也谈齐次化方法在圆锥曲线中的应用

深圳大学数学与统计学院 (518060) 关丽娜* 曹丽华

圆锥曲线中常见于一类问题，这类问题的特点是条件中的两直线斜率之和或之积是一个指定常数. 这种问题的求解方法多种多样，但是采用齐次化方法，可以将这两种题型统一处理. 接下来谈谈齐次化方法在处理圆锥曲线这些问题中的应用.

1. 处理两直线斜率之积为常数的问题

例1 已知椭圆的中心为O，长轴、短轴分别为$2a$、$2b(a>b>0)$，P、Q分别在椭圆上，且$OP\perp OQ$. 求证：$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$为定值.

分析：此题是高中数学选修4－4人教版第15页习题1.31第6小题. 设P、Q坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，由于$OP\perp OQ$，由斜率公式可得$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$. (1)

观察(1)式，并且由韦达定理我们可以联想：我们能不能得到一个关于$\frac{y}{x}$的一个一元二次方程，即

$A(\frac{y}{x})^2+B\frac{y}{x}+C=0$. (2)

使得$\frac{y_1}{x_1}$、$\frac{y_2}{x_2}$是该方程的两个根？如果可以，那么由韦达定理可得$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{C}{A}$. 又由条件可得$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$. 因此有$\frac{C}{A}=-1$.

现在我们假设(2)式是存在的，那么有$Ay^2+Bxy+Cx^2=0$. (3)

也就是说我们需要从已知条件得到(3)式这样一个关于x、y的2次齐次等式，于是便有了下面的齐次化方法：

证明：联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(4)\\ mx+ny=1.(5)\end{cases}$

将(5)两边平方并且代入(4)可得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=(mx+ny)^2$. 整理可得$(\frac{1}{b^2}-n^2)y^2-2mnxy+(\frac{1}{a^2}-m^2)x^2=0$. 即$(\frac{1}{b^2}-n^2)(\frac{y}{x})^2-2mn\frac{y}{x}+(\frac{1}{a^2}-m^2)=0$. 由韦达定理可得$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{\frac{1}{a^2}-m^2}{\frac{1}{b^2}-n^2}$. 由条件又可以得到$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$，所以有$\frac{\frac{1}{a^2}-m^2}{\frac{1}{b^2}-n^2}=-1$，整理得$m^2+n^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$. 由于原点$O$到直线$PQ$的距离$d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，设三角形$OPQ$的面积为$S$时，由$S=\frac{1}{2}OP\times OQ$且$S=\frac{1}{2}d\times PQ$，可得$OP\times OQ=2S$，$PQ=\frac{2S}{d}$. 所以$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{PQ^2}{(OP\times OQ)^2}=\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

评注：这里直线方程可以假设为$mx+ny=1$的原因如下：设PQ一般方程为$Ax+By+C=0$. 因为直线PQ不过原点，所以$C\neq0$. 因此直线PQ方程可化为$mx+ny=1$，其中$m=-\frac{A}{C}$，$N=-\frac{B}{C}$；此外，直线方程的右边化为1，为齐次化方法的灵活应用作准备；再次，由同样的方法我们可以得出以下结论：

结论1 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，直线$l$：$mx+ny=1$与双曲线$C$相交于$P$、$Q$两点，若$OP\perp OQ$，则有$m^2+n^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$.

例2 已知椭圆E：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$的左右顶点分别为$A$，$B$，点$P$为椭圆上异于$A$，$B$的任意一点.

(1) 求直线PA与PB的斜率之积；

(2) 设直线l交椭圆E于M，N两点，且以MN为直径的圆恒过点A. 求证直线l恒过定点，并且求出

* 作者现为硕士研究生，本文通讯作者为曹丽华老师.

此定点的坐标.

解: 仅看问题(2),(1) 略. 根据条件可设直线 l 的方程为 $m(x+\sqrt{3})+ny=1$. 因为 $2x^2+3y^2=2(x+\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+3y^2=2(x+\sqrt{3})^2+3y^2-4\sqrt{3}(x+\sqrt{3})+6$,所以椭圆的方程可以化为 $2(x+\sqrt{3})^2+3y^2-4\sqrt{3}(x+\sqrt{3})=0$.

联立 $\begin{cases} m(x+\sqrt{3})+ny=1, \\ 2({}^{x}+)2+3y^2-4\sqrt{3}(x+\sqrt{3})=0. \end{cases}$

并且齐次化可得 $2(x+\sqrt{3})^2+3y^2-4\sqrt{3}(x+\sqrt{3})[m(x+\sqrt{3})+ny]=0$. 整理可得 $3(\frac{y}{x+\sqrt{3}})^2-4\sqrt{3}(\frac{y}{x+\sqrt{3}})+2-4\sqrt{3}m=0$.

由韦达定理及已知条件可得 $\frac{2-4\sqrt{3}m}{3}=-1$, 解得 $m=\frac{5}{4\sqrt{3}}$,所以直线 l 方程为 $\frac{5}{4\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})+ny=1$. 令 $y=0$,解得 $x=-\frac{\sqrt{3}}{5}$. 即直线 l 恒过定点 $(-\frac{\sqrt{3}}{5},0)$.

评注: 使用齐次化方法时,直线方程中的 x、y 必须化为 $m(x-x_0)+n(y-y_0)=1$ 的形式,其中 (x_0,y_0) 是题目中给定的点. 此时圆锥曲线的方程也需要跟着变式,如上题中的椭圆化为 $2(x+\sqrt{3})^2+3y^2-4\sqrt{3}(x+\sqrt{3})=0$ 的形式.

2. 处理两直线斜率之和为常数的问题

例 3　如图 1 所示,过椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 上的定点 $P(2,1)$ 作倾斜角互补的两直线,设其分别交椭圆 C 于 A、B 两点,求证:直线 AB 的斜率是定值.

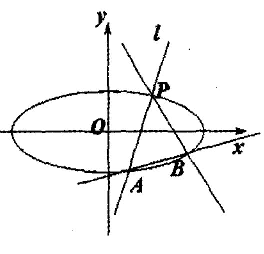

图 1

分析: 设 A、B 坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2),根据条件可得 $k_{AP}+k_{BP}=0$,即 $\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=0$,根据例 1 中的分析知,我们需要构造如下齐次式 $A(y-1)^2+B(x-2)(y-1)+C(x-2)^2=0$.

证明: 设直线 AB 方程为 $m(x-2)+n(y-1)=1$,因为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=\frac{(x-2+2)^2}{8}+\frac{(y-1+1)^2}{2}=\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{4(x-2)}{8}+\frac{2(y-1)}{2}+1$. 所以椭圆方程可化为 $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{4(x-2)}{8}+\frac{2(y-1)}{2}=0$.

联立 $\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{4(x-2)}{8}+\frac{2(y-1)}{2}=0, \\ m(x-2)+n(y-1)=1 \end{cases}$

将其齐次化并且整理可得 $\frac{2n+1}{2}(\frac{y-1}{x-2})^2+2(\frac{n}{4}+\frac{m}{2})(\frac{y-1}{x-2})+\frac{4m+1}{8}=0$.

由韦达定理可得 $\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=-2\frac{\frac{n}{4}+\frac{m}{2}}{\frac{2n+1}{2}}$.

又因为 $\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=0$,所以 $\frac{n}{4}+\frac{m}{2}=0$,所以 $k_{AB}=-\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$. 故直线 AB 斜率为定值,此定值为 $\frac{1}{2}$.

评注: 从上面的解答过程可以看到,条件中斜率之间的关系可以推导出直线方程中 m,n 之间的一个关系式.

3. 处理与斜率之和或者斜率之积相关的问题

例 4　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,以原点 O 为圆心,以椭圆 C 的短半轴长为半径的圆 O 与直线 $l_1:y=x+\sqrt{2}$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设不过原点 O 的直线 l_2 与该椭圆交于 P、Q 两点,满足直线 OP,PQ,OQ 的斜率依次成等比数列,求 ΔOPQ 面积的取值范围.

解: (1) 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,过程略;

(2) 依题意可设直线 l_2 的方程为 $mx+ny=1$,联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2=1, \\ mx+ny=1 \end{cases}$ 并且齐次化可得 $(4n^2-4)(\frac{y}{x})^2+8mn(\frac{y}{x})+4m^2-1=0$. 由韦达定理可得 $k_{OP}\cdot k_{OQ}$

$= \frac{4m^2-1}{4n^2-4}$. 根据条件又有 $k_{OP} \cdot k_{OQ} = k_{PQ}^2$，所以 $\frac{4m^2-1}{4n^2-4} = (-\frac{m}{n})^2$，即 $n = \pm 2m$.

余下略.

参考文献

[1] 徐守军. 巧构"齐次式"解一类解析几何问题[J]. 广东教育(高中版)，2008：21－23.

一道解析几何题的变式拓展

浙江省金华市第六中学　(321000)　虞　懿

浙江省丽水中学　(323000)　曹　斌

每年高考都会留下一份十分宝贵的资源——数学高考试卷，其中许多试题内涵丰富、立意新颖、视角独特，彰显着数学永恒的魅力，也为我们的学习和探究提供了广阔的平台. 2013 年高考江西理科第 20 题就是难得的优质高考试题，文[1] 对此题进行了探究和拓广，本文在此基础上进行变式拓展，得到了几个好的结果，与诸位分享.

文[1] 结论：如图 1，直线 AB 经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的类焦点 $F(m,0)(|m|<a$ 且 $m \neq 0)$，交椭圆于 A、B 两点，交椭圆类焦点 F 对应的类准线：$x=\frac{a^2}{m}$ 于点 M，点 P 是直线 $x=m$ 上的任意一点，则直线 PA、PM、PB 的斜率成等差数列.（证明参见文[1]）

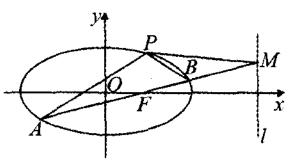

图 1

一道好的试题往往是命题者研究成果的结晶，在一个背景下，交换部分条件和结论，或给出某个问题一般结论的特例，便生成出一道新题，又能挑战你的思维. 笔者结合对相关题目的研究，又做了如下探究：

变式 1　过定点 $M(\frac{a^2}{m},0)(|m|<a$ 且 $m \neq 0)$ 任作一条斜率存在的直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A、B 两点，点 P 是直线 $x=m$ 上的任意一点，则直线 PA、PM、PB 的斜率成等差数列.

证明：设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(m,y_0)(y_0 \in R)$，由题意可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-\frac{a^2}{m})$，代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，整理得 $[(a^2k^2+b^2)m^2]x^2-2ma^4k^2x+a^6k^2-a^2b^2m^2=0$. 其中 $\Delta=4m^2a^8k^4-4(a^2m^2k^2+b^2m^2)(a^6k^2-a^2b^2m^2)=4a^2b^2[a^2m^2k^2(m^2-a^2)+b^2m^4]>0$. 由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{2ma^4k^2}{(a^2k^2+b^2)m^2}$，$x_1 \cdot x_2=\frac{a^6k^2-a^2b^2m^2}{(a^2k^2+b^2)m^2}$. 从

$$而\ k_{PA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-m}=\frac{k(x_1-\frac{a^2}{m})-y_0}{x_1-m}$$

$$=\frac{k(x_1-m)+k(m-\frac{a^2}{m})-y_0}{x_1-m}$$

$$=k+\frac{k(m-\frac{a^2}{m})-y_0}{x_1-m}.$$

同理，$k_{PB}=k+\frac{k(m-\frac{a^2}{m})-y_0}{x_2-m}$，

$k_{PM}=-\frac{my_0}{a^2-m^2}$. 于是 $k_{PA}+k_{PB}=$

$$2k+\frac{k(m-\frac{a^2}{m})-y_0}{x_1-m}+\frac{k(m-\frac{a^2}{m})-y_0}{x_2-m}=$$

$$2k+\left[k(m-\frac{a^2}{m})-y_0\right]\left[\frac{x_1+x_2-2m}{x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2}\right]$$

$$=2k+\left[k(m-\frac{a^2}{m})-y_0\right]\cdot$$

$$\left[\frac{\frac{2ma^4k^2}{(a^2k^2+b^2)m^2}-2m}{\frac{a^6k^2-a^2b^2m^2}{(a^2k^2+b^2)m^2}-\frac{2m^2a^4k^2}{(a^2k^2+b^2)m^2}+m^2}\right]$$

$$=2k+\left[k(m-\frac{a^2}{m})-y_0\right]\cdot$$