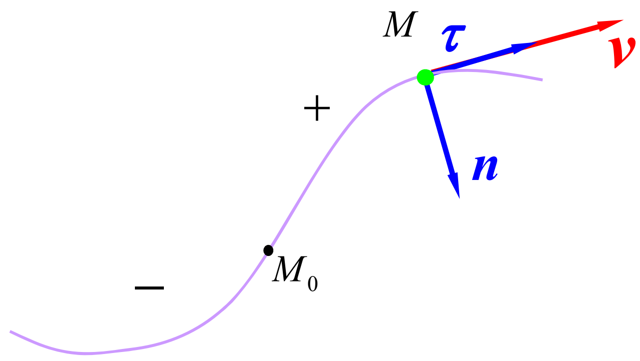
点（系）的运动描述

- 弧坐标法（自然法）——轨迹已知



a）弧坐标

1. 已知点的运动轨迹；

2. 在轨迹上任选一参考点作为坐标原点M_0；

3. 规定度量的正方向，一般以点的运动方向作为正向。

$s = f(t)$ ——弧坐标形式的运动方程

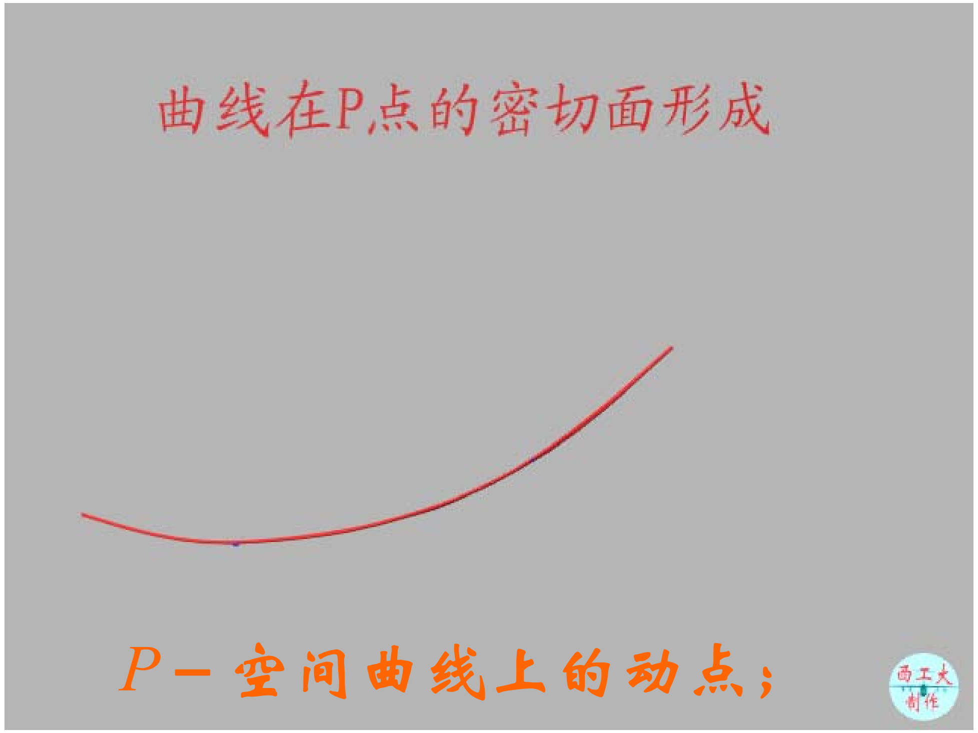
轨迹方程和弧坐标方程共同给出了点运动的完全信息

点（系）的运动描述

- 弧坐标法（自然法）——轨迹已知

b）自然轴系

为了表达出点的速度和加速度，在弧坐标的每一点处都引进一组基向量，称为该点处的**自然轴系**



1. 密切面

当P'无限接近于 P点时，过这两点的切线所组成的平面，称为P点的密切面。

$$\lim_{P'\to P} \alpha' = \alpha$$

点（系）的运动描述

- 弧坐标法（自然法）——轨迹已知

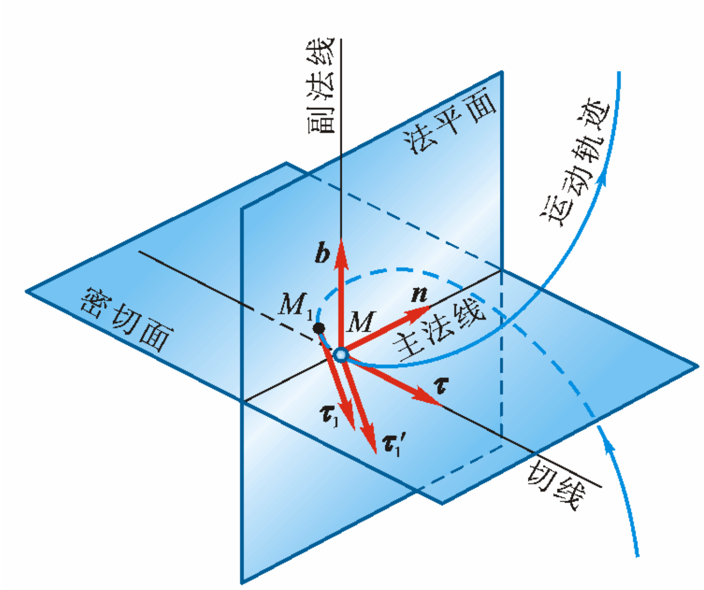
b）自然轴系

2. 法平面——过M点作垂直于切线的平面

✓ 主法线——法平面与密切面的交线

✓ 副法线——法平面内与主法线垂直的法线

3. 自然轴系的单位矢量



$\boldsymbol{\tau}$ ：正向指向弧坐标正向

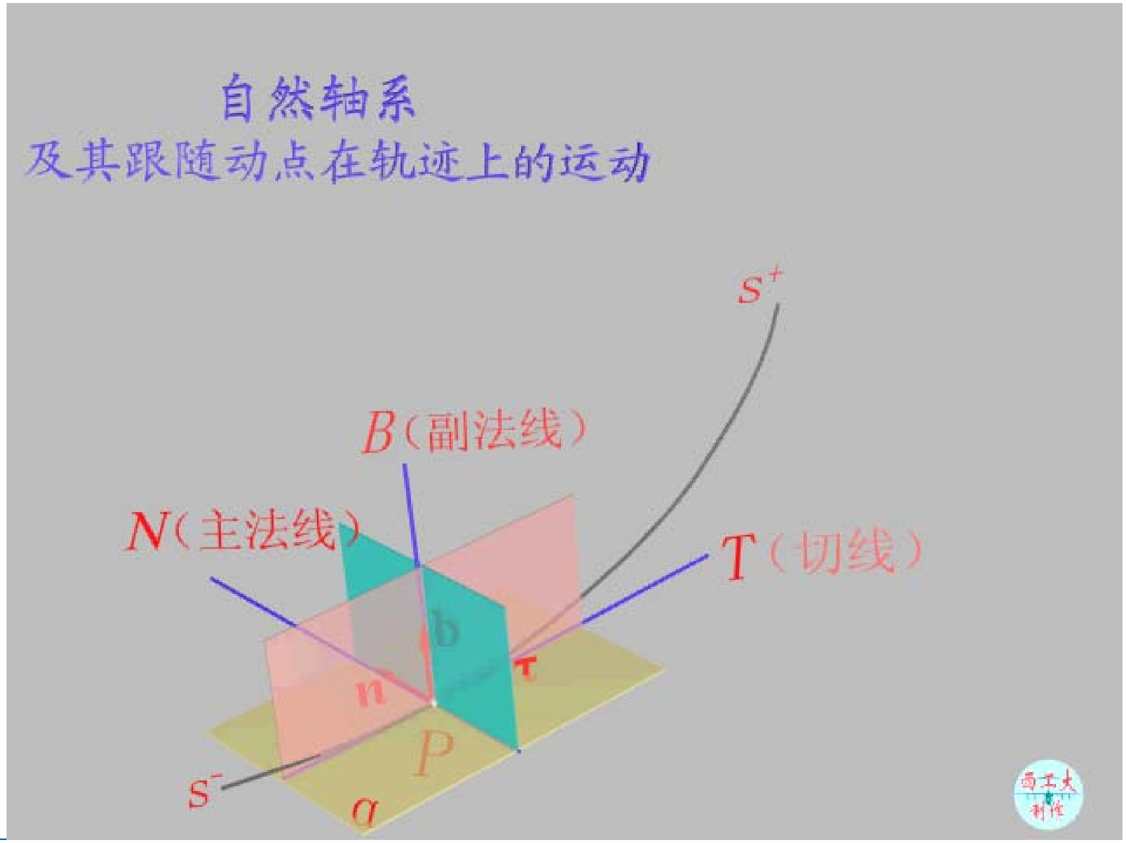
$\boldsymbol{n}$ ：正向指向曲线内凹的一边，曲率中心在主法线上

$\boldsymbol{b}$ ：正向由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$ 确定

点（系）的运动描述

- 弧坐标法（自然法）——轨迹已知

  自然轴系的特点:　跟随动点在轨迹上作空间曲线运动。



点（系）的运动描述

- 弧坐标法（自然法）——轨迹已知

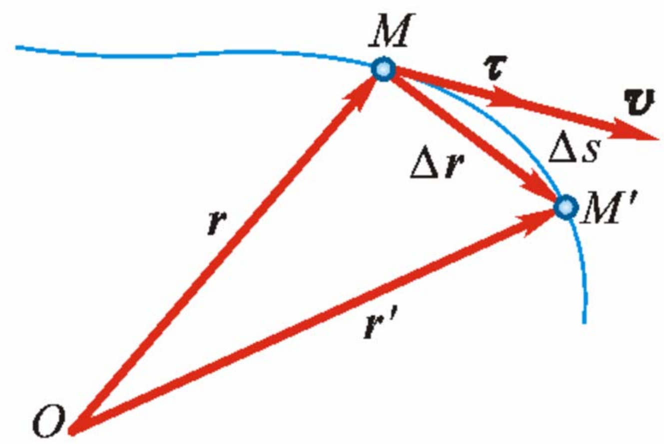
c）点的速度在自然轴系上的表示

在参考系中选取一个固定点O，点M关于O点的矢径$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{\tau}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}=\boldsymbol{\tau}\right)$$

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}\left(v=\dot{s}\right)$$

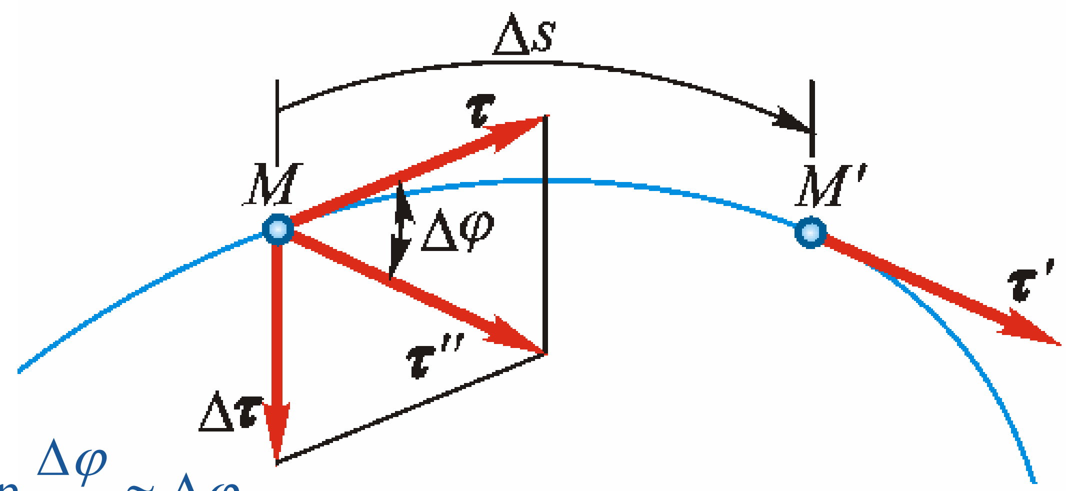


点（系）的运动描述

- 弧坐标法（自然法）——轨迹已知

d）点的加速度在自然轴系上的表示

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}\dot{\boldsymbol{\tau}}$$



单位矢量 τ 对时间的导数

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi\boldsymbol{n}}{\Delta t}=\dot{\varphi}\boldsymbol{n}$$

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|=2\times 1\times\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\approx\Delta\varphi$$

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{\dot{s}}{\rho}$$

点M处轨迹的曲率半径

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}=\frac{\dot{s}}{\rho}\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}=\dot{v}\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n$$

切向加速度，反映速度大小的变化率　　法向加速度，反映速度方向的变化率

点（系）的运动描述

思考　1. $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}$ 何时相等?

答：

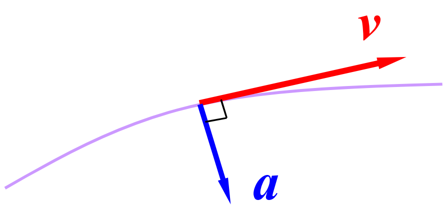
$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{s}\,\boldsymbol{\tau})\right| = \left|a_\tau\,\boldsymbol{\tau} + a_n\,\boldsymbol{n}\right|$$

$$\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{s} = \ddot{s}$$

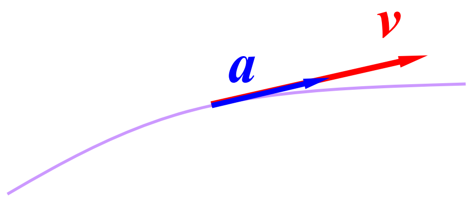
$a_n = 0$ 时，相等 $(v = 0$, 或 $\rho = \infty)$

点（系）的运动描述

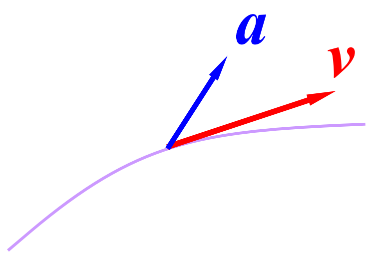
思考　2. 点沿曲线运动。指出点的运动状态?



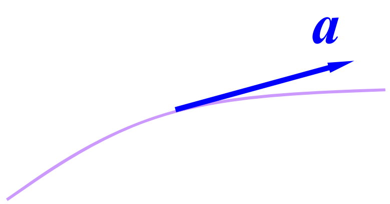
匀速



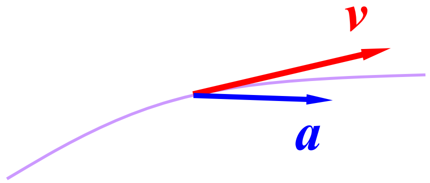
× $\left(v^2/\rho \neq 0\right)$



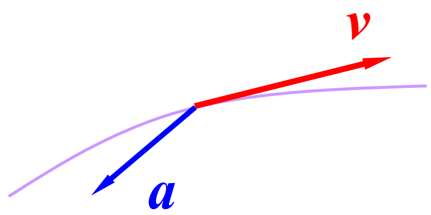
×



$\boldsymbol{v}=0\ \left(v^2/\rho=0\right)$



加速



减速

点（系）的运动描述

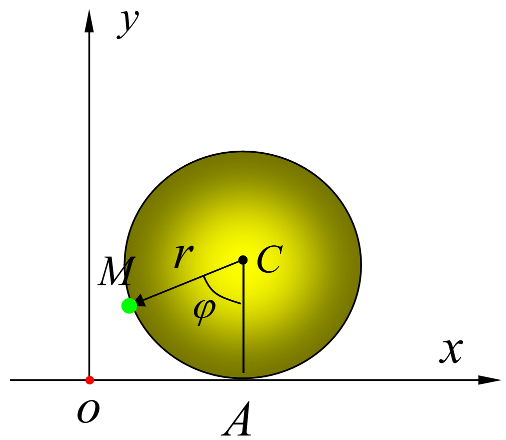
例题 半径为r的圆轮沿着平面纯滚动（无滑滚动），其一半径（固定于轮上）与竖直方向夹角 $\varphi=\omega t$。试求M点的加速度的大小、方向及轨迹的曲率半径，并求当$t=0$瞬时M点轨迹的曲率半径。

解： 沿两个坐标方向的速度分量：

$$\dot{x}=\omega r\left(1-\cos\omega t\right),\dot{y}=\omega r\sin\omega t$$

沿两个坐标方向的加速度分量：

$$\ddot{x}=\omega^2 r\sin\omega t,\ddot{y}=\omega^2 r\cos\omega t$$

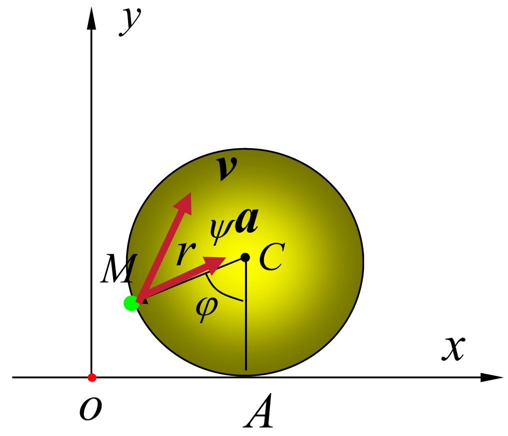


M点的加速度大小： $\omega^2 r$

M点的加速度方向：沿MC并指向圆轮的中心

点（系）的运动描述

点的法向加速度： $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$



轨迹的曲率半径： $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

$$a_n = a\sin\psi = a\sin\left[\varphi_1 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = a\left(\sin\varphi_1 \sin\varphi - \cos\varphi_1 \cos\varphi\right)$$

$$= \frac{a}{v}\omega r\left(1 - \cos\omega t\right)$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\dot{y}}{v}$$

$$\dot{x} = \omega r\left(1 - \cos\omega t\right), \dot{y} = \omega r\sin\omega t$$

$$\ddot{x} = \omega^2 r\sin\omega t, \ddot{y} = \omega^2 r\cos\omega t$$

$$v = \omega r\sqrt{2(1 - \cos\omega t)} = 2\omega r\sin\left(\omega t/2\right)$$

$$a = \omega^2 r$$

$$曲率\,\kappa(t) = \left|\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}\right| = \frac{1}{2r\sqrt{2(1 - \cos\omega t)}}$$

$$= \frac{1}{4r\sin(\omega t/2)} = \frac{1}{\rho}$$

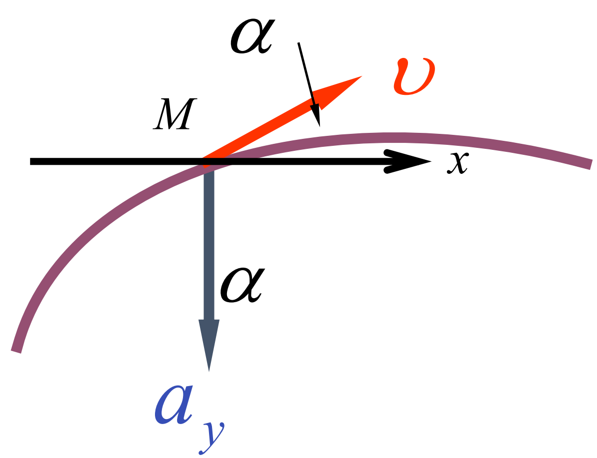
轨迹的曲率半径 $\rho = 4r\sin\left(\omega t/2\right) = 2MA$

t=0瞬时M点轨迹的曲率半径为零

点（系）的运动描述

例题 动点M作平面曲线运动，其速度在 x 轴上的投影始终为一常数c，证明在此情况下，其加速度 $a=\upsilon^3/c\rho$ ，其中 υ 为M点的速度大小，ρ为曲率半径。

证： 设 υ与 x 轴的夹角为 α



由题意知： $\upsilon\cos\alpha=\upsilon_x=c$ （1）

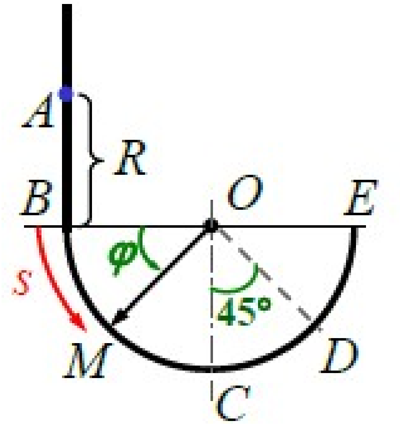
因 $\upsilon_x=c$, 所以 $a_x=0,\ a=a_y$

且由（1）式知 $\cos\alpha=\dfrac{c}{\upsilon}$ 代入上式 $\boxed{a=\dfrac{\upsilon^2}{\cos\alpha\rho}=\dfrac{\upsilon^3}{c\rho}}$

点（系）的运动描述

例题 小环M从点A由静止开始运动，在AB上，a=g；在BCE上，$a_\tau = g\cos\varphi$ 。求小环在C与D处的速度与加速度。

解 8 小环M，曲线轨迹定——自然法



AB上：　$a = g$

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \upsilon\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}s} = g$$

积分得　$\upsilon^2 = 2gs$　$\upsilon_B = \sqrt{2gR}$

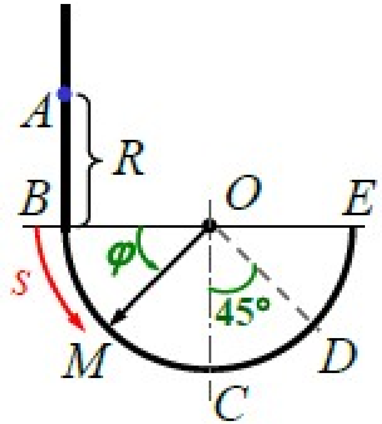
BCE上：　$a_\tau = g\cos\varphi, s = R\varphi, \dot{s} = \upsilon = R\dot{\varphi}$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\upsilon}{R}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\varphi} = g\cos\varphi$$

积分得　$\upsilon^2 - \upsilon_B^2 = 2gR\sin\varphi$

点（系）的运动描述

$$\upsilon^2-\upsilon_B^2=2gR\sin\varphi$$



在点C处， $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

速度： $\upsilon_C=2\sqrt{gR}$ $a_\tau=g\cos\varphi$

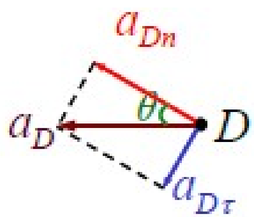
加速度：$a_{Cn}=\dfrac{\upsilon_C^2}{R}=4g,a_{C\tau}=0,a_C=4g(\uparrow)$

在点D处， $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$

速度： $\upsilon_D=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)gR}$

加速度：

$$a_{Dn}=\frac{\upsilon_D^2}{R}=(2+\sqrt{2})g,a_{D\tau}=-\frac{\sqrt{2}}{2}g,$$



$$a_D=\sqrt{6.5+4\sqrt{2}}g,\tan\theta=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

点（系）的运动描述

- 评述

点的描述坐标的数目（运动方程的个数）

对三维空间中的一个点，需要三个独立坐标确定其位置，这不会因描述规则的改变而改变

- 在矢径法描述中，“一个”矢量，貌似只有一个运动方程，但是，一个矢量相应于三个标量，“一个”矢量方程恰相应于“三个”标量方程；在直角坐标、柱坐标和球坐标描述中，描述坐标和运动方程都有且仅有三个。
- 在弧坐标描述中，只有一个描述坐标（弧长）和一个运动方程，但这并未引出矛盾。采用弧坐标描述时，已经事先知道轨迹的完全信息，给出了轨迹就给出了一条空间曲线，提供了三个坐标间的两个方程，因此，仅余一个坐标需要刻画，一个弧坐标方程与这两个已知方程一起（共三个方程），共同确定点的位置

点（系）的运动描述

增加“限制”会降低运动的“维度”，从而减小（独立）运动方程的数目；点所处的运动空间的“维度”和运动方程的“数目”一致。

- 若一个点被限制在二维平面内运动，用矢径法描述时，将固定点置于该平面内，则运动用二维矢量描述，一个二维矢量相应于两个标量，一个二维矢量方程相应于两个标量方程；用直角坐标描述时，其中一个坐标确定且已知，仅需两个描述坐标；用柱坐标和球坐标描述时，退化为极坐标描述，亦只有两个描述坐标；用弧坐标描述时，已知的一个方程（平面曲线）和一个弧坐标方程共同确定点的位置。

点（系）的运动描述

- 点系的运动描述

点系，即点的集合。点系的运动可通过其所有点的运动共同刻画

矢径法 $\{\mathbf{r}_i(t),\ \ i=1,\ldots N\}$ N为点系所包含的点数，可为有限值或无穷大

直角坐标法 $\{x_i(t), y_i(t), z_i(t),\ \ i=1,\ldots N\}$

也可采用坐标法或者弧坐标法来描述各点的运动，甚或采用混合法，即各点采用不同的描述方式

点系的描述坐标的数目：每个点的运动用3个坐标描述，因此，点系的运动用3N个坐标描述，对点系的运动描述无疑是完备的

点系的速度和加速度描述可由各点的速度和加速度并置而得

1.2 约束点系的初等理论

- 约束概念

自由点系：不受限制的点系，无法用更少数目的坐标来刻画之

非自由点系：受到某些限制的点系，之前的描述方式是冗余的，可用更少数目的坐标来刻画之 （例如，刚体（作为一个点系）中各点总是保持距离不变，传动装置中的齿轮总是相互啮合）

约束：限制、关联——**预先**设定的限制位置和运动的条件

约束方程：这些限制条件的数学表达式，预先设定的存在于位置、位置导数（速度）之间的关系式

局限于讨论**对位置**的**时不变等式**限制：所谓“位置”是指，仅限制位置关系，而无涉运动（即位置导数，速度）；所谓“时不变”是指，数学关系中不显含时间，换言之，约束的数学结构不随时间变化；所谓“等式”是指，数学关系为等式关系，不涉及不等式关系

最一般意义上，应解除上述限制，解除这些限制所相应的物理意义及其一般理论，将在后文“再谈约束” 中论述

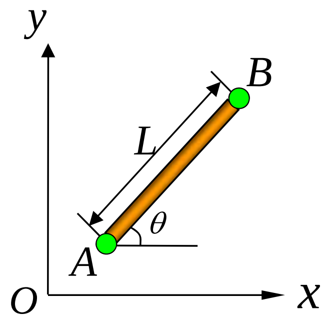
1.2 约束点系的初等理论

• 约束概念

刚性杆（不变形的细长杆件）连接：点和点之间的典型约束，刚性杆限制了两点距离始终保持不变。

约束方程：$$\left\|\mathbf{r}_i(t)-\mathbf{r}_j(t)\right\|_2 = L$$

用直角坐标表示为 $$\left[x_i(t)-x_j(t)\right]^2+\left[y_i(t)-y_j(t)\right]^2+\left[z_i(t)-z_j(t)\right]^2 = L^2$$



• 评述

这里特别指出，按照当前定义，**弹性线**不是约束，因为它并未明确限制点和点之间的位置关系。这看起来有点奇怪：从字面上看，任何限制运动的因素都可称为约束，外在作用（力），预先设定的位置和运动限制，甚至动力学规律都可视为约束；但在力学中，“约束”专指预先设定的位置和运动限制，为明确区分之，前者称为（外在）“**作用**”，后者称为（动力学）“**法则**”。这种日常词汇在科学中被限定应用的现象颇为普遍

1.2 约束点系的初等理论

- 约束点系

约束点系： 受到约束的点系

约束点系的独立描述坐标数目和独立描述坐标的选择:

N个点构成的点系有$3N$个描述坐标，每增加一个关于这$3N$个坐标的约束方程（要求各约束方程相容且独立），就减去一个独立描述坐标，对具有k个约束方程的点系，其独立描述坐标数目为$n=3N-k$

独立描述坐标并非一定要选用笛卡尔直角坐标的其中一部分，而是可以任意选取。一般来说，总是选择力学意义明确、使用便捷的一组坐标来描述点系的运动

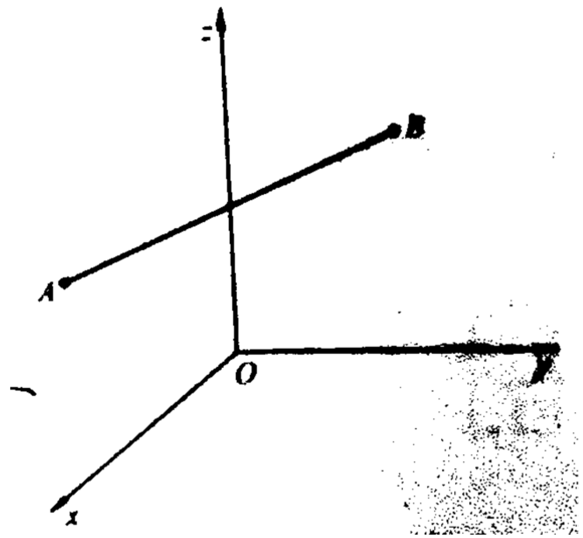
1.2 约束点系的初等理论

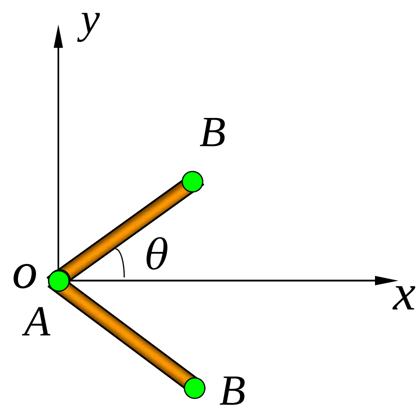
- 约束点系

刚性杆连接的两点

不一定要用两点的6个直角坐标中的5个作为独立描述坐标（有时，这种选择并不好，因为如果选择其中一点的三个坐标和另一点的两个坐标，就会导致这五个坐标不能完全确定点系的位置）

可以选择一点的三个直角坐标，以及两点连线与x，y坐标轴的夹角，作为独立描述坐标。据此，可以轻易表出两点的位置





1.2 约束点系的初等理论

- 约束点系独立描述坐标，运动表出

独立描述坐标 $q_1, q_2 \cdots, q_n$

点系各点的矢径可表出： $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1 \cdots, q_n\right)$

求导得：

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i\left(q_1 \cdots, q_n\right)}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i\left(q_1 \cdots, q_n\right)}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_j \dot{q}_s + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i\left(q_1 \cdots, q_n\right)}{\partial q_j} \ddot{q}_j$$

其分量形式可以直接给出

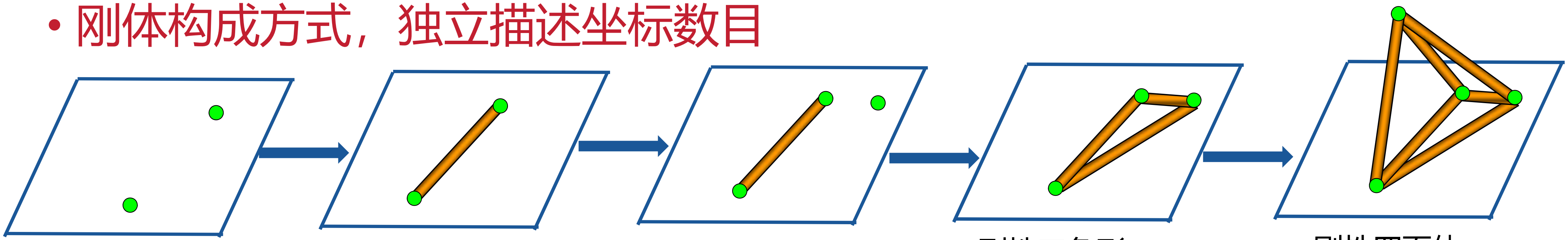
据此明了：点系中任一点的位置可由独立描述坐标完全刻画，任一点的速度可由独立描述坐标及其一阶导数表出，任一点的加速度可由独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数共同表出

1-2 刚体（系）的运动描述与简化
——过程标量分析方法

从刚体的构成方式讲起、讲述独立描述坐标数目及选择；刚体的典型运动模式，刚体的典型约束，刚体系的独立描述，表出各点的速度和加速度。最后，讲述标量分析的普适性，并指出为何要再引入矢量方法

2.1 刚体构成，独立描述坐标数目及选择

- 刚体构成方式，独立描述坐标数目



6个坐标描述

5个独立坐标来描述

5+3

刚性三角形
9-3=6

刚性四面体
6+3-3=6

先确定两点的位置（5个坐标），另一个点只能在垂直于两点连线的某一平面上做圆周运动，可用一个角度描述之（1个坐标）。或者理解为：增加一个点（3个描述坐标），同时增加两根刚性杆（2个等式），因此，可用6（=5+3-2）个坐标描述之。

以此方式，即可构造点和点之间距离保持不变的点系，即刚体

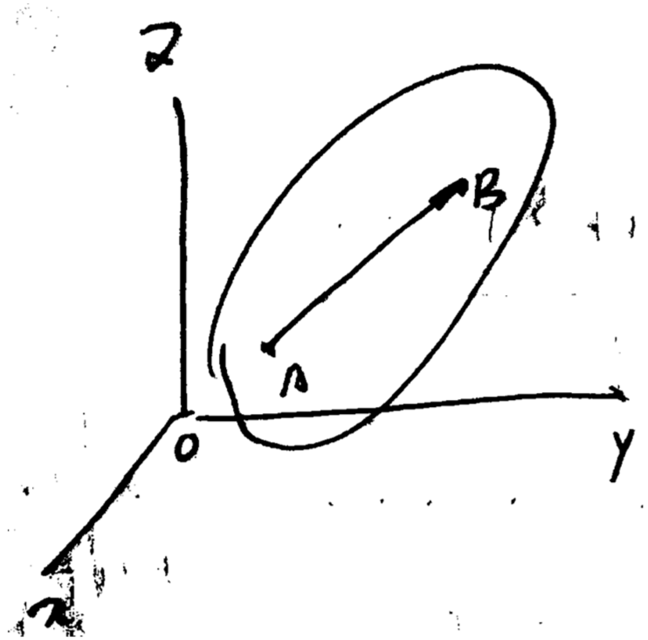
刚体的独立描述坐标数目为6个

这里指出，在刚体各点间增加更多的刚性杆并不会使独立描述坐标数目减少，这是因为，尽管约束方程数目增加了，但增加的约束方程与既有约束方程并不独立，属于冗余约束

2.1 刚体构成，独立描述坐标数目及选择

- 独立描述坐标选择

如下六个坐标作为独立描述坐标



首先选择刚体上一点A，由三个坐标（ x_A, y_A, z_A ）确定A点的位置，然后，选择刚体上的一根固结线AB，由AB的方位角 θ_x, θ_y 确定AB线的位置，最后，由刚体绕AB线转过的角度 θ_l 最终确定刚体位置。

当然，还有无穷种方法选择独立描述坐标，但数目不变。

2.1 刚体构成，独立描述坐标数目及选择

- 刚体 vs. 变形体

刚体可视为由刚性杆联系在一起的不变点系
可变形连续体可视为由弹性线（或非刚性线）联系在一起的可变点系
弹性线（非刚性线）未对点和点之间的距离做出预先的严厉限制，因此不算约束。
又因为连续，必由无穷多点组成，因此，需用无穷多个独立坐标描述。
按照可变形体的空间维度，可分为一维、二维和三维三个大类。一维以线为代表，二维以膜为代表，三维以体为代表。
对于一维线段，建立以线段方向为一根轴的直角坐标系，因各点初始位置已知，可以描述各点在任意时刻的位置，或者等价地，描述各点在任意时刻沿着三个方向的位移 $u(x,t),v(x,t),w(x,t)$

对于三维体 $u(x,y,z,t),v(x,y,z,t),w(x,y,z,t)$

此处的空间位置自变量，对应于离散描述中点的编号（下标），但相应于无穷多个点

总结之，作为一类特殊的约束点系，刚体的描述大为简化；可变形体不是约束点系，而是自由点系（严格意义上讲，也不是自由点系，因为点系中诸点的位移存在某种限制关系），其描述要复杂得多