1).

由$\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，令$\dfrac{x_1}{a}=\cosh x$，$\dfrac{y_1}{b}=\sinh x$，$\dfrac{x_2}{a}=\cosh y$，$\dfrac{y_2}{b}=\sinh y$，其中 $x\neq y$，则 $\dfrac{2a^2b^2}{(x_1y_2-x_2y_1)^2}(\dfrac{x_1x_2}{a^2}-\dfrac{y_1y_2}{b^2}-1)=\dfrac{2}{(\cosh x\sinh y-\sinh x\cosh y)^2}(\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y-1)=\dfrac{2}{\sinh^2(x-y)}[\cosh(x-y)-1]=\dfrac{1}{\cosh^2(\frac{x-y}{2})}$. 因为 $x\neq y$，所以$\cosh^2(\dfrac{x-y}{2})>1$，$0<\dfrac{1}{\cosh^2(\frac{x-y}{2})}<1$，即$0<\dfrac{1}{a^2}\left[\dfrac{a^2(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1}\right]^2-\dfrac{1}{b^2}\left[\dfrac{b^2(x_2-x_1)}{x_1y_2-x_2y_1}\right]^2<1$，得证.

性质2 过开区域Λ上一点作双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的切线，切点在双曲线的同一支上.

证明：设点$P(x_0,y_0)\in\Lambda$，过点 P 的双曲线切线的切点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则直线 AB 的方程为$\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$，即$y=\dfrac{b^2}{y_0}(\dfrac{x_0}{a^2}x-1)$，代入$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，消去$y$，整理得$(a^2y_0^2-b^2x_0^2)x^2+2a^2b^2x_0x-a^4(y_0^2+b^2)=0$，从而$x_1x_2=\dfrac{a^4(y_0^2+b^2)}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}$. 由引理，知$b^2x_0^2-a^2y_0^2>0$，所以$x_1x_2>0$，即切点$A$，$B$在双曲线的同一支上.

性质3 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的焦点为$F_1$，$F_2$，$P$为双曲线上异于顶点的任意一点，则$\Delta PF_1F_2$的重心$G\in\Lambda$.

证明：设$P(x_0,y_0)$为双曲线上异于顶点的任意一点，双曲线的左，右焦点分别$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$. 则ΔPF_1F_2的重心坐标为$G(\dfrac{x_0}{3},\dfrac{y_0}{3})$，从而$0<\dfrac{x_0^2}{9a^2}-\dfrac{y_0^2}{9b^2}=\dfrac{1}{9}(\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2})=\dfrac{1}{9}<1$，由引理，得证.

性质4 双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的焦点为$F_1$，$F_2$，$P$为双曲线上异于顶点的任意一点，则$\Delta PF_1F_2$的内切圆圆心$I\in\Lambda$.

证明：不妨设$P(x_0,y_0)$是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$右支上异于顶点的任意一点，双曲线的左、右焦点分别为$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$. 易知ΔPF_1F_2的内切圆圆心落在直线$x=a$上，且$\angle F_1PF_2$的平分线所在直线方程为$\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$.

联立$x=a$与$\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$得$y=\dfrac{b^2}{y_0}(\dfrac{x_0}{a}-1)$，从而$b^2-y^2=b^2-\dfrac{b^4}{y_0^2}(\dfrac{x_0}{a}-1)^2=\dfrac{b^2}{a^2y_0^2}[a^2y_0^2-b^2\cdot(x_0-a)^2]=\dfrac{b^2}{a^2y_0^2}(a^2y_0^2-b^2x_0^2+2ab^2x_0-a^2b^2)=\dfrac{b^2}{a^2y_0^2}(2ab^2x_0-2a^2b^2)=\dfrac{2b^4}{ay_0^2}(x_0-a)>0$. 所以$-b<y<b$，得证.

参考文献

[1]普通高中数学课程标准(2017)[M]. 中华人民共和国教育部. 北京：人民教育出版社. 2018,1.

[2]王申怀主编. 普通高中课程标准试验教科书，数学选修2-1(A版)[M]. 北京：人民教育出版社. 2018,12.

利用仿射变换研究椭圆内接四边形面积的最值*

安康学院数学与统计学院 (725000) 赵临龙

1. 基础理论

引理1[1] 两封闭曲线的面积之比保持不变.

* 基金项目：陕西省“高层次人才特殊支持计划”项目(2019TZJH01)、2019 年度陕西高等教育教学改革研究项目(19BY120).

引理2[2] 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的面积为 πab.

引理3[1] 椭圆经仿射变换化为圆.

定理 若圆 $O:x^2+y^2=r^2$ 的内接四边形的对角线交于圆内一定点 F,记 $|OF|=m>0$,内接四边形的对角线斜率分别为 k_1,k_2 并满足 $k_1k_2=-a(a>0)$,则四边形面积 S 取最值:

(1) 当且仅当 $k_1=\sqrt{a},k_2=-\sqrt{a}$ 时,即 OF 平分四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 的交角时,四边形 $ABCD$ 的面积取最小值 $S=2(r^2-m^2\frac{1}{1+a})\frac{2\sqrt{a}}{1+a}$.

(2) 当 $k_1k_2=-1$ 时,即 OF 平分四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 的交角时,四边形 $ABCD$ 的面积取最大值 $S=2r^2-m^2$.

(3) 当 $k_1=0,k_2=\infty$ 时,即 OF 与四边形 $ABCD$ 的一对角线重合时,四边形 $ABCD$ 的面积取最大值 $S=2r\sqrt{r^2-m^2}$.

证明:如图1,设点 F 在直角坐标系的 y 轴建上,记圆内接四边形的对角线 AC,BD 斜率分别为 $k_1,k_2(k_1,k_2\neq 0)$,AC,BD 与 y 轴的交角分别是 θ_1,θ_2,圆心 O 到 AC,BD 的距离分别是 d_1,d_2,则 $|AC|=2\sqrt{r^2-d_1^2}=2\sqrt{r^2-m^2\sin^2\theta_1}=2\sqrt{r^2-m^2\cos^2(\arctan k_1)}=2\sqrt{r^2-m^2\frac{1}{1+k_1^2}}$.

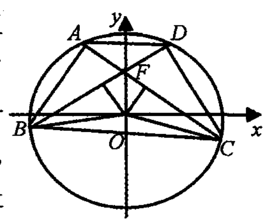

图1

同理,有 $|BD|=2\sqrt{r^2-m^2\frac{1}{1+k_2^2}}$.

对角线 AC,BD 的交角满足 $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{|k_1-k_2|}{1+k_1k_2}$,则 $\sin(\theta_1+\theta_2)=$
$$\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{(k_1-k_2)^2+(1+k_1k_2)^2}}=\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{(1+k_1)(1+k_2^2)}}.$$

于是,圆内接四边形 $ABCD$ 的面积是
$$S=\frac{1}{2}|AC||BD|\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$=2\sqrt{(r^2-m^2\frac{1}{1+k_1^2})(r^2-m^2\frac{1}{1+k_2^2})}\cdot\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}}(k_1,k_2\neq 0)(1).$$

在(1)中,设 $k_1>0$,则 $k_2=\frac{-a}{k_1}$,得 $S=$
$$2\sqrt{(r^2-m^2\frac{1}{1+k_1^2})(r^2-m^2\frac{1}{1+k_2^2})}\frac{|k_1-k_2|}{\sqrt{(1+k_1^2)(1+k_2^2)}}$$
$$=2\sqrt{(1-m^2\frac{1}{1+k_1^2})(1-m^2\frac{k_1}{a^2+k_1^2})}\frac{k_1+\frac{a}{k_1}}{\sqrt{(1+k_1^2)(1+\frac{a^2}{k_1^2})}}.$$

由于 $k_1+\frac{a}{k_1}\geqslant 2\sqrt{a}$,当且仅当 $k_1=\frac{a}{k_1}$,即 $k_1=\sqrt{a},k_2=-\sqrt{a}$ 时,四边形的面积取最小值 $S=2\sqrt{(r^2-m^2\frac{1}{1+a})(r^2-m^2\frac{1}{1+a})}\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{(1+a)(1+a)}}=2(r^2-m^2\frac{1}{1+a})\frac{2\sqrt{a}}{1+a}(2)$.

此时,由于 $k_1=\sqrt{a},k_2=-\sqrt{a}$,则四边形的对角线 AC,BD 对于 y 轴对称,即 OF 平分四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 的交角. 由公式(1),得 $S=$
$$2\sqrt{(r^2-m^2\frac{1}{1+k_1^2})(r^2-m^2\frac{1}{1+k_2^2})}\frac{k_1+\frac{a}{k_1}}{\sqrt{(1+k_1^2)(1+\frac{a^2}{k_1^2})}}.$$

由于 $\frac{k_1+\frac{a}{k_1}}{\sqrt{(1+k_1^2)(1+\frac{a^2}{k_1^2})}}=\frac{k_1+\frac{a}{k_1}}{\sqrt{1+a^2+k_1^2+\frac{a^2}{k_1^2}}}$
$$=\frac{k_1+\frac{a}{k_1}}{\sqrt{1-2a+a^2+(k_1+\frac{a}{k_1})^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-a)^2}{(k_1+\frac{a}{k_1})^2}+1}}\leqslant 1.$$

(Ⅰ) 当 $a=1$,即 $k_1k_2=-1$ 时,四边形的面积取最大值 $S=2\sqrt{(r^2-m^2\frac{1}{1+k_1^2})(r^2-m^2\frac{k_1^2}{1+k_1^2})}$
$$=2(\frac{r^2-m^2\frac{1}{1+k_1^2}+r^2-m^2\frac{k_1^2}{1+k_1^2}}{2})=2r^2-m^2$$
(3). 此时,由于 $r^2-m^2\frac{1}{1+k_1^2}=r^2-m^2\frac{1}{1+k_2^2}\Leftrightarrow k_1^2=k_2^2\Leftrightarrow k_1=-k_2$,则四边形的对角线 AC,BD 对于 y 轴对称,即 OF 平分四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 的交角.

(Ⅱ) 当 $(k_1+\frac{a}{k_1})^2\to\infty$,即 $k_1=0,k_2=\infty$ 时,

四边形的面积取最大值 $S=2\sqrt{(r^2-m^2)(r^2)}=2r\sqrt{r^2-m^2}$(4). 此时,由于 $k_2=\infty$,则 OF 与四边形 $ABCD$ 的一对角线重合.

2. 理论应用

例 1 (2009 年全国高考 Ⅱ 理) 已知 AC、BD 为圆 $O:x^2+y^2=4$ 的两条相互垂直的弦,垂足为 $M(1,\sqrt{2})$,则求四边形 $ABCD$ 面积的最大值为.[4]

解: $m=|OM|=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$,由于 $k_1k_2=-1$,则由公式(3)可得到四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $S=2r^2-m^2=8-3=5$.

例 2 (2009 年全国高考 Ⅰ 理) 如图 2,已知抛物线 $E:y^2=x$ 与圆 $M:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交于 A、B、C、D 四个点.

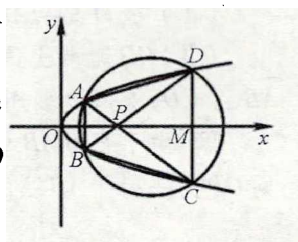

图 2

(1) 求 r 的取值范围;

(2) 当四边形 $ABCD$ 的面积最大时,求对角线 AC、BD 的交点 p 的坐标.[5]

解: 由抛物线 $E:y^2=x$ 与圆 $M:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$ 得 $x^2-7x+16-r^2=0$,则抛物线 E 与圆 M 相交于 A、B、C、D 四个点的充要条件是

$$\begin{cases}\Delta=(-7)^2-4(16-r^2)>0,\\ x_1+x_2=7>0,\\ x_1x_2=16-r^2>0,\end{cases}\quad 解得\frac{15}{4}<r^2<16,$$

即 $r\in(\frac{\sqrt{15}}{2},4)$.

由于抛物线 $E:y^2=x$ 与圆 $M:(x-4)^2+y^2=r^2(r>0)$ 都是关于 x 轴的对称图形,因此两二次曲线形成的四边形 $ABCD$ 也为关于 x 轴对称的等腰梯形. 此时,由于四边形 $ABCD$ 的对角线斜率不为 0,则当 $k_1k_2=-1$ 时,即 $k_1=1,k_2=-1$ 时,四边形 $ABCD$ 的面积最大.

现设 E 与 M 的四个交点的坐标分别为 $A(x_1,\sqrt{x_1})$、$B(x_1,-\sqrt{x_1})$、$C(x_2,-\sqrt{x_2})$、$D(x_2,\sqrt{x_2})$. 由 $E:y^2=x$ 和直线 $BD:y=x-x_p$(其中 x_p 为点 P 的 x 坐标),得到 $x^2-(2x_p+1)x+x_p^2=0$,则 $x_p=\sqrt{x_1x_2}$. 设 $x=\sqrt{x_1x_2}$,由 $x=\sqrt{16-r^2}$ 得 $0<x<\frac{7}{2}$. 对于四边形 $ABCD$ 面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|x_2-x_1|(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})=(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(x_2+x_1+2\sqrt{x_1x_2})$

$=(\sqrt{x_2+x_1-2\sqrt{x_1x_2}})(x_2+x_1+2\sqrt{x_1x_2})$

$=(\sqrt{7-2x}(7+2x))(x_1+x_2=7,\sqrt{x_1x_2}=x)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{14-4x}\sqrt{(7+2x)(7+2x)}$

$\leqslant(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\frac{14-4x+2(7+2x)}{3})^3}=\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{28}{3})^3}$.

于是,当且仅当 $14-4x=7+2x$,即 $x=\frac{7}{6}\in(0,\frac{7}{2})$,即当 $r=\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-(\frac{7}{6})^2}=\frac{\sqrt{527}}{6}$ 时,四边形 $ABCD$ 面积最大值是 $\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{28}{3})^3}$.

例 3 (2005 年全国高考 Ⅱ 理) 点 P、Q、M、N 在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上,F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 $\overrightarrow{PF}$ 与 $\overrightarrow{FQ}$ 共线,$\overrightarrow{MF}$ 与 $\overrightarrow{FN}$ 共线,且 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.[6]

解: $\because\ \overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{MF}=0\Rightarrow\overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{MF}$,即 $MN\perp PQ$.

现在,作仿射变换:$x\to x,y\to\frac{y}{\sqrt{2}}$,则椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 变为圆 $x^2+y^2=1$. 此时,椭圆的焦点 $F(0,1)$ 变为 $F(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$;四边形的对角线方程 $y=kx+1$,$y=\frac{-1}{k}x+1(k\neq0)$ 变为 $\sqrt{2}y=kx+1$,$\sqrt{2}y=\frac{-1}{k}x+1(k\neq0)$,即变换后的四边形对角线斜率满足 $k_1k_2=\frac{-1}{2}=-a$,$m^2=\frac{1}{2}$. 由公式(2)得 $S_{圆}=2(r^2-m^2\frac{1}{1+a})\frac{2\sqrt{a}}{1+a}=\frac{8}{9}\sqrt{2}$.

由引理 1 得到 $S_{椭圆四边形}:S_{椭圆}=S_{圆四边形}:S_{圆}$. 即 $S_{椭圆四边形}=(S_{圆四边形}:S_{圆})S_{椭圆}=(\frac{8}{9}\sqrt{2}:\pi r^2)(\pi ab)=\frac{16}{9}$. 此时,由仿射变换知,当椭圆内接四边形的对角线斜率分别为 1 和 -1 时,四边形的面积取最小值 $\frac{16}{9}$. 由公式(4)得 $S=2r\sqrt{r^2-m^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$. 由引理 1,得到 $S_{椭圆四边形}=(S_{圆四边形}:S_{圆})S_{椭圆}=(\sqrt{2}:\pi)(\pi\sqrt{2})=2$. 此时,由仿射变换知,当椭圆内接四边形的对角线斜率分别为 0 和 ∞ 时,四边形的面积取最大值 2.

例 4 (2007 年全国高考 Ⅰ) 如图 3,已知椭圆

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，过$F_1$的直线交椭圆于$B$、$D$两点，过$F_2$的直线交椭圆于$A$、$C$两点，且$AC\perp BD$，垂足为$P$.

（Ⅰ）设P点的坐标为(x_0,y_0)，证明：$\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}<1$；

（Ⅱ）求四过形$ABCD$的面积的最小值.

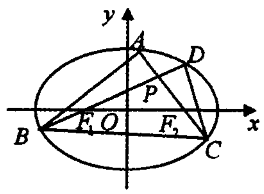

图3

解：（Ⅰ）略.

（Ⅱ）作仿射变换：$x\to\frac{x}{\sqrt{3}}$，$y\to\frac{y}{\sqrt{2}}$，则椭圆$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$变为圆$x^2+y^2=1$.

此时，四边形的对角线方程$y=k(x+1)$，$y=\frac{-1}{k}(x-1)(k\neq0)$分别变为$\sqrt{2}y=k(\sqrt{3}x+1)$，$\sqrt{2}y=\frac{-1}{k}(\sqrt{3}x-1)(k\neq0)$，即变换后的四边形对角线斜率满足$k_1k_2=\frac{-3}{2}=-a$. 在公式(2)中，当$k_1=\sqrt{a}=\sqrt{\frac{3}{2}}$，$k_2=-\sqrt{a}=-\sqrt{\frac{3}{2}}$时，变换后的四边形的面积取最小值. 此时，结合变换后的四边形的对角线方程$\sqrt{2}y=k(\sqrt{3}x+1)$，$\sqrt{2}y=\frac{-1}{k}(\sqrt{3}x-1)(k\neq0)$，知$k=1$. 则点$P(\frac{1-k^2}{1+k^2},\frac{2k}{1+k^2})=(0,1)$变为$P(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$，则$m^2=\frac{1}{2}$. 于是$S=2(r^2-m^2\frac{1}{1+a})\frac{2\sqrt{a}}{1+a}=2(1-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{2}})\frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{16}{25}\sqrt{6}$. 即当且仅当$k_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$，$k_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$时，变换后的四边形的面积取最小值$S=\frac{16}{25}\sqrt{6}$. 由引理1得到$S_{椭圆四边形}=(S_{圆四边形}:S_{圆})S_{椭圆}=(\frac{16}{25}\sqrt{6}:\pi)(\pi\sqrt{6})=\frac{96}{25}$. 在公式(3)中，由于$k=0$，则点$P(\frac{1-k^2}{1+k^2},\frac{2k}{1+k^2})=(1,0)$变为$P(\frac{1}{\sqrt{3}},0)$，则$m^2=\frac{1}{3}$. 于是$S=2r\sqrt{r^2-m^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$. 即当且仅当$k_1=0$，$k_2=\infty$时，变换后的四边形的面积取最大值$S=\frac{2}{3}\sqrt{6}$. 由引理1得到$S_{椭圆四边形}=(S_{圆四边形}:S_{圆})S_{椭圆}=(\frac{2}{3}\sqrt{6}:\pi)(\pi\sqrt{6})=4$.

例5 (2013年全国高考数学Ⅱ理)在平面直角坐标系xoy中，过椭圆$M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点的直线$x+y-\sqrt{3}=0$交$M$于点$A$、$B$两点，$P$为$AB$的中点，且$OP$的斜率为$\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求M的方程；

（Ⅱ）CD为M上两点，若四边形$ABCD$的对角线$AB\perp CD$，求四边形$ABCD$的面积的最大值.[8]

解：由于P为AB的中点，则OP为平行于AB弦的直径，则$k_{OP}k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$，即$\frac{1}{2}(-1)=-\frac{b^2}{a^2}$，从而$a^2=2b^2$.

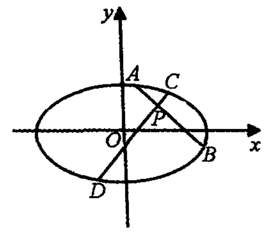

图4

由焦点$(\sqrt{3},0)$，得到$a^2-b^2=3$. 于是，求得$a^2=6$，$b^2=3$，即椭圆方程是$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. 作仿射变换：$x\to\frac{x}{\sqrt{6}}$，$y\to\frac{y}{\sqrt{3}}$，则椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$变为圆$x^2+y^2=1$. 此时，$ABCD$四边形的对角线方程$x+y-\sqrt{3}=0$，$-x+y+\sqrt{3}s=0$(其中$s$为常数)分别变为$\sqrt{6}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$，$-\sqrt{6}x+\sqrt{3}y+\sqrt{3}s=0$，即$\sqrt{2}x+y-1=0$，$-\sqrt{2}x+y+s=0$，则变换后的四边形对角线斜率满足$k_1k_2=-2$. 由$\sqrt{2}x+y-1=0$，$-\sqrt{2}x+y+s=0$，得圆中四边形对角线交点坐标为$F(\frac{1+s}{2\sqrt{2}},\frac{1-s}{2})$，于是$m^2=|OF|^2=\frac{1}{8}(1+s)^2+\frac{1}{4}(1-s)^2=\frac{1}{8}(3s^2-2s+3)=\frac{3}{8}((s-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9})\geqslant\frac{1}{3}$.

由公式(4)，得到$S=2r\sqrt{r^2-m^2}\leqslant2\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$. 由引用1，得到$S_{椭圆四边形}=(S_{圆四边形}:$

$S_{圆})S_{椭圆} = (\frac{2}{3}\sqrt{6}:\pi)(\pi 3\sqrt{2}) = 4\sqrt{3}$.

即当 $k_1 = 0, k_2 = \infty$ 时,$ABCD$ 四边形的面积取最大值 $4\sqrt{3}$. 遗憾是,此时 $ABCD$ 四边形的面积对角线斜率满足 $k_1k_2 = -2$,不满足 $k_1 = 0, k_2 = \infty$. 即此方法失效. 这是由于 AB 为定直线,其斜率 $k_1 = -1$. 但我们可得到推广结论.

注:命题5 由椭圆方程 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 和定直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$,得到定长 $|AB| = \frac{4}{3}\sqrt{6}$,在由直线 $-x + y + n = 0$(其中 n 为常数),得到变长 $|CD| = \frac{4}{3}\sqrt{9 - n^2}$,于是四边形 $ABCD$ 的面积的最大值:$S = \frac{1}{2}|AB||CD| = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\sqrt{6} \times \frac{4}{3}\sqrt{9 - n^2} \leq \frac{8}{3}\sqrt{6} \leq 4\sqrt{3}$(动态四边形的面积的最大值).

命题　在平面直角坐标系 xoy 中,过椭圆 M:$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的右焦点的直线交 M 于点 A、B 两点,CD 为 M 上两点,若四边形 $ABCD$ 的对角线 $AB \perp CD$,四边形 $ABCD$ 的面积的最大值是 $4\sqrt{3}$.

由此可见,对于理论的应用,一定要考虑其前提条件,只有满足条件时,才可以使用,当条件不满足时,不能简单应用. 但经过研究可以获得新的结果,这只是学习研究的重要所在.

参考文献

[1]周振荣,赵临龙. 高等几何[M]. 武汉:华中师范大学出版社,2013.

[2]赵临龙. 用射影几何知识引领欧氏几何研究[J]. 教育研究与评论(中学教育教学),2018(12):50－55.

[3]王子怡,赵临龙. 巧用仿射变换解决高考中解析几何问题[J]. 中学数学研究(江西),2018(03):43－45.

[4] 2010 届高考数学热点:解析几何[E]. doc https://www.taodocs.com/p－218892229.html.

[5]赵临龙. 一道全国高考数学题解法的面积求法研究[J]. 数学学习与研究,2019(23):149－150.

[6]赵临龙. 圆内接四边形面积最值的理论研究[J]. 河南科学,2011,29(06):643－647.

[7]赵临龙. 封闭二次曲线内接四边形面积最值新探[J]. 河南科学,2011,29(11):1267－1271.

[8]高中数学试题[E]. http://www.manfen5.com/stinfo/gz_sx/SYS20130817124539780780235 7/.

一道高三模拟试题的探究与推广

安徽省砀山中学　(235300)　葛　敏

对一些典型的模拟试题进行深入探究,追根溯源,找到其蕴藏的数学知识、数学方法,不仅可以提升高三复习备考效益,同时也可为复习备考指明方向. 本文对2020 年皖北协作区的一道解析几何试题进行了探究与推广,以供参考.

1. 试题再现

(2020 皖北协作区联考20 题文) 已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 经过点 $A(1, \frac{3}{2})$,离心率为 $\frac{1}{2}$,过右焦点 F 的直线 l 交椭圆于 M, N 两点,交 y 轴于点 E,若 $\overrightarrow{EM} = \lambda_1 \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{EN} = \lambda_2 \overrightarrow{NF}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 试判断 $\lambda_1 + \lambda_2$ 是否是定值. 若是定值,求出该定值,并给出证明;若不是定值,请说明理由.

本题考查了向量、直线方程、椭圆的标准方程及直线与椭圆的位置关系等基础知识,通过研究直线与椭圆的位置关系探索定值问题. 试题重点知识突出,综合性强,解法灵活,不落俗套,是一道不折不扣的好题,对高三的复习备考具有重要的借鉴意义.

2. 解法探究

(1) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) **解法1**:由题意可知,直线 l 的斜率存在,设直线 l 的斜率为 k,则直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$,