

第十一章 股票期权的性质

练习题

11.1 列出影响股票期权价格的 6 个因素。

1. 当前股票价格 S_0 , 2. 执行价格, K , 3. 期权期限, T , 4. 股票价格的波动率, σ , 5. 无风险利率, r , 6. 期权期限内预期支付的股息。

11.2 无股息股票上看涨期权的期限为 4 个月, 执行价格为 25 美元, 股票的当前价格为 28 美元, 无风险利率为每年 8%, 期权下限是多少?

$$28 - 25 \times e^{-0.08 \times \frac{4}{12}} = 3.66 \text{ 美元。}$$

11.3 无股息股票上欧式看跌期权的期限为 1 个月, 执行价格为 15 美元, 股票的当前价格为 12 美元, 无风险利率为每年 6% 时, 期权下限是多少?

$$15 \times e^{-\frac{1}{12} \times 0.06} - 12 = 2.93 \text{ 美元。}$$

11.4 列举两个原因来说明为什么无股息股票上美式看涨期权不应当被提前行使。第一个原因应涉及货币的时间价值; 第二个原因在利率为 0 时也应成立。

(a) 如果行使期权后打算持有股票, 那么需要花费 K 值的钱来购买股票, 如果不行使期权而是用 K 的钱做无风险投资, 等到执行期限到时再买入股票, 会有更高收益。(b) 如果打算行使期权后立马卖出股票, 那么不如直接卖出期权, 因为美式看涨期权价格总是大于等于 $S_0 - Ke^{-rt}$ 。

11.5 “提前行使美式看跌期权是在货币的时间价值与看跌期权的保险价值之间的权衡。”解释这一观点。

保险价值体现在, 如果同时持有股票和看跌期权, 看跌期权可以为股息下跌到一定程度提供保险。时间价值体现在, 如果股价比较低, 提早行使看跌期权可以收入现金进行其它无风险投资, 而且当股价低于一定值后进一步降低的可能性会逐渐减小。

11.6 解释为什么一个支付股息股票上美式看涨期权的价格至少等于其内涵价格。这对欧式看涨期权也成立么? 解释你的答案。

对于美式看涨期权我们总是可以立马行使期权以实现其内涵价值, 所以价格至少等于内涵价格。但时对于欧式看涨期权则不一定, 因为股息的存在使得持有股票会有更多收益, 考虑期权价格时需要移除执行期限前预期股息的贴现值。

11.7 无股息股票的价格为 19 美元, 其上 3 个月期执行价格为 20 美元的欧式看涨期权价格为 1 美元, 无风险利率为每年 4%, 这个股票上 3 个月期限执行价格为 20 美元的看跌期权价格为多少?

$$\text{由 } p + S_0 = c + Ke^{-rt}, \quad p = 1 + 20 \times e^{-0.04 \times 0.25} - 19 = 1.80.$$

11.8 解释为什么关于欧式期权看跌-看涨平价关系的讨论对于美式期权不适用。

欧式期权看跌-看涨平价关系是通过建立分别使用看涨期权和看跌期权的投资策略,使得在期权到期时两种投资具有相同的价值,根据无套利空间要求,两种投资组合必须有同样的价格,从而得出一个平价关系。而对于美式期权,看涨期权和看跌期权的最佳执行时间不一定相同,不易用看涨和看跌期权构造等价的投资组合。

11.9 无股息股票上看涨期权的期限为 6 个月,执行价格为 75 美元,股票当前价格为 80 美元,无风险利率为每年 10% 时,期权价格的下限为多少?

$$80 - 75 \times e^{-0.1 \times 0.5} = 8.66 \text{ 美元。}$$

11.10 无股息股票上欧式看跌期权的期限为 2 个月,执行价格为 65 美元,股票当前价格为 58 美元,无风险利率为每年 5% 时,期权价格的下限为多少?

$$65 \times e^{-0.05 \times \frac{1}{6}} - 58 = 6.46 \text{ 美元。}$$

11.11 一个期限为 4 个月,在支付股息股票上的欧式看涨期权价格为 5 美元,执行价格为 60 美元,股票当前价格为 64 美元,预计在 1 个月后股票将支付 0.8 美元的股息,对于所有期限的无风险利率均为 12%,这时对于套利者而言存在什么样的套利机会?

先计算合理的期权价格下限, $c \geq 64 - 60 \times e^{-0.12 \times \frac{1}{3}} - 0.8 \times e^{-0.12/12} = 5.56$ 美元,由于现在价格为 5 美元,所以有套利空间。可以卖空一只股票,买入看涨期权,预留股息贴现值后将剩余现金进行无风险投资,到一个月时支付股息给卖空对手,4 个月后执行看涨期权买入股票,偿还股票卖空对手股票。这样四个月后的净收益为 $(64 - 5 - 0.8 \times e^{-0.12/12}) \times e^{0.12 \times \frac{1}{3}} - 60 = 0.58$ 美元。

11.12 期限为 1 个月的无股息股票上欧式看跌期权的当前价格为 2.5 美元。股票价格为 47 美元,执行价格为 50 美元,无风险利率为每年 6%,这时对套利者而言存在什么样的套利机会?

一样先计算该看跌期权的价格的最小值, $p \geq 50e^{-0.06/12} - 47 = 2.75$ 美元,但是当前价格为 2.5 美元,所以有套利空间。可以如下进行,以无风险利率借入期权加股价买入看跌期权和股票,一个月后到期行使看跌期权卖出股票,同时偿还借入的资金和利息。这样 1 个月后净收益为 $50 - (2.5 + 47) \times e^{0.06/12} = 0.25$ 美元。

11.13 当无风险利率上升与波动率下降时,用直观方式解释为什么提前行使美式看跌期权会变得更吸引人。

波动率下降美式看跌期权的保险价值降低,同时无风险利率上升,更早得执行期权换取现金进行无风险投资变得更为有利。

11.14 执行价格为 30 美元,期限为 6 个月的欧式看涨期权的价格为 2 美元。标的股票价格为 29 美元,在 2 个月与 5 个月时预计股票将会分别发放 0.5 美元股息,所有期限的无风险利率均为 10%。执行价格为 30 美元,期限为 6 个月的欧式看跌期权价格是多少?

考虑有股息时的看跌-看涨平价关系式, $c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$, D 为股息的贴现值,将数据带入得:

$$2 + 0.5 \times e^{-0.1/6} + 0.5 \times e^{-0.1 \times 5/12} + 30 \times e^{-0.1 \times 0.5} = p + 29, \Rightarrow p = 2.51 \quad (1)$$

同样执行价格和期限的欧式看跌期权价格应为 2.51 美元。

11.15 解释当练习题 11.14 中的欧式看跌期权价格为 3 美元时,会有什么样的套利机会?

当看跌期权太贵时我们可以卖空股票,卖出看跌期权,买入看涨期权,预留股息贴现值后剩余现金进行无风险投资(股息贴现值需要按照预期支付股息时间进行相应无风险投资),期间支付卖空股票对手股息,到 6 个月,如果股价高于执行价格,执行看涨期权,买入股票偿还卖空股票对手,如果股价低于执行价格,看跌期权被执行,以执行价格买入股票偿还股票卖空对手。这样子总盈亏为:

$$(29 + 3 - 2 - 0.5 \times e^{-0.1/6} - 0.5 \times e^{-0.1 \times \frac{5}{12}}) \times e^{0.1 \times 0.5} - 30 = 0.52 \quad (2)$$

可以无风险套利 0.52 美元。

11.16 无股息股票上美式看涨期权的价格为 4 美元，股票价格为 31 美元，执行价格为 30 美元，期限为 3 个月，无风险利率为 8%。推导具有相同股票价格、相同执行价格与相同期限的美式看跌期权上下限。

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}, \Rightarrow Ke^{-rT} + C - S_0 \leq P \leq C + K - S_0.$$

所以：2.41 ≤ P ≤ 3。

11.17 在练习题 11.16 中，如果美式看跌期权价格高于其上限，详细说明这时存在什么样的套利机会。

卖空股票，卖出看跌，买入看涨，剩余现金进行无风险投资。这样投资后，初始现金为 30 美元，被进行无风险投资，假设任意期限前一时刻股价低于 30 美元，看跌期权被执行，我们只需要付出 30 美元买入股票，偿还卖空股票对手，看涨期权还有至少为 0 的价值，而且这段时间会收益 30 美元无风险投资的利息。如果到最后看跌期权都没有被执行，我们最多需要花费 30 美元执行看涨期权，买入股票偿还最初股票卖空对手，这段时间 30 美元无风险投资收获的利息加上看涨期权可能产生的收益之和为我们的总收益。所以这样操作无论股价怎么变化我们都会有大于零的正收益。

11.18 证明式 (11-7) (提示：对于关系式的第一部分，考虑 (a) 一个欧式看涨期权与一个数量为 K 的现金组合，及 (b) 一个美式看跌期权与 1 只股票的组合。)

11-7 为： $S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$ ，分为两部分 (a) $P + S_0 - C - K \leq 0$; (b) $C - P - S_0 + Ke^{-rT} \leq 0$ 。

- (a) 考虑投资组合：卖空股票，卖出美式看跌期权，买入美式看涨期权，以无风险利率借出 K 的资金。我们可以证明这种组合将来的价值总是大于等于 0 的。初始现金情况为 $P + S_0 - C - K$ ，如果初始现金大于 0，考虑到组合的将来价值也大于零，就会有无风险套利空间（最简单的就把多出来的现金以无风险利率借出）。

考虑这个组合，如果在将来一时刻股价低于执行价格，看跌期权被执行，我们付出 K 的价格买入股票，买入的股票可以偿还卖空股票对手。我们的看涨期权还有大于等于零的价值，同时我们借出的 K 的资金本息也会大于 K，所以把所有投资平仓之后，会有大于等于 0 的收益。如果看跌期权一直没有被执行，收回借出资金的本金和利息（大于 K），执行看涨期权（付出 K），偿还卖空股票对手股票，总收益还是大于等于 0。

- (b) 考虑投资组合：以无风险利率借入 Ke^{-rT} 资金，卖出美式看涨，买入美式看跌，买入股票。这个组合的价值在将来也是大于等于 0 的。初始现金即为： $C - P - S_0 + Ke^{-rT}$ 。所以初始现金同样不能大于 0，否则可以进行无风险套利。

对于这个组合，如果将来一时刻股价大于执行价格，美式看涨被执行，我们以价格 K 卖出持有的股票，偿还借入资金的本息（小于等于 K），同时我们的看跌期权还有大于等于 0 的价值，所以平仓所有投资后的总盈亏是大于等于 0 的。如果卖出的美式看涨一直没有被执行，由于我们持有看跌期权和股票，我们至少可以以价格 K 卖出股票，偿还借入资金，最后总盈亏也是大于等于 0 的。

11.19 证明式 (11-11) (提示：对于关系式的第一部分，考虑 (a) 一个欧式看涨期权与一个数量为 $D + K$ 的现金的组合，以及 (b) 一个美式看跌期权与 1 只股票的组合)。

和上一题类似，只是需要考虑股息贴现对有效即期股价的影响（可能我们持有股票但还没收到股息，就需要卖出股票，或者我们卖空股票，在支付对方股息之后再偿还股票）。证明的投资组合和上题一样。

11.20 考虑一个 5 年期的雇员期权，标的股票不支付股息，期权可以在 1 年后任何时间行使。与通常在交易所内交易的看涨期权不同的是，雇员期权不能被出售。这一限制对提前行使策略会有什么影响？

由于雇员期权不能被出售，所以总是需要执行期权来实现它的价值。所以最优的方式是在我们估计公司股价虚高很多时，选择执行期权并卖出股票。当我们估计股价被低估时，不需要执行期权并持有股票，因为这样会浪费本可以做无风险投资的现金。

11.21 略

作业题

11.22 在交易所，看涨期权比看跌期权被更早引入，在看涨期权被引入而同时看跌期权还没有被引入时，对于一个无股息股票，你将如何由看涨期权来构造欧式看跌期权？

卖空股票，买入看涨。

11.23 假定关于某无股息股票的看涨和看跌期权的价格分别为 20 美元和 5 美元，期权期限为 12 个月，执行价格为 120 美元，当前股票价格为 130 美元，由以上信息隐含得出的无风险利率为多少？

根据看跌-看涨平价关系， $p + S_0 = c + Ke^{-rt}$ ，可以得到 $r = 4.26\%$ 。

11.24 同一股票上的欧式看涨与看跌期权的执行价格均为 20 美元，期限均为 3 个月，两个期权的价格均为 3 美元，无风险利率均为每年 10%，当前股票价格为 19 美元，在 1 个月时股票预计将支付 1 美元的股息。对于交易员来讲，这时会有什么样的套利机会？

$c + D + Ke^{-rT} = 3 + 1 \times e^{-0.1/12} + 20 \times e^{-0.1/4} = 23.50$ ，然后 $p + S_0 = 22$ 。说明看涨期权价格过高。

考虑这种组合：买入看跌期权，买入股票，卖出看涨期权，借入 K 的贴现值，这样总现金值为 1.50。之后如果股价大于 K ，看涨期权被执行，我们只需要以 K 卖出股票，用收入的 K 偿还借入的现金，看跌期权此时价值为 0，这样平仓后总价值为 0。如果股价小于 K ，看涨期权不会被执行，我们执行看跌期权，以 K 的价格卖出股票，收入现金偿还之前借入的现金，这样总盈亏也是 0。所以这个投资组合可以套利最初多出来的 1.5 美元。

11.25 假设 c_1 、 c_2 、 c_3 分别代表执行价格为 K_1 、 K_2 与 K_3 的欧式看涨期权的价格，这里的执行价格满足 $K_3 > K_2 > K_1$ 和 $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ 。所有期权具有相同的到期日，证明：

$$c_2 \leq 0.5(c_1 + c_3) \quad (3)$$

(提示：考虑以下交易组合：一个执行价格为 K_1 的期权多头，一个执行价格为 K_3 的期权多头，以及两个执行价格为 K_2 的期权空头)。

考虑卖出两份 c_2 ，买入一份 c_1 和 c_3 ，到期日时的盈亏如图：

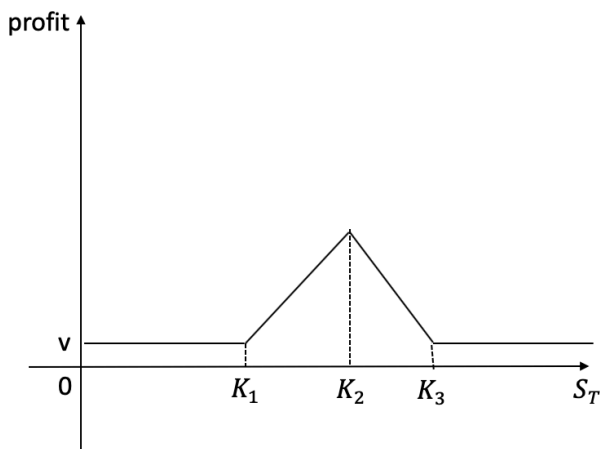


Fig 11.25

其中 $v = 2c_2 - c_1 - c_3$ ，如果 v 大于 0，那么这个组合是可以无风险套利的。所以 v 必须小于 0，即 $c_2 \leq 0.5(c_1 + c_3)$ 。

11.26 如果作业题 11.25 中的期权为欧式看跌期权，结果又会如何？

卖出两份执行价在中间的看跌期权，执行价高和低的看跌期权各买入一份。会得到和上题中图一样的盈亏曲线，考虑不能存在无风险套利，关于看跌期权价格的不等式也是一样的。

11.27 假设你是一家杠杆比例很高公司的经理和唯一股东，所有的债务在 1 年后到期，如果那时公司的价值高于债务的面值，你将偿还债务；如果那时公司价值小于债务的面值，你将宣布破产，同时债务人将会拥有公司。

- (a) 将公司的价值作为期权的标的资产，描述你的期权头寸状况。
- (b) 将公司的价值作为期权的标的资产，描述债权人的期权头寸状况。
- (c) 你应该如何提高你的期权头寸价值？
 - (a) 多头看涨。
 - (b) 相当于卖出看跌期权。
 - (c) 想办法提高公司盈利状况，和债权人协商延长偿还债务时间。

11.28 略

11.29 略

11.30 11.1 节里给出了一个欧式看涨期权价格随时间期限增长而有所降低的例子，请给出一个具有同样性质，即价格随时间期限增长而有所降低的欧式看跌期权的例子。

当无风险利率很低的时候，持有股票变得越来越不如早日兑换现金，这样看跌期权价值会下降。