专题 6 同构式下的函数体系

秒杀秘籍：关于同构式下的“亲戚函数”

陈永清老师对同构式的评价及总结：
同构解题，观察第一　同构新天地，单调大舞台.
明确提示要同构，五脏俱全立同构，无中生有再同构，放缩有方可同构！
秒 1 中我们介绍了同构“母函数”以及同构的一些技巧，在这里我们继续欣赏同构对称之美，领略同构波澜壮阔之势.

同构式下我们分为两条主线

1．顺反同构：顺即为平移拉伸后的同构函数，反即为乘除导致的凹凸反转同构函数.

2．同位同构：

①加减同构，在同构的过程中“加减配凑”，从而完成同构；

②局部同构即在同构过程中，我们可以将函数的某两个或者多个部分构造出同构式，再构造同构体系中的亲戚函数即可；

③差一同构，指对跨阶，指数幂和对数真数差 1 往往可用同构秒杀之.

关于 $f(x)=x\cdot e^x$ 的亲戚函数

如图 1：根据求导后可知：$f(x)=x\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,-1)\downarrow$，在区间 $(-1,+\infty)\uparrow$，$f(x)_{\min}=f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

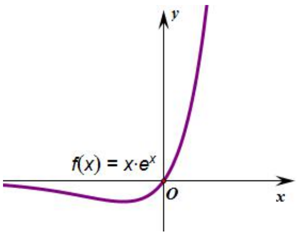

图 1

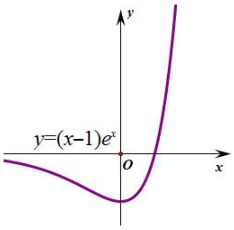

图 2

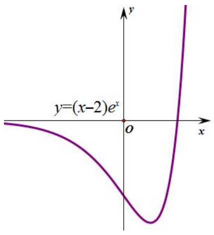

图 3

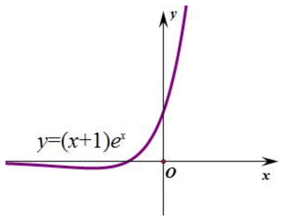

图 4

一 平移和拉伸得到的同构函数

如图 2：$(x-1)\cdot e^x=e\cdot(x-1)\cdot e^{x-1}=ef(x-1)$，即将 $f(x)$ 向右平移 1 个单位，再将纵坐标扩大 e 倍，故可得 $y=(x-1)\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,0)\downarrow$，在区间 $(0,+\infty)\uparrow$，当 $x=0$ 时，$y_{\min}=-1$.

如图 3：$(x-2)\cdot e^x=e^2\cdot(x-2)\cdot e^{x-2}=e^2f(x-2)$，即将 $f(x)$ 向右平移 2 个单位，再将纵坐标扩大 e^2 倍，故可得 $y=(x-2)\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,1)\downarrow$，在区间 $(1,+\infty)\uparrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=-e$.

如图 4：$(x+1)\cdot e^x=e^{-1}\cdot(x+1)\cdot e^{x+1}=e^{-1}f(x+1)$，即将 $f(x)$ 向左平移 1 个单位，再将纵坐标缩小 $\dfrac{1}{e}$ 倍，故可得 $y=(x+1)\cdot e^x$ 在区间 $(-\infty,-2)\downarrow$，在区间 $(-2,+\infty)\uparrow$，当 $x=-2$ 时，$y_{\min}=-\dfrac{1}{e^2}$.

二 乘除导致凹凸反转同构函数

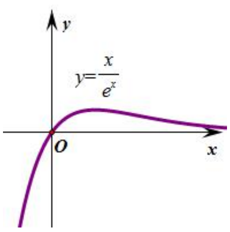

图 5

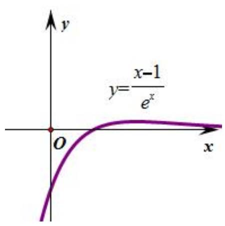

图 6

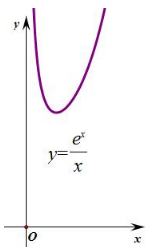

图 7

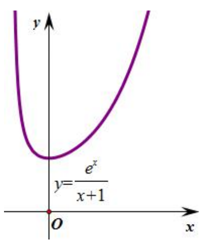

图 8

如图 5：$y=\dfrac{x}{e^x}=x\cdot e^{-x}=-f(-x)$，即将 $f(x)$ 关于原点对称后得到 $y=\dfrac{x}{e^x}$，故可得 $y=\dfrac{x}{e^x}$ 在区间 $(-\infty,1)\uparrow$，在区间 $(1,+\infty)\downarrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\max}=\dfrac{1}{e}$．

如图 6：$y=\dfrac{x-1}{e^x}=\dfrac{1}{e}(x-1)\cdot e^{-(x-1)}=-\dfrac{1}{e}f(-(x-1))$，即将 $f(x)$ 关于原点对称后，向右移一个单位，再将纵坐标缩小 $\dfrac{1}{e}$ 倍，得到 $y=\dfrac{x-1}{e^x}$，故可得 $y=\dfrac{x-1}{e^x}$ 在区间 $(-\infty,2)\uparrow$，在区间 $(2,+\infty)\downarrow$，当 $x=2$ 时，$y_{\max}=\dfrac{1}{e^2}$．

如图 7：$y=\dfrac{e^x}{x}=-\dfrac{1}{-x\cdot e^{-x}}=-\dfrac{1}{f(-x)}$，属于分式函数，将 $\dfrac{1}{f(x)}$ 关于原点对称后得到，故可得 $y=\dfrac{e^x}{x}$ 在区间 $(0,1)\downarrow$，在区间 $(1,+\infty)\uparrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=e$．

如图 8：$y=\dfrac{e^x}{x+1}=-\dfrac{1}{e}\dfrac{1}{(-x-1)\cdot e^{-x-1}}=-\dfrac{1}{e}\dfrac{1}{f(-(x+1))}$，属于分式函数，将 $\dfrac{1}{f(x)}$ 关于原点对称后，左移一个单位，再将纵坐标缩小 $\dfrac{1}{e}$ 倍，故可得 $y=\dfrac{e^x}{x+1}$ 在区间 $(-1,0)\downarrow$，在区间 $(0,+\infty)\uparrow$，当 $x=0$ 时，$y_{\min}=1$．

三 顺反同构函数

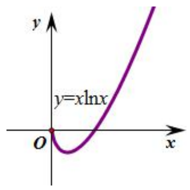

图 9

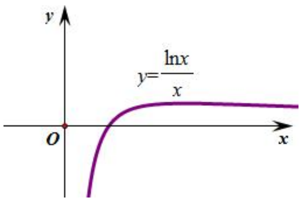

图 10

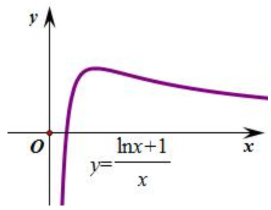

图 11

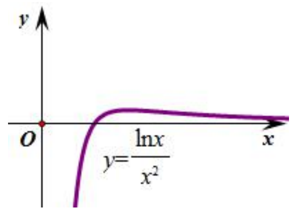

图 12

如图 9：$x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x=f(\ln x)$，当 $\ln x\in(-\infty,-1)$，即 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\downarrow$，当 $\ln x\in(-1,+\infty)$，即 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)\uparrow$，$y_{\min}=-\dfrac{1}{e}$．

如图 10：$\dfrac{\ln x}{x}=-\ln x^{-1}\cdot x^{-1}=-f(-\ln x)$，实现了凹凸反转，原来最小值变成了最大值，当 $-\ln x\in(-\infty,-1)$，即 $x\in(e,+\infty)\downarrow$，当 $-\ln x\in(-1,+\infty)$，即 $x\in(0,e)\uparrow$，$y_{\max}=\dfrac{1}{e}$．

如图 11：$\dfrac{\ln x+1}{x}=e\dfrac{\ln ex}{ex}=-ef(-\ln ex)$，当 $-\ln ex\in(-\infty,-1)$，即 $x\in(1,+\infty)\downarrow$，当 $-\ln ex\in(-1,+\infty)$，即 $x\in(0,1)\uparrow$，$y_{\max}=1$．

如图 12：$\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}f(-\ln x^2)$，当 $-\ln x^2\in(-\infty,-1)$，即 $x\in(\sqrt{e},+\infty)\downarrow$，当 $-\ln x^2\in(-1,+\infty)$，即 $x\in(0,\sqrt{e})\uparrow$，$y_{\max}=\dfrac{1}{2e}$．

【例 1】(2019•凌源市一模）若函数 $f(x)=e^x-ax^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个极值点 x_1，$x_2(0<x_1<x_2)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$a\leqslant\dfrac{e}{2}$　　B．$a>e$　　C．$a\leqslant e$　　D．$a>\dfrac{e}{2}$

【解析】由题意得：$f'(x)=e^x-2ax=0$ 有两个实根，即 $y=2a=g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 有两个交点，如图 7 所示，$y=\dfrac{e^x}{x}$ 在区间 $(0,1)\downarrow$，在区间 $(1,+\infty)\uparrow$，当 $x=1$ 时，$y_{\min}=e$；$\therefore 2a\in(e,+\infty)$，选 D．

【例 2】(2019•广州一模)已知函数 $f(x)=e^{|x|}-ax^2$，对任意 $x_1<0$，$x_2<0$，都有 $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))<0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\frac{e}{2}]$　　B．$(-\infty,-\frac{e}{2}]$　　C．$[0,\frac{e}{2}]$　　D．$[-\frac{e}{2},0]$

【解析】由题意可知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,0)$ 上的单调递减函数，且 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)=e^x-2ax\geq 0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $2a\leq(\frac{e^x}{x})_{\min}=e$，$\therefore a\leq\frac{e}{2}$，选 A.

【例 3】(2019•荆州期末)函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{lnx}{x}$ 的单调增区间为（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(0,1)$　　C．$(0,e)$　　D．$(1,+\infty)$

【解析】$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}=e\cdot\frac{\ln ex}{ex}$，由于函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$，则 $f(x)=e\cdot\frac{\ln ex}{ex}$，当 $ex\in(0,e)$，即 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\uparrow$，故选 B.

【例 4】(2019•广州期末)函数 $f(x)=xlnx-mx^2$ 有两个极值点，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{1}{2})$　　B．$(-\infty,0)$　　C．$(0,1)$　　D．$(0,+\infty)$

【解析】$f'(x)=\ln x+1-2mx=0$ 有两个根，则 $2m=e\frac{\ln ex}{ex}$，由于函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$，最大值为 $\frac{1}{e}$，参考图 10，故 $2m=e\frac{\ln ex}{ex}\Rightarrow\frac{2m}{e}=\frac{\ln ex}{ex}$ 有两根时满足 $0<\frac{2m}{e}<\frac{1}{e}$，即 $0<m<\frac{1}{2}$，选 A.

【例 5】(2019•深圳月考)已知函数 $f(x)=\frac{lnx}{x}-kx$ 在区间 $[e^{\frac{1}{4}}$，$e]$ 上有两个不同的零点，则实数 k 的取值范围为（　　）

A．$[\frac{1}{4\sqrt{e}}，\frac{1}{2e})$　　B．$(\frac{1}{4\sqrt{e}}，\frac{1}{2e})$　　C．$[\frac{1}{e^2}，\frac{1}{4\sqrt{e}}]$　　D．$[\frac{1}{e^2}，\frac{1}{e}]$

【解析】$f(x)=\frac{\ln x}{x}-kx=0\Rightarrow k=\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{\ln x^2}{x^2}$，当 $x\in[e^{\frac{1}{4}},e]$ 时，$x^2\in[e^{\frac{1}{2}},e^2]$，由于函数 $\frac{\ln x}{x}$ 在区间 $(0,e)\uparrow$，$(e,+\infty)\downarrow$，则当 $x^2\in[e^{\frac{1}{2}},e]$ 时，$\frac{\ln x^2}{x^2}\in[\frac{1}{2\sqrt{e}},\frac{1}{e}]$，当 $x^2\in[e,e^2]$ 时，$\frac{\ln x^2}{x^2}\in[\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}]$，由于 $\frac{1}{2\sqrt{e}}>\frac{2}{e^2}$，故当 $k=\frac{1}{2}\frac{\ln x^2}{x^2}\in[\frac{1}{4\sqrt{e}},\frac{1}{2e})$ 时，$f(x)=\frac{lnx}{x}-kx$ 有两个不同零点，故选 A.

【例 6】(2019•陕西一模)已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)$，若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,e]$　　B．$(-\infty,e)$　　C．$(-e,+\infty)$　　D．$[-e,+\infty)$

【解析】$\because$ 函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(lnx-x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$\therefore f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{k(1-x)}{x}=\frac{(e^x-kx)(x-1)}{x^2}$．

$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个极值点 $\therefore x=1$ 是导函数 $f'(x)=0$ 的唯一根．$\therefore e^x-kx=0$ 在 $(0,+\infty)$ 无变号零点，

则 $k=\frac{e^x}{x}=-\frac{1}{(-x)\cdot e^{-x}}\in[e,+\infty)$，故 $k\le e$ 时满足题意，选 A.

【例 7】（2019•保山一模）若函数 $f(x)=e^x+ax\ln x$ 有两个极值点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-e)$　　B．$(-\infty,-2e)$　　C．$(e,+\infty)$　　D．$(2e,+\infty)$

【解析】由 $f'(x)=e^x+alnx+a=0$，得 $e^x=-a(lnx+1)$．当 $a>0$ 时，易知，有且仅有一个极值点，

当 $a=0$ 时，无极值点；$a<0$ 时，$\because$ 方程 $e^x=-a(lnx+1)$ 有两解，故存在 $x>0$，使 $e^x<-a(lnx+1)$，

即 $-\frac{1}{a}<\frac{lnx+1}{e^x}$，令 $g(x)=\frac{lnx+1}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-lnx-1}{e^x}$，再令 $h(x)=\frac{1}{x}-lnx-1\frac{\frac{1}{x}-lnx-1}{e^x}$，

则 $h(x)=\frac{1}{x}-lnx-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，又 h（1）$=0$，所以 $g(x)_{max}=g$（1）$=\frac{1}{e}$，

$\therefore -\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$，解得 $a<-e$，故选：A．

【注意】关于 $y=x\ln x$ 与 $y=\frac{\ln x}{x}$ 均可以成为模型函数，也可以作为模板来进行同构，本专题之所以这样设计是让读者思考这一系列函数的同构效用，达到举一反三的目的。例题中我们会以 $y=\frac{\ln x}{x}$ 为模板进行求最值讨论.

常用的几个以 $f(x)=x\cdot e^x$ 为母函数的“亲戚函数”！

1. $y=\frac{\ln x}{x}=-\ln x^{-1}\cdot x^{-1}=-e^{\ln x^{-1}}\cdot\ln x^{-1}=-f(-\ln x)$

2. $y=\frac{x}{\ln x}=-\frac{1}{\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}}=-\frac{1}{e^{\ln\frac{1}{x}}\cdot\ln\frac{1}{x}}=-\frac{1}{f\left(\ln\frac{1}{x}\right)}$

3. $y=\frac{e^x}{x}=-\frac{1}{-x\cdot e^{-x}}=-\frac{1}{f(-x)}$

4. $y=\frac{x}{e^x}=x\cdot e^{-x}=-\left(-x\cdot e^{-x}\right)=-f(-x)$