北京航空航天大学

2018－2019 学年 第3学期期末

《 离散数学 (1)》

期 末 考 卷

班 级\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_学 号 \_\_\_\_\_\_\_\_\_

姓 名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_成 绩 \_\_\_\_\_\_\_\_\_

2019年07月28日

《 离散数学 (1)》期末考试卷

注意事项：1、考生应自觉服从监考人员的管理，不得以任何理由妨碍监考人员履行职责，不得扰乱考场秩序。

2、考生在考场内必须保持安静，不准喧哗、左顾右盼、打手势等，不准夹带、旁窥、抄袭或有意让他人抄袭，不准传抄答案或交换试卷。

题目：

一、简答题……………………………………………………………………( 20 分)

二、论述题……………………………………………………………………( 20 分)

三、判断题……………………………………………………………………( 15 分)

四、计算题……………………………………………………………………( 20 分)

五、证明题……………………………………………………………………( 25 分)

**一、简答题（20分，每题4分）**

(1). 给出任意一组命题逻辑联结词完备集，并用真值表示逻辑联结词语义。

{∧,∨,¬},{∧,¬},{∨,¬}{¬,→}任何一组均可，或者其他完备集。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | q | p ∧q | (p∨q) | ¬p | p →q |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

(2). 举例说明什么是命题逻辑的对偶式。

**设A是由{0,1,**¬**,∨,∧}生成的命题逻辑合合式公式，将A中的∨和∧互换，0和1互换得到A\*，称A\*与A互为对偶式。**

* + **A = (p∨q)∧r B =** ¬**(p∨0) ∧1**
  + **A\* = (p∧q)∨r B\* =** ¬**(p∧1)∨0**

(3). 给出谓词逻辑公理系统。

1).公理模式**A** 1：Q→ (R→Q)

2).公理模式**A** 2：(P→ (Q→R)) → ((P→Q) → (P→R))

3).公理模式**A** 3：(¬Q→¬R) → (R→Q)

4).公理模式**A** 4：∀xQ(x)→Q(x)[x/t] 其中，项t对于Q中的x是可代入的。

5).公理模式**A** 5：∀x(Q→R(x)) → (Q→∀xR(x)) 其中x不是Q中自由变元。

6) 推理规则

<a> 分离规则（简称MP规则）：从Q和Q→ R推出R。

<b> 概括规则（简称UG规则）：从Q(x)推出(∀xQ(x))。

(4).什么是等价关系和偏序关系？各给出一个实例。

**定义：设X≠∅，a∈X，R⊆X×X，若R是自反的、对称的和传递的，则称R为X上的等价关系**

**定义：设X是非空集合， R 是X上的关系，若 R 自反的、反对称的、传递的，则 R 称为偏序关系或偏序**

(5).什么是单射、满射和双射？各给出一个实例。

**定义：设函数*f* : X** → **Y，**

**(1).若对于每个 y**∈**Y ，都存在 x**∈**X使得** *f* **(x) = y，则称 *f* 为满射**

**(2).若对于任意 x1 ∈X, x2∈X，只要 *f* (x1) = *f* (x 2)，就有 x 1=x2 ，或只要 x 1≠ x2，就有 *f* (x 1) ≠ *f* (x 2) ，则称 *f* 为单射**

***f*既是单射又是满射，则 *f*是双射函数**

**二、论述题（20分，每题4分）**

(1). 请论述谓词逻辑的演绎定理，并说明如何应用。

演绎定理：若A是句子, Γ ∪ {A} ⊢B当且仅当 Γ ⊢ A → B

举个例子，能说明要证明类似 Γ ⊢ A → B 结构的定理，只需要证明Γ ∪ {A} ⊢B即可。

例如要证明├x(P(x)Q(x))(xP(x)xQ(x)) ，仅需证x(P(x)Q(x))├xP(x)xQ(x)

(2) 针对下列命题（其中Q表示限定论域的谓词，≤、+和=分别表示小于等于、加号和等号），在自然数论域和整数论域上分别给出解释，并求逻辑真值。

(a) ∃x (Q(x)∧∀y(Q(y)→x≤y))

(b) ∀x∀y(Q(x)∧Q(y) → x+y=y+x)

(1).解释：QI(x)表示x是自然数，≤是自然数上的小于等于关系。

命题表示：存在x，x是自然数，并且对于所有y，如果y是自然数，则x≤y。

存在自然数0，对于所有自然数y，有x≤y，所以，该命题是真命题。

(1).解释：QI(x)表示x是整数，≤是整数上的小于等于关系。

命题表示：存在x，x是整数，并且对于所有y，如果y是整数，则x≤y。

因为在整数论域没有最小数，所以，该命题是假命题。

(3). 试用谓词逻辑公式描述以下“函数极限”的概念：

对于任意给定的ε>0，存在δ>0，对于任意x满足0<|x-x0|<δ时，都有| f(x) - A | < ε，那么称当x→x0时函数f(x)的极限为A，记作。

答案：

(4). 给出自然数与有理数等势的说明。

(5).设集合X={a,b,c,d,e,f}，R是X上的二元关系，R={(a,b), (a,c), (b,c), (b,d), (d,e), (e,f), (f,d)}，求关系R的自反闭包r(R)及对称闭包s(R)。

r(R) = {(a,b), (a,c), (b,c), (b,d), (d,e), (e,f), (f,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f)}

s(R) = R ∪ R-1 = {(a,b), (a,c), (b,c), (b,d), (d,e), (e,f), (f,d),

(b,a), (c,a), (c,b), (d,b), (e,d), (f,e), (d,f)}

**三、判断题(15分，每题3分)**

(1) 给定公式Q和公式集合Γ，若Γ |≠ Q，Γ是否可满足？给出理由。

答：Γ可满足。若任意公式都是Γ的推论，则Γ不可满足，否则，Γ可满足。

(2). ∀x (Q(x)∨R(x))∀xQ(x) ∨ ∀ xR(x) 是否成立?不成立给出反例。

不成立。

给出任意的反例即可。

(3). {{∅}, {{{∅}}}} ⊆ {∅, {{∅}}, {{{∅}}}} 是否成立？并说明原因。

不成立。 （2分）

元素{∅}在前面的集合中，但不在后面的集合中。 （1分）

(4).A |= B, 当且仅当A→B是永真式，是否成立？给出理由。

成立。

由定理1.12可知，A|= B当且仅当A→B是永真式。

(5).∀x(P(x)→Q(x))⇔∃xP(x)→Q(x)是否成立？给出理由

不成立。 等值式模式∀x(A→B)⇔∃xA→B成立，要求x不是B的自由变元。

**四、计算题（20分，每题4分）**

(1). 求命题合式公式(P∧Q → R) → (Q∧R)主合取范式。

= ¬(P∧Q→R)∨(Q∨R)

= (P∧Q∧¬R)∨(Q∨R)

= (P∨Q∨R) ∧ ((Q∧¬R)∨(Q∨R))

= (P∨Q∨R) ∧(Q∨Q∨R) ∧(¬R∨Q∨R)

= (P∨Q∨R) ∧(Q∨R)

= (P∨Q∨R) ∧((P∧¬P)∨Q∨R)

= (P∨Q∨R) ∧(P∨Q∨R) ∧(¬P∨Q∨R)

= (P∨Q∨R) ∧(¬P∨Q∨R)

(2). 多路选择器是一种多路数据输入并且一路数据输出的逻辑运算，其功能为如下真值表描述，给出Y1和Y2逻辑表达式。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 输入 | | | 输出 | |
| X1 | X2 | X3 | Y1 | Y2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Y1 = (¬X1**∧**¬X2**∧**X3) **∨**(X1**∧**¬X2**∧**¬X3)**∨**(X1**∧**X2**∧**X3)

Y2 = (¬X1**∧**¬X2**∧**¬X3) **∨**(¬X1**∧**X2**∧**¬X3) **∨**(¬X1**∧**X2**∧**X3)**∨**(X1**∧**¬X2**∧**X3)

(3) 用命题逻辑归结法证明。

├ Q→(R→(Q∧R))

证明：

¬( Q→(R→(Q∧R)))对应的合取范式为 Q∧R∧(¬Q∨¬R)

构成子句集合S = {Q, R, ¬Q∨¬R }.

C1= Q;

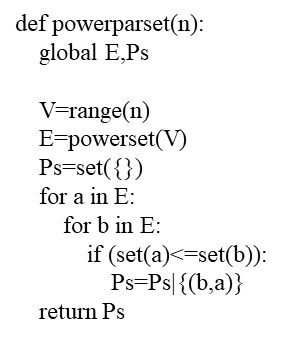
C2= R;

C3=¬Q∨¬R;

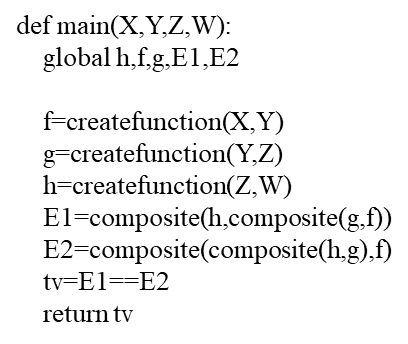
C4=¬R; C1和C3归并

C5=□ C2和C4归并

(4).设X是集合，ρ(X)是幂集，设计程序构造ρ(X)上的偏序集合，其中，powerset(X)是幂集。

****

(5). 设 *f* 是从 X 到 Y 的函数，g 是从 Y 到 Z 的函数。若 *f* 和 *g*都是满射，则 *g* ∘*f* 是满射。设计程序验证定理，其中composite(g,f)是函数复合，issurjection(Y,f)是满射判断。



**五、证明题（25分， 各题为8、9、8分）**

(1). 用命题逻辑公理方法证明(注：只能用公理系统的公理和规则)。（8分）

P → R, R → S├ P → S

证明：

*A*1=(R→S) →(P→ (R→S)) A 1

*A*2=R→S *A*2∈ *Γ*

*A*3=P→ (R→S) *A*1=*A*2 → *A*3

*A*4=(P→ (R→S)) →((P→R) →(P→S)) A 2

*A*5=(P→R) →(P→S) *A*4=*A*3 → *A*5

*A*6=(P→R) *A*6∈ *Γ*

*A*7=(P→S) *A*5=*A*6→*A*7

(2). 用谓词逻辑公理方法证明(注：只能用公理系统的公理和规则)。（9分）

├ ∀x∀yQ(x,y) → ∀y∀xQ(x,y)

**证明： 证据：**

**A1=**∀**x**∀**y R(x,y)** →∀**y R(x,y) A 4**

**A2=**∀**y R(x,y)**→**R(x,y) A 4**

**A3=**∀**x**∀**y R(x,y)** → **R(x,y) A1 , A2├A3**

**A4=**∀**x (**∀**x**∀**y R(x,y)** → **R(x,y)) UG**

**A5=**∀**x (**∀**x**∀**y R(x,y)** → **R(x,y)) →(∀x∀y R(x,y) →∀xR(x,y)) A 5**

**A6=(**∀**x**∀**y R(x,y)** →∀**xR(x,y)) A5=A4**→ **A6**

**A7=**∀**y(**∀**x**∀**y R(x,y)** →∀**xR(x,y)) UG**

**A8=**∀**y(**∀**x**∀**y R(x,y)** →∀**xR(x,y)) →(∀x∀y R(x,y)→∀y∀xR(x,y)) A 5**

**A9=(**∀**x**∀**y R(x,y)**→∀**y**∀**xR(x,y)) A8=A7**→ **A9**

**证毕**

(3). 设R1、R2、R3是关系，证明(R1∘R2)∘R3=R1∘(R2∘R3)，逻辑证明可以用选择规则（8分）

