

MNUM - PROJEKT 3

zadanie 3.2

Treść zadania

Ruch punktu na płaszczyźnie (x_1, x_2) jest opisany równaniami:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_1(0.6 - x_1^2 - x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2(0.6 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

Należy obliczyć przebieg trajektorii ruchu tego punktu w przedziale $[0, 20]$ dla warunków początkowych:

$$x_1(0) = 11 \qquad x_2(0) = 6$$

Rozwiązanie proszę znaleźć korzystając z zaimplementowanej przez siebie w języku Matlab w formie funkcji (możliwie uniwersalnej, czyli solwera, o odpowiednich parametrach wejścia i wyjścia) metody Rungego–Kutty-Fehlberga drugiego rzędu przy zmiennym kroku z szacowaniem błędu techniką pary metod włożonych (RKF23)

Równania trajektorii

```
function dxdt = trajectory(x)
    dx1dt = x(2) + x(1) * (0.6 - x(1)^2 - x(2)^2);
    dx2dt = -x(1) + x(2) * (0.6 - x(1)^2 - x(2)^2);
    dxdt = [dx1dt; dx2dt];
end
```

Metoda Rungego–Kutty-Fehlberga drugiego rzędu (RKF23)

Metoda RK rzędu 2

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{i=1}^m w_i^* \cdot k_i$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_i = f(x_n + c_i \cdot h, y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot k_j) \quad i = 2, 3, \dots, m$$

Metoda RK rzędu 3

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{i=1}^m w_i \cdot k_i$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_i = f(x_n + c_i \cdot h, y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot k_j) \quad i = 2, 3, \dots, m+1$$

Po wykonaniu kroku metodą drugiego rzędu [p=2]

$$y(x_n + h) = y_n + h \cdot \sum_{i=1}^m w_i^* \cdot k_i(h) + \frac{r_n^3(0)}{3!} h^3 + O(h^4)$$

Po wykonaniu kroku metodą trzeciego rzędu [p+1 = 3]

$$y(x_n + h) = y_n + h \cdot \sum_{i=1}^m w_i \cdot k_i(h) + \frac{r_n^4(0)}{4!} h^4 + O(h^5)$$

Po odjęciu stronami i pominięciu ogona (funkcji rzędu $O(h^5)$) otrzymujemy oszacowanie błędu metody rzędu p (niższego)

$$\delta_n(h) = \frac{r_n^3(0)}{3!} h^3 = h \cdot \sum_{i=1}^m (w_i - w_i^*) \cdot k_i(h) + h w_{m+1} k_{m+1}(h)$$

Parametry dla metody RKF23

c_i	a_{ij}			w_i^*	w_i
0				$\frac{214}{891}$	$\frac{533}{2106}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{33}$	0
$\frac{27}{40}$	$-\frac{189}{800}$	$\frac{729}{800}$		$\frac{650}{891}$	$\frac{800}{1053}$
1	$\frac{214}{891}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{650}{891}$		$-\frac{1}{78}$

Wyznaczanie zmiennej długości kroku

Długość kolejnego kroku obliczamy z:

$$h_{n+1} = s \cdot \alpha \cdot h_n$$

gdzie $s < 1$ (np. dla RK4, RKF45: $s \approx 0.9$)

Współczynnik modyfikacji kroku wyznaczamy z:

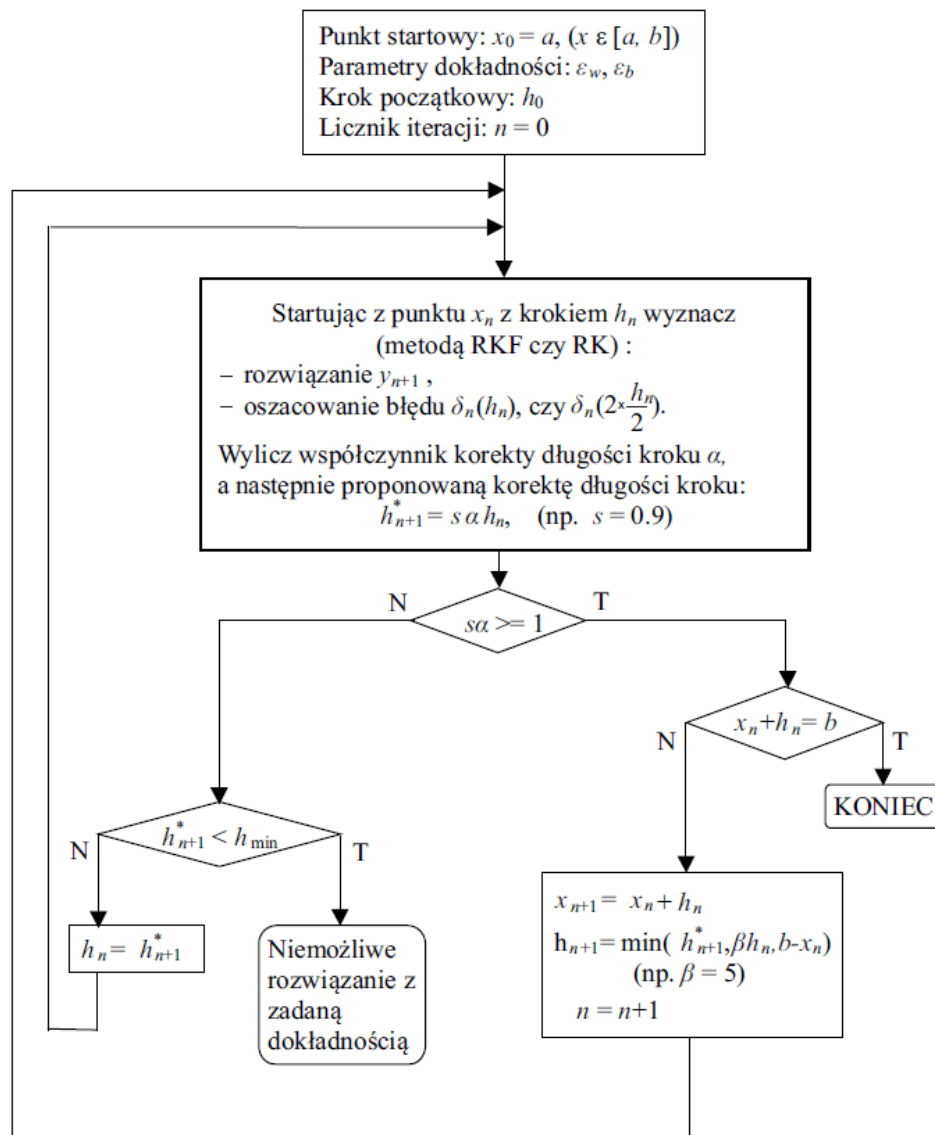
$$\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{\delta_n(h)} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Parametr dokładności obliczeń:

$$\varepsilon = |y_n| \cdot \varepsilon_w + \varepsilon_b$$

gdzie ε_w - dokładność względna, ε_b - dokładność bezwzględna

Algorytm:



Implementacja solwera

```
function [tout, yout, hout, dout] = RKF23(f, t_span, x0, h0, hmin, eW, eB)
% CEL
%     Wyznaczanie rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych
%     za pomocą metody Rungego-Kutty-Fehlberga (RKF23)
%
% PARAMETRY WEJŚCIOWE
%     f       - funkcja przyjmująca jako parametry czas oraz wartości
%               w punkcie, a zwracająca pochodną dx/dt
%     t_span  - wektor dwu wartościowy - przedział poszukiwania
%               rozwiązania
%     x0      - wektor punktów startowych
%     h0      - początkowa wartość kroku
%     hmin    - ustalona minimalna wielkość kroku - poniżej tego
%               kroku kończymy program - uznajemy, że nie da się
%               znaleźć wyniku z zadaną dokładnością
%     eW      - wartość dozwolonego błędu względnego
%     eB      - wartość dozwolonego błędu bezwzględnego
%
% PARAMETRY WYJŚCIOWE
%     tout    - wektor kolejnych wartości czasu t
%     yout    - macierz kolejnych wartości x w kolejnych iteracjach
%               algorytmu
%     hout    - wektor kroków w kolejnych iteracjach algorytmu
%     dout    - macierz szacowanych błędów dla wartości x w kolejnych
%               iteracjach algorytmu
% stałe
s = 0.9;
beta = 5;
% inicjalizacja
T(1, :) = t_span(1);
Y(1, :) = x0;
H(1, :) = h0;
D(1, :) = 0;
% przechodzimy przez przedział wyznaczając kolejne punkty
n = 1;
while (T(n) <= t_span(2))
    x = Y(n, :)' ;
    h = H(n);
    % wyznaczenie współczynników k
    k1 = f(x);
    k2 = f(x + h * (1/4) * (      k1
                                ));
    k3 = f(x + h * (1/800) * (-189 * k1 + 729 * k2
                                ));
    k4 = f(x + h * (1/891) * (214 * k1 + 27 * k2 + 650 * k3));

    % wyznaczenie wartości dla metody rzędu 2 i 3
    x2 = x + (1/891) * h * (214 * k1 + 27 * k2 + 650 * k3
                            );
    x3 = x + (1/2106) * h * (533 * k1 + 0 * k2 + 1600 * k3 - 27 * k4);
    % oszacowanie błędu metody (2 rzędu)
    delta = norm(x3 - x2, inf);
```

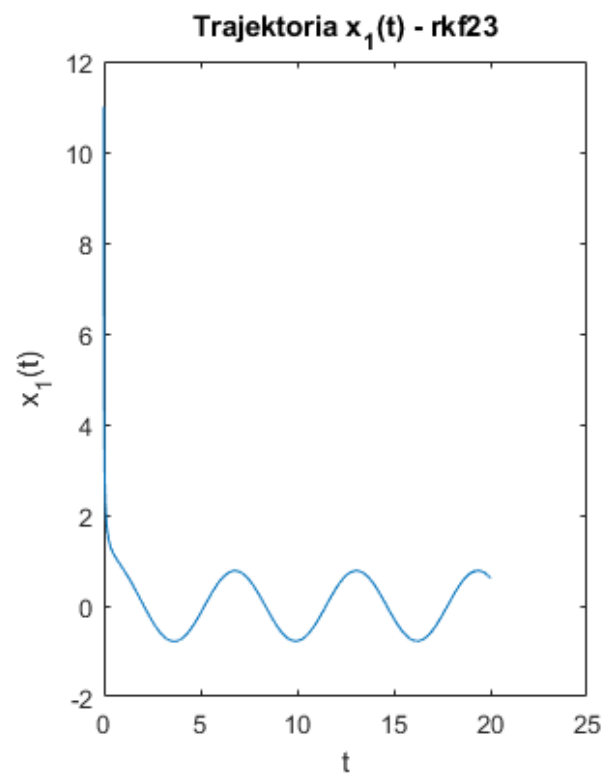
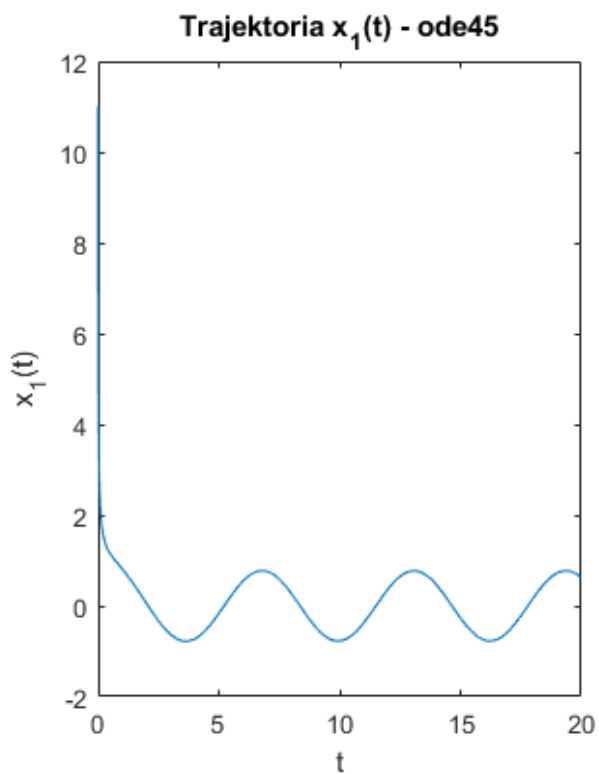
```

% wyznaczenie kolejnego rozmiaru kroku
e = abs(Y(n)) * eW + eB;
alpha = (e/abs(delta))^(1/3);
h1 = H(n) * s * alpha;
if (s * alpha >= 1)
    % wyznaczenie nowego połozenia
    Y(n+1, :) = x3;
    T(n+1) = T(n) + H(n);
    H(n+1) = min([h1, beta * H(n), t_span(2) - T(n)]);
    D(n+1, :) = delta;
    n = n + 1;
else
    if (h1 < hmin)
        error("Niemożliwe rozwiązanie z zadaną dokładnością")
    else
        H(n) = h1; % powtórzenie iteracji
    end
end
end
tout = T; yout = Y; hout = H; dout = D;
end

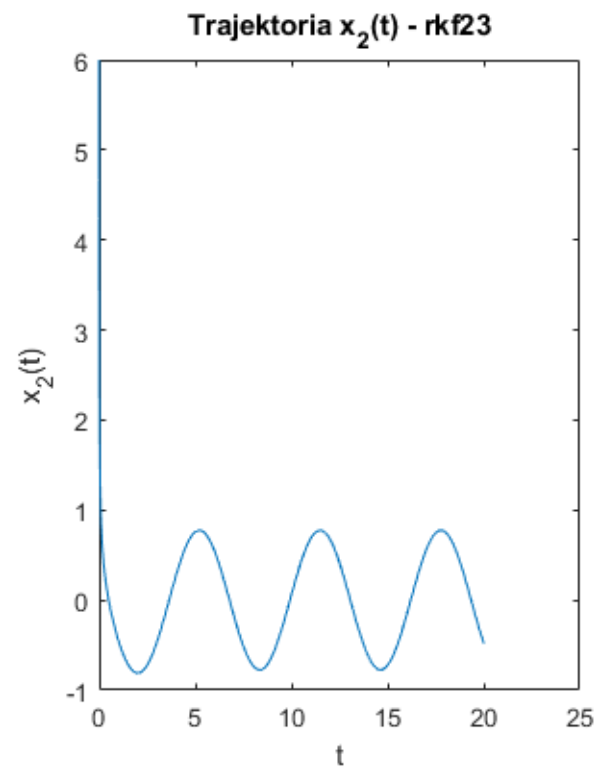
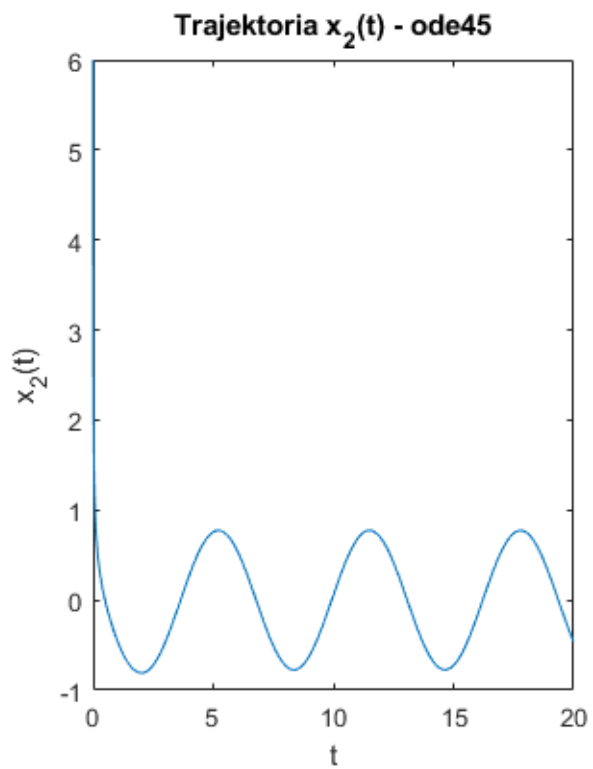
```

Wyniki

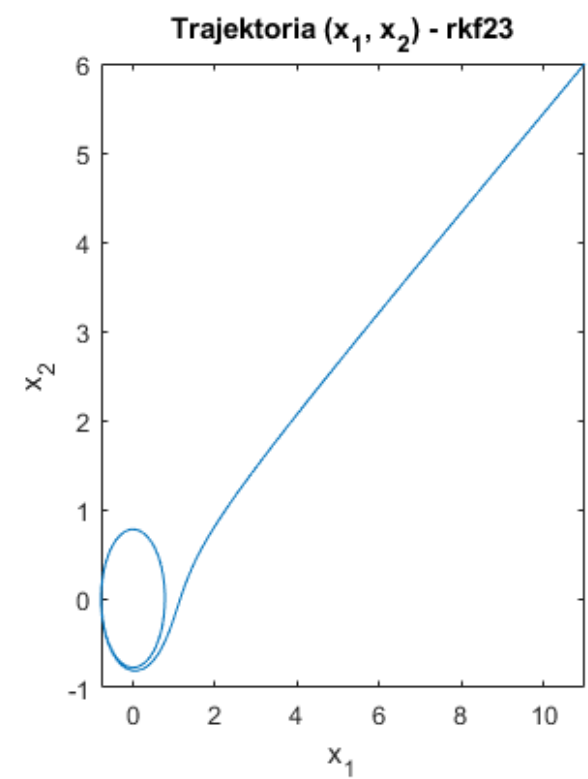
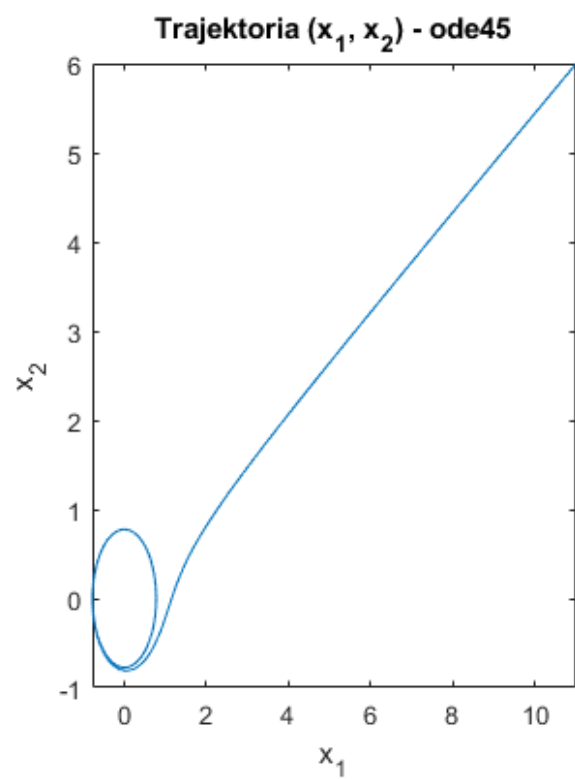
- 1) wykresy trajektorii $x_1(t)$

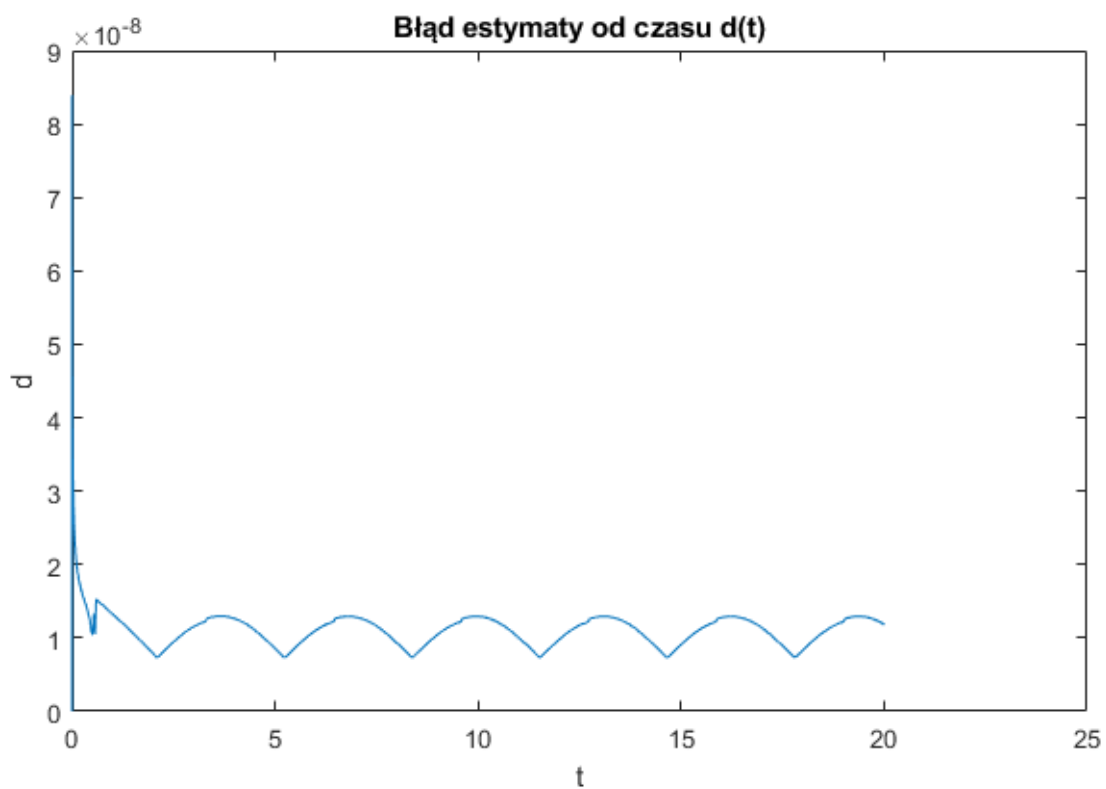
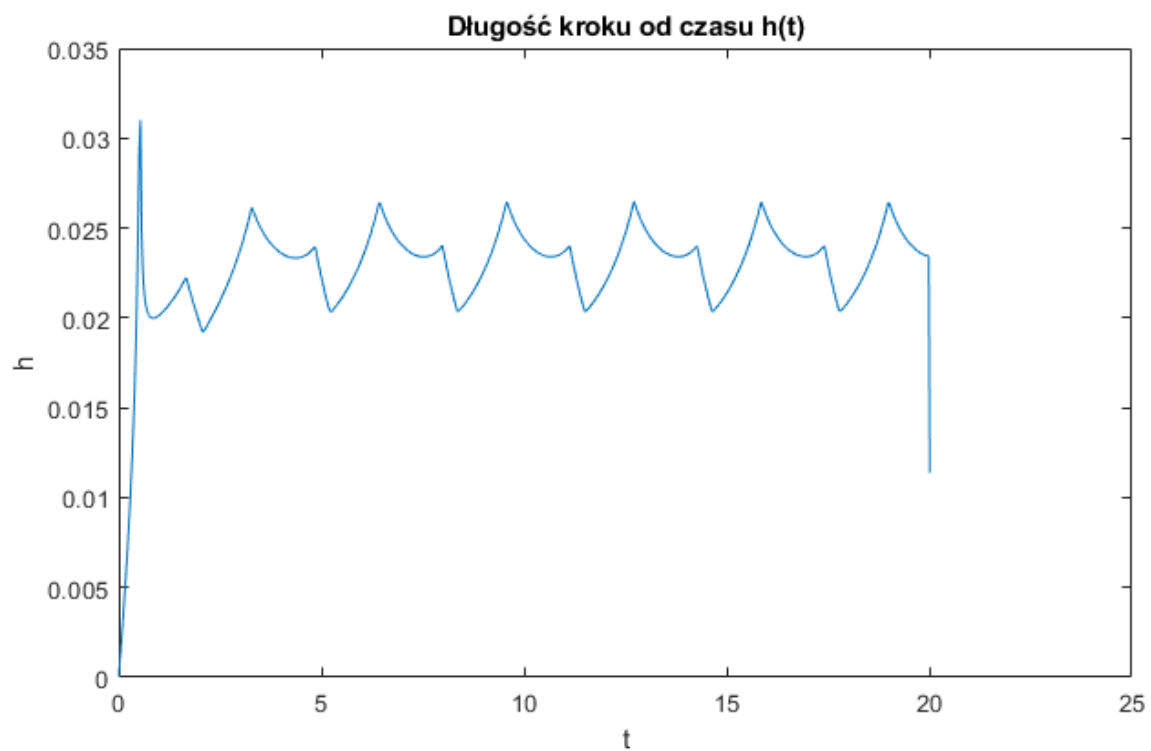


2) wykresy trajektorii $x_2(t)$



3) wykresy trajektorii na płaszczyźnie (x_1, x_2)





Przyjęte wartości parametrów:

- minimalny krok $h_{min} = 1e - 5$
- dokładność względna $\varepsilon_w = 1e - 8$
- dokładność bezwzględna $\varepsilon_b = 1e - 8$

Komentarz

Jako wartości dokładności wybrałem $1 \cdot 10^{-8}$, ponieważ wyniki przy takiej dokładności maszynowej są już praktycznie nierozróżnialne w numerycznych przybliżeniach. Dla takiej dokładności największym minimalnym krokiem była wartość $1 \cdot 10^{-5}$. Próbowałem uruchomić solwer dla wartości 10 razy większej i wyświetlił się komunikat "Niemożliwe rozwiązanie z zadaną dokładnością".

Czasami wykresy są przesunięte w poprzek (wzdłuż osi x), należy patrzeć uważnie na podziałkę. Obie metody zwróciły identyczne trajektorie.

Wnioski

Obie metody zwróciły poprawne wyniki i są podobnie efektywne. Nie zauważyłem lepszej metody, dają identyczne rezultaty. Po nałożeniu na jeden wykres trajektorii na płaszczyźnie (x_1, x_2) nie jestem w stanie rozróżnić ich przebiegu w zależności od metody. Dopiero przy dużym przybliżeniu widać lekkie odchylenia.

