一个椭圆定点问题与完全四边形调和性

李伟健

(安徽省滁州中学，239000)

文[1]从多个角度探讨了 2005 年四川省预赛试题第 15 题，即：

问题 1 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右两个焦点为 F_1，F_2，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，两条准线间的距离为 $4\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)设直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，椭圆的左顶点为 M，连接 MA，MB 并延长交直线 $x=4$ 于 $P(4,y_3)$，$Q(4,y_4)$ 两点，若 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}$，求证：直线 AB 恒过定点，并求出定点坐标.

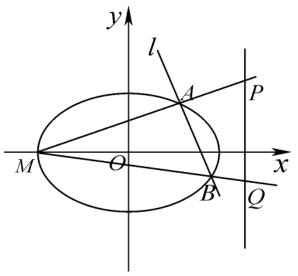

图 1

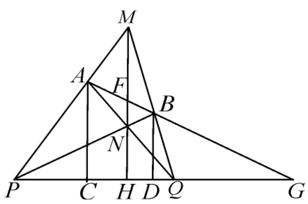

图 2

文[1]评述椭圆的这一定点问题时，指出其特征是“点多线杂”. 从抽象概括、垂直延伸、横向思考、建构模型等方面，对这一问题进行探究和迁移.

然而一个需要思考的问题是，问题 1 的结构特征究竟是什么？“$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}$”与“直线 AB 恒过定点”内在的联系究竟是什么？这是文[1]并未回答的问题.

经过一番深入思考，确认问题 1 实际上是由如下平面几何问题演变而来，即：

问题 2 如图 2，已知完全四边形 $AMBN$，直线 MA、BN 交于点 P，直线 AN、MB 交于点 Q，直线 AB、MN 交于点 F，过点 A、B 作直线 MN 的平行线交直线 PQ 于点 C、D，直线 AB、MN 交直线 PQ 于点 G、H，那么 $\frac{2}{HG}=\frac{1}{HC}+\frac{1}{HD}=\frac{1}{HP}+\frac{1}{HQ}$.

接下来，本文详细阐述问题 2 究竟如何演变为问题 1. 观察问题 2，其结构特征是完全四边形调和性，即：

完全四边形调和性 完全四边形通过每一个对角点有一组调和线束，即通过这个对角点的两边和对角三角形的两条边.

这是高等几何中一条十分重要的性质，考虑其广泛的应用性，文[2]曾将这一性质的高等几何中的证明翻译成平面几何语言. 目的是希望这一性质为读者所理解并加以应用. 下面给出问题 2 的证明.

证明 在完全四边形 $AMBN$ 中，F、G 调和分割 A、B，所以 H、G 调和分割 C、D 和 P、Q，即

$$\frac{2}{HG}=\frac{1}{HC}+\frac{1}{HD}=\frac{1}{HP}+\frac{1}{HQ}.$$

当四点 A、M、B、N 置于一个椭圆上时，从问题 2 的证明过程看：F、G 调和分割 A、B，F、H 调和分割 M、N，根据极点极线的定义，可知点 F 的极线是直线 PQ.

问题 2 演变为问题 1，实际上是对上述判断进一步特殊化，即将 M、N 置于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右顶点，直线 PQ 置于椭圆的右准线 $x=4$.

问题 1 设置的条件 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}$ 恰为 $\frac{1}{HC}+\frac{1}{HD}=\frac{1}{HP}+\frac{1}{HQ}$，本文接下来解释为什么 $\frac{1}{HC}+\frac{1}{HD}=\frac{1}{HP}+\frac{1}{HQ}$ 可以推出直线 AB 经过右焦点 F_2.

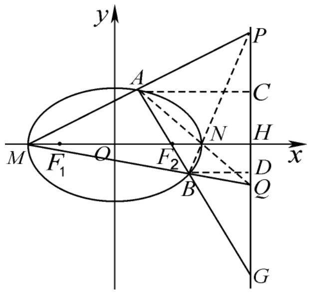

图 3

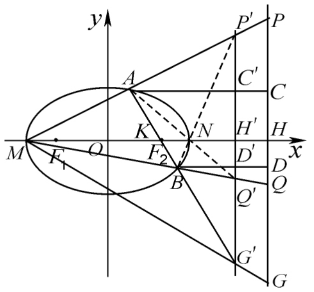

图 4

使用同一法,如图 4,假设直线 AB 与 x 轴交于点 K,直线 MA、BN 交于点 P',直线 AN、MB 交于点 Q',过点 A、B 作 x 轴的平行线交直线 $P'Q'$ 于点 C'、D',直线 $P'Q'$ 与轴交于点 H',直线 AB、$P'Q'$ 交于点 G',那么

$$\frac{2}{H'G'}=\frac{1}{H'C'}+\frac{1}{H'D'}=\frac{1}{H'P'}+\frac{1}{H'Q'}.$$

又 $\frac{2}{HG}=\frac{1}{HC}+\frac{1}{HD}=\frac{1}{HP}+\frac{1}{HQ}$,且 $HC=H'C'$,$HD=H'D'$,所以 $HG=H'G'$,因此直线 PQ 与直线 $P'Q'$ 重合,所以点 K 是直线 PQ 的极点,即为椭圆的右准点 F_2.

上述讨论,实际上证明了如下问题,即:

问题 3　已知 M 为椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点,直线 l 与椭圆 E 相交于 A,B 两点,连接 MA,MB 并延长交准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 于 P、Q 两点,A,B,P,Q 的纵坐标为 y_1,y_2,y_3,y_4,那么 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}$ 当且仅当直线 AB 过椭圆 E 的右焦点.

通过上述讨论可以看到抛物线的这一定点问题是以问题 2 作为模型演化而来,继续考察这一模型的应用,文[3]曾探究如下问题,即:

问题 4　线段 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过定点 $F(m,0)$ 的一动弦,S 是 x 轴上任一点,直线 SA、SB 与直线 $x=\frac{a^2}{m}$ 交于 P、Q 两点,A,B,P,Q 的纵坐标为 y_1,y_2,y_3,y_4,那么 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}=\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}$.

实际上,问题 4 也是以问题 2 为模型演变而来,考虑问题 2 的一般形式,即:

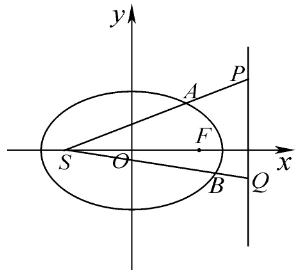

图 5

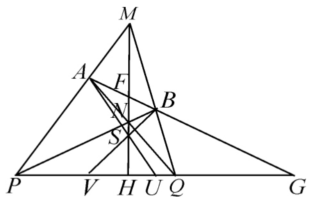

图 6

问题 5　如图 6,已知完全四边形 $AMBN$,直线 MA、BN 交于点 P,直线 AN、MB 交于点 Q,直线 AB、MN 交于点 F,直线 AB、MN 交直线 PQ 于点 G、H,S 为直线 MN 上一动点,直线 SA、SB 交直线 PQ 于点 U、V. 那么,S 在直线 MN 上运动过程中,$\frac{2}{HG}=\frac{1}{HU}+\frac{1}{HV}$ 恒成立.

证明　在完全四边形 $AMBN$ 中,F、G 调和分割 A、B,所以 H、G 调和分割 U、V,即 $\frac{2}{HG}=\frac{1}{HU}+\frac{1}{HV}$.

问题 4 实际上是问题 5 中将点 M、N 置于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右顶点,点 F、直线 PQ 置于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 一对特殊极点 $(m,0)$、极线 $x=\frac{a^2}{m}$ 的结果.

完全四边形调和性是几何中一条非常重要的性质,由它生成的自共轭三角形在圆锥曲线问题的探究中有十分重要的应用,本文对椭圆的这一定点问题的考察从侧面佐证了这一判断. 读者不妨考察文[4]、文[5]探究的问题,很可能获得同样的感悟.

关于完全四边形调和性生成自共轭三角形,鉴于其重要意义,文[2]曾使用平面几何语言有过精确描述,遗憾的是文[6]对此批评文[2]"仍算不上简捷证法".

实际上,本文以及文[6]探讨的问题,调和点列都只是问题的表象,问题真正的核心是本文陈述的这一判断. 文[6]提供的简捷证法,并未触及自共轭三角形的生成过程(文[6]未能解释为什么点 P 在直线 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$,而这一点才是问题的关键). 希望本文连同文[2]能够引起同行们对完全四边形调

和性在圆锥曲线问题探究活动的重要价值的注意.

参考文献:

[1] 宋春龙. 一道圆锥曲线竞赛试题引发的探究与迁移[J]. 数学通讯(下半月),2018(07):36-41.
[2] 李伟健. 椭圆的一个结论的演变历程[J]. 数学通讯(下半月),2017(12):38-40.
[3] 彭世金. 圆锥曲线类准线的一个统一性质再探[J]. 数学通讯(下半月),2011(11):17-18.
[4] 孔繁文. 对一道省际大联考试题的推广探究[J]. 数学通讯(下半月),2018(05):32-34.
[5] 干志华. 圆锥曲线中的一个割线性质再探究[J]. 数学通讯(下半月),2017(06):41-43.
[6] 曾建国. 圆锥曲线一组性质及猜想的简证与推广[J]. 数学通讯(下半月),2018(07):封底.

(收稿日期:2018－09－23)

对一个数学问题的探究性学习

郑丽生
(福建省仙游第一中学,351200)

《普通高中数学课程标准》(2017) 指出:“数学探究活动是运用数学知识解决数学问题的一类综合实践活动,也是高中阶段数学课程的重要内容”,“数学探究活动是围绕某个具体的数学问题,开展自主探究、合作研究并最终解决问题的过程”.

下面是以一个数学问题为案例引导学生所进行的一系列探究.

案例　(《数学教学》2017 年第 6 期数学问题 1002) 在平面直角坐标系 xOy 中,A、B 是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 $y=x$ 的两个交点,P 为椭圆 C 上异于 A、B 的动点,过 A、B 分别作 PA、PB 的垂线,两者交于点 M. 求证:点 M 总是位于椭圆 C':$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 上.

本题内涵丰富,难度适中,不应满足于会解,可引导学生进行深入探究. 本题的结论揭示了椭圆与其一条定直径的一个关联性质,不妨记为

性质 1　设 A、B 是椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 l:$y=x$ 的两个交点,P 为椭圆 C 上异于 A、B 的动点,过 A、B 分别作直线 PA、PB 的垂线,则两垂线的交点 M 恒在椭圆 C':$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 上.

1. 横向探究:由椭圆到双曲线的探究

问题 1　性质 1 揭示了椭圆与其一条特殊的定直径的一个关联性质,我们自然要问:双曲线是否具有类似性质?即:设 A、B 是双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 l:$y=x$ 的两个交点,P 为双曲线 C 上异于 A、B 的动点,过 A、B 分别作直线 PA、PB 的垂线,那么两垂线的交点 M 是否恒在双曲线 C':$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 上?

探究 1　由 $\begin{cases} y=x, \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 得 $b^2x^2-a^2x^2=a^2b^2$,解得 $x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$(由双曲线 C 与直线 l 相交知 $b>a$). 不妨设 $A(t,t)$,$B(-t,-t)$,其中 $t=\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

先考虑直线 PA、PB 的斜率均存在的情况. 此时,若直线 PA、PB 中有一条斜率为 0,则另一条斜率必不存在,这不适合直线 PA、PB 的斜率均存在