椭圆的第三定义

广东省佛山市罗定邦中学 (528300)　龙 宇
广东省佛山市李伟强职业技术中学 (528300)　何 珊

1. 第三定义的由来

在人教 A 版教材–选修 2-1 的第 80 页有如下一道习题:

10. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A, B 的坐标分别为 $(-5,0)$, $(5,0)$, 且 AC, BC 所在直线的斜率之积等于 $m(m\neq 0)$, 试探求顶点 C 的轨迹.

此题的目的是为了介绍圆锥曲线的第三定义, 但介绍的过于浅显. 根据高考的考纲, 教材中出现的任何内容都可能作为高考的出题点. 所以本文以椭圆为例, 介绍一下椭圆的第三定义, 再给出几个例题供大家参考.

定义 平面内的动点到两定点 $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ 的斜率乘积等于常数 e^2-1 的点轨迹及点 A_1, A_2 叫做椭圆, 其中的常数 $e^2-1\in(-1,0)$.

说明 因为当椭圆上的点与端点重合时, 斜率不存在, 所以该定义要特别注意两个端点.

2. 第三定义的运用

例 1 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 其左、右顶点分别为点 A, B, 且点 A 关于直线 $y=x$ 对称的点在直线 $y=3x-2$ 上, 点 M 在椭圆 E 上, 且不与 A, B 点重合. (1) 求椭圆 E 的标准方程;(2) 已知点 N 在圆 $O: x^2+y^2=b^2$ 上, $MN\perp y$ 轴, 若直线 MA, MB 与 y 轴的交点分别为 C, D. 求证: $\sin\angle CND$ 为定值.

分析 第 (1) 问较简单, E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$, 过程从略. 第 (2) 问中求证 $\angle CND$ 的正弦为定值, 而与正弦相关的结论较少, 转求该角的余弦值, 若该角的余弦为定值, 正弦必为定值.

因为点 M 在椭圆 E 上, 设点 M 为 $(2\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$, 又因为点 N 在圆 $O: x^2+y^2=b^2$ 上, 且 $MN\perp y$ 轴, 所以点 N 为 $(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$, 设直线 MA 的斜率为 m, 直线 MA 为: $y=m(x-2\cos\theta)+\sqrt{2}\sin\theta$, 得到点 C 的坐标为 $(0,\sqrt{2}\sin\theta-2m\cos\theta)$. 同理, 设直线 MB 的斜率为 n, 得到点 D 的坐标为 $(0,\sqrt{2}\sin\theta-2n\cos\theta)$; 通过向量的方法来计算 $\angle CND$ 的余弦,

$$\overrightarrow{NC}=(-\sqrt{2}\cos\theta,-2m\cos\theta)=-\cos\theta\cdot(\sqrt{2},2m),$$

同理

$$\overrightarrow{ND}=-\cos\theta\cdot(\sqrt{2},2n),$$

根据 $\cos\angle CND=\dfrac{\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ND}}{|\overrightarrow{NC}|\cdot|\overrightarrow{ND}|}$, 而 $\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ND}=\cos^2\theta(2+4mn)$, 根据上面的定义, $mn=e^2-1=-\dfrac{1}{2}$, 所以 $\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ND}=0$, 即 $\angle CND=\dfrac{\pi}{2}$, 它的正弦值为 1, 是定值.

分析 这里用全概率公式求解.

解 因为从 1 号箱中选出白球的概率 $\dfrac{1}{3}$, 记为 B_1; 从 1 号箱中选出红球的概率 $\dfrac{2}{3}$, 记为 B_2; 1 号箱中选出的为白球时, 从 2 号箱中取出红球的概率为 $\dfrac{1}{3}$. 1 号箱中选出的为红球时, 从 2 号箱中取出红球的概率 $\dfrac{4}{9}$. 设所求的事件为 R, 则

$$P(R)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(R|B_i)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}+\frac{8}{27}=\frac{11}{27}.$$

四、一些建议

1. 命题应严把文字关, 对于易引起混淆的语义, 应进行修改; 历年高考命题都遵守这个原则.

2. 条件概率的教学应把握难度, 不应出太难的题, 但对这个概念本身, 力求在教学中讲透. 对于本题的解法二为何出错, 学生也许不能真正理解, 还可以用以下题来说明:

变式 投掷骰子两次, 求在第一次掷得的点数为 1 或 2 的条件 (设为 A) 下, 两次掷得的点数之和为 5(设为 B) 的概率.

由于可以列举法证得, 学生更容易理解.

解法一 (正确解法) 容易求得所求概率为 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

解法二 (错误解法) 所求为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{6}.$$

参考文献

[1] 杨志文. 是 $P(AB)$ 还是 $P(B/A)$ – 由一道例题教学的困惑谈条件概率教学[J. 中学数学教学参考 (上旬刊), 2009(4).

[2] 魏宗舒. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997,12.

该类问题的传统解法, 是用尽量少的未知数 (即“消元”思想) 表达出所求式, 再计算出最终的定值. 而该解法以直线斜率做为参数, 增加了较多的未知量, 与学生们“固有的”消元思想相违背, 虽然能更好表达题目的意图, 但解答的过程会越来越复杂, 以最后的向量为例, 我们一共有三个未知量, 对于解答者而言, 需要较强的心理承受能力, 才能继续化简. 但是该解法通过第三定义, 在最后一步消掉所有的未知量, 能给人一种豁然开朗的感觉, 很有一种数学的奇异之美.

例 2 (2016 年广州一模第 20 题) 已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 左顶点为 A, 左焦点为 $F_1(-2,0)$, 点 $B(2,\sqrt{2})$ 在椭圆 C 上, 直线 $y=kx(k\neq 0)$ 与椭圆 C 交于 E,F 两点, 直线 AE,AF 分别与 y 轴交于点 M,N.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 以 MN 为直径的圆是否经过定点? 若经过, 求出定点的坐标; 若不经过, 请说明理由.

分析 第 (1) 问中椭圆方程为: $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 过程从略. 对于第 (2) 问, 主体思路都是联立直线与椭圆, 求解得到点 E,F, 进而得到点 M,N, 然后以点 M,N 为直径做圆, 再观察表达式, 判断该圆是否过定点. 思路虽清晰, 但运算太过复杂. 根据题干信息, 点 E,F 关于原点对称, 可直接设点 $E(x_1,y_1)$, 点 $F(-x_1,-y_1)$, 虽可以简化部分运算, 但仍很复杂.

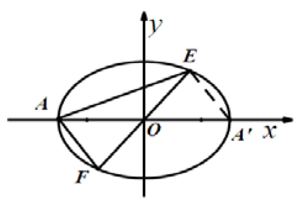

图 1

在证明该问之前, 我们先利用椭圆的第三定义得到如下的

断言 设直线 AE,AF 的斜率分别为 m,n, 则有 $mn=e^2-1=-\dfrac{1}{2}$.

事实上, 设椭圆的右顶点为 A', 则有点 A 与点 A' 关于原点对称, 点 E,F 也关于原点对称, 则有直线 EA' 的斜率等于 AF 的斜率 n, 利用椭圆的第三定义, $mn=e^2-1=-\dfrac{1}{2}$.

解 直线 AE,AF 的直线方程分别为 $y=m(x+2\sqrt{2})$, $y=n(x+2\sqrt{2})$, 它们与 y 轴的交点分别为 $M(0,2\sqrt{2}m)$, $N(0,2\sqrt{2}n)$, 以 MN 为直径的圆的方程为:

$$x^2+(y-2\sqrt{2}m)(y-2\sqrt{2}n)=0,$$

结合根据 $mn=-\dfrac{1}{2}$ 化简得:

$$x^2+(y-\sqrt{2}m-\sqrt{2}n)^2=4+(\sqrt{2}m+\sqrt{2}n)^2.$$

根据方程可知, 该圆过定点为 $(\pm 2,0)$.

总结 两道例题的本质是一样的. 根据例 1, 点 P 落在圆 $x^2+y^2=4$ 上. 如果把两题结合起来, 我们可以编出下面的练习供读者思考

练习 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 直线 $y=kx$ 与椭圆 C 交于点 E,F, 设椭圆上的任意一点 P, 直线 PE,PF 与 y 轴交于点 C,D, 设点 N 在圆 $O:x^2+y^2=b^2$ 上, 且 $PN\perp y$ 轴, 求证: $CN\perp DN$.

证明过程如上例, 从略.

例 3 设 P 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b>0)$ 上的动点, F_1,F_2 为椭圆的两个焦点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 求点 I 的轨迹方程.

解 在求轨迹方程之前, 我们先证明如下的

断言 设焦点三角形的底角为 α,β, 则有 $\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{1-e}{1+e}$.

事实上, 设焦点三角形的顶角为 γ, 注意到 $\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{2a-2c}{2a+2c}$, 由正弦定理可得

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}.$$

仿照上面的解法二, 利用和差化积及二倍角公式可得:

$$\begin{aligned}\text{上式}&=\frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\\&=\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\\&=\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}.\end{aligned}$$

回归到焦点 $\triangle PF_1F_2$ 即有 $k_{PF_1}\cdot k_{PF_2}=-\dfrac{a-c}{a+c}$ 为定值, 且该定值位于 $(-1,0)$. 根据椭圆的第三定义, 点 I 的轨迹为椭圆, 其方程为: $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{\frac{a-c}{a+c}\cdot c^2}=1(y\neq 0)$.