第十五章 布莱克-斯科尔斯-默顿模型

练习题

15.1 布莱克-斯科尔斯-默顿股票期权定价模型中对于 1 年后股票价格概率分布的假设是什么？对于 1 年内连续复利收益率分布的假设是什么？

股票价格在将来一时刻为对数正态分布。连续复利收益率服从正态分布。

15.2 股票价格的波动率为每年 30%，在一个交易日内价格百分比变化的标准差为多少？

$(\sigma^2\Delta t)^{0.5} = (0.09 \times \frac{1}{252})^{0.5} = 0.019$ 。

15.3 解释风险中性定价原理。

任何投资组合在任何时刻的收益率都等于无风险利率。对于衍生产品，可以根据标的资产的价格变化计算其未来期望价值，用无风险利率贴现后即为当前衍生品价值。

15.4 计算一个 3 个月期的无股息股票欧式看跌期权的价格，这里期权执行价格为 50 美元，股票当前价格为 50 美元，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 30%。

由

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \tag{1}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{2}$$

将相应参数代入，得 $p = 2.376$ 美元。

15.5 如果预计股票在两个月后将支付股息 1.5 美元，练习题 15.4 中的结果会如何变化？

将当前股价减去股息贴现，$p = 3.03$ 美元。

15.6 什么是隐含波动率？如何计算？

由当前期权价格和有关参数，倒推出来的波动率。可以迭代求解。

15.7 股票的当前价格为 40 美元，假定其收益率期望为 15%，波动率为 25%。在两年内的股票收益率（连续复利）的概率分布是什么？

收益率为 x， $x \backsim \phi(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}) = \phi(0.11875, 0.03125)$ 。

15.8 某股票价格服从几何布朗运动，其中收益率期望为 16%，波动率为 35%，股票的当前价格为 38 美元。

(a) 一个该股票上具有执行价格为 40 美元，期限为 6 个月的欧式看涨期权被行使的概率为多少？

(b) 一个该股票上具有同样执行价格及期限的欧式看跌期权被行使的概率为多少？

(a) $N(d_2)$ 为看涨期权被行使的概率，代入参数得 0.4969 。

(b) $1 - N(d_2) = 0.5031$ 。

15.9 采用本章中的记号，证明 S_T 的 95% 置信区间介于

$$S_0e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T-1.96\sigma\sqrt{T}}\text{与 } S_0e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+1.96\sigma\sqrt{T}} \tag{3}$$

之间。

已知

$$\ln S_T \backsim \phi(\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T,\sigma^2T) \tag{4}$$

所以 $\ln S_T$ 的 95% 置信区间为 $[\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T-1.96\sigma\sqrt{T},\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+1.96\sigma\sqrt{T}]$。等价可知 S_T 的 95% 置信区间为 $[S_0e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T-1.96\sigma\sqrt{T}}$，$S_0e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+1.96\sigma\sqrt{T}}]$。

15.10 一个组合经理声称自己在过去 10 年中平均每年的收益率为 20%，这种说法在什么方面会引起误解?

他可能直接时对每年的收益率取算术平均值，会比实际每年复利后的有效收益率高。

15.11 假定一个无股息股票的收益率期望为 μ，波动率为 σ。一个具有创新意识的金融机构刚刚宣布它将交易在时刻 T 收益为 $\ln S_T$ 的衍生产品，其中 S_T 为股票在 T 时刻的价格。

(a) **采用风险中性定价理论来将衍生产品价格表达为股票价格 S 与时间 t 的函数。**

(b) **验证你得出的价格满足微分方程式（15-16）。**

(a) $V=e^{-r(T-t)}E_T[\ln S_T]=e^{-r(T-t)}(\ln S_t+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t))$ 。

(b)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2S^2=rV \tag{5}$$

$$rV-\mu e^{-r(T-t)}+\frac{\sigma^2}{2}e^{-r(T-t)}+\mu e^{-r(T-t)}-\frac{\sigma^2}{2}e^{-r(T-t)}=rV \tag{6}$$

$$rV=rV \tag{7}$$

15.12 考虑一个在时间 T 提供收益为 S_T^n 的衍生产品，其中 S_T 为股票在 T 时刻的价格。当股票价格服从几何布朗运动式，可以证明该衍生产品在时间 $t(t\le T)$ 的价格具有以下形式

$$h(t,T)S^n \tag{8}$$

其中 S 为股票在时间 t 的价格，h 为 t 和 T 的函数。

(a) **将以上形式的解代入布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程，推导 $h(t,T)$ 满足的常微分方程。**

(b) **$h(t,T)$ 所满足的边界条件是什么?**

(c) **证明**

$$h(t,T)=e^{[0.5\sigma^2n(n-1)+r(n-1)](T-t)} \tag{9}$$

其中 r 为无风险利率，σ 为股票价格的波动率。

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2S^2=rf \tag{10}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}S^n+rhS^n+\frac{n(n-1)}{2}\sigma^2hS^n=rf \tag{11}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+(r(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}\sigma^2)h=0 \tag{12}$$

(b) $h(0,T)S_0^n = e^{-rT}E_T[S_T^n]$, $h(T,T)=1$

$$\begin{aligned}
E_T[S_T^n] &= \int_0^\infty S_T^n f(S_T)dS_T && (13)\\
&= \int_0^\infty S_T^n g(\ln S_T)d\ln S_T && (14)\\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{nx}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}e^{-\frac{(x-\mu')^2}{2\sigma^2 T}}dx,\ \mu' = \ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T && (15)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T}(x-\mu'-\sigma^2 Tn)^2}e^{\frac{1}{2\sigma^2 T}(2\mu'\sigma^2 Tn+\sigma^4T^2n^2)}dx && (16)\\
&= e^{\frac{1}{2\sigma^2 T}(2\mu'\sigma^2 Tn+\sigma^4T^2n^2)}dx && (17)\\
&= e^{n\ln S_0 + n(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\frac{1}{2}\sigma^2Tn^2} && (18)\\
&= S_0^n e^{\frac{1}{2}\sigma^2Tn(n-1)+n\mu T} && (19)
\end{aligned}$$

此时，考虑风险中性定价时所有资产的收益率都为 r, $E[S_T]=S_0e^{\mu T}$，$r=\mu$，代入上式，可得

$$h(0,T) = e^{T(\frac{1}{2}\sigma^2 n(n-1)+(n-1)r)} \tag{20}$$

(c) 类似 $h(0,T)$，我们可以直接计算得 $h(t,T)=e^{(T-t)(\frac{1}{2}\sigma^2n(n-1)+r(n-1))}$。

15.13 计算以下无股息股票上欧式看涨期权的价格，其中股票价格为 52 美元，执行价格为 50 美元，无风险利率为每年 12%，波动率为每年 30%，期限为 3 个月。

将数据代入（15-20，15-21）式，可得 $c=5.057$ 美元。

15.14 计算以下无股息股票上欧式看跌期权的价格，其中股票价格为 69 美元，执行价格为 70 美元，无风险利率为每年 5%，波动率为每年 35%，期限为 6 个月。

将数据代入（15-20，15-21）式，可得 $p=6.96$ 美元。

15.15 略

15.16 一个无股息股票上看涨期权的市场价格为 2.5 美元，股票价格为 15 美元，执行价格为 13 美元，期限为 3 个月，无风险利率为每年 5%，隐含波动率为多少?

可迭代得 $\sigma=39.65\%$。

15.17 采用本章中的记号

(a) **$N'(x)$ 等于什么?**

(b) **证明 $SN'(d_1)=Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$，其中 S 为股票在时间 t 的价格，以及**

$$d_1 = \frac{\ln(S/K)+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2 = \frac{\ln(S/K)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{21}$$

(c) **计算 $\frac{\partial d_1}{\partial S}$和$\frac{\partial d_2}{\partial S}$。**

(d) **证明当 $c=S_0N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ 时, 以下方程成立:**

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \tag{22}$$

其中 c 为无股息股票上欧式看涨期权的价格。

(e) **证明 $\frac{\partial c}{\partial S}=N(d_1)$。**

(f) **证明 c 满足布莱克-斯科尔斯-默顿微分方程。**

(g) **证明 c 满足欧式看涨期权的边界条件，即 $t \to T$时, $c = \max(S-K, 0)$ 。**

(a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

(b)

$$SN'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) \tag{23}$$

$$\frac{S}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} = \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \tag{24}$$

$$e^{\ln\frac{S}{K}+r(T-t)} = e^{-\frac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)} \tag{25}$$

把 d_1, d_2 带入后可知等式成立。

(c)

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}},\ \ \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} \tag{26}$$

(d)

$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{27}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = S_0N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t} - Ke^{-r(T-t)}rN(d_2) \tag{28}$$

$$= -Ke^{-r(T-t)}rN(d_2) - S_0N'(d_1)(\frac{\partial d_2}{\partial t} - \frac{\partial d_1}{\partial t}) \tag{29}$$

$$= -Ke^{-r(T-t)}rN(d_2) - S_0N'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \tag{30}$$

(e)

$$c = S_0N(d_1) - KN(d_2),\ \ as\ t \to T \tag{31}$$

$$if\ \ S_0 > K,\ \ d_1, d_2\ \to +\infty,\ \ else\ \ -\infty \tag{32}$$

$$c = \max(S_0 - K, 0) \tag{33}$$

15.18 **证明有布莱克-斯科尔斯-默顿给出的期权公式满足看跌-看涨期权平价关系式。**

我们直接把欧式看涨和看跌期权的解直接代入看跌-看涨平价关系来验证，

$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),\ \ p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \tag{34}$$

$$p + S_0 = c + Ke^{-rT} \tag{35}$$

$$\Rightarrow\ Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0(N(-d_1) - 1) = S_0N(d_1) + Ke^{-rT}(1 - N(d_2) \tag{36}$$

$$Ke^{-rT}(N(d_2) + N(-d_2) - 1) = S_0(N(d_1) + N(-d_1) - 1) \tag{37}$$

$$0 = 0,\ \text{since N(x)} + \text{N}(-\text{x}) = 1 \tag{38}$$

15.19 **略**

15.20 **仔细解释为什么即使一个股票预期只发放一次股息时，布莱克方法只是对支付股息股票上美式期权的一个近似。由布莱克近似法得出的估计值会高估还是会低估期权价格？解释你的答案。**

布莱克方法是利用理想情况下的最优执行方式对美式期权估价，把期权的可能执行时间固定在发股息前或到期日。这种估价方式直接略去了美式期权的执行时间的灵活性，得出的价格只可能小于等于美式期权的价格。

15.21 **考虑关于某股票上的美式看涨期权，股票价格为 50 美元，期权期限为 15 个月，无风险利率为每年 8%，执行价格为 55 美元，波动率为 25%。股票在 4 个月与 10 个月时预计各有 1.5 美元的股息，证明在两个除息日行使期权不会是最佳选择，并计算期权价格。**

根据式（15.24），这里 $K(1-e^{-r(T-t_1)}) = 3.89 > D_1 = 1.5$ 和 $K(1-e^{-r(T-t_2)}) = 1.80 > D_2 = 1.5$。所以在两次除息日之前都不是最佳执行时间。这种情况下美式期权价格变为和欧式期权一样。所以利用欧式期权价格计算公式可以得到 $C = 5.66$ 美元。

15.22 采用本章中的记号，证明在风险中性世界里，一个欧式看涨期权将被执行的概率为 $N(d_2)$。在 T 时刻，股票价格大于 K 时收益为 00 美元的衍生产品价格为多少?

已知 $\ln S_T \backsim \phi(\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$, 替换变量考虑 $x = \frac{\ln S_T - \ln S_0 - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$。$x$ 为一个标准正态分布，而且在风险中性世界里，$\mu = r$。所以对于欧式看涨期权，它被执行的情况为 $S_T > K$，被执行的概率等于:

$$P(S_T > K) = P(\ln S_T > \ln K) = P(x > \frac{\ln K - \ln S_0 - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}) = N(d_2) \tag{39}$$

15.23 利用式 (15-17) 中的结果来确定美式看跌期权的价值，期权标的股票不支付任何股息，当股票价格达到价格 H 时，期权回报为 K，其中 $H < K$。假定股票当前价格 S 高于 H，H 取什么样值时，期权价值为最大? 推出具有执行价格 K 的美式看跌期权的价值。

根据式（15-17）,$f = Q(\frac{S}{H})^{-2\frac{r}{\sigma^2}}$, $Q = K - H$, 当 $\frac{\partial f}{\partial H} = 0, H = \frac{\alpha}{1+\alpha}K = \frac{2r}{\sigma^2+2r}K$ 时，期权价值最大。

15.24 某公司已经发行了管理人股票期权，当对期权进行定价时，是否应考虑稀释效应? 解释你的答案。

已经发行后，管理人股票期权的影响已经体现在股价中。所以对期权进行定价时，就不用再重复考虑了。

15.25 某公司的股票价格为 50 美元，市场上共有 1000 万股。公司计划向其雇员发行 300 万 5 年期的平价看涨期权，在期权行使时，公司需要发行更多的股票，股票价格的波动率为 25%，5 年的无风险利率为每年 5%，公司不发放股息。估算公司发行管理人期权的费用。

该公司的平价普通看涨期权价格为 16.25 美元，总费用为 $16.25 \times \frac{10^7}{10^7+3\times10^6} \times 3 \times 10^6 = 3.75 \times 10^7$ 美元。

作业题

15.26 某股票的波动率为每年 18%，计算在以下时段价格变动的标准差（a）1 天，（b）1 周，（c）1 个月。

股价变化百分比的标准差分别为 (a)$0.18 \times \sqrt{\frac{1}{252}} = 0.0113$, (b) $0.0113 \times \sqrt{5} = 0.0254$, (c) $0.18 \times \sqrt{\frac{22}{252}} = 0.0532$。

15.27 某股票的当前价格为 50 美元。假定股票的预期收益率为 18%，波动率为 30%，在两年后股票价格的概率分布是什么? 计算分布的期望值与标准方差，并确定 95% 的置信区间。

S_T 服从对数正态分布，$\ln S_T \backsim \phi(\ln 50 + (0.18 - 0.3^2/2) * 2, 0.3^2 * 2) = \phi(4.92, 0.18)$, 95% 置信区间为 $\pm 1.96\sigma$, 即为 $[3.668, 4.516]$。

15.28 假定在连续的 15 个周末所观察的股票价格（以美元计）为：30.2，32.0，31.1，30.1，30.2，30.3，30.6，33.0，32.9，33.0，33.5，33.5，33.7，33.5，33.2 估计股票价格的波动率，你所估计结果的标准差为多少?

先计算股价每日的 log return，然后标准差的估计值可以计算得到 0.0288，相应波动率为 $0.0288 \times \sqrt{252} = 0.478$, 估计的标准差为 0.122。

15.29 某金融机构计划提供在时刻 T 收益为 S_T^2 的衍生产品。假定股票不提供任何股息。

(a) **利用风险中性定价原理推导此衍生产品价格在 t 时刻的价格与时刻 t 股票价格 S 的关系（提示：S_T^2 的期望可由 15.1 节中 S_T 的期望值与方差给出）。**

(b) **验证你的结果满足微分方程式（15-16）。**

(a)

$$
\begin{aligned}
f &= e^{-r(T-t)}E[S_T^2] && (40)\\
&= e^{-r(T-t)}[Var[S_T]+E^2[S_T]] && (41)\\
&= e^{-r(T-t)}[S_t^2e^{2\mu(T-t)}(e^{\sigma^2(T-t)}-1)+S_t^2e^{2\mu(T-t)}] && (42)\\
&= S_t^2e^{(T-t)[2\mu-r+\sigma^2]} && (43)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2S^2 &= rf && (44)\\
-[2\mu-r+\sigma^2]f+2rf+\sigma^2f &= rf && (45)
\end{aligned}
$$

在风险中性定价时，$\mu=r$，所以上式成立。

15.30 考虑一个无股息股票上的期权，股票价格为 30 美元，执行价格为 29 美元，无风险利率为每年 5%，波动率为每年 25%，期权期限为 4 个月。

(a) **如果期权是欧式看涨期权，其价格为多少?**

(b) **如果期权是美式看涨期权，其价格为多少?**

(c) **如果期权是欧式看跌期权，其价格为多少?**

(d) **验证看跌-看涨期权平价关系式。**

将参数代入（15-20）和（15-21），

(a) 2.24 美元。

(b) 2.24 美元。

(c) 0.88 美元。

(d) $p+S=c+Ke^{-rT}, \rightarrow\ 0.88+30=2.24+29\times e^{-0.05\times 0.25}=2.24+28.64$ 。

15.31 假定作业题 15.30 中的股票在 1.5 个月时将会有除息日，所付股息预期为 50 美分。

(a) **如果期权时欧式看涨期权，其价格为多少?**

(b) **如果期权时欧式看跌期权，其价格为多少?**

(c) **如果期权为美式看涨期权，会不会在某种情形下提前行使期权成为最优?**

计算欧式期权价格时，只需要将当前股价减去股息的贴现值 $0.5\times e^{-0.05\times 0.125}=0.497$。

(a) 1.92 美元。

(b) 1.06 美元。

(c) 考虑 $K(1-e^{-r(T-t)})=29(1-e^{-0.05\times\frac{5}{24}})=0.3$ 美元，所以股息大于该值。即 1.5 月发股息前，如果股票价格足够大，可以提前执行期权。

15.32 略