HappaNotesBooks
（试用）

数　　学

OyamaHappa

数列

数学是人类智慧皇冠上最灿烂的明珠。——考特

目录

第 1 章 数列

像上面的例子中，按一定次序排列的一列数叫做**数列**。数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**，如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的**通项公式**。项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**。

1.1 等差数列

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 d 表示。

1.1.1 通项公式

等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d。}$$

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A ，使 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的 **等差中项**。

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A - a = b - A$，所以

$$A = \frac{a+b}{2}。$$

$$a_{n+1} - a_n = d$$

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}。}$$

因为 $a_n = a_1 + (n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d。}$$

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = dn - d + a_1 \Leftrightarrow \textbf{kn+b} \\ S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n \Leftrightarrow An^2 + Bn \end{gathered}}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

1.1.2 等差中项定理

$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$

$$a_m + a_n = a_p + a_q \Leftrightarrow \textbf{m+n=p+q}$$

1.1.3 前 n 项和的性质

①

$$S_{2n-1} = (2n-1)\cdot a_n$$

$$S_{2n+1} = (2n+1)\cdot a_{n+1}$$

$$S_{2n} = n\cdot(a_n + a_{n+1})$$

②

$\dfrac{S_{2n+1}}{T_{2n+1}} = \dfrac{(2n+1)\cdot a_{n+1}}{(2n+1)\cdot b_{n+1}} = \dfrac{a_n}{b_n}$

$$\boxed{\frac{S_{2n+1}}{T_{2n+1}} = \frac{a_n}{b_n}}$$

③

$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 构成等差数列,$d' = n^2 d$

④

$S_n = An^2 + Bn$

$\dfrac{S_n}{n} = An + B$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}n + (a_1 - \frac{d}{2}) \Rightarrow 公差为\frac{d}{2}$$

1.2 等比数列

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做**等比数列**，这个常数叫做等比数列的**公比**，公比通常用字母 q 表示。

等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}。}$$

上面的公式还可以改写成

$$a_n = \frac{a_1}{q}q^n = cq^n,$$

这里 $c = \dfrac{a_1}{q}$，它是一个不为零的常数。当 q 是不等于 1 的正数时，$y = q^x$ 是一个指数函数，而函数 $y = cq^x$ 是一个不为零的常数与指数函数的积。因此，从图上看，表示数列 $\{cq^n\}$ 各项的点都在函数 $y = cq^x$ 的图像上。

1.2.1 递推公式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 0$$

1.2.2 通项公式

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} n \in N^*$$

1.2.3 等比中项定理

$a_n \cdot a_{n+2} = (a_{n+1})^2$

$$a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_t \leftrightarrow m+n=s+t$$

奇数项同号

偶数项同号

1.2.4 求和

$S_n = \frac{a_1 \cdot (a-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n \Leftrightarrow A - A \cdot q$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$= \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}$$

1.2.5 性质

$S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 构成新等比数列且公比 $q' = q^n$

1.3 数列求通项

1.3.1 累加法

形式

$a_{n+1} = a_n + f(n)$

例题

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \ln(1+\frac{1}{n})$

$\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$

$$\left.\begin{aligned} a_2 = a_1 = \ln 2 - \ln 1 \\ a_3 - a_2 = \ln 3 - \ln 2 \\ \cdots \\ a_n - a_{n-1} = \ln n - \ln(n-1) \end{aligned}\right\} \text{累加} \Rightarrow a_n - a_1 = \ln n - \ln 1 = \ln n$$

$\therefore n \geq 2$ 时 $a_n = 2 + \ln n$

检验 n=1 时,$a_1 = 2$

$\therefore a_n = 2 + \ln n, n \in N^*$

1.3.2 累乘法

形式

$$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$$

例题

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{1}{2} \\ \frac{a_3}{a_2} &= \frac{2}{3} \\ &\ldots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{n-1}{n} \end{aligned}\right\} \text{累乘} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \ldots \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \frac{n-1}{n}$$

$\therefore n \geq 2$ 时 $a_n = a_1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

检验 n=1 时,$a_1 = 1$

$\therefore a_n = \frac{1}{n}, n \in N^*$

1.3.2.1 构造常数列

$(n+1)a_{n+1} = na_n$

令 $b_n = na_n$

$\Rightarrow b_{n+1} = b_n$

$\{b_n\}$ 为常数列, 且 $b_n = b_1 = a_1 = 1$

$\therefore a_n = \frac{b_n}{n} = \frac{1}{n} \quad n \in N^*$

1.3.3 构造法-待定系数法

形式

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

操作

构造等比

$a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda) \Rightarrow \lambda = \frac{q}{p-1}$

$\{a_n + \lambda\}$ 是公比为 p, 首项为 $a_1 + \lambda$ 的等比数列

例题

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n + 1$$

令 $a_{n+1}+k=4(a_n+k)$
$3k=1 \Rightarrow k=\dfrac{1}{3}$
$\therefore \dfrac{a_{n+1}+\frac{1}{3}}{a_n+\frac{1}{3}}=4$
$\Rightarrow \{a_n+\frac{1}{3}\}$ 是公比为 4 的等比数列
$\therefore a_n+\dfrac{1}{3}=(a_1+\dfrac{1}{3})\cdot 4^{n-1}=4^{n-1}$
$\therefore a_n=4^{n-1}-\dfrac{1}{3} \quad n\in N^*$

1.3.4 构造法-同除以指数

形式

$$a_{n+1}=pa_n+q^n$$

操作

两边同除 q^{n+1}
$\dfrac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{a_n}{q_n}$
转为待定系数法求解

例题

$$a_1=3, a_{n+1}=3a_n-3^n$$

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{1}{3}$
$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=-\dfrac{1}{3}$
$\{\frac{a_n}{3^n}\}$ 是公差为 $-\dfrac{1}{3}$ 的等差数列
$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{a_1}{3^1}+(n-1)(-\dfrac{1}{3})=-\dfrac{1}{3}n+\dfrac{4}{3}$
$\therefore a_n=(4-n)3^{n-1} \quad n\in N^*$

1.3.5 构造法- 取倒数

形式

$$a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_{n+r}}$$

操作

两边同取倒数
$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{qa_n+r}{pa_n}=\dfrac{r}{p}\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{q}{p}$
转为待定系数法求解

例题

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$$

$$\frac{1}{a_n+1} = \frac{1+a_n}{a_n} = \frac{1}{a_n+1}$$
$$\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{a^n} = 1$$
$\{\frac{1}{a_n}\}$ 是公差为 1 的等差数列
$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + n - 1 = n$$
$$\therefore a_n = \frac{1}{a_n} \quad n \in N^*$$

1.3.6 构造法- 取对数

形式

$$a_{n+1} = k{a_n}^m$$

操作

两边同取以 k 为底的对数

$\log_k a_{n+1} = \log_k(k{a_n}^m) = 1 + m\log_k(ka_n)$

转为待定系数法求解

1.4 列项相消

分子 = 分母之差

①

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

②

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2 \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$$

③

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{n+k-n}{n(n+k)} = \frac{1}{k}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k})$$

1.5 等差比数列

等差 × 等比

1.5.1 错位相减

$$a_n = -\frac{2}{3^n}, b_n = 2n - 1$$
$$c_n = -\frac{2b_n}{a_n} = (2n-1)\cdot 3^n$$
$$S_n?$$

1.5.1.1 ① 列

$$s_n = 1\cdot 3^1 + 3\cdot 3^2 + 5\cdot 3^3 + ... + (2n-3)\cdot 3^{n-1} + (2n-1)\cdot 3^n$$

1.5.1.2 ② 乘

$$qS_n = 1\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + ... + (2n-3)\cdot 3^n + (2n-1)\cdot 3^{n+1}$$

1.5.1.3 ③ 减

$$-2S_n = 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + ..._2 \cdot 3^n - (2n-1)\cdot 3^{n+1}$$

1.5.1.4 ④ 除

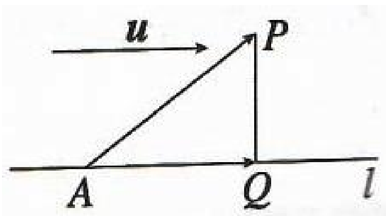
$$= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 2\cdot\frac{3(1-3^n)}{1-3} - 3 - (2n-1)\cdot 3^{n+1} = 3^{n+1} - 3 - 3 - (2n-1)\cdot 3^{n+1}$$
$$-2S_n = -(2n-2)\cdot 3^{n+1} - 6$$
$$S_n = (n-1)3^{n+1} + 3$$

第 2 章 空间向量

	对称轴或对称中心、对称平面	对称点坐标
$P(a,b,c)$	x 轴	$(a,-b,-c)$
	y 轴	$(-a,b,-c)$
	z 轴	$(-a,-b,c)$
	Oxy 平面	$(a,b,-c)$
	Oyz 平面	$(-a,b,c)$
	Ozx 平面	$(a,-b,c)$
	坐标原点	$(-a,-b,-c)$

2.1 点到直线的距离

已知直线 l 的单位方向向量为 $\mathbf{u}$, A 是直线 l 上的定点, P 是直线 l 外一点, 设 $\overrightarrow{AP}=\mathbf{a}$, 则向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u}$. 在 Rt $\triangle APQ$ 中, 由勾股定理, 得 $PQ=\sqrt{\left|\overrightarrow{AP}\right|^2-\left|\overrightarrow{AQ}\right|^2}=\sqrt{a^2-(a\cdot u)^2}$.



(1) 建立空间直角坐标系, 并求相应点的坐标.
(2) 求出直线的方向向量 $\mathbf{a}$ 的坐标, 并求 $|\mathbf{a}|$.
(3) 求以直线上某一特殊点为起点, 已知点为终主的向量 $\mathbf{b}$ 的坐标, 并求 $|\mathbf{b}|$, 计算 $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.
(4) 利用 $\sqrt{|\mathbf{b}|^2-\left(\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)^2}$ 求点到直线的距离.

2.2 点到平面的距离

已知平面 α 的法向量为 n, A 是平面 α 内的定点, P 是平面 α 外一点. 过点 P 作平面 α 的垂线 l , 交平面 α 于点 Q , 则点 P 到平面 α 的距离 $PQ=\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot n\right|}{|n|}$.