$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha)-4d^2(\frac{3}{4}\cos^2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin^2\alpha)=12r^2-4d^2\sin^2\alpha-6d^2\cos^2\alpha-2d^2\sin^2\alpha=12r^2\cos^2\alpha)=12r^2-6d^2$. 从而性质(1)成立.

(2)$\because AB^2=(PA+PB)^2=PA^2+2PA\cdot PB+PB^2$, $\therefore PA^2+PB^2=AB^2-2PA\cdot PB$.

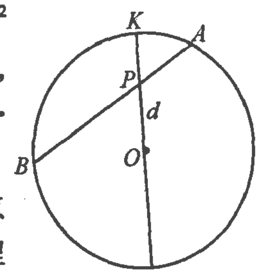

图3

在图3中，若KL为过P点的圆的直径，则由相交弦定理知$PA\cdot PB=PK\cdot PL=(r-d)\cdot(r+d)=r^2-d^2$. 从而$PA^2+PB^2=AB^2-2(r^2-d^2)$，同理可证$PC^2+PD^2=CD^2-2(r^2-d^2)$，$PE^2+PF^2=EF^2-2(r^2-d^2)$，故有$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2+PE^2+PF^2=AB^2-2(r^2-d^2)+CD^2-2(r^2-d^2)+EF^2-2(r^2-d^2)=AB^2+CD^2+EF^2-6r^2+6d^2=12r^2-6d^2-6r^2+6d^2=6r^2$. 这个定值与$P$点的位置无关，这就证明了性质(2).

笔者猜想，对于过圆（半径为r）内定点$P(OP=d)$的n条弦也有类似的性质，即猜想有如下结论：如图4，P为圆O内一定点，过P点作n条弦$A_1B_1,A_2B_2,\cdots,A_nB_n$，每相邻的两条弦的夹角都是$\frac{180°}{n}$，则有

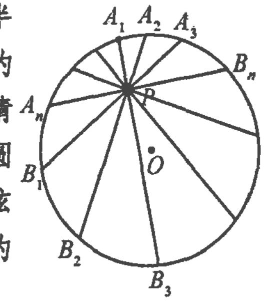

图4

(1)$A_1B_1{}^2+A_2B_2{}^2+\cdots+A_nB_n{}^2$为定值，这个定值是$4nr^2-2nd^2$；

(2)$PA_1{}^2+PB_1{}^2+PA_2{}^2+PB_2{}^2+\cdots+PA_n{}^2+PB_n{}^2$为定值，这个定值是$2nr^2$.

椭圆内接三角形外心轨迹问题探究

江西省景德镇一中　(333000)　王为民

椭圆内接三角形外心轨迹问题早期曾见于数学周报，但是所给答案过于简洁，详细解答过程不得而知. 与同行进行相关探讨，都觉得运算量太大，故放弃. 近年来，这类问题因为能够考察学生的运算能力，提高运算技巧，所以在一些考题中时有出现. 此次盟校联合命题，再次将其提出，并用几何画板探究，可见其具有一定的典型意义. 现将其解答方法推导如下，与同行分享，并求最佳的思路和方法.

1　问题的提出

已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，点$A(-2,0)$，点$B(1,$)），动直线l过点B交椭圆C于P、Q两点. 求$\triangle APQ$外心N的轨迹方程.

解法一：由ΔAPQ存在，∴ 直线PQ斜率不为0. 设直线PQ为$x=my+1$，设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由

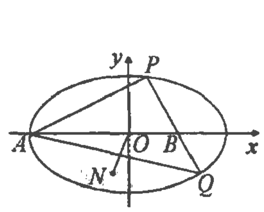

图1

$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}\Rightarrow(m^2+4)y^2+2my-3=0\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4},\\y_1\cdot y_2=\frac{-3}{m^2+4}.\end{cases}$

直线AP的中垂线方程为$y=-\frac{x_1+2}{y_1}(x-\frac{x_1-2}{2})+\frac{y_1}{2}$，即$y=-\frac{x_1+2}{y_1}x+\frac{x_1^2-4}{2y_1}+\frac{y_1}{2}$，$\because x_1^2+4y_1^2=4$，$\therefore y=-\frac{x_1+2}{y_1}x-\frac{3y_1}{2}$，即$y=-\frac{my_1+3}{y_1}x-\frac{3y_1}{2}$，$\therefore y=-mx-\frac{3}{y_1}x-\frac{3y_1}{2}$.

同理可得直线AQ的中垂线方程为$y=-mx-\frac{3}{y_2}x-\frac{3y_2}{2}$，∴ 点$N(x,y)$的坐标满足

$$\begin{cases}y+mx=-\frac{3}{y_1}x-\frac{3y_1}{2}\\y+mx=-\frac{3}{y_2}x-\frac{3y_2}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$\begin{cases}x=\frac{1}{2}y_1y_2\\ 2y+2mx=-(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2})3x-\frac{3}{2}(y_1+y_2)\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x=\frac{-3}{2(m^2+4)}\\ 2y+2mx=-2mx+\frac{3m}{m^2+4}\end{cases}\Rightarrow 2y+2mx=-2mx-2mx\Rightarrow\frac{y}{x}=-3m\Rightarrow m=\frac{y}{-3x}$. 代入 $x=\frac{-3}{2(m^2+4)}$, 得 $72x^2+27x+2y^2=0(-\frac{3}{8}\leqslant x<0)$. ∴ 外心 N 的轨迹为椭圆 $\frac{(x+\frac{3}{16})^2}{(\frac{3}{16})^2}+\frac{y^2}{(\frac{9}{8})^2}=1$ 在 $-\frac{3}{8}\leqslant x<0$ 的一部分.

解法二: 设直线 PQ 为 $x=my+1$, 点 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $N(x,y)$, 由 $\begin{cases}x=my+1\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow(m^2+4)y^2+2my-3=0\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4},\\ y_1\cdot y_2=\frac{-3}{m^2+4},\end{cases}$

由 $|AN|=|QN|$ 得 $(x+2)^2+y^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$, ∴ $(2x_2+4)x+2y_2y=x_2^2+y_2^2-4$,

由于 $x_2^2+4y_2^2=4$, 所以 $(2x_2+4)x+2y_2y=-3y_2^2$ (1).

同理由 $|AN|=|PN|$, 得 $(2x_1+4)x+2y_1y=-3y_1^2$. (2)

$\frac{(1)}{y_2}-\frac{(2)}{y_1}$, 得 $(\frac{2x_2+4}{y_2}-\frac{2x_1+4}{y_1})x=-3(y_2-y_1)$ (3)

将 $x_2=my_2+1, x_1=my_1+1$ 代入(3)整理得 $(\frac{6}{y_2}-\frac{6}{y_1})x=-3(y_2-y_1)$, ∴ $x=\frac{1}{2}y_1y_2$. (4)

将(4)代入(1)中, 整理得 $y=-\frac{m}{2}y_1y_2-\frac{3}{2}(y_1+y_2)$ (5)

由根与系数关系, 得点 $N(x,y)$ 满足

$\begin{cases}x=\frac{-3}{2(m^2+4)},\\ y=\frac{9m}{2(m^2+4)},\end{cases}$ 消去参数 m 得点 $N(x,y)$ 的轨迹方程是 $72x^2+27x+2y^2=0(-\frac{3}{8}\leqslant x<0)$.

二、结论

如果椭圆内接三角形的一个顶点是椭圆上的定点, 且它的对边过椭圆内某一定点, 则其所得三角形外心的轨迹是椭圆的一部分.

圆锥曲线两垂直焦点弦的一组结论

福建省泉港第一中学 (362801) 钟长彬

福建省泉州第五中学 (362000) 杨苍洲

用一个平面去截一个圆锥面, 我们就可以得到三种圆锥曲线. 但在这简单勾勒的线条中, 却蕴藏着丰富的变化, 吸引着众多的数学爱好者不断研究、挖掘、拓展. 笔者在日常教学中发现:

结论 1 过抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ 作相互垂直的两条直线, 其中抛物线 C 与 l_1 交于点 P_1, P_2, 与 l_2 交于点 Q_1, Q_2, 那么 $\frac{1}{|P_1P_2|}+\frac{1}{|Q_1Q_2|}$ 是一个常数.

证明: 显然直线 l_1, l_2 的斜率存在且不等于 0, 不妨设 l_1 的方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)(k\neq 0)$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, 由 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(pk^2+2p)x+\frac{p^2k^2}{4}=0$, 由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{pk^2+2p}{k^2}$, $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$, 因为曲线 C 与 l_1 交于点 P_1, P_2, 且 l_1 过焦点