4.4 初等方阵及应用

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$与 $B=(b_{ij})_{n\times p}$相乘，可以将矩阵 B 的每一行作为一块，写成分块形式

$$B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

A 的每个元作为一块，进行分块运算得

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1n}B_n \\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2n}B_n \\ \vdots \\ a_{m1}B_1+a_{m2}B_2+\cdots+a_{mn}B_n \end{pmatrix} \qquad (4.4.1)$$

这说明:AB的每一行都是B的行的线性组合,组合系数由 A 的相应的行提供。

常用的矩阵的三类初等行变换

1. 将某两行互换位置。

2. 用 F 中某个非零的数乘以某行。

3. 将某行的若干倍加到另一行。

经过初等行变换 $B \mapsto B_1$ 后的矩阵 B_1 的行都是变换前的矩阵 B 的行的线性组合，

从 B 到 B_1 的变换可以通过在 B 的左边乘以适当的矩阵 A 来实现：

$$B \mapsto B_1 = AB$$

设计适当的A，分别满足下面的条件：

1. 将B的前两行交换得到 AB；
2. 将B的第1行乘 λ 得到AB；
3. 将B的第1行的 λ 倍加到第2行得到AB。

解法一 设B的各行依次为$B_1, B_2, \cdots, B_n$.

1）AB的各项为B_2，B_1，$B_3, \cdots$，B_n。由于

$$B_2 = 0B_1 + 1B_2 + 0B_3 + \cdots + 0B_n$$

$$B_1 = 1B_1 + 0B_2 + 0B_3 + \cdots + 0B_n$$

$$B_i = 0B_1 + \cdots + 0B_{i-1} + 1B_i + 0B_{i+1} + \cdots + 0B_n$$

$$(3 \le i \le n)$$

取A的前两行为 $(0,1,0,\ldots,0)$, $(1,0,0,\ldots,0)$,

其余各行依次为$e_3,\cdots,e_n$（e_i 为第 i 分量为1，其余分量为0的数组向量），则

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

符合要求。

2) AB的各行依次为$\lambda \mathrm{B}_1, B_2, \cdots, B_n$.因此

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

符合要求。

3) AB的各行依次为$B_1, \lambda \mathrm{B}_1+B_2, B_3, \cdots, B_n$.
因此

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

符合要求。

解法二

1）对所有B，将B的前两行交换都得到AB。特别地，取$B=I$ 为单位矩阵，将 I 的前两行互换得到$AI=A$

因此

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{前两行互换}} A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

（2）将I 的第 1 行乘λ得到 $AI = A.$

因此

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1行乘}\lambda} A = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

（3）将I 的第 1 行的λ倍加到第二行得到 AI=A, 因此

$$I=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{加到第2行}]{\text{第1行的第}\lambda\text{倍}}A=\begin{pmatrix}1&&&\\\lambda&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}$$

问： 这里的方法和结果是否可以推广到一般的初等行变换？

定义4.4.1 如下方阵称为初等矩阵 (elementary)：

（1） 对$1 \le i < j \le n$, 将n阶单位矩阵$I_{(n)}$的第i, j两行互换得到的方阵

$$P_{ij} = \left(\begin{array}{ccccc} I_{(i-1)} & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & I_{(j-i-1)} & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & I_{(n-j)} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \longrightarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \longrightarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \end{array}$$

2） 对$1 \le i \le n, \lambda \ne 0$,将$n$阶单位矩阵$I_{(n)}$的第$i$行乘$\lambda$得到的方阵

$$D_i(\lambda)=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix} I_{(i-1)} & & \\ & \lambda & \\ & & I_{(n-i)} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \to \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \end{array}\end{array}$$

3） 对$1 \le i, j \le n, i \ne j, \lambda \ne 0$，将$n$阶单位矩阵$I_{(n)}$的第$j$行的$\lambda$倍加到第$i$行得到的方阵

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} I_{(i-1)} & & & & \\ & 1 & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & I_{(n-j)} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \rightarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \rightarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

对任意的i, j记E_{ij}为第（i, j）元为1、其余为0的矩阵，则得到

P_{ij}, $D_i(\lambda)$和$T_{ij}(\lambda)$的运算性质：

(1) $$P_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji};$$

(2) $$D_i(\lambda) = I + (\lambda - 1)E_{ii};$$

(3) $$T_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij};$$

定理4.4.1　对矩阵B做初等行变换，效果相当于对B左乘相应的初等方阵：

1. 将 B的第 i，j行互换：$B \mapsto P_{ij}B$ 。
2. 将B的第i 行乘λ ≠0：$B \mapsto D_i(\lambda)B$ 。
3. 将 B的第 j行的λ倍加到第 i行：$B \mapsto T_{ij}(\lambda)B$。

由定义4.4.1或定理4.4.1可得：

(1) 初等方阵可逆，其逆方阵仍是初等方阵

(2)$P_{ij}{}^2 = I$，进而$P_{ij}{}^{-1} = P_{ij}$　　(3)$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$

(4)$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

下面考虑 BA与B的关系。将B的每一列作为一块，写成分块形式

$$B=(\beta_1,\cdots\beta_m)$$

A的每个元作为一块，进行分块运算得

$$BA=(\beta_1,\cdots\beta_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1 a_{11}+\beta_2 a_{21}+\cdots+\beta_m a_{m1},\cdots,\beta_1 a_{1n}+\beta_2 a_{2n}+\cdots+\beta_m a_{mn})$$

这说明：BA的每一列都是 B的列的线性组合，组合系数由 A的相应的列提供。

用矩阵消元法解线性方程组，对任一矩阵 A 作初等行变换，可以将 A 化为阶梯形。如果同时使用初等行变换和初等列变换，可以将任一矩阵 A 化到更简单的形式。而对 A 进行初等行变换和初等列变换，相当于对 A 左乘和右乘一系列初等方阵。

定理4.4.2 任意的 $m\times n$ 矩阵 A 都可以通过有限次初等行变换和初等列变换化为

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (4.4.2)$$

其中 $r=\mathrm{rank}A$。

证明：如果 $A=O$，则A是所求。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}\neq O$。其中必有元$a_{kl}\neq 0$。

如果$a_{11}=0$，当$k\neq 1$时将A的第1行与第k行互换，可将非零元a_{kl}换到第1行；

如果$l\neq 1$，再将第1列和第l列互换，将非零元换到第(1,1)位置。经过这样的初等行变换和初等列变换，一定可以将$A=(a_{ij})_{m\times n}$化为$B=(b_{ij})_{m\times n}$，使$a_{11}\neq 0$。

对 $2 \le i \le m, 2 \le j \le n$，将$B=(b_{ij})_{m\times n}$第1行的 $-b_{i1}b_{11}^{-1}$ 倍加到第 i行， 第1列的$-b_{11}^{-1}b_{1j}$倍加到第j列，可以将B中第2至第 m 行的第1列元化为0，第2至第n列的第1行化为0.

再将第1行乘 b_{11}^{-1}可以将第（1，1）元化为1。这样就将 B 化为了如下形式的矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 1 & \\ & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 A_1是$(m-1)\times(n-1)$ 矩阵。

如果$A_1=O$ ，则 A_1 已经是所需的形状。

设 $A_1 \neq O$，重复以上步骤，对 A_1 作初等行变换和初等列变换可以将 A_1 化为

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

其中 A_2 是 $(m-2)\times(n-2)$ 矩阵。 这也就是对 C 的第2至第 m 行作初等行变换，对 C 的第2至第 n 列作初等列变换，将 C 进一步化为

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & A_2 \end{pmatrix}$$

重复这个过程，最后可以得到形如（4.4.2）的矩阵

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

这个矩阵的 r 个非零行线性无关，组成行向量的极大线性无关组，因此秩为 r 。而对矩阵进行初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩，因此 A 的秩也是 r ，也就是：

$$r = \mathrm{rank} A$$

推论4.4.2 对任意 $m\times n$ 矩阵 A，用一系列的 m 阶初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 左乘 A，以及一系列初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 右乘 A，将 A 化为

$$\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $r=\mathrm{rank}A$。存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q 使 PAQ 具有上述形式

证明：根据定理4.4.2，A 可以通过有限次初等行变换和有限次初等列变换化为所说形状。而每次初等行变换可以通过左乘某个初等方阵来实现，每次初等列变换可以通过右乘某个初等方阵来实现。因此 A 可以左乘有限个初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和右乘有限个初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 化为所说形状：

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$$
$$= \begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

令 $P = P_s \cdots P_2 P_1$ ，$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$，则

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

P, Q都是初等方阵的乘积，初等方阵都是可逆方阵，而可逆方阵的乘积仍是可逆方阵，因此P, Q是可逆方阵。

引理4.4.2 如果 A 是可逆方阵，则 A 可以表示为若干个初等方阵的乘积。

由于A可逆, $\mathrm{rank}A = n$，由定理4.4.2知道 A 可以左乘一系列初等方阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$，右乘一系列初等方阵$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 化为 $I_{(n)}$ ：

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = I$$

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_2^{-1} Q_1^{-1}$$

由于初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 的逆仍是初等方阵，上式表明 A是初等矩阵的乘积。

推论 可逆方阵A可以经过有限次初等行变换化为单位矩阵。

证明: A是有限个初等方阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$的乘积:

$$A = P_1 P_2 \cdots P_s$$

因此

$$P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} A = I$$

$P_1^{-1}, P_2^{-1}, \cdots P_s^{-1}$都是初等方阵，将它们依次左乘 A ，最后得到单位阵I，其效果相当于对A进行一系列的初等行变换之后得到I 。

例1　设 $A\in F^{m\times n}, B\in F^{m\times n}$，如果以 A, B 为块组成的 (A, B) 可以经过一系列的初等行变换变成 (I, X) 的形式，则其中的块为 $X = A^{-1}B$。

证明：矩阵的每个初等行变换可以通过左乘一个初等方阵来实现。(A, B) 可以经过一系列初等行变换变成 (I, X)，也就是左乘一系列初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 变成 (I, X)：

$$P_1 P_2 \cdots P_s (A, B) = (I, X)$$

记 $P=P_1,P_2,\cdots,P_s$，则 $P(A,B)=(I,X)$,

$$(PA,PB)=(I,X) \quad PA=I \quad PB=X$$

由 $PA=I$，知$P=A^{-1}$，从而

$$X=PB=A^{-1}B$$

考虑将分块矩阵

$$S=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

看成两“行”两“列”。如果 A 是可逆矩阵，则可以将第一“行”左乘 $-CA^{-1}$ 加到第二行消去 C ，再将第一“列”右乘 $-A^{-1}B$ 加到第二“列”得到

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

将所说的行变换和列变换作用于单位阵 $\begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix}$，得到“初等方阵”

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$$

于是所说的行变换和列变换就可以通过左乘和右乘这两个“初等方阵”来实现：

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \qquad (4.4.3)$$

等式（4.4.3）称为Schur公式。

例 2　设

$$S=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中A，D是方阵，且 A 可逆。求 S 可逆的条件，并在此条件满足时求S^{-1}。

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \qquad (4.4.3)$$

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$$

因此，

$$S\text{可逆} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\text{可逆} \Leftrightarrow D-CA^{-1}B\text{可逆}$$

由（4.4.3）得

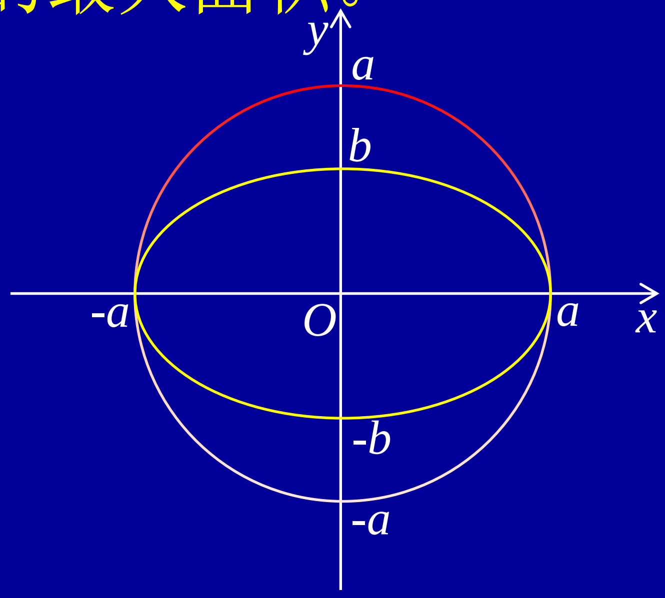
$$S=\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}^{-1}$$

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵乘法与行列式

例3 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(其中 $a>b>0$)的面积，并求出它的内接四边形的最大面积。



答案：椭圆面积 πab，内接四边形最大面积 $2ab$.

1. 同阶方阵乘积的行列式

设B是n 阶方阵，P 是n阶初等方阵。B 通过适当的初等行变换变到PB，行列式|B|乘上了适当的倍数μ变成 |PB|。我们研究这个倍数μ与P的关系。

(1) $P = P_{ij}$ 。此时的初等行变换$B \mapsto P_{ij}B$是将B的第 i，j两行互换，因此

$$\left|P_{ij}B\right| = -\left|B\right| = (-1)\left|B\right|$$

然而P_{ij}是由单位阵 I 的两行互换得来的，因此 $\left|P_{ij}\right| = -\left|I\right|$ ，可见

$$\left|P_{ij}B\right| = \left|P\right|\left|B\right|$$

（2）$P = D_i(\lambda)$ 。此时的初等行变换

$$B \mapsto D_i(\lambda)B$$

是将 B 的第 i 行乘 λ ，因此

$$|D_i(\lambda)B| = \lambda|B|$$

由单位阵 I 经过同样的初等变换得到 $D_i(\lambda)$，

$|D_i(\lambda)| = \lambda$ ，因此

$$|D_i(\lambda)B| = |D_i(\lambda)||B|$$

（3）$P=T_{ij}(\lambda)$。

将B的第j行的λ倍加到第i行得到$T_{ij}(\lambda)B$，

$$|T_{ij}(\lambda)B|=|B|$$

由单位阵I经过同样的初等变换得到$T_{ij}(\lambda)$，

$|T_{ij}(\lambda)|=1$

$$|T_{ij}(\lambda)B|=|T_{ij}(\lambda)||B|$$

定理: 设B是n阶方阵，A是n阶方阵，则

$$|AB|=|A|\bullet|B|$$

例 4　利用方阵乘积的行列式公式证明：

(1) 设 A, B是同阶方阵，则$|AB| = |BA|$.

(2) 方阵A可逆 $\Longrightarrow |A| \neq 0$.

(3) 设 A是可逆方阵，则$|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

(4) 设方阵A与A^{-1}元素都是整数,则$|A| = \pm 1$.

证明：(1) $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$.

注意： 交换律对矩阵乘法不成立，AB不一定等于BA。

(2) n 阶方阵 A可逆

$\Rightarrow$ 存在n阶方阵B使得$AB=I$

$\Rightarrow$ $|A||B|=|AB|=|I|=1$

$\Rightarrow$ $|A|\neq 0.$

(3) $|A||A^{-1}|=|AA^{-1}|=|I|=1$

$\Rightarrow |A^{-1}|=|A|^{-1}.$

(4) 由 (3) 显然

例 5 $A \in F^{n\times m}, B \in F^{m\times n}$

$$\left|I_{(n)} - AB\right| = \left|I_{(m)} - BA\right| \tag{4.5.3}$$

证明:
$$\left|I_{(n)} - AB\right| = \begin{vmatrix} I_{(m)} & B \\ O & I_{(n)} - AB \end{vmatrix} \tag{4.5.4}$$

在等式

$$\begin{pmatrix} I_{(m)} & O \\ A & I_{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(m)} & B \\ O & I_{(n)} - AB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{(m)} & O \\ -A & I_{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{(m)} - BA & B \\ O & I_{(n)} \end{pmatrix} \tag{4.5.5}$$

两边取行列式，并将

$$\begin{vmatrix} I_{(m)} & O \\ A & I_{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{(m)} & O \\ -A & I_{(n)} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} I_{(m)} & B \\ O & I_{(n)} - AB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{(m)} - BA & B \\ O & I_{(n)} \end{vmatrix} = \left| I_{(m)} - BA \right|$$

$$\left| I_{(n)} - AB \right| = \left| I_{(m)} - BA \right|$$

注：（4.5.3）可以作为公式来计算行列式。

例 6

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & 1+a_nb_n\end{vmatrix}$$

解:

$$\Delta=\left|I-\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b_1 & \cdots & -b_n\end{pmatrix}\right|$$

$$=1-\begin{pmatrix}-b_1 & \cdots & -b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=1+a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

定义4.4.2 设 $A, B \in F^{m\times n}$，如果A可以通过一系列初等行变换和初等列变换变成B， 就称A与B相抵，也称 A与B等价(equivalent)

引理4.4.3 A与B相抵 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q 使

$$B = PAQ$$

证明： 设A与B相抵, A可以通过一系列初等行变换和初等列变换变成 B。每个初等行变换可以通过左乘某个初等方阵实现，每个初等列变换可以通过右乘某个初等方阵实现，因此存在一系列初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B$$

取$P = P_s \cdots P_2 P_1$,$Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$，则 P,Q 是可逆方阵且$PAQ = B$

反过来设存在可逆矩阵P,Q使$B = PAQ$

由推论4.4.2，可逆方阵都可以表示成有限个初等方阵的乘积：

$$P = P_s \cdots P_2 P_1,\ Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$$

因此，$B = P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t$。由此可知 A 经过一系列初等行变换和初等列变换变成B。

引理4.4.4　矩阵的相抵关系具有如下性质：

（1）反身性：A相抵于自己；

（2）对称性：如果A相抵于B，则B 相抵于 A；

（3）传递性：如果A相抵于B，B相抵于C，则A相抵于C。

由于相抵关系的以上性质，可以将$F^{m\times n}$ 按相抵关系划分成两两没有公共元素的类R_A，每一类称为一个**相抵等价类 (equivalent class)**，对于每个元素 A ，必属于唯一的一类。

机动　目录　上页　下页　返回　结束

由于每个A都可以通过有限次初等变换变成

$$S=\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

也就是 A 相抵于S。选取 S 作为 A 所在的相抵等价类 R_A 的代表，称为 S 是**相抵标准型 (canonical form of equivalent matrices)**。

定理(推论4.4.3) 设$A,B\in F^{m\times n}$，则A与B相抵当且仅当$\text{rank}A=\text{rank}B$。

证明： A与B相抵 $\Rightarrow$ 存在可逆矩阵P,Q

$$B=PAQ$$

$$\Rightarrow \text{rank}B=\text{rank}(PAQ)=\text{rank}A$$

$F^{m\times n}$中的每个矩阵A相抵于它的标准形

$$S=\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中r=rank$A$。如果$B\in F^{m\times n}$的秩与 A 相同，则 B也相抵于S，由相抵的传递性，B 相抵于A。

事实上，对于$F^{m\times n}$，记$d=\min\{m,n\}$则可以按矩阵的秩将 $F^{m\times n}$分成 $d+1$类，并且每一类中所有的矩阵有一个标准形：

$$C_r=\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad r\in\{0,1,\cdots,d\}$$

例7 设$A\in F^{n\times n}$，rank$A=r$，则存在$B\in F^{n\times n}$满足条件：rank$B=n-r$，且$AB=BA=O$。

证明：存在可逆方阵P，$Q\in F^{n\times n}$，使

$$A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$$

取

$$B=Q^{-1}\begin{pmatrix} O_{(r)} & O \\ O & I_{(n-r)} \end{pmatrix}P^{-1}$$

即满足条件。