圆锥曲线对定点张直角弦问题再研究①

李世臣 陆楷章

(河南省周口市川汇区教体局教研室 466001) (河南省周口师范学院数学与统计学院 466000)

文[1]探讨了圆锥曲线上的定点张直角弦的问题,文[2]修正了文[1]的命题和证明,文[3][4]用两种方法研究了圆锥曲线外的定点张直角弦的一组结论.由于两条直线垂直常用两条直线的斜率乘积等于-1来进行量化,于是笔者从斜率入手对这一问题再研究,欣喜发现圆锥曲线两条过定点的弦确有关联斜率的一组新结论.

定理1 过定点$P(m,n)$的直线交椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$于$A$、$B$两点,点$C$、$D$在椭圆上,直线$CA$、$CB$、$DA$、$DB$的斜率分别为$k_{CA}$、$k_{CB}$、$k_{DA}$、$k_{DB}$.

(1)若$k_{CA}\cdot k_{CB}=k_{DA}\cdot k_{DB}=t$,当$a^4t^2\neq b^4$时,直线$CD$过定点$Q\left(\frac{a^2t-b^2}{a^2t+b^2}m,-\frac{a^2t-b^2}{a^2t+b^2}n\right)$;

(2)若$k_{CA}+k_{CB}=k_{DA}+k_{DB}=t$,当$t\neq0$时,直线$CD$过定点$Q\left(\frac{a^2t^2m-2a^2tn}{a^2t^2+4b^2},-\frac{2b^2tm+a^2t^2n}{a^2t^2+4b^2}\right)$.

定理2 过定点$P(m,n)$的直线交双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$于$A$、$B$两点,点$C$、$D$在双曲线上,直线$CA$、$CB$、$DA$、$DB$的斜率分别为$k_{CA}$、$k_{CB}$、$k_{DA}$、$k_{DB}$.

(1)若$k_{CA}\cdot k_{CB}=k_{DA}\cdot k_{DB}=t$,当$a^2t+b^2\neq0$时,直线$CD$过定点$Q\left(\frac{a^2t+b^2}{a^2t-b^2}m,-\frac{a^2t+b^2}{a^2t-b^2}n\right)$;

(2)若$k_{CA}+k_{CB}=k_{DA}+k_{DB}=t$,当$t\neq0$时,直线$CD$过定点$Q\left(\frac{a^2t^2m-2a^2tn}{a^2t^2-4b^2},\frac{2b^2tm-a^2t^2n}{a^2t^2-4b^2}\right)$.

定理3 过定点$P(m,n)$的直线与抛物线$y^2=2px(p>0)$交于A、B两点,点C、D在抛物线上,直线CA、CB、DA、DB的斜率分别为k_{CA}、k_{CB}、k_{DA}、k_{DB}.

(1)若$k_{CA}\cdot k_{CB}=k_{DA}\cdot k_{DB}=t$,当$t\neq0$时,直线$CD$过定点$Q\left(\frac{2p}{t}+m,-n\right)$;

(2)若$k_{CA}+k_{CB}=k_{DA}+k_{DB}=t$,当$t\neq0$时,直线$CD$过定点$Q\left(m-\frac{2}{t}n+\frac{4p}{t^2},-n+\frac{2}{t}p\right)$.

将三种曲线统一如下:

定理4 过定点$P(m,n)$的直线与圆锥曲线$F(x,y)=(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$(以原点为焦点,以$x=-p$为准线,$e$为离心率,$p$为焦准距)交于$A$、$B$两点,点$C$、$D$在圆锥曲线上,直线$CA$、$CB$、$DA$、$DB$的斜率分别为$k_{CA}$、$k_{CB}$、$k_{DA}$、$k_{DB}$.

(1)若$k_{CA}\cdot k_{CB}=k_{DA}\cdot k_{DB}=t$,当$t^2\neq(e^2-1)^2$时,直线$CD$经过定点

$$Q\left(\frac{t-1+e^2}{t+1-e^2}m+\frac{2e^2p}{t+1-e^2},-\frac{t-1+e^2}{t+1-e^2}n\right);$$

(2)若$k_{CA}+k_{CB}=k_{DA}+k_{DB}=t$,当$(t^2-4e^2+4)t\neq0$时,直线$CD$过定点

$$Q\left(\frac{t^2m-2tn+4e^2p}{t^2-4e^2+4},\frac{2(e^2-1)tm-t^2n+2e^2tp}{t^2-4e^2+4}\right).$$

以上四个结论的正确性已在动态数学软件GeoGebra下进行了实验验证,由于定理1,2,3和定理4的证明方法相同,限于篇幅下面仅给出定理4的证明过程.

分析 由于条件都与斜率的和与积有关,所

① 河南省教育科学"十二五"规划课题"基于GeoGebra环境下的数学探究性学习模式研究"(项目编号:〔2014〕-JKGHC-0467)的阶段性研究成果.

以可构建关于斜率的一元二次方程解决问题，利用平移坐标系来简化方程，又保持直线的斜率不变，再将方程转化为关于 x、y 的二元二次齐次方程，然后根据根与系数的关系形成求解过程.

证明　设点 $C(u,v)$，则 $F(u,v)=0$.

平移坐标系，使原点 O 移到点 $C(u,v)$，则圆锥曲线方程化为 $F(x+u,y+v)=0$.

令 $F(x+u,y+v)-F(u,v)=0$，整理得

$(1-e^2)x^2+y^2+2(u-e^2u-e^2p)x+2vy=0$.

设直线 AB 的方程为 $\lambda x+\mu y=1$，

将上式化为关于 x、y 的齐次方程

$(1-e^2)x^2+y^2+2[(u-e^2u-e^2p)x+vy](\lambda x+\mu y)=0$.

整理得 $[(1-e^2)+2\lambda(u-e^2u-e^2p)]x^2+2[\lambda v+\mu(u-e^2u-e^2p)]xy+(1+2\mu v)y^2=0$.

令 $y=kx$，得 $(1+2\mu v)k^2+2[\lambda v+\mu(u-e^2u-e^2p)]k+[(1-e^2)+2\lambda(u-e^2u-e^2p)]=0$.

当 $1+2\mu v\neq 0$，$\Delta=4\{[\lambda v+\mu(u-e^2u-e^2p)]^2-(1+2\mu v)[(1-e^2)+2\lambda(u-e^2u-e^2p)]\}\geqslant 0$ 时，上式有两个实数根.

由于 k_{CA}、k_{CB} 是方程的根，所以

$$k_{CA}\cdot k_{CB}=\frac{1-e^2+2\lambda(u-e^2u-e^2p)}{1+2\mu v},$$

$$k_{CA}+k_{CB}=-\frac{2\lambda v+2\mu(u-e^2u-e^2p)}{1+2\mu v}.$$

(1)若 $k_{CA}\cdot k_{CB}=\dfrac{1-e^2+2\lambda(m-e^2m-e^2p)}{1+2n\mu}=t$，则 $2\lambda(u-e^2u-e^2p)-2\mu tv=t-1+e^2$.

当 $t\neq 1-e^2$ 时，$\lambda\left(\dfrac{2(u-e^2u-e^2p)}{t-1+e^2}\right)+\mu\left(\dfrac{-2tv}{t-1+e^2}\right)=1$.

所以，直线 AB 过点

$C'\left(\dfrac{2(u-e^2u-e^2p)}{t-1+e^2},\dfrac{-2tv}{t-1+e^2}\right)$，在原坐标系中为

$$C'\left(\frac{t+1-e^2}{t-1+e^2}u-\frac{2e^2p}{t-1+e^2},-\frac{t+1-e^2}{t-1+e^2}v\right).$$

由于直线 AB 经过定点 $P(m,n)$，它在原坐标系中的方程为 $\lambda(x-m)+\mu(y-n)=0$.

代入点 C' 的坐标，$\lambda\left(\dfrac{t+1-e^2}{t-1+e^2}u-\dfrac{2e^2p}{t-1+e^2}-m\right)+\mu\left(-\dfrac{t+1-e^2}{t-1+e^2}v-n\right)=0$.

所以点 C 在直线 $\lambda\left(\dfrac{t+1-e^2}{t-1+e^2}x-\dfrac{2e^2p}{t-1+e^2}-m\right)+\mu\left(-\dfrac{t+1-e^2}{t-1+e^2}y-n\right)=0$ 上.

同理，点 D 也在这条直线上，即直线 CD 的方程为

$$\lambda\left(\frac{t+1-e^2}{t-1+e^2}x-\frac{2e^2p}{t-1+e^2}-m\right)+\mu\left(-\frac{t+1-e^2}{t-1+e^2}y-n\right)=0.$$

由 λ、μ 的任意性知

$$\begin{cases}\dfrac{t+1-e^2}{t-1+e^2}x-\dfrac{2e^2p}{t-1+e^2}-m=0\\[2mm] -\dfrac{t+1-e^2}{t-1+e^2}y-n=0\end{cases}.$$

当 $t\neq e^2-1$ 时，解方程组，得

$$\begin{cases}x=\dfrac{t-1+e^2}{t+1-e^2}m+\dfrac{2e^2p}{t+1-e^2}\\[2mm] y=-\dfrac{t-1+e^2}{t+1-e^2}n\end{cases}.$$

则直线 CD 经过定点 Q

$$\left(\frac{t-1+e^2}{t+1-e^2}m+\frac{2e^2p}{t+1-e^2},-\frac{t-1+e^2}{t+1-e^2}n\right).$$

说明　以椭圆图示，如图 1.

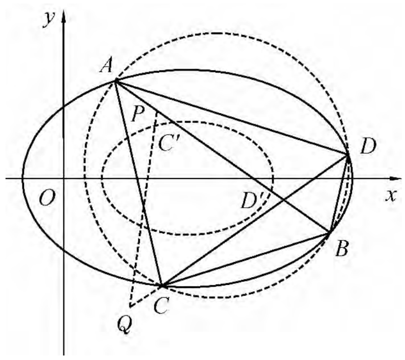

图 1

①由于点 C、D 是圆锥曲线上动点，所以点 C'、D' 在圆锥曲线 $F(x,y)=\dfrac{4e^2p^2t}{(t+e^2-1)^2}$ 上.

②当 $\mu\neq 0$ 时，由 AB、CD 的方程知 $k_{AB}=-\dfrac{\lambda}{\mu}$，$k_{CD}=\dfrac{\lambda}{\mu}$，所以 $k_{AB}=-k_{CD}$. 则 A、B、C、D 四点共圆[5]. 所以 $k_{AC}\cdot k_{AD}=k_{BC}\cdot k_{BD}=-t$，又 $k_{AC}\cdot k_{BC}=k_{AD}\cdot k_{BD}=t$，得 $k_{AC}=-k_{BD}$，$k_{BC}=-k_{AD}$；当 $\mu=0$ 时，k_{AB}、k_{CD} 不存在. 所以 AB、CD，AC、BD，AD、BC 三组直线的斜率互为相反或均不存在.

③当 $k_{AB}\to\pm\infty$ 时，AB 的方程化为 $x=m$，此时 $k_{CD}=-k_{AB}\to\mp\infty$，$CD$ 的方程化为 $x=\frac{t-1+e^2}{t+1-e^2}m+\frac{2e^2p}{t+1-e^2}$，则直线 CD 经过点 Q；

当 $k_{AC}\to\pm\infty$ 时，$k_{BD}=-k_{AC}\to\mp\infty$，$k_{BC}=\frac{t}{k_{AC}}\to 0$，$k_{AD}=\frac{t}{k_{BD}}\to 0$，直线 AB、CD 关于 x 轴对称，由于直线 AB 经过点 P，点 Q 在点 $P(m,n)$ 确定的直线 $y=-\frac{n}{m}\left(x-\frac{2e^2p}{t+1-e^2}\right)$ 上，所以直线 CD 必过点 Q.

（2）若 $k_{CA}+k_{CB}=-\frac{2\lambda v+2\mu(u-e^2u-e^2p)}{1+\mu v}=t$，则 $2\lambda v+2\mu(u-e^2u-e^2p+tv)=-t$.

当 $t\neq 0$ 时，

$$\lambda\left(-\frac{2}{t}v\right)+\mu\left(\frac{2e^2-2}{t}u-2v+\frac{2e^2p}{t}\right)=1.$$

所以，直线 AB 经过点

$C'\left(-\frac{2}{t}v,\frac{2e^2-2}{t}u-2v+\frac{2e^2p}{t}\right)$，在原坐标系中为

$$C'\left(u-\frac{2}{t}v,\frac{2e^2-2}{t}u-v+\frac{2e^2p}{t}\right).$$

由于直线 AB 经过定点 $P(m,n)$，它在原坐标系中的方程为 $\lambda(x-m)+\mu(y-n)=0$.

代入点 C' 的坐标，

$$\lambda\left(u-\frac{2}{t}v-m\right)+\mu\left(\frac{2e^2-2}{t}u-v+\frac{2e^2p}{t}-n\right)=0.$$

所以点 C 在直线 $\lambda\left(x-\frac{2}{t}y-m\right)+\mu\left(\frac{2e^2-2}{t}x-y+\frac{2e^2p}{t}-n\right)=0$ 上.

同理，点 D 也在这条直线上. 所以直线 CD 的方程为

$$\lambda\left(x-\frac{2}{t}y-m\right)+\mu\left(\frac{2e^2-2}{t}x-y+\frac{2e^2p}{t}-n\right)=0.$$

由 λ、μ 的任意性知

$$\begin{cases}x-\frac{2}{t}y-m=0\\ \frac{2e^2-2}{t}x-y+\frac{2e^2p}{t}-n=0\end{cases}.$$

当 $t^2\neq 4(e^2-1)$ 时，解方程组得

$$\begin{cases}x=\frac{t^2m-2tn+4e^2p}{t^2-4e^2+4}\\ y=\frac{2(e^2-1)tm-t^2n+2e^2tp}{t^2-4e^2+4}\end{cases}.$$

则直线 CD 经过定点

$$Q\left(\frac{t^2m-2tn+4e^2p}{t^2-4e^2+4},\frac{2(e^2-1)tm-t^2n+2e^2tp}{t^2-4e^2+4}\right).$$

说明 以椭圆图示，如图 2.

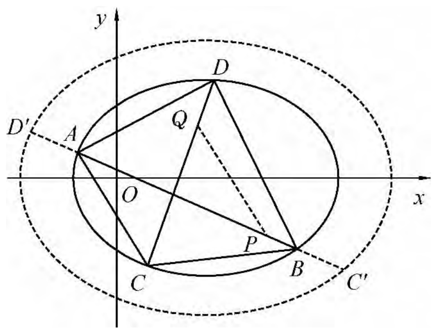

图 2

①由于点 C、D 是圆锥曲线上动点，所以点 C'、D' 在圆锥曲线 $F(x,y)=\frac{4e^2p^2}{t^2}$ 上；

②当 $\mu(2\lambda+t\mu)\neq 0$ 时，由 AB、CD 的方程知 $k_{AB}=-\frac{\lambda}{\mu}$，$k_{CD}=\frac{t\lambda+2(e^2-1)\mu}{2\lambda+t\mu}$. 消去 λ、μ 得 $2k_{AB}\cdot k_{CD}-(k_{AB}+k_{CD})t+2(e^2-1)=0$. 所以 $\left(k_{AB}-\frac{t}{2}\right)\left(k_{CD}-\frac{t}{2}\right)=\frac{t^2-4e^2+4}{4}$.

③由 AB 的方程知，当 $k_{AB}\to\pm\infty$ 时，$\mu=0$，CD 的方程化为 $y=\frac{t}{2}(x-m)$. 点 Q 的坐标满足该方程，所以 CD 经过点 Q；当 $k_{AC}\to\pm\infty$ 时，$k_{BC}=t-k_{AC}\to\mp\infty$，点 A、B 重合于点 C 关于 x 轴的对称点 C'. 设 $C(x_0,y_0)$，则直线 AB 与圆锥曲线切于点 $C'(x_0,-y_0)$. 其方程为 $[(1-e^2)x_0-e^2p](x-m)-y_0(y-n)=0$. 所以 CD 的方程为 $[(1-e^2)\cdot x_0-e^2p]\left(x-\frac{2}{t}y-m\right)-y_0\left(\frac{2e^2-2}{t}x-y+\frac{2e^2p}{t}-n\right)=0$. 所以 CD 仍过点 Q.

在假设的尝试验证和逻辑推演过程中，得益于动态数学软件 GeoGebra 的使用，数学技术拓展了我们研究的广度和深度，延伸了我们思维的区域和空间. 行文至此，笔者猜想：满足斜率和与积的线性代数式（如 $r(k_{CA}\cdot k_{CB})+s(k_{CA}+k_{CB})=r(k_{DA}\cdot k_{BD})+s(k_{DA}+k_{DB})=t$）为定值下的定点问题是否还成立？本文圆锥曲线性质证明略显繁

（下转封底）

$+(GC+GA)(2-2)]=0.$

故 $GA+GB+GC\leqslant GA_1+GB_1+GC_1$.

2290 若$\triangle ABC$的面积为Δ，角A,B,C的对边分别为a,b,c，则

$$a^2\cos^2\frac{B-C}{2}+b^2\cos^2\frac{C-A}{2}+c^2\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$\geqslant 4\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\Delta\geqslant 4\sqrt{3}\Delta$$

（天津水运高级技工学校 黄兆麟 300456）

证明 设h_a,w_a分别为三角形BC边上的高线和角平分线，那么由熟知的公式

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{h_a}{w_a}\text{和 } w_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2},$$

可得

$$\frac{a^2\cos^2\dfrac{B-C}{2}}{\Delta}=\frac{a^2h_a^2}{\Delta w_a^2}=\frac{4\Delta}{w_a^2}$$

$$=\frac{4(b+c)^2\cdot\dfrac{1}{2}bc\sin A}{\left(2bc\cos\dfrac{A}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{(b+c)^2\tan\dfrac{A}{2}}{bc}\geqslant 4\tan\frac{A}{2},$$

那么有

$$\frac{1}{\Delta}\left(a^2\cos^2\frac{B-C}{2}+b^2\cos^2\frac{C-A}{2}+c^2\cos^2\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\geqslant 4\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\geqslant 4\sqrt{3},$$

整理得

$$a^2\cos^2\frac{B-C}{2}+b^2\cos^2\frac{C-A}{2}+c^2\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$\geqslant 4\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\Delta\geqslant 4\sqrt{3}\Delta,$$

以上过程用到了熟知的公式

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geqslant\sqrt{3}.$$

2016年3月号问题
（来稿请注明出处——编者）

2291 设n为正整数，求证：

$$\frac{1\cdot(C_n^1)^2}{1}+\frac{2\cdot(C_n^2)^2}{3}+\frac{3\cdot(C_n^3)^2}{7}+\cdots+\frac{n\cdot(C_n^n)^2}{n^2-n+1}\geqslant\frac{3n\cdot 2^{2n}}{(n+1)(3n^2-n+4)}$$

（甘肃省秦安县第二中学 罗文军 741600）

2292 2295 对任意$a>0,b>0$，求证：$a^a+b^b\geqslant a^b+b^a$.

（湖北省谷城县第三中学 贺 斌 付相兵 441700）

2293 若$a,b,c>0,a^\pi+b^\pi+c^\pi=3$，则

$$a^e+b^e+c^e\leqslant 3.$$

（浙江省宁波市甬江职高 邵剑波 315016）

2294 证明：如果以直角梯形的斜腰为直径的圆与直腰相交于两点，那么以此两点为焦点直腰为长轴的椭圆与斜腰相切.

（河南省辉县市一中 贺基军 453600）

2295 在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$a+c=3b$，$\triangle ABC$的内心为I，内切圆在AB、BC边上的切点分别为D、E，设K是D关于点I的对称点，L是E关于点I的对称点，求证：A、C、K、L四点共圆.

（四川省资阳市外国语实验学校 蔡勇全 641300）

（上接第62页）

琐，能否在更高观点下（如射影几何）进一步简化证明，期待读者探讨交流.

参考文献

1 徐存旭.大胆猜想小心求证逐步推广[J].数学通报，2012，5：40－43

2 施开明.对一类定点（值）问题结论的修正和补充[J].数学通报，2013，8：54－56

3 张忠旺.圆锥曲线对定点张直角弦的包络问题研究[J].数学通报，2013，8：57－59

4 高文启.再谈圆锥曲线对定点张直角的弦问题[J].数学通报，2014，11：60－63

5 张乃贵.圆锥曲线上四点共圆充要条件的研究[J].数学教学，2012，7：8－10

刊号：ISSN 0583－1458 / CN11－2254/O1 全国各地邮局订购 代号：2－501 全年定价：72.00元 每期定价：6.00元