

---

## 2-5 约束的反力效应，物系的受力分析

在矢量力学框架中，力是物体运动改变的原因，且是唯一原因。因此，在矢量力学中，系统若受到约束，需将约束拆开，替换为力。在分析力学框架中，力和约束共同发挥作用，但仍需区分约束是否理想，这也涉及到约束引起的力的性质。

# 5.1 约束的反力效应

---

约束引起的力称为**约束力**或**约束反力**。

本节讨论典型约束引起的约束力性质，并形成约束力分析的一般方法论。

这里，首先给出**作用与反作用定律**（牛顿第三定律）：两物体之间的作用力和反作用力，总是等值、反向、共线且分别作用于两个物体上。这是两物体相互作用力的关联定律。

以下逐次给出五类典型约束的约束力性质，强调约束对位移的限制、减少的独立描述坐标数目、约束力性质以及约束力的个数。

# 5.1 约束的反力效应

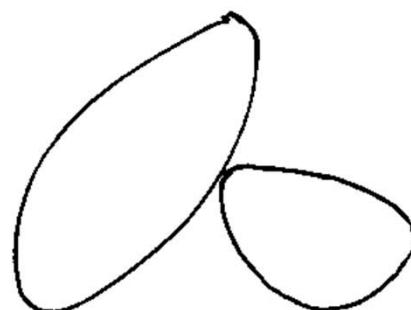
## • 接触式约束

接触式约束限制刚体与外界或者刚体与刚体之间发生且始终发生接触。

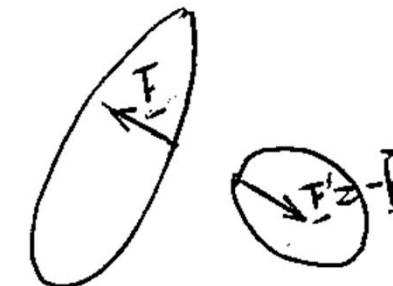
### 平面问题

- 如果接触线光滑（力学中的“光滑”，指无摩擦；注意区分几何上的“光滑”，指可导），独立描述坐标数目减1，约束力沿接触点公法线方向，**约束力个数为1**；
- 如果接触线十分粗糙（摩擦很强，不打滑），独立描述坐标数目减2，一个约束力沿公法线方向，另一个沿公切线方向，**约束力个数为2**。

空间问题可类似讨论。



接触才平面



光滑



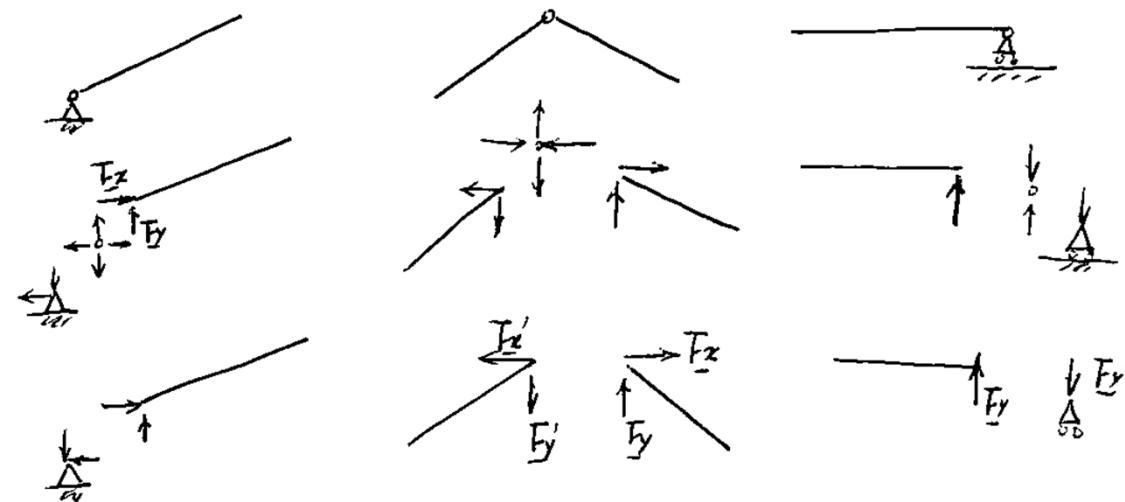
粗糙

# 5.1 约束的反力效应

## • 铰联式约束

铰联式约束限制刚体与外界或者刚体与刚体之间两点的位置始终一致。平面问题对应圆柱形铰链，刚体与外界以及刚体和刚体之间并未发生直接接触，而是通过销钉发生作用。刚体与销钉之间以及销钉与支座之间均发生光滑接触，属于接触式约束，但接触位置不明。

- 对于固定铰联，刚体与销钉发生作用，销钉与支座发生作用。研究销钉，由二力平衡条件知，两对约束力分量分别相等。据此，可视刚体和支座直接发生作用，约束力具有两个相互垂直的分量，**约束力个数为2**。
- 对于中间铰联，两个刚体分别与销钉发生作用，同理可知，可视刚体与刚体直接发生作用，约束力具有两个相互垂直的分量，**约束力个数为2**。
- 对于可动铰联，刚体与销钉发生作用，销钉与光滑滑车发生作用。分别研究滑车和销钉，由二力平衡条件可确定作用力的方位，据此，可视刚体与滑面直接发生作用，约束力沿滑面法线方向，**约束力个数为1**。



对于上述情形，除非要研究销钉本身，否则销钉不再明确画出。可以视为刚体与支座、刚体或滑面的直接作用，或者视为将销钉连在刚体、支座或者滑车上。在后文中，销钉将用“。”来标示。

# 5.1 约束的反力效应

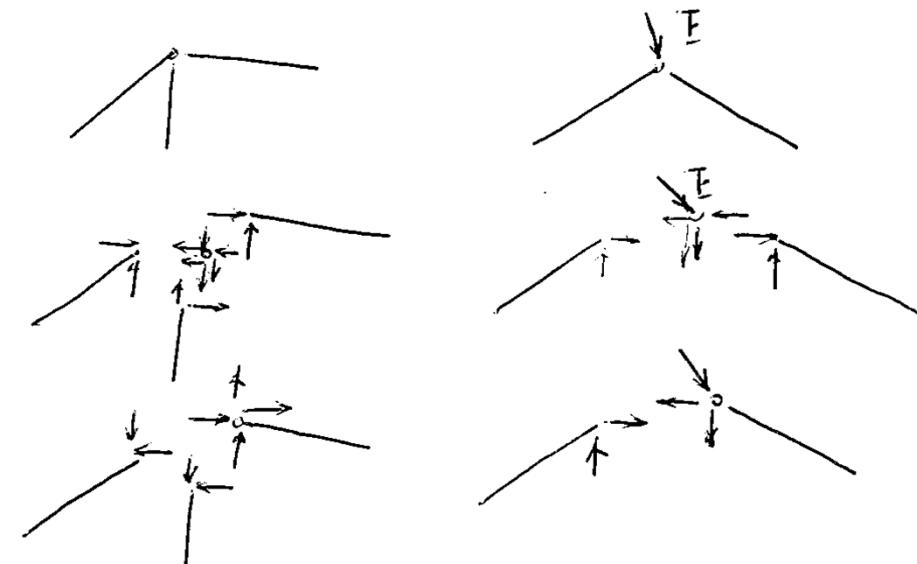
## • 铰联式约束

考虑复铰情形，一个销钉连接多个刚体。此时，无法舍弃销钉，视为两个刚体直接发生作用。宜将销钉挂在一个刚体上，这个刚体和另外两个刚体直接发生作用。

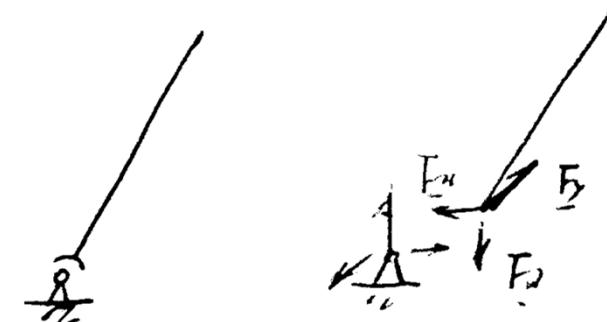
再考虑作用有集中力的单铰情形，集中力作用于销钉上。宜将销钉挂在一个刚体上，这个刚体和另一个刚体直接发生作用。在这两种情形中，销钉必须明确画出。

空间问题对应[球铰链](#)，刚体和外界发生直接的光滑接触，属于接触式约束，但接触位置不明。约束力具有三个相互垂直的分量，[约束力个数为3](#)。

注意，铰联式约束的约束力的个数恰与减少的独立描述坐标数目一致。



平面复铰、集中力作用下的单铰



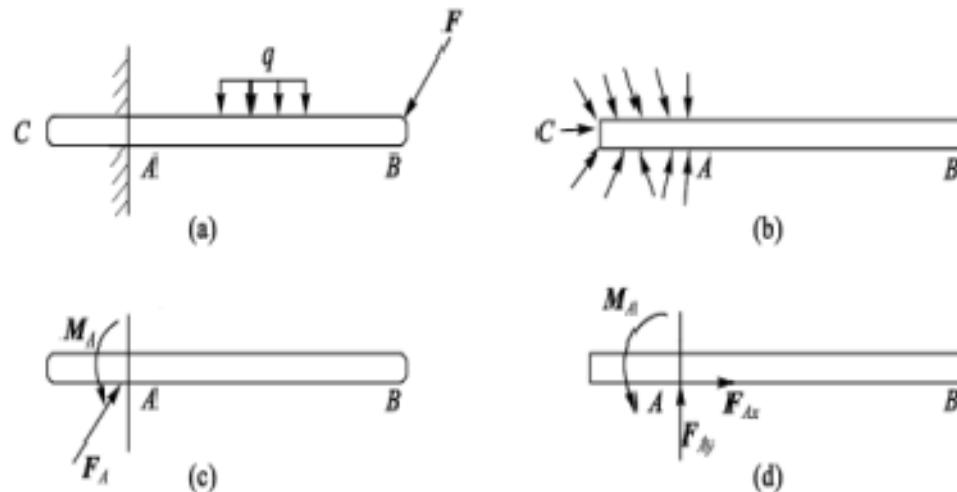
球铰链

# 5.1 约束的反力效应

## • 固定式约束

固定式约束限制刚体的所有可能运动。对于平面问题，独立描述坐标数目减3（限制两个位移和一个角位移）；对于空间问题，独立描述坐标数目减6（限制三个位移和三个角位移）。

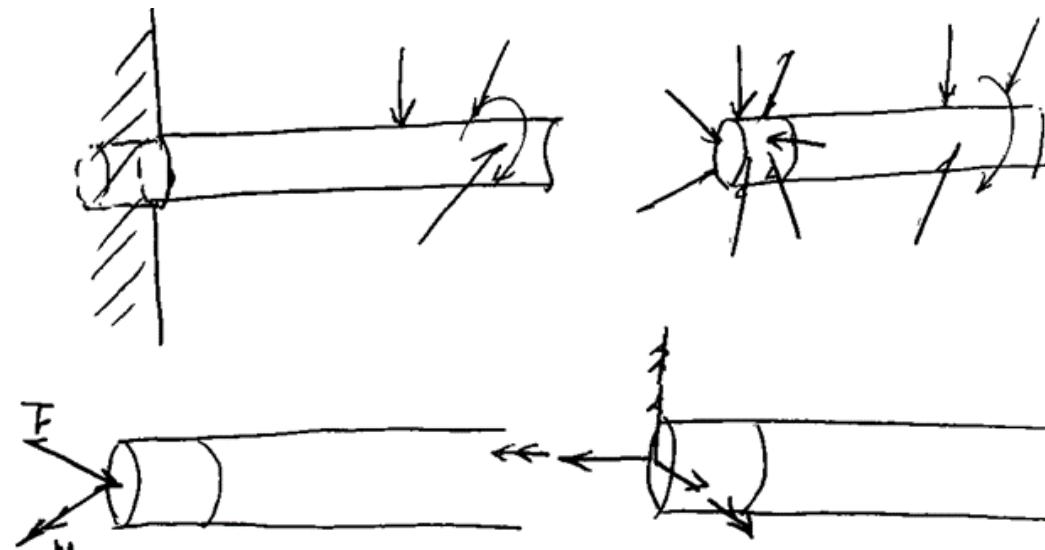
**平面问题。**在平面外载荷作用下，外部环境（如墙体）对刚体端部施加了平面约束力系。将平面约束力系向端部一点（如形心）简化，得到一个单力和一个单力偶，这个单力可分解为两个相互垂直的分力，因此，**约束力个数为3**。



# 5.1 约束的反力效应

- 固定式约束

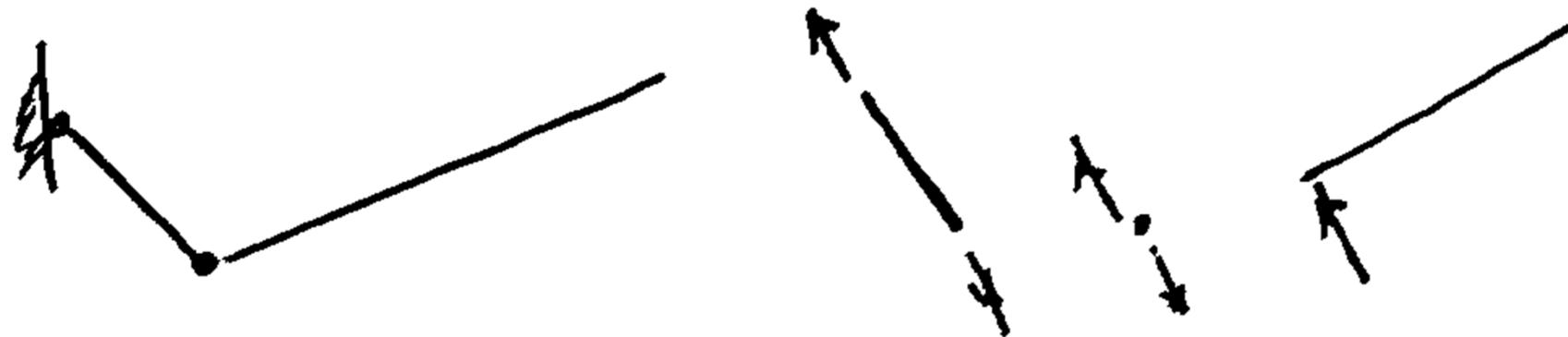
**空间问题。**在空间外载荷作用下，将空间约束力系向端部一点（如形心）简化，得到一个单力和一个单力偶，分别向三个相互垂直的方向分解得到三个分力和三个分力偶，因此，**约束力个数为6**。



# 5.1 约束的反力效应

## • 连杆式约束

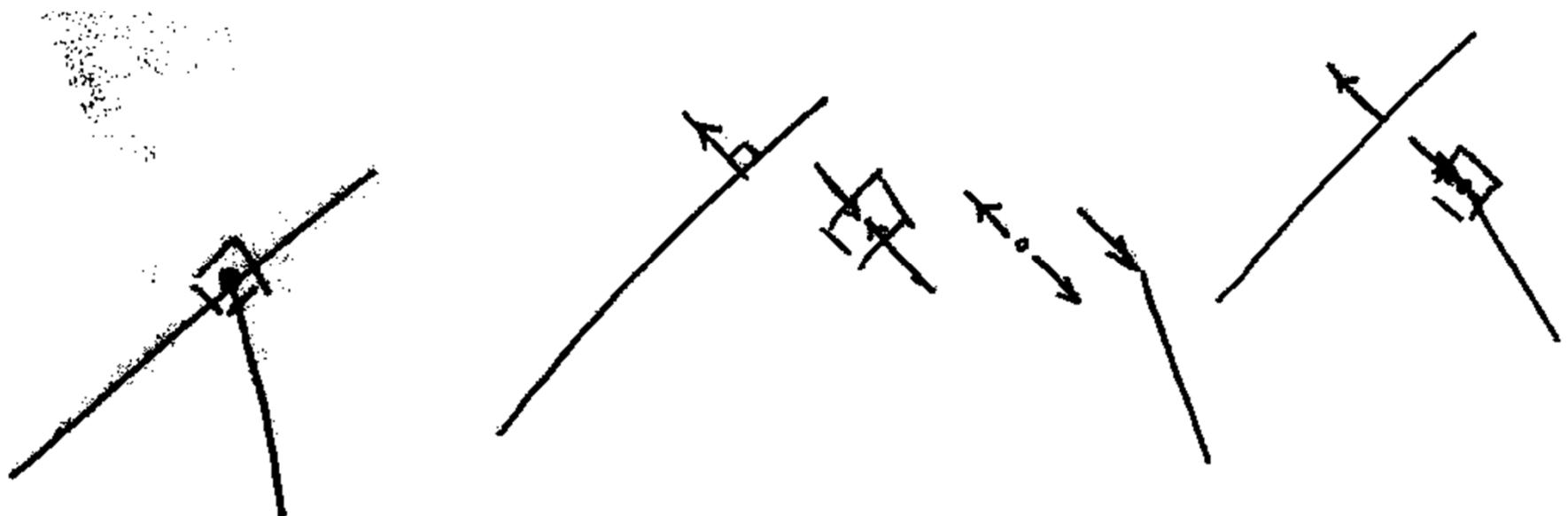
连杆式约束将约束点限制在给定圆弧或者球面上，一个连杆式约束使独立描述坐标数目减1。分别研究连杆和销钉，由二力平衡条件知，约束力沿着连杆方向，**约束力数目为1**。



# 5.1 约束的反力效应

## • 滑移式约束

滑移式约束使独立描述坐标数目减1。分别研究套筒和销钉，由二力平衡知，约束力垂直套筒穿过的刚性杆。可将套筒、销钉和另一个刚体置于一起，与套筒穿过的刚性杆发生相互作用。[约束力个数为1](#)。



## 5.1 约束的反力效应

---

总结之，约束限制刚体运动。从矢量力学角度看，约束通过约束力起作用。约束限制一个运动就相应于一个约束力，约束减小的独立描述坐标数目恰等于约束力的个数。

此后，为方便计，若一个(物理)约束减少了 $s$ 个独立描述坐标，称它是个(数学)约束，简称 $s$ 个约束。这个(物理)约恰好具有 $s$ 个约束反力。这样，约束的个数就和约束力的个数完全一致起来了。

这里指出，上述讨论中均忽略了销钉、可动支座、连杆以及套筒的质量，换言之，在运动学中将之视为运动联系件，在受力分析中将之视为力传递件，均不视为一个目标对象来看待。如果考虑其质量，需要将之视为目标对象，约束力个数会有变化，但同时也附加了这些对象的动力学律。

## 5.2 物系的受力分析

### • 物系的受力分析

至此，已经弄清了各类典型约束的反力效应。进而，可以对目标对象进行**受力分析**。步骤：

- (1) 选取研究对象，取之为隔离体（或自由体）；
  - (2) 施加外加力；
  - (3) 在解除约束处施加约束反力，进而得到受力图
- 受力分析构成了矢量力学的分析基础。

- 对于一个不受约束的单刚体（即自由刚体），直接施加外加力即可。
- 对于一个受约束的单刚体（即约束刚体），隔离之成为自由刚体，施加外加力并在解除约束处施加约束反力。
- 对于一个受约束的刚体系（常称为物体系，简称**物系**），隔离每个单刚体使之称为自由刚体，施加外加力并在解除约束处施加约束反力。

约束反力的方位及个数完全由约束的性质确定。

## 5.2 物系的受力分析

---

若所受约束恰好使某刚体系的独立描述坐标数目为零，即约束减少的独立描述坐标数目恰等于各单刚体独立描述坐标之和，那么，在受力图中，约束力的个数恰等于各单刚体独立描述坐标数目之和。

若所受约束使某刚体系的独立描述坐标数目为零，并且包含有冗余约束，那么，在受力图中，约束力的个数大于各单刚体独立描述坐标数目之和。

若所受约束使某刚体系的独立描述坐标数目大于零，那么，在受力图中，约束力的个数和刚体系独立描述坐标数目之和恰等于各单刚体独立描述坐标数目之和。

这段评述对于矢量静力学和矢量动力学分析是十分重要的。

## 5.2 物系的受力分析

### • 刚化原理

建立了物系受力分析的标准流程，只需亦步亦趋，就不会犯错。这里，针对静力学问题引入**刚化原理**：

变形体在力系作用下平衡，刚化（想象将之替换为刚体）后仍平衡。

刚化原理是变形体平衡的必要条件。依据刚化原理，当对一个变形体或者刚体系（非单刚体）进行静力学分析时，可以将之刚化，之后视之为单刚体进行分析，此时，适用于单刚体的平衡条件（二力平衡、三力汇交、力系主矢/主矩为零等）都可以直接采用。注意，静力学问题的受力分析并非一定是针对不能运动的结构进行的，亦可针对外加力作用下能继续保持静止的机构进行。

## 5.2 物系的受力分析

### • 静力学问题的受力分析举例——例1



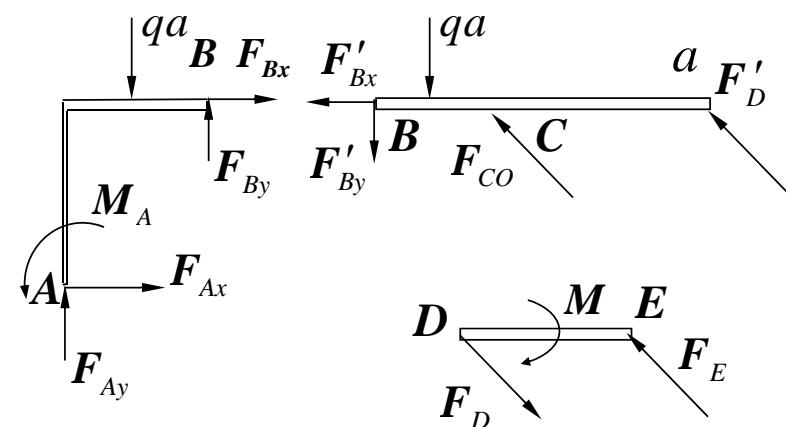
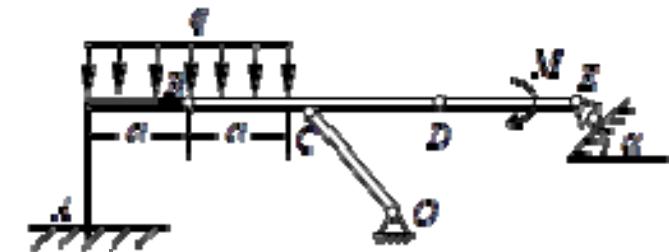
例题

如图所示结构， $A$ 为固定端， $B$ 、 $D$ 为中间铰， $E$ 为可动铰。不计各构件自重，试画出各构件的受力图。



解：

观察发现， $OC$ 为二力杆；方位已知； $DE$ 平衡，力系主矢为零，因此  $F_D$  与  $F_E$  平行，二者构成功力偶，力偶矩矢与外加力偶  $M$  等值反向。将三个刚体拆开（视  $OC$  为约束），按  $DE$ 、 $AB$ 、 $BD$  顺次画出各构件的受力，如图所示。注意，在单刚体上，分布力系均做了等效处理。



## 5.2 物系的受力分析

### • 静力学问题的受力分析举例——例2



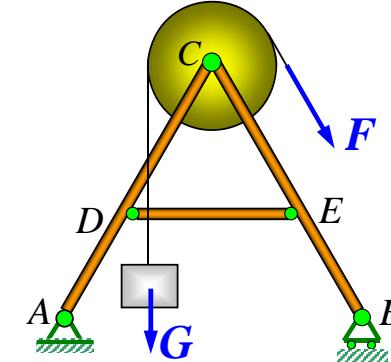
如图所示结构，不计各构件自重，试画出各构件的受力图。



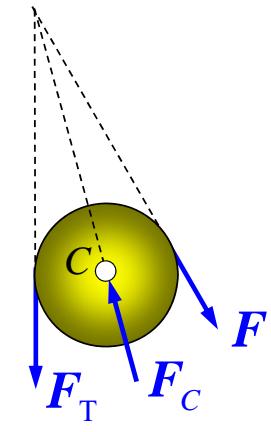
解：对于圆轮，由三力汇交确定销钉对轮心处的约束力  $F_C$  的方位，如图(b)所示。再分析三角架  $ABC$ ， $F_B$  沿竖直方向，由三力汇交确定  $F_A$  的方位，如图(c)所示。 $DE$  为二力杆。将销钉附着在  $BC$  杆端， $AC$  杆受力如图(d)所示。最后分析  $BC$  杆， $C$  端销钉受到轮与  $AC$  杆的反作用力  $F'_C$  与  $F'_{CA}$  作用，如图(d)所示。



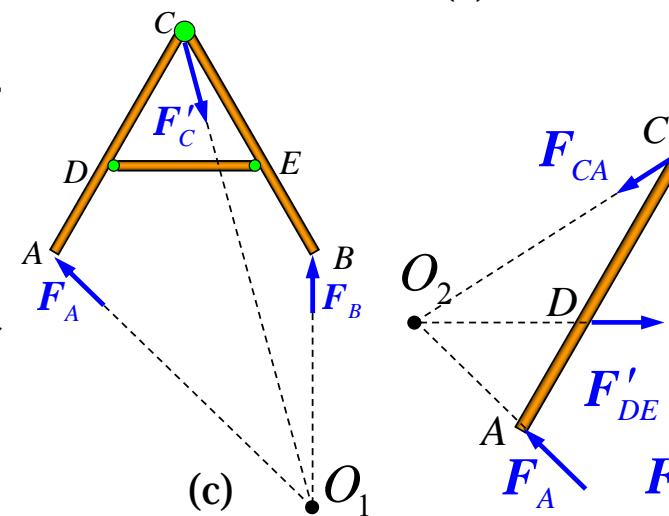
若销钉附在轮  $C$  上，受力图有何变化？



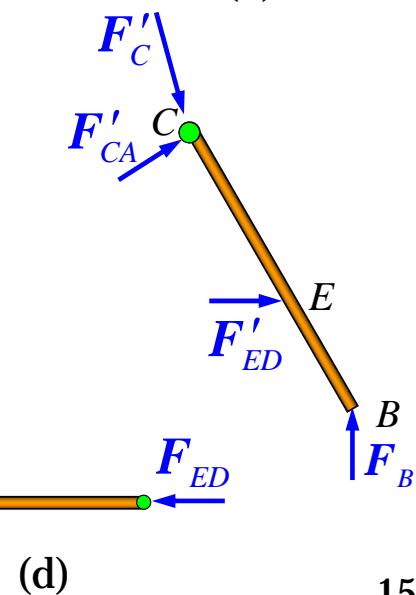
(a)



(b)



(c)



(d)

## 5.2 物系的受力分析

### • 静力学问题的受力分析举例——例3

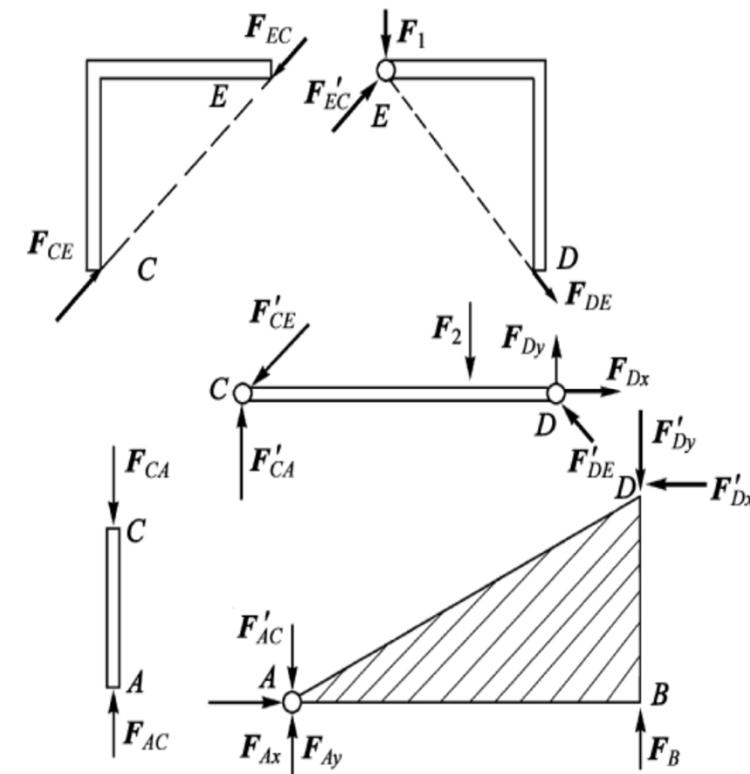
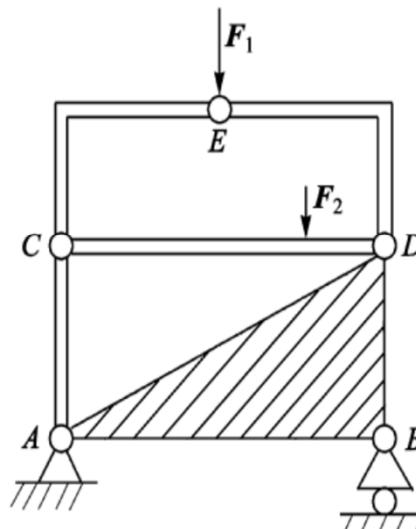


例题

如图所示结构，不计各构件自重，试画出各构件的受力图。



解：先分析二力构件 $CE$ 及 $CA$ ，再分析 $ED$ 和 $CD$ ，最后分析三角块。作用了外加集中力的销钉挂在 $ED$ 杆端，复铰分别挂在 $CD$ 杆端和三角块左侧端点。各构件受力如图所示。



思考

若销钉附在不同杆件上，受力图有何变化？

## 5.2 物系的受力分析

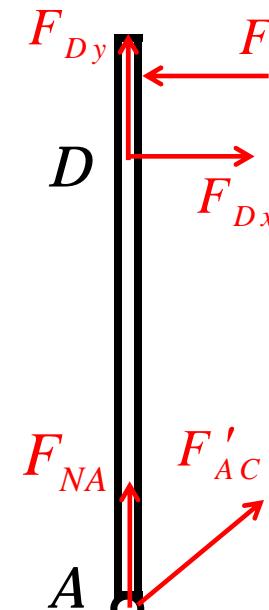
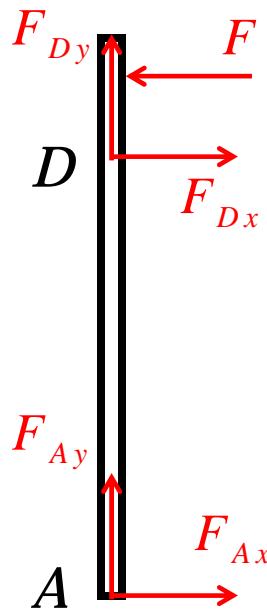
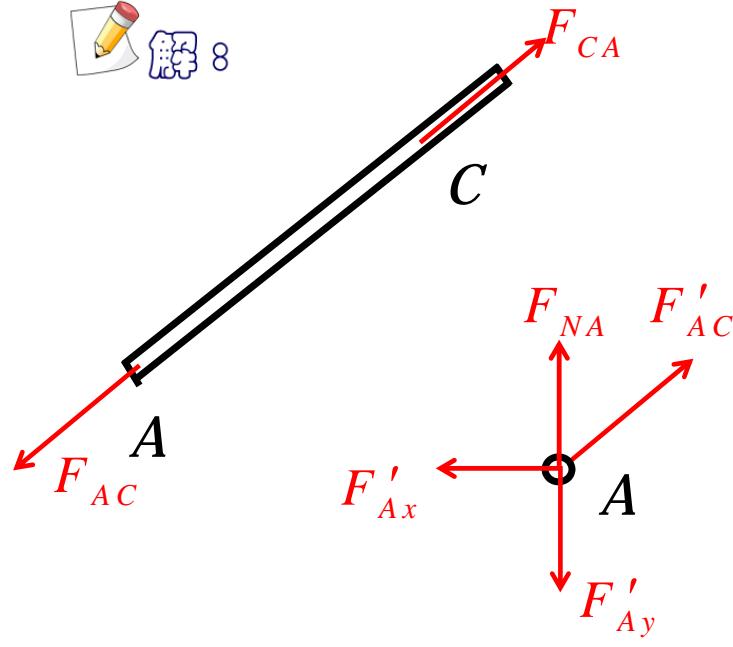
### • 静力学问题的受力分析举例——例4



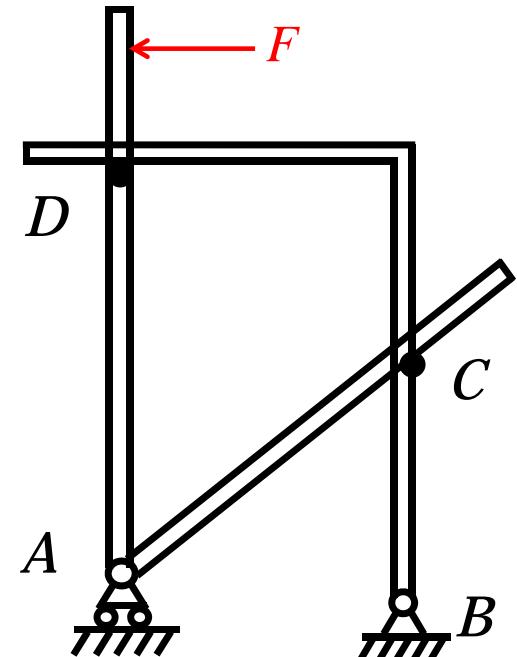
例题

如图所示结构，不计杆件自重，画出杆件AD, AC及销钉A的受力图，如果将销钉A附在杆件AD上受力图又如何。

解 8



销钉A附在AD



## 5.2 物系的受力分析

---

至此，明确了刚体系所受约束的性质（其方位和个数），并能画出各单刚体的受力图。对于静力学问题，可以应用刚化原理研究变形体（的一部分）和刚体系（的一部分），此时视之为一个单刚体，可使用二力平衡、三力汇交条件，并在其上执行力系的等效变换。最后指出，应用二力平衡、三力汇交等平衡条件之后，约束力的个数减少了一—在后文中，会就这一点给出回应。