第三十二章 HJM，LMM 模型以及多种零息曲线

练习题

32.1 解释关于短期利率的马尔科夫模型与非马尔科夫模型之间的区别。

对于短期利率的马尔科夫模型，利率的瞬间变化只依赖于利率的当前值和时间。对于非马尔科夫模型，利率的瞬时变化会依赖于利率变化的历史过程。

32.2 证明在多因子模型下，式 (32-6) 里 HJM 模型的远期利率的漂移项与波动率之间的关系式。

考虑多因子情况下 t 时刻债券价格变化过程为，

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + \sum_i v_i(t,T,\Omega_i)P(t,T)dz_i$$

对于远期利率，

$$F(t,T_1,T_2) = -\frac{\ln P(t,T_2) - \ln P(t,T_1)}{T_2 - T_1}$$

考虑对应于 dt 的变化，

$$\begin{aligned}
dF(t,T_1,T_2) =& \frac{1}{T_2 - T_1}\left[\frac{1}{2}\sum_i (v_i^2(t,T_1,\Omega_i) - v_i^2(t,T_2,\Omega_i))dt + \sum_i (v_i(t,T_1,\Omega_i) - v_i(t,T_2,\Omega_i))dz_i\right] \\
& \text{let } \; T_2 = T, \quad T_1 \;\to\; T_{2-} \\
dF(t,T) =& \sum_i v_i(t,T,\Omega_i)\frac{\partial(v_i(t,T,\Omega_i)}{\partial T}dt + \sum_i \frac{\partial v_i(t,T,\Omega_i)}{\partial T}dz_i
\end{aligned}$$

让 $s_i(t,\tau,\Omega_i) = \frac{\partial v_i(t,\tau,\Omega_i)}{\partial T}$，由于 $v_i(t,t,\Omega_i) = 0$，

$$v_i(t,T,\Omega_i) = \int_t^T s_i(t,\tau,\Omega_i)d\tau + v_i(t,t,\Omega_i) = \int_t^T s_i(t,\tau,\Omega_i)d\tau$$

所以有

$$dF(t,T) = \sum_i s_i(t,T,\Omega_i)\int_t^T s_i(t,\tau,\Omega_i)d\tau dt + \sum_i s_i(t,T,\Omega_i)dz_i$$

记 $m(t,T,\vec{\Omega}) = \sum_i s_i(t,T,\Omega_i)\int_t^T s_i(t,\tau,\Omega_i)d\tau$，则

$$dF(t,T) = m(t,T,\vec{\Omega})dt + \sum_i v_i(t,T,\Omega_i)dz_i$$

32.3 "当 HJM 模型中的远期利率波动率 $s(t,T)$ 是常数时，所得到的模型是 HoLee 模型。"通过证明 HJM 给出的债券价格过程与第 31 章中 Ho-Lee 模型一致来验证这个结果是正确的。

对于 HJM 模型，

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + v(t,T,\Omega)P(t,T)dz$$

其中 $v(t,T,\Omega) = \int_t^T s(t,\tau,\Omega)d\tau$，如果 $s(t,T,\Omega) = \sigma$ 常数，$v(t,T,\Omega) = (T-t)\sigma$，

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + (T-t)\sigma P(t,T)dz$$

对于 Ho-Lee 模型，

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz$$

且

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r(t)(T-t)}$$

t 时刻债券价格的漂移率应该等于 $r(t)$, 波动率项来源于 $r(t)$ 的波动率，所以

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt - \sigma(T-t)P(t,T)dz \tag{1}$$

和 HJM 中 $s(t,\tau,\Omega)$ 取常数时变化过程是一致的。

32.4 ”当 HJM 模型中的远期利率波动率 $s(t,T)$ 等于 $\sigma e^{-a(T-t)}$，所得到的模型是 Hull-White 模型。“通过证明 HJM 给出的债券价格过程与第 31 章中 Hull-White 模型一致来验证这个结果是正确的。

同上，对于 HJM 模型，

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + v(t,T,\Omega)P(t,T)dz$$

其中 $v(t,T,\Omega) = \int_t^T s(t,\tau,\Omega)d\tau$，如果 $s(t,T,\Omega) = \sigma e^{-a(T-t)}$，$v(t,T,\Omega) = \frac{\sigma}{a}(1-e^{-a(T-t)})$，

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + \frac{\sigma}{a}(1-e^{-a(T-t)})P(t,T)dz$$

对于 Hull-White 模型，

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz$$

且

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r(t)B(t,T)}, \quad B(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

t 时刻债券价格的漂移率应该等于 $r(t)$, 波动率项来源于 $r(t)$ 的波动率，所以

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt - \frac{\sigma}{a}(1-e^{-(T-t)a})P(t,T)dz \tag{2}$$

和 HJM 中结果是一致的。

32.5 同 HJM 模型相比，LMM 模型的优点是什么?

HJM 模型是用瞬时远期利率来表示的，不易在市场上观察到，同时也难以使用市场上的产品进行校正。LMM 模型使用的是有限长区间的远期利率，很大程度上克服了前面 HJM 的两个缺陷。

32.6 从直观上说明当因子的个数增加时，跳跃上限的价值也会增加。

不知道怎么直观说明，但是当因子个数增加且总方差率不变时，远期利率 $F(t,T_i,T_{i+1}$ 的漂移率会增加（算术平均值大于几何平均值），所以远期利率的期望会增加。

32.7 证明当 σ_i 趋于零时，式（32-10）变为式（32-4）。

由于 $F_k(t) = F(t,T_k,T_{k+1})$, 当 $\delta_k = T_{k+1} - T_k \to 0$，分步取极限，先考虑 $F_k(t)$ 可以表示为瞬时远期利率 $F(t,T_k)$，且 $\zeta_k(t) = \zeta(t,T_k)$。式（32-10）也可以写为

$$dF(t,T_k) = \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F(t,T_i)F(t,T_k)\zeta(t,T_i)\zeta(t,T_k)}{1+\delta_i F(t,T_i)}dt + \zeta(t,T_k)F(t,T_k)dz$$

让 $s(t,T_k,\Omega) = \zeta(t,T_k)F(t,T_k)$，并且再一步考虑 $\delta_k \to 0$，而且 $F(t,T_k) < \infty$。有

$$dF(t,T) = s(t,T,\Omega)\int_t^T s(t,\tau,\Omega)d\tau dt + s(t,T,\Omega)dz$$

32.8 解释为什么粘性上限要比一个类似的跳跃上限更贵。

如果“类似”指初始第一个上限单元执行利率相同，由于粘性上限 $K_{j+1}=\min(R_j,K_j)+s$ 始终小于等于跳动上限 $K_{j+1}=R_j+s$，所以粘性上限更贵。

32.9 解释为什么提前偿还率对 IO 和 PO 有相反的影响。

对于纯本金债券（PO），投资者将收到的本金数量是固定的，当提前偿还率高时投资者会更早收到本金，对投资者而言更有利。对于纯息债券（IO），提前偿还率提高意味着将收到的利息将降低，对于投资者而言相对不利。

32.10 “期权调整利差类似于债券的收益率。”解释这个结论。

期权调整利差是指将债券中期权功能考虑后，等效利率和国库零息债券利率之差。或者说零息债券利率曲线加上利差后计算所得的债券价格等于其市场价格的利差。

32.11 证明式（32-15）。

在对 $P(t,T_{k+1})$ 为远期风险中性的世界，假设 p 个独立因子，

$$dF_k(t)=\sum_{q=1}^{p}\zeta_{kq}(t)F_k(t)dz_q,\quad \frac{dP(t,t_k)}{P(t,t_k)}=(...)dt+\sum_{q=1}^{p}v_{kq}(t)dz_q$$

换到滚延远期风险中性世界，即对 $P(t,t_{m(t)})$ 为远期风险中性的世界，

$$dF_k(t)=\sum_{q=1}^{p}\zeta_{kq}(t)(v_{m(t)q}-v_{kq})F_k(t)dt+\sum_{q=1}^{p}\zeta_{kq}(t)F_k(t)dz_q$$

且由

$$\begin{aligned}&\frac{P(t,t_k)}{P(t,t_{k+1})}=1+\delta_kF_k(t)\\&\ln P(t,t_k)-\ln P(t,t_{k+1})=\ln(1+\delta_kF(t))\end{aligned}$$

左右微分并比较 dz_q 项，

$$\begin{aligned}(...)dt+\sum_{q=1}^{p}(v_{kq}(t)-v_{k+1,q}(t))dz_q=&(...)dt+\sum_{q=1}^{p}\frac{\delta_k\zeta_{kq}(t)F_k(t)}{1+\delta_kF_k(t)}dz_q\\v_{kq}(t)-v_{k+1,q}(t)=&\frac{\delta_k\zeta_{kq}(t)F_k(t)}{1+\delta_kF_k(t)}\\\Rightarrow\quad v_{m(t)q}(t)-v_{k+1,q}(t)=&\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\delta_i\zeta_{iq}(t)F_i(t)}{1+\delta_iF_i(t)}\end{aligned}$$

将结果代回滚延远期风险中性世界中 $dF_k(t)$ 的表达式，

$$dF_k(t)=\sum_{i=m(t)}^{k}\frac{\delta_iF_i(t)\sum\limits_{q=1}^{p}\zeta_{iq}(t)\zeta_{kq}(t)}{1+\delta_iF_i(t)}dt+\sum_{q=1}^{p}\zeta_{kq}(t)dz_q$$

32.12 证明式（32-17）中互换利率的方差 $V(T)$ 的公式。

互换利率为

$$s(t)=\frac{P(t,T_0)-P(t,T_N)}{\sum\limits_{i=0}^{N-1}\tau_iP(t,T_{i+1})}$$

在 LIBOR 市场模型下，即考虑滚延远期风险中性世界，

$$dP(t,T_k)=(...)dt+P(t,T_k)\sum_{q=1}^{p}v_{kq}(t)dz_q$$

且由（32-15），可知 $G_k(t)$ 的过程为

$$\frac{dG_k(t)}{G_k(t)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\tau_i G_i(t) \sum_{q=1}^{p} \beta_{iq}(t)\beta_{kq}(t)}{1+\tau_i G_i(t)} dt + \sum_{q=1}^{p} \beta_{kq} dz_q$$

而且对于远期利率，

$$\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1+\tau_j G_j(t)}$$

$$\ln P(t,T_i) - \ln P(t,T_0) = -\sum_{j=0}^{i-1} \ln\left(1+\tau_j G_j(t)\right)$$

左右微分，且考虑 dz_q 项对应系数应相等，

$$v_{0q}(t) - v_{iq}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\tau_j \beta_{jq}(t) G_j(t)}{1+\tau_j G_j(t)}$$

然后回到互换利率的过程，

$$\frac{ds(t)}{s(t)} = (...)dt + \sum_{q=1}^{p} \frac{P(t,T_0)v_{0q}(t) - P(t,T_N)v_{Nq}(t)}{P(t,T_0) - P(t,T_N)} dz_q - \sum_{q=1}^{p} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i v_{iq}(t) P(t,T_{i+1})}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})} dz_q$$

考虑其中 dz_q 项系数，

$$\begin{aligned}
&\frac{P(t,T_0)v_{0q}(t) - P(t,T_N)v_{Nq}(t)}{P(t,T_0) - P(t,T_N)} - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i v_{iq}(t) P(t,T_{i+1})}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})} \\
=&\frac{P(t,T_0)(v_{0q}(t) - v_{Nq}(t))}{P(t,T_0) - P(t,T_N)} + v_{Nq}(t) - v_{Nq}(t) - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})(v_{iq}(t) - v_{Nq}(t))}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})} \\
=&\frac{P(t,T_0)(v_{0q}(t) - v_{Nq}(t))}{P(t,T_0) - P(t,T_N)} - \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})(v_{iq}(t) - v_{Nq}(t))}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})} \\
=&A - B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A =&\frac{1}{1 - \frac{P(t,T_N)}{P(t,T_0)}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tau_j \beta_{jq}(t) G_j(t)}{1+\tau_j G_j(t)} = \frac{\prod_{j=0}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t))}{\prod_{j=0}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t)) - 1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tau_j \beta_{jq}(t) G_j(t)}{1+\tau_j G_j(t)} \\
B =&\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i (v_{iq}(t) - v_{Nq}(t)) \prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t))}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t))} \\
=&\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t)) \sum_{j=i}^{N-1} \frac{\tau_j \beta_{jq}(t) G_j(t)}{1+\tau_j G_j(t)}}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t))} \\
=&\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{kq}(t) G_k(t)}{1+\tau_k G_k(t)} \sum_{i=0}^{k} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t))}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_j G_j(t))}
\end{aligned}$$

可以把 $A+B$ 表示为

$$A+B=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\tau_k\beta_{kq}(t)G_k(t)}{1+\tau_kG_k(t)}\gamma_k(t)$$

$$\gamma_k(t)=\frac{\prod_{j=0}^{N-1}(1+\tau_jG_j(t))}{\prod_{j=0}^{N-1}(1+\tau_jG_j(t))-1}-\frac{\sum_{i=0}^{k}\tau_i\prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_jG_j(t))}{\sum_{i=0}^{N-1}\tau_i\prod_{j=i+1}^{N-1}(1+\tau_jG_j(t))}$$

这里 $A+B$ 为 dz_q 项系数，所以互换利率总方差为

$$V(t)=\sum_{q=1}^{p}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\tau_k\beta_{kq}(t)G_k(t)}{1+\tau_kG_k(t)}\gamma_k(t)\right]^2$$

32.13 证明式（32-19）。

（32-18）式在 $\tau_j=\sum_{m=1}^{M}\tau_{jm}$ 的情况下，互换的区间数量为 N 不变，但是每个互换的区间有 m 个上限或者下限区间。类似上题过程，但是需要把过程中

$$\sum_{k=i}^{N-1}\frac{\tau_k\beta_{kq}(t)G_k(t)}{1+\tau_kG_k(t)}$$

换为

$$\sum_{k=i}^{N-1}\sum_{m=1}^{M}\frac{\tau_{km}\beta_{kmq}(t)G_{km}(t)}{1+\tau_{km}G_{km}(t)}$$

这是因为滚延远期风险中性区间和上限或下限区间对应，$\frac{dP(t,T_k)}{P(t,T_k)}=(...)dt+\sum_{q=1}^{p}v_{k,m=1,q}dz_q$， $\frac{dP(t,T_N)}{P(t,T_N)}=(...)dt+\sum_{q=1}^{p}v_{N,m=1,q}dz_q$, 前面的 $v_{iq}(t)-v_{Nq}(t)$ 变为 $v_{i,m=1,q}(t)-v_{N,m=1,q}(t)$。

做此替换后，式（32-18）即变为

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{t=0}^{T_0}\sum_{q=1}^{p}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=1}^{M}\frac{\tau_{km}\beta_{kmq}(t)G_{km}(0)\gamma_k(0)}{1+\tau_{km}G_{km}(0)}\right]^2dt}$$

作业题

32.14 在一个按年付款的上限里，期限为 1 年、2 年、3 年和 5 年开始而一年后结束的上限单元布莱克波动率分别是 18%、20%、22% 和 20%。当期限如下时，估计 LIBOR 市场模型中 1 年远期利率的波动率：（a）0～1 年；（b）1～2 年；（c）2～3 年；（d）3～5 年。假设零息曲线为水平，利率为每年 5%（按年复利）。利用 DerivaGem 估计 2 年、3 年、4 年、5 年和 6 年平值上限的水平波动率。

（a）$\Lambda_0=0.18$, $\Lambda_1=\sqrt{2\times0.2^2-0.18^2}=0.218$, $\Lambda_2=\sqrt{3\times0.22^2-0.18^2-0.218^2}=0.255$, $\Lambda_3(3\sim5y)=\sqrt{(5\times0.2^2-0.18^2-0.218^2-0.255^2)/2}=0.166$。

（b）不知道。

32.15 在 32.2 节里考虑的灵活上限中，持有者有行使前 N 个实值上限单元的义务。在此之后，持有者不能再行驶其他上限单元（在例子中，$N=5$）。有时灵活上限也可以由另外两种方式定义：

(a) **持有者可以决定是否行使一个上限单元，但能够行驶的上限单元数不超过 N 个；**

(b) **一旦持有者决定行使一个上限单元，所有随后的实值上限单元都必须被行使，直到最多 N 个。**

讨论对这些类型的灵活上限定价时会存在什么问题。在三种类型的灵活上限定价时会存在什么问题。在三种类型的灵活上限中，你认为哪类会更贵？哪类会更便宜?

价格：可以选择行使最多 N 个 > 连续行使最多 N 个实值 > 必须行使前 N 个实值。