标为$(2p,4)$,代入$y^2=2px$得$16=(2p)^2\Rightarrow 2p=4$,故所求$C$的方程为$y^2=4x$;

(2)由题设知,直线l与坐标轴不垂直,设直线l的斜率为k,则直线l'的斜率为$-\frac{1}{k}$,因为A,M,B,N四点在同一圆上,所以$k_{AB}=-k_{MN}$,即$k=\frac{1}{k}\Rightarrow k=\pm 1$.

又直线l过焦点$F(1,0)$,故所求l的方程为$y=x-1$或$y=-x+1$.

评注:本解答简洁明快!关键是运用了上述抛物线的性质.

例 4　四边形$ABCD$的四个顶点均在某一圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)上,如果约定:1. 直线的斜率k不存在时,记作$k=\infty$;2. 当$k=\infty$时,记$\frac{1}{k}=0$. 求证:

A,B,C,D四点共圆$\Leftrightarrow k_{AB}+k_{CD}=0$

$\Leftrightarrow k_{AC}+k_{BD}=0\Leftrightarrow k_{AD}+k_{BC}=0$.

证明　由上述圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)的统一性质得:

A,B,C,D四点共圆$\Leftrightarrow$直线AB、CD的倾斜角互补$\Leftrightarrow k_{AB}=-k_{CD}\Leftrightarrow k_{AB}+k_{CD}=0$.

同理:

A,B,C,D四点共圆$\Leftrightarrow k_{AC}+k_{BD}=0$,

A,B,C,D四点共圆$\Leftrightarrow k_{AD}+k_{BC}=0$.

所以结论成立.

评注　本例说明:顶点都在某一圆锥曲线上的四边形的两组对边、两条对角线这三对直线中,有一对直线的倾斜角互补,则另两对直线的倾斜角也互补,且该四边形内接于圆.

(收稿日期:2015—03—15)

椭圆内接三角形的一个定值结论的探究

崔志荣

(江苏省东台市安丰中学,224221)

定点、定值问题是圆锥曲线中十分重要的研究对象,也是高考的重点内容,它们往往有较深刻的几何背景,值得我们去探究、玩味. 最近,笔者所在学校组织了一次高三检测考试,笔者通过探究,发现其中的解析几何题蕴含着一个优美的结论,现将探究历程整理成文,供读者教学时参考、研讨.

1. 探究源起

题 1　已知圆M:$(x+\sqrt{3})^2+y^2=16$,动圆P过点$N(\sqrt{3},0)$且与圆M相切,动圆圆心P的轨迹记为E.

(1)求轨迹E的方程;

(2)若斜率为k_1的动直线l过点$(1,0)$且与轨迹E交于B,C两点,$A(-2,0)$,设点D为$\triangle ABC$的外心,直线OD的斜率为k_2. 试问k_1k_2是否为定值?若是,求出该定值;若不是,请说明理由.

对于第(1)小题,易得轨迹E是椭圆,其方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 对于第(2)小题,点$A(-2,0)$刚好是椭圆E的右顶点,通过运算求解(具体方法见下文),最终得到k_1k_2为定值-3.

该定值问题,笔者有点陌生,它到底有什么几何背景呢?带着这个疑问,笔者进行了下列探究.

2. 探究历程

2.1　试题拓展

首先,笔者把原检测题拓展成下列一般性问题:

题 2　如图 1,已知$\triangle ABC$为椭圆E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的内接三角形,其中$A(-a,0)$,斜率为$k_1$的动直线$BC$过定点$(r,0)$,设点$D$为$\triangle ABC$的外心,直

线 OD 的斜率为 k_2. 试问 k_1k_2 是否为定值？

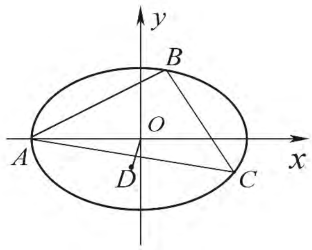

图 1

解析　设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$，注意到直线 BC 的斜率不为 0，设 $BC: x=my+r$，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得

$$(a^2+b^2m^2)y^2+2mrb^2y+b^2r^2-a^2b^2=0,$$

所以 $y_1+y_2=\frac{-2mrb^2}{a^2+b^2m^2}$, $y_1y_2=\frac{b^2r^2-a^2b^2}{a^2+b^2m^2}$.

又 AB 的垂直平分线的方程为 $y-\frac{y_1}{2}=-\frac{x_1+a}{y_1}\left(x-\frac{x_1-a}{2}\right)$，即 $y=-\frac{x_1+a}{y_1}x+\frac{x_1^2+y_1^2-a^2}{2y_1}$.

利用 $x_1=my_1+r$ 以及 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，消去 x_1 可得 $y=-\left(m+\frac{r+a}{y_1}\right)x-\frac{c^2}{2b^2}y_1$.

同理，AC 的垂直平分线的方程为 $y=-\left(m+\frac{r+a}{y_2}\right)x-\frac{c^2}{2b^2}y_2$.

于是联立 AB、AC 的垂直平分线的方程，解得 $x_D=\frac{c^2y_1y_2}{2b^2(r+a)}$, $y_D=-\frac{c^2}{2b^2}\left(\frac{my_1y_2}{r+a}+y_1+y_2\right)$. 所以

$$k_2=-\frac{\frac{my_1y_2}{r+a}+y_1+y_2}{\frac{y_1y_2}{r+a}}=-m-\frac{(r+a)(y_1+y_2)}{y_1y_2}.$$

将上述关于 y_1, y_2 的根与系数的关系代入，化简得 $k_2=-m+\frac{2mr}{r-a}$.

因为 $k_1=\frac{1}{m}$，从而可得 $k_1k_2=\frac{r+a}{r-a}$(定值).

在 $k_1k_2=\frac{r+a}{r-a}$ 中，若令 $a=2$, $r=1$，则 $k_1k_2=-3$，即原检测题的结论. 但以此结论作为原检测题的背景，似乎不能令人信服，它的附加条件偏多，内接三角形既受制于左顶点 $A(-a,0)$，又要考虑直线 BC 过点 $(r,0)$，而且结论也不够简洁优美，笔者觉得，原检测题还应有更深层次的几何背景.

2.2　问题联想

对上述拓展问题，笔者反复推敲，觉得它的几何背景可能是"有关椭圆中任意内接三角形的边与外心的斜率关系". 为此，笔者联想到求 $k_{AB}k_{AC}$ 的值，看看有没有什么重要的信息. 于是，接着上述解析过程，又进行了下列运算.

由 $k_{AB}k_{AC}=\frac{y_1y_2}{(x_1+a)(x_2+a)}$，利用 $x=my+r$ 消去 x，得

$$k_{AB}k_{AC}=\frac{y_1y_2}{(my_1+r+a)(my_2+r+a)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(r+a)(y_1+y_2)+(r+a)^2},$$

将 $y_1+y_2=\frac{-2mrb^2}{a^2+b^2m^2}$, $y_1y_2=\frac{b^2r^2-a^2b^2}{a^2+b^2m^2}$ 代入上式，整理可得 $k_{AB}k_{AC}=\frac{b^2(r-a)}{a^2(r+a)}$.

由此笔者发现，在拓展问题中有更简洁的结论 $k_{AB}k_{AC}k_1k_2=\frac{b^2}{a^2}$，该结论淡化了条件"直线 BC 过点 $(r,0)$"，那么，该结论是否适用于椭圆中任意内接三角形呢？

2.3　背景揭示

基于以上分析，笔者最终得到原检测题的一个简洁而优美的几何背景.

结论 1　如图 2，已知 $\triangle ABC$ 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的任意内接三角形，点 D 为 $\triangle ABC$ 的外心，若直线 AB, BC, CA, OD 的斜率均存在，并分别记为 k_1, k_2, k_3, k_4，则 $k_1k_2k_3k_4=\frac{b^2}{a^2}$.

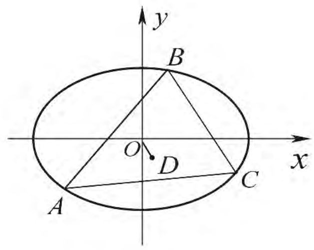

图 2

证明　设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$，则 $k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $k_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, $k_3=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$, $k_4=\frac{y_4}{x_4}$.

又设 $\triangle ABC$ 的外接圆方程为 $x^2+y^2-2x_4x-2y_4y+F=0$，则

$$x_1^2+y_1^2-2x_4x_1-2y_4y_1+F=0,$$

$x_2^2+y_2^2-2x_4x_2-2y_4y_2+F=0$,

两式相减,得

$x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2$

$=2x_4(x_2-x_1)+2y_4(y_2-y_1)$,

因为 $y_2^2-y_1^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_2^2-x_1^2)$,所以

$\frac{c^2}{a^2}(x_2+x_1)=2x_4+2y_4k_1$.

同理$\frac{c^2}{a^2}(x_3+x_2)=2x_4+2y_4k_2$,

两式相减,得 $2y_4=\frac{c^2(x_3-x_1)}{a^2(k_2-k_1)}$,于是

$2x_4=\frac{c^2}{a^2}(x_2+x_1)-\frac{c^2(x_3-x_1)}{a^2(k_2-k_1)}\cdot k_1$.

所以

$$k_4=\frac{y_4}{x_4}=\frac{\frac{x_3-x_1}{k_2-k_1}}{(x_2+x_1)-\frac{x_3-x_1}{k_2-k_1}\cdot k_1}$$

$$=\frac{x_3-x_1}{(x_2+x_1)k_2-(x_3+x_2)k_1}.$$

将 $k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,$k_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$代入 k_4,有

$$k_4=\frac{x_3-x_1}{(x_2+x_1)\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-(x_3+x_2)\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}{(x_2^2-x_1^2)(y_3-y_2)-(x_3^2-x_2^2)(y_2-y_1)}.$$

因为 $x_2^2-x_1^2=-\frac{a^2}{b^2}(y_2^2-y_1^2)$,$x_3^2-x_2^2=-\frac{a^2}{b^2}\cdot(y_3^2-y_2^2)$,所以

$$k_4=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}{(y_2^2-y_1^2)(y_3-y_2)-(y_3^2-y_2^2)(y_2-y_1)},$$

整理得

$$k_4=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}{(y_2-y_1)(y_3-y_2)(y_3-y_1)},$$

所以 $k_1k_2k_3k_4=\frac{b^2}{a^2}$(定值).

2.4 一点引申

在双曲线中,也有与此类似的定值结论,证明与椭圆完全类似,笔者只给出结论.

结论 2 已知$\triangle ABC$为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的任意内接三角形,点 D 为$\triangle ABC$ 的外心,若直线 AB,BC,CA,OD 的斜率均存在,并分别记为 k_1,k_2,k_3,k_4,则 $k_1k_2k_3k_4=-\frac{b^2}{a^2}$.

特别地,若内接$\triangle ABC$ 的边 AB 过原点 O,则对于椭圆 E,有 $k_2k_3=-\frac{b^2}{a^2}$;对于双曲线 E,有 $k_2k_3=\frac{b^2}{a^2}$,所以总得到 $k_1k_4=-1$,从而得到:

推论 已知$\triangle ABC$ 为曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ 的任意内接三角形,点 D 为$\triangle ABC$ 的外心,若直线 AB,BC,CA,OD 的斜率均存在,且直线 AB 过原点 O,则 $AB\perp OD$.

对于抛物线 $E:y^2=2px$,若条件与椭圆 E 完全相同,仿照其证明,则有 $2y_4=\frac{x_3-x_1}{k_2-k_1}$,$2x_4=x_2+x_1+2p-\frac{x_3-x_1}{k_2-k_1}k_1$,所以

$$\frac{1}{k_4}=\frac{x_4}{y_4}=\frac{(x_2+x_1+2p)k_2-(x_3+x_2+2p)k_1}{x_3-x_1}$$

$$=\frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\cdot[(x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2)(y_3-y_2)-(x_3^2-x_2^2+y_3^2-y_2^2)(y_2-y_1)]$$

$$=\frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\cdot[(x_2^2-x_1^2)(y_3-y_2)-(x_3^2-x_2^2)(y_2-y_1)+(y_2^2-y_1^2)(y_3-y_2)-(y_3^2-y_2^2)(y_2-y_1)]$$

$$=\frac{1}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\cdot[(x_2^2-x_1^2)(y_3-y_2)-(x_3^2-x_2^2)(y_2-y_1)]+\frac{(y_2-y_1)(y_3-y_2)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\cdot[(y_2+y_1)-(y_3+y_2)]$$

$$=\frac{1}{4p^2(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}\cdot[(y_2^4-y_1^4)(y_3-y_2)-(y_3^4-y_2^4)(y_2-y_1)]+\frac{(y_2-y_1)(y_3-y_2)(y_1-y_3)}{(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}$$

$$=\frac{(y_2-y_1)(y_3-y_2)}{4p^2(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)}$$
$$\cdot[(y_2^2+y_1^2)(y_2+y_1)$$
$$-(y_3^2+y_2^2)(y_3+y_2)]-k_1k_2k_3$$
$$=\frac{k_1k_2k_3}{4p^2}\cdot\frac{1}{y_3-y_1}[(y_2^2+y_1^2)(y_2+y_1)$$
$$-(y_3^2+y_2^2)(y_3+y_2)]-k_1k_2k_3,$$

又 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，所以 $k_1=\frac{2p}{y_2+y_1}$，同理 $k_2=\frac{2p}{y_3+y_2}$，$k_3=\frac{2p}{y_3+y_1}$，所以

$$\frac{1}{y_3-y_1}[(y_2^2+y_1^2)(y_2+y_1)$$
$$-(y_3^2+y_2^2)(y_3+y_2)]$$
$$=\frac{1}{y_3-y_1}\cdot[(y_1^3-y_3^3)+y_2^2(y_1-y_3)$$
$$+y_2(y_1^2-y_3^2)]$$
$$=-(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3)$$
$$=-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2+(y_2+y_3)^2$$
$$+(y_1+y_3)^2]$$
$$=-2p^2(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_3^2}),$$

所以 $\frac{1}{k_4}=\frac{k_1k_2k_3}{4p^2}\cdot[-2p^2(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_3^2})]-k_1k_2k_3$，所以 $\frac{1}{k_4k_1k_2k_3}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_3^2})-1$，

整理得 $\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_3^2}+\frac{2}{k_1k_2k_3k_4}=-2$.

结论 3　已知 $\triangle ABC$ 为抛物线 E：$y^2=2px$ 的任意内接三角形，点 D 为 $\triangle ABC$ 的外心，若直线 AB，BC，CA，OD 的斜率均存在，并分别记为 k_1，k_2，k_3，k_4，则 $\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}+\frac{1}{k_3^2}+\frac{2}{k_1k_2k_3k_4}=-2$.

3. 探究感悟

数学学习要养成善于思考、善于提问的习惯. 单墫教授说过，不断地、持续地“思之、思之、思之、思之”，定有意想不到的收获. 当我们面对一个陌生的数学问题时，要敢于思考、勇于探索，只有如此，我们才能有所发现，有所收获；另外，数学学习离不开问题，要主动提出问题，不能被问题牵着鼻子走，美国数学家哈尔莫斯说“问题是数学的心脏”. 离开问题的数学学习犹如一潭死水，毫无乐趣，只有善于提出问题、勤于解决问题，才能使我们的数学学习丰富多彩. 就如本文中的检测题，笔者反思，为什么 k_1k_2 为定值？问题的几何背景是什么？通过这些问题的提出，最终探究出一个优美的定值结论.

（收稿日期：2015－03－06）

例谈改编课本题的“七种武器”

张　俊
（江苏省兴化市第一中学，225700）

教材是命题的基础和源泉，每年的高考试题都有不少题目来源于课本. 因此，学会改编课本的例题或习题得到新问题，有非常重要的现实意义.

根据个人的实践，笔者总结了几种常用的方法，并形象地称之为七种武器. 在实际命题时，并不拘泥于某一种方法，常常是几种武器协同作战，下面通过具体的实例为大家说明.

武器一：引参 .

一道常规的数学问题，如果将其中某些确定的数字或字母改为参数，那么问题将置于一个开放的、具有动感的系统中，在这个系统中，或研究其极端状态（如最值，值域），或探寻其变化中不变的因素等，就可以获得新的题目.