Sprawozdanie – Laboratorium nr 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Mikołaj Marchewa, 11 marca 2020

1. Wstęp teoretyczny

W trakcie naszych zajęć laboratoryjnych wykorzystywaliśmy rozkład *LU* macierzy współczynników. Rozkład ten polega na odnalezieniu takich dwóch macierzy *L* i *U*, które spełniają poniższe założenia:

$$A = L \cdot U \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

gdzie:
L jest macierzą trójkątną wypełnioną zerami powyżej diagonali i jedynkami na jej przekątnej,
U jest to macierz trójkątna górna,
A jest zadaną macierzą kwadratową.

Wiedząc, że iloczyn diagonali *L=1,* trywialne staje się obliczenie wyznacznika macierzy *A*:

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U).$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy, to wartość informująca nas o tym w jakim stopniu błąd zaokrąglania liczb przez komputer wpłynął na uzyskany wynik. K(A) jest więc liczbą, która informuje nas z jaką dokładnością, możemy podać wynik (tzn. ile liczb po przecinku). Wskaźnik ten wyliczamy jako iloczyn normy macierzy *A* oraz jej odwrotności:

$$K(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||,$$

$$||A||_{1,\infty} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|.$$

W trakcie zajęć wszystkie powyższe przekształcenia uzyskiwaliśmy przy użyciu biblioteki ***GSL***.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Pierwszym zadaniem było znalezienie rozkładu LU zadanej kwadratowej macierzy A o 4 kolumnach i 4 wierszach. Wartości w zadanej macierzy A wyliczaliśmy na podstawie wzoru:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\delta},$$

gdzie $\delta = 2$.

Następnie obliczyliśmy wyznacznik macierzy *A*, który jest równy iloczynowi wartości na diagonali macierzy *U* i zapisaliśmy go do pliku.

Kolejnym krokiem było znalezienie macierzy odwrotnej, której kolejne kolumny uzyskiwaliśmy przy pomocy funkcji ***gsl_linalg_LU_solve()*** oraz wektorów wyrazów wolnych:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wyliczając iloczyn $A \cdot A^{-1}$ winniśmy uzyskać macierz jednostkową. Na jej podstawie obliczyliśmy normy macierzy A oraz A^{-1}, których iloczynem jest wskaźnik uwarunkowania macierzy A.

2.2 Wyniki

Wszystkie uzyskane wyniki w trakcie trwania ćwiczeń laboratoryjnych zapisywaliśmy do pliku. I tak macierz *A* ukształtowała się następująco:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.2 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125 \end{pmatrix}.$$

Z kolei rozkład LU powyższej macierzy dał poniższe rezultaty:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 & 0 \\ 0.666667 & 0.833333 & 1 & 0 \\ 0.4 & 1 & -0.857143 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0.0333333 & 0.0416667 & 0.0428571 \\ 0 & 0 & -0.00138889 & -0.00238095 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000102041 \end{pmatrix}.$$

Wartości współczynników znajdujących się na diagonali macierzy *U* z rozkładu *LU macierzy* A kształtują się następująco:

u_{11}	0.5
u_{22}	0.0333333
u_{33}	-0.0013889
u_{44}	0.000102041

Ich iloczyn jeszcze nie daje nam pełnej informacji o wyznaczniku macierzy *A.* Jego znak obarczony jest błędem wynikającym z liczby permutacji jakie na macierzy *A* wykonała użyta wcześniej funkcja ***gsl_linalg_LU_decomp().*** W naszym przypadku ich liczba okazała się nieparzysta, o czym świadczy ujemna wartość trzeciego argumentu dostarczonego do powyższej funkcji, po jej użyciu. Tak więc, szukany wyznacznik macierzy *A* po korekcji znaku przyjął następującą wartość:

$$det(A) = 2.36206 \cdot 10^{-9}.$$

Odwrócona macierz *A*, obliczona dzięki funkcji ***gsl_linalg_LU_solve()*** ukształtowała się następująco:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}.$$

Z kolei iloczyn $A \cdot A^{-1}$ dał następujący wynik:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2.27374 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ -2.84217 \cdot 10^{-14} & 1 & 4.54747 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 0 & -2.27374 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Iloczyn norm odwrotności A i normy A, będący wskaźnikiem uwarunkowania macierzy A wynosi:

$$K(A) = 14700.$$

3. Wnioski

Istotnym elementem wyliczania wyznacznika macierzy przy użyciu rozkładu LU w powyższym zadaniu, była liczba permutacji, które zostały wykonane przez funkcję ***gsl_linalg_LU_decomp().*** Ponadto do pomijalnym elementem jest tu *det(L),* który z założenia ma przyjmować wartość 1, więc nie wpływa on na obliczany wyznacznik macierzy A.

Ze względu na niedokładność zapisu liczb rzeczywisty w systemie binarnym, po wymnożeniu $A \cdot A^{-1}$, otrzymaliśmy macierz mocno zbliżoną, jednak niedokładną macierz jednostkową. Rezultat ten był w pełni oczekiwany i uzasadniony. Wynika to ze wskaźnika uwarunkowania, który przyjął stosunkowo bardzo dużą wartość. Tak więc zadanie zostało źle uwarunkowane. Błąd wynikający z numerycznej reprezentacji liczb wprowadza nieproporcjonalnie duży błąd w odpowiedzi.