线性代数方程组

浙江大学控制学院

本章内容

- 高斯消去法
- LU分解、特殊矩阵和矩阵求逆
- 误差分析、条件数
- 迭代方法

误差分析和方程组条件数

- 利用逆矩阵确定方程组是否病态的方法
  - 缩放系数矩阵A，使其每一行的最大元素为1。计算缩放后的逆矩阵，如果A^{-1}中有元素的值大于1几倍，则方程组是病态的。
  - 将逆矩阵与原矩阵相乘，检查结果是否接近单位阵。如果不接近单位阵，则方程组是病态的。
  - 求逆矩阵的逆矩阵，与原系数矩阵对比。如果不相等，则方程组是病态的。

向量和矩阵的范数

- 向量的范数
  - 三维欧氏空间中向量长度概念的推广
  - 定义

设对任意向量$x \in R^n$,按一定的规则有一实数与之对应,记为$\|x\|$,若$\|x\|$满足

1, $\|x\| \geq 0$, 且$\|x\| = 0$当且仅当 $x = 0$; (正定)

2, $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, α为任意实数 (齐次)

3, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, 对任意$x, y \in R^n$

(三角不等式)

则称 $\| x \|$ 为 向量x的范数

向量和矩阵的范数

- 几种向量范数
  - 向量的“2”范数（欧几里德范数）

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

  - 向量的“1”范数

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

  - 向量的“∞”范数（极大值范数或一致向量范数）

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \cdots |x_n|\} = \max_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$$

  - 向量的“p”范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

向量和矩阵的范数

- 矩阵的范数

定义：对任意n阶方阵A，按一定的规则有一实数与之对应，记为$\|A\|$。若$\|A\|$满足：

1 $\|A\| \geq 0$，且$\|A\|=0$当且仅当$A=0$；（正定）

2 $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$，$\alpha$为任意实数；（齐次）

3 $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$，对任意$A,B$两个$n$阶方阵；（三角不等式）

4 $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$；（矩阵乘法不等式，相容性条件）

则称$\|A\|$为矩阵A的范数

向量和矩阵的范数

- 几种矩阵范数
  - 矩阵的“2”范数（谱范数）
  - 矩阵的“1”范数（列和范数）
  - 矩阵的“∞”范数（行和范数）

$$\|A\|_2=\left[\lambda_{\max}\left(A^T A\right)\right]^{1/2}$$

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

向量和矩阵的范数

- 谱和谱半径
  - $A \in R^{n \times n}$的特征值为λ_1，λ_2，…，λ_n，
  - 称A的所有特征值的集合为A的谱
  - 称 $\rho(A) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$ 为A的谱半径
- $\|A\|$ 为A的任意一种范数，有$\rho(A) \le \|A\|$
- （按行）严格对角占优阵
  - 如果A满足条件 $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

  即A的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和

病态方程组和矩阵条件数

- 例： $\begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix}$ $x = (1,1)^T$
- 若系数矩阵有微小扰动 $\Delta A = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\dfrac{\|\Delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} = 5\times 10^{-5}$
- 则 $\begin{bmatrix} 1.0001 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{x}^{(1)} = (50, -48.5)^T$ $\dfrac{\|\Delta x^{(1)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 49.5$
- 若右端有微小扰动 $\Delta b = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$ $\dfrac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 5\times 10^{-5}$
- 则 $\begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9899 \\ 1.9701 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{x}^{(2)} = (2.97, -0.99)^T$ $\dfrac{\|\Delta x^{(2)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1.99$
- 若同时对系数矩阵和右端有扰动，则

$$\begin{bmatrix} 1.0001 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9899 \\ 1.9701 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{x}^{(3)} = (148.5, -148.005)^T \quad \frac{\|\Delta x^{(3)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 149.005$$

病态方程组和矩阵条件数

- 扰动方程 $(A+\Delta A)x=b+\Delta b$
- 如果方程组的系数或常数项有微小改变时，解会发生很大的改变，则称这种方程组为“**病态**”的
- 扰动方程的解与原方程的解相对误差不大，称为**良态**方程
- 方程组的“**条件**”问题
- 一般说来，在用计算机解方程组时，实际上解的都是扰动方程，这是由于计算过程中不可避免地会产生舍入误差
- 对于良态问题，只要数值方法是稳定的，就可以得到较好的结果
- 而对于病态问题，即使算法是稳定的，其计算结果有时也会很坏

扰动方程组的误差界

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$

- b的扰动

$$A(x+\Delta x) = b+\Delta b \Rightarrow \Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow \|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\,\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

- A的扰动

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \Rightarrow \Delta x = -A^{-1}\Delta A(x+\Delta x) \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

- 同时扰动

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$$

$$\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| \le 1$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|}{1-\|A\|\,\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

病态方程组和矩阵条件数

- 条件数
  - 设$A\in R^{n\times n}$，非奇异，Cond(A)=$\|A\|\,\|A^{-1}\|$
  - $K(A)=\|A\|_2\left\|A^{-1}\right\|_2$ 称为谱条件数

- 条件数的性质
  - 对任何非奇异矩阵A，有Cond(A)≥1。
  - 对任何非奇异矩阵A，非零常数c，有 Cond(cA) = Cond(A)
  - 若P为正交矩阵，则$K(P)=1$，且$K(PA)=K(AP)=K(A)$
  - 若$A=A^T$，

$$K(A)=\frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}$$

病态方程组和矩阵条件数

- 线性方程组$Ax=b$解的相对误差直接与A的条件数相关
- A的条件数Cond(A)相对大(>>1)，称$Ax=b$是病态方程组/坏条件，或A是病态的；当A的条件数Cond(A)相对小，称$Ax=b$是良态方程组/好条件，或A是良态的。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(A)_2=K(A)=\frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}=\frac{1.98005}{0.00005}=39206>>1$$

方程是病态方程

矩阵条件数

- Hilbert矩阵是一个著名的病态矩阵，它是一个对称正定矩阵，当$n \geq 3$时，Hilbert矩阵是病态矩阵
- n越大，条件数越大
- Matlab 中 hilb() 构 造 hilbert 矩 阵 ，invhilb()可求精确逆

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

相对误差的事后估计（近似解可靠性判别）

- 设$Ax=b$，A为非奇异矩阵，x为精确解，$\tilde{x}$ 为计算解，残差向量$r=b-A\tilde{x}$
- 则近似解的相对误差估计

$$\frac{1}{cond(A)}\frac{\|r(\tilde{x})\|}{\|b\|} \le \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le cond(A)\frac{\|r(\tilde{x})\|}{\|b\|}$$

  - Cond(A)越小，相对误差越小
  - 近似解的精度不仅依赖于残差向量r，也与矩阵A的条件数有关

相对误差的事后估计

$$A=\begin{bmatrix}6 & 13 & -17\\ 13 & 29 & -38\\ -17 & -38 & 50\end{bmatrix}\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}6 & -4 & -1\\ -4 & 11 & 7\\ -1 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

$$cond(A)_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=105\times 22=2310$$

- 假定在求解$Ax=b$的过程中，得到的解满足 $\|r\|\le 0.001$
- 绝对误差上界

$$\|\Delta x\|\le\|A^{-1}\|\|r\|\le 22\times 0.001=0.022$$

- 若给定$\|b\|=4$，相对误差上界

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\le cond(A)\frac{\|r(\tilde{x})\|}{\|b\|}\le 2310\times\frac{0.001}{4}=0.5775$$

病态方程组的判别

- 当A的行列式值相对小，或A某些行/列近似线性相关，方程组可能病态
- 若用选主元消去法求解$Ax=b$，在A消去中出现小主元，方程组可能病态
- 当A元素数量级相差很大且无一定规则，方程组可能病态
- 估计条件数，若条件数较大，则方程组病态

迭代求精技术

- 设x为精确解，$\tilde{x}_1$ 为得到的近似解，则

$$x = \tilde{x}_1 + \Delta x_1$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = A\tilde{x}_1 + A\Delta x_1$$

- 残差向量

$$r_1 = b - A\tilde{x}_1$$

$$\Downarrow$$

$$A\Delta x_1 = r_1$$

- 通过求解上述方程，可以得到修正因子 Δx_1
- 由于舍入误差的影响， 同样 $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 + \Delta x_1$ 不会是精确解，可从 $\tilde{x}_2$出发重复以上步骤
- 对于LU分解，只需计算残差向量再进行回代
- 当$Ax=b$不过分病态时，迭代求精是较成功的提高近似解精度的方法

本章内容

- 高斯消去法
- LU分解、特殊矩阵和矩阵求逆
- 误差分析、条件数
- 迭代方法

迭代法的思想

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\
x_3 &= \frac{c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}
\end{aligned}
$$

First Iteration

高斯-赛得尔方法（异步迭代法）

(a)

$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$

$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$

$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

(b)

$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$

$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$

$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

雅可比方法（同步迭代法）

Second Interation

(a)

$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$

$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$

$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

(b)

$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$

$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22}$

$x_3 = (c_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33}$

迭代法

$$Ax = b \Longrightarrow x = Gx + f$$

- 任取初始向量 $x^{(0)}$，作

$$x^{(1)} = Gx^{(0)} + f$$

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f$$

- 构造向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 求方程的近似解的方法，称为一阶定常迭代法，G为该迭代法的迭代矩阵。
- 如果对任意取初始近似$\boldsymbol{x}^{(0)}$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ ，称迭代法为**收敛**，否则称迭代法为**发散**。若迭代法收敛，则称$\boldsymbol{x}^{(k)}$为第k步迭代得到方程组的近似解。

迭代法

- 问题
  - 构造迭代方法
  - 迭代的收敛性和收敛速度

基本迭代方法

- A分裂为$A=M-N$
- 分裂阵M
  - 可选择的非奇异阵
  - $Mx=d$易于求解
  - M选为A的某种近似
- $Ax=b$　　$Mx=Nx+b$　　$x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$
- 迭代：
  - $x^{(0)}$为初始向量
  - $x^{(k+1)}=M^{-1}Nx+M^{-1}b$
- 选取不同的M阵就得到不同迭代法。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}=D-L-U$$

雅可比(Jacobi)迭代法（同步迭代法）

- 设A为非奇异矩阵，且$a_{ii}\neq 0$，选取 $M=D$ 和 $N=D-A=L+U$
- $x^{(k+1)}=Jx^{(k)}+f$　　　$J=D^{-1}(L+U)$　　$f=D^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

(1)雅可比迭代法，每迭代一次主要是计算一次矩阵乘向量，即$Jx^{(k)}$。

(2)计算过程中，原始数据A始终不变。

(3)计算中需要**两组工作单元**来保存$x^{(k)}$及$x^{(k+1)}$。

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法（异步迭代法）

- 选取 $M=D-L$ 和 $N=M-A=U$
- $x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$　　　$G=(D-L)^{-1}U$　　$f=(D-L)^{-1}b$

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

(1)G-S迭代法每迭代一次主要是计算一次矩阵乘向量。

(2)计算$x^{(k+1)}$的第i个分量$x_i^{(k+1)}$时，利用已计算出的最新分量$x_j^{(k+1)}(j=1,\dots,i-1)$，因此，计算中只需要**一组工作单元**来保存$x^{(k)}$或$x^{(k+1)}$。

迭代终止准则

- 近似相对百分误差

$$\left|\varepsilon_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}}\right| \times 100$$

- 对所有的i，近似相对百分误差小于预设的ε_s时，迭代终止
- 其他的终止准则 $\dfrac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k+1)}\right\|}$

迭代法——例

- 求解线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Jacobi迭代

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases}$$

- G-S迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)} + 2 \end{cases}$$

迭代法——例

G-S方法比Jacobi方法收敛快。

迭代次数	Jacobi方法						G-S方法					
	x_1	$\|\varepsilon_a\|_1$	x_2	$\|\varepsilon_a\|_2$	x_3	$\|\varepsilon_a\|_3$	x_1	$\|\varepsilon_a\|_1$	x_2	$\|\varepsilon_a\|_2$	x_3	$\|\varepsilon_a\|_3$
0	0		0		0		0		0		0	
1	0.3	100	1.5	100	2	100	0.3	100	1.56	100	2.684	100
2	0.8	62.5	1.76	14.7727	2.66	24.812	0.8804	65.9246	1.9445	19.7729	2.9539	9.1362
3	0.918	12.854	1.926	8.6189	2.864	7.1229	0.9843	10.5542	1.9922	2.3975	2.9938	1.3322
4	0.9716	5.5167	1.97	2.2335	2.954	3.0467	0.9997	1.3571	1.9989	0.335	2.9991	0.1796
5	0.9894	1.7991	1.9897	0.9911	2.9823	0.9496	1	0.1879	1.9999	0.0457	2.9999	0.0247
6	0.9962	0.6802	1.9961	0.3202	2.9938	0.3824	1	0.0257	2	0.0063	3	0.0034
7	0.9986	9.2427	1.9986	0.1251	2.9977	0.1305	1	0.0035	2	0.0009	3	0.0005
8	0.9995	0.0892	1.9995	0.0438	2.9992	0.0495						
9	0.9998	0.0324	1.9998	0.0163	2.9997	0.0176						
10	0.9999	0.0118	1.9999	0.0059	2.9999	0.0065						

迭代法的收敛性

- $x=Gx+f$　　　$x^*=Gx^*+f$
- 迭代$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$
- 引入误差向量$e^{(k)}=x^{(k)}-x^*$
- 误差向量的递推公式：　$e^{(k+1)}=Ge^{(k)}$
- 于是$e^{(k)}=Ge^{(k-1)}=G^2e^{(k-2)}=\ldots=G^ke^{(0)}$　（$e^{(0)}=x^{(0)}-x^{(*)}$）

$$\left\|e^{(k)}\right\|=\left\|G^k e^{(0)}\right\|\le\left\|G\right\|^k\left\|e^{(0)}\right\|=q^k\left\|e^{(0)}\right\|$$

- 定理：设$G\in R^{n\times n}$，则$G^k\to 0$（零矩阵）（当$k\to\infty$时）的充要条件为G所有特征值满足$|\lambda_i|<1$（$i=1,2,\ldots,n$）或G的谱半径$\rho(G)<1$

迭代法的收敛性

- 一阶定常迭代法收敛性的基本定理
  - 设有方程组$x=Gx+f$，有迭代法$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$，则对任选初始向量$x^{(0)}$，迭代法收敛的充要条件是$\rho(G)<1$。
- 迭代收敛的**充分**条件
  - 设有方程组$x=Gx+f$及一阶定常迭代法$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$，如果有G的某种范数$\|G\|_r=q<1$，则
    - 迭代法收敛；
    - 误差估计

$$\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le\frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|<\frac{1}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$$

事后估计

$$\left\|x^*-x^{(k)}\right\|\le\frac{q^k}{1-q}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$$

事前估计

    - 当$q\approx1$时，迭代法收敛缓慢。

q越小收敛速度越快；可以事先估计保证误差$\|x^*-x^{(k)}\|_\infty<\varepsilon$所需要的迭代次数。

迭代法的收敛性

matlab中计算特征值：eig()

- 推论：
  - Jacobi迭代法收敛的充要条件是$\rho(J)<1$ $(J=D^{-1}(L+U))$
  - G-S迭代法收敛的充要条件是$\rho(G)<1$ $(G=(D-L)^{-1}U)$
- 例1：

$$A=\begin{bmatrix}1&0.8&0.8\\0.8&1&0.8\\0.8&0.8&1\end{bmatrix}\quad J=\begin{bmatrix}0&-0.8&-0.8\\-0.8&0&-0.8\\-0.8&-0.8&0\end{bmatrix}$$

$\rho(J)=1.6>1$ Jacobi迭代不收敛

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.8&1&0\\0.8&0.8&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-0.8&-0.8\\0&0&-0.8\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.8&-0.8\\0&0.64&-0.16\\0&0.128&0.768\end{bmatrix}$$

$\rho(G)<1$ G-S迭代收敛

- 例2：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}\quad J=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$$

$\rho(J)<1$ Jacobi迭代收敛

$$G=\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$\rho(G)>1$ G-S迭代不收敛

对于给定的线性方程组，用雅可比法和G-S法求解时可能都收敛或都不收敛，也可能一个收敛另一个不收敛。

迭代法的收敛性

- 如果A为（按行或列）严格对角占优阵，则$Ax=b$的Jacobi方法和G-S方法都收敛。
  - 实际上，如果A为严格对角占优阵，可以证明，$\|J\|_\infty<1$并且$\|G\|_\infty<1$，因此，Jacobi方法和G-S方法都收敛。
  - G-S迭代法比Jacobi迭代法收敛得快
- 如果A为对称正定矩阵，G-S迭代收敛。
- 例：判断解$Ax=b$的Jacobi方法和G-S方法的收敛性

$$A=\begin{bmatrix}10 & -2 & -1\\ -2 & 10 & -1\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$|a_{11}|=10>|-2|+|-1|$$

$$|a_{22}|=10>|-2|+|-1|$$

$$|a_{33}|=15>|-1|+|-2|$$

A是严格对角占优矩阵，两种方法都收敛

迭代法的收敛性

- 例：用G-S方法求解

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 7x_2 + 13x_3 &= 76 \\
x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 28 \\
12x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

不收敛！

Iteration	x_1	$\lvert\varepsilon_a\rvert_1$	x_2	$\lvert\varepsilon_a\rvert_2$	x_3	$\lvert\varepsilon_a\rvert_3$
1	21.000	110.71	0.80000	100.00	5.0680	98.027
2	-196.15	109.83	14.421	94.453	-462.30	110.96
3	-1995.0	109.90	-116.02	112.43	4718.1	109.80
4	-20149	109.89	1204.6	109.63	-47636	109.90
5	$2.0364\text{x}10^5$	109.90	-12140	109.92	$4.8144\text{x}10^5$	109.89
6	$-2.0579\text{x}10^5$	1.0990	$1.2272\text{x}10^5$	109.89	$-4.8653\text{x}10^6$	109.89

$$
[A]=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 1 & 5 & 3 \\ 12 & 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow [A]=\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}
$$

不是所有的矩阵都可以通过重排变为严格对角占优阵

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \\
x_1 + 7x_2 + x_3 &= 9
\end{aligned}
$$

逐次超松驰迭代法(SOR，Successive Over-Relaxation)

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

G-S方法得到的解

- 高斯-赛得尔方法的基础上进行修改
- $$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})$$ $0<\omega<2$，称为松驰因子
- $\omega=1$，SOR方法即为G-S方法
- $0<\omega<1$，结果为当前迭代结果和上一次迭代结果的加权平均，称为低松弛方法。用于使得非收敛方程组收敛或者克服振荡加速收敛。
- $1<\omega<2$，超松弛方法
  - 隐含假设：新值沿正确方向向真实解移动，但是移动的速度慢
  - 用于加速已知是收敛的方程组的收敛速度
  - 根据经验确定ω值

SOR——例

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

精确解为$x^*=[-1\ -1\ -1\ -1]^T$，初始向量$x^{(0)}=[0\ 0\ 0\ 0]^T$

松弛因子	满足$\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|<10^{-5}$的迭代次数
1.0	22
1.1	17
1.2	12
1.3	11
1.4	14
1.5	17
1.6	23
1.7	33
1.8	53
1.9	107

最佳松弛因子

SOR——收敛性

- SOR的矩阵形式

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$M=(D-\omega L)/\omega$

$$\Downarrow$$

$$(D-\omega L)x^{(k+1)} = \left[(1-\omega)D + \omega U\right]x^{(k)} + \omega b \Rightarrow$$

$$x^{(k+1)} = G\omega x^{(k)} + f$$

$$G\omega = (D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right]$$

$$f = \omega(D-\omega L)^{-1} b$$

- SOR法收敛的充要条件是$\rho(G\omega)<1$
- 如果A为对称正定阵，且$0<\omega<2$，则解$Ax=b$的SOR法收敛。

MATLAB中的函数

矩阵分析		线性方程组	
函数	描述	函数	描述
cond	计算矩阵条件数	右除/和左除\	help slash
norm	计算矩阵或向量的范数	lu	lu分解
inv	矩阵求逆	chol	cholesky分解
pinv	求矩阵伪逆		
det	计算行列式的值		
rank	求秩		
eig，eigs	矩阵特征值		

第三章 总结——各种方法

方法	稳定性	精度	应用范围	编程难度	备注
图解法	—	差	受限	—	比数值方法耗时
Cramer法则	—	受舍入误差影响	受限	—	方程数多于3个时计算复杂
列主元高斯消去	—	受舍入误差影响	一般，适用于方程组系数矩阵为低阶稠密矩阵、带状矩阵	中等，计算量较小，存储量较大	
LU分解					常用；进行矩阵求逆计算
迭代法(Jacobi和G-S)	可能不收敛	优秀	收敛时，适用于大型稀疏线性方程组	较简单，计算量有时较大，存储量较小	

第三章 总结——重要内容

- 直接法
  - 高斯消去、LU分解
- 迭代
  - Jacobi、Gauss-Seidel、SOR
- 具体算法、问题及改进
- 范数、条件数、病态方程组