$-\frac{1}{2}$)，∵ M'在圆 $x'^2+y'^2=1$ 内部，∴ $(-\frac{1}{\sqrt{2m}})^2+(-\frac{1}{2})^2<1$，解得 $m<-\frac{\sqrt{6}}{2}$或 $m>\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)在圆 $x'^2+y'^2=1$ 中，$S_{\triangle A'B'O'}=\frac{1}{2}|O'A'|\cdot|O'B'|\sin\angle A'O'B'\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $A'O'\perp B'O'$，即 $O'M'=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，也即 $\sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2m}})^2+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $m=\pm\sqrt{2}$，此时，$S_{\triangle ABO}=\sqrt{2}\cdot 1\cdot S_{\triangle A'B'O'}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ $(S_{\triangle ABO})_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例7　(2015 山东高考理)在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，左、右焦点分别是 F_1,F_2，以 F_1 为圆心、以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心、以 1 为半径的圆相交，且交点在椭圆 C 上. (1)求椭圆 C 的方程；(2)设椭圆 $E:\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$，$P$ 为椭圆 C 上任意一点，过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A,B 两点，射线 PO 交椭圆 E 于点 Q，如图 6. ①求$\frac{|OQ|}{|OP|}$的值；②求$\triangle ABQ$ 面积的最大值.

解：(1)由题意知 $2a=4$，则 $a=2$，又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2-c^2=b^2$，可得 $b=1$，∴ 椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

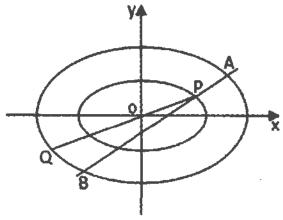

图6

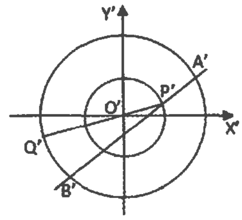

图7

(2)由(1)知椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. 令 $\begin{cases}x'=\frac{x}{2},\\ y'=y,\end{cases}$ 可得椭圆 C 的方程变成了圆 $C':x'^2+y'^2=1$，椭圆 E 的方程变成了圆 $E':x'^2+y'^2=4$. 如图 7.

则①$\frac{|OQ|}{|OP|}=\frac{|O'Q'|}{|O'P'|}=\frac{2}{1}=2$；

②$S_{\triangle ABQ}=3S_{\triangle ABO}=6S_{\triangle A'B'O'}=\frac{1}{2}(2\sqrt{4-d^2})\cdot d=\sqrt{-(d^2)^2+4d^2}$. 其中 d 是 O' 到直线 $A'B'$ 的距离，易知 $0<d^2\leqslant 1$，∴ $S_{\triangle ABQ}=6\sqrt{-(d^2)^2+4d^2}\leqslant 6\sqrt{3}$，∴ $\triangle ABQ$ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$.

一道椭圆试题的探究及变式

广东省中山市东升高级中学　(528414)　姬兴瑞

圆锥曲线一直是高中数学的主干和核心知识，特别是涉及圆锥曲线的综合解答题，由于难度和区分度较大，运算也较复杂，因而一直是高考的重头戏. 本文通过探究一道与椭圆有关的定点问题，发现椭圆、双曲线、抛物线共有的一组优美结果.

题目　已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，$|OF|=\sqrt{3}$，P,Q 分别为椭圆 C 的上下顶点，且$\triangle PQF$ 为等边三角形. (1)求椭圆 C 的方程；(2)过点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B，且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，求证：直线 AB 过定点，并求出该定点坐标.

一、一题多解、提炼思想

解法1：(1)易得椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=16(4k^2-m^2+1)>0$. 所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2$

$=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$. 因为 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，所以 $AP\perp BP$，即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，即 $x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=0$，$y_1=(kx_1+m)$，$y_2=(kx_2+m)$，所以 $x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=(1+k^2)x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2=\frac{(1+k^2)(4m^2-4)}{1+4k^2}+\frac{-8k^2m(m-1)}{1+4k^2}+(m-1)^2=\frac{5m^2-2m-3}{1+4k^2}=0$，所以 $m=1$(舍)或 $m=-\frac{3}{5}$，从而直线 AB 过定点 $(0,-\frac{3}{5})$.

评注：此解法是解析几何试题中求定点问题的常用方法，用斜率和截距作为参数来表示直线方程，通过运算研究两个参量关系进而确定定点坐标；解法思路自然，学生容易想到，但是运算量大，对学生的运算能力有较高的要求.

解法2：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 PA 的方程为 $y=kx+1$，由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kx=0$，解得 $x=-\frac{8k}{1+4k^2}$ 或 $x=0$(舍)，所以 $x_1=-\frac{8k}{1+4k^2}$，以 $-\frac{1}{k}$ 代替上式中的 k，可得 $x_2=\frac{8k}{4+k^2}$. 由题意得分别作直线 PA、PB 关于 y 轴对称的直线 PA'、PB'，则显然可知直线 AB 与 $A'B'$ 关于 y 轴对称，从而若直线 AB 过定点，该定点一定是直线 AB 与 $A'B'$ 的交点，故交点必定在 y 轴上，设该点坐标为 $(0,t)$，则 $\frac{t-y_1}{-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，即 $t=\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2-x_1}=\frac{(kx_1+1)x_2-x_1(-\frac{1}{k}x_2+1)}{x_2-x_1}=\frac{(k+\frac{1}{k})x_1x_2}{x_2-x_1}+1$，将 x_1,x_2 的值代入并化简得 $t=-\frac{3}{5}$，从而直线 AB 过定点 $(0,-\frac{3}{5})$.

评注：本解法 2 根据对称关系找到定点的特殊位置，方法较为巧妙，但运算量亦较大，对学生基于图形的特征判断要求较高.

解法3：由题意可设直线 PA，PB 的方程为分别为 $y=k_1x+1$ 和 $y=k_2x+1$，则双直线方程 $(k_1x+1-y)(k_2x+1-y)=0$ 表示直线 PA，PB 上的所有点，整理得 $kk_1x^2+(k+k_1)x(1-y)+(1-y)^2=0$ (1). 因为 A，B 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，即 $x^2=4(1-y^2)$，和(1)联立得 $4k_1k_2(1-y^2)+(k_1+k_2)x(1-y)+(1-y)^2=0$ 且 $y\neq1$，$k_1k_2=-1$，于是 $-4(1+y)+(k+k_1)x+(1-y)=0$，即 $(k_1+k_2)x-(5+3y)=0$，此方程即为直线 AB 的方程，令 $x=0$，解得 $y=-\frac{5}{3}$，于是直线 AB 恒过定点 $(0,-\frac{5}{3})$.

评注：本解法利用两条直线方程的乘积形式来刻画直线 AB 的方程，其本质是利用曲线系方程解题，可以将两条直线看做二次曲线的退化，作为曲线的特殊形式，联立两条直线(曲线)与椭圆得到的解就是对应交点 A，B 的坐标，从而快速锁定直线 AB 的方程，此过程中代数变形简单，极大提高了解题效率，但是要求学生熟悉曲线系方程的应用.

解法4：在坐标系中将原点 $O(0,0)$ 平移到 $P(0,1)$，则在坐标系 $x'O'y'$ 中椭圆 C 的方程为 $\frac{x'^2}{4}+(y'+1)^2=1$. 因为直线 AB 不经过 $O'(0,0)$，可设直线 AB 在坐标系 $x'O'y'$ 中的方程为 $mx'+ny'=1$；将椭圆 C 的方程变形为 $\frac{x'^2}{4}+y'^2+2y'=0$，与直线 $mx'+ny'=1$ 联立得 $\frac{x'^2}{4}+y'^2+2y'(mx'+ny')=0$，化简得 $(1+2n)\frac{y'^2}{x'^2}+2m\frac{y'}{x'}+\frac{1}{4}=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为平移坐标系直线的斜率不改变，从而由根与系数的关系得 $k_{AP}\cdot k_{BP}=k_{A'O'}\cdot k_{B'O'}=\frac{y_1{}'}{x_1{}'}\cdot\frac{y_2{}'}{x_2{}'}=\frac{\frac{1}{4}}{1+2n}=-1$，即 $n=-\frac{5}{8}$. 从而直线 AB 在坐标系 $x'O'y'$ 中的方程为：$mx'-\frac{5}{8}y'=1$；易知直线 AB 在坐标系 $x'O'y'$ 中过定点 $(0,-\frac{8}{5})$，该点在原坐标系中的坐标为 $(0,-\frac{3}{5})$. 故直线 AB 过定点 $(0,-\frac{3}{5})$.

评注：解法 4 将两条直线的交点平移到坐标原点，使直线的斜率之积的代数形式变得简单，再联立直线和椭圆方程得到二次齐次问题，最后再根据根与系数的关系得出 m,n 的等量关系，进而求出定点坐标. 此法大大简化运算，不失为解析几何解决定点问题的一个较好的方法.

二、一题多变，揭示本质

一题多解不是追求解题的目标，重要的是提炼解决一类问题的通性通法，揭示数学本质，形成数

学方法与思想,促进学生数学抽象素养的提高.

(1)若将斜率之积 -1 换成任意的实数 t,是否也有类似的结论?引导学生探索可得:

结论 1 过椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 的斜率不存在,当 $t\neq\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 过定点 $(0,-\frac{4t+1}{4t-1})$.

(2)点 $P(0,1)$ 是椭圆的上顶点,自然联想到对于其他三个顶点的类似问题,通过类比探究可得到:

结论 2 过椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的下顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 的斜率不存在,当 $t\neq\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 过定点 $(0,\frac{4t+1}{4t-1})$.

结论 3 过椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的右顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 的斜率为 0,当 $t\neq\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 过定点 $(\frac{8t+2}{4t-1},0)$.

结论 4 过椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 的斜率为 0,当 $t\neq\frac{1}{4}$ 时,直线 AB 过定点 $(-\frac{8t+2}{4t-1},0)$.

(3)若将椭圆方程一般化,对本题结论做拓展研究,可得如下一些一般性的结论:

结论 5 过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的上顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 的斜率不存在;当 $t\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 过定点 $(0,-\frac{b(b^2+ta^2)}{ta^2-b^2})$.

结论 6 过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的下顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 的斜率不存在,当 $t\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 过定点 $(0,\frac{b(b^2+ta^2)}{ta^2-b^2})$.

结论 7 过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 的斜率为 0,当 $t\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 过定点 $(\frac{a(ta^2+b^2)}{ta^2-b^2},0)$.

结论 8 过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 的斜率为 0,当 $t\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 过定点 $(-\frac{a(ta^2+b^2)}{ta^2-b^2},0)$.

(4)若点 P 为椭圆 C 上的任一点呢?那么我们是否会有更一般的结论呢?

结论 9 若 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的任意一点,过 P 作两条直线与椭圆 C 分别交于异于点 P 的点 A,B,且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$,则当 $t=\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 的斜率不存在或者等于 0;当 $t\neq\frac{b^2}{a^2}$ 时,直线 AB 过定点 $(\frac{(ta^2+b^2)x_0}{ta^2-b^2},-\frac{(ta^2+b^2)y_0}{ta^2-b^2})$.

证明:在坐标系中将 $O(0,0)$ 平移到 $P(x_0,y_0)$,则在坐标系 $x'O'y'$ 中椭圆 C 为 $\frac{(x'+x_0)^2}{a^2}+\frac{(y'+y_0)^2}{b^2}=1$. 化简得 $\frac{x'^2+2x_0x'+x_0^2}{a^2}+\frac{y'^2+2y_0y'+y_0^2}{b^2}=1$. 又 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,所以 $\frac{x'^2+2x_0x'}{a^2}+\frac{y'^2+2y_0y'}{b^2}=0$. 因为直线 AB 不经过 $O'(0,0)$,可设直线 AB 在坐标系 $x'O'y'$ 中的方程为: $mx'+ny'=1$; 将直线与椭圆联立得 $\frac{x'^2+2x_0x'(mx'+ny')}{a^2}+\frac{y'^2+2y_0y'(mx'+ny')}{b^2}=0$, 化简得 $\frac{1+2ny_0}{b^2}y'^2+2(\frac{nx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2})x'y'+\frac{1+2mx_0}{a^2}x'^2=0$, 即 $\frac{1+2ny_0}{b^2}\frac{y'^2}{x'^2}+2(\frac{nx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2})\frac{y'}{x'}+\frac{1+2mx_0}{a^2}=0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为直线 PA、PB 的斜率都存在,由根与系数的关系得 $k_{PA}\cdot k_{PB}=k_{O'A'}\cdot k_{O'B'}=$

$\frac{y_1'}{x_1'} \cdot \frac{y_2'}{x_2'} = \frac{\frac{1+2mx_0}{a^2}}{\frac{1+2ny_0}{b^2}} = t$，化简得 $2mb^2x_0 - 2tna^2y_0 = ta^2 - b^2$. 当 $t \neq \frac{b^2}{a^2}$ 时，可得 $\frac{2b^2x_0}{ta^2-b^2}m + \frac{-2ta^2y_0}{ta^2-b^2}n = 1$，从而直线 AB 在坐标系 $x'O'y'$ 中过定点 $(\frac{2b^2x_0}{ta^2-b^2}, \frac{-2ta^2y_0}{ta^2-b^2})$，该点在原坐标系中的坐标为 $(\frac{2b^2x_0}{ta^2-b^2}+x_0, \frac{-2a^2y_0}{ta^2-b^2}+y_0)$，化简得 $(\frac{(ta^2+b^2)x_0}{ta^2-b^2}, -\frac{(ta^2+b^2)y_0}{ta^2-b^2})$，从而直线 AB 过定点 $(\frac{(ta^2+b^2)x_0}{ta^2-b^2}, -\frac{(ta^2+b^2)y_0}{ta^2-b^2})$. 当 $t = \frac{b^2}{a^2}$ 时，根据图像易知直线 AB 的斜率不存在或者等于 0.

(5) 由于椭圆、双曲线和抛物线都是二次曲线，可以通过类比的方式横向拓展一些结论：

结论 10　若 $P(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的任意一点，过 P 作两条直线与双曲线 C 分别交于异于点 P 的点 A,B，且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t$，则当 $t=-\frac{b^2}{a^2}$ 时，直线 AB 的斜率不存在或者等于 0，当 $t\neq -\frac{b^2}{a^2}$ 时，直线 AB 过定点 $(\frac{(ta^2-b^2)x_0}{ta^2+b^2}, -\frac{(ta^2-b^2)y_0}{ta^2+b^2})$.

结论 11　若 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $C:y^2=2px$ 上的任意一点，过 P 作两条直线与抛物线 C 分别交于异于点 P 的点 A,B，且满足 $k_{PA}\cdot k_{PB}=t(t\neq 0)$，则直线 AB 过定点 $(-\frac{2p}{t}+x_0, -y_0)$. 对于其他形式的抛物线，可以得到类似结论.

以上结论，从具体数字到字母，从特殊到一般，从椭圆到双曲线和抛物线，层层深入，不断揭示数学本质，形成一般结论. 从这一道模拟试题的结论研究可知：通过对问题变条件、变结论等方式，可以引导学生对命题进行不同角度、不同层次的探究，完善了学生的认知结构和方法体系，有利于发展学生的抽象能力素养，学生数学抽象素养的形成是一个长期的过程，要求我们在平时有意识的培养和引导，只要坚持下去，学生的抽象素养能力定会大幅提升.

三、编题变式，拓展能力

题 1　设直线 l 不经过椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上点 $P(2,0)$，且与椭圆 C 相交于两点 A,B，若直线 PA 与直线 PB 的斜率之积为 $\frac{1}{2}$，求 P 点到直线 l 的最大距离.

显然由结论 3 可知，直线 l 过定点 $Q(6,0)$，则 P 点到直线 l 的最大距离是 PQ，即为 4.

题 2　已知直线 $y=kx+m$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于 A,B 两点，且直线 OA 与直线 OB 的斜率之积为 -1，其中 O 为坐标原点，若 $OM\perp AB$ 于点 M，求 M 点的轨迹方程.

由结论 11 知直线 AB 过定点 $C(2,0)$，依题意得 M 点的轨迹是以 OC 为直径的圆，从而轨迹方程是 $(x-1)^2+y^2=1$.

通过编题解题，一方面能加强学生对基本的解题思想方法的运用，加深学生对数学本质的理解，另一方面培养学生的创造思维能力.

四、探后反思

美国著名数学教育家波利亚说过：“掌握数学就意味着要善于解题.”而想要学会解题，好的数学题目是关键. 一道好的试题之所以能引起大家的共鸣，不是因为其独特的解题技巧，而是其中蕴含着的数学思想和方法. 本文中的试题素材平实，但求解方法和过程精彩纷呈，妙趣横生，真可谓是一道平中见奇的好题. 在日常教学中，教师精心选择这样极具代表性的一题多解题目作为练习，通过一题多解、多题一解的训练，增强学生的数学核心素养和思维能力的提升. 正如波利亚说：“一个专心的认真备课教师能拿出一个有意义的但不复杂的题目，去帮助学生发展问题的各个方面，使得通过这道题，就好像通过一道门户，把学生引入一个完整的领域”.

参考文献

[1]江民杰. 两道高考题关系的探究及思考[J]. 中学数学教学参考，2017(11).

[2]苏立标. 莫让浮云遮望眼，撩开雾纱见真颜——一道解析几何模拟试题的深度探寻[J]. 数学通讯，2016(8).