Sprawozdanie – Laboratorium nr 8
Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Mikołaj Marchewa, 6 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja

Interpolacja sprowadza się do wyznaczenia w danym przedziale **funkcji interpolacyjnej**. Funkcja ta wykorzystuje początkowo zadane punkty, zwane węzłami i pozwala na wyznaczenie przybliżonych wartość dla punktów nie będących jej węzłami.

1.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja funkcjami sklejanymi **polega** na przybliżeniu takich funkcji interpolujących, które na przedziałach pomiędzy kolejnymi węzłami dają najmniejszą wartość tzw. krzywizny całkowitej. W praktyce oznacza to znajdowanie takich funkcji, które „wygładzają" krzywą na zadanych podprzedziałach $[x_i, x_{i+1}]$ przedziału $[a, b]$. Początkowo dane jest n+1 punktów:

$$a = x_0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{1}$$

będących węzłami funkcji interpolującej:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i\,(x), \quad x \in [a, b], \tag{2}$$

gdzie $s(x)$ jest kombinacją liniową elementów bazy $\{s_i(x)\}$ stopnia *m*, takich że:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \cdots + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i, x_{i+1}). \tag{3}$$

Funkcja sklejana stopnia 0 jest schodkową (przedziałami stałą), a stopnia 1 - łamaną. Najczęściej stosuje się 3 stopień funkcji sklejanych, zwanych kubicznymi, bądź sześciennymi. Do określania funkcji $s(x)$ takiego stopnia niezbędne jest wyznaczenie *n+3* parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa *n+1* pozostają dwa stopnie swobody. Należy zatem nałożyć dwa dodatkowe warunki, których rodzaj zależy od funkcji f(x) lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału [a, b]. Warunki są następujące:

- 1 rodzaj warunków (1 pochodna): $s^{(1)}(a+0) = \alpha_1, \quad s^{(1)}(b-0) = \beta_1,$
- 2 rodzaj warunków (2 pochodna): $s^{(2)}(a+0) = \alpha_2, \quad s^{(2)}(b-0) = \beta_2,$
- 3 rodzaj warunków stosuje si dla funkcji okresowych (warunek na 1 i 1 pochodną): $s^{(i)}(a+0) = s^{(i)}(b-0), i = 1{,}2.$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Głównym celem tych zajęć laboratoryjnych było napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych, będących wielomianami trzeciego stopnia, poprzez wyznaczanie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Pierwszym krokiem było napisanie procedury do wyznaczania drugich pochodnych w węzłach, co w praktyce sprowadzało się do rozwiązania układu równań liniowych $Am = d$, gdzie A jest macierzą postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}\ ,\ \mu_i = 1 - \lambda_i, \tag{4}$$

d jest wektorem wyrazów wolnych, a *m* to szukany wektor drugich pochodnych. Narzucone są też warunki brzegowe $m_1 = m_n = 0$, a odległości międzywęzłowe oznaczamy jako $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Kolejnym etapem zadania było napisanie procedury do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym $s_i(x)$.

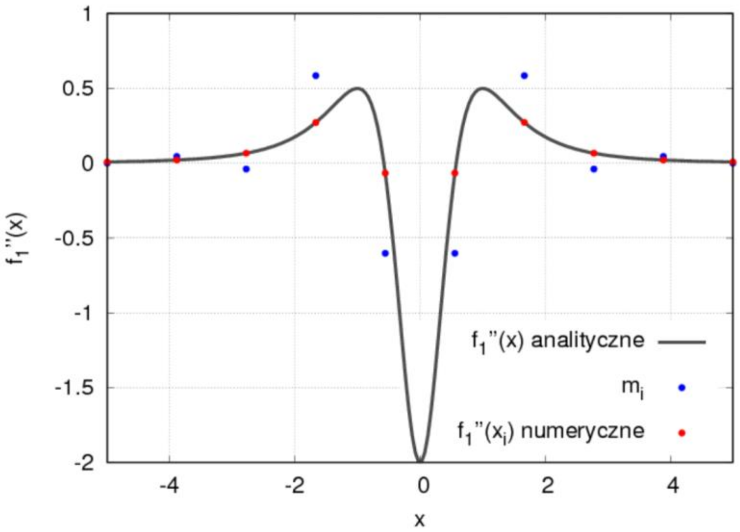
Poprawność działania kodu sprawdziliśmy na dwóch wybranych funkcjach:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, \tag{5}$$

$$f_2(x) = \cos(2x). \tag{6}$$

2.2 Wyniki

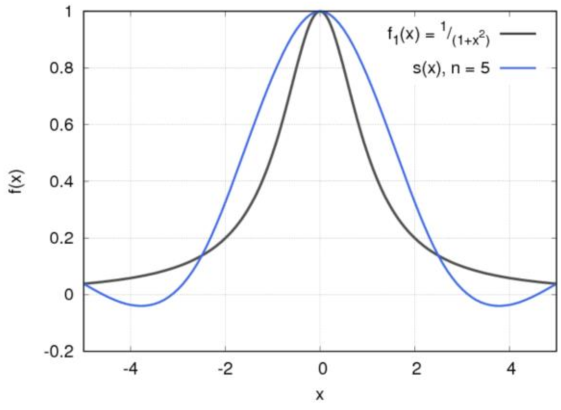
2.2.1 Wartości drugich pochodnych



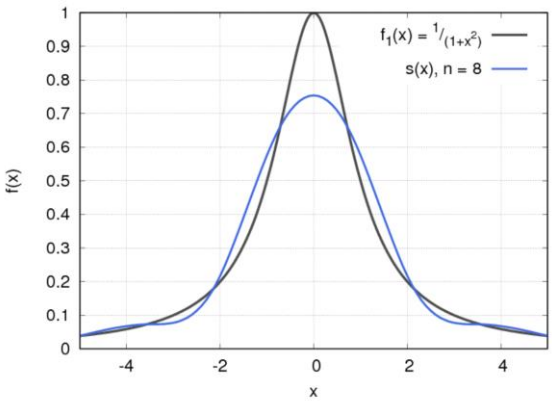
Wykres 1: Porównanie wartości drugich pochodnych funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wyznaczonych analitycznie, metodą ilorazu różnicowego oraz algorytmem interpolacji funkcjami sklejanymi dla n=10 węzłów.

Wartości drugich pochodnych wyznaczone numerycznie pokrywają się z tymi samymi wartościami wyznaczonymi analitycznie. Wartości te wyznaczone algorytmem interpolacji, na krańcach przedziału również dają zbliżone rezultaty do wartości analitycznych jednak w centralnej części wykresu różnice między nimi się powiększają.

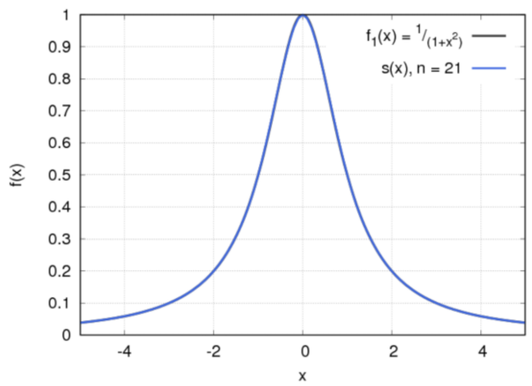
2.2.2 Wyniki interpolacji funkcji f_1



Wykres 2: Interpolacja f_1 dla n=5 węzłów



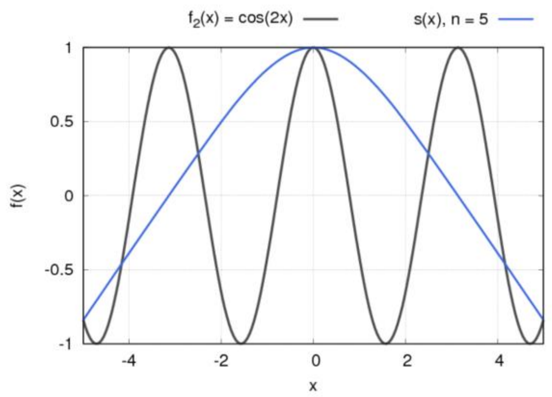
Wykres 3: Interpolacja f_1 dla n=8 węzłów



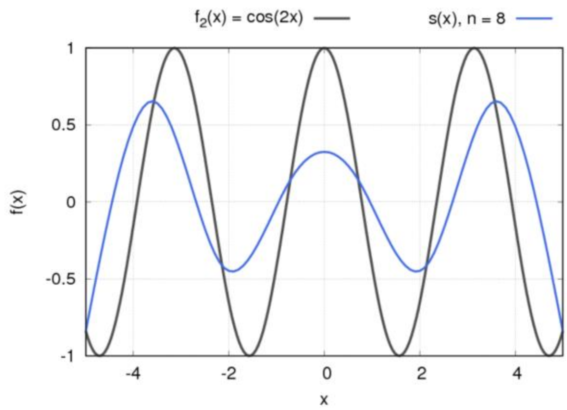
Wykres 4: Interpolacja f_1 dla n=21 węzłów

Zwiększenie liczby węzłów znacząco wpływa na poprawę jakości dopasowania funkcji sklejanej do oczekiwanego rezultatu. Jednak już przy n=5 węzłach widoczny jest zarys funkcji f_1.

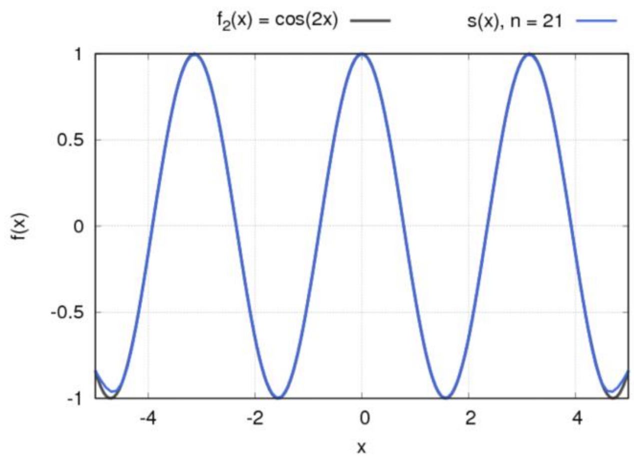
2.2.3 Wyniki interpolacji funkcji f_2



Wykres 5: Interpolacja f_2 dla n=5 węzłów



Wykres 6: Interpolacja f_2 dla n=8 węzłów



Wykres 7: Interpolacja f_2 dla n=21 węzłów

Podobnie jak w podpunkcie 2.2.2 większa ilość punktów będących węzłami funkcji interpolacyjnej skutkuje poprawą jakości interpolacji. Jednakże w odróżnieniu od poprzedniego przykładu widoczny jest też wpływ ilości „przegięć” na wykresie funkcji f_2. Im większa ich liczba tym więcej węzłów potrzebnych jest do zadowalającego dopasowania funkcji sklejanej

3. Wnioski

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach pozwala na uzyskiwanie zaskakująco zadowalających wyników dopasowania funkcji interpolacyjnej już dla niewielkiej liczby węzłów (n=5), pod warunkiem niewielkiej liczby „przegięć" na wykresie interpolowanej funkcji. Znaczącą poprawą względem metody interpolacji Newtona z poprzednich zajęć laboratoryjnych, jest wyeliminowanie efektu Rungego, bez konieczności optymalizacji położeń węzłów. Interpolacja funkcjami sklejanymi jest więc efektywnym narzędziem interpolacyjnym i daje akceptowalne rezultaty, których jakość możemy poprawić poprzez zwiększenie liczby węzłów.

4. Bibliografia

4.1 Wstęp teoretyczny napisany na podstawie wykładu dr hab. inż. Tomasza Chwieja - [link] http://home.agh.edu.pl/~chwiej/mn/interpolacja_1819.pdf