# 抓住本质　简洁求解

## ——用二次曲线系方程解决一类解析几何问题

唐一良

(江苏省扬州中学,225009)

圆锥曲线是高中解析几何的重点内容,主要包括圆、椭圆、双曲线、抛物线,它们也常被称为二次曲线,两条相交直线可视为二次曲线的退化情形. 二次曲线方程一般形式为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

对于二次曲线系的一般方程,由圆系方程进一步可知如下结论:

**结论**　过两个二次曲线 $C_1$,$C_2$ 的交点的二次曲线系可设为 $C_1+\lambda C_2=0$.

**推论 1**　$L_1(x,y)=0$,$L_2(x,y)=0$,$F(x,y)=0$ 是两条不重合的直线和一条二次曲线,且两直线分别与曲线相交,则经过它们四个交点的二次曲线系方程为:$mF(x,y)+nL_1(x,y)L_2(x,y)=0$($m$,$n$ 不同时为零).

**推论 2**　$L_1(x,y)=0$,$L_2(x,y)=0$,$L_3(x,y)=0$,$L_4(x,y)=0$ 是四条两两不重合的直线,则过 $L_1$ 与 $L_2$、$L_2$ 与 $L_3$、$L_3$ 与 $L_4$、$L_4$ 与 $L_1$ 的交点的曲线系方程为 $mL_1(x,y)L_3(x,y)+nL_2(x,y)L_4(x,y)=0$($m$,$n$ 不同时为零).

---

列组合问题,通常用分类法. 本题采用的是间接法,适用于反面情况明确且易于计算的情况.

**十一、选排问题先取后排法**

**例 11**　四个不同的小球放入编号为 1,2,3,4 的四个盒子中,则恰有一个空盒的放法共有______种(用数字作答).

**解**　先从四个小球中取出两个放在一起,有 $C_4^2$ 种不同的取法;再把取出的两个小球与另外两个小球看作三堆,并分别放入四个盒子中的三个盒子里,有 $A_4^3$ 种不同的放法. 根据分步计算原理,共有 $C_4^2A_4^3=144$ 种不同的放法.

**点评**　本题正确求解的关键是把四个小球中的两个视为一个整体,如果考虑不周,就会出现重复和遗漏的错误.

**十二、部分符合条件淘汰法**

**例 12**　四面体的顶点及各棱中点共有 10 个点,在其中取 4 个不共面的点,不同的取法共有(　　)

(A) 150 种　　(B) 147 种

(C) 144 种　　(D) 141 种

**解**　10 个点中取 4 个点,共有 $C_{10}^4$ 种取法,其中同一侧面内的 6 个点中任取 4 个点必共面,这样的面共有 4 个;又同一条棱上的 3 个点与对棱的中点也四点共面,共有 6 个面;再各棱中点共 6 个点中,取四点共面的平面有 3 个. 故符合条件 4 个点不共面的取法共有 $C_{10}^4-4C_6^4-6-3=141$(种). 应选 D.

**点评**　在选取总数中,只有一部分符合条件,可从总数中减去不符合条件的个数,即为所求.

需要大家注意的是,上述所介绍的适用不同要求的各种方法并不是绝对的,对于同一问题有时会有多种方法,此时一定要认真思考和分析,寻找最佳解题途径,选取最佳解题方法.

应用上述二次曲线系方程的观点，有些问题可以得到更为简洁的求解与证明. 例说如下.

例 1　(2011 年全国高考题) 如图 1，已知 $F$ 为椭圆 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 在 $y$ 轴正半轴上的焦点，过点 $F$ 斜率为 $-\sqrt{2}$ 的直线 $l$ 与 $C$ 交于 $A,B$ 两点，点 $P$ 满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$.

(1) 证明：点 $P$ 在椭圆 $C$ 上；

(2) 设点 $P$ 关于点 $O$ 的对称点为 $Q$，证明：$A,B,P,Q$ 在同一圆上.

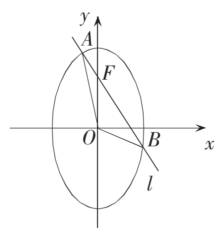

图 1

解　(1) 由条件易知，点 $F(0,1)$，直线 $l$ 的方程为 $y=-\sqrt{2}x+1$.

代入 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$，并化简得

$$4x^2-2\sqrt{2}x-1=0.$$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，则

$$x_1+x_2=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_1+y_2=-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2=1.$$

由题意得

$$x_3=-(x_1+x_2)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y_3=-(y_1+y_2)=-1,$$

所以点 $P$ 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$.

(2) 方法 1　由 $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，可得 $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. $PQ$ 的垂直平分线 $l_1$ 的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x. \quad ①$$

设 $AB$ 的中点为 $M$，则 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$，$AB$ 的垂直平分线 $l_2$ 的方程为

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{1}{4}. \quad ②$$

由①、②，得 $l_1,l_2$ 的交点为 $N\left(-\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{1}{8}\right)$.

$$|NP|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8},$$

$$|AB|=\sqrt{1+(-\sqrt{2})^2}\cdot|x_2-x_1|=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$|AM|=\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$|MN|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$|NA|=\sqrt{|AM|^2+|MN|^2}=\frac{3\sqrt{11}}{8}.$$

故 $|NP|=|NA|$. 由此知 $A$、$P$、$B$、$Q$ 四点在以 $N$ 为圆心，$NA$ 为半径的圆上.

方法 2　由(1)可知，直线 $PQ$ 方程为 $\sqrt{2}x-y=0$，$AB$ 方程为 $\sqrt{2}x+y-1=0$. 由推论 1 知，过 $PQ$、$AB$ 与椭圆 $C$ 交点 $A$、$B$、$P$、$Q$ 的二次曲线为 $2x^2+y^2-2+\lambda(\sqrt{2}x+y-1)(\sqrt{2}x-y)=0$，整理得 $(2+2\lambda)x^2+(1-\lambda)y^2-\lambda(\sqrt{2}x-y)-2=0$.

若表示圆，则 $2+2\lambda=1-\lambda$，$\lambda=-\frac{1}{3}$，二次曲线方程为 $4x^2+4y^2+\sqrt{2}x-y-6=0$，此即为 $A$、$B$、$P$、$Q$ 所在的圆的方程.

例 2　(2011 年四川高考题) 如图 2，椭圆有两顶点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 $l$ 与椭圆交于 $C$、$D$ 两点，并与 $x$ 轴交于点 $P$. 直线 $AC$ 与直线 $BD$ 交于点 $Q$.

(1) 当 $|CD|=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 时，求直线 $l$ 的方

程;

(2) 当点 $P$ 异于 $A$、$B$ 两点时,求证:$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.

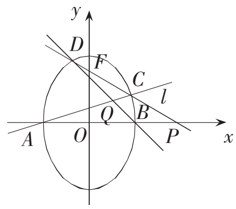


图 2

解 (1) 椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$,直线 $l$ 的方程为 $y=\sqrt{2}x+1$ 或 $y=-\sqrt{2}x+1$(过程略).

(2) 方法 1 依题意,可设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+1(k\neq0$ 且 $k\neq\pm1)$,所以 $P$ 点坐标为$\left(-\frac{1}{k},0\right)$.

设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,由(1)可知

$$x_1+x_2=-\frac{2k}{k^2+2},x_1x_2=-\frac{1}{k^2+2}.$$

直线 $AC$ 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$,直线 $BD$ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$.

将两直线方程联立,消去 $y$,得

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{y_2(x_1+1)}{y_1(x_2-1)}.$$

因为 $-1<x_1,x_2<1$,所以$\frac{x+1}{x-1}$与$\frac{y_2}{y_1}$异号.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2&=\frac{y_2^2(x_1+1)^2}{y_1^2(x_2-1)^2}\\&=\frac{2-2x_2^2}{2-2x_1^2}\cdot\frac{(x_1+1)^2}{(x_2-1)^2}\\&=\frac{(1+x_1)(1+x_2)}{(1-x_1)(1-x_2)}\\&=\frac{1+\frac{-2k}{k^2+2}+\frac{-1}{k^2+2}}{1-\frac{-2k}{k^2+2}+\frac{-1}{k^2+2}}\\&=\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2.\end{aligned}$$

又 
$$\begin{aligned}y_1y_2&=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1\\&=\frac{2(1-k)(1+k)}{k^2+2}\\&=\frac{2(1+k)^2}{k^2+2}\cdot\frac{k-1}{k+1},\end{aligned}$$

$\therefore$ $\frac{k-1}{k+1}$与 $y_1y_2$ 异号,$\frac{x+1}{x-1}$与$\frac{k-1}{k+1}$同号,

$$\therefore\quad\frac{x+1}{x-1}=\frac{k-1}{k+1},$$

解得 $x=-k$. 因此 $Q$ 点坐标为$(-k,y_0)$,

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{1}{k},0\right)\cdot(-k,y_0)=1,$$

即$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.

方法 2 设直线 $CD$ 方程为 $y=kx+1$,则 $P\left(-\frac{1}{k},0\right)$,直线 $AC$ 方程为 $y=k_1(x+1)$,直线 $BD$ 方程为 $y=k_2(x-1)$. 联立方程组,得交点坐标 $Q\left(\frac{k_1+k_2}{k_2-k_1},\frac{2k_1k_2}{k_2-k_1}\right)$,

$$\text{故 }\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{k_1+k_2}{k(k_2-k_1)}.\qquad①$$

由推论 2,经过 $A$,$B$,$C$,$D$ 四点的二次曲线方程可设为

$y(kx-y+1)+\lambda(k_1x-y+k_1)(k_2x-y-k_2)=0$. 与椭圆$\frac{y^2}{2}+x^2=1$ 比较系数得

$$\begin{cases}k-\lambda(k_1+k_2)=0,\\\lambda(k_2-k_1)+1=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}k_1+k_2=\frac{k}{\lambda},\\k_2-k_1=-\frac{1}{\lambda}.\end{cases}$$

代入①,得

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{k_1+k_2}{k(k_2-k_1)}=1(\text{定值}).$$

点评 通过比较可以发现,上述两个例题的方法 2 都避开了解析几何繁琐的计算,从二次曲线系方程出发进行解答,视角独特而深刻,抓住了问题的本质,故解答更简洁.