第一章：运动，其描述与简化

质点（系）、刚体（系）的运动描述，特别是最小刻画

第一章：运动，其描述与简化

• 运动描述之为几何学

机械运动是**质点**和**质点系**的机械运动。因质点没有外延性，且仅作运动描述，因此，可视为几何点；而质点系可视为几何点集。

研究几何点（集）的运动描述，与力学本身无涉。当然，也不能说完全无涉，力学决定了在运动描述中在哪个层面（即加速度层面）停下来。

• 运动的相对性、参考体和参考系

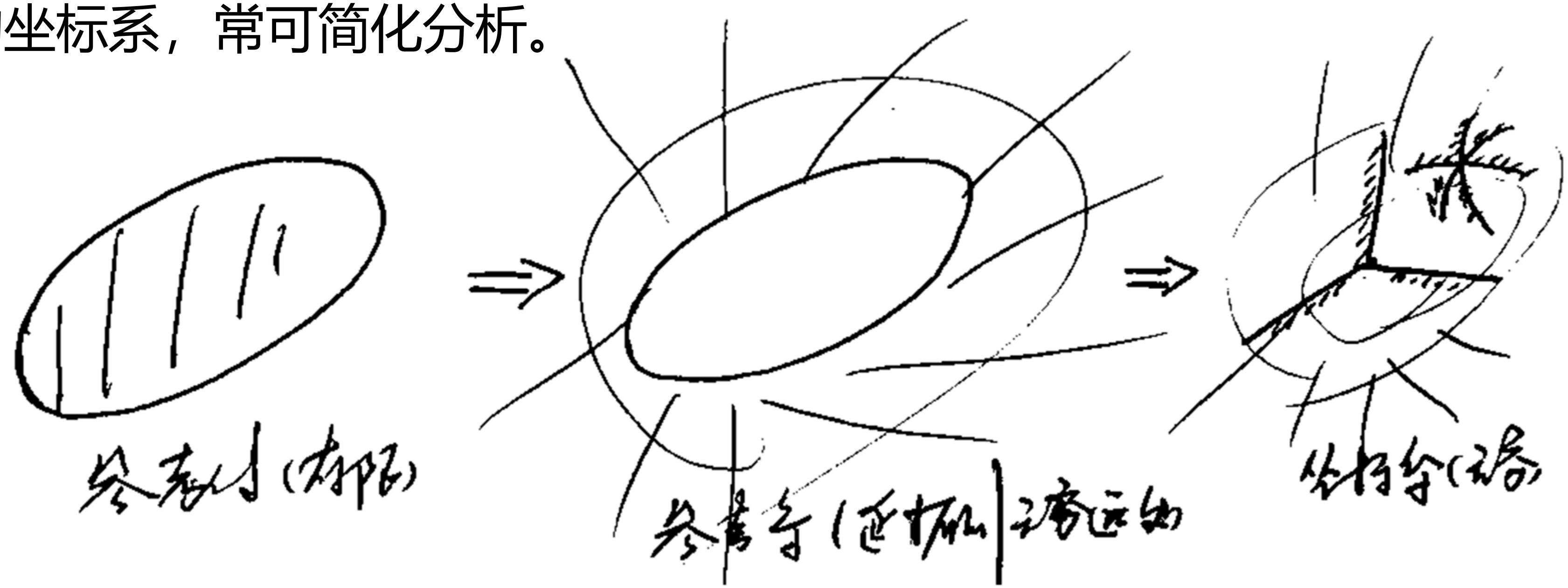
运动是相对的，说一个物体如何运动，首先要申明是参考哪个物体而言的（以人坐车上为例）。不申明以谁为参考，而问物体如何运动，这是没有意义的。

选取三维刚体为**参考体**，并在参考体上取不共面的三根相交线作为标架。标架与参考体固结，可用于替代参考体，称之为**参考系**。参考体可以是真实的或虚拟的、有限的或无限的物体；无论如何，参考系都将参考体延拓到无限远处，成为一个虚构的无限大刚体(例如：以地球为参考体，放置标架引入参考系）。在后续研究中，参考系具有根本重要性，参考体反而没那么重要了。

第一章：运动，其描述与简化

• 坐标系

选定参考系后，谈物体如何运动就有了意义。进一步，可以在参考系中安置**坐标系**来进行运动定量研究。坐标系种类繁多，依据具体问题的特点选择特定的坐标系，常可简化分析。



参考体，参考系和坐标系的关系图

参考体为有限刚体，参考系为无限大虚构刚体，而坐标系为固结于参考系中的数学标架

第一章：运动，其描述与简化

- 本章纲要：

点（系）的运动描述与简化：点的运动描述；点系的运动描述；约束与约束点系，独立描述坐标及其数目，由独立描述坐标表出体系的所有运动信息。

刚体（系）的运动描述与简化——过程标量分析方法：典型运动单刚体的独立描述坐标数目及其选择，由独立描述坐标表出单刚体所有运动信息；刚体和外部以及刚体间的典型约束；刚体系独立描述坐标数目计算、坐标选择及所有运动信息的表出。

刚体（系）的运动描述与简化——瞬时矢量分析方法：典型运动单刚体，由独立描述矢量表出所有运动信息；单刚体运动分析方法，特定刚体系的运动分析；点的合成运动定理；单刚体运动分析方法与点的合成运动方法相结合，形成一般刚体系运动分析的完备的瞬时矢量分析方法。

1-1 点（系）的运动描述与简化

从点的运动描述到点系运动描述；引入约束概念、独立描述坐标概念；独立描述坐标数目计算和独立描述坐标选择；通过独立描述坐标解析表出点系中所有点的运动信息（位置，速度和加速度）

1.1 点（系）的运动描述

- 点的运动描述

一个点在某一参考系中的位置、速度和加速度常随时间而改变。刻画该点的位置变化（运动方程）、划过的迹线（运动轨迹）、位置变化的快慢以及变化快慢的变化快慢（速度和加速度）。

描述方法：首先通过矢量表示出各量及其关系（矢径法），这些关系与坐标系选择无关；之后，再选用合适的坐标系描述之（各类坐标法）

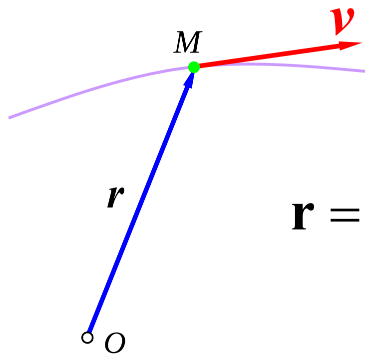
1. 矢径法

2. 坐标法（解析法）

点（系）的运动描述

- 矢径法

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$$ ——矢量形式的运动方程



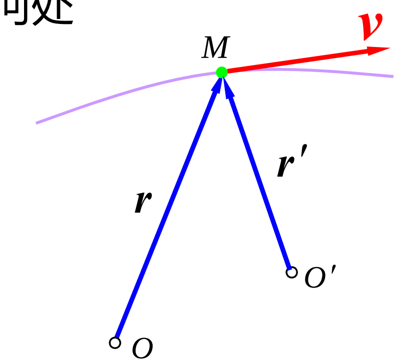
$\mathbf{r}=OM$

矢端曲线（或直线）——点M的轨迹

相比于运动方程，轨迹仅提供了不完全的运动信息，未能指明何时处于何处

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$ ——瞬时速度（沿轨迹的切线方向）

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$ ——瞬时加速度（方向指向轨迹的凹侧）



$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+OO'$

尽管对于同一参考系上的不同固定点，刻画点M位置的矢径不同，但按上述定义给出的速度和加速度却是相同的

矢径法形式简洁、意义明确，特别适合理论推导，但对具体运算不利，这就需要借助于各类坐标法

点（系）的运动描述

- 坐标法：在一个三维参考系中，只需预设合理的规则，每个点的位置都能用三个数字唯一地确定下来。

➢坐标面、坐标线、向量基：

关于这些规则，可做如下形象理解：设想在参考系中预置了三族曲面（I、II、III），每一族曲面都包含有无穷多个“平行”曲面。曲面族I中的每一个曲面都被赋予了一个坐标 q_{I} ，无限临近的曲面具有无限接近的坐标值，且坐标值单调变化，不重复，不遗漏；曲面族II和曲面族III的坐标值分别记为q_{II} 和 q_{III} 。空间中的任一点都有且只有三个曲面（分属三族曲面）通过，这三个曲面相应的三个坐标值称为该点的坐标$\left(q_{\mathrm{I}}, q_{\mathrm{II}}, q_{\mathrm{III}}\right)$ 。这些曲面称为**坐标曲面**，位于一个坐标曲面上的各点，一个坐标值保持恒定，而另两个坐标值改变；分属不同族的两个坐标曲面交于一条曲线，该曲线上的各点相应于这两个坐标曲面的坐标值保持不变，而另一个坐标值改变，称之为**坐标曲线**。对空间中的任一点，恰有三条坐标曲线通过，沿这三条坐标曲线的切线方向的单位矢量称为该点的**向量基**。定义在每个点处的矢量都可用该点的向量基表出。

点（系）的运动描述

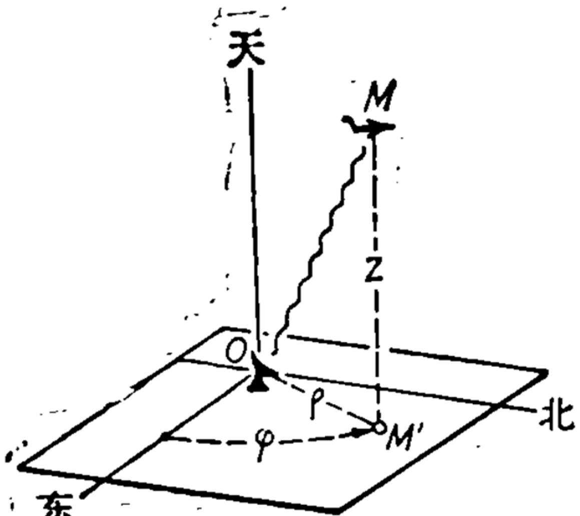
- 常用坐标系：

  直角坐标系、柱坐标系和球坐标系

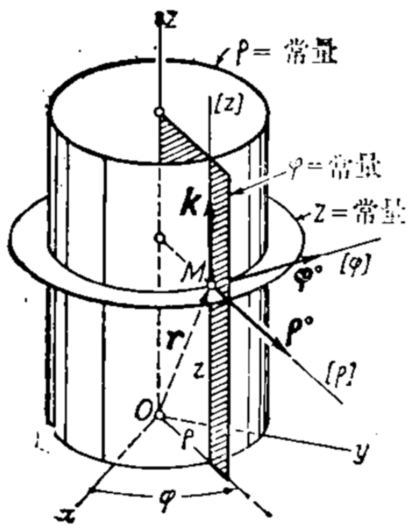
- 直角坐标系：将一个点向三条直线分别投影，投影得到的三个度量值即为该点的坐标(x, y, z)。按照这一规则，坐标曲面为一系列平面，与某条相交直线（三条相交直线之一）垂直；而坐标曲线为一系列直线，与某相交直线（三条相交直线之一）平行；并且，任一点处的向量基分别与原点处的向量基平行（一致）。

点（系）的运动描述

- 柱坐标系：将一个点向两条直线（x, y）所确定的平面上（xy平面）投影，将投影点与原点相连，线段长度记为坐标 ρ ，连线与一条直线（x） 的夹角记为坐标 φ ，该点向另一条直线（z）的投影记为坐标z。按照这一规则，坐标曲面分别为以z轴为中心线的圆柱面、经过z轴的半平面和垂直于z轴的平面；坐标曲线分别为通过z轴的水平射线、以z轴为中心的圆和平行于z轴的直线。一点的向量基如图所示，随点的位置的改变而改变。

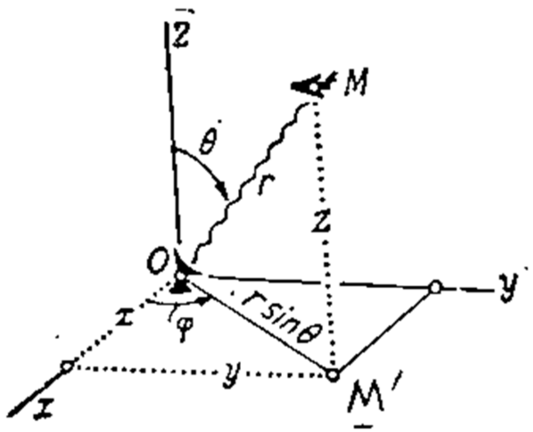


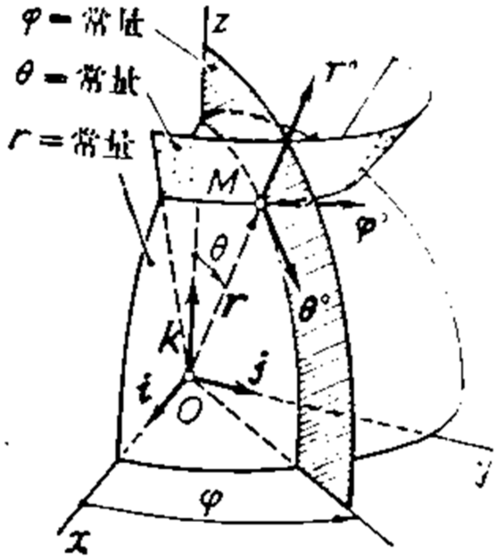
(a)



点（系）的运动描述

- 球坐标系：一个点到原点的距离记为坐标 ρ ，将该点向两条直线（x, y）所确定的平面上（xy平面）投影，将投影点与原点相连，连线与一条直线（x）的夹角记为坐标 φ ，该点与原点的连线与另一条直线（z）的夹角记为坐标 θ 。按照这一规则，坐标曲面分别为以原点为中心的球面、经过z轴的平面和以原点为顶点的圆锥面；坐标曲线分别为通过原点的射线、以z轴为中心的圆和通过z轴的圆。一点的向量基如图所示，随点的位置的改变而改变。

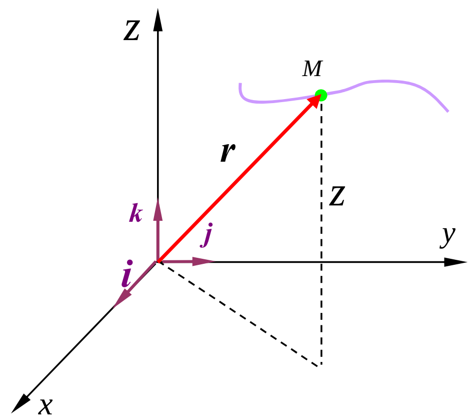




点（系）的运动描述

- 直角坐标法　在笛卡尔直角坐标系中，M点的位置由坐标(x, y, z)确定

$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$ ——直角坐标形式的运动方程



从运动方程组中消去时间，可得点M的轨迹方程

M点的矢径

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为M点所在位置的向量基

M点的速度矢量

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k}$$

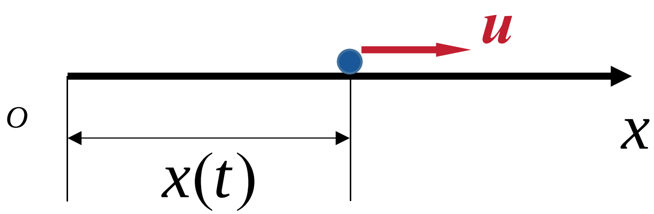
速度和加速度在某一坐标轴上的投影（或分量）等于相应坐标的一阶导数和二阶导数

M点的加速度矢量

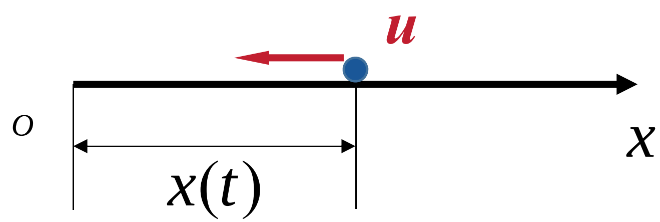
$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{x}(t)\boldsymbol{i} + \ddot{y}(t)\boldsymbol{j} + \ddot{z}(t)\boldsymbol{k}$$

点（系）的运动描述

例题　质点质点沿着水平线运动，建立图示笛卡尔直角坐标（仅画出x轴）。对I、II两种情形，已经画出了速度矢量，试通过坐标导数表示速度大小。



(I)



(II)

解 8

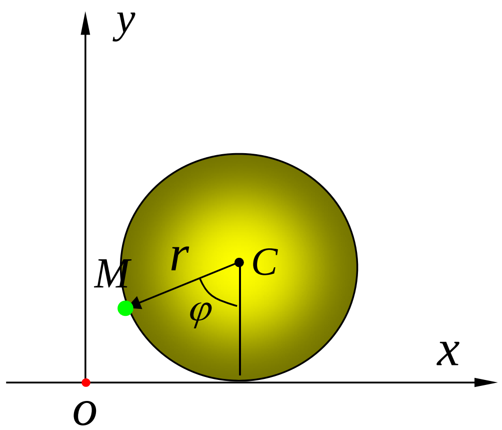
I情形 $\dot{x}=u$　　　II情形 $\dot{x}=-u$

已经标示了速度的正方向 $\boldsymbol{u}^0$　　$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{u}^0$　　$\dot{x},\ddot{x}$ 均与 x 的正方向一致

点（系）的运动描述

例题

半径为r的圆轮沿着平面纯滚动（无滑滚动），其一半径（固定于轮上）与竖直方向夹角$\varphi=\omega t$ 。试写出轮缘上一点M的运动方程和轨迹方程，并求出M点恰与地面接触时的速度和加速度。



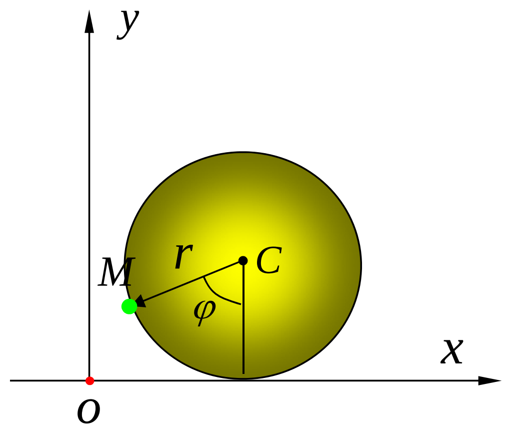
点（系）的运动描述

解8 取M点与地面接触时地面上那个接触点为原点，建立直角坐标系O-xy。M点的运动方程

$$x = r(\omega t - \sin\omega t), y = r(1 - \cos\omega t)$$

上述两式消去时间t得轨迹方程

$$\left(r\arccos\left(1 - y/r\right) - x\right)^2 + \left(r - y\right)^2 = r^2$$



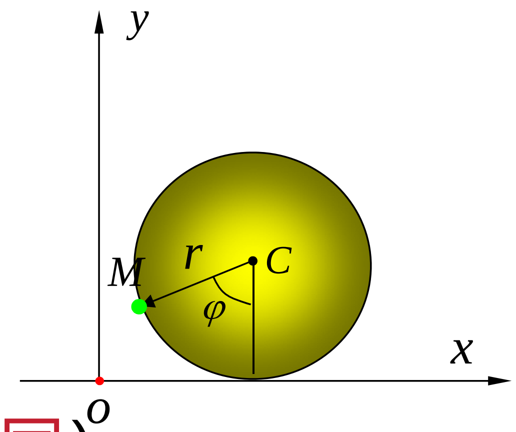
沿两个坐标方向的速度分量：

$$\dot{x} = \omega r\left(1 - \cos\omega t\right), \dot{y} = \omega r\sin\omega t$$

沿两个坐标方向的加速度分量：

$$\ddot{x} = \omega^2 r\sin\omega t, \ddot{y} = \omega^2 r\cos\omega t$$

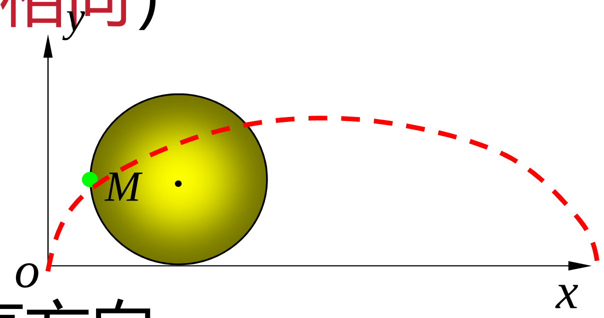
点（系）的运动描述



当时间t取零时，M点恰与地面接触，此时

$$\dot{x}=0,\dot{y}=0 \qquad \dot{x}=\omega r\left(1-\cos\omega t\right),\dot{y}=\omega r\sin\omega t$$

即M点速度为零（两点无滑接触，接触两点的速度相同）



$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t\to0^+}=\left.\frac{\omega r\sin\omega t}{\omega r\left(1-\cos\omega t\right)}\right|_{t\to0^+}=\left.\frac{\omega t}{1/2\left(\omega t\right)^2}\right|_{t\to0^+}\to+\infty$$

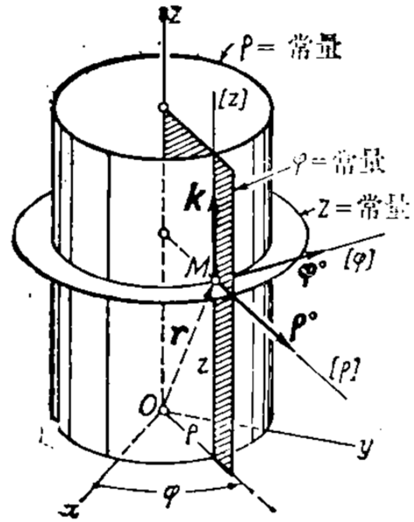
$\Rightarrow$ M点所描绘的轨线，在地面接触处的切线沿竖直方向

当时间t取零时， $\ddot{x}=0,\ddot{y}=\omega^2 r$

即M点的加速度方向垂直于接触面向上（两点无滑接触，接触两点的加速度在公切线上的投影相等）

点（系）的运动描述

- 柱坐标法　在柱坐标系中，M点的位置由坐标 (ρ,φ,z) 确定



$$\rho=\rho(t),\quad \varphi=\varphi(t),\quad z=z(t)$$ ——柱坐标形式的运动方程

从运动方程组中消去时间，可得点M的轨迹方程

取原点为固定点，M点的矢径

$$\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{\rho}_0(t)+z(t)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{k}$ 为M点所在位置的向量基

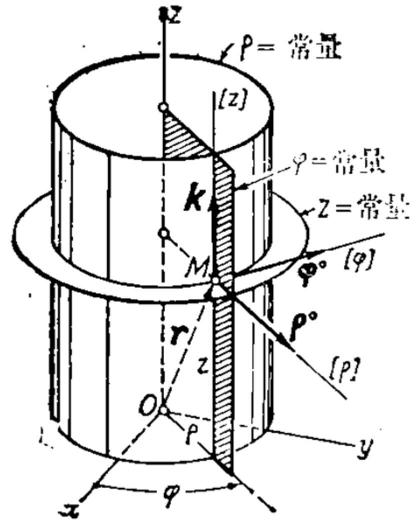
随位置而改变，不是常矢量　　不随位置而改变，为常矢量

点（系）的运动描述

- 柱坐标法

借助直角坐标系研究非常矢量的单位矢量

$$\boldsymbol{\rho}_0(t)=\cos\varphi(t)\boldsymbol{i}+\sin\varphi(t)\boldsymbol{j},\boldsymbol{\varphi}_0(t)=-\sin\varphi(t)\boldsymbol{i}+\cos\varphi(t)\boldsymbol{j}$$



对时间求导

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_0(t)=-\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)\boldsymbol{j}=\dot{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}_0(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_0(t)=-\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)\boldsymbol{i}-\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)\boldsymbol{j}=-\dot{\varphi}(t)\boldsymbol{\rho}_0$$

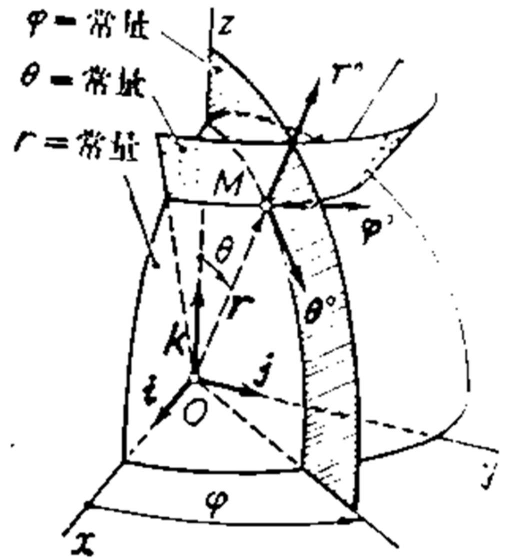
速度矢量与加速度矢量

$$\boldsymbol{v}(t)=\dot{\rho}(t)\boldsymbol{\rho}_0(t)+\rho(t)\dot{\boldsymbol{\rho}}_0(t)+\dot{z}(t)\boldsymbol{k}=\dot{\rho}(t)\boldsymbol{\rho}_0(t)+\rho(t)\dot{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\dot{z}(t)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\ddot{\rho}(t)\boldsymbol{\rho}_0(t)+\dot{\rho}(t)\dot{\boldsymbol{\rho}}_0(t)+\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\rho(t)\ddot{\varphi}(t)\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\rho(t)\dot{\varphi}\dot{\boldsymbol{\varphi}}_0(t)+\ddot{z}(t)\boldsymbol{k}$$
$$=\left[\ddot{\rho}(t)-\rho(t)\dot{\varphi}^2(t)\right]\boldsymbol{\rho}_0(t)+\left[2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t)+\rho(t)\ddot{\varphi}(t)\right]\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\ddot{z}(t)\boldsymbol{k}$$

点（系）的运动描述

- 球坐标法　在球坐标系中，M点的位置由坐标(ρ,φ,θ) 确定



$$\rho=\rho(t),\quad \varphi=\varphi(t),\quad \theta=\theta(t)$$ ——球坐标形式的运动方程

从运动方程组中消去时间，可得点M的轨迹方程

取原点为固定点，，M点的矢径

$$\boldsymbol{r}(t)=\rho(t)\boldsymbol{\rho}_0(t)$$

$\boldsymbol{\rho}_0,\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\theta}_0$ 为M点所在位置的向量基

随位置而改变，不是常矢量

点（系）的运动描述

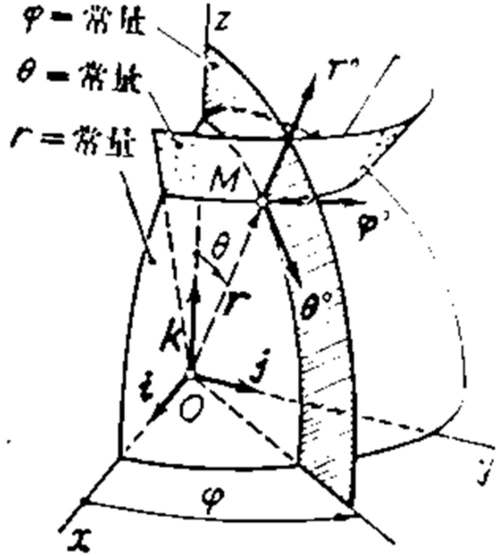
- 球坐标法

借助直角坐标系研究非常矢量的单位矢量

$$\boldsymbol{\rho}_0=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+\cos\theta\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_0=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{\theta}_0=\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}-\cos\theta\boldsymbol{k}$$



对时间求导

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_0(t)=\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0+\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_0,\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_0=-\dot{\theta}\boldsymbol{\rho}_0+\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\varphi}_0,\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0=-\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{\rho}_0-\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{\theta}_0$$

速度矢量与加速度适量

$$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\boldsymbol{\rho}_0+\rho\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_0+\rho\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0$$

$$\boldsymbol{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2-\rho\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\boldsymbol{\rho}_0+\left(\rho\dot{\varphi}^2\sin\theta+2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\theta+2\rho\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\boldsymbol{\varphi}_0$$

$$+\left(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}-\rho\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\boldsymbol{\theta}_0$$

柱坐标中当z恒等于零时，以及球坐标中当 $\theta\equiv\pi/2$ 时，均退化为极坐标