第 12 章 分治

Abstract

难题被逐层拆解，每一次的拆解都使它变得更为简单。

分而治之揭示了一个重要的事实：从简单做起，一切都不再复杂。

12.1 分治算法

分治（divide and conquer），全称分而治之，是一种非常重要且常见的算法策略。分治通常基于递归实现，包括“分”和“治”两个步骤。

1. **分（划分阶段）**：递归地将原问题分解为两个或多个子问题，直至到达最小子问题时终止。
2. **治（合并阶段）**：从已知解的最小子问题开始，从底至顶地将子问题的解进行合并，从而构建出原问题的解。

如图 12-1 所示，“归并排序”是分治策略的典型应用之一。

1. **分**：递归地将原数组（原问题）划分为两个子数组（子问题），直到子数组只剩一个元素（最小子问题）。
2. **治**：从底至顶地将有序的子数组（子问题的解）进行合并，从而得到有序的原数组（原问题的解）。

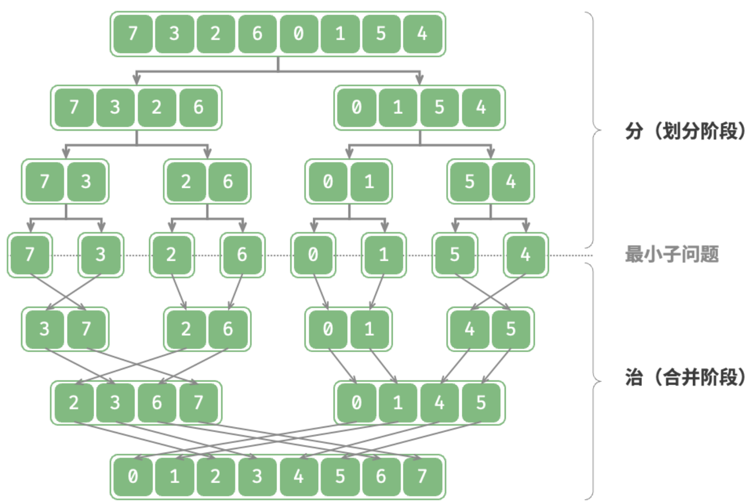


图 12-1　归并排序的分治策略

12.1.1 如何判断分治问题

一个问题是否适合使用分治解决，通常可以参考以下几个判断依据。

1. **问题可以分解**：原问题可以分解成规模更小、类似的子问题，以及能够以相同方式递归地进行划分。
2. **子问题是独立的**：子问题之间没有重叠，互不依赖，可以独立解决。
3. **子问题的解可以合并**：原问题的解通过合并子问题的解得来。

显然，归并排序满足以上三个判断依据。

1. **问题可以分解**：递归地将数组（原问题）划分为两个子数组（子问题）。
2. **子问题是独立的**：每个子数组都可以独立地进行排序（子问题可以独立进行求解）。
3. **子问题的解可以合并**：两个有序子数组（子问题的解）可以合并为一个有序数组（原问题的解）。

12.1.2 通过分治提升效率

分治不仅可以有效地解决算法问题，往往还可以提升算法效率。在排序算法中，快速排序、归并排序、堆排序相较于选择、冒泡、插入排序更快，就是因为它们应用了分治策略。

那么，我们不禁发问：**为什么分治可以提升算法效率，其底层逻辑是什么**？换句话说，将大问题分解为多个子问题、解决子问题、将子问题的解合并为原问题的解，这几步的效率为什么比直接解决原问题的效率更高？这个问题可以从操作数量和并行计算两方面来讨论。

1. 操作数量优化

以“冒泡排序”为例，其处理一个长度为 n 的数组需要 $O(n^2)$ 时间。假设我们按照图 12-2 所示的方式，将数组从中点处分为两个子数组，则划分需要 $O(n)$ 时间，排序每个子数组需要 $O((n/2)^2)$ 时间，合并两个子数组需要 $O(n)$ 时间，总体时间复杂度为：

$$O(n + (\frac{n}{2})^2 \times 2 + n) = O(\frac{n^2}{2} + 2n)$$

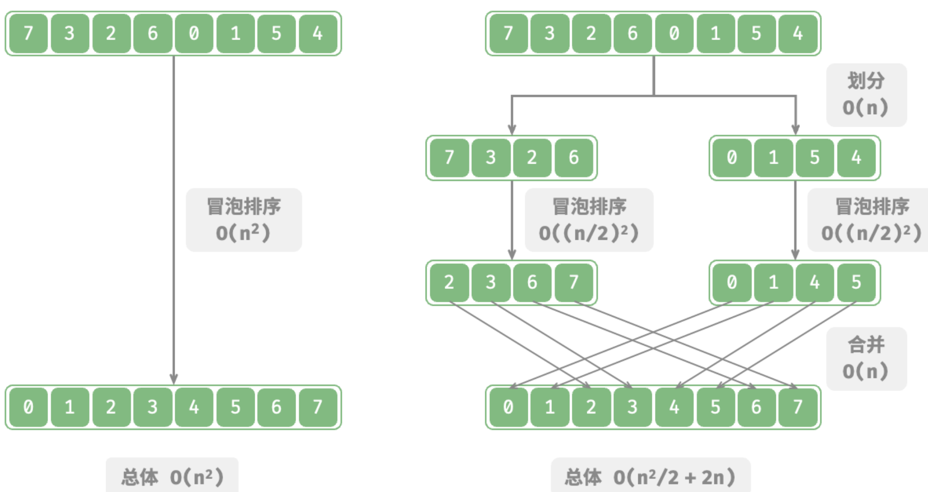


图 12-2 划分数组前后的冒泡排序

接下来，我们计算以下不等式，其左边和右边分别为划分前和划分后的操作总数：

$$\begin{aligned} n^2 & > \frac{n^2}{2} + 2n \\ n^2 - \frac{n^2}{2} - 2n & > 0 \\ n(n - 4) & > 0 \end{aligned}$$

这意味着当 $n > 4$ 时，划分后的操作数量更少，排序效率应该更高。请注意，划分后的时间复杂度仍然是平方阶 $O(n^2)$ ，只是复杂度中的常数项变小了。

进一步想，**如果我们把子数组不断地再从中点处划分为两个子数组**，直至子数组只剩一个元素时停止划分呢？这种思路实际上就是“归并排序”，时间复杂度为 $O(n \log n)$ 。

再思考，**如果我们多设置几个划分点**，将原数组平均划分为 k 个子数组呢？这种情况与“桶排序”非常类似，它非常适合排序海量数据，理论上时间复杂度可以达到 $O(n + k)$ 。

2. 并行计算优化

我们知道，分治生成的子问题是相互独立的，**因此通常可以并行解决**。也就是说，分治不仅可以降低算法的时间复杂度，**还有利于操作系统的并行优化**。

并行优化在多核或多处理器的环境中尤其有效，因为系统可以同时处理多个子问题，更加充分地利用计算资源，从而显著减少总体的运行时间。

比如在图 12-3 所示的“桶排序”中，我们将海量的数据平均分配到各个桶中，则可将所有桶的排序任务分散到各个计算单元，完成后再合并结果。

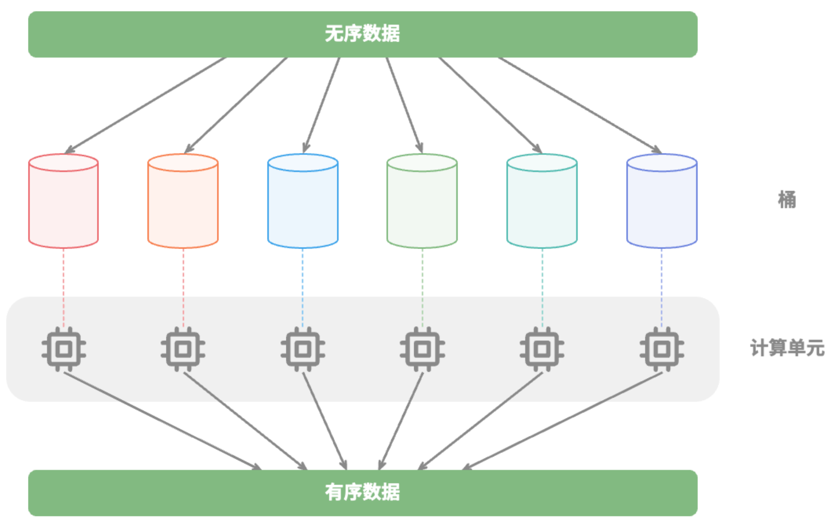


图 12-3 桶排序的并行计算

12.1.3 分治常见应用

一方面，分治可以用来解决许多经典算法问题。

- **寻找最近点对**：该算法首先将点集分成两部分，然后分别找出两部分中的最近点对，最后找出跨越两部分的最近点对。
- **大整数乘法**：例如 Karatsuba 算法，它将大整数乘法分解为几个较小的整数的乘法和加法。
- **矩阵乘法**：例如 Strassen 算法，它将大矩阵乘法分解为多个小矩阵的乘法和加法。
- **汉诺塔问题**：汉诺塔问题可以通过递归解决，这是典型的分治策略应用。
- **求解逆序对**：在一个序列中，如果前面的数字大于后面的数字，那么这两个数字构成一个逆序对。求解逆序对问题可以利用分治的思想，借助归并排序进行求解。

另一方面，分治在算法和数据结构的设计中应用得非常广泛。

- **二分查找**：二分查找是将有序数组从中点索引处分为两部分，然后根据目标值与中间元素值比较结果，决定排除哪一半区间，并在剩余区间执行相同的二分操作。
- **归并排序**：本节开头已介绍，不再赘述。
- **快速排序**：快速排序是选取一个基准值，然后把数组分为两个子数组，一个子数组的元素比基准值小，另一子数组的元素比基准值大，再对这两部分进行相同的划分操作，直至子数组只剩下一个元素。
- **桶排序**：桶排序的基本思想是将数据分散到多个桶，然后对每个桶内的元素进行排序，最后将各个桶的元素依次取出，从而得到一个有序数组。
- **树**：例如二叉搜索树、AVL 树、红黑树、B 树、B+ 树等，它们的查找、插入和删除等操作都可以视为分治策略的应用。
- **堆**：堆是一种特殊的完全二叉树，其各种操作，如插入、删除和堆化，实际上都隐含了分治的思想。
- **哈希表**：虽然哈希表并不直接应用分治，但某些哈希冲突解决方案间接应用了分治策略，例如，链式地址中的长链表会被转化为红黑树，以提升查询效率。

可以看出，**分治是一种“润物细无声”的算法思想**，隐含在各种算法与数据结构之中。

12.2 分治搜索策略

我们已经学过，搜索算法分为两大类。

- **暴力搜索**：它通过遍历数据结构实现，时间复杂度为 $O(n)$ 。
- **自适应搜索**：它利用特有的数据组织形式或先验信息，时间复杂度可达到 $O(\log n)$ 甚至 $O(1)$ 。

实际上，**时间复杂度为 $O(\log n)$ 的搜索算法通常是基于分治策略实现的**，例如二分查找和树。

- 二分查找的每一步都将问题（在数组中搜索目标元素）分解为一个小问题（在数组的一半中搜索目标元素），这个过程一直持续到数组为空或找到目标元素为止。
- 树是分治思想的代表，在二叉搜索树、AVL 树、堆等数据结构中，各种操作的时间复杂度皆为 $O(\log n)$ 。

二分查找的分治策略如下所示。

- **问题可以分解**：二分查找递归地将原问题（在数组中进行查找）分解为子问题（在数组的一半中进行查找），这是通过比较中间元素和目标元素来实现的。
- **子问题是独立的**：在二分查找中，每轮只处理一个子问题，它不受其他子问题的影响。
- **子问题的解无须合并**：二分查找旨在查找一个特定元素，因此不需要将子问题的解进行合并。当子问题得到解决时，原问题也会同时得到解决。

分治能够提升搜索效率，本质上是因为暴力搜索每轮只能排除一个选项，**而分治搜索每轮可以排除一半选项**。

1. 基于分治实现二分查找

在之前的章节中，二分查找是基于递推（迭代）实现的。现在我们基于分治（递归）来实现它。

Question

给定一个长度为 n 的有序数组 `nums` ，其中所有元素都是唯一的，请查找元素 `target` 。

从分治角度，我们将搜索区间 $[i, j]$ 对应的子问题记为 $f(i, j)$ 。

以原问题 $f(0, n-1)$ 为起始点，通过以下步骤进行二分查找。

1. 计算搜索区间 $[i, j]$ 的中点 m ，根据它排除一半搜索区间。
2. 递归求解规模减小一半的子问题，可能为 $f(i, m-1)$ 或 $f(m+1, j)$ 。
3. 循环第 `1.` 步和第 `2.` 步，直至找到 `target` 或区间为空时返回。

图 12-4 展示了在数组中二分查找元素 6 的分治过程。

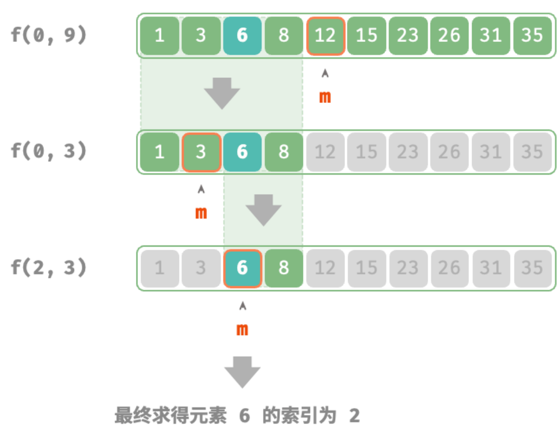


图 12-4　二分查找的分治过程

在实现代码中，我们声明一个递归函数 `dfs()` 来求解问题 $f(i, j)$ ：

```
// === File: binary_search_recur.c ===

/* 二分查找：问题 f(i, j) */
int dfs(int nums[], int target, int i, int j) {
    // 若区间为空，代表无目标元素，则返回 -1
    if (i > j) {
        return -1;
    }
    // 计算中点索引 m
    int m = (i + j) / 2;
    if (nums[m] < target) {
        // 递归子问题 f(m+1, j)
        return dfs(nums, target, m + 1, j);
    } else if (nums[m] > target) {
        // 递归子问题 f(i, m-1)
```

```
        return dfs(nums, target, i, m - 1);
    } else {
        // 找到目标元素，返回其索引
        return m;
    }
}

/* 二分查找 */
int binarySearch(int nums[], int target, int numsSize) {
    int n = numsSize;
    // 求解问题 f(0, n-1)
    return dfs(nums, target, 0, n - 1);
}
```

12.3 构建二叉树问题

Question

给定一棵二叉树的前序遍历 `preorder` 和中序遍历 `inorder` ，请从中构建二叉树，返回二叉树的根节点。假设二叉树中没有值重复的节点（如图 12-5 所示）。

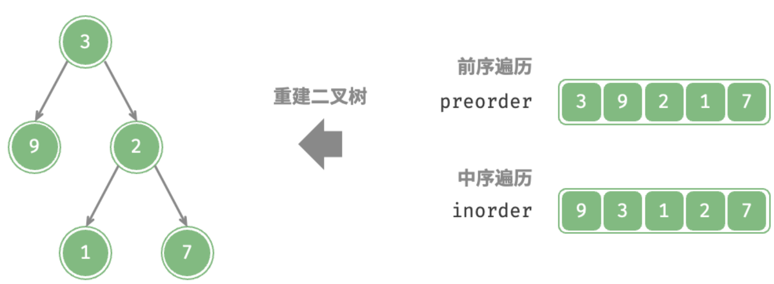


图 12-5 构建二叉树的示例数据

1. 判断是否为分治问题

原问题定义为从 `preorder` 和 `inorder` 构建二叉树，是一个典型的分治问题。

- **问题可以分解**：从分治的角度切入，我们可以将原问题划分为两个子问题：构建左子树、构建右子树，加上一步操作：初始化根节点。而对于每棵子树（子问题），我们仍然可以复用以上划分方法，将其划分为更小的子树（子问题），直至达到最小子问题（空子树）时终止。
- **子问题是独立的**：左子树和右子树是相互独立的，它们之间没有交集。在构建左子树时，我们只需关注中序遍历和前序遍历中与左子树对应的部分。右子树同理。
- **子问题的解可以合并**：一旦得到了左子树和右子树（子问题的解），我们就可以将它们链接到根节点上，得到原问题的解。

2. 如何划分子树

根据以上分析，这道题可以使用分治来求解，**但如何通过前序遍历 `preorder` 和中序遍历 `inorder` 来划分左子树和右子树呢**？

根据定义，`preorder` 和 `inorder` 都可以划分为三个部分。

- 前序遍历：`[ 根节点 | 左子树 | 右子树 ]`，例如图 12-5 的树对应 `[ 3 | 9 | 2 1 7 ]`。
- 中序遍历：`[ 左子树 | 根节点 | 右子树 ]`，例如图 12-5 的树对应 `[ 9 | 3 | 1 2 7 ]`。

以上图数据为例，我们可以通过图 12-6 所示的步骤得到划分结果。

1. 前序遍历的首元素 3 是根节点的值。
2. 查找根节点 3 在 `inorder` 中的索引，利用该索引可将 `inorder` 划分为 `[ 9 | 3 | 1 2 7 ]`。
3. 根据 `inorder` 的划分结果，易得左子树和右子树的节点数量分别为 1 和 3，从而可将 `preorder` 划分为 `[ 3 | 9 | 2 1 7 ]`。

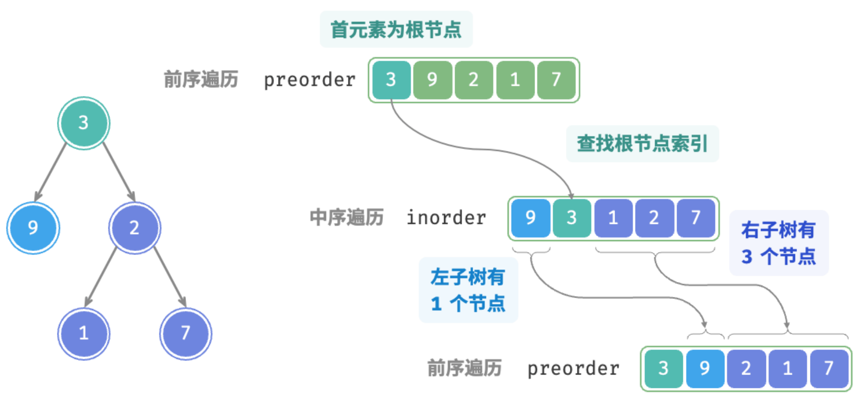


图 12-6 在前序遍历和中序遍历中划分子树

3. 基于变量描述子树区间

根据以上划分方法，**我们已经得到根节点、左子树、右子树在 `preorder` 和 `inorder` 中的索引区间**。而为了描述这些索引区间，我们需要借助几个指针变量。

- 将当前树的根节点在 `preorder` 中的索引记为 i。
- 将当前树的根节点在 `inorder` 中的索引记为 m。
- 将当前树在 `inorder` 中的索引区间记为 $[l, r]$。

如表 12-1 所示，通过以上变量即可表示根节点在 `preorder` 中的索引，以及子树在 `inorder` 中的索引区间。

表 12-1 根节点和子树在前序遍历和中序遍历中的索引

	根节点在 `preorder` 中的索引	子树在 `inorder` 中的索引区间
当前树	i	$[l, r]$
左子树	$i+1$	$[l, m-1]$
右子树	$i+1+(m-l)$	$[m+1, r]$

请注意，右子树根节点索引中的 $(m-l)$ 的含义是“左子树的节点数量”，建议结合图 12-7 理解。

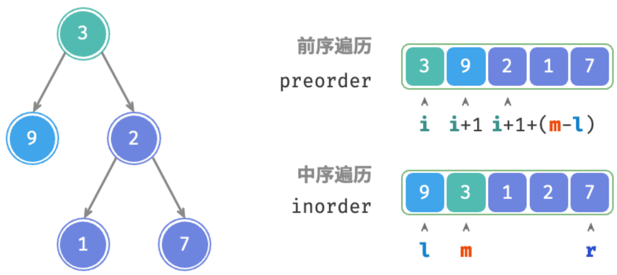


图 12-7 根节点和左右子树的索引区间表示

4. 代码实现

为了提升查询 m 的效率，我们借助一个哈希表 `hmap` 来存储数组 `inorder` 中元素到索引的映射：

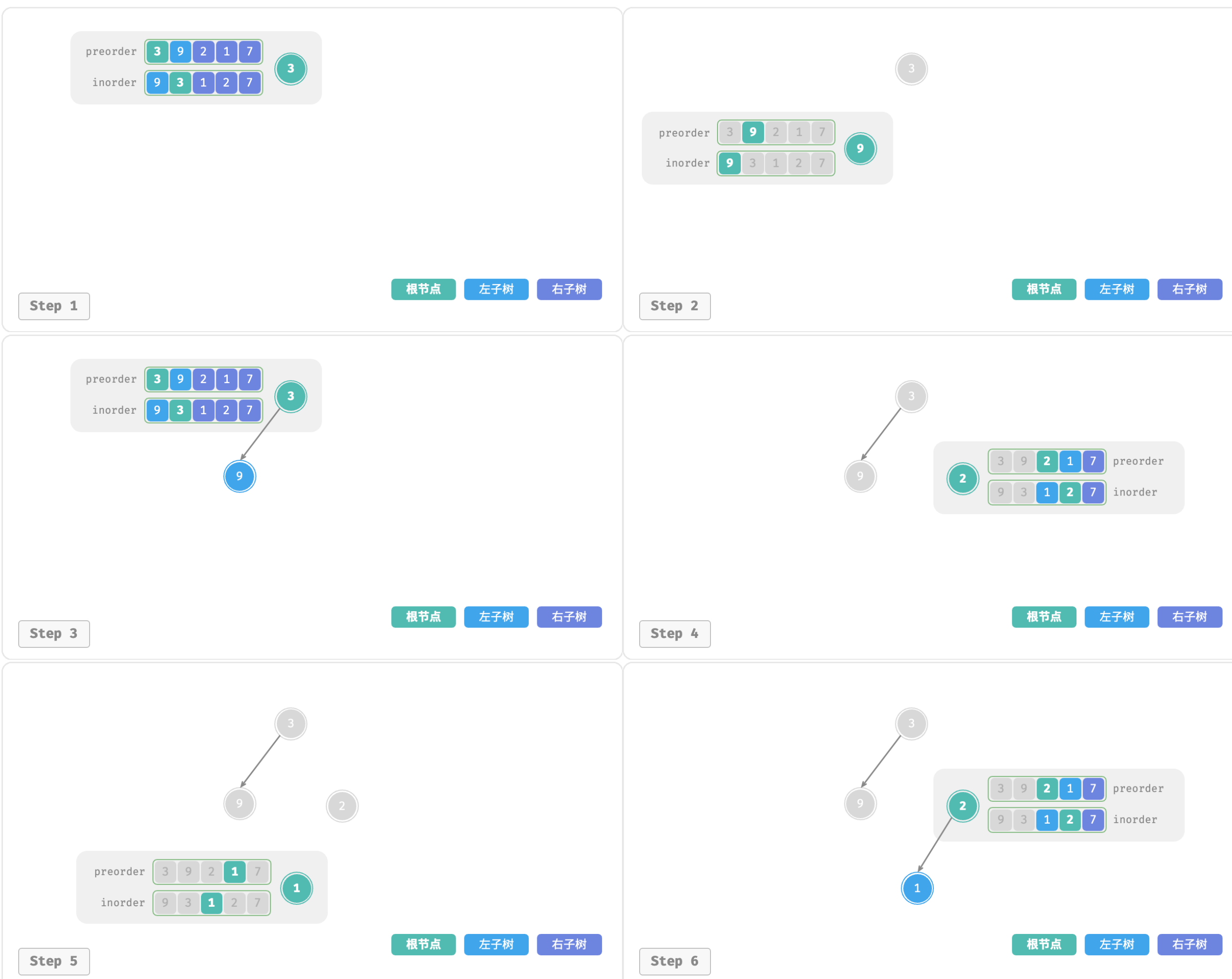
```c
// === File: build_tree.c ===

/* 构建二叉树：分治 */
TreeNode *dfs(int *preorder, int *inorderMap, int i, int l, int r, int size) {
    // 子树区间为空时终止
    if (r - l < 0)
        return NULL;
    // 初始化根节点
    TreeNode *root = (TreeNode *)malloc(sizeof(TreeNode));
    root->val = preorder[i];
    root->left = NULL;
    root->right = NULL;
    // 查询 m ，从而划分左右子树
    int m = inorderMap[preorder[i]];
    // 子问题：构建左子树
    root->left = dfs(preorder, inorderMap, i + 1, l, m - 1, size);
    // 子问题：构建右子树
    root->right = dfs(preorder, inorderMap, i + 1 + m - l, m + 1, r, size);
    // 返回根节点
    return root;
```

```
}

/* 构建二叉树 */
TreeNode *buildTree(int *preorder, int preorderSize, int *inorder, int inorderSize) {
    // 初始化哈希表，存储 inorder 元素到索引的映射
    int *inorderMap = (int *)malloc(sizeof(int) * MAX_SIZE);
    for (int i = 0; i < inorderSize; i++) {
        inorderMap[inorder[i]] = i;
    }
    TreeNode *root = dfs(preorder, inorderMap, 0, 0, inorderSize - 1, inorderSize);
    free(inorderMap);
    return root;
}
```

图 12-8 展示了构建二叉树的递归过程，各个节点是在向下“递”的过程中建立的，而各条边（引用）是在向上“归”的过程中建立的。



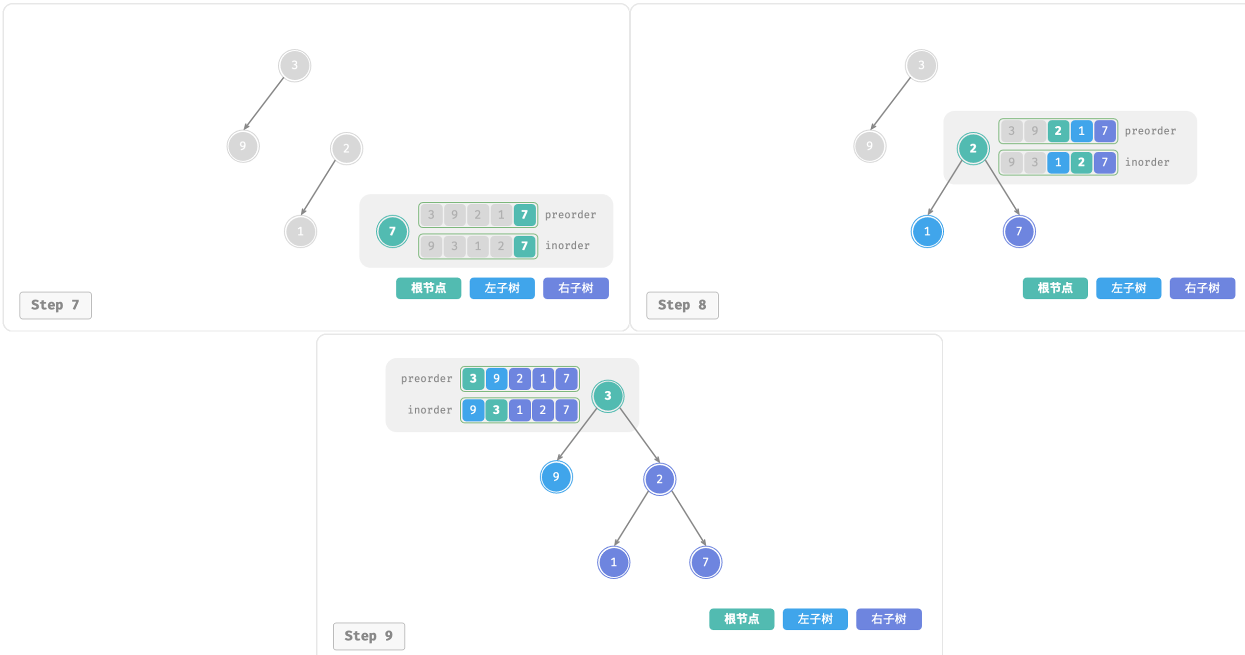


图 12-8　构建二叉树的递归过程

每个递归函数内的前序遍历 `preorder` 和中序遍历 `inorder` 的划分结果如图 12-9 所示。

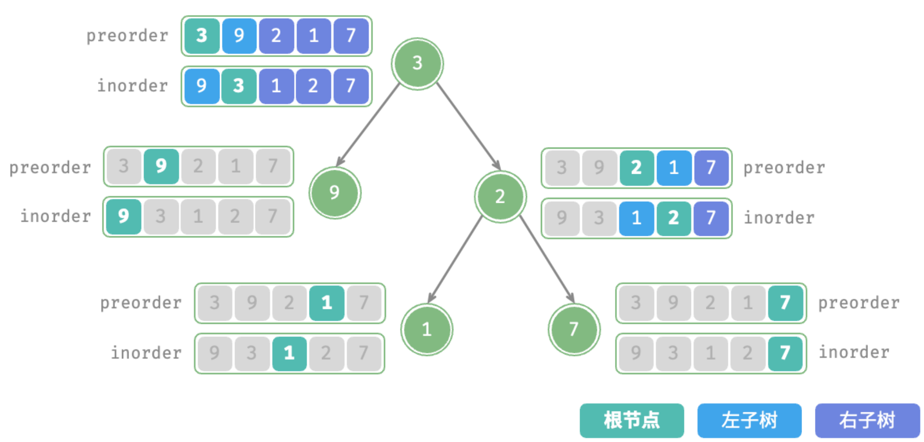


图 12-9　每个递归函数中的划分结果

设树的节点数量为 n ，初始化每一个节点（执行一个递归函数 `dfs()` ）使用 $O(1)$ 时间。**因此总体时间复杂度为 $O(n)$** 。

哈希表存储 `inorder` 元素到索引的映射，空间复杂度为 $O(n)$ 。在最差情况下，即二叉树退化为链表时，递归深度达到 n ，使用 $O(n)$ 的栈帧空间。**因此总体空间复杂度为 $O(n)$** 。

12.4　汉诺塔问题

在归并排序和构建二叉树中，我们都是将原问题分解为两个规模为原问题一半的子问题。然而对于汉诺塔问题，我们采用不同的分解策略。

Question

给定三根柱子，记为 `A`、`B` 和 `C` 。起始状态下，柱子 `A` 上套着 n 个圆盘，它们从上到下按照从小到大的顺序排列。我们的任务是要把这 n 个圆盘移到柱子 `C` 上，并保持它们的原有顺序不变（如图 12-10 所示）。在移动圆盘的过程中，需要遵守以下规则。

1. 圆盘只能从一根柱子顶部拿出，从另一根柱子顶部放入。
2. 每次只能移动一个圆盘。
3. 小圆盘必须时刻位于大圆盘之上。

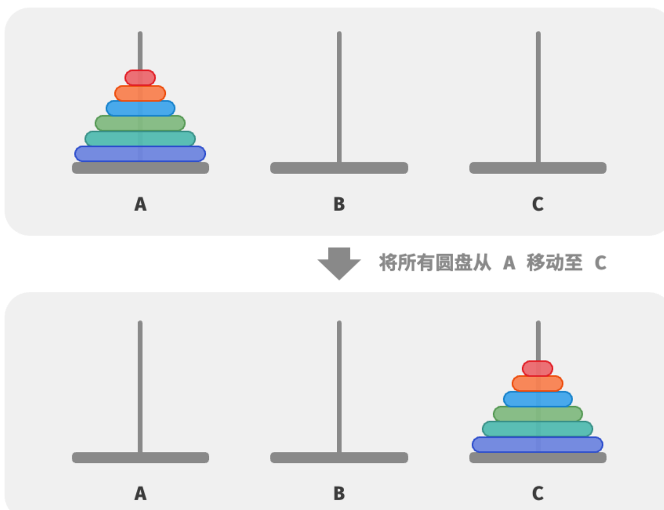


图 12-10　汉诺塔问题示例

我们将规模为 i 的汉诺塔问题记作 $f(i)$ 。例如 $f(3)$ 代表将 3 个圆盘从 `A` 移动至 `C` 的汉诺塔问题。

1.　考虑基本情况

如图 12-11 所示，对于问题 $f(1)$ ，即当只有一个圆盘时，我们将它直接从 `A` 移动至 `C` 即可。

图 12-11　规模为 1 的问题的解

如图 12-12 所示，对于问题 $f(2)$ ，即当有两个圆盘时，**由于要时刻满足小圆盘在大圆盘之上，因此需要借助 `B` 来完成移动**。

1. 先将上面的小圆盘从 `A` 移至 `B` 。
2. 再将大圆盘从 `A` 移至 `C` 。
3. 最后将小圆盘从 `B` 移至 `C` 。

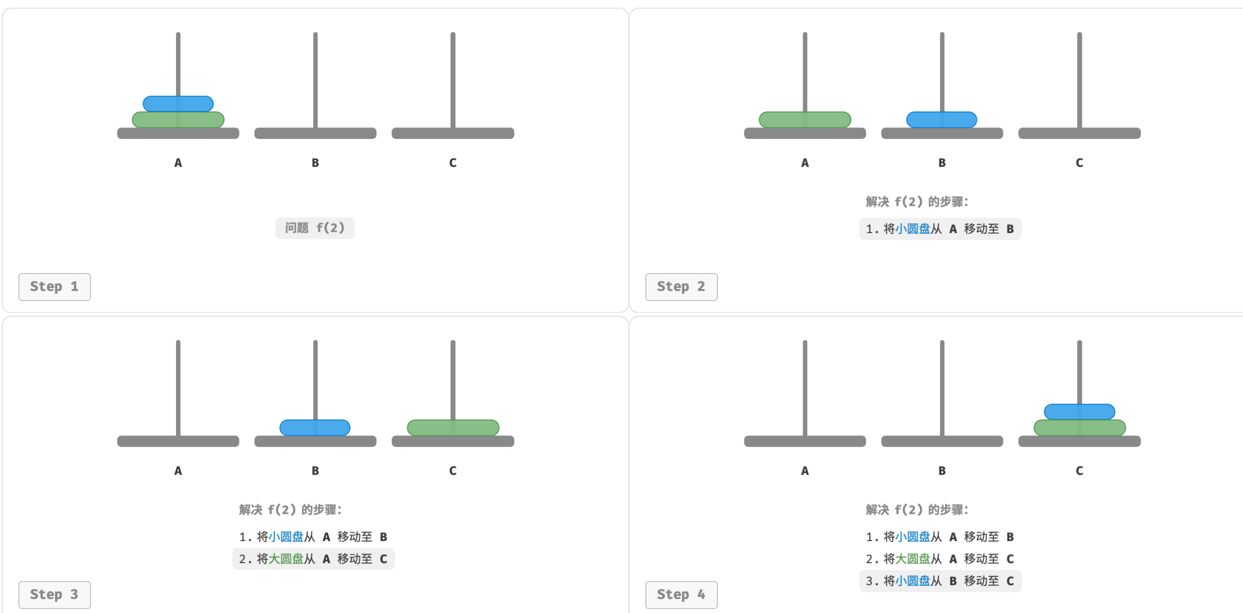


图 12-12　规模为 2 的问题的解

解决问题 $f(2)$ 的过程可总结为：**将两个圆盘借助 `B` 从 `A` 移至 `C`** 。其中，`C` 称为目标柱、`B` 称为缓冲柱。

2.　子问题分解

对于问题 $f(3)$ ，即当有三个圆盘时，情况变得稍微复杂了一些。

因为已知 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的解，所以我们可从分治角度思考，**将 `A` 顶部的两个圆盘看作一个整体**，执行图 12-13 所示的步骤。这样三个圆盘就被顺利地从 `A` 移至 `C` 了。

1. 令 `B` 为目标柱、`C` 为缓冲柱，将两个圆盘从 `A` 移至 `B` 。
2. 将 `A` 中剩余的一个圆盘从 `A` 直接移动至 `C` 。
3. 令 `C` 为目标柱、`A` 为缓冲柱，将两个圆盘从 `B` 移至 `C` 。

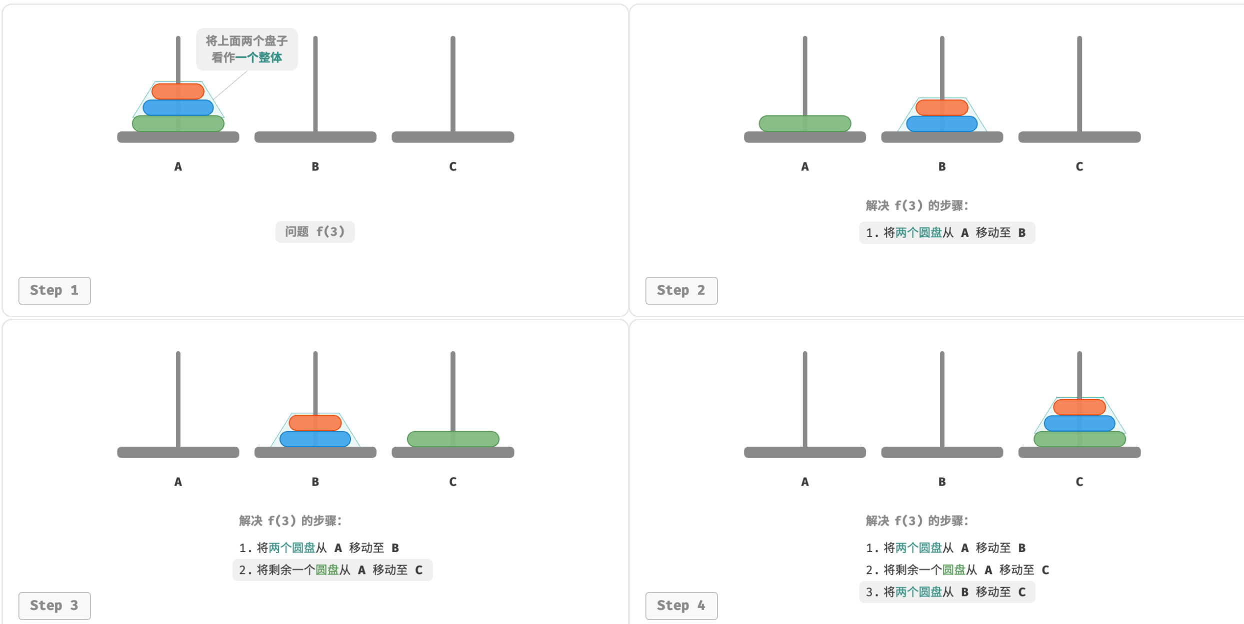


图 12-13　规模为 3 的问题的解

从本质上看，**我们将问题 $f(3)$ 划分为两个子问题 $f(2)$ 和一个子问题 $f(1)$** 。按顺序解决这三个子问题之后，原问题随之得到解决。这说明子问题是独立的，而且解可以合并。

至此，我们可总结出图 12-14 所示的解决汉诺塔问题的分治策略：将原问题 $f(n)$ 划分为两个子问题 $f(n-1)$ 和一个子问题 $f(1)$ ，并按照以下顺序解决这三个子问题。

1. 将 $n-1$ 个圆盘借助 `C` 从 `A` 移至 `B` 。
2. 将剩余 1 个圆盘从 `A` 直接移至 `C` 。
3. 将 $n-1$ 个圆盘借助 `A` 从 `B` 移至 `C` 。

对于这两个子问题 $f(n-1)$ ，**可以通过相同的方式进行递归划分**，直至达到最小子问题 $f(1)$ 。而 $f(1)$ 的解是已知的，只需一次移动操作即可。

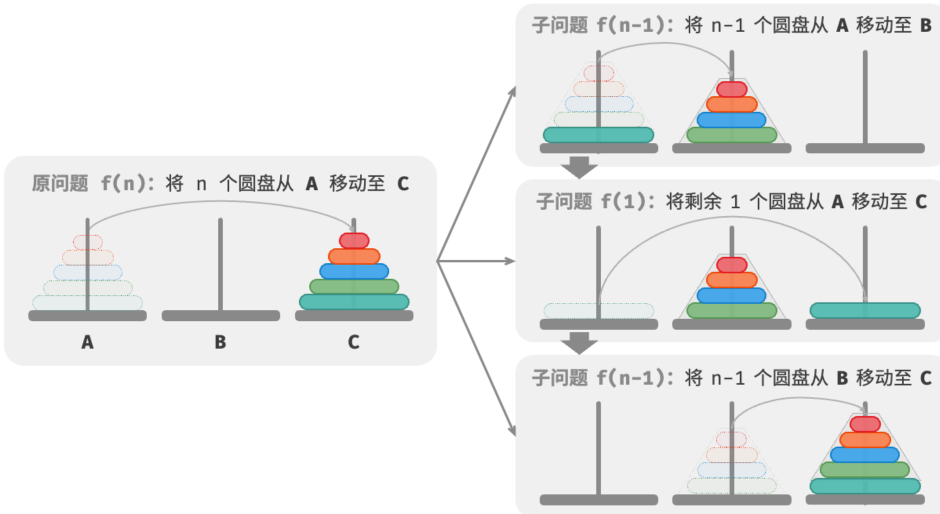


图 12-14　解决汉诺塔问题的分治策略

3. 代码实现

在代码中，我们声明一个递归函数 `dfs(i, src, buf, tar)` ，它的作用是将柱 `src` 顶部的 i 个圆盘借助缓冲柱 `buf` 移动至目标柱 `tar` ：

```c
// === File: hanota.c ===

/* 移动一个圆盘 */
void move(int *src, int *srcSize, int *tar, int *tarSize) {
    // 从 src 顶部拿出一个圆盘
    int pan = src[*srcSize - 1];
    src[*srcSize - 1] = 0;
    (*srcSize)--;
    // 将圆盘放入 tar 顶部
    tar[*tarSize] = pan;
    (*tarSize)++;
}

/* 求解汉诺塔问题 f(i) */
void dfs(int i, int *src, int *srcSize, int *buf, int *bufSize, int *tar, int *tarSize) {
    // 若 src 只剩下一个圆盘，则直接将其移到 tar
    if (i == 1) {
        move(src, srcSize, tar, tarSize);
        return;
    }
    // 子问题 f(i-1) ：将 src 顶部 i-1 个圆盘借助 tar 移到 buf
    dfs(i - 1, src, srcSize, tar, tarSize, buf, bufSize);
    // 子问题 f(1) ：将 src 剩余一个圆盘移到 tar
```

```c
    move(src, srcSize, tar, tarSize);
    // 子问题 f(i-1) ：将 buf 顶部 i-1 个圆盘借助 src 移到 tar
    dfs(i - 1, buf, bufSize, src, srcSize, tar, tarSize);
}

/* 求解汉诺塔问题 */
void solveHanota(int *A, int *ASize, int *B, int *BSize, int *C, int *CSize) {
    // 将 A 顶部 n 个圆盘借助 B 移到 C
    dfs(*ASize, A, ASize, B, BSize, C, CSize);
}
```

如图 12-15 所示，汉诺塔问题形成一棵高度为 n 的递归树，每个节点代表一个子问题，对应一个开启的 `dfs()` 函数，**因此时间复杂度为 $O(2^n)$ ，空间复杂度为 $O(n)$** 。

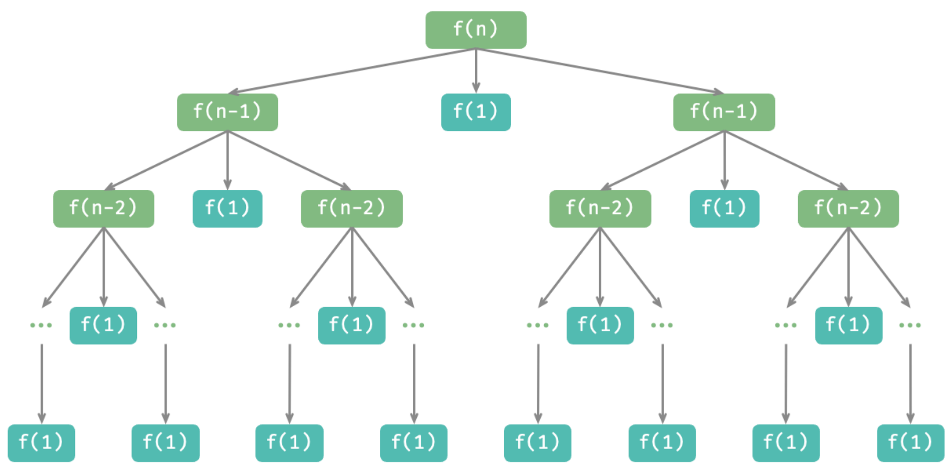


图 12-15 汉诺塔问题的递归树

> **Quote**
> 汉诺塔问题源自一个古老的传说。在古印度的一个寺庙里，僧侣们有三根高大的钻石柱子，以及 64 个大小不一的金圆盘。僧侣们不断地移动圆盘，他们相信在最后一个圆盘被正确放置的那一刻，这个世界就会结束。
> 然而，即使僧侣们每秒钟移动一次，总共需要大约 $2^{64} \approx 1.84 \times 10^{19}$ 秒，合约 5850 亿年，远远超过了现在对宇宙年龄的估计。所以，倘若这个传说是真的，我们应该不需要担心世界末日的到来。

12.5 小结

- 分治是一种常见的算法设计策略，包括分（划分）和治（合并）两个阶段，通常基于递归实现。
- 判断是否是分治算法问题的依据包括：问题能否分解、子问题是否独立、子问题能否合并。

- 归并排序是分治策略的典型应用，其递归地将数组划分为等长的两个子数组，直到只剩一个元素时开始逐层合并，从而完成排序。
- 引入分治策略往往可以提升算法效率。一方面，分治策略减少了操作数量；另一方面，分治后有利于系统的并行优化。
- 分治既可以解决许多算法问题，也广泛应用于数据结构与算法设计中，处处可见其身影。
- 相较于暴力搜索，自适应搜索效率更高。时间复杂度为 $O(\log n)$ 的搜索算法通常是基于分治策略实现的。
- 二分查找是分治策略的另一个典型应用，它不包含将子问题的解进行合并的步骤。我们可以通过递归分治实现二分查找。
- 在构建二叉树的问题中，构建树（原问题）可以划分为构建左子树和右子树（子问题），这可以通过划分前序遍历和中序遍历的索引区间来实现。
- 在汉诺塔问题中，一个规模为 n 的问题可以划分为两个规模为 $n-1$ 的子问题和一个规模为 1 的子问题。按顺序解决这三个子问题后，原问题随之得到解决。