2.1 动量方法

• 质点系对固定点的动量矩定理

质点系对固定点的动量矩定理表述为：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^e=\boldsymbol{M}_O^e$$

即，动量矩的时间变化率等于外力系的主矩。此即质点系对固定点的动量矩定理的微分形式。

定义 $\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^e\mathrm{d}t=\boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e$ 外力的元冲量矩，则有 $\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^e\mathrm{d}t=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e$ 为外力系元冲量的主矩，于是有：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e$$

即，动量矩的增量等于外力系元冲量的主矩。此即质点系对固定点的动量矩定理的另一微分形式。

2.1 动量方法

- 质点系对固定点的动量矩定理

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e$$

上式两边在时间区间$[t_1, t_2]$内积分得，

$$\boldsymbol{L}_{O2}-\boldsymbol{L}_{O1}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e$$

式中，$\boldsymbol{L}_{O2},\boldsymbol{L}_{O1}$分别为$t_2$和$t_1$时刻的动量矩，$\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e$ 为外力系元冲量的主矩在时间区间中的积分。此即对固定点的动量矩定理的积分形式。

若为冲击等瞬态作用过程，在过程始末各质点位置未变，上式化为

$$\boldsymbol{L}_{O2}-\boldsymbol{L}_{O1}=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\int_{t_1}^{t_2}d\boldsymbol{I}_i^e$$

即，动量矩的改变量等于外力系冲量的主矩，此即质点系的**冲量矩定理**。

2.1 动量方法

- 质点系对固定点的动量矩定理

可以列出相应的**投影形式**。例如，在惯性参考系中引入直角坐标系，则有：

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} = M_x^e,$$

$$L_{x2} - L_{x1} = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left[\boldsymbol{r}_i \times d\boldsymbol{I}_i^e \right]_x$$

对固定点和固定轴的动量矩守恒定理

➢若外力系主矩在某时段内等于零，即 $\boldsymbol{M}_O^e = 0$，则在该时段内，

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{C}_1$$

➢若外力系在某时段内对某根轴的矩等于零，例如x坐标轴，即 $M_x^e = 0$ ，则在该时段内， $L_x = C_2$

2.1 动量方法

- 质点系对固定点的动量矩定理

总结之，给出下表：

	矢量式	投影式（对x轴）
微分形式	$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^e=\boldsymbol{M}_O^e$	$\dfrac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=M_x^e$
积分形式	$\boldsymbol{L}_{O2}-\boldsymbol{L}_{O1}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e$	$L_{x2}-L_{x1}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\left[\boldsymbol{r}_i\times d\boldsymbol{I}_i^e\right]_x$
守恒形式	若 $\boldsymbol{M}_O^e=0$， $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{C}_1$	若 $M_x^e=0$ ， $L_x=C_2$

2.1 动量方法

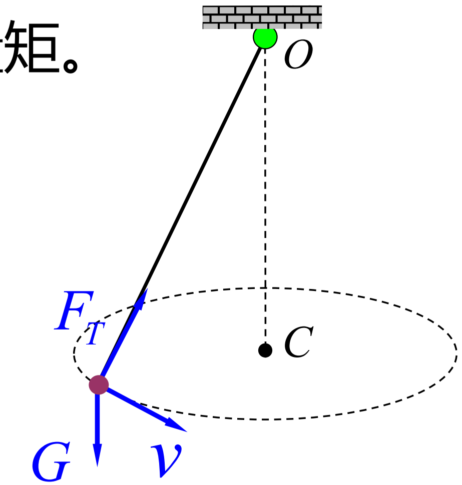
- 质点系对固定点的动量矩定理

考察一种常见的情形——刚体定轴转动问题。采用对转轴的动量矩定理，并注意到 $L_x = J_x\omega$，有，

$$J_x\ddot{\varphi} = J_x\alpha = M_x^e$$

这就是**刚体定轴转动微分方程**。

动量矩定理告诉我们，内力不能改变刚体对固定点和固定轴的动量矩。

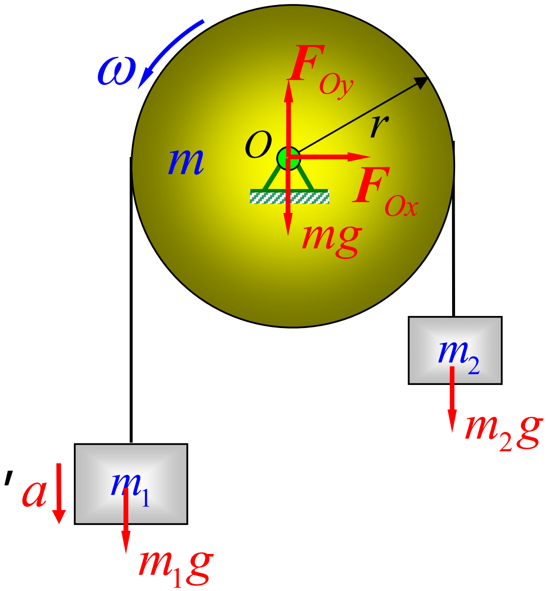


例题 分析圆锥摆中的动量矩守恒。

解8 小球受重力 $\boldsymbol{G}$ 与绳的拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 作用。$\sum \boldsymbol{M}_O^e \neq 0$，故 $\boldsymbol{L}_O$ 不守恒；$\sum M_{OC} = 0$，故 L_{OC} 守恒；$\sum \boldsymbol{M}_C = 0$，故 $\boldsymbol{L}_C$ 守恒。

2.1 动量方法

- 质点系对固定点的动量矩定理



例题　均质滑轮质量为m，半径为r，两重物系于绳端，质量为m_1和m_2。试求重物加速度。

解 8　以整体为研究对象，受力如图。设滑轮逆时针方向转动，角速度记为ω。质点系对O点的动量矩为

$$L_O = m_1r^2\omega + m_2r^2\omega + \frac{1}{2}mr^2\omega$$

外力系对O点的主矩为 $M_O^e = m_1gr - m_2gr$

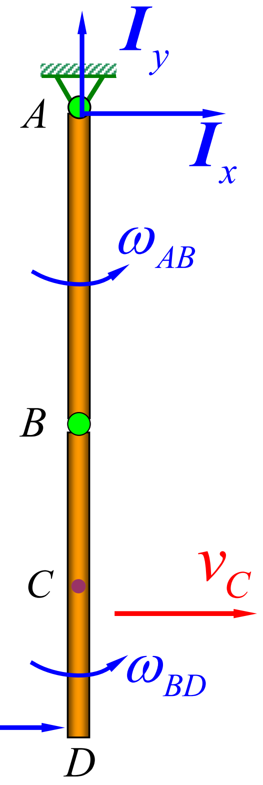
代入对固定点的动量矩 $\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = M_O^e$，得到：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)r^2\omega] = m_1gr - m_2gr$

于是有，$\alpha = \frac{2(m_1 - m_2)g}{(2m_1 + 2m_2 + m)r}$ ➡ 重物的加速度为 $a = r\alpha = \frac{2(m_1 - m_2)}{2m_1 + 2m_2 + m}g$

2.1 动量方法

- 质点系对固定点的动量矩定理

例题　两均质杆铰接，悬挂于重力场中。各杆质量为m，杆长为l，初始静止，某时刻BD杆下端受水平冲量$\boldsymbol{I}$作用。试求冲击结束后两杆的角速度。

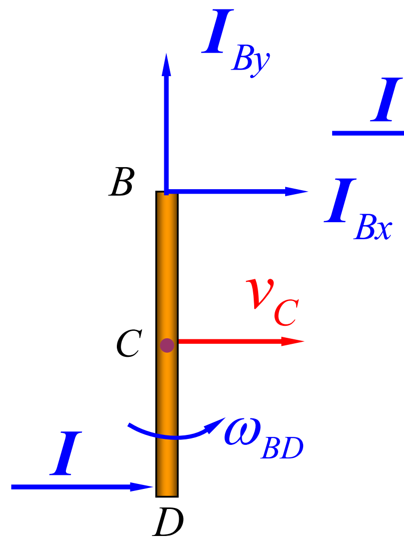


解：冲击结束后两杆的角速度设定如图所示。以B为基点，研究BD杆的质心C点

$$v_C = v_B + v_{CB} = l\omega_{AB} + \frac{1}{2}l\omega_{BD}$$

以整体为研究对象，应用对固定点A的冲量矩定理，有，

$$\frac{1}{3}ml^2\omega_{AB} + mv_C\frac{3l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_{BD} = I2l$$



以BD为研究对象，应用对固定点B'（B'点为与B点重合的固定点），有

$$mv_C\frac{l}{2} + \frac{1}{12}ml^2\omega_{BD} = Il$$

联立求解得，$\omega_{AB} = \dfrac{-6I}{7ml}$　$\omega_{BD} = \dfrac{30I}{7ml}$

2.1 动量方法

- 质点系对运动点的动量矩定理

将对固定点O和对运动点A的动量矩关系 $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{OA} \times m\boldsymbol{v}_C + m\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{v}_A$ ，以及对不同点的力系主矩关系 $\boldsymbol{M}_O^e = \boldsymbol{M}_A^e + \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{F}_R^e$ 代入对固定点的动量矩定理，得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{OA} \times m\boldsymbol{v}_C + m\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{v}_A\right) = \boldsymbol{M}_A^e + \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{F}_R^e$$

对左端进行求导操作，得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}_A \times m\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{OA} \times m\boldsymbol{a}_C + m\boldsymbol{v}_{CA} \times \boldsymbol{v}_A + m\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{M}_A^e + \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{F}_R^e$$

其中， $\boldsymbol{v}_{CA}$ 为在固连于A点的平移坐标系中观察到的质心C的速度，于是有 $\boldsymbol{v}_{CA} = \boldsymbol{v}_C - \boldsymbol{v}_A$ 。代入上式，并结合动量定理得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_A^e - \boldsymbol{AC} \times m\boldsymbol{a}_A$$

这就是质点系对运动点的动量矩定理。一般来说，它并不具有对固定点的动量矩定理的简洁形式。

2.1 动量方法

- 质点系对运动点的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_A^e-\boldsymbol{AC}\times m\boldsymbol{a}_A$$

在一些特殊情形下，对运动点的动量矩定理具有那种简洁形式。

- 第一，当运动点A与质心C重合时；
- 第二，当运动点A的加速度为零时；
- 第三，当 $\boldsymbol{a}_A//\boldsymbol{AC}$ ，即运动点的加速度指向质心时。

若上述条件始终满足，则始终有这一简洁形式；若在某瞬时满足，则在该瞬时有这一简洁形式。

2.1 动量方法

- 质点系对运动点的动量矩定理 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_A^e-\boldsymbol{AC}\times m\boldsymbol{a}_A$$

当运动点选为质心时，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^e=\boldsymbol{M}_C^e$$

即，质点系对质心的动量矩的时间变化率等于外力系对质心的主矩，这就是**质点系对质心的动量矩定理**。上式亦可以写成:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C=\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times d\boldsymbol{I}_i^e$$

相应的积分形式为: $$\boldsymbol{L}_{C2}-\boldsymbol{L}_{C1}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{r}_i'\times d\boldsymbol{I}_i^e$$

若为冲击等瞬态作用过程，则有: $$\boldsymbol{L}_{C2}-\boldsymbol{L}_{C1}=\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times\int_{t_1}^{t_2}d\boldsymbol{I}_i^e$$

2.1 动量方法

- 质点系对运动点的动量矩定理

进一步地，写出相应的**投影形式**。例如，在固连于质心的平移参考系中放置直角坐标系，则有：

$$\frac{\mathrm{d}L_{x'}}{\mathrm{d}t}=M_{x'}^{e}$$

$$L_{x'2}-L_{x'1}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}\left[\boldsymbol{r}_i'\times d\boldsymbol{I}_i^e\right]_{x'}$$

对质心的动量矩守恒定理

➢若外力系对质心的主矩在某时段内等于零，即 $\boldsymbol{M}_C^e=0$ ，则在该时段内，

$$\boldsymbol{L}_C=\boldsymbol{C}_3$$

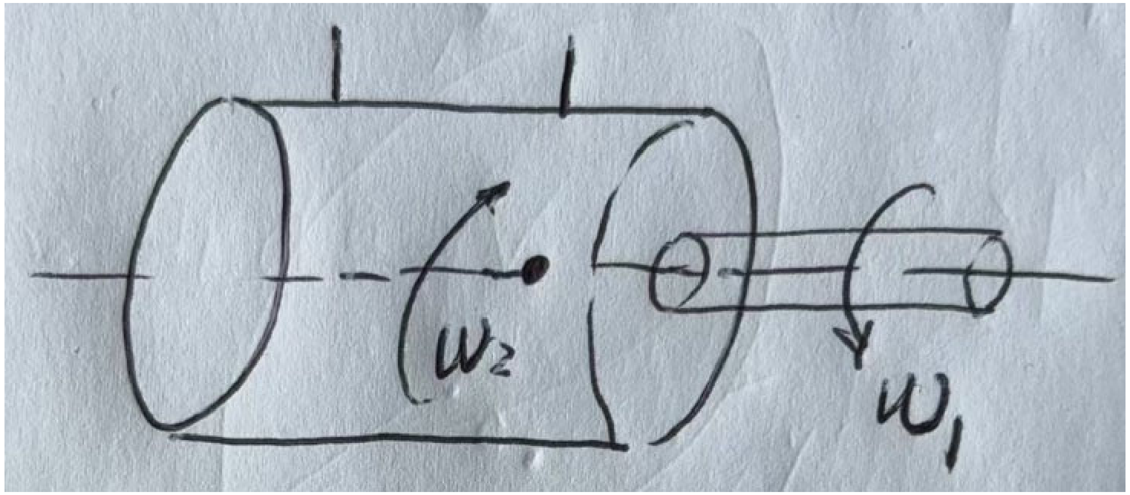
➢若外力系在某时段内对过质心的某一根平移轴的主矩等于零，例如x坐标轴，即 $M_{x'}^e=0$，则在该时段内，

$$L_{x'}=C_4$$

2.1 动量方法

- 质点系对运动点的动量矩定理

  对质心的动量矩定理表明，内力不能改变对质心和过质心的平移轴的动量矩。这可以解释猫有九条命。



2.1 动量方法

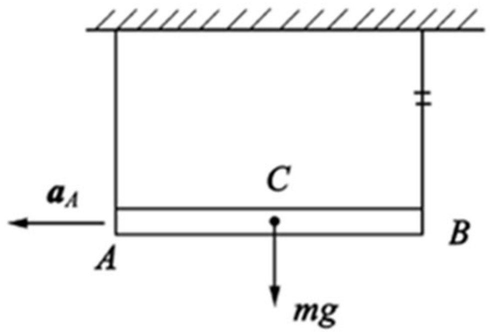
- 质点系对运动点的动量矩定理

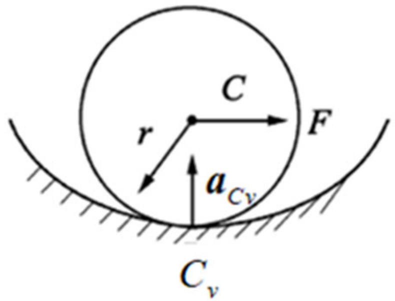
考察一种常见的情形——刚体平面运动问题。采用对垂直运动平面的质心轴的动量矩定理，注意到 $L_{z'}=J_C\omega$ ，有，

$$J_C\ddot{\varphi}=J_C\alpha=M_C^e$$

式中，J_C 是指平面运动刚体对质心轴 z' 的转动惯量，M_C^e 是外力系对质心轴 z' 的矩。

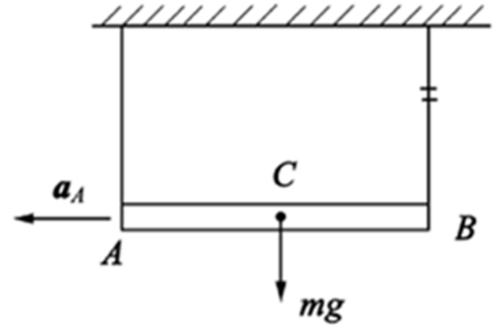
例题 试计算图示各平面运动刚体的角加速度。左图中，刚体初始静止，突然一根悬线断开；右图中，圆轮在水平推力作用下纯滚动。





2.1 动量方法

解：绳断瞬时，所有速度信息为零。杆端A点（物质点）作圆周运动，加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 只有切线分量。$\boldsymbol{a}_A$ 通过刚体质心C，在该时刻有



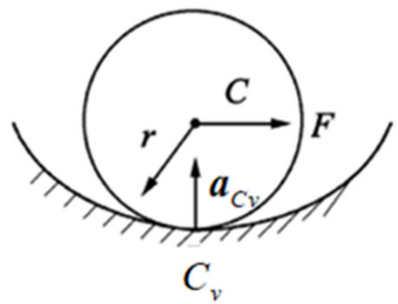
$$\frac{\mathrm{d}L_A}{\mathrm{d}t} = M_A^e$$

$$L_A = J_A\omega = \frac{1}{3}ml^2\omega \qquad M_A^e = mg\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

注意：对下一个时刻，$\dfrac{\mathrm{d}L_A}{\mathrm{d}t} = M_A^e$ 不成立

已知圆轮的速度瞬心 C_v(圆轮上的物质点）的加速度 $\boldsymbol{a}_{C_v}$ 指向质心C，在该时刻有



$$\frac{\mathrm{d}L_{C_v}}{\mathrm{d}t} = M_{C_v}^e$$

$$L_{C_v} = J_{C_v}\alpha = \frac{3}{2}mr^2, M_{C_v}^e = Fr$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{Fr}{J_{C_v}}$$

(重力和地面支持力、摩擦力都通过瞬心)

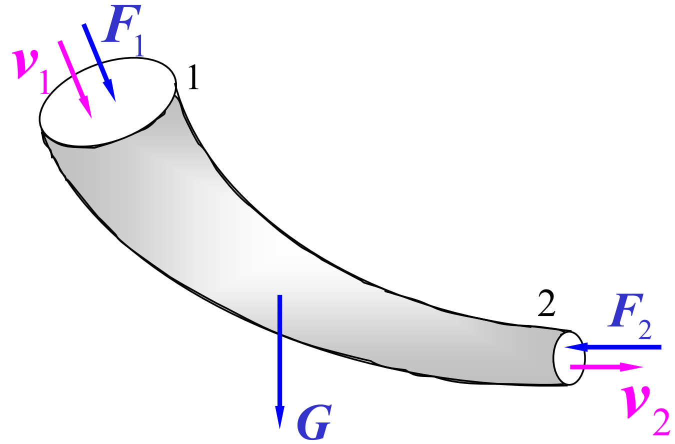
2.1 动量方法

- 动量方法应用

讨论动量方法应用，即联合应用动量定理和动量矩定理，来求解动力学问题。首先，讨论稳定流体的动反力；然后，重点研究平面刚体系的动力学问题求解。

动量方法用于稳定流体

考察细长变截面弯管中的不可压缩稳定流体（所谓稳定流体，即各点处的速度保持不变的流体）。这部分流体受重力$\boldsymbol{G}$作用，在入口和出口处两横截面上分别受到压力$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$，以及管壁约束力$\boldsymbol{F}_N$ 作用（均为分布力）。入出口的速度分别为 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 。试求流体对管壁的附加动约束力的主矢和主矩。

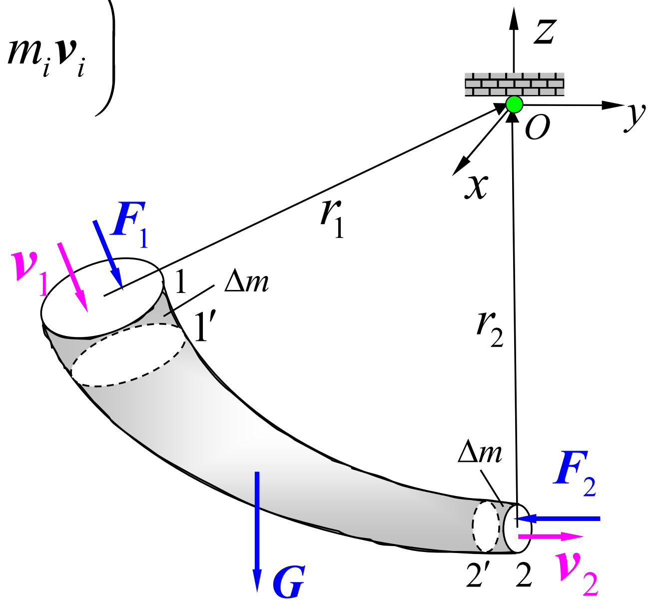


2.1 动量方法

动量方法用于稳定流体

先求管壁对流体的动约束力系的主矢。考察流体构成的质点系的动量变化。设在时间间隔Δt 内，流体从截面1和2之间运动到截面$1'$和 $2'$之间。在该时段内，动量改变量为，

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p} = \sum_{1'-2'} m_i \boldsymbol{v}_i' - \sum_{1-2} m_i \boldsymbol{v}_i = \left(\sum_{1'-2} m_i \boldsymbol{v}_i' + \sum_{2-2'} m_i \boldsymbol{v}_i'\right) - \left(\sum_{1-1'} m_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{1'-2} m_i \boldsymbol{v}_i\right)$$



因为是稳定流，故有 $\sum_{1'-2} m_i \boldsymbol{v}_i' = \sum_{1'-2} m_i \boldsymbol{v}_i$ ，于是有，

$$\Delta \boldsymbol{p} = \sum_{2-2'} m_i \boldsymbol{v}_i' - \sum_{1-1'} m_i \boldsymbol{v}_i = \Delta m \left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right)$$

其中，Δm 为1至 $1'$ 和2至 $2'$ 的微片质量。上式两边除以 Δt 并取极限，得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q_m (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$$

式中， q_m 为质量流量。

2.1 动量方法

动量方法用于稳定流体

由质点系动量定理，可得：

$$q_m(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_N$$

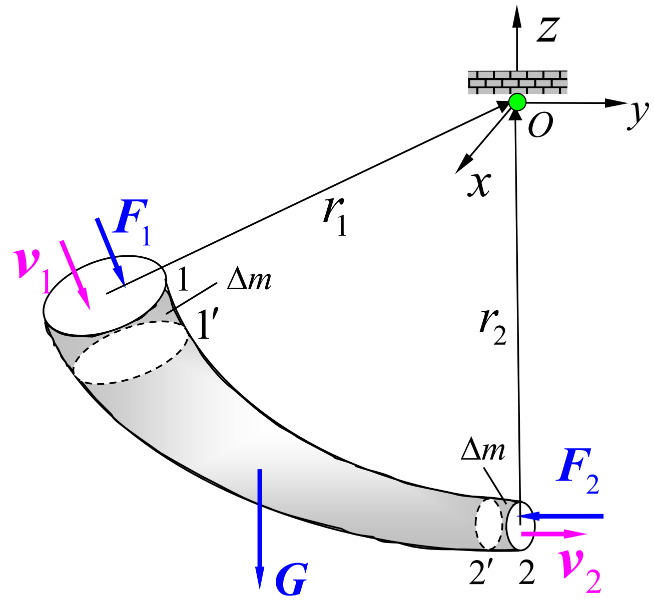
将约束力系 $\boldsymbol{F}_N$ 分为两个力系，$\boldsymbol{F}_N=\boldsymbol{F}_N'+\boldsymbol{F}_N''$ ，其中$\boldsymbol{F}_N'$ 为与外力系$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$平衡的静约束力系，有

$$\boldsymbol{F}_N'+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{G}=0$$

于是，附加动约束力系的主矢为

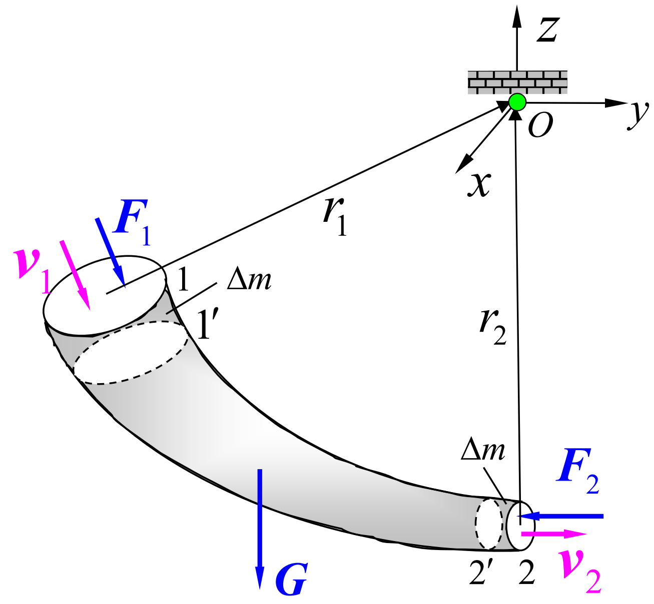
$$\boldsymbol{F}_N''=q_m(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)=q_v\rho(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$$

式中， q_v 为体积流量，ρ 为质量密度。



2.1 动量方法

动量方法用于稳定流体



再求管壁对流体的动约束力系对一固定点O的主矩。由固定点O向入、出口处的微片质量 Δm 引矢径 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 。在时段 Δt 内，对定点O的动量矩改变量为，

$$\Delta \boldsymbol{L}_O = \Delta m(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1)$$

上式两边除以Δt 并取极限，得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = q_m(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1)$$

由质点系对固定点的动量矩定理，可得：

$$q_m(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_N)$$

注意到， $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{G}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_1) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_2) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}'_N) = 0$

于是，附加动约束力系对固定点O的主矩为 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}''_N) = q_m(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1) = q_v\rho(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1)$

2.1 动量方法

动量方法用于稳定流体

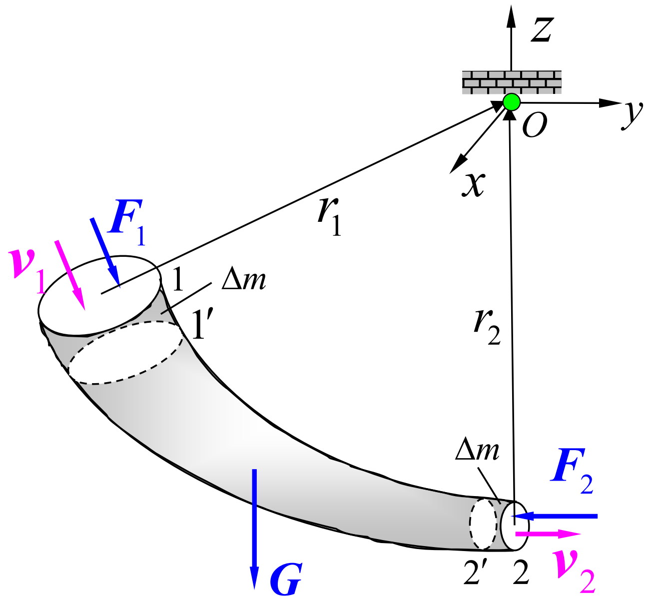
至此，导出了管壁对流体的动约束力系的主矢和主矩

附加动约束力系的主矢为

$$\boldsymbol{F}_N'' = q_m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = q_v\rho(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)$$

附加动约束力系对固定点O的主矩为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_N'') = q_m(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1) = q_v\rho(\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1)$$



由作用与反作用定律知，流体对管壁的动反力的主矢和主矩与之等值、反向。这也就得到了流体对管壁的分布动反力向O点简化的结果。