探究圆锥曲线中的线段定值问题*

北京市第十二中学高中部 (100071)　刘 刚

定值问题是解析几何中的一类重要内容, 它揭示了圆锥曲线相关的一些几何量 (如线段长度、角度、面积、斜率等) 在运动变化过程中所固有的某些几何或代数性质, 是历来考试中的热点问题. 下面对近些年高考、竞赛中的有关线段定值问题进行归类梳理, 供大家参考.

1 长度定值

例 1 (2017 年全国高中数学联赛山东预赛) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{1}{2}\right)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 动点 $M(2,t)(t>0)$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 求以 OM 为直径且被直线 $3x-4y-5=0$ 截得的弦长为 2 的圆的方程;

(3) 设 F 是椭圆的右焦点, 过点 F 作 OM 的垂线与以 OM 为直径的圆交于点 N, 证明线段 ON 的长为定值, 并求出这个定值.

解 (1) 略, 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$;

(2) 略, 圆的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

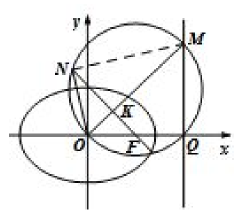

图 1

(3) 如图 1, 设 FN 与 OM 交于点 K, 直线 $x=2$ 与 x 轴交于点 Q, 连接 MN, 由已知可得 $NK\perp OM$, $ON\perp NM$, 利用直角三角形的射影定理有 $ON^2=OK\cdot OM$. 因为 $\angle MKF=\angle MQF=90^\circ$, 所以 M,K,F,Q 四点共圆, 利用割线定理, 得 $OK\cdot OM=OF\cdot OQ$. 因为 $OF=1, OQ=2$, 所以 $OF\cdot OQ=2$, 即 $OK\cdot OM=2$, 由此得 $ON^2=2$, 故线段 ON 的长为定值 $\sqrt{2}$.

点评 解法先抓住 $NK\perp OM$, $ON\perp NM$ 这一特点, 利用直角三角形的射影定理表示出 $ON^2=OK\cdot OM$, 然后根据 M,K,F,Q 四点共圆, 利用割线定理 $OK\cdot OM=OF\cdot OQ$ 进行求解, 体现了解决解析几何问题时 "先几何后代数" 的策略.

2 差定值

例 2 (2014 年高考江西文科) 如图 2, 已知抛物线 $C: x^2=4y$, 过点 $M(0,2)$ 任作一直线与 C 相交于 A、B 两点, 过点 B 作 y 轴的平行线与直线 AO 相交于点 D(O 为坐标原点).

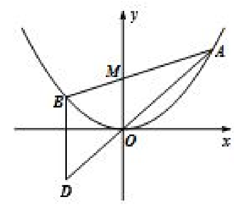

图 2

(1) 证明: 动点 D 在定直线上;

(2) 作 C 的任意一条切线 l(不含 x 轴) 与直线 $y=2$ 相交于点 N_1, 与 (1) 中的定直线相交于点 N_2, 证明: $|MN_2|^2-|MN_1|^2$ 为定值, 并求此定值.

解 (1) 略, 点 D 在定直线 $y=-2(x\neq 0)$ 上.

(2) 设切线 l 对应的切点为 $P(x_0,y_0)$, 则 $y_0=\frac{1}{4}x_0^2$. 因为 $y'=\frac{1}{2}x$, 所以切线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2}x_0$, 所以切线 l 的方程为 $y-\frac{1}{4}x_0^2=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$, 即 $y=\frac{1}{2}x_0x-\frac{1}{4}x_0^2$. 分别令 $y=2, y=-2$, 得 $N_1\left(\frac{x_0}{2}+\frac{4}{x_0},2\right)$, $N_2\left(\frac{x_0}{2}-\frac{4}{x_0},-2\right)$, 则 $|MN_2|^2-|MN_1|^2=\left(\frac{x_0}{2}-\frac{4}{x_0}\right)^2+4^2-\left(\frac{x_0}{2}+\frac{4}{x_0}\right)^2=8$, 故 $|MN_2|^2-|MN_1|^2$ 为定值 8.

点评 解法首先借助导数表示出切线 l 的方程, 在此基础上求得点 N_1,N_2 的坐标, 然后把所求几何量用坐标表示, 再通过化简求得定值.

3 和定值

例 3 (2013 年浙江高中数学竞赛) 已知抛物线 $y^2=4x$, 过 x 轴上一点 K 的直线与抛物线交于 P,Q 两点, 证明: 存在唯一一点 K, 使 $\frac{1}{PK^2}+\frac{1}{QK^2}$ 为常数, 并确定点 K 的坐标.

证明 设 $K(a,0)$, 过点 K 的直线方程为 $x=ty+a$, 交抛物线于 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, 联立 $x=ty+a$ 与 $y^2=4x$, 得 $y^2-4ty-4a=0$, 所以 $y_1+y_2=4t$, $y_1y_2=-4a$. 因为 $PK^2=(x_1-a)^2+y_1^2=(1+t^2)y_1^2$,

*本文系北京市第五批中小学名师发展工程成果; 北京市丰台区"十三五"重点课题《新课程背景下高中数学竞赛教学研究》(课题批准号: 2016237-J) 阶段成果之一.

$QK^2=(x_2-a)^2+y_2^2=(1+t^2)y_2^2$, 所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{PK^2}+\frac{1}{QK^2}\\=&\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}\right)=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{(y_1y_2)^2}\\=&\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{16t^2+8a}{16a^2}=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{2t^2+a}{2a^2},\end{aligned}$$

令 $a=2$, 得 $\frac{1}{PK^2}+\frac{1}{QK^2}$ 为常数 $\frac{1}{4}$, 点 K 的坐标为 $(2,0)$.

点评 解法先设出直线的横截距式方程, 避免了讨论直线斜率是否存在的情况, 然后借助韦达定理表示出 $\frac{1}{PK^2}+\frac{1}{QK^2}$, 最后通过对比系数得到定点与定值.

推广 在抛物线 $y^2=2px(x>0)$ 的轴上有且仅有一点 $K(p,0)$, 使得过点 K 的任意一条弦 PQ 都有 $\frac{1}{PK^2}+\frac{1}{QK^2}=\frac{1}{p^2}$.

4 积定值

例 4 (2016 年高考北京理科) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $O(0,0)$, $\triangle OAB$ 的面积为 1.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 P 是椭圆 C 上一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M, 直线 PB 与 x 轴交于点 N. 求证: $|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

解 (I) 略, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(II) 当点 P 在 y 轴上时, 直线 PB 的斜率不存在, 此时点 $P(0,-1)$, $M(0,-1)$, $N(0,0)$, 所以 $|AN|\cdot|BM|=2\times2=4$, 下面讨论直线 PB 斜率存在的情况. 设 $P(x_0,y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$, 即 $x_0^2+4y_0^2=4$. 因为 $A(2,0)$, 所以 $AP:y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$, 令 $x=0$, 得 $y=-\frac{2y_0}{x_0-2}$, 所以点 $M\left(0,-\frac{2y_0}{x_0-2}\right)$. 因为 $B(0,1)$, 所以 $BP:y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$, 令 $y=0$, 得 $x=\frac{x_0}{1-y_0}$, 所以点 $N\left(\frac{x_0}{1-y_0},0\right)$, 由此得 $|BM|=|\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}|$, $|AN|=|\frac{x_0+2y_0-2}{y_0-1}|$, 故

$$\begin{aligned}|AN|\cdot|BM|=&|\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}|\cdot|\frac{x_0+2y_0-2}{y_0-1}|\\=&|\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}|,\end{aligned}$$

把 $x_0^2+4y_0^2=4$ 代入, 得

$$|AN|\cdot|BM|=4|\frac{x_0y_0-x_0-2y_0+2}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}|=4,$$

综上 $|AN|\cdot|BM|$ 为定值 4.

点评 解法先通过直线 PB 斜率不存在的情况求得 $|AN|\cdot|BM|=4$, 这为后续一般化求定值指明了方向. “先特殊再一般”是解决定值问题的一个常用策略.

推广 已知 P 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点, $A(a,0)$, $B(0,b)$, 直线 PA 与 y 轴交于点 M, 直线 PB 与 x 轴交于点 N, 则 $|AN|\cdot|BM|=2ab$.

5 商定值

例 5 (2015 年全国高中数学联赛甘肃预赛) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点 F_1,F_2 与椭圆短轴的一个端点构成边长为 4 的正三角形.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 过椭圆 C 上任意一点 P 作椭圆 C 的切线与直线 F_1P 的垂线 F_1M 相交于点 M, 求点 M 的轨迹方程;

(III) 若切线 MP 与直线 $x=-2$ 交于点 N, 求证: $\frac{|NF_1|}{|MF_1|}$ 为定值.

解 (I) 略, 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$;

(II) 略, 点 M 的轨迹方程为 $x=-8$.

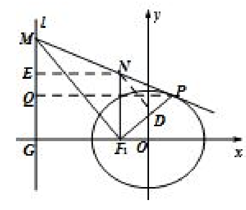

图 3

(III) 如图 3, 设椭圆的左准线 $l:x=-8$ 与 x 轴交于点 G, 过 N 作 l, PF_1 的垂线, 垂足分别为 E,D, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 Q, 因为 $\angle MF_1G+\angle MF_1N=90^\circ$, $\angle MF_1N+\angle NF_1D=90^\circ$, 所以 $\angle MF_1G=\angle NF_1D$, 所以 $\mathrm{Rt}\triangle F_1DN\backsim\mathrm{Rt}\triangle F_1GM$, 即 $\frac{F_1D}{F_1G}=\frac{NF_1}{MF_1}$. 因为四边形 F_1NEG 为矩形, 所以 $F_1G=EN$, 故 $\frac{F_1D}{EN}=\frac{NF_1}{MF_1}$①. 因为 $EN//PQ$, 所以 $\frac{PQ}{EN}=\frac{MP}{MN}$. 因为 $ND\perp PF_1$, $MF_1\perp PF_1$, 所以 $ND//MF_1$, 所以 $\frac{MP}{MN}=\frac{F_1P}{F_1D}$, 即 $\frac{PQ}{EN}=\frac{F_1P}{F_1D}$, 由此得 $\frac{F_1D}{EN}=\frac{F_1P}{PQ}$②. 由①②, 得 $\frac{NF_1}{MF_1}=\frac{F_1P}{PQ}$, 由椭圆的第二定义, 得 $\frac{F_1P}{PQ}=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{|NF_1|}{|MF_1|}$ 为定值 $\frac{1}{2}$.

点评 从结论看, 所求的是两条线段长度的比, 由此想到了构造三角形相似, 因为 $\angle MF_1G=\angle NF_1D$, 且 MF_1 是 $\mathrm{Rt}\triangle F_1GM$ 的斜边, 所以过 N 作 PF_1 的垂线从而构造 $\mathrm{Rt}\triangle F_1DN$, 接下来再运用平行线分得线段对应成比例及椭圆第二定义等知识解决.

推广 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点为 F_1,F_2, 过椭圆 C 上任意一点 P 的切线分别交直线 $x=-\frac{a^2}{c}$、$x=-c$ 于点 M,N, 则 $\frac{|NF_1|}{|MF_1|}$ 为离心率 e.

6 系数定值

例 6 (2016 年高考四川) 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的 3 个顶点, 直线 $l:y=-x+3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T.

(I) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标;

(II) 设 O 是坐标原点, 直线 l' 平行于 OT, 与椭圆 E 交于不同的两点 A、B, 且与直线 l 交于点 P. 证明: 存在常数 λ, 使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$, 并求 λ 的值.

解 (I) 略, 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$, 点 T 的坐标为 $(2,1)$.

(II) 因为点 P 在直线 $l:y=-x+3$ 上, 所以设 $P(x_0,3-x_0)$. 因为 $T(2,1)$, 所以 $\sin\angle TOx=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\angle TOx=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以直线 l' 的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+\frac{2\sqrt{5}}{5}t \\ y=3-x_0+\frac{\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$ (t 为参数), 代入椭圆的方程 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$, 整理得 $2t^2+4\sqrt{5}t+5(x_0-2)^2=0$. 由 t 的几何意义知, $|PA|=|t_1|$, $|PB|=|t_2|$. 因为 $t_1t_2=\frac{5}{2}(x_0-2)^2$, 所以 $|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\frac{5}{2}(x_0-2)^2$. 因为 $|PT|^2=(x_0-2)^2+(3-x_0-1)^2=2(x_0-2)^2$, 且 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$, 所以 $\lambda=\frac{|PT|^2}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{2(x_0-2)^2}{\frac{5}{2}(x_0-2)^2}=\frac{4}{5}$, 故存在这样的常数 λ, 且 $\lambda=\frac{4}{5}$.

点评 本题 (II) 问最大的难点是如何表示 $|PA|\cdot|PB|$, 这两条线段都是以 P 为端点, 因此可以借助直线的参数方程进行求解, 并能大大减少计算量. 所以在运算前一定要选好方法, 不可盲目处理.

推广 如图 4, $T(x_0,y_0)$ 为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点, 直线 l 为过点 T 的切线, 平行于 OT 的直线 l' 与椭圆 E 交于不同的两点 A、B, 且与直线 l 交于点 P. 则存在常数 λ, 使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$, 且 $\lambda=\frac{a^2+b^2-x_0^2-y_0^2}{x_0^2+y_0^2}$.

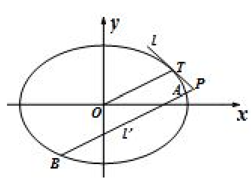

图 4

以上探讨了有关线段定值问题, 解决这类问题的基本思路是引入参变量, 然后建立几何定值与参变量之间的关系, 再通过代数运算化简、消参进而求出定值. 另外, 解析几何研究的是几何问题, 代数是工具, 所以考虑问题时先注意挖掘图形特点, 尝试运用平面几何知识解决, 如果行不通再进行代数运算. 总之, 题目变化莫测, 只要我们不断总结解题规律, 养成良好的解题习惯, 定能在考试中攻无不克, 战无不胜.

以下几道试题供读者练习:

1.(2000 年全国高考) 过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q, 则 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ 等于 (　)

A. $2a$　　B. $\frac{1}{2a}$　　C. $4a$　　D. $\frac{4}{a}$

2.(2013 年全国高中数学联赛甘肃预赛) 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $F_1(-\sqrt{3},0)$, 且过点 $H\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$. 设椭圆 E 的上下顶点分别为 A_1、A_2, 点 P 是椭圆上异于 A_1、A_2 的任一点, 直线 PA_1、PA_2 分别交 x 轴于点 M、N, 若直线 OT 与过点 M、N 的圆 G 相切, 切点为 T. 证明: 线段 OT 的长为定值, 并求出该定值.

3.(2014 年全国高中数学联赛天津预赛) 设 A,B 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上两个动点, O 是坐标原点, 且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. 又设点 P 在 AB 上, 且 $OP\perp AB$. 求 $|OP|$ 的值.

4.(2012 年高考江苏) 如图 5, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. 已知 $(1,e)$ 和 $\left(e,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 都在椭圆上, 其中 e 为椭圆的离心率.

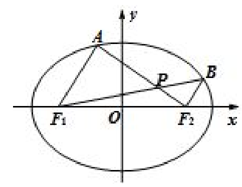

图 5

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A、B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点, 且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行, AF_2 与 BF_1 交于点 P.

(i) 若 $AF_1-BF_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AF_1 的斜率;

(ii) 求证: PF_1+PF_2 是定值.

5.(2010 年全国高中数学联赛江西预赛) 给定椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 以及圆 $\odot O:x^2+y^2=b^2$, 自椭圆上异于其顶点的任意一点 P, 作 $\odot O$ 的两条切线, 切点为 M、N, 若直线 MN 在 x、y 轴上的截距分别为 m、n, 证明: $\frac{a^2}{n^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{a^2}{b^2}$.

6.(2012 年浙江高中数学竞赛) 设 P 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 长轴上一个动点, 过点 P 斜率为 k 的直线交椭圆于 A、B 两点. 若 $|PA|^2+|PB|^2$ 的值仅依赖于 k 而与 P 无关, 求 k 的值.

答案: 1. C. 2. 线段 OT 的长为定值 2. 3. $|OP|=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 4.(1) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$; (2)(i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (ii) 故 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 5. 略. 6. $k=\pm\frac{4}{5}$.

参考文献

[1] 刘刚, 赵毅. 探究圆中定值、定点问题的几何解法 [J]. 数学通讯 (上半月), 2017, 3.

[2] 刘刚, 赵毅. 探究抛物线切线问题的几何解法 [J]. 数学通讯 (上半月), 2016, 7-8.

[3] 刘刚, 赵毅, 2016 年高考北京理科卷圆锥曲线试题的探究与推广 [J]. 数学通讯 (上半月), 2016, 9.

[4] 刘刚, 赵毅, 一道 2016 年高考椭圆试题的探究、溯源及推广 [J]. 数理化学习 (高中版), 2017, 2.