

**概率与数列的结合问题**

（2024·全国·模拟预测）

1．网球运动是一项激烈且耗时的运动，对于力量的消耗是很大的，这就需要网球运动员提高自己的耐力．耐力训练分为无氧和有氧两种训练方式．某网球俱乐部的运动员在某赛事前展开了一轮为期90天的封闭集训，在封闭集训期间每名运动员每天选择一种方式进行耐力训练．由训练计划知，在封闭集训期间，若运动员第天进行有氧训练，则第天进行有氧训练的概率为，第天进行无氧训练的概率为；若运动员第天进行无氧训练，则第天进行有氧训练的概率为，第天进行无氧训练的概率为．若运动员封闭集训的第1天进行有氧训练与无氧训练的概率相等．

(1)封闭集训期间，记3名运动员中第2天进行有氧训练的人数为，求的分布列与数学期望；

(2)封闭集训期间，记某运动员第天进行有氧训练的概率为，求．

（2024·河北·校联考一模）

2．最新研发的某产品每次试验结果为成功或不成功，且每次试验的成功概率为．现对该产品进行独立重复试验，若试验成功，则试验结束；若试验不成功，则继续试验，且最多试验8次．记为试验结束时所进行的试验次数，的数学期望为．

(1)证明：；

(2)某公司意向投资该产品，若，每次试验的成本为元，若试验成功则获利元，则该公司应如何决策投资？请说明理由．

（2023·广西·模拟预测）

3．篮球是一项风靡世界的运动，是深受大众喜欢的一项运动．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 喜爱篮球运动 | 不喜爱篮球运动 | 合计 |
| 男性 | 60 | 40 | 100 |
| 女性 | 20 | 80 | 100 |
| 合计 | 80 | 120 | 200 |

(1)为了解喜爱篮球运动是否与性别有关，随机抽取了男性和女性各100名观众进行调查，得到如上列联表，判断是否有99.9%的把握认为喜爱篮球运动与性别有关．

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.001 |
|  | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 10.828 |

附：，．

(2)校篮球队中的甲、乙、丙三名球员将进行传球训练，第1次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能的将球传给另外两个人中的任何一人，如此不停地传下去，且假定每次传球都能被接到．记开始传球的人为第1次触球者，第次触球者是甲的概率记为，即．

①求（直接写出结果即可）；

②证明：数列为等比数列，并比较第9次与第10次触球者是甲的概率的大小．

（2023·广东·校联考二模）

4．某中学的风筝兴趣小组决定举行一次盲盒风筝比赛，比赛采取得分制度评选优胜者，可选择的风筝为硬翅风筝､软翅风筝､串式风筝､板式风筝､立体风筝，共有5种风筝，将风筝装入盲盒中摸取风筝，每位参赛选手摸取硬翅风筝或软翅风筝均得1分并放飞风筝，摸取串式风筝､板式风筝､立体风筝均得2分并放飞风筝，每次摸取风筝的结果相互独立，且每次只能摸取1只风筝，每位选手每次摸取硬翅风筝或软翅风筝的概率为，摸取其余3种风筝的概率为.

(1)若选手甲连续摸了2次盲盒，其总得分为分，求的分布列与期望；

(2)假设选手乙可持续摸取盲盒，即摸取盲盒的次数可以为中的任意一个数，记乙累计得分的概率为，当时，求.

（2023·上海长宁·统考一模）

5．已知等差数列的前项和为，公差.

(1)若，求的通项公式；

(2)从集合中任取3个元素，记这3个元素能成等差数列为事件，求事件发生的概率.

（2023·广东韶关·统考一模）

6．有一个质地均匀的正方体骰子与一个有61个格子的矩形方格图，矩形方格图上从0，1，2，…，60依次标号.一个质点位于第0个方格中，现有如下游戏规则：先投掷骰子，若出现1点或2点，则质点前进1格，否则质点前进2格，每次投掷的结果互不影响.

(1)求经过两次投掷后，质点位于第4个格子的概率；

(2)若质点移动到第59个格子或第60个格子时，游戏结束，设质点移动到第个格子的概率为，求和的值.

（2023·湖北·武汉市第三中学校联考一模）

7．2023年10月5日晚，杭州亚运会女篮决赛的巅峰对决中，中国女篮以战胜日本女篮，成功卫冕亚运会冠军，大快人心，表现神勇，为国家和人民争了光．某校随即开展了“学习女篮精神，塑造健康体魄”的主题活动，在该活动的某次篮球训练课上，进行了一场、、3名女篮队员的传接球的训练，球从手中开始，等可能地随机传向另外2人中的1人，接球者接到球后再等可能地随机传向另外2人中的1人，如此不停地传下去，假设传出的球都能被接住．记第次传球之前球在手中的概率为，易知，．

(1)①求第5次传球前，球恰好在手中的概率；

②第次传球前球在手中的概率为，试比较与的大小．

(2)训练结束，体育老师为了表扬队员们精彩的表现和取得的进步，组织了一场“摸球抽奖”活动，先在一个口袋中装有个红球（且）和5个白球，一次摸奖从中摸两个球，两个球颜色不同则为中奖．若设三次摸奖（每次摸奖后球放回）恰好有一次中奖的概率，当取何值时，最大?

（2023·全国·模拟预测）

8．运动会期间，某班组织了一个传球游戏，甲、乙、丙三名同学参与游戏，规则如下：持球者每次将球传给另一个同学.已知，若甲持球，则他等可能的将球传给乙和丙；若乙持球，则他有的概率传给甲；若丙持球，则他有的概率传给甲，游戏开始时，由甲持球.记经过*n*次传球后甲持球的概率为.

(1)若三次传球为一轮游戏，并且每轮游戏开始都由甲持球，规定：在一轮游戏中，若在第3次传球后，持球者是甲，为甲胜利.记随机变量*X*为3轮游戏后甲胜利的次数，求*X*的分布列和数学期望；

(2)求.

（2023·浙江·模拟预测）

9．全民健身是全体人民增强体魄､健康生活的基础和保障，为了研究杭州市民健身的情况，某调研小组在我市随机抽取了100名市民进行调研，得到如下数据：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 每周健身次数 | 1次 | 2次 | 3次 | 4次 | 5次 | 6次及6次以上 |
| 男 | 4 | 6 | 5 | 3 | 4 | 28 |
| 女 | 7 | 5 | 8 | 7 | 6 | 17 |

附：，

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.10 | 0.05 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
|  | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

(1)如果认为每周健身4次及以上的用户为“喜欢健身”；请完成列联表，根据小概率值的独立性检验，判断“喜欢健身”与“性别”是否有关？

(2)假设杭州市民小红第一次去健身房健身的概率为，去健身房健身的概率为，从第二次起，若前一次去健身房，则此次不去的概率为；若前一次去健身房，则此次仍不去的概率为.记第次去健身房健身的概率为，则第10次去哪一个健身房健身的概率更大？

（2023·浙江·模拟预测）

10．立德中学有甲､乙两家餐厅，如果赵同学上一天去甲餐厅用午餐，那么下一天去甲餐厅的概率为0.6，如果上一天去乙餐厅用午餐，那么下一天去甲餐厅的概率为0.8，已知赵同学第一天去甲餐厅用午餐的概率为0.5.

(1)求赵同学第二天去乙餐厅用午餐的概率；

(2)设赵同学第去甲餐厅用午餐的概率为，判断与的大小，并求.

（2023·河北保定·河北省唐县第一中学校考二模）

11．在某个周末，甲、乙、丙、丁四名同学相约打台球．四人约定游戏规则：①每轮游戏均将四人分成两组，进行组内一对一对打；②第一轮甲乙对打、丙丁对打；③每轮游戏结束后，两名优胜者组成优胜组在下一轮游戏中对打，同样的，两名失败者组成败者组在下一轮游戏中对打；④每轮比赛均无平局出现．已知甲胜乙、乙胜丙、丙胜丁的概率均为，甲胜丙、乙胜丁的概率均为，甲胜丁的概率为．

(1)设在前三轮比赛中，甲乙对打的次数为随机变量*X*，求*X*的数学期望；

(2)求在第10轮比赛中，甲丙对打的概率．

（2023·吉林通化·梅河口市第五中学校考模拟预测）

12．某学校三年级开学之初增加早自习，早饭在校食堂就餐人数增多，为了缓解就餐压力，学校在原有一个餐厅的基础上增加了一个餐厅，分别记做餐厅甲和餐厅乙，经过一周左右统计调研分析：前一天选择餐厅甲就餐第二天选择餐厅甲就餐的概率是，择餐厅乙就餐的概率为，前一天选择餐厅乙就餐第二天选择餐厅乙就餐的概率是，选择餐厅甲就餐的概率也为，如此往复.假设学生第一天选择餐厅甲就餐的概率是，选择餐厅乙就餐的概率是，记某同学第天选择甲餐厅就餐的概率为.

(1)记某班级的3位同学第二天选择餐厅甲的人数为，求的分布列，并求；

(2)请写出的通项公式；

（2023·全国·统考高考真题）

13．甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若末命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5．

(1)求第2次投篮的人是乙的概率；

(2)求第次投篮的人是甲的概率；

(3)已知：若随机变量服从两点分布，且，则．记前次（即从第1次到第次投篮）中甲投篮的次数为，求．

（2019·全国·高考真题）

14．为了治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验．试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得分；若都治愈或都未治愈则两种药均得0分．甲、乙两种药的治愈率分别记为*α*和*β*，一轮试验中甲药的得分记为*X*．

（1）求的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予4分，表示“甲药的累计得分为时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则，，，其中，，．假设，．

(i)证明：为等比数列；

(ii)求，并根据的值解释这种试验方案的合理性．

（2020·江苏·统考高考真题）

15．甲口袋中装有2个黑球和1个白球，乙口袋中装有3个白球．现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋，重复*n*次这样的操作，记甲口袋中黑球个数为Xn，恰有2个黑球的概率为pn，恰有1个黑球的概率为qn．

（1）求*p1*，*q1*和*p2*，*q2*；

（2）求2pn+qn与2pn-1+qn-1的递推关系式和Xn的数学期望*E*(Xn)(用 *n*表示) ．

（2017·江苏·高考真题）

16．已知一个口袋有m个白球，n个黑球（m,n  ,n 2）,这些球除颜色外全部相同．现将口袋中的球随机的逐个取出，并放入如图所示的编号为1,2,3，……，m+n的抽屉内，其中第k次取球放入编号为k的抽屉（k=1,2,3，……，m+n）.

@@@4ae74149ab314934a451edd5af893b0d（1）试求编号为2的抽屉内放的是黑球的概率p;

（2）随机变量x表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数，E(x)是x的数学期望，证明 

（2023·山东烟台·统考三模）

17．现有甲、乙两个袋子，每个袋子中均装有大小、形状、质地完全相同的个黑球和个红球，若每次分别从两个袋子中随机摸出个球互相交换后放袋子中，重复进行次此操作．记第次操作后，甲袋子中红球的个数为．

(1)求的分布列和数学期望；

(2)求第次操作后，甲袋子中恰有个红球的概率．

（2023·安徽合肥·合肥市第六中学校考模拟预测）

18．在上海举办的第五届中国国际进口博览会中，一款无导线心脏起搏器引起广大参会者的关注，成为了进博会的“明星展品”．体积仅有维生素胶囊大小，体积比传统心脏起搏器减小93%，重量仅约2克，拥有强大的电池续航能力，配合兼容1.5T/3.0T全身核磁共振扫描检查等创新功能．在起搏器研发后期，某企业快速启动无线充电器主控芯片生产，试产期每天都需同步进行产品检测，检测包括智能检测和人工检测，选择哪种检测方式的规则如下：第一天选择智能检测，随后每天由计算机随机等可能生成数字“0”和“1”，连续生成4次，把4次的数字相加，若和小于3，则该天的检测方式和前一天相同，否则选择另一种检测方式．

(1)求该企业前三天的产品检测选择智能检测的天数*X*的分布列；

(2)当地政府为了检查该企业是否具有一定的智能化管理水平，采用如下方案：设表示事件“第*n*天该企业产品检测选择的是智能检测”的概率，若恒成立，认为该企业具有一定的智能化管理水平，将给予该企业一定的奖励资金，否则将没有该项奖励资金．请问该企业能拿到奖励资金吗？请说明理由．

（2023·安徽合肥·合肥一中校考模拟预测）

19．2023年4月23日，是中国海军成立74周年74年向海图强，74年劈波斩浪．74年，人民海军新装备不断增加，新型作战力量加速发展，从“101南昌舰”到“108咸阳舰”，8艘055型驱逐舰列阵.我国自主研制的075型两栖攻击舰“31海南舰”“32广西舰”“33安徽舰”也相继正式入列．从小艇到大舰，从近海防御到挺进深蓝大洋，人民海军步履铿锵，捍卫国家主权，维护世界和平．为了庆祝中国海军成立74周年，某公司设计生产了三款两栖攻击舰模型（分别为“31海南舰”､“32广西舰”“33安徽舰”），并限量发行若该公司每个月发行300件（三款各100件），一共持续12个月，采用摇号的方式进行销售．假设每个月都有3000人参与摇号，摇上号的将等可能获得三款中的一款．小周是个“战舰狂热粉”，听到该公司发行两栖攻击舰模型，欣喜若狂．

(1)若小周连续三个月参与摇号，求他在这三个月集齐三款模型的概率；

(2)若摇上号的人不再参加后面的摇号．已知小周从第一个月开始参与摇号，并且在12个月的限量发行中成功摇到并获得了模型．设他第*X*个月摇到并获得了模型，求*X*的数学期望．

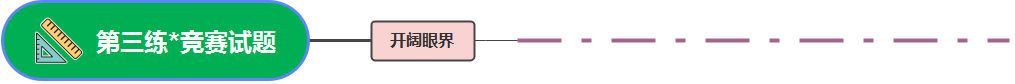
（2023·河北衡水·河北衡水中学校考模拟预测）

20．某辖区组织居民接种新冠疫苗，现有四种疫苗且每种都供应充足.前来接种的居民接种与号码机产生的号码对应的疫苗，号码机有四个号码，每次可随机产生一个号码，后一次产生的号码由前一次余下的三个号码中随机产生，张医生先接种与号码机产生的号码对应的种疫苗后，再为居民们接种，记第位居民（不包含张医生）接种四种疫苗的概率分别为.

(1)第2位居民接种哪种疫苗的概率最大；

(2)张医生认为，一段时间后接种四种疫苗的概率应该相差无几，请你通过计算第10位居民接种四种的概率，解释张医生观点的合理性.

参考数据：.



（2023·湖北武汉·华中师大一附中校考模拟竞赛）

21．长江十年禁渔计划全面施行，渔民老张积极配合政府工作，如期收到政府的补偿款.他决定拿出其中10万元进行投资，并看中了两种为期60天（视作2个月）的稳健型（不会亏损）理财方案.

方案一：年化率，且有的可能只收回本金；

方案二：年化率，且有的可能只收回本金；

已知老张对每期的投资本金固定（都为10万元），且第一次投资时选择了方案一，在每期结束后，老张不间断地进行下一期投资，并且他有的可能选择另一种理财方案进行投资.

(1)设第*i*次投资（）选择方案一的概率为，求；

(2)求一年后老张可获得总利润的期望（精确到1元）.

注：若拿1千元进行5个月年化率为的投资，则该次投资获利元.

（2023·湖南长沙·长沙市明德中学校考竞赛）

22．甲、乙两选手进行一场体育竞技比赛，采用局胜制的比赛规则，即先赢下局比赛者最终获胜. 已知每局比赛甲获胜的概率为，乙获胜的概率为，比赛结束时，甲最终获胜的概率为.

(1)若，结束比赛时，比赛的局数为，求的分布列与数学期望；

(2)若采用5局3胜制比采用3局2胜制对甲更有利，即.

(i)求的取值范围；

(ii)证明数列单调递增，并根据你的理解说明该结论的实际含义.

（2023·山西晋中·统考竞赛）

23．晋中市是晋商文化的发源地，且拥有丰富的旅游资源，其中有保存完好的大院人文景观（如王家大院，常家庄园等），也有风景秀丽的自然景观（如介休绵山，石膏山等）．某旅行团带游客来晋中旅游，游客可自由选择人文景观和自然景观中的一处游览．若每位游客选择人文景观的概率是，选择自然景观的概率为，游客之间选择意愿相互独立．

(1)从游客中随机选取5人，记5人中选择人文景观的人数为*X*，求*X*的均值与方差；

(2)现对游客进行问卷调查，若选择人文景观记2分，选择自然景观记1分，记已调查过的累计得分为*n*分的概率为，求．

（2023·江苏南京·统考竞赛）

24．进行独立重复试验，设每次成功的概率为，则失败的概率为，将试验进行到恰好出现次成功时结束试验，以表示试验次数，则称服从以，为参数的帕斯卡分布或负二项分布，记为．

(1)若，求；

(2)若，，．

①求；

②要使得在次内结束试验的概率不小于，求的最小值．

（2023·海南海口·校考模拟竞赛）

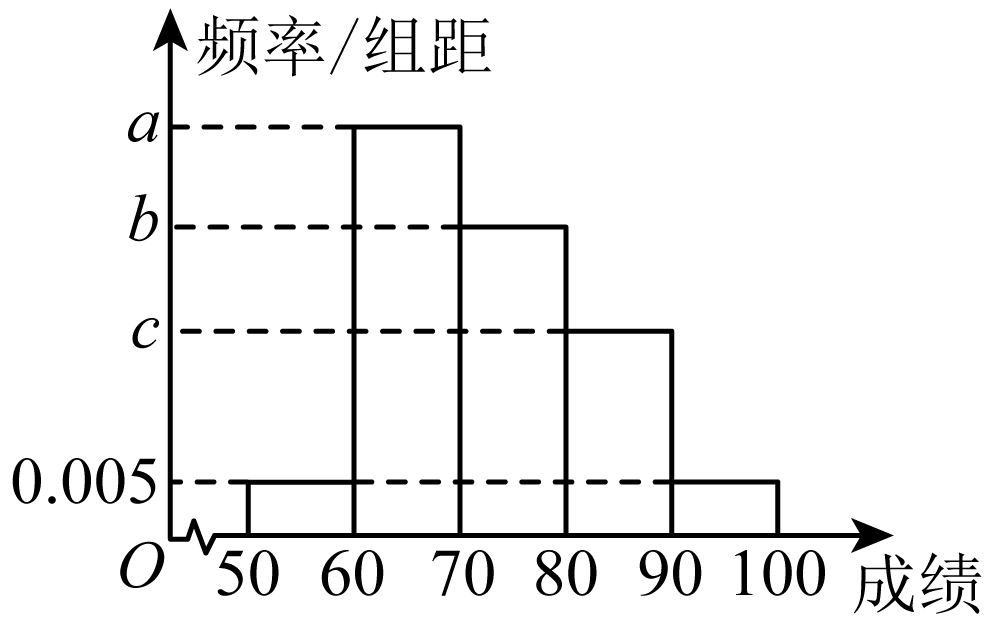
25．某电视台综艺栏目拟组织如下一个活动：将全体演员分成甲、乙两组，各组每次表演一个节目（同一个节目可以由一个演员单独表演，也可以由几个演员合作表演），在一组表演完节目后，主持人将一枚质地均匀的骰子随机抛掷两次，若所得两个点数之和为的倍数，则该组再继续表演一个节目：否则，由另一组表演一个节目．经抽签，第一次由甲组表演节目．

(1)设在前次表演中甲组表演的次数为，求的分布列和数学期望；

(2)求第次表演者是甲组的概率．

（2023·贵州毕节·统考竞赛）

26．某中学组织学生进行地理知识竞赛，随机抽取500名学生的成绩进行统计，将这500名学生成绩分成5组：[50，60），[60，70），[70，80），，[90，100]，得到如图所示的频率分布直方图，若成等差数列，且成绩在区间内的人数为120．



(1)求*a*，*b*，*c*的值；

(2)估计这500名学生成绩的中位数和平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值代替）；

(3)由成绩在区间[90，100]内的甲、乙等5名学生组成帮助小组，帮助成绩在区间[50，60）内的学生*A*，*B*，其中3人帮助*A*，余下的2人帮助*B*，求甲、乙都帮助*A*的概率．

**参考答案：**

1．(1)分布列见解析，2

(2)

【分析】（1）分别求出运动员第2天进行有氧训练与无氧训练的概率，判断服从二项分布并求概率，列分布列，求数学期望；

（2）求，的递推关系，构造数列并证其为等比数列，利用等比数列的通项公式求结果.

【详解】（1）设运动员第2天进行有氧训练为事件*M*，第2天进行无氧训练为事件*N*，

则，，

所以3名运动员第2天进行有氧训练的人数，可知，

则，，

，，

所以的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

所以．

（2）依题意可得，即（，且）．

则（，且），且，

所以数列是首项为，公比为的等比数列，

则，即，

所以．

2．(1)证明见解析；

(2)应该投资，理由见解析

【分析】（1）由题意，，，列出分布列，列出，乘公比错位相减法求和，分析可证明；

（2）由（1）可得，分析即得解

【详解】（1）由题意，

故

分布列如下：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

所以的数学期望，

记，

，

作差可得，，

则；

（2）由（1）可知，则试验成本的期望小于元，

试验成功则获利元，且，则该公司应该投资该产品

3．(1)有99.9%的把握认为喜爱篮球运动与性别有关．

(2)①；②证明见解析，第9次触球者是甲的概率大．

【分析】（1）根据题意，由的计算公式，代入计算，即可判断；

（2）根据题意，由等比数列的定义即可得到数列为等比数列，然后代入计算，即可得到结果.

【详解】（1）假设：喜爱篮球运动与性别独立，即喜爱篮球运动与性别无关．

根据列联表数据，经计算得，

根据小概率值的独立性检验，我们推断不成立，

即有99.9%的把握认为喜爱篮球运动与性别有关．

（2）①由题意得：第二次触球者为乙，丙中的一个，第二次触球者传给包括甲的二人中的一人，

故传给甲的概率为，故．

②第次触球者是甲的概率记为，则当时，第次触球者是甲的概率为，

第次触球者不是甲的概率为，

则，

从而，又，

∴是以为首项，公比为的等比数列，

∴，

∴，，

故第9次触球者是甲的概率大．

4．(1)分布列见解析，

(2)

【分析】（1）根据相互独立事件乘法公式求得分布列并求得数学期望.

（2）根据已知条件列出递推关系，利用构造等比数列、累加法等知识求得.

【详解】（1）的可能取值为，则：，

则的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |

故.

（2）当时，得分累计分，即在得到分后再得1分，或在得到分后再得2分，

所以，

则.

因为，所以，

所以为等比数列，且首项为，公比为，

则

，

则，故当时，.

5．(1)

(2)

【分析】（1）根据题意，利用等差数列的求和公式，列出方程，求得，进而求得数列的通项公式；

（2）根据题意，得到所有的不同取法有20种，再利用列举法求得事件中所包含的基本事件的个数，结合古典概型的概率计算公式，即可求解.

【详解】（1）解：由等差数列的前项和为，公差，

因为，可得，解得，

所以，即数列的通项公式为.

（2）解：由题意，从集合中任取3个元素，共有种不同的取法，

其中这3个元素能成等差数列有

，有6种不同的取法，

所以事件的概率为.

6．(1)

(2)，.

【分析】（1）分别求出质点前进1格、前进2格的概率，再利用相互独立事件的概率公式求解即得.

（2）求出，当时，探求的关系，利用构造法、累加法求出，进而求出即得.

【详解】（1）设事件为质点前进1格，事件为质点前进2格，则，

设事件为质点经过两次投掷后位于第4个格子，所以.

（2）质点移动到第个格子的情况可分为两种：

由第个格子移动至第个格子；由第个格子移动至第个格子，

则，

，因此，

则数列是以为首项，为公比的等比数列，于是，

因此

，

所以，.

7．(1)①；②

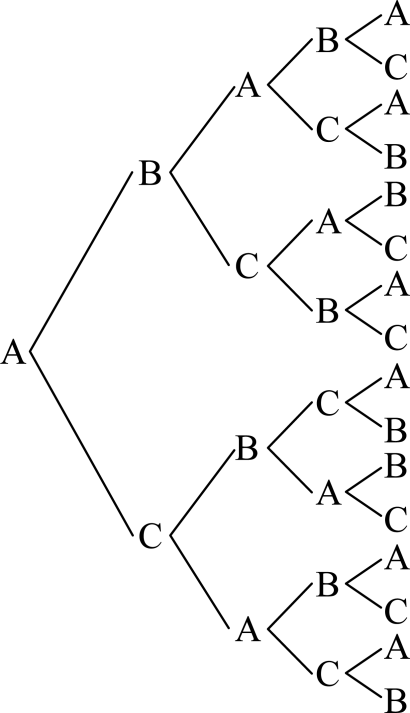
(2)

【分析】（1）①利用树状图列出所有可能结果，再由古典概型的概率公式计算可得；

②依题意第次传球前在乙、丙手中的概率均为，则，从而得到为等比数列，即可求出的通项公式，求出与，即可判断；

（3）首先求出一次摸奖中奖的概率，则三次摸奖（每次摸奖后放回），恰有一次中奖的概率，，再利用导数求出函数的单调性，即可求出函数的极大值点，再求出即可.

【详解】（1）①记三个人分别为、、，则4次传球的所有可能可用树状图列出，如图．



每一个分支为一种传球方案，则基本事件的总数为16，而又回到手中的事件个数为6，

根据古典概型的概率公式得．

②第次传球前在乙、丙手中的概率均为，

故，



为等比数列，首项为，公比为，

，

所以，

，

，

.

（2）一次摸奖从个球中任选两个，有种，它们等可能，其中两球不同色有种，一次摸奖中奖的概率

三次摸奖（每次摸奖后放回），恰有一次中奖的概率

，，

则，

所以当时，当时，

所以在上为增函数，在上为减函数，当时，取得最大值，

又，得时，最大.

8．(1)分布列见解析，；

(2).

【分析】（1）求出每一轮常游戏甲胜的概率，再利用二项分布的概率公式求出分布列及期望.

（2）利用全概率公式求出与的关系式，再利用构造法求出.

【详解】（1）据题意只需关注前3次球由谁持球即可，则持球的所有可能情况为甲乙丙甲，甲丙乙甲，

，

因此一轮游戏甲胜利的概率为，随机变量的可能取值为，

，

，

所以的分布列为：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

数学期望.

（2）设事件表示次传球后，球在甲同学手上，事件表示次传球后，球在乙同学手上，

事件表示次传球后，球在丙同学手上，设次传球后，乙持球的概率为，

则，由全概率公式知：

，

整理得，于是，而，即，

因此数列是以为首项，为公比的等比数列，即有，

所以.

9．(1)列联表见解析，“喜欢健身”与“性别”无关

(2)第10次去健身房健身的概率更大

【分析】（1）先绘制列联表，计算的值，从而确定正确答案.

（2）根据全概率公式、递推关系求得，从而求得，由此确定正确答案.

【详解】（1）依题意，列联表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 喜欢健身 | 不喜欢健身 | 合计 |
| 男 |  |  |  |
| 女 |  |  |  |
| 合计 |  |  |  |

，

所以“喜欢健身”与“性别”无关.

（2）依题意，，当时，，

则，

所以数列是首项为，公比为的等比数列，

所以，

所以，

所以第10次去健身房健身的概率更大.

10．(1)0.3

(2)；．

【分析】（1）分类，按赵同学第一天去甲、乙餐厅分两类计算后相加可得；

（2）求出与的关系：，然后凑配出等比数列，利用等比数列通项公式求解．

【详解】（1）因为赵同学第一天去甲餐厅用午餐的概率为0.5，,那么他去乙餐厅用午餐的概率也为0.5，则他第二天去乙餐厅用午餐的概率为；

（2）由已知，，，

，即，

因此，

，又，∴数列是等比数列，公比是，

∴，从而．

11．(1)

(2)

【分析】（1）根据游戏规则得到甲乙在第一轮对打，且在第二轮不对打，第三轮有可能对打，从而得到的可能值为或，其中第三轮对打为甲乙胜者组对打或甲乙败者组对打，再结合条件即可求解；

（2）设在第*n*轮中，甲乙对打的概率为，甲丙对打的概率为，甲丁对打的概率为，根据题目条件求得，和，再分类讨论甲丙在胜者组对打或甲丙在败者组对打，从而求得，再由结合数列通项公式的求法，求得，即可求出.

【详解】（1）由题可知，甲乙在第一轮对打，且在第二轮不对打，所以的可取值为1，2，

，

则，

所以*X*的数学期望.

（2）设在第轮中，甲乙对打的概率为，甲丙对打的概率为，甲丁对打的概率为，

易知，，，

且，

又，所以，

整理得，

则数列是以为首项，以为公比的等比数列，

即，所以，则，

故在第10轮比赛中，甲丙对打的概率为．

12．(1)分布列见解析，

(2)

【分析】（1）先求某同学第二天选择餐厅甲就餐的概率，然后根据二项分布的概率公式求出概率，可得概率分布，利用二项分布期望公式可得期望；

（2）根据题意先求与的关系，然后利用构造法可得通项.

【详解】（1）某同学第二天选择餐厅甲就餐的概率，

某同学第二天选择餐厅乙就餐的概率，

所以位同学第二天选择餐厅甲就餐的人数为，则.



的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

故

（2）依题意，，即.

由（1）知，则

当时，可得，

数列是首项为公比为的等比数列.



13．(1)

(2)

(3)

【分析】（1）根据全概率公式即可求出；

（2）设，由题意可得，根据数列知识，构造等比数列即可解出；

（3）先求出两点分布的期望，再根据题中的结论以及等比数列的求和公式即可求出．

【详解】（1）记“第次投篮的人是甲”为事件，“第次投篮的人是乙”为事件，

所以，

.

（2）设，依题可知，，则

，

即，

构造等比数列，

设，解得，则，

又，所以是首项为，公比为的等比数列，

即．

（3）因为，，

所以当时，，

故．

【点睛】本题第一问直接考查全概率公式的应用，后两问的解题关键是根据题意找到递推式，然后根据数列的基本知识求解．

14．（1）见解析；（2）（i）见解析；（ii）.

【分析】（1）首先确定所有可能的取值，再来计算出每个取值对应的概率，从而可得分布列；（2）（i）求解出的取值，可得，从而整理出符合等比数列定义的形式，问题得证；（ii）列出证得的等比数列的通项公式，采用累加的方式，结合和的值可求得；再次利用累加法可求出.

【详解】（1）由题意可知所有可能的取值为：，，

；；

则的分布列如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

（2），

，，

（i）

即

整理可得：  

是以为首项，为公比的等比数列

（ii）由（i）知：

，，……，

作和可得：





表示最终认为甲药更有效的.由计算结果可以看出，在甲药治愈率为0.5，乙药治愈率为0.8时，认为甲药更有效的概率为，此时得出错误结论的概率非常小，说明这种实验方案合理.

【点睛】本题考查离散型随机变量分布列的求解、利用递推关系式证明等比数列、累加法求解数列通项公式和数列中的项的问题.本题综合性较强，要求学生能够熟练掌握数列通项求解、概率求解的相关知识，对学生分析和解决问题能力要求较高.

15．（1）（2）

【分析】（1）直接根据操作，根据古典概型概率公式可得结果；

（2）根据操作，依次求，即得递推关系，构造等比数列求得，最后根据数学期望公式求结果.

【详解】（1），

，

.

（2），

，

因此，

从而，

即.

又的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

故.

【点睛】本题考查古典概型概率、概率中递推关系、构造法求数列通项、数学期望公式，考查综合分析求解能力，属难题.

16．（1）（2）见解析

【详解】试题分析：（1）根据条件先确定总事件数为，而编号为2的抽屉内放的是黑球的事件数为，最后根据古典概型的概率公式即可求概率；（2）先确定最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数为，所对应的概率，再根据数学期望公式得，利用性质，进行放缩变形：，最后利用组合数性质化简，可得结论．

试题解析：解:(1) 编号为2的抽屉内放的是黑球的概率为: .

(2) 随机变量 *X* 的概率分布为:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* |  |  |  | … |  | … |  |
| *P* |  |  |  | … |  | … |  |

随机变量 *X* 的期望为：

.

所以









.

点睛:求解离散型随机变量的数学期望的一般步骤为：

（1）“判断取值”，即判断随机变量的所有可能取值，以及取每个值所表示的意义；

（2）“探求概率”，即利用排列组合、枚举法、概率公式(常见的有古典概型公式、几何概型公式、互斥事件的概率和公式、独立事件的概率积公式，以及对立事件的概率公式等)，求出随机变量取每个值时的概率；

（3）“写分布列”，即按规范形式写出分布列，并注意用分布列的性质检验所求的分布列或某事件的概率是否正确；

（4）“求期望值”，一般利用离散型随机变量的数学期望的定义求期望的值，对于有些实际问题中的随机变量，如果能够断定它服从某常见的典型分布(如二项分布)，则此随机变量的期望可直接利用这种典型分布的期望公式()求得．因此，应熟记常见的典型分布的期望公式，可加快解题速度．

17．(1)分布列见解析，

(2)

【分析】（1）由题意可知，的所有可能取值为、、，计算出随机变量在不同取值下的概率，可得出随机变量的分布列，进而可求得的值；

（2）由已知条件推导得出，可得出数列为等比数列，确定该数列的首项和公比，可求得的表达式，即的表达式.

【详解】（1）由题知，的所有可能取值为、、，

，，，

所以，的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

所以，的数学期望．

（2）由题知，



又，

所以，，

整理得，，

所以，，

又因为，所以，数列是首项为，公比为的等比数列，

所以，，

所以，，即.

18．(1)答案见解析

(2)可以；理由见解析

【分析】（1）根据题意，由条件可得的可能取值为，然后分别求出其所对应的概率，即可得到分布列.

（2）根据题意，由条件可得是以为首项，为公比的等比数列，然后结合等比数列的通项公式即可得到结果.

【详解】（1）设计算机4次生成的数字之和为，则，

则，

，

的可能取值为，

则，

，

，

所以的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |

（2）设表示事件第天该企业产品检测选择的是智能检测，

表示事件第天该企业产品检测选择的是智能检测，

由全概率公式可知

则，，

即，，且，

所以是以为首项，为公比的等比数列，

则，所以恒成立，

所以该企业具有一定的智能化管理水平，能拿到奖金.

19．(1)

(2)

【分析】（1）分别分析小周连续3个月摇上号的概率和集齐三款模型的概率，即可求出他在这三个月集齐三款模型的概率；

（2）根据题意得出和，得出的表达式，根据错位相减即可求出．

【详解】（1）由题可知，小周第1个月摇上号的概率为，所以小周连续三个月摇上号的概率为，

小周连续三个月摇上号的前提下，三个月集齐三款模型共有种情况，三个月获得模型共有种情况，

所以在小周连续三个月摇上号的前提下，三个月集齐三款模型的概率为,

设事件为“小周在这三个月集齐三款模型”，则．

（2）由题意得，，

则，

两边同乘得，

两式相减得





，

所以．

20．(1)疫苗

(2)答案见解析

【分析】（1）分类讨论，根据全概率公式计算；

（2）根据（1）的逻辑，讨论的通项公式，运用等比数列求出第10为居民使用*A*，*B*，*C*，*D*疫苗的概率即可.

【详解】（1）第1位居民接种疫苗的概率分别为，

若第2位居民接种疫苗，则第1位居民接种*B*，*C*，*D*疫苗，，

第2位居民接种疫苗，则第1位居民接种*C*，*D*疫苗，

同理，第2位居民接种疫苗的概率也等于，

故第2位居民接种疫苗的概率最大；

（2）因为，

所以，

故数列是公比为的等比数列.

又，所以

即，

从而，

同理，

，

所以，

第10位居民接种疫苗概率应该相差无几.

第位居民接种疫苗概率应该相差将会更小，所以张医生的话合理.

21．(1)

(2)2255元

【分析】（1）根据互斥加法概率公式求出选择方案一的概率递推式，变形，根据等比数列通项公式求出概率通项公式，代入计算即可；

（2）先求出每一个方案的获利期望，然后再利用期望公式求出一年的总获利期望.

【详解】（1）由题意知，，

整理得，，其中，

故数列是以为首项，为公比的等比数列，则，

即，那么；

（2）当某期选择方案一时，获利期望值为元；

当某期选择方案二时，获利期望值为元；

那么，在一年间，老张共投资了6次，获得的总利润的期望为





元，

即一年后老张可获得的利润的期望约为2255元.

22．(1)分布列见解析，

(2)（i）；（ii）证明见解析，比赛局数越多，对实力较强者越有利

【分析】

（1）先写出离散型随机变量的分布列，再求出数学期望即可；

（2）先根据已知不等式列式求解，再根据单调性定义作差证明单调递增说明结论.

【详解】（1），即采用3局2胜制，所有可能取值为，

，

的分布列如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 |
|  |  |  |

所以的数学期望为.

（2）采用3局2胜制：不妨设赛满3局，用表示3局比赛中甲胜的局数，则，甲最终获胜的概率为：

，

采用5局3胜制：不妨设赛满5局，用表示5局比赛中甲胜的局数，则，甲最终获胜的概率为：



，



，

得.

（ii）由（i）知.

局比赛中恰好甲赢了局的概率为，

局比赛中恰好甲赢了局的概率为，

则局比赛中甲至少赢局的概率为.

考虑局比赛的前局：

如果这局比赛甲至少赢局，则无论后面结果如何都胜利，其概率为，

如果这局比赛甲赢了局，则需要后两场至少赢一局，其概率为，

如果这局比赛甲赢了局，则需要后两场都赢，其概率为，

因此局里甲最终获胜的概率为：，



因此，即数列单调递增.

该结论的实际意义是：比赛局数越多，对实力较强者越有利.

23．(1)，

(2)

【分析】（1）由题意可知*X*服从二项分布，利用，求解即可；

（2）由题意可推出时，，

方法一：构造出为常数数列，进而构造出是以为公比的等比数列，利用等比数列的通项公式求解即可；

方法二：构造出是以为公比的等比数列，利用等比数列的通项公式求出其通项，再根据累加法即可求解.

【详解】（1）由题可知，（或者列出分布列）

于是，．

（2）法一：由题可知，．

时，，也即，

∴为常数数列，且，

∴，∴是以为首项、为公比的等比数列，

∴，∴．

法二：由题可知，．

时，，也即，

∴是以为首项、为公比的等比数列，

∴，

，

……

，

相加得：，

∴,又也满足，

所以.

24．(1)

(2)①；②

【分析】（1）根据独立重复试验的概率公式计算可得；

（2）①依题意可得，，再利用裂项相消法求和即可；

②①可知，即，令，判断的单调性，再由特殊值即可求出的取值范围，即可得解.

【详解】（1）因为，所以.

（2）①因为，，，

所以，，

所以

；

②由①可知，所以，

令，则，

所以单调递减，又，，

所以当时，则的最小值为.

25．(1)分布列见解析，

(2)

【分析】（1）首先求出某组表演一次节目后仍然是该组表演的概率，依题意可得的可能取值为、、，求出所对应的概率，从而得到其分布列与数学期望；

（2）设在第次表演表演者是甲组的概率为，显然，当时，即可得到是以为首项，为公比的等比数列，从而求出的通项，再代入计算可得.

【详解】（1）依题意某组表演一次节目后仍然是该组表演的概率为，

则为另外一组表演的概率为，

则的可能取值为、、，

所以，，，

所以的分布列为：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

所以.

（2）设在第次表演表演者是甲组的概率为，显然，

当时，即，所以，

即是以为首项，为公比的等比数列，

所以，即，

所以，即第次表演者是甲组的概率为.

26．(1)，

(2)中位数估计为73，平均数73.8

(3)

【分析】（1）根据的人数先求出，再利用其成等差数列，以及所有小矩形面积为1得到方程，解出即可.

（2）设估计中位数为*t*，列出方程，解出即可，再利用频率分布直方图求出平均值即可.

（3）列出所有情况，找到满足题意得情况，即可得到概率.

【详解】（1）依题意可得：

又∵成等差数列，

∴且，

解得：

（2）估计中位数设为*t*，而的频率为0.41，的频率为0.71,则，

∴，

解得：，即中位数估计为73，

估计平均数为：

．

（3）5人中，将甲、乙分别编号为1,2，其余3人编号，

从这5人中选3人帮助*A*的所以可能结果有：（1，2，3），（1，2，4），（1，2，5），

（1，3，4），（1，3，5）（1，4，5），（2，3，4），（2，3，5），（2，4，5），（3，4，5），共10个基本事件，

其中满足条件的有（1，2，3），（1，2，4），（1，2，5），共3个，

故满足条件的概率为.