第6章：分析力学之静力学

分析力学的核心思想就是“主动扰动，观察信息”。对于一个力学系统，在某时刻、某真实位置，主动施加那组假想的（并非真的发生）、瞬时发生的（与时间无关）、为约束所允许的（不危害约束）、任意的（变动随意）微小（无限小）位移，也即虚位移，看会发生什么，能否获取有用信息？具体而言，看是否能找出定量数学关系，是否能据此确定系统的行为？

首先，从静力学问题开始。

6-1 虚位移原理

在本节中，首先从力学角度考察动能定理、从数学角度考察运动定律，据此引出虚位移原理；然后，给出虚位移原理的一般形式和广义坐标形式；进而，给出有势情形下虚位移原理的一般形式和广义坐标形式；之后，陈述如何用虚位移原理解决静力学问题；最后，讨论平衡稳定性问题。

1.1 虚位移原理

- 引子：从力学角度考察动能定理

考察一个受**完整**、**定常**、**理想**约束的质点系，自由度非零，即具有运动的可能。

先从力学角度考察之。设在某一时刻，质点系处于静止状态。在该时刻，质点系动能为零。如果在下一无限小邻近时刻质点系开始运动，那么，由动能定理知，质点系所受力系在（实）位移上的（实）元功大于零，即：

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{Ni} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i > 0$$

其中，$\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{F}_{Ni}$ 分别为作用于第i个质点上的主动力和约束力。

约束理想，于是有，

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i > 0$$

上式阐释为：如果质点系从静止开始运动，主动力系必须做正功，将能量注入静止质点系中。换言之，能量能够注入静止质点系是质点系从静止开始运动的必要条件。

1.1 虚位移原理

- 引子：从力学角度考察动能定理

反过来，如果**测试**所有可能发生的路径（即可能位移集合，对于定常系统，也即虚位移集合），主动力都不能将能量注入静止质点系中，也即，

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \le 0$$

那么，静止质点系在下一个无限小邻近时刻一定不会发生运动，也就是说，静止状态会继续维持下去。上式给出了静止质点系继续保持其静止状态的**充分条件**。

进一步地，假设所有约束均为（具有数学光滑性的）双边约束。那么，对于任一组虚位移，都有一组与之等值、反向的虚位移。如果主动力在前一组虚位移上的虚功为负，那么在后一组虚位移上的虚功就为正。于是知，$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \le 0$ 等价于 $\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ 。这就是说，完整、定常、双边、理想约束系统继续保持静止的充分条件是：

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

1.1 虚位移原理

- 引子：从数学角度考察运动定律

下边，从数学角度考察之。设在某一时刻，质点系处于静止状态，在下一个无限小邻近时刻，质点系仍保持静止状态。由此知，在该时刻各质点的加速度均为零。由运动定律知，对任一质点有， $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}=0$

这是一个矢量式，两侧点积任一矢量后求和，仍然相等。在力学问题中，很多时候并不关注约束力，因此，有动机点积与约束力正交的矢量，从而消去约束力，于是有，

$$\left(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}\right)\cdot\xi_i=0$$

但是，要去判断每一质点的约束力方向是十分困难的。进一步将上式求和，得到，

$$\sum_i\left(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{Ni}\right)\cdot\xi_i=0$$

此时，就可以放宽上述矢量的选法：无需每一矢量与相应的约束力正交，而是每一矢量与相应约束力点积后求和等于零。这可视为在总体意义上正交。从数学上理解为：将各质点约束力的三个分量排成一长列，得到一个单一向量；将相应矢量的三个分量按同样方式排成一长列，形成另一个单一向量；二者正交。

1.1 虚位移原理

- 引子：从数学角度考察运动定律

定义在各质点上的任一组虚位移就可以选作这组矢量，就能满足与约束力的总体正交性。于是，有

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

上式是静止质点系能继续其保持静止状态的**必要条件**。

以上分别从力学角度和数学角度讨论了同一问题，请读者认真思考之。这里只提到，在力学角度关注“测试和比较”思想，而在数学角度关注“正交性”思想。

至此，证明了：完整、定常、双边、理想约束系统，在某时刻处于静止状态，能在下一无限小邻近时刻继续保持静止状态的充分必要条件是，主动力在任意虚位移上的虚功之和为零。拓展之，就得到了著名的虚位移原理。

1.1 虚位移原理

- 虚位移原理

虚位移原理（一般形式）：双边、理想约束系统，在某时刻处于静止状态，能在下一无限小邻近时刻继续保持静止状态的充分必要条件是，所有主动力（当前时刻）在任意虚位移（当前时刻）上所作的虚功之和为零。即，

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}\bar{\delta}W_{\boldsymbol{F}_i}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0}$$

或写成

$$\sum_{i=1}^{N}F_{xi}\delta x_i+F_{yi}\delta y_i+F_{zi}\delta z_i=0$$

式中，$\boldsymbol{F}_i$ 是当前时刻作用在质点i上的主动力的合力，$\boldsymbol{r}_i$ 是当前时刻质点i的矢径，$\delta\boldsymbol{r}_i$ 是当前时刻质点i的虚位移（矢径的变分）；F_{xi},F_{yi},F_{zi} 是 $\boldsymbol{F}_i$ 在笛卡尔坐标系各轴上的投影，$\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$是 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 在相应坐标轴上的投影，也即力的作用质点的坐标变分。上式称为**静力虚功方程**。

1.1 虚位移原理

• 虚位移原理评述

关于虚位移原理，评述如下：

其一，该原理的上述一般形式是很难证明的，或者说尚未完成证明。但是，由于其根本重要性，它是作为基本原理被接受的，与牛顿运动定律地位等同，甚至有观点认为，虚位移原理比牛顿运动定律更基本，对此我们不做争论。

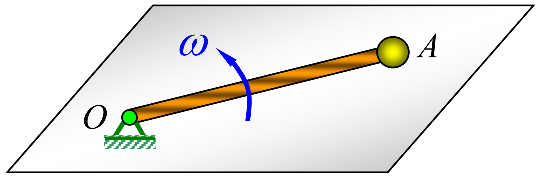
其二，该原理只要求双边、理想约束，对约束是否完整、是否定常没有任何限制。事实上，正是为了能够囊括非完整和非定常约束，才专门引入虚位移概念，而非直接采用可能位移概念。请读者仔细比对能量方法中的理想约束概念和分析力学中的理想约束概念，就能得窥其奥妙。

其三，虚位移原理给出的是“静止质点系能继续保持静止状态”的充要条件，而不是“质点系平衡”的充要条件。因此，“在某时刻处于静止状态”这一条件不能舍弃，举例说明如下：

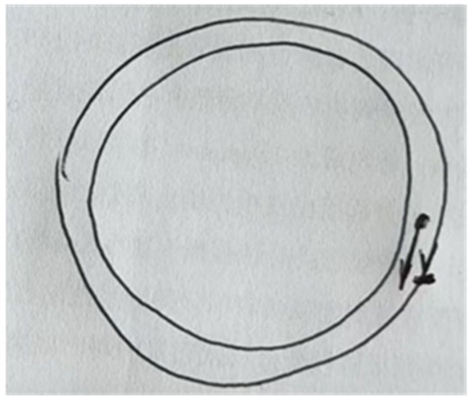
1.1 虚位移原理

- 虚位移原理评述

例题　小球受轻质刚性杆和光滑水平面约束，在水平面内做匀速圆周运动。



以小球为研究对象，约束双面（限制不脱离平面）、理想。主动力只有重力，且有$\sum \delta W_F = 0$ 。然而，小球并不平衡。



例题　小球受水平光滑曲线轨道约束，在轨道中做匀速率运动。

以小球为研究对象，约束双面、理想。主动力只有重力，且有$\sum \delta W_F = 0$ 。然而，小球并不平衡。

1.1 虚位移原理

- 虚位移原理评述

其四，如果已知静止质点系在下一个无限小邻近时刻仍保持静止，那么就有一个变分等式，据此可以由已知的主动力确定其静止位置（静力学问题的正向提法），或者由已知的静止位置确定主动力（或主动力之间的关系）（静力学问题的反向提法）。如果已知系统在某时刻静止，要问下一个无限小邻近时刻是否能继续保持静止，那么，就需要测试主动力在“所有”虚位移上的虚功，而不是只要测试随意一个就行了。这点务请注意！

其五，虚位移原理的重要意义在于，将继续保持静止的条件（也即平衡条件）浓缩在一个单一的等式中，这是矢量力学方法所不能比拟的。浓缩的可能性完全源自测试的任意性。

1.1 虚位移原理

- 虚位移原理评述

下边，对虚位移原理的实际应用进行一般性论述。注意到，虚位移为约束所限制，也即矢径（或坐标）变分为约束所限制，矢径（或坐标）变分并不独立。因此，静力虚功方程是一个有约束的变分等式。

处理**有约束的变分等式**的方法有三：其一，从约束方程出发，写出坐标变分之间的线性关系，之后用独立的坐标变分表出全部变分，代入变分等式，化为无约束的变分等式（独立变分个数减少）；其二，待定乘子法——通过待定乘子将约束吸收进变分等式；其三，消元法——将矢径（或坐标）用广义坐标表出后代入变分等式。这三种方法与解决有约束的变分驻值问题的三种方法完全一致。以下，分别详述之。

1.1 虚位移原理

- 虚位移原理评述

讨论限于完整、定常、双面、理想约束系统。

方法1： 写出全部k个约束方程，

$$f_\alpha\left(x_i, y_i, z_i\right)=0, \alpha=1,2\cdots,k$$

约束方程施予坐标变分（虚位移）的限制为：

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i=0, \alpha=1,2\cdots,k$$

选出n=3N-k个虚位移，由此表出其它k个虚位移，而这n=3N-k个虚位移可以独立变动。将之代入静力虚功方程，由这n=3N-k个虚位移的任意性知其系数必为零，从而得到n=3N-k个代数方程。

如果主动力已知，可以由这n=3N-k个代数方程加上k个约束方程，共同求解平衡位置的3N个坐标值。如果平衡位置已知，可以由这n=3N-k个代数方程确定主动力之间的n个关系。

1.1 虚位移原理

- 虚位移原理评述

方法2：待定乘子法。首先，写出约束方程施予坐标变分（虚位移）的限制。之后，将这些限制等式分别乘以待定乘子（常数）并加入静力虚功方程中，得，

$$\sum_{i=1}^{N}\left(F_{xi}\delta x_i+F_{yi}\delta y_i+F_{zi}\delta z_i\right)+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0$$

按坐标变分（虚位移）整理得，

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left(F_{xi}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right)\delta x_i+\left(F_{yi}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right)\delta y_i+\left(F_{zi}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right]=0$$

于是有：

$$F_{xi}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0,F_{yi}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0,F_{zi}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}=0\qquad i=1,2,\cdots,N$$

如果主动力已知，可以由这3N个代数方程加上k个约束方程，共同决定平衡位置的3N个坐标值和k个待定乘子。如果平衡位置已知，可以由这3N个代数方程确定主动力和k个待定乘子之间的3N个关系，消去k个待定乘子得到关于主动力的n=3N-k个关系。

1.1 虚位移原理

- 虚位移原理评述

虚位移原理（广义坐标形式）。方法3：消元法。首先，将矢径（或坐标）用广义坐标表出，即，

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1 \cdots, q_n\right)$$

进而，将矢径（或坐标）变分（虚位移）用广义坐标变分（广义虚位移）表出，

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

代入静力虚功方程得，

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\delta} W_{\boldsymbol{F}_i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

观察上式并与虚功定义相比较，可以恰当地称括号中的一项为广义（主动）力，记为，

$$F_{Q_j} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

这样，虚功等于主动力与虚位移之积，也等于广义主动力与广义虚位移之积。

1.1 虚位移原理

- 虚位移原理评述

由于广义坐标变分（广义虚位移）的独立性，得知，主动力虚功之和为零当且仅当广义主动力分别为零，即，$F_{Q_j}=0 \quad (j=1,\cdots,n)$

这也是静止质点系继续保持静止状态的充要条件。

上式十分规范，但若按定义来计算广义主动力，需要首先将矢径（或坐标）用广义坐标表出，而后求偏导数，而这并不容易。考虑到广义虚位移的独立性，可以用如下方法计算广义主动力 F_{Q_r}。令广义虚位移 δq_r 不为零，其它广义虚位移均为零，计算主动力的虚功$\left(\sum_{i=1}^{N}\bar{\delta}W_{\boldsymbol{F}_i}\right)_r$，于是有，

$$F_{Q_r}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\bar{\delta}W_{\boldsymbol{F}_i}\right)_r}{\delta q_r}$$

符号 $(\cdot)_r$ 表示仅发生第r个广义虚位移。

于是，广义主动力为零等价于：$\left(\sum_{i=1}^{N}\bar{\delta}W_{\boldsymbol{F}_i}\right)_r=0, \quad (r=1,\cdots,n)$

在实际应用中，对于简单的、几何关系明确的问题，多采用几何法直接给出虚位移之间的关系，代入静力虚功方程进行后继分析。

1.1 虚位移原理

- 有势情形下的虚位移原理

有势情形下的虚位移原理（一般形式和广义坐标形式）。这里，来考察主动力有势的情形。存在势函数，

$$V=V\left(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N\right)$$

主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 可表示为，

$$\boldsymbol{F}_i=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}$$

代入静力虚功方程得，

$$\sum_{i=1}^N \bar{\delta} W_{\boldsymbol{F}_i}=\sum_{i=1}^N-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-\delta V=0$$

于是，得到静止质点系继续保持静止状态的充要条件，

$$\delta V\left(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N\right)=0$$

这就是有势情形下虚位移原理的一般形式。

1.1 虚位移原理

- 有势情形下的虚位移原理

上式化为有约束的泛函驻值问题，仍可采用三种方法处理之。这里，只给出第三种方法，即消元法。

将矢径与广义坐标的关系代入上式得，

$$\delta V\left(q_1,\cdots,q_n\right)=0$$

变分运算得到：

$$\delta V\left(q_1,\cdots,q_n\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j=0$$

由于广义坐标变分的独立性，有，

$$\frac{\partial V}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,\cdots,n$$

1.1 虚位移原理

• 有势情形下的虚位移原理

上式亦可如下处理来得到。对于主动力有势的情形，广义主动力可表示为，

$$F_{Q_j}=\sum_{i=1}^{N}-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

于是有，

$$\frac{\partial V}{\partial q_j}=0\qquad j=1,\cdots,n$$

上述的全变分等式和偏导数等式就是有势情形下虚位移原理的广义坐标形式。

这里指出，有势情形下的虚位移原理可阐释为：势能函数在且仅在静止平衡这个特定的位置处取驻值，换言之，静止平衡位置相应于势能函数取驻值。这里，就体现了自然的目的性和倾向性。这是力学的第一个目的因解释（自然倾向于势能取驻值），全然不同于力学的动力因解释（作用力引起运动的改变）。