第四章：矢量力学之动力学

矢量力学之动力学为一套公理体系，它以牛顿三大定律为基石，演绎出一整套动力学体系。这套体系以动力学三大定理（动量定理、动量矩定理和动能定理）为核心，由之可以解决质点（系）和刚体的全部动力学问题。当然，当涉及到摩擦、冲击等问题时，尚需补充相应的物理律。值得指出，矢量力学之静力学源自另一套公理体系，这两套体系是相容的，从动力学公理体系中可以演绎出静力学的平衡条件。之所以没有将矢量静力学作为矢量动力学的特例讲授，是为了遵循力学的历史发展路径。

第四章：矢量力学之静力学

- 本章纲要：

牛顿三大定律： 讲述牛顿三大定律，并直接用于质点动力学问题的研究；对运动定律进行数学处理，直接导出动力学三大定理。

动量方法： 讲述动量、动量定理和质心运动定理，以及动量定理的各种形式（矢量式、投影式和守恒式）；讲述（对固定点和运动点的）动量矩、（对固定点和运动点的）动量矩定理，以及动量矩定理的各种形式（矢量式、投影式和守恒式）；联合应用之，解决一般约束刚体系的动力学问题。

达朗贝尔原理： 讲述惯性力和达朗贝尔原理，强调达朗贝尔原理和动量定理、动量矩定理的等价性；讲述刚体上惯性力系的简化；讲述用静力学方法解决动力学问题的“动静法”。

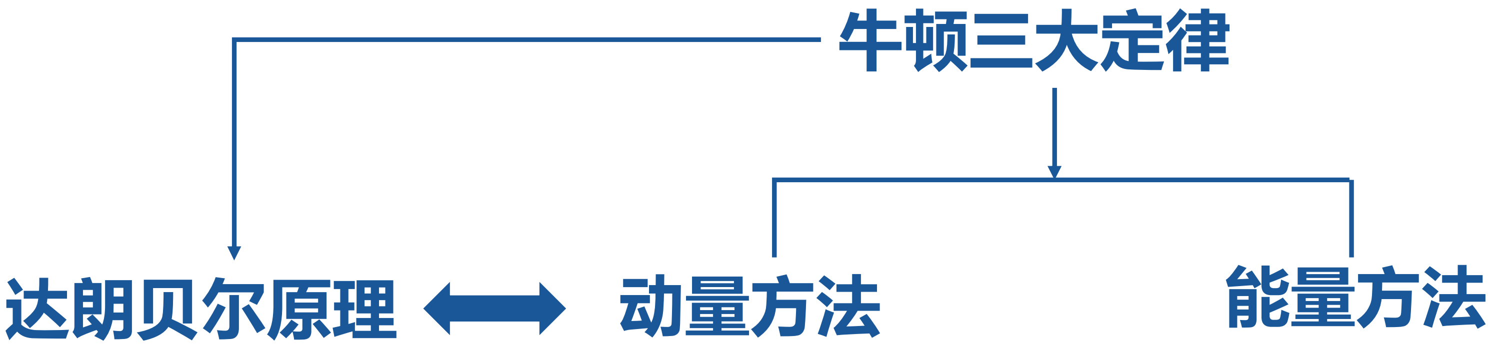
能量方法： 讲述动能、功和动能定理；讲述有势力场、势能和机械能守恒定律。

动力学综合问题： 将动量方法和能量方法相结合，或者将达朗贝尔原理和能量方法相结合，用于解决一般约束刚体系的动力学综合问题。

第四章：矢量力学之静力学

- 本章纲要：

各部分的关系如下所示：



4-1 牛顿三大定律

1.1 牛顿三大定律

- 牛顿三大定律

惯性定律（第一定律）：

不受力的质点，始终保持其静止或匀速直线运动状态。

运动定律（第二定律）：

质点质量与加速度的乘积等于作用于质点上的共点力系的合力，即 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$

作用与反作用定律（第三定律）：

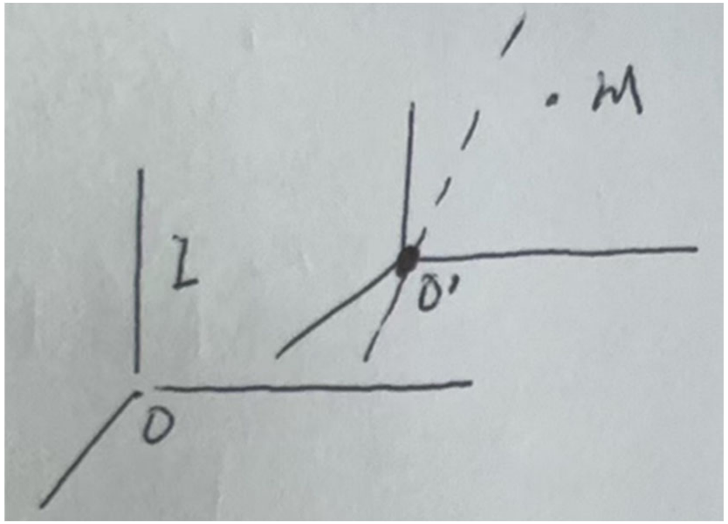
两质点间的作用力和反作用力等值反向，沿同一条直线作用于两质点上。

从数学角度看，惯性定律可视为运动定律的特例。由运动定律知，当质点不受力时，加速度为零，速度为常矢量，这恰是惯性定律的表述。然而，惯性定律绝不是冗余的！牛顿以欧几里得的《几何原本》为蓝本构造《自然哲学的数学原理》写作体系，因此，绝不会允许不独立的两个命题同时作为公理出现。事实上，惯性定律陈明了这样一个事实：**存在着**这样的参考系，在其中观察，不受力的质点始终保持静止或匀速直线运动。惯性定律一方面陈明了这种参考系的存在性，另一方面陈明了要在这种参考系中观察加速度，运动定律才成立。

1.1 牛顿三大定律

- 牛顿三大定律

选定一个惯性参考系I，考虑在其中匀速直线平移的另一个参考系II。由点的速度合成定理知，在I中的速度等于在II中的速度加上一个恒定不变的速度（参考系II在I中的平移速度）。若一质点在I中保持静止或匀速直线运动，那么在II中也保持静止或匀速直线运动。这就是说，在惯性参考系中匀速直线平移的参考系也是惯性参考系。



1.1 牛顿三大定律

- 牛顿三大定律

运动定律陈明了质点受力和加速度的数量关系。

➢质量是质点惯性的度量（注意，“质量”并不是好的命名，惯性度量更适合的名字是“惯量”，这也就呼应了转动惯性的度量“转动惯量”）；

➢加速度是在惯性系中观察到的质点加速度（选惯性参考系为定系，也称该加速度为绝对加速度）；

➢力指作用于质点上的共点力系的合力，力和加速度具有同时性——同时发生，同时消失。

作用与反作用定律陈明了质点之间的相互作用法则，从而在不同质点之间建立了联系。这一定律在约束反力和物系受力处已经正式提出并全面采用。

综述之，惯性定律在空间舞台上设置了参考系，运动定律给定了质点运动和受力的关系，作用与反作用定律在质点之间建立了桥梁——它们共同构成了矢量动力学的完整基石。

1.1 牛顿三大定律

- 质点运动微分方程

在惯性参考系中选取一个固定点，由之向质点引出矢径$\boldsymbol{r}$。以矢径的二阶导数表示质点加速度，运动定律化为质点运动微分方程：

矢量式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}\left(t, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}\right)$$

$\boldsymbol{F}$为质点所受共点力系的合力，受力可随时间变化，亦可依赖于质点位置和速度。例如，万有引力和弹簧力依赖于位置，粘性阻力依赖于速度。

$\boldsymbol{F}$是否可以依赖于加速度?

投影式

1. 在惯性参考系中设置直角坐标系，可得直角坐标投影方程：

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z$$

2. 在惯性参考系中设置自然坐标系，可得弧坐标投影方程：

$$m\ddot{s} = F_\tau, \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b$$

亦可设置其它坐标系，将质点运动微分方程向各轴投影，得到相应的投影方程。

1.1 牛顿三大定律

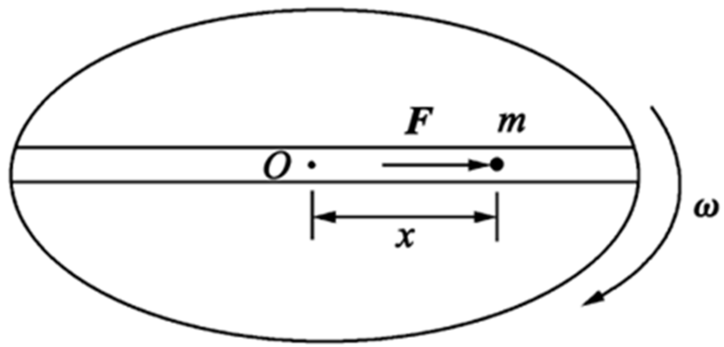
- 质点运动微分方程

依据质点运动微分方程或其投影形式，可以求解两类基本问题：

1. 已知运动求力；——涉及微分运算
2. 已知力求运动。——涉及积分运算。

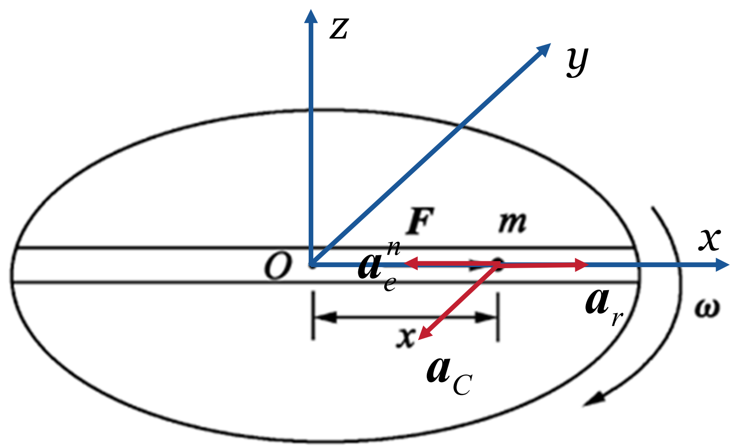
当然，亦可求解某些混合问题，即从部分运动和部分力出发，表出其它运动和其它力。对受约束的质点，常会遇到混合问题。下文举例说明之，注意判定问题的可解性。

例题　水平圆盘绕竖直轴匀速转动，小球置于滑道之中。试求小球的运动以及滑道的约束力。



1.1 牛顿三大定律

解 8 滑道的运动已知，小球受滑道的约束，因此，小球的运动需一个坐标来刻画，可选取固结于圆盘且沿滑道方向的直线坐标x。对小球而言，可列出三个微分方程，分别确定小球的运动，所受的竖向约束力和垂直轨道的水平约束力。



取地面为定系（在动力学中，定系取为惯性参考系），圆盘为动系，小球为动点。小球处于x位置时，其绝对加速度为

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C \qquad a_e^n = x\omega^2, \quad a_r = \ddot{x}, \quad a_C = 2\omega\dot{x}$$

小球的绝对加速度在三根坐标轴上的投影分别为

$$a_x = \ddot{x} - x\omega^2, \quad a_y = -2\omega\dot{x}, \qquad a_z = 0$$

于是得到投影方程： $m\left(\ddot{x} - x\omega^2\right) = 0, -m \times 2\omega\dot{x} = F_y, 0 = -mg + F_z$

该式对任意时刻都成立。由第一式知 $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$，其通解为： $x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

A、B由初始位置和初始（相对）速度确定

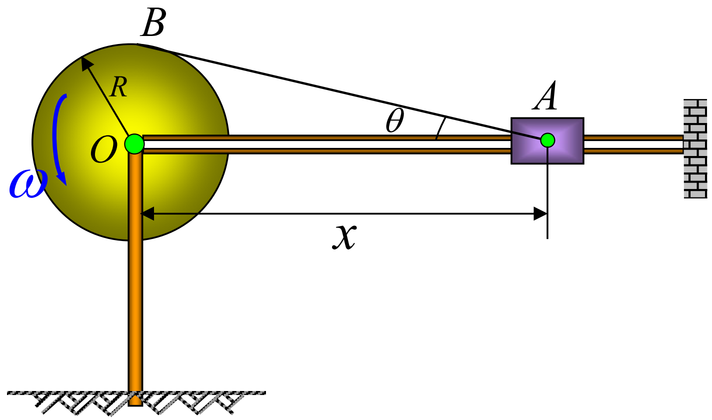
一旦确定了运动规律，就可由第二式计算约束力F_y。第三式给出了约束力 F_z。

1.1 牛顿三大定律

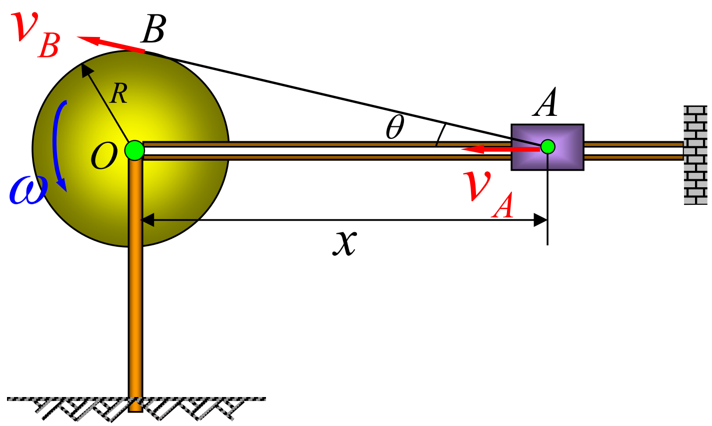
思考 设定初始条件 $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=0$，求出运动规律并实现可视化。设定初始条件 $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=0$，质点保持静止，试讨论该静止状态的稳定性。

思考 试分析轨道非光滑情形。注意，需要补充摩擦定律，并且方程耦合，试求解之。

例题 半径为r的绕线轮以匀角速度ω定轴转动，拉动质量为m的滑块A沿OA杆水平运动，求绳的拉力F_T与x的关系。



1.1 牛顿三大定律



解8 滑块沿既定轨道运动，独立描述坐标数目为1，可取x刻画之。滑块的运动被绕线轮的运动所确定，进而可确定滑块的受力。

研究拉线，由速度投影定理知

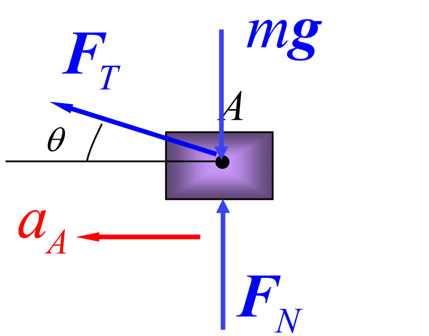
$$v_B = v_A \cos\theta \qquad v_B = r\omega,\ \cos\theta = \frac{\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$$

$$v_A = \frac{r\omega}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{x^2}}}$$

对时间求导得，$a_A = \dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{r^3\omega}{(x^2 - r^2)^{3/2}}\dot{x}$ $\xrightarrow{\dot{x} = -v_A}$ $a_A = \dfrac{r^4\omega^2 x}{(x^2 - r^2)^2}$

研究滑块，受力如图。列写投影方程

$$F_T \cos\theta = ma_A, F_T \sin\theta + F_N - mg = 0$$



由此，求出拉力和约束力。

1.1 牛顿三大定律

- 对运动定律的操作和观察

对运动定律做出如下数学操作和观察。首先，将加速度表示为速度的导数；之后，将不变质量移至导数算子之内，将等式两边叉乘矢径、点乘速度。这样，得到如下三个等式：

$$\overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}m\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \qquad m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}^{m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}}$$

质点的动量 $\boxed{\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}}$

质点对固定点*O*的动量矩（即质点动量对惯性参考系中的固定点*O*之矩）

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}}$$

质点的动能 $\boxed{T=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}$ **力的功率** $\boxed{P=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}$

上述三个等式就给出了动力学三大定理：动量定理、动量矩定理和动能定理

1.1 牛顿三大定律

• 对运动定律的操作和观察

以上三大定理是针对质点列出的，以下导出针对质点系的相应定理。对第i个质点有动量定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{F}_i \xrightarrow{\text{关于指标求和}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i^e + \boldsymbol{F}_i^i\right) = \sum_i \boldsymbol{F}_i^e$$

上标e和i分别表示外力和内力，为external和internal的缩写

所谓内力，是指由质点系中各质点间相互作用引起的力，其它来自质点系之外的力称为外力。根据作用与反作用定律知，内力系矢量和为零。

类比力系的主矢，定义**动量系的主矢** $\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$

于是有，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_R^e$

即，动量系主矢（简称**质点系的动量**）的时间变化率等于外力系主矢。

1.1 牛顿三大定律

- 对运动定律的操作和观察

对第i个质点有动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \xrightarrow{\text{关于指标求和}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i^e + \boldsymbol{F}_i^i\right) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^e$$

根据作用与反作用定律知，内力系对固定点之矩的矢量和为零

类比力系的主矩，定义**动量系的主矩** $\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$

于是有，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_R^e$

即，动量系主矩（简称**质点系的动量矩**）的时间变化率等于外力系主矩。

1.1 牛顿三大定律

- 对运动定律的操作和观察

对第i个质点有动能定理 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\right)=\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i$

关于指标求和 ⇒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i\right)=\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i=\sum_i\left(\boldsymbol{F}_i^e+\boldsymbol{F}_i^i\right)\cdot\boldsymbol{v}_i=\sum_i\boldsymbol{F}_i^e\cdot\boldsymbol{v}_i+\sum_i\boldsymbol{F}_i^i\cdot\boldsymbol{v}_i$$

定义**质点系的动能**为 $T=\sum_i\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i$

于是有， $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\sum_i\boldsymbol{F}_i^e\cdot\boldsymbol{v}_i+\sum_i\boldsymbol{F}_i^i\cdot\boldsymbol{v}_i$

即，质点系动能的时间变化率等于外力系的功率和内力系的功率之和。

注意，一对内力作用在不同质点上，尽管内力等值、反向、共线，但作用质点的速度一般不同，因此内力功率并不为零。

1.1 牛顿三大定律

- 对运动定律的操作和观察

观察上述三大定理，可以发现：

1. 三大定理都是运动量的一阶导数与作用量的关系，以最清晰的方式体现了牛顿力学所刻画的时间进化关系。

2. 动量定理和动量矩定理都是矢量关系，而动能定理是标量关系。

3. 质点的动量定理等价于运动定律，因此，从理论上看，只要质点间的作用方式明确，就足以解决质点系的运动问题。具体来说，N个质点需$3N$个坐标刻画，恰有$3N$个投影方程，质点系外力已知，质点间内力明确（或者事先给定，或者与质点相对位置有关），据此联立求解，就能得到各质点的运动规律。

4. 质点系的动量定理和动量矩定理将运动变化与外力主矢和外力主矩联系起来。**对自由单刚体而言**，独立描述坐标数目为6，其运动（动量和动量矩）能由这6个坐标表出，而动量定理和动量矩定理恰好提供了6个投影方程，因此，足以解决单刚体的运动问题；**对约束刚体系而言**，独立描述坐标数目M等于各个单刚体的独立描述坐标数目之和（$6N$）减去约束个数（s），各单刚体的运动（动量和动量矩）能由着M个坐标表出，而动量定理和动量矩定理提供了$6N$，因此，恰好可以用以求解M个独立描述坐标和s个约束反力。这就说明，动量定理与动量矩定理联合起来就能处理刚体和刚体系运动问题。

1.1 牛顿三大定律

- 对运动定律的操作和观察

观察上述三大定理，可以发现：

5. 粗看起来，动能定理并非必要，它只是一个有益的补充。但实质上，动能定理是与动量定理和动量矩定理同步发展起来的，它提供了看待同一问题的另一角度。这一角度将在分析力学中大放异彩，而在此处，只是将之视作对动量方法的补充。

以下，将详述动量方法（动量定理+动量矩定理）和能量方法，并在二者之间插入达朗贝尔原理。将要说明：动量方法本身就足以解决动力学问题；达朗贝尔原理与动量方法完全等价，在一般情形下归结为求解常微分方程组；将动量方法和能量方法相结合或者将达朗贝尔原理和能量方法相结合，可形成处理一大类动力学问题的代数方法。

4-2 动量方法

所谓**动量方法**，即基于动量定理和动量矩定理的动力学分析方法。

从动量定理开始，陈述质点系的动量计算，动量定理和质心运动定理（及其各种形式），动量定理用于刚体系的例子；

然后转入动量矩定理，陈述质点系对固定点和对运动点的动量矩计算，刚体对固定点和对运动点的动量矩计算，对固定点的动量矩定理和对运动点（特别是对质心）的动量矩定理（及其各种形式），动量矩定理用于刚体系的例子。

最后，结合二者给出刚体平面运动的微分方程，并据此解决平面刚体系的动力学问题。

2.1 动量方法

- 动量及其计算

质点系的动量（即动量系主矢）定义为：

$$\boldsymbol{p}=\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$$

若用定义式计算，需遍历质点系中每一质点。

回顾一下质点系的质心位置定义式 $m\,\boldsymbol{r}_C=\sum m_i\,\boldsymbol{r}_i$

若将质点系人为分成若干组，并反复使用质心位置定义式，可以得到：

$$m\,\boldsymbol{r}_C=\sum m_i\,\boldsymbol{r}_i=\sum m_{j(\mathrm{Group})}\,\boldsymbol{r}_{Cj(\mathrm{Group})}$$

$m_{j(\mathrm{Group})}$ 是第j组的质量，$\boldsymbol{r}_{Cj(\mathrm{Group})}$ 是第j组的质心矢径。上式对时间逐次求导可得：

$$m\,\boldsymbol{v}_C=\sum m_i\,\boldsymbol{v}_i=\sum m_{j(\mathrm{Group})}\,\boldsymbol{v}_{Cj(\mathrm{Group})}$$

$$m\,\boldsymbol{a}_C=\sum m_i\,\boldsymbol{a}_i=\sum m_{j(\mathrm{Group})}\,\boldsymbol{a}_{Cj(\mathrm{Group})}$$

式中，$\boldsymbol{v}_{Cj(\mathrm{Group})}$ 和 $\boldsymbol{a}_{Cj(\mathrm{Group})}$ 分别为第j组的质心速度和质心加速度。

2.1 动量方法

- 动量及其计算

由此知，

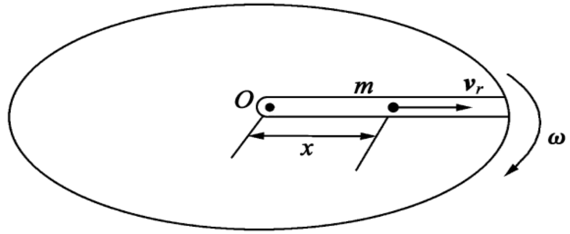
$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_C = \sum m_{j(\text{Group})}\boldsymbol{v}_{Cj(\text{Group})}$$

这就是说，可通过质点系质量m与质点系质心速度$\boldsymbol{v}_C$的乘积来计算质点系的动量，恰如计算一个单质点的动量一样。亦可将质点系人为分组，分成若干个子质点系，将子质点系质量与子质点系质心速度相乘后再求和，来计算质点系的动量。据此，质点系的动量计算得以大幅简化。

2.1 动量方法

• 动量及其计算

例题　水平均质圆盘质量为M，绕竖直中心轴定轴转动，角速度ω，小球质量为m，沿径向滑道运动，相对速度 $\boldsymbol{v}_r$。试求质点系的动量和质心速度。



解：若按定义计算，需要表出各点的速度矢量，乘以质量元素后再求和。将质点系分为两个子质点系：子质点系I为圆盘，子质点系II为小球。子质点系I的动量为 $M\boldsymbol{v}_{C_1}=0$，子质点系II的动量为 $m\boldsymbol{v}=m\left(\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r\right)$，其中 $v_e=x\omega$，与 $\boldsymbol{v}_r$ 垂直。于是，得到质点系动量：

$$\boldsymbol{p}=M\boldsymbol{v}_{C_1}+m\boldsymbol{v}=m\left(\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r\right)$$

又因为　$\boldsymbol{p}=\left(M+m\right)\boldsymbol{v}_C$

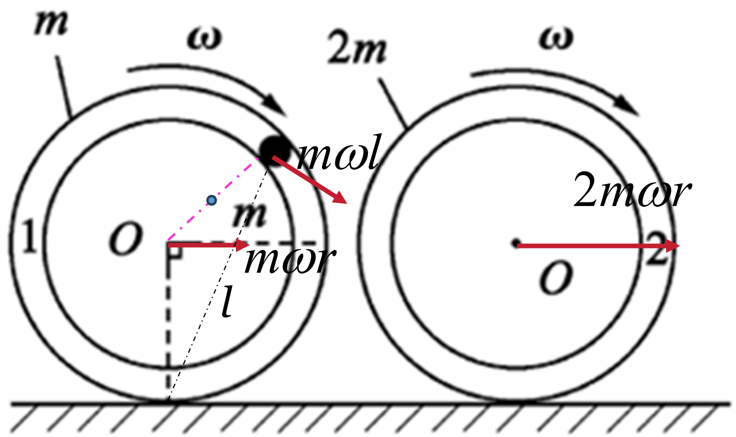
$$\boldsymbol{v}_C=\frac{m\left(\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r\right)}{\left(M+m\right)}$$

注意，质点系的质心不是质点系上的某一物质点，而是一空间点。

2.1 动量方法

- 动量及其计算

例题　两均质、等厚、薄壁圆环在水平地面上纯滚动，圆环半径均为r，角速度均为ω。1环质量为m，且固结质量为m的质点；2环质量为$2m$。计算图示瞬时的动量。



解：

对于前者，动量可由圆环动量和质点动量求和得到，亦可先找到质心（圆环质心和质点连线的中点，始终与刚体上的一个物质点重合），求出质心速度，而后将总质量$2m$与之相乘。对于后者，动量等于总质量$2m$乘以质心速度。

2.1 动量方法

- 动量定理

质点系的动量定理表述为：$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \boldsymbol{F}_i^e=\boldsymbol{F}_R^e}$

即，动量系主矢（动量）的时间变化率等于外力系主矢。此为**动量定理的微分形式**。

定义 $\mathrm{d}\boldsymbol{I}_i^e=\boldsymbol{F}_i^e\mathrm{d}t$ 为外力的**元冲量**

定义 $\sum_i \boldsymbol{F}_i^e\mathrm{d}t=\sum_i \mathrm{d}\boldsymbol{I}_i^e$ 为外力系的**元冲量主矢**

$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\sum_i \mathrm{d}\boldsymbol{I}_i^e}$

即，动量系主矢（动量）的元增量等于外力系的元冲量主矢。此为动量定理的另一**微分形式**。

上式两边在时间区间$[t_1, t_2]$内积分得到：

$$\boxed{\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum_i \boldsymbol{I}_i^e=\boldsymbol{I}_R^e}$$

式中，$\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1$ 分别为t_2和t_1时刻的动量，$\boldsymbol{I}_i^e=\int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{I}_i^e=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_i^e\mathrm{d}t$ 为外力在时间区间$[t_1, t_2]$内的冲量；$\boldsymbol{I}_R^e=\sum_i \boldsymbol{I}_i^e$为外力系在时间区间内的冲量主矢。即，动量系主矢（动量）的改变量等于外力系的冲量主矢。此为**动量定理的积分形式**（亦称冲量定理）。

2.1 动量方法

- 动量定理　可以写出上述微分形式和积分形式的投影形式

在惯性系中设置直角坐标系，则有 $\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k}$，其中，单位方向矢不随时间变化，于是有：

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum_i F_{ix}^e,\quad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum_i F_{iy}^e,\quad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum_i F_{iz}^e$$

$$p_{2x}-p_{1x}=\sum_i I_{ix}^e,\ p_{2y}-p_{1y}=\sum_i I_{iy}^e,\ p_{2z}-p_{1z}=\sum_i I_{iz}^e$$

注意，如果在惯性系中设置其它类型的坐标系，其单位方向矢随时间变化，那么，积分式投影仍有效，但微分式不能表述如上。

质点系的**动量守恒定律**

➢若外力系主矢在某时段内等于零，即 $\boldsymbol{F}_R^e=0$，则在该时段内，$\boxed{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{C}_1}$

➢若外力系主矢在某时段内在某方向上的投影等于零，例如x坐标轴，即$F_{Rx}^e=\sum_i F_{ix}^e=0$，则在该时段内 $\boxed{p_x=C_2}$

注意，在当期的理论体系下，应称为定理，但由于历史原因，仍称为定律。

2.1 动量方法

- 动量定理

总结之，给出下表：

	矢量式	投影式（对x轴）
微分形式	$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \boldsymbol{F}_i^e=\boldsymbol{F}_R^e$	$\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum_i F_{ix}^e$
积分形式	$\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1=\sum_i \boldsymbol{I}_i^e=\boldsymbol{I}_R^e$	$p_{2x}-p_{1x}=\sum_i I_{ix}^e$
守恒形式	若$\boldsymbol{F}_R^e=0$ ， $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{C}_1$	若$\sum_i F_{ix}^e=0$ ，$p_x=C_2$

2.1 动量方法

- 质心运动定理

将动量的质心表示式 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}_C$ 代入动量定理得到：

$$m\boldsymbol{a}_C=\sum_i \boldsymbol{F}_i^e=\boldsymbol{F}_R^e$$

这就是说，质点系的质量与质心加速度的乘积等于外力系主矢。这就是质点系的**质心运动定理**。

注意，左端可依据下式计算：

$$m\boldsymbol{a}_C=\sum m_i\boldsymbol{a}_i=\sum m_{j(\mathrm{Group})}\boldsymbol{a}_{Cj(\mathrm{Group})}$$

2.1 动量方法

- 质心运动定理vs. 牛顿运动定律

从数学形式上看，质心运动定理和牛顿运动定律的形式相同。牛顿运动定律陈明了质点质量、加速度和共点力系合力（等于共点力系主矢）的关系，而质心运动定理陈明了质点系质量、质心加速度和外力系主矢的关系。二者的差异在于：前者针对质点，后者针对质点系；前者关于质点本身的加速度，后者关于质点系质心的加速度；前者关于全部力系，后者关于外力系。

质点是牛顿力学研究的基本对象，是没有内部结构的物质点，因此，也就谈不上所谓的内力。在实践中，取谁为质点、取谁为质点系是有赖于经验的。可以拆分一个质点，将之视为质点系；那么使用牛顿运动定律研究该质点和使用质心运动定理研究该质点系时，就不能相悖。对于拆分而成的质点系，其质心与原质点本身重合，其质量等于原质点的质量，而所受之外力系恰恰就是原质点所受之共点力系。这就是说，二者给出同样的结果。换言之，牛顿运动定律以及据此导出的质心运动定理，具有自洽性！这体现了自然科学极致的美！如果出现了不自洽，就不得不抛弃或者至少是修改整个理论体系。

2.1 动量方法

- 质心运动定理vs. 牛顿运动定律

牛顿第二定律和质心运动定理的关系恰似衔尾蛇：由牛顿运动定律导出的质心运动定理，又可以反过来导出牛顿运动定律。亦可从质心运动定理出发构建整个矢量动力学体系，若是如此，质心运动定理就成为定律，而牛顿运动定律就成为定理。人们常常对公理化科学存有误解，认为置于前面的命题比后边的命题更基本、更正确，这是错误的。自然如其所是地矗立于此，作为认知主体的人们寻求一种逻辑的方式将事实进行排列，形成的理论体系只是追求经济性的成果。事实就是事实，没有谁更基本，没有谁更复杂，所谓的前后源于人为构造的逻辑。

运动定律（对质点）

质心定理（对质点系）

2.1 动量方法

- 质心运动定理

上述质心运动定理为矢量形式，可以写出投影形式。因不含求导操作，因此，在惯性参考系中设置任何坐标系，都可直接写出投影形式。对于直角坐标系，投影形式为，

$$ma_{Cx}=\sum_i F_{ix}^e,\ \ ma_{Cy}=\sum_i F_{iy}^e,\ \ ma_{Cz}=\sum_i F_{iz}^e$$

质点系的**质心运动守恒定理**

➢若外力系主矢在某时段内等于零，即 $\boldsymbol{F}_R^e=0$ ，则在该时段内 $\boldsymbol{a}_C=0$ ，于是有

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{C}_3$$

➢有若外力系主矢在某时段内在某方向上的投影等于零，例如x坐标轴，即 $F_{Rx}^e=\sum_i F_{ix}^e=0$，则在该时段内 $a_{Cx}=0$ ，于是有

$$v_{Cx}=C_4$$

常矢量$\boldsymbol{C}_3$和常数 C_4 取决于初始条件。若质心的初始速度 $\boldsymbol{v}_{C0}=0$ ，则有$\boldsymbol{v}_C=0$ ，$\boldsymbol{r}_C=$常矢量，即质心位置在该时间段内保持不变。若质心的初始速度在x方向的投影等于零，即 $v_{Cx0}=0$ ，则有 $v_{Cx}=0$， $x_C=$常数

2.1 动量方法

- 质心运动定理

对于一个质点系，若在某时段内 $F_{Rx}^{e}=\sum_{i}F_{ix}^{e}=0$ ，并且 $v_{Cx0}=0$ ，那么可知 $x_C=$常数 。于是，对该时段内的任意两个瞬时，质点系中各质点的x坐标满足 $\Sigma m_i x_i^{(1)}=mx_C$，$\Sigma m_i x_i^{(2)}=mx_C$ 。于是有，

$$\Sigma m_i x_i^{(2)}-\Sigma m_i x_i^{(1)}=\Sigma m_i\left(x_i^{(2)}-x_i^{(1)}\right)=\Sigma m_i\,\Delta x_i=0$$

式中，Δx_i 为第i个质点在两个瞬时的位置偏移量。进一步地，将质点系划分为一系列子质点系，则有，

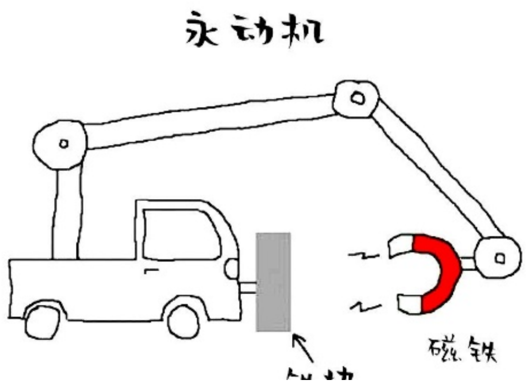
$$\sum m_{j(\mathrm{group})}\Delta x_{Ci(\mathrm{group})}=0$$

式中，$\Delta x_{Ci(\mathrm{group})}$ 为第i个子质点系的质心在两个瞬时的位置偏移量。

2.1 动量方法

- 质心运动定理

质心运动定理告诉我们，内力不能改变质心的运动。自诩“力拔山兮气盖世”的西楚霸王项羽也无法提着头发把自己提起来。武侠世界中的轻功“燕子三抄水”（武者在空中通过左脚踩右脚背腾身而起）是无法实现的。一个在空中飞行的炮弹，无论是否炸裂，其质心的轨迹是明确的。通过置于车上的磁铁吸引无法创造出永动机。



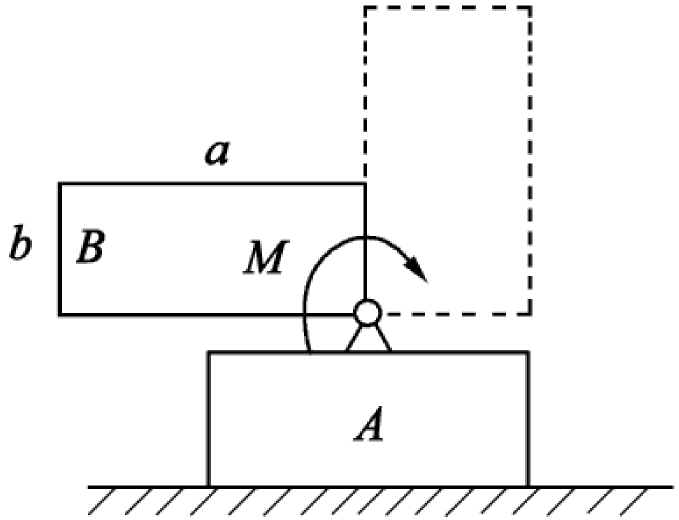
2.1 动量方法

例题

物A置于光滑水平面上，物B与物A铰联，初始静止。力偶M使物B沿水平位置（实线）运动移至铅垂位置（虚线）。试求物A移动的距离。

解： 以整体为研究对象。作用与该质点系上的外力包括重力、地面支持力和外加力偶，外力系在水平方向投影之和为零，且初始静止，因此有 $x_C=\text{常数}$ 。
取两刚体为两个子质点系，则有：

$$\sum m_{j(\text{group})}\Delta x_{Ci(\text{group})}=0$$

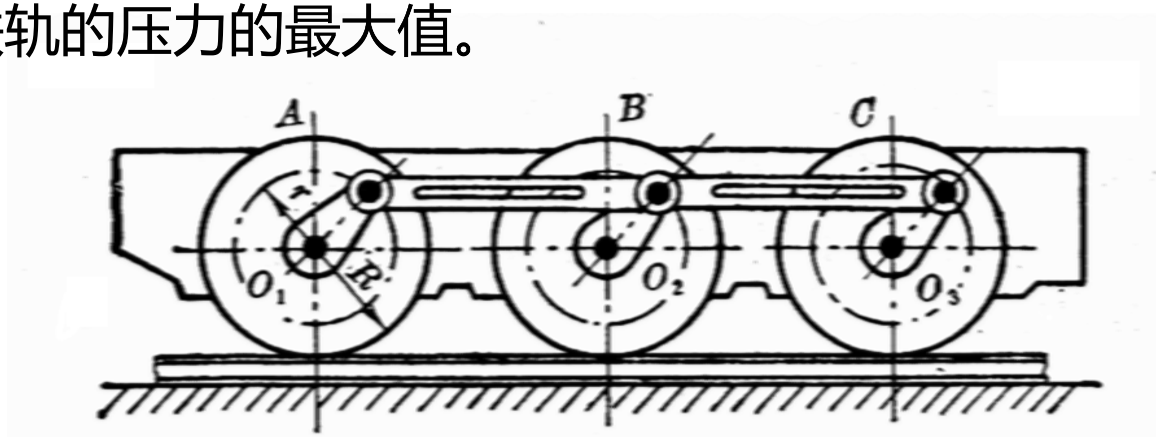


设A右移 s_A ，有 $m_A s_A+m_B(s_A+\dfrac{a+b}{2})=0$

解之得： $s_A=-\dfrac{(a+b)m_B}{2(m_A+m_B)}$

2.1 动量方法

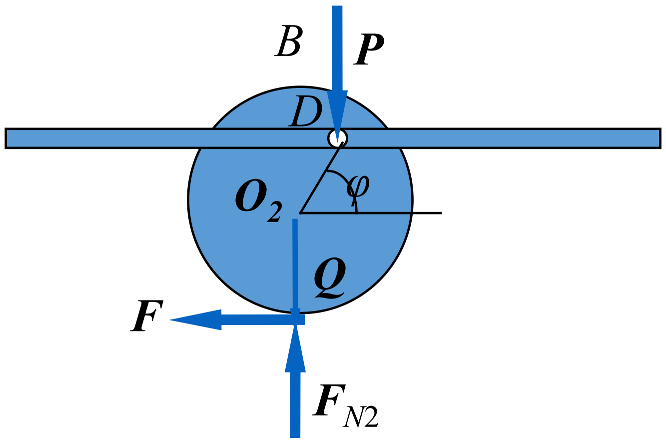
例题 已知:轮心速度 v ，半径为R ，重为Q 。平行杆ABC 重P，曲柄长r，其重量不计。求：车轮匀速运动时加于铁轨的压力的最大值。



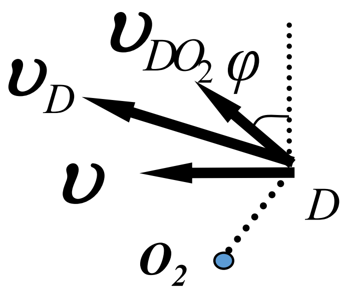
解： 以整体为研究对象。

受力分析，运动分析

1 . 受力分析



$$\varphi = \omega t$$



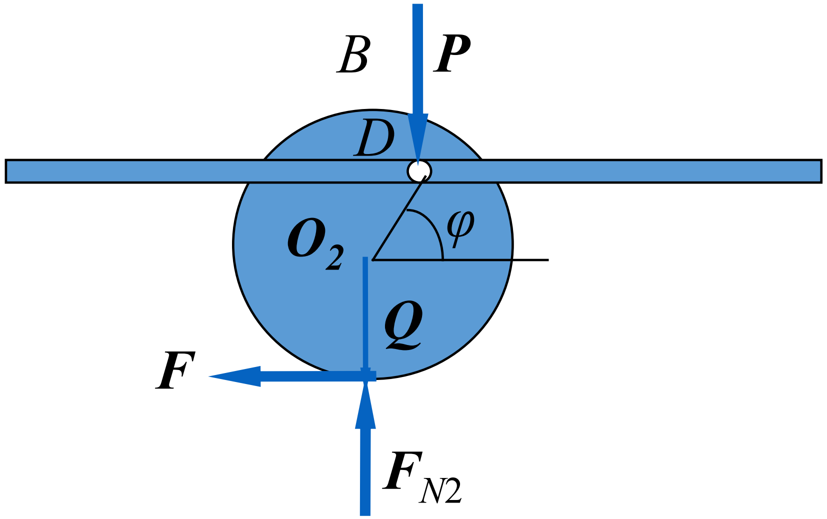
2 . 运动分析

$$v_D = v + v_{DO_2}$$

2.1 动量方法

对整体应用动量定理:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\sum \boldsymbol{F}_i^{(e)}$$



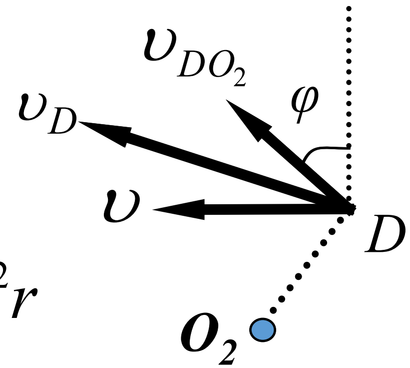
$\varphi=\omega t$

将上式投影到 y 轴

$$p_y=0+0+0+\frac{P}{g}\upsilon_{DO_2}\cos\varphi=\frac{P}{g}\omega r\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=-\frac{P}{g}\omega^2 r\sin\varphi=F_{N1}+F_{N2}+F_{N3}-3Q-P$$

$$\Rightarrow\quad F_{N1}+F_{N2}+F_{N3}=3Q+P-\frac{P}{g}\omega^2 r\sin\varphi$$



因此，车轮运动时加于铁轨的压力的最大值为 $F_{N\max}=3Q+P+\frac{P}{g}\omega^2 r$