归类解析圆锥曲线中的斜率定值问题*

北京市第十二中学高中部 (100071)　刘　刚

翻阅近些年的竞赛题与高考题, 发现圆锥曲线中的定值问题频繁出现, 成为了热点. 这些定值问题揭示了圆锥曲线相关的一些量 (如线段长度、角度、面积、斜率等) 在运动变化中所固有的某些几何或代数性质, 倍受命题人青睐. 下面对近些年各类试题中的有关斜率定值问题进行归类梳理, 供大家参考.

1. 斜率定值

例 1 (2016 年全国高中数学联赛浙江预赛) 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 经过点 $P\left(3,\dfrac{16}{5}\right)$, 离心率为 $\dfrac{3}{5}$. 过椭圆 C 的右焦点作斜率为 k 的直线 l, 交椭圆于 A,B 两点, 记 PA,PB 的斜率为 k_1,k_2.

(I) 求椭圆的标准方程;

(II) 若 $k_1+k_2=0$, 求实数 k 的值.

解 (I) 略, 椭圆的标准方程是 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

(II) 椭圆 C 的右焦点坐标为 $(3,0)$, 由已知得直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$. 联立方程组

$$\begin{cases} y=k(x-3), \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1, \end{cases}$$

得 $(16+25k^2)x^2-150k^2x+225k^2-400=0$. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则

$$x_1+x_2=\frac{150k^2}{16+25k^2},\quad x_1x_2=\frac{225k^2-400}{16+25k^2}.$$

又 $k_1=\dfrac{y_1-\frac{16}{5}}{x_1-3}$, $k_2=\dfrac{y_2-\frac{16}{5}}{x_2-3}$, 所以

$$k_1+k_2=\frac{\left(y_1-\frac{16}{5}\right)(x_2-3)+\left(y_2-\frac{16}{5}\right)(x_1-3)}{(x_1-3)(x_2-3)}.$$

由 $y_1=k(x_1-3)$, $y_2=k(x_2-3)$, 得

$$k_1+k_2=\frac{1536-2560k}{5(16+25k^2)(x_1-3)(x_2-3)}=0,$$

解得 $k=\dfrac{3}{5}$.

点评 解法利用已知条件表示出直线 l 的方程, 然后与椭圆 C 的方程联立并借助韦达定理进行求解, 体现了坐标法的运用.

推广 已知 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的定点, 过点 P 作斜率互为相反数的两条直线, 分别交椭圆于 A,B 两点, 则直线 AB 的斜率为定值 $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, 且该定值等于点 P 处切线斜率的相反数.

2. 和定值

例 2 (2015 年高考陕西卷文科第 20 题) 如图 1, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$, 且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

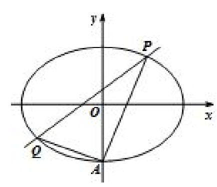

图 1

*本文系北京市第五批中小学名师发展工程成果; 北京市丰台区“十三五”重点课题《新课程背景下高中数学竞赛教学研究》(课题批准号: 2016237-J) 阶段成果之一.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 经过点 $(1,1)$, 且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P,Q(均异于点 A), 证明: 直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2.

解 (I) 略, 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

(II) 由题设知, 直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1\ (k\neq 2)$, 代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$, 得

$$(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0.$$

由已知 $\Delta>0$, 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$, 则

$$x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2},\quad x_1x_2=\frac{2k(k-2)}{1+2k^2},$$

从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和

$$\begin{aligned}&k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}\\&=\frac{kx_1+2-k}{x_1}+\frac{kx_2+2-k}{x_2}=2k+(2-k)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\\&=2k+(2-k)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2k+(2-k)\frac{4k(k-1)}{2k(k-2)}\\&=2k-2(k-1)=2.\end{aligned}$$

点评 解法先设出直线 PQ 的方程, 然后联立椭圆方程, 接下来用 P,Q 点坐标表示出 $k_{AP}+k_{AQ}$, 最后借助韦达定理求解.

3. 差定值

例 3 (2013 年高考江西卷文科) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a+b=3$.

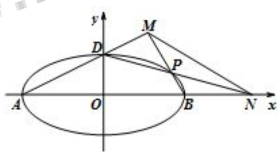

图 2

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图 2, A,B,D 是椭圆 C 的顶点, P 是椭圆 C 上除顶点外的任意点, 直线 DP 交 x 轴于点 N, 直线 AD 交 BP 于点 M, 设 BP 的斜率为 k, MN 的斜率为 m, 证明 $2m-k$ 定值.

解 (1) 略, 椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 由 (1) 得 $A(-2,0),B(2,0),D(0,1)$, 直线 BP 的方程为 $y=k(x-2)(k\neq 0,\pm\dfrac{1}{2})$, 与 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立, 得 $(4k^2+1)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$, 所以 $2x_P=\dfrac{16k^2-4}{4k^2+1}$, 由此得点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{8k^2-2}{4k^2+1},-\dfrac{4k}{4k^2+1}\right)$. 由 D、P、$N(x,0)$ 三点共线, 得 $\dfrac{0-1}{x-0}=\dfrac{-\frac{4k}{4k^2+1}-1}{\frac{8k^2-2}{4k^2+1}-0}$, 解得 $N\left(\dfrac{4k-2}{2k+1},0\right)$. 直线 AD 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$, 与 $y=k(x-2)$ 联立, 求得 $M\left(\dfrac{4k+2}{2k-1},\dfrac{4k}{2k-1}\right)$. 所以

$$m=k_{MN}=\frac{\dfrac{4k}{2k-1}-0}{\dfrac{4k+2}{2k-1}-\dfrac{4k-2}{2k+1}}=\frac{2k+1}{4},$$

故 $2m-k=\dfrac{1}{2}$(定值).

点评 本题用 k 表示出 m 是关键, 解法首先写出直线 BP 的方程, 与椭圆方程联立得到一个关于 x 的一元二次方程, 利用这个方程的一根为 2, 借助韦达定理可求出点 P 的横坐标, 进而求出点 P 的坐标. 接下来利用 D、P、N 三点共线求出点 N 的坐标, 以此表示出 m 从而使问题得以解决.

推广 已知点 P(不在坐标轴上) 是曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上的动点, 点 $A(-a,0),B(a,0),D(0,b)$, 设直线 DP 交 x 轴于点 N, 直线 AD 交 BP 于点 M, 则 $2k_{MN}-k_{BP}=\dfrac{b}{a}$.

4. 积定值

例 4 (2016 年全国高中数学联赛江苏复赛) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(2,1)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上, 不经过坐标原点 O 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点, 且线段 AB 的中点为 D, 直线 OD 的斜率为 1. 记直线 PA、PB 的斜率分别为 k_1、k_2, 求证: k_1k_2 为定值.

解 设 A、B 两点的坐标为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2), 从而 $D\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$. 因为直线 OD 的斜率为 1, 故 $x_1+x_2=y_1+y_2$. 又点 A、B 在椭圆上, 则 $\dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$, $\dfrac{x_2^2}{6}+\dfrac{y_2^2}{3}=1$, 从而 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{6}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{3}=0$, 即 $x_1-x_2+2(y_1-y_2)=0$, 所以 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{1}{2}$, 即直线 l 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$. 设直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+t(t\neq 0)$, 与椭圆的方程 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立, 得 $\dfrac{3}{2}x^2-2tx+2t^2-6=0$, 所以 $x_1+x_2=\dfrac{4t}{3},x_1x_2=\dfrac{4(t^2-3)}{3}$. 从而

$$\begin{aligned}k_1k_2&=\frac{(y_1-1)(y_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{\left(-\frac{1}{2}x_1+t-1\right)\left(-\frac{1}{2}x_2+t-1\right)}{(x_1-2)(x_2-2)}\\&=\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\left(\frac{t-1}{2}\right)(x_1+x_2)+t^2-2t+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\\&=\frac{\dfrac{t^2-3}{3}-\left(\dfrac{t-1}{2}\right)\dfrac{4t}{3}+t^2-2t+1}{\dfrac{4(t^2-3)}{3}-2\times\dfrac{4t}{3}+4}\\&=\left(\frac{2t^2}{3}-\frac{4t}{3}\right)\Big/\left(\frac{4t^2}{3}-\frac{8t}{3}\right)=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故 k_1k_2 为定值 $\dfrac{1}{2}$.

点评 本题先通过点差法求出直线 l 的斜率, 为后续求解简化了运算. 然后借助 A、B 两点的坐标表示出 k_1k_2, 再

运用韦达定理进行求解, 体现了整体替换的思想.

推广 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上, 不经过坐标原点 O 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点, 且线段 AB 的中点为 D, 直线 OD 的斜率为 $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 记直线 PA、PB 的斜率分别为 k_1、k_2, 则 k_1k_2 为定值 $\dfrac{b^2}{a^2}$.

5. 商定值

例 5 (2010 年全国高中数学联赛四川预赛) 已知 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, M 点的坐标为 $(4,0)$, 过点 F 作斜率为 k_1 的直线与抛物线交于 A、B 两点, 延长 AM、BM 交抛物线于 C、D 两点, 设直线 CD 的斜率为 k_2.

(1) 求 $\dfrac{k_1}{k_2}$ 的值;

(2) 求直线 AB 与直线 CD 夹角 θ 的取值范围.

解 (1) 由条件知 $F(1,0)$, 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$, 不妨设 $y_1>0$. 直线 AB 的方程为 $y=k_1(x-1)$, 与 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-\dfrac{4}{k_1}y-4=0$, 所以 $y_1y_2=-4$, $x_1x_2=1$. 当 $x_1=4$ 时, 则 $A(4,4)$, 故 $y_2=\dfrac{-4}{y_1}=-1$, $x_2=\dfrac{1}{4}$, 即 $B\left(\dfrac{1}{4},-1\right)$. 又直线 AM 的方程为 $x=4$, 从而 $C(4,-4)$. 又直线 BM 的方程为 $y=\dfrac{4}{15}(x-4)$, 与 $y^2=4x$ 联立, 得 $y^2-15y-16=0$, 所以 $y_4=16$, $x_4=64$, 即 $D(64,16)$. 于是 $k_1=\dfrac{4}{3}$, $k_2=\dfrac{16-(-4)}{64-4}=\dfrac{1}{3}$, 所以 $\dfrac{k_1}{k_2}=4$. 当 $x_1\neq 4$ 时, 直线 AM 方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-4}(x-4)$, 与 $y^2=4x$ 联立, 得 $y_1^2(x-4)^2=4x(x_1-4)^2$, 又由 $y_1^2=4x_1$, 化简上述方程得 $x_1x^2-(x_1^2+16)x+16x_1=0$. 此方程有一根为 x_1, 所以另一根 $x_3=\dfrac{16}{x_1}$, 所以 $y_3=-\dfrac{16}{y_1}$, 即 $C\left(\dfrac{16}{x_1},-\dfrac{16}{y_1}\right)$. 同理, $D\left(\dfrac{16}{x_2},-\dfrac{16}{y_2}\right)$, 所以

$$k_2=\frac{-\dfrac{16}{y_2}+\dfrac{16}{y_1}}{\dfrac{16}{x_2}-\dfrac{16}{x_1}}=-\frac{x_1x_2}{y_1y_2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{4}k_1,$$

即 $\dfrac{k_1}{k_2}=4$.

(2) 略, 直线 AB 与直线 CD 夹角 θ 的取值范围是 $\left(0,\arctan\dfrac{3}{4}\right]$.

点评 本题在求解过程中先考虑了直线 AC 斜率不存在的情况, 在此基础上求得 $\dfrac{k_1}{k_2}=4$, 然后再进行一般化的证明. 很显然, 特殊情况下的定值起到了检验的作用, "先特殊再一般"是破解定值问题的常用策略.

推广 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 及定点 $M(m,0)$, $N(n,0)(mn\neq 0)$, 过点 M 作斜率为 k_1 的直线与抛物线交于 A、B 两点, 延长 AN、BN 交抛物线于 C、D 两点, 设直线 CD 的斜率为 k_2, 则直线 CD 过定点 $P(r,0)$(其中 $r=\dfrac{n^2}{m}$), 且 $\dfrac{k_1}{k_2}=\dfrac{r-n}{n-m}$.

6. 系数定值

例 6 (2013 年高考江西卷理科) 如图 3, 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 经过点 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$, 离心率 $e=\dfrac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x=4$.

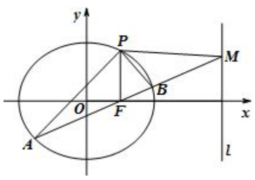

图 3

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M, 记 PA,PB,PM 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3. 问: 是否存在常数 λ, 使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$? 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

解 (1) 略, 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 设 $B(x_0,y_0)(x_0\neq 1)$, 则 $3x_0^2+4y_0^2=12$, 直线 FB 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1)$, 令 $x=4$, 求得 $M\left(4,\dfrac{3y_0}{x_0-1}\right)$, 则 $k_3=\dfrac{2y_0-x_0+1}{2(x_0-1)}$. 联立 $y=\dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1)$ 与 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 得 $(6x_0-15)x^2+8y_0^2x+15x_0^2-24x_0=0$, 所以 $x_0x_A=\dfrac{15x_0^2-24x_0}{6x_0-15}$, 即 $x_A=\dfrac{5x_0-8}{2x_0-5}$, 所以 $A\left(\dfrac{5x_0-8}{2x_0-5},\dfrac{3y_0}{2x_0-5}\right)$, 由此得 $k_1=\dfrac{2y_0-2x_0+5}{2(x_0-1)}$, $k_2=\dfrac{2y_0-3}{2(x_0-1)}$, 所以 $k_1+k_2=\dfrac{2y_0-2x_0+5}{2(x_0-1)}+\dfrac{2y_0-3}{2(x_0-1)}=\dfrac{2y_0-x_0+1}{x_0-1}=2k_3$, 故存在常数 $\lambda=2$ 符合题意.

点评 本题表示出 k_1,k_2,k_3 是关键, 在 A,B,M 三个动点中先设出 B 点 (也可以先设 A 点) 坐标, 进而表示出直线 AB 的方程, 在此基础上就可以得到点 M 的坐标. 最后联立直线 AB 与 C 的方程借助韦达定理表示出点 A 的坐标从而使问题得以解决.

推广 设二次曲线 $C:ax^2+by^2=1$ 上一点 P(不是顶点) 在 x 轴上的射影为 $N(m,0)$, 过 N 任作不垂直于 x 轴的直线, 交 C 于点 A,B, 交直线 $l:x=\dfrac{1}{am}$ 于点 M, 记直线 PA,PB,PM 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3, 则 $k_1+k_2=2k_3$.

以上探讨了有关斜率定值问题, 解决这类问题的基本思路是先设出动点的坐标, 然后表示出斜率代数式, 在此过程中通常要借助韦达定理进行代数运算化简, 进而求出定值, 体现了坐标法的运用. 在求解时还要考虑判别式大于 0 及动直线斜率是否存在等情况. 当然能通过特殊位置先求出定值, 无疑为后续求解指明了方向. 总之, 对于解析几何问题, 只要我们多梳理、归类, 不断总结规律, 养成良好的解题习惯, 定

能在考试中百战不殆.

以下试题供读者练习:

1.(2015 年全国高中数学联赛湖南预赛) 如图 4, A、B 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的公共顶点, P、Q 分别为双曲线和椭圆上不同于 A、B 的动点, 且满足 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\lambda(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ})$ $(\lambda\in\mathbb{R},|\lambda|>1)$, 求证:

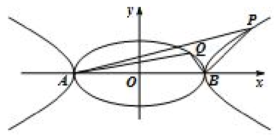

图 4

(1) 三点 O、P、Q 在同一直线上;

(2) 若直线 AP、BP、AQ、BQ 的斜率分别是 k_1、k_2、k_3、k_4, 则 $k_1+k_2+k_3+k_4$ 是定值.

2.(2014 年全国高中数学联赛陕西预赛) 如图 5, 已知圆 $O:x^2+y^2=1$ 与 x 轴交于 A、B 两点、与 y 轴交于点 C, M 是圆 O 上任一点 (除去圆 O 与两坐标轴的交点). 直线 AM 与 BC 交于点 P, 直线 CM 与 x 轴交于点 N, 设直线 PM、PN 的斜率分别为 m、n, 求证: $m-2n$ 为定值.

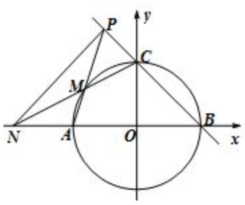

图 5

3.(2014 年高考山东卷文科) 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y=x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点 (A,B 不是椭圆 C 的顶点). 点 D 在椭圆 C 上, 且 $AD\perp AB$, 直线 BD 与 x 轴、y 轴分别交于 M,N 两点.

(i) 设直线 BD, AM 的斜率分别为 k_1,k_2, 证明存在常数 λ 使得 $k_1=\lambda k_2$, 并求出 λ 的值;

(ii) 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

4.(2013 年高考山东卷理科) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 过 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点, 连接 PF_1,PF_2, 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m,0)$, 求 m 的取值范围;

(III) 在 (II) 的条件下, 过 P 点作斜率为 k 的直线 l, 使得 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点, 设直线 PF_1,PF_2 的斜率分别为 k_1,k_2, 若 $k\neq 0$, 试证明 $\dfrac{1}{kk_1}+\dfrac{1}{kk_2}$ 为定值, 并求出这个定值.

5.(2014 年北京市昌平区二模) 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2, 点 $B(0,\sqrt{3})$ 为短轴的一个端点, $\angle OF_2B=60^\circ$.

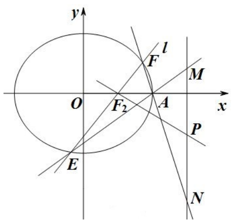

图 6

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 如图 6, 过右焦点 F_2, 且斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 E,F 两点, A 为椭圆的右顶点, 直线 AE,AF 分别交直线 $x=3$ 于点 M,N, 线段 MN 的中点为 P, 记直线 PF_2 的斜率为 k'. 求证: $k\cdot k'$ 为定值.

6.(2015 年南京、盐城二模) 如图 7, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l:y=\dfrac{1}{2}x$ 与椭圆 E 相交于 A,B 两点, $AB=2\sqrt{5}$, C,D 是椭圆 E 上异于 A,B 两点, 且直线 AC,BD 相交于点 M, 直线 AD,BC 相交于点 N.

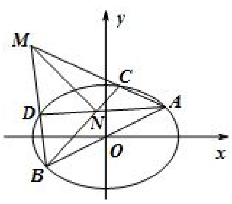

图 7

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求证: 直线 MN 的斜率为定值.

答案: 1. (1) 略; (2) $k_1+k_2+k_3+k_4$ 是定值 0.

2. 1.

3. (I) 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$; (II)(i) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$; (ii) $\triangle OMN$ 的面积的最大值为 $\dfrac{9}{8}$.

4. (I) 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$; (II) $-\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{3}{2}$; (III) -8.

5. (I) 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. (II) $k\cdot k'$ 为定值 $-\dfrac{3}{4}$.

6. (1) $a=\sqrt{6},b=\sqrt{3}$; (2) -1.

参考文献

[1] 刘刚, 赵毅. 探究圆中定值、定点问题的几何解法 [J]. 数学通讯 (上半月), 2017(3).

[2] 刘刚, 赵毅. 2016 年浙江高中数学竞赛第 17 题的探究、推广与应用 [J]. 数学通讯 (上半月), 2016, 11-12.

[3] 刘刚, 赵毅. 一道竞赛题的探究、推广及溯源 [J]. 数学通讯 (上半月), 2017, 8.

[4] 刘刚. 探究圆锥曲线中的线段定值问题 [J]. 中学数学研究 (华南师大), 2018, 5.