3.1 达朗贝尔原理

- 动静法

质点系的达朗贝尔原理阐述为：外力系和惯性力系的主矢为零，对一点的主矩为零。单刚体平衡的充分必要条件阐述为：（外）力系的主矢为零，对一点的主矩为零。变形体平衡的必要条件阐述为：（外）力系的主矢为零，对一点的主矩为零——这是由刚化原理给出的。

将惯性力视为真实存在的力，施加在质点上。这样，如果想要列出达朗贝尔原理的等式，只需将质点系视为刚体（刚化），视为在外力系和惯性力系作用下处于平衡状态，之后按照静力平衡方法列写等式，所列出的就是达朗贝尔原理的等式。此时，按照平衡问题处理时的一切手段都可以采用，例如力系的等效变换，巧取投影轴和取矩轴，诸如此类。这种用静力学方法处理动力学问题的方法称为**动静法**。

3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

当研究刚体（系）的动力学问题时，由于单刚体上各点的加速度相互牵制，惯性力系分布具有规律，因此可以先对惯性力系进行简化。惯性力系的一般简化结果是一个单力和一个单力偶，分别简称为惯性力和惯性力偶。

这里，分别给出平移运动、定轴转动和平面运动刚体的惯性力系简化结果。

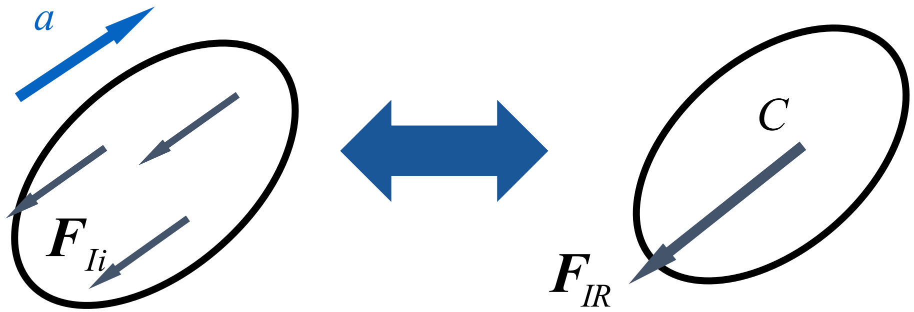
对于**平移运动刚体**

惯性力系的主矢为 $\boldsymbol{F}_{IR} = -m\boldsymbol{a}_C$

惯性力系对质心的主矩为 $\boldsymbol{M}_{IC} = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} = 0$

因此，将惯性力系向质心简化，得到作用于质心的一个惯性力，其力矢为：

$$\boldsymbol{F}_{IR} = -m\boldsymbol{a}_C$$



3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

对于**定轴转动刚体**

惯性力系的主矢为 $\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$

惯性力系对质心C的主矩为 $\boldsymbol{M}_{IC}=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \boldsymbol{L}_C=-J_{x'z'}\omega\boldsymbol{i}'-J_{y'z'}\omega\boldsymbol{j}'+J_{z'}\omega\boldsymbol{k}'$

惯性力系对转轴上一点O的主矩为 $\boldsymbol{M}_{IO}=-\dfrac{d\boldsymbol{L}_O}{dt}$ $\qquad \boldsymbol{L}_O=-J_{xz}\omega\boldsymbol{i}-J_{yz}\omega\boldsymbol{j}+J_z\omega\boldsymbol{k}$

➢惯性力系向质心简化，得到一个作用于质心C的惯性力和一个惯性力偶，惯性力的力矢为$\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$，惯性力偶的力偶矩矢为$\boldsymbol{M}_{IC}=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$

➢惯性力系向转轴上一点O简化，得到一个作用于O点的惯性力和一个惯性力偶，惯性力的力矢为 $\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$，惯性力偶的力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_{IO}=-\dfrac{d\boldsymbol{L}_O}{dt}$

在一般情形下，力偶矩矢的方向与转轴不重合。

3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

研究这样的定轴转动刚体：它具有质量对称面，且转轴垂直于此质量对称面。此时，与质量对称面垂直的轴是其与质量对称面交点的一根主轴。

对于质心C， $\boldsymbol{L}_C = J_{z'}\boldsymbol{\omega} \triangleq J_C\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{M}_{IC} = -J_C\boldsymbol{\alpha}$ ；

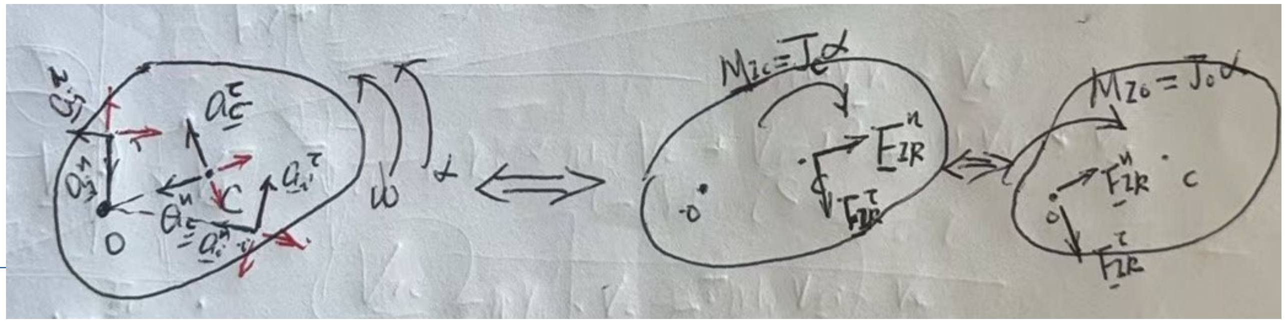
对于质量对称面与转轴的交点O， $\boldsymbol{L}_O = J_z\boldsymbol{\omega} \triangleq J_O\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{M}_{IO} = -J_O\boldsymbol{\alpha}$ 。

在此情形下，

➢惯性力系向质心C简化，惯性力偶的力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_{IC} = -J_C\boldsymbol{\alpha}$

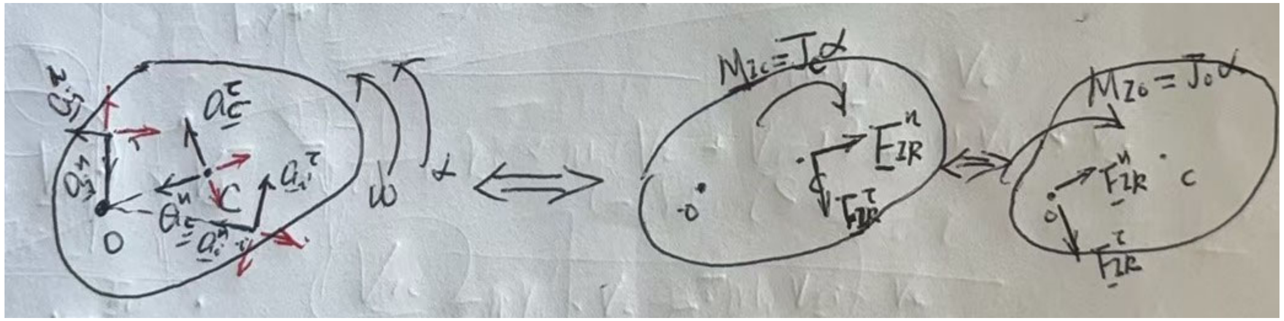
➢惯性力系向质量对称面与转轴的交点O简化，惯性力偶的力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_{IO} = -J_O\boldsymbol{\alpha}$

常在纸面上画出这个质量对称面，转轴与纸面垂直，此时所标记的O点即为质量对称面与转轴的交点。简化结果如图所示：



3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化



惯性力用两个分力表示（矢量标记），$F_{IR}^n = ma_C^n, F_{IR}^\tau = ma_C^\tau$ ；惯性力偶用一个平面内的圆弧表示（代数标记），$M_{IC} = J_C\alpha, M_{IO} = J_O\alpha$ ，这是因为力偶矩矢的方位已然明确。

如果先将惯性力系向质心C简化，再向O点简化，应与直接向O点简化的结果一致。将作用于C点的惯性力向O点搬移，产生附加力偶 $F_{IR}^\tau \times OC = ma_C^\tau \times OC = mOC^2\alpha$，于是得到作用于$O$点的一个单力和一个单力偶，单力偶的力偶矩矢值为

$$J_C\alpha + mOC^2\alpha = \left(J_C + mOC^2\right)\alpha = J_O\alpha$$

这个结果与直接向O点简化的结果完全一致。

3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

对于**平面运动刚体**

惯性力系的主矢为 $\boldsymbol{F}_{IR} = -m\boldsymbol{a}_C$

惯性力系对质心C的主矩为 $\boldsymbol{M}_{IC} = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$　　$\boldsymbol{L}_C = -J_{x'z'}\omega\boldsymbol{i}' - J_{y'z'}\omega\boldsymbol{j}' + J_{z'}\omega\boldsymbol{k}'$

因此，惯性力系向质心简化，得到一个作用于质心C的惯性力和一个惯性力偶，惯性力的力矢为 $\boldsymbol{F}_{IR} = -m\boldsymbol{a}_C$，惯性力偶的力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_{IC} = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t}$

在一般情形下，力偶矩矢的方向与转轴不重合。

研究这样的平面运动刚体：它具有质量对称面，且转轴垂直于此质量对称面。

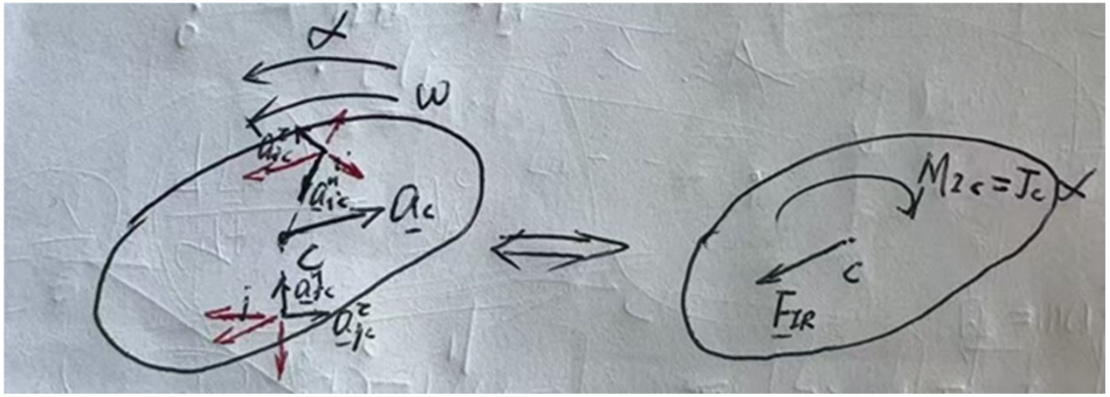
此时，$\boldsymbol{L}_C = J_{z'}\boldsymbol{\omega} \triangleq J_C\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{M}_{IC} = -J_C\boldsymbol{\alpha}$，

惯性力系向质心C简化，惯性力偶的力偶矩矢为 $\boldsymbol{M}_{IC} = -J_C\boldsymbol{\alpha}$ 。

3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

研究这样的平面运动刚体：它具有质量对称面，且转轴垂直于此质量对称面。常在纸面上画出这个质量对称面，简化结果如图所示



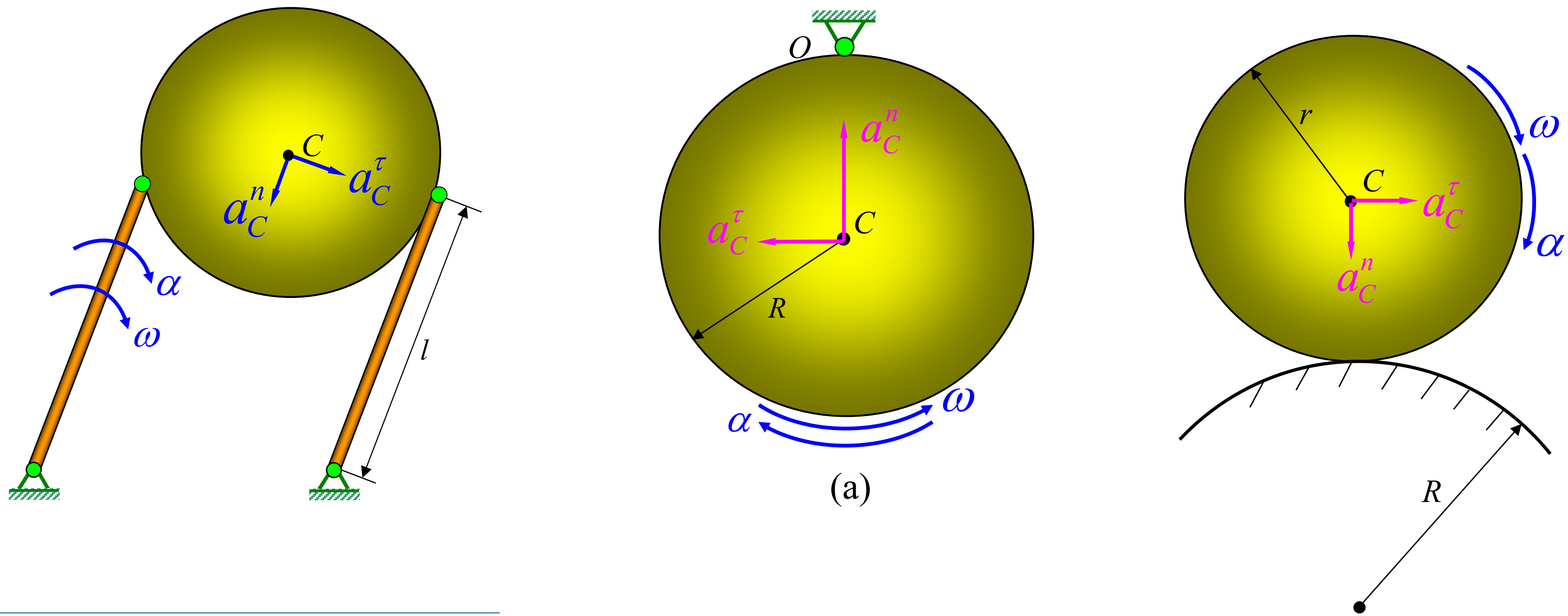
图中，惯性力用矢量符号标记，$F_{IR}=ma_C$，若切向和法向方位已知，亦可用两个分力表示；惯性力偶用一个平面内的圆弧表示（代数标记），$M_{IC}=J_C\alpha$。

注意，在上述典型运动刚体的惯性力画法中，方向已经画为与加速度方向相反，因此，在其量值和加速度量值之间的关系中，已经没有负号了。后文中，若非特别指出，研究的都是这种有质量对称面的情形

3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

例题 图示各均质等厚薄圆盘，运动信息均已给出。试添加惯性力和惯性力偶。

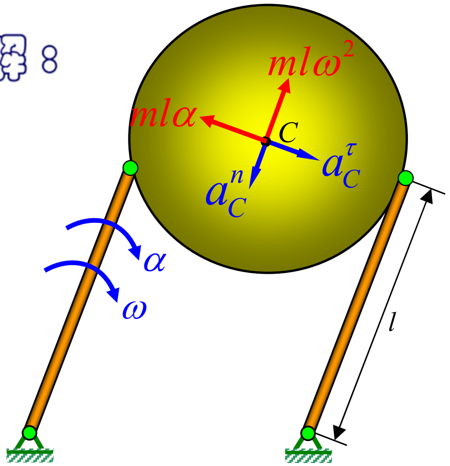


(a)

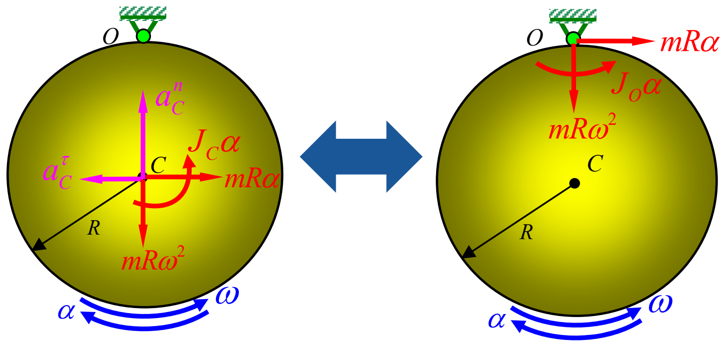
3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

解：

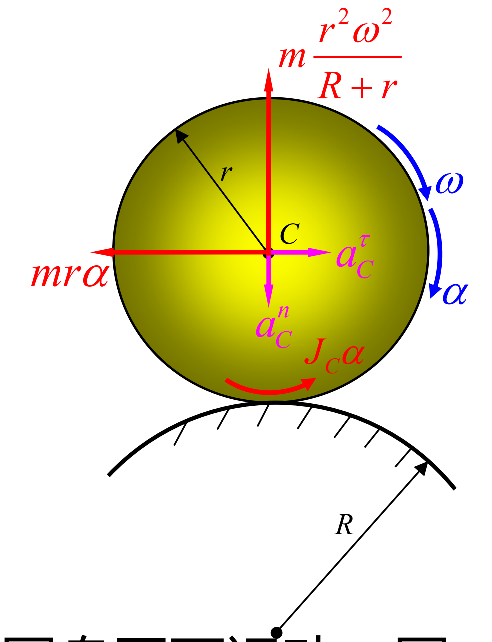


圆盘平行移动，圆盘质心C的加速度为 $a_C^\tau = l\alpha, a_C^n = l\omega^2$，角加速度为0。惯性力有两个分量，量值分别为$ml\alpha, ml\omega^2$，惯性力偶的量值为0，或者说无惯性力偶。



圆盘定轴转动，惯性力系可向质心C或者质量对称面与转轴的交点O简化。圆盘质心C的加速度为 $a_C^\tau = r\alpha, a_C^n = r\omega^2$，角加速度为$\alpha$。向质心$C$简化，惯性力有两个分量，量值分别为 $mr\alpha, mr\omega^2$，惯性力偶的量值为 $J_C\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha$。

向O点简化，惯性力有两个分量，量值分别为$mr\alpha, mr\omega^2$，惯性力偶的量值为 $J_O\alpha = \frac{3}{2}mr^2\alpha$ 。



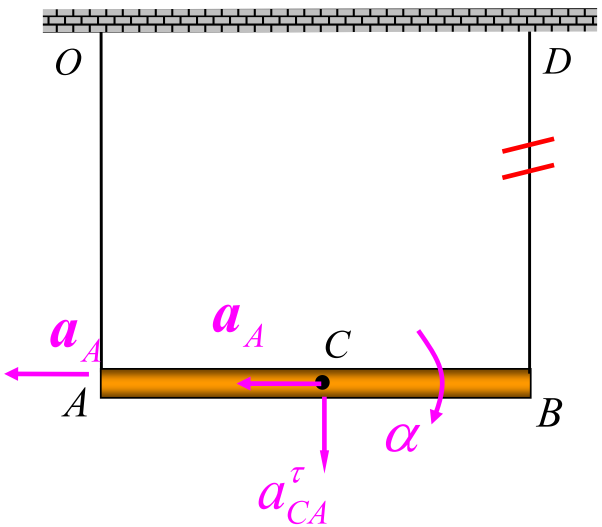
圆盘平面运动，圆盘质心C的加速度为 $a_C^\tau = r\alpha, a_C^n = \frac{(r\omega)^2}{R+r}$ ，角加速度为α。惯性力有两个分量，量值分别为$mr\alpha, m\frac{(r\omega)^2}{R+r}$，惯性力偶的量值为

$$J_C\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

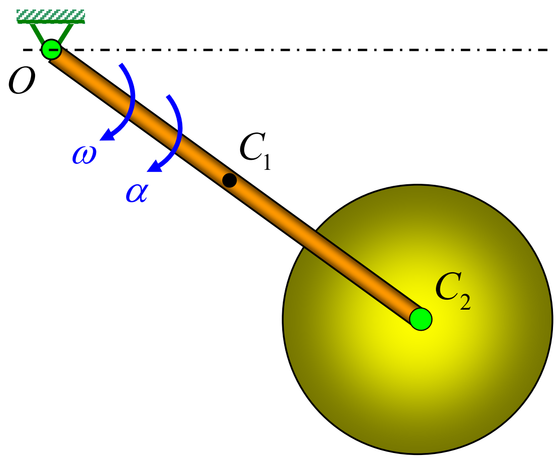
3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

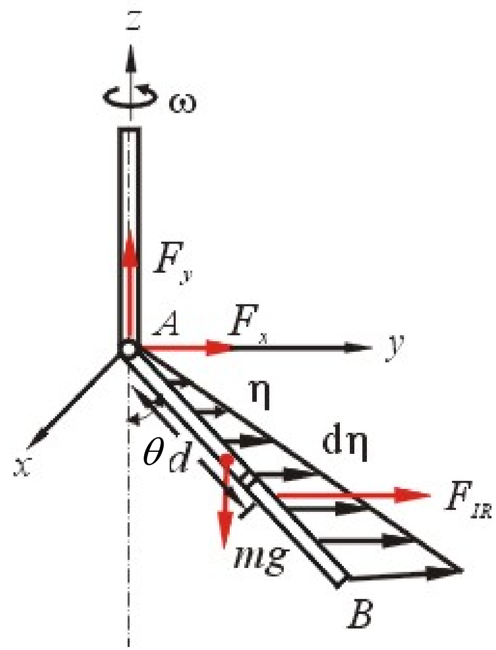
例题 图示均质等厚的细长杆件和薄圆盘，杆长l，圆盘半径r，试添加惯性力和惯性力偶。图a中，杆件水平静止悬挂，BD绳断瞬间。图b中，杆件水平静止放置，圆盘静止，释放后运动图示位置。图c中，处于图示稳定状态。



(a)



(b)

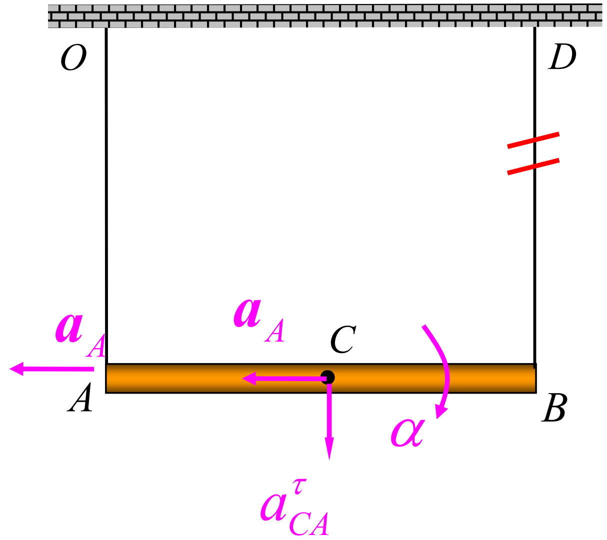


(c)

3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

解8 图a中，绳断之后，独立描述坐标数目为2。因绳断瞬时，所有速度信息为零，只需设定两个加速度量，不妨设为A点的加速度（A点的加速度只有切向分量）$\boldsymbol{a}_A$和AB杆的角加速度α。



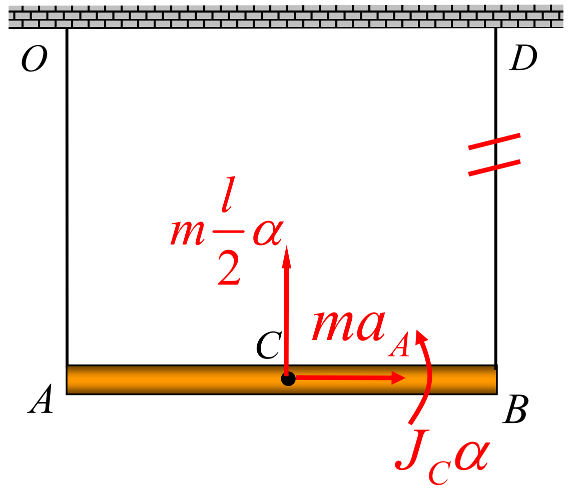
质心加速度由基点法表出为

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{CA}^{\tau} \qquad a_{CA}^{\tau} = \frac{l}{2}\alpha$$

因此，惯性力有两个分量，量值分别为

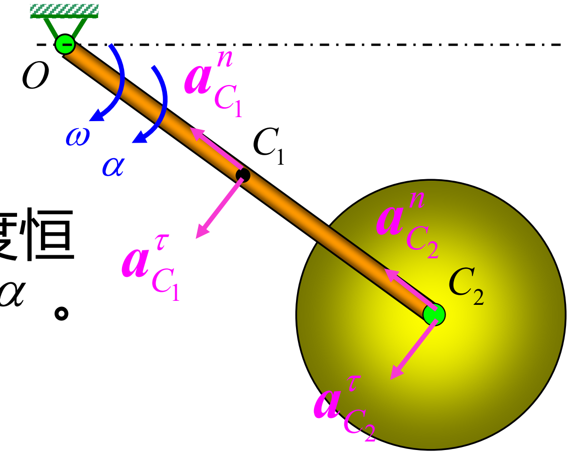
$$ma_A, m\frac{l}{2}\alpha$$

惯性力偶的量值为 $J_C\alpha = \frac{1}{12}ml^2\alpha$



3.1 达朗贝尔原理

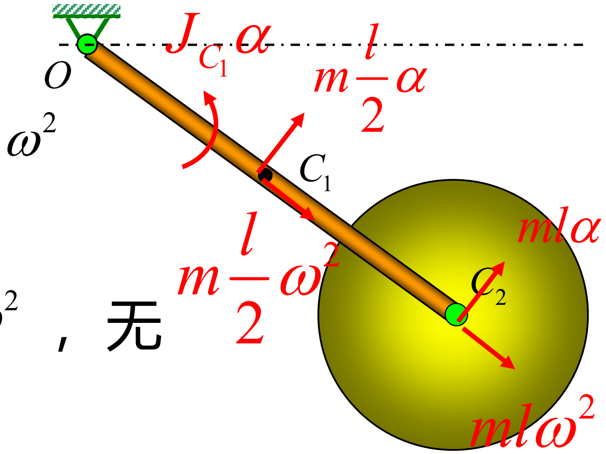
- 刚体上惯性力系的简化



图b中，对圆盘而言，由对质心的动量矩守恒知，圆盘角加速度恒为零，圆盘平移。此时，只需设定杆件的角速度和角加速度 ω,α 。

杆件质心加速度为 $a_{C_1}^\tau=\dfrac{l}{2}\alpha, a_{C_1}^n=\dfrac{l}{2}\omega^2$

圆盘质心加速度为 $a_{C_2}^\tau=l\alpha, a_{C_2}^n=l\omega^2$



向质心C_1简化，杆件惯性力有两个分量，量值分别为 $m\dfrac{l}{2}\alpha, m\dfrac{l}{2}\omega^2$

惯性力偶的量值为 $J_{C_1}\alpha=\dfrac{1}{12}ml^2\alpha$

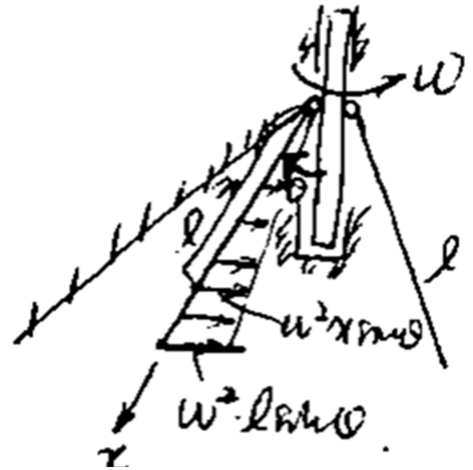
向质心C_2简化，圆盘惯性力有两个分量，量值分别为 $ml\alpha, ml\omega^2$ ，无惯性力偶。

此外，杆件的惯性力系也可以向O点简化。这里强调指出，杆件惯性力系向O点简化，是作用于杆件上的O点，而非销钉上或者支座上；同理，圆盘惯性力系向C_2点简化，是作用于圆盘上的中心点，而非销钉上或杆端。这在后继分析中尤其容易出错。

3.1 达朗贝尔原理

- 刚体上惯性力系的简化

图c中，斜杆定轴转动，但不是具有质量对称面且在质量对称面中运动的情形。这里，按定义研究之。沿杆轴线建立坐标轴η，各点加速度和惯性力系分布如图

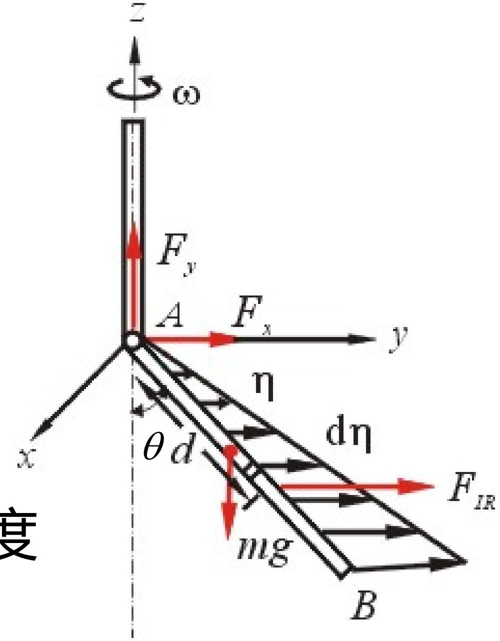


在η位置处，微元dη作用的惯性力为

$$\eta \sin\theta\omega^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}\eta$$

三角形惯性分布力系简化为作用在2/3l处的一个惯性力，量值为

$$\int_0^l \eta \sin\theta\omega^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}\eta = m\frac{l}{2}\sin\theta\omega^2 = ma_C$$



注意，上述例子中，也可找出独立描述坐标，由之表出质心加速度和角加速度，直接用独立描述坐标的导数表出惯性力和惯性力偶。

3.1 达朗贝尔原理

- 动静法的应用

动静法（达朗贝尔原理）和动量方法是完全等价的，能用动量方法解决的问题也能用动静法解决，反之亦然；应用动静法时，不要试图用动量方法补充方程，反之亦然；动量方法对于解决刚体（系）动力学问题是完备的，一般性地归结为常微分方程组求解，动静法亦是如此；动量方法在初瞬时问题或者速度已知（预选给定或者用能量方法获得）的问题中，可归结为代数方程组求解，动静法亦是如此。

然而，理论上的等价性并不预示着操作上的等价性。动静法（达朗贝尔原理）以静制动，是一种深刻的观念转变。采用动静法处理动力学问题时，只要将惯性力系视为真实力系，就可以采用静力学的一切手段求解，例如无条件地任意选取取矩轴。在动量方法中，一般选取固定轴或过质心的平移轴。

3.1 达朗贝尔原理

- 动静法的应用

下面，讨论如何应用动静法来处理平面刚体（系）的动力学问题

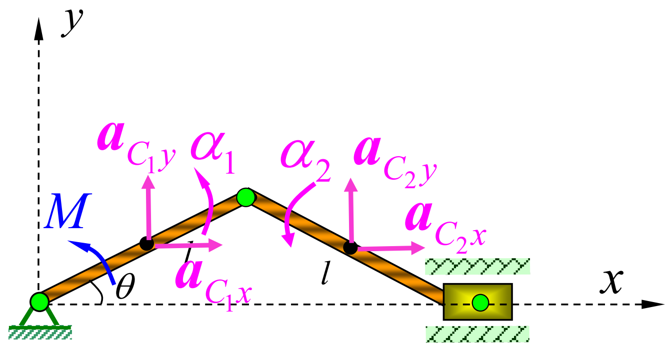
考虑受约束的平面运动刚体系。设平面运动刚体个数为n，受到m个约束作用。每个单刚体的质心坐标和转角x_C, y_C, φ 都能用刚体系的$3n$-m独立描述坐标表出。对每个平面单刚体列写平衡方程，共写出$3n$个二阶微分方程，其中包含$3n$-m个独立描述坐标和m个约束反力，结合 $2\times(3n-m)$ 个初始条件恰好定解。这就是说，动静法构成了平面运动刚体系的完备的分析方法。这种方法称为**过程分析方法**。

对于上述受约束的平面运动刚体系，如果某时刻的位置和速度信息已知，那么，必能用相应于$3n$-m个独立描述坐标的$3n$-m个加速度表出每个单刚体的质心加速度和角加速度 a_{Cx}, a_{Cy}, α。此时，上述$3n$个二阶微分方程退化为$3n$个代数方程，其中包含相应于独立描述坐标的$3n$-m个加速度和m个约束反力。这种方法称为**瞬时分析方法**。

3.1 达朗贝尔原理

• 动静法的应用

例题 两根均质杆件构成图示平面刚体系，两杆等质量m、等长度l，杆件初始静止，并保持水平。体系在常力偶M作用开始运动。试求运动和约束力变化的全过程。



解： 机构的独立描述坐标取为θ。两杆的三个独立描述坐标都可据此表出：

$$AB: \quad x_{C_1}=\frac{l}{2}\cos\theta, y_{C_1}=\frac{l}{2}\sin\theta, \varphi_1=\theta$$

$$BD: \quad x_{C_2}=\frac{3l}{2}\cos\theta, y_{C_2}=\frac{l}{2}\sin\theta, \varphi_2=-\theta$$

杆件的质心加速度和角加速度直接求导表出

3.1 达朗贝尔原理

- 动静法的应用

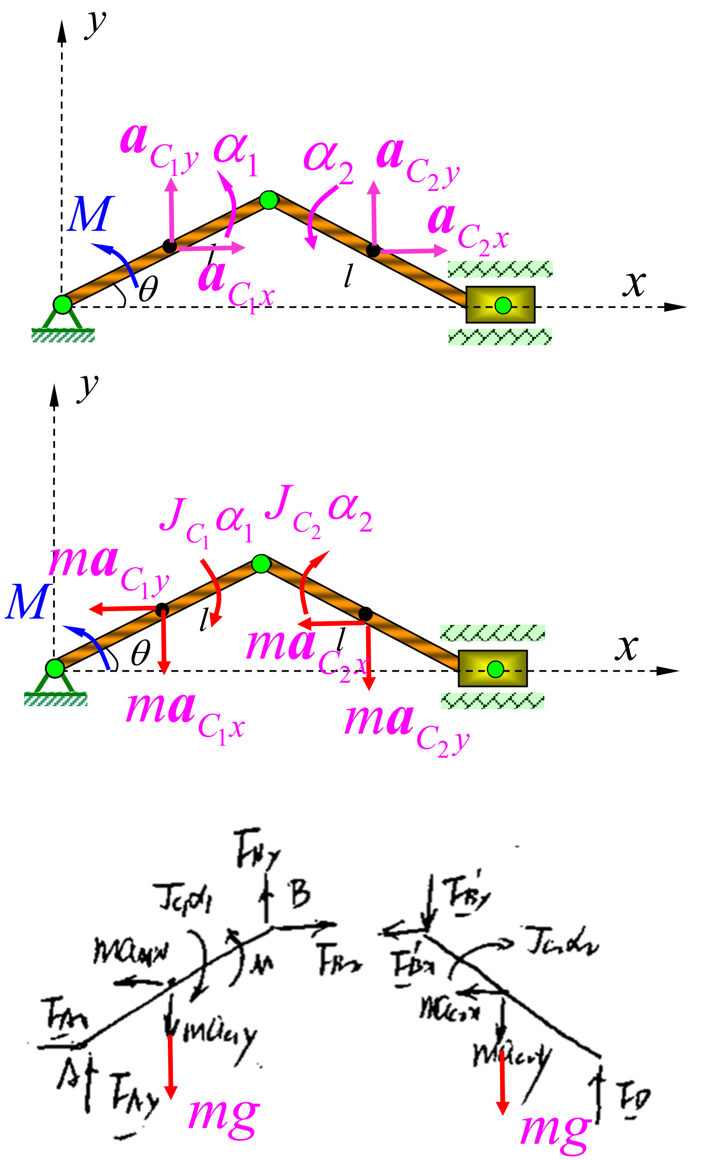
在杆件上施加惯性力。对每一个单刚体受力分析如图。列写三个平衡方程，得到：

AB： $F_{Ax}+F_{Bx}-m\ddot{x}_{C_1}=0, F_{Ay}+F_{By}-mg-m\ddot{y}_{C_1}=0,$

$$M-J_{C_1}\ddot{\varphi}_1+\left(F_{Ax}-F_{Bx}\right)\frac{l}{2}\sin\varphi_1+\left(F_{By}-F_{Ay}\right)\frac{l}{2}\cos\varphi_1=0,$$

BD： $-F_{Bx}-m\ddot{x}_{C_2}=0, F_D-F_{By}-mg-m\ddot{y}_{C_2}=0,$

$$\left(F_D+F_{By}\right)\frac{l}{2}\cos\varphi_2+F_{Bx}\frac{l}{2}\sin\varphi_2-J_{C_2}\ddot{\varphi}_2=0$$

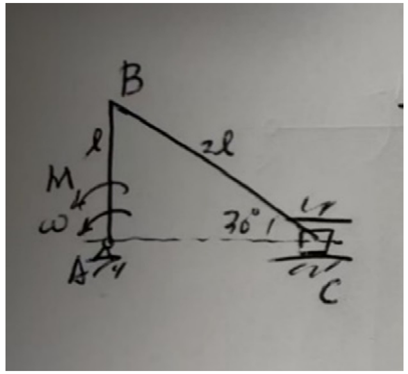


将运动学关系代入，得到关于1个独立描述坐标θ、5个约束力$F_{Ax}, F_{Bx}, F_{Ay}, F_{By}, F_D$的六个方程。结合初始条件，问题定解。

3.1 达朗贝尔原理

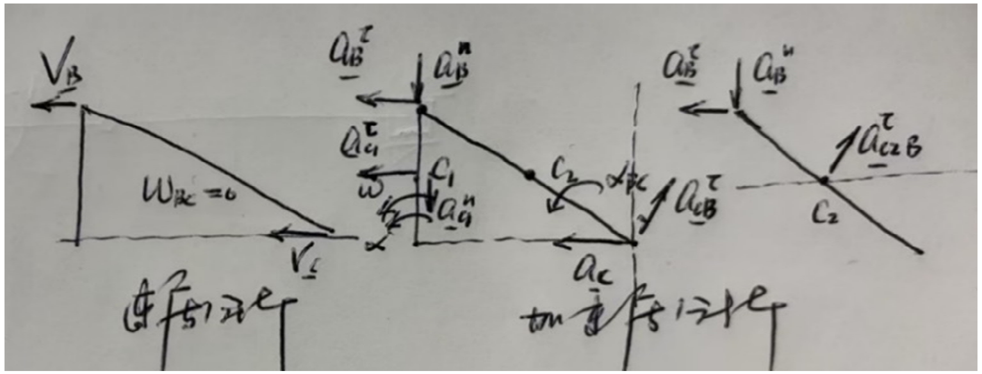
- 动静法的应用

例题 两根均质杆件构成图示平面刚体系，两杆等质量m、长度分别为l和$2l$，体系在常力偶M作用，某瞬时位置如图，AB杆的角速度为ω。试求该瞬时AB杆的角加速度及各约束反力。



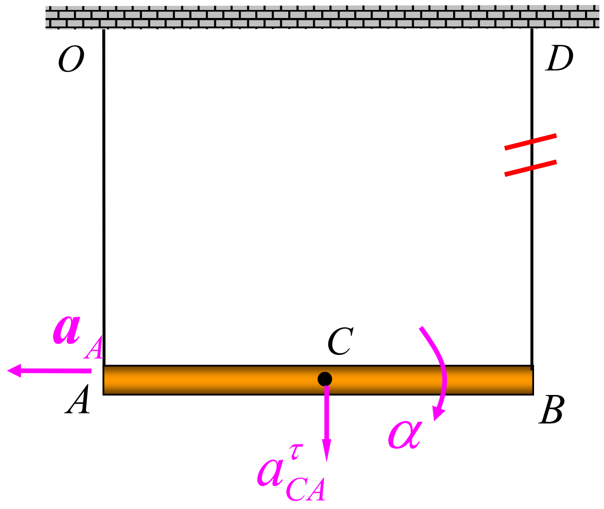
解： 该瞬时的位置和速度已知，可由一个加速度表出各单刚体的质心加速度和角加速度，设AB杆的角加速度为α 。由之表出各单刚体的质心加速度和角加速度。

施加惯性力，对两个刚体分别列写平衡方程得到6个代数方程，包含五个约束力 $F_{Ax}, F_{Bx}, F_{Ay}, F_{By}, F_D$ 和一个角加速度α，问题定解。



3.1 达朗贝尔原理

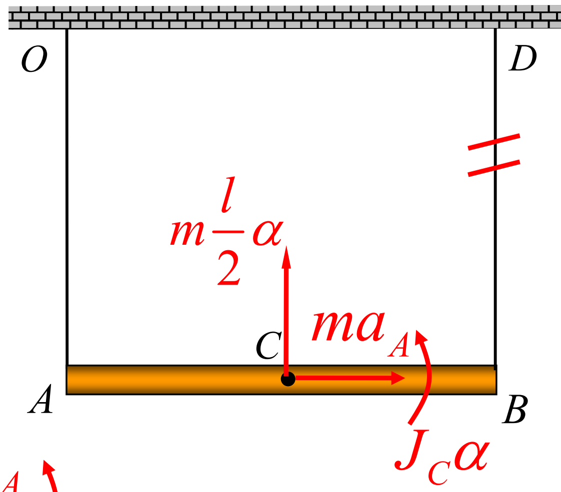
- 动静法的应用——对初瞬时问题的处理



例题 均质杆水平悬挂，质量m，长度l。试求BD绳断瞬时，OA绳的张力。

解：

绳断后，独立描述坐标数目为2。绳断瞬时，所有速度信息为零，只需两个加速度量，即可表出全部加速度信息。记A点的加速度为 $\boldsymbol{a}_A$ ，AB杆的角加速度为α，加速度分析如图。



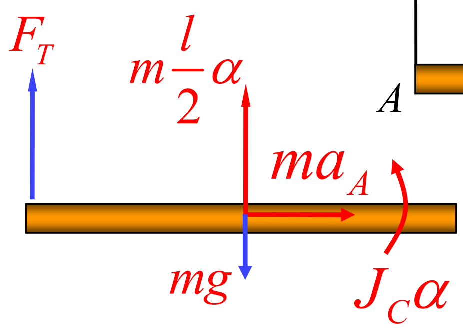
在杆件上添加惯性力和惯性力偶，结果如图。以杆件为研究对象，受力分析如图。由平衡条件，恰可确定两个加速度和一个约束力。

对A点取矩得，

$$\left(mg - m\frac{l}{2}\alpha\right)\frac{l}{2} = J_C\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2l}$$

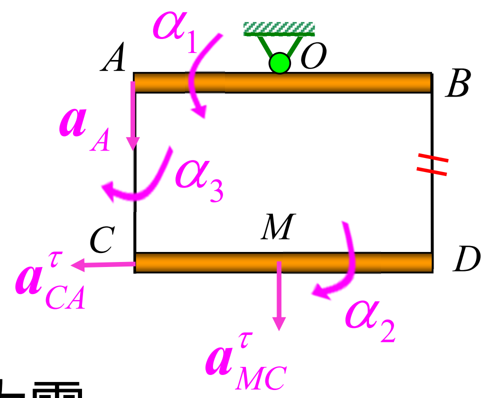
竖向投影得，

$$F_T + m\frac{l}{2}\alpha = mg \Rightarrow F_T = \frac{1}{4}mg$$



注释：绳断之前，杆件处于静止状态，绳子张力为 $\frac{1}{2}mg$ 。绳断瞬时，绳子张力突变。读者试讨论绳子非竖直悬吊的情形，看绳子张力是否一定突变，是否一定减小?

3.1 达朗贝尔原理



- 动静法的应用——对初瞬时问题的处理

例题 两均质杆用细绳相连，水平悬挂，两杆质量均为m，长度均为l，$AO=OB$ 。试求BD绳断瞬时，铰O处约束反力。

解：绳断后，独立描述坐标数目为3。绳断瞬时，所有速度信息为零，只需三个加速度量，即可表出全部加速度信息。记AB杆的角加速度为α_1，CD杆的角加速度为α_2，AC线的角加速度为α_3。

先做加速度分析，目标是用设定的三个角加速度表出杆件AB和CD的质心加速度和角加速度。加速度分析如图。

AB杆质心加速度为零，AB杆角加速度即为α_1， A点的加速度只有切向分量，$a_A=\dfrac{l}{2}\alpha_1$。以A为基点研究C点，有

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{CA}^{\tau} \qquad a_{CA}^{\tau}=CA\times\alpha_3$$

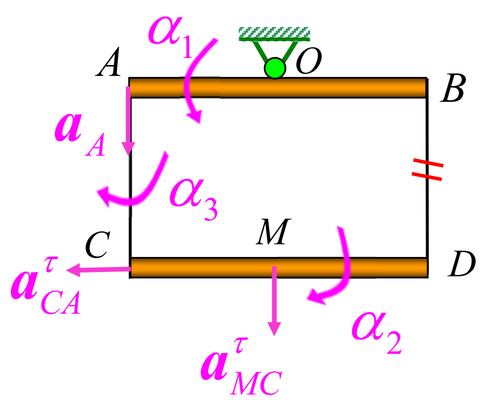
以C为基点研究M点（M为CD杆的质心），有

$$\boldsymbol{a}_M=\boldsymbol{a}_C+\boldsymbol{a}_{MC}^{\tau} \qquad a_{MC}^{\tau}=\frac{l}{2}\alpha_2$$

3.1 达朗贝尔原理

- 动静法的应用——对初瞬时问题的处理

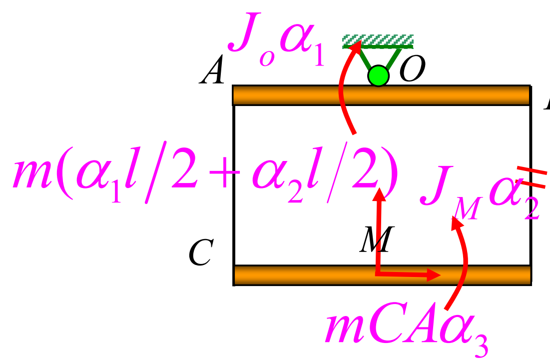
在杆件上施加惯性力和惯性力偶，结果如图。分别以两根杆件为研究对象，可以列6个平衡方程，恰好求解三个加速度和三个约束力。这里，只需求解O点的约束力。先以CD杆为研究对象，受力如图。水平方向投影得，



$$mCA\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_3=0$$

对C点取矩得，$J_M\alpha_2+m\dfrac{l}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\dfrac{l}{2}=mg\dfrac{l}{2}$

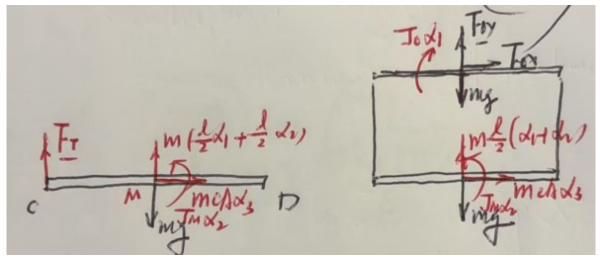
以整体为研究对象，受力如图。水平方向投影得，



$$F_{Ox}+mCA\alpha_3=0 \Rightarrow F_{Ox}=0$$

对O点取矩得，$J_M\alpha_2-J_O\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2$

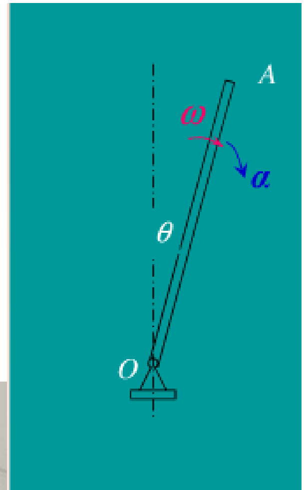
$$\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\frac{6g}{7l}$$



竖直方向投影得，$F_{Oy}-mg-mg+m\dfrac{l}{2}(\alpha_1+\alpha_2)=0 \Rightarrow F_{Oy}=\dfrac{8}{7}mg$

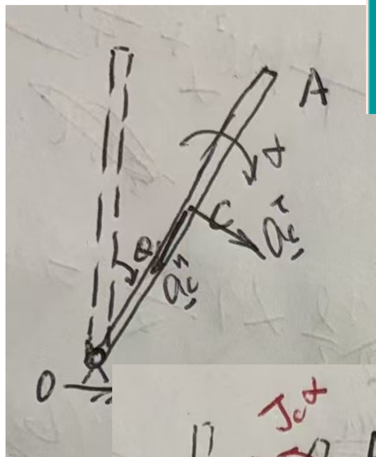
3.1 达朗贝尔原理

- 动静法的应用



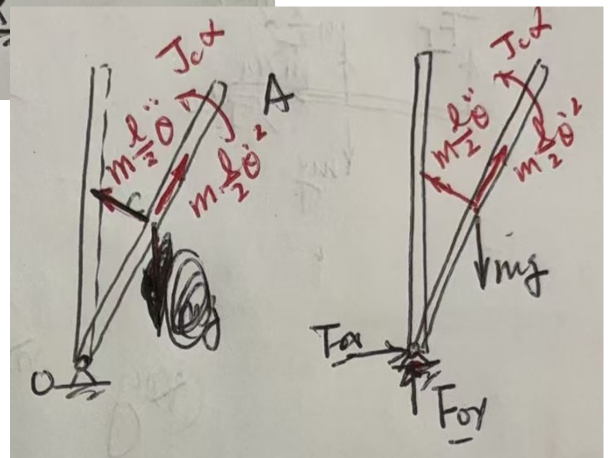
例题　均质杆OA质量为m，长度为l，O点铰接。初始静止于铅垂位置，受轻微扰动倒下。试求处于θ位置时，杆子各横截面的弯矩、最大弯矩值及其所在位置。

解：杆件独立描述坐标数目为1，可取θ角刻画之。可由θ表出所有加速度信息。



杆件质心加速度 $a_C^\tau = \frac{l}{2}\ddot{\theta}, a_C^n = \frac{l}{2}\dot{\theta}^2$，角加速度 $\alpha = \ddot{\theta}$，加速度表示如图。

在杆件上施加惯性力和惯性力偶，结果如图。以杆件为研究对象，受力如图。对O点取矩得，



$$J_C\ddot{\theta} + m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\times\frac{l}{2} - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

积分之可得角度对时间的显式关系

3.1 达朗贝尔原理

- 动静法的应用

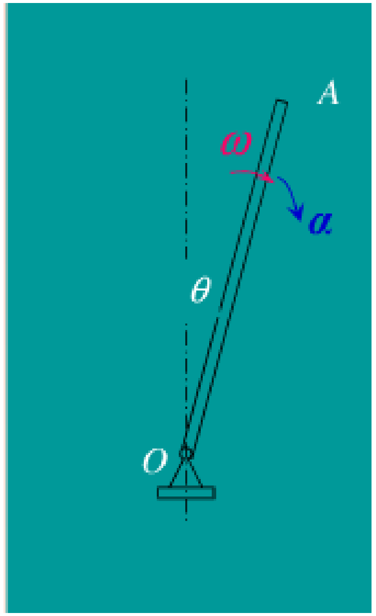
只需知道角加速度和角速度对角度的依赖关系

角加速度 $\alpha = \dfrac{3g}{2l}\sin\theta$

角速度处理如下

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}d\dot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta d\theta$$

当 $\theta = 0$ 时 $\dot{\theta} = 0$ $\Rightarrow$ $\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\cos)\theta}$

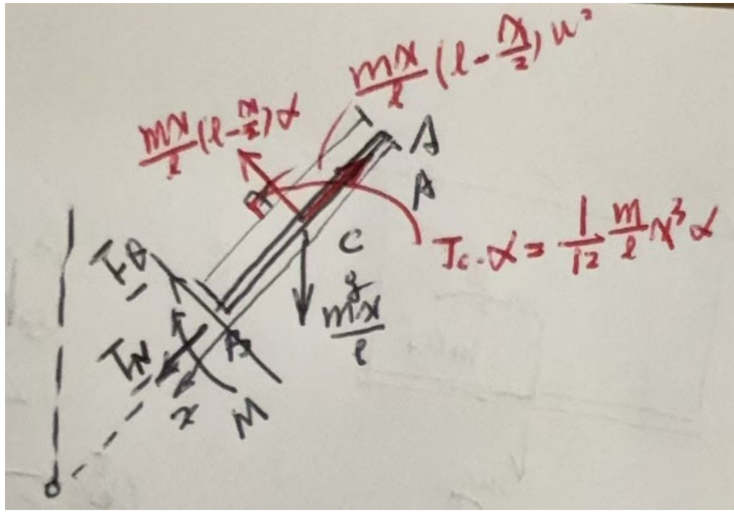


至此，已经弄清了在任一θ角时，杆件的角速度和角加速度。

3.1 达朗贝尔原理

- 动静法的应用

采用动静法求解横截面内力。以杆端A为原点，沿轴线放置坐标线x。截出杆段 $AB=x$ 为研究对象，施加惯性力和惯性力偶，外力和横截面内力，受力如图。



对B点取矩得， $-M-\dfrac{mgx}{l}\dfrac{x}{2}\sin\theta+\dfrac{mx}{l}\left(l-\dfrac{x}{2}\right)\alpha\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{12}\dfrac{mx^3}{l}\alpha=0$

$$\Rightarrow \quad M=\frac{1}{4}mgl\sin\theta\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=0 \quad \Rightarrow$ 在 $x=\dfrac{2}{3}l$ 处，横截面弯矩最大，量值为

$$M_{\max}=\frac{1}{27}mgl\sin\theta$$

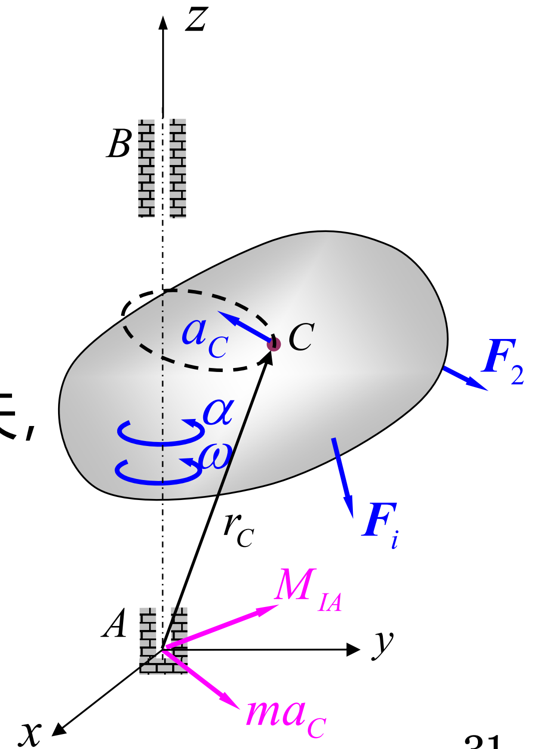
注释：横截面弯矩最大的位置不随角度而变，最大弯矩的量值正比于$\sin\theta$ 。这就解释了在拆除砖石结构的烟囱时，在其根部定向爆破后，倒下过程中发生的二次断裂现象。也可以计算轴力F_N和剪力 F_Q沿轴线的分布，最大值及其位置。

3.1 达朗贝尔原理

- 定轴转动刚体的轴承动约束力问题

由外加力引起的约束力称为**静约束力**，称由惯性力引起的约束力为**动约束力**。在工程中，转子高速转动时，常在轴承处产生很大的动约束力，这将引起剧烈振动，加速轴承损坏。因此，研究高速转子产生动约束力的原因，找出消除动约束力的条件，是十分重要的。

考虑定轴转动刚体，质量为m，在外力系 $\boldsymbol{F}_i$ 作用下以角速度 ω，角加速度 α 绕AB轴转动，轴长$AB=l$。



以止推轴承A为原点，建立与固结于刚体上的直角坐标系A-xyz，其中z轴与AB重合。将惯性力系向A点简化，得到作用于A点的一个惯性力和一个惯性力偶。此惯性力的力矢量等于惯性力系的主矢，即

$$\boldsymbol{F}_{IR}=-m\boldsymbol{a}_C$$

方向垂直于转轴z。此惯性力偶的力偶矩矢等于惯性力系对A的主矩，即

$$\boldsymbol{M}_{IA}=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{L}_A=-J_{xz}\omega\boldsymbol{i}-J_{yz}\omega\boldsymbol{j}+J_z\omega\boldsymbol{k}$$

3.1 达朗贝尔原理

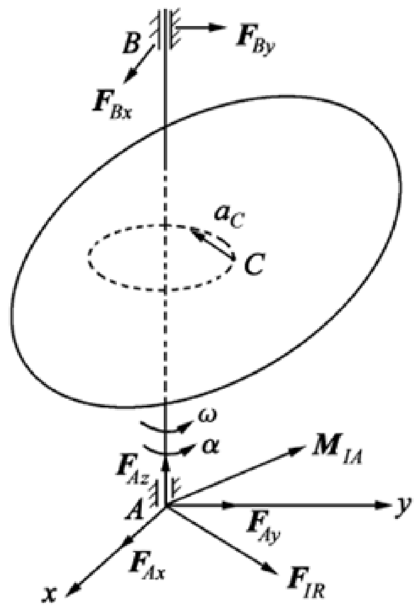
- 定轴转动刚体的轴承动约束力问题

注意，前文推导上式时，建立了惯性直角坐标系，在转动过程中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 不变，而 J_{xz},J_{yz} 变化。此处建立了随体直角坐标系，在转动过程中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 变化而 J_{xz},J_{yz} 不变。又，

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\alpha,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=\omega\boldsymbol{j},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=-\omega\boldsymbol{i},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=0$$

于是得，

$$\boldsymbol{M}_{IA}=\left(J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2\right)\boldsymbol{i}+\left(J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2\right)\boldsymbol{j}-J_z\alpha\boldsymbol{k}$$



只画出了惯性力和惯性力偶，以及由之引起的动约束力，受力如图。

对x轴取矩得， $F_{By}=\dfrac{J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2}{l}$

向y轴投影得， $F_{Ay}=\dfrac{-J_{xz}\alpha+J_{yz}\omega^2}{l}+ma_{Cy}$

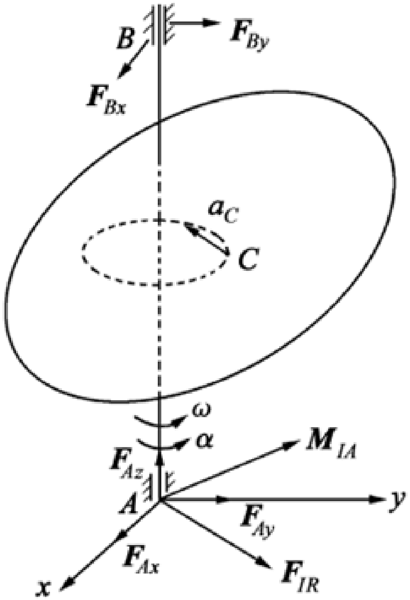
对y轴取矩得， $F_{Bx}=-\dfrac{1}{l}(J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2)$

3.1 达朗贝尔原理

- 定轴转动刚体的轴承动约束力问题

向x轴投影得， $F_{Ax}=\frac{1}{l}(J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2)+ma_{Cx}$

向z轴投影得， $F_{Az}=0$



当转子稳定运行时，$\alpha=0$，ω 不变，此时动约束力在随体直角坐标系中看是不变的，而在惯性参考系中观察动约束力按正弦规律变化。转子高速转动时，这种周期性变化的动约束力的反作用力作用于轴承上，引起轴承和基座强烈振动。

观察可知，只要使

$$x_C=y_C=0 \qquad J_{xz}=J_{yz}=0$$

那么，无论角速度和角加速度取何值，动约束力均为零。这就要求：转轴为中心惯量主轴！