一类椭圆中定点问题的探究与平面几何证法溯源

摘要：椭圆中的定点问题是高考中的热门考点.本文在求解两道相似的定点问题基础上给出了一般的探究结果，并进一步通过射影定理逆定理给出了该结论的平面几何证法.通过代数手段计算和平面几何溯源，从多角度展示了这类定点问题的背景与实质，契合了当下高考在解析几何上的考查精神.

关键词：定点问题；代数计算；几何证明

椭圆中的定点问题是高考的高频考点，近两年高考中都有所考查.在圆锥曲线考题中，代数计算是首要的解题手段，它体现着解析法的基本思想，所以本文首先用代数计算对这类定点问题进行探究并归纳猜测出一般的结论.但与此同时，能否从几何角度入手，探寻这些问题的几何实质更是一件有趣的事情，唯有如此，我们对解析几何问题的认识才会更加深入，代数计算的有效性才会提升，而这正是近两年高考解析几何题目所呈现的一个显著特征，以数助形，以形推数. 因此，本文在立足代数运算探究处定点结论的基础上，进一步从平面几何的角度入手，给出了这类定点问题的几何实质，下面笔者将从模考中的两道相似的定点问题出发，逐步探究，给出结论，最后推广证明.

1.例题呈现

例 1.已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，左右顶点分别为 A,B，点 P 为 E 上异于 A,B 的动点，且 ΔPAB 面积最大值为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）令直线 AP 与 y 轴交于点 M，过点 A 且与直线 BP 平行的直线交 y 轴于点 N，以 MN 为直径的圆是否过定点，若是，求出定点坐标；若不过定点，说明理由.

解：（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（过程略）

（2）设点 $P(x_0,y_0)$，则有 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，即 $x_0^2-4=-\dfrac{4}{3}y_0^2\ldots\ldots$①，依题，直线 AM，AN 的斜率都存在，这样可得直线 AM 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，令 $x=0$ 可得 M 点的坐标为 $(0,\dfrac{2y_0}{x_0+2})$，同理直线 AN 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x+2)$，令 $x=0$ 可得 N 点的坐

标为$(0,\dfrac{2y_0}{x_0-2})$. 于是可得 MN 中点的为$(0,\dfrac{4x_0y_0}{x_0^2-4})$，将①式代入可进一步化简 MN 中点坐标为$(0,-\dfrac{3x_0}{2y_0})$. 另一方面，直径$|MN|=|\dfrac{2y_0}{x_0+2}-\dfrac{2y_0}{x_0-2}|=\dfrac{6}{|y_0|}$，这样就可得到以 MN 为直径的圆的方程为：$x^2+(y+\dfrac{3x_0}{2y_0})^2=\dfrac{9}{y_0^2}$. 由对称性可知，该定点在 x 轴上，故令 $y=0$ 代入圆的方程可得：$x^2=\dfrac{9}{y_0^2}-\dfrac{9x_0^2}{4y_0^2}=\dfrac{9(4-x_0^2)}{4y_0^2}=3$，故该定点的坐标为$(\pm\sqrt{3},0)$.

上述的证明过程紧紧围绕着先求出圆的标准方程再通过方程找定点的基本流程进行. 当笔者认为这就是一道普通的定点问题之时，无独有偶，在后续的模拟练习过程中再次遇到与例 1 类似的一道问题，这便是下面的例 2.

例 2. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 $F(-1,0)$，点 $M(0,2)$ 在椭圆 E 的外部，点 N 为椭圆 E 上一动点，且 ΔNMF 的周长最大值为 $2\sqrt{5}+4$.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）点 B,C 为椭圆 E 上关于原点对称的两个点，A 为左顶点，若直线 AB,AC 分别与 y 轴交于 P,Q 两点，试判断以 PQ 为直径的圆是否过定点，若是，求出定点坐标；若不过定点，说明理由.

（1）椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（过程略）.

（2）由（1）知 $A\left(-2,0\right)$，设 $B\left(x_0,y_0\right)$，则 $C\left(-x_0,-y_0\right)$.

当直线 BC 斜率存在时，设其方程为 $y=kx$，联立$\begin{cases}y=kx\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$得 $x^2=\dfrac{12}{3+4k^2}$

$\therefore x_0=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+4k^2}},y_0=\dfrac{2\sqrt{3}k}{\sqrt{3+4k^2}}$，　$AB:y=\dfrac{k}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{5}k^2}}(x+2)$

令 $x=0$，得 $y=\frac{2k}{1+\sqrt{1+\frac{4}{3}k^2}}$,$\therefore P\left(0,\frac{2k}{1+\sqrt{1+\frac{4}{3}k^2}}\right)$，同理可得

$$Q\left(0,\frac{2k}{1-\sqrt{1+\frac{k}{3}k^2}}\right)\ \therefore |PQ|=\left|\frac{2k}{1+\sqrt{1+\frac{4}{3}k^2}}-\frac{2k}{1-\sqrt{1+\frac{4}{3k^2}}}\right|=\frac{3\sqrt{1+\frac{4}{3}k^2}}{|k|}.$$

设 PQ 中点为S，则 $S\left(0,-\frac{3}{2k}\right)$，所以以 PQ 为直径的圆得方程为：

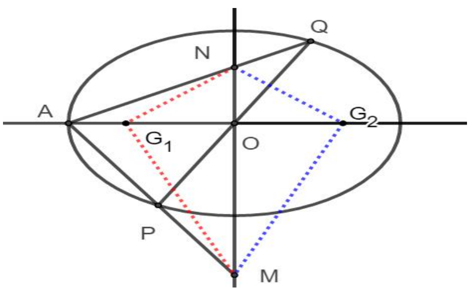
$x^2+\left(y+\frac{3}{2k}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{1+\frac{4}{3}k^2}}{2|k|}\right)^2$ 即 $x^2+y^2+\frac{6}{k}y-3=0$，由对称性可知，定点在 x 轴上，

令 $y=0$，得 $x=\pm\sqrt{3}$，所以过点 $\left(\sqrt{3},0\right)$ 和 $\left(-\sqrt{3},0\right)$，且为定点. 当直线 BC 斜率不存在时，容易知道 $B(0,\sqrt{3}),C(0,-\sqrt{3})$，此时 $P(0,\sqrt{3}),Q(0,-\sqrt{3})$ 所以以 PQ 为直径的圆是以原点为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆，显然也过定点 $\left(\sqrt{3},0\right)$ 和 $\left(-\sqrt{3},0\right)$，综上，此圆过定点 $\left(\sqrt{3},0\right)$ 和 $\left(-\sqrt{3},0\right)$.

2.一般结论的归纳

证明完例2，我发现这两道问题具有有趣的共性. 于是，我将这两道问题的一个基本特征总结一下，就得到下面的一般结论：

结论：设点 A 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点，点 P,Q 椭圆上关于坐标原点对称的两个点. 连接 AP,AQ 分别与 y 轴交于 M,N 两点，则以 MN 为直径的圆恒过定点 $(\pm b,0)$.



3. 几何观点下的证明

这样的一般结论在上述两个例题中都得到了验证，但是，对于很多定点，定值问题其背后都有着深刻的几何背景，比如极点极线等，那么这个题目是否也有几何背景呢？证明圆恒过定点一个常见思路就是利用直径所对所对圆周角为直角，即证明垂直，而平面几何中证垂直方法很多，如图，注意到上述两个题目均是以椭圆中基本关系 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，能否进一步推出垂直关系呢，沿着这样的思路，笔者终于探寻出一种几何证法如下：

证明：由 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，则 $ak_{AP}\cdot ak_{AQ}=-b^2\Leftrightarrow a\tan\angle QAO\cdot a\tan(\pi-\angle PAO)$

$=a\tan\angle QAO\cdot a\tan\angle PAO=b^2$，即 $|ON|\cdot|OM|=b^2$．由对称性可知，以 MN 为直径的圆所恒过定点在 x 轴上，因此，在 x 轴上选取 G_1,G_2 点使得 $|OG_1|=|OG_2|=b$，这样的话，$|ON|\cdot|OM|=|OG_1|^2=|OG_2|^2$．在 ΔMG_1N 中，$|ON|\cdot|OM|=|OG_1|^2\Rightarrow\dfrac{|ON|}{|OG_1|}=\dfrac{|OG_1|}{|OM|}$

即 ΔONG_1 相似于 ΔOG_1M，再加之 $GO\perp MN$，故可得 $G_1M\perp G_1N$，同理 $G_2M\perp G_2N$．即以 MN 为直径的圆恒过定点 $(\pm b,0)$．证毕.

这样，本文完成从两道常见的模考题出发归纳探究出一般的结论并最终通过平面几何的方法给出了一般结论的证明的过程. 上述一般的结论当然是我们继续命制相关解析几何试题的理论来源，其平面几何证法也丰富了我们的解题思路，为后续的解析几何研究开拓了视野.