第二十七章　再谈模型和数值方法

练习题

27.1 验证 CEV 模型下的期权公式满足看跌-看涨期权平价关系式。

$$0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

$$c - p = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT} \tag{2}$$

$$\alpha > 1 \tag{3}$$

$$c - p = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT} \tag{4}$$

27.2 当 $r = 0.05, q = 0, \lambda = 0.3, k = 0.5, \sigma = 0.25, S_0 = 30, K = 30, s = 0.5$ 以及 $T = 1$ 时，默顿混合跳跃-扩散模型的欧式看涨期权价格是什么？利用 DerivaGem 来验证你的答案。

假设这里是跳跃幅度百分比的对数也服从正态分布。欧式看涨期权价格为:

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(1+k)T}(\lambda(1+k)T)^n}{n!} c_n \tag{5}$$

$$c_n = c(\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{ns^2}{T}, r_n = r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T}),\ \ \gamma = \ln(1+k) \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad C = 5.47 \tag{7}$$

27.3 验证当跳跃的幅度服从对数正态分布时，由默顿的跳跃-扩散模型得出的期权价格满足看跌-看涨期权平价关系式。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} c_n + K e^{-rT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} p_n + S_0 e^{-qT} \tag{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} c_n + K e^{-rT} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} p_n + S_0 e^{-qT} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} \times (c_n + K e^{-rT}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} \times (p_n + S_0 e^{-qT}) \tag{10}$$

27.4 假定从今天到第 6 个月的资产波动率为 20%，从 6 个月到 12 个月的资产波动率为 22%，从 12 个月到 24 个月的资产波动率为 24%。当利用布莱克-斯科尔斯-默顿公式对一个 2 年期的期权进行定价时，我们应采用什么样的波动率？

$\sqrt{\frac{0.2^2 \times 0.5 + 0.22^2 \times 0.5 + 0.24^2 \times 1}{2}} = 0.226$ 。

27.5 考虑默顿的跳跃-扩散模型，其中每次跳跃都将使资产价格变为 0 。假定每一年的平均跳跃次数为 λ 。证明欧式看涨期权的价格等价于在无跳跃时的看涨期权价格，只是无风险利率为 $r + \lambda$ （而不是 r）。存在跳跃的可能会使得期权的价格增加还是减小？（提示：在无跳跃、一个跳跃、多跳跃的情况分别对期权进行定价，在时间 T 内，资产价格无跳跃的概率为 $e^{-\lambda T}$。）

只要出现跳跃，期权价格就变为 0 。期权价格应该为期限内无跳跃概率乘以原先看涨期权价格。

27.6 在 0 时刻，一个无股息股票的价格为 S_0，假设我们将 0 到 T 的时间区间分为两个部分，时间长度分别为 t_1 和 t_2 。在第 1 个时间区间内，无风险利率和波动率分别为 r_1 和 σ_1；在第 2 个时间区间内，无风险利率和波动率分别为 r_2 和 σ_2 。假定世界为风险中性。

(a) **利用第 15 章里的结果来确定股票价格在时刻 T 的分布，并将最终结果以 r_1、r_2、σ_1、σ_2、t_1、t_2 和 S_0 来表达。**

(b) **假定 $\bar{r}$ 为 0 时刻与 T 时刻之间的平均利率，$\bar{V}$ 为 0 时刻与 T 时刻之间的平均方差率。股票价格在时刻 T 的分布是什么？将最终结果以 $\bar{r}$、$\bar{V}$、T 和 S_0 来表达。**

(c) **当共有 3 个时间段、3 个不同的利率和 3 个不同的波动率时，(a）和（b）的结果会如何改变？**

(d) **证明当无风险利率 r 和波动率 σ 分别为时间的已知函数时，在风险中性世界里，股票价格在 T 时刻的概率分布满足 $\ln S_T \backsim \phi\left[\ln S_0 + (\bar{r} - \frac{\bar{V}}{2})T, \bar{V}T\right]$，其中 $\bar{r}$ 为 r 的均值，$\bar{V}$ 为 σ^2 的均值，S_0 为股票的当前价格，$\phi(m, v)$ 为具有均值 m 和方差 v 的正态分布。**

(a)

$$\ln\frac{S_1}{S_0} \backsim \mathcal{N}((r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})t_1, \sigma_1\sqrt{t_1}) \tag{11}$$

$$\ln\frac{S_2}{S_1} \backsim \mathcal{N}((r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})t_2, \sigma_2\sqrt{t_2}) \tag{12}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{S_2}{S_0} \backsim \mathcal{N}((r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})t_1 + (r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})t_2, \sqrt{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2}) \tag{13}$$

$$\ln S_2 \backsim \mathcal{N}(S_0 + (r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})t_1 + (r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})t_2, \sqrt{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2}) \tag{14}$$

$$ \tag{15}$$

(b)

$$\bar{r} = \frac{r_1 t_1 + r_2 t_2}{t_1 + t_2},\ \bar{V} = \frac{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2}{t_1 + t_2} \tag{16}$$

$$\ln S_2 \backsim \mathcal{N}(S_0 + (r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})t_1 + (r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})t_2, \sqrt{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2}) \tag{17}$$

$$\ln S_2 \backsim \mathcal{N}(S_0 + (\bar{r} - \frac{\bar{V}}{2})(t_1 + t_2), \bar{V}(t_1 + t_2)) \tag{18}$$

(c) 类似，就是变成三段的平均。

(d) 分多段求极限。

27.7 假定资产价格服从由式（27-2）和式（27-3）所定义的随机过程，说明模拟这一随机波动率模型中资产价格路径的方程。

$$S_{n+1} - S_n = S_n((r - q)\Delta t + \sqrt{V_n}\Delta z_S) \tag{19}$$

$$V_{n+1} - V_n = a(V_L - V_n)\Delta t + \xi V_n^{\alpha}\Delta z_V \tag{20}$$

27.8 “IVF 模型并不一定能正确地描述了波动率曲面变化。”解释这一论点。

首先波动率曲面的定义不是确定的。而且 IVF 模型应该只是用一个 S 和 T 的函数来估计波动率曲面。

27.9 “当利率为常数时，IVF 模型正确地给出了收益只与某单一时刻的资产价格有关的衍生产品价格。“解释这一论点。

如果利率固定，那么由单一时刻资产价格决定的衍生品价格可以被确定，因为标的资产价格在将来的概率分布可以由当前简单期权价格估计出，IVF 模型给出了当前波动率和当前简单期权价格在选定函数下最好的拟合。

27.10 采用一个 3 步二叉树来对一个美式回望货币期权进行定价，当前汇率为 1.6，国内无风险利率为每年 5%，外币的无风险利率为每年 8%, 汇率波动率为 15%，期限为 18 个月。在计算中，采用 27.5 节中给出的算法。

美式回望浮动看涨期权价格为 0.1308 ，浮动看跌期权价格为 0.1920 。

27.11 当参数 v 趋于 0 时，方差-Gamma 模型会如何变化?

跳跃频率提高，跳跃幅度降低。

27.12 采用一个 3 步二叉树来对一个美式看跌期权定价，期权标的变量为无股息股票价格的几何平均值，股票当前价格为 40 美元，执行价格为 40 美元，无风险利率为每年 10%，股票价格波动率为每年 35%，期限为 3 个月。几何平均值的计算由今天开始直到期权的到期日。

如果用 50 个点插值，结果是 1.309 美元。

27.13 在 27.5 节中所描述的对于依赖路径期权定价的方法是否可用于对以下 2 年期的美式期权定价？期权的收益为 $\max(S_{ave} - K, 0)$，其中 S_{ave} 为在期权被行使前 3 个月的资产平均价格。解释你的答案。

可以，和计算取全程平均的亚式期权一样的过程。

27.14 验证图 27-4 中的数字 6.492 是正确的。

略。

27.15 检查 27.8 节例子中所考虑的 8 条路径。最小二乘法和边界参数化所得出的提前行使策略有什么不同？对于给定的路径样本，哪个给出的期权价格会更高?

27.8 节里的边界参数化会低估行使价格，期权价格会被低估。最小二乘法可能给出的期权价格更高。

27.16 考虑一个无股息股票上的欧式看跌期权，股票的当前价格为 100 美元，执行价格为 110 美元，无风险利率为每年 5%，期限为 1 年。假定在期权期限内平均方差率等于 0.06 的概率为 0.20、等于 0.09 的概率为 0.50、等于 0.12 的概率为 0.30 。波动率与股票价格相互无关。估计期权的价格。在计算中使用 DerivaGem 软件。

当波动率随机但和资产价格不相关时，$c = \int_0^\infty c(\bar{V})g(\bar{V})d\bar{V}$，看跌期权类似，所以可以计算得价格为 13.98 美元。

27.17 当我们有两个障碍时，如何设计树形以保证节点落在两个障碍边界上?

我们可以用不同的时间间隔，一个时间间隔保证节点落在第一个障碍边界上，第二个时间间隔的选取保证节点会落在第二个障碍边界上。

27.18 考虑一个 18 个月期限的某公司零息债券，面值为 100 美元。在 18 个月内，债券持有者随时可将债券转换为 5 股公司的股票。假定股票的当前价格为 20 美元，股票不支付股息，对于所有期限的无风险利率均为每年 6% (连续复利)，股票价格的波动率为每年 25%。假定违约密度为每年 3%，债券回收率为 35%，债券发行方可以以 110 美元的价格将债券赎回。利用一个 3 步树形计算债券的价格，转换期权的价值为多少 (剔除发行方的看涨期权)?

103.72 美元。

作业题

27.19 一个股指上新的欧式浮动回望看涨期权的期限为 9 个月。股指的当前水平为 400，无风险利率为每年 6%，股息收益率为每年 4%，股指波动率为 20%。采用第 27.5 中的算法来对这一期权定价，将你的结果与 DerivaGem 软件的解析公式所给结果进行比较。

40.47 美元。

27.20 假定表 19-2 给出了对于 6 个月货币期权定价的波动率。假定本国与外国无风险利率均为每年 5 %，当前汇率为 1.00 。考虑有一个期限为 6 个月、执行价格为 1.05 的欧式看涨期权长头寸和一个期限为 6 个月、执行价格为 1.10 的欧式看涨期权短头寸所组成的牛市价差。

(a) **牛市价差的价值为多少?**

(b) **对于两个期权，使用什么样的单一波动率可以保证牛市价差价格的正确性?（在计算中，将 DerivaGem 应用工具与 Excel 计算表的 Goal Seek 或 Solver 结合使用）**

(c) **你的结果是否验证了在本章开始时提到过的特征期权定价所采用的波动率可能会与直觉不一致这一观点?**

(d) **IVF 模型是否会给出牛市价差的正确价格?**

找不到表。

27.21 假定执行价格为 1.13，重复 27.8 节里对于看跌期权的分析。在分析中，采用最小二乘法和将期权行使边界参数化方法。

用 python 实现算法后，波动率取为 30%，时间为 100 步，10000 次模拟，最小二乘法结果是 0.208，行使边界参数化结果是 0.214。

27.22 在无股息股票上一个欧式期权的期限为 6 个月，执行价格为 100 美元。目前的股票价格是 100 美元，无风险利率为 5 %。利用 DerivaGem 来回答以下问题:

(a) **当波动率为 30% 时，期权的布莱克-斯科尔斯-默顿价格是多少?**

(b) **在 CEV 模型中 $\alpha = 0.5$。什么样的 CEV 波动率参数会给出与（a）中结果相同的价格?**

(c) **在默顿混合跳跃-扩散模型中，跳跃的平均频率时每年一次，平均跳跃幅度是 2%，1 加上百分比跳跃幅度的对数的标准差为 20%。当价格过程的扩散部分波动率是多少时，这个模型可以给出与（a）中相同的价格?**

(d) **在方差-Gamma 模型中，$\theta = 0$ 和 $v = 40\%$。当波动率为多少时模型给出的价格与（a）中相同?**

(e) **对（b)、(c）和（d）中的模型，通过考虑介于 80～120 执行价格的欧式看涨期权，计算波动率微笑。描述由波动率微笑所蕴含概率分布的特征。**

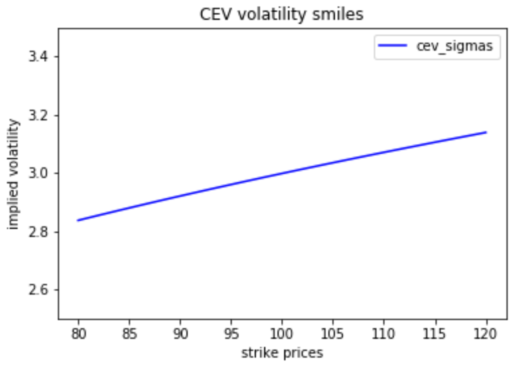
(a) 看涨期权价格为 9.635，看跌期权价格为 7.166 。

(b) python 算得波动率约为 3.0，非中心 Chi 方计算用的是 lecture notes 里的方法。

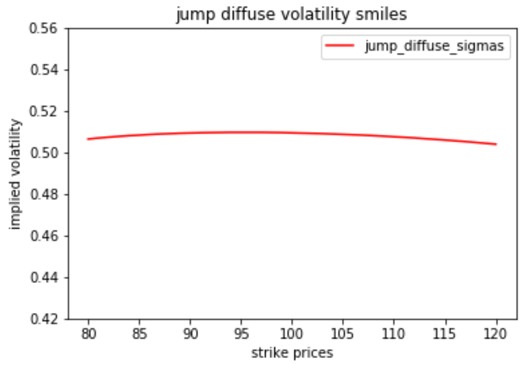
(c) 0.51 。

(d) 0.337 。

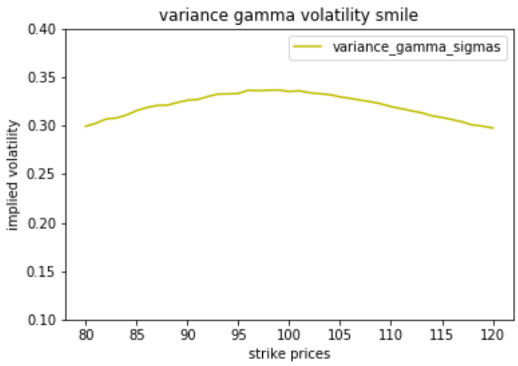
(e)



(a)



(b)



(c)

Fig 27.22

27.23 一个由 ABC 公司发行的 3 年期可转换债券的面值为 100 美元。债券在每年末支付券息 5 美元，在第 1 年和第 2 年年末可以转换为 ABC 公司的股票。在第 1 年末，在券息发放后，这一债券可以转换成 3.6 只股票；在第 2 年年末，在债券发放后，这一债券可以转换成 3.5 只股票。股票的当前价格为 25 美元，股票波动率为 25%，股票不支付股息。无风险利率为每年 5%（连续复利）。由 ABC 发行的债券的收益率为 7%（连续复利），回收率为 30%，

(a) 利用 3 步树来计算债券的价值。

(b) 转换期权的价值为多少?

(c) 如果债券在前 2 年内任何时刻都可以按 115 美元的价格赎回，这一赎回期权将如何改变债券和转换期权的价值?

(d) 假设股票在第 6 个月、第 18 个月、第 30 个月将支付 1 美元的股息，这将如何改变你的分析过程？在分析中不需要给出详细的计算结果。（提示：利用式（24-2）来估计平均违约密度。）

略。