4.7-3 坐标变分（虚位移）和自由度

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

- 完整约束加在坐标变分上的条件

考虑N个质点构成的质点系，受到k个完整约束的限制。约束方程如下，

$$f_\alpha\left(x_i, y_i, z_i, t\right)=0, \alpha=1,2 \cdots, k$$

这里，考察完整约束加在坐标（作为时间的函数）变分上的条件。

从满足完整约束的一组坐标出发，发生变分后的坐标仍满足此约束等式，这就是说，

$$f_\alpha\left(x_i+\delta x_i, y_i+\delta y_i, z_i+\delta z_i, t\right)=0, \alpha=1,2 \cdots, k$$

将上式泰勒展开并与原式相减，得到完整约束施予坐标变分的限制：

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i=0, \alpha=1,2 \cdots, k$$

于是知，每个完整约束对坐标变分施加了一个限制条件。其中k个坐标变分可用另外$3N$-k个坐标变分表出。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

- 自由度

因此，对于完整系统，独立的坐标变分个数为$s=3N-k$，恰与系统的广义坐标数相一致。对于完整系统，采用了一组广义坐标后，这组广义坐标（作为时间的函数）的变分就是独立的。

这里特别指出，每个非完整约束对坐标变分施加了一个限制条件，对于包含k个完整约束和l个非完整约束的非完整系统，独立的坐标变分个数$s=3N-k-l$，因此，广义坐标的变分是不独立的。

独立的坐标变分的个数称为**自由度**。易知，对于完整系统，广义坐标数等于自由度；对于非完整系统，广义坐标数目大于自由度。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

- 可能位移、实位移和虚位移

在力学中，在任一时刻t、任一真实位置 x_i, y_i, z_i 的坐标变分相应于各质点位置的变动。这一变动是假想的、不依赖于时间的，因此与力学系统的真实位置变动有别。因此，在力学中，任一时刻t、任一真实位置 x_i, y_i, z_i 的坐标变分专称**虚位移**，而这一时刻、这一真实位置处真实发生的坐标微分称为**实位移**。

这里，引进**可能位移**概念，并通过与实位移和虚位移相比较，更深刻地理解虚位移的力学意义。

将k个完整约束微分得， $\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\mathrm{d}t=0,\ \alpha=1,2\cdots,k$

该式限制了在当前时刻t、当前真实位置 x_i, y_i, z_i ，系统在dt时段可能发生的无限小位移之间的关系。因此，如果$\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}z_i$满足上述线性代数方程组，称之为在当前时刻、当前真实位置处，系统在dt时段的**可能位移**。一般来说，对于任一时刻、任一真实位置处，都存在无穷组可能位移。然而，在该时刻、该真实位置处，**实位移**是且仅是可能位移中的一种。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

- 可能位移、实位移和虚位移

在任一时刻t、任一真实位置 x_i, y_i, z_i ，取dt时段的两组可能位移：$\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}z_i$ 和 $\overline{\mathrm{d}}x_i, \overline{\mathrm{d}}y_i, \overline{\mathrm{d}}z_i$ 。二者之差 $\mathrm{d}x_i - \overline{\mathrm{d}}x_i, \mathrm{d}y_i - \overline{\mathrm{d}}y_i, \mathrm{d}z_i - \overline{\mathrm{d}}z_i$ 满足，

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\left(\mathrm{d}x_i - \overline{\mathrm{d}}x_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\left(\mathrm{d}y_i - \overline{\mathrm{d}}y_i\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\left(\mathrm{d}z_i - \overline{\mathrm{d}}z_i\right) = 0, \alpha = 1, 2 \cdots, k$$

这恰是虚位移满足的关系。由此知，虚位移就是同一时间元内两个可能位移之差。

相比于虚位移满足的方程组，可能位移满足的方程组只多了一项 $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt$ 。因此可以说，**当约束“凝固”时的可能位移（集合），就和虚位移（集合）完全一致**。所谓“凝固”是指，时间t被固定，约束保持它在当前时刻t的形状不变，因此，$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt$ 项不出现。易知，**对于定常系统，可能位移集合和虚位移集合完全一致，真实位移是虚位移中的一个**。

总结来说，可能位移是满足且仅满足约束条件的无限小位移的集合；真实位移是真实发生的位移，除满足约束条件外，尚需满足物理律、作用力和初始条件，是可能位移中的一个；虚位移是假想的（并非真的发生）、瞬时发生的（与时间无关）、为约束所允许的（不危害约束）任意的（变动随意）微小（无限小）位移。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

- 广义实位移、广义虚位移

将质点矢径的广义坐标表示式 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1\cdots,q_n,t)$ 微分，得，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\mathrm{d}t \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

该式给出了在当前时刻t、当前真实位置$q_1\cdots,q_n$，在dt时段，广义坐标微分$\mathrm{d}q_1\cdots,\mathrm{d}q_n$和笛卡尔坐标微分$\mathrm{d}x_i,\mathrm{d}y_i,\mathrm{d}z_i$之间的关系。真实发生的广义坐标微分称为**广义实位移**。

将质点矢径的广义坐标表示式 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1\cdots,q_n,t)$ 变分，得，

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

该式给出了在当前时刻t、当前真实位置 $q_1\cdots,q_n$，广义坐标变分$\delta q_1\cdots,\delta q_n$ 和虚位移（笛卡尔坐标变分）$\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$之间的关系。广义坐标变分称为**广义虚位移**。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

以下，通过例子说明可能位移、实位移和虚位移的联系和区别，并揭示出为何要引入抽象的虚位移概念？

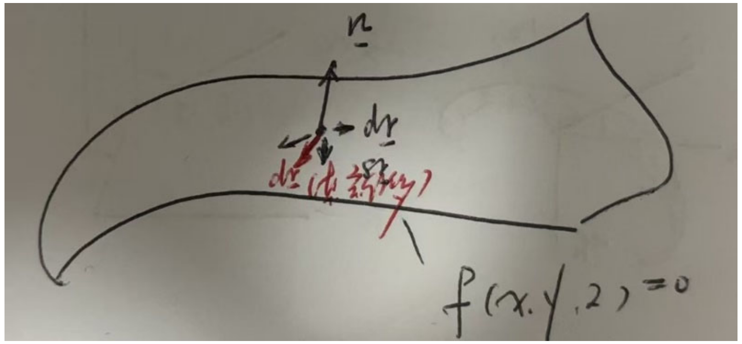
例题 质点限制在给定的不随时间变化的曲面上运动。约束方程为，

$$f\left(x,y,z\right)=0$$

解： 微分和变分上式，分别给出可能位移和虚位移满足的方程：

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0$$



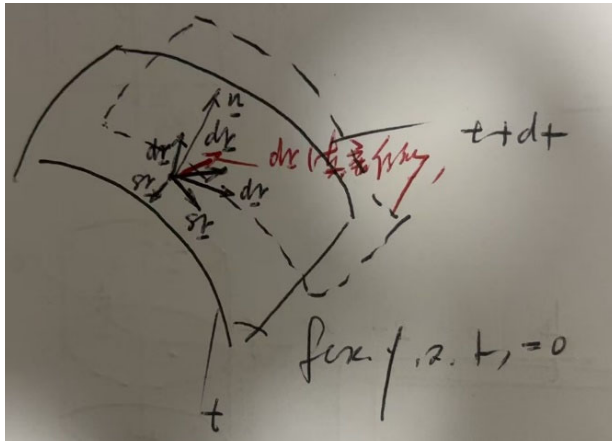
由此可知，可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$ 以及虚位移 $\delta\boldsymbol{r}=\delta x\boldsymbol{i}+\delta y\boldsymbol{j}+\delta z\boldsymbol{k}$ 均与曲面的法向 $\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ 垂直，这就是说，可能位移以及虚位移都沿着曲面的切面方向。

进一步知，任何在切面内的无限小位移都是可能位移和虚位移，可能位移集合和虚位移集合一致，而实位移仅是虚位移中的一个。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

如果曲面本身按照既定模式运动或变形，约束方程为，

$$f\left(x,y,z,t\right)=0$$



可能位移和虚位移分别满足方程：

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0$$

由此可知，可能位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$ 一般不再与曲面法向垂直，然而，虚位移 $\delta\boldsymbol{r}=\delta x\boldsymbol{i}+\delta y\boldsymbol{j}+\delta z\boldsymbol{k}$ 仍与曲面法向垂直。虚位移集合和约束凝固时的可能位移完全一致，而实位移不是虚位移中的一个。

评述：上例表明，无论对于定常约束还是非定常约束，虚位移都与约束面法向正交。正交性在数学中具有举足轻重的地位，常被用来做许多事。这种正交性也正是引入虚位移的真正动机。

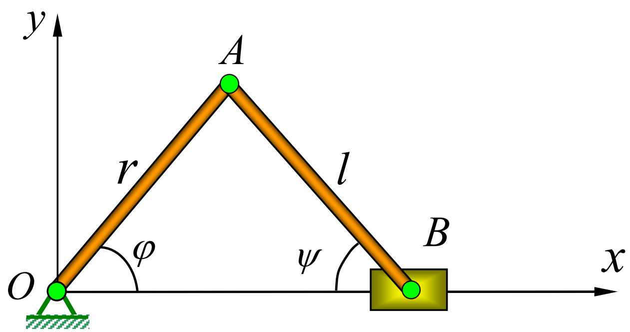
3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

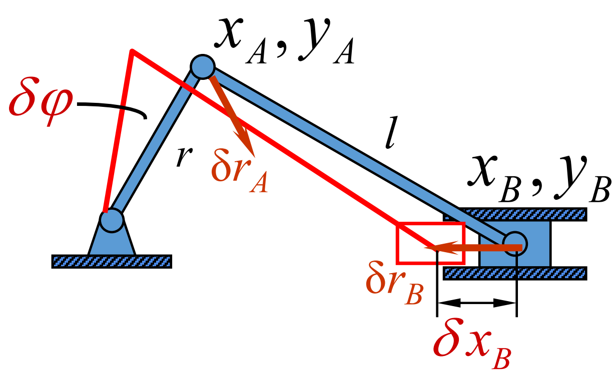
- 虚位移关系的计算

针对一个**完整**系统，算出广义坐标数，选取广义坐标，将各质点坐标用广义坐标表出；通过变分运算，用广义虚位移表出各质点的虚位移，进而，可以得出各质点虚位移之间的关系。这种方法称为虚位移关系计算的**解析法**。

对于**完整、定常**系统，由于虚位移集合和可能位移集合一致，可以通过运动分析得出可能位移之间的关系，这也就得出了虚位移之间的关系。这种方法称为虚位移关系计算的**几何法**。

例题 试求曲柄连杆机构中A、B两点的虚位移关系。

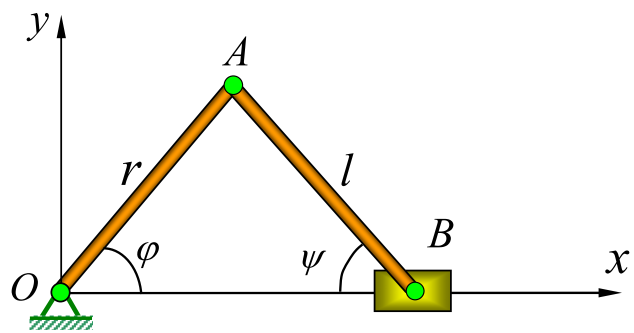




3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

- 虚位移关系的计算

解： 完整、定常系统。



解析法： 广义坐标数为1，取φ为广义坐标。*A*、*B*两点的坐标用广义坐标表出，

$$x_A = r\cos\varphi, y_A = r\sin\varphi, x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}, y_B = 0$$

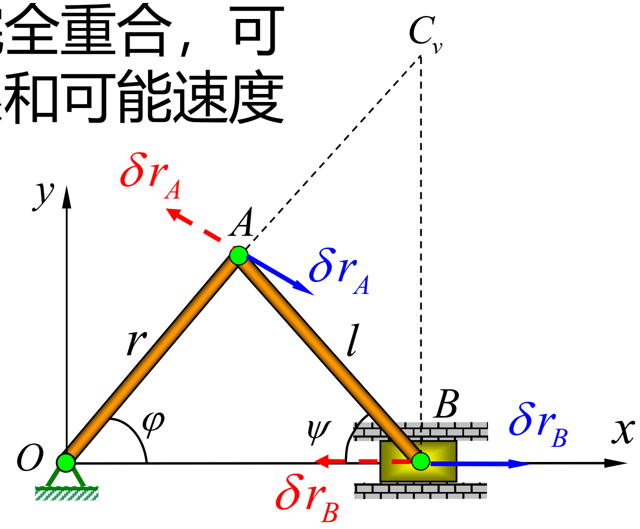
于是有：

$$\delta x_A = -r\sin\varphi\delta\varphi, \delta y_A = r\cos\varphi\delta\varphi, \delta x_B = -[r\sin\varphi + \frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}]\delta\varphi, \delta y_B = 0$$

这就以广义虚位移为参数，表出了两质点虚位移之间的关系。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

几何法： 对于完整、定常系统，虚位移集合和可能位移集合完全重合，可通过分析可能位移关系来确定虚位移关系。又，可能位移关系和可能速度关系一致，故可通过分析可能速度关系来确定虚位移关系。



以下，图中画出的虚位移均理解为可能速度。给定一组虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_A$和$\delta \boldsymbol{r}_B$ ，方位明确。由速度投影定理知，

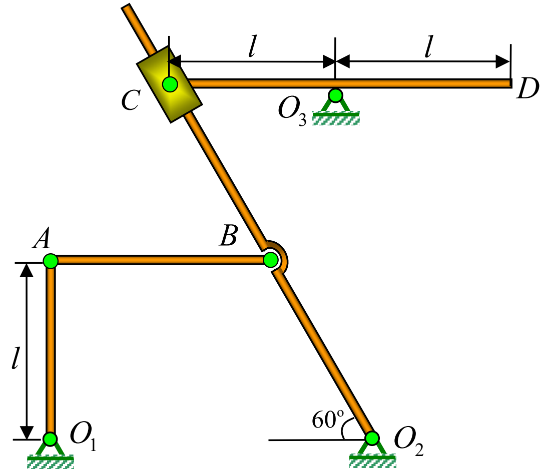
$$\delta r_A \cos[90^\circ - (\varphi + \psi)] = \delta r_B \cos\psi$$

虚位移关系亦可用速度瞬心法给出，$\dfrac{\delta r_A}{\delta r_B} = \dfrac{C_v A}{C_v B} = \dfrac{\cos\psi}{\sin(\varphi + \psi)}$

在上述关系中，ψ与φ相互依赖，给出φ也就确定了ψ 。

评述： 解析法规范，几何法直观。如果坐标关系明了，适合用解析法；如果运动关系明了，适合用几何法。此外，不但能给出A、B两点的虚位移关系，还能给出所有点虚位移之间的关系。

3.1 坐标变分（虚位移）和自由度

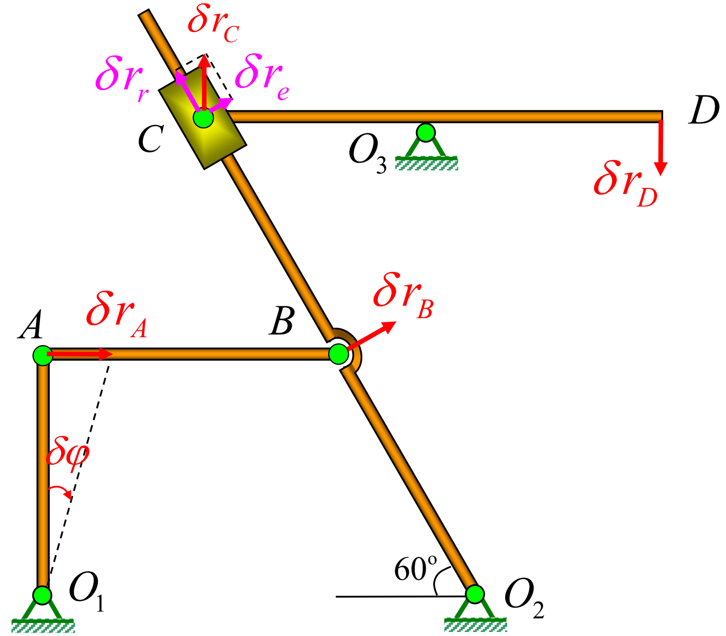


例题 试求杆件-滑块机构上A、D两点的虚位移关系。

解： 完整、定常系统。广义坐标数为1。但该例不适合采用解析法，可以试着选取广义坐标，由之表出A、D两点的坐标。

几何法： 给定图示虚位移，有

$$\delta r_D = \delta r_C$$



按速度合成定理知， $\delta r_e = \dfrac{1}{2}\delta r_C$

又 $\delta r_B = \dfrac{1}{2}\delta r_e$

由速度投影定理知， $\delta r_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\delta r_B$

由此知，两杆端A、D的虚位移关系为 $\delta r_A = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\delta r_D$

4.7-4 虚功和理想约束

本节引入虚功和理想约束的概念。这二者在数学的泛函和变分研究中都不曾出现。

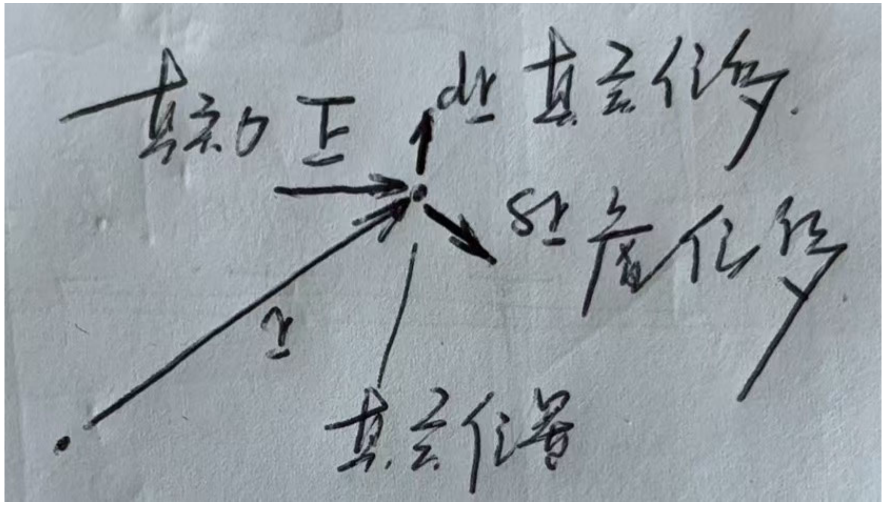
4.1 虚功和理想约束

- 虚功

虚元功（简称**虚功**）定义为：（真实的）力与其作用质点（假想发生的）虚位移的点积，即，

$$\bar{\delta} W = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}$$

力$\boldsymbol{F}$作用于质点上，虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 是该质点在某时刻、某真实位置处的虚位移。



- 虚元功vs.实元功

相应地，（真实的）力与其作用质点（真实发生的）实位移的点积，应称为实元功（简称为元功）。虚元功概念是实元功概念的拓展。实位移宜理解为力的作用质点的速度乘以时间元，但虚位移不宜这样理解，因为并未定义虚速度概念。

这里说明两点：其一，虚元功是一个数学概念，初看并无清晰的物理意义；其二，并未定义类比实功（简称功）的“虚功”概念，前者定义为实元功按时间加和，但在后者的定义中，虚位移不是伴随时间发生的。

4.1 虚功和理想约束

- 理想约束

质点之间或者质点系与外部之间的约束引起约束反力作用，或者说，正是约束反力使质点之间或者质点系与外部之间保持着既定的位置和运动关系。

如果一个约束引起的约束力在任意虚位移上所做的虚功均为零，称该约束为**理想约束**，即，
$$\sum \boldsymbol{F}_{Ni} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

该式刻画了约束力（矢量）与虚位移（矢量）之间的总体正交性。

- 典型理想约束

考察五类典型约束：

(1) 接触式约束；(2) 铰联式约束；(3) 固定端约束；

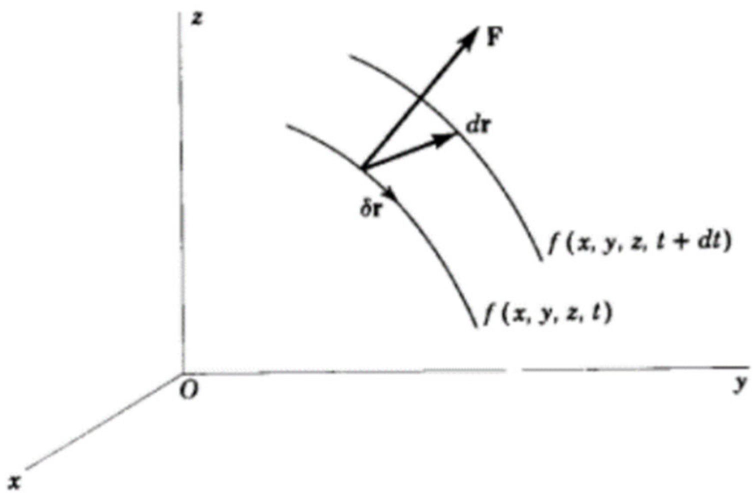
(4) 连杆式约束；(5) 滑移式约束

4.1 虚功和理想约束

- (1) 接触式约束

光滑曲面约束

对受约束的质点或者刚体而言，光滑曲面约束在任意时刻提供的约束力都沿着曲面法线方向。无论约束曲面是否定常，相应时刻的虚位移都沿着切平面方向。因此，约束力在任意虚位移上的所做的虚功均为零，光滑曲面约束为理想约束。注意，对于非定常情形，约束力 F_N 的实元功一般并不等于零。

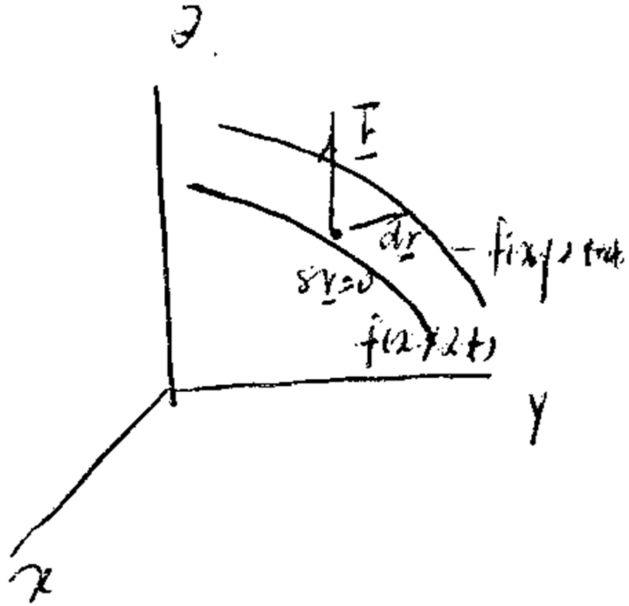


4.1 虚功和理想约束

- (1) 接触式约束

（完全）粗糙曲面约束

对受完全粗糙曲面约束的质点而言，无论约束是否定常，任一时刻的虚位移都等于零，因此为理想约束。对完全粗糙曲面约束的刚体而言，无论约束是否定常，任意时刻的虚位移都等于零，因此为理想约束。注意，对于非定常情形，约束力的实元功一般并不等于零。



4.1 虚功和理想约束

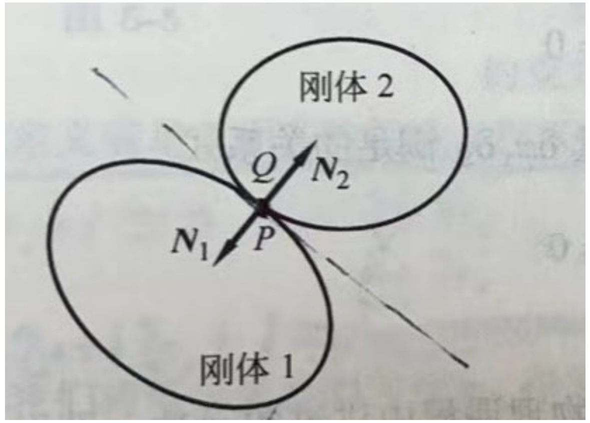
- (1) 接触式约束

两刚体以光滑表面接触

刚体I和刚体II以完全光滑表面接触，且不脱离。刚体I接触质点记为P，矢径为 r_1，受到约束力$\boldsymbol{F}_{R1}$作用；刚体II接触质点记为Q，矢径为r_2，受到约束力$\boldsymbol{F}_{R2}$作用。两约束力互为作用力与反作用力关系。于是有，

$$\boldsymbol{F}_{R1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{R2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_{R1}\cdot\left(\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2\right)$$

该系统为定常系统，因此，虚位移集合和可能位移集合完全重合，只需考察所有的可能速度即可。以刚体I为动系，以刚体II的接触点Q为动点，Q点（动点）的绝对速度等于P点（牵连点）的绝对速度加上相对速度。因为相对速度沿着接触点处的公切面方向，因此，Q点的绝对速度与P点的绝对速度之差沿共切面方向，两质点虚位移之差也就沿共切面方向。由此知，上述点积为零，该约束为理想约束。



4.1 虚功和理想约束

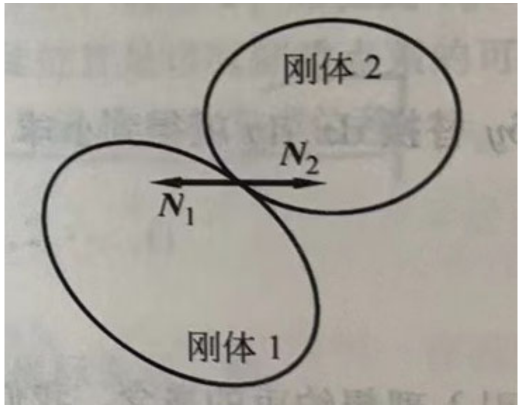
• (1) 接触式约束

两刚体以（完全）粗糙表面接触

刚体I和刚体II以完全粗糙表面接触，且不脱离。刚体I接触质点的矢径为 r_1 ，受到约束力$\boldsymbol{F}_{R1}$作用；刚体II接触质点的矢径为r_2 ，受到约束力$\boldsymbol{F}_{R2}$作用。两约束力互为作用力与反作用力关系。于是有，

$$\boldsymbol{F}_{R1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{R2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_{R1}\cdot\left(\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2\right)$$

该体系为定常体系，因此，虚位移集合和可能位移集合完全重合，只需考察所有可能速度即可。无滑接触两点的速度相等，因此，虚位移之差等于零。由此知，上述点积为零，该约束为理想约束。



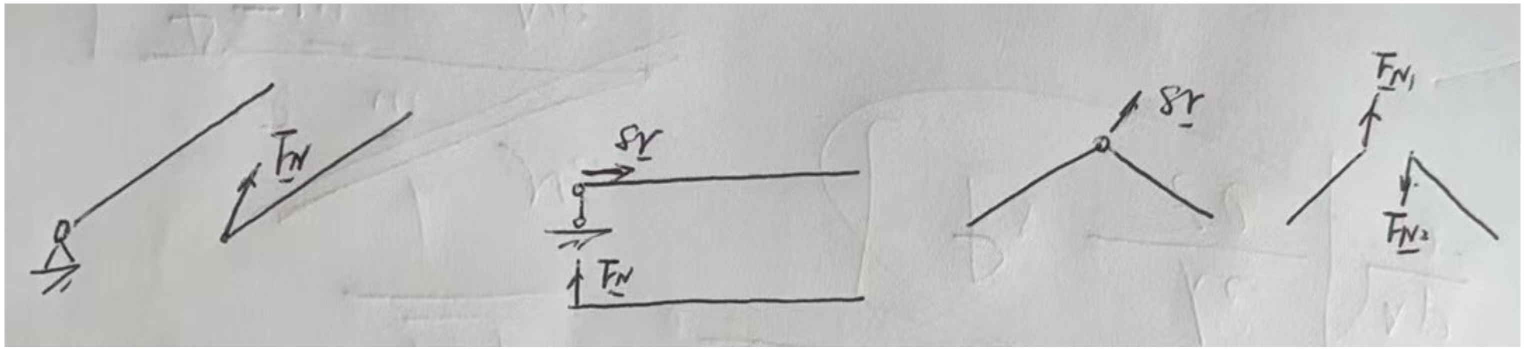
4.1 虚功和理想约束

- (2) 铰联式约束

对于受固定铰链约束的刚体，约束力的作用质点的虚位移恒等于零，因此，为理想约束。

对于受到可动铰链约束的刚体，约束力方向和作用质点的虚位移方向垂直，因此，为理想约束。

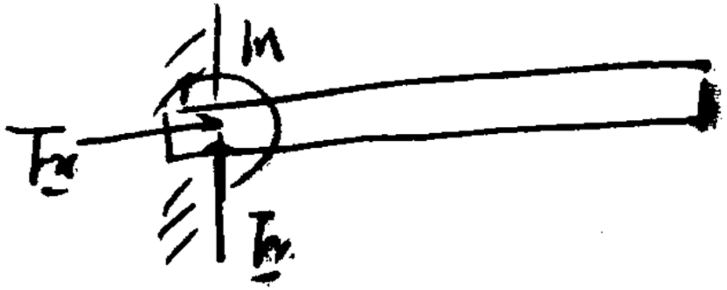
对于受到中间铰链约束的两个刚体，分别作用于两个刚体的约束力为作用力与反作用力关系，而两个约束力作用质点的虚位移始终相等，因此，为理想约束。



4.1 虚功和理想约束

- (3) 固定端约束

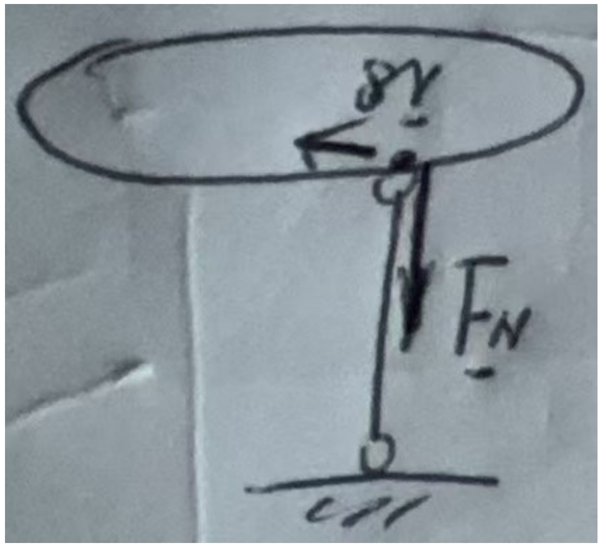
对于受固定端约束的刚体，刚体的虚位移等于零，因此为理想约束。



- (4) 连杆式约束

刚体受轻质刚性杆约束

对于受轻质刚性杆约束的刚体，约束力沿杆轴线方向，而虚位移与连杆垂直，因此为理想约束。



4.1 虚功和理想约束

- (4) 连杆式约束

两质点受轻质刚性杆约束

对于受轻质刚性杆约束的两质点，约束力沿杆轴线方向，且大小相等、方向相反。于是有，

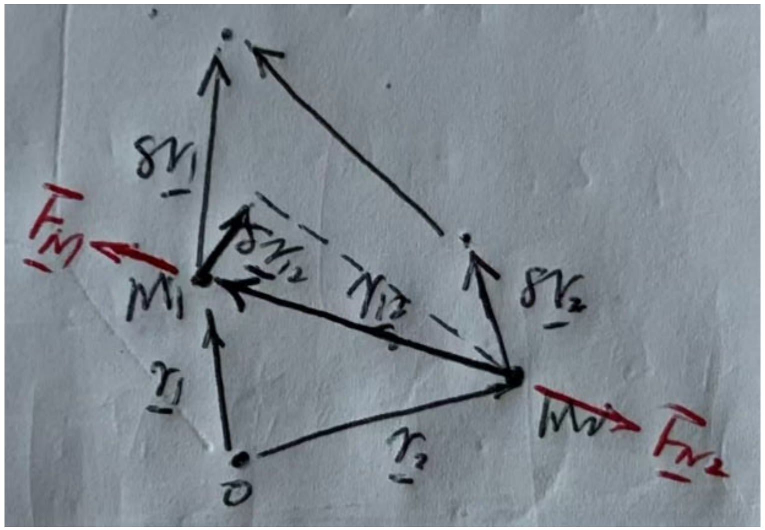
$$\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{N2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\left(\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2\right)=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2\right)=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{12}$$

由刚性杆的长度不变性，有，

$$\left(\boldsymbol{r}_{12}+\delta\boldsymbol{r}_{12}\right)\cdot\left(\boldsymbol{r}_{12}+\delta\boldsymbol{r}_{12}\right)=\boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{r}_{12}$$

略去高阶小，得，$\boldsymbol{r}_{12}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{12}=0$

$\boldsymbol{F}_{R1}$ 平行于 $\boldsymbol{r}_{12}$ ，与 $\delta\boldsymbol{r}_{12}$ 垂直。因此，为理想约束。
这就表明，**单刚体的内部约束为理想约束！**



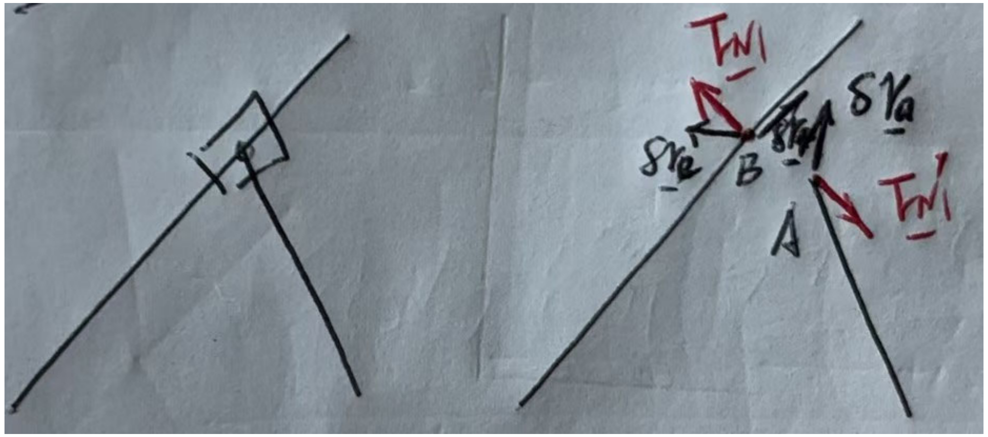
4.1 虚功和理想约束

• (5)滑移式约束

对于受滑移式约束的两个刚体，约束力互为作用力与反作用力。于是有，

$$\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{N2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\left(\delta\boldsymbol{r}_1-\delta\boldsymbol{r}_2\right)$$

滑移式约束定常，可由可能速度关系给出虚位移关系。以套筒（即杆端）为动点，以另一根杆为动系，由速度合成定理得，



$$\delta\boldsymbol{r}_a=\delta\boldsymbol{r}_e+\delta\boldsymbol{r}_r$$

而 $\delta\boldsymbol{r}_1=\delta\boldsymbol{r}_a,\delta\boldsymbol{r}_2=\delta\boldsymbol{r}_e$，于是得，

$$\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{N2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{F}_{N1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_r=0$$

因此，为理想约束。

此外，如果将滑移式约束视为铰联式约束和光滑接触约束的组合，那么上述结论就是必然的。

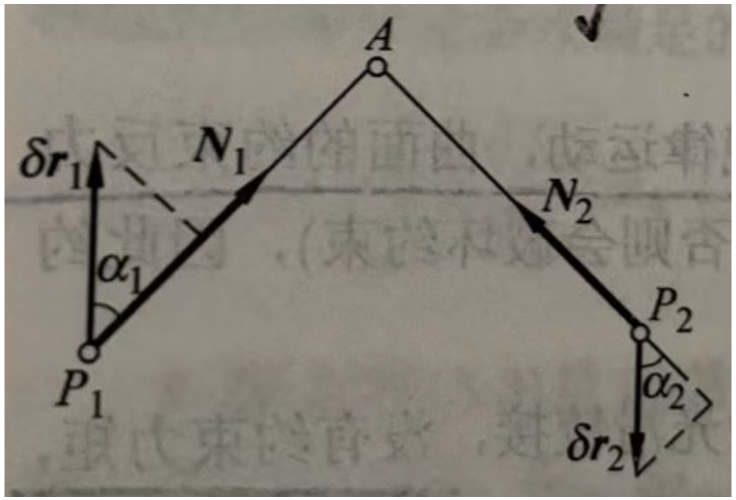
4.1 虚功和理想约束

- (5)滑移式约束

附带地，考虑不可伸长轻质细绳跨过定滑轮联结两质点的情形，假定细绳保持张紧。两质点受到的约束力$\boldsymbol{F}_{R1}$和$\boldsymbol{F}_{R2}$沿绳方向，力值相等，方位如图。于是有，

$$\boldsymbol{F}_{R1}\cdot\delta\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_{R2}\cdot\delta\boldsymbol{r}_2=F_{R1}\left(\delta r_1\cos\alpha_1-\delta r_2\cos\alpha_2\right)$$

由绳长不变性知 $\delta r_1\cos\alpha_1=\delta r_2\cos\alpha_2$。因此，为理想约束。



4.1 虚功和理想约束

- 总结

关于理想约束说明如下：考虑定常约束，因为虚位移集合和可能位移集合一致，这里的理想约束定义和能量方法中的理想约束定义相同；考虑非定常约束，二者差异立显：以形状时变的光滑曲面约束为例，在这里是理想约束，而在能量方法中，不是理想约束。按照虚位移定义虚功，大大拓展了理想约束的范围，为后继研究铺平了道路。

定义所有约束都是理想约束的质点系为**理想约束系统**。前文研究表明，力学中的常见约束都是理想约束。自由的单刚体是理想约束系统；多个刚体由常用约束连接形成的约束刚体系为理想约束系统。

为表述方便，定义**主动力**：对于一个理想约束系统，除了约束力之外的其它力统称主动力。这样，主动力和约束力二分整个力系。约束力仅指理想约束的约束反力，主动力包含外加力（主动施加的力、阻碍力、与外部之间相对滑动的摩擦力、与外部之间相对滚动的摩阻力偶等）、内部作用力（如弹簧力等）。

4.1 虚功和理想约束

- 总结

拓展：指尖魔方。指尖模仿由八个立方块组成，相邻两个通过铰链相连，形成环形。每个立方块的描述坐标数目为6，每个铰链提供了4个数学约束，共8个铰链。由此知，广义坐标数为6*8-4*8=16，当用手锁死一个立方块时，广义坐标数为10，因此变化多端。

思考：为什么虚功的定义式中使用符号$\bar{\delta} W$，而不是直接使用 δW 。