椭圆焦半径公式之二：角度式

本节给出椭圆焦半径公式的角度形式.

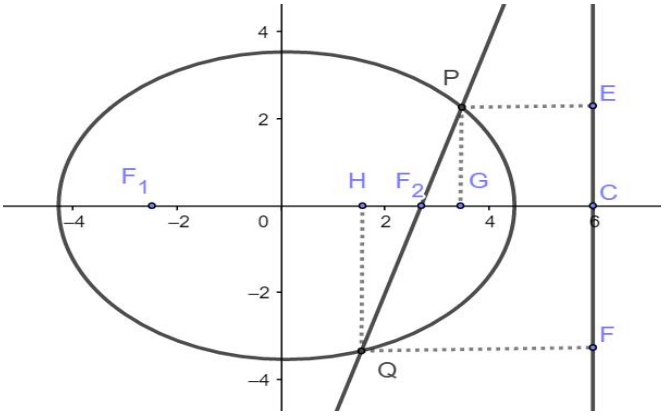
1. 基本结论：上加下减.

$$\left|QF_2\right|=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta},\left|PF_2\right|=\frac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta},\left|AB\right|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cdot\cos^2\theta}$$

证明：设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 与 x 轴交于 C 点，F_1,F_2 为椭圆的左右焦点，过右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 E 交于 P,Q 两点. 设 $\angle CF_2P=\theta$，过 P,Q 两点向准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 引垂线，垂足记为 E,F 点. 根据椭圆第二定义，$\frac{|PF_2|}{|PE|}=e$，$\frac{|QF_2|}{|QE|}=e$. 过 P,Q 两点再向 x 轴引垂线，垂足记为 G,H 点.

显然 $|PE|=|CG|=|CF_2|-|F_2G|=|CF_2|-|PF_2|\cdot\cos\theta=\frac{a^2}{c}-c-|PF_2|\cdot\cos\theta$，再代入 $\frac{|PF_2|}{|PE|}=e$ 可得 $\frac{|PF_2|}{\frac{a^2}{c}-c-|PF_2|\cdot\cos\theta}=e$，整理化简：$\left|PF_2\right|=\frac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta}$.

同理可得：$\left|QF_2\right|=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}$.



证法 2：设 $\angle CF_2P=\theta$，在 ΔPF_1F_2 中，$\overrightarrow{PF_2}+\overrightarrow{F_2F_1}=\overrightarrow{PF_1}$，等式两边平方可得：

$|\overrightarrow{PF_2}|^2+4c^2+4c\cdot\cos\theta\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=(2a-|\overrightarrow{PF_2}|)^2$，化简整理可得 $\left|PF_2\right|=\frac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta}$.

同理可证 $\left|QF_2\right|=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}$.

2. 常见应用

例 1. 已知椭圆 C 的两个焦点为 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，且经过点 $E(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点(点 A 位于 x 轴上方)，若 $\vec{AF_1}=2\vec{F_1B}$，求直线 l 的斜率 k 的值.

解：(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) $\vec{AF_1}=2\vec{F_1B}\Rightarrow|AF_1|=2|F_1B|\Rightarrow\dfrac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}=2\cdot\dfrac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{2}{3}\Rightarrow$

$k=\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

例 2．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 与 x 轴负半轴交于 $A\left(-2,0\right)$，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若过点 $F\left(1,0\right)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 M、N 两点，过点 F 且与直线 l 垂直的直线与直线 $x=4$ 相交于点 T，求 $\dfrac{|TF|}{|MN|}$ 的取值范围及 $\dfrac{|TF|}{|MN|}$ 取得最小值时直线 l 的方程.

解：（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）证法 1.直角坐标

若直线 l 与 x 轴重合，则直线 TF 与直线 $x=4$ 平行，不合乎题意；

若直线 l 垂直于 x 轴，将 $x=1$ 代入椭圆 C 的方程，可得 $\dfrac{1^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，解得 $y=\pm\dfrac{3}{2}$，

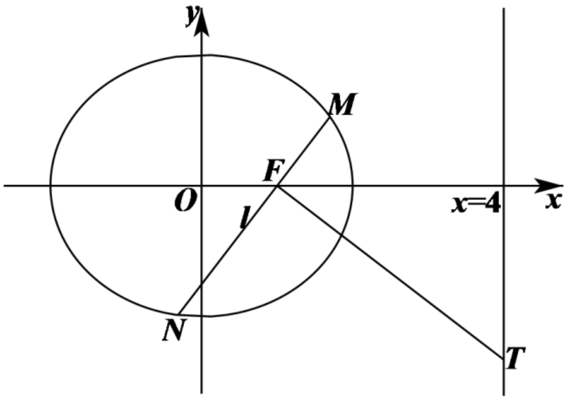
此时 $\left|MN\right|=3$，$\left|TF\right|=4-1=3$，则 $\dfrac{|TF|}{|MN|}=1$；

若直线 l 的斜率存在且不为零时，设直线 l 的方程为 $x=my+1\left(m\neq0\right)$，

设点 $M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases} x = my + 1 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$，消去$x$并整理得$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$，

$\Delta = 36m^2 + 36\left(3m^2+4\right) = 144\left(m^2+1\right) > 0$，



由韦达定理可得$y_1 + y_2 = -\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1 y_2 = -\dfrac{9}{3m^2+4}$，

所以，

$$\left|MN\right| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{6m}{3m^2+4}\right)^2 - 4\times\left(-\frac{9}{3m^2+4}\right)} = \frac{12\left(1+m^2\right)}{3m^2+4}$$

，

直线TF的方程为$x = -\dfrac{1}{m}y + 1$，

将$x=4$代入直线TF的方程可得$y=-3m$，即点$T\left(4,-3m\right)$，

所以，$\left|TF\right| = \sqrt{3^2+\left(-3m\right)^2} = 3\sqrt{m^2+1}$，

所以，$\dfrac{\left|TF\right|}{\left|MN\right|} = \dfrac{3\sqrt{m^2+1}}{\dfrac{12\left(m^2+1\right)}{3m^2+4}} = \dfrac{3m^2+4}{4\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{3\left(m^2+1\right)+1}{4\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{1}{4}\left(3\sqrt{m^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)$，

令$t = \sqrt{m^2+1} > 1$，设$f\left(t\right) = 3t + \dfrac{1}{t}$，下面证明函数$f\left(t\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上为增函数.

任取t_1、$t_2 \in \left(1,+\infty\right)$且$t_1 > t_2$，即$t_1 > t_2 > 1$，

$$f\left(t_1\right) - f\left(t_2\right) = \left(3t_1 + \frac{1}{t_1}\right) - \left(3t_2 + \frac{1}{t_2}\right) = 3\left(t_1 - t_2\right) + \frac{t_2 - t_1}{t_1t_2} = \frac{\left(t_1-t_2\right)\left(3t_1t_2-1\right)}{t_1t_2}，$$

$\because t_1 > t_2 > 1$，则$t_1 - t_2 > 0$且$t_1t_2 > 1$，所以，$f\left(t_1\right) - f\left(t_2\right) > 0$，即$f\left(t_1\right) > f\left(t_2\right)$，

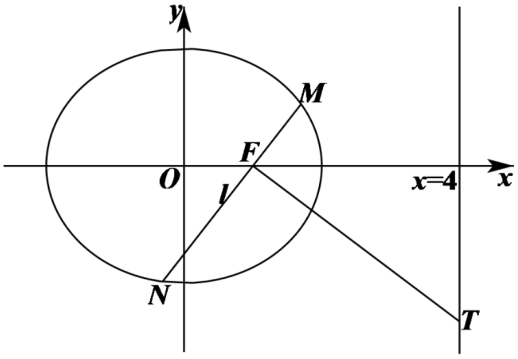
所以，函数$f\left(t\right)$在区间$\left(1,+\infty\right)$上为增函数.

当$t>1$时，$f(t)=3t+\frac{1}{t}>4$，即$\frac{|TF|}{|MN|}=\frac{1}{4}f(t)>1$.

综上所述，$\frac{|TF|}{|MN|}=\frac{1}{4}f(t)\in[1,+\infty)$.

当直线l垂直于x轴时，$\frac{|TF|}{|MN|}$取得最小值1，此时，直线l的方程为$x=1$.

证法 2. 角度式（极坐标）



如图，设$\angle MFx=\theta$，则$|MF|=\frac{b^2}{a+c\cdot\cos\theta}=\frac{3}{2+\cos\theta}$，$|NF|=\frac{b^2}{a-c\cdot\cos\theta}=\frac{3}{2-\cos\theta}$

$|MN|=|MF|+|NF|=\frac{12}{4-\cos^2\theta}$. 另外，$\angle TFx=\frac{\pi}{2}-\theta$，$|FT|=\frac{3}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{3}{\sin\theta}$.

那么$\frac{|TF|}{|MN|}=\frac{3}{\sin\theta}\cdot\frac{4-\cos^2\theta}{12}=\frac{3+\sin^2\theta}{4\sin\theta}=\frac{3}{4\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{4}$.

令$t=\sin\theta, f(t)=\frac{1}{4}\cdot(t+\frac{3}{t}),t\in[-1,1]$，这样$f(t)\geq 1\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$.

此时，直线l的方程为$x=1$.

点评：可以看到，与直角坐标法繁杂的计算相比，角度形式的焦半径做这个题目简直堪称完美，运算量小，一气呵成！

练习题

1．设F_1，F_2分别是椭圆$E:x^2+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$的左、右焦点，过点$F_1$的直线交椭圆 ***E*** 于 ***A***，***B*** 两点．若$|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$轴，则椭圆 ***E*** 的方程为________.

2．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，过右焦点$F$作倾斜角 **60°**的直线$l$交

C 于 A，B 两点（**A 在第一象限**），则 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=$ ________.

3.（2019 全国三卷）

设 F_1，F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点，M 为 C 上一点且在第一象限.若 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形，则 M 的坐标为__________.