利用伸缩变换巧解 2020 年成都三诊理科 21 题

成都　袁建华

2020 年成都三诊压轴题是以蒙日圆为背景的题，计算量特别大（当学生看到参考答案时被超大计算吓得三魂不知在哪儿，求此时学生的心理阴影面积）. 利用伸缩变化将椭圆变换圆，计算量大打折扣！（可惜这一方法在高考要被扣分，一大遗憾啊！）

【伸缩变换知识梳理】

定义(选修 4-4)：设点 $P(x,y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点，在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x\\ y'=\mu y\end{cases}$ 的作用下，点 $P(x,y)$ 对应到点 $P'(x',y')$，则称 φ 为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换，简称伸缩变换.

伸缩变换的性质

性质 1（保留结合性）：曲线与曲线上任意一点，经伸缩变换后，该点仍在对应的曲线上.

性质 2（保留平直性）：经伸缩变换后，曲线仍是曲线，直线仍是直线，且相互之间的位置关系保持不变，即在伸缩变换下两相交（相切、相离）的曲线仍然变成两相交（相切、相离）的曲线.

性质 3（保留平行性）：若取平面内一线段与线段上的任定比分点，经伸缩变换后，该点仍为相应线段的定比分点，且比例不变.

性质 4(斜率关系)：在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x\\ y'=\mu y\end{cases}$ 的作用下，平面上任一直线的斜率 k 对应变换为 k'，则 $k'=\dfrac{\mu}{\lambda}k$.

性质 5(面积关系)：在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x\\ y'=\mu y\end{cases}$ 的作用下，平面上任一一图形的面积 S 对应变换为 S'，则 $S'=\lambda\mu S$.

性质 6(线段关系)：在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x\\ y'=\mu y\end{cases}$ 的作用下，平面上任一线段 AB（斜率为 k）对应变换为 $A'B'$，则 $|A'B'|=\dfrac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2k^2}}{\sqrt{1+k^2}}|AB|$.

（2020 年成都三诊理 21 题）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$，点 $Q\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）经过圆 $O:x^2+y^2=5$ 上一动点 P 作椭圆 C 的两条切线，切点分别记为 A，B，直线 PA，PB 分别与圆 O 相交于异于点 P 的 M，N 两点.

（ⅰ）求证：$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$；

（ⅱ）求 $\triangle AOB$ 的面积的取值范围.

解：（Ⅰ）略；椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）在平面伸缩变换 φ：$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$ 的作用下，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 对应为圆：$x'^2+y'^2=1$；圆 O：$x^2+y^2=5$ 对应为椭圆 O'：$4x'^2+y'^2=5$.

设点 A，B，$P\left(x_0,y_0\right)$ 在变换 φ 的作用下对应分别为 A'，B'，$P'\left(x_0',y_0'\right)$，则直线 $P'A'$，$P'B'$ 与圆：$x'^2+y'^2=1$ 相切，切点分别为 A'，B'，点 P' 在椭圆 O' 上，即 $4x_0'^2+y_0'^2=5$.

（ⅰ）①当直线 PA，PB 的斜率都存在时，设直线 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，直线 $P'A'$，$P'B'$ 的斜率分别为 k_1'，$k_2{}'$，则 $k_1'=2k_1$，$k_2'=2k_2$.

设过点 P' 与圆 $x'^2+y'^2=1$ 相切的直线方程为 $y'=k\left(x'-x_0'\right)+y_0'$，即 $kx'-y'-kx_0'+y_0'=0$.

则 $\dfrac{\left|kx_0'-y_0'\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即 $\left(x_0'^2-1\right)k-2x_0'y_0'k+y_0'^2-1=0$.（*）

则 k_1'，$k_2{}'$ 是方程（*）两根，所以 $k_1'k_2{}'=\dfrac{y_0'^2-1}{x_0'^2-1}=\dfrac{5-4x_0'^2-1}{x_0'^2-1}=-4$，所以 $k_1k_2=-1$，所以 $PA\perp PB$，所以 $PM\perp PN$.

②当直线 PA 或 PB 的斜率不存在时，则点 P 为 $\left(\pm 2,\pm 1\right)$. 不妨设 $P\left(2,1\right)$，则直线 PA，PB 的方程分别为 $x=2$，$y=1$，所以 $PA\perp PB$，所以 $PM\perp PN$.

综上，MN 为圆 O 的直径，所以 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$.

（ⅱ）易知 $A'B'\perp OP'$，记 $A'B'$ 与 OP' 的交点为 H，则 $\left|OA'\right|^2=\left|OH\right|\left|OP'\right|$，所以 $\left|OH\right|=\dfrac{1}{\left|OP'\right|}$，

所以 $\left|A'B'\right|=2\sqrt{1-\left|OH\right|^2}=2\sqrt{1-\dfrac{1}{\left|OP'\right|^2}}$.

所以 $S'_{\triangle A'OB'}=\dfrac{1}{2}\left|A'B'\right|\left|OH\right|=\dfrac{1}{\left|OP'\right|}\sqrt{1-\dfrac{1}{\left|OP'\right|^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{\left|OP'\right|^2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

因为 P' 在椭圆 O'：$4x_0'^2+y_0'^2=5$ 上，所以 $\dfrac{5}{4}\le\left|OP'\right|^2\le 5$，所以 $\dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{\left|OP'\right|^2}\le\dfrac{4}{5}$，所以 $\dfrac{2}{5}\le S'_{\triangle A'OB'}\le\dfrac{1}{2}$.

在变换 φ 的作用下 $S'_{\triangle A'OB'}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle AOB}$，所以 $\dfrac{4}{5}\le S_{\triangle AOB}\le 1$，故 $\triangle AOB$ 的面积的取值范围为 $\left[\dfrac{4}{5},1\right]$.