

1 欧式期权价格

使用申明*

2021 年 2 月 18 日

目录

1 简介	1
2 Python 代码实现计算	1
3 相关说明	2
3.1 价格和价值	2
3.2 正态分布累积该率函数	2
4 参考资料	3

1 简介

考虑期权对应的资产价格为 $S(t)$ ，记为 S ，它的变化过程为几何布朗运动，

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \quad (1)$$

这里假设漂移率 μ 和波动率 σ 都为常数， dz 为维纳过程（布朗运动）随机项。

如果我们在时刻 $t = 0$ 观察，此时资产价格为 S_0 。对于执行日期为 T ，执行价格为 K 的欧式看涨或看跌期权，我们知道根据 Black-Scholes-Merton 欧式期权定价公式，看涨期权的价格 c 和看跌期权的价格 p 可以分别被表示为：

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \quad (2)$$

这里的 r 为无风险利率，也假设为常数。 $N()$ 函数为标准正态分布累积概率函数。 d_1 和 d_2 为

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (3)$$

在 Python 里做数值计算我们只需要用到 `numpy` 和 `scipy.stats.norm` 两个模块。具体实现起来比较简单，就是把价格表达式写成 Python 函数就可以了。

2 Python 代码实现计算

<code>import numpy as np</code>	1
<code>from scipy.stats import norm</code>	2
	3
<code>E = np.e</code>	4
	5

*作者不对内容正确性负责。如果您希望使用部分内容作为报告、文章内容等，请您注明内容来源为“金融工程资料小站”网站。

#作为例子的一组数值。

r, sigma, S_0, K, T = 0.05, 0.20, 90.0, 100.0, 3.0

#欧式期权价格函数。

```
def european_option(r, sigma, S_0, K, T):
```

""" r: 无风险利率; sigma: 资产波动率; S_0: 资产初始 (当前) 价格;

K: 期权执行价格; T: 期权执行时间。

"""

d_1 = (np.log(S_0/K)+(r-0.5)*sigma*sigma*T)/sigma/T**0.5

d_2 = d_1-sigma*T**0.5

call_price = S_0*norm.cdf(d_1)-K*E**(-r*T)*norm.cdf(d_2)

put_price = K*E**(-r*T)*norm.cdf(-d_2)-S_0*norm.cdf(-d_1)

return (call_price, put_price)

然后我们可以检验结果是不是满足看跌-看涨平价关系式:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 . \quad (4)$$

假设 $r = 0.05, \sigma = 0.20, S_0 = 90, K = 100, T = 3$, 使用上面的函数我们可以计算得:

```
call_price, put_price = european_option(r, sigma, S_0, K, T)
```

```
print("欧式看涨期权价格为: {0:.5f}, 欧式看跌期权价格为: {1:.5f}。".format(call_price, put_price))
```

```
print(" {0:.5f}+{1:.5f}={2:.5f}+{3:.5f}\n".format(call_price, K*E**(-r*T), put_price, S_0))
```

```
print(" {0:.5f}={1:.5f}\n".format(call_price + K*E**(-r*T), put_price+S_0))
```

Output:

欧式看涨期权价格为: 10.973, 欧式看跌期权价格为: 7.0436 。

看跌-看涨平价关系式为:

$$10.973+86.071 = 7.0436+90.0$$

$$97.044 = 97.044$$

3 相关说明

3.1 价格和价值

感觉这两个词很容易被混用或混淆, 所以简单在这里描述一下它们的特点:

价格 (price): 一般是指市场上我们考虑的商品的标价或买卖成交价。

价值 (value): 我们考虑的商品的“合理”价格, 不一定严格等于市场上该商品的价格。“合理”这里指我们可以由可靠的定价方式 (比如无风险套利), 通过观察市场上除该商品考虑价格之外的变量, 估计出的该商品在该时刻应有的价格。

虽然很多时候混着用也没有什么问题, 但它们应该是不同的。

3.2 正态分布累积该率函数

上面期权表达式中的 $N(x)$ 函数为正态分布累积概率函数, 为对标准正态分布 (均值为 0, 标准差为 1) 概率密度从 $-\infty$ 到 x 的积分, 即

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds . \quad (5)$$

一般具体数值都是查表或直接做数值积分, 这里我们直接用 `scipy` 模块里的 `stats.norm` 类, 它包含了正态分布相关的一些函数。其中 `norm.cdf()` 即为累积概率函数。下面左图为正态分布概率密度函数, 右图为正态分布累积概率函数。

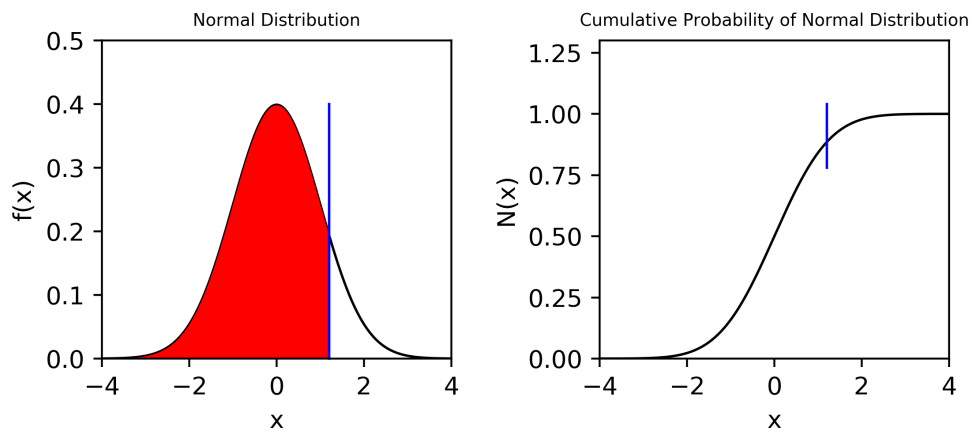


Fig. 1

4 参考资料

参考文献

- [1] 《期权、期货及其他衍生产品》（原书第 9 版）第 15 章，John C. Hull 著，王勇、索吾林译，机械工业出版社，2014.11。