命题3　如图3，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A、B，过点 B 的一条直线分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 C、D，过点 B 的另一条直线分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 E、F，且 $CD = EF$，直线 CF 分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 P、Q，设 M、N 分别是 $\overset{\frown}{PB}$、$\overset{\frown}{QB}$ 的中点，求证：C、F、M、N 四点共圆.

在图1的基础上，连结 CF，取 CF 的中点 I，设直线 IA 与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 分别相交于不同于点 A 的两点 G，H，连结 GC、HF（见图4），则 $\angle CGA = \angle ABC = \angle ABF = \angle AHF$.

过点 C 作 $CM \perp IA$ 于点 M，过点 F 作 $FN \perp IA$ 于点 N，注意到 I 是 CF 的中点，即知 $\Delta CMI \cong \Delta FNI$，故 $CM = FN$，$IM = IN$，于是 $\Delta GCM \cong \Delta HFN$，从而知 $GM = HN$，即 $GH + HM = HM + MN$，故 $GH = MN = 2IM$.

令 $GH = IA$，则 $IA = MN = 2IM$，即知 CM 垂直平分 IA，故 $CA = CI$，于是 $\angle CAI = \angle CIA$，$\angle GAC = \angle HIF$，注意到 $GH = IA$，知 $GA = HI$，于是 $\Delta GAC \cong \Delta HIF$. 再注意到 I 是 CF 的中点，知 $CF = 2CI = 2CA$.

至此，2019 年全国高中数学联赛加试试题（A 卷）一水到渠成：

命题4　如图4，在锐角 ΔBCF 中，I 是 CF 边的中点. 点 A 在 ΔBCF 内，使得 BA 平分 $\angle CBF$. 直线 IA 与 ΔBCA，ΔBFA 的外接圆分别相交于不同于点 A 的两点 G，H，证明：若 $GH = IA$，则 $CF = 2CA$.

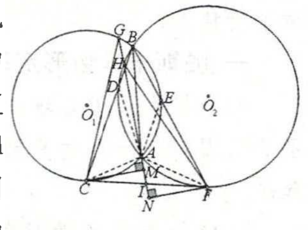

图4

参考文献

[1]2010 中国数学奥林匹克[J]. 中等数学，2010，3.

[2]2019 年全国高中数学联合竞赛[J]. 中等数学，2019，12.

活跃于数学高考中的帕斯卡六边形定理*

浙江省绍兴鲁迅中学　(312000)　虞关寿

考题呈现

题1　(2012 贵州高中数学竞赛题) 如图1，已知 A，B 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左右顶点，P，Q 是该椭圆上不同与顶点的两点，且直线 AP 与 QB，PB 与 AQ 分别交于点 M，N.

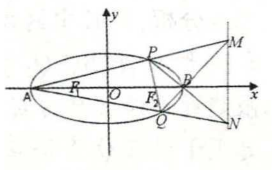

图1

(1) 求证：$MN \perp AB$；

(2) 若弦 PQ 过椭圆的右焦点 F_2，求直线 MN 的方程.

题2　(2014 江西高考题) 如图2，已知抛物线 C：$x^2 = 4y$，过点 $M(0,2)$ 任作一直线与 C 相交于 A，B 两点，过点 B 作 y 轴的平行线与直线 AO 相交于点 D(O 为坐标原点).

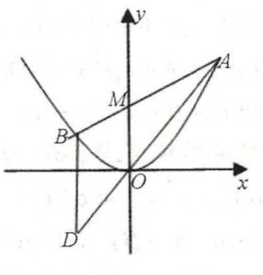

图2

(1) 证明：动点 D 在定直线上；

(2) 作 C 的任意一条切线 l(不含 x 轴)，与直线 $y = 2$ 相交于点 N_1，与(1)中的定直线相交于点 N_2，证明：$|MN_2|^2 - |MN_1|^2$ 为定值，并求此定值.

题3　(2017 台州市高三模拟题) 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 A，下顶点为 B. 点 $E(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 在椭圆 C 上，且 ΔEF_1F_2 的面积为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 动直线 $y = kx + 4$ 与该椭圆交于不同两点 M，N，求证：直线 BM 与直线 AN 的交点 G 在定直线上.

这三个考题取之不同的水平考试，但有个共同的特点，就是先用“帕斯卡六边形定理”作预判，得到所要得到的结果，然而有意识地消去一些参量，朝既定的方向进行变形与运算，由于目标已明确，所以

* 本文为绍兴市教育科学 2019 年规划课题《深度学习背景下侧文学生数学高阶思维培养的实践与研究》研究成果.

我们在解决问题时,不会感到无所适从. 从近年的各省市的高考题和数学竞赛题及自主招生题来看,能充分感悟到这类问题都是用“帕斯卡六边形定理”来设计和编拟的,可见“帕斯卡六边形定理”独特的运用价值.

一、帕斯卡六边形定理及证明

帕斯卡六边形定理:如果圆锥曲线的内接六边形的三双对边所在的直线分别相交,那么这三交点共线.

定理的证明通常是先证明圆锥曲线是圆的情形,然后利用“投影、仿映(相似变换)”或运用复平面的旋转变换和平移变换,可证明定理对椭圆、双曲线、抛物线仍然正确.

证明:如图 3,设圆内六边形 $ABCDEF$ 的三双对边所在的直线分别相交于 P,Q,R 三点,记两直线 PAB 与 RDC 相交于 M,两直线 RDC 与 QEF 相交于 N,两直线 QEF 与 PAB 相交于 K. 依次注意直线 QCB、直线 RFA、直线 PED 去截 ΔMNK 的三边所在直线,则运用三次梅涅劳斯定理得 $\frac{MC}{CN}\cdot\frac{NQ}{QK}\cdot\frac{KB}{BM}=1,\frac{KA}{AM}\cdot\frac{MR}{RN}\cdot\frac{NF}{FK}=1,\frac{NE}{EK}\cdot\frac{KP}{PM}\cdot\frac{MD}{DN}=1$. 三式相乘得 $\frac{MC\cdot MD}{MA\cdot MB}\cdot\frac{NE\cdot NF}{NC\cdot ND}\cdot\frac{KA\cdot KB}{KE\cdot KF}\cdot(\frac{NQ}{QK}\cdot\frac{KP}{PM}\cdot\frac{MR}{RN})=1$,又由圆的割线定理得 $MC\cdot MD=MA\cdot MB,NE\cdot NF=NC\cdot ND,KA\cdot KB=KE\cdot KF$,则 $\frac{NQ}{QK}\cdot\frac{KP}{PM}\cdot\frac{MR}{RN}=1$. 再运用梅涅劳斯定理的逆定理得三个交点 P,Q,R 共线.

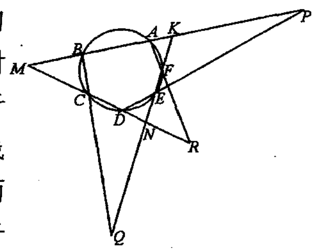

图 3

我们把这其中的三交点所在的直线称为帕斯卡直线.

为了使此定理更具完备性,作这样的规定:两条平行直线相交于“无穷远点”,而且平面内的无穷远点在平面内的任意一条直线上.

近年来一些命题专家青睐于以帕斯卡六边形定理为题源,把其一般情形演变到具体、特殊、极端、退化等情形,结合圆锥曲线中的极点与极线理论编制出竞赛题、高考题及自主招生题.

二、帕斯卡六边形定理的特殊化与拓展

1. 帕斯卡六边形定理特殊化

把圆锥曲线内接六边形中相邻的两个顶点合成一个点,则可得下列三个推论(以椭圆为例):

(1) 椭圆内接五边形 $ABCDE$,过点 A 的切线与直线 CD 相交于点 P,直线 DE 与直线 AB 相交于点 Q,直线 BC 与直线 AE 相交于点 R,则 P,Q,R 三点共线;

(2) 椭圆内接四边形 $ABCD$,直线 AD 与直线 BC 相交于点 P,直线 AB 与直线 CD 相交于点 Q,过点 A 的切线与过点 C 的切线相交于点 R,则 P,Q,R 三点共线;

(3) 椭圆内接三角形 ABC,过点 A 切线与直线 BC 相交于点 P,过点 B 的切线与直线 AC 相交于点 Q,过点 C 的切线与直线 AB 相交于点 R,则 P,Q,R 三点共线.

2. 帕斯卡六边形定理拓展处理

(1) 上述所给的内接六边形,我们一般认为它是凸六边形,可验证对凹六边形也是成立的,同样对凹五边形、凹四边形也是成立的;

(2) 当一个多边形有一对对边平行时,作这样的规定:两条平行直线相交于“无穷远点”,而且平面内的无穷远点在平面内的任意一条直线上.

三、帕斯卡六边形定理及推论的应用

1. 题 1 分析与解答:

分析:题目中的内接凸四边形 $APBQ$ 可看作凸六边形 $AP_1P_2BQ_1Q_2$ 的退化形式,其中割线 P_1P_2 无限趋近于以点 P 为切点的切线 PT,割线 Q_1Q_2 无限趋近于以点 Q 为切点的切线 QT,两切线相交于点 T. 帕斯卡六边形定理知三点 M,N,T 共线,设弦 PQ 与长轴(x 轴)的交点坐标为 $(x_0,0)$,又由极点与极线的关联性得动点 T 的轨迹是直线 $x_0x=a^2$. 这样就可以推测两个小题的结论.

解:(1) 设 $P(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$Q(a\cos\beta,b\sin\beta)$,由 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,可得两直线的方程为 $l_{AP}:a(1+\cos\alpha)y=b\sin\alpha(x+a)$;$l_{QB}:a(\cos\beta-1)y=b\sin\beta(x-a)$,联立两方程并消去 y 得 $\sin\alpha(\cos\beta-1)(x+a)=\sin\beta(1+\cos\alpha)(x-a)$,移项并整理可得 $[\sin\alpha(\cos\beta-1)-\sin\beta(1+\cos\alpha)]x=a[\sin\alpha(1-\cos\beta)-\sin\beta(1+\cos\alpha)]$,即 $[\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha-\sin\beta]x=a[\sin\alpha-\sin\beta-\sin(\beta+\alpha)]$. 利用三角恒等变换公式得 $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2})x=a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}(\sin$

$\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$). 因为 P,Q 不同于顶点,所以 $x_M = \frac{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$;同理由直线 AQ 方程与直线 PB 方程,联立消去 y 可得 $x_N = \frac{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$,故 $x_M = x_N$,所以 $MN \perp AB$.

(2) 注意到 $\overrightarrow{F_2P} = (a\cos\alpha - c, b\sin\alpha)$, $\overrightarrow{F_2Q} = (a\cos\beta - c, b\sin\beta)$,又由 P,F_2,Q 三点共线可得 $\overrightarrow{F_2P} // \overrightarrow{F_2Q}$,所以 $\sin\beta(a\cos\alpha - c) = \sin\alpha(a\cos\beta - c)$,移项并整理得 $a\sin(\alpha-\beta) = c(\sin\alpha - \sin\beta)$,即 $a\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,所以 $a\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,即 $\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a}{c}$,所以 $x_M = x_N = \frac{a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a^2}{c}$,因此直线 MN 的方程为 $x = \frac{a^2}{c}$.

2. 题 2 分析与解答

分析:设想抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的内接凸六边形 $A_1A_2PB_1B_2O$ 的点 P 是与 y 轴正方向同向的无穷远点,当两点 A_1, A_2 无限趋近于直到重合于 A 点,两点 B_1, B_2 无限趋近于直到重合于 B 点时,可理解两条直线 AP, BP 都平行于 y 轴,设直线 A_1A_2,即点 A 处的切线与直线 B_1B_2,即点 B 处的切线,两切线的交点为 E,两直线 AP, BO 交于点 G,则由帕斯卡六边形定理和极限思想可推测知三点 D,E,G 三点共线,再由极限思想和圆锥曲线的极点与极线理论可推知,动点 E 的轨迹是点 M 的极线,易知极线方程为 $y = -2$,显然动点 D 也在这条定直线上.

解:(1) 依题可设 AB 的方程为 $y = kx + 2$,与抛物线方程 $x^2 = 4y$ 联立,消去 y 得 $x^2 - 4kx - 8 = 0$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,则有 $x_1x_2 = -8$,直线 AO 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1}x$,直线 BD 的方程为 $x = x_2$,联立解得 D 点的坐标为 $D(x_2, \frac{y_1x_2}{x_1})$,注意到 $x_1x_2 = -8$, $x_1 = 4y_1$,则有 $y = \frac{y_1x_1x_2}{x_1} = \frac{-8y_1}{4y_1} = -2$.

(2) 依题知,切线 l 的斜率存在且不等于0,设切线 l 的方程为 $y = ax + b(a \neq 0)$,代入 $x^2 = 4y$,得 $x^2 = 4(ax+b)$,即 $x^2 - 4ax - 4b = 0$,由 $\Delta = 0$ 得 $(4a)^2 + 16b = 0$,即得 $b = -a^2$. 所以切线 l 的方程可写成 $y = ax - a^2$,令 $y = 2$, $y = -2$ 得 N_1, N_2 的坐标分别为:$N_1(\frac{2}{a}+a, 2)$, $N_2(-\frac{2}{a}+a, -2)$,则 $|MN_2|^2 - |MN_1|^2 = (\frac{2}{a}-a)^2 + 4^2 - (\frac{2}{a}+a)^2 = 8$.

3. 题 3 分析与解答

分析:由题设条件容易得(1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. 观察椭圆的内接四边形 $ANBM$ 为一个凹四边形,如图 4,可把它想象成椭圆的内接凹六边形 $AN_1N_2BM_1M_2$ 退化情形(其中 M_1 和 M_2 无限接近直至重合于 M 点, N_1 和 N_2 无限接近直至重合于 N 点). 这样可借助帕斯卡六边形定理,推测直线 BM 与直线 AN 的交点 G、椭圆在点 M 处的切线与在 N 处的切线的交点 P、直线 AM 与直线 BN 的交点 Q 这三点共线. 而易知两切线交点 P 在定点 $(0,4)$ 的极线 $y = 1$ 上,则可推测交点 G 也在这条极线上.

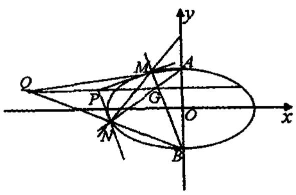

图4

解:(1) $\because S_{\Delta EF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $\therefore c = 2$,又点 $E(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 在椭圆 C 上, $\therefore \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^2 - 4} = 1$, $\therefore a^4 - 9a^2 + 8 = 0$,解得 $a^2 = 8$ 或 $a^2 = 1$(舍去),又 $a^2 - b^2 = 4$, $\therefore b^2 = 4$, $\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) $\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = kx + 4 \end{cases} \Rightarrow (1+2k^2)x^2 + 16kx + 24 = 0$,由韦达定理知 $\begin{cases} x_M + x_N = \frac{-16k}{1+2k^2}, \\ x_M \cdot x_N = \frac{24}{1+2k^2}, \end{cases}$ 则 $\frac{x_M + x_N}{x_M \cdot x_N} = \frac{2k}{-3}$, $\because A(0,2)$, $b(0,-2)$,且三点 A,G,N 共线,三

点 B,G,M 共线,∴ 可得 $\frac{y_G-2}{x_G}=\frac{y_N-2}{x_N}$,且 $\frac{y_G+2}{x_G}=\frac{y_M+2}{x_M}$. 把这两式相除可得 $\frac{y_G-2}{y_G+2}=\frac{(y_N-2)x_M}{(y_M+2)x_N}=\frac{(kx_N+2)x_M}{(kx_M+6)x_N}=\frac{kx_Mx_N+2x_M}{kx_Mx_N+6x_N}$,运用合比与分比定理得 $\frac{2y_G}{-4}=\frac{2kx_Mx_N+2x_M+6x_N}{2x_M-6x_N}=\frac{-3(x_M+x_N)+2x_M+6x_N}{2x_M-6x_N}=\frac{-x_M+3x_N}{2x_M-6x_N}=-\frac{1}{2}$,则 $y_G=1$. ∴ 直线 BM 与直线 AN 的交点 G 在定直线 $y=1$ 上.

三角形"边分比"性质的应用举例及其推广

广东省广州市铁一中学 (510600) 何重飞
华南师范大学数学科学学院 (510631) 吴 康

丰富繁杂的平面几何世界,有一些命题或者结论及其模型简洁明了,但在解题应用当中却是一把利器,正所谓"小结论,大应用". 下面笔者介绍一个涉及三角形边角关系的"边分比"性质,并对性质的简单应用及其推广加以举例探究.

三角形"边分比"性质 如图1,在 ΔABC 中,D 是 BC 上的一点,则有 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$.

证明:(法一)在 ΔABD 中,由正弦定理 $\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,∴ $BD=AB\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}$;同理在 ΔACD 中,$CD=AC\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}$. 所以有 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$. 当点 D 在 BC 或 CB 的延长线上时,结论也成立.

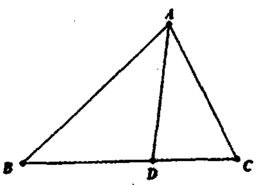

图1

(法二:面积法)∵ $\frac{BD}{CD}=\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAD}{AC\cdot\sin\angle CAD}$.

性质推论 在 ΔABC 中,D 是 BC 上的一点,则有 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle BAD}$;$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{AC}{AB}$.

利用上述"边分比"性质或其推论可以证明平面几何中的多个经典定理.

例1 (角平分线定理)在 ΔABC 中,AD 是 $\angle A$ 的平分线,且与 BC 交于点 D,则有 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$.

证明:因为 AD 是 $\angle A$ 的平分线,所以 $\angle BAD=\angle CAD$,由"边分比"性质可得 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}=\frac{AB}{AC}$,当 AD 是 $\angle A$ 的外角平分线时,定理也成立.

例2 (角元塞瓦定理)ΔABC 内一点 O,连接 AO,BO,CO 并延长之,如果分别交三角形的另一边于 D,E,F,则有(1) $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$;(2) $\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}\cdot\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC}\cdot\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA}=1$.

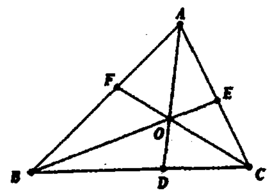

图2

证明:如图2所示,设 $\angle AOF=\alpha$,$\angle FOB=\beta$,$\angle BOD=\gamma$,则由三角形"边分比"性质知 $\frac{AF}{FB}=\frac{AO}{BO}\cdot\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle FOB}=\frac{AO}{BO}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$,$\frac{BD}{DC}=\frac{BO}{CO}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle DOC}=\frac{BO}{CO}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$,$\frac{CE}{EA}=\frac{CO}{AO}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle EOA}=\frac{CO}{AO}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$,所以 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$,又因为 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}$,所以 $\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB}=\frac{CD}{DB}\cdot\frac{AB}{AC}$.