圆锥曲线的弦对定点张直角的一组性质

宁夏银川市第九中学　750001　田彦武
山东烟台市祥和中学　264000　徐艳芳

最近文[2]对文[1]中关于抛物线的弦对顶点张直角的一个充要条件作了推广，得出椭圆和双曲线的弦对顶点张直角的几个充要条件. 本文我们要探讨的问题是将圆锥曲线的顶点改为圆锥曲线上其它任意的一个定点时，若所张角依然为直角，那么弦会过定点吗？反之弦过此定点时，弦所张角会为直角吗？回答是肯定的，即有下面的：

定理 1　设直线 l 交椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 于 A,B 两点，点 $M(x_0,y_0)$ 是椭圆上不同于 A,B 两点的一个定点，则 $MA\perp MB$ 的充要条件是直线 l 过定点

$$N\left(\frac{x_0(a^2-b^2)}{a^2+b^2},\frac{y_0(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right).$$

证明　先证必要性：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB：$x=ky+m$，代入方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，得 $(a^2+b^2k^2)y^2+2b^2mky+b^2m^2-a^2b^2=0$，由根与系数的关系得

$$y_1+y_2=\frac{-2b^2mk}{a^2+b^2k^2},$$

$$y_1y_2=\frac{b^2m^2-a^2b^2}{a^2+b^2k^2}\qquad ①$$

又 $\overrightarrow{MA}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-x_0,y_2-y_0)$，且 $MA\perp MB$，所以有 $(x_1-x_0,y_1-y_0)(x_2-x_0,y_2-y_0)=0$

整理得：$(k^2+1)y_1y_2+[k(m-x_0)-y_0](y_1+y_2)+(m-x_0)^2+y_0^2=0$，

将①式代入上述式子，并结合 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$ 整理得：

$$(a^2+b^2)m^2+2(b^2ky_0-a^2x_0)m+(a^2-b^2)(x_0^2-k^2y_0^2)=0$$

解这个关于 m 的方程得：$m=\frac{(a^2-b^2)(x_0+ky_0)}{a^2+b^2}$ 或 $m=x_0-ky_0$（舍）.

从而直线 AB 的方程为：$x=ky+\frac{(a^2-b^2)(x_0+ky_0)}{a^2+b^2}$，易知 $x=\frac{x_0(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$，$y=\frac{y_0(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$ 是上述方程的一个解，即直线 AB 必过定点 $N\left(\frac{x_0(a^2-b^2)}{a^2+b^2},\frac{y_0(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right)$.

再证充分性：

设过点 $N\left(\frac{x_0(a^2-b^2)}{a^2+b^2},\frac{y_0(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right)$ 的直线为：

$$y-\frac{y_0(b^2-a^2)}{a^2+b^2}=n\left(x-\frac{x_0(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right),$$

令 $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=c$，则上述直线方程化为：$y=nx-c(nx_0+y_0)$.

由 $\begin{cases}y=nx-c(nx_0+y_0)\\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{cases}$ 得：$b^2x^2+a^2[n^2x^2-2nc(nx_0+y_0)x+c^2(nx_0+$

$y_0)^2] = a^2b^2$, 即 $(a^2n^2 + b^2)x^2 - 2a^2nc(nx_0 + y_0)x + a^2c^2(nx_0 + y_0)^2 - a^2b^2 = 0$, 由根与系数的关系有:

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2nc(nx_0 + y_0)}{a^2n^2 + b^2},$$
$$x_1x_2 = \frac{a^2c^2(nx_0 + y_0)^2 - a^2b^2}{a^2n^2 + b^2} \quad ②$$

且 $y_1 + y_2 = nx_1 - c(nx_0 + y_0) + nx_2 - c(nx_0 + y_0) = n(x_1 + x_2) - 2c(nx_0 + y_0)$ ③

$y_1y_2 = [nx_1 - c(nx_0 + y_0)][nx_2 - c(nx_0 + y_0)] = n^2x_1x_2 - nc(nx_0 + y_0)(x_1 + x_2) + c^2(nx_0 + y_0)^2$ ④

又 $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = x_1x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2$

$$= \frac{a^2c^2(nx_0 + y_0)^2 - a^2b^2}{a^2n^2 + b^2} - \frac{2a^2ncx_0(nx_0 + y_0)}{a^2n^2 + b^2} + x_0^2$$

$$= \frac{a^2(c-1)[n(c-1)x_0 + (c+1)y_0](nx_0 + y_0)}{a^2n^2 + b^2} \quad ⑤$$

$(y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = y_1y_2 - y_0(y_1 + y_2) + y_0^2$ ⑥

将③、④式代入⑥式并化简得:

$$(y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = \frac{b^2(c+1)[n(c-1)x_0 + (c+1)y_0](nx_0 + y_0)}{a^2n^2 + b^2} \quad ⑦$$

又结合 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c$ 知 $a^2(c-1) = -b^2(c+1)$, 再由⑤式和⑦式有: $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = -(y_1 - y_0)(y_2 - y_0)$

即 $k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{(y_1 - y_0)(y_2 - y_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} = -1$, 从而 $MA \perp MB$, 证毕.

显然, 当点 $M(x_0, y_0)$ 分别为 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ 时即为文[2]中的定理1, 因此, 本文中的定理1是对文[2]中的定理1作了一般意义推广.

按照同样的办法可以证得下面的:

定理2 设直线 l 交双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0, a \neq b)$ 于 A, B 两点, 点 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线上不同于 A, B 两点的一个定点, 则 $MA \perp MB$ 的充要条件是直线 l 过定点 $N\left(\frac{x_0(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}, \frac{y_0(b^2 - a^2)}{a^2 + b^2}\right)$.

定理3 设直线 l 交抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 于 A, B 两点, 点 $M(x_0, y_0)$ 是抛物线上不同于 A, B 两点的一个定点, 则 $MA \perp MB$ 的充要条件是直线 l 过定点 $N(2p + \frac{y_0^2}{2p}, -y_0)$.

上述三个定理可统一叙述为:

定理4 过圆锥曲线上一定点 M 作两条互相垂直的直线交圆锥曲线于 A, B 两点, 则直线 AB 必过一定点(等轴双曲线除外).

需要说明的是, 本文中的式⑤和式⑦的化简需要很大的耐心和毅力, 尤其是代换 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c$ 使得问题的化简大不一样, 否则这种化简的难度可想而知了. 在这里也特别希望读者不妨尝试一下式⑤和式⑦的化简以及代换 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = c$ 所带来的方便之处.

参考文献

[1] 张必平. 弦对定点张直角的性质及其应用[J]. 中学数学月刊, 2005(1).

[2] 解永良. 圆锥曲线的弦对顶点张直角的一组性质[J]. 中学数学杂志(高中), 2005(6).