Sprawozdanie – Laboratorium nr 6

Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia (metoda Newtona)

Mikołaj Marchewa, 22 kwietnia 2020

1. Wstęp teoretyczny

Wiedząc, że funkcja f(x) jest określona i ciągła w punkcie x_0 możemy wyznaczyć jej pochodną zgodnie z definicją:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

Pochodna funkcji w punkcie jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej i pozwala na zbadanie przebiegu zmienności danej funkcji. I tak ujemny znak pochodnej świadczy o tym, że funkcja maleje w danym punkcie, dodatni zaś świadczy o jej lokalnym wzroście, a wartość zero sygnalizuje minimum lub maksimum lokalne. Jeśli pochodna przyjmuje duże wartości bezwzględne, wówczas otrzymujemy informację o gwałtownym wzroście lub spadku. Dzięki pochodnej możemy wyznaczyć wzór na styczną w punkcie, który dany jest wzorem:

$$y = f'(x_0) \cdot x + r. \tag{2}$$

Przy założeniu, że na krańcach danego przedziału $< a, b >$ pewnego wielomianu przyjmuje on wartości o różnych znakach, możemy użyć stycznych do znajdowania przybliżonych miejsc zerowych tej funkcji. Metoda ta nosi nazwę metody stycznych, ponieważ wyznacza nowe przybliżenie pierwiastka wielomianu x_{j+1}, na podstawie punktu przecięcia **stycznej** w punkcie x_j z osią OX.

Zmodyfikowana wersja metody stycznych o iteracyjne dzielenie wielomianu przez dwumian $(x - x_j)$ nosi nazwę metody Newtona (zwana również metodą Newtona-Raphsona). W ogólności wielomian postaci:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0, \tag{3}$$

dla którego pierwiastki chcemy znaleźć, dzielimy go przez dwumian i uzyskujemy:

$$f(x) = (x - x_j) \cdot (b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + b_0) + R_j, \tag{4}$$

gdzie kolejne współczynniki $b_k$wyznaczamy w sposób rekurencyjny zgodnie z poniższymi wzorami:

$$b_n = 0, \tag{5}$$

$$b_k = a_{k+1} + x_j \cdot b_{k+1}, \tag{6}$$

$$R_j = a_0 + x_j \cdot b_0, \tag{7}$$

dla $k = n - 1, n - 2, \ldots, 0$.

Wykonując drugie analogiczne dzielenie przez ten sam dwumian otrzymujemy:

$$f(x) = (x - x_j)^2 \cdot (c_{n-2} \cdot x^{n-2} + c_{n-3} \cdot x^{n-3} + \cdots + c_0) + R_j' \cdot (x - x_j) + R_j. \tag{8}$$

We wzorze (8) kolejne współczynniki c_n, a także resztę z dzielenia $R_j{}'$ wyznaczamy analogicznie do współczynników b_n i R_j zgodnie z wzorami (5), (6), (7). Metoda Newtona wykorzystuje zależności pomiędzy tymi dwoma resztami z dzielenia $Rj\ i\ Rj'$, a kolejne przybliżenia miejsca zerowego wyjściowego wielomianu (3) liczymy ze wzoru:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{R_j}{R_j{}'}. \tag{9}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Głównym celem tych zajęć było wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu, wykorzystując metodę iterowanego dzielenia.

Na początku ustaliliśmy stopień wielomianu *N*, a także wypełniliśmy wektor *a* współczynnikami zadanego wielomianu, który przyjął następującą postać:

$$f(x) = x^5 + 14 \cdot x^4 + 33 \cdot x^3 - 92 \cdot x^2 - 196 \cdot x + 240\ . \tag{10}$$

Przed przystąpieniem do przybliżania każdego kolejnego zera ustaliliśmy punkt startowy na $x_0 = 0.0$ oraz wyznaczyliśmy aktualny stopień wielomianu *n*. Następnie iteracyjnie wyznaczyliśmy reszty z podwójnego dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - x_j)$ z zastosowaniem wzorów (5), (6), (7) oraz kolejne przybliżenia szukanego pierwiastka x_{j+1} poprzez implementację wzoru (9), aż do uzyskania zadanej dokładności 10^{-7} (bezwzględnej różnicy pomiędzy przybliżeniem x_{j+1} i x_j).

Ostatnim etapem przed przybliżeniem kolejnego zera jest zredukowanie wielomianu poprzez przepisanie współczynników wielomianu niższego stopnia b_k do wektora a_k.

2.2 Wyniki

Miejsce zerowe numer: 1			
Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
1	1.22449	240	-196
2	0.952919	-43.1289	-158.813
3	0.999111	10.5714	-228.86
4	1	0.195695	-220.179
5	1	7.96468e-05	-220
6	1	1.32729e-11	-220

Tab.1 Kolejne przybliżenia pierwszego miejsca zerowego

Miejsce zerowe numer: 2			
Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
1	-5.45455	-240	-44
2	-4.46352	-120.975	122.071
3	-4.10825	-24.2755	68.3304
4	-4.00957	-4.31754	43.7539
5	-4.00009	-0.347977	36.6891
6	-4	-0.00323665	36.0065
7	-4	-2.90891e-07	36

Tab.2 Kolejne przybliżenia drugiego miejsca zerowego

Miejsce zerowe numer: 3			
Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
1	15	-60	4
2	9.20218	5850	1009
3	5.53752	1687.53	460.488
4	3.38316	469.259	217.818
5	2.33534	118.159	112.767
6	2.0277	22.07	71.739
7	2.00021	1.67505	60.9441
8	2	0.0128842	60.0073
9	2	7.83733e-07	60

Tab.3 Kolejne przybliżenia trzeciego miejsca zerowego

Miejsce zerowe numer: 4			
Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
1	-2.30769	30	13
2	-2.94284	5.32544	8.38462
3	-2.99954	0.403409	7.11433
4	-3	0.00321531	7.00092
5	-3	2.10929e-07	7

Tab.4 Kolejne przybliżenia czwartego miejsca zerowego

Miejsce zerowe numer: 5			
Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
1	-10	10	1
2	-10	0	1

Tab.5 Kolejne przybliżenia piątego miejsca zerowego

Powyższe pięć tabel przedstawia wyniki uzyskiwane z przybliżania kolejnych miejsc zerowych zadanego wielomianu (10). Dokładność rzędu 10^{-7} została uzyskana w maksymalnie dziewięciu (Tab.3) i minimalnie dwóch iteracjach (Tab.5).

3. Wnioski

Metoda Newtona jest niezwykle wydajnym narzędziem wyznaczania zer funkcji. Należy jednak pamiętać, że do jej implementacji dana funkcja musi spełniać określone kryteria. Ponadto dla tej metody kłopotliwą częścią stają się pierwiastki wielokrotne dla których zbieżność algorytmu staje się liniowa. W tym przypadku metoda stycznych może okazać się znacząco wolniejsza niż inne rozwiązania równań o zbieżności liniowej.