第二章：力系，其描述与简化

由几何到力学

前文研究了输出的描述与简化，这完全属于几何内容。从本章起，将正式转向力学内容，首先研究输入的描述与简化

第二章：力系，其描述与简化

- 外效应、内效应

输入（作用）引起系统（质点系）的输出（运动）。实验表明，无论作用形式如何，输入都可以统一地抽象成力系来处理。力系引起自由质点系的运动和质点间的相互作用（内力）；引起约束质点系的运动、质点间的相互作用（内力）、外部约束力和内部约束力。在此，不变视为变化的特例看待。这些统称为力系的作用效应。

对于受约束刚体而言，力系引起运动（刚性运动）、内力和外部约束力；

对于受约束变形体而言，力系引起运动（刚性运动+局部变形）、内力和外部约束力。

称刚性运动和外部约束力为力系的外效应，称局部变形和内力为力系的内效应。

刚体不发生变形，只有刚性运动，并且内力并不重要（内力与局部变形相关），因此，这里只关心外效应：即刚性运动和外部约束力。

第二章：力系，其描述与简化

- 力系等效

考虑一个空间（平面）单刚体，其独立描述坐标数目为6（3），而作用于其上的力系可以无穷无尽。对一给定的外效应，必有无穷多个力系与之对应，这无穷多个力系构成了力系子集，它们具有相同的外效应。我们称具有相同外效应的力系是等效的。这就提示我们：如果能找出力系的等效条件，进而找出那个最简的等效力系，就能以之替代原始（复杂）力系进行刚体的外效应分析，这将极大地便利后继力系和运动（平衡）的关系研究。

后文将使用两个动词：
“变换”，是指在刚体上将两个等效力系相互替换；
“简化”，是指找出作用于刚体上的原始力系的最简等效力系，并替代之。

第二章：力系，其描述与简化

- 本章纲要：

力、力矢和力矩矢，力偶和力偶矩矢：讨论力的概念、力的描述和转动效应度量；讨论力偶的概念、力偶的作用效应度量。强调二者的独立性。

刚体上力系的等效变换：提出力系的等效变换公理，据此给出一般力系的等效变换方法，特别强调最简等效力系的形式和类别。

约束的反力效应，物系的受力分析：给出各种典型约束的反力效应（也即，对几何和运动的严格限制表现在作用力上是怎样的），进而形成物系受力分析的隔离体方法。

2-1 力，力矢与力矩矢

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力的概念

力是输入（作用）的抽象。实验表明，力的作用伴随着物体运动的改变，或者说，力是物体运动改变的原因。

注意两点：

➢其一，这时的运动改变是在特定参考系中的观察结果，先贤们在身处其中的地球上形成认识，故而无意识地取之为参考系，之后，再推广到一般的惯性参考系；

➢其二，力的作用引起的是“运动本身”还是“运动改变”，这只能由实验给出判决。

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力的度量（力矢、合成和分解）

力以其效应来度量，效应相同则度量相同，换言之，效应相同的力（无论其来源和方式）就是同一个力。

实验表明：

力有三要素——大小、方向和作用点；

并且有实验定律——共点力系的平行四边形（多边形）法则。

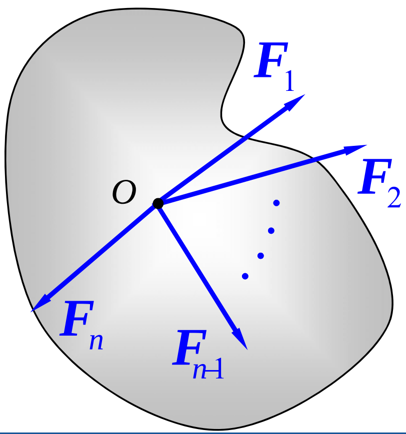
因此，力可用矢量描述，称为力矢。注意，和数学上的自由矢量不同，力矢为定位矢量。力矢标记应包括“矢量符号”和“作用点（或矢径）”，即 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{r})$ 或$(\boldsymbol{F},O)$ 。

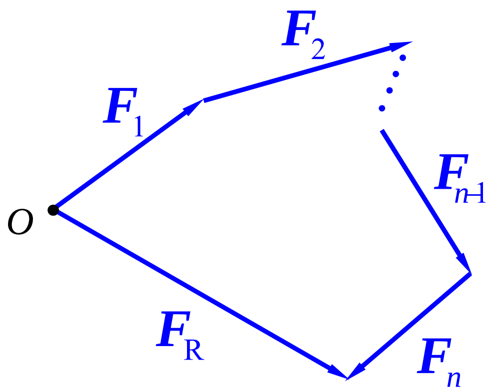
1.1 力，力矢与力矩矢

- 力的度量（力矢、合成和分解）

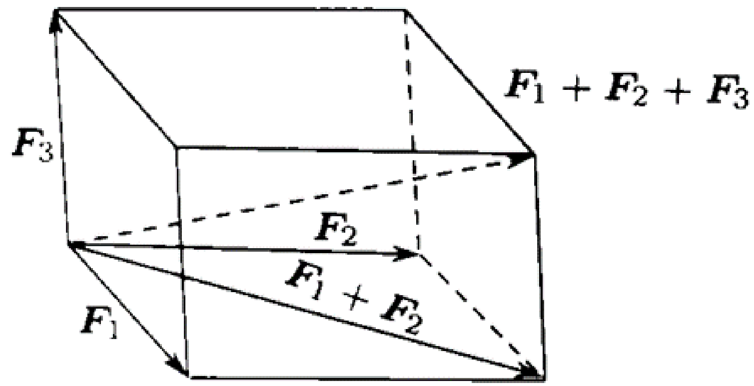
平行四边形（多边形）法则是**最简力系的简化规则**，它由一个力等效一组共点力，或者说，一组共点力系合成为一个力，这个力称为原力系的**合力**。该法则适用于任意质点系，包括离散点系、刚体和变形体。

反之，一个力可以**分解**为一个共点力系，这是平行四边形（多边形）法则的反向应用。给定一个力，在其作用点取三个不共面方向作一个平行六面体，以力矢为对角线，以三个方向为边，则在各边上都得到一个力，这三个力等效于原力，称为原力的**分力**。





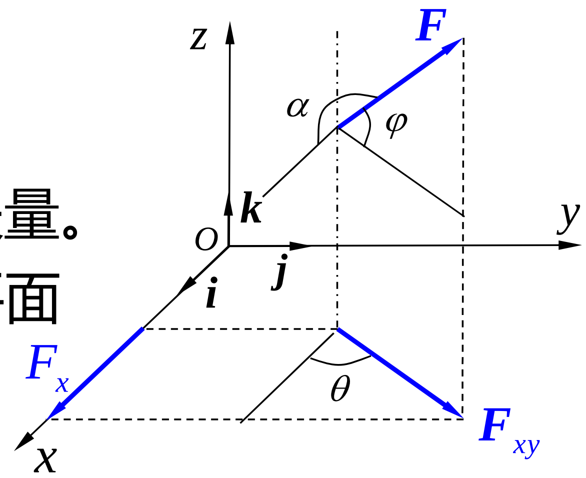
共点力系的多边形法则（共点力系的合成）



力的分解

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力矢在平面上和轴上的投影



力矢在平面上的投影为矢量

由矢端和矢尾分别向平面做垂线，两垂足的连线确定平面内矢量。

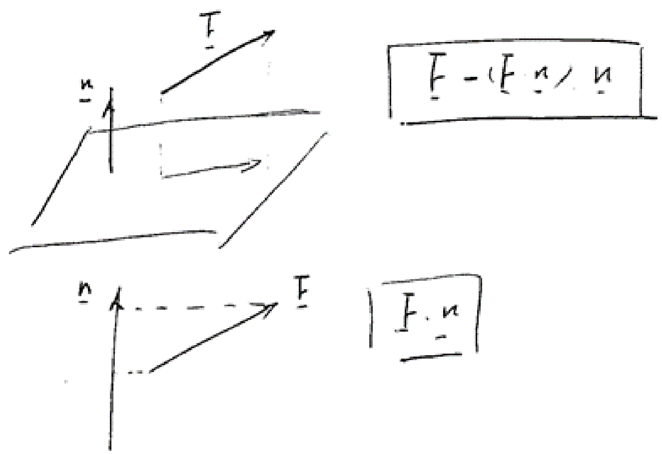
力矢向平面投影，在数学上表示为：力矢本身减去力矢点积平面法线单位矢并配上该单位矢 $\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$

力矢在轴上的投影为代数量

可通过两种方法定义：

（1）直接投影法，过矢端和矢尾分别向轴做垂线，由此确定的线段长度配以正负号；

（2）二次投影法，过轴线做一平面，力矢先向该平面投影，之后再向该轴投影。

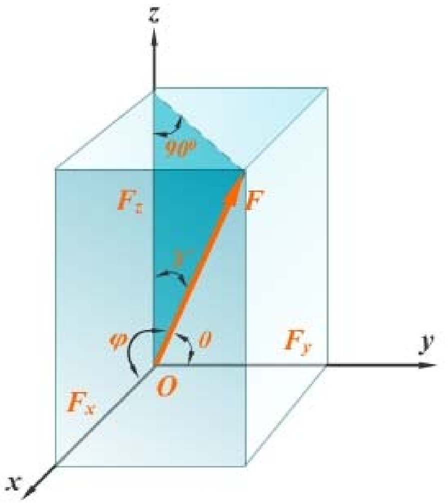


三余弦定理保证了二者的一致性。力矢向轴投影，在数学上表示为：力矢本身点积轴的单位方向矢。$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$

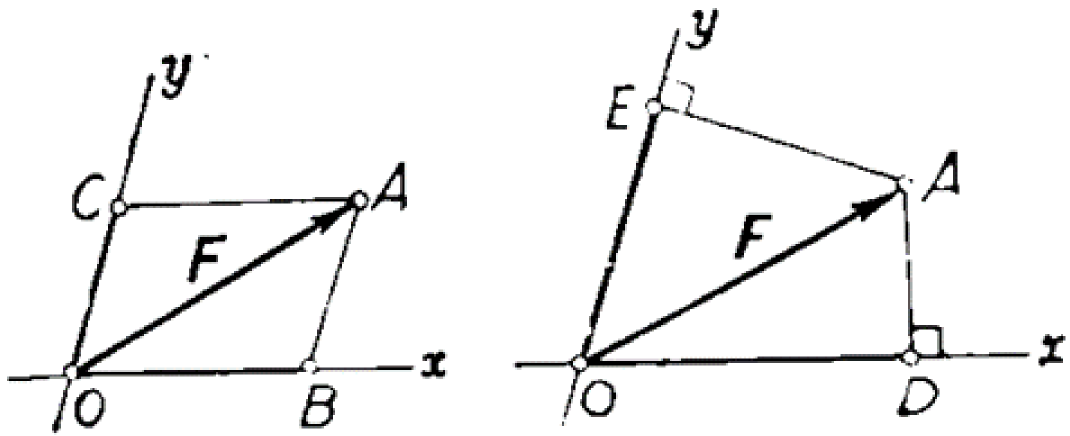
1.1 力，力矢与力矩矢

- 力矢在不同坐标系中的表示

在直角坐标系中，力矢可表示为向三根垂直轴的投影并配以单位方向矢之和；
在斜角坐标系中，却非如此，力矢量可表示为分力矢之矢量和。
只是在直角坐标系中，投影配以单位方向矢恰与分力矢相同



$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$



斜角坐标系中，力矢的分量和投影

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力系、力系的主矢

力系，顾名思义，即一组力（有限个或无限个）。力系可由一系列矢量并配以各自的作用点信息来表示，即 $\left\{\left(\boldsymbol{F}_i,\boldsymbol{r}_i\right),i=1,2\cdots\cdots\right\}$

定义力系的主矢量（简称**主矢**）：力系中各力矢的矢量和，即

$$\boxed{\boldsymbol{F}_R^*=\sum_i \boldsymbol{F}_i}$$

这是一个纯粹的数学定义，单纯地将（作为自由矢量的）各个力矢作矢量和，因此，主矢为自由矢量。这里，给出力系主矢的直角坐标表示。

$$\boldsymbol{F}_i=F_{ix}\boldsymbol{i}+F_{iy}\boldsymbol{j}+F_{iz}\boldsymbol{k}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{F}_R^*=F_{Rx}^*\boldsymbol{i}+F_{Ry}^*\boldsymbol{j}+F_{Rz}^*\boldsymbol{k}$$

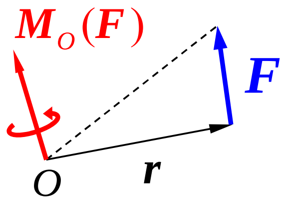
$$\Longrightarrow\quad F_{Rx}^*=\sum F_x,\quad F_{Ry}^*=\sum F_y,\quad F_{Ry}^*=\sum F_z$$

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力对点（对轴）之矩的定义和性质

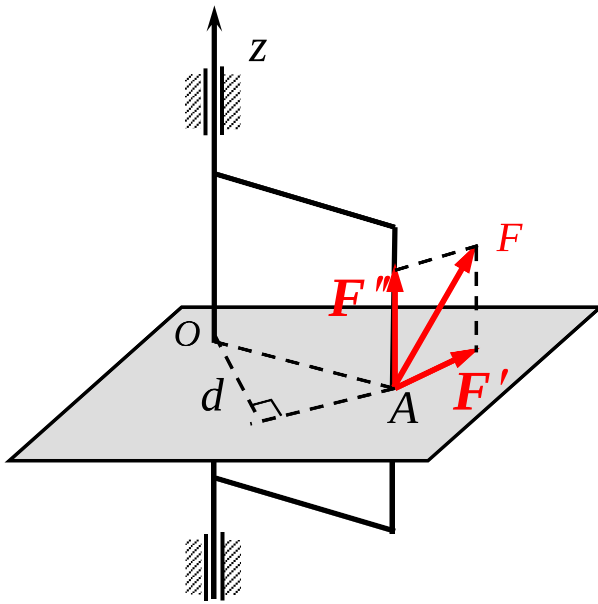
力对点之矩定义为矢量叉积：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$



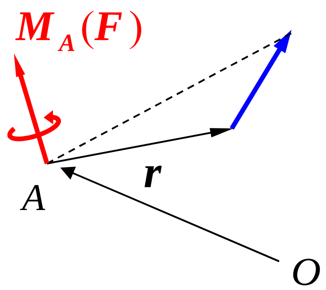
力对点之矩是矢量，为定位矢量，对不同点的结果一般不同。

力对轴之矩定义为：力向垂直于该轴的某平面投影，之后对平面和轴的交点取矩，所得的矩与该轴同向取正，反向取负。因此，力对轴之矩是代数量。

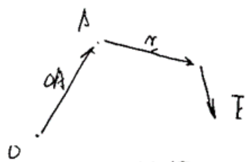


力对不同点的矩之间的关系为：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}) + OA \times \boldsymbol{F}$$



若OA与$\boldsymbol{F}$平行，则有 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F})$

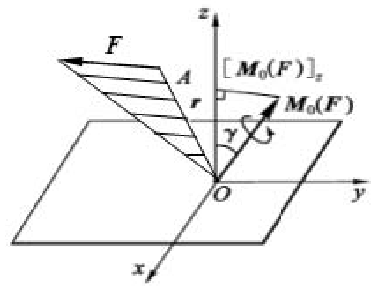


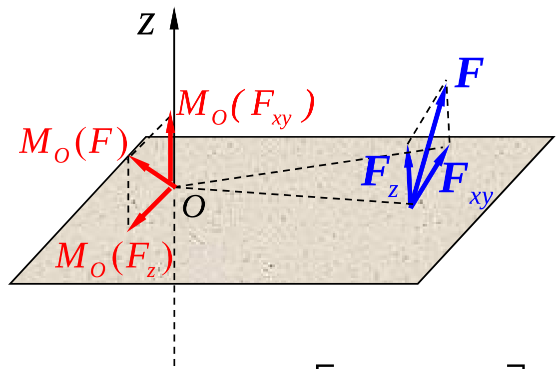
$M_O(F) = (OA + r) \times F = r \times F + OA \times F = M_A(F) + OA\times$

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力矩关系定理

讨论力对点之矩和力对轴之矩之间的关系。记轴为z，在轴上任取一点O，并以O为原点建立图示坐标系。





$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{F}_y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{F}_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}\right) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

按照对轴之矩的定义，

$$\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_{xy}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} \qquad M_z\left(\boldsymbol{F}\right) = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M_z\left(\boldsymbol{F}\right) = \boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}\right)\cdot\boldsymbol{k} = \left[\boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}\right)\right]_z$$

算子 $[\cdot]_z$ 表示在z轴上投影

力矩关系定理——力对轴之矩等于力对轴上任一点之矩对该轴的投影值。

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力矩关系定理

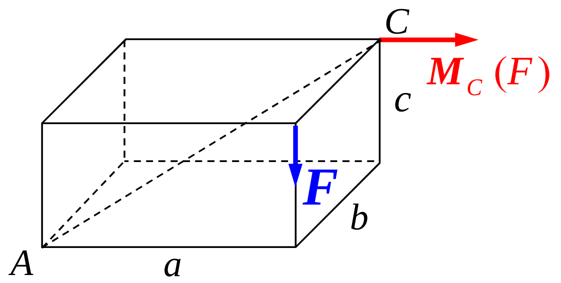
思考　已知如图，求 $M_{AC}(\boldsymbol{F})$

答：

$$M_{AC}(\boldsymbol{F})$$

$$=\left[\boldsymbol{M}_C(\boldsymbol{F})\right]_{AC}$$

$$=\frac{Fab}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



1.1 力，力矢与力矩矢

- 共点力系的合力矩定理

设 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 为共点力系，$\boldsymbol{F}_R$ 为其合力，矩心O至共同作用点A的矢径为 $\boldsymbol{r}$，则有

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_R) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{r} \times \sum \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$$

共点力系的合力矩定理——共点力系的合力对点之矩等于各分力对点之矩的矢量和。

上式对过O点的任意轴（记为x）投影，得到共点力系对轴的合力矩定理：

$$M_x(\boldsymbol{F}_R) = \sum M_x(\boldsymbol{F}_i)$$

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力系的主矩

定义力系对一点之矩（称为主矩矢量，简称**主矩**）：力系中各力对点之矩的矢量和，即

$$\boldsymbol{M}_O^* = \sum_i \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

这也是一个纯粹的数学定义，单纯地将（作为定位矢量的）各个力矩作矢量和，因此，主矩为定位矢量。

定义力系对轴之矩：力系中各力对轴之矩的代数和，即 $\sum_i M_z(\boldsymbol{F}_i)$

力系对不同点的主矩之间的关系为：

$$\boldsymbol{M}_O^* = \sum_i \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = \sum_i \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_i) + OA \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_A^* + OA \times \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_A^* + OA \times \boldsymbol{F}_R^*$$

1.1 力，力矢与力矩矢

- 力系的主矩

力矩关系定理从单力推广到力系

$$\sum_i M_z(\boldsymbol{F}_i)=\sum_i\left[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)\right]_z=\left[\sum_i \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)\right]_z$$

力系对轴之矩等于力系对轴上任一点之矩（对该点的主矩）对该轴的投影值。因此，*力系对一点的主矩为零，当且仅当力系对过该点的三根不共面的轴之矩为零*。在之后的应用中，这一点尤为重要。

力系主矩的直角坐标表示如下。

$$\boldsymbol{M}_{Oi}=M_{Oix}\boldsymbol{i}+M_{Oiy}\boldsymbol{j}+M_{Oiz}\boldsymbol{k}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\boldsymbol{M}_O^*=M_{Ox}^*\boldsymbol{i}+M_{Oy}^*\boldsymbol{j}+M_{Oz}^*\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow\quad M_{Ox}^*=\sum M_{Oix},\quad M_{Oy}^*=\sum M_{Oiy},\quad M_{Oz}^*=\sum M_{Oiz}$$

各力对轴之矩的代数和

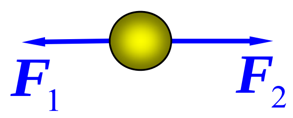
2-2 刚体上力系的等效变换公理

从这里开始，转向力系的等效变换研究，但显然还缺少一个坚实的出发点。将从几条无可置疑的命题出发，形成等效变换的完整的演绎体系，这就是力系等效变换的公理化方法。

2.1 刚体上力系的等效变换公理

- 刚体上力系的等效变换公理

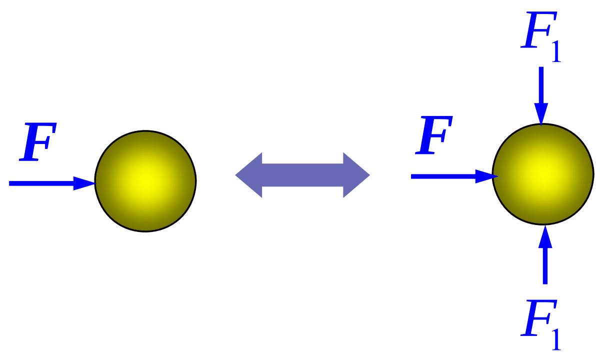
大量观察表明：一个初始静止的单刚体，某时刻在其上施加了两个力，刚体能够继续保持静止的充要条件是这两个力等值、反向、共线。这就是**二力平衡公理**。它是最基本的非零平衡力系，为后继的等效变换奠定了基础



$$F_1 = -F_2$$

二力平衡 ⟺ 二力等值、反向、共线

大量观察表明：在单刚体上，加上或者减去平衡力系，不改变原力系的外效应。这就是**加减平衡力系公理**。它是力系等效变换的基本公理。



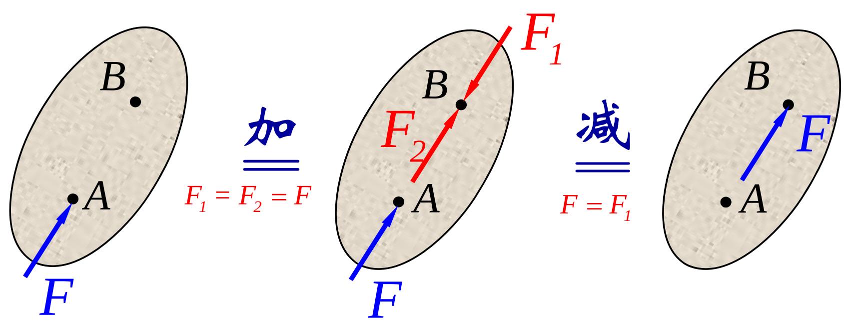
注意，前一条公理提供了素材，而后一条公理提供了操作依据。

2.1 刚体上力系的等效变换公理

- 刚体上力系的等效变换公理

推论1——**力对刚体的可传性**

陈述为：作用于刚体上的力，可沿其作用线滑移至刚体上任一点，而不改变对刚体的外效应



结合使用了二力平衡公理和加减平衡力系公理

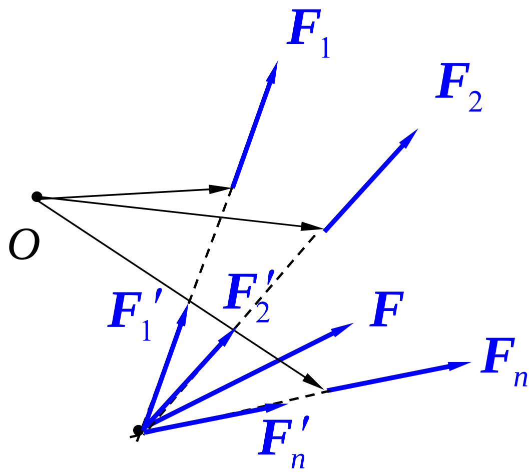
力对刚体是滑移矢量，刚体上力的三要素变为：大小、方向和作用线

2.1 刚体上力系的等效变换公理

- 刚体上力系的等效变换公理

由此，可将平行四边形（多边形）法则从共点力系推广到汇交力系。可将汇交力系的各个力滑移到汇交点，之后合成为单个力（即合力）。

注意到，力的滑移不改变力对一点的矩。可将合力矩定理从共点力系推广到汇交力系，即汇交力系的合力对一点之矩等于各个力对该点之矩的矢量和。



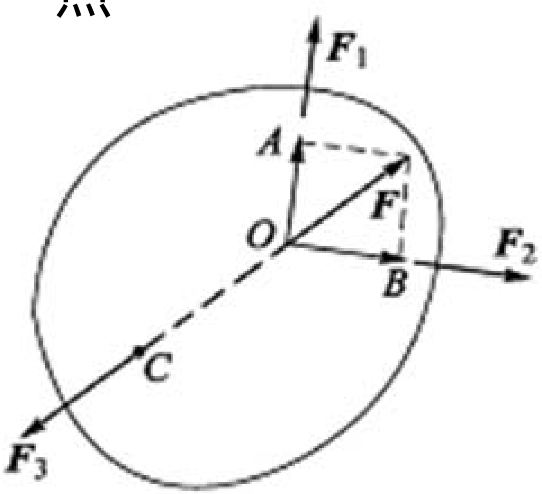
$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\sum_i \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i')=\sum_i \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i)$$

2.1 刚体上力系的等效变换公理

- 刚体上力系的等效变换公理

推论2——**三力平衡汇交定理**

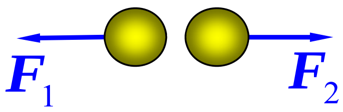
陈述为：若单刚体受三个力作用而平衡，且其中两力作用线相交，则这三个力共面且汇交于一点



顺次应用了力的可传性、平行四边形法则和二力平衡公理

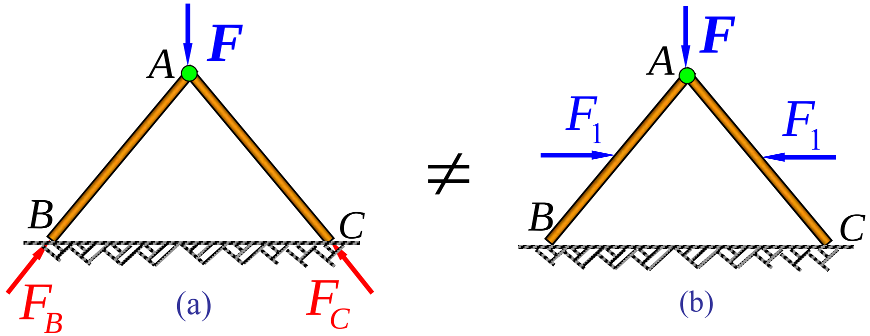
2.1 刚体上力系的等效变换公理

思考 1. 平衡吗?



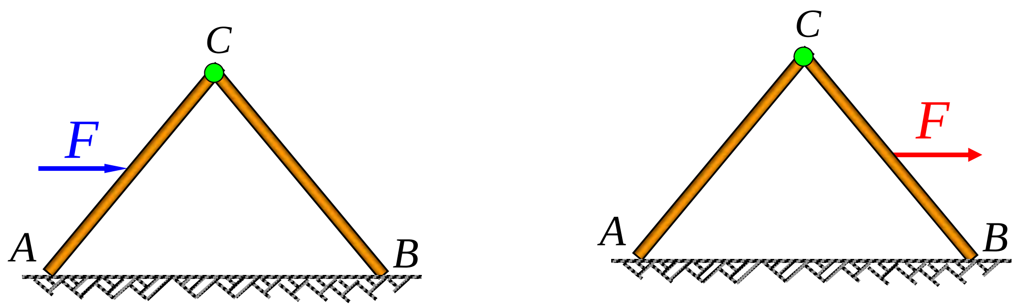
不平衡

2. 图(a)和(b)受力等效吗?



改变了A、B、C处约束力

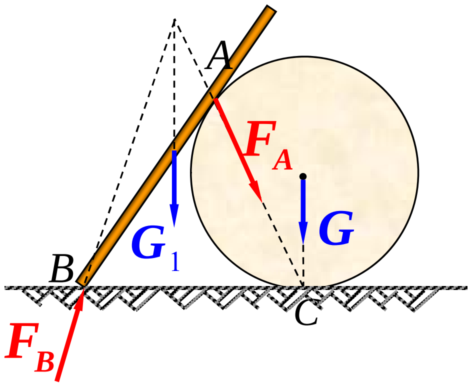
3. 力$\boldsymbol{F}$滑移改变外力吗?



滑移后，改变了杆端A、B处的外力。

2.1 刚体上力系的等效变换公理

思考　4. 判断重杆对圆轮作用力及杆端*B*处作用力方向。

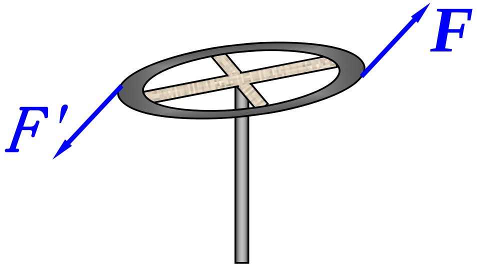


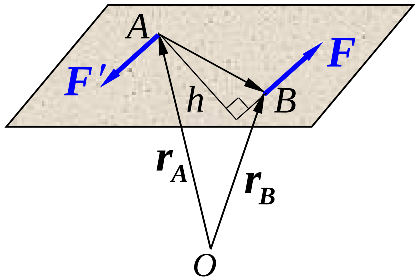
2-3 力偶，力偶矩矢

3.1 力偶，力偶矩矢

- 刚体上力偶的概念和度量

作用于单刚体上的一对等值、反向、不共线的力，称为**力偶**，记为 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ 。实验表明，力偶由构成力偶的两个力对点的主矩来度量，称为力偶矩矢；其值相等，则其外效应相同





力偶 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ 的两个力对任一点O的主矩为：

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')=\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F}'$$

$$\boldsymbol{r}_B=\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{AB},\quad \boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}'$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{F}$$

其方位垂直于力偶所在平面，大小等于力与力臂（两个力的作用线距离）的乘积

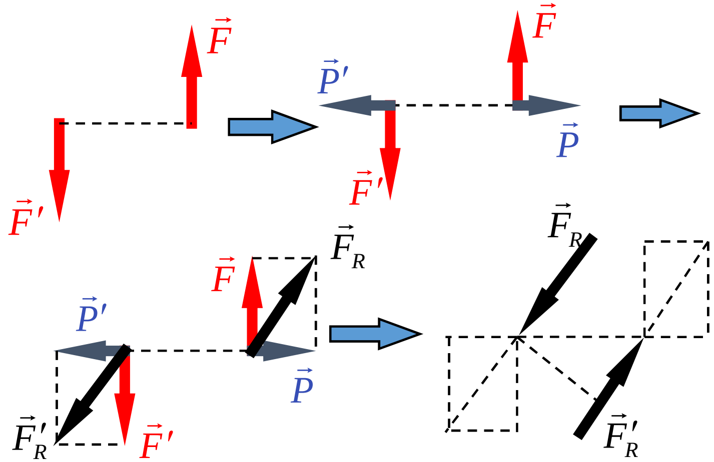
力偶对任一点的主矩都相同，因此，力偶矩矢是自由矢量，可以画在任何位置，数学记号中可去掉下标，记为 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ 。

力偶对轴之矩等于力偶矩矢在该轴上的投影。将力偶视为一个力系，这个结论是显然的

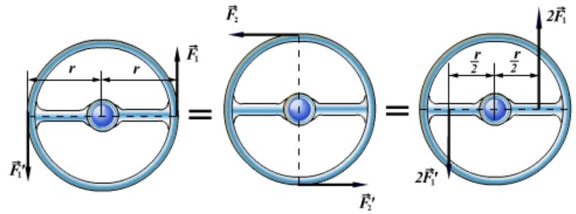
3.1 力偶，力偶矩矢

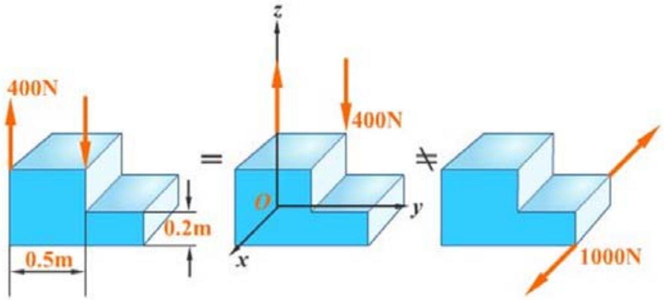
- 刚体上力偶的概念和度量

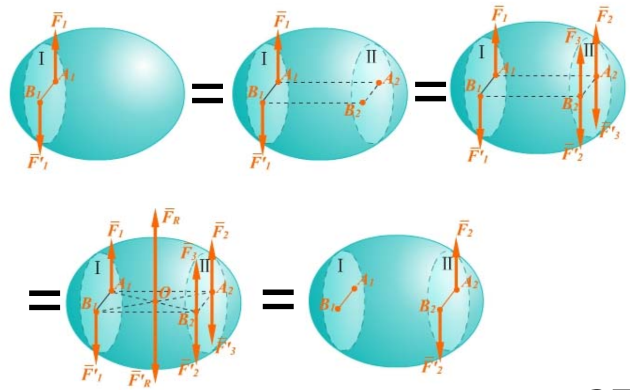
依据力偶的度量，来说明单个力偶的等效变换——滑移、平移（面内和面外）、转动和拉伸



- ➢ 构成力偶的一对力可沿各自的作用线滑移；
- ➢ 这对力可在力偶所在平面内共同平移和转动；
- ➢ 可平移至平行于所在平面的任一平面中，并在该平面中平移和转动；
- ➢ 可以拉远或者拉近这对力之间的距离并成比例地减小或者增加力值。







所有这些操作都不改变力偶的度量，也就可视为同一个力偶。

3.1 力偶，力偶矩矢

- 刚体上力偶的概念和度量

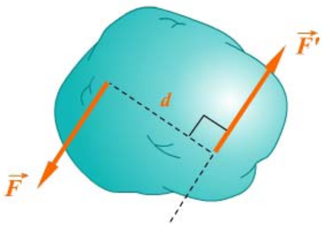
对力偶而言，重要的不是位置和力值，而是力偶矩矢。因此，力偶矩矢的数学表达中无需再突出一对力，因此，直接记为 $\boldsymbol{M}$ 。

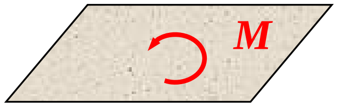
采用三种图形方法表示力偶：

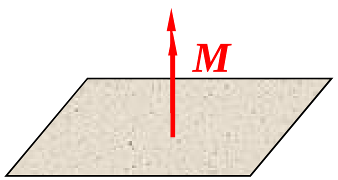
➢其一，一对力，但无需给出力值和间距；

➢其二，一个有向圆弧，指明方位、转向和大小；

➢其三，一个矢量，为了区分力矢，用双箭头标示。



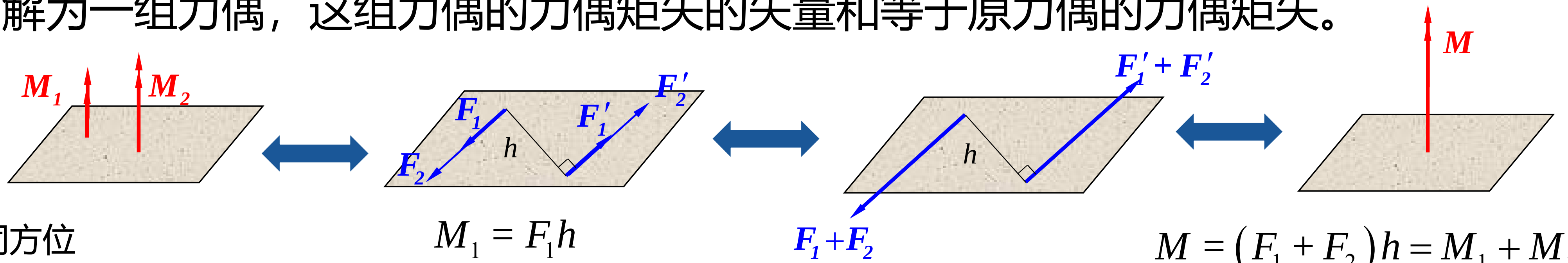




3.1 力偶，力偶矩矢

- 力偶系的合成和分解

以两个力偶为例，分别考察力偶矩矢同方位和不同方位的情形。由此可得力偶系的合成定理（称为**合力偶矩定理**）：力偶系可以简化为一个单力偶，称为该力偶系的**合力偶**；合力偶的力偶矩矢等于各分力偶的力偶矩矢的矢量和。反过来，一个力偶可以分解为一组力偶，这组力偶的力偶矩矢的矢量和等于原力偶的力偶矩矢。



同方位

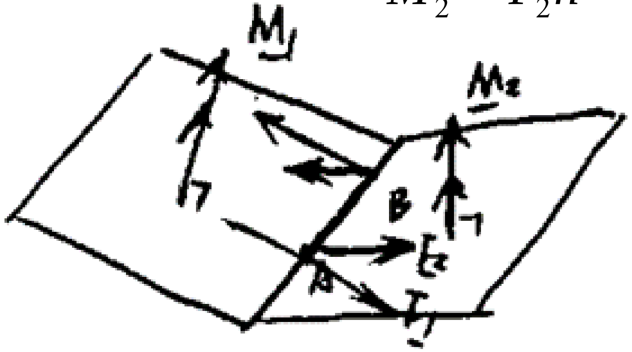
$$M_1 = F_1 h$$

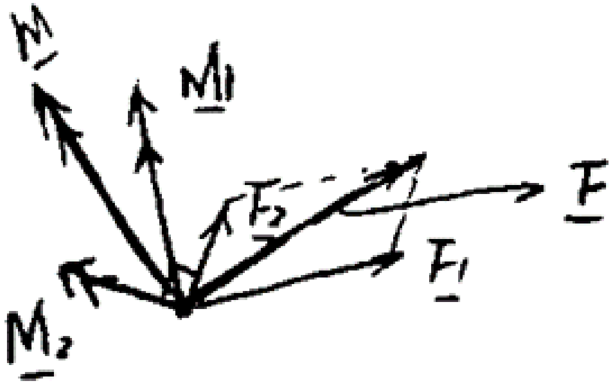
$$M_2 = F_2 h$$

$$M = (F_1 + F_2)h = M_1 + M_2$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$$

不同方位





$\underline{M} = \underline{M_1} + \underline{M_2}$

3.1 力偶，力偶矩矢

- 力 vs 力偶

力：力矢（力对物体的作用效应的度量，实验表明，其值相同则效应相同，为定位矢量）；共点力的合成（力的平行四边形（多边形）法则）作为公理给出；当作用在刚体上时，可滑移，从而成为滑移矢量。

力偶：力偶矩矢（力偶对刚体的外效应的度量，实验表明，其值相同则外效应相同，为自由矢量）；力偶系的合成（合力偶矩定理）证明给出；力偶直接定义在刚体上。

力偶也只是一个力系罢了，为何值得单独拿来讨论呢？这里从“合成”和“效应”两个角度来说明。

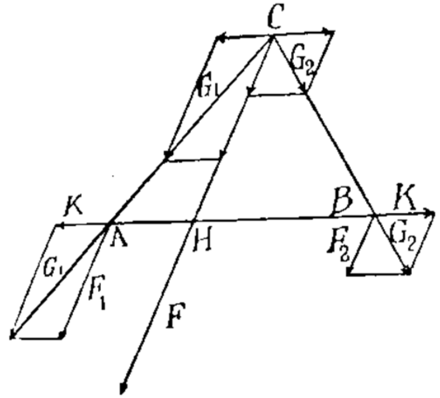
3.1 力偶，力偶矩矢

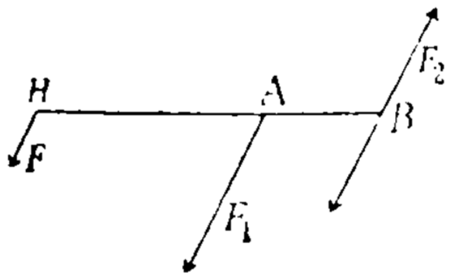
- 力 vs 力偶

首先看“合成”角度，力偶不能等效于一个力！

考察一对同向平行力$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2)$，分别作用于$A$、$B$两点，沿$AB$连线方向添加一对平衡力，就能得到同向平行力的合力，作用线处于这对平行力的作用线之间。

考察一对反向不等平行力，同样可得这对反向平行力的合力，作用线处在这对平行力的作用线之外，两力值越接近，合力作用线越远。反向平行力等值时（即力偶），合力作用线在无穷远处，或者说没有合力。这就暗示着，力偶具有基本的重要性！





再来看“效应”角度。直觉上，力应与平移效应相关，而力偶应与转动效应相关；作用于刚体上时，力矢的三个分量应与刚体的三个平移坐标有关，而力偶矩矢的三个分量应与刚体的三个转角坐标相关。