圆锥曲线对定点张直角弦的几何性质再探

潘神龙

（广东省广州市番禺区实验中学　511400）

我们知道，对圆锥曲线上的定点张直角的弦恒过一定点，这一结论已散见于各种数学刊物，如[1]. 2009 年北京、2014 年山东高考试卷中的解析几何题目分别涉及了椭圆对中心、椭圆对椭圆上的一点张直角弦的问题，这启发我们探究圆锥曲线对一般位置的定点张直角弦的性质. 本文重点研究直角弦的几何性质.

1　点 $P(x_0, y_0)$ 不在圆锥曲线上

（1）椭圆

定理 1　过准圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 引椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两条切线互相垂直，其中 $R^2=a^2+b^2$；切点弦 MN 的中点 E 在 OP 上，$x_E=\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}$，$y_E=\frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}$，$\frac{x_E^2}{a^2}+\frac{y_E^2}{b^2}=\frac{|OE|}{|OP|}=\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}$；当点 P 变动时，点 E 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

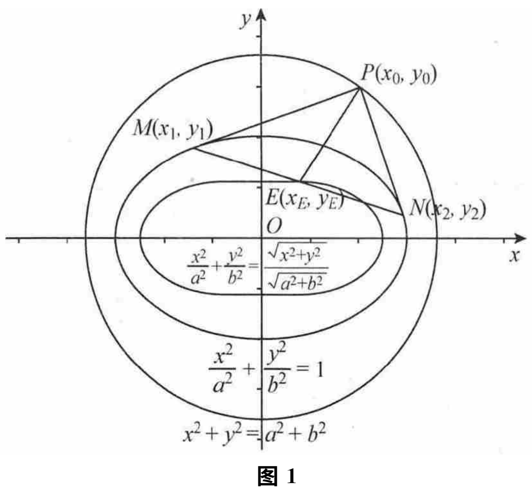

图 1

证明　设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，易知直线 MP：$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$，直线 NP：$\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1$，直线 MN：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，将直线 MN 代入椭圆 C 得 $(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2})x^2-2x_0x+a^2(1-\frac{y_0^2}{b^2})=0$，由韦达定理，$\frac{x_1}{a^2}\cdot\frac{x_2}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}\cdot\frac{y_2}{b^2}=0$，直线 MP、NP 互相垂直. 其余结论计算可得.

推论 1　过动点 P 引椭圆 C 的两条切线互相垂直，则点 P 的轨迹是准圆 $x^2+y^2=R^2$，其中 $R^2=a^2+b^2$.

推论 2　双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的准圆上.

推论 3　设 $\mu=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$，则 $\frac{a^2+b^2}{a^2}\leqslant\mu\leqslant\frac{a^2+b^2}{b^2}$. 当点 P 在直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 上时，$\mu=2$.

证明　$\mu=-\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}x_0^2+\frac{a^2+b^2}{b^2}(0\leqslant x_0^2\leqslant a^2+b^2)$ 关于 x_0^2 单调递减. 当点 P 在直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 上时，$x_0^2=a^2$，$y_0^2=b^2$，$\mu=2$.

推论 4　点 P、点 O 到直线 MN 的距离乘积是定值，$\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

推论 5　点 P 在 MN 为直径的圆 E 上，半径 $r=|OP|-|OE|$.

（2）双曲线

定理 2　准圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ $(y_0\neq\pm\frac{b}{a}x_0)$ 引双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两条切线互相垂直，其中 $R^2=a^2-b^2$；切点弦

MN 的中点 E 在直线 OP 上,

$$x_E=\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}},\ y_E=\frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}},$$

$$\left|\frac{x_E^2}{a^2}-\frac{y_E^2}{b^2}\right|=\frac{|OE|}{|OP|}=\frac{1}{\left|\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right|};$$

当点 P 变动时,点 E 的轨迹方程是

$$\left|\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

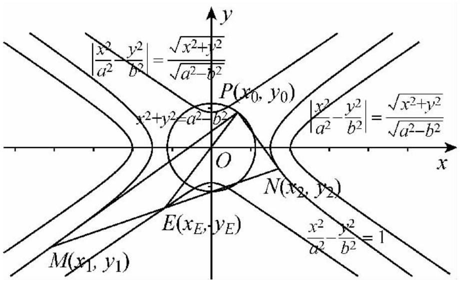

图 2

推论 1 若动点 P 引双曲线 C 的两条切线互相垂直,则点 P 的轨迹是准圆 $x^2+y^2=R^2$,除去直线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 上的四个点,其中 $R^2=a^2-b^2$.

推论 2 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的准圆上.

推论 3 设 $\mu=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$,$\mu$ 的大小分布如图.

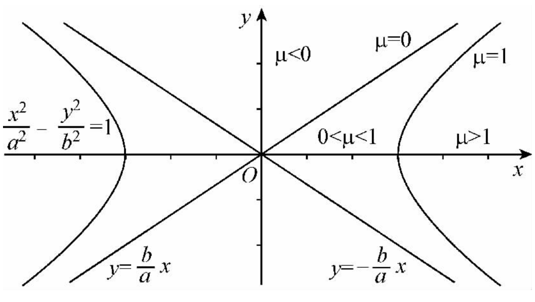

图 3

推论 4 当 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0$ 时,点 P 引双曲线 C 的唯一切线与准圆相切.

证明 不妨设 $x_0=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}a$,$y_0=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}\cdot b$. 易知准圆在点 P 处的切线 $x_0x+y_0y=R^2$ 与双曲线相切于点$\left(\frac{a^3}{\sqrt{a^4-b^4}},\frac{-b^3}{\sqrt{a^4-b^4}}\right)$.

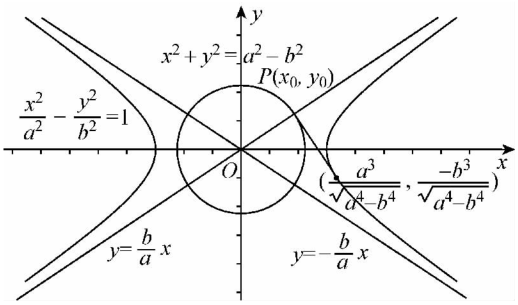

图 4

推论 5 点 P、点 O 到直线 MN 的距离乘积是定值,$\dfrac{1-\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}=\dfrac{a^2b^2}{a^2-b^2}$.

推论 6 点 P 在 MN 为直径的圆 E 上,当 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<0$ 时,半径 $r=|OE|+|OP|$;当 $0<\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$ 时,半径 $r=|OE|-|OP|$.

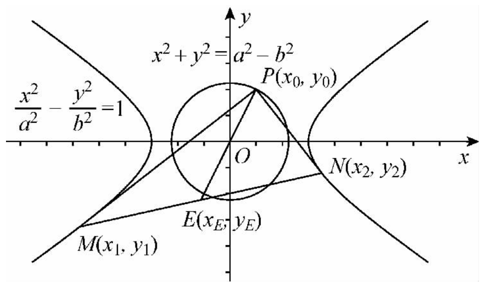

图 5

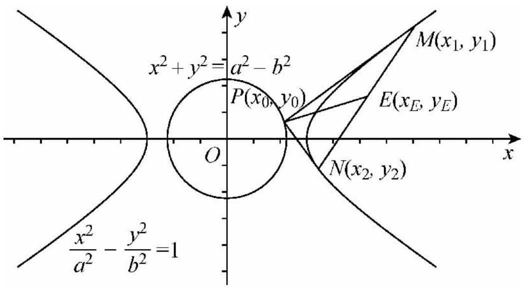

图 6

推论 7 点 E 的轨迹有渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x\pm\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}}$.

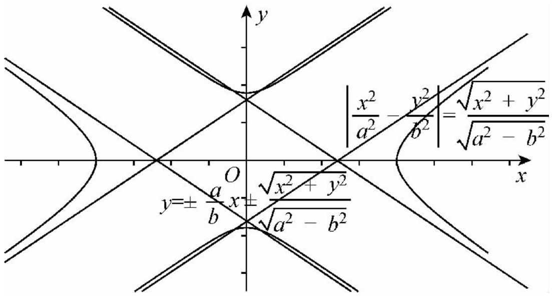

图 7

证明　该轨迹方程两边同时除以 x^2 得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}$；再将 $y=\pm\frac{b}{a}x+m$ 代入原方程，得 $\left|\frac{2m}{ab}x+\frac{m^2}{b^2}\right|=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)x^2+2abmx+a^2m^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}}$，有 $\lim\limits_{x\to\infty}|m|=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}}$.

(3)抛物线

定理 3　准线上一点 $P(x_0,y_0)$ 引抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的两条切线互相垂直，切点弦 MN 的中点 E 在直线 $y=y_0$ 上，$x_E=\frac{y_0^2}{p}-x_0$，$y_E=y_0$；当点 P 变动时，点 E 的轨迹是抛物线 C_1：$y^2=p(x-\frac{p}{2})$.

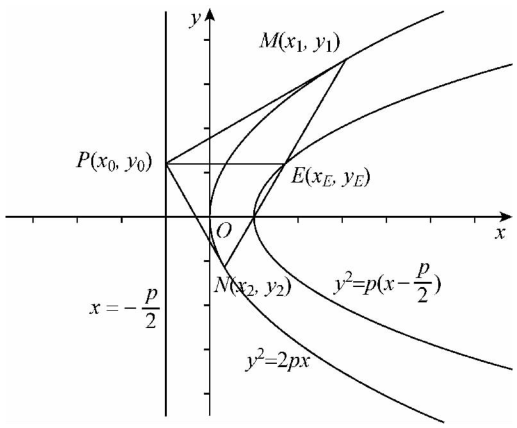

图 8

证明　设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，易知直线 MP：$y_1y=p(x+x_1)$，直线 NP：$y_2y=p(x+x_2)$，直线 MN：$y_0y=p(x+x_0)$，将直线 MN 代入抛物线 C 得 $y^2-2y_0y+2px_0=0$，由韦达定理，$p\cdot p+(-y_1)\cdot(-y_2)=0$，直线 MP、NP 互相垂直. 其余结论计算可得.

推论 1　若动点 P 引抛物线 C 的两条切线互相垂直，则点 P 的轨迹是准线.

推论 2　点 P、点 O 到直线 MN 的距离乘积是定值 $\frac{1}{2}p^2$.

推论 3　点 P 在 MN 为直径的圆 E 上，半径 $r=\frac{y_0^2}{p}+p$.

推论 4　抛物线 C_1 的顶点是 $(\frac{p}{2},0)$，焦点是 $F_1(\frac{3p}{4},0)$，准线是 $x=\frac{p}{4}$.

2　$P(x_0,y_0)$ 在圆锥曲线上

(1)椭圆

定理 4　对椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上定点 $P(x_0,y_0)$ 张直角的弦 MN 过定点 $P_1(x_1,y_1)$，当 MN 变动时，若 $\overrightarrow{ME}=\lambda\overrightarrow{EN}$，则点 E 的轨迹方程是 $\left[\frac{x(x-x_1)}{a^2}+\frac{y(y-y_1)}{b^2}\right]^2+\frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left[\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}\right]=0$；当 $\lambda=1$ 时，MN 中点 E 的轨迹是椭圆 C_1：$\frac{(x-\frac{x_1}{2})^2}{\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}a\right]^2}+\frac{(y-\frac{y_1}{2})^2}{\left[\frac{e^2}{2(2-e^2)}b\right]^2}=1$；最后，除去 PP_1 内的点.

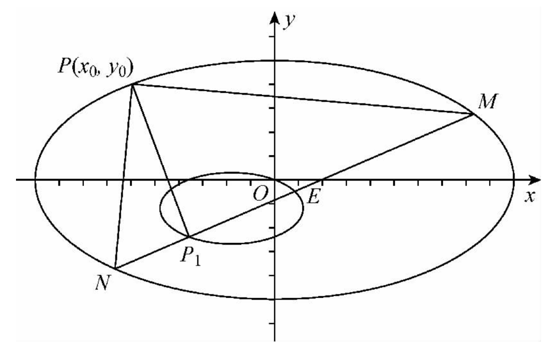

图 9

证明　由[2]，$P_1(\frac{e^2}{2-e^2}x_0,-\frac{e^2}{2-e^2}y_0)$. 当 k_{MN} 存在时，由[3]，点 E 的轨迹方程是 $(\frac{x}{a^2}+\frac{ky}{b^2})^2$

$+\frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2})=0$，$k\neq k_{PP_1}$，将 $k=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ 代入可得；当 k_{MN} 不存在时，点 $E(x_1,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a}})$ 也在轨迹上.

推论 1　椭圆 C_1 除去点 $(\frac{a^2k(kx_1-y_1)}{a^2k^2+b^2},\frac{-b^2(kx_1-y_1)}{a^2k^2+b^2})$，$k=\frac{y_0}{(1-e^2)x_0}$.

证明　将直线 MN：$y=kx-(kx_1-y_1)$ 代入椭圆 C 得

$(a^2k^2+b^2)x^2-2a^2k(kx_1-y_1)x+a^2[(kx_1-y_1)^2-b^2]=0$，由韦达定理计算可得.

推论 2　椭圆 C_1 的中心是 OP_1 中点，长半轴是 $\frac{e^2}{2(2-e^2)}a$，短半轴是 $\frac{e^2}{2(2-e^2)}b$，离心率仍是 e.

推论 3　当点 P 不在坐标轴上时，椭圆 C_1 上有 4 个特殊点：(1)原点，直线 MN：$y=\frac{y_1}{x_1}x$；(2)点 $(x_1,0)$，直线 MN：$x=x_1$；(3)点 $(0,y_1)$，直线 MN：$y=y_1$；(4)点 P_1，直线 MN：$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1$ 是椭圆 C_1 在 P_1 处的切线.

证明　(1)(2)(3)易知.(4)：在推论 1 中令 $\frac{a^2k(kx_1-y_1)}{a^2k^2+b^2}=x_1$，得 $k=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$；在椭圆 C_1 方程两边同时求导，得 $y'=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$，证完.

推论 4　设 A、B 是椭圆 C 的左右顶点，直线 BP_1 与椭圆 C_1、C 分别交于点 E、N，则 OE 是 $\triangle ABN$ 的中位线. P_1 与椭圆 C 其它顶点的连线也有类似结论.

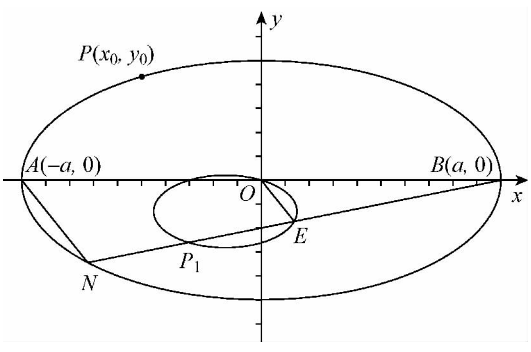

图 10

推论 5　点 P 在 MN 为直径的圆 E 上，当 k_{MN} 不存在时，半径 $r=b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}}$；当 k_{MN} 存在时，半径 $r=\frac{ab\sqrt{1+k^2}\sqrt{(a^2k^2+b^2)-(kx_1-y_1)^2}}{a^2k^2+b^2}$.

证明　当 k_{MN} 不存在时，将 $x=x_1$ 代入椭圆 C 可得；当 k_{MN} 存在时，由推论 1，$\triangle=4a^2b^2[(a^2k^2+b^2)-(kx_1-y_1)^2]$，再由 $|MN|=\frac{\sqrt{1+k^2}\sqrt{\triangle}}{a^2k^2+b^2}$ 可知结论成立.

(2)双曲线

定理 5　对双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,a\neq b)$ 上定点 $P(x_0,y_0)$ 张直角的弦 MN 所在直线过定点 $P_1(x_1,y_1)$，当 MN 变动时，若 $\overrightarrow{ME}=\lambda\overrightarrow{EN}$，则点 E 的轨迹方程是 $[\frac{x(x-x_1)}{a^2}-\frac{y(y-y_1)}{b^2}]^2+\frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda}(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1)\cdot[\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}]=0$；当 $\lambda=1$ 时，MN 中点 E 的轨迹是双曲线 C_1：$\frac{(x-\frac{x_1}{2})^2}{[\frac{e^2}{2(2-e^2)}a]^2}-\frac{(y-\frac{y_1}{2})^2}{[\frac{e^2}{2(2-e^2)}b]^2}=1$；最后，除去 PP_1 内的点.

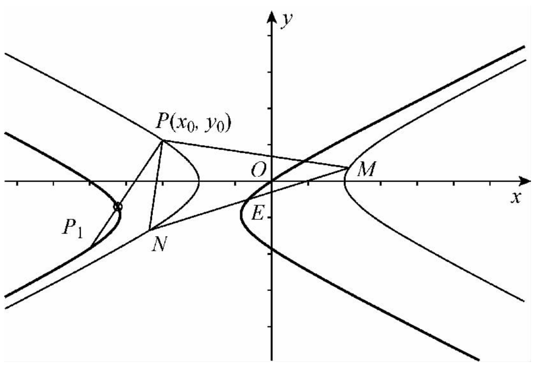

图 11

推论 1　双曲线 C_1 除去点 $(\frac{a^2k(kx_1-y_1)}{a^2k^2-b^2},\frac{b^2(kx_1-y_1)}{a^2k^2-b^2})$，$k=\frac{y_0}{(1-e^2)x_0}$.

推论 2　双曲线 C_1 的中心是 OP_1 中点，实半轴是 $\frac{e^2}{2(2-e^2)}a$，虚半轴是 $\frac{e^2}{2(2-e^2)}b$，离心率仍

是 e.

推论 3　当点 P 不在坐标轴上时,双曲线 C_1 上有 4 个特殊点:(1)原点,直线 MN:$y=\frac{y_1}{x_1}x$;(2)点$(x_1,0)$,直线 MN:$x=x_1$;(3)点$(0,y_1)$,直线 MN:$y=y_1$;(4)点 P_1,直线 MN:$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)+y_1$ 是双曲线 C_1 在 P_1 处的切线.

推论 4　设 A、B 是双曲线 C 的左右顶点,直线 BP_1 与双曲线 C_1、C 分别交于点 E、N,则 OE 是$\triangle ABN$ 的中位线. 直线 AP_1 也有类似结论.

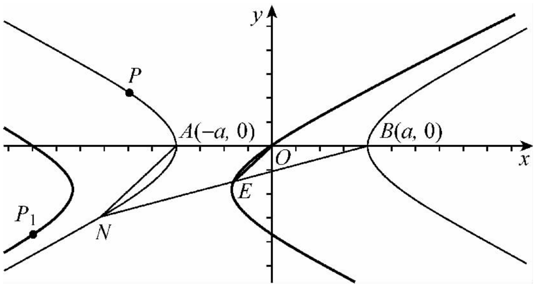

图 12

推论 5　点 P 在 MN 为直径的圆 E 上,当 k_{MN} 不存在时,半径 $r=b\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}}$;当 k_{MN} 存在时,半径 $r=\frac{ab\sqrt{1+k^2}\sqrt{(a^2k^2-b^2)-(kx_1-y_1)^2}}{a^2k^2-b^2}$.

(3)抛物线

定理 6　对抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$上定点 $P(x_0,y_0)$张直角的弦 MN 过定点 $P_1(x_1,y_1)$,当 MN 变动时,若$\overrightarrow{ME}=\lambda\overrightarrow{EN}$,则点 E 的轨迹方程是$\left[\frac{y(y-y_1)-p(x-x_1)}{y-y_1}\right]^2+\frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda}(y^2-2px)=0$;当 $\lambda=1$ 时,MN 中点 E 的轨迹是抛物线 C_1:$\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=p\left(x-\frac{x_1}{2}-p\right)$;最后,除去 PP_1 内的点.

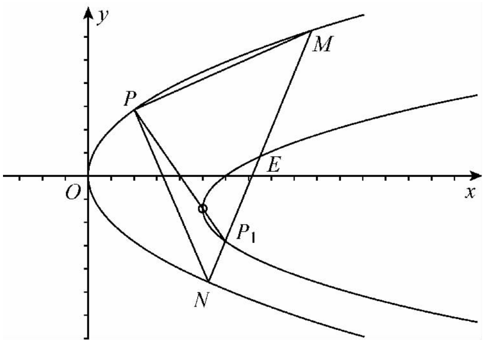

图 13

证明　由[2],$P_1(x_0+2p,-y_0)$. 当 k_{MN} 存在时,由[3],点 E 的轨迹方程是$\left(y-\frac{p}{k}\right)^2+\frac{(\lambda-1)^2}{4\lambda}\cdot(y^2-2px)=0$,$k\neq0$,$k\neq k_{P_0P_1}$,将 $k=\frac{y-y_1}{x-x_1}$代入可得;当 k_{MN} 不存在时,点 $E\left(x_1,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\sqrt{2px_1}\right)$也在轨迹上.

推论 1　抛物线 C_1 除去点$\left(\frac{p}{k^2}-\frac{y_1}{k}+x_1,\frac{p}{k}\right)$,$k=-\frac{y_0}{p}$.

证明　将直线 MN:$y=kx-(kx_1-y_1)$代入抛物线 C 得

$ky^2-2py-2p(kx_1-y_1)=0$,由韦达定理计算可得.

推论 2　抛物线 C_1 的顶点是$\left(\frac{x_1}{2}+p,\frac{y_1}{2}\right)$,焦点是 $F\left(\frac{x_1}{2}+\frac{5p}{4},\frac{y_1}{2}\right)$,准线是 $x=\frac{x_1}{2}+\frac{3p}{4}$.

推论 3　当点 P 不在坐标轴上时,抛物线 C_1 上有 2 个特殊点:(1)点$(x_1,0)$,直线 MN:$x=x_1$;(2)点 P_1,直线 MN:$y=\frac{p}{y_1}(x-x_1)+y_1$ 是抛物线 C_1 在 P_1 处的切线.

推论 4　点 P 在 MN 为直径的圆 E 上,当 k_{MN} 不存在时,半径 $r=\sqrt{y_1^2+4p^2}$;当 k_{MN} 存在时,半径 $r=\frac{2\sqrt{1+k^2}\sqrt{(ky_1-p)^2+4k^2p^2}}{k^2}$.

参考文献

1　张忠旺. 圆锥曲线对定点张直角弦的包络问题研究[J]. 数学通报,2013,8

2　潘神龙. 圆锥曲线对定点张直角弦的几何性质研究. 中学数学研究,2016,1

3　杨浦斌. 关于分圆锥曲线弦成定比的点的问题. 中学数学研究,2004,12