所以 $4a_{n+2}+a_n=4a_{n+1}$.

所以 $a_{n+2}=a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n$.

所以 $\frac{a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}}{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n}=\frac{a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n-\frac{1}{2}a_{n+1}}{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n}=\frac{1}{2}$.

所以 $\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\}$ 为等比数列.

评注 把四个"部分和"转化为三个"通项"，再利用定义证明等比数列.

5 数学归纳法

例5 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 满足 $S_n=2na_{n+1}-3n^2-4n$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $S_3=15$.

(1)求 a_1,a_2,a_3 的值;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析 (1)当 $n=2$ 时，$S_2=4a_3-20$，$S_3=S_2+a_3=5a_3-20=15$，解得 $a_3=7$.

所以 $a_1+a_2=8$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2a_2-7$，解得 $a_1=3$，$a_2=5$.

(2)猜想 $a_n=2n+1$.

由(1)得，$n=1$ 时猜想成立;

假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 时假设成立，即 $a_k=2k+1$;

由 $a_k=S_k-S_{k-1}=2ka_{k+1}-3k^2-4k-2(k-1)a_k+3(k-1)^2+4(k-1)$，

整理，得 $a_{k+1}=\frac{(2k-1)a_k+6k+1}{2k}=2(k+1)+1$.

所以 $n=k+1$ 时命题成立.

综上，$a_n=2n+1$.

评注 数学归纳法是解决此类问题的通法，尤其是当题目中条件不容易消元时.

教学中不能简单地把此类问题"套路化"，要引导学生体会 S_n 与 a_n 的双向关系，在解题时可以根据题目条件及要解决的问题"消部分和"或"消通项". 消元后通常是构造等差或等比数列. 运用公式后，是否需要验证，取决于项的实际意义，项为正整数.

参考文献:

[1] 杨二明，罗增儒. 数列公式 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 的教学认识[J]. 中学数学研究(华南师范大学版)，2014(09):53+1-4.

(收稿日期:2020-03-09)

一道圆锥曲线定值问题的深度探析

殷可丁

(汉中中学 陕西 汉中 723000)

摘 要:本文首先将2013年高考数学江西卷文科的一道圆锥曲线试题一般化，并对该一般化问题尝试探究，然后从极点、极线、调和点列的角度分析了该题目的几何实质，最后从更一般的圆锥曲线的角度对该问题进行了深度探析.

关键词:高考题;探析;极点;极线;调和点列

1 问题提出

原题 (2013年高考数学江西卷文科)椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a+b=3$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)如图1，A,B,D 是椭圆 C 的顶点，P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点，直线 DP 交 x 轴于点 N，直线 AD 交 BP 于点 M，设 BP 的斜率为 k，MN 的斜率为 m. 证明:$2m-k$ 为定值.

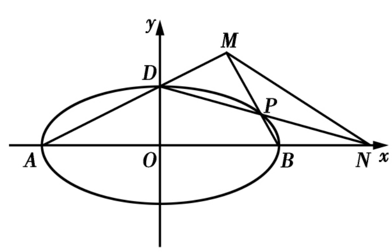

图1

作者简介:殷可丁(1979-)，男，陕西汉中人，本科，中学高级教师，研究方向:解题教学研究.

本题第(1)问答案是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$;第(2)问答案为$2m-k=\frac{1}{2}$为定值.笔者发现,第(2)问答案定值$\frac{1}{2}$正好是$\frac{b}{a}$,这是巧合,还是必然?于是笔者对第(2)问做了进一步的思考探究.

2　问题推广

笔者将原题第(2)问一般化为下面的结论.

结论　已知椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,点$A$,$B$,$D$是椭圆$C$的顶点,$P$是椭圆$C$上除顶点外的任意一点,直线$DP$交$x$轴于点$N$,直线$AD$交$BP$于点$M$,设$BP$的斜率为$k$,$MN$的斜率为$m$,则$2m-k=\frac{b}{a}$.

证法1　由题意,设直线BP的方程为$y=k(x-a)$,$k\neq0$,$k\neq\pm\frac{b}{a}$.代入椭圆C的方程,得

$$(b^2+a^2k^2)x^2-2a^3k^2x+a^4k^2-a^2b^2=0.$$

设$P(x_1,y_1)$,由韦达定理,得$ax_1=\frac{a^4k^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$.

所以$x_1=\frac{a^3k^2-ab^2}{b^2+a^2k^2}$,$y_1=k(x_1-a)=-\frac{2kab^2}{b^2+a^2k^2}$.

所以$P(\frac{a^3k^2-ab^2}{b^2+a^2k^2},-\frac{2kab^2}{b^2+a^2k^2})$.

直线AD的方程为$y=\frac{b}{a}x+b$,与$y=k(x-a)$联立,得$M(\frac{ab+a^2k}{ak-b},\frac{2kab}{ak-b})$.

设$N(x_2,0)$,由D,P,N三点共线,解得$x_2=\frac{a^2k-ab}{ak+b}$,所以$N(\frac{a^2k-ab}{ak+b},0)$.

所以直线MN的斜率$m=\frac{\frac{2kab}{ak-b}}{\frac{a^2k+ab}{ak-b}-\frac{a^2k-ab}{ak+b}}=\frac{ak+b}{2a}$,即$2m-k=\frac{b}{a}$.

证法2　设$P(x_0,y_0)(x_0\neq0,x_0\neq\pm a)$,则$k=\frac{y_0}{x_0-a}$.

直线AD的方程为$y=\frac{b}{a}x+b$,　①

直线BP的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-a}(x-a)$,　②

直线DP的方程为$y=\frac{y_0-b}{x_0}x+b$.

可得$N(-\frac{bx_0}{y_0-b},0)$.

由①②解得$M(\frac{a^2y_0+abx_0-a^2b}{ay_0-bx_0+ab},\frac{2aby_0}{ay_0-bx_0+ab})$.

因此,直线MN的斜率

$$m=\frac{\frac{2aby_0}{ay_0-bx_0+ab}}{\frac{a^2y_0+abx_0-a^2b}{ay_0-bx_0+ab}+\frac{bx_0}{y_0-b}}$$
$$=\frac{2aby_0(y_0-b)}{a^2y_0^2+2abx_0y_0-2a^2by_0+(a^2b^2-b^2x_0^2)}$$
$$=\frac{2aby_0(y_0-b)}{2a^2y_0^2+2abx_0y_0-2a^2by_0}$$
$$=\frac{b(y_0-b)}{ay_0+bx_0-ab}.$$

所以$2m-k=\frac{2b(y_0-b)}{ay_0+bx_0-ab}-\frac{y_0}{x_0-a}$

$$=\frac{bx_0y_0-2b^2x_0-aby_0+2ab^2-ay_0^2}{ax_0y_0-2abx_0-a^2y_0+bx_0^2+a^2b}$$
$$=\frac{b(bx_0y_0-2b^2x_0-aby_0+2ab^2-ay_0^2)}{abx_0y_0-2ab^2x_0-a^2by_0+(b^2x_0^2+a^2b^2)}$$
$$=\frac{b(bx_0y_0-2b^2x_0-aby_0+2ab^2-ay_0^2)}{abx_0y_0-2ab^2x_0-a^2by_0+(2a^2b^2-a^2y^2)}$$
$$=\frac{b(bx_0y_0-2b^2x_0-aby_0+2ab^2-ay_0^2)}{a(bx_0y_0-2b^2x_0-aby_0+2ab^2-ay_0^2)}$$
$$=\frac{b}{a}.$$

接着,笔者又产生了一系列问题.

问题1　在双曲线和抛物线中是否有类似结论?

图1中有三个顶点分别是A,D,B,而双曲线中只有两个顶点,抛物线只有一个顶点,显然,从这一角度将椭圆中这一结论推广到双曲线和抛物线不现实.

问题2　图1的特征是椭圆上有一个四边形AB-PD,其中四边形四个点中三个点固定,另一个点运动,图1的这一几何特征与该结论有什么联系?

于是,笔者先带着问题2从几何的角度进行了探究思考,以揭示结论的几何特征.

在完全四点形的每条边上有一组调和共轭点,其中两个点是顶点,另外一对点里,一个点是对边点,另一个点是这条边与对边三点形的边的交点.注意到图1中有一个完全四点形$ABPD$,于是,连接AP,BD交于点Q,连接MQ,交x轴于点H,如图2所示.则图2中点A,B,H,N是调和点列,同时$\triangle QMN$是一个自极三

角形.

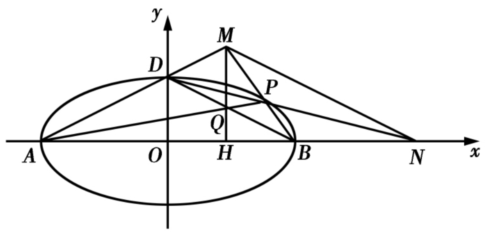

图2

由$\triangle QMN$是一个自极三角形，则点N的极线是MH. 而点N在x轴上，可知过点N作椭圆的两条切线，其切点弦垂直于x轴，该切点弦所在直线也是点N的极线，因此可知$MH\perp x$轴.

由A,B,H,N是调和点列，所以$\frac{|HA|}{|HB|}=\frac{|NA|}{|NB|}$.

即$|HA|(|HN|-|HB|)=|HB|(|HN|+|HA|)$.

所以$|HA|\cdot|HN|-|HB|\cdot|HN|=2|HB|\cdot|HA|$.

所以$\frac{1}{|HB|}-\frac{1}{|HA|}=\frac{2}{|HN|}$.

则$2m-k=2\tan(\pi-\angle MNH)-\tan(\pi-\angle MBH)$

$=-2\tan\angle MNH+\tan\angle MBH$

$=-2\frac{|HM|}{|HN|}+\frac{|HM|}{|HB|}$

$=\left(\frac{-2}{|HN|}+\frac{1}{|HB|}\right)|HM|$

$=\frac{|HM|}{|HA|}$

$=\frac{|OD|}{|OA|}$

$=\frac{b}{a}$.

到此，问题2基本有了答案. 进一步观察思考，笔者又产生了如下问题.

问题3　直线AD的斜率恰好为$\frac{b}{a}$，记直线AD的斜率为k_{AD}，则等量关系$2m-k=\frac{b}{a}$变成了$k_{AD}+k=2m$成立. 也就是说，四边形$ABPD$中，如果A,D不是固定点，那么$k_{AD}+k=2m$是否依然成立?

问题4　图1中，四边形$ABPD$的一条边在x轴上也显得有些特殊，如果四边形$ABPD$的四条边不在坐标轴上，那么$k_{AD}+k=2m$是否成立?

带着这些问题，笔者从更一般的圆锥曲线的角度进行了深入思考.

如图3，四边形$ABPD$是圆锥曲线C上的四边形. 因为完全四点形的每条边上有一组调和共轭点，其中两个点是顶点，另外一对点里，一个点是对边点，另一个点是这个边与对边三点形的边的交点. 所以，点A，B,H,N是调和点列，MA,MB,MH,MN是调和线束.

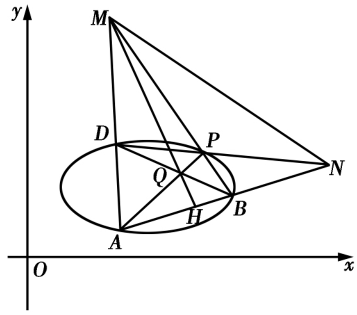

图3

所以$\frac{\sin\angle AMH}{\sin\angle BMH}\cdot\frac{\sin\angle BMN}{\sin\angle AMN}=1$.

设直线MA,MB,MH,MN的倾斜角分别为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，则$\angle AMH=\alpha_3-\alpha_1$，$\angle BMN=\alpha_4-\alpha_2$，$\angle BMH=\alpha_2-\alpha_3$，$\angle AMN=\alpha_4-\alpha_1$.

则$\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_4-\alpha_2)=\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_4-\alpha_1)$. 可见，这一等量关系就是所有问题的关键所在.

由此，也可以看出原题的命题背景及本文中结论的几何实质.

在图2中，$\alpha_3=\frac{\pi}{2}$，则有$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)\sin(\alpha_4-\alpha_2)=\sin\left(\alpha_2-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha_4-\alpha_1)$.

所以$\cos\alpha_1(\sin\alpha_4\cos\alpha_2-\cos\alpha_4\sin\alpha_2)$

$=-\cos\alpha_2(\sin\alpha_4\cos\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_4)$.

去括号，整理得$2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_4=\cos\alpha_1\cos\alpha_4\sin\alpha_2+\cos\alpha_2\cos\alpha_4\sin\alpha_1$.

化简，得$2\tan\alpha_4=\tan\alpha_1+\tan\alpha_2$.

即直线MA的斜率k_{AM}，直线MB的斜率k，直线MN的斜率m满足$k_{AM}+k=2m$. 再回到图1中，当A，D两点固定，则k_{AM}为定值，即$2m-k$为定值，这就是原题.

参考文献:

[1] 梅向明，刘增贤，王汇淳，王智秋. 高等几何[M]. 北京: 高等教育出版社，2008.

(收稿日期: 2020－04－07)