Sprawozdanie – Laboratorium nr 9

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama

Mikołaj Marchewa, 18 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Aproksymacja

Aproksymacja liniowa sprowadza się do wyznaczenia współczynników funkcji aproksymacyjnej:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x), \tag{1}$$

gdzie $\varphi_i(x)$ są funkcjami bazowymi (m+1) wymiarowej podprzestrzeni liniowej X_{m+1}.

Żądamy by funkcja $F(x)$ spełniała następujący warunek:

$$\|f(x) - F(x)\| = minimum. \tag{2}$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu.

Funkcja aproksymująca, przebiega w pobliżu danych punktów początkowych. W przypadku gdy funkcja $F(x)$ przebiega dokładnie przez wszystkie podane węzły, wówczas mamy do czynienia z interpolacją.

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych

Funkcje f(x) i g(x) nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $x_0,\ x_1, \dots,\ x_n$, jeśli funkcje te spełniają następujące warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{n} [g(x_i)]^2 > 0. \tag{5}$$

W aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny:

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \tag{6}$$

stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji $x_1, x_2, \dots, x_n$, jeśli narzucimy dwa warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0, \qquad j \neq k \tag{7}$$

oraz nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów, wówczas macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną. Macierz układu jest dobrze uwarunkowana więc układ posiada jedno rozwiązanie.

By znaleźć wielomiany ortogonalne na siatce zakładamy, że węzły są równoodległe i wykonujemy przekształcenie:

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \qquad x_i \to q_i. \tag{8}$$

Naszym zadaniem jest znalezienie ciągu wielomianów:

$$\left\{F_i^{(n)}(q)\right\} = F_0^{(n)}(q), F_1^{(n)}(q), \dots, F_m^{(n)}(q), \quad (9)$$

postaci:

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q(q-1) + \cdots + a_k q(q-1)\cdots(q-k+1), \quad (10)$$

spełniające warunek ortogonalności:

$$\sum_{i=0}^{n} F_j^{(n)}(i) F_k^{(n)}(i) = 0 \iff j \neq k. \quad (11)$$

Wielomian (10) możemy zapisać w sposób ogólny przy w prowadzeniu oznaczenia $q^{[k]}$, który jest równy iloczynowi różnicy z liczby q i pewnej liczby o zakresie od 0 do k+1, zatem to oznaczenie możemy przepisać wzorem:

$$q^{[k]} = q(q-1)\cdots(q-k+1), \quad (12)$$

wówczas wzór (10) przyjmie postać:

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \cdots + a_k q^{[k]} \quad (13)$$

i dodatkowo normujemy wielomiany do 1 tzn. mają one postać:

$$\hat{F}_k^{(n)}(0) = 1, \qquad \text{k=0, 1, 2,..., m,} \quad (14)$$

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \cdots + b_k q^{[k]}. \quad (15)$$

Szukane wielomiany ortogonalne są wielomianami Grama:

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s}\binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}}. \quad (16)$$

Mając zdefiniowaną bazę można znaleźć funkcję aproksymującą F(x):

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \hat{F}_k^{(n)}\left(\frac{x-x_0}{h}\right), \qquad m \le n, \quad (17)$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i \hat{F}_k^{(n)}(x_i), \quad (18)$$

$$s_k = \sum_{q=0}^{n} \left[\hat{F}_k^{(n)}(q)\right]^2. \quad (19)$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Głównym celem tych zajęć laboratoryjnych była implementacja wyznaczania funkcji aproksymującej w bazie wielomianów Grama. Zadanie sprawdziliśmy na danym przedziale $[-4, 4]$ z $N = 201$ równoodległymi węzłami dla funkcji danej wzorem:

$$f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x), \quad (20)$$

gdzie:

$$f(x) = \sin\left(\frac{14\pi x}{x_{max} - x_{min}}\right)\left(exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + exp\left(-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right), \tag{21}$$

a funkcja $C_{rand}(x)$ jest niewielkim zaburzeniem stochastycznym, zdefiniowanym jako:

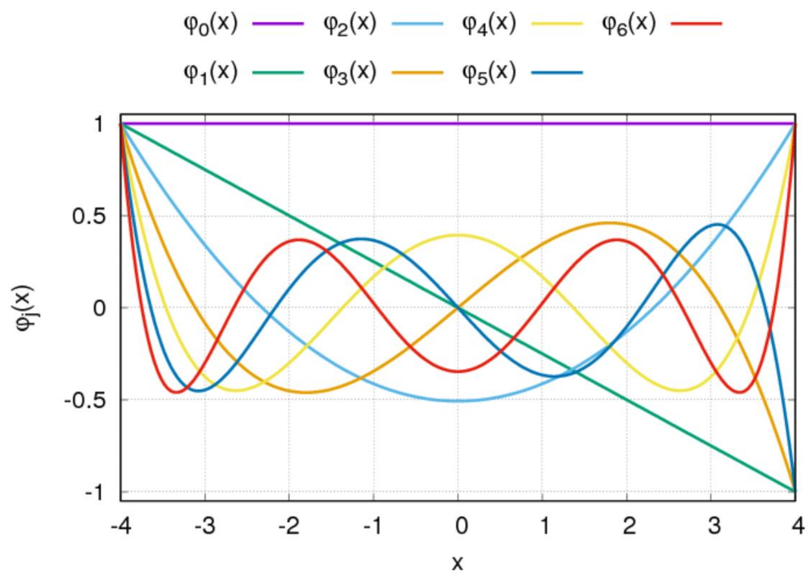
$$C_{rand} = \frac{Y - 0{,}5}{5}, \tag{22}$$

w którym $Y \in [0,1]$ jest liczbą pseudolosową o rozkładzie równomiernym.

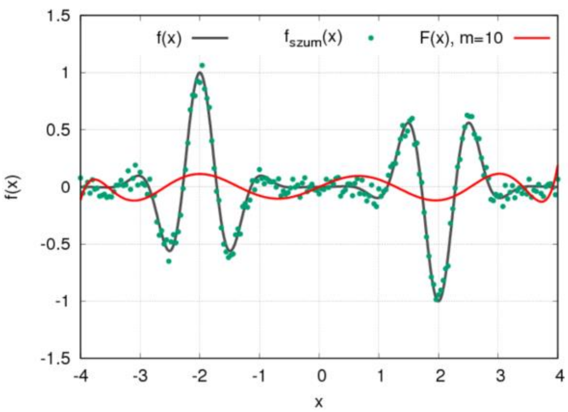
Aproksymację przeprowadziliśmy dla $m = 10, 30, 50$ wielomianów dla funkcji (21) z szumem oraz bez zaburzeń stochastycznych. Wyniki sprawdziliśmy tworząc odpowiednie wykresy dla każdego z przypadków.

2.2 Wyniki

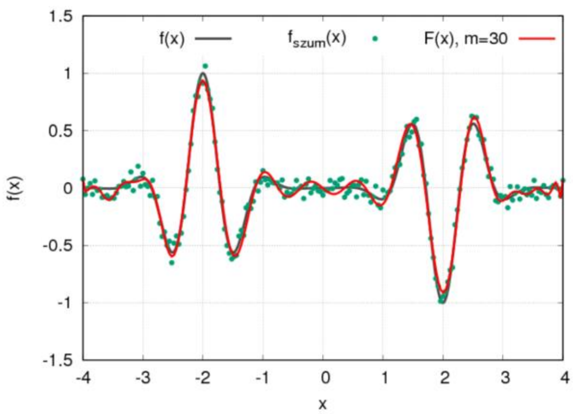
2.2.1 Wyniki aproksymacji funkcji z losowym szumem



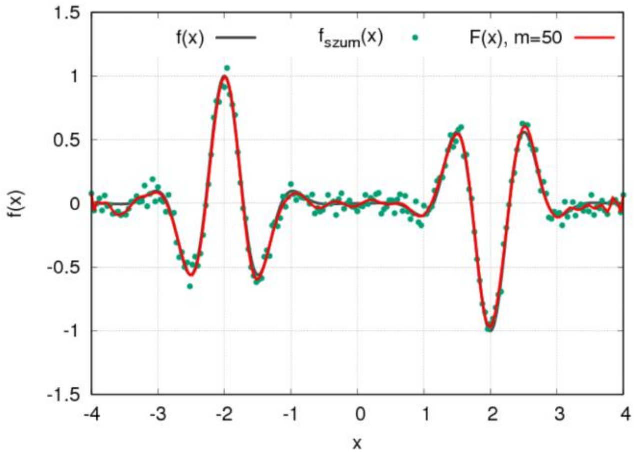
Wykres 1: Siedem pierwszych wielomianów Grama w przedziale [−4, 4]



Wykres 2: m=10 wielomianów dla $f_{szum}(x)$



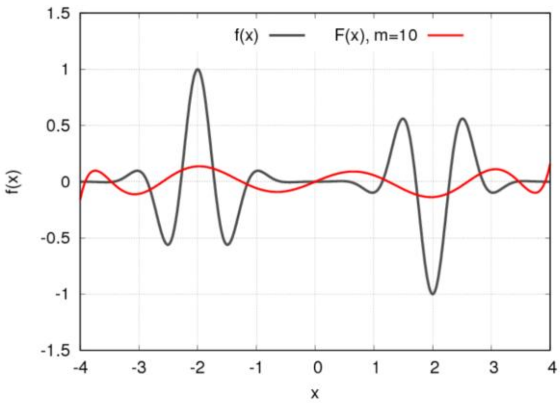
Wykres 3: m=30 wielomianów dla $f_{szum}(x)$



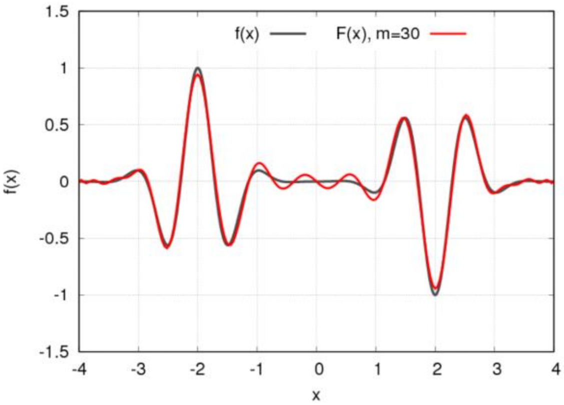
Wykres 4: m=50 wielomianów dla $f_{szum}(x)$

Z powyższych wykresów dokładnie widać jak zwiększenie liczby wyznaczanych wielomianów poprawia dopasowanie funkcji aproksymującej. Pomimo zaburzeń aproksymacja okazała się odpowiednim narzędziem do przybliżenia szukanej funkcji. Dla $m = 30, 50$ wykresy prawie dokładnie pokrywają się z rzeczywistym wykresem funkcji f(x).

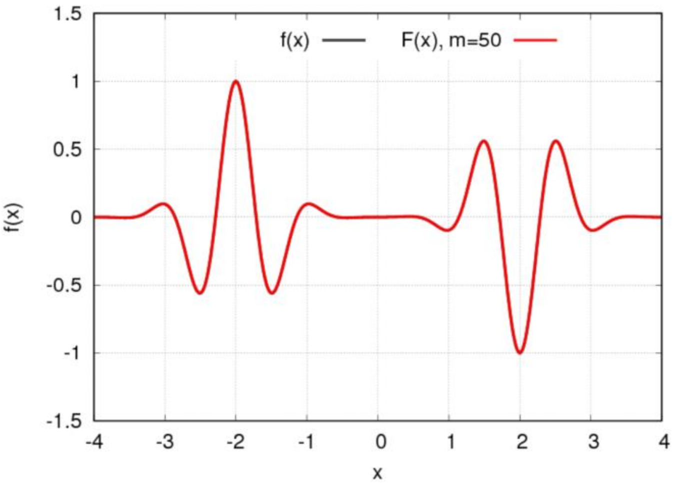
2.2.2 Wyniki aproksymacji funkcji bez losowego szumu



Wykres 5: m=10 wielomianów dla $f(x)$



Wykres 6: m=30 wielomianów dla $f(x)$



Wykres 7: m=50 wielomianów dla $f(x)$

Wykresy 5-7 obrazują skuteczność wykorzystywanego w tym ćwiczeniu narzędzia oraz wpływ zaburzeń w trakcie wykonywania np. pomiarów w doświadczeniu. Brak szumu skutkuje dla odpowiedniej liczby (w tym przypadku m=50) wielomianów pokryciem się wykresu funkcji aproksymowanej i aproksymującej.

3. Wnioski

Aproksymacja daje znacznie szersze spektrum zastosowań w porównaniu do poprzednio poznanego narzędzia – interpolacji. Główną zaletą stosowania aproksymacji jest jej „odporność" na zaburzenia w trakcie wykonywania pomiarów. Dodatkowo implementacja wyznaczania funkcji aproksymacyjnej jest stosunkowo efektywna i nietrudna.

Dokładność rezultatów i ilość wyznaczanych wielomianów zależna jest od aproksymowanej funkcji. Im jest ona bardziej skomplikowana i posiada więcej przegięć na swoim wykresie tym więcej wielomianów należy wyznaczyć. W naszym przypadku akceptowalne wyniki uzyskaliśmy już dla m=30 wielomianów, lecz pomimo zwiększenia tej liczby do 50, co poprawiło wygładzenie i dopasowanie, funkcja aproksymująca nie pokryła się w pełni z aproksymowaną, ze względu na szum.

4. Bibliografia

4.1 Wstęp teoretyczny napisany na podstawie wykładu dr hab. inż. Tomasza Chwieja - [link]
http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/aproksymacja_1819.pdf