极点、极线与圆锥曲线试题的命制

王文彬
(江西省抚州市第一中学，344000)

极点与极线是高等几何中的重要概念，当然不是《高中数学课程标准》规定的学习内容，也不属于高考考查的范围，但由于极点与极线是圆锥曲线的基本特征，因此在高考试题中必然会有所反映，自然也会成为高考试题的命题背景.

作为一名中学数学教师，应当了解极点与极线的概念，掌握有关极点与极线的基本性质，只有这样，才能"识破"试题中蕴含的有关极点与极线的知识背景，进而把握命题规律.

1. 极点与极线的定义

定义 1 (几何定义) 如图 1，P 是不在圆锥曲线上的点，过 P 点引两条割线依次交圆锥曲线于四点 E,F,G,H，连接 EH,FG 交于 N，连接 EG,FH 交于 M，则直线 MN 为点 P 对应的极线.

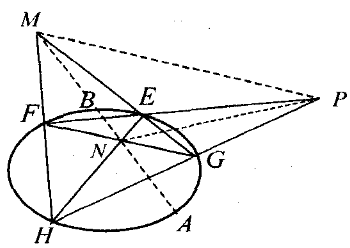

图 1

若 P 为圆锥曲线上的点，则过 P 点的切线即为极线.

由图 1 可知，同理 PM 为点 N 对应的极线，PN 为点 M 所对应的极线. MNP 称为自极三点形. 若连接 MN 交圆锥曲线于点 A,B，则 PA,PB 恰为圆锥曲线的两条切线.

定义 2 (代数定义) 已知圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$，则称点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l: Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ 是圆锥曲线 Γ 的一对极点和极线.

事实上，在圆锥曲线方程中，以 x_0x 替换 x^2，以 $\frac{x_0+x}{2}$ 替换 x(另一变量 y 也是如此)，即可得到点 $P(x_0,y_0)$ 的极线方程.

特别地：

(1) 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$；

(2) 对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$；

(3) 对于抛物线 $y^2=2px$，与点 $P(x_0,y_0)$ 对应的极线方程为 $y_0y=p(x_0+x)$.

2. 极点与极线的基本性质

定理 1 (1) 当 P 在圆锥曲线 Γ 上时，其极线 l 是曲线 Γ 在 P 点处的切线；

(2) 当 P 在 Γ 外时，其极线 l 是曲线 Γ 从点 P 所引两条切线的切点所确定的直线(即切点弦所在直线)；

(3) 当 P 在 Γ 内时，其极线 l 是曲线 Γ 过点 P 的割线两端点处的切线交点的轨迹.

证明 (1) 假设同以上代数定义，对 $\Gamma: Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ 的方程，两边求导得 $2Ax+2Cyy'+2D+2Ey'=0$，解得 $y'=-\frac{Ax+D}{Cy+E}$，于是曲线 Γ 的 P 点处的切线斜率为 $k=-\frac{Ax_0+D}{Cy_0+E}$，故切线 l 的方程为 $y-y_0=-\frac{Ax_0+D}{Cy_0+E}(x-x_0)$，化简得 $Ax_0x+Cy_0y-Ax_0^2-Cy_0^2+Dx+Ey-Dx_0-Ey_0=0$. 又点 P 在曲线 Γ 上，故有 $Ax_0^2+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0$，从中解出 $Ax_0^2+Cy_0^2$，然后代入前式可得曲线 Γ 在 P 点处的切线为 $l: Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$. 根据代数定义，此方程恰为点 P 的极线方程.

(2) 设过点 P 所作的两条切线的切点分别为 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则由(1)知，在点 M,N 处的切线方程分别为 $Axx_1+Cyy_1+D(x_1+x)+E(y_1$

$+y)+F=0$ 和 $Axx_2+Cyy_2+D(x_2+x)+E(y_2+y)+F=0$,又点 P 在切线上,所以有

$Ax_0x_1+Cy_0y_1+D(x_1+x_0)+E(y_1+y_0)+F=0$,

$Ax_0x_2+Cy_0y_2+D(x_2+x_0)+E(y_2+y_0)+F=0$.

观察这两个式子,可发现点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$都在直线 $Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ 上,又两点确定一条直线,故切点弦 MN 所在的直线方程为 $Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$. 根据代数定义,此方程恰为点 P 对应的极线方程.

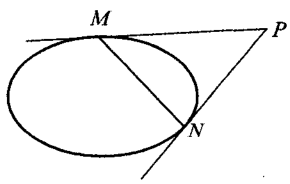

图 2

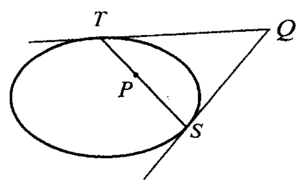

图 3

(3) 设曲线 Γ 过 $P(x_0,y_0)$ 的弦的两端点分别为 $S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$,则由(1)知,曲线在这两点处的切线方程分别为

$Ax_1x+Cy_1y+D(x_1+x)+E(y_1+y)+F=0$,

$Ax_2x+Cy_2y+D(x_2+x)+E(y_2+y)+F=0$.

设两切线的交点为 $Q(m,n)$,则有

$Ax_1m+Cy_1n+D(x_1+m)+E(y_1+n)+F=0$,

$Ax_2m+Cy_2n+D(x_2+m)+E(y_2+n)+F=0$.

观察两式,可发现 $S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$都在直线 $Axm+Cyn+D(x+m)+E(y+n)+F=0$ 上,又两点确定一条直线,所以直线 ST 的方程为 $Axm+Cyn+D(x+m)+E(y+n)+F=0$.

又直线 ST 过点 $P(x_0,y_0)$,所以 $Ax_0m+Cy_0n+D(x_0+m)+E(y_0+n)+F=0$,这意味着点$Q(m,n)$在直线 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$ 上.

所以,两切线的交点的轨迹方程是 $Ax_0x+Cy_0y+D(x_0+x)+E(y_0+y)+F=0$.

定理 2 (配极原则) 点 P 关于圆锥曲线 Γ 的极线 p 经过点 $Q\Leftrightarrow$点 Q 关于 Γ 的极线 q 经过点 P;

直线 p 关于 Γ 的极点 P 在直线 q 上$\Leftrightarrow$直线 q 关于 Γ 的极点 Q 在直线 p 上.

由此可知,共线点的极线必共点;共点线的极点必共线.

定理 3 如图 4,设点 P 关于圆锥曲线 Γ 的极线为 l,过点 P 任作一割线交 Γ 于 A,B,交 l 于 Q,则$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$ ①;反之,若有①成立,则称点 P,Q 调和分割线段 AB,或称点 P 与 Q 关于 Γ 调和共轭.

点 P 关于圆锥曲线 Γ 的调和共轭点的轨迹是一条直线,这条直线就是点 P 的极线.

推论 1 如图 4,设点 P 关于圆锥曲线 Γ 的调和共轭点为点 Q,则有$\frac{2}{PQ}=\frac{1}{PA}+\frac{1}{PB}$ ②;反之,若有②成立,则点 P 与 Q 关于 Γ 调和共轭.

可以证明①与②是等价的(详略).

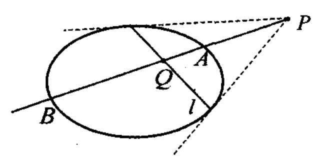

图 4

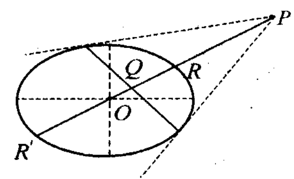

图 5

特别地,我们还有

推论 2 如图 5,设点 P 关于有心圆锥曲线 Γ(设其中心为 O)的调和共轭点为点 Q,直线 PQ 经过圆锥曲线的中心,则有 $OR^2=OP\cdot OQ$;反之,若有 $OR^2=OP\cdot OQ$ 成立,则点 P 与 Q 关于 Γ 调和共轭.

证明 设直线 PQ 与 Γ 的另一交点为 R',若点 P 与 Q 关于 Γ 调和共轭,则有 $\frac{PR}{PR'}=\frac{QR}{QR'}\Rightarrow\frac{OP-OR}{OP+OR}=\frac{OR-OQ}{OR'+OQ}$(注意 $OR'=OR$),化简即可得 $OR^2=OP\cdot OQ$. 反之,由 $OR^2=OP\cdot OQ$ 也可推出$\frac{PR}{PR'}=\frac{QR}{QR'}$,即点 P 与 Q 关于 Γ 调和共轭.

定理 2、定理 3 的证明可参阅有关高等几何教材,这里从略.

3. 特殊的极点与极线

①圆锥曲线的焦点与其相应的准线是该圆锥曲线的一对极点与极线.

譬如,对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 而言,右焦点 $F(c,$

0)对应的极线为$\frac{c\cdot x}{a^2}+\frac{0\cdot y}{b^2}=1$,即$x=\frac{a^2}{c}$,恰为椭圆的右准线.

②对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$而言,点$M(m,0)$对应的极线方程为$x=\frac{a^2}{m}$;对于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$而言,点$M(m,0)$对应的极线方程为$x=\frac{a^2}{m}$;(3)对于抛物线$y^2=2px$而言,点$M(m,0)$对应的极线方程为$x=-m$.

定理 4 如图6,设圆锥曲线Γ的一个焦点为F,与F相应的准线为l.

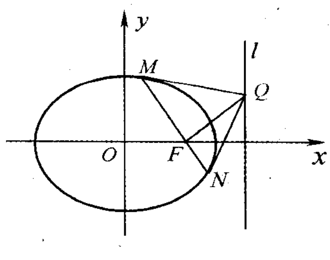

图 6

(1)若过点F的直线与圆锥曲线Γ相交于M,N两点,则Γ在M,N两点处的切线的交点Q在准线l上,且$FQ\perp MN$;

(2)若过准线l上一点Q作圆锥曲线Γ的两条切线,切点分别为M,N,则直线MN过焦点F,且$FQ\perp MN$;

(3)若过焦点F的直线与圆锥曲线Γ相交于M,N两点,过F作$FQ\perp MN$交准线l于Q,则连线QM,QN是圆锥曲线Γ的两条切线.

下面给出椭圆情形下结论(1)的证明,其余皆同理可证.

设$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$,则$F(c,0)$,$l:x=\frac{a^2}{c}$.由于焦点$F$的极线为$l$,故切线$MQ,NQ$的交点$Q$一定在直线$l$上,设$Q(\frac{a^2}{c},y_Q)$,则点$Q$的极线为

$$\frac{\frac{a^2}{c}\cdot x}{a^2}+\frac{y_Qy}{b^2}=1,\text{即 }y=-\frac{b^2}{cy_Q}(x-c).$$

再设$MN:y=k(x-c)$,则$k=-\frac{b^2}{cy_Q}$,即有$y_Q=-\frac{b^2}{ck}$,从而Q点的坐标为$(\frac{a^2}{c},-\frac{b^2}{ck})$,于是$k_{FQ}=\frac{-\frac{b^2}{ck}}{\frac{a^2}{c}-c}=-\frac{1}{k}$,$k_{FQ}\cdot k_{MN}=-1$,故$FQ\perp MN$.

4. 圆锥曲线试题的命制

例 1 对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,如图 7,如果取定点$P$,过点$P$作割线$PAB$,设$P$与$Q$关于椭圆调和共轭,则点$Q$一定在一条定直线上.特别地,如图 8,如果点$P,Q$调和共轭,而且点$P$在某直线上运动,则$Q$是点$P$的极线与射线$OP$的交点.

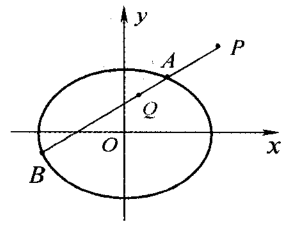

图 7

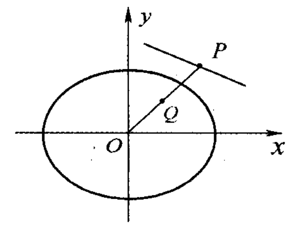

图 8

【链接 1】 (2008 年安徽卷理 22)设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$过点$M(\sqrt{2},1)$,且左焦点为$F_1(-\sqrt{2},0)$.

(1) 求椭圆C的方程;

(2) 当过点$P(4,1)$的动直线l与椭圆C交于两个不同的点A,B时,在线段AB上取点Q,满足$|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$,证明点$Q$总在某定直线上.

简析 (1) 易求得答案$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.(2)由条件可得$\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}=\frac{|\overrightarrow{QB}|}{|\overrightarrow{QA}|}$,说明点$P,Q$关于圆锥曲线$C$调和共轭.根据定理 3,点$Q$在点$P$对应的极线上,此极线方程为$\frac{4\cdot x}{4}+\frac{1\cdot y}{2}=1$,化简得$2x+y-2=0$.故点$Q$总在直线$2x+y-2=0$上.

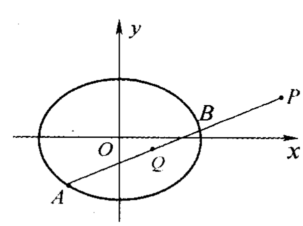

图 9

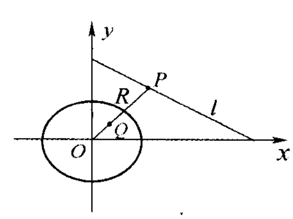

图 10

【链接 2】 (1995 年全国卷理 26)已知椭圆$C:\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线$l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$,$P$是$l$上一点,射线$OP$交椭圆于点$R$,又点$Q$在$OP$上且满足$|OQ|$

$\cdot|OP|=|OR|^2$，当点 P 在 l 上移动时，求点 Q 的轨迹方程，并说明轨迹是什么曲线.

简析　由条件 $|OR|^2=|OP|\cdot|OQ|$ 可知点 P，Q 关于椭圆 C 调和共轭，点 Q 是点 P 的极线与射线 OP 的交点.

设 $P(12t,8-8t)$，则与 P 对应的极线方程为 $\frac{12t\cdot x}{24}+\frac{(8-8t)\cdot y}{16}=1$，化简得

$$tx+(1-t)y=2 \quad ①$$

又射线 OP 的方程为 $y=\frac{8-8t}{12t}x$，化简得

$$y=\frac{2-2t}{3t}x \quad ②$$

由①②联立方程组并消去 t 得 $2x^2+3y^2=4x+6y$（下略）.

例 2　设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $P(m,0)(m\neq0,|m|\neq b)$ 的极线为垂直于 x 轴的直线：$x=\frac{b^2}{m}$，若点 Q 在该极线上，则其坐标可设为 $(\frac{b^2}{m},y_Q)$，容易看出 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(m,0)\cdot(\frac{b^2}{m},y_Q)=b^2$（定值）.

【链接】（2011 年四川卷理 21）如图 11，椭圆两顶点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，过其焦点 $F(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C,D 两点，并与 x 轴交于点 P. 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q.

(1)当 $|CD|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，求直线 l 的方程；

(2)当点 P 异于 A,B 两点时，求证：$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 为定值.

简析　可求得椭圆方程为 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$，第(1)问略，对第(2)问，若以 P 点为极点，则其对应的极线过 Q 点，P 点的极线方程为 $x=\frac{1}{m}$，故可设 $Q(\frac{1}{m},y_Q)$，因而有 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1$.

例 3　设椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 $T(m,t)(m,t\neq0)$，A,B 为椭圆的左右顶点，直线 TA,TB 分别与椭圆交于另一点 M,N. 如果 t 为常数 t_0，则点 T 的极线为 $\frac{t_0x}{a^2}+\frac{my}{b^2}=1$，该极线恒

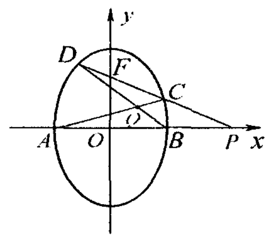

图 11

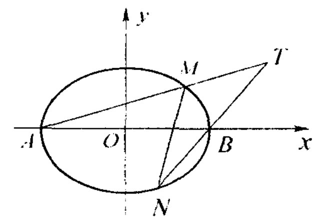

图 12

过 x 轴上的定点 $(\frac{a^2}{t_0},0)$，当然直线 MN 也过该定点；如果 m 为常数 m_0，则点 T 的极线恒过 y 轴上的定点 $(0,\frac{b^2}{m_0})$，此时直线 MN 也过该定点.

【链接】（2010 年江苏卷理 18）在平面直角坐标系 xOy 中，如图 12，已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左右顶点为 A,B，右焦点为 F. 设过点 $T(t,m)$ 的直线 TA,TB 与此椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，其中 $m>0,y_1>0,y_2<0$.

(1) 设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$，求点 P 的轨迹；

(2) 设 $x_1=2,x_2=\frac{1}{3}$，求点 T 的坐标；

(3) 设 $t=9$，求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点（其坐标与 m 无关）.

简析　前面两问比较简单，这里从略. 对于(3)，当 $t=9$ 时，T 点坐标为 $(9,m)$，点 T 对应的极线方程为 $\frac{9\cdot x}{9}+\frac{m\cdot y}{5}=1$，即 $x+\frac{m\cdot y}{5}=1$，此直线恒过 x 轴上的定点 $K(1,0)$，从而直线 MN 也恒过定点 $K(1,0)$.

例 4　如图 13，设椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，其右焦点为 F，直线 l 与椭圆 Γ 相切于 P，且与右准线交于点 Q，根据定理 4 有，$PF\perp FQ$.

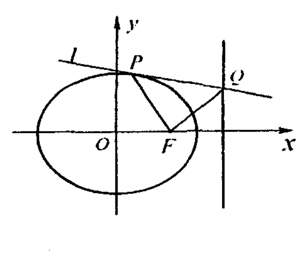

图 13

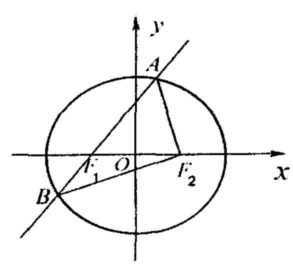

图 14

【链接 1】（2012 年福建卷理 19）如图 14，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F_1，右焦点为 F_2，离心率 $e=\frac{1}{2}$，过 F_1 的直线交椭圆于 A,B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设动直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 P，且与直线 $x=4$ 相交于点 Q. 试探究：在坐标平面内是否存在定点 M，使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

简析 易求得椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，直线 $x=4$ 恰为椭圆的准线，所求定点显然就是右焦点 $F_2(1,0)$.

【链接 2】（2006 年全国卷Ⅱ理 21）已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A,B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}\ (\lambda>0)$，过 A,B 两点分别作抛物线的切线，并设其交点为 P.

（1）证明 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值；

（2）设 $\triangle ABP$ 的面积为 S，写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式，并求 S 的最小值.

简析 （1）根据定理 4 有 $PF\perp AB$，故有 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$；

（2）因 $PF\perp AB$，故 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|FP|$. 设 AB 的方程为 $y=kx+1$，与抛物线的极线方程 $x_0x=2(y_0+y)$ 对比可知直线 AB 对应的极点为 $P(2k,-1)$，把 $y=kx+1$ 代入 $x^2=4y$，并由弦长公式得 $|AB|=4(1+k^2)$，所以

$$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|FP|$$

$$=2(1+k^2)\sqrt{4(1+k^2)}.$$

显然，当 $k=0$ 时，S 取最小值 4.

例 5 设双曲线 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，其右焦点为 F，右准线为 m，直线 l 与 Γ 相切于 P，且与右准线 m 交于点 N，根据定理 4 有，$NF\perp FP$.

稍作延伸：过 F 作垂直于 x 轴的直线交 l 于 M，过 P 作 $PQ\perp m$ 于 Q，连 QF，易知四边形 $PQNF$ 为圆内接四边形，故 $\angle PQF=\angle PNF$，$\angle PFQ=\angle PNQ$，又 $MF//m$，故 $\angle PNQ=\angle NMF$，由此知 $\angle PFQ=\angle NMF$，从而有 $\triangle PQF\backsim\triangle FNM$，于是 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{|FP|}{|QP|}=e$（定值）.

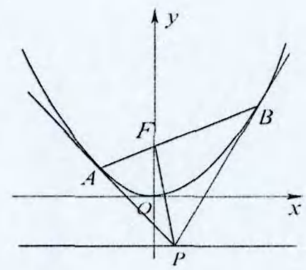

图 15

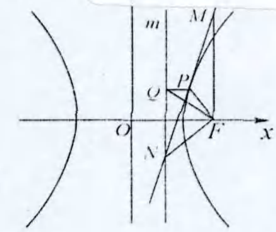

图 16

【链接】（2014 年江西卷理 20）如图 17，已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的右焦点 F，点 A,B 分别在 C 的两条渐近线上，$AF\perp x$ 轴，$AB\perp OB$，$BF//OA$（O 为坐标原点）.

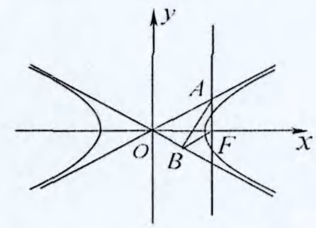

图 17

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）过 C 上一点 $P(x_0,y_0)\ (y_0\neq 0)$ 的直线 $l:\frac{x_0x}{a^2}-y_0y=1$ 与直线 AF 相交于点 M，与直线 $x=\frac{3}{2}$ 相交于点 N，证明点 P 在 C 上移动时，$\left|\frac{MF}{NF}\right|$ 恒为定值，并求此定值.

简析 （1）易求得双曲线方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$；

（2）题目条件符合图 16，故有

$$\left|\frac{MF}{NF}\right|=e=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

极点与极线的知识蕴藏着十分丰富的内容，是命题取之不尽的源泉. 仅就所举的几个例子来说，如果将题中涉及的圆锥曲线换成其他圆锥曲线，即可得出一系列"姊妹题". 另外，我们还可对极点与极线的性质进行更多的整合或更深入的挖掘，这样就可以命制出许许多多有关圆锥曲线的新试题.

（收稿日期：2014－10－14）