2. 7 子空间的交与和

例1 设W_1，W_2 分别是数域F上的线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0 \\ x_2+2x_3+x_5=0 \end{cases}$$ 与 $$\begin{cases} x_1+2x_2+7x_3+5x_4-4x_5=0 \\ x_2+4x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的解空间，求$W_1 \cap W_2$。

解： 将这两个方程组的4个方程组共同组成一个方程组，求得的通解

$$\left(-\frac{1}{2}t_1+3t_2,3t_1-3t_2,-\frac{3}{2}t_1+t_2,t_1,t_2\right)$$

即 $$t_1\left(-\frac{1}{2},3,-\frac{3}{2},1,0\right)+t_2(3,-3,1,0,1)$$

组成的集合就是$W_1 \cap W_2$。容易看出$W_1 \cap W_2$是由两个线性无关的向量组成的2维子空间。

例2 设π_1是空间直角坐标系下的3维几何空间R^3中过点(0,0,0)，(1,-1,0)，(1,2,-3)的平面，π_2是过点(0,0,0)，(1,-1,-1)，(2,3,1)平面，求这两个平面的交集$\pi_1 \cap \pi_2$。

解： 用3维空间中坐标(x,y,z)的点表示R^3中的向量(x,y,z)，则π_1是向量α_1=(1,-1,0)，α_2= (1,2,-3)生成的子空间，π_2是向量β_1=(1,-1,-1)，β_2= (2,3,1)生成的子空间。

$$\boldsymbol{\alpha} \in \pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 = y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 \left(x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}\right) \quad (2.7.1)$$

条件 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2$ ，即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2-y_1\boldsymbol{\beta}_1-y_2\boldsymbol{\beta}_2=0$$

将$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$的坐标代入得

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-y_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}-y_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

这是以x_1,x_2,y_1,y_2为变量的线性方程组，求得通解为

$$(x_1,x_2,y_1,y_2)=t\left(\frac{19}{3},\frac{5}{3},6,1\right)$$

将 $x_1=\frac{19}{3}t, x_2=\frac{5}{3}t$ 代入(2.7.1)得

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{19}{3}t(1,-1,0)+\frac{5}{3}t(1,2,-3)=t(8,-3,-5)$$

因此 $\pi_1\cap\pi_2=\{t(8,-3,-5)\mid t\in R\}$ 是(8,-3,-5)生成的1维子空间，是过原点和点(8,-3,-5)的直线。

定理2.7.1 设W_i ($i\in I$)是F上线性空间V的任意一组子空间，$U=\bigcap_{i\in I}W_i=\{\boldsymbol{\alpha}\mid \boldsymbol{\alpha}\in W_i, \forall i\in I\}$

是这些子空间的交，则U是V的子空间。

机动 目录 上页 下页 返回 结束

证明：对任意的 u，$v \in$ U，$\lambda \in$ F，u，v含于 $\cap_{i\in I}$ W_i => u,v含于每个W_i。由于W_i是子空间，$u+v \in W_i$，$\lambda u \in W_i$。这又导致$u+v$和λu含于 $U = \cap_{i\in I} W_i$。证明U是子空间。

定义（子空间的和） 设V是F上的线性空间，$W_1,\ldots, W_t$是V的子空间。定义

$$W_1+\ldots+W_t=\{b_1+\ldots+b_t \mid b_i \in W_i,\ 1\le i \le t\}$$

称为子空间$W_1,\ldots, W_t$的和。

例3 给定F^4的子空间W_1的基$\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和子空间W_2的基$\{\beta_1,\beta_2\}$其中$\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,1,0)$, $\beta_1=(1,2,3,4)$, $\beta_2=(0,1,2,2)$.

(1) 求W_1+W_2的维数并求出一组基;

(2) 求$W_1\cap W_2$的维数并求出一组基，扩充为W_1+W_2的一组基。

解: (1) W_1+W_2由$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$生成，S的极大线性无关组就是$W_1+W_2$的基。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&2&1\\0&1&3&2\\0&0&4&2\end{pmatrix}\longrightarrow T=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

T的前三列成列向量的极大线性无关组。可见 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$ 组成了W_1+W_2的一组基，同时有 $\dim(W_1+W_2)=3$。

(2)仿照例2得到

$W_1 \cap W_2 = \{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 \mid x_1, x_2, y_1, y_2 \in F\}$

解方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\beta_1 + x_4\beta_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λ对应的齐次方程组的通解为：$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-1, 1, 1, -2)$，$W_1 \cap W_2 = \{t(-\alpha_1 + \alpha_2) = t(-\beta_1 + 2\beta_2) \mid t \in F\}$, $\alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - 2\beta_2$ 组成了$W_1 \cap W_2$的一组基。同时可证$\{\alpha_0, \alpha_2, \beta_1\}$线性无关，组成了$W_1 + W_2$的一组基。

重要命题 设V是F上线性空间，$W_1,\ldots, W_t$是V的子空间，则

(1) $W_1+\ldots+W_t$ 是子空间；

(2) $W_1+\ldots+W_t$是包含$W_1\cup\ldots\cup W_t$的最小的子空间；

(3) 取每个$W_i\ (1\le i\le t)$的一组基，则$M_1\cup\ldots\cup M_t$生成的子空间等于$W_1+\ldots+W_t$；

(4) $\dim(W_1+\ldots+W_t)\le \dim W_1+\ldots+\dim W_t$。

证明（1）记$W = W_1 + \ldots + W_t$，$M = M_1 \cup \ldots \cup M_t$。任取$u = u_1 + \ldots + u_t \in W$, $v = v_1 + \ldots + v_t \in W$ $\lambda \in F$，其中u_i，$v_i \in W_i$。则

$$u + v = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_t + v_t)$$

$$\lambda u = (\lambda u_1) + \ldots + (\lambda u_t) \qquad (2.7.3)$$

对每个$1 \le i \le t$，由于W_i是子空间，$u_i, v_i \in W_i$ => $u_i + v_i \in W_i$ 且$\lambda u_i \in W_i$。(2.7.3)说明了$u + v \in W$，$\lambda u \in W$，证明了W是子空间。

(2) 对任意$w \in W_1 \cup \ldots \cup W_t$，存在$1 \le i \le t$使$w \in W_i$。对每个$1 \le j \le t$，当$j \ne i$时取$w_j = 0 \in W_j$，当$j = i$时取$w = w_i \in W_i$，则$w = w_1 + \ldots + w_t \in W$。这就说明了$W_1 \cup \ldots \cup W_t$包含于W。

设$U = L(W_1 \cup \ldots \cup W_t)$是$W_1 \cup \ldots \cup W_t$生成的子空间，也就是包含$W_1 \cup \ldots \cup W_t$的最小子空间。则U包含任何一组$w_i \in W_i\ (1 \le i \le t)$之和$w_1 + \ldots + w_t$，也就是包含W。由W是子空间知W = U。

(3) 每个W_i $(1 \le i \le t)$是M_i的线性组合，因而 $W_1 \cup \ldots \cup W_t$ 是$M = M_1 \cup \ldots \cup M_t$的线性组合。而W是$W_1 \cup \ldots \cup W_t$的线性组合，因此W是M的线性组合，等于M生成的子空间。

(4) W由M生成，其维数dim W不超过M所含向量个数$|M|$，每个M_i所含向量个数$|M_i| = \dim W_i$

因此，$\dim W \le |M_1| + \ldots + |M_t| = \dim W_1 + \ldots + \dim W_t$

定理2.7.2 设W_1，W_2是V的子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$$

证明： 取$W_1\cap W_2$ 的一组基 $M_0=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$，扩充为$W_1$的的一组基 $M_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m\}$ 。则

$$M=M_1\cup M_2=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s\}$$

生成W_1+W_2，所含元素个数

$$|M|=|M_1|+|M_2|-|M_0|=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

$$=m+s-r$$

我们证明M线性无关，是W_1+W_2的一组基。

设 (2.7.4)

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r+\cdots+x_m\alpha_m+y_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+y_s\beta_s=0$$

其中 $x_i, y_j \in \mathbf{F}\left(1\le i\le m, r+1\le j\le s\right)$

将(2.7.4)移项得

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r+\cdots+x_m\alpha_m=-y_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-y_s\beta_s \quad (2.7.5)$$

将等式(2.7.5)左边的向量记为α，右边的向量记为β。则α是M_1的线性组合，含于W_1；β是M_2的线性组合，含于W_2。等式(2.7.5)说明α = β同时含于W_1与W_2，因而$\alpha=\beta\in W_1\cap W_2$。

β应是$W_1 \cap W_2$的基M_0的线性组合，即：存在 $y_i \in \mathbf{F}\left(1 \le i \le r\right)$使得，

$$y_1\alpha_1 + \cdots + y_r\alpha_r = \beta = -y_{r+1}\beta_{r+1} - \cdots - y_s\beta_s$$

即

$$y_1\alpha_1 + \cdots + y_r\alpha_r + y_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + y_s\beta_s = 0 \quad \left(2.7.6\right)$$

由于 $\mathbf{M}_2 = \left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s\right\}$ 是W_2的基，(2.7.6)仅当所有的$y_i = 0$ ($1 \le i \le s$)时成立。代入(2.7.5)得

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + \cdots + x_m\alpha_m = 0 \quad \left(2.7.7\right)$$

而$\mathbf{M}_1 = \left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\right\}$是$W_1$的基，(2.7.7)仅当所有的$x_i = 0$ ($1 \le i \le m$)时成立。

这就说明了(2.7.4)仅当所有的$x_i = y_j = 0$ ($1 \le i \le m$, $r + 1 \le j \le s$)时成立，

$$\mathbf{M} = \{\alpha_i, \beta_j \mid 1 \le i \le m, r+1 \le j \le s\}$$

线性无关，确实是$W_1 + W_2$的基。从而

$$\dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = \dim(\mathbf{W}_1) + \dim(\mathbf{W}_2) - \dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2)$$

推论2.7.1 设W_1，W_2是V的子空间，则

$$\dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) \ge \dim(\mathbf{W}_1) + \dim(\mathbf{W}_2) - \dim(\mathbf{V})$$

特别，当 $\dim(\mathbf{W}_1) + \dim(\mathbf{W}_2) > \dim(\mathbf{V})$ 时有

$$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \ne 0$$

定理2.7.3 设W_1,W_2是F^n的子空间，则如下命题等价：

(1)$W_1 \cap W_2=\{0\}$；

(2)$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$；

(3)每个$w \in W_1+W_2$**的分解式**$w=w_1+w_2$（$w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$）**由**w**唯一决定**；

(4)设$w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$，则$w_1+w_2=0$当且仅当$w_1=w_2=0$。

定义2.7.1 设W_1, W_2是线性空间V的子空间，满足定理2.7.3四个等价命题中的任意一个，则W_1+W_2称为W_1, W_2的直和，记为$W_1 \oplus W_2$