运动与力系的关系

已经阐明了运动的描述和简化、力系的描述和简化。这里，转而研究运动与力系的关系

运动和力系的关系研究包含两大体系：矢量力学体系和分析力学体系。这两个体系都是针对质点系建立起来的，都具有普遍适用性。依照历史发展进程，关于这两大体系，我们均从静力学开始，而后转向动力学；而非先阐述动力学，而后，将静力学视为动力学的特例。

静力学，即关于平衡的力学。研究质点系的平衡条件，并据此确定作用力及平衡位置。

动力学研究旨在建立运动与力系的关系，即动力学律。

第三章：矢量力学之静力学

质点受到共点力系作用，质点静止（或平衡）当且仅当共点力系之合力为零，或者说共点力系与零力系等效。在质点系中，每一质点都受到共点力系作用，质点系静止（或平衡）当且仅当每一质点所受共点力系的合力均为零。上述结论是十分直观的，但在具体应用中并不方便。对于少数几个质点构成的质点系，尚可用上述方法分析；但若质点数较多，甚至无穷多时（例如，刚体和可变形体情形），上述方法非常繁琐，甚至是不可能的。

专章讨论刚体和刚体系的平衡问题，这不仅是因为刚体和刚体系的平衡问题相对简单，更重要的是，变形体平衡问题可部分地化为刚体平衡问题来解决。

第三章：矢量力学之静力学

- 本章纲要：

单刚体平衡问题： 给出一般力系作用下，单刚体平衡的充分必要条件（几何条件和解析条件（即平衡方程））；特殊力系作用下，单刚体平衡的充分必要条件，并强调独立平衡方程数目。

物系平衡问题： 讲述物系静定和超静定概念；求解物系平衡问题，确定物系受力状态或平衡位置；讨论一类特殊的物系——静定桁架，确定其受力状态。

具摩擦物系的平衡问题： 讲述滑动摩擦和滚动摩擦，引入摩擦力、摩擦因数、滚阻力偶和滚阻因数概念；求解具摩擦物系的平衡问题。

3-1 单刚体平衡问题

1.1 单刚体平衡问题

- 一般力系的平衡条件

作用在单刚体上的一般力系，可简化为作用于简化中心的一个单力和一个单力偶。

若该力和该力偶均消失，也即力系主矢为零，对简化中心的主矩为零，那么，单刚体平衡。

若该力和该力偶不全消失，也即力系主矢和对简化中心的主矩不全为零，则单刚体不平衡。

于是知，**一般力系平衡的充分必要条件**：

力系主矢为零，对任一点的主矩为零，即 $\boldsymbol{F}_R^* = 0, \boldsymbol{M}_O^* = 0$

1.1 单刚体平衡问题

• 平衡的几何条件

一般力系平衡的充要条件是两个矢量和（各力矢的矢量和、各力对点之矩的矢量和）为零。这在几何上表现为：

力系的力矢多边形和力矩矢多边形同时封闭 —— **一般力系平衡的几何条件**

思考 刚性圆板受力系作用。在图（a）中，三个力构成封闭三角形ABC，在图（b）中，四个力构成平行四边形$ABCD$。试问圆板是否平衡？

(a)　　(b)

答：

在图（a）中，力系主矢 $\boldsymbol{F}_R^* = 0$ ，对A点的主矩 $\boldsymbol{M}_A^* \neq 0$ ，圆板不平衡；
在图（b）中，力系主矢 $\boldsymbol{F}_R^* = 0$ ，对O点的主矩 $\boldsymbol{M}_O^* \neq 0$ ，圆板平衡。

1.1 单刚体平衡问题

- 平衡的解析条件

在三维空间中，一个矢量等式相应于三个标量等式，因此，“主矢为零，对一点的主矩为零”相应于六个独立的标量等式。

一个矢量为零，那么它向任何一根轴上投影都等于零，但这样得到的无穷多等式是相关的，独立的只有三个，只需建立独立的三个等式即可。

不妨以简化中心O为原点，建立直角坐标系$O\text{-}xyz$，并注意到力矩关系定理（对轴之矩等于对轴上一点之矩在该轴上的投影），有

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_{ix}=0,\ \sum F_{iy}=0,\ \sum F_{iz}=0,\\ \sum M_{ix}=0,\ \sum M_{iy}=0,\ \sum M_{iz}=0\end{array}\right\}$$

—— **一般力系平衡的解析条件**，即平衡方程

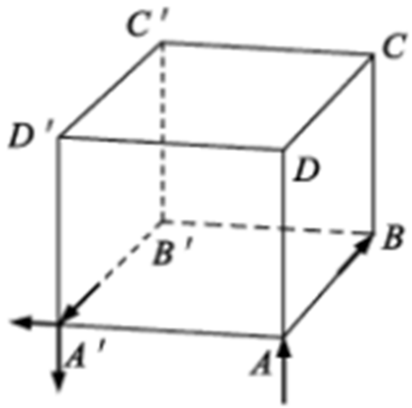
F_{ix},F_{iy},F_{iz} 为力 $\boldsymbol{F}_i$ 在x、y、z三轴上的投影（在直角坐标情形下，亦为分量大小）

M_{ix},M_{iy},M_{iz} 为力 $\boldsymbol{F}_i$ 对x、y、z三轴之矩

注意：并非一定要沿三根垂直轴投影和取矩，对任一轴投影和取矩都可以。针对具体问题，选择合适的投影轴和取矩轴，争取一个方程求解一个未知数，避免求解联立方程。投影式可由力矩式替代。

1.1 单刚体平衡问题

- 平衡的解析条件



例题 刚性立方块受图示力系作用，各力沿棱边作用，且大小相等。试添加一个力使刚性块平衡。

解： 以 B' 为原点，以三个棱边为轴建立直角坐标系。设添加的力的力矢为 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$，作用点矢径为 $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$。原有的五个力加上所添加的这个力构成平衡力系。

力系的三个投影等式为：

$$F_x-F+F=0, F_y-F=0, F_z-F+F=0 \quad \Longrightarrow \quad F_x=0, F_y=F, F_z=0$$

力$\boldsymbol{F}$对原点之矩为 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=-Fc\boldsymbol{i}+aF\boldsymbol{k}$

力系的三个取矩等式为：

$$-Fc+Fl=0, -Fl+Fl+0=0, Fl-Fl+aF=0 \quad \Longrightarrow \quad c=l, a=0$$ b任意取值

添加的力的力值为F，作用在CC' 线上，可任意滑移。检验知，添加该力使刚性块平衡。

1.1 单刚体平衡问题

- 特殊力系平衡的解析条件

讨论特殊力系的平衡条件，特别强调独立平衡方程的个数。

特殊力系，是指力系中各力的作用线（简称力线）具有某种特征的力系。例如，平面力系、平行力系、汇交力系和力偶系等。

力线的特定关系使得一般力系平衡的六个解析条件之间有了相关性，不再具有六个独立的等式关系。通过恰当选择投影轴和取矩轴，很容易看出某些等式恒成立，这些恒等式提供不了有价值的信息。这是特殊力线关系导致的退化现象。

这里，讨论各类特殊力系的独立平衡方程个数。

1.1 单刚体平衡问题

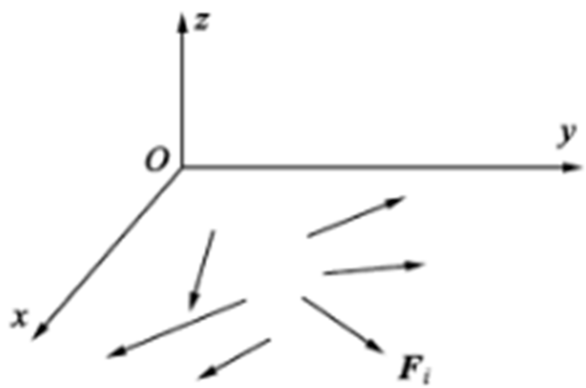
- 特殊力系平衡的解析条件

平面一般力系：各力作用线位于同一个平面内的力系。

注意，力偶要看力的作用线方向，而非力偶矩矢方向；平面力系中的力偶，其力偶矩矢方向垂直于该平面。

将直角坐标系的xy平面置于该平面内，z轴垂直该平面，坐标系原点O可取平面内任一点。于是，对z轴的投影方程自动满足，对x、y轴的取矩方程自动满足，只剩下三个独立平衡方程：

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum M_z = 0$$



对于平面力系情形，图形上并不标示z轴，因此，通常将对z轴的取矩方程记为$\sum M_O = 0$

可以证明，平面一般力系的平衡方程具有与之等价的二矩式方程和三矩式方程

1.1 单刚体平衡问题

- 特殊力系平衡的解析条件

空间平行力系：各力作用线相互平行的力系。

取直角坐标系的xy平面与力线垂直，z轴与力线平行。剩下三个独立平衡方程：

$$\sum F_z = 0,\ \sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0$$

空间汇交力系：各力作用线汇交于一点的力系。

取直角坐标系的原点O为汇交点，剩下三个独立平衡方程：

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0$$

空间力偶系：全由力偶构成的力系。

任取直角坐标系$O\text{-}xyz$，三个投影方程自动满足，剩下三个独立平衡方程：

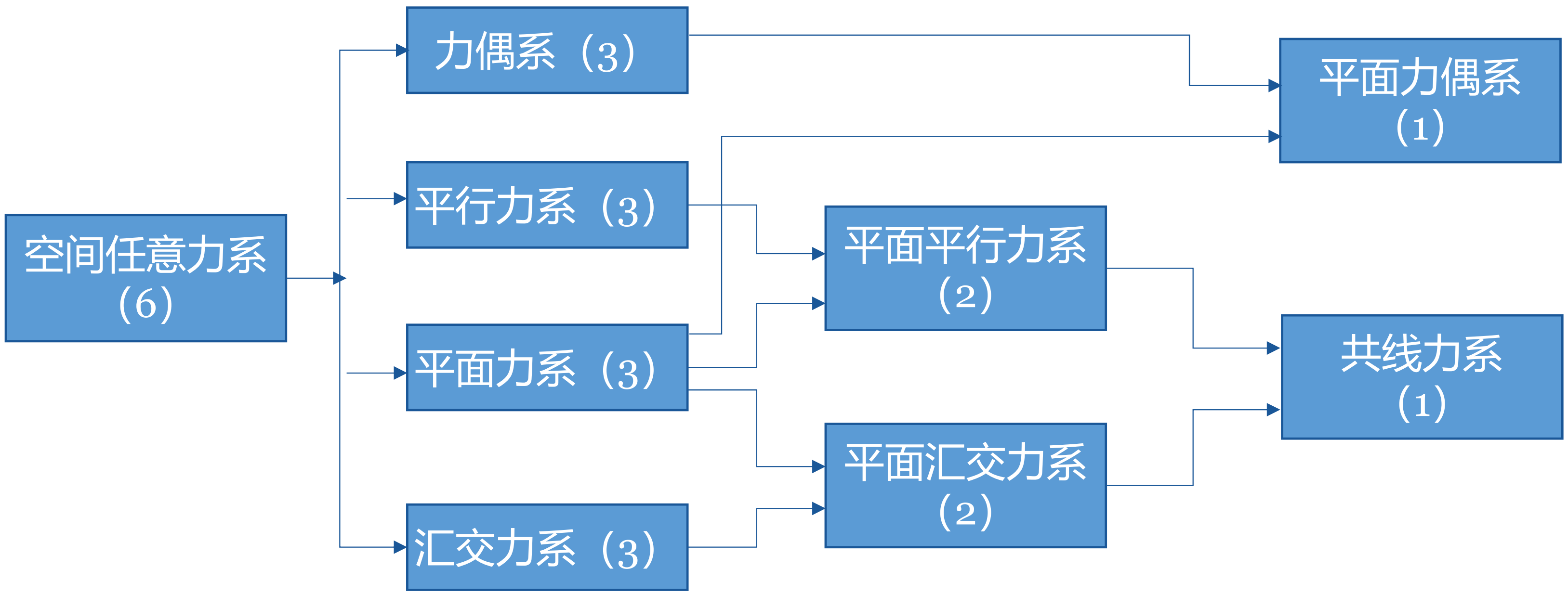
$$\sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0,\ \sum M_z = 0$$

M_x 为力偶矩矢在x轴上的投影

1.1 单刚体平衡问题

• 特殊力系平衡的解析条件

各类特殊力系的独立平衡方程个数汇总如下



1.1 单刚体平衡问题

- 特殊力系平衡的解析条件

思考　计算下列力系独立平衡方程数目

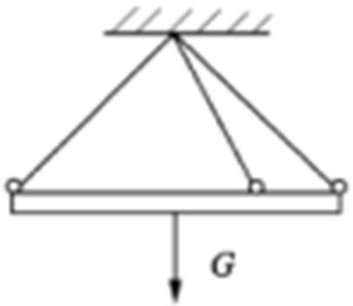
1. 各力线平行于某平面。　5
2. 各力线平行于某直线。　3
3. 各力线相交于某直线.。　5
4. 各力线分别汇交于两点.。　5
5. 一个平面任意力系加一个垂直于此平面力系的平行力系。　6
6. 一个平面任意力系加一个平行于此平面力系所在平面的平行力系。　4

1.1 单刚体平衡问题

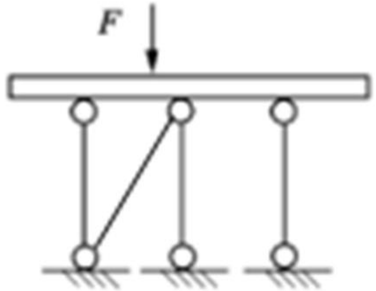
- 单刚体平衡问题的可解性

至此，弄清了各类力系的独立平衡方程个数，据此，可以判断具体单刚体平衡问题的可解性。确切地说，判断是否可通过刚体静力学方法求解具体单刚体平衡问题。

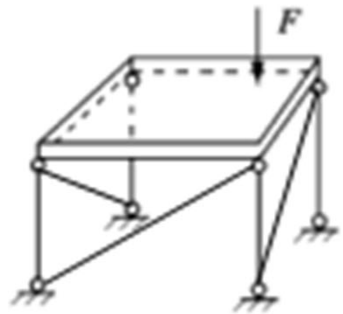
思考　单刚体在外加力作用下平衡。试判断其可解性。



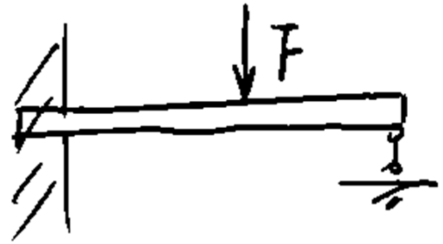
(a) 不可解



(b) 不可解



(c) 不可解



(d) 不可解

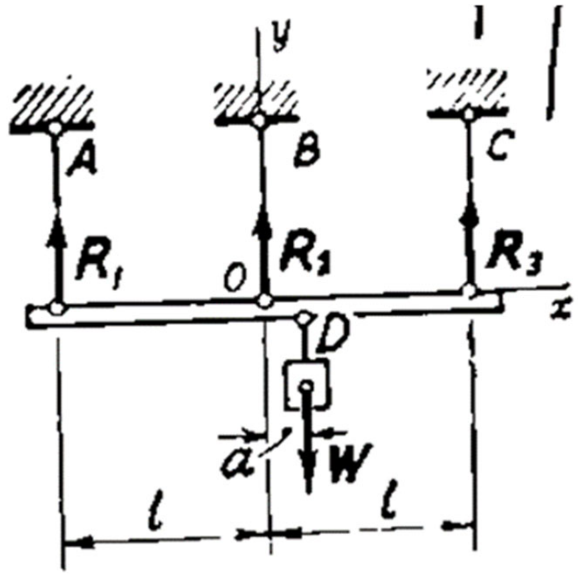
答：在图（a）中，若位置已知（**G**通过悬挂点），为平面汇交力系，有3个（未知）约束力，但只有两个平衡方程，不可解；若位置未知，平面一般力系，有4个未知数（三个约束力和一个位置），但只有三个平衡方程，不可解。在图（b）中，为平面一般力系，有4个（未知）约束力，但只有三个平衡方程，不可解；在图（c）中，为空间一般力系，有7个（未知）约束力，但只有六个平衡方程，不可解。在图（d）中，为平面一般力系，有4个（未知）约束力，但只有三个平衡方程，不可解。

1.1 单刚体平衡问题

- 单刚体平衡问题的可解性

客观来看，在外加力作用下，各构件的受力状况是明确的，但按照刚体静力学方法却不可解。这是由于采用刚性模型所造成的，举例说明如下。

例题 长为$2l$的刚性梁用三根竖直刚性连杆悬吊，载荷W挂在D点，位置a已知。试求各连杆施加于刚性梁上的约束力。



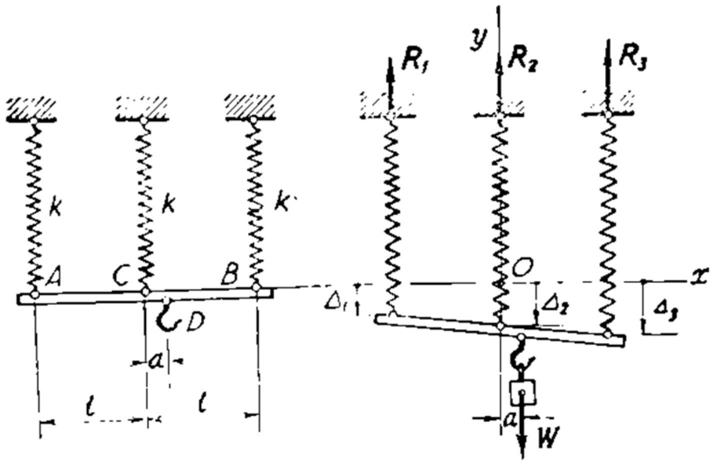
解：以刚性梁为研究对象，受到平面平行力系作用，有三个（未知）约束力，但只有两个独立平衡方程，不可解。可做如下理解：左右两杆已经可以使梁处于水平静止状态，中间杆件是冗余的；在没有外载荷作用时，中间杆件的初始装配力可在左右两杆中引起预加力，因此，可能存在无穷多组约束反力使刚性梁在水平位置平衡。将该例作如下修改：

1.1 单刚体平衡问题

- 单刚体平衡问题的可解性

例题

长为$2l$的刚性梁用三根线弹簧竖直悬吊，载荷W挂在D点，位置a已知，弹簧刚度系数k，在施加载荷W前各弹簧处于自由状态，并设施加载荷后，变形较小（刚性梁接近水平，弹簧接近竖直）。试求各弹簧的作用力。



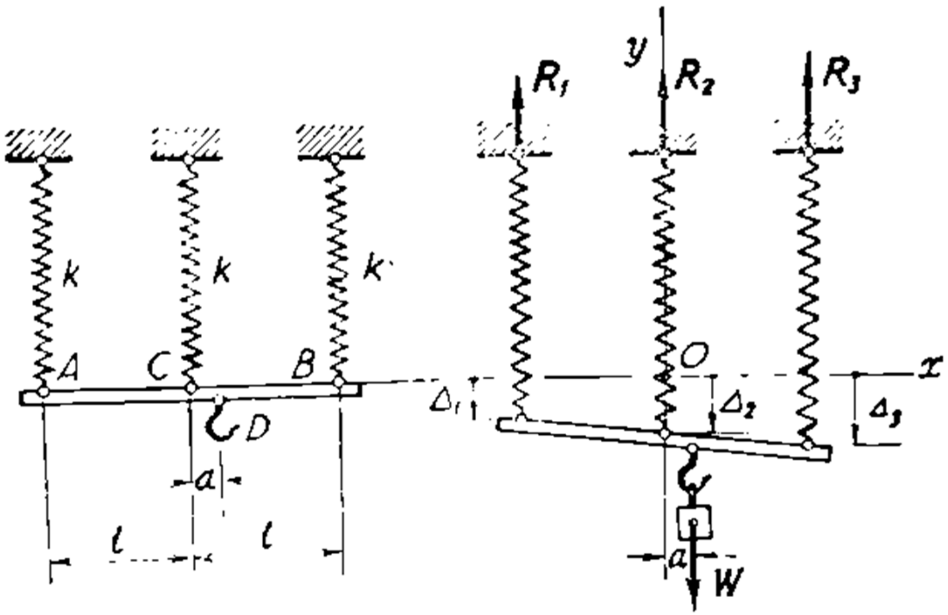
解：

弹簧是一类特殊元件，不是直接限制位移，而是在作用点位移与作用力之间建立了关系。以刚性梁为研究对象，要想列出作用力之间的平衡关系，就要知道刚性梁所处的位置，而所处的位置又与作用力相关，这样，力就和变形纠缠在一起了，处理起来非常繁琐，读者不妨一试

注意到，当弹簧变形较小时（这或者是由于载荷W较小，或者是由于弹簧较硬），当前位置（即时构型）与原始位置（初始构型）相差很小，这样，我们就可以取原始位置列平衡方程；之后，再由变形后的几何位置确定各弹簧力之间的关系；联立求出各弹簧力值，进而给出当前位置。这种做法看似十分奇怪：要求变形，却先假定不变形，给出平衡关系，再结合变形几何关系确定受力和变形。这种将力和变形耦合的问题拆分的方法十分精彩，在材料力学中广泛采用。在原始位置列平衡方程的方法，称为原始尺寸原理。读者需仔细体会之。

1.1 单刚体平衡问题

- 单刚体平衡问题的可解性



具体来说，在原始位置列平衡方程：

$$R_1 + R_2 + R_3 = W, lR_2 + 2lR_3 = W(l + a)$$

三根弹簧变形后，三个下端点仍位于一条直线上，因此，有变形协调条件：

$$\Delta_2 = (\Delta_1 + \Delta_3)/2 \quad \Rightarrow \quad 2R_2 = R_1 + R_3$$

⇒ 联立求得弹簧力。进而，给出变形后的平衡位置。

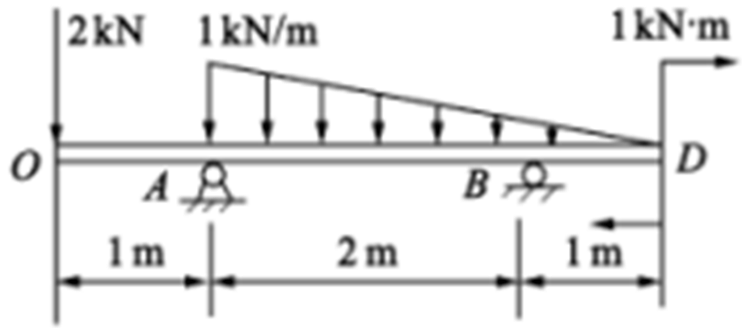
1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

通过几个算例来说明，如何运用上述平衡条件对单个刚体和单个变形体进行受力分析和平衡位置分析。注意，对单个变形体分析时，都应用了刚化原理。

例题

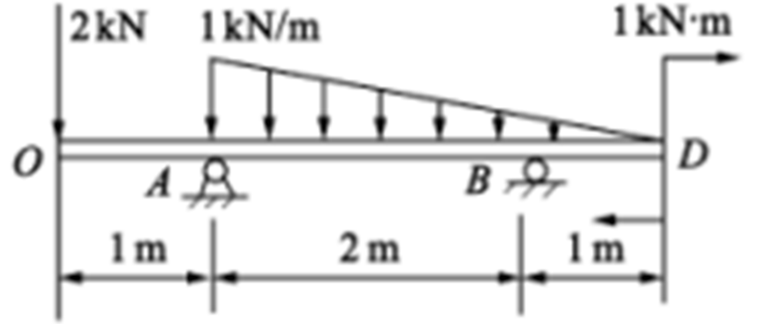
平面单刚体问题。图示水平梁，*A*端固定铰支，*B*端可动铰支，受图示载荷作用。试求支座*A*、*B*的约束反力。



1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

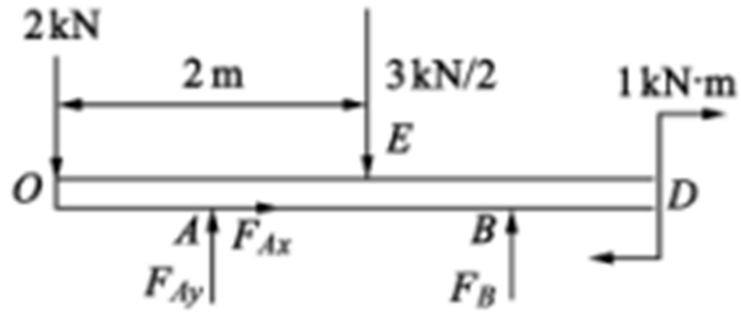
解 8 以梁为研究对象，受力如图。在单刚体上，三角形分布力简化为作用于分布区域2/3 处的集中力。



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_B \times 2 + 2 \times 1 - \frac{3}{2} \times 1 - 1 = 0 \Rightarrow F_B = \frac{1}{4}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_B - 2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = \frac{13}{4}$$

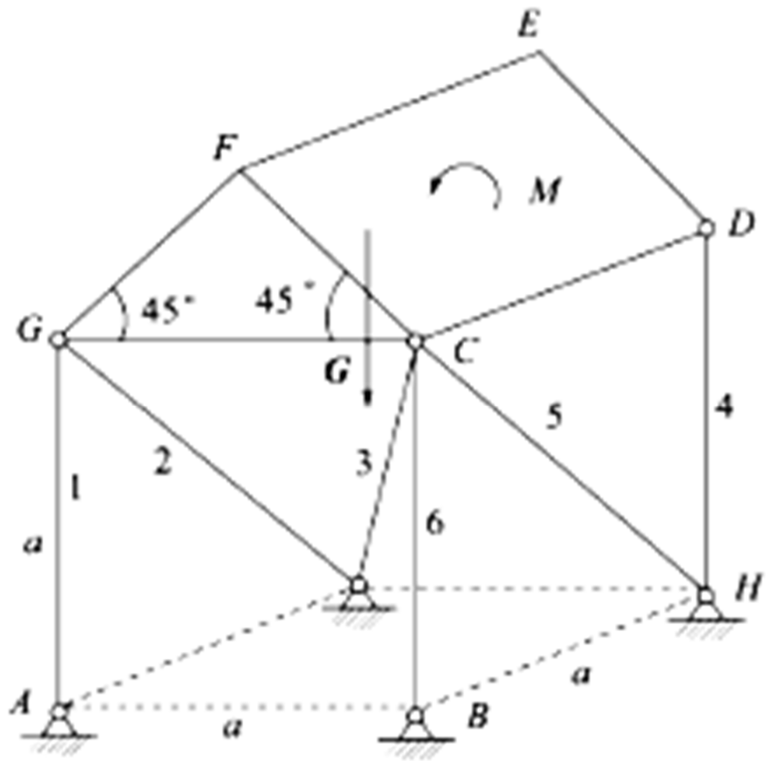


方向如图所示

1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

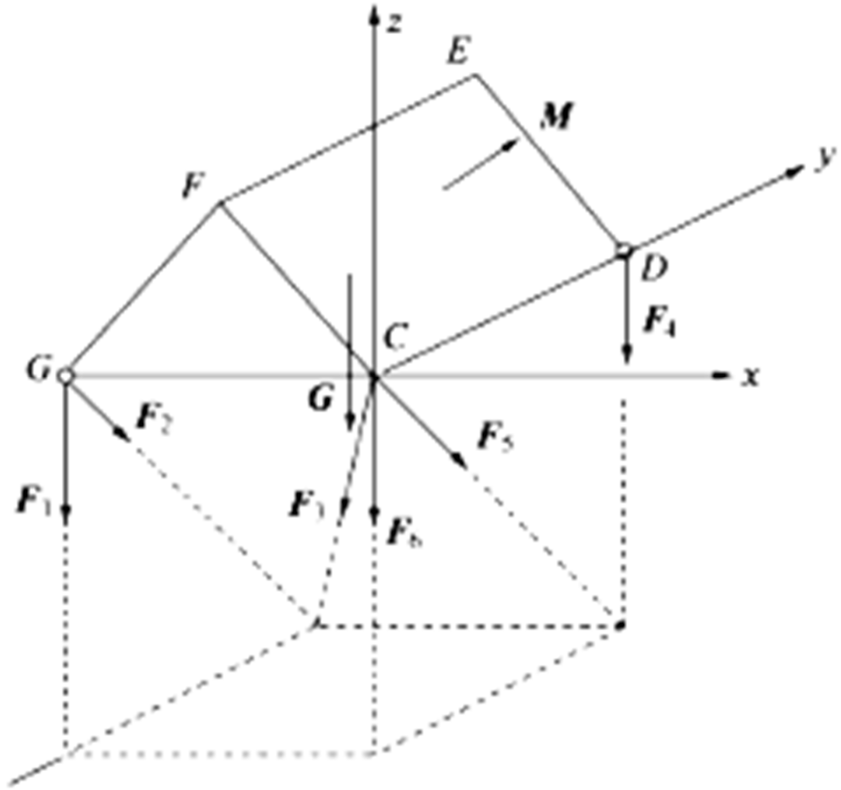
例题 空间单刚体问题。图示均质三棱柱由六根支撑杆约束，尺寸和角度关系如图。三棱柱重G，力偶（矩M）作用在斜面$CDEF$内。试求支承杆1、2、3的内力。



1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

解 8 以三棱柱为研究对象，受力如图，设各杆受拉力作用。建立图示直角坐标系。



$$\sum M_z = 0 \qquad M\cos 45^\circ - F_2\cos 45^\circ a = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{M}{a}$$

$$\sum M_y = 0 \qquad -F_1 a - F_2\cos 45^\circ a - G\frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = -\frac{\sqrt{2}M}{2a} - \frac{G}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_3 = 0$$

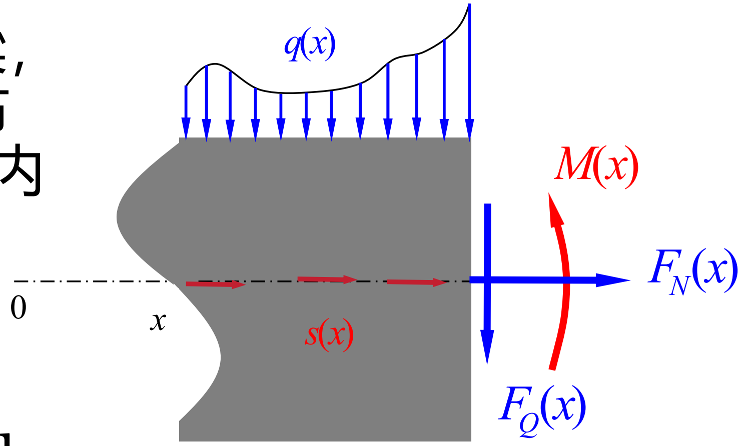
方向如图所示

由另外三个平衡条件可以给出另外三根支撑杆的约束力。

1.1 单刚体平衡问题

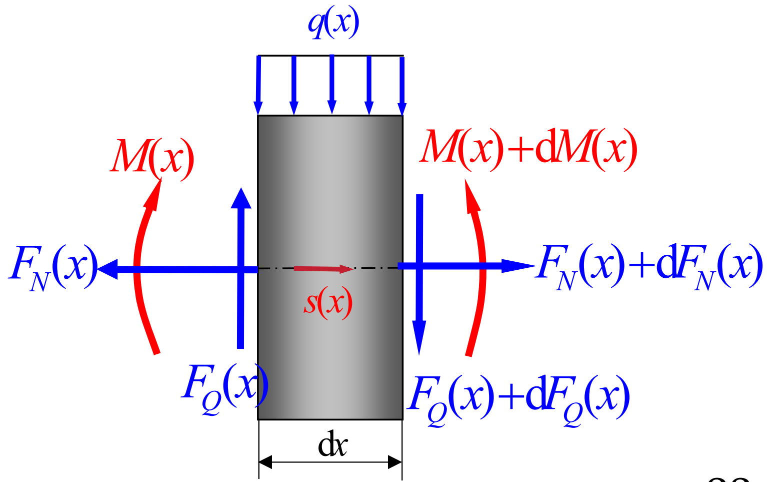
- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

例题 可变形体（梁的内力分析）。等截面直梁，受面内竖向分布荷载$q(x)$和面内水平分布载荷$s(x)$作用。试求垂直于轴线的横截面内力满足的平衡微分方程。



解：

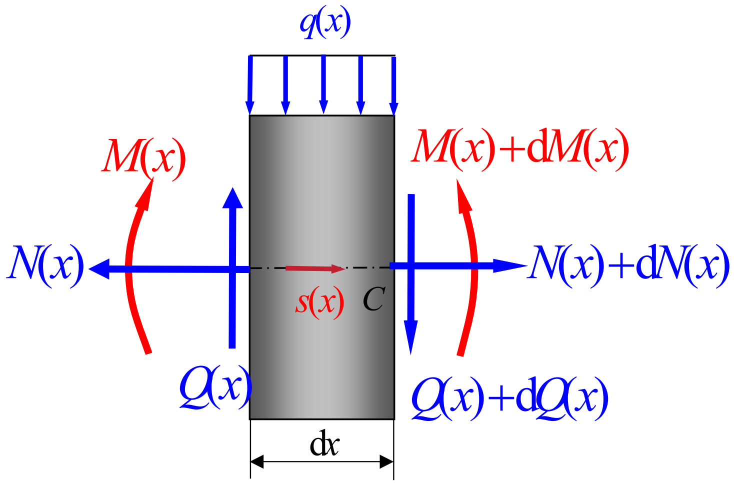
以轴线为x坐标轴建立直角坐标系。在x和dx位置，用垂直于轴线的截面截出长度为dx的微段，两截面受力均呈现为平面分布力系，分别向形心简化得到两个力和一个力偶，微段受力如图。



1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

以dx的微段为研究对象，列平衡方程：



$$\sum F_x = 0 \qquad F_N(x) - [F_N(x) + \mathrm{d}F_N(x)] - s(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_Q(x) - [F_Q(x) + \mathrm{d}F_Q(x)] - q(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\sum M_C = 0 \qquad -M(x) + [M(x) + \mathrm{d}M(x)] - F_Q(x)\mathrm{d}x + q(x)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

略去二阶微量 $q(x)\mathrm{d}x\dfrac{\mathrm{d}x}{2}$，整理得，

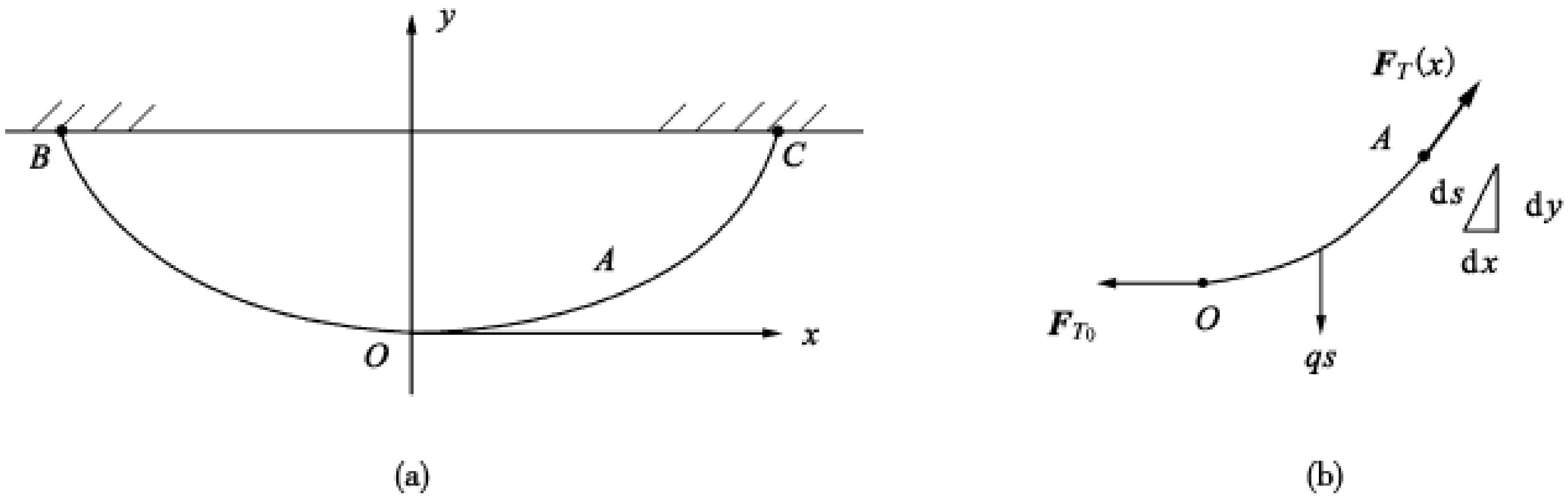
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}F_N(x)}{\mathrm{d}x} = -s(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}F_Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = F_Q(x) \end{cases}$$

这就是横截面内力满足的平衡微分方程

1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

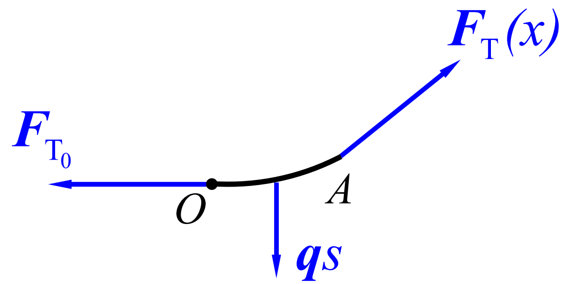
例题 可变形体（悬链线平衡位置）。长为L、单位长度重量为q的柔索，两端悬挂于高度相同、相距为a的两固定点。试求柔索的平衡位置（形状）。

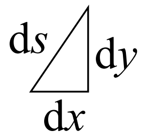


解： 平衡时柔索对称，取最低点O为坐标原点，建立图示O-xy坐标系。截取 $\overset{\frown}{OA}$ 弧段为研究对象，受力如图。

1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题





$F_T(x)$为x位置的张力

F_{T_0} 为水平位置的张力

s为 $\overset{\frown}{OA}$ 段弧长

列平衡方程： $\sum F_x = 0 \qquad F_T(x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = F_{T_0}$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_T(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = qs$$

两式相除得到， $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{qs}{F_{T_0}}$

两边对x求导，得到， $\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \dfrac{q}{F_{T_0}}\sqrt{1+y'^2}$ $\xrightarrow[\text{并利用条件 } x=0,\, y'=0]{\text{分离变量，从}O\text{点到}A\text{点积分}}$ $\operatorname{arc\,sh} y' = \dfrac{q}{F_{T_0}}x$

$$\Rightarrow \quad y' = \mathrm{sh}\left(\frac{qx}{F_{T_0}}\right) \xrightarrow[x=0,\, y=0]{\text{再次积分}} y = \frac{F_{T_0}}{q}\left(\mathrm{ch}\frac{qx}{F_{T_0}} - 1\right)$$

$$\int_0^{a/2}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad F_{T_0}$$

1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题

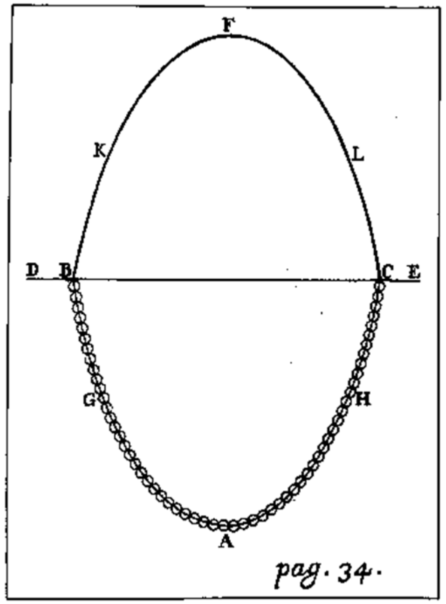
思考

1.上述分析中，为何没有使用力矩平衡方程？

2. 轻质柔索，两端水平悬挂，受沿水平方向均布的竖向荷载q作用（悬索桥的悬索模型）。试求平衡位置（形状）。

3. 试比较悬链线和抛物线。

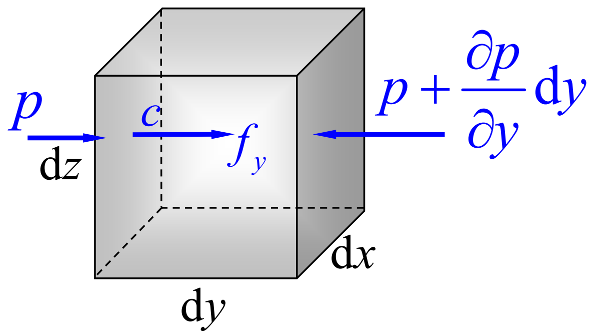
注释： 悬链vs. 砖石拱。注意到：悬链在重力作用下处处受拉；在砖石拱的设计中，要求在重力作用下处处受压，这是由于堆积的砖石只能受压不能受拉。十七世纪以前，石质建筑的圆拱和拱顶在修建时都只能反复试错，其中很多后来都倒塌了，其中包括圣索菲亚大教堂的穹顶（558年倒塌），法国博韦大教堂的中殿（1284年倒塌）。1666年，雷恩爵士在主持伦敦圣保罗大教堂的新建时，接受罗伯特.胡克的建议，遵循了悬链线规律，迄今稳固如初。



1-68. 罗伯特·胡克的悬链，见乔瓦尼·波伦尼，《梵蒂冈大圆顶的历史记录》（1748），34页，图12。艺术与建筑藏品，米莉亚姆与艾拉·D. 瓦拉赫艺术、版画、照片分馆。纽约公共图书馆，阿斯特、雷诺克斯与蒂尔登基金会。

1.1 单刚体平衡问题

- 单个刚体和单个变形体的平衡问题



例题 可变形体（流体微元的平衡）。试导出理想流体（无粘性流）的平衡微分方程。设单位质量的体力为$\boldsymbol{f}$。

解： 在静止流体中取一个正六面体微元，边长分别为$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$，微元受到体力$\boldsymbol{F}=\rho\Delta V\boldsymbol{f}$ 及6个侧面上的分布压力作用

$$\sum F_y=0 \qquad p\mathrm{d}x\mathrm{d}z-(p+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\rho f_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \Rightarrow f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

同理可得， $f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0$

矢量式 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{f}=\frac{1}{\rho}\nabla p$ 理想流体的平衡微分方程

注释：据此，可以求出流体在重力场中的静压力，

$$p=\rho gz+p_0$$

思考 上述分析中，为何没有使用力矩平衡方程?