第二十八章 鞅与测度

练习题

28.1 一个不是投资资产价格的变量的风险市场价格是如何定义的?

参考例 28-1，对于不是投资资产价格的变量，如果有一个衍生产品的价格只依赖该变量，那么该变量的风险市场价格可以由这个衍生产品的预期收益率和波动率计算出。

28.2 假设黄金价格的风险市场价格是零。如果储藏费是每年 1%，无风险利率是每年 6%，那么金价的增值率期望是多少? 假设黄金不提供收入。

黄金价格增值率期望为 0.06，如果考虑黄金期货，那么需要加上储藏费用部分。

28.3 考虑两个依赖于同一市场变量的证券，它们的收益率期望分别是 8% 和 12 %。第一个证券的波动率是 15%，瞬时无风险利率是 4%。第二个证券的波动率是多少?

风险市场价格为 0.267，所以第二个证券的波动率为 0.3 。

28.4 一个原油公司成立的唯一目的是在的德克萨斯州内的一个小区域里寻找原油。公司的价值主要依赖于两个随机变量：原油价格与原油储备量。讨论第二个变量的风险市场价格应该是正是负，还是零。

资本资产定价模型认为投资人会要求额外收益来补偿由于和市场收益风险相关性而带来的风险。如果该区域原油规模不大，可以认为原油储备量和原油市场之间关系很小，风险市场价格应该为零，如果该区域原油储备量比较大，其具体储量会影响到原油市场的话，风险市场价格应该为正。

28.5 一个衍生产品价格与两个不分红的可交易证券价格有关。通过构造由衍生产品以及两个可交易证券的无风险组合，推导衍生产品价格所满足的微分方程。

$$df = (\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_1}\mu_1 S_1 + \frac{\partial f}{\partial S_2}\mu_2 S_2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2})dt + S_1\sigma_1\frac{\partial f}{\partial S_1}dz_1 + S_2\sigma_2\frac{\partial f}{\partial S_2}dz_2 \quad (1)$$

通过卖空 $\frac{\partial f}{\partial S_1}$ 的证券一，和 $\frac{\partial f}{\partial S_2}$ 的证券二, 和无无风险套利空间要求 (2)

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial S_1}\Delta S_1 - \frac{\partial f}{\partial S_2}\Delta S_2 = (f - \frac{\partial f}{\partial S_1}S_1 - \frac{\partial f}{\partial S_2}S_2)r\Delta t \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_1}S_1 r + \frac{\partial f}{\partial S_2}S_2 r + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2} = rf \quad (4)$$

28.6 假设利率 x 服从以下过程

$$dx = a(x_0 - x)dt + c\sqrt{x}dz \quad (5)$$

这里 a, x_0 和 c 是正常数。我们进一步假设 x 的风险市场价格是 λ，在传统风险中性世界里，x 所服从的过程是什么?

不知道是什么意思。

28.7 当证券 f 以 q 的速度提供收益时，证明式（28-9）变成了 $\mu+q-r=\lambda\sigma$（提示：将从 f 得到的收入再投资于 f 中，这样可以构造一个新的不提供收入的证券 f^* 。）

此时，该证券资产总价值变化过程为 $\Delta f=\mu f\Delta t+qf\Delta t+\sigma f\Delta z$, 考虑把收益不断投入到购买证券，等价于该证券的收益率提高了 q 。

28.8 证明当 f 和 g 分别以 q_f 和 q_g 的速度提供收益时，式（28-15）变为

$$f_0=g_0e^{(q_f-q_g)T}E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{6}$$

(提示：将从 f 得到的收入再投资于 f，从 g 得到的收入再投资于 g，这一我们可以构造新的不提供收入的证券 f^* 和 g^*。)

$$\begin{aligned}
&df=\mu_f f dt+\sigma_f f dz,\quad dg=\mu_g g dt+\sigma_g g dz && (7)\\
&df^*=(\mu_f+q_f)f^*dt+\sigma_f f^*dz,\quad dg^*=(\mu_g+q_g)g^*dt+\sigma_g g^*dz && (8)\\
&\text{market price of risk}\quad \lambda=\sigma_g && (9)\\
&\lambda=\sigma_g=\frac{\mu_f+q_f-r}{\sigma_f}=\frac{\mu_g+q_g-r}{\sigma_g} && (10)\\
&\mu_f=r-q_f+\sigma_f\sigma_g,\quad \mu_g=r-q_g+\sigma_g^2 && (11)\\
&d\left(\frac{f}{g}\right)=(\sigma_f-\sigma_g)\frac{f}{g}dz+(q_g-q_f)\frac{f}{g}dt && (12)\\
&d\left(\frac{f}{g}e^{(q_f-q_g)t}\right)=(\sigma_f-\sigma_g)\frac{f}{g}e^{(q_f-q_g)t}dz && (13)\\
&\frac{f_0}{g_0}=\mathbb{E}_g\left[\frac{f_T}{g_T}e^{(q_f-q_g)T}\right] && (14)\\
&f_0=g_0e^{(q_f-q_g)T}\mathbb{E}_g\left[\frac{f_T}{g_T}\right] && (15)
\end{aligned}$$

28.9 “一个利率将来值在风险中性世界里的期望大于它在现实世界里的期望值。”这个结论对以下变量的风险市场价格有什么影响？（a）某种利率；（b）某个债券的价格。你认为这个结论有可能成立吗？给出理由。

没看明白。

28.10 变量 S 是一个以货币 A 为计量的投资资产，它以 q 的速度提供收益。在现实世界里，它服从过程

$$dS=\mu_S S dt+\sigma_S S dz \tag{16}$$

可以定义必要的变量，给出在以下情况下 S 的过程，以及相应的风险市场价格。

(a) 在一个对货币 A 是传统风险中性的世界里。

(b) 在一个对货币 B 是传统风险中性的世界里。

(c) 在一个对货币 A 里在时间 T 到期的零息债券为远期风险中性的世界里。

(d) 在一个对货币 B 里在时间 T 到期的零息债券为远期风险中性的世界里。

让投资资产价格相对于某一一般等价物价格为 f, 货币 A 和 B 价格为 g_A, g_B，它们都依赖于同一个随机过程变量 z，且满足如下条件，

$$
\begin{aligned}
&S = \frac{f}{g_A},\ \ dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz && (17)\\
&df = \mu_f f dt + \sigma_f f dz && (18)\\
&dg_A = \mu_A g_A dt + \sigma_A g_A dz && (19)\\
&dg_B = \mu_B g_B dt + \sigma_B g_B dz && (20)\\
&dS = (\mu_f - \mu_A + \sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_f) S dt + (\sigma_f - \sigma_A) dz && (21)
\end{aligned}
$$

由于都依赖于同一个随机过程变量，由无无风险套利要求，有 $\frac{\mu_i - r}{\sigma_i} = \lambda$。

(a)

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \sigma_A, \quad \mu_f = r + \sigma_f\sigma_A, \quad \mu_A = r + \sigma_A^2 && (22)\\
&dS = (\sigma_f - \sigma_A) S dz && (23)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \sigma_B, \quad \mu_f = r + \sigma_f\sigma_B, \quad \mu_A = r + \sigma_A\sigma_B && (24)\\
&dS = (\sigma_f\sigma_B - \sigma_A\sigma_B + \sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_f) S dt + (\sigma_f - \sigma_A) S dz && (25)
\end{aligned}
$$

(c) 假设 $dr_A(t,T) = \mu_{rA}(t, r_A)dt + \sigma_{rA}(t, r_A)dz$,然后有 $dP_A(t,T) = \mu_{rA}(t, r_A)P_A(t,T)dt + \sigma_{rA}(t, r_A)P_A(t,T)dz$。$\lambda = \sigma_{rA}(t, r_A)$, 所以 $dS = (\sigma_f\sigma_{rA}(t, r_A) - \sigma_A\sigma_{rA}(t, r_A) + \sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_f)Sdt + (\sigma_f - \sigma_A)Sdz$。

(d) 同上一小问，$dS = (\sigma_f\sigma_{rB}(t, r_B) - \sigma_A\sigma_{rB}(t, r_B) + \sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_f)Sdt + (\sigma_f - \sigma_A)Sdz$。

28.11 解释远期利率的定义与其他变量的远期价值之间的区别，这些变量可以是股票价格、商品价格、货币兑换率。

其它远期的价值一般直接和标的变量的未来期望相关，而远期利率是远期债券价格隐含的利率。

28.12 证明在以下假设下，28.5 节中的结论

$$df = \left[r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{f,i}\right] f dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{f,i} f dz_i \tag{26}$$

和

$$dg = \left[r + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{g,i}\right] g dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{g,i} g dz_i \tag{27}$$

其中 dz_i 是互不相关的，当 $\lambda_i = \sigma_{g,i}$ 时，f/g 是个鞅（提示：首先利用式（14A-11）得出 $\ln f$ 和 $\ln g$ 的过程）。

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{f}{g}\right) =& \frac{1}{g}df - \frac{f}{g^2}dg + \frac{f}{g^3}dg^2 - \frac{1}{g^2}df dg && (28)\\
d\left(\frac{f}{g}\right) \times \frac{g}{f} =& dt\left(r + \sum_i \sigma_{g,i}\sigma_{f,i} - r - \sum_i \sigma_{g,i}^2 + \sum_i \sigma_{g,i}^2 - \sum_i \sigma_{g,i}\sigma_{f,i}\right) + \sum_i (\sigma_{f,i} - \sigma_{g,i}) dz_i && (29)\\
=& \sum_i (\sigma_{f,i} - \sigma_{g,i}) dz_i && (30)
\end{aligned}
$$

28.13 证明当 $w = h/g$，而 h 和 g 都依赖于 n 个维纳过程时，w 波动率的第 i 个成分是 h 的第 i 个成分减去 g 的第 i 个成分（提示：首先利用式（14A-11）得出 $\ln g$ 和 $\ln h$ 的过程）。

上一题的波动率部分和风险价值取值无关，所以结果就是这题的要证明的。

28.14 “如果 X 是一个随机变量的条件期望，那么 X 是个鞅。”解释这个结论的意思。

$$X(t) = \mathbb{E}[Y(T)|\mathcal{F}(t)],\ t \le T \tag{31}$$
$$t_1 \le t_2 \le T, \tag{32}$$
$$\mathbb{E}[X(t_2)|\mathcal{F}(t_1)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y(T)|\mathcal{F}(t_2)]|\mathcal{F}(t_1)] = \mathbb{E}[Y(T)|\mathcal{F}(t_1)] = X(t_1) \tag{33}$$

作业题

28.15 一个证券的价格依赖于两个随机变量：黄铜价格和日元/美元兑换率。证券的价格与这两个变量有正向关系。假如这两个变量的风险市场价格分别是 0.5 和 0.1，如果黄铜价保持不变，那么证券的波动率将会是每年 8%；如果日元/美元兑换率保持不变，那么证券的波动率将会是每年 12%。无风险利率是每年 7%，证券的增长率期望是多少？如果两个变量是不相关的，那么证券的波动率是多少?

增长率期望为 12.2%, 如果两个变量不相关，证券波动率为 14.7%。

28.16 假设在时间 T 到期的零息债券价格服从以下过程

$$dP(t,T) = \mu_P P(t,T)dt + \sigma_P P(t,T)dz \tag{34}$$

而一个依赖于这个债券的衍生产品价格服从过程

$$df = \mu_f f dt + \sigma_f f dz \tag{35}$$

假设随机性只有一个来源，而且 f 不提供收入。

(a) **f 在时间 T 到期合约的远期价格 F 是什么?**

(b) **在一个关于 $P(t,T)$ 为远期风险中性的世界里，F 服从什么过程?**

(c) **在传统的风险中性的世界里，F 服从什么过程?**

(d) **在一个关于 $P(t,T^*)$ 为远期风险中性的世界里，F 的过程是什么？这里 $T^* \ne T$，假设 σ_P^* 是这个债券的波动率。**

(a) $F(t) = \mathbb{E}_{\lambda=0}[f(T)|\mathcal{F}(t)]$。

(b) 不知道。

(c) 不知道。

(d) 不会。

28.17 考虑一个非利率的变量。

(a) **在什么世界里这个变量的期货价格是鞅?**

(b) **在什么世界里这个变量的远期价格是鞅?**

(c) **推导在传统风险世界里，期货价格的漂移项与远期价格漂移项之差的表达式。必要时可以定义新的变量。**

(d) **在 5.8 节中当期货价格高于远期价格时，我们曾给出一些观点，证明你的结果与这些观点是一致的。**

(a) 在定价单位为货币市场账户的传统风险中性世界。

(b) 定价单位为在时刻 T 到期的零息债券，在以该定价单位为远期风险中性世界时。

(c) 不会。

(d) 不知道。