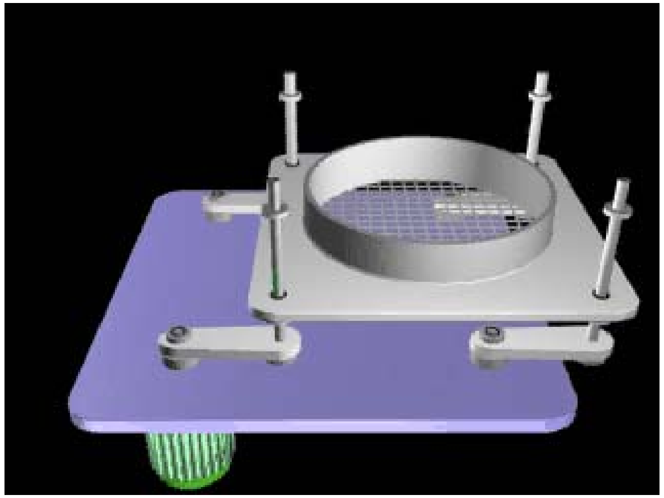
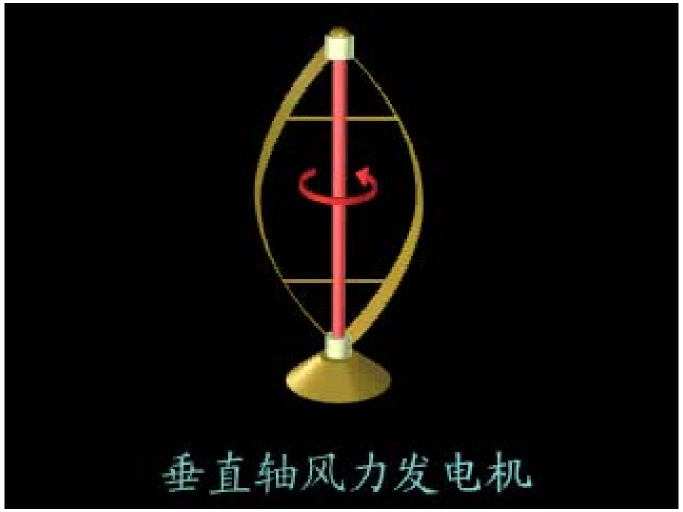
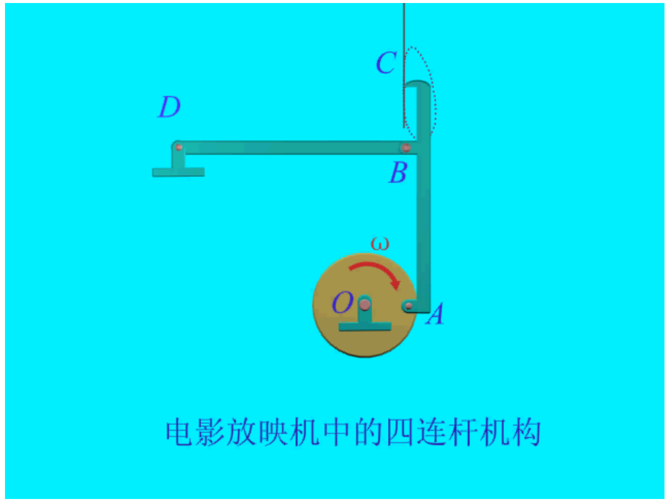
# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 单刚体的典型运动模式

  平行移动、定轴转动、平面运动、定点运动和一般运动





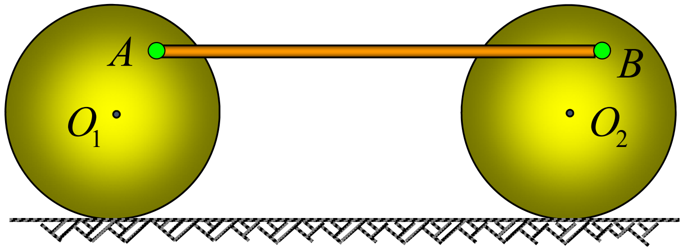




详细讨论前三种运动模式，其独立描述坐标数目及其选择，并据此表出单刚体上各点的位置、速度和加速度。值得指出，这些运动模式相应于外在约束，约束使之按既定模式运动

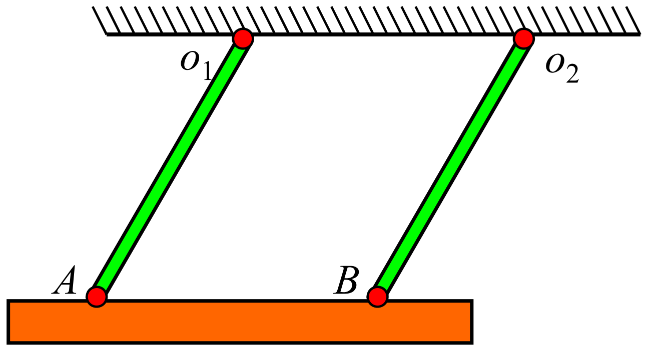
在某些情形下，未受到约束的刚体也会表现出这些运动模式，对此情形，亦可视为受到约束来处理，因为这种处理什么也不曾改变。上述评述具有一般性，对于一般点系也成立。若点系并未具有某种约束，但外在作用和动力学法则使得点系就像具有某种约束一样运动，这时，可以将该点系视为本来就存在这些约束来研究，这种处理不会影响问题的分析结果。

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 平行移动




**定义**　　刚体运动过程中，其上任一直线始终与其初始位置保持平行（对选定参考系而言）




思考　1. 图示AB杆是否作平行移动?

答：　是。

2. 平移时，刚体上各点轨迹是平行直线，对吗?

答：　不一定。可为平行曲线。

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 平行移动

**独立描述坐标** 平移刚体受转动限制，其上一点的三个坐标就能刻画刚体上任一点的位置。独立描述坐标数目为3个，可取为其上任一点的三个直角坐标例如用$A$点 $x_A, y_A, z_A$

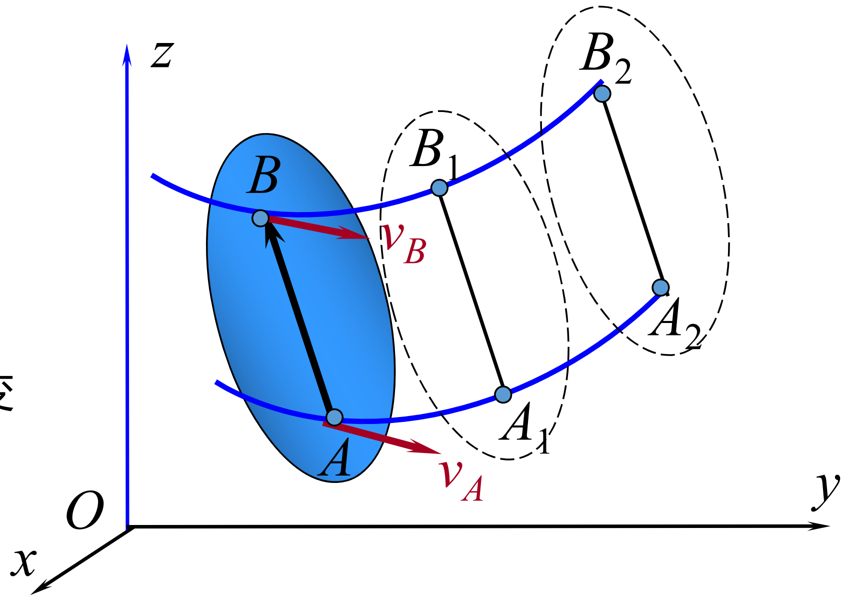
**运动方程，运动表出**

平移刚体的运动方程 $x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), z_A = z_A(t)$

平移刚体上任一点（如$B$点）的位置坐标

$$x_B = x_A + \underline{x_{BA}}, y_B = y_A + \underline{y_{BA}}, z_B = z_A + \underline{z_{BA}}$$

矢量$AB$的三个直角坐标分量，它们在运动过程中保持不变




$B$点的速度和加速度
$$\dot{x}_B = \dot{x}_A, \dot{y}_B = \dot{y}_A, \dot{z}_B = \dot{z}_A,$$
$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_A, \ddot{y}_B = \ddot{y}_A, \ddot{z}_B = \ddot{z}_A$$

**矢量表示**

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A$$

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 平行移动

**平面平移**：独立描述坐标数目为2个，将$O$-$xy$坐标系置于运动平面内，描述坐标可取为 $x_A, y_A$

**瞬时平移**

若某瞬时刚体上各点的速度相等，则称刚体作瞬时平移

刚体平移时，其上各点轨迹形状相同且相互平行，任一瞬时各点速度相同、各点加速度也相同。刚体的平移可归结为研究刚体内任一点的运动

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 定轴转动

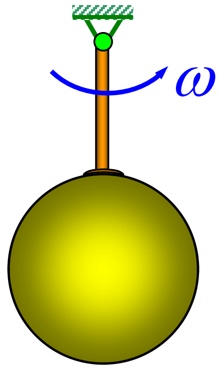
**定义**　刚体运动过程中，其上或其延展体上有一条直线始终不动（对选定参考系而言）

这条不动直线称为**转轴**

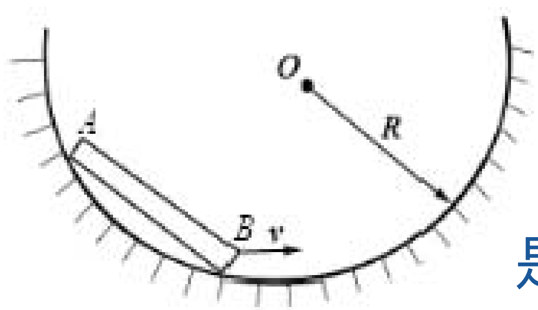
思考 1. 处于转轴上的各点始终保持不动，不在转轴上的各点作什么运动?

在通过该点且垂直转轴的平面内作圆周运动

2. 指出下列物体是否作定轴转动?




是




是

在杆*AB*的延展部分，过*O*点且垂直于纸面的直线固定保持不动

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 定轴转动

**独立描述坐标**

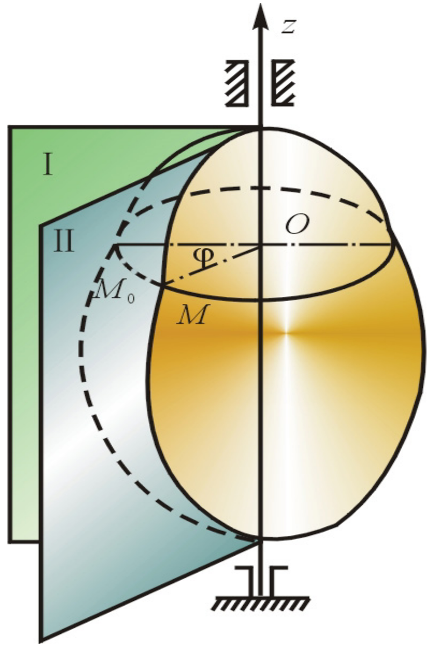
定轴转动刚体上一根直线保持不动，且位置已知，因此，仅需一个独立坐标即可刻画其位置

设z轴，定平面I，动平面II，两个平面的夹角$\varphi$ 作为独立描述坐标，称为刚体的转角或角位移

转角为代数量，右手螺旋法则定义其正负

明确转轴位置、定平面位置、与刚体固连的动平面在刚体上的位置以及转角，就能确定刚体上任一点的位置。

定轴转动刚体的独立描述坐标数目为1个




**运动方程** $\varphi = \varphi(t)$

运动方程可以直接表出刚体上任一点的运动

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 定轴转动

**运动表出**　定轴转动刚体某给定（与转轴正交的）截面上的一个点$B$

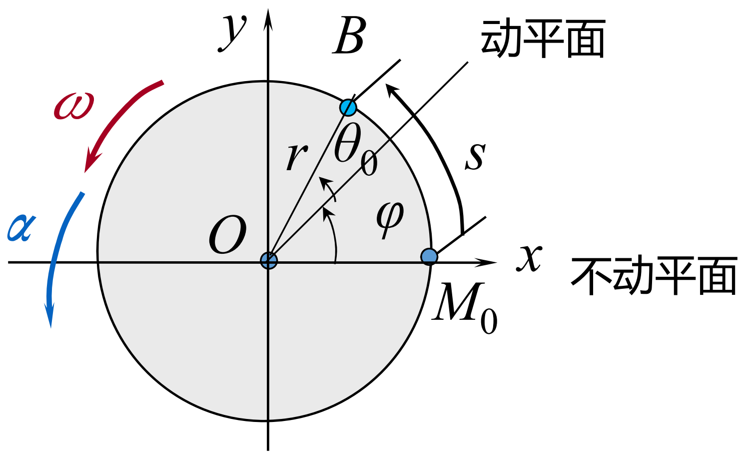
$B$点的坐标　$x_B = r\cos\left[\varphi(t)+\theta_0\right], y_B = r\sin\left[\varphi(t)+\theta_0\right]$

$B$点的速度和加速度

$$\dot{x}_B = -r\sin\left[\varphi(t)+\theta_0\right]\dot{\varphi}(t), \dot{y}_B = r\cos\left[\varphi(t)+\theta_0\right]\dot{\varphi}(t),$$

$$\ddot{x}_B = -r\cos\left[\varphi(t)+\theta_0\right]\dot{\varphi}^2(t) - r\sin\left[\varphi(t)+\theta_0\right]\ddot{\varphi}(t),$$

$$\ddot{y}_B = -r\sin\left[\varphi(t)+\theta_0\right]\dot{\varphi}^2(t) + r\cos\left[\varphi(t)+\theta_0\right]\ddot{\varphi}(t)$$




刚体定轴转动的**角速度**和**角加速度**　$\omega = \dot{\varphi}, \alpha = \ddot{\varphi}$

用独立描述坐标（转角）、其一阶导数（角速度）和二阶导数（角加速度）
表出了任一点的速度和加速度

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

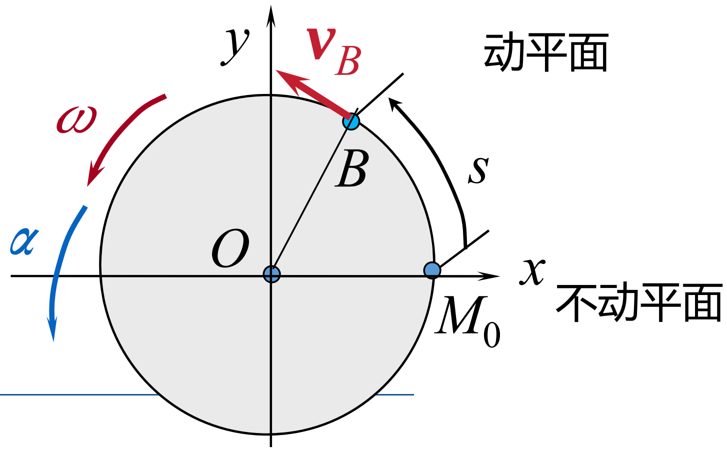
- 定轴转动

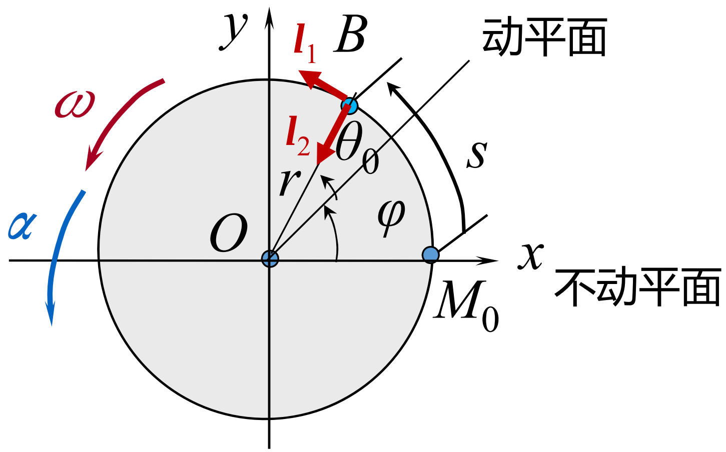
**矢量表示**

$$\boldsymbol{v}_B = \dot{x}_B\boldsymbol{i} + \dot{y}_B\boldsymbol{j} = r\dot{\varphi}\underbrace{\left[-\sin(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{i} + \cos(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{j}\right]}_{\boldsymbol{l}_1} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v}_B = r\dot{\varphi}\boldsymbol{l}_1}$$

$$\boldsymbol{a}_B = \ddot{x}_B\boldsymbol{i} + \ddot{y}_B\boldsymbol{j} = r\dot{\varphi}^2\underbrace{\left[-\cos(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{i} - \sin(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{j}\right]}_{\boldsymbol{l}_2} + r\ddot{\varphi}\left[-\sin(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{i} + \cos(\varphi+\theta_0)\boldsymbol{j}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{a}_B = r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{l}_2 + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{l}_1}$$



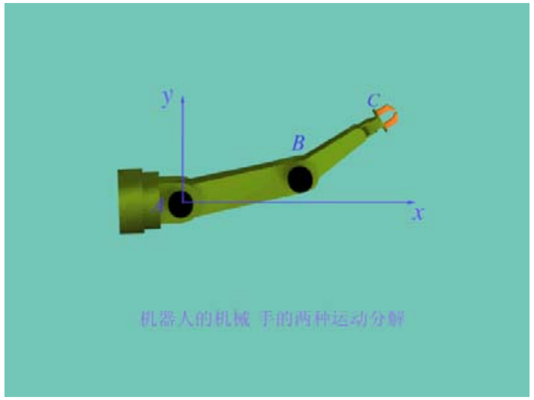



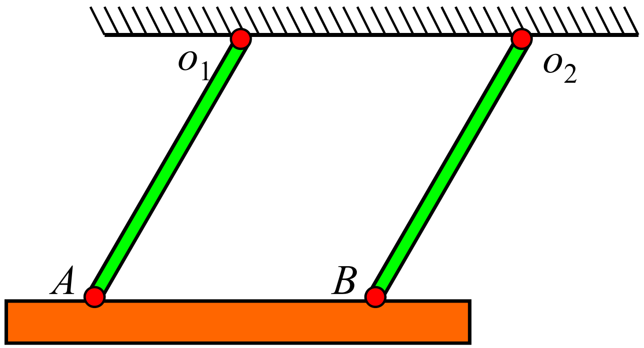
# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 平面运动

**定义**　　刚体运动过程中，存在一个固定（对选定参考系而言）平面，刚体上任一物质点到该平面的距离保持不变

思考　　定轴转动，平行移动与平面运动的关系



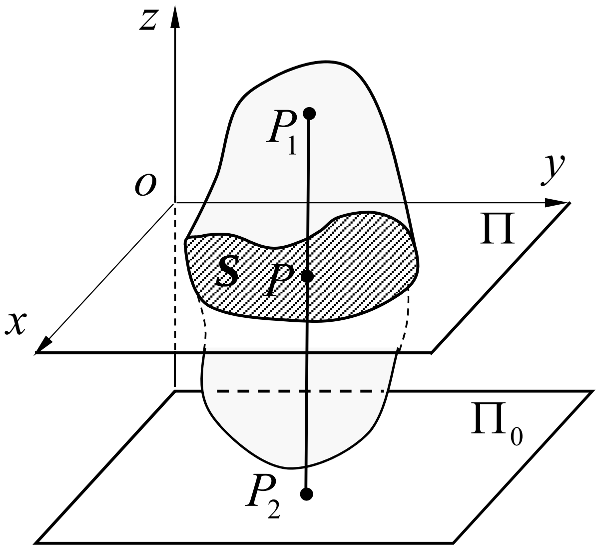



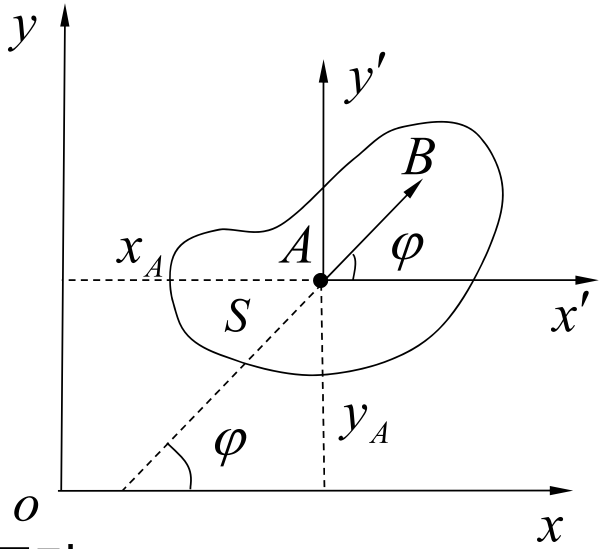

定轴转动是平面运动的特例，但平行移动和平面运动并无包含关系，平面平移是平面运动，但一般平移不是平面运动

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 平面运动

**独立描述坐标**　　刚体→ 刚性平面图形→基线→基点坐标和基线角度




刚性平面图形$S$始终保持在平面 $\Pi$ 上运动

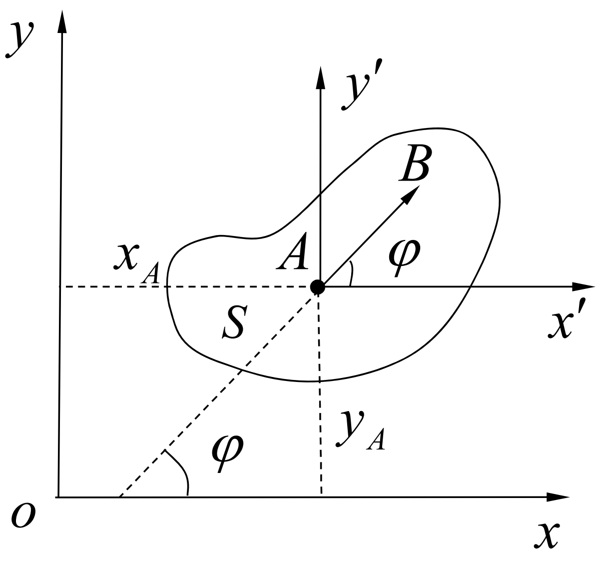
直线 $P_1P_2$ 上各点的位置由$P$点完全确定

刚体平面运动可用刚性平面图形$S$在平面 $\Pi$ 中的位置完全确定

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 平面运动

**独立描述坐标**　刚体→ 刚性平面图形→基线→基点坐标和基线角度




任选一点$A$（称为**基点**）

一条固结于刚性平面图形上的射线$AB$（称为**基线**）

基线的位置就完全刻画了刚性平面图形的位置

确定**基点的位置**和**基线与指定参考线的夹角**即可描述基线的位置

基点坐标、基线和$Ox$轴的夹角确定了基线、刚性平面图形及刚体各点的位置

$x_A, y_A, \varphi$ 独立描述坐标

平面运动刚体的独立描述坐标数目为3个

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

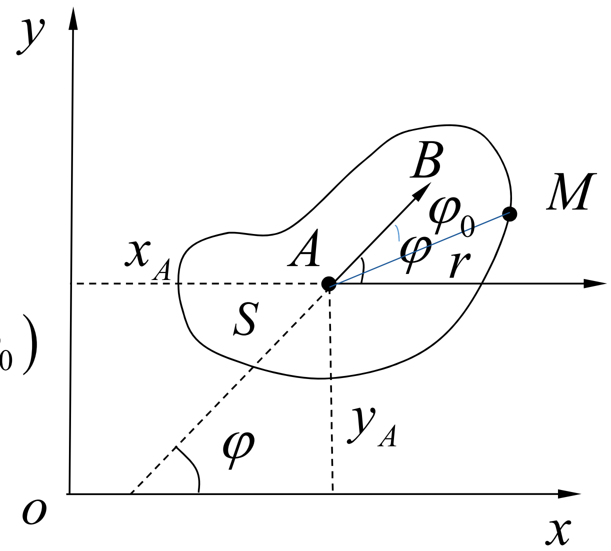
- 平面运动

**运动方程，运动表出**

运动方程 $x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), \varphi = \varphi(t)$

平面图形$S$上的一点$M$的运动方程

$$x_M = x_A + r\cos(\varphi - \varphi_0), y_M = y_A + r\sin(\varphi - \varphi_0)$$




$M$点的速度和加速度

$$\dot{x}_M = \dot{x}_A - r\sin(\varphi - \varphi_0)\dot{\varphi}, \dot{y}_M = \dot{y}_A + r\cos(\varphi - \varphi_0)\dot{\varphi}$$

$$\ddot{x}_M = \ddot{x}_A - r\left[\cos(\varphi - \varphi_0)\dot{\varphi}^2 + \sin(\varphi - \varphi_0)\ddot{\varphi}\right],$$

$$\ddot{y}_M = \ddot{y}_A + r\left[-\sin(\varphi - \varphi_0)\dot{\varphi}^2 + \cos(\varphi - \varphi_0)\ddot{\varphi}\right]$$

刚体平面运动的**角速度**和**角加速度** $\omega = \dot{\varphi}, \alpha = \ddot{\varphi}$

用独立描述坐标（基点坐标和转角）、其一阶导数（基点速度和转动角速度）表出了$M$点的速度；
用独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数（基点加速度和转动角加速度）表出了$M$点的加速度

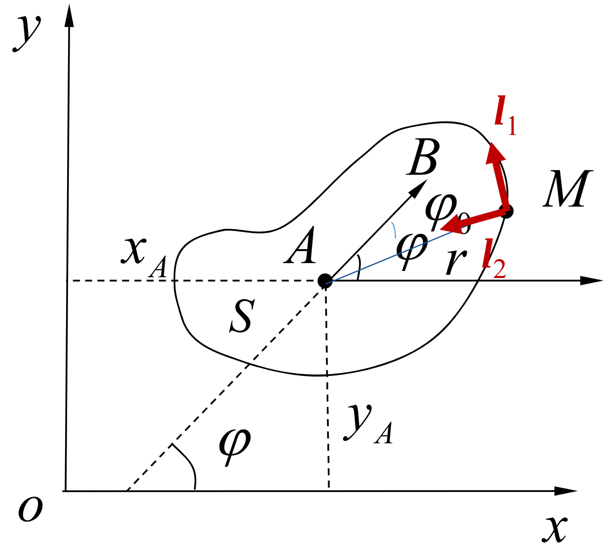
# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- 平面运动

**矢量表示**

$$\boldsymbol{v}_M = \dot{x}_M \boldsymbol{i} + \dot{y}_M \boldsymbol{j} = \underbrace{\dot{x}_A \boldsymbol{i} + \dot{y}_A \boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{v}_A} + r\dot{\varphi}\left[\underbrace{-\sin(\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{i} + \cos(\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{l}_1}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + r\dot{\varphi}\boldsymbol{l}_1}$$



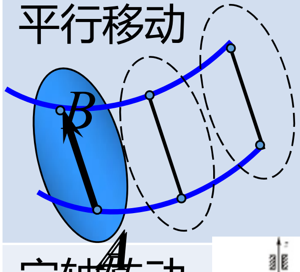
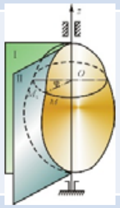
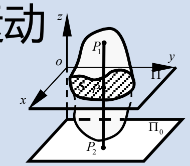

$$\boldsymbol{a}_M = \ddot{x}_M \boldsymbol{i} + \ddot{y}_M \boldsymbol{j} = \underbrace{\ddot{x}_A \boldsymbol{i} + \ddot{y}_A \boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{a}_A}$$

$$+r\dot{\varphi}^2\left[\underbrace{-\cos(\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{i} - \sin(\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{l}_2}\right] + r\ddot{\varphi}\left[\underbrace{-\sin(\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{i} + \cos(\varphi-\varphi_0)\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{l}_1}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A + r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{l}_2 + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{l}_1}$$

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

- **刚体典型运动总结** 刚体平移运动、定轴转动和平面运动的独立描述坐标、运动方程，以及任一点的速度和加速度表达式

| | 独立坐标 | 运动方程 | 点的速度 | 点的加速度 |
|---|---|---|---|---|
| 平行移动  | $x_A, y_A$ | $x_A = x_A(t)$<br>$y_A = y_A(t)$ | $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A$ | $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A$ |
| 定轴转动  | $\varphi$ | $\varphi = \varphi(t)$ | $\boldsymbol{v}_B = r\dot{\varphi}\boldsymbol{l}_1$ | $\boldsymbol{a}_B = r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{l}_2 + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{l}_1$ |
| 平面运动  | $x_A, y_A, \varphi$ | $x_A = x_A(t)$<br>$y_A = y_A(t)$<br>$\varphi = \varphi(t)$ | $\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + r\dot{\varphi}\boldsymbol{l}_1$ | $\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_A + r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{l}_2 + r\ddot{\varphi}\boldsymbol{l}_1$ |

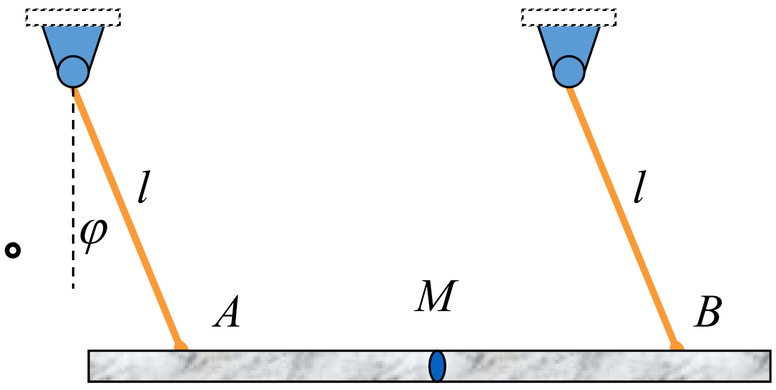
观察数学公式发现，平面运动可视为平移运动和定轴转动的加和

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

例题

已知： $\varphi=\varphi_0\sin\dfrac{\pi}{4}t,\quad l$

求$AB$杆的运动方程及$M$点的速度和加速度。




解： $AB$杆作平行移动

运动方程用A点的运动方程表示

用自然法表示

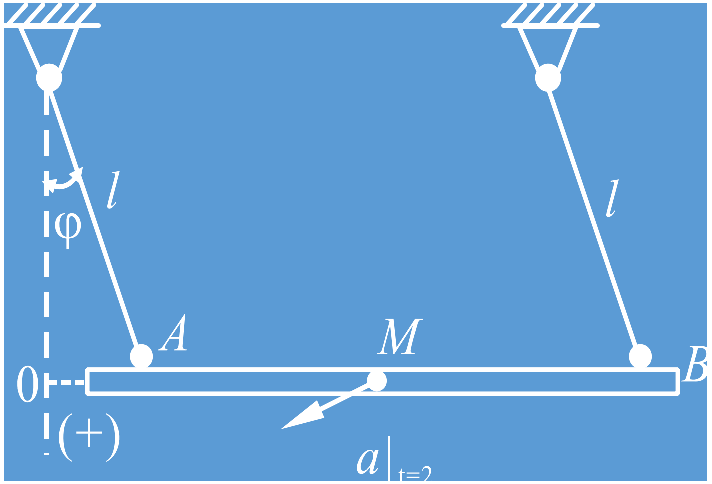
最低点为起点，运动方向为正方向

$$s=l\varphi=\varphi_0 l\sin\frac{\pi}{4}t$$

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

$M$点的速度与加速度与点$A$相同

速度 $$\upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4} l\varphi_0 \cos\frac{\pi}{4}t$$

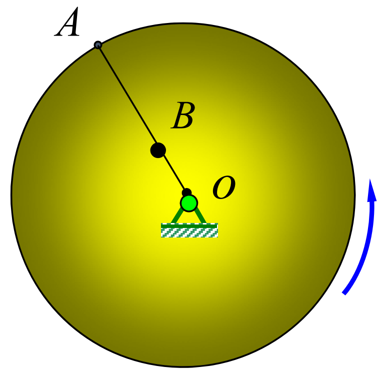



加速度

$$\begin{cases} a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\pi^2}{16} l\varphi_0 \sin\dfrac{\pi}{4}t \\ a_n = \dfrac{\upsilon^2}{l} = \dfrac{\pi^2}{16} l\varphi_0^2 \cos^2\dfrac{\pi}{4}t \end{cases}$$

# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

**例题** 飞轮以匀加速由静止状态开始转动，初始转角为零。当$t$=2s时，轮缘A点的速度为50cm/s，与$A$在同一半径上的$B$点的速度为10cm/s，$AB$=20cm。求飞轮的半径，角加速度，运动方程。




**解：** 飞轮作定轴转动

飞轮的运动方程 $\varphi=\varphi(t)$

飞轮匀加速由静止状态开始转动，初始转角为零

$\ddot{\varphi}=\alpha \Rightarrow \omega=\dot{\varphi}=\alpha t \Rightarrow \varphi=\frac{1}{2}\alpha t^2$

$$\begin{cases} v_A\big|_{t=2}=R\omega=50 \\ v_b\big|_{t=2}=(R-AB)\omega=10 \end{cases} \Rightarrow R=25\text{cm}$$

$\omega\big|_{t=2}=2=2\alpha \Rightarrow \alpha=1 \qquad \varphi=\frac{1}{2}t^2$

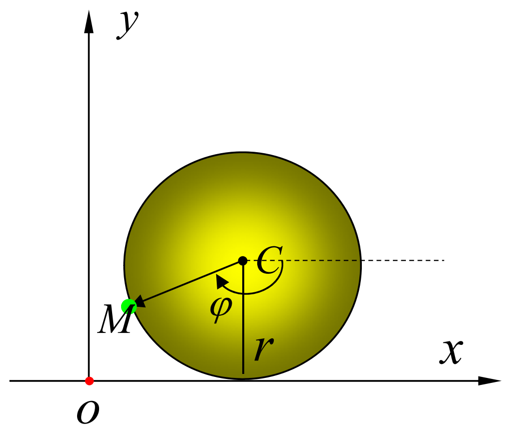
# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

例题　半径为$r$的车轮沿着平面纯滚动（无滑滚动），车轮中心的$C$的速度不变且等于$v$。已知初始瞬时与车轮固连的$CM$是铅直的，$M$点恰与地面接触，且固定轴$y$此时通过车轮中心，求车轮的运动方程。

解：车轮作平面运动

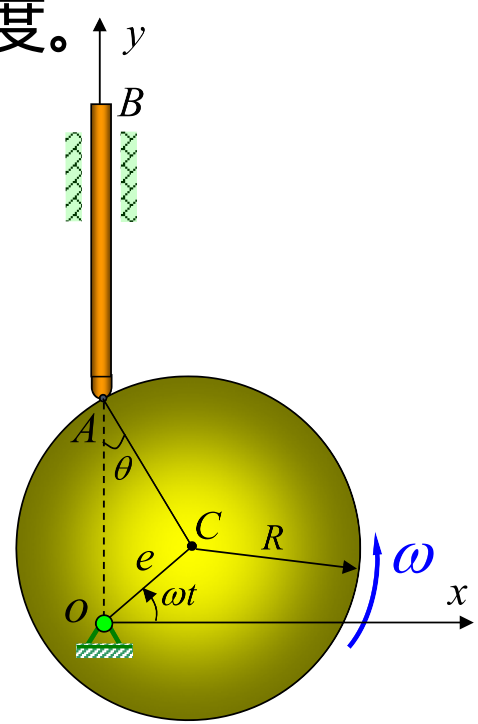
运动方程：选C点为基点，CM为基线

$$x_C = vt, y_C = r, \varphi = \frac{vt}{r} + \frac{\pi}{2}$$



# 2.2 单刚体的典型运动模式，其描述与简化

**例题** 图示凸轮机构。已知偏心轮的半径为$R$，转轴$O$到轮心$C$的距离$OC=e$，偏心轮的角速度为$\omega$，初始时，轮心$C$在水平轴上。求：推杆$AB$的运动方程及$B$点的速度和加速度。




**解：** 推杆作平行移动

运动方程用$A$点的运动方程表示

$$x_A = 0, y_A = e\sin\omega t + R\cos\theta$$

$$\frac{e}{\sin\theta} = \frac{R}{\cos\omega t} \qquad \sin\theta = \frac{e}{R}\cos\omega t$$

$$y_A = e\sin\omega t + R\sqrt{1 - \frac{e^2}{R^2}\cos^2\omega t} \qquad v_B = \dot{y}_A,\ a_B = \ddot{y}_A$$