Билет 13

1 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой с нулевым краевым условием первого рода.

При распределении температуры влияние одного из концов стержня несущественно, можно им пренебречь. Рассмотрим **первую краевую задачу на полупрямой:**

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0 \qquad \varphi(0) = 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Доопределим нечетным образом $\varphi(x)$:

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим **задачу Коши:**

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ U(x,0) = \Phi(x), & -\infty < x < +\infty \\ U(0,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Известно:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)\,ds - \textit{интеграл Пуассона} \tag{4}$$

Покажем, что $u(x,t) = U(x,t)$ при $x \geq 0$, является решением (1). Проверим выполнение граничного условия:

$$u(0,t) = U(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)\,ds = \left\{ \begin{matrix} \text{под интегралом произведение} \\ \text{четной и нечетной функций} = \\ = \text{нечетной функции} \end{matrix} \right\} = 0 \tag{5}$$

Получим формулу для решения:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\Phi(s)\,ds = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{0} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} \cdot -\varphi(-s)\,ds + \int_{0}^{+\infty} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\varphi(s)\,ds \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \cdot \left(-\int_{0}^{+\infty} \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\}\varphi(s)\,ds + \int_{0}^{+\infty} \exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\}\varphi(s)\,ds \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{0}^{+\infty} \left[\exp\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\} - \exp\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\} \right] \cdot \varphi(s)\,ds \end{aligned} \tag{6}$$

В итоге, с учетом (5) и (6), имеем:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Значит $u(x,t)$ - есть **решение первой краевой задачи на полупрямой.**

2 Задача Гурса. Сведение к эквивалентной системе интегральных уравнений.

Рассмотрим задачу с нелинейным уравнением гиперболического типа:

$$\begin{cases} u_{xy}(x,y) = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + f(x,y,u(x,y)),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l_1 \\ u(0,y) = \psi(y),\ 0 \le y \le l_2 \end{cases} \quad \textbf{- задача Гурса} \tag{1}$$

Для первого уравнения (1) характеристиками будут функции удовлетворяющие: $dxdy = 0$.
Получим семейство прямых вида: $x = const, y = const$.
Таким образом, наша u(x,y) задается данными на характеристиках $x = 0, y = 0$.

Эквивалентная система интегральных уравнений
Пусть функция $u(x,y)$ — решение задачи Гурса (3). Тогда, интегрируя уравнение сначала по y, потом по x:

$$u(x,y) = \psi(y)+\varphi(x)-\varphi(0)+\int\limits_0^x\int\limits_0^y [a(\xi,\eta)u_x(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u_y(\xi,\eta)]\ d\eta d\xi+\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(\xi,\eta,u(\xi,\eta))\, d\eta d\xi \tag{2}$$

$$u_x(x,y) = \varphi'(x) + \int\limits_0^y [a(x,\eta)u_x(x,\eta) + b(x,\eta)u_y(x,\eta)]\ d\eta + \int\limits_0^y f(x,\eta,u(x,\eta))\, d\eta. \tag{3}$$

$$u_y(x,y) = \psi'(y) + \int\limits_0^x [a(\xi,y)u_x(\xi,y) + b(\xi,y)u_y(\xi,y)]\ d\xi + \int\limits_0^x f(\xi,y,u(\xi,y))\, d\xi. \tag{4}$$

Получим (2), (3) и (4) - система эквивалентных интегральных уравнений задаче (3).

Теормин: (дополнительно)
Классическое уравнение в частных производных 2-го порядка:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \tag{5}$$

Поставим ему в однозначное соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \tag{6}$$

Тогда функции (кривые), являющиеся решением (6), называются **характеристиками уравнения** (5).