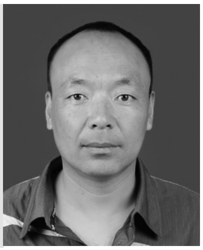
活跃在解析几何中的定比点差法

李守明（甘肃省兰州市第五中学　730000）
司恺（甘肃省兰州市第五十二中学　730000）

李守明　中学一级教师。主要从事高中数学教学及高考研究，多篇论文发表于《数学教学研究》《中学数学研究》等数学期刊。



若$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}(\lambda\neq-1)$，称$M$分有向线段$\overrightarrow{AB}$的比为$\lambda$.$M$为有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有

$$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right).$$

若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$在有心二次曲线$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}\pm\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{\lambda^2x_2^2}{a^2}\pm\dfrac{\lambda^2y_2^2}{b^2}=\lambda^2,\end{cases}$$

两式相减，得
$$\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{a^2}\pm\frac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{b^2}=1-\lambda^2,$$

两边同除以$1-\lambda^2$，得
$$\frac{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdot\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}}{a^2}\pm\frac{\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdot\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}}{b^2}=1,$$

通过这个表达式，当M为定点时，可以简化运算，这个方法叫做定比点差法，定比点差法在解析几何解题中有广泛的应用.

1.定比点差法在高考中的运用

例 1　已知F_1，F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的左右焦点，点A，B在椭圆上，且$\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$，则点$A$坐标是______.（2011 年浙江卷）

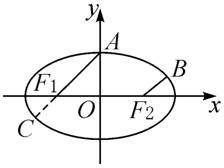


图 1

解　延长AF_1与椭圆相交于点C，

则
$$\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{CF_1},$$

设$A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

则
$$F_1\left(\frac{x_1+5x_2}{6},\frac{y_1+5y_2}{6}\right),$$

又
$$F_1(-\sqrt{2},0),$$

所以
$$x_1+5x_2=-6\sqrt{2},$$
$$y_1+5y_2=0.$$

由A，C在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上，

所以
$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{3}+y_1^2=1,\\ \dfrac{25x_2^2}{3}+25y_2^2=25,\end{cases}$$

两式相减，得
$$\frac{(x_1+5x_2)(x_1-5x_2)}{3}+(y_1+5y_2)(y_1-y_2)=-24,$$

把$x_1+5x_2=-6\sqrt{2}$，$y_1+5y_2=0$代入上式得
$$x_1-5x_2=6\sqrt{2},$$

与$x_1+5x_2=-6\sqrt{2}$联立即得
$$x_1=0,$$

所以
$$A(0,\pm1).$$

注　根据椭圆的对称性，把$\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$的问题转化为$\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{CF_1}$，从而构造过定点

F_1 的弦 AC，运用定比点差法解决.

例 2　已知椭圆 $C:x^2+3y^2=3$，过点 $D(1,0)$ 且不过点 $E(2,1)$ 的直线与椭圆交于 A,B 两点，直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M.

(1) 求椭圆 C 的离心率；

(2) 若 $AB\perp x$ 轴，求直线 BM 的斜率；

(3) 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系，并说明理由.

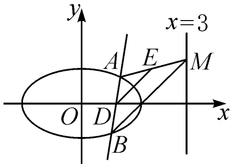


图 2

(2015 年北京卷)

解　(1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (2) 1.

(3) 设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}(\lambda\neq-1)$，

$$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),$$

则 $$D\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right),$$

又 $$D(1,0),$$

所以 $$\begin{cases}x_1+\lambda x_2=1+\lambda,\\ y_1+\lambda y_2=0,\end{cases}$$

由 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在 $C:x^2+3y^2=3$ 上，

故 $$\begin{cases}x_1^2+3y_1^2=3,\\ \lambda^2x_2^2+3\lambda^2y_2^2=3\lambda^2,\end{cases}$$

两式相减得

$$(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)+3(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)$$
$$=3(1+\lambda)(1-\lambda),$$

又 $1+\lambda\neq0$，得

$$x_1-\lambda x_2=3-3\lambda,$$

结合 $$x_1+\lambda x_2=1+\lambda,$$

所以 $$x_1=2-\lambda,\frac{AE}{EM}=\frac{2-x_1}{3-2}=\lambda.$$

因此 $$BM\parallel DE.$$

注　要判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系，根据 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$，只需判断 AE 与 EM 的比值是否为 λ，“化斜为直”，进一步转化为 $\frac{AE}{EM}=\frac{2-x_2}{3-2}$，达到证明的目的.

2. 定比点差法在竞赛中的运用

例 3　在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆的方程为 $x^2+y^2=4$，过点 $P(0,1)$ 的直线 l 与圆交于 A,B 两点，与 x 轴交于点 Q，设 $\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{PB}$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值.

(2018 年全国高中联赛江苏初赛)

证明　设 $Q(n,0)$，

由 $$P(0,1),\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{PA},$$
$$\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{PB},$$

则 $$A\left(\frac{n}{1-\lambda},\frac{\lambda}{\lambda-1}\right),$$
$$B\left(\frac{n}{1-\mu},\frac{\mu}{\mu-1}\right).$$

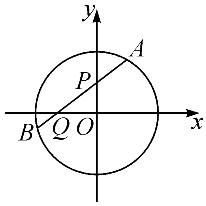


图 3

又 A,B 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

所以 $$\begin{cases}\left(\frac{n}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2=4,\\ \left(\frac{n}{1-\mu}\right)^2+\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^2=4,\end{cases}$$

两式相减，得 $$\lambda+\mu=4(\lambda+\mu)-8,$$

所以 $$\lambda+\mu=\frac{8}{3}.$$

注　借助定点 $P(0,1)$ 及 $\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{PB}$，表示出直线 l 与圆交点 A,B 的坐标，而 A,B 在圆上，坐标符合圆的方程，后续过程用做差法解决了需要证明的问题，是定比点差法的变用.

上述结论具有一般性，并且对椭圆双曲线也成立，下面以椭圆为例运用定比点差法证明.

已知不与 x 轴垂直的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 交于 A、B 两点，与 x 轴交于 P 点，与 y 轴交于 Q 点，若 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{PB}=\mu\overrightarrow{BQ}$，证明：若 Q 为定点，则 $\lambda+\mu$ 为定值.

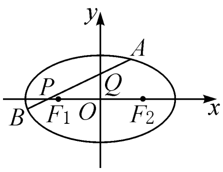


图 4

证明　设 $P(m,0)$，$Q(0,n)$，

由 $$\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}=\mu\overrightarrow{BQ},$$

则 $$A\left(\frac{m}{1+\lambda},\frac{\lambda n}{1+\lambda}\right),B\left(\frac{m}{1+\mu},\frac{\mu n}{1+\mu}\right),$$

由 A,B 两点在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，

所以 $$\begin{cases}\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{\lambda^2n^2}{b^2}=(1+\lambda)^2,\\ \dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{\mu^2n^2}{b^2}=(1+\mu)^2,\end{cases}$$

两式相减得

$$\frac{n^2}{b^2}=\frac{(1+\lambda)^2-(1+\mu)^2}{\lambda^2-\mu^2}=1+\frac{2}{\lambda+\mu},$$

则 $$\lambda+\mu=\frac{2b^2}{n^2-b^2}.$$

例4　圆 O 的圆心在坐标原点，过点 $P(0,1)$ 的动直线 l 与圆 O 相交于 A,B 两点，当直线 l 平行于 x 轴时，直线 l 被圆 O 截得的线段长为 $2\sqrt{3}$.

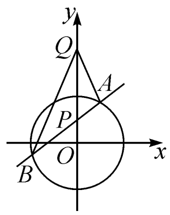


图5

(1) 求圆 O 的方程；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 内，是否存在与点 P 不同的点 Q，使得 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立？若存在，求出点 Q 的坐标，若不存在，请说明理由.

解　(1) $x^2+y^2=4$；

(2) l 平行于 x 轴时，$|PA|=|PB|$，

由此 $$|QA|=|QB|,$$

且 A,B 关于 x 轴对称，

因此，点 Q 在 y 轴上，

设 $Q(0,t)$，其中 $t\neq1$.

下面证明符合条件的点 $Q(0,t)$ 是存在的.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}(\lambda^2\neq1),$$

则 $$P\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right),$$

又 $$P(0,1),$$

所以 $x_1+\lambda x_2=0$，$y_1+\lambda y_2=1+\lambda$.

由 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

所以 $$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=4,\\ \lambda^2x_2^2+\lambda^2y_2^2=4\lambda^2,\end{cases}$$

两式相减得 $y_1-\lambda y_2=4(1-\lambda)$，

结合 $y_1+\lambda y_2=1+\lambda$，解得

$$y_1=\frac{5-3\lambda}{2},y_2=\frac{5\lambda-3}{2\lambda}.$$

$$\frac{|QA|^2}{|QB|^2}=\frac{x_1^2+\left(\frac{5-3\lambda}{2}-t\right)^2}{x_2^2+\left(\frac{5\lambda-3}{2\lambda}-t\right)^2}=\frac{(-\lambda x_2)^2+\left(\frac{5-3\lambda}{2}-t\right)^2}{x_2^2+\left(\frac{5\lambda-3}{2\lambda}-t\right)^2}=\lambda^2,$$

化简得 $$t=4.$$

所以存在 $Q(0,4)$，满足 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$.

注　本解法在直线 l 平行于 x 轴这种特殊位置时，探究得到符合条件的点 Q 在 y 轴上，然后用定比点差法证明了符合条件的点存在.

(上接第13页)

从而只需证 $2\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}\geqslant\sqrt{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$，

只需证 $4\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\geqslant2\left(a^2+2+\dfrac{1}{a^2}\right)$，

即证 $$a^2+\frac{1}{a^2}\geqslant2.$$

而上述不等式显然成立，故原不等式成立.

注　本题观察到已知条件简单($a>0$)，而证明的结论 $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}-\sqrt{2}\geqslant a+\dfrac{1}{a}-2$ 比较复杂，且条件和结论的联系不明确，根据条件推出结论比较困难，应转变传统的正向思维，采用逆向思维，从结论出发，寻找每步成立的充分条件，即用分析法证明.分析法是培养学生逆向思维能力最直接的方法，它能增大思维的发散量，克服思维定势的影响，有利于培养思维的灵活性.