极点与极线视角下的高考圆锥曲线试题

广东省东莞中学 (523005) 于 涛

摘要 文章简述了极点与极线的概念, 进行了概念的简单解读, 在定义和三个基本性质的基础上, 证明了三个衍生性质, 并按照文中定义和性质的呈现顺序, 将极点与极线的知识应用于高考真题的求解, 体现了高考真题背景的深刻性和统一性.

关键词 极点; 极线; 调和共轭; 性质; 圆锥曲线

近年来, 不少高考解析几何试题以极点、极线为背景, 堪称出现频率最高的背景知识. 文 [1] 介绍了极点与极线的概念及基本性质, 笔者进行了进一步研究, 证明了若干与圆锥曲线极点、极线有关的性质, 与读者分享.

1. 极点与极线的定义

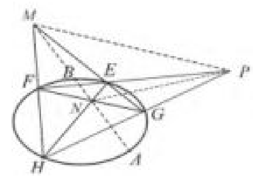

图 1

定义 1 (几何定义) 如图 1, P 是不在圆锥曲线上的点, 过点 P 引两条割线依次交圆锥曲线于四点 E, F, G, H, 连接 EH, FG 交于点 N, 连接 EG, FH 交于点 M, 则直线 MN 为点 P 对应的极线. 特别地, 若 P 是圆锥曲线上的点, 则过点 P 的切线即为极线. 同理, 直线 PN 为点 M 对应的极线, 直线 PM 为点 N 对应的极线. MNP 称为自极三角形 (参见 [1]).

同理可得 $\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{y_0+y_2}{y_0-y_2}$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}&=\frac{y_0+y_1}{y_0-y_1}+\frac{y_0+y_2}{y_0-y_2}\\&=\frac{2y_0^2-2y_1y_2}{y_0^2-y_0(y_1+y_2)+y_1y_2}=\frac{2y_0^2-2\cdot\frac{py_0}{k}}{y_0^2-y_0\cdot\frac{2p}{k}+\frac{py_0}{k}}=2.\end{aligned}$$

推论 2 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线与 y 轴交于点 Q, 过点 Q 的直线 l 与椭圆 C 有两个不同的交点 A,B, 且直线 PA 交 y 轴于 M, 直线 PB 交 y 轴于 N, O 为原点, $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$, 则 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值 $\dfrac{2b^2}{b^2-y_0^2}$.

证明 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线 PQ 的方程为 $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$, 由已知得 $x_0y_0\neq0$, 且 $Q\left(0,\dfrac{b^2}{y_0}\right)$, 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 直线 l 显然不能与 x 轴垂直, 设其方程为 $y=kx+\dfrac{b^2}{y_0}$, 联立 $\begin{cases}y=kx+\dfrac{b^2}{y_0},\\\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y 得: $b^2x^2+a^2\left(kx+\dfrac{b^2}{y_0}\right)^2=a^2b^2$, 整理得 $y_0^2(b^2+a^2k^2)x^2+2ky_0a^2b^2x+a^2b^2(b^2-y_0^2)=0$. 所以 $\Delta>0$, 且

$$x_1+x_2=-\frac{2ky_0a^2b^2}{y_0^2(b^2+a^2k^2)},x_1x_2=\frac{a^2b^2(b^2-y_0^2)}{y_0^2(b^2+a^2k^2)}.$$

又因为直线 PA,PB 均与 y 轴相交, 所以直线 PA,PB 的斜率均存在, 即 $x_1\neq x_0, x_2\neq x_0$. 因为

$$k_{PA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\left(kx_1+\frac{b^2}{y_0}\right)-y_0}{x_1-x_0}=\frac{kx_1y_0+b^2-y_0^2}{y_0(x_1-x_0)},$$

所以直线 PA 的方程为 $y-y_0=\dfrac{kx_1y_0+b^2-y_0^2}{y_0(x_1-x_0)}(x-x_0)$, 令 $x=0$, 解得 $y=\dfrac{x_1y_0^2-kx_1x_0y_0-b^2x_0}{y_0(x_1-x_0)}$, 所以 $M\left(0,\dfrac{x_1y_0^2-kx_1x_0y_0-b^2x_0}{y_0(x_1-x_0)}\right)$. 由 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$, 得 $\dfrac{x_1y_0^2-kx_1x_0y_0-b^2x_0}{y_0(x_1-x_0)}-\dfrac{b^2}{y_0}=-\dfrac{b^2}{y_0}\cdot\lambda$, 所以 $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{b^2(x_1-x_0)}{(b^2+kx_0y_0-y_0^2)x_1}$. 同理可得 $\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{b^2(x_2-x_0)}{(b^2+kx_0y_0-y_0^2)x_2}$. 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}&=\frac{2b^2x_1x_2-b^2x_0(x_1+x_2)}{(b^2+kx_0y_0-y_0^2)x_1x_2}\\&=\frac{2b^2\cdot\frac{a^2b^2(b^2-y_0^2)}{y_0^2(b^2+a^2k^2)}+b^2x_0\cdot\frac{2ky_0a^2b^2}{y_0^2(b^2+a^2k^2)}}{(b^2+kx_0y_0-y_0^2)\cdot\frac{a^2b^2(b^2-y_0^2)}{y_0^2(b^2+a^2k^2)}}=\frac{2b^2}{b^2-y_0^2}.\end{aligned}$$

推论 3 圆 $C: x^2+y^2=r^2$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线与 y 轴交于点 Q, 过点 Q 的直线 l 与圆 C 有两个不同的交点 A,B, 且直线 PA 交 y 轴于 M, 直线 PB 交 y 轴于 N, O 为原点, $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$, 则 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值 $\dfrac{2r^2}{r^2-y_0^2}$.

推论 4 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线与 y 轴交于点 Q, 过点 Q 的直线 l 与双曲线 C 有两个不同的交点 A,B, 且直线 PA 交 y 轴于 M, 直线 PB 交 y 轴于 N, O 为原点, $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$, 则 $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值 $\dfrac{2b^2}{b^2+y_0^2}$.

推论 3 及推论 4 可以类比推论 2 进行证明, 此处不再赘述.

如图 1, 由几何定义可知: (1) 若连接 MN 交圆锥曲线于点 A,B, 则 PA,PB 恰为圆锥曲线的切线; (2) 若点 P 与直线 MN 为圆锥曲线的一对极点与极线, 记过极点 P 的两割线 EF,GH 与圆锥曲线的交点形成的四边形为 $EFHG$, 则极线 MN 与两对角线 EH,FG 三线共点.

定义 2 (代数定义) 已知圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, 则称点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l: Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ 是圆锥曲线 Γ 的一对极点与极线. [1]

具体地, 明确曲线方程时, 极点与对应的极线方程见下表:

曲线类型	极点	极线
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(x_0,y_0)	$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$
	$(m,0)$	$x=\frac{a^2}{m}(m\neq 0)$
	$(0,t)$	$y=\frac{b^2}{t}(t\neq 0)$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	(x_0,y_0)	$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$
	$(m,0)$	$x=\frac{a^2}{m}(m\neq 0)$
	$(0,t)$	$y=-\frac{b^2}{t}(t\neq 0)$
$y^2=2px$	(x_0,y_0)	$y_0y=p(x+x_0)$
	$(m,0)$	$x=-m$

通过上表发现: 特别地, 当极点在圆锥曲线的对称轴上时, 对应的极线垂直于该对称轴.

2. 极点与极线的基本性质

性质 1 如图 2, 已知点 Q、直线 l 和圆锥曲线 Γ, 过 Q 作任意一条割线交 Γ 于点 A,B, 交 l 于点 P. 若点 Q 与直线 l 是 Γ 的一对极点与极线, 则点 P,Q 调和分割线段 AB, 即 $\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$, 也称点 P,Q 关于 Γ 调和共轭.

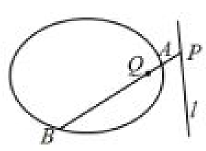

图 2

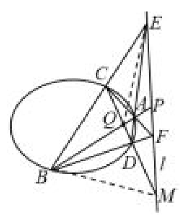

图 3

证明 如图 3, 过极点 Q 作圆锥曲线 Γ 的割线 CD 交极线 l 于点 M, 连接 DA,BC 交于点 E, 连接 CA,BD 交于点 F, 由极点与极线的几何定义知直线 EF 是极点 Q 对应的极线, 故 E,P,F,M 四点共线. 在 $\triangle EBF$ 中, 因为 ED,CF,BP 三线共点 A, 由赛瓦定理得 $\frac{EC}{CB}\cdot\frac{BD}{DF}\cdot\frac{FP}{PE}=1$. 因为直线 CDM 截 $\triangle EBF$, 由梅涅劳斯定理得 $\frac{EC}{CB}\cdot\frac{BD}{DF}\cdot\frac{FM}{ME}=1$. 所以 $\frac{FP}{PE}=\frac{FM}{ME}$, 即点 M,P 调和分割线段 FE. 连接 BM, 以点 B 为射影点, 由交比定理得 M,Q 调和分割线段 DC. 连接 EQ, 以点 E 为射影点, 由交比定理得 P,Q 调和分割线段 AB, 即 $\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$.

性质 2 如图 4, 已知点 P,Q 和有心圆锥曲线 Γ, 直线 PQ 经过 Γ 的中心 O, 与 Γ 交于点 R,R' (点 R 在 P,Q 之间). 若 P,Q 关于 Γ 调和共轭, 则 $OP\cdot OQ=OR^2$.

性质 3 如图 5, 已知点 P,Q 和圆锥曲线 Γ (Q 在 Γ 内, P 在 Γ 外), 直线 PQ 与 Γ 交于点 A,B (点 A 在 P,Q 之间). 若 P,Q 关于 Γ 调和共轭, 则有 (1) $\frac{2}{PQ}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$; (2) $\frac{2}{PQ}=\frac{1}{QA}-\frac{1}{QB}$.

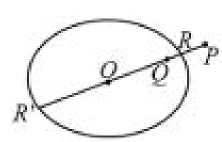

图 4

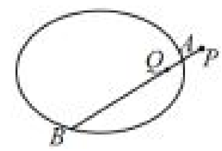

图 5

性质 2、3 的证明可应用性质 1.

3. 极点与极线的衍生性质

性质 4 如图 6、7, 已知点 P,Q 在圆锥曲线 Γ 的对称轴 l 上, 过 Q 作直线交 Γ 于点 M,N. 若 P,Q 关于 Γ 调和共轭, 则直线 PM,PN 与对称轴 l 所成的角相等.

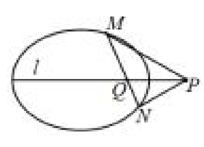

图 6

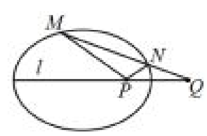

图 7

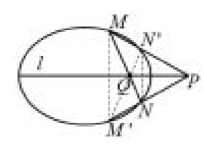

图 8

证明 当 MN 与 l 垂直时, 命题显然成立; 当 MN 与 l 不垂直时, 如图 8, 因为 Γ 关于直线 l 对称, 所以 Γ 上存在 M,N 关于 l 的对称点 M',N', 易知 MN. $M'N'$ 与 l 交于点 Q, 设 MN'. $M'N$ 与 l 交于点 P', 由几何定义知点 P',Q 关于 Γ 调和共轭, 因为 P,Q 关于 Γ 调和共轭, 且点 P 在 l 上, 所以 P' 与 P 重合, 故直线 PM,PN 与对称轴 l 所成的角相等.

性质 4 的逆命题也成立, 证明过程略.

性质 5 如图 9、10, 已知点 Q 在圆锥曲线 Γ 的对称轴上, 直线 l 垂直于该对称轴, 过 Q 作直线交 Γ 于点 M,N, P 为 l 上任意一点. 若点 Q 与直线 l 是 Γ 的一对极点与极线:

(1) 如图 9, 当对称轴是 x 轴或平行于 x 轴时, $k_{PM}+k_{PN}=2k_{PQ}$;

(2) 如图 10, 当对称轴是 y 轴或平行于 y 轴时,

$\dfrac{1}{k_{PM}}+\dfrac{1}{k_{PN}}=\dfrac{2}{k_{PQ}}$.

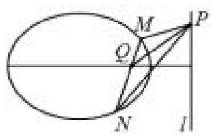

图 9

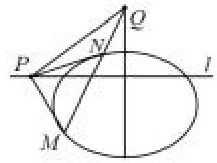

图 10

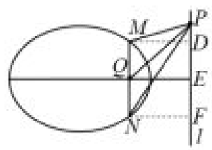

图 11

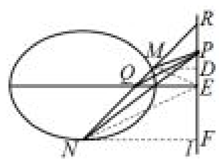

图 12

证明 (1) 如图 11、12, 分别过点 M,N 作 l 的垂线, 垂足为点 D,F, 记 l 与对称轴的垂足为 E. 当 MN 与 l 平行时, 如图 11, $k_{PM}=\dfrac{PD}{MD}$, $k_{PN}=\dfrac{PF}{NF}$, $k_{PQ}=\dfrac{PE}{QE}$, 易知 $MD=NF=QE$, $PD+PF=2PE$, 所以 $k_{PM}+k_{PN}=2k_{PQ}$; 当 MN 与 l 不平行时, 如图 12, 延长 NM 交直线 l 于点 R, 设直线 NM 的倾斜角为 α, 则 $k_{PM}=\dfrac{PD}{MD}=\dfrac{PD}{MR\cos\alpha}$, $k_{PN}=\dfrac{PF}{NF}=\dfrac{PF}{NR\cos\alpha}$, $k_{PQ}=\dfrac{PE}{QE}=\dfrac{PE}{QR\cos\alpha}$, 所以 $k_{PM}+k_{PN}=\dfrac{1}{\cos\alpha}\left(\dfrac{PD}{MR}+\dfrac{PF}{NR}\right)$, 由性质 3 得 $2k_{PQ}=\dfrac{2PE}{QR\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}\left(\dfrac{PE}{MR}+\dfrac{PE}{NR}\right)$. 连接 EM,EN, 由性质 4 得 $\triangle EMD\backsim\triangle ENF$, 所以 $\dfrac{EF}{NF}=\dfrac{ED}{MD}$, 又由 $MD//NF$ 得 $\dfrac{NR}{NF}=\dfrac{MR}{MD}$, 两式相除得 $\dfrac{EF}{NR}=\dfrac{ED}{MR}$, 即 $\dfrac{PF-PE}{NR}=\dfrac{PE-PD}{MR}$, 整理得 $\dfrac{PD}{MR}+\dfrac{PF}{NR}=\dfrac{PE}{MR}+\dfrac{PE}{NR}$, 所以 $k_{PM}+k_{PN}=2k_{PQ}$.

(2) 如图 10, 设 PM,PQ,PN 的倾斜角分别为 β,γ,θ, 则 $k_{PM}=\tan\beta$, $k_{PQ}=\tan\gamma$, $k_{PN}=\tan\theta$, 顺时针旋转 90°, 由性质 5 (1) 得 $\tan(\beta-90^\circ)+\tan(\theta+90^\circ)=2\tan(\gamma+90^\circ)$, 化简得 $\dfrac{-1}{\tan\beta}+\dfrac{-1}{\tan\theta}=\dfrac{-2}{\tan\gamma}$, 所以 $\dfrac{1}{k_{PM}}+\dfrac{1}{k_{PN}}=\dfrac{2}{k_{PQ}}$.

性质 6 如图 13、14, 已知点 Q、直线 l 和圆锥曲线 Γ, 过 Q 作直线交 Γ 于点 M,N, 在直线 l 上任取一点 P, 连接 PQ, 分别过 M,N 作 PQ 的平行线交 l 于点 S,T. 若点 Q 与直线 l 是 Γ 的一对极点与极线, 则 $S^2_{\triangle MPN}=4S_{\triangle MPS}S_{\triangle NPT}$, 或 $S^2_{\triangle SQT}=4S_{\triangle MQS}S_{\triangle NQT}$.

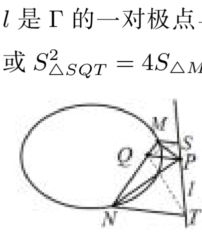

图 13

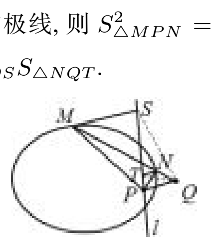

图 14

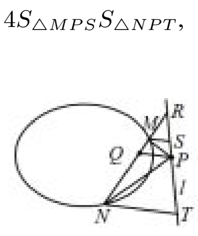

图 15

证明 如图 15, 延长 NM 交直线 l 于点 R, 设直线 NM 与直线 PQ 所成的角为 α, 则 $S_{\triangle MPS}=\dfrac{1}{2}MS\cdot MQ\sin\alpha$, $S_{\triangle NPT}=\dfrac{1}{2}NT\cdot NQ\sin\alpha$, $S_{\triangle MPN}=\dfrac{1}{2}QP\cdot MN\sin\alpha$. 由性质 3 得 $\dfrac{2}{QR}=\dfrac{1}{MR}+\dfrac{1}{NR}$, $\dfrac{2}{QR}=\dfrac{1}{MQ}-\dfrac{1}{NQ}$, 两式相乘得 $\left(\dfrac{2}{QR}\right)^2=\dfrac{(MR+NR)(NQ-MQ)}{MR\cdot NR\cdot MQ\cdot NQ}=\dfrac{MR\cdot NQ-MR\cdot MQ+NR\cdot NQ-NR\cdot MQ}{MR\cdot NR\cdot MQ\cdot NQ}$, 由性质 1 得 $MR\cdot NQ=NR\cdot MQ$, 所以 $\left(\dfrac{2}{QR}\right)^2=\dfrac{NR\cdot MQ-MR\cdot MQ+NR\cdot NQ-MR\cdot NQ}{MR\cdot NR\cdot MQ\cdot NQ}=\dfrac{MQ\cdot NM+NQ\cdot NM}{MR\cdot NR\cdot MQ\cdot NQ}=\dfrac{NM^2}{MR\cdot NR\cdot MQ\cdot NQ}$, 即

$$NM^2\cdot QR^2=4MR\cdot NR\cdot MQ\cdot NQ \qquad (*)$$

又因为 $MS//QP//NT$, 所以 $\dfrac{MS}{MR}=\dfrac{QP}{QR}=\dfrac{NT}{NR}$, 代入 $(*)$ 式得 $NM^2\cdot QP^2=4MS\cdot NT\cdot MQ\cdot NQ$, 所以 $S^2_{\triangle MPN}=4S_{\triangle MPS}S_{\triangle NPT}$. 由 $S_{\triangle SQT}=S_{\triangle MPN}$, $S_{\triangle MQS}=S_{\triangle MPS}$, $S_{\triangle NQT}=S_{\triangle NPT}$, 得 $S^2_{\triangle SQT}=4S_{\triangle MQS}S_{\triangle NQT}$.

性质 4、5、6 的证明只证明了一种情形, 其它情形证明过程类似, 不再赘述.

4. 极点与极线知识的应用

例 1 (2016 年全国 I 卷文科第 20 题) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M, 交抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 于点 P, M 关于点 P 的对称点为 N, 连结 ON 并延长交 C 于点 H.

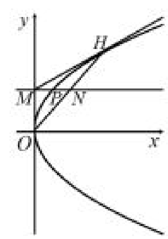

图 16

(I) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$; (II) 除 H 以外, 直线 MH 与 C 是否有其它公共点? 说明理由.

简析 (I) 略; (II) 如图 16, 由 (I) 得, $M(0,t)$, $l_{ON}: y=\dfrac{p}{t}x$ 即 $ty=px$, 由代数定义知点 M 与直线 l_{ON} 是抛物线 C 的一对极点与极线, 又因为 l_{ON} 与曲线 C 交于点 O,H, 由几何定义得 MO,MH 均为抛物线 C 的切线, 所以除 H 以外, 直线 MH 与 C 没有其它公共点.

例 2 (2012 年高考北京卷理科第 19 题) 已知曲线 $C:(5-m)x^2+(m-2)y^2=8(m\in\mathbb{R})$.

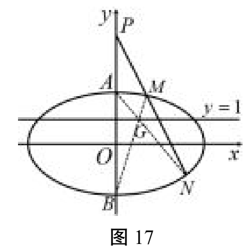

图 17

(I) 若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆, 求 m 的取值范围;

(II) 设 $m=4$, 曲线 C 与 y 轴的交点为 A,B (点 A 位于点 B 的上方), 直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M,N, 直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G. 求证: A,G,N 三

点共线.

简析 (I) 略; (II) $m=4$ 时, 曲线 C 为椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, 如图 17, 因为直线 $y=kx+4$ 恒过定点 $P(0,4)$, 由代数定义知点 P 与直线 $y=1$ 是椭圆 C 的一对极点与极线, 直线 MN 和 AB 为过极点 P 的两割线, 由几何定义知极线 $y=1$ 与四边形 $ABNM$ 的对角线三线共点, 因为极线 $y=1$ 与对角线 BM 交于点 G, 所以点 G 在另一条对角线 AN 上, 即 A,G,N 三点共线.

例 3 (2007 年高考福建卷理科第 20 题) 已知点 $F(1,0)$, 直线 $l: x=-1$, P 为平面上的动点, 过 P 作直线 l 的垂线, 垂足为点 Q, 且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

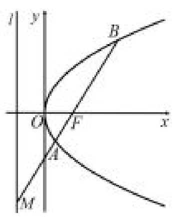

图 18

(I) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(II) 过点 F 的直线交轨迹 C 于 A,B 两点, 交直线 l 于点 M, 已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值.

简析 (I) $C: y^2=4x$; (II) 如图 18, 由 (I) 知点 F 与直线 l 是抛物线 C 的一对极点与极线, 由性质 1 得 $\frac{MA}{MB}=\frac{FA}{FB}$, 令 $\frac{MA}{FA}=\frac{MB}{FB}=\lambda$, 则 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB}=-\lambda\overrightarrow{BF}$, 故 $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=-\lambda$, 所以 $\lambda_1+\lambda_2=0$.

例 4 (2015 年高考北京卷理科第 19 题) 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0,1)$ 和点 $A(m,n)(m\neq 0)$ 都在椭圆 C 上, 直线 PA 交 x 轴于点 M.

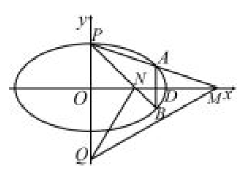

图 19

(I) 求椭圆 C 的方程, 并求点 M 的坐标 (用 m,n 表示);

(II) 设 O 为原点, 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N. 问: y 轴上是否存在点 Q, 使得 $\angle OQM=\angle ONQ$? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

简析 (I) $C: \frac{x^2}{2}+y^2=1$; (II) 如图 19, 由 $\angle OQM=\angle ONQ$, $\angle QOM=\angle NOQ$, 得 $\triangle OQM\backsim\triangle ONQ$, 故 $|OQ|^2=|ON|\cdot|OM|$. 由几何定义知点 N 是点 M 对应极线上的一点, 即点 M,N 关于椭圆 C 调和共轭, 又因为椭圆 C 的中心 O 在直线 MN 上, 记椭圆 C 的右顶点为 D, 由性质 2 得 $|ON|\cdot|OM|=|OD|^2=2$, 故 $|OQ|^2=2$, 所以 Q 的坐标为 $(0,\pm\sqrt{2})$.

例 5 (2015 年全国 I 卷理科第 20 题) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y=\frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y=kx+a(a>0)$ 交于 M,N 两点.

(I) 当 $k=0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;

(II) y 轴上是否存在点 P, 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM=\angle OPN$? 说明理由.

简析 (I) 略; (II) 如图 20, 由题得抛物线 C 的对称轴为 y 轴, 直线 l 恒过 y 轴上点 $Q(0,a)$, 因为 $\angle OPM=\angle OPN$, 且点 P 在 y 轴上, 由性质 4 的逆命题得 P,Q 关于抛物线 C 调和共轭, 由代数定义得点 P 的坐标为 $(0,-a)$.

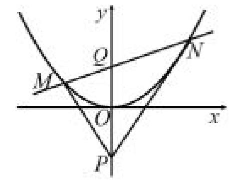

图 20

例 6 (2013 年高考江西卷文科第 20 题) 椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a+b=3$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 如图 21, A,B,D 是椭圆 C 的顶点, P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点, 直线 DP 交 x 轴于点 N, 直线 AD 交 BP 于点 M, 设 BP 的斜率为 k, MN 的斜率为 m. 证明: $2m-k$ 为定值.

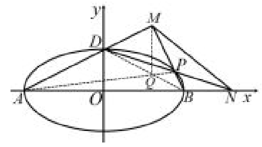

图 21

简析 (I) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; (II) 如图 21, 连接 AP,BD 交于点 Q, 连接 MQ, 由几何定义知点 N 与直线 MQ 是椭圆 C 的一对极点与极线, 由性质 5 得 $k_{MP}+k_{MD}=2k_{MN}$, 即 $k+k_{MD}=2m$, 因为 $k_{MD}=k_{AD}=-\frac{1}{2}$, 所以 $k-2m=\frac{1}{2}$.

例 7 (2009 年高考湖北卷理科第 21 题) 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的对称轴上一点 $A(a,0)(a>0)$ 的直线与抛物线相交于 M,N 两点, 自 M,N 向直线 $l: x=-a$ 作垂线, 垂足分别为 M_1,N_1.

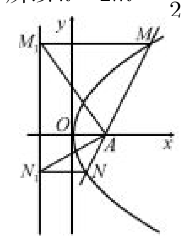

图 22

(I) 当 $a=\frac{p}{2}$ 时, 求证: $AM_1\perp AN_1$;

(II) 记 $\triangle AMM_1$, $\triangle AM_1N_1$, $\triangle ANN_1$ 的面积分别为 S_1,S_2,S_3, 是否存在 λ, 使得对任意的 $a>0$, 都有 $S_2^2=\lambda S_1S_3$ 成立? 若存在, 求出 λ 的值, 否则说明理由.

简析 (I) 略; (II) 如图 22, 由代数定义知点 A 与直线 l 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的一对极点与极线, 由性质 6 得 $S_2^2=4S_1S_3$, 故 $\lambda=4$.

以极点、极线为背景的高考解析几何试题还有很多, 例如, 2018 年全国 I 卷文、理解析几何解答题就是以性质 4 为背景的试题. 通过列举的 7 道真题, 不难体会极点与极线知识内容的丰富性, 虽然极点与极线的知识不属于高考考查内容, 但是了解极点与极线的相关知识, 能帮助教师和学生打开思维视角, 培养学生探究数学问题的能力.

参考文献

[1] 王文彬. 极点、极线与圆锥曲线试题的命制 [J]. 数学通讯, 2015 (4): 62-66.