3.1 单刚体的典型运动模式

- 瞬心法

在基点法中，选取平面图形上某点为基点（常选速度、加速度已知的点为基点）。

思考 基点可任选，选什么基点，基点法公式最简?

答： 选平面图形上速度、加速度为零的点。

平面图形上速度（加速度）为零的点是否存在？如果存在，在何位置?

瞬心定义

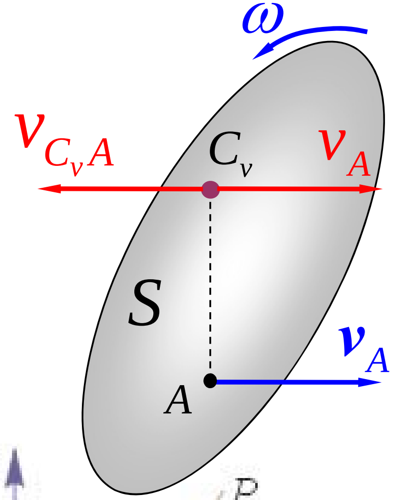
某瞬时平面图形上速度为零的点为速度瞬心，记为 C_v

某瞬时平面图形上加速度为零的点为加速度瞬心，记为 C_a

3.1 单刚体的典型运动模式

- 瞬心法

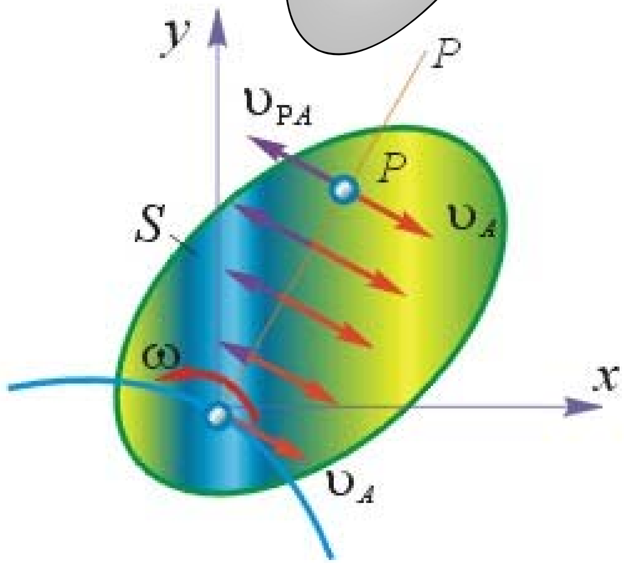
速度瞬心存在唯一性证明　　平面图形上一点A的速度为 $\boldsymbol{v}_A$



(1) 若$v_A=0$ 且 $\omega\neq0$，A即为速度瞬心

(2) 若 $v_A=0$ 且 $\omega=0$，各点速度均为零，平面图形瞬时平移，速度瞬心有无穷多个；

(3) 若 $v_A\neq0$ 且 $\omega\neq0$，过A点将 $\boldsymbol{v}_A$ 顺 ω 转向转过 90° 得到一条垂线，并在其上截取长度v_A/ω 得到B点（如图所示），以A为基点来研究B点，有 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}=0$，由此知，这样得到的$B$点即为速度瞬心 C_v；

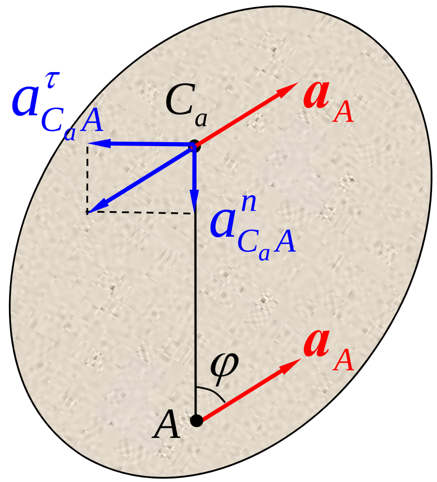


(4) 若$v_A\neq0$ 但 $\omega=0$，该瞬时各点速度相同，平面图形瞬时平移，不存在速度瞬心，或者说速度瞬心在无穷远处（按照上一情形取极限来理解）。

这就证明了：当 $\omega\neq0$ 时，存在速度瞬心。通过反证法可以证明：当 $\omega\neq0$ 时，速度瞬心唯一。假设存在两个速度瞬心，取其中一个为基点研究另一个，出现矛盾。

3.1 单刚体的典型运动模式

- 瞬心法



加速度瞬心存在唯一性证明 平面图形上一点A的加速度为 $\boldsymbol{a}_A$

(1) 若 $\boldsymbol{a}_A=0$ 且 ω,α不同时为零，A即为加速度瞬心，并且唯一（由加速度基点法说明）

(2) 若$\boldsymbol{a}_A=0$ 且 ω,α 同时为零，各点的加速度均为零，加速度瞬心有无穷多个

(3) 考虑 $\boldsymbol{a}_A\neq 0$ 且 ω,α 不同时为零的情形：假设存在瞬心（记为B），以A为基点来研究B点，有 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}^{\tau}_{BA}+\boldsymbol{a}^{n}_{BA}=0$，其中，$a^{\tau}_{BA}=\alpha\cdot BA,\ a^{n}_{BA}=\omega^2\cdot BA$ ，由此知，$BA=a_A\big/\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$， $\mathrm{tg}\varphi=\alpha/\omega^2$（如图所示）。以A为基点来研究该点可验证其加速度的确为零，这就证明了B即为加速度瞬心 C_a，加速度瞬心存在且唯一；

(4) 当$\boldsymbol{a}_A\neq 0$且ω,α 同时为零时，由基点法知，各点加速度均等于 $\boldsymbol{a}_A$ ，因此，无加速度瞬心，或者说加速度瞬心在无穷远处（按照上一情形取极限来理解）

当 ω,α 不同时为零时，加速度瞬心存在且唯一

3.1 单刚体的典型运动模式

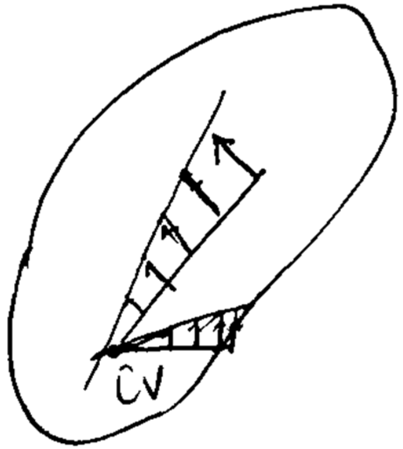
- 瞬心法

速度瞬心法

取速度瞬心 C_v 为基点，平面图形上任一M点的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{MC_v}$$

即任一点M的速度 $\boldsymbol{v}_M$ 等于在固连于基点 C_v的平移参考系中观察到的速度 $\boldsymbol{v}_{MC_v}$，其中，$v_{MC_v} = \omega \cdot MC_v$。在该平移参考系中，平面图形定轴转动，因此，该瞬时各点速度的分布规律就像绕“不动”点 作定轴转动一样（如图所示）。
注意，该平面图形并未真的绕点 定轴转动，而是在该瞬时表现出的速度分布与定轴转动一致罢了

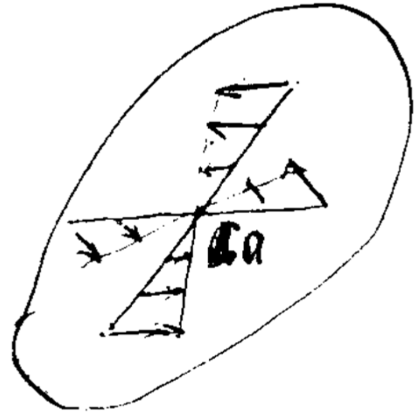


选取速度瞬心为基点的速度分析方法，称为速度瞬心法。

3.1 单刚体的典型运动模式

- 瞬心法

加速度瞬心法

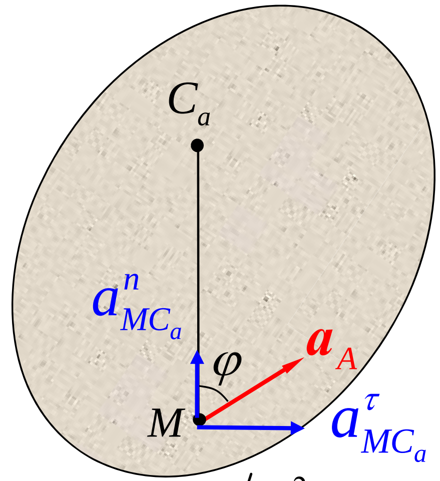


取加速度瞬心 C_a 为基点，平面图形上任一M点的加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_{MC_a}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{MC_a}^{n}$$

即任一点M的加速度 $\boldsymbol{a}_M$等于在固连于基点 C_a的平移参考系中观察到的加速度$\boldsymbol{a}_{MC_a} = \boldsymbol{a}_{MC_a}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{MC_a}^{n}$， 其中，$a_{MC_a}^{\tau} = \alpha \cdot MC_a$，$a_{MC_a}^{n} = \omega^2 \cdot MC_a$。在该平移参考系中，平面图形定轴转动，因此，在该瞬时，平面图形上各点加速度的分布规律就像绕 “不动” 点 C_a作定轴转动一样（如图所示）。

注意，该平面图形并未真的绕点 C_a 定轴转动，而是在该瞬时表现出的加速度分布和定轴转动一致罢了



$\mathrm{tg}\varphi = \alpha / \omega^2$

选取加速度瞬心为基点的加速度分析方法，称为加速度瞬心法。

3.1 单刚体的典型运动模式

- 瞬心法

速度瞬心位置确定

采用瞬心法时，首先要确定瞬心的位置。这里给出确定速度瞬心的两条规则：

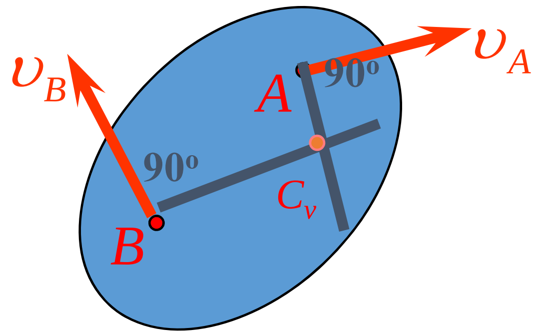
☺ 规则1. 速度瞬心必在过某点且垂直于该点速度的直线上；

☺ 规则2. 沿该垂线各点速度大小线性分布

已知平面图形上A、B两点的速度，确定速度瞬心 C_v 的典型情形：

第一种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的方位，这两点的速度矢量方位互不平行。



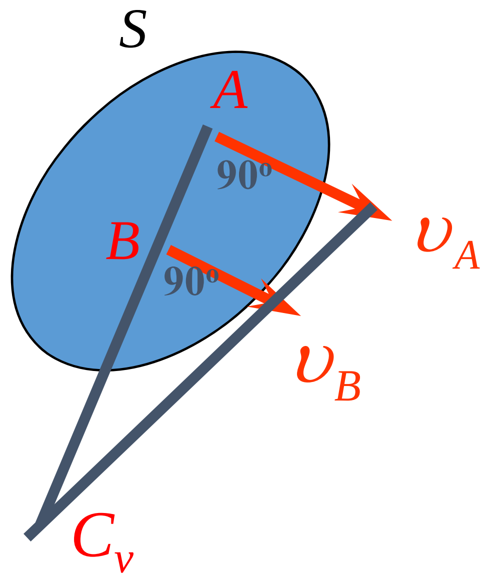
3.1 单刚体的典型运动模式

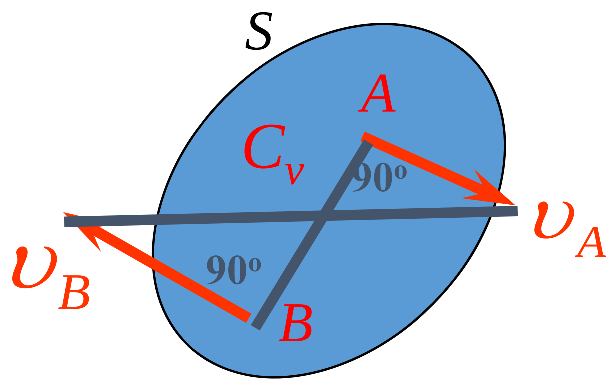
- 瞬心法

速度瞬心位置确定

第二种情形

已知平面图形上两点的速度矢量的大小与方向，而且二矢量互相平行，并且都垂直于两点的连线





3.1 单刚体的典型运动模式

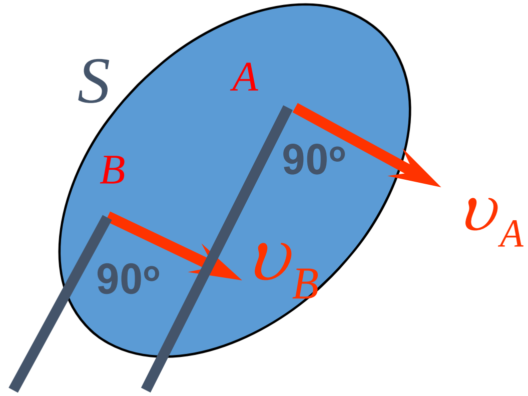
- 瞬心法

速度瞬心位置确定

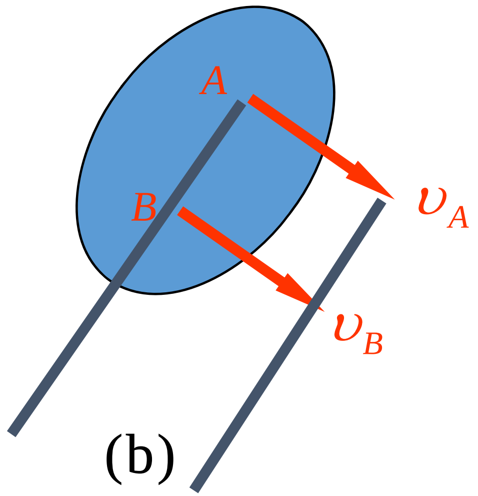
第三种情形

已知某瞬时两点速度相互平行但不垂直于两点的连线，如图（a），或已知两点速度垂直于连线，且大小互等，如图（b）。

速度瞬心在无穷远处，此时平面图形瞬时平移，各点速度相等。



(a)

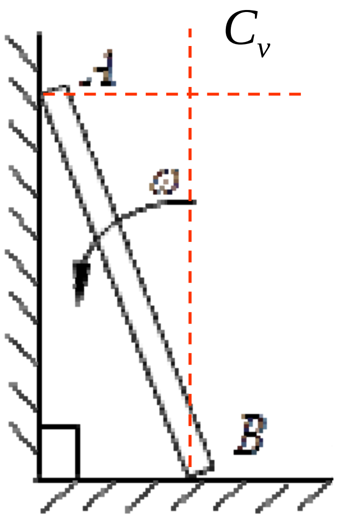


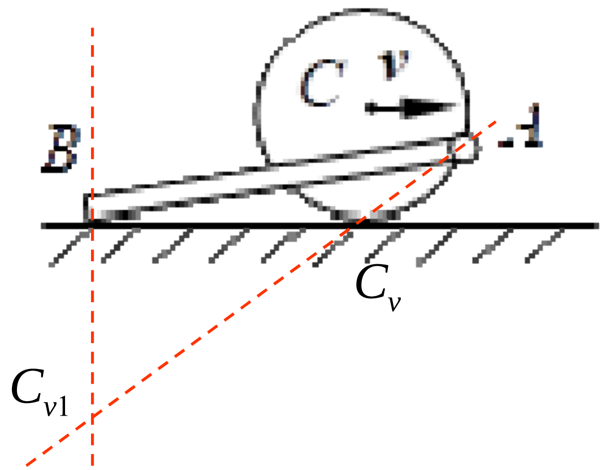
(b)

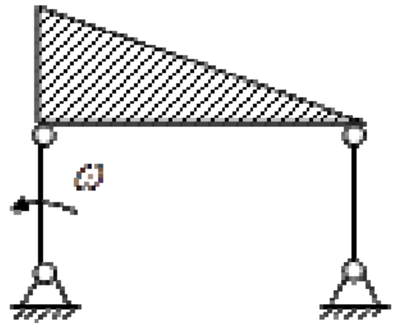
2.1 单刚体的典型运动模式

- 瞬心法

例题 试确定图中各平面运动刚体的速度瞬心 C_v 。







瞬时平移

3.1 单刚体的典型运动模式

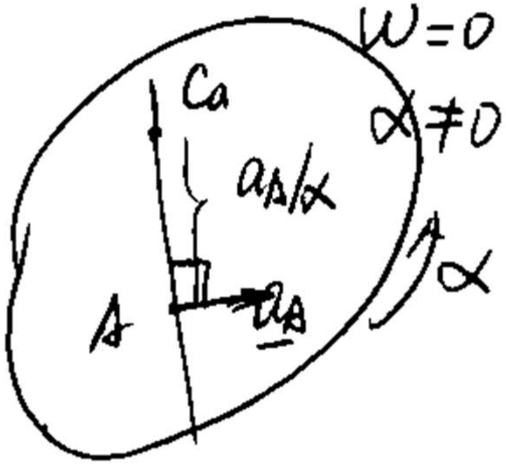
- 瞬心法

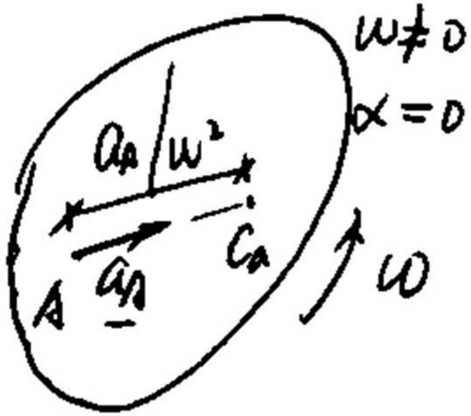
加速度瞬心位置确定

一般情形下，加速度瞬心不太容易确定；但当 $\omega = 0$ 或 $\alpha = 0$ 时，较容易找出。

（1）当 $\omega = 0$ 且 $\alpha \neq 0$ 时，加速度瞬心在过一点且垂直于该点加速度的直线上

（2）当 $\alpha = 0$ 且 $\omega \neq 0$ 时，任一点的加速度都通过加速度瞬心



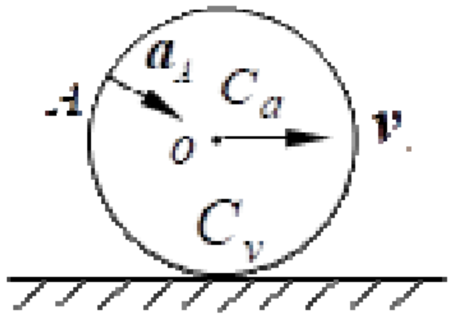


3.1 单刚体的典型运动模式

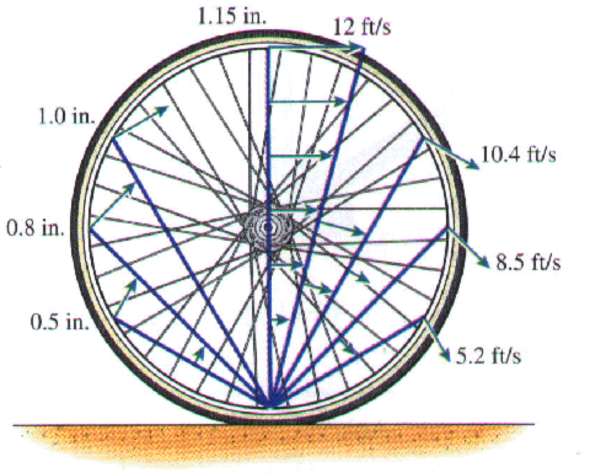
- 瞬心法

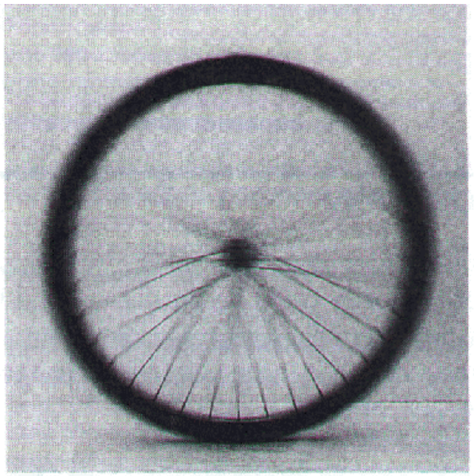
例题　圆轮在平面上匀速纯滚，确定速度瞬心和加速度瞬心的位置。

解：在该瞬时，速度瞬心为轮缘上与地面接触的点，加速度瞬心为轮心。
速度瞬心时刻发生着变化，加速度瞬心始终为轮心



说明，速度瞬心和加速度瞬心一般是两个不同的物质点





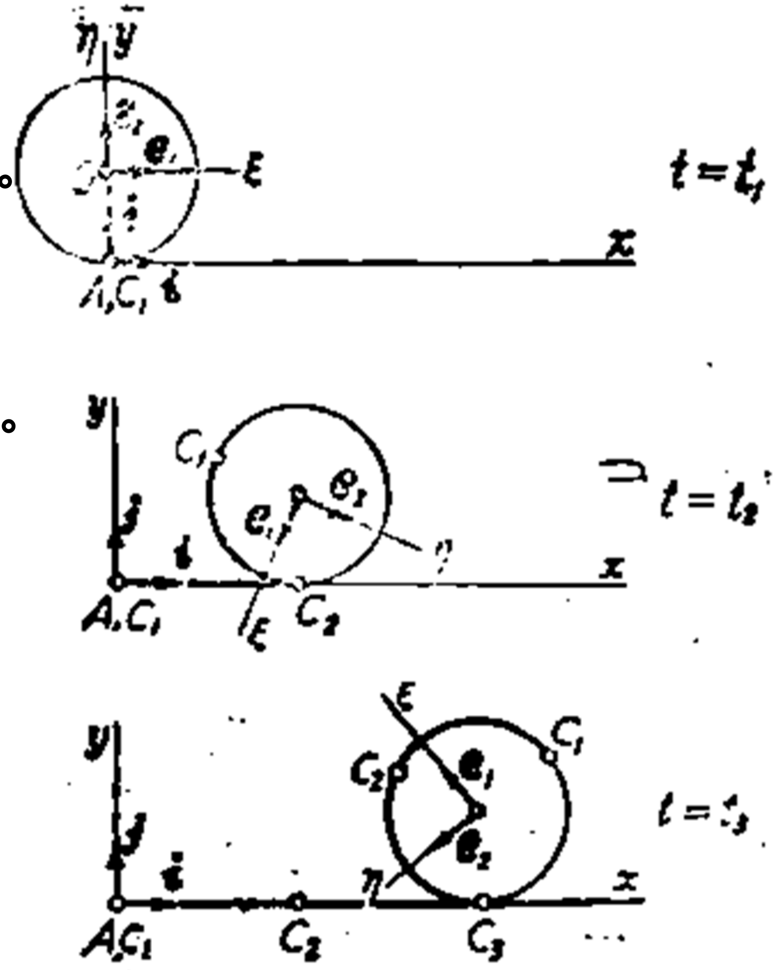
3.1 单刚体的典型运动模式

- 瞬心法

定瞬心轨迹和动瞬心轨迹

在平面图形上，速度瞬心的位置是随时间而连续变化的。

速度瞬心在平面图形上描绘的轨迹称为动瞬心轨迹；
速度瞬心在选定参考系中描绘的轨迹称为定瞬心轨迹



以水平地面上纯滚动轮为例，讨论速度瞬心的位置变化。图中分别给出了三个不同时刻轮子的位置，相应的瞬心分别为 C_{v1}, C_{v2}, C_{v3}

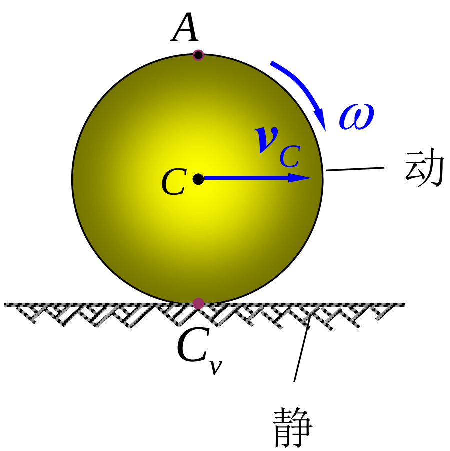
速度瞬心在轮上描绘出一个半径为R的圆周线，速度瞬心在参考系中描绘出一条水平直线，动瞬心轨迹为一条圆周线，而定瞬心轨迹为一条直线。

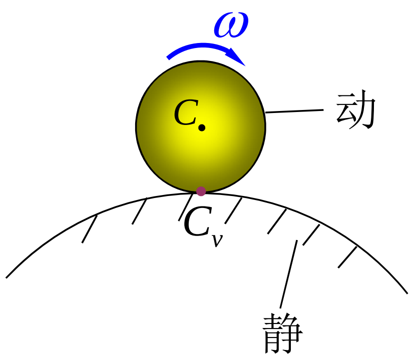
3.1 单刚体的典型运动模式

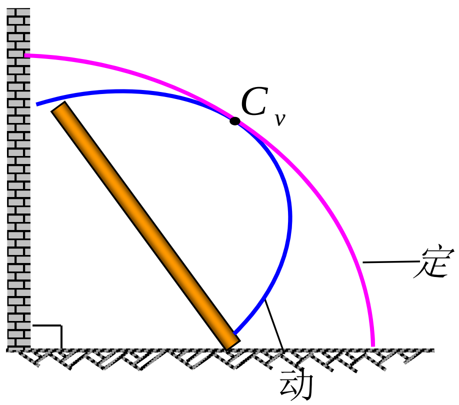
- 瞬心法

定瞬心轨迹和动瞬心轨迹

如果把动瞬心轨迹和定瞬心轨迹分别假想为两个（虚拟）刚体的边缘，那么，由于这两个假想刚体在接触点处无相对速度，平面图形的运动就好像是以动瞬心轨迹为边缘的刚体在以定瞬心轨迹为边缘的刚体上纯滚动。这就是瞬心轨迹的几何意义，它提供了一种平面图形运动的形象描述





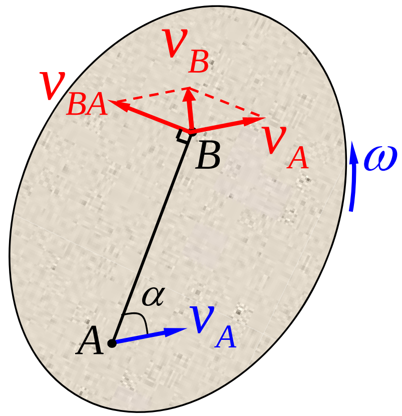


3.1 单刚体的典型运动模式

- 投影法

速度基点法公式和加速度基点法公式都是矢量式。在何种条件下、在哪个方向上可以得到简明的投影式?

速度投影法



速度基点法公式向连线AB上投影，并注意到 $\boldsymbol{v}_{BA} \perp AB$

$$[\boldsymbol{v}_B]_{AB} = [\boldsymbol{v}_A]_{AB}$$

算子$[\cdot]_{AB}$ 表示对矢量做AB上的投影操作

平面图形上任意两点的速度在两点连线上的投影相等，这称为速度投影定理

已知图形上一点的速度大小和方向，又知道另一点的速度方位，就可由此表出该点的速度值

3.1 单刚体的典型运动模式

- 投影法

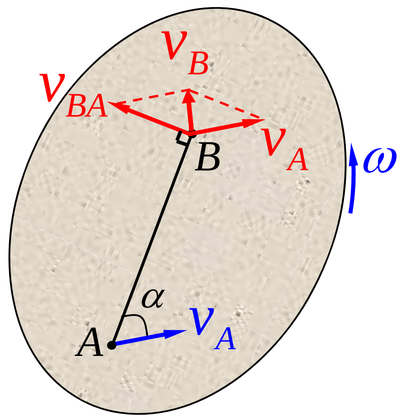
速度投影法

注意到，刚体上两点间的距离保持不变

$$\left(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A\right)\cdot\left(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A\right)=\text{const}$$

两边对时间求导

$$\left(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A\right)\cdot\left(\dot{\boldsymbol{r}}_B-\dot{\boldsymbol{r}}_A\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{r}_{BA}=\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{r}_{BA}$$



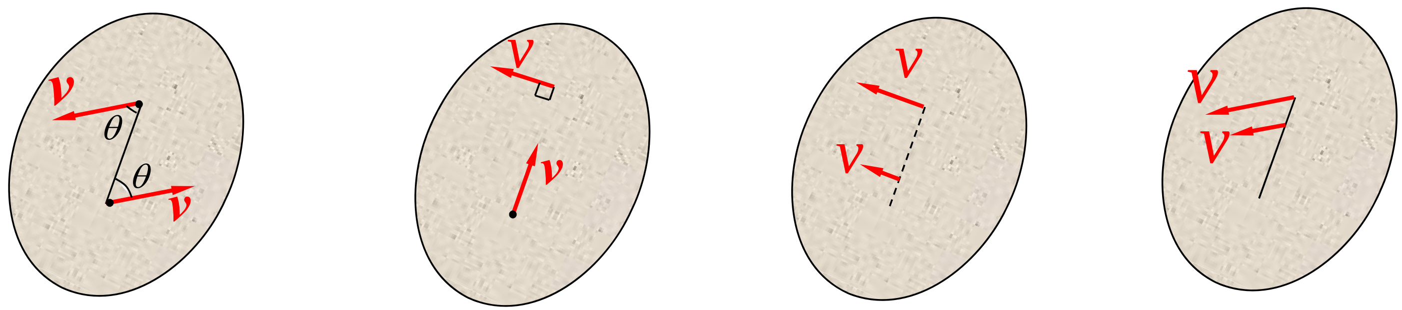
速度投影定理反映了刚体上任何两点距离保持不变的几何性质，且适用于刚体的任意运动

3.1 单刚体的典型运动模式

- 投影法

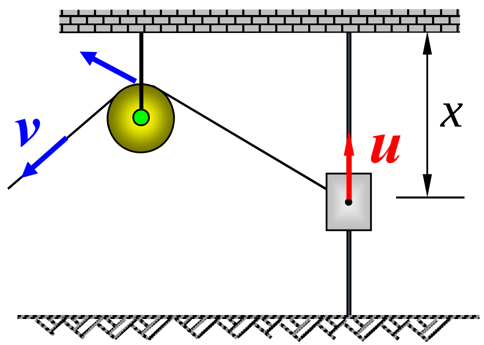
速度投影法

下列运动是否可能?



× × √ ×

v 与 u 之间的关系?

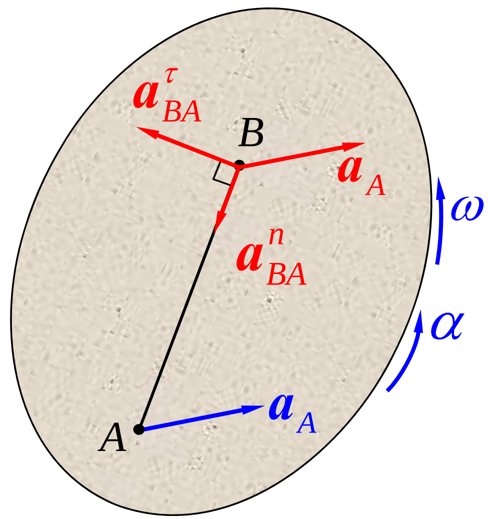


3.1 单刚体的典型运动模式

- 投影法

加速度投影法

将加速度基点法公式向连线AB上投影，并注意到 $\boldsymbol{a}_{BA}^{\tau} \perp AB$



$$[\boldsymbol{a}_B]_{AB} = [\boldsymbol{a}_A]_{AB} + [\boldsymbol{a}_{BA}^{n}]_{AB}$$

（1）当 $\omega = 0$ 时，$a_{BA}^{n} = \omega^2 \cdot AB = 0$，于是

$$[\boldsymbol{a}_B]_{AB} = [\boldsymbol{a}_A]_{AB}$$

此时，加速度投影和速度投影具有同样简洁的形式

（2）当 $\omega \neq 0$ 时，$[\boldsymbol{a}_B]_{AB} \neq [\boldsymbol{a}_A]_{AB}$

3.1 单刚体的典型运动模式

- 投影法

加速度投影法

仍从刚体上两点间的距离保持不变出发

$$(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)\cdot(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) = \text{const}$$

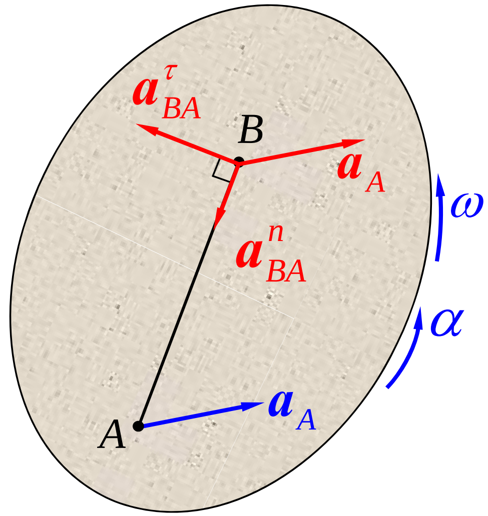
两边对时间求导 $(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_B - \dot{\boldsymbol{r}}_A) = 0$

两边对时间再次求导 $(\dot{\boldsymbol{r}}_B - \dot{\boldsymbol{r}}_A)\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}_B - \dot{\boldsymbol{r}}_A) + (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)\cdot(\ddot{\boldsymbol{r}}_B - \ddot{\boldsymbol{r}}_A) = 0$

当 $\omega = 0$ 时，两点速度相等，因此有

$$(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)\cdot(\ddot{\boldsymbol{r}}_B - \ddot{\boldsymbol{r}}_A) = 0$$

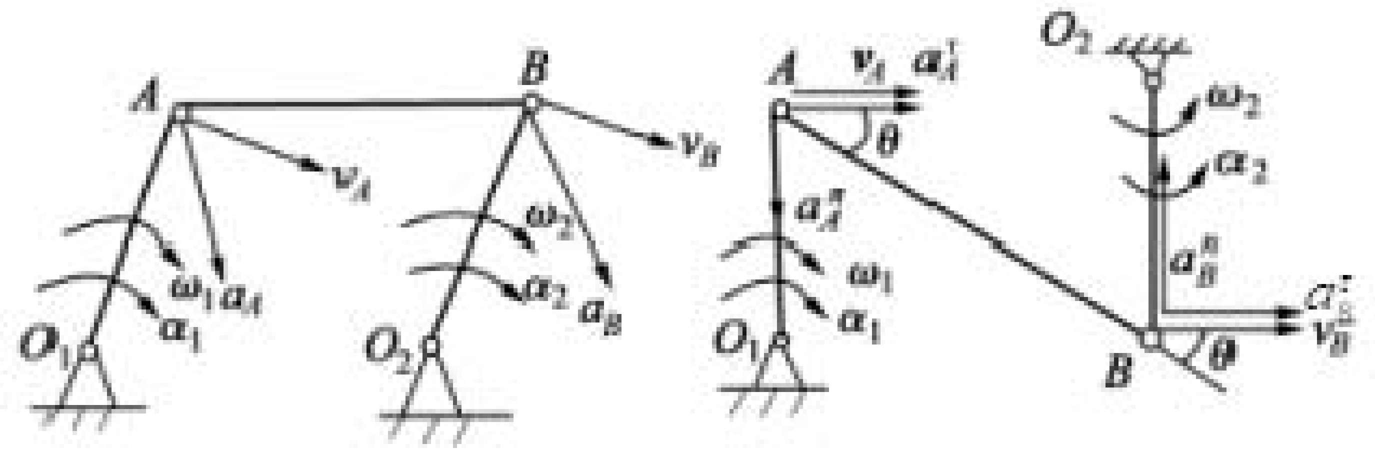
这也导出了加速度投影定理。



3.1 单刚体的典型运动模式

- 投影法

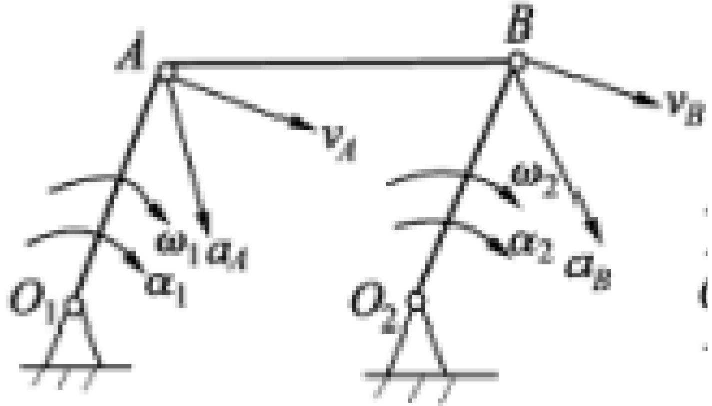
例题 已知$O_1A=O_2B$，且二杆平行。试问图(a)、(b)所示瞬时，ω_1与ω_2，α_1与α_2是否相等。



(a) (b)

3.1 单刚体的典型运动模式

- 投影法



(a)

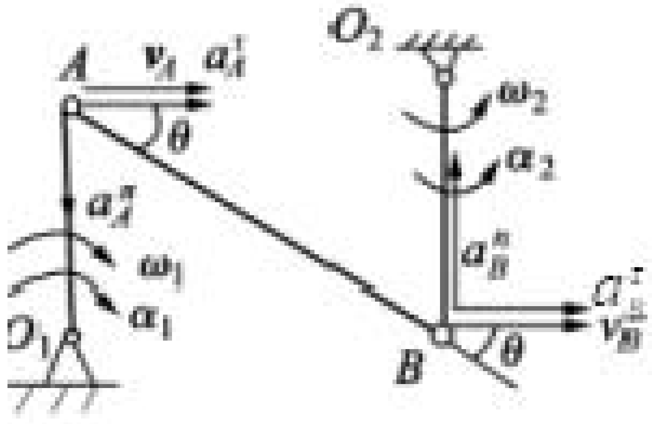
解 8 在图(a)中，杆*AB*平移。

$$v_B = v_A \qquad a_B = a_A \quad \Rightarrow \quad O_1A\omega_1 = O_2B\omega_2, \quad O_1A\sqrt{\omega_1^4+\alpha_1^2} = O_2B\sqrt{\omega_2^4+\alpha_2^2}$$

得到:$\omega_1 = \omega_2, \alpha_1 = \alpha_2$

直观来看，O_1A, O_2B始终具有同样转角，因此，角速度和角加速度始终相等

在图(b)中，杆*AB*瞬时平移。



(b)

$$\omega_{AB} = 0 \quad v_B = v_A \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2$$

$$[\boldsymbol{a}_B]_{AB} = [\boldsymbol{a}_A]_{AB} \quad \Rightarrow \quad a_B^\tau = a_A^\tau + (a_A^n + a_B^n)\tan\theta$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A \neq 0, a_B^n = \omega_2^2 \cdot O_1A \neq 0 \qquad \theta \neq 0$$

所以，$a_B^\tau \neq a_A^\tau$，即 $\alpha_2 \cdot O_2B \neq \alpha_1 \cdot O_1A \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$

3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法、瞬心法和投影法比较

基点法	$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}$ $\quad$ $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA}$ $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{BA}^{n}$ $\quad$ $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{BA}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{BA}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{BA}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA})$
瞬心法	$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_{MC_v}$ $\quad$ $v_{MC_v}=\omega\cdot MC_v$ $\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_{MC_a}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{MC_a}^{n}$ $\quad$ $a_{MC_a}^{\tau}=\alpha\cdot MC_a,\ a_{MC_a}^{n}=\omega^2\cdot MC_a$
投影法	$[\boldsymbol{v}_B]_{AB}=[\boldsymbol{v}_A]_{AB}$ $\quad$ $[\boldsymbol{a}_B]_{AB}=[\boldsymbol{a}_A]_{AB}+[\boldsymbol{a}_{BA}^{n}]_{AB}$ $\quad$ $\begin{cases}\omega=0,[\boldsymbol{a}_B]_{AB}=[\boldsymbol{a}_A]_{AB}\\ \omega\neq 0,[\boldsymbol{a}_B]_{AB}\neq[\boldsymbol{a}_A]_{AB}\end{cases}$

- 总地来说，基点法居于根本地位，瞬心法和投影法都是其特例。
- 关于速度分析
  - ✓ 若已知一点速度的大小和方向，以及另一点的速度方向，可用投影法直接表出后一点的速度大小，但这种做法未能给出角速度信息；
  - ✓ 若已知刚体上两点的速度方向，可用瞬心法直接表出刚体角速度，并确定刚体上任一点速度的大小和方向。
- 关于加速度分析：一般采用基点法，只有在特殊情形下使用瞬心法和投影法。