1 欧式期权价格

使用申明*

2021 年 2 月 18 日

目录

1 简介

考虑期权对应的资产价格为 $S(t)$，记为 S，它的变化过程为几何布朗运动，

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \tag{1}$$

这里假设漂移率 μ 和波动率 σ 都为常数，dz 为维纳过程（布朗运动）随机项。

如果我们在时刻 $t = 0$ 观察，此时资产价格为 S_0。对于执行日期为 T，执行价格为 K 的欧式看涨或看跌期权，我们知道根据 Black-Scholes-Merton 欧式期权定价公式，看涨期权的价格 c 和看跌期权的价格 p 可以分别被表示为：

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \quad p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)\,. \tag{2}$$

这里的 r 为无风险利率，也假设为常数。$N()$ 函数为标准正态分布累积概率函数。d_1 和 d_2 为

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\,. \tag{3}$$

在 Python 里做数值计算我们只需要用到 numpy 和 scipy.stats.norm 两个模块。具体实现起来比较简单，就是把价格表达式写成 Python 函数就可以了。

2 Python 代码实现计算

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm

E = np.e

```

*作者不对内容正确性负责。如果您希望使用部分内容作为报告、文章内容等，请您注明内容来源为“金融工程资料小站”网站。

```
#作为例子的一组数值。
r, sigma, S_0, K, T = 0.05, 0.20, 90.0, 100.0, 3.0

#欧式期权价格函数。
def european_option(r, sigma, S_0, K, T):
    """ r: 无风险利率; sigma: 资产波动率; S_0: 资产初始(当前)价格;
      K: 期权执行价格; T: 期权执行时间。
    """
    d_1 = (np.log(S_0/K)+(r+0.5*sigma*sigma)*T)/sigma/T**0.5
    d_2 = d_1-sigma*T**0.5
    call_price = S_0*norm.cdf(d_1)-K*E**(-r*T)*norm.cdf(d_2)
    put_price = K*E**(-r*T)*norm.cdf(-d_2)-S_0*norm.cdf(-d_1)

    return (call_price, put_price)
```

然后我们可以检验结果是不是满足看跌-看涨平价关系式:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \ . \tag{4}$$

假设 $r = 0.05, \sigma = 0.20, S_0 = 90, K = 100, T = 3$，使用上面的函数我们可以计算得:

```
call_price, put_price = european_option(r, sigma, S_0, K, T)
print("欧式看涨期权价格为: {0:.5f}, 欧式看跌期权价格为: {1:.5f}。".format(call_price, put_price))
print("看跌-看涨平价关系为: ")
print("    {0:.5}+{1:.5}={2:.5}+{3:.5}\n".format(call_price, K*E**(-r*T), put_price, S_0))
print("                {0:.5}={1:.5}\n".format(call_price + K*E**(-r*T), put_price+S_0))

Output:
    欧式看涨期权价格为: 14.17, 欧式看跌期权价格为: 10.24 。
    看跌-看涨平价关系式为:
        14.16968+86.071 = 10.24+90.0
                100.24 = 100.24
```

3 相关说明

3.1 价格和价值

感觉这两个词很容易被混用或混淆，所以简单在这里描述一下它们的特点:
价格(price): 一般是指市场上我们考虑的商品的标价或买卖成交价。
价值(value): 我们考虑的商品的“合理”价格，不一定严格等于市场上该商品的价格。“合理”这里指我们可以由可靠的定价方式(比如无无风险套利)，通过观察市场上除该商品考虑价格之外的变量，估计出的该商品在该时刻应有的价格。
虽然很多时候混着用也没有什么问题，但它们应该是不同的。

3.2 正态分布累积该率函数

上面期权表达式中的 $N(x)$ 函数为正态分布累积概率函数，为对标准正态分布(均值为 0，标准差为 1)概率密度从 $-\infty$ 到 x 的积分，即

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \ . \tag{5}$$

一般具体数值都是查表或直接做数值积分，这里我们直接用 scipy 模块里的 stats.norm 类，它包含了正态分布相关的一些函数。其中 norm.cdf() 即为累积概率函数。下面左图为正态分布概率密度函数，右图为正态分布累积概率函数。

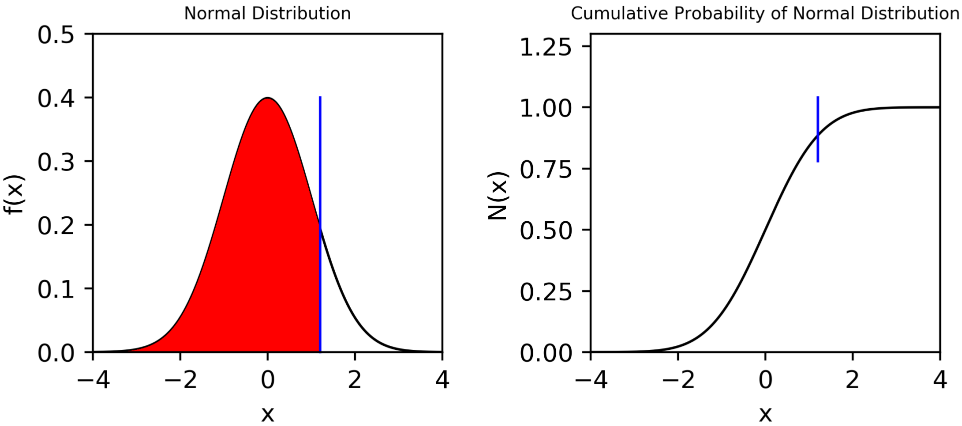

Fig. 1

4 参考资料

参考文献

[1]《期权、期货及其他衍生产品》（原书第 9 版）第 15 章，John C. Hull 著，王勇、索吾林译，机械工业出版社，2014.11 。