



HappaMathsNotes

解析几何

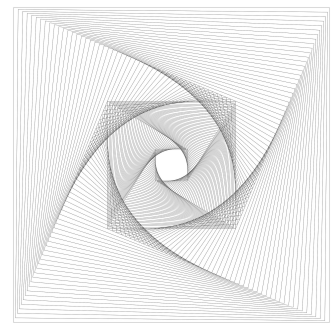
作者：OyamaHappa

时间：July 19, 2024

版本：20240719105707

数学：学无止境

数学是人类智慧皇冠上最灿烂的明珠。——考特



目录

第 1 章 解析几何	1
1.1 直线的方程	1
1.1.1 点到直线距离公式	1
1.1.2 直线到直线距离公式	1
1.1.3 对称	1
1.1.3.1 点关于点对	1
1.1.3.2 点关于线对称	1
1.1.3.3 线关于点对称	1
1.1.3.4 线关于线对称	1
1.2 圆的方程	2
1.2.1 圆的直径式方程	2
1.2.2 阿波罗尼斯圆	2
1.2.3 圆的参数方程	2
1.2.3.1 三角换元	2
1.2.4 直线与圆位置关系	2
1.2.4.1 直线与圆相离	3
1.2.5 圆系方程	3
1.2.5.1 \Rightarrow 公共弦	3
1.3 椭圆	3
1.3.1 第一定义	3
1.3.2 焦点三角形	4
1.3.2.1 小焦点三角形	4
1.3.2.2 大焦点三角形	5
1.3.3 焦点弦	5
1.3.4 焦点三角形面积	5
1.3.4.1 MAX	5
1.3.4.2 面积公式	5
1.3.5 距离	5
1.3.5.1 椭圆上的点到中心的距离 $ PO $	5
1.3.5.2 椭圆上的点到焦点的距离 $ PF $	5
1.3.6 椭圆的第二定义	6
1.3.7 椭圆的参数方程	6
1.4 双曲线	6

第 1 章 解析几何

1.1 直线的方程

$$Ax + By + C = 0 \implies y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$l_1 \parallel l_2 \implies k_1 = k_2 \implies A_1 B_2 = A_2 B_1 \text{ 且 } B_1 C_2 \neq B_2 C_1$$

$$l_1 \perp l_2 \implies k_1 k_2 = -1 \implies A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

方向向量 (B,-A) 法向量 (A,B)

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}} = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

1.1.1 点到直线距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1.1.2 直线到直线距离公式

$$d = \Delta y \cos\theta = \left| -\frac{C_1}{B} + \frac{C_2}{B} \right| \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1.1.3 对称

1.1.3.1 点关于点对

$$A(x_1, y_1) \text{ 关于 } P(x_0, y_0) \text{ 对称点 } (2x_0 - x_1, 2y_0 - y_1)$$

1.1.3.2 点关于线对称

$$A \frac{x_1 + x_2}{2} + B y_1 + y_2 + C = 0$$
$$-\frac{A}{B} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$$

1.1.3.3 线关于点对称

1.1.3.4 线关于线对称

1.1.3.4.1 平行

$$C_2 - C_1 = C_3 - C_2$$

1.1.3.4.2 不平行

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan(\theta_2 - \theta_3) \Rightarrow \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$$

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$$

到角公式

1.2 圆的方程

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow (x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2 + E^2 + 4F}{4} > 0$$

1.2.1 圆的直径式方程

$$(x - a)(x - c) + (y - b)(y - d) = 0$$

1.2.2 阿波罗尼斯圆

动点到两定点的距离之比为定值 ($k \neq 1$) 则动点轨迹为圆

1.2.3 圆的参数方程

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}$$

1.2.3.1 三角换元

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$\begin{cases} x - a = \cos(\theta) \\ y - b = \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a + R \cos(\theta) \\ y = b + R \sin(\theta) \end{cases}$$

1.2.4 直线与圆位置关系

$$d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1.2.4.1 直线与圆相离

$$d_{min} = d - r$$

$$d_{MAX} = d + r$$

1.2.4.1.1 $d' \Rightarrow$ 要求距离

$$d = r + d' \Rightarrow 1\text{个}$$

$$r - d' < d < r + d' \Rightarrow 2\text{个}$$

$$d = r - d' \Rightarrow 3\text{个}$$

$$0 \leq d < r - d' \Rightarrow 4\text{个}$$

$$O_1O_2 > r_1 + r_2 \Rightarrow \text{相离, 4 条公切线} \quad O_1O_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow \text{外切, 3 条公切线}$$

$$|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2 \Rightarrow \text{相交, 2 条公切线} \quad O_1O_2 = |r_1 - r_2| \Rightarrow \text{内切, 1 条公切线}$$

$$0 < O_1O_2 < |r_1 - r_2| \Rightarrow \text{内含, 0 条公切线} \quad O_1O_2 = 0 \Rightarrow \text{同心圆, 0 条公切线}$$

1.2.5 圆系方程

$$\lambda(Ax + By + C) + x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{交点}$$

$$\lambda(x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1) + x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{定点} \Leftrightarrow \text{交点}$$

$$\star x = -1$$

1.2.5.1 \Rightarrow 公共弦

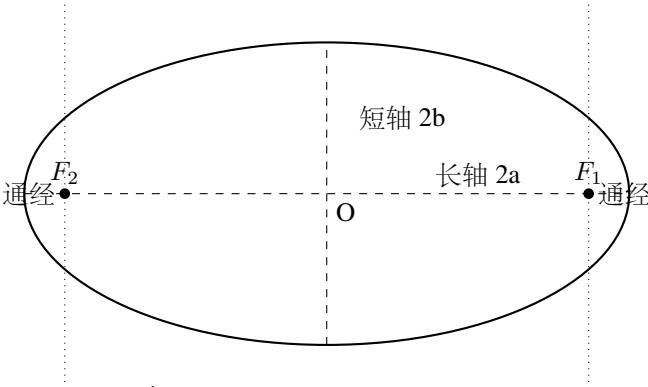
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow l_1 : (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

$$l_1 : (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

1.3 椭圆

1.3.1 第一定义

动点到两定点和为定值 即动点轨迹为椭圆



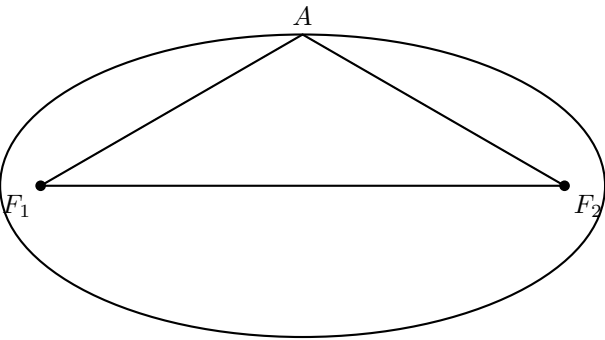
$\star a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$

通经 $x = 4 \pm c \Rightarrow |y| = \frac{b^2}{a}$

通经: $2|y| = \frac{2b^2}{a}$

椭圆	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
范围	$-a \leq x \leq a \quad -b \leq y \leq b$	$-b \leq x \leq b \quad -a \leq y \leq a$
顶点		
焦点坐标	$F_1(c, 0) \quad F_2(-c, 0)$	$F_1(0, c) \quad F_2(0, -c)$
abc 关系	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$
长轴	2a	2a
短轴	2b	2b
焦距	2c	2c
★ 离心率	$e = \frac{a}{c} \in (0, 1)$	$e = \frac{a}{c} \in (0, 1)$
通经	$\frac{2b^2}{a}$	
准线	$\pm \frac{c^2}{a}$	

1.3.2 焦点三角形



1.3.2.1 小焦点三角形

$$\left. \begin{aligned} |AF_1| + |AF_2| &= 2a \\ |F_1F_2| &= 2c \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{\triangle AF_1F_2} = 2a + 2c$$

1.3.2.2 大焦点三角形

$$C_{\triangle ABF_2} = |AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 4a$$

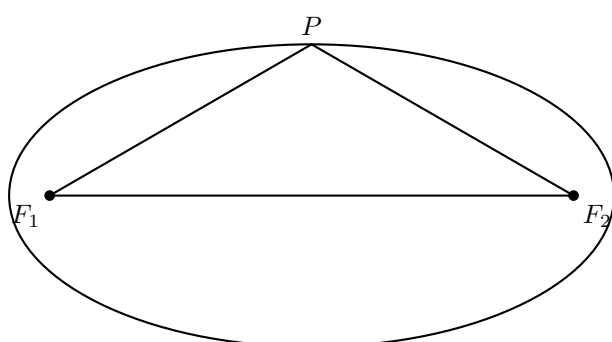
1.3.3 焦点弦

过焦点的与相交的叫做焦点弦

$$y = k(x \pm c)$$

$$\star |PF_1| + |PF_2| = 2a \Rightarrow |PF_1| = 2a - |PF_2| \star$$

1.3.4 焦点三角形面积



1.3.4.1 MAX

当 P 点位于上/下顶点时, 顶角 $\angle F_1 P F_2$ 取到最大值

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot c \cdot b = bc$$

1.3.4.2 面积公式

$$b^2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{双曲线} \frac{b^2}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

1.3.5 距离

1.3.5.1 椭圆上的点到中心的距离 |PO|

$$[a, b]$$

1.3.5.2 椭圆上的点到焦点的距离 |PF|

$$[a - c, a + c]$$

1.3.6 椭圆的第二定义

动点到定点距离只比动点到定直线的距离只比为定值, 则动点的轨迹为椭圆

定点-焦点 $(\pm c, 0)$

定直线-准线 $x = \pm \frac{a^2}{c}$

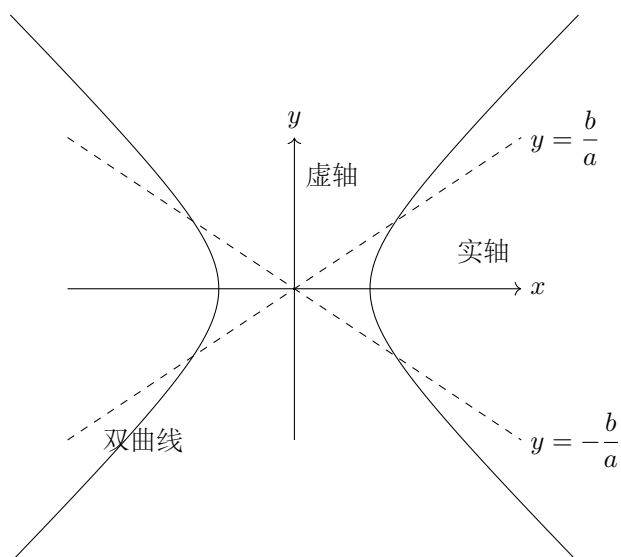
定值- $e = \frac{c}{a}$

$$|PF| = a \pm ex_0$$

1.3.7 椭圆的参数方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \cdot \cos(\theta) \\ y = b \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

1.4 双曲线



双曲线	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
范围	$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$
顶点	$(a, 0), (-a, 0)$
焦点坐标	$F_1(c, 0) \quad F_2(-c, 0)$
abc 关系	$c^2 = a^2 + b^2$
实轴	$2a$
虚轴	$2b$
焦距	$2c$
★ 离心率	$e = \frac{c}{a} \in (1, +\infty)$
通经	$\frac{2b^2}{a}$