直角双曲线内接三角形的垂心问题

王 庆
(苏州市职业大学 数理部,江苏 苏州 215104)

摘 要: 目前,有关直角双曲线内接三角形垂心问题的研究还不多。本文用解析几何与射影几何的方法讨论这一问题,得出直角双曲线的内接三角形的垂心在原双曲线上的结论。

关键词: 直角双曲线;射影几何;垂心
中图分类号: O123.1 **文献标志码:** C **文章编号:** 1009-3907(2017)04-0023-02

目前,有关直角双曲线内接三角形垂心问题的研究还不多,网上只能找到一篇日本文献。本文用解析几何与射影几何的方法讨论这一问题,讨论中所用射影几何的概念及性质可见[1]。

性质1:直角双曲线的内接三角形的垂心在原双曲线上。

证明(1),首先用解析几何的方法讨论。

设:直角双曲线 $\begin{cases} x = a\sec t \\ y = a\tan t \end{cases}$ 的内接三角形 ΔPQR,其中 P、Q、R 分别对应 $t = 2\alpha, 2\beta, 2\gamma$,则 PQ 的斜率为

$$\frac{\tan(2\beta) - \tan(2\alpha)}{\sec(2\beta) - \sec(2\alpha)} = \frac{\sin(2\beta - 2\alpha)}{\cos(2\alpha) - \cos(2\beta)} = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}。 \quad (1)$$

设:$b = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$,$c = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$, (2)

取 $\omega = \arctan(-b/c)$,则 $b\cos\omega + c\sin\omega = 0$,该式可变形为

$$\begin{cases} \cos(\beta - \alpha)\cos(\omega - \gamma) + \sin(\beta + \alpha)\sin(\omega + \gamma) = 0 & (1) \\ \cos(\alpha - \gamma)\cos(\omega - \beta) + \sin(\alpha + \gamma)\sin(\omega + \beta) = 0 & (2) \\ \cos(\gamma - \beta)\cos(\omega - \alpha) + \sin(\gamma + \beta)\sin(\omega + \alpha) = 0 & (3) \end{cases}。 \quad (3)$$

取 S 为直角双曲线上对应 $t = 2\omega$ 的点,则 RS 的斜率为 $\cos(\omega - \gamma)/\sin(\omega + \gamma)$。而由上式(1)可得 $RS \perp PQ$,同理上式(2)可得 $QS \perp RP$、上式(3)可得 $PS \perp QR$。因此,S 就是 ΔPQR 的垂心 H,故 H 也在直角双曲线上。

下面用射影几何的方法证明,讨论中所用射影几何的概念及性质可见[1]。本文的讨论要多次用到射影几何的 Steiner 定理:设 A,B 是二次曲线上两定点,它们与二次曲线上动点 P 的连线的对应 AP a BP 是线束 A,B 间的射影映射,两线束间非透视的射影映射的对应直线的交点轨迹是二次曲线。为了给出性质1的证明,本文先给出如下的性质。

性质2:设 A,B 是双曲线上两定点,P 是动点,则 ΔABP 的垂心是一条二次曲线。

证明:如图1,以 AB 为直径作圆,设 PA,PB 分别交圆于 X、Y,AY 与 BX 的交点 H 是 ΔABP 的垂心。对双曲线与圆用 Steiner 定理可得:

$$A(AY,\cdots) \overline{\wedge} B(BY,\cdots) \overline{\wedge} A(AP,\cdots) \overline{\wedge} B(BX,\cdots),$$

由此得射影映射 φ:$A(AY,\cdots) \overline{\wedge} B(BX,\cdots)$,对应直线的交点就是所讨论三角形的垂心,易知它不是透视。由 Steiner 定理,这一射影映射的对应直线的交点构成一条二次曲线,线束的中心 A、B 也在这一二次曲线上。

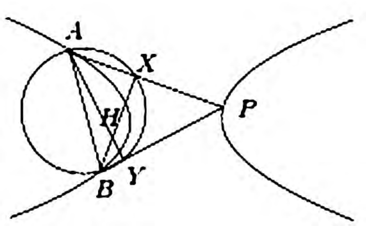

图1

收稿日期:2017-02-16
基金项目:国家自然科学基金项目(11271277);苏州市职业大学校级课题(SVU2015CGCX13)
作者简介:王庆(1979-),男,江苏高邮人,副教授,硕士,主要从事从事高等几何方面研究。

把性质中双曲线换成椭圆或抛物线也成立[2]。进一步可以证明,性质 2 中椭圆的内接三角形的垂心轨迹也是一个椭圆。

证明(2):设 P_∞、Q_∞ 是直角双曲线 Γ 上的无穷远点,它们也是直角双曲线的渐近线与曲线的交点(切点)。过 P_∞、Q_∞ 的直线互相垂直。设 A、B、C 是 Γ 上三点,H 是 ΔABC 的垂心。图 2 画出了无穷远直线。不难知道,$P_\infty \to Q_\infty$,$A_\infty \to E_\infty$,$B_\infty \to D_\infty$ 给出无穷远直线一个对合,过这一对合的对应点的直线互相垂直,对 Γ 上定点 A、B,动点 C 用 Steiner 定理可得无穷远直线上双曲型射影映射

φ: $P_\infty \to P_\infty, Q_\infty \to Q_\infty, D_\infty \to E_\infty$

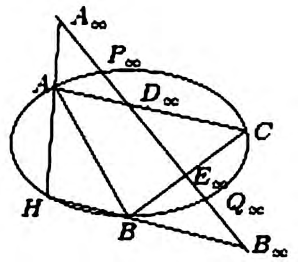

图 2

记交比 $R(P_\infty Q_\infty, D_\infty E_\infty) = k$,由[1]性质 2.2.2,$\varphi$ 的不动点 P_∞、Q_∞ 与它的任一对对应点的交比是常数,于是

$R(P_\infty Q_\infty, A_\infty B_\infty) = R(Q_\infty P_\infty, E_\infty D_\infty) = R(P_\infty Q_\infty, D_\infty E_\infty) = k$,

这证明 $\varphi(A_\infty) = B_\infty$。在定点 A、B,动点 C 给出的射影映射下,AA_∞ 的像是 BB_∞,由 Steiner 定理,H 是直角双曲线 Γ 上点。

为了进一步的讨论先给出下面的性质,叫做 Desargues 对合定理。

性质 3 一直线与完全四点形的三对对边交点是一个对合的三对对应点,过此完全四点形的二次曲线与直线的交点也是对合的对应点。

证明:如图 3 所示,设 Γ 是过完全四点形 $ABCD$ 的顶点的二次曲线,一直线与完全四点形的边交于 E、E',F、F',G、G',与 Γ 交于 P、Q,对 A、B 用 Steiner 定理可得,

$R(PQ, EF') = R(PQ, FE') = R(QP, E'F)$。

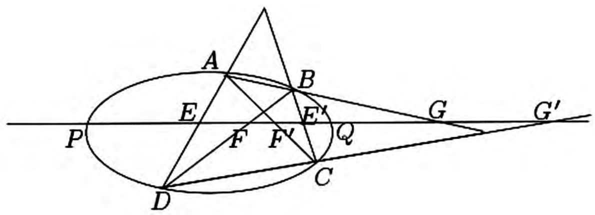

图 3

这证明有对合 φ_1,使 $P \to Q$,$E \to E'$,$F \to F'$。同理,对 B、C 用 Steiner 定理可得对合 φ_2,使 $P \to Q$,$F \to F'$,$G \to G'$。对合由两对对应点决定,这两个对合都把 P、F 分别变为 Q、F'。因此 $\varphi_1 = \varphi_2$,记为 φ。对合 φ 也由 $E \to E'$、$F \to F'$ 决定,与二次曲线 Γ 的选取无关,这证明了 Desargues 对合定理。

性质 4 过(非直角)三角形的顶点与垂心的二次曲线是直角双曲线。

证明: 设 Γ 是过 ΔABC 的顶点与垂心 H 的二次曲线,D、E、F 是三边上的垂足,DEF 是由 A、B、C、H 给出的完全四点形的对角三点形,也是 Γ 的自极三点形。显然,自极三点形 DEF 的每一条边的两边都有二次曲线上点,而二次曲线的自极三点形的三边中总有一边与二次曲线没有交点,这证明 Γ 是双曲线。设 A_∞、B_∞、D_∞、E_∞ 分别是 AH、BH、AC、BC 上的无穷远点,P_∞、Q_∞ 是 Γ 上无穷远点,如图 2 所示。由 Desargues 对合定理,$P_\infty \to Q_\infty, A_\infty \to E_\infty, B_\infty \to D_\infty$ 给出一个对合。过 A_∞、E_∞;B_∞、D_∞ 的直线分别垂直,由[1] §4.4 习题 8,过 P_∞、Q_∞ 的直线也垂直。这证明 Γ 的渐近线垂直,Γ 是等轴双曲线[3]。

参考文献:

[1] 周建伟. 高等几何[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

[2] 周建伟. 二次曲线局部与整体的关系[J]. 大学数学,2013,29(5):113-117.

[3] 王庆. 二次曲线垂直切线的研究[J]. 大学数学,2015,31(1):124-126.

[4] 石双双,杜旭东,白根柱. 扩展的三角函数展开法及其应用[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学版),2013(2):142-144.

责任编辑:程艳艳

Problem About Orthocenter of Rectangular Hyperbolic Inscribed Triangle

WANG Qing

(Department of Mathematics and Physics, Suzhou Vocational University, Suzhou 215104, China)

Abstract: At present, the research on the problem about orthocenter of rectangular hyperbolic inscribed triangle is not much. This paper uses the methods of analytic geometry and projective geometry to discuss the problem, giving a conclusion that the orthocenter of rectangular hyperbolic inscribed triangle is on the original hyperbolic.

Keywords: rectangular hyperbolic; projective geometry; orthocenter