第三十章 曲率、时间与 Quanto 调整

练习题

30.1 解释你如何去对一个在 5 年后付出 100R 的衍生产品定价，其中 R 是在 4 年后所观察到的 1 年期利率（按年复利）。当支付时间在第 4 年时，会有什么区别？当支付时间在第 6 年时，会有什么区别？

(a) 用当前期限为第四年到第五年的远期零息债券价格计算出远期利率，即为定价所用利率。

(b) 如果支付时间在第四年，需要对利率进行曲率调整。

(c) 如果支付时间在第 6 年，需要对利率进行时间调整。由相对 $P(0,5)$ 远期风险中性世界转换到相对 $P(0,6)$ 远期风险中性世界。

30.2 解释在下面情况下，有没有必要做任何曲率或时间调整？

(a) **我们要定价的期权每个季度支付一次，数量等于 5 年期互换利率超出 3 个月 LIBOR 利率的部分（假如超出的话），本金为 100 美元，收益发生在利率被观察后 90 天。**

(b) **我们要定价的期权每季度支付一次，数量等于 3 个月的 LIBOR 利率减去 3 个月的短期国库券利率，收益发生在利率被观察后 90 天。**

（a）如果这里互换指的是一个不变的互换的话，不需要进行调整。

（b）不清楚。

30.3 假设 29.2 节中例 29-3 里的收益发生在 1 年后（即利率被观察到的时候），而不是 15 个月后。布莱克模型中所需要的参数会有什么区别？

远期利率需要进行曲率调整。

30.4 收益率曲线呈水平形状，利率为每年 10%，按年复利，计算这样一个产品的价值：5 年后收取 2 年互换利率（按年复利），而付出 10% 的固定利率，两种利率的名义本金数量均为 100 美元。假设互换利率的波动率为每年 20%，解释产品的价格为什么不等于 0 。

这里收益率未来的期望并不一定为 10%, 需要进行曲率调整。这里把互换利率近似为远期债券收益率。

$$G(y) = \frac{0.1}{(1+y)} + \frac{1.1}{(1+y)^2},\ y_0 = 0.1,\ G'(y_0) = -1.356,\ G''(y_0) = 4.658$$

$$\mathbb{E}[y_T] = y_0 - \frac{1}{2}\frac{G''(y_o)}{G'(y_0)} y_0^2 \sigma_y^2 T = 0.1034 \tag{1}$$

曲率调整后收益率期望为 0.1034，大于 10%。

30.5 解释在下列情况下，练习题 30.4 会有何区别。互换利率被观察的时间为 5 年，但收益却发生在（a）6 年后，（b）7 年后。假设所有远期利率的波动率均为 20%，介于 5～7 年之间的互换利率与介于 5～6 年之间的远期利率的相关系数为 0.8，并与 5～7 年之间远期利率的相关系数为 0.95 。

除了对收益率期望进行曲率调整之外，还需要进行时间调整，

(a) $\mathbb{E}_{T=6}[y_{T=5}] \approx 0.1034 - 0.015 = 0.0984$。

(b) $\mathbb{E}_{T=7}[y_{T=5}] \approx 0.1034 - 0.035 = 0.0784$。

30.6 一个债券在时间 T 的价格作为其收益率的函数为 $G(y_T)$ 。假设在一个对时间 T 到期的债券为远期风险中性的世界里，远期债券收益率 y 服从集合布朗运动。假定远期债券收益率的增长率为 α，波动率为 σ_y。

(a) 利用伊藤引理，计算由 α、σ_y、y 和 $G(y)$ 表示的远期债券价格的过程。

(b) 在所考虑的世界里，远期债券价格应当为一个鞅。利用这个结论来推导 α 的表达式。

(c) 证明 α 表达式的一阶逼近与式（30-1）一致。

(a) $dG(y) = (G'(y)y\alpha + \frac{1}{2}G''(y)\sigma_y^2 y^2)dt + G'(y)y\sigma_y dz$

(b) $\alpha = -\frac{1}{2}\frac{G''(y)}{G'(y)}\sigma_y^2 y$ 。

(c) $\mathbb{E}[y_T] = y_0 e^{\alpha T} \approx y_0 - \frac{1}{2}\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}y_0^2\sigma_y^2 T$。

30.7 变量 S 是一个提供中间收益率为 q 并以货币 A 来度量的投资资产。在现实世界里，它服从以下过程

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz \tag{2}$$

如有必要，可以定义新的变量。对以下情形，给出 S 所服从的过程，以及相应的风险市场价格。

(a) 在货币 A 下的传统风险中性世界。

(b) 在货币 B 下的传统风险中性世界。

(c) 对货币 A 下，对时间 T 到期的零息债券为远期风险中性的世界。

(d) 对货币 B 下，对时间 T 到期的零息债券为远期风险中性的世界。

(a) $dS = (r_A - q)Sdt + \sigma_S S dz$ 。

(b) $dS = (r_A - q + \rho_{SV}\sigma_V\sigma_S)Sdt + \sigma_S S dz$, $V = \frac{g_B}{g_A}X_{BA}$, X_{BA} : 汇率。

(c) $dS = (r_A - q + \sigma_S\sigma_{PA})Sdt + \sigma_S S dz$。

(d) $dS = (r_A - q + \sigma_S\sigma_{PA} + \rho_{SW}\sigma_S\sigma_W)Sdt + \sigma_S S dz$, $W = \frac{P_B(t,T)}{P_A(t,T)}X_{BA}$。

30.8 一个看涨期权在时间 T 提供的收益为 $\max(S_T - K, 0)$ 日元，其中 S_T 为时间 T 以美元计价的黄金价格，K 为执行价格。假设黄金存储费用为 0，并定义其他必要的变量，计算合约的价值。

计价货币由美元转为日元，远期价格 $F(S_T)$ 需要做 Quanto 调整，

$$c = e^{-r_{yen}T}[F_{yen}(S_T)N(d_1') - KN(d_2')]$$

$$F_{yen}(S_T) = F_{dollar}(S_T)(1 + \rho_{SW}\sigma_S\sigma_W T), \quad W(t) = \frac{P_{yen}(t,T)}{P_{dollar}(t,T)}X_{yen/dollar}$$

30.9 假设一个加拿大的股票指数的当前水平为 400，而目前 1 加元值 0.70 美元，加拿大和美国的无风险利率分别为 6% 和 4%，股指的股息收益率为 3%。定义 Q 为每单位美元所兑换的加元数量，S 为股指值，S 的波动率为 20%，Q 的波动率为 6%，S 和 Q 之间的相关系数为 0.4 。利用 DerivaGem 计算以下关于这个指数的 2 年期美式看涨期权的价值。

(a) 以加元为度量的指数超出 400 的数量。

(b) 以美元为度量的指数超出 400 的数量。

(a) 以加元计，美式看涨相应参数为 $r = 0.06$, $q = 0.03$, $\sigma = 0.2$, $T = 2$, $S_0 = 400$, $K = 400$, 使用二叉树计算得 $C = 52.97$。

(b) 以美元计，$q = [0.04 - (0.06 - 0.03 + \rho_{SQ}\sigma_S\sigma_Q)] = 0.0052$, $\quad r = 0.04$，其它参数不变，使用二叉树计算得出 $C = 57.56$。

作业题

30.10 考虑一个 2 年后支付 S 美元的产品，这里 S 代表日经指数值，指数的当前值为 20000，日元/美元汇率为 100（1 美元所兑换的日元数量）。汇率与指数的相关系数为 0.3，指数的股息收益率为每年 1%。日经指数的波动率为 20%，日元/美元汇率的波动率为 12%。美国和日本的无风险利率（假定为常数）分别为 4% 和 2%。

(a) 该产品的价值为多少?

(b) 假设在产品有效期内的某个时间汇率为 Q、指数的水平为 S。证明一个美国投资者可以通过在日经指数上投资 S 美元，并且卖空 SQ 日元的组合来达到以下目的：当指数变化为 ΔS 日元时，组合的变化大约为 ΔS 美元。

(c) 通过假设指数由 20000 变为 20050，汇率由 100 变为 99.7 来验证（b）的正确性。

(d) 你如何对所考虑的产品进行 Delta 对冲?

(a) $\mathbb{E}_{dollar}[S_T] = \mathbb{E}_{yen}[S_T] \times [1 + 0.3 \times 0.2 \times 0.12] = 1.0072 \times e^{0.01\times 2} S_0$，
$value = e^{-0.04\times 2} \times \mathbb{E}_{dollar}[S_T] \times \frac{1}{100} = 189.71$。

(b) 开始时组合为：$\frac{QS}{S}$ 份指数和 $-QS$ 份日元，以美元计价值为：$\frac{QS}{Q} - \frac{QS}{Q} = 0$;
变化后组合组成不变，以美元计价值变为：$\frac{Q(S+\Delta S)}{Q+\Delta Q} - \frac{QS}{Q+\Delta Q} = \frac{\Delta S \cdot Q}{Q+\Delta Q} \approx \Delta S$。

(c) $\frac{\Delta S \cdot Q}{Q+\Delta Q} = \frac{50\times 100}{99.7} \approx 50 = \Delta S$。

(d)（a）中产品价值为 μS_0，$\mu = 0.00949$，（b）中产品价值变化和 ΔS 近似相等。所以可以分别多空（a）和（b）中产品，比例为 μ，来进行对冲。

30.11 假设 LIBOR 收益率曲线呈水平状，利率为 8%（按连续复利）。一个衍生产品的收益发生在 4 年后，并等于当时的 5 年期利率减去 2 年期利率，本金为 100 美元，而且利率均按连续复利（产品的收益可正可负）。计算衍生产品的价值。假定所有利率的波动率均为 25%。如果收益发生在 5 年后而不是 4 年后，这会引起什么不同? 假设所有利率之间有完美的相关性。使用 LIBOR 贴现。

$$
\begin{aligned}
&G_1(y) = e^{-2y}, \quad G_2(y) = e^{-5y} \\
&\mathbb{E}[y_{T1}] = y_0 - \frac{1}{2}\frac{G_1''(y_0)}{G_1'(y_0)}\sigma_y^2 y_0^2 4 = 0.0816,\ \ \mathbb{E}[y_{T2}] = y_0 - \frac{1}{2}\frac{G_2''(y_0)}{G_2'(y_0)}\sigma_y^2 y_0^2 4 = 0.084 \\
&100 \times (\mathbb{E}[y_{T2} - y_{T1}]) e^{-4\times 0.08} = 0.174
\end{aligned}
$$

如果支付时间在 5 年后而不是 4 年后，对于远期收益率还需要进行时间调整。

30.12 假设一个衍生产品的收益发生在 10 年后，并且等于在当时所观察到的 3 年期每半年结算一次的美元互换合约的互换利率乘以本金数量。假定美元和日元收益率曲线均呈水平状，利率分别为 8% 和 3%（均按半年复利），远期互换利率的波动率为 18%，10 年期的“每单位美元的日元数量“远期汇率的波动率为 12%，并且汇率与美元利率的相关系数为 0.25 。

(a) 如果互换利率被用在 1 亿美元的本金上，收益时按美元支付，这时衍生产品的价值为多少?

(b) 如果互换利率被用在 1 亿日元的本金上，收益时按日元支付，这时衍生产品的价值时多少?

(a) 把互换利率近似为远期债券收益率，

$$
\begin{aligned}
&G(y) = \sum_{i=1}^{6} \frac{0.04}{(1+0.5\times y)^i} + \frac{1}{(1+0.5\times y)^6}, \quad y_0 = 0.08 \\
&\mathbb{E}[y_T] = y_0 - \frac{1}{2}\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)} y_0^2 \sigma_y^2 T = 0.0865 \\
&value = 10^8 \times \mathbb{E}[y_T] \times (1+0.04)^{-20} = 3.945 \times 10^6
\end{aligned}
$$

(b)

$$\mathbb{E}_{yen}[y_T] = \mathbb{E}_{dollar}[y_T](1+\rho_{yW}\sigma_y\sigma_W T), \quad W(t) = \frac{P_{yen}(t,T)}{P_{dollar}(t,T)}S(t), \quad S(t): \text{日元对美元汇率}$$
$$\mathbb{E}_{yen}[y_T] = \mathbb{E}_{dollar}[y_T] \times 1.054$$
$$value = 1.054 \times 0.0865 \times 10^8 \times (1+0.015)^{-20} = 6.77 \times 10^6$$

30.13 一个衍生产品的收益发生在 8 年后，其数量等于在第 5、第 6、第 7 和第 8 年时所观察到的 1 年期利率的平均值乘以 1000 美元本金。收益率曲线呈水平状，利率等于 6%（按年复利），而所有利率的波动率均为 16%。假设所有利率之间都具有完美的相关性，衍生产品的价值为多少?

先进行曲率调整，然后时间调整。

$$value = \frac{1}{4}e^{-8\times 0.06} \times \mathbb{E}_{T=8}[y_{T=5}+y_{T=6}+y_{T=7}+y_{T=8}] \times 1000, \quad y_0 = 0.06$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=5}] = \mathbb{E}_{T=5}[y_{T=5}]e^{-0.0256\times 3\times 5\frac{y_0}{1+y_0}} = y_0(1+0.0256\times 5\times\frac{y_0}{1+y_0})e^{-0.0256\times 3\times 5\frac{y_0}{1+y_0}} = 0.0591$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=6}] = \mathbb{E}_{T=6}[y_{T=6}]e^{-0.0256\times 2\times 6\frac{y_0}{1+y_0}} = y_0(1+0.0256\times 6\times\frac{y_0}{1+y_0})e^{-0.0256\times 2\times 6\frac{y_0}{1+y_0}} = 0.0595$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=7}] = \mathbb{E}_{T=7}[y_{T=7}]e^{-0.0256\times 1\times 7\frac{y_0}{1+y_0}} = y_0(1+0.0256\times 7\times\frac{y_0}{1+y_0})e^{-0.0256\times 1\times 7\frac{y_0}{1+y_0}} = 0.0600$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=8}] = y_0 + 0.0256\times 8\times\frac{y_0}{1+y_0} = 0.0607$$
$$value = 57$$

或者直接考虑时间调整，由于收益率曲线水平，$y_0 = \mathbb{E}_{T=T_i+1}[y_{T=T_i}]$：

$$value = \frac{1}{4}e^{-8\times 0.06} \times \mathbb{E}_{T=8}[y_{T=5}+y_{T=6}+y_{T=7}+y_{T=8}] \times 1000, \quad y_0 = 0.06$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=5}] = \mathbb{E}_{T=6}[y_{T=5}]e^{-0.0256\times 2\times 5\frac{y_0}{1+y_0}} = y_0 e^{-0.0256\times 2\times 5\frac{y_0}{1+y_0}} = 0.0591$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=6}] = \mathbb{E}_{T=7}[y_{T=6}]e^{-0.0256\times 1\times 6\frac{y_0}{1+y_0}} = y_0 e^{-0.0256\times 1\times 6\frac{y_0}{1+y_0}} = 0.0595$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=7}] = y_0 = 0.0600$$
$$\mathbb{E}_{T=8}[y_{T=8}] = y_0 + 0.0256\times 8\times\frac{y_0}{1+y_0} = 0.0607$$
$$value = 57$$