2 二叉树计算欧式和美式期权价格

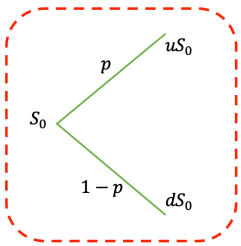
使用申明*

2021 年 2 月 18 日

目录

1 简介

当期权为股票期权，二叉树是指股票价格在期限内可能的变化路径图形。考虑时间段为 0 至 T，步数为 N 的二叉树，在 $t = 0, ..., (N-1)\Delta t$ 的时间节点上股票价格有概率 p 由当前价格 S_t 变为 uS_t，有概率 $(1-p)$ 变为 dS_t。其中 $\Delta t = \frac{T}{N}$，u 和 d 分别为上升和下降幅度。当二叉树的步数足够多时，股票价格的最后分布将为对数正态分布。



$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Fig. 1

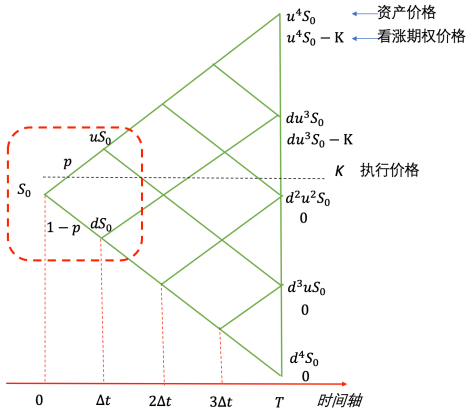


Fig. 2

《期权、期货及其他衍生产品》中说明了当我们要求没有无风险套利空间，选取 $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ 时，期权在当前节点的价格为期权在分叉后价格期望的贴现后价格。此外我们需要选取的 u 和 d 会让股票价格的波动率与几何布朗运动：

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dz \ . \tag{1}$$

相符合。即考虑下列等式，

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}, \quad p(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2 - [p(u-1) + (1-p)(d-1)]^2 = \sigma^2 \Delta t \ . \tag{2}$$

让 $d = 1/u$，我们会得到一个重合的树形。这时忽略 Δt 的 $\frac{3}{2}$ 阶小量后会有

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\,. \tag{3}$$

上面左图和右图分别为一步和多步二叉树分叉过程，多步二叉树中每一个节点的分叉过程都是相同的。

2 二叉树计算期权价格步骤

欧式期权价格：

1. 根据给定的股票价格的波动率 σ 和无风险利率 r，按照上图中公式计算出 u, d 和 p，其中 Δt 为每一步步长 T/N。
2. 计算出股票价格在树形末端每个节点的价格，如上右图右侧。
3. 根据期权类型（看涨或看跌），以及期权的执行价格 K 计算出期权在树形末端的价格分布。
4. 用期权价格的递推关系计算出前一节点上期权价格的期望值。期权价格的递推关系为

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}(f_{i+1,j+1}p + (1-p)f_{i+1,j})\,. \tag{4}$$

其中 $f_{i,j}$ 为期权在 $i\Delta t$ 时刻，第 j 层（由下往上数，从 0 开始）的价格。

5. 重复过程 4，直到计算出根节点处的期权价格 $f_{0,0}$。

美式期权的价格，重复欧式期权价格的计算过程 1 至 3，然后在递推上一层期权价格时考虑可以在该节点执行的情况，具体为：

1. 根据给定的股票价格的波动率 σ 和无风险利率 r，按照上图中公式计算出 u, d 和 p。
2. 计算出股票价格在树形末端每个节点的价格。
3. 根据期权类型（看涨或看跌），以及期权的执行价格 K 计算出期权在树形末端的价格分布。
4. 计算出前一层节点上期权价格的期望值。此时需要考虑可以在该节点执行期权，假设期权为看涨期权，则其价格的递推关系为

$$f_{i,j} = \max\left[S_{i,j} - K,\, e^{-r\Delta t}(f_{i+1,j+1}p + (1-p)f_{i+1,j})\right]\,. \tag{5}$$

其中 $f_{i,j}$ 为期权在 $i\Delta t$ 时刻，第 j 层的价格，$S_{i,j}$ 为该处的股票价格。

5. 重复过程 4，计算出根节点处期权的价格 $f_{0,0}$。

3 步骤 Python 代码实现

```
import numpy as np
E = np.e

class Binomial_tree_sim:
    def __init__(self, r, sigma, S_0, K, T, steps, option_type="european", call_or_put="call"):
        """ 用输入参数初始化树。
        """
        self.r = r
        self.sigma = sigma
        self.S_0 = S_0
        self.K = K
        self.T = T
```

```
        self.steps = steps
        self.option_type = option_type
        self.call_or_put = call_or_put

        # 计算出树形分叉参数。
        self.dt = self.T/self.steps
        self.u = E**(self.sigma*self.dt**0.5)
        self.d = 1/self.u
        self.p = (E**(self.r*self.dt)- self.d)/(self.u- self.d)

        # 将会得到的结果。
        self.tree = None
        self.option_price = None

        # 计算出一个树形。
        self.build_tree()

    def build_tree(self):
        """ 计算出股票价格在树形上每个节点的价格。
        """
        self.tree = list()
        for lvl in range(self.steps+1):
            row = list()
            for j in range(lvl+1):
                node = dict()
                node["stock_price"] = self.S_0*self.u**(j)*self.d**(lvl-j)
                node["option_price"] = None
                row.append(node)
            self.tree.append(row)
        return

    def calculate_option_price(self):
        """ 计算给定类型期权的价格。
        """
        # 如果是欧式期权。
        if self.option_type == "european":
            # 计算出期权在树形末端的价格。
            for node in self.tree[-1]:
                # 如果是看涨期权。
                if self.call_or_put == "call":
                    node["option_price"] = max(node["stock_price"]-self.K, 0)
                # 如果是看跌期权。
                else:
                    node["option_price"] = max(self.K-node["stock_price"], 0)
            # 递推出树形根节点期权的价格。
            for lvl in range(self.steps-1, -1, -1):
                for j in range(len(self.tree[lvl])):
                    self.tree[lvl][j]["option_price"] = E**(-self.r*self.dt)*(self.p*self.tree[lvl+1][j+1]\
                        ["option_price"]+(1-self.p)*self.tree[lvl+1][j]["option_price"])
        # 如果是美式期权，过程同欧式期权，计算节点价格时考虑需不需要在该节点执行。
        else:
            for node in self.tree[-1]:
```

```
                node["option_price"] = max(node["stock_price"]-self.K, 0)
            else:
                node["option_price"] = max(self.K-node["stock_price"], 0)
            for lvl in range(self.steps-1, -1, -1):
                for j in range(len(self.tree[lvl])):
                    self.tree[lvl][j]["option_price"] = E**(-self.r*self.dt)*(self.p*self.tree[lvl+1][j+1]\
                        ["option_price"]+(1-self.p)*self.tree[lvl+1][j]["option_price"])
                    # 考虑需不需要在这时执行。
                    if self.call_or_put == "call":
                        self.tree[lvl][j]["option_price"] = max(self.tree[lvl][j]["option_price"], \
                                        self.tree[lvl][j]["stock_price"]-self.K)
                    else:
                        self.tree[lvl][j]["option_price"] = max(self.tree[lvl][j]["option_price"], \
                                        self.K-self.tree[lvl][j]["stock_price"])

        self.option_price = self.tree[0][0]["option_price"]
        return
```

4 计算示例

考虑一个期限在 3 年后，执行价格为 10 的期权。当前股票价格为 10，无风险利率为 0.05，股票价格波动率为 0.2。使用 10 步二叉树，可以如下计算出各种期权价格。

```
tree_obj = Binomial_tree_sim(0.05, 0.2, 10, 10, 3, 10, option_type="european", call_or_put="call")
tree_obj.calculate_option_price()
print("欧式看涨期权价格为: {:0.4f}".format(tree_obj.option_price))

tree_obj = Binomial_tree_sim(0.05, 0.2, 10, 10, 3, 10, option_type="european", call_or_put="put")
tree_obj.calculate_option_price()
print("欧式看跌期权价格为: {:0.4f}".format(tree_obj.option_price))

tree_obj = Binomial_tree_sim(0.05, 0.2, 10, 10, 3, 10, option_type="american", call_or_put="call")
tree_obj.calculate_option_price()
print("美式看涨期权价格为: {:0.4f}".format(tree_obj.option_price))

tree_obj = Binomial_tree_sim(0.05, 0.2, 10, 10, 3, 10, option_type="american", call_or_put="put")
tree_obj.calculate_option_price()
print("美式看跌期权价格为: {:0.4f}".format(tree_obj.option_price))
```

5 参考资料

参考文献

[1]《期权、期货及其他衍生产品》（原书第 9 版）第 21 章，John C. Hull 著，王勇、索吾林译，机械工业出版社，2014.11 。