坐标恒等变换

作者：$Happy2018new$

出品：幻想乡和英伦小镇·命令组

本文献主要推导和给出“Minecraft·基岩版”中关于局部坐标与相对坐标的转换式。对于其他转换式，请参考其他文献。

（一） 局部坐标转换相对坐标[菊香恒等式]

1. 已知：实体 A 的竖直朝向 rx 及其水平朝向 ry，另一点 B 关于实体 A 的局部坐标 (x, y, z)。
2. 求：点 B 关于实体 A 的相对坐标。
3. 推导：

由于游戏中的坐标系统不是数学上的坐标系统，因此为了便于理解和推导，此处令实体 A 的竖直朝向为 α，水平朝向为 β，以实体 A 为原点建立的相对坐标系为 R。

除此之外，我们使用笛卡尔三维直角坐标系来完成大多数推导过程(y 轴为高度轴)。

需要注意的是，由于使用的坐标系统是数学上的，因此竖直朝向 α 和水平朝向 β 须在最终转换回 rx 和 ry。

I. 对于局部坐标系的 z_+ 方向：

一般地，局部坐标系的 z_+ 方向为实体 A 的正前方向。同时，此轴上的单位长度与世界坐标系下任意轴上的单位长度等价。

因此，我们不妨设局部坐标系 z_+ 方向上的单位向量 $\overrightarrow{z_+}$ 的长度为 1。

现在，我们需要表达出 $\overrightarrow{z_+}$ 在坐标系 R 下的坐标表达形式。

我们知道，z_+ 作为实体 A 的正前方向，其具有的水平朝向和竖直朝向应与实体 A 完全一致。因此，我们只需要研究这些朝向与 $\overrightarrow{z_+}$ 的几何关系即可得到目标表达式。

很显然，我们可以认为 $\overrightarrow{z_+}$ 在坐标系 R 下的竖直分量是 $\overrightarrow{z_+}$ 在垂直于地面方向的投影，即：

$$1 \times \sin(\alpha)$$

其中，1 是 $\overrightarrow{z_+}$ 的长度。

以同样的方法可以得到 $\overrightarrow{z_+}$ 在地面上的投影，即：

$$1 \times \cos(\alpha)$$

此时，我们从地面的正上方俯视此投影，于是可以观察到 $\overrightarrow{z_+}$ 在坐标系 R 下的 x, z 轴分量分别是此投影在水平地

面上的 x, z 轴分量，即：

$$\vec{x} = 1 \times \cos(\alpha) \times \cos(\beta)$$

$$\vec{z} = 1 \times \cos(\alpha) \times \sin(\beta)$$

于是，得到 $\overrightarrow{z_+}$ 在坐标系 R 下的坐标表达形式：

$$\overrightarrow{z_+} = (\cos(\alpha) \times \cos(\beta)\,, \sin(\alpha)\,, \cos(\alpha) \times \sin(\beta))$$

由于存在以下转换关系：

$$\begin{cases} \beta = ry + \dfrac{1}{2}\pi \\ \\ \alpha = -rx \end{cases}$$

于是得到：

$$\overrightarrow{z_+} = (-\cos(rx) \times \sin(ry)\,, -\sin(rx)\,, \cos(rx) \times \cos(ry))$$

值得注意的是，地面上投影的长度应当始终为非负数，即 $\cos(\alpha)$ 必须始终为非负数。

细心的读者应发现上文并未使用 $|\cos(\alpha)|$ 。这是因为 α 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$，在 α 取此范围中的值时，$\cos(\alpha)$ 一定是非负数，因此绝对值可以直接去掉。

II. 对于局部坐标系的 x_+ 方向：

一般地，局部坐标系的 x_+ 方向为实体 A 的正左方向。

除此之外，此方向永远平行于地面，即此方向在坐标系 R 下的竖直分量为 0。

如果你不理解为何为 0，那么你可以摆放一张草稿纸在水平桌面上，然后缓慢抬起它(可以转动草稿纸)并让草稿纸的左下角始终接触水平桌面。之后，看到草稿纸的左下角，你会发现无论怎么改变草稿纸的方向，草稿纸总有一边平行于水平桌面。

现在，让我们来解决问题。同样的，由于此轴上的单位长度与世界坐标系下任意轴上的单位长度等价，因此我们依旧设局部坐标系 x_+ 方向上的单位向量 $\overrightarrow{x_+}$ 的长度为 1。

现在，我们需要表达出 $\overrightarrow{x_+}$ 在坐标系 R 下的坐标表达形式。

值得注意的是，由于我们在推导时采用的是笛卡尔三维直角坐标系，因此游戏中的正左方应对应此坐标系下的正右方。

近似的，我们可以把 $\overrightarrow{x_+}$ 看作是将 $\overrightarrow{z_+}$ 投影到地面并顺时针旋转 90 度。

但这么操作会导致一个问题，即投影的长度不为 1。

所以，为了解决这个问题，我们应只看实体 A 的水平朝向，而不将 $\overrightarrow{z_+}$ 投影到地面上。

按照刚刚所说的，将实体 A 的水平朝向顺时针旋转 90 度便能得到 $\overrightarrow{x_+}$。然后，我们分解转动后的单位水平朝向便可得到目标表达式。

于是 $\overrightarrow{x_+}$ 在坐标系 R 下的水平分量为：

$$1 \times \cos(\beta - \frac{1}{2}\pi) = \sin(\beta)$$

其竖直分量为：

$$1 \times \sin(\beta - \frac{1}{2}\pi) = -\cos(\beta)$$

于是得到：

$$\overrightarrow{x_+} = (\sin(\beta)\,, 0, -\cos(\beta))$$

由于存在以下转换关系：

$$\beta = ry + \frac{1}{2}\pi$$

于是得到：

$$\overrightarrow{x_+} = (\cos(ry)\,, 0, \sin(ry))$$

III. 对于局部坐标系的 y_+ 方向：

一般地，局部坐标系的 y_+ 方向为实体 A 的上方向。

为了便于理解，你可以先水平看向前方，然后放一只铅笔在你的头顶(铅笔笔头朝向平行于地面的天花板)。

之后，你转动你的脑袋，且仍然让铅笔的底部紧靠你的头顶，那么此时从铅笔底部指向铅笔笔头的方向便是你这个局部坐标系的 y_+ 方向。

同样的，我们设局部坐标系 y_+ 方向上的单位向量 $\overrightarrow{y_+}$ 的长度为 1。

为了便于理解，我们定义一个平面 L。此平面的长度方向是z_+ 的水平朝向，宽度方向是垂直于地面的方向。

通过分析 y_+ 方向和 z_+ 方向的几何关系，我们可以发现 y_+ 是由 z_+ 在平面 L 内逆时针旋转 90 度得到的。

根据我们之前的推导过程，在此处我们仍然需要分解和 $\overrightarrow{y_+}$ 到坐标系 R 的各个轴上。

值得注意的是，由于分解时需要使用到水平朝向，但 $\overrightarrow{z_+}$ 经旋转后得到的 $\overrightarrow{y_+}$ 的水平朝向不一定仍旧是 β，因此我们应当分类讨论。

(i) 当竖直朝向满足下述限制时：

$$\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$$

此时 $\overrightarrow{y_+}$ 的水平朝向是原水平朝向加上 180 度，竖直朝向是原竖直朝向加上 90 度。

让我们重新看看 $\overrightarrow{z_+}$ 在坐标系 R 下的坐标表达形式：

$$\overrightarrow{z_+} = (\cos(\alpha) \times \cos(\beta)\,, \sin(\alpha)\,, \cos(\alpha) \times \sin(\beta))$$

于是我们得到 $\overrightarrow{y_+}$ 在坐标系 R 下的坐标表达形式：

$$\overrightarrow{y_+} = \left(\left|\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)\right| \times \cos(\beta + \pi)\,, \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right), \left|\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)\right| \times \sin(\beta + \pi)\right)$$

即：

$$\overrightarrow{y_+} = (|-\sin(\alpha)| \times (-\cos(\beta)), \cos(\alpha)\,, |-\sin(\alpha)| \times (-\sin(\beta)))$$

由于竖直朝向有范围限制，因此我们可以去掉绝对值符号并稍做处理，最终得到：

$$\overrightarrow{y_+} = (-\sin(\alpha) \times \cos(\beta)\,, \cos(\alpha)\,, -\sin(\alpha) \times \sin(\beta))$$

(ii) 当竖直朝向满足下述限制时：

$$\beta \in \left[-\frac{1}{2}\pi, 0\right)$$

此时 $\overrightarrow{y_+}$ 的水平朝向不变，竖直朝向是原竖直朝向加

上 90 度。

于是我们得到 $\overrightarrow{y_+}$ 在坐标系 R 下的坐标表达形式：

$$\overrightarrow{y_+} = \left(\left|\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)\right| \times \cos(\beta)\,, \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right), \left|\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}\pi\right)\right| \times \sin(\beta)\right)$$

即：

$$\overrightarrow{y_+} = (|-\sin(\alpha)| \times \cos(\beta)\,, \cos(\alpha)\,, |-\sin(\alpha)| \times \sin(\beta))$$

由于竖直朝向有范围限制，因此我们可以去掉绝对值符号并稍做处理，最终得到：

$$\overrightarrow{y_+} = (-\sin(\alpha) \times \cos(\beta)\,, \cos(\alpha)\,, -\sin(\alpha) \times \sin(\beta))$$

通过整理，我们会发现 2 个情况下的表达式完全一致，故 $\overrightarrow{y_+}$ 在坐标系 R 下的坐标表达形式为：

$$\overrightarrow{y_+} = (-\sin(\alpha) \times \cos(\beta)\,, \cos(\alpha)\,, -\sin(\alpha) \times \sin(\beta))$$

由于存在以下转换关系：

$$\begin{cases} \beta = ry + \dfrac{1}{2}\pi \\ \alpha = -rx \end{cases}$$

于是得到：

$$\overrightarrow{y_+} = \left(-\sin(rx) \times \sin(ry)\,, \cos(rx)\,, \sin(rx) \times \cos(ry)\right)$$

所有情况的讨论到此结束。最终，我们得到了 3 个向量，它们分别是：

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_+} = \left(\cos(ry)\,, 0, \sin(ry)\right) \\ \overrightarrow{y_+} = \left(-\sin(rx) \times \sin(ry)\,, \cos(rx)\,, \sin(rx) \times \cos(ry)\right) \\ \overrightarrow{z_+} = \left(-\cos(rx) \times \sin(ry)\,, -\sin(rx)\,, \cos(rx) \times \cos(ry)\right) \end{cases}$$

由于存在：

$$x \times \overrightarrow{x_+} + y \times \overrightarrow{y_+} + z \times \overrightarrow{z_+} = (A, B, C)$$

于是可列方程：

$$\begin{cases} x \times \cos(ry) - y \times \sin(rx) \times \sin(ry) - z \times \cos(rx) \times \sin(ry) = A \\ y \times \cos(rx) - z \times \sin(rx) = B \\ x \times \sin(ry) + y \times \sin(rx) \times \cos(ry) + z \times \cos(rx) \times \cos(ry) = C \end{cases}$$

因此，当另一点 B 关于实体 A 的局部坐标为 (x, y, z) 时，点 B 关于实体 A 的相对坐标为：

$$\begin{pmatrix} x \times \cos(ry) - y \times \sin(rx) \times \sin(ry) - z \times \cos(rx) \times \sin(ry)\,, \\ y \times \cos(rx) - z \times \sin(rx)\,, \\ x \times \sin(ry) + y \times \sin(rx) \times \cos(ry) + z \times \cos(rx) \times \cos(ry) \end{pmatrix}$$

（二） 相对坐标转换局部坐标[乡居恒等式]

1. 已知：实体 A 的竖直朝向 rx 及其水平朝向 ry，另一点 B 关于实体 A 的相对坐标 (x, y, z) 。
2. 求：点 B 关于实体 A 的局部坐标。

3. 根据上一章节的推导，易得：

$$\begin{cases} \overrightarrow{x_+} = (\cos(ry)\,, 0, \sin(ry)) \\ \overrightarrow{y_+} = (-\sin(rx) \times \sin(ry)\,, \cos(rx)\,, \sin(rx) \times \cos(ry)) \\ \overrightarrow{z_+} = (-\cos(rx) \times \sin(ry)\,, -\sin(rx)\,, \cos(rx) \times \cos(ry)) \end{cases}$$

由于存在：

$$A \times \overrightarrow{x_+} + B \times \overrightarrow{y_+} + C \times \overrightarrow{z_+} = (x, y, z)$$

于是可列方程：

$$\begin{cases} A \times \cos(ry) - B \times \sin(rx) \times \sin(ry) - C \times \cos(rx) \times \sin(ry) = x \\ B \times \cos(rx) - C \times \sin(rx) = y \\ A \times \sin(ry) + B \times \sin(rx) \times \cos(ry) + C \times \cos(rx) \times \cos(ry) = z \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A = x \times \cos(ry) + z \times \sin(ry) \\ B = -x \times \sin(rx) \times \sin(ry) + y \times \cos(rx) + z \times \sin(rx) \times \cos(ry) \\ C = -x \times cos(rx) \times sin(ry) - y \times sin(rx) + z \times cos(rx) \times cos(ry) \end{cases}$$

因此，当另一点 B 关于实体 A 的相对坐标为 (x, y, z) 时，点 B 关于实体 A 的局部坐标为：

$$\begin{pmatrix} x \times \cos(ry) + z \times \sin(ry)\,, \\ -x \times \sin(rx) \times \sin(ry) + y \times \cos(rx) + z \times \sin(rx) \times \cos(ry)\,, \\ -x \times cos(rx) \times sin(ry) - y \times sin(rx) + z \times cos(rx) \times cos(ry) \end{pmatrix}$$