椭圆的极点极线性质及推论

北京化工大学附属中学 (100029) 韩 毅

北京市朝阳区教育研究中心 (100028) 蒋晓东

摘要 本文聚焦椭圆的极点极线问题, 研究了椭圆的极点极线性质以及推论, 对于性质以及推论进行了详细的证明与阐述. 并且借助高考解析几何试题来揭示椭圆的极点极线性质及其推论是如何在高考试题中体现的, 通过现象研究试题的本质.

关键词 极点; 极线

1. 研究的缘起

在高考解析几何题当中, 经常会遇到求定值、定点、以及共线等等问题. 这些问题的背后隐藏着更深层次的理论 — 极点极线理论. 极点极线是法国数学家笛莎格于 1639 年在射影几何学奠基之作《圆锥曲线论稿》中提出的.

初次接触极点极线理论是在王雅琪所写的《高观点下的北京高考解析几何试题》一文中, 此文介绍了极点极线的定义、两个推论和以极点极线为背景的高考解析几何试题 [1]. 该文并没有对相关推论进行证明. 查阅资料发现范方兵、王芝平所写的文章《代数几何相转化相映成辉是一家》中, 借助 2018 年北京高考的抛物线解答题, 探究了该题的命题理论背景 — 极点极线理论, 并介绍了调和点列及调和线束等概念 [2]. 张留杰的《基于抛物线的一条性质的类比推广》一文中, 借助极点极线理论使得 2017 年北京高考理科的抛物线解答题结论得以推广到一般的二次曲线 [3]. 从以上文章中不难看出, 以极点极线理论为背景命制的高考试题比较常见, 但是极点极线在椭圆中如何体现的呢? 它们的性质有哪些? 推论有哪些? 它们的推论以及性质是如何得到的呢? 这些性质以及推论如何体现在高考试题当中呢? 这些细致的问题值得研究与探讨.

2. 椭圆的切线以及切点弦直线

首先, 如果点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $O: x^2+y^2=1$ 上, 则过点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 O 相切的直线为 $x_0\cdot x+y_0\cdot y=1$. 那么, 当点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上, 用隐函数求导法、判别式法或仿射变换法, 易求得过 $P(x_0, y_0)$ 的切线为 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$; 用仿射变换法求该切线方法如下:

证明 设 $\begin{cases} x'=\dfrac{x}{a}, \\ y'=\dfrac{y}{b}, \end{cases}$ 则椭圆 C 变换为 $x'^2+y'^2=1$, $P(x_0, y_0)$ 变换为 $P'(x_0', y_0')$, 即 $P'\left(\dfrac{x_0}{a}, \dfrac{y_0}{b}\right)$. 过点 $P'\left(\dfrac{x_0}{a}, \dfrac{y_0}{b}\right)$ 与圆 $x'^2+y'^2=1$ 相切的直线为 $x_0'\cdot x'+y_0'\cdot y'=1$, 即 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$.

若点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 外, 如图 1, 则过 P 可以作椭圆 C 的两条切线, 切点为 F, G, 那么直线 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 是过两个切点 F, G 的直线, 俗称切点弦直线. 证明如下:

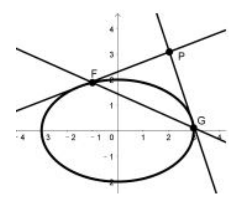

图 1

证明 设 $F(x_1, y_1), G(x_2, y_2)$ 在椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上, 因为 PF, PG 为椭圆的两条切线, 所以直线 PF, PG 方程分别为 $\dfrac{x_1\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_1\cdot y}{b^2}=1$, $\dfrac{x_2\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_2\cdot y}{b^2}=1$, 又因为点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 PF, PG 上, 所以 $\dfrac{x_1\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y_1\cdot y_0}{b^2}=1$, $\dfrac{x_2\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y_2\cdot y_0}{b^2}=1$, 进而可知点 $F(x_1, y_1), G(x_2, y_2)$ 在直线 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$, 所以直线 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 为过两个切点 F, G 的直线方程.

若点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆内部, 但非中心 $(0,0)$ 时, 依然可以得到一条 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 的直线. 那么这条直线与椭圆的位置关系是什么呢? 分两种情况讨论一下:

① 若 $y_0=0$, 带入 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 可得: $x=\dfrac{a^2}{x_0}(x_0\neq 0)$. 当 $|x_0|<a$, P 在椭圆内, 由于 $\left|\dfrac{a^2}{x_0}\right|>a$, 直线 $x=\dfrac{a^2}{x_0}$ 与椭圆相离; 当 $|x_0|=a$, P 在椭圆上, 由于 $\left|\dfrac{a^2}{x_0}\right|=a$, 直线 $x=\dfrac{a^2}{x_0}$ 与椭圆相切; 当 $|x_0|>a$, P 在椭圆外, 由于 $\left|\dfrac{a^2}{x_0}\right|<a$, 直线 $x=\dfrac{a^2}{x_0}$ 与椭圆相交.

② 若 $y_0\neq 0$, 联立直线与椭圆方程: $\begin{cases} \dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 利用判别式 $\Delta=\dfrac{4a^2b^6}{y_0^2}\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1\right)$; 当 P 在椭圆内, 由于 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1<0$, $\Delta<0$, 直线 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 与椭圆相离; 当 P 在椭圆上, 由于 $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}-1=0$, $\Delta=0$, 直线 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 与

椭圆相切于 P; 当 P 在椭圆外, 由于 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1>0, \Delta>0$, 直线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 与椭圆相交.

上述讨论可以得到, ① 当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上, 直线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 为过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线; ② 当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 外, 那么直线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 是过两个切点的直线, 即切点弦直线. ③ 当点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内, 那么直线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 在椭圆外.

3. 椭圆极点与极线

3.1 极点极线的定义

事实上, 点 $P(x_0,y_0)$ (不是原点) 与直线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$, 就是相对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一对极点与极线. 对于圆锥曲线的极点极线, 有统一的定义:

已知圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2+By^2+2Cx+2Dy+E=0$, 则称点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l: Ax_0x+By_0y+C(x+x_0)+D(y+y_0)+E=0$ 是圆锥曲线 Γ 的一对极点和极线 [4].

3.2 椭圆的极点与极线的性质

在平面直角坐标系 xOy 中, 极点 $P(x_0,y_0)$ (不是原点) 相对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的极线为 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$; 有如下性质:

① 一个确定的极点, 有唯一确定的一条极线; 反之亦然.

② 如图 2, 若极点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆内, 极线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 与椭圆相离, 该极线是椭圆中过 P 点的割线的两端点处切线的交点轨迹.

如图 3, 若极点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上, 极线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 与椭圆相切于极点 P.

如图 4, 若极点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆外, 极线 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 与椭圆相交且为椭圆的切点弦直线 (已证).

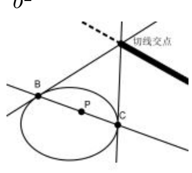

图 2

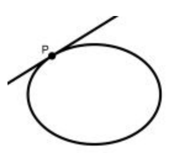

图 3

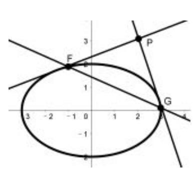

图 4

③ 当极点 $P(0,m)$ 在 y 轴上时, 极线为 $y=\frac{b^2}{m}$ 平行于 x 轴; 当极点 $P(n,0)$ 在 x 轴上时, 极线 $x=\frac{a^2}{n}$ 为平行于 y 轴; 特别的当极点 $P(\pm c,0)$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点时, 极线为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$ 平行于 y 轴且为椭圆的准线.

④ 设极点 $P(x_0,y_0)$ 不在坐标轴上, 则直线 OP 的斜率为 k_{OP}, 极线 $f:\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$, 其斜率为 k, 则 $k_{OP}\cdot k=\frac{y_0}{x_0}\cdot\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)=-\frac{b^2}{a^2}$. 特别的, 当极点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆内, 用点差法易证明极线 f 平行于以 P 为中点的弦所在直线 EF. 直线 OP 与椭圆相交于点 D, 过点 D 作椭圆的切线 i, 则以 P 为中点的弦所在直线 EF、过点 D 的切线 i, 极点 P 的极线 f, 三线相互平行, 如图 5.

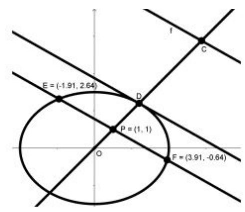

图 5

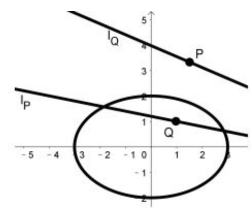

图 6

⑤ 设点 P 的极线为 l_P, 点 Q 的极线为 l_Q, 如图所示, 若 l_Q 过点 P, 则 l_P 过点 Q, 如图 6. 证明如下:

设点 $P(x_P,y_P)$, 则相应的极线为 $l_P:\frac{x_P\cdot x}{a^2}+\frac{y_P\cdot y}{b^2}=1$, 点 $Q(x_Q,y_Q)$, 相应的极线为 $l_Q:\frac{x_Q\cdot x}{a^2}+\frac{y_Q\cdot y}{b^2}=1$. 因为 l_Q 过点 P, 则 P 点坐标满足方程 $\frac{x_Q\cdot x}{a^2}+\frac{y_Q\cdot y}{b^2}=1$, 那么 $\frac{x_Q\cdot x_P}{a^2}+\frac{y_Q\cdot y_P}{b^2}=1$; 即点 Q 坐标满足方程 $\frac{x_P\cdot x}{a^2}+\frac{y_P\cdot y}{b^2}=1$, 也就是 l_P 过点 Q.

由此可得结论, 如图 7, 共线点的极线必然共点 (A、G、D、E 四点共线, 它们的极线 a、g、d、e 共交点 F) ; 共点线的极点必然共线 (直线 a、g、d、e 共交点 F, 它们的极点 A、G、D、E 四点共线).

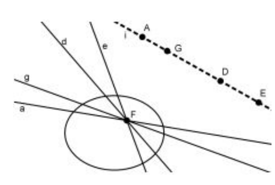

图 7

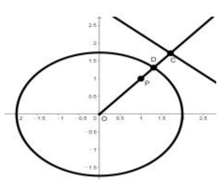

图 8

3.3 椭圆的极点与极线的推论

推论 1 如图 8, 射线 OP 与椭圆交于点 D, 与点 P 的极线交于点 C, 则 $|OP|\cdot|OC|=|OD|^2$; 当点 P 在 x 轴上时, $|OP|\cdot|OC|=a^2$; 当点 P 在 y 轴上时, $|OP|\cdot|OC|=b^2$.

证明 设点 $P(x_0,y_0)$, 则其极线为 $\frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1$, 当点 P 不在 x 轴上时, 直线 OP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0}x$. 联立方程组: $\begin{cases} y=\frac{y_0}{x_0}x, \\ \frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0\cdot y}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得

$C\left(\dfrac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2+a^2y_0^2},\dfrac{a^2b^2y_0}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}\right)$. 联立方程组:

$\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{x_0}x, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $|OD|^2=\dfrac{a^2b^2x_0^2}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}+\dfrac{a^2b^2y_0^2}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}$, 所以

$$|OP|\cdot|OC|=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$=x_0\cdot\frac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}+y_0\cdot\frac{a^2b^2y_0}{b^2x_0^2+a^2y_0^2}=|OD|^2;$$

易知当点 P 在 x 轴上时, $|OP|\cdot|OC|=a^2$; 当点 P 在 y 轴上时, $|OP|\cdot|OC|=b^2$.

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的极点极线的几何意义: 如图 9, 点 $P(x_0,y_0)$ 不在椭圆上, 过 P 作椭圆的两条割线, 分别交椭圆于 A、B、C、D, 在线段 AB, CD 分别取一点 M、N, 使得 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}$, $\dfrac{|PC|}{|PD|}=\dfrac{|NC|}{|ND|}$(内分比 = 外分比), 则直线 MN 就是极点 $P(x_0,y_0)$ 关于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的极线. 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}$ 的四个点 P、A、M、B 为一组调和点列; 满足 $\dfrac{|PC|}{|PD|}=\dfrac{|NC|}{|ND|}$ 的四个点 P、C、N、D 为另一组调和点列.

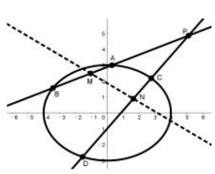
图 9

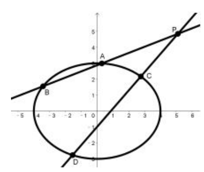
图 10

证明 如图 10, 过点 $P(x_0,y_0)$ (不在椭圆上) 作椭圆的两条割线, 分别交椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 于 A、B、C、D 四点, 设 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}=\mu\overrightarrow{PD}$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$. 因为 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$, 所以 $(x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0)$, 即

$$\begin{cases} x_1-\lambda x_2=(1-\lambda)x_0 & (1) \\ y_1-\lambda y_2=(1-\lambda)y_0 & (2) \end{cases}$$

又因为 A、B 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上, 即有

$$\begin{cases} b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2 & (3) \\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2 & (4) \end{cases}$$

由 (3) $-$ (4) $\times\lambda^2$ 得: $b^2\left(x_1^2-\lambda^2x_2^2\right)+a^2\left(y_1^2-\lambda^2y_2^2\right)=a^2b^2\left(1-\lambda^2\right)$; 整理得:

$$b^2(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)+a^2(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)$$
$$=a^2b^2(1+\lambda)(1-\lambda) \quad (5)$$

将 (1),(2) 代入 (5) $b^2(x_1+\lambda x_2)(1-\lambda)x_0+a^2(y_1+\lambda y_2)(1-\lambda)y_0=a^2b^2(1+\lambda)(1-\lambda)$; 即: $b^2(x_1+\lambda x_2)x_0+a^2(y_1+\lambda y_2)y_0=a^2b^2(1+\lambda)$; 两边同除以 $a^2b^2(1+\lambda)$ 得: $\dfrac{x_0\cdot\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)}{b^2}=1$. 设点 $M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$, 从上式可以看出点 $M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ 恰好在直线 $\dfrac{x_0\cdot x}{a^2}+\dfrac{y_0\cdot y}{b^2}=1$ 上. 又因为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 所以点 $M\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点, 即 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$. 所以有 $\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|}$, 且点 M 恰好在点 P 关于椭圆的极线上. 同理, 在线段 CD 上可以找到一个点 N, 使得 $\dfrac{|\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{PD}|}=\dfrac{|\overrightarrow{NC}|}{|\overrightarrow{ND}|}$, 且点 N 恰好在点 P 关于椭圆的极线上. 所以 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}$ 且 $\dfrac{|PC|}{|PD|}=\dfrac{|NC|}{|ND|}$ (内分比 = 外分比), 则直线 MN 就是极点 $P(x_0,y_0)$ 关于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的极线.

如图 11, 不仅点 M、N 在极点 $P(x_0,y_0)$ 的极线上, 直线 AD、BC 的交点 Q, 以及直线 AC、BD 的交点 R, 也都在该极线上. 证明这个需要了解两个著名的定理: 梅涅劳斯定理以及塞瓦定理.

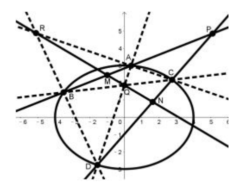
图 11

梅捏劳斯定理 如图 12, 13, 若一条不过 A、B、C 三点的直线与 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、AC 所在直线分别交于 D、E、F, 则 $\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=1$.

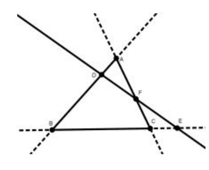
图 12

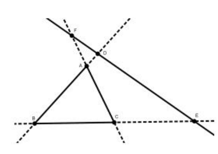
图 13

塞瓦定理 如图 14, 15, 已知平面上 $\triangle ABC$ 和点 D (点 D 不在 $\triangle ABC$ 的三边上), 直线 AD, BD, CD 分别交直线 BC、CA、AB 于 F、G、E, 则 $\dfrac{AE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GA}=1$.

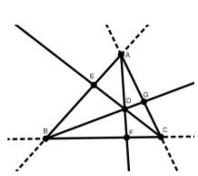
图 14

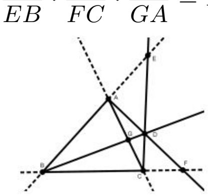
图 15

推论 2 如图 16, 在完全四边形 $ABCD$ 中, DB 与 CA 的的延长线相交于 R, BA 与 DC 的的延长线相交于 P, 直线 AD 与 BC 相交于 Q, 若 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{MA}{MB}$ 且 $\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{NC}{ND}$(内

分比 = 外分比) , 则点 M、N 在直线 QR 上.

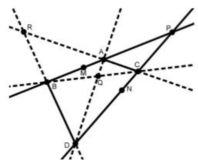

图 16

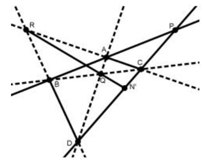

图 17

证明 先证明点 N 在直线 QR 上, 如图 17, 连接 QR 交 PD 于点 N', 在 $\triangle RCD$ 中, 因为 RN', CB, DA 共点 Q, 由塞瓦定理得: $\frac{RB}{BD}\cdot\frac{DN'}{N'C}\cdot\frac{CA}{AR}=1$; 又因为 P, A, B 共线, 由梅涅劳斯定理得: $\frac{RB}{BD}\cdot\frac{DP}{PC}\cdot\frac{CA}{AR}=1$; 比较以上两式即有 $\frac{PC}{PD}=\frac{N'C}{N'D}$. 又因为 $\frac{PC}{PD}=\frac{NC}{ND}$, 所以 $\frac{NC}{ND}=\frac{N'C}{N'D}$, 即点 N, N' 重合.

再证明点 M 在直线 QR 上, 如图 18: 连接 QR 交线段 AB 于点 M', 在 $\triangle AQB$ 中, 因为 QR, AR, BR 共点 R, 由塞瓦定理得: $\frac{AM'}{M'B}\cdot\frac{BC}{CQ}\cdot\frac{QD}{DA}=1$; 因为 P, C, D 共线, 由梅涅劳斯定理得: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BC}{CQ}\cdot\frac{QD}{DA}=1$; 比较以上两式即有 $\frac{PA}{PB}=\frac{M'A}{M'B}$. 又因为 $\frac{PA}{PB}=\frac{MA}{MB}$, 所以 $\frac{M'A}{M'B}=\frac{MA}{MB}$, 即点 M, M' 重合. 综上所述: M、N 点在直线 QR 上.

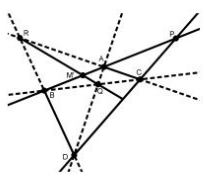

图 18

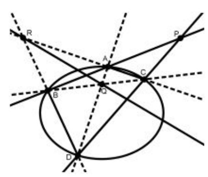

图 19

推论 2 的意义在于给出了画极点 P 所对应的极线的快速方法. 如图 19, 过点 $P(x_0, y_0)$ (不在椭圆上) 作椭圆的两条割线, 分别交椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 于 A、B、C、D 四点, 在完全四边形 $ABCD$ 中, 直线 AD、BC 相交点 Q, 以及直线 AC、BD 相交点 R, 则直线 QR 即为点 $P(x_0, y_0)$ 的极线.

推论 3 如图 20, 若 P、A、M、B 为一组调和点列 (即满足 $\frac{PA}{PB}=\frac{MA}{MB}$), 则 $\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{2}{PM}$.

证明 若 $\frac{PA}{PB}=\frac{MA}{MB}$, 则 $\frac{MA}{PA}=\frac{MB}{PB}\Rightarrow\frac{MA}{PA}-\frac{MB}{PB}=0\Rightarrow 1+1+\frac{MA}{PA}-\frac{MB}{PB}=2\Rightarrow\frac{PA}{PA}+\frac{MA}{PA}+\frac{PB}{PB}-\frac{MB}{PB}=2\Rightarrow\frac{PM}{PA}+\frac{PM}{PB}=2$, 所以 $\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}=\frac{2}{PM}$.

推论 4 设完全四边形 $ABCD$ 为椭圆的内接四边形, 且 $\begin{cases}AB\cap CD=P,\\ AD\cap BC=Q,\\ BD\cap AC=R,\end{cases}$ 则点 P 的极线为 RQ; 点 Q 的极线为 RP; 点 R 的极线为 PQ, 称 $\triangle PQR$ 为自极三角形, 如图 21.

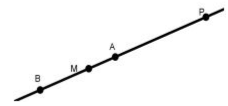

图 20

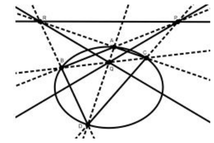

图 21

推论 5 如图 22, 设四边形 $ABCD$ 为椭圆的内接梯形, $AC//BD$, $AD\cap BC=Q$, 则点 P 的极线过 Q, 且与直线 AC、BD 平行. 特别的如图 23, 若 $BC//AD//y$ 轴时, 点 P 的极线平行 y 轴, 且与 x 轴的交点 R 也是 AC、BD 交点, 根据推论 1 有 $|OR|\cdot|OP|=|OF|^2=a^2$.

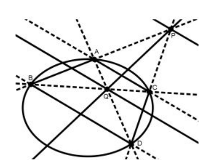

图 22

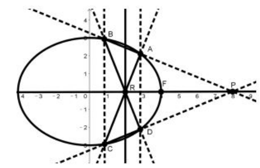

图 23

4. 极点极线理论在高考试题中的体现

例题 1 (2008 年高考安徽卷理科) 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(\sqrt{2},1)$, 且着焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$.

(I) 求椭圆 C 的方程; (II) 当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A, B 时, 在线段 AB 上取点 Q, 满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$, 证明: 点 Q 总在某定直线上.

背景分析 (II) 因为 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$, 所以 PQ 调和分割 AB (即 P、Q 两点为线段 AB 的内外分点). 所以点 Q 在点 P 的极线上, 而点 P 的极线为 $2x+y-2=0$, 所以点 Q 总在 $2x+y-2=0$ 上.

例题 2 (2010 年高考江苏卷) 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图 24, 已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右顶点为 A、B, 右焦点为 F. 设过点 $T(t,m)$ 的直线 TA、TB 与椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$, 其中 $m>0, y_1>0, y_2<0$.

(I) 设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$, 求点 P 的轨迹;

(II) 设 $x_1=2, x_2=\frac{1}{3}$, 求点 T 的坐标;

(III) 设 $t=9$, 求证: 直线 MN 必过 x 轴上的一定点 (其坐标与 m 无关).

背景分析 (III) 因为直线 MN 与直线 AB 的交点必在点 T 的极线上, 而点 T 在直线 $x=9$ 上. 所以点 T 的极线必共点, 且该点为直线 $x=9$ 的极点, 此点即为直线 MN 必过的定点. 因为, 直线 $x=9$ 的极点为 $(1,0)$, 所以, 直线必过点为 $(1,0)$.

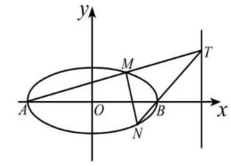

图 24

例析有效增设在高考数学解题中的应用*

江苏省扬州大学数学科学学院 (225002)　黄 欢　濮安山

在数学解题中, 常常通过增加个别条件不改变原来题意的情况下, 令问题易于求解, 这就是有效增设解题策略. 在高考数学解题中, 有效增设发挥着至关重要的作用. 下面就以历年高考题为基础, 分析有效增设在高考题中的具体应用.

一、进退互化产生归纳增设

数学归纳法加强命题主要有两种情况, 一种是将有限项的命题加强为无限项的命题; 一种是证明更强的命题. 例题 1 就是第二种情况. 用数学归纳法证明更强的命题主要的困难在于第二步假设 $n=k$ 时命题成立, 因为更强的命题具有更强的归纳假设的性质, 所以更强的命题便会产生有效增设.

例 1 (2014 年高考江苏卷第 23 题) 已知函数 $f_0(x)=\dfrac{\sin x}{x}(x>0)$, 设 $f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数, $n\in\mathbb{N}^*$.

(1) 略; (2) 证明: 对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$, 等式 $\left|nf_{n-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{4}f_n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 都成立.

解 (1) 略; (2) 由已知, 得 $xf_0(x)=\sin x$, 等式两边分别对 x 求导, 得 $f_0(x)+xf_0'(x)=\cos x$, 即 $f_0(x)+xf_1(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, 类似可得 $2f_1(x)+xf_2(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)$, $3f_2(x)+xf_3(x)=-\cos x=\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $4f_3(x)+xf_4(x)=\sin x=\sin(x+2\pi)$. 下面用数学归纳法证明等式 $nf_{n-1}(x)+xf_n(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ 对所有的 $n\in\mathbb{N}^*$ 都成立.

① 当 $n=1$ 时, 由上可知等式成立.

② 假设当 $n=k$ 时等式成立 (有效增设), 即 $kf_{k-1}(x)+xf_k(x)=\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$.

③ 因为 $[kf_{k-1}(x)+xf_k(x)]'=kf_{k-1}'(x)+f_k(x)+xf_k'(x)=(k+1)f_k(x)+xf_{k+1}(x)$, $\left[\sin\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)'=\sin\left[x+\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right]$, 所以 $(k+1)f_k(x)+xf_{k+1}(x)=\sin\left[x+\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right]$.

例题 3 (2011 年高考四川卷) 如图 25, 椭圆有两顶点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$, 过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C、D 两点, 并与 x 轴交于点 P, 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

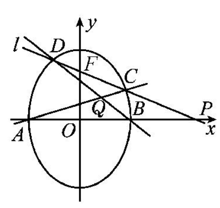

图 25

(I) 当 $|CD|=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ 时, 求直线 l 的方程;

(II) 当点 P 异于 A、B 两点时, 求证: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.

背景分析 (II) 设 $P(t,0)$, 则点 P 的极线过 Q. 因为椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$, 所以点 $P(t,0)$ 的极线为 $x=\dfrac{1}{t}$, 即 $Q\left(\dfrac{1}{t},y_Q\right)$. 所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_P\cdot x_Q+y_P\cdot y_Q=t\cdot\dfrac{1}{t}+0\cdot y_Q=1$.

例题 4 (2012 年高考北京卷理科) 已知曲线 C : $(5-m)x^2+(m-2)y^2=8\,(m\in\mathbb{R})$.

(I) 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆, 求 m 的取值范围;

(II) 设 $m=4$, 曲线 C 与 y 轴的交点为 A,B (点 A 位于点 B 的上方) , 直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M、N, 直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G. 求证: A,G,N 三点共线.

背景分析 (II) 如图 26, 直线 AN 与 BM 的交点必在点 $P(0,4)$ 的极线上, 而点 $P(0,4)$ 的极线为 $y=1$. 所以直线 AN、直线 BM、直线 $y=1$ 共点, 所以 A,G,N 三点共线.

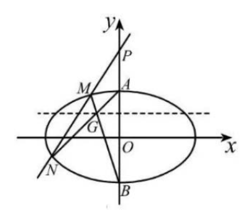

图 26

5. 小结

许多高考解析几何试题的命制都是以极点极线理论作为指导的, 因此对于极点极线理论的了解, 有助于把握命题者的意图, 明确解决问题的方向, 优化运算. 探究极点极线性质、推论有较高的教育教学价值, 因此作为一线教师可以有所了解.

参考文献

[1] 王雅琪. 高观点下的北京高考解析几何试题 [J]. 数学通报, 2016, 55(11): 28—30.

[2] 范方兵, 王芝平. 代数几何相转化 相映成辉是一家 [J]. 数学通报, 2018, 57(7): 55—58.

[3] 张留杰. 基于抛物线的一条性质的类比推广 [J]. 数学通报, 2018, 57(7): 59—61.

[4] 周兴和. 高等几何 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

*项目支持: 江苏省高等教育教改项目: "综合性大学开展卓越中学数学教师培养的探索与实践 (2017JSJG236) ".