Black-Scholes-Merton 方程解（基于风险中性定价）

假设股票价格为 $S(t)$, 简记为 S_t，服从过程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz. \tag{1}$$

其中 μ 为增长率，σ 为波动率，μ 和 σ 为常数。z 为维纳过程。

考虑该股票上一个欧式看涨期权，执行价格为 K，到期时间为 T，在时刻 t $(0 \leq t \leq T)$ 价格为 $c(t, S_t)$。假设股票在时刻 T 时的价格为 S_T，由风险中性定价可知:

$$c(t, S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max(S_T - K,\, 0)]. \tag{2}$$

这里 r 为常数无风险利率，期望为风险中性世界里的期望，即式(1)中 $\mu = r$ 时。

为了计算这里的期望值，我们需要知道风险中性世界中随机变量 S_T 的分布。由 Itô 引理得

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}d{S_t}^2 \\ &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz. \end{aligned} \tag{3}$$

可知在时刻 t 已知 S_t 后，将来时刻 T 时的 $\ln S_T$ 的分布为均值为 $\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$, 标准差为 $\sigma\sqrt{T-t}$ 的正态分布，

$$\ln S_T \backsim \mathcal{N}\left(\mu_t,\, \sigma_t\right), \tag{4}$$

$$\text{其中 } \mu_t = \ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \;\; \sigma_t = \sigma\sqrt{T-t}.$$

对于 S_T 的分布，设其概率密度函数为 $f(x)$，由于相对应的区间内随机变量 S_T 和 $\ln S_T$ 的累计概率应该相同，所以

$$\int_0^{S_T} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\ln S_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(x-\mu_t)^2}{2{\sigma_t}^2}} dx \tag{5}$$

对左右两侧积分上限同时微分，

$$\frac{d}{dS_T}\int_0^{S_T} f(x)dx = \frac{d}{dS_T}\int_{-\infty}^{\ln S_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(x-\mu_t)^2}{2{\sigma_t}^2}} dx$$

$$f(S_T) - 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}\frac{1}{S_T} e^{-\frac{(\ln S_T-\mu_t)^2}{2{\sigma_t}^2}} - 0$$

$$f(S_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}\frac{1}{S_T} e^{-\frac{(\ln S_T-\mu_t)^2}{2{\sigma_t}^2}}. \tag{6}$$

然后计算该欧式看涨期权价格,

$$
\begin{aligned}
c(t,S_t) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max(S_T-K,\ 0)] \\
&= e^{-r(T-t)}\int_0^{\infty}\max(S_T-K,\ 0)f(S_T)dS_T \\
&= e^{-r(T-t)}\int_K^{\infty}(S_T-K)f(S_T)dS_T \\
&= e^{-r(T-t)}\left[\int_K^{+\infty}S_Tf(S_T)dS_T-K\int_K^{+\infty}f(S_T)dS_T\right] \\
&= e^{-r(T-t)}(A-B). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$
A=\int_K^{\infty}S_Tf(S_T)dS_T,\quad B=K\int_K^{\infty}f(S_T)dS_T. \qquad (8)
$$

先计算 B, 记 $N(x)$ 为标准正态分布的累计概率函数，$N(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$,

$$
\begin{aligned}
B &= K\int_K^{+\infty}f(S_T)dS_T \\
&= K\,\mathbb{P}(S_T\geq K) \\
&= K\,\mathbb{P}(\ln S_T\geq \ln K) \\
&= K\,\mathbb{P}(\frac{\ln S_T-\mu_t}{\sigma_t}\geq\frac{\ln K-\mu_t}{\sigma_t}) \\
&= K(1-N(\frac{\ln K-\mu_t}{\sigma_t})) \\
&= KN(\frac{\mu_t-\ln K}{\sigma_t}). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

然后计算 A,

$$
\begin{aligned}
A &= \int_K^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^{-\frac{(\ln S_T-\mu_t)^2}{2{\sigma_t}^2}}dS_T \\
&\text{替换变量，} y=\ln S_T, \qquad (10)\\
&= \int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^ye^{-\frac{(y-\mu_t)^2}{2{\sigma_t}^2}}dy \\
&= \int_{\ln K}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t}e^{-\frac{1}{2{\sigma_t}^2}[(y-(\mu_t+{\sigma_t}^2))^2-{\sigma_t}^4-2\mu_t{\sigma_t}^2]}dy \\
&\text{替换变量，} s=\frac{y-(\mu_t+{\sigma_t}^2)}{\sigma_t}, \qquad (11)\\
&= \int_{\frac{\ln K-(\mu_t+{\sigma_t}^2)}{\sigma_t}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}e^{\frac{1}{2}\sigma_t^2+\mu_t}ds \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma_t^2+\mu_t}(1-N(\frac{\ln K-(\mu_t+\sigma_t^2)}{\sigma_t})) \\
&= e^{\frac{1}{2}\sigma_t^2+\mu_t}N(\frac{\mu_t+\sigma_t^2-\ln K}{\sigma_t}). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

将 A 和 B 代回 $c(t,S_t)$，得

$$
c(t,S_t)=e^{-r(T-t)}\left[e^{\frac{1}{2}\sigma_t^2+\mu_t}N(\frac{\mu_t+\sigma_t^2-\ln K}{\sigma_t})-KN(\frac{\mu_t-\ln K}{\sigma_t})\right], \qquad (13)
$$

$$
\text{由于 } \mu_t=\ln S_t+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t),\quad \sigma_t=\sigma\sqrt{T-t},
$$

$$
c(t,S_t)=S_tN(d_1)-e^{-r(T-t)}KN(d_2), \qquad (14)
$$

$$
\text{其中 } d_1=\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=\frac{\ln\frac{S_t}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \qquad (15)
$$

式(14)即为 Black-Scholes-Merton 方程解。且式(13)也适用于其它远期资产价格服从对数正态分布的情况，该式为执行价格为 K 的远期合约在 t 时刻的价值。