1-4 点的合成运动分析

前文指出，一定能通过过程标量分析方法，由独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数表出刚体系上任一点的位置、速度和加速度，但在徒手操作中，这一方法常常过于复杂；为应对上述问题，建立了瞬时矢量分析方法，以直观、形象的方式解决了相当大一类刚体系的运动表出问题。上一节也已指出，当面对具有接触式和滑移式约束的刚体系时，因为无法通过联系点完成运动过渡，所以仍保持开放。这里的任务就是解决此类刚体系的运动过渡问题，与前述矢量方法相结合，形成完备的瞬时矢量分析方法。

- 数学任务

在数学上，抽象地研究如下问题：

在两个不同的参考系中（其中一个参考系相对于另一个参考系有运动）观察同一个点，建立运动量之间的关系

注意，尽管该问题是为了解决运动过渡问题引出的，但其本身就具有重要意义

- 运动的相对性

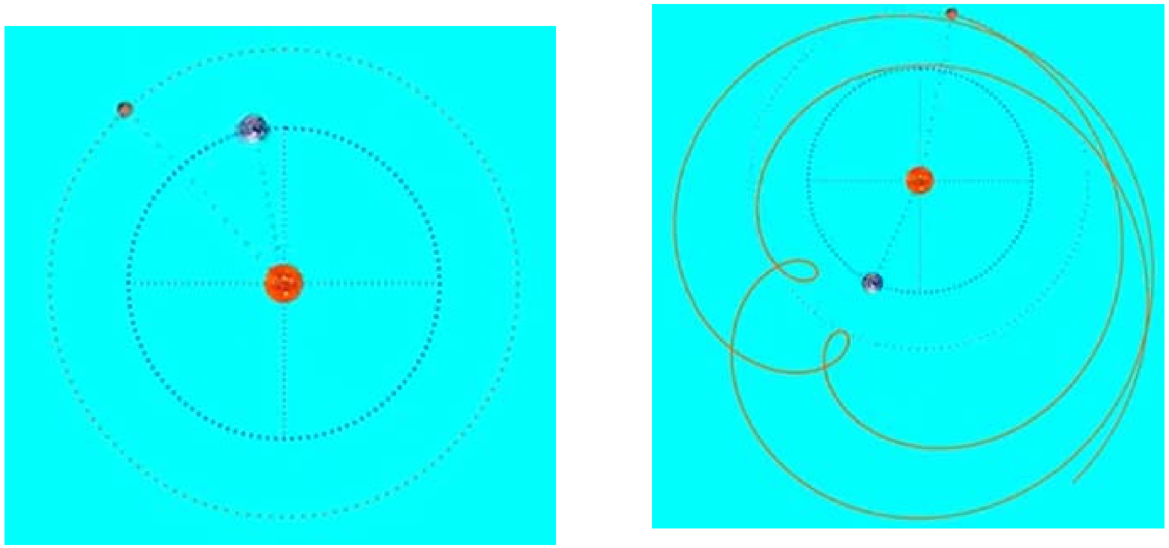
这里，强调指出，前文关于点和刚体的运动描述是对指定参考系给出的，并未明确是哪个或者哪类参考系。对于不同的参考系，同一点、同一刚体的运动是不同的，这是显而易见的——这就是运动的相对性。

• 运动的相对性

举例来说：

在科学史上，困扰人类千年的火星逆行现象（中国古代称为“荧惑守心”）就是运动相对性问题。设定太阳不动（以太阳为参考系），火星和地球都沿近圆轨道绕太阳运行；设定地球不动（以地球为参考系），太阳沿近圆轨道绕地球运行，火星沿近圆轨道绕太阳运行，在地球参考系中观察，火星走出复杂轨迹。若以漫天星系为背景，火星就表现出逆行现象。

在日常生活中，运动相对性问题更是随处可见。在无风的下雨天开车外出，对乘客而言（预设车身不动，即以车身为参考系），当车静止时，雨滴划过竖直线，当车匀速直线前进时，雨滴划过倾斜直线，当车胡乱开动时，雨滴划过复杂轨线。



运动相对性：火星逆行现象

• 运动合成，物理图像描述及数学关系猜测

直观上看，这些都涉及“合成”作用。

- 站在地球上（参考系I）观察火星（视为一个点），所观察到的运动可视为太阳（参考系II）在参考系I中的平面运动与火星在参考系II中的圆周运动的共同结果。
- 坐在直线行驶的车上（参考系I）观察雨滴（视为一个点），所观察到的运动可视为地面（参考系II）在参考系I中的平移运动与雨滴在参考系II中的竖直运动的共同结果。

总结之，一个点在参考系I中的运动，可视为由两个因素共同引起：参考系II在参考系I中的运动、该点在参考系II中的运动。

目标：建立点在参考系I中的速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{I}}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{I}}$，与参考系II在参考系I中的运动量 $\boldsymbol{v}_{O'},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{a}_{O'},\boldsymbol{\alpha}$ 及点在参考系II中的速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{II}}$之间的定量关系。

大胆猜测如下形式：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{II}}+f_1\left(\boldsymbol{v}_{O'},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}\right),$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{II}}+f_2\left(\boldsymbol{v}_{O'},\boldsymbol{a}_{O'},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{r}\right)$$

这里的“加和”操作并无依据，仅仅只是猜测而已。感觉“应当如此”，这方能与“合成”一词相匹配。但要知道，在自然科学中，感觉往往并不正确。注意，上述数学式中包含着矢径：一方面，是为了匹配量纲，但尚未明确该矢径是对哪个参考点而言的；另一方面，前文已经明了，速度和加速度均依赖于位置信息。

4.1 速度和加速度合成定理

- 数学模型　建立点的合成运动模型：

两点两系，三种运动，三种轨迹

两点两系

动点：研究对象

参考系I（定系）：常取为惯性参考系（一般为地球，亦可为动体）

参考系II（动系）：固连于运动物体

牵连点：某瞬时，动系上与动点重合的点。

牵连点是一个特殊点：它是动系上的点，绝不是动点本身但又与动点关系密切。注意，由于动点在动系中有运动，所以，在不同瞬时牵连点是不同的。

a. 某瞬时动系上的固定点

b. 不同瞬时，点不同

研究动点在参考系I中的运动量、动点在参考系II中的运动量，以及参考系II在参考系I中的运动量之间的定量关系。

要求动点在动系中发生运动，动系在定系中发生运动。若非如此，就丧失了研究的价值：

- 若动点在动系中无运动，则退化为动系上一个确定点的运动；
- 若动系在定系中无运动，则退化为定系中一个确定点的运动。

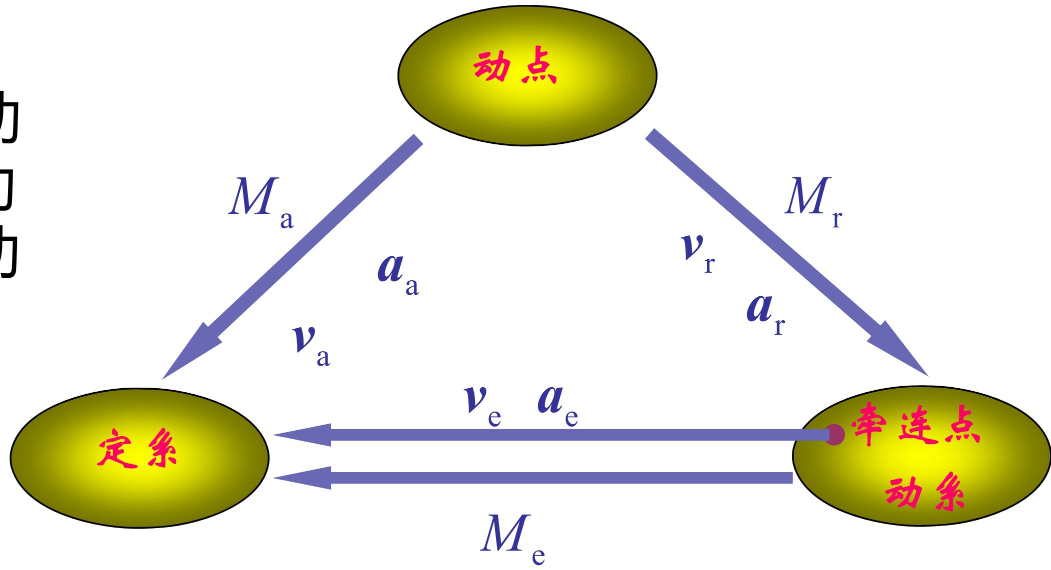
4.1 速度和加速度合成定理

三种运动，三种轨迹

动点的绝对运动（Ma）：动点在定系中的运动
动点的相对运动（Mr）：动点在动系中的运动
动系的牵连运动（Me）：动系在定系中的运动

动点的绝对轨迹：动点在定系中的轨迹
动点的相对轨迹：动点在动系中的轨迹
牵连点的绝对轨迹：牵连点在定系中的轨迹

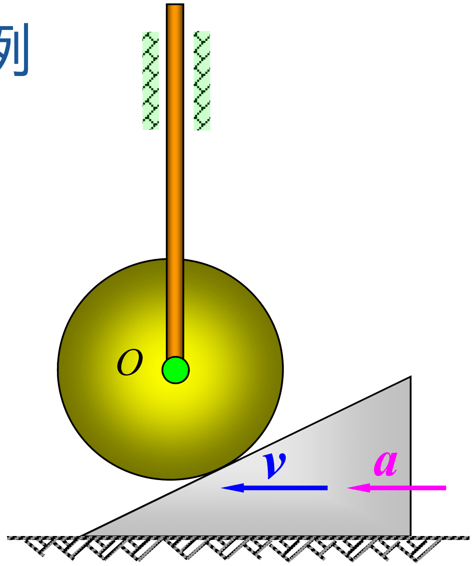
两点两系和三种运动的关系
点的合成运动的数学模型



注意，在三种运动中，两种是点的运动，一种是系的运动（即刚体运动）；在三种轨迹中，两种是动点的轨迹，一种是牵连点的轨迹，两种是绝对轨迹，一种是相对轨迹。牵连运动是系的运动，可以是平移、定轴转动、平面运动等；三种轨迹可以是直线、圆周、一般曲线等

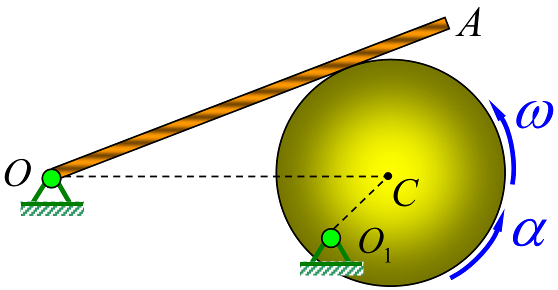
4.1 速度和加速度合成定理

举例



动系为斜面，
动点为圆心O。

圆轮与斜面保持接触，斜面水平向左运动。取圆心O为动点，地面为定系，斜面为动系（更确切地说，动系固结于斜面上），牵连点为延展斜面上与O点重合的O'点。动点的绝对运动为直线运动，动点的相对运动为直线运动，动系的牵连运动为平移运动；动点的绝对轨迹为竖直直线，动点的相对轨迹为倾斜直线，牵连点的绝对轨迹为水平直线

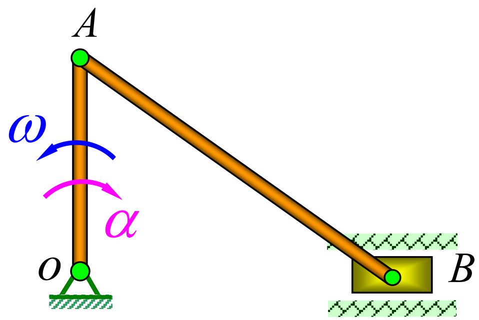


动系为OA，
动点为圆心C。

斜杆与偏心圆轮保持接触，圆轮逆时针方向转动。取圆心C为动点，地面为定系，斜杆为动系，牵连点为延展斜杆上与C点重合的C'点。动点的绝对运动为圆周运动，动点的相对运动为直线运动，动系的牵连运动为定轴转动；动点的绝对轨迹为以O1为圆心的圆弧线，动点的相对轨迹为倾斜直线，牵连点的绝对轨迹为以O为圆心的圆弧线。

4.1 速度和加速度合成定理

举例



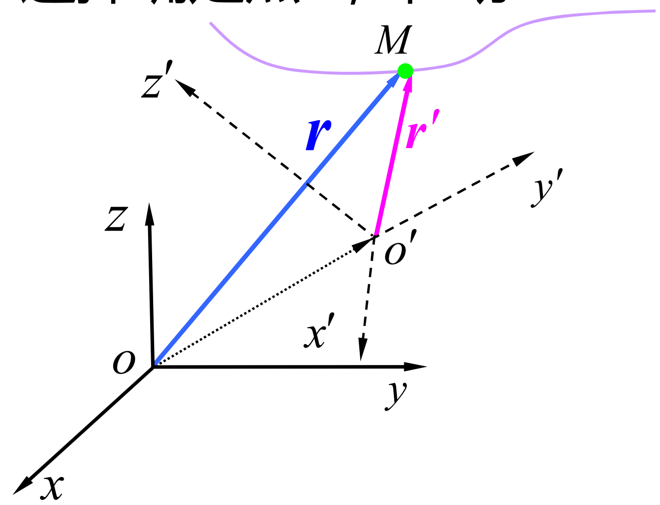
动系为OA，
动点为滑块B。

曲柄摇杆机构，曲柄逆时针方向转动。取滑块B（忽略滑块大小或者视为铰点）为动点，地面为定系，摇杆为动系，牵连点为延展摇杆上与B点重合的B'点。动点的绝对运动为直线运动，动点的相对运动为圆周运动，动系的牵连运动为定轴转动；动点的绝对轨迹为水平直线，动点的相对轨迹为以A为圆心的圆弧线，牵连点的绝对轨迹为以O为圆心的圆弧线

4.1 速度和加速度合成定理

三种速度，三种加速度

为了定量研究之，需对三种运动做出数学描述。在定系中选择确定点O，在动系中选择确定点O'，由O和O'向动点M引矢径 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$



动点在定系和动系中的矢径形式的运动方程

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ ——在定系中观察

$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'(t)$ ——在动系中观察

注意，分别在定系和动系中观察 $\boldsymbol{r}'$ 时，其变化方式是不同的

放置坐标系 $O-xyz$ 和 $O'-x'y'z'$， 用以代表定系和动系

动点在定系中的速度和加速度称为动点的绝对速度和绝对加速度，分别记为 $\boldsymbol{v}_a,\boldsymbol{a}_a$（下标a为absolute的缩写）

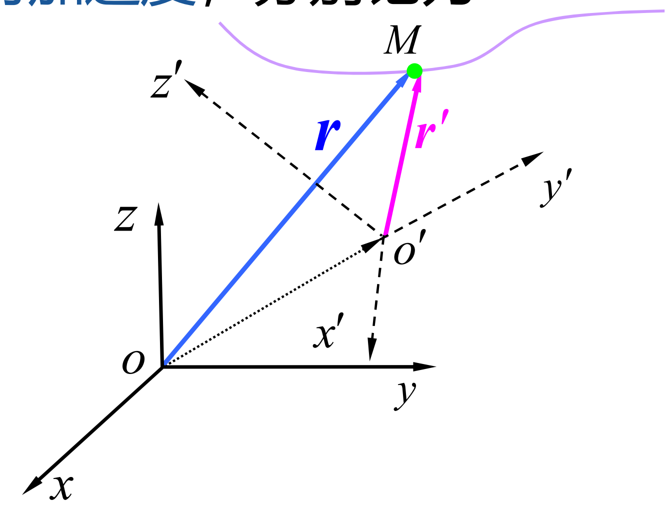
$$\boldsymbol{v}_a=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\boldsymbol{a}_a=\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

其中，求导在定系中执行，求导过程中定系不动，定系各单位方向矢不变。在定系中执行的导数称为绝对导数

4.1 速度和加速度合成定理

三种速度，三种加速度

动点在动系中的速度和加速度称为动点的相对速度和相对加速度，分别记为 $\boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{a}_r$ (下标r为relative的缩写)



$$\boldsymbol{v}_r = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}'}{dt}, \boldsymbol{a}_r = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2\boldsymbol{r}'}{dt^2}$$

其中，求导在动系中执行，求导过程中动系不动，动系各单位方向矢不变。在动系中执行的导数称为相对导数

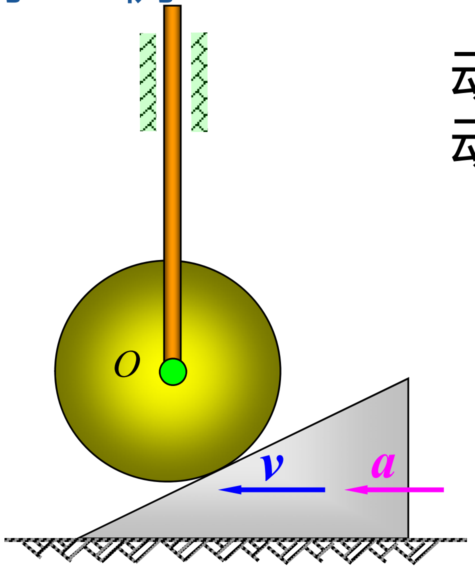
牵连点在定系中的速度和加速度称为牵连速度和牵连加速度，分别记为 $\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{a}_e$。限定动系作平面运动（平面平移、定轴转动或平面运动，前二者为后者的特例）

牵连点为动系（刚体）上的一个点 $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}', \boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$

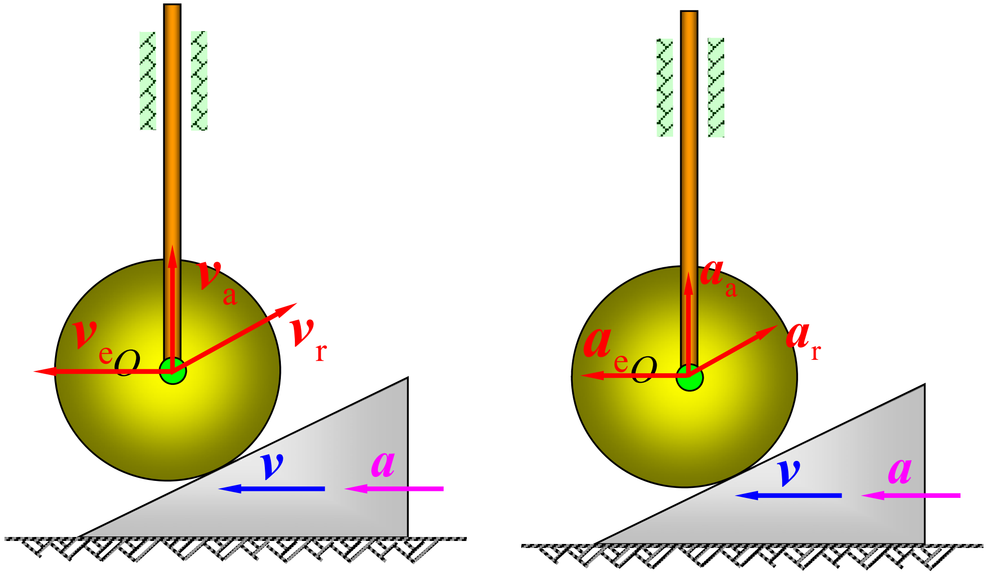
其中，$\boldsymbol{v}_{O'}, \boldsymbol{a}_{O'}$ 为动系上确定点O'的绝对速度和绝对加速度，$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}$ 为动系（刚体）在定系中的角速度和角加速度

4.1 速度和加速度合成定理

举例——例1



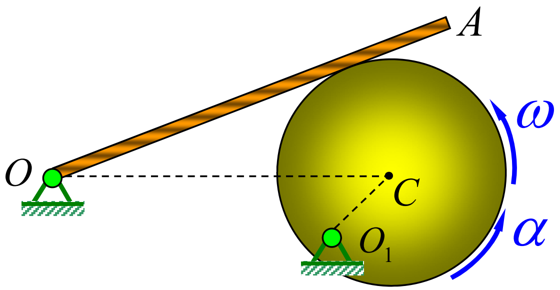
动系为斜面，
动点为圆心O。

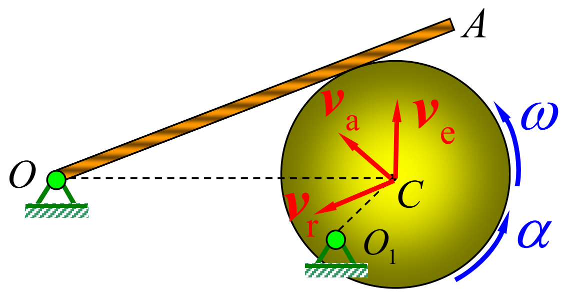


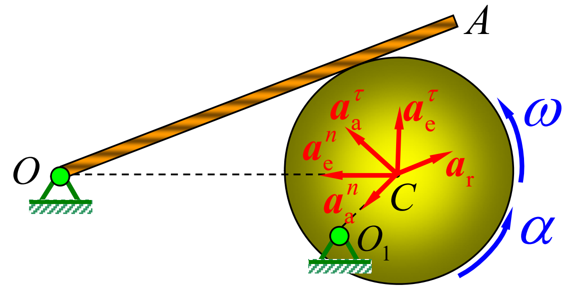
记平移斜面的速度和加速度为$\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}$ 。动点的绝对轨迹为竖直线，绝对速度和绝对加速度沿竖直线方向；动点的相对轨迹为斜直线，相对速度和相对加速度沿斜直线方向；牵连点的绝对轨迹为水平线，牵连速度和牵连加速度沿水平线方向，动系作平移运动，因此有 $\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}_e=\boldsymbol{a}$

4.1 速度和加速度合成定理

举例——例2





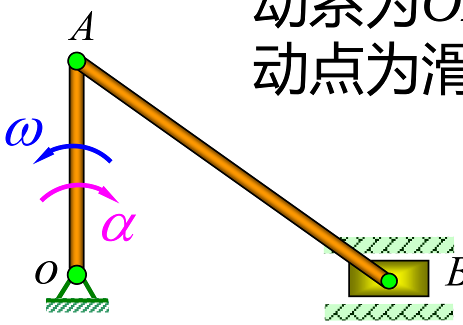


动系为OA，
动点为圆心C。

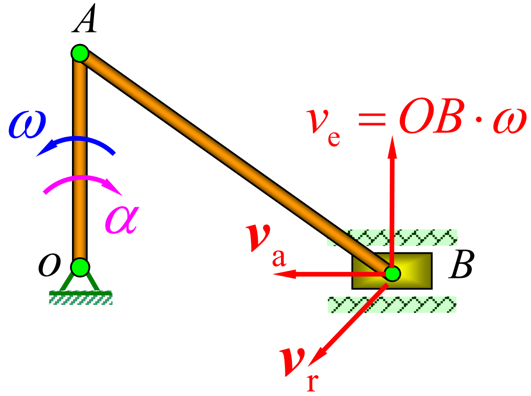
记偏心轮的角速度和角加速度为 ω,α 。动点的绝对轨迹为以$O1$为圆心的圆弧线，绝对速度沿着圆弧线切线，$v_a=\omega\cdot O_1C$，绝对加速度有切向和法向两个分量，$a_a^\tau=\alpha\cdot O_1C, a_a^n=\omega\cdot O_1C^2$ ；动点的相对轨迹为倾斜直线，相对速度和相对加速度均沿斜直线方向；牵连点的绝对轨迹为以O为圆心的圆弧线，牵连速度沿着圆弧线切向，牵连加速度有切向和法向两个分量。

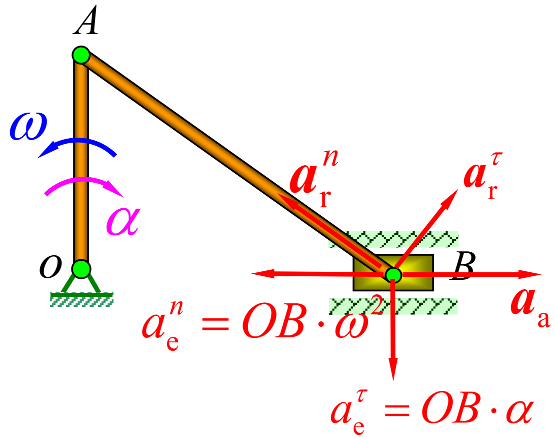
4.1 速度和加速度合成定理

举例——例3



动系为OA，
动点为滑块B。





记曲柄的角速度和角加速度为 ω,α 。动点的绝对轨迹为水平直线，绝对速度和绝对加速度沿水平线方向；动点的相对轨迹为以A为圆心的圆弧线，相对速度沿圆弧线切向，相对加速度由切向和法向两个分量；牵连点的绝对轨迹为以O为圆心的圆弧线，牵连速度沿圆弧线切线，$v_e = \omega \cdot OB$，牵连加速度有切向和法向两个分量，$a_e^\tau = \alpha \cdot OB, a_e^n = \omega \cdot OB^2$。

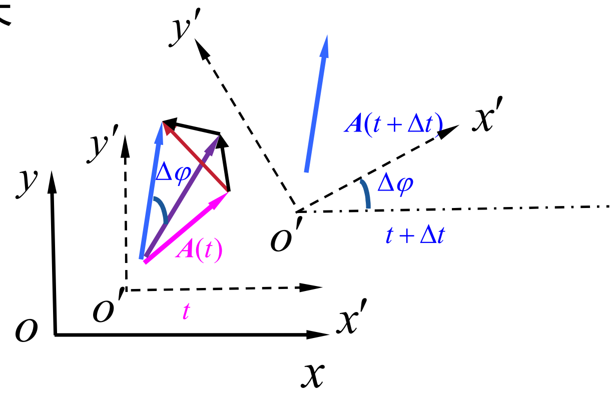
注意，图中的运动量（速度、加速度及加速度分量）均用矢量标出。如果仅能断定矢量方位，则矢量指向可任意标出，最终由正负号调整。如果能够断定矢量方向，则按照既定方向标出（如例1中的牵连速度和牵连加速度，例2中的绝对速度和绝对加速度，例3中的牵连速度和牵连加速度）——这点很重要，如果方向标记反了，则上述数量关系将会相差一个负号，很容易出错。

4.1 速度和加速度合成定理

绝对导数与相对导数的数学关系

在建立定量关系之前，先来谈谈矢量的绝对导数、相对导数的概念和关系

限定动系作平面运动（以平面平移和定轴转动为特例），矢量在该平面内运动。矢量***A***随时间变动，分别在定系*O*-*xy*和动系*O*'-*x*'*y*'中观察。动系在定系中有运动；在定系中观察，动系的基点速度和角速度记为 $\boldsymbol{v}_{O'}, \boldsymbol{\omega}$ 。试建立矢量***A***的绝对导数（在定系中执行求导操作）和相对导数（在动系中执行求导操作）之间的关系。



在定系中观察，从*t*时刻到 $t+\Delta t$ 时刻，矢量***A***大小、方位和位置发生变化，动系*O*'-*x*'*y*'发生平移和转动，转过转角 $\Delta\varphi$ 。在定系中看矢量***A***的增量：将 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$ 平移至与 $\boldsymbol{A}(t)$ 共起点，并将二者相减，即

$$\Delta\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)$$

在动系中看矢量***A***的增量：把动系从 $t+\Delta t$时刻所在位置移至*t*位置，注意在移动过程中矢量 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$ 随动系一起移动，再把矢量$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$平移至与 $\boldsymbol{A}(t)$ 共起点，并将二者相减，即

$$\tilde{\Delta}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}'(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)$$

矢量的绝对导数和相对导数的关系

$$\Delta\boldsymbol{A}(t)=\tilde{\Delta}\boldsymbol{A}(t)+\Delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{A}(t) \Longrightarrow \frac{\Delta\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}=\frac{\tilde{\Delta}\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}+\frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t}\times\boldsymbol{A}(t) \xrightarrow{\text{取极限}} \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$

可以证明，上式对动系作一般运动的情形也成立，但需引入一般运动刚体的角速度概念。

4.1 速度和加速度合成定理

一点说明

比较一下矢量绝对导数和相对导数的关系公式，以及刚体上两点之间的运动量关系公式：

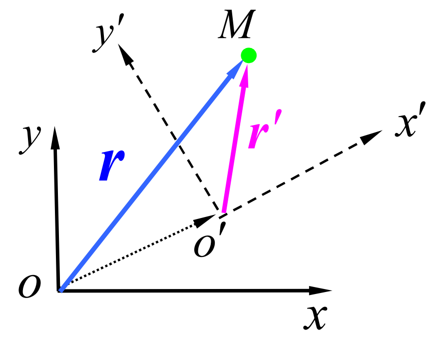
$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} \qquad \text{VS} \qquad \boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA}$$

二者在数学结构上非常相似。$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$ 表示矢量$\boldsymbol{A}$的绝对导数（在定系中观察），$\boldsymbol{v}_B$ 表示B点的速度（在给定参考系中观察）；$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}$ 表示矢量的相对导数（在动系中观察），$\boldsymbol{v}_A$ 表示A点的速度（在给定参考系中观察）；前式中，$\boldsymbol{\omega}$ 表示动系在定系中观察的角速度，后式中，$\boldsymbol{\omega}$ 表示刚体在给定参考系中观察的角速度，也等于在固连于A点的平移参考系中观察的角速度；前式中，$\boldsymbol{A}$为矢量本身，后式中，$\boldsymbol{r}_{BA}$ 为AB两点确定的矢量。因此知，二者并无实质性关联，不要混淆。

4.1 速度和加速度合成定理

速度合成定理

限定动系作平面运动（以平面平移和定轴转动为特例），动点在此平面内运动。由图可知



$$\boldsymbol{r}(t)=OO'(t)+\boldsymbol{r}'(t)$$

两边对时间t求绝对导数可得

取极限

$$\underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}_{\text{动点}M\text{的绝对速度 }\boldsymbol{v}_a}=\underbrace{\frac{dOO'}{dt}}_{\text{动系上 }O'\text{点的绝对速度 }\boldsymbol{v}_{O'}}+\underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}}_{\text{矢径 }\boldsymbol{r}'\text{ 的绝对导数}}$$

结合绝对导数和相对导数的关系，有

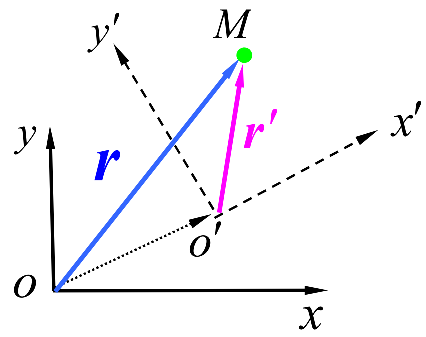
$$\boldsymbol{v}_a=\underbrace{\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'}_{\text{牵连点的绝对速度，即牵连速度 }\boldsymbol{v}_e}+\underbrace{\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}'}{dt}}_{\text{矢径 }\boldsymbol{r}'\text{ 的相对导数即动点M的相对速度 }\boldsymbol{v}_r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r}$$

任一瞬时，动点的绝对速度等于牵连速度和动点的相对速度的矢量和，这就是**动点的速度合成定理**

4.1 速度和加速度合成定理

加速度合成定理



对速度合成定理的公式两边对时间t求绝对导数可得

$\boldsymbol{a}_a$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}$$

右边两项运算如下：

$$\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)=\frac{d\boldsymbol{v}_{O'}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}'}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)$$

$$=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}_r}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

牵连速度的绝对导数并不等于牵连加速度，
相对速度的绝对导数也不等于相对加速度，
它们之间均相差一个附加项 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

不同于动点的速度关系，动点的绝对加速度并不等于牵连加速度和动点的相对加速度的矢量和，而是还有一个附加项 $2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$

$\boldsymbol{a}_C=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$

科氏加速度

$$\boxed{\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C}$$

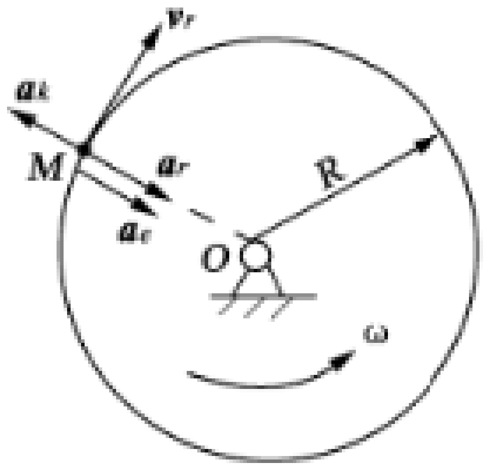
任一瞬时，动点的绝对加速度等于牵连加速度、动点的相对加速度和科氏加速度的矢量和，这就是**动点的加速度合成定理**。

4.1 速度和加速度合成定理

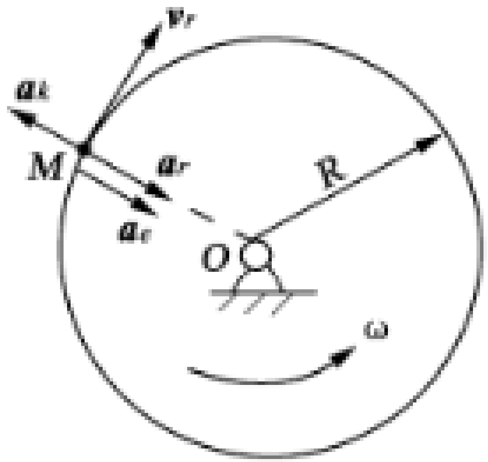
相比于先前的猜测，速度和加速度合成定理给出了清晰的几何图像，非常适宜几何分析。这里指出，科氏加速度是一个数学定义，其中包含着速度信息（动系的角速度和动点的相对速度）。此外，合成定理可以推广到动系作任意运动的情形。

例题

图示圆盘，半径为R，以匀角速度ω绕轴O转动，点M沿圆盘边缘反向匀速运动，相对速度 $v_r = R\omega$ 。以M为动点，以圆盘为动系（动系与圆盘固结），做速度和加速度合成分析。



4.1 速度和加速度合成定理



解8

绝对速度 $v_a = 0$ ；相对速度与圆盘边缘相切 $v_r = R\omega$ （斜向上）；牵连速度与圆盘边缘相切 $v_e = R\omega$ （斜向下）。满足关系 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$ 。

绝对加速度 $a_a = 0$ ；相对加速度只有法向分量，$a_r = \dfrac{v_r^2}{R} = R\omega^2$，指向圆心；牵连加速度只有法向分量，其值为 $a_e = R\omega^2$，指向圆心；科氏加速度之值为 $a_C = 2R\omega^2$，背向圆心。满足关系 $\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$ 。

4.1 速度和加速度合成定理

应用说明

动点的速度合成定理描述了三个矢量（绝对速度、相对速度和牵连速度）的三角形关系，可建立两个投影方程。三个速度矢量（方位和大小，共六个量），若已知其四，可求出另二。动点的加速度合成定理描述了四个矢量（绝对加速度、相对加速度、牵连加速度和科氏加速度）的关系，对于平面问题，可建立两个投影方程。一般情形下，绝对加速度、相对加速度和牵连加速度都可分解为切向分量和法向分量，三个法向分量以及科氏加速度均可由速度信息表出，三个切向加速度分量（方位和大小，共六个量），若已知其四，可求出其二。

应用速度和加速度合成定理处理运动学问题的一般步骤和原则如下：

- 首先，合理选择动点、动系。动点在动系中要有运动；相对轨迹要简明，便于确定相对速度和相对加速度的方位。
- 其次，根据三种轨迹，画出速度和加速度矢量图。
- 最后，由合成定理建立投影方程，求取未知量。注意，在选择投影轴时，要尽量避免不需要的未知量出现在方程中。