第 10 章　搜索

Abstract

搜索是一场未知的冒险，我们或许需要走遍神秘空间的每个角落，又或许可以快速锁定目标。

在这场寻觅之旅中，每一次探索都可能得到一个未曾料想的答案。

10.1　二分查找

二分查找（binary search）是一种基于分治策略的高效搜索算法。它利用数据的有序性，每轮缩小一半搜索范围，直至找到目标元素或搜索区间为空为止。

> **Question**
> 给定一个长度为 n 的数组 `nums` ，元素按从小到大的顺序排列且不重复。请查找并返回元素 `target` 在该数组中的索引。若数组不包含该元素，则返回 -1 。示例如图 10-1 所示。

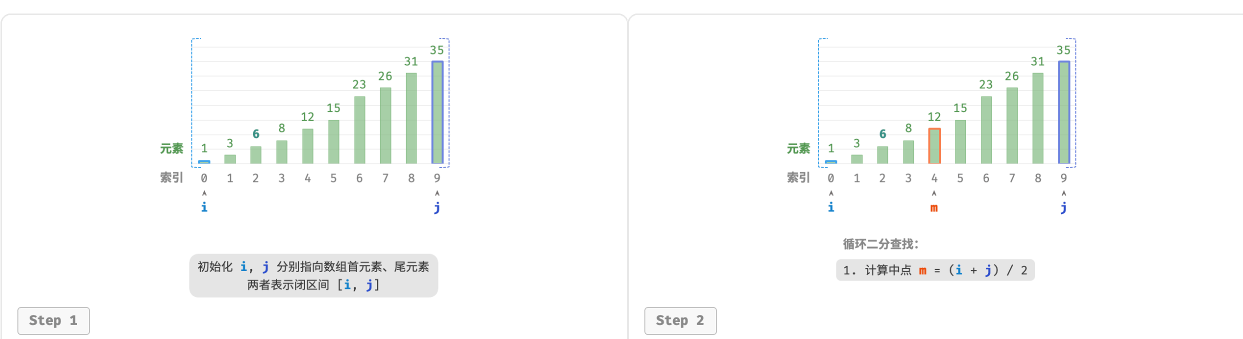
图 10-1　二分查找示例数据

如图 10-2 所示，我们先初始化指针 $i = 0$ 和 $j = n - 1$ ，分别指向数组首元素和尾元素，代表搜索区间 $[0, n - 1]$ 。请注意，中括号表示闭区间，其包含边界值本身。

接下来，循环执行以下两步。

1. 计算中点索引 $m = \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$ ，其中 $\lfloor \ \rfloor$ 表示向下取整操作。
2. 判断 `nums[m]` 和 `target` 的大小关系，分为以下三种情况。
    1. 当 `nums[m] < target` 时，说明 `target` 在区间 $[m + 1, j]$ 中，因此执行 $i = m + 1$ 。
    2. 当 `nums[m] > target` 时，说明 `target` 在区间 $[i, m - 1]$ 中，因此执行 $j = m - 1$ 。
    3. 当 `nums[m] = target` 时，说明找到 `target` ，因此返回索引 m 。

若数组不包含目标元素，搜索区间最终会缩小为空。此时返回 -1 。



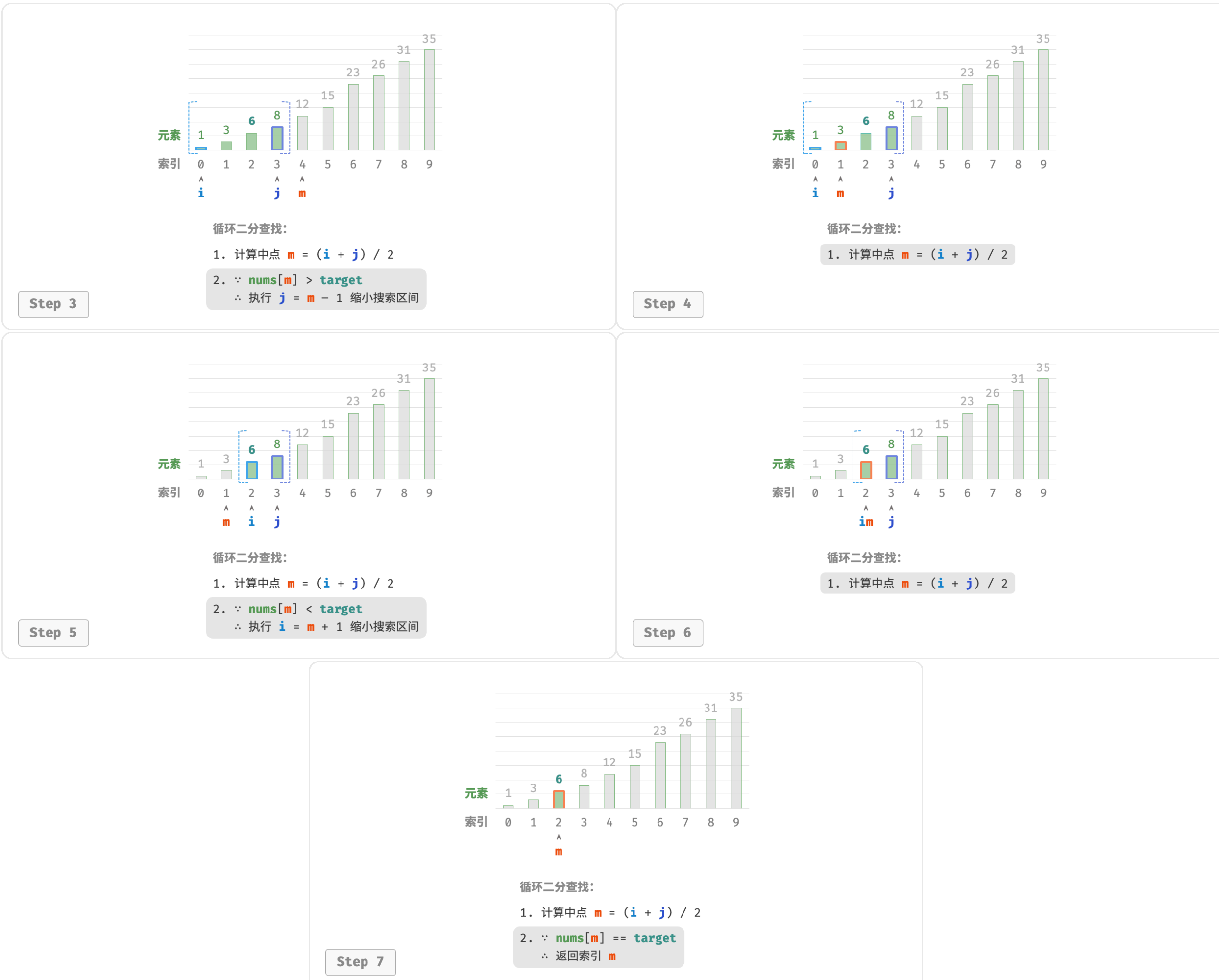


图 10-2 二分查找流程

值得注意的是，由于 i 和 j 都是 `int` 类型，**因此 $i + j$ 可能会超出 `int` 类型的取值范围**。为了避免大数越界，我们通常采用公式 $m = \lfloor i + (j - i)/2 \rfloor$ 来计算中点。

代码如下所示：

```
// === File: binary_search.c ===

/* 二分查找（双闭区间） */
int binarySearch(int *nums, int len, int target) {
    // 初始化双闭区间 [0, n-1] ，即 i, j 分别指向数组首元素、尾元素
    int i = 0, j = len - 1;
    // 循环，当搜索区间为空时跳出（当 i > j 时为空）
    while (i <= j) {
        int m = i + (j - i) / 2; // 计算中点索引 m
        if (nums[m] < target)    // 此情况说明 target 在区间 [m+1, j] 中
            i = m + 1;
        else if (nums[m] > target) // 此情况说明 target 在区间 [i, m-1] 中
```

```
            j = m - 1;
        else // 找到目标元素，返回其索引
            return m;
    }
    // 未找到目标元素，返回 -1
    return -1;
}
```

时间复杂度为 $O(\log n)$ ：在二分循环中，区间每轮缩小一半，因此循环次数为 $\log_2 n$ 。

空间复杂度为 $O(1)$ ：指针 i 和 j 使用常数大小空间。

10.1.1 区间表示方法

除了上述双闭区间外，常见的区间表示还有“左闭右开”区间，定义为 $[0, n)$ ，即左边界包含自身，右边界不包含自身。在该表示下，区间 $[i, j)$ 在 $i = j$ 时为空。

我们可以基于该表示实现具有相同功能的二分查找算法：

```
// === File: binary_search.c ===

/* 二分查找（左闭右开区间） */
int binarySearchLCRO(int *nums, int len, int target) {
    // 初始化左闭右开区间 [0, n) ，即 i, j 分别指向数组首元素、尾元素 +1
    int i = 0, j = len;
    // 循环，当搜索区间为空时跳出（当 i = j 时为空）
    while (i < j) {
        int m = i + (j - i) / 2; // 计算中点索引 m
        if (nums[m] < target)    // 此情况说明 target 在区间 [m+1, j) 中
            i = m + 1;
        else if (nums[m] > target) // 此情况说明 target 在区间 [i, m) 中
            j = m;
        else // 找到目标元素，返回其索引
            return m;
    }
    // 未找到目标元素，返回 -1
    return -1;
}
```

如图 10-3 所示，在两种区间表示下，二分查找算法的初始化、循环条件和缩小区间操作皆有所不同。

由于“双闭区间”表示中的左右边界都被定义为闭区间，因此通过指针 i 和指针 j 缩小区间的操作也是对称的。这样更不容易出错，**因此一般建议采用“双闭区间”的写法**。

图 10-3 两种区间定义

10.1.2 优点与局限性

二分查找在时间和空间方面都有较好的性能。

- 二分查找的时间效率高。在大数据量下，对数阶的时间复杂度具有显著优势。例如，当数据大小 $n = 2^{20}$ 时，线性查找需要 $2^{20} = 1048576$ 轮循环，而二分查找仅需 $\log_2 2^{20} = 20$ 轮循环。
- 二分查找无须额外空间。相较于需要借助额外空间的搜索算法（例如哈希查找），二分查找更加节省空间。

然而，二分查找并非适用于所有情况，主要有以下原因。

- 二分查找仅适用于有序数据。若输入数据无序，为了使用二分查找而专门进行排序，得不偿失。因为排序算法的时间复杂度通常为 $O(n \log n)$ ，比线性查找和二分查找都更高。对于频繁插入元素的场景，为保持数组有序性，需要将元素插入到特定位置，时间复杂度为 $O(n)$ ，也是非常昂贵的。
- 二分查找仅适用于数组。二分查找需要跳跃式（非连续地）访问元素，而在链表中执行跳跃式访问的效率较低，因此不适合应用在链表或基于链表实现的数据结构。
- 小数据量下，线性查找性能更佳。在线性查找中，每轮只需 1 次判断操作；而在二分查找中，需要 1 次加法、1 次除法、1 ~ 3 次判断操作、1 次加法（减法），共 4 ~ 6 个单元操作；因此，当数据量 n 较小时，线性查找反而比二分查找更快。

10.2 二分查找插入点

二分查找不仅可用于搜索目标元素，还可用于解决许多变种问题，比如搜索目标元素的插入位置。

10.2.1 无重复元素的情况

Question

给定一个长度为 n 的有序数组 `nums` 和一个元素 `target`，数组不存在重复元素。现将 `target` 插入数组 `nums` 中，并保持其有序性。若数组中已存在元素 `target`，则插入到其左方。请返回插入后 `target` 在数组中的索引。示例如图 10-4 所示。

图 10-4 二分查找插入点示例数据

如果想复用上一节的二分查找代码，则需要回答以下两个问题。

问题一：当数组中包含 `target` 时，插入点的索引是否是该元素的索引？

题目要求将 `target` 插入到相等元素的左边，这意味着新插入的 `target` 替换了原来 `target` 的位置。也就是说，**当数组包含 `target` 时，插入点的索引就是该 `target` 的索引**。

问题二：当数组中不存在 `target` 时，插入点是哪个元素的索引？

进一步思考二分查找过程：当 `nums[m] < target` 时 i 移动，这意味着指针 i 在向大于等于 `target` 的元素靠近。同理，指针 j 始终在向小于等于 `target` 的元素靠近。

因此二分结束时一定有：i 指向首个大于 `target` 的元素，j 指向首个小于 `target` 的元素。**易得当数组不包含 `target` 时，插入索引为 i**。代码如下所示：

```c
// === File: binary_search_insertion.c ===

/* 二分查找插入点（无重复元素） */
int binarySearchInsertionSimple(int *nums, int numSize, int target) {
    int i = 0, j = numSize - 1; // 初始化双闭区间 [0, n-1]
    while (i <= j) {
        int m = i + (j - i) / 2; // 计算中点索引 m
        if (nums[m] < target) {
            i = m + 1; // target 在区间 [m+1, j] 中
        } else if (nums[m] > target) {
            j = m - 1; // target 在区间 [i, m-1] 中
```

```
        } else {
            return m; // 找到 target ，返回插入点 m
        }
    }
    // 未找到 target ，返回插入点 i
    return i;
}
```

10.2.2 存在重复元素的情况

> **Question**
> 在上一题的基础上，规定数组可能包含重复元素，其余不变。

假设数组中存在多个 `target` ，则普通二分查找只能返回其中一个 `target` 的索引，**而无法确定该元素的左边和右边还有多少 `target`**。

题目要求将目标元素插入到最左边，**所以我们需要查找数组中最左一个 `target` 的索引**。初步考虑通过图 10-5 所示的步骤实现。

1. 执行二分查找，得到任意一个 `target` 的索引，记为 k 。
2. 从索引 k 开始，向左进行线性遍历，当找到最左边的 `target` 时返回。

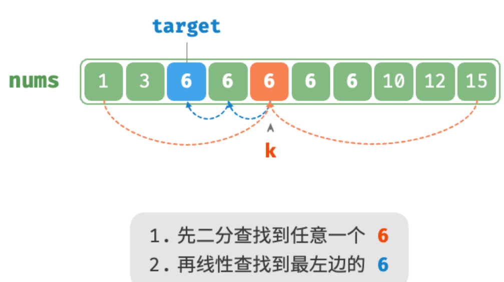


图 10-5 线性查找重复元素的插入点

此方法虽然可用，但其包含线性查找，因此时间复杂度为 $O(n)$ 。当数组中存在很多重复的 `target` 时，该方法效率很低。

现考虑拓展二分查找代码。如图 10-6 所示，整体流程保持不变，每轮先计算中点索引 m ，再判断 `target` 和 `nums[m]` 的大小关系，分为以下几种情况。

- 当 `nums[m] < target` 或 `nums[m] > target` 时，说明还没有找到 `target` ，因此采用普通二分查找的缩小区间操作，**从而使指针 i 和 j 向 `target` 靠近**。
- 当 `nums[m] == target` 时，说明小于 `target` 的元素在区间 $[i, m-1]$ 中，因此采用 $j = m-1$ 来缩小区间，**从而使指针 j 向小于 `target` 的元素靠近**。

循环完成后，i 指向最左边的 `target` ，j 指向首个小于 `target` 的元素，**因此索引 i 就是插入点**。

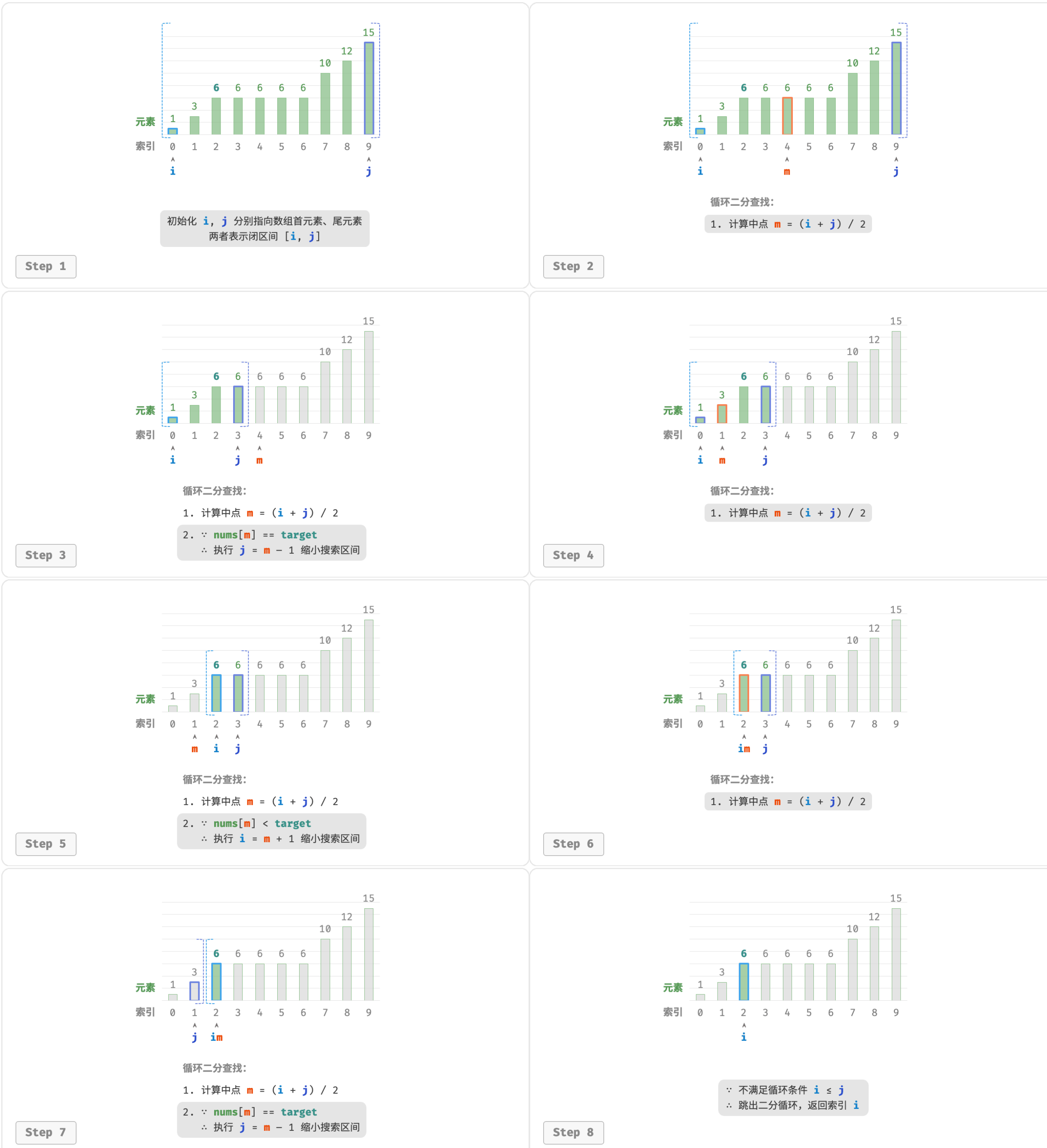


图 10-6　二分查找重复元素的插入点的步骤

观察以下代码，判断分支 `nums[m] > target` 和 `nums[m] == target` 的操作相同，因此两者可以合并。

即便如此，我们仍然可以将判断条件保持展开，因为其逻辑更加清晰、可读性更好。

```c
// === File: binary_search_insertion.c ===

/* 二分查找插入点（存在重复元素） */
int binarySearchInsertion(int *nums, int numSize, int target) {
    int i = 0, j = numSize - 1; // 初始化双闭区间 [0, n-1]
    while (i <= j) {
        int m = i + (j - i) / 2; // 计算中点索引 m
        if (nums[m] < target) {
            i = m + 1; // target 在区间 [m+1, j] 中
        } else if (nums[m] > target) {
            j = m - 1; // target 在区间 [i, m-1] 中
        } else {
            j = m - 1; // 首个小于 target 的元素在区间 [i, m-1] 中
        }
    }
    // 返回插入点 i
    return i;
}
```

Tip

本节的代码都是"双闭区间"写法。有兴趣的读者可以自行实现"左闭右开"写法。

总的来看，二分查找无非就是给指针 i 和 j 分别设定搜索目标，目标可能是一个具体的元素（例如 `target` ），也可能是一个元素范围（例如小于 `target` 的元素）。

在不断的循环二分中，指针 i 和 j 都逐渐逼近预先设定的目标。最终，它们或是成功找到答案，或是越过边界后停止。

10.3 二分查找边界

10.3.1 查找左边界

Question

给定一个长度为 n 的有序数组 `nums` ，其中可能包含重复元素。请返回数组中最左一个元素 `target` 的索引。若数组中不包含该元素，则返回 -1 。

回忆二分查找插入点的方法，搜索完成后 i 指向最左一个 `target` ，**因此查找插入点本质上是在查找最左一个 `target` 的索引**。

考虑通过查找插入点的函数实现查找左边界。请注意，数组中可能不包含 `target` ，这种情况可能导致以下两种结果。

- 插入点的索引 i 越界。
- 元素 `nums[i]` 与 `target` 不相等。

当遇到以上两种情况时，直接返回 -1 即可。代码如下所示：

```c
// === File: binary_search_edge.c ===

/* 二分查找最左一个 target */
int binarySearchLeftEdge(int *nums, int numSize, int target) {
    // 等价于查找 target 的插入点
    int i = binarySearchInsertion(nums, numSize, target);
    // 未找到 target ，返回 -1
    if (i == numSize || nums[i] != target) {
        return -1;
    }
    // 找到 target ，返回索引 i
    return i;
}
```

10.3.2　查找右边界

那么如何查找最右一个 `target` 呢？最直接的方式是修改代码，替换在 `nums[m] == target` 情况下的指针收缩操作。代码在此省略，有兴趣的读者可以自行实现。

下面我们介绍两种更加取巧的方法。

1.　复用查找左边界

实际上，我们可以利用查找最左元素的函数来查找最右元素，具体方法为：**将查找最右一个 `target` 转化为查找最左一个 `target + 1`**。

如图 10-7 所示，查找完成后，指针 i 指向最左一个 `target + 1`（如果存在），而 j 指向最右一个 `target` ，**因此返回 j 即可**。

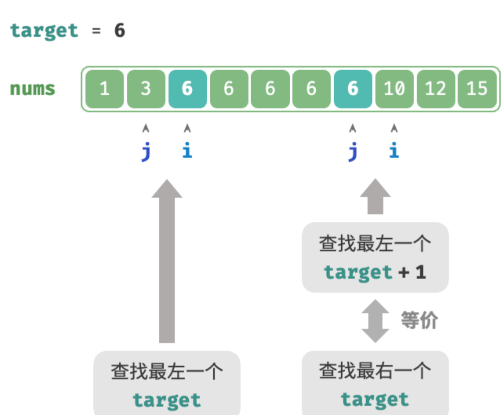


图 10-7　将查找右边界转化为查找左边界

请注意，返回的插入点是 i ，因此需要将其减 1 ，从而获得 j ：

```c
// === File: binary_search_edge.c ===

/* 二分查找最右一个 target */
int binarySearchRightEdge(int *nums, int numSize, int target) {
    // 转化为查找最左一个 target + 1
    int i = binarySearchInsertion(nums, numSize, target + 1);
    // j 指向最右一个 target ，i 指向首个大于 target 的元素
    int j = i - 1;
    // 未找到 target ，返回 -1
    if (j == -1 || nums[j] != target) {
        return -1;
    }
    // 找到 target ，返回索引 j
    return j;
}
```

2. 转化为查找元素

我们知道，当数组不包含 `target` 时，最终 i 和 j 会分别指向首个大于、小于 `target` 的元素。

因此，如图 10-8 所示，我们可以构造一个数组中不存在的元素，用于查找左右边界。

- 查找最左一个 `target` ：可以转化为查找 `target - 0.5` ，并返回指针 i 。
- 查找最右一个 `target` ：可以转化为查找 `target + 0.5` ，并返回指针 j 。

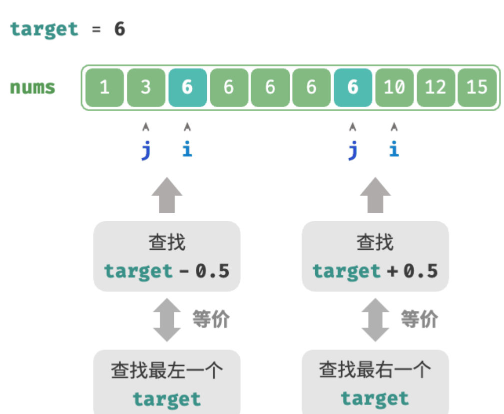


图 10-8 将查找边界转化为查找元素

代码在此省略，以下两点值得注意。

- 给定数组不包含小数，这意味着我们无须关心如何处理相等的情况。
- 因为该方法引入了小数，所以需要将函数中的变量 `target` 改为浮点数类型（Python 无须改动）。

10.4 哈希优化策略

在算法题中，**我们常通过将线性查找替换为哈希查找来降低算法的时间复杂度**。我们借助一个算法题来加深理解。

> **Question**
> 给定一个整数数组 `nums` 和一个目标元素 `target`，请在数组中搜索“和”为 `target` 的两个元素，并返回它们的数组索引。返回任意一个解即可。

10.4.1 线性查找：以时间换空间

考虑直接遍历所有可能的组合。如图 10-9 所示，我们开启一个两层循环，在每轮中判断两个整数的和是否为 `target`，若是，则返回它们的索引。

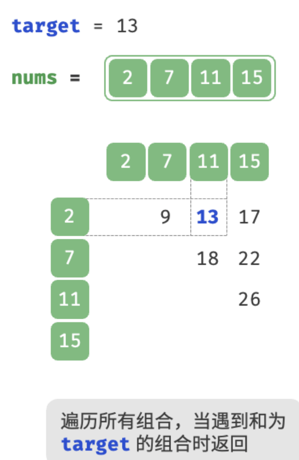


图 10-9　线性查找求解两数之和

代码如下所示：

```c
// === File: two_sum.c ===

/* 方法一：暴力枚举 */
int *twoSumBruteForce(int *nums, int numsSize, int target, int *returnSize) {
    for (int i = 0; i < numsSize; ++i) {
        for (int j = i + 1; j < numsSize; ++j) {
            if (nums[i] + nums[j] == target) {
                int *res = malloc(sizeof(int) * 2);
                res[0] = i, res[1] = j;
                *returnSize = 2;
                return res;
```

```
            }
        }
    }
    *returnSize = 0;
    return NULL;
}
```

此方法的时间复杂度为 $O(n^2)$ ，空间复杂度为 $O(1)$ ，在大数据量下非常耗时。

10.4.2 哈希查找：以空间换时间

考虑借助一个哈希表，键值对分别为数组元素和元素索引。循环遍历数组，每轮执行图 10-10 所示的步骤。

1. 判断数字 `target - nums[i]` 是否在哈希表中，若是，则直接返回这两个元素的索引。
2. 将键值对 `nums[i]` 和索引 `i` 添加进哈希表。

图 10-10　辅助哈希表求解两数之和

实现代码如下所示，仅需单层循环即可：

```
// === File: two_sum.c ===

/* 哈希表 */
typedef struct {
    int key;
    int val;
```

```c
    UT_hash_handle hh; // 基于 uthash.h 实现
} HashTable;

/* 哈希表查询 */
HashTable *find(HashTable *h, int key) {
    HashTable *tmp;
    HASH_FIND_INT(h, &key, tmp);
    return tmp;
}

/* 哈希表元素插入 */
void insert(HashTable **h, int key, int val) {
    HashTable *t = find(*h, key);
    if (t == NULL) {
        HashTable *tmp = malloc(sizeof(HashTable));
        tmp->key = key, tmp->val = val;
        HASH_ADD_INT(*h, key, tmp);
    } else {
        t->val = val;
    }
}

/* 方法二：辅助哈希表 */
int *twoSumHashTable(int *nums, int numsSize, int target, int *returnSize) {
    HashTable *hashtable = NULL;
    for (int i = 0; i < numsSize; i++) {
        HashTable *t = find(hashtable, target - nums[i]);
        if (t != NULL) {
            int *res = malloc(sizeof(int) * 2);
            res[0] = t->val, res[1] = i;
            *returnSize = 2;
            return res;
        }
        insert(&hashtable, nums[i], i);
    }
    *returnSize = 0;
    return NULL;
}
```

此方法通过哈希查找将时间复杂度从 $O(n^2)$ 降至 $O(n)$ ，大幅提升运行效率。

由于需要维护一个额外的哈希表，因此空间复杂度为 $O(n)$ 。**尽管如此，该方法的整体时空效率更为均衡，因此它是本题的最优解法**。

10.5 重识搜索算法

搜索算法（searching algorithm）用于在数据结构（例如数组、链表、树或图）中搜索一个或一组满足特定条件的元素。

搜索算法可根据实现思路分为以下两类。

- **通过遍历数据结构来定位目标元素**，例如数组、链表、树和图的遍历等。
- **利用数据组织结构或数据包含的先验信息，实现高效元素查找**，例如二分查找、哈希查找和二叉搜索树查找等。

不难发现，这些知识点都已在前面的章节中介绍过，因此搜索算法对于我们来说并不陌生。在本节中，我们将从更加系统的视角切入，重新审视搜索算法。

10.5.1 暴力搜索

暴力搜索通过遍历数据结构的每个元素来定位目标元素。

- “线性搜索”适用于数组和链表等线性数据结构。它从数据结构的一端开始，逐个访问元素，直到找到目标元素或到达另一端仍没有找到目标元素为止。
- “广度优先搜索”和“深度优先搜索”是图和树的两种遍历策略。广度优先搜索从初始节点开始逐层搜索，由近及远地访问各个节点。深度优先搜索从初始节点开始，沿着一条路径走到头，再回溯并尝试其他路径，直到遍历完整个数据结构。

暴力搜索的优点是简单且通用性好，**无须对数据做预处理和借助额外的数据结构**。

然而，**此类算法的时间复杂度为 $O(n)$** ，其中 n 为元素数量，因此在数据量较大的情况下性能较差。

10.5.2 自适应搜索

自适应搜索利用数据的特有属性（例如有序性）来优化搜索过程，从而更高效地定位目标元素。

- “二分查找”利用数据的有序性实现高效查找，仅适用于数组。
- “哈希查找”利用哈希表将搜索数据和目标数据建立为键值对映射，从而实现查询操作。
- “树查找”在特定的树结构（例如二叉搜索树）中，基于比较节点值来快速排除节点，从而定位目标元素。

此类算法的优点是效率高，**时间复杂度可达到 $O(\log n)$ 甚至 $O(1)$** 。

然而，**使用这些算法往往需要对数据进行预处理**。例如，二分查找需要预先对数组进行排序，哈希查找和树查找都需要借助额外的数据结构，维护这些数据结构也需要额外的时间和空间开销。

> **Tip**
> 自适应搜索算法常被称为查找算法，**主要用于在特定数据结构中快速检索目标元素**。

10.5.3 搜索方法选取

给定大小为 n 的一组数据，我们可以使用线性搜索、二分查找、树查找、哈希查找等多种方法从中搜索目标元素。各个方法的工作原理如图 10-11 所示。

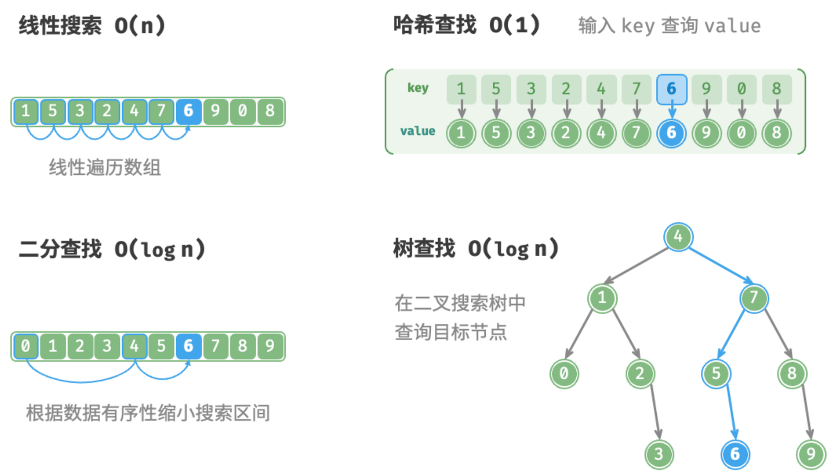


图 10-11 多种搜索策略

上述几种方法的操作效率与特性如表 10-1 所示。

表 10-1 查找算法效率对比

	线性搜索	二分查找	树查找	哈希查找
查找元素	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
插入元素	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
删除元素	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
额外空间	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$
数据预处理	/	排序 $O(n \log n)$	建树 $O(n \log n)$	建哈希表 $O(n)$
数据是否有序	无序	有序	有序	无序

搜索算法的选择还取决于数据体量、搜索性能要求、数据查询与更新频率等。

线性搜索

- 通用性较好，无须任何数据预处理操作。假如我们仅需查询一次数据，那么其他三种方法的数据预处理的时间比线性搜索的时间还要更长。
- 适用于体量较小的数据，此情况下时间复杂度对效率影响较小。
- 适用于数据更新频率较高的场景，因为该方法不需要对数据进行任何额外维护。

二分查找

- 适用于大数据量的情况，效率表现稳定，最差时间复杂度为 $O(\log n)$ 。
- 数据量不能过大，因为存储数组需要连续的内存空间。
- 不适用于高频增删数据的场景，因为维护有序数组的开销较大。

哈希查找

- 适合对查询性能要求很高的场景，平均时间复杂度为 $O(1)$ 。
- 不适合需要有序数据或范围查找的场景，因为哈希表无法维护数据的有序性。
- 对哈希函数和哈希冲突处理策略的依赖性较高，具有较大的性能劣化风险。
- 不适合数据量过大的情况，因为哈希表需要额外空间来最大程度地减少冲突，从而提供良好的查询性能。

树查找

- 适用于海量数据，因为树节点在内存中是分散存储的。
- 适合需要维护有序数据或范围查找的场景。
- 在持续增删节点的过程中，二叉搜索树可能产生倾斜，时间复杂度劣化至 $O(n)$ 。
- 若使用 AVL 树或红黑树，则各项操作可在 $O(\log n)$ 效率下稳定运行，但维护树平衡的操作会增加额外的开销。

10.6 小结

- 二分查找依赖数据的有序性，通过循环逐步缩减一半搜索区间来进行查找。它要求输入数据有序，且仅适用于数组或基于数组实现的数据结构。
- 暴力搜索通过遍历数据结构来定位数据。线性搜索适用于数组和链表，广度优先搜索和深度优先搜索适用于图和树。此类算法通用性好，无须对数据进行预处理，但时间复杂度 $O(n)$ 较高。
- 哈希查找、树查找和二分查找属于高效搜索方法，可在特定数据结构中快速定位目标元素。此类算法效率高，时间复杂度可达 $O(\log n)$ 甚至 $O(1)$ ，但通常需要借助额外数据结构。
- 实际中，我们需要对数据体量、搜索性能要求、数据查询和更新频率等因素进行具体分析，从而选择合适的搜索方法。
- 线性搜索适用于小型或频繁更新的数据；二分查找适用于大型、排序的数据；哈希查找适用于对查询效率要求较高且无须范围查询的数据；树查找适用于需要维护顺序和支持范围查询的大型动态数据。
- 用哈希查找替换线性查找是一种常用的优化运行时间的策略，可将时间复杂度从 $O(n)$ 降至 $O(1)$ 。