二次曲线系视角下对 2017 年全国Ⅰ卷理数 20 题的反思

江西省南昌市第三中学　(330049)　张金生

2017 年高考新课标全国Ⅰ卷理数的设计遵循《普通高中数学课程标准》和《高考说明》的要求和阐述，紧密联系高中数学教学现状，关注数学本质，渗透学科核心素养.

本文从二次曲线系的角度去研究该卷 20 题，请看题：

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，四点 $P_1(1,1),P_2(0,1),P_3(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}),P_4(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上. (1) 求 C 的方程；(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A,B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率之和为 -1，证明：l 过定点.

常规解法略，为巧解该题，我们先看关于二次曲线系的相关概念：

二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示的曲线叫做二次曲线，它包括圆、椭圆、双曲线、抛物线以及两条直线(退化的二次曲线).

二次方程 $(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 表示两条直线，但这个方程展开后，是一个二次式，因此我们说这是退化的二次曲线.

已知两条二次曲线 $\Gamma_1:f(x,y)=0$ 与 $\Gamma_2:g(x,y)=0$ 相交，且有四个交点，则方程 $\lambda f(x,y)+\mu g(x,y)=0(\lambda,\mu$ 为参数$)$ 表示经过其四个交点的二次曲线系方程. 若能确定所求的曲线不是 $\Gamma_1:f(x,y)=0$ 或 $\Gamma_2:g(x,y)=0$，我们可以只设一个参数.

当我们已知曲线 $h(x,y)=0$，要求某些未知数时，我们可以利用 $\lambda f(x,y)+\mu g(x,y)=h(x,y)$，两边对比系数即可.

下面利用该知识解决笔者原创的南昌市 2017 年一模试题 20 题：

例 1　(2017 年南昌一模 20) 如图 1，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，左、右焦点分别为 F_1,F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，点 $B(4,0)$，F_2 为线段 A_1B 的中点.

(Ⅰ) 求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ) 若过点 B 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点，已知直线 A_1M 与 A_2N 相交于点 G，试判断点 G 是否在定直线上？若是，请求出定直线的方程；若不是，请说明理由.

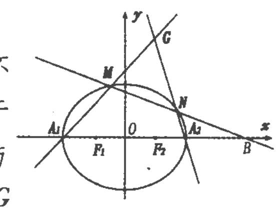

图 1

解：(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 常规方法计算量较大，此处略.

设 $MN:y=k(x-4)$，易知 $A_1M:x+2=t_1y$，$A_2N:x-2=t_2y$，$A_1A_2:y=0$，

因为椭圆过二次曲线 $A_1M\cdot A_2N$ 与二次曲线 $A_1A_2\cdot MN$ 的四个交点 A_1,A_2,M,N，则有 $(x+2-t_1y)(x-2-t_2y)+\mu y(kx-y-4k)=\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-1)$，比较两边 xy 项的系数，得 $-t_1-t_2+\mu k=0$；

比较两边 y 项的系数，得 $2t_1-2t_2-4\mu k=0$，两式联立，得 $\begin{cases}t_1+t_2=\mu k,\\t_1-t_2=2\mu k,\end{cases}$ 所以 $t_1=-3t_2$，由 $\begin{cases}x+2=-3t_2y,\\x-2=t_2y\end{cases}\Rightarrow x=1$，即点 G 在定直线 $x=1$ 上.

如图 2，若一条直线与一条二次曲线交于 P,Q 两点，那么对于这两条直线 $OP\cdot OQ$，怎么来刻划呢？设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$①，曲线方程为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$②.

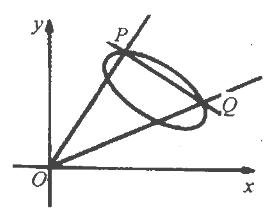

图 2

我们将①变形为$\frac{y-kx}{m}=1$,利用它将②中的所有项配成二次,得

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx\cdot\frac{y-kx}{m}+Ey\cdot\frac{y-kx}{m}+F\cdot(\frac{y-kx}{m})^2=0③.$$

注意到点P,Q满足③式,又③为二次齐次式,所以它一定能分解成$(y-k_1x)(y-k_2x)=0$,这就是过原点的两直线$OP\cdot OQ$,也可以将③两边同除x^2,视其为关于$\frac{y}{x}$的二次方程,解出两根,即为k_1,k_2,这即为OP,OQ的斜率.

由上可得2017年高考解析几何20题的巧解:

(1) 根据椭圆的对称性,可知P_2,P_3,P_4在椭圆C上,所以椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 将坐标系向上平移一个单位,将原点移至P_2点.椭圆方程化为$C':\frac{x'^2}{4}+(y'+1)^2=1$,即$\frac{1}{4}x'^2+y'^2+2y'=0$,设平移后直线$l$对应的直线$l'$为$mx'+ny'=1$,将平移后的椭圆方程齐次化,得$\frac{1}{4}x'^2+y'^2+2y'(mx'+ny')=0$,整理得$(2n+1)y'^2+2mx'y'+\frac{1}{4}x'^2=0$,即$(2n+1)(\frac{y}{x})^2+2m\frac{y}{x}+\frac{1}{4}=0$,结合两直线斜率之和为$-1$,得$-\frac{2m}{2n+1}=-1$,$2m=2n+1$.所以直线$l':(2n+1)x'+2ny'=2$,$l'$恒过点$Q'(2,-2)$,在原坐标系中,直线$l$过定点$Q(2,-1)$.

我们再来深挖该题背景性质:

性质1　已知点$A(a,-b)$,$B(a,b)$,$D(-a,b)$,$E(-a,-b)$,我们称矩形$ABDE$为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的伴随矩形,设直线$l$不经过点$P(0,b)$且与椭圆$C$相交于$M,N$两点,若$k_{PM}+k_{PN}=-\frac{2b}{a}$,则直线$l$过定点$A$.

性质2　从椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的伴随矩形$ABDE$的顶点$A(a,-b)$引一条直线与椭圆$C$交于$M,N$两点,若$P(0,b)$,则$k_{PM}+k_{PN}=-\frac{2b}{a}$.

这两条性质读者不妨用前面二次曲线系的方法去简洁证明.

关于椭圆类似性质的探究,笔者在《对一次试卷讲评课的一点感悟》(见本刊2016年第4期)一文中有以下两个结论:

性质3　从已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的大伴随圆$C':x^2+y^2=a^2+b^2$上一点$P$作椭圆$C$的两条切线,则两条切线相互垂直.

性质4　已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的小伴随圆$C':x^2+y^2=\frac{a^2\cdot b^2}{a^2+b^2}$的任意一条切线与椭圆$C$恒有两个交点$P,Q$,则$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$.

2017高考全国Ⅰ卷解析几何解答题考查了数学抽象、逻辑推理、数学运算、数据分析等核心素养,重点考查思维品质,减少计算量.数学离不开计算,核心素养下的数学运算是指在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题.主要包括:理解运算对象,掌握运算法则,探究运算方向,选择运算方法,设计运算程序,求得运算结果.重在运算法则的掌握、运算方向的探究、方法的选择,也就是"多一点想、少一点算".基于核心素养视角的教育教学将是今后相当长时间段内的热点.

本文从二次曲线系视角下探索试题的多种解法,挖掘试题的本质属性,在提高数学学科核心素养方面作出一点探索,不到之处敬请批评指正.