2.3 刚体的典型约束

- 刚体的典型约束　刚体与外界以及刚体与刚体之间的典型约束。如果将外界视为一个大刚体，则刚体与外界以及刚体与刚体之间的约束并无本质区别，可按统一方式阐述之。

五类约束：

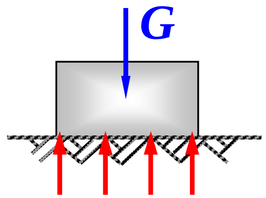
接触式

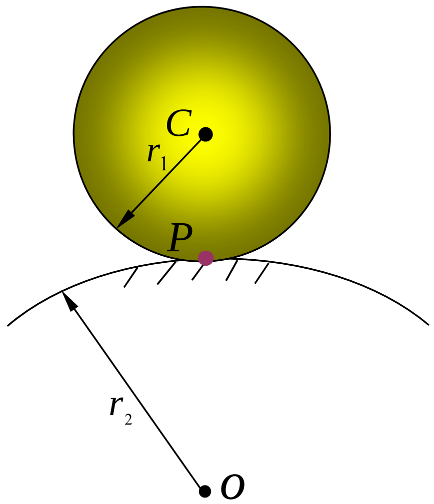
铰联式

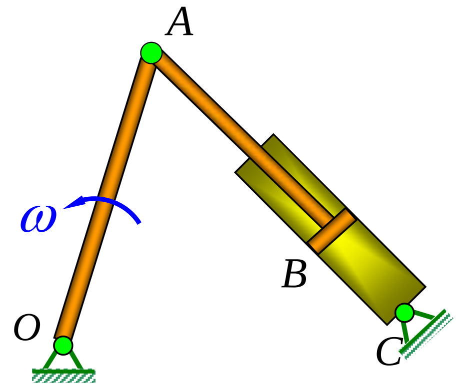
固定式

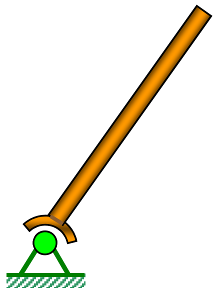
连杆式

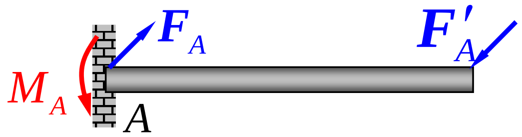
滑移式

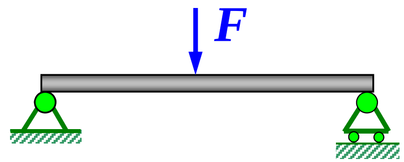






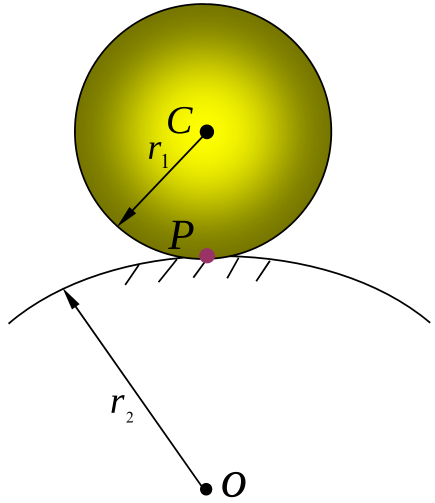






2.3 刚体的典型约束

- **接触式约束** 刚体与外界给定曲线（对平面问题）或给定曲面（对空间问题）或者刚体与刚体之间，发生且始终发生接触



平面问题

- 如果能发生打滑，与给定曲线接触刚体的独立描述坐标数目减1，两接触刚体的独立描述坐标数目同样减1
- 如果不能打滑，而是单纯滚动，与给定曲线接触刚体的独立描述坐标数目减2，两接触刚体的独立描述坐标数目同样减2

空间问题

- 能发生打滑，与给定曲面接触刚体的独立描述坐标数目减1，两接触刚体的独立描述坐标数目同样减1；
- 不能打滑，与给定曲面接触刚体的独立描述坐标数目减2；两接触刚体的独立描述坐标数目同样减2

注意，对于刚体问题，通常不易写出具体的约束方程，而是按如下方式分析和理解：对于外部约束问题，看看刚体需要几个坐标来描述；对于刚体和刚体之间的约束问题，限制一个刚体不动，看另一个刚体需要几个坐标来描述，据此，就能确定刚体系的独立描述坐标数目

注意，对于打滑情形，两接触点（刚体上和外界的物质点）的坐标相同；对于单纯滚动情形，接触点（刚体上和外界的物质点）的坐标相同，速度相等。

2.3 刚体的典型约束

- 铰联式约束　通过一个铰链将刚体与外界或者刚体与刚体联结起来的约束。分别针对平面问题和空间问题，讲述圆柱形铰链约束和球铰链约束

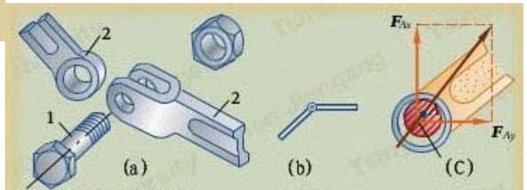
平面问题

圆柱形铰链由两个（组）销孔和一个销钉穿接构成。根据销孔所处的位置，可分为固定铰链、中间铰链和可动铰链

固定铰链：一个（组）销孔开在外界不动构件上，一个（组）销孔开在刚体上，该刚体可绕销钉转动

1. 销钉　2. 被约束物体　3. 固定部分
图1-20　铰链支座

中间铰链：两个（组）销孔分别开在两个刚体上，从而连接二者，二者可相对转动



1. 销钉　2. 构件　图1-19　铰链约束

可动铰链：一个（组）销孔开在可沿给定的光滑（几何光滑）曲线移动的小车上（类似于旱冰鞋，但其实际构造保证了小车和光滑曲线不会脱开）

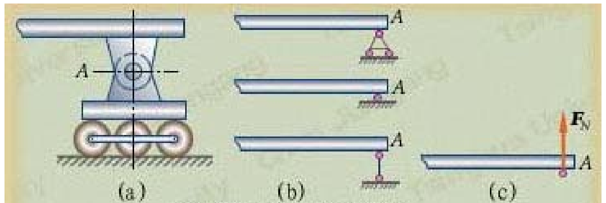
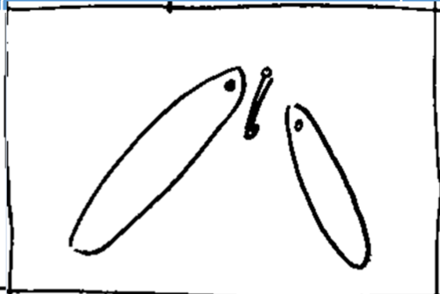
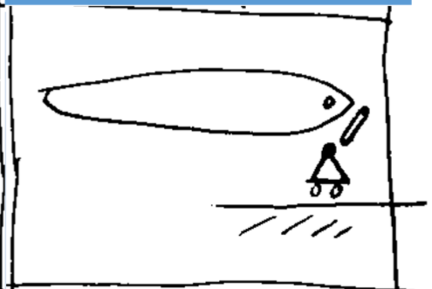
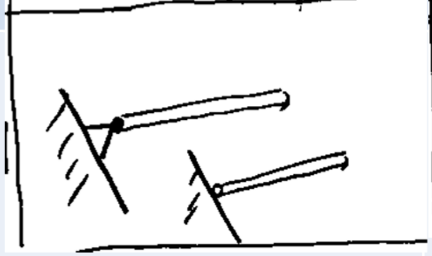
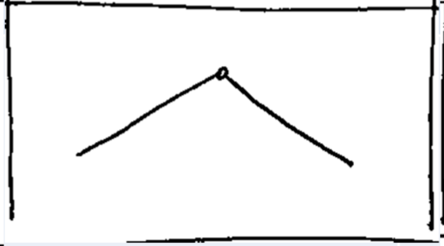
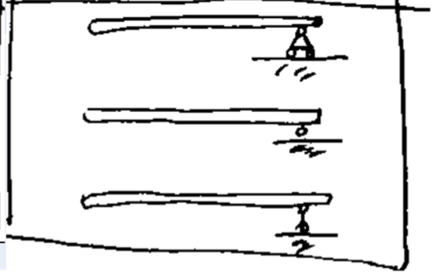
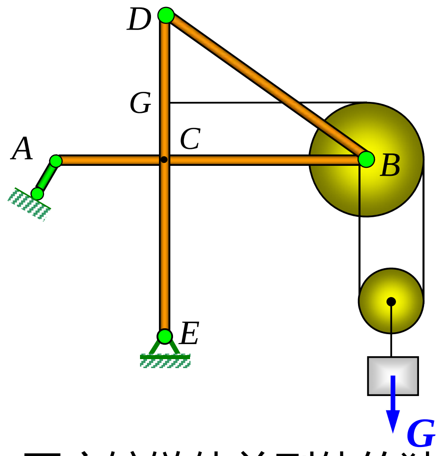


图1-23　滚动支座约束

2.3 刚体的典型约束

- 铰联式约束

	固定铰链	中间铰链	可动铰链
构成			
简图			



固定铰链使单刚体的独立描述坐标数目减2
中间铰链使两个刚体的独立描述坐标数目减2
可动铰链使单刚体的独立描述坐标数目减1

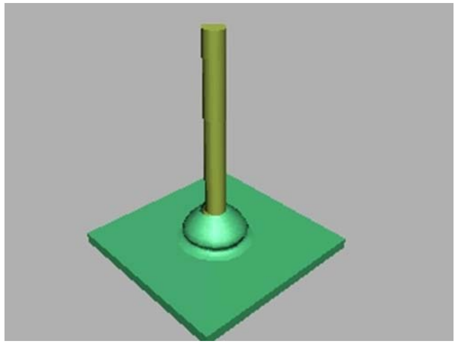
中间铰链同时穿透n个刚体的情形（称为复铰），这会导致这n个刚体的独立描述坐标数目减$2(n-1)$，相当于$n-1$个单个铰链（相应地，称为单铰）

注意，被固定铰链所约束的刚体上的那个点位置确定，速度、加速度始终为零；
被中间铰链所约束的两个刚体上的那两个点位置相同，速度、加速度始终保持相同；
被可动铰链所约束的刚体上的那个点始终保持在光滑曲线上，且速度沿光滑曲线的切线方向。

2.3 刚体的典型约束

- 铰联式约束

空间问题 球铰链由球头和球窠组成，其中之一固定在外界不动构件上，另一个固定在空间刚体上



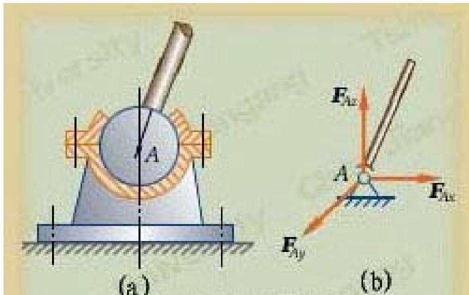
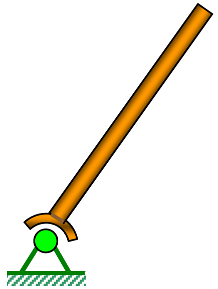


图 1-24 球铰约束



球铰链使空间刚体的独立描述坐标数目减3
被球铰链所约束的刚体上的那个点位置确定，速度、加速度始终为零

对于平面问题，刚体与外界以及刚体和刚体之间并非直接发生作用，而是通过销钉传递作用的，销钉和两个构件之间发生接触作用；
对于空间问题，刚体与外界之间也是通过球头与球窠表面发生作用的。
二者在本质上都属于接触式约束，但接触位置并不明显

2.3 刚体的典型约束

- 固定式约束　将刚体的一部分完全固定起来，即与外界刚结起来。对于细长刚体，将一端插入外界不动构件中，此时称为固定端约束。

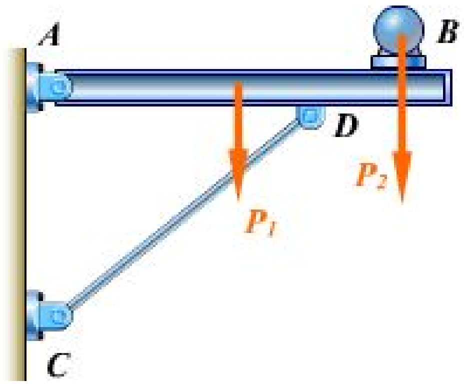
对于平面问题，刚体的独立描述坐标数目减3（限制构件两个线位移和一个角位移）
对于空间问题，刚体独立描述坐标数目减6（限制构件三个线位移和三个角位移）
刚体的独立描述坐标数目变为零

注意，受固定式约束的刚体，各点位置完全确定，速度、加速度始终为零。

2.3 刚体的典型约束

- 连杆式约束

通过一根刚性杆实现的约束，刚性杆一端用铰链与外界不动构件相连，另一端用铰链与刚体相连



对于平面问题，刚体的独立描述坐标减1
对于空间问题，刚体的独立描述坐标数目减1

注意，由连杆所约束的刚体上点，其坐标满足圆或球面方程，其速度沿所在位置的切线方向。

连杆式约束中包含着铰联式约束，也可以将连杆视为一个单独刚体，视连杆约束的刚体为铰联约束体系。这种观点的转换不会改变体系的独立描述坐标数目。
从运动学角度看，是否单独考虑连杆没有任何区别，但从动力学角度看，若连杆具有质量，则不能视为连杆式约束来处理，这在动力学章节中，会逐渐明晰起来。

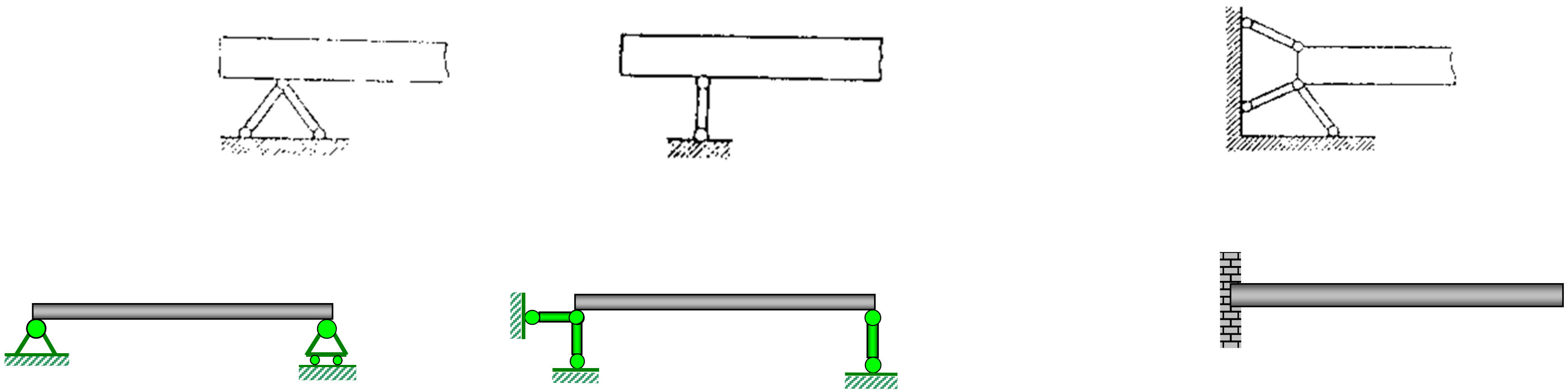
2.3 刚体的典型约束

- 连杆式约束

连杆式约束具有特殊的重要性，因为无论是平面问题还是空间问题，一根连杆都消去一个独立描述坐标。

铰联式约束和固定式约束都可用恰当个数的连杆来替代。

平面问题中的（固定和可动）铰联式约束、固定式端约束的连杆表示方法



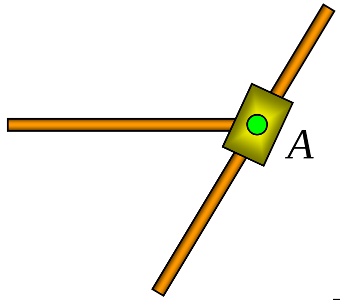
可动铰链的连杆表示略有歧义，但要明了含义！

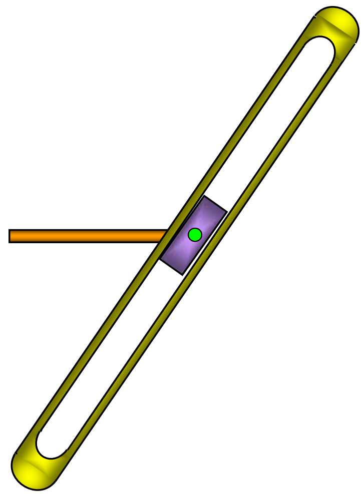
2.3 刚体的典型约束

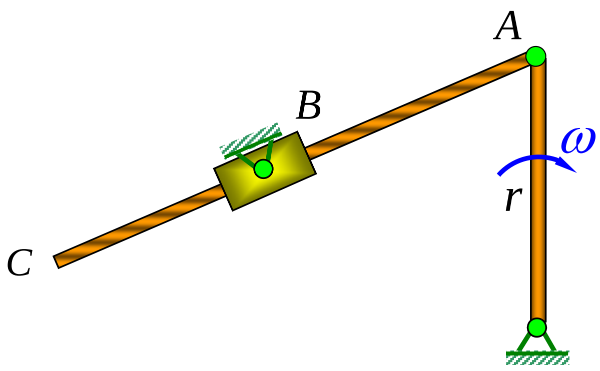
- 滑移式约束

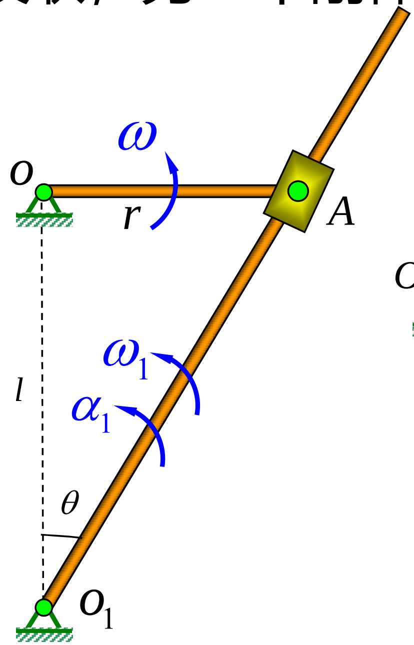
两个刚体（至少有一个细长）通过一个套筒联系在一起，其中一个刚体与套筒铰联，另一刚体（细长刚体）从套筒中穿过，刚体可与套筒相对滑动；

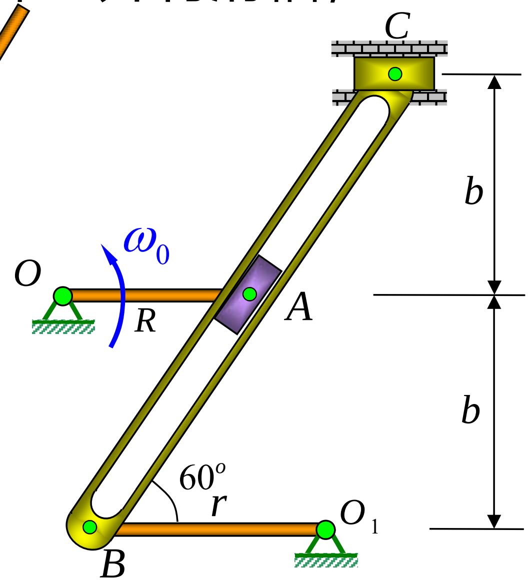
另一种等效模式是，两个刚体通过滑块和滑道联系在一起，其中一个刚体与滑块铰联，另一个刚体上开有滑槽，滑块可沿滑槽相对运动

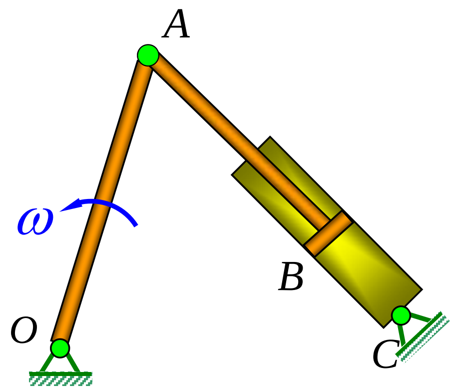






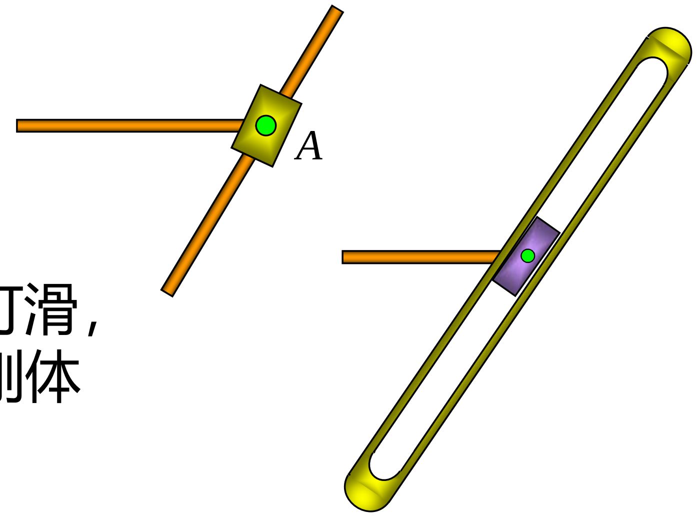






2.3 刚体的典型约束

• 滑移式约束



对于平面问题，若可发生打滑（注：此类约束多可发生打滑，如果未发生打滑，则在几何上退化为铰联式约束），两刚体的独立描述坐标数目减1。

套筒（滑块）是作为一个连接件出现的，并未作为单独刚体考虑。从数学上讲，这里只谈约束，并不需要一个实际的套筒作为载体

另一方面，如果将套筒（滑块）也视为一个单独的刚体，则此时研究的是三个刚体：其中一个刚体穿过套筒，另一个刚体与套筒铰联。对于平面问题，如果固定一个刚体，则套筒（滑块）需要1个坐标描述，进一步再固定套筒，另一个刚体需要一个坐标描述，因此，共需5个坐标描述。由此知，将连接件视为一个单独刚体，并未改变体系的独立描述坐标数目。

注意，如果不考虑套筒（滑块）本身，而只考虑其几何限制作用，那么，滑移式约束等价于可打滑的接触式约束。进一步地，如果套筒（滑块）和穿过其中的细长刚体（滑道）不能发生滑动或者未发生滑动，则在几何上退化为中间铰联约束。

2.3 刚体的典型约束

补充评述

在中间铰联约束中，铰链连接的两个刚体上的物质点始终保持相同位置，所有时间导数始终保持一致；

在滑移式和接触式约束中，两个刚体并无两点始终保持接触，因此，也就不存在位置始终不变的两个确定的物质点，更不存在简单的时间导数关系

一般性评述

五类典型约束是常见的和有代表性的，但绝非全无遗漏。

务须把握如下要点：约束使点与外界、点与点、刚体与外界、刚体与刚体相互牵制、相互掣肘，从而使体系的独立描述坐标数目减少。限制了几个独立运动，就有几个独立约束方程，可去掉几个描述坐标。

但在实用中，并非要确切写出约束方程，这也是不现实的，而是凭借经验，从整体上直接确定独立描述坐标数目并直接选出独立描述坐标。

2.3 刚体的典型约束

- 约束切换问题

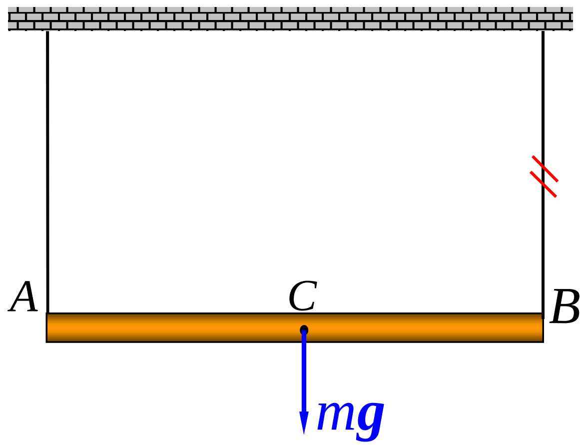
一般来说，一旦约束预先给定，点与外界、点与点之间、刚体与外界、刚体与刚体之间的几何关系就明确了，独立描述坐标数目也就完全确定了，这是没有任何争议的事。然而，在实际中，常存在这种情形：某一约束在一个阶段起作用，而在另一个阶段不起作用，即在一个阶段存在此约束，而另一个阶段不存在此约束，这就是约束切换问题。此处，常采用“添加约束”或者“解除约束”这样的术语。

约束的添加与解除或者是预先给定的，或者是由于某种运动学条件或静、动力学条件确定的。二者十分不同，前者是预加条件，而后者与运动学和静、动力学联系在一起，与静、动力学的联系通常需要借助附加的物理律。

2.3 刚体的典型约束

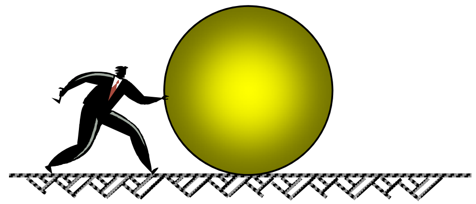
- 约束切换问题

预先给定的切换约束的例子：一个点受到刚性线约束，刚性线在某一时刻自动解除；刚体和刚体受中间铰联约束，铰链在某时刻自动解除（例如，人为撤除它们）。



与运动学关联的切换约束的例子：当刚体运动到距磁铁足够近的某位置时，突然被吸引，从而添加了约束。

与静、动力学关联的切换约束的例子：当约束处的作用力超出某一临界值时，发生断裂；平面刚体由摩擦刚性曲线约束，当接触处力值符合某条件时，在滑动和不滑之间切换（这些条件都需要介入附加的物理律）。



当添加约束或解除约束时，独立描述坐标数目发生变化。添加约束，独立描述坐标数目相应减少；解除约束，独立描述坐标数目相应增加

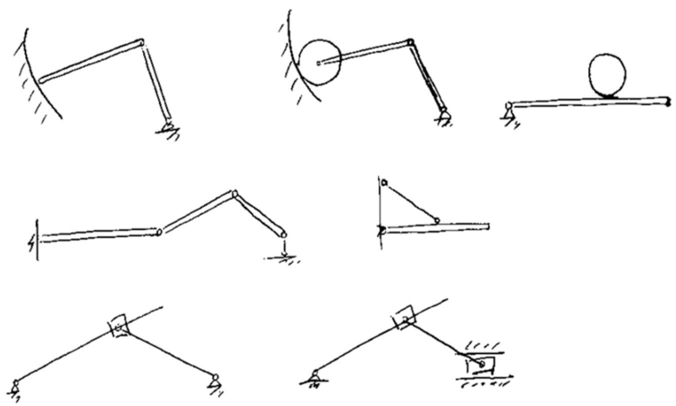
2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

- 独立描述坐标数目 首先，确定刚体系包含几个刚体，各自的运动模式，所受约束，减少的独立描述坐标数目，之后，直接计算刚体系的独立描述坐标数目。

平面运动刚体系：

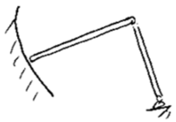
独立描述坐标数目 = 2 ×平移刚体数+1 ×定轴转动刚体数 +3 ×平面运动刚体数-1*N（由于约束减少的描述坐标数目）

例题 以下刚体系独立描述坐标数目



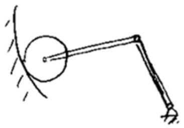
2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

- 独立描述坐标数目

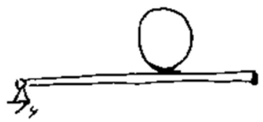


图a所示刚体系由两个平面运动刚性杆组成，一个刚体一端通过固定铰链与地面相连，另一个刚体一端与不动曲面接触，两刚体通过中间铰链连接。

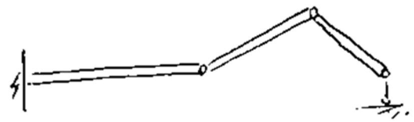
接触面如果发生滑动：2*3-2-2-1=1
如果不发生滑动：2*3-2-2-2=0



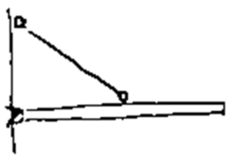
接触面如果发生滑动：3*3-3*2-1=2
如果不发生滑动：3*3-3*2-2=1



接触面如果发生滑动：2*3-2-1=3
如果不发生滑动：2*3-2-2=2

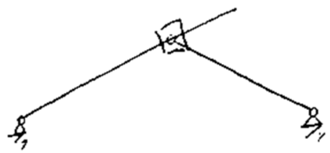


3*3-3-2*2-1=1

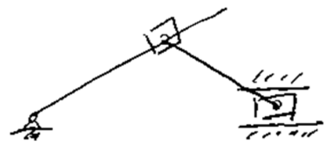


单个刚体组成，刚体一端固定铰联，刚体上某点由连杆支撑

3-2-1=0，体系的位置完全确定



2*3-2*2-1=1



2*3-2-2*1=2

注意，上述分析具有足够的灵活性。例如，由固定铰链约束的平面运动刚体，亦可视为定轴转动刚体，此时该铰链不再算作约束；套筒和滑块亦可作为单独刚体处理。但是，无论采取哪种看法，计算得到的独立描述坐标数目结果一致，这是体系的本征量。

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

- 结构和机构，约束欠缺度和约束冗余度

如果体系中（独立）约束的数目足够多，就会导致该体系不具有运动的可能；如果（独立）约束的数目不够多，该体系就可以运动。据此，可以定义机构和结构的概念

机构——在几何上可以发生运动的刚体系

结构——在几何上不能发生运动的刚体系

当约束数目恰好使刚体系的独立描述坐标数目等于零时，该体系刚好不具有运动可能。

若约束数目少了，该体系就是机构，所少的个数即独立描述坐标数目，称为约束欠缺度

若约束数目多了，该体系还是结构，所多的数目就称为约束冗余度

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

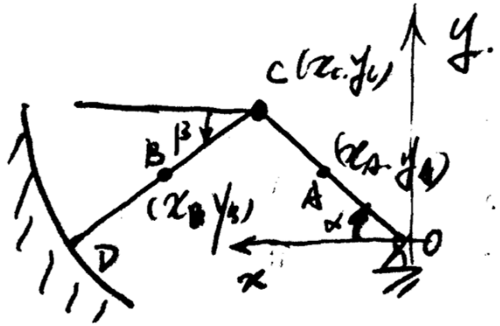
- 独立描述坐标选择，据此表出任一点位置和运动

选取各单刚体的独立描述坐标形成的坐标集合，而后删减一些，保留其它坐标作为独立描述坐标（要注意，这里的删减和保留不能随意进行）
也可以凭经验直接选择独立描述坐标，视具体问题而定。

选定独立描述坐标之后，即可据此表出刚体系任一点的位置和运动。
易知，只要由体系的独立描述坐标表出了各单刚体的独立描述坐标，也就表出了刚体系任一点的位置和运动，于是，我们的任务就是表出各单刚体的独立描述坐标。

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

例题 考虑图示刚体系。体系由两个刚体组成，受铰链和接触面约束。选取体系的独立坐标描述及表出体系任一点的位置和运动。



解：

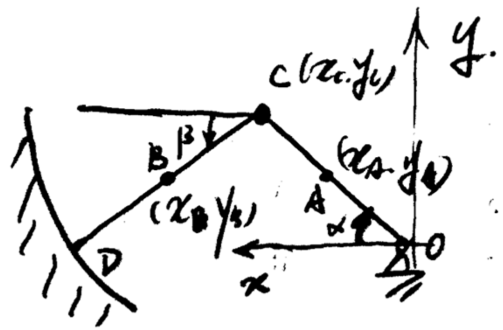
两个刚体的独立描述坐标可选为 x_A, y_A, α 和 x_B, y_B, β，体系的独立描述坐标数目为1。取 α 为体系的独立描述坐标。据此，可表出两个刚体各自的独立描述坐标为：

$$x_A = OA\cos\alpha, y_A = OA\sin\alpha, \alpha = \alpha,$$

$$x_B = OC\cos\alpha + CB\cos\beta(\alpha), y_B = OC\sin\alpha - CB\sin\beta(\alpha), \beta = \beta(\alpha)$$

注意，β 一定可以用 α 表出，但这并不容易。

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择



对时间求导给出速度和角速度信息：

$$\dot{x}_A=-OA\sin\alpha\dot{\alpha},\dot{y}_A=OA\cos\alpha\dot{\alpha},\dot{\alpha}=\dot{\alpha},$$

$$\dot{x}_B=-OC\sin\alpha\dot{\alpha}-CB\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\dot{\alpha},\dot{y}_B=OC\cos\alpha\dot{\alpha}-CB\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\dot{\alpha},\dot{\beta}=\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\dot{\alpha}$$

再次求导，给出加速度和角加速度信息：

$$\ddot{x}_A=-OA\cos\alpha\dot{\alpha}^2-OA\sin\alpha\ddot{\alpha},\ddot{y}_A=-OA\sin\alpha\dot{\alpha}^2+OA\cos\alpha\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}=\ddot{\alpha},$$

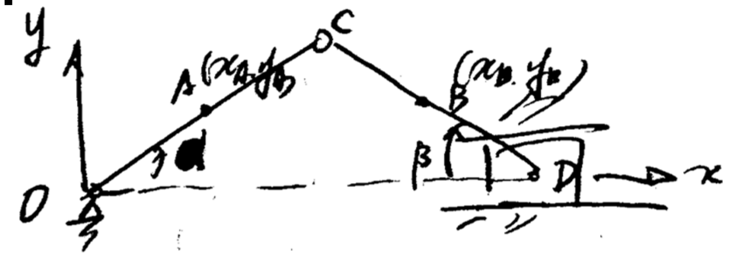
$$\ddot{x}_B=-OC\cos\alpha\dot{\alpha}^2-OC\sin\alpha\ddot{\alpha}-CB\cos\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\dot{\alpha}\right)^2-CB\sin\beta\frac{\partial^2\beta}{\partial\alpha^2}\dot{\alpha}^2-CB\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\ddot{\alpha},$$

$$\ddot{y}_B=-OC\sin\alpha\dot{\alpha}^2+OC\cos\alpha\ddot{\alpha}+CB\sin\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\dot{\alpha}\right)^2-CB\cos\beta\frac{\partial^2\beta}{\partial\alpha^2}\dot{\alpha}^2-CB\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\beta}=\frac{\partial^2\beta}{\partial\alpha^2}\dot{\alpha}+\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\ddot{\alpha}$$

至此，我们就用体系的独立描述坐标、其一阶和二阶导数表出了两个刚体各自的独立描述坐标、其一阶和二阶导数，据此，可以写出体系任一点的位置、速度和加速度

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择



例题 考虑图示刚体系。体系由两个刚体组成，受铰链和滑移约束。选取体系的独立坐标描述及表出体系任一点的位置和运动。

解： 两个刚体的独立描述坐标可选为 x_A, y_A, α 和 x_B, y_B, β，体系的独立描述坐标数目为1。取 α 为刚体系的独立描述坐标。据此，可表出两个刚体各自的独立描述坐标为：

$$x_A = OA\cos\alpha, y_A = OA\sin\alpha, \alpha = \alpha,$$

$$x_B = OC\cos\alpha + CB\cos\beta(\alpha), y_B = OC\sin\alpha - CB\sin\beta(\alpha), \beta = \beta(\alpha)$$

正弦定理知 $\sin\beta = \dfrac{OC}{CD}\sin\alpha$ ⟹ $x_B = OC\cos\alpha + CB\sqrt{1 - \dfrac{OC^2}{CD^2}\sin^2\alpha},$

$$y_B = OC\sin\alpha - CB\frac{OC}{CD}\sin\alpha, \beta = \arcsin\left(\frac{OC}{CD}\sin\alpha\right)$$

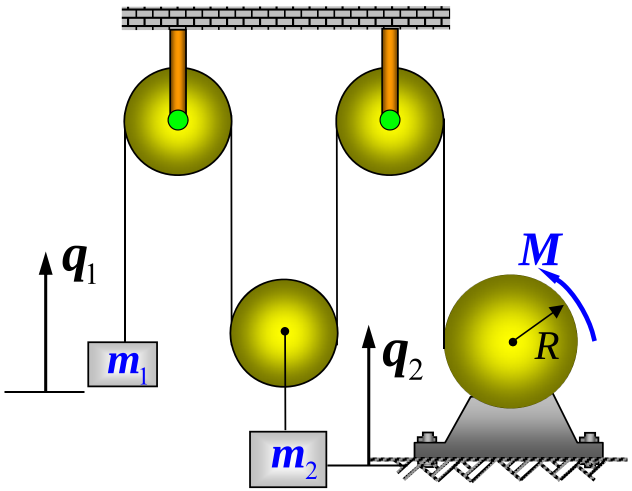
求导可得两个刚体各自的独立描述坐标的速度和加速度信息

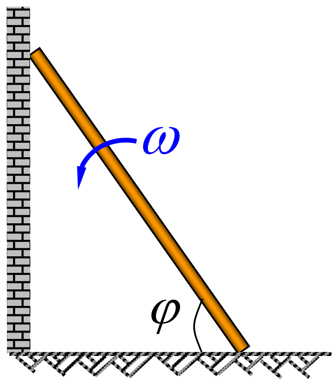
注意，仅对$OC=CD$的特殊情形，能得到形式简洁的结果；在一般情形下，解析表示十分复杂

可选择 x_D 为体系的独立描述坐标。但采用这一描述坐标时，要补充一些信息来确定体系是位于水平线之上还是之下

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

思考 刚体系独立坐标数和选择





答 2 1

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

- 评述

至此，确证了如下事实：体系的独立描述坐标足以刻画整个体系的运动。具体而言，体系上任一点的位置可由独立描述坐标表出；任一点的速度可由独立描述坐标、其一阶导数表出；任一点的加速度可由独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数表出。

理论上的确如此，但是在实际操作中，发现，即使对于不十分复杂的系统，想要完成这一解析表述也是十分困难的，这就要求我们寻找替代方案。

替代方案要能较为便捷地给出这些关系，同时又要具有完备性，即对一般系统都有效。

2.4 刚体系独立描述坐标数和选择

- 独立描述坐标再评述

体系的独立描述坐标，是指能完全确刻画体系空间位置的独立坐标。所谓“完全”表明不缺少（充分），所谓“独立”表明不冗余（必要）。
独立描述坐标的选择可依问题本身而定，选择恰当能使问题的分析更简明。独立描述坐标数目却不同，对一个具体问题而言，这是一个本征量，不随独立描述坐标的选择方式而有所改变。换言之，选择方式可以不同，但选择数目不可更改。
在弄不清如何选择充分且必要的描述坐标时，宁可多选，决不遗漏：选多了，会使问题变得复杂，但是，选少了，就会导致彻底失败。
当然，弄清一个对象的独立描述坐标数目，并恰当地选择一组独立描述坐标，会为后续研究奠定坚实基础，务必要掌握这一点。在后文中，独立描述坐标数目也可直接用于判定问题的可解性并指导求解过程，无论是在机构静力学和机构动力学中都是如此。

为了强调独立描述坐标的一般性，也称之为广义坐标——这是一个成功的命名，除了反映出选择的任意性外，也隐含了无需一定选择笛卡尔坐标之意。这里，并不使用广义坐标一词，而是将之留到分析力学部分。在分析力学中，用一个新词进一步凸显其全新意义和卓越价值。