函数二级结论

1. 若奇函数 $f(x)$ 在原点处有定义，则 $f(0)=0$，若奇函数 $f(x)$ 周期为 T，则 $f(T)=0, f(\frac{T}{2})=0$（需在相应点有定义）

2. 幂函数 $y=x^{a}(a\in Z)$，当 a 为奇数时为奇函数，当 a 为偶数时为偶函数.

3. 形如 $y=f(x)+f(-x)$ 的函数为偶函数, 形如 $y=f(x)-f(-x)$ 的函数为奇函数.

4. 形如 $y=f(|x|)$ 的函数为偶函数.

5. 形如 $y=\frac{a^{x}-1}{a^{x}+1}$ 的函数为奇函数

6. 形如 $y=\log_{a}\left(\sqrt{1+b^{2}x^{2}}\pm bx\right)$ 的函数为奇函数

7. 形如 $y=\log_{a}\left(a^{2bx}+1\right)-bx$ 的函数为偶函数

8. 形如 $y=\frac{n}{a^{x}+m}$ 的函数关于点 $(\log_{a}|m|,\frac{n}{2m})$ 中心对称；形如 $y=\frac{a^{x}+n}{a^{x}+m}$ 的函数关于点 $(\log_{a}|m|,\frac{m+n}{2m})$ 中心对称.

9. 形如 $y=f(x)+f(2a-x)$ 的函数关于 $x=a$ 轴对称（也可写成 $y=f(x-a)+f(a-x)$），形如 $y=f(x)-f(2a-x)$ 的函数关于点 $(a,0)$ 中心对称（也可写成 $y=f(x-a)-f(a-x)$）

10. 形如 $y=f(|x-a|)$ 的函数关于 $x=a$ 轴对称.

11. 若 $f(x)$ 满足 $f\left(a+x\right)=f\left(b-x\right)$, 则 $f\left(x\right)$ 关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 轴对称（括号内相加除以 2）.

12. 若 $f(x)$ 满足 $f\left(a+x\right)+f\left(b-x\right)=2c$, 则 $f\left(x\right)$ 关于点 $\left(\frac{a+b}{2},c\right)$ 中心对称；

13. 函数 $f(x+a)$ 与函数 $f(b-x)$ 关于 $x=\frac{b-a}{2}$ 轴对称（括号内零点之和除以 2）.

14. 函数 $f(x+a)+c$ 与函数 $d-f(b-x)$ 关于点 $(\frac{b-a}{2},\frac{c+d}{2})$ 中心对称

15. 若 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=f(x+b)$, 则 $f(x)$ 周期为 $|a-b|$

16. 若 $f(x)$ 同时关于 $x=a$ 和 $x=b$ 轴对称, 则 $f(x)$ 周期为 $2|a-b|$

若 $f(x)$ 同时关于 (a,m) 和 (b,m) 中心对称, 则 $f(x)$ 周期为 $2|a-b|$

若 $f(x)$ 关于 (a,m) 中心对称, 同时关于 $x=b$ 轴对称, 则 $f(x)$ 周期为 $4\left|a-b\right|$

17. 若函数 $f(x)$ 满足： $f(x+a)+f(x+b)=C(C为常数)$, 则 $f(x)$ 周期为 $2\left|a-b\right|$

特殊地：若 $f(x+a)=-f(x)$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|2a\right|$.

18. 若函数 $f(x)$ 满足： $f(x+a)\cdot f(x+b)=C(C为常数)$, 则 $f(x)$ 周期为 $2\left|a-b\right|$

特殊地：若 $f(x+a)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|2a\right|$.

19. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|2a\right|$.

若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|2a\right|$.

若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|4a\right|$.

若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|4a\right|$.

20. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=\dfrac{1}{1-f(x)}$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|3a\right|$.

21. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+a)-f(x+2a)$, 则 $f(x)$ 周期为 $\left|6a\right|$

22. 函数奇偶性的叠加：

$奇\pm奇=奇, 偶\pm偶=偶$

$$奇\times/\div奇=偶, \left.\begin{matrix}奇\times/\div偶\\偶\times/\div奇\end{matrix}\right\}=奇, 偶\times/\div偶=偶$$

奇（奇）=奇，奇（偶）=偶，偶（奇）=偶，偶（偶）=偶;（内偶则偶，内奇同外）

23. 若 $f(x)$ 为奇函数则 $f'(x)$ 为偶函数, 若 $f(x)$ 为偶函数则 $f'(x)$ 为奇函数.

24. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ 的图像关于点 $(-\dfrac{b}{3a}, f(-\dfrac{b}{3a}))$ 中心对称.

三角函数二级结论

1.当 $A+B+C=\pi$ 时, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

2.当 $A+B=\dfrac{\pi}{4}$ 时, $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

当 $A+B=\dfrac{\pi}{3}$ 时, $(1+\sqrt{3}\tan A)(1+\sqrt{3}\tan B)=4$

当 $A+B=\dfrac{\pi}{6}$ 时, $(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan A)(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan B)=\dfrac{4}{3}$

3.在△ABC 中, $\begin{cases}\sin(A+B)=\sin C\\ \cos(A+B)=-\cos C\\ \tan(A+B)=-\tan C\end{cases}$, $\begin{cases}\sin 2(A+B)=-\sin 2C\\ \cos 2(A+B)=\cos 2C\\ \tan 2(A+B)=-\tan 2C\end{cases}$, $\begin{cases}\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}\\ \cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}\\ \tan\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}\end{cases}$

4.△ABC 中,若 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1),\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$,则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$

5.△ABC 三边长分别为 a,b,c ,则 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},(p=\dfrac{a+b+c}{2})$

6.△ABC 三边长分别为 a,b,c ,内切圆半径为 r ,则 $S_{\triangle ABC}=p\cdot r,(p=\dfrac{a+b+c}{2})$

7.△ABC 的三边 a,b,c 对边分别为 A,B,C ,则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4}\cdot\tan C=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}\cdot\tan A$

$=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4}\cdot\tan B$

8.△ABC 三边长分别为 a,b,c ,外接圆半径为 R , $S_{\triangle ABC}=\dfrac{abc}{4R}$

9.积化和差: $\begin{cases}\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]\\ \sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\\ \sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\\ \cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]\end{cases}$

和差化积：$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$

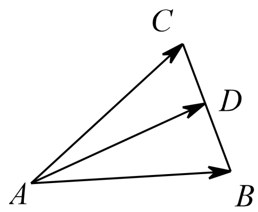
10.正弦平方差公式：$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

余弦平方差公式:$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

向量二级结论

1.向量平方差公式：

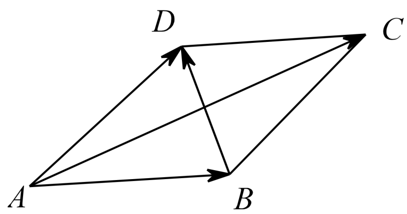
向量平方差公式 1（极化恒等式）：



如图：△ ABC 中, D 为 BC 中点则:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB})=|AD|^2-|DB|^2$

向量平方差公式 2：



如图：平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=|AD|^2-|AB|^2$

2.三角形四心的向量表达式与奔驰定理：

（1）奔驰定理：已知点 O 为△ ABC 平面上一点,则 $S_{\triangle BOC}\cdot\overrightarrow{OA}+S_{\triangle AOC}\cdot\overrightarrow{OB}+S_{\triangle AOB}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

（2）三角形四心的向量表达：

①已知 O 为△ ABC 的重心,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

②已知O为△ABC的垂心,则$\tan A\cdot\overrightarrow{OA}+\tan B\cdot\overrightarrow{OB}+\tan C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

（$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$）

③已知O为△ABC的外心,则$\sin 2A\cdot\overrightarrow{OA}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{OB}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

（$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$）

④已知O为△ABC的内心,则$a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

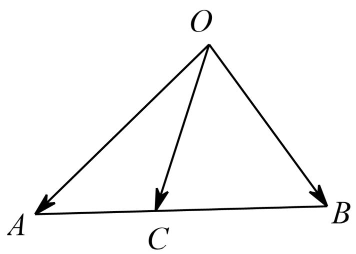
3.单位向量:（1）对于非零向量$\vec{a}$,则$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$是与$\vec{a}$共线的单位向量.

（2）对于非零向量$\vec{a},\vec{b}$,若$\vec{p}=\lambda(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|})$,则$\vec{p}$与$\vec{a},\vec{b}$夹角平分线共线

（3）任意单位向量可设坐标为$(\cos\theta,\sin\theta)$

4.向量与三点共线及向量的等和线:

（1）三点共线的向量表达:如图A,B,C三点共线,O为线外一点:

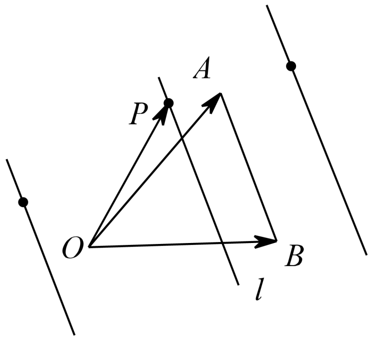


①若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则$x+y=1$,反之也成立.

②若$\dfrac{|AC|}{|BC|}=\dfrac{\lambda}{\mu}$,则$\overrightarrow{OC}=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{OB}$

③若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$,即$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$,将此式整理即能用$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$中任意两个为基底表示第三个.

（2）向量的等和线：



如图,向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$不共线,若直线$l$与直线$AB$平行（或重合），称直线$l$为基底$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$的等和线.若$P$在直线$l$上,且$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则$x+y$为定值,且$x+y$随$O$与$l$的距离成比例扩大或缩小：

①当l与AB重合时：$x+y=1$

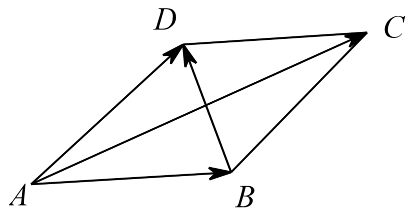
②当l过点O 时：$x+y=0$

③当l在O与AB之间时：$0<x+y<1$

④当l在O与AB同侧,O到AB这一侧时：$x+y>1$

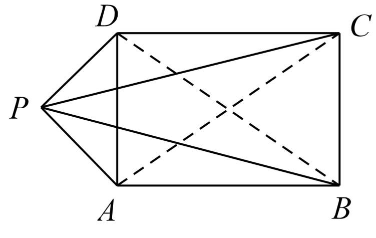
⑤当l在O与AB同侧,AB到O这一侧时：$x+y<0$

5.平行四边形对角线定理：平行四边形的两对角线平方和等于四边平方之和



如图：平行四边形$ABCD$中,$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})^2=2(\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2)$

6.矩形对角线定理：矩形所在平面内任意一点到矩形两对角线端点距离的平方和相等.



如图,四边形$ABCD$为矩形,P为矩形所在平面上一点,则$\left|PA\right|^2+\left|PC\right|^2=\left|PB\right|^2+\left|PD\right|^2$

数列二级结论

1.等差数列$\{a_n\}$中,若$a_m=n,且a_n=m,则a_{m+n}=0$.

2.等差数列$\{a_n\}$中,若$S_m=n,且S_n=m,则S_{m+n}=-(m+n)$.

3.等差数列$\{a_n\}$中,$S_{2m-1}=(2m-1)a_m,S_{2m}=m(a_i+a_{2m+1-i})$.

4.等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$ 前n项和分别为S_n和T_n,则$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}},\frac{a_p}{b_q}=\frac{S_{2p-1}}{T_{2q-1}}\cdot\frac{2q-1}{2p-1}$.

5.等差数列$\{a_n\}$,若$S_M=S_N(M\neq N)$,则$S_K=S_{M+N-K}$.

6.等差数列$\{a_n\}$,$a_1>0(a_1<0)$,且$S_M=S_N(M\neq N)$,若$M+N为偶数$,则当$n=\frac{M+N}{2}$时,S_n最大,若$M+N为奇数$,则当$n=\frac{M+N+1}{2}或n=\frac{M+N-1}{2}$ 时,S_n最大（最小）.

7.等差数列$\{a_n\}$,公差为d,则$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}\cdots$ 也成等差数列且公差为m^2d.

8.等差数列$\{a_n\}$,公差为d， 则$S_{m+n}=S_m+S_n+mnd$

9.等差数列$\{a_n\}$前$2n$项中：$\frac{S_奇}{S_偶}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$,前$2n-1$项中：$\frac{S_奇}{S_偶}=\frac{n}{n-1}$

10.等差数列$\{a_n\}$首项为a_1,公差为d,前n项和为S_n,则$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列且首项仍为$a_1$,公差为$\frac{d}{2}$.

11.等比数列$\{a_n\}$中：$a_1\cdot a_2\cdot a_3\times\cdots\times a_{2m-1}={a_m}^{2m-1},a_1\cdot a_2\cdot a_3\times\cdots\times a_{2m}=(a_m\cdot a_{m+1})^m$.

12.$\{a_n\}$是公比为q的正项等比数列,则$\{\log_m a_n\}$是公差为$\log_m q$的等差数列.

13.等比数列$\{a_n\}$公比为q,前n项和为S_n,数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$前$n$项和为$T_n$， 数列$\left\{a_1\cdot\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}\right\}$前$n$项和为$M_n$,则$\frac{S_n}{T_n}=a_1a_n$ ； $\frac{S_n}{M_n}=q^{n-1}$

14.等比数列$\{a_n\}$公比为q,则$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}\cdots$ 也成等比数列且公比为q^m .

15.等比数列$\left\{a_n\right\}$公比为q,前n项连乘积为T_n,则$T_m,\frac{T_{2m}}{T_m},\frac{T_{3m}}{T_{2m}}\cdots$ 也成等比，且公比为q^{m^2}

16.$\left\{a_n\right\}$为公差不为零的等差数列,且a_m,a_k,a_p依次成等比数列,则公比为$\frac{p-k}{k-m}$

17.等比数列$\left\{a_n\right\}$公比为q,若$-1<q<1$，则S_n趋近于$\frac{a_1}{1-q}$

18.等比数列$\left\{a_n\right\}$,$S_{m+n}=S_m+q^mS_n$