椭圆的“第三定义”

——从课本上一道例题谈起

■河南师范大学附属中学 李润泽 孟召臣

人教版教科书高中《数学》选修2－1第41页有这样一道例题：如图1，设点A、B的坐标分别为$(-5,0)$，$(5,0)$。直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积是$-\frac{4}{9}$，求点M的轨迹方程。

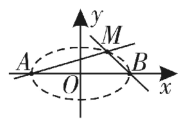

图1

本题求解的结果是点M的轨迹方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{100}{9}}=1(x\neq\pm5)$。不难发现点$M$的轨迹是椭圆（仅去掉两个点），并且不难看出点$A$、$B$恰好为此椭圆的左右顶点，且$-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{\frac{100}{9}}{25}=-\frac{4}{9}=k_{AM}\cdot k_{BM}$。

对此例题推广到一般情况：设点A、B的坐标分别为$(-a,0)$，$(a,0)$。若直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积是$-\frac{b^2}{a^2}$ $(a>0,b>0)$，求点M的轨迹方程。

求解如下：设点M的坐标为(x,y) $(x\neq\pm a)$。

则直线AM，BM的斜率分别为：$k_{AM}=\frac{y}{x+a}$，$k_{BM}=\frac{y}{x-a}(x\neq\pm a)$。

根据题设可得：$\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=-\frac{b^2}{a^2}$。

化简可得点M的轨迹方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\neq\pm a)$。

(2)设直线MN的方程$x=ny+m(n\neq0)$。

联立$\begin{cases}x=ny+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$得$(n^2+4)y^2+2mny+m^2-4=0$。

故$y_1+y_2=\frac{-2mn}{n^2+4}$，$y_1y_2=\frac{m^2-4}{n^2+4}$。

因为直线l_1，l_2关于x轴对称，故斜率之和为零。

故$\frac{y_1}{x_1-3}+\frac{y_2}{x_2-3}=0$，即$2ny_1y_2+(m-3)(y_1+y_2)=0$。

解得$m=\frac{4}{3}$。

故直线MN的方程为$x=ny+\frac{4}{3}(n\neq0)$，所以直线恒过定点$\left(\frac{4}{3},0\right)$，证毕。

通过对这道例题的解析，我们可得到如下结论：

结论：已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，点$P(x_P,0)$为$x$轴上的一定点，过点$P(x_P,0)$的直线（不垂直于$x$轴）交椭圆于$A$，$B$两点，若$B$点关于$x$轴的对称点是$E$，则直线$AE$与$x$轴相交于定点$M$，且点$M$的坐标为$M\left(\frac{a^2}{x_P},0\right)$。

证明：设直线AE的方程$x=ny+m$ $(n\neq0)$。

联立$\begin{cases}x=ny+m,\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$得$(a^2+b^2n^2)y^2+2mnb^2y+m^2b^2-a^2b^2=0$。

故$y_1+y_2=\frac{-2b^2mn}{n^2b^2+a^2}$，$y_1y_2=\frac{b^2m^2-a^2b^2}{n^2b^2+a^2}$。

因为直线l_{EP}，l_{AP}关于x轴对称，故其斜率之和为零。

故$\frac{y_1}{x_1-x_P}+\frac{y_2}{x_2-x_P}=0$，即$2ny_1y_2+(m-x_P)(y_1+y_2)=0$。

解得$m=\frac{a^2}{x_P}$，则直线AE的方程为$x=ny+\frac{a^2}{x_P}(n\neq0)$，故直线恒过定点$\left(\frac{a^2}{x_P},0\right)$，证毕。

注意：这种解法具有一定的局限性，只适合解决该类问题。 （责任编辑 赵 平）

从求解的结果我们不难得出当 $a\neq b$，即 $\frac{b^2}{a^2}\neq 1$ 时，点 M 的轨迹为椭圆（仅去掉左右顶点），于是我们得出：

椭圆的“第三定义”：平面内与两个顶点连线的斜率之积为绝对值不为1的负实数的点的轨迹是椭圆。

根据椭圆的“第三定义”以及上面的证明过程我们不难得出：

结论1：设点 A,B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点，点 C 为椭圆上不同于点 A,B 的任意一点，则 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-\frac{b^2}{a^2}$。

不难发现结论1中线段 AB 是椭圆的长轴，是椭圆的一条特殊的直径（过椭圆中心的弦叫作椭圆的直径），对于椭圆一般的直径来说，同样的结论能否成立呢？

若线段 DE 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的直径，点 C 为椭圆上任意一点，当直线 CD,CE 的斜率都存在时，可设 $D(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$，$E(-a\cos\alpha,-b\sin\alpha)$，$C(a\cos\theta,b\sin\theta)$。

则直线 CD,CE 的斜率分别为：$k_{CD}=\frac{b\sin\theta-b\sin\alpha}{a\cos\theta-a\cos\alpha}$，$k_{CE}=\frac{b\sin\theta+b\sin\alpha}{a\cos\theta+a\cos\alpha}$。

故 $k_{CD}\cdot k_{CE}=\frac{b\sin\theta-b\sin\alpha}{a\cos\theta-a\cos\alpha}\cdot\frac{b\sin\theta+b\sin\alpha}{a\cos\theta+a\cos\alpha}=\frac{b^2(\sin^2\theta-\sin^2\alpha)}{a^2(\cos^2\theta-\cos^2\alpha)}=-\frac{b^2}{a^2}$。

于是我们得到：

结论2：如图2，设线段 DE 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的直径，点 C 为椭圆上任意一点，若直线 CD,CE 的斜率都存在时，则 $k_{CD}\cdot k_{CE}=-\frac{b^2}{a^2}$。

结论2中，显然 O 为直径 DE 的中点，于是在三角形 CDE 中就很容易想到构造三角形的中位线，如图3，设 M 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的弦 CD 的中点，则 $OM/\!/CE$，当直线 CD 不垂直于坐标轴时，显然 $k_{OM}=k_{CE}$，根据结论2我们不难得出椭圆中点弦的一条重要性质：

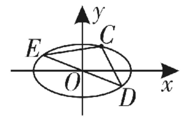

图2

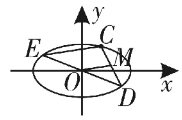

图3

结论3：设点 M 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的弦 CD（非直径）的中点，O 为坐标原点，若直线 CD 不垂直于坐标轴，则 $k_{OM}\cdot k_{CD}=-\frac{b^2}{a^2}$。

数学中很多知识是相互关联的，也是有规律可循的，多掌握一些有逻辑联系的数学结论，对我们数学解题是大有裨益的。下面针对本文介绍的结论，给出一些具体的题目供大家练习。

针对练习：

1. 椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，点 P 在 C 上且直线 PA_2 的斜率的取值范围是 $[-2,-1]$，那么直线 PA_1 的斜率的取值范围是____。

2. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$M$，$N$ 是椭圆上关于原点对称的两点，P 是椭圆上任意一点，且直线 PM,PN 的斜率分别为 $k_1,k_2(k_1k_2\neq 0)$，若 $|k_1|+|k_2|$ 的最小值为1，则椭圆的离心率为____。

3. 已知点 $P(1,1)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的弦 CD 的中点，求弦 CD 所在的直线方程。

4. 已知 A、B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右顶点，点 P 为椭圆上的动点，求证：当且仅当点 P 位于椭圆的上、下顶点时 $\angle APB$ 最大。

参考答案与提示：

1. 提示：$k_1k_2=-\frac{3}{4}$，$k_2\in[-2,-1]$，所以 $k_1\in\left[\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$。

2. 提示：$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow|k_1|+|k_2|\geqslant 2\sqrt{|k_1k_2|}=\frac{2b}{a}=1\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

（下转第41页）

故 $\begin{cases}-2+x_0=\dfrac{-16k^2}{1+4k^2},\\ -2x_0=\dfrac{16k^2-4}{1+4k^2},\end{cases}$ $x_0=\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}$，

$|AQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_0+2|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{4}{1+4k^2}$。

$R(0,2k)$，$|AR|=\sqrt{1+k^2}\,|0-(-2)|=\sqrt{4+4k^2}$，且 $Q\left(\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2},\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)$。

直线 OP 的方程为 $y=kx$，由 $\begin{cases}y=kx,\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2=4$。

故 $x_P^2=\dfrac{4}{1+4k^2}$，$y_P^2=\dfrac{4k^2}{1+4k^2}$。

所以 $|OP|^2=\dfrac{4k^2+4}{1+4k^2}$。

故 $\dfrac{|AQ||AR|}{|OP|^2}=\dfrac{\dfrac{8(1+k^2)}{1+4k^2}}{\dfrac{4(1+k^2)}{1+4k^2}}=2$。

法二：$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AR}=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{AR}|=\left(\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}+2,\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)\cdot(2,2k)$

$=\left(\dfrac{4}{1+4k^2},\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)\cdot(2,2k)=\dfrac{8+8k^2}{1+4k^2}$。

又 $|OP|^2=\dfrac{4(1+k^2)}{1+4k^2}$，故 $\dfrac{|AQ||AR|}{|OP|^2}=\dfrac{\dfrac{8+8k^2}{1+4k^2}}{\dfrac{4(1+k^2)}{1+4k^2}}=2$。

法三：如图2，设 $P(x_0,y_0)$，$x_0\neq0$。

因为 P 在椭圆上，所以 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，即 $x_0^2+4y_0^2=4$。

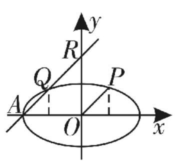

图2

设 $Q(x_1,y_1)$。

直线 AQ 方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0}(x+2)$。

由 $\begin{cases}y=\dfrac{y_0}{x_0}(x+2),\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 整理得 $(x_0^2+4y_0^2)x^2+16y_0^2x+16y_0^2-4x_0^2=0$。

故 $x^2+4y_0^2x+4y_0^2-x_0^2=0$。

$\Delta=(16y_0^2)^2-4(x_0^2+4y_0^2)(16y_0^2-4x_0^2)=16x_0^4>0$。

故 $\begin{cases}-2+x_1=-4y_0^2,\\ -2x_1=4y_0^2-x_0^2。\end{cases}$

故 $\dfrac{|AQ||AR|}{|OP|^2}=\dfrac{|AQ||AR|}{|OP||OP|}=\dfrac{4-4y_0^2}{|x_0|}\cdot\dfrac{2}{|x_0|}=\dfrac{|x_0|^2\cdot2}{|x_0|^2}=2$。

点评：通过本练习题我们可以学到两点：①在直角三角形中长度比与坐标比的转化关系。②直线与椭圆相交时，已知其中一个交点坐标，利用韦达定理求另一个交点坐标（这一技巧会经常在高考中应用）。

纵观近几年高考题，我们会发现解析几何试题的难度，相比前些年下降了不少，选择题、填空题均属中档题，且解答题不再处于压轴题的位置，计算量在减少，但同时要看到思维量还保持着原来的层次和要求，同时加大了与相关知识的联系（如向量、函数、方程等），凸现了教材中研究性学习的能力要求。我们有理由相信自己，只要经过努力，一定会攻克解析几何这一难关的！

（责任编辑　赵　平）

（上接第5页）

3. 提示： 由 $k\cdot k_{OP}=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow k=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow CD:3x+4y-7=0$。

4. 提示： 设直线 AP，BP 的斜率分别为 k_1，$k_2(k_1>0)$，则 $k_1k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}$。

$\tan\angle APB=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=-\dfrac{k_1+\dfrac{b^2}{a^2k_1}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=-\dfrac{a^2k_1+\dfrac{b^2}{k_1}}{c^2}=\leqslant-\dfrac{2ab}{c^2}$。

上式当且仅当 $k_1=-k_2=\dfrac{b}{a}$ 时取等号，此时点 P 位于椭圆的上顶点。

同理可证，点 P 位于椭圆的下顶点时 $\angle APB$ 最大。

（责任编辑　赵　平）