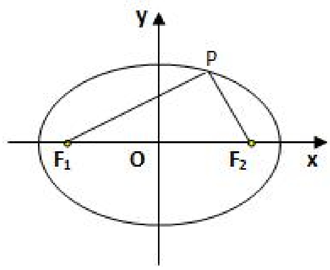
坐标形式下的椭圆焦半径及应用

1.基本结论：



坐标形式焦半径（已知圆锥曲线上一点P（x_0,y_0））

$$|PF_1|=a+ex_0,|PF_2|=a-ex_0$$

左加右减.

推导：根据两点间距离公式:$|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}$，由于

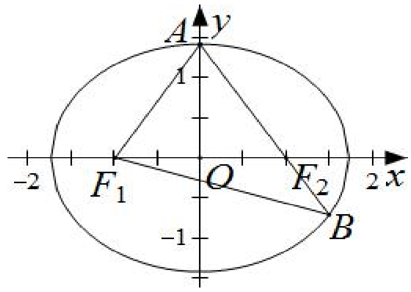
$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,(a>b>0)$代入两点间距离公式可得$|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+b^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})}$，整理化简即可得$|PF_1|=a+ex_0$. 同理可证得$|PF_1|=a-ex_0$.

2.常见应用

例 1.（2019 全国 1 卷）已知椭圆 **C** 的焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 $\boldsymbol{F_2}$ 的直线与 **C** 交于 ***A***，***B*** 两点.若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 **C** 的方程为

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　**B.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　**C.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　**D.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

解：如图所示：



设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$|AF_2|=2|F_2B|,|AB|=|BF_1|\Rightarrow|BF_1|=3|BF_2|$，代入焦半径公式到$|BF_1|=3|BF_2|$可得：$a+ex_2=3(a-ex_2)\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}a^2.(1)$.再由 $|AF_2|=3|BF_2|\Rightarrow$

$a-ex_1=2(a-ex_2)\Rightarrow 2x_2-x_1=a^2.(2)$.结合(**1**),(**2**)式可得，$x_1=0$，故$|AF_1|=|AF_2|=a$

$|BF_1|=\frac{3}{2}a,|BF_2|=\frac{a}{2}$，这样在三角形$ABF_1$与三角形$AF_1F_2$中分别使用余弦定理可得：

$a=\sqrt{3}$ $,\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2$.

小结：通过坐标表示出焦半径的关系，进而解出椭圆上点的坐标是解题的关键.

例 2.（2019 全国三卷）

设 F_1，F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限.若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M 的坐标为__________.

解：由已知可得 $a^2=36, b^2=20, \therefore c^2=a^2-b^2=16, \therefore c=4$，

$\therefore |MF_1|=|F_1F_2|=2c=8$．$\therefore |MF_2|=4$．由焦半径公式可知

设 $M(x_0,y_0)$，由焦半径公式可知 $|MF_2|=a-ex_0=6-\frac{2}{3}x_0=4\Rightarrow x_0=3$

再代入椭圆方程可解得 $\therefore M$ 的坐标为 $\left(3,\sqrt{15}\right)$.

例 3.（2018 全国三卷）

已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1，m)(m>0)$.

（1）证明：$k<-\frac{1}{2}$；

（2）设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点,且 $\overline{FP}+\overline{FA}+\overline{FB}=0$．证明：$\left|\overline{FA}\right|$，$\left|\overline{FP}\right|$，$\left|\overline{FB}\right|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

解：（1）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$.

两式相减，并由 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$ 得 $\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$.

由题设知 $\frac{x_1+x_2}{2}=1,\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是 $k=-\frac{3}{4m}$.①

由题设得 $0<m<\frac{3}{2}$，故 $k<-\frac{1}{2}$.

（2）由题意得 $F(1,0)$，设 $P(x_3,y_3)$，则

$(x_3-1,y_3)+(x_1-1,y_1)+(x_2-1,y_2)=(0,0)$.

由（1）及题设得 $x_3=3-(x_1+x_2)=1, y_3=-(y_1+y_2)=-2m<0$.

又点 **P** 在 **C** 上，所以 $m=\frac{3}{4}$，从而 $P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，$\left|\overline{FP}\right|=\frac{3}{2}$.于是

$$\left|\overline{FA}\right|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}=2-\frac{x_1}{2}$$ ………(焦半径公式)

同理 $\left|\overline{FB}\right|=2-\frac{x_2}{2}$ ………(焦半径公式)

所以 $\left|\overline{FA}\right|+\left|\overline{FB}\right|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=3$.

故 $2\left|\overline{FP}\right|=\left|\overline{FA}\right|+\left|\overline{FB}\right|$，即 $\left|\overline{FA}\right|,\left|\overline{FP}\right|,\left|\overline{FB}\right|$ 成等差数列.

设该数列的公差为 ***d***，则

$$2|d|=\left|\left|\overline{FB}\right|-\left|\overline{FA}\right|\right|=\frac{1}{2}|x_1-x_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}.②$$

将 $m=\frac{3}{4}$ 代入①得 $k=-1$.

所以 ***l*** 的方程为 $y=-x+\frac{7}{4}$，代入 ***C*** 的方程，并整理得 $7x^2-14x+\frac{1}{4}=0$.

故 $x_1+x_2=2,x_1x_2=\frac{1}{28}$，代入②解得 $|d|=\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为 $\frac{3\sqrt{21}}{28}$ 或 $-\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

练习

1. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的两个焦点为 F_1、F_2，P 为椭圆上一点，且 $\angle F_1PF_2=60°$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的值为（　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

2．已知直线 $l_1:mx-y+m=0$ 与直线 $l_2:x+my-1=0$ 的交点为 Q，椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，则 $|QF_1||QF_2|$ 的取值范围是（　　）

A. $[2,+\infty)$　　**B.** $[2\sqrt{3},+\infty)$　　**C.** $[2,4]$　　**D.** $[2\sqrt{3},4]$

更多优质内容，敬请关注公众号！

喜洋洋漫谈中学数学

长按识别二维码，关注我的公众号