高观点下圆锥曲线一组性质的统一

曾建国

（赣南师范学院数学与计算机科学学院 341000）

文[1]得到与圆锥曲线极点和极线有关的一个"等角定理".

命题 1 若 $E(t,0)(t\neq 0)$ 为椭圆(或双曲线)内一点,直线 AB(非 x 轴)过点 $P\left(\frac{a^2}{t},0\right)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$(或双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$)交于不同的两点 A,B,则直线 EA,EB 与 x 轴所成的角(锐角)相等.

命题 2 若 $E(t,0)$ 为抛物线内一点,直线 AB 过点 $P(-t,0)$,且与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于不同的两点 A,B,则直线 EA,EB 与 x 轴所成的角相等.

文[2]、[3]、[4]各自得到与圆锥曲线相关的"等差定理".

命题 3 直线 AB 过点 $P(t,0)(0<|t|<a)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$(或双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$)交于不同的两点 A,B,点 $E\left(\frac{a^2}{t},n\right)$ 是极线 $x=\frac{a^2}{t}$ 上的任意一点,则直线 EA、EP、EB 的斜率成等差数列.

命题 4 直线 AB 过点 $P(t,0)(t>0)$,且与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于不同的两点 A,B,点 $E(-t,n)$ 是极线 $x=-t$ 上任意一点,则直线 EA、EP、EB 的斜率成等差数列.

文[4]不仅得到上面的定理 3 和定理 4,还得到有关直线斜率的倒数成等差数列的许多定理和推论,这里只列出椭圆中的一个,其余结论都类似.

命题 5 直线 AB 过点 $P(0,t)(t\neq 0,t\neq\pm b)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于不同的两点 A,B,点 E 是直线 $y=\frac{b^2}{t}$ 上的任意一点,则直线 EA、EP、EB 的斜率的倒数成等差数列.

经笔者研究发现,上述性质密切相关,它们都可以看作二次曲线(也包括圆)下述性质的各种特例(参看图 1).

定理 1 在直角坐标平面内,设 P 是不在二次曲线 Γ 上的一点,直线 p 是点 P 的极线,E 是直线 p 上任一点,过点 P 的直线交 Γ 于两点 A、B,设直线 EA、EB、EP 和直线 p 的斜率依次为 k_1,k_2,k_3 和 k_4,则有 $\frac{(k_3-k_1)(k_4-k_2)}{(k_4-k_1)(k_3-k_2)}=-1$.

为了证明这个统一的性质,需要用到高等几何的简单知识.

线束的交比 在直角坐标系中,若直线 a,b,c,d 的斜率依次为 k_1,k_2,k_3,k_4,则四直线的交比为

$$(ab,cd)=(k_1k_2,k_3k_4)=\frac{(k_3-k_1)(k_4-k_2)}{(k_4-k_1)(k_3-k_2)}.$$

引理 1(完全四线形的调和性)通过完全四线形的每个顶点有一个调和线束(四直线的交比等于-1),其中一对线偶是过此点的两边;另一对线偶,一条是对顶边,另一条是这个顶点与对顶三线形的顶点的连线.

例如,图 2 中,有 $E(AB,PH)=-1$ 等.

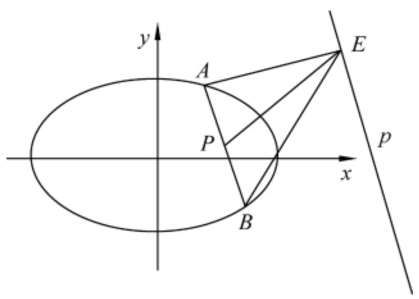

图 1

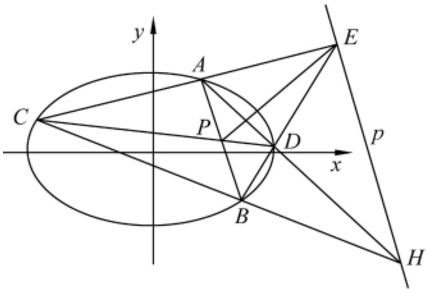

图 2

二次曲线极线的作图：如图 3，P 为不在二次曲线 Γ 上的点，过点 P 引两条割线依次交 Γ 于四点 E、F、G、H，连接 EH、FG 交于 N，连接 EG、FH 交于 M，则 MN 为点 P 的极线. 若 P 为二次曲线 Γ 上的点，过点 P 的切线即为点 P 的极线.

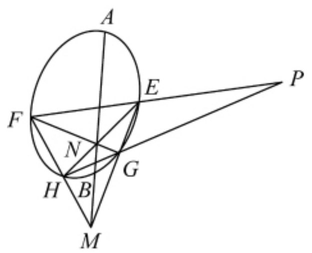

图 3

由上面的作图可知，PM 为点 N 的极线，PN 为点 M 的极线，MNP 称为自极三角形.

上述内容详见于文[5]或《高等几何》课本[6].

定理 1 证明　如图 2，设 EA，EB 分别交二次曲线 Γ 于 C，D. 可以证明：C、P、D 三点共线.

事实上，假设 CP 交 Γ 于 D'，连 BD' 与直线 EAC 交于点 E'，根据二次曲线极线的作图可知，E' 在 P 点的极线 p 上，表明 E' 就是 E，则 D' 就是 D，也即 C、P、D 三点共线.

同理可知，AD 与 BC 的交点 H 在 p 上.

根据引理 1 及线束交比的定义知，

$$F(AB,PH)=(k_1k_2,k_3k_4)$$
$$=\frac{(k_3-k_1)(k_4-k_2)}{(k_4-k_1)(k_3-k_2)}=-1.$$ 证毕.

下面说明前文所述诸命题均为定理 1 的特例.

在定理 1 中，若极线 p 垂直于 x 轴，则 $k_4=\infty$，此时交比为

$$(k_1k_2,k_3\infty)=(k_1k_2k_3)=\frac{k_3-k_1}{k_3-k_2}=-1.$$

($(k_1k_2k_3)$ 为简比[6])

即有 $2k_3=k_1+k_2$，即直线 EA、EP、EB 的斜率成等差数列. 这就是命题 3 和命题 4.

在定理 1 中，若极线平行于 x 轴，则 $k_4=0$，此时交比为 $\frac{(k_3-k_1)(0-k_2)}{(0-k_1)(k_3-k_2)}=-1$，即有 $\frac{2}{k_3}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$，即直线 EA、EP、EB 的斜率的倒数成等差数列. 这就是命题 5(包括文[4]的其他结论).

命题 1、命题 2 分别是命题 3、命题 4 的特例，这里仅以椭圆的情形加以说明.

根据定理 1，命题 3 中无需限制 $0<|t|<a$，可改为 $0<|t|\neq a$ 结论仍成立. 即有：

命题 3′　直线 AB 过点 $P(t,0)(0<|t|\neq a)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于不同的两点 A，B，点 $E\left(\frac{a^2}{t},n\right)$ 是极线 $x=\frac{a^2}{t}$ 上的任意一点，则直线 EA、EP、EB 的斜率成等差数列.

在命题 3′中，当 $|t|>a$ 时，点 $P(t,0)$ 在椭圆外，极线 $p:x=\frac{a^2}{t}$ 与椭圆相交. 取 E 为极线 p 上特殊点 $\left(\frac{a^2}{t},0\right)$(如图 4)，根据命题 3′知，直线 EA、EP、EB 的斜率成等差数列. 即有 $2k_3=k_1+k_2$. 但此时 EP 的斜率 $k_3=0$，所以有 $k_1=-k_2$.

表明：直线 EA，EB 与 x 轴所成的角(锐角)相等. 这正是命题 1 的结论.

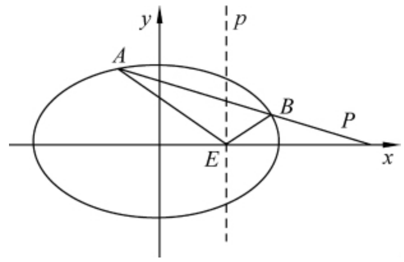

图 4

本文定理 1 内涵丰富，考察其特例，还可以得到许多新命题. 肯定也能从中编拟出一些圆锥曲线试题.

参考文献

1　俞永锋. 与圆锥曲线极点和极线有关的一个等角定理[J]. 数学通讯，2010，6(下半月)

(下转第 62 页)

一个无理不等式的修正

姜坤崇

（上海市宝山区宝林路宝林六村42号101室 201999）

笔者拜读了文献[1]，受益匪浅，同时发现文中给出的一个无理不等式有误，这个不等式是：

深化3 设 a,b,c 是正实数，$-2<\lambda<2$，求证：

$$\sqrt{(a^2+\lambda ab+b^2)(b^2+\lambda bc+c^2)}+\sqrt{(b^2+\lambda bc+c^2)(c^2+\lambda ca+a^2)}+\sqrt{(c^2+\lambda ca+a^2)(a^2+\lambda ab+b^2)}\geqslant(a^2+b^2+c^2)+(1-\lambda)(ab+bc+ca). \quad (*)$$

由于证明中将恒等式 $a^2+\lambda ab+b^2=\frac{2+\lambda}{4}\cdot(a+b)^2+\frac{2-\lambda}{4}(a-b)^2$ 误写为 $a^2+\lambda ab+b^2=\frac{2-\lambda}{4}(a+b)^2+\frac{2+\lambda}{4}(a-b)^2$，因此不等式（$*$）应修正为

设 a,b,c 是正实数，$-2<\lambda<2$，求证：

$$\sqrt{(a^2+\lambda ab+b^2)(b^2+\lambda bc+c^2)}+\sqrt{(b^2+\lambda bc+c^2)(c^2+\lambda ca+a^2)}+\sqrt{(c^2+\lambda ca+a^2)(a^2+\lambda ab+b^2)}\geqslant(a^2+b^2+c^2)+(1+\lambda)(ab+bc+ca). \quad (**)$$

证明 实施配方变形，得

$$a^2+\lambda ab+b^2=\frac{2+\lambda}{4}(a+b)^2+\frac{2-\lambda}{4}(a-b)^2,$$

于是，可构造复数

$$z_1=\frac{\sqrt{2+\lambda}}{2}(a+b)+\frac{\sqrt{2-\lambda}}{2}(a-b)i,$$

$$z_2=\frac{\sqrt{2+\lambda}}{2}(b+c)+\frac{\sqrt{2-\lambda}}{2}(b-c)i,$$

$$z_3=\frac{\sqrt{2+\lambda}}{2}(c+a)+\frac{\sqrt{2-\lambda}}{2}(c-a)i.$$

易算得 $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=(a^2+b^2+c^2)+(1+\lambda)(ab+bc+ca)$.

从而，不等式（$**$）的左边 $=|z_1||z_2|+|z_2||z_3|+|z_3||z_1|$

$$=|z_1z_2|+|z_2z_3|+|z_3z_1|$$

$$\geqslant|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$$

$$=|(a^2+b^2+c^2)+(1+\lambda)(ab+bc+ca)|$$

$$\geqslant(a^2+b^2+c^2)+(1+\lambda)(ab+bc+ca),$$

故不等式（$**$）成立.

文[1]中的问题6及推论1也分别应修正为（在（$**$）式中分别令 $\lambda=-1$、1 的结论）：

设 a,b,c 是正实数，则

$$\sqrt{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}+\sqrt{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}+\sqrt{(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

设 a,b,c 是正实数，则

$$\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)}+\sqrt{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}+\sqrt{(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)}\geqslant(a+b+c)^2.$$

参考文献

1 安振平. 一类无理不等式的深入探究[J]. 数学通报，2011，12：55－56，60

（上接第61页）

2 张留杰，李慧. 圆锥曲线的一个性质的证明与推广[J]. 中学数学(高中版)，2009，6

3 俞永锋. 与圆锥曲线极点和极线有关的一个统一等差定理[J]. 数学通讯，2010，11(下半月)

4 舒金根. 圆锥曲线中的等差数列[J]. 数学通讯，2010，10(下半月)

5 王兴华. 漫谈圆锥曲线的极点与极线——两高考试题的统一背景与解法[J]. 中学数学教学，2006，6

6 朱德祥. 高等几何[M]. 北京：高等教育出版社，1998