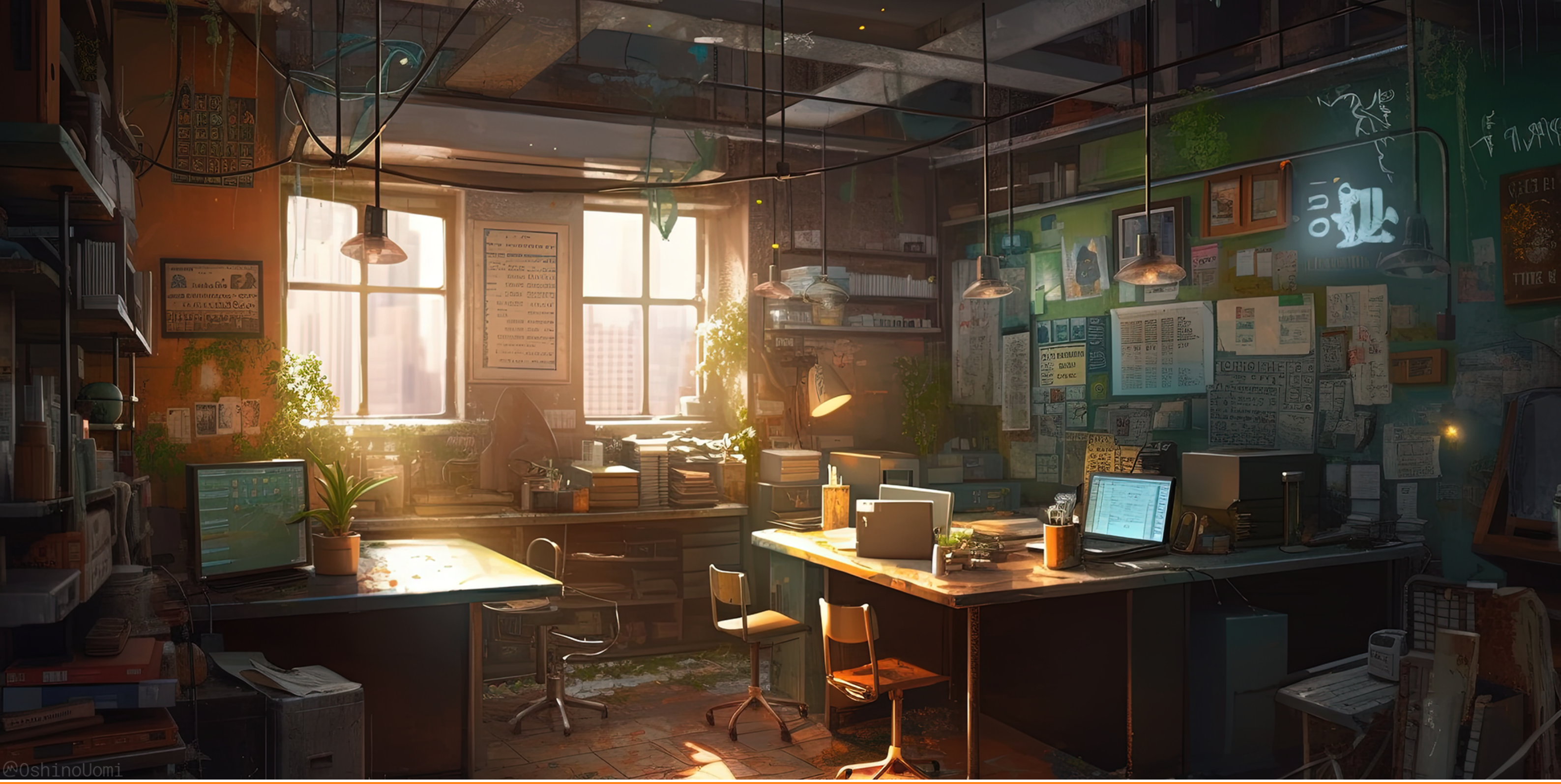

高中数学数列通项公式常用 15 种求法

作者：宋利峰

时间：July 23, 2024

版本：20240723221307

目录

第 1 章 高中数学数列通项公式常用 15 种求法

1.1 类型 1 (迭加法)

$$a_{n+1}-a_n=f(n)=\begin{cases}2n-1\\ 2^n\\ 2n-1+2^n\\ (2n-1)\,2^{n-1}\\ \log_2^{\frac{n+1}{n}}\\ \dfrac{1}{n(n+1)}\end{cases},a_1=1\text{，求 }a_n$$

以上 6 种情况都要试着做一遍

例 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{2},a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n^2+n}$，求 a_n。

解: 由条件知: $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

分别令 $n=1,2,3,\cdots,(n-1)$，代入上式得 $(n-1)$ 个等式累加之, 即

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

所以 $a_n-a_1=1-\dfrac{1}{n}$

$$a_1=\frac{1}{2},\therefore a_n=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$$

1.2 类型 2 (迭乘法)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{n}\\ 2^n\end{cases},a_1=1\text{，求 }a_n$$

例 2: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{2}{3},a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}a_n$，求 a_n。

解: 由条件知 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}$，

分别令 $n=1,2,3,\cdots,(n-1)$，代入上式得 $(n-1)$ 个等式累乘之, 即

$$\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\Rightarrow\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n}$$

又 $\because a_1=\dfrac{2}{3},\therefore a_n=\dfrac{2}{3n}$

1.3 类型 3 (退一相减法)

递推公式为 S_n 与 a_n 的关系式。(或 $S_n=f(a_n)$)

解法: 这种类型一般利用 $a_n=\begin{cases}S_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n=1)\\ S_n-S_{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(n\geq 2)\end{cases}$

与 $a_n=S_n-S_{n-1}=f(a_n)-f(a_{n-1})$ 消去 $S_n\ (n\geq 2)$ 或与 $S_n=f(S_n-S_{n-1})\ (n\geq 2)$ 消去 a_n 进行求解。

常见题型: 1、$S_n=n^2+n+1$，求 a_n (S_n 与 n 关系)

2、$S_n = 3a_n + 2$，求 a_n (S_n 与 a_n 关系)

3、$\frac{n+1}{3} = 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + \cdots + 2^na_n$，求 a_n (n与a_n)

例: 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$.

(1) 求 a_{n+1} 与 a_n 的关系; (2) 求通项公式 a_n .

解: (1) $S_n = 4 - a_n - \frac{1}{2^{n-2}}$ 得: $S_{n+1} = 4 - a_{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}$

于是 $S_{n+1} - S_n = (a_n - a_{n+1}) + \left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

所以 $a_{n+1} = a_n - a_{n+1} + \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^n}$.

1.4 类型 3 (构造法 1)

$a_{n+1} = pa_n + q$ (其中 p, q 均为常数, $(pq(p-1) \neq 0)$)。

可以转化为 $(a_{n+1} + \lambda) = p(a_n + \lambda)$，其中 $\lambda = \frac{q}{p-1}$

例: 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$，求 a_n .

解: 设递推公式 $a_{n+1} = 2a_n + 3$ 可以转化为 $a_{n+1} - \lambda = 2(a_n - \lambda)$ 即 $a_{n+1} = 2a_n - \lambda \Rightarrow \lambda = -3$.

故递推 $a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$，令 $b_n = a_n + 3$，则 $b_1 = a_1 + 3 = 4$，且 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}+3}{a_n+3} = 2$ 。

所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = 4$ 为首项,2 为公比的等比数列, $b_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$，所以 $a_n = 2^{n+1} - 3$.

1.5 类型 4 (构造法 2)

$a_{n+1} = pa_n + q^n$ (其中 p, q 均为常数, $(pq(p-1)(q-1) \neq 0)$)。

(或 $a_{n+1} = pa_n + rq^n$，其中 p, q, r 均为常数)。等式两边同除以 q^{n+1} 或者 p^n

例: 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{5}{6}, a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，求 a_n .

解: 在 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 两边乘以 2^{n+1} 得: $2^{n+1} \cdot a_{n+1} = \frac{2}{3}(2^n \cdot a_n) + 1$

令 $b_n = 2^n \cdot a_n$，则 $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + 1$，

解之得: $b_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

所以 $a_n = \frac{b_n}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

1.6 类型 5 (构造法 3)

$a_{n+1} = pa_n + an + b\,(p \neq 1, 0, a \neq 0)$

解法: 这种类型一般利用待定系数法构造等比数列, 即令

$a_{n+1} + k(n+1) + m = p(a_n + kx + m)$，与已知递推式比较, 解出 k, m 而转化为 $\{a_n + kn + m\}$ 是公比为 p 的等比数列。

例: 设数列 $\{a_n\} : a_1 = 4, a_n = 3a_{n-1} + 2n - 1, (n \geq 2)$，求 a_n .

解: 设 $b_n = a_n + An + B$，则 $a_n = b_n - An - B$，将 a_n, a_{n+1} 代入递推式, 得

$$b_n - An - B = 3[b_{n-1} - A(n-1) - B] + 2n - 1$$

$$= 3b_{n-1} - (3A-2)n - (3B - 3A + 1)$$

$$\therefore \begin{cases} A = 3A - 2 \\ B = 3B - 3A + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

1.7 类型 6 (构造法 4)

$a_{n+1} = pa_n^r \, (p > 0, a_n > 0)$

解法: 这种类型一般是等式两边取对数后转化为 $a_{n+1} = pa_n + q$, 再利用待定系数法求解。

例: 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot a_n^2 \, (a > 0)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解: 由 $a_{n+1} = \frac{1}{a} \cdot a_n^2$ 两边取对数得 $\lg a_{n+1} = 2 \lg a_n + \lg \frac{1}{a}$,

令 $b_n = \lg a_n$, 则 $b_{n+1} = 2b_n + \lg \frac{1}{a}$, 再利用待定系数法解得: $a_n = a \left(\frac{1}{a}\right)^{2^n - 1}$ 。

1.8 类型 7 (倒数法)

$a_{n+1} = \dfrac{\lambda a_n}{pa_n + q}$

解法: 这种类型一般是等式两边取倒数后换元转化为 $a_{n+1} = pa_n + q$ 。

高中阶段涉及到分式形式数列, 通常是采用倒数法或者是一个周期数列

例: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{3 \cdot a_{n-1} + 1}, a_1 = 1$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解: 取倒数: $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{3 \cdot a_{n-1} + 1}{a_{n-1}} = 3 + \dfrac{1}{a_{n-1}}$

$\therefore \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列, $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + (n-1) \cdot 3 = 1 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = \dfrac{1}{3n-2}$

1.9 类型 8 (构造法 5)

$pa_{n+1}a_n = a_n - a_{n+1}$

两边同除以 $a_{n+1}a_n$

练习: $3a_{n+1}a_n = a_n - a_{n+1}, a_1 = 1$, 求 a_n

1.10 类型 9 (构造法 6)

递推公式为 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ (其中 p, q 均为常数).

(连续三项时要注意拆中间项)

解法一 (待定系数法) : 先把原递推公式转化为 $a_{n+2} - sa_{n+1} = t\,(a_{n+1} - sa_n)$

其中 s, t 满足 $\begin{cases} s + t = p \\ st = -q \end{cases}$

第一部分

选学：自招和竞赛需要会要、特征根法

解法二 (特征根法): 对于由递推公式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n, a_1=\alpha, a_2=\beta$ 结出的数列 $\{a_n\}$，方程 $x^2-px-q=0$，叫做数列 $\{a_n\}$ 的特征方程。若 x_1,x_2 是特征方程的两个根, 当 $x_1\neq x_2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$，其中 A, B 由 $a_1=\alpha, a_2=\beta$ 决定(即把 a_1,a_2,x_1,x_2 和 $n=1,2$，代入 $a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$，得到关于 A、B 的方程组), 当 $x_1=x_2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=(A+Bn)\,x_1^{n-1}$，其中 A, B 由 $a_1=\alpha, a_2=\beta$ 决定 (即把 a_1,a_2,x_1,x_2 和 $n=1,2$，代入 $a_n=(A+Bn)\,x_1^{n-1}$，得到关于 A.B 的方程组)。

解法一 (待定系数一迭加法):

数列 $\{a_n\}: 3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0\,(n\geq 0, n\in N)$，$a_1=a, a_2=b$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

由 $3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$，得

$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\,(a_{n+1}-a_n)$

且 $a_2-a_1=b-a$ 。

则数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $b-a$ 为首项, $\dfrac{2}{3}$ 为公比的等比数列, 于是

$a_{n+1}-a_n=(b-a)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ 。把 $n=1,2,3,\cdots,n$ 代入, 得

$a_2-a_1=b-a,$

$a_3-a_2=(b-a)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$$a_4-a_3=(b-a)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$\cdots$

$$a_n-a_{n-1}=(b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}。$$

把以上各式相加, 得

$$a_n-a_1=(b-a)\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}\,(b-a)。$$

$$\therefore a_n=\left[3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right](b-a)+a=3\,(a-b)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3b-2a。$$

解法二 (特征根法):

数列 $\{a_n\}: 3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0\,(n\geq 0, n\in N)$，$a_1=a, a_2=b$ 的特征方程是:

$3x^2-5x+2=0.$

$$\Theta x_1=1, x_2=\frac{2}{3}$$

$\therefore a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}=A+B\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. 又由 $a_1=a, a_2=b$，于是

$$\begin{cases} a=A+B \\ b=A+\dfrac{2}{3}B \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=3b-2a \\ B=3\,(a-b) \end{cases}$$

故 $a_n=3b-2a+3\,(a-b)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

特征根高考时候涉及较少, 高考难度通常用第一种待定系数构造更好

类型 10 (选学) $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+h}$

解法: 如果数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件: 已知 a_1 的值且对于 $n\in N$，都有 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+h}$ (其中 p,q,r,h 均

为常数, 即 $ph \neq qr, r \neq 0, a_1 = -\dfrac{h}{r}$), 那么, 可作特征方程 $x = \dfrac{px+q}{rx+h}$, 当特征方程有且仅有一根 x_0 时, 则 $\left\{\dfrac{1}{a_n - x_0}\right\}$ 是等差数列; 当特征方程有两个相异的根 x_1, x_2 时, 则 $\left\{\dfrac{a_n - x_1}{a_n - x_2}\right\}$ 是等比数列。

例: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足性质: 对于 $n \in N$, $a_{n-1} = \dfrac{a_n + 4}{2a_n + 3}$ 且 $a_1 = 3$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解: 数列 $\{a_n\}$ 的特征方程为 $x = \dfrac{x+4}{2x+3}$, 变形得 $2x^2 + 2x - 4 = 0$, 其根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$.
故特征方程有两个相异的根, 使用定理 2 的第 (2) 部分, 则有

$$c_n = \frac{a_1 - \lambda_1}{a_1 - \lambda_2} \cdot \left(\frac{p - \lambda_1 r}{p - \lambda_2 r}\right)^{n-1} = \frac{3-1}{3+2} \cdot \left(\frac{1 - 1 \cdot 2}{1 - 2 \cdot 2}\right)^{n-1}, n \in N$$

$$\therefore c_n = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}, n \in N.$$

$$\therefore a_n = \frac{\lambda_2 c_n - \lambda_1}{c_n - 1} = \frac{-2 \cdot \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}, n \in N$$

即 $a_n = \dfrac{(-5)^n - 4}{2 + (-5)^n}, n \in N$.

类型 11 $a_{n+1} + a_n = pn + q$ 或 $a_{n+1} \cdot a_n = pq^n$

解法: 这种类型一般可转化为 $\{a_{2n-1}\}$ 与 $\{a_{2n}\}$ 是等差或等比数列求解。

例: (I) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 6n - a_n$, 求 a_n 。

(II) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n a_{n+1} = 3^n$, 求 a_n 。

计算过程略

类型 12 (构造法 3) 递推公式为 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ (其中 p, q 均为常数).

(连续三项时要注意拆中间项)

解法一 (待定系数法): 先把原递推公式转化为 $a_{n+2} - sa_{n+1} = t\left(a_{n+1} - sa_n\right)$

其中 s, t 满足 $\begin{cases} s + t = p \\ st = -q \end{cases}$

选学: 自招和竞赛需要会要、特征根法

解法二 (特征根法): 对于由递推公式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n, a_1 = \alpha, a_2 = \beta$ 结出的数列 $\{a_n\}$, 方程 $x^2 - px - q = 0$, 叫做数列 $\{a_n\}$ 的特征方程。若 x_1, x_2 是特征方程的两个根, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1}$, 其中 A, B 由 $a_1 = \alpha, a_2 = \beta$ 决定 (即把 a_1, a_2, x_1, x_2 和 $n = 1, 2$, 代入 $a_n = Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1}$, 得到关于 A、B 的方程组), 当 $x_1 = x_2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n = (A + Bn)\, x_1^{n-1}$, 其中 A, B 由 $a_1 = \alpha, a_2 = \beta$ 决定 (即把 a_1, a_2, x_1, x_2 和 $n = 1, 2$, 代入 $a_n = (A + Bn)\, x_1^{n-1}$, 得到关于 A.B 的方程组)。

解法一 (待定系数—迭加法) :

数列 $\{a_n\}: 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0\,(n \geq 0, n \in N)$, $a_1 = a, a_2 = b$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

由 $3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$, 得

$a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{2}{3}\left(a_{n+1} - a_n\right)$

且 $a_2 - a_1 = b - a$ 。

则数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $b - a$ 为首项, $\dfrac{2}{3}$ 为公比的等比数列, 于是

$a_{n+1} - a_n = (b - a)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ 。把 $n = 1, 2, 3, \cdots, n$ 代入, 得

$$a_2 - a_1 = b - a,$$

$$a_3 - a_2 = (b-a) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$$

$$a_4 - a_3 = (b-a) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

...

$$a_n - a_{n-1} = (b-a)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}。$$

把以上各式相加, 得

$$a_n - a_1 = (b-a)\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}(b-a)$$

$\therefore a_n = \left[3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right](b-a) + a = 3(a-b)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3b - 2a$ 。解法二 (特征根法) :
数列 $\{a_n\}: 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0\,(n \geq 0, n \in N), a_1 = a, a_2 = b$ 的特征方程是:
$3x^2 - 5x + 2 = 0.$
$\Theta x_1 = 1, x_2 = \dfrac{2}{3}$
$\therefore a_n = Ax_1^{n-1} + Bx_2^{n-1} = A + B \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.
又由 $a_1 = a, a_2 = b$, 于是

$$\begin{cases} a = A + B \\ b = A + \frac{2}{3}B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3b - 2a \\ B = 3(a-b) \end{cases}$$

故 $a_n = 3b - 2a + 3(a-b)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
特征根高考时候涉及较少, 高考难度通常用第一种待定系数构造更好

类型 13 数学归纳法

解法: 数学归纳法
变式: (2006, 全国 II, 理 22, 本小题满分 12 分)
设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且方程 $x^2 - a_n x - a_n = 0$ 有根为 $S_n - 1, n = 1, 2, 3, \cdots$
(I) 求 a_1, a_2 ; (II) $\{a_n\}$ 通项公式.
解答: (1) 当 $n = 1$ 时, $x^2 - a_1 x - a_1 = 0$
有一根为 $S_1 - 1 = a_1 - 1$, 于是 $(a_1 - 1)^2 - a_1(a_1 - 1) - a_1 = 0$
$\therefore a_1 = \dfrac{1}{2}$
当 $n = 2$ 时, 有一根为 $S_2 - 1 = a_2 - 1$, 于是 $(a_2 - 1)^2 - a_2(a_2 - 1) - a_2 = 0$
$\therefore a_2 = \dfrac{1}{6}$
(II) 由题设 $(S_n - 1)^2 - a(S_n - 1) - a_n = 0$
${S_n}^2 - 2S_n + 1 - a_n S_n = 0$
当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 代入上式得
$S_{n-1}S_n - 2S_n + 1 = 0$
由 (I) 知 $S_1 = a_1 = \dfrac{1}{2}$

$S_2 = a_2 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

由 可得 $S_3 = \frac{3}{4}$

猜想: $S_n = \frac{n}{n+1}, n = 1, 2, 3 \cdots$

下面用数学归纳法证明这个结论。

(i) $n = 1$ 时已知结论成立。

(ii) 假设 $n = k$ 时结论成立, 即 $S_k = \frac{k}{k+1}$

当 $n = k+1$ 时, 由 得 $S_{k+1} = \frac{1}{2 - S_k}$

即 $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

故 $n = k+1$ 时结论也成立。

综上, 由 (i)、(ii) 可知 $S_n = \frac{n}{n+1}$ 对所有正整数 n 都成立

于是当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$

又 n = 1 时, $a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$ 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a = \frac{1}{n(n+1)}, n = 1, 2, 3 \cdots$

类型 14 双数列型

解法: 根据所结两个数列递推公式的关系, 灵活采用累加、累乘、化归等方法求解。

例: 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$; 数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 0$ 。

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1}), b_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1})$, 求 a_n, b_n .

解: 因 $a_n + b_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1}) + \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1}) = a_{n-1} + b_{n-1}$

所以 $a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-2} + b_{n-2} = \cdots = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 = 1$

即 $a_n + b_n = 1$ . ...(1)

又因为 $a_n - b_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} - b_{n-1}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (a_{n-2} - b_{n-2}) = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - b_1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

即 $a_n - b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ....(2)

由（1)、(2）得: $a_n = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right], b_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$.

类型 15 周期型

解法: 由递推式计算出前几项, 寻找周期.

例: 由数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, \left(0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ 2a_n - 1, \left(\frac{1}{2} \leq a_n < 1\right) \end{cases}$, 若 $a_1 = \frac{6}{7}$, 则 a_{2017} 的值为 $-\frac{6}{7}$ ___.

变式: (2005, 湖南, 文,5)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n + 1} (n \in N^*)$, 则 $a_{20} =$ (B)

A. 0 B. $-\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$