极线视角下对 2020 年全国 I 卷解析几何题的探究*

湖北恩施州教育科学研究院 (445000) 周 威

摘要 在《普通高中数学课程标准 (2017 年版)》提出, 数学教师要努力提升数学专业素养, 要理解与高中数学关系密切的高等数学的内容, 能够从更高的观点理解高中数学知识的本质. 因此在高考试题研究过程中, 很有必要建立起高等数学与基础数学的连接点, 基于高观点审视高考试题, 导向数学教学.

关键词 高考试题研究; 极点极线; 解析几何

一、试题呈现与问题提出

例 1 (2020 年全国 I 卷理科 21 题、文 20 题) 已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$.$P$ 为直线 $x=6$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D.

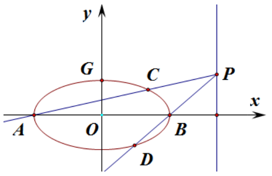

图 1

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

解法 1 (1) 由数量积的坐标运算可得 $a^2=9$, 即 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$;

(2) 由 (1) 可知 $A(-3,0), B(3,0)$, 设 $P(6,n)$, 则直线 $PA: y=\frac{n}{9}(x+3)$, 直线 $PB: y=\frac{n}{3}(x-3)$, 将 PA 代入椭圆方程可得 $(9+n^2)x^2+6n^2x+9n^2-81=0$, 由韦达定理可得 C 点横坐标为 $x_C=\frac{-3n^2+27}{9+n^2}$, 代入 PA 方程可得 $y_C=\frac{6n}{9+n^2}$, 即 $C(\frac{-3n^2+27}{9+n^2},\frac{6n}{9+n^2})$. 同理将 PB 代入椭圆方程可求得 $(1+n^2)x^2-6n^2x+9n^2-9=0$, 得 D 点坐标为 $D(\frac{3n^2-3}{1+n^2},\frac{-2n}{1+n^2})$, 所以 $k_{CD}=\frac{4n}{3(3-n^2)}$, 从而 CD 的直线方程为 $y-\frac{-2n}{1+n^2}=\frac{4n}{3(3-n^2)}(x-\frac{3n^2-3}{1+n^2})$, 整理得 $y=\frac{4n}{3(3-n^2)}(x-\frac{3}{2})$. 故 CD 过定点 $(0,\frac{3}{2})$.

另外, 从图 1 不难发现, 不管 P 点的位置在直线 $x=6$ 上哪个位置, 由椭圆对称性知, CD 都会与 x 轴相交于一点, 这一点其实就是要求的定点, 所以还有以下解法:

解法 2 根据解法 1 求出 $C(\frac{-3n^2+27}{9+n^2},\frac{6n}{9+n^2})$, $D(\frac{3n^2-3}{1+n^2},\frac{-2n}{1+n^2})$, 由椭圆对称性知定点一定位于 x 轴上, 可先设定点坐标为 $H(t,0)$, 那么

$$k_{HC}=\frac{\frac{6n}{9+n^2}}{\frac{-3n^2+27}{9+n^2}-t}, k_{HD}=\frac{\frac{-2n}{1+n^2}}{\frac{3n^2-3}{1+n^2}-t}, k_{HD}=k_{HC},$$

化简得 $(4t-6)n^2+12t-18=0$, 令 $\begin{cases}4t-6=0,\\12t-18=0,\end{cases}$ 得 $t=\frac{3}{2}$. 即 CD 过定点 $(0,\frac{3}{2})$.

评注 此题以椭圆与直线最基本的问题情境作为进行任务创设和基本知识能力运用考查的载体, 重点考查学生数形结合、化归转化思想, 强调直线代入圆锥曲线方程通性通法的应用. 对于直线过定点问题, 要么先设点 P 坐标, 然后把直线 AP, BP 的方程分别与椭圆方程联立, 求出 C, D 两点的坐标, 对于处理定点问题, 可对 CD 直线方程化简, 得出过定点; 也可以先确定点, 再通过三点共线求定点; 要么设 CD 的直线方程 $x=my+n$ 及 C, D 的坐标, 联立椭圆方程, 通过设而不求, 找到 m, n 的关系, 进而得到直线过定点 (请读者解答). 因此, 上述解法具有代表性和通法性, 体现了高考“四翼”中的基础性.

那么基于此问题情境, 其背后的命题立意、高等数学背景和相关拓展是怎样的? 为此, 有以下问题导向:

问题 1 第 (2) 问命题立意时, 如何从高观点视角确定 CD 与 x 轴的交点就是固定的?

问题 2 当椭圆 E 和直线 $x=6$ 都为一般情形时, 直线 CD 过定点坐标是怎样的?

问题 3 如果将椭圆 E 改为双曲线的情形, 是否有类似结论?

二、基于极点极线的问题探究与结论

如果站在极点极线高观点下, 对上述问题的思考就能让人豁然开朗. 极点极线是高等几何中关于二次曲线的有关概念, 与高中阶段圆锥曲线的相关知识联系密切. 其具体定义为: 如图 2, 设点 P 是不在圆锥曲线上的一点, 过 P 点引两条割线依次交圆锥曲线于四点 E, F, G, H, 连接 EH, FG

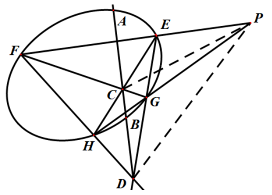

图 2

*基金项目: 本文为湖北省教育科学规划课题《基于课程标准的教学与质量测评研究》(课题号: 2020JB348) 阶段性研究成果.

交于 C, 连接 EG, FH 交于 D, 则直线 CD 为点 P 对应的极线. 若 P 为圆锥曲线上的点, 则过 P 点的切线即为极线. 同理可知, PC 为点 D 对应的极线, PD 为点 C 所对应的极线.

定理 1 当 P 在圆锥曲线 Γ 上时, 则点 P 的极线是曲线 Γ 在 P 点处的切线; 当 P 在 Γ 外时, 过点 P 作 Γ 的两条切线, 设其切点分别为 A, B, 则点 P 的极线是直线 AB(即切点弦所在的直线); 当 P 在 Γ 内时, 过点 P 任作一割线交 Γ 于 A, B, 设 Γ 在 A, B 处的切线交于点 Q, 则点 P 的极线即为点 Q 的轨迹.

定理 2 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$; 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$, 与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$; 对于抛物线 $y^2=2px(p>0)$, 与点 $P(x_0, y_0)$ 对应的极线方程为 $yy_0=p(x+x_0)$.

定理 1、定理 2 的证明请参考文献 [1]. 基于以上极点极线定义及定理, 在图 1 中连接 CD 交 x 轴于 H, 连接 AD、BC 相交于 J, 如图 3 所示, 则 HJ 就为点 P 关于椭圆 E 的极线. 设点 P 在 $x=m(m\neq 0)$ 直线上, 那么 $P(m, n)$, 由椭圆的极点极线形式可知, HJ 的直线方程为 $\frac{mx}{9}+ny=1$, 令 $y=0$, 即得 H 点坐标 $(\frac{9}{m}, 0)$, 当 $m=6$ 时, H 点坐标为 $(\frac{3}{2}, 0)$. 从而得到问题 1 的解答.

事实上, 若椭圆方程为 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 则 HJ 的直线方程为 $\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}=1$, 令 $y=0$, 即得 H 点坐标 $(\frac{a^2}{m}, 0)$, 从而解决了问题 2 的疑惑.

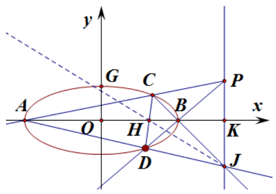

图 3

若设 $J(x_0, y_0)$, HP 是点 J 的极线, 可得 HP 的直线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$, 因为点 $H(\frac{a^2}{m}, 0)$ 在直线 HP 上, 故可得 $x_0=m$. 综上所述, 可得到例 1 的一般结论:

结论 1 已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点, P 为直线 $x=m(m\neq 0)$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D. 那么直线 CD 过定点 $H(\frac{a^2}{m}, 0)$, 且直线 AD 与 BC 的交点在直线 $x=m$ 上.

证明 可知 $A(-a, 0), B(a, 0), P(m, n)$,

$$PA: y=\frac{n}{m+a}(x+a),\ PB: y=\frac{n}{m-a}(x-a),$$

将 PA 代入椭圆方程 E 可得 $[b^2(m+a)^2+a^2n^2]x^2+2a^3n^2x+a^4n^2-a^2b^2(m+a)^2=0$, 由韦达定理可得 $x_C=\frac{a^3b^2-a^3n^2+2a^2b^2m+ab^2m^2}{a^2b^2+a^2n^2+2ab^2m+b^2m^2}$, 代入 PA 方程可得, $y_C=\frac{2a^2b^2m+2ab^2mn}{a^2b^2+a^2n^2+2ab^2m+b^2m^2}$, 即 $C(\frac{a^3b^2-a^3n^2+2a^2b^2m+ab^2m^2}{a^2b^2+a^2n^2+2ab^2m+b^2m^2}, \frac{2a^2b^2m+2ab^2mn}{a^2b^2+a^2n^2+2ab^2m+b^2m^2})$, 同理 $D(\frac{-a^3b^2+a^3n^2+2a^2b^2m-ab^2m^2}{a^2b^2+a^2n^2-2ab^2m+b^2m^2}, \frac{2a^2b^2m-2ab^2mn}{a^2b^2+a^2n^2-2ab^2m+b^2m^2})$, 所以 $k_{CD}=\frac{-2b^2mn}{a^2b^2+a^2n^2-m^2b^2}$, 得到 CD 的直线方程为

$$y=\frac{-2b^2mn}{a^2b^2+a^2n^2-m^2b^2}(x-\frac{-a^3b^2+a^3n^2+2a^2b^2m-ab^2m^2}{a^2b^2+a^2n^2-2ab^2m+b^2m^2})+\frac{2a^2b^2m-2ab^2mn}{a^2b^2+a^2n^2-2ab^2m+b^2m^2},$$

化简可得 $y=\frac{-2b^2n}{a^2b^2+a^2n^2-m^2b^2}(mx-a^2)$, 因此 CD 过定点 $(\frac{a^2}{m}, 0)$.

可得直线 AD 的方程为 $y=\frac{a^2b^2-ab^2m+ab^2x-b^2mx}{a^2n}$, BC 的方程为 $y=\frac{a^2b^2+ab^2m-ab^2x-b^2mx}{a^2n}$, 联立可得 $x=m$, 即直线 AD 与 BC 的交点在 $x=m$ 上.

对于问题 3, 同样根据极点极线定义及定理, 可类比得到双曲线的结论.

结论 2 已知 A, B 分别为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左右顶点, P 为直线 $x=m(m\neq 0)$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D. 那么直线 CD 过定点 $H(\frac{a^2}{m}, 0)$, 且直线 AD 与 BC 的交点在直线 $x=m$ 上.

结论 2 由于篇幅所限, 请读者自行证明.

三、结论再推广

在解法 1 与解法 2 中其实都用到了斜率, 那么也可基于极点极线从斜率的角度对上述结论进行推广. 如图 3, 不妨设 $m>a$, 则 $k_{PH}=\frac{|PK|}{|HK|}=\frac{n}{m-\frac{a^2}{m}}=\frac{mn}{m^2-a^2}$, $k_{PA}=\frac{|PK|}{|AK|}=\frac{n}{m+a}$, $k_{PB}=\frac{|PK|}{|BK|}=\frac{n}{m-a}$, 满足 $2k_{PH}=k_{PA}+k_{PB}$. 其他情形同样成立.

因此可得到结论 1 和结论 2 的以下推论.

推论 1 已知 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点, P 为直线 $x=m(m\neq 0)$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D. 直线 CD 交 x 轴于点 H, 记直线 PH 的斜率为 k_0, 直线 PA 的斜率为 k_1, 直线 PB 的斜率为 k_2, 那么 $k_1+k_2=2k_0$.

证明 设 $A(-a, 0), B(a, 0), P(m, n)$, $PA: y=\frac{n}{m+a}(x+a)$, $PB: y=\frac{n}{m-a}(x-a)$, 由结论 1 可得点

基于 2020 年高考全国 I 卷第 17 题一类数列问题的研究

佛山市第一中学 (528000) 陈 豪

中山大学数学学院 (510275) 陈弈龙

在新高考中, 数列大题出现在第一道解答题的位置, 更多的是关注基本方法、基本思想, 其中裂项相消法与错位相减法成为求前 n 项和的最基本的两类方法, 2020 年全国 I 卷, III 卷第 17 题均为基于数列通项公式: $a_n=(an+b)\cdot q^n$ 的求和问题, a_n 是一个等差数列与一个等比数列的乘积. 此类问题通常采用错位相减法来求和, 然而错位相减法容易出错, 而这次公比还为负, 数学生更容易出错. 考生此处失分较多, 下文我们将专门研究这类数列的四种求和方法.

一、原题呈现

例 1 (2020 年高考全国 I 卷理科第 17 题) 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, a_1 为 a_2,a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 若 $a_1=1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前项和.

二、解法汇总

1 错位相减法

(1) 略. (2) 设 S_n 为 $\{na_n\}$ 的前 n 项和. 由 (1) 及题设可得, $a_n=(-2)^{n-1}$. 所以 $S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$, $-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$. 可得 $3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$, 所以 $S_n=\dfrac{1}{9}-\dfrac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

2 待定系数法

设数列 a_n 的前项和为 $S_n=(An-B)q^n+B$, 则 $\begin{cases}S_1=(A\times1-B)(-2)+B=1,\\ S_2=(A\times2-B)\times4+B=-3,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}A=-\dfrac{1}{3},\\ B=\dfrac{1}{9},\end{cases}$ 所以 $S_n=(-\dfrac{1}{3}n-\dfrac{1}{9})(-2)^n+\dfrac{1}{9}$.

3 幂级数法

令 $f(x)=x^n$, 则 $f(x)$ 是连续可导函数, $f'(x)=nx^{n-1}$,

$$S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}=\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)'\Bigg|_{x=-2}$$

$$=\left[\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{nx-(n+1)}{(x-1)^2}x^n\right]_{x=-2}=\frac{1}{9}+\frac{-3n-1}{9}(-2)^n.$$

4 构造法

当 $n\geqslant2$, 由 $S_n-S_{n-1}=n(-2)^{n-1}$, 则 $\dfrac{S_n}{(-2)^n}+\dfrac{1}{2}\dfrac{S_{n-1}}{(-2)^{n-1}}=-\dfrac{1}{2}n$. 令 $b_n=\dfrac{S_n}{(-2)^n}$, 则 $b_n=(-\dfrac{1}{2})b_{n-1}-\dfrac{n}{2}$, 设 $b_n+An+B=-\dfrac{1}{2}(b_{n-1}+A(n-1)+B)$, 则 $A=\dfrac{1}{3}$, $B=\dfrac{1}{9}$, 故

$$b_n+\frac{1}{3}n+\frac{1}{9}=(-\frac{1}{2})^{n-1}(b_1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9})=(-\frac{1}{2})^{n-1}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}),$$

$$b_n=\frac{S_n}{(-2)^n}=-(\frac{1}{3}n+\frac{1}{9})+(-\frac{1}{2})^{n-1}(-\frac{1}{9}),$$

当 $n=1$, $b_1=-\dfrac{1}{2}$ 符合, 所以 $S_n=(-\dfrac{1}{3}n-\dfrac{1}{9})(-2)^n+\dfrac{1}{9}$.

$H(\dfrac{a^2}{m},0)$, 所以 $k_{PH}=\dfrac{n}{m-\frac{a^2}{m}}=\dfrac{mn}{m^2-a^2}$, 显然满足 $k_1+k_2=2k_0$.

推论 2 已知 A,B 分别为双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右顶点, P 为直线 $x=m(m\neq0)$ 上的动点, PA 与 E 的另一交点为 C, PB 与 E 的另一交点为 D. 直线 CD 交 x 轴于点 H, 记直线 PH 的斜率为 k_0, 直线 PA 的斜率为 k_1, 直线 PB 的斜率为 k_2, 那么 $k_1+k_2=2k_0$.

四、反思与结语

上述讨论都是借助极点极线高等数学知识, 对试题情境中椭圆、双曲线情形的探究. 其实, 抛物线的情形也有类似问题情境和结论, 比如: 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$, P 为直线 $x=m$ 上的动点, 过 P 作抛物线的两条切线, 切点分别为 C、D, 则直线 CD 过定点 $H(-m,0)$. 关于抛物线中“$k_1+k_2=2k_0$”的结论情形, 笔者在文 [2] 中也有所阐述, 这涉及到此道高考题的源与流, 不再赘述. 数学家 F. 克莱因认为, 教师应具备较高的数学观点, 基础数学的教师应该站在更高的视角来审视、理解初等数学问题, 只有观点高了, 事物才能显得明了简单.

参考文献

[1] 梅向明等. 高等几何 (第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[2] 周威. 探究性学习的问题设计与探究过程——以一次试卷讲评中的圆锥曲线探究性问题为例 [J]. 中学数学研究 (江西师范大学版), 2019(10) : 13-15.