第十三章　二叉树

练习题

13.1 股票的当前价格为 40 美元，已知在 1 个月后股票的价格将可能变为 42 美元或 38 美元，无风险利率为每年 8%（连续复利），执行价格为 39 美元、1 个月期限的欧式看涨期权价值是多少?

考虑多一份欧式看涨期权，空头 Δ 份股票，我们希望这种组合在股价为 42 或 38 美元时有相同的价值:

$$3-42\Delta=-38\Delta,\ \Rightarrow\Delta=\frac{3}{4} \tag{1}$$

且组合价值为-28.5, 贴现后为 $-28.5e^{-0.08/12}=-28.31$ 。要求没有无风险套利空间，当前组合价值需要等于未来价值的贴现值 $-0.75\times 40+c=-28.31$, 所以看涨期权价格为 1.69 美元。

13.2 用一步二叉树说明无套利方法与风险中性定价方法对于欧式期权的定价过程。

风险中性定价要求投资组合的盈利增长总是和无风险利率一样。在用二叉树给期权定价时，我们总是可以用股票和期权构造投资组合使得在组合未来的收益是固定的，那么这个收益的贴现值就必然等于组合当前的价值，由于股价已知，便可以得到相应期权价值。

13.3 股票期权 Delta 的含义是什么?

Delta 为期权价格变化同标的股票价格变化之间的比率。是卖出一份期权时，为了构造无风险组合而需要持有的标的股票数量。

13.4 股票的当前价格为 50 美元，已知在 6 个月后这一股票的价格将可能变为 45 美元或 55 美元，无风险利率为 10%（连续复利）。执行价格为 50 美元、6 个月期限的欧式看跌期权的价值是多少?

多 Δ 股票，多 1 份看跌，

$$55\Delta+0=45\Delta+5,\ \Rightarrow\Delta=0.5 \tag{2}$$

组合在将来价值为 27.5 美元，贴现后为 $27.5e^{-0.1\times 0.5}=26.16$，等于当前价值 $26.16=25+p$, 所以此看跌期权价格为 1.16 美元。

13.5 股票的当前价格为 100 美元，在今后每 6 个月内，股票价格可能会或上涨 10% 或下跌 10%, 无风险利率为每年 8%(连续复利)，执行价格为 100 美元、1 年期的欧式看涨期权的价格是多少?

当股价为 100 美元以下时，欧式看涨价值都为 0。股价最后只可能为 120、100 或 80 美元，我们只需要知道股价升为 120 美元的概率即可。

分两步，前六个月假设股价上升为 110 美元的概率为 p_1，那么由风险中性定价，$p_1\times 110+(1-p_1)\times 90=100\times e^{0.5\times 0.08}$，$p_1=0.704$；第二步，设由 110 美元升为 120 美元的概率为 p_2，$110\times p_2+(1-p_2)\times 100=120\times e^{0.04}$，$p_2=0.724$。所以期权在 1 年后价值的期望是 $(120-100)\times p_1p_2=10.19$, 贴现后为 $10.19e^{-0.08}=9.41$ 美元。

13.6 在练习题 13.5 的情形下，执行价格为 100 美元、1 年期的欧式看跌期权价格是多少？验证所得结果满足看跌-看涨平价关系式。

和上题一样，第一步，股价跌为 90 美元的概率为 $q_1 = (1-p_1) = 0.296$；第二步，股价由 90 美元跌为 80 美元的概率为 q_2, $80q_2 + 100(1-q_2) = 90e^{0.04}$，$q_2 = 0.316$。所以看跌期权在一年后的期望价值为 $20 \times q_1 q_2 = 1.87$，贴现值为 $1.87e^{-0.08} = 1.73$ 美元。

13.7 由波动率计算 u 和 d 的公式是什么？

对于一步二叉树，设股价为 S, 上升的概率为 p, 上升为 uS, 可能下降为 dS，那么收益的方差为：

$$S^2[(u-1)^2p + (1-p)(d-1)^2 - ((u-1)p - (d-1)(1-p))^2] \tag{3}$$

收益的方差需要等于 $S^2\sigma^2\Delta t$，而且 $p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$。

13.8 假设在期权期限内，股票价格变化服从两步二叉树。解释为什么用股票与期权构造的投资组合不可能在整个期权有效期内一直保持无风险状态。

股价变化后，无论是处于高股价还是低股价，组合的价值都和无风险定价不同，只是考虑处于两种状态的概率后，期望值和无风险定价的价值一样。

13.9 股票的当前价格为 50 美元，一只在 2 个月后股票价格将可能变为 53 美元或 48 美元，无风险利率为每年 10%（连续复利）。执行价格为 49 美元、期限为 2 个月的欧式看涨期权价值为多少？在讨论中采用无套利方法。

$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.568$, 看涨期权价格为 $c = p \times (53-49) \times e^{-rt} = 2.23$ 美元。

13.10 股票的当前价格为 80 美元，已知在 4 个月后股票价格将可能变为 75 美元或 85 美元，无风险利率为每年 5%（连续复利），执行价格为 80 美元、期限为 4 个月的欧式看跌期权价值为多少？在讨论中采用无套利方法。

$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.634$, 看跌期权价格应为 $p \times (80-75) \times e^{-rt} = 3.13$ 美元。

13.11 股票的当前价格为 40 美元，已知在 3 个月后股票价格将可能变为 45 美元或 35 美元，无风险利率为每年 8%（连续复利），计算执行价格为 40 美元、期限为 3 个月的欧式看跌期权价格。验证由无套利理论与风险中性原理给出的价格相等。

$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.581$, 看跌期权价格应为 $p \times (40-35) \times e^{-rt} = 2.85$ 美元。

13.12 某股票的当前价格为 50 美元，在今后 6 个月的每 3 个月时间内，股票价格都可能或上涨 6%，或下跌 5%，无风险利率为每年 5%（连续复利）。执行价格为 51 美元、6 个月期限的欧式看涨期权的价值为多少？

$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.569$, 该两步二叉树有 3 个可能结果，较低的 2 个股价看涨期权不会被执行。看涨期权最后收益的贴现为 $p^2(50u^2-51)e^{-0.05\times 0.5} = 1.635$ 美元。

13.13 考虑练习题 13.12 中的情形，执行价格为 51 美元，6 个月欧式看跌期权的价值为多少？验证看跌-看涨期权平价关系式的正确性。如果看跌期权为美式期权，在二叉树的某些节点上提前行使期权会是最优吗？

6 个月后看跌期权价值为 $2p(1-p)(51-50\times 1.06 \times 0.95) + (1-p)^2 \times (51 - 50 \times 0.95^2) = 1.41$ 美元，贴现后为 $1.41 \times e^{-0.05/2} = 1.375$ 美元。

平价关系为 $p + S_0 = c + Ke^{-rt}$，$1.375 + 50 \approx 1.635 + 51 \times e^{-0.025} = 1.635 + 49.74$ 数值带入后近似满足。

如果看跌期权为美式，第一个三个月后，如果股价降低为 47.5 美元，就可以行使。

13.14 股票的当前价格为 25 美元，已知在 2 个月末股票价格将可能变为 23 美元或 27 美元，无风险利率为每年 10%（连续复利）。假定 S_T 为股票在两个月末的价格，股票上一种衍生产品在 2 个月后的收益为 S_T^2，此衍生产品的价值是多少?

股价上涨的概率为 $p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = \frac{e^{0.1\times\frac{1}{6}}-0.92}{1.08-0.92} = 0.605$, 此衍生品的价值为将来期望价值的贴现值 $(0.605 \times 27^2 + 0.295 \times 23^2) \times e^{-0.1\frac{1}{6}} = 587.23$ 美元。

13.15 计算用于对外汇期权定价的二叉树中的 u、d 和 p，二叉树的步长为 1 个月，本国利率为 5%，国外利率为 8%，汇率的波动率为每年 12%。

等价于无风险利率为-0.03 。$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.03525, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.9660, p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.455$ 。

13.16 一个无股息股票的价格为 78 美元，波动率为 30%，所有期限的无风险利率均为每年 3%（连续复利）。采用 2 个月的步长，计算参数 u、d 和 p。采用两步二叉树，即步长为 2 个月、期限为 4 个月欧式看涨期权的价值为多少? 期权的执行价格为 80 美元。假定一个交易员卖出了 1000 份期权（10 份合约），交易员在交易开始时，应该持有怎样的股票头寸来对冲交易风险。

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.13, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.885, p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.490$ 。
执行价格为 80 美元的看涨期权价值为 $p^2(78 \times u^2 - 80) \times e^{-0.03/3} = 4.67$ 美元。
$\Delta = \frac{78\times1.13-80}{78\times1.13-78\times0.885} = 0.436$, 即卖出 1000 份看涨期权需要持有 436 份股票来对冲。

13.17 一个股指当前取值为 1500，波动率为 18%，所有期限的无风险利率均为每年 4%（连续复利），股指的股息收益率为 2.5%。采用两步二叉树，即步长为 6 个月，期限为 12 个月美式看跌期权的价值为多少? 期权的执行价格为 1480 。

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.136, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.880, p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.478$ 。
看跌期权价值为 $(1-p)^2(1480 - 1500 \times d^2) \times e^{-0.04} = 83.01$ 美元。

13.18 某商品期货的价格为 90 美元，利用三步二叉树来计算期权价值（a）9 个月期限、执行价格为 93 美元的美式看涨期权，(b) 9 个月期限、执行价格为 93 美元的美式看跌期权。波动率为 28%，无风险利率（所有期限）为 3%（连续复利）。

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.15, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.869, p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.492$ 。
如图推算美式看涨看跌期权价格。

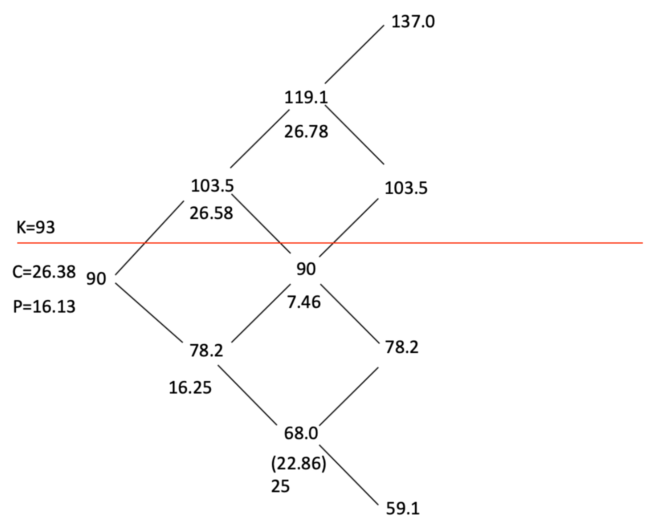

Fig 13.18

(a) 执行价格 93 美元的美式看涨，价格为 26.18 美元。

（b）执行价格为 93 美元的美式看跌，价格为 16.13 美元。

作业题

13.19 一个无股息的生物科技股票的当前价格为 140 美元，波动率为 25%，无风险利率为 4%, 对于 3 个月步长:

(a) **价格上升的百分比为多少?**

(b) **价格下跌的百分比为多少?**

(c) **在风险中性世界里价格上升的概率为多少?**

(d) **在风险中性世界里价格下跌的概率为多少?**

利用两步二叉树，即采用 3 个月步长来对一个 6 个月期限的欧式看涨和看跌期权来定价，这里的期权执行价格均为 150 美元。

(a) $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.133$

(b) $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.8825$

(c) $p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.5089$

(d) 1-p = 0.4911

欧式看涨期权价格为 $p^2(140 \times u^2 - 150) \times e^{-0.4\times 0.5} = 7.56$ 美元。欧式看跌期权价格为 $7.56 + 150 \times e^{-0.02} - 140 = 14.58$ 美元。

13.20 在作业题 13.19 中，假定交易员卖出了 10000 份欧式看涨期权，而且两步二叉树可以用来描述股票价格变化，为了对冲 6 个月期限的欧式看涨期权，在第 1 个 3 个月的开始时刻和第 2 个 3 个月的开始时刻，交易员要持有多少股票? 对于第 2 个 3 个月区间，考虑在第 1 个 3 个月区间价格上升和价格下降时两种情形。

对冲一份期权相应需要需要股票数量 Δ 为下一步期权价格变化和股票价格变化之比。

对于第一步，$\Delta = \frac{140\times u-150-0}{140\times u-140\times d} = 0.2462$, 所以对冲卖出 10000 份看涨期权，需要持有 2462 只股票。

对于第二步，如果股价为较高值，$\Delta_u = \frac{140u^2-150}{140u^2-140} = 0.7485$，需要持有 7485 只股票。如果股价为较低值，欧式看涨之后也不会被执行，不需要持有股票对冲。

13.21 股票的当前价格为 50 美元，在 6 个月后股票价格将可能变为 60 美元或 42 美元，无风险利率为每年 12% (连续复利)，计算执行价格为 48 美元、期限为 6 个月的欧式看涨期权价格。验证无套利方法与风险中性定价方法所得结果是一致的。

$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.616$，欧式看涨价格为 $p(60-48) \times e^{-0.12\times 0.5} = 6.96$ 美元。

13.22 股票的价格为 40 美元，在今后 6 个月中每一个 3 个月的时间内，股票价格或上涨 10% 或下跌 10%，无风险利率为每年 12%（连续复利)。

(a) **执行价格为 42 美元，6 个月期限的欧式看跌期权价值是多少?**

(b) **执行价格为 42 美元，6 个月期限的美式看跌期权价值是多少?**

风险中性定价，$p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.6523$ 。

（a）欧式看跌期权价格为 2.12 美元，（b）美式看跌期权价格为 2.54 美元。

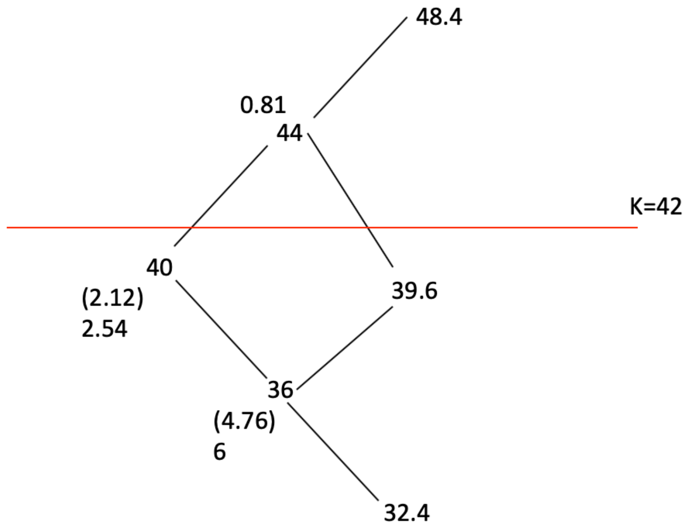

Fig 13.22

13.23 利用"试错法"，估计作业题 13.17 中的期权在什么样的执行价格下应该被马上行使期权。

对于 $u=\frac{1}{d}$ 且实值价格大于 0 的美式看跌期权，当股价一步之后下跌，就应该执行期权。所以两步美式看跌期权直接执行的条件为:

$$K-1500=(K-1500)(1-p)pa^2+(K-1500d)(1-p)a,\ a=e^{-r\Delta t} \tag{4}$$

可得 $K=1870$ 美元。

13.24 股票当前价格为 30 美元，在今后 4 个月中的每 2 个月内，股票价格可能或上涨 8%，或下跌 10%，无风险利率为 5%。采用两步二叉树来计算收益为 $[\max(30-S_T,0)]^2$ 的衍生产品的当前价值，其中 S_T 为 4 个月时股票的价格。如果衍生产品为美式，这一期权是否应该被提前行使?

使用风险中性定价，$p=\frac{e^{rt}-d}{u-d}=0.602$ 。
该期权价值为 $(2\times(30-30\times1.08\times0.9)^2\times p(1-p)+(1-p)^2(30-0.9^2\times30)^2)e^{-0.05\frac{1}{3}}=5.41$ 美元。
如果为美式，可以检验第一步后，两种状态都不应提前行使。

13.25 略。

13.26 略。

13.27 13.2 节的脚注表示，对于图 13-1 中的例子，为了使期权收益在现实世界里的期望贴现后与期权价格吻合，现实世界里贴现率应取为 42.6%。证明如果期权是看跌期权，这时在现实世界里的贴现率应取为-52.5%。解释为什么这两个在现实世界里的贴现率会如此不同。

脚注那里计算时，期权的价格的是用无风险利率作为股票收益率计算出来的，然后换了个股票的收益率，算出来新的执行时期权价值，想再找一个贴现因子，贴现到之前无风险利率下的期权最初价格，贴现率自然会比较不合理。

13.28 股指的当前取值为 990，无风险利率为 5%，股息收益率为 2%，利用 3 步二叉树来计算期限为 18 个月的美式看跌期权的价格，期权的执行价格为 1000，波动率为每年 20%。通过提前行使期权，期权持有者将如何获利? 获利在什么时刻?

无风险定价时，$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=1.152, d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}=0.868, p=\frac{e^{rt}-d}{u-d}=0.518$
且一步贴现因子为, $a=e^{-0.05\times0.5}=0.9753$。
如图，美式看跌期权价格为 87.5 美元，当第二步股价跌为 746.1 美元时应当直接执行。

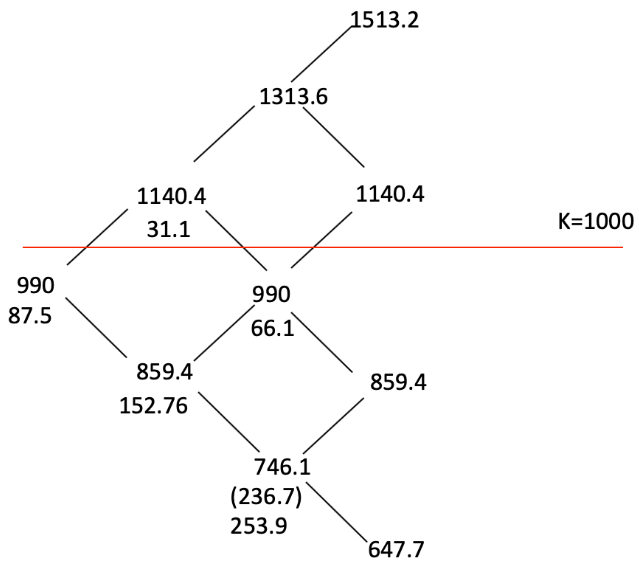

Fig 13.28

13.29 **利用 3 步二叉树来计算一个 9 个月期限的美式看涨期权的价格，该期权是关于买入 100 万单位的外币，当前汇率为 0.79，执行价格为 0.80（汇率的表达为每一个单位外币所对应的美元数量），汇率的波动率为每年 12%，国内和国外的无风险利率分别为 2% 和 5%，在交易开始时，为了对冲风险，交易员应该持有多少外币？**

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.062, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.942, p = \frac{e^{rt}-d}{u-d} = 0.361$，
一步的贴现因子为，$a = e^{-0.02\times0.25} = 0.995$ 。

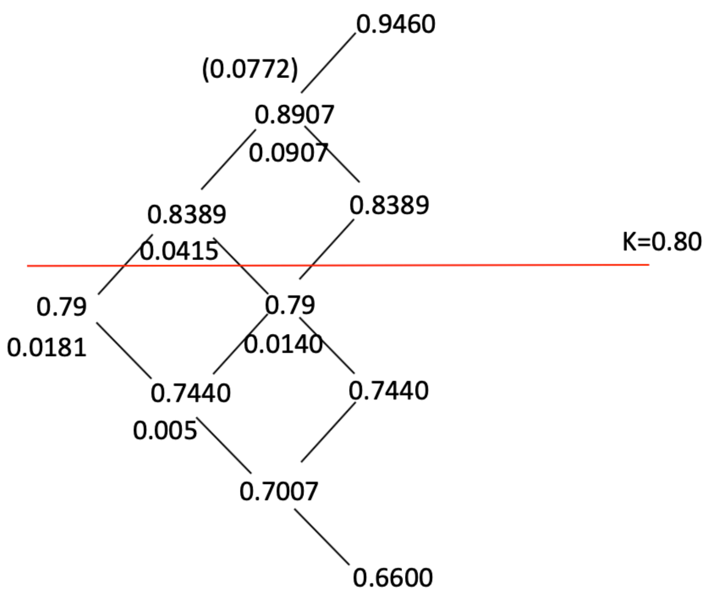

Fig 13.29

由图，美式看涨价格为 0.0181 美元。
$\Delta = \frac{0.0415-0.005}{0.8389-0.7440} = 0.432$, 所以需要持有 43.2 万澳元来对冲。