椭圆中一类斜率比值为定值引出的直线过定点

赵颖颖

(江苏省张家港市暨阳高级中学名师工作室，215600)

定点定值是直线与椭圆教学中的常见问题，也是重点问题之一. 笔者在研究直线与椭圆的综合问题时，发现一类斜率比值为定值引出的直线过定点的问题的结论，现将有关内容和思考叙述如下，与同行们交流.

结论1 如图1，已知椭圆Γ:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右顶点为$A$、$B$，点$P$、$Q$是椭圆$\Gamma$上的动点，且满足$k_{PA}=mk_{QB}(m\neq-1)$，求证：直线$PQ$过定点.

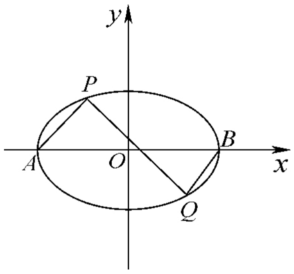

图1

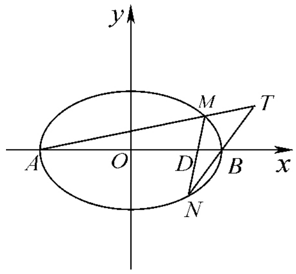

图2

证明 设$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则直线PQ的方程为：

$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0$.

因为$k_{PA}=mk_{QB}(m\neq-1)$，所以$\frac{y_1}{x_1+a}=m\cdot\frac{y_2}{x_2-a}$.

因为$\frac{y_i}{x_i+a}\cdot\frac{y_i}{x_i-a}=\frac{y_i^2}{x_i^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$，所以$\frac{y_2}{x_2+a}=m\cdot\frac{y_1}{x_1-a}$.

由$\frac{y_1}{x_1+a}=m\cdot\frac{y_2}{x_2-a}$可得

$mx_1y_2-x_2y_1=-may_2-ay_1$.

由$\frac{y_2}{x_2+a}=m\cdot\frac{y_1}{x_1-a}$可得

$mx_2y_1-x_1y_2=-may_1-ay_2$.

两式相减可得

$(m+1)(x_1y_2-x_2y_1)=-(m-1)a(y_2-y_1)$.

故直线PQ过定点$(\frac{1-m}{1+m}a,0)$.

这个结论，其实是江苏省2010年高考第18题的命题背景.

题1 (2010年江苏省高考第18题)在平面直角坐标系xOy中，如图2，已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右顶点为$A$、$B$，右焦点为$F$. 设过点$T(t,m)$的直线$TA$、$TB$与椭圆分别交于点$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，其中$m>0$，$y_1>0$，$y_2<0$.

(1) 设动点P满足$PF^2-PB^2=4$，求点P的轨迹；

(2) 设$x_1=2$，$x_2=\frac{1}{3}$，求点T的坐标；

(3) 设$t=9$，求证：直线MN必过x轴上的一定点(其坐标与m无关).

第(3)小题的解析：由条件可知$k_{MA}=k_{TA}=\frac{m}{12}$，$k_{NB}=k_{TB}=\frac{m}{6}$，则$k_{MA}=\frac{1}{2}k_{NB}$，依结论1，即可知直线直线$MN$必过$x$轴上的一定点(1,0).

事实上，如图3，由于椭圆中$k_{PA}\cdot k_{PB}=k_{QA}\cdot k_{QB}=-\frac{b^2}{a^2}$，因此，当$k_{AP}\cdot k_{AQ}$或$k_{BP}\cdot k_{BQ}$为定值时，直线$PQ$过定点.

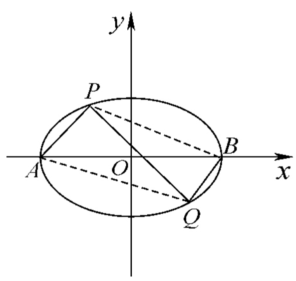

图3

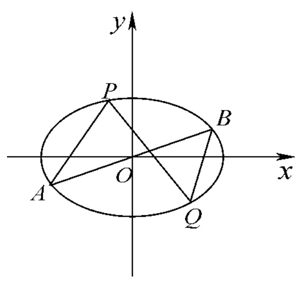

图4

上述问题中，若点A、B不是椭圆的左右顶点，

还有类似结论吗?笔者发现,只要直线 AB 过椭圆中心,直线依然过定点.

结论2　如图4,已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上定点 $A(x_0,y_0)$、$B(-x_0,-y_0)$,点 P、Q 是椭圆 Γ 上的动点,且满足 $k_{PA}=mk_{QB}(m\neq-1)$,求证:直线 PQ 过定点.

证明1　设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$,则直线 PQ 的方程为:

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

因为 $k_{PA}=mk_{QB}(m\neq-1)$,所以

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=m\cdot\frac{y_2+y_0}{x_2+x_0}.$$

因为 $\frac{y_i-y_0}{x_i-x_0}\cdot\frac{y_i+y_0}{x_i+x_0}=\frac{y_i^2-y_0^2}{x_i^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{a^2}$,所以

$$\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=m\cdot\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}.$$

由 $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=m\cdot\frac{y_2+y_0}{x_2+x_0}$ 可得

$$mx_1y_2-x_2y_1=mx_0y_2+x_0y_1-my_0x_1-y_0x_2+(m-1)x_0y_0.$$

由 $\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=m\cdot\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}$ 可得

$$mx_2y_1-x_1y_2=mx_0y_1+x_0y_2-my_0x_2-y_0x_1+(m-1)x_0y_0.$$

两式相减可得

$$(m+1)(x_1y_2-x_2y_1)=(m-1)x_0(y_2-y_1)+(m-1)y_0(x_2-x_1),$$

故 $x_1y_2-x_2y_1=\frac{m-1}{m+1}x_0(y_2-y_1)+\frac{m-1}{m+1}y_0(x_2-x_1)$.

所以,直线 PQ 的方程即为:

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-\frac{m-1}{m+1}x_0(y_2-y_1)-\frac{m-1}{m+1}y_0(x_2-x_1)=0,$$

故直线 PQ 过定点 $(\frac{m-1}{m+1}x_0,-\frac{m-1}{m+1}y_0)$.

证明2　设 $A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$P(a\cos\beta,b\sin\beta)$,$Q(a\cos\gamma,b\sin\gamma)$,则 $x_0=a\cos\alpha$,$y_0=b\sin\alpha$,$B(a\cos(\alpha+\pi),b\sin(\alpha+\pi))$,

$$k_{PA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\cos\beta-\cos\alpha}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}},$$

$$k_{QB}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\gamma+\alpha+\pi}{2}}{\sin\frac{\gamma+\alpha+\pi}{2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}}.$$

因为 $k_{PA}=mk_{QB}(m\neq-1)$,所以

$$\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+m\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=0,$$

所以 $\cos\frac{\gamma-\beta}{2}+\cos(\frac{\gamma+\beta}{2}+\alpha)+m[\cos\frac{\gamma-\beta}{2}-\cos(\frac{\gamma+\beta}{2}+\alpha)]=0$,

所以 $\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{m-1}{m+1}\cos(\frac{\gamma+\beta}{2}+\alpha)$,

即 $\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{m-1}{m+1}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\alpha-\frac{m-1}{m+1}\cdot\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\alpha$.

直线 PQ 的方程为 $b(\sin\gamma-\sin\beta)x-a(\cos\gamma-\cos\beta)y-ab\sin(\gamma-\beta)=0$,即

$$(b\cos\frac{\gamma+\beta}{2})x-(a\sin\frac{\gamma+\beta}{2})y-ab\cos\frac{\gamma-\beta}{2}=0,$$

即 $(b\cos\frac{\gamma+\beta}{2})x-(a\sin\frac{\gamma+\beta}{2})y-\frac{m-1}{m+1}ab\cdot\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\alpha+\frac{m-1}{m+1}ab\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\alpha=0$,

即 $b\cos\frac{\gamma+\beta}{2}(x-\frac{m-1}{m+1}a\cos\alpha)+a\sin\frac{\gamma+\beta}{2}(y+\frac{m-1}{m+1}b\sin\alpha)=0$.

故直线 PQ 过定点 $(\frac{m-1}{m+1}x_0,-\frac{m-1}{m+1}y_0)$.

(收稿日期:2018－11－30)