Sprawozdanie – Laboratorium nr 5

Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy symetrycznej metodą potęgową z redukcją Hotellinga

Mikołaj Marchewa, 8 kwietnia 2020

1. Wstęp teoretyczny

Do wykonania zadań z laboratorium posłużyliśmy się **metodą potęgową** w połączeniu z **redukcją Hotellinga.** Metoda potęgowa w sposób iteracyjny pozwala na wyznaczenie wartości własnej i odpowiadającego jej wektora własnego, dla macierzy kwadratowej *A* wymiaru $n \times n$. Jeżeli macierzy *A* jest macierzą symetryczną oraz spełnia poniższy warunek:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|, \tag{1}$$

(to znaczy że istnieje dokładnie jedna dominująca wartość własna tej macierzy), wówczas wykonując ciąg mnożeń *A* przez wektor startowy: $x_0 = [1,1,\ldots,1]$, uzyskujemy kolejne poszukiwane wartości własne. Procedura ta jest równoznaczna z wykonaniem mnożenia macierzy A podniesionej do potęgi k (gdzie k = 1,2,…,n jest liczbą iteracji, które chcemy wykonać) przez wektor startowy:

$$A^k \cdot x_0 = x_k. \tag{2}$$

Wektor x_k zmierza do wektora odpowiadającego największej wartości własnej i dzięki niemy wyznaczamy kolejne wartości λ_k.

Dla porównania użyliśmy również procedury ***tred2*** oraz ***tqli*** z biblioteki *Numerical Recipes.* Pierwsza z nich wykorzystując metodę Householder'a redukuje macierz kwadratową *A* do postaci trójdiagonalnej *T* i w wyniku działania zwraca d - wektor elementów zapisanych na diagonali macierzy trójdiagonalnej, oraz e – wektor elementów pozadiagonalnych szukanej macierzy:

$$T = P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad \rightarrow \qquad T = \begin{pmatrix} d[1] & e[2] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ e[2] & d[2] & e[3] & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e[3] & d[3] & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e[n-1] & d[n-1] & e[n] \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e[n] & d[n] \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Z kolei *tqli* korzystając z algorytmu QL zwraca wektor wartości własnych danej macierzy trójdiagonalnej.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Głównym zadaniem tych zajęć laboratoryjnych była implementacja metody potęgowej z redukcją Hotellinga (I.) do wyznaczenia dominującej wartości własnej i odpowiadającej jej wektora własnego macierz kwadratowej *A*. W celu sprawdzenia poprawności wykonanego zadania, wartości te uzyskaliśmy również wykorzystując funkcje biblioteki *Numerical Recipes* (II.).

Pierwszym zadaniem było stworzenie i wypełnienie symetrycznej macierzy *A* o wymiarze n=7, zgodnie z poniższym równaniem:

$$A_{i,j} = \sqrt{i+j} \tag{4}$$

oraz stworzenie jej identycznej kopii *W*, którą wykorzystamy do metody (I.).

(II.)

Macierz *A* zredukowaliśmy do macierzy trójdiagonalnej *T* przy pomocy procedury *tred2, a następnie wykorzystaliśmy uzyskane przekształcenie do funkcji tqli,* która zwróciła gotowy wektor wartości własnych, który zawiera szukaną dominującą wartość własną macierzy A.

(I.)

Na początku dla metody potęgowej z redukcją Hotellinga ustaliliśmy numer poszukiwanej wartości własnej i jej wektora: k = 1,2,…,n oraz ilość iteracji (przybliżeń) dla każdego k-tego wektora: i=8. Przed wyliczeniem k-tego wektora, każdorazowo inicjalizujemy wektor startowy $x_0 = [1,1,\dots,1]$, a po zakończonej pętli przybliżającej k-ty wektor, wykorzystujemy redukcję Hotelinga. K-ty wektor przybliżamy zgodnie z poniższymi przekształceniami:

$$x_{i+1} = W_k \cdot x_i, \tag{5}$$

$$\lambda_i = \frac{x_{i+1}^T \cdot x_i}{x_i^T \cdot x_i}, \tag{6}$$

$$x_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{\|x_{i+1}\|_2}, \tag{7}$$

$$x_i = x_{i+1}, \tag{8}$$

gdzie λ_i oznacza i-te przybliżenie wartości własnej.

Przeprowadzana redukcja Hotellinga liczona jest z poniższego wzoru:

$$W_{k+1} = W_k - \lambda_k \vec{x}_k^i \left(\vec{x}_k^i\right)^T. \tag{9}$$

2.2 Wyniki

Macierz *A,* której wartości i wektorów własnych poszukiwaliśmy przyjęła następującą postać:

$$A = \begin{pmatrix} 1.41421 & 1.73205 & 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 \\ 1.73205 & 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 \\ 2 & 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 \\ 2.23607 & 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 \\ 2.44949 & 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 \\ 2.64575 & 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 & 3.60555 \\ 2.82843 & 3 & 3.16228 & 3.31662 & 3.4641 & 3.60555 & 3.74166 \end{pmatrix}.$$

Tabela wartości własnych otrzymanych z metod (I.) i (II.), a także z metody (II.) bez normalizacji wektora x_k:

	Metoda (I.)	Metoda (II.)	Metoda (II.) bez normalizacji x_k
λ_1	19.7862	19.7862	19.7862
λ_2	-0.712341	-0.71234	-nan
λ_3	-0.0133178	-0.0133172	-nan
λ_4	-0.00033598	-0.000335307	-nan
λ_5	-0.00000710793	-0.00000660271	-nan
λ_6	0.000000443579	-0.000000849657	-nan
λ_7	-0.000000402198	-0.000000238169	-nan

Tab. 1 Porównanie uzyskanych wektorów własnych macierzy *A* przy użyciu funkcji biblioteki *Numerical Recipes* (I.), metodą potęgową z redukcją Hotellinga (II.) oraz metodą (II.) bez normalizacji przybliżonego wektora x_k.

3. Wnioski

- Tab. 1 dowodzi, że wszystkie trzy metody odpowiednio przybliżają dominującą wartość własną macierzy.
- Użycie metody potęgowej z redukcją Hotellinga (II.) pozwala na uzyskanie kolejnych, wartości własnych, lecz ich kolejne wyniki zaczynają odbiegać od rezultatu otrzymanego przy użyciu funkcji tred2 i tqli (I.), który jest dokładniejszy.
- Brak normowania wektora x_k w kolejnych przybliżeniach, choć zwiększa efektywność działania metody (II.), to uniemożliwia znalezienie kolejnych wartości wartości własnych. Spowodowane jest to powstawaniem błędu nadmiaru/niedomiaru, w wyniku czego pojawiają się błędy przy redukcji Hotellinga.