Билет 17.

1. Третья (основная) формула Грина.

Опционально, 1 и 2 ф-лы Грина: 1) $\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u\, d\tau = \iint\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma - \iiint\limits_{\Omega} (grad\, u, grad\, v)\, d\tau$

2) $\iiint\limits_{\Omega} v\Delta u - u\Delta v\, d\tau = \iint\limits_{S} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})\, d\sigma$

Итак, приступим. Нам понадобятся: 2-я формула Грина и фунд. решение ур-я Лапласа.
Используя их, получим 3-ю формулу Грина. 1. Пусть $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ (Ω - ограниченная область)

Точка $M_0 \in \Omega$; функция $v(M, M_0) = \frac{1}{R_{MM_0}}$ имеет особенность в $M_0 \Longrightarrow$сразу применять формулу Грина нельзя
2. Поэтому окружим M_0 шаром $K(M_0, \varepsilon)$, ограниченным сферой $\Sigma(M_0, \varepsilon)$
Тогда можно применить 2-ю формулу Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega\setminus K(M_0,\varepsilon)} (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau = \underbrace{\iint\limits_{S} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, d\sigma}_{(1)} + \underbrace{\iint\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\, d\sigma}_{(2)} \qquad (0)$$

в инт-ле (1) берем внешнюю нормаль к S, во втором внешнюю нормаль к сфере $\Sigma(M_0, \varepsilon$
3. Вычислим интеграл по сфере, учитывая $v(P)\Big|_{P\in\Sigma(M_0,\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{\partial v(P)}{\partial n}\Big|_{P\in\Sigma(M_0,\varepsilon)} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$

$(2) = \iint\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)} (u(P)\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial n})\, d\sigma_p = \Big/$ Воспользуемся теоремой о среднем, точки$P^*, P^{**} \in \Sigma(M_0,\varepsilon)\Big/ = (\frac{1}{\varepsilon^2}u(P^*) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n})4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(P^*) - 4\pi\varepsilon\frac{\partial u(P^{**})}{\partial n} = (3)$ **;** Устремим ε к 0, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial n}$ – ограниченная; u – непрерывная $(3) = (\varepsilon \to 0) = 4\pi u(M_0)$
4. Подставим в (0) и выделим $u(M_0), \varepsilon \to 0$
$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} (\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_p} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_p}(\frac{1}{R_{PM_0}}))\, d\sigma_p - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}\, d\tau_m$
Мы получили 3-ю формулу Грина, мы восхитительны

2. Интеграл Пуассона для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Интеграл Пуассона $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина: $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}$