数学活动课程讲座

圆锥曲线几个结论的证明与应用

金荣生
（上海交通大学附属中学，200439）

中图分类号：O121.3 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2020)09－0002－07

（本讲适合高中）

本文以全国高中数学联赛的试题为例，谈几个圆锥曲线的常见结论及其应用.

1 互相垂直的半径

命题1 O 为坐标原点. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上有两点 A、B，满足 $OA\perp OB$，则

$$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

且直线 AB 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切.

证明 如图1.

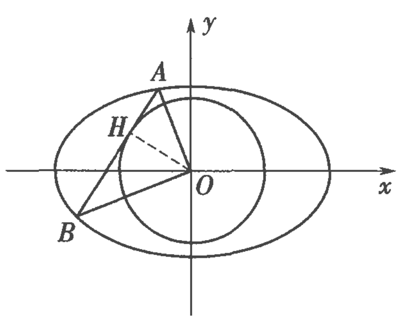

图1

设 $|OA|=r_1$，$|OB|=r_2$.

不妨设 $\angle xOA=\theta$，$\angle xOB=\frac{\pi}{2}+\theta$.

则 $A(r_1\cos\theta, r_1\sin\theta)$，

$B(-r_2\sin\theta, r_2\cos\theta)$.

由点 A、B 在椭圆上得

$$\begin{cases}\frac{r_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r_1^2\sin^2\theta}{b^2}=1,\\ \frac{r_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{r_1^2},\\ \frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}=\frac{1}{r_2^2}.\end{cases}$$

两式相加得

$$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H. 则

$$OH=\frac{2S_{\triangle AOB}}{AB}=\frac{|OA||OB|}{|AB|}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

故直线 AB 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切.

命题2 已知 O 为坐标原点. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上有两点 A、B，满足 $OA\perp OB$，则 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$（此时 $a^2<b^2$），且直线 AB 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$ 相切.

如图2. 证法类似于命题1.

收稿日期：2020－06－15

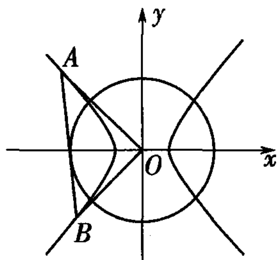

图 2

例 1　设 $C_0:x^2+y^2=1$ 和 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$. 试问：当且仅当 a、b 满足什么条件时，对 C_1 上任意一点 P，均存在以 P 为顶点、与 C_0 外切、与 C_1 内接的平行四边形？并证明你的结论.

（2000，全国高中数学联合竞赛）

解　如图 3，设四边形 $PQRS$ 是与 C_0 外切且与 C_1 内接的平行四边形.

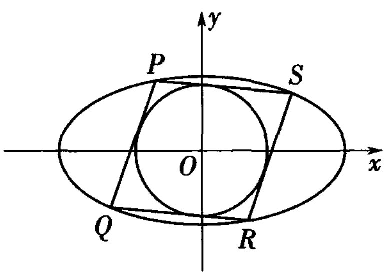

图 3

由圆的外切平行四边形为菱形得

$OP\perp OQ$.

由命题 1，知圆的方程为

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

于是，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$.　①

反之，若式①成立，则对于椭圆上任一点 P，取椭圆上点 Q、S，使得 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$.

则由命题 1，知此时 PQ、PS 与 C_0 相切.

设点 P 关于 O 的对称点为 R. 则四边形 $PQRS$ 为满足条件的平行四边形.

综上，当且仅当 a、b 满足式①时，结论成立.

例 2　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，存在经过点 F 的一条直线 l，l 与椭圆交于 A、B 两点，使得 $OA\perp OB$. 求该椭圆的离心率的取值范围.

（2015，全国高中数学联合竞赛（B 卷））

解　一方面，若 $OA\perp OB$，由命题 1，得点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

另一方面，若点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，过 O 作 OA 的垂线，与椭圆交于点 B_1、B_2，则

$$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB_1|^2}=\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB_2|^2}$$
$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

于是，点 O 到直线 AB_1、AB_2 的距离也是 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

因为过点 A 与 O 的距离为定值 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 的直线最多只有两条，所以，点 B 与 B_1、B_2 之一重合. 于是，$OA\perp OB$.

故 $OA\perp OB$

$\Leftrightarrow$ 直线 l 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 相切.

从而，存在经过点 F 的一条直线 l，l 与椭圆交于 A、B，使得

$OA\perp OB$

$$\Leftrightarrow |OF|=c\geqslant\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow c^2(2a^2-c^2)\geqslant a^2(a^2-c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant e^2\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

又 $e<1$，故 $e\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$ 即为所求.

2 圆锥曲线的切线方程与切点弦方程

命题3 若 $P(x_0,y_0)$ 为圆锥曲线 Γ:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

上一点,则过点 P 的切线 l 的方程为

$$2Ax_0x+B(x_0y+xy_0)+2Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+2F=0. \quad ①$$

证明 由题意得

$$Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0. \quad ②$$

设 $P'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 也为圆锥曲线 Γ 上的点.则

$$A(x_0+\Delta x)^2+B(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)+C(y_0+\Delta y)^2+D(x_0+\Delta x)+E(y_0+\Delta y)+F=0. \quad ③$$

(③-②)÷Δx 得

$$A(2x_0+\Delta x)+B\left(x_0\frac{\Delta y}{\Delta x}+y_0+\Delta y\right)+C\left(2y_0\frac{\Delta y}{\Delta x}+\Delta y\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)+D+E\frac{\Delta y}{\Delta x}=0. \quad ④$$

若切线 l 的斜率 k 存在,则

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

对式④两边求极限得

$$2Ax_0+B(x_0k+y_0)+2Cy_0k+D+Ek=0$$

$$\Rightarrow k=-\frac{2Ax_0+By_0+D}{Bx_0+2Cy_0+E}.$$

若切线 l 的斜率 k 不存在,则

$$Bx_0+2Cy_0+E=0.$$

从而,切线 l 的方程为

$$(2Ax_0+By_0+D)(x-x_0)+(Bx_0+2Cy_0+E)(y-y_0)=0,$$

即式①成立.

命题4 若点 $P(x_0,y_0)$ 不在圆锥曲线 Γ:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

上,过点 P 可以作 Γ 的两条切线,则经过两个切点的弦所在的直线方程为

$$2Ax_0x+B(x_0y+xy_0)+2Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+2F=0. \quad ①$$

证明 设切点为 $Q(x_1,y_1)$,$R(x_2,y_2)$.

由命题3,知切线 PQ 的方程为

$$2Ax_1x+B(x_1y+xy_1)+2Cy_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+2F=0.$$

由点 P 在 PQ 上得

$$2Ax_1x_0+B(x_1y_0+x_0y_1)+2Cy_1y_0+D(x_1+x_0)+E(y_1+y_0)+2F=0.$$

则 (x_1,y_1) 为方程①的一组解.

类似地,(x_2,y_2) 也为方程①的一组解.

而经过点 Q、R 的直线有且只有一条,故直线 QR 的方程为①.

例3 在平面直角坐标系 xOy 中,P 为不在 x 轴上的一个动点,满足条件:过 P 可作抛物线 $y^2=4x$ 的两条切线,两切点连线 l_P 与 PO 垂直.设直线 l_P 与 PO、x 轴的交点分别为 Q、R.

(1)证明:R 为一个定点;

(2)求 $\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值.

(2019,全国高中数学联合竞赛(A卷))

解 (1)设 $P(a,b)(b\neq 0)$.

由命题4,知直线 $l_P: by=2(x+a)$,直线 PO、l_P 的斜率分别为 $\frac{b}{a}$、$\frac{2}{b}$.

由 $PO\perp l_P$,知

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{2}{b}=-1\Rightarrow a=-2.$$

故 l_P 与 x 轴的交点 R 为定点 $(2,0)$.

(2)直线 PO、PR 的斜率分别为

$$k_1=-\frac{b}{2},k_2=-\frac{b}{4}.$$

设 $\angle OPR=\alpha$.则

$$\frac{|PQ|}{|QR|}=\frac{1}{\tan\alpha}=\left|\frac{1+k_1k_2}{k_1-k_2}\right|$$

$$=\left|\frac{1+\left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{b}{4}\right)}{-\frac{b}{2}+\frac{b}{4}}\right|=\frac{8+b^2}{2|b|}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{8b^2}}{2|b|}=2\sqrt{2}.$$

因此，当 $b=\pm2\sqrt{2}$ 时，$\frac{|PQ|}{|QR|}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

例 4 已知过点 $(0,1)$ 的直线 l 与曲线 $C: y=x+\frac{1}{x}(x>0)$ 交于两个不同的点 M、N. 求曲线 C 在点 M、N 处的切线的交点的轨迹.

(2007，全国高中数学联合竞赛)

解 设曲线 C 在点 M、N 处的切线的交点为 $P(x_P,y_P)$.

由命题 4，得直线 MN 的方程为

$x_Py+xy_P=2x_Px+2$.

将点 $(0,1)$ 的坐标代入，得 $x_P=2$.

将 $y=\frac{4-y_P}{2}x+1$ 代入 $y=x+\frac{1}{x}$，得

$\left(1-\frac{y_P}{2}\right)x+x-1=0$.

该方程有两个不相等的正根，解得

$2<y_P<\frac{5}{2}$,

即点 P 的轨迹为 $(2,2)$、$\left(2,\frac{5}{2}\right)$ 两点间的线段(不含端点).

3 二次曲线系方程

命题 5 经过平面内任意三点不共线的五点，有且仅有一条二次曲线.

设这五点为 A、B、C、D、E，且

$l_{AB}: f_1(x,y)=0, l_{BC}: f_2(x,y)=0$,

$l_{CD}: f_3(x,y)=0, l_{DA}: f_4(x,y)=0$,

点 $E(x_E,y_E)$.

则 $f_2(x_E,y_E)f_4(x_E,y_E)f_1(x,y)f_3(x,y)-f_1(x_E,y_E)f_3(x_E,y_E)f_2(x,y)f_4(x,y)=0$

是满足条件的一条二次曲线.

构造射影坐标系可以比较简明地证明其唯一性[1]，本文略.

命题 6 若二次曲线 $\Gamma_1: F_1(x,y)=0$ 与二次曲线 $\Gamma_2: F_2(x,y)=0$ 有四个公共点，则经过这四个点的任意一条二次曲线的方程可表示为

$\lambda F_1(x,y)+\mu F_2(x,y)=0(\lambda、\mu\in\mathbf{R})$.

证明 设点 $E(x_E,y_E)$ 为平面内经过曲线 Γ_1 与 Γ_2 的四个公共点的二次曲线 Γ 上与该四点相异的一点. 则曲线

$F_2(x_E,y_E)F_1(x,y)-F_1(x_E,y_E)F_2(x,y)=0$

经过四个公共点与点 E.

又点 E 与四个公共点组成的五点组任意三点不共线(否则，与直线和二次曲线最多只有两个公共点矛盾)，由命题 5，知二次曲线 Γ 由这五点确定.

取 $\lambda=F_2(x_E,y_E)$，$\mu=-F_1(x_E,y_E)$.

故二次曲线 Γ 的方程可表示为

$\lambda F_1(x,y)+\mu F_2(x,y)=0$.

特别地，若直线 $l_1: f_1(x,y)=0$、直线 $l_2: f_2(x,y)=0$ 是二次曲线 $\Gamma_1: F(x,y)=0$ 与 Γ 的公共弦所在的直线(或公切线)，且直线 l_1、l_2 的公共点不在 Γ_1 上，则二次曲线 Γ(除 $f_1(x,y)f_2(x,y)=0$ 外)的方程可表示为

$F(x,y)+\lambda f_1(x,y)f_2(x,y)=0(\lambda\in\mathbf{R})$.

例 5 在平面直角坐标系 xOy 中，设 AB 是抛物线 $y^2=4x$ 的过点 $F(1,0)$ 的弦，$\triangle AOB$ 的外接圆与抛物线交于点 P(不同于点 O、A、B). 若 PF 平分 $\angle APB$，求 $|PF|$ 的所有可能值.

(2018，全国高中数学联合竞赛(A 卷))

解 设 $l_{AB}: y=k(x-1)$，$P\left(\frac{y_P^2}{4},y_P\right)$.

如图 4.

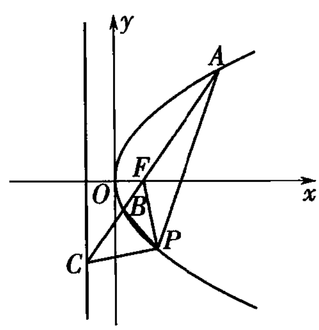

图 4

由命题6,知经过A、O、B、P四点的圆的方程可表示为

$$(y^2-4x)+\lambda(y-kx+k)\left(y-\frac{4}{y_P}x\right)=0.$$

由圆的方程中xy的系数为0得

$$k+\frac{4}{y_P}=0.$$

设直线AB与抛物线的准线交于点C,点A、B在准线上的射影是A_1、B_1.

由PF平分$\angle APB$,及F为抛物线的焦点,知

$$\frac{PA}{PB}=\frac{FA}{FB}=\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AC}{BC}$$

$\Rightarrow PC$为$\angle APB$的外角平分线

$\Rightarrow PF\perp PC.$

又$C(-1,-2k)$,于是,

$$\frac{y_P}{\frac{y_P^2}{4}-1}\cdot\frac{y_P+2k}{\frac{y_P^2}{4}-1}=-1.$$

消去k得

$$\frac{y_P^4}{16}+4\cdot\frac{y_P^2}{4}-9=0$$

$$\Rightarrow\frac{y_P^2}{4}=\sqrt{13}-2.$$

由焦半径公式得

$$|PF|=\frac{y_P^2}{4}+1=\sqrt{13}-1.$$

例6 已知$0<a<b$,过两定点$A(a,0)$、$B(b,0)$分别引直线l、m,使得与抛物线$y^2=x$有四个不同的交点.当这四点共圆时,求这种直线l与m的交点P的轨迹.

(1993,全国高中数学联合竞赛)

解 设$l:y=k_1(x-a)$,$m:y=k_2(x-b)$.

若四个交点共圆,则此圆可写为

$$(k_1x-y-k_1a)(k_2x-y-k_2b)+\lambda(y^2-x)=0,$$

此方程中xy项必为0,故得$k_1=-k_2$.

则$l:y=k_1(x-a)$,$m:y=-k_1(x-b)$.

两式消去k_1得

$$2x-(a+b)=0(y\neq0),$$

此即为所求轨迹方程.

4 伸缩变换视角下的椭圆

命题7 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的每个点的横坐标不变、纵坐标变为原先的$\frac{a}{b}$($a>0$,$b>0$,$a\neq b$),椭圆将变换为圆$x^2+y^2=a^2$.

在伸缩变换下:直线仍是直线;点与曲线的位置关系(点在或不在曲线上)不变,直线与曲线的位置关系(相交、相离或相切)不变;平行或共线直线上对应线段长度的比值不变;两条对应直线斜率的比值不变,两条平行直线仍平行;对应图形的面积的比值不变.

例7 如图5,在平面直角坐标系xOy中,A、B、C、D依次是椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右、上、下顶点.设$P$、$Q$为椭圆上位于第一象限的两点,满足$OQ\parallel AP$,$M$为线段$AP$的中点,射线$OM$与椭圆交于点$R$.证明:线段$OQ$、$OR$、$BC$能构成一个直角三角形.

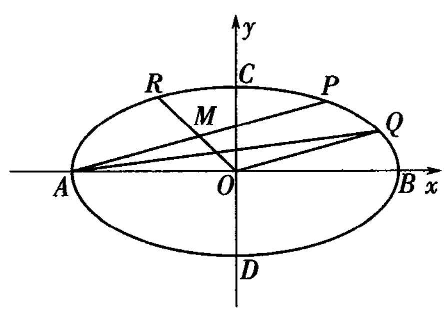

图5

(2018,全国高中数学联合竞赛(B卷))

证明 作伸缩变换:横坐标不变,纵坐标变为原先的$\frac{a}{b}$.

将椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$变换为圆$x^2+y^2=a^2$.

设椭圆上的点P、Q变换为圆上的点P_1、Q_1.记OP_1的中点为M_1,延长OM_1,与圆交于点R_1.

则 $OR_1 \perp OQ_1$.

由共线直线上对应线段长度的比值不变,知 M、R 在该伸缩变换下与 M_1、R_1 对应.

设 $Q_1(a\cos\theta, a\sin\theta)$. 则

$Q(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $R_1(-a\sin\theta, a\cos\theta)$,

$R(-a\sin\theta, b\cos\theta)$.

故 OQ^2+OR^2

$$=(a\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2+(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2$$

$$=BC^2.$$

因此,线段 OQ、OR、BC 能构成一个直角三角形.

例8 如图6,$A(-2,0)$、$B(0,-1)$是椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的两点,直线 $l_1: x=-2$,$l_2: y=-1$. $P(x_0, y_0)(x_0>0, y_0>0)$是 Γ 上的一个动点,l_3 是过点 P 且与 Γ 相切的直线,C、D、E 分别是直线 l_1 与 l_2、l_2 与 l_3、l_1 与 l_3 的交点. 证明:三条直线 AD、BE、CP 共点.

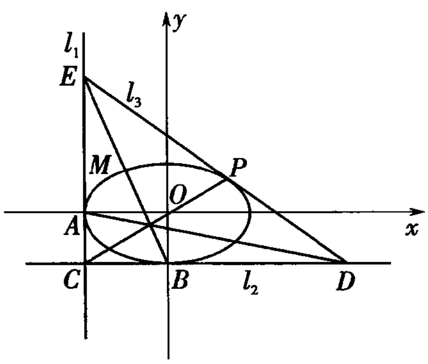

图6

(2019,全国高中数学联合竞赛(B卷))

证明 作伸缩变换:横坐标不变,纵坐标变为原先的2倍.

则椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 变换为圆 $\Gamma': x^2+y^2=4$,直线 $l_1: x=-2$ 不变,直线 $l_2: y=-1$ 变换为 $l_2': y=-2$,点 $P(x_0, y_0)$变换为圆 Γ'上的一个动点 $P'(x_0, 2y_0)$,l_3 变换为过点 P'且与圆 Γ'相切的直线 l_3',点 C、D、E 变换为直线 l_1 与 l_2'、l_2'与 l_3'、l_1 与 l_3'的交点 C'、D'、E'.

于是,圆 Γ'是$\triangle D'E'C'$的内切圆,

$E'A'=E'P'$, $D'B'=D'P'$, $C'B'=C'A'$.

故 $\frac{E'A'}{A'D'}\cdot\frac{D'B'}{B'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'E'}=1$.

由塞瓦定理,知 $A'D'$、$B'E'$、$C'P'$ 三线共点.

因此,三条直线 AD、BE、CP 共点.

练习题

1. 对椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上任意两点 P、Q,若 $OP \perp OQ$,则$|OP||OQ|$的最小值为______.

(2009,全国高中数学联合竞赛)

提示 由

$$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow |OP||OQ| \geqslant \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 $C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{10}=1$,$F$、$A$ 分别为椭圆 C 的焦点、右顶点,P 为椭圆 C 上位于第一象限内的动点. 则四边形 $OAPF$ 面积的最大值为______.

(2017,全国高中数学联合竞赛(A卷))

提示 设 $P(3\cos\theta, \sqrt{10}\sin\theta)$,其中,$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 则

$$S_{\text{四边形}OAPF}=S_{\triangle OAP}+S_{\triangle OFP}$$

$$=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{10}\sin\theta+\frac{1}{2}\times 3\cos\theta$$

$$\geqslant \frac{3\sqrt{11}}{2}.$$

3. 已知 F 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点,P 为直线 $x=4$ 上的动点,过点 P 作椭圆 C 的切线 PA、PB,A、B 是切点.

(1)证明:A、F、B 三点共线;

(2)求$\triangle PAB$ 面积的最小值.

(2019,全国高中数学联赛福建赛区预赛)

提示 (1)用切点弦方程或用伸缩变换,变为圆的切点弦问题.

(2)用伸缩变换,变为与圆相关的问题,设$\triangle PAB$ 变换为$\triangle P'A'B'$,证得 $A'B'$与直线 $x=4$ 平行时,$\triangle P'A'B'$面积最小,故$\triangle PAB$ 面积的最小值为$\frac{9}{2}$.

4. 椭圆 C 的焦点为 F_1、F_2,两准线为 l_1、l_2,过椭圆 C 上一点 P 作平行于 F_1F_2的直线,分别与 l_1、l_2 交于点 M_1、M_2,直线 M_1F_1 与 M_2F_2交于点 Q. 证明:P、F_1、Q、F_2四点共圆.

(2019,全国高中数学联赛江西赛区预赛)

提示 设 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点,

$l_{PF_1}:f_1(x,y)=0, l_{QF_2}:f_2(x,y)=0,$

$l_{F_1Q}:f_3(x,y)=0, l_{F_2P}:f_4(x,y)=0,$

转化为存在实数λ使得

$$f_1(x,y)f_3(x,y)+\lambda f_2(x,y)f_4(x,y)=0$$

展开式的 xy 项的系数为 0,且 x^2、y^2 项的系数相等. 也可利用椭圆的第二定义,用平面几何的知识证明四点共圆.

5. 作斜率为$\frac{1}{3}$的直线 l,与椭圆 C: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$交于 A、B 两点,且点 $P(3\sqrt{2},\sqrt{2})$在直线 l 上方.

(1)证明:$\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上;

(2)若$\angle APB=60°$,求$\triangle PAB$ 的面积.

(2011,全国高中数学联合竞赛(A 卷))

提示 (1)设点 P 关于 x 轴的对称点为 Q,过点 Q 作椭圆的切线,则切线的斜率为$\frac{1}{3}$,与直线 l 平行. 作伸缩变换:横坐标不变,纵坐标变为原先的 3 倍,将椭圆变换为圆,直线 l 的斜率变为 1. 利用圆的弦切角定理,发现 PQ 为$\angle APB$ 的平分线.

(2)若$\angle APB=60°$时,可知

$k_{PA}=\sqrt{3}, k_{PB}=-\sqrt{3}$.

解得 $S_{\triangle PAB}=\frac{117\sqrt{3}}{49}$.

参考文献:

[1] 孟壮. 关于二次曲线的两种定义的注记[J]. 宿州师专学报,2004(2).