射影几何在高中圆锥曲线问题中的应用

吴佐慧

(广西柳州高级中学，545006)

摘　要:高等几何为初等几何提供了丰富的理论依据,很多初等几何和解析几何的题目都有高等几何的背景.本文先给出射影几何中的相关知识,然后从射影几何的视角给出文[2][3][4]中命题的统一证明及推广,并结合高考和竞赛真题进一步揭示此类问题的本质.

关键词:射影几何;圆锥曲线;统一证明及推广;高考和竞赛真题

1　引言

"高等几何"是高等师范院校数学专业的基础课程之一,其内容一般是先给出射影几何,然后去掉无穷远元素得到仿射几何,最后再引进度量得到欧氏几何,比如[1].同时德国数学家克莱茵(F. Klein)应用群论的观点给出了几何学的定义,并指出欧式几何是射影几何的子几何.

高等几何为初等几何提供了丰富的理论依据,很多初等几何和解析几何的题目都有高等几何的背景,因此,掌握一些高等几何知识有助于我们看清很多初等几何问题的本质,对高中数学教师以及学生数学素养的提高都是大有裨益的.文[2]研究了2018年全国高考数学Ⅰ卷(理)第19题以及2019年武汉市二月调研测试(理)第20题,并对其进行推广,读后深受启发.

题1　(2018年全国高考数学Ⅰ卷(理)第19题)设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F,过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点,点 M 的坐标为 $(2,0)$.

(1) 当 l 与 x 轴垂直时,求直线 AM 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点,证明:$\angle OMA=\angle OMB$.

题2　(2019年武汉市二月调研测试(理)第20题)已知椭圆 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为4,离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 G 的标准方程;($\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$)

(2) 过点 $P(1,0)$ 作动直线交椭圆 G 于 A,B 两点,Q 为平面上一点,直线 QA,QB,QP 的斜率分别记为 k_1,k_2,k_0,且满足 $k_1+k_2=2k_0$.问 Q 点是否在某定直线上运动,若存在,求出该直线的方程;若不存在,请说明理由.

本文将从射影几何的视角分别给出文[2][3][4]中命题的统一证明及推广,并结合全国高考数学真题以及全国高中数学联赛预赛试题,进一步揭示此类问题的本质.

接下来我们先给出射影几何中的相关知识.本文所有的符号都是标准的,参考[1].本文二阶曲线均为非退化二阶曲线.

2　基本知识

定义1[1]　给定二阶曲线 (c),如果两点 P、Q(P 不在 (c) 上)的连线与二阶曲线 (c) 交于两点 M_1,M_2,且 $(M_1M_2,PQ)=-1$,则称 P、Q 关于二阶曲线 (c) 调和共轭,或者 Q 与 P 关于二阶曲线 (c) 互为共轭点.

定理1[1]　不在二阶曲线上的两点 $P(p_1,p_2,p_3)$,$Q(q_1,q_2,q_3)$ 关于二阶曲线 $S\equiv\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 成共轭点的充要条件是 $S_{pq}=0$.

定义2[1]　定点 P 关于二阶曲线的共轭点的轨迹是一条直线,这条直线叫做 P 关于此二阶曲线的极线,P 点叫这条直线关于此二阶曲线的极点.

规定:若 P 在二阶曲线上,则 P 的极线即为二阶曲线在 P 点处的切线.

定理2[1]　(配极原则)如果 P 点的极线通过 Q 点,则 Q 点的极线通过 P 点.

本文系广西教育科学"十三五"规划课题(立项编号:2017C050)、广西教育科学"十三五"规划课题年度专项课题(立项编号:2018ZJY224)阶段性成果

推论 2.1[1] 两点连线的极线是此二点极线的交点;两直线交点的极线是此二直线极点的连线.

推论 2.2[1] 设 PA,PB 为二阶曲线的切线,若其中 A,B 为切点,则 AB 为 P 点的极线.

定义 3[1] 如果一个三点形的三个顶点恰好是对边的极点,则此三角形叫做自极三点形.

注 1 一个完全四点形的四个顶点若在一条二阶曲线上,则这个完全四点形的对边三点形的顶点是其对边的极点,故此三点形为自极三点形.(如图 1)

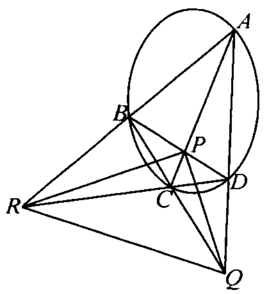

图 1

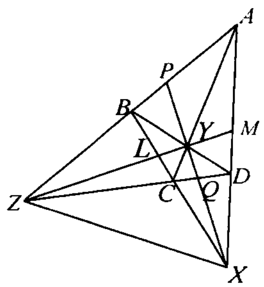

图 2

定义 4[1] 如果 $(P_1P_2,P_3P_4)=-1$,则称点偶 P_3,P_4 调和分离点偶 P_1,P_2,或称 P_1,P_2 与 P_3,P_4 调和共轭,也称 P_4 为 P_1,P_2,P_3 的第四调和点.

性质 1[1] 如图 2,在完全四点形 $ABCD$ 的对边三点形的每条边上有一组调和共轭点,其中两个点是对边点,另两个点是这条边与通过第三个对边点的一对对边的交点,则 $(YZ,LM)=-1$.

性质 2[1] 一角的两边与这个角的内外角平分线调和共轭.

性质 3[1] $(P_1P_2,P_3P_4)=-1$ 当且仅当 P_3 为线段 P_1P_2 的中点.

注 2 如图 3 所示,线段 BC 上,$OC=OD$,则 B 为 A 的反演点当且仅当 $(AB,CD)=-1$.

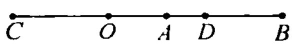

图 3

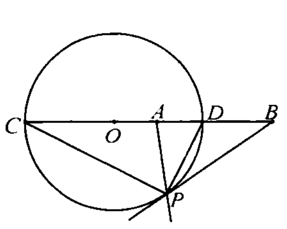

图 4

注 3 若动点 P 满足 $\frac{PA}{PB}=\frac{OD}{OA}$,则点 P 的轨迹为圆.进一步,已知平面内的动点 P 满足 $\frac{PA}{PB}=k$,其中 $k\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,则点 P 的轨迹为圆,称为阿波罗尼斯圆.显然 $(AB,CD)=-1$,此时 PD,PC 分别为 $\angle APB$ 的内外角平分线.如图 4.

性质 4[1] 对于通常线束中以 k_i 为斜率的四条直线 $l_i(i=1,2,3,4)$,我们有

$$(l_1l_2,l_3l_4)=\frac{(k_1-k_3)(k_2-k_4)}{(k_1-k_4)(k_2-k_3)}.$$

3 相关应用与推广

命题 1 直线 l 为点 P 的极线,过点 P 的直线与二阶曲线交于 A、B 两点,过点 P 作 $PM\perp l$ 于 M,分别连接 AM 与 BM,则当 A、B 两点在极线 l 的同侧时,$\angle AMP=\angle BMP$;当 A、B 两点在极线 l 的异侧时,$\angle AMP+\angle BMP=180°$.

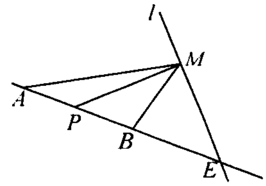

图 5

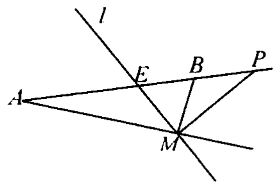

图 6

证明 当 A、B 在极线 l 的同侧时,如图 5 所示,延长 AB 交直线 l 于点 E,因为直线 l 为点 P 的极线,所以点 E 是点 P 的共轭点,$(PE,AB)=-1$,MA,MP,MB,ME 为调和线束.又因为 $\angle PME=90°$,所以 $\angle AMP=\angle BMP$.

当 A、B 在极线 l 的异侧时(如图 6),证法类似.

评注 若点 P 在二阶曲线的对称轴上,则此时点 P 的极线 l 与对称轴垂直,则交点即为 M,由命题 1 便得到文[2]中的探究一、探究二和探究三的结论.同时,如果二阶曲线为椭圆,进而就得到前文的题 1(2018 年全国高考数学 I 卷理第 19 题).如果二阶曲线为抛物线,则得到 2007 年全国高中数学联赛河南省预赛题第(2)问和 2015 年全国高考数学 I 卷(理)第 20 题;如果二阶曲线为圆,则得到 2013 年全国高考数学陕西卷(理)第 20 题和 2015 年全国高考数学福建卷(文)第 19 题等.

题 1 的第(2)问证明如下:过点 M 作垂直于 x 轴的直线 l_0,设直线 l 与 l_0 交点为 E,显然 $l_0:x=2$ 为准线,且是焦点 $F(1,0)$ 的极线,所以点 E 是点 F 的共轭点,$(FE,AB)=-1$,则 MA,MF,MB,ME 为调和线束,又因为 $\angle FME=90°$,所以 $\angle AMF=\angle BMF$.

命题 2 直线 l 为点 P 的极线,过点 P 的直线与二阶曲线 C 交于 A、B 两点,M 为直线 l 上任意一点,连接 MA、MB、MP,设直线 MA、MB、MP 和 l 的斜

率分别为k_1、k_2、k_3和k_4,则

$$\frac{(k_1-k_3)(k_2-k_4)}{(k_1-k_4)(k_2-k_3)}=-1.$$

证明　由性质4可得

$$(l_1l_2,l_3l_4)=\frac{(k_1-k_3)(k_2-k_4)}{(k_1-k_4)(k_2-k_3)}.$$

当直线AB与直线l相交时,设交点为E,因为直线l为P关于二阶曲线C的极线,所以E为P关于曲线C的共轭点,即$(AB,PE)=-1$,则

$$\frac{(k_1-k_3)(k_2-k_4)}{(k_1-k_4)(k_2-k_3)}=(l_1l_2,l_3l_4)=(AB,PE)=-1;$$

当直线$AB//l$时,$\frac{(k_1-k_3)(k_2-k_4)}{(k_1-k_4)(k_2-k_3)}=(l_1l_2,l_3l_4)=(AB,P\infty)=-1$,且此时$P$为$AB$的中点.

评注　由命题2我们还可得到:当直线l垂直于y轴时$k_4=0$,则$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{2}{k_3}$;当直线$l$垂直于$x$轴时$k_4=\infty$,则$k_1+k_2=2k_3$.于是便得到文[2]中探究四、探究五和探究六的统一证明以及文[3]中的结论.同时得到前文的题2(2019年武汉市二月调研测试理第20题)、2013年全国高考数学江西卷(文)第20题和2014年全国高中数学联赛陕西省预赛题等圆锥曲线试题等.

题2的第(2)问证明如下:存在定直线满足题目要求.点$P(1,0)$关于椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$的极线为$x=4$,即为所求.后续过程同命题2的证明,不再赘述.

命题3　如图7,圆锥曲线C及其外一定点P,若过点P作圆锥曲线的两条切线,切点分别为A、B,过点P的动直线l与C相交于不同的两点M、N,与直线AB交于Q,证明$\frac{|PM|}{|QM|}=\frac{|PN|}{|QN|}$.

证明　因为PA、PB与曲线C相切,所以AB为P关于曲线C的极线,则Q为P关于曲线C的共轭点,即$(MN,PQ)=-1$,$\frac{|PM|}{|QM|}=\frac{|PN|}{|QN|}$.

评注　由命题3,我们清楚了2009年全国高中数学联赛福建省预赛题的本质.稍加变形还可以得到$\frac{1}{PM}+\frac{1}{PN}=\frac{2}{PQ}$,同时,也可由命题3得到2008年全国高考数学安徽卷(理)第22题、2009年全国高中数学联赛四川省预赛题、2009年全国高中数学联赛湖北省预赛题第(2)问以及2014年全国高中数学联赛陕西省预赛题第(2)问等圆锥曲线试题.

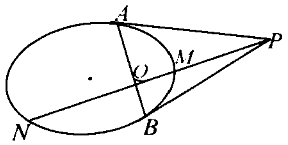

图7

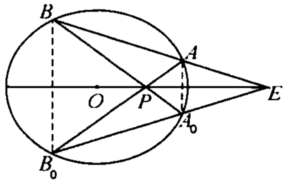

图8

命题4　点$P(x_0,y_0)$在直线$l:ax+by+h=0$上运动,且直线l与二阶曲线$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$不相交,过点$P$作二阶曲线的切线,切点分别为$M$,$N$,则直线$MN$过定点.

证明　因为点$P(x_0,y_0)$在直线$l:ax+by+h=0$上运动,所以$ax_0+by_0+h=0$,且直线MN为点P的极线,方程为$Ax_0x+By_0y+C(x_0y+y_0x)+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$,则可得

$$[b(Ax+Cy+D)-a(Cx+By+E)]x_0+b(Dx+Ey+F)-h(Cx+By+E)=0.$$

于是$b(Ax+Cy+D)-a(Cx+By+E)=0$,且$b(Dx+Ey+F)-h(Cx+By+E)=0$.

联立方程组,即可解出定点的坐标.

评注　此类定点问题经常出现.比如:2007年全国高中数学联赛河南省预赛题第(1)问、2008年全国高中数学联赛湖南省预赛题第(1)问(第2问即为性质1应用)、2009年全国高中数学联赛湖北省预赛题第(1)问、2014年全国高中数学联赛(A卷)一试第9题、2007年全国高中数学联赛湖北省预赛题第(3)问、2014年全国高中数学联赛陕西省预赛题第(1)问、2013年全国高考数学广东卷(理)第20题以及2012年全国高考数学福建卷(理)第19题等.

性质5[4]　若$P(t,0)(t\neq 0)$为椭圆(或双曲线)内一点,直线AB(非x轴)过点$E(\frac{a^2}{t},0)$且与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$(或双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$)交于不同的两点$A$、$B$,则直线$PA$、$PB$与$x$轴所成的角相等.

性质6[4]　若$P(t,0)(t\neq 0)$为抛物线内一点,直线AB(非x轴)过点$E(-t,0)$且与抛物线$y^2=2px(p>0)$交于不同的两点A、B,则直线PA、PB与x轴所成的角相等.

性质5和性质6是文[4]中得到的两个结果,作者应用解析法分别给出了两个性质的证明.接下来我们将应用射影几何的知识给出其统一证明.

(下转46页)

至此,我们的猜想得到了证实,由此可见题1中的解法二仅仅是题目的"个性"产生的巧合而已,题1与题2的解法二均需要进行调整.

4. 问题的再思考

我们接着来审视上述结论,不难发现利用导数刻画函数的单调性问题是上述结论的特殊情形即 $k_0=0$. 以单调递增函数为例:

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续,在 (a,b) 可导,且 $f(x)$ 在区间 (a,b) 单调递增,则对于 $\forall x \in (a,b)$,总有 $f'(x) \geqslant 0$ 恒成立.

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续,在 (a,b) 可导,对于 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) \geqslant 0$ 恒成立($f'(x)$ 不恒等于0),则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 单调递增.

参考文献:

[1] 查晓东,陶晖. 分享探究一个模拟题的心路历程[J]. 数学通讯(下半月),2019(5).

(上接第43页)

命题5 点 P 和点 E 在圆锥曲线 C 的对称轴上,且互为共轭点,过点 E 作直线与圆锥曲线 C 交于不同的两点 A、B,则直线 PA、PB 与圆锥曲线 C 的对称轴所成的角相等.

证明 如图8所示,设 A、B 关于圆锥曲线 C 的对称轴的对称点分别为 A_0、B_0,设 AA_0 与 BB_0 交于点 P,由对称性可知点 P 在圆锥曲线 C 的对称轴上,延长 BA 与 B_0A_0,设其交点为 E_0,可知点 E_0 也在圆锥曲线 C 的对称轴上. 又因为 AA_0 与 BB_0 均垂直于圆锥曲线 C 的对称轴,且由第二部分的注1可得,过点 E_0 且垂直于对称轴的直线为点 P 的极线,则点 P 与点 E_0 互为共轭点,又因为 E_0 也在圆锥曲线 C 的对称轴上且点 E 为点 P 的共轭点,所以 E_0 与 E 重合,因此直线 PA、PB 与圆锥曲线 C 的对称轴所成的角相等.

其他情况类似.

评注 由命题5即可得性质5和性质6的统一证明. 本质上命题5是命题1的特例. 同时也可由命题5得到2015年全国高考数学 I 卷(理)第20题和2013年全国高考数学陕西卷(理)第20题. 此外,第二部分的注1也在高考中多次出现:如2010年全国高考数学江苏卷(理)第18题、2012全国高考数学北京卷(理)第19题以及2011全国高考数学四川卷(理)第21题等.

限于篇幅,文中出现的高考原题以及全国高中数学联赛预赛题就不再一一列出,如有需要请读者自行查阅.

4 结语

圆锥曲线是高中阶段的重点和难点,且全国高中数学联赛以及高考数学中必有圆锥曲线的题目,一般运算量较大且得分率低. 在文[5]和[6]中,我们给出伸缩变化和平移坐标系在高中圆锥曲线中的应用,解决了部分问题. 本文给出了射影几何在高中数学圆锥曲线中的应用,更具体的是应用极点极线给出高中数学联赛预赛及全国高考数学圆锥曲线的部分真题的统一证明及推广.

通过研究不难发现,高中圆锥曲线试题大部分都有高等几何的背景,且突出数学基本思想方法、体现数学核心素养. 作为高中数学老师,在圆锥曲线内容平时教学及试题命制的过程中一定要多加关注其高等几何背景,这样不仅能够提升我们自己的数学素养,而且更能开阔学生的眼界、拓展学生的思维,引导学生以更高的观点去理解、分析高中数学知识与习题,引导学生去发现数学试题的本质、体会圆锥曲线众多规律的统一性,进而提高学生对数学的兴趣以及培养学生的学术志趣,为以后的学术科研打下一定基础.

参考文献:

[1] 梅向明,刘增贤,王汇淳,王智秋. 高等几何(第三版)[M]. 北京:高等教育出版社,2008.
[2] 韩智明. 一道调研试题的有缘"前世"和美妙的"今生"[J]. 数学通讯(下半月),2019(9):39-42.
[3] 漆赣湘. 关于椭圆准线的若干性质再探究[J]. 数学通讯(下半月),2019(7):42-43.
[4] 俞永锋. 与圆锥曲线极点和极线有关的一个等角定理[J]. 数学通讯(下半月),2010(6):43-44.
[5] 吴佐慧,林军,刘合国. 仿射变换在高中数学中的应用[J]. 数学通讯(下半月),2015(9):28-30.
[6] 吴佐慧. 平移坐标系法在圆锥曲线问题中的应用[J]. 中学数学,2018(8):92-94.

(收稿日期:2020-02-19)