北京航空航天大学
BEIHANG UNIVERSITY

# 工科数学分析进阶课程

任课老师：苑　佳

数学科学学院

# Fourier级数的分析性质

一、Fourier级数的逐项积分定理

二、Fourier级数的逐项微分定理

# 一、Fourier级数的逐项积分定理

**定理3.1** （Fourier级数的逐项积分定理）

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积，其傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则$f(x)$的Fourier级数可以逐项积分，即对于任意$c,x\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t=\int_c^x\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

**证明**:这里仅对$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上上只有有限个第一类不连续点的情况加以证明.

# 一、Fourier级数的逐项积分定理

考虑函数，$F(x)=\int_c^x\left[f(t)-\dfrac{a_0}{2}\right]d\,t$,则$F(x)$是周期$2\pi$的连续函数,

且在$f(x)$的连续点，成立$F'(x)=f(x)-\dfrac{a_0}{2}$，而在$f(x)$的第一类不

连续点，$F(x)$的两个单侧导数$F_{\pm}'(x)=f(x\pm)-\dfrac{a_0}{2}$都存在.

$F(x)$可展开为收敛的Fourier级数

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx).$$

其中,$A_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}\,x, B_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\mathrm{d}\,x.$

# 一、Fourier级数的逐项积分定理

分部积分，

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}F(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\frac{a_0}{2}]\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{b_n}{n}.$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}F(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F'(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\frac{a_0}{2}]\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a_n}{n}.$$

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx).$$

# 一、Fourier级数的逐项积分定理

令$x=c$,有 $$0=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nc+\frac{a_n}{n}\sin nc\right).$$

两式相减

$$F(x)=\int_c^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nx-\sin nc}{n}+b_n\frac{-\cos nx+\cos nc}{n}\right).$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t.$$

结论得证.

注：只要$f(x)$可以展成Fourier级数，

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

即使这个级数并不表示$f(x)$，甚至根本不收敛，它的逐项积分级数也一定能收敛于$f(x)$的积分.

# 一、Fourier级数的逐项积分定理

从定理3.1的证明，我们还顺便得到了判断一个三角级数是否为Fourier级数的一个必要条件.

**推论:** $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是某个在上可积或绝对可积函数的Fourier级数的必要条件是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛。

由推论可知并不是任意一个收敛的三角级数就一定是某个可积或绝对可积函数的Fourier级数的. 比如三角级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$，由Dirichlet判别法可知它是点点收敛的. 但由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散，它不可能是某个可积或绝对可积函数的Fourier级数.

# 二、Fourier级数的逐项微分定理

**定理3.2** （Fourier级数的逐项微分定理）

设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续，$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$f(-\pi)=f(\pi)$，且除了有限个点外$f(x)$可导.进一步假设$f'(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积（注意：在有限个点可能无定义，但这并不影响其可积性）.

则$f'(x)$的Fourier级数可由$f(x)$的Fourier级数逐项微分得到，即

$$f'(x)\sim\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a_0}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx).$$

## 二、Fourier级数的逐项微分定理

**证明:** 由定理条件，$f'(x)$可展开为Fourier级数.记$f'(x)$的Fourier系数为$a_n', b_n'$，则有，

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \left.\frac{f(x)\cos nx}{\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = nb_n,$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = -a_n, n = 1,2,\cdots.$$

$$\therefore\ f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx + nb_n\cos nx).$$ **结论得证.**

**Fourier级数除了上述分析性质之外，还有逼近性质，帕塞瓦不等式（等式）及应用等. 这里从略.**

# 本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院