抛物线的焦点弦

1. 准备知识:

(1). 抛物线弦长计算的基本方法:设 A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)

弦长 $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

若直线的斜率存在，假设直线方程为 $y=kx+m$，代入 $y^2=2px$，消去 y 并化简整理得到：

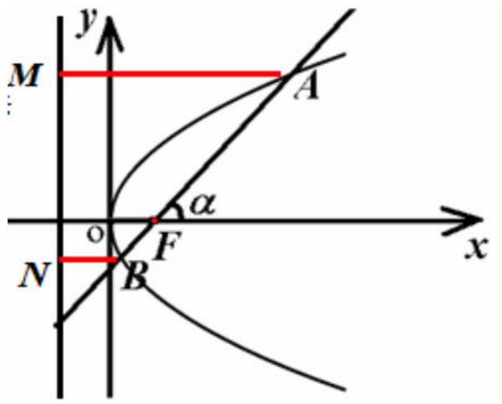
$k^2x^2+2(mk-p)x+m^2=0$，$\Delta>0$，最后利用韦达定理，代入弦长公式即可解得弦长.

(2). 由于 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$，故 $\tan^2\alpha=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$，

所以有：$\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha},\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$.

2. 抛物线焦点弦的常用结论

抛物线的焦点弦具有丰富的性质，它是对抛物线定义的进一步考察，也是抛物线这节中最重要的考点之一，下面罗列出常见的抛物线焦点弦性质：



假设抛物线方程为 $y^2=2px$. 过抛物线焦点的直线 l 与抛物线交于 A,B 两点，其坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

性质 1. $|AF|=x_A+\frac{p}{2},|BF|=x_B+\frac{p}{2},|AB|=x_A+x_B+p$.

证明：性质 1 的证明很简单，由抛物线的定义即可证得. 如上图，过 A,B 向准线引垂线，垂足分别为 M,N. 由定义可知：$|AM|=|AF|,|BN|=|BF|$. 代入坐标即可证得相关结论.

例 1.（2018 年全国 2 卷）设抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，过F且斜率为$k(k>0)$的直线l与C交于A，B两点，$|AB|=8$.

（1）求l的方程；

（2）求过点A，B且与C的准线相切的圆的方程.

性质 2. 抛物线$y^2=2px$ 的焦点为 F，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是过F的直线与抛物线的两个交点，求证：$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4},y_1y_2=-p^2$.

证明：$A(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1),B(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2)$，则$AB$的方程为$y-y_1=\dfrac{2p}{y_1+y_2}(x-\dfrac{y_1^2}{2p})$，整理可得：$(y-y_1)(y_1+y_2)=2px-y_1^2$，即可得$AB$的方程为：$(y_1+y_2)\cdot y=2px+y_1y_2$. 最后，由于直线$AB$过焦点，代入焦点坐标可得$y_1y_2=-p^2$. 再代入抛物线方程$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$.

性质 3. 已知倾斜角为α直线的l经过抛物线$y^2=2px$的焦点F，且与抛物线交于A,B两点，则

（1）$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha},|BF|=\dfrac{P}{1+\cos\alpha},\dfrac{1}{|FA|}+\dfrac{1}{|FB|}=\dfrac{2}{p}$.

（2）$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$，$S_{\Delta OAB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha},|AB|=2p(1+\dfrac{1}{k^2})$。

证明：略

性质 4. 抛物线的通径

(1). 通径长为 $2p$.

(2). 焦点弦中，通径最短.
(3). 通径越长，抛物线开口越大.

性质 5. 已知直线 l 经过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 F，且与抛物线交于 A,B 两点，若弦 AB 中点的坐标为 (x_0,y_0)，则 $|AB|=2(x_0+\frac{p}{2})$.
证明思路：中点弦问题，点差法即可.

性质 6. 以焦点弦为直径的圆与准线相切.

三. 练习题

1．设抛物线$C:y^2=8x$，过焦点F作倾斜角为30° 的直线交C于A,B两点，则$|AB|$

（　　）

A．$\frac{32}{3}$　B．16　C．32　D．$4\sqrt{3}$

2．过抛物线$C:y^2=4x$的焦点的直线l交抛物线于$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$两点，如果

$x_1+x_2=6$，则$|PQ|=$（　）

A．9　B．6　C．7　D．8

3．已知F是抛物线$y^2=4x$ 的焦点，则过F作倾斜角为$60°$的直线分别交抛物线于A,B

（A在x轴上方）两点，则$\frac{|AF|}{|BF|}$的值为（ ）

A．$\sqrt{3}$　B．2　C．3　D．4

4．过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F作倾斜角为$\frac{\pi}{6}$的直线交抛物线于A，B两点，若

$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=2$，则实数$p$的值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　B．1　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D．$\sqrt{3}$

5．过抛物线$y^2=4x$的焦点F且倾斜角为$60°$的直线交抛物线于A、B两点，以AF、BF

为直径的圆分别与y轴相切于点M，N，则$\left|MN\right|=$（）

A．$\sqrt{3}$　B．$2\sqrt{3}$　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　D．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

6．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点F和准线l，过点F的直线交l于点A，与抛物线的一个

交点为B，且$\overrightarrow{FB}=-3\overrightarrow{FA}$，则$|AB|=$（ ）

A．$\frac{32}{3}$　B．$\frac{16}{3}$　C．$\frac{8}{3}$　D．$\frac{4}{3}$

7．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，过F的直线l交抛物线C于A、B两点，弦AB的

中点M到抛物线C的准线的距离为5，则直线l的斜率为（　）

A. $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　**B.** $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　**C.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　**D.** ± 1

8．过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，且 $|AF|=3|BF|$，则直线 AB 的斜率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$　　　　D．$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$

9. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，直线 l_1 与 C 交于 A,B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D,E 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为（　　）

A．16　　　B．14　　　C．12　　　D．10

10．已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A 、B 两点，弦 AB 的中点 M 到抛物线 C 的准线的距离为 5，线段 AB 的长度为_________.

11. 已知点 $M(-1，1)$ 和抛物线 C：$y^2=4x$，过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A，B 两点．若 $\angle AMB=90^\circ$，则 $k=$________.

12.（2019 年全国 1 卷）已知抛物线方程 $C:y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，与 x 轴交点为 P.

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overline{AP}=3\overline{PB}$，求 $|AB|$.