第二十一章　基本数值方法

练习题

21.1 在美式期权的希腊值 Delta、Gamma、Vega、Theta 和 Rho 中，哪一个可以通过构造单个二叉树来估计?

Delta，Gamma，Theta 。

21.2 计算一个 3 个月期限的美式看跌期权的价格，这里的标的股票不支付股息，其当前价格为 60 美元，执行价格为 60 美元，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 45%，构造时间短为 1 个月的二叉树来为这一期权定价。

5.163 美元。

21.3 解释当采用树形结构对美式期权定价时，如何应用控制变量技巧。

先利用树形结构算出来对应欧式期权价格，同时算出来 BSM 模型下该欧式期权价格，两者之差几乎等于相应美式期权树形和模型解（没有解析解）之差。所以可以通过树形结构计算美式期权价格，再加上欧式期权树形和解析解之差。

21.4 计算玉米期货上 9 个月期限的欧式看涨期权价格，这里的玉米期货当前价格为 198 美分，执行价格为 200 美分，无风险利率为每年 8%，波动率为每年 30%，构造时间段为 3 个月的二叉树来为这一期权定价。

1.106 美元。

21.5 考虑一个期权，其最终收益等于股票最终价格与在期限内股票平均价格的差额，这一期权能否用二叉树来定价? 解释你的答案。

应该可以用二叉树迭代计算，但效率很低。

21.6 "对于支付股息的股票，股价的树形不重合；但从股价中减去股息的贴现值后，其树形重合。"解释这一论点。

对于支付股息的股票，如果股息的部分不从股价中移除，那么在支付股息后，股价下跌，树形节点将分离，$(Su^i d^{n_k-i}d - Dd) \neq (Su^{i-1}d^{n_k-i+1}u - Du)$ 。但如果我们假设股息部分是固定的现金流，二叉树考虑的只是除去股息贴现后的股价变化，则不存在这个问题。

21.7 说明在 21.4 节脚注所示的情况下，应用 CRR 二叉树时，将出现负概率值。

$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t}-d}{u-d} = \frac{e^{(r-q)\Delta t}-e^{\sigma\Delta t}}{u-d}$，当 $\sigma < |(r-q)\sqrt{\Delta t}|$，$p$ 为负。

21.8 利用间隔抽样抽取 100 样本来改善业界事例 21-1 和表 21-1 中关于 π 近似值的精度。

估计 π 采用均匀分布，所以此时间隔抽样为划分出 100 个等大小网格，取每个网格中点。100 个样本，π 估计值为 3.2 。

21.9 说明为什么蒙特卡罗模拟法不能很容易地用来对美式衍生产品定价。

因为蒙特卡罗模拟是从当前状态模拟将来演化过程，但美式衍生产品每一时刻的价格依赖于将来的可能情况。

21.10 考虑某个无股息股票上 9 个月期限的美式看跌期权，期权执行价格为 49 美元，股票的当前价格为 50 美元，无风险利率为每年 5%，波动率为每年 30%。采用 3 步二叉树来对期权定价。

4.29 美元。

21.11 采用 3 步树形来对一个小麦期货上 9 个月期限的美式看涨期权进行定价。期货的当前价格为 400 美分，执行价格为 420 美分，无风险利率为每年 6%，波动率为每年 35%。由二叉树估算期权的 Delta 。

0.603 美元, Delta 为 0.628 。

21.12 某股票上 3 个月期限的美式看涨期权执行价格为 20 美元，股票价格为 20 美元，无风险利率为每年 3%，波动率为每年 25%，在 1.5 个月时，股票将支付 2 美元股息，采用 3 步二叉树对期权定价。

此处股息额度很大，在发放股息后，如果股价大于执行价就应该执行期权。$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=1.075, d=1/u=0.93, p=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}=0.508$，股息贴现后约为 2 美元。可以得美式看涨价格为 0.0673 美元。

21.13 在某无股息股票上 1 年期美式看跌期权的执行价格为 18 美元，股票的当前价格为 20 美元，无风险利率为每年 15%，股票价格的波动率为每年 40%。由 DerivaGem 软件并采用 4 步、步长为 3 个月的二叉树为期权定价。展示树形结构，并验证树的最后一步以及倒数第 2 步的期权价格的正确性。采用 DerivaGem 对相应的欧式期权定价。利用控制变量技巧来提高美式期权近似值的精度。

4 步二叉树美式看跌价格为 1.289 美元，欧式看跌为 1.144 美元。欧式看跌 BSM 价格为 1.103 美元。由控制变量法得美式看跌期权价格应为 1.248 美元。

21.14 考虑某股指上 2 个月期限的美式看跌期权，期权的执行价格为 480，股指的当前值为 484，无风险利率为每年 10%，股指股息收益率为每年 3%，股指波动率为每年 25%。将期权期限分为 4 个步长为半个月的区间，利用树形结构为这一期权进行股价。

14.93 美元。

21.15 当采用树形方法时，如何应用控制变量技巧来改进美式期权的 Delta 估计值?

Delta 可以通过一次二叉树模拟，取树内同时刻相邻节点的值估计或者两次二叉树模拟股价有小的变化时不同价格。两种情况都可以通过计算相同节点欧式期权价格和理论价格进行控制变量修正。

21.16 假设我们采用蒙特卡罗模拟法为某无股息股票的欧式看涨期权定价，股价的波动率为随机。解释如何应用控制变量技巧和对偶变量技巧来改进计算效率。解释在同时应用控制变量技巧和对偶变量技巧时，为什么需要计算 6 个期权值?

对偶变量是指产生一个正态分布随机数时，同时产生并计算同概率的对偶数值，以确保抽样样本对称分布。控制变量是指通过欧式期权二叉树定价和理论解析解之差对美式期权二叉树定价进行修正。所以一次抽样，我们需要计算 6 个期权价格。

21.17 说明当采用隐式有限差分法对美式看涨期权定价时式（21-27）～式（21-30）的变化情况。

看涨或看跌期权所满足的微分方程不变，所以有限差分法的递推关系式不变。但是边界条件改变，比如当股价为 S_{max} 时，期权价格不再为 0，而是 $S_{max}-K$ 。

21.18 考虑某无股息股票上 4 个月期限的美式看跌期权，期权的执行价格为 21 美元，股票的当前价格为 20 美元，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 30%。采用显式有限差分法对期权定价，在计算中采用 4 美元的价格间隔和 1 个月的时间间隔。

4.45 美元。这里误差应该比较大。

21.19 黄铜的即期价格为每磅 0.60 美元。假定期货价格（每磅的美元数量）如下

3 个月	0.59
6 个月	0.57
9 个月	0.54
12 个月	0.50

黄铜价格的波动率为每年 40%，无风险利率为每年 6%。采用二叉树对一个执行价格为 0.60 美元、期限为 1 年的美式看涨期权进行定价。在计算过程中将期限分成 3 个长度为 3 个月的时间区间（提示：如 18.7 节所示，在风险中性世界里，期货价格等于将来价格的期望值）。

期货价格的期望为 $F_{t+\Delta t} = F_t e^{(r-q)\Delta t}$，根据表格我们可以知道四个区间的 $e^{(r-q)\Delta t}$，然后分别计算上升下降的概率，以此作二叉树。

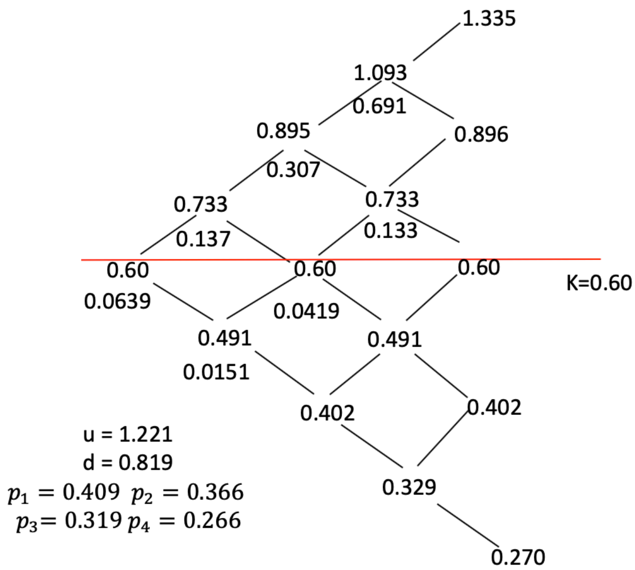


Fig 21.19

价格为 0.0639 美元。

21.20 采用练习题 21.19 的二叉树对以下证券定价：该证券在一年时的收益为 x^2，其中 x 为黄铜价格。

价格为 0.275 美元。

21.21 在显式有限差分法中，在什么时候边界条件 $S=0$ 和 $S \to \infty$ 会影响衍生产品价格的估计值?

时间间隔不够小时，因为 $\Delta S \approx \sqrt{\Delta t}$ 需要被满足，而如果 S_{max} 太大，股价间隔将过大。

21.22 你应如何采用对偶变量法来盖上业界事例 21-2 和表 21-2 中欧式期权近似值的精度?

每次从正态分布抽样时，同时取出概率相同的对称的点，一次随机抽样计算两个同概率结果。

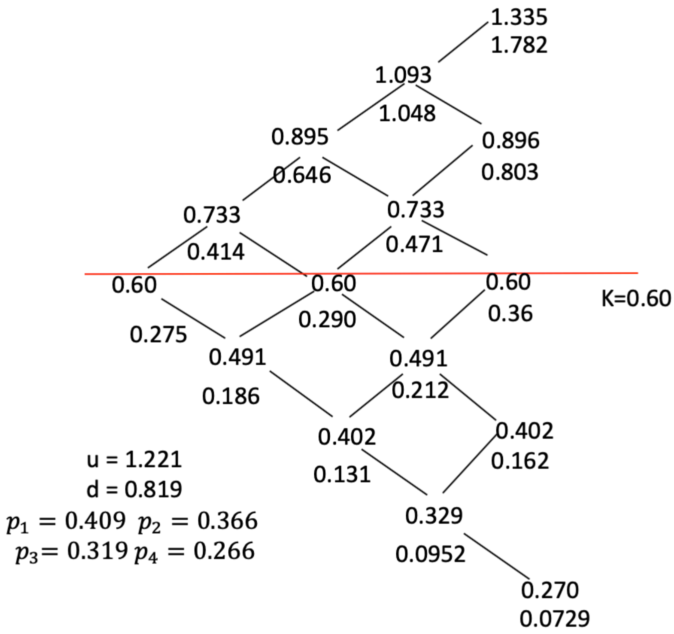


Fig 21.20

21.23 一家公司发行了 3 年期的可转换债券，面值为 25 美元。证券持有者可在任何时刻将债券转换为两只发行公司的股票。当股票价格高于或等于 18 美元时，公司可提前赎回债券。假定公司将会在最早的时刻强制转换债券，可转换债券所满足的边界条件是什么？假定利率为常数，你将如何利用有限差分法来对可转换债券定价？假定公司无违约风险。

股价只要到 18 美元，公司就会赎回，同时考虑股价如果跌到 0 后将不变，边界条件为：

$$f(t=T=3,S)=\begin{cases} 25 & S=18 \\ 2S-25 & 18>S\geq 12.5 \\ 25 & S<12.5 \end{cases}, \quad f(t,S=18)=25, \quad f(t,S=0)=25e^{-r(T-t)} \tag{1}$$

21.24 假定样本 i 和样本 j 之间的相关系数为 $\rho_{i,j}$，提供由标准正态分布中抽取 3 个随机样本的公式。

设标准正态分布随机样本为 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$，则所需要的样本为

$$x_1=\epsilon_1, \quad x_2=\sqrt{1-\rho_{12}^2}\epsilon_2+\rho_{12}\epsilon_1, \tag{2}$$

$$x_3=\rho_{13}\epsilon_1+\frac{\rho_{23}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}\epsilon_2+\sqrt{\frac{1-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{13}^2+\rho_{12}^2\rho_{23}^2}{1-\rho_{12}^2}}\epsilon_3 \tag{3}$$

作业题

21.25 考虑一美式看跌期权，期权持有者有权在 1 年末以每瑞士法郎 0.80 美元的价格卖出瑞士法郎。瑞士法郎汇率的波动率为每年 10%，美元的无风险利率为 6%，瑞士法郎的无风险利率为 3 %，当前的汇率为 0.81 。采用 3 步二叉树给这一期权定价。利用你所构造的树形估计期权的 Delta 。

期权价格为 0.0143，Delta 为-0.382 。

21.26 白银期货上 1 年期的美式看跌期权执行价格为 9 美元。期货的当前价格为 8.50 美元，无风险利率为每年 12%，期货波动率为每年 25%。采用 DerivaGem 软件，并以步长为 3 个月的 4 步二叉树对期权定价。显示树形结果并验证最后一步与倒数第 2 步结点上期权价格的正确性。采用 DerivaGem 对相应的欧式期权定价，并采用控制变量技巧来改善美式期权价格的精度。

直接由二叉树计算该美式看跌价格为 0.784 美元。由二叉树计算欧式看跌期权价格为 0.5945 美元，由 BSM 模型计算欧式看跌价格为 0.5866 美元，所以由控制变量法的修正后的美式看跌价格为 0.705 美元。

21.27 6 个月期限美式看涨期权的标的股票将在第 2 个月末与第 5 个月末支付每股 1 美元的股息。股票的当前价格为 30 美元，执行价格为 34 美元，无风险利率为每年 10%。对于除去股息的股票部分波动率为每年 30%。采用 DerivaGem 软件，将期权期限分为 100 个时间区间来估计期权价格。将你的答案与布莱克近似模型（见 15.12 节）进行比较。

二叉树计算价格为 1.651 美元。

21.28 假定 1 英镑的当前价格为 1.60 美元，汇率波动率为 15%，一个关于英镑上的美式看涨期权执行价格为 1.62 美元，期限为 1 年。美国和英国的无风险利率分别为每年 6% 及每年 9%。采用显式有限差分法对期权定价。在定价中，在汇率 0.80 与 2.40 之间选用 0.20 的汇率间隔，时间间隔为 3 个月。

0.0144 美元。

21.29 当采用 21.4 节给出的另外一种构造树形结构的方法来对期权定价时：

(a) 在 21.4 节里给出的二叉树与股票价格的对数在 Δt 时间段变化的均值和方差一致。

(b) 证明当 Δt^2 等高阶项被忽略时，21.4 节中给出的三叉树与股票价格的对数在 Δt 时间区间里的变化均值和方差一致。

(c) 采用 21.4 节里的另一种方式来构造三叉树，在每个节点上，股票价格上升、取中间值、下降的概率分别为 1/6、2/3、1/6，假定价格由 S 分别可以变化为 Su、Sm、Sd，其中 $m^2 = ud$。在构造树形结构时，使股票价格对数变化的均值和方差被得以匹配。

(a) 考虑股息贴现，忽略 Δt^2 高阶项，

$$u = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}},\ \ p = 0.5 \tag{4}$$

$$E[\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}] = \frac{1}{2}(\ln u + \ln d) = (r-q-\sigma^2/2)\Delta t \tag{5}$$

$$E[(\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t})^2] = \frac{1}{2}(\ln^2 u + \ln^2 d) \approx \sigma^2\Delta t \tag{6}$$

(b) 忽略 Δt^2 高阶项，

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}},\ d = \frac{1}{u} \tag{7}$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{1}{6},\ p_m = \frac{2}{3},\ p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)+\frac{1}{6} \tag{8}$$

$$E[\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}] = p_u\sigma\sqrt{3\Delta t}+p_d(-\sigma\sqrt{3\Delta t}) = (r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t \tag{9}$$

$$E[(\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t})^2] = \sigma^2\Delta t \tag{10}$$

(c)

$$E[\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}] = (r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t = \frac{1}{2}\ln u + \frac{1}{2}\ln d \tag{11}$$

$$E[(\ln\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t})^2] = \sigma^2\Delta t = \frac{1}{3}(\ln^2 u + \ln^2 d + \ln u \ln d) \tag{12}$$

$$\Rightarrow u = e^{\frac{1}{2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{\frac{1}{2}(r-q-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{13}$$

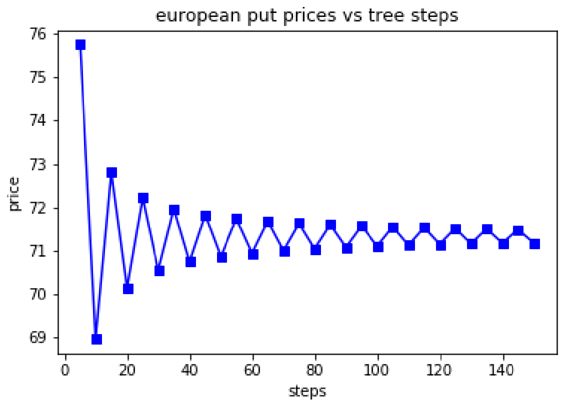
21.30 利用软件 DerivaGem 的 Application Builder 功能检验由二叉树所得出的期权结果在步数增大时趋向于真解的收敛性（见图 21-4 和 DerivaGem 的 Sample Application A）。考虑关于某股指上的看跌期权，股指取值为 900，执行价格为 900，无风险利率为 5%，股指股息收益率为 2%，期限为 2 年。

(a) **对于欧式期权和波动率等于 20% 的情形，生成类似于 Sample Application A 中关于收敛性的结果。**

(b) **对于美式期权和波动率等于 20% 的情形，生成类似于 Sample Application A 中关于收敛性的结果。**

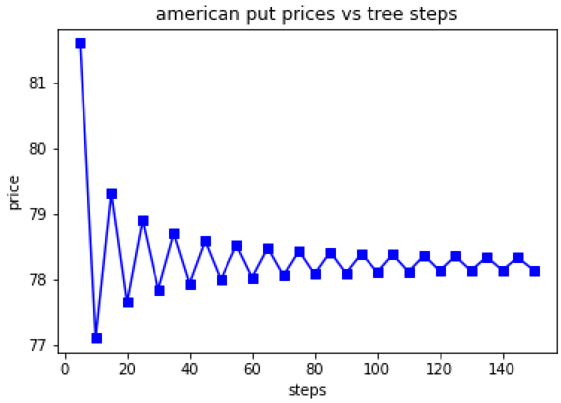
(c) **波动率等于 20%，采用控制变量技巧，画出美式期权价格与二叉树步数之间函数关系的图形。**

(d) **假定美式期权的市场价格为 85.0 。画出由二叉树估计的隐含波动率与二叉树步数之间函数关系的图形。**



(a)

Fig 21.30a



(b)

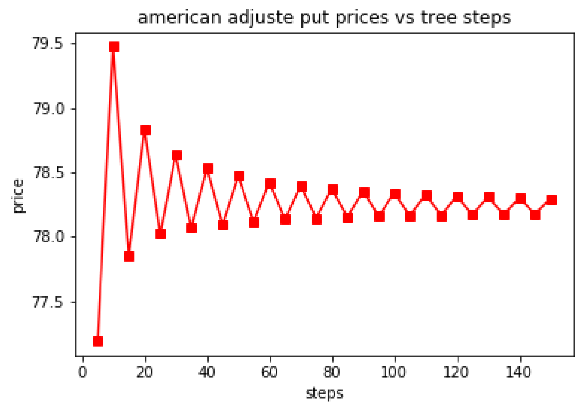
Fig 21.30b

21.31 从例 21-3 的树形上估计 Delta、Gamma 和 Theta 。解释如何理解这些参数。

用自己生成的树得，Delta 为 0.589，Gamma 为 36430，Theta 为 40.7 。

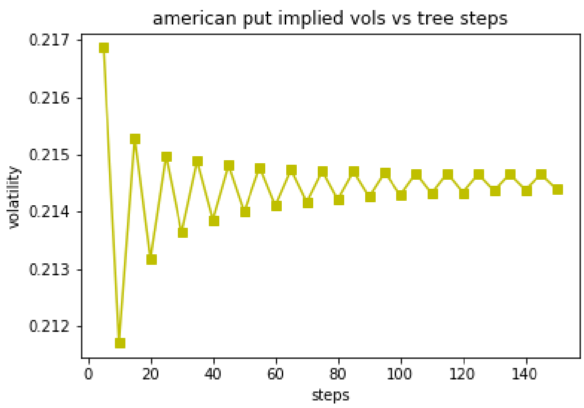
21.32 在例 21-4 中，在第 9 个月最下面的节点上提前行使期权的是多少?

第 9 个月最下面节点提前行使期权，所以价格为执行价减股价为 0.2552 。



(c)

Fig 21.30c



(d)

Fig 21.30d

21.33 利用 3 步 CRR（Cox-Ross-Rubinstein）二叉树来对于某指数的一年期看跌期权进行定价，指数当前值为 500，期权执行价格为 500，指数收益率为 2%，无风险利率为 5%，指数波动率为每年 25%。期权的价格、Delta、Gamma 和 Theta 分别为多少？解释如何计算 Vega 和 Rho。

价格为 41.13 美元。Delta 为-0.362，Gamma 为 0(应该不是 0，我没用树节点算)，Theta 为 13.98，Vega 为-206.2，Rho 为 235.9 。