一类椭圆内接三角形的几个定值命题

广州市铁一中学 (510600) 何重飞

广州市广东仲元中学 (510000) 严运华

熟知, 若 ΔABC 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 ΔABC 的重心, 则 ΔABC 的面积为定值 $\dfrac{\sqrt{3}ab}{4}$. 笔者研究发现, 以椭圆中心为重心的椭圆内接三角形有许多优美的性质, 下面就这一类三角形的几个定值命题与大家一起探讨.

命题 1 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点到以椭圆中心原点 O 为重心的椭圆内接三角形的三个顶点的距离的平方和与该点到椭圆两焦点距离的乘积的 3 倍之和为定值 $\dfrac{9}{2}(a^2+b^2)$.

证明命题 1, 要利用如下两个引理.

引理 1 若 ΔABC 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 ΔABC 的重心, 则 A,B,C 三点的离心角分别为 $\theta,\theta+\dfrac{2\pi}{3},\theta-\dfrac{2\pi}{3}$.

证明 依题意设 $A(a\cos\theta_1,b\sin\theta_1)$, $B(a\cos\theta_2,b\sin\theta_2)$, $C(a\cos\theta_3,b\sin\theta_3)$, 则有

$$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2=-\cos\theta_3 & ①\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2=-\sin\theta_3 & ②\end{cases}$$

由 $①^2+②^2$ 得 $\cos(\theta_1-\theta_2)=-\dfrac{1}{2}$, 同理可得 $\cos(\theta_2-\theta_3)=-\dfrac{1}{2}$, $\cos(\theta_1-\theta_3)=-\dfrac{1}{2}$, 故可设 $\theta_1=\theta,\theta_2=\theta+\dfrac{2\pi}{3},\theta_3=\theta-\dfrac{2\pi}{3}$, 引理得证.

引理 2 若 ΔABC 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 ΔABC 的重心, 则 $AB^2+BC^2+CA^2=\dfrac{9}{2}(a^2+b^2)$.

证明 由引理 1 可设 ΔABC 的三点坐标为 $A(a\cos\theta,b\sin\theta)$, $B(a\cos(\theta+\dfrac{2\pi}{3}),b\sin(\theta+\dfrac{2\pi}{3}))$, $C(a\cos(\theta-\dfrac{2\pi}{3}),b\sin(\theta-\dfrac{2\pi}{3}))$, 则有

$$\begin{aligned}AB^2&=a^2(\sin(\theta+\frac{2\pi}{3})-\sin\theta)^2+b^2(\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})-\cos\theta)^2\\&=3a^2\sin^2(\theta+\frac{\pi}{3})+3b^2\cos^2(\theta+\frac{\pi}{3})\end{aligned}$$

同理 $BC^2=3a^2\sin^2\theta+3b^2\cos^2\theta$, $CA^2=3a^2\sin^2(\theta-\dfrac{\pi}{3})+3b^2\cos^2(\theta-\dfrac{\pi}{3})$, 又因为

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\frac{\pi}{3})+\sin^2(\theta-\frac{\pi}{3})\\=&\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\frac{\pi}{3})+\cos^2(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

所以有 $AB^2+BC^2+CA^2=\dfrac{9}{2}(a^2+b^2)$, 引理得证.

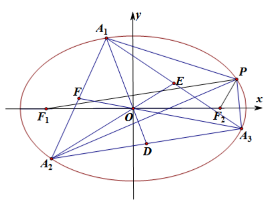

图 1

命题 1 的证明 如图 1, 设 $\Delta A_1A_2A_3$ 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心, $\Delta A_1A_2A_3$ 三条边 A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 长度分别为 a_1,a_2,a_3, 点 P 是椭圆 C 上的任意一点, D,E,F 分别是边 A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 的中点, F_1,F_2 分别是椭圆 C 的左右焦点, 记三条中线 A_1D,A_2E,A_3F 的长度分别为 m_1,m_2,m_3, 由中线长公式知

$$PD^2=\frac{1}{2}PA_2^2+\frac{1}{2}PA_3^2-\frac{1}{4}a_1^2 \quad ③$$

$$PE^2=\frac{1}{2}PA_3^2+\frac{1}{2}PA_1^2-\frac{1}{4}a_2^2 \quad ④$$

$$PF^2=\frac{1}{2}PA_1^2+\frac{1}{2}PA_2^2-\frac{1}{4}a_3^2 \quad ⑤$$

由 ③+④+⑤ 得 $PD^2+PE^2+PF^2=\sum\limits_{i=1}^{3}PA_i^2-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^2$; 再由 Stewart 定理知

$$\begin{aligned}PO^2&=\frac{1}{3}PA_1^2+\frac{2}{3}PD^2-\frac{2}{9}m_1^2\\&=\frac{1}{3}PA_2^2+\frac{2}{3}PE^2-\frac{2}{9}m_2^2\\&=\frac{1}{3}PA_3^2+\frac{2}{3}PF^2-\frac{2}{9}m_3^2\end{aligned}$$

又因为

$$PO^2=\frac{1}{2}PF_1^2+\frac{1}{2}PF_2^2-\frac{1}{4}F_1F_2^2=a^2+b^2-PF_1\cdot PF_2$$

且 $\sum\limits_{i=1}^{3}{m_i}^2=\dfrac{3}{4}\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^2$, 所以有

$$3PO^2=\sum_{i=1}^{3}PA_i^2-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}a_i^2=3(a^2+b^2-PF_1\cdot PF_2)$$

又由引理 2 知 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^2=\frac{9}{2}(a^2+b^2)$, 所以有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}PA_i^2+3PF_1\cdot PF_2\\=&3(a^2+b^2)+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}a_i^2=\frac{9}{2}(a^2+b^2).\end{aligned}$$ 证毕.

当动点 P 在 $A_i(i=1,2,3)$ 时, 即可得到

推论 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心, F_1,F_2 分别是是椭圆 C 的左右焦点, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{3}A_iF_1\cdot A_iF_2=\frac{3}{2}(a^2+b^2)$.

证明 当点 P 在 A_1 上时, 由命题 1 知 $A_1A_2^2+A_1A_3^2+3A_1F_1\cdot A_1F_2=\frac{9}{2}(a^2+b^2)$, 同理, 当点 P 在 A_2 和 A_3 上时,

$$\begin{aligned}&A_2A_3^2+A_2A_1^2+3A_2F_1\cdot A_2F_2\\=&A_3A_1^2+A_3A_2^2+3A_3F_1\cdot A_3F_2=\frac{9}{2}(a^2+b^2),\end{aligned}$$

整理由引理 2 得 $\sum\limits_{i=1}^{3}A_iF_1\cdot A_iF_2=\frac{3}{2}(a^2+b^2)$. 证毕.

由命题 1 及其证明过程亦可得到如下两个命题.

命题 2 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心, 点 P 是椭圆 C 上任意一点, F_1,F_2 分别是是椭圆 C 的左右焦点, 则有

$$\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{PA_2}+\overrightarrow{PA_2}\cdot\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{PA_3}\cdot\overrightarrow{PA_1}-3\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{9}{4}a^2-\frac{15}{4}b^2.$$

证明 如图 1, 由极化恒等式知

$$\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{PA_2}=\overrightarrow{PF}^2-(\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_2})^2=PF^2-\frac{1}{4}{a_3}^2,$$

同理由命题 1 及其证明知

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PA_j}&=\sum_{i=1}^{3}{PA_i}^2-\frac{9}{4}(a^2+b^2)\\&=\frac{9}{4}(a^2+b^2)-3PF_1\cdot PF_2,\end{aligned}$$

又因为

$$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{PO}^2-(\frac{1}{2}\overrightarrow{F_1F_2})^2=2b^2-PF_1\cdot PF_2,$$

所以有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\overrightarrow{PA_i}\cdot\overrightarrow{PA_j}-3\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{9}{4}a^2-\frac{15}{4}b^2.$$

命题 3 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心, F_1,F_2 分别是椭圆 C 的左右焦点, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{3}\overrightarrow{A_iF_1}\cdot\overrightarrow{A_iF_2}=\frac{9}{2}b^2-\frac{3}{2}a^2$.

证明 由极化恒等式知

$$\overrightarrow{A_iF_1}\cdot\overrightarrow{A_iF_2}=\overrightarrow{A_iO}^2-(\frac{1}{2}\overrightarrow{F_1F_2})^2=\frac{4}{9}m_i^2-c^2(i=1,2,3)$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{3}m_i^2=\frac{3}{4}\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^2$, 所以有 $\sum\limits_{i=1}^{3}\overrightarrow{A_iF_1}\cdot\overrightarrow{A_iF_2}=\frac{9}{2}b^2-\frac{3}{2}a^2$. 证毕.

命题 4 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个内接三角形, 且原点 O 是 $\Delta A_1A_2A_3$ 的重心, 若直线 A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 都存在斜率, 且斜率分别为 k_1,k_2,k_3, 则有

(1) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}k_i\cdot k_j=-\frac{3b^2}{a^2}$;

(2) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\frac{1}{k_i\cdot k_j}=-\frac{3a^2}{b^2}$;

(3) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}k_i\cdot k_j\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\frac{1}{k_i\cdot k_j}=9$.

证明 由引理 1 可设 $A_1(a\cos\theta,b\sin\theta)$, $A_2(a\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}),b\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}))$, $A_3(a\cos(\theta-\frac{2\pi}{3}),b\sin(\theta-\frac{2\pi}{3}))$, 则

$$k_1=\frac{b\sin(\theta+\frac{2\pi}{3})-b\sin(\theta-\frac{2\pi}{3})}{a\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})-a\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})}=-\frac{b}{a}\cot\theta,$$

同理可得 $k_2=-\frac{b}{a}\cot(\theta-\frac{\pi}{3})$, $k_3=-\frac{b}{a}\cot(\theta+\frac{\pi}{3})$, $k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}\cot\theta\cot(\theta-\frac{\pi}{3})$, $k_2k_3=\frac{b^2}{a^2}\cot(\theta+\frac{\pi}{3})\cot(\theta-\frac{\pi}{3})$, $k_3k_1=\frac{b^2}{a^2}\cot\theta\cot(\theta+\frac{\pi}{3})$, 又因为有三角恒等式

$$\cot\theta\cot(\theta+\frac{\pi}{3})+\cot\theta\cot(\theta-\frac{\pi}{3})+\cot(\theta+\frac{\pi}{3})\cot(\theta-\frac{\pi}{3})=-3,$$

$$\tan\theta\tan(\theta+\frac{\pi}{3})+\tan\theta\tan(\theta-\frac{\pi}{3})+\tan(\theta+\frac{\pi}{3})\tan(\theta-\frac{\pi}{3})=-3,$$

所以有 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}k_ik_j=-\frac{3b^2}{a^2}$; $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\frac{1}{k_ik_j}=-\frac{3a^2}{b^2}$; $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}k_ik_j\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\frac{1}{k_ik_j}=9$.

以椭圆中心为重心的椭圆内接三角形是否还有其他定值性质, 或者其他圆锥曲线中是否有类似的定值性质留给感兴趣的读者进一步探究.

参考文献

[1] 何重飞. “重心圆”的有趣性质及其推广 [J]. 福建中学数学, 2018(2): 9-11.

[2] 何重飞. “重心圆”的有趣定值的再推广 [J]. 福建中学数学, 2019(3): 10-12.

[3] 俞振. 椭圆中的内接三角形的性质探究 [J]. 中学生数理化, 2017(8): 18.

[4] 贺功保. 三角形的六心及其应用 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015: 473.