第十三章 傅里叶(Fourier)级数

§13.1 Fourier级数的定义和收敛定理

一、问题的提出

简谐波：$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$

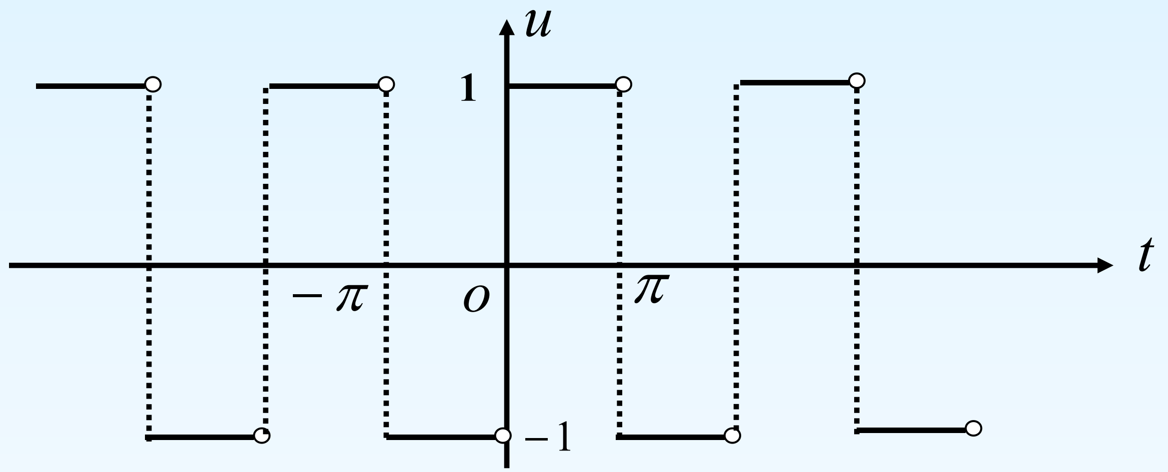
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: 周期； ω: 角频率；

φ: 初相； a: 振幅.

$x_1(t) = \sin t$， $x_2(t) = \sin 3t$,

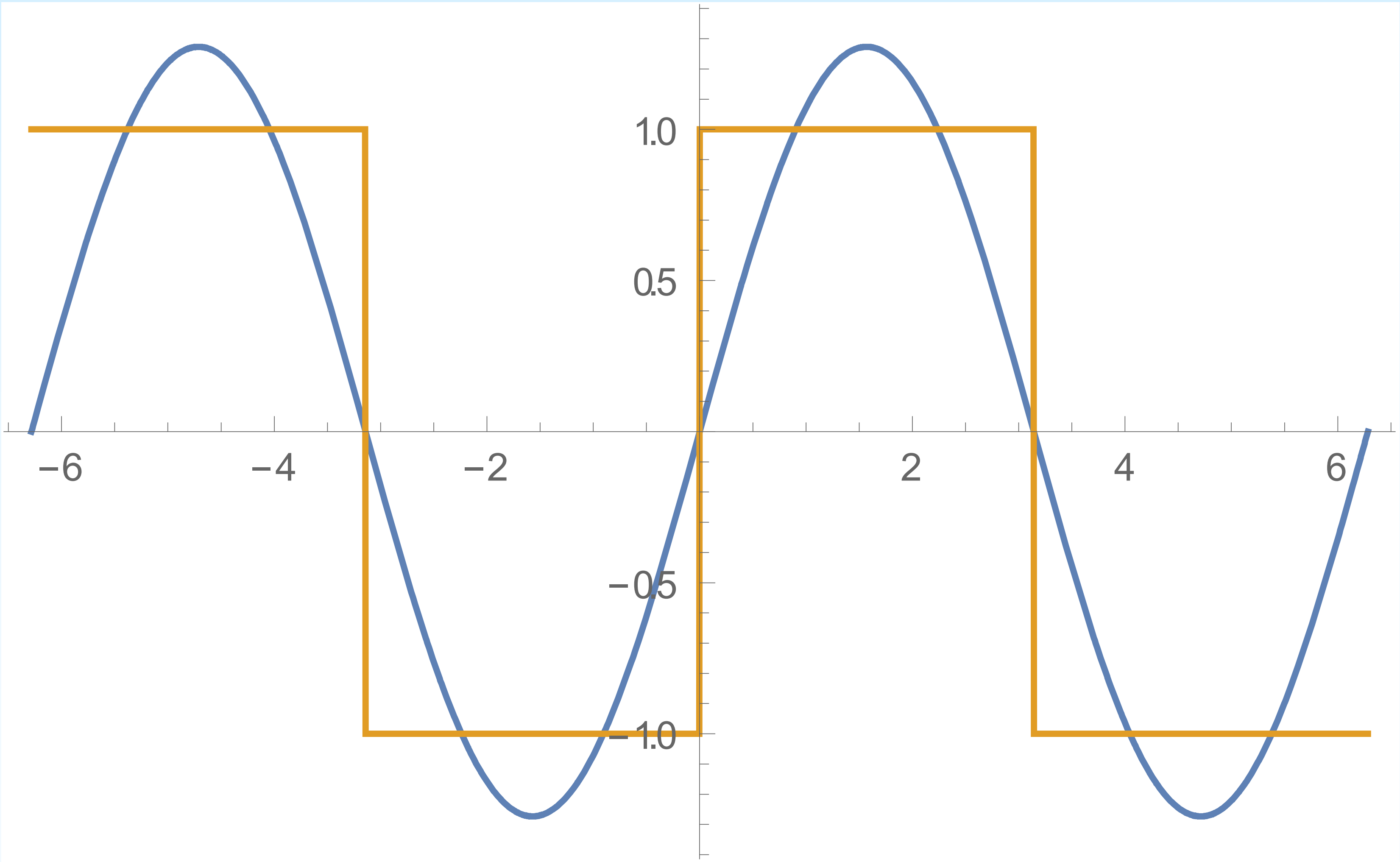
$x_1(t) + x_2(t)$?

非正弦周期函数:矩形波 $u(t)=\begin{cases}-1, & 当-\pi\le t<0\\ 1, & 当0\le t<\pi\end{cases}$

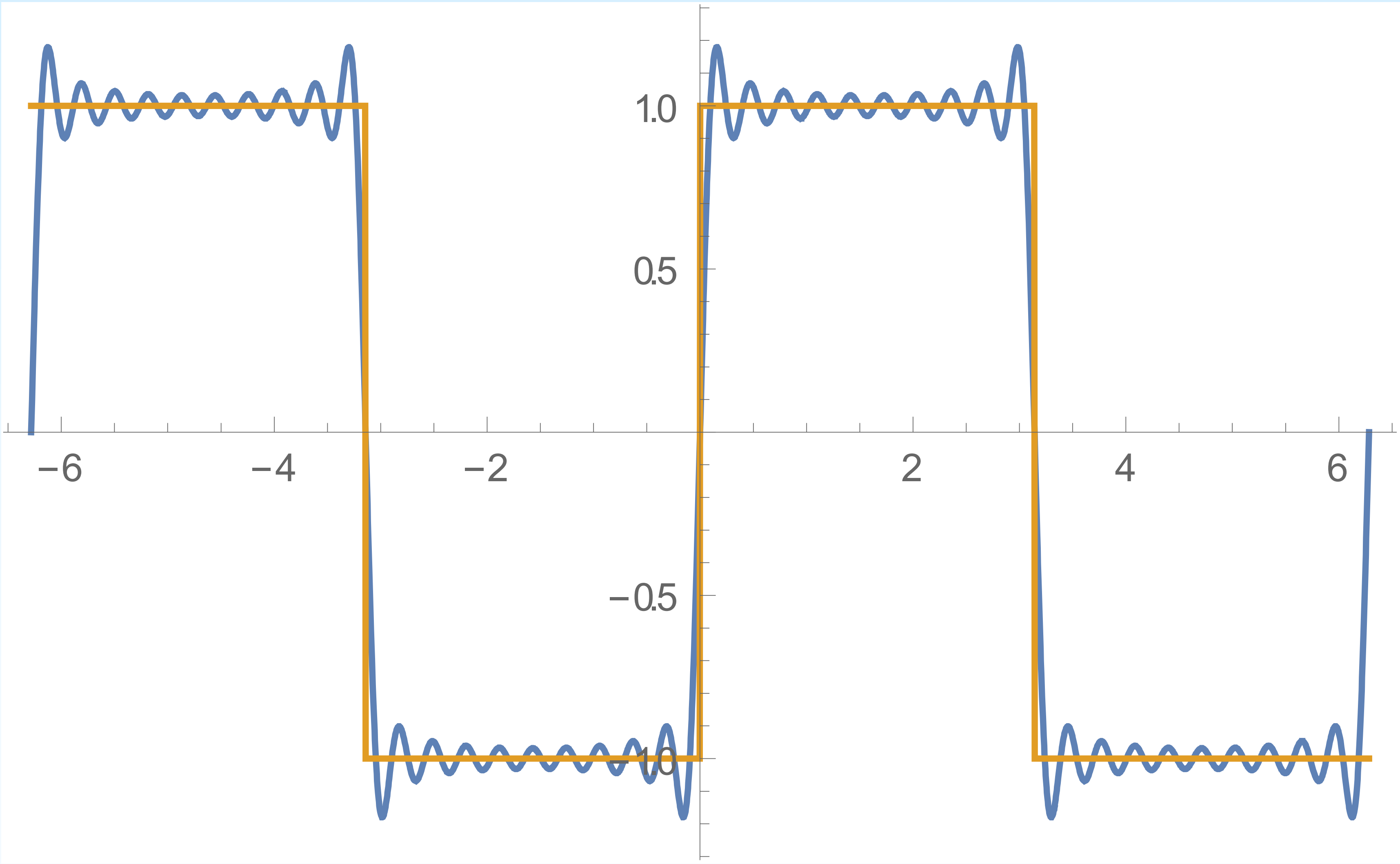


不同频率正弦波逐个叠加

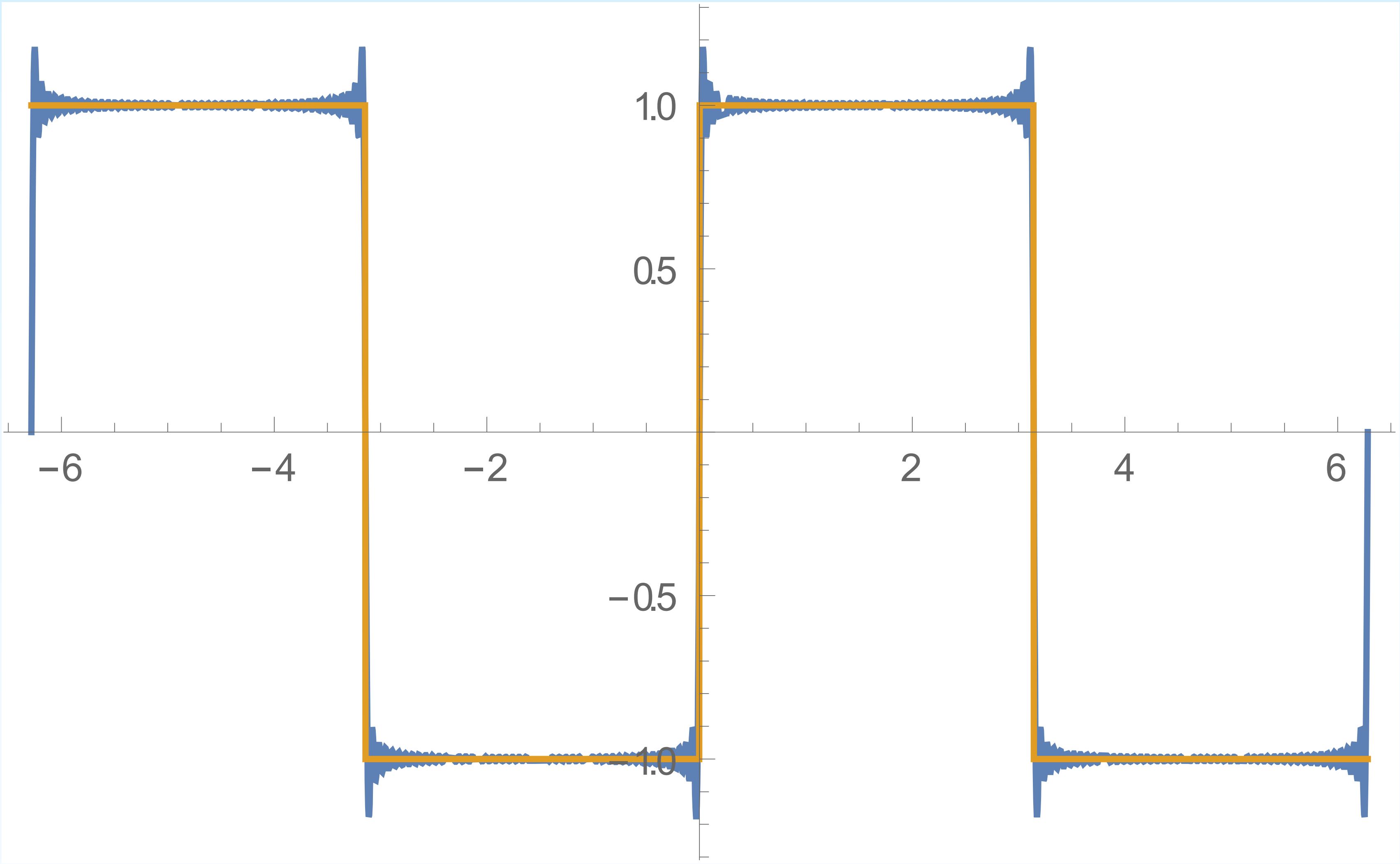
$$\frac{4}{\pi}\sin t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin(3t),\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin(5t),\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin(7t),\cdots$$

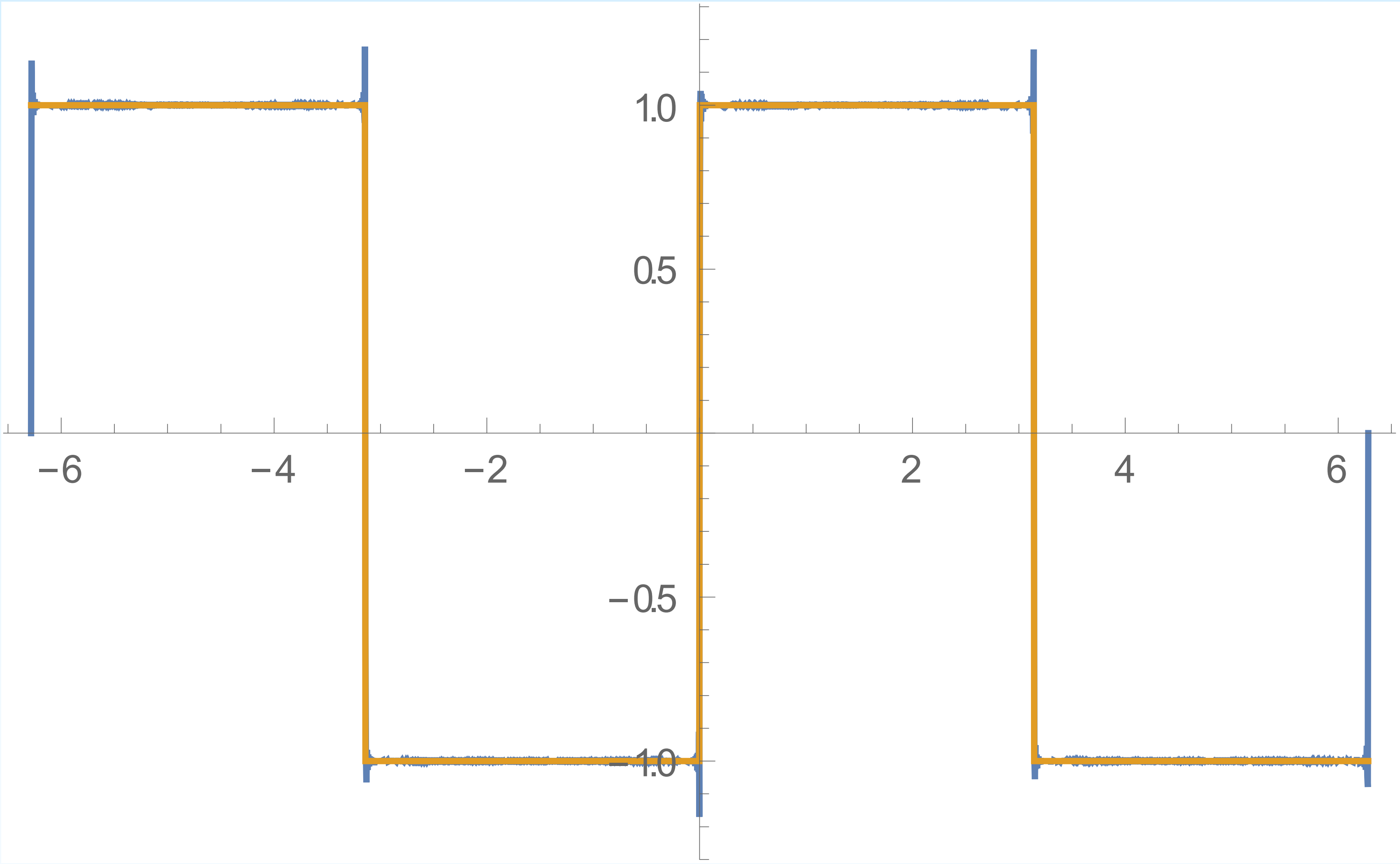

1.0
0.5
−0.5
−1.0
−6
−4
−2
2
4
6

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY



北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY




1.0
0.5
−0.5
−1.0
−6
−4
−2
2
4
6

$$u(t)=\frac{4}{\pi}[\sin t+\frac{1}{3}\sin(3t)+\frac{1}{5}\sin(5t)+\frac{1}{7}\sin(7t)+\cdots]$$

$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

问题 $$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)?$$

二、三角函数系的正交性

1. 三角级数

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t)$$

令 $\frac{a_0}{2}=A_0, a_n=A_n\sin\varphi_n, b_n=A_n\cos\varphi_n, \omega t=x,$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$ 三角级数

2. 两个函数的内积

设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积，定义它们的内积为

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

定义1.1 我们称两个函数正交, 如果

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

3. 三角函数系的正交性

三角函数系 : $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

正交性 : 任意两个不同函数正交.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot 1 dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot 1 dx = 0, \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

记 $\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$, 则

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$,

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$,

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$ (其中 $m, n = 1,2,\cdots$)

三、Fourier级数

问题

(1)给定周期为2π的函数$f(x)$, 若存在三角级数收敛于$f(x)$,即：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则a_n,b_n的值是什么？

(2)三角级数的表达式是否唯一？

(3)函数能够表示成三角级数的条件是什么？

假设级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$一致收敛于$f(x)$, 则

(1) 求a_0.

假设此级数一致收敛

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

(2) 求a_n.

假设此级数一致收敛

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cos nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx)$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1,2,3,\cdots)$$

(3) 求b_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

假设此级数一致收敛

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\sin nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \sin nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \sin nx dx\right)$$

$$= b_n \pi$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

北京航空航天大学 BEIHANG UNIVERSITY

定义1.2

*Riemann*可积

设周期为2π的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx, n=0,1,2,\cdots,$$

若$f(x)$无界,则其瑕积分绝对可积

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx, n=1,2,\cdots$$

为$f(x)$的*Fourier*系数，并称以*Fourier*系数a_n,b_n

为系数的三角级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$称为$f(x)$的

*Fourier*级数，记为$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

注 以2π为周期的函数$f(x)$，Fourier系数中的积分区间可以改成长度为2π的任意区间，不影响a_n, b_n的值，即有$\forall c$

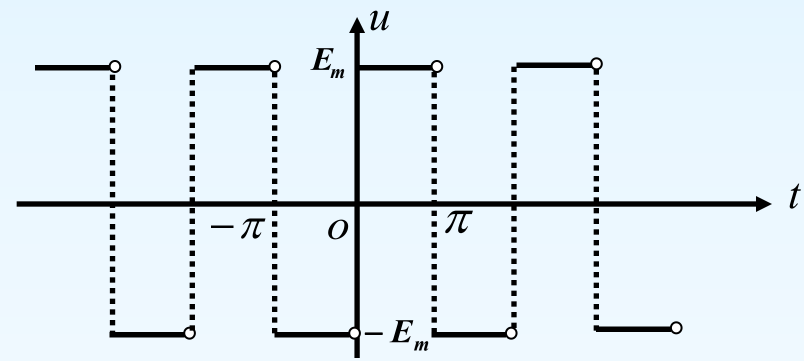
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx dx, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx dx, n = 1,2,\cdots$$

例 1 以2π为周期的矩形脉冲波$u(t)=\begin{cases} E_m, & 0\le t<\pi \\ -E_m, & -\pi\le t<0 \end{cases}$,

求此函数的 Fourier 级数.

解 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\cos nt\,dt=0,(n=0,1,2,\cdots)$$



$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\sin nt\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-E_m)\sin nt\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_m\sin nt\,dt$$

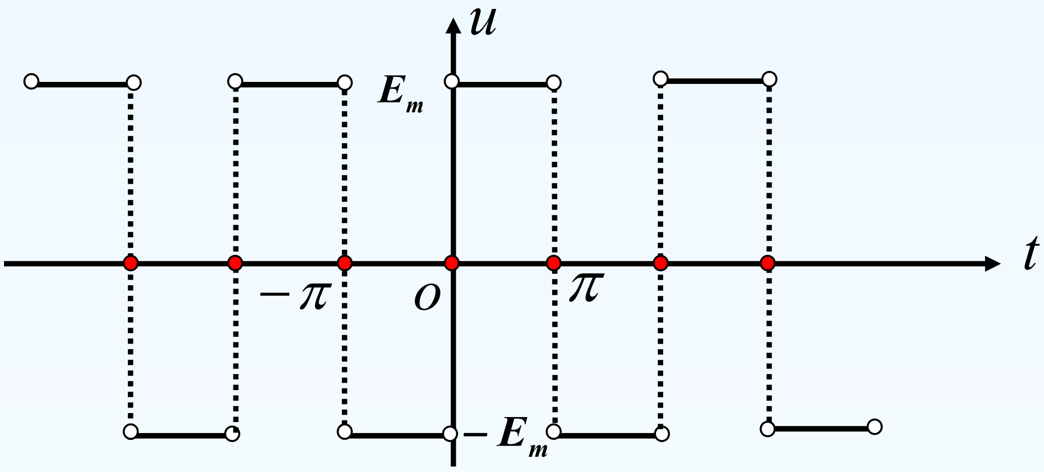
定积分对称性和奇偶性

$$=\frac{2E_m}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

$$=\frac{2E_m}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{4E_m}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$\therefore u(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4E_m}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)t.$$

和函数图象为



例2 若函数$\varphi(-x)=\psi(x)$，问：$\varphi(x)$与$\psi(x)$的 Fourier 系数a_n、b_n与α_n、β_n $(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系？

解 $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\cos(-nt)d(-t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx=\alpha_n$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\varphi(-t)\sin(-nt)d(-t)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-x)\sin nx dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx$$

$$=-\beta_n.$$

四、Fourier级数的收敛问题

若 f 是以 2π为周期的可积或绝对可 积函数,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

问题: $$f(x)\overset{?}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

定理2.1(Riemann-Lebesgue引理)

若 f 在$[a,b]$上可积或绝对可积,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0,\ \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0.$$

定理2.2 若 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积,则其*Fourier*系数满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.$

固定x_0,记级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$的部分和为

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos kx\cos kx_0+\sin kx\sin kx_0)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)dx$$

$$\because \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad x\neq 2m\pi$$

$$\therefore S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-x_0)}{2\sin\frac{(x-x_0)}{2}}dx$$

令 $x-x_0=t$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi+x_0}f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{-\pi} f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi-x_0} f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\cancel{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{-\pi} f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi-x_0} f(t-2\pi+x_0)\cancel{\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-2\pi)}{2\sin\frac{t-2\pi}{2}}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x_0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

逐点收敛问题 ⟹ 当$n\to\infty$时此积分是否有极限?

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt\right.$$

取$\delta\in(0,\pi)$,

$$\left.+\boxed{\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt)}\right.\to 0, n\to\infty.$$

$(R-L$引理$)$

定理2.3（Fourier级数的局部化定理） 若 f 是以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数，那么 f 的Fourier级数在点 x_0 是否收敛，以及收敛到何值，仅与 f 在 x_0 点附近的取值有关.

定理2.4（Dini判别法） 若 f 是以 2π 为周期，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数，对于给定的实数 s，令

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s,$$

若存在 $\delta>0$，使得 $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积，那么 f 的Fourier级数在点 x_0 收敛于 s.

证明 $\because \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad x\neq 2m\pi$

$$\therefore \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx]dt=1$$

$$S_n(x_0)-s$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt$$

$$\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$$ 可积或绝对可积

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})tdt=0$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)=s$

定义(分段光滑函数)

若$f(x)$在$[a,b]$上至多有有限个第一类间断点 x_i, $i=1,2,\ldots,n$,其导函数除有限个点外都存在且连续,且在这有限个点处导函数的左右极限存在,则称$f(x)$是$[a,b]$上的分段光滑函数.

注 (1) $f(x)$的导函数在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上光滑.

(2) 区间$[a,b]$上的分段光滑函数,是由有限个光滑弧段组成,至多有有限个第一类间断点和角点.

在$[a, b]$上分段光滑的函数 $f(x)$，有如下重要性质：

(i) f 在$[a, b]$上可积.

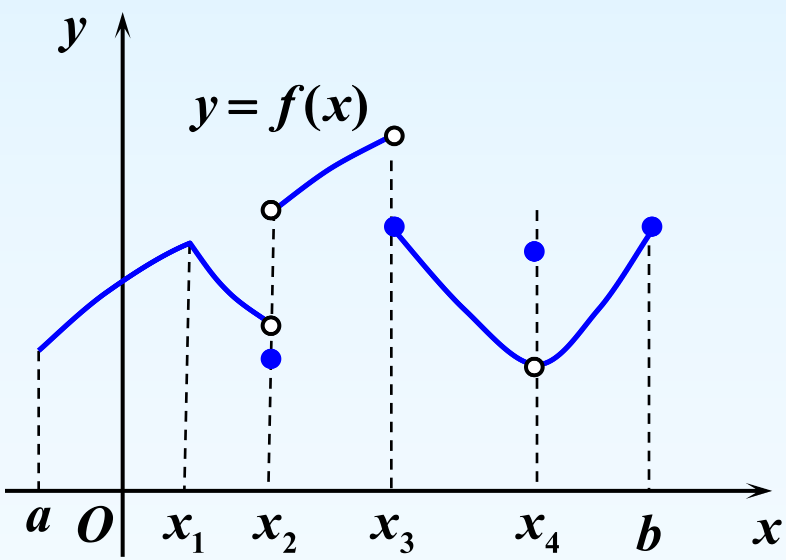
(ii) 在$[a, b]$上每一点都存在$f(x \pm 0)$, 如果在不连续点补充定义$f(x) = f(x+0)$，或$f(x) = f(x-0)$，则还有

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} = f'(x+0),$$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x-t) - f(x-0)}{-t} = f'(x-0),$$

(iii) 在补充定义 f' 在 $[a, b]$ 上那些至多有限个不存在导数的点上的值后 (仍记为 f'), f' 在 $[a, b]$ 上可积.

从几何图形上讲, 在区间 $[a, b]$ 上按段光滑光滑函数, 是由有限个光滑弧段所组成, 它至多有有限个第一类间断点和角点.



定理1.1(收敛定理)

若f 以 2π为周期,在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,那么f的Fourier级数在每点x_0处收敛于$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.特别地,在$f$ 的连续点处,它收敛于$f(x_0)$.

证 取$s=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

作业:

习题13.1　3
习题13.2　1