

1.1 虚位移原理

• 虚位移原理解题

这里，讨论虚位移原理在静力学问题中的应用。解题步骤简述如下：

- 首先，选取研究对象（质点系），判定是否为双边、理想约束系统。
- 然后，明确是否静止并将继续保持静止状态，明确所有的主动力。
- 之后，采用解析法或几何法确定虚位移之间的关系（此处，限定为完整、定常系统）：
 - 采用解析法时，由广义坐标表出矢径（坐标），变分运算得出虚位移关系；
 - 当采用几何法时，由可能速度关系给出虚位移关系。
- 最后，代入静力虚功方程，藉此求解静力学正问题和反问题。
- 对于主动力有势的情形，可直接写出作为广义坐标的函数的势能函数，之后，对广义坐标求偏导数，由偏导数等式确定静止平衡位置或者主动力。

1.1 虚位移原理

• 虚位移原理解题

以下来看几类算例。

类别I：主动力已知，求静止平衡位置。

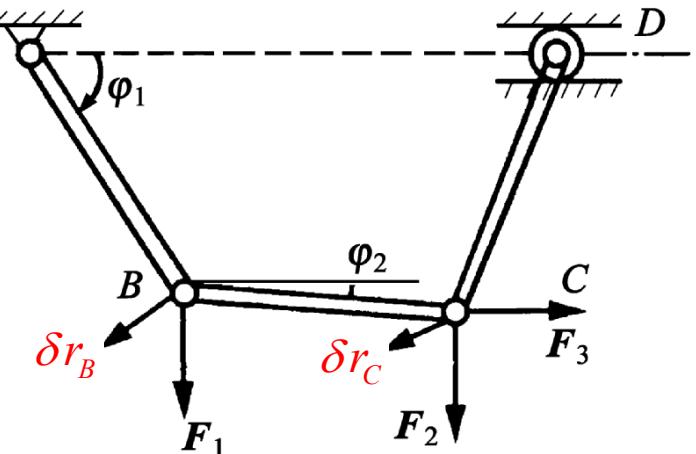


例题 AB 、 BC 、 CD 三杆约束如图。杆长均为 l ，受铅垂力 F_1, F_2 及水平力 F_3 作用，不计杆重及摩擦。试求静止平衡时的角度 φ_1 与 φ_2 。



解 8 取整体为研究对象，约束双边、理想、完整、定常。系统的广义坐标数（自由度）为2，可取 φ_1, φ_2 为广义坐标。

可采用解析法和几何法确定虚位移之间的关系。这里采用几何法。



1.1 虚位移原理

给定广义虚位移 $\delta\varphi_1 \neq 0, \delta\varphi_2 = 0$, BC杆平移, 故有

$$\delta r_B = \delta r_C$$

代入静力虚功方程得,

$$F_1 \cos \varphi_1 l \delta\varphi_1 + F_2 \cos \varphi_1 l \delta\varphi_1 - F_3 \sin \varphi_1 l \delta\varphi_1 = 0$$

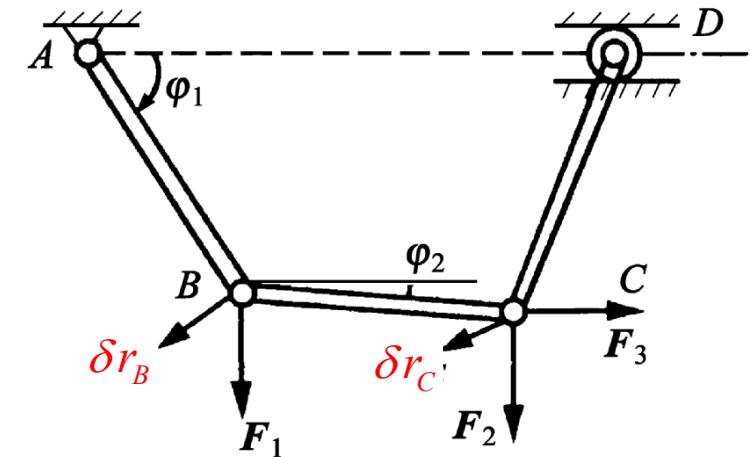
给定广义虚位移 $\delta\varphi_1 = 0, \delta\varphi_2 \neq 0$, 则有

$$\delta r_B = 0$$

代入静力虚功方程得, $F_2 \cos \varphi_2 l \delta\varphi_2 - F_3 \sin \varphi_2 l \delta\varphi_2 = 0$

联立求解得到: $\tan \varphi_1 = \frac{F_1 + F_2}{F_3}$ $\tan \varphi_2 = \frac{F_2}{F_3}$

评述: 请采用解析法解答, 并比较几何法和解析法。请用矢量静力学方法解答, 并比较矢量静力学方法和分析静力学方法。



1.1 虚位移原理

类别II：平衡位置已知，求主动力之间的关系。

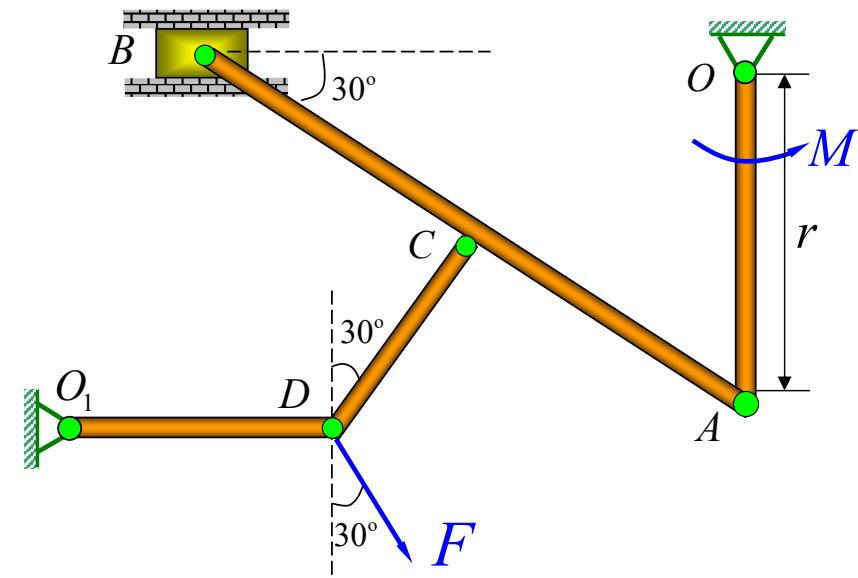


图示滑块连杆机构。杆长 $OA = r$ ，受力偶 M 和力 F 作用，系统静止平衡。试求主动力之间的数量关系。



解 8 取整体为研究对象，约束双面、理想、完整、定常。系统广义坐标数（自由度）为 1，可取 OA 杆的转角 φ 为广义坐标。

在此特定特殊位置，几何关系明确，适合采用几何法，且只需要求出与力偶相应的虚转角和力的作用质点的虚位移之间的关系。



1.1 虚位移原理

由速度分析知,

$$\delta r_A = r \delta\varphi, \delta r_C = \delta r_B = \delta r_A$$

$$\delta r_D \cos 30^\circ = \delta r_C \cos 60^\circ$$

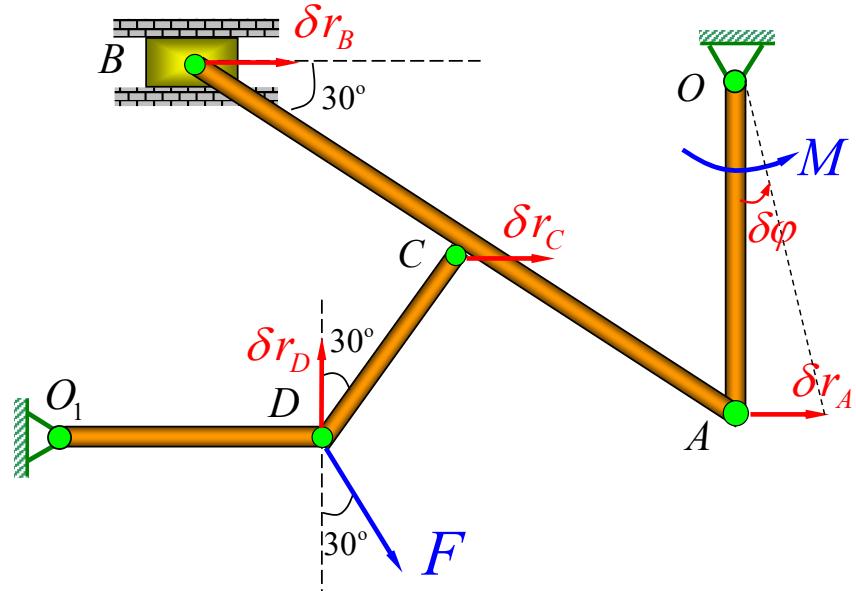
于是有,

$$\delta r_D = \frac{\sqrt{3}}{3} r \delta\varphi$$

代入静力虚功方程得,

$$M \delta\varphi - F \cos 30^\circ \delta r_D = \left(M - F \cos 30^\circ \frac{\sqrt{3}}{3} r \right) \delta\varphi = 0$$

由于虚转角的任意性, 得到 $F = \frac{2M}{r}$



1.1 虚位移原理

这里，提出一个有趣的问题：是否可能用虚位移原理来确定静止平衡系统的约束力值呢？读者也许会觉得这个问题挺奇怪的，引入虚位移原理的出发点不正是不希望约束力出现么？但这无疑是个有趣的问题。粗粗看来，答案是显然的，根本不可能！然而，如果假想地解除静止平衡系统中的那个（或那些）约束，并施加真实的约束反力，那么，这个修改过的系统仍然静止平衡，而约束反力也作为主动力出现，继而，就可以用虚位移原理求出这些主动力（即原系统中的约束反力）。

这一思路在应用于不可动系统（对应矢量静力学中的静定系统）时尤为精彩。不可动体系根本没有运动可能，因此无法发生不违反约束的虚位移，也就无法通过主动扰动激发有用信息。而主动地、假想地解除约束后，化原始不可动系统为可动体系，进而可以主动扰动之。

1.1 虚位移原理



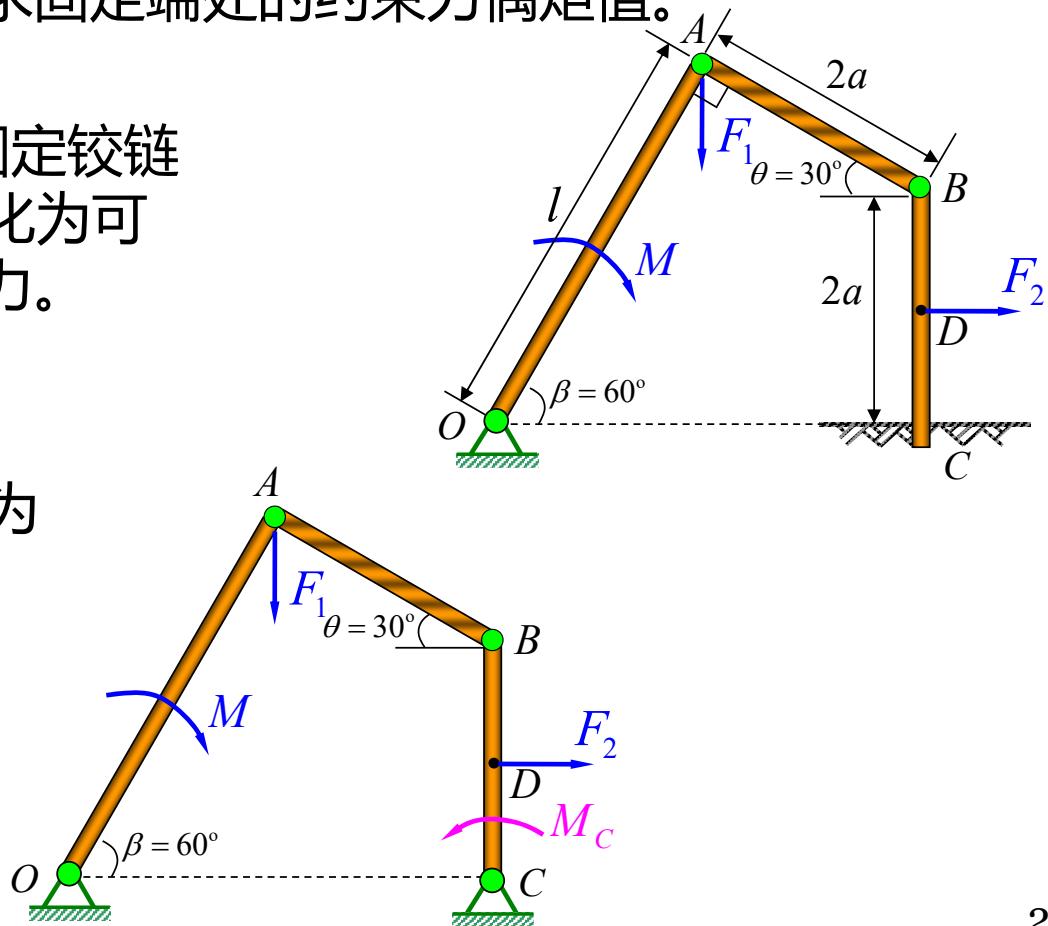
图示结构。 $OA = l$, $AB = BC = 2a$, $BD = DC$, $\theta = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\angle OAB = 90^\circ$, 受主动力 F_1, F_2 及主动力偶 M 的作用。试求固定端处的约束力偶矩值。



解：解除固定端处的转角约束，代以固定铰链及约束力偶 M_C ，原始不可动结构化为可动机构，约束力偶 M_C 归入主动力。

取可动机构为研究对象，约束双边、理想、完整、定常。系统广义坐标数（自由度）为 1，可取 BC 杆的转角 φ 为广义坐标。

采用几何法分析之。



1.1 虚位移原理

由速度关系知, $\delta r_B = 2a\delta\varphi$

$$\delta r_D = a\delta\varphi$$

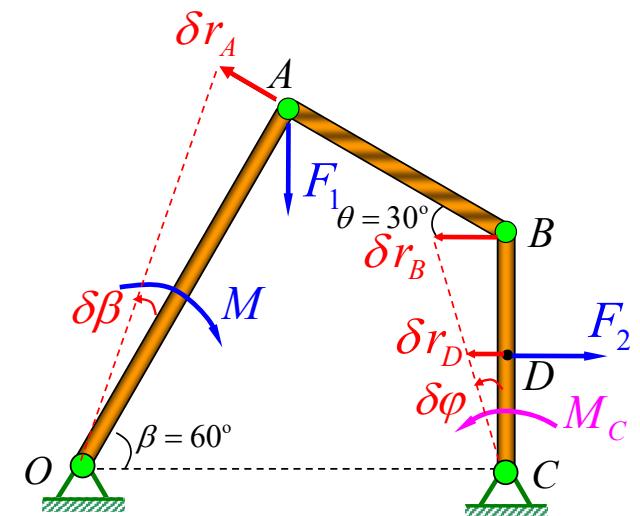
$$\delta r_A = \delta r_B \cos 30^\circ = \sqrt{3}a\delta\varphi$$

$$\delta\beta = \frac{\delta r_A}{l} = \frac{\sqrt{3}a\delta\varphi}{l}$$

代入静力虚功方程,

$$M\delta\varphi - F \cos 30^\circ \delta r_D = \left(M - F \cos 30^\circ \frac{\sqrt{3}}{3} r \right) \delta\varphi = 0$$

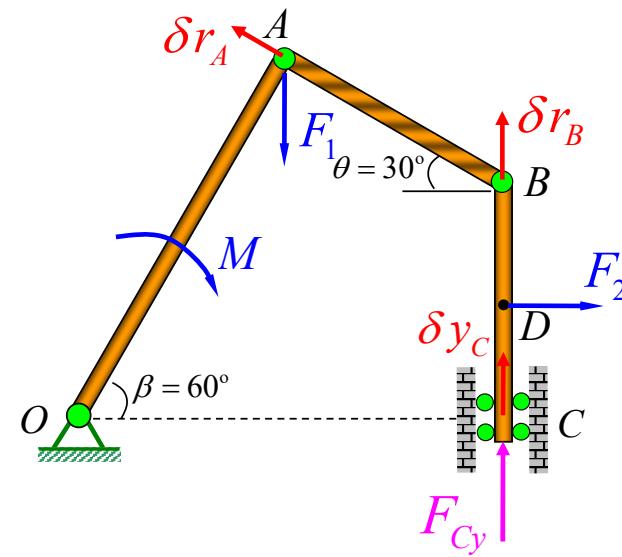
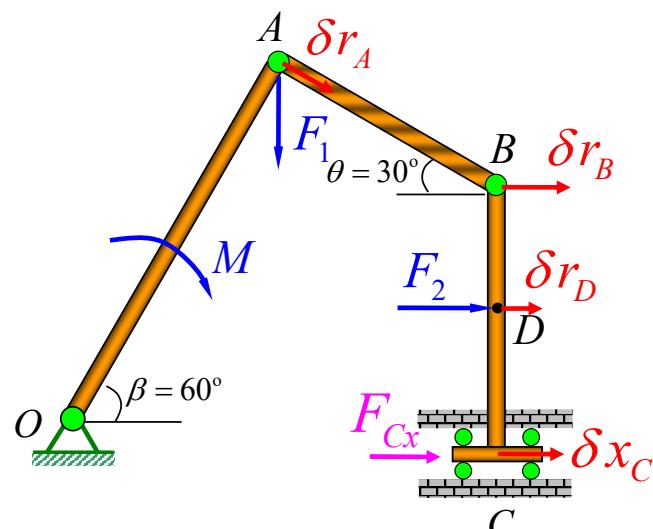
整理可得, $M_C = F_2 a + \frac{\sqrt{3}}{2} F_1 a + \frac{\sqrt{3}aM}{l}$



评述: 约束力与主动力之间呈线性关系, 各系数反映相关几何信息。

1.1 虚位移原理

评述：类似地，可求固定端处的约束力 F_{Cx} 和 F_{Cy} 。只解除固定端处水平约束，代以约束反力 F_{Cx} ，给出图示虚位移，代入静力虚功方程求解；只解除固定端处竖向约束，代以约束反力 F_{Cy} ，给出图示虚位移，代入静力虚功方程求解。



1.1 虚位移原理

类别III：主动力有势，求平衡位置。



图示机构，4杆长度及弹簧原长均为 l ，弹簧刚度 k ，不计自重，体系静止平衡。试求力 F 大小与角度 θ 之间的数量关系。

解：取整体为研究对象，约束双边、理想、完整、定常。系统广义坐标数（自由度）为1，可取角度 θ 为广义坐标。

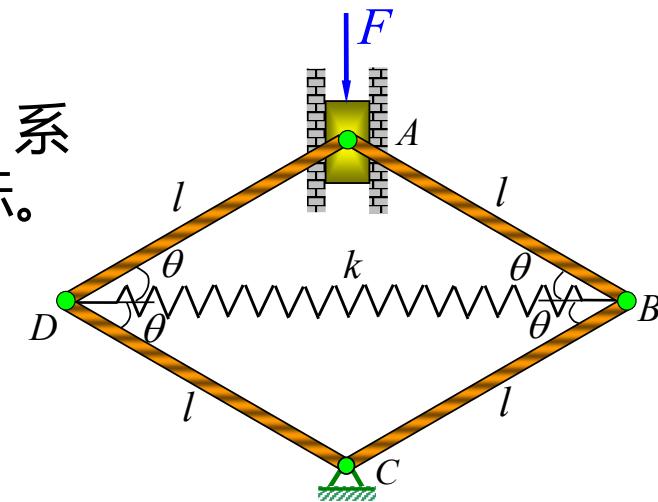
主动力（恒力、弹簧力）有势。取自由状态下滑块A的位置为恒力的零势能位置，取弹簧未变形时的位置为弹簧力的零势能位置。系统处于 θ 处时，主动力的势能为，

$$V = -\left(\sqrt{3}l - 2l \sin \theta\right)F + \frac{k}{2}(2l \cos \theta - l)^2$$

代入等式 $\frac{\partial V}{\partial q} = 0$ 得， $2l \cos \theta F - k(2l \cos \theta - l)2l \sin \theta = 0$

整理得， $F = kl(2 \cos \theta - 1) \tan \theta$

评述：请读者画出力 F 与角度 θ 的关系，仔细想想是否合理。



6-2 静力稳定性

2.1 静力稳定性

• 静止平衡

本节局限于考察有势情形。静止的有势系统能继续保持静止状态的充要条件是势能函数取驻值，也即广义主动力等于零，数学表述为，

$$F_{Q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

这可归于科学的目的因解释：

自然具有一种倾向，倾向于寻找其处所。

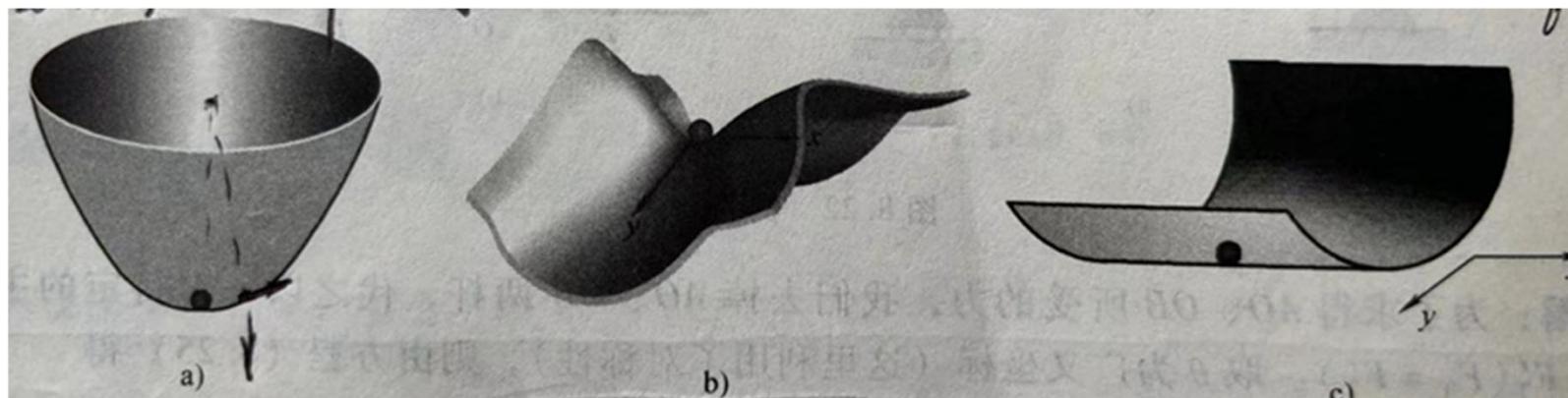
水往低处流，就可解释为水有目的地找出低处——那个它应在的处所。水从当前静止状态出发，假想地测试所有那些无限邻近位置，看否能进一步下降。如果能，就流下去；如果不能，就停在原地。这就是“主动扰动，测试信息”的思想。

2.1 静力稳定性

• 平衡稳定性

这里，来探讨一个与静止平衡密切相关，但又十分相同的主题——静力稳定性。

考察一个置于光滑面上的小球。考虑三种光滑面：*a*为椭球面，*b*为马鞍面，*c*为圆柱面。对于这三种情形，小球均能保持静止平衡（对于情形*b*，静止平衡不易实现）。但是，如果小球受到微小干扰而发生微小位置偏移，那么，对于这三种情形，小球的表现却截然不同。对于情形*a*，小球将倾向于恢复平衡位置，对于情形*b*，小球以极大概率进一步偏离平衡位置，对于情形*c*，小球沿*x*方向可停留在任何位置，而沿*y*方向倾向于恢复平衡位置。



2.1 静力稳定性

• 平衡稳定性

静止平衡系统在微扰下可能表现出不同的行为，研究这一问题具有极为重要的意义。这里，首先给出精确定义。

所谓**静力稳定性**，就是研究静止平衡系统在受到微扰时，是否能保持在原始平衡位置附近。如果对任意微扰，系统都倾向于恢复原始平衡位置，称为**稳定平衡**；如果存在这样一种微扰，系统倾向于远离原始平衡位置，称为**不稳定平衡**；如果至少存在这样一种微扰，系统可以在微扰后的位置平衡，并且对于其它微扰，系统都倾向于恢复原始平衡位置，则称为**随遇平衡**。

从置于光滑面上的小球问题，就能大概猜出系统稳定平衡、不稳定平衡和随遇平衡的条件。下边，将从理论上严格建立这些条件。

2.1 静力稳定性

• 平衡稳定性

考察一个广义坐标数（自由度）为 n 的双面、理想、完整、定常约束系统，所有主动力有势。系统在 $\mathbf{q}^0 = \{q_1^0, \dots, q_n^0\}$ 处静止平衡，试判断平衡的稳定性。

在静止平衡位置处，对任意虚位移都有主动力虚功之和为零，相应地，广义主动力为零 $F_{Q_j}(\mathbf{q}^0) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}(\mathbf{q}^0) = 0$ ，广义主动力在广义虚位移上的虚功之和为零，即

$$\sum_{j=1}^n F_{Q_j}(\mathbf{q}^0) \delta q_j = 0$$

如果将广义主动力排列成一个向量 $\mathbf{F}_Q(\mathbf{q}^0)$ ，将广义虚位移排列成另一个向量 $\delta \mathbf{q}$ ，那么，上式表示广义主动动力向量与广义虚位移向量正交，即，

$$\mathbf{F}_Q(\mathbf{q}^0) \cdot \delta \mathbf{q} = 0$$

2.1 静力稳定性

• 平衡稳定性

为研究平衡的稳定性，考察偏离平衡位置的一个无限小邻近位置处 $\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q}$ 的广义主动力：

$$F_{Q_j}(\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q}) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}(\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q}) = -\frac{\partial V}{\partial q_j}(\mathbf{q}^0) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i} \delta q_i = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i} \delta q_i$$

即记 $\mathbf{G} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i} \right]_{n \times n}$, 于是有,

$$\mathbf{F}_Q(\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q}) = -\mathbf{G} \cdot \delta\mathbf{q}$$

考察这一无限小邻近位置处的广义主动力 $F_{Q_j}(\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q})$ 在广义虚位移 δq_j 上的虚功之和的符号，或者说，考察广义主动力向量 $-\mathbf{G} \cdot \delta\mathbf{q}$ 和广义虚位移向量 $\delta\mathbf{q}$ 的夹角。如果符号为负，或者说角度大于 90° ，说明主动力倾向于使系统恢复原始平衡位置，反之则不会。

2.1 静力稳定性

• 平衡稳定性

这就得出如下结论：

如果对任意非零广义虚位移向量 δq ，都有 $\delta q^T \cdot G \cdot \delta q \geq 0$ ，**系统稳定平衡**，反之亦然；如果存在某个非零广义虚位移向量 δq ，使得 $\delta q^T \cdot G \cdot \delta q < 0$ ，**系统不稳定平衡**，反之亦然。

但是，“对任意非零广义虚位移向量 δq ，都有 $\delta q^T \cdot G \cdot \delta q \geq 0$ ，并且至少有一个非零 δq 使等号成立”这一条件，并非**随遇平衡**的充要条件，而仅是必要条件，其充分性有赖于考察广义主动力的更高阶项。通常，将满足上述条件的平衡称为**临界平衡**。

由此可知，判定平衡稳定性的问题归结为判定矩阵 G 的性质。

2.1 静力稳定性

• 稳定性判定定理

有势系统在某一位置静止平衡。若 \mathbf{G} 的全部特征值为正（即正定），稳定平衡，反之亦然；若 \mathbf{G} 的特征值中至少有一个为负，不稳定平衡，反之亦然；若 \mathbf{G} 的特征值非负，且至少有一个为零（即半正定），临界平衡，反之亦然。

定理：有势系统的稳定平衡位置必为势能函数的严格极小点，反之亦然。

证明：记 $V(\mathbf{q}) = V(q_1, \dots, q_n)$ 为势能函数，对于静止平衡位置 \mathbf{q}^0 有，

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q^0} = 0$$

即 \mathbf{q}^0 为势能函数的驻点。考察势能函数在驻点的无限小邻近位置 $\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q}$ 的值，

$$V(\mathbf{q}^0 + \delta\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}^0) + \frac{1}{2} \delta\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}^0) \cdot \delta\mathbf{q} + \dots$$

静止平衡位置为稳定平衡，当且仅当对任意非零广义虚位移向量 $\delta\mathbf{q}$ ，
有 $\delta\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \delta\mathbf{q} > 0$ ，当且仅当势能函数在平衡位置取严格极小。

2.1 静力稳定性

• 稳定性判定定理



均质杆AB长 $l = 0.6\text{m}$ ，质量 $m = 10\text{kg}$ ，弹簧刚度 $k = 200\text{N/m}$ 。当杆与铅直方向夹角 $\theta = 0^\circ$ 时，弹簧刚好处于原长。试求杆的平衡位置，并判定平衡稳定性。



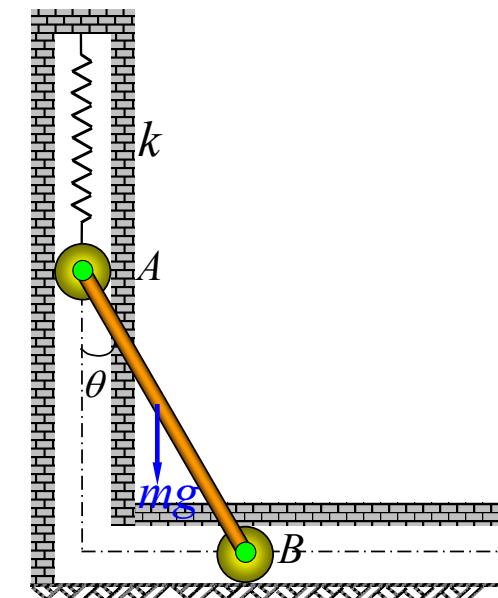
解：取整体为研究对象，约束双边、理想、完整、定常。广义坐标数（自由度）为1，取 θ 为广义坐标。

主动力（重力和弹性力）有势，取弹簧原长为弹性力的零势能位置，取水平滑道面为重力的零势能位置。系统处于 θ 位置时，主动力的势能：

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos\theta)^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

代入等式 $\frac{\partial V}{\partial q} = 0$ 得， $\left[kl(1 - \cos\theta) - \frac{mg}{2} \right] \sin\theta = 0$

解之得， $\theta_1 = 0^\circ$ $\theta_2 = \arccos\left(1 - \frac{mg}{2kl}\right) = 53.8^\circ$



2.1 静力稳定性

• 稳定性判定定理

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1 - \cos\theta)^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

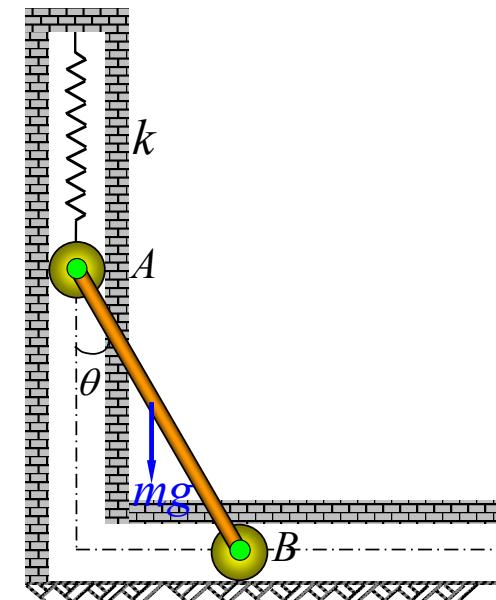
求势能函数的二阶导数得,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = kl(\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta) - \frac{mg}{2}\cos\theta$$

将两个平衡位置分别代入其中。

$\frac{d^2V}{d\theta^2}|_{\theta=0^\circ} = -29.4 < 0$, θ_1 位置为不稳定平衡;

$\frac{d^2V}{d\theta^2}|_{\theta=53.8^\circ} = 46.9 > 0$, θ_2 位置为稳定平衡。



评述: 严格说来，在杆件竖直时为单边约束，请读者思考该如何处理。

2.1 静力稳定性

评述：达朗贝尔原理vs. 虚位移原理。达朗贝尔原理（动静法）——动力学问题的静力学观点，即，以静制动；虚位移原理——以“虚”动解决“实”静问题，即，以动御静。二者共同构成了分析力学的两大柱石。