再证抛物线内接三角形的面积公式

广西东兴市东兴中学　(538100)　吴中伟

文[1]中推导了抛物线内接三角形的面积的两个重要结论：

性质1　已知 A、B、C 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的三点，其纵坐标分别为 y_1,y_2,y_3，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$；若 A、B、C 是抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上的三点，其横坐标分别为 x_1,x_2,x_3，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4p}|(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)|$.

性质2　已知 A、B、C 是抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的三点，过 A、B、C 三点作抛物线的切线分别交于 P、Q、R 三点，则 $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta PQR}$.

本文给出了一个更简洁的方法，并且对这一面积公式给出一些举例应用. 现在先给出一个与向量有关的三角形面积公式.

定理：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

证明：$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cdot\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$，又因为 $|\overrightarrow{AB}^2||\overrightarrow{AC}|^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2$，$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2=(x_1x_2+y_1y_2)^2=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2$，所以 $S=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-y_1x_2)^2}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

性质1的简洁证明：易知 $A(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$，$C(\frac{y_3^2}{2p},y_3)$，则 $\overrightarrow{AB}=(\frac{y_2^2-y_1^2}{2p},y_2-y_1)$，$\overrightarrow{AC}=(\frac{y_3^2-y_1^2}{2p},y_3-y_1)$，由定理的公式得，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\frac{y_2^2-y_1^2}{2p}(y_3-y_1)-\frac{y_3^2-y_1^2}{2p}(y_2-y_1)|=\frac{1}{4p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$.

性质2的简洁证明：设 $A(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$，$C(\frac{y_3^2}{2p},y_3)$，易知过 A、B、C 三点的切线方程分别是 $l_A:y_1y=p(x+\frac{y_1^2}{2p})$，$l_B:y_2y=p(x+\frac{y_2^2}{2p})$，$l_C:y_3y=p(x+\frac{y_3^2}{2p})$，则联立方程可得 $P(\frac{y_1y_2}{2p},\frac{y_1+y_2}{2})$，$Q(\frac{y_1y_3}{2p},\frac{y_1+y_3}{2})$，$R(\frac{y_2y_3}{2p},\frac{y_2+y_3}{2})$，从而 $\overrightarrow{PQ}=(\frac{y_1}{2p}(y_3-y_2),\frac{y_3-y_2}{2})$，$\overrightarrow{PR}=(\frac{y_2}{2p}(y_3-y_1),\frac{y_3-y_1}{2})$，由定理公式得 $S_{\Delta PQR}=\frac{1}{2}|\frac{y_1}{4p}(y_3-y_2)(y_3-y_1),\frac{y_2}{4p}(y_3-y_2)(y_3-y_1)|=\frac{1}{8p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$. 从而 $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta PQR}$.

整个证明过程非常的简洁，省去了文[1]的采用弦长公式或点到直线的距离公式求长度的步骤. 接下来给出一些有关这一面积公式的举例应用.

例1　在平面直角坐标系中，已知抛物线 $C:x^2=4y$，点 P 是 C 的准线 l 上的动点，过点 P 作 C 的两条切线，切点分别为 A,B，求 $\triangle AOB$ 面积的最小值.

分析：由公式 $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{4p}|(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，所以只需找到 x_1x_2，x_1+x_2 的关系式代入运算即可. 而根据导数的知识可以得到切线 PA，PB 的方程，再把点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 分别代入发现 x_1,x_2 是方程 $x^2-2tx-4=0$ 的两个解.

解：设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，准线 $l:y=-1$，$y'=\frac{1}{2}x$，故可设点 $P(t,-1)$，则切线 PA 的方程为 $y+1=\frac{1}{2}x_1(x-t)$，把点 $A(x_1,y_1)$ 代入上式，得 $y_1+1=\frac{1}{2}x_1(x_1-t)$，又因为 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2$，所以有 $x_1^2-2tx_1$

$-4=0$,同理可得$x_2^2-2tx_2-4=0$. 故x_1,x_2是方程$x^2-2tx-4=0$的两个解. 由根与系数关系得,$x_1+x_2=2t,x_1x_2=-4$. 由公式$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{4p}|(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)|$可得$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{8}|(x_1-0)(0-x_2)(x_2-x_1)|=\frac{1}{8}|x_1x_2(x_2-x_1)|$
$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{1}{2}\sqrt{4t^2+16}$. 所以当$t=0$时,三角形$AOB$的面积取得最小值2.

例2 已知点$P(1,1)$为抛物线$y^2=x$上的一定点,斜率为$-\frac{1}{2}$的直线与抛物线交于A,B两点. (1)求弦AB的中点M的纵坐标. (2)若中点M的横坐标$x_0\in[2,6]$,求三角形ABP的面积取得最大值及对应的x_0的值.

分析:由公式$S_{\Delta ABP}=\frac{1}{4p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}|-y_1y_2-1+y_1+y_2|$知,只需找到$y_1y_2,y_1+y_2$的关系式代入运算即可. 而$y_1y_2,y_1+y_2$的关系式可以通过联立方程得到.

解:(1)设直线方程$y=-\frac{1}{2}x+b$,与方程$y^2=x$联立可得,$y^2+2y-2b=0$,设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=-2,y_1y_2=-2b$. $\Delta=4+8b>0\Rightarrow b>-\frac{1}{2}$. 所以弦$AB$的中点$M$的纵坐标为$\frac{y_1+y_2}{2}=-1$.

(2)点$M(x_0,-1)$代入方程$y=-\frac{1}{2}x+b$,得$b=\frac{1}{2}x_0-1$,因为$x_0\in[2,6]$,所以$b\in[0,2]$. 由公式得$S_{\Delta ABP}=\frac{1}{4p}|(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)|$得$S_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}|(y_1-y_2)(y_2-1)(1-y_1)|=\frac{1}{2}|y_1-y_2||-y_1y_2-1+y_1+y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}|-y_1y_2-1+y_1+y_2|=\sqrt{8b^3-20b^2+6b+9}$.

令$f(x)==8x^3-20x^2+6x+9,0\leqslant x\leqslant 2$,则$f'(x)=24x^2-40x+6=2(2x-3)(6x-1)$,所以$f'(x)=0$的解为$x=\frac{1}{6}$或$\frac{3}{2}$. $x\in[0,\frac{1}{6})$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;$x\in[\frac{1}{6},\frac{3}{2})$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;$x\in[\frac{3}{2},2]$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增. 所以$f(\frac{1}{6})=\frac{256}{27}$为$f(x)$的极大值,而$f(2)=5<f(\frac{1}{6})$. 所以$S_{\Delta ABP}\leqslant\sqrt{\frac{256}{27}}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$. 此时$x_0=\frac{7}{3}$.

点评:根据例1,2可以看出,相对于其他方法,利用性质1和2的面积公式求抛物线内接三角形的面积时更直接. 由公式变形直接转化成x_1x_2,x_1+x_2(或y_1y_2,y_1+y_2)的关系式,然后根据条件代入运算就可以得到结果.

参考文献

[1]房增军. 抛物线内接三角形的面积[J]. 中学数学研究(江西师大),2019(2).

椭圆范围矩形相关点的一个结论及应用*

广东省惠州市实验中学 (516003) 肖志向

在椭圆性质的学习中,我们知道,椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$位于直线$x=\pm a$与$y=\pm b$所围成的矩形框内,矩形四个顶点是$(\pm a,\pm b)$,其坐标

* 本文系广东省教育科学规划课题"问题驱动视野下高中数学主干知识的教学设计与实践研究"(课题批准号2019YQJK288)成果.