1-3 刚体（系）的运动描述与简化
——瞬时矢量分析方法

时常只关注某一瞬时的运动信息，而且分量表示并不直观

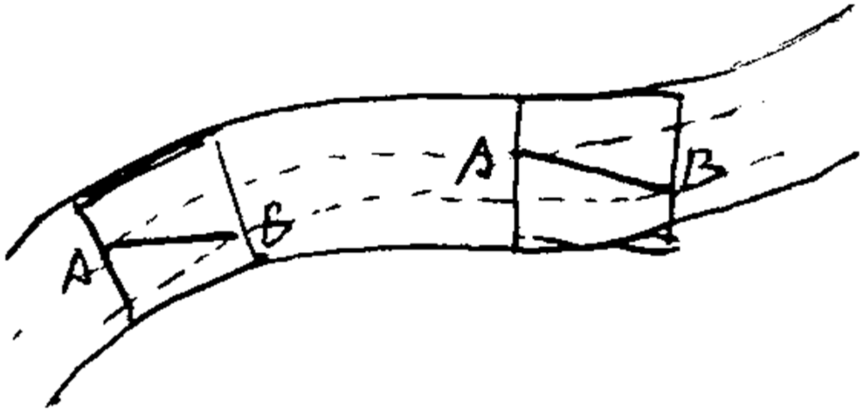
由过程分析转向瞬时分析，由标量分析转向矢量分析

将典型运动单刚体的独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数用矢量表出，由之表出刚体上某一瞬时，任一点的速度矢量和加速度矢量。此处的单刚体矢量分析和上节的单刚体标量分析相并行，不给出新的结论，但给出既有结论的全新洞见。之后，由刚体系的独立描述坐标、其一阶导数和二阶导数，直接表出体系上任一点的速度矢量和加速度矢量。并指出上述方法何时有效？何时失效？

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平行移动

 试判断在水平曲线铁轨上行驶的火车车厢是否为平移运动。



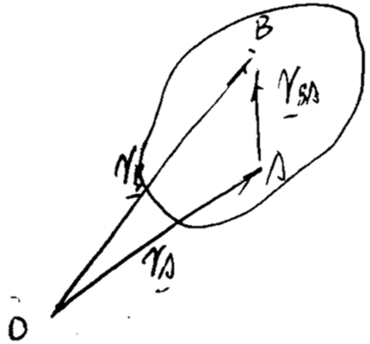
 由图可知，车厢上存在一根物质线（例如AB），在运动过程中并不保持平行，因此，车厢不是平移运动。

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平行移动

独立描述坐标的矢量表示

考虑一平移刚体，从某固定点O（选定参考系中的固定点）向刚体内一确定点A作矢径 $\boldsymbol{r}_A$ ，该矢径足以刻画整个刚体的运动。给定该矢量，也就给定了3个独立描述坐标



运动方程，运动表出

平移刚体的矢量形式运动方程

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(t)$$

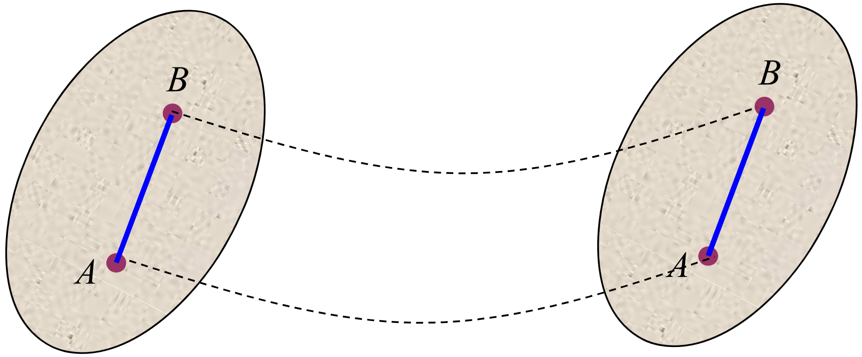
平移刚体上任一点（如B点）的矢径

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \underline{\boldsymbol{r}_{BA}}$$

已知的常矢量

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平行移动



运动方程，运动表出

B点的速度矢量和加速度矢量

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A,\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A$$

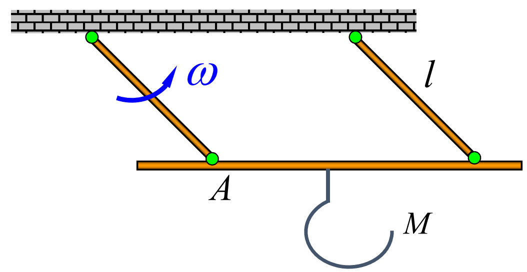
$$\boldsymbol{v}_A=\dot{\boldsymbol{r}}_A,\boldsymbol{a}_A=\ddot{\boldsymbol{r}}_A$$ ——A点的速度矢量和加速度矢量

总结之，刚体平移时，其上各点的轨迹形状相同，且相互平行（意指将B点的轨迹平移后能与A点的轨迹完全重合）；在同一瞬时，各点的速度相同，加速度相同。因此，刚体平移问题可归结为其上一点的运动问题来研究。这也揭示出点的运动的双重意义：其一，代表大小可以忽略的物体的运动；其二，代表平移刚体的运动。

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平行移动

例题　图示体系在纸面内运动，已知A点的速度和加速度（或者给定A点的弧坐标方程），试计算M点的速度和加速度。



解：　已知平移刚体上各点的速度、加速度分别相等，由此知，M点的速度和加速度分别等于A点的速度和加速度

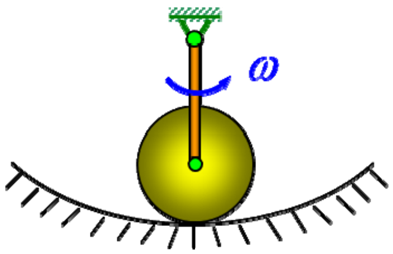
关于**瞬时平移**刚体，在该瞬时 $\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A$ ，但在一般情形下， $\boldsymbol{a}_B\neq\boldsymbol{a}_A$

3.1 单刚体的典型运动模式

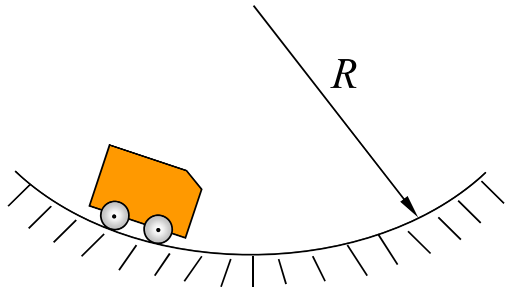
- 定轴转动

思考

试判断沿圆弧纯滚动的轮（图a所示）以及沿圆弧滑动的杆AB（图b所示）是否为定轴转动。



(a)



(b)

答：轮子在任一瞬时都有一条不动直线（过A点垂直于纸面的直线），但该直线位置随时间连续变动，因此，轮子不是定轴转动；在车厢的延展部分，过O点且垂直于纸面的直线固定保持不动，因此，车厢做定轴转动，车轮不是定轴转动。

3.1 单刚体的典型运动模式

- 定轴转动

独立描述坐标的矢量表示

定轴转动刚体，可选转角 φ 为独立描述坐标，转角为代数量。记$\boldsymbol{k}$为z轴（转轴）正向的单位方向矢，可将转角用矢量表示为$\boldsymbol{\varphi}=\varphi\boldsymbol{k}$ 。相应地，定轴转动刚体的角速度矢量和角加速度矢量定义为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k},\boldsymbol{\alpha}=\alpha\boldsymbol{k}$$

角速度的单位为弧度/秒（rad/s），在工业领域常用**转速**n，单位为转/分（round/min），二者之间存在换算关系：

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30}$$

有时也采用**频率**单位（1/s），记为f，相应地，弧度/秒（rad/s）称为**圆频率**，二者相差一个倍数 2π

角加速度的单位为弧度/秒^2（rad/s^2）

3.1 单刚体的典型运动模式

- 定轴转动

运动方程，运动表出

刚体定轴转动的矢量形式运动方程

$$\varphi = \varphi(t)$$

刚体上任一点M在垂直于转轴的平面上作圆周运动，可用弧坐标描述之，弧坐标原点取在转角为零处。

M点的速度沿圆周切线方向，大小为 $v = \dot{s} = \dfrac{d(R\varphi)}{dt} = R\dot{\varphi} = R\omega$

M点的切向加速度沿圆周切线方向，大小为 $a_\tau = \ddot{s} = R\ddot{\varphi} = R\alpha$

法向加速度指向圆心，大小为 $a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{R} = \dfrac{R^2\dot{\varphi}^2}{R} = R\omega^2$

3.1 单刚体的典型运动模式

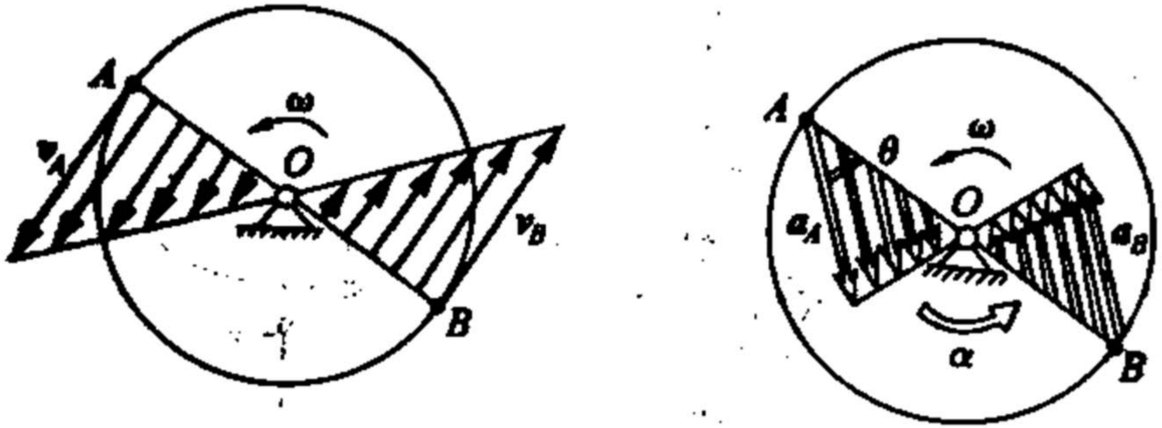
- 定轴转动

运动方程，运动表出

点M的全加速度a的大小： $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=R\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$

方向：与法线夹角的正切为 $\tan\theta=\dfrac{a_\tau}{a_n}=\dfrac{\alpha}{\omega^2}$

定轴转动刚体上各点的速度和加速度分布如图所示，注意速度和加速度大小均正比于到轴的距离R。点的速度由角速度确定，而点的加速度同时依赖于角速度和角加速度。

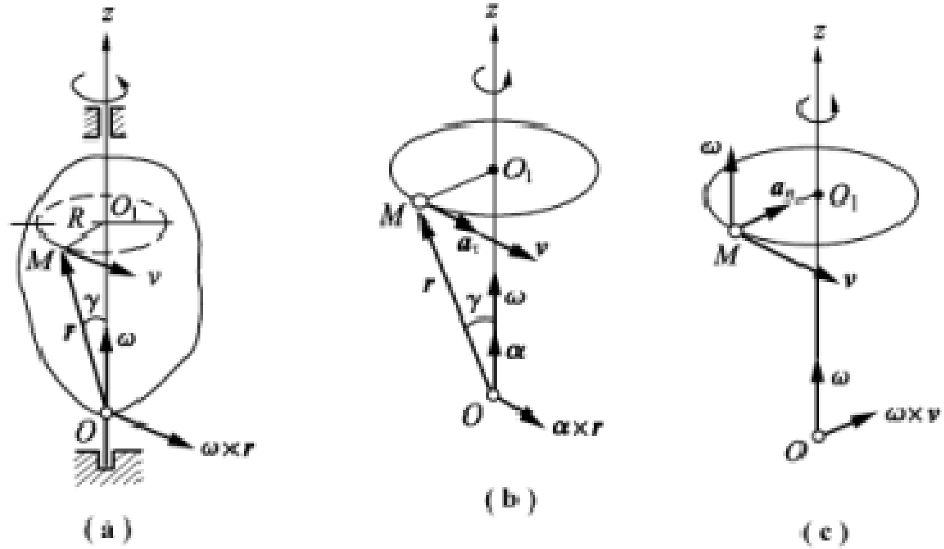


(a) (b)

3.1 单刚体的典型运动模式

- 定轴转动

一点的速度矢量和加速度矢量的矢积表示



$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}| = r|\omega|\sin\gamma = R|\omega|$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = \underline{\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}} + \underline{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}}$$

方向垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和v构成的平面，指向圆心

大小 $|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}| = |\omega||v| = R\omega^2$ ， $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$

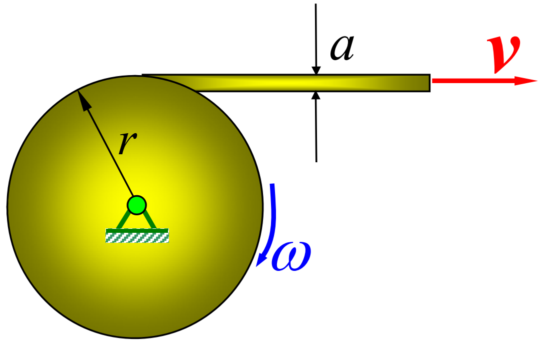
方向垂直于$\boldsymbol{r}$和 $\boldsymbol{\alpha}$ 构成的平面，沿圆周切线方向

大小 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}| = r|\alpha|\sin\gamma = R|\alpha|$ ， $\boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}$

3.1 单刚体的典型运动模式

例题

考虑图示卷带圆盘，已知胶带厚度为a（ $a \ll r$ ），速度 v = 常数，求圆盘转动的角加速度。

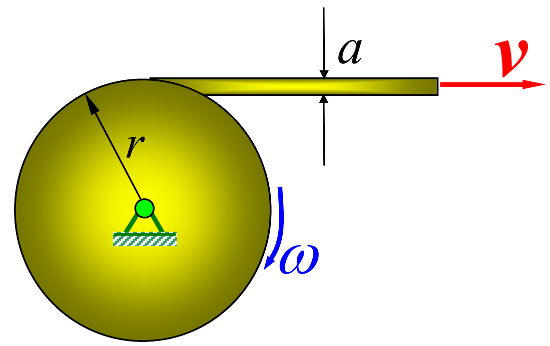


3.1 单刚体的典型运动模式

解： 由刚体上一点速度和刚体角速度关系知，

$$\omega = \frac{v}{r}$$

注意，此处 r, ω 时变 ，而v为常数。对时间求导得



$$\alpha = \dot{\omega} = -\frac{v}{r^2}\dot{r}$$

又 $\quad \mathrm{d}A = -av\,\mathrm{d}t, \qquad A = \pi r^2$

即 $\quad 2\pi r \cdot \mathrm{d}r = -av\,\mathrm{d}t$

故 $\quad \alpha = \dfrac{av^2}{2\pi r^3}$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{av}{2\pi r}$$

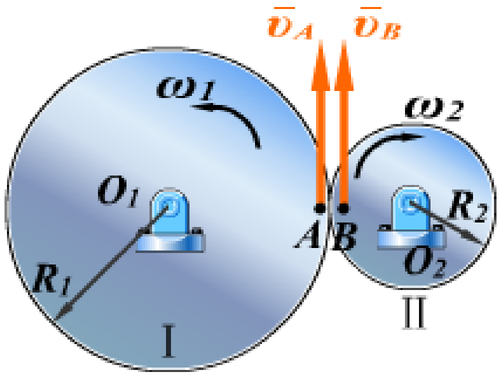
$$r = r_0\sqrt{1 - \frac{av}{2\pi r_0^2}t}$$

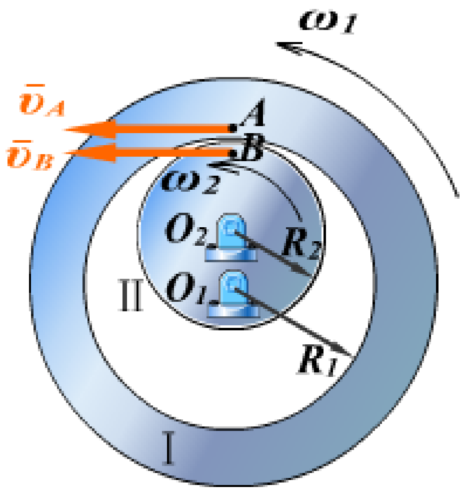
r_0 为零时刻的圆盘半径

3.1 单刚体的典型运动模式

轮系传动比

例题 两个定轴转动轮无滑滚动（如图所示），试求两轮角速度和角加速度的关系。Ⅰ、II两轮的角速度和半径分别记为 $\omega_1,\ R_1, \omega_2,\ R_2$ 。





3.1 单刚体的典型运动模式

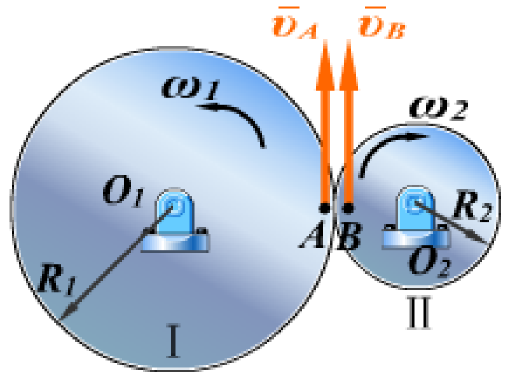
轮系传动比

解：两轮在接触处（接触型约束）满足运动学条件：

$$v_A = v_B$$

于是有： $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

该式对任意时刻成立，因此有： $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{R_2}{R_1}$$



外啮合

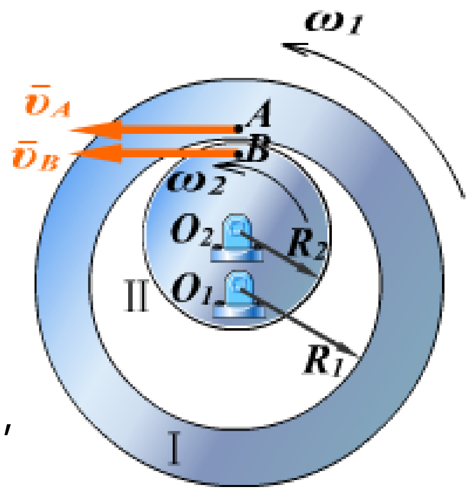
两轮的角速度和角加速度均与半径成反比。进一步分析知，两（无滑滚动）接触点的加速度在公切线方向的投影（在此例中，恰为两接触点的切向加速度）相同

为了区分轮系中各轮的转向，规定某一转向为正，各轮角速度和角加速度视为代数量，于是有

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \pm\frac{R_2}{R_1}$$ 轮系传动比

内啮合： “+”　　外啮合： “-”

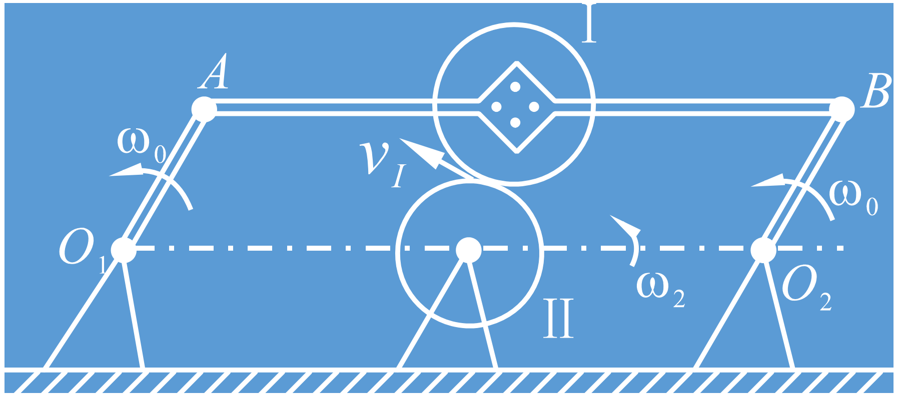
若给出两轮的齿数，由于齿距相同，齿数比等于周长比，也就等于半径比，据此可知，角速度和角加速度均与齿数成反比



内啮合

3.1 单刚体的典型运动模式

例题 已知：$O_1A=O_2B=2r$，ω_0 = 常数，齿轮半径均为r，且 $O_1O_2=AB$ 。
求：轮Ⅰ与轮Ⅱ，轮缘上任一点的加速度。



解：

- **速度：**

轮Ⅰ：平移

$$\upsilon_I=\upsilon_A=O_1A\cdot\omega_0=2r\omega_0$$

轮Ⅱ：定轴转动 $\omega_2=\dfrac{\upsilon_I}{r}=2\omega_0$ $\upsilon_{II}=\upsilon_I$

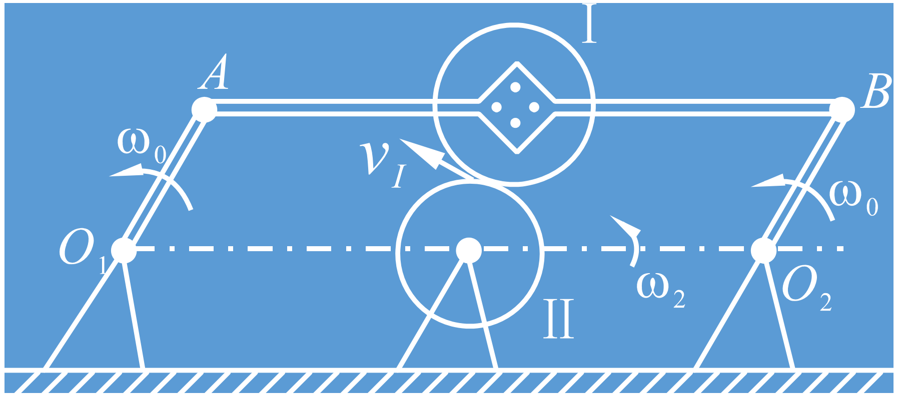
3.1 单刚体的典型运动模式

加速度：

轮 I：

$$a_I = a_A = 2r\omega_0^2$$

方向平行于O_1A



轮II： $\omega_2 = 2\omega_0$

$$\alpha_2 = \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad a_{II}^{\tau} = r\alpha_2 = 0$$

$$a_{II}^{n} = r\omega_2^2 = 4r\omega_0^2 \qquad a_{II} = a_{II}^{n} = 4r\omega_0^2$$

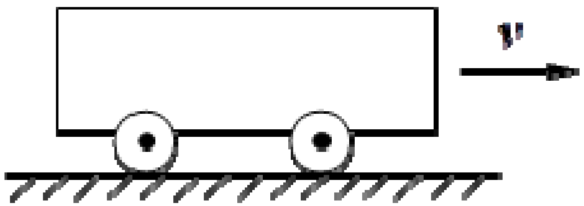
注意：在I，II两轮接触的点上，存在 $\vec{v}_I = \vec{v}_{II}$ ，但并不存在 $\vec{a}_I = \vec{a}_{II}$

3.1 单刚体的典型运动模式

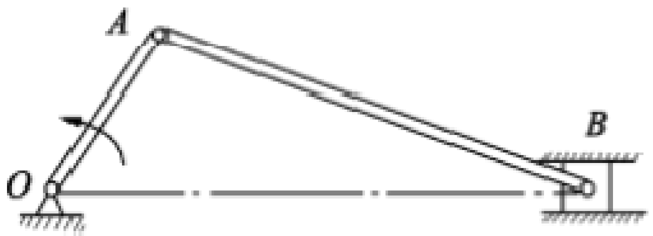
- 平面转动

思考

沿直线轨道行驶小车的车厢和车轮的运动模式；曲柄连杆机构中的曲柄OA、连杆AB和滑块B的运动模式。



(a)



(b)

答：

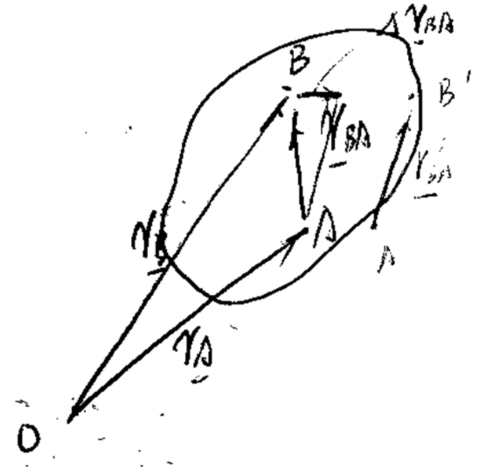
沿直线轨道行驶小车的车厢和车轮均为平面运动，且车厢为平面平移；曲柄连杆机构中的曲柄OA、连杆AB和滑块B均为平面运动，且曲柄OA为定轴转动（以过O点垂直纸面的直线为轴），滑块B为平面平移

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平面运动

独立描述坐标的矢量表示

刚体平面运动选用基点A的两个坐标 x_A, y_A 和基线的转角 φ 为独立描述坐标，从选定参考系O点向基点A引矢径 $\boldsymbol{r}_A$ ，刻画基点的位置，记$\boldsymbol{k}$为z轴（转轴）正向的单位矢量，将基线转角用矢量表示为 $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \boldsymbol{k}$



运动方程

刚体平面动的矢量形式运动方程

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(t), \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t)$$

基点的速度矢量和加速度矢量表示为： $\boldsymbol{v}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_A, \boldsymbol{a}_A = \ddot{\boldsymbol{r}}_A$

基线转角的角速度矢量和角加速度矢量表示为： $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{k}$

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平面运动

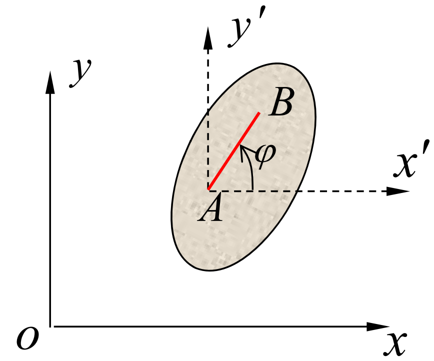
平面运动 vs. 平面平移+定轴转动

在运动方程中，取φ 保持不变，退化为平面平移；若取 x_A, y_A 不变，退化为绕过A点的固定轴（垂直该平面）的定轴转动。

定轴转动中的转角：过转轴的固定平面与过转轴且固连于刚体上的平面的夹角；

A点不动的平面运动的转角：基线和Ox轴的夹角。

过基点A做平行于Ox轴的直线 Ax'，基线AB和Ox轴的夹角即等于基线AB和Ax' 轴的夹角，基线AB和 Ax'轴的夹角即刻画了它们所代表的两个过转轴的平面的夹角。

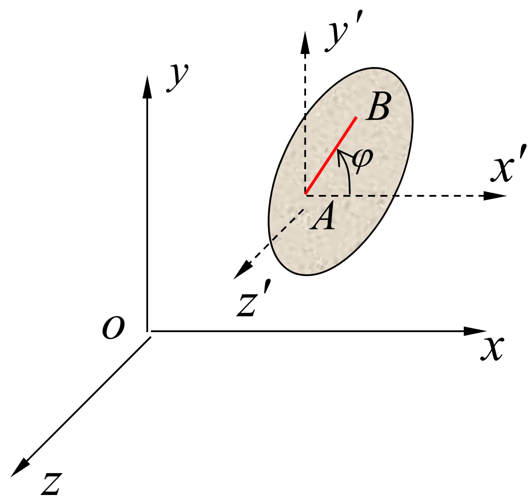


φ 不变，平面平移

A 不动，即 x_A, y_A不变，定轴转动

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平面运动



设想在基点A处设置一个平移参考系：该参考系在A点与平面图形相连，并在初始选定的参考系中作平面平移。在该平移参考系中放置直角坐标系 $Ax'y'z'$，其中，$Ax'y'$ 置于平面图形中，Ax', Ay'两轴分别与 Ox, Oy 轴平行，Az' 垂直于平面图形所在平面。在这个平移参考系中观察，该平面运动刚体绕“不动”轴 Az' “定轴”转动，且该定轴转动刚体的转角、角速度和角加速度（在平移坐标系中观察）与该平面运动刚体（在初始选定的参考系中观察）的转角、角速度和角加速度相等

3.1 单刚体的典型运动模式

- 平面运动

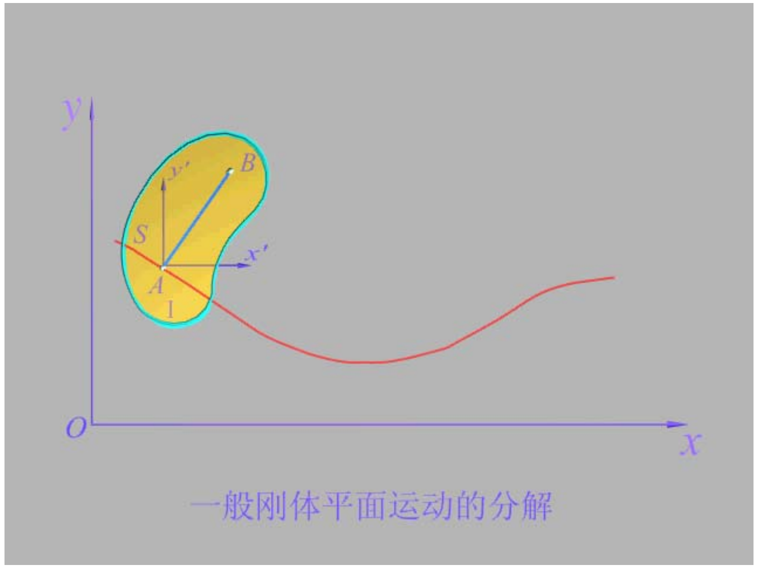
不同基点和不同基线带来的差异

对于平面运动刚体，基点和基线的选择可以是任意的，那么，选取不同基点和不同基线描述其运动，会带来怎样的差异呢？

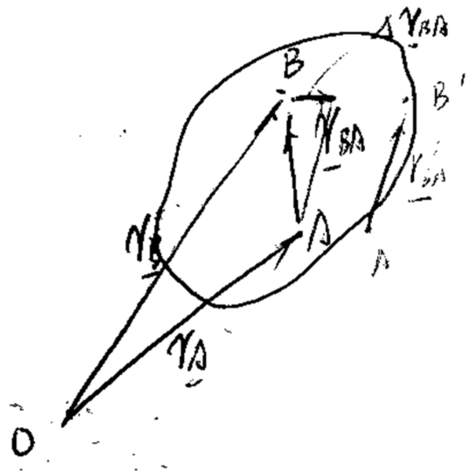
选择两个不同的基点，而两条基线保持平行。此时，在运动过程中，基点坐标不同，一般来说，基点的速度和加速度不同；而基线与参考轴的夹角相同，因此，转角相同，角速度相同，角加速度相同。

如果选定的两条基线相差一个角度，那么，在运动过程中将始终保持这个角度，而角速度相同，角加速度相同

选择不同的基点和基线，基点的速度和加速度一般不同，但是角速度和角加速度始终相同



一般刚体平面运动的分解



3.1 单刚体的典型运动模式

- 平面运动

运动表出

用独立描述坐标（矢量）及其一阶导数（矢量）表出任一点的速度矢量，用独立描述坐标（矢量）、其一阶导数和二阶导数（矢量）表出任一点的加速度矢量。这些矢量方法包括：基点法、瞬心法和投影法。前者是后两者的基础，而后两者是前者的特例，它们各有擅场。

3.1 单刚体的典型运动模式

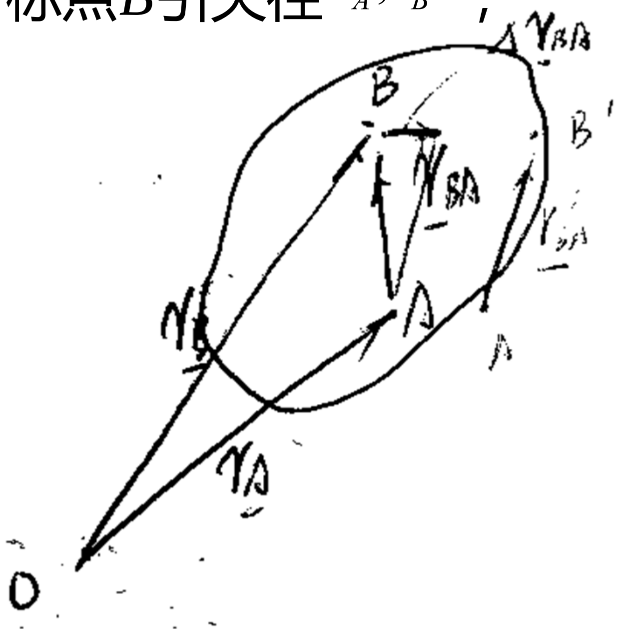
- 基点法

运动表出之基点法

目标是：用刚性平面图形基点A的速度 $\boldsymbol{v}_A$ 、加速度 $\boldsymbol{a}_A$ 以及转动角速度 ω和角加速度 α 表出刚性平面图形上任一点B的速度 $\boldsymbol{v}_B$ 和加速度 $\boldsymbol{a}_B$ 。

从刚性平面图形所在的Π 平面上的固定点O向基点A和目标点B引矢径 $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ ，于是有

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{BA}$$



速度基点法

对时间求导得

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \dot{\boldsymbol{r}}_{BA}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{BA} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_{BA}}{\Delta t}$$

3.1 单刚体的典型运动模式

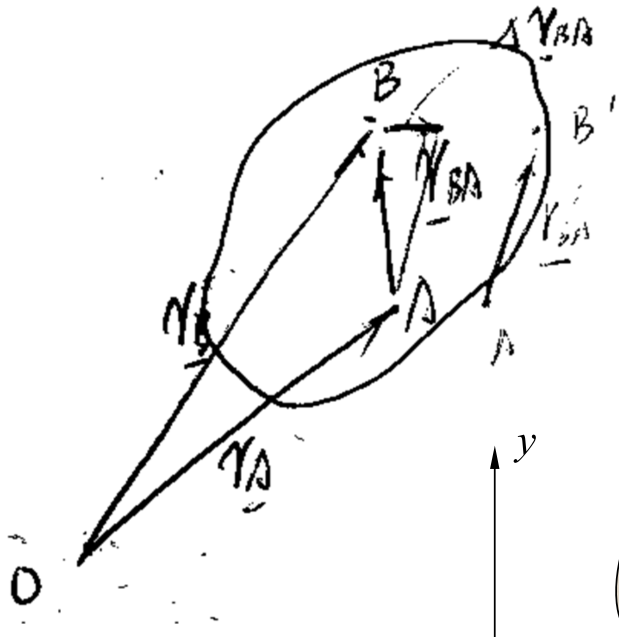
- 基点法

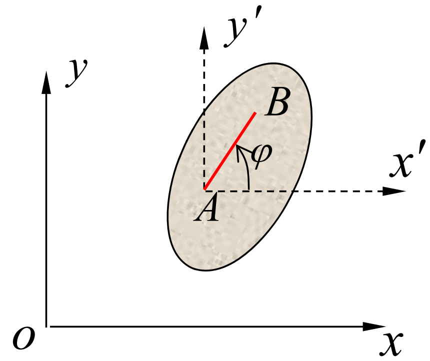
速度基点法

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \dot{\boldsymbol{r}}_{BA}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{BA} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_{BA}}{\Delta t}$$

设置一个固连于基点*A*的平移参考系，在该参考系中观察到刚体作定轴转动，*B*点在该参考系中观察的速度





$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}_{BA}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{BA}$$ ——*B点在固连于A点的平移参考系中的速度*

$$\boxed{\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}}$$

刚性平面图形上任一点的速度等于基点的速度与该点在固连于基点的平移参考系中的速度的矢量和，这称为**刚体平面运动的速度基点法**

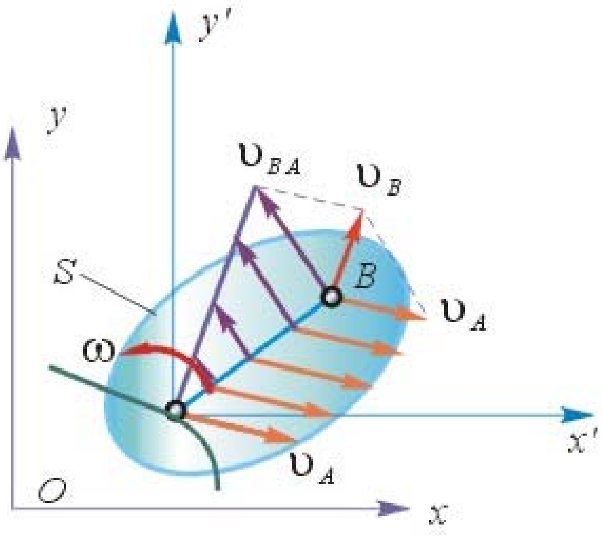
3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

速度基点法

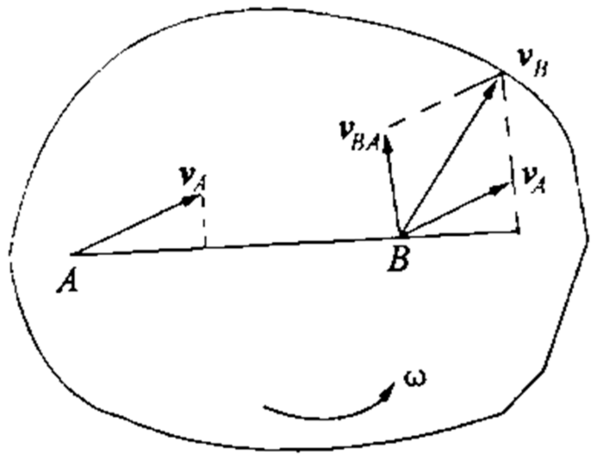
速度 $\boldsymbol{v}_{BA}$ 的方位与AB连线垂直，指向由角速度的转向确定，大小为 $v_{BA}=\omega\cdot AB$

按照矢量表示法 $\boldsymbol{v}_{BA}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA}$



$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA}$$

速度矢量图如图

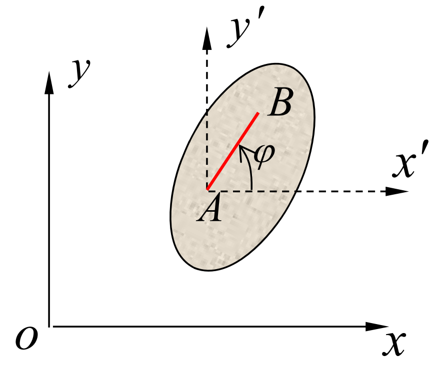


3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

加速度基点法

速度基点法公式 $\boxed{\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}}$



将速度基点法公式左右两端对时间求导。注意到，$\dot{\boldsymbol{v}}_{BA}$ 是在固连于基点*A*的平移参考系中观察时点*B*的加速度，记为$\boldsymbol{a}_{BA}$ 。在该平移坐标系中观察，点*B*是定轴转动刚体上的点，其加速度由切向加速度 $\boldsymbol{a}_{BA}^{\tau}$ 和法向加速度 $\boldsymbol{a}_{BA}^{n}$ 组成

$$\boxed{\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{BA}^{n}}$$

刚性平面图形上任一点的加速度等于基点的加速度与该点在固连于基点的平移参考系中的加速度的矢量和，这称为**刚体平面运动的加速度基点法**

3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

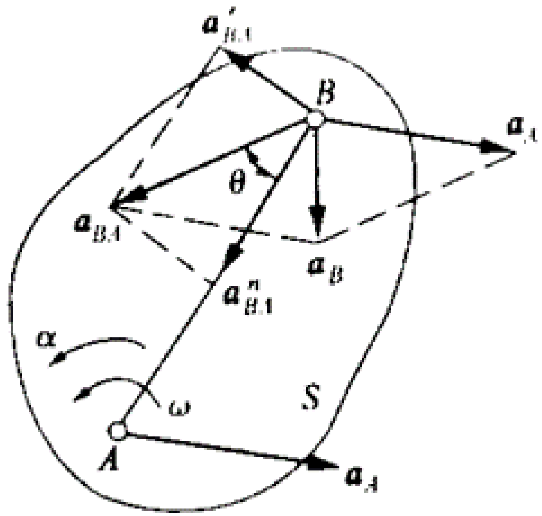
加速度基点法

切向加速度 $\boldsymbol{a}_{BA}^{\tau}$（加速度 $\boldsymbol{a}_{BA}$ 的切向分量）的方位与AB连线垂直，指向由角加速度的转向确定，大小为 $a_{BA}^{\tau}=\alpha\cdot AB$

法向加速度$\boldsymbol{a}_{BA}^{n}$（加速度 $\boldsymbol{a}_{BA}$的法向分量）的方位由B点指向基点A，大小为 $a_{BA}^{n}=\omega^2\cdot AB$

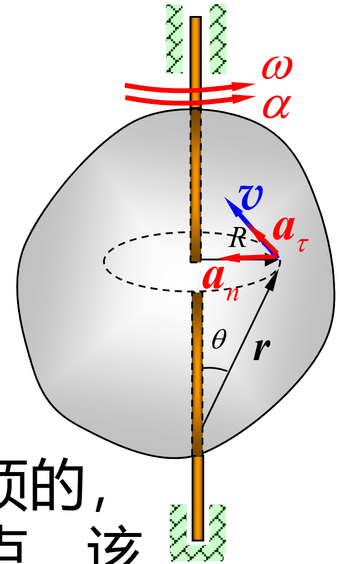
按照矢量表示法 $\boldsymbol{a}_{BA}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{BA}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{BA}$

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{BA}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{BA}=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{BA}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{BA}\right)$$



加速度矢量图

3.1 单刚体的典型运动模式



- 基点法

一点评述

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}\right)$$

基点A和研究点B处在平面运动刚体的同一刚性截面上。但这不是必须的，例如，选取A点所代表的垂直于刚性截面的物质线上的任一点A'为基点，该A'点的速度等于A点速度，即 $\boldsymbol{v}_{A'} = \boldsymbol{v}_A$；尽管 $\boldsymbol{r}_{BA'} \neq \boldsymbol{r}_{BA}$，但是$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA'} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}$，$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{BA'} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{BA}$，于是知，上述速度矢量关系和加速度矢量关系对任意基点（刚体上任一物质点）均成立

对于定轴转动问题（平面运动的特例），将基点置于转轴上，因基点速度和加速度为零，就得到之前的结果 $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}$ $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}\right)$

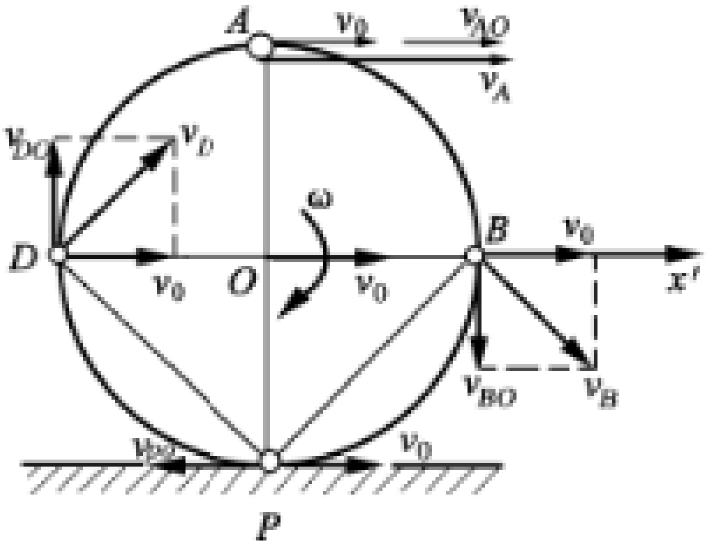
对于平面平移问题（平面运动的特例），取角速度和角加速度为零，就得到之前的结果 $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A$ $\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A$

将角速度和角加速度定义拓展到一般运动刚体，可以证明：上述速度矢量关系和加速度矢量关系仍成立

3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

例题 圆轮沿直线轨道纯滚动（只滚不滑）。轮半径为R，已知轮心速度为 $\boldsymbol{v}_0$ ，轮心加速度为0，求轮缘上的点D、A和B的速度和加速度。



3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

解： 圆轮作平面运动，受到地面接触约束，由于无滑，独立描述坐标数目为1，因此，可用一个描述坐标（如轮心水平坐标，即轮心位置）及其导数（轮心速度和轮心加速度）表出刚体上任一点的速度和加速度

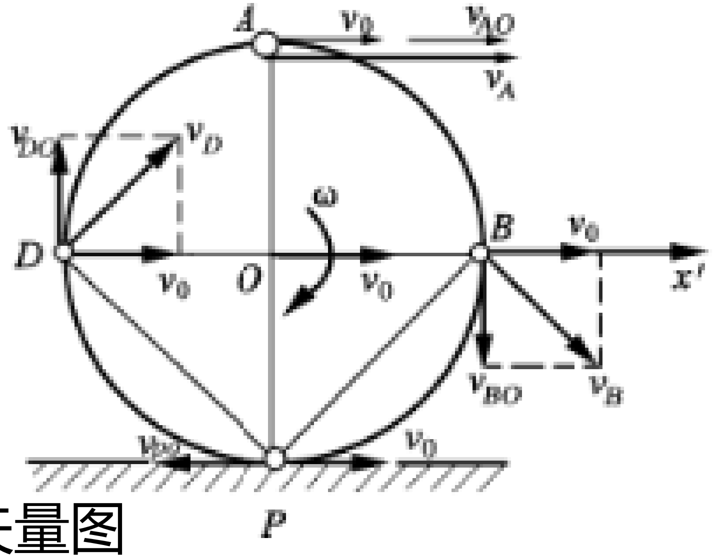
速度分析

取轮心O为基点，研究接触点P（轮缘上的点）的速度，有 $\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_{PO}$

由于只滚不滑 $v_P=0$

$v_{PO}=\omega\cdot PO=\omega R=v_0$ ⟹ $\omega=\dfrac{v_0}{R}$

方向如图



取轮心O为基点，研究点D、A和B的速度，画相应的速度矢量图

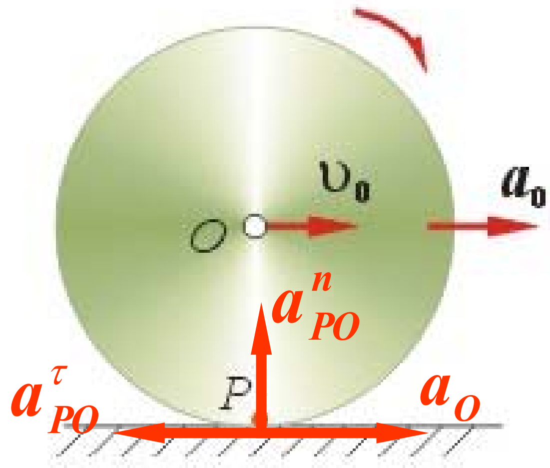
$\boldsymbol{v}_{DO},\boldsymbol{v}_{AO},\boldsymbol{v}_{BO}$ 方向如图，大小为 $v_{DO}=v_{AO}=v_{BO}=\omega R=v_0$ ⟹ $v_D=\sqrt{2}v_0$ $v_B=\sqrt{2}v_0$

$v_A=2v_0$ 方向如图

3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

加速度分析



取轮心O为基点，研究接触点P（轮缘上的点）的加速度，有 $\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}_{PO}^\tau + \boldsymbol{a}_{PO}^n$

$a_O = 0 \qquad a_{PO}^n = \omega^2 R$

圆轮的角速度为常数 $\omega = \dfrac{v_0}{R}$ ➡ $\alpha = 0 \qquad a_{PO}^\tau = \alpha R = 0$

➡ $\boldsymbol{a}_P$ 垂直向上，指向轮心，大小为 $\omega^2 R$

取轮心O为基点，研究点D、A和B的加速度，画相应的加速度矢量图

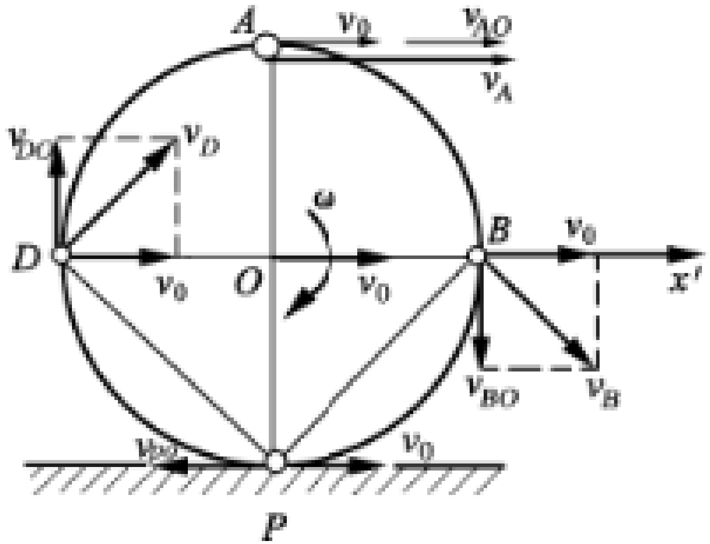
点D、A和B的加速度均指向轮心，大小为 $\omega^2 R$ 。注：该结论可在运动和力系的关系章节中，从固连于O点的平移坐标系（惯性参考系）中观察直接给出

3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

注意，求得圆轮的角速度 后，可改选P为基点来分析点D，A，B的速度

$$\boldsymbol{v}_P = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_{DP}, \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{AP}, \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_{BP}$$

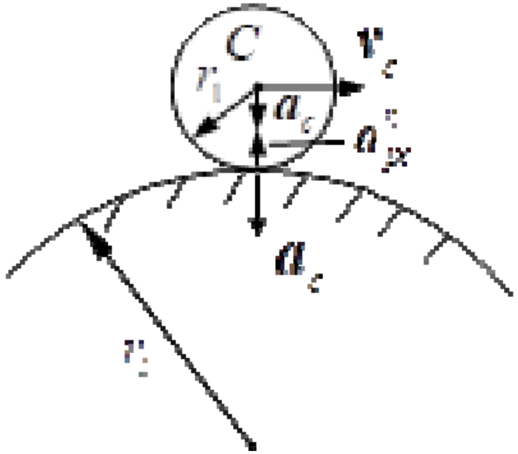


各点的速度分布就与它们随圆轮绕该基点作定轴转动时完全一致

3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

例题 半径为 r_1 的圆轮在半径为 r_2 的不动圆柱面上滚动。已知轮心C的速度大小 $v_C = v$ 保持常值，求圆轮的角速度，角加速度，以及接触点P（轮缘上的物质点）的加速度。



3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法

解：

圆轮作平面运动，受到地面接触约束，由于无滑，独立描述坐标数目为1，因此，可用一个描述坐标（如轮心弧坐标，即轮心位置）及其导数（轮心速度和轮心*切向*加速度）表出刚体上任一点的速度和加速度

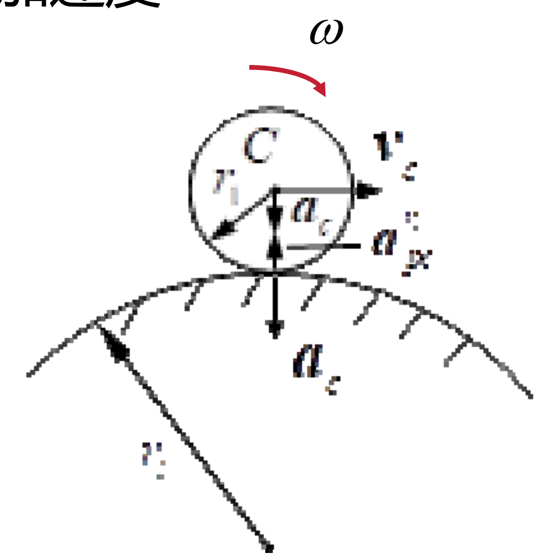
以接触点P为基点，分析轮心C点 $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{v}_{CP}$

由于只滚不滑 $v_P = 0$

$v_{CP} = \omega \cdot CP = \omega R = v_C$ ⟹ $\omega = \dfrac{v}{r_1} = const$

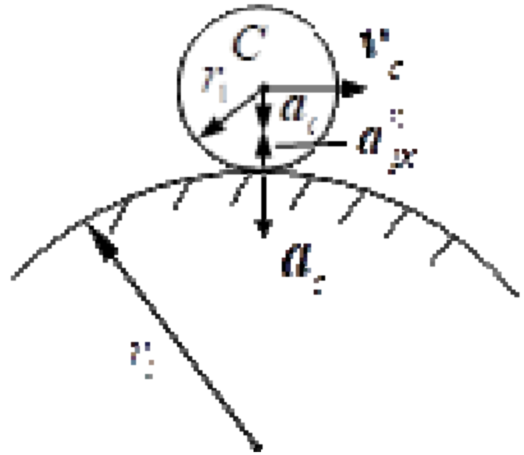
$\alpha = \dot{\omega} = 0$

轮心C沿圆弧轨线作匀速圆周运动 $a_C^\tau = \dot{v} = 0, a_C^n = \dfrac{v^2}{r_1 + r_2}$ 方向如图



3.1 单刚体的典型运动模式

- 基点法



以轮心C为基点，研究接触点P

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{PC}^{\tau} + \boldsymbol{a}_{PC}^{n}$$

$$a_{PC}^{\tau} = \alpha r_1 = 0,\ a_{PC}^{n} = \omega^2 r_1 = \frac{v^2}{r_1}$$ 方向如图

$$a_P = a_{PC}^n - a_C^n = \frac{r_2 v^2}{r_1(r_1 + r_2)}$$ 方向由P指向C

（注：无滑接触两点，加速度在公切线方向上的投影相等，此例中均等于零。）

若 v_C 不为常数,$v_C = v(t)$时，接触点P的加速度有何改变?