2-4 刚体上力系的简化

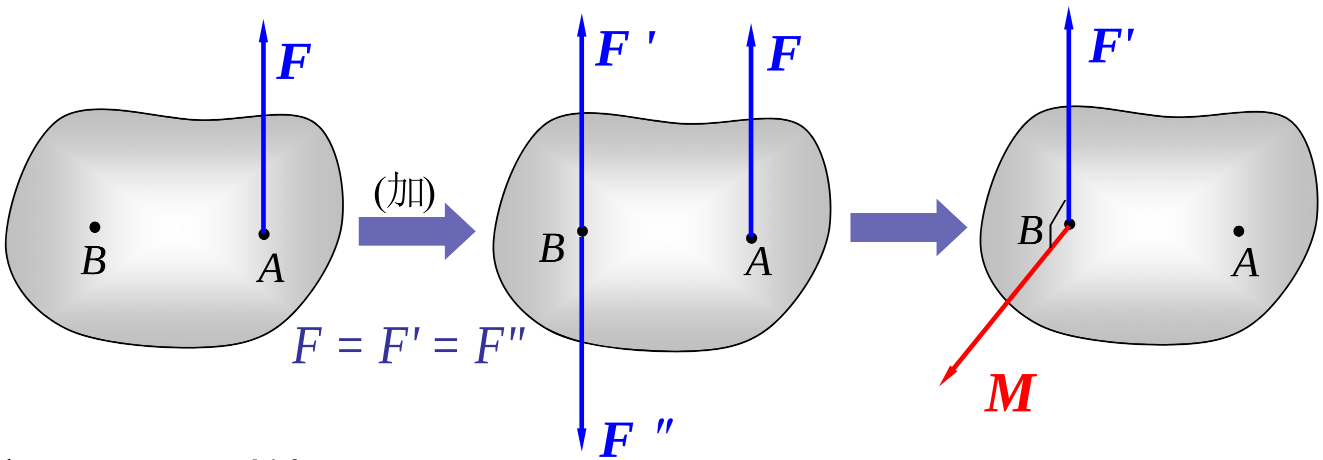
4.1 刚体上力系的简化

- 力的平移定理

至此，已有了共点（汇交）力系的合成法则（平行四边形（多边形）法则）和任意力偶系的合成定理（合力偶矩定理）。这里，来考察力的搬移问题

作用于刚体上的一个力，可以搬移至该刚体上的任一点，并附加一个力偶，其力偶矩矢等于原力对新作用点之矩——这就是力的平移定理

此定理可由加减平衡力系公理证明

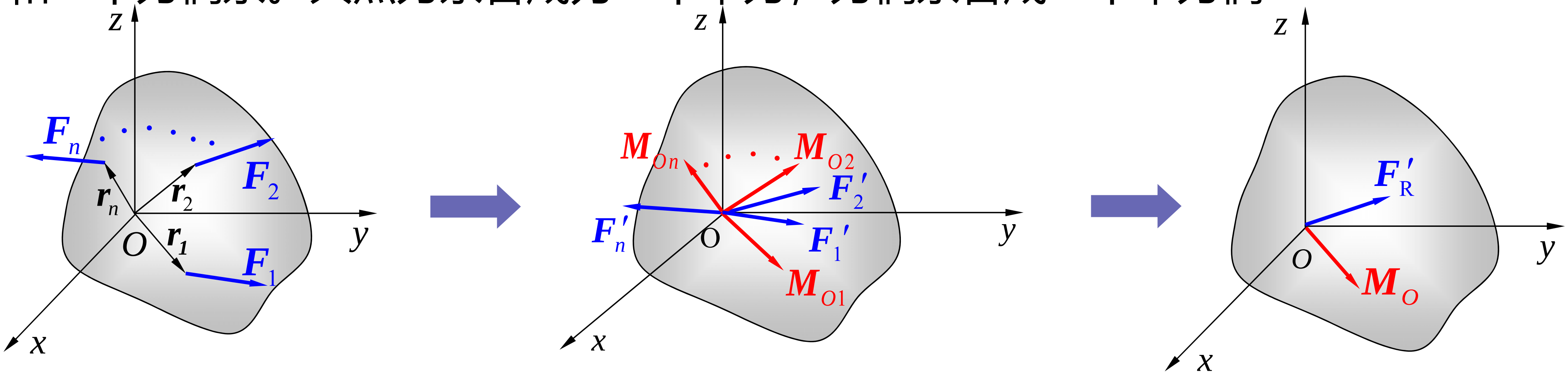


仅适应于同一刚体。

4.1 刚体上力系的简化

- 刚体上的力系向一点简化

任选刚体上一点O（称为**简化中心**），将各力向该点搬移，从而得到一个共点力系和一个力偶系。共点力系合成为一个单力，力偶系合成一个单力偶



单力作用于简化中心O处，力矢为 $\boldsymbol{F}_R=\sum_i \boldsymbol{F}_i'=\sum_i \boldsymbol{F}_i$

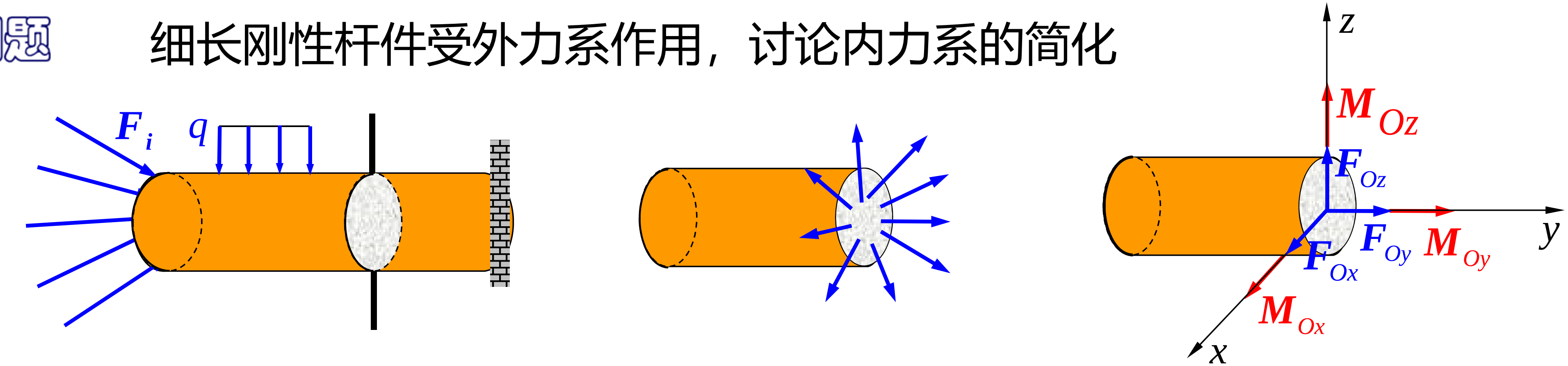
单力偶无所谓作用点，力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_R=\sum_i \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{F}_i,\boldsymbol{F}_i''\right)=\sum_i \boldsymbol{M}_O\left(\boldsymbol{F}_i\right)$

该单力的力矢等于力系主矢，该单力偶的力偶矩矢等于力系对简化中心的主矩。
但要注意，力矢为滑移矢量而主矢为自由矢量，力偶矩矢为自由矢量而主矩为定位矢量。
将力系向不同点简化，所得单力的力矢总是相等，而单力偶的力偶矩矢一般不同。

4.1 刚体上力系的简化

- 刚体上的力系向一点简化

例题　细长刚性杆件受外力系作用，讨论内力系的简化



解：垂直于杆轴的横截面上有分布力系作用。将分布力系向截面形心O简化，再将所得的单力与单力偶沿坐标轴正交分解（如图所示）。直观来看，三个力和三个力偶分别产生了四个效应。沿轴线的分力产生拉压效应，称为轴力；沿截面的两个分力产生剪切效应，称为剪力；沿轴线的分力偶产生扭转效应，称为扭矩；沿截面的两个分力偶产生弯曲效应，称为弯矩。这些概念在一维可变形体力学中具有基本的重要性。

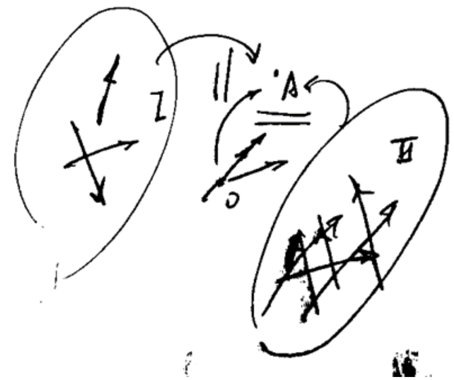
4.1 刚体上力系的简化

• 刚体上的力系向一点简化

力系的等效定理

力和力偶的作用效应不同。若两力系等效，则它们向同一点简化必得到相同的单力和单力偶。又单力的力矢等于力系主矢，单力偶的力偶矩矢等于力系对简化中心的主矩，由此知，两力系等效，则二者主矢相等，对同一个点的主矩相等。反过来，若两力系主矢相等，对同一个点的主矩相等，则两力系向该点简化得到相同的单力和单力偶，两力系等效。由此，得到**力系的等效定理：**

两力系等效 $\Longleftrightarrow$ 主矢相等，对任一点的主矩相等



进一步可知，若两力系主矢相等，对一点的主矩相等，则对任一点的主矩均相等。

$$\boldsymbol{M}_O^* = \sum_i \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) = \sum_i \boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}_i) + OA \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_A^* + OA \times \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_A^* + OA \times \boldsymbol{F}_R^*$$

可以将适用于共点力系和汇交力系的合力矩定理推广到存在合力的力系。若一个力系存在合力，即该力系与一个单力（合力）等效，那么该力系对任一点的主矩（即该力系对点之矩的矢量和）等于单力（合力）对该点之矩。

4.1 刚体上力系的简化

• 力系简化的最简形式

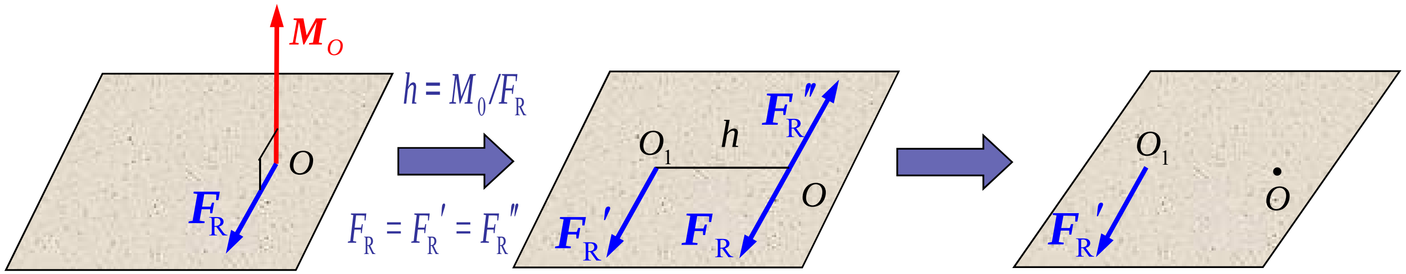
将力系向一点O简化，一般来说，得到一个单力和一个单力偶

- 若简化得到的单力的力矢为零、单力偶的力偶矩矢为零（也即力系的主矢为零 $\boldsymbol{F}_R^* = 0$ ，对该点的主矩为零 $\boldsymbol{M}_O^* = 0$ ），那么，该力系与零力系等效。在该力系作用下，刚体**平衡**。
- 若简化得到的单力的力矢不为零、单力偶的力偶矩矢为零（也即力系的主矢不为零$\boldsymbol{F}_R^* \neq 0$，对该点的主矩为零$\boldsymbol{M}_O^* = 0$），那么，该力系等效于一个力，称为力系的**合力**。
- 若简化得到的单力的力矢为零、单力偶的力偶矩矢不为零（也即力系的主矢为零 $\boldsymbol{F}_R^* = 0$，对该点的主矩不为零 $\boldsymbol{M}_O^* \neq 0$），那么，该力系等效于一个力偶，称为力系的**合力偶**。
- 若简化得到的单力的力矢不为零、单力偶的力偶矩矢也不为零（也即力系的主矢不为零 $\boldsymbol{F}_R^* \neq 0$，对该点的主矩也不为零 $\boldsymbol{M}_O^* \neq 0$），依照主矢和主矩的方位，分如下三种情况说明：

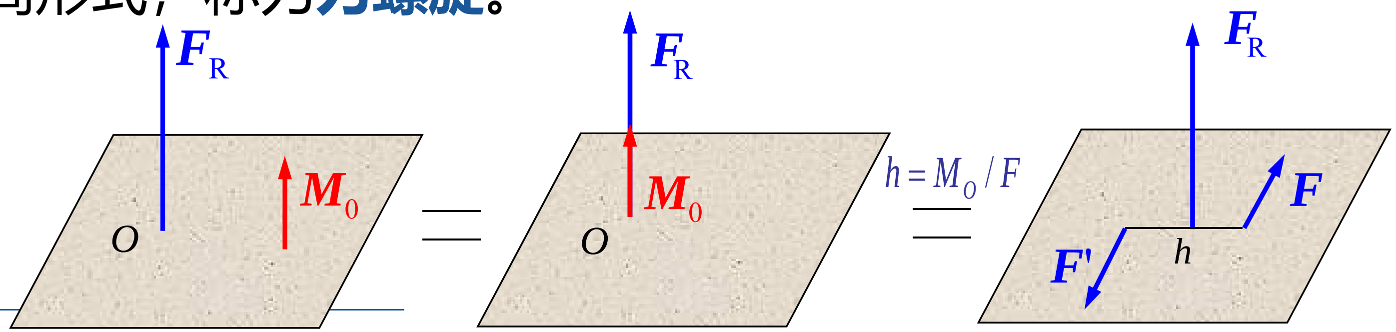
4.1 刚体上力系的简化

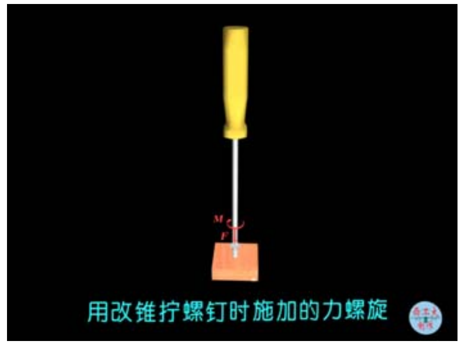
- 力系简化的最简形式

1） $\boldsymbol{F}_R^* \perp \boldsymbol{M}_O^*$ ，单力与单力偶垂直。进一步可等效为一个力。



2） $\boldsymbol{F}_R^* // \boldsymbol{M}_O^*$，单力与单力偶平行。向其它点简化，除非简化中心在单力的作用线上，否则会引起与单力垂直的另一个力偶，与原单力偶合成，合成得到的力偶与单力不垂直。因此，这一情形无法进一步简化。这一简化结果（单力和单力偶平行）已是最简形式，称为**力螺旋**。

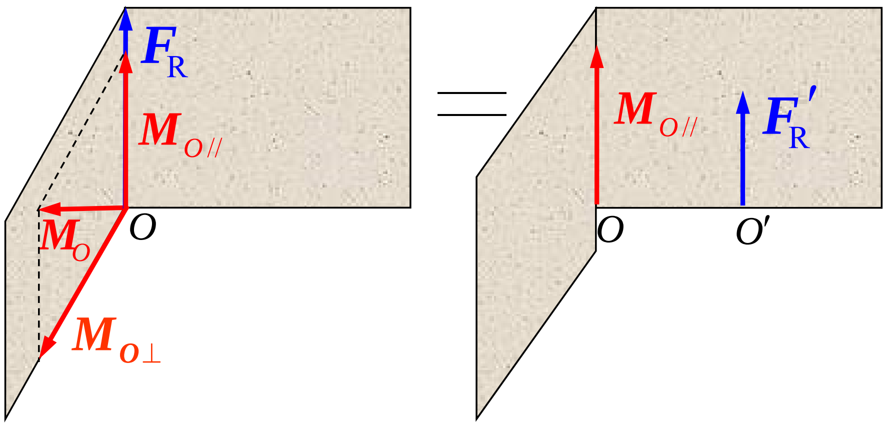




4.1 刚体上力系的简化

- 力系简化的最简形式

3）$\boldsymbol{F}_R^*$ 与 $\boldsymbol{M}_O^*$ 既不平行也不垂直。将单力偶分解为与单力平行和垂直的两个力偶，将力在垂直于垂直分量的平面内平移，消去垂直分量，从而得到一个力和一个平行于该力的力偶（原力偶的平行分量），也化为力螺旋。



$$OO' = \frac{M_{O\perp}}{F_R}$$

据此可知，力系简化的最简形式有四种：无、合力、合力偶和力螺旋。“无”即零力系，相应于平衡，一个可以等效于“无”的力系即平衡力系。“主矢为零、主矩为零”提供了关于力系的两个矢量等式方程，可用于确定6个待定量。直观上看，“合力”引起平移运动的改变，“合力偶”引起转动运动的改变，而“力螺旋”引起平移运动和转动运动的同时改变。具体细节在力系和运动关系部分讨论。

4.1 刚体上力系的简化

- **力系简化的最简形式**

从最一般意义上看，任一力系都可简化为两个单力。这是因为，首先可将力系简化为一个单力和一个单力偶，然后将力偶替换为两个力（其中之一与单力相交），进而将相交的两力合成为一个力。

例题　同向平行力系简化和平面力系简化。

解：考虑一个同向平行力系。力系主矢沿平行线方向，力系主矩与平行线正交，因此，必可化为一个单力，即**同向平行力系必有合力**。
考虑一个平面力系。力系主矢在面内，关于面内一点的主矩垂直平面。若主矢不为零，可化为一个单力；若主矢为零（退化情形），在主矩不为零时化为合力偶，在主矩为零时化为“无”。

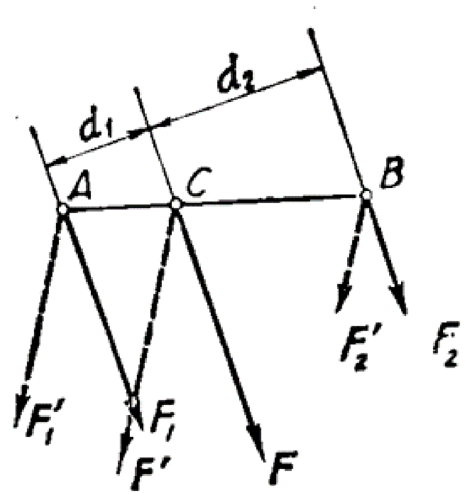
4.1 刚体上力系的简化

- 同向平行力系简化

从两个平行力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 组成的力系开始，两力分别通过A点和B点（如图所示）。在AB连线上选一点C作为简化中心，力系对该点的主矩垂直纸面，适当调整C的位置可使主矩为零。此时，力系简化为一个通过C点的合力，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ 。

如果将两力分别绕A、B两点转过一个相同的角度，成为 $\boldsymbol{F}_1',\boldsymbol{F}_2'$ ，且保持两力大小不变，易知，合力仍然通过C点。作用点固定，大小固定的两个同向平行力，在方向任意变动时，合力必经过的这个点称为这两个平行力的**中心**。

可以证明，由n个平行力组成的平行力系，也存在一个中心。首先将其中两个平行力合成，之后将合力与另外一个力合成，如此不断进行下去，即可得证。



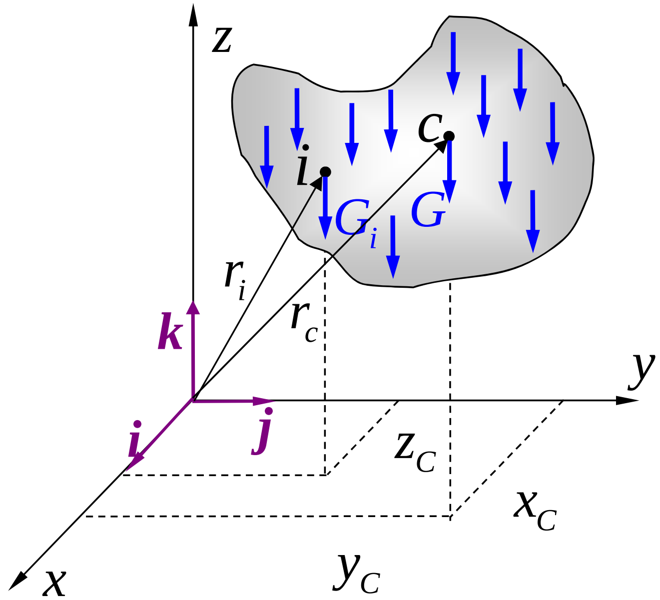
4.1 刚体上力系的简化

- 刚体重心

重力是最重要的同向平行力系。地球相比于所研究的对象无限大，重力可视为平行力系。考虑一个刚体，假想将之切分为一系列小单元，第i个小单元受重力 $\boldsymbol{G}_i$ 作用。重力系必有中心（称为**重心**），记为C，重力系合成为一个通过C点的合力 $\boldsymbol{G}=\sum\boldsymbol{G}_i$，且重力场方向改变时，合力大小不变且仍通过$C$点。由合力矩定理知

$$\boldsymbol{r}_C\times\boldsymbol{G}=\sum\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{G}_i$$

$$\boldsymbol{r}_C G\times\boldsymbol{l}=\left(\sum G_i\boldsymbol{r}_i\right)\times\boldsymbol{l} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{r}_C=\frac{\sum G_i\boldsymbol{r}_i}{G}$$



在参考点处建立直角坐标系，重心的坐标表示为：

$$x_C=\frac{\sum G_i x_i}{G},\ y_C=\frac{\sum G_i y_i}{G},\ z_C=\frac{\sum G_i z_i}{G}$$

随着小单元的无限细分，上述矢量式和坐标式中的求和运算化为积分运算。由数学式知，重心坐标是重力加权的小单元坐标的代数平均。

4.1 刚体上力系的简化

- 刚体重心

质点系的质心和**几何图形的形心**位置定义：

$$\frac{\sum M_i \boldsymbol{r}_i}{M}, \quad \frac{\sum V_i \boldsymbol{r}_i}{V}$$

式中，M_i 为质点系第i个质点的质量，V_i 为几何图形第i个小单元的体积。M 为质点系的总质量，V 为几何图形的总体积。

强调：重心是对刚体定义的，是刚体上的一个物质点，是最简等效力系（合力）的作用点；质心是对质点系定义的，是一个空间点，其意义将在动力学中表现出来；形心是对几何体定义的，是一个几何点，只具有几何意义。

4.1 刚体上力系的简化

- 刚体重心

如果刚体体积不大，重力加速度g可视为常数。此时，刚体重心位置

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum M_i g \boldsymbol{r}_i}{Mg} = \frac{\sum M_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

刚体的重心和质心位置重合。

进一步地，如果刚体密度均匀，即 ρ 为常数。此时，刚体重心位置

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum \rho V_i \boldsymbol{r}_i}{\rho V} = \frac{\sum V_i \boldsymbol{r}_i}{V}$$

刚体的三心（重心、质心和形心）合一。

对三心合一情形，可通过计算刚体所构成的几何体的形心位置来确定刚体的重心位置。一种特殊而常见的情形是等厚薄板。将O-xy坐标面置于板面（严格地说，板的中面），形心z坐标必为零，即形心在板面上。形心的x、y坐标计算如下：

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A}, \quad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A}$$

也可称为平面图形的面心公式。

4.1 刚体上力系的简化

- 刚体重心

给出计算几何图形形心的组合法和负体积法。

所谓组合法是指，将几何图形划分为一系列子图形，由子图形体积加权的子图形形心位置的代数平均值，即为几何图形的形心位置。其数学依据为：

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum V_i\boldsymbol{r}_i}{V}=\frac{\sum_{(k)}\left(\sum V_i^{(k)}\boldsymbol{r}_i^{(k)}\right)}{V}=\frac{\sum_{(k)}V^{(k)}\boldsymbol{r}_C{}^{(k)}}{V}$$

所谓负体积法是指，在原始几何图形中添加一个图形形成新的图形，并令添加的图形具有负体积，原始图形形心可计算如下：

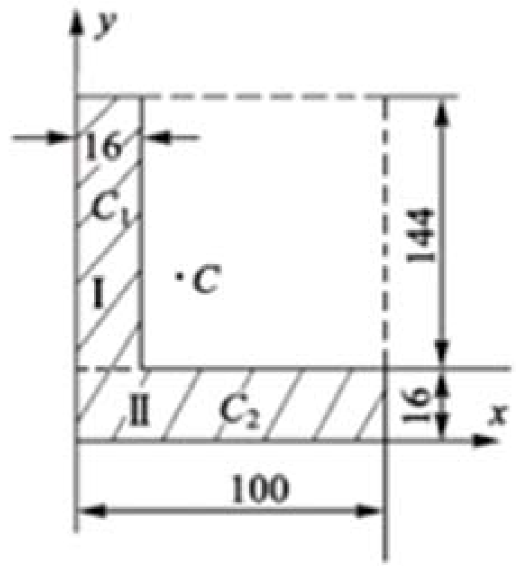
$$\boldsymbol{r}_C{}^{(o)}=\frac{\sum V_i^{(o)}\boldsymbol{r}_i^{(o)}}{V^{(o)}}=\frac{\sum V_i^{(o)}\boldsymbol{r}_i^{(o)}+\sum V_i^{(s)}\boldsymbol{r}_i^{(s)}-\sum V_i^{(s)}\boldsymbol{r}_i^{(s)}}{V^{(o)}}=\frac{V^{(o+s)}\boldsymbol{r}_C{}^{(o+s)}-V^{(s)}\boldsymbol{r}_C{}^{(s)}}{V^{(o+s)}-V^{(s)}}$$

式中，上标“o”和“s”分别为original（原始的）和supplementary（附加的）缩写。上标“$o+s$”指的是新图形。

4.1 刚体上力系的简化

- 刚体重心

例题　试求图示均质等厚平板的形心位置。



解 8　组合法。将平板视为矩形 I 和 II 之组合。两矩形的形心位置已知，在图示坐标系中，形心坐标分别为 $C_1(8,\ 88)C_2(50,\ 8)$，于是有：

$$x_C=\frac{A_1x_1+A_2x_2}{A}=25.2,\ y_C=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A}=55.2$$

负体积法。将平板补全，形成一个完整矩形，补全的部分视为负体积。此处，$A^{(o+s)}=160\times100$ ，$A^{(s)}=(160-16)\times(100-16)=-12096$ ，于是有：

$$x_C=\frac{A^{(o+s)}x_1-A^{(s)}x_2}{A^{(o+s)}-A^{(s)}}==25.2,\ y_C=\frac{A^{(o+s)}y_1-A^{(s)}y_2}{A^{(o+s)}-A^{(s)}}=55.2$$

4.1 刚体上力系的简化

- 刚体重心

例题　考虑体积不大的等厚均质刚性圆环，试找出其重心位置。

解：将O-xy坐标面置于圆环中面，O点置于圆环中心位置。由对称性知，$x_C = y_C = 0$，形心在圆环中心处，重心亦在圆环中心处。此例中，重心位于刚体之外，应理解为，重心（重力的合力作用点）位于圆环的延拓刚体之上。

- 关于集中力和分布力的评述

实际上，物理作用都是施加在有限体积上的，应以分布力刻画。但在理论上，都是针对集中力讨论的，力系是由集中力构成的。讨论重力时，也是将刚体切分为小块，每个小块受到集中力的作用。这里应从两个角度来理解：

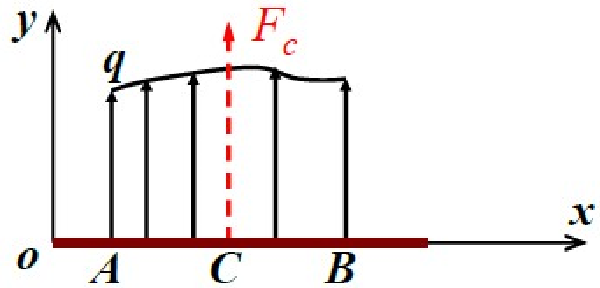
其一，类似连续体微元可视为质点处理，分布力微元也可视为集中力处理（连续体密度对应于分布力集度）；

其二，在很小面积上的分布力可通过力系等效变换等效为一个集中力（注意，由于尺寸很小，等效给出单力偶小一个量级，可以忽略）。

4.1 刚体上力系的简化

例：线分布力的合力

直线上分布力的集度 $q=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta l}$ （单位：N/m）



q为常量——均匀分布，q线性变化——线性分布

合力平行于分布力：

大小 $F_C=\int_{x_A}^{x_B} q(x)\mathrm{d}x$

位置
——合力矩定理

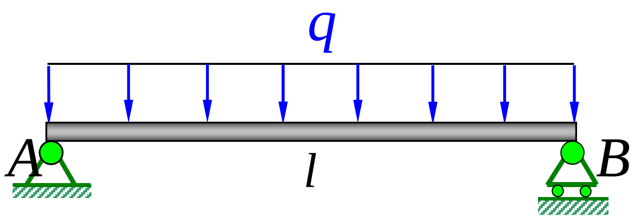
$$F_C\times x_C=\int_{x_A}^{x_B} xq\mathrm{d}x \Rightarrow x_C=\frac{\int_{x_A}^{x_B} xq\mathrm{d}x}{F_C}$$

4.1 刚体上力系的简化

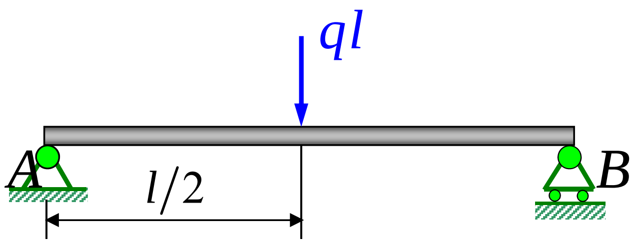
例：线分布力的合力

$$F_C=\int_{x_A}^{x_B} q\mathrm{d}x,\quad x_C=\frac{\int_{x_A}^{x_B} xq\mathrm{d}x}{F_C}$$

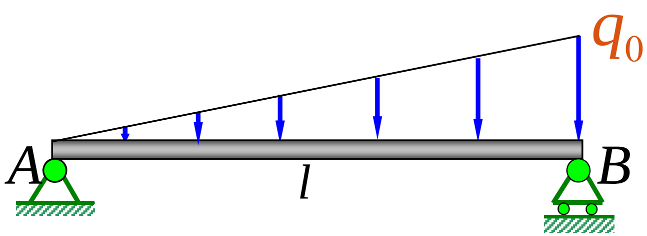
均匀线分布力



$$F_C=ql,\quad x_C=\frac{x_A+x_B}{2}\quad(l=\overline{AB})$$



线性线分布力



$$q=\frac{q_0}{l}(x-x_A)$$

$$F_C=\frac{q_0 l}{2},\quad x_C=x_A+\frac{2}{3}l\quad(l=\overline{AB})$$