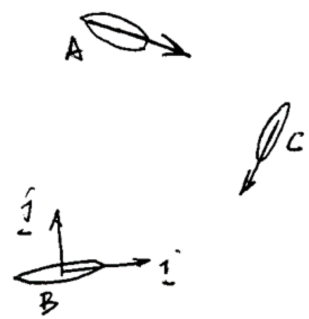
4.2 应用

点的速度和加速度合成定理是为了解决刚体系运动过渡问题而引入的，但其本身就具有重要的意义。这里，首先举例说明之，而后讨论其在刚体系运动分析中的应用。

- 算例说明定理本身的意义——例1

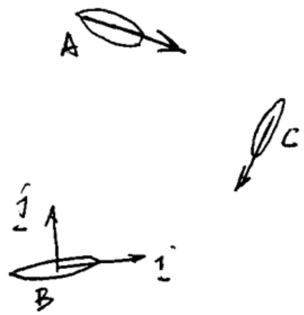
例题 小船相对运动问题。A、B、C三船在邻近海域直线行驶（在地球上观察），今在B船上测得A、C两船的速度分别为 $\boldsymbol{v}_{AB}=14\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}_{CB}=-16\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为置于B船上的直角坐标轴x, y的单位方向矢。试求在C船上测得的A船的速度 。



4.2 应用

解：注意到，在速度合成定理中的三个速度中，有两个是绝对速度（在定系中观察），另一个是相对速度（在动系中观察）。因此，应取*B*船为定系，*C*船为动系，*A*船为动点。绝对速度即为 $\boldsymbol{v}_{AB}$ ；动系（*C*船）平移，因此牵连速度等于 $\boldsymbol{v}_{CB}$；相对速度为在*C*船上测得的*A*船的速度，记为 $\boldsymbol{v}_{AC}$ 。由速度合成定理知，

$$\boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{v}_{CB} + \boldsymbol{v}_{AC}$$



$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_{AC} = \boldsymbol{v}_{AB} - \boldsymbol{v}_{CB} = 30\boldsymbol{i} + 13\boldsymbol{j}$$

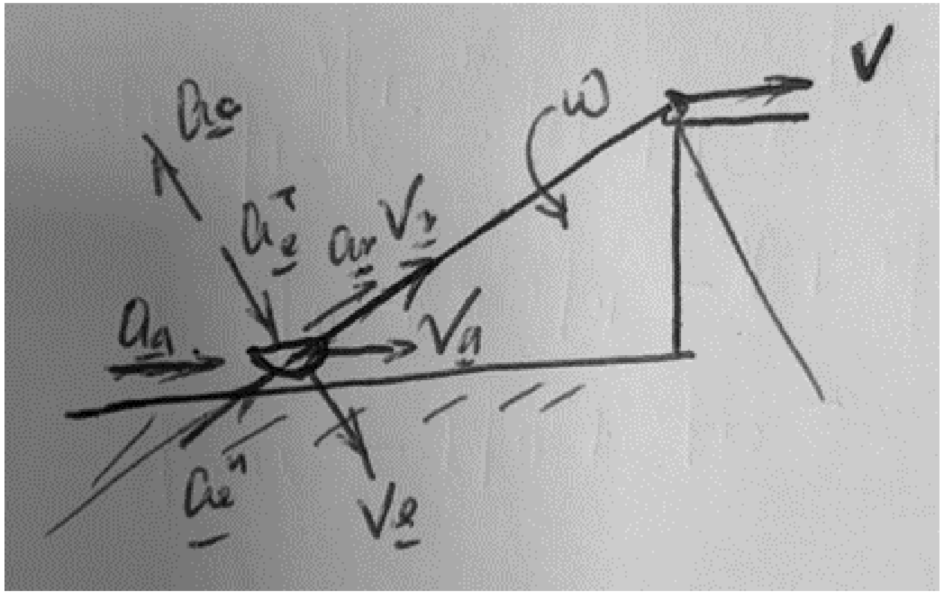
此处的表示采用了置于*B*船上的直角坐标系，如果需要，可通过*B*船坐标系和*C*船坐标系的关系改写之。

思考 若所测量的是加速度，如何求解？若*C*船沿圆弧航行，如何求解？

4.2 应用

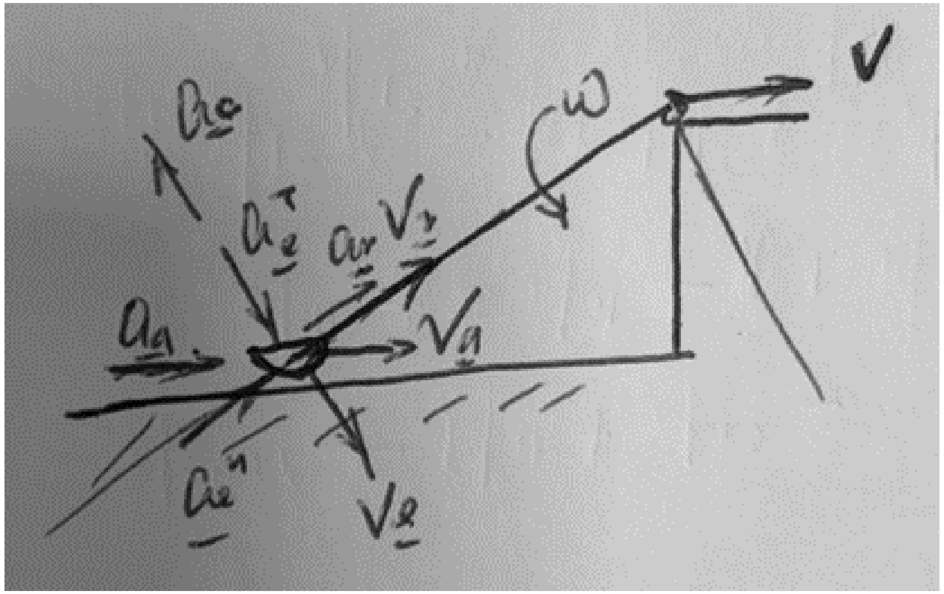
- 算例说明定理本身的意义——例2

例题　河岸拉船问题。已知绳端速度（恒定），试求小船的速度和加速度。



4.2 应用

解：　取小船为动点，取地面为定系，动系固连于滑轮中心且其上一条直线始终与绳索保持平行。



速度分析：

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

	$\boldsymbol{v}_a$	$\boldsymbol{v}_e$	$\boldsymbol{v}_r$
大小	?	?	√
方位	√	√	√

$$v_r = v$$

投影得到

$$v_a \cos\theta = v$$

$$v_a \sin\theta = v_e$$

$$v_a = \frac{v}{\cos\theta}$$

动系的角速度（也即绳子摆动的角速度）为

$$\omega = \frac{v_e}{h/\sin\theta} = \frac{v}{h}\sin\theta\tan\theta$$

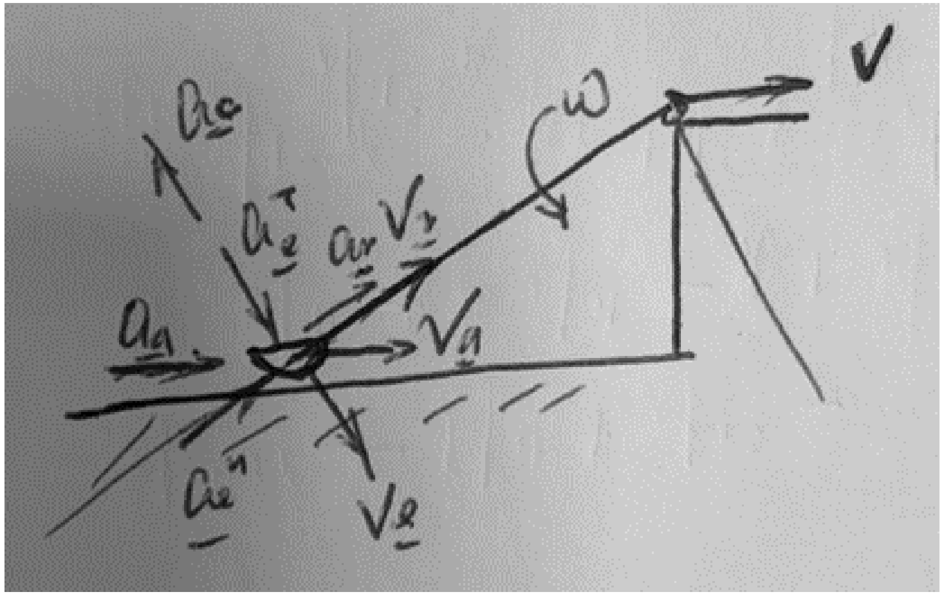
4.2 应用

加速度分析：

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C$$

大小	?	?	√	√	√
方位	√	√	√	√	√

$$a_e^n = \omega^2 \frac{h}{\sin\theta}, a_r = 0, a_C = 2\omega v$$



投影得到小船的绝对加速度和牵连加速度的切向分量，进而给出绳子的角加速度。

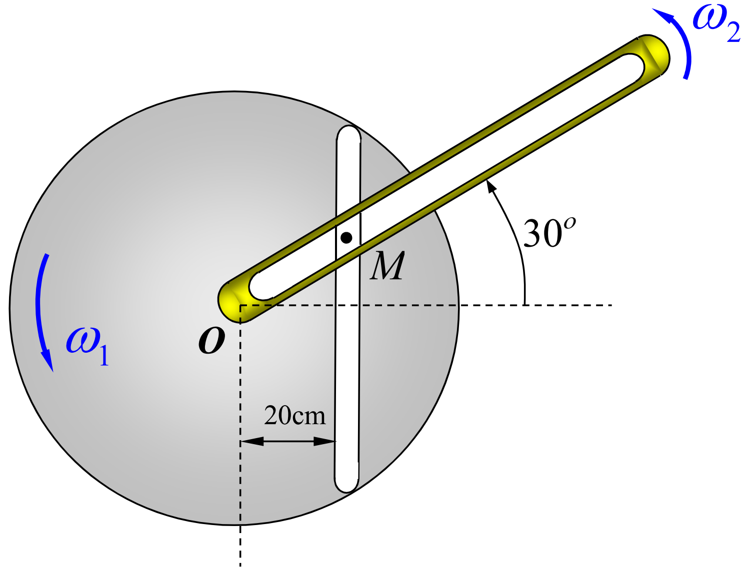
思考　如果滑轮尺寸不能忽略，如何做速度和加速度分析？

4.2 应用

- 算例说明定理本身的意义——例3

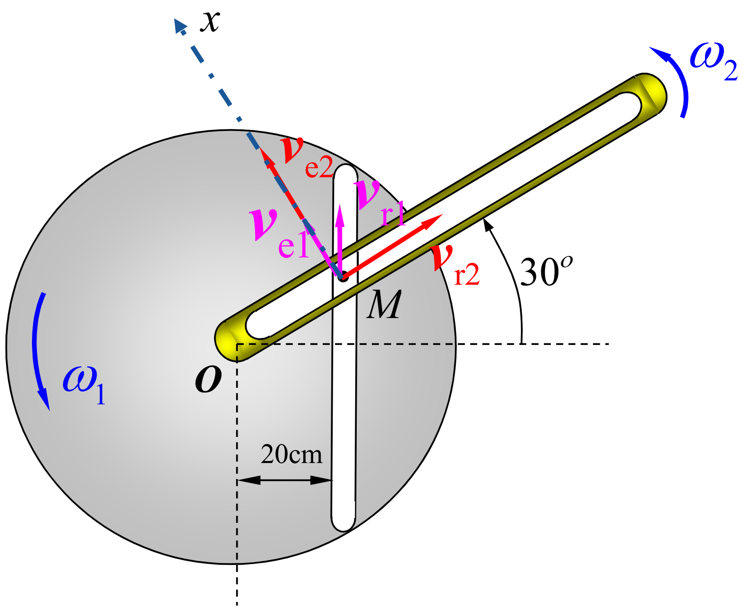
例题

交点问题。如图所示机构，圆盘与导杆OA绕同一轴O转动，并由圆盘上的导槽与销钉控制运动，销钉M可沿两导槽相对运动。已知圆盘和导杆的角速度分别为 $\omega_1 = 9\ \text{rad/s},\ \omega_2 = 3\ \text{rad/s}$ ，试求图示位置销钉M的速度和加速度。



4.2 应用

解： 取销钉M为动点，分别取圆盘和导杆为动系。



速度分析：

$$\boldsymbol{v}_M=\boldsymbol{v}_{e_1}+\boldsymbol{v}_{r_1}=\boldsymbol{v}_{e_2}+\boldsymbol{v}_{r_2}$$

大小	?	√	?	√	?
方位	?	√	√	√	√

$$v_{e_1}=OM\cdot\omega_1=120\sqrt{3},v_{e_2}=OM\cdot\omega_2=40\sqrt{3}$$

将后一等式沿x轴投影得到，

$$v_{e_2}=v_{e_1}+v_{r_1}\cos 30^\circ \quad\Rightarrow\quad v_{r_1}=-160$$

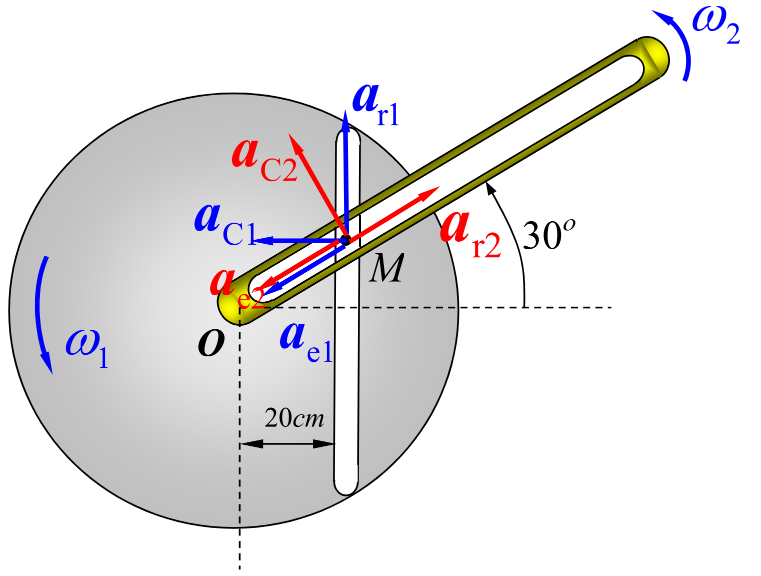
将后一等式沿OM方向投影得到，

$$v_{r_2}=v_{r_1}\cos 60^\circ=-80$$

由前一等式可计算出动点的绝对速度 $\boldsymbol{v}_M$

4.2 应用

加速度分析：



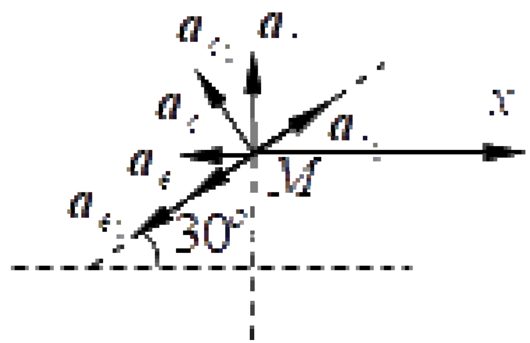
$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_{e_1} + \boldsymbol{a}_{r_1} + \boldsymbol{a}_{C_1} = \boldsymbol{a}_{e_2} + \boldsymbol{a}_{r_2} + \boldsymbol{a}_{C_2}$$

大小	?	√	?	√	√	?	√
方位	?	√	√	√	√	√	√

$$a_{e_1} = OM\omega_1^2 = 1080\sqrt{3}, a_{e_2} = OM\omega_2^2 = 120\sqrt{3}, a_{C_1} = 2\omega_1 v_{r_1} = -2880,$$

$$a_{C_2} = 2\omega_2 v_{r_2} = -480$$

将后一等式沿x轴投影，得



$$a_{r_2}\cos 30^\circ - a_{C_2}\cos 60^\circ = -a_{C_1} - a_{e_1}\cos 30^\circ \quad \Rightarrow \quad a_{r_2} = 800\sqrt{3}$$

进一步地，可得 a_{r_1} 和动点的绝对加速度 $\boldsymbol{a}_M$

评述： 两物体相互接触，无固定接触点，无特殊点，可采用“一个动点，两个动系”联合求解。

4.2 应用

- 运动合成定理用于刚体系运动分析

将运动合成定理与上节矢量分析方法相结合，用于刚体系的运动分析。将通过算例说明，二者的结合构成了刚体系运动分析的完备方法，重点考察包含接触式和滑移式约束的刚体系。

这里，再次强调约束刚体系的运动过渡。

- 对于铰联式约束，两个（或者多个）铰接点的速度相等、加速度相等；
- 对于无滑接触式约束，两接触点的速度相同，加速度在共切向方向上的投影相等。

约束刚体系的分析原则如下：

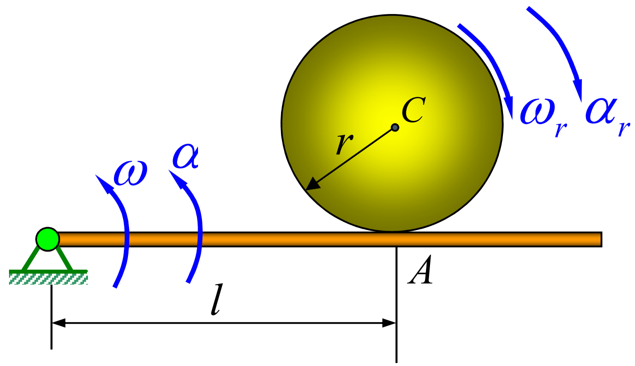
- 一般从运动已知构件入手，按运动传递关系次第分析，也可能需迂回分析；
- 对于无滑接触式约束，速度分析直接过渡，加速度分析需采用运动合成方法；
- 对于滑移式约束，速度分析和加速度分析都需采用运动合成方法。

4.2 应用

- 运动合成定理用于刚体系运动分析——例4

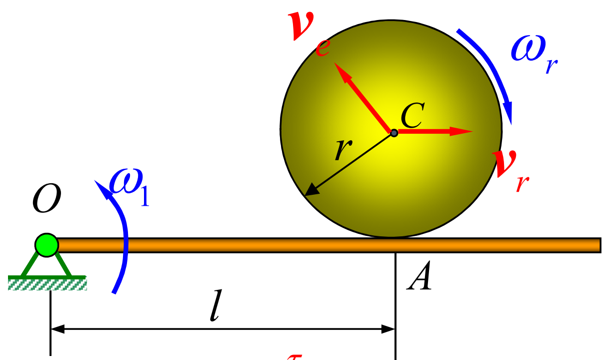
例题

无滑接触式约束体系。杆件定轴转动，已知角速度为ω，角加速度α。圆轮在杆上纯滚，在固结于杆的参考系中观察，轮心C的速度为$\boldsymbol{v}_r$，加速度为 $\boldsymbol{a}_r$。求轮心C点的速度和加速度。



4.2 应用

解8 刚体系由两个刚体组成，独立描述坐标数目为2，可选为杆件的转角，以及在杆件上观察的轮心沿杆轴的坐标。由过程标量分析理论知，刚体系上任一点的速度都可由体系位置、杆件的角速度 和在固结于杆的参考系中观察到的轮心速度表出；任一点的加速度都可由体系位置、杆件的角速度和角加速度ω 、α ，以及在固结于杆的参考系中观察到的轮心速度和加速度 $\boldsymbol{v}_r$ 、$\boldsymbol{a}_r$表出。前文已经指出，确实可以用前文矢量方法完成速度分析，但无法完成加速度分析。这里，采用运动合成方法解决之



速度分析： 取C为动点，动系固结于杆上。由速度合成定理知，

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

$$v_e=OC\cdot\omega, v_r=r\cdot\omega_r$$

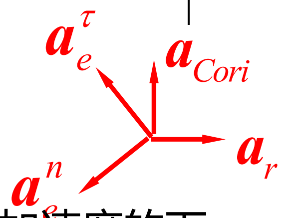
投影求出 $\boldsymbol{v}_C$

加速度分析：由加速度合成定理知，

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_e^\tau+\boldsymbol{a}_e^n+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_{Cori}$$

$$a_e^\tau=OC\alpha, a_e^n=OC\omega^2, a_{Cori}=2\omega v_r$$

投影求出 $\boldsymbol{a}_C$



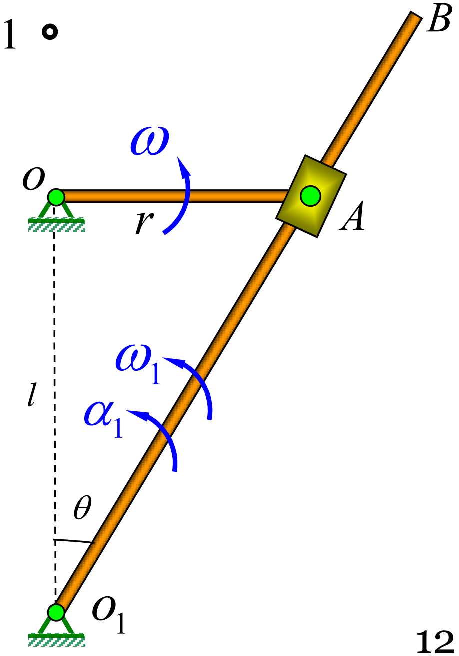
注意，当字母C作为某点的标记出现时，一定不要与科氏加速度下标混淆。此时，建议将科氏加速度的下标“C”替换为“cori”

4.2 应用

- 运动合成定理用于刚体系运动分析——例5

例题

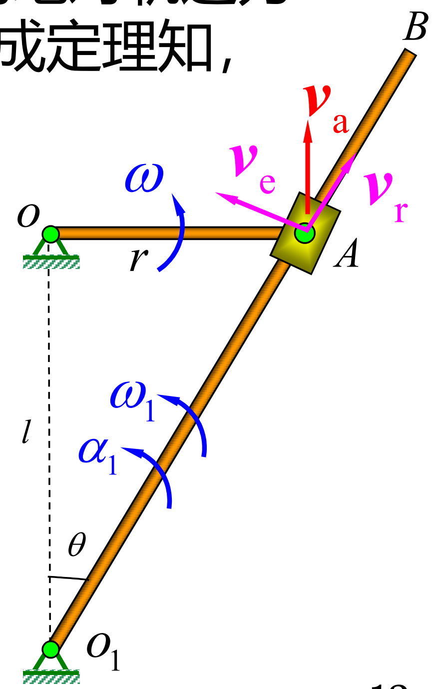
牛头刨床急回机构。曲柄OA的A端与滑块铰联，当曲柄OA绕轴O转动时，滑块在摇杆O_1B上滑动，并带动摇杆O_1B绕轴O_1摆动。曲柄长$OA=r$，以匀角速度ω转动，两轴间距$OO_1=l$。试求当曲柄转至水平位置时，摇杆的角速度ω_1和角加速度α_1。



4.2 应用

解 8 刚体系由两个刚体通过铰链和套筒约束，独立描述坐标数目为1，取为曲柄的转角。由过程标量分析理论知，可通过体系位置、曲柄的角速度和角加速度表出刚体系的所有速度和加速度信息。

速度分析：取曲柄OA的端点A为动点，动系固结于摇杆O_1B上。点A的绝对轨迹为以O为圆心OA为半径的圆弧线，相对轨迹为斜直线，牵连点的绝对轨迹为以O_1为圆心O_1A为半径的圆弧线。速度分析如图，由速度合成定理知，



$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

大小	√	?	?
方位	√	√	√

$$v_a = r\omega$$

$$v_e = v_a \sin\varphi = r\omega \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

$$v_r = v_a \cos\varphi = r\omega \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$

进而得，$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{r^2}{r^2 + l^2}\omega$$

4.2 应用

加速度分析： 加速度分析如图，由加速度合成定理知，

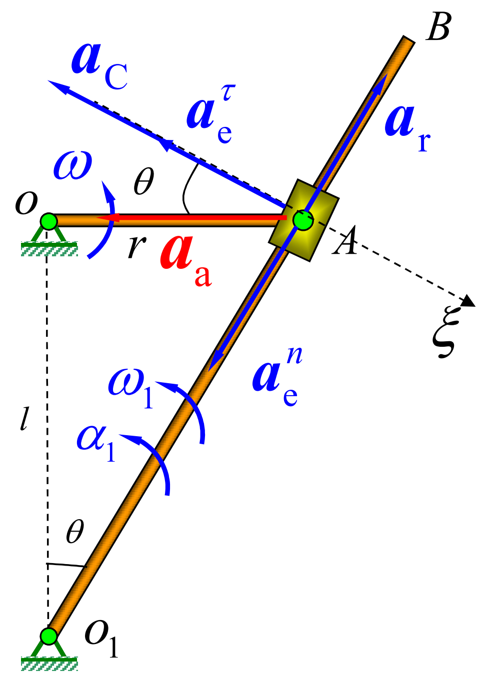
$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_{Cori}$$

大小	√	?	√	?	√
方位	√	√	√	√	√

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_a^n \qquad a_a^n = r\omega^2$$

$$a_e^n = O_1A \cdot \omega_1^2 = \frac{r^4}{\left(r^2 + l^2\right)^{3/2}}\omega^2$$

$$a_{Cori} = 2\omega_1 v_r \sin 90^\circ = \frac{2\omega^2 r^3 l}{\left(r^2 + l^2\right)^{3/2}}$$



上式向 ξ 轴投影得

$$-a_a^n \cos\varphi = -a_e^\tau - a_{Cori} \;\Rightarrow\; a_e^\tau = \frac{rl\left(l^2 - r^2\right)}{\left(r^2 + l^2\right)^{3/2}}\omega^2 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \frac{a_e^\tau}{O_1A} = \frac{rl\left(l^2 - r^2\right)}{\left(r^2 + l^2\right)^2}\omega^2$$

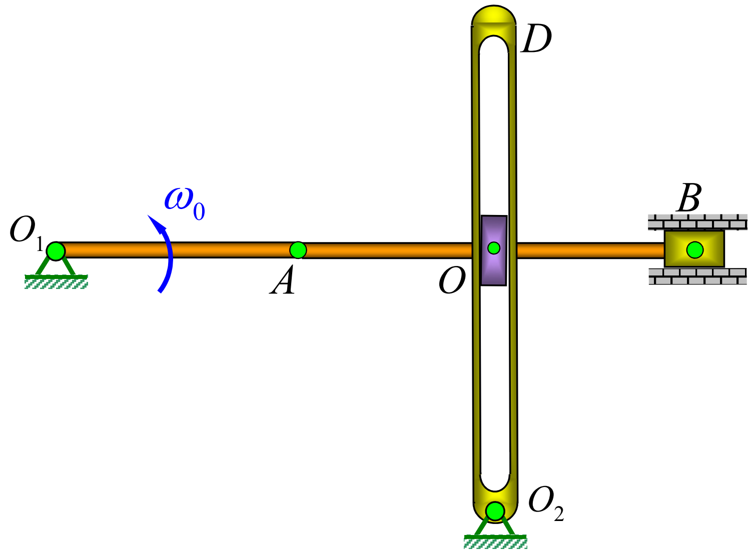
摇杆O_1B的角加速度的转向为逆时针

评述：两物体接触，其中有一个物体上的接触点不变，常选该不变接触点为动点，动系固结于另一物体上。

4.2 应用

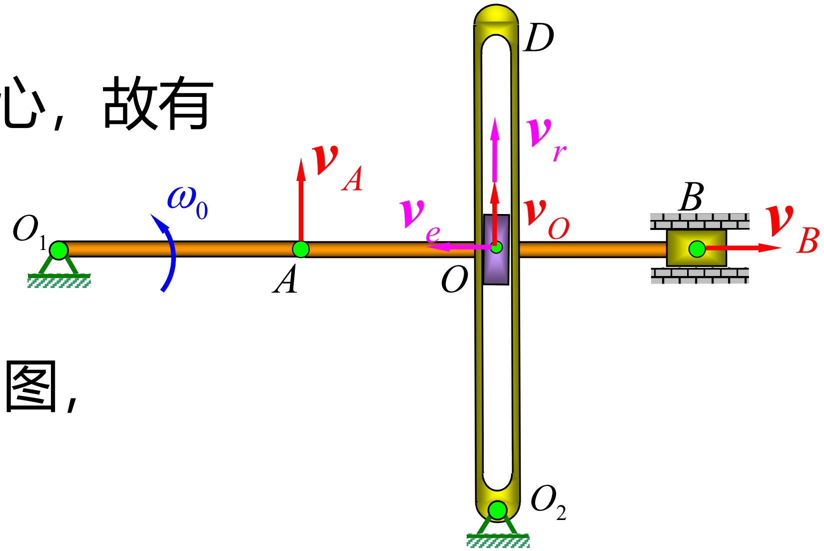
- 运动合成定理用于刚体系运动分析——例6

例题 图示机构，销钉O固定在连杆AB上，并可在滑槽杆O_2D中滑动，曲柄O_1A以匀角速度ω_0绕O_1轴转动。在图示瞬时，O_1A与AB处于水平位置，O_2D处于铅直位置，且$O_1A=AO=OB=O_2O=r$。试求该瞬时AB杆和O_2D杆的角速度和角加速度。



4.2 应用

解 8 刚体系由三个刚体组成，受铰链和滑道约束，独立描述坐标数目为1，取为曲柄的转角。由过程标量分析理论知，可由体系位置、曲柄角速度和角加速度表出刚体系的所有速度和加速度信息。



速度分析： A点速度为 $v_A = r\omega_0$ 。B点为AB杆的速度瞬心，故有

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{2r} = \frac{\omega_0}{2}, v_B = 0$$

选销钉O为动点，动系固结于O_2D杆上，速度分析如图，由速度合成定理知，

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$$

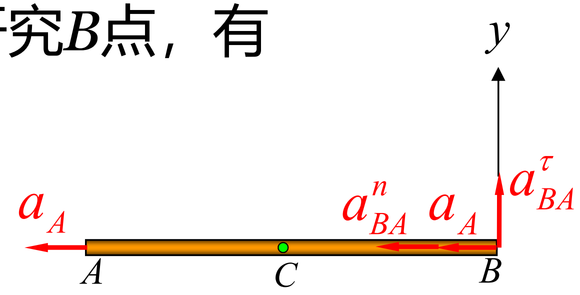
	$\boldsymbol{v}_a$	$\boldsymbol{v}_e$	$\boldsymbol{v}_r$
大小	√	?	?
方位	√	√	√

$$v_a = v_O = r\omega_{AB}$$ ⟹ $$v_e = 0, v_r = v_O$$

进而得， $$\omega_{O_2D} = \frac{v_e}{r} = 0$$

4.2 应用

加速度分析： A点的加速度为 $a_A^\tau = 0, a_A^n = r\omega_0^2$ 。以A为基点研究B点，有

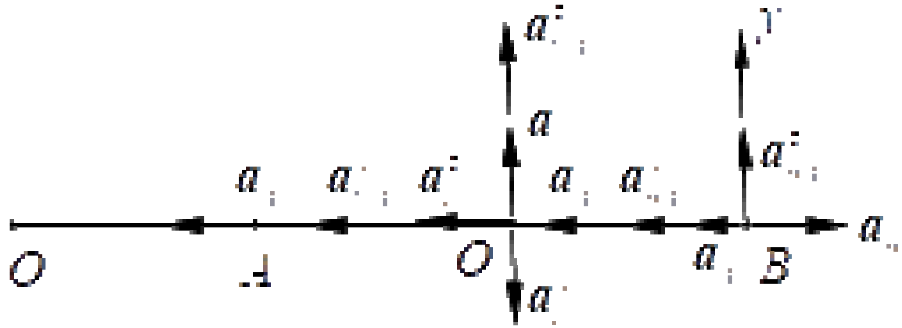


$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A^\tau + \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_{BA}^\tau + \boldsymbol{a}_{BA}^n$$

大小	?	√	√	?	√
方位	√	√	√	√	√

向y轴投影得 $a_{BA}^\tau = 0$ ➡ $\alpha_{AB} = \dfrac{a_{BA}^\tau}{AB} = 0$

以A为基点研究O点，其加速度为



$$\boldsymbol{a}_O = \boldsymbol{a}_A^\tau + \boldsymbol{a}_A^n + \boldsymbol{a}_{OA}^\tau + \boldsymbol{a}_{OA}^n$$

大小	?	√	√	√	√
方位	?	√	√	√	√

➡ $\boldsymbol{a}_O$

$a_{OA}^\tau = r\alpha_{AB} = 0, a_{OA}^n = r\omega_{AB}^2$

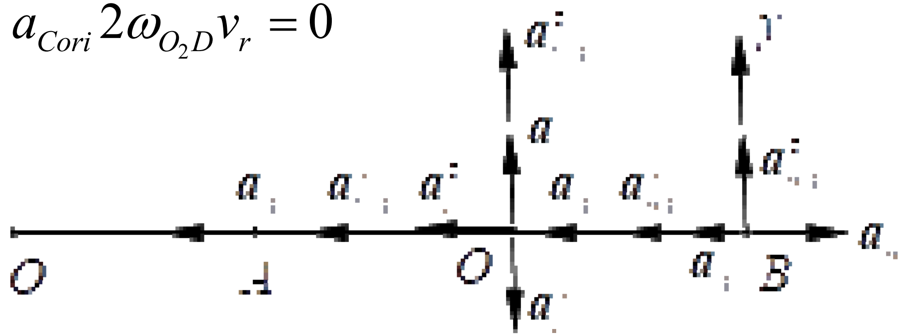
4.2 应用

取销钉O为动点，动系固结于O_2D杆上，由加速度合成定理知

$$\boldsymbol{a}_O = \boldsymbol{a}_e^\tau + \boldsymbol{a}_e^n + \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_{Cori}$$

大小	√	?	√	?	√
方位	√	√	√	√	√

$$a_e^n = r \cdot \omega_{O_2D} = 0,\ a_{Cori} 2\omega_{O_2D} v_r = 0$$



沿水平向投影得

$$a_e^\tau = \frac{5}{4} r\omega_0^2$$

$$\alpha_{O_2D} = \frac{a_e^\tau}{r} = \frac{5}{4}\omega_0^2$$

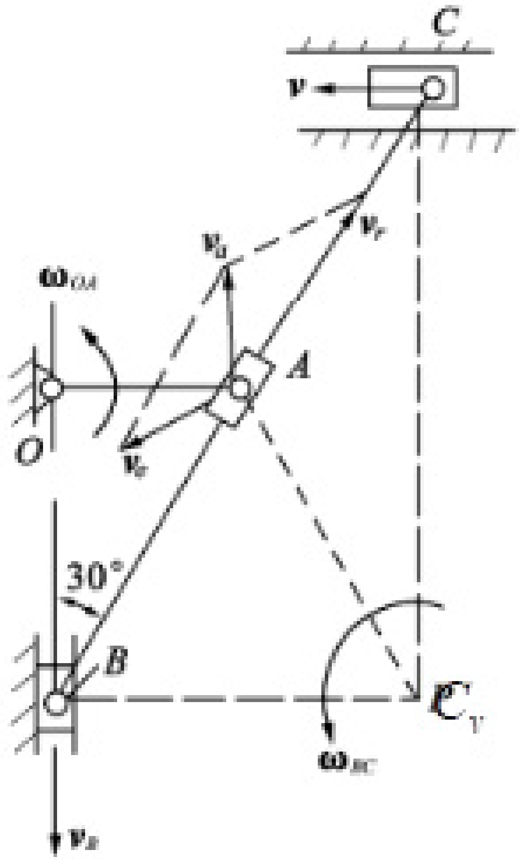
O_2D杆的角加速度的转向为逆时针

评述：可将后两式直接联立，无需求解 $\boldsymbol{a}_O$ ，直接投影求出所需

4.2 应用

- 运动合成定理用于刚体系运动分析——例7

例题 图示机构，滑块C以匀速度$\boldsymbol{v}$沿水平导槽滑动，滑块B沿铅直导槽滑动，套筒A与曲柄OA连接，可在杆BC上滑动。图示瞬时，杆BC与铅垂线夹角30°，曲柄OA水平，滑块A位于杆BC中点。已知 $BC=4r$，$OA=r$。试求该瞬时OA杆的角速度与角加速度。



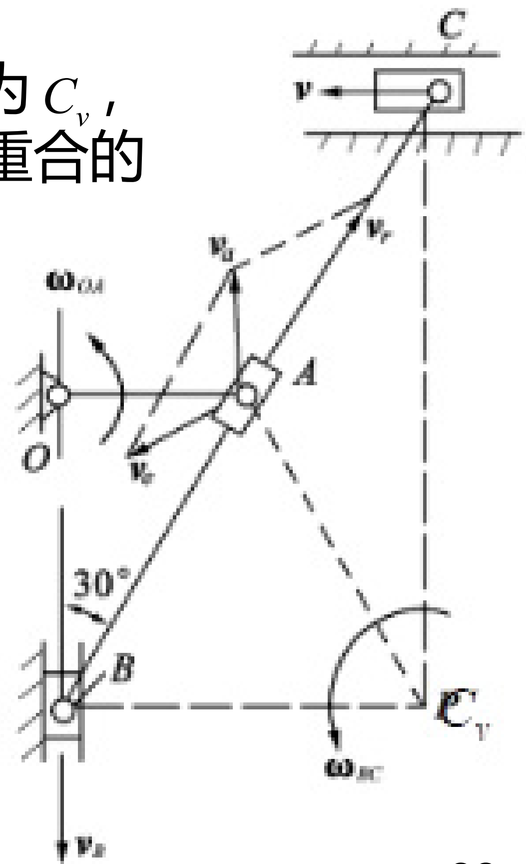
4.2 应用

解 8 刚体系由两个刚体组成，由铰链和滑块约束，独立描述坐标数目为1，选为滑块C的位置坐标。在理论上，可由体系位置，滑块C的速度和加速度表出刚体系的所有速度和加速度信息。

速度分析： 研究杆BC，端点B和C的速度方位已知，杆BC速度瞬心为 C_v，杆BC的角速度为 $\omega_{BC}=\dfrac{v}{CC_v}=\dfrac{v}{2\sqrt{3}r}$ 。杆BC上与套筒A相重合的点 A' 的速度为

$$v_{A'}=AC_v\cdot\omega_{BD}=2r\cdot\frac{v}{2\sqrt{3}r}=\frac{\sqrt{3}}{3}v$$

方向垂直 AC_v，指向左下



取套筒A为动点，动系固结于杆BC上，速度分析如图。牵连速度 $\boldsymbol{v}_e$ 即为点 A' 的速度 $\boldsymbol{v}_{A'}$。由速度合成定理知，

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

大小	?	√	?
方位	√	√	√

$$\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{A'}$$

投影

$$v_a=v_{A'}=\frac{\sqrt{3}}{3}v$$

$$v_r=2v_a\cos 30^\circ=\frac{v}{2}$$

$$\omega_{OA}=\frac{v_a}{OA}=\frac{\sqrt{3}v}{3r}$$

转向为逆时针

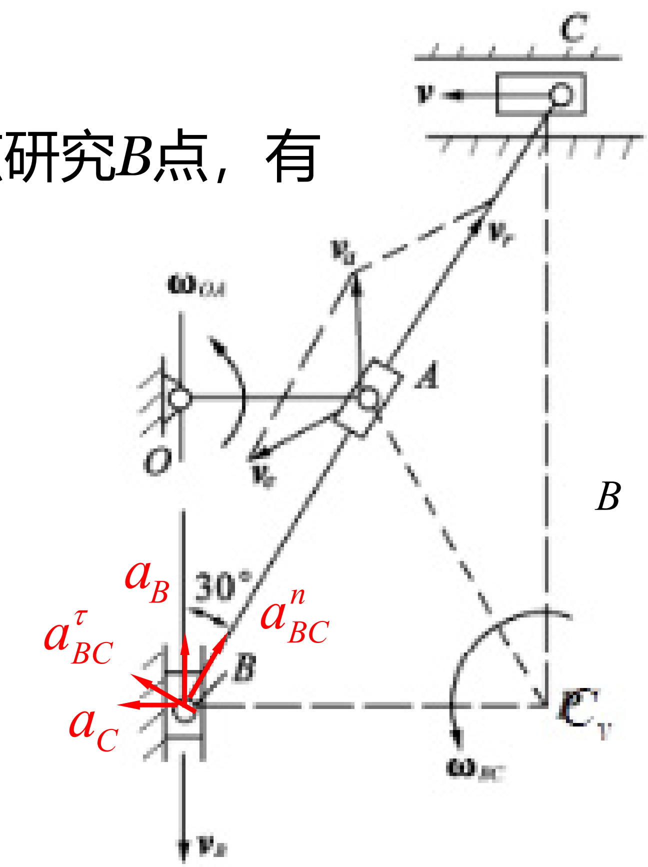
4.2 应用

加速度分析：研究BC杆，C点加速度已知，$a_C = 0$。以C为基点研究B点，有

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{BC}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{BC}^{n}$$

大小	?	√	?	√
方位	√	√	√	√

$$a_{BC}^{n} = 4r\omega_{BC}^{2} = \frac{v^2}{3r}$$



投影得 $a_{BC}^{\tau} = a_{BC}^{n}\mathrm{tg}30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}v^2}{9r}$ ➡ $\alpha_{BC} = \dfrac{a_{BC}^{\tau}}{4r} = \dfrac{\sqrt{3}v^2}{36r^2}$

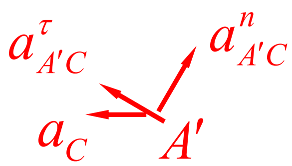
转向为顺时针

以C为基点研究杆CB上 A' 点，有

$$\boldsymbol{a}_{A'} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{A'C}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{A'C}^{n}$$

大小	?	√	√	√
方位	?	√	√	√

➡ $\boldsymbol{a}_{A'}$



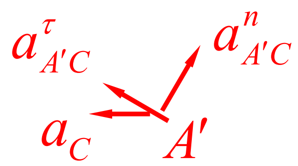
$$a_{A'C}^{\tau} = 2r\alpha_{BC}, a_{A'C}^{n} = 2r\omega_{BC}^{2}$$

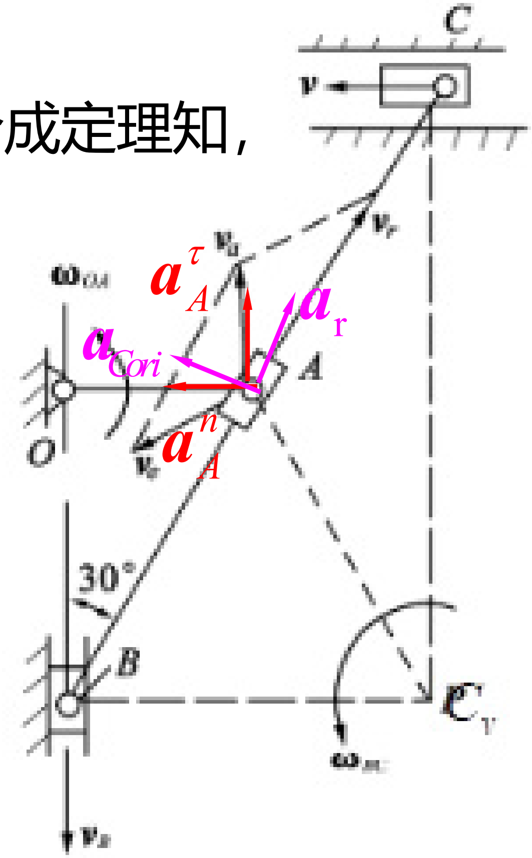
4.2 应用

套筒A为动点，动系固结在杆BC上，加速度分析如图。由加速度合成定理知，

$$\boldsymbol{a}_A^\tau+\boldsymbol{a}_A^n=\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_{Cori}=\boldsymbol{a}_{A'}+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_{Cori}$$

	$\boldsymbol{a}_A^\tau$	$\boldsymbol{a}_A^n$	$\boldsymbol{a}_{A'}$	$\boldsymbol{a}_r$	$\boldsymbol{a}_{Cori}$
大小	?	√	√	?	√
方位	√	√	√	√	√



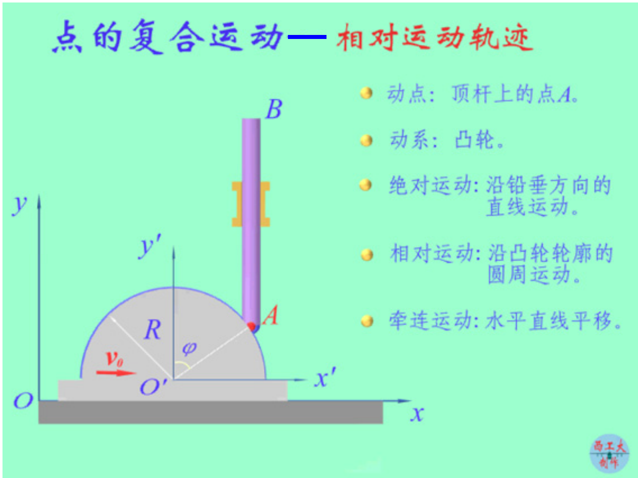


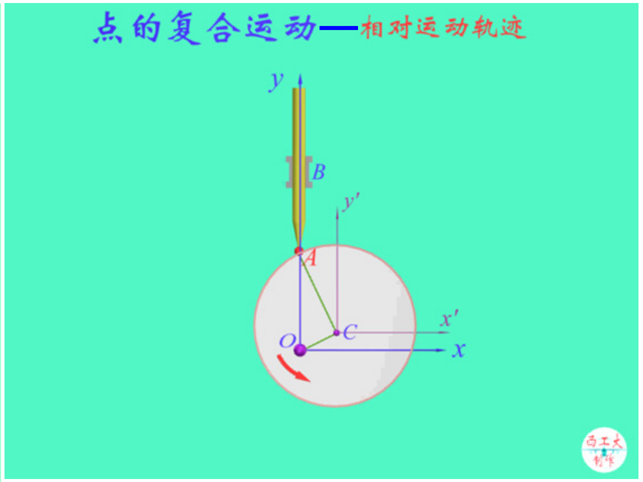
$$a_A^n=r\cdot\omega_{OA}^2,a_{Cori}=2\omega_{BC}v_r$$

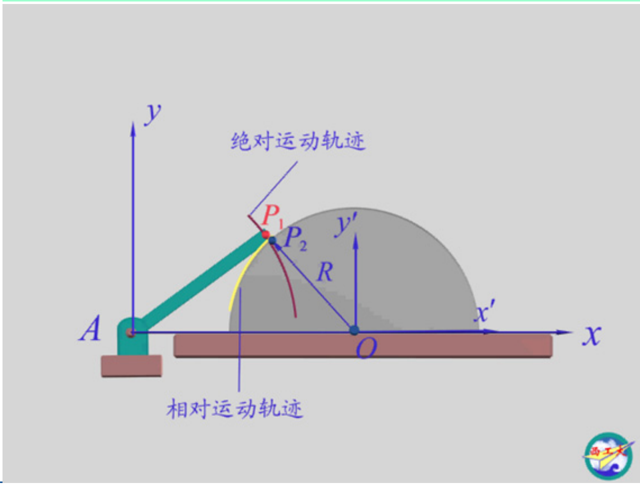
投影得 $\boldsymbol{a}_A^\tau$ ➡ $\alpha_{OA}=\dfrac{a_A^\tau}{r}$ 转向为逆时针

评述：动系发生平面运动，需采用单刚体运动的矢量分析方法确定牵连速度和牵连加速度信息。

4.2 应用

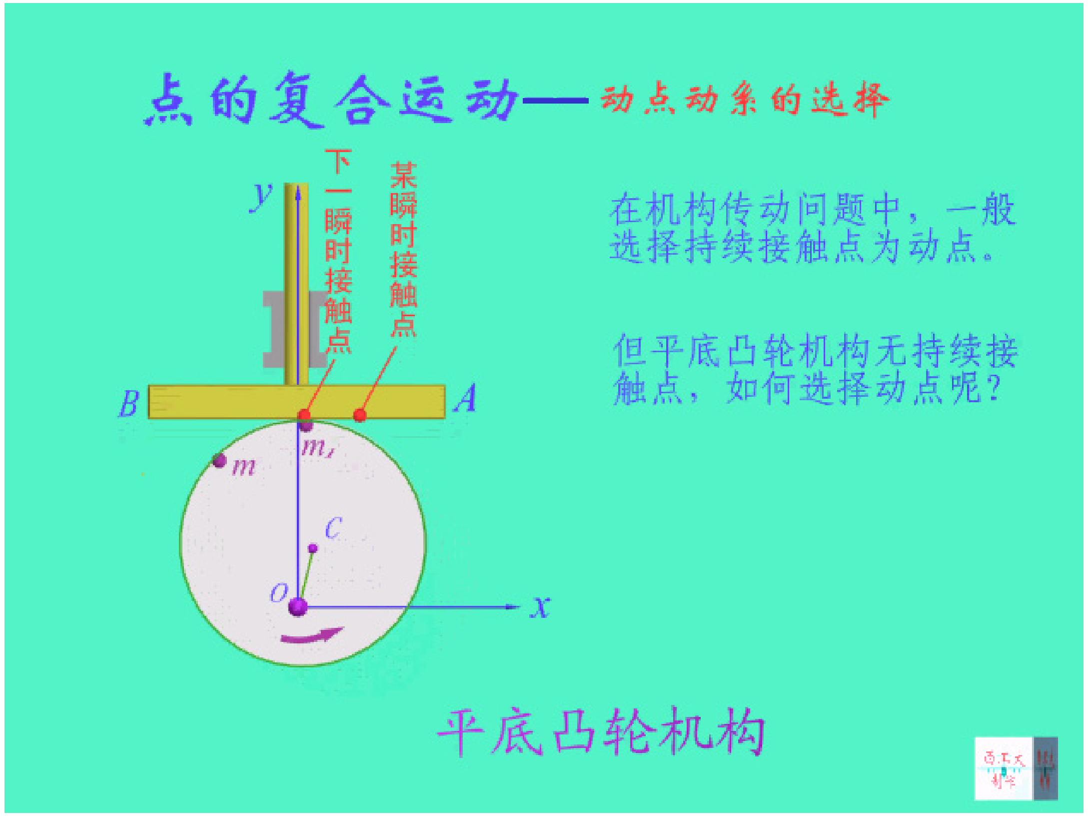






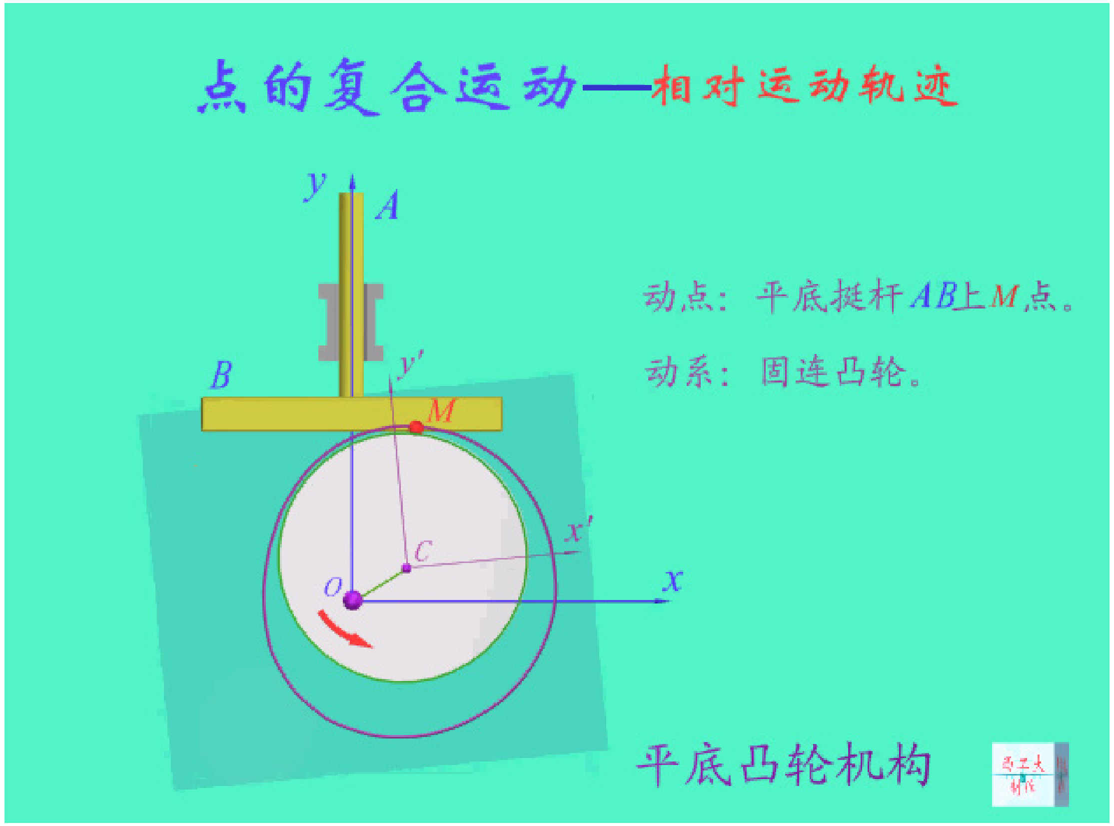
试比较其共同点

4.2 应用

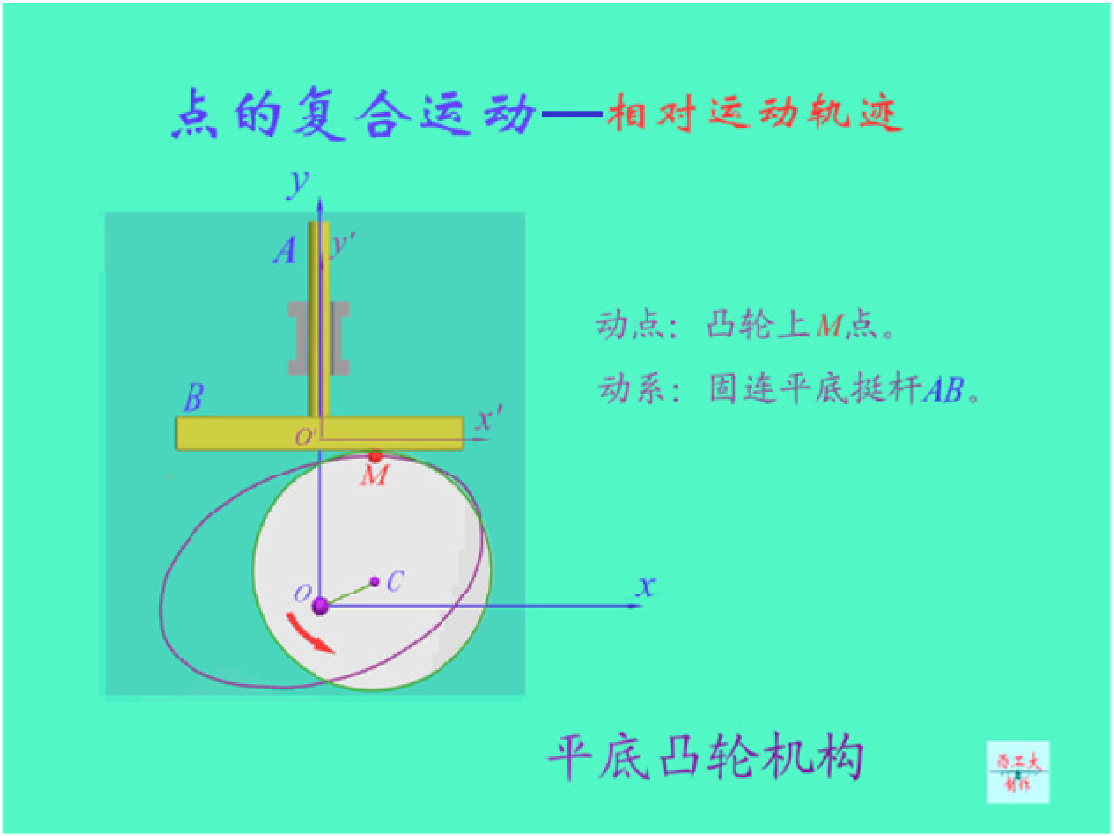


点的复合运动——动点动系的选择
下一瞬时接触点
某瞬时接触点
y
B
A
m
C
O
x
在机构传动问题中，一般选择持续接触点为动点。
但平底凸轮机构无持续接触点，如何选择动点呢？
平底凸轮机构

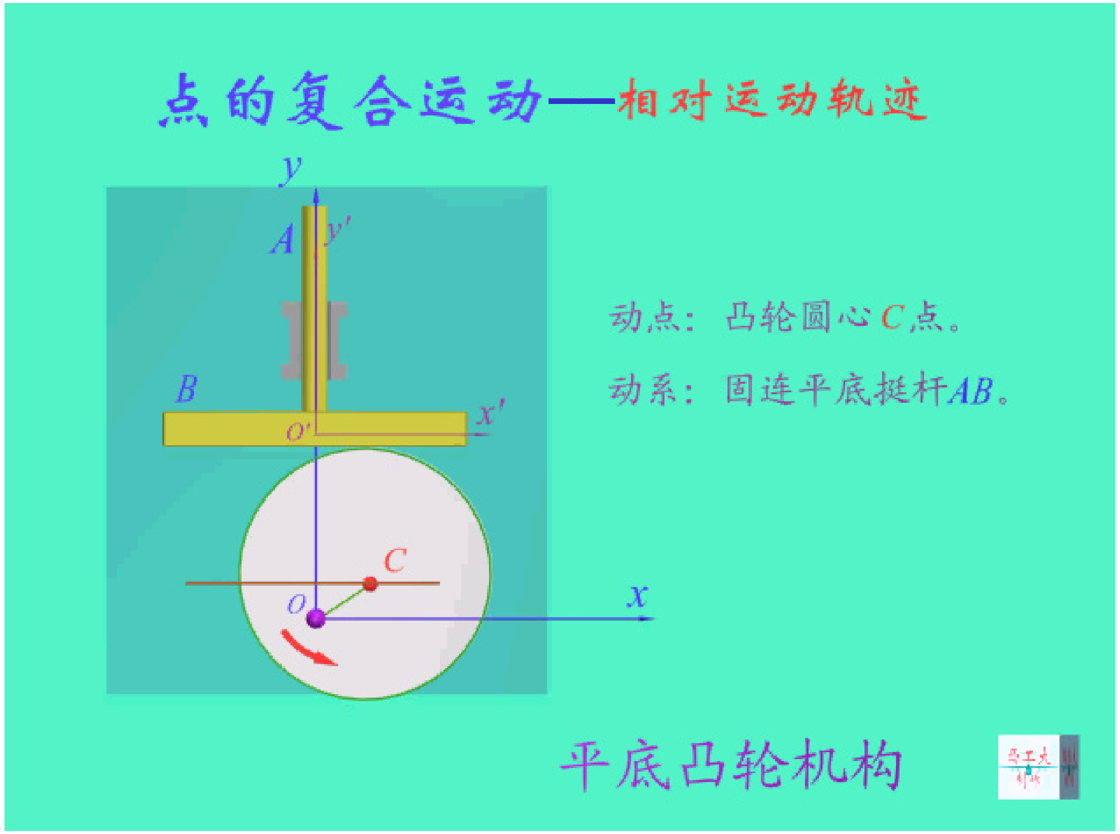
4.2 应用



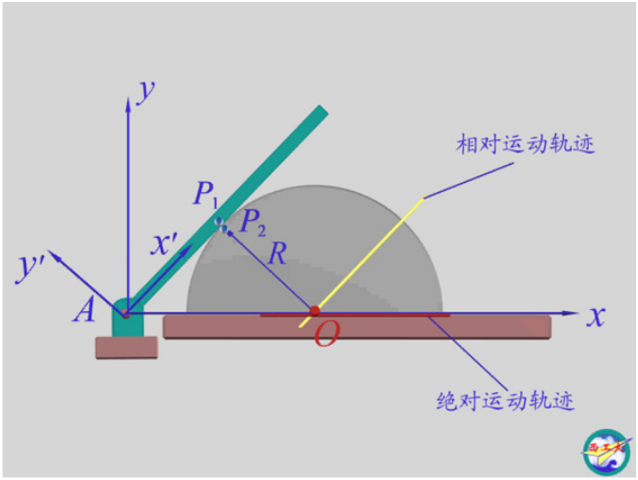
4.2 应用

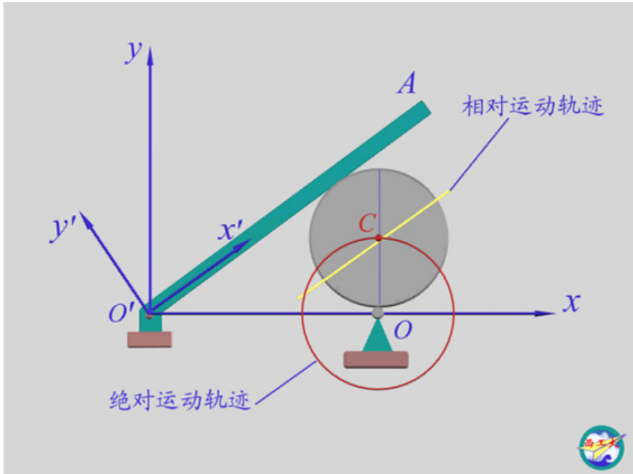


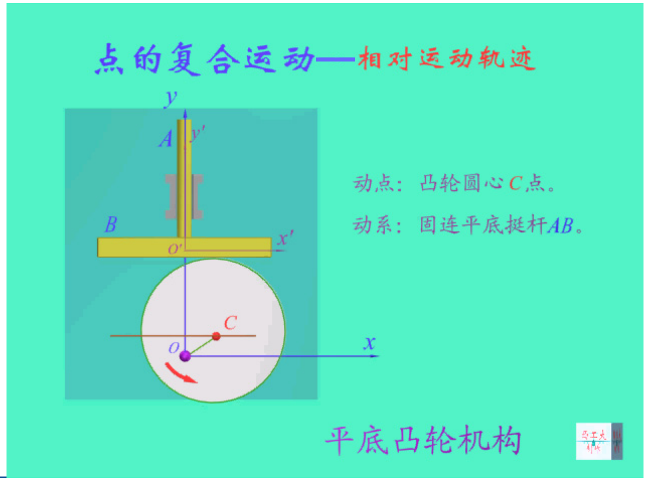
4.2 应用



4.2 应用







试比较其共同点

4.2 应用

动点和动系的选择

原则： (1)动点对动系要有相对运动。

(2) 动点的相对轨迹要容易确定。

几大类：

(1) 两物接触，有一固定接触点，可选该点为动点，另一物为动系。

(2) 两物体接触，无固定接触点，但有特殊点(圆心)，选特殊点为动点，其相对轨迹简明。（如平底凸轮机构)

(3) 两物接触，无固定接触点，又无特殊点，采用一个动点，两个动系。