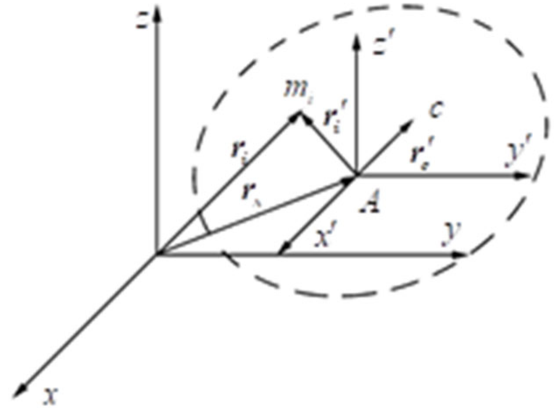
2.1 动量方法

- 对固定点和运动点的动量矩定义

动量矩及其计算

质点系**对固定点**（惯性系中的不动点）**的动量矩**定义为

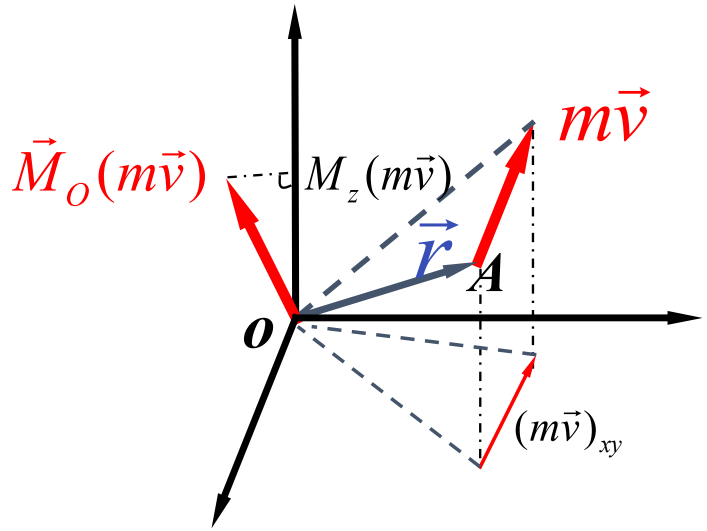


$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$ ——也即动量系的主矩

质点系对固定轴l（惯性系中的不动轴）的动量矩定义为：将各动量向垂直于该轴的某平面投影，然后对平面和轴的交点取矩（与轴的正向同向取正，反向取负），然后求和，记为L_l。

类比力矩关系定理，有动量矩关系定理：

$$L_l = [\boldsymbol{L}_O]_l$$



即，质点系对轴之动量矩等于对该轴上一点的动量矩在该轴上的投影。

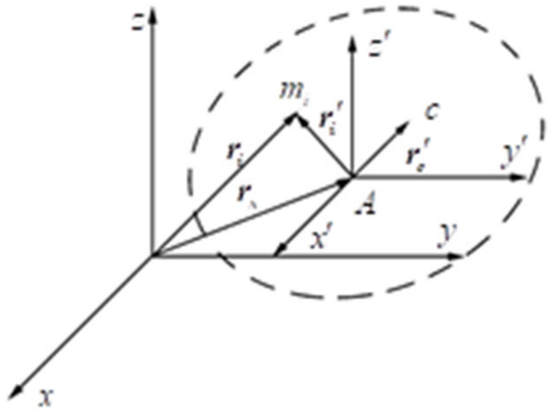
2.1 动量方法

- 对固定点和运动点的动量矩定义

动量矩及其计算

在惯性参考系（定系）中选择一个运动点A（不必为物质点），并在运动点上固连一平移参考系（动系）。在该参考系中观察各质点，相对速度记为$\boldsymbol{v}_{ri}$。质点系对**运动点A的动量矩**定义为：

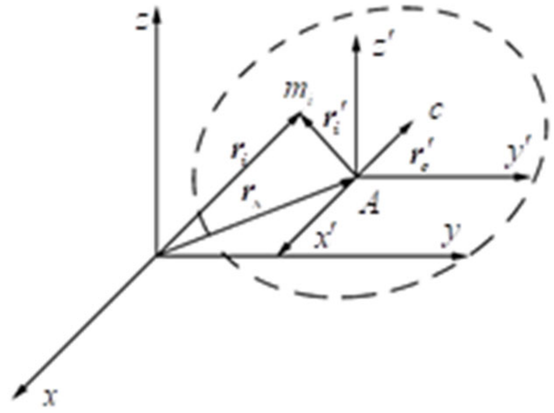
$$\boldsymbol{L}_A = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_{ri}$$



同理，可定义质点系对平移轴的动量矩，并有类似的动量矩关系定理

2.1 动量方法

质点系对固定点和运动点的动量矩关系



质点系对固定点O和运动点A的动量矩关系

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{r}_i') \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{ri}$$

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i' = m\boldsymbol{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{OA} \times m\boldsymbol{v}_C + m\boldsymbol{AC} \times \boldsymbol{v}_A$$

以下是一些重要特例

1. 当运动点A取为固定点时，$\boldsymbol{v}_A = 0$ ，于是有

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{OA} \times m\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{L}_A + \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{p}$$

这就是对两个固定点的动量矩关系，类似对两个点的力系主矩关系。

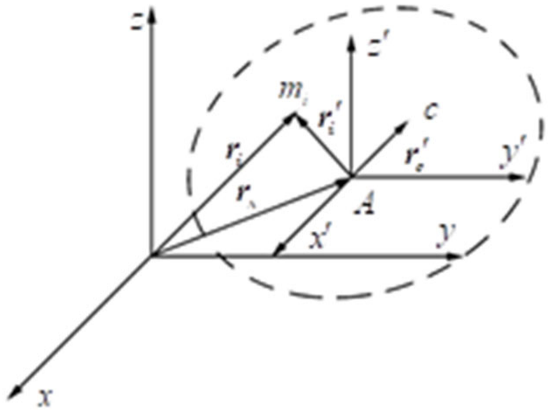
特别地，如果质心不动，有 $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_A$ 此时，质点系对任意固定点的动量矩都相等。

2.1 动量方法

质点系对固定点和运动点的动量矩关系

以下是一些重要特例

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_A+\boldsymbol{OA}\times m\boldsymbol{v}_C+m\boldsymbol{AC}\times\boldsymbol{v}_A$$



2. 当运动点取为质心时，$AC=0$，于是有

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C+\boldsymbol{OC}\times m\boldsymbol{v}_C$$

这就是对固定点O和对质心C的动量矩关系。因为对质心的动量矩常常更易求出，所以此式常用于计算质点系对固定点的动量矩。

特别地，如果质心不动，有

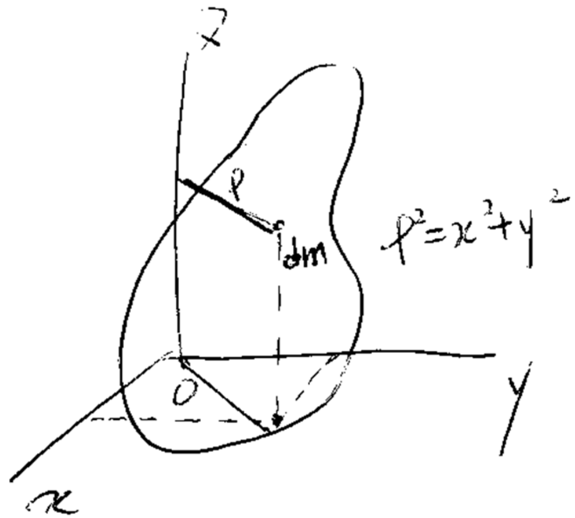
$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_C$$

2.1 动量方法

- 刚体的惯性特性

在计算刚体的动量矩之前，首先来讨论刚体的惯性特性。考察一个刚体，给定点O和直角坐标系O-xyz。定义刚体对这三根轴的三个质量**惯性矩**（moment of inertia，也称**转动惯量**）为：

$$J_x=\int\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}m, J_y=\int\left(x^2+z^2\right)\mathrm{d}m, J_z=\int\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}m$$



定义刚体对两根正交轴的三个质量**惯性积**为

$$J_{xy}=\int_M xy\mathrm{d}m, J_{xz}=\int_M xz\mathrm{d}m, J_{yz}=\int_M yz\mathrm{d}m$$

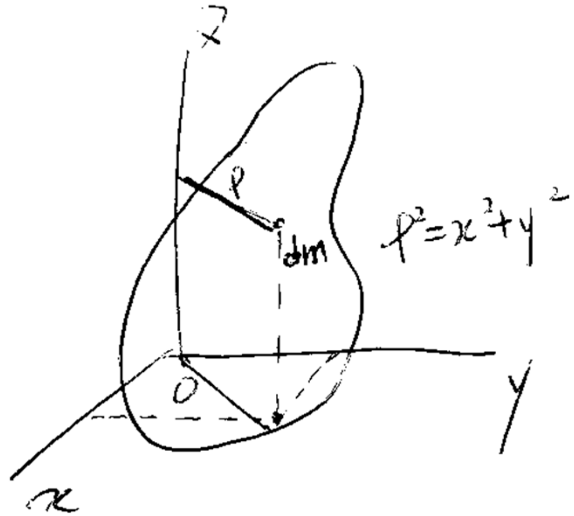
这些量仅与刚体的质量分布有关，无涉运动，统称为**刚体的惯性特性**。

2.1 动量方法

- 刚体的惯性特性

刚体对轴的转动惯量就是各质量元素与其到轴的距离平方相乘，而后全域求和，因此，也可写成：

$$J_l = \int \rho^2 \mathrm{d}m \qquad \rho\text{为质量元素到轴}l\text{的距离}$$



刚体对轴的转动惯量必定非负。

定义刚体对轴的回转半径（或称惯量半径）：

$$\rho_l = \sqrt{\frac{J_l}{m}} \qquad m\text{为刚体的总质量}$$

于是 $J_l = m\rho_l^2$ ，这相当于将刚体的质量全部集中在与l轴距离为 ρ_l 的某一点时对l轴的转动惯量。

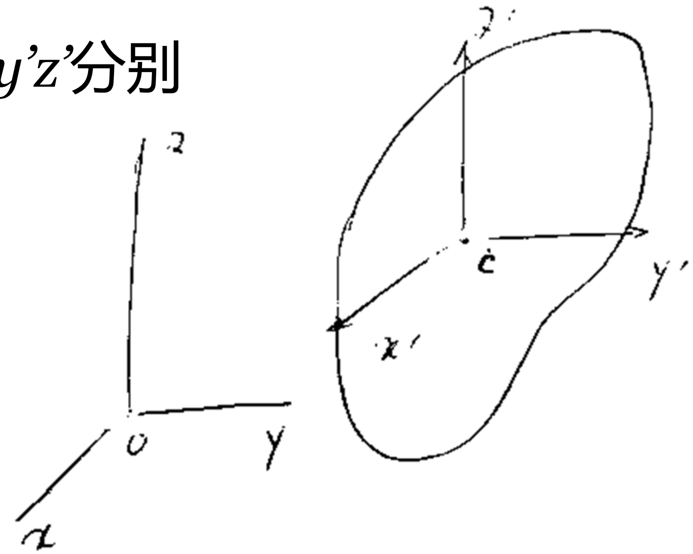
刚体对两正交轴的惯性积定义为质量元素与其相应的两个坐标相乘，而后全域求和，因此可正可负。

2.1 动量方法

点移动的影响

由定义知，转动惯量和惯性积与点的位置和坐标轴的方位有关。先来考察点的移动带来的影响，此时坐标轴方位不变

将点*O*移至刚体质心*C*，并建立坐标系*C-x'y'z'*，三根坐标轴*x'y'z'*分别与*xyz*平行。质心*C*在坐标系*O-xyz*中的坐标记为(x_C, y_C, z_C)。



考察惯性矩 J_z ，有

$$J_z = \int \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}m = \int \left[\left(x' + x_C\right)^2 + \left(y' + y_C\right)^2\right] \mathrm{d}m$$

$$= \int \left(x'^2 + y'^2\right) \mathrm{d}m + m\left(x_C{}^2 + y_C{}^2\right) + 2x_C \int x' \mathrm{d}m + 2y_C \int y' \mathrm{d}m$$

在质心坐标系中，$\int x' \mathrm{d}m = \int y' \mathrm{d}m = 0$ ，$x_C{}^2 + y_C{}^2$ 等于质心轴z'到轴z的距离的平方。于是有，

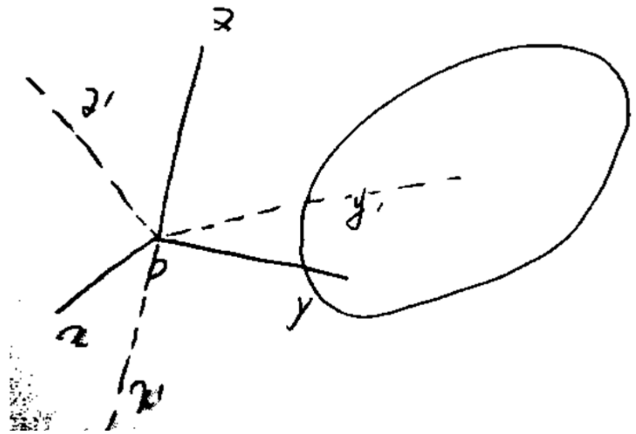
$$\boxed{J_z = J_{z'(C)} + m \times \mathrm{Dis}\left[z, z'\right]^2}$$ ——平行轴定理

该定理表明：刚体对一根轴的转动惯量等于刚体对与之平行的质心轴的转动惯量加上总质量与二者距离平方的乘积。因此，刚体对平行轴的转动惯量，以过质心的那一根为最小。

同理，可考察参考点移动对惯性积的影响。

2.1 动量方法

坐标系转动影响



考察坐标系转动对转动惯量和惯性积的影响

对给定一点，将三个转动惯量相加得

$$J_x + J_y + J_z = 2\int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \mathrm{d}m$$

其中，被积函数表示质量元素到给定点的距离平方

因此，三个转动惯量之和不随坐标系的转动而改变。

从定义可知，随坐标系转动，三个转动惯量改变且此消彼长，三个惯性积量值变化，且正负切换。

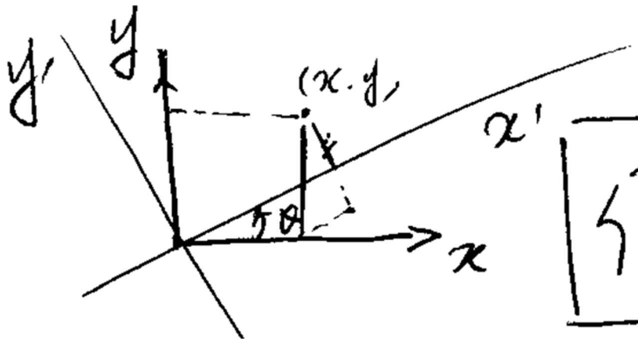
2.1 动量方法

刚体对点的惯量主轴

可以证明，对任一点，均存在三根正交轴，刚体对这三根轴的惯性积为零。这三根正交轴称为刚体**对该点的三根惯量主轴**。在刚体上取一点，该点的三个惯量主轴可视为与刚体固结在一起，随刚体位置改变而改变。

命题： 如果z轴是刚体对O点的一根主轴，那么无论如何放置另两根过O点的正交轴 x', y' ，都有 $J_{x'z} = J_{y'z} = 0$ 。

证明： 记另两根主轴为x、y，有$J_{xz} = J_{yz} = 0$ 。两轴转过角度θ ，得到x', y' 。利用坐标变换关系，得知，



$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\theta + y\cdot\sin\theta \\ y' = y\cos\theta - x\cdot\sin\theta \end{cases}$$

$$J_{x'z} = \int_M x'z\mathrm{d}m = \int_M (x\cos\theta + y\sin\theta)z\mathrm{d}m = J_{xz}\cos\theta + J_{yz}\sin\theta = 0,$$

$$J_{y'z} = \int_M y'z\mathrm{d}m = \int_M (-x\sin\theta + y\cos\theta)z\mathrm{d}m = -J_{xz}\sin\theta + J_{yz}\cos\theta = 0$$

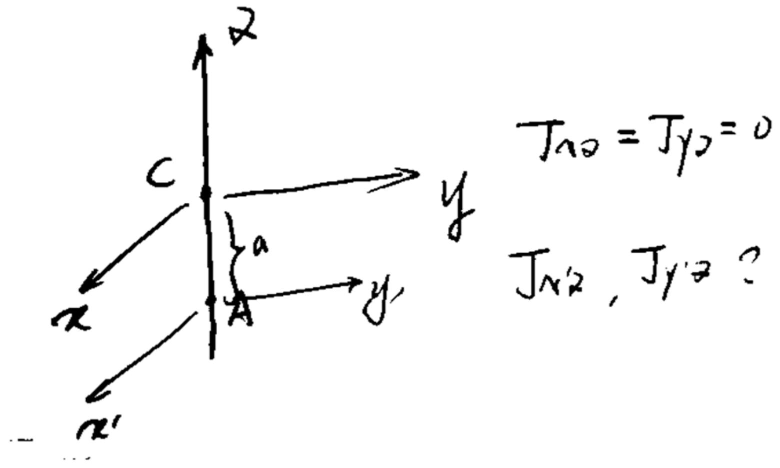
2.1 动量方法

中心惯量主轴

刚体对质心的三根主轴称为刚体的三根**中心惯量主轴**。

命题： 中心惯量主轴是该轴上任一点的主轴。

证明： 设z为刚体的一根中心惯量主轴，另两根中心惯量主轴记为x、y，有 $J_{xz}=J_{yz}=0$ 。考察z轴上一点A，有



$$J_{x'z}=\int_M x'z\mathrm{d}m=\int_M x\left(z+a\right)\mathrm{d}m=J_{xz}+a\int_M x\mathrm{d}m=0,$$

$$J_{y'z}=\int_M y'z\mathrm{d}m=\int_M y\left(z+a\right)\mathrm{d}m=J_{yz}+a\int_M y\mathrm{d}m=0$$

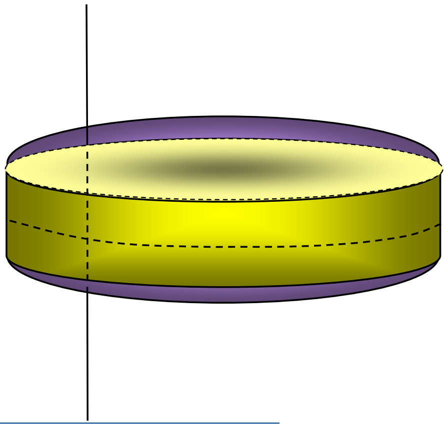
于是知，z为A点的一根惯量主轴。

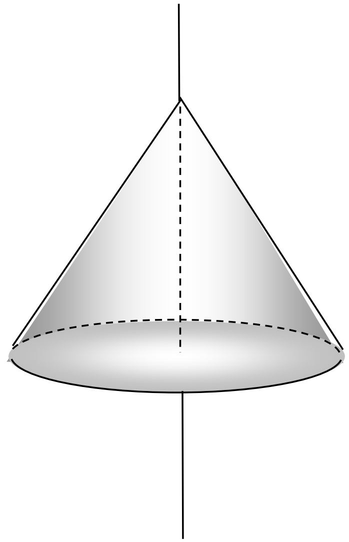
2.1 动量方法

中心惯量主轴

简单刚体对点的主轴和对质心的中心惯量主轴容易判断分析，常结合对称性来分析。

- 具有质量对称面的刚体，垂直于该质量对称面的轴是该轴与质量对称面交点的一根主轴；质心位于质量对称面上，过质心的那根垂直轴是一根中心惯量主轴。
- 均质圆锥体具有对称轴，该对称轴是轴上任一点的一根主轴，同时为中心惯量主轴。





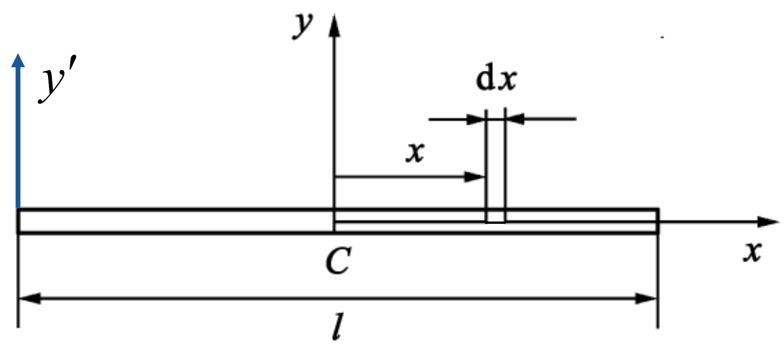
2.1 动量方法

典型刚体的转动惯量计算

这里，来计算典型刚体以及组合刚体对轴的转动惯量。

例题 均质细长直杆质量为m，长为l。试求该杆对通过质心且垂直于杆的轴的转动惯量，对通过杆端且垂直于杆的轴的转动惯量

解： 建立图示坐标系，有：



$$J_y = \int_M x^2 \mathrm{d}m = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}x = \frac{1}{12} m l^2$$

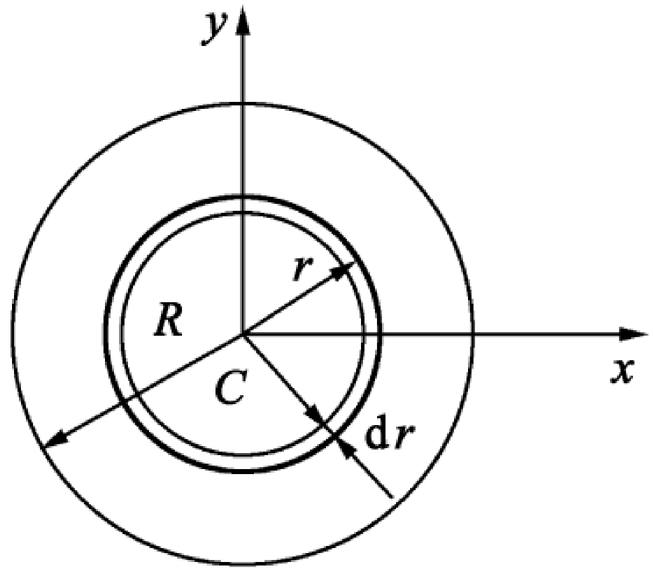
$$J_{y'} = \int_M x^2 \mathrm{d}m = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} m l^2$$

后式也可采用平行轴定理得到，$J_{y'} = J_y + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2$

2.1 动量方法

典型刚体的转动惯量计算

例题　等厚均质薄圆盘半径为R，质量为m。试求圆盘对过其中心且垂直于盘面的轴的转动惯量。



解：　建立图示坐标系，有：

$$J_z = \int_M r^2 \mathrm{d}m = \int_0^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{1}{2} m R^2$$

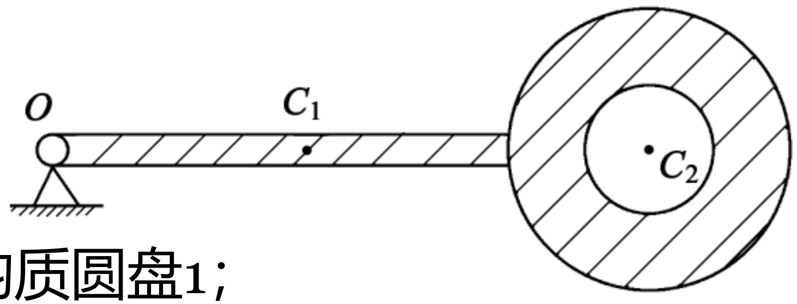
2.1 动量方法

组合刚体的质量惯性矩计算

由转动惯量的求和定义和平行轴定理，可由各刚体对质心轴的转动惯量计算出组合刚体对任一平行轴的转动惯量。若某刚体有空心部分，可采用负质量法处理之，恰似求形心的负体积法。

例题 均质细长直杆长为l，质量为m，杆的一端与一质量为m_O，外径为$2R$，内径为$2r$的均质圆环板固结，试求该刚体对过杆的另一端O且垂直于刚体所在平面的轴的惯性矩。

解： C_1, C_2 分别为直杆和圆环的质心。此刚体可看成由三部分组成：质量为m，长为l的杆；



质量为 $m_1 = -\dfrac{m_0 \pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)}$ ，半径为r，中心在 C_2 处的均质圆盘1；

质量为 $m_2 = m_0 + \dfrac{m_0 \pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)}$ ，半径为R，中心在 C_2 处的均质圆盘2。

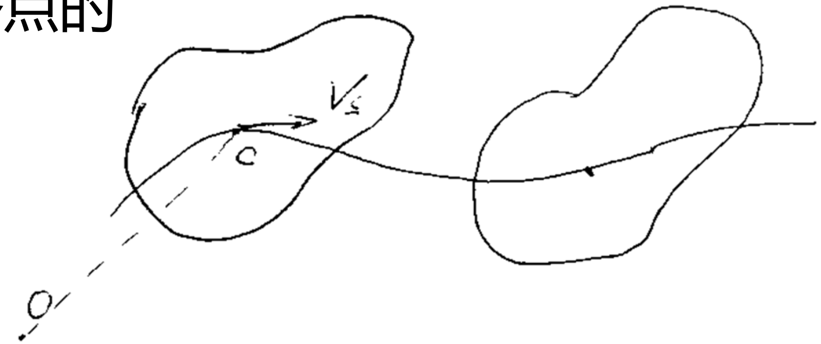
于是有，$J_O = J_O^{杆} + J_O^{盘1} + J_O^{盘2} = J_C^{杆} + mOC_1^{\ 2} + J_{C_2}^{盘1} + m_1 OC_2^{\ 2} + J_{C_2}^{盘2} + m_2 OC_2^{\ 2}$

2.1 动量方法

- 刚体的动量矩计算

转向典型运动（平移、定轴转动和平面运动）刚体的动量矩计算

平移运动刚体： 先从定义出发，因平移运动刚体上各点的速度相同，于是有



$$\boxed{\boldsymbol{L}_O=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_C=m\boldsymbol{OC}\times\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{OC}\times m\boldsymbol{v}_C}$$

也可以在固连于质心的平移坐标系中观察，平移运动刚体静止不动，于是有 $\boxed{\boldsymbol{L}_C=0}$

由对固定点和质心的动量矩关系，再次得到 $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{OC}\times m\boldsymbol{v}_C$

因此，平移运动刚体对固定点的动量矩等于从固定点到质心的连线叉乘质点系动量。这可理解为，将刚体质量完全集中于质心处，并对固定点取矩，这就是能将平移运动刚体视作单质点处理的原因之一。

当刚体做平面平移时，质心做平面曲线运动。此刚体对该平面内一固定点的动量矩方位不变，可按代数量处理。

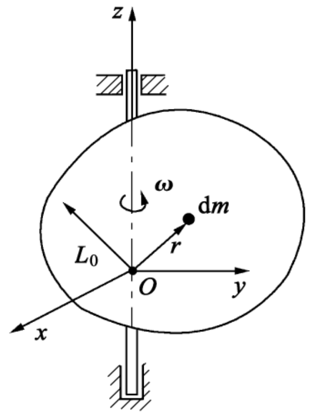
2.1 动量方法

- 刚体的动量矩计算

定轴转动刚体： 在转轴上选取一固定点O，计算定轴转动刚体对该点的动量矩。

先从定义出发，

$$\boldsymbol{L}_O=\int_M \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}m=\int_M \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\mathrm{d}m=\int_M [r^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}]\mathrm{d}m$$



这里，应用了拉格朗日公式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

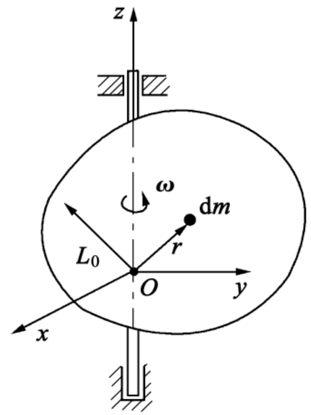
以固定点O为原点，建立惯性直角坐标系$O\text{-}xyz$，其中z轴与固定转轴重合。于是，角速度表示为 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$ ，矢径表示为$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，代入上式得到:

$$\boldsymbol{L}_O=\int\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)\omega\boldsymbol{k}-z\omega\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)\right]\mathrm{d}m=-J_{xz}\omega\boldsymbol{i}-J_{yz}\omega\boldsymbol{j}+J_z\omega\boldsymbol{k}$$

2.1 动量方法

- 刚体的动量矩计算

定轴转动刚体：



在刚体定轴转动时，单位方向矢 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 保持不变，J_z 保持不变，而J_{xz},J_{yz} 随刚体位置变化而变化。一般来说，定轴转动刚体对转轴上一点的动量矩方向不与角速度矢量同向。当转轴为刚体对O点的一根主轴时，J_{xz},J_{yz} 始终为零，于是有，

$$\boldsymbol{L}_O = J_z\boldsymbol{\omega}$$

此时，动量矩 $\boldsymbol{L}_O$的方向与角速度矢量同向，大小与角速度大小成正比。

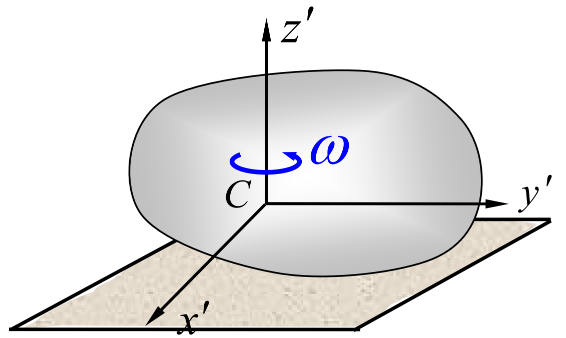
定轴转动刚体对转轴z的动量矩为

$$L_z = \left[\boldsymbol{L}_O\right]_z = J_z\omega$$

定轴转动刚体对转轴的动量矩亦可由定义直接得出。

2.1 动量方法

平面运动刚体：



以质心为原点，建立平移坐标系$C-x'y'z'$，并使z'轴垂直于刚体运动平面。在该系中观察，刚体绕z'轴定轴转动。于是得到刚体对质心的动量矩，

$$\boldsymbol{L}_C = -J_{x'z'}\omega\boldsymbol{i}' - J_{y'z'}\omega\boldsymbol{j}' + J_{z'}\omega\boldsymbol{k}'$$

一般来说，平面运动刚体对质心的动量矩方向不与角速度矢量同向。当z'轴为刚体对质心的一根主轴时，$J_{x'z'} = J_{y'z'}$始终为零，于是有

$$\boldsymbol{L}_C = J_{z'}\boldsymbol{\omega}$$

研究平面运动刚体时，常将过质心的刚性平面图形画在纸面上，此时z'轴与纸面垂直且通过质心C，因此，常将上式记为，$\boldsymbol{L}_C = J_C\boldsymbol{\omega}$

但要十分清楚，J_C是指平面运动刚体对z'轴的转动惯量。

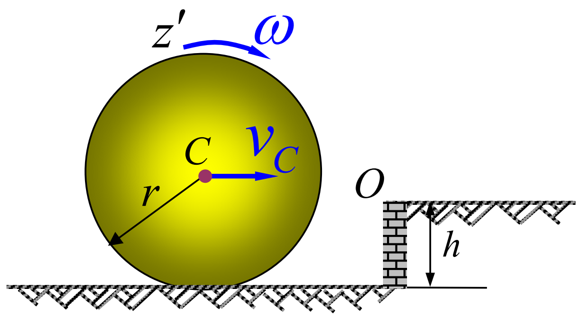
平面运动刚体对过质心的平移轴z'的动量矩为，$L_{z'} = \left[\boldsymbol{L}_C\right]_{z'} = J_C\omega$

2.1 动量方法

若要计算平面运动刚体对固定点的动量矩，可以应用对固定点和对质心的动量矩关系。以下，仅研究这样的平面运动刚体：它具有质量对称面，且运动平面与质量对称面平行。讨论在过质心的运动平面中进行，计算刚体对该平面内的固定点O的动量矩。对此情形，$\boldsymbol{L}_O$和$\boldsymbol{\omega}$同向，且都与该平面垂直，因此可视为代数量，用圆弧箭头标示。

例题 均质圆轮以角速度ω纯滚，已知m,r,h。试求圆轮对O点的动量矩。

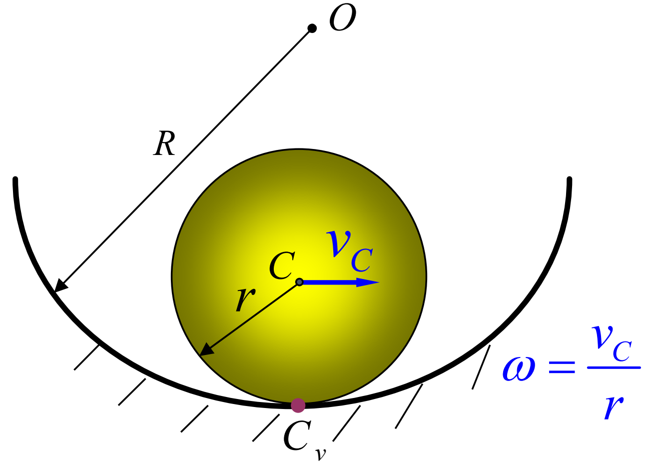
解： 以顺针向为正。由对固定点和对质心的动量矩关系知，



$$L_O = J_C\omega + mr\omega(r-h)$$

2.1 动量方法

例题 均质圆轮在圆弧槽内纯滚动，已知 R,r,m,v_C。试求 L_C,L_O,L_{C_v}，其中C_v为地面上的接触点。



解： 以逆针向为正。对质心的动量矩为，

$$L_C=-\frac{1}{2}mr^2\frac{v_C}{r}$$

由对固定点和对质心的动量矩关系知，

$$L_O=mv_C(R-r)-\frac{1}{2}mr^2\frac{v_C}{r}$$

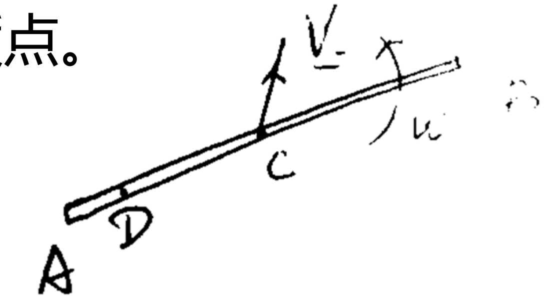
$$L_{C_v}=-mv_Cr-\frac{1}{2}mr^2\frac{v_C}{r}=-\frac{3}{2}mr^2\frac{v_C}{r}$$

观察发现，在圆弧槽内纯滚动的圆轮的速度分布，与绕接触点定轴转动的圆轮的速度分布完全一致，如图所示。因此，二者的动量矩相同。后者为定轴转动，对铰点的动量矩为

$$L_{C_v}=-J_{C_v}\frac{v_C}{r}=-\frac{3}{2}mr^2\frac{v_C}{r}$$

2.1 动量方法

例题 均质杆件作平面运动。试求 L_D，其中D为杆件上的物质点。



解： D为运动点。在D点固连平移参考系，杆件在该参考系中作定轴转动。于是有，

$$L_D = J_D \omega$$

取D为质心，则有

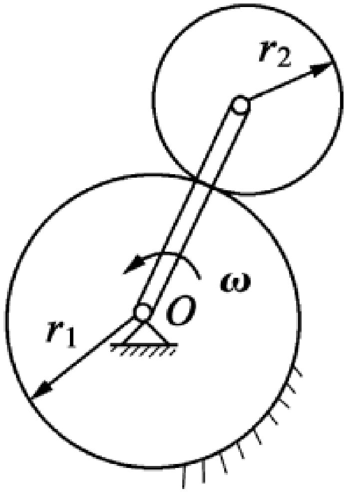
$$L_C = J_C \omega = \frac{1}{12} m l^2 \omega$$

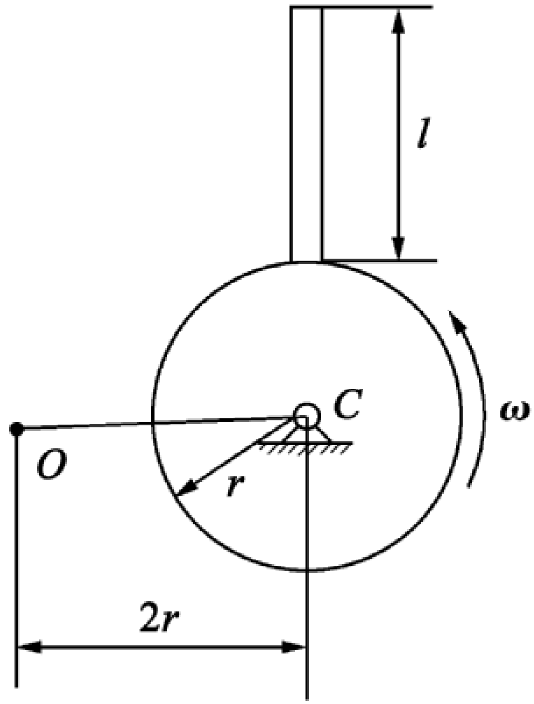
若D为杆端A点，则有

$$L_A = J_A \omega = \frac{1}{3} m l^2 \omega$$

2.1 动量方法

例题 体系由均质轮和杆组成，各构件质量均为m，试求对固定点O的动量矩。





解： 以逆针向为正。由对固定点和对质心的动量矩关系知，

$$L_O = \frac{1}{3}m\left(r_1 + r_2\right)^2\omega + \frac{1}{2}mr_2^2\frac{\omega\left(r_1 + r_2\right)}{r_2} + m\omega\left(r_1 + r_2\right)^2,$$

$$L_O = \frac{1}{2}mr^2\omega + \frac{1}{12}ml^2\omega + m\omega\left(\frac{l}{2} + r\right)^2$$

2.1 动量方法

• 刚体的动量矩计算

➢当定轴转动刚体的转轴z是轴上一点O的主轴时，对该点的动量矩为

$$\boldsymbol{L}_O = J_z \boldsymbol{\omega}$$

➢当平面运动刚体的转轴 z' 是质心C的主轴时，对质心的动量矩为

$$\boldsymbol{L}_C = J_{z'} \boldsymbol{\omega}$$

这时，动量矩与角速度同向且成正比关系。只有在此时，动量矩和角速度的关系恰与动量和质心速度的关系（ $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_C$ ）构成比拟。