第二十九章 利率衍生产品：标准市场模型

练习题

29.1 一家企业签订了一项上限合约，合约将 3 个月期的 LIBOR 利率上限定为每年 10%，本金为 2000 万美元。在重置日 3 个月的 LIBOR 利率为每年 12%。根据利率上限协议，支付的数目是多少？何时付款？

$(0.12-0.1)\times 2\times 10^7\times 0.25=10^5$，在 3 个月后支付。

29.2 解释为什么一个互换期权可以被看做是一个债券期权。

利率互换可以看作将定息债券与浮息债券想交换的合约。浮息债券的价值总是等于其面值。所以可以将互换期权看成是由定息债券与面值相交换的期权，即债券期权。

29.3 采用布莱克模型来对一个期限为 1 年、标的资产为 10 年期债券的欧式看跌期权定价。假定债券当前价格为 125 美元，执行价格为 110 美元，1 年期利率为每年 10%，债券远期价格的波动率为每年 8%，期权期限内所支付票息的贴现值为 10 美元。

$$
\begin{aligned}
p &= P(0,T)[KN(-d_2)-F_BN(-d_1)] \\
d_1 &= \frac{\ln\frac{F_0}{K}+\sigma_B^2\frac{T}{2}}{\sigma_B\sqrt{T}}, \quad d_2=d_1-\sigma_B\sqrt{T} \\
F_B &= \frac{B_0-I}{P(0,T)}
\end{aligned} \tag{1}
$$

代入相关数值，可得 $p=0.1204$。

29.4 仔细解释你如何利用（a）即期波动率，（b）单一波动率来对一个 5 年期的上限定价。

可以将上限看作 n 个利率看涨期权，每个期权称为利率上限单元。对于每一个利率上限单元的定价，可以采用同一波动率即单一波动率，也可以选择采用单元对于即期波动率。

29.5 计算以下期权的价格：在 15 个月时将 3 个月期的利率上限定为 13%（按季度复利），本金为 1000 美元。对应这段时间的远期利率为 12%（按季度复利），18 个月期限的无风险利率为每年 11.5%（连续复利），远期利率的波动率为每年 12%。

该利率上限单元价值为 $L\delta_k\max(R_k-R_K,0)$，标准市场模型下

$$
\begin{aligned}
& cap = L\delta_kP(0,t_{k+1})[F_kN(d_1)-R_KN(d_2)] \\
& d_1 = \frac{\ln\frac{F_k}{R_K}+\frac{\sigma_k^2t_k}{2}}{\sigma_k\sqrt{t_k}}, \quad d_2=d_1-\sigma_k\sqrt{t_k} \\
& L=1000,\ \delta_k=0.25,\ P(0,t_{k+1})=e^{-1.5\times 0.115},\ F_k=0.12,\ R_K=0.13,\ \sigma_k=0.12,\ t_k=1.25 \\
\Rightarrow\quad & d_1=-0.530,\ d_2=-0.664 \\
& cap=0.597
\end{aligned} \tag{2}
$$

29.6 某家银行采用布莱克模型来对欧式债券期权定价。假定银行采用了 5 年期限、标的资产为 10 年期的债券期权隐含波动率来对这个债券上 9 年期的期权定价。你所得到的价格太高还是太低？解释你的答案。

债券期权执行时间为 9 年后的期权的隐含波动率应低于 5 年期限的期权的隐含波动率。这是由于

$$\sigma_B = \frac{\text{在期权到期时债券对书的标准差}}{\sqrt{\text{期权期限}}} \tag{3}$$

所以价格会被高估。

29.7 采用布莱克模型来计算具有 4 年期限的欧式看涨期权价格，标的资产是从现在起 5 年后到期的债券。5 年期债券的现金价格为 105 美元，与 5 年期债券具有同样票息率的 4 年期债券的现金价格 102 美元，期权执行价格为 100 美元，4 年期无风险利率为每年 10%（连续复利），4 年后债券价格的波动率为每年 2%。

考虑 F_B 为第 4 年开始的 5 年期债券远期的价值。4 年期债券价值贴现为 102，除去 $100e^{-4\times0.1}$ 面值贴现，34.968 为前 4 年券息贴现值。则 5 年期债券 4 年后开始远期价值贴现为 $105 - 34.968 = 70.032$。

$$F_B = \frac{70.032}{e^{-4\times0.1}} = 104.475, \quad \sigma_B = \frac{0.02}{\sqrt{4}} = 0.01 \tag{4}$$

代入债券期权价格公式，得价值为 3.007 。

29.8 看跌期权的期限为 5 年，标的资产为在 10 年后到期的债券，债券收益率波动率为 22%，如何对这一期权进行定价？假定在基于今天的利率下，债券在期权满期时的久期为 4.2 年，债券的远期收益率为 7%。

$$\text{value} = P(0,T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)] \tag{5}$$

$$\sigma_B = Dy_0\sigma_y \tag{6}$$

29.9 如果利率上限与利率下限执行价格相同，什么样的金融产品等价于一个 5 年期零费用利率双限？这里的共同执行价格等于什么？

利率双限是一个利率上限多头寸和一个利率下限空头寸，当双限执行价格相同时，利率被锁定。所以等价于一个固息和浮息的利率互换。

29.10 推导关于欧式债券期权的看跌-看涨期权平价关系式。

$$c = P(0,T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)] \tag{7}$$

$$p = P(0,T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)] \tag{8}$$

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)}$$

$$\Rightarrow \quad c + KP(0,T) = p + B_0 - I \tag{9}$$

29.11 推导关于欧式互换期权的看跌-看涨期权平价关系式。

$$c = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \tag{10}$$

$$p = \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i)[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)] \tag{11}$$

$$s_0 = \frac{P(0,T_0) - P(0,T_{mn})}{\sum_{i=0}^{mn-1} \frac{1}{m} P(0,T_{i+1})}$$

$$c + s_K \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i) = p + s_0 \sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0,T_i) \tag{12}$$

29.12 说明当上限隐含的布莱克（单一）波动率不等于利率下限隐含的波动率时，会有套利机会。在由市场经纪人给出的表 29-1 中的报价里存在套利机会吗?

上限价值 − 下限价值 = 利率互换价值，如果上下限执行利率相同，但对应单一波动率不相等，则等价于利率互换价值被高估或者低估，所以会存在套利空间。

表 29-1 中不存在套利机会，因为上限卖出价对应波动率都大于同期限下限买入价对应波动率，且上限买入价对应波动率都小于同期限下限买入价对应波动率。

29.13 当债券价格服从对数正态时，债券的收益率会取负值吗? 解释你的答案。

不知道。

29.14 以下欧式互换期权的价值为多少? 这个期权给持有人在 4 年后有权进入一个 3 年期的利率互换，在互换中支付的固定利率为 5%，同时收入 LIBOR，互换本金为 1000 万美元，互换每年付款一次。假设收益率曲线呈水平状，为每年 5% (连续复利)，互换率的波动率为 20%。将你的答案同 DerivaGem 给出的结果进行比较。再假设所有互换率均为 5%，所有 OIS 利率均为 4.7%。利用 DerivaGem 计算 LIBOR 零息曲线与互换期权的价值。

$$
\begin{aligned}
&c = \sum_{i=1}^{3} LP(0,T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \\
&T = 4,\ L = 10^7,\ s_K = 0.05,\ \sigma = 0.2,\ T_i = i \\
&P(0,T_i) = e^{-T_i \times 0.05}, \quad s_0 = \frac{P(0,4) - P(0,7)}{P(0,5) + P(0,6) + P(0,7)} \\
&c = 193022
\end{aligned} \tag{13}
$$

29.15 假设一个零息债券的收益率 R 服从以下过程

$$
dR = \mu dt + \sigma dz \tag{14}
$$

其中 μ 和 σ 均为 R 和 t 的函数，dz 为维纳过程。利用伊藤引理证明在接近到期日时，零息债券价格的波动率会下降到 0 。

$$
P(t,T) = e^{-\int_t^T R(t)dt} \tag{15}
$$

$$
\text{for} \quad T - t \ll 1, \quad P(t,T) \approx e^{-(T-t)R(t)}
$$

$$
\begin{aligned}
dP(t,T) &\approx P(t,T)R(t)dt - (T-t)P(t,T)dR + \frac{1}{2}(T-t)^2 P(t,T)dR^2 \\
&= (\text{tems})dt - (T-t)P(t,T)\sigma dz
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\sigma_P = (T-t)\sigma \quad \to 0, \quad as \quad t \to T \tag{17}
$$

29.16 通过手算来验证例 29-2 中的期权价格。

$$r = y = 0.05, \quad K = 115, \quad T = 2.25, \quad \sigma_B = Dy_0\sigma_y$$

$$P(0,T) = e^{-2.25\times y}$$

$$\text{现金价计算时 } B_T = \sum_{i=1}^{16} 4e^{-y(0.25+0.5(i-1))} + 100e^{-y\times 7.75} = 120.62,\ K = 115 \tag{18}$$

$$\text{报价计算时 } B_T = 120.62,\ K' = 117 \tag{19}$$

$$F_B = B_T, \quad \text{因上面计算的就是远期价格}$$

$$put(\text{按现金价}) = 1.779 \tag{20}$$

$$put(\text{按报价}) = 2.402 \tag{21}$$

29.17 假定 1 年、2 年、3 年、4 年、5 年期的 LIBOR 对定息每半年支付的互换率分别为 6%、6.4%、6.7%、6.9% 和 7%。面值为 100 美元、每半年支付一次、上限利率为 8% 的 5 年期限利率上限价格为 3 美元。利用 DerivaGem 软件来确定

(a) **以 LIBOR 贴现时，5 年期上限与下限的单一波动率。**

(b) **以 LIBOR 贴现时，上限利率为 8% 的 5 年期零费用利率双限中的下限利率。**

(c) **以 OIS 贴现时，(a）和（b）的答案又是什么？假设 OIS 互换利率比 LIBOR 互换利率低 100 个基点。**

(这里计算没注意连续复利和分段复利的问题，**不想改了**。互换的利率是分段支付的，每段固定和浮动利息都是分段计算的，但贴现是连续贴现的。)

由互换利率计算零息利率曲线和远期利率，

R(0, 1) = 0.06, R(1, 2) = 0.0683, R(2, 3) = 0.0737, R(3, 4) = 0.0760, R(4, 5) = 0.0748

R(0, 1) = 0.05, R(0, 2) = 0.0641, R(0, 3) = 0.0673, R(0, 4) = 0.0695, R(0, 5) = 0.0705

(a) 迭代计算得 $\sigma = 0.286$。

(b) 上下限对应波动率相同，可以迭代计算得下限的 $R_K = 0.0663$。

(c) 可以计算出 OIS 零息利率曲线，$R'(0,1) = 0.05, R'(0,2) = 0.0541, R(0,3) = 0.0573, R(0,4) = 0.0594, R(0,5) = 0.0605$。替换贴现因子后，类似（a）（b）迭代计算得 $\sigma' = 0.276,\ R'_K = 0.0664$。

29.18 证明 $V_1 + f = V_2$，其中 V_1 为介于时间 T_1 与 T_2 之间付出固定利率 s_K 并同时收入 LIBOR 的互换期权的价值，f 为介于 T_1 与 T_2 之间收入固定利率 s_K 并同时付出 LIBOR 的远期利率互换的价值，V_2 为介于 T_1 与 T_2 之间收入固定利率 s_K 的互换期权的价格。并由以上公式来证明当 s_K 等于当前远期互换利率时，$V_1 = V_2$。

考虑组合（A）可以进入付出固定利率 s_K 的互换期权，和收入固定利率 s_K 付出 LIBOR 的远期互换；(B) 可以进入收入固定利率 s_K 的互换期权。当两期权执行日期相同时，易知无论在期权到期时 s_0（使互换即期价值为 0 的固定利率）大于或者小于等于 s_K，组合（A）和组合（B）的价值都是相等的。所以当前两个组合的价值也应该相等。

当 s_K 等于当前远期互换价值时，f 等于 0，所以 $V_1 = V_2$。

29.19 假定零息利率如练习题 29.17 所示。利用 DerivaGem 来决定以下期权的价格：期权持有人在 1 年后有权进入一个 5 年期的利率互换，在互换中支付的固定利率为 6%，同时收入 LIBOR，互换本金为 1 亿美元，互换付款日为每半年一次，互换利率的波动率为 21%。用 LIBOR 贴现。

$$
\begin{aligned}
&price = \sum_{i=1}^{8} LP(0,1+0.5i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \\
&d_1 = \frac{\ln\frac{s_0}{s_K} + \sigma^2 T \frac{1}{2}}{\sigma\sqrt{T}},\ \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \\
&L = 10^8,\ \ s_K = 0.06,\ \ T = 1,\ \ \sigma = 0.21 \\
&s_0 = \frac{P(0,1) - P(0,5)}{\sum_{i=1}^{8} 0.5 \times P(0,1+0.5\times i)} \\
&price = 42843
\end{aligned} \tag{22}
$$

29.20 描述你将如何（a）由上限的即期波动率来计算上限的单一波动率，和（b）由上限的单一波动率来计算上限的即期波动率。

类似债券零息利率与远期利率之间的计算关系。

作业题

29.21 考虑一个 8 个月期、标的债券为在目前仍有 14.25 年期期限的看跌期权，债券在目前的现金价格为 910 美元，执行价格为 900 美元，债券价格波动率为每年 10%，在 3 个月后债券将支付票息 35 美元，1 年内所有期限的无风险利率均为每年 8%。采用布莱克模型为这一期权定价。在定价中考虑以下两种情形：（a）执行价格为债券现金价格；（b）执行价格为债券报价。

(a)

$$
\begin{aligned}
&F_B = \frac{910 - 35e^{-0.25\times 0.08}}{e^{-\frac{2}{3}\times 0.08}} = 923.7,\ \ K = 900 \\
&d_1 = \frac{\ln\frac{F_B}{K} + \sigma_B^2 T \frac{1}{2}}{\sigma_B\sqrt{T}},\ \ d_2 = d_1 - \sigma_B\sqrt{T} \\
&price = e^{\frac{2}{3}\times 0.08}[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)] = 18.24
\end{aligned} \tag{23}
$$

(b) 这里假设债券券息为每半年支付 35，计算期权价格时执行价格需要修正为 $K' = K + \frac{5}{6}\times 35$，可以同上计算出看跌期权价格为 29.15 。

29.22 计算一个 9 个月期、标的变量为 90 天 LIBOR 的利率上限价格，其中本金为 1000 美元。采用布莱克模型及以下信息进行计算：

(a) **9 个月期的欧洲美元期货价格为 92（忽略期货与远期利率的差别）；**

(b) **9 个月期的欧洲美元期权隐含波动率为每年 15%；**

(c) **当前连续复利的 12 个月期限的利率为每年 7.5%；**

(d) **上限利率为每年 8%（假定计量天数惯例为"实际天数/360"）。**

这里 $R_K = 0.08,\ F_k = 0.08,\ \sigma = 0.15,\ P(0,1) = e^{-0.075}$, 可以由上限价格公式计算出其价格为 0.961 。

29.23 假定 LIBOR 收益率曲线为水平 8%（按年复利）。某个互换期权给期权持有者以下权利：在 4 年后可以进入一个 5 年期的互换，在互换中收入 7.6% 固定利率，付款为每年一次，互换利率的年波动率为 25%，本金为 100 万美元。采用布莱克模型来对以上期权（按 LIBOR 贴现）定价。将你的结果与 DerivaGem 给出的结果比较。

$$
\begin{aligned}
&price = LA(s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)) \\
&L = 10^6,\ s_K = 0.076,\ s_0 = e^{0.08} - 1 = 0.0833,\ \sigma = 0.25 \\
&A = \sum_{i=5}^{9} e^{-0.08\times i} = 2.874 \\
&price = 35191
\end{aligned} \tag{24}
$$

29.24 利用 DerivaGem 软件对以下 5 年期的双限定价：双限保证 LIBOR（每季度确定一次利率）的最大及最小利率分别为 7% 及 5%，LIBOR 零息曲线（连续复利）为水平 6%，在定价中采用单一波动率 20%，本金数量为 100 美元。以 OIS 贴现。

用 LIBOR 贴现。

双限价格为多头一个上限和空头一个下限的价格，可以计算得 0.493 。

29.25 采用 DerivaGem 软件对以下欧式互换期权定价：期权持有者有权在 2 年后进入一个 5 年期的互换。在互换中付出 6% 固定利率，同时收入浮动利率，互换中的现金流为每半年交换一次。1 年、2 年、5 年和 10 年期的 LIBOR 对定息互换率（每半年支付一次）分别为 5%、6%、6.5% 和 7%。假定本金为 100 美元，波动率为每年 15%。

(a) **利用 LIBOR 贴现。**

(b) **利用 OIS 贴现，假设 OIS 互换率比 LIBOR 互换率低 80 个基点。**

(c) **错误的做法对由 LIBOR 所计算的互换率以 OIS 利率贴现。这样做所得结果的误差是多少?**

计算不同时间段零息利率和远期利率，注意连续复利和分段复利，然后套公式。略。