椭圆中斜率比值为定值与直线过定点问题

田朋朋

(首都师范大学数学科学学院,北京 100048)

定点定值是圆锥曲线中常见的问题,也是重点考查的问题之一.比较常见的问题有以两直线斜率之积为定值、两直线斜率之和为定值引出的直线过定点或者直线定向.然而若已知两直线的斜率比值为定值,能引出直线过定点的结论吗?或者若已知直线过定点,能引出直线斜率比值为定值的结论吗?本文分别对此进行了探究.

1 斜率比值为定值引出的直线过定点

结论1 如图1,已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,点 $A(-x_0,-y_0)$,$B(x_0,y_0)$ 为椭圆上关于原点对称的两点,点 C,D 为椭圆 E 上的两个动点(均不与 A,B 重合),记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2,且满足 $k_1=\lambda k_2$(λ 为定值且 $\lambda\neq-1$),则直线 CD 过定点 $(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_0,-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}y_0)$.

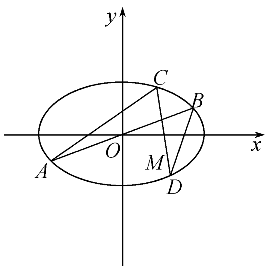

图1

证明 设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则直线 CD 的方程为:

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

因为 $k_1=\lambda k_2$,所以有

$$\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\lambda\ \frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}. \quad ①$$

因为 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{y_2+y_0}{x_2+x_0}=-\frac{b^2}{a^2}$,所以有

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\lambda=\frac{y_2+y_0}{x_2+x_0}. \quad ②$$

由①可得

$$\lambda x_1y_2-x_2y_1=\lambda x_1y_0-x_0y_1-\lambda y_2x_0+y_0x_2+(\lambda-1)x_0y_0. \quad ③$$

由②可得

$$\lambda x_2y_1-x_1y_2=x_1y_0-\lambda x_0y_1-y_2x_0+\lambda y_0x_2+(\lambda-1)x_0y_0. \quad ④$$

③减④得

$$(\lambda+1)(x_1y_2-x_2y_1)=(1-\lambda)x_0(y_2-y_1)+(1-\lambda)y_0(x_2-x_1).$$

故 $$x_1y_2-x_2y_1=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_0(y_2-y_1)+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot y_0(x_2-x_1), \quad ⑤$$

所以直线 CD 的方程即为:

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_0(y_2-y_1)-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}y_0(x_2-x_1)=0,$$

故直线 CD 过定点 $(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_0,-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}y_0)$.证毕.

观察该定点坐标,可知该定点在直线 $y=-\frac{y_0}{x_0}x$ 上.如图2,作点 $B(x_0,y_0)$ 关于 x 轴的对称点 $B'(x_0,-y_0)$,则定点在直线 OB' 上.直观上可看出此定点即为直线 OB' 与直线 CD 的交点,即图2中的点 M.

(下转第8页)

中学生数学 · 2020年7月上 · 第637期(高中)

立体几何中有关动点的最值问题的求解

张文琴[1]，许零筝[2]

(1.台州市第一中学，浙江 台州 318000；2.浙江师范大学初阳学院，浙江 金华 321004)

动点问题是立体几何知识中的一类典型问题，是高考命题的热点，也是难点所在.由于点的位置变化复杂，需要用动态的方式思考更多的位置关系和数量关系，同学们往往觉得很难，无从下手.而题型又往往以填空题形式出现，并处于填空题的压轴位置，要想解决这类问题，需要充分理解题意合理转化.本文将运用转化思想对立体几何中的动点问题进行探索，提供三种解决此类问题的方法.

1 将立体图形展开转化为平面图形，通过解三角形求解

例1 如图1，在直三棱柱 $ABC-DEF$ 中，若上底面 ABC 为直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=6$，$BC=CF=\sqrt{2}$，点 P 是线段 BF 上的一动点，则 $CP+PD$ 的最小值为________.

(下转第9页)

(上接第7页)

若结论1中的点 A,B 为椭圆 E 的左右顶点，则直线 CD 过定点 $\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}a,0\right)$，此时定点在 x 轴上.

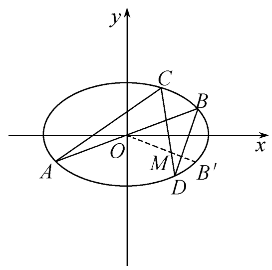

图2

若将结论1中的条件与结论互换，也能得到由直线过定点引出的斜率比值为定值的结论.如下：

2 直线过定点引出的斜率比值为定值

结论2 如图2，已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，点 $A(-x_0,-y_0)$，$B(x_0,y_0)$ 为椭圆上关于原点对称的两点，过定点 $M(mx_0,-my_0)$ 的(m 为定值且 $m\neq-1$)直线 l 交椭圆 E 于 C,D 两点(均不与 A,B 重合)，记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2，则 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\frac{1-m}{1+m}$.

证明 如图2，设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，因为 C,D,M 三点共线，所以有

$$\frac{y_1+my_0}{x_1-mx_0}=\frac{y_2+my_0}{x_2-mx_0}，即$$

$$x_1y_2-x_2y_1=mx_0(y_2-y_1)+my_0(x_2-x_1). \quad ⑥$$

假设 $\frac{k_1}{k_2}$ 存在且为定值 λ，仿照结论1的证明过程，可得

$$x_1y_2-x_2y_1=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}x_0(y_2-y_1)+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}y_0\cdot(x_2-x_1). \quad ⑦$$

结合⑥式与⑦式，可得 $m=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$，即 $\lambda=\frac{1-m}{1+m}$.因此假设成立，$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\frac{1-m}{1+m}$.证毕.

若结论2中的点 A,B 为椭圆 E 的左右顶点，则定点 M 的坐标为 $(ma,0)$，在其他条件不变的情况下，$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $\frac{1-m}{1+m}$ 的结论也不发生改变.

(责审 连四清)