第四章 利率

练习题

4.1 一家银行的利率报价为每年 14%，每季度复利一次。在以下不同的复利机制下对应的利率时多少？(a) 连续复利，(b) 1 年复利一次。

(a) $e^r=(1+0.14/4)^4, r=13.76\%$。(b) $1+r=(1+0.14/4)^4, r=14.75\%$ 。

4.2 LIBOR 和 LIBID 的含义是什么？哪一个更高？

LIBOR 是伦敦同业银行拆借利率，是银行之间短期无抵押拆借利率，特指借入资金的利率。LIBID 是伦敦银行同业拆入利率，时某家信用级别高的伦敦银行支付给另一家同意信用级别的伦敦银行的存款利率。LIBOR 通常比 LIBID 高。

4.3 6 个月期与 1 年期的零息利率均为每年 10%。一个剩余期限还有 18 个月，券息率为 8%（刚刚付过半年 1 次的券息）的债券，收益率为 10.4% 的债券价格为多少？18 个月期的零息利率为多少？这里的所有利率均为每半年复利一次。

价值为：$B=\frac{4}{1+0.052}+\frac{4}{(1+0.052)^2}+\frac{104}{(1+0.052)^3}=96.74$ 。
18 个月的零息利率为 r，$96.74=\frac{4}{1+0.05}+\frac{4}{(1+0.05)^2}+\frac{104}{(1+0.5r)^3}, \rightarrow r=10.41\%$ 。

4.4 一个投资者在年初投入 1000 美元，年末收入 1100 美元。计算投资在不同复利机制下的收益率 (a) 1 年复利 1 次，(b) 1 年复利 2 次，(c) 每月复利 1 次，(d) 连续复利。

(a) $(1+r_1)=1.1,\ r_1=10\%$;

(b) $(1+\frac{r_2}{2})^2=1.1,\ r_2=9.76\%$;

(c) $(1+\frac{r_3}{12})^{12}=1.1,\ r_3=9.57\%$;

(d) $e^{r_4}=1.1,\ r_4=9.53\%$ 。

4.5 假设连续复利的零息利率如下：

期限（以月计）	利率（%, 年）
3	8.0
6	8.2
9	8.4
12	8.5
15	8.6
18	8.7

计算第 2 季度、第 3 季度、第 4 季度、第 5 季度和第 6 季度的远期利率。

(a) 第 2 季度：$e^{\frac{r}{4}}e^{\frac{0.08}{4}}=e^{\frac{0.082\times 2}{4}},\ r=8.4\%$;

(b) 第 3 季度：$r=0.084\times 3-0.082\times 2=8.8\%$;

(c) 第 4 季度：$r = 0.085 \times 4 - 0.084 \times 3 = 8.8\%$;

(d) 第 5 季度：$r = 0.086 \times 5 - 0.085 \times 4 = 9.0\%$;

(e) 第 6 季度：$r = 0.087 \times 6 - 0.086 \times 5 = 9.2\%$。

4.6 假定零息利率如练习题 4.5 所示，一个收入 3 个月期固定利率为 9.5% 的 FRA 价值为多少？这里 FRA 的面值为 100 万美元，其实日期为 1 年以后，利率复利为每季度一次。

$(1 + 0.085 \times 0.25)^4 \times (1 + 0.095 \times 0.25) = (1 + 0.086 \times 0.25)^5 + \Delta,\ \Delta = 0.136\%$, 所以价值为 1360 美元。

4.7 利率期限结构向上倾斜，将以下变量按大小排列：

(a) 5 年期零息利率。

(b) 5 年期带息债券的收益率。

(c) 将来从第 4.75～5 年远期利率。

(c) > (a) > (b)

4.8 从久期你能知道债券组合对于利率有什么样的敏感度？久期又什么局限性？

短期内，债券组合的价值变化等于负的收益率变化乘以久期，收益率的大小和利率直接正相关。局限性是这种估计只在收益率变化比较小时比较有效，收益率变化大时需要考虑曲率等高阶项。

4.9 与每年 15%, 按月复利等价的按连续复利的年利率时多少？

$(1 + \frac{0.15}{12})^{12} = e^r,\ r = 14.9\%$ 。

4.10 一个存款账户以每年 12%, 的连续复利利率来计算利息，但利息每个季度支付一次，对应于 10000 美元存款在每季度的利息为多少？

$(e^{\frac{0.12}{4}} - 1) \times 10000 = 305$ 。

4.11 假定 6 个月期、12 个月期、18 个月期、24 个月期和 30 个月期的零息利率分别为每年 4%、4.2%、4.4%、4.6% 和 4.8%，按连续复利。估计一个面值为 100 美元的债券的价格，假定此债券在 30 个月后到期，债券券息率为每年 4%, 每半年付息一次。

$Value = 2 \times e^{-0.04/2} + 2 \times e^{-0.042} + 2 \times e^{-0.044/2\times3} + 2 \times e^{-0.046\times2} + 102 \times e^{-0.048/2\times5} = 98.04$。

4.12 一个 3 年期债券的券息率为 8%, 每半年付息一次，债券的现金价格为 104，债券的收益率为多少？

$4 \times \sum_{i=1}^{6} e^{-i\times y/2} + 100 \times e^{-3y} = 104,\ y = 5.3\%$。

4.13 假定 6 个月期、12 个月期、18 个月期和 24 个月期的零息利率分别为每年 5%、6%、6.5% 和 7%。2 年期债券的平值收益率为多少？

$\frac{c}{2} \times (e^{-0.05/2} + e^{-0.06} + e^{-0.065\times1.5} + e^{-2\times0.07}) + 100 \times e^{-2\times0.07} = 100,\ c = 7.07$ 。

4.14 假设连续复利的零息利率如下：

期限（以年计）	利率（%, 年）
1	2.0
2	3.0
3	3.7
4	4.2
5	4.5

计算第 2 年、第 3 年、第 4 年和第 5 年的远期利率。

(a) 第 2 年：$e^{0.02} \times e^{r} = e^{0.03\times 2}$，$r = 4\%$;

(b) 第 3 年：$3.7\% \times 3 - 3\% \times 2 = 5.1\%$;

(c) 第 4 年：$4.2\% \times 4 - 3.7\% \times 3 = 5.7\%$;

(d) 第 5 年：$4.5\% \times 5 - 4.2\% \times 4 = 5.7\%$。

4.15 假定 9 个月及 12 个月的 LIBOR 利率分别为 2% 和 2.3%，9 个月和 12 个月之间的远期利率为多少？假定在一个 FRA 合约中，收入 3% 固定利率，同时支付 9～12 个月之间的 LIBOR 利率，所有利率均为每季度复利一次，FRA 的面值为 1000 万美元，假定 LIBOR 被用作无风险利率，这时 FRA 的价值是多少？

（a）远期（9 个月～12 个月）利率为 r, $(1+0.02/4)^3 \times (1+r/4) = (1+0.023/4)^4$，$r = 3.2\%$;

（b）远期价值贴现（远期利息在末端支付）为 $(3.2\% - 3\%) \times 10000000/(1+2.4\%/4)^4 = 19547$。

4.16 10 年期票息为 8% 的债券价格为 90 美元，10 年期票息为 4% 的债券价格为 80 美元，10 年期的零息利率为多少？（提示：考虑 2 份票息为 4% 的债券的多头和 1 份票息为 8% 的债券的空头。

2 份票息为 4% 的债券的多头，1 份票息为 8% 的债券的空头，券息部分会相互抵消。总盈亏为 $2\times 100e^{-10r} - 100e^{-10r} = 2\times 80 - 90$ $r = 3.6\%$。

4.17 仔细解释为什么流动性偏好理论与市场上所观察到的利率期限结构向上倾斜多于向下倾斜这一现象一致。

因为期限较短的债券，贷款等有更好的流动性，所以利率相对长期限的更低。

4.18“当零息利率曲线向上倾斜时，对应于某一期限的零息利率比相应期限的平值收益率要高。当零息利率为向下倾斜时，对应于某一期限的零息利率要比相应同一期限的平值收益率要低。”解释这是为什么。

因为，$r_{FRA} = r_2 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}(r_2 - r_1)$。

4.19 为什么美国国债收益率远低于其他几乎无风险的投资收益率？

因为美国国债几乎无风险，而且流动性很好。

4.20 为什么再回购市场贷款的信用风险很低？

因为一般都有等值的证券作为抵押。

4.21 解释为什么一个 FRA 等价于以浮动利率交换固定利率？

因为 FRA 约定了将来一定时间区间之内的一个固定利率，与将来该时间段内的浮动利率之差为交易双方的盈亏。

4.22 一个年收益率为 11%（连续复利）的 5 年期债券在每年年底支付 8% 的票息，请计算

(a) **此债券价格为多少?**

(b) **债券久期为多少?**

(c) **运用久期公式说明当收益率下降幅度为 0.2% 时对债券价格的影响。**

(d) **重新计算年收益率为 10.8% 时债券的价格，并验证计算结果同（c）是一致的。**

(a) $8e^{-0.11} + 8e^{-0.22} + 8e^{-0.33} + 8e^{-0.44} + 108e^{-0.55} = 86.8$。

(b) $\frac{1}{B} \times \sum_{i=1}^{5} t_i c_i e^{-yt_i} = 4.256$。

(c) $\Delta B = -BD\Delta y = -86.8 \times 4.256 \times (-0.2\%) = 0.74$。

(d) 债券价值为 87.54，相对之前上涨 0.74，和（c）里的 ΔB 相符合。

4.23 6 个月期和 1 年期国债（零息）的价格分别为 94.0 美元和 89.0 美元。1.5 年期的债券每半年付票息 4 美元，价格为 94.84 美元。2 年期的债券每半年付票息 5 美元，价格为 97.12 美元。计算 6 个月期、1 年期、1.5 年期以及 2 年期的零息利率。

使用债券价值计算公式可以一步步计算不同时间段零息利率。结果如下：

	票息	价值	零息利率
6 个月	0	94	12.3%
12 个月	0	89	11.7%
18 个月	4	94.84	11.5%
24 个月	5	97.12	11.3%

4.24“一个利率互换中的浮动利率为 6 个月 LIBOR，固定利率为 5%，面值为 1 亿美元，这样的互换是一个 FRA 组合。“解释这一说法。

利率互换是指双方在将来固定时间点交换固定利率和浮动利率之差的现金流，可以看作是一系列连续的 FRA 组合。

作业题

4.25 一个按年复利的利率为 11%, 当利率按以下复利计算时，数量分别为多少?（a）每半年复利一次，（b）每季度复利一次，（c）每月复利一次，（d）每周复利一次，（e）每天复利一次。

(a) $(1+\frac{r_1}{2})^2 = 1.11,\ r_1 = 10.7\%$;

(b) $(1+\frac{r_2}{4})^4 = 1.11,\ r_2 = 10.57\%$;

(c) $(1+\frac{r_3}{12})^{12} = 1.11,\ r_3 = 10.48\%$;

(d) $(1+\frac{r_4}{50})^{50} = 1.11,\ r_4 = 10.45\%$;

(e) $(1+\frac{r_5}{365})^{365} = 1.11,\ r_5 = 10.44\%$。

4.26 下表给出了零息国债的零息利率及现金流，零息利率为连续复利。(a) 债券的理论价格为多少?(b) 债券的收益率为多少?

期限（年）	零息利率（%）	票息（美元）	面值（美元）
0.5	2.0	20	
1.0	2.3	20	
1.5	2.7	20	
2.0	3.2	20	1000

(a) $Value = 20e^{-0.01} + 20e^{-0.023} + 20e^{-0.045} + 1020e^{0.064} = 1015$;

(b) $20e^{-y/2} + 20e^{-y} + 20e^{-1.5y} + 1020e^{-2y} = 1015,\ y = 3.1\%$。

4.27 一个 5 年期的债券提供每年 5% 的票息，每半年支付一次，它的价格为 104 美元。债券的收益率为多少?

$\sum_{i=1}^{10} 2.5e^{-0.5iy} + 100e^{-5y} = 104,\ y = 4.06\%$。

4.28 假设到期日为 1、2、3、4、5 和 6 个月的 LIBOR 利率分别为 2.6%、2.9%、3.1%、3.2%、3.25% 和 3.3%，连续复利。在将来的 1 个月期的远期利率分别为多少?

对于连续复利，$r_F = \frac{T_2 r_2 - T_1 r_1}{T_2 - T_1}$。计算得下表:

	LIBOR	1 个月远期
1 个月	2.6%	2.6%
2 个月	2.9%	3.2%
3 个月	3.1%	3.5%
4 个月	3.2 %	3.5%
5 个月	3.25%	3.45%
6 个月	3.3%	3.55%

4.29 一家银行可以按 LIBOR 利率进行贷款或放贷，2 个月期的 LIBOR 利率为每年 0.28%（连续复利）。假设利率不能为负，那么当 3 个月期的 LIBOR 为每年 0.1% 时（连续复利）存在什么样的套利机会? 为保证无套利机会，3 个月期的 LIBOR 利率最低能达到多少?

借入 3 个月期的贷款 S，贷出 2 个月期的贷款 S，2 个月后收回利息加本金 $Se^{0.0028/6}$，3 个月后偿还 $Se^{0.001/4}$。总盈亏为:

$$P = S(e^{0.0028/6} - e^{0.001/4}) = 0.021\%S \tag{1}$$

想要没有这种简单的套利机会，需要借入和借出总利息一样，至少 $0.0028/6 = r/4,\ r = 0.18\%$。

4.30 一家银行可以按 LIBOR 利率进行借贷或放贷，假定 6 个月利率为 5%，而 9 个月利率为 6%；在 6 个月到 9 个月之间的利率可以通过 FRA 来锁定，其值为 7%。假设所有利率均为连续复利，银行可以如何进行套利?

当无套利空间时，远期利率为 r，$\frac{1}{4}r = \frac{3}{4} \times 6\% - \frac{1}{2} \times 5\%,\ r = 8\%$。而这里 r 为 7%，所以存在套利空间。

可以以 LIBOR 6% 贷出 9 个月期贷款，以 LIBOR 5% 借入 6 个月期贷款，以 7% 多头 FRA。6 个月后偿还 6 个月期贷款，支付 FRA 贴现利差，如果到时候 LIBOR 实际利息和预期变化不大，会有盈利。

4.31 对一个年息 5%，按半年复利的利率，在以下复利形式下所对应的利率为多少? (a) 1 年复利 1 次，(b) 每月复利 1 次，(c) 连续复利。

(a) $(1 + r_1) = (1 + r_0/2)^2,\ r_1 = 5.06\%$;

(b) $(1 + r_2/6)^6 = (1 + r_0/2)^2,\ r_2 = 5.0\%$;

(c) $e^{r_3}=(1+r_0/2)^2$, $r_3=4.94\%$。

4.32 6 个月、12 个月、18 个月和 24 个月期限的零息利率分别为 4%、4.5%、4.75% 和 5%，这里的利率为每半年复利 1 次。

(a) **相应的连续复利利率为多少?**

(b) **在 18 个月开始的 6 个月期的远期利率为多少?**

(c) **在 18 个月开始的 6 个月内支付 6% 利率（半年复利）的 FRA 价值时多少？假设本金为 100 万美元。**

(a) 6 个月为 4%, 12 个月为 4.45%, 18 个月为 4.70%, 24 个月为 4.94%。

(b) $(4.94\%\times 2-4.75\%\times 2)\times 2=5.51\%$。

(c) $(6\%-5.51\%)\times 10^6=4900$。

4.33 当零息利率由作业题 4.32 给定时，2 年的平值收益率为多少？2 年期票息等于平值收益率的债券收益率为多少?

（a）$\frac{c}{2}(e^{-0.02}+e^{-0.045}+e^{-1.5\times 0.047}+e^{-2\times 0.0494})+100e^{-2\times 0.0494}=100,\ c=4.99$;
（b）$\frac{c}{2}(e^{-0.5y}+e^{-y}+e^{-1.5y}+e^{-2y})+100e^{-2y}=100,\ y=4.9\%$。

4.34 下表给出了债券价格。

债券面值（美元）	期限（以年为计）	年票息（美元）	债券价格（美元）
100	0.5	0	98
100	1.0	0	95
100	1.5	6.2	101
100	2.0	8.0	104

(a) **计算对应 6 个月、12 个月、18 个月和 24 个月期限的零息利率。**

(b) **以下时间段的远期利率为多少？6～12 个月；12～18 个月；18～24 个月。**

(c) **对月每半年支付一次票息，期限分别为 6 个月、12 个月、18 个月和 24 个月的债券的平值收益率为多少?**

(d) **估计票息率为 7%、每半年支付一次、2 年期限债券的价格和收益率。**

(a) 6 个月：4.04%, 12 个月 5.13%，18 个月 5.44%, 24 个月 5.81%。

(b) 6～12 个月，$(5.13\%-0.5\times 4.04\%)\times 2=6.22\%$;
12～18 个月，$(1.5\times 5.44\%-5.13\%)\times 2=6.06\%$;
18～24 个月，$(2\times 5.81\%-1.5\times 5.44\%)\times 2=6.92\%$。

(c) 6 个月，$(0.5c_1+100)e^{-0.5\times 4.04\%}=100,\ c_1=4.08$;
12 个月，$0.5c_2e^{-0.5\times 0.0404}+(c_2\times 0.5+100)e^{-0.0513}=100,\ c_2=5.18$;
18 个月，$0.5c_3e^{-0.5\times 0.0404}+0.5c_3e^{-0.0513}+(0.5c_3+100)e^{-1.5\times 0.0544}=100,\ c_3=5.50$;
24 个月，$0.5c_4e^{-0.5\times 0.0404}+0.5c_4e^{-0.0513}+0.5c_4e^{-1.5\times 0.0544}+(0.5c_4+100)e^{-0.112}=100,\ c_4=5.66$。

(d) $Value=3.5\times(e^{-0.0202}+e^{-0.0513}+e^{-0.0816}+e^{-0.112})+100e^{-0.112}=102.51$;
$3.5\times(e^{0.5y}+e^{-y}+e^{-1.5y}+e^{-2y})+100e^{-2y}=102.51,\ \ y=5.58\%$。

4.35 组合 A 由一个本金为 2000 美元的 1 年期零息债券和一个面值为 6000 美元的 10 年期零息债券组成。组合 B 由一个面值为 5000 美元的 5.95 年期的零息债券组成。每个债券目前的收益率均是 10%。

(a) **证明两个组合具有相同的久期。**

(b) **证明当两个组合的收益率每年都增长 0.1% 时，两个组合价值变化的百分比是一样的。**

(c) **当收益率每年增长 5% 时，两个组合价值变化的百分比时多少?**

(a) ... 结果好像不一样。。。

(b)

(c)

4.36 略