2.1 动量方法

动量方法用于刚体系

考察单刚体和刚体系的动力学问题。单刚体和刚体系动力学问题的**正向提法**为：给定外力系，求所有运动和所有约束反力。

对于无约束平移运动刚体，独立描述坐标数目为3，可取为质心坐标 x_C, y_C, z_C 。由质心运动定理恰给出关于这些坐标的3个二阶微分方程：

$$m\ddot{x}_C = ma_{Cx} = \sum_i F_{ix}^e,$$
$$m\ddot{y}_C = ma_{Cy} = \sum_i F_{iy}^e,$$
$$m\ddot{z}_C = ma_{Cz} = \sum_i F_{iz}^e$$

对于无约束定轴转动刚体，独立描述坐标数目为1，可取为转角 。由动量矩定理恰给出关于转角的1个二阶微分方程——即刚体定轴转动的微分方程：

$$J_x\ddot{\varphi} = J_x\alpha = M_x^e$$

2.1 动量方法

动量方法用于刚体系

对于无约束平面运动刚体，独立描述坐标数目为3，可取为 x_C, y_C, φ 。由质心运动定理和对质心轴的动量矩定理，可得关于这些坐标的3个二阶微分方程：

$$m\ddot{x}_C = ma_{Cx} = \sum_i F_{ix}^e,$$

$$m\ddot{y}_C = ma_{Cy} = \sum_i F_{iy}^e,$$

$$J_C\ddot{\varphi} = J_C\alpha = M_C^e$$

——**刚体平面运动的微分方程**

质心运动定理亦可在其它坐标系（例如自然坐标系）中投影。

$$m\ddot{s} = ma_C^\tau = \sum_i F_{i\tau}^e,$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = ma_C^n = \sum_i F_{in}^e,$$

$$J_C\ddot{\varphi} = J_C\alpha = M_C^e$$

对于上述无约束单刚体，给定外力系，可结合初始条件（初始位置和初始速度）完全确定独立描述坐标的时间历程。

2.1 动量方法

动量方法用于刚体系

考虑受约束的平面运动刚体系。设平面运动刚体个数为n，受到m个约束作用。刚体系的独立描述坐标数目为$3n$-m，由这$3n$-m个独立描述坐标可以表出每个单刚体的质心坐标和转角 。对每个单刚体列写平面运动微分方程，共写出$3n$个二阶微分方程，其中包含$3n$-m个独立描述坐标和m个约束反力，结合 $2\times(3n-m)$ 个初始条件（初始时刻的独立描述坐标值及其一阶导数值）恰好定解。这就是说，平面运动微分方程构成了平面运动刚体系的完备的分析方法。这种方法称为**过程分析方法**，给出了全过程的信息。

对于上述受约束的平面运动刚体系，如果某时刻的位置和速度信息已知，那么，必能用相应于$3n$-m个独立描述坐标的$3n$-m个加速度表出每个单刚体的质心加速度和角加速度 。此时，上述$3n$个二阶微分方程退化为$3n$个代数方程，其中包含相应于独立描述坐标的$3n$-m个加速度和m个约束反力。这种方法称为**瞬时分析方法**，给出了某瞬时的信息。

过程分析和瞬时分析比较如下：过程分析方法给出了全过程的信息，但需求解微分方程组；瞬时分析方法仅给出某瞬时的信息，仅需求解线性代数方程组。瞬时分析方法需要该瞬时的速度信息，这就要求直接给出速度，或者已知速度（例如初瞬时问题，所有速度为零），或者通过其它方法率先确定速度（例如，应用能量方法）。

2.1 动量方法

算例

例题

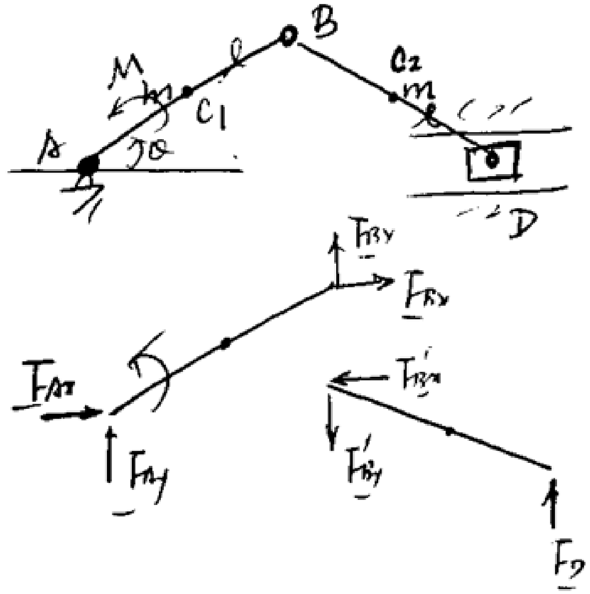
两根均质杆件构成图示平面刚体系，两杆等质量m、等长度l，杆件初始静止，并保持水平。体系在常力偶M作用开始运动。试求运动和约束力变化的全过程。

解：

机构由两个平面运动刚体构成，包含5个约束，独立描述坐标数目为1，取为θ。两杆的三个独立描述坐标都可据此表出：

$$AB: \quad x_{C_1} = \frac{l}{2}\cos\theta, y_{C_1} = \frac{l}{2}\sin\theta, \varphi_1 = \theta$$

$$BD: \quad x_{C_2} = \frac{3l}{2}\cos\theta, y_{C_2} = \frac{l}{2}\sin\theta, \varphi_2 = -\theta$$



2.1 动量方法

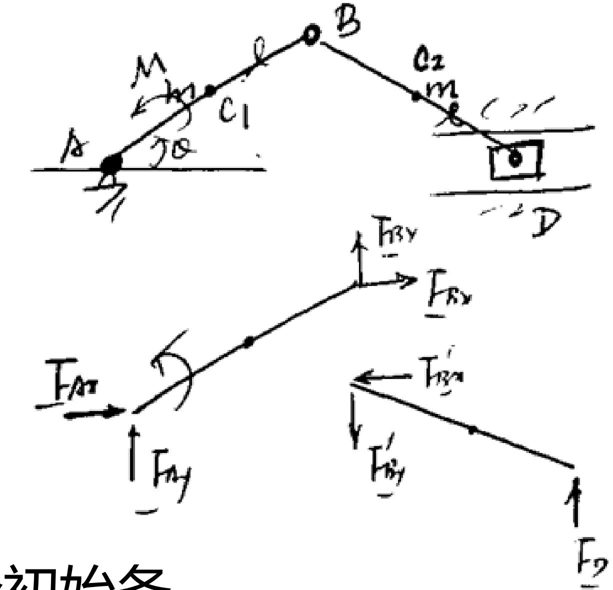
对这两个单刚体，受力分析如图。分别列写平面运动微分方程，得：

AB：$$m\ddot{x}_{C_1}=F_{Ax}+F_{Bx},m\ddot{y}_{C_1}=F_{Ay}+F_{By}-mg,$$

$$J_{C_1}\ddot{\varphi}_1=M+\left(F_{Ax}-F_{Bx}\right)\frac{l}{2}\sin\varphi_1+\left(F_{By}-F_{Ay}\right)\frac{l}{2}\cos\varphi_1,$$

BD：$$m\ddot{x}_{C_2}=-F_{Bx},m\ddot{y}_{C_2}=F_D-F_{By}-mg,$$

$$J_{C_2}\ddot{\varphi}_2=\left(F_D+F_{By}\right)\frac{l}{2}\cos\varphi_2+F_{Bx}\frac{l}{2}\sin\varphi_2$$



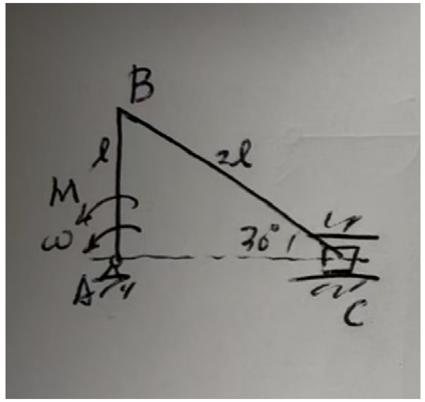
将运动学关系代入，得到关于1个独立描述坐标θ、5个约束力 $F_{Ax},F_{Bx},F_{Ay},F_{By},F_D$ 的六个方程。

消去约束力得到关于1个独立描述坐标θ的二阶微分方程，结合初始条件$\theta(0)=0,\dot{\theta}(0)=0$ 得到θ的变化全过程，据此可求出刚体上任一点的变化全过程。进而，可求出5个约束力的变化全过程。

注释：对很少的一些简单问题，可以手算结果。当问题变得复杂时，只需给出定解问题，之后交给数学软件即可。上例中，如果将两杆长度设定为不等，立即就会变得异常复杂。

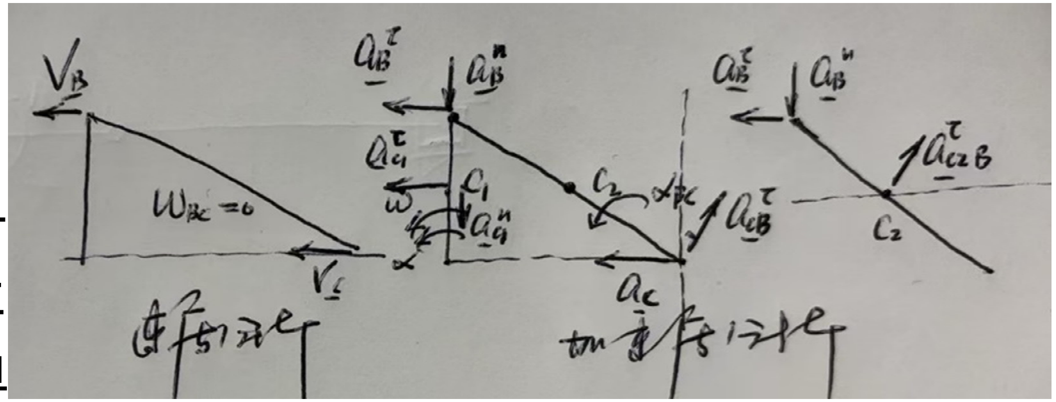
2.1 动量方法

例题 两根均质杆件构成图示平面刚体系，两杆等质量m、长度分别为l和$2l$，体系在常力偶M作用，某瞬时位置如图，AB杆的角速度为ω。试求该瞬时AB杆的角加速度及各约束反力。



解：

机构的独立描述坐标数目为1。该瞬时的位置和速度已知，可由一个加速度表出各单刚体的质心加速度和角加速度，设AB杆的角加速度为α。由之表出各单刚体的质心加速度和角加速度。

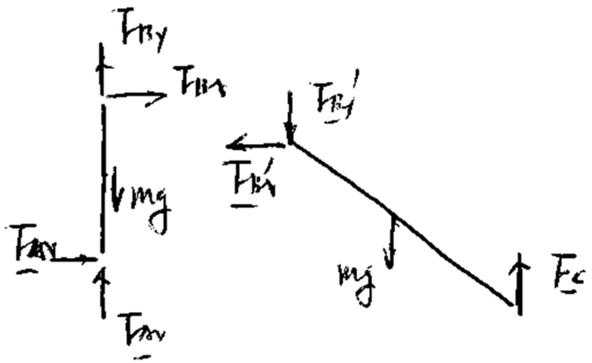


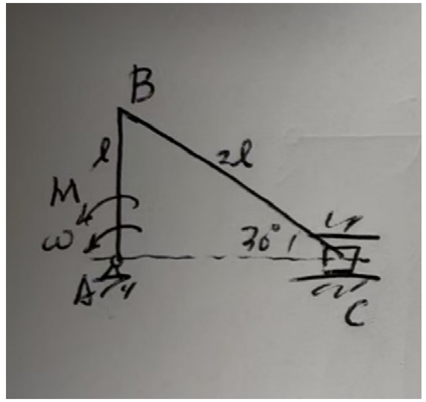
速度分析：BC杆瞬时平移，角速度为零。

加速度分析：以B为基点，研究C点，投影可得BC杆的角加速度。以B为基点研究C_2点，可得C_2点的水平向和竖直向加速度。C_1点的水平向和竖直向加速度可直接写出。至此，两个单刚体的质心加速度和角加速度都用α表出。

2.1 动量方法

受力分析如图。





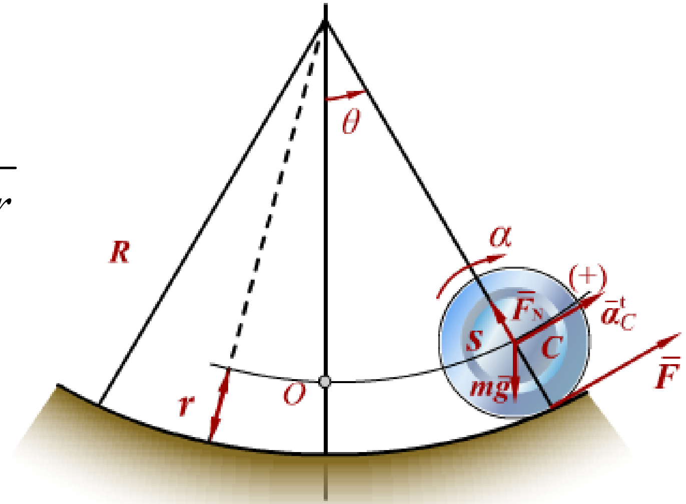
对两个刚体分别列写平面运动微分方程得到6个代数方程，包含五个约束力 $F_{Ax},F_{Bx},F_{Ay},F_{By},F_D$ 和一个加速度α。据此定解运动和约束反力。

注释：如果不求A点的两个约束力，对AB杆可以列写1个定轴转动微分方程，和BC杆的3个平面运动方程共同定解三个约束力 F_{Bx},F_{By},F_D 。

2.1 动量方法

例题　均质圆轮半径为r、质量为m，受到轻微扰动后，在半径为R的圆弧面上往复滚动。设表面足够粗糙，圆轮纯滚。试求质心C的运动规律。

解：　圆轮受到粗糙面约束，独立描述坐标数目为1，可取为弧坐标s。



质心的切向加速度为 $a_C^\tau = \ddot{s}$ 质心的法向加速度为 $a_C^n = \dfrac{\dot{s}^2}{R-r}$

圆轮的角加速度为 $\alpha = \dfrac{a_C^\tau}{r} = \dfrac{\ddot{s}}{r}$

圆轮受力如图。列写平面运动微分方程，

$$ma_C^\tau = F - mg\sin\theta, ma_C^n = F_N - mg\cos\theta, J_C\alpha = -Fr$$

由此得到关于弧坐标s，支持力F_N和摩擦力F的3个微分方程。消去约束力得到关于弧坐标s的微分方程：

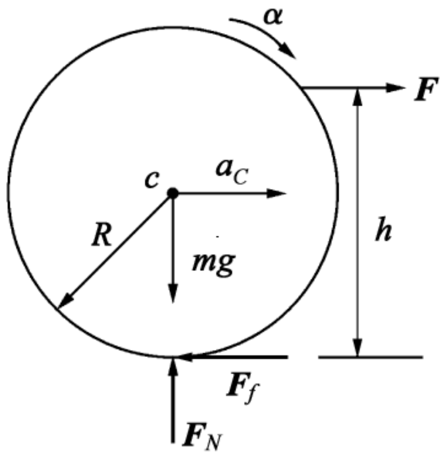
$$\frac{3}{2}\ddot{s} + \frac{g}{R-r}s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = A\sin\left[\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}t + \varphi\right]$$

由初始条件确定待定常数。进一步由平面运动方程得到约束力的时变规律。

2.1 动量方法

例题 均质圆轮在水平面上滚动。质量m，半径R，摩擦因数f。在高h处受水平力$\boldsymbol{F}$作用。试求轮心加速度$\boldsymbol{a}_C$和摩擦力。

解： 圆轮受力如图。列写平面运动微分方程，



$$\left.\begin{aligned} &F - F_f = ma_C \\ &F_N = mg, \\ &F(h-R) + F_f R = J_C\alpha \end{aligned}\right\}$$

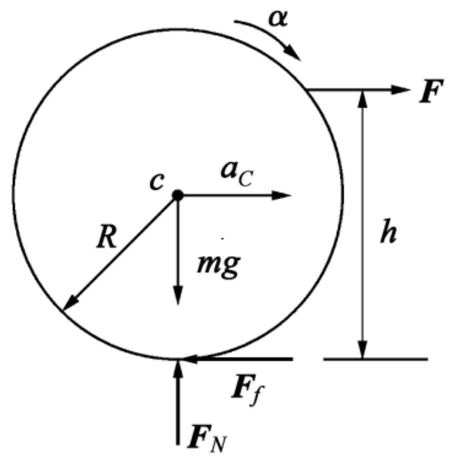
假设圆轮纯滚，则有运动学关系， $a_C = R\alpha$

$$\Rightarrow \quad a_C = \frac{2Fh}{3mR}, F_f = \frac{F(3R-2h)}{3R}, F_N = mg$$

由此可见：当 $h < \dfrac{3R}{2}$ 时，F_f 向左；当 $h > \dfrac{3R}{2}$ 时，F_f 向右；当 $h = \dfrac{3R}{2}$ 时，$F_f = 0$ 。

2.1 动量方法

$$a_C=\frac{2Fh}{3mR},F_f=\frac{F(3R-2h)}{3R},F_N=mg$$



纯滚的条件是 $|F_f|\le F_{\max}$ ，即

$$F\le mgf\frac{3R}{|3R-2h|}$$

若 $F>mgf\dfrac{3R}{|3R-2h|}$ ，圆轮滑滚，有补充物理律，

$$F_f=mgf$$

联立之，可解出加速度，角加速度和支持力。

注释：圆轮纯滚，用1个加速度表出全部，有2个约束反力，由3个平面运动微分方程定解；圆轮滑滚，用2个加速度表出全部，有1个约束反力，由3个平面运动微分方程定解。

4-3 达朗贝尔原理

达朗贝尔原理是一项天才的创造。本节中，达朗贝尔原理提供了解决动力学问题的优雅方法——动静法，即采用静力学方法处理动力学问题，或可说“以静制动”。但是，该原理的内涵远不止如此，它与虚位移原理一起，共同构成了分析力学的两大支柱。将达朗贝尔原理置于动量方法之后，能量方法之前来讲授，原因有二。其一，达朗贝尔原理等价于动量方法，能用动量方法处理的问题都能用动静法处理，反之亦然。其二，能量方法本质上是标量方法，且与分析力学密切相关，虚位移原理可从能量方法中直接引申出来。

本节阐述惯性力和达朗贝尔原理，达朗贝尔原理和动量方法的等价性，处理动力学问题的动静法，刚体上的惯性力系简化，以及动静法的应用。读者应仔细体会动静法和动量方法的内在等价性和操作区别性。

3.1 达朗贝尔原理

- 惯性力和达朗贝尔原理

这里，继承牛顿三大定律，并再度观察质点的运动定律：

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

将上式移项得 $\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = 0$

考虑到各项均具有力的量纲，记 $\boldsymbol{F}_I = -m\boldsymbol{a}$ ——称为作用于该质点上的**惯性力**

上式等价地写成，

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_I = 0$$

该式可解释为：作用于质点上的外力和惯性力在数学形式上构成平衡力系。这就是**质点的达朗贝尔原理**。

从上文来看，惯性力纯粹是一个虚构，是一种数学技巧。但恰是这样的一个看似平凡的操作，引发了意味隽永的深刻反思。爱因斯坦及其助手兰索斯都认为惯性力和万有引力是完全等效的。从这里开始，我们将惯性力视为真实存在的力，施加在质点上。

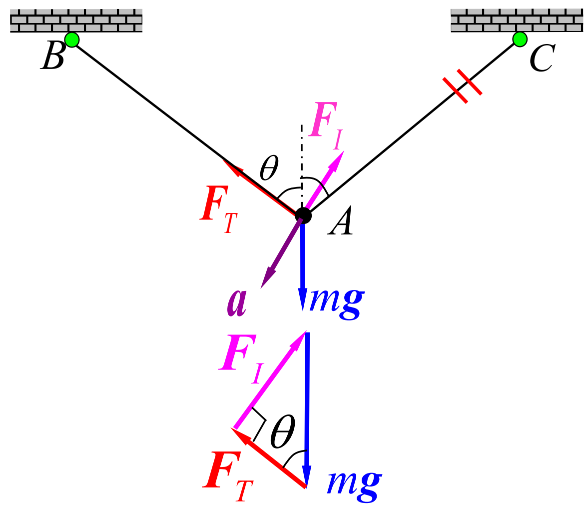
3.1 达朗贝尔原理

• 惯性力和达朗贝尔原理

这里，来看怎样应用这一原理。

例题　质量m的小球用两根细绳悬挂，试求AC绳断瞬时AB绳的张力。

解：绳断瞬时，小球的速度为零，加速度沿切线方向。



以小球为研究对象，受绳子的张力 $\boldsymbol{F}_T$ 、重力$m\boldsymbol{g}$和惯性力 $\boldsymbol{F}_I$ 作用，受力如图

由达朗贝尔原理知，力矢三角形封闭。于是有，

$$F_T = mg\cos\theta, F_I = mg\sin\theta$$

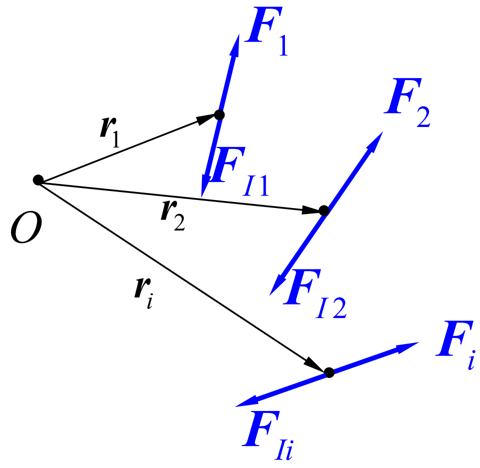
进而得 $a = g\sin\theta$

3.1 达朗贝尔原理

- 惯性力和达朗贝尔原理

考察一个质点系。由质点的达朗贝尔原理知，

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ii} = 0$$



从数学上，将各式直接求和，将各式叉积矢径后求和得：

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ii}\right) = 0,$$

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ii}\right) = 0$$

将作用于质点上的力 $\boldsymbol{F}_i$ 分为外力 $\boldsymbol{F}_i^e$ 和内力 $\boldsymbol{F}_i^i$，并注意到 $\sum_i \boldsymbol{F}_i^i = 0, \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^i = 0$，于是有

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^e + \sum_i \boldsymbol{F}_{Ii} = 0,$$

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^e + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{Ii} = 0$$

或者写成：

$$\boldsymbol{F}_R^e + \boldsymbol{F}_{IR} = 0,$$

$$\boldsymbol{M}_O^e + \boldsymbol{M}_{IO} = 0$$

即：外力系的主矢与惯性力系的主矢之和为零；外力系的对一点的主矩与惯性力系对同一点主矩之和为零。这就是**质点系的达朗贝尔原理**。

3.1 达朗贝尔原理

- 达朗贝尔原理与动量方法的等价性

这里，考察惯性力系的主矢和对一点的主矩。

惯性力系的主矢：

$$\boldsymbol{F}_{IR}=\sum_i \boldsymbol{F}_{Ii}=-\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i=-\sum_i m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}=-\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

惯性力系对固定点*O*的主矩：

$$\boldsymbol{M}_{IO}=-\sum_i \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{a}_i=-\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\frac{dm_i\boldsymbol{v}_i}{dt}=-\sum_i\left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i)-\dot{\boldsymbol{r}}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i\right]=-\frac{d}{dt}\sum_i \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i=-\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt}$$

惯性力系对质心*C*的主矩：

$$\boldsymbol{M}_{IC}=-\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{a}_i=-\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times\frac{dm_i\boldsymbol{v}_i}{dt}=-\sum_i\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{r}_i'\times m_i\left(\boldsymbol{v}_{ri}+\boldsymbol{v}_C\right)\right]+\sum_i \boldsymbol{v}_{ri}\times m_i\left(\boldsymbol{v}_{ri}+\boldsymbol{v}_C\right)$$

注意到，$\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i'=0$，$\sum_i m_i\boldsymbol{v}_{ri}\times\boldsymbol{v}_C=0$，有，

$$\boldsymbol{M}_{IC}=\frac{d}{dt}\sum_i \boldsymbol{r}_i'\times m_i\boldsymbol{v}_{ri}=-\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt}$$

3.1 达朗贝尔原理

- 达朗贝尔原理与动量方法的等价性

据此得知，质点系的达朗贝尔原理第一式与动量定理等价，即

$$\boldsymbol{F}_R^e + \boldsymbol{F}_{IR} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_R^e$$

第二式与对固定点的动量矩定理等价，即

$$\boldsymbol{M}_O^e + \boldsymbol{M}_{IO} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_O^e$$

在第二式中，若取O为质心，则与对质心的动量矩定理等价，即

$$\boldsymbol{M}_C^e + \boldsymbol{M}_{IC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_C^e$$

总结之，质点系的达朗贝尔原理和动量方法完全等价。