圆锥曲线一组性质及猜想的简证与推广

曾建国

（江西省赣州市赣南师范大学数学与计算机科学学院，341000）

一、引言

文[1]将有关圆锥曲线切线、割线的一组性质进行了推广，证明了更为一般化的结论（为节省篇幅，仅列出有关椭圆的结论，参见图1）

命题1　设点 $F(x_0,y_0)$（非坐标原点）为椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内一点，过点 F 任作两直线 AC，BD 分别与椭圆 Γ 交于 A，C，B，D，设直线 AB，CD 交于点 P. 过直线 PF 上任意一点 M 作直线 $l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 的平行线，与直线 PA，PC 分别交于点 G，H，则直线 PF 平分线段 GH.

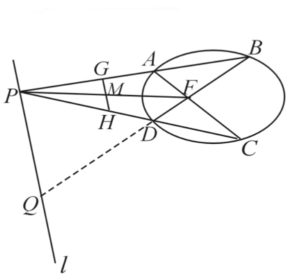

图1

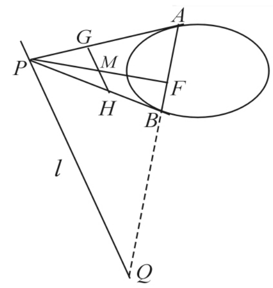

图2

文[1]末作者猜想命题1的极限情形结论成立，但因未能找到严格、规范的证法及简捷证法而留下“一丝遗憾”（参见图2）.

猜想　设点 $F(x_0,y_0)$（非坐标原点）为椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内一点，过点 F 任作一直线与椭圆 Γ 交于 A，B，设 A，B 处的两条切线交于点 P. 过直线 PF 上任意一点 M 作直线 $l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ 的平行线，与直线 PA，PB 分别交于点 G，H，则直线 PF 平分线段 GH.

文[2]通过引进“调和线束”、“完全四边形的调和性”等“高观点”，完美地证明了上述猜想. 但美中不足的是文[2]的证法仍算不上“简捷证法”. 本文拟利用调和点列的一个性质，给出命题1及猜想的简证并将结论进一步推广.

二、有关调和点列的概念和性质

定义1[3][4]　对于线段 AB 的内分点 C 与外分点 D，若 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$，则称 C、D 调和分割线段 AB（或线段 AB 被 C、D 调和分割），或称点列 A、B、C、D 为调和点列.

根据定义1易知，若线段 AB 被 C、D 调和分割，则线段 CD 也被 A、B 调和分割.

调和点列与圆锥曲线的极线概念密切相关. 事实上，根据高等几何知识我们有（参见图3）：

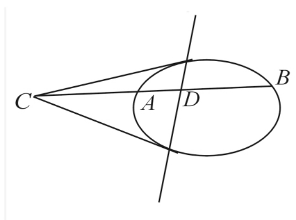

图3

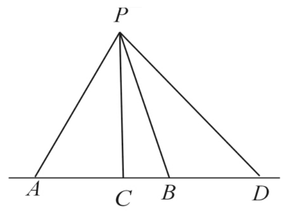

图4

定义2[3]　设两点 C、D 的连线与圆锥曲线 Γ 相交于 A、B，若线段 AB 被 C、D 调和分割，则称 C、D 是关于圆锥曲线 Γ 的一对调和共轭点.

定义3[3]　一点 P 关于圆锥曲线 Γ 的所有调和共轭点的轨迹为一条直线 p，称直线 p 为点 P（关于 Γ）的极线，点 P 为直线 p（关于 Γ）的极点.

我们知道，点 $F(x_0,y_0)$（非坐标原点）关于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$（参阅文[1]的引理1）. 因此，在命题1及猜想中，直线 l 就是点 F 关于椭圆 Γ 的极线.

特别地，圆锥曲线焦点的极线就是与之对应的准线. 当 P 在 Γ 外时，其极线 p 是从点 P 所引曲线 Γ 的两条切线的切点所确定的直线（即切点弦所在直线）[3].

如图 3，过一点 C 作圆锥曲线 Γ 的割线分别与曲线 Γ 及 C 点的极线交于点 A、B 及 D，则根据上述定义易知，C、D、A、B 为调和点列.

定义 4[3][5]　如图 4，若 A、B、C、D 为调和点列，过此点列所在直线外任一点 P 作射线 PA、PB、PC、PD，则称这四条射线为调和线束. 反过来，任一直线与调和线束相交所截的四个点构成调和点列.

调和点列有一个特殊性质(参见图 5)：

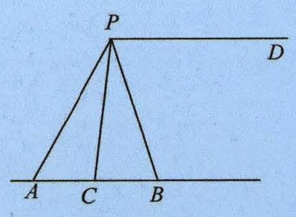

图 5

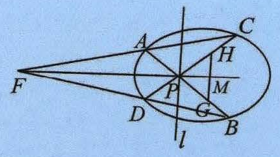

图 6

引理 1[3][5]　如果 PA、PB、PC、PD 为调和线束，且 PD 平行于 AB，则 PC 必平分线段 AB.

三、命题 1 与猜想的简证及推广

命题1的简证　如图 1，依题设知，直线 l 就是 F 关于椭圆 Γ 的极线. 设直线 BD 与 l 交于 Q，根据定义 2 和定义 3 知，B，D，F，Q 是调和点列，由定义 4 知，PB，PD，PF，PQ 是调和线束.

因为 $GH \parallel PQ$ 交 PF 于 M，则调和线束也就是 PG，PH，PM，PQ. 根据引理 1 即知，M 为线段 GH 的中点.

猜想的简证　依题设知，图 2 中 l 是 F 关于椭圆 Γ 的极线，于是 A，B，F，Q 是调和点列，以下与命题 1 证法类似，同理可得 M 为线段 GH 的中点.

从上面的证明我们不难发现，命题 1 及猜想中没必要限制点 F 在椭圆内，即它们可以推广为下面的结论(点 F 在椭圆外的情形见图 6、图 7，上面的证法完全适用，证明略).

命题 2　设点 F 关于椭圆 Γ 的极线为 l，过点 F 任作两直线 AC，BD，分别与椭圆 Γ 交于 A，C，B，D，设直线 AB，CD 交于点 P. 过直线 PF 上任意一点 M 作直线 l 的平行线，与直线 PA，PC 分别交于点 G，H，则 $GM = MH$.

命题 3　设点 F 关于椭圆 Γ 的极线为 l，过点 F 任作一直线与椭圆 Γ 交于两点 A，B，设 A，B 处的两条切线交于点 P. 过直线 PF 上任意一点 M 作直线 l 的平行线，与直线 PA，PB 分别交于点 G，H，则 $GM = MH$.

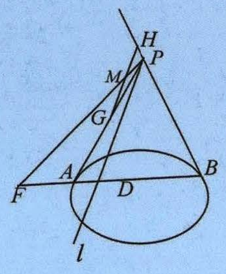

图 7

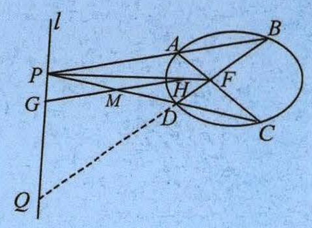

图 8

在引理 1 中，显而易见，(图 5 中)与点列所在直线 AB 平行的直线 PD 可以换成调和线束中的任一条，也能得到类似的结论. 因此，命题 2 及命题 3 也可以通过变换所作的平行线得到新的命题. 例如命题 2 中换成作 PA 的平行线就得(见图 8，证明略)：

命题 4　设点 F 关于椭圆 Γ 的极线为 l，过点 F 任作两直线 AC，BD，分别与椭圆 Γ 交于 A，C，B，D，设直线 AB，CD 交于点 P. 过直线 PC 上任意一点 M 作直线 PA 的平行线，与直线 l，PF 分别交于点 G，H，则 $GM = MH$.

类似这样的命题还可以写出很多；另外，椭圆 Γ 也可以换成其他圆锥曲线，得到一系列命题，这里不再赘述.

以上命题的结论不仅揭示了圆锥曲线的有趣性质，也为我们编制圆锥曲线试题提供了丰富的素材，例如 2017 年北京高考圆锥曲线试题就是以此为素材编制的[6].

参考文献：

[1]　干志华. 圆锥曲线中的一个割线性质再探究[J]. 数学通讯(上半月)，2017(6)：41－43.

[2]　李伟健. 椭圆的一个结论的演变历程[J]. 数学通讯(上半月)，2017(12)：38－40.

[3]　朱德祥. 高等几何[M]. 北京：高等教育出版社，1998.

[4]　沈毅. 与调和点列有关的平面几何问题[J]. 中等数学，2009(2)：6－10.

[5]　郑春筱. 调和点列的一个特殊性质及应用[J]. 数学通讯(上半月)，2017(4)：53－55.

[6]　曾建国. 调和点列：一道 2017 年北京高考题的背景分析及应用[J]. 数学通讯(上半月)，2017(12)：59－60.

(收稿日期：2018－02－25)

邮发代号：38-23(下半月 教师)　ISSN 0488-7395　CN 42-1152/O1　定价：9.00元