Sprawozdanie – Laboratorium nr 1

Rozwiązywanie układu równań liniowych metodami bezpośrednimi

Mikołaj Marchewa, 3 marca 2020

1. Wstęp teoretyczny

Do obliczeń w czasie naszych laboratoriów wykorzystaliśmy **metodę Gaussa-Jordana**, która umożliwia rozwiązanie równania macierzowego postaci:

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Metoda ta opiera się o sprowadzenie macierzy ***A*** do postaci jednostkowej, czyli takiej, w której powyżej jak i poniżej przekątnej znajdują się same zera, zaś na przekątnej – jedynki.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Do otrzymania powyższego rezultatu możemy wykonywać operacje na wierszach np. dodawać, odejmować lub mnożyć przez współczynnik różny od zera. Pierwszym krokiem jest uzyskanie samych zer poniżej, a następnie analogicznego wyniku powyżej przekątnej. Taka postać macierzy ***A*** pomnożona przez wektor $\vec{x}$ zapewnia prostotę odczytania kolejnych wartości x_i.

W programie użyliśmy biblioteki *Numerical Recipes.* Zawiera ona między innymi funkcję **matrix(),** pozwalająca na wygodne alokowanie pamięci dla macierzy, a także procedurę **gaussj(),** która implementuje wyżej wymienioną metodę Gaussa-Jordana i zwraca macierz wyników.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

W czasie ćwiczeń laboratoryjnych rozważaliśmy oscylator harmoniczny, którego wzór wynikający z drugiej zasady dynamiki Newtona kształtuje się następująco:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t). \tag{1}$$

W danej chwili czasu ***t*** druga pochodna wychylenia od położenia początkowego po czasie szacuje się wzorem:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}.$$

Uzależniając każdy kolejny wyraz x_{i+1} od dwóch poprzednich x_i i x_{i-1}, czyli zapisując równanie (1) w postaci iteracyjnej, wprowadzamy następujące oznaczenia: $\Delta t = h$ oraz $x_i = x(ih)$. Dzięki temu otrzymujemy:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2) \cdot x_i + x_{i-1} = 0 \qquad (2)$$

Z kolei powyższy wzór (2) możemy zapisać w postaci równania macierzowego:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & (\omega^2 h^2 - 2) & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ V_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Ponieważ wzór ten uzależnia kolejne swoje wyrazy od dwóch poprzednich, konieczna okazuje się znajomość x_0 oraz x_1. Wychylenie początkowe oscylatora jest równe z wzoru (3) $x_0 = B$, zaś początkowa prędkość jest równa: $\frac{x_1 - x_0}{h} = V_0$. Do rozwiązania tego równania wykorzystujemy, opisaną w punkcie **1.** tego sprawozdania, metodę Gaussa-Jordana. Ustalamy więc niezbędne dane początkowe następująco:

B = 1,

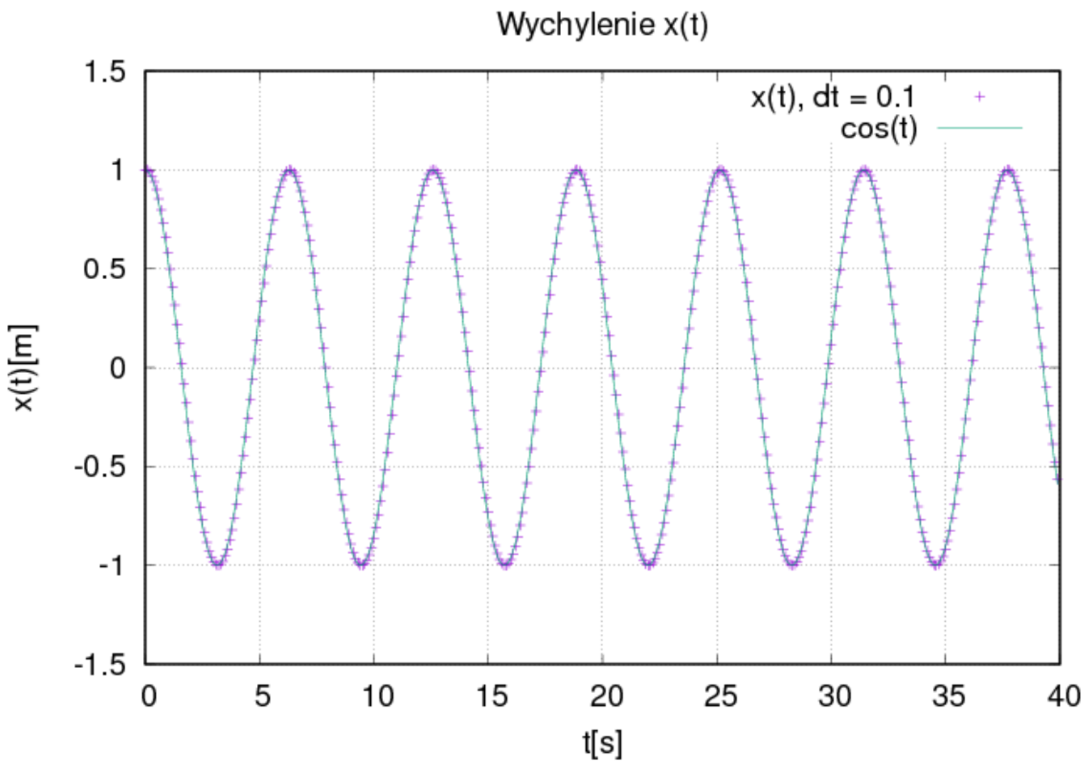
$\omega = \frac{k}{m} = 1,$

$\mathrm{V}_0 = 0,$

krok czasowy: *h = 0.1*.

2.2 Wyniki

Uzyskane wyniki zapisaliśmy do pliku *out.dat.* Następnie dzięki programowi *gnuplot* stworzyliśmy na ich podstawie następujący wykres:



Rys. 1: Wykres zależności wychylenia oscylatora harmonicznego w zależności od czasu oraz wykres funkcji cosinus.

Powyższy wykres obrazuje pokrywanie się uzyskanych wyników z wykresem funkcji cosinus. Fakt ten stanowi potwierdzenie poprawności otrzymanych rezultatów.

3. Wnioski

Użycie metody Gaussa-Jordana pozwala na rozwiązywanie, zawartych w temacie ćwiczeń laboratoryjnych, układów równań liniowych. Na dokładność otrzymanych rezultatów wpływa głównie krok czasowy pomiędzy wyliczaniem kolejnych punktów wychylenia oscylatora harmonicznego. Jednakże wartość kroku całkowania należy dobrać na tyle roztropnie, by obliczenia algorytmu mieściły się w rozsądnym czasie wykonania. Wynika to z kwadratowej złożoności obliczeniowej tej procedury.