

12 EWMA 估计日波动率

使用申明*

2021 年 2 月 26 日

目录

1 简介	1
1.1 EWMA 模型	1
1.2 最大似然估计确定最佳 λ	1
2 EWMA 估计波动率步骤	2
3 步骤 Python 代码实现	2
4 计算示例	3
5 参考资料	3

1 简介

1.1 EWMA 模型

考虑一市场变量, 如股价, 我们有其从第 0 天至第 N 天末的数据 S_0, S_1, \dots, S_N 。定义 σ_n 为于第 $n-1$ 天末所估计的市场变量在第 n 天的波动率, σ_n^2 为方差率。定义连续复利收益率 $u_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} \approx \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$ 。则在指数加权移动平均模型 Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) 模型下, σ_n^2 的变化过程为:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (1)$$

σ_n^2 也可以直接由 u_i^2 表示为:

$$\sigma_n^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2, \quad 1 < m < n. \quad (2)$$

相对于 σ_n^2 的简单估计 $\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2$, EWMA 模型下, σ_n^2 中每个 u_i^2 的权重随时间距离的增加而指数衰减。这里的 m 都为一选定的截断距离。

所以给定 S_0, S_1, \dots, S_N , 我们可以先由 $u_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$ 计算出 u_1, u_2, \dots, u_N , 然后设初始日方差率 $\sigma_2^2 = u_1^2$, 由 $\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$, 计算出 $\sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_{N+1}^2$ 。即为 EWMA 模型给出的每天日方差率/波动率的估计结果。

1.2 最大似然估计确定最佳 λ

在 EWMA 模型中只有一个自由未确定的变量 λ , 我们希望 λ 的选取可以使得 $\{\sigma_i^2\}$ 的估计在某种定义下最优。这里我们假设每天的连续复利收益率 u_i 的数据抽样取值在给定当天隐含方差率为 σ_i^{*2} 的情况下服从正态分布, 对应概率密度函数 $f(u_i) = \frac{1}{\sigma_i^* \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2\sigma_i^{*2}}\right) = P(u_i | \sigma_i^*) = p_i$ 。考虑我们选取一个具体的 λ 数值, 由已知市场变量

*作者不对内容正确性负责。如果您希望使用部分内容作为报告、文章内容等, 请您注明内容来源为“金融工程资料小站”网站。

数据 S_0, S_1, \dots, S_N ，我们先用 EWMA 模型计算出 $\sigma_2(\lambda), \sigma_3(\lambda), \dots, \sigma_N(\lambda)$ ，然后假如这些波动率即为对应日期隐含波动率 σ_i^* ，就可以计算出 p_2, p_3, \dots, p_N 。记：

$$P(\lambda) = \prod_{i=2}^N p_i(\lambda) = \prod_{i=2}^N P(u_i | \sigma_i(\lambda)). \quad (3)$$

这里 $P(\lambda)$ 可以解释为，在每天的 u_i 服从独立正态分布的假设下，考虑 EWMA 模型时，当选取 λ 和初始条件 $\sigma_2 = u_1$ 后，市场变量的连续复利收益率的历史数据正好为 u_1, u_2, \dots, u_N 的概率，也可以记为 $P(u_1, \dots, u_N | \lambda)$ 。

最大似然估计的想法是选取使得该 $P(\lambda)$ 达到极大值的 λ 作为模型的最优参数估计。即

$$\lambda = \text{Arg max}_{\lambda} P(\lambda). \quad (4)$$

其中 Arg max 是“return the arguments that maximize the function”，即指计算出可以使后面方程值达到最大的参数。具体表示为

$$\lambda = \text{Arg max}_{\lambda} \prod_{i=2}^N \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (5)$$

等价于，

$$\lambda = \text{Arg min}_{\lambda} \sum_{i=2}^N \left(\ln \sigma_i^2 + \frac{u_i^2}{\sigma_i^2} \right). \quad (6)$$

并记

$$\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{i=2}^N \left(\ln \sigma_i^2 + \frac{u_i^2}{\sigma_i^2} \right). \quad (7)$$

由于这里希望确定的参数只有一个，我们可以通过穷举法简单地求出其最优值。

2 EWMA 估计波动率步骤

1. 由已知数据 S_0, S_1, \dots, S_N ，按 $u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$ 计算出 u_1, u_2, \dots, u_N 。
2. 在 $[0, 1]$ 区间均匀地取 M 个点，作为 λ 的尝试取值， $\lambda_i = \frac{i}{M}$ 。
3. 计算出每个 λ_i 对应的 $\mathcal{L}(\lambda_i)$ ：

A 设 $\sigma_2^2 = u_1^2$ ，由 λ_i 和 u_1, u_2, \dots, u_N ，按照 EWMA 模型 $\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2$ 计算出 $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N$ 。

B 由 $\mathcal{L}(\lambda_i) = \sum_{j=2}^N \left(\ln \sigma_j^2 + \frac{u_j^2}{\sigma_j^2} \right)$ 计算出 $\mathcal{L}(\lambda_i)$ 。

4. λ 的最优估计值即为最小的 $\mathcal{L}(\lambda_i)$ 所对应的 λ_i 。

3 步骤 Python 代码实现

```
import numpy as np 1
2
def EWMA(values, precision=1.e-3): 3
    # 由给定精确度确定划分格点数。 4
    M = int(1/precision) 5
    values = np.array(values) 6
    # 计算出 {u_i}。 7
    U = (values[1:] - values[:-1]) / values[:-1] 8
    U_squared = U*U 9
10
    opt_lbd = None 11
    min_loss = float("inf") 12
```

# 穷举法找最优lambda。	13
for i in range(1, M):	14
lbd = float(i)/M	15
sigma_squared = U_squared[0]	16
loss = 0	17
for j in range(1, len(U_squared)):	18
loss += np.log(sigma_squared)+U_squared[j]/sigma_squared	19
sigma_squared = lbd*sigma_squared+(1-lbd)*U_squared[j]	20
if loss < min_loss:	21
min_loss = loss	22
opt_lbd = lbd	23
# 用最优lambda再计算出日方差率估计值。	24
Vars = [0, U_squared[0]]	25
for i in range(1, len(U_squared)):	26
Vars.append(Vars[-1]*opt_lbd+(1-opt_lbd)*U_squared[i])	27
return (Vars, opt_lbd)	28

4 计算示例

我们考虑 John Hull 网站上的示例数据（欧元/美元汇率）。

data = np.genfromtxt("EURUSDEXchangerates.txt", skip_header=1, usecols=(1))	1
Vars, lbd = EWMA(data, precision=1.e-3)	2
print("EWMA最优lambda: ", lbd)	3
	4
Output:	5
EWMA最优lambda: 0.958	6

5 参考资料

参考文献

[1] 《期权、期货及其他衍生产品》（原书第 9 版）第 23 章，John C. Hull 著，王勇、索吾林译，机械工业出版社，2014.11。