利用二次曲线系方程巧解定点、定值问题

——解析几何专题复习策略

李永波　陈国良

（江苏省沙溪高级中学，江苏 太仓　215421）

摘　要：在高中解析几何中，陆续出现了直线系方程，圆系方程，圆锥曲线中的共渐近线的双曲线系等曲线系方程.在高三二轮专题复习中，利用二次曲线系方程巧解定点、定值问题，不仅可以简化计算，更能让学生站在更高的角度看透数学问题的本质，发展学生的解题思维，优化方法方能简化运算，谋定而后动，这就是解析几何培养学生数学思维品质之所在.

关键词：定点问题　二次曲线系方程　直线

在高中解析几何中，陆续出现了直线系方程，圆系方程，圆锥曲线中的共渐近线的双曲线系等曲线系方程. 从中可以归纳得出这样的结论：

对于曲线C_1：$f_1(x,y)=0$和曲线C_2：$f_2(x,y)=0$，则曲线$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$是与曲线$C_1$，$C_2$有关的曲线系方程.当曲线$C_1$，$C_2$有公共点$P(x_0,y_0)$时，曲线系也过点$P(x_0,y_0)$.

一、由教材出发，寻根溯源

我们先来看看教材中的例题.

引例1（苏教版必修2，2.1.4两条直线交点的例2）.直线l经过原点，且经过另两条直线$2x+3y+8=0$，$x-y-1=0$的交点，求直线l的方程.

教材的解法为求出两条直线的交点，再求直线l.换成下面的变式：

引例1变式.直线l经过点(2，1)，且经过另两条直线$11x+13y+8=0$，$8x-9y-1=0$的交点，求直线l的方程.

不难发现教材解法的问题是计算量偏大.此时，若采用直线系方程，即设所求直线l方程为：$11x+13y+8+\lambda(8x-9y-1)=0$，将$x=2$，$y=1$代入求出λ的值为$-\frac{43}{6}$，回代即得直线l的方程.

再来看一个教材中的问题.

引例2（苏教版必修2，2.2.3圆与圆的位置关系的习题2.2(2)思考·运用第6题）.已知一个圆经过直线l：$2x+y+4=0$与圆C：$x^2+y^2+2x-4y+1=0$的两个交点，并且有最小面积，求此圆的方程.

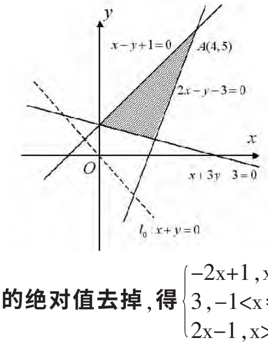
常规解法依然是求出直线和圆两个交点，则所求圆是以这两个点为直径的圆.此法的症结依然是在求交点上，如果消元后无法十字相乘，那么运算量就会很大.但是我们采用曲线

例8：若实数x，y满足不等式组$\begin{cases}x+3y-3\geqslant 0\\2x-y-3\leqslant 0\\x-y+1\geqslant 0\end{cases}$，则$x+y$的最大值为（　　）

(A)9　(B)$\frac{15}{7}$　(C)1　(D)$\frac{7}{15}$

本题主要考查了平面区域的二元一次不等式组，以及简单的转化思想和数形结合的思想，画出不等式组表示的平面区域，再利用图像求$x+y$的最大值.

令$z=x+y$，则$y=-x+z$，z表示过可行域内点斜率为-1的直线在y轴上的截距.由图可知当向上平移l_0使它过点A(4，5)时，$z_{max}=9$.

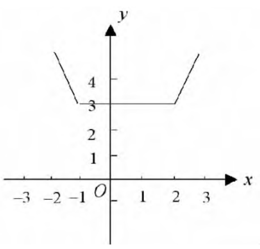


其方法是 (1) 画可行域时："直线定界、特殊点定域". (2)寻找目标函数的最值时，应先指明它的几何意义，这样才能找到相应的最值.

例9：求函数$y=|x+1|+|x-2|$的值域.

解：将原函数的解析式中的绝对值去掉，得$\begin{cases}-2x+1,x\leqslant -1,\\3,-1<x\leqslant 2,\\2x-1,x>2,\end{cases}$

作出图像（如图），显然$y\geqslant 3$.



所以函数的值域是[3，+∞).

六、利用函数的单调性求函数的值域

例10：某商场销售某种商品的经验表明，该商品每日的销售量y（单位：千克）与销售价格x（单位：元/千克）满足关系式$y=\frac{a}{x-3}+10(x-6)^2$，其中$3<x<6$，a为常数，已知销售价格为5元/千克时，每日可售出该商品11千克.

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）若该商品的成品为3元/千克，试确定销售价格x的值，使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

解：（Ⅰ）因为$x=5$时$y=11$，所以$\frac{a}{2}+10=11\Rightarrow a=2$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知该商品每日的销售量$y=\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2$，所以商场每日销售该商品所获得的利润：

$$f(x)=(x-3)\left[\frac{2}{x-3}+10(x-6)^2\right]=2+10(x-3)(x-6)^2,3<x<6;$$

$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]-30(x-4)(x-6)$，令$f'(x)=0$得$x=4$.

函数f(x)在(3，4)上递增，在(4，6)上递减，所以当$x=4$时，函数f(x)取得最大值42.

答：当销售价格$x=4$时，商场每日销售该商品所获得的利润最大，最大值为42.

求函数值域的方法除了以上介绍的几种之外，还有很多，比如：基本不等式法，利用导数法，判别式法等.在求解函数值域的过程中，同学们应该认真审题，寻找迅速求解的一种方法.它所涉及的知识面广，方法灵活多样，在高考中经常出现，占有一定的地位，若方法运用适当，就能起到简化运算过程，避繁就简，事半功倍的作用.各种题目难易程度相差很大，方法灵活多样，要做到迅速寻求最佳求解方法，必须吃透课本上的例题，熟练数学基本概念，全面系统掌握基本知识和基本技能.

总之，数学学习重在掌握思考方法、思维方式，要想掌握好数学，平时学习中应善于观察、总结，并做到举一反三.

参考文献：

[1]任志鸿主编.赢在高考.2015.

系方程，先设过直线和圆两交点的圆方程为：$x^2+y^2+2x-4y+1+\lambda(2x+y+4)=0$，再配方得到圆心$(-1-\lambda,\frac{4-\lambda}{2})$，利用圆心在直线$l:2x+y+4=0$上就可以确定$\lambda$，进而求出圆的方程.

这两个教材上的题目的各种解法其实在一轮的教学中几乎所有的教师都渗透进去了，学生也知道了“直线系方程和圆系方程”的应用.基础较好的学生觉得今天的内容有点奇怪，在他们的意识里，今天应该是圆锥曲线综合专题，强大的韦达定理，繁琐的运算怎么还没出现？

二、展示例题，探索创新

例1：已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左顶点为A，过点A作两条互相垂直的弦AM，AN交椭圆于两点.

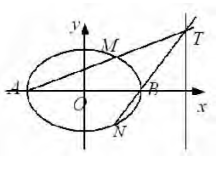
(1)当直线AM的斜率为1时，求点M的坐标；

(2)当直线AM的斜率变化时，直线MN是否过x轴上的一定点，若过定点，请给出证明，并求出该定点；若不过定点，请说明理由.

此类题型，学生早已遇见多次，大部分学生留下的唯一印象就是理解简单“计算烦”.他们的具体思路是，先解决第一问中的点$M(-\frac{6}{5},\frac{4}{5})$；设直线$AM:y=k(x+2)$代入椭圆化简得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，因为此方程有一个根为$-2$，则$x_M=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$，同理$x_N=\frac{2k^2-8}{k^2+4}$，由(1)知若存在定点，必为点$P(-\frac{6}{5},0)$；当直线MP，NP斜率均存在时，$K_{MP}=\frac{y_M}{x_M+\frac{6}{5}}=\frac{k(\frac{2-8k^2}{1+4k^2}+2)}{\frac{2-8k^2}{1+4k^2}+\frac{6}{5}}=\frac{5k}{4-4k^2}$，以$-\frac{1}{k}$代k，化简得$K_{NP}=\frac{5k}{4-4k^2}$，所以M，N，P三点共线，所以直线MN过定点$P(-\frac{6}{5},0)$.这样的解题思路可能是使用功能强大的韦达定理方法中最简单的一种，至少避免了求直线MN方程.

但也有个别学生采用设曲线系方程的方法，大致思路为：设直线$AM:y=k_1(x+2)$，$AN:y=k_2(x+2)$，则过M，N，A的二次曲线方程可设为$[y-k_1(x+2)][y-k_2(x+2)]+\lambda(\frac{x^2}{4}+y^2-1)=0$(其中$k_1k_2=-1$)，由于两直线及椭圆都过点$(-2,0)$，故左边式子中必含有式子$(x+2)$，则可以得到$\lambda=-1$，化简可得$(x+2)[-(x+2)-y(k_1+k_2)+\frac{1}{4}(2-x)]=0$，则直线MN方程为$-(x+2)-y(k_1+k_2)+\frac{1}{4}(2-x)=0$，当令$y=0$时，等式恒成立(与斜率变化无关)得$x=-\frac{6}{5}$.其余学生当时有点匪夷所思，但给几分钟时间，很多人都能懂，但谈不上使用.

例2：(2010江苏卷第三问)在平面直角坐标系xoy中，如图，已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右顶点为A，B，右焦点为F.设过点$T(t,m)$的直线TA，TB与椭圆分别交于点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，其中$m>0$，$y_1>0$，$y_2<0$.



(3)设t=9，求证：直线MN必过轴上的一定点(其坐标与m无关).

学生在处理该题时，大都是奔着求点而去的.而直线AM，BN过的分别是A，B，故需要二次韦达定理，分别求M，N，然后求直线MN，整理得定点坐标，思路还是很清晰的，不过一般求出两点M，N后就放弃了，庞大的计算量还是难倒了绝大部分同学.但此题貌似由于A，B点不同，但实际上是与案例一是相似的，只需要一步转化.由$K_{AM}\cdot K_{BM}=-\frac{5}{9}$，可以得到$K_{BM}\cdot K_{BN}=-\frac{10}{9}$，记$K_{BM}$，$K_{BN}$为$k_1$，$k_2$，则直线$BM:y=k_1(x-3)$，$BN:y=k_2(x-3)$，其中$k_1k_2=-\frac{10}{9}$，则可设过点B，N，M三点的二次曲线方程为：$[y-k_1(x-3)][y-k_2(x-3)]+\lambda(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}-1)=0$，将$k_1k_2=-\frac{10}{9}$代入，因为左边式子中必含有式子$(x-3)$，则可以得到$\lambda=-5$，化简可得$(x-3)[-y(k_1+k_2)-\frac{10}{9}(x-3)-\frac{5}{9}(x+3)]=0$，所以直线MN方程为$-y(k_1+k_2)-\frac{10}{9}(x-3)-\frac{5}{9}(x+3)=0$，要与斜率无关，只需$y=0$就有$x=1$；这样就达到了化归效果.当然，如果不转化到同过点B，也可以操作，只是学生理解起来有难度.设直线$AM:y=\frac{m}{12}(x+3)$，$BN:y=\frac{m}{6}(x-3)$，则可设过A，B，M，N四点的二次曲线方程为$[y-\frac{m}{12}(x-3)][y-\frac{m}{6}(x-3)]+\lambda(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}-1)=0$整理可得$(1+\frac{\lambda}{5})y^2-\frac{m}{12}y(3x-3)+(\frac{m^2}{72}+\frac{\lambda}{9})x^2-\lambda-\frac{m^2}{8}=0$，方程表示双直线AB，MN，而直线$AB:y=0$，则该二次方程必定不含$x^2$项和常数项，所以$\lambda=-\frac{m^2}{8}$，整理得到$y[(1-\frac{m^2}{40})y-\frac{m}{12}(3x-3)]=0$，得到两直线$AB:y=0$和直线$MN:(1-\frac{m^2}{40})y-\frac{m}{12}(3x-3)=0$要与m无关，只需$y=0$且$x=1$即可.

关于双直线方程的理解，其实在教材线性规划中也是有体现的，如不等式$(x-y-1)(x+y+3)\geqslant0$表示的区域实际上是两直线相交后的一个对顶区域，把“$\leqslant$”改成“=”，那么就表示了两条直线，把$(x-y-1)(x+y+3)=0$打开就可以得到二次曲线的方程形式，这样学生就不难懂了.

三、变式拓展、巩固强化

例3：在平面直角坐标系xoy中，已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的左、右顶点为A，B，直线l过点$P(1,0)$与椭圆交于M，N，直线AM，BN交于点Q，求证：Q在一定直线上.

沿用上述设曲线系方程的方法，本题将迎刃而解.设$Q(m,n)$，则直线$AM:y=\frac{n}{m+2}(x+2)$，$BN:y=\frac{n}{m-2}(x-2)$，设过点A，B，M，N的双直线方程为：$[y-\frac{n}{m+2}(x+2)][y-\frac{n}{m-2}(x-2)]+\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-1)=0$整理得到

$$(1+\frac{\lambda}{2})y^2-y\left[\frac{n(x-2)}{m-2}+\frac{n(x+2)}{m+2}\right]+(\frac{n^2}{m^2-4}+\frac{\lambda}{4})x^2-(\lambda+\frac{4n^2}{m^2-4})=0$$

，方程表示双直线AB，MN，而直线$AB:y=0$，则该二次方程必定不含x^2项和常数项故$\lambda=-\frac{4n^2}{m^2-4}$，由此可以得到直线MN方程：$(1+\frac{\lambda}{2})y=\frac{n(x-2)}{m-2}+\frac{n(x+2)}{m+2}$过点$(1,0)$就可以求出$m=4$，所以点Q在定直线$x=4$上.

上述的几个案例均通过构思设曲线系方程的方法，避开了使用韦达定理的复杂计算.设出来的曲线系方程含有待定系数“λ”，我们可以先计算出待定系数λ的值，更多时候设而不求，因为这个待定系数对整个多项式的x，y，xy没有贡献；要联系几何意义，知道它表示什么曲线.要表示这种曲线，就必须满足什么条件，由此直接得到系数间的一些关系，从而简化运

高中数学教学中数形结合思想的应用探析

孙美荣

(左云县高级中学校,山西 左云 037100)

摘 要:数学基础知识教学和数学思想方法教学是贯穿于高中数学教学的两条主线。其中,数学思想方法是指从数学角度思考问题的思想和方法,是人们长期积累的结果。由于数学思想方法隐藏于数学基础知识中,使得教师和学生很容易忽视,因此要注重对数学教材中所蕴含的数学思想方法进行挖掘,尤其要注重对数形结合思想的挖掘,指导学生理解和运用数形结合思想,提高学生的数学思维能力。

关键词:高中数学 数形结合思想 教学应用

一、数形结合思想的含义

1964年我国著名的数学家华罗庚指出,"数与形是相互依存"的关系。数形结合一词一经提出变得到不同领域的教学实践者和教育家的普遍认同。一些人开始将其作为一种数学思想方法进行研究,一些数学教师将其作为一种解答题目的方法或策略向学生传授。从字面上理解,数形结合即是将"数"与"形"相互结合,然后运用到数学的教学与学习中。但是,对于数形结合的定义有多种理解。罗增儒认为:"数形结合思想是一种极富数学特点的信息转换,既有用数的抽象性质来说明形象的事实,有用图形的直观性质来说明数的事实。"张同君认为:"数形结合,调用了几何和代数的双面工具,有助于揭露问题的深层结构,实现解答题目的目的。"综合而言,笔者认为,数形结合是将代数关系和几何图形相互联系起来,本质是二者的结合,是学习高中数学的一种重要思想,也是解答数学问题的重要方法。

二、数形结合思想的教学原则

1.目标性原则。

在新课程标准所提出的三维教学目标中,过程和方法目标即是指学生在学习中掌握哪些数学思想的具体目标。目前,数学思想教学在高中数学教学中还没有得到全面落实,很重要的一个影响因素,就是目前高中数学思想教学缺乏明确的目标,因此在高中数学教学中应用数形结合思想首要遵循的原则是目标性原则。

2.渗透性原则。

在数形结合思想的教学中,要以知识为载体,在日常教学中选择恰当时机渗透。在数形结合思想的渗透中,要注意两点:首先要注重对数形结合思想的挖掘,由于数形结合思想具有一定的内隐性,要想渗透它就必须从数学知识中进行提炼和挖掘;其次要把握渗透方法。数形结合思想的教学难以在短时间内取得成效,需要学习者长时间数学知识的积累及教师长期的培养。

3.学生参与原则。

数形结合思想的教学和渗透,离不开教学实践活动。遵循学生参与原则,要求教师在实际教学活动中注重对学习氛围的营造,为学生提供适宜学习的素材和时机,并逐步引导学生积极参与到数学知识的发生与发展过程中,让学生能够在教师的启发和引导下学会逐步挖掘潜藏在数学知识中的数形结合思想,并逐步尝试学会运用数形结合思想解决数学学习中遇到的问题。

三、数形结合思想在高中数学教学中的应用途径

1.在学习新知识时,注重对数形结合思想的探索。

数学知识一般可以分为深层知识和表层知识,其中,表层知识主要是指数学概念类的基础知识,深层知识是指数学的思想方法,并且这两种知识之间的关系是相互依存的。在学习新知识时,要特别注重遵循学生参与的原则,通过学生自己的探索发现数形结合思想的价值,提高其学习并运用数形结合思想的兴趣,具体而言,要做到以下三点:其一,目标明确,突出重点。在高中数学教学中应用数形结合思想必须在课前设置一个明确的教学目标,并围绕目标设计教学活动,丰富教学活动;其二,激发学生的兴趣。要让学生学习并掌握数形结合思想,需要激发起学生的兴趣,只有让学生对数形结合思想感兴趣,才能提高课堂教学的有效性;其三,如何画图、识图,教师要为学生留足时间消化和思考,使其将数形结合思想内化。

2.在解决问题时,巩固数形结合思想。

在实际解决问题时,应用数形结合思想,教师要辅以适当引导,让学生亲自参与求解问题过程,能够让学生进一步加深对数形结合思想的理解和领悟。在解决问题时,很多学生都会存在畏难情绪,教师可以先讲解常规的解题思想方法,让学生成功解决问题。然后,在学生有一定信心的情况下,再渗透数形结合思想,让学生尝试数形结合思想在解题中的作用,一旦学生发现数形结合思想解题的直观、形象等优点时,就会有兴趣进一步了解数形结合思想及运用。

3.在知识归纳时,概括数形结合思想。

数学教材的安排,大多是按照知识的发展而系统编排的,呈螺旋上升的趋势,但是数学思想的教学一般都是零散的,因此,这就要求教师每隔一段时间,以专题的形式对知识进行归纳,让学生在掌握知识体系的过程中系统化地掌握数形结合思想。具体而言,可以从以下两个方面着手:其一,对高中数学中数形结合思想具体在哪些知识点中渗透要进行总结,如集合问题中的韦恩图、不等式问题中的数轴、最值问题中的函数图像等。其二,归纳数形结合在解题应用中应该注意的问题,如作图要精确,避免粗糙导致错误的结果;书中数形转化要等价;要仔细观察图像,尽可能避免遗漏可能的情况。

参考文献:

[1]姚爱梅.高中数学教学中数形结合方法的有效应用[J].学周刊,2011,12:50.

[2]卢江啸.数形结合思想在高中数学解题中的运用[J].求知导刊,2015,13:140.

[3]王丽杰.高中数学教学中数形结合方法的原则和策略[J].中国校外教育,2015,19:89.

[4]武蕾,于志萍.高中数学教学应用数形结合方法的分析[J].中国校外教育,2015,26:9.

[5]朱江红,孙兰香."数形结合"的思想方法的应用总结与培养的体会[J].沧州师范专科学校学报,2010,01:99-101+103.

算.上述方法有效提高了学生的解析几何解题能力,同时也促进了学生对数学本质问题的认知.

在高三专题复习中,利用二次曲线系方程巧解定点、定值问题,不仅能简化计算,更能让学生站在更高的角度,看透数学问题的本质,发展学生的解题思维,优化方法方能简化运算,谋定而后动,这就是解析几何培养学生数学思维品质之所在.

参考文献:

[1]刘绪占,等.数学解题方法与技巧[M].湖北教育出版社,2004.

[2]陈忠.曲线系方程巧解定点、定值问题.中学数学月刊教师教育,2014.9.

[3][美]波利亚.怎样解题.科学出版社,1982.