3-2 物系平衡问题

2.1 物系平衡问题

- 刚体系平衡化为单刚体平衡

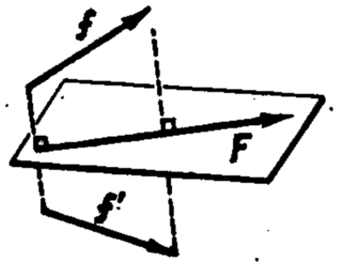
至此，单刚体的平衡问题已得以解决，包括单刚体的平衡条件、独立平衡方程个数，以及可解性判定等。原则上，通过解除约束并施加约束反力，将刚体系拆分成一系列单刚体后，就可以按照单刚体平衡问题来处理；又，将刚体系任意拆分、施加约束反力并刚化后，也可视为单刚体平衡问题来处理。因此，事实上，刚体系的平衡问题也已得以解决。但鉴于该问题的重要性，还要详尽讨论之。

- 可变形物系平衡 vs. 刚体系平衡

可以应用刚化原理，将可变形物系平衡问题化为刚体系平衡问题来处理；对变形较小的可变形物系，可在原始位置（未变形位置）列写平衡方程。因此，之后，不再强调刚体系，而只说物（体）系。

2.1 物系平衡问题

这里，主要研究平面力系作用下的物系平衡问题。这一方面是由于，平面力系本身的重要性，另一方面是由于，所采用的方法可直接推广到空间力系情形。平面力系之所以重要，原因有二：其一，在许多实际问题中，各力作用线本来就处于同一平面内；其二，在另一些问题中，作用于物系上的是空间力系，但它对称于某个平面，因而可简化为平面力系。例如，可将对称两力合成为平面内的一个单力。



• 本节纲要

➢首先讨论平面物系平衡问题的可解性判定；

➢而后，通过算例阐明求解过程和分析技巧，特别强调一类特殊的、在工程中广为采用的刚体系——桁架；

2.1 物系平衡问题

- 物系平衡问题的可解性判定

物系平衡问题的**正向提法**是：

对于结构，已知外加力，求各约束反力；

对于机构，已知外加力，求平衡位置和各约束反力。

可解性是指：对于结构，是否能由平衡条件解出各约束反力；对于机构，是否能由平衡条件解出平衡位置和各约束反力

对于结构，将物系的所有单体在约束处拆开，并在拆除约束处施加约束反力；对于机构，除了施加约束反力外，明确平衡位置的独立描述坐标。根据物系包含单体的个数和受力形式，**算出**总共可列的独立平衡方程个数。

对于结构，**数出**约束反力个数，将独立平衡方程个数与约束反力个数相**比较**；

对于机构，**数出**约束反力个数和独立描述坐标个数，将独立平衡方程个数与二者之和相**比较**。

据此，就能判定问题的可解性。

2.1 物系平衡问题

- 物系平衡问题的可解性判定

考虑一个由n个平面单体通过m个独立约束（只有这m个独立约束，别无其它约束）组成的平面物系。每个单体有3个独立描述坐标，物系的独立描述坐标数目为$3n-m$。

（1）如果$3n-m>0$，体系为机构。每个平面单体可列写3个独立平衡方程，总共可列写$3n$个独立平衡方程；约束力个数等于约束个数m，也即约束减少的独立描述坐标数目；确定平衡位置的独立描述坐标有$3n-m$个；由此知，机构平衡问题可解！

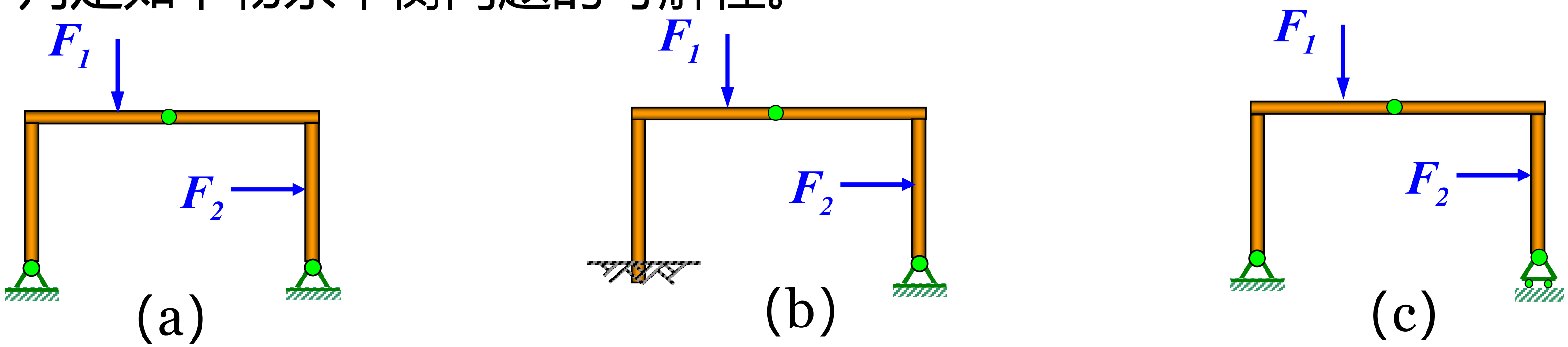
（2）如果$3n-m=0$，体系为结构。n个单刚体可以列写$3n$个独立平衡方程，约束力个数恰等于$3n$，问题可解！此类物系可由平衡方程定解（静力可定），称为**静定结构**。

独立约束的个数不会超过$3n$，因此，上述分类讨论业已完成。这里，研究如下情形：除了包含$3n$个独立约束外，还包含s个额外的不独立约束。此时，n个单刚体可以列写$3n$个独立平衡方程，约束力个数$3n+s>3n$，问题不可解！此类物系无法通过平衡方程定解（静力不可定），称该物系为静不定结构或**超静定结构**（注意，“静不定”这个词，有结构不定之意，应回避之）。额外的不独立约束个数称为**超静定次数**，也即约束冗余度。

2.1 物系平衡问题

• 物系平衡问题的可解性判定

思考　判定如下物系平衡问题的可解性。



答：　物系由两个承受平面力系的单体构成，独立平衡方程个数为 $3n=3\times2=6$

图（a），m=2+2+2=6（每个铰链有2个约束力），为静定结构，可解。

图（b），m=3+2+2=7（固定端有3个约束力），为超静定结构，不可解，超静定次数为1。

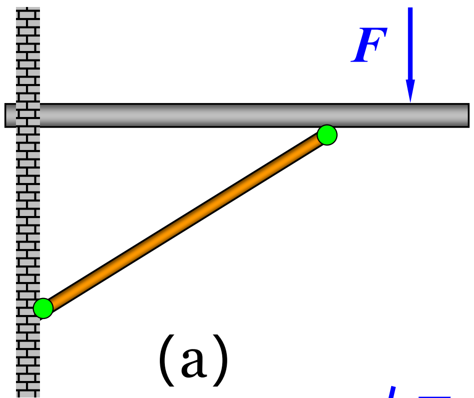
图（c），m=2+2+1=5（可动铰链有1个约束力），为机构，平衡位置的独立描述坐标为1，可解。

2.1 物系平衡问题

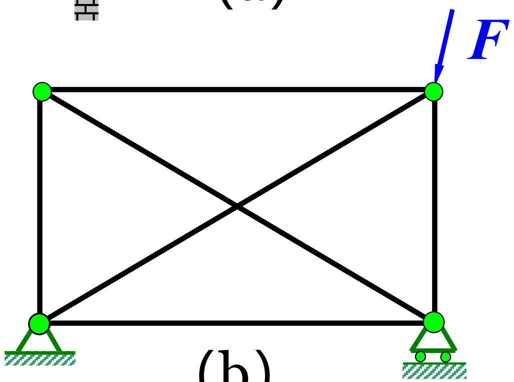
- 物系平衡问题的可解性判定

思考　判定物系是否静定。

答：



(a)



(b)

在图（a）中，$3n=3\times2=6$，$m=3+2+2=7$（固定端有3个约束力，中间铰链和固定铰链分别有2个约束力），为超静定结构，超静定次数为1。

在图（b）中，$3n=3\times6=18$，$m=2\times(2+2+2+2)+2+1=19$（先不看外界的固定铰链和可动铰链，体系共有四个复铰，每个复铰相当于两个单铰，共有$2\times(2+2+2+2)$个约束力；外界固定铰链有2个约束力，外部可动铰链有1个约束力），为超静定结构，超静定次数为1。如果该物系仅在结点处（销钉上）受力，各杆件均为二力杆，此时，可将之视为平面上四个点的平衡问题。总共可列$2\times4=8$个独立平衡方程（平面上的每个点可列2个独立平衡方程），约束力的个数等于二力杆的根数（每根二力杆有一个约束力）加上外部约束个数，即 $m=6+2+1=9$，也是超静定结构，超静定次数为1。这种由二力杆铰接而成，且外加力作用于结点的特殊物系称为**桁架**，之后将会细致讨论。

这里强调指出，机构、结构（静定和超静定）是物系的固有属性，不会因视点的不同而有所不同。

2.1 物系平衡问题

- 物系平衡问题的规范求解

至此，我们已弄清了物系的可解性判定问题。

➢对于机构平衡问题，直接拆分之成为一系列单刚体，列写所有独立平衡方程，由此直接求解约束力和平衡位置（需要确定平衡位置时，涉及到非线性代数方程组求解）；

➢对于静定结构平衡问题，直接拆分之成为一系列单刚体，列写所有独立平衡方程，由此直接求解约束力（位置确定，仅涉及线性代数方程组求解）；

➢对于超静定结构平衡问题，无法由静力平衡方程给出所有约束力

2.1 物系平衡问题

- 物系平衡问题求解步骤

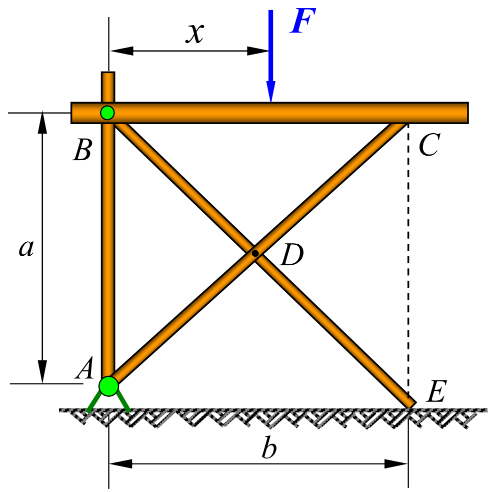
无疑地，上述方法具有规范性，特别适合计算机流程化分析。但对于较简单的问题，掌握一些技巧常可以快速求解问题，或对结果进行快速检验。这里，就通过典型算例来研究物系平衡问题。面对物系平衡问题，应首先判定其可解性，再具体求解之。求解步骤如下：

- （1）根据具体问题的已知条件和所求目标，确定“先求什么，后求什么”的整体思路，先整体后局部，或先局部后整体（对于整体静定型问题，可从整体开始；对于整体超静定问题，可从局部开始）；
- （2）选取研究对象，画出受力图（注意力系的简化条件：在单刚体上，直接简化；对于多刚体，刚化后再简化）；
- （3）适当选取投影轴和取矩轴，列出独立平衡方程求解（尽量选与多个未知力垂直的轴为投影轴，与多个未知力共面的轴为取矩轴，从而能一个式子求解一个未知数，尽量不解联立方程）。

2.1 物系平衡问题

- 算例——例1

例题 整体静定型。如图所示物系，C、E处光滑接触，销钉A、B穿透各构件。已知尺寸a、b，铅垂力$\boldsymbol{F}$竖直作用于x位置，不计各构件自重。试求AB杆的受力。



解 8

可解性判定。$3n=3\times4=12$，$m=2\times2$（B处复铰相应于两个单铰）+2（A处单铰）+2（D处单铰）+1（E处光滑接触）+1（C处光滑接触）+2（A处外部固定铰链）=12，为静定结构，可解。

以整体为研究对象（以后见到这句话，应理解为：取整体为隔离体，刚化之视为一个单刚体），可以列写3个独立平衡方程，共有2（A处外部固定铰链）+1（E处光滑接触）=3个约束力，因此，为整体静定型。

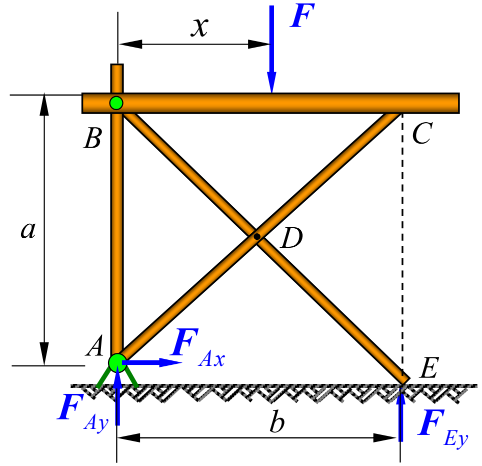
2.1 物系平衡问题

- 算例——例1

以整体为研究对象，受力如图

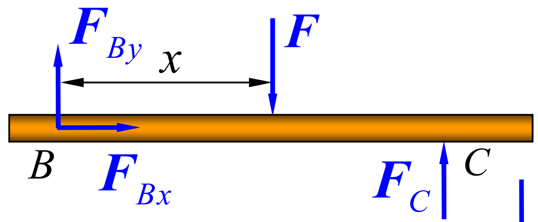
$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_E = 0 \qquad F(b-x) - F_{Ay} b = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{Ay} = \frac{b-x}{b} F$$



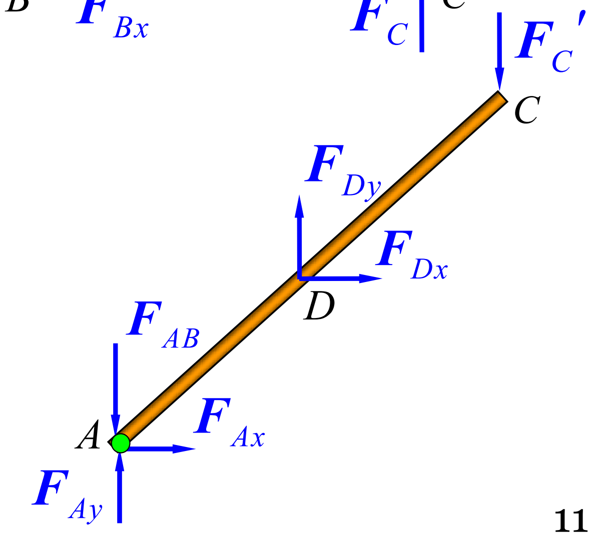
以*BC*杆为研究对象，受力如图

$$\sum M_B = 0 \qquad F_C b = Fx \quad \Longrightarrow \quad F_C = \frac{Fx}{b}$$



以*AC*杆为研究对象，受力如图

$$\sum M_D = 0 \qquad F_{AB} \frac{b}{2} = (F_{Ay} + F_C) \frac{b}{2} \quad \Longrightarrow \quad F_{AB} = \frac{b-x}{b} F + \frac{Fx}{b} = F$$

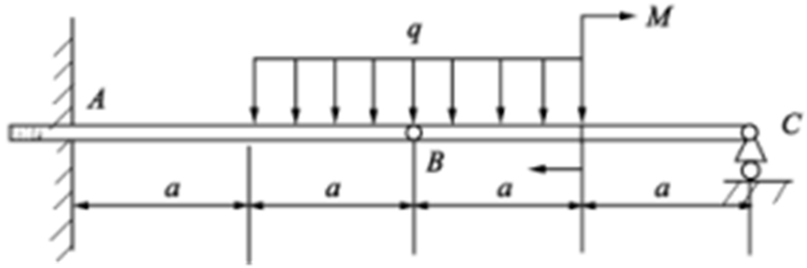


注释：细致观察发现，上述体系具有运动可能性。这涉及单边约束问题，在分析力学中会再次提及。

2.1 物系平衡问题

- 算例——例2

例题 局部静定型。如图所示物系。已知分布荷载q，集中力偶M，尺寸a。试求固定端A及可动铰C处的约束力。

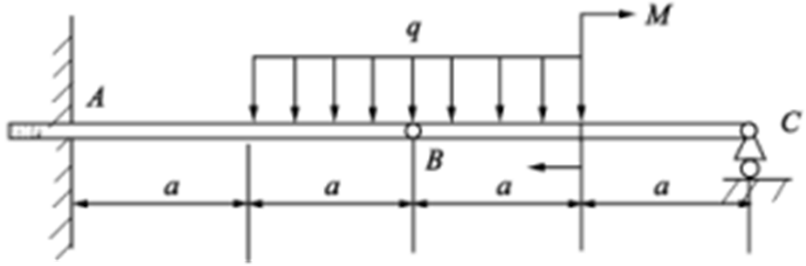


解：

可解性判定。$3n=3\times2=6$，$m=3+2+1=6$，结构静定结构。

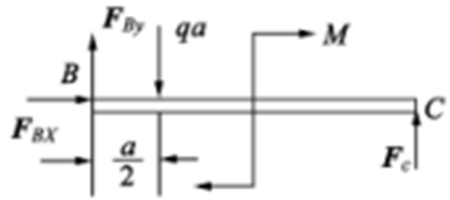
以整体为研究对象，可以列写3个独立平衡方程，共有3（A处固定端）+1（E处可动铰链）=4个约束力，因此，为整体超静定型。

2.1 物系平衡问题



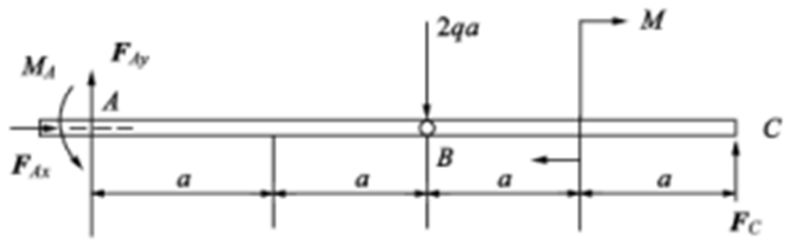
- 算例——例2

以杆BC为研究对象，受力如图（注意，在单刚体BC上，分布力系简化为一个集中力）



$$\sum M_B = 0 \quad F_C \times 2a - qa\frac{a}{2} - M = 0 \longrightarrow F_C = \frac{qa}{4} + \frac{M}{2a}$$

再以整体为研究对象，受力如图（注意，刚化之视为单刚体，分布力系简化为一个集中力）



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_C - 2qa = 0 \longrightarrow F_{Ay} = \frac{7qa}{4} - \frac{M}{2a}$$

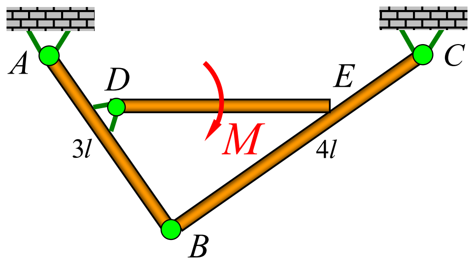
$$\sum M_A = 0 \quad M_A + F_C 4a - 2qa2a - M = 0 \longrightarrow M_A = 3qa^2 - M$$

2.1 物系平衡问题

- 算例——例3

例题 平面力偶系。图（a）所示物系，杆DE的D端铰接，E端光滑接触，$DE \parallel AC$， $AB=3l$, $BC=4l$, $\angle B=90^{\circ}$，力偶矩为M。试求A、C处的约束力。

解：



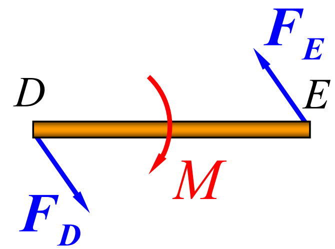
图(a)

可解性判定。$3n=3\times3=9$， $m=2\times4+1=9$，为静定结构。

物系为整体超静定型。

以杆DE为研究对象，受力如图（b）

$F_E \perp BC$ ，与AB杆平行，F_D 必与 F_E 组成一力偶



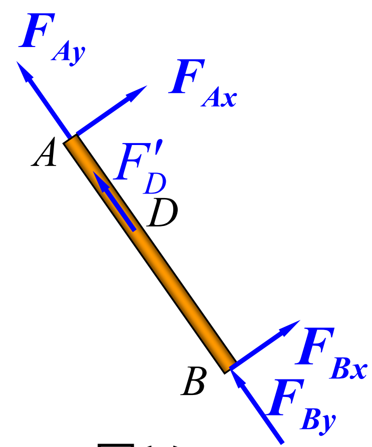
图(b)

2.1 物系平衡问题

- 算例——例3

以杆AB为研究对象，受力如图（c）

$\sum M_B = 0 \quad \boldsymbol{F}_{Ax} = 0$ （亦可由三力平衡汇交得知）



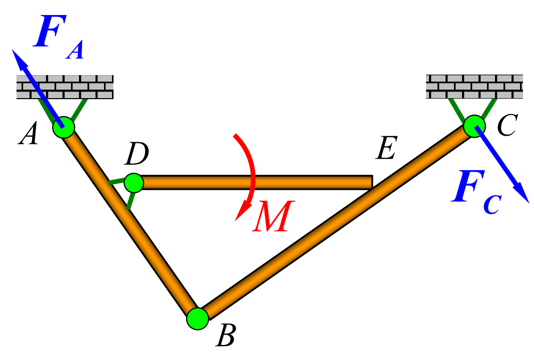
图(c)

以整体为研究对象，受力如图（d）

因铰A对AB杆约束力为 $\boldsymbol{F}_A$ ，方向沿AB，它必与铰C对BC杆约束力 $\boldsymbol{F}_C$ 组成一力偶

$$\sum M = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_C = F_A = \frac{M}{4l}$$

方向如图所示

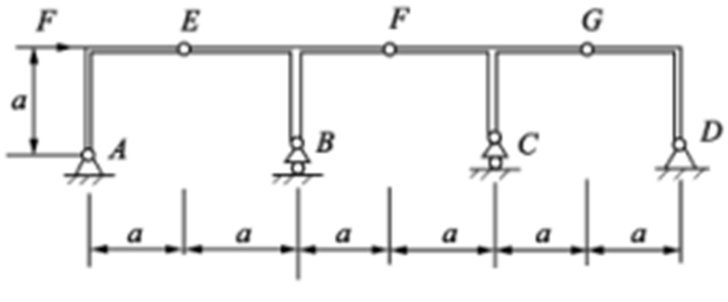


图(d)

2.1 物系平衡问题

- 算例——例4

例题 平面多跨。平面刚架如图（a）所示，受水平力$\boldsymbol{F}$的作用，不计各构件自重。试求支座A、B、C、D处的约束力。



(a)

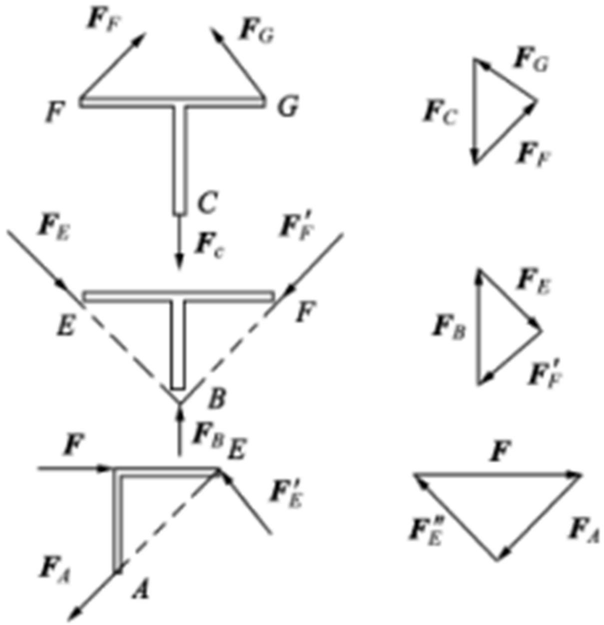
解： 可解性判定。$3n=3\times4=12$，$m=2\times5+1+1=12$，为静定结构。

物系为整体超静定型。依次研究构件CFG、BEF和AE，受力如图（b）。由AE构件的力三角形封闭，可知：

$$F_A = F_E = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

由BEF构件的力三角形封闭，可知：

$$F_B = \sqrt{2}F_E = F, F_F = F_E = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$



由CFG构件的力三角形封闭，可知：

$$F_C = \sqrt{2}F_F = F, F_G = \frac{\sqrt{2}}{2}F_C = \frac{\sqrt{2}}{2}F = F_D$$

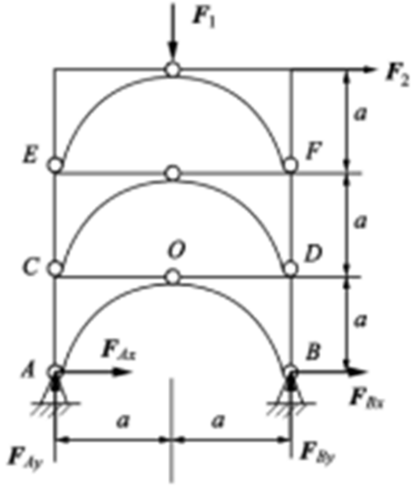
(b)

注释：平衡的几何条件特别适用于求解三力平衡问题，对包含多于三力的问题，力多边形十分复杂，宜列写平衡方程求解。

2.1 物系平衡问题

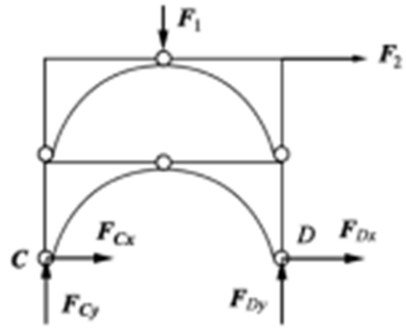
- 算例——例5

例题 平面多层。三层铰结构如图，已知 $F_1 = F_2 = F$，不计自重。试求铰支座A、B的约束力。



解： 可解性判定。$3n=3\times6=18$，$m=2\times7+2+2=18$，为静定结构。

物系为整体超静定型。以整体为研究对象，受力如图



$$\sum M_B = 0 \qquad F_{Ay}\cdot 2a + F\cdot 3a - Fa = 0 \Rightarrow F_{Ay} = -F$$

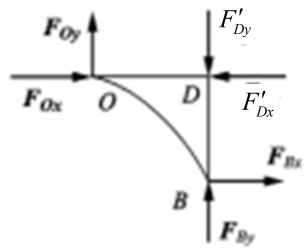
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_{By} - F = 0 \Rightarrow F_{By} = 2F$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_{Bx} + F = 0$$

以上边两层为研究对象，受力如图

$$\sum M_C = 0 \qquad F_{Dy}2a = Fa + F2a \Rightarrow F_{Dy} = \frac{3}{2}F$$

以构件OBD为研究对象，受力如图



$$\sum M_O = 0 \qquad F_{Bx}a + F_{By}a = F_{Dy}a \Rightarrow F_{Bx} = \frac{3}{2}F - 2F = -\frac{1}{2}F$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = -\frac{F}{2}$$

2.1 物系平衡问题

- 一类特殊的物系——桁架

桁架是由二力杆铰接而成，且外加力作用于结点上的特殊物系，是一大类工程结构的简化模型。

若各杆轴线共面，且外加力作用在该平面内，称为**平面桁架**。

工程中校核桁架的强度时，需知道各杆件的内力。计算桁架内力时，按选取的研究对象不同，常采用如下两种方法：**结点法**和**截面法**。

结点法：依次选销钉为研究对象；

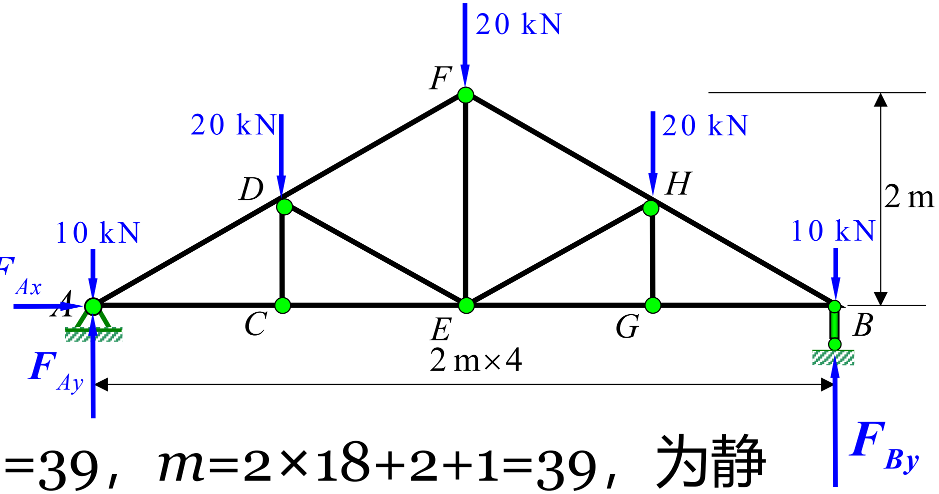
截面法：假想将桁架截开，研究一部分的平衡。

注意，各杆受拉、压作用，为规范起见，规定：首先假设杆件受拉，若算出负值则表示受压。一旦设定受拉方向后，不再因计算得出负值而改变设定好的箭头方向。

2.1 物系平衡问题

- 一类特殊的物系——桁架

例题 结点法。图示屋架，试求各杆件的内力。



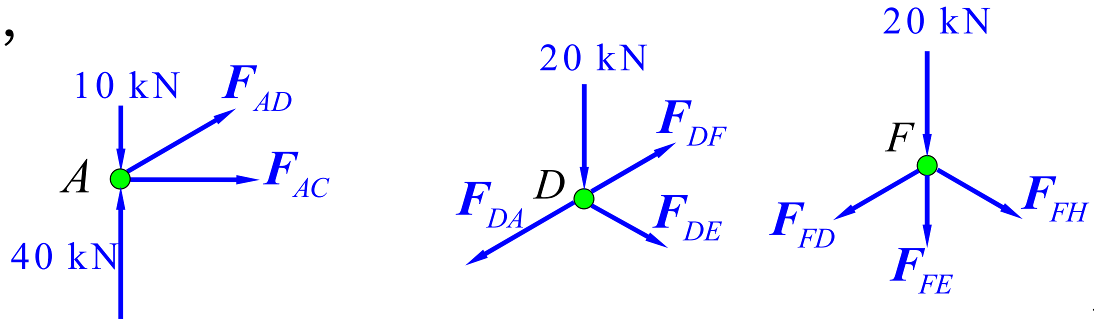
解 8 可解性判定。视为平面刚体系，$3n=3\times13=39$，$m=2\times18+2+1=39$，为静定结构；视为平面点系，$2\times8=16$， $m=13+2+1=16$ ，为静定结构。

该桁架为整体静定型。以整体为研究对象，受力如图，求得A、B支座的约束力：

$$F_{Ax}=0,\ F_{Ay}=40\text{kN},\ F_{By}=40\text{kN}$$

由于对称性（结构形式对称、载荷对称），只需考虑半边（以左半边为例）。考察结点C，知 $F_{DC}=0$ 。依次考察结点A、D、F，受力如图。各结点均受平面汇交力系作用，列出各自的平衡方程 $\sum F_x=0,\ \sum F_y=0$，

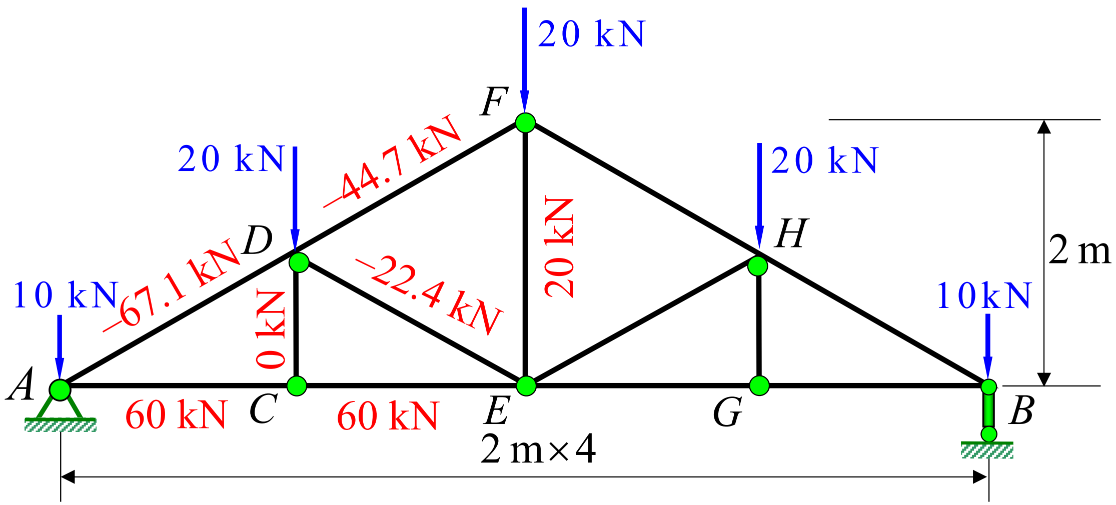
依次求得各杆件的内力。



2.1 物系平衡问题

- 一类特殊的物系——桁架

各杆内力结果标示于图中，其中，负号表示受压。



2.1 物系平衡问题

- 一类特殊的物系——桁架

注释：可以对每个结点列写两个独立平衡方程，每个独立平衡方程均建立了约束力（内部约束力（杆件内力）和外部约束力）和外加力的线性代数关系，并涉及桁架的几何信息。整理之可得如下矩阵方程：

$$[\mathbf{B}]_{s\times s}\begin{bmatrix}约\\束\\力\end{bmatrix}_{s\times 1}=[\mathbf{A}]_{s\times l}\begin{bmatrix}外\\加\\力\end{bmatrix}_{l\times 1}$$

其中，**B**为方阵，这是因为对于静定结构，约束力个数等于独立平衡方程个数；**A**不一定为方阵，其列数决定于外加力的分量个数。矩阵**B**和**A**中仅包含结构的几何信息。求解之得到：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}约\\束\\力\end{bmatrix}_{s\times 1}}_{被动力}=\underbrace{[\mathbf{B}]_{s\times s}^{-1}[\mathbf{A}]_{s\times l}}_{几何}\underbrace{\begin{bmatrix}外\\加\\力\end{bmatrix}_{l\times 1}}_{主动力}$$

该式建立了约束力和外加力之间的线性变换关系，变换矩阵只包含结构的几何信息。

以上推导中假设了**B**矩阵满秩，请思考**B**矩阵何时奇异？

进一步指出，上述讨论对于一般静定物系的平衡问题亦成立。

2.1 物系平衡问题

- 一类特殊的物系——桁架

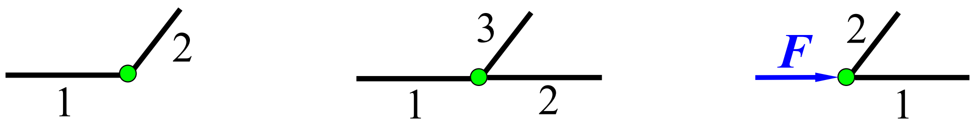
零杆

当手动求解静定桁架的平衡问题时，若能一眼看出内力为零的杆件，那么对后继分析是极为有利的。正如在上例中，直接看出了CD杆内力为零。

称内力为零的杆件为**零杆**。

考察结点平衡，以下三种情形中均存在零杆。遇到这些情形，可以直接标记零杆；在受力分析时，可以直接拆除零杆，认为零杆不存在。

三种常见情形



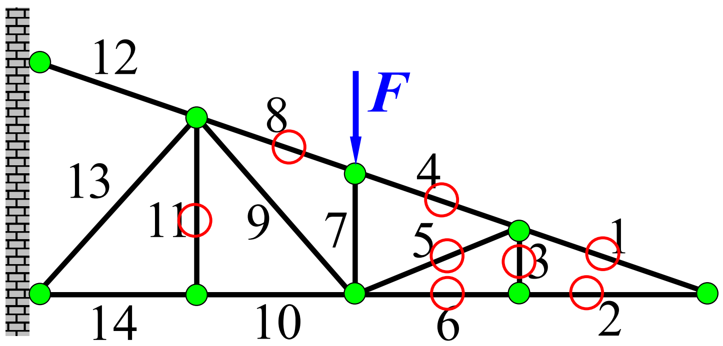
$F_1 = F_2 = 0$　　$F_3 = 0$　　$F_2 = 0$

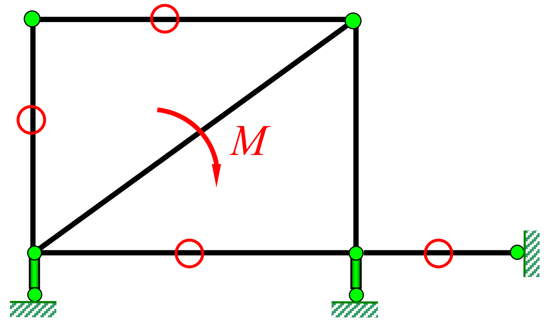
2.1 物系平衡问题

- 一类特殊的物系——桁架

零杆

思考　指出桁架中零杆。



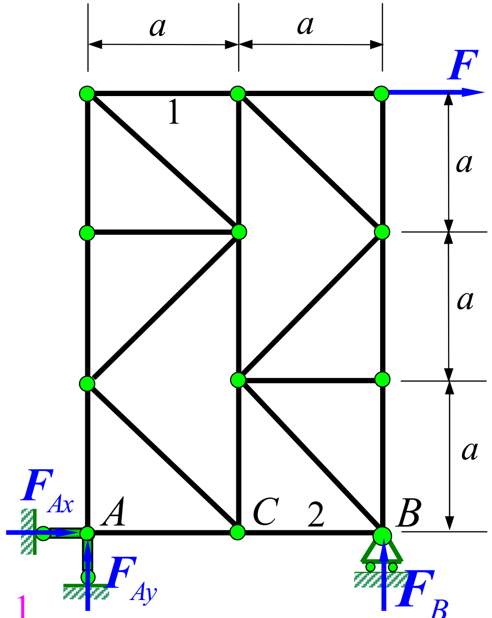


2.1 物系平衡问题

- 一类特殊的物系——桁架

例题　截面法。图示桁架，试求1、2杆的内力。

解：可解性判定。视为平面刚体系，$3n=3\times21=63$，$m=2\times30+2+1=63$，为静定结构；视为平面点系，$2\times12=24$，　$m=21+2+1=24$，为静定结构。



桁架为整体静定型。以整体为研究对象，受力如图

$$\sum M_A=0 \qquad F_{By}=1.5F$$

作n-n截面，将桁架一分为二，取右半部分为研究对象，受力如图

$$\sum M_C=0 \quad F_1\times3a+F_{By}a=F\times3a \quad \Rightarrow \quad F_1=\frac{F}{2}$$

$$\sum F_x=0 \quad -F_1-F_2+F=0 \quad \Rightarrow \quad F_2=\frac{F}{2}$$