3-3 具摩擦的物系平衡问题

3.1 具摩擦的物系平衡问题

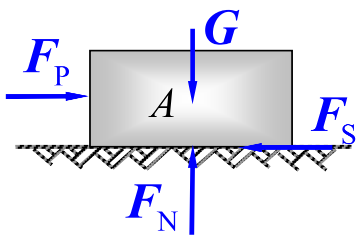
- 摩擦现象及其定量描述

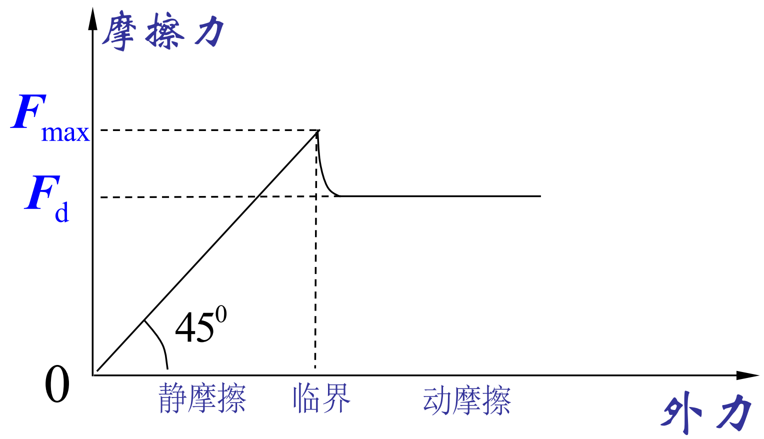
摩擦无处不在。摩擦发生在相互接触的两物体的接触界面处，它源于两界面原子间的复杂相互作用，在宏观上表现为：当界面处有相对运动或相对运动趋势时，界面处会产生阻碍相对运动或相对运动趋势的相互作用，称为摩擦阻力。摩擦阻力分为阻碍滑动的滑动摩擦力（摩檫力）和阻碍转动的滚动摩阻力偶两种。以下，分别讨论这两类摩擦——**滑动摩擦**和**滚动摩阻**。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 滑动摩擦

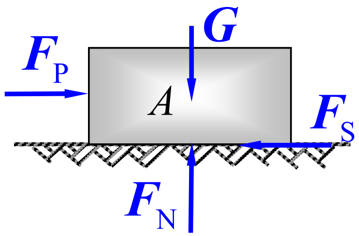
考虑具有*相对滑动及相对滑动趋势*的情形。观察一个置于水平面上的物块（假设物块不翻倒）。无水平推力时，法向作用力（称为支持力）$\boldsymbol{F}_N$与重力$\boldsymbol{G}$平衡，无切向作用力（称为摩擦力）；随着水平推力增大，摩擦力$\boldsymbol{F}_S$逐渐增大，保持物块平衡；当水平推力达到某一临界值时，物块突然开始运动，摩擦力保持某值。

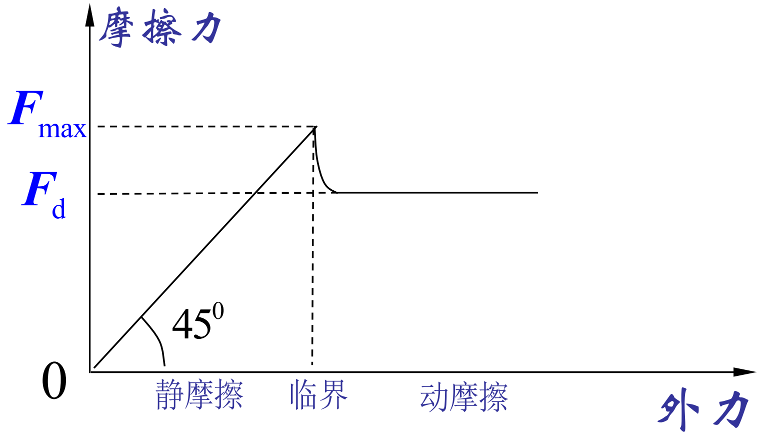




3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 滑动摩擦





静摩擦力

实验表明：未滑动时的摩擦力（称为静摩擦力）F_S 的大小在0到 F_{max} 之间，且

$$F_{max} = F_N f_S$$

极限静摩擦力　　静滑动摩擦因数

大小: $0 \le |F_S| \le F_{max}$

方向: 与物体相对滑动趋势相反。只需假想地去除摩擦化为光滑面，看物体沿哪个方向相对滑动，即可判定相对滑动趋势

动摩擦力

发生滑动时的摩擦力（称为动摩擦力）

大小: $F_d = F_N f$　　动滑动摩擦因数

方向: 与物体相对滑动相反。

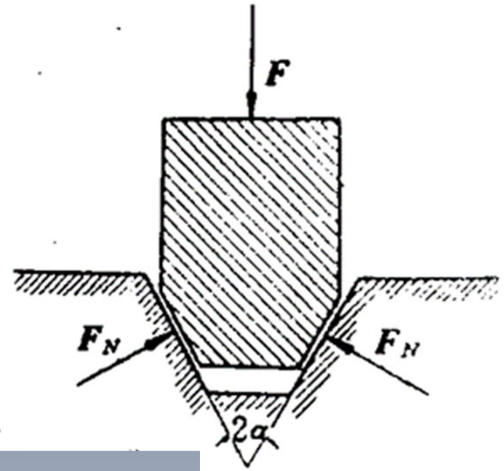
一般来说 $f < f_S$，工程中常忽略这一差异

二式统称为库仑摩擦定律，是实验物理定律，而非力学律

3.1 具摩擦的物系平衡问题

• 滑动摩擦

例子 楔形槽。楔形槽是技术领域常用的放大摩擦的辅助设备，如图所示。刚性楔块置于槽中，楔块受竖向力$\boldsymbol{F}$作用。沿竖向投影知

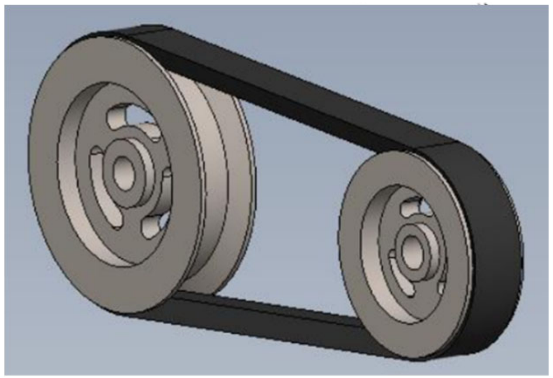


$$F = 2F_N \sin\alpha$$

沿槽（出面方向）拖动楔块，界面能产生的最大摩擦力为，

$$2f_S F_N = \frac{f_S}{\sin\alpha} F$$

当槽夹角较小时，楔块和槽之间可传递的最大摩擦力远大于在相同载荷作用下两物体平面接触时的最大摩擦力。这就是三角皮带的工作原理。



思考 为何拔钉子时，一边左右转动一边向外拔?

3.1 具摩擦的物系平衡问题

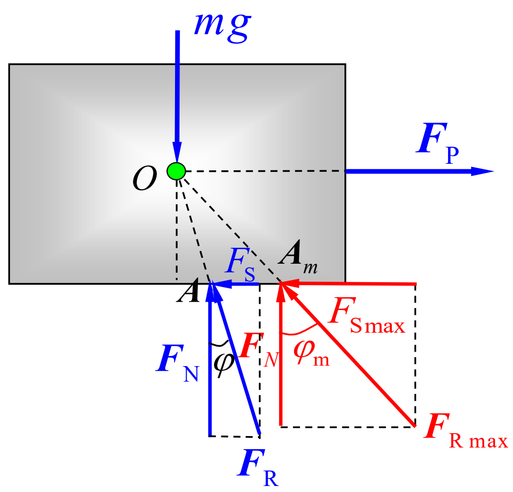
- 滑动摩擦

摩擦角　　前文给出了滑动摩擦的分析律，这里给出其几何律

再度考察上例。物块平衡时，$F_S = F_P$

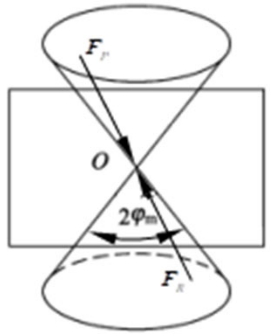
支持力 $\boldsymbol{F}_N$ 和摩擦力 $\boldsymbol{F}_S$ 的合力称为全反力，记为 $\boldsymbol{F}_R$

- 当 $F_S < F_{\max}$ 时，$\boldsymbol{F}_R$ 作用于A点，三力 $(m\boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}_P, \boldsymbol{F}_R)$ 汇交于O点；
- 随着推力 $\boldsymbol{F}_P$ 增大，力 $\boldsymbol{F}_S$ 增大，$\boldsymbol{F}_R$与公法线的夹角 φ 增大，同时 $\boldsymbol{F}_R$ 作用点A前移；
- 当 $F_S = F_{\max} = F_N f_S$ 时，A移至 A_m，φ 达到最大值 φ_m



称全反力与法向的最大夹角 φ_m 为摩擦角。$\tan\varphi_m = \dfrac{F_{\max}}{F_N} = f_S$

在水平面内，连续改变推力 $\boldsymbol{F}_P$ 的方向，$\boldsymbol{F}_R$ 的方向随之改变。在临界状态下，$\boldsymbol{F}_R$ 的作用线在空间形成顶角为 $2\varphi_m$ 的正圆锥面，称为摩擦锥。



3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 滑动摩擦

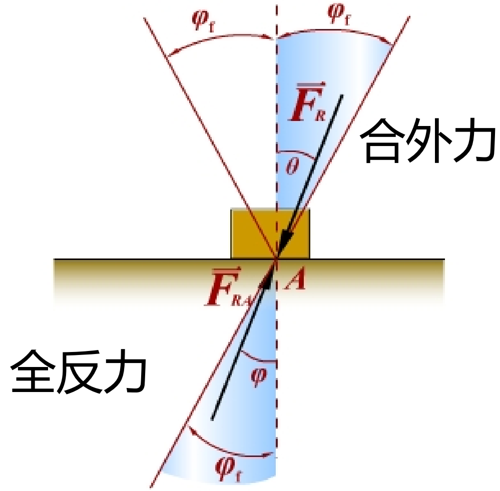
自锁现象

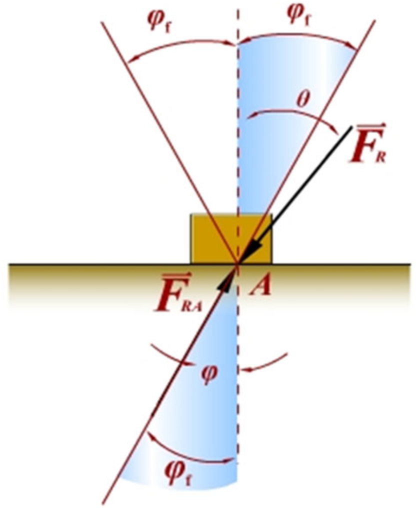
一般来说，作用于物体上的外加力可合成为一个单力，称为合外力。若物体平衡，合外力与全反力构成二力平衡。

对于初始静止的物体，施加外力系，若摩擦面能提供这样的全反力，则物体保持平衡，全反力可由外力系完全确定；若摩擦面不能提供这样的全反力，物体开始运动。

因此，初始静止的物体，在外力系作用下是否发生运动，只要看外力系的合力作用线（或全反力的作用线）是否落在摩擦角内。

当外力系的合力作用线落入摩擦角时，无论合外力值（全反力值）如何改变，物体都不会滑动，这种现象称为**自锁**。

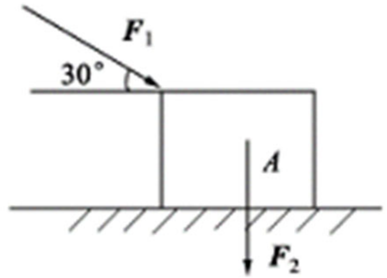




3.1 具摩擦的物系平衡问题

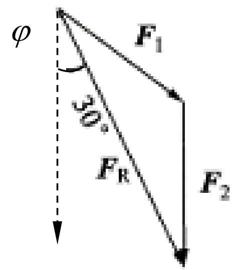
• 滑动摩擦

例题 已知物块A与水平面间的摩擦因数 $f_S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，且 $F_1 = F_2 = F$ 。设物块A初始静止且不会翻倒，试问是否能被推动?



解：

无论F如何取值，外力系的合力作用线与公法线的夹角始终为 $\varphi = 30^\circ$， $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mu_S = \tan\varphi_m$，故有 $\varphi < \varphi_m$，因此自锁，不能被推动。（点作用到面作用！可以证明，临界滑动时候的全反力方向）

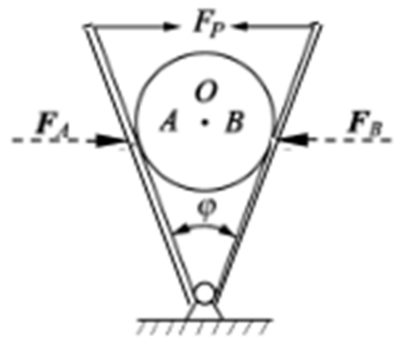


3.1 具摩擦的物系平衡问题

• 滑动摩擦

例题 图示机构，小球与夹板的摩擦角为 φ_m 。无论夹持力 F_P 多大，小球在夹板中不滑动的条件是什么?

解：当夹持力很大时，夹板对小球的作用力 $\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 很大，可不计小球的自重，小球可视为二力平衡。全反力与公法线夹角始终为 $\dfrac{\varphi}{2}$ ，自锁条件为 $\dfrac{\varphi}{2} \leq \varphi_m$ 。



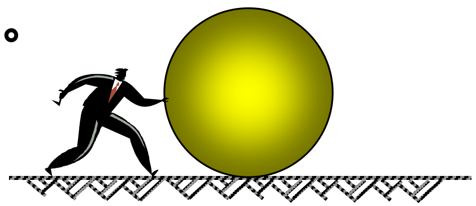
3.1 具摩擦的物系平衡问题

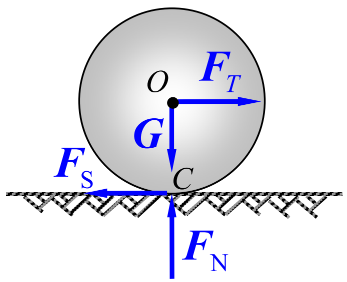
- 滚动摩阻

考虑具有*相对滚动及相对滚动趋势*的情形。从一个具体问题出发：考虑一个置于有摩擦的水平地面上的圆轮$\boldsymbol{G}$，初始静止；在水平推力$\boldsymbol{F}_T$作用下，受力如图；

假设平衡，那么，取水平轴为投影轴，由 $\sum F_x = 0$ ，得到滑动摩擦力 $F_S = F_T$ ，取过O点垂直纸面的轴为取矩轴，$\sum M_O = F_S r \neq 0$ ，矛盾！

由此知，无论多么重的圆轮，在任意小的水平力作用下，都无法保持平衡。这显然与经验相悖。



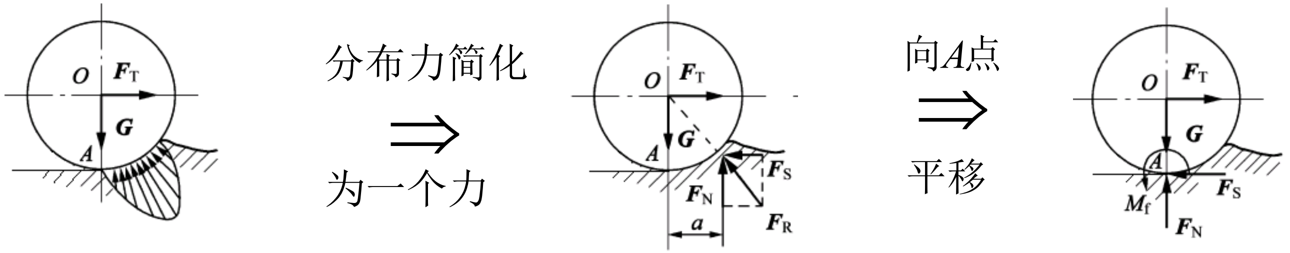


这一悖论无疑是由刚性接触模型造成的。为此，不再将界面处视为是刚性的，而是考虑局部变形。具体处理时，若以其中一个物体为研究对象，则仍视之为刚性，而视另一物体发生局部变形。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 滚动摩阻

仍考虑置于有摩擦的水平地面上的圆轮。观察可见，在自重和水平推力$\boldsymbol{F}_T$作用下，无论圆轮是否运动，圆轮和地面接触处或多或少都有些许变形，不是点接触，而是面接触。接触面处作用分布反力（平面分布力系），如图所示。



当推力较小时，圆轮平衡，分布反力可简化为一个通过轮心的全反力，与自重和水平推力合成的合外力构成二力平衡（或与水平推力和重力构成三力汇交平衡）。将全反力分解为沿公法线方向的$\boldsymbol{F}_N$和沿公切线方向的$\boldsymbol{F}_S$，将二者向理论上的接触点A平移，并略去$\boldsymbol{F}_S$平移产生的高阶小附加力偶，得到作用于接触点A（轮缘上的点）的两个力$\boldsymbol{F}_N$、$\boldsymbol{F}_S$和作用于圆轮上的一个反针向力偶$M_f = F_N a$。力$\boldsymbol{F}_N$和力$\boldsymbol{F}_S$分别相应于支持力和滑动摩擦力，力偶M_f称为**滚阻力偶**。滚阻力偶与相对滚动和相对滚动趋势的方向相反。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 滚动摩阻

实验表明，滚阻力偶M_f不能超过临界值$M_{f\max}$

$$M_{f\max} = F_N\delta \quad \text{——滚阻定律}$$

其中 δ 为支持力的最大前移量，称为**滚阻系数**，其量纲为长度，单位常用毫米。

需要指出的是，尽管上述讨论是针对具体物体（圆轮）受具体载荷（重力和水平推力）作用进行的，但所得规律适用于任意物体受任意载荷作用的情形。滚阻定律也是独立于力学律的一种本构律。无疑地，当载荷作用下滚阻力偶不足以维持平衡时，物体开始发生相对滚动，此时，全反力一般不通过轮心。

这里指出，滑动摩擦与滚动摩阻并不是对立关系，而是包含关系。滚动摩阻包含了滑动摩擦；若在滚动摩阻中舍弃滚阻效应，则退化为滑动摩擦。

上述圆轮问题中，已知圆轮半径R，摩擦因数 μ_S 和滚阻系数 δ。试问何时先发生滑动，何时先发生滚动?

3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 摩擦之为一类切换约束

摩擦是切换约束

将摩擦作用和接触式约束并置考察，强调指出，摩擦作用是一类典型的切换约束。分别讨论**点接触约束**和**面接触约束**，并限定于平面问题。讨论中，重点梳理约束对运动的限制，减小的独立描述坐标数目（即约束的个数），约束力及其个数，以及摩擦力。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

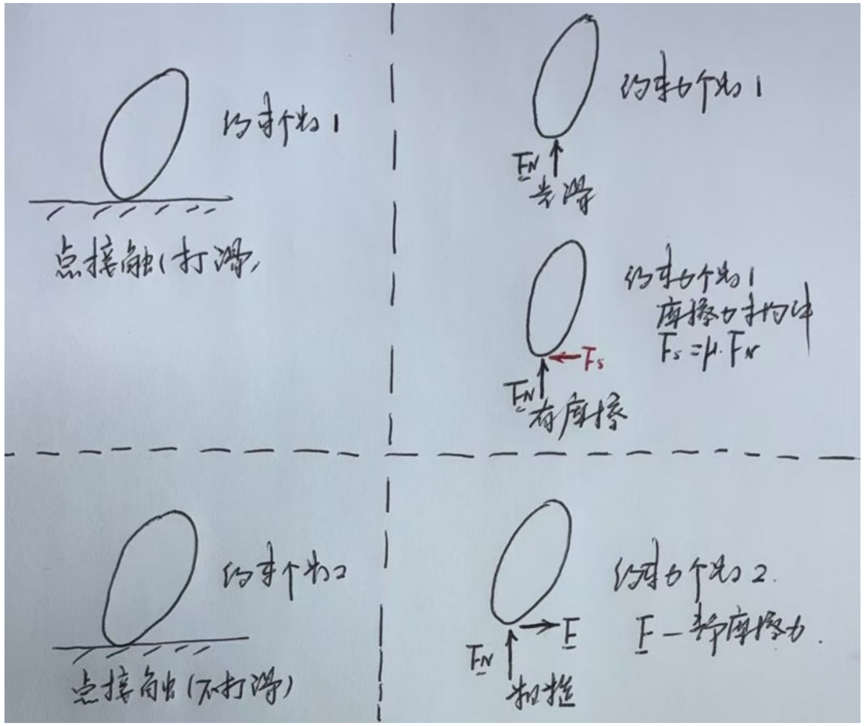
- 摩擦之为一类切换约束

点接触约束

点接触约束，顾名思义，即指两物体在*某一点处*发生接触。

➢如果接触处打滑，独立描述坐标数目减1，即约束个数为1：当接触处光滑（摩擦可以忽略）时，约束力沿接触点公法线方向，约束力个数为1；当接触处有摩擦时，约束力（即支持力）沿接触点公法线方向，滑动摩擦力沿公切线方向（与支持力之间存在本构律），约束力个数为1。

➢如果接触处不打滑，独立描述坐标数目减2（即约束个数为2）：这可视为接触处无限粗糙，约束力个数为2，一个约束力（即支持力）沿公法线方向，另一个约束力（即静摩擦力）沿公切线方向。

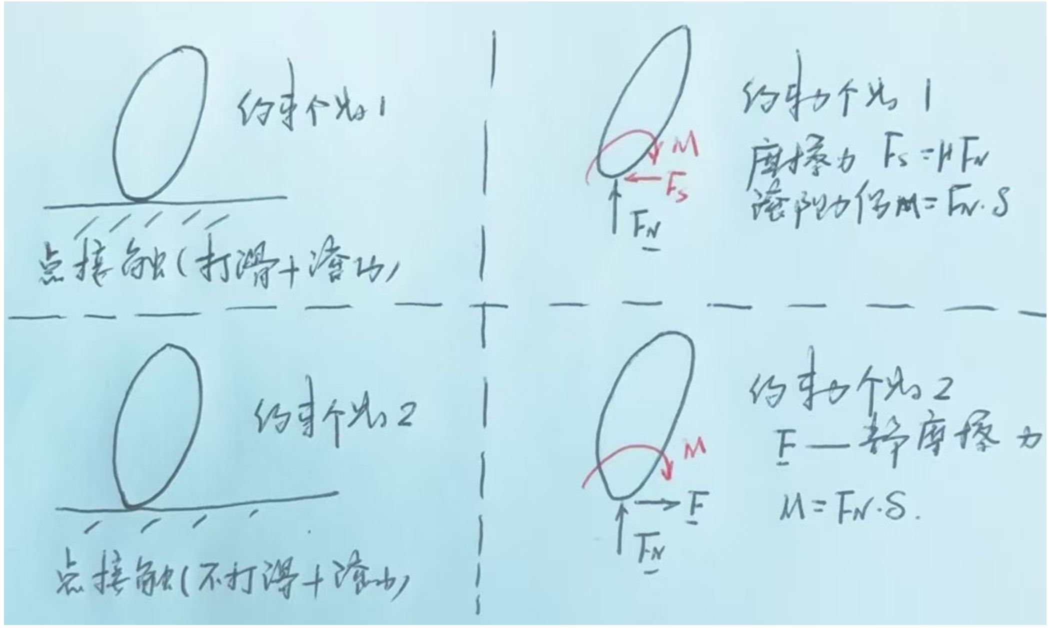


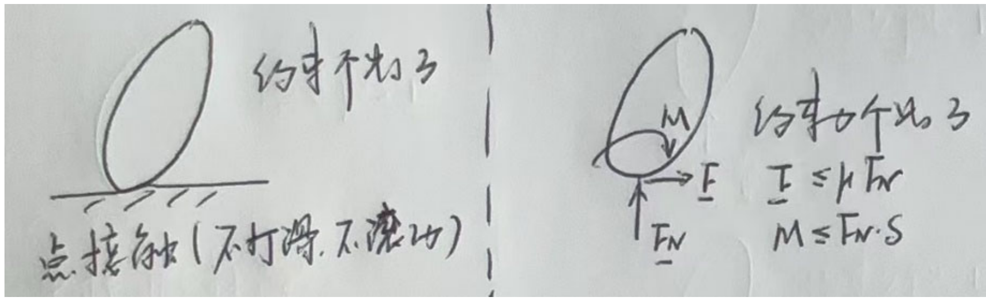
3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 摩擦之为一类切换约束　**点接触约束**

上述分析中未考虑滚动摩阻。如果考虑滚阻，会变得更有趣。

- 如果既打滑又滚动，独立描述坐标数目减1，即约束个数为1，约束力（即支持力）沿公法线方向，摩擦力和滚阻力偶与支持力之间存在本构律，约束力个数为1；
- 如果不打滑但滚动，独立描述坐标数目减2，即约束个数为2，一个约束力（即支持力）沿公法线方向，另一个约束力（即静摩擦力）沿公切线方向，滚阻力偶与支持力之间存在本构律，约束力个数为2；
- 如果既不打滑又不滚动，等价于固定端约束，独立描述坐标数目减3，即约束个数为3，第一个约束力（即支持力）沿公法线方向，第二个约束力（即静摩擦力）沿公切线方向，第三个约束力为滚阻力偶，约束力个数为3。



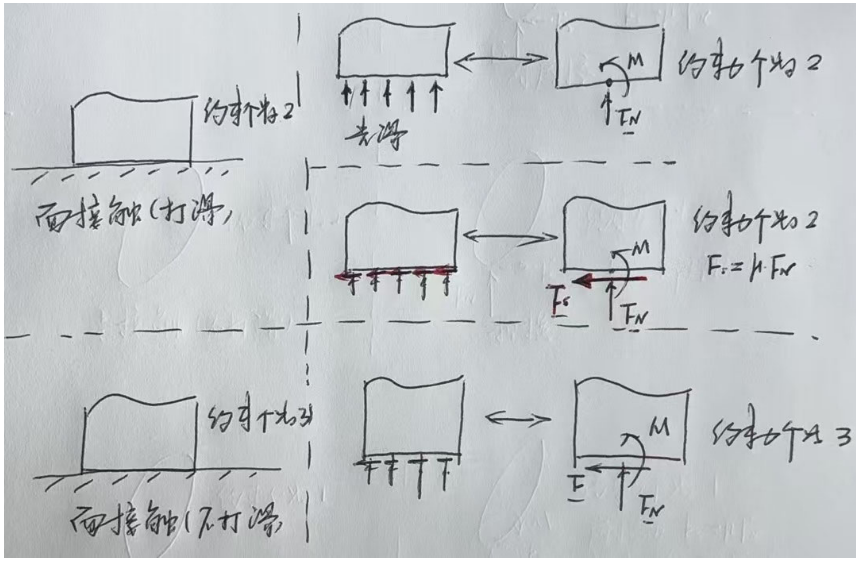


3.1 具摩擦的物系平衡问题

• 摩擦之为一类切换约束　　面接触约束

面接触约束，是指两物体在*某一面处*发生接触。面接触可视为一系列点接触的组合。面接触问题不涉及滚动，因此这里不考虑滚阻。

- 如果接触处打滑，独立描述坐标数目减去2，即约束个数为2：当接触面光滑时，分布约束力沿接触面的公法线方向，向某一接触点简化，可得一个沿公法线的约束反力和一个约束反力偶，约束力个数为2；当接触面有摩擦时，分布支持力沿接触面的公法线方向，向某一接触点简化，可得一个沿公法线的约束反力和一个约束反力偶，分布摩擦力合成为一个摩擦力（与支持力之间存在本构律），约束力个数为2。
- 如果接触处不打滑（可视为接触处无限粗糙），独立描述坐标数目减3，即约束个数为3，等价于固定端约束。分布支持力简化得到一个沿公法线的约束反力和一个约束反力偶，分布摩擦力合成为一个约束力（静摩擦力），约束力个数为3。



这里指出，光滑接触面约束和粗糙接触面约束只是摩擦接触面约束的两个极限情况罢了。当摩擦较小不足以影响所关注的行为时，忽略摩擦；当在所关注的过程中没有发生滑移，则视为不能滑移，视为完全粗糙。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

• 具摩擦物系的静定和超静定判定

对于一个具摩擦的物系，按照各界面不打滑（和不滚动）来计算约束个数（也即约束力个数），同时计算独立平衡方程个数。

- ➢如果判定物系静定，并且已知在给定载荷作用下物系平衡，就能求出各界面的约束反力（支持力和摩擦力）。
- ➢如果物系静定，并且知道哪个（或哪几个）位置临界滑动，因为约束力个数减少而平衡方程个数不变，就能求出各界面的约束反力和临界外力值。
- ➢如果判定物系超静定，并且已知物系平衡，无法求出各界面的约束反力。
- ➢如果物系超静定，并且知道或哪几个位置临界滑动，从而成为机构，就能求出各界面的约束反力和临界外力值。

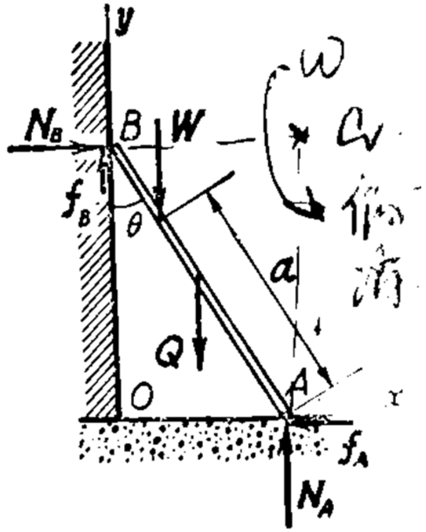
3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

例题 滑动摩擦。长为l的轻质梯子靠在墙上，夹角为θ，摩擦系数均为μ。人重W，站在梯子上。试问人最高能爬到离下端距离a多远的位置，并保持梯子不动?

解：

经验表明：当摩擦因数很小时（以光滑面接触为极限），梯子无法静置于墙角；当摩擦因数很大时（以固定铰接为极限），梯子总是静置于墙角；当摩擦因数既非很大也非很小时，梯子可静置于墙角，但当人登上梯子，到了一定的高度时会突然下滑。这里，就来讨论第三种情形。

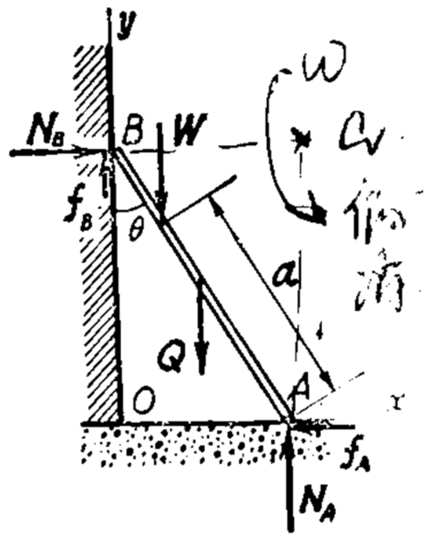


3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

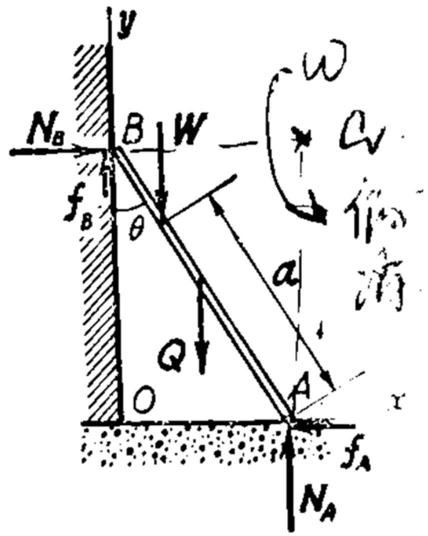
➢未滑动时，A、B两处分别有2个约束，共有4个约束，但只有3个平衡方程，为超静定结构。因此，给定外力（载荷值及载荷位置）无法确定两个界面的约束力（支持力和摩擦力）。

➢刚要滑动时，A、B两处同时进入临界态，分别有1个约束（1个约束力），共有2个约束，但有3个平衡方程，为机构。因此，给出外力值，可以直接确定两个界面的约束力（支持力）以及外力的作用位置。直接从数学角度看，刚要滑动时，A、B两处各有2个未知力，加上外力位置1个未知力，共有5个未知力；3个平衡方程，加上2个临界摩擦等式，正好可以定解。



3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题　　**分析方法**



人站上梯子，梯子有下滑趋势，A点有右滑趋势，B点有下滑趋势，这可从假想去除摩擦后梯子的运动确定。梯子未滑动，列出平衡方程：

$$\sum F_x = 0,\qquad N_B - f_A = 0$$

$$\sum F_y = 0,\qquad -W + f_B + N_A = 0 \qquad\qquad f_A \le \mu N_A, f_B \le \mu N_B$$

$$\sum M_A = 0,\qquad Wa\sin\theta - f_B l\sin\theta - N_B l\cos\theta = 0$$

不是直接去处理上述等式、不等式关系，而是化为临界问题来处理。当人离开下端的距离增大到某一值时，梯子处于临界状态，即“将动而未动”。因为“将动”，因此有等式$f_A = \mu N_A, f_B = \mu N_B$，因为“未动”，因此平衡方程成立。于是，可用五个等式求解五个量（$N_A, f_A N_B, f_B, a$）： $N_A = \frac{1}{1+\mu^2}W, N_B = \frac{\mu}{1+\mu^2}W, f_A = \frac{\mu}{1+\mu^2}W, f_B = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}W, a = l\frac{\mu^2 + \mu\cot\theta}{1+\mu^2}$

所得即为处于临界状态时的支持力、摩擦力和载荷位置。

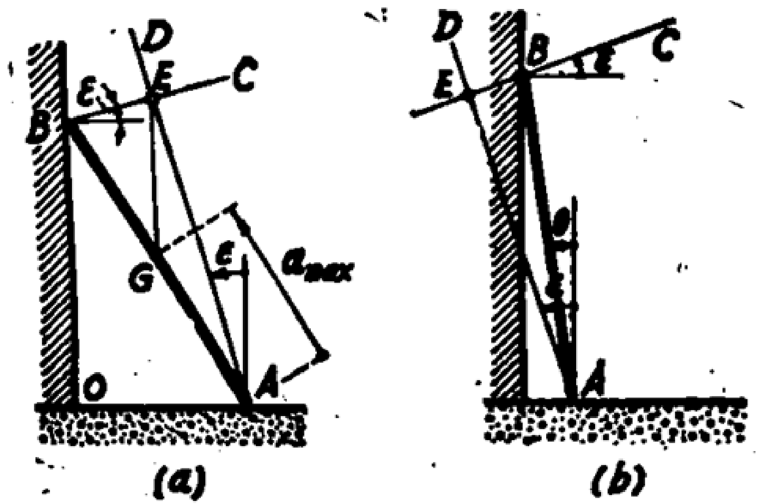
分析可知，当 $a \le l\frac{\mu^2 + \mu\cot\theta}{1+\mu^2}$ 时，可保持梯子不动。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

几何方法，应用摩擦角的概念处理之

通过A点做直线AD，与公法线夹角为摩擦角，通过B点做直线BC，与公法线夹角为摩擦角，两直线交于E点，过E点做竖直线交AB于G点。若人的位置高于G点，两个全反力无法与W构成三力汇交，不能平衡；若人的位置未高于G点，全反力可以与之平衡。注意，如果摩擦因数很大或者梯子很陡，交点可能落在OB线左侧，此时，人爬到梯子顶端也不会破坏梯子的平衡。几何方法给出的这一结果，在分析方法中没有体现出来。

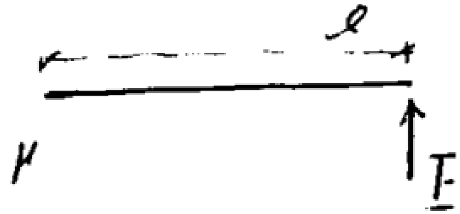


3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

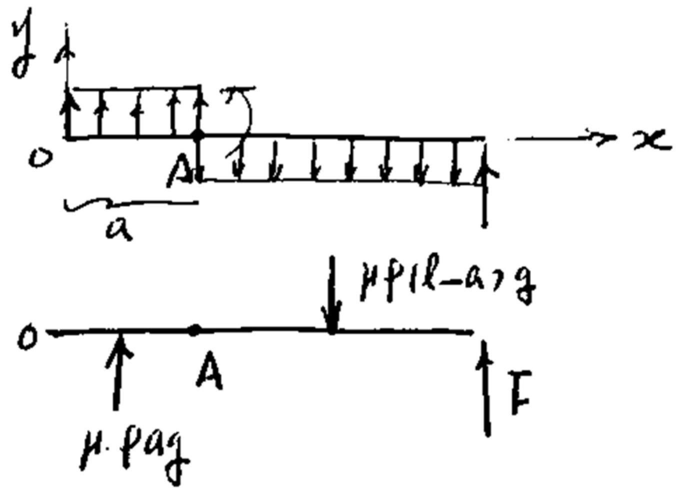
例题

滑动摩擦。均质杆件线密度为 ρ，长度为l，置于具摩擦的水平桌面上，摩擦因数为μ，在其一端受与之垂直的水平推力$\boldsymbol{F}$作用，试问推动杆件的最小推力。



解 8

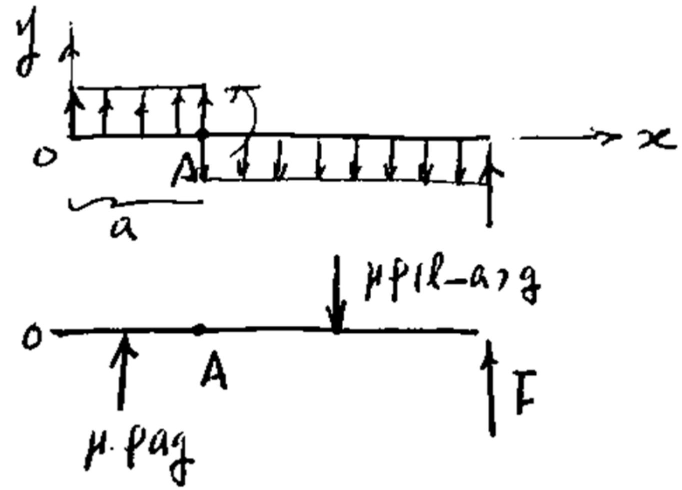
观察可知：水平推力很小时，杆件保持静止；水平推力增大至某值时，杆件开始绕杆上某点转动。据此，可以判定在临界状态下各点的运动趋势方向。



3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

建立图示坐标系，记不动点A的水平坐标为a。临界状态下的摩擦力分布如图所示，分布力集度为 $\mu\rho g$ 。将A点两侧的分布力分别简化。力系临界平衡，在y方向投影得



$$\mu\rho a g+F-\mu\rho(l-a)g=0$$

对A点取矩得，

$$\mu\rho a g\frac{a}{2}-F(l-a)+\mu\rho(l-a)g\frac{l-a}{2}=0$$

临界状态的推力和不动点的坐标

$$F=\mu\rho(l-2a)g,\quad F=\mu\rho g\frac{1}{(l-a)}\left[\frac{(l-a)^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right]\Rightarrow a^2-2al+\frac{l^2}{2}=0\Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}l$$

当 $a=\frac{2+\sqrt{2}}{2}l$ 时，$F=\mu\rho g\left(-1-\sqrt{2}\right)l<0$ ，矛盾；

当 $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}l$ 时，$F=\mu\rho g\left(-1+\sqrt{2}\right)l$。即为所求。

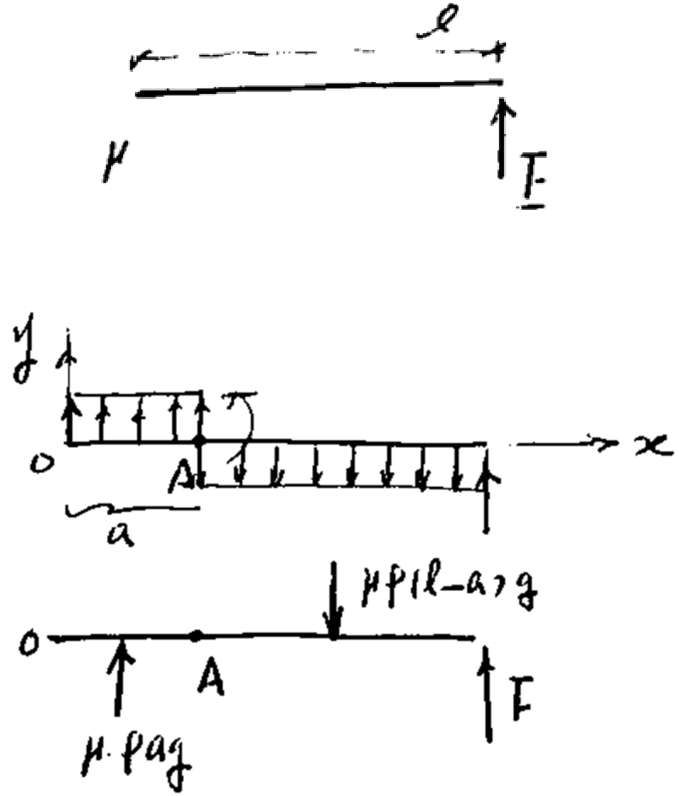
3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

思考 （1）在推力作用下，临界状态是否会是平移?

（2）如果推力不与杆件垂直，如何计算推动杆件的最小推力?

（3）将水平推力替换为一个作用于水平面内的力偶，如何计算移动杆件的最小力偶矩矢值?

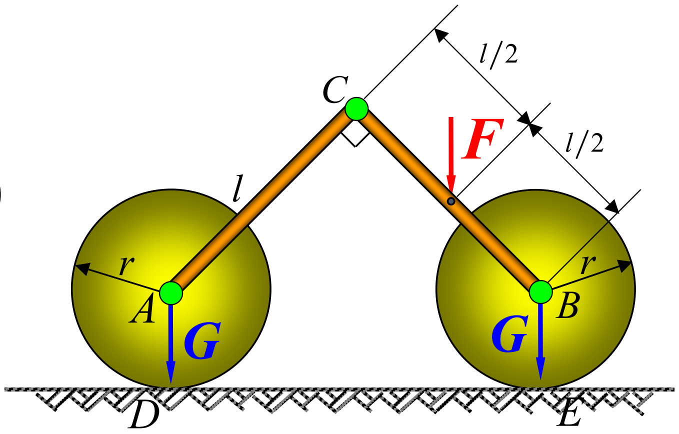


3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

例题 滚动摩阻。如图所示，轮半径r=1cm，轮重G=10N，杆长为l，不计杆重。摩擦因数 $f=0.02$ ，滚阻系数 $\delta=0.01\mathrm{cm}$ 。试求能保持平衡的最大力$\boldsymbol{F}$值，以及临界平衡时两轮所受的摩擦力与滚阻力偶。

解 物系由四个刚体组成，可列12个独立平衡方程；考虑滚动摩阻，在静止时，轮与地面的接触处有3个约束，计算得到物系的约束个数（也即约束力个数）为12。因此，物系为静定结构。

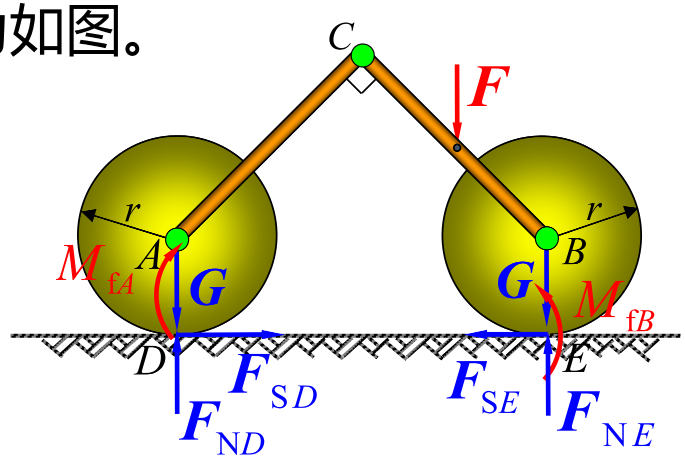


一般地，可以直接用力$\boldsymbol{F}$表出轮和地面之间的支持力、摩擦力和滚阻力偶，看哪个位置、哪个力先达到临近，据此就能给出最大力值。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题

以下，使用一些技巧进行分析。以整体为研究对象，受力如图。



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{SD} = F_{SE}$$

分别取两轮为研究对象，对轮心取矩，得

$$M_{fA} = F_{SD} \cdot r, M_{fB} = F_{SE} \cdot r$$

$$\Rightarrow \quad M_{fA} = M_{fB}$$

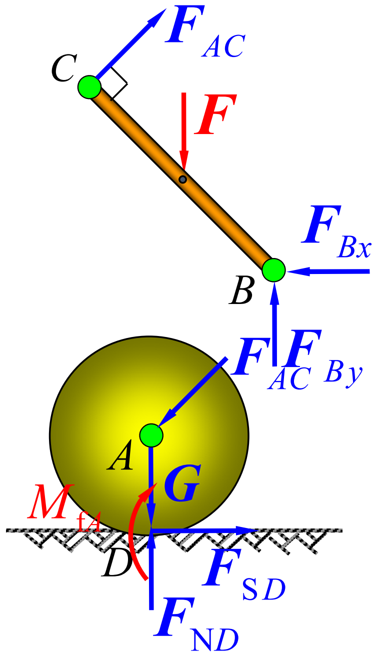
以整体为研究对象

$$\left.\begin{array}{l} \sum M_D = 0 \\ \sum M_E = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F_{ND} = \frac{1}{4}F + 10, F_{NE} = \frac{3}{4}F + 10$$

由此可知，临界平衡必在A轮和地面接触处发生，或者先滑动或者先滚动。

3.1 具摩擦的物系平衡问题

- 具摩擦物系的平衡问题



研究BC杆，受力如图，分析可得

$$F_{AC}=\frac{\sqrt{2}}{4}F,F_{Bx}=\frac{F}{4},F_{By}=\frac{3}{4}F$$

研究A轮，受力如图。假设先发生滚动。在临界状态， $M_{\mathrm{f}A}=F_{\mathrm{N}D}\delta$

$$\sum M_D=0 \qquad F_{AC}\times\frac{\sqrt{2}}{2}r=M_{fA} \quad \Rightarrow \quad F=0.404$$

假设先发生滑动，在临界状态 $F_{SD}=F_{ND}f$

$$\sum F_x=0 \qquad F_{AC}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=F_{SD} \quad \Rightarrow \quad F_2=0.82$$

故有，最大力值为 $F_{\max}=0.404$ 相应的摩擦力和滚阻力偶为

$$F_{SA}=F_{SB}=\frac{1}{4}F=0.101, M_{fA}=M_{fB}=F_{NA}\delta=0.101$$

- 注释

1. 对静力学问题进行受力分析时，常应用二力平衡、三力汇交条件。这相当于应用了部分平衡方程，因此，独立平衡方程的个数将会减少。

2. 初始静止的物体，当外加力缓慢增大时，接触面的支持力和摩擦力（被动力）倾向于阻碍运动开始。若能提供保持静止所需的支持力和摩擦力，就会提供之，使物体保持静止。

3. 对于静力学问题，摩擦面约束可用连杆约束来等效。