重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形性质初探

杨同伟
(陕西省西安市昆仑中学, 710043)

题目　已知(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)是圆$x^2+y^2=1$上的三点, 且满足$x_1+x_2+x_3=0$, $y_1+y_2+y_3=0$. 证明: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}$.

这道题是 2011 年北京大学保送生考试题, 文[1]给出了此题的 3 种妙解, 读后很受启迪. 本文将对此题作更深入的探索, 从而得到了重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形的几个重要性质.

定理 1　若$A_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$上的三个不同点, 点A_i的离心角为θ_i, 且$\triangle A_1A_2A_3$的重心是原点, 则$\cos(\theta_i-\theta_j)=-\frac{1}{2}$ $(i, j\in\{1, 2, 3\}, i\neq j)$.

证明　∵点A_i的离心角为$\theta_i(i=1, 2, 3)$,

∴ $x_i=a\cos\theta_i$, $y_i=b\sin\theta_i$.

又∵ $\triangle A_1A_2A_3$的重心在原点,

∴ $x_1+x_2+x_3=0$, $y_1+y_2+y_3=0$.

即$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2=-\cos\theta_3 & ①\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2=-\sin\theta_3 & ②\end{cases}$

①^2+②^2, 得 $1=2+2\cos\theta_1\cos\theta_2+2\sin\theta_1\sin\theta_2$ $\Rightarrow\cos(\theta_1-\theta_2)=-\frac{1}{2}$.

同理可得 $\cos(\theta_2-\theta_3)=-\frac{1}{2}$, $\cos(\theta_3-\theta_1)=-\frac{1}{2}$.

定理 2　若$A_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$上的三个不同点, 且$\triangle A_1A_2A_3$的重心是原点, 则$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{3}{2}a^2$, $y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}b^2$.

证明　不妨设点A_i的离心角为$\theta_i(i=1, 2, 3)$, 则$x_i=a\cos\theta_i$, $y_i=b\sin\theta_i$.

由$\triangle A_1A_2A_3$的重心是原点$\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{3}x_i=0$, $\sum\limits_{i=1}^{3}y_i=0$,

∴ $\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2=x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2$
$=2a^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2)$
$=2a^2[\frac{1+\cos2\theta_1}{2}+\frac{1+\cos2\theta_2}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta_1-\theta_2)+\frac{1}{2}\cos(\theta_1+\theta_2)]$
$=2a^2[1+\frac{1}{2}(\cos2\theta_1+\cos2\theta_2)+\frac{1}{2}\cos(\theta_1-\theta_2)+\frac{1}{2}\cos(\theta_1+\theta_2)]$
$=2a^2[1+\cos(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)+\frac{1}{2}\cos(\theta_1-\theta_2)+\frac{1}{2}\cos(\theta_1+\theta_2)]$.

又由定理 1 可知, $\cos(\theta_1-\theta_2)=-\frac{1}{2}$,

∴ $\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2=2a^2[1-\frac{1}{2}\cos(\theta_1+\theta_2)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(\theta_1+\theta_2)]=\frac{3}{2}a^2$.

又∵ $3=\sum\limits_{i=1}^{3}(\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2})=\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a^2}+\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{y_i^2}{b^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2}{a^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}y_i^2}{b^2}$,

∴ $\sum\limits_{i=1}^{3}y_i^2=\frac{3}{2}b^2$.

定理 3　若$A_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$上的三个不同点, 且$\triangle A_1A_2A_3$的重心是原点, 则$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

证明　不妨设点A_i的离心角为$\theta_i(i=1, 2, 3)$, 则$x_i=a\cos\theta_i$, $y_i=b\sin\theta_i$. 由定理 1 可知, $\cos(\theta_1-\theta_2)=-\frac{1}{2}$. 进而有, $|\sin(\theta_1-\theta_2)|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴ $S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|$

对 2011 年新课程高考数学试卷的若干分析与思考

陈　言
(福建省福州格致中学, 350001)

2011 年全国各地高考数学试卷共 18 套, 其中新课程试卷有 15 套, 大纲课程试卷只有 3 套. 纵观 2011 年新课程数学试卷, 可谓精彩纷呈, 美不胜收. 考查内容基础全面, 命题形式新颖别致, 选拔功能充分体现. 每份试卷都突显数学的工具性与应用性, 体现了新课改的精神.

1　2011 年新课程高考数学试卷的若干分析

分析 2011 年新课程卷, 可以看出新增内容如函数的零点、三视图、算法初步中的程序运行、含有全称量词和存在量词的命题、几何概型、茎叶图、合情推理等知识, 都已是文、理科考查的热点, 有些已成为高频考点(如三视图、算法初步等). 在选择题和填空题中, 集合运算、复数运算、向量运算等三种运算占必考地位, 对有关性质的研究也是每卷中不可或缺的内容, 如函数的性质、数列的性质、不等式的性质、曲线方程的性质等. 数学的思想方法在每份试卷中都得到很好的体现. 此外, 自定义运算、自定义集合、自定义函数、自定义性质等已经作为“考查学习潜能”的热门载体. 对 2011 年新课程高考数学试卷可以做以下几点分析:

1.1　传统的主干知识在试卷中占主导地位

以下是 2011 年各地市新课程高考数学主干知识的占分比例:

卷　　别	全国新课标卷	北京	广东	山东	江苏	浙江	安徽	天津	辽宁	湖南	陕西	江西	福建
文科数学主干知识占分比例	75%	80%	77%	81%	73%	76%	83%	77%	77%	77%	73%	77%	77%
理科数学主干知识占分比例	72%	77%	73%	73%	73%	79%	73%	73%	80%	73%	77%	77%	72%

由上表可见命题把重点放在高中数学课程的主干知识上, 通观以上各卷可以发现试卷紧紧围绕“双基”, 对中学数学的核心内容和基本能力进行重点考查.

1.2　稳中求变化、变化中求创新

1.2.1　试题新

2011 年高考新课程数学试卷中有不少原创与新编的好题, 这些试题设计构思精妙独到, 考查学生

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ -x_1-x_2 & -y_1-y_2 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{3}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{3}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos\theta_1 & b\sin\theta_1 \\ a\cos\theta_2 & b\sin\theta_2 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{3ab}{2}|\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2|$$

$$=\frac{3ab}{2}|\sin(\theta_1-\theta_2)|=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

注　上述定理中如果是圆, 则 $a=b=r$.

参考文献:

[1]　李加军. 解两道保送生考试题. 中等数学, 2011(7).

(收稿日期: 2011—09—30)