弦对定点张直角的性质及其应用

张必平 (湖北省鄂南高中 437100)

直线与圆锥曲线的相交弦问题综合考查了直线与圆锥曲线的有关概念、性质与解析几何的基本思想以及考生的数学能力,一直是高考命题的重点和热点.其中弦对一些特殊定点张直角问题在高考中经常出现,笔者最近对这一问题作了些探究,得到了几个简洁、优美的性质,供大家参考.

定理1 设直线 l 与抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 相交于 A,B 两点,则 $OA\perp OB$ 的充要条件是直线 l 过定点 $(2p,0)$.

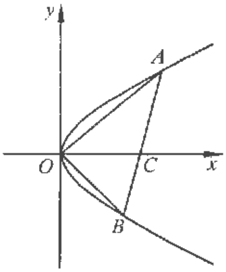

图 1

这一结论散见在一些报刊上.为了行文的完整性,此处借用作为本文的定理1,其证明并不复杂,在此不再赘述.

定理2 直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点,则 $OA\perp OB$ 的充要条件是椭圆中心 O 到直线 l 的距离为 $d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证明 当 $l\perp x$ 轴时,易证.

当 l 不垂直于 x 轴时,设直线 l: $y=kx+m$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=kx+m\end{cases}$ 消去 y 得 $(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{2a^2km}{b^2+a^2k^2}$, $x_1x_2=\frac{a^2m^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$,

$$\begin{aligned}\therefore\ & x_1x_2+y_1y_2\\ =\ & x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)\\ =\ & (1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2\\ =\ & \frac{(1+k^2)(a^2m^2-a^2b^2)}{b^2+a^2k^2}-\frac{2a^2k^2m^2}{b^2+a^2k^2}+m^2\\ =\ & \frac{m^2(a^2+b^2)-a^2b^2(1+k^2)}{b^2+a^2k^2}.\end{aligned}$$

$OA\perp OB\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

$\Leftrightarrow m^2(a^2+b^2)=a^2b^2(1+k^2)$ ①

$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

说明 必要性也可先利用极坐标证明 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,再由 $d=\frac{|OA|\cdot|OB|}{\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}}$ 证之;充分性则可结合必要性利用同一法进行证明.

定理3 直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 相交于 A,B 两点,则

(1) 当 $b>a>0$ 时,$OA\perp OB$ 的充要条件是双曲线中心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$;

(2) 当 $a\geqslant b>0$ 时,不可能有 $OA\perp OB$.

简证 将双曲线的方程写成 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-b^2}=1$ 的结构,与椭圆的方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相比较,不难发现,在定理2的推导过程中,将 b^2 换为 $-b^2$,便可得到

(1) $OA\perp OB\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

$\Leftrightarrow m^2(a^2-b^2)=-a^2b^2(1+k^2)$ (将①式中 b^2 换为 $-b^2$ 得到)

$\Leftrightarrow m^2(b^2-a^2)=a^2b^2(1+k^2)$ ②

$\Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$

$\Leftrightarrow d=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

(2) 当 $a\geqslant b>0$ 时,② 式不成立,不可

能有 $OA\perp OB$.这一点,作出双曲线及其渐近线,由图形也容易得到解释.

以抛物线的弦对顶点张直角,椭圆、双曲线的弦对中心张直角为背景的试题在高考、竞赛以及各地高考模拟试卷中频频出现,应用以上三个定理,可以迅速简捷地解决这一类问题.下面举例说明.

例 1　(2000年北京、安徽春季高考题)如图2,设点 A 和 B 为抛物线 $y^2=4px\ (p>0)$ 上除原点以外的两个动点,已知 $OA\perp OB$,$OM\perp AB$,求点 M 的轨迹方程,并说明它表示什么曲线.

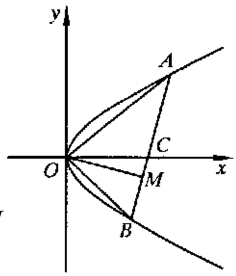

图 2

解　根据定理1,AB 过定点 $C(4p,0)$,

$\because OM\perp MC$,

$\therefore$ 点 M 的轨迹是以 OC 为直径的圆(不包括原点 O),

所以点 M 的轨迹方程是 $(x-2p)^2+y^2=4p^2\ (x\neq 0)$,它表示以 $(2p,0)$ 为圆心、以 $2p$ 为半径的圆,去掉坐标原点 O.

例 2　(2004年天津高考题)椭圆的中心是原点 O,它的短轴长为 $2\sqrt{2}$,相应于焦点 $F(c,0)\ (c>0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A,$|OF|=2|FA|$,过点 A 的直线与椭圆相交于 P,Q 两点.

(Ⅰ)求椭圆的方程及离心率;

(Ⅱ)若 $\vec{OP}\cdot\vec{OQ}=0$,求直线 PQ 的方程.

解析　(Ⅰ)椭圆的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$,离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 $A(3,0)$.

设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-3)$,即 $kx-y-3k=0$.

$\because \vec{OP}\cdot\vec{OQ}=0$,$\therefore OP\perp OQ$.

根据定理2,原点 O 到直线 PQ 的距离为

$$d=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6+2}},$$

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以直线 PQ 的方程为 $x-\sqrt{5}y-3=0$ 或 $x+\sqrt{5}y-3=0$.

例 3　(1991年全国高考题)双曲线的中心在坐标原点 O,焦点在 x 轴上,过双曲线右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P,Q 两点,若 $OP\perp OQ$,$|PQ|=4$,求双曲线的方程.

本题寻求解题思路并不困难,但其计算量之大可谓历年高考之最,利用定理3求解则大为简化.

解　设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,右焦点 $F(c,0)$,其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$,则直线方程为 $y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$,即 $\sqrt{3}x-\sqrt{5}y-\sqrt{3}c=0$,根据定理3,$d=\frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{8}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

整理得　$3b^4-8a^2b^2-3a^4=0$,

$\therefore b=\sqrt{3}a,c=2a$.

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$,直线的方程为 $y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-2a)$.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-2a),\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1\end{cases}$ 消去 y 得

$4x^2+4ax-9a^2=0$.

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-a$,$x_1\cdot x_2=\frac{-9a^2}{4}$,

$$|PQ|=\sqrt{1+\frac{3}{5}}\,|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{\frac{8}{5}[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{\frac{8}{5}(a^2+9a^2)}=4,$$

解得 $a^2=1$,故双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.