得 $k<2(1+\ln 2)<4$. 又 k 为正整数，取 $k=3$，则 $g(x)=x\ln x-2x+3$，故 $g'(x)=\ln x-1$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e$. 易得 $[g(x)]_{\min}=g(e)=3-e>0$，因此 $k=3$ 满足题意，所以正整数 k 的最大值为 3.

这种方法也适合例 1. 不难发现，如果我们对自变量 x 取值不当，那么可能造成参数的范围过大，给后续的验证带来困难.

【结束语】

函数中的任意性问题通常可转化为函数的最值问题. 解题中要注意数学思想方法的应用，如转化与化归思想、分类讨论思想、数形结合思想等.

解题是一种认识活动，是对数学知识的继续学习过程，寻找解题思路的过程就是寻找条件与结论之间的逻辑联系或转化轨迹的过程. 对于解题教学，教师的主要任务不在于提供解法或结论，也不在于解法有多么的高超精妙，而应是揭示解法的神秘面纱，给得到的解法一个说法，寻求一个合情合理的诠释，必要时还要上串下连，适当的拓展引申，引导学生发现解决问题的最本质最一般的方法，也就是“通性通法”. 只有这样，学生才能掌握解题的基本方法，才能提高解题教学的有效性.[3]

在解题教学中，有些教师一堂课能讲很多题目，有些题目点到为止，其“含金量”会有多少？因为学生缺少了各种体验的机会，没有了比较分析，一旦遇到了不同的问题，当然不会随机应变，因此考场上经常出现教师讲过的题学生仍然不会做的现象就不足为奇了. 课堂上教师、学生都花了时间，却没得到相应的效果，得不偿失. 所以，草草讲 10 道题，不如讲透一道题，解题教学要讲究质量，“题不在多，经典就行”. 一道题讲完后让学生多些反思，多些探究，一定会有惊喜出现，这样数学学习就不会成为一种负担，而是一种乐趣.[4]

参考文献：

[1] 杨发廷. 一类含有“任意性、存在性”问题的求解策略[J]. 中学数学教学，2018(1)：49—50.

[2] 陈晓明. 对几道高考数学全国卷导数试题命题规律的探究[J]. 中学数学教学，2017(6)：20—23.

[3] 陈荣桂. 提高高三数学总复习的有效性的几点思考[J]. 数学通报，2013(4)：44—46.

[4] 陈晓明. 对一道教材习题的探究[J]. 中学数学教学参考，2017(9)：39—41.

(收稿日期：2018—07—14)

关联椭圆准线若干性质探究

姚先伟

(四川省绵阳东辰国际学校高中部，621000)

在椭圆的学习研究中，我们发现与椭圆的准线有关的若干性质，现分述如下.

为行文方便，本文以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 为例，当涉及一条准线时以左准线为例，a、b、c 分别表示椭圆的长半轴长、短半轴长、半焦距.

性质 1 如图 1，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴的左、右两端点为 A、B，P 为左准线 l 上任一点，PA、PB 分别交椭圆于 M、N，则 MN 恒过椭圆的左焦点 $F(-c,0)$.

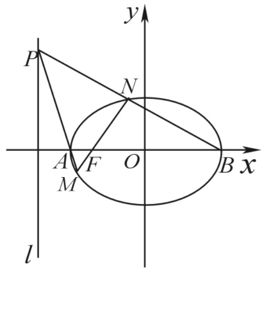

图 1

证明 设 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，设直线 AM 的方程为 $y=k_1(x+a)$，直线 BN 的方程为 $y=k_2(x-a)$.

将 $y=k_1(x+a)$ 与

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立，消去 y 得

$$(a^2k_1^2+b^2)x^2+2a^3k_1^2x+a^4k_1^2-a^2b^2=0.$$

因为 $-a$ 与 x_1 是此方程的两根，所以 $-ax_1=\frac{a^4k_1^2-a^2b^2}{a^2k_1^2+b^2}$，即 $x_1=-\frac{a^3k_1^2-ab^2}{a^2k_1^2+b^2}$，所以

$$y_1=k_1(x_1+a)=\frac{2ab^2k_1}{a^2k_1^2+b^2}.$$

于是 $M(-\frac{a^3k_1^2-ab^2}{a^2k_1^2+b^2},\frac{2ab^2k_1}{a^2k_1^2+b^2})$.

同理可得 $N(\frac{a^3k_2^2-ab^2}{a^2k_2^2+b^2},-\frac{2ab^2k_2}{a^2k_2^2+b^2})$.

由于 AM、BN 交左准线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 于 P，所以 $k_1(-\frac{a^2}{c}+a)=k_2(-\frac{a^2}{c}-a)$，即

$$k_2=\frac{a-c}{a+c}\cdot k_1 \quad ①$$

又 $k_{MN}=-\frac{b^2(k_1+k_2)}{a^2k_1k_2-b^2}$，所以直线 MN 的方程是

$$y-\frac{2ab^2k_1}{a^2k_1^2+b^2}=-\frac{b^2(k_1+k_2)}{a^2k_1k_2-b^2}(x+\frac{a^3k_1^2-ab^2}{a^2k_1^2+b^2}) \quad ②$$

现在只需验证点 $(-c,0)$ 在直线 MN 上.

将 $x=-c$，$y=0$ 代入②，并利用①知 $(-c,0)$ 在直线 MN 上，故 MN 过左焦点 $F(-c,0)$.

推论 设 A、B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴的左、右两端点，MN 是过椭圆的左焦点 $F(-c,0)$ 的弦，则直线 AM、BN 的交点 P 在椭圆的左准线上.

性质 2 如图 2，P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左准线 l 上一点，过 P 作椭圆的切线 PM、PN，M、N 为切点，则直线 MN 过椭圆的左焦点 $F(-c,0)$，且 $PF\perp MN$.

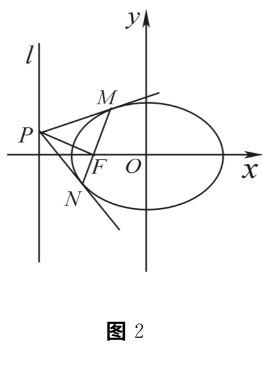

图 2

证明 设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

则切线 PM 的方程为 $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$，又 $P(x_0,y_0)$ 满足此直线方程，所以 $\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1$.

同理有 $\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}=1$.

于是可知直线 MN 的方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

因为 $x_0=-\frac{a^2}{c}$，所以 $-\frac{x}{c}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，令 $y=0$，得 $x=-c$，即直线 MN 过椭圆的左焦点 $F(-c,0)$.

又由 $P(-\frac{a^2}{c},y_0)$，$F(-c,0)$，可得

$$k_{PF}=\frac{y_0-0}{-\frac{a^2}{c}-(-c)}=-\frac{cy_0}{b^2}.$$

又 $k_{MN}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{b^2}{a^2y_0}\cdot(-\frac{a^2}{c})=\frac{b^2}{cy_0}$，所以 $k_{PF}k_{MN}=-1$，即 $PF\perp MN$.

推论 设 MN 是过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左焦点 $F(-c,0)$ 的弦，分别过点 M、N 作椭圆的切线，则两切线交点 P 在椭圆的左准线上，且 $PF\perp MN$.

性质 3 如图 3，M 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左准线 l 上任意一点，以 OM（O 是坐标原点）为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P、Q 两点，则直线 PQ 恒过椭圆的左焦点.

证明 设 $M(-\frac{a^2}{c},t)$，则以 OM 为直径的圆的方程是 $x(x+\frac{a^2}{c})+y(y-t)=0$，此圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相交于 P、Q 两点，两圆方程相减得直线 PQ 的方程是 $\frac{a^2}{c}x-yt+a^2=0$.

显然，不论 t 取何值直线 PQ 均过定点 $F(-c,0)$，即 PQ 恒过椭圆的左焦点 $F(-c,0)$.

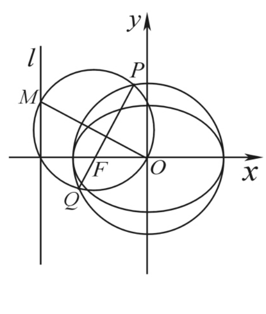

图 3

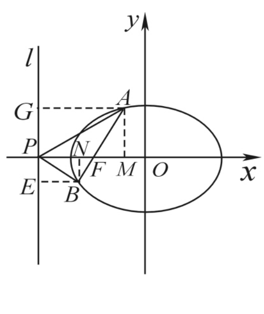

图 4

性质 4 如图 4，过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 $F(-c,0)$ 作一直线交椭圆于 A、B 两点，P

是椭圆左准线 l 与 x 轴的交点，则 PF 平分 $\angle APB$.

证明　当 $AB\perp x$ 轴时，结论显然成立.

当 AB 不垂直于 x 轴时，过 A、B 作 l 的垂线，垂足分别为 G、E，过 A、B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 M、N.

由 $\triangle BNF\backsim\triangle AMF$ 得 $\frac{BN}{AM}=\frac{BF}{AF}$，由椭圆第二定义有 $\frac{BF}{AF}=\frac{BE}{AG}$，又 $BN=EP$，$AM=GP$，所以 $\frac{EP}{GP}=\frac{BE}{AG}$，故 $Rt\triangle BEP\backsim Rt\triangle AGP$.

于是 $\angle EPB=\angle GPA$，所以 $\angle BPF=\angle APF$，即 PF 平分 $\angle APB$.

推论　AB 是过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左焦点 $F(-c,0)$ 且不与长轴垂直的弦，P 是 x 轴负半轴上一点，若 $\angle APF=\angle BPF$，则 P 是椭圆左准线 l 与 x 轴的交点.

性质 5　如图 5，设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过椭圆右焦点 F_2 且与 x 轴垂直的直线与椭圆交于 A、B 两点，连结 AF_1 与椭圆交于 M，连结 BM 交 x 轴于 P，则 P 是椭圆左准线与 x 轴的交点.

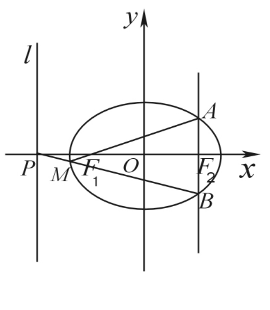

图 5

证明　设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$M(x_1,y_1)$，易知 $A(c,\frac{b^2}{a})$，$B(c,-\frac{b^2}{a})$.

直线 AF_1 的方程是 $y=\frac{b^2}{2ac}(x+c)$，与椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立，消去 y 得

$$(4c^2+b^2)x^2+2b^2cx+b^2c^2-4a^2c^2=0,$$

则 x_1 与 c 是此方程的根，所以 $cx_1=\frac{b^2c^2-4a^2c^2}{4c^2+b^2}$，故

$$x_1=\frac{b^2c-4a^2c}{4c^2+b^2},y_1=-\frac{b^4}{4ac^2+ab^2},$$

即 $M(\frac{b^2c-4a^2c}{4c^2+b^2},-\frac{b^4}{4ac^2+ab^2})$.

所以直线 MB 的斜率为 $-\frac{b^2c}{a(a^2+c^2)}$，于是 MB 的方程是 $y+\frac{b^2}{a}=-\frac{b^2c}{a(a^2+c^2)}(x-c)$.

令 $y=0$ 解得 $x=-\frac{a^2}{c}$，所以与 x 轴的交点坐标是 $(-\frac{a^2}{c},0)$，此即为椭圆左准线与 x 轴的交点.

推论　设 F_1、F_2 是椭圆左、右焦点，P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左准线与 x 轴的交点，AB 是过点 F_2 且垂直于 x 轴的弦，连结 BP 交椭圆于 M，则 A、F_1、M 三点共线.

性质 6　如图 6，设 $F(-c,0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，不过点 F 的直线与椭圆交于 A、B 两点，且与椭圆的左准线 l 交于 M，则 MF 平分 $\angle AFB$ 的外角.

证明　过 A、B 分别作 l 的垂线，垂足为 E、G，则 $\frac{MB}{MA}=\frac{BG}{AE}$.

由椭圆第二定义有 $\frac{FB}{BG}=\frac{FA}{AE}$，即 $\frac{FB}{FA}=\frac{BG}{AE}$，所以 $\frac{MB}{MA}=\frac{FB}{FA}$，故 MF 是 $\angle AFB$ 的外角平分线.

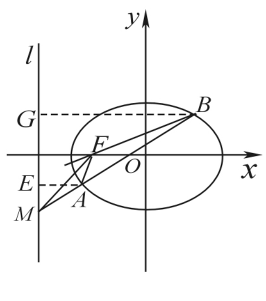

图 6

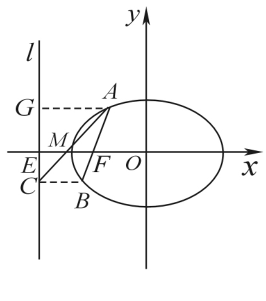

图 7

性质 7　如图 7，AB 是过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 $F(-c,0)$ 的弦，左准线 l 与 x 轴交于 E，若 $BC\perp l$，则 AC 平分线段 EF.

证明　过 A 作 $AG\perp l$ 于 G，则 $BC/\!/EF/\!/AG$，设 AC 交 EF 于 M.

由 $BC/\!/EF$ 得 $\frac{FM}{BC}=\frac{AF}{AB}$，所以

$$FM=\frac{AF}{AB}\cdot BC \qquad ①$$

由 $AG/\!/EF$ 得 $\frac{EM}{AG}=\frac{CE}{CG}=\frac{BF}{BA}$，所以

$$EM=\frac{AG}{BA}\cdot BF \qquad ②$$

由椭圆第二定义有

$$\frac{BF}{BC}=\frac{AF}{AG} \quad ③$$

由①、②、③可得 $FM=EM$，即 M 是线段 EF 的中点.

推论 1　AB 是过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左焦点 $F(-c,0)$ 的弦，准线 l 与 x 轴交于 E，M 是线段 EF 的中点，直线 AM 交 l 于 C，则 $BC/\!/EF$.

推论 2　AB 是过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左焦点 $F(-c,0)$ 的弦，左准线 l 与 x 轴交于 E，过 B 作 $BC\perp l$，垂足为 C，M 是线段 EF 的中点，则 A、M、C 三点共线.

推论 8　如图 8，设 A、B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴的左、右两端点，$F(-c,0)$ 是左焦点，l 是左准线，P 是椭圆上(除 A、B 外)任意点，直线 AP、BP 分别与 l 交于 M、N 两点，则 $MF\perp NF$.

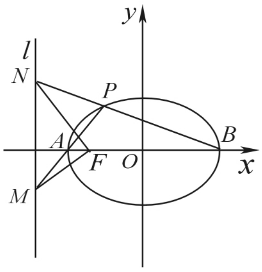

图 8

证明　设 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，$A(-a,0)$，$B(a,0)$.

直线 AP 的方程是 $y=\frac{b\sin\theta}{a+a\cos\theta}(x+a)$，因为 AP 交左准线 $x=-\frac{a^2}{c}$ 于 M，所以点 M 的纵坐标为 $\frac{b\sin\theta}{a+a\cos\theta}(-\frac{a^2}{c}+a)=\frac{b(c-a)\sin\theta}{c(1+\cos\theta)}$，即 $M(-\frac{a^2}{c},\frac{b(c-a)\sin\theta}{c(1+\cos\theta)})$.

同样，BP 的方程是 $y=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta-a}(x-a)$，有 $N(-\frac{a^2}{c},\frac{b(c+a)\sin\theta}{c(1-\cos\theta)})$.

又 $F(-c,0)$，所以

$$k_{MF}\cdot k_{NF}=[\frac{b(c-a)\sin\theta}{c(1+\cos\theta)}\div(-\frac{a^2}{c}+c)]\cdot[\frac{b(c+a)\sin\theta}{c(1-\cos\theta)}\div(-\frac{a^2}{c}+c)]=-1,$$

于是 $MF\perp NF$.

性质 9　如图 9，设 $F(-c,0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，过 F 的直线交椭圆于 A、B 两点，P 是椭圆左准线 l 上任一点，直线 PA、PF、PB 的斜率分别为 k_1、k_2、k_3，则 k_1、k_2、k_3 成等差数列.

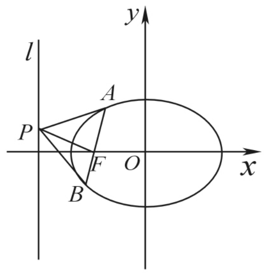

图 9

证明　当 A、B 是长轴的两端点时，易知结论成立.

当 A、B 不是长轴的两端点时，设 AB：$x=my-c$，与椭圆 C 的方程联立，消去 x 化简得：

$$(a^2+b^2m^2)y^2-2b^2cmy-b^4=0.$$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{2b^2cm}{a^2+b^2m}$，$y_1y_2=\frac{-b^4}{a^2+b^2m}$.

设 $P(-\frac{a^2}{c},t)$，因为 $F(-c,0)$，所以

$$k_1=(y_1-t)\div(x_1+\frac{a^2}{c})=\frac{c(y_1-t)}{cmy_1+b^2},$$

$$k_3=\frac{c(y_2-t)}{cmy_2+b^2},\ k_2=-\frac{ct}{b^2}.$$

$$\begin{aligned}k_1+k_3&=\frac{c(y_1-t)}{cmy_1+b^2}+\frac{c(y_2-t)}{cmy_2+b^2}\\&=c\cdot\frac{2cmy_1y_2+(b^2-cmt)(y_1+y_2)-2b^2t}{c^2m^2y_1y_2+b^2cm(y_1+y_2)+b^4}\\&=\frac{2c}{b^2}\cdot\frac{-b^2cm-c^2m^2t+b^2cm-a^2t-b^2m^2t}{-c^2m^2+2c^2m^2+a^2+b^2m^2}\\&=-\frac{2ct}{b^2}=2k_2.\end{aligned}$$

即 $k_1+k_3=2k_2$，故 k_1、k_2、k_3 成等差数列.

类比于双曲线与抛物线是否有类似性质，请读者自行思考.

运用上述性质可求解与圆锥曲线准线有关的高考题和竞赛题，限于篇幅，此处不赘述.

参考文献：

[1]　沈文选，张垚，冷岗松. 奥林匹克数学中的几何问题[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2009 年 5 月.

(收稿日期：2018—07—01)