Sprawozdanie – Laboratorium nr 7
Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Mikołaj Marchewa, 28 kwietnia 2020

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja

Interpolacja sprowadza się do wyznaczenia w danym przedziale **funkcji interpolacyjnej**. Funkcja ta wykorzystuje początkowo zadane punkty, zwane węzłami i pozwala na wyznaczenie przybliżonych wartość dla punktów nie będących jej węzłami.

1.2 Interpolacja Newtona

Interpolacja metodą Newtona przy założeniu, że odległości pomiędzy kolejnymi węzłami mogą być różne, umożliwia wyznaczenie wielomianu interpolacyjnego postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot(x_j-x_1)\cdot\cdots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\cdots\cdot(x_j-x_n)}, \tag{1}$$

który w spełnia warunki w węzłach interpolacji:

$$W_n(x_i) = f(x_i), \qquad \text{dla } i = 0,1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

Wówczas szukany wielomian można zapisać w poniższej postaci:

$$W_n(x) = W_0(x) + [W_1(x) - W_0(x)] + [W_2(x) - W_1(x)] + \cdots + [W_n(x) - W_{n-1}(x)], \tag{3}$$

gdzie kolejne różnice są zdefiniowane w następujący sposób:

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}), \qquad A_k = const. \tag{4}$$

Dokonując podstawienia $x = x_k$ oraz korzystając z warunku (2), po przekształceniu różnica (4) przyjmuje postać:

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_k(x_i)}\right) \omega_{k-1}(x), \tag{5}$$

w którym wyrażenie w nawiasie jest ilorazem różnicowym n-rzędu. Iloraz ten wiedząc, że funkcja przyjmuje w punktach x_i , dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ oraz $x_i \neq x_j$ kolejne wartości

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n), \tag{6}$$

definiujemy następująco:

a) 1-go rzędu:

$$f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \tag{7}$$

b) 2-go rzędu:

$$f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}, \tag{8}$$

c) n-tego rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; \cdots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \cdots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \cdots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}, \qquad (9)$$

co przy założeniu i=0 zapisujemy w zwięzłej postaci:

$$f(x_0; x_1; \cdots; x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdot (x_j - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_n)}, \qquad (10)$$

$$f(x_0; x_1; \cdots; x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'_k(x_j)}. \qquad (11)$$

Tak więc ostatecznie wielomian interpolacyjny można zapisać przy użyciu formuły opisującej n-ty iloraz różnicowy następująco:

$$W_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)\omega_0(x) + f(x_0; x_1; x_2)\omega_1(x) + \cdots + f(x_0; x_1; \cdots; x_n)\omega_{n-1}(x). \qquad (12)$$

1.3 Wielomian Czebyszewa

W celu dokładniejszej estymacji funkcji interpolacyjnej można wykorzystać jako węzły zera wielomianów Czebyszewa. W ogólności wielomian ten definiujemy rekurencyjnie:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_k(x) = 2 \cdot x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \qquad (13)$$

dla którego zera przyjmują postać:

$$x_m = \cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right), \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n, \qquad (14)$$

a po przeskalowaniu:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\left(\frac{2m+1}{2n+2}\pi\right) + (b+a)\right], \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n. \qquad (15)$$

Węzły nie są rozmieszczone równomiernie, ale są zagęszczone na krańcach przedziału.

1.4 Efekt Rungego

Efekt Rungego, czyli pogorszenie się dokładności funkcji interpolacyjnej wraz ze wzrostem liczby węzłów. Początkowo inkrementacja liczby punktów (na podstawie których szacujemy wielomian interpolacyjny) poprawia przybliżony wielomian. Jednakże od pewnego momentu wzrost ten powoduje znaczące odbieganie szukanej funkcji interpolacyjnej na krańcach przedziału.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Głównym problemem do rozwiązania w trakcie trwania zajęć laboratoryjnych było przeprowadzenie interpolacji wielomianowej Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{16}$$

Na potrzeby ćwiczenia skorzystaliśmy ze wzoru interpolacyjnego:

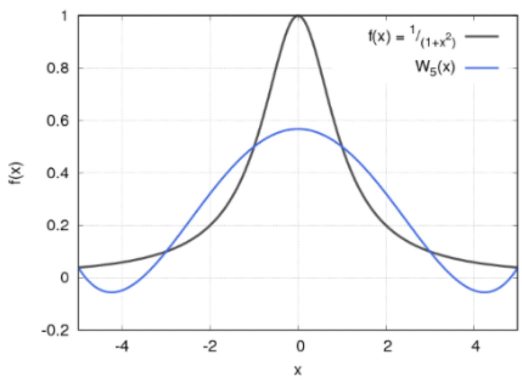
$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i), \tag{17}$$

gdzie $f^{(j)}(x_0)$ jest ilorazem rzędu *j* dla danego węzła x_0.

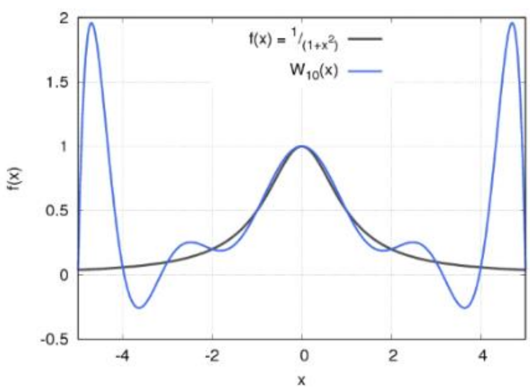
Na początku dla $n+1,\ gdzie\ \mathrm{n} = 5, 10, 15, 20$ równoodległych węzłów przygotowaliśmy dwuwymiarową tabelę wartości ilorazów różnicowych. Następnie dla każdego n implementując wzór (17), sporządziliśmy wykresy funkcji $f(x)$ wraz z uzyskanym wielomianem interpolacyjnym. Ostatnim krokiem było wykonanie analogicznych kroków, jednak dla punktów będących zerami Czebyszewa.

2.2 Wyniki

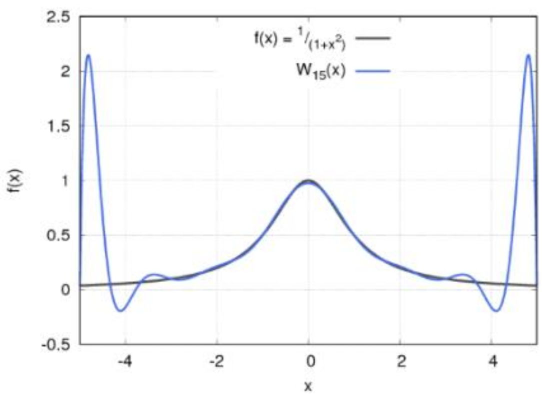
2.2.1 Dla równoodległych węzłów



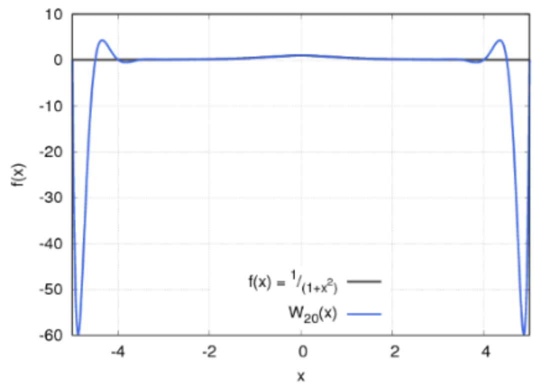
Wykres 1: n=5



Wykres 2: n=10

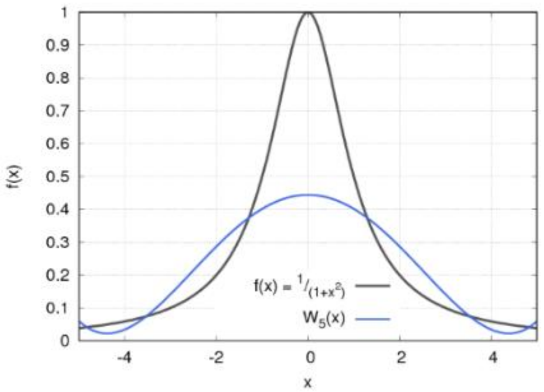


Wykres 3: n=15

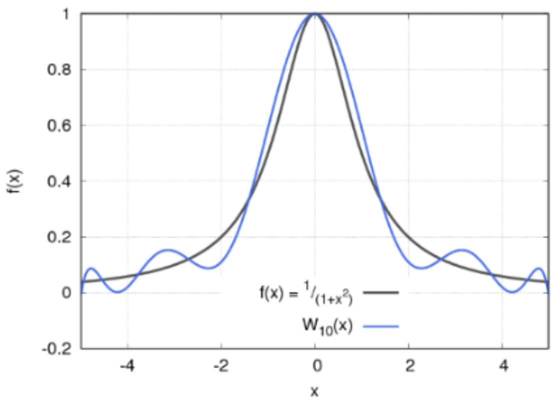


Wykres 4: n=20

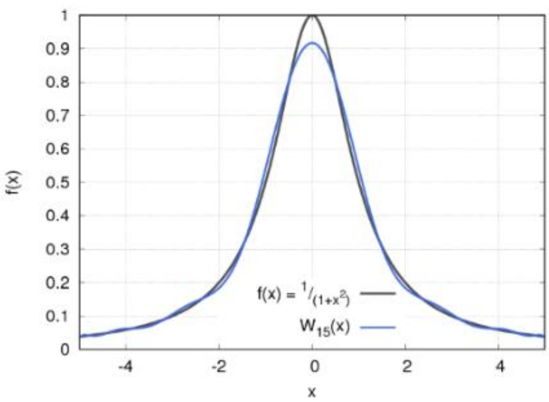
2.2.2 Dla węzłów będących zerami Czebyszewa



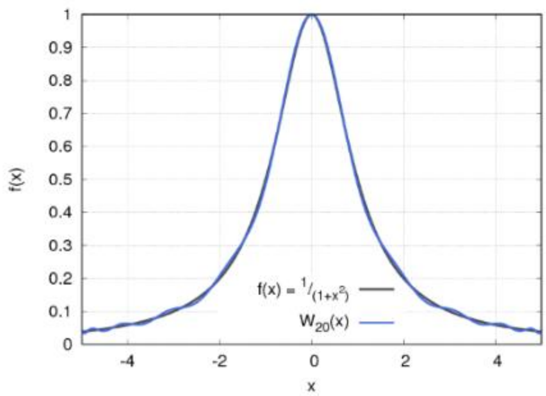
Wykres 5: n=5



Wykres 6: n=10



Wykres 7: n=15



Wykres 8: n=20

3. Wnioski

Interpolacja Newtona na podstawie kilku punktów pozwala na szybkie oszacowanie przybliżonego wykresu funkcji, na której leżą dane punkty. Już dla niewielkiej ilości równoodległych węzłów (Wykres 1., Wykres 2) interpolowana funkcja przypomina oryginalną. Niestety bazowanie na równych odległościach pomiędzy poszczególnymi węzłami powoduje występowanie efektu Runnego, co szczególnie widoczne jest na Wykresie 3 i 4, gdzie szukany wielomian na krańcach przedziału, jest znacząco zaburzony.

Rozwiązaniem powyższego problemu okazuje się zagęszczenie ilości węzłów na krańcach przedziału, na którym się poruszamy. Implementacja zer wielomianu Czebyszewa jako węzłów znacznie usprawnia narzędzie jakim jest interpolacja Newtona. Efekt Rungego w przypadku wykorzystania takich punktów został wyeliminowany o czym świadczą kolejne wykresy z podpunktu 2.2.2.

4. Bibliografia

4.1 Wstęp teoretyczny napisany na podstawie wykładu dr hab. inż. Tomasza Chwieja - [link]
http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_1819.pdf