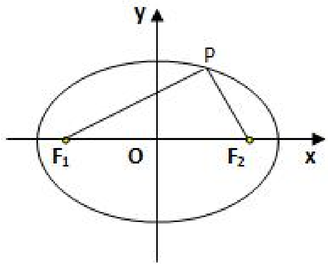
椭圆的焦点三角形

一．结论梳理

椭圆焦点三角形主要结论：椭圆定义可知：ΔPF_1F_2中，



（1）$|PF_1|+|PF_2|=2a,|F_1F_2|=2c$.

（2）焦点三角形的周长为$L=2a+2c$.

（3）$|PF_1||PF_2|=\dfrac{2b^2}{1+\cos\angle F_1PF_2}$.

（4）焦点三角形的面积为：$S=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}$.

（5）$S=\dfrac{1}{2}\cdot|F_1F_2||y_P|$，则当$|y_P|=b$时，$S_{\max}=bc$.

（6）假设焦点ΔPF_1F_2的内切圆半径为r，则$S=(a+c)r$.

（7）假设焦点ΔPF_1F_2的内切圆圆心为I，延长PI交x轴于M点，则$\dfrac{|PI|}{|IM|}=\dfrac{1}{e}$.

（8）内心I的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}}=1$，即内心的轨迹也是一个椭圆.

设 $P(x_P,y_P),I(x_I,y_I)$

有 $F_1F_2\cdot\overrightarrow{IP}+F_1P\cdot\overrightarrow{IF_2}+F_2P\cdot\overrightarrow{IF_1}=\vec{0}$

焦半径公式：$PF_1=a+ex_P$，$PF_2=a-ex_P$

$$\begin{cases}2c\cdot(x_P-x_I)+(a+ex_P)(c-x_I)+(a-ex_P)(-c-x_I)=0\\2c\cdot(y_P-y_I)+(a+ex_P)(-y_I)+(a-ex_P)(-y_I)=0\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_P=\frac{a}{c}x_I\\y_P=\frac{a+c}{c}y_I\end{cases}$，并带入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

得到 I 点轨迹为 $\dfrac{x^2}{c^2}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2c^2}{(a+c)^2}}=1$

（9）设$\angle F_1PF_2=\theta$，则$\cos\theta\geq 1-2e^2$. 当$|PF_1|=|PF_2|$，即点P为短轴端点时，θ最大.

证明：设 $PF_1=r_1, PF_2=r_2$，则在 ΔF_1PF_2 中，由余弦定理得：

$$\cos\theta=\frac{r_1^2+r_2^2-F_1F_2^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-4c^2}{2r_1r_2}=\frac{2a^2-2c^2}{2r_1r_2}-1$$

$$\geq\frac{2a^2-2c^2}{2\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2}-1=\frac{2a^2-2c^2}{2a^2}-1=1-2e^2$$

命题得证。

（10）设 $\angle PF_1F_2=\alpha,\angle PF_2F_1=\beta$，在 ΔPF_1F_2 中，$e=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

证明:又正弦定理结合合分比性质可证.

二．巩固练习

1．椭圆 $\dfrac{y^2}{49}+\dfrac{x^2}{24}=1$ 上一点 P 与椭圆两个焦点 F_1、F_2 的连线互相垂直，则△ F_1PF_2 的面积为（　　）

A．20　　B．22　　C．28　　D．24

2．椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左右焦点为 F_1、F_2， P 是椭圆上一点，当△ F_1PF_2 的面积为 1 时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值为（　　）

A．0　　B．1　　C．3　　D．6

3．椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左右焦点为 F_1、F_2， P 是椭圆上一点，当△ F_1PF_2 的面积最大时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的值为（　　）

A．0　　B．2　　C．4　　D．-2

4．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的两个焦点为 F_1、F_2，P 为椭圆上一点，且 $\angle F_1PF_2=60°$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|$ 的值为（　　）

A．1　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

5．椭圆 $\dfrac{y^2}{49}+\dfrac{x^2}{24}=1$ 上一点 P 与椭圆两个焦点 F_1、F_2 的连线互相垂直，则△ F_1PF_2 的面积为（　　）

A．20　　B．22　　C．28　　D．24

6．已知椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$的两个焦点分别为$F_1$， F_2，斜率不为0的直线l过点F_1，且交椭圆于A， B两点，则$\triangle ABF_2$的周长为（ ）.

A．10　B．16　C．20　D．25

7.在平面直角坐标系xoy中，已知△ABC 顶点 A（－4，0），C（4，0），顶点 B 在椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$上，则$\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}=$（ ）

A. $\dfrac{3}{4}$　B. $\dfrac{2}{3}$　C. $\dfrac{4}{5}$　D. $\dfrac{5}{4}$

8.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$内有一点$M(2,3)$，$F_1$、$F_2$分别为其左右焦点，$P$是椭圆上一点，求：

(1).$|PM|-|PF_1|$的最大值与最小值；

(2).$|PM|+|PF_1|$的最大值与最小值.