○学习指导○

用韦达定理求解非对称式的常用策略

王冬明

(江苏省沛县歌风中学,221600)

在解析几何中,应用韦达定理结构的对称性进行化简计算,学生是比较熟悉的. 但是,遇到非对称式问题时,有些学生就有点不适应,甚至无从下手. 笔者在高三二轮复习解析专题时,遇到了下面一道典型问题,并且运用自己的思维给出了不同解法,可谓精彩纷呈,特整理出来和大家分享.

题目 如图1,点 A、B、F 分别为椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右、左顶点和左焦点,过点 F 的直线 MN(不与 x 轴重合)交椭圆 C 于 M、N 两点.

(1)若椭圆 C 上的点到左焦点 F 的最大距离与左焦点 F 到椭圆 C 的左准线的距离都为3,求椭圆 C 的标准方程;

(2)若椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{3}$,直线 BN 的斜率为 k_1,直线 AM 的斜率为 k_2,且 $k_1k_2>0$,求 $\frac{k_2}{k_1}$ 的值.

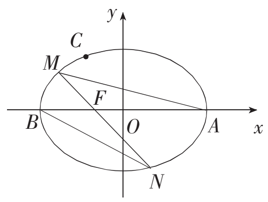

图 1

解 (1)略.

(2)**解法1** 由 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$,得 $a=3c$,故 $b^2=a^2-c^2=8c^2$,从而椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9c^2}+\frac{y^2}{8c^2}=1$,且 $F(-c,0)$,$A(3c,0)$,$B(-3c,0)$.

设 $N(x_1,y_1)$、$M(x_2,y_2)$,直线 AM 的方程为 $x=m_2y+3c$,直线 BN 的方程为 $x=m_1y-3c$,其中 $m_1\neq 0$,$m_2\neq 0$,$k_1=\frac{1}{m_1}$,$k_2=\frac{1}{m_2}$. 联立 $x=m_2y+3c$ 和 $\frac{x^2}{9c^2}+\frac{y^2}{8c^2}=1$,得 $(8m_2^2+9)y^2+48m_2cy=0$,解得 $y_2=\frac{-48m_2c}{8m_2^2+9}$,进而可得交点 $M\left(\frac{27c-24m_2^2c}{8m_2^2+9},\frac{-48m_2c}{8m_2^2+9}\right)$. 同理可求得交点 $N\left(\frac{24m_1^2c-27c}{8m_1^2+9},\frac{48m_1c}{8m_1^2+9}\right)$.

由 $\overrightarrow{MF}=(-c-x_2,-y_2)$,$\overrightarrow{FN}=(c+x_1,y_1)$,$\overrightarrow{MF}\parallel\overrightarrow{FN}$,得 $y_1(-c-x_2)=-y_2(x_1+c)$. 将点 M、N 的坐标代入并化简,得 $16m_2m_1^2-8m_2^2m_1+18m_1-9m_2=0$,即 $(8m_2m_1+9)(2m_1-m_2)=0$. 考虑到 $m_1m_2=\frac{1}{k_1k_2}>0$,得 $2m_1-m_2=0$,即 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{2}$.

评注 若设直线 AM、BN 方程分别为 $y=k_2(x-3c)$,$y=k_1(x+3c)$,只需要将上述过程中 m_2、m_1 用 $\frac{1}{k_2}$、$\frac{1}{k_1}$ 替换,同样可得答案.

解法2 同解法1可得椭圆 C: $\frac{x^2}{9c^2}+\frac{y^2}{8c^2}=1$,$F(-c,0)$,$A(3c,0)$,$B(-3c,0)$.

当直线 $MN\perp x$ 轴时,易知 $M\left(-c,\frac{8}{3}c\right)$,$N\left(-c,-\frac{8}{3}c\right)$,此时 $k_1=-\frac{4}{3}c$,$k_2=-\frac{2}{3}c$,

$\frac{k_2}{k_1}=\frac{1}{2}$.

当直线 MN 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x+c)$，$k\neq 0$. 与 $\frac{x^2}{9c^2}+\frac{y^2}{8c^2}=1$ 联立，得

$$(8+9k^2)x^2+18ck^2x+9c^2k^2-72c^2=0. \quad ①$$

方程①的判别式 $\Delta=36c^2(64k^2+64)>0$. 设 $N(x_1,y_1)$、$M(x_2,y_2)$，则有

$$x_1+x_2=\frac{-18ck^2}{8+9k^2}, x_1x_2=\frac{9c^2k^2-72c^2}{8+9k^2}.$$

由于 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{\frac{y_2}{x_2-3c}}{\frac{y_1}{x_1+3c}}=\frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{x_1+3c}{x_2-3c}$，欲消掉 y_2、y_1，由 M、N 在椭圆上，得 $y_1^2=-\frac{8}{9}(x_1^2-9c^2)$，$y_2^2=-\frac{8}{9}(x_2^2-9c^2)$，于是

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2=\frac{x_2^2-9c^2}{x_1^2-9c^2}\left(\frac{x_1+3c}{x_2-3c}\right)^2$$
$$=\frac{(x_2+3c)}{(x_1-3c)}\cdot\frac{(x_1+3c)}{(x_2-3c)}$$
$$=\frac{x_1x_2+3c(x_1+x_2)+9c^2}{x_1x_2-3c(x_1+x_2)+9c^2}.$$

将 x_1+x_2 和 x_1x_2 表达式代入，可得 $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2=\frac{36k^2c^2}{144k^2c^2}=\frac{1}{4}$，注意到 $k_1k_2>0$，得 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{1}{2}$.

评注　此解法的漂亮之处是通过平方，借助椭圆方程消去 y_1^2、y_2^2 后生成关于 x_1+x_2、x_1x_2 对称式，方便了韦达定理的运用. 本题若用直线方程消元，得

$$\frac{k_2}{k_1}=\frac{x_1x_2+c(x_1+3x_2)+3c^2}{x_1x_2+c(x_2-3x_1)-3c^2},$$

此时需求出方程①的两个根，代入上式化简得出结论，运算较繁琐.

解法3　由 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，$b^2=a^2-c^2=8c^2$，可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{9y^2}{8a^2}=1$.

设点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，则 $k_{BN}k_{AN}=\frac{y_2}{x_2+a}\cdot\frac{y_2}{x_2-a}=\frac{y_2^2}{x_2^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{8}{9}$，可得 $k_1=-\frac{8}{9}\frac{x_2-a}{y_2}$，$k_2=\frac{y_1}{x_1-a}$. 于是

$$\frac{k_2}{k_1}=-\frac{9}{8}\cdot\frac{y_1y_2}{x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2}. \quad ②$$

当 MN 的斜率不存在时，其方程为 $x=-c$，易得 $M\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$，$N\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$，$\frac{k_2}{k_1}=\frac{1}{2}$.

当 MN 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x+c)(k\neq 0)$，与椭圆方程联立，得

$$(8+9k^2)x^2+18k^2cx+9k^2c^2-8a^2=0.$$

于是，有

$$x_1+x_2=\frac{-18k^2c}{8+9k^2}, x_1x_2=\frac{9k^2c^2-8a^2}{8+9k^2}.$$

此时 $y_1y_2=k^2(x_1+c)(x_2+c)=k^2[x_1x_2+c^2+c(x_1+x_2)]=\frac{-8k^2(a^2-c^2)}{8+9k^2}$，代入②，得

$$\frac{k_2}{k_1}=-\frac{9}{8}\cdot\frac{-8k^2(a^2-c^2)}{9k^2(c+a)^2}$$
$$=\frac{a-c}{a+c}=\frac{3c-c}{4c}=\frac{1}{2}.$$

评注　此解法是借助一个常见的结论 $k_{MA}k_{MB}=-\frac{b^2}{a^2}$（$A$、$B$ 是椭圆上关于原点对称的两个点，点 M 是椭圆上异于 A、B 的点），挖掘出 k_1、k_2 之间的联系，方便了韦达定理的运用.

解法4　设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则由 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，易知 $a=3c$，$b=2\sqrt{2}c$.

当 MN 的斜率为零时，不符合 $k_1k_2>0$；当 MN 的斜率不存在时，易知 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{1}{2}$.

当 MN 的斜率存在且不为零时，设其方程为 $x=my-c$，$m=\frac{1}{k}$. 联立直线和椭圆的方程，可得 $(a^2+b^2m^2)y^2-2mcb^2y+c^2b^2-a^2b^2=0$. 设 $N(x_1,y_1)$、$M(x_2,y_2)$，则有 $y_1+y_2=$

灵活建系巧解三角形问题

陈庆华

(江苏省姜堰第二中学,225500)

在解三角形时,正、余弦定理及三角形面积公式给我们提供了很多优秀的题源. 但这些题目带给我们最大的解题障碍就是运算繁琐,这就使简化运算成为我们关心的主题. 那么,如何简化呢? 研究表明,只要我们换个角度,抛弃正、余弦定理及三角形面积公式,根据题目的具体条件,灵活建立直角坐标系,可达到简化运算、优化思维的目的.

例 1 设 $\triangle ABC$ 的面积为 2,若角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c,则 $a^2+2b^2+3c^2$ 的最小值为______.

分析 1 常规思路是从解三角形的角度出发,利用余弦定理及基本不等式进行放缩处理,再构造一个以角为自变量的函数,通过求导得到解决,运算量较大.

解法 1 依题意,由 $\triangle ABC$ 面积为 2,得 $\frac{1}{2}bc\sin A=2$,即 $bc\sin A=4$. 又由余弦定理,得

$$\begin{aligned}&a^2+2b^2+3c^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos A+2b^2+3c^2\\&=3b^2+4c^2-2bc\cos A\\&\geqslant 4\sqrt{3}bc-2bc\cos A\\&=\frac{16\sqrt{3}}{\sin A}-\frac{8\cos A}{\sin A}=\frac{8(2\sqrt{3}-\cos A)}{\sin A}.\end{aligned}$$

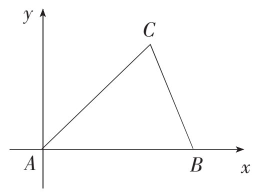

图 1

设函数 $f(\theta)=\frac{2\sqrt{3}-\cos\theta}{\sin\theta}(0<\theta<\pi)$,则 $f'(\theta)=\frac{1-2\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta}$. 令 $f'(\theta)=0$,得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

设 $\cos\theta_0=\frac{\sqrt{3}}{6}(0<\theta_0<\pi)$,则 $\sin\theta_0=\frac{\sqrt{33}}{6}$,且 $f(\theta)$ 在 $(0,\theta_0)$ 单调减,在 (θ_0,π) 单调增,故 $f(\theta)\geqslant f(\theta_0)=\frac{11\sqrt{3}}{6}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$,当且仅当 $\sqrt{3}b=2c$,$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时等号成立.

$\frac{2mcb^2}{a^2+b^2m^2}$,$y_1y_2=\frac{c^2b^2-a^2b^2}{a^2+b^2m^2}=\frac{-b^4}{a^2+b^2m^2}$.

由于 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{x_1+a}{x_2-a}=\frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{my_1-c+a}{my_2-c-a}=\frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{my_1+2c}{my_2-4c}=\frac{my_1y_2+2cy_2}{my_1y_2-4cy_1}$,又注意到 $\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\frac{2mcb^2}{-b^4}=\frac{m}{-4c}$,即 $my_1y_2=-4c(y_1+y_2)$,可得 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{-(4cy_1+2cy_2)}{-(8cy_1+4cy_2)}=\frac{1}{2}$.

评注 此解法由条件和结论综合考虑问题,思维独特,独辟蹊径,整体构造巧妙.