利用曲线系方程解决定点、定值问题

陈　忠　（江苏省昆山市陆家高级中学　215300）

圆锥曲线中的定点、定值问题是近几年江苏高考中的热点问题，按常规的联立方程组方法解这类问题有时显得非常繁琐，如若能巧妙利用曲线系方程来求解，则可以使问题简单化. 本文就此类问题作一些探讨.

首先，圆、椭圆、双曲线、抛物线被称为二次曲线，两条相交直线被视为二次曲线的退化形式，二次曲线系的一般形式为 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. 同圆系一样，具有某一共同性质的二次曲线也能用二次曲线系表示，以下是常用的几个结论（λ,μ 表示参数，$f_i=A_ix+B_iy+C_i$）.

结论 1　当三角形三边方程为 $f_i=0(i=1,2,3)$ 时，过三角形三个顶点的二次曲线系为 $f_1f_2+\lambda f_2f_3+\mu f_3f_1=0$.

结论 2　当四边形四条边方程顺次为 $f_i=0(i=1,2,3,4)$ 时，过四边形四个顶点的二次曲线系为 $f_1f_3+\lambda f_2f_4=0$.

结论 3　与两直线 $f_i=0(i=1,2)$ 相切于点 M,N 的二次曲线系为 $f_1f_2+\lambda f_3^2=0$（$f_3=0$ 为过 M,N 的直线方程）.

结论 4　过两直线 $f_1=0,f_2=0$ 与二次曲线 $F(x,y)=0$ 的四个交点的二次曲线系为 $F(x,y)+\lambda f_1f_2=0$.

结论 5　过两二次曲线 $F_1(x,y)=0,F_2(x,y)=0$ 的交点的二次曲线系为 $F_1(x,y)+\lambda F_2(x,y)=0$（$F_2(x,y)=0$ 除外）.

利用上述结论，有些问题可以得到更为简洁的求解和证明，举例如下.

1　定点问题

例 1　已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左顶点为 A，过点 A 作两条互相垂直的弦 AM,AN 交椭圆于 M，

位圆中 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 x，$f(x)$ 表示弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍，则函数 $y=f(x)$ 的图象是（　　）.

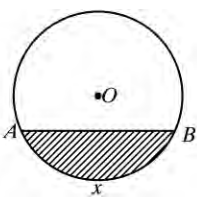

图 11

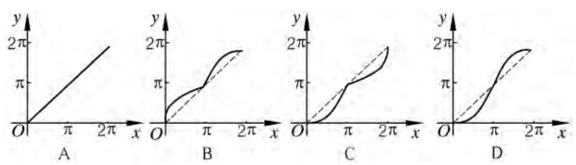

图 12

解　如图 11，当 $\overset{\frown}{AB}$ 的长小于半圆时，函数 $y=f(x)$ 的值增加得越来越快，曲线是下凸的；当 $\overset{\frown}{AB}$ 的长大于半圆时，函数 $y=f(x)$ 的值增加得越来越慢，曲线是上凸的，故选择 D.

例 7　（2012 年高考江西卷）如图 13，$OA=2$（单位：m），$OB=1$（单位：m），OA 与 OB 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，以 A 为圆心，AB 为半径作圆弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 与线段 OA 的延长线交于点 C. 甲、乙两质点同时从点 O 出发，甲先以速度 1（单位：m/s）沿线段 OB 行至点 B，再以速度 3（单位：m/s）沿圆弧 $\overset{\frown}{BDC}$ 行至点 C 后停止，乙以速率 2（单位：m/s）沿线段 OA 行至 A 点后停止. 设 t 时刻甲、乙所到的两点连线与它们经过的路径所围成图形的面积为 $S(t)$（$S(0)=0$），则函数 $y=S(t)$ 的图象大致是（　　）.

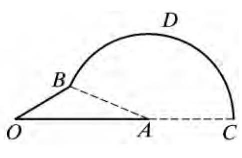

图 13

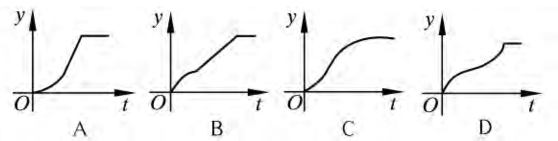

图 14

解　当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$S(t)$ 的增量越来越大，曲线是下凸的；当 $1<t\leqslant 2$ 时，$S(t)$ 的增量不变，曲线是条直线，故选择 A.

综上可知，在几何图形中求函数图象时，若函数解析式不易求，作为选择题，我们可以从几何图形特征定性分析. 定性可以从函数值的变化快慢，利用曲线的凹凸性去判断，从而收到化难为易、化复杂为简单的效果.

N 两点,当直线 AM 的斜率变化时,直线 MN 是否过 x 轴上的一定点?若过定点,请给出证明,并求出该定点;若不过定点,请说明理由.

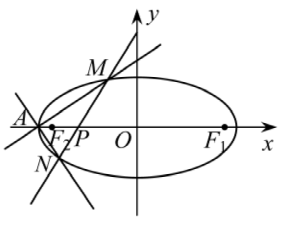

图 1

解 如图 1,设直线 MN 与 x 轴的交点为 $P(m,0)$,则可设直线 MN 的方程为 $x-ny-m=0$. 又因为点 A 处的切线方程为 $x+2=0$,由结论 4,设过交点 A,M,N 的二次曲线系方程为 $(x+2)(x-ny-m)+\lambda(x^2+4y^2-4)=0$. ①

设直线 AM 方程为 $y=k(x+2)$,即 $kx-y+2k=0$,则直线 AN 方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$,即 $x+ky+2=0$,得 $(kx-y+2k)(x+ky+2)=0$. ②

① 和 ② 应有相同的特征,比较系数得 x^2,y^2 系数相反,x 系数和常数项相同,则 $\begin{cases}5\lambda+1=0,\\2-m=-4\lambda-2m,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{5},\\m=-\frac{6}{5}.\end{cases}$

所以,直线 MN 的方程为 $x-ny+\frac{6}{5}=0$,恒过定点 $(-\frac{6}{5},0)$.

点评 (1) 此题亦可先由点 A 和直线 AM,AN,设二次曲线系方程为:$(kx-y+2k)(x+ky+2)+\lambda(x^2+4y^2-4)=0$,再由点 A 的切线方程和直线 MN 的方程 $Ax+By+C=0$,得 $(x+2)(Ax+By+C)=0$,比较系数得 $C=\frac{6}{5}A$,故可得最后的结论.

(2) 一般性结论:过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 长轴一端点 $P(a,0)$(或 $P(-a,0)$)作弦 PA,PB,若 $PA\perp PB$,则直线 AB 必过定点 $(\frac{ac^2}{a^2+b^2},0)$(或 $(-\frac{ac^2}{a^2+b^2},0)$).

例 2 (2013 · 陕西理科卷) 已知动圆过定点 $A(4,0)$,且在 y 轴上截得的弦 MN 的长为 8.

(1) 求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(2) 已知点 $B(-1,0)$,设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P,Q,若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线,证明直线 l 过定点.

解 (1) 动圆圆心的轨迹 C 的方程为 $y^2=8x$(过程略).

(2) 如图 2,设直线 BP 的方程为 $kx-y+k=0$,与抛物线交于另一点 A,则直线 BQ 的方程为 $kx+y+k=0$,与抛物线交于另一点 C. 由结论 4 知,过直线 BP,BQ 与椭圆 C 交于点 A,P,C,Q 的二次曲线系方程可以设为:

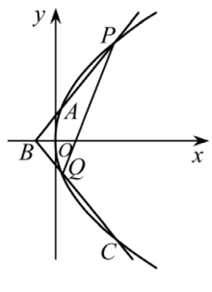

图 2

$$y^2-8x+\lambda(kx-y+k)(kx+y+k)=0.$$

整理得

$$(1-\lambda)y^2+\lambda k^2x^2+(2\lambda k^2-8)x+\lambda k^2=0. \text{①}$$

根据对称性,可设直线 AC 和 PQ 的方程分别为 $Ax+By+C=0$,$Ax-By+C=0$,因此,$(Ax+By+C)(Ax-By+C)=0$. ②

由于 ① 和 ② 有相同特征,比较系数得

$\begin{cases}\lambda k^2=A^2,\\1-\lambda=-B^2,\\2\lambda k^2-8=2AC,\\\lambda k^2=C^2,\end{cases}$ 则 $C=-A$,

所以直线 PQ,即 l 的方程为 $Ax-By-A=0$,恒过定点 $(1,0)$.

2 定值问题

例 3 (2013 · 江西文科卷) 如图 3,椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a+b=3$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) A,B,D 是椭圆 C 的顶点,P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点,直线 DP 交 x 轴于点 N,直线 AD 交 BP 于点 M,设 BP 的斜率为 k,MN 的斜率为 m,证明 $2m-k$ 为定值.

解 (1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$(过程略).

(2) 如图 3,设 $N(a,0)$,直线 AD 的方程为 x

$-2y+2=0$,直线BP的方程为$kx-y-2k=0$,直线DP的方程为$x+ay-a=0$,直线AB的方程为$y=0$.

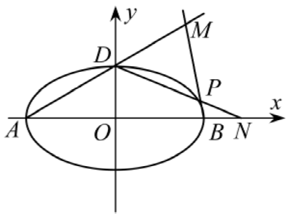

图3

由结论2知,过A,B,P,D四点的二次曲线系方程可以设为

$(x-2y+2)(kx-y-2k)+\lambda y(x+ay-a)=0$.

与椭圆$x^2+4y^2-4=0$的系数作比较得

$\begin{cases}\lambda-1-2k=0,\\4k-a\lambda-2=0,\end{cases}$则$\begin{cases}\lambda=1+2k,\\a=\dfrac{4k-2}{2k+1}.\end{cases}$

又由$\begin{cases}x-2y+2=0\\kx-y-2k=0\end{cases}$得点$M\left(\dfrac{4k+2}{2k-1},\dfrac{4k}{2k-1}\right)$,所以$2m-k=\dfrac{\dfrac{8k}{2k-1}}{\dfrac{4k+2}{2k-1}-\dfrac{4k-2}{2k+1}}-k=\dfrac{16k^2+8k}{16k}-k=\dfrac{1}{2}$.

例4 如图4,在平面直角坐标系xOy中,椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(1,0)$,离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.分别过$O,F$的两条弦$AB,CD$相交于点$E$(异于$A,C$两点),且$OE=EF$.

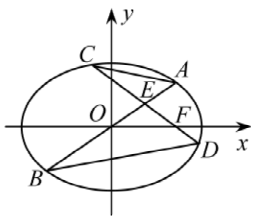

图4

(1)求椭圆的方程;

(2)求证:直线AC,BD的斜率之和为定值.

解 (1)由题意,得$c=1,e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故$a=\sqrt{2}$,从而$b^2=a^2-c^2=1$,所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线AB的斜率为k,由题意得直线CD的斜率为$-k$,所以直线AB的方程为$kx-y=0$,直线CD的方程为$kx+y-k=0$.

设直线AC,BD的方程分别为:$A_1x+B_1y+C_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2=0$,由结论2,过A,C,B,D四点的二次曲线系方程可以设为

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)+\lambda(kx-y)(kx+y-k)=0$.

若表示椭圆,则$A_1B_2+B_1A_2=0$,

所以$k_{AC}+k_{BD}=(-\dfrac{A_1}{B_1})+(-\dfrac{A_2}{B_2})=0$.

点评 一般性结论:(1)若椭圆的两条相交弦AB,CD的倾斜角互补,即$k_{AB}+k_{CD}=0$,则$k_{AC}+k_{BD}=0$,$k_{AD}+k_{AC}=0$(AD,BC的斜率均存在时);(2)若椭圆的两条相交弦AB,CD交于点E,在斜率均存在的前提下,$k_{AB}+k_{CD}$,$k_{AC}+k_{BD}$和$k_{AD}+k_{AC}$中,若有一个为0,则其余两个均为0;(3)上述命题对双曲线和椭圆同样成立.

例5 (2011·四川理科卷)椭圆有两顶点$A(-1,0)$,$B(1,0)$,过其焦点$F(0,1)$的直线l与椭圆交于C,D两点,并与x轴交于点P.直线AC与直线BD交于点Q.

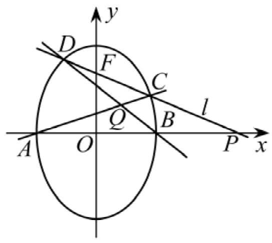

图5

(1)当$CD=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$时,求直线l的方程;

(2)当点P异于A,B两点时,求证:$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.

解 (1)椭圆方程为$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$,直线l的方程为$y=\pm\sqrt{2}x+1$(过程略).

(2)设直线CD方程为$kx-y+1=0$,则$P(-\dfrac{1}{k},0)$,直线AC方程为$k_1x-y+k_1=0$,直线BD方程为$k_2x-y-k_2=0$,联立解得交点$Q\left(\dfrac{k_1+k_2}{k_2-k_1},\dfrac{2k_1k_2}{k_2-k_1}\right)$,故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{k_1+k_2}{k(k_2-k_1)}$.

由结论2,可设过A,B,C,D四点的二次曲线系方程为$y(kx-y+1)+\lambda(k_1x-y+k_1)(k_2x-y-k_2)=0$,与椭圆方程$2x^2+y^2-2=0$比较系数得$\begin{cases}k-\lambda(k_1+k_2)=0,\\\lambda(k_2-k_1)+1=0,\end{cases}$即$\begin{cases}k_1+k_2=\dfrac{k}{\lambda},\\k_2-k_1=-\dfrac{1}{\lambda}.\end{cases}$

故$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{k_1+k_2}{k(k_2-k_1)}=1$,为定值.