# 2020年全国卷Ⅰ理科第20题的解法探究与背景溯源

张　丽　　梁宝同
(安徽省颍上第一中学，236200)

**摘　要**：本文探究2020年全国卷Ⅰ理科第20题的解法，推广得到更一般的结论，溯源试题的命制背景.

**关键词**：2020年全国卷Ⅰ理科第20题；解法探究；背景溯源

高考试题是集体智慧的结晶，具有基础性、典型性、创新性、导向性等特点，只有认真研究这些试题，才能在高三复习教学中少走弯路，真正提高教学效率.下面是笔者对2020年全国卷Ⅰ理科第20题的一些思考，供大家参考.

## 一、真题再现

2020年全国卷Ⅰ理科第20题如下：

已知$A$,$B$分别为椭圆$E$:$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右顶点，$G$为$E$的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$. $P$为直线$x=6$上的动点，$PA$与$E$的另一交点为$C$，$PB$与$E$的另一交点为$D$.

(1) 求$E$的方程；

(2) 证明：直线$CD$过定点.

本题考查了椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系，向量的数量积以及定点问题，意在考查学生的运算求解能力与化归问题的能力，考查的核心素养是数学抽象、逻辑推理与数学运算.试题解法多样，内涵丰富，精彩纷呈，是一道具有研究性学习价值的好题.

## 二、解法探究

第(1)问求得椭圆$E$的标准方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.下面重点研究一下第(2)问的解法及相关探究.

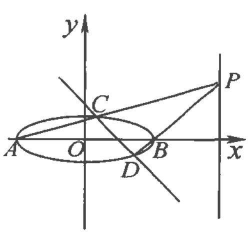


图1

**解法1**　由(1)知$A(-3,0)$,$B(3,0)$.

如图1所示，设$P(6,m)$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$，则直线$AP$的方程为$y=\frac{m}{9}(x+3)$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，整理得

$$(m^2+9)x^2+6m^2x+9(m^2-9)=0.$$

$-3$与$x_1$是此二次方程的两根，因此$-3\cdot x_1=\frac{9(m^2-9)}{m^2+9}$，从而$x_1=\frac{-3(m^2-9)}{m^2+9}$，$y_1=\frac{m}{9}(x_1+3)=\frac{6m}{m^2+9}$，即$C(\frac{-3(m^2-9)}{m^2+9},\frac{6m}{m^2+9})$.

又直线$BP$的方程为$y=\frac{m}{3}(x-3)$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，整理得

$$(m^2+1)x^2-6m^2x+9(m^2-1)=0.$$

$3$与$x_2$是此二次方程的两根，因此$3\cdot x_2=\frac{9(m^2-1)}{m^2+1}$，从而$x_2=\frac{3(m^2-1)}{m^2+1}$，$y_2=\frac{m}{3}(x_2-3)=-\frac{2m}{m^2+1}$，即$D(\frac{3(m^2-1)}{m^2+1},-\frac{2m}{m^2+1})$.

由对称性可知，直线$CD$所过的定点必在$x$轴上.不妨取$m=1$，则$C(\frac{12}{5},\frac{3}{5})$,$D(0,-1)$，此时直线$CD$的方程为$y=\frac{2}{3}x-1$，令$y=0$，可得$x=\frac{3}{2}$，即定点$M$的坐标为$(\frac{3}{2},0)$.下面证明，直线$CD$过点$M(\frac{3}{2},0)$即可.

由$\overrightarrow{MC}=(\frac{-9(m^2-3)}{2(m^2+9)},\frac{6m}{m^2+9})$，$\overrightarrow{MD}=(\frac{3(m^2-3)}{2(m^2+1)},-\frac{2m}{m^2+1})$，因为

$$\frac{-9(m^2-3)}{2(m^2+9)}\cdot(-\frac{2m}{m^2+1})$$
$$=\frac{3(m^2-3)}{2(m^2+1)}\cdot\frac{6m}{m^2+9},$$

所以$\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{MD}$共线,即$C,D,M$三点共线.

综上可得直线$CD$过定点$M(\frac{3}{2},0)$.

**点评** 解法1先设$P(6,m)$,然后把直线$AP$,$BP$的方程分别与椭圆方程联立,求出$C,D$两点的坐标,在处理定点的环节,采用的策略是先采点,再打点.简化了运算量,体现了由特殊到一般的数学思想方法.

**解法2** 设$P(6,m)$,同解法1可得:

$C(\frac{-3(m^2-9)}{m^2+9},\frac{6m}{m^2+9})$,

$D(\frac{3(m^2-1)}{m^2+1},-\frac{2m}{m^2+1})$.

(1)当$m^2=3$时,直线$CD$的方程为$x=\frac{3}{2}$;

(2)当$m^2\neq 3$时,

$$k_{CD}=\frac{\frac{6m}{m^2+9}-(-\frac{2m}{m^2+1})}{\frac{-3(m^2-9)}{m^2+9}-\frac{3(m^2-1)}{m^2+1}}$$

$$=\frac{4m}{3(3-m^2)},$$

直线$CD$的方程为$y=\frac{4m}{3(3-m^2)}\cdot[x-\frac{3(m^2-1)}{m^2+1}]+(-\frac{2m}{m^2+1})$,整理得$y=\frac{4m}{3(3-m^2)}\cdot(x-\frac{3}{2})$,恒过点$M(\frac{3}{2},0)$.

综上,直线$CD$过定点$M(\frac{3}{2},0)$.

**点评** 解法2是从一般化开始研究,解题的关键在于简化直线$CD$的方程,虽然对运算量有一定的要求,但解题思路明确,也不失为一种好方法.

**解法3** (1)当直线$CD$的斜率不为0时,设直线$CD$的方程为$x=my+t$,代入椭圆方程$\frac{x^2}{9}+y^2=1$,整理得

$(m^2+9)y^2+2mty+t^2-9=0$.

设$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则

$y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2+9}$,$y_1y_2=\frac{t^2-9}{m^2+9}$.

直线$AC$的方程为$y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$,令$x=6$,得$y_P=\frac{9y_1}{x_1+3}$.

直线$BC$的方程为$y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,令$x=6$,得$y_P=\frac{3y_2}{x_2-3}$.

则有$\frac{9y_1}{x_1+3}=\frac{3y_2}{x_2-3}$,即

$$\frac{3y_1^2}{x_1+3}=\frac{y_1y_2}{x_2-3}. \quad ①$$

又点$C(x_1,y_1)$在椭圆$E$上,所以

$$\frac{x_1^2}{9}+y_1^2=1. \quad ②$$

联立①②,消去$y_1^2$,可得$-3y_1y_2=(x_1-3)(x_2-3)$,即$-3y_1y_2=(my_1+t-3)(my_2+t-3)$,整理得

$(m^2+3)y_1y_2+m(t-3)(y_1+y_2)+(t-3)^2=0$,

即$(m^2+3)\cdot\frac{t^2-9}{m^2+9}+m(t-3)\cdot\frac{-2mt}{m^2+9}+(t-3)^2=0$.

又$t\neq 3$,化简可得$t=\frac{3}{2}$.

故直线$CD$的方程为$x=my+\frac{3}{2}$,从而直线$CD$经过定点$(\frac{3}{2},0)$.

(2)当直线$CD$为$x$轴时,也过点$(\frac{3}{2},0)$.

综上,直线$CD$过定点$(\frac{3}{2},0)$

**点评** 先直接设出直线$CD$的方程$x=my+t$及$C,D$的坐标,接下来联立直线$CD$与椭圆的方程,通过设而不求的策略,找到$m,t$满足的关系,进而得到直线所过的定点.但是本解法的关键在于:通过点$C$在椭圆上,将非对称韦达定理转化为对称的韦达定理.

**解法4** 如图2所示,由题意可知直线$CD$的斜率不为0时,设直线$CD$的方程为$x=my+t$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则$\frac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$,从而可得

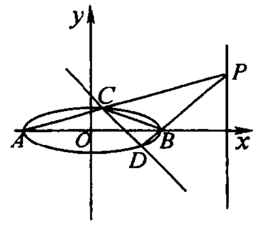


图2

$$k_{CA}\cdot k_{CB}=\frac{y_1}{x_1+3}\cdot\frac{y_1}{x_1-3}=\frac{y_1^2}{x_1^2-9}=-\frac{1}{9}. ①$$

又 $k_{AP}=\frac{y_P}{9}, k_{BP}=\frac{y_P}{3}$,所以 $k_{BP}=3k_{AP}$.　②

又 $k_{CA}=k_{AP}, k_{BD}=k_{BP}$,联立①②可得 $k_{BC}\cdot k_{BD}=-\frac{1}{3}$,即 $\frac{y_1}{x_1-3}\cdot\frac{y_2}{x_2-3}=-\frac{1}{3}$.

下面同解法3,略.

**点评**　利用椭圆上的点与任意关于原点对称的两点连线的斜率乘积为定值这一常用结论,将原问题转化为已知 $k_{BC}\cdot k_{BD}$ 为定值,求直线 $CD$ 过定点问题,而这一处理巧妙地避开了非对称的韦达定理问题.

## 三、试题推广

通过不同角度、不同层次的探索、联想、类比发现新问题,充分挖掘解析几何试题,才能揭示数学本质,进一步培养数学抽象素养,提升解析几何的魅力.

**结论1**　已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,$A,B$ 是椭圆的左、右顶点,点 $P$ 为直线 $x=m$ 上的动点,直线 $PA,PB$ 与椭圆分别交于 $C,D$,则直线 $CD$ 恒过点 $(\frac{a^2}{m},0)$.

**证明**　当直线 $CD$ 的斜率为0时,显然成立;

当直线 $CD$ 的斜率不为0时,可设直线 $CD$ 的方程为 $x=ny+t$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$.联立直线 $CD$ 和椭圆的方程,消去 $x$,可得

$$(a^2+b^2n^2)y^2+2ntb^2y+b^2(t^2-a^2)=0,$$

则 $y_1+y_2=-\frac{2ntb^2}{a^2+b^2n^2}, y_1y_2=\frac{b^2(t^2-a^2)}{a^2+b^2n^2}$.

又 $k_{CA}=k_{AP}=\frac{y_P}{m+a}, k_{BD}=k_{BP}=\frac{y_P}{m-a}$,所以 $k_{CA}=\frac{m-a}{m+a}k_{BD}$.

而 $k_{CA}\cdot k_{CB}=\frac{y_1}{x_1+a}\cdot\frac{y_1}{x_1-a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$,于是可得 $k_{BC}\cdot k_{BD}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m-a}{m+a}$.

不妨记 $-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m-a}{m+a}=p$,则 $\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_2}{x_2-a}=p$,故 $y_1y_2=p(x_1-a)(x_2-a)=p(ny_1+t-a)(ny_2+t-a)$,整理得 $(pn^2-1)y_1y_2+np(t-a)(y_1+y_2)+p(t-a)^2=0$,即

$$(pn^2-1)\cdot\frac{b^2(t^2-a^2)}{a^2+b^2n^2}+np(t-a)\cdot(-\frac{2ntb^2}{a^2+b^2n^2})+p(t-a)^2=0,$$

化简可得

$$t=\frac{ab^2+a^3p}{a^2p-b^2}=\frac{ab^2+a^3(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m-a}{m+a})}{a^2(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m-a}{m+a})-b^2}=\frac{a^2}{m}.$$

故直线 $CD$ 的方程为 $x=ny+\frac{a^2}{m}$,所以直线 $CD$ 过定点 $(\frac{a^2}{m},0)$.

**结论2**　已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,$A,B$ 是双曲线的左、右顶点,点 $P$ 为直线 $x=m$ 上的动点,直线 $PA,PB$ 与椭圆分别交于 $C,D$,则直线 $CD$ 恒过点 $(\frac{a^2}{m},0)$.

结论2的证明与结论1的证明类似,在此不再赘述.

## 四、背景溯源

### 1.链接高考

(2010年江苏省理科第18题)在平面直角坐标系 $xOy$ 中,已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右顶点为 $A$,$B$,右焦点为 $F$.设过点 $T(t,m)$ 的直线 $TA,TB$ 与此椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,其中 $m>0$,$y_1>0$,$y_2<0$.

(1)设动点 $P$ 满足 $PF^2-PB^2=4$,求点 $T$ 的轨迹;

(2)设 $x_1=2, x_2=\frac{1}{3}$,求点 $T$ 的坐标;

(3)设 $t=9$,求证:直线 $MN$ 必过 $x$ 轴上的一定点(其坐标与 $m$ 无关).

高考真题是复习备考的重要素材,每年的高考试题都能看到以往高考题的背影,甚至有的题目仅仅只是换了个数据而已,因此,在高三的复习教学中,要充分挖掘真题的价值!

### 2.背景揭秘

追踪试题的命题轨迹,探寻试题的命题背景,不仅有助于提升思维高度,开阔学习思考视野,而且能识破题目的神秘面纱,并能最终把握命题规律.

**定义**　如图3,设点 $P$ 是不在二次曲线上的点,过点 $P$ 引两条割线依次交二次曲线于点 $E,F,G,H$,连接 $EG,FH$ 交于点 $M$,连接 $EH,FG$ 交于点 $N$,则 $MN$ 为点 $P$ 对应的极线.同理,直线 $MP$ 为点 $N$ 对应的极线.

**定理**　(1)当点 $P$ 为二次曲线上的点时,点 $P$ 的极线即为二次曲线在点 $P$ 处的切线;

(2)当点 $P$ 为二次曲线外的点时,过点 $P$ 作二次曲

线的切线,切点分别为$A$,$B$,则点$P$的极线为直线$AB$.

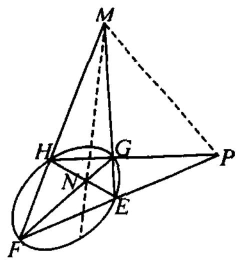


图3

(3) 当点$P$为二次曲线内的点时,过点$P$任作一条割线交二次曲线于$A$,$B$,过$A$,$B$分别作曲线的切线,则两切线交点的轨迹即为点$P$的极线.

由此可以看到,2020年全国卷Ⅰ理科第20题是以极点极线为背景进行命题的.

**参考文献:**

[1] 刘刚.一道2019年高考抛物线试题的多角度探究[J].数学通讯(下半月),2019(11):35-41.

[2] 刘紫阳.2019年全国卷Ⅱ第21题的揭发探究与背景探源[J].数学通讯(上半月),2019(11):26-28.

(收稿日期:2020—07—09)

(上接第13页)

次为高级认知,分别对应的是初阶思维和高阶思维.课堂教学是培养学生数学核心素养的主阵地,在课堂教学中培养学生数学核心素养,归根结底是要通过转变学生的学习方式,激活学生的高阶思维,变指向性探究为开放式探究,这样获取的知识和技能、思想和方法、观念和意识,才是鲜活的,才具有蓬勃向上的生长力.

**3.1 项目式学习方式(PBL)**

项目式学习是一种教与学的模式,学生基于真实世界的现实问题进行探究活动.以问题为起点,攥活动为抓手,通过制作最终作品的形式,在提出问题、规划项目、活动探究和结果评价的学习过程中自主完成知识的建构.

复习命题的否定,掌握全称命题和特称命题的概念.创设问题情境:含有一个量词的命题如何否定?让学生列举出一些全称命题和特称命题的数学实例,比如:(1) 所有的矩形都是平行四边形;(2) 有些实数的绝对值是正数,等.以此为研究课题进行项目式学习,建构全称命题与特称命题的否定在形式上、涵义上的变化规律及其本质属性.其中,在"活动探究"和"结果评价"两个环节中,要提倡学生客观、冷静、深入地思考,自主、协作、切身地体验,通过展示研究成果,校正过程性作品,积累自主建构的经验.

**3.2 数学阅读与写作(WTL)**

数学写作是引导学生将数学理解、解题回顾和方法反思,用自己的语言形成文字表达,为数学思维和交流创造机会,反馈学习和成长进程,促进深度学习的活动.[3]

伯特兰·罗素指出,逻辑学是哲学与科学共同的底层基石,代表着人类理性思维的具象原理,是立身处世的根本学问.逻辑在生活与科学中可以说是无处不在.事实上,在"常用逻辑用语"这一章的学习中,学生仍然有一些理解不透、似懂非懂的地方.比如,"奇数是质数"的否定是"奇数不是质数"吗?"若$p$,则$q$"的否定是"若$p$,则非$q$"吗?"否命题"与"命题的否定"是一回事吗?本节课学习之后,可以让学生上网查阅相关资料,并以"命题的否定,我有话要说"为题写一篇数学小论文,作为课堂学习的延伸与全章知识的拓展,用准确简洁的语言进行数学表达,夯实学生对常用逻辑用语的理解、掌握与应用,助推学生的深度学习活动,获得知识与能力、观念与素养上的提高.

**4 结束语**

教师要走向专业研究的道路,促进自身的专业化发展,就要自觉地关注自己的课堂,积极地关爱自己的学生;靶向课程标准,创造性地解读教材,通过精心谋划和设计,不断呈现精致的"课堂作品".以课例为载体,进行行为跟进的全过程反思与批判,就能"学会教学"(learning how to teach),就能深刻地体验到数学教学是一门技术,是一种艺术,更是一项科学,就能把"简单课""平常课"上得出彩、析出素养,让我们为之而努力.

**参考文献:**

[1] 人民教育出版社等编著.普通高中课程标准实验教科书·数学2-1(选修A版)[M].第2版.北京:人民教育出版社,2007.

[2] 中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017版)[S].北京:人民教育出版社,2018.

[3] 吴宏,张珂,刘广军.数学写作融入初中数学教学的实验研究[J].数学教育学报,2019,28(5):51-58.

(收稿日期:2020—04—11)