3.2 应用

- 应用于刚体系

➢ 至此，已经讲述了单刚体最小描述坐标的矢量表示，并由最小描述坐标，其一阶导数和二阶导数表出了单刚体上任一点的位置、速度和加速度。当用于约束单刚体时，独立描述坐标数目减小，可应用矢量分析方法由独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数表出约束单刚体上任一点的速度和加速度。

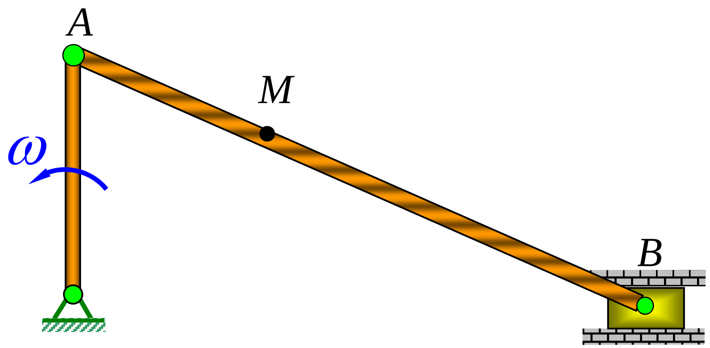
➢ 随后的问题是，采用这套矢量分析方法，能否解决刚体系问题？即，能否由独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数表出刚体系上任一点的速度矢量和加速度矢量？事实上，只要能表出每个刚体的独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数就够了！

➢ 通过具体算例讲述如何用上述矢量方法解决刚体系运动表出问题，并讨论其完备性（即，是否能够解决所有刚体系运动表出问题）。

3.2 应用

- 刚体系——例1

例题 曲柄连杆机构。已知 $OA=r$，$AB=2r$，$\omega=$ 常数，试求当曲柄运动到铅直位置时，连杆AB上任一点M的加速度。

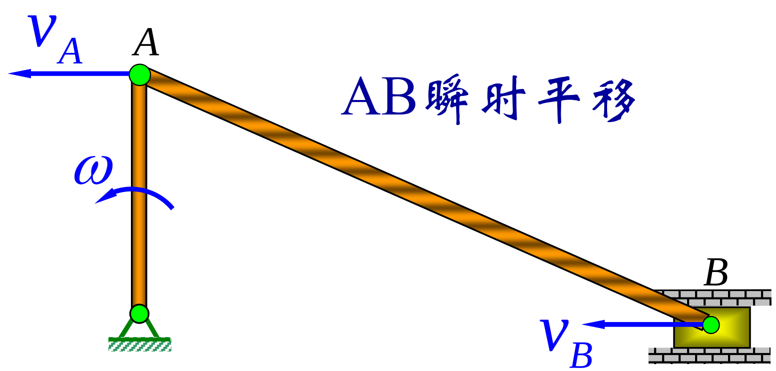


3.2 应用

解：

刚体系的独立描述坐标数目为1，可取为OA杆件转角。从标量过程分析理论看，由OA杆件转角，其一阶导数（角速度）和二阶导数（角加速度），可表出刚体上任一点的速度和加速度。在当前位置，OA杆竖直，角速度为 ω，角加速度为零。瞬时矢量分析如下。

速度分析

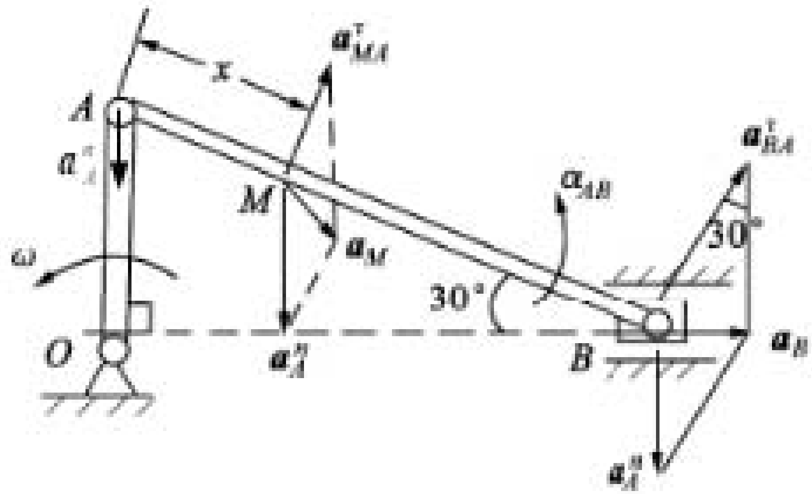


该瞬时，$\boldsymbol{v}_A // \boldsymbol{v}_B$ 且不垂直于连线AB。由基点法可知，连杆AB的角速度为零，进而得知，其上各点速度相等，都等于点A的速度 ωr

$v_M = \omega r$ 方向水平向左

3.2 应用

加速度分析



A点的加速度已知， $a_A^n = \omega^2 r, a_A^\tau = \alpha r = 0$

取A点为基点，研究B点的加速度，画加速度矢量合成图

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A^\tau + \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau + \boldsymbol{a}_{BA}^n$$

	$\boldsymbol{a}_B$	$\boldsymbol{a}_A^\tau$	$\boldsymbol{a}_A^n$	$\boldsymbol{a}_{BA}^\tau$	$\boldsymbol{a}_{BA}^n$
大小	?	√	√	?	√
方位	√	√	√	√	√

沿竖向投影

$$a_{BA}^\tau = \frac{a_A^n}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{3}\sqrt{3} r\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2$$

$$a_{BA}^n = 2r\omega_{BA}^2 = 0$$

A点为基点，研究M点的加速度

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_{MA}^\tau$$

$$a_{MA}^\tau = \alpha_{AB} x = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2 x$$

向水平和竖直方向投影

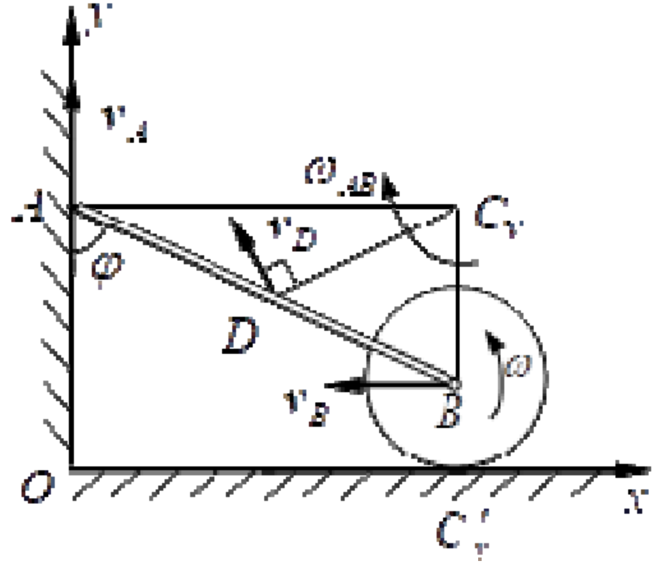
$$\begin{cases} a_{Mx} = a_{MA}^\tau \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} x \alpha_{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega^2 x \\ a_{My} = a_{MA}^\tau \cos 30^\circ - a_A^n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha_{AB} x - r\omega^2 = -\dfrac{\omega^2}{2}(2r - x) \end{cases}$$

注释：该瞬时，连杆AB各点速度相等，发生瞬时平移。对于平面运动刚体，“各点速度相等”等价于“角速度为零”，这可从基点法直接得出。

3.2 应用

- 刚体系——例2

例题 长为l的杆AB，A端靠在铅垂墙面，B端铰接在半径为R的圆盘中心，圆盘沿水平面纯滚动。杆A端速度为 v_A 且保持为常数。试求图示位置处，B点的速度、杆AB的角速度、杆AB中点D的速度和圆盘角速度；试求B点的加速度、杆AB的角加速度、杆AB中点D的加速度和圆盘角加速度。



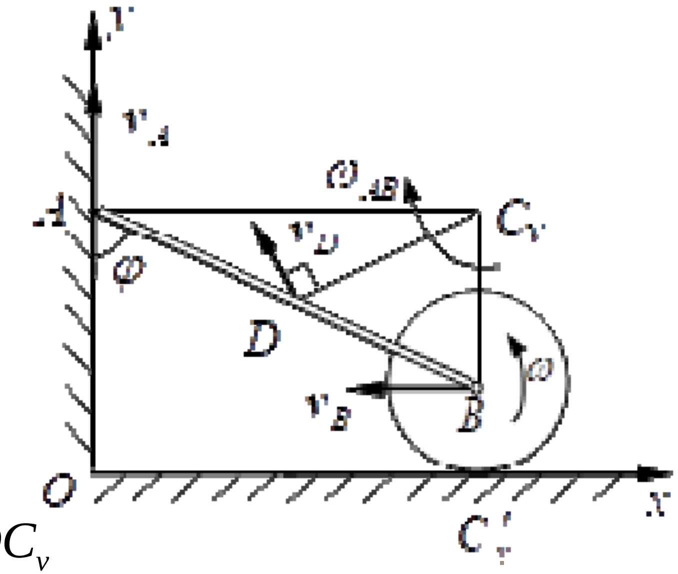
3.2 应用

解8 刚体系的独立描述坐标数目为1，可取A点的竖向位移。从标量过程分析理论看，可由A点的位置、速度和加速度表出刚体系任一点的速度和加速度。在当前位置，A点位置明确，速度为 $\boldsymbol{v}_A$，加速度为零。瞬时矢量分析如下。

速度分析

选杆AB为研究对象，A、B两点的速度方位明确，分别作A和B两点速度的垂线，交点 C_v 即为杆AB的速度瞬心，如图所示。杆AB的角速度为

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AC_v}=\frac{v_A}{l\sin\varphi}$$



B点速度为 $v_B=BC_v\cdot\omega_{AB}=l\cos\varphi\omega_{AB}=v_A\cot\varphi$

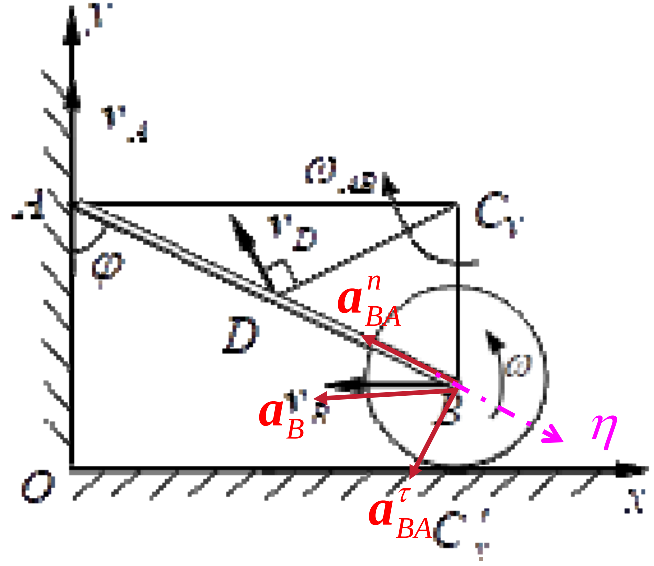
D点速度为 $v_D=DC_v\cdot\omega_{AB}=\dfrac{l}{2}\omega_{AB}=\dfrac{v_A}{2\sin\varphi}$ 方向垂直于 DC_v

圆盘速度瞬心在圆盘边缘与地面接触点 C_v' ，圆盘角速度为 $\omega=\dfrac{v_B}{R}=\dfrac{v_A}{R}\cot\varphi$

3.2 应用

加速度分析

以A为基点研究B点，画加速度矢量合成图



$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}$$

大小	?	√	?	√
方位	√	√	√	√

$$a_A = 0, a_{BA}^{n} = l\alpha_{AB}, a_{BA}^{n} = l\omega_{AB}^{2}$$

沿竖向投影

$$a_{BA}^{n}\cos\varphi - a_{BA}^{\tau}\sin\varphi = 0$$

$$\alpha_{AB} = \omega_{AB}^{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{v_A^2}{l^2\sin^2\varphi}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{v_A^2\cos\varphi}{l^2\sin^3\varphi}$$

沿 η 方向投影

$$a_B\sin\varphi = a_{BA}^{n}$$

$$a_B = \frac{a_{BA}^{n}}{\sin\varphi} = \frac{v_A^2}{l\sin^3\varphi}$$

3.2 应用

加速度分析

以A为基点研究D点

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{DA}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{DA}^{n}$$

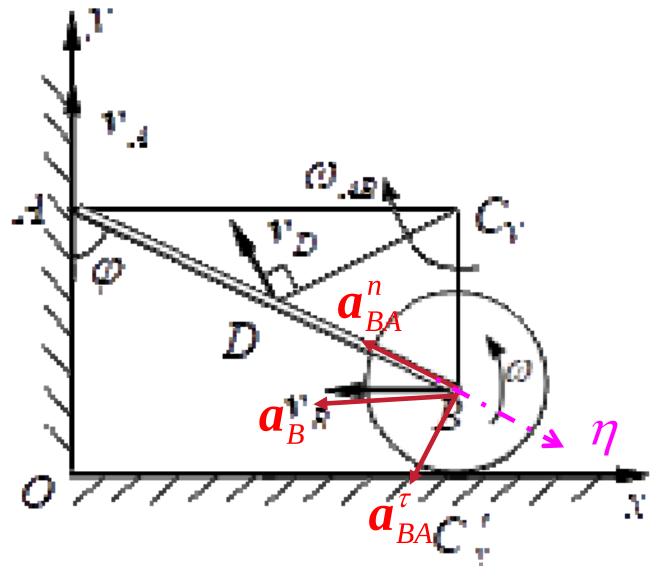
$$a_A = 0, a_{DA}^{n} = \frac{l}{2}\alpha_{AB}, a_{DA}^{n} = \frac{l}{2}\omega_{AB}^2$$

因A为加速度瞬心，D点的加速度为B点的加速度的一半

以圆盘为研究对象：

$$v_B = R\omega \xrightarrow{\text{对时间求导}} a_B = R\alpha \longrightarrow \alpha = \frac{a_B}{R} = \frac{v_A^2}{Rl\sin^3\varphi}$$

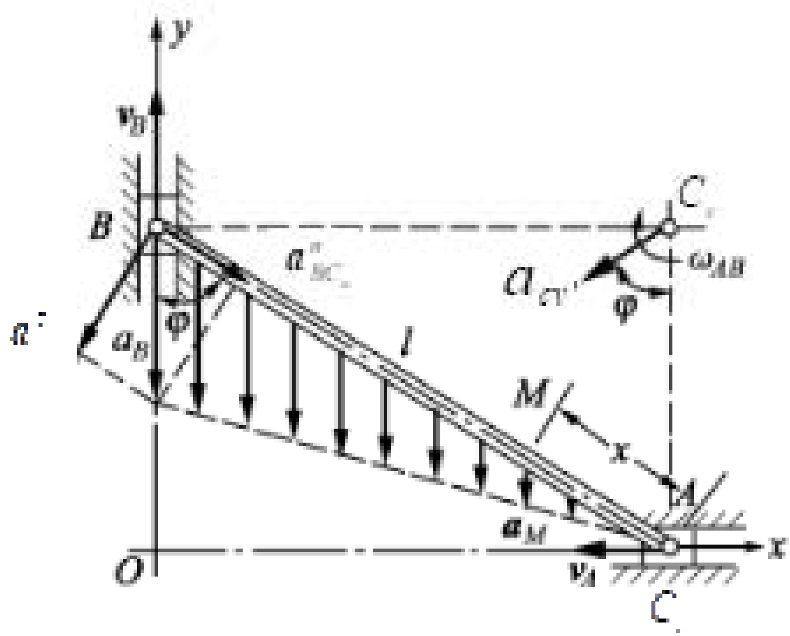
转向为逆时针



3.2 应用

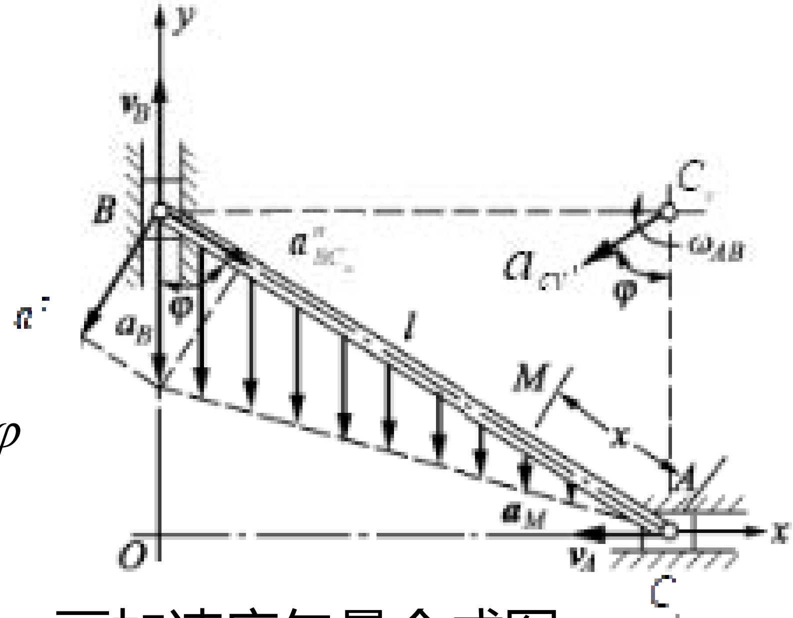
- 刚体系——例3

例题 滑槽连杆机构。滑块A沿水平滑槽匀速直线运动，速度 v_A 恒定不变，连杆AB长为l，图示瞬时，连杆与竖直线夹角为φ 。试求该瞬时连杆的角速度和B端速度，连杆的角加速度，其上任一点M的加速度，以及速度瞬心 C_v 的加速度。



3.2 应用

解：该体系可视为单刚体，包含两个滑移式约束；或者视为三个刚体，包含两个铰链和两个接触约束。无论如何看待，体系的独立描述坐标数目都为1，可取为A点的水平坐标。



速度分析

连杆的速度瞬心C_v如图所示，杆的角速度为

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AC_v}=\frac{v_A}{l\cos\varphi}$$

B点的速度竖直向上，大小为为 $v_B=BC_v\cdot\omega_{AB}=v_A\tan\varphi$

加速度分析

点A为连杆的加速度瞬心 C_a。以 C_a 为基点研究B点，画加速度矢量合成图

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_{BC_a}^{\tau}+\boldsymbol{a}_{BC_a}^{n}$$

	$\boldsymbol{a}_B$	$\boldsymbol{a}_{BC_a}^{\tau}$	$\boldsymbol{a}_{BC_a}^{n}$
大小	?	?	√
方位	√	√	√

$$a_{BC_a}^{n}=AB\cdot\omega_{AB}^2=\frac{v_A^2}{l\cos^2\varphi}$$

几何关系

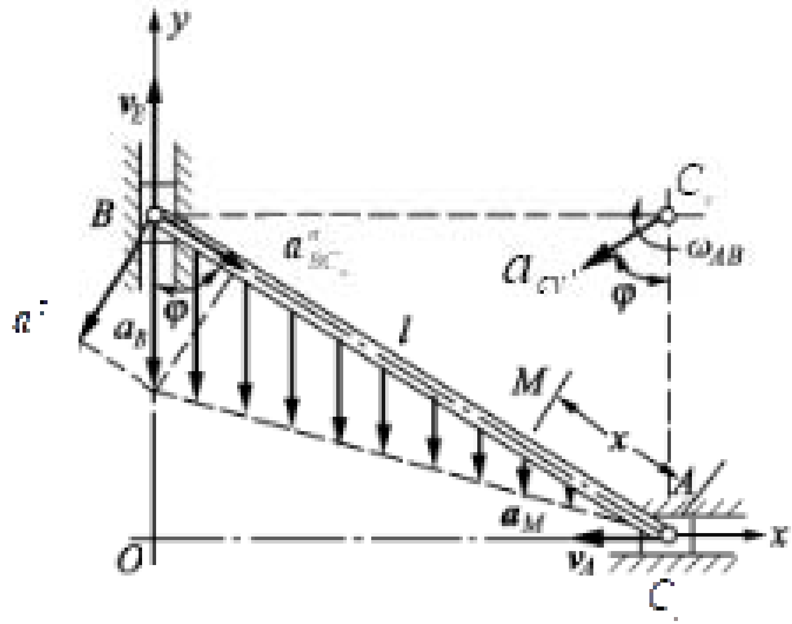
$$a_{BC_a}^{\tau}=a_{BC_a}^{n}\tan\varphi=\frac{v_A^2\sin\varphi}{l\cos^3\varphi}$$

$$\alpha_{AB}=\frac{a_{BC_a}^{\tau}}{BC_a}=\frac{v_A^2\sin\varphi}{l^2\cos^3\varphi}$$

逆时针转向

3.2 应用

连杆上任一点M到加速度瞬心 C_a 的距离为x，以 C_a 为基点研究M点



$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}^{\tau}_{MC_a} + \boldsymbol{a}^{n}_{MC_a}$$

$$a^n_{MC_a} = \omega^2_{AB} \cdot x = \frac{v_A^2}{l^2 \cos^2 \varphi} x, a^{\tau}_{MC_a} = \alpha_{AB} \cdot x = \frac{v_A^2 \sin\varphi}{l^2 \cos^3 \varphi} x$$

M点的加速度 $\boldsymbol{a}_M$ 大小 $a_M = x\sqrt{\omega^4_{AB} + \alpha^2_{AB}} = \dfrac{v_A^2}{l^2 \cos^3 \varphi} x$

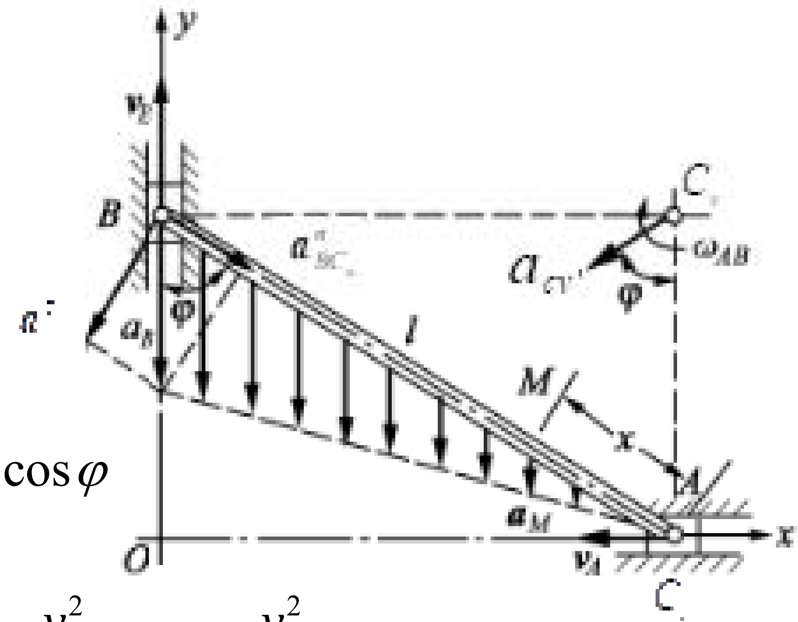
方向与 $\boldsymbol{a}_B$ 的一致，铅直向下，与AB连线的夹角也为φ

注释：这是必然的，选择加速度瞬心为基点进行分析，加速度分布就和绕加速度瞬心定轴转动的加速度分布一样。据此，可以根据加速度的线性分布特征直接写出连杆上任一点的加速度。

3.2 应用

以 C_a 为基点研究速度瞬心 C_v

$$\boldsymbol{a}_{C_v} = \boldsymbol{a}_{C_vC_a}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{C_vC_a}^{n}$$



$$a_{C_vC_a}^{n} = \omega_{AB}^2 \cdot C_vC_a = \frac{v_A^2}{l^2\cos^2\varphi} l\cos\varphi, a_{MC_a}^{\tau} = \alpha_{AB} \cdot C_vC_a = \frac{v_A^2 \sin\varphi}{l^2\cos^3\varphi} l\cos\varphi$$

加速度 $\boldsymbol{a}_{C_v}$ 大小 $a_{C_v} = C_vC_a\sqrt{\omega_{AB}^4 + \alpha_{AB}^2} = l\cos\varphi \frac{v_A^2}{l^2\cos^3\varphi} = \frac{v_A^2}{l\cos^2\varphi}$

$\boldsymbol{a}_{C_v}$ 与 C_vC_a的夹角也为φ。于是知，速度瞬心的加速度方向恰指向连杆中点C！

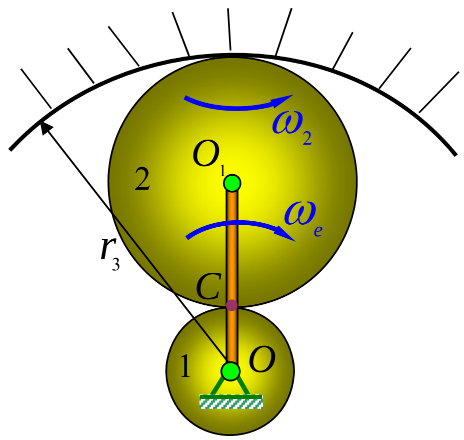
此例说明，速度瞬心的加速度一般来说并不等于零。

速度瞬心是一个物质点，不同的时刻对应不同的物质点，这里所计算的是该瞬时那个物质点的加速度。随着时间变化，速度瞬心在空间中（选定参考系中）划出一条轨线，也可考虑这个速度瞬心对应的空间点的运动。此外，如果搞清楚了动瞬心轨迹和定瞬心轨迹的概念以及运动的几何解释，就能直接得知速度瞬心指向杆件中点的结论！

3.2 应用

- 刚体系——例4

例题 周转轮系。系杆 O_1O_2 的角速度为 ω_e ，齿轮I，II的半径分别为 r_1, r_2 。求齿轮I，II的绝对角速度 ω_1, ω_2 ，以及传动比 ω_1/ω_e 。



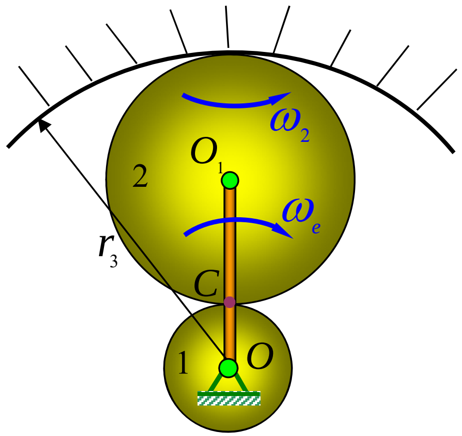
3.2 应用

解：刚体系独立描述坐标为1，可取系杆转角为独立描述坐标。

传递分析

齿轮 III 不动，齿轮 II与齿轮III的啮合点为齿轮II的速度瞬心 C_v

$$v_{O_2}=(r_1+r_2)\omega_e=r_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2=\frac{r_1+r_2}{r_2}\omega_e$$



齿轮II上与齿轮I的啮合点C的速度为 $v_C=2r_2\omega_2=2(r_1+r_2)\omega_e$

齿轮I和齿轮II无滑，齿轮I上的啮合点速度 $v_{C'}=v_C$

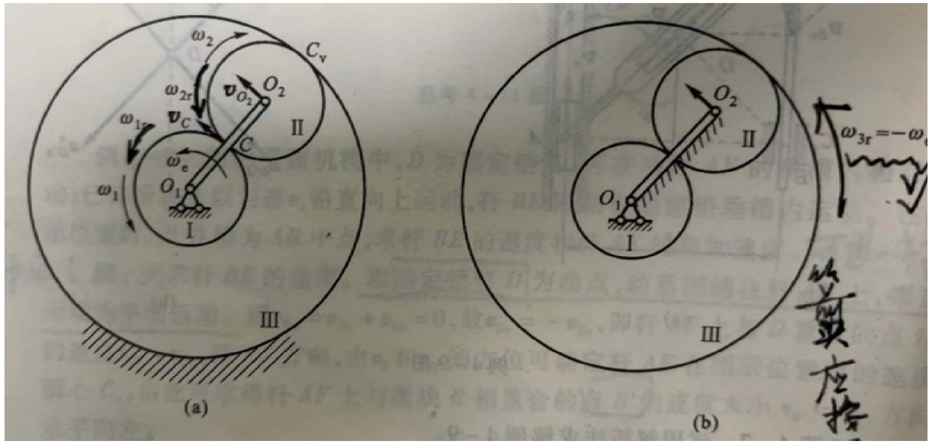
$$\Rightarrow \quad \omega_1=\frac{v_{C'}}{r_1}=\frac{2(r_1+r_2)}{r_1}\omega_e \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_e}=\frac{2(r_1+r_2)}{r_1}$$

3.2 应用

反转分析

将既定参考系置在系杆上。在此参考系中观察，系杆不动，若规定逆时针转向为正，齿轮III以 $\omega_{3r}=-\omega_e$ 绕轴O_1转动，设齿轮I、II以角速度 ω_{1r} 和 ω_{2r} 绕轴 O_1和 O_2转动。由轮系传动比公式知

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}}=-\frac{r_2}{r_1} \qquad \frac{\omega_{2r}}{\omega_{3r}}=\frac{r_3}{r_2}$$



$$\omega_{2r}=-\frac{r_1+2r_2}{r_2}\omega_e,\omega_{1r}=\frac{r_1+2r_2}{r_1}\omega_e$$

站在地面上观察，则有

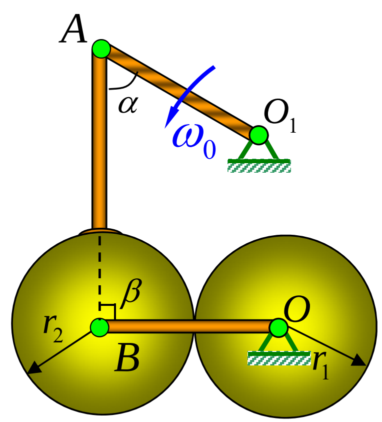
$$\omega_1=\omega_e+\omega_{1r}=\frac{2(r_1+r_2)}{r_1}\omega_e$$

$$\omega_2=\omega_e+\omega_{2r}=-\frac{r_1+r_2}{r_1}\omega_e$$

3.2 应用

- 刚体系——例5

例题 无滑接触式约束体系。图示行星轮传动机构，已知O、B两轮半径为 $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}\ \text{cm}$ ，曲柄 $O_1A = 75\ \text{cm}$ ，$AB = 150\ \text{cm}$ ，曲柄恒定角速度 $\omega_0 = 6\ \text{rad/s}$ 。图示瞬时 $\alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ$ ，试求该瞬时OB杆的角速度和角加速度、圆轮O的角速度和角加速度。

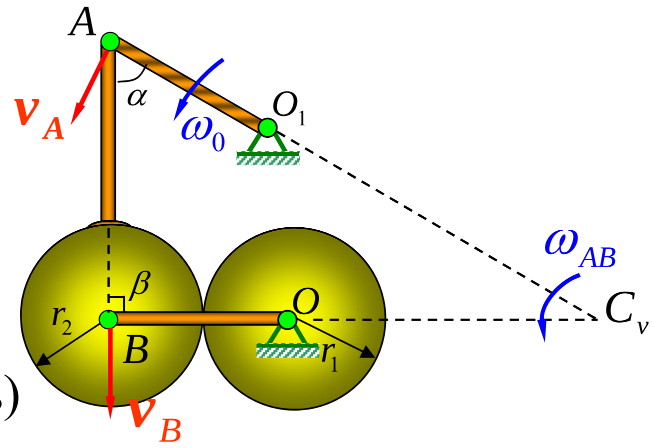


3.2 应用

解：行星轮间无滑接触，易知该体系的独立描述坐标数目为1。取曲柄转角为独立描述坐标。

速度分析

A点速度方位大小已知，B点速度方位已知(如图所示)，平面运动刚体AB的速度瞬心为 C_v



$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{75\times 6}{300} = 1.5\ (\text{rad/s})$$

$$v_B = BC_v \cdot \omega_{AB} \Rightarrow \omega_{OB} = \frac{v_B}{r_1 + r_2} = \frac{150\sqrt{3}\times 1.5}{60\sqrt{3}} = 3.75\ (\text{rad/s})$$

轮B与轮O接触点的速度为 $v_C = CC_v \cdot \omega_{AB}$

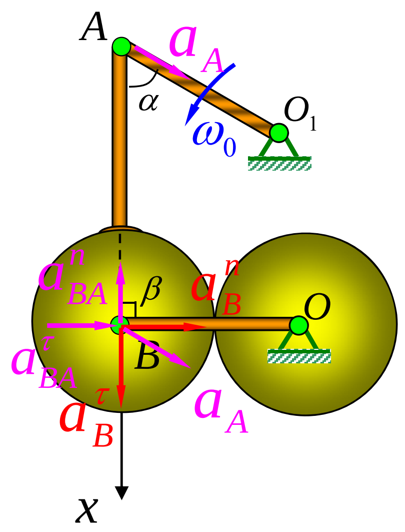
接触点无滑，因此轮O与轮B接触点的速度 $v_{C'} = v_C$

$$\Rightarrow \omega_O = \frac{v_{C'}}{r_1}$$

注释：本例涉及角加速度分析，因此宜用瞬心法，不用投影法，因为投影法能直接给出B的速度大小，但未能给出AB的角速度

3.2 应用

加速度分析



A点加速度方位大小已知，AB平面运动，B点法向加速度方位大小已知，切向加速度方位已知、大小未知。以A为基点，研究B点，画加速度矢量合成图，如图所示

	$\boldsymbol{a}_B^\tau$	$\boldsymbol{a}_B^n$	$\boldsymbol{a}_A$	$\boldsymbol{a}_{BA}^\tau$	$\boldsymbol{a}_{BA}^n$
大小	?	√	√	?	√
方位	√	√	√	√	√

$$\boldsymbol{a}_B^\tau + \boldsymbol{a}_B^n = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau + \boldsymbol{a}_{BA}^n$$

$$a_A = O_1A\omega_0^2 = 75\times 6^2 = 270, a_{BA}^n = AB\omega_{AB}^2 = 150\times 1.5^2 = 337.5, a_B^n = OB\omega_{OB}^2$$

向AB连线方向投影

$$a_B^\tau = a_A\cos 60^\circ - a_{BA}^n \quad\Rightarrow\quad \alpha_{OB} = \frac{a_B^\tau}{OB} = \frac{270\times 1/2 - 337.5}{60\sqrt{3}} = 7.74$$

向垂直于AB的方向投影

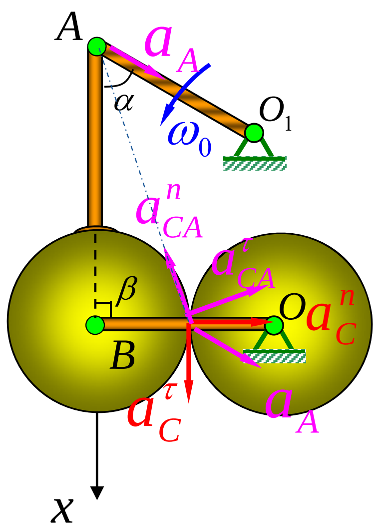
$$a_B^n = a_A\cos 30^\circ - a_{BA}^\tau \quad\Rightarrow\quad \alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB}$$

3.2 应用

以A为基点，研究轮B的接触点C

$$\boldsymbol{a}_C^\tau + \boldsymbol{a}_C^n = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{CA}^\tau + \boldsymbol{a}_{CA}^n$$

大小	?	?	√	√	√
方位	√	√	√	√	√



$$a_{CA}^n = AC\omega_{AB}^2, a_{CA}^\tau = AC\alpha_{AB}$$

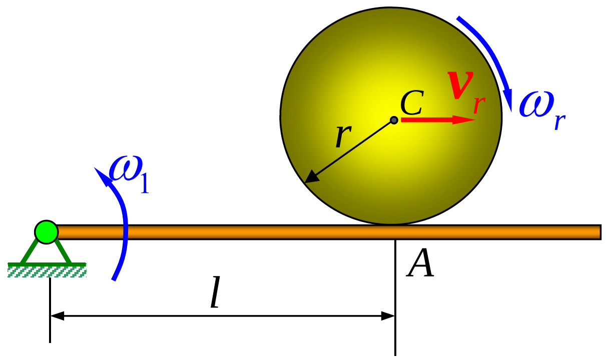
向切线方向投影 $\Rightarrow$ a_C^τ

无滑接触两点的加速度在公切线上投影相等 $\Rightarrow$ $a_{C'}^\tau = a_C^\tau$ $\Rightarrow$ $\alpha_O = \dfrac{a_{C'}^\tau}{r_1}$

3.2 应用

- 刚体系——例6

例题 无滑接触式约束体系。杆件定轴转动，已知角速度为 ω_1 ，圆盘在杆上纯滚动。在固连在杆上的参考系中观察，轮心C的速度为 v_r 。试求轮心C点的速度和加速度（在选定地面参考系中观察）。



3.2 应用

解： 刚体系由两个刚体组成，独立描述坐标数目为2，可选为杆件的转角，以及在杆件上观察的轮心沿杆轴的坐标。

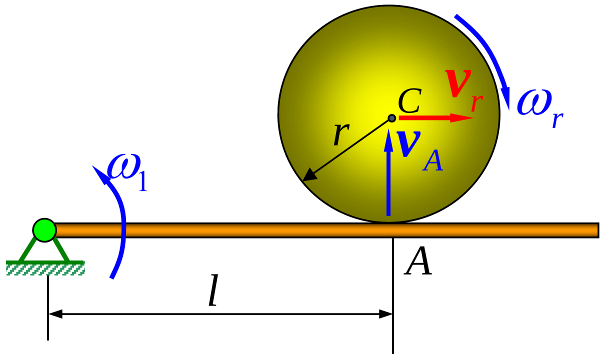
速度分析

在固连在杆上的参考系中观察，圆轮纯滚动，角速度为

$$\omega_r = \frac{v_r}{r}$$

在地面参考系中观察，圆轮平面运动，其角速度为

$\omega_r - \omega_1$ （以顺针向为正）

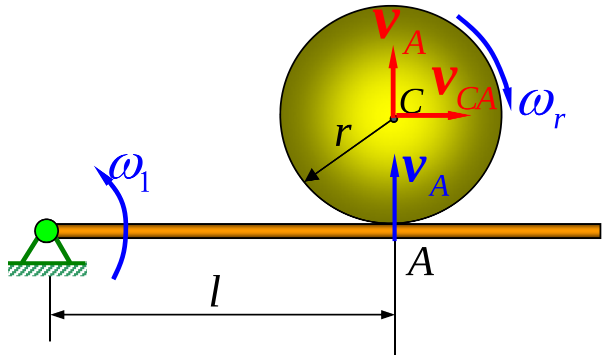


接触点A（杆上的点）速度已知 $v_A = \omega_1 l$

两刚体无滑接触，因此，A点（轮上的点）速度相同

3.2 应用

选轮上的点*A*为基点研究*C*点，速度矢量合成图如图所示



$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{CA}$$

$$v_{CA} = \omega r = (\omega_r - \omega_1) r \quad \text{（水平向右）}$$

➡ $\boldsymbol{v}_C$

加速度分析

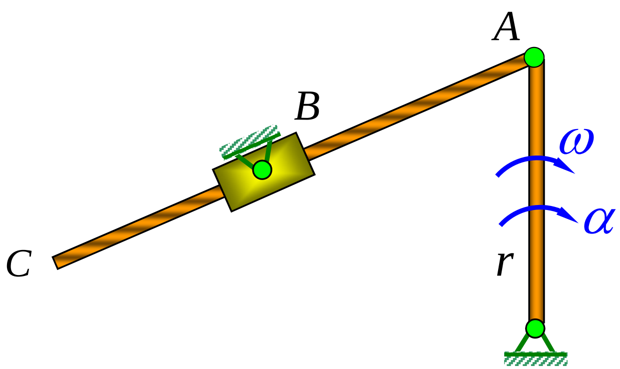
分析轮心*C*点的加速度时，上述矢量分析方法力有不逮。对圆轮的分析，只能选轮上的点*A*为基点，但仅通过无滑接触条件，尚不足以由杆上的接触点*A*的加速度来确定。这就提示，上述矢量分析方法用于多刚体运动分析时，并非完备！

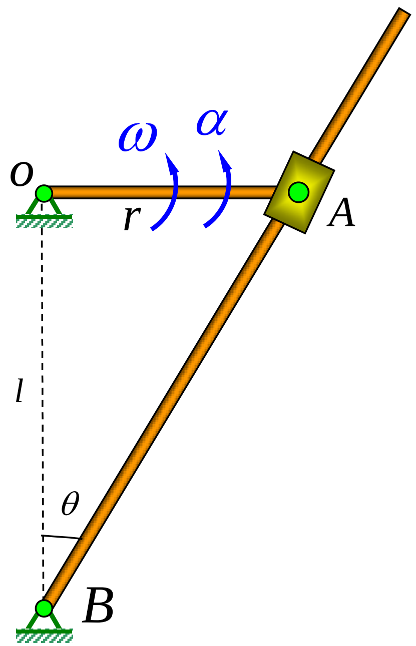
注释：速度和加速度基点法中， ω, α 是在选定参考系（这里是地面参考系）中观察到的角速度和角加速度。

3.2 应用

- 刚体系——例7

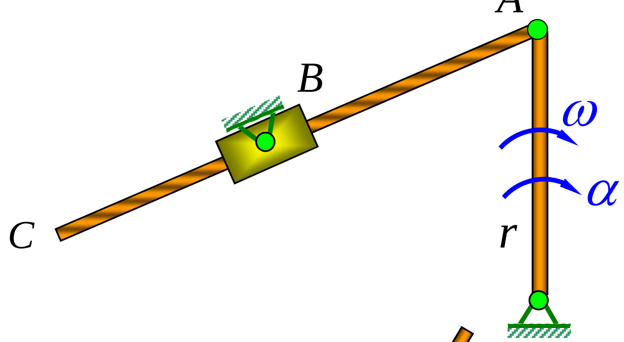
例题 滑移式约束体系。考虑图示包含滑移式约束的刚体系，已知OA杆的角速度和角加速度，试表出刚体AB的角速度和角加速度。



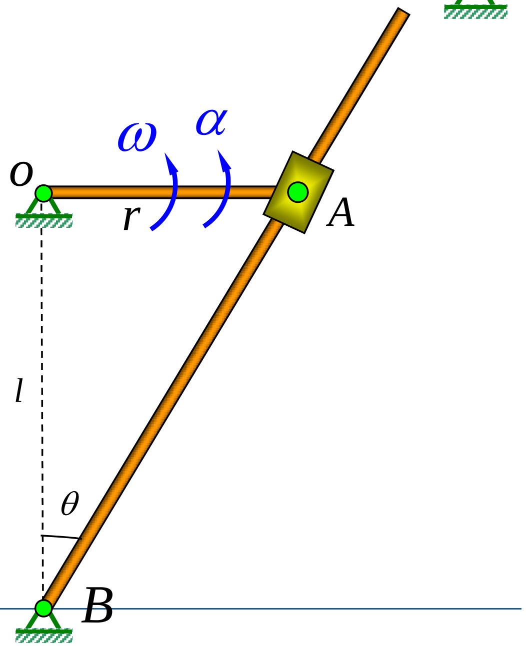


3.2 应用

解：刚体系由两个刚体组成，独立描述坐标数目均为1，可选为OA杆的转角



首先表出AB杆上A点的速度，但由于无法给出AB杆上另一点的速度信息（大小或方向），致使基点法无法实施



无法完成从OA到AB的运动过渡。

速度分析尚且无法完成，更勿论加速度分析

3.2 应用

- 总结与反思

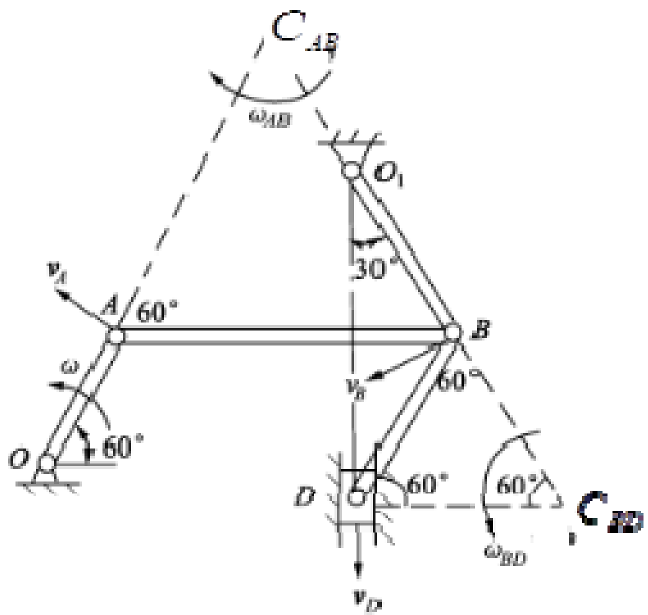
由算例可知，上述矢量分析方法很有威力，但对于刚体间包含接触式约束，以及刚体与外界或者刚体与刚体之间包含滑移式约束的情形，约束处的运动常常无法完成过渡，即无法由一个刚体运动信息表出另一刚体上的运动信息。

然而，从过程标量分析理论知，表出一定可行，这就只能说明上述瞬时矢量分析方法并不完备，需另作考虑。应从何处入手补足上述矢量分析方法呢？无疑地，不能再针对单刚体进行分析，分析单刚体的最小运动刻画和任一点运动表出，而需另辟蹊径，旨在建立两个不同刚体（或刚体上的点）之间的运动量关系。这就引出了点的合成运动。在下文将会看到，点的合成运动仍属于瞬时矢量分析方法，它与本节方法相结合，构成了刚体系运动析的完备的瞬时矢量分析方法。

3.2 应用

- 刚体系——例

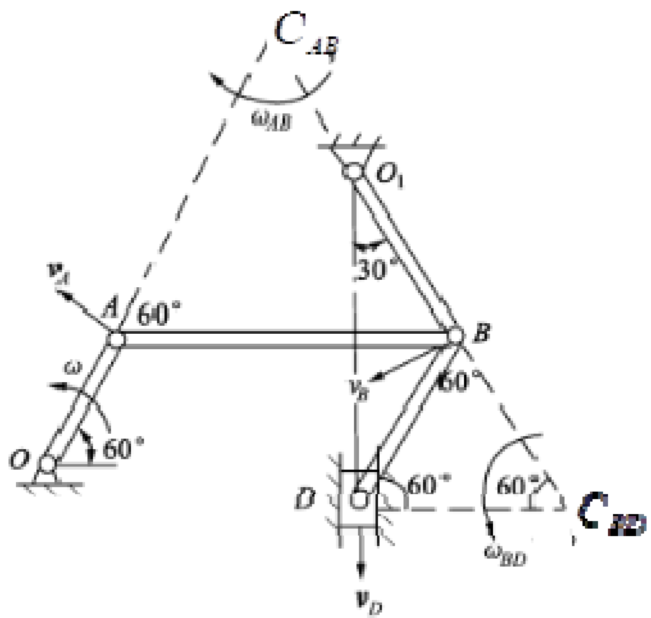
例题 冲床模型。曲柄OA以匀角速度ω绕轴O转动，带动连杆AB使杆O_1B 绕轴O_1 摆动，又通过连杆BD带动滑块D沿铅直滑槽上下运动。已知 $OA=r$，$AB=L$， $O_1B=BD=l$，图示位置AB水平，各杆的几何位置如图。求该瞬时连杆AB、BD的角速度，以及滑块D的速度。



3.2 应用

解： 刚体系由四个刚体组成，包含铰链和滑移约束，刚体系独立描述坐标数目为1，可选为OA杆的转角。。

瞬心法



曲柄OA及杆O_1B作定轴转动 $\boldsymbol{v}_A \perp OA, \boldsymbol{v}_B \perp O_1B$ $v_A = r\omega$

连杆AB作平面运动，过点A和B作其速度的垂线，交点为杆AB的速度瞬心，如图所示

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_{AB}} = \frac{r}{L}\omega$$ 转向为顺时针

$$v_B = BC_{AB} \cdot \omega_{AB} = r\omega$$

连杆BD作平面运动，点B和D的速度方向已知，确定杆BD的速度瞬心，如图所示

$$\omega_{BD} = \frac{v_B}{BC_{BD}} = \frac{r\omega}{l}$$ 转向为顺时针

$$v_D = DC_{v2} \cdot \omega_{BD} = r\omega$$

3.2 应用

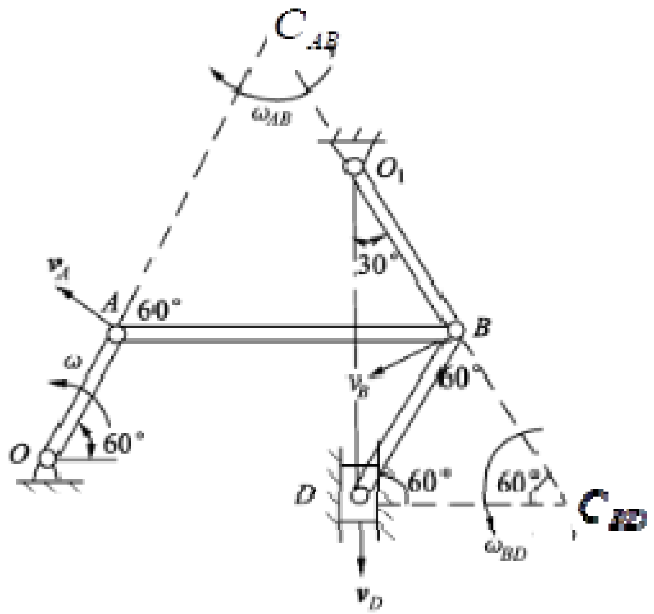
投影法

对AB杆，A点的速度方向、大小已知，B点速度方位已知，沿AB投影得到

$$v_B = v_A = r\omega$$

对BD杆，B点的速度方向、大小已知，D点速度方位已知，沿BD投影得到

$$v_D = v_B = r\omega$$



注意，投影法并未直接给出角速度信息，需进一步采用基点法或瞬心法分析之

此外，可进一步分析连杆AB、BD的角加速度和滑块D的加速度。