第三十一章　利率衍生产品：短期利率模型

练习题

31.1 均衡模型与无套利模型的区别是什么?

均衡模型不能保证模型给出的初始利率期限结构和市场上观察到的利率期限结构相吻合。无套利模型通过在瞬时利率的漂移项中加入初始利率期限结构决定的随时间变化项，保证了模型给出的利率初始期限结构和市场上对应零息债券的价格相吻合。

31.2 假设当前的短期利率为 4%，其标准差为每年 1%。当短期利率增长到 8% 时，在下列模型中，它的标准差会有什么变化?（a）Vasicek 模型；（b）Rendleman 和 Bartter 模型；（c）Cox，Ingresoll 和 Ross 模型。

（a）不变；（b）变为 2%；（c）变为 1.414%。

31.3 如果股票价格具有均值回归性，或有轨迹依赖性，那么市场将不会是有效的。为什么当短期利率具有这些性质时，市场仍可以是有效的?

如果股票价格具有历史数据依赖性，那么可能可以通过分析历史数据对股票价格变化有有意义的预测，从而相对稳定盈利，有效市场应该使得这种盈利机会微乎其微。

对于瞬时/短期利率，即使我们可以一定程度上预测其变化，但是利率的收益是发生在一段时间之后，同时利率直接决定贴现比例。

31.4 解释单因子与两因子模型的区别。

单因子模型中利率的变化过程只包含一个不确定项，两因子模型中包含两个不确定项。

31.5 在 31.4 节中，我们描述了如何将一个带息债券的期权分解成一些零息债券期权的组合，这种处理方式能被推广到两个因子模型的情形吗? 解释你的答案。

对于单因子模型，r 的上升或者下降会使对应的零息债券价格同方向变化（如 page 566 所述），所以可以把带息债券的期权拆分为一系列零息债券期权的组合。对于两因子模型，不知道。

31.6 假设在 Vasicek 模型与 Cox，Ingresoll 和 Ross 模型中的参数为 $a = 0.1$ 和 $b = 0.1$ 。在两种模型下，初始短期利率均为 10%，在一个短时间 Δt 内，短期利率变化的初始标准差为 $0.02\sqrt{\Delta t}$。比较两种模型所给出的 10 年期零息债券的价格。

$a = 0.1,\ b = 0.1,\ r = 0.1,\ \sigma_{Vasick} = 0.02,\ \sigma_{CIR} = 0.02/\sqrt{0.1} = 0.0632,\ T = 10,\ t = 0$。

Vasicek:

$$
\begin{aligned}
&P(0,T) = A(0,T)e^{-B(0,T)r} \\
&B(0,T) = \frac{1-e^{-aT}}{a} \\
&A(0,T) = exp\left[\frac{(B(0,T)-T)(a^2b-\frac{\sigma^2}{2})}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(0,T)^2}{4a}\right]
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ P(0,T) = 0.3805$$

CIR:

$$
\begin{aligned}
&P(0,T)=A(0,T)e^{-B(0,T)r}\\
&B(0,T)=\frac{2(e^{\gamma T}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma T}-1)+2\gamma},\quad \gamma=\sqrt{a^2+2\sigma^2}\\
&A(0,T)=\left[\frac{2\gamma e^{\frac{1}{2}(a+\gamma)T}}{(\gamma+a)(e^{\gamma T}-1)+2\gamma}\right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}\\
\Rightarrow\ &P(0,T)=0.3799
\end{aligned}
$$

31.7 假设在 Vasicek 模型中，$a=0.1,\ b=0.08$ 和 $\sigma=0.015$，初始短期利率为 5%。计算在 3 年期零息债券上期限为 1 年、执行价格为 87 美元的欧式看涨期权价格。零息债券本金为 100 美元。

考虑 s 到期零息债券，期限为 T 的欧式看涨期权，参数为：$a=0.1,\ b=0.08,\ \sigma=0.015,\ L=100,\ K=87$。

$$
\begin{aligned}
&c=LP(0,s)N(h)-KP(0,T)N(h-\sigma_P)\\
&\sigma_P=\frac{\sigma}{a}(1-e^{-a(s-T)})\cdot\sqrt{\frac{1-e^{-aT}}{2a}}\\
&h=\frac{\sigma_P}{2}+\frac{1}{\sigma_P}\ln\frac{LP(0,s)}{KP(0,T)}\\
\Rightarrow\ &c=2.593
\end{aligned}
$$

31.8 重复练习题 31.7，考虑一个执行价格为 87 美元的欧式看跌期权。欧式看涨期权价格与欧式看跌期权价格之间的看跌-看涨平价关系式是什么？证明在这种情况下，看跌和看涨期权满足看跌-看涨平价关系式。

$$
\begin{aligned}
&p=KP(0,T)N(-h+\sigma_P)-LP(0,s)N(-h)=0.140\\
&c-p=LP(0,s)-KP(0,T)\\
&2.593-0.140\approx 100\times 0.851-87\times 0.950=2.450
\end{aligned}
$$

31.9 假设在 Vasicek 模型中，$a=0.05,\ b=0.08,$ 和 $\sigma=0.015$，初始短期利率为 6%，计算 3 年期债券上期限为 2.1 年的欧式看涨期权价格。假设债券每半年支付一次券息，年息为 5%，债券的本金为 100 美元，期权执行价格为 99 美元，执行价格为现金价格（而非报价）。

把带息债券期权拆为多个零息债券期权之和，
这里带息债券相当于两个零息债券之和，一个于 $s_1=2.5$ 时支付 2.5，一个于 $s_2=3$ 时支付 102.5 。
让 $T=2.1$ 时的短期利率为 r_0，使得 $P_1(T,s_1)+P_2(T,s_2)=K=99$，
可迭代计算得 $r_0=0.06598$，对应的 $K_1=P_1(T,s_1)=2.435,\ K_2=P_2(T,s_2)=96.566$ 。
K_1, K_2 为两个零息债券期权的执行价格。
类似前面计算欧式零息债券期权价格过程，可得 $c_1=0.00908,\ c_2=0.80573,\ c=c_1+c_2=0.8148$。

31.10 利用练习题 31.9 的结果与看跌-看涨平价关系式，计算一个与练习题 31.9 中看涨期权具有相同条件的看跌期权价格。

同上题，$p_1=0.00524,\ p_2=0.45943,\ p=p_1+p_2=0.4647$。

31.11 在 Hull-White 模型下，$a = 0.08,\ \sigma = 0.01$, 计算一个在 5 年期零息债券上期限为 1 年的欧式看涨期权的价格。利率期限结构呈水平状，利率为每年 10%，债券本金为 100 美元，执行价格为 68 美元。

Hull-White 单因子模型，

$$
\begin{aligned}
dr &= [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \\
B(t,T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \\
A(t,T) &= exp\left[\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)F(0,t) - \frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT} - e^{-at})^2(e^{2at} - 1)\right] \\
P(t,T) &= A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}
\end{aligned}
$$

这里利率期限结构为水平，所以 $r_0 = F(0,t) = 0.1,\ P(0,t) = e^{-r_0 t}$。
欧式看涨期权价格 $c = LP(0,s)N(h) - KP(0,T)N(h - \sigma_P) = 0.439$。

31.12 假定在 Hull-White 模型下，$a = 0.05$ 和 $\sigma = 0.015$，而且初始利率期限结构呈水平状，利率为 6%，按半年复利。计算一个关于 3 年期债券上期限为 2.1 年的欧式看涨期权价格。假设债券的券息为每年 5%，每半年支付一次，债券本金为 100 美元，执行价格为 99 美元，其中执行价格为现金价格（而非报价）。

按半年复利频率复利利率为 6%，对应连续复利利率为 $r_0 = 0.0591$，由于利率期限结构为水平，所以远期短期利率也都为 r_0。

把带息债券期权拆为两个零息债券期权，一个在 $s_1 = 2.5$ 时支付 2.5，一个在 $s_2 = 3$ 时支付 102.5 。

设一个参考 $r(T = 2.1) = r^*$，使带息债券在 $T = 2.1$ 时的现金价为 K，然后可以通过迭代计算得出 $r^* = 0.00663$。此时两个零息债券在 $T = 2.1$ 时的价格 $K_1 = 2.435$ 和 $K_2 = 96.563$，即为我们计算两个子期权所用的执行价格。

对于c_1，$s_1 = 2.5,\ L_1 = 2.5,\ K_1 = 2.435,\ \Rightarrow c_1 = 0.01056$；

对于c_2，$s_2 = 3,\ L_2 = 102.5,\ K_2 = 96.563,\ \Rightarrow c_2 = 0.9365$。

$c = c_1 + c_2 = 0.947$。

31.13 按 Δt 的时间间隔观察了一些短期利率的值，第 i 个观察值是 $r_i (0 \le i \le m)$。证明在 Vasicek 模型里参数 a, b 以及 σ 的极大似然估计是通过对 $\sum\limits_{i=1}^{m}\left(-\ln(\sigma^2\Delta t) - \frac{[r_i - r_{i-1} - a(b - r_{i-1})\Delta t]^2}{\sigma^2\Delta t}\right)$ 求极大值来得到的。对于 CIR 模型的相应结果是什么？

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{i=1}^{m}\left[-\ln\sigma^2\Delta t - \frac{[r_i - r_{i-1} - a(b - r_{i-1})\Delta t]^2}{\sigma^2\Delta t}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\left[-\ln\sigma^2\Delta t - \frac{[\Delta r_i - a(b - r_i)\Delta t]^2}{\sigma^2\Delta t}\right] \qquad \Delta r_i = r_{i+1} - r_i \\
&\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \\
&\begin{cases}
\sigma^2 = \frac{1}{\Delta t}\sum\limits_{i=0}^{m-1}(\Delta r_i - a(b - r_i)\Delta t)^2 \\
\frac{\partial}{\partial a}\sum\limits_{i=0}^{m-1}(\Delta r_i - a(b - r_i)\Delta t)^2 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial b}\sum\limits_{i=0}^{m-1}(\Delta r_i - a(b - r_i)\Delta t)^2 = 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

a, b 的估计值是对 $\Delta t = a(b - r)\Delta t$ 做线性回归的最优参数，σ^2 的估计值是该线性回归的方差。

a, b 的表达式为：

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\overline{\Delta r_i} \cdot \overline{r_i} - \overline{\Delta r_i \cdot r_i}}{\Delta t(\overline{r_i^2} - \overline{r_i}^2)}, \qquad \overline{x_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} x_i \\
b &= \frac{\overline{r_i^2} \cdot \overline{\Delta r_i} - \overline{\Delta r_i \cdot r_i} \cdot \overline{r_i}}{\overline{\Delta r_i} \cdot \overline{r_i} - \overline{\Delta r_i \cdot r_i}}
\end{aligned}
$$

31.14 **假设 $a = 0.05$, $\sigma = 0.015$，期限结构呈水平状，利率为 10%。构造一个关于 Hull-White 模型步长为 1 年的两步二叉树。**

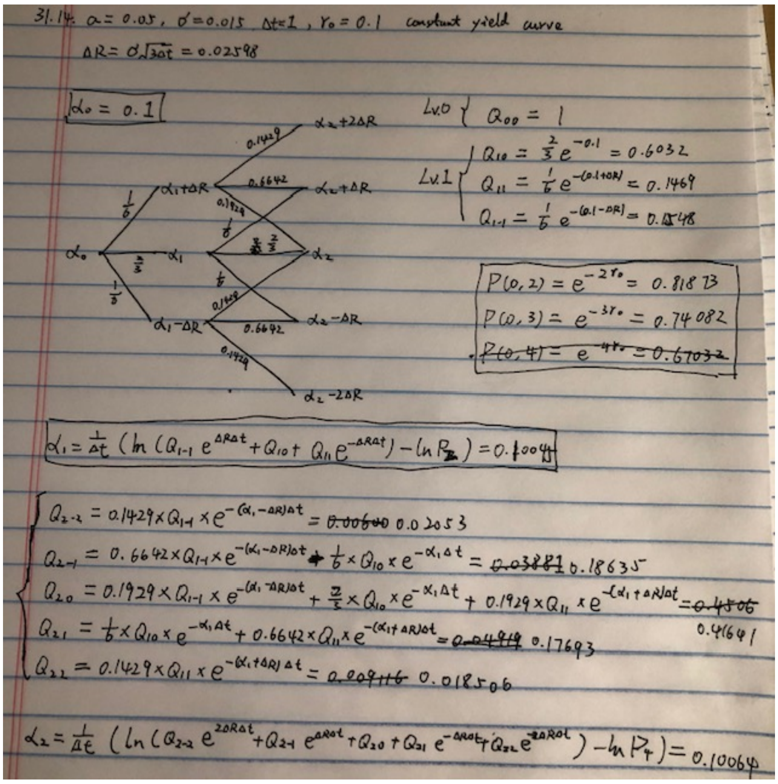

Fig. 31.14

31.15 **由图 31-6 中的树形计算 2 年期零息债券的价格。**

$$P(0,2) = e^{-0.1} \times (0.25 \times e^{-0.12} + 0.5 \times e^{-0.1} + 0.25 \times e^{-0.08}) = 0.8188$$

31.16 **由图 31-9 中的树形计算 2 年期零息债券的价格，并验证改价格与初始期限结构是一致的。**

$$P(0,2) = e^{-0.03824} \times (\frac{1}{6} \times e^{-(0.05202+0.01732)} + \frac{2}{3} \times e^{-0.05202} + \frac{1}{6} \times e^{-(0.05202-0.01732)}) = 0.91374$$

31.17 **由图 31-10 中的树形计算 18 个月期的零息债券价格，并验证该价格与初始期限结构是一致的。**

$$\begin{aligned}
P(0,1.5) = e^{-0.03430\times 0.5} \times (&\frac{1}{6} \times e^{-0.05642\times 0.5} \times (0.1177 \times e^{-0.08803\times 0.5} + 0.6546 \times e^{-0.06481\times 0.5} + 0.2277 \times e^{-0.04772\times 0.5}) \\
&+ \frac{2}{3} \times e^{-0.05154\times 0.5} \times (\frac{1}{6} \times e^{-0.06481\times 0.5} + \frac{2}{3} \times e^{-0.04772\times 0.5} + \frac{1}{6} \times e^{-0.03513\times 0.5}) \\
&+ \frac{1}{6} \times e^{-0.03058\times 0.5} \times (0.2277 \times e^{-0.04772\times 0.5} + 0.6546 \times e^{-0.03513\times 0.5} + 0.1177 \times e^{-0.02587\times 0.5})) \\
= 0.9306&
\end{aligned}$$

$$-\frac{\ln P(0,1.5)}{1.5} = 0.04405 > 0.04183$$

书上的表中结果好像有问题。自己算的和给出的 0.04183 零息利率是吻合的。

31.18 **单因子期限模型的校正都会涉及什么?**

选取拟合测度，选取合适数量随时间变化的波动率和一些惩罚因子，选取合适的校正产品。

31.19 利用 DerivaGem 软件对收取固定利率、支付浮动利率的 1×4, 2×3, 3×2, 和 4×1 欧式互换期权定价。假设 1 年、2 年、3 年、3 年和 5 年利率分别为 6%，5.5%，6%, 6.5% 和 7%。互换的交换频率为半年，固定利率为年息 6%, 按半年复利。利用参数 $a=3\%$, $\sigma=1\%$ 时的 Hull-White 模型，计算在布莱克模型下每个期权所隐含的波动率。

自己算的话比较麻烦，略。

需要先算出利率的树形，然后使用树形计算期权到期日互换的价值分布，再使用树形计算期权价值贴现到当前的价值。远期互换的价值期望由树形计算出，然后隐含波动率可以由布莱克模型推出。

31.20 证明式（31-25）、式（31-26）和式（31-27）。

首先 $r(t)$ 可以用 $R(t,t+\Delta t)$ 表示，

$$\begin{aligned}R(t,\Delta t)&=-\frac{1}{\Delta t}\ln P(t,t+\Delta t)\\&=-\frac{1}{\Delta t}\ln A(t,t+\Delta t)+\frac{r(t)}{\Delta t}B(t,t+\Delta t)\\r(t)&=\frac{\Delta tR(t,t+\Delta t)}{B(t,t+\Delta t)}+\frac{\ln A(t,t+\Delta t)}{B(t,t+\Delta t)}\end{aligned}$$

然后把该 $r(t)$ 代入 $P(t,T)$ 的表达式，

$$\begin{aligned}P(t,T)&=A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}\\&=A(t,T)e^{-\frac{\ln A(t,t+\Delta t)}{B(t,t+\Delta t)}B(t,T)}e^{-\Delta t\frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)}R(t,t+\Delta t)}\\&=\hat{A}(t,T)e^{-\hat{B}(t,T)R(t,t+\Delta t)}\end{aligned}$$

其中

$$\hat{B}(t,T)=\Delta t\frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)},\quad B(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

和

$$\begin{aligned}\ln\hat{A}(t,T)&=\ln A(t,T)-\frac{\ln A(t,t+\Delta t)}{B(t,t+\Delta t)}B(t,T)\\\ln A(t,T)&=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}+B(t,T)F(0,t)-\frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT}-e^{-at})^2(e^{2at}-1)\\&=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}+B(t,T)F(0,t)-\frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2(1-e^{-2at})\\\ln\hat{A}(t,T)&=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}+B(t,T)F(0,t)-\frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)^2(1-e^{-2at})\\&\quad-\frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)}\ln\frac{P(0,t+\Delta t)}{P(0,t)}-B(t,T)F(0,t)+\frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)B(t,t+\Delta t)(1-e^{-2at})\\&=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}-\frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)}\ln\frac{P(0,t+\Delta t)}{P(0,t)}-\frac{\sigma^2}{4a}B(t,T)(B(t,T)-B(t,t+\Delta t)(1-e^{-2at})\end{aligned}$$

31.21

(a) **在 Vasicek 模型与 CIR 模型里 $P(t,T)$ 关于 r 的 2 阶偏导数是什么?**

(b) **在 31.2 节里，我们曾将 $\hat{D}$ 作为标准久期 D 的替代。与 4.9 节衡量曲率的测度相类似的 $\hat{C}$ 是什么?**

(c) **对于 $P(t,T)$ 的 $\hat{C}$ 是什么? 对带息债券，你将如何计算 $\hat{C}$?**

(d) **在 Vasicek 模型和 CIR 模型下，对 $\Delta P(t,T)$ 做由 Δr 和 $(\Delta r)^2$ 组成的泰勒级数展开。**

(a)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2P(t,T)}{\partial r^2}=B(t,T)^2P(t,T)\\&B(t,T)_{Vasicek}=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a},\quad B(t,T)_{CIR}=\frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+a)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma},\quad\gamma=\sqrt{a^2+2\sigma^2}\end{aligned}$$

(b)

$$Q = \sum_i P(t, T_i)$$

$$\hat{C} = \frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} = \frac{\sum_i B(t,T_i)^2 P(0,T_i)}{Q}$$

(c) $\hat{C} = B(t,T)^2$, 对于带息债券，可以拆为多个零息债券。

(d) 如果只考虑 $r(t)$ 的扰动，

$$\Delta P(t,T) \approx -B(t,T)P(t,T)\Delta r + \frac{1}{2}B(t,T)^2 P(t,T)\Delta r^2$$

31.22 假设短期利率 r 为 4%，它在现实世界里的过程为 $dr = 0.1[0.05 - r]dt + 0.01dz$，而在风险中性世界里的过程为 $dr = 0.1[0.11 - r]dt + 0.01dz$。

(a) **利率风险的市场价格是多少?**

(b) **在风险中性世界里，5 年期零息债券的增长率期望和波动率是多少?**

(c) **在现实世界里，5 年期零息债券的增长率期望和波动率是多少?**

(a) $r = 0.04$, $\sigma = 0.01/r = 0.25$,

$$\lambda\sigma = 0.1(0.05 - r)/r - 0.1(0.11 - r)/r, \ \Rightarrow \ \lambda = -0.6$$

(b) 这里的利率模型为 Vasicek 模型。对于 $P(t, T = 5)$，在传统风险中性世界，其增长率期望应该等于风险中性世界里的 $r(t)$, 其波动率应该为 $\sigma_P = \sigma_r \times \frac{\partial P(t,T)}{\partial r}\frac{1}{P(t,T)} = -0.01 \times \frac{1-e^{-0.1(5-t)}}{0.1}$。

(c) 如果风险市场价格不变，增长率期望为 $r(t) + \lambda \times \sigma_P$，波动率不变 $\sigma_P = -0.01 \times \frac{1-e^{-0.1(5-t)}}{0.1}$。

作业题

31.23 构造参数 $\sigma = 0.02$ 的 Ho-Lee 模型三叉树。假设在初始时对应于期限为 0.5，1.0 和 1.5 年的零息利率分别为 7.5%、8% 和 8.5%。采用步长为 6 个月的两步树形来计算本金为 100 美元、在树的最后节点仍有 6 个月期限的零息债券价格。利用树形来计算在这个债券上 1 年期、执行价格为 95 的欧式看跌期权价格。将你在树上所得价格与 DerivaGem 的解析价格进行比较。

Hull-White 模型 $a = 0$ 时即为 Ho-Lee 模型。

31.24 一位交易员想要计算一个本金为 100 美元、5 年期限债券上期限为 1 年的美式看涨期权价格。债券支付的券息为 6%，每半年支付一次，期权执行价格（报价）为 100 美元。6 个月、1 年、2 年、3 年、4 年和 5 年的连续复利零息利率分别为 4.5%、5%、5.5%、5.8%、6.1% 和 6.3%。对正态模型和对数正态模型所估计的最优拟合回归率均为 5%。

该债券上 1 年期、执行价格为 100（报价）的欧式看涨期权交易很活跃，市场价格为 0.50 美元。交易员决定利用这个价格对模型进行校正。利用 DerivaGem 和 10 步三叉树来回答下列问题:

(a) **假设正态模型，计算欧式期权所隐含的 σ 。**

(b) **当期权为美式期权时，利用参数 σ 来计算其价格。**

(c) **假设对数正态模型，重复（a）和（b）。说明当用已知的欧式期权价格来做校正时，采用不同模型对价格并没有太大的影响。**

(d) **对于正态情形，显式树形并计算发生负利率的概率。**

(e) **对于对数正态情形，显式树形并验证节点 $i = 9$ 和 $j = -1$（31.7 节里的记号）上期权价格的正确性。**

31.25 利用 DerivaGem 计算 1×4, 2×3, 3×2 和 4×1 欧式互换期权的价格。互换为收取浮动利率，支付固定利率。假定 1 年、2 年、3 年、4 年和 5 年的利率分别为 3%、3.5%、3.8%、4.0% 和 4.1%。互换的支付频率半年，固定利率为每年 4%，按半年复利。利用对数正态模型，$a=5\%$、$\sigma=15\%$ 和 50 步的三叉树，计算在每个期权中由布莱克模型所隐含的波动率。

31.26 验证 DerivaGem 软件对所考虑例子所给出的图 31-11 。利用该软件，对正态和对数正态模型计算执行价格为 95 美元、100 美元和 105 美元的美式债券期权价格。当使用正态模型时，假设 $a=5\%$ 和 $\sigma=1\%$。以第 20 章给出的关于肥尾分布的角度，讨论所得结果。

31.27 将 DerivaGem 软件里应用工具（Application Builder）的样本应用 G 加以修改来验证三叉树价格的收敛性。采用三叉树计算一个 5 年期、本金为 100 美元的债券上 2 年期看涨期权的价格。假设执行价格为 100 美元 (报价)，券息为 7%，每年支付 2 次。假设零息曲线如表 31-2 所示，对以下情形进行比较:

(a) 期权为欧式，正态模型，$\sigma=0.01$ 和 $a=0.05$;

(b) 期权为欧式，对数正态模型，$\sigma=0.15$ 和 $a=0.05$;

(c) 期权为美式，正态模型，$\sigma=0.01$ 和 $a=0.05$;

(d) 期权为美式，对数正态模型，$\sigma=0.15$ 和 $a=0.05$。

31.28 假设在风险中性世界里短期利率 r 的（CIR）过程为

$$dr=a(\theta-r)dt+\sigma\sqrt{r}dz \tag{1}$$

而且利率风险的市场价格为 λ。

(a) r 在现实世界里的过程是什么?

(b) 10 年期零息债券在风险中性世界里的回报期望与波动率是什么?

(c) 10 年期零息债券在现实世界里的回报期望与波动率是什么?