调和点列:一组平面几何问题的背景分析

曾建国
(江西省赣州市赣南师范大学数学与计算机科学学院,341000)

一、引言

调和点列有如下性质:

性质 1[1][2] 如果 A、B、C、D 为调和点列,则有

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}. \quad ①$$

文[1]中 A、B、C、D 为调和点列是指线段 AB 的内分点 C 与外分点 D 满足 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$,这与射影几何[2]中的定义"满足交比 $(AB,CD)=-1$ 的点列是调和点列"是等价的.所不同的是,① 式中各线段在文[1]中均表示其长度、取正值,而在文[2]中则表示有向线段的数量,可取正值也可取负值.

结论类似于 ① 式的平面几何证明题,很多都是上述性质的各种变化,如果应用平面几何证法,就有些繁琐,而应用性质 1,不仅可以简化解题,而且有助于我们看清此类问题的本质.本文拟对一组此类平面几何问题进行剖析.

调和点列常于下面两种图形中产生:(1) 由二次曲线的极线产生的调和点列;(2) 由完全四边形的调和性形成的调和点列.以下分类介绍.

二、由二次曲线产生的调和点列

例 1[3] 如图 1,以 $\angle BAC$ 的平分线上任一点 O 为圆心作圆,分别交两射线 AB,AC 于 E,F,G,H,交角平分线于 M,N,连结 EH 交角平分线于 D,求证:$\frac{1}{AM}+\frac{1}{ON}=\frac{1}{MD}$.

分析与证明 连 EG,GF,FH,由于图形关于角平分线 AN 对称,故 EH 与 GF 的交点必在角平分线 AN 上,即点 D.

根据极线的作图方法[2]可知,点 D 在 A 关于 $\odot O$ 的极线上.根据极线定义[2]知,A,D,M,N 是调和点列,即 $(AD,MN)=-1$.根据交比的性质[2]可得 $(MN,AD)=(AD,MN)=-1$,即 M,N,A,D 也是调和点列.应用性质 1 就得 $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MD}=\frac{2}{MN}$(式中各线段均为有向线段).

注意 $MN=2ON$,则 $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MD}=\frac{1}{ON}$.此等式中线段 MA 与其他线段反向(参见图 1),因此有 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{ON}=\frac{1}{MD}$.

注 最后这一等式中,各线段同向,因此不论它们表示线段的长度还是有向线段的数量,等式均正确.

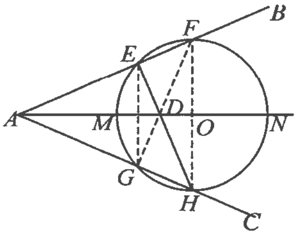

图 1

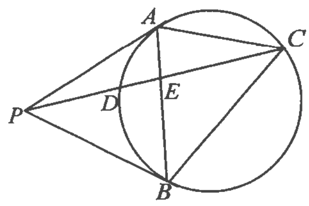

图 2

例 2[4] 如图 2,在 $\triangle ABC$ 中,分别过 A,B 作它的外接圆的切线相交于 P 点,连结 PC 交圆于 D,交 AB 于 E,求证:$\frac{1}{DE}=\frac{1}{PD}+\frac{1}{PC}+\frac{1}{EC}$.

分析与证明 此题中的结论看似复杂,但是应用性质 1 来解则十分快捷.

显然 AB 是 P 点关于圆的极线,因此 P,E,D,C 是调和点列,由性质 1 得

$$\frac{1}{PD}+\frac{1}{PC}=\frac{2}{PE}. \quad ②$$

因为 $(PE,DC)=(EP,CD)=-1$,即 E,P,C,D 也是调和点列,由性质 1 得 $\frac{1}{EC}+\frac{1}{ED}=\frac{2}{EP}$,即

$$\frac{2}{PE}=\frac{1}{DE}-\frac{1}{EC}. \quad ③$$

由 ②③ 就得 $\frac{1}{DE}=\frac{1}{PD}+\frac{1}{PC}+\frac{1}{EC}$.

三、由完全四边形的调和性形成的调和点列

例 3[5] 如图 3,P 是 $\triangle ABC$ 内一点,D,E,F 分别是 C,B,A 与 P 的连线和对边的交点,AF,BE,CD 分别与 DE,DF,EF 交于点 G,H,I,过 D,G,E 分别作 BC 的垂线,垂足分别为 K,M,N,求证:$\frac{1}{DK}+\frac{1}{EN}=\frac{2}{GM}$.

分析与证明 此题的结论容易让我们想到性质 1,但是图 3 中的调和点列较为隐蔽、不易发现.

延长 ED,CB 交于 Q,根据完全四边形($BCED$)的调和性[2] 易知:Q,G,D,E 是调和点列,根据性质 1 就得

$$\frac{1}{QD}+\frac{1}{QE}=\frac{2}{QG}. \qquad ④$$

依题设有 $DK \parallel GM \parallel EN$,则 $QD : QG : QE = DK : GM : EN$,结合 ④ 式就得

$$\frac{1}{DK}+\frac{1}{EN}=\frac{2}{GM}.$$

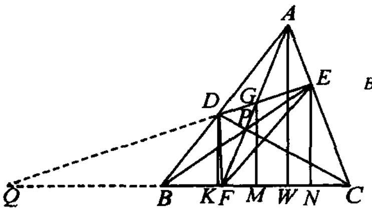

图 3

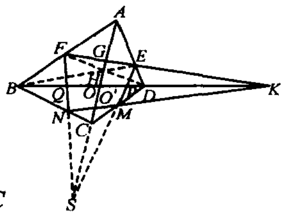

图 4

例 4[6]　如图 4,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于 O,K 为直线 BD 上一点,且 $\frac{BO}{OD}=\frac{BK}{KD}$,过 K 作直线 KEF 交 AD、AB 于 E、F,过 K 作直线 KMN 交 CD、CB 于 M、N,EM、FN 分别交 BD 于 P、Q,证明:$\frac{1}{KP}+\frac{1}{KQ}=\frac{1}{KB}+\frac{1}{KD}$.

分析与证明　题设条件 $\frac{BO}{OD}=\frac{BK}{KD}$ 表明 B,D,O,K 是调和点列,则 K,O,D,B 也是调和点列,根据性质 1 知 $\frac{1}{KB}+\frac{1}{KD}=\frac{2}{KO}$. 欲证 $\frac{1}{KP}+\frac{1}{KQ}=\frac{1}{KB}+\frac{1}{KD}$,只需证 $\frac{1}{KP}+\frac{1}{KQ}=\frac{2}{KO}$,即要证 K,O,P,Q 是调和点列.

连接 BE,DF 交于 H,设 AH 交 BD 于 O',交 EF 于 G,由完全四边形($BDEF$)的调和性质可知,AB,AD,AH,AK 是调和线束,则 F,E,G,K 与 B,D,O',K 分别都是调和点列.

依题设又知 B,D,O,K 是调和点列,表明 O' 就是 O,即 A,G,H,O,C 共线.

考察 $\triangle AEF$ 与 $\triangle CMN$,由于三组对应边的交点($AF \times CN = B$;$AE \times CM = D$;$EF \times MN = K$)共线,根据德萨格(Desargues)定理[2] 可知其三组对应顶点连线共点,即有 FN,AC,EM 交于一点 S.

由(F,E,G,K) $\overline{\wedge}$ (SF,SE,SG,SK) $\overline{\wedge}$ (Q,P,O,K) 知,(F,E,G,K) $\wedge$ (Q,P,O,K),($\overline{\wedge}$ 表示透视对应,$\wedge$ 表示射影对应[2]),则有 $(QP,OK)=(FE,GK)=-1$,表明 Q,P,O,K 是调和点列,则 K,O,P,Q 也是调和点列. 证毕.

四、综合情形中的调和点列

例 5[5]　如图 5 为圆内接 $\triangle ABC$,过点 C 作圆的切线交 BA 的延长线于 D,过 D 作圆的割线 DE 分别交 AC,BC 于 F,G,过 A,B 两点分别作圆的切线交 DE 于 H,E,求证:$\frac{1}{DH}+\frac{1}{DE}=\frac{1}{DF}+\frac{1}{DG}$.

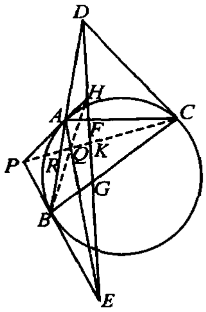

图 5

分析与证明　设 A,B 两点的切线交于 P,连 AE,BH 交于 Q,根据文[8]知,PQ 是 D 点关于此圆的极线. 又 DC 与圆切于 C,所以极线 PQ 过点 C,设直线 PQC 交 DE 于 K,交 DB 于 R.

考察完全四边形 $ABEH$ 的调和性知,D,K,H,E 是调和点列,根据性质 1 得

$$\frac{1}{DH}+\frac{1}{DE}=\frac{2}{DK} \qquad ⑤$$

由(D,K,H,E) $\overline{\wedge}$ (PD,PK,PH,PE) $\overline{\wedge}$ (D,R,A,B) $\overline{\wedge}$ (CD,CR,CA,CB) $\overline{\wedge}$ (D,K,F,G) 知,(D,K,F,G) $\wedge$ (D,K,H,E),则有 $(DK,FG)=(DK,HE)=-1$,表明 D,K,F,G 也是调和点列,根据性质 1 得

$$\frac{1}{DF}+\frac{1}{DG}=\frac{2}{DK}. \qquad ⑥$$

综合 ⑤、⑥ 可得 $\frac{1}{DH}+\frac{1}{DE}=\frac{1}{DF}+\frac{1}{DG}$.

五、结束语

通过以上各例的分析我们发现:调和点列常见于二次曲线、完全四边形中,有时还可能通过透视及射影变换隐藏在图形之中,需要我们去发掘. 本文通过揭示上述各例的调和点列背景,首先简化了问题的解法,看清了问题的本质,进而,也让我们看出了这些问题构思之精巧,感受到命题者的奇思妙想.

参考文献:

[1] 沈毅. 与调和点列有关的平面几何问题[J]. 中等数学,2009(2):6-10.
[2] 朱德祥. 高等几何[M]. 北京:高等教育出版社,1998:31-34;61;116-119;64-70.
[3] 2109 号数学问题解答[J]. 数学通报,2013(3):65-66.

[4] 2137 号数学问题解答[J]. 数学通报,2013(9):64.
[5] 2122 号数学问题解答[J]. 数学通报,2013(6):63.
[6] 2212 号数学问题解答[J]. 数学通报,2014(12):59.
[7] 2239 号数学问题解答[J]. 数学通报,2015(5):64-65.
[8] 李伟健. 1720 号问题的极点、极线结构[J]. 数学通报,2017(9):52-54.

(收稿日期:2019 — 09 — 10)

(上接第 4 页)
的问题?让学生在回顾与讨论中明白:计数的需要产生了自然数;为了表示具有相反意义的量引入了负数,数集由自然数集扩充为整数集;为了测量与分配的需要,引入了分数,数集由整数集扩充为有理数集.第一次数学危机使人们发现了无理数,数集由有理数集扩充为实数集.即自然数集 → 引入负整数 → 整数集 → 引入分数 → 有理数集 → 引入无理数 → 实数集[7].进而总结:数系的依次扩充是基于生产实践与数学发展的需要.

再进一步启发:对于本案例,“实数集不够用,怎么办?”可能有学生会回答“把实数集扩充”.由此进而追问“你怎么想到的?怎么扩充?”接下来从方法论的角度启发学生:“我们遇到新的问题怎么解决?人类解决问题最本原的方法是什么?”实际上,我们通常是从已有方法寻找未知方法,从已有知识寻找未知知识,从已经解决的问题寻找解决新问题的方法.进一步引出复数,同时以主要的人物和事件(例如:笛卡尔、莱布尼茨)贯穿复数的由来与历史发展介绍新元“i”的 200 多年的发展史.使学生体会在知识发现过程中所形成的数学思想、方法和数学精神,感受到浓厚的数学文化气息.继而启发学生进一步思考利用虚数单位“i”与实数可构成哪些新的数?这些新的数从形式看有什么特征?其一般形式是什么?可以怎样分类?让学生在探究与思考中自主地形成概念,加深对复数的理解与认识,同时培养学生的科学品质和创新精神.

3. 结语

在数学课堂教学中融入数学史,对于加强数学史和数学文化教育、培养学生的数学核心素养都具有十分重要的意义.但是,在数学课堂教学中引入数学史并不是对数学知识发展历程的简单移植和嫁接,也不只是在教学中简单地增加一则数学历史材料或一段历史故事讲述数学家的生平事迹这么简单,而应考虑如何真正地让数学的历史服务于数学的教学.所以,在课堂教学渗透数学史时还应注意以下问题:

(1) 关于某一个数学知识点的数学历史可能有很多,在有限的课堂时间里我们不能按照历史发展来尽观其发展,也不能在课堂上喧宾夺主地让数学史取代了数学教学,应选与新知识有着上位、下位或并列的关系并真正起到“桥梁”作用的数学史知识,与教学进行适时合理整合,以提升教学效果.

(2) 基于 HPM 视角下的高中数学课堂教学并不是整堂数学课都要将数学史贯穿其中,也并非每堂课都要用到数学史.作为提升教学效果的一种教学策略,数学史只是辅助学生学习新知识的工具,教学的主要任务还是学习新知识,掌握数学思想方法.

(3) 数学史在数学课堂教学中的融入不是生搬硬套,也不是按历史发展娓娓道来.在具体的课堂教学里,或许不必完全按照知识的由来进行讲述,而是要基于对历史发展脉络的把握和对知识与历史之间的关系深刻透彻的理解,依据学生已有认知找准知识与历史之间的融合点,使学生在知识演进的历程中深化对概念的理解和对知识体系的整体把握,从源头出发对数学有一个透彻的认识.

参考文献:

[1] 汪晓勤. 数学文化透视[M]. 上海:上海科学技术出版社,2013.
[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018.
[3] 王俊辉. 基于数学史的等差数列前 n 项和教学设计[J]. 数学教学,2008,2:43-45.
[4] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的正弦定理历史[J]. 数学通报,2016,1:01-05.
[5] 李文林. 数学史概论(第 3 版)[M]. 北京:高等教育出版,2011.
[6] 周善富. 借鉴数学史揭示新概念 —— 对复数起始课中如何引入虚数单位 i 的思考[J]. 中学数学教学参考,2018,07:11-14.
[7] 陈天宇. HPM 视角下的高中数学教学优化设计例析[J]. 数学教学通讯,2017,21:04-05.

(收稿日期:2019 — 09 — 02)