# 第二十章　波动率微笑

## 练习题

**20.1 在下列情形下常常观察到的波动率微笑是什么形式?**

(a) **股票价格分布两端的尾部均没有对数正态分布肥大。**

(b) **股票价格分布右端的尾部比对数正态分布要肥大，左端尾部没有对数正态分布肥大。**

(a) 股票价格分布两端的尾部都没有对数正态分布肥大，说明股票在风险中性分布中过大或过小的概率都比较小。对应期权价格在执行价格过大或过小时都比较低，对应波动率在执行价格过大或过小时都较低。

(b) 波动率微笑左低右高。

**20.2 股票的波动率微笑是什么?**

指隐含波动率随股票执行价格变化的曲线，一般为左高右低的凹曲线。

**20.3 标的资产价格有跳跃式会造成什么样形式的波动率微笑? 这种形式对于 2 年和 3 个月期限的期权中哪个更显著?**

资产价格的跳跃对应会产生比较大的隐含波动率。这在短期限的期权中影响更显著。

**20.4 一个欧式看涨期权与一个欧式看跌期权具有同样的执行价格与期限。看涨期权的隐含波动率为 30%，看跌期权的隐含波动率为 25%。你会进行什么样的交易?**

根据看跌-看涨平价关系，这两种期权应该具有同样的隐含波动率，但这里的隐含波动率不同说明他们的价格标定不合理。看涨期权价格可能偏高，或者看跌期权价格偏低。可以空头看涨期权，多头看跌期权，买入资产, 无风险利率借入 $Ke^{-rtT}$。由看跌-看涨平价关系，$p + S_0 = c + Ke^{-rT}$，当这里看涨期权价格偏高时, $c + Ke^{-rT} - p - S_0 > 0$。购买该投资组合后出始现金即为 $c + Ke^{-rT} - p - S_0$, 会有现金剩余。然后等到到期日，如果资产价格大于执行价格，看涨期权被执行，我们以执行价格卖出资产，收入 $K$ 偿还无风险利率借入资金，持有的看跌期权价值为 0，平仓后总盈亏为 0；如果到期日资产价格小于执行价 $K$，我们执行看跌期权，以价格 $K$ 卖出股票，偿还无风险利率借入资金方，卖出的看涨期权不会被执行，总盈亏为 0。所以实现该组合当前会有现金盈余，但将来组合总盈亏为 0，就有无风险套利空间。

**20.5 仔细解释为什么同对数正态分布相比时，左端尾部更加肥大而右端尾部更加瘦小的分布会造成波动率微笑向下倾斜的形状。**

说明资产将来无风险概率分布时，如果左端肥大，右端瘦小，说明资产价格较低的可能性比对数正态分布大，资产价格较大的可能性比对数正态分布要小，而在布莱克-斯科尔斯-默顿模型下，符合几何布朗运动，无风险利率不变情况下，资产将来价格应该符合对数正态分布，同时波动率为也需要为常数。但是如果允许波动率变化，及我们用期权价格倒推隐含波动率的话，波动率和期权价格正相关，所以如果资产将来价格过小的可能性大，即执行价低的期权的价值更大的时候，隐含波动率也会更大（相对于不变的波动率），资产将来价格过大的可能性小的时候，执行价格高的期权的价值会小，隐含波动率就会比较小（相对于不变的波动率）。即隐含波动率随执行价格向下倾斜。

**20.6 一个欧式看涨期权的市场价格为 3 美元。当采用 30% 的波动率时，由布莱克-斯科尔斯-默顿公式给出的价格为 3.50 美元，由布莱克-斯科尔斯-默顿模型给出的具有相同执行价格与期限的看跌期权价格为 1.00 美元。这一期权的市场价格应该为多少？解释你的答案。**

$$p_{mkt} + S_0 = c_{mkt} + Ke^{-rT}, \quad p_{bs} + S_0 = c_{bs} + Ke^{-rT}, \Rightarrow p_{mkt} = c_{mkt} - c_{bs} + p_{bs} = 0.5 \text{ 美元。}$$

**20.7 解释"股票暴跌恐惧症"。**

当股票大幅下跌时，市场中的交易员由于担心股票出现暴跌而对于深度虚值的看跌期权赋予较高的价值。

**20.8 股票的当前价格为 20 美元。明天将要公布的消息会使得股票价格或上涨 5 美元或下跌 5 美元。采用布莱克-斯科尔斯-默顿公式来对 1 个月期的期权定价会存在什么样的问题?**

布莱克-斯科尔斯-默顿公式基于股票价格将来的分布为对数正态分布，而且要求波动率在考虑时间段内为常数。而此时明天的股票价格为二项分布，而且可能的上涨或下跌幅度比较大，对应短期波动率会比较大，用布莱克-斯科尔斯-默顿对 1 个月期的期权定价可能会偏低。

**20.9 当波动率不确定，并且与股票价格有正的相关性时，我们所观察到的 6 个月期限的期权波动率微笑最可能会是什么样子?**

对于波动率不变的情况，$\ln S_T \backsim \phi(\ln S_{T-\Delta t} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$，我们可以考虑一种简单的情况，当股价大于一定值后波动率为一个很大的值，当股价小于一定值后，波动率为一个很小的值。由 $\ln S_T \backsim \phi(\ln S_{T-\Delta t} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ 可见，当股价很大之后，股价会倾向于降低增长速度甚至下降，当股价很低之后，股价的变化倾向于增加上升速度。所以相对于波动率不变的情况，当波动率和股价正相关时，股价更倾向于稳定在较集中的范围。所以对于执行价格过高或者过低的期权，其将来价值的期望会比较低，对应隐含波动率微笑为中高，左右低的形状。

**20.10 在以实证的形式验证期权定价公式时，你最可能会碰到什么样的问题?**

波动率的选取的问题。但应该可以通过其它相关期权的隐含波动率来估计。

**20.11 假定中央银行的政策是允许汇率在 0.97～1.03 中变化，你所计算的汇率期权隐含波动率将会具有什么样的特征?**

隐含波动率会中高左右低，在 0.97 和 1.03 时降为 0 。

**20.12 期权交易员有时将深度虚值期权看成波动率上的期权。你认为他们为什么会这样做呢?**

对于执行价格非常低或非常高的深度虚值期权，其波动率的倾斜程度都比较大。而且无论是外汇期权这种中低两端高的波动率微笑，还是股票这种左高右低的波动率微笑，波动率在执行价格较高或较低时都是单调递增或递减的。所以执行价格和波动率一一对应，所以可以看作是波动率上的期权。

**20.13 某股票上看涨期权的执行价格为 30 美元，期限为 1 年，隐含波动率为 30%。对于同一股票，执行价格为 30 美元，期限也为 1 年的看跌期权隐含波动率为 33%。这对于交易员来讲会有什么样的套利机会？套利机会是建立在布莱克-斯科尔斯-默顿模型里对数正态分布的前提下吗？仔细解释你的答案。**

由于无套利空间的要求，看跌-看涨平价关系需要满足，同时要求了看涨和看跌期权的隐含波动率相同。隐含波动率也可以由其它模型定义。这里看跌期权隐含波动率比看涨期权隐含波动率高，说明相对于看跌期权，看涨期权价格偏低，可以卖空看跌期权，买入看涨期权，卖空对应资产，所得现金进行无风险投资。

**20.14 假定明天将会宣布对于公司有重大影响的法律诉讼结果。公司股票当前的价格为 60 美元。如果诉讼结果对公司有利，股票价格将会上涨到 75 美元；如果诉讼结果对于公司不利，股票价格将会下跌到 50 美元。诉讼结果对于公司有利的风险中性概率为多少？如果诉讼结果对于公司有利，股票在 6 个月的波动率为 25%；但如果诉讼结果对于公司不利，股票在 6 个月的波动率为 40%。利用 DerivaGem 来计算今天这家公司股票隐含波动率与欧式期权价格的关系。已知公司不付股息。假定 6 个月期的无风险利率为 6%。在计算中考虑具有执行价格为 30 美元、40 美元、50 美元、60 美元、70 美元及 50 美元的看涨期权。**

（a）$p = \frac{1-d}{u-d} = 0.4$

(b) 可以先计算宣布结果后，两种情况下各执行价格看涨期权的价格，然后把期望贴现到当前，得当前各执行价格期权的价格，再迭代求出相应隐含波动率。

| 执行价格 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 上涨后期权价格 | 45.86 | 36.18 | 26.50 | 17.17 | 9.33 | 4.16 |
| 下跌后期权价格 | 21.00 | 12.44 | 6.31 | 2.83 | 1.16 | 0.45 |
| 当前期权价格 | 30.96 | 21.94 | 14.39 | 8.56 | 4.43 | 1.93 |
| 当前期权隐含波动率 | 0.468 | 0.478 | 0.478 | 0.460 | 0.433 | 0.403 |

可以看到，确实会有波动率皱眉。

**20.15 当前某汇率为 0.8000 。汇率的波动率为 12%，两个国家的利率相同。利用对数正态假设，估计在 3 个月后汇率在以下范围的概率（a）小于 0.7000，（b）介于 0.7000 与 0.7500 之间，（c）介于 0.7500 与 0.8000 之间，（d）介于 0.8000 与 0.8500 之间，（e）介于 0.8500 与 0.9000 之间，（f）大于 0.9000 。如果假设汇率波动率微笑为通常所看到的形式，以上的估计哪一项太低，哪一项太高?**

对数正态分布的标准差为 0.06 。

(a) 0.0130, (b)0.128, (c) 0.359, (d) 0.344 , (e) 0.131, (f) 0.0248 。如果是通常汇率情况，（a）（e）（f）可能过低，（c）（d）可能过高，

**20.16 某股票的价格为 40 美元。股票上执行价格为 30 美元，期限为 6 个月的欧式看涨期权的隐含波动率为 35%。股票上执行价格为 50 美元，期限为 6 个月的欧式看涨期权的隐含波动率为 28%。6 个月期限的无风险利率为 5%，股票无股息。解释为什么两个隐含波动率会不同。利用 DerivaGem 计算两个期权的价格。利用看跌-看涨期权平价关系式计算执行价格分别为 30 美元及 50 美元的欧式看跌期权价格。利用 DerivaGem 计算 3 个月期限期货期权的隐含波动率。**

因为低股价时可能由于公司的杠杆效应增加，波动率增大。还有股价大幅下跌时，深度虚值的看跌期权被赋予较高的价值，对应隐含波动率增大。

执行价格 30 的欧式看涨价格为 11.155，执行价格 50 的欧式看涨价格为 0.725 。$p = c + Ke^{-rT} - S_0$, 分别为 0.414，9.49 。

**20.17“布莱克-斯科尔斯-默顿模型是被交易员用于插值的工具”。解释这一观点。**

是建立期权价格和隐含波动率之间关系的一种方式。

**20.18 利用表 20-2 计算交易员所采用的 8 个月期限，$K/S_0 = 1.04$ 的期权隐含波动率。**

约为 13.4 。

# 作业题

**20.19 一家公司股票价格为 4 美元。公司没有任何债务。分析员认为公司的结算价值至少为 300000 美元，公司的流通股数量是 100000 。这时你会看到什么样的波动率微笑?**

不知道。

**20.20 一家公司正在等待一个重要诉讼结果，而结果会在 1 个月后宣布。公司股票当前价格为 20 美元。如果诉讼结果对公司有利，1 个月后股票会上涨到 24 美元；但如果结果对公司不利，1 个月后股票会下跌到 18 美元。1 个月期的无风险利率为每年 8%。**

(a) **诉讼结果对于公司有利的风险中性概率为多少?**

(b) **执行价格分别为 19 美元、20 美元、21 美元、22 美元及 23 美元，1 个月期看涨期权的价格分别为多少?**

(c) **利用 DerivaGem 计算 1 个月期的看涨期权波动率微笑。**

(d) **验证 1 个月期看跌期权波动率微笑与以上结果一致。**

(a) $p = \frac{e^{rT}-d}{u-d} = 0.3556$ 。

(b) 分别计算将来期望价格，然后贴现到当前，这些看涨期权价值分别为:

| 执行价格 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|
| 看涨期权价格 | 1.766 | 1.413 | 1.060 | 0.706 | 0.353 |

(c)

| 执行价格 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|
| 看涨期权价格 | 1.766 | 1.413 | 1.060 | 0.706 | 0.353 |
| 隐含波动率 | 0.499 | 0.587 | 0.616 | 0.603 | 0.534 |

(d) 完全一样的过程。

**20.21 一个期货目前价格为 40 美元，无风险利率为 5%。明天公布的消息会造成今后 3 个月期的波动率变为 10% 或者 30%，第 1 种情况出现的概率为 60%，第 2 种情况出现的概率为 40%，采用软件 DerivaGem 来计算 3 个月期权的波动率微笑。**

| 执行价格 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma = 0.1$ 看涨价格 | 5.436 | 4.453 | 3.486 | 2.565 | 1.739 | 1.066 | 0.581 | 0.278 | 0.116 | 0.042 | 0.013 |
| $\sigma = 0.3$ 看涨价格 | 5.922 | 5.143 | 4.421 | 3.76 | 3.163 | 2.633 | 2.169 | 1.767 | 1.425 | 1.138 | 0.899 |
| 当前价格 | 5.63 | 4.729 | 3.86 | 3.043 | 2.309 | 1.693 | 1.216 | 0.874 | 0.64 | 0.481 | 0.368 |
| 隐含波动率 | 0.062 | 0.062 | 0.062 | 0.062 | 0.109 | 0.123 | 0.125 | 0.125 | 0.125 | 0.125 | 0.171 |

**20.22 在作者网页上可以下载几种汇率数据 http://www.rotman.utoronto.ca/ hull/data 选定一种货币来产生类似于表 20-1 的表格。**

to be added.

**20.23 在作者网页上可以下载几种股票指数数据 http://www.rotman.utoronto.ca/ hull/data 选定一种指数并检验价格下跌 3 个标准差的概率是否会大于价格上涨 3 个标准差的概率。**

to be added.

**20.24 某欧式看涨期权与欧式看跌期权具有同样的执行价格和期限。证明当波动率在一个短暂时段上由 $\sigma_1$ 上涨到 $\sigma_2$ 时，以上两个期权的增值相同（提示：利用看跌-看涨平价关系式）。**

欧式看跌和欧式看涨的 Vega 相同，短时间内波动率变化造成的价格变化相同。

**20.25 某汇率当前的值为 1.0，6 个月期限、具有执行价格 0.7、0.8、0.9、1.0、1.1、1.2、1.3 的隐含波动率分别为 13%、12%、11%、10%、11%、12%、13%。国内与外国无风险利率均为 2.5%。利用与本章附录中例 20A-1 类似的方法计算隐含概率分布，并且与所有隐含波动率均为 11.5% 时的隐含概率分布相比较。**

to be added.

**20.26 利用表 20-2 计算交易员所用的对应于 11 个月期限，$K/S_0 = 0.98$ 的期权隐含波动率。**

to be added.