2016年高考四川卷解析几何题的探源与推广

张志勇
（江苏省常州市第五中学）

摘　要：文章以GeoGebra为工具，历经试题再现初探定值、仿射变换寻根问源、引申推广数学推演等环节，探寻2016年四川卷解析几何题的源与流，将圆中的性质推广到圆锥曲线中．解题研究的目标在于让学生有机会再创造数学，在技术支持实验先行、构建网络深化思维、以简驱繁趋近通透中帮助认识问题本质、深化数学思维．

关键词：解题研究；圆锥曲线；圆幂定理；GeoGebra

圆锥曲线中的定点定值、范围最值问题一直是高考的热点和重点，这类试题往往以解法灵活为学生提供了多样的选择，以贴近教材为教学提供了良好的导向，以背景丰富为研究提供了广阔的空间．例如，2016年四川卷文、理科的第20题便是这样的平中见奇、卓尔不群的好题．两道试题的背景恰是圆锥曲线幂定理，《从圆幂定理到圆锥曲线幂定理》一文，从数学史的角度揭示了圆幂定理与圆锥曲线幂定理之间的本质联系，突出了数学史料在思考、探究现代数学问题中所起到的重要指引作用．本文则从高考试题的解法分析入手，借助GeoGebra软件（以下统称“GGB”）揭示其清晰的几何直观、动态的变换方式和深刻的数学背景，并以仿射变换的方式，实现了圆的几何性质在圆锥曲线中自然的引申、推广，可谓异曲同工，相映成趣．

一、试题源与流的探寻

1．试题再现，初探定值

题目1　（2016年四川卷·理20）已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点，直线 l：$y=-x+3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T．

（1）求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标；

（2）设 O 是坐标原点，直线 l' 平行于 OT，与椭圆 E 交于不同的两点 A，B，且与直线 l 交于点 P．证明：存在常数 λ，使得 $|PT|^2=\lambda|PA|\cdot|PB|$，并求 λ 的值．

探究1：第(2)小题属于典型的定值问题，题设满足两个几何等量关系（PT 与椭圆相切于点 T，直线 AB 与 OT 平行），当点 P 在椭圆外变动时，$\lambda=\dfrac{|PT|^2}{|PA|\cdot|PB|}$，且保持不变．自然地，我们需要追问这个定值是特殊的存在还是有一般性的规律？更进一步地，如果有一般性的规律存在，那么这样的性质能否推广到双曲线和抛物线中？考虑到计算的复杂性，我们借助 GGB 来先行探路．

步骤1：创设如图1所示的情境，拖动点 P 可以发现度量值保持不变，λ 为定值0.8.

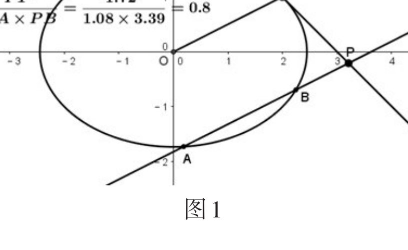

图1

收稿日期：2017—06—28

基金项目：江苏省教育科学“十二五”规划2015年度重点课题——高中数学可视化教学的实践研究（B-a/2015/02/010）．

作者简介：张志勇（1974— ），男，中学高级教师，主要从事中学数学教育教学、试题及信息技术与数学学科的整合研究．

步骤2：改变点 T 的位置，可以发现 λ 有所变化（仍与点 P 无关）；进一步的，更改椭圆方程，λ 值随之变化；说明 λ 值的大小取决于椭圆方程和点 T 的位置.

步骤3：将椭圆方程更改为双曲线方程和抛物线方程，如图2、图3，可以验证 $\lambda=\dfrac{|PT|^2}{|PA|\cdot|PB|}$ 始终为定值.

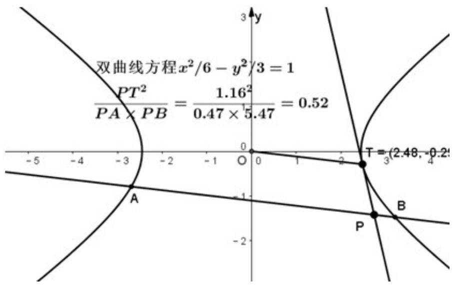

图2

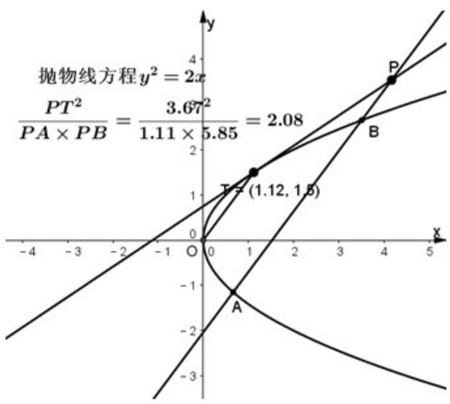

图3

说明：GGB内嵌CAS系统支持符号计算，绘制椭圆只需直接在命令输入区输入方程，便可绘制出相应图象；提供有作切线、极线（或径线）等命令，为解析几何研究带来了极大的便利；更为重要的是，GGB做到了图形与代数方程的同步变化，如从步骤1到步骤3，我们更改方程便可立竿见影、一触即发.

通过前述探究验证，我们已然确信在圆锥曲线中，$\dfrac{|PT|^2}{|PA|\cdot|PB|}$ 为定值，而联想圆的切割线定理，于是可猜想圆锥曲线中应有相应的定理存在，问题在于这样的定值并不会随随便便存在，题设中的平行条件奥妙何在，有待我们进一步的探究.

题目2 （2016年四川卷·文20）已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点，点 $P\left(\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ 在椭圆 E 上.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设不过原点 O，且斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 l，与椭圆 E 交于不同的两点 A，B，线段 AB 的中点为点 M，直线 OM 与椭圆 E 交于点 C，D. 证明：$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

探究2：如果说题目1让我们想到了切割线定理，那么题目2的背景自然会锁定相交弦或割线定理. 但简单探索并不成功，$|PA|\cdot|PB|$，$|PC|\cdot|PD|$ 的值随点 P 的变化而变化（为行文方便将题设中的点 M 改成了点 P），于是受题目1的启发，将弦 AB，CD 固定方向.

步骤1：创设如图4所示的探究情境，其中 OM，ON 为椭圆的两半径，AB，CD 为过点 P 分别与 OM，ON 平行的弦；拖动点 P 可以发现 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$ 的值保持不变.

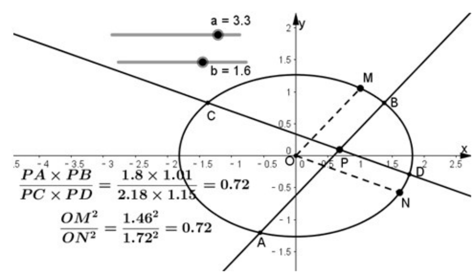

图4

步骤2：既然 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$ 的结果与弦的方向有关. 因此，度量计算相应的半径 OM，ON 的长度，结果发现 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\dfrac{|OM|^2}{|ON|^2}$；而改变椭圆形状，结论依然成立.

说明：为方便研究，GGB中所给定的方程形式为 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=1$，其中 a，b 由数值滑杆确定（如图4）.

步骤3：调节数值滑杆 a，b 的值，将椭圆背景改为双曲线；拖动点 P，发现步骤2的结论在双曲线中同样适用（如图5）.

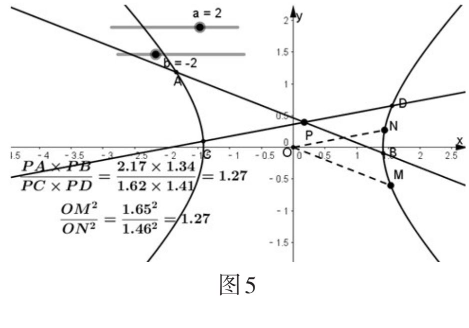

图5

步骤4：将上述双曲线方程修改为抛物线方程 $y^2=2ax$；可以发现，当点 P 变动时，$\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$ 的值为定值，但却与 $\dfrac{|OM|^2}{|ON|^2}$ 不相等（如图6）.

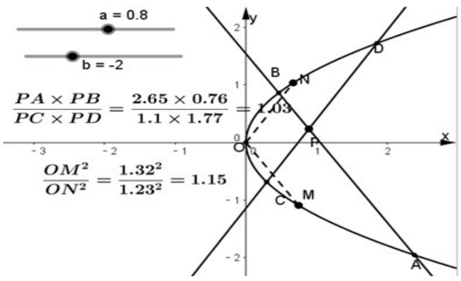

图6

与椭圆、双曲线均是有心圆锥曲线相区别的是，抛物线并没有中心；考虑到抛物线比较特殊的“心”还在于焦点，并且考查割线定理关键在于定向，于是将弦 AB，CD 的平行方向修改为与焦点弦平行.

步骤5：过抛物线焦点 F 作两条弦 A_1B_1，C_1D_1，分别修改直线 AB，CD 的属性“过点 P 与 A_1B_1（C_1D_1）平行”；拖动点 P，可以发现 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$ 的值为定值，并且与 $\dfrac{A_1B_1}{C_1D_1}$ 始终相等（如图7）.

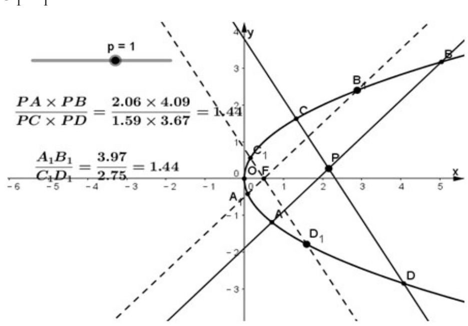

图7

2. 仿射变换，寻根问源

类比圆中的结论以GGB为探究工具，我们已经发现圆锥曲线中有类似切割线定理、割线定理的结论存在（以定向为前提），那么为什么会有这样的结论？还需要进一步的寻根探源.

考虑到圆幂定理是相交弦定理、切割线定理及割线定理的统一，而仿射变换可将椭圆转换为圆，于是一个基本思路是借助仿射变换探讨圆幂定理在椭圆中的推广.

圆幂定理：过一定点 P 的直线与半径为 r 的定圆交于 A，B 两点，则 $PA\cdot PB$ 为定值 OP^2-r^2，定值称为点 P 关于 $\odot O$ 的幂（以下统称“圆幂”）.

依据变换 Γ：$\begin{cases}x'=x,\\ y'=\dfrac{a}{b}y,\end{cases}$ 可以由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得到圆 $x'^2+y'^2=a^2$.

如图8，这样椭圆中的割线 PAB、半径 OM，变换后得到圆中的割线 $P'A'B'$，半径 OM'.

依据仿射变换的基本性质，即仿射变换前后的直线保持平行性、对曲线的切线和平行（共线）线段比例不变，得 $\dfrac{PA}{OM}=\dfrac{P'A'}{OM'}$，$\dfrac{PB}{OM}=\dfrac{P'B}{OM'}$. 从而 $\dfrac{PA\cdot PB}{OM^2}=\dfrac{P'A'\cdot P'B}{OM'^2}$.

由圆幂定理，又有 $P'A'\cdot P'B=OP'^2-a^2$.

设 $P(x_0,\ y_0)$，则 $P'\left(x_0,\ \dfrac{a}{b}y_0\right)$.

所以 $\dfrac{PA\cdot PB}{OM^2}=\dfrac{OP'^2-a^2}{a^2}=\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}-1$.

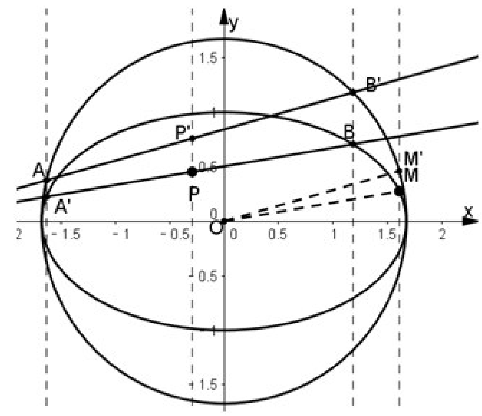

图8

椭圆幂定理：过一定点 $P(x_0,\ y_0)$ 的直线与椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 交于 A，B 两点，OM 为椭圆平行于 AB 的半径，则 $\dfrac{PA\cdot PB}{OM^2}$ 为定值 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}-1$（$PA$，$PB$，$OM$ 表示有向线段的数量），此定值叫做点 P 关于此椭圆的幂（以下统称“椭圆幂”）.

证明： 设 AB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\theta,\\ y=y_0+t\sin\theta\end{cases}（t为参数），$$

代入椭圆方程，得

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0\cos\theta}{a^2}+\frac{y_0\sin\theta}{b^2}\right)t+\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}-1=0.$$

根据参数方程的几何意义，有

$$PA\cdot PB=\frac{\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}-1}{\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}}.$$

类似地，由点 M，N 在椭圆上（点 N 为点 M 关于原点的对称点），得

$$OM \cdot ON = \frac{\frac{0^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} - 1}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}} = -OM^2.$$

所以 $\frac{PA \cdot PB}{OM^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - 1.$

与圆相类似，由椭圆幂定理，可得相交弦定理、割线定理、切线长定理及切割线定理：当点 P 在圆内时，$k<0$，易得相交弦定理；当点 P 在圆上时，$k=0$；当点 P 在圆外时，$k>0$，易得割线定理、切线长定理、切割线定理.

椭圆相交弦定理：AB 与 CD 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中两相交于点 P 的弦，r_1，r_2 是分别与 AB，CD 平行的两半径，则 $\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD} = \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2}.$

椭圆切割线定理：点 P 为椭圆外一点，过点 P 引椭圆的切线 PT 和割线 PAB，r_1，r_2 是分别与切线 PT 和割线 PAB 分别平行的半径，则 $\frac{PT^2}{PA \cdot PB} = \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2}.$

3. 引申推广，数学推演

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 可看成“虚椭圆” $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(bi)^2} = 1$，这样类比，可得双曲线幂为 $k = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{(bi)^2} - 1 = \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} - 1$，于是有如下定理.

双曲线幂定理：过一定点 $P(x_0,\ y_0)$ 的直线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 交于 A，B 两点，OM 为椭圆平行于 AB 的半径，则 $\frac{PA \cdot PB}{OM^2}$ 为定值 $\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} - 1$，此定值称为点 P 关于此双曲线的幂（以下统称“双曲线幂”）.

相应地，我们整理探究2的步骤5，可得抛物线幂定理如下.

抛物线幂定理：过一定点 $P(x_0,\ y_0)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 2px$（$p>0$）交于 A，B 两点，l 为抛物线中平行于 AB 的焦点弦的长，则 $\frac{PA \cdot PB}{l}$ 为定值 $\frac{{y_0}^2}{2p} - x_0$，此定值叫做点 P 关于此抛物线的幂（以下统称“抛物线幂”）.

证明：设 AB 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\theta, \\ y = y_0 + t\sin\theta \end{cases}（t为参数），$$

代入抛物线方程，得

$$(\sin^2\theta)t^2 + 2(y_0\sin\theta - p\cos\theta)t + {y_0}^2 - 2px_0 = 0.$$

根据参数方程的几何意义，有 $PA \cdot PB = \frac{{y_0}^2 - 2px_0}{\sin^2\theta}.$

类似地，得到焦点弦 l 的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} + t\cos\theta, \\ y = t\sin\theta \end{cases}（t为参数）.$$

代入抛物线方程，得

$$(\sin^2\theta)t^2 - (2p\cos\theta)t + {y_0}^2 - p^2 = 0.$$

弦长 $l = |t_1 - t_2| = \frac{\sqrt{(2p\cos\theta)^2 + 4p^2\sin^2\theta}}{\sin^2\theta} = \frac{2p}{\sin^2\theta}.$

于是，$\frac{PA \cdot PB}{l} = \frac{{y_0}^2}{2p} - x_0.$

通过上述推导，我们得出了椭圆幂、双曲线幂和抛物线幂的概念，但仍有瑕疵. 因为前者是借助同向半径长来定义的，而抛物线幂则以同向焦点弦长为参照，固然我们可以统一以焦点弦长 l 来表示，如椭圆中 $l = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} + \frac{ep}{1 + e\cos\theta} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}$，这样椭圆幂为 $\frac{PA \cdot PB}{l} = \frac{a}{2}\left(\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - 1\right)$；但既然只要确定方向，那么用半径长或焦点弦长为参照都有一定的局限性，于是有下列推演过程.

设倾斜角为 α，且过点 $P(x_0,\ y_0)$ 的直线交圆锥曲线 $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$（记为 $F(x,\ y) = 0$）于 A，B 两点，则割线 PAB 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}（t为参数）.$$

将割线参数方程代入圆锥曲线方程，有

$$A(x_0 + t\cos\alpha)^2 + C(y_0 + t\sin\alpha)^2 + D(x_0 + t\cos\alpha) + E(y_0 + t\sin\alpha) + F = 0,$$

即 $p \cdot t^2 + q \cdot t + r = 0$，

其中 $\begin{cases} p = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha, \\ q = 2Ax_0\cos\alpha + 2Cy_0\sin\alpha + D\cos\alpha + E\sin\alpha, \\ r = A{x_0}^2 + C{y_0}^2 + Dx_0 + Ey_0 + F. \end{cases}$

所以 $PA \cdot PB = t_1t_2 = \frac{r}{p} = \frac{F(x_0,\ y_0)}{A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha}.$

圆锥曲线幂定理：过定点 $P(x_0,\ y_0)$ 的直线与圆锥曲线 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$（记为 $F(x,\ y)=0$）交于 A，B 两点，则 $PA\cdot PB$ 为定值 $\dfrac{F(x_0,\ y_0)}{A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha}$，称此定值为做点 P 关于此圆锥曲线的幂.

圆锥曲线割线定理：过平面内任意一点 P，作圆锥曲线 Γ 的两方向确定的割线 PAB，PCD，则比值 $\lambda=\dfrac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}$ 为定值（与点 P 的位置无关）.

证明：设割线 PAB，PCD 的倾斜角分别为 α，β，由圆锥曲线幂定理，得

$$PA\cdot PB=\frac{F(x_0,\ y_0)}{A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha},$$

$$PC\cdot PD=\frac{F(x_0,\ y_0)}{A\cos^2\beta+C\sin^2\beta}.$$

所以 $\dfrac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\dfrac{A\cos^2\beta+C\sin^2\beta}{A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha}$.

二、解题研究的价值认识和教学应用

高考压轴题并非无源之水，而是有根可寻. 作为教师，如果能够了解试题的背景、挖掘试题的本质，自然可以居高临下地认识高考试题、游刃有余地驾驭课堂. 教是为了学，笔者以为研究解题的价值在于教会学生怎样应用数学方法、如何发现数学结论，由“震惊”转为“原来如此”，在认识问题本质、深化数学思维的过程中趋近一览众山小般的通透.

1. 技术支持，实验先行

研究数学问题重要的是发现结论，而验证数学想法最简单、最直接的做法就是寻找具体案例来证实，这就是数学实验. 以探究1为例，当我们的猜想在无数个椭圆、双曲线、抛物线中得到证实时，题目1中所蕴含的切割线定值规律自然可以呼之欲出.

当然，工欲善其事，必先利其器. 这样的实验探究离开教育技术的支持，以纸笔的方式进行操作是很难想象的，事实上在GGB的帮助下，很多想法都能一一核实，而且举重若轻、一触即发，从椭圆到双曲线、抛物线，从步骤1到步骤3，简单更改数学对象属性设置便能轻松实现. 笔者认为，技术与数学学科从整合走向融合的重要标志是实现使用技术学习和研究数学，具体而言，就是把技术交到学生手中，使之成为学生学习和解决数学问题的强有力的工具.

2. 构建网络，深化思维

数学教育从面向定义走向面向问题，最重要的着眼点在于数学思维水平的提升. 在前面对试题的源与流的探寻中，在发现“蘑菇群”的同时也构建了一个命题网络（如图9）.

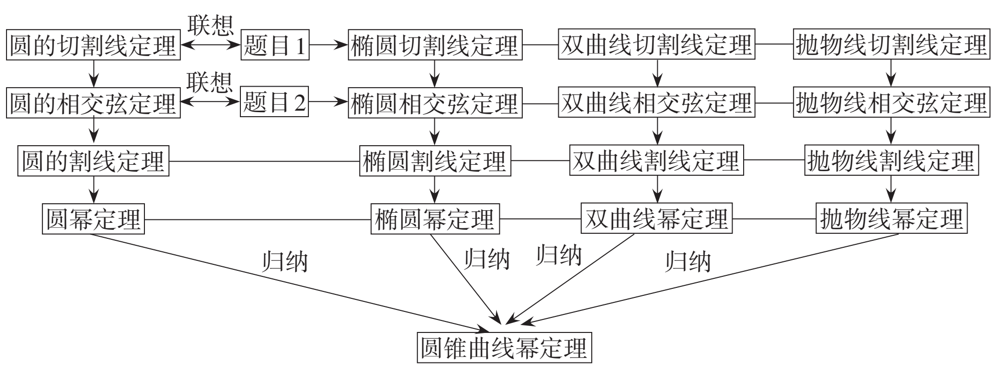

图9

在这个命题网络中，既有横向的类比推理（题目1中从圆的切割线定理中得到启发，探索圆锥曲线中的定值规律），也有纵向的归纳思考（从椭圆切割线定理、相交弦定理探索定值背后蕴含的幂定理，整合椭圆幂、双曲线幂、抛物线幂为圆锥曲线幂定理）；既有从试题解读到圆中定理的联想，也有从题目1到题目2定向制约条件的猜测；既有强抽象（从幂定理到切割线定理），也有弱抽象（将椭圆幂、抛物线幂的定向参照弱化得到圆锥曲线幂）；显然，在这样的探寻中，于学生而言，收获的不仅仅是知识和解题成功的喜悦，更重要的是思维水平和解题境界的真切提升. 正如M·克莱因所言，为了教学生思维，让他们喜欢并真正理解数学，有必要帮助学生“再创造数学”. 于是解题研究可以为学生再创造数学提供课题和资源.

3. 以简驱繁，趋近通透

当学生有机会参与试题研究时，可以在登高望远之余，通彻、明白问题的诸多变化，让学生在挖掘试题的内涵价值、拓展试题的外延范围的同时，把题目做活，实现做一道题、通一类题、变多道题.

以题目1的求解为例，可以类似椭圆幂定理的证明用参数方程法解决，也可直接参考仿射变换法进行化归. 具体地，在变换 $\begin{cases} x'=x, \\ y'=\sqrt{2}y \end{cases}$ 的作用下，椭圆的割线 PAB，切线 PT，变换成了 $P'A'B'$，PT'，于是 $\dfrac{P'T'^2}{PT^2}=\dfrac{1+2\times(-1)^2}{1+(-1)^2}=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{P'A'\cdot P'B'}{PA\cdot PB}=\dfrac{1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{6}{5}$，进而得到 $\dfrac{PT^2}{PA\cdot PB}\cdot\dfrac{P'A'\cdot P'B'}{P'T'^2}=\dfrac{4}{5}$；又由 $P'T'^2=P'A'\cdot P'B'$，得 $\dfrac{PT^2}{PA\cdot PB}=\dfrac{4}{5}$.

面对这样的解法，自有“华丽转身”之感，事实上，让学生参与研究试题的源与流，可以让最终结果在解题前就“观念地存在着”，更可以在解题具体操作与解题策略之间架设沟通或转化的桥梁，在对为什么这样解、怎样学会解的不断追问中实现观点上的提高或实质性的突破.

参考文献：

［1］陈波. 从圆幂定理到圆锥曲线幂定理［J］. 数学教学，2016(5)：42-45.

［2］沈文选，杨清桃. 几何瑰宝：平面几何500名题暨1 000条定理［M］. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.

（上接第52页）

描点法. 为了使所画图象比较精确，用描点法画图要注意两点：（1）描的点越多越好；（2）选择的点要有代表性. 这两点学生都是有体会的，而正是基于这两点，教材才会选择用正弦线来描点.

3. 自然渗透思想方法

数学思想方法往往是内隐于数学探究发现过程中的，其反映出研究数学对象的一般规律与方法. 本案例中师生探究活动之所以融洽有余，皆因教学处理背后的思想方法承接自然. 加之其中蕴涵的数学思想方法十分丰富，细细悟来，课堂沉浸在数学的意境美中. 数形结合，从来就不是一蹴而就的过程，要么从形到数入微，要么由数到形显直观. 从形入手，通过画图直观感受三角函数图象的周而复始的变化规律，符合学生的认知发展规律，立体几何的教学更是如此，总是严格遵照“直观感知、操作确认、思维辩证、度量计算”的几何学习方式. 具体地，画函数图象，不是乱画，画法要讲效率、讲精确度，问题的重心就落在了点的选取上，一个活脱脱的随机抽样与统计学的问题：选部分点，是想以样本代替总体；选多少个点，是想确定样本的容量（太少不足以表现图象的大致轮廓，太多则浪费精力与时间）；选怎样的点，是想提高样本的代表性. 故此，正弦函数图象上的最高点、最低点、平衡位置点就是首选. 画完正弦函数图象，是否需要用同样的方法再画余弦函数图象呢？肯定不能，数学是抓问题本质的，是善用“化归”的魔术师，解决了一个问题，就相当于解决了一类问题. 当然，对于这类问题的“鸿沟”，我们要找出并填补上. 根据三角函数的诱导公式，两函数图象可平移变化互得. 因而，好的数学课堂应以思想方法来润，真正提升教学品质.

参考文献：

［1］中华人民共和国教育部制订. 普通高中数学课程标准（实验）［M］. 北京：人民教育出版社，2003.

［2］章建跃. 在领悟数学知识蕴含的思想方法上下功夫［J］. 中小学数学，2009(10)：52.

［3］殷希群. 怎样才能“把方法交给学生”：对课堂教学的一些认识与思考［J］. 数学通讯，2012(10)：1-4.

［4］王策三. 认真对待“轻视知识”的教育思潮［J］. 北京大学教育评论，2004(7)：5-25.

［5］李渺. 高中数学教师PCK的案例分析：以“正弦函数、余弦函数的图象”为例［J］. 中学数学教学参考（上旬），2012(1/2)：15-18.

［6］周龙虎. “等比数列前 n 项和”的教学思考［J］. 中国数学教育（高中版），2015(12)：15-18.