第十四章　维纳过程和伊藤引理

练习题

14.1 如果我们说一个地区的温度服从马尔科夫过程，这里的含义是什么？你认为温度确实可以服从马尔科夫过程吗？

温度的将来变化只与当前值有关，和历史记录无关。不能。

14.2 基于股票价格历史数据的交易策略的收益是否会总是高于平均收益？讨论这一问题。

可能，如果执行速度足够快。但市场中竞争激烈，盈利机会会被竞争者迅速填平，所以对于大部分投资者而言基于股票价格历史数据的交易策略不会总高于平均收益。

14.3 假定一家公司的现金头寸（用百万美元来计）服从广义维纳过程，现金头寸的漂移率为每季度 0.5，方差率为每季度 4.0 。公司的初始现金头寸要多高才能使得其在 1 年后的现金流为负值的概率小于 5%。

一年后现金流的分布为 $\phi(\mu = 2, \sigma = 2)$，$\pm 1.645\sigma$ 之外的概率为 10%，所以初始头寸需要为 1.29 。

14.4 变量 X_1 和 X_2 服从广义维纳过程，漂移率分别为 μ_1 和 μ_2，方差率分别为 σ_1^2 和 σ_2^2。在以下条件下，X_1+X_2 服从什么样的过程。

(a) **X_1 和 X_2 在任何小的时间区间内的变化相互无关。**

(b) **X_1 和 X_2 在任何小的时间区间内变化的相关系数为 ρ。**

(a) $\Delta X \backsim \phi(\Delta t(\mu_1 + \mu_2), \sqrt{\Delta t}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

(b) $\Delta X \backsim \phi(\Delta t(\mu_1 + \mu_2), \sqrt{\Delta t}\sqrt{(\sigma_1 + \rho\sigma_2)^2 + (1 - \rho^2)\sigma_2^2})$

14.5 考虑服从以下过程的变量 S

$$dS = \mu dt + \sigma dz \tag{1}$$

在最初的 3 年中，$\mu = 2, \sigma = 3$; 在接下来的 3 年中，$\mu = 3, \sigma = 4$。如果变量的初始值为 5，变量在第 6 年年末的的概率分布是什么？

$\phi(\mu = 10, \sigma = 5)$

14.6 假设 G 为股票价格和时间的函数，σ_S 和 σ_G 分别为 S 和 G 的波动率。证明当 S 的收益期望增加 $\lambda\sigma_S$ 时，G 的收益期望将会增加 $\lambda\sigma_G$，这里 λ 为常数。

$$\begin{aligned}
dS &= \mu_S S dt + \sigma_S S dz &(2)\\
dG &= \frac{\partial G}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial G}{\partial t} dt &(3)\\
&= dt(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S}\mu_S S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma_S^2 S^2) + dz\frac{\partial G}{\partial S}\sigma_S S &(4)\\
&= \mu_G G dt + dz\sigma_G G &(5)\\
\mu'_S &= \mu_S + \lambda\sigma_S, \Rightarrow \mu'_G = \mu_G + \lambda\sigma_G. &(6)
\end{aligned}$$

14.7 股票 A 和股票 B 均服从几何布朗运动，并且在任何短时段内两者的变化相互无关。由一只股票 A 和一只股票 B 所构成的证券组合的份值是否服从几何布朗运动？解释原因。

$\frac{d(S_A+S_B)}{S_A+S_B} = dt\frac{S_A\mu_A+S_B\mu_B}{S_A+S_B} + dz\frac{\sigma_A S_A+\sigma_B S_B}{S_A+S_B}$, 不服从几何布朗运动。

14.8 式（14-8）中股票价格过程可以写成

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{7}$$

其中 μ 和 τ 为常数。仔细解释以上模型与以下所列举个个模型之间的差别

$$\Delta S = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{8}$$

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{9}$$

$$\Delta S = \mu\Delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{10}$$

为什么式（14-8）中模型比以上 3 种模型更适合用来描述股票价格的变化?

因为只有（14-8）表达的股价变化过程中，股票所提供的短期预期收益率与股票即时价格无关。

14.9 以下过程常被用来描述短期利率 r 随时间的变化

$$dr = a(b-r)dt + rcdz \tag{11}$$

其中 a, b, c 为正常数，dz 为维纳过程。描述这一过程的特性。

漂移率随利率变化而改变，当利率大于 b 时，漂移率为负，利率小于 b 时，漂移率为正。所以利率会有均值回归的特性。

14.10 假定股票价格 S 服从几何布朗运动

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz \tag{12}$$

其中 μ 为收益率的期望，σ 为波动率。变量 S^n 服从什么过程？证明 S^n 也服从几何布朗运动。

$dS^n = nS^{n-1}dS + \frac{n(n-1)}{2}dS^2 = (nS^n + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^2 S^n)dt + n\sigma S^n dz$，也符合几何布朗运动。

14.11 假定 x 为在 T 时刻支付 1 美元的无券息债券的收益率（按连续复利）。假定 x 服从以下随机过程

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz \tag{13}$$

其中 a, x_0 和 s 均为正常数，dz 为维纳过程。债券价格服从的过程是什么?

$$y = e^{(t-T)x} \tag{14}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx^2 \tag{15}$$

$$\frac{dy}{y} = (\frac{\ln y}{t-T} + a(x_0(t-T) - \ln y) + \frac{1}{2}s^2\ln^2 y)dt + s\ln y dz \tag{16}$$

14.12 某股票的价格是 30 美元，收益率期望是 9%, 波动率是 20%。在 Excel 计算表中模拟在未来 5 年中价格变化的路径，要求步长取为 1 个月，并且从正态分布中取样。以图形来表示股票价格的路径。点击 F9，观察当随机样本变化时路径的变化。

作业题

14.13 假定股票的收益率期望为每年 16%，波动率为每年 30%。当股票价格在某一天末的价格为 50 美元时，计算:

(a) 在下一天股票价格的期望值。

(b) **在下一天股票价格的标准差。**

(c) **在下一天股票价格的 95% 置信区间。**

这里用一年 365 天，

(a) $\frac{1}{365} \times 0.16 \times 50 = 0.02$，50.02 美元。

(b) $\sigma\sqrt{\Delta t}S = 0.3 \times \sqrt{\frac{1}{365}} \times 50 = 0.785$ 。

(c)（48.432，51.572）。

14.14 假定一家公司的现金头寸（以百万美元计）服从广义维纳过程，漂移率为每月 0.1 ，方差率为每月 0.16，初始现金头寸为 2.0 。

(a) **现金头寸在 1 个月、6 个月以及 1 年时的概率分布是什么?**

(b) **现金头寸在 6 个月末和 1 年末时有负现金头寸的概率为多少?**

(c) **在将来什么时刻公司具有负现金头寸的概率为最大?**

(a) $\phi(2.2, 0.8), \phi(3.2, 1.96), \phi(4.4, 2.77)$ 。

(b) 约为 5%, 2.5%。

(c) $Argmin_t \frac{2+0.2t}{0.4\times 2\times\sqrt{t}} = Argmin_t(2.5t^{-0.5} + 0.25t^{0.5}), \Rightarrow t = 10$。

14.15 假定 x 为永久性政府债券的收益率，债券每年发放 1 美元的利息。假设 x 是按连续复利计算，并且券息也是连续支付，x 服从以下随机过程

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz \tag{17}$$

其中 a, x_0 和 s 为正常数，dz 为维纳过程。债券价格服从的过程是什么? 对于债券持有者而言，瞬时收益率的期望（包括利息和资本收益）为多少?

考虑一年刚开始为起点，该债券价格为 $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-xk} = \frac{1}{e^x-1}$。该债券的价格在每年之内周期变化，在跨年的时候需要支付券息。考虑在一年中的时刻 t 时的价格为:

$$y = \frac{e^{xt}}{e^x - 1} \tag{18}$$

然后，

$$dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx^2 \tag{19}$$

$$\frac{dy}{y} = dt(x + \frac{t}{2}s^2x^2 + ta(2 - e^x)(x_0 - x) - \frac{1}{2}\frac{s^2x^2}{e^x - 1}) + dz(2 - e^x)sx \tag{20}$$

瞬时收益率的期望为 dt 项系数。

14.16 假定股票价格 S 服从式（14-6）中的几何布朗运动，以下变量都服从什么样的过程?

(a) $y = 2S$。

(b) $y = S^2$ 。

(c) $y = e^S$。

(d) $y = e^{r(T-t)}/S$。

对于每种情形，将 dt 和 dz 的系数用 y （而不是 S）来表达。

(a) $dy = \mu ydt + \sigma ydz$

(b) $dy = (2\mu + \sigma^2)ydt + 2\sigma ydz$

(c) $\frac{dy}{y} = (\mu \ln y + \sigma^2 \ln^2 y)dt + \sigma \ln ydz$

(d) $\frac{dy}{y} = (\sigma^2 - r - \mu)dt - \sigma dz$

14.17 假定股票的当前价格为 50，其收益率期望和波动率分别为每年 12% 和每年 30%。股票价格在 2 年后高于 80 美元的概率为多少?（提示：当 $\ln S_T > \ln 80$ 时，$S_T > 80$。

$\ln S_T \backsim \phi(\ln 50 + (0.12 - 0.3^2/2) \times 2, 0.3^2 \times 2) = \phi(4.062, 0.18)$, $\ln 80 = 4.382$, 所以高于 80 的概率约为 3%。

14.18 股票 A 的价格是 30 美元，收益率期望为 11%, 波动率为 25%。股票 B 的价格是 40 美元，收益率期望为 15%，波动率为 30%。描述两个股票收益率的过程具有相关系数 ρ。在 Excel 计算表中模拟两个股票在 3 个月中价格变化的路径，要求步长取成 1 天，并且从正态分布取样。将结果画图，并点击 F9 健，观察当随机样本变化时，路径是如何变化的。考虑 ρ 等于 0.25、0.75 和 0.95 时的情形。