

25 Билет 1. Уравнение Бюргерса. Преобразование Хопфа-Коула. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Уравнение Бюргерса. Описывает нелинейность и диффузию (вязкость).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Рассмотрим задачу $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ - описывает движение жидкости
 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ - несжимаемая жидкость; $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0$

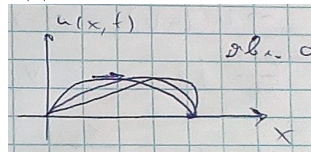
Запишем уравнения характеристик:

$$\frac{\partial t}{1} = \frac{\partial x}{u}; \quad \partial x = u \partial t \Rightarrow x - ut = C$$

$$u(x, t) = f(x - ut)$$

Проиллюстрируем $u(x, t) = f(x - ut)$. Чем выше амплитуда, тем больше скорость распространения.

Здесь возникает явление опрокидывания.



$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - учет вязкости.

Уравнение можно решить аналитически. Проведем преобразование Хопфа-Коула: $u = \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$\text{Тогда: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right) = D \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

$$\text{Проинтегрируем по } x: \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + C$$

$$\text{Пусть } C = 0. \text{ Замена } \psi(x, t) = -2D \ln v. \text{ Тогда } \frac{\partial \psi}{\partial t} = -2D \frac{v_t}{v}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2D \frac{v_x}{v}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2D \frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$$

$$\text{Подставим: } -2D \frac{v_t}{v} + 2D^2 \frac{v_x^2}{v^2} = -2D^2 \frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}. \text{ Тогда } 2D^2 \frac{v_x^2}{v^2} \text{ сокращается.}$$

$$v_t = D v_{xx} - \text{получили линейное уравнение вместо нелинейного.}$$

Теперь рассмотрим задачу Коши для этого уравнения.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & -\infty < x < +\infty; 0 < t; \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Замена $u = -2D(\ln v)_x$:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x, 0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\text{При } t = 0 \text{ получим } -2D(\ln v)_x = \varphi(x) \Leftrightarrow (\ln v)_x = -\frac{\varphi(x)}{2D} \text{ и } \ln v = \int_0^x -\frac{\varphi(\xi)}{2D} d\xi$$

$$v(x, 0) = \Phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2D} \int_0^x \varphi(\xi) d\xi\right)$$

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{4Dt}\right) \Phi(\mu) d\mu$$

2. Формула среднего значения для гармонической функции.

Гармоническая функция - функция, определенная в плоскости или в пространстве и имеющая непрерывные частные производные 2 порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ или } \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ для плоскости и пространства соответственно.}$$

Или, что то же самое:

Функция u называется гармонической в области Ω , если $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω .

Теорема о среднем значении

Для $u(M)$ гармоничной в области D функции для любой сферы V радиуса a с центром в точке M_0 , целиком лежащей в области D , верно следующее:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_V u(M) dS$$