圆锥曲线一个有趣性质的再推广

张元方

（四川省宜宾市商业职业中等专业学校　644000）

文[1]中给出了如下性质：

性质　过圆锥曲线 E 的一个焦点 F 的任一直线（不与焦点所在坐标轴重合）交 E 于不同两点，和另一焦点 F' 相对应的顶点与这两点的连线分别和 F 相对应的准线交于另两点，则以准线上这两点为直径端点的圆必过 E 的焦点 F.

借助《几何画板》，经笔者研究发现：以上性质中的顶点改为圆锥曲线 E 上任一点，结论仍然成立. 于是得到如下推广性质：

性质 1　如图 1，设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，C 是抛物线上的任一点，直线 CA，CB 分别与准线 l 交于 M，N 两点，则以线段 MN 为直径的圆必过焦点 F.

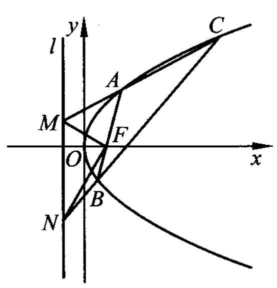

图 1

证明　设 $A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$，$C\left(\frac{y_0^2}{2p},y_0\right)$，直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，联立方程组 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2}\\ y^2=2px\end{cases}$，消去 x，得 $y^2-2pmy-p^2=0$，由韦达定理得：$y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$.

直线 CA 的方程为 $\dfrac{x-\frac{y_0^2}{2p}}{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$，令 $x=-\frac{p}{2}$，得 $y=\dfrac{y_0y_1-p^2}{y_0+y_1}$，从而

$M\left(-\frac{p}{2},\dfrac{y_0y_1-p^2}{y_0+y_1}\right)$，

同理可得 $N\left(-\frac{p}{2},\dfrac{y_0y_2-p^2}{y_0+y_2}\right)$，所以 $\overrightarrow{MF}=\left(p,\dfrac{p^2-y_0y_1}{y_0+y_1}\right)$，$\overrightarrow{NF}=\left(p,\dfrac{p^2-y_0y_2}{y_0+y_2}\right)$.

于是

$$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=p^2+\frac{(p^2-y_0y_1)(p^2-y_0y_2)}{(y_0+y_1)(y_0+y_2)}$$

解　已知直线 $5x+2y+3=0$ 中，$A=5$，$B=2$，$C=3$，所求直线 l 与夹角 $\theta=45°$，根据定理 3，得到 l 的方程为

$(2\tan 45°-5)(x-2)-(5\tan 45°+2)(y-1)=0$，即

$3x+7y-13=0$.

由例题的求解可以看出，应用本文中所给出的定理解答过已知点与已知直线平行、垂直，特别是与已知直线夹角为任意定值的直线方程，使问题变得非常容易，只需一步就可以得到正确答案.

参考文献

1　人民教育出版社. 普通高级中学教科书（必修）数学第二册（上）[M]. 北京：人民教育出版社，2004

$$=p^2+\frac{p^4-p^2y_0(y_1+y_2)+y_0^2y_1y_2}{y_0^2+y_0(y_1+y_2)+y_1y_2}$$

$$=p^2+\frac{p^4-2p^3my_0-p^2y_0^2}{y_0^2+2pmy_0-p^2}$$

$$=p^2+\frac{-p^2(y_0^2+2pmy_0-p^2)}{y_0^2+2pmy_0-p^2}=p^2-p^2=0.$$

所以$\overrightarrow{MF}\perp\overrightarrow{NF}$,即以线段$MN$为直径的圆必过焦点$F$.

性质2 如图2,设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为$F$,相对应的准线为$l$,过焦点$F$的直线交椭圆于$A$,$B$两点,$C$是椭圆上的任一点,直线$CA$,$CB$分别与准线$l$交于$M$,$N$两点,则以线段$MN$为直径的圆必过焦点$F$.

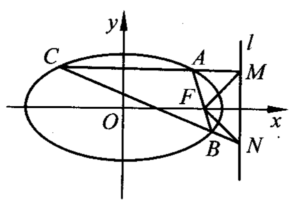

图2

证明 设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_0,y_0)$,直线AB的方程为$x=my+c$,联立方程组$\begin{cases}x=my+c\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$,消去$x$,得$(b^2m^2+a^2)y^2+2b^2cmy-b^4=0$,由韦达定理得:$y_1+y_2=\frac{-2b^2cm}{b^2m^2+a^2}$,$y_1y_2=\frac{-b^4}{b^2m^2+a^2}$,从而$x_1+x_2=\frac{2a^2c}{b^2m^2+a^2}$,

$x_1x_2=\frac{a^2c^2-m^2a^2b^2}{b^2m^2+a^2}$.

直线CA的方程为$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$,令$x=\frac{a^2}{c}$,得$y=\frac{\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right)y_1+\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)y_0}{x_1-x_0}$,从而

$M\left(\frac{a^2}{c},\frac{\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right)y_1+\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)y_0}{x_1-x_0}\right)$,同理可得

$N\left(\frac{a^2}{c},\frac{\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right)y_2+\left(x_2-\frac{a^2}{c}\right)y_0}{x_2-x_0}\right)$,所以

$$\overrightarrow{FM}=\left(\frac{b^2}{c},\frac{\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right)y_1+\left(x_1-\frac{a^2}{c}\right)y_0}{x_1-x_0}\right),$$

$$\overrightarrow{FN}=\left(\frac{b^2}{c},\frac{\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right)y_2+\left(x_2-\frac{a^2}{c}\right)y_0}{x_2-x_0}\right).$$

所以$\overrightarrow{FM}\perp\overrightarrow{FN}$,即以线段$MN$为直径的圆必过焦点$F$.

性质3 如图3,设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点为$F$,相对应的准线为$l$,过焦点$F$的直线交双曲线于$A$,$B$两点,$C$是双曲线上的任一点,直线$CA$,$CB$分别与准线$l$交于$M$,$N$两点,则以线段$MN$为直径的圆必过焦点$F$.

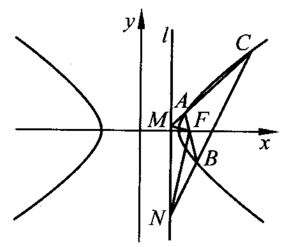

图3

证明仿照性质2,此处略.

综合性质1,2,3,可得:

统一性质 设圆锥曲线E的一个焦点为F,相对应的准线为l,过焦点F的直线交圆锥曲线E于A,B两点,C是圆锥曲线E上的任一点,直线CA,CB分别与准线l交于M,N两点,则以线段MN为直径的圆必过焦点F.

参考文献

1 陈广权.圆锥曲线又一有趣性质.数学通讯,2011(1)(下半月).