# 第十九章 希腊值

## 练习题

**19.1 解释如何实现对一个卖出的虚值看涨期权止损策略进行对冲。为什么这种策略的效果并不好?**

卖出了虚值看涨期权，即执行价大于股票当前价值。做法是频繁关注股票价格变化，当股票价格大于执行价的时刻买入股票以防止股价进一步上升造成更多损失，当股票价格跌回执行价以下的时刻再卖出股票。这种策略效果不好主要两方面原因，一是需要频繁关注股票价格，二是可能的频繁交易和高买低卖产生的交易损失。

**19.2 一个看涨期权 Delta 为 0.7 的含义是什么? 当每个期权的 Delta 均为 0.7 时，如何使得 1000 份期权的空头组成为 Delta 中性?**

当标的资产价格上升或下跌 1 美元时，该看涨期权的价格上升或下跌 0.7 美元。多头 700 份标的资产。

**19.3 当无风险利率为每年 10%，股票波动率为每年 25% 时，计算无股息股票上平值欧式看涨期权的 Delta，其中期权的期限为 6 个月。**

$\Delta = N(d_1) = N(\frac{\ln(\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) = N(0.654) = 0.743$。

**19.4 当时间以年做单位时，一个期权头寸的 Theta 为-0.1 的含义是什么? 假如交易人认为股票价格与期隐含波动率都不会变动时，什么样的期权头寸比较合适?**

一年后期权的价格降低 0.1 美元。如果股票价格和隐含波动率都不变，应该空头期权。

**19.5 期权头寸的 Gamma 是什么含义? 某个头寸的 Delta 为 0，而 Gamma 为一个很大的负值，该头寸的风险是什么?**

Delta 的变化率。如果 Gamma 为很大的负值，说明 Delta 会很敏感，股价变化时 Delta 会快速反方向变化，会使之前 Delta 中性对冲很快失去平衡。

**19.6 "构造一个合成期权的过程，就是对冲这一期权头寸的反过程。"解释这句话的含义。**

构造合成期权是通过卖出标的资产。正常通过买入资产进行对冲，是通过引入（-Δ，卖空或买入）来进行 Delta 中性对冲，而合成期权是通过卖出 Δ（Δ 通过希望构造的期权的参数计算出）份额的投资组合来虚拟一个空头期权。是相反的过程。

**19.7 解释为什么投资组合保险策略在 1987 年 10 月 19 日的股票市场大跌中效果不好。**

因为很多投资者都使用相似的组合保险策略，导致在股市大幅下跌的时候，很多投资者按保险策略都需要卖出大量相似的股票，同时带动市场其他投资者抛售股票。以至于交易市场超负荷运作，很多交易不能及时进行，策略所提供的保险效果并不能被实现。

**19.8 一个执行价格为 40 美元的虚值看涨期权的布莱克-斯科尔斯-默顿价格为 4 美元，卖出期权的交易员想采用止损交易策略。交易员想在股票价格为 40.10 美元时买入股票，而在 39.90 美元时卖出股票，估计股票被买入与卖出的次数。**

假设无风险利率为 5%, 期限为 12 个月，当前资产价格为 38 美元，可迭代求得波动率应为 26.6%。然后可以简单模拟一下，如果取 100 个时间间隔，买入卖出各需要 2.8 和 3.4 次，如果取 500 个时间间隔，买入和卖出各需要 5.7 和 5.5 次，如果取 1000 个时间间隔，买入和卖出各需要 8.3 和 8.1 次，如果取 10000 个时间间隔，买入和卖出各需要 24.3 和 24.2 次。但实际上如果考虑一天关注一次的话，大概需要买入和卖出各 4 次。

**19.9 假定某股票的当前价格为 20 美元，一个执行价格为 25 美元的看涨期权是由频繁交易标的股票头寸按合成的方式构造而成。考虑以下两个情形:**

(a) **股票价格在期权期限内逐渐由 20 美元涨至 35 美元；**

(b) **股票价格剧烈变动，最后的价格为 35 美元。**

**哪种情景会使合成期权的费用更高？解释你的答案。**

合成期权需要买入或卖出的股票数量由期权的 Delta 决定，Delta 随股价的变化由期权的 Gamma 决定，如果该期权的 Gamma 不大，那么合成期权所需要的股票数量并不随股价变化而频繁调整。但一般而言，股价剧烈变化，Gamma 如果没有对冲为 0，我们是需要不断调整合成期权所需要的股票数量的，会产生更多的交易费用。

**19.10 数量为 1000 的白银期货上欧式看涨期权空头的 Delta 为多少？其中期权期限为 8 个月，标的期货的期限为 9 个月，目前 9 个月期限的期货价格为每盎司 8 美元，期权执行价格为 8 美元，无风险利率为每年 12%，白银价格波动率为每年 18%。**

对于期货期权，$\Delta = e^{-rT}N(d_1) = N(\frac{\ln\frac{F_0}{K}+\frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} = 0.514$。

**19.11 在练习题 19.10 中，为保证 Delta 对冲，9 个月期限的白银期货初始头寸为多少？如果采用白银本身来对冲，初始头寸又为多少？如果采用 1 年期的期货，初始头寸又为多少？这里我们假设白银没有存贮费用。**

如果用 9 个月期限的白银期货，多 514 数量的期货合约。

如果用白银来对冲，考虑白银当前价格为 $e^{-rT}F_0$，计算标准欧式看涨期权 Delta 为 $N(d_1) = N(\frac{\ln\frac{S}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) = 0.502$，所以买入 502 白银。

如果用 1 年期的期货，考虑期货价格为 $e(r*0.25)F_0$, 计算期货期权 Delta 为 0.319，多头 319 数量的 1 年期期货。

**19.12 一家公司准备对由某一货币上的看跌和看涨期权所组成的投资组合多头来进行 Delta 对冲。在下面哪种情况下对冲的效果会最好?**

(a) **一种基本上稳定的即期汇率。**

(b) **一种变动剧烈的即期汇率。**

基本稳定的汇率，可以使得 Gamma 不是很大的时候 Delta 不会有太大变化，从而不需要频繁调整对冲组合。

**19.13 重复练习题 19.12 中的分析，这里是一家持有外汇看涨期权和外汇看跌期权空头的金融机构。**

如果同一种期权的看涨多头和看跌空头份额相近，那么由于多头和空头的 Gamma 会抵消，所以总 Gamma 会接近于 0，即 Delta 对冲时 Delta 并不会随汇率剧烈变化而有很大变化。

**19.14 一家金融机构刚刚卖出了 1000 份 7 个月期的日元欧式看涨期权。假设即期汇率为每日元 0.80 美元，执行价格为每日元 0.81 美元，美国的无风险利率为每年 8%，日本的无风险利率为 5%，日元汇率的波动率为每年 15%, 计算金融机构头寸的 Delta、Gamma、Vega，Theta 和 Rho 。解释这些数值的含义。**

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = 0.1016,\ \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -0.0130 \tag{1}$$

$$\Delta = e^{-r_f T} N(d_1) = 0.5249 \tag{2}$$

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-r_f T}}{S_0\sigma\sqrt{T}} = 1.678 \tag{3}$$

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} + r_f S_0 N(d_1) e^{-r_f T} - rKe^{-rT}N(d_2) = -0.0217 \tag{4}$$

$$\text{Vega} = S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-r_f T} = 0.2355 \tag{5}$$

$$\text{Rho} = KTe^{-rT}N(d_2) = 0.2231 \tag{6}$$

Delta 是期权价格随标的资产即期价格变化的比率。Gamma 是 Delta 随标的资产即期价格变化的变化比率。Theta 是期权价格随到期时间变化的变化比率。Vega 是期权价格随波动率变化而变化的比率。Rho 是期权价格随无风险利率变化而变化的比率。

**19.15 在什么情况下只需要在组合中加入另外一种欧式期权的头寸即可使一个股指上欧式期权的 Gamma 和 Vega 同时中性化?**

当加入的期权的 Gamma 和 Vega 之比和当前组合的 Gamma 和 Vega 的比率相同时。

**19.16 某基金经理拥有一个风险分散较好的投资组合，该投资组合的收益反映了标普 500 股指的收益，组合的价值为 3.6 亿美元。标普 500 取值为 1200 。投资组合经理打算购买保险，以便使得在今后 6 个月内投资组合价值下跌的程度不超过 5%。无风险利率为每年 6%，投资组合与标普 500 的股息收益率均为 3%，标普 500 股指波动率为每年 30 %，**

(a) **如果基金经理买入交易所内交易的欧式看跌期权，这时的保险费用是多少?**

(b) **仔细解释有关交易所内交易的欧式看涨期权的其他交易策略，并说明这些交易策略回取得相同的效果。**

(c) **如果基金经理决定将投资组合的一部分投放于无风险证券，最初的头寸应该为多少?**

(d) **如果基金经理决定采用 9 个月期的指数期货来提供保险，最初的头寸应该为多少?**

这里投资组合的 $\beta$ 等于 1，而且收益率和股指的股息收益率相同。所以期权对冲只需要买入份额相同执行价为为保险价的看跌期权即可。

(a) 需要的欧式看跌的执行价为 1140,可以计算得该股指期权价格为 63.40, 随意对冲的看跌期权费用为 $1.902 \times 10^7$ 美元。

(b) 给投资组合加保险，一种是通过看跌期权。另一种是通过买卖其它资产来构造看跌期权。这里我们已知看跌期权所需的所有参数，构造该看跌期权的 Delta 也可以通过空头一定数量的看涨期权，具体份额由看涨期权的 Delta 确定。通过买卖看涨期权，随时匹配所需的看跌期权的 Delta。核心思想是通过动态控制其他资产的份额来模拟一个看跌期权价格随标的资产即期价格变化的曲线，来替代看跌期权实现对冲目的。

(c) 考虑（a）中所需的看跌期权，其 Delta 为-0.338。所以需要卖出组合的 33.8%。

(d) 股指期货合约的 Delta 为 $e^{-(r-q)T} = 0.985$，所以需要空头 0.343 组合份额的股指期货来对冲。此为最初头寸，头寸要动态调整以和需要的看跌期权的 Delta 符合。

**19.17 假定投资组合的 $\beta$ 为 1.5，重复练习题 19.16 。假设投资组合股息收益率为每年 4%。**

首先计算所需要的看跌期权的执行价格，参考表 17-1，假设看跌期权执行价格对应当前股指下跌 $\rho$, 则 $\rho$ 需要满足：

$$(-\rho + 0.03 \times 0.5 - 0.06 \times 0.5) \times 1.5 + 0.06 \times 0.5 - 0.04 \times 0.5 = -0.05, \ \Rightarrow \rho = 0.025 \tag{7}$$

即执行价格为 1170 的看跌期权。之后过程和上一题一样。

**19.18 对于以下情景代入相关表达式，证明式（19-4）仍然成立：**

(a) **无股息股票上欧式看涨期权。**

(b) **无股息股票上欧式看跌期权。**

(c) **无股息股票上欧式看涨与看跌期权的任意组合。**

将欧式期权的希腊值代入（19-4）。

(a) 对于欧式看涨，

$$\Delta = N(d_1), \quad \Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}, \quad \Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) \tag{8}$$

$$r\Pi = \Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \tag{9}$$

$$r\Pi = rSN(d_1) - rKe^{-rT}N(d_2) = rc \tag{10}$$

这里组合为欧式看涨 $\Pi = c$。

(b) 对于欧式看跌期权，

$$\Delta = N(d_1) - 1, \quad \Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}, \quad \Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2) \tag{11}$$

$$r\Pi = \Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \tag{12}$$

$$r\Pi = -rSN(-d_1) + rKe^{-rT}N(-d_2) = rp \tag{13}$$

这里 $\Pi = p$。

(c) 式（19-4）是希腊值的线性组合，看涨看跌期权的任意组合显然都满足。

**19.19 对以下两种情况，与式（19-4）相应的方程是什么？（a）外汇衍生产品组合，（b）期货衍生产品组合。**

对于有股息的股票，有外币无风险利率的外汇，确定将来价格的期货，都可以当作无股息股票衍生品，即期价格加一个贴现因子，希腊值 Theta 会多一项。

（a）对于外汇衍生产品，

$$r\Pi = \Theta + (r - r_f)S\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \tag{14}$$

$$r\Pi = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} + r_f SN(d_1)e^{-r_f T} - rKe^{-rT}N(d_2) + (r - r_f)Se^{-r_f T}N(d_1) \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{N'(d_1)e^{-r_f T}}{S\sigma\sqrt{T}} \tag{16}$$

$$r\Pi = r(Se^{-r_f T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)) \tag{17}$$

（b）对于期货衍生产品，只需要把 $r_f$ 替换为 $r$ 。

$$r\Pi = \Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma \tag{18}$$

$$r\Pi = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-rT}}{2\sqrt{T}} + rSN(d_1)e^{-rT} - rKe^{-rT}N(d_2) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{N'(d_1)e^{-rT}}{S\sigma\sqrt{T}} \tag{19}$$

$$r\Pi = r(Se^{-rT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)) \tag{20}$$

**19.20 假定我们要为价值为 700 亿美元的股权资产做出保险计划。假设这一保险的目的是保证在 1 年内，股权资产价值的下跌程度不会超过 5%，做出你认为需要的估计，并采用 DerivaGem 软件计算当在 1 天之内市场下跌 23% 时，该股权资产组合保险的管理人应出售股票或期货合约的数量是多少?**

构造看跌期权，$S_0 = 7 \times 10^{10}$, $K = 6.65 \times 10^{10}$, $T = 1$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.20$, 该期权的 Delta 为 $N(d_1) - 1 = -0.272$，所以我们可以卖出 27.2% 的该股权资产来构造出一个看跌期权。如果一天之内市场下跌 23%，即 $S_0 \approx 5.39 \times 10^{10}$, 此时 Delta 为-0.7581，所以需要出售 $75.81\% - 27.2\% = 48.81\%$ 的股权资产。

**19.21 股指远期的 Delta 是否与相同头寸的股指期货的 Delta 相等? 解释你的答案。**

不相等。远期的执行价格固定后，总盈亏在执行时结算，当前价值为 $S - Ke^{-rT}$，Delta 为 1 。但对于期货，由于其每日结算的特性，它的当前价格为 $Se^{rT}$，所以 Delta 为 $e^{rT}$。

**19.22 某银行持有的美元/欧元汇率期权头寸的 Delta 为 30000，Gamma 为-80000 。说明如何理解这些数字。汇率为 0.90 美元/欧元（每欧元所对应的美元数量为 0.90），为了使头寸为 Delta 中性，你应该持有什么样的头寸? 在一段短暂时间后，汇率变化为 0.93，估计新的 Delta。这时为了保证 Delta 中性，你还要再进行什么样的交易? 假定银行在最初的头寸已经是 Delta 中性，在汇率变动后，这一头寸会亏损还是盈利?**

Delta 为资产价值随汇率变化的变化率，Gamma 为 Delta 随汇率变化的变化率。这里汇率每上升 0.01，资产升值 300，Delta 降低 800 。为了使 Delta 中性，我们需要空头 30000 欧元。

汇率升为 0.93 后，Delta 约为 27600，为了保持 Delta 中性，我们需要减持 2400 欧元的空头。如果一开始是 Delta 中性，汇率变化后，这一头寸是盈利。

**19.23 对于无股息股票上期权，利用看跌-看涨平价关系式来推导**

(a) **欧式看涨期权 Delta 与欧式看跌期权 Delta 的关系式。**

(b) **欧式看涨期权 Gamma 与欧式看跌期权 Gamma 的关系式。**

(c) **欧式看涨期权 Vega 与欧式看跌期权 Vega 的关系式。**

(d) **欧式看涨期权 Theta 与欧式看跌期权 Theta 的关系式。**

平价关系式，$p + S = c + Ke^{-rT}$

(a)
$$\Delta_p + 1 = \Delta_c \tag{21}$$

(b)
$$\Gamma_p = \Gamma_c \tag{22}$$

(c)
$$\text{Vega}_p = \text{Vega}_c \tag{23}$$

(d)
$$\Theta_p = \Theta_c - rKe^{-rT} \tag{24}$$

# 作业题

**19.24 某金融机构持有以下有关英镑的场外交易期权组合, 某交易所里交易的期权 Delta 为 0.6，Gamma 为 1.5，Vega 为 0.8 。**

| 期权类型 | 头寸 | 期权 Delta | 期权 Gamma | 期权 Vega |
|---|---|---|---|---|
| A 看涨 | -1000 | 0.50 | 2.2 | 1.8 |
| B 看涨 | -500 | 0.80 | 0.6 | 0.2 |
| C 看跌 | -2000 | -0.40 | 1.3 | 0.7 |
| D 看涨 | -500 | 0.70 | 1.8 | 0.4 |

(a) **什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使交易组合为 Gamma 与 Delta 中性?**

(b) **什么样的交易所内交易的英镑期权头寸和英镑头寸会使得交易组合为 Vega 与 Delta 中性?**

记交易所里的期权为 X，组合的总和:$Delta = -450$, $Gamma = -6000$, $Vega = -4000$ 。

(a) 多头价值 4000 的交易所期权 X，卖空价值 1950 的英镑。

(b) 多头价值 5000 的交易所期权 X, 卖空价值 2550 的英镑。

**19.25 考虑作业题 19.24 中的情景，假定第 2 个交易所交易期权的 Delta 为 0.1，Gamma 为 0.5，Vega 为 0.6，进行什么样的交易可使得交易组合 Delta、Gamma 与 Vega 均为中性。**

多头第一个交易所价值 3200 的期权，多头第二个交易所价值 2400 的期权，空头价值 2160 的英镑。

**19.26 考虑一个 1 年期的欧式股票看涨期权，股票价格为 30 美元，执行价格为 30 美元，无风险利率为每年 5%。波动率为每年 25%。利用 DerivaGem 软件来计算期权的价格、Delta、Gamma、Vega、Theta 和 Rho 。将价格改变为 30.1 美元时，通过计算期权价格来验证 Delta 的正确性；通过计算期权在股票价位为 30.1 美元时的 Delta 来计算 Gamma，并由此来验证 Gamma 的正确性。进行类似的计算来验证 Vega、Theta 和 Rho 的正确性。采用 DerivaGem 软件画出期权价格、Delta、Gamma、Vega、Theta 和 Rho 与股票价格关系的图形。**

略。

**19.27 某银行提供的存款产品中，有一种产品向投资者保证收益（a）等于 0 与（b）市场指数收益的 40% 的最大值。某投资者决定将 100000 美元投资于这种产品，描述该产品作为该市场指数上期权时的收益。假设无风险利率为每年 8%，指数股息收益率为每年 3%，指数波动率为每年 25%，这一产品对于投资者而言合理吗?**

该产品等价于 0.4 倍的欧式平价看涨期权，如果期限为 1 年，所以价格应该为 4789 美元。

**19.28 第 18 章里给出的欧式期货看涨期权 $c$ 与期货价格 $F_0$ 的关系式为 $c = e^{-rT}[F_0N(d_1) - KN(d_2)]$ 其中 $d_1 = \frac{\ln(F_0/K)+\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}$ 和 $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$。其中 $K$、$r$、$T$ 和 $\sigma$ 分别为执行价格、利率、期限和波动率。**

(a) **证明 $F_0N'(d_1) = KN'(d_2)$。**

(b) **证明看涨期权对于期货价格的 Delta 等于 $e^{-rT}N(d_1)$ 。**

(c) **证明看涨期权的 Vega 等于 $F_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-rT}$ 。**

(d) **证明 19.12 节里计算 Rho 的公式。在计算期货看涨期权的 Delta、Gamma、Theta 与 Vega 时，我们可以将一般期权希腊值计算公式中的 $q$ 由 $r$ 来代替，$S_0$ 由 $F_0$ 来代替，$q$ 为股息收益率。为什么这一做法对计算看涨期权的 Rho 时不成立?**

(a)

$$F_0 N'(d_1) = K N'(d_2) \tag{25}$$

$$F_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} = K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \tag{26}$$

$$F_0 e^{-\frac{(\ln(\frac{F_0}{K})+\sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T}} = K e^{-\frac{(\ln(\frac{F_0}{K})-\sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T}} \tag{27}$$

$$\frac{F_0}{K} = e^{\ln(\frac{F_0}{K})} \tag{28}$$

(b)

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial F_0} = e^{-rT} N(d_2) \tag{29}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial \sigma} &= e^{-rT} F_0 N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - e^{-rT} K N'(d_1 - \sigma\sqrt{T}) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} && (30)\\
&= e^{-rT} N'(d_1)(F_0(-\frac{\ln(F_0/K)}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{T}}{2}) - K(-\frac{\ln(F_0/K)}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{T}}{2}) e^{\sigma\sqrt{T}d_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 T}) && (31)\\
&= e^{-rT} N'(d_1)(F_0(-\frac{\ln(F_0/K)}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{T}}{2}) - K(-\frac{\ln(F_0/K)}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{T}}{2}) \frac{F_0}{K} && (32)\\
&= e^{-rT} N'(d_1) F_0 \sqrt{T} && (33)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial r} &= S_0 e^{-qT} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - K e^{-rT}(N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial r} - T N(d_2)) && (34)\\
&= K e^{-rT} T N(d_2) + S_0 e^{-qT} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - K e^{-rT} N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} e^{-(r-q)T + \ln(S_0/K)} && (35)\\
&= K e^{-rT} T N(d_2) && (36)
\end{aligned}$$

计算 Rho 时是对 $r$ 的偏导数，这里 $q$ 是不随 $r$ 变的，用 $r$ 替换 $q$，算 Rho 当然不对。

**19.29 利用** DerivaGem **软件验证** 19.1 **节中的期权满足式**（19-4）。

略。

**19.30 略**