第二十六章 特种期权

练习题

26.1 解释远期开始期权与选择人期权的区别。

远期开始期权是一定时间后才会开始的期权，如果为平值远期期权那么执行价格会随着标的资产的价格变动。选择人期权是一段时间指定时间之后持有人可以选择期权为看跌或看涨，但执行价格是一开始就约定好的。

26.2 描述具有同样期限的一个浮动回望看涨期权和一个浮动回望看跌期权组合的收益图。

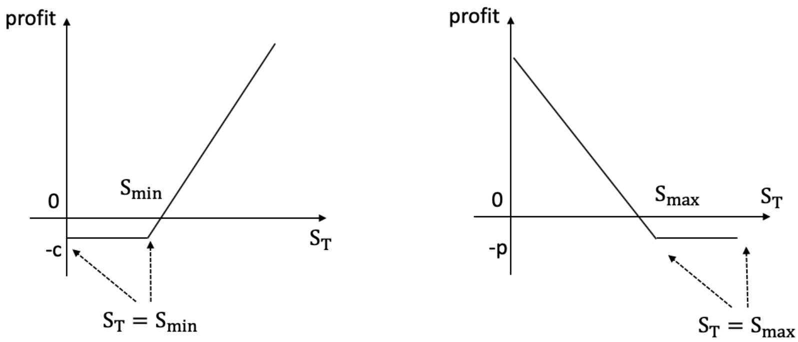


Fig 26.2

26.3 考虑一个选择人期权：在 2 年内任何时刻，期权持有者有权在欧式看涨期权和欧式看跌期权之间进行选择，无论何时做出选择，看涨期权和看跌期权的到期日和执行价格均相同。在 2 年到期之前做出行使选择会是最佳吗？解释原因。

不会，因为如果不选择，到到期日时再决定，那么收益为看涨和看跌中的较大值。如果中途选择，那么最后收益会固定为看跌或者看涨的收益。

26.4 假设 c_1 和 p_1 分别是执行价格为 K、期限为 T 的欧式平均价格看涨期权和欧式平均价格看跌期权的价格，c_2 和 p_2 分别是期限为 T 的欧式平均执行价格看涨期权和欧式平均执行价格看跌期权的价格，c_3 和 p_3 分别是执行价格为 K、期限为 T 的普通欧式看涨期权和普通欧式看跌期权的价格。证明：$c_1+c_2-c_3=p_1+p_2-p_3$ 。

这里没说明第二组期权的执行价格，假设为 K'，

$$c_1-p_1+c_2-p_2-(c_3-p_3)=0 \tag{1}$$

$$e^{-eT}F_0-e^{-rT}K+e^{-rT}F_0'-e^{-rT}K'-(S_0-e^{-rT}K)=0 \tag{2}$$

$$F_0'=F_0=S_0\frac{e^{rT}-1}{rT} \tag{3}$$

$$\Rightarrow K'=2F_0-e^{rT}S_0 \tag{4}$$

26.5 书中给出了将选择人期权分解为一个期限为 T_2 的看涨期权和一个期限为 T_1 的看跌期权的方式。导出另外一个形式来将选择人期权分解为一个期限为 T_1 的看涨期权和一个期限为 T_2 的看跌期权。

假设在 T_1 时刻执行，

$$\begin{aligned} P &= \max(c_{T_1}, p_{T_1}) & (5) \\ &= \max(p_{T_1} + S_{T_1} - Ke^{-r(T_2-T_1)}, p_{T_1}) & (6) \\ &= p_{T_1} + \max(0, S_{T_1} - Ke^{-r(T_2-T_1)}) & (7) \end{aligned}$$

26.6 第 26.9 节中给出了两个下跌-敲出看跌期权的公式，第一个公式在障碍值 $H \le K$ 时成立，第二个公式在障碍值 $H \ge K$ 时成立。证明当 $H = K$ 时，以上公式等同。

下跌-敲出看跌期权只有在 H 小于执行价格 K 时才有非 0 的价值，上升-敲出看跌期权只有 H 大于执行价格 K 时才有非 0 的价值，当 H=K 时，两种期权价值都为 0 。

26.7 解释为什么当障碍水平大于执行价格时，下跌-敲出看跌期权的价值为 0 。

因为总会在到执行价格之前被敲出。

26.8 假定某美式期权的执行价格以增长率为 g 的速度增长，标的资产为一个不提供任何股息的股票，证明如果 g 小于无风险利率 r，提早行驶此美式期权一定不会是最优。

考虑多头该看跌期权，同时买入一只标的股票，该投资组合当前的价值是固定的，将来的价值取决于我们在何时执行期权或者一直没有执行期权，如果执行期权会得到 Ke^{gT} 的现金，再做无风险投资，但由于无风险投资利率低于 g，所以早执行期权不会是最优的选择。

如果是看涨期权，考虑多头看涨期权，卖空股票，现金进行无风险投资。看涨期权买入股票需要的现金的增长速度小于无风险投资的利率，所以早执行期权买入股票不会是最优的选择。

26.9 假定在期权开始时，执行价格被定为高于股票价格 10%，如何对这样的远期开始的期权定价。假定标的资产为无股息股票。

对于执行价格为当前股票价格 1.1 倍的期权，其价格和当前股价线性相关，所以定价这种远期开始期权和远期开始平值期权是一样的。只是 $e^{-rT}E\left[c\frac{S_1}{S_0}\right]$ 里的 c 变为执行价格为当前股价 1.1 倍的看涨/看跌期权的价格。

26.10 假定股票价格服从几何布朗运动，$A(t)$ 为 0 时刻到 t 时刻之间股票价格的算术平均值，则 $A(t)$ 服从什么过程?

$A(t)$ 近似服从对数正态分布。

26.11 解释为什么对于亚式期权的 Delta 对冲比一般期权的对冲更为容易?

如果已经有一段时间作为观察时间，亚式期权的价格对即期股价的变化更加不敏感。

26.12 计算以下欧式期权的价格，期权持有者有权在 1 年时以 100 盎司白银换取 1 盎司黄金。黄金和白银的当前价格分别为每盎司 1520 美元和 16 美元，无风险利率为 10%，两种商品价格的波动率均为每年 20%，两种商品的相关系数为 0.7 。在计算中忽略存储费用。

$$P = V_0 e^{-q_v T} N(d_1) - U_0 e^{-q_u T} N(d_2) \tag{8}$$

$$U_0 = 1600, \quad V_0 = 1520 \tag{9}$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{V_0}{U_0} + (q_u - q_v + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{10}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\rho\sigma_u\sigma_v} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \quad P = 61.54 \tag{12}$$

26.13 某个资产上的下跌-敲出期权和该资产期货上的下跌-敲出期权是否相等？假定期货的到期日等于期权的到期日。

如果两种期权的敲出价格之间有贴现因子的比例的话是相等的。

26.14 回答以下有关复合期权的问题：

(a) 欧式看涨-看涨期权与欧式看跌-看涨期权之间的平价关系式是什么？证明书中给出的公式满足平价关系式。

(b) 欧式看涨-看跌期权与欧式看跌-看跌期权之间的平价关系式是什么？证明书中给出的公式满足平价关系式。

(a)

$$pc(K_1) + c(K_2) = cc(K_1) + K_1 e^{-rT_1} \tag{13}$$

$$K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} K_1 N(-a_2) + c(K_2) \tag{14}$$

$$= S_0 e^{-qT_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} K_1 N(a_2) + K_1 e^{-rT_1} \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \tag{16}$$

$$c(K_2) - K_1 e^{-rT_1} + e^{-rT_1} K_1 (N(-a_2) + N(a_2)) \tag{17}$$

$$= S_0 e^{-qT_2} (M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) + M(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2})) \tag{18}$$

$$- K_2 e^{-rT_2} (M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) + M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2})) \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \tag{20}$$

$$c(K_2) = S_0 e^{-qT_2} N(b_1) - K_2 e^{-rT_2} N(b_2) \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

(b)

$$pp(K_1) + p(K_2) = cp(K_1) + K_1 e^{-rT_1} \tag{23}$$

$$S_0 e^{-qT_2} M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} K_1 N(a_2) + p(K_2) \tag{24}$$

$$= K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} K_1 N(-a_2) + K_1 e^{-rT_1} \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow \tag{26}$$

$$p(K_2) \tag{27}$$

$$= K_2 e^{-rT_2} (M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) + M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2})) \tag{28}$$

$$- S_0 e^{-qT_2} (M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) + M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2})) \tag{29}$$

$$= K_2 e^{-rT_2} N(-b_2) - S_0 e^{-qT_2} N(-b_1) \tag{30}$$

26.15 当我增加观测标的资产最小值的频率时，一个浮动回望看涨期权的价值是增加还是减小？

会增加。

26.16 当我们增加观测标的资产是否达到障碍水平的频率时，一个下跌-敲出看涨期权的价值是增加还是减小? 一个下跌敲入看涨期权的价值会如何变化?

下跌-敲出看涨期权的价值会增加。
下跌-敲入看涨期权的价值会减小。

26.17 解释为什么一个普通欧式看涨期权等于一个下跌-敲出看涨期权与一个下跌-敲入看涨期权的组合。

该组合无论有没有达到障碍值，价值都等于一个普通欧式看涨期权。

26.18 当 6 个月后标普 500 股指高于 1000 时，一个衍生产品提供的收益为 100 美元，否则提供收益为 0 。这里股指的当前水平为 960，无风险利率为每年 8%，股指的股息收益率为每年 3%，股指波动率为每年 20%，这一衍生产品的价值是多少?

$$\ln S_T \backsim \mathcal{N}(\ln S_0 + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}) \tag{31}$$

$$\frac{\ln \frac{S_T}{S_0} - (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \backsim \mathcal{N}(0,1) \tag{32}$$

$$P = e^{-rT}\mathbb{E}[100 \times \mathbb{1}_{S_T > K}] \tag{33}$$

$$= 100e^{-rT} N\left(-\frac{\ln \frac{K}{S_0} - (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{34}$$

$$= 55.9 \tag{35}$$

26.19 考虑一个白银期货上 3 个月期限的下跌-敲出看涨期权，执行价格为每盎司 20 美元，障碍水平为 18 美元。当前的期货价格为 19 美元，无风险利率为 5%，白银期货价格的波动率为每年 40%。解释期权的运作方式，并计算其价值。具有同样条款的白银期货价格上普通看涨期权价格是多少? 具有同样条款的白银期货价格上的下跌-敲入看涨期权价值是多少?

3 个月内，如果白银期货的价格从当前的 19 美元跌至 18 美元则该期权失效。在没有失效的情况下期权有和普通看涨期权一样的效果。

$$c_{do} = c - c_{di} \tag{36}$$

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \tag{37}$$

$$c_{di} = S_0 \frac{H}{S_0}^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT}\frac{H}{S_0}^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T}) \tag{38}$$

$$\lambda = \frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}, \quad y = \frac{\ln \frac{H^2}{S_0 K}}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \tag{39}$$

$$\Rightarrow \quad c_{do} = 0.753, \quad c = 1.291 \tag{40}$$

26.20 一个刚刚开始的某股指上欧式浮动回望看涨期权的期限为 9 个月。股指的当前水平为 400，无风险利率为每年 6%，股指股息收益率为每年 4%，股指波动率为 20%，利用 DerivaGem 计算期权价值。

根据 26.11 节公式，可计算得 102.17 。

26.21 估计一个刚刚开始的 6 个月期限的平均价格看涨期权价值，标的资产为某无股息股票，股票的初始价格为 30 美元，执行价格为 30 美元，无风险利率为 5%，股票价格波动率为 30%。

根据 26.13 节公式，可计算得 1.637 美元。

26.22 利用 DerivaGem 计算以下期权的价值:

(a) **一个普通欧式期权，标的资产是当前价格为 50 美元的无股息股票，无风险利率为每年 5 %, 波动率为每年 30%，执行价格为 50 美元，期限为 1 年。**

(b) **一个参数由（a）给出的欧式下跌-敲出看涨期权，障碍水平为 45 美元。**

(c) **一个参数由（a）给出的欧式下跌-敲入看涨期权，障碍水平为 45 美元。**

(a) 看涨为 7.116，看跌为 4.677 。

(b) $c_{do} = 4.70$ 。

(c) $c_{di} = 2.42$ 。

26.23 当 $r = q$ 时，解释如何对以下公式进行修正:（a）在第 26.11 节里给出的浮动回望看涨期权定价公式;（b）第 26.13 节里给出的 M_1 和 M_2 的计算公式。

(a)

$$a_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{S_{min}} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{41}$$

$$a_3 = \frac{\ln \frac{S_0}{S_{min}} + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}, \quad Y_1 = \ln \frac{S_0}{S_{min}} \tag{42}$$

$$c_{fl} = S_0 e^{-rT} N(a_1) - S_{min} e^{-rT} N(a_2) \tag{43}$$

(b)

$$M_1 = S_0 \tag{44}$$

$$M_2 = \frac{2e^{\sigma^2 T} S_0^2}{\sigma^4 T^2} + \frac{2S_0^2}{T^2}\frac{T\sigma^2 - 1}{\sigma^4} \tag{45}$$

$$\tag{46}$$

26.24 对 26.16 节中的例 26.4 的方差互换进行定价，假定对应于执行价格 800，850，900，950，1000，1050，1100，1150，1200 的隐含波动率分别为 20%，20.5%, 21%, 21.5%, 22%, 22.5%, 23%, 23.5%, 24%。

$$\hat{E}(\bar{V}) = \frac{2}{T}\ln\frac{F_0}{S^*} - \frac{2}{T}\left[\frac{F_0}{S^*} - 1\right] + \frac{2}{T}\left[\int_{K=0}^{S^*}\frac{1}{K^2}e^{rT}p(K)dK + \int_{K=S^*}^{\infty}\frac{1}{K^2}e^{rT}c(K)dK\right] \tag{47}$$

$$P = L_{var}[\hat{E}(\bar{V}) - V_K]e^{-rT} \tag{48}$$

积分用求和近似，可以代入参数得：$P = 0.00812 \times 10^8 = 8.12 \times 10^5$ 美元。

26.25 验证第 26.2 节中关于 $S = H$ 时支付 Q 的衍生产品价格与第 15.6 节里的相应公式一致。

26.2 中 $q = 0$ 时，对于看涨型，$\alpha = 1, f = Q\frac{S}{H}$，对于看跌期权 $\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}, f = Q(\frac{S}{H})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$ 。

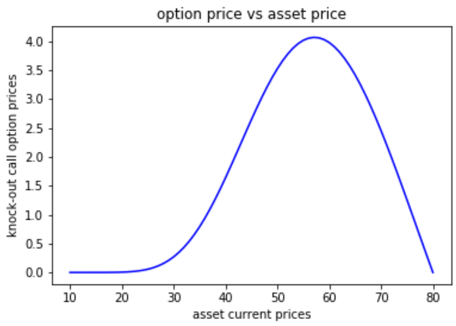
作业题

26.26 当美元/英镑汇率在一年后高于 1.5000 时，衍生产品提供的收益为 10000 英镑，否则提供收益为 0 。当前美元/英镑汇率为 1.4800，美元和英镑的无风险利率分别为每年 4% 及每年 8%，美元/英镑汇率波动率为每年 12%，这一衍生产品价值为多少美元?

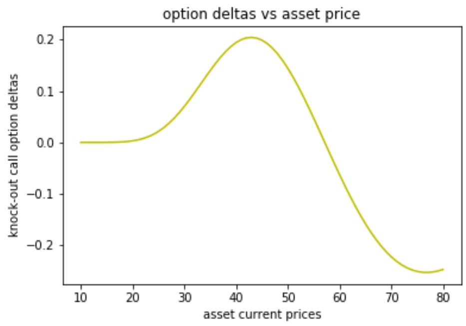
资产或空手看涨期权，价格为 $S_0 e^{-qT} N(d_1) = 4847$。

26.27 考虑以下上涨-敲出看涨期权：标的资产为无股息、当前价格为 50 美元的股票，期权执行价格为 50 美元，波动率为 30%，无风险利率为 5%，期限为 1 年，障碍水平为 80 美元。采用 DerivaGem 来对这一期权定价并画出以下图形：（a）期权价格与标的资产价格的关系；（b）期权 Delta 与标的资产价格的关系；（c）期权价格与期限的关系；（d）期权价格与波动率的关系。对以上结果提供直观解释。说明为什么上涨-敲出看涨期权的 Delta，Gamma，Theta，Vega 可正可负。

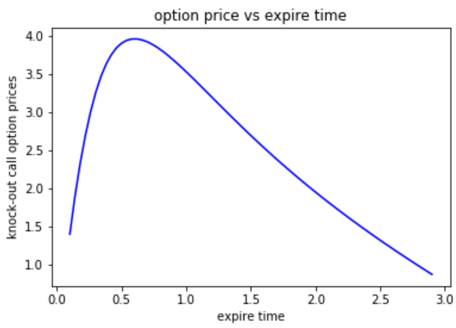
上涨-敲出看涨期权价格为 3.528 美元。



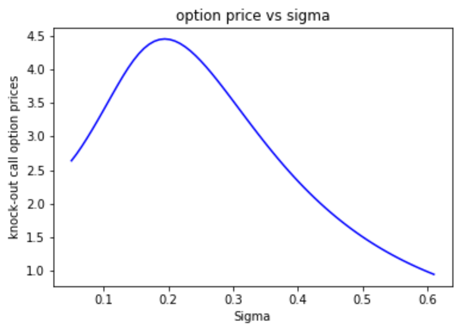
(a)



(b)



(c)



(d)

26.28 DerivaGem 应用工具软件的实例应用 F（Sample Application F）考虑了第 26.17 节中的静态复制。这一例子说明了一种通过 4 个期权来实现（见 26.17 节）的对冲和两种通过 16 个期权来实现的对冲。

(a) **解释两种通过 16 个期权来实现的对冲有什么不同，用直观的方式说明为什么第 2 种对冲效果更好。**

(b) **通过变动第 3 个和第 4 个期权的 Tmat 来改善采用 4 个期权所实现的对冲效果。**

(c) **检验 16 个期权所组成的期权组合对于 Delta、Gamma 和 Vega 匹配的程度。**

略

26.29 考虑一个关于某外汇上的下跌-敲出看涨期权。初始汇率为 0.90，期限为 2 年，执行价格为 1.00，障碍水平为 0.80，国内无风险利率为 5 %，外币无风险利率为 6%，汇率波动率为每年 25%。利用 DerivaGem 来构造一个由 5 个期权构成的静态复制策略。

略。

26.30 假定股指的当前水平为 900，股息收益率为 2%，无风险利率为 5%，波动率为 40%。利用网页 www.rotman.utoronto.ca / hull/TechnicalNotes 里的 Technical Note 27 中的结果来计算 1 年期、执行价格为 900 的平均价格看涨期权价值。未来计算均值，我们在每季度末对资产价格进行观测。将你的结果与 DerivaGem 结果进行比较，DerivaGem 假定一年平均价格的观测频率为连续。直观地解释两个价格的不同。

略。

26.31 利用 DerivaGem 应用工具来比较一下每天的 Delta 对冲效率：(a) 表（19-2）和表（19-3）里所考虑的期权；(b) 具有同样参数的平均价格看涨期权。利用 DerivaGem 应用工具软件的实例应用 C（Sample Application C）。为了计算平均价格看涨期权，你需要修改计算元 C16 粒的期权价格，计算元 H15 和 H16 的期权收益，以及 Delta（计算元 G46 至 G186 以及 N46 至 N186）。点击功能键 F9 重复 20 次蒙特卡罗模拟。在每次运算中，记录期权承约费用以及对冲费用、全部 20 周的交易量、第 11 周至第 20 周的交易量。对结果进行评论。

略。

26.32 修改 DerivaGem 应用工具软件的实例应用 D（Sample Application D）来检验以下看涨-看涨复合期权的 Delta，Gamma 对冲效果，期权规模为 100000 单位外汇，汇率为 0.67，本国无风险利率为 5%，外币的无风险利率为 6%，汇率波动率为 12%，第 1 个期权期限为 20 周，执行价格为 0.015 。第 2 个期权期限为（从目前起）40 周，执行价格为 0.68 。解释你将如何修改计算表中的计算元。评论对冲效率。

略。

26.33 表现证书（outperformance certificate）（有时也被称为短跑证书（sprint certificate）、加速证书（accelerator certificate）或短跑者（speeder））是由欧洲银行向投资者发行的投资于公司股票的方式。最初的投资等于股票价格 S_0。从 0 时刻到 T 时刻，如果股票价格增加，投资者在 T 时刻收益为 k 乘以股票的增值，其中 k 为大于 1 的常数。但在 T 时刻股票的增值被限定在一个极限 M 内。如果股票价格下跌，投资者的损失等于股票的跌值。在此证书种，投资者不会收到股息。

(a) 说明表现证书为一个组合期权。

(b) 股票价格等于 50 欧元，$k = 1.5$，$M = 70$ 欧元，无风险利率为 5%，股票价格波动率为 25%, 在第 2 个月、第 5 个月、第 8 个月和第 11 个月股票股息预计为 0.5 欧元。采用 DerivaGem 计算 1 年期的表现证书的价值。

(a) 可以考虑多头 k 份平值欧式看涨，空头 k 份执行价格 M 的欧式看涨，空头 1 份平值欧式看跌。

(b) 当前股价更新为除去股息贴现，然后计算上面组合的价值为：2.044。

26.34 在 26.15 节里给出的例 26-4 中，假定互换的期限为 1 个月而非 3 个月，对期权进行定价。

2.70 百万美元。

26.35 普通看涨期权、二元式看涨期权以及缺口看涨期权之间的关系是什么?

普通看涨可以由二元看涨和缺口看涨组成。

26.36 给出以下形式的棘轮期权定价公式：数量为 Q 的投资被用来在 n 段时间后提供收益。在每个时间段里的回报率等于某个指数的回报率（不算股息）与零的最大值。

这个棘轮期权为 n 个远期开始平值期权，数量为 Q，时间段分别对应 $[i\Delta t,(i+1)\Delta t]$, $i=0,1,...n-1$, $\Delta t=\frac{T}{n}$，由远期开始期权定价可以得此棘轮期权的价值为：

$$c = call\ price(T=\Delta t, K=S_0) \tag{49}$$

$$P = Q\sum_{i=0}^{n-1} ce^{qT} \tag{50}$$

$$q=0, \quad P=ncQ \tag{51}$$