北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

工科数学分析进阶课程

任课老师：苑 佳

数学科学学院

含参变量的反常积分

一、含参变量反常积分的一致收敛性

二、含参变量反常积分一致收敛性的判别

Cauchy收敛定理、Weierstrass定理

Dirichlet判别法、Abel判别法

三、Gamma函数和Beta函数

一、含参变量反常积分的一致收敛性

【定义1】 设函数$f(x,y)$定义在区间$[a,+\infty)\times[c,d]$上，如果对于某个$y_0\in[c,d]$,反常积分$\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$收敛，则称含参变量反常积分$\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$在$y_0$处**收敛**，并称$y_0$为它得**收敛点**.

设E为所有收敛点组成的点集，则E是函数$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$的定义域,也称为反常积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$的**收敛域**.

一、含参变量反常积分的一致收敛性

【定义2】 设函数$f(x,y)$定义在区间$[a,+\infty)\times[c,d]$上，如果$\forall y\in[c,d]$，反常积分 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$存在，如果$\forall\varepsilon>0$,存在与$y$无关的正数$A_0$,使得当$A>A_0$时，对所有$y\in[c,d]$,有

$$\left|\int_a^{A}f(x,y)\mathrm{d}x-I(y)\right|=\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

则称$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$关于y在$[c,d]$上一致收敛(于$I(y)$).也简称

$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在$[c,d]$上一致收敛.

同样可以定义$\int_{-\infty}^{b}f(x,y)dx,\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$关于$y$的一致收敛.

一、含参变量反常积分的一致收敛性

无界函数的含参变量反常积分的一致收敛性 (设b为奇点)

【定义3】设函数$f(x,y)$定义在区间$[a,b)\times[c,d]$上，如果对于任意$y\in[c,d]$,反常积分 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$存在.如果$\forall\varepsilon>0$,存在与$y$无关的$\delta>0$,使得当$0<\eta<\delta$时,对所有$y\in[c,d]$,有

$$\left|\int_a^{b-\eta} f(x,y)\mathrm{d}x - I(y)\right|<\varepsilon$$

则称$\int_a^b f(x,y)dx$关于y在$[c,d]$上一致收敛(于$I(y)$).也简称

$\int_a^b f(x,y)dx$ 在$[c,d]$上一致收敛.

一、含参变量反常积分的一致收敛性

【例1】证明：含参变量 α的反常积分$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$关于$\alpha$在$[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛$(\alpha_0 > 0)$，但在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

【解】I)　由于$\alpha \geq \alpha_0$时，

$$0 \leq \int_A^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \overset{令 t=\alpha x}{=} \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha A}^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 A} \xrightarrow{A\to+\infty} 0$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > 0, 使得当 A > A_0 时, \left|\frac{1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 A}\right| < \varepsilon.$$

一、含参变量反常积分的一致收敛性

$$\Rightarrow \quad \left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\right| < \left|\frac{1}{\alpha_0}\mathrm{e}^{-\alpha_0 A}\right| < \varepsilon,$$

$\therefore \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} dx$关于$\alpha$在$[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛$(\alpha_0 > 0)$.

II) $\quad \forall A > 0, \quad 0 \le \int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha A} \xrightarrow{\alpha \to 0+} +\infty$

$\therefore$必存在某个$\alpha(A) > 0$,使得 $\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(A)x}\mathrm{d}x > 1$,

$\therefore \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} dx$关于$\alpha$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

二、一致收敛性的判别

【定理1】(Cauchy收敛定理)

含参量积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛的充要条件是

$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$，当 $A', A'' > A_0$ 时，对任意的 $y \in [c,d]$，都有

$$|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dx| < \varepsilon$$

【推论1】 如果存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于任意大的正数 A_0，总存在 $A', A'' > A_0$ 及 $y_{A_0} \in [c,d]$，使得 $|\int_{A'}^{A''} f(x,y_{A_0})dx| \geq \varepsilon_0$，

那么含参量积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 $[c,d]$ 上不一致收敛.

二、一致收敛性的判别

【定理2】(Weierstrass定理)

如果存在$F(x)$使得 (1) $|f(x,y)|\le F(x),\quad (x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d]$,

(2) 反常积分$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$收敛,

那么含参量积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在$[c,d]$上一致收敛.

【证】因为$\int_a^{+\infty}F(x)dx$收敛，则由$Cauchy$收敛原理可知:

$$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>a,\text{当}A',A''>A_0\text{时},\text{都有}\left|\int_{A'}^{A''}F(x)dx\right|<\varepsilon$$

$$\text{当}A',A''>A_0\text{时},\forall y\in[c,d],\text{有}\left|\int_{A'}^{A''}f(x,y)dx\right|\le\left|\int_{A'}^{A''}F(x)dx\right|<\varepsilon$$

所以含参量积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$在$[c,d]$上一致收敛.

二、一致收敛性的判别

【例2】讨论$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx,\ (y\ge a>0)$的一致收敛性.

【解】 $f(x,y)=\frac{\cos xy}{x^2+y^2}$在$(x,y)\in[0,+\infty)\times[a,+\infty)$上连续,

因为 $\left|\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{x^2+a^2}$, 又因为$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx$收敛,

利用维尔斯特拉斯判别 法可知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx\text{在}[c,d]\text{上一致收敛}.$$

二、一致收敛性的判别

【定理3】(Dirichlet判别法)

如果$f(x,y)$和$g(x,y)$满足下面三个条件：

1° $\int_a^A f(x,y)dx$ 在$[c,d]$上一致有界，即存在$L>0$，使得

$$\left|\int_a^A f(x,y)dx\right| \le L, \quad a<A<+\infty, y\in[c,d];$$

2° $g(x,y)$关于x单调，即对于固定的 $y\in[c,d]$，g关于x是单调;

3° 当$x\to+\infty$时$g(x,y)$关于y在$[c,d]$上一致收敛到0，即$\forall\varepsilon>0$，存在与y无关的正数A_0，使得当$x>A_0$时，$\forall y\in[c,d]$，有

$$|g(x,y)|<\varepsilon.$$

则$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛.

二、一致收敛性的判别

【定理4】(Abel判别法)

如果$f(x,y)$和$g(x,y)$满足下面三个条件：

1° $\int_a^A f(x,y)dx$关于y在$[c,d]$上一致收敛；

2° $g(x,y)$关于x单调，即对于固定的 $y\in[c,d]$, g关于x是单调;

3° $g(x,y)$一致有界，即存在正数 L,使得

$$|g(x,y)|\le L,\qquad (x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d].$$

则$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛.

二、一致收敛性的判别

【例3】 证明:$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$是一致收敛的，其中$0\le\alpha\le+\infty$.

【证】 $\because e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}=\cos x\cdot\frac{1}{e^{\alpha x}\sqrt{x}}$,

对任意$A>1$,有$\left|\int_1^A \cos x dx\right|=|\sin A-\sin 1|\le 2$,

$\frac{1}{e^{\alpha x}\sqrt{x}}$关于$x$在$[1,+\infty)$上单调递减，$0<\frac{1}{e^{\alpha x}\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$,

显然$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\alpha x}\sqrt{x}}=0$对$0\le\alpha<+\infty$是一致的,

$\therefore$由Dirichlet判别法可知:$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$在$[0,+\infty)$一致收敛.

二、一致收敛性的判别

【例4】证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 关于 y 在 $[y_0,+\infty)(y_0>0)$ 上一致收敛，

但在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛．

【证】 $$\left|\int_0^A \sin xy dx\right| = \left|\frac{1-\cos(Ay)}{y}\right| \le \frac{2}{y} \le \frac{2}{y_0},\qquad A\ge 0, y\ge y_0,$$

因此它在 $[y_0,+\infty)$ 一致有界，而 $\frac{1}{x}$ 是 x 的单调递减函数且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,

由于 $\frac{1}{x}$ 与 y 无关，因此这个极限关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ 上一致，所以由

Dirichlet 判别法可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ 上一致收敛．

二、一致收敛性的判别

【证】 对于正整数n，取 $y_n=\dfrac{1}{n}$,这时

$$\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin xy_n}{x}dx\right|=\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}dx\right|\geq\frac{1}{\frac{3}{2}n\pi}\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\sin\frac{x}{n}dx\right|=\frac{2}{3\pi}.$$

因此只要取$\varepsilon_0=\dfrac{2}{3\pi}$,则对于任意大的正数$A_0$,总∃正整数$n$

满足$n\pi>A_0$,及 $y_n=\dfrac{1}{n}$,使得 $\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\dfrac{\sin xy_n}{x}dx\right|\geq\dfrac{2}{3\pi}=\varepsilon_0$

由$Cauchy$收敛原理可知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xy}{x}dx$关于$y$在$(0,+\infty)$上非一致收敛．

三、Gamma函数和Beta函数

Gamma函数 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx(s>0)$

特点: 1. 积分区间为无穷区间;

2. 当$s-1<0$时,被积函数在点$x=0$的右邻域内无界.

当$s\geq 1$时, 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{s-1}e^{-x}}{e^{-\frac{x}{2}}}=0$,

$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{2}}dx=-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^{+\infty}=2$ 收敛 所以$\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ 收敛.

三、Gamma函数和Beta函数

当$0 < s < 1$时，

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\dfrac{1}{x^{1-s}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1, \quad \Gamma_1\text{收敛},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0, \quad \Gamma_2\text{收敛},$$

Γ 对所有的 $s > 0$ 收敛.

三、Gamma函数和Beta函数

$\Gamma-$函数的递推公式　递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ (s>0).$

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s e^{-x}dx$$

$$=-e^{-x}x^s\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx\quad =s\Gamma(s)$$

特别地,

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1\quad \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!\Gamma(1),$$

$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\cdot 2!\Gamma(1)=3!\Gamma(1),$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1,\ \therefore \Gamma(n+1)=n!\Gamma(1)=n!.$$

三、Gamma函数和Beta函数

形如 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$的含参变量积分称为

Beta函数,或者第一类Euler积分.

$\forall a\in(0,1)$, 把积分拆成两部分：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

当$x\to 0$时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}$,

故当$p>0$时,第一个积分收敛;

当$x\to 1$时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}$,

$\Rightarrow q>0$时,第二个积分收敛;

因此原积分在 $p>0,q>0$时收敛.

即：$B(p,q)$的定义域为$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

三、Gamma函数和Beta函数

Beta函数的性质

1.对称性 $\boxed{B(p,q)=B(q,p),p>0,q>0.}$

2.递推公式 $\boxed{B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),p>0,q>1.}$

【定理5】 *Beta*函数和Gamma函数的关系为：

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,q>0.$$

三、Gamma函数和Beta函数

【例5】 已知$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$,计算概率积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

【解】 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx(s>0)$ 做变量替换 $x=t^2$,有

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} t^{2s-1}e^{-t^2}dt,$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt, \quad \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

三、Gamma函数和Beta函数

【例6】 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x dx.$

【解】 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \overset{x=\cos^2 t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2q-1}(\cos t)^{2p-1}dt$

利用*Beta*函数的性质及*Gamma*函数的递推公式得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x dx=\frac{1}{2}B(\frac{5}{2},\frac{7}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{1}{2\cdot 5!}(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi})(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi})=\frac{3\pi}{512}.$$

$$\boxed{\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(n)=(n-1)!.}$$

作业

习题19.2：　1，　2，　3，　8，　9

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院