哈尔莫斯提出“问题是数学的心脏”，通过这次由于错解引发的探究，我感到问题也是数学教学的心脏，只有问题才能引发学生的思维活动，发展学生的数学能力．以问题为指引，引导学生自主探究，合作学习，我们会发现学生的潜力是无穷的．如何激发学生的学习兴趣，如何引导学生去主动探究，是值得每位数学教师深思的问题．数学教学要着眼于学生的长期利益，发挥数学的内在力量，以提高数学素养、发展思维能力、培育理性精神为核心，使学生在掌握数学知识的过程中学会思考，成为善于认识问题、解决问题的人才．

参考文献：

[1]　章建跃．数学教育之取势明道优术[J]．数学通报，2014(10)．

[2]　卓彬．例谈数学教学中问题串的设计与使用[J]．数学通报，2013(6)．

[3]　罗增儒．数学解题学引论[M]．西安：陕西师范大学出版社，2009．

(收稿日期：2018－07－01)

2018年高考全国卷Ⅲ理科20题的解法与拓展

李　波

(四川省苍溪中学校，628400)

2018年高考全国卷Ⅲ理科20题考查了椭圆的性质、参数方程、三角形的重心公式、向量运算、等差数列等知识的综合运用，该题立足于基础，注重技能和知识交汇的考查，凸显高考对能力的要求．本文从多个视角给出试题的不同解法，并对该问题进行多层次的推广．

题目　(2018年高考全国卷Ⅲ理科20题)已知斜率为k的直线l与椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$交于$A$，$B$两点，线段$AB$的中点为$M(1,m)$ $(m>0)$．

(1)证明：$k<-\frac{1}{2}$；

(2)设F为C的右焦点，P为C上一点，且$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$．证明：$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$成等差数列，并求出该数列的公差．

一、第(1)小题的解法分析

视角1　从点差法入手，利用点与椭圆的位置关系建立不等式．

解法1　设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，两式相减整理得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，即$k=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$．

由题设知$\frac{x_1+x_2}{2}=1$，$\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是$k=-\frac{3}{4m}$．

因为A，B两点在椭圆上，所以线段AB的中点$M(1,m)$在椭圆内，即$\frac{1^2}{4}+\frac{m^2}{3}<1$，解得$0<m<\frac{3}{2}$，故$k<-\frac{1}{2}$．

评析　求m的取值范围，可以利用弦的的中点M必在椭圆内建立不等式．

视角2　从点差法入手，利用判别式建立不等式．

解法2　同解法1可得$k=-\frac{3}{4m}$．

故直线AB的方程为$y-m=-\frac{3}{4m}(x-1)$，即$y=-\frac{3}{4m}x+\frac{3}{4m}+m$．

令$k=-\frac{3}{4m}$，$t=\frac{3}{4m}+m$，则直线AB的方程可整理为$y=kx+t$．

联立$\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去$y$得

$$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0.$$

因为直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，所以 $\Delta=48(3+4k^2-t^2)>0$，即 $3+4k^2-t^2>0$，即

$$3+4(-\frac{3}{4m})^2-(\frac{3}{4m}+m)^2>0,$$

结合 $m>0$ 解得 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

评析　"点差法"常用题型有：求中点弦方程、求过定点弦的中点轨迹、垂直平分线、定点、定值问题. 但需要注意的是点差法的不等价性，求出直线方程以后，必须将直线方程和圆锥曲线方程联立得到一个关于 x(或 y)的一元二次方程，判断该方程的 Δ 和 0 的关系，只有 $\Delta>0$ 时直线才存在.

视角3　从设 AB 的直线方程入手，利用判别式建立不等式.

解法3　设直线 AB 的方程为 $y=kx+t$，联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消 y 得

$$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0.$$

因为直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，所以 $\Delta=48(3+4k^2-t^2)>0$，即 $3+4k^2-t^2>0$.

由韦达定理知 $x_1+x_2=\frac{-8kt}{3+4k^2}$，又由题设知 $x_1+x_2=2$，即 $\frac{-8kt}{3+4k^2}=2$，解得 $t=\frac{3+4k^2}{-4k}$，将上式代入 $3+4k^2-t^2>0$，解得 $k^2>\frac{1}{4}$.

因为 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2t=\frac{6t}{3+4k^2}=2m>0$，所以 $t>0$，从而 $k<0$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

解法4　设直线 AB 的方程为 $y=kx+t$，联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消 y 得

$$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0.$$

由韦达定理，知 $x_1+x_2=\frac{-8kt}{3+4k^2}$，由题设知 $x_1+x_2=2$，即 $\frac{-8kt}{3+4k^2}=2$，解得 $t=\frac{3+4k^2}{-4k}$.

因为直线 AB 过点 $M(1,m)$，所以 $m=k+t$，将 $t=\frac{3+4k^2}{-4k}$ 代入得 $m=\frac{3}{-4k}$.

当 $x=1$ 时，椭圆上点的纵坐标为 $y=\pm\frac{3}{2}$，即 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

二、第(2)小题的解法分析

视角1　从解交点入手.

解法1　由题意得 $F(1,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{FP}=(x_0-1,y_0)$，$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，则 $(x_0-1,y_0)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=\mathbf{0}$，即 $x_0=3-x_1-x_2$，$y_0=-y_1-y_2$.

又 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2m$，所以点 P 坐标为 $(1,-2m)$，因为点 P 在椭圆上，所以 $m=\frac{3}{4}$，从而 $P(1,-\frac{3}{2})$，$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$.

由(1)知，直线 AB 的斜率 $k=-\frac{3}{4m}=-1$，所以直线 l 的方程为 $y=-x+\frac{7}{4}$.

联立 $\begin{cases}y=-x+\frac{7}{4},\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消 y 得 $28x^2-56x+1=0$，解得 $x_1=1-\frac{\sqrt{189}}{14}$，$x_2=1+\frac{\sqrt{189}}{14}$，从而 $y_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{189}}{14}$，$y_2=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{189}}{14}$，即 A，B 两点的坐标为 $(1-\frac{\sqrt{189}}{14},\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{189}}{14})$，$(1+\frac{\sqrt{189}}{14},\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{189}}{14})$，显然 $|\overrightarrow{FA}|\neq|\overrightarrow{FB}|$.

当 $|\overrightarrow{FA}|>|\overrightarrow{FB}|$ 时，$|\overrightarrow{FA}|=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{189}}{28}$，$|\overrightarrow{FB}|=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{189}}{28}$，有 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=3$，故 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$，即 $|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，设该数列的公差为 d，则

$$d=|\overrightarrow{FA}|-|\overrightarrow{FP}|=\frac{3\sqrt{21}}{28}.$$

同理可得，当 $|\overrightarrow{FA}|<|\overrightarrow{FB}|$ 时，公差

$$d=|\overrightarrow{FA}|-|\overrightarrow{FP}|=-\frac{3\sqrt{21}}{28}.$$

所以该数列的公差为 $\pm\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

评析　处理数学问题最常用的方法是直译法，即将题干中的已知条件直接代数化，但该方法"少想多算". 以上解法计算量较大，学生在有限的时间内较难算出，因此，在平常教学中鼓励学生以

“多想少算”.

视角2 从设而不求入手.

解法2 由题意得 $F(1,0)$,设 $P(x_0,y_0)$,则 $\overrightarrow{FP}=(x_0-1,y_0)$,$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$,则 $(x_0-1,y_0)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=\mathbf{0}$,即 $x_0=3-x_1-x_2$,$y_0=-y_1-y_2$.

又 $x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2m$,所以点 P 坐标为 $(1,-2m)$,又点 P 在椭圆上,所以 $m=\frac{3}{4}$,从而 $P(1,-\frac{3}{2})$,$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$.

由(1)知,直线 AB 的斜率 $k=-\frac{3}{4m}=-1$,所以直线 l 的方程为 $y=-x+\frac{7}{4}$.

联立 $\begin{cases}y=-x+\frac{7}{4},\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消 y 得 $28x^2-56x+1=0$,易知 $x_1+x_2=2$,$x_1x_2=\frac{1}{28}$.

因为点 A 在椭圆上,所以 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,于是

$$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$$
$$=\sqrt{(x_1-1)^2+3(1-\frac{x_1^2}{4})}=2-\frac{x_1}{2}.$$

同理可得 $|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_2}{2}$,所以

$$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{x_1+x_2}{2}=3.$$

故 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$,即 $|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

设该数列的公差为 d,则

$$2|d|=||\overrightarrow{FA}|-|\overrightarrow{FB}||=\frac{1}{2}|x_1-x_2|$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{3\sqrt{21}}{14},$$

即 $d=\pm\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为 $\pm\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

视角3 利用已有结论.

解法3 由解法2知,$m=\frac{3}{4}$,$P(1,-\frac{3}{2})$,$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$,$\overrightarrow{FP}\perp x$ 轴.

由椭圆的第二定义知 $\frac{|\overrightarrow{FA}|}{\frac{a^2}{c}-x_1}=e$,又 $a=2$,$e=\frac{1}{2}$,故 $|\overrightarrow{FA}|=2-\frac{1}{2}x_1$.

同理 $|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{1}{2}x_2$,$|\overrightarrow{FP}|=2-\frac{1}{2}x_3=\frac{3}{2}$,所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\frac{x_1+x_2}{2}=3$,故 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$,即 $|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列,以下同解法2.

评析 “设而不求”解题法,就是在解决数学问题时,先设定未知数,然后把它们当成已知数,根据题中各量间的制约关系,求出方程,将未知数消去或者代换,使问题的解决变得简捷、明快.

视角4 从椭圆的参数方程入手.

解法4 设 $A(2\cos\alpha,\sqrt{3}\sin\alpha)$,$B(2\cos\beta,\sqrt{3}\sin\beta)$,$P(x_0,y_0)$,则 $\overrightarrow{FP}=(x_0-1,y_0)$,$\overrightarrow{FA}=(2\cos\alpha-1,\sqrt{3}\sin\alpha)$,$\overrightarrow{FB}=(2\cos\beta-1,\sqrt{3}\sin\beta)$.

由 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$,可得 $x_0=3-2\cos\alpha-2\cos\beta$,$y_0=-\sqrt{3}\sin\alpha-\sqrt{3}\sin\beta$.

又由题设知 $2\cos\alpha+2\cos\beta=2$,$\sqrt{3}\sin\alpha+\sqrt{3}\sin\beta=2m$,所以点 P 的坐标为 $(1,-2m)$,因为点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上,故可得 $m=\frac{3}{4}$,从而 $P(1,-\frac{3}{2})$,$|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$.

由 $2\cos\alpha+2\cos\beta=2$ 得 $\cos\alpha=1-\cos\beta$,由 $\sqrt{3}\sin\alpha+\sqrt{3}\sin\beta=2m=\frac{3}{2}$ 得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\beta$,故 $(1-\cos\beta)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\beta)^2=1$,结合 $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$,可解得 $\cos\beta=\frac{14\pm3\sqrt{21}}{28}$.

因为

$$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{(2\cos\alpha-1)^2+(\sqrt{3}\sin\alpha)^2}$$
$$=2-\cos\alpha,$$

同理 $|\overrightarrow{FB}|=2-\cos\beta$,所以

$$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=4-\cos\alpha-\cos\beta=3.$$

所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$,即 $|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列,设公差为 d,则

$$d=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{FB}|-|\overrightarrow{FA}|)=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos\beta)$$
$$=\frac{1}{2}[(1-\cos\beta)-\cos\beta]$$

$=\frac{1}{2}(1-2\cos\beta)=\pm\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为 $\pm\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

评析 针对点在圆锥曲线上的问题考虑参数法,将坐标中两个变量转化为一个变量,方便在化简、求最值时使用均值不等式、配方、构造函数判断单调性.不难发现,以上解法都具有通法.

三、试题的拓展

通过探究,笔者发现可以把这道试题拓展到更一般的情况,介绍如下.

拓展 1 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_3,y_3)$ 是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上不同的三点,且 $x_1+x_2=2c\ (x_1\neq x_2)$,设 F 为 C 的右焦点,且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

证明 由题设知 $\overrightarrow{FA}=(x_1-c,y_1)$,$\overrightarrow{FB}=(x_2-c,y_2)$,$\overrightarrow{FP}=(x_3-c,y_3)$.

由椭圆的第二定义知 $\frac{|\overrightarrow{FA}|}{\frac{a^2}{c}-x_1}=e$,即 $|\overrightarrow{FA}|=a-ex_1$,同理 $|\overrightarrow{FB}|=a-ex_2$,$|\overrightarrow{FP}|=a-ex_3$.

若 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$,则 $x_3=3c-x_1-x_2=c$,所以 $|\overrightarrow{FP}|=a-ec$.

又 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2a-e(x_1+x_2)=2a-2ec$,所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$,即 $|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

拓展 2 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_3,y_3)$ 是双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上不同的三点,且 $x_1+x_2=2c\ (x_1\neq x_2)$,设 F 为 C 的右焦点,且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

拓展 3 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_3,y_3)$ 是抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$ 上不同的三点,且 $x_1+x_2=p\ (x_1\neq x_2)$,设 F 为 C 的焦点,且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{FA}|$,$|\overrightarrow{FP}|$,$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

拓展 2、拓展 3 的证明类似于拓展 1,在此就不再论述.

拓展 4 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上不同两点,且 $x_1+x_2=2\lambda(x_1\neq x_2)$,则线段 AB 的中垂线过定点 $(\lambda-\frac{b^2\lambda}{a^2},0)$.

证明 设线段 AB 的中点坐标为 (λ,y_0),则 $y_1+y_2=2y_0$.

由 A,B 两点在椭圆上知,$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,将两式相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$,整理得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{b^2\lambda}{a^2y_0}$,即 $k_{AB}=-\frac{b^2\lambda}{a^2y_0}$.

易知线段 AB 的中垂线的方程为 $y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2\lambda}(x-\lambda)$,整理得 $y=\frac{a^2y_0}{b^2\lambda}(x-\lambda+\frac{b^2\lambda}{a^2})$,所以线段 AB 的中垂线过定点 $(\lambda-\frac{b^2\lambda}{a^2},0)$.

类似地,还可以得到如下拓展,证明从略.

拓展 5 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上不同两点,且 $y_1+y_2=2\lambda(y_1+y_2\neq 0)$,则线段 AB 的中垂线过定点 $(0,\lambda-\frac{a^2\lambda}{b^2})$.

拓展 6 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上不同两点,且 $x_1+x_2=2\lambda(x_1\neq x_2)$,则线段 AB 的中垂线过定点 $(\lambda+\frac{b^2}{a^2}\lambda,0)$.

拓展 7 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上不同两点,且 $y_1+y_2=2\lambda(y_1+y_2\neq 0)$,则线段 AB 的中垂线过定点 $(0,\lambda+\frac{a^2}{b^2}\lambda)$.

拓展 8 若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$ 上不同两点,且 $x_1+x_2=2\lambda(x_1\neq x_2)$,则线段 AB 的中垂线过定点 $(\lambda+p,0)$.

(收稿日期:2018－06－26)