138 道 同构 练习题

1. 已知函数 $f(x)=ae^{x}Inx(a\neq 0)$，若 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)<x^{2}+xIna$，求 a 的取值范围.

解析：由 $x^{2}+xIna>ae^{x}Inx\Rightarrow\dfrac{x+Ina}{ae^{x}}>\dfrac{Inx}{x}\Rightarrow\dfrac{Inx}{x}<\dfrac{In(ae^{x})}{ae^{x}}$ 对 $\forall x\in(0,1)$ 恒成立。

构造 $h(x)=\dfrac{Inx}{x},x\in(0,1)$，$h(x)$ 单增，

所以：$x<ae^{x}\Rightarrow a>\dfrac{x}{e^{x}}\Rightarrow a>[\dfrac{x}{e^{x}}]_{\max}$，因为 $x\in(0,1)\therefore a\geq\dfrac{1}{e}$

2. 已知 $f(x)=e^{x}-aInx$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)>aIna$ 恒成立，求正实数 a 的取值范围.

解析：$e^{x}-aInx>aIna\Rightarrow e^{x-Ina}-Inx>Ina$

$\Rightarrow e^{x-Ina}+x-Inx>x+Inx=e^{Inx}+Inx$ 构造 $g(x)=e^{x}+x$，单增，

所以：$x-Ina>Inx\Rightarrow Ina<x-Inx\Rightarrow Ina<[x-Inx]_{\min}=x-(x-1)=1$

3. 设实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\dfrac{Inx}{\lambda}\geq 0$ 恒成立，则 λ 的取值范围是（ ）.

解：$e^{\lambda x}-\dfrac{Inx}{\lambda}\geq 0\Rightarrow\lambda xe^{\lambda x}\geq xInx=Inxe^{Inx}$，即 $\lambda x\geq Inx$ 恒成立，$\lambda\geq\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)_{\max}=\dfrac{1}{e}$，

4. 已知 $e^{x}-1\geq\dfrac{Inx+a}{x}$ 恒成立，则实数 a 的最大值为（ ）。

答案：1

5. 设实数 $m>0$，若对任意的 $x\geq e$，若不等式 $x^{2}\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0$ 恒成立，则 m 的最大值为（ ）.

解：$x^{2}\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0\Rightarrow x^{2}\ln x\geq me^{\frac{m}{x}}\Rightarrow x\ln x\geq\dfrac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}\Rightarrow e^{\ln x}\ln x\geq\dfrac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}\Rightarrow\dfrac{m}{x}\leq\ln x$，

得 $m\leq(x\ln x)_{\min}=e$（注意定义域）.

6. 对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $2x^3\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geq 0$ 恒成立，求实数 m 的最大值______.

解：由题意得 $2x^3\ln x\geq me^{\frac{m}{x}}\Rightarrow x^2\ln x^2\geq\frac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}\Rightarrow e^{\ln x^2}\ln x^2\geq\frac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}$，

即 $\ln x^2\geq\frac{m}{x}$，$\Rightarrow m\leq\left(x\cdot\ln x^2\right)_{\min}=-\frac{2}{e}$.

7. 已知函数 $f(x)=m\cdot\ln(x+1)-3x-3$，若不等式 $f(x)>mx-3e^x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 m 的取值范围是（　）.

解：由题意得：$m\ln(x+1)-3x-3>mx-3e^x\Rightarrow 3\left(e^x-x-1\right)>mx-m\ln(x+1)$，

右边凑 1，得 $3\left(e^x-x-1\right)>m\left(x+1-\ln(x+1)-1\right)\Rightarrow 3\left(e^x-x-1\right)>m\left(e^{\ln(x+1)}-\ln(x+1)-1\right)$

得 $m\leq 3$.（说明：定义域大于零，所以 $x>\ln(x+1)$，$m=3$ 成立）.

8. 对 $\forall x>0$，不等式 $2ae^{2x}-\ln x+\ln a\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为______.

解：由题意得：$2ae^{2x}-\ln x+\ln a\geq 0\Rightarrow 2ae^{2x}\geq\ln x-\ln a=In\frac{x}{a}$

$$\Rightarrow 2xe^{2x}\geq\frac{x}{a}In\frac{x}{a}=In\frac{x}{a}e^{In\frac{x}{a}}\Rightarrow 2x\geq In\frac{x}{a}\Rightarrow a\geq\left(\frac{x}{e^{2x}}\right)_{\min}=\frac{1}{2e}$$

9. 若 $x\in(0,+\infty),\frac{e^{x-1}}{x}\geq x-Inx+a$ 恒成立，则 a 的最大值（ C ）

A. 1　　B. $\frac{1}{e}$　　C. 0　　D. $-e$

解析：$e^{x-Inx-1}\geq x-Inx+a\Rightarrow e^{x-Inx-1}\geq x-Inx-1+1+a\Rightarrow a\leq 0$

10. 已知关于 x 的不等式 $\frac{e^x}{x^3}-x-aInx\geq 1$ 对于任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围（ B ）

A. $(-\infty,1-e]$　　B. $(-\infty,-3]$　　C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,2-e^2]$

解析：$\frac{e^x}{x^3}-x-aInx\geq 1\Rightarrow e^{x+Inx^{-3}}\geq x+Inx^{-3}+1=x-3Inx+1\geq x+aInx+1$.

$\therefore -3Inx\geq aInx,\because x>1\therefore a\leq -3$

11. 已知不等式 $x+\alpha Inx+\frac{1}{e^x}\geq x^{\alpha}$，对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　）

A. $-\sqrt{e}$　　B. $-\frac{e}{2}$　　C. $-e$　　D. $-2e$

解析：$x+Inx+e^{-x}\ge x^{\alpha}\Rightarrow x+e^{-x}\ge -Inx+x^{\alpha}=-Inx^{\alpha}+e^{-(-Inx^{\alpha})}$

令 $g(x)=x+e^{-x}\Rightarrow g'(x)=1-e^{-x}\Rightarrow g(x)\ge g(-Inx^{\alpha})$

$\Rightarrow x\ge -Inx^{\alpha}\Rightarrow \alpha\ge -\dfrac{x}{Inx},(x>1)\Rightarrow \alpha\ge -e$

12. 对任意的 $x\in(0，+\infty)$，恒有 $a\left(e^{ax}+1\right)\ge 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln x$，求实数 a 的最小值______.

解：由题意得：$ax\cdot e^{ax}+ax\ge 2x^2\ln x+2\ln x=x^2\ln x^2+\ln x^2$

即 $ax\cdot e^{ax}+ax\ge \ln x^2\cdot e^{\ln x^2}+\ln x^2$，

得 $ax\ge \ln x^2\Rightarrow a\ge\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)_{\max}=\dfrac{2}{e}$.

13. 已知 x_0 是方程 $2x^2e^{2x}+\ln x=0$ 的实根，则关于实数 x_0 的判断正确的是（ ）.

A. $x_{\circ}\ge In2$　　B. $x_{\circ}<\dfrac{1}{e}$　　C. $2x_0+\ln x_0=0$　　D. $2e^{x_0}+\ln x_0=0$

解析：$2x^2e^{2x}+\ln x=0\Rightarrow 2xe^{2x}=-\dfrac{1}{x}Inx=\dfrac{1}{x}In\dfrac{1}{x}=In\dfrac{1}{x}e^{In\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow 2x=In\dfrac{1}{x}\Rightarrow 2x_{\circ}+Inx_{\circ}=0$

14. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+1)$，$g(x)=e^x-x-1$，若 $g(x)\ge kf(x)$ 对 $\forall x\in[0，+\infty)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

解析：由题意得：$e^x-x-1\ge k\left[x-\ln(x+1)\right]$

右边式子凑 1 得 $e^x-x-1\ge k\left[x+1-\ln(x+1)-1\right]$

即 $e^x-x-1\ge k\left[e^{\ln(x+1)}-\ln(x+1)-1\right]$，因为 $x\ge\ln(x+1)$

当且仅当 $x=0$ 等号成立，所以满足 $k\le 1$ 即可

当且仅当 $e^x-x-1=1$，即 $x=0$ 等号成立，所以 $k\le 1$.

15. 已知函数 $f(x)=x\cdot e^{x+1}$，$g(x)=k\cdot\ln x+k(x+1)$. 设 $h(x)=f(x)-g(x)$，其中 $k>0$，若 $h(x)\ge 0$ 恒成立，求 k 的取值范围.

解析：由题意得：$x\cdot e^{x+1}>k(\ln x+x+1)\Rightarrow e^{\ln x+x+1}>k(\ln x+x+1)$

因为 $e^{\ln x+x+1}\ge k(\ln x+x+1)$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立

因为 $e^x\ge ex$，所以等价于证：$e(\ln x+x+1)\ge k(\ln x+x+1)$

当且仅当 $x=1$ 时等号成立，所以 $k\le e$.

16. 已知函数 $f(x)=xlnx$ ， $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．证明： $f(x)<2e^{x-2}$

解析：由题意得： $x\ln x<2e^{x-2}$ ，因为 $\ln x\le\frac{x}{e}$（当且仅当 $x=e$ 时等号成立）

等价于证明 $x\cdot\frac{x}{e}\le 2e^{x-2}\Rightarrow\frac{x^2}{e^x}\le 2e^{-1}$ ，构造 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$

则 $g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$ ，易知 $g(x)_{\max}=g(2)=2e^{-1}$

17. 若函数 $f(x)=x(e^{2x}-a)-Inx-1$ 无零点，则整数 a 的最大值是（　　）

A. 3　　　　B. 2　　　　C. 1　　　　D. 0

解析： $f(x)=x(e^{2x}-a)-Inx-1>0$

$$\Rightarrow e^{2x+Inx}-ax-Inx-1\ge 2x+Inx+1-ax-Inx-1=(2-a)x>0$$

$$\Rightarrow a<2\therefore a=1$$

18. 已知 $f(x)=\ln x+ax-a$ ． 若 $g(x)=e^{x-1}-f(x)$ 的最小值为 M ，求证 $M\le 1$ ．

解析：构造 $f(x)=e^x-(x+1)$ ，则 $f(x)>0$

则 $f(x-1)+f(\ln x)=e^{x-1}-x+x-\ln x-1$ ，

$g(x)=e^{x-1}-\ln x-a(x+1)=f(x-1)+f(\ln x)-a(x-1)+1$

$\left(f(x-1)+f(\ln x)\right)_{\min}=0$ ， $g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}-a$

$g'(1)=-a$ ，接下来分类讨论：

1. 当 $a=0$ ，则 $g(x)_{\min}=1$ ，成立；

2. 当 $a>0$ ，则 $g'(1)=-a<0$ ，得 $g(x)_{\min}\le g(1)=1$ ，成立；

3. 当 $a<0$ ，则 $g'(1)=-a>0$ ，得 $g(x)_{\min}\le g(1)=1$ ；

19. 已知函数 $f(x)=a\ln x+be^{x-1}-(a+2)x+a$ ．（ a,b 为常数）若 $b=2$ ，若对任意的 $x\in[1,+\infty)$ ， $f(x)\ge 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

解析：由题意得： $a\ln x+2e^{x-1}-(a+2)x+a\ge 0\ (x\ge 1)$

即 $a\ln x-(a+2)x+a\ge -2e^{x-1}\Rightarrow a\ln x-ax-2x+a\ge -2e^{x-1}$ ，

$$\Rightarrow a(\ln x-x+1)\ge 2\left(-e^{x-1}+x\right)$$

右边凑 1，得 $a(\ln x-x+1)\ge 2\left(x-1-e^{x-1}+1\right)\Rightarrow$

$a\left(e^{\ln(\ln x)}-e^{\ln x}+1\right)\ge 2\left(e^{\ln(x-1)}-e^{x-1}+1\right)$ ，

构造 $g(x)=e^{\ln x}-e^{x}+1$，则 $g(x)<0$，即 $a\cdot g(\ln x)\geq 2\cdot g(x-1)$

当且仅当 $x=1$ 时取等号，所以只需满足 $a\leq 2$.

20. 若 $\frac{1+\ln x}{x}\leq a+\mathrm{e}^{-ax}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】$\frac{1+\ln x}{x}\leq a+\mathrm{e}^{-ax}\Leftrightarrow 1+\ln x\leq ax+x\mathrm{e}^{-ax}\Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-ax}\geq \ln x-ax+1$

而 $x\mathrm{e}^{-ax}=\mathrm{e}^{(\ln x-ax)}\geq \ln x-ax+1$，故 $a\in\mathbf{R}$

21. 已知函数 $f(x)=\frac{e^{x}}{x}-ax,x\in(0,+\infty)$，当 $x_2>x_1$ 时，不等式 $\frac{f(x_1)}{x_2}<\frac{f(x_2)}{x_1}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（D）

A. $(-\infty，e]$　　B. $(-\infty,e)$　　C. $(-\infty,\frac{e}{2})$　　D. $(-\infty，\frac{e}{2}]$

22. 设函数 $f(x)=xe^{x}-a(x+Inx)$，若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围（　　）

A. $[0,\ e]$　　B. $[0,1]$　　C. $(-\infty,e]$　　D. $[e,+\infty)$

解析：同构思想：$e^{x+Inx}\geq a(x+Inx)\because e^{x}\geq ex\therefore a\in[0,e]$

23. （2020 成都二诊）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=x\cdot e^{-x}$，若存在 $x_1\in(0，+\infty)$，$x_2\in R$，使得 $f(x_1)=g(x_2)=k(k<0)$ 成立，则 $(\frac{x_2}{x_1})^2\cdot e^{k}$ 的最大值为（　　）

A. e^2　　B. e　　C. $\frac{4}{e^2}$　　D. $\frac{1}{e^2}$

解析：$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g(x)=x\cdot e^{-x}\Rightarrow\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=k<0\Leftrightarrow\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{Ine^{x_2}}{e^{x_2}}=k<0$

构造 $F(x)=\frac{Inx}{x}$，做出图像：因为 $k<0$ 容易知道：$0<x_1<1,0<e^{x_2}<1$

又因为 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单增

所以：$x_1=e^{x_2}\Rightarrow x_2=Inx_1\Rightarrow(\frac{x_2}{x_1})^2e^{k}=k^2e^{k}\Rightarrow[k^2e^{k}]_{\max}=\frac{4}{e^2}$

24. （重庆渝中区模拟）若关于 x 的不等式 $x+a\ln x+\frac{1}{e^{x}}\geq x^{a}(a<0)$ 对任意的 $x\in(1，+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的最小值是（ ）　　　.

解析 1：$x+e^{-x}\ge x^{a}-aInx=e^{-(-Inx^{a})}-Inx^{a}$，令 $g(x)=x+e^{-x}$，因为单增

所以：$x\ge -Inx^{a}\Rightarrow -a\le[\frac{x}{Inx}]_{\min}\Rightarrow a\ge -e$。答案：$-e$

解析 2：$x+e^{-x}\ge x^{a}-aInx\Rightarrow -Ine^{-x}+e^{-x}>x^{a}-Inx^{a}$

构造 $g(x)=x-Inx$，因为单增。所以 $e^{-x}>x^{a}\Rightarrow a\ge -e$.

25.（名校联考）已知对任意的 $x\in(0，+\infty)$，都有 $k(e^{kx}+1)-(1+\frac{1}{x})\ln x>0$，则实数 k 的取值范围是________.

解析：$k(e^{kx}+1)-(1+\frac{1}{x})\ln x>0\Rightarrow ke^{kx}+k>(1+\frac{1}{x})\ln x$

$\Rightarrow kxe^{kx}+kx>\ln xe^{\ln x}+\ln x$

构造函数：$g(x)=xe^{x}+x$，容易知道 $g(x)$ 单增

$\therefore kx>Inx\Rightarrow k>(\frac{Inx}{x})_{\max}=\frac{1}{e}$

26. 对任意 $x>0$，不等式 $2ae^{2x}-Inx+Ina\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　　）

解析：$2ae^{2x}-Inx+Ina\ge 0\Rightarrow 2xe^{2x}\ge\frac{x}{a}In\frac{x}{a}=In\frac{x}{a}e^{In\frac{x}{a}}$

令 $g(x)=xe^{x}$，在 $x>0$，单增

所以：$2x\ge In\frac{x}{a}$，即 $2x\ge Inx-Ina,Ina\ge Inx-2x$

$\therefore Ina\ge[Inx-2x]_{\max}=In\frac{1}{2e}\therefore a\ge\frac{1}{2e}$

27. 若函数 $f(x)=x(e^{2x}-a)-\ln x-1$ 无零点，则整数 a 的最大值是（　　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

解析：$x(e^{2x}-a)-\ln x-1>0\Rightarrow e^{Inx+2x}-ax-Inx-1>0$

$\therefore e^{Inx+2x}-Inx-2x-1+Inx+2x+1-ax-Inx-1>0$

$\Rightarrow e^{Inx+2x}-Inx-2x-1+(2-a)x>0$

$\because[e^{Inx+2x}-Inx-2x-1]_{\ge 0}+(2-a)x>0$

$\because x>0\Rightarrow 2-a>0\Rightarrow a<2\therefore a=1$

28. 若 $x>0$ 时，恒有 $x^{2}e^{3x}-(k+3)x-2\ln x-1\ge 0$ 成立，则实数 k 的取值范围是________.

解析：$x^2e^{3x}-(k+3)x-2\ln x-1\geq 0$

$e^{2Inx+3x}-(2Inx+3x)-1+(2Inx+3x)+1-(k+3)x-2Inx-1\geq 0$

$\therefore e^{2Inx+3x}-(2Inx+3x)-1-kx\geq 0$

$\because [e^{2Inx+3x}-(2Inx+3x)-1]_{\geq 0}-kx\geq 0$，$\because x>0\therefore k\leq 0$

29.（2019•衡水金卷）已知 $a<0$，不等式 $x^{a+1}\cdot e^x+aInx\geq 0$ 对任意的实数 $x>1$ 恒成立，则实数 a 的最小值是（　　）

A．$-\dfrac{1}{2e}$　　B．$-2e$　C．$-\dfrac{1}{e}$　D．$-e$

解析：$x^{a+1}\cdot e^x+aInx\geq 0\Rightarrow xe^x\geq \dfrac{1}{x^a}In\dfrac{1}{x^a}=e^{In\frac{1}{x^a}}In\dfrac{1}{x^a}$

令 $g(x)=xe^x$ 单增函数，$x\geq -aInx\Rightarrow -a\leq [\dfrac{1}{\frac{Inx}{x}}]_{\min}=e\Rightarrow a\geq -e$

30.（2019 武汉调研，2020 安徽六安一中模考）已知函数 $f(x)=e^x-aIn(ax-a)+a(a>0)$，若关于 x 的不等式 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(0，e]$　　B．$(0，e^2)$　　C．$[1，e^2]$　　D．$(1，e^2)$

解法一：$f(x)=e^x-aIn(ax-a)+a(a>0)$

$\therefore e^x>aIn[a(x-1)]-a\Rightarrow e^{x-Ina}>Ina+In(x-1)-1$

$\therefore e^{x-Ina}+x-Ina>Ina+In(x-1)-1+x-Ina$

$=In(x-1)-1+x=e^{In(x-1)}+In(x-1)$，令 $g(x)=e^x+x$，单增

$\therefore x-Ina>In(x-1)\Rightarrow Ina<x-In(x-1)$

$\Rightarrow Ina<[x-In(x-1)]_{\geq 2}\Rightarrow Ina<2\Rightarrow a<e^2$

解法二：$e^x-aIn[a(x-1)]+a>0,(x>1)$

$\Rightarrow (x-1)e^x>a(x-1)In[a(x-1)]-a(x-1)$

$\Rightarrow (x-1)e^x>(In[a(x-1)]-1)\cdot a(x-1)$

$\Rightarrow (x-1)e^x>(In[a(x-1)]-1)\cdot e^{In[a(x-1)]}$

构造 $g(t)=(t-1)e^t\ \therefore g(x)>g(In[a(x-1)])$，因为 $g(t)$ 单增，

$\therefore x>In[a(x-1)]\Rightarrow Ina<x-In(x-1)$，所以 $a\leq e^2$

$\Rightarrow Ina<[x-In(x-1)]_{\min}=2$

31. 已知 x_0 是函数 $f(x)=x^2e^{x-2}+Inx-2$ 的零点，则 $e^{2-x_0}+Inx_0$ 为（　　）

解析：$x^2e^{x_0-2}+Inx-2=0\Rightarrow x^2e^{x-2}=Ine^2-Inx$

$\Rightarrow x^2e^x=e^2In\frac{e^2}{x}\Rightarrow xe^x=\frac{e^2}{x}In\frac{e^2}{x}\Rightarrow xe^x=In\frac{e^2}{x}e^{In\frac{e^2}{x}}$

令 $g(x)=xe^x$ 可知 $x>0,\ g(x)$ 单增，所以

$x=In\frac{e^2}{x}=2-Inx\therefore x_0=2-Inx_0\Rightarrow e^{2-x_0}=x_0\Rightarrow e^{2-x_0}+Inx_0=x_0+Inx_0=2$

32. 对任意的实数 $x>0$，不等式 $2ae^{2x}-Inx+Ina\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　　）

A. $\frac{2}{\sqrt{e}}$　　B. $\frac{1}{2\sqrt{e}}$　　C. $\frac{2}{e}$　　D. $\frac{1}{2e}$

解析：

$2ae^{2x}-Inx+Ina\geq 0\Rightarrow 2ae^{2x}\geq In\frac{x}{a}$。

$\therefore 2xe^{2x}\geq In\frac{x}{a}\cdot e^{In\frac{x}{a}}\Rightarrow 2x\geq In\frac{x}{a}$

因为 $Inx\leq\frac{1}{e}x\therefore In\frac{x}{a}\leq\frac{1}{ae}x\therefore\frac{1}{ae}x\leq 2x\Rightarrow a\geq\frac{1}{2e}$；

33. 已知函数 $f(x)=\frac{ex^2}{1+Inx}$，则不等式 $f(x)>e^x$ 得解集为（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(\frac{1}{e},1)$　　C. $(1,e)$　　D. $(1,+\infty)$

解析：$\frac{ex^2}{1+Inx}>e^x\Rightarrow\frac{ex}{1+Inx}>\frac{e^x}{x}\Rightarrow\frac{e^{1+Inx}}{1+Inx}>\frac{e^x}{x}$

构造 $g(x)=\frac{e^x}{x},(x>\frac{1}{e})$

$g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增

①当 $x\in(\frac{1}{e},1)$ 时，$1+Inx<1$，$g(x)$ 递减

$\therefore 1+Inx<x\Rightarrow x-1>Inx\Rightarrow x>0$　所以取交集：$x\in(\frac{1}{e},1)$

②当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$1+Inx>1$，$g(x)$ 递增

$\therefore 1+Inx>x\Rightarrow x-1<Inx\Rightarrow x\in\phi$　所以取交集：x 无解.

34. 已知函数 $f(x)=x-Inx$

①求函数 $f(x)$ 的单调性

②当 $x>\frac{1}{e}$，证明：$\frac{e^x+Inx+1}{x}\geq e+1$

③若不等式 $x+aInx+\frac{1}{e^x}\geq x^a$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的最小值

解析：① $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减，$(1,+\infty)$ 单增。

②要证：$\frac{e^x+Inx+1}{x}\geq e+1$

即证：$e^x+Inex\geq ex+x\Rightarrow e^x-x\geq ex-Inex\Rightarrow e^x-Ine^x\geq ex-Inex$

又$\because e^x\geq ex>1$ 由（1）可得：$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单增，故 $f(e^x)\geq f(ex)$

故原不等式成立。

③

$x+aInx+\frac{1}{e^x}\geq x^a\Rightarrow\frac{1}{e^x}+x\geq x^a-aInx\Rightarrow e^{-x}-Ine^{-x}\geq x^a-aInx$

$\Rightarrow e^{-x}-Ine^{-x}\geq x^a-Inx^a\Rightarrow f(e^{-x})\geq f(x^a)$

又因为 $0<e^{-x}<1$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单减

$\therefore e^{-x}\leq x^a\Rightarrow a\geq\left[-\frac{x}{Inx}\right]_{\max}=-e$.

35. 不等式 $x^{-3}e^x-aInx\geq x+1$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（ D ）

A. $(-\infty,1-e]$　B. $(-\infty,2-e^2]$　C. $(-\infty,-2]$　D. $(-\infty,-3]$

解析：$e^{x-3Inx}-aInx\geq x+1$

$\Rightarrow e^{x-3Inx}-(x-3Inx)-1\geq aInx+3Inx=(a+3)Inx$

$[e^{x-3Inx}-(x-3Inx)-1]_{\geq 0}\geq(a+3)[Inx]_{>0}\Rightarrow a+3\leq 0\Rightarrow a\leq -3$

36. 已知不等式 $e^x-x-1>m[x-In(x+1)]$ 对一切正数 x 都成立，则实数 m 的取值范围是（ C ）

A. $(-\infty,\frac{e}{3}]$　B. $(-\infty,\frac{e}{2}]$　C. $(-\infty,1]$　D. $(-\infty,e]$

解析：设 $h(x)=e^x-x-1$，$h(x)$ 恒增，$h(x)>mh(In(x+1)$

$\because x\geq In(x+1)$　$x=0$ 取等号，$\therefore m\leq 1$。

37. 若不等式 $mxe^{mx^2} \geq Inx$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　）

A. $[\frac{1}{e^2},+\infty)$　　B. $[\frac{1}{2e},+\infty)$　　C. $[\frac{1}{e},+\infty)$　　D. $[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$

解析：①. 当 $m \leq 0$，显然不成立.

②. $m>0$ 时，$mxe^{mx^2} \geq Inx$ ·

（i）当 $x \in (0,1)$ 时，显然成立

（ii）当 $x \in (1,+\infty)$，$mxe^{mx^2} \geq Inx$，

$mxe^{mx^2} \geq Inx \Rightarrow mx^2e^{mx^2} \geq xInx = Inxe^{Inx}$

构造函数 $h(x)=xe^x$，在 $x \in (1,+\infty)$ $h(x)$ 单增

$mx^2 \geq Inx \Rightarrow m \geq [\frac{Inx}{x^2}]_{\max} = \frac{1}{2e}$

38. 设 $m>0$，若任给 $x>0$ 都有 $e^{mx} \geq \frac{Inx}{m}$ 成立，则实数 m 的最小值为（　）

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{1}{2e}$　　C. $\frac{2}{e}$　　D. $\frac{e}{3}$

解析：原不等式等价于 $me^{mx} \geqslant \ln x$，两边乘以 x 得 $mxe^{mx} \geqslant x\ln x$

设 $f(x)=xe^x$，上述不等式等价于 $f(mx) \geqslant f(\ln x)$ 由于 $f(x)$ 是增函数

所以转化为 $mx \geqslant \ln x$ 恒成立即：$m \geqslant \frac{\ln x}{x}$ 恒成立，

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，求导可知 $g(x)_{\max}=\frac{1}{e}$，所以 $m \geqslant \frac{1}{e}$

39. 若对任意 $x \in (0,+\infty)$，不等式 $2e^{2x}-aIna-aInx \geq 0$ 恒成立，则实数 a 的最大值为（　）

A. $\sqrt{e}$　　B. e　　C. $2e$　　D. e^2

解析：同构：$2xe^{2x} \geq axInax = Inax \cdot e^{Inax}$

又因为 xe^x 在 $(0,+\infty)$ 单增，$\therefore 2x \geq Inax \Rightarrow a \leq [\frac{e^{2x}}{x}]_{\min} = 2e$

40. 已知对任意 $x \in (0,+\infty)$，都有 $k(e^{kx}+1)-(1+\frac{1}{x})\ln x>0$，则实数 k 的取值范围为________.

解析：对任意 $x \in (0,+\infty)$，都有 $k(e^{kx}+1)-(1+\frac{1}{x})\ln x>0$

可得 $kx(e^{kx}+1)>(1+x)\ln x$，即 $(1+e^{kx})\ln e^{kx}>(1+x)\ln x$，

可设 $f(x)=(1+x)\ln x$，可得上式即为 $f(e^{kx})>f(x)$

由 $f'(x)=\ln x+\frac{1+x}{x}$，令 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，则 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值

且为最小值 2，则 $f'(x)>0$ 恒成立，可得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

则 $\mathrm{e}^{kx}>x$ 恒成立，即有 $k>\dfrac{\ln x}{x}$ 恒成立，可设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

可得 $g(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处取得极大值，且为最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $k>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

即 k 的取值范围是 $(\dfrac{1}{\mathrm{e}}，+\infty)$．故答案为：$(\dfrac{1}{\mathrm{e}}，+\infty)$．

41 函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^{x-1}}+x-In(ax)-2(a>0)$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,1]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,e]$　　D. $[3,+\infty)$

解析：$f(x)=e^{Inax+1-x}+x-Inax-2=e^{Inax+1-x}-(Inax+1-x)-1\geq 0$

当 $Inax+1-x=0\Rightarrow Inax=x-1\leq ax-1$，即 $a\geq 1$

42. 已知函数 $f(x)=Inx-e^x+(e^a-1)x+a(a\in R)$，若不等式 $f(x)\leq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围（　）

解析：不等式即：$xe^a+a+Inx\leq e^x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

等价于：$e^{a+Inx}+a+Inx\leq e^x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立

构造函数：$\varphi(x)=e^x+x$，知在 R 上单增，所以

$$\varphi(a+Inx)\leq\varphi(x)\Rightarrow a+Inx\leq x\Rightarrow a\leq x-Inx$$
$$\Rightarrow a\leq[x-Inx]_{\max}=1\Rightarrow a\leq 1$$

43. 已知函数 $\dfrac{e^x}{x^a}-e+1\geq x-aInx$，$a\in R$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

解析：$e^{x-aInx}-(x-aInx)\geq e-1\Rightarrow$ 构造函数 $\varphi(x)=e^x+x$ 知在 R 上单增

所以 $\varphi(x-aInx)\geq\varphi(1)\Rightarrow x-aInx\geq 1\Rightarrow a\leq\dfrac{x-1}{Inx}\Rightarrow a\leq[\dfrac{x-1}{Inx}]_{\min}=1$

44.（浙江新高考模拟卷——学军中学）已知函数 $x^3e^{2x}\ge(k+2)x+3Inx+1$ 恒成立，求 k 的取值范围（　）

解析：$x^3e^{2x}=e^{3Inx+2x}\ge 3Inx+2x+1$

要使，$x^3e^{2x}\ge(k+2)x+3Inx+1$

只需要：$3Inx+2x+1\ge(k+2)x+3Inx+1$，即：$k\le 0$

45.（2020 年山东）$f(x)=ae^x-Inx+Ina$，若 $f(x)\ge 1$，求 a 的取值范围（　）

解析：方法一：同构构造 $h(x)=xe^x$

$$ae^x-Inx+Ina\ge 1\Rightarrow ae^{x-1}\ge In\frac{ex}{a}\Rightarrow xe^x\ge\frac{ex}{a}In\frac{ex}{a}=In\frac{ex}{a}e^{In\frac{ex}{a}}$$

$$\therefore x\ge In\frac{ex}{a}=1+Inx-Ina\Rightarrow Ina\ge 1+Inx-x\Rightarrow Ina\ge 0\Rightarrow a\ge 1$$

方法二：构造 $h(x)=x+e^x$.

$$\because ae^{x-1}-Inx+Ina\ge 1\Rightarrow ae^{x-1}+Ina-1\ge Inx$$
$$\Rightarrow e^{Ina+x-1}+Ina+x-1\ge Inx+x=Inx+e^{Inx}$$
，

$$Ina+x-1\ge Inx\Rightarrow Ina\ge Inx-x+1\Rightarrow Ina\ge 0\Rightarrow a\ge 1$$

46. 已知函数 $xe^x-x-Inx\ge(b-2)x+1$ 恒成立，求 b 的取值范围（　）

解析：
$$\frac{e^{x+Inx}-(x+Inx)-1}{x}\ge(b-2)x$$
$$\because[e^{x+Inx}-(x+Inx)-1]\ge 0\Rightarrow b-2\le 0\Rightarrow b\le 2$$

47. 已知函数 $xe^x+ax\ge ax^aInx+aInx+(a-1)x,x\in(1,+\infty)$ 时恒成立，则 a 的取值范围（　）

答案：$a\in(-\infty,e]$

提示：$xe^x+x\ge ax^aInx+aInx$，

48. 设函数 $f(x)=axe^x-ax-1\,(a\in R)$. 若不等式 $f(x)\geq \ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

解析：

$$axe^x-ax-1\geq Inx\Rightarrow a(e^{x+Inx}-x)-1\geq Inx$$
$$\Rightarrow a(e^{x+Inx}-x-Inx-1)-1+a(Inx+1)\geq Inx$$

$$a(e^{x+Inx}-x-Inx-1)-1+a(Inx+1)\geq Inx$$
$$\Rightarrow a(e^{x+Inx}-x-Inx-1)+(a-1)(Inx+1)\geq 0$$

$$a(e^{x+Inx}-x-Inx-1)_{\geq 0}+(a-1)(Inx+1)\geq 0$$
$$\Rightarrow a(e^{x+Inx}-x-Inx-1)_{\geq 0}+(a-1)(Inx+1)_{\geq 0}\geq 0$$
$$\Rightarrow a-1\geq 0\Rightarrow a\geq 1$$

49. 若函数 $f(x)=x+e^{x-b}-b(x+x^2-xInx)$ 有零点，则 b 的取值范围.

解析：

$$x+e^{x-b}=b(x+x^2-xInx)\Rightarrow 1+e^{x-b-Inx}=b(1+x-Inx)$$
$$\because e^x\geq x+1\therefore b(1+x-Inx)\geq x-b-Inx+2$$

$$\Rightarrow b(2+x-Inx)\geq x-Inx+2\because x-Inx+2>0\Rightarrow b\geq 1$$

50. 已知函数 $f(x)=aInx+2e^{x-1}-(a+2)x+a\geq 0$，对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围__________.

答案：$a\in(-\infty,2]$

解析：$2e^{x-1}-(a+2)x+a\geq -aInx\Rightarrow 2e^{x-1}-ax-2x+a\geq -aInx$

$$2e^{x-1}-2x\geq -aInx+ax-a\Rightarrow 2e^{x-1}-2(x-1)-2\geq a(-Inx+x-1)$$

$$2e^{x-1}-2(x-2[e^{x-1}-(x-1)-1]\geq a[x-1-Inx]$$
$$\Rightarrow 2[e^{x-1}-(x-1)-1]_{\geq 0}\geq a[x-1-Inx]_{\geq 0}\Rightarrow a\leq 2$$

51. 若 $x>0$ 证明：$(e^x-1)In(x+1)>x^2$

解：需证：$(e^x-1)In(x+1)>x^2$

即证：$\dfrac{In(x+1)}{x}>\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{Ine^x}{e^x-1}=\dfrac{In(e^x-1+1)}{e^x-1}$

令 $h(x)=\dfrac{In(x+1)}{x},(x>0)\therefore h(x)>h(e^x-1)$

$\because h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单减，即证：$x<e^x-1$

即证 $e^x-x-1>0(x>0)$ 显然成立。

52. 已知函数 $f(x)=x^2e^x-a(x+2Inx)$ 有两个零点，则 a 的取值范围（　　）

解析：$f(x)=e^{2Inx+x}-a(x+2Inx)$，令 $t=x+2Inx$

容易知 t 单增，$f(t)=e^t-at$，$f'(t)=e^t-a$

①$a\le 0$，$f(t)\uparrow\therefore f(t)$ 至多有一个根，不符合题意。

②$a>0,f(t)=e^t-at=0\Rightarrow e^t=at\Rightarrow\dfrac{1}{a}=\dfrac{t}{e^t}\therefore\dfrac{1}{a}\in(0,\dfrac{1}{e})\Rightarrow a\in(e,+\infty)$

符合题意

53. 若不等式 $x(e^x-1)>Inx-1+t$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则实数 t 的取值范围（　　）

答案：$(-\infty,2)$

54. 已知函数 $f(x)=x^2e^x-a(x+2Inx)$，讨论 $f(x)$ 的零点的个数

解析：$x^2e^x=a(x+2Inx)\Rightarrow e^{x+2Inx}=a(x+2Inx)$

令 $t=x+2Inx\Rightarrow e^t=at\Rightarrow a=\dfrac{e^t}{t}$

$\therefore 0\le a<e$，$f(x)$ 无零点；$a<0\,\&\,a=e$ $f(x)$ 只有一个零点

$a>e$ $f(x)$ 有两个零点

55. 已知函数 $f(x)=a\ln x+be^{x-1}-(a+2)x+a$．（$a,b$ 为常数）若 $b=2$，若对任意的 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)\ge 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解析：由题意得：$aInx+2e^{x-1}-(a+2)x+a\geq 0,(x\geq 1)$；

$$a(Inx-x+1)\geq 2(-e^{x-1}+x)$$
$$\Rightarrow a(Inx-x+1)\geq 2(x-1-e^{x-1}+1)$$ 即：
$$\Rightarrow 2(e^{x-1}-(x-1)-1)\geq a(x-Inx-1)$$

$2(e^{x-1}-(x-1)-1)\geq a(e^{Inx}-Inx-1)$, 因为 $x-1\geq Inx$

当且仅当 $x=1$ 时等号成立，构造 $g(x)=e^x-x-1$ 容易得：

$g(x)\geq 0$，所以只需要满足 $a\leq 2$。

56. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+1)$，$g(x)=e^x-x-1$．若 $g(x)\geq kf(x)$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

解析：由题意得：$e^x-x-1\geq k[x-In(x+1)]=k[x+1-In(x+1)-1]$

即 $e^x-x-1\geq k[e^{In(x+1)}-In(x+1)-1]$

又因为 $x\geq 0$，所以：$x\geq In(x+1)\geq 0$

又 $y=e^x-x-1$ 在 $[0,+\infty)$ 单增，且 $x=0,y=0$

所以不等式恒成立满足 $k\leq 1$ 即可。

57. 已知函数 $f(x)=e^x+mx-1$，其中 e 是自然对数的底数. 若关于 x 的不等式 $f(x)+\ln(x+1)\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析：由题意得：

$$e^x+mx-1+In(x+1)\geq 0$$
$$\Rightarrow e^x-x-1-[x+1-1-In(x+1)]+(m+2)x\geq 0$$

$$e^x-x-1-[e^{In(x+1)}-In(x+1)-1]+(m+2)x\geq 0$$

构造 $g(x)=e^x-x-1$，$x\geq In(x+1)$ 当且仅当 $x=0$ 时等号成立

即 $(m+2)x\geq 0,\because x\in[0,+\infty)$，即 $m\geq -2$

58. 已知函数 $f(x)=ax+lnx(a\in R)$．当 $a=1$ 时，不等式 $xe^{x}+1>f(x)+m$ 对于任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围________.

解析：$xe^{x}+1>x+Inx+m\Rightarrow e^{x+Inx}-x-Inx-1\geq m-2$

当 $x+Inx=0$ 取等，所以：$m<2$.

59. 已知函数 $f(x)=\dfrac{lnx+a}{x},(a\in R)$，$g(x)=e^{2x}-2$．若 $f(x)\leq g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，求 a 的取值范围______.

解析：$\dfrac{Inx+a}{x}\leq e^{2x}-2\Rightarrow Inx+a\leq xe^{2x}-2x\Rightarrow Inx+a\leq e^{2x+Inx}-2x$

$\therefore a-1\leq e^{Inx+2x}-Inx-2x-1$，当 $Inx+2x=0$ 取等，$a-1\leq 0\Rightarrow a\leq 1$

60. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x}+a(lnx-x)$．当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 的最小值______.

解析：$f(x)=e^{x-Inx}+a(x-Inx)$，令 $x-Inx=t\geq 1$

$\therefore g(t)=e^{t}-at,(t\geq 1)\therefore g(t)_{\min}=g(Ina)=a-Ina$.

61. 设 $f\left(x\right)=xe^{x}-ax^{2}$，$g\left(x\right)=\ln x+x-x^{2}+1-\dfrac{e}{a}$．当 $a>0$ 时，设 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-ag\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围_______.

解析：$xe^{x}-a(Inx+x+1)+e\geq 0\Rightarrow e^{x+Inx}-a(x+Inx+1)+e\geq 0$

令 $t=Inx+x\therefore e^{t}-a(t+1)+e\geq 0\Rightarrow e^{t}+e\geq a(t+1)\because e^{t}\geq et\therefore a\leq e$

62. 已知函数 $f(x)=xe^{x}-a(x+lnx)$．若 $f(x)>0$ 在 $x\in[1，+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围______.

解析：$xe^{x}-a(x+Inx)>0\Rightarrow e^{x+Inx}>a(x+Inx)\because e^{x}\geq ex\therefore a<e$

63. 函数 $f(x)=(x+\dfrac{a}{x})Inx,g(x)=me^{mx}+m$，当 $a=1$ 时，不等式 $2f(x)-g(x)\leq 0$ 恒成立，求 m 的取值范围（　）

解析：$2(x+\dfrac{1}{x})Inx\leq me^{mx}+m\Rightarrow e^{Inx^{2}}Inx^{2}+Inx^{2}\leq mxe^{mx}+mx$

构造 $h(x)=xe^{x}+x$，易知单增，

$$\therefore h(Inx^2) \le h(mx) \Rightarrow m \ge 2\frac{Inx}{x} \Rightarrow m \ge [2\frac{Inx}{x}]_{\max} = \frac{2}{e} \Rightarrow m \in [\frac{2}{e},+\infty)$$

64. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-Inx$，若 $a>\frac{1}{e}$，证明 $f(x)>1-xe^{-ax}$

解析：$ax-Inx>1-e^{Inx}\cdot e^{-ax} \Rightarrow e^{Inx-ax}>Inx-ax+1$

$$\because \frac{Inx}{x} \le \frac{1}{e} < a \therefore Inx < ax \therefore Inx-ax<0$$

由 $e^x \ge x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等，得 $e^{Inx-ax}>Inx-ax+1$，证毕。

65. 若对任意的 $x>0$，恒有 $a(e^{ax}+1)\ge 2(x+\frac{1}{x})Inx$，则实数 a 的最小值为（ ）

解析：

$$a(e^{ax}+1) \ge 2(x+\frac{1}{x})Inx$$
$$\Rightarrow ax(e^{ax}+1) \ge (x^2+1)Inx^2$$
$$\Rightarrow (e^{ax}+1)Ine^{ax} \ge (x^2+1)Inx^2$$

构造 $f(x)=(x+1)Inx$，容易知单增

$$\therefore e^{ax} \ge x^2 \Rightarrow a \ge \frac{2Inx}{x} \Rightarrow a \ge [\frac{2Inx}{x}]_{\max} = \frac{2}{e} \Rightarrow a \ge \frac{2}{e}$$

66. 已知 x_0 时函数 $f(x)=x^2e^{x-2}+Inx-2$ 的零点，则 $e^{2-x_0}+Inx_0=$（ ）

解析：

$$x^2e^{x-2}+Inx-2=0 \Rightarrow x^2e^{x-2}=2-Inx$$
$$\Rightarrow xe^x=\frac{e^x}{x}In\frac{e^x}{x} \Rightarrow Inx+x=In(In\frac{e^x}{x})+In\frac{e^x}{x}$$

$$\therefore In(\frac{e^2}{x})=x \Rightarrow 2-Inx=x,\&e^{2-x}=x \Rightarrow e^{2-x_0}+Inx_0=x_0+Inx_0=2$$

67. 已知 x_0 是方程 $x^3e^{x-4}+2Inx-4=0$ 的一个根，则 $e^{\frac{4-x_0}{2}}+2Inx_0$ 的值是（ ）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

解析：$x^3e^{x-4}=4-2Inx=In\frac{e^4}{x^2}\Rightarrow xe^x=\frac{e^4}{x^2}In\frac{e^4}{x^2}\Rightarrow Inx+x=In(In\frac{e^4}{x^2})+In\frac{e^4}{x^2}$

令$x=In\frac{e^4}{x^2}\Rightarrow x=4-2Inx$

$\Rightarrow 4-x=2Inx\therefore e^{\frac{4-x}{2}}=x\therefore e^{\frac{4-x_0}{2}}+2Inx_0=x_0+2Inx_0=4$

68. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x+m}-x^3$，$g\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)+2$. 当 $m\geq 1$ 时，证明：$f\left(x\right)>g(x)-x^3$.

解析：先证明 $\mathrm{e}^x\geq x+1\,(x\in\mathbf{R})$，且 $\ln(x+1)\leq x\,(x>-1)$

设 $F(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x-1$

因为当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$

当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

所以当 $x=0$ 时，$F(x)$ 取得最小值 $F(0)=0$

所以 $F(x)\geq F(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x\geq x+1\,(x\in\mathbf{R})$

所以 $\ln(x+1)\leq x$ （当且仅当 $x=0$ 时取等号）

再证明 $\mathrm{e}^{x+m}-\ln\left(x+1\right)-2>0$. 由 $\mathrm{e}^x\geq x+1\,(x\in\mathbf{R})$

得 $\mathrm{e}^{x+1}\geq x+2$（当且仅当 $x=-1$ 时取等号）

因为 $x>-1$，$m\geq 1$，且 $\mathrm{e}^{x+1}\geq x+2$ 与 $\ln(x+1)\leq x$ 不同时取等号

所以 $\mathrm{e}^{x+m}-\ln\left(x+1\right)-2=\mathrm{e}^{m-1}\cdot\mathrm{e}^{x+1}-\ln\left(x+1\right)-2$

$>\mathrm{e}^{m-1}(x+2)-x-2=(\mathrm{e}^{m-1}-1)(x+2)\geq 0$. 综上得证。

69. 已知函数 $f\left(x\right)=m\mathrm{e}^x-\ln x-1$. 当 $m\geq 1$ 时，证明：$f\left(x\right)>1$.

解析：设 $F(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x-1$

$F(x)$ 取得最小值 $F(0)=0$. 所以 $F(x)\geq F(0)=0$

即 $\mathrm{e}^x\geq x+1$（当且仅当 $x=0$ 时取等号）由 $\mathrm{e}^x\geq x+1\,(x\in\mathbf{R})$

得 $\mathrm{e}^{x-1}\geq x$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）

所以 $\ln x \le x-1\ (x>0)$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）

再证明 $me^x-\ln x-2>0$

因为 $x>0$，$m\ge 1$，且 $e^x\ge x+1$ 与 $\ln x\le x-1$ 不同时取等号

所以 $me^x-\ln x-2>m(x+1)-(x-1)-2=(m-1)(x+1)\ge 0$

综上可知，当 $m\ge 1$ 时，$f(x)>1$.

70. 若 $f(x)=xe^x+ax, a\in R, g(x)=ax^a Inx+aInx+(a-1)x,$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，若 $f(x)\ge g(x)$ 恒成立，则 a 的取值范围（　　）

解析：$xe^x+ax\ge ax^a Inx+aInx+ax-x\Rightarrow x+xe^x\ge Inx^a e^{Inx^a}+Inx^a$

构造：$h(x)=x+xe^x$ 单增，$h(x)\ge h(Inx^a)$

①$a\le 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ 恒成立

②$a>0$ 时，$Inx^a=aInx>0$，$\therefore x\ge Inx^a\Rightarrow \dfrac{x}{Inx}\ge a\Rightarrow e\ge a$

71. 已知函数 $(e^{ax}-1)Inx=ax^2-ax,(a>0)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 有三个不同的解，求 a 的范围？

解析：$(e^{ax}-1)Inx=ax^2-ax,$

①当 $x=1$ 时，成立

②当 $x\ne 1$ 时，$\dfrac{(e^{ax}-1)}{ax}=\dfrac{x-1}{Inx}=\dfrac{e^{Inx}-1}{Inx}$

又因为 $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 单增，$ax=Inx\Rightarrow a=\dfrac{Inx}{x}\Rightarrow a\in(0,\dfrac{1}{e})$

72. 设实数 $\lambda>0$，若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\dfrac{Inx}{\lambda}\ge 0$ 恒成立，则 λ 的取值范围？

解析：$e^{\lambda x}-\dfrac{Inx}{\lambda}\ge 0\Rightarrow \lambda xe^{\lambda x}\ge xInx\Rightarrow \lambda xe^{\lambda x}\ge xInx\Rightarrow e^{\lambda x}Ine^{\lambda x}\ge xInx$

令 $f(x)=xInx \because x\in(0,\dfrac{1}{e}), f(x)\downarrow; x\in(\dfrac{1}{e},+\infty), f(x)\uparrow;$

$\because e^{\lambda x}>1$，所以 $e^{\lambda x}>x\Rightarrow \lambda x>Inx\Rightarrow \lambda>[\dfrac{Inx}{x}]_{\max}=\dfrac{1}{e}$

73. 若不等式 $xe^{x}-Inx-1\geq kx$ 对任意的 $x>0$ 都成立，则 k 的取值范围（　　）

解析：$k\leq\dfrac{xe^{x}-Inx-1}{x}=\dfrac{e^{x+Inx}-(Inx+1)}{x}=\dfrac{e^{x+Inx}-(Inx+x)-1+x}{x}\geq 1$

$\therefore k\leq 1$

74. 已知 $f(x)=Inx+x-xe^{x+1}$，求 $f(x)$ 最大值_______.

解析：$f(x)=Inx+x-e^{Inx+x+1}=Inx+x+1-e^{Inx+x+1}-1\leq -2$

当 $Inx+x+1=0$ 时 $f(x)$ 取最大值为 -2

75. 已知函数 $f(x)=xe^{x}-Inx-x-2$ 最小值为 a，$g(x)=\dfrac{e^{x-2}}{x}+Inx-x$ 最小值为 b 则（　　）

A. $a=b$　　B. $a>b$　　C. $a<b$　　D. 不确定

解析：$f(x)=e^{x+Inx}-(x+Inx)-1-1\geq -1$

$g(x)=e^{x-2-Inx}-(x-2-Inx+1)-1\geq=-1$，

当 $x+Inx=0;x-2-Inx=0$ 等号成立。

76. 已知不等式 $x+aInx+\dfrac{1}{e^{x}}\geq x^{a}$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围（　　）

解析：$x+aInx+\dfrac{1}{e^{x}}\geq x^{a}\Rightarrow x+e^{-x}\geq x^{a}-aInx\Rightarrow e^{-x}-Ine^{-x}\geq x^{a}-Inx^{a}$

不妨令 $f(x)=x-Inx,x\in(0,1)\downarrow,(1,+\infty)\uparrow$

所以当 $x>1\Rightarrow 0<e^{-x}<\dfrac{1}{e}\therefore e^{-x}\in(0,1)$

当 $a>0$ 时，x^{a} 与 e^{-x} 无法比较，不满足恒成立。

当 $a<0\Rightarrow x^{a}\in(0,1)\therefore e^{-x}\leq x^{a}\Rightarrow -x\leq aInx\Rightarrow\dfrac{x}{Inx}\geq -a\Rightarrow a\leq -e$

77. 已知函数 $f(x)=e^{\frac{x}{2}},g(x)=Inx$，当 $x>0$ 时，$t[f^{2t}(x)+1]\geq 2(x+\frac{1}{x})g(x)$ 恒成立，则实数 t 的范围（ ）

解析：

$$t(e^{tx}+1)\geq 2(x+\frac{1}{x})Inx\Rightarrow xt(e^{tx}+1)\geq(x^2+1)Inx^2$$
$$\Rightarrow(e^{tx}+1)Ine^{tx}\geq(x^2+1)Inx^2$$

构造：$F(x)=(x+1)Inx$

知 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)\uparrow\therefore e^{tx}\geq x^2\Rightarrow tx\geq 2Inx\Rightarrow t\geq\frac{2Inx}{x}\Rightarrow t\geq\frac{2}{e}$

78. 不等式 $x(e^{2x}-2a)\geq x+Inx+1$ 恒成立，则 a 得取值范围为（ ）

答案：$a\leq\frac{1}{2}$，

解析：$2a\leq\frac{xe^{2x}-x-Inx-1}{x}=h(x),\because xe^{2x}=e^{Inx+2x}\geq 2x+Inx+1$

$$\therefore xe^{2x}-x-Inx-1\geq x\therefore\frac{xe^{2x}-x-Inx-1}{x}\geq 1,(Inx+2x=0)$$

取等。 $\therefore h(x)_{\min}=1\therefore 2a\leq 1\Rightarrow a\leq\frac{1}{2}$

79. 已知函数 $f(x)=aInx+\frac{e^x}{x}-ax+e^2$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围（ ）

解析：要证：$e^{x-Inx}-a(x-Inx)+e^2\geq 0$

只需要证：$e^{x-Inx-2}-\frac{a}{e^2}(x-Inx)+1\geq 0$

同构：
$$\because h(x)=e^x-x-1\geq 0,(x=1)$$
$$\therefore h(x-2)=e^{x-2}-(x-2)-1=e^{x-2}-x+1\geq 0,(x=2)$$

$$\therefore e^{x-Inx-2}-\frac{a}{e^2}(x-Inx)+1=e^{x-Inx-2}-(x-Inx)+1+(1-\frac{a}{e^2})(x-Inx)$$

$$=h(x-Inx-2)+(1-\frac{a}{e^2})(x-Inx)\geq 0$$

$\because h(x-Inx-2)\geq 0,(x-Inx=2)$ 取等

$$\because x-Inx\geq 1\therefore 1-\frac{a}{e^2}\geq 0\Rightarrow a\leq e^2$$

80. 已知 $f(x)=mxInx-1,m\neq 0$，若 $g(x)=x^2-\frac{2}{e}x$ 且关于 x 的不等式 $f(x)\leq g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析：由题目得：$x+\frac{1}{x}-mInx-\frac{2}{e}\geq 0$

①当 $x\geq 1$ 时，$e(\frac{1}{e}x-Inx)+\frac{1}{e}(Inx-2+\frac{e}{x})+(e-\frac{1}{e}-m)Inx\geq 0$

$$\because \underset{(x=e)}{e(\frac{1}{e}x-Inx)_{\geq 0}}+\frac{1}{e}\underset{(x=e)}{(Inx-2+\frac{e}{x})_{\geq 0}}+Inx\underset{\Rightarrow m\leq e-\frac{1}{e}}{(e-\frac{1}{e}-m)_{\geq 0}}\geq 0$$

$$\therefore m<e-\frac{1}{e}$$

②当 $0<x<1$ 时，$(x-\frac{1}{e}Inx-\frac{2}{e})+(eInx+\frac{1}{x})+(\frac{1}{e}-e-m)Inx\geq 0$

$$\because \underset{(x=\frac{1}{e})}{(x-\frac{1}{e}Inx-\frac{2}{e})_{\geq 0}}+\underset{(x=\frac{1}{e})}{(eInx+\frac{1}{x})_{\geq 0}}+Inx\underset{\Rightarrow m\geq \frac{1}{e}-e}{(\frac{1}{e}-e-m)_{\geq 0}}\geq 0$$

$$\therefore m>\frac{1}{e}-e$$

综合①② $\because m\neq 0\therefore m\in[\frac{1}{e}-e,0)\cup(0,e-\frac{1}{e}]$

81. （焦作市 2021 届高三一模理 12）已知对任意的 $a,b\in R$ 都有 $(b-a)e^{b-a}\geq be^{-b}-\lambda a$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围（　　）

解析：

$$(b-a)e^{b-a}\geq be^{-b}-\lambda a\Rightarrow(b-a)e^{b-a}-be^{-b}+\lambda a=0$$
$$\Rightarrow(b-a)e^{b-a}-\lambda(b-a)+be^{-b}-\lambda(-b)\geq 0$$

构造 $f(x)=xe^x-\lambda x$，即 $f(b-a)+f(-b)\geq 0$，由于 a,b 为任意实数，

$$\therefore f(x)\geq 0\Rightarrow f(x)=x(e^x-\lambda)\geq 0$$

①$x=0$，满足题意

②$x<0, e^x-\lambda\le 0\Rightarrow\lambda\ge 1$ ③$x>0, e^x-\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda\le 1$

综上所述：$\lambda=1$

82.（浙江省 2021 届高三百校 12 月联考）已知 $a>1$，若对任意的 $x\in[\frac{1}{3},+\infty)$，不等式

$4x-In3x\le ae^x-Ina$

恒成立，则 a 的最小值（　）

解析：

$4x-In3x\le ae^x-Ina\Rightarrow x+3x-In3x\le e^{Ina+x}-Ina\Rightarrow e^{In3x}-In3x\le e^{Ina+x}-(Ina+x)$

构造 $f(x)=e^x-x\Leftrightarrow f(In3x)\le f(Ina+x)$

$\because f(x)$ 在 $x>0$ 单增，$x\in[\frac{1}{3},+\infty)$　$\therefore In3x\ge 0$，$Ina+x\ge(\frac{1}{3},+\infty)$

所以：$In3x\le Ina+x\Rightarrow Ina\ge In3x-x=In\frac{3x}{e^x}\Rightarrow a\ge 3\cdot\frac{x}{e^x}\Rightarrow a\ge[3\cdot\frac{x}{e^x}]_{\max}=\frac{3}{e}$

83. 已知函数 $f(x)=e^{x-a}-xInx+x(a\in R)$ 有两个极值点，$x_1,x_2(x_1<x_2)$，设 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$，证明 $a>2$。（同类同构）

解析：思路分析：$f'(x)=g(x)=e^{x-a}-Inx$ 有两根

即 $e^{x-a}-(x-a)-1+x-Inx-1=a-2$

令 $h(x)=e^x-x-1\Rightarrow h(x)\ge 0$，$(x=0)$ 取等；

$h(x-a)=e^{x-a}-(x-a)-1\ge 0$ $(x=a)$ 取等；

$h(Inx)=x-Inx-1\ge 0$ $(x=1)$ 取等；

$\therefore a-2>0\Rightarrow a>2$（不等同时取等，另 $a=1$ 不成立）

84. 已知函数 $f(x)=ae^{x+1},g(x)=In\frac{x}{a}-1$，其中 $a>0$，若 $f(x)\ge g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 得最小值

解析：$f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow ae^{x+1}\ge In\frac{x}{a}-1\Leftrightarrow xe^{x+1}\ge\frac{x}{a}(In\frac{x}{a}-1)\Leftrightarrow xe^{x+1}\ge(In\frac{x}{a}-1)e^{In\frac{x}{a}}$

构造：$h(x)=xe^{x+1}\Rightarrow h(x)\ge h(In\frac{x}{a}-1)$，$\because h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单增

则 $x \geq In\dfrac{x}{a}-1 \Rightarrow Ina \geq Inx-x-1 \Rightarrow Ina \geq [Inx-x-1]_{\max}=-2 \Rightarrow a \geq \dfrac{1}{e^2}$

84. 已知函数 $f(x)=ae^x-In(x+1)+Ina-1$，若函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点，则 a 的取值范围（　　）

解析：$f(x)=ae^x-In(x+1)+Ina-1=0$ 有两解，$(a>0,x>-1)$

指对分离：$ae^x=In(x+1)+1-Ina \Leftrightarrow ae^x=In\dfrac{e(x+1)}{a}$

同乘 $e(x+1)$ 得：$(x+1)e^{x+1}=\dfrac{e(x+1)}{a}In\dfrac{e(x+1)}{a}$

构造函数：$g(t)=te^t,(t>0)$

$\because g(t)$ 单增 $\Leftrightarrow g(x+1)=g(In\dfrac{e(x+1)}{a}) \Leftrightarrow x+1=In\dfrac{e(x+1)}{a}$ 图像有两个交点

$a=e\cdot\dfrac{x+1}{e^{x+1}} \leq e[\dfrac{x+1}{e^{x+1}}]_{\max}=e\cdot\dfrac{1}{e}=1$，综上：$a\in(0,1)$

85. 已知函数 $f(x)=1+ae^xInx$，若不等式 $f(x)\geq e^x(x^a-x)(a<0)$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

解析：$f(x)\geq e^x(x^a-x)(a<0) \Leftrightarrow 1+ae^xInx \geq e^x(x^a-x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{e^x}+aInx \geq x^a-x \Leftrightarrow e^{-x}+x \geq x^a-Inx^a$

又 $x>1$，$-x<-1$，又 $a<0,x^a<1,Inx^a<0$

构造 $g(t)=e^t-t,(t<0)$，$g(t)$ 单减

$\Rightarrow g(-x)\geq g(Inx^a) \Rightarrow -x \leq Inx^a=aInx,(x>1)$

$\Rightarrow a \geq -\dfrac{x}{Inx} \Rightarrow a \geq [-\dfrac{x}{Inx}]_{\max}=-e$，综上：$a\in[-e,+\infty)$

86. 已知 $xe^x-ax-Inx\geq 1$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

解析：$f(x)=xe^x-ax-Inx-1\geq 0 \Rightarrow f(x)=e^{x+Inx}-(x+Inx)-1+(1-a)x\geq 0$

$f(x)=[e^{x+Inx}-(x+Inx)-1]_{\underset{x+Inx=0}{\geq 0}}+(1-a)x\geq 0 \therefore 1-a\geq 0 \Rightarrow a\leq 1$

87. 若不等式 $ax(e^x-1)\ge Inx+1$ 在区间 $[\frac{1}{e},+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围（　　）

解析：$ax(e^x-1)\ge Inx+1\Rightarrow ae^{x+Inx}-ax-aInx-a-Inx-1+aInx+a\ge 0$

$$[ae^{x+Inx}-ax-aInx-a]_{a(e^{x+Inx}-x-Inx-1)\ge 0}+[-Inx-1+aInx+a]_{(a-1)Inex\ge 0}\ge 0$$

$$\therefore a-1\ge 0\Rightarrow a\ge 1$$

88. 已知函数 $f(x)=x-(a+1)Inx,a\in R$，当 $a=2e$ 时，$xe^x+m+f(x)\ge 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围？

解析：$e^{x+Inx}-(2e+1)Inx+x+m\ge 0$

$$\Rightarrow e[e^{x+Inx-1}-(x+Inx-1)-1]+(e+1)x-(e+1)Inx-(e+1)+e+1+m\ge 0$$

$$e[e^{x+Inx-1}-(x+Inx-1)-1]_{\substack{\ge 0\\ x=1}}+[(e+1)x-(e+1)Inx-(e+1)]_{\substack{\ge 0\\ x=1}}+e+1+m\ge 0$$

$\therefore e+1+m\ge 0\Rightarrow m\ge -1-e$

89. （2014 年全国 I 卷）设函数 $f(x)=ae^xInx+\frac{be^{x-1}}{x}$，$a=2,b=1$，证明：$f(x)>1$

解析：$e^xInx+\frac{2e^{x-1}}{x}-1>0\Rightarrow xInx+\frac{2}{e}-\frac{x}{e^x}>0$

$$\Rightarrow e^{Inx}Inx+\frac{2}{e}-xe^{-x}>0\Rightarrow[e^{Inx}Inx]_{\substack{\ge -\frac{1}{e}\\ x=\frac{1}{e}}}+\frac{2}{e}+[-xe^{-x}]_{\substack{\ge -\frac{1}{e}\\ x=1}}>0$$

所以得证

90. 已知函数 $f(x)=e^x-In(x+m)$，当 $m\le 2$ 时，证明 $f(x)>0$

解析：$e^x-In(x+m)=e^x-x-1+(x+m)-In(x+m)-1+2-m>0$

$$\Rightarrow[e^x-x-1]_{\substack{\ge 0\\ x=0}}+[(x+m)-In(x+m)-1]_{\substack{\ge 0\\ x+m=1\\ m=1}}+2-m>0\therefore 2-m\ge 0\Rightarrow m\le 2$$

91. 已知 $a>0$ 函数 $f(x)=e^{x-a}-In(x+a)-1$，$(x>0)$ 的最小值为 0，则实数 a 的取值范围（　）

解析：$e^{x-a}-(x-a)-1+(x+a)-In(x+a)-1+1-2a\ge 0$

$[e^{x-a}-(x-a)-1]_{\underset{x=a}{\ge 0}}+[(x+a)-In(x+a)-1]_{\underset{x=1-a}{\ge 0}}+1-2a\ge 0$

因为最小值为 0，$\therefore 1-2a=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

92. 函数 $f(x)=e^{2x}-aInx$，证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\ge 2a+aIn\frac{2}{a}$

解析：$e^{2x}-aInx-2a-aIn\frac{2}{a}\ge 0\Rightarrow\frac{e^{2x}}{a}-Inx-2-In2+Ina\ge 0$

$\Rightarrow e^{2x-Ina}-(2x-Ina)-1+2x-In2x-1\ge 0$

$[e^{2x-Ina}-(2x-Ina)-1]_{\underset{2x-Ina=0}{\ge 0}}+[2x-In2x-1]_{\underset{2x=1}{\ge 0}}\ge 0\therefore x=\frac{1}{2},a=e$。

93. 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-Inx+Ina$ 若 $f(x)\ge 1$，求 a 的取值范围（　　）

解析：$ae^{x-1}-Inx+Ina-1\ge 0$

$\Rightarrow a(e^{x-1}-x)+ax-Inx+Ina-1=a(e^{x-1}-x)+(x-Inx-1)+(a-1)x+Ina\ge 0$

$\Rightarrow[a(e^{x-1}-x)]_{\underset{x=1}{\ge 0}}+[(x-Inx-1)]_{\underset{x=1}{\ge 0}}+(a-1)x+Ina\ge 0$

$\Rightarrow(a-1)x+Ina\ge 0\Rightarrow a\ge 1$

当 $a<1$ 时，$(a-1)\cdot 1+Ina<0$ 不一定满足 $f(x)\ge 1$，所以综上 $a\ge 1$

94. 已知函数 $f(x)=e^{x}-In(x+1)-a$ 的图像在 $x=0$ 处与 x 轴相切，若 $x>t\ge 0$，证明：

$e^{x-t}+In(t+1)>In(x+1)+1$

解析：$e^{x-t}+In(t+1)>In(x+1)+1\Rightarrow e^{x-t}-(x-t)-1+x-In(x+1)-[t-In(t+1)]>0$

$\Rightarrow[e^{x-t}-(x-t)-1]_{\underset{x=t}{\ge 0}}+\{x-In(x+1)-[t-In(t+1)]\}_{>0}$

95. 已知 $f(x)=aInx-x+1,g(x)=x-e^{x}$，$a$ 为实数，设 $h(x)=f(x)+g(x)$，求所有的实数值 a，使得对任意的 $x>0$，不等式 $h(x)\le 1-e$ 恒成立

解析：$e(e^{x-1}-x)+ex-aInx-e\geq 0\Rightarrow e(e^{x-1}-x)+e(x-Inx-1)+(e-a)Inx\geq 0$

$\Rightarrow [e(e^{x-1}-x)]_{\substack{\geq 0\\ x=1}}+[e(x-Inx-1)]_{\substack{\geq 0\\ x=1}}+(e-a)Inx\geq 0$

当 $x>1, Inx>0\therefore e-a\geq 0\Rightarrow a\leq e$

当 $x\in(0,1), Inx<0\therefore e-a\leq 0\Rightarrow a\geq e$，综上：$a=e$

96. 已知函数 $f(x)=e^x-(a+1)Inx-2$，当 $a=e$ 时，证明：$f(x)>2e-(e+1)In(e+1)$

解析：$e^x-(a+1)Inx-2>2e-(e+1)In(e+1)$

$\Rightarrow e^x-(e+1)Inx-2(e+1)+(e+1)In(e+1)>0$

$\Rightarrow e^x-ex+(e+1)(\frac{ex}{e+1}-In\frac{ex}{e+1}-1)>0$

$\Rightarrow [e^x-ex]_{\substack{\geq 0\\ x=1}}+[(e+1)(\frac{ex}{e+1}-In\frac{ex}{e+1}-1)]_{\substack{\geq 0\\ \frac{ex}{e+1}=1\Rightarrow x=1+\frac{1}{e}}}>0$

97. 已知函数 $f(x)=e^x-(a+1)Inx-2$，当 $a=2$ 时，证明：$f(x)>4-3In3$

解析：$e^x-(a+1)Inx-2>4-3In3\Rightarrow e^x-3Inx-6+3In3>0$

$e^x-ex+3(\frac{ex}{3}-In\frac{ex}{3}-1)>0\Rightarrow [e^x-ex]_{\substack{\geq 0\\ x=1}}+[3(\frac{ex}{3}-In\frac{ex}{3}-1)]_{\substack{\geq 0\\ x=\frac{3}{e}}}>0$

98. 已知函数 $f(x)=ae^x, g(x)=In(x-1)+1$，证明：当 $a\geq\frac{1}{e^2}$ 时，$f(x)\geq g(x)$

解析：$f(x)-g(x)=\frac{1}{e^2}e^x-In(x-1)-1+(a-\frac{1}{e^2})e^x$

$=e^{x-2}-(x-2)-1+(x-1)-In(x-1)-1+(a-\frac{1}{e^2})e^x$

$[e^{x-2}-(x-2)-1]_{\substack{\geq 0\\ x=2}}+[(x-1)-In(x-1)-1]_{\substack{\geq 0\\ x=2}}+(a-\frac{1}{e^2})e^x$

$\because a\geq\frac{1}{e^2}$ 所以：$f(x)-g(x)\geq 0$ 得证。

99. 已知函数 $f(x)=Inx-ax+a, a\in R$，若关于 x 的不等式 $f(x)+e^{x-1}\geq 1$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围（　　）

解析：$e^{x-1}+Inx-a(x-1)-1\geq 0\Rightarrow [e^{x-1}-(x-1)-1]-[(x-1)-Inx]+(2-a)(x-1)\geq 0$，

$\Rightarrow \{[e^{x-1}-(x-1)-1]-[(x-1)-Inx]\}_{\underset{x=1}{\geq 0}}+(2-a)(x-1)\geq 0, \because x\geq 1 \therefore 2-a\geq 0\Rightarrow a\leq 2$

100. 已知函数 $f(x)=Inx+ax^2$，若 $f(x)>ax^2+2ax-e^x+e-2a$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围（）

解析：$e^x+Inx-2a(x-1)-e>0$

$$\Rightarrow e[e^{x-1}-(x-1)-1]-[(x-1)-Inx]+(e+1-2a)(x-1)>0$$

$$e[e^{x-1}-(x-1)-1]_{\underset{x=1}{\geq 0}}-[(x-1)-Inx]_{\underset{x=1}{\geq 0}}+(e+1-2a)(x-1)>0,$$

$$\because x>1 \therefore e+1-2a\geq 0\Rightarrow a\leq \frac{e+1}{2}$$

101. 已知 $a>1, \forall x\geq \frac{1}{3}$，不等式 $4x-In(3x)\leq ae^x-Ina$ 恒成立，则 a 的最小值为（ ）

解析：同构变形：$3x-In3x\leq ae^x-x-Ina\Rightarrow 3x-In3x\leq ae^x-Inae^x$

又因为 $3x\geq 1, a>1$，构造 $y=t-Int(t\geq 1)$ 单增

所以 $ae^x\geq 3x\Rightarrow a\geq \frac{3x}{e^x}\Rightarrow a\geq [\frac{3x}{e^x}]_{\max}=\frac{3}{e}$

102. 已知函数 $f(x)=e^{x-a}-xInx+x$ 有两个极值点 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$，设 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$，证明：$a>2$

解析：$g(x)=e^{x-a}-Inx$ 有两根，即：$e^{x-a}-(x-a)-1+x-Inx-1=a-2$

$\therefore$ $[e^{x-a}-(x-a)-1]_{\underset{x=a}{\geq 0}}+[x-Inx-1]_{\underset{x=1}{\geq 0}}=a-2 \therefore a-2>0\Rightarrow a>2$。

注意：（不能同时取等，另 $a=1$ 不成立）（此题：同类同构）

103. 已知函数 $f(x)=Inx-a(x-1)$，$g(x)=e^x$，设 $h(x)=f(x+1)+g(x)$，当 $x\geq 0$，$h(x)\geq 1$，求实数 a 的取值范围（ ）

解析：当 $x\geq 0$，$h(x)\geq 1$

即：$e^x+In(x+1)-ax-1=(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1)+In(x+1)-x+\frac{1}{2}x^2)+(2-a)x\geq 0$

所以：$(e^{x}-\frac{1}{2}x^{2}-x-1)_{\underset{x=0}{\geq 0}}+In(x+1)-x+\frac{1}{2}x^{2})_{\underset{x=0}{\geq 0}}+(2-a)[x]_{\geq 0}\geq 0$，

所以：$2-a\geq 0\Rightarrow a\leq 2$ （此题：同类异构）

104. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-x$，$a$ 为常数，若 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq(3a-1)\cos x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围（　　）

解析：

$$ae^{2x}+(2a-1)e^{x}-x\geq(3a-1)\cos x$$

$$a(e^{2x}-e^{x}-x)+(3a-1)(e^{x}-x-1)+(3a-1)(1-\cos x)+(4a-2)x\geq 0$$

所以：

$$a[(e^{2x}-e^{x}-x)_{\underset{x=0}{\geq 0}}]+(3a-1)[(e^{x}-x-1)_{\underset{x=0}{\geq 0}}]+(3a-1)[(1-\cos x)_{\underset{x=0}{\geq 0}}]+(4a-2)[x_{\geq 0}]\geq 0$$

所以：$\begin{cases}a\geq 0\\3a-1\geq 0\\4a-2\geq 0\end{cases}\Rightarrow a\geq\frac{1}{2}$，（此题：同类异构）

105. 已知函数 $f(x)=\frac{ax}{e^{x-1}}+x-In(ax)-2,(a>0)$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在零点，则实数 a 的取值范围（B）

A. $(0,1]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(0,e]$　　D. $[3,+\infty)$

解析：$\because\frac{ax}{e^{x-1}}=axe^{1-x}=e^{1-x+Inax}$ 所以：

$$f(x)=e^{1-x+Inax}-(1-x+Inax)-1\geq 0$$

当且仅当：$1-x+Inax=0\Rightarrow a=\frac{e^{x-1}}{x}\Rightarrow a\geq 1$

106. 已知函数 $f(x)=xe^{x}-Inx-x-1$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$ 使得 $f(x)\geq a$，则 a 的最大值为（　）

A. 0　　B. $e-2$　　C. 1　　D. $e-1$

解析：

$f(x)=xe^{x}-Inx-x-1=e^{x+Inx}-(x+Inx)-1\geq a\Rightarrow[e^{x+Inx}-(x+Inx)-1]_{\geq 0}\geq a\Rightarrow a\leq 0$

107. 已知对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 都有 $k(e^{kx}+1)-(1+\frac{1}{x})Inx>0$，则实数 k 的取值范围（　）

解析：$k(e^{kx}+1)-(1+\frac{1}{x})Inx>0\Rightarrow k(e^{kx}+1)>(1+\frac{1}{x})Inx$

$\Rightarrow kxe^{kx}+kx>xInx+Inx=e^{Inx}\cdot Inx+Inx$

$g(x)=x+xe^{x}$ 单增，所以：$kx>Inx\Rightarrow k>\frac{Inx}{x}\Rightarrow k>[\frac{Inx}{x}]_{\max}=\frac{1}{e}$

108. 若直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=Inx+1$ 相切，则 ab 的最大值为（　）

解析：$ax+b\geq Inx+1\Rightarrow ax+b-1\geq Inx,\because Inax\leq ax-1\therefore Inx\leq ax-1-Ina=ax+b-1$

所以：$b=-Ina\therefore ab=-aIna\leq\frac{1}{e}$

109. 已知 m,n 为实数，$f(x)=e^{x}-mx+n-1$ 若 $f(x)\geq 0$ 对 $x\in R$ 恒成立，则 $\frac{n-m}{m}$ 的取值范围（　）

解析：$e^{x}-mx+n-1\geq 0\Rightarrow e^{x}-1\geq mx-n\Rightarrow[e^{x}-1]_{\geq 0}\geq mx-n\therefore\frac{n}{m}\geq 0\therefore\frac{n}{m}-1\geq -1$

110. 已知函数 $f(x)=xe^{ax-1}-Inx-ax,a\in(-\infty,-\frac{1}{e^{2}}]$，则函数 $f(x)$ 的最小值为（　）

解析：$f(x)=xe^{ax-1}-Inx-ax=e^{ax+Inx-1}-(ax+Inx-1)-1\geq 0$

当且仅当 $ax+Inx-1=0\Rightarrow a=\frac{1-Inx}{x}$ 等号成立，则 $a\geq -\frac{1}{e^{2}}$

111. 已知函数 $f(x)=x+In(x-1),g(x)=xInx$，若 $f(x_1)=1+2Int,g(x_2)=t^{2}$，则 $(x_1x_2-x_2)Int$ 的最小值为（　）

A. $\frac{1}{e^{2}}$　　B. $\frac{2}{e}$　　C. $-\frac{1}{2e}$　　D. $-\frac{1}{e}$

解析：$\begin{cases}x_1+In(x_1-1)=1+2Int\\ x_2Inx_2=t^{2}\Rightarrow Inx_2+In(Inx_2)=2Int\end{cases}\Rightarrow x_1-1+In(x_1-1)=Inx_2+In(Inx_2)$

构造 $h(x)=x+Inx$，$h(x)$ 单增，$\therefore x_1-1=Inx_2$，

$$(x_1x_2-x_2)Int=x_2(x_1-1)Int=x_2Inx_2\frac{In(x_2Inx_2)}{2}=\frac{x_2Inx_2In(x_2Inx_2)}{2}$$

构造 $m(x)=xInx$，则 $m(x)_{\min}=-\frac{1}{e}$

所以：$(x_1x_2-x_2)Int$ 的最小值为 $-\frac{1}{2e}$

112. 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x-\frac{a}{2}x^2+ax$，$a\in R$，若不等式 $f(x)+(x+1)e^x+\frac{a}{2}x^2-2ax+a>0$ 恒成立，求 a 的取值范围。

解析 1：$(2x-1)e^x>ax-a$，$\because xe^x\ge 2ex-e\therefore(x-\frac{1}{2})e^{x-\frac{1}{2}}\ge 2e(x-\frac{1}{2})-e$

$\Rightarrow(2x-1)e^x\ge 4e^{\frac{3}{2}}x-4e^{\frac{3}{2}}\Rightarrow 1<a<4e^{\frac{3}{2}}$（此法：切线找点）

解析 2：过 $(1,0)$ 点作 $y=(2x-1)e^x$ 的切线，设切点 $(x_0,(2x_0-1)e^{x_0})$，则

$$k=(2x_0+1)e^{x_0}=\frac{(2x_0+1)e^{x_0}-0}{x_0-1}\Rightarrow x_0=0\,\&\,x_0=\frac{3}{2}$$

解之得：$k=1,k=4e^{\frac{3}{2}}$，所以 $1<a<4e^{\frac{3}{2}}$

113. 已知函数 $f(x)=Inx-ax+1\le 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围（　）

解析：由 $f(x)=Inx-ax+1\le 0$

得：$Inx-ax+1\le 0\Rightarrow a\ge\frac{Inx+1}{x}=e\frac{Inex}{ex}=e\cdot[\frac{Inex}{ex}]_{\max}=1$

114. 已知函数 $f(x)=x+Inx,g(x)=xInx$，若 $f(x_1)=x+Inx,g(x)=xInx$，若 $f(x_1)=Int,g(x_2)=t$，则 x_1x_2Int 的最小值（　）

解析：$x_1+Inx_1=Int,x_2Inx_2=t$，$e^{x_1+Inx_1}=x_2Inx_2\Rightarrow x_1e^{x_1}=Inx_2e^{Inx_2}$

构造 $h(x)=xe^x$

单增，$\therefore x_1=Inx_2\therefore x_1x_2Int=x_2Inx_2Int=tInt\therefore x_1x_2Int=[tInt]_{\min}=-\frac{1}{e}$

115. 已知函数 $f(x)=xe^{x},g(x)=xInx$，若 $f(x_1)=g(x_2)=t>0$，则 $\dfrac{Int}{x_1x_2}$ 的最大值（　　）

解析：由题意：$f(x_1)=x_1e^{x_1}=t>0\Rightarrow x_1>0;g(x_2)=x_2Inx_2=t>0\Rightarrow x_2>1$

而：$g(x_2)=x_2Inx_2=Inx_2e^{Inx_2}=f(Inx_2)\therefore f(x_1)=f(Inx_2)$

构造 $h(x)=xe^{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 单增

$\therefore x_1=Inx_2\therefore x_1x_2=x_2Inx_2=t\therefore \dfrac{Int}{x_1x_2}=\dfrac{Int}{t},\because [\dfrac{Int}{t}]_{\max}=\dfrac{1}{e}\therefore \dfrac{Int}{x_1x_2}\le\dfrac{1}{e}$

116. 已知函数 $f(x)=x-Inx$，已知实数 $a>0$，若 $f(x)+ae^{2x}+Ina\ge0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围（　　）

解析 1：由题意知 $Inx\le ae^{x}+Ina$；

两边同时加上 x，得 $ae^{x}+x+Ina\ge a+Inx$，即 $ae^{x}+In(ae^{x})\ge x+Inx$

构造 $h(x)=x+Inx$，因为单增,即：$ae^{x}\ge x\Rightarrow a\ge\dfrac{x}{e^{x}}\Rightarrow a\ge[\dfrac{x}{e^{x}}]_{\max}=\dfrac{1}{e}$

解析 2：由题意知 $Inx\le ae^{x}+Ina$；$\therefore\dfrac{1}{a}In\dfrac{x}{a}\le e^{x}\Rightarrow\dfrac{x}{a}In\dfrac{x}{a}\le xe^{x}\Rightarrow e^{In\frac{x}{a}}In\dfrac{x}{a}\le xe^{x}$

构造 $h(x)=xe^{x}$，在 $x>0$ 单增，$\therefore h(In\dfrac{x}{a})\le h(x)\Rightarrow In\dfrac{x}{a}\le x\Rightarrow a\ge\dfrac{1}{e}$

117. 若 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时，关于 x 的不等式 $ax^{3}e^{ax}+2Inx\le0$ 恒成立，则实数 a 的最大值（　　）

解析：$ax^{3}e^{ax}+2Inx\le0\Rightarrow axe^{ax}+\dfrac{2Inx}{x^{2}}\le0\Rightarrow axe^{ax}\le-\dfrac{2Inx}{x^{2}}\Rightarrow axe^{ax}\le\dfrac{1}{x^{2}}In\dfrac{1}{x^{2}}$

构造 $f(x)=xe^{x}$，$f(ax)\le f(In\dfrac{1}{x^{2}}),\because In\dfrac{1}{x^{2}}\in(2,+\infty)$ 且单增

所以：$ax\le In\dfrac{1}{x^{2}}\Rightarrow a\le\dfrac{-2Inx}{x}\Rightarrow a\le(\dfrac{-2Inx}{x})_{\min}=-2\dfrac{-1}{\frac{1}{e}}=2e$

118. 已知函数 $f(x)=ae^{x}+2x-1$，证明：对任意的 $a\geq 1$，当 $x>0$ 时，$f(x)\geq(x+ae)x$

解析：$ae^{x}+2x-1\geq(x+ae)x \Leftrightarrow (a-1)(e^{x}-ex)+e^{x}-ex-(x-1)^{2}\geq 0$

$$\Rightarrow (a-1)[(e^{x}-ex)]_{\substack{\geq 0\\x=1}}+[e^{x}-ex-(x-1)^{2}]_{\substack{\geq 0\\x=1}}\geq 0$$

即：$a\geq 1$，得证　　（同类异构）

119. 已知函数 $f(x)=x-Inx,a>0$ 若 $f(x)+ae^{2x}+Ina\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围_____.

解析：$x-Inx+ae^{2x}+Ina\geq 0\Rightarrow ae^{2x}+2x+Ina\geq x+Inx\Rightarrow ae^{2x}+Ina\cdot e^{2x}\geq x+Inx$

设 $h(x)=x+Inx$，因为单增，$\therefore ae^{2x}\geq x\Rightarrow a\geq\dfrac{x}{e^{2x}}\Rightarrow a\geq[\dfrac{x}{e^{2x}}]_{\max}=\dfrac{1}{2e}$

120. 已知函数 $f(x)=ae^{x}+\ln\dfrac{a}{x+2}-2(a>0)$，若 $f(x)>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

【解】$\because f(x)=ae^{x}+\ln\dfrac{a}{x+2}-2>0$，则 $e^{x+\ln a}+\ln a>\ln(x+2)+2$，

两边加上 x 得到 $e^{x+\ln a}+x+\ln a>x+2+\ln(x+2)=e^{\ln(x+2)}+\ln(x+2)$，

$\because y=e^{x}+x$ 单调递增，$\therefore x+\ln a>\ln(x+2)$，即 $\ln a>\ln(x+2)-x$，令

$g(x)=\ln(x+2)-x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=\dfrac{-x-1}{x+1}$，因为 $f(x)$ 的定义域为

$(-2,+\infty)$ $\therefore x\in(-2,-1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(-1,+\infty)$，$g'(x)<0$，

$g(x)$ 单调递减，$\therefore \ln a>g(x)_{\max}=g(-1)=1$，$\therefore a>e$. 故答案为：$(e,+\infty)$

121. 已知函数 $f(x)=e^{2x+a}-\dfrac{1}{2}Inx+\dfrac{a}{2}$ 在定义域内没有零点，则实数 a 的取值范围为（　）

解析：$f(x)=e^{2x+a}-\dfrac{1}{2}Inx+\dfrac{a}{2}>0\Rightarrow e^{2x+a}+\dfrac{a}{2}>\dfrac{1}{2}Inx\Rightarrow e^{2x+a}+\dfrac{a}{2}+x>e^{Inx}+\dfrac{1}{2}Inx$

构造：$g(x)=e^{2x}+x\therefore x+\dfrac{a}{2}>\dfrac{1}{2}Inx\Rightarrow\dfrac{a}{2}>\dfrac{1}{2}Inx-x\Rightarrow a>-In2-1$

122. 若 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时，关于 x 的不等式 $ax^{3}e^{ax}+2Inx\leq 0$，则实数 a 的最大值为（　）

解析：$ax^{3}e^{ax}+2Inx\leq 0\Rightarrow axe^{ax}+2Inx\leq\dfrac{1}{x^{2}}In\dfrac{1}{x^{2}}=e^{In\frac{1}{x^{2}}}\cdot In\dfrac{1}{x^{2}}$

因为 $x\in(0,\dfrac{1}{e})\Rightarrow In\dfrac{1}{x^{2}}>2$，$\therefore ax\leq In\dfrac{2}{x^{2}}\Rightarrow a\leq-\dfrac{2Inx}{x}\therefore a\leq 2e$

123.　　函数 $f(x)=ae^{x}-xInx$ 若 $a\geq\frac{2}{e^{2}}$，证明：$f(x)>0$

解析：即证：$a\geq\frac{2}{e^{2}}$，$f(x)=ae^{x}-xInx\geq\frac{2}{e^{2}}e^{x}$

124. 已知 x_0 是函数 $f(x)=x^{2}e^{x-2}+Inx-2$ 的零点，则 $e^{2-x_0}+Inx_0=$（　　）

解析：

$f(x)=e^{x-2+2Inx}+x-2+2Inx-Inx-x\Rightarrow e^{x_0-2+2Inx_0}+x_0-2+2Inx_0-Inx_0-x_0=0$

$e^{x_0-2+2Inx_0}+x_0-2+2Inx_0=Inx_0+x_0=e^{Inx_0}+Inx_0$

得：$2Inx_0+x_0-2=Inx_0\Rightarrow e^{2-x_0}+Inx_0=2$

125. 已知关于 x 得方程 $2^{x^{2}+1}-2^{ax}=-x^{2}+ax-1$，当 $\frac{1}{2}\leq x\leq 3$ 时有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围（　　）

解析：$2^{x^{2}+1}+x^{2}+1=2^{ax}+ax$，即 $x^{2}+1=ax$

当 $\frac{1}{2}\leq x\leq 3$ 有两个不同的交点，$a=x+\frac{1}{x}$，$a\in(2,\frac{5}{2}]$

126. 函数 $f(x)=\frac{e^{x}}{x}(x>0)$，函数 $g(x)=mx$，若不等式 $f(x)+g(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的范围？

解析：$\frac{e^{x}}{x}+mx>0$，则 $e^{x}+mx^{2}>0\Rightarrow e^{x}>-mx^{2}$

因为 $e^{x}\geq\frac{e^{2}}{4}x^{2}\Rightarrow m<-\frac{e^{2}}{4}$（切线放缩）

127. 若 $h(x)=ae^{x}-Inx+Ina(a>0)$，当 $x>a$ 时，不等式 $h(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的最小值？

解析：$ae^{x}-Inx+Ina\geq 0\Rightarrow e^{x+Ina}+x+Ina\geq Inx+x$

所以：$x+Ina\geq Inx\Rightarrow Ina\geq Inx-x$

① $0<a<1,x\in(0,1)\uparrow,(1,+\infty)\downarrow,Ina\geq -1\Rightarrow a\geq\frac{1}{e}$

② $a>1,x\in[a,+\infty)\therefore a\geq 0$ 恒成立。综上：$a\geq\frac{1}{e}$

128. 已知函数 $f(x)=x(e^x-a)-2Inx+2In2-2(a\in R)$，若 $f(x)\geq 0$，求 a 的取值范围（　）

解析：$e^{x+Inx}-2Inx+2In2-2-ax\geq 0\Rightarrow e^{x+Inx-In2}-Inx+In2-1-\frac{a}{2}x\geq 0$

$\Rightarrow e^{x+Inx-In2}-x-Inx+In2+(1-\frac{a}{2})x\geq 0$

$\therefore 1-\frac{a}{2}\geq 0\Rightarrow a\leq 2$

容易知道：$h(x)=e^x-x-1\geq 0$，$x=0$ 取等号

$h(x+Inx-In2)=e^{x+Inx-In2}-(x+Inx-In2)-1\geq 0$，$x_0+Inx_0=In2$ 取等

①当 $1-\frac{1}{2}a\geq 0$ 即 $a\leq 2$ 时，原式恒成立

②当 $1-\frac{1}{2}a<0$ 即 $a>2$ 时，$-ax<-2x$

$g(x)=e^{x+Inx-In2}-(x+Inx-In2)-1+(1-\frac{1}{2}a)x$

$<e^{x+Inx-In2}-(e^{x+Inx-In2}-(x+Inx-In2)-1)-1=h(x+Inx-In2)$

当 $x_0+Inx_0=In2$ 时，$h(x_0+Inx_0-In2)=0$

$g(x_0)<h(x_0+Inx_0-In2)=0$，矛盾：综合 $a\leq 2$

129. 已知函数 $f(x)=e^x-2ax-1,g(x)=2aIn(x+1),a\in R$，若对任意 $x\in[0,+\infty),f(x)+g(x)\geq x$ 恒成立，求 a 的取值范围（　）

解析：$e^x-2ax-1+2aIn(x+1)-x\geq 0\Rightarrow (e^x-x-1)_{\substack{\geq 0\\ x=0}}+2a[In(x+1)-x]_{\substack{\leq 0\\ x=0}}\geq 0$

$\Rightarrow 2a\leq 0\Rightarrow a\leq 0$

130. 函数 $f(x)=\frac{1}{m}e^{mx}-\frac{1}{2}x^2$，若 $m>1$，且对任意 $x\in(e,+\infty),\frac{mx(mx-6)+2f'(x)}{Inx}\geq Inx-6$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析：原式化简为：$(mx)^2-6mx+2e^{mx}\ge(Inx)^2-6Inx+2x$

$\Leftrightarrow(mx)^2-6mx+2e^{mx}\ge(Inx)^2-6Inx+2e^{Inx}$

构造 $h(x)=x^2-6+2e^x=2(x-3+e^x)$，等价于 $h(mx)\ge h(Inx)$，

$\because m>1,x\in(e,+\infty)\Rightarrow mx>1,Inx>1,$

当 $x>1$ 时，$h'(x)=2(x-3+e^x)>2(1-3+e)>0$

所以：$h(mx)\ge h(Inx)\Leftrightarrow mx\ge Inx\Leftrightarrow m\ge\dfrac{Inx}{x}\Rightarrow m\ge[\dfrac{Inx}{x}]_{\max}=\dfrac{1}{e}$

综上：$m>1$

131. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{Inx}(a>0)$，当 $x>1$ 时，$f(x)\ge\dfrac{x}{e^x}\cdot\dfrac{In\frac{x}{a}}{Inx}$，求 a 的取值范围。

解析：$\dfrac{ax}{Inx}\ge\dfrac{x}{e^x}\cdot\dfrac{In\frac{x}{a}}{Inx}\Rightarrow a\cdot e^x\ge In\dfrac{x}{a}\Rightarrow e^{x+Ina}\ge Inx-Ina\Rightarrow e^{x+Ina}+x+Ina\ge Inx+x$

构造 $g(x)=e^x+x$，知单增

$x+Ina\ge Inx\Rightarrow Ina\ge Inx-x,x>1\Rightarrow Ina\ge-1\Rightarrow a\ge\dfrac{1}{e}$

132. 已知函数 $f(x)=\ln x+ax+1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）对任意 $x>0$，$xe^{2x}\geqslant f(x)$ 恒成立，求实数 a 的最大值.

解：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}+a=\dfrac{1+ax}{x}(x>0)$

当 $a\geqslant0$ 时，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1+ax}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a<0$ 时，$x\in(0,-\dfrac{1}{a})$，$f'(x)=\dfrac{1+ax}{x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,-\dfrac{1}{a})$ 上单调递增;

$x\in(-\dfrac{1}{a},+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1+ax}{x}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减;

综上：当 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减.

（2）任意 $x>0$，$xe^{2x}\geqslant f(x)$，即 $xe^{2x}-\ln x-ax-1\geqslant 0$ 恒成立，

即 $e^{\ln x+2x}-\ln x-ax-1\geqslant 0$ 恒成立；

令 $g(x)=e^{\ln x+2x}-\ln x-ax-1$，则任意 $x>0$，$g(x)=e^{\ln x+2x}-\ln x-ax-1\geqslant 0$，

因为，存在正实数 x_0，满足：$\ln x_0+2x_0=0$，且 $g(x_0)=e^{\ln x_0+2x_0}-\ln x_0-ax_0-1\geqslant 0$，

所以 $2x_0-ax_0\geqslant 0$，所以 $a\leqslant 2$.

下证：当 $a=2$ 时成立：即证：$e^{\ln x+2x}-\ln x-2x-1\geqslant 0$，

因为 $\forall x\in R$，$e^x\geqslant x+1$，

所以：$e^{\ln x+2x}-\ln x-2x-1\geqslant \ln x+2x+1-\ln x-2x-1=0$ 显然成立；

所以实数 a 的最大值为 2.

133. 已知 $a>0$，若 $a\ln x\leqslant x\ln a$ 恒成立，则 a 的值是________.

答案：e

解析：两边同时除以 ax 得，$\frac{\ln x}{x}\leq\frac{\ln a}{a}$，要使该不等式恒成立

即 $x=a$ 时，$\frac{\ln x}{x}$ 取最大值，故 $a=e$.

134. 已知函数 $f(x)=(x-x^m+mInx)e^x+1(m<0)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时恒有 $f(x)\geq 0$，求实数 m 的取值范围（ ）

解析：$f(x)\geq 0\Rightarrow x-x^m+mInx+e^{-x}\geq 0\Rightarrow e^{-x}+x\geq x^m-mInx\Rightarrow e^{-x}+x\geq x^m-mInx$

$\Rightarrow e^{-x}-(-x)\geq x^m-Inx^m$

设 $g(t)=e^t-t, g(-x)\geq g(Inx^m)$

$g'(t)=e^t-1=0\Rightarrow t=0\Rightarrow t\in(-\infty,0)$ 递减

$\because -x<-1, Inx^m=mInx<0\therefore -x\leq Inx^m=mInx\Rightarrow m\geq(-\frac{x}{Inx})_{\max}=-e$

综上 $[-e,0)$

135. 若 $a>0,x>0,e^{\frac{x}{a}}-a^2In(ax+b)\ge b$ 在定义域内恒成立，求 a 的取值范围（　　）

解析：$ax+e^{\frac{x}{a}}\ge a^2In(ax+b)+ax+b\Rightarrow a^2Ine^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{x}{a}}\ge a^2In(ax+b)+ax+b$，

构造函数 $g(x)=a^2Inx+x$，易知 $g(x)$ 单增，故有 $e^{\frac{x}{a}}\ge ax+b$

由 $e^x\ge x+1$ 结合图像得 $a\le 1,b\le 1$，故 $a\in(0,1]$

136. 当 $a>0$ 时，证明 $\dfrac{e^{2x}}{a}>Inx+2+In\dfrac{2}{a}$

解析：要证 $\dfrac{e^{2x}}{a}>Inx+2+In\dfrac{2}{a}$，即证：$e^{2x-Ina}-In2x-2+Ina\ge 0$

构造函数 $h(x)=e^x-x-1$

易证：$h(x)\ge h(0)=0$

由于 $h(2x-Ina)=e^{2x-Ina}-2x+Ina-1,h(In2x)=2x-In2x-1$

故 $h(2x-Ina)+h(In2x)=e^{2x-Ina}-2x+Ina-1+2x-1=e^{2x-Ina}-In2x+Ina-2\ge 0$

当且仅当 $2x=Ina$ 且 $In2x=0$ 即 $x=\dfrac{1}{2},a=e$ 时等号成立

所以当 $a>0$ 时，$\dfrac{e^{2x}}{a}\ge Inx+2+In\dfrac{2}{a}$

137. 若 $a>1$，对任意 $x\in(e,+\infty),\dfrac{2e^{ax}+a^2x^2-6ax-2x}{Inx}\ge Inx-6$ 恒成立，求 a 的取值范围（　　）

解析：由 $x>e$ 可得：即为 $e^{ax}+\dfrac{a^2x^2}{2}-3ax\ge e^{Inx}+\dfrac{In^2x}{2}-3Inx,$

因为 $a>1$，$x>e$，故 $ax>e,Inx>1$

令 $F(t)=e^t+\dfrac{t^2}{2}-3t(t>0)$，则 $F(ax)>F(Inx)$ 在 $x\in(e,+\infty)$ 上恒成立

易知函数 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以只需要 $ax > Inx$

即 $a > \dfrac{Inx}{x}$，即 $a > [\dfrac{Inx}{x}]_{\max} = \dfrac{1}{e}$，即 $a \geq \dfrac{1}{e}$，结合 $a > 1$，所以 $a \in (1,+\infty)$

138. 已知 $f(x) = e^{x+a} + ax,\ g(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $F(x) = f(x) - g(x)$ 在定义域上单调递增，求实数 a 的取值范围.

详解：（1） $f'(x) = e^{x+a} + a,\ x \in R.$ $f'(x)$ 在 R 上单调递增.

当 $a \geq 0, f'(x) > 0,$ $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a < 0$ 时， $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a + \ln(-a),$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -a + \ln(-a); f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -a + \ln(-a);$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-a+\ln(-a))$ 上单调递减；在 $(-a+\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增

（2） $F(x) = e^{x+a} + ax - (x+1)\ln(x+1)$ 定义域是 $(-1,+\infty)$；

函数 $F(x)$ 在定义域上单调递增的充要条件是 $F'(x) \geq 0$ $(x > -1)$ 恒成立.

法一：$\therefore F'(x) = e^{x+a} + a - \ln(x+1) - 1 \geq 0$ $(x > -1)$ 恒成立，$\therefore F'(0) = e^{a} + a - 1 \geq 0$

令 $t(x) = e^{x} + x - 1,$ 则 $t'(x) = e^{x} + 1 > 0 \therefore t(x)$ 在 R 单调递增，

$\because t(0) = 0, e^{a} + a - 1 = t(a) \geq 0 \therefore a \geq 0$

当 $a \geq 0$ 时，

记 $G(x) = F'(x), G'(x) = e^{x+a} - \dfrac{1}{x+1} = h(x), x > -1$

$h'(x) = e^{x+a} + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0 \therefore G'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

$\because$ 当 $x \to -1$ 时 $G'(x) \to -\infty$；当 $x \to +\infty$ 时 $G'(x) \to +\infty$；

$\therefore$ 存在唯一的 x_0 使 $G'(x_0) = e^{x_0+a} - \dfrac{1}{x_0+1} = 0,$……………………………………………8分

事实上，取 $x_1 = -1 + \dfrac{1}{e^{a}}$，

$\because a \geq 0 \therefore 0 < \frac{1}{e^a} \leq 1, \therefore -1 < x_1 \leq 0, \therefore e^{x_1+a} \leq e^a, \frac{1}{x_1+1} = e^a$

$\therefore G'(x_1) = G'(-1+\frac{1}{e^a}) \leq 0$

又 $G'(0) = e^a - 1 \geq 0 \therefore$ 存在唯一的$x_0 \in \left[-1+\frac{1}{e^a},0\right]$,使$G'(x_0)=0$,

$G'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0+a} = \frac{1}{x_0+1}, x_0 + a = -\ln(x_0+1)$

当$-1 < x < x_0, G'(x) < G'(x_0) = 0$; 当$x > x_0, G'(x) > G'(x_0) = 0$;

$\therefore G(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增.

$\therefore F'(x)_{\min} = G(x)_{\min} = G(x_0)$……………………………………………………………10分

$= e^{x_0+a} + a - \ln(x_0+1) - 1 = \frac{1}{x_0+1} + a + (x_0+a) - 1$

$= \frac{1}{x_0+1} + (x_0+1) - 2 + 2a \geq 2\sqrt{\frac{1}{x_0+1}\cdot(x_0+1)} - 2 + 2a = 2a \geq 0.$

$\therefore a \geq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 0$

综上可知 $a \geq 0$ 为所求

法二：

$$F'(x) = e^{x+a} + a - \ln(x+1) - 1 \geq 0 \quad (x > -1)$$
$$\Leftrightarrow e^{x+a} + (x+a) \geq x+1+\ln(x+1) = e^{\ln(x+1)} + \ln(x+1)$$

令$T(t) = e^t + t$，$T'(t) = e^t + 1 > 0, \therefore T(t)$在$R$上单调递增

$\because T(x+a) \geq T(\ln(x+1)) \therefore x+a \geq \ln(x+1)$恒成立.

$\therefore a \geq S(x) = \ln(x+1) - x \therefore a \geq S(x)_{\max}$

$$S'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} (x > -1)$$

$\therefore -1 < x < 0$时$S'(x) > 0; x > 0$时$, S'(x) < 0$

$\therefore S(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减.

$\therefore S(x)_{\max} = S(0) = 0$

$\therefore a \geq 0$

法三：

先证明 $h(x) = e^x - x - 1 \geq 0$，证明如下：

$\because h'(x)=e^x-1\therefore x=0$时$h'(x)=0;x<0$时$h'(x)<0;x>0$时$h'(x)>0;$

$\therefore x<0$时$h(x)$单调递减$;x>0$时$h(x)$单调递增$.\therefore$

$h(x)_{\min}=h(0)=0\therefore h(x)\ge h(x)_{\min}=0$

$\therefore e^x\ge x+1\therefore x+1>0$时$\ln e^x\ge\ln(x+1)$即$x-\ln(x+1)\ge 0.$

$\therefore$若$a\ge 0,$则

$$
\begin{aligned}
F'(x)&=e^{x+a}+a-\ln(x+1)-1\ge(x+a+1)+[a-\ln(x+1)-1]\\
&=x-\ln(x+1)+2a\ge 2a\ge 0\ (x>-1)\text{恒成立}
\end{aligned}
$$

$\therefore$若$a<0,$则$e^a<1\therefore F'(0)=e^a+a-\ln 1-1=e^a-1+a<0$

$\therefore$当且仅当$a\ge 0$时$F'(x)\ge 0$恒成立