对椭圆、双曲线中两直线斜率乘积为定值的探究

浙江省杭州市萧山区第六高级中学 (311261) 陈斌
云南省昆明市寻甸县柯渡镇柯渡中学 (655212) 杨彩清

摘要 圆锥曲线问题一直都是浙江高考中的核心内容之一, 圆锥曲线对于多数考生来说基本上都是有解题的思路, 但往往都是计算到中途时搁浅或结果出错. 究其原因, 主要是学生没有运用好题中所给的条件或者曲线已有的一些性质, 导致方法选择不当或运算不合理, 解题策略欠佳. 因此, 本文通过一道课本题的思考题引发对椭圆、双曲线中两直线斜率乘积为定值的思考及探究, 通过对这些猜想的论证, 得出问题的本质.

关键词 椭圆 双曲线 斜率乘积 定值

一、问题呈现

普通高中课程标准试验教科书《数学》(选修 2-1) 人教 A 版 P55 的探究题

如图 1, 点 A,B 的坐标分别是 $(-5,0),(5,0)$, 直线 AM,BM 相交于点 M, 且它们的斜率之积是 $-\dfrac{4}{9}$, 试求点 M 的轨迹方程, 并由点 M 的轨迹方程判断轨迹的形状.

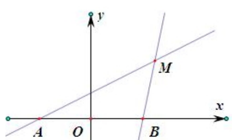

图 1

解 设 $M(x,y)$, 由题意, 可得 $k_{AM}k_{BM}=\dfrac{y}{x+5}\cdot\dfrac{y}{x-5}=-\dfrac{4}{9}$, 化简整理得 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{\frac{100}{9}}=1$. 同时由于直线 AM,BM 的斜率必须存在, 则 $x\neq\pm5$. 即点 M 的轨迹方程是 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{\frac{100}{9}}=1\,(x\neq\pm5)$.

从上述解答中, 我们发现点 M 的轨迹其实就是以长轴是 10, 短轴是 $\dfrac{20}{3}$ 的标准椭圆再挖去左右两个顶点. 在这里不禁想问为什么两相交直线斜率乘积等于 $-\dfrac{4}{9}$ 的交点轨迹是椭圆, 我们在学习圆锥曲线这一章时, 椭圆的第一、二定义不是这样的. 笔者在这里不禁想问:

问题 1. 平面内一个点到两定点的斜率乘积为定值 (负数), 则该点的轨迹还是椭圆吗?

问题 2. 平面内一个点到两定点的斜率乘积为定值 (正数), 则该点的轨迹是什么?

问题 3. 以上问题它们的实质是什么? 为什么会有这样的结果?

二、初入云雾

问题 1. 平面内一个点到两定点的斜率乘积为定值 (负数), 求该点的轨迹方程?

解 建立直角坐标系, 以两定点所在直线为 x 轴, 两定点的中点为原点, 过原点且垂直于 x 轴为 y 轴, 不妨设两定点 $A(a,0),B(-a,0)$, 动点 $M(x,y)$, 定值为 $-p\,(p>0)$. 由题意, 得 $k_{AM}k_{BM}=\dfrac{y}{x+a}\cdot\dfrac{y}{x-a}=-p$, 化简整理, 得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2p}=1$. 由于直线 AM,BM 的斜率必须存在, 则 $x\neq\pm a$. 即点 M 的轨迹方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2p}=1\,(x\neq\pm a)$. 从上述方程可知当 $p=1$ 时, 点 M 的轨迹是圆 (去掉与 x 轴相交的点); 当 $p\neq1$ 时, 点 M 的轨迹是椭圆 (去掉与 x 轴相交的点).

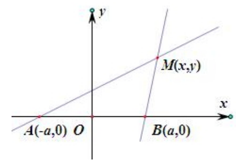

图 2

问题 2. 由问题 1, 可得点 M 的轨迹方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2p}=1\,(x\neq\pm a)$, 从上述方程可知点 M 的轨迹是双曲线 (去掉与 x 轴相交的点). 、

问题 3. 由问题 1、2, 我们发现平面内一个点到两定点的斜率乘积为定值 (定值是非零实数), 则该点的轨迹是椭圆或双曲线. 我们知道椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可以由仿射变换, 令 $x'=\dfrac{x}{a}$, $y'=\dfrac{y}{b}$, 得 $x'^2+y'^2=1$. 此时如右图所示, $k_{A'M'}k_{B'M'}=-1$. 即 $k_{AM}k_{BM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$; 对于双曲线来说, 我们有 $k_{AM}k_{BM}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

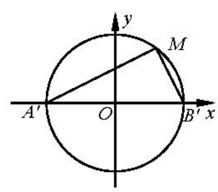

图 3

上述描述的仿射圆的直径是在 x 轴上, 且由直径所对的圆周角是直角, 所以才有斜率乘积为 -1(两直线的斜率都存在的前提下), 从而我们得到上述 $k_{AM}k_{BM}$ 为定值. 笔者不禁思考, 是否只要圆中两直线的斜率乘积为 -1(圆中两直线垂直), 对应的椭圆、双曲线也有类似的斜率乘积为定值的性质? 为了研究的方便, 不妨假设下面提及的椭圆和双曲线的焦点都在 x 轴上.

问题 4. 已知在圆中直径所对的圆周角是直角, 若两直角边所在的直线斜率存在, 则两直角边的斜率乘积为 -1, 即 $k_{AM}k_{BM}=-1$. 那么对于椭圆、双曲线是否也有类似的结论:

(I) 如图 5, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 点 A、B 是椭圆上关于原点对称的两点, M 是椭圆上异于 A,B 上的一个点, 此时等式 $k_{AM}k_{BM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 是否成立?

(II) 如图 6, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$, 点 A、B 是双曲线上关于原点对称的两点, M 是双曲线上异于 A,B 上的一个点, 此时等式 $k_{AM}k_{BM}=\dfrac{b^2}{a^2}$ 是否成立?

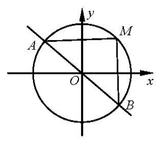

图 4

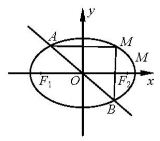

图 5

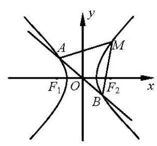

图 6

问题 5. 已知在圆中具有垂径定理, 若此时直径和弦长所在的直线斜率存在, 则这两直线的斜率乘积为 -1, 即 $k_{AM}k_{BM}=-1$. 那么对于椭圆、双曲线是否也有类似的结论:

(I) 如图 7, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 点 A、B 是椭圆上的两点, M 是弦 AB 的中点, 此时等式 $k_{AB}k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 是否成立?

(II) 如图 8, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$, 点 A、B 是双曲线上的两点, M 是弦 AB 的中点, 此时等式 $k_{AB}k_{OM}=\dfrac{b^2}{a^2}$ 是否成立?

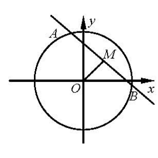

图 7

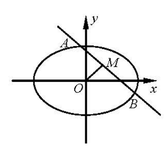

图 8

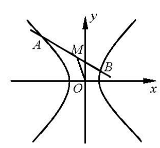

图 9

问题 6. 已知在圆中切线与对应的半径相互垂直, 若切线和对应的半径所在的直线的斜率存在, 则这两直线的斜率乘积为 -1, 即 $k_{OM}k_l=-1$. 那么对于椭圆、双曲线是否也有类似的结论:

(I). 如图 11, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, M 是椭圆上的一点, 过点 M 作椭圆的切线 l, 此时等式 $k_{OM}k_l=-\dfrac{b^2}{a^2}$ 是否成立?

(II). 如图 12, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$, M 是双曲线上的一点, 过点 M 作双曲线的切线 l, 此时等式 $k_{OM}k_l=\dfrac{b^2}{a^2}$ 是否成立?

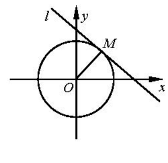

图 10

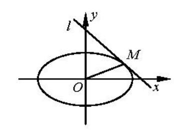

图 11

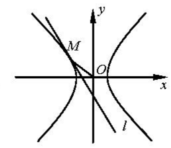

图 12

三、拨开云雾

对于上述由圆中直角的特点, 引发的对椭圆、双曲线中类似性质的猜想, 即问题 4、5、6 这三类猜想, 以下笔者逐一给出证明.

椭圆定理一 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 点 A、B 是椭圆上关于原点对称的两点, M 是椭圆上异于 A,B 上的一个点, 则 $k_{AM}k_{BM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$;

证明 如图 5, 可设 $M(x,y)$, $A(x_1,y_1)$, $B(-x_1,-y_1)$, 由点 A, M 是椭圆上的两点, 得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\end{cases}$, 两式相减, 得 $\dfrac{x^2-x_1^2}{a^2}+\dfrac{y^2-y_1^2}{b^2}=0$. 此时 $k_{AM}k_{BM}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\dfrac{y+y_1}{x+x_1}=\dfrac{y^2-y_1^2}{x^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 命题证毕!

双曲线定理一 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$, 点 A、B 是双曲线上关于原点对称的两点, M 是双曲线上异于 A,B 上的一个点, 则 $k_{AM}k_{BM}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

证明 如图 6, 可设 $M(x,y)$, $A(x_1,y_1)$, $B(-x_1,-y_1)$, 由点 A, M 是椭圆上的两点, 得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\end{cases}$, 两式相减, 得 $\dfrac{x^2-x_1^2}{a^2}-\dfrac{y^2-y_1^2}{b^2}=0$. 此时 $k_{AM}k_{BM}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\dfrac{y+y_1}{x+x_1}=\dfrac{y^2-y_1^2}{x^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 命题证毕!

椭圆定理二 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 点 A、B 是椭圆上的两点, M 是弦 AB 的中点, 则 $k_{AB}k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$;

证明 如图 8, 可设 $M(x_0,y_0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 由点 A、M 是椭圆上的两点, 得 $\begin{cases}\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\end{cases}$, 两式相减, 得 $\dfrac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$. 又由于 M 是弦 AB 的中点, 得 $\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_0\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=y_0\end{cases}$ 得 $k_{AB}k_{OM}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 命题证毕!

(下转封底)

(上接第 43 页)

双曲线定理二 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$, 点 A、B 是双曲线上的两点, M 是弦 AB 的中点, 则 $k_{AB}k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$.

证明 如图 9, 可设 $M(x_0,y_0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 由点 A, M 是椭圆上的两点, 得 $\begin{cases}\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\\ \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\end{cases}$, 两式相减, 得 $\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}-\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$. 又由于 M 是弦 AB 的中点, 得 $\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=x_0\\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_0\end{cases}$ 得 $k_{AB}k_{OM}=\frac{y_2-y_1}{x+2-x_1}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{b^2}{a^2}$, 命题证毕!

椭圆定理三 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, M 是椭圆上的一点, 过点 M 作椭圆的切线 l, 则 $k_{OM}k_l=-\frac{b^2}{a^2}$.

证明 如图 11, 设 $M(x_0,y_0)$, 对 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边求导, 可得 $\frac{2xx'}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, 化简整理, 得 $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$. 此时 $k_l=y'_M=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 又由于 $k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$, 得 $k_{OM}k_l=-\frac{b^2}{a^2}$.

双曲线定理三 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$, M 是双曲线上的一点, 过点 M 作双曲线的切线 l, 则 $k_{OM}k_l=\frac{b^2}{a^2}$.

证明 如图 12, 设 $M(x_0,y_0)$, 对 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边求导, 可得 $\frac{2xx'}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0$, 化简整理, 得 $y'=\frac{b^2x}{a^2y}$. 此时 $k_l=y'_M=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 又由于 $k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$, 得 $k_{OM}k_l=\frac{b^2}{a^2}$.

四、云开雾散

上述的种种猜想已经得到论证, 笔者不禁想问为什么会有这样漂亮的性质? 其实, 我们知道直角坐标系中的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 可以通过伸缩变换 $\begin{cases}x=ax'\,(a>0)\\ y=by'\,(b>0)\end{cases}$, 变换为新坐标系下的单位圆 $x'^2+y'^2=1$. 而且两直线垂直的关系在伸缩变换下发生了变化, 在旧坐标系中若直线的斜率为 k, 则在新坐标系中新直线的斜率为 $k'=\frac{b}{a}k$. 在旧坐标系下两直线垂直时应适合 $k_1k_2=-1$, 那么在新坐标系下应满足 $k'_1k'_2=\frac{b}{a}k_1\cdot\frac{b}{a}k_2=-\frac{b^2}{a^2}$. 同理可知, 直角坐标系中的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 也可以通过伸缩变换 $\begin{cases}x=ax'\,(a>0)\\ y=by'\,(b>0)\end{cases}$, 变换为新坐标系下的等轴双曲线 $x'^2-y'^2=1$. 而且两直线垂直的关系在伸缩变换下发生了变化, 在旧坐标系中若直线的斜率为 k, 则在新坐标系中新直线的斜率为 $k'=-\frac{b}{a}k$. 在旧坐标系下两直线垂直时应适合 $k_1k_2=-1$, 那么在新坐标系下应满足 $k'_1k'_2=\frac{b}{a}k_1\cdot\frac{b}{a}k_2=\frac{b^2}{a^2}$. 因此才会有上述漂亮的性质.

五、一览众山

上述的定理一至三在数学高考中都有着非常重要的作用, 若能熟练运用这些性质, 可以给学生解圆锥曲线中弦长中点问题、点到直线距离最远 (近) 问题、曲线中三角形、四边形面积最大等问题带来极大的优势, 具体题型的应用本文由于篇幅有限, 不在一一举例了. 解析几何一直都是高考数学中的重中之重, 掌握一些常用的技巧是快速解题、取得高分的关键.

中学数学研究

1955年2月创刊
1982年1月复刊
复刊第424期(上)
2017年4月10日出版

主　　办: 华南师范大学数学科学学院　广东省数学会
主　　管: 华南师范大学
协　　办: 广东教育学会中学数学教学专业委员会
编辑出版者: 华南师范大学数学科学学院《中学数学研究》编辑部
杂志社社长: 黎稳
主　　编: 吕杰
印　　刷: 广东省农垦总局印刷厂
总 发 行 处: 广东省发行局　发行: 在全国范围内发行
订阅、零售处: 全国各地邮局(所)

ISSN 1671-4164

04>

9 771671 416025

电话:(020)85211343　传真:(020)85216705　邮编:510631
地址: 广州市天河区中山大道西华南师范大学数学科学学院
杂志社网址: http://m-math-yj.scnu.edu.cn
E-mail:m-math-yj@scnu.edu.cn　邮发代号: 46-82
统一刊号: CN44-1140/O1(国内)ISSN1671-4164(国际)　定价: 6.00元