# 3 Уравнения эллиптического типа

Пусть$\Omega$ — некоторая открытая область в $\mathbf{E^3}$, ограниченная поверхностью $\Sigma$. Аналогично, $D$ — некоторая открытая область в $\mathbf{E^2}$, ограниченная кривой $L$.

## 3.1 Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка краевых задач.

Рассмотрим такие уравнения теплопроводности:

$$\begin{array}{rcll} u_t(x,y,z,t) & = & a^2\Delta u(x,y,z,t)+f_1(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega; \quad \Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}; \\ u_t(x,y,t) & = & a^2\Delta u(x,y,t)+f_2(x,y), & (x,y)\in D; \quad \Delta u = u_{xx}+u_{yy}. \end{array}$$

В случае стационарного теплового процесса ($u_t \equiv 0$) мы получаем уравнения эллиптического типа: $\Delta u = -f$. При этом из общего вида получаются два типа уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x,y,z); \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x,y). \end{array}\right. \text{— уравнения Пуассона в } \mathbf{E^3} \text{ и } \mathbf{E^2};$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{array}\right. \text{— уравнения Лапласа в } \mathbf{E^3} \text{ и } \mathbf{E^2};$$

Эти уравнения широко используются при описании разнообразных стационарных физических полей.

**Определение.** Функция $u(x,y,z)$ называется **гармонической** в $\Omega$, если $u\in C^2(\Omega)$ и $\Delta u\equiv 0$ в $\Omega$.

Гармонические функции от двух переменных можно получить, используя понятие аналитичности функции комплексного переменного. В курсе ТФКП показывалось, что если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична, то выполняются условия Коши-Римана для функций $u, v$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_x(x,y) = v_y(x,y); \\ u_y(x,y) = -v_x(x,y). \end{array}\right.$$

Дифференцируя верхнее равенство по $x$, а нижнее — по $y$, получим

$$\left\{\begin{array}{l} u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y); \\ u_{yy}(x,y) = -v_{xy}(x,y). \end{array}\right. \Longrightarrow u_{xx}+u_{yy} = 0$$

Аналогично — для функции $v$. Отсюда можно сделать вывод, что если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — аналитическая, то функции $u$, $v$ — гармонические.

В дальнейшем мы будем рассматривать в пространстве $\mathbf{E^3}$ такие задачи:

**Внутренняя задача Дирихле**

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in\Omega; \\ u(x,y,z) & = & \mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

**Внутренняя задача Неймана**

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in\Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) & = & \nu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

**Внешняя задача Дирихле**

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\overline{\Omega}; \\ u(x,y,z) & = & \mu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

**Внешняя задача Неймана**

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y,z) & = & 0, & (x,y,z)\in E^3\setminus\overline{\Omega}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) & = & \nu(x,y,z), & (x,y,z)\in\Sigma. \end{array}\right.$$

Естественно обобщить данные задачи на случай уравнения Пуассона.

Кроме того, существуют и двухмерные аналоги, например:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u(x,y) & = & 0, & (x,y)\in D; \\ u(x,y) & = & \mu(x,y), & (x,y)\in L. \end{array}\right. \text{— } \textbf{внутренняя задача Дирихле в } E^2.$$

## § 3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения колебаний на полупрямой методом продолжений.

Найти решение уравнения

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{3.1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t) \ \textbf{или} \ u_x(0,t) = \nu(t), \quad t \ge 0, \tag{3.2}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \ge 0. \tag{3.3}$$