调和点列:一道 2017 年北京高考题的背景分析及应用

曾建国
(江西省赣州市赣南师范大学数学与计算机科学学院,341000)

近年来,命题者开始挖掘高等几何中的一些素材来命制高考圆锥曲线试题[1],此类试题也逐渐引起老师们的关注,其中被关注得较多的是具有极线背景的圆锥曲线试题,人们热衷于揭示其背景、研究其变式[2][3][4].事实上,高等几何中可用来命题的素材还有很多,调和点列就是可供挖掘的素材之一.本文通过分析一道 2017 年北京高考卷圆锥曲线试题,揭示其调和点列的背景,并举例说明其应用.

1. 有关概念和性质

定义 1[5][6]　对于线段 AB 的内分点 C 与外分点 D,若 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$,则称 C、D 调和分割线段 AB(或线段 AB 被 C、D 调和分割),或称点列 A、B、C、D 为调和点列.

根据定义 1 易知,若线段 AB 被 C、D 调和分割,则线段 CD 也被 A、B 调和分割.

调和点列与圆锥曲线的极线概念密切相关.事实上,根据高等几何知识我们有:

定义 2[5]　设两点 C、D 的连线与圆锥曲线 Γ 相交于 A、B,若线段 AB 被 C、D 调和分割,则称 C、D 是关于圆锥曲线 Γ 的一对调和共轭点.

定义 3[5]　一点 P 关于圆锥曲线 Γ 的所有调和共轭点的轨迹为一条直线 p,称 p 为点 P(关于 Γ)的极线,点 P 称为直线 p(关于 Γ)的极点(简称为极).

特别地,圆锥曲线焦点的极线就是与之对应的准线.当 P 在 Γ 外时,其极线 p 是从点 P 所引曲线 Γ 的两条切线的切点所确定的直线(即切点弦所在直线)[5].

如图 1,过一点 C 作圆锥曲线 Γ 的割线分别与曲线 Γ 及 C 点的极线交于点 A、B 及 D,则根据上述定义易知,A、B、C、D 为调和点列.

定义 4[5][7]　如图 2,若 A、B、C、D 为调和点列,过此点列所在直线外任一点 P 作射线 PA、PB、PC、PD,则称这四条射线为调和线束.反过来,任一直线与调和线束相交所截的四个点构成调和点列.

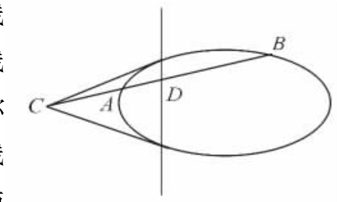

图 1

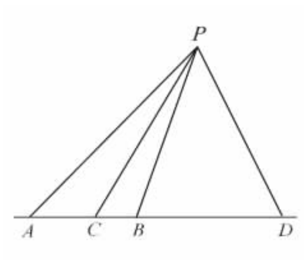

图 2

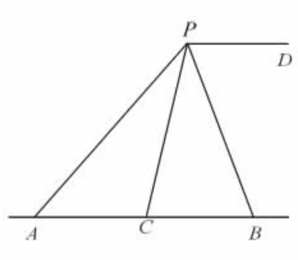

图 3

调和点列有一个特殊性质(参见图 3):

性质 1[5][7]　如果 PA、PB、PC、PD 为调和线束,且 PD 平行于 AB,则 PC 必平分线段 AB.

2. 北京试题剖析

试题　(2017 年北京卷理科 18 题)已知抛物线 C:$y^2=2px$ 过点 $P(1,1)$.过点 $D(0,\frac{1}{2})$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M,N,过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP,ON 交于点 A,B,其中 O 为原点.

(Ⅰ)求抛物线 C 的方程,并求其焦点坐标和准线方程;

(Ⅱ)求证:A 为线段 BM 的中点.

此题似乎并未引起人们的研究兴趣.这大概是因为:一方面试题难度不大(问题(Ⅱ)只需验证 A 为线段 BM 的中点,涉及的都是很普通的计算);另一方面,调和点列和极线在试题中都比较隐蔽,不易被发现.事实上,第(Ⅱ)题的结论正体现了前文的性质 1.

分析与证:(Ⅰ)易求得抛物线的方程为 $y^2=x$.

(Ⅱ)如图 4,容易验证:抛物线上点 $P(1,1)$处的切线恰过点 $D(0,\frac{1}{2})$. 又过 D 点的另一条切线为 y 轴、切点为 O,根据前文有关定义知:OP 是 D 点的极线,设直线 l 交 OP 于 E,则 D,E,M,N 是调和点列. 由定义 4 知,射线 OD,OE,OM,ON 为调和线束,注意到 $OD\,/\!/\,MB$,根据性质 1 就知:A 为线段 BM 的中点.

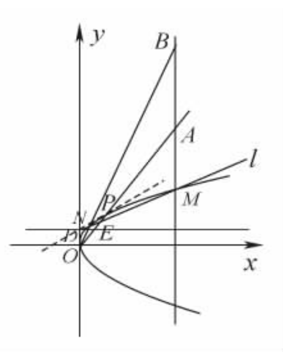

图 4

3. 应用举例

如果去掉抛物线、切线等"包装",上面试题(Ⅱ)的结论实质上就是:

命题 1　如图 5,若 D,E,M,N 是调和点列,O 是直线 DM 外一点,过 M 作直线 $MB\,/\!/\,OD$,设 OE,ON 分别交 MB 于 A,B,则 A 为线段 BM 的中点.

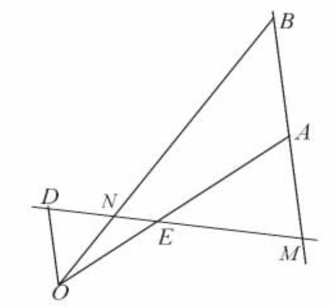

图 5

依据命题 1 来编制试题时,我们只需变换不同的圆锥曲线为载体(以下仅以椭圆为例),另外还可以在调和点列的构造方法上变换花样.

例 1[9] 若 A,B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴(长轴)的两个端点,P 为椭圆上的任意一点(不与 A,B 重合),直线 PA,PB 交长轴(短轴)所在直线于 C,D,则椭圆在点 P 处的切线平分线段 CD.

注:图 6 中,设切线 PQ 交 y 轴于 M,点 M 的极线 PN(平行于 x 轴)交 y 轴于 N,则 M,N,A,B 是调和点列,依据命题 1 知结论成立.

例 2[10]　设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上点 P 处的切线和长轴所在直线的交点为 M,长轴的两端点分别为 A,B,过 M 作长轴的垂线和直线 PA,PB 分别交于 C,D,则 $CM=MD$.

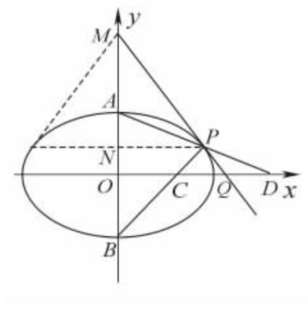

图 6

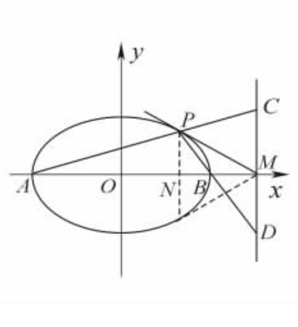

图 7

例 2 中的调和点列是 M,N,A,B,而 $PN\,/\!/\,CD$.

按照上述思路,还可以编出许多问题(如文[11]～[12]),这里就不再赘述了.

参考文献:

[1]　曾建国. 圆锥曲线高考命题热点的变迁[J]. 中学数学研究,2017(4):28－30.

[2]　邵琼. 极点与极线背景下高考圆锥曲线试题研究[J]. 中小学数学(高中版),2016(4):50－52.

[3]　王文彬. 极点、极线与圆锥曲线试题的命制[J]. 数学通讯(下半月刊),2015(4):62－66.

[4]　王雅琪. 高观点下的北京高考解析几何试题[J]. 数学通报,2016(11):28－30.

[5]　朱德祥. 高等几何[M]. 北京:高等教育出版社,1998.

[6]　沈毅. 与调和点列有关的平面几何问题[J]. 中等数学,2009(2):6－10.

[7]　郑春筱. 调和点列的一个特殊性质及应用[J]. 数学通讯(上半月),2017(4):53－55.

[8]　楼可飞. 调和点列在高考试题中的应用[J]. 中学数学(高中版),2012(8):57－58.

[9]　徐文春. 关于有心圆锥曲线切线的一组性质[J]. 数学通讯(下半月),2012(12):36－37.

[10]　(日)笹部贞市郎编,高清仁、舒玉兴等译. 几何学辞典——问题解法[M]. 上海教育出版社,1984:864.

[11]　曾建国. 有心圆锥曲线切线的一个性质的推广[J]. 数学通讯(下半月),2013(5):45－46.

[12]　曾建国. 有心圆锥曲线切线的一个性质再推广[J]. 数学通讯(下半月),2013(12):34－36.

(收稿日期:2017－09－01)