伸缩变换与椭圆性质再研究

汪正良

(广东省深圳市红岭中学高中部，518049)

《数学通讯》2007年第10期的文[1]用解析法证明了"椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的内接三角形面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$"，文[2]用伸缩变换证明了"内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的多边形$A_1A_2\cdots A_n$的面积的最大值为$\frac{nab}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$"，文[2]不仅将文[1]的结论进行了推广，而且证明的篇幅要简短得多，所用方法不同于文[1].

新课程标准要求在教学活动中以恰时恰点恰当的问题引导数学活动，基于文[2]的证法揭示的问题实质，即椭圆中的许多性质可以由圆中的性质通过伸缩变换得到，笔者顺着这一思路，对椭圆中的一些问题进行了探索，从而获得一些新的结论.

一、伸缩变换及有关性质

1. 定义 设点$P(x,y)$是平面直角坐标系内的任一点，在变换

$$\varphi:\begin{cases}x'=ax\\ y'=by\end{cases}(a,b>0)(*)$$

的作用下，点$P(x,y)$对应到点$Q(x',y')$，称φ为平面直角坐标系中的伸缩变换.

约定 以下称上述伸缩变换为变换($*$)，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$简记为椭圆($**$).

2. 性质 通过变换($*$)，容易得到

(Ⅰ)曲线$f(x,y)=0$变为$f(\frac{1}{a}x,\frac{1}{b}y)=0$. 相应地，圆$x^2+y^2=1$变为椭圆($**$).

(Ⅱ)直线变为直线，两平行直线变为两平行直线，斜率为k的直线l变为斜率为$\frac{b}{a}k$的直线l'. 相应地，$k_1\cdot k_2=-1$变为$k_1'\cdot k_2'=-\frac{b^2}{a^2}$.

(Ⅲ)共线点仍变为共线点且保持点分线段的比不变，即$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$变为$\overrightarrow{A'P'}=\lambda\overrightarrow{P'B'}$.

(Ⅳ)三角形变为三角形，面积由S变为abS. 相应地，多边形的面积由S变为abS.

(Ⅴ)直线l与曲线$f(x,y)=0$相交(相切)变为直线l'与$f(\frac{1}{a}x,\frac{1}{b}y)=0$相交(相切).

二、几点探索

1. 椭圆共轭直径的一组性质[3]

定义 经过椭圆中心的弦叫椭圆的直径. 若椭圆($**$)的两直径的斜率之积为$-\frac{b^2}{a^2}$，则称这两直径为椭圆的共轭直径. 特别地，当一直径所在直线斜率为0，另一直径所在直线斜率不存在时，我们也称这两直径为椭圆的共轭直径.

性质 设椭圆($**$)的两共轭直径的端点为A、C及B、D. 则有

(1) 四边形$ABCD$的面积为定值$2ab$.

(2) 四边形$ABCD$的四边中点在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}(a>b>0)$上.

(3) 四边形$ABCD$的四边分别与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}(a>b>0)$相切，切点分别为相应边的中点.

(4) 过A,B,C,D分别作椭圆的切线，则四条切线所围成的四边形是平行四边形，其面积为$4ab$.

以上是文[3]用解析法证得的一组性质. 事实上，在圆$O:x^2+y^2=1$中，设互相垂直的两条直径为A_1C_1及B_1D_1. 易知有：

(1) 四边形$A_1B_1C_1D_1$的面积为2；

(2) 四边形$A_1B_1C_1D_1$的四边中点在圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$上；

(3) 四边形$A_1B_1C_1D_1$的四边分别与圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$相切，切点分别为各边中点；

(4) 过A_1,B_1,C_1,D_1分别作圆的切线，则四条切线所围的四边形是平行四边形，其面积为4.

经变换($*$)，圆$O:x^2+y^2=1$变为椭圆

(＊＊),圆的一对互相垂直的直径变为椭圆的两共轭直径,正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 变为平行四边形 $ABCD$,圆的弦 A_1B_1 的中点变为椭圆中相应的弦 AB 的中点,直线 A_1B_1 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 相切变为直线 AB 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$ 相切,三角形(四边形)的面积 S 变为 abS,这样,就得到椭圆共轭直径的上述4条性质.

定理1 如图1,已知两个椭圆有公共的中心,所有焦点在同一直线上,并且它们的长轴和短轴对应成比例(即离心率相等).那么任意一条与它们都相交的直线夹在两椭圆间的线段相等(即 $AB=CD$).

证明 对于两个同心圆,任意一条与它们都相交的直线夹在两圆间的线段相等.通过伸缩变换,两同心圆变成离心率相等的椭圆,圆的弦中点变成椭圆的弦中点,由于两圆的弦中点重合,故两椭圆的弦中点也重合,所以两椭圆所夹的线段相等.

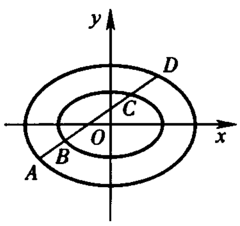

图1

2.一个结论的的溯源及推广

文[4]用解析法证明了如下的一个结论(下面称"定理2").

定理2 设椭圆(＊＊)上一点 $P(x_0,y_0)$,过 P 作倾斜角互补的两条直线分别与椭圆交于异于 P 的点 M、N,则直线 MN 的斜率为定值 $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

笔者由本结论产生联想:它是否对应圆中的一个相应结论?经探索,很快找到"原型".如图2,在单位圆 O:$x^2+y^2=1$ 中,AB 是直径,PM、PN 与 AB 的夹角相等,Q 是 P 关于 AB 的对称点.易知 $\angle MPQ=\angle NPQ$,即 Q 是弧 MN 的中点,连 MN,OQ,则 $OQ\perp MN$,所以 $k_{OQ}\cdot k_{MN}=-1$.经变换(＊),圆 O:$x^2+y^2=1$ 变为椭圆(＊＊),变换后,椭圆中的 PM、PN 的倾斜角也互补,圆中 $k_{OQ}\cdot k_{MN}=-1$ 变成椭圆中的 $k_{OQ}\cdot k_{MN}=-\frac{b^2}{a^2}$,即在椭圆中 $k_{MN}\cdot\frac{-y_0}{x_0}=-\frac{b^2}{a^2}$,所以 $k_{MN}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

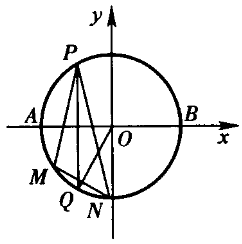

图2

进一步考虑,这个结论是否可以推广?

在图2中,连 OP,过 P 作圆 O 的切线 l,则 $OP\perp l$,由 OP、OQ 的倾斜角互补,可知 l 的倾斜角与 MN 的倾斜角互补,那么,通过伸缩变换,在定理2中过 P 作椭圆的切线,则该切线的倾斜角与 MN 的倾斜角互补.换个角度,设点 P 是圆 O 外任一点,过 P 的倾斜角互补的两直线 PMA 与 PNB 分别依次交圆于点 M、A 及 N、B,易推知弦 AB 与弦 MN 的倾斜角互补.由伸缩变换,得

推广 设点 P 是椭圆(＊＊)外任一点,过 P 作倾斜角互补的两直线 PMA 与 PNB,分别交椭圆于点 M、A 及点 N、B,则弦 AB 与弦 MN 的倾斜角互补.

3.椭圆的内接、外切平行四边形面积的最值.

定理3 椭圆(＊＊)的内接平行四边形的面积无最小值,最大值为 $2ab$,且面积取最大值时的平行四边形有无数个,此平行四边形的对角线是椭圆的一对共轭直径.

解析 在圆 $x^2+y^2=1$ 中,易知其内接平行四边形必是矩形,其内接矩形面积无最小值,最大值是2,面积取最大值时的内接矩形是正方形,这样的正方形有无数个.经变换(＊),圆变成椭圆(＊＊),相应地,圆的内接矩形变成椭圆的内接平行四边形,由正方形变成的内接平行四边形面积最大,最大值为 $2ab$,这样的平行四边形有无数个,其对角线是椭圆的一对共轭直径.

类似地,对于圆 $x^2+y^2=1$,易知其外切平行四边形的面积 S 无最大值,而当平行四边形是正方形时,S 取最小值4.依伸缩变换的性质,可以得到

定理4 椭圆(＊＊)的外切平行四边形的面积 S 无最大值,最小值是 $4ab$.面积取最小值时的平行四边形有无数个,它们包括两类,一类是切点为椭圆的四个顶点的矩形,另一类是相邻两边的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$ 的椭圆的外切平行四边形.

三、从伸缩变换的角度认识有关椭圆的一些常见的结论

在常见的教辅资料中有一些有关椭圆的结论,一般是用解析法证明.读者可尝试从伸缩变换的角度来认识以下结论.

约定:以下涉及直线的斜率,是指斜率存在的情况,当斜率不存在时,易检验,过程略.

结论1 若 MN 是椭圆(＊＊)的过中心的弦,P 是椭圆上异于 M、N 的任意一点,则两条直线 PM、PN 的斜率之积为定值 $-\frac{b^2}{a^2}$.

结论2 设 AB 是椭圆(＊＊)的不垂直于对

称轴的弦,M为AB的中点,O为坐标原点,则$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$.

结论3 斜率为定值k的动直线l与椭圆(* *)交于两点,则弦中点的轨迹是一条过椭圆中心的斜率为$-\frac{b^2}{ka^2}$的线段.

结论4 设$Q(x_1,y_1)$是椭圆(* *)内一点,则以点Q为中点的弦所在直线的方程为$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$.

结论5 过椭圆(* *)上一点$Q(x_1,y_1)$的椭圆的切线方程是$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

结论6 过椭圆(* *)外一点$Q(x_1,y_1)$作椭圆的两条切线,则过两切点的弦(称为切点弦)所在直线的方程为$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

结论7 过点$Q(x_1,y_1)$的动直线l交椭圆(* *)于A、B两点,则弦AB的中点M的轨迹是曲线$\frac{x(x-x_1)}{a^2}+\frac{y(y-y_1)}{b^2}=0$在椭圆$C$内的部分.

通过以上的分析,我们认识了圆与椭圆的联系,初步洞悉了问题的实质,也开辟了研究椭圆性质的一条途径.如何在目前的数学教学中引导学生用普遍联系的辩证观点看问题,引导有兴趣的、学有余力的学生进行探究,是新课程改革中值得探讨的一个问题.

参考文献:

[1] 陶楚国.二次曲线内接最大三角形探析,数学通讯,2007(10).

[2] 孙建明.用伸缩变换求椭圆内接n边形面积的最大值,数学通讯,2009(3).

[3] 杜山,卢伟峰.椭圆共轭直径的一组性质,数学通讯,2008(15).

[4] 徐元根.关于"圆锥曲线的一类定值问题"的再探讨,数学通报,2002(1).

(收稿日期:2010-06-05)

两道高考题的统一推广

玉邴图

(云南省广南一中,663300)

2010年高考全国卷Ⅰ和全国卷Ⅱ有如下两道题:

例1 (全国卷Ⅰ理科第16题)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$,上顶点为$B$,$BF$的延长线交椭圆于$D$,已知$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$,则椭圆的离心率$e=$________.

例2 (全国卷Ⅱ理科第12题)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,经过右焦点$F$且斜率为$k(k>0)$的直线交椭圆于$A$,$B$两点,已知$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,则$k=$ ( )

(A)1. (B)$\sqrt{2}$. (C)$\sqrt{3}$. (D)2.

这两道题都反映了椭圆焦点分弦所得的比和弦的倾斜角(或斜率)之间的内在联系,若将它们推广为一般,进行研究,则可得到下面的定理.

定理 设F是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点,过$F$的弦$AB$与$x$轴的夹角为$\theta(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}])$,$\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{FB}|}=\lambda(\lambda>1)$,$e$是离心率,椭圆焦点到相应准线的距离为$p$,则

(1)$e\cos\theta=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$;