非对称结构圆锥曲线问题的求解策略

——以 2020 年高考全国Ⅰ卷第 20 题为例

涂序星

(广东省佛山市乐从中学,528315)

在很多直线与圆锥曲线相交的问题中,我们都习惯于联立直线与曲线方程,利用韦达定理整体代换进行求解,所得表达式通常是关于两交点坐标对称结构的表达式. 但是在遇到非对称结构问题时,由于目标式子不对称,如$\frac{x_1}{x_2}$或$\frac{3x_1x_2+2x_1-x_2}{2x_1x_2-x_1+x_2}$,就无法直接利用韦达定理整体代换,很多学生对此感觉无从下手. 笔者以 2020 年全国Ⅰ卷理科第 20 题为例,探究这类问题的常规解法和思路.

题目 已知A,B分别为椭圆E:$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点,$G$为$E$的上顶点,$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$,$P$为直线$x=6$上的动点,$PA$与$E$的另一交点为$C$,$PB$与$E$的另一交点为$D$.

(1) 求E的方程;

(2) 证明:直线CD过定点.

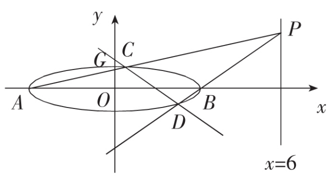

图 1

解 (1) E的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.(过程略)

(2) 易知$A(-3,0)$,$B(3,0)$,设$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,直线AC,BD的方程分别为$y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$,$y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$.

由于$AC\cap BD=P$,联立直线AC与BD的方程,消去y得$x=6$,所以$\frac{9y_1}{x_1+3}=\frac{3y_2}{x_2-3}$,即

$$\frac{3y_1}{x_1+3}=\frac{y_2}{x_2-3}. \qquad ①$$

当直线CD的斜率不存在时,有$x_1=x_2$,$y_1=-y_2$,①式也成立,化简得$x_1=x_2=\frac{3}{2}$,即此时直线CD的方程为$x=\frac{3}{2}$. 根据对称性,我们可以猜测直线CD过x轴上的定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

当直线CD的斜率存在时,设直线CD的方程为$y=kx+b$,与$\frac{x^2}{9}+y^2=1$联立,消去y得$(9k^2+1)x^2+18kbx+9b^2-9=0$,由韦达定理得$x_1+x_2=\frac{-18kb}{9k^2+1}$,$x_1x_2=\frac{9b^2-9}{9k^2+1}$.

解题至此,我们发现①式是非对称结构,无法直接用韦达定理代入解决,高考时很多学生止步于此. 笔者经过一番探究运算,总结出解决此类非对称结构圆锥曲线问题的几种思路,供读者参考.

思路 1 平方法

由点C,D在椭圆上,得$9y_1^2=(3+x_1)(3-x_1)$,$9y_2^2=(3+x_2)(3-x_2)$. 对①式两边平方得$\frac{9y_1^2}{(x_1+3)^2}=\frac{y_2^2}{(x_2-3)^2}$,即

$$\frac{(3+x_1)(3-x_1)}{(x_1+3)^2}=\frac{(3+x_2)(3-x_2)}{9(x_2-3)^2},$$

亦即$\frac{3-x_1}{x_1+3}=\frac{3+x_2}{9(3-x_2)}$,

整理得$4x_1x_2-15(x_1+x_2)+36=0$.

于是$4\cdot\frac{9b^2-9}{9k^2+1}-15\cdot\frac{-18kb}{9k^2+1}+36=0$，化简得$2b^2+15bk+18k^2=0$，即$(2b+3k)(b+6k)=0$，解得$b=-\frac{3k}{2}$或$b=-6k$.

当$b=-\frac{3k}{2}$时，直线CD的方程为$y=k\left(x-\frac{3}{2}\right)$，过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$；当$b=-6k$时，直线$CD$的方程为$y=k(x-6)$，过定点$(6,0)$，不合题意，舍去.

综上，直线CD过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

思路2　用椭圆第三定义

由椭圆第三定义，得$k_{AD}k_{BD}=-\frac{1}{9}$，即

$$\frac{y_2}{x_2+3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=-\frac{1}{9}. \quad ②$$

把①式代入②式并整理，得$\frac{y_2}{x_2+3}\cdot\frac{3y_1}{x_1+3}=-\frac{1}{9}$，即$27y_1y_2+(x_1+3)(x_2+3)=0$，亦即$(27k^2+1)x_1x_2+(27kb+3)(x_1+x_2)+27b^2+9=0$.

所以$(27k^2+1)\frac{9b^2-9}{9k^2+1}+(27kb+3)\frac{-18kb}{9k^2+1}+27b^2+9=0$，化简得$2b^2-3bk-9k^2=0$，即$(2b+3k)(b-3k)=0$，所以$b=-\frac{3k}{2}$或$b=3k$.

当$b=-\frac{3k}{2}$时，直线CD的方程为$y=kx-\frac{3k}{2}$，过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$；当$b=3k$时，直线$CD$的方程为$y=kx+3k$，过定点$(-3,0)$，不合题意，舍去.

综上，直线CD过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

评注　观察到①式等价于$k_{BD}=3k_{AC}$，这也是命题的核心思想. 突破本题的关键需联想到椭圆第三定义：椭圆上的动点到椭圆两顶点斜率之积为常数$-\frac{b^2}{a^2}$，即$k_{AD}k_{BD}=-\frac{1}{9}$，结合①式得到$k_{AD}k_{AC}=-\frac{1}{27}$，从而把非对称结构式转化为对称结构.

思路3　积转为和

直线CD的斜率不可能为0，可设直线CD的方程为$x=my+t$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{9}+y^2=1,\end{cases}$消去$x$得$(m^2+9)y^2+2mty+t^2-9=0$. 由韦达定理得$y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+9}$，$y_1y_2=\frac{t^2-9}{m^2+9}$，所以

$$my_1y_2=\frac{t^2-9}{-2t}(y_1+y_2). \quad ③$$

由于①式可化为$\frac{y_2(x_1+3)}{y_1(x_2-3)}=3$，即$\frac{my_1y_2+(t+3)y_2}{my_1y_2+(t-3)y_1}=3$，通过积转为和，将③式代入，可化为齐次式. 于是，有

$$\frac{\frac{t^2-9}{-2t}(y_1+y_2)+(t+3)y_2}{\frac{t^2-9}{-2t}(y_1+y_2)+(t-3)y_1}=3,$$

即$\frac{\frac{t^2-9}{-2t}y_1+\frac{t^2+6t+9}{2t}y_2}{\frac{t^2-9}{-2t}y_1+\frac{t^2-6t+9}{2t}y_2}=3$. 将$y_1=\frac{-2mt}{m^2+9}-y_2$代入，整理得$\frac{3+t}{3-t}=3$，解得$t=\frac{3}{2}$.

故直线CD过定点$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

评注　思路1，2要求学生对式子的构造要求能力要求很高，不易想到. 抓住核心关系$k_{BD}=3k_{AC}$，将①式化为$\frac{my_1y_2+(t+3)y_2}{my_1y_2+(t-3)y_1}=3$，注意$y_1y_2$是二次项，其它都是一次项，利用③式积化和进行降次，顺其自然，思路3切合学生实际，学生容易接受.

思路4　设线解点

设$P(6,y_0)$，则直线AP的方程为$y=\frac{y_0}{9}(x+3)$. 与$\frac{x^2}{9}+y^2=1$联立，整理得$(y_0^2+9)x^2+6y_0^2x+9y_0^2-81=0$，解得$x=-3$或$x=\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$.

将 $x=\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$ 代入 $y=\frac{y_0}{9}(x+3)$，可得 $y=\frac{6y_0}{y_0^2+9}$，所以点 $C\left(\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9},\frac{6y_0}{y_0^2+9}\right)$.

同理可得点 $D\left(\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1},\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$.

故直线 CD 的方程为 $y-\left(\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)=\frac{\frac{6y_0}{y_0^2+9}-\left(\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)}{\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}}\left(x-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$，整理可得 $y=\frac{4y_0}{3(3-y_0^2)}\left(x-\frac{3}{2}\right)$. 即直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

评注　思路4为了回避出现非对称结构，不直接设直线 CD 的方程，而是先通过设直线 AP 方程求出点 C 的坐标，同理得出点 D 的坐标，从而得到直线 CD 的方程；再整理得出直线 CD 过定点. 思路清晰顺畅，学生容易接受，但计算量偏大.

思路5　平移坐标系 + 齐次化变换

以 A 为原点，AB 所在直线为 x' 轴建立新平面直角坐标系 $x'Ay'$，则椭圆方程 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 变为 $\frac{(x'-3)^2}{9}+y'^2=1$，即

$$x'^2+9y'^2-6x'=0.$$

在新坐标系下，设直线 CD 的方程为 $mx'+ny'=1$，则 $x'^2+9y'^2-6x'(mx'+ny')=0$，即 $9\left(\frac{y'}{x'}\right)^2-6n\left(\frac{y'}{x'}\right)+1-6m=0$. 由韦达定理，得 $k_{AC}k_{AD}=\frac{1-6m}{9}=-\frac{1}{27}$，解得 $m=\frac{2}{9}$. 于是，直线 CD 的方程为 $\frac{2}{9}x'+ny'=1$，过定点 $\left(\frac{9}{2},0\right)$.

故在原坐标系下，直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

评注　思路5是思路2的一种简化运算技巧. 由于 $k_{AC}k_{AD}=-\frac{1}{27}$，通过平移坐标系，使 A 为原点，再通过齐次化变换，目的是构造以 k_{AC}，k_{AD} 为根的二次方程，从而用韦达定理迅速得出答案，收到事半功倍的效果. 不难发现，本思路可用来解决含有“$k_1+k_2=m$”，“$k_1k_2=m$ 型”条件的圆锥曲线问题.

纵观以上解题思路，化归与转化这一重要思想的应用体现得淋漓尽致，大道至简. 非对称结构圆锥曲线问题大部分有高等几何命题背景——极点极线知识，深受命题专家亲睐，在高考和各地模拟卷多次出现，如2010年江苏卷、2011年四川卷、2001年广东卷.

参考文献

[1] 张杨文. 高考数学你真的掌握了吗? [M]. 北京: 清华大学出版社，2014.

[2] 闻杰. 神奇的圆锥曲线与解题秘诀 [M]. 杭州: 浙江大学出版社，2017.

(上接第48页)

当 $\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}<1$ 时，曲线 L 表示椭圆，此时 $\cos\theta_1<\cos\theta_2$，$\theta_1>\theta_2$.

另设 $\odot O_1$ 上距平面 α 最远点为 M，最近点为 N(图1)，则 $MN\subset$ 面 OQF，且 $\angle MSO=\theta_2$，$\angle SQF=\theta_1$. 所以，当 $\theta_1=\theta_2$ 时，曲线 L 表示抛物线，$SM\parallel QF$，此时，点光源 S 距平面 α 高度恰等于球 O 直径；同理，当 $\theta_1>\theta_2$，曲线 L 表示椭圆，点光源 S 距平面 α 高度大于球 O 直径；当 $\theta_1<\theta_2$，曲线 L 表示双曲线(一支)，点光源 S 距平面 α 高度小于球 O 直径.

参考文献

[1] 韩亚芹. 球在平面上的投影 [J]. 数学教学，2009(4): 25-27.

[2] 邹明，陈瑞青. 圆锥截线特征的一种简捷证明 [J]. 数学教学通讯，2000(11): 46.