# Билет 22. Логарифмический потенциал двойного слоя. Существование логарифмического потенциала двойного слоя на границе области. Пример Адамара.

## 1 Логарифмический потенциал двойного слоя

Основная функция Грина в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $S$ дает интегральное представление функции $u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ (3.33):

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_S \left( ln\frac{1}{R_{PM}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_p} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left( ln\frac{1}{R_{PM}} \right) \right) dl_p - \frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta u(P) ln\frac{1}{R_{PM}} \, dx_p dy_p \tag{3.33}$$

где параметрами являются координаты точки наблюдения $M \in D$, $R_{PM}$ - расстояние между точками $P$ и $M$.

Формула (3.33) состоит из интегралов трех типов:

$$\oint_S \mu(P) ln\frac{1}{R_{PM}} \, dl_p \tag{3.34}$$

$$\oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left( ln\frac{1}{R_{PM}} \right) dl_p \tag{3.35}$$

$$\iint_D \rho(P) ln\frac{1}{R_{PM}} \, dx_p dy_p \tag{3.36}$$

Где (3.34) - *логарифмический потенциал простого слоя.*

(3.35) - *логарифмический потенциал двойного слоя* (который нас и интересует).

(3.36) - *логарифмический потенциал.*

Эти интегралы нам интересны, т.к. решением задачи Дирихле (3.37) является (3.35),плотность $\nu$ которого удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in D, \\ u\big|_{M \in S} = f(M); f \in C(S) \end{cases} \tag{3.37}$$

Рассмотрим подробнее формулу логарифмический потенциал двойного слоя:

$$w(M) = -\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left( ln\frac{1}{R_{PM}} \right) dl_p \tag{3.35}$$

где:

$R_{PM}$ - расстояние от точки $M$ до точки $P$,

производная берется по координатам точки $P$, в направлении оси $n_p$ (нормаль к кривой $S$).

Заметим, что:

$$-\frac{\partial}{\partial n_p} \left( ln\frac{1}{R_{PM}} \right) = \frac{1}{R_{PM}} * \frac{\partial}{\partial n_p} (R_{PM}) = \frac{1}{R_{PM}} * (\overrightarrow{n_p}, grad(R_{PM})) = \frac{cos\phi}{R_{PM}}$$

откуда получаем следующее представление:

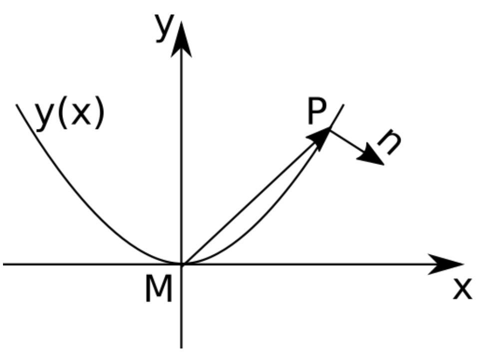
$$w(M) = \int_S \nu(P) \frac{cos\phi}{R_{PM}} \, dl_p$$

где угол $\phi$ - угол между $\overrightarrow{n_p}$ и вектором $\overrightarrow{MP}$.

**Теорема**

Если граница S обладает гладкостью второго порядка в окрестности точки $M$, а $\nu$ ограничена и интегрируема, то логарифмический потенциал двойного слоя $\exists$ в случае $M \in S$.

**Док-во:**




Фиксируем точку $M \in S$ и рассмотрим достаточно малую окрестность этой точки. Проведём через неё оси координат так, чтобы ось x была касательной к кривой, а ось y - нормалью к ней (так, чтобы график S образовывал выпуклую вниз функцию).

Пусть $S$ задаётся формулой y(x). Т.к. $S$ достаточно гладкая, рассмотрим представление y(x) по формуле Тейлора:

$$y(x) = y(0) + x * y(0)' + \frac{x^2}{2} * y''(x_1) = \frac{x^2}{2} * y''(x_1)$$

$$y(x)' = y(0)' + x * y''(x_2) = x * y''(x_2)$$

где $x_1, x_2 \in [0, x_P]$, ($x_P$ - координата x точки P)

$$\overrightarrow{\tau} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} \right\} - \text{вектор касательной в точке P}$$

$$\overrightarrow{n_p} = \left\{ \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} \right\} - \text{вектор нормали в точке P}$$

$$\overrightarrow{MP} = \{x, y(x)\}$$

$$R_{MP} * cos\phi = (\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{MP}) = \frac{xy'(x) - y(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{x^2 y''(x_2) - \frac{1}{2}x^2 y''(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$$

$$\frac{cos\phi}{R_{MP}} = \frac{(\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{MP})}{R_{MP}^2} = \frac{x^2 y''(x_2) - \frac{1}{2}x^2 y''(x_1)}{(\sqrt{1+y'^2(x)}) * (x^2 + \frac{1}{4}x^4 y''^2(x))} = \frac{y''(x_2) - \frac{1}{2}y''(x_1)}{(\sqrt{1+y'^2(x)}) * (1 + \frac{1}{4}x^2 y''^2(x))}$$

При стремлении P к M получаем, что $\frac{cos\phi}{R_{MP}}$ - непрерывная ограниченная функция. Т.к. $\nu$ ограничена и интегрируема, получаем, что исходный интеграл сходится $\Rightarrow$ логарифмический потенциал второго слоя существует при $M \in S$.

## 2 Пример Адамара

**Опр.** Говорят, что математическая задача поставлена корректно, если:

- Решение существует;
- Решение единственно;
- Решение задачи непрерывно зависит от данных задачи (начальных и граничных условий, коэффициентов уравнений и тд.);

**Пример Адамара некорректно поставленной классической задачи Коши.**

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа $\begin{cases} u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t),\ t > 0, -\infty < x < \infty (1) \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \dfrac{1}{n}\sin nx, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Легко проверить , что решением этой задачи будет:
$u(x,t) = \frac{1}{n^2} * sh(n*t) * sin(n*x)$; (2)
Так как , $|\ u_t(x,0)\ | = |\ \frac{1}{n} * sin(n*x)\ | <= \frac{1}{n}$, то при достаточно большом n величина $|\ u_t(x,0)\ |$ является как угодно малой при любом x. Из решения (2) : |u(x,t)| будет иметь как угодно большое значение при произвольно малом t>0 и достаточно большом n.

Допустим мы нашли решение $u_0(x,t)$ задачи (1) при условиях :
$u(x,0) = f_1(x)$,
$u_t(x,0) = f_2(x)$;
Рассмотрим эту же задачу (1) При новых начальных условиях(старые + малое возмущение):
$u(x,0) = f_1(x)$,
$u_t(x,0) = f_2(x) + \frac{1}{n}\sin nx$;
Решение:
$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{n^2} * sh(n*t) * sin(n*x)$;
(это слагаемое очень большое $\Rightarrow$ большое возмущение)
То есть при малом изменении начального условия произошло большое изменение решения задачи, следовательно эта задача является некорректно поставленной.