9 Билет

1.Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Интеграл Пуассона.

Задача Коши: $\begin{cases} u_t = a^2\, u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, 0 < t \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$

Ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)\, T(t)$. Подставляем, получаем:

$X''\, T\, a^2 = T'\, X$ и $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -k$

Потребуем ограниченность $X(x)$ и $T(t)$. Из этого получим, что $k \in R, k \geq 0, k = \lambda^2, \lambda \in R$

$X(x) = A(\lambda)\, exp(i\lambda x)$

$T(t) = B(\lambda)\, exp(-a^2\lambda^2 t)$

Тогда $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)\, exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda x)\, d\lambda$

$u(x,0) = \varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)\, exp(i\lambda x)\, d\lambda \Rightarrow$ (Обр. преобр. Фурье) $C(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, exp(-i\lambda\xi)\, d\xi$

$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, exp(-i\lambda\xi)\, d\xi \Big)\, exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda x)\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x - \xi))d\lambda \Big)\, \varphi(\xi)\, d\xi$

Назовем $G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi))\, d\lambda$ - **функцией Грина**

Обозначим $J(\alpha,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-\beta^2\lambda^2 + i\lambda\alpha)\, d\lambda$. Возьмем производную по α:

$\frac{dJ}{d\alpha} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\, exp(-\beta^2\lambda^2 + i\lambda\alpha)\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\lambda}{-2\beta^2\lambda}\, exp(i\lambda\alpha)\, de^{-\beta^2\lambda^2} = \frac{i}{2\beta^2} \Big(- exp(i\lambda\alpha - \beta^2\lambda^2)|_{-\infty}^{+\infty} +$

$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\alpha\, exp(-\beta^2\lambda^2 + i\lambda\alpha)\, d\lambda \Big) = -\frac{\alpha}{2\beta^2}\, J(\alpha,\beta)$

Получим $\frac{dJ}{d\alpha} + \frac{\alpha}{2\beta^2} J(\alpha,\beta) = 0 \Longrightarrow \mathrm{J}(\alpha,\beta) = M(\beta)\, exp(\frac{-\alpha^2}{4\beta^2})$

$M(\beta) = J(0,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-\beta^2\lambda^2)\, d\lambda = \frac{1}{\beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}$

$J(\alpha,\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\, exp(\frac{-\alpha^2}{4\beta^2})$

$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{a\sqrt{t}}\, exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t})\, \varphi(\xi)\, d\xi$ - **Интеграл Пуассона**

2.Определение функции Грина для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в пространстве.

$D \subseteq R^3$ - область, ∂D - замкнутая достаточно гладкая поверхность, ограничивающая D.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -f(M,t), & M \in D, 0 < t \\ u(P,t) = g(P), & P \in \partial D \end{cases}$$

$u(M_0) = -\iint\limits_{\partial D} g(P)\, \frac{\partial G(P,M_0)}{\partial n_P}\, d\sigma_P + \iiint\limits_{D} f(M)\, G(M,M_0)\, dr_M$

Функция $G(M,M_0)$ называется **функцией Грина** внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если :

1) $G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$, где $v(M)$ гармонична в D

2) $G(P,M_0) = 0, P \in \partial D$