Билет 23. Разрыв логарифмического потенциала двойного слоя на границе области

Логарифмический потенциал двойного слоя: $U_1(x) = \int\limits_L \rho_2 \frac{d}{dn}(ln\frac{1}{r})dL$

ρ_2 - плотность двойного слоя. В области, не содержащей L, U_1 гармонична. Учитывая, что $\frac{d}{dn}(ln\frac{1}{r})dL = \frac{cos\phi}{r}$, где ϕ это угол между n и r, можно преобразовать так: $U_1(x) = \int\limits_L \rho_2\frac{cos\phi}{r}dL$. Если L представляет собой замкнутый контур, удовлетворяющий условиям Ляпунова для поверхностей, и имеющий в каждой точке касательную, то разрыв можно охарактеризовать равенствами: $\begin{cases} U_{1i} = U_{10} - \pi * \rho_{20} \\ U_{1e} = U_{10} + \pi * \rho_{20} \end{cases}$, где U_{10} - прямое значение U_1, ρ_{20} - значение плотности ρ_2 в какой-нибудь точке ξ, лежащей на контуре L. U_{1i} и U_{1e} - предельные значения того же потенциала, когда точка x стремится совпасть с точкой ξ, подходя к ней или изнутри или извне контура L. В частном случае $\rho_2 = 1$ интеграл $\int\limits_L \frac{cos\phi}{r}dL$ аналогичный интегралу в формуле Гаусса, имеет три различных значения: $\begin{cases} -2 * \pi, \\ 0, \\ -\pi \end{cases}$, в зависимости от того, находится точка х внутри, вне, или на контуре.

Теормин. Преобразование Хопфа-Коула для уравнения Бюргерса

Уравнение Бюргерса описывает нелинейность и диффузию (вязкость)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Проведём преобразование Хопфа-Коула для этого уравнения: $u = \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$
Тогда: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}\big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\big)^2\Big) = D\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$
Проинтегрируем по x: $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\big(\frac{\partial \psi}{\partial x}\big)^2 = D\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + C$
Пусть $C = 0$. Замена $\psi(x,t) = -2D\ln v$. Тогда $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2D\frac{v_t}{v}$; $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2D\frac{v_x}{v}$; $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2D\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$
Подставим: $-2D\frac{v_t}{v} + 2D^2\frac{v_x^2}{v^2} = -2D\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$. Тогда $2D^2\frac{v_x^2}{v^2}$ сокращается.
$v_t = Dv_{xx}$ - получили линейное уравнение вместо нелинейного.