Для вдумчивого читателя заметим, что ссылка в начале параграфа на то, что действительные числа и их свойства известны из курса элементарной математики, не является необходимой. Сформулированные выше свойства действительных чисел можно взять за исходное определение. Следует только исключить тривиальный случай: легко проверить, что для множества, состоящего только из одного нуля, выполняются все свойства I—V (в таком множестве $0 = 1$). Множество, в котором имеется хоть один элемент, отличный от нуля, будем здесь для краткости называть нетривиальным.

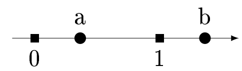

Рис. 3

Перефразируя сказанное, получим следующее определение.

Определение 1. *Нетривиальное множество элементов, обладающих свойствами I—V, называется множеством действительных чисел. Каждый элемент этого множества называется действительным числом.*

Построение теории действительных чисел, основывающееся на таком их определении, называется *аксиоматическим*, а свойства I—V — *аксиомами действительных чисел.*

Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой. Поэтому совокупность действительных чисел часто называют числовой прямой, а также числовой или действительной осью, а отдельные числа — ее точками (рис. 3).

При такой интерпретации действительных чисел иногда вместо a меньше b (a больше b) говорят, что точка a лежит левее точки b (что a лежит правее b).

В п. 2.2*—2.6* будут более детально проанализированы свойства I-V действительных чисел и выведены некоторые их следствия. Как и все пункты, отмеченные звездочками, эти пункты при первом чтении можно без существенного ущерба для усвоения курса математического анализа опустить. Для понимания дальнейшего материала (в § 3 и следующих) вполне достаточно представления о действительных числах, которое дается в курсе элементарной математики.

2.2*. Свойства сложения и умножения

Рассмотрим некоторые свойства сложения и умножения, которые вытекают из свойств I, II и III. Прежде всего заметим,