§ 2. Метод распространяющихся волн

1. Формула Даламбера. Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную (см. гл. I). Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2\, dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - a\, dt = 0, \quad dx + a\, dt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Вводя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3}$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения. Очевидно, для всякого решения уравнения (3)

$$u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ — некоторая функция только переменного η. Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ, получим:

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{4}$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η. Обратно, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f_1 и f_2, функция $u(\xi, \eta)$, определяемая формулой (4), представляет собой решение уравнения (3). Так как всякое решение уравнения (3) может быть представлено в виде (4) при соответствующем выборе f_1 и f_2, то формула (4) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно, функция

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{5}$$

является общим интегралом уравнения (1).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой (5). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{7}$$

Интегрируя второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C,$$

где x_0 и C — постоянные. Из равенств

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C$$

находим:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, причем равенства (8) должны иметь место для любого значения аргумента[1]). Подставляя в (5) найденные значения f_1 и f_2, получим:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\, d\alpha \right\}$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \tag{9}$$

Формулу (9), называемую формулой Даламбера, мы получили, предполагая существование решения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (1)—(2), то оно представлялось бы формулой (9) и совпадало бы с первым решением.

Нетрудно проверить, что формула (9) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной дифференцируемости функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

Формула для потенциала двойного слоя в трехмерном случае

$$u(M) = -\iint_{\sum} f(P)\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{R_{MP}})d\sigma_P$$