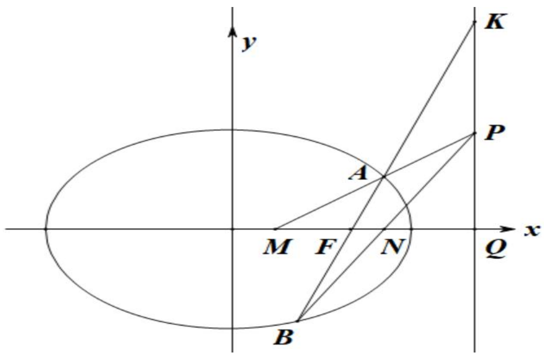
数学通讯2020第10期一道解析几何问题的几何证法

在此处对数学通讯**2020**第**10**期中一篇《对一道武汉市质检试题的推广与变式》文章进行一些平面几何角度的分析和证明.

题目呈现：过椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F_2(c,0)$的直线交椭圆于$A,B$两点，已知$P(\dfrac{a^2}{c},t)(t\neq 0)$是直线$l:x=\dfrac{a^2}{c}$上的一动点，若$PA,PB$分别于$x$轴分别交于点$M(x_M,0),N(x_N,0)$，记椭圆$C$的右焦点到准线的距离为$p$，则$\dfrac{1}{x_M-c}+\dfrac{1}{x_N-c}=\dfrac{2}{p}$.

注：代数证法参见该期杂志，这里仅给出几何证明.



先给出一个引理[1]:设点F关于圆锥曲线C的极线为l,过F作曲线C的任一割线交C于A,B两点，交l于K，则F,K调和分割A,B，即四点成调和点列.

证明：如图，由引理可得：B,F,A,K为调和点列，则PB,PF,PA,PK为调和线束，直线x轴与调和线束分别交于M,F,N,Q四点，根据调和线束的性质可得：M,F,N,Q四点是调和点列，即$\dfrac{MF}{FN}=\dfrac{MF+FQ}{FQ-FN}\Rightarrow FN\cdot(MF+FQ)=MF\cdot(FQ-FN)$，即$2MF\cdot FN=MF\cdot FQ-FN\cdot FQ$，即$\dfrac{1}{FN}-\dfrac{1}{MF}=\dfrac{2}{FQ}$，代入各点坐标可得：

$\dfrac{1}{x_N-c}-\dfrac{1}{c-x_M}=\dfrac{2}{p}\Rightarrow\dfrac{1}{x_M-c}+\dfrac{1}{x_N-c}=\dfrac{2}{p}$，证毕.

参考文献：**[1]**王文彬.极点，极线与圆锥曲线试题的命制[J].数学通讯，2015(4):62-66.