第二十三章 估计波动率和相关系数

练习题

23.1 解释如何使用指数加权移动平均（EWMA）模型和历史数据来估算波动率。

先通过历史数据使用最大似然估计找到最佳的参数 λ，然后 EWMA 模型给出了波动率演化的确定过程，可以计算出将来时刻的波动率。

23.2 采用 EWMA 及 GARCH（1，1）对波动率进行更新的不同之处是什么？

GARCH 模型多了一个历史波动率平均项，GARCH 的波动率预测具有均值回归特性。在一些情况下 GARCH 模型会退化为 EWMA，比如如果 GARCH 的最优历史波动率平均项为负的时候需要把该项设为零以保证模型稳定性。

23.3 某一资产波动率的最新估计值为 1.5%，资产在昨天交易结束时的价格为 30.00 美元。EWMA 模型中的参数 λ 为 0.94，假定在今天交易结束时资产价格为 30.50 美元，EWMA 模型将如何对波动率进行更新？

$\sigma_{new}^2 = \lambda\sigma^2 + (1-\lambda)(\ln\frac{S+\Delta S}{S})^2$，$\sigma_{new} = 1.51\%$ 。

23.4 某一公司采用 EWMA 来预测波动率，公司决定将参数 λ 由 0.95 变为 0.85，解释这一变化的影响。

模型对历史数据的依赖程度降低，历史数据比重的衰减速度增快。对近期的波动率更敏感。

23.5 某市场变量的波动率为每年 30%，计算该变量在一天内的百分比变化大小对应的 99% 置信区间。

$\pm(0.3 \times \frac{1}{\sqrt{252}} \times 2.576) = \pm 2.444$

23.6 一个公司采用 GARCH（1，1）来更新波动率，模型中的参数为 ω, α 及 β 。描述稍稍增加某一参数并同时保持其他参数不变所带来的影响是什么？

ω 为长期平均方差乘以其权重，GARCH 模型计算的方差有均值回归到长期方差的性质，所以增加 ω 且保持另外两个参数不变，说明长期方差的权重不变，但是长期方差提高，所以计算的方差整体会变大。

如果增大 α，保持其它参数不变，说明模型给予历史方差变化更大权重，同时降低了长期方差的权重，但是长期方差变大，均值回归速度变慢，但是长期均值变大。

如果增大 β，保持其它参数不变，说明模型给历史波动率的权重衰减速度加快，同时也降低了长期方差的权重，长期方差数值变大，均值回归速度变慢。

23.7 美元/英镑汇率波动率的最新估计为每天 0.6%，在昨天下午 4 点，汇率为 1.5000，在 EWMA 中参数 λ 为 0.9，假定在今天下午 4 点时回来为 1.4950，这时应该如何更新对汇率日波动率的估计？

$\sigma_{new}^2 = \lambda\sigma^2 + (1-\lambda)(\ln\frac{S+\Delta S}{S})^2$，$\sigma_{new} = 0.579\%$ 。

23.8 假定标普 500 在昨天交易结束时为 1040，在昨天，指数的日波动率估计值为每天 1%。GARCH（1，1）模型中的参数 $\omega = 0.000002, \alpha = 0.06$ 和 $\beta = 0.92$，如果指数在今天交易结束时的取值为 1060，今天新的波动率估计为多少？

$\sigma_{new}^2 = \omega + \alpha(\ln\frac{S+\Delta S}{S})^2 + \beta\sigma^2$，$\sigma_{new} = 1.076\%$

23.9 假定在昨天交易日所估计的资产 A 和资产 B 的日波动率分别为 1.6% 和 2.5%，资产 A 和资产 B 在昨天交易日末的价格分别为 20 美元和 40 美元，资产收益相关系数的估计值为 0.25，EWMA 模型中的 λ 参数为 0.95 。

(a) 计算目前资产之间的协方差。

(b) 假定在今天交易结束时，资产价格分别为 20.50 美元和 40.50 美元，更新相关系数的估计。

(a) $cov_{ab} = \rho\sigma_a\sigma_b = 0.0001$ 。

(b) $u_a = 0.0247$, $u_b = 0.0124$,

$$\sigma_a^2 = 0.05 \times 0.0247^2 + 0.95 \times 0.016^2,\ \sigma_a = 1.654\% \tag{1}$$

$$\sigma_b^2 = 0.05 \times 0.0124^2 + 0.95 \times 0.025^2,\ \sigma_b = 2.452\% \tag{2}$$

$$cov_{ab} = 0.95 \times 0.0001 + 0.05 \times 0.0124 \times 0.0247 = 0.00011 \tag{3}$$

23.10 某 GARCH（1，1）模型的参数为 $\omega = 0.000004, \alpha = 0.05$ 以及 $\beta = 0.92$，长期平均波动率为多少？描述波动率会收敛到长期平均值的方程是什么？如果目前波动率为 20%，在 20 天后波动率的期望值为多少？

长期波动率为 $\sqrt{0.0001333} = 1.15\%$ 。假设这里 20% 为年波动率。

$$E[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^t(\sigma_n^2 - V_L) \tag{4}$$

20 天后的期望为 1.213%。

23.11 假定资产 X 和 Y 目前每天的波动率分别为 1.0% 和 1.2%，昨天在交易日结束时资产价格分别为 30 美元和 50 美元，资产收益的相关系数为 0.5，在这里我们采用 GARCH（1，1）模型来更新相关系数与波动率，GARCH（1，1）模型中的参数估计为 $\alpha = 0.04$ 和 $\beta = 0.94$，在相关系数估计中采用 $\omega = 0.000001$，在波动率估计中采用 $\omega = 0.000003$，假如在今天交易结束时资产的价格分别为 31 美元和 51 美元，相关系数的最新估计为多少？

更新为：

$$\sigma_x^2 = 0.000003 + 0.04 \times 0.033^2 + 0.94 \times 0.01^2,\ \sigma_x = 1.19\% \tag{5}$$

$$\sigma_y^2 = 0.000003 + 0.04 \times 0.02^2 + 0.94 \times 0.012^2,\ \sigma_x = 1.24\% \tag{6}$$

$$\rho_{xy} = 0.000001 + 0.04 \times 0.02 \times 0.033 + 0.94 \times 0.5 = 0.4700274 \tag{7}$$

23.12 假设富时 100 股指（以英镑计）的日波动率为 1.8%, 美元/英镑汇率的日波动率为 0.9%，我们进一步假定富时 100 与美元/英镑汇率的相关系数为 0.4，富时 100 被转换成美元后的波动率为多少？这里假定美元/英镑汇率被表达为 1 英镑对应的美元数量（提示：当 $Z = X \cdot Y$ 时，Z 所对应的每天百分比价格变化大约等于 X 的每天百分比价格变化，加上 Y 的每天百分比价格变化）。

$$Z = XY \tag{8}$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \tag{9}$$

$$\sigma_z = 0.0231 \tag{10}$$

23.13 假定在练习题 23.12 中，标普 500（以美元计）与富时 100（以英镑计）的相关系数为 0.7，标普 500（以美元计）与美元/英镑的汇率的相关系数为 0.3，标普 500 的日波动率为 1.6%，将富时 100 转换为美元后与标普 500（以美元计）的相关系数为多少？（提示：对于 3 个变量 X, Y 及 $Z, X+Y$ 同 Z 的协方差等于 X 与 Z 的协方差加上 Y 与 Z 的协方差）。

记标普 500 为 X，富时 100 为 Y，汇率为 Z，

$$\rho_{xy} = 0.7, \rho_{xz} = 0.3 \tag{11}$$

$$\sigma_x = 0.016 \tag{12}$$

$$\rho_{x(yz)} = \frac{Cov(x, yz)}{\sigma_x \sigma_{yz}} = \frac{\rho_{xy}\sigma_y + \rho_{xz}\sigma_z}{\sigma_{yz}} = 0.662 \tag{13}$$

23.14 证明由式 (23-9) 所表达的 GARCH (1，1) 模型 $\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$ 与随机波动率模型 $dV = \alpha(V_L - V)dt + \xi V dz$ 等价，其中时间以天计算，V 为资产价格波动率的平方，以及 $a = 1 - \alpha - \beta$，$V_L = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}, \xi = \alpha\sqrt{2}$。当时间以年计算时，随机波动率模型是什么？（提示：变量 u_{n-1} 为资产价格在 Δt 时间内的收益，假定其分布为正态，均值为 0，标准差为 σ_{n-1}。可以证明，从正态分布的矩可以得出，变量 u_{n-1}^2 得均值和方差分别为 σ_{n-1}^2 和 $2\sigma_{n-1}^4$。）

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V dz \tag{14}$$

$$\sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2 = a(V_L - \sigma_{n-1}^2) + \xi\sigma_{n-1}^2\Delta z \tag{15}$$

$$= (1 - \alpha - \beta)(\frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} - \sigma_{n-1}^2) + \sqrt{2}\alpha\sigma_{n-1}^2\Delta z \tag{16}$$

$$\sigma_n^2 = \omega + (\alpha + \beta)\sigma_{n-1}^2 + \sqrt{2}\alpha\sigma_{n-1}^2\Delta z \tag{17}$$

$$= \omega + \beta\sigma_{n-1}^2 + \alpha(\sigma_{n-1}^2 + \sqrt{2}\sigma_{n-1}^2\Delta z) \tag{18}$$

最后一项的均值和二阶矩和 $\Delta x^{\,2}$ 一样。

23.15 在 23.8 节末尾对 4 个指数 VaR 的计算中我们使用了模型构造法。当在每个指数中的投资为 250 万美元时，VaR 的计算会有什么变化？在计算中假定：使用相同权重估计波动率与协方差；使用 $\lambda = 0.94$ 的 EWMA 模型估计波动率与协方差。可以使用作者网页里的计算表。

此时四个指数的投资都是 250 万美元。

(a) $\sigma = 98431$，对应 1 天 99%VaR 为 229345 。

(b) $\sigma = 195453$ 对应的 VaR 为 455405 。

23.16 在 23.8 节末尾对 4 个指数例子的计算中，将 λ 从 0.94 改成 0.97 时对计算有什么影响？可以使用上面网页里的计算表。

略。

作业题

23.17 假定黄金价格在昨天收盘时为 600 美元，估计的波动率为每天 1.3%，今天黄金的收盘价为 596 美元。采用以下模型来更新波动率

(a) 采用 EWMA 模型，其中 $\lambda = 0.94$。

(b) 采用 GARCH（1，1）模型，其中参数选择为 $\omega = 0.000002, \alpha = 0.04$ 和 $\beta = 0.94$。

(a)

$$\sigma^2 = 0.95 \times 0.013^3 + 0.06 \times 0.0067^2 \tag{19}$$

$$\sigma = 0.0127 \tag{20}$$

(b)

$$\sigma^2 = 2\times10^{-6} + 0.04\times0.0067^2 + 0.94\times0.013^2 \tag{21}$$
$$\sigma = 0.01275 \tag{22}$$

23.18 假定在作业题 23.17 中，昨天交易结束时的银价为 16 美元，价格波动率为每天 1.5%，银价与黄金价格的相关系数为 0.8，今天在交易结束时银价同昨天相同，即 16 美元。采用作业题 23.17 中的两个模型来更新黄金价格与银价的波动率以及它们之间的相关系数。在实际中，对于黄金价格及银价采用的 ω 参数是否会相同?

(a)

$$\Sigma = \lambda\begin{pmatrix} 0.013^2 & 0.8\times0.013\times0.015 \\ 0.8\times0.013\times0.015 & 0.015^2 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} 0.0067^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.00016 & 0.00015 \\ 0.00015 & 0.00021 \end{pmatrix} \tag{24}$$

(b)

$$\Sigma = \omega + \alpha\begin{pmatrix} 0.0067^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0.013^2 & 0.8\times0.013\times0.015 \\ 0.8\times0.013\times0.015 & 0.015^2 \end{pmatrix} \tag{25}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.000162 & 0.000152 \\ 0.000152 & 0.000212 \end{pmatrix} \tag{26}$$

23.19 读者可以从网页 http://www.rotman.utoronto.ca/ hull/data 上下载一个计算表，其中含有至少 900 天的不同汇率与股指数据。选择一个汇率与一个股指，估计 EWMA 中的 λ，以使得 $\sum_i (v_i-\beta_i)^2$ 达到极小。其中，v_i 为在第 $i-1$ 天末所做的方差预测，β_i 为由第 i 天至第 $i+25$ 天数据所计算出的方差。在计算中采用 Excel 中的 Solver 功能，在开始 EWMA 计算时，令第 1 天的方差预测值等于第 1 天收益的平方。

选用 GBP 和 FTSE 指数的话，把相应日期的指数和汇率相乘为美元价格。可以计算得该 Loss 最小值为 0.0000870，对应 $\lambda = 0.913$。

23.20 GARCH（1，1）模型中的参数 $\alpha = 0.03, \beta = 0.95$ 和 $\omega = 0.000002$。

(a) **长期平均波动率为多少?**

(b) **如果当前波动率为每天 1.5%，你对 20 天、40 天及 60 天后的波动率估计为多少?**

(c) **应采用什么样的波动率来计算 20 天、40 天及 60 天期限的期权价格?**

(d) **假定由某一事件使得目前的波动率由每天 0.5% 增至每天 2%，估计这一事件对 20 天、40 天及 60 天后波动率的影响。**

(e) **估计这一事件对用于 20 天、40 天及 60 天期限的期权的定价中所使用的波动率的影响。**

(a) $\frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = 0.0002$

(b)

$$E[\sigma_t^2] = V_L + (\alpha+\beta)^t(\sigma_0^2 - V_L) \tag{27}$$
$$= 0.0002 + 0.98^t(0.015^2 - 0.0002) \tag{28}$$

可以得 20 天后，$\sigma = 0.0147$；40 天后，$\sigma = 0.0145$; 60 天后，$\sigma = 0.0144$ 。

(c) 时间段内每日波动率之和。

(d) 对于 20 天，$(0.02^2-0.005^2)\times 0.98^20=0.00025$；对于 40 天，影响为 0.00017，对于 60 天，影响为 0.00011 。

(e) 对于 20 天期权，影响为

$$\Delta\sigma(20)^2 = 252\times(0.0002+\frac{1-e^{-aT}}{aT}(\Delta\sigma_0^2-0.0002)) \tag{29}$$

$$a=\ln\frac{1}{\alpha+\beta} \tag{30}$$

$$\Rightarrow \Delta\sigma(20)^2 = 0.0867 \tag{31}$$

所以对于 20 天期限期权，σ 大约增加 0.043 。类似对于 40 天的影响为 0.040，对于 60 天期权影响为 0.038 。

23.21 在 23.8 节末对 4 个指数例子的计算中，我们假设交易组合在道琼斯工业平均指数，富时 100、CAC40 以及日经 225 中的投资数量分别为 400 万美元、300 万美元、100 万美元和 200 万美元。当投资数量分别变为 300 万美元、300 万美元、100 万美元和 300 万美元时，对 VaR 的计算会有什么改变？在计算时采用相同权重模型；估计时采用 EWMA 模型。在 EWMA 计算中当 λ 从 0.94 变成 0.90 时会有什么影响？在计算时可以利用作者网页里的计算表。

略

23.22 利用 2005 年 7 月 27 日至 2010 年 7 月 27 日之间的欧元-美元汇率数据，对 EWMA 模型和 GARCH（1，1）模型中的参数进行估计。汇率数据可以从网页 http://www.rotman.utoronto.ca/ hull/data 下载。

数据时 2006 年 3 月到 2010 年 3 月的 Euro Exchange 。
EWMA 最合适 $\lambda=0.962$，对应 loss 为-9266 。
GARCH 可以用 Gradient Descent，（这里错了）。

$$v_i=\sigma_i^2=\omega+\alpha u_{i-1}^2+\beta\sigma_{i-1}^2 \tag{32}$$

$$L=\sum_{i=1}^{n}(\ln v_i+\frac{u_i^2}{v_i}) \tag{33}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{v_i}-\frac{u_i^2}{v_i^2})u_{i-1}^2 \tag{34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{v_i}-\frac{u_i^2}{v_i^2})\sigma_{i-1}^2 \tag{35}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\omega}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{v_i}-\frac{u_i^2}{v_i^2}) \tag{36}$$

模型好像不稳定，ω 会逐渐变为负值，所以用 EWMA 模型可能更合适。GARCH 的 ω 逐渐变到负值时 β 约为 0.97, 和 GARCH 的估计值很接近。