第十七章 股指期权与货币期权

练习题

17.1 一个当前价值为 1000 万美元的证券组合的 β 值为 1.0，某个指数的当前值为 800. 解释如何利用执行价格为 700，标的资产为该指数的看跌期权来为证券组合提供保险。

买入 $10^7/800/100 = 125$ 份股指看跌期权，这样可以保证投资组合的在期权执行期之前 875 万美元的价值。

17.2 "一旦我们知道了如何对支付股息收益率股票上的期权定价，那么我们也就知道了如何对股指和货币期权定价。"解释这句话的含义。

因为股指和外币分别可以看为支付固定收益的资产，定价过程和支付股息的股票是一样的。

17.3 一个股指的当前值为 300，股指的股息收益率为每年 3%，无风险利率为每年 8%，在这一股指上执行价格为 290，期限为 6 个月的欧式看跌期权下限为多少?

$Ke^{-rT} - S_0 e^{-qT} < 0$, 所以下限为 0 。

17.4 一种外币的当前价格为 0.80 美元，波动率为 12%，国内和国外无风险利率分别为 6% 和 8%。利用两步二叉树来对以下期权定价:

(a) **期限为 4 个月，执行价格为 0.79 的欧式看涨期权。**

(b) **4 个月期限并具有同样执行价格的美式看涨期权。**

$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = 1.05,\ d = 1/u = 0.952,\ p = \frac{e^{(r-r_f)\delta t} - d}{u-d} = 0.522$ 。

(a) 由下图知欧式看涨期权价格为 0.0296 美元。

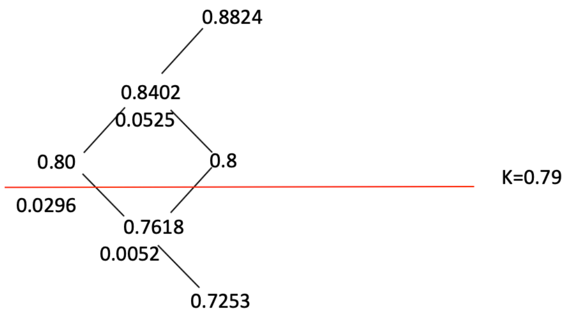

Fig 17.4

(b) 由二叉树知，没有合适的时刻可以提前执行，所以价格等于欧式看涨 0.0296 美元。

17.5 当一家企业知道在将来会收进一笔外汇时，解释该企业如何利用货币范围远期合约来对冲外汇风险。

多头同样数量外汇远期合约，到期前平仓。外汇如果升值，购入时会多付费用，但是外汇远期多头可能会盈利，以此对冲掉一定的风险。

17.6 计算一个期限为 3 个月的股指平值欧式看涨期权的价格，股指的当前值 250，无风险利率为每年 10%，股指的波动率为每年 18%，股指股息收益率为每年 3%。

把当前股指按照股指股息收益率贴现，然后代入欧式看涨期权价格的解，可得 $c = 11.15$。

17.7 计算一个 8 个月期限的欧式货币看跌期权价格，期权执行价格为 0.50，当前汇率为 0.52，汇率波动率为 12%，国内无风险利率为每年 4%，国外无风险利率为每年 8%。

先把会当前汇率按照国外无风险利率“贴现”，然后用欧式看跌期权价格公式，可得 $p = 0.0162$。

17.8 证明式 (17-12) 给出的关于以货币 B 卖出 1 个单位货币 A，执行价格为 K 的看跌期权的价格等于式 (17-11) 给出的关于以货币 A 卖出 S_0 个单位货币 B，执行价格为 1/K 的看涨期权的价格。

考虑原先是在货币 A 体系下股价货币 B 汇率期货的价格，汇率为一单位 B 货币需要 A 货币多少，如果我们转换成在货币 B 体系下对同样的期权进行股价，初始汇率和执行汇率都需要换成倒数。同时，看涨和看跌互换，同时考虑一份期权对应货币量。所以货币 A 下的看涨期权的价格，可以通过计算货币 B 下同样的看跌期权价格，注意本国和外国无风险利率 $r \leftrightarrow r_f$，$S_0 \to \frac{1}{S_0}$，$K \to \frac{1}{K}$，再乘以汇率 S_0 和对应将来货币 B 的数量 K。

17.9 一种外币的当前价格为 1.5 美元，国内与国外的无风险利率分别为 5% 和 9%。计算在下面两种情况下一个 6 个月执行价格为 1.40 美元的看涨期权下限，假定期权分别时（a）欧式，（b）美式。

(a) 欧式看涨期权下限为 $Se^{-r_f T} - Ke^{-rT} = 0.0686$ ，(b) 美式看涨期权下限为 $\max(Se^{-r_f T} - Ke^{-rT}, S - K) = 0.1$ 。

17.10 某股指的当前值为 250，股指的股息收益率为每年 4%，无风险利率为每年 6%。这一股指上 3 个月期，执行价格为 245 的看涨期权的目前价格为 10 美元。该股指上 3 个月期，执行价格为 245 的看跌期权价值是多少?

$c + Ke^{-rT} = p + Se^{-qT}$，$p = 3.84$ 美元。

17.11 一个股指的当前值为 696，波动率为 30%，无风险利率为每年 7%，股指所提供的连续股息收益率为每年 4%。计算 3 个月期，执行价格为 700 的欧式看跌期权价格。

价格为 40.55 美元。

17.12 假定 C 时执行价格为 K，期限为 T，连续股息率为 q 的股票上美式看涨期权价格，P 为具有同样执行价格与期限的美式看跌期权价格，证明

$$S_0 e^{-qT} - K < C - P < S_0 - Ke^{-rT} \tag{1}$$

其中 S_0 为股票价格，r 为无风险利率，$r > 0$。(提示：为了证明第 1 个不等式，考虑一下证券组合的价值，组合 A：一个欧式看涨期权加上数量为 K 的无风险投资；组合 B：一个美式看跌期权加上 e^{-qT} 只股票，其中股息被再投资于股票之中。未来证明第 2 个不等式，考虑一下证券组合的价值，组合 C：一个美式看涨期权加上数量为 Ke^{-rT} 的无风险投资；组合 D：一个欧式看跌期权加上 1 只股票，其中股息被再投资于股票之中。)

只需要证明 $S_0 e^{-qT} - K - C + P < 0$ 和 $C - P - S_0 + Ke^{-rT} < 0$。这分别对应两种投资组合，

1. 卖空 e^{-qT} 份股票，以无风险利率借出 K，多美式看涨，空美式看跌。当股价低于 K 时，美式看跌有可能被执行，我们以 K 的价格买入股票，股票可以偿还卖空股票对手（卖空的份额在考虑支付股息后还是小于等于 1），此时美式看涨期权还有大于等于 0 的价值，而且借出的 K 的资金的价值也大于等于 K，所以对所有投资平仓后总盈亏大于 0 。当美式看跌期权一直没有被执行，我们可以用 K 的价格买入股票，偿还卖空股票对手，同时无风险投资会有大于 K 的收益，这样将来平仓所有交易后盈亏也是大于 0 的。这个组合在将来的价值是大于 0 的，所以要求投资这个组合我们在当前需要付出大于 0 的代价。即上面式子需要小于 0，我们需要借入资金来进行投资。

2. 买入一份股票，多美式看跌，空美式看涨，以无风险利率借入 Ke^{-rT} 的资金。如果美式看涨被执行，我们以 K 的价格卖出了股票，K 总是可以偿还借入的资金，而且我们的美式看跌还有大于等于 0 的价值，这种情

况平仓后总盈亏会大于等于 0；如果美式看涨一直没有被执行，那么我们可以以 K 卖出股票，偿还借入的资金，平仓后，总盈亏为 0 。这种组合在将来的总盈亏是大于等于 0 的。所以形成这种组合我们应该需要大于 0 的初始投资。即上面等式小于 0 。

17.13 证明当远期价格等于执行价格时，一个欧式货币看涨期权价格等于相应的欧式货币看跌期权价格。

根据式（17-8）、（17-9）

$$c = F_0e^{-rT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{2}$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - F_0e^{-rT}N(-d_1) \tag{3}$$

当 $F_0 = K$，$d_1 = -d_2, c = p$。

17.14 你认为股指的波动率会大于还是小于一般股票的波动率？解释原因。

小于，因为股指一般是由股票价格的平均值或者加权平均值定义的。多个随机变量之和的方差率一般比单个随机变量的方差率小。

17.15 当证券组合的 β 值增加时，相应证券组合保险的价格会增加还是减少？解释原因。

增加，一方面需要的期权数量会增加，另一方面相应期权的执行价格也会升高。

17.16 假定某个证券组合的价值为 6000 万美元，标普 500 的当前值为 1200，如果证券组合的收益反映了股指收益，未来保证证券组合在 1 年后价值不低于 5400 万美元，证券组合管理者应购买什么样的期权?

买入 500 份股指看跌期权，执行价为 1080 美元。

17.17 考虑练习题 17.16 的情形。假定证券组合的 β 为 2.0，无风险利率为每年 5%，证券组合与股指的股息收益率为每年 3%。为了保证证券组合在 1 年后价值不低于 5400 万美元，管理者应购买什么样的期权?

买入 100 份股指看跌期权。然后确定执行价。

设执行价为 $1200(1+\rho)$。则股指变化收益率为 ρ，加上股息为 $\rho+0.03$，超出无风险利率 $\rho+0.03-0.05=\rho-0.02$。考虑组合的 β 为 2，组合收益超出无风险利率应为 $2\rho-0.04$, 加上无风险利率，扣除组合股息率 $2\rho-0.04+0.05-0.03=2\rho-0.02$ 为证券组合增值期望，所以根据保值要求 $2\rho-0.02=0.1$，$\rho=0.04$。所以股指期权的执行价格应为 1152。

17.18 某个指数的当前水平为 1500。执行价格为 1400，期限为 6 个月的欧式看涨和看跌期权的价格分别为 154.00 和 34.25 。6 个月期无风险利率为 5%，这时的隐含股息收益率为多少?

考虑平价关系，$p+Se^{-qT}=c+Ke^{-rT}$，$34.25+1500\times e^{-q\times 0.5}=154+1400\times e^{-0.05\times 0.5}$, 可得 $q=0.02$ 。

17.19 一个整体收益指数对某投资组合的整体收益（包括股息）进行跟踪。解释你将如何对该指数上的以下产品定价（a）远期合约，（b）欧式期权。

远期合约价格为当前指数按无风险利率复利后的价格。对于基于该指数的欧式期权，先根据历史数据估计波动率，然后和给无股息股票期权定价一样的方式定价。

17.20 什么是欧式货币期权的看跌-看涨期权平价关系式?

和带股息的欧式股票期权一样。外币的无风险利率替换股息。$c+Ke^{-rT}=p+S_0e^{-r_fT}$ 。

17.21 利用书中所述的投资组合来证明式（17-1）、式（17-2）和式（17-3）。

(a) $c \geq \max(S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}, 0)$，考虑多欧式看涨，卖空 e^{-qT} 份股票，进行无风险投资。到期后最多花 K 的价格买入股票偿还股票卖空对手。组合收益大于等于 $S_0e^{-qT}e^{rT} - K$，贴现后为 $S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}$, 多欧式看涨的价值 $c \geq \max(S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}, 0)$。

(b) $p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}, 0)$，考虑多欧式看跌，无风险利率借钱买入 e^{-qT} 股票，并将之后的股息进一步买股票，到期后由于欧式看跌，出售股票至少可以得到 K，偿还借入的资金后，剩余 $K - S_0e^{-qT}e^{rT}$，贴现后 $Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}$。所以看跌期权的价格至少为这个值。

(c) $c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-qT}$，考虑：空看涨期权，多看跌期权，无风险利率借入 Ke^{-rT}, 买入 e^{-qT} 股票。股票股息用于买股票，到期后如果股价大于执行价，卖出的看涨被执行，卖出股票 1 份得到 K，偿还借入现金，盈亏为 0；如果股价低于执行价，执行看跌期权，以 K 的价格卖出持有股票，偿还借入的现金，盈亏为 0。该组合在到期日的价值总是为 0，所以当前价值也为 0，平价关系式必须成立。

17.22 一个关于日元/欧元的期权是否可由以下两个期权来构造？其中一个期权为美元/欧元期权，另一个期权为美元/日元期权。

持有看涨美元/欧元汇率期权，可以以执行价格 K_1 买入 1 欧元，看跌美元/日元汇率期权，可以以执行价格 K_2 卖出 1 日元，是等于持有看涨日元/欧元汇率期权，至多以执行价格 $\frac{K_1}{K_2}$ 以日元买入 1 欧元。

作业题

17.23 略

17.24 某股指的当前值为 300，波动率为 20%，无风险利率为 8%，股息收益率为 3%。利用三步二叉树对指数上 6 个月期，执行价格为 300 的看跌期权定价。假设期权为（a）欧式，（b）美式。

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.085,\ d = 1/u = 0.926,\ p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} = 0.5308$ 。

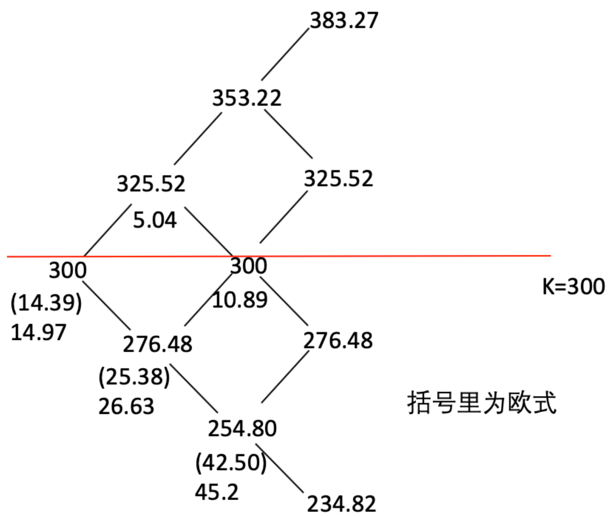

Fig 17.24

由图可知，（a）欧式看跌期权价格为 14.39 美元，（b）美式看跌期权价格为 14.97 美元。

17.25 假定加元的即期汇率为 0.95 美元，加元/美元汇率的波动率为每年 8%，加拿大与美国的无风险利率分别为每年 4% 与 5%。计算 9 个月期以 0.95 美元买入 1 加元的欧式看涨期权价格。利用看跌-看涨期权平价关系式来求出 9 个月期的以 0.95 美元的价格出售 1 加元的欧式看跌期权的价格。在 9 个月后以 1 加元买入 0.95 美元的看涨期权价格为多少?

（a）0.0290 美元。

（b）$c+Ke^{-rT}=p+S_0e^{-r_fT}$，$p=0.0221$ 美元。

（c）0.0221 美元。

17.26 某股指当前取值为 1000，无风险利率为 4%，3 个月期限、执行价格为 950 的欧式看涨和看跌期权的价格分别为 78 和 26，估计（a）股息收益率，(b）隐含波动率。

(a) $p+S_0e^{-qT}=c+K^{-rT}$，$26+1000\times e^{-0.25q}=78+950\times e^{-0.04\times 0.25}$，$\Rightarrow q=0.03$

(b) 用迭代法，可得 $\sigma=24.7\%$。

17.27 如果货币 A 以货币 B 表达时满足过程

$$dS=(r_B-r_A)Sdt+\sigma Sdz \tag{4}$$

其中 r_A 和 r_B 分别为国家 A 和国家 B 的无风险利率。如果以货币 A 表达货币 B，货币 B 将满足什么过程?

这里 1 单位 A 货币价值 S 单位 B 货币，设 1 单位 B 货币价值 F 单位 A 货币。则 $F=\frac{1}{S}$。

$$\begin{aligned} dF=-\frac{1}{S^2}dS &= \frac{1}{S^2}(r_A-r_B)Sdt-\frac{1}{S^2}\sigma Sdz && (5)\\ &=(r_A-r_B)\frac{1}{S}dt-\sigma\frac{1}{S}dz && (6)\\ &=(r_A-r_B)Fdt-\sigma Fdz && (7)\end{aligned}$$

17.28 假定目前美元/欧元的兑换为 1.3000，汇率波动率为 15%。一家美国公司在 3 个月时将收入 100 万欧元。欧洲和美国的无风险利率分别为 5% 与 4%。这家公司准备采用范围远期合约，其中执行价格下限等于 1.2500 。

(a) **为保证合约费用为 0，执行价格上限等于多少?**

(b) **公司采用的看涨和看跌期权的头寸是什么?**

(c) **证明只要两种货币的利率之间的差 $r-r_f$ 保持不变，那么（a）的答案将不依赖于利率的大小。**

(a) 执行价格为 1.25 的看跌期权，价格为 0.019，同样价格的看涨期权的执行价格为 1.348。

(b) 多看跌，空看涨。

(c) 我们需要执行价格为 K_1 的看跌期权价格和执行价格为 K_2 的看涨期权价格一样，

$$p(K_1)=c(K_2)\ \Leftrightarrow K_1N(-d_2(K_1))-S_0e^{(r-q)T}N(-d_1(K_1))=S_0e^{(r-q)T}N(d_1(K_2))-KN(d_2(K_2)) \tag{8}$$

如果 $r-q$ 不变，K_1,K_2 需要满足的关系式不变。

17.29 在业界事例 17-1 中，保证在今后 10 年内基金的回报不会为负的价值是多少?

如果这里不为负指 10 年后价值不低于当前价值，那么对于这个 10 年期平价看跌期权，价值为 38.46，股指基金价格的 3.8%。

17.30 1 年期限关于墨西哥比索（peso）的远期价格为每比索 0.075 美元，美国的无风险利率为 1.25%，墨西哥的无风险利率为 4.5%，汇率的波动率为 13%。1 年期执行价格为 0.0800 的欧式和美式看跌期权的价格为多少?

用式（17-4），知欧式看跌期权价格为 0.0069 美元。美式期权需要用多步二叉树来定价。