0$

同理 $\because\ zx$是关于x的奇函数,

且V关于yoz面对称, $\therefore\ \iiint\limits_V xzdv = 0,$

由对称性知 $\iiint\limits_V x^2 dv = \iiint\limits_V y^2 dv,$

则$I = \iiint\limits_V (x+y+z)^2 dxdydz$

$$= \iiint\limits_V (2x^2 + z^2)dxdydz,$$

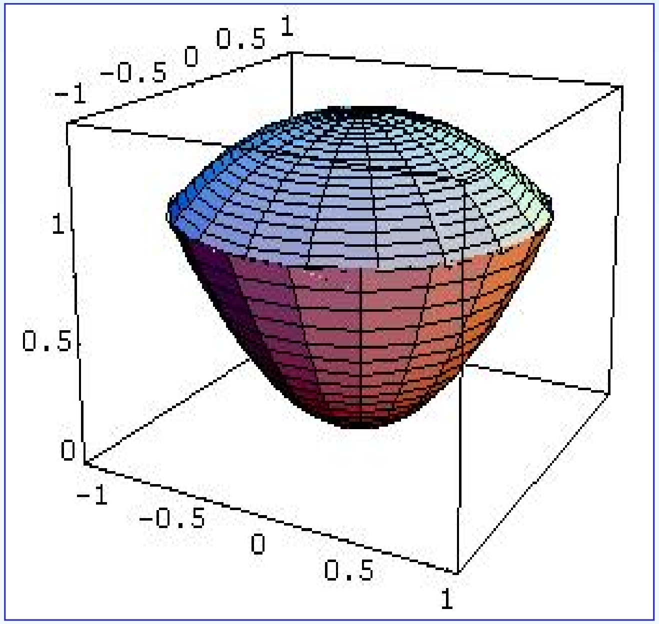
V 在 xy 平面上的投影区域为:

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

$$\text{原积分}=\iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}(2x^2+z^2)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r(2r^2\cos^2\theta+z^2)dz$$

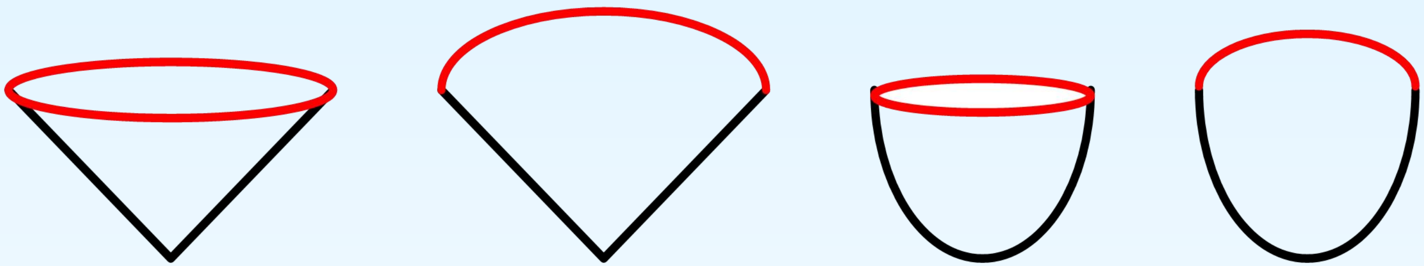
$$=\frac{\pi}{60}(90\sqrt{2}-89).$$



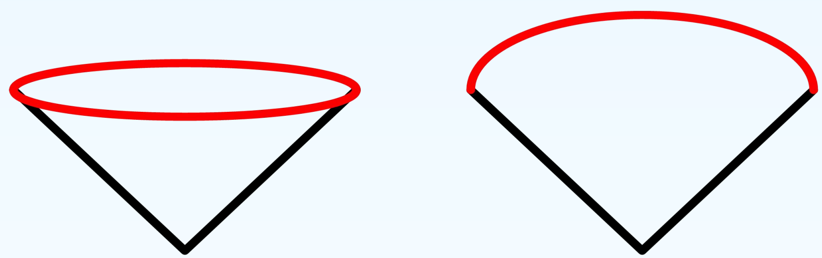
小结

三重积分的变量代换

柱面坐标变换



球面坐标变换



利用对称性(轮换、奇偶)计算三重积分