Билет 12

1. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Постановка задачи. $u_t = a^2u_{xx}+f(x,t), (x,t) \in q$, **(1)** где $q = \{(x,t) : x \in R^1, t > 0\}, \overline{q} = \{(x,t) : x \in R^1, t \geq 0\}$ $u(x,0) = \varphi(x), x \in R^1$, **(2)** где $f(x,t), \varphi(x)$ непрерывны

Определение. Классическим решением задачи (1)-(2) называется функция $u(x,t)$, определенная и непрерывная вместе с производными u_t и a^2u_{xx} в q, удовлетворяющая (1) в q, непрерывная в $\overline{q}$ и удовлетворяющая условию (2).

Теорема единственности. Задача (1)-(2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{q}$.

Доказательство. Пусть $\exists$ два ограниченных решения $u_i(x,t), i = 1,2$, которые удовлетворяют (1)-(2). Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. В силу линейности задачи функция $v(x,t)$ будет удовлетворять однородной задаче Коши:

$v_t = a^2v_{xx}, (x,t) \in q$, **(3)**

$v(x,0) = 0, x \in R^1$ **(4)**

Условие ограниченности для функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ дает условие ограниченности для функции $v(x,t)$: $|v(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \leq 2M$, где $|u_i(x,t)| \leq M, i = 1,2$.

Таким образом, $v(x,t)$ - решение задачи (3)-(4) и ограничена в области $\overline{q}$.

Покажем, что $v(x,t) \equiv 0, (x,t) \in q$. Выберем в полуплоскости q линии $|x| = L$ и $t = T$ и будем рассматривать ограниченную область q_L: $q_L = [-L,L] \times (0,T], \overline{q_L} = [-L,L] \times [0,T]$.

Введем функцию $w(x,t) = \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2t)$. Она удовлетворяет $w_t = a^2w_{xx}$.

При $t = 0 : w(x,0) = \frac{2Mx^2}{L^2} \geq |v(x,0)| = 0$.

При $|x| = L : w(\pm L,t) = 2M + \frac{4Ma^2t}{L^2} \geq 2M \geq |v(\pm L,t)|$.

Так как q_L ограничена, $v(x,t), w(x,t)$ удовлетворяют (1) и на границе $|v(x,0)| \leq w(x,0), |v(\pm L,t)| \leq w(\pm L,t)$, то к можно применить следствие из принципа максимума:

$|v(x,t)| \leq w(x,t), (x,t) \in \overline{q_L}$, или $-\frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2t) \leq v(x,t) \leq \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2t)$. Зафиксируем точку $(x,t) \in \overline{q_L}$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{L\to\infty} v(x,t) = 0$. В силу независимости от L и выбора точки, то в $\overline{q_L}$ $v(x,t) \equiv 0$. Значит, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

2. Интеграл энергии для уравнения колебаний.

Рассмотрим уравнение колебания $v_{tt} = a^2v_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, v(x,t) \in C^2\{[0;l] \times [0;T]\}$ с нулевыми начальными и граничными условиями. Функция $E(t) = \int\limits_0^l[\rho(v_t(x,t))^2 + T(v_x(x,t))^2]dx$ $(E(t) = \int\limits_0^l[(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2]dx$ - у Денисова, отличаются ровно в ρ раз) называется **интегралом энергии**. В физической интерпретации с точностью до константы это полная энергия колебания.

Есть более общее определение. Определим интеграл энергии - кинетическая + потенциальная энергии механической системы

в определенный момент t. $D \subset R^n, n = 1...3$

$$\begin{cases} u_{tt}(M,t) = a^2\Delta_M u_{xx}(M,t) + f(M,t), M \in D, t > 0 \\ u(M,0) = \varphi(M) \\ u_t(M,0) = \psi(M), M \in \overline{D} \\ \alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P} + \beta(P)u(P,t) = \chi(P,t), P \in \partial D, t > 0 \end{cases}$$

1) Свободные колебания $f \equiv \chi \equiv 0$. Обозначим ∂D^+ - область, где $\alpha(P), \beta(P) > 0$

Интеграл энергии $\varepsilon(t) = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_D \left(u_t^2(M,t) + a^2grad_M^2u(M,t)\right)dD_M + a^2\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\partial D^+}\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}u^2(P,t)dS_P$

$\partial D^+ \neq 0$ только для третьего краевого условия

тройной интеграл это кинетическая энергия колеблющейся системы, dD_M - элемент объема

двойной интеграл это энергия упругого закрепления, dS_P - элемент площади поверхности

$\rho = const$ - объемная плотность массы

Физический смысл $\varepsilon(t)$ - в отсутствие внешних сил полная энергия колеблющейся системы не изменяется со временем. То есть это закон сохранения энергии:

$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_D \left(\psi^2(M) + a^2grad_M^2\varphi(M)\right)dD_M + a^2\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\partial D^+}\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}\varphi^2(P)dS_P$