1720号问题的极点、极线结构

李伟健

（安徽省滁州中学，239000）

文[1]提出的1720号数学问题内容如下：$\triangle ABC$中，以BC为轴（长轴或短轴均可）作一椭圆交AB于E，交AC于F. 设M、N分别是点E、F关于直线BC的对称点，EN交FM于D. 求证：$AD\perp BC$. 文[2]给出了证明方法，之后文[3]、文[4]进行了大篇幅的讨论分析，得出的结论极富美感，但两者推理过程由于计算过于繁琐而稍显不和谐，笔者从极点、极线出发简化文[4]的证明；另外文[4]对文[3]的推广工作并不彻底，本文对文[4]补充完善，并彻底推广了文[3]的工作；此外，回归原问题，在思考1720号问题的结构过程中，得到了一个有趣性质，并以此为基础，解释了文[5]作者赵忠华老师利用几何画板发现的一个有趣现象.

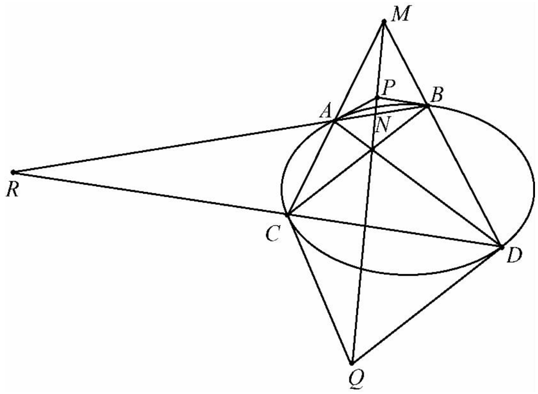
1 文[4]推理过程的简化

文[3]对1720号问题开展分析讨论，得出两个结论，即为：

结论1 以$\triangle BC$中的BC为长轴（实轴）的椭圆（双曲线）交此三角形的另两边AB、AC分别于点E、F. 设M、N分别是点E、F关于直线BC的对称点，G、H分别是E、F在x轴上的射影，连EN交FM于D，连EH交FG于K，连BF交CE于Q，过点E、F分别作椭圆（双曲线）的切线交于点P，则A、P、Q、K、D五点共线.

文[4]同样对数学问题1720试图对结论1进行推广，探究得到的4个结论，概括地来说，即为如下结论：

结论2 设A,B,C,D是非退化二阶曲线Γ上不同的四点，连直线AC、BD交于点M，连直线AD、BC交于点N，过点A,B分别作曲线Γ的切线交于点P，过点C,D分别作曲线Γ的切线交于点Q. 则M、N、P、Q四点共线.



该结论具有和谐的美感，不足之处在于论证过程过于繁琐而失去美感，本文从极点与极线的角度，结合配极原理，予以论证，即：

证明 记$R=AB\times CD$，由于MNR是自极点三点形，直线MN为R的极线，因为PA,PB与Γ相切于点A,B，所以直线AB是P点的极线，且经过点R，根据配极原理，点R的极线必过点P，同理直线MN也过点Q，即M、N、P、Q四点共线.

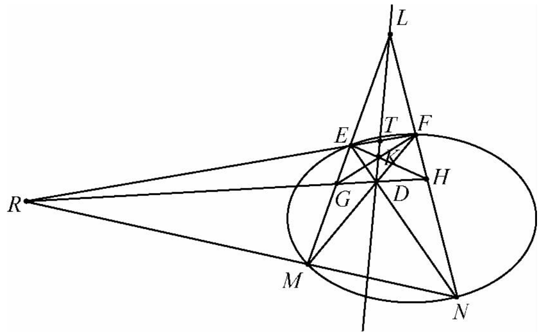
2 文[3]工作的彻底推广

文[4]所得结论较文[3]来说，另一个不足之处在于，与文[3]相比，丢失了两个点，实际上P、Q两点在结论2中情形是一样的，本文拟弥补缺失的两个点，要想补出这两个丢失的点，必须了解此两点的由来，文[3]中直线EM与直线FN，交于无穷远点，此点在位于R的极线MN上，至此，E、M与F、N的由来实际上是过R的极线上一点与曲线Γ的交点，接下来，就可以把文[4]迷失的两点再现出来，即：

结论3 设L为R的极线上一点，过L作两条直线，分别交Γ于点E、M、F、N，且$D=EN\times FM$，$K=GF\times EH$，则D、K在R的极线上.

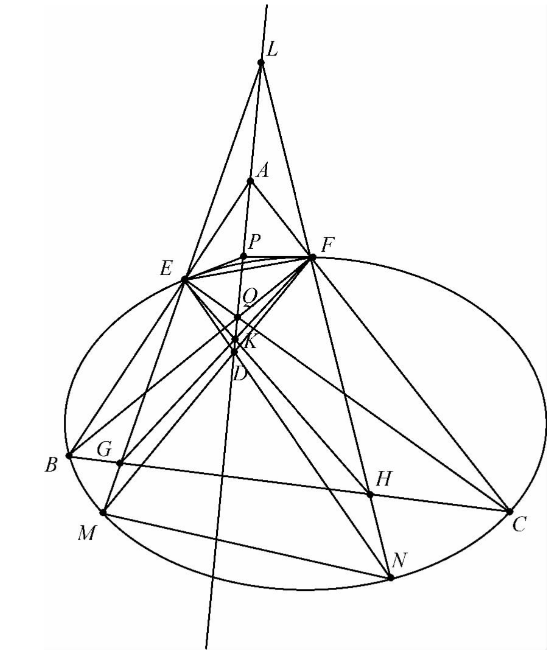
证明 根据完全四点形$MNFE$的调和性，D

必在 R 的极线上，且 $(RT,EF)=-1$，$(RD,HG)=-1$，所以 $(R,T,E,F)\ \overline{\wedge}\ (R,D,H,G)$，又因为公共点 R 自对应，所以 $(R,T,E,F)\ \overline{\overline{\wedge}}\ (R,D,H,G)$，所以直线 DT、HE、GF 三点共线，即为 K 在 R 的极线上.



行文至此，在结论[2]、[3]的基础上，文[3]所得的结论 1 彻底推广后的一般情形如下：

定理　设 B、C、E、F 是非退化二阶曲线 Γ 四点，设 $A=BE\times CF$，$Q=BF\times CE$，点 P 是曲线 Γ 在 E、F 处切线的交点，L 为直线 AQ 上一点，直线 LE、LF 与曲线 Γ 另一交点分别为 M、N，且 $D=EN\times FM$，$G=BC\times EM$，$H=BC\times FN$，$K=GF\times EH$，则 A、P、Q、K、D 五点共线.

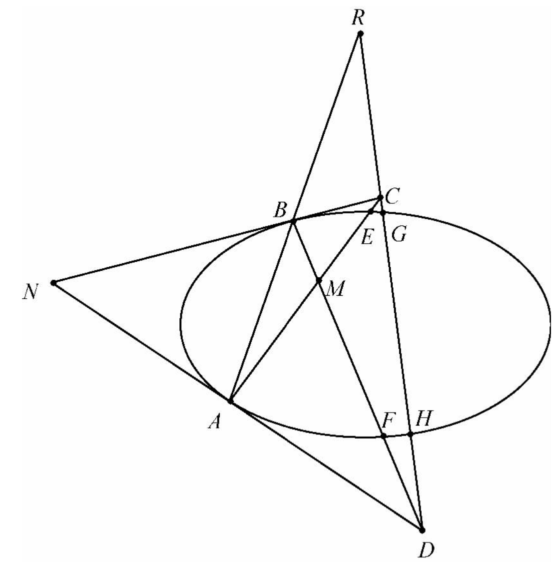


注　文[3]实际上是 L 为无穷远点的特殊情形.

3　1720 号问题的结构

反思文[4]的简化证明过程，实质上揭示了 1720 号问题结构实质上是极点、极线. 直线 MN 为 R 的极线紧紧依赖于完全四点形 $ABCD$ 内接于 Γ 这一事实，正是这一点导致 M、N、P、Q 四点共线，因此说这一结果是平凡的，通过对"完全四点形 $ABCD$ 内接于 Γ"这一条件思考，笔者发现，完全四点形 $ABCD$ 未必需要四点 A，B，C，D 均与 Γ 接触，事实上有两点就可以了，即：

定理　设直线 BC 与非退化二阶曲线 Γ 相切于点 B，直线 AD 与非退化二阶曲线 Γ 相切于点 A，$M=AC\times BD$，$N=BC\times AD$，$R=AB\times CD$，直线 AC 交 Γ 于另一点 E，直线 BD 交 Γ 于另一点 F，那么直线 MN 为 R 的极线.



证明　以 A、B 为束心与另外四点 B，E，F，A 连接，由二阶曲线的基本定理知

$$B(B,E,F,A)\ \overline{\wedge}\ A(B,E,F,A),$$

用直线 AC、BD 分别截以 A、B 为束心的线束，则有

$$AC(C,E,M,A)\ \overline{\overline{\wedge}}\ B(B,E,F,A),$$

$$A(B,E,F,A)\ \overline{\overline{\wedge}}\ BD(B,M,F,D)$$

所以

$$AC(C,E,M,A)\ \overline{\wedge}\ BD(B,M,F,D),$$

因此 $(CE,MA)=(BM,FD)$，

所以 $(CE,MA)=(DF,MB)$，

故 $(C,E,M,A)\ \overline{\wedge}\ (D,F,M,B)$，

又因为两点列的交点 M 自对应，所以有

$$(C,E,M,A)\ \overline{\overline{\wedge}}\ (D,F,M,B)$$

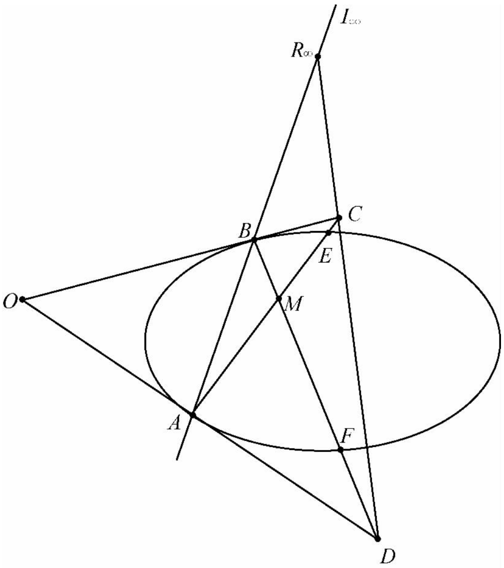
因此 DC、FE、AB 三线共点，即为 R.

根据完全四点形 $ABEF$ 的调和性，所以点 M 在 R 的极线上，又因为 R 在点 N 的极线上，所以点 N 在 R 的极线上，所以直线 MN 为 R 的极线.

从证明过程看，DC、FE、AB 三线交于点 R，可以推出欧几里得几何学中难以解释的现象变得自然，如文[5]提出的如下性质，即为本文的推论，即：

推论1　在双曲线所在的平面内任取一点(该点不在渐近线和双曲线上)，过此点作两条渐近线的平行线，则这两条直线与双曲线交于两点，与渐近线交于两点，则双曲线上两点连线平行于渐近线上两点连线.

这一结论放到射影空间内就好解释了，双曲线的渐近线实际上是其与无穷远直线交点处的切线，为了便于解释，如图所示：

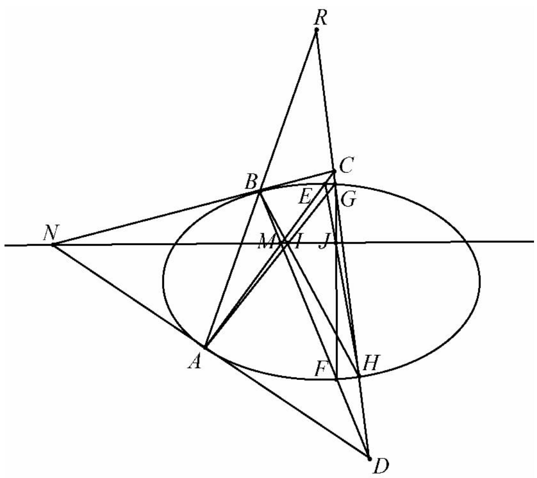


双曲线上两点连线 FE，渐近线上两点连线 DC 交于无穷远点 R_∞，所以二者必然平行.

注　该结论属于赵忠华老师.

从证明的结果看，直线 MN 为 R 的极线，设 $I=AG\times BH$，$J=FG\times EH$，则有如下：

推论2　M、N、I、J 四点共线，此线就是 R 的极线，也是曲线 Γ 的 Pascal 线.



注　这一图形蕴藏着大量的共线点，有兴趣的读者不妨一试.

参考文献

[1]数学问题与解答[J]. 数学通报，2008，47(2)：60－63

[2]数学问题与解答[J]. 数学通报，2008，47(3)：60－63

[3]林建新. 对数学问题1720的研究性学习[J]. 数学通报，2011，50(6)：60－63

[4]杨华. 对数学问题1720的再研究[J]. 数学通报，2012，51(3)：48－49，51

[5]赵忠华. 双曲线一个优美性质的发现[J]. 中学数学教学，2016(2)：20

(上接第34页)

的必修课那般常态化，综合化，但不可否认的是，模型教学中学生的学习方式改变了，学生的多种能力提升了，数学课堂更鲜活了，效果也更好了！值得称道的是将要使用的新修订或编写的高中课标教材已把"数学建模"等核心词直接作为章节标题的一部分，这表明模型的功能性地位不改变(素材、载体)，但模型的延伸价值(由已知模型的探讨到未知模型的建立)已受到重视，学生应用意识、实践能力的培养才能落到实处.

希望模型教学是今后数学课堂教学改革中一道靓丽的风景线，学生通过多种合作交流活动学中做，做中学，真正体会数学的实用价值，为数学学科育人奉献一份力量！

参考文献

[1]张思明. 张思明与中学数学建模[M]. 北京：北京师范大学出版社，2015，10

[2]章建跃，李伯青，金克勤，董凯. 体现函数建模思想，加强信息技术应用——"函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的修订研究报告"[J]. 数学通报 2015，54(8)：1－8

[3]张唯一. 高中概率教学中模型思想的渗透与培养[J]. 数学通报 2013，52(8)：17－20