椭圆中面积最大的内接三角形和平行四边形构造

200063 上海市普陀区教育学院教学研究室 刘 达

椭圆中有关内接三角形和内接平行四边形面积的最值问题，近年在专业杂志上有过一些同行们各具匠心的研究和结论．笔者在研究2010年上海市数学高考的压轴试题时，结合过去的一些解题经验，发现了椭圆中几类相交弦斜率之积的有趣的共性结论，并由此深入，探究了有关面积最大的椭圆内接三角形和内接平行四边形的一般构造方法．本文特将笔者的探究心路整理成章，供同行交流．希望能为日益升温的高中数学教学中的研究性学习提供些教学素材．

一、源起：两道结构相似的数学高考试题

试题一　2010年上海数学高考（理）压轴题：已知椭圆Γ的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，点$P$的坐标为$(-a,b)$．

(1) 若直角坐标平面上的点M、$A(0,-b)$，$B(a,0)$满足$\overrightarrow{PM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$，求点$M$的坐标；

(2) 设直线$l_1: y=k_1x+p$交椭圆Γ于C、D两点，交直线$l_2: y=k_2x$于点E．若$k_1k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}$，证明：E为CD的中点；

(3) 对于椭圆Γ上的点$Q(a\cos\theta,b\sin\theta)\,(0<\theta<\pi)$，如果椭圆$\Gamma$上存在不同的两个交点$P_1$、$P_2$满足$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$，写出求作点$P_1$、$P_2$的步骤，并求出使$P_1$、$P_2$存在的$\theta$的取值范围．

本题的核心在于第2小题的结论所给出的一个命题，第3小题则是考查学生能否应用此结论完成一个几何构造（解答过程不赘述）．就命题而言，此题的试题结构和题中数学结论的另一种表现形式早在2005年上海春季数学高考卷的压轴题中就有过体现，即以下试题二．

试题二　2005年上海春季数学高考压轴题：

(1) 求右焦点坐标是$(2,\ 0)$，且经过点$(-2,-\sqrt{2})$的椭圆的标准方程；

(2) 已知椭圆C的方程是$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$．设斜率为$k$的直线$l$，交椭圆$C$于$A$、$B$两点，$AB$的中点为$M$．证明：当直线$l$平行移动时，动点$M$在一条过原点的定直线上；

(3) 利用(2)所揭示的椭圆几何性质，用作图方法找出下面给定椭圆的中心，简要写出作图步骤，并在图中标出椭圆的中心．

试题二的核心也在于第2小题的结论所给出的一个命题，第3小题则是考查学生能否应用该结论完成寻找椭圆中心的几何作图过程（解答过程不赘述）．

这两道试题都体现出常见的数学问题研究的思维过程，即先解决一个或一类特殊的问题，然后将结论加以推广或转化，并应用于新的问题情境中．

二、发现：椭圆内相交弦斜率之积的有趣结论

这两道高考试题除了在问题背景、试题结构和解题思路方面有不少共性之外，笔者还发现这两道试题中涉及的数学核心命题还有以下关联：

设椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$l_1$、$l_2$是两条不垂直于对称轴的直线，其中$l_1$过椭圆中心$O$且与椭圆交于$M$、$N$两点，斜率为$k_1$；直线$l_2$交椭圆于$C$、$D$两点，斜率为$k_2$，$MN$和$CD$相交于点$E$（为了便于研究，本文中各条与椭圆相关的结论和性质均以此题设为条件）．

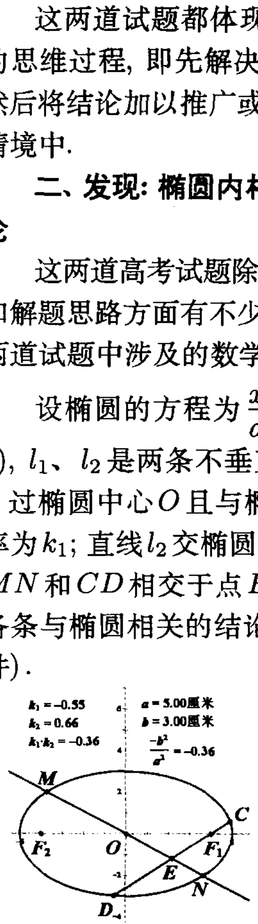

图1

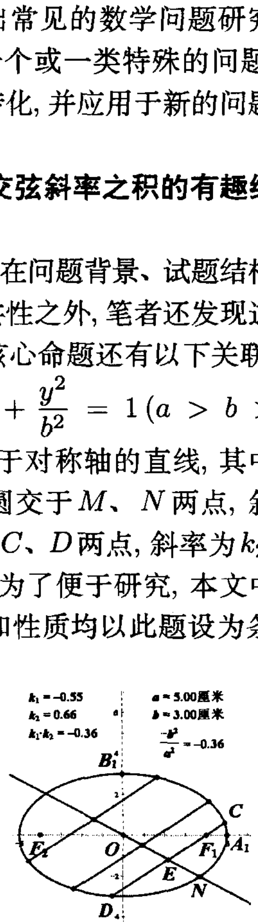

图2

从上述两道高考题中, 可依次提炼出有关椭圆中相交弦的两个一般化结论, 它们分别是:

(a) 若 $k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$, 则相交弦的交点 E 必为弦 CD 的中点 (如图1).

(b) 当直线 l_2 平行移动时, CD 的中点轨迹就在直线 l_1 上, 且满足 $k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ (如图2).

经分析可知, 结论 (a) 和结论 (b) 互为逆命题, 笔者将这两个结论转化为椭圆相交弦的一个性质:

性质1: 坐标平面内, 中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆中一条弦恰被过椭圆中心的另一条弦平分的充要条件是这两条相交弦的斜率之积为 $-\dfrac{b^2}{a^2}$ (特别地, 若有一条斜率不存在, 则另一条斜率必定为0).

除性质1外, 笔者还联想到另一个有关于椭圆中相交弦斜率之积等于 $-\dfrac{b^2}{a^2}$ 的结论:

(c) 设弦 MN 为椭圆中过中心的弦, 已知点 P 为椭圆上不同于点 M 和 N 的任一点, 设 PM 所在直线的斜率为 k_3, PN 所在直线的斜率为 k_4, 则 $k_3 \cdot k_4 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ (如图3).

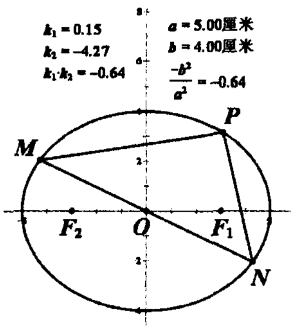

图 3

证明: 由条件, 设过椭圆中心的直线 l_1 与椭圆的交点分别为 $M(a\cos\theta, b\sin\theta)$、$N(-a\cos\theta, -b\sin\theta)$, 点 P 的坐标为 $(a\cos t, b\sin t)$, 则可得 $k_3 = \dfrac{b(\sin\theta - \sin t)}{a(\cos\theta - \cos t)}$, $k_4 = \dfrac{b(\sin\theta + \sin t)}{a(\cos\theta + \cos t)}$, 则

$$k_3 \cdot k_4 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\sin^2\theta - \sin^2 t}{\cos^2\theta - \cos^2 t}$$
$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(1-\cos^2\theta) - (1-\cos^2 t)}{\cos^2\theta - \cos^2 t} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

对于这个结论, 我们可以类比圆的一个重要结论: "圆内接三角形是直角三角形的充要条件是该三角形的其中一条边长恰为该圆的直径 (如图4)." 在圆的这个结论中, 过圆心的弦 MN 恰为直径, 而在 $\triangle PMN$ 中, PM 和 PN 的斜率之积为定值 -1.

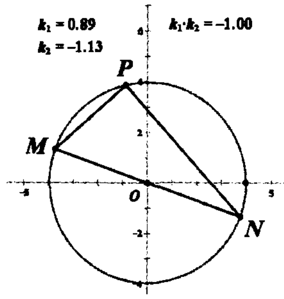

图 4

我们将此结论类比至椭圆时, 就能得到上述性质, 其可等价地叙述为:

性质2: 坐标平面内, 中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆中一内接三角形的一条边若经过椭圆中心, 则该三角形另两条边所在直线的斜率之积为 $-\dfrac{b^2}{a^2}$ (特别地, 若有一条边斜率不存在, 则另一条斜率必定为0).

以上关于圆与椭圆之间相交弦问题的类比也启发我们, 性质1就是将圆的一条性质: "对于一个圆的直径与该圆的交点而言, 过交点作圆的切线必与这条直径垂直, 且与该切线平行的弦都被这条直径垂直平分" 类比到了椭圆. 为了便于后续探究, 我们不妨先定义: "过椭圆中心的弦叫做椭圆的直径".

对于椭圆内相交弦的斜率之积 $k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ 的结论, 笔者又联想到了一道自己设计的高考模拟考试题, 命题也是尝试体现研究型试题的特征, 考查学生能否在试题的启发下对一个特殊的结论进行推广, 提出更一般化的命题并证明. 经简化, 问题如下:

试题三 (1) 设过原点 O 的弦 AB 交椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 于点 A、B, 定点 M 的坐标为 $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, 试求 $\triangle MAB$ 面积的最大值, 并求此时 AB 所在直线的斜率 k_{AB};

(2) 反思上题的解答, 当 $\triangle MAB$ 的面积取得最大值时, 探索 (2) 题的结论中直线 AB 的斜率 k_{AB} 和 OM 所在直线的斜率 k_{OM} 之间的关系. 由此推广到点 M 位置的一般情况或椭圆的一般情况 (使第 (1) 题的结论成为推广后的一个特例), 试提出一个猜想或设计一个问题, 尝试研究解决.

解: (1) 过程略, $(S_{\triangle MAB})_{\max} = \sqrt{2}$, 此时

$k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

(2) 可提出如下较一般化的命题:"设点$M(m,n)\,(mn\neq 0)$和椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 若过椭圆$C$中心的直线$AB$与椭圆分别交于$A$、$B$两点. 则当$\triangle MAB$的面积取得最大值时, 直线$AB$的斜率$k_{AB}$和$OM$所在直线的斜率$k_{OM}$满足$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$."

证: 设$M(m,n)\,(mn\neq 0)$, 由椭圆的对称性, 可设$A(a\cos\theta,b\sin\theta)$, 点$A$到直线$OM$的距离为$d$. 由此, OM所在直线方程为$nx-my=0$, 故

$$d=\frac{|an\cos\theta-bm\sin\theta|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\sqrt{\frac{a^2n^2+b^2m^2}{m^2+n^2}}|\sin(\theta+\varphi)|,$$

其中$\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{an}{\sqrt{a^2n^2+b^2m^2}},\\ \cos\varphi=\dfrac{-bm}{\sqrt{a^2n^2+b^2m^2}},\end{cases}$ 可得$\tan\varphi=-\frac{an}{bm}$. 要使$d$取得最大值, 则必有$\sin(\theta+\varphi)=\pm1$, 即$\theta+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

所以, 此时必有$\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$, $k\in\mathbf{Z}$. 而由题设, 当d取得最大值时,

$$\begin{aligned}k_{AB}&=\frac{b}{a}\tan\theta\\&=\frac{b}{a}\cdot\tan\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\\&=\frac{b}{a}\cdot\cot\varphi=\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{bm}{an}\right)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m}{n}.\end{aligned}$$

所以, 此时$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=-\frac{b^2}{a^2}$. 可以验证, 在第(2)题条件下, $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{4}$是以上结论的一个特例.

从上述推广的结论中, 我们再次发现了斜率之积为$-\frac{b^2}{a^2}$的身影, 若将试题中给出的命题简化, 则有:

(d) 坐标平面内一定点与中心在原点, 焦点在x轴上的椭圆中一条过中心的弦所构造的三角形, 当且仅当弦所在直线的斜率与该三角形中过定点的中线斜率之积为$-\frac{b^2}{a^2}$时, 三角形面积最大(如图5).

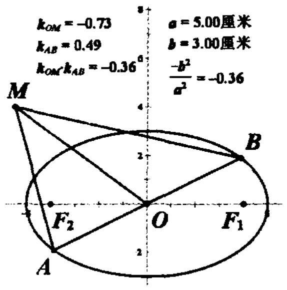

图 5

三、探究: 从性质研究到几何构造

根据上述结论(d), 问题转化到了椭圆的内接三角形中, 可提出以下猜想: 椭圆的内接三角形当且仅当其三条边和其对应中线所在直线斜率之积都为$-\frac{b^2}{a^2}$时, 该内接三角形面积最大.

为了证明这个猜想, 我们可先确定椭圆内接三角形面积的最大值:

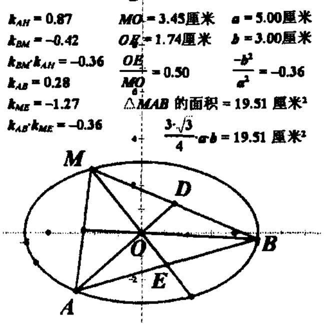

图 6

如图6, 不妨设椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上三点坐标分别为$M(a\cos\theta_1,b\sin\theta_1)$、$A(a\cos\theta_2,b\sin\theta_2)$和$B(a\cos\theta_3,b\sin\theta_3)$, 则椭圆内接三角形$\triangle MAB$的面积为

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1&a\cos\theta_1&b\sin\theta_1\\1&a\cos\theta_2&b\sin\theta_2\\1&a\cos\theta_3&b\sin\theta_3\end{matrix}\right\|=ab\cdot\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1&\cos\theta_1&\sin\theta_1\\1&\cos\theta_2&\sin\theta_2\\1&\cos\theta_3&\sin\theta_3\end{matrix}\right\|$$

于是, 本问题可等价转化为单位圆的内接三角形面积最大问题.

证明圆内接三角形面积最大为正三角形的证明可用琴生(Jensen)不等式解决. 设圆半径为R, 内接三角形的三边分别为a、b、c, 对应角分别为A、B、C.

证: 因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4R}abc$

$=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$$\leqslant 2R^2 \cdot \left[\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)\right]^3,$$

由琴生不等式: 若$f(x)$在区间$[a,b]$内是一个上凸函数, 则对于$[a,b]$内任意n个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right),$$

当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时等号成立.

因为$f(x)=\sin x$在区间$[0,\pi]$内是一个上凸函数, 则有

$$\sin A+\sin B+\sin C \leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

于是$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{4R}abc$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C \leqslant 2R^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

当且仅当$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$时, 等号成立.

所以, 当且仅当圆的内接三角形为正三角形时, 面积最大, 且最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

于是, 椭圆内接三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1\\ 1 & a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2\\ 1 & a\cos\theta_3 & b\sin\theta_3\end{vmatrix}\right| =\frac{1}{2}ab\cdot\left|\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ 1 & \cos\theta_3 & \sin\theta_3\end{vmatrix}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

由此, 我们可得椭圆内接三角形面积最大值的结论: 椭圆的内接三角形面积的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

接着, 我们继续用圆内接三角形的性质来类比. 由于面积最大的圆内接三角形必为一个正三角形, 则该圆的圆心是内接三角形的重心. 我们知道, 椭圆可由圆经过伸缩变换得到. 不妨设坐标平面内, 圆方程为$x^2+y^2=a^2\ (a>0)$, 则根据变换公式$T\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{b}{a}y\end{cases}$ $(a>b>0)$, 我们可以将该圆方程变换为椭圆方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

设圆内接正三角形三个顶点的坐标分别为:

$A(a\cos\theta, a\sin\theta)$、

$B\left(a\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right), a\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$、

$C\left(a\cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right), a\sin\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$,

$\theta\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$. 经过变换$T$之后, 得到椭圆上三点

$A'(a\cos\theta, b\sin\theta)$、

$B'\left(a\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right), b\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$、

$C'\left(a\cos\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right), b\sin\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

不难得到三角形$\triangle A'B'C'$的重心坐标为$(0,0)$, 即椭圆的中心; 且此时$\triangle A'B'C'$的面积也为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

再由性质1, 可证得笔者猜想正确, 即:

性质3: 椭圆的内接三角形当且仅当其重心恰为椭圆中心时面积最大, 最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$. 对于在坐标平面内, 中心在原点, 焦点在x轴上的椭圆中, 此时三条边和其对应中线的斜率之积都为$-\dfrac{b^2}{a^2}$.

有了性质3, 我们就能找到构造椭圆的内接三角形, 使得其面积最大的作图方法了. 以下是根据性质和结论而设计的一种典型的尺规作图的方法:

(1) 构造椭圆内两条平行的弦l_1、l_2, 由两弦中点连线作一条过椭圆中心的弦MN (说明: MN必为椭圆的直径);

(2) 在弦MN上作一四等分点E, 使得$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{ME}$ (说明: 椭圆中心O是弦MN的中点);

(3) 过点E作平行于l_1的弦CD;

(4) 连结MC、MD.

由性质3,可知三角形$\triangle MCD$即为椭圆中面积最大的一个内接三角形.

完成了椭圆中面积最大的内接三角形的构造方法之后, 我们可再研究椭圆中面积最大的平行四边形的构造.由圆的相关结论我们知道: 圆内接矩形面积最大时为正方形, 如图7. 类比猜想椭圆中的内接平行四边形结论有:

性质4: 坐标平面内, 当且仅当中心在原点、焦点在x轴上的椭圆的一个内接平行四边形的对角线交点为椭圆中心, 且对角线所在直线的斜率之积和该平行四边形相邻两边所在直线斜率

之积都为$-\frac{b^2}{a^2}$时, 椭圆的内接平行四边形面积最大.

证明: 首先, 由于椭圆内接n边形面积的最大值为$\frac{1}{2}ab\cdot n\sin\frac{2\pi}{n}$(证明详见文[1], 此处略), 故当$n=4$时可知, 椭圆内接平行四边形面积的最大值为$2ab$, 其特殊情形即为椭圆四个顶点构成的菱形面积为$2ab$.

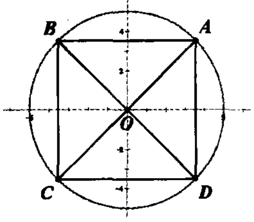

图 7

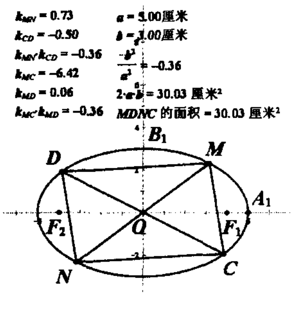

图 8

如图8, 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 由椭圆的对称性可知内接平行四边形对角线的交点为椭圆中心. 设$M(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $D(a\cos t, b\sin t)$, $\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$. 因为$S_{\triangle MOD}=S_{\triangle NOD}=S_{\triangle MOC}=S_{\triangle NOC}$, 故

$$S_{\square MCND}=4S_{\triangle MOD}$$

$$=2\left|\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a\cos\theta & b\sin\theta\\ 1 & a\cos t & b\sin t\end{vmatrix}\right|=2ab\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \cos t & \sin t\end{vmatrix}$$

$$=2ab\sin(t-\theta)\leqslant 2ab.$$

由题设$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 故当且仅当$t-\theta=\frac{\pi}{2}$时等号成立.

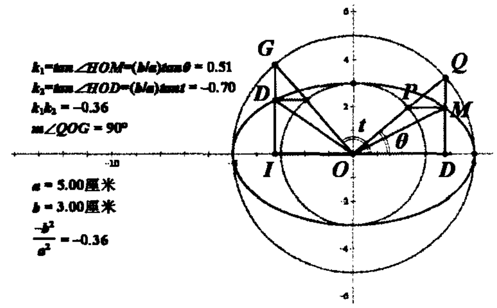

图 9

如图9, 由椭圆参数方程的定义可知, $\theta=\angle HOQ$, $t=\angle HOG$, 而$t-\theta=\frac{\pi}{2}$可得$\angle QOG=\frac{\pi}{2}$, 即$k_{OG}\cdot k_{OQ}=\tan\theta\cdot\tan t=-1$. 对于此时的点$M$和点$D$, 有$k_{OM}=\tan\angle HOM=\frac{b}{a}\tan\theta$, $k_{OD}=\tan\angle HOD=\frac{b}{a}\tan t$, 所以$k_{OM}\cdot k_{OD}=\frac{b^2}{a^2}\tan\theta\cdot\tan t=-\frac{b^2}{a^2}$.

综上可知, 性质4正确. 特别地, 当θ或t为$\frac{\pi}{2}$时, 平行四边形即为由椭圆四个顶点构成的菱形, 亦满足$t-\theta=\frac{\pi}{2}$, 即$\angle QOG=\frac{\pi}{2}$, 故我们将此视作相交弦中有斜率不存在情况的特例.

在性质4的基础上, 我们也不难归纳椭圆中作面积最大的平行四边形的尺规作图方法:

(1) 先构造椭圆内两条平行的弦l_1、l_2, 由两弦中点连线作一条过椭圆中心的弦MN(椭圆的直径);

(2) 作MN的中点, 即为椭圆的中心O;

(3) 过点O作平行于l_1的弦CD;

(4) 顺次连结MC、MD、NC和ND.

此时的椭圆内接平行四边形$MDNC$即为椭圆中面积最大的一个内接平行四边形.

四、反思: 开放性的深入研究空间

笔者觉得, 作为高中学生开展数学研究性学习的良好素材, 本题还有不少可以深入研究的空间, 作为抛砖引玉, 笔者提出如下两个问题以寻求更丰富的研究结论:

■ 是否可以将椭圆中相交弦斜率之积的一致性结论迁移到双曲线和抛物线, 并从类似结论出发探究双曲线中的某些几何构造?

■ 对于椭圆内相交弦斜率之积等于$-\frac{b^2}{a^2}$的结论, 我们是以坐标平面中直线的斜率和椭圆的标准方程为基础获得的. 对于任意位置的椭圆中的相交弦必然也有此关系. 但经过平移或旋转的椭圆相交弦之间更一般化的几何结论是什么呢?

参考文献

[1] 刘飞才. 探求椭圆内接n边形面积的最大值[J]. 数学通讯, 2008(11): 35.

[2] 蒋声, 陈瑞琛编. 趣味解析几何[M]. 上海: 上海教育出版社, 2007.

[3] 上海市教育考试院编. 2010年上海卷试题及答案要点汇编[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2010.