

圆锥曲线中一个面积比的定值性质的推广

干志华

(上海市金山中学, 201599)

文[1]给出了圆锥曲线中一个关于三角形面积之比为定值的新性质, 椭圆的情形如下:

性质 如图 1, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的弦 PQ 经过左焦点 F , 点 P, Q 处的切线相交于 T , A 是椭圆的右顶点, 直线 AP, AQ 交左准线 l 于 M, N , 则

(1) T 为 MN 的中点;

(2) 记 $\triangle PTQ, \triangle PMT, \triangle QNT$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则 $\frac{S_1}{S_2 + S_3} = e (e \text{ 为离心率})$.

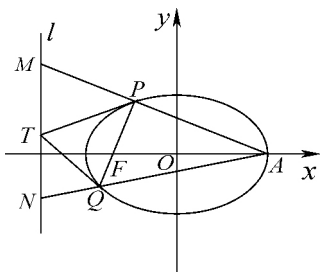


图 1

在众多研究圆锥曲线性质的文献中, 有关面积之比为定值的性质并不多见. 上述优美性质立即引起了笔者探究的兴趣. 借用超级画板的动态功能, 笔者发现该性质还可将焦点 F 推广到长轴上的其它点, 进一步甚至可以推广到椭圆内的任意点(椭圆中心除外), 面积之比依然为定值.

以椭圆为例, 我们有如下结论:

定理 1 设 $F(m, 0) (0 < |m| < a)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 长轴上一定点, A 是椭圆的右顶点, 过点 F 的动直线与椭圆交于 P, Q 两点, 点 P, Q 处的切线相交于 T , 直线 AP, AQ 分别交直线 $l: x = \frac{a^2}{m}$ 于点 M, N , 则

(1) T 为线段 MN 的中点;

(2) 记 $\triangle PTQ, \triangle PMT, \triangle QNT$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则 $\frac{S_1}{S_2 + S_3} = \left| \frac{m}{a} \right|$.

定理 2 如图 2, 设 $F(m, n)$ (非坐标原点 O) 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 内一定点, 直线 OF 与椭圆交于点 A , 过点 F 的动直线与椭圆交于 P, Q 两点, 点 P, Q 处的切线相交于 T , 直线 AP, AQ 分别交直线 $l: \frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1$ 于点 M, N , 则

(1) T 为线段 MN 的中点;

(2) 记 $\triangle PTQ, \triangle PMT, \triangle QNT$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则 $\frac{S_1}{S_2 + S_3} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$.

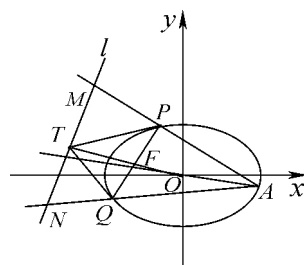


图 2

定理 1 是定理 2 的特例, 限于篇幅, 本文将直接证明更具普遍性的定理 2.

1. 几个引理

若沿用文[1]的证明思路, 计算量将非常大, 因此笔者希望尽可能挖掘定理中所蕴含的几何本质, 借助几何性质简化计算. 证明过程中, 需要用到下面这些引理.

引理 1^[2] 过定点 $F(x_0, y_0)$ 的两条动直线 AC, BD 分别与圆锥曲线相交于 A, B, C, D . 设 AB, CD 相交于点 M, AD, BC 相交于点 N , 则

(1) 当圆锥曲线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

0), 且 $F(x_0, y_0)$ 不为坐标原点时, 点 M, N 的轨迹都是定直线 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$;

(2) 当圆锥曲线为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 且 $F(x_0, y_0)$ 不为坐标原点时, 点 M, N 的轨迹都是定直线 $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$;

(3) 当圆锥曲线为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 且 $F(x_0, y_0)$ 不为坐标原点时, 点 M, N 的轨迹都是定直线 $y_0 y = p(x + x_0)$.

我们称直线 l 是点 F 关于圆锥曲线的极线, 点 F 为直线 l 关于圆锥曲线的极点.

因此, 定理 2 中的直线 $l: \frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1$ 即为点 $F(m, n)$ 关于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的极线.

极线与极点有许多有趣的性质, 详细介绍请参考文[3]、[4]、[5].

引理 2^[3] 如图 3, 过点 P 作直线 AB, CD 与圆锥曲线分别交于 A, B 和 C, D , 直线 AC, BD 交于点 Q , 圆锥曲线在点 B, C 处的切线交于点 R , 则 P, Q, R 三点共线.

引理 3 (牛顿线^[6]) 四边形两对角线中点、两组对边交点连线的中点, 三点共线.

引理 4 设点 P, Q 在直线 l 上的射影为 P_1, Q_1 , PQ 的中点 R 在直线 l 上的射影为 R_1 , 则

(1) 当 P, Q 在直线 l 的同侧时,

$$|PP_1| + |QQ_1| = 2|RR_1|;$$

(2) 当 P, Q 在直线 l 的异侧时,

$$||PP_1| - |QQ_1|| = 2|RR_1|.$$

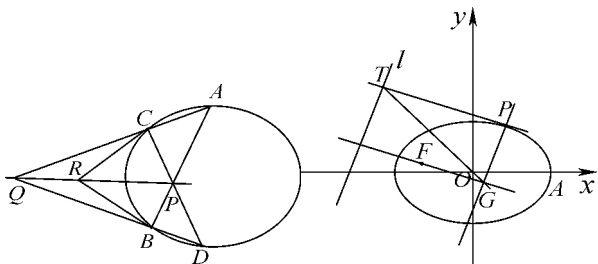


图 3

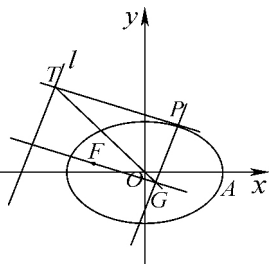


图 4

引理 5 如图 4, 已知直线 $l: \frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1$ 是点

$F(m, n)$ (非坐标原点 O) 关于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a >$

$b > 0)$ 的极线, 椭圆上一点 P 处的切线与极线交于点 T . 过 F 作平行于 PT 的直线与过 P 所作平行于 l 的直线交于点 G , 则 T, O, G 三点共线.

证明 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 则切线 PT 的方程为 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.

又点 T 在直线 $l: \frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1$ 上, 故点 T 的坐标适合方程 $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2}$, 即点 T 在过坐标原点 O 的直线 $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2}$ 上.

此外, 由直线 FG 平行 PT , 得直线 FG 的方程为 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{mx_1}{a^2} + \frac{ny_1}{b^2}$.

又直线 PG 平行于 l , 故直线 PG 的方程为 $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = \frac{mx_1}{a^2} + \frac{ny_1}{b^2}$.

从而, 两直线 FG, PG 的交点 G 的坐标也适合方程 $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2}$, 即点 G 也在直线 $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2}$ 上.

从而, T, O, G 三点共线.

2. 定理 2 的证明

对于(1), 我们的证明思路是: 先证明两切线的交点 T 在极线 l 上, 后证明直线 OT 经过弦 PQ 的中点, 再得到 T 为线段 MN 的中点.

如图 2, 设点 P, Q 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则切线 TP, TQ 的方程分别为 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$,

$$\frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1.$$

又设 TP, TQ 的交点 T 的坐标为 (x_0, y_0) , 则 $\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} = 1, \frac{x_2 x_0}{a^2} + \frac{y_2 y_0}{b^2} = 1$, 从而直线 PQ 的方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

将 $F(m, n)$ 代入, 得 $\frac{mx_0}{a^2} + \frac{ny_0}{b^2} = 1$, 即 (x_0, y_0) 适合方程 $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1$, 故点 T 在直线 l 上.

记 PQ 的中点为 $R(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. 由 $\frac{x_1^2}{a^2} +$

$\frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, 两式相减, 得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0,$$

从而 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}} = -\frac{b^2}{a^2}$, 即

$$k_{PQ} \cdot k_{OR} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

又 $k_{PQ} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, 故 $k_{OR} = \frac{y_0}{x_0} = k_{OT}$, 从而, 直线

OT 经过 PQ 的中点 R .

如图 5, 设直线 OF 与椭圆的另一个交点为 B , 与直线 l 的交点为 C , 则由极线的性质可知, M, B, Q 三点共线, N, B, P 三点共线.

从而, 在四边形 $APBQ$ 中, O, R 分别是对角线 AB, PQ 的中点, 由引理 3 得, T 为对边交点 M, N 连线的中点, 即 T 为线段 MN 的中点.

对于(2), 我们的证明思路是: 借助几何性质, 将面积之比转化为线段长度之比.

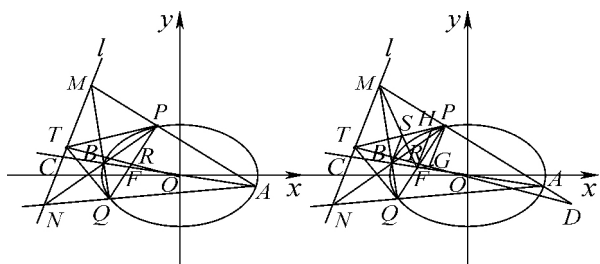


图 5

设点 P, Q, R 在直线 l 上的射影为 P_1, Q_1, R_1 , 则由引理 4, 得

$$\begin{aligned} S_2 + S_3 &= \frac{1}{2} \cdot |TM| \cdot |PP_1| + \frac{1}{2} \cdot |TN| \cdot |QQ_1| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |TM| \cdot (|PP_1| + |QQ_1|) \\ &= |TM| \cdot |RR_1| = 2S_{\triangle MTR}. \end{aligned}$$

设点 P, M 在直线 TR 上的射影分别为 P_0, M_0 , 直线 TR 与 AP 交于点 D , 则

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3} = \frac{2S_{\triangle PTR}}{2S_{\triangle MTR}} = \frac{|PP_0|}{|MM_0|} = \frac{|DP|}{|DM|}.$$

如图 6, 过 B 作椭圆的切线, 与切线 PT 交于点 S , 由引理 2, 得 M, S, F 三点共线.

设 $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OF} (\lambda \neq 1)$, 则点 B 的坐标为 $(\lambda m, \lambda n)$, 切线 BS 的方程为 $\frac{\lambda m x}{a^2} + \frac{\lambda n y}{b^2} = 1$, 从而 $l \parallel BS$.

过 F 作平行于 PT 的直线与过 P 所作平行于 l 的直线交于点 G , 由引理 5 得, T, O, G 三点共线.

过点 F 作 $FH \parallel GP$ 交 PT 于 H , 则 $l \parallel GP \parallel FH \parallel BS$, 且四边形 $PGFH$ 为平行四边形, 从而 $|FH| = |GP|$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2 + S_3} &= \frac{|DP|}{|DM|} = \frac{|GP|}{|TM|} \\ &= \frac{|FH|}{|TM|} = \frac{|FS|}{|MS|} = \frac{|FB|}{|BC|}. \end{aligned}$$

将 $B(\lambda m, \lambda n)$ 代入椭圆方程, 得 $\frac{\lambda^2 m^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 n^2}{b^2} = 1$, 即 $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$.

设 $\overrightarrow{OC} = \mu \overrightarrow{OF}$, 则点 C 的坐标为 $(\mu m, \mu n)$, 代入极线 l 的方程, 得 $\frac{\mu m^2}{a^2} + \frac{\mu n^2}{b^2} = 1$, 即 $\frac{1}{\mu} = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$, 从而 $\mu = \lambda^2$. 于是

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2 + S_3} &= \frac{|FB|}{|BC|} = \frac{|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OF}|}{|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{|\lambda - 1| \cdot |\overrightarrow{OF}|}{|\mu - \lambda| \cdot |\overrightarrow{OF}|} = \frac{|\lambda - 1|}{|\lambda^2 - \lambda|} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

定理 2 得证.

事实上, 根据极线的性质(文[5], 定理 3), 当点 F 关于圆锥曲线的极线为 l 时, 过点 F 任作一割线交圆锥曲线于 A, B , 交 l 于 C , 则有 $\frac{|FB|}{|BC|} = \frac{|FA|}{|AC|}$.

因此, 点 A, B 具有对称性, 如在定理 1 中, 若 A 为椭圆的左顶点, 结论亦不变.

3. 类比到双曲线

类比椭圆的情形, 我们可以得到双曲线的相关结论. 然而, 过点 F 的动直线与双曲线的两交点 P, Q 可能位于双曲线的同一支上, 也可能位于双曲线的不同支上, 由引理 4, 视 P, Q 两点在直线 l 的同侧与异侧, 会有不同的结论.

定理 3 设 $F(m, 0) (|m| > a)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} -$

$\frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 内一定点, A 是双曲线的右顶点, 过点 F 的动直线与双曲线交于 P, Q 两点, 点 P, Q 处的切线相交于 T , 直线 AP, AQ 分别交直线 $l: x = \frac{a^2}{m}$ 于点 M, N , 则

(1) T 为线段 MN 的中点;

(2) 记 $\triangle PTQ, \triangle PMT, \triangle QNT$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则

(i) 当 P, Q 两点在双曲线上的同一支时,

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3} = \frac{|m|}{a};$$

(ii) 当 P, Q 两点分别在双曲线两支上时,

$$\frac{S_1}{|S_2 - S_3|} = \frac{|m|}{a}.$$

定理 4 设 $F(m, n)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 内一定点, 直线 OF 与双曲线交于点 A , 过点 F 的动直线与双曲线交于 P, Q 两点, 点 P, Q 处的切线相交于 T , 直线 AP, AQ 分别交直线 $l: \frac{mx}{a^2} - \frac{ny}{b^2} = 1$ 于点 M, N , 则

(1) T 为线段 MN 的中点;

(2) 记 $\triangle PTQ, \triangle PMT, \triangle QNT$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则

(i) 当 P, Q 两点在双曲线上的同一支时,

$$\frac{S_1}{S_2 + S_3} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}};$$

(ii) 当 P, Q 两点分别在双曲线两支上时,

$$\frac{S_1}{|S_2 - S_3|} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}}.$$

证明过程同样可以类比椭圆情形得到, 不再赘述.

4. 类比到抛物线

椭圆情形下, 过点 F 的弦 AB 为椭圆的直径^[4]. 对于抛物线, 其直径平行于抛物线的对称轴, 故交点 A 可视为无穷远点, 从而直线 PM, QN 也平行于抛物线的对称轴. 我们有相应的结论:

定理 5 设 $F(m, 0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 内一定点, 过点 F 的动直线与抛物线交于 P, Q 两点, 点 P, Q 处的切线相交于 T , 直线 PM, QN 分别平行于 x 轴且交直线 $l: x = -m$ 于点 M, N , 则

(1) T 为线段 MN 的中点;

(2) 记 $\triangle PTQ, \triangle PMT, \triangle QNT$ 的面积分别为

S_1, S_2, S_3 , 则 $\frac{S_1}{S_2 + S_3} = 1$.

定理 6 设 $F(m, n)$ 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 内一定点, 过点 F 的动直线与抛物线交于 P, Q 两点, 点 P, Q 处的切线相交于 T , 直线 PM, QN 分别平行于 x 轴且交直线 $l: ny = p(x + m)$ 于点 M, N , 则

(1) T 为线段 MN 的中点;

(2) 记 $\triangle PTQ, \triangle PMT, \triangle QNT$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则 $\frac{S_1}{S_2 + S_3} = 1$.

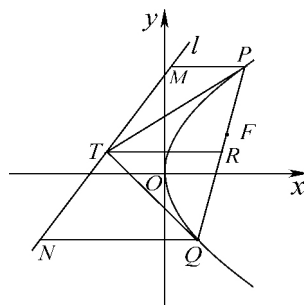


图 7

证明 如图 7, 设 P, Q 两点的坐标分别为 $(2pt_1^2, 2pt_1), (2pt_2^2, 2pt_2) (t_1 \neq t_2)$, 则切线 TP 的方程为 $2pt_1y = p(x + 2pt_1^2)$, 即 $2t_1y = x + 2pt_1^2$.

同理, 切线 TQ 的方程为 $2t_2y = x + 2pt_2^2$.

联立 $\begin{cases} 2t_1y = x + 2pt_1^2, \\ 2t_2y = x + 2pt_2^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2pt_1t_2, \\ y = p(t_1 + t_2), \end{cases}$ 即交点 T 为 $(2pt_1t_2, p(t_1 + t_2))$.

由 F, P, Q 三点共线, 得 $\begin{vmatrix} m & n & 1 \\ 2pt_1^2 & 2pt_1 & 1 \\ 2pt_2^2 & 2pt_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

化简后整理得

$$2pt_1t_2(t_1 - t_2) + m(t_1 - t_2) - n(t_1^2 - t_2^2) = 0.$$

因为 $t_1 \neq t_2$, 故 $n(t_1 + t_2) = 2pt_1t_2 + m$.

从而, $T(2pt_1t_2, p(t_1 + t_2))$ 适合直线 l 的方程 $ny = p(x + m)$, 即点 T 在直线 l 上.

设 PQ 的中点为 R , 则点 R 的坐标为 $(p(t_1^2 + t_2^2), p(t_1 + t_2))$, 从而, $Rt \parallel x$ 轴, 进而 $RT \parallel PM \parallel QN$, 故 T 为线段 MN 的中点, 且 $S_{\triangle PTR} = S_{\triangle MTR}$.

同定理 2 的证明过程, 得 $\frac{S_1}{S_2 + S_3} = \frac{2S_{\triangle PTR}}{2S_{\triangle MTR}}$, 因

此 $\frac{S_1}{S_2 + S_3} = 1$.

参考文献:

- [1] 杨雨融. 关于圆锥曲线焦点弦端点处切线的一个新性质[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2018(7)(上): 25-26.
- [2] 于先金. 圆锥曲线定点弦与定直线相关性的推广[J]. 河北理科教学研究, 2006(2): 46-47.
- [3] 冯克勤. 射影几何趣谈[M]. 上海: 上海教育出版社, 1987: 93-94.

- [4] 梅向明等. 高等几何(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 44-58, 112-117.
- [5] 王文彬. 极点、极线与圆锥曲线试题的命制[J]. 数学通讯(上半月), 2015(4): 62-封底.
- [6] 沈康身. 历史数学名题赏析[M]. 上海: 上海教育出版社, 2010: 544-546.

(收稿日期: 2018-10-30)

蕴涵于数学高考中的几个“阿波罗尼斯问题”

虞关寿 潘建伟

(浙江省绍兴鲁迅中学, 312000)

阿波罗尼斯是古希腊数学家, 与欧几里得、阿基米德齐名, 他的代表作《圆锥曲线论》是一部经典巨著, 对圆锥曲线进行了系统全面的研究, 其中一些研究成果常常出现在我们日常的数学教学和各级各类考试中, 比如在数学高考中比较多出现的阿波罗尼斯圆. 本文例举几个在近几年各地高考试题、竞赛试题与自主招生试题中出现的阿波罗尼斯问题, 感悟阿波罗尼斯问题在中学几何中的地位.

一、阿波罗尼斯圆

设 A, B 为两定点, 且 $|AB| = a$, 动点 M 满足 $\frac{AM}{BM} = \lambda (\lambda \neq 1)$, 则动点 M 的轨迹是一个圆, 这个轨迹最先由阿波罗尼斯发现, 通常称之为阿波罗尼斯圆.

如图 1, PQ 为直径, 显然有 $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$. 若 AC 为圆的切线, 则 $CB \perp PQ$, 阿波罗尼斯圆的直径 $|PQ| = \frac{2a\lambda}{|\lambda^2 - 1|}$.

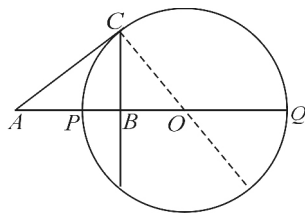


图 1

例 1 (2008 年江苏高考) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2, CA = \sqrt{2}CB$, 则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是_____.

解 因为 $AB = 2, CA = \sqrt{2}CB$, 所以, 点 C 的轨迹是个阿波罗尼斯圆, 且该圆的直径为 $2R = \frac{2 \times 2 \times \sqrt{2}}{|(\sqrt{2})^2 - 1|} = 4\sqrt{2}$, 即半径 $R = 2\sqrt{2}$. 所以, $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

例 2 (2017 年杭州二模) 已知 \vec{OA}, \vec{OB} 是不共线的非零向量, 设 $\vec{OC} = \frac{1}{r+1} \vec{OA} + \frac{r}{r+1} \vec{OB}$, 定义点集 $M = \{K \mid \frac{\vec{KA} \cdot \vec{KC}}{|\vec{KA}|} = \frac{\vec{KB} \cdot \vec{KC}}{|\vec{KB}|}\}$. 当 $K_1, K_2 \in M$ 时, 若对于任意的 $r \geq 2$, 不等式 $|\vec{K_1 K_2}| \leq c |\vec{AB}|$ 恒成立, 则实数 c 的最小值为_____.

解 因为 $\frac{1}{r+1} + \frac{r}{r+1} = 1$, 所以 A, B, C 三点共线, 因为 $\frac{\vec{KA} \cdot \vec{KC}}{|\vec{KA}|} = \frac{\vec{KB} \cdot \vec{KC}}{|\vec{KB}|}$, 所以 KC 为 $\angle AKB$ 的平分线, 所以 $\frac{|KA|}{|KB|} = \frac{r}{1} = r$, 即 K 的轨迹是阿波罗尼斯圆, 且该圆的直径为 $\frac{2|AB|r}{r^2 - 1}$.

因为 $K_1, K_2 \in M$, 所以