由椭圆张角为直角的弦所在直线形成的“包络”

广东省中山纪念中学 (528454)　李文东

一族平面直线 (或曲线) 的“包络”是指一条与这族直线 (或曲线) 中任意一条都相切的曲线, 这条曲线叫做这族直线 (或曲线) 的包络线. 文 [1] 中探讨了由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内对称轴上一点 P 引两垂直直线 PA,PB 分别交椭圆于点 A,B, 得到了动直线 AB 形成的包络曲线方程, 并且对于椭圆内任意一点 $P(x_0,y_0)$ (原点除外) 的包络线情形给出了一个猜想:

包络线是以 $P(x_0,y_0)$ 和 $\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}x_0,-\frac{c^2}{a^2+b^2}y_0\right)$ 为焦点, 长轴长为 $\frac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2-x_0^2-y_0^2}$ 的椭圆, 但是没有给出证明和具体的包络线方程.

本文对于上述结论给出证明并将此结论推广到点 $P(x_0,y_0)$ 为平面内任意满足条件 $PA\perp PB$ 的情形, 其推导和证明过程如下:

一、运用齐次化手段推导动直线满足的条件

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 点 $P(x_0,y_0)$, 过点 P 作两垂直直线 PA,PB 分别交椭圆于点 A,B, 设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 直线 AB 的方程为: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=1$, 将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 方程改写为 $b^2[(x-x_0)+x_0]^2+a^2[(y-y_0)+y_0]^2=a^2b^2$, 即 $b^2(x-x_0)^2+2b^2x_0(x-x_0)+a^2(y-y_0)^2+2a^2y_0(y-y_0)+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0$, 将 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=1$ 代入并且实现齐次化得: $b^2(x-x_0)^2+2b^2x_0(x-x_0)\cdot[A(x-x_0)+B(y-y_0)]+a^2(y-y_0)^2+2a^2y_0(y-y_0)\cdot[A(x-x_0)+B(y-y_0)]+\left(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2\right)[A(x-x_0)+B(y-y_0)]^2=0$.

为方便起见, 记 $m=b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2$, 展开上式可得: $\left(a^2+2a^2By_0+mB^2\right)(y-y_0)^2+2\left(b^2Bx_0+a^2Ay_0+mAB\right)(y-y_0)(x-x_0)+\left(b^2+2b^2Ax_0+mA^2\right)(x-x_0)^2=0$, 等式两边同除以 $(x-x_0)^2$ 得: $\left(a^2+2a^2By_0+mB^2\right)\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2+2\left(b^2Bx_0+a^2Ay_0+mAB\right)\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)+\left(b^2+2b^2Ax_0+mA^2\right)=0$, 由题意 $k_{PA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},k_{PB}=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}$ 是上述方程的两根, 由于 $PA\perp PB$, 故 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$, 所以 $\frac{b^2+2b^2Ax_0+mA^2}{a^2+2a^2By_0+mB^2}=-1$, 即 $m\left(A^2+B^2\right)+2b^2x_0A+2a^2y_0B+a^2+b^2=0$. 这便是动直线 AB 所满足的条件. 下面我们结合上面的齐次化方法和求点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 AB 的对称点来进一步推导动直线 AB 的包络线方程.

二、利用对称点推导动直线的包络线

首先给出如下引理:

引理 设圆 M 的半径为 r, 点 A 为圆 M 上一动点, 点 N 为不在圆 M 上一定点, 线段 AN 的垂直平分线为 l, l 交 MA (或其延长线) 于点 P, 则

(1) 当点 N 为圆 M 内一定点时, 垂直平分线 l 的包络线即点 P 的轨迹是以点 M,N 为焦点, 长轴长为 r 的椭圆;

(2) 当点 N 为 M 外一定点时, 垂直平分线 l 的包络线即点 P 的轨迹是以点 M,N 为焦点, 长轴长为 r 的双曲线.

当直线 l 与 x 轴垂直时 $x_1=x_2=x_0$, 则③式可化为 $\tan\angle AMC=\frac{|-y_1(y_1-y_0)|}{|p(y_1-y_0)|}=\frac{|y_1|}{p}$, 同理④式可化为 $\tan\angle BMD=\frac{|y_2|}{p}$, 由抛物线的对称性可知 $|y_1|=|y_2|$, 所以 $\tan\angle AMC=\tan\angle BMD\Rightarrow\angle AMC=\angle BMD$, 从而得 $\angle AMP=\angle BMP$.

综上所述 $\angle AMP=\angle BMP$.

在以上结论中, 直线 m 实际上是 P 点关于圆锥曲线对应的极线, 因而 M 点本质上是过 P 点与其对应极线垂直的垂线与极线的交点, 因此, 本文中的定理 1～6 可以进一步统一概括为:

定理 7 已知圆锥曲线 Γ, P 是一个不在 Γ 上的定点, P 点关于 Γ 的极线为 m, 过 P 点作直线 m 的垂线, 垂足为 M, 过 P 点的任一直线 l 与 Γ 交于 A,B 两点, 则有 $\angle AMP=\angle BMP$ 或 $\angle AMP=180^\circ-\angle BMP$.

参考文献

[1] 刘光明. 2018 年全国 1 卷理科数学第 19 题溯源与探究 [J]. 中学数学研究, 2018(8):19-21.

证明 以椭圆为例. 如图 1, 由题意: $|PA| = |PN|$, 故 $|PM| + |PN| = |PA| + |PM| = |AM| = r > |MN|$, 由椭圆的定义知: 点 P 的轨迹是以点 M, N 为焦点, 长轴长为 r 的椭圆.

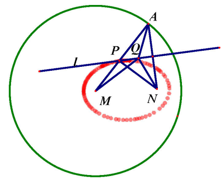

图 1

以下证明直线 l 与椭圆相切. 设点 Q 为直线 l 上异于点 P 的任意一点, 则 $|QM| + QN| = |QA| + |QM| > |AM| = |PM| + |PN$, 即点 Q 在椭圆外, 故点 P 为直线 l 与椭圆的唯一公共点, 即直线 l 与椭圆相切于点 P. 证毕.

设点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=1$ 的对称点为 $Q(x,y)$, 则 $\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{x-x_0} \cdot \left(-\dfrac{A}{B}\right) = -1, \\ A\left(\dfrac{x-x_0}{2}\right) + B\left(\dfrac{y-y_0}{2}\right) = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{2A}{A^2+B^2}, \\ y = y_0 + \dfrac{2B}{A^2+B^2}, \end{cases}$ 由此可见 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \left(\dfrac{2A}{A^2+B^2}\right)^2 + \left(\dfrac{2B}{A^2+B^2}\right)^2 = \dfrac{4}{A^2+B^2}$. 又由第一部分可知 A, B 满足方程 $m\left(A^2+B^2\right) + 2b^2x_0A + 2a^2y_0B + a^2 + b^2 = 0$.

(1) 若 $m = 0$, 即点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆上一点, 则 $2b^2x_0A + 2a^2y_0B + a^2 + b^2 = 0$, 即 $\left(1 - \dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)Ax_0 + \left(1 - \dfrac{2a^2}{a^2+b^2}\right)By_0 = Ax_0 + By_0 + 1$, 而直线 AB 的方程为 $Ax + By = Ax_0 + By_0 + 1$, 联立可得: $\left(1 - \dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)Ax_0 + \left(1 - \dfrac{2a^2}{a^2+b^2}\right)By_0 = Ax + By$, 即 $A\left[x - \left(1 - \dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)x_0\right] + B\left[y - \left(1 - \dfrac{2a^2}{a^2+b^2}\right)y_0\right] = 0$, 可见此时直线 AB 过定点 $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0, -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)$.

(2) 当 $m \neq 0$ 时, 此时 $m + b^2x_0\dfrac{2A}{A^2+B^2} + a^2y_0\dfrac{2B}{A^2+B^2} + \dfrac{\left(a^2+b^2\right)}{4} \cdot \dfrac{4}{A^2+B^2} = 0$, 从而可得对称点 $Q(x,y)$ 的轨迹方程为 $m + b^2x_0(x-x_0) + a^2y_0(y-y_0) + \dfrac{\left(a^2+b^2\right)}{4} \cdot \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] = 0$, 化简可得: $\left(x - \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0\right)^2 + \left(y + \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)^2 = \dfrac{4a^2b^2\left(a^2+b^2-x_0^2-y_0^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}$. 它是一个以 $M(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0, -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0)$ 为圆心, 半径为 $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2-x_0^2-y_0^2}$ 的圆.

(i) 若点 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 内除原点外任意一点, 即 $m = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 < 0$ 且 $x_0^2 + y_0^2 > 0$, 则 $\left(b^4x_0^2 + a^4y_0^2\right) - a^2b^2\left(a^2+b^2-x_0^2-y_0^2\right) = \left(a^2+b^2\right)\left(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2\right) < 0$, 从而 $\left(x_0 - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0\right)^2 + \left(y_0 + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)^2 = \frac{4\left(b^4x_0^2+a^4y_0^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2} < \frac{4a^2b^2\left(a^2+b^2-x_0^2-y_0^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}$, 即点 $P(x_0, y_0)$ 在 $Q(x,y)$ 的轨迹方程圆内, 从而由引理可知, MQ 与直线 AB 的交点, 即直线 AB 的包络线是以 $M\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0, -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)$ 和 $P(x_0, y_0)$ 为焦点, 长轴长为 $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2-x_0^2-y_0^2}$ 的椭圆 (如图 2);

(ii) 若点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 外, 且满足 $a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2 > 0$, 即点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆的蒙日圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 内, 由引理可知此时直线 AB 的包络线是以 $M\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x_0, -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y_0\right)$ 和 $P(x_0, y_0)$ 为焦点, 实轴长为 $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2-x_0^2-y_0^2}$ 的双曲线 (如图 2).

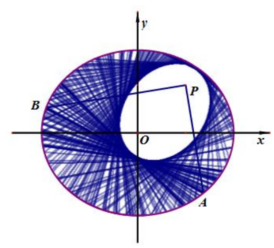

图 2

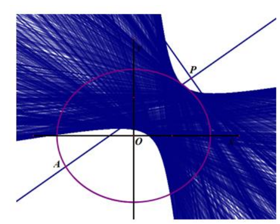

图 3

(iii) 若 P 为原点, 即 $x_0 = y_0 = 0$, 此时包络线为一个圆, 其方程为: $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$.

三、包络线的统一方程

根据第二部分的推导, 根据圆锥曲线的定义, 我们可以得到包络线的统一方程为: $b^2\left(a^2t - b^2x_0^2\right)x^2 + a^2\left(b^2t - a^2y_0^2\right)y^2 - 2a^2b^2x_0y_0xy - 2a^2b^2x_0\left(t - b^2\right)x - 2a^2b^2y_0\left(t - a^2\right)y - a^2b^2\left[a^2b^2 - t\left(x_0^2 + y_0^2\right)\right] = 0$. 其中 $t = a^2 + b^2 - x_0^2 - y_0^2 > 0$.

限于篇幅, 具体推导过程留给感兴趣的读者!

参考文献

[1] 周雅俊. 椭圆中由两垂直直线引出的“包络”[J]. 福建中学数学, 2016(9).