远期债券收益率期望曲率调整

1 远期债券收益率期望曲率调整

1.1 债券收益率

一个债券的收益率为一个固定的贴现率，当我们用该贴现率对债券的所有现金流进行贴现后，所得债券贴现后价值将会等于该债券现金价格。

一般情况下，债券的现金价格的计算是对贴现后的现金流进行求和。其中每笔现金流对应的贴现因子中的贴现率并不一定都相同，对于不同时间段的贴现，贴现率一般由当前相应的零息债券的价格确定。而债券收益率是一个固定的有效贴现率，我们可以统一用此贴现率对债券产生的现金流进行贴现，得到的现金价格会和用不同期限零息债券的贴现率贴现后的现金价格相同。

如果我们将债券收益率记为 y，债券现金价格则可以表示为 $G(y)$，$G(y)$ 表达式只取决于债券现金流结构和贴现方式。

债券的收益率数值一般可以通过列出债券贴现后现金流总和等于债券市场价格的等式后，通过迭代计算倒推得出。比如考虑一个 2 年期每半年支付一次券息，券息率为 8%，面值为 100 的债券，复利方式为半年复利一次，其当前现金价格为 98，设收益率为 y，我们有

$$\begin{aligned} G(y) &= 4\times\frac{1}{(1+0.5\times y)^1}+4\times\frac{1}{(1+0.5\times y)^2}+4\times\frac{1}{(1+0.5\times y)^3}+104\times\frac{1}{(1+0.5\times y)^4} \\ &= 98. \end{aligned} \tag{1}$$

然后可以用二分法或者牛顿法迭代计算出 $y=0.0912$。

1.2 远期债券收益率

远期债券多头/空头对应在将来一个时刻买入/卖出一个在更迟时刻结束的债券。如果我们在 t 时刻进入一个远期债券多头，使得我们在 T 时刻支付一定价格以买入 T^* 时刻结束的债券，则该价格可以记为 $F_B(t,T,T^*)$。如下图

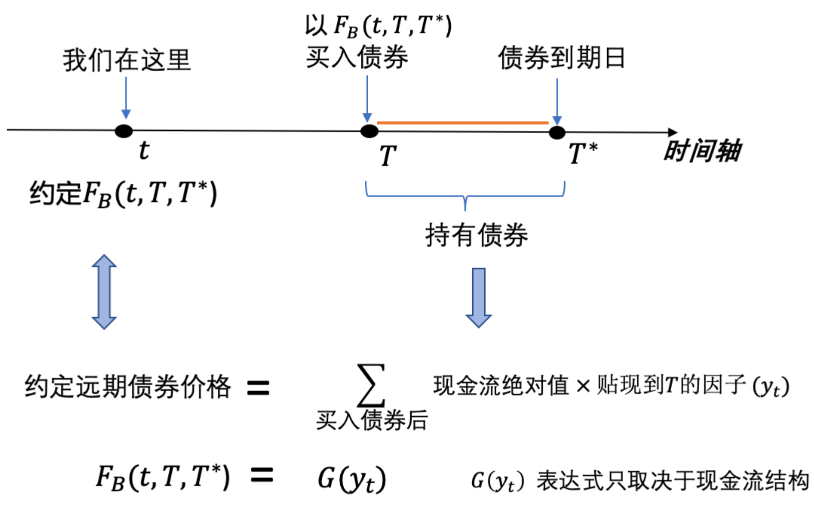

Fig. 1 远期债券

远期债券收益率为满足上图中等式对应的债券收益率。对应于在 t 时刻约定的远期债券价格 $F_B(t,T,T^*)$，我们可以记远期债券收益率为 y_t。由于 $y_t = G^{-1}(F_B(t,T,T^*))$ 为远期债券价格倒推得出，所以它的变化过程取决于市场上 $F_B(t,T,T^*)$ 随 t 的变化过程。因此 y_t 可能为一随机过程，比如几何布朗运动。

记在未来 T 时刻的证券价格为 $B(T,T^*)$, 此时 $B(T,T^*) = F(t=T,T,T^*) = G(y_T)$。$t$ 时刻约定的远期债券价格应该使得 T 时刻的交易双方收益的期望为 0, 即

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[B(T,T^*) - F_B(t,T,T^*)|\mathcal{F}_t] = 0, \\ \Rightarrow\quad &F_B(t,T,T^*) = \mathbb{E}[G(y_T)|\mathcal{F}_t]. \end{aligned} \tag{2}$$

这里 $\mathcal{F}_t$ 可以考虑为在 t 时刻的我们所拥有的信息。

由于 $F_B(t,T,T^*)$ 可以表示为 $G(y_t)$，所以

$$\begin{aligned} &G(y_t) = \mathbb{E}[G(y_T)|\mathcal{F}_t], \\ &y_t = G^{-1}(F_B(t,T,T^*)) = G^{-1}(\mathbb{E}[G(y_T)|\mathcal{F}_t]). \end{aligned} \tag{3}$$

1.3 收益率期望曲率调整

我们知道远期债券收益率 y_t 的变化过程一般为一随机过程，由于一些衍生产品的定价直接与未来 T 时刻的债券收益率的期望相关（比如远期利率），所以我们希望可以通过市场上的远期债券价格计算或近似计算出 $\mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t]$。

如果我们在 t 时刻得知市场上远期债券价格为 $F_B(t,T,T^*)$, 然后就可以迭代计算出 $y_t = G^{-1}(F_B(t,T,T^*)$。但是一般情况下

$$\mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t] \neq y_t = G^{-1}(\mathbb{E}[G(y_T)|\mathcal{F}_t]), \tag{4}$$
$$\text{即}\quad G(\mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t]) \neq \mathbb{E}[G(y_T)|\mathcal{F}_t].$$

不过我们可以进行所谓的曲率调整，然后可以使用 y_t 近似表示 $\mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t]$。曲率调整公式为:

$$\mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t] \approx y_t - \frac{1}{2}\frac{G''(y_t)}{G'(y_t)}y_t^2\sigma_y^2(T-t). \tag{5}$$

其中 σ_y 为远期收益率波动率。υ，Υ，　ν，ν

2 曲率调整的推导

2.1 方法一 (对 $G(y_T)$ 进行泰勒展开)

考虑到债券收益率变化一般比较小，我们假设对任意 y_t 满足的过程，都有

$$G(y_T) \approx G(y_t) + G'(y_t)(y_T - y_t) + \frac{1}{2}G''(y_t)(y_T - y_t)^2. \tag{6}$$

然后计算期望，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G(y_T)|\mathcal{F}_t] &\approx \mathbb{E}[G(y_t) + G'(y_t)(y_T - y_t) + \frac{1}{2}G''(y_t)(y_T - y_t)^2|\mathcal{F}_t], \\ F_B(t,T,T^*) &\approx F_B(t,T,T^*) + G'(y_t)(\mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t] - y_t) + \frac{1}{2}G''(y_t)\mathbb{E}[(y_T - y_t)^2|\mathcal{F}_t], \\ \mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t] &\approx y_t - \frac{1}{2}\frac{G''(y_t)}{G'(y_t)}\mathbb{E}[(y_T - y_t)^2|\mathcal{F}_t]. \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\mathbb{E}[(y_T - y_t)^2|\mathcal{F}_t] \approx y_t^2\sigma_y^2(T-t). \tag{8}$$

σ_y 为远期收益率波动率，假设已知。这样我们就得到

$$\mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t] \approx y_t - \frac{1}{2}\frac{G''(y_t)}{G'(y_t)}y_t^2\sigma_y^2(T-t). \tag{9}$$

2.2 方法二（假设 y_t 服从几何布朗运动）

由于

$$F_B(t,T,T^*) = G(y_t) = \mathbb{E}[G(y_T)|\mathcal{F}_t]. \tag{10}$$

所以这里隐含着我们要求 $G(y_t)$ 变化过程是一个鞅过程。假设其变量 y_t 的变化过程为几何布朗运动，即

$$dy_t = \mu_t y_t dt + \sigma_y y_t dz. \tag{11}$$

其中 z 为维纳过程，并且我们假设波动率 σ_y 为远期收益率波动率。

考虑 $dG(y_t)$,

$$\begin{aligned} dG(y_t) &= G'(y_t)dy_t + \frac{1}{2}G''(y_t){dy_t}^2, \\ &= (G'(y_t)y_t\mu_t + \frac{1}{2}G''(y_t)\sigma_y^2 y_t^2)dt + G'(y_t)y_t\mu_t dz. \end{aligned}$$

可知当 $\mu_t = -\frac{1}{2}\frac{G''(y_t)}{G'(y_t)}\sigma_y^2 y_t$ 时，dt 项为 0，即 $G(y_t)$ 的变化过程为鞅过程。

由于收益率变化比较小，我们可以进一步近似认为 $\mu = \mu_t$ 不变。对于几何布朗运动 y_t，我们知道其未来的期望为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y_T|\mathcal{F}_t] &= y_t e^{\mu(T-t)} \\ &\approx y_t + y_t\mu(T-t) \\ &= y_t - \frac{1}{2}\frac{G''(y_t)}{G'(y_t)}\sigma_y^2 y_t^2 (T-t). \end{aligned} \tag{12}$$