1 18 билет

1.Постановка основных краевых задач для уравнения Лапласа.

Внутренняя задача Дирихле

S - замкнутая, достаточно гладкая поверхность, ограничивающая область Ω. Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}$, удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ (то есть $u(M)$ гармоничка в Ω) и принимает на границе S заданные значения: $u(P) = \mu(P),\ P \in S$. Непрерывность u(M) в $\overline{\Omega}$ необходима для единственности решения задачи. В этом случае функция $u(M)$ называется классическим решением задачи, поэтому требуем $\mu \in C(S)$. $u(M) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),\ \mu \in C(S)$

Внутренняя задача Неймана

Требуется найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}$, имеет непрерывные вторые производные в и удовлетворяет внутри области Ω уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, её нормальная производная принимает на границе заданные значения $\frac{\partial u(P)}{\partial n}|_{P \in S} = \nu(P), P \in S$. $u(M) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),\ \nu \in C(S)$

Внешние краевые задачи для трех и двух независимых переменных ставятся по-разному. Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть Ω' - область внешняя к некоторой замкнутой поверхности S.

Внешняя задача Дирихле.

Требуется найти функцию u(M), удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной пространственной области Ω', непрерывную в замкнутой области $\overline{\Omega'}$, принимающую на границе заданные значения $u(M) = \mu(M),\ M \in S$, и равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности. Стремление к нулю функции u(M) на бесконечности необходимо для единственности решения задачи. $u(M) \in C(\overline{\Omega'}) \cap C^2(\Omega')$

Если рассматривать случай двух переменных, то стремление к нулю функции на бесконечности нужно заменить на условие ограниченности функции на бесконечности.

Внешние краевые задачи Неймана ставятся аналогично, но с краевым условием II типа.

2. Задача Коши для уравнения колебаний струны на полуограннченной прямой.

Задача на бесконечной прямой $(-\infty < x < +\infty,\ t > 0)$

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Если рассматривать полубесконечную прямую, то начальные возмущения вызовут волны, бегущие в обе стороны по струне, и волна, бегущая влево, достигнет конца струны, отразится от него и побежит вправо. Она будет определяться не только начальным возмущением, но и характером отражения, которое происходит по-разном упри разных движениях конца струны. Появляется необходимость в задании краевых условий.

1. Условие Дирихле (1 рода): $u(0,t) = \mu(t),\ t \geq 0$. Оно означает, что конец струны движется по заранее определенному закону. И если $\mu(t) \equiv 0,\ t \geq 0$, то конец жестко закреплен.

2. Условие Неймана (2 рода): $u_x(0,t) = \nu(t),\ t \geq 0$. Оно выражает равенство величин поперечной силы, приложенной извне к концу струны, и силы упругости струны. И если $\nu(t) \equiv 0, t \geq 0$, то внешняя сила не действует.

3. Условие 3 рода: $u_x(0,t) - hu(0,t) = \nu(t),\ h = const > 0,\ t \geq 0$ означает, что конец струны закреплен упруго, например пружиной.