

第五章 如何确定远期和期货价格

练习题

5.1 说明当投资者卖空 1 只股票时，会有什么情况发生。

投资者通过经纪人借入 1 只股票，并在市场上卖出股票，如有股息发生，投资者需要支付股息，在将来一时刻投资人需要通过买入股票对卖空股票进行平仓。

5.2 远期价格与远期合约价值又什么不同？

远期价格指远期合约在将来执行时的价格。远期价值指远期合约在当前的估计价值。

5.3 假定你签署了一个无股息股票上 6 个月期限的远期合约，股票当前价格为 30 美元，无风险利率为 12%（连续复利），远期价格为多少？

$$F = 30 \times e^{0.06} = 31.86。$$

5.4 一个股指的当前价格为 350，无风险利率为每年 8%（连续复利），股指的股息收益率为每年 4%。4 个月期的期货价格为多少？

$$\text{这里期货价格等于远期，} F = 350 \times e^{\frac{0.08-0.04}{3}} = 354.7。$$

5.5 仔细解释为什么黄金的期货价格可以由黄金的即期价格与其他可观测变量计算得出，但铜的期货价格却不能这么做。

黄金为投资资产，期货价格可以表达为即期价格和其他市场可观察变量的函数。铜通常为消费资产，资产便利收益率等对期价格都有影响，但是又不易估计。

5.6 仔细解释便利收益与持有成本两个术语的含义。期货价格、即期价格、便利收益与持有成本之间的关系式是什么？

便利收益率是由于持有商品而带来的收益比率，便利收益率反映了市场对将来能够购买商品的可能性的期望。它与期货价格负相关。

持有成本包括贮存成本加上资产的融资利息，再减去资产的收益。期货价格和持有成本正相关。

5.7 解释为什么可以将外币视为提供已知收益率的资产。

可以通过外汇期货锁定外汇汇率。期货价格与本币和外币的无风险利率有关。

5.8 一个股指的期货价格是会高于还是会低于其未来价格期望值？为什么？

高于。持有股票会有股息收入，所以期货价格应高于股指期望。

5.9 在签署无股息股票 1 年期的远期合约时，股票当前价格为 40 美元，连续复利的无风险利率为每年 10%。

(a) 远期合约的初始价值和期货价格分别为多少？

(b) 6 个月后，股票价格变为 45 美元，无风险利率仍为每年 10%。这时远期价格和远期合约的价值分别为多少？

(a) 都为 $40 \times e^{0.1} = 44.2$ 。

(b) 远期价格 $45 \times e^{0.05} = 47.31$ ；远期价值为 $(47.31 - 44.2) \times e^{-0.05} = 2.95$ 。

5.10 无风险利率为每年 7%（连续复利），股指的股息收益率为每年 3.2%。股指的当前价格为 150。6 个月远期的期货价格为多少？

$$F = 150 \times e^{\frac{0.07-0.032}{2}} = 152.88$$

5.11 假定无风险利率为每年 9%（连续复利），股指股息的收益率在一年中经常发生变化。在 2 月份、5 月份、8 月份和 11 月份，股息收益率为每年 5%，在其他月份，股息收益率为每年 2%。假定股指在 7 月 31 日为 1300。在同一年 12 月 31 日价格的期货价格为多少？

假设股息是每月月末发生，而且 7 月已经发过股息。 $F = 1300 \times e^{-0.09 \times 5/12} - 1300 \times (\frac{0.05}{12} \times e^{-0.09/3} + \frac{0.05}{12} \times e^{-0.09/12} + \frac{0.02}{12} \times (e^{-0.09/4} + e^{-0.09/6} + 1)) = 1332$ 。

5.12 假定无风险利率为每年 10%（连续复利），股指股息收益率为每年 4%。股指的当前价格为 400，在 4 个月交割的期货合约中期货价格为 405。这时会存在什么样的套利机会？

卖空一份股指，收入 400，进行无风险投资，多头一份 4 个月后期货，4 个月后现金为 $400 \times e^{0.1/3-0.04/3} = 408.1$ ，以 405 的价格买入股指，还之前卖空的对手，总收益 3.1。

5.13 由表 5-4 中的数据来估计在 203 年 5 月 14 日加拿大和美国短期利率之间的差异。

$$\frac{F_1}{F_{12}} = e^{(r-r_f) \times 0.5} = \frac{0.9886}{0.9844}, \quad r - r_f = 0.85\%, \quad r \text{ 为美元利率, } r_f \text{ 为加元利率。}$$

5.14 在瑞士和美国按连续复利的两个月期限利率分别为每年 2% 和 5%。瑞士法郎大即期价格时 1.0500 美元。在 2 个月交割的期货价格也是 1.0500 美元，这时会存在什么样的套利机会？

卖空瑞士法郎，进入期货多头，进行美元无风险投资，到期平仓期货，买入瑞士法郎，还之前卖空对手。

5.15 白银的现价每盎司 25 美元，每年贮存费用为每盎司 0.24 美元，贮存费要每季度预付一次。假定所有期限的利率均为每年 5%（连续复利），计算 9 个月交割的期货价格。

$$F = 25 \times e^{0.05 \times \frac{3}{4}} + 0.24e^{0.05 \times 3/4} + 0.24 \times e^{0.05 \times 0.05} + 0.24 \times e^{0.05/4} = 26.69。$$

5.16 假定 F_1 和 F_2 是同一种商品上两份合约的期货，合约的到期日分别为 t_1 和 t_2 ，这里 $t_2 > t_1$ ，证明 $F_2 \leq F_1 e^{r(t_2-t_1)}$ ，其中 r 为无风险利率（假定为常数），假定无贮存费用。在这个问题里，假定期货价格与远期价格相等。

反证，假如 $F_2 > F_1 e^{r(t_2-t_1)}$ ，可以如下套利：多头 F_1 ，空头 F_2 ，到 t_1 时借 F_1 买入股票，到 t_2 时，还借贷方 $F_1 e^{r(t_2-t_1)}$ ，但用股票交割 F_2 ，由于 $F_2 > F_1 e^{r(t_2-t_1)}$ ，所以会有正收益。

5.17 当一家公司采用远期合约对将来已知的外汇现金流进行对冲时，就不存在汇率风险。而当采用期货合约来对外币对冲时，因为按市场定价的方式会使得公司有一定的风险敞口。解释这种风险的实质。尤其当出现以下 4 种情况时，公司使用期货合约和远期合约哪种形式会更好？

(a) 在合约的期限内，外汇迅速贬值。

- (b) 在合约的期限内，外汇迅速升值。
- (c) 外汇先升值，然后贬值到它的初始水平。
- (d) 外汇先贬值，然后升值到它的初始水平。

假设公司空头期货或远期合约，主要不同之处源于期货每日结算的特性。(a) 期货更好，(b) 远期更好，(c) 期货更好，(d) 远期更好。

5.18 有人认为远期汇率是未来即期汇率的无偏估计。在什么情况下这一说法成立？

当本币和外币的无风险利率变化同步时。远期汇率和即期汇率的估计值应该相同。

5.19 证明股指期货的增长率等于组成股指的股票组合收益率超出无风险利率的数量。假定无风险利率和收益率均为常数。

如果 $F_t = S \times e^{(r-q)(T-t)}$ 不成立，增长率大于 $(q-r)$ 时可以多头期货，卖空股指，所得现金进行无风险投资。增长率小于 $(q-r)$ 时，可以空头期货，无风险利率借钱买入股指。

5.20 通过考虑一个标的资产与其期货上的投资组合来证明式 (5-3) 成立。在证明中假设所有资产的收入均再投资于资产之中。参考本章中关于证明式 (5-1) 和 (5-2) 的脚注，详细说明当式 (5-3) 不成立时，一个套利者会怎么做。

上题说明 $F_t = S \times e^{(r-q)(T-t)}$ ，当 $t=0$ ，即为 (5-3)。

5.21 仔细解释对于将来某一时间商品价格的期望值是什么。假设随着期限的增大，原油期货价格以 2% 的速度下跌，再假设投机者倾向于卖空原油期货并且对冲者倾向于持有原油期货的多头。由凯恩斯和希克斯的理论所得出的将来价格期望值会是怎么样？

(a) 市场对于在将来某时刻资产即期价格的一般观点称为资产在这一时刻的即期价格期望值。(b) 投机者倾向于用承担风险的方式换取正的期望收益，对冲者往往愿意承担一定负的期望收益来换取小的投资风险。所以这种情况下，原油的价格期望值应该低于以 2% 速度下跌后的值。

5.22 价值线综合指数是用于反映 1600 个股票价值变化的等权重指数。在 1988 年 3 月 9 日以前，这一指数在每天的变化值是按照指数所包含的股票价格的几何平均值来计算的。在这种情况下，式 (5-8) 是否正确地反映指数的期货价格与其现金价格之间的关系？如果不是，这一表达式是会低估还是高估期货价格？

(5-8) 式: $F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$ ，对于价值线综合指数， $S_0 \propto (S_1^2 + S_2^2 + \dots S_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ，假设股息还是 $\propto (S_1 + S_2 + \dots S_n)$ ，那么有效股息率实际上大于 q ，这种情况下 (5-8) 的 F_0 会高估远期价格。

5.23 一家美国公司想采用 CME 集团的期货合约来对冲澳元的风险敞口。假定美国和澳大利亚的无风险利率分别为 r 和 r_f ， r 和 r_f 为常数，公司利用在 T 到期的合约来对冲时间 $t(T > t)$ 的风险敞口，证明

- (a) 最佳对冲比率为 $e^{(r_f-r)(T-t)}$ 。
- (b) 当 t 等于 1 天时，最佳对冲比率几乎正好等于 S_0/F_0 ，其中 S_0 为澳元的即期价格， F_0 为目前澳元在 T 时刻到期的期货价格。
- (c) 对于长于 1 天的风险敞口，通过使对冲比率等于即期价格与期货价格的比，公司可以应对期货的每日结算问题。
- (a) S_0 为 1 澳元对应美金， F_0 为 1 外币的美元期货价格，假设都为时间 t 时价格， N 为外币数量，为了对冲风险，我们需要 $NF_0 e^{r_f(T-t)} = NS_0 e^{r(T-t)}$ ， $hNS_0 = NF_0$ ， $h = e^{(r_f-r)(T-t)}$ 。
- (b) 对比 (5-8) 式，和以上结果，当 $t \approx 0$ ， $h = S_0/F_0$ 。
- (c) 这题我不清楚。。。

5.24 解释 (a) 投资资产 (b) 消费资产的含义。为什么再确定远期及期货价格时, 区别投资资产和消费资产是很重要的?

投资资产: 投资者为了投资目的而持有的资产。

消费资产: 投资者除了投资以外还有消费的目的。

投资资产对应的期货价格可以表示为即期价格和其它市场可观察变量的函数, 消费性资产对应期货不可以。

5.25 以下资产的持有成本是什么?

(a) 无股息股票。

(b) 股指。

(c) 有储存费用的商品。

(d) 外汇。

(a) 无风险利率 r , (b) $r-q$, q 为股息收益率, (c) $r+u$, u 为贮存成本, (d) $r-r_f$, 本币和外币无风险利率差。

作业题

5.26 在 2012 年年初, 瑞士法郎与美元之间的汇率是 1.0404 (每法郎对应的美元数)。美国和瑞士的利率分别是每年 0.25% 和 0 (连续复利)。3 个月期限的远期汇率是 1.0300 (每法郎对应的美元数)。这时存在什么套利机会? 如果汇率是 1.0500 (每法郎对应的美元数), 你的答案会如何改变?

当前: 多法郎远期, 卖空法郎, 换美元, 投资无风险收益为 $0.25\% \times \frac{1}{4}$, 3 个月后: 买入法郎偿还借入的法郎, 平仓远期合约。如果远期汇率为 1.05 的话, 反之, 当前: 借钱买入法郎, 空法郎期货, 3 个月后: 连本带息还借的钱, 卖法郎, 平仓期货。

5.27 指数为 1200, 3 个月的无风险利率为每年 3%, 以后 3 个月的股息收益率为每年 1.2%; 6 个月的无风险利率为每年 3.5%, 以后 6 个月的股息收益率为每年 1%。估计 3 个月期和 6 个月期的指数期货价格。假定所有的利率和收益率均为连续复利。

$$3 \text{ 个月: } 1200 \times e^{\frac{1}{4}(0.03-0.012)} = 1205.4;$$

$$6 \text{ 个月: } 1200 \times e^{\frac{1}{2}(0.035-0.01)} = 1215.1。$$

5.28 当前的美元/欧元的汇率为每欧元兑 1.4000 美元, 6 个月期的远期汇率为 1.3950, 6 个月期的美元利率为每年 1% (连续复利)。估计 6 个月期的欧元利率。

$$\frac{1}{1.395} = \frac{1}{1.4} e^{(r-r_f)\frac{1}{2}}, r = 0.01, \rightarrow f = 0.0028。$$

5.29 原油现货价格为每桶 80 美元, 存储 1 年的费用为每桶 3 美元, 年底支付; 无风险利率为每年 5%, 连续复利。1 年期原油期货价格的上限是多少?

$$F \leq 80 \times e^{0.05} + 3 = 87.1$$

5.30 股票预计在 2 个月和 5 个月时将支付 1 美元股息。股票价格为 50 美元, 对应所有期限的连续复利无风险利率均为每年 8%。某投资者刚刚进入了股票上 6 个月期限的远期合约空头。

(a) 远期价格与远期合约的初始价值为多少?

(b) 在 3 个月后, 股票价格变为 48 美元, 无风险利率仍为每年 8%。这时远期价格和远期合约空头的价值为多少?

$$(a) F = 50 \times e^{0.5 \times 0.08} + 1 \times e^{0.08 \times \frac{1}{3}} + 1 \times e^{\frac{1}{12} \times 0.08} = 54.07, \text{ 初始价值为 } 0。$$

$$(b) F' = 48 \times e^{\frac{1}{4} \times 0.08} + 1 \times e^{\frac{1}{12} \times 0.08} = 49.88, F_0 = 54.07 \times e^{-\frac{1}{4} \times 0.08} = 53, F' - F_0 = -3。$$

5.31 一家银行向企业客户提供了两种选择：一种是按 11% 利率借入现金，另一种是以 2% 利率借入黄金（当借入黄金时，必须以黄金形式支付利息，因此，如果今天借入 100 盎司，在 1 年后必须偿还 102 盎司黄金）。无风险利率为每年 9.25%，贮存费用为每年 0.5%。讨论同现金贷款利率相比，借入黄金的利率是太高还是太低？这里两种贷款的利率均为每年复利一次，无风险利率和贮存费用率均为连续复利。

借入现金一年后支付利息 11%，无风险收益 9.7%，亏 1.3%；借入黄金，一年后亏 2.5%，借入黄金利率太高。

5.32 一家公司不太确定在将来收入或支出某笔外汇的时间，它可以同银行来商定一种远期合约，在远期合约中注明可以交割的时间区间。公司想保留选择交割时间的权利以便保证同自身现金流的吻合。假定你处在银行的位置，你会如何对这家公司需要的产品定价？

定价可以参考交割时间区间的开始时刻或者结束时刻，具体取决于哪个时刻对银行更有利。

5.33 一位交易员的长期投资组合中包含一种既不提供收入，也不需要贮存费用的商品。交易员能够以每盎司 1250 美元的价格买入商品，以每盎司 1249 美元的价格卖出商品。交易员能够以每年 6% 的利率借入资金，并以每年 5.5% 的利率借出资金（这里的利率均为按年复利）。当期货价格在什么范围时，交易员没有套利机会。在这里假定远期价格的买入价和卖出价相同。

考虑两种情况：1. 多头期货，卖出商品，得现金 1249，借出这些现金，需要的时候平仓期货，买入商品，借出的现金到时价值为 $1249e^{0.055t}$ ，期货不应低于此价格。2. 空头期货，借 1250，买入商品，需要的时候平仓期货，卖出商品，借入的现金到期需要偿还 $1250e^{0.06t}$ ，期货价格不应高于此价格。

5.34 一家公司与银行进行一项远期合约交易。在合约中银行可以在 T_1 时刻以汇率 K_1 卖出外汇。在 T_1 时实际汇率为 $S_1 (S_1 > K_1)$ 。公司要求银行将远期合约延续到 $T_2 (T_2 > T_1)$ （而不是在 T_1 ）进行交割。银行同意了一个新的交付价格 K_2 ，解释 K_2 的计算方法。

假设无风险利率差值（外币和本币无风险利率之差）为 r 不变， T_1 时刻公司已经亏 $S_1 - K_1$ ，正常时， T_1 时刻 T_2 期限的远期价格为 $S_1 e^{r(T_2 - T_1)}$ ，考虑到 T_1 时刻已经欠银行 $S_1 - K_1$ ，所以 T_2 时合适的价格为 $S_1 e^{r(T_2 - T_1)} + (S_1 - K_1) e^{r(T_2 - T_1)} = (2S_1 - K_1) e^{r(T_2 - T_1)}$ 。