重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形性质再探

杨同伟
(陕西省西安市昆仑中学，710043)

笔者在文[1]中给出了重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形的三个有趣性质．近期又对此问题进行了深入研究，得到了重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形的另外几个有趣性质．

引理　若$\triangle A_1A_2A_3$是椭圆(或圆)：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$的内接三角形，且$\triangle A_1A_2A_3$的重心是原点，则$A_1$，$A_2$，$A_3$的离心角分别为$\theta$，$\theta+120^\circ$，$\theta-120^\circ$．

上述引理实质是文[1]中定理1的一种改述，这里无需再来证明．下面着重介绍最近发现的重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形的又几个新性质，愿与各位同仁共同分享．

定理 1　若$A_i(x_i,\ y_i)\ (i=1,2,3)$是椭圆(或圆)：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$上的三个不同点，且$\triangle A_1A_2A_3$的重心是原点，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}x_ix_j=-\frac{3}{4}a^2,\quad \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}y_iy_j=-\frac{3}{4}b^2.$$

证明　不妨设点A_1的离心角为θ，由引理可知，A_2，A_3的离心角分别为$\theta+120^\circ$，$\theta-120^\circ$，于是$x_1=a\cos\theta$，$x_2=a\cos(\theta+120^\circ)$，$x_3=a\cos(\theta-$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得 $\frac{(\frac{a^2\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2})^2}{a^2}-\frac{(\frac{a^2\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2})^2}{b^2}=1$，即有线段$MN$中点的轨迹方程为$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2})^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

对于抛物线，我们也可以仿文[1]有如下轨迹：

轨迹 1′　过抛物线C：$y^2=2px$的相关圆$x^2+y^2=p^2$上位于抛物线外的任意一点P作抛物线C的两条切线PM，PN，切点分别为M，N，则线段MN中点的轨迹方程是$(y^2-px)^2+p^2y^2=p^4$.

由结论 3，将$\begin{cases}x_0=\frac{1}{p}\bar{y}^2-\bar{x},\\ y_0=\bar{y}\end{cases}$代入相关圆$x^2+y^2=p^2$得$(\frac{1}{p}\bar{y}^2-\bar{x})^2+\bar{y}^2=p^2$，即有线段$MN$中点的轨迹方程为$(y^2-px)^2+p^2y^2=p^4$.

轨迹 2′　过抛物线C：$y^2=2px$上位于相关圆$x^2+y^2=p^2$之外的任意一点P作相关圆的两条切线PM，PN，切点分别为M，N，则线段MN中点的轨迹是$py^2=2x(x^2+y^2)$.

由结论1的特殊情况：将$\begin{cases}x_0=\frac{p^2\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2},\\ y_0=\frac{p^2\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2}\end{cases}$代入$y^2=2px$得$(\frac{p^2\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2})^2=2p(\frac{p^2\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2})$，即有线段$MN$中点的轨迹方程为$py^2=2x(x^2+y^2)$.

文[1]还介绍了轨迹2，4，7，8，它们研究的是一条曲线C_1在点T处的切线与另一曲线C_2相交于P，Q，弦PQ的中点为M，当T在曲线C_1上变化时，求中点M的轨迹方程．我们可以仿上述结论证明中的方法，把PQ作为C_1的切线和C_2的中点弦分别求出方程，通过系数成比例，找出用点M的坐标表示点T坐标的关系式，代入C_1的方程也可容易地求出M点的轨迹方程，有兴趣的读者不妨一试．

参考文献

[1]　玉云化．椭圆、双曲线与相关圆生成的轨迹方程．数学通讯，2012(1)(下半月)．

(收稿日期：2012—02—27)

$120^\circ)$, $y_1=b\sin\theta$, $y_2=b\sin(\theta+120^\circ)$, $y_3=b\sin(\theta-120^\circ)$.

所以 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}x_ix_j=a^2[\cos\theta\cos(\theta+120^\circ)+\cos(\theta+120^\circ)\cos(\theta-120^\circ)+\cos(\theta-120^\circ)\cos\theta]$

$=a^2(-\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta-\frac{3}{4}\sin^2\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta)$

$=a^2(-\frac{3}{4}\sin^2\theta-\frac{3}{4}\cos^2\theta)=-\frac{3}{4}a^2$,

同理可得, $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}y_iy_j=-\frac{3}{4}b^2$.

定理 2 $\triangle A_1A_2A_3$ 是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的内接三角形, 且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 则 $|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1|^2=\frac{9}{2}(a^2+b^2)$.

证明 设 $A_i(x_i, y_i)\ (i=1, 2, 3)$, 一方面, 由文 [1] 中的定理 2 可知, $\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2=\frac{3}{2}a^2$, $\sum\limits_{i=1}^{3}y_i^2=\frac{3}{2}b^2$;

另一方面, 由本文中的定理 1 可知, $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}x_ix_j=-\frac{3}{4}a^2$, $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}y_iy_j=-\frac{3}{4}b^2$.

$\therefore |A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_1|^2$

$=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2]$

$=2(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{3}y_i^2-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}x_ix_j-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}y_iy_j)$

$=2(\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2+\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}b^2)=\frac{9}{2}(a^2+b^2)$.

定理 3 $\triangle A_1A_2A_3$ 是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的内接三角形, 且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 若 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 分别存在非零斜率 k_1, k_2, k_3. 则 $(\sum\limits_{i=1}^{3}k_i)\cdot(\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{k_i})=9$.

证明 不妨设点 A_1 的离心角为 θ, 由引理可知, A_2, A_3 的离心角分别为 $\theta+120^\circ$, $\theta-120^\circ$, 则 $A_1(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $A_2(a\cos(\theta+120^\circ),\ b\sin(\theta+120^\circ))$, $A_3(a\cos(\theta-120^\circ),\ b\sin(\theta-120^\circ))$.

于是, 有

$k_1=\frac{b[\sin(\theta+120^\circ)-\sin\theta]}{a[\cos(\theta+120^\circ)-\cos\theta]}$

$=\frac{2b\cos(\theta+60^\circ)\sin60^\circ}{-2a\sin(\theta+60^\circ)\sin60^\circ}=-\frac{b}{a}\cot(\theta+60^\circ)$;

$k_2=\frac{b[\sin(\theta+120^\circ)-\sin(\theta-120^\circ)]}{a[\cos(\theta+120^\circ)-\cos(\theta-120^\circ)]}$

$=\frac{2b\cos\theta\sin120^\circ}{-2a\sin\theta\sin120^\circ}=-\frac{b}{a}\cot\theta$;

$k_3=\frac{b[\sin\theta-\sin(\theta-120^\circ)]}{a[\cos\theta-\cos(\theta-120^\circ)]}$

$=\frac{2b\cos(\theta-60^\circ)\sin60^\circ}{-2a\sin(\theta-60^\circ)\sin60^\circ}=-\frac{b}{a}\cot(\theta-60^\circ)$.

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{3}k_i=-\frac{b}{a}[\cot(\theta-60^\circ)+\cot\theta+\cot(\theta+60^\circ)]=-\frac{b}{a}(\frac{1+\sqrt{3}\tan\theta}{\tan\theta-\sqrt{3}}+\frac{1}{\tan\theta}+\frac{1-\sqrt{3}\tan\theta}{\tan\theta+\sqrt{3}})$

$=-\frac{b}{a}\cdot[(1+\sqrt{3}\tan\theta)(\tan\theta+\sqrt{3})\tan\theta+(\tan\theta+\sqrt{3})(\tan\theta-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3}\tan\theta)(\tan\theta-\sqrt{3})\tan\theta]/[\tan\theta(\tan^2\theta-3)]$

$=-\frac{b}{a}\cdot\frac{3(3\tan^2\theta-1)}{\tan\theta(\tan^2\theta-3)}$.

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{k_i}=-\frac{a}{b}[\tan(\theta-60^\circ)+\tan\theta+\tan(\theta+60^\circ)]=-\frac{a}{b}(\frac{\tan\theta-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\theta}+\tan\theta+\frac{\tan\theta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\theta})$

$=-\frac{a}{b}\cdot[(1-\sqrt{3}\tan\theta)(\tan\theta-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3}\tan\theta)(1-\sqrt{3}\tan\theta)\tan\theta+(\tan\theta+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}\tan\theta)]/(1-3\tan^2\theta)$

$=-\frac{a}{b}\cdot\frac{3\tan\theta(3-\tan^2\theta)}{1-3\tan^2\theta}$.

故 $(\sum\limits_{i=1}^{3}k_i)(\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{1}{k_i})=9$.

定理 4 $\triangle A_1A_2A_3$ 是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的内接三角形, 且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 过 $\triangle A_1A_2A_3$ 的顶点 A_1, A_2, A_3 分别作椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的切线 l_1, l_2, l_3, 则 $l_1/\!/A_2A_3$, $l_2/\!/A_1A_3$, $l_3/\!/A_1A_2$.

证明 不妨设点 A_1 的离心角为 $\theta\ (0^\circ\leqslant\theta\leqslant120^\circ)$, 由引理可知, A_2, A_3 的离心角分别为 $\theta+120^\circ$, $\theta-120^\circ$, 则 $A_1(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $A_2(a\cos(\theta+120^\circ),\ b\sin(\theta+120^\circ))$, $A_3(a\cos(\theta-120^\circ),\ b\sin(\theta

$-120^\circ)$).

(1) 当 $\theta=0^\circ$ 时, $A_1(a, 0)$, $A_2(-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}b)$, $A_3(-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}b)$, 此时, $l_1\perp x$ 轴, $A_2A_3\perp x$ 轴, 从而 $l_1 /\!/ A_2A_3$; 又切线 l_2 的方程为 $-\frac{x}{2a}+\frac{\sqrt{3}y}{2b}=1$, 切线 l_3 的方程为 $-\frac{x}{2a}-\frac{\sqrt{3}y}{2b}=1$, 所以 $k_{l_2}=\frac{\sqrt{3}b}{3a}$, $k_{l_3}=-\frac{\sqrt{3}b}{3a}$, 而 $k_{A_1A_3}=\frac{\sqrt{3}b}{3a}$, $k_{A_1A_2}=-\frac{\sqrt{3}b}{3a}$, 故 $l_2 /\!/ A_1A_3$, $l_3 /\!/ A_1A_2$;

同理可证明 $\theta=60^\circ$, 120° 等情况下, 命题也成立.

(2) 当 $\theta\neq0^\circ$, 60°, 120° 时, A_1, A_2, A_3 不可能是椭圆(或圆): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$) 的左右顶点, 此时, 切线 l_1 的方程为 $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$, 切线 l_2 的方程为 $\frac{x\cos(\theta+120^\circ)}{a}+\frac{y\sin(\theta+120^\circ)}{b}=1$, 切线 l_3 的方程为 $\frac{x\cos(\theta-120^\circ)}{a}+\frac{y\sin(\theta-120^\circ)}{b}=1$, 所以 $k_{l_1}=-\frac{b}{a}\cot\theta$, $k_{l_2}=-\frac{b}{a}\cot(\theta+120^\circ)=-\frac{b}{a}\cot(\theta-60^\circ)$, $k_{l_3}=-\frac{b}{a}\cot(\theta-120^\circ)=-\frac{b}{a}\circ\cot(\theta+60^\circ)$.

又由定理 3 的证明可知, $k_{A_1A_2}=-\frac{b}{a}\cot(\theta+60^\circ)$, $k_{A_1A_3}=-\frac{b}{a}\cot(\theta-60^\circ)$, $k_{A_2A_3}=-\frac{b}{a}\cot\theta$.

故有, $l_1 /\!/ A_2A_3$, $l_2 /\!/ A_1A_3$, $l_3 /\!/ A_1A_2$.

定理 5 $\triangle A_1A_2A_3$ 是椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的内接三角形, 且 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心是原点, 若 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一边经过椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的焦点 F, 则椭圆 C 的离心率 e 满足 $\frac{1}{2}\leqslant e<1$.

证明 不妨设 F_1, F_2 是椭圆 C 的左右焦点, 再设点 A_1 的离心角为 θ ($0^\circ\leqslant\theta\leqslant120^\circ$), 由引理可知, A_2, A_3 的离心角分别为 $\theta+120^\circ$, $\theta-120^\circ$, 则

$A_1(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $A_2(a\cos(\theta+120^\circ), b\sin(\theta+120^\circ))$, $A_3(a\cos(\theta-120^\circ), b\sin(\theta-120^\circ))$.

(1) 当 $\theta=0^\circ$ 时, $A_1(a, 0)$, $A_2(-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}b)$, $A_3(-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}b)$, 要使 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一边经过椭圆的焦点, 只能是 A_2A_3 经过左焦点 $F_1(-c, 0)$, 此时有 $-\frac{1}{2}a=-c$, 即离心率 $e=\frac{1}{2}$;

当 $\theta=120^\circ$ 时, $A_1(-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}b)$, $A_2(-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}b)$, $A_3(a, 0)$, 要使 $\triangle A_1A_2A_3$ 的一边经过椭圆的焦点, 只能是 A_1A_2 经过左焦点 $F_1(-c, 0)$, 此时有 $-\frac{1}{2}a=-c$, 即离心率 $e=\frac{1}{2}$;

(2) 当 $\theta\neq0^\circ$, 120° 时, 不妨设 A_1A_3 经过右焦点 $F_2(c, 0)$, 而 $\overrightarrow{A_1F_2}=(c-a\cos\theta, -b\sin\theta)$, $\overrightarrow{A_3F_2}=(c-a\cos(\theta-120^\circ), -b\sin(\theta-120^\circ))$,

$\therefore -b\sin(\theta-120^\circ)(c-a\cos\theta)=-b\sin\theta[c-a\cos(\theta-120^\circ)]$,

$(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)(c-a\cos\theta)=\sin\theta(c+\frac{1}{2}a\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\theta)$,

即 $-\frac{1}{2}c\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}c\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}a\cos^2\theta=c\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin^2\theta$,

$\therefore (\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

从而, $\frac{c}{a}=\frac{1}{2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta)}=\frac{1}{2\sin(\theta+30^\circ)}\in[\frac{1}{2}, 1)$.

综合(1), (2) 可知椭圆的离心率 e 满足 $\frac{1}{2}\leqslant e<1$.

参考文献:

[1] 杨同伟. 重心是原点的椭圆(或圆)内接三角形性质初探. 数学通讯, 2012(1)(下半月).
[2] 李加军. 解两道保送生考试题. 中等数学, 2011(7).

(收稿日期: 2011—12—19)