2010 年陕西高考数学解析几何题的源与流

金　磊
（陕西省西安交大附中，710049）

2010 年陕西高考数学试卷的理科第 20 题的解析几何题目如下：

如图 1，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的顶点为 A_1,A_2,B_1,B_2，焦点为 F_1,F_2，$A_1B_1=\sqrt{7}$，$S_{\square A_1B_1A_2B_2}=2S_{\square B_1F_1B_2F_2}$.

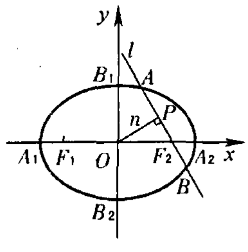

图 1

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 n 为过原点的直线，l 是与 n 垂直相交于点 P、与椭圆相交于 A,B 两点的直线，$|\overrightarrow{OP}|=1$. 是否存在上述直线 l，使 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PB}=1$ 成立？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

容易求出椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，第二问入手点是发现 $\angle AOB=90^\circ$，这可以用向量证明. 也可以用相似三角形证明，相似证法如下：由 $OP^2=1=AP\cdot PB$，得 $\mathrm{Rt}\triangle APO\backsim\mathrm{Rt}\triangle OPB$，从而 $\angle AOB=\angle AOP+\angle BOP=90^\circ$.

下面本题即为：是否存在直线 l 使得 $\overrightarrow{OP}=1$ 且 $\angle AOB=90^\circ$，其实这是解析几何中很常见的一类问题：对定点张直角的二次曲线弦问题. 本文拟对此类问题在高考及竞赛中的应用做一总结，并给出一般结论的统一简洁证明，最后将结论进行引申推广.

1　对原点张直角的二次曲线弦的问题

此类问题在高考中屡见不鲜，历年高考中相关题目如下：

例 1　（1991 理 26）双曲线的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，过双曲线右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P,Q 两点. 若 $OP\perp OQ$ 且 $|PQ|=4$，求双曲线方程.

例 2　（2004 重庆理 21）设 $p>0$ 是一常数，过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A,B，以线段 AB 为直径作圆 H（H 为圆心）. 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上；并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.

例 3　（2004 天津理 22）椭圆的中心是原点 O，它的短轴长为 $2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c,0)$（$c>0$）的准线 l 与 x 轴相交于点 A，$|OF|=2|FA|$，过点 A 的直线与椭圆相交于 P,Q 两点.

（Ⅰ）求椭圆的方程及离心率；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求直线 PQ 的方程.

例 4　（2007 江西理 21）如图 2，设动点 P 到点 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2，$\angle APB=2\theta$，且存在常数 λ（$0<\lambda<1$），使得 $d_1d_2\sin^2\theta=\lambda$.

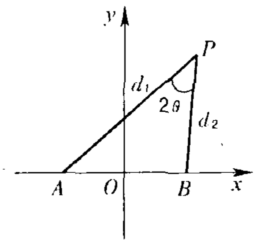

图 2

(1) 证明：动点 P 的轨迹 C 为双曲线，并求出 C 的方程；

(2) 过点 B 作直线双曲线 C 的右支于 M,N 两点，试确定 λ 的范围，使 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，其中点 O 为坐标原点.

例 5　（2008 辽宁理 20）在直角坐标系 xOy 中，点 P 到两点 $(0,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$ 的距离之和等于 4，设点 P 的轨迹为 C，直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A，B 两点.

（Ⅰ）写出 C 的方程；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，求 k 的值；

例 6　（2008 宁夏、海南理 20）在直角坐标系中，椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左右焦点分别为 F_1,F_2，F_2 也是抛物线 $C_2:y^2=4x$ 的焦点，点 M 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点，且 $|\overrightarrow{MF_2}|=\frac{5}{3}$.

(1) 求 C_1 的方程；

(2) 平面上的点 N 满足 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$，直线 $l/\!/MN$，且与 C_1 交于 A,B 两点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求直线 l 的方程.

例 7　(2009 北京理 22) 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$,右准线方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Ⅰ) 求双曲线 C 的方程;

(Ⅱ) 设直线 l 是圆 $O:x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0,y_0)\ (x_0y_0\neq0)$ 处的切线,l 与双曲线 C 交于不同的两点 A,B,证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

例 8　(2009 山东理 22) 椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$ 过 $M(2,\sqrt{2})\ N(\sqrt{6},1)$.

(Ⅰ) 求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ) 是否存在圆心在原点 O 的圆,使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B,且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$? 若存在,写出该圆方程,并求 $|AB|$ 的取值范围,若不存在说明理由.

其实对于二次曲线的此类问题早有成型的结论. 例如对于椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 设不过原点的直线 $l:mx+ny=1$,l 交 C 于 A,B 两点,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 的充要条件为 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=m^2+n^2$.

常见的证明方法为联立直线与椭圆的方程,消去 y,由韦达定理得两根关系,最后代入垂直条件,计算量颇为可观(这也就是考试中本类问题屡次出现的原因). 事实上,本题的简洁证法为利用曲线系,证明如下:

设交点坐标为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$. 又由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1=(mx+ny)^2$,得到 $(n^2-\frac{1}{b^2})y^2+2mnxy+(m^2-\frac{1}{a^2})x^2=0$,即 $(n^2-\frac{1}{b^2})(\frac{y}{x})^2+2mn\frac{y}{x}+(m^2-\frac{1}{a^2})=0$,又 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$ 据韦达定理即 $\frac{(m^2-\frac{1}{a^2})}{(n^2-\frac{1}{b^2})}=-1$,化简即得 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=m^2+n^2$.

类似地对双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$ 及 $l:mx+ny=1$ 的两交点 A,B,有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 的充要条件为 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=m^2+n^2$;

对抛物线 $C:y^2=2px\ (p>0)$ 及 $l:mx+ny=1$ 的两交点 A,B,有 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 的充要条件为 l 过定点 $(2p,0)$.

2　对二次曲线上的点张直角的弦的问题

由抛物线的结论,我们不禁要问:如果直角顶点不是原点,而在二次曲线上呢?

这又引出一系列高考及竞赛题目,计算量都蔚为大观. 当然用上述处理方法同理可以证明:对于二次曲线上一点 O,对此点张直角的直线恒过定点(二次曲线为等轴双曲线时直线斜率一定)的结论,一般称为富瑞吉(Fregier)定理[1](如图 3).

证明　选定点为坐标原点建立坐标系,设过原点的二次曲线的一般方程为:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0,$$

直线 $l:mx+ny=1$,同样有

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+(Dx+Ey)(mx+ny)=0,$$

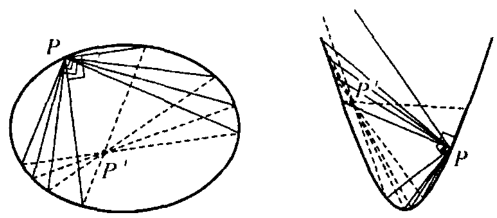

图 3

化为标准的二次式为 $(C+nE)y^2+(B+nD+mE)xy+(A+mD)x^2=0$,

即 $(C+nE)(\frac{y}{x})^2+(B+nD+mE)\frac{y}{x}+(A+mD)=0$,

由垂直及韦达定理得 $\frac{A+mD}{C+nE}=-1$,化简即 $nE+mD=-A-C$.

若 $A+C=0$,即二次曲线为等轴双曲线,则 $-\frac{m}{n}=\frac{E}{D}$,l 有定斜率 $\frac{E}{D}$;

若 $A+C\neq0$,则 $m\frac{D}{-A-C}+n\frac{E}{-A-C}=1$ 即 l 过定点 $(\frac{D}{-A-C},\frac{E}{-A-C})$,证毕.

上例中的抛物线结论显然为本结论的特殊情况.

以此为背景的高考题有:

例 9　(2007 年山东理 21) 已知椭圆 C 的中心在坐标原点,焦点在 x 轴上,椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3,最小值为 1.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的标准方程;

(Ⅱ)若直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A,B 两点(A,B 不是左右顶点),且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点.求证:直线 l 过定点,并求出该定点的坐标.

例 10 (2009 高中数学联赛陕西预赛)已知两点 $A(-\sqrt{5},0)$,$B(-\sqrt{5},0)$,$\triangle ABC$ 的内切圆圆心在直线 $x=2$ 上移动.

(1) 求点 C 的轨迹方程

(2) 过点 $M(2,0)$ 作两条射线,分别交(1)中所求轨迹于 P,Q 两点,且 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$,求证:直线 PQ 必过定点.

例 11 (2009 新知杯上海市高中竞赛)已知 A 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右顶点,过 A 的两条互相垂直的直线分别与双曲线的右支交于点 M,N. MN 是否一定过 x 轴上一定点,如果是,求出定点坐标.

进一步,对于平面上任意一点 O 和一个二次曲线 C,C 的弦 AB 对 O 张直角,有什么约束条件呢?

通过几何画板验证发现对椭圆此直线的包络为以 O 为焦点之一的椭圆(如图 4).

包络求法类似,以 O 为原点建立直角坐标系,设二次曲线的一般方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$,直线 $l: mx+ny=1$ 同样有 $Ax^2+Bxy+Cy^2+(Dx+Ey)(mx+ny)+F(mx+ny)^2=0$,化为二次齐次式为 $(C+nE+n^2F)y^2+(B+nD+mE+2mnF)xy+(A+mD+m^2F)x^2=0$,

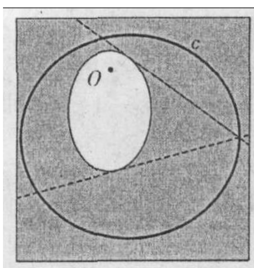

图 4

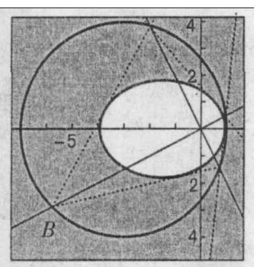

图 5

由韦达定理即得 $C+nE+n^2F+A+mD+m^2F=0$ 即 $A+C+mD+nE+n^2F+m^2F=0$.

由 $A+C+mD+nE+n^2F+m^2F=0$ 及 $mx+ny=1$ 得到齐次化的二次式.

$Fm^2+Fn^2+(mD+nE)(mx+ny)+(A+C)(mx+ny)^2=0$,

整理成关于 m,n 的二次式为:

$(F+Dx+(A+C)x^2)m^2+(Dy+Ex+2xy(A+C))mn+(F+yE+(A+C)y^2)n^2=0$.

由其判别式非负,得到

$(Dy+Ex+2xy(A+C))^2-4(F+yE+(A+C)y^2)(F+Dx+(A+C)x^2)\geqslant 0$,展开化简即得 $(4CF+4AF-E^2)x^2+2DExy+(4CF+4AF-D^2)y^2+4DFx+4EFy+4F^2\leqslant 0$.

此即为此弦的包络,显然其为二次曲线.

图 4 为一个验证特例.取二次曲线为圆 $(x+3)^2+y^2=16$,即

$x^2+y^2+6x-7=0$,$A=C=1$,$D=6$,$E=0$,$F=-7$,相应的弦的包络为 $14x^2+23y^2+42x-49\geqslant 0$,即为如图 5 所示内部的椭圆.

3 对于二次曲线,对其弦张直角的点的范围

需要注意的是,对于二次曲线而言,并非平面上的每个点都可以做出两条互相垂直的直线,使其都与二次曲线有公共点,只有在一定区域内的点才能作出.不难发现其临界条件为对二次曲线张直角(即过此点的两条切线互相垂直)的点的轨迹.而对于二次曲线所在平面,对其张直角的点的轨迹为圆,称为此二次曲线的准圆,又称蒙日(Monge)圆[3].特别地,对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$,其准圆方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$,证明如下:

设两切线交点坐标为 (x_0,y_0),切线斜率为 k,切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$,

代入椭圆方程整理得到:$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2k(y_0-kx_0)x+a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]=0$.

因直线与椭圆相切,则判别式为 0,即

$a^4k^2(y_0-kx_0)^2-(a^2k^2+b^2)a^2[(y_0-kx_0)^2-b^2]=0$,化简成关于 k 的二次方程为:

$(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0$,显然其有两实根,设为 k_1,k_2,由垂直知 $k_1\cdot k_2=-1$,即 $\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}=-1$,化简得 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$,所以对椭圆张直角的点的轨迹为圆.

对于双曲线和抛物线,不难用类似得到其准圆方程,不再赘述.

参考文献:

[1] 戴维.韦尔斯.奇妙而有趣的几何.上海教育出版社,2006.

[2] 蒋声译.圆锥曲线的几何性质.上海教育出版社,2002.

[3] 唐秀颖.数学题解词典(平面解析几何).上海辞书出版社,1983.

(收稿日期:2010－09－13)