圆锥曲线顶点定值子弦的性质

夏越春 邢益辉
(江苏省高淳高级中学, 211300)

1 顶点定值子弦的含义

设点 P 是某圆锥曲线的一个顶点, PA, PB 是该曲线过顶点 P 的两条弦, 当直线 PA, PB 的斜率的积为定值 λ 时, 称线段 AB 为该曲线顶点 P 的关于定值 λ 的斜率等积子弦; 当直线 PA, PB 的斜率的和为定值 λ 时, 称线段 AB 为该曲线顶点 P 的关于定值 λ 的斜率等和子弦; 并把这两个子弦统称为顶点 P 关于定值 λ 的定值子弦.

2 抛物线顶点定值子弦的性质

设 OA, OB 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 过顶点 O 的两条弦, 它们的斜率分别是 k 和 k' $(k\neq0,\ k'\neq0)$, 易得 $A(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k})$.

(1) 若 $k\cdot k'=\lambda$ $(\lambda\neq0)$, 则 $B(\frac{2pk^2}{\lambda^2}, \frac{2pk}{\lambda})$, $\because$ 直线 AB 的斜率为: $k_{AB}=(\frac{2pk}{\lambda}-\frac{2p}{k})/(\frac{2pk}{\lambda^2}-\frac{2p}{k^2})=\frac{\lambda k}{k^2+\lambda}$, $\therefore$ 直线 AB 的方程为: $y-\frac{2p}{k}=\frac{\lambda k}{k^2+\lambda}(x-\frac{2p}{k^2})$, 令 $y=0$, 得 $x=-\frac{2p}{\lambda}$, 即直线 AB 过定点 $(-\frac{2p}{\lambda}, 0)$.

(2) 若 $k+k'=\lambda$, 则 $B(\frac{2p}{(\lambda-k)^2}, \frac{2p}{\lambda-k})$, 当 $\lambda=0$ 时, 显然 A, B 两点关于 x 轴对称, 所以直线 AB 与 x 轴垂直; 当 $\lambda\neq0$ 时, 易得 $k_{AB}=\frac{k(\lambda-k)}{\lambda}$, 所以直线 AB 的方程为: $y-\frac{2p}{k}=\frac{k(\lambda-k)}{\lambda}(x-\frac{2p}{k^2})$, 令 $x=0$, 得 $y=\frac{2p}{\lambda}$, 即直线 AB 过定点 $(0, \frac{2p}{\lambda})$.

由上面的讨论可知, 抛物线的顶点定值子弦有如下性质:

给定抛物线 $y^2=2px$ 和定值 λ, 当 $\lambda\neq0$ 时, 顶点的斜率等积子弦所在直线过定点 $(-\frac{2p}{\lambda}, 0)$, 顶点的斜率等和子弦所在直线过定点 $(0, \frac{2p}{\lambda})$; 当 $\lambda=0$ 时, 顶点的斜率等和子弦与抛物线的对称轴垂直.

3 椭圆顶点定值子弦的性质

(1) 设点 A 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 长轴的一个端点, PA, AQ 为该椭圆的两条弦, 它们的斜率分别是 k 和 k' $(k\neq0,\ k'\neq0)$,

当 A 为椭圆的左顶点时, 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=k(x+a)\end{cases}$ 解得 $P(\frac{(b^2-a^2k^2)a}{a^2k^2+b^2}, \frac{2ab^2k}{a^2k^2+b^2})$.

1) 若 $k\cdot k'=\lambda$ $(\lambda\neq0)$, 则 $k'=\frac{\lambda}{k}$, 由此得 $Q(\frac{(b^2k^2-a^2\lambda^2)a}{a^2\lambda^2+b^2k^2}, \frac{2ab^2\lambda k}{a^2\lambda^2+b^2k^2})$.

当 $\lambda=\frac{b^2}{a^2}$ 时, 易知 P, Q 两点关于 y 轴对称, 所以直线 PQ 与 x 轴平行; 当 $\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时,

$\because$ $k_{PQ}=(\frac{2ab^2\lambda k}{a^2\lambda^2+b^2k^2}-\frac{2ab^2k}{a^2k^2+b^2})/(\frac{(b^2k^2-a^2\lambda^2)a}{a^2\lambda^2+b^2k^2}-\frac{(b^2-a^2k^2)a}{a^2k^2+b^2})=\frac{k(a^2\lambda-b^2)}{a^2(k^2+\lambda)}$,

$\therefore$ 直线 PQ 的方程为: $y-\frac{2ab^2k}{a^2k^2+b^2}=\frac{k(a^2\lambda-b^2)}{a^2(k^2+\lambda)}(x-\frac{(b^2-a^2k^2)}{a^2k^2+b^2})$, 令 $y=0$, 得 $x=-\frac{(a^2\lambda+b^2)a}{a^2\lambda-b^2}$, 即直线 PQ 过定点 $(-\frac{(a^2\lambda+b^2)a}{a^2\lambda-b^2}, 0)$.

2) 若 $k+k'=\lambda$, 则 $k'=\lambda-k$, 由此得 $Q(\frac{[b^2-a^2(\lambda-k)^2]a}{a^2(\lambda-k)^2+b^2}, \frac{2ab^2(\lambda-k)}{a^2(\lambda-k)^2+b^2})$.

当 $\lambda=0$ 时, 易知 P, Q 两点关于 x 轴对称, 所以直线 PQ 与 x 轴垂直; 当 $\lambda\neq0$ 时,

$\because$ $k_{PQ}=[\frac{2ab^2(\lambda-k)}{a^2(\lambda-k^2)+b^2}-\frac{2ab^2k}{a^2k^2+b^2}]/[\frac{b^2-a^2(\lambda-k)^2)a}{a^2(\lambda-k)^2+b^2}-\frac{(b^2-a^2k^2)a}{a^2k^2+b^2}]=k-\frac{a^2k^2+b^2}{a^2\lambda}$,

∴直线 PQ 的方程为: $y-\frac{2ab^2k}{a^2k^2+b^2}=(k-\frac{a^2k^2+b^2}{a^2\lambda})(x-\frac{(b^2-a^2k^2)a}{a^2k^2+b^2})$, 令 $x=-a$, 得 $y=\frac{2b^2}{a\lambda}$, 即直线 PQ 过定点 $(-a,\frac{2b^2}{a\lambda})$.

根据椭圆的对称性, 不难得知当 A 为椭圆的右顶点时直线 PQ 的有关属性.

(2) 设点 B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 短轴的一个端点, BM, BN 为该椭圆的两条弦, 它们的斜率分别是 k 和 k' ($k\neq0$, $k'\neq0$),

当 B 为椭圆的上顶点时, 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=kx+b\end{cases}$

解得 $M(-\frac{2a^2kb}{a^2k^2+b^2},\frac{(b^2-a^2k^2)b}{a^2k^2+b^2})$.

1) 若 $k\cdot k'=\lambda\ (\lambda\neq0)$, 则 $N(-\frac{2a^2\lambda kb}{a^2\lambda^2+b^2k^2},\frac{(b^2k^2-a^2\lambda^2)b}{a^2\lambda^2+b^2k^2})$, 当 $\lambda=\frac{b^2}{a^2}$ 时, 易知 M, N 两点关于 x 轴对称, 所以直线 MN 与 y 轴平行; 当 $\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时,

$$\because k_{MN}=[(\frac{(b^2k^2-a^2\lambda^2)b}{a^2\lambda^2+b^2k^2}-\frac{(b^2-a^2k^2)b}{a^2k^2+b^2}]/[-\frac{2a^2b\lambda k}{a^2\lambda^2+b^2k^2}+\frac{2a^2bk}{a^2k^2+b^2}]=\frac{b^2(k^2+\lambda)}{k(b^2-a^2\lambda)}.$$

∴直线 MN 的方程为: $y-\frac{(b^2-a^2k^2)b}{a^2k^2+b^2}=\frac{b^2(k^2+\lambda)}{k(b^2-a^2\lambda)}(x+\frac{2a^2kb}{a^2k^2+b^2})$, 令 $x=0$, 得 $y=\frac{(a^2\lambda+b^2)b}{b^2-a^2\lambda}$, 即直线 MN 过定点 $(0,\frac{(a^2\lambda+b^2)b}{b^2-a^2\lambda})$.

2) 若 $k+k'=\lambda$, 则 $N(-\frac{2a^2(\lambda-k)b}{a^2(\lambda-k)^2+b^2},\frac{(b^2-a^2(\lambda-k)^2)b}{a^2(\lambda-k)^2+b^2})$, 当 $\lambda=0$ 时, 易知 M, N 两点关于 y 轴对称, 所以直线 MN 与 y 轴垂直; 当 $\lambda\neq0$ 时, 有

$$k_{MN}=[\frac{(b^2-a^2(\lambda-k)^2)b}{a(\lambda-k)^2+b^2}-\frac{(b^2-a^2k^2)b}{a^2k^2+b^2}]/[-\frac{2a^2b(\lambda-k)}{a^2(\lambda-k)^2+b^2}+\frac{2a^2bk}{a^2k^2+b^2}]=\frac{b^2\lambda}{(a^2k^2+b^2)-a^2k\lambda},$$

∴直线 MN 的方程为: $y-\frac{(b^2-a^2k^2)b}{a^2k^2+b^2}=\frac{b^2\lambda}{(a^2k^2+b^2)-a^2k\lambda}(x+\frac{2a^2kb}{a^2k^2+b^2})$, 令 $y=-b$, 得 $x=-\frac{2b}{\lambda}$, 即直线 MN 过定点 $(-\frac{2b}{\lambda},-b)$.

当 B 为椭圆的下顶点时, 由对称性易知直线 MN 的有关属性.

综上所述可得如下性质: 给定椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$).

(1) 对于定值 λ ($\lambda\neq0$), 当 $\lambda=\frac{b^2}{a^2}$ 时, 椭圆左、右顶点的斜率等积子弦都与 x 轴平行, 上、下顶点的斜率等积子弦都与 y 轴平行; 当 $\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时, 椭圆的左、右、上、下顶点的斜率等积子弦所在直线分别过定点 $(-\frac{(a^2\lambda+b^2)a}{a^2\lambda-b^2},0)$, $(\frac{(a^2\lambda+b^2)a}{a^2\lambda-b^2},0)$, $(0,\frac{(a^2\lambda+b^2)b}{b^2-a^2\lambda})$, $(0,-\frac{(a^2\lambda+b^2)b}{b^2-a^2\lambda})$.

(2) 对于定值 λ, 当 $\lambda=0$ 时, 椭圆的左、右顶点的斜率等和子弦都与 x 轴垂直, 上、下顶点的斜率等和子弦都与 y 轴垂直; 当 $\lambda\neq0$ 时, 椭圆的左、右、上、下顶点的斜率等和子弦分别过定点 $(-a,\frac{2b^2}{a\lambda})$, $(a,-\frac{2b^2}{a\lambda})$, $(-\frac{2b}{\lambda},-b)$, $(\frac{2b}{\lambda},b)$.

4　双曲线顶点定值子弦的性质

给定双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$).

(1) 对于定值 λ ($\lambda\neq0$), 当 $\lambda=-\frac{b^2}{a^2}$ 时, 双曲线的左、右顶点的斜率等积子弦都与 x 轴平行; 当 $\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时, 双曲线的左、右顶点的斜率等积子弦所在直线分别过定点 $(-\frac{(a^2\lambda-b^2)a}{a^2\lambda+b^2},0)$, $(\frac{(a^2\lambda-b^2)a}{a^2\lambda+b^2},0)$.

(2) 对于定值 λ, 当 $\lambda=0$ 时, 双曲线的左、右顶点的斜率等和子弦都与 x 轴垂直; 当 $\lambda\neq0$ 时, 双曲线的左、右顶点的斜率等和子弦分别过定点 $(-a,-\frac{2ab^2}{\lambda})$, $(a,\frac{2ab^2}{\lambda})$.

双曲线顶点定值子弦性质的真实性, 类比椭圆的论证易得, 笔者在此不再赘述.

根据上面论述可知: 一般情况下, 圆锥曲线的顶点定值子弦所在直线过某个定点, 个别情况下, 圆锥曲线的顶点定值子弦与它一条对称轴平行或垂直.

(收稿日期: 2011—04—19)