Билет 8

1 Математическая постановка задач для уравнения теплопроводности

Для нахождения единственного решения необхдимы начальное и граничные условия.

Начальное условие: $u(x,0) = \phi(x)$
Граничные условия:
1) $u(0,t) = \mu(t)$ - ***I род***, на конце задана температура
2) $u_x(l,t) = \nu(t)$ - ***II род***
3) $u_x(l,t) + \lambda(u(l,t) - \theta(t)) = 0$ - ***III род***, теплообмен с окружающей средой с температурой θ по закону Ньютона.

Краевые задачи получаются из всех возможных комбинаций краевых условий, например, ***первая краевая задача***:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \leqslant T \\ u(x,0) = \phi(x), 0 \leqslant x \leqslant l \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

При бесконечной длине стержня ставится ***задача Коши*** - в течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на бесконечно удалённой границе, в центральной области сказывается весьма слабо:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \phi(x) \\ |u(x,t)| - \text{ограничен} \end{cases}$$

Если рассматриваемый участок стержня вблизи одного конца и далеко от другого, ставится ***первая краевая задача для полубесконечного стержня***:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < +\infty, 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(0,t) = \mu(t) \\ |u(x,t)| - \text{ограничен} \end{cases}$$

Условия на доп. условия: $u(x,t) \in C^{1,2}((0,l)\times[0,T])\cap([0,l]\times[0,T])$; $f(x,t), \mu_{1,2}(t), \varphi(x)$ - непр.; $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$.

2 Третья (основная) формула Грина

Пусть $u(M)$ — произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в ограниченной области D и непрерывная вместе с производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$: $u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$. Фиксируем точку $M_0 \in D$ (внутренняя точка облести D). Пусть R_{MM_0} — расстояние от точки M_0 до M. Тогда формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right) dS_P - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}} dD_M$$

называется ***третьей формулой Грина*** или интегральным представлением функции $u(M)$