圆锥曲线一个有趣性质的统一简证与再推广

孙 芸

（江苏省海门中学 226100）

《数学通报》2012 年第 2 期刊登的《圆锥曲线一个有趣性质的再推广》一文（文[1]）给出了圆锥曲线一个统一的美妙性质（本文称之为定理）：

定理 设圆锥曲线 E 的一个焦点是 F，相应的准线为 l，过焦点 F 的直线交圆锥曲线 E 于 A、B 两点，C 是 E 上任意一点，直线 CA、CB 分别与准线 l 交于 M、N 两点，则以线段 MN 为直径的圆必过焦点 F.

关于定理的证明，文[1]采用代数方法比较繁琐，笔者研究发现，利用圆锥曲线的第二定义可使定理获得简捷证明，另外，借助《几何画板》软件研究发现，定理还可以进一步推广到类焦点和类准线情形，现将研究成果行文如下.

1 统一简证

证明 为便于叙述，不妨设圆锥曲线 E 的焦点在 x 轴上，离心率为 e，且不妨设：相应于焦点 F 的准线为 l，当 E 为椭圆时，F 为左焦点，当 E 为双曲线时，F 为右焦点，当 E 为抛物线时，焦点 F 在 x 轴的正半轴上.

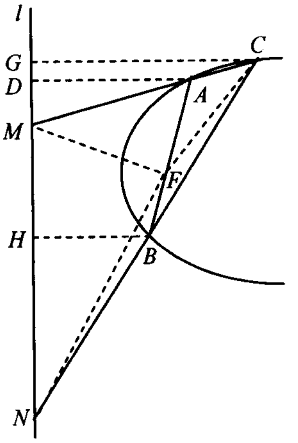

图 1

(1)当点 C 位于准线 l 的右侧时（椭圆、双曲线和抛物线情形一样证明），有两种情况：一是点 C 位于直线 AB 的右侧（示意图 1），二是点 C 位于直线 AB 的左侧，准线 l 的右侧（示意图 2），这两种情形统一证明如下：

分别过 A、B、C 作准线 l 的垂线 AD、BH、CG，垂足分别为 D、H、G，连接 MF、NF、CF.

由圆锥曲线的第二定义 $\frac{AF}{AD}=\frac{CF}{CG}=e$，

所以 $\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{CG}$.

又因为 $AD \parallel CG$，所以 $\triangle ADM \backsim \triangle CGM$，

所以 $\frac{AM}{CM}=\frac{AD}{CG}$，

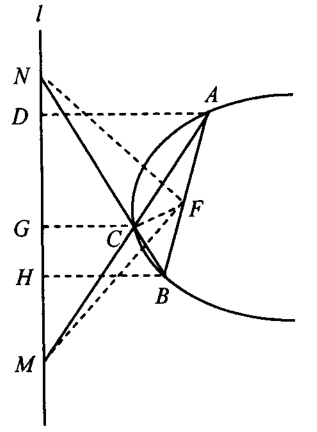

图 2

所以 $\frac{AF}{CF}=\frac{AM}{CM}$，由外角平分线定理得，

FM 是 $\angle AFC$ 外角 $\angle BFC$ 的平分线.

同理可得 FN 是 $\angle BFC$ 的外角 $\angle AFC$ 平分线.

又 $\angle AFC+\angle BFC=\pi$，且 A、F、B 三点共线，

所以 $MF \perp NF$，即 $\angle MFN=\frac{\pi}{2}$，

故以 MN 为直径的圆经过焦点 F.

(2)当点 C 位于准线 l 的左侧时,仅双曲线有此情形,此时点 C 位于左支上.

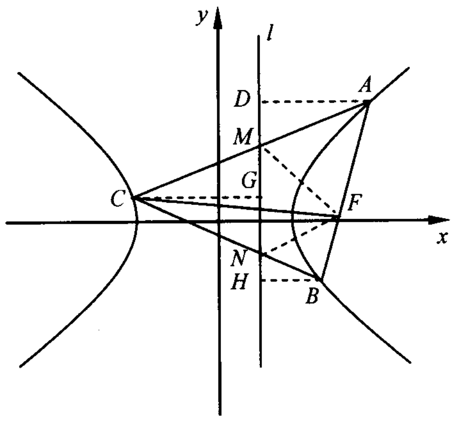

图 3

如图 3,分别过 A、B、C 作准线 l 的垂线 AD、BH、CG,垂足分别为 D、H、G,连接 MF、NF、CF.

仿(1)证明可得 $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AM}{CM}$.

由角平分线定理得,FM 是 $\angle AFC$ 的平分线.

同理可得 FN 是 $\angle BFC$ 的平分线.

又 $\angle AFC+\angle BFC=\pi$,且 A、F、B 三点共线,

所以 $MF\perp NF$,即 $\angle MFN=\dfrac{\pi}{2}$,

故以 MN 为直径的圆经过焦点 F.

综上,以线段 MN 为直径的圆必过焦点 F(定理证毕).

2 推广探究

圆锥曲线的类焦点与类准线的概念:点 $F(m,0)$ $(m>0)$、直线 $l:x=-m$ 称为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的类焦点、类准线;点 $F(m,0)$、直线 $l:x=\dfrac{a^2}{m}$ 分别称为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的类焦点、类准线(椭圆中 $0<|m|<a$,双曲线中 $|m|>a$).

若将焦点与准线拓展到类焦点与类准线,则定理可以进一步推广如下.

推广 1 已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$,定点 $F(m,0)(m>0)$ 和定直线 $l:x=-m$,过 F 的直线交抛物线 E 于 A、B 两点,C 是 E 上任意一点,直线 CA、CB 分别与 l 交于 M、N 两点,则以线段 MN 为直径的圆恒过两个定点 $(-m\pm\sqrt{2pm},0)$,而且

(1)当 $0<m<\dfrac{p}{2}$ 时,点 F 在以线段 MN 为直径的圆内;

(2)当 $m=\dfrac{p}{2}$ 时,点 F 在以线段 MN 为直径的圆上(此时 F 为抛物线的焦点);

(3)当 $m>\dfrac{p}{2}$ 时,点 F 在以线段 MN 为直径的圆外.

证明 设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{2p},y_1\right)B\left(\dfrac{y_2^2}{2p},y_2\right)C\left(\dfrac{y_0^2}{2p},y_0\right)$,

直线 AB 的方程为 $x=ny+m$,

联立方程组 $\begin{cases}y^2=2px\\x=ny+m\end{cases}$,

消去 x,得 $y^2-2pny-2pm=0$,

由韦达定理得 $y_1+y_2=2pn$,$y_1y_2=-2pm$.

直线 CA 的方程为 $\dfrac{x-\dfrac{y_0^2}{2p}}{\dfrac{y_1^2}{2p}-\dfrac{y_0^2}{2p}}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$,

令 $x=-m$,得 $y_M=\dfrac{y_1y_0-2pm}{y_1+y_0}$,

同理 $y_N=\dfrac{y_2y_0-2pm}{y_2+y_0}$,

$$\text{所以 } y_My_N=\frac{(y_1y_0-2pm)(y_2y_0-2pm)}{(y_1+y_0)(y_2+y_0)}$$
$$=\frac{y_1y_2y_0^2-2pmy_0(y_1+y_2)+4p^2m^2}{y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2}$$
$$=\frac{-2pmy_0^2-2pmy_0(2pn)+4p^2m^2}{-2pm+2pny_0+y_0^2}$$
$$=\frac{-2pm(y_0^2+2pny_0-2pm)}{-2pm+2pny_0+y_0^2}$$
$$=-2pm,$$

所以 $|y_My_N|=2pm$.

因为 $MN\perp x$ 轴(设垂足为 K),

由圆的相交弦定理得 $|y_My_N|=|KQ|^2$(其中 Q 为以线段 MN 为直径的圆与 x 轴的交点),

所以 $|KQ|=\sqrt{2pm}$,

所以 $Q(-m\pm\sqrt{2pm},0)$(两个定点).

特别地,当 $m=\dfrac{p}{2}$ 时,$2m=\sqrt{2pm}$,

即 $|KF|=|KQ|$,

所以点 F 在以线段 MN 为直径的圆上(此时 F 为

抛物线的焦点).

当 $0 < m < \frac{p}{2}$ 时，$2m < \sqrt{2pm}$ ，

即 $|KF| < |KQ|$ ，

所以 F 在以线段 MN 为直径的圆内；

当 $m > \frac{p}{2}$ 时，$2m > \sqrt{2pm}$ ，即 $|KF| > |KQ|$ ，

所以 F 在以线段 MN 为直径的圆外.

由以上证明可知，推广 1 等价叙述为：

结论 1 已知抛物线 $E: y^2 = 2px\ (p > 0)$，定点 $F(m,0)\ (m > 0)$ 和定直线 $l: x = -m$ ，过 F 的直线交抛物线 E 于 A、B 两点，C 是 E 上任意一点，直线 CA、CB 分别与 l 交于 M、N 两点，则 M、N 两点的纵坐标之积为定值 $-2pm$.

推广 2 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$，定点 $F(m,0)\ (0 < |m| < a)$ 和定直线 $l: x = \frac{a^2}{m}$ ，过 F 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点，C 是 E 上任意一点，直线 CA、CB 分别与 l 交于 M、N 两点，则以线段 MN 为直径的圆恒过两个定点 $\left(\frac{a^2}{m} \pm \frac{b}{|m|}\sqrt{a^2 - m^2}, 0\right)$ ，而且

(1)当 $0 < |m| < c$ 时，点 F 在以线段 MN 为直径的圆外；

(2)当 $|m| = c$ 时，点 F 在以线段 MN 为直径的圆上(此时 F 为椭圆的焦点)；

(3)当 $c < |m| < a$ 时，点 F 在以线段 MN 为直径的圆内.

证明 设 $A(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$ ，$B(a\cos\beta, b\sin\beta)$ ，$C(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ，

则直线 CA 的方程为 $(a\cos\alpha - a\cos\theta)(y - b\sin\theta) = (b\sin\alpha - b\sin\theta)(x - a\cos\theta)$ ，

即

$$-2a\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2}(y - b\sin\theta) = 2b\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2}(x - a\cos\theta),$$

化简整理得

$$b\cos\frac{\alpha+\theta}{2}x + a\sin\frac{\alpha+\theta}{2}y = ab\cos\frac{\alpha-\theta}{2},$$

令 $x = \frac{a^2}{m}$ ，得 $y_M = \dfrac{b\left(m\cos\frac{\theta-\alpha}{2} - a\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\right)}{m\sin\frac{\theta+\alpha}{2}}$ ，

同理得 $y_N = \dfrac{b\left(m\cos\frac{\theta-\beta}{2} - a\cos\frac{\theta+\beta}{2}\right)}{m\sin\frac{\theta+\beta}{2}}$.

又 $\overrightarrow{FA} = (a\cos\alpha - m, b\sin\alpha)$ 与 $\overrightarrow{FB} = (a\cos\beta - m, b\sin\beta)$ 共线，

所以 $(a\cos\alpha - m)b\sin\beta - (a\cos\beta - m)b\sin\alpha = 0$ ，

即 $a\sin(\beta - \alpha) = m(\sin\beta - \sin\alpha)$ ，

由两倍角公式及和差化积公式得

$$a\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = m\cos\frac{\beta+\alpha}{2}, \quad ①$$

所以

$$\begin{aligned}
&\left(m\cos\frac{\theta-\alpha}{2} - a\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\left(m\cos\frac{\theta-\beta}{2} - a\cos\frac{\theta+\beta}{2}\right)\\
&= m^2\cos\frac{\theta-\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\beta}{2} - am\left(\cos\frac{\theta-\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2} + \cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\beta}{2}\right) + a^2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2}\\
&= \frac{1}{2}m^2\left(\cos\frac{2\theta-\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \frac{1}{2}am\left(\cos\frac{2\theta-\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{2\theta+\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}a^2\left(\cos\frac{2\theta+\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}m^2\left(\cos\frac{2\theta-\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \frac{1}{2}am\left(2\cos\theta\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}a^2\left(\cos\frac{2\theta+\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

结合①式，上式

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}m^2\left(\cos\frac{2\theta-\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - am\left(\frac{m}{a}\cos\theta\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{a}{m}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}a^2\left(\cos\frac{2\theta+\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}m^2\left(\cos\frac{2\theta-\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - am\left(\frac{m}{2a}\left(\cos\frac{2\theta+\alpha+\beta}{2}\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+\cos\frac{2\theta-\alpha-\beta}{2}\Big)+\frac{a}{m}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}a^2\left(\cos\frac{2\theta+\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(m^2-a^2)\Big(\cos\frac{2\theta+\alpha+\beta}{2}$$

$$-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\Big),$$

所以

$$y_My_N=-\frac{b^2(m^2-a^2)\left(\cos\frac{2\theta+\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2m^2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}$$

$$=\frac{b^2(m^2-a^2)\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{m^2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}$$

$$=\frac{b^2(m^2-a^2)}{m^2},$$

从而 $|y_My_N|=\frac{b^2(a^2-m^2)}{m^2}$.

因为 $MN\perp x$ 轴(设垂足为 K),

由圆的相交弦定理得 $|y_My_N|=|KQ|^2$(其中 Q 为以线段 MN 为直径的圆与 x 轴的交点)

所以 $|KQ|=\frac{b}{|m|}\sqrt{a^2-m^2}$,

从而 $Q\left(\frac{a^2}{m}\pm\frac{b}{|m|}\sqrt{a^2-m^2},0\right)$(两个定点).

特别地,当 $|m|=c$ 时,

$\left|\frac{a^2}{m}-m\right|=\frac{b}{|m|}\sqrt{a^2-m^2}$,即 $|KF|=|KQ|$,

所以点 F 在以线段 MN 为直径的圆上(此时 F 为椭圆的焦点).

当 $0<|m|<c$ 时,$\left|\frac{a^2}{m}-m\right|>\frac{b}{|m|}\sqrt{a^2-m^2}$,

即 $|KF|>|KQ|$,

所以 F 在以线段 MN 为直径的圆外;

当 $c<|m|<a$ 时,$\left|\frac{a^2}{m}-m\right|<\frac{b}{|m|}\sqrt{a^2-m^2}$,

即 $|KF|<|KQ|$,

所以 F 在以线段 MN 为直径的圆内.

推广 2 等价叙述为:

结论 2 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,定点 $F(m,0)(0<|m|<a)$ 和定直线 $l:x=\frac{a^2}{m}$,过 F 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点,C 是 E 上任意一点,直线 CA、CB 分别与 l 交于 M、N 两点,则 M、N 两点的纵坐标之积为定值 $\frac{b^2(m^2-a^2)}{m^2}$.

推广 3 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,定点 $F(m,0)(|m|>a)$ 和定直线 $l:x=\frac{a^2}{m}$,过 F 的直线交双曲线 E 于 A、B 两点,C 是 E 上任意一点,直线 CA、CB 分别与 l 交于 M、N 两点,则以线段 MN 为直径的圆恒过两个定点 $\left(\frac{a^2}{m}\pm\frac{b}{|m|}\sqrt{m^2-a^2},0\right)$,而且

(1)当 $a<|m|<c$ 时,点 F 在以线段 MN 为直径的圆内;

(2)当 $|m|=c$ 时,点 F 在以线段 MN 为直径的圆上(此时 F 为双曲线的焦点);

(3)当 $|m|>c$ 时,点 F 在以线段 MN 为直径的圆外.

推广 3 的证明与推广 2 类似,此处不赘述. 推广 3 等价叙述为:

结论 3 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,定点 $F(m,0)(|m|>a)$ 和定直线 $l:x=\frac{a^2}{m}$,过 F 的直线交双曲线 E 于 A、B 两点,C 是 E 上任意一点,直线 CA、CB 分别与 l 交于 M、N 两点,则 M、N 两点的纵坐标之积为定值 $\frac{b^2(a^2-m^2)}{m^2}$.

参考文献

1 张元方. 圆锥曲线一个有趣性质的再推广[J]. 数学通报, 2012,2

2 陈广权. 圆锥曲线又一有趣性质[J]. 数学通讯(下半月), 2011,1