椭圆焦点三角形的若干性质

熊光汉　(湖北省恩施市教研室　445000)

以椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的两个焦点$F_1,F_2$及椭圆上任意一点$P$(除长轴上两个端点外)为顶的$\triangle F_1PF_2$,叫做椭圆的焦点三角形.椭圆的焦点三角形有一系列耐人寻味的性质,这些性质深刻地揭示了椭圆的一些有趣的几何特征.

为了使问题简洁明了,本文设$\angle F_1PF_2=\theta$,$\angle PF_1F_2=\alpha$,$\angle PF_2F_1=\beta$,椭圆的离心率为e.

性质1　$0<\theta\leqslant\arccos\frac{2b^2-a^2}{a^2}$

证明　如图1,由正弦定理有$\frac{|PF_1|}{\sin\beta}=\frac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|F_1F_2|}{\sin\theta}$,

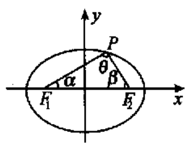

图1

所以$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|F_1F_2|}=$

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}$$

因为$|PF_1|+|PF_2|=2a$,

$|F_1F_2|^2=4(a^2-b^2)$,

所以$\frac{4a^2}{4(a^2-b^2)}\leqslant\frac{2}{1-\cos\theta}$,

即$\cos\theta\geqslant\frac{2b^2-a^2}{a^2}$.

所以$\theta\leqslant\arccos\frac{2b^2-a^2}{a^2}$.

当点P在长轴上的端点时,$\theta=0$,此时$\triangle F_1PF_2$不存在.故$0<\theta\leqslant\arccos\frac{2b^2-a^2}{a^2}$.

性质2　$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}$.

证明　如图1,因为$\frac{|F_1F_2|}{\sin\theta}=\frac{|F_1F_2|}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin\alpha+\sin\beta}$

所以$\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a}{\sin\alpha+\sin\beta}$.

所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}.$$

故$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}$.

性质3　r,R分别是$\triangle F_1PF_2$的内切圆和外接圆半径,则$\frac{r}{R}\leqslant2e(1-e)$.

证明　如图1,由三角形的知识有

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=4\sin\frac{\theta}{2}[-\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2})]$$

因为$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\theta}{2}$,

所以$\frac{r}{R}=2\sin\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})$　①

由椭圆定义及正弦定理有

$$e=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{2\sin\theta}{2\sin\alpha+2\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

又因为$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}$.

所以$e=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

即$\sin\frac{\theta}{2}=e\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　②

将②代入①得

$$\frac{r}{R}=2e\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-e\cos\frac{\alpha-\beta}{2})=$$

$2e(1-e)\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

故$\frac{r}{R}\leqslant 2e(1-e)$.当且仅当$\alpha=\beta$时等号成立.

性质4　M是$\triangle F_1PF_2$的内心,PM的延长线交F_1F_2于D.则$|PM|:|MD|=1:e$.

证明　如图2,

$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|DF_1|}{|DF_2|}$,

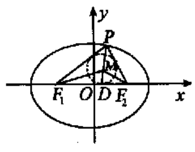

图2

所以$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|PF_2|}=\frac{|DF_1|+|DF_2|}{|DF_2|}$

所以$\frac{|PF_1|+|PF_2|}{|DF_1|+|DF_2|}=\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{|PF_2|}{|DF_2|}$

因为$\frac{|PF_2|}{|DF_2|}=\frac{|PM|}{|DM|}$.故$\frac{|PM|}{|DM|}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$.

性质5　$\triangle F_1PF_2$的内切圆圆心M的轨迹方程为$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(c\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}\right)^2}=1.(y\neq 0)$

证明　如图2,设$M(x,y)$,连结F_1M,F_2M,由性质2知$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{a-c}{a+c}$.

因为$K_{F_1M}=\frac{y}{x+c},K_{F_2M}=\frac{y}{x-c}.(y\neq 0)$,

所以$K_{F_1M}\cdot K_{F_2M}=-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{y^2}{x^2-c^2}$.

从而$\frac{a-c}{a+c}=-\frac{y^2}{x^2-c^2}$.

化简得$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(c\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}\right)^2}=1,(y\neq 0)$为点$M$的轨迹方程.

性质6　设点N为$\triangle F_1PF_2$的旁心,则有

(1)若点N在$\angle F_1PF_2$的平分线上,则点N的轨迹方程为$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(c\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}\right)^2}=1,(y\neq 0)$;

(2)若点N在$\angle PF_1F_2$的平分线上,则点N的轨迹方程为$x=a,(y\neq 0)$;

(3)若点N在$\angle PF_2F_1$的平分线上,则点N的轨迹方程为$x=-a,(y\neq 0)$.

证明　(1)如图3,设$N(x,y)$,$\triangle F_1PF_2$的内心为M,则知

$MF_1\perp NF_1,MF_2\perp NF_2$.

所以$K_{NF_1}\cdot K_{NF_2}=\left(-\frac{1}{K_{MF_1}}\right)\left(-\frac{1}{K_{MF_2}}\right)$

$=\frac{1}{K_{MF_1}\cdot K_{MF_2}}=-\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}$.

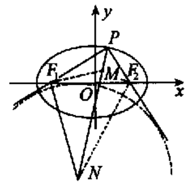

图3

所以$K_{NF_1}=\frac{y}{x+c}$,

$K_{NF_2}=\frac{y}{x-c}$,

$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{a-c}{a+c}$.

所以$\frac{y^2}{x^2-c^2}=-\frac{a+c}{a-c}$.

整理得$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{\left(c\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}\right)^2}=1,(y\neq 0)$为点$N$的轨迹方程.

(2)如图4,设$N(x,y)$,$c(x',0)$.$\odot N$与PF_2,PF_1,x轴分别相切于点A,B,C,则有$|AF_2|=|CF_2|$,$|F_1C|=|F_1B|$,$|PB|=|PA|$.

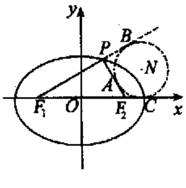

图4

由椭圆定义知

$|F_1P|+|PA|+|AF_2|=|F_1B|+|AF_2|=2a$.

所以$|F_1C|+|AF_2|=2a$,

即$|F_1C|=2a-|AF_1|=2a-|F_2C|$.

因此有$x'+c=2a-(x'-c)$,所以$x'=a$.

从而知$\odot N$总与x轴相切于点$C(a,0)$,又因为$NC\perp x$轴,故点N的轨迹方程为$x=a,(a\neq 0)$.

(3)仿(2)的证明可以获证,从略.

性质7　在$\triangle F_1PF_2$中,$\angle F_1PF_2$的外角平线为l,过焦点F_2,(或F_1)作l的垂线,垂足为D,则点D的轨迹方程为$x^2+y^2=a^2,(y\neq 0)$.

证明　如图5,延长F_2D交F_1P的延长线于E.

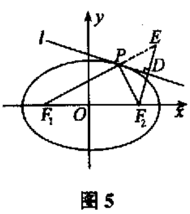

图5

由$\angle EPD=\angle F_2PD$,$\angle PDE=\angle PDF_2=90°$,$PD=PD$知$\triangle PF_2D\cong\triangle PED$.

所以$|PE|=|PF_2|$,$|DF_2|=|DE|$.

所以$|F_1E|=|F_1P|+|PE|=|F_1P|+|PF_2|=2a$.

由D是线段F_2E的中点知$E(2x-c,2y)$.

所以$|OD|=\frac{1}{2}|F_1E|=a$(定值)

故点D的轨迹方程为$x^2+y^2=a^2(y\neq 0)$.