1. 1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для функции двух переменных $u = u(x, y)$.
   2. Принцип максимума для гармонических функций.
2. 1. Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа.
   2. Первая и вторая формулы Грина.
3. 1. Математическая постановка задач для уравнения колебаний струны.
   2. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа.
4. 1. Метод распространяющихся волн. Формула Д'Аламбера.
   2. Формула для потенциала двойного слоя в трехмерном случае.
5. 1. Метод разделения переменных для уравнения колебаний струны в одномерном случае.
   2. Формула для логарифмического потенциала двойного слоя.
6. 1. Теорема существования и единственности для смешанной задачи для уравнения колебаний в одномерном случае.
   2. Разрыв логарифмического потенции двойного слоя на границе области.
7. 1. Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа в случае одной пространственной переменной.
   2. Постановка внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости.
8. 1. Математическая постановка задач для уравнения теплопроводности.
   2. Третья (основная) формула Грина.
9. 1. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Интеграл Пуассона.
   2. Определение функции Грина для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве.
10. 1. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости для смешанной задачи для уравнения теплопроводности.
    2. Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах.
11. 1. Теорема существования решения залачи Коши для уравнения теплопроводности.
    2. Постановка внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в просгранстве.
12. 1. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
    2. Интеграл энергии для уравнения колебаний.
13. 1. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с нулевым краевым условием первого рода.
    2. Задача Гурса. Сведение к эквивалентной системе интегральных уравнений.
14. 1. Решение смешанной краевой задачи для сравнения теплопроводности на отрезке методом разделения переменных.
    2. Свойства гармонических функций.
15. 1. Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.
    2. Сопряженный дифференциальный оператор в двумерном случае.
16. 1. Первая и вторая формулы Грина.
    2. Формула Д'Аламбера.
17. 1. Третья (основная) формула Грина.
    2. Интеграл Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.
18. 1. Постановка основных краевых задач дзя уравнения Лапласа.
    2. Задача Коши для уравнения колебаний струны на полуограннченной прямой.
19. 1. Решение внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Формула Пуассона.
    2. Теоремы единственности и устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебаний.
20. 1. Функция Грина для краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве.
    2. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности на неограниченной прямой.
21. 1. Применение метода конформных отображений для решения краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости.
    2. Решение смешанной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности. Промежуточная асимптотика.
22. 1. Логарифмчсский потенциал двойного слоя. Существование логарифмического потенциала двойного слоя на границе области.
    2. Пример Адамара.
23. 1. Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на границе области.
    2. Преобразование Хопфа-Коула для уравнения Бюргерса.
24. 1. Сведение внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа к интегральному уравнению.
    2. Метод продолжения для задачи Коши для уравнения теплопроводности на полуограниченной прямой в случае краевых условий второго рода.
25. 1. Уравнение Бюргерса. Преобразование Хопфа-Коула. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.
    2. Формула среднего значения для гармонической функции.
26. 1. Уравнение Кортевега-де Фриза. Решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде солитопа.
    2. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

Билет 1

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для функции двух переменных $u = u(x, y)$

$u = u(x, y)$, ур-е в частных производных $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$

Рассмотрим (линейное относительно старщих производных) ур-е: $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + \bar{F}(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ $a_{11} = a_{11}(x, y), a_{12} = a_{12}(x, y), a_{22} = a_{22}(x, y)$

Линейное ур-е: (1) $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$. Если $f(x, y) = 0 \Rightarrow$ (1) - однородное ур-е

Ур-е колебаний: $u_{tt} = u_{xx}$; Ур-е теплопроводности: $u_t = u_{xx}$; Ур-е Лапласа: $\Delta u = div(gradu) = 0$;

Замена: $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$

$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x$; $u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y$

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}$; $u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}$

$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}$

Подставим в (1): $u_{\xi\xi}(a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2) + 2u_{\xi\eta}(a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y) + u_{\eta\eta}(a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2) + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + f = 0 \Rightarrow \bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + f = 0$ (2)

Попробуем сдеать так, чтобы $\bar{a}_{11} = 0 \Rightarrow \bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$

Рассмотрим: $a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \Rightarrow a_{11}(\frac{z_x}{z_y})^2 + 2a_{12}(\frac{z_x}{z_y}) + a_{22} = 0$

$\sqsupset z = \varphi(x, y), \varphi(x, y) = c \Rightarrow d\varphi = \varphi_xdx + \varphi_ydy = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$

$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$ (3)

$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0$ (4)

Если $z = \varphi(x, y)$ - решение (3) $\Rightarrow \varphi(x, y) = c$ является интегралом (4)

Надо решить ур-е (4):

$a_{11}(\frac{dy}{dx})^2 - 2a_{12}(\frac{dy}{dx}) + a_{22} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{12}}}{a_{11}}$

1) $D > 0$ - ур-е гиперболического типа

2) $D = 0$ - ур-е параболического типа

3) $D < 0$ - ур-е эллиптического типа

$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$

1) $D > 0$ имеем 2 решения (3)

$z_1 = \varphi(x, y), z_2 = \psi(x, y)$

$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$

$\Rightarrow u_{\xi\eta} = \Phi(u, u_\xi, u_\eta, \xi, \eta)$ - 1-я каноническая форма

2-я каноническая форма:

$\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$

$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \beta = \frac{\xi-\eta}{2}$

$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$

$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$

$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi$

2) $D = 0 \Rightarrow a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$

$\xi = \varphi(x, y) \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0$

$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y)$

т.к $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$

$a_{11}\xi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y)^2 = 0$

$\Rightarrow$ берем $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ получается из квадратного уравнения, а $\eta = \eta(x, y)$ такая, что $\Delta \neq 0$

$\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{12} = 0 : u_{\eta\eta} = \Phi(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta)$ - ур-ние параболического типа

3) $D < 0$

$\xi = \varphi(x, y)$ - интеграл (3), тогда $\eta = \varphi^*(x, y)$ - тоже интеграл

$\varphi = \alpha + i\beta, \psi = \alpha - i\beta \Rightarrow u_{\alpha\alpha} - i^2u_{\beta\beta} = \Phi \Leftrightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi$ - ур-е эллиптического типа

Итог: $u = u(x, y)$

$0 = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u_x, u_y, u)$ св-ся к ур-ям одного из типов:

1) $u_{xy} = \Phi, u_{xx} - u_{yy} = \Phi$

2) $u_{xx} = \Phi(u_x, u_y, u, x, y)$

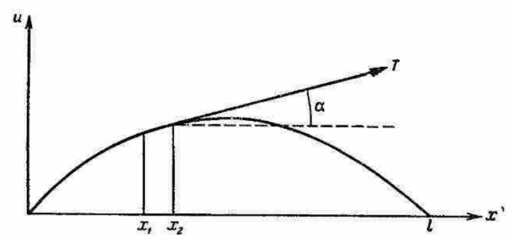
3) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$

2. Принцип максимума для гармонических функций Рассмотрим область Ω, ограниченную поверхностью $S, \bar{\Omega} = \Omega \cup S$. Пусть $u(M)$ - гармоническая в Ω и непрерывна в $\bar{\Omega} \Rightarrow$ она достигает своего максимального и минимального значения на границе области $\bar{\Omega}$, т.е. $\max\limits_{M\in\bar{\Omega}} u(M) = \max\limits_{M\in S} u(M)$; $\min\limits_{M\in\bar{\Omega}} u(M) = \min\limits_{M\in S} u(M)$

Билет 2. 1.Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа.

Уравнение колебаний струны

- Струна - гибкая нерастяжимая нить, колеблется в одной плоскости; u(x,t) - отклонение струны в точке x в момент времени t. На струну действуют силы натяжения T (T = const, это можно доказать через 3-ий з.Ньютона, в лекциях не доказывалось) и возможно внешние силы f(x,t). $|u_x^2| << 1$ (т.к. рассматриваем малые колебания)



- Покажем, что длина дуги (x_1, x_2) равна $x_2 - x_1$ и найдем T_u. Это будет нужно для 2-ого з.Ньютона:

$$\int_{x1}^{x2} \frac{dx}{cos\alpha} = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1+tg^2\alpha}\, dx = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 \tag{1}$$

$$T_u = Tsin\alpha \approx Ttg\alpha = Tu_x \tag{2}$$

- Запишем 2-ой з.Ньютона ($m\overline{a} = \overline{F}$) в проекции на Ou: $\rho dx * u_{tt} = Tu_x|_{x+dx} - Tu_x|_x + \tilde{f}dx$

  В предположение что u_{xx} непрерывна на R, применим к $Tu_x|_{x+dx} - Tu_x|_x$ ф. Лагранжа конечных приращений. Получим $\rho dx * u_{tt} = \frac{\partial T u_x}{\partial x}|_{x+\xi dx} dx + \tilde{f}dx$, где $\xi \in (0,1)$. Поделим на dx и $dx \to 0$:

$$\rho u_{tt} = Tu_{xx} + \tilde{f} \tag{3}$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ a = \sqrt{\frac{T}{\rho}},\ f = \frac{\tilde{f}}{\rho} \tag{4}$$

Уравнение электромагнитного поля

- Запишем уравнения Максвелла, предполагая, что $\rho = 0$ (свободных зарядов нет):

$$divB = 0 \tag{5}$$

$$divE = 0 \tag{6}$$

$$rotB = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \tag{7}$$

$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{8}$$

- Рассмотрим rot(rot E) двумя способами: I - подставляем все, что можно подставить, II - используем, что rot(rot A) = grad div A - $\triangle A$, где $\triangle A$ - оператор Лапласа:

$$rot(rotE) \overset{(8)}{=} rot(-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rotB) \overset{(7)}{=} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{9}$$

$$rot(rotE) = graddivE - \triangle E \overset{(6)}{=} -\triangle E = \{\text{в одномерном случае}\} = -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{10}$$

- В итоге:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 * \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{11}$$

2.Первая и вторая формулы Грина

В области Ω, ограниченной $\partial\Omega$, заданы $u(M)$ и $v(M)$: $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} ((grad(u), grad(v)) + u\Delta v)dr = \iint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

($\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали). Вторая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dr = \iint\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma$$

Билет 3

1 Математическая постановка задач для уравнения колебания струны

Имеем уравнение колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, если $f(x,t) = 0$, то колебания свободные, иначе вынужденные. Данное уравнение может иметь бесконечно много решений, но можно наложить различные формы дополнительных условий, чтобы получить необходимое нам решение.

Рассмотрим основные три типа граничных условий для **задачи о колебаниях струны на отрезке**

граничное условие 1-го рода: $u(0,t) = \mu(t)$ - задано правило движение конца струны, если $\mu(t) = 0$, то конец закреплен;

граничное условие 2-го рода: $u_x(0,t) = \nu(t)$ - задана сила, действующая на конец стержня, если силы не действуют, то $\nu(t) = 0$;

граничное условие 3-го рода: $u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)]$ - имеет место при упругом закреплении;

Аналогично задаются условия и на другом конце $x = l$.

Помимо граничных условий определяют еще *начальные условия* - $u(x,0) = \phi(x)$ и $u_t(x,0) = \psi(x)$, т.к. процесс колебания зависит от начальной формы и распредлении скоростей.

Ex. постановка **первой краевой задачи**(первая, т.к. граничные условия первого рода):

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Также может интересовать вариант, когда влияние границ еще не существенно, тогда можно рассмотреть **задачу с начальными условиями для неограниченной области**(эту задачу еще называют задачей Коши):

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Можно еще быть так, что нас итересует только влияние одной границы, тогда мы приходим к постановке **задачи на полуограниченно прямой**:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \leq x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu(t) \text{ или } u_x(0,t) = \mu(t) \end{cases}$$

2 Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа

Задача Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ M \in D \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M \in \partial D} = f(M) \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали.

Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint\limits_{\partial D} f(M) d\sigma = 0 - \text{в трехмерном случае}$$

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint\limits_{\partial D} f(M) ds = 0 - \text{в двумерном случае}$$

Билет 4

1. Метод распространяющихся волн. Формула Д'Аламбера. Решается уравнение колебаний для неограниченной струны:

$$\begin{aligned}&u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \;\; -\infty < x < +\infty, \; t > 0\\&u(x,0) = \phi(x),\\&u_t(x,0) = \psi(x).\end{aligned}$$

Уравнение характеристик можно привести к виду $dx^2 - a^2\,dt^2 = (dx - a\,dt)(dx + a\,dt) = 0$

Следовательно, его интегралами будут $x + at = C_1, \; x - at = C_2$

Производя замену переменных $\xi = x + at, \; \eta = x - at$, преобразуем исходное уравнение к виду $u_{\xi\eta} = 0$

Теперь видно, что для любого решения $u(\xi, \eta)$ этого уравнения верно: $u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta)$

Проинтегрировав это равенство по η при фиксированном ξ, получим: $u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

Так как при подстановке $u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ при произвольных дважды дифференцируемых f_1 и f_2 в уравнение получим равенство, то таким образом представимы все решения.

В переменных x и y формула примет вид: $u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$

Удовлетворим начальным условиям:

$$\begin{aligned}u(x,0) &= f_1(x) + f_2(x) = \phi(x) \qquad (1)\\u_t(x,0) &= af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x)\end{aligned}$$

Проинтегрировав второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \; + C \qquad (2)$$

Выразим f_1 и f_2 из (1) и (2):

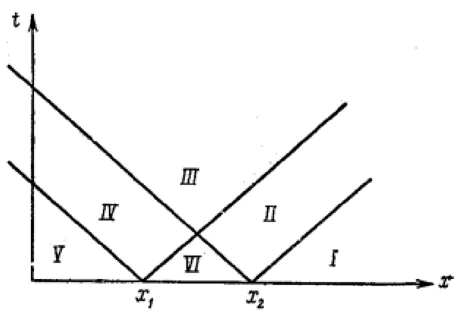
$$f_1(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \; + \frac{C}{2}, \;\; f_2(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \; - \frac{C}{2}$$

Подставим в выражение для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\,d\alpha\right) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha$$

Получена **формула Д'Аламбера**.

Физический смысл формулы: профиль волны распространяется в пространстве (в нашем случае - по струне) со скоростью a.



Метод распространяющихся волн. Пусть начальные условия равны 0 вне отрезка $[x_1, x_2]$. Тогда, построив характеристики $x_{1,2} \pm at = 0$, получим разбиение координатной полуплоскости на шесть областей, в каждой из которых решение может быть вычислено по формулам:

$$\begin{aligned}\mathrm{I, V:}&\;\; u(x,t) = 0\\\mathrm{II:}&\;\; u(x,t) = \frac{\phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x_2} \psi(\alpha)\,d\alpha\\\mathrm{III:}&\;\; u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x_2} \psi(\alpha)\,d\alpha\\\mathrm{IV:}&\;\; u(x,t) = \frac{\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha\\\mathrm{VI:}&\;\; \text{формула Д'Аламбера}\end{aligned}$$

2. Формула для потенциала двойного слоя в трехмерном случае. Пусть Σ – поверхность двойного слоя, n_P – нормаль к ней в точке P, $\nu(P)$ – поверхностная плотность, R_{MP} – расстояние между точками M и P. **Потенциал двойного слоя** в точке $M(x, y, z)$:

$$W(M) = -\iint\limits_{\Sigma} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\nu(P)d\sigma_P$$

Билет 5

1. Метод разделения переменных для уравнения колебаний струны в одномерном случае

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0; \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0 \qquad\qquad (*) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

► **1.** Найдем решения уравнения колебаний (частные) вида $X(x)T(t)$. Подставляем в уравнение:
$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \mid : a^2 T(t)X(x)$
(2) $\frac{T''(t)}{T(t)a^2} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ (для нек. константы λ)
Разрешаем отнсительно $X(x)$: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

2. Дописываем к этому уравнению кравевые условия из (*): $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

Это задача Штурма-Лиувилля. Ее спектр: $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2,\ X_k(x) = sin(\frac{\pi kx}{l}),\ k = 1, 2, 3, ...$

3. Разрешаем пропорцию (2) отн-но $T(t)$ и подставляем $\lambda = \lambda_k$: $T_k''(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = 0.$

Общее решение этого уравнения: $T_k(t) = A_k cos(a\frac{\pi kt}{l}) + B_k sin(a\frac{\pi kt}{l})$

4. Принцип суперпозиции: общее решение ур-я колеб. представляется в виде ∞ лин. комб. его элементарных решений: $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}[A_k cos(a\frac{\pi kt}{l}) + B_k sin(a\frac{\pi kt}{l})]sin(\frac{\pi kx}{l})$

A_k, B_k - ? Найдем их из нач. условий. Разложим ф-ии $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье на $[0, l]$ по системе функций $\{sin(\frac{\pi kx}{l})\}_{k=1}^{\infty}$:

$\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k sin(\frac{\pi kx}{l})$, где $\varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)sin(\frac{\pi kx}{l})dx$ $\psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k sin(\frac{\pi kx}{l})$, где $\psi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)sin(\frac{\pi kx}{l})dx$

Начальные условия:

$u(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k sin(\frac{\pi kx}{l}) = \varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k sin(\frac{\pi kx}{l}) \Rightarrow A_k = \varphi_k, \forall k$

$u_t(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\pi ka}{l} sin(\frac{\pi kx}{l}) = \psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k sin(\frac{\pi kx}{l}) \Rightarrow B_k = \frac{l}{\pi ka}\psi_k, \forall k$

Тем самым, след. функциональный ряд является "формальным" решением задачи (*), являющийся суммой стоячих волн: $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}[\varphi_k cos(a\frac{\pi kt}{l}) + \frac{l}{\pi ka}\psi_k sin(a\frac{\pi kt}{l})]sin(\frac{\pi kx}{l})$ ◄

Рассмотрим также: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & t > 0; \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0 \qquad\qquad (**) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$

► Будем искать решение в виде: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)sin(\frac{\pi nx}{l})$ (1). Чтобы найти $T_n(t)$, подставим предполагаемый вид решения (1) в первое уравнение системы (**), разложив $f(x,t)$ в ряд Фурье по синусам:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n''(t)sin(\frac{\pi nx}{l}) = -a^2\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)(\frac{\pi n}{l})^2 sin(\frac{\pi nx}{l}) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)sin(\frac{\pi nx}{l})$, где $f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)sin(\frac{\pi n\xi}{l})d\xi$

Отсюда и из начальных условий системы (**) при каждом $n = 1, 2, 3, ...$ получаем для нахождения $T_n(t)$ задачу Коши: $\begin{cases} T_n''(t) + a^2(\frac{\pi n}{l})^2 T_n(t) = f_n(t), & t \geq 0 \\ T_n(0) = \varphi_n,\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$ ◄

Замечание: [Все аналогично для граничных условий 2-рода и смешанных условий]

Решение $u(x,t)$ задачи: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & t > 0; \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t), & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$

можно найти, разбив ее на рассмотренные выше задачи: $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$,

где $u_1(x,t)$ без $f(x,t)$ с нулевыми граничными условиями, а $u_2(x,t)$ с $f(x,t)$ и нулевыми граничными и начальными условиями.

Замечание: [в первом случае колебания называются свободными, во втором вынужденными]

2. Формула для логарифмического потенциала двойного слоя

$w(M) = \int\limits_S \frac{cos\varphi(P,M)}{r_{PM}}\nu(P)dS_P;$

$\varphi(P,M)$ - угол между нормалью в точке и P и вектором $\overrightarrow{PM}$

$\nu(P)$ - плотность в точке P

r_{PM} - расстояние между точками P и M

6 Билет

1. Теорема существования и единственности решения для смешанной (начально-краевой) задачи для уравнения колебаний в одномерном случае

Рассматриваются поперечные колебания (вынужденные) конечной однородной струны, если заданы движения её концов, поперечное смещение и поперечная скорость в момент $t = 0$.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t), x \in [0,l], 0 < t \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad (1)$$

Для существования классического решения необходимы $f, \mu_1, \mu_2, \psi \in C(D); \varphi \in C'(D)$
и согласование $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(l) = \mu_2(0); \psi(0) = \frac{\partial \mu_1(0)}{\partial t}, \psi(l) = \frac{\partial \mu_2(0)}{\partial t}$
в силу линейности задачи $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t)$, в каждом из слагаемых которой:
$u_1(x,t)$ - одноодные уравн. и кр.усл., неоднородные нач. усл.
$u_2(x,t)$ - однородные уравн., нач.усл. и кр. усл.
$u_3(x,t)$ - однородные уравн. и нач.усл., неоднородные кр. усл.

Существование классического решения

Необходимо полагать, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0$
Метод разделения переменных даёт:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n cos(\tfrac{\pi n}{l}at) + \tfrac{l}{\pi na}\psi(n)sin(\tfrac{\pi n}{l}at)]sin(\tfrac{\pi n}{l}x) \qquad (2)$$

где $\varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)sin(\frac{\pi n}{l}\xi d\xi), \psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi_(\xi)sin(\frac{\pi n}{l}\xi d\xi)$

Утв: $\omega(x) \in C^m[0,l] \exists \omega^{(i)}(x)$ кусочно непр. $\omega^{(i)}(0) = \omega^{(i)}(l) = 0, i = 0...m$ (достаточно потребовать для чётных i)

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^m|\omega_n|$ сх-ся, где $\omega_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \omega_(\xi)sin(\frac{\pi n}{l}\xi d\xi)$

Теорема 1

$\varphi \in C^2[0,l]$
$\exists \varphi'''(x)$ кус.непр. $x \in [0,l]$
$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0; \psi(0) = \psi(l) = 0$
$\psi \in C'[0,l], \exists \varphi''(x)$ кус.непр. на $[0,l]$
$\Rightarrow \exists$ Классическое решение (1), представимое в виде (2)

Теорема 2

$\varphi \in C^3[0,l]$
$\exists \varphi''''(x)$ кус.непр. $x \in [0,l]$
$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0; \psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$
$\psi \in C^2[0,l], \exists \varphi'''(x)$ кус.непр. на $[0,l]$
$\Rightarrow \exists$ Классическое решение (1), представимое в виде (2)

Единственность классического решения

Определим интеграл энергии - кинетическая + потенциальная энергии механической системы
в определенный момент t. $D \subset R^n, n = 1...3$

$$\begin{cases} u_{tt}(M,t) = a^2\Delta_M u_{xx}(M,t) + f(M,t), M \in D, t > 0 \\ u(M,0) = \varphi(M) \\ u_t(M,0) = \psi(M), M \in \overline{D} \\ \alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P} + \beta(P)u(P,t) = \chi(P,t), P \in \partial D, t > 0 \end{cases}$$

1) Свободные колебания $f \equiv \chi \equiv 0$. Обозначим ∂D^+ - область, где $\alpha(P), \beta(P) > 0$
Интеграл энергии $\varepsilon(t) = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_D \Big(u_t^2(M,t) + a^2grad_M^2u(M,t)\Big)dD_M + a^2\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\partial D^+} \frac{\beta(P)}{\alpha(P)}u^2(P,t)dS_P$
$\partial D^+ \neq 0$ только для третьего краевого условия
тройной интеграл это кинетическая энергия колеблющейся системы, dD_M - элемент объема
двойной интеграл это энергия упругого закрепления, dS_P - элемент площади поверхности
$\rho = const$ - объемная плотность массы
Физический смысл $\varepsilon(t)$ - в отсутствие внешних сил полная энергия колеблющейся системы не изменяется со

временем. То есть это закон сохранения энергии:

$\varepsilon(t)=\varepsilon(0)=\frac{\rho}{2}\iiint\limits_D\left(\psi^2(M)+a^2grad_M^2\varphi(M)\right)dD_M+a^2\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\partial D^+}\frac{\beta(P)}{\alpha(P)}\varphi^2(P)dS_P$

2) Вынужденные колебания $f\neq0,\chi\equiv0$

$\varepsilon(t)=\varepsilon(0)+\rho\int\limits_0^t\left(\iiint\limits_D f(M,\tau)u_\tau(M,\tau)dD_M\right)d\tau$

ρf - объемная плотность внешней силы

Теорема 3

Задача может иметь только одно классическое решение. $\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t),x\in[0,l],t>0\\ u(x,0)=\varphi(x)\\ u_t(x,0)=\psi(x)\\ \alpha_i(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_i(x)u(X,t)=\chi_i(x,t),i=1,2,x_1=0,x_2\end{cases}$

Доказательство: пусть $\exists u_1(x,t),u_2(x,t)$ - решения. Тогда $w=u_1-u_2$ удовл. системе:

$$\begin{cases}w_{tt}=a^2w_{xx}(x,t),x\in[0,l],t>0\\ w(x,0)=0\\ w_t(x,0)=0\\ \alpha_i(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_i(x)u(X,t)=0,i=1,2,x_1=0,x_2=l\end{cases}$$

Введем $E(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left(w_t^2(x,t)+a^2w_x^2(x,t)\right)dx,E(0)=0,E(t)\geq0$

$\frac{dE}{dt}=\int\limits_0^l\left(w_tw_{tt}+a^2w_xw_{xt}\right)dx=\int\limits_0^l w_t(w_{tt}-a^2w_{xx})dx+a^2(w_xw_t)|_{x=0}^{x=l}$

Первая краевая задача:

$\omega(0,t)=\omega(l,t)\ \ \forall t\geq0\Rightarrow\omega_t(0,t)=\omega_t(l,t)=0\Rightarrow\frac{dE}{dt}=0\Rightarrow E(t)\equiv0$

Вторая краевая задача:

$\omega_x(0,t)=\omega_x(l,t)\Rightarrow\frac{dE}{dt}=0\Rightarrow E(t)\equiv0$

Третья краевая задача:

... тоже $\Rightarrow E(t)\equiv0\Rightarrow\begin{cases}\omega_x\equiv0\\ \omega_t\equiv0\end{cases}\Rightarrow\omega(x,t)=const$, т.к $\omega(x,0)=0\Rightarrow\omega\equiv0$

2. Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на границе области

Логарифмический потенциал двойного слоя выражается интегралом:

$W(x)=\int\limits_L v(\xi)\frac{d}{dn}(ln\frac{1}{r})dL$, где L - контур, $v(\xi)$ - плотность дв-го слоя

n - напр-ие внеш. нормали к L, r - расст. от x дло переменной точки ξ на L.

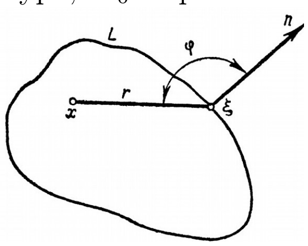
$\frac{d}{dn}(ln\frac{1}{r})=\frac{cos\varphi}{r}$, где φ - угол между наравлениями n и r

Имеем: $W(x)=\int\limits_L v(\xi)\frac{\cos\varphi}{r}dL$

Обозначим $v(p)=v_0=const$ - постоянная плотность. Если L - замкнутый контур, тогда на нем потенциал имеет разрыв, харак-ся равенствами:

$$\begin{cases}\mathrm{W}_{int}=W_0+\pi v_0\\ \mathrm{W}_{ext}=W_0-\pi v_0\end{cases}$$

Здесь W_{int} - предельное значение потенциала внутри контура, W_{ext} - предельное значение потенциала вне контура, W_0 - прямое значение потенциала в точке, лежащей на контуре L.



Билет 7. Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа в случае одной переменной

1 Теплопроводность

Рассмотрим достаточно тонкий однородный стержень (такой, что в $\forall$ момент времени его изотермические и поперечные сечения совпадают). Направим ось Ох вдоль стержня.

Пусть $u(x,t)$ - температура стержня в точке x в момент времени t.

По ЗСЭ для участка $[x_1, x_2]$ энергия, требующаясядля изменения температуры участка в течение $[t_1, t_2]$ равна количеству тепла, полученному через концы x_1 и x_2 за $[t_1, t_2]$.

Закон Фурье: $W = -k\frac{\partial u}{\partial x}$, где W — плотность потока теплоты, $k > 0$ — коэффициент теплопроводности.

Поток втекающей на $[x_1, x_2]$ теплоты в момент τ:

$$S\left(k\frac{\partial u(x_2,\tau)}{\partial x} - k\frac{\partial u(x_1,\tau)}{\partial x}\right)$$

Баланс теплоты:

$$S\int_{x_1}^{x_2} c\rho(u(x,t_2) - u(x,t_1))dx = S\int_{t_1}^{t_2}(W(x_1,\tau) - W(x_2,\tau))d\tau = S\int_{t_1}^{t_2}\left(k\frac{\partial u(x_2,\tau)}{\partial x} - k\frac{\partial u(x_1,\tau)}{\partial x}\right)d\tau,$$

c - удельная теплоёмкость стержня,
ρ - объёмная плотность массы.

По интегральной теореме о среднем:

$$c\rho(u(x',t_2) - u(x',t_1))(x_2 - x_1) = \left(k\frac{\partial u(x_2,\tau')}{\partial x} - k\frac{\partial u(x_1,\tau')}{\partial x}\right)(t_2 - t_1), x' \in [x_1, x_2], \tau' \in [t_1, t_2]$$

Делим на $(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)$:

$$\frac{c\rho(u(x',t_2) - u(x',t_1))}{t_2 - t_1} = \frac{k\frac{\partial u(x_2,\tau')}{\partial x} - k\frac{\partial u(x_1,\tau')}{\partial x}}{x_2 - x_1}$$

Стягиваем отрезки в точки, получаем: $c\rho u_t = ku_{xx} \Rightarrow u_t = a^2u_{xx}, a^2 = \frac{k}{c\rho}$ - ***уравнение теплопроводности***.

Если ***есть источники или поглотители тепла*** с объёмной плотностью $F(x,t)$, то в правой части баланса теплоты добавится $S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,\tau)dxd\tau$. Полагая, что $F(x,t)$ - непрерывна по x и t, получим

$$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t), f = \frac{F}{c\rho}$$

Если стержень ***не является однородным***:

$$c(x)\rho(x)u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + F(x,t)$$

2 Диффузия

Аналогично, только вместо плотности энергии $c\rho u$ будет плотность вещества u, а вместо W будет градиент $p = -D\frac{\partial u}{\partial x}$, D - коэффициент диффузии.

Уравнение диффузии (одномерное):

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Для однородной среды:

$$u_t = a^2u_{xx}, a^2 = D$$

Теормин. Постановка внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости

Найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области D' ($D' = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$), непрерывную в замкнутой области $\overline{D}' = D' \cup S$ (S - граница D), принимающую на границе заданные значения $u(P) = \mu(P), P \in S$, и ограниченную на бесконечности.

Билет 8

1 Математическая постановка задач для уравнения теплопроводности

Для нахождения единственного решения необхдимы начальное и граничные условия.

Начальное условие: $u(x,0) = \phi(x)$
Граничные условия:
1) $u(0,t) = \mu(t)$ - ***I род***, на конце задана температура
2) $u_x(l,t) = \nu(t)$ - ***II род***
3) $u_x(l,t) + \lambda(u(l,t) - \theta(t)) = 0$ - ***III род***, теплообмен с окружающей средой с температурой θ по закону Ньютона.

Краевые задачи получаются из всех возможных комбинаций краевых условий, например, ***первая краевая задача***:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \leqslant T \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \leqslant x \leqslant l \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

При бесконечной длине стержня ставится ***задача Коши*** - в течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на бесконечно удалённой границе, в центральной области сказывается весьма слабо:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \phi(x) \\ |u(x,t)| - \text{ограничен} \end{cases}$$

Если рассматриваемый участок стержня вблизи одного конца и далеко от другого, ставится ***первая краевая задача для полубесконечного стержня***:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(0,t) = \mu(t) \\ |u(x,t)| - \text{ограничен} \end{cases}$$

Условия на доп. условия: $u(x,t) \in C^{1,2}((0,l)\times[0,T]) \cap ([0,l]\times[0,T])$; $f(x,t), \mu_{1,2}(t), \varphi(x)$ - непр.; $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$.

2 Третья (основная) формула Грина

Пусть $u(M)$ — произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в ограниченной области D и непрерывная вместе с производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$: $u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$. Фиксируем точку $M_0 \in D$ (внутренняя точка облести D). Пусть R_{MM_0} — расстояние от точки M_0 до M. Тогда формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right) dS_P - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}} dD_M$$

называется ***третьей формулой Грина*** или интегральным представлением функции $u(M)$

9 Билет

1.Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Интеграл Пуассона.

Задача Коши: $\begin{cases} u_t = a^2\, u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, 0 < t \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$

Ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)\, T(t)$. Подставляем, получаем:

$X''\, T\, a^2 = T'\, X$ и $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -k$

Потребуем ограниченность $X(x)$ и $T(t)$. Из этого получим, что $k \in R, k \geq 0, k = \lambda^2, \lambda \in R$

$X(x) = A(\lambda)\, exp(i\lambda x)$

$T(t) = B(\lambda)\, exp(-a^2\lambda^2 t)$

Тогда $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)\, exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda x)\, d\lambda$

$u(x,0) = \varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)\, exp(i\lambda x)\, d\lambda \Rightarrow$ (Обр. преобр. Фурье) $C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, exp(-i\lambda\xi)\, d\xi$

$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, exp(-i\lambda\xi)\, d\xi \Big)\, exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda x)\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x - \xi))d\lambda \Big)\, \varphi(\xi)\, d\xi$

Назовем $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi))\, d\lambda$ - **функцией Грина**

Обозначим $J(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-\beta^2\lambda^2 + i\lambda\alpha)\, d\lambda$. Возьмем производную по α:

$\frac{dJ}{d\alpha} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\, exp(-\beta^2\lambda^2 + i\lambda\alpha)\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\lambda}{-2\beta^2\lambda}\, exp(i\lambda\alpha)\, de^{-\beta^2\lambda^2} = \frac{i}{2\beta^2} \Big(- exp(i\lambda\alpha - \beta^2\lambda^2)|_{-\infty}^{+\infty} + $
$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\alpha\, exp(-\beta^2\lambda^2 + i\lambda\alpha)\, d\lambda \Big) = -\frac{\alpha}{2\beta^2}\, J(\alpha,\beta)$

Получим $\frac{dJ}{d\alpha} + \frac{\alpha}{2\beta^2} J(\alpha,\beta) = 0 \Longrightarrow \mathrm{J}(\alpha,\beta) = M(\beta)\, exp(\frac{-\alpha^2}{4\beta^2})$

$M(\beta) = J(0,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-\beta^2\lambda^2)\, d\lambda = \frac{1}{\beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}$

$J(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\, exp(\frac{-\alpha^2}{4\beta^2})$

$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{a\sqrt{t}}\, exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t})\, \varphi(\xi)\, d\xi$ - **Интеграл Пуассона**

2.Определение функции Грина для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве.

$D \subseteq R^3$ - область, ∂D - замкнутая достаточно гладкая поверхность, ограничивающая D.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M,t), & M \in D, 0 < t \\ u(P,t) = g(P), & P \in \partial D \end{cases}$$

$u(M_0) = -\iint\limits_{\partial D} g(P)\, \frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}\, d\sigma_P + \iiint\limits_{D} f(M)\, G(M,M_0)\, dr_M$

Функция $G(M,M_0)$ называется **функцией Грина** внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если :

1) $G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$, где $v(M)$ гармонична в D

2) $G(P,M_0) = 0, P \in \partial D$

Билет 10.

1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости для смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

1.1 Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим множество $Q_T = \{(x,t) : (0;l) \times (0;T]\}$. Обозначим $\Gamma = \overline{Q_T} \backslash Q_T$.

Теорема. *(принцип максимума)* Пусть $u(x,t) \in C[\overline{Q_T}], u_t, u_{xx} \in C[Q_t]$ и $u_t = a^2 u_{xx}$. Тогда

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{\Gamma} u(x,t)$$

$$\min_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \min_{\Gamma} u(x,t)$$

Доказательство. ◁ Сначала докажем утверждение для max. Предположим противное: пусть $\max_{\Gamma} u(x,t) = M$ и $\exists$ точка $(x_0, t_0) \in Q_T$ такая, что $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$.

Тогда введем $v(x,t)$:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t - t_0) \tag{1}$$

Очевидно, что $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M + \varepsilon$. Так как $|\frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ при $t \in [0,T]$, то:

$$\max_{\Gamma} v(x,t) = \max_{\Gamma}\{u(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T}(t-t_0)\} \leqslant M + \frac{\varepsilon}{2}$$

Отсюда следует, что $\exists$ точка $(x_1,t_1) \in Q_T$, в которой $v(x,t)$ достигает максимума. Тогда по необходимому условию максимума дважды дифференцируемой функции получаем:

$$\begin{cases} v_t(x_1,t_1) \geqslant 0 \\ v_{xx}(x_1,t_1) \leqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

Продифференцируем (1) отдельно один раз по t и отдельно два раза по x. Получим:

$$v_t(x,t) = u_t(x,t) - \frac{\varepsilon}{2T} \tag{3}$$

$$v_{xx}(x,t) = u_{xx}(x,t)$$

Из полученных равенств и системы (2) следует, что:

$$u_t(x_1,t_1) = v_T(x_1,t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \geqslant a^2 v_{xx}(x_1,t_1) = a^2 u_{xx}(x_1,t_1)$$

(В (3) перенесли $\frac{\varepsilon}{2T} > 0$. Из (2) следует, что $v_t(x_1,t_1) \geq v_{xx}(x_1,t_1)$. Во все выражения подставили (x_1,t_1). Домножили на $a^2 > 0$ производные по x, что не влияет на знак выражения.)

Получим $u_t(x_1,t_1) > a^2 u_{xx}(x_1,t_1)$, что противоречит уравнению теплопроводности. Первое утверждение доказано.

Второе утверждение доказывается аналогично заменой $\omega(x,t) = -u(x,t)$ и рассмотрением первого утверждения для $\omega(x,t)$

Теорема доказана. ▷

1.2 Теорема единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Смешанная задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t \leqslant T \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{4}$$

$\forall T > 0$. В общем случае $T = +\infty$

Теорема. *(единственности)* Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t)$ являются решениями одной и той же задачи (4) и $u_i(x,t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x,t), (u_i)''_{xx}(x,t) \in C[Q_T],\ \forall T > 0, i = 1,2$. Тогда $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

Доказательство. ◁ Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ такую, что $v(x,t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t \leqslant T \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

Для $v(x,t)$ выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\begin{cases} \underset{\overline{Q_T}}{max}\, v(x,t) = \underset{\Gamma}{max}\, v(x,t) = 0 \\ \underset{\overline{Q_T}}{min}\, v(x,t) = \underset{\Gamma}{min}\, v(x,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow v(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$$

Теорема доказана. ▷

1.3 Теорема устойчивости решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности

Лемма. Если $u_1(x,t), u_2(x,t)$ такие, что $u_i(x,t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x,t), (u_i)''_{xx}(x,t) \in C[Q_T],\ \forall T > 0, i = 1,2$ и являются решениями разных задач (4), причем все граничные условия задачи для $u_1(x,t)$ больше или равны граничным условиям задачи для $u_2(x,t)$, то $u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t)$ в $\overline{Q_T}$.

Доказательство. ◁ Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ такую, что $v(x,t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Она является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} v_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),\ 0 \leqslant x \leqslant l, 0 < t \leqslant T \\ v(0,t) \geqslant 0 \\ v(l,t) \geqslant 0 \\ v(x,0) \geqslant 0 \end{cases}$$

Для $v(x,t)$ выполнены все условия принципа максимума. Тогда:

$$\underset{\overline{Q_T}}{min}\, v(x,t) = \underset{\Gamma}{min}\, v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t),\ \forall (x,y) \in \overline{Q_T}$$

Лемма доказана. ▷

Теорема. *(устойчивости)* Если $u_1(x,t), u_2(x,t)$ такие, что $u_i(x,t) \in C[\overline{Q_T}]$ и $(u_i)'_t(x,t), (u_i)''_{xx}(x,t) \in C[Q_T],\ \forall T > 0, i = 1,2$ и являются решениями разных задач (4), причем все граничные условия двух задач различаются по модулю $< \varepsilon$ ($|u_1(0,t) - u_2(0,t)| \leqslant \varepsilon$ и так для каждого граничного условия), то

$$\underset{\overline{Q_T}}{max}\, |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \varepsilon$$

Доказательство. ◁ Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ такую, что $v(x,t) \in C[\overline{Q_T}], v_t, v_{xx} \in C[Q_t]$. Тогда $v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t)$ и для нее выполняются все условия принципа максимума. Получим:

$$\underset{\overline{\Gamma}}{max}\, |v(x,t)| \leqslant \varepsilon$$

То есть $-\varepsilon \leqslant v(x,t) \leqslant \varepsilon$ на Γ (границе Q_T). Применив лемму к парам функций $(-\varepsilon, v(x,t))$ и $(v(x,t), \varepsilon)$, получим:

$$-\varepsilon \leqslant u_1(x,t) - u_2(x,t) \leqslant \varepsilon\ \forall (x,y) \in \overline{Q_T}$$

Теорема доказана. ▷

Полученное утверждение означает, что из близости исходных данных следует близость полученных решений.

2 Общее решение уравнения Лапласа в полярных координатах.

Уравнение Лапласа: $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$ *(оператор Лапласа для полярных координат)* Функция $u(r,\phi)$ ищется в виде: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\phi)$ Подставим $R(r)$ и $\Phi(\phi)$ в оператор Лапсласа для полярных координат:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr})\Phi + \frac{1}{r^2}R\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0 \mid : \Phi \ \Rightarrow\ \frac{r(rR')'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Решаем два уравнения для $R_n(r)$ и $\Phi_n(\phi)$. Не забыть про $n = 0$. В итоге получим общее решение для $u(r,\phi)$:

$$u(r,\phi) = a_0 + b_0\, ln\, r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\, cos\, n\phi + b_n\, sin\, n\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(c_n\, cos\, n\phi + d_n\, sin\, n\phi)$$

Билет 11

1. $\exists$ р-я зад.Коши для ур-я тепл-сти. Постановка задачи: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$ (1). Хотим доказать, что решение $u(x,t)$ существует и единственно.**Подготовка:**Используем метод разделения переменных. $u(x,t) = X(x)T(t)$.Подставим в(1). Получим $T'X = a^2X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T} = -\lambda^2, \quad \lambda = const > 0$

В итоге получили такую систему: $\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + a^2\lambda^2 T = 0 \end{cases}$ Решения системы: $\begin{cases} X(x) = exp(i\lambda x) \\ T(t) = exp(-a^2\lambda^2 t) \end{cases}$

Итак, решение исходной системы: $u(x,t) = exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t)$. Пусть $A(\lambda)$ - некоторая функция. Тогда $u_\lambda = A(\lambda)u(x,t)$ - тоже решение системы(функция по сути константа). Определим решение таким образом: $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t)d\lambda$.Сделаем так, что она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \phi(x)$: $\phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$,

где $A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s}\phi(s)ds$ //Коэффициенты ряда Фурье. Подставим найденные коэффициенты A в решение:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s}\phi(s)ds\right] exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t)d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(s)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}exp(i\lambda(x-s) - a^2\lambda^2 t)d\lambda\right] ds$$

Внутренний интеграл можно посчитать. В результате получится: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(x-s)^2}{4a^2t})\phi(s)ds$

Более короткая запись: $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t)\phi(s)ds$, где $G(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}exp(-\frac{(x-s)^2}{4a^2t})$,

Теорема. *Пусть $\phi(x)$ - начальное условие, такое что оно непрерывно по x и ограничено : $|\phi(x)| < M$. Тогда u(x,t) (опред-я формулой через G) непрерывна имеет непр-е частные произв-е u_{xx}, u_t и удовлетворяет уравнению теплопроводности при $x \in \Re, t > 0$. К тому же, $\lim\limits_{t->0+} u(x,t) = \phi(x)$*

Доказательство. **1.** Для начала докажем, что u(x,t) непрерывна. Для этого достаточно доказать, что u(x,t) непрерывна в прямоугольнике $= \{(x,t) : -L < x < L, t_0 < t < T\}$ где все эти пределы - const > 0.
Все функции в интеграле из u (а это G и ϕ) непрерывны в П. Тогда если интеграл сходится равномерно, то и u тоже. Для этого построим фун-цию F(s). Оцениваем показатель exp при разных s: (след-е нер-ва и усл-я лучше записывать друг по другом)
$\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t} \leqslant 0, |s| < 2L\}, \{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t} \leqslant -\frac{(L-s)^2}{4a^2T}, s \geqslant 2L\}, \{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t} \leqslant -\frac{(L+s)^2}{4a^2T}, s \leqslant -2L\}$, также оценим 1ый сомножитель в интеграле : $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}\}$
Получаем что $|G(x,s,t)| \leqslant F(s)$ где F(s) = либо $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}, |s| \leqslant 2L\}$ либо $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}exp(-\frac{(L-s)^2}{4a^2T} + \frac{L^2}{4a^2T}), s \geqslant 2L\}$ либо $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}exp(-\frac{(L+s)^2}{4a^2T} + \frac{L^2}{4a^2T}), s \leqslant -2L\}$
$\frac{L^2}{4a^2T}$ это было добавлено в показатель exp лишь для непр-сти F(s) Получаем инт-л $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)ds$ сходящийся; $|G(x,s,t)| < F(s)$; по условию $\phi(x) < M$,значит справ-во: $|G(x,s,t)\phi(x)| < |G(x,s,t)||\phi(x)| < MF(s)$, а инт-л от $MF(s)$ сх-ся.Следовательно по признаку Вейерштрасса мы получаем равномерную сходимость исходного интеграла и непрерывность функции u(x, t) в прям-ке.

2. Док-м непрерывность в прям-ке u_{xx} , u_t
$|G_{xx}(x,s,t)| = |\frac{(x-s)^2}{4a^4t^2}G(x,s,t) - \frac{1}{2a^2t}G(x,s,t)| \leqslant F(s)\{\frac{1}{2a^2t_0} + \frac{L^2+2LS+S^2}{4a^4t_0^2}\} = F_1(s)$
$F_1(s)$ интегрируема, а значит можем предст-ть $u_{xx}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(x,s,t)\phi(x)ds \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_{xx}(x,s,t)||\phi(x)|ds \leqslant$
$\leqslant M\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(s)ds < \infty$ т.е $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)$ равномерно сх-ся в прям-ке $\Rightarrow u_{xx}(x,t)$ непр-на в прям-ке.
Аналогично док-ся $u_t(x,t)$

3. Теперь докажем $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \phi(x)$. Замена $\frac{s-x}{2a\sqrt{t}} = p$. Тогда $s = x + 2a\sqrt{t}p$, $ds = 2a\sqrt{t}dp$
$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-p^2)\phi(2pa\sqrt{t} + x)dp \to$ при $(t \to 0+)$ к интегралу $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-p^2)\phi(x) = \phi(x)$ □

2. Постановка внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве Пусть Ω - некоторая открытая область в E^3, огранченная поверхностью Σ. Задача:

$$\Delta u = 0 (\text{т.е гарм-я}) \quad \text{и u непрерывна вне области}$$
$$u(M) = \mu(M), \quad M \in \Sigma$$
$$u(M) \rightrightarrows 0 \ M \to \infty$$

Билет 12

1. Теорема единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Постановка задачи. $u_t = a^2u_{xx}+f(x,t),(x,t) \in q$, **(1)** где $q = \{(x,t) : x \in R^1, t > 0\}, \overline{q} = \{(x,t) : x \in R^1, t \geq 0\}$ $u(x,0) = \varphi(x), x \in R^1$, **(2)** где $f(x,t), \varphi(x)$ непрерывны

Определение. Классическим решением задачи (1)-(2) называется функция $u(x,t)$, определенная и непрерывная вместе с производными u_t и a^2u_{xx} в q, удовлетворяющая (1) в q, непрерывная в $\overline{q}$ и удовлетворяющая условию (2).

Теорема единственности. Задача (1)-(2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в области $\overline{q}$.

Доказательство. Пусть $\exists$ два ограниченных решения $u_i(x,t), i = 1,2$, которые удовлетворяют (1)-(2). Введем функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. В силу линейности задачи функция $v(x,t)$ будет удовлетворять однородной задаче Коши:

$v_t = a^2v_{xx}, (x,t) \in q$, **(3)**

$v(x,0) = 0, x \in R^1$ **(4)**

Условие ограниченности для функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ дает условие ограниченности для функции $v(x,t)$: $|v(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \leq 2M$, где $|u_i(x,t)| \leq M, i = 1,2$.

Таким образом, $v(x,t)$ - решение задачи (3)-(4) и ограничена в области $\overline{q}$.

Покажем, что $v(x,t) \equiv 0, (x,t) \in q$. Выберем в полуплоскости q линии $|x| = L$ и $t = T$ и будем рассматривать ограниченную область q_L: $q_L = [-L,L] \times (0,T], \overline{q_L} = [-L,L] \times [0,T]$.

Введем функцию $w(x,t) = \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2t)$. Она удовлетворяет $w_t = a^2w_{xx}$.

При $t = 0 : w(x,0) = \frac{2Mx^2}{L^2} \geq |v(x,0)| = 0$.

При $|x| = L : w(\pm L,t) = 2M + \frac{4Ma^2t}{L^2} \geq 2M \geq |v(\pm L,t)|$.

Так как q_L ограничена, $v(x,t), w(x,t)$ удовлетворяют (1) и на границе $|v(x,0)| \leq w(x,0), |v(\pm L,t)| \leq w(\pm L,t)$, то к можно применить следствие из принципа максимума:

$|v(x,t)| \leq w(x,t), (x,t) \in \overline{q_L}$, или $-\frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2t) \leq v(x,t) \leq \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2t)$. Зафиксируем точку $(x,t) \in \overline{q_L}$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{L\to\infty} v(x,t) = 0$. В силу независимости от L и выбора точки, то в $\overline{q_L}$ $v(x,t) \equiv 0$. Значит, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$.

2. Интеграл энергии для уравнения колебаний.

Рассмотрим уравнение колебания $v_{tt} = a^2v_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, v(x,t) \in C^2\{[0;l] \times [0;T]\}$ с нулевыми начальными и граничными условиями. Функция $E(t) = \int\limits_0^l [\rho(v_t(x,t))^2 + T(v_x(x,t))^2]dx$ ($E(t) = \int\limits_0^l [(v_t(x,t))^2 + a^2(v_x(x,t))^2]dx$ - у Денисова, отличаются ровно в ρ раз) называется **интегралом энергии**. В физической интерпретации с точностью до константы это полная энергия колебания.

Есть более общее определение. Определим интеграл энергии - кинетическая + потенциальная энергии механической системы

в определенный момент t. $D \subset R^n, n = 1...3$

$$\begin{cases} u_{tt}(M,t) = a^2\Delta_M u_{xx}(M,t) + f(M,t), M \in D, t > 0 \\ u(M,0) = \varphi(M) \\ u_t(M,0) = \psi(M), M \in \overline{D} \\ \alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P} + \beta(P)u(P,t) = \chi(P,t), P \in \partial D, t > 0 \end{cases}$$

1) Свободные колебания $f \equiv \chi \equiv 0$. Обозначим ∂D^+ - область, где $\alpha(P), \beta(P) > 0$

Интеграл энергии $\varepsilon(t) = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_D \left(u_t^2(M,t) + a^2grad_M^2u(M,t)\right)dD_M + a^2\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\partial D^+} \frac{\beta(P)}{\alpha(P)}u^2(P,t)dS_P$

$\partial D^+ \neq 0$ только для третьего краевого условия

тройной интеграл это кинетическая энергия колеблющейся системы, dD_M - элемент объема

двойной интеграл это энергия упругого закрепления, dS_P - элемент площади поверхности

$\rho = const$ - объемная плотность массы

Физический смысл $\varepsilon(t)$ - в отсутствие внешних сил полная энергия колеблющейся системы не изменяется со временем. То есть это закон сохранения энергии:

$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_D \left(\psi^2(M) + a^2grad_M^2\varphi(M)\right)dD_M + a^2\frac{\rho}{2}\iint\limits_{\partial D^+} \frac{\beta(P)}{\alpha(P)}\varphi^2(P)dS_P$

Билет 13

1 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с нулевым краевым условием первого рода.

При распределении температуры влияние одного из концов стержня несущественно, можно им пренебречь. Рассмотрим **первую краевую задачу на полупрямой:**

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0 \qquad \varphi(0) = 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Доопределим нечетным образом $\varphi(x)$:

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим **задачу Коши:**

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), & -\infty < x < +\infty \\ U(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Известно:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)\,ds - \textit{интеграл Пуассона} \tag{4}$$

Покажем, что $u(x,t) = U(x,t)$ при $x \geq 0$, является решением (1). Проверим выполнение граничного условия:

$$u(0,t) = U(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)\,ds = \left\{ \begin{array}{c} \text{под интегралом произведение} \\ \text{четной и нечетной функций} = \\ = \text{нечетной функции} \end{array} \right\} = 0 \tag{5}$$

Получим формулу для решения:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)\,ds = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{0} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} \cdot -\varphi(-s)\,ds + \int_{0}^{+\infty} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\varphi(s)\,ds \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(-\int_{0}^{+\infty} \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\}\varphi(s)\,ds + \int_{0}^{+\infty} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\varphi(s)\,ds \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{0}^{+\infty} \left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} - \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\} \right] \cdot \varphi(s)\,ds \end{aligned} \tag{6}$$

В итоге, с учетом (5) и (6), имеем:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Значит $u(x,t)$ - есть **решение первой краевой задачи на полупрямой.**

2 Задача Гурса. Сведение к эквивалентной системе интегральных уравнений.

Рассмотрим задачу с нелинейным уравнением гиперболического типа:

$$\begin{cases} u_{xy}(x,y) = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + f(x,y,u(x,y)),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2 \\ \quad u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l_1 \\ \quad u(0,y) = \psi(y),\ 0 \le y \le l_2 \end{cases} \quad \textbf{- задача Гурса} \tag{1}$$

Для первого уравнения (1) характеристиками будут функции удовлетворяющие: $dxdy = 0$.
Получим семейство прямых вида: $x = const, y = const$.
Таким образом, наша u(x,y) задается данными на характеристиках $x = 0, y = 0$.

Эквивалентная система интегральных уравнений
Пусть функция $u(x,y)$ — решение задачи Гурса (3). Тогда, интегрируя уравнение сначала по y, потом по x:

$$u(x,y) = \psi(y)+\varphi(x)-\varphi(0)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y [a(\xi,\eta)u_x(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u_y(\xi,\eta)]\ d\eta d\xi+\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))\,d\eta d\xi \tag{2}$$

$$u_x(x,y) = \varphi'(x) + \int\limits_0^y [a(x,\eta)u_x(x,\eta) + b(x,\eta)u_y(x,\eta)]\ d\eta + \int\limits_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))\,d\eta. \tag{3}$$

$$u_y(x,y) = \psi'(y) + \int\limits_0^x [a(\xi,y)u_x(\xi,y) + b(\xi,y)u_y(\xi,y)]\ d\xi + \int\limits_0^x f(\xi,y,u(\xi,y))\,d\xi. \tag{4}$$

Получим (2), (3) и (4) - система эквивалентных интегральных уравнений задаче (3).

Теормин: (дополнительно)
Классическое уравнение в частных производных 2-го порядка:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \tag{5}$$

Поставим ему в однозначное соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \tag{6}$$

Тогда функции (кривые), являющиеся решением (6), называются **характеристиками уравнения** (5).

Билет 14

1. Решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке методом разделения переменных

В смешанной задаче краевые условия можно всегда обнулить, поэтому будем рассматривать приведённую систему:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & 0 < \text{x} < \text{l, t} > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = 0 & \\ u_x(l,t) = 0 & t \ge 0 \end{cases}$$

Идея метода разделения переменных: нетривиальные частные решения данного уравнения с независимыми переменными x и t ищутся в виде произведения X(x)T(t). Чтобы решить данную задачу для неднородного уравнения, решим сначала аналогичную задачу с однородным уравнением $u_t = a^2 u_{xx}$. Подставим X(x)T(t) в уравнение и разделим его на $a^2 X(x)T(t)$: $\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ Левая часть уравнения зависит только от t, правая - только от x. Поскольку x и t являются независимыми пременными, равенство возможно, если обе его части равны постоянной. Обозначим эту постоянную через -λ и запишем уравнения относительно X(x) и T(t).

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$$

Подставим X(x)T(t) в краевые условия и получим $X(0) = 0, X'(l) = 0$. Чтобы найти X(x), необходимо решить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X(x) = 0 & 0 \le x \le l \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = (\frac{2n+1}{2l}\pi)^2, X_n = sin(\frac{2n+1}{2l}\pi x) \tag{1}$$

Далее при каждом λ_n, которое является собственным значением задачи для X(x), находим общее решение уравнения относительно T(t). Чтобы найти решение задачи, надо из всевозможных решений исходного уравнения u(x, t) $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям, отобрать единственное верное решение, удовлетворяющее начальному условию.

$T_n(t) = C_n \exp(-(\frac{2n+1}{2l}\pi a)^2 t)$

$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n sin(\frac{2n+1}{2l}\pi x) \exp(-(\frac{2n+1}{2l}\pi a)^2 t)$

Коэффициенты C_n можно найти из начального условия $u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n sin(\frac{2n+1}{2l}\pi x) = \phi(x)$.

Для этого разложим заданную на [0, l] $\phi(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{X_n(x)\}$ на указанном отрезке. Тогда C_n равны коэффициентам Фурье функции $\phi(x)$ по системе $\{X_n(x)\}$.

Возвращаемся к задаче с неоднородным уравнением. $f(x,t)$ разложим в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля: $f(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$

Теперь решение исходной задачи при фиксированном t можно искать в виде ряда Фурье по системе $\{X_n(x)\} : u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$ Чтобы найти коэффициенты $T_n(t)$, необходимо подставить предполагаемый вид решения в уравнение.

2. Свойства гармонических функций

Определение Функция двух переменных $u(x,t)$ называется гармонической в области D, если $u \in C^2(D)$ и $\Delta u = 0$.

Свойства:

1) Если v - функция, гармоническая в области T, ограниченной поверхностью $\sum$, то $\iint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0$, где S - любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T.

2) Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T, а M_0 - какая-нибудь точка, лежащая внутри области T, то имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\sum_a} u d\sigma,$$

где $\sum_a$ - сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области T (***формула среднего значения***).

3) Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T + \sum$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальные и минимальные значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности $\sum$ (***принцип максимального значения***).

Билет 15. Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.

1. Стационарное тепловое поле

Рассмотрим стационарное тепловое поле. Ранее было показано что температура нестационарного теплового поля удовлетворяет диференциальному уравнению теплопроводности $u_t = a^2\Delta u + f$. Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры, не меняющееся с течением времени $u_t = 0$, и следовательно удовлетворяющее уравнению $\Delta u = -f$ - уравнение Пуассона ($\Delta u = 0$ - уравнение Лапласса)

2. Потенциальное течение жидкости

Пусть внутри некоторого объема T с границей Σ имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = const$), характеризуемое скоростью $v(x, y, z)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость v является потенциальным вектором, т.е.

$$v = -grad\ \varphi \tag{1}$$

, где φ - скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то $div\ v = 0$. Подставляя сюда выражение (1) для v, получим $div\ grad\varphi = 0$, или $\Delta\varphi = 0$, т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

3. Потенциал стационарного тока

Пусть в однородной проводящей среде имеется стационарный ток с объемной плотностью $j(x, y, z)$, если в среде нет объемных источников тока, то

$$div\ j = 0 \tag{2}$$

Электрическое поле E определяется через плотность тока из диференциального закона Ома

$$E = j/\lambda \tag{3}$$

где λ - проводимость среды. Поскольку процесс стационарный, то электрическое поле является безвихревым, или потенциальным, т.е. существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой $E = grad\varphi$ ($j = -\lambda\ grad\varphi$). Отсюда на основании формул (2) и (3) заключаем, что $\Delta\varphi = 0$, т.е потенциал электрического поля стационарного тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

4. Потенциал электростатического поля

Рассмотрим электрическое поле стационарных зарядов. Из стационарности процесса следует, что $rot\ E = 0$, т.е. поле является потенциальным и $E = -grad\varphi$. Пусть $\rho(x, y, z)$ - объемная плотность зарядов, имеющихся в среде, характеризуемой диэлектрической постоянной $\varepsilon = 1$. Исходя из основного закона электродинамики

$$\iint\limits_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint\limits_T \rho d\tau \tag{4}$$

(где T - некоторый объем, S - поверхность, его ограничивающая, $\sum e_i$ - сумма всех зарядов внутри T) и пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_S E_n dS = \iiint\limits_T divE d\tau \tag{5}$$

получаем $div\ E = 4\pi\rho$. Подставив сюда выражение (3) для E, будем иметь $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, т.е. электростатический потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет ($\rho = 0$), то потенциал φ должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Теормин. Сопряженный дифференциальный оператор в двумерном случае.

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, u = u(x_1, ..., x_n) = u(x)$$

Считаем, что $A_{ij} = A_{ji}, n = 2$

$$Mv = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(A_{ij}v) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + cv$$

M - сопряженный для L; L - сопряженный для M

1 Билет 16. Первая и вторая формулы Грина

1.1 Формула Остроградского

Пусть поверхность Σ состоит из конечного числа замкнутых кусков, имеющих в каждой точке касательную, причем любые прямые, параллельные прямые, параллельные осям координат, пересекают поверхность либо в конечном числе точек, либо по конечному числу отрезков.

Тогда в области Ω для функции $\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, где P,Q,R - непрерывно дифференцируемые в $\bar{\Omega}$, верна формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{A} d\tau$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

1.2 Первая формула Грина

Пусть u,v - скалярные функции, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1\bar{\Omega}$
$A = u * grad(v)$. Применим формулу Остроградского:

$$\iint\limits_{\Sigma} (u * grad(v), \vec{n}) d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div(u * \vec{grad}(v)) d\tau$$

Распишем левую и правую части

1. Правая часть

$$\begin{aligned} div(u\ grad(v)) = div(u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y}, u\frac{\partial v}{\partial z}) = \frac{\partial(u\frac{\partial v}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(u\frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(u\frac{\partial v}{\partial z})}{\partial z} = \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \\ (grad(u), grad(v)) + u \cdot (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) = \\ (grad(u), grad(v)) + u\Delta v \end{aligned} \tag{1}$$

2. Левая часть

$$(grad(v), \vec{n}) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n1 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n2 + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot n3 = \frac{\partial v}{\partial n} \tag{2}$$

Итак, первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} ((grad(u), grad(v)) + u\Delta v) dr = \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

1.3 Вторая формула Грина

Поменяем местами u и v и вычтем из исходной формулы Грина. Получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} ((grad(u), grad(v)) - (grad(u), grad(v)) + u\Delta v - v\Delta u) dr = \iint\limits_{\Sigma} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dr = \iint\limits_{\Sigma} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$

2 Формула Д'аламбера

Задача Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \Re, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Формула Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

Билет 17.

1. Третья (основная) формула Грина.

Опционально, 1 и 2 ф-лы Грина: 1) $\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\, d\tau = \iint\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma - \iiint\limits_{\Omega}(grad\, u, grad\, v)\, d\tau$

2) $\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u - u\Delta v\, d\tau = \iint\limits_{S}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})\, d\sigma$

Итак, приступим. Нам понадобятся: 2-я формула Грина и фунд. решение ур-я Лапласа.
Используя их, получим 3-ю формулу Грина. 1. Пусть $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ (Ω - ограниченная область)

Точка $M_0 \in \Omega$; функция $v(M, M_0) = \frac{1}{R_{MM_0}}$ имеет особенность в $M_0 \Longrightarrow$сразу применять формулу Грина нельзя
2. Поэтому окружим M_0 шаром $K(M_0, \varepsilon)$, ограниченным сферой $\Sigma(M_0, \varepsilon)$
Тогда можно применить 2-ю формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus K(M_0,\varepsilon)} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \underbrace{\iint\limits_{S}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, d\sigma}_{(1)} + \underbrace{\iint\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, d\sigma}_{(2)} \qquad (0)$$

в инт-ле (1) берем внешнюю нормаль к S, во втором внешнюю нормаль к сфере $\Sigma(M_0, \varepsilon$
3. Вычислим интеграл по сфере, учитывая $v(P)\Big|_{P\in\Sigma(M_0,\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{\partial v(P)}{\partial n}\Big|_{P\in\Sigma(M_0,\varepsilon)} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$
$(2) = \iint\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)} (u(P)\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial n})\, d\sigma_p = \Big/$ Воспользуемся теоремой о среднем, точки$P^*, P^{**} \in \Sigma(M_0, \varepsilon)\Big/ = (\frac{1}{\varepsilon^2}u(P^*) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n})4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(P^*) - 4\pi\varepsilon\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n} = (3)$ **;** Устремим ε к 0, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ – ограниченная; u – непрерывная
$(3) = (\varepsilon \to 0) = 4\pi u(M_0)$
4. Подставим в (0) и выделим $u(M_0), \varepsilon \to 0$
$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_p} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_p}(\frac{1}{R_{PM_0}}))\, d\sigma_p - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}\, d\tau_m$
Мы получили 3-ю формулу Грина, мы восхитительны

2. Интеграл Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Интеграл Пуассона $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина: $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}$

1 18 билет

1.Постановка основных краевых задач для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Дирихле

S - замкнутая, достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область Ω. Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ (то есть $u(M)$ гармоничка в Ω) и принимает на границе S заданные значения: $u(P) = \mu(P),\ P \in S$. Непрерывность u(M) в $\overline{\Omega}$ необходима для единственности решения задачи. В этом случае функция $u(M)$ называется классическим решением задачи, поэтому требуем $\mu \in C(S)$. $u(M) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),\ \mu \in C(S)$

Внутренняя задача Неймана

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}$, имеет непрерывные вторые производные в и удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, её нормальная производная принимает на границе заданные значения $\frac{\partial u(P)}{\partial n}|_{P\in S} = \nu(P), P \in S$. $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),\ \nu \in C(S)$

Внешние краевые задачи для трех и двух независимых переменных ставятся по-разному. Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть Ω' - область внешняя к некоторой замкнутой поверхности S.

Внешняя задача Дирихле.

Требуется найти функцию u(M), удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной пространственной области Ω', непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega'}$, принимающую на границе заданные значения $u(M) = \mu(M),\ M \in S$, и равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности. Стремление к нулю функции u(M) на бесконечности необходимо для единственности решения задачи. $u(M) \in C(\overline{\Omega'}) \cap C^2(\Omega')$

Если рассматривать случай двух переменных, то стремление к нулю функции на бесконечности нужно заменить на условие ограниченности функции на бесконечности.

Внешние краевые задачи Неймана ставятся аналогично, но с краевым условием II типа.

2. Задача Коши для уравнения колебаний струны на полуограннченной прямой.

Задача на бесконечной прямой $(-\infty < x < +\infty,\ t > 0)$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Если рассматривать полубесконечную прямую, то начальные возмущения вызовут волны, бегущие в обе стороны по струне, и волна, бегущая влево, достигнет конца струны, отразится от него и побежит вправо. Она будет определяться не только начальным возмущением, но и характером отражения, которое происходит по-разном упри разных движениях конца струны. Появляется необходимость в задании краевых условий.

1. Условие Дирихле (1 рода): $u(0,t) = \mu(t),\ t \geq 0$. Оно означает, что конец струны движется по заранее определенному закону. И если $\mu(t) \equiv 0,\ t \geq 0$, то конец жестко закреплен.

2. Условие Неймана (2 рода): $u_x(0,t) = \nu(t),\ t \geq 0$. Оно выражает равенство величин поперечной силы, приложенной извне к концу струны, и силы упругости струны. И если $\nu(t) \equiv 0, t \geq 0$, то внешняя сила не действует.

3. Условие 3 рода: $u_x(0,t) - hu(0,t) = \nu(t),\ h = const > 0,\ t \geq 0$ означает, что конец струны закреплен упруго, например пружиной.

Билет 19. Решение внутренней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Формула Пуассона

Задача Дирихле в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(r,\varphi)|_{r=a} = f(\varphi) \end{cases}$$

Или в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = 0, \\ u|_{r=a} = f(\varphi), 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le a \end{cases}$$

Решение: Метод разделения переменных: $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ Подставим в задачу Дирихле в полярных координатах:

$$\frac{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = const \tag{1}$$

Получим:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) - \lambda R(r) = 0 \tag{2}$$

Уравнение Эйлера:

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{3}$$

Частное решение в виде $R = r^m, m = const.$

$$r^2(m-1)mr^{m-2} + rmr^{m-1} - \lambda r^m = 0$$
$$m = \pm\sqrt{\lambda}\,(\lambda > 0) \text{ или } \lambda = 0$$

Если $\lambda = 0$, то $R(r) = C_0 \ln r + C_1$. Решение должно быть ограничено в центре круга при $r = 0$, поэтому из двух найденных решений берем $r^{\sqrt{\lambda}} = r^n$ и $u(r,\varphi)$ должна быть непрерывной и конечной в круге.

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$
$$\Phi(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

Все частные решения: $u_n(r,\varphi) = r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), n = 0, 1...$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \tag{4}$$

Найдем A_n и B_n разложение $f(\varphi)$ в $(0, 2\pi)$ в ряде Фурье.

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{5}$$

$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi,\ \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \quad n = 0, 1..$

$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi, \quad n = 0, 1..$

$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$

Тогда получаем: $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{6}$$

Подставим выражение для коэффициентов Фурье в формулу (6), тогда получим:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\cos n\varphi\cos n\alpha + \sin n\varphi \sin n\alpha)\right)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\alpha)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\cos n(\varphi - \alpha)\right)$$

$$\left\{\cos n(\varphi-\alpha)=\frac{e^{in(\varphi-\alpha)}+e^{-in(\varphi-\alpha)}}{2}, q=\frac{r}{a}<1\right\};\ \frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(qe^{i(\varphi-\alpha)}\right)^n+\left(qe^{-i(\varphi-\alpha)}\right)^n\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}}+\frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}}\right)=\frac{1}{2}\frac{1-q^2}{1-2q\cos(\varphi-\alpha)+q^2}=\frac{1}{2}\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\alpha)+r^2}$$

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)(a^2-r^2)}{a^2-2ar\cos(\varphi-\alpha)+r^2}\,d\alpha,\quad (r<a) \tag{7}$$

2. Теоремы единственности и устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебания

Задача Коши для однородного уравнения колебаний: $-\infty<x<\infty$, $t>0$.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

Теорема. Пусть $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на бесконечной прямой. Тогда решение задачи Коши существует, единственно и определяется формулой Даламбера: $u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha$.

Теорема. Пусть начальные функции $\varphi_s(x)$ и $\psi_s(x)$ $(s=1,2)$ двух задач Коши, удовлетворяют условиям : $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\le\epsilon$, $x\in(-\infty;\infty)$ и $\int\limits_a^b|\psi_1(z)-\psi_2(z)|^2\,dz\le\epsilon^2(b-a)^2$, тогда выполняется для решений этих задач с $t\in[0,T]$ $|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\le\epsilon(1+T)$ (устойчивость).

Билет 20

1. Функция Грина для краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве .

имеем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in T \\ u(P) = g(P), P \in \Sigma \end{cases}$$

$T \in \mathbb{R}^3$ - область, ограниченная замкнутой поверхностью Σ; $u, v \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$. Справедлива 3-я формула Грина:

$$4\pi u(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} (\frac{\partial u}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PM_0}} - u\frac{\partial}{\partial n_P}(\frac{1}{R_{PM_0}}))d\delta - \iiint\limits_{T} \frac{\Delta u}{R_{PM_0}} d\tau$$

Пусть v гармонична в T $(\Delta v = 0)$ и непрерывна с первыми производными в $\overline{T}$. Применим к u и v 2-ю формулу Грина:

$$0 = \iint\limits_{\Sigma} (v\frac{\partial u}{\partial n_P} - u\frac{\partial v}{\partial n_P})d\delta - \iiint\limits_{T} (v\Delta u - u\Delta v)d\tau = \iint\limits_{\Sigma} (v\frac{\partial u}{\partial n_P} - u\frac{\partial v}{\partial n_P})d\delta$$

(второй интеграл исчез, так как $\Delta u = \Delta v = 0$ в T). Складываем и получаем:

$$u(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} (\frac{\partial u}{\partial n_P} G - u\frac{\partial G}{\partial n_P})d\delta$$

где $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$. Потребуем, чтобы выполнялось условие $G(P, M_0) = 0, P \in \Sigma$, тогда

$$u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial G}{\partial n_P} d\delta$$

Определение: Функция $G(M, M_0)$ называется *функцией Грина* внутренней задачи Дирихле в $T \in \mathbb{R}^3$, если:
1) $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$, где $v(M)$ гармонична в T
2) $G(P, M_0) = 0, P \in \Sigma$
Если функция Грина $G(M, M_0)$ существует, то решение задачи находим в явном виде по формуле:

$$u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma} g(P)\frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} d\delta$$

Для построения функции Грина необходимо найти функцию $v(M)$, удовлетворяющую задаче:

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, M \in T \\ v(P) = -\frac{1}{4\pi R_{PM_0}}, P \in \Sigma \end{cases}$$

Свойства функции Грина:
1) $G(M, M_0) \geq 0$, если $M, M_0 \in T$
Доказательство: ограничим точку M_0, в которой у $G(M, M_0)$ особенность, шаром K_ϵ достаточно малого радиуса ϵ (чтобы выполнялось $\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} > v(M)$) тогда $G > 0$ в $K_\epsilon \cup \Sigma_\epsilon$ (Σ_ϵ - поверхность шара) и $\Delta G = 0$ в $T \backslash K_\epsilon$, тогда по принципу минимума $G \geq 0$ в $\Delta G = 0$ в $T \backslash K_\epsilon$, откуда в силу произвольности выбора ϵ следует утверждение. Следствие: $\frac{\partial G}{\partial n}|_\Sigma \leq 0$
2) Принцип взаимности: $G(M, M_0) = G(M_0, M)$
Короткого доказательства не нашёл

2. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности на неограниченной прямой.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

$f(x, t), \phi(x)$ - заданные непрерывные функции

Билет 21

1 Применение метода конформных отображений для решения краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости.

1.1 Инвариантность свойства гармоничности при конформных отображениях

Для начала определимся с обозначениями. $z = x + iy$, $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$. f - гармонична, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$. Также для f выполнено условие Коши-Римана (условие аналитической функции):
$\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y}$; $\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$; $\Delta\xi = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{-\partial \eta}{\partial x}) = 0$, следовательно: $\Delta\xi = \Delta\eta = 0$.
Пусть $u(x, y) = U(\xi, \eta)$, тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\dfrac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(\dfrac{\partial \eta}{\partial x})^2 + \dfrac{\partial U}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial U}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\dfrac{\partial \xi}{\partial y})^2 + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(\dfrac{\partial \eta}{\partial y})^2 + \dfrac{\partial U}{\partial \xi}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial U}{\partial \eta}\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$
$\Delta u = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}((\dfrac{\partial \xi}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial \xi}{\partial y})^2) + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta}(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}((\dfrac{\partial \eta}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial \eta}{\partial y})^2) + (\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\Delta\xi + \dfrac{\partial U}{\partial \eta}\Delta\eta) = \Delta U|f'(z)|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Свойство гармоничности сохраняется
Пояснение к последнему равенству:
Если преобразование было конформным, то выполнены условия Коши-Римана:
$\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + (-\dfrac{\partial \eta}{\partial x})\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0; (\dfrac{\partial \eta}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial \eta}{\partial y})^2 = (\dfrac{\partial \xi}{\partial y})^2 + (\dfrac{\partial \xi}{\partial x})^2 = |f'(z)|^2; f'(z) = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + i\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$

1.2 Решение краевых задач для уравнения Лапласа с помощью конформных отображений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в Т.,} \\ u(x, y)|_T = g(x, y) \end{cases}$$

$T \xrightarrow{\text{f(z)}} T_1; \xi = \varphi(x, y); r \to r_1; \eta = \psi(x, y); \Delta U = 0$ в $T_1; U(\xi, \eta)|_{r_1} = G(\xi, \eta)$
Конформные отображения обратимы $\Rightarrow x = \Phi(\xi, \eta)$ и $y = \Psi(\xi, \eta) \Rightarrow g(x, y) = g(\Phi(\xi, \eta), \Psi(\xi, \eta)) = G(\xi, \eta)$.
Таким образом задача Дирихле в области T была сведена к задаче Дирихле в области T_1. Если T_1 проще, чем T, то мы значительно упростили задачу.

1.3 Построение функции Грина с помощью конформных отображений.

$\xi = f(z_0, z); z_0 \to 0; G(M_0, M) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|f(z_0, z)|; \xi = -\dfrac{1}{2\pi}\ln f(z_0, z); Re(-\dfrac{1}{2\pi}\ln(f(z_0, z))) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|f(z_0, z)|$;
$G(M_0, M) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|\dfrac{f(z_0, z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0} * (z - z_0)| = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|\dfrac{f(z_0, z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0}| - \dfrac{1}{2\pi}\ln|(z - z_0)|$

$G(M_0, M)|_{M \in r} = 0$ – Очевидно

2 Решение смешанной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности. Промежуточная асимптотика.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(u\dfrac{\partial u}{\partial x}), 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$F(x)$ – функция Буссинеска; $u(x, t) = \dfrac{F(x)}{t + 1}$ - эта функция является решением исходной задачи

Теорема: Для любой функции $\varphi(x)$, решение $u(x, t) \sim \dfrac{F(x)}{t + t_0}, t \to \infty$, т. е. задача "забывает"детали начальных условий.

Билет 22. Логарифмический потенциал двойного слоя. Существование логарифмического потенциала двойного слоя на границе области. Пример Адамара.

1 Логарифмический потенциал двойного слоя

Основная функция Грина в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей S дает интегральное представление функции $u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ (3.33):

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_S \left(ln\frac{1}{R_{PM}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_p} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(ln\frac{1}{R_{PM}} \right) \right) dl_p - \frac{1}{2\pi} \iint_D \Delta u(P) ln\frac{1}{R_{PM}} \, dx_p dy_p \tag{3.33}$$

где параметрами являются координаты точки наблюдения $M \in D$, R_{PM} - расстояние между точками P и M.

Формула (3.33) состоит из интегралов трех типов:

$$\oint_S \mu(P) ln\frac{1}{R_{PM}} \, dl_p \tag{3.34}$$

$$\oint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(ln\frac{1}{R_{PM}} \right) dl_p \tag{3.35}$$

$$\iint_D \rho(P) ln\frac{1}{R_{PM}} \, dx_p dy_p \tag{3.36}$$

Где (3.34) - *логарифмический потенциал простого слоя.*

(3.35) - *логарифмический потенциал двойного слоя* (который нас и интересует).

(3.36) - *логарифмический потенциал.*

Эти интегралы нам интересны, т.к. решением задачи Дирихле (3.37) является (3.35),плотность ν которого удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in D, \\ u\big|_{M \in S} = f(M); f \in C(S) \end{cases} \tag{3.37}$$

Рассмотрим подробнее формулу логарифмический потенциал двойного слоя:

$$w(M) = -\int_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(ln\frac{1}{R_{PM}} \right) dl_p \tag{3.35}$$

где:

R_{PM} - расстояние от точки M до точки P,

производная берется по координатам точки P, в направлении оси n_p (нормаль к кривой S).

Заметим, что:

$$-\frac{\partial}{\partial n_p} \left(ln\frac{1}{R_{PM}} \right) = \frac{1}{R_{PM}} * \frac{\partial}{\partial n_p} (R_{PM}) = \frac{1}{R_{PM}} * (\overrightarrow{n_p}, grad(R_{PM})) = \frac{cos\phi}{R_{PM}}$$

откуда получаем следующее представление:

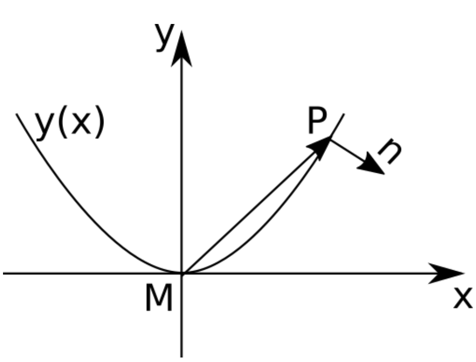
$$w(M) = \int_S \nu(P) \frac{cos\phi}{R_{PM}} \, dl_p$$

где угол ϕ - угол между $\overrightarrow{n_p}$ и вектором $\overrightarrow{MP}$.

Теорема

Если граница S обладает гладкостью второго порядка в окрестности точки M, а ν ограничена и интегрируема, то логарифмический потенциал двойного слоя $\exists$ в случае $M \in S$.

Док-во:



Фиксируем точку $M \in S$ и рассмотрим достаточно малую окрестность этой точки. Проведём через неё оси координат так, чтобы ось x была касательной к кривой, а ось y - нормалью к ней (так, чтобы график S образовывал выпуклую вниз функцию).

Пусть S задаётся формулой y(x). Т.к. S достаточно гладкая, рассмотрим представление y(x) по формуле Тейлора:

$$y(x) = y(0) + x * y(0)' + \frac{x^2}{2} * y(0)''(\theta x) = \frac{x^2}{2} * y(0)''(x_1)$$

$$y(x)' = y(0)' + x * y(0)''(x_2) = x * y(0)''(x_2)$$

где $x_1, x_2 \in [0, x_P]$, (x_P - координата x точки P)

$$\overrightarrow{\tau} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} \right\} \text{– вектор касательной в точке P}$$

$$\overrightarrow{n_p} = \left\{ \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}} \right\} \text{– вектор нормали в точке P}$$

$$\overrightarrow{MP} = \{x, y(x)\}$$

$$R_{MP} * cos\phi = (\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{MP}) = \frac{xy'(x) - y(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}} = \frac{x^2 y''(x_2) - \frac{1}{2}x^2 y''(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$$

$$\frac{cos\phi}{R_{MP}} = \frac{(\overrightarrow{n_p}, \overrightarrow{MP})}{R^2_{MP}} = \frac{x^2 y''(x_2) - \frac{1}{2}x^2 y''(x_1)}{(\sqrt{1+y'^2(x)}) * (x^2 + \frac{1}{4}x^4 y''^2(x))} = \frac{y''(x_2) - \frac{1}{2}y''(x_1)}{(\sqrt{1+y'^2(x)}) * (1 + \frac{1}{4}x^2 y''^2(x))}$$

При стремлении P к M получаем, что $\frac{cos\phi}{R_{MP}}$ - непрерывная ограниченная функция. Т.к. ν ограничена и интегрируема, получаем, что исходный интеграл сходится $\Rightarrow$ логарифмический потенциал второго слоя существует при $M \in S$.

2 Пример Адамара

Опр. Говорят, что математическая задача поставлена корректно, если:

- Решение существует;
- Решение единственно;
- Решение задачи непрерывно зависит от данных задачи (начальных и граничных условий, коэффициентов уравнений и тд.);

Пример Адамара некорректно поставленной классической задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа $\begin{cases} u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t),\ t > 0, -\infty < x < \infty (1) \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \dfrac{1}{n}\sin nx, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Легко проверить , что решением этой задачи будет:
$u(x,t) = \frac{1}{n^2} * sh(n*t) * sin(n*x)$; (2)
Так как , $\mid u_t(x,0) \mid = \mid \frac{1}{n} * sin(n*x) \mid <= \frac{1}{n}$, то при достаточно большом n величина $\mid u_t(x,0) \mid$ является как угодно малой при любом x. Из решения (2) : |u(x,t)| будет иметь как угодно большое значение при произвольно малом t>0 и достаточно большом n.

Допустим мы нашли решение $u_0(x,t)$ задачи (1) при условиях :
$u(x,0) = f_1(x)$,
$u_t(x,0) = f_2(x)$;
Рассмотрим эту же задачу (1) При новых начальных условиях(старые + малое возмущение):
$u(x,0) = f_1(x)$,
$u_t(x,0) = f_2(x) + \frac{1}{n}\sin nx$;
Решение:
$u(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{n^2} * sh(n*t) * sin(n*x)$;
(это слагаемое очень большое $\Rightarrow$ большое возмущение)
То есть при малом изменении начального условия произошло большое изменение решения задачи, следовательно эта задача является некорректно поставленной.

Билет 23. Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на границе области

Логарифмический потенциал двойного слоя: $U_1(x) = \int\limits_L \rho_2 \frac{d}{dn}(ln\frac{1}{r})dL$

ρ_2 - плотность двойного слоя. В области, не содержащей L, U_1 гармонична. Учитывая, что $\frac{d}{dn}(ln\frac{1}{r})dL = \frac{cos\phi}{r}$, где ϕ это угол между n и r, можно преобразовать так: $U_1(x) = \int\limits_L \rho_2 \frac{cos\phi}{r} dL$. Если L представляет собой замкнутый контур, удовлетворяющий условиям Ляпунова для поверхностей, и имеющий в каждой точке касательную, то разрыв можно охарактеризовать равенствами: $\begin{cases} U_{1i} = U_{10} - \pi * \rho_{20} \\ U_{1e} = U_{10} + \pi * \rho_{20} \end{cases}$, где U_{10} - прямое значение U_1, ρ_{20} - значение плотности ρ_2 в какой-нибудь точке ξ, лежащей на контуре L. U_{1i} и U_{1e} - предельные значения того же потенциала, когда точка x стремится совпасть с точкой ξ, подходя к ней или изнутри или извне контура L. В частном случае $\rho_2 = 1$ интеграл $\int\limits_L \frac{cos\phi}{r} dL$ аналогичный интегралу в формуле Гаусса, имеет три различных значения: $\begin{cases} -2 * \pi, \\ 0, \\ -\pi \end{cases}$, в зависимости от того, находится точка x внутри, вне, или на контуре.

Теормин. Преобразование Хопфа-Коула для уравнения Бюргерса

Уравнение Бюргерса описывает нелинейность и диффузию (вязкость)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Проведём преобразование Хопфа-Коула для этого уравнения: $u = \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$
Тогда: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)^2\Big) = D\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$
Проинтегрируем по x: $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big)^2 = D\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + C$
Пусть $C = 0$. Замена $\psi(x,t) = -2D \ln v$. Тогда $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2D\frac{v_t}{v}$; $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2D\frac{v_x}{v}$; $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2D\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$
Подставим: $-2D\frac{v_t}{v} + 2D^2\frac{v_x^2}{v^2} = -2D\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$. Тогда $2D^2\frac{v_x^2}{v^2}$ сокращается.
$v_t = Dv_{xx}$ - получили линейное уравнение вместо нелинейного.

Билет 24.

1 Сведение внутренней и внешней задач Дирихле для оп-ра Лапласа к интегральному уравнению

Рассмотрим двумерный случай.

Ищем функцию, гармоническую в области T с контуром C, и удовлетворяющую граничному условию $u|_c = f$

Будем искать решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя. $W(M) = \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}}\,\upsilon(P)\,dS_P$

Где

φ - угол между отрезком MP и внутренней нормалью к контуру C в точке P

$\upsilon(P)$ - плотность момента линейного двойного слоя.

$W(M)$ гармонична внутри , т.е нам нужно лишь гарантировать выполнение граничного условия $u|_c = f$,то есть $W_B(P_o) = f(P_o)$

$W(M)$ разрывна на границе: $W_B(P_o) = W_C(P_o) + \pi\upsilon(P_o)$ где W_B, W_H, W_C это соответственно значение при приближении изнутри, снаружи, и непосредственно значение на контуре

Соотвтсвенно получаем интегральное уравнение для υ

$\pi\upsilon(P_o) + \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R_{P_oP}}\,\upsilon(P)\,dS_P = f(P_o)$ Или, если перейти от точек P, P_o к параметрам дуг s, s_o:

$\pi\upsilon(s_o) + \int\limits_0^L K(s_o, s)\,\upsilon(s)\,dS = f(s_o)$

Где

L - длина контура

$K(s_o, s) = \frac{\cos\varphi}{R_{P_oP}}$ - ядро этого интегрального уравнения

Для внешней задачи, учитывая разрыв $W_H(P_o) = W_C(P_o) - \pi\upsilon(P_o)$ аналогично получим

$$-\pi\upsilon(s_o) + \int\limits_0^L K(s_o, s)\,\upsilon(s)\,dS = f(s_o)$$

2 Метод продолжения для задачи Коши для полуограниченной прямой в случае краевых условий второго рода

имеем задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = \upsilon(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

ее можно разбить на две, одна с нулевым граничным условием и ненулевым начальным, другая наоборот. Нас интересует первая:

$$\begin{cases} u1_t = a^2 u1_{xx} \\ u1_x(0,t) = 0 \\ u1(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

четным образом продляем φ

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

после этого, по лемме, граничное условие будет нулевым, т.е получаем задачу на прямой, решение которой выглядит так:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{\dfrac{-(x-\varepsilon)^2}{4a^2 t}}\, \psi(\varepsilon) d\varepsilon$$

учитывая значения $\psi(x)$, получим

$$u1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left(e^{\dfrac{-(x-\varepsilon)^2}{4a^2 t}} + e^{\dfrac{-(x+\varepsilon)^2}{4a^2 t}}\right) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

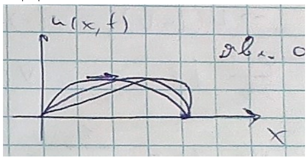
по задаче $u2$ для второго рода ни в лекциях, ни в Тихонове-Самарском нет инфы

25 Билет 1.Уравнение Бюргерса. Преобразование Хопфа-Коула. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Уравнение Бюргерса. Описывает нелинейность и диффузию (вязкость).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Рассмотрим задачу $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ - описывает движение жидкости
$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ - несжимаемая жидкость; $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = 0$
Запишем уравнения характеристик:
$\frac{\partial t}{1} = \frac{\partial x}{u}$; $\partial x = u\,\partial t \Rightarrow x - ut = C$
$u(x,t) = f(x - ut)$
Проиллюстрируем $u(x,t) = f(x - at)$. Чем выше амплитуда, тем больше скорость распространения. Здесь возникает явление опрокидывания.



$D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - учитывание вязкости.
Уравнение можно решить аналитически. Проведем **преобразование Хопфа-Коула**: $u = \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$
Тогда: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\big)^2\Big) = D\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$
Проинтегрируем по x: $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\big)^2 = D\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + C$
Пусть $C = 0$. Замена $\psi(x,t) = -2D\ln v$. Тогда $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2D\frac{v_t}{v}$; $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2D\frac{v_x}{v}$; $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2D\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$
Подставим: $-2D\frac{v_t}{v} + 2D^2\frac{v_x^2}{v^2} = -2D^2\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$. Тогда $2D^2\frac{v_x^2}{v^2}$ сокращается.
$v_t = Dv_{xx}$ - получили линейное уравнение вместо нелинейного.

Теперь рассмотрим **задачу Коши** для этого уравнения.
$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; -\infty < x < +\infty; 0 < t; \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$
Замена $u = -2D(\ln v)_x$:
$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$
При $t = 0$ получим $-2D(\ln v)_x = \varphi(x) \Leftrightarrow (\ln v)_x = -\frac{\varphi(x)}{2D}$ и $\ln v = \int\limits_0^x -\frac{\varphi(\xi)}{2D}\,d\xi$
$v(x,0) = \Phi(x) = exp(-\frac{1}{2D}\int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi)$
$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-\frac{(x-\mu)^2}{4Dt})\,\Phi(\mu)\,d\mu$

2.Формула среднего значения для гармонической функции.

Гармоническая функция - функция, определенная в плоскости или в пространстве и имеющая непрерывные частные производные 2 порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа:
$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ или $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ для плоскости и пространства соответственно.
Или, что то же самое:
Функция u называется *гармонической* в области Ω, если $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω.
Теорема о среднем значении
Для $u(M)$ гармоничной в области D функции для любой сферы V радиуса а с центром в точке M_0, целиком лежащей в области D, верно следующее:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_V u(M)\,dS$$

1 Билет 26. Уравнение Кортевега-де Фриза. Решение уравнения Корт... де Фриза в виде солитона.

$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ (коэф-ы могут быть любыми, 6 для удобства)

Коэф-ы можно поменять при помощи замены $t' = kt$, $x' = px$, $u' = lu$

Ищем решение в виде: $u(x,t) = f(x - ct)$ (т.е. в виде волны)

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}(-c)$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}$; $x - ct = \xi$; $f(\xi), f'(\xi) \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$

$-cf_\xi + 6ff_\xi + f_{\xi\xi\xi} = 0$; $f_{\xi\xi\xi} \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(-cf + 3f^2 + f_{\xi\xi}) = 0 \Rightarrow -cf + 3f^2 + f_{\xi\xi} = \frac{A}{2}$, где $A = const$

$f_{\xi\xi} \to \frac{A}{2}$, при $\xi \to \pm\infty$, умножаем на f_ξ

$-cff_\xi + 3f^2 f_\xi + f_{\xi\xi}f_\xi = \frac{A}{2}f_\xi$;

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(-\frac{c}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}f_\xi^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\frac{A}{2}f)$; проинтегрируем:

$-\frac{c}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}f_\xi^2 = \frac{A}{2}f + B$, отсюда получаем, что при $\xi \to \pm\infty$ $B = 0$

$\frac{A}{2} = -\frac{c}{2}f + f^2 + \frac{1}{2}\frac{f_\xi^2}{f}$

$\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \frac{f_\xi^2}{f} = 2\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \frac{f_\xi f_{\xi\xi}}{f_\xi} = 2\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} f_{\xi\xi} = 2\frac{A}{2} = A$

Без потери общности считаем $A = 0, B = 0$. Тогда получаем:

$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 = cf^2 - 2f^3$, $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \pm\sqrt{cf^2 - 2f^3}$

$\frac{\partial f}{f\sqrt{c-2f}} = \pm \mathrm{d}\xi \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{c-2f}} = \pm(\xi - x_0)$

$\int \frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{1-\frac{2}{c}f}} = \pm\sqrt{c}(\xi - x_0)$; Сделаем замену $\frac{2}{c}f = \frac{1}{\cosh^2\alpha}$:

$1 - \frac{2}{c}f = 1 - \frac{1}{\cosh^2\alpha} = \frac{\cosh^2\alpha - 1}{\cosh^2\alpha} = \frac{\sinh^2\alpha}{\cosh^2\alpha} = \tanh^2\alpha$

$\mathrm{d}f = \frac{c}{2}2\frac{-2\cosh\alpha\sinh\alpha}{\cosh^4\alpha}\mathrm{d}\alpha = -c\tanh\alpha\frac{1}{\cosh^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$

$I = \int \frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{1-\frac{2}{c}f}} \Rightarrow I = \int \frac{-c\tanh\alpha\frac{1}{\cosh^2\alpha}\mathrm{d}\alpha}{\frac{c}{2}\frac{1}{\cosh^2\alpha}\tanh\alpha} = -2\int \mathrm{d}\alpha = -2\alpha$

Таким образом получаем, что $-2\alpha = \pm\sqrt{c}(\xi - x_0)$

$\alpha = \mp\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0) \Rightarrow \cosh\alpha = \cos\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0)$

Итого, получаем решение в виде солитона: $u(x,t) = f(x - ct) = \frac{c}{2}\frac{1}{\cosh^2(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - x_0))}$

2 Принцип максимума для уравнения теплопроводности

Если $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $0 < t \le T$ и $u(x,t) \in C([0,l] \times [0,T])$, то $\max u(x,t)$ в $[0,l] \times [0,T]$ достигается на границе, то есть или в начальный момент $(t = 0)$, или в точках границы $(x = 0$ или $x = l)$.