一道2020年四川省预赛题的推广

栾　功

(广西南宁市第三中学，530020)

一、试题解析

题1　(2020年全国高中数学联赛四川赛区预赛9)过点$P(0,1)$作一直线l,与抛物线$y=x^2$交于A、B不同两点,过点A、B分别作抛物线$y=x^2$的切线,两切线交于点Q,求点Q到直线AB的距离的最小值.

题1以抛物线的弦和过弦两端的切线为背景命制,考查解析几何中点、线等基本元素的刻画及几何关系的代数表达,重点考查学生的逻辑推理能力、运算求解能力、综合应用数学知识分析问题和解决问题的能力,具有一定的区分度和选拔功能.类似的问题在2014年全国高中数学联赛和2019年高考全国卷中都有呈现,试题背景在普通高中课程标准实验教科书《数学选修3－1北师大版》数学史选讲和《数学选修2－1湘教版》中都有涉及,其中《数学选修2－1湘教版》中以圆锥曲线小史的形式介绍了阿基米德在圆锥曲线方面取得的巨大成就,阿基米德证明了,由抛物线与它的弦围成的图形,它的面积等于弦与弦两端的切线所构成的三角形面积的$\frac{2}{3}$.本题的命制亦源于此,阿基米德三角形以其深刻的背景、丰富的内涵演绎了无穷的魅力,备受高考命题者和竞赛命题者的青睐.

下面先给出题1的两种解法.

解法1　由题设知直线AB的斜率存在,设直线AB的方程为$y=kx+1$,与抛物线方程$y=x^2$联立得$x^2-kx-1=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则

$x_1+x_2=k$,$x_1x_2=-1$.

对$y=x^2$求导得$y'=2x$,所以点A处抛物线$y=x^2$的切线AQ的方程为$y-y_1=2x_1(x-x_1)$,又$y_1=x_1^2$,代入整理可得$y=2x_1x-x_1^2$.同理可得点B处抛物线$y=x^2$的切线BQ的方程为$y=2x_2x-x_2^2$.

联立直线AQ和BQ的方程可求得点Q的坐标为$(\frac{x_1+x_2}{2},x_1x_2)$,即$Q(\frac{k}{2},-1)$.

于是点Q到直线AB的距离

$$d=\frac{|k\cdot\frac{k}{2}-(-1)+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{k^2+4}{2\sqrt{k^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{k^2+1}+\frac{3}{\sqrt{k^2+1}})\geqslant\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}=\sqrt{3},$$

当且仅当$\sqrt{k^2+1}=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}$即$k=\pm\sqrt{2}$时等号成立.

所以,点Q到直线AB的距离的最小值为$\sqrt{3}$.

解法2　设$Q(x_0,y_0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

对$y=x^2$求导得$y'=2x$,所以点A处抛物线$y=x^2$的切线AQ的方程为$y-y_0=2x_1(x-x_0)$,从而$y_1-y_0=2x_1(x_1-x_0)$,又$y_1=x_1^2$,代入整理得$x_1x_0=\frac{1}{2}(y_1+y_0)$.

同理可得$x_2x_0=\frac{1}{2}(y_2+y_0)$,从而直线$AB$的方程为$x_0x=\frac{1}{2}(y+y_0)$.

又直线AB过点$P(0,1)$,故$y_0=-1$,即$Q(x_0,-1)$.

于是可得点Q到直线AB的距离

$$d=\frac{x_0^2+1}{\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}=\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}+\frac{3}{4\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}$$

$$\geqslant2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3},$$

当且仅当$\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4}}}$即$x_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立.

所以,点Q到直线AB的距离的最小值为$\sqrt{3}$.

评注　杰出的数学家乔治·波利亚说,“假如你想从解题中得到最大的收获,你就应当在所做的

题目中去找出它的特征，这些特征在你以后去求解其他问题时，能起到指引作用”．因此，我们有必要去反思解题过程，解法1以直线 AB 的斜率为参数表示切线方程，求出两切线交点 Q 的坐标，从而求解点到直线的距离问题，在解答过程中数学直觉告诉我们，点 Q 的坐标与点 A,B,P 的坐标具有一定的内在联系；解法2以点 Q 的坐标为参数，表达出切点弦 AB 的方程，从而求解点到直线的距离，在解答过程中我们发现切点弦 AB 所在的直线方程与点 Q 和抛物线 $y=x^2$ 有必然的联系．这样的数学直觉判断的结论正确与否，我们需要把问题推广到一般情形，在剖析解答中寻求答案．

二、试题推广

题2 过点 $P(0,t)(t>0)$ 作一直线 l，与抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 交于 A、B 不同两点，过点 A、B 分别作抛物线 C 的切线，两切线交于点 Q，求点 Q 到直线 AB 的距离的最小值．

解法1 由题设知，直线 AB 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+t$，与抛物线方程 $x^2=2py$ 联立得 $x^2-2pkx-2pt=0$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-2pt$．

对 $y=\dfrac{x^2}{2p}$ 求导得 $y'=\dfrac{x}{p}$，所以点 A 处抛物线 $x^2=2py$ 的切线 AQ 的方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1)$，又 $y_1=\dfrac{x_1^2}{2p}$，代入整理可得 $y=\dfrac{x_1}{p}x-\dfrac{x_1^2}{2p}$．同理可得点 B 处抛物线 $x^2=2py$ 的切线 BQ 的方程为 $y=\dfrac{x_2}{p}x-\dfrac{x_2^2}{2p}$．

联立直线 AQ 和 BQ 的方程可求得点 Q 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{2p}\right)$，即 $Q(pk,-t)$．

于是点 Q 到直线 AB 的距离

$$d=\frac{|k\cdot pk-(-t)+t|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{pk^2+2t}{\sqrt{k^2+1}}.$$

令 $\sqrt{k^2+1}=m(m\geqslant 1)$，则 $d=pm+\dfrac{2t-p}{m}$．

(1) 若 $2t-p=0$，即 $t=\dfrac{p}{2}$ 时，$d=p\sqrt{k^2+1}\geqslant p$（当 $k=0$ 时取等号），$d_{\min}=p$．

(2) 若 $2t-p<0$，即 $t<\dfrac{p}{2}$ 时，$d=pm+\dfrac{2t-p}{m}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，当 $m=1$ 即 $k=0$ 时，$d_{\min}=2t$．

(3) 若 $2t-p>0$，即 $t>\dfrac{p}{2}$ 时，$d=pm+\dfrac{2t-p}{m}\geqslant 2\sqrt{p(2t-p)}$，当 $pm=\dfrac{2t-p}{m}$ 即 $m^2=\dfrac{2t-p}{p}$，$k=\pm\sqrt{2\left(\dfrac{t}{p}-1\right)}$ 时，$d_{\min}=2\sqrt{p(2t-p)}$．

解法2 设 $Q(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

对 $y=\dfrac{x^2}{2p}$ 求导得 $y'=\dfrac{x}{p}$，所以点 A 处抛物线 $x^2=2py$ 的切线 AQ 的方程为 $y-y_0=\dfrac{x_1}{p}(x-x_0)$，从而 $y_1-y_0=\dfrac{x_1}{p}(x_1-x_0)$，又 $y_1=\dfrac{x_1^2}{2p}$，代入整理得 $x_1x_0=p(y_1+y_0)$．

同理可得 $x_2x_0=p(y_2+y_0)$，从而直线 AB 的方程为 $x_0x=p(y+y_0)$．

又直线 AB 过点 $P(0,t)$，故 $y_0=-t$，即 $Q(x_0,-t)$．

于是可得点 Q 到直线 AB 的距离

$$d=\frac{x_0^2+2pt}{\sqrt{x_0^2+p^2}}.$$

令 $\sqrt{x_0^2+p^2}=m(m\geqslant p)$，则

$$d=m+\frac{p(2t-p)}{m}.$$

(1) 若 $2t-p=0$ 即 $t=\dfrac{p}{2}$ 时，$d=m\geqslant p$（当 $x_0=0$ 时取等号），$d_{\min}=p$．

(2) 若 $2t-p<0$ 即 $t<\dfrac{p}{2}$ 时，$d=m+\dfrac{p(2t-p)}{m}$ 在 $[p,+\infty)$ 上单调递增，当 $m=p$ 即 $x_0=0$ 时，$d_{\min}=2t$．

(3) 若 $2t-p>0$ 即 $t>\dfrac{p}{2}$ 时，$d=m+\dfrac{p(2t-p)}{m}\geqslant 2\sqrt{p(2t-p)}$，当 $m=\dfrac{p(2t-p)}{m}$ 即 $x_0^2=2p(t-p)$ 时，$d_{\min}=2\sqrt{p(2t-p)}$．

评注 正如我国数学教育专家郑毓信教授所说：“数学直觉是一种直接反映数学对象结构关系的心智活动形式，它是人脑对于数学对象的某种直接的领悟或洞察．”通过对问题一般情形的解答，我们不仅更加清楚了点 Q 到切点弦 AB 距离的最小值的表达形式，还收获了满满的解题惊喜，验证了我们的直觉判断是正确的，从而得出如下定理．

定理1 过点 $P(0,t)(t>0)$ 作一直线 l，与抛

物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 交于 A、B 不同两点，过点 A、B 分别作抛物线 C 的切线，两切线交于点 Q，则 A,Q,B 三点的横坐标成等差数列.

定理 2　过点 $P(0,t)(t>0)$ 作一直线 l，与抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 交于 A、B 不同两点，过点 A、B 分别作抛物线 C 的切线，两切线交于点 Q，则点 Q 在定直线 $y=-c$ 上.

定理 3　过点 $Q(x_0,y_0)$ 作抛物线 $C:x^2=2py(p\neq 0)$ 的两条切线，切点分别为 A、B，则切点弦 AB 所在的直线方程为 $x_0x=p(y+y_0)$.

思考 1　定理 1、定理 2 的逆定理是否成立?并说明理由.

定理 4　如图 1，过点 $P(0,t)(t>0)$ 作一直线 l，与抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 交于 A、B 不同两点，过线段 AB 的中点 E 作直线 $y=-t$ 的垂线，垂足为 Q，则 QA、QB 为抛物线 C 的切线.

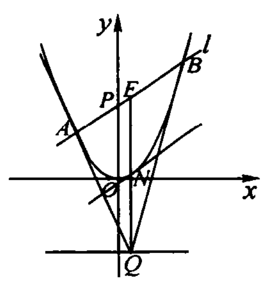

图 1

证明　设直线 l 的方程为 $y=kx+t$，与抛物线方程 $x^2=2py$ 联立得 $x^2-2pkx-2pt=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=-2pt$. 从而点 $Q(\frac{x_1+x_2}{2},-t)$，即 $Q(pk,-t)$.

对 $y=\frac{x^2}{2p}$ 求导得 $y'=\frac{x}{p}$，所以点 A 处抛物线 $x^2=2py$ 的切线 AQ 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$，它与直线 $y=-c$ 的交点坐标为 $M(\frac{x_1}{2}-\frac{pt}{x_1},-t)$.

由于 $x_1x_2=-2pt$，故 $\frac{x_1}{2}-\frac{pt}{x_1}=\frac{x_1+x_2}{2}=pk$，故点 M 与点 Q 重合，也就是 QA 为抛物线 C 的切线.

同理可证 QB 为抛物线 C 的切线.

定理 5　已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，Q 为直线 $y=-t(t>0)$ 上的动点，过 Q 作 C 的两条切线，切点分别为 A,B，则直线 AB 过定点 $P(0,t)$.

证明　设 $P(x_0,-t)$，由定理 3 知切点弦 AB 所在直线方程为 $x_0x=p(y-t)$，即 $x_0x-py+pt=0$. 由 x_0 的任意性知，当 $x=0$ 时，$y=t$，因此直线 AB 过定点 $P(0,t)$.

思考 2　定理 4 中直线 EQ 与抛物线 C 的交点记为 N，抛物线在点 N 处的切线的斜率是否为定值?

定理 6　如图 1，过点 $P(0,t)(t>0)$ 作一直线 l，与抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 交于 A、B 不同两点，过线段 AB 的中点 E 作直线 $y=-t$ 的垂线交抛物线 C 于点 N，则抛物线 C 在点 N 处的切线与直线 l 平行.

证明　设直线 l 的方程为 $y=kx+t$，与抛物线方程 $x^2=2py$ 联立得 $x^2-2pkx-2pt=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2pk$，从而点 $N(pk,\frac{pk^2}{2})$.

对 $y=\frac{x^2}{2p}$ 求导得 $y'=\frac{x}{p}$，所以抛物线 C 在点 N 处的切线的斜率为 $\frac{pk}{p}=k$，故抛物线 C 在点 N 处的切线与直线 l 平行.

思考 3　把定理 5 中的条件“Q 为直线 $y=-t(t>0)$ 上的动点”一般化为“动点 Q 在直线 $ax+by+c=0$ 上”，过 Q 作 C 的两条切线，切点分别为 A,B，则直线 AB 是否过定点?

定理 7　已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$，Q 为直线 $ax+by+c=0$ 上的动点，过 Q 作 C 的两条切线，切点分别为 M,N，则直线 MN 过定点 $G(-\frac{ap}{b},\frac{c}{b})$.

证明　设 $Q(x_0,y_0)$，由定理 3 知切点弦 MN 所在直线方程为 $x_0x=p(y+y_0)$.

又点 Q 在直线 $ax+by+c=0$ 上，所以 $ax_0+by_0+c=0$,

联立两式，消去 y_0 得

$(bx+ap)x_0+pc-pby=0$.

由 x_0 的任意性知，$bx+ap=0$，$pc-pby=0$，解得 $x=-\frac{ap}{b}$，$y=\frac{c}{b}$.

因此直线 MN 过定点 $G(-\frac{ap}{b},\frac{c}{b})$.

思考 4　从圆的切割线定理猜想抛物线的切割线定理.

定理 8　过抛物线 C 外一点 Q 作 C 的两条切

(下转 57 页)

最基本最合理的、学生日常推理最接近的那些思维的源起出发,从学生已有的基础知识和基本方法人手,逐步培养学生的探索性思维能力(哪怕是经历许多曲折甚至是不成功),多从学生的角度考虑,多想想学生一般会如何思考这个问题,多想想学生在解题过程中可能会遇到的种种困难,适当帮助学生寻求自己解决问题的自然想法.当然,丰富而有条理的知识储备才是解题者的至宝.

参考文献:

[1] 侯木兰.构造法在数学解题教学中的应用举例[J].高中数学教与学,2019(9):46-49.

[2] 张筑生.让解题思路来的自然[J].中等数学,1991(6):13.

[3] 中国数学会普及工作委员会.2019年高中数学联赛备考手册(预赛试题集锦)[M].上海:华东师范大学出版社,2019年1月.

[4] 中国数学会普及工作委员会.2009年高中数学联赛备考手册(预赛试题集锦)[M].上海:华东师范大学出版社,2016年1月.

[5] 中国数学会普及工作委员会.2017年高中数学联赛备考手册(预赛试题集锦)[M].上海:华东师范大学出版社,2017年1月.

[6] 中国数学会普及工作委员会.2018年高中数学联赛备考手册(预赛试题集锦)[M].上海:华东师范大学出版社,2018年1月.

[7] 中国数学会普及工作委员会.2020年高中数学联赛备考手册(预赛试题集锦)[M].上海:华东师范大学出版社,2020年1月.

[8] 张国治,程似锦,于雯青,李浩玉.探源溯流一走进数学寻根之旅[J].数学教学,2017(02):13-17.

[9] 新青年数学教师工作室.当代中国数学教育名言解读[M].上海:上海教育出版社,2015年8月.

[10] 张国治.反思出巧解[J].中国数学教育,2012(8):35-36.

[11] 张国治.例谈向量恒等式的应用[J].数学教学,2020(3):30-33.

(收稿日期:2020－05－27)

(上接第31页)

线,切点分别为A、B,过点Q的任一直线l与抛物线的两个交点为C、D,直线l与抛物线切点弦AB的交点为P,则$\frac{1}{|QC|}+\frac{1}{|QD|}=\frac{2}{|QP|}$.

证明　设$Q(x_0,y_0)$,以抛物线$C:x^2=2py(p>0)$为例证明.

设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数,$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$),代入抛物线方程$x^2=2py$,整理得

$(\cos^2\alpha)t^2+(2x_0\cos\alpha-2p\sin\alpha)t+x_0^2-2py_0=0$.

设点C,D的参数分别为t_1,t_2,则

$$t_1+t_2=\frac{2p\sin\alpha-2x_0\cos\alpha}{\cos^2\alpha},t_1t_2=\frac{x_0^2-2py_0}{\cos^2\alpha}.$$

易知t_1,t_2的符号相同,所以

$$\frac{1}{|QC|}+\frac{1}{|QD|}=\frac{|QC|+|QD|}{|QC|\cdot|QD|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{2|p\sin\alpha-x_0\cos\alpha|}{|x_0^2-2py_0|}.$$

由定理3可知切点弦所在直线方程为$x_0x=p(y+y_0)$,将直线l的参数方程代入得:

$(x_0\cos\alpha-p\sin\alpha)t=2py_0-x_0^2$,

解得$t_P=\frac{2py_0-x_0^2}{x_0\cos\alpha-p\sin\alpha}$,因此

$$\frac{2}{|QP|}=\frac{2}{|t_P|}=\frac{2|x_0\cos\alpha-p\sin\alpha|}{|2py_0-x_0^2|},$$

因此$\frac{1}{|QC|}+\frac{1}{|QD|}=\frac{2}{|QP|}$.

三、后记

题1以阿基米德三角形为背景,考查解析几何的基本思想方法,我们还可以挖掘出更多的内在联系,甚至抛物线中的切点弦问题可以类比到圆、椭圆、双曲线中,限于篇幅,留给有兴趣的读者续研.

波利亚曾说:"虽然解决重大问题是一个重大的发现,但求解任何问题都是一个发现,哪怕是点滴的发现."在这样的发现中数学直觉起了重要的作用,这种直觉牵引下学生对问题深入探究,从而获得灵感式的顿悟,结果会令人更加兴奋.而全国各省市的预赛试题往往具有深刻的内涵和丰富的外延,是培育学生核心素养的有效题材,值得重视.

参考文献:

[1] 闻杰,神奇的圆锥曲线[M].杭州:浙江大学出版社,2013.

[2] 张景中,黄楚芳.普通高中课程标准实验教科书数学选修2-1[M].长沙:湖南教育出版社,2005.

(收稿日期:2020－06－20)