第4.7章：约束的一般理论、分析力学基本概念

前文已多处论及约束。在“运动、其描述与简化”一章中，论述限定为**对位置**的**时不变等式**约束；在“从函数到泛函、从微分到变分”一章中，论述了对自变函数的代数等式约束，并提及了对自变函数的微分等式约束和积分等式约束。鉴于约束在分析力学中的重要地位，这里将在力学背景下，论述约束的一般理论，并赋予数学约束以力学意义。

第4.7章：约束的一般理论、分析力学基本概念

- 本章纲要：

➢ 论述约束及其分类；

➢ 讨论广义坐标、广义坐标数目和广义坐标空间概念；

➢ 给出坐标变分（虚位移）和自由度概念，通过算例讲述虚位移计算；

➢ 给出虚功和理想约束概念。

这些共同构成了分析力学的基本概念，为学习分析力学原理奠定了基础。

4.7-1 约束及其分类

1.1 约束及其分类

- 约束方程

考虑一个质点系 $P_\nu\left(\nu=1,\cdots,N\right)$，它在惯性参考系中的运动。

所谓**约束**，即限制、关联——**预先设定**的限制**位置**和**运动**的条件。

不受约束的质点系称为**自由质点系**，各质点可以自由变动，不受牵制。

受到约束的质点系称为**约束质点系**，质点间的位置和运动变动相互牵制。

约束效应可用**约束方程**表出，即这些限制条件的数学表达式，预先设定的存在于位置、位置导数（速度）之间的关系式。

在力学中，约束处于运动学层面，因此，在约束方程中不会出现与加速度相关的二阶导数项，更不会出现更高阶导数项。

1.1 约束及其分类

• 约束方程

对于等式约束而言，约束方程在一般形式为，

$$f\left(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N,t\right)=0$$

式中，质点的位置矢径$\boldsymbol{r}_\nu$是从固定于惯性系中的同一点引出的，矢径的时间导数 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 表示质点的速度。记x_ν,y_ν,z_ν为质点P_ν在笛卡尔坐标系中的坐标，约束方程可表示为关于6*N*+1个标量的关系，即

$$f\left(x_1,y_1,z_1,\cdots x_N,y_N,z_N,\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots\dot{x}_N,\dot{y}_N,\dot{z}_N,t\right)=0$$

按约束方程不同分类：

➢几何约束/运动约束；

➢完整约束/非完整约束；

➢定常约束/非定常约束；

➢双边约束/单边约束；

1.1 约束及其分类

• 几何约束/运动约束

若约束方程中不包含速度，称之为**几何约束**。即，

$$f\left(\boldsymbol{r}_{v},t\right)=0$$

在笛卡尔坐标系表示为， $f\left(x_{1},y_{1},z_{1},\cdots x_{N},y_{N},z_{N},t\right)=0$

若约束方程中包含速度，称之为**运动约束**。其约束方程与一般形式相同。

如果一个运动约束**可以**积分，那么，它与一个几何约束等价，二者仅相差一个积分常数，这个运动约束就可按几何约束处理。注意，这里的“可以”是“数学上”的可以，而不是“主观上”的可以。

1.1 约束及其分类

- 完整约束/非完整约束

几何约束和能够积分的运动约束统称为**完整约束**，不能积分的运动约束称为**非完整约束**。

上述分类是针对几何约束和运动约束的非二分性而提出的，之后，将不再（或很少）提几何约束和运动约束。

完整约束限制质点系在任一时刻的可能位置——在给定时刻，质点系不能占据物理空间的任意位置。非完整约束并未限制质点系在任一时刻的可能位置，但是，在该时刻各质点的速度不是任意的。

可以说，完整约束对位置施加了限制，而非完整约束对速度施加了限制。

若质点系的所有约束都是完整约束，称该质点系为**完整系统**；若质点系中有非完整约束，则称为**非完整系统**。后文中，限于讨论完整系统，基本不涉及非完整系统，只是在必要的地方指明非完整约束的影响，提请留意。

1.1 约束及其分类

• 定常约束/非定常约束

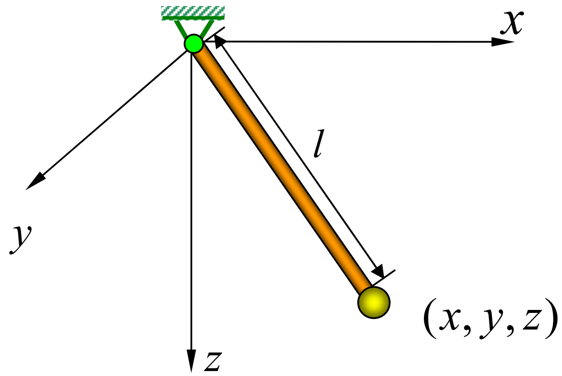
对于完整约束，如果约束方程中不显含时间，那么称为**定常约束**，否则称为**非定常约束**。

所有约束都是定常约束的质点系，称为**定常系统**，存在非定常约束的质点系，称为**非定常系统**。

例题

刚性杆件约束的单质点。约束方程为，

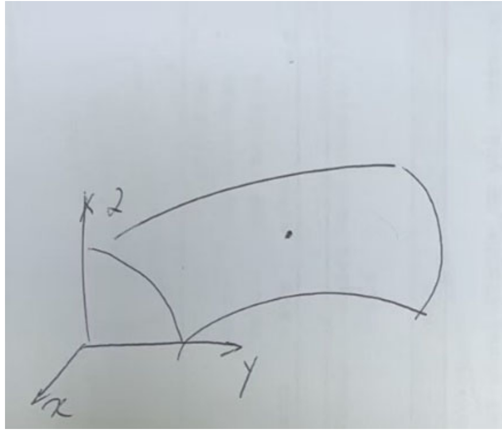
$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$



该约束为几何、完整、定常约束。

1.1 约束及其分类

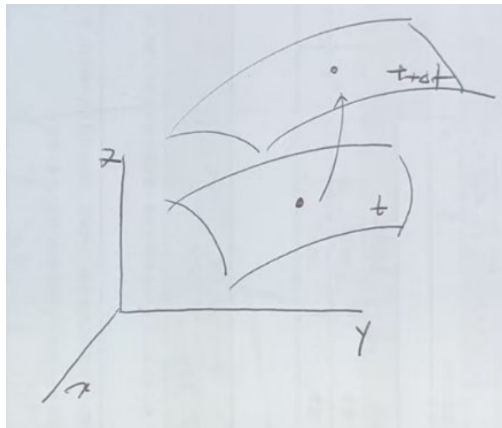
例题　曲面约束下的单质点。约束方程就是曲面方程，即，



$$f\left(x, y, z\right) = 0$$

该约束为几何、完整、定常约束。

如果曲面本身按照既定模式运动或变形，约束方程为，



$$f\left(x, y, z, t\right) = 0$$

该约束为几何、完整、非定常约束。

1.1 约束及其分类

例题 长度为l的刚性杆件连接两个质点。约束方程为，

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2$$

该约束为几何、完整、定常约束。**单刚体可视为由这种约束联系在一起的约束质点系，因此为完整、定常系统。**

如果杆件长度按既定模式$l(t)$变化，约束方程为，

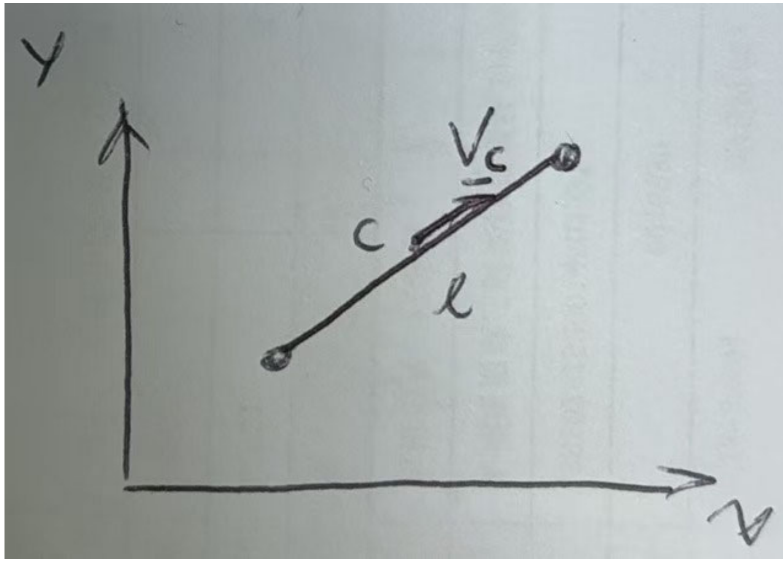
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l(t)^2$$

该约束为几何、完整、非定常约束。

1.1 约束及其分类

例题 冰刀在平面上运动的模型——平面上两质点由长度为l的刚性杆连接，杆的中点速度只能沿杆轴方向。约束方程为，

$$z_1=0, z_2=0, (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=l^2, \frac{\dot{y}_1-\dot{y}_2}{\dot{x}_1-\dot{x}_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$



前三个约束为几何、完整、定常约束，第四个约束为运动、非完整、定常约束。注意，约束的可积性需从数学上保证。

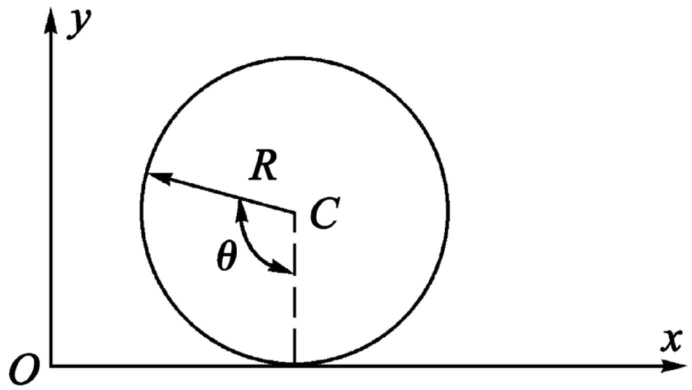
约束推广

质点系之间的约束概念可略作拓展，拓展到质点组到质点组之间的约束，特别是刚体和外界以及刚体与刚体之间的约束。这样，首先明确质点组（或刚体）可由哪几个（独立）坐标描述，而后，由约束方程刻画约束对这些坐标的限制。

1.1 约束及其分类

例题　平面上的圆轮在粗糙地面上纯滚。取圆轮（刚体）的描述坐标为 x_C, x_C, θ，粗糙地面约束圆轮运动，其约束方程为，

$$\dot{x}_C = R\dot{\theta}$$



该式可积分为 $x_C = R\theta + a$ ，其中a为积分常数。因此，该约束为运动、完整、定常约束。

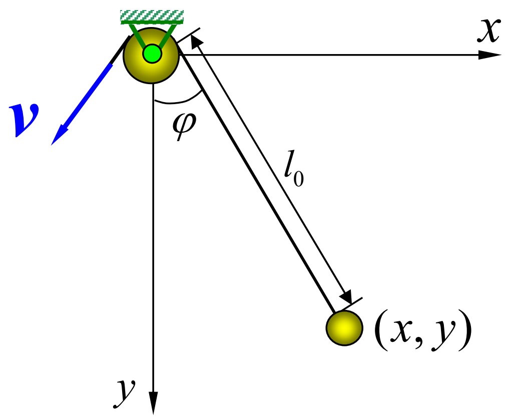
1.1 约束及其分类

- 双边约束/单边约束

上述约束的约束方程均以等式表出，称为**双边约束**。

在力学中，还会遇到不等式约束，这种约束称为**单边约束**。约束方程形式如下，

$$f\left(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N,t\right)\geq 0$$



上式中，如果等号成立，说约束是**张紧的**。

当存在单边约束时，可分段考虑。

如果约束处于张紧段，视为双边约束处理；

如果约束处于非张紧段，就视为不存在该约束。

因此，单边约束或可视为双边约束，或可视为完全解除。因此，后文只考虑双边约束。

4.7-2 广义坐标、广义坐标数目、位形空间

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

- 完整约束独立性

考虑N个质点构成的质点系，受到k个完整约束的限制。约束方程表示如下，

$$f_\alpha\left(x_i, y_i, z_i, t\right)=0, \alpha=1,2\cdots,k$$

完整约束限制了质点系在任意时刻的可能位置，本节就来考察这种限制。
首先，陈明这组完整约束的独立性。这组完整约束相互独立，当且仅当：

$$\operatorname{rank}\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_n} & \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \end{vmatrix}=k$$

如果该条件不独立，说明这组完整约束不独立，这组约束中的一个或一些与其它矛盾，或者可从其它导出。如果出现了矛盾，则需检查问题本身；如果无矛盾但不独立，则应删去不独立约束。之后，认为列出的完整约束之间无矛盾且相互独立。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

• 广义坐标与广义坐标数

由隐函数定理知，如果$3N$个坐标满足k个独立的代数方程，那么，可用代数方法将某k个坐标用其它$3N$-k个坐标表出。换言之，每个代数方程消去一个独立坐标。对上述问题而言，可从$3N$个笛卡尔坐标中选出$3N$-k个作为独立坐标，由之表出剩余的k个笛卡尔坐标。这$3N$-k个坐标可（在定义域内）独立取值，并决定着剩余k个坐标的取值，这样得到的$3N$个笛卡尔坐标必能满足全部完整约束。

在实践中，很少采用上述方式选取独立坐标。可以选择任意$3N$-k个独立坐标，由之表出全部$3N$个笛卡尔坐标。这组独立坐标可以有物理意义，但也不总是有物理意义。这$3N$-k个独立坐标可独立取值，随之得到$3N$个笛卡尔坐标必能满足全部完整约束。从数学上，可以将这组独立坐标视为前述$3N$-k个独立笛卡尔坐标的变换，它们之间构成一一映射关系。

称**足够**确定质点系位置的**最少**个数的一组参数为**广义坐标**（注：在“运动，其描述与简化”一章中，称为独立描述坐标，这里引入广义坐标这一新词，刻画同样的内容）。在广义坐标的定义中，隐含着“足够”和“最少”两重含义：“足够”是指能够刻画位置，“最少”是指个数不能再减少。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

• 广义坐标与广义坐标数

从坐标变换角度看，约束质点系的广义坐标必有无穷多种选法，至于选取哪一种可依方便、有效来定；约束质点系广义坐标的数目是确定的，这是一个本征量，称为**广义坐标数**（在“运动，其描述与简化”一章中，称为独立描述坐标数目）。

通常，记广义坐标为 $q_1, q_2 \cdots, q_n$，其中n为广义坐标数，且有$n=3N-k$。于是有，

$$x_i = x_i\left(q_1 \cdots, q_n, t\right)$$

$$y_i = y_i\left(q_1 \cdots, q_n, t\right)$$

$$z_i = z_i\left(q_1 \cdots, q_n, t\right)$$

其矢径描述为：$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\left(q_1 \cdots, q_n, t\right)$

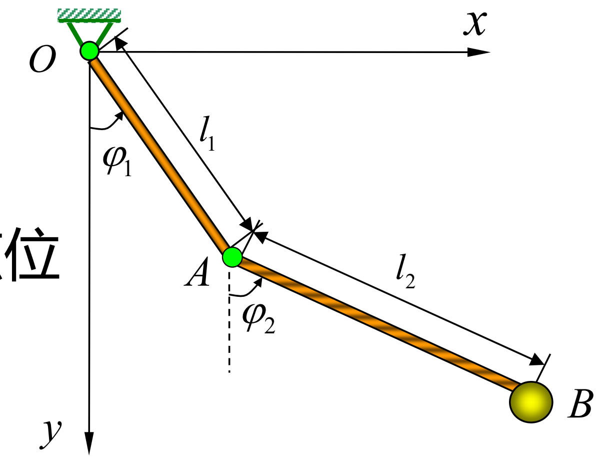
对于非定常约束系统，等式中显含时间t；对于定常约束系统，通过广义坐标选择总能使等式中不显含时间t。

这里指出，在研究具体问题时，通常并不需要建立全部完整约束方程，而是依据问题本身直接得知广义坐标数，并给出广义坐标的选择方式。另外，有些时候，选取能描述系统全部状态的广义坐标并不容易或者不甚便利，此时，可引入局部广义坐标，对不同的可能位置集合引用不同的广义坐标。这就是说，广义坐标的选择具有灵活性，一切视方便、有效定。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

- 广义坐标与广义坐标数

例题 双摆问题。两质点A、B由两根刚性杆约束。



解：限定两质点在平面内运动，不考虑第三维。A、B两质点位置由笛卡尔坐标描述$(x_A,y_A),(x_B,y_B)$。约束方程写成，

$$x_A{}^2+y_A{}^2=l_1{}^2,(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=l_2{}^2$$

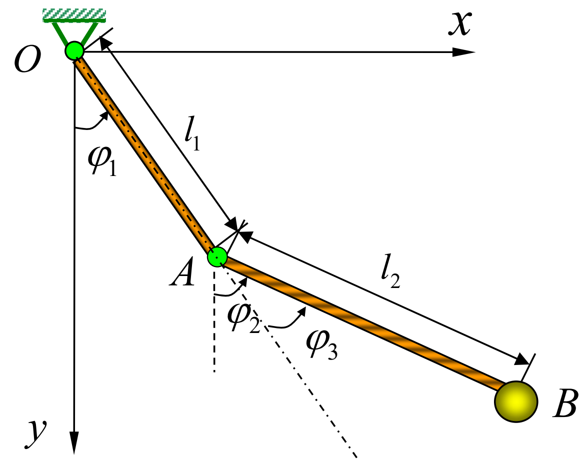
均为完整约束，k=2。因此，广义坐标数为 $n=2N-k=2\times2-2=2$

可以选择x_A,x_B为广义坐标，由此表出另外两个笛卡尔坐标 y_A,y_B 。但要注意，表出式中包含正负号，对不同区域要做限定。不能选择x_A,y_A，据此无法表出另外两个笛卡尔坐标x_B,y_B。这就是说，并不是任意选择具有广义坐标数目的坐标就能作为广义坐标使用。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

- 广义坐标与广义坐标数

如前所述，通常并不做上述选择，而是选用两个角度 φ_1,φ_2 来刻画系统位置。四个笛卡尔坐标可由这两个角度表出如下：



$$x_A = l_1 \sin\varphi_1,$$

$$y_A = l_1 \cos\varphi_1,$$

$$x_B = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2,$$

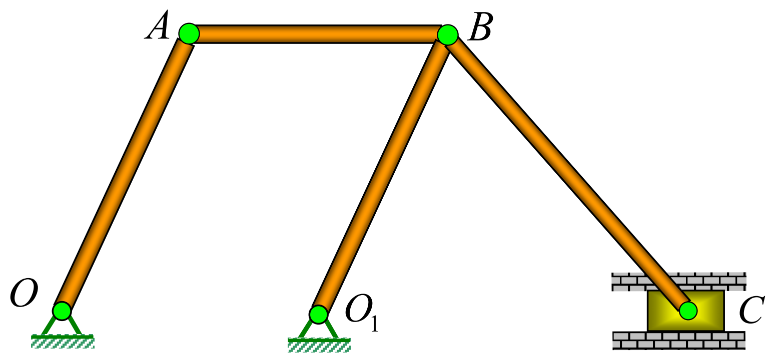
$$y_B = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

亦可采用两个角度 φ_1,φ_3 为广义坐标，后者为两杆之间的夹角。

评述：关于此例，也可视作两根刚性杆件由两个铰链约束。仍考虑平面问题。每个平面运动杆件的位置用3个坐标刻画，每个铰链给出关于坐标的2个完整约束方程，因此，广义坐标数为 $n=3N-k=3\times2-2\times2=2$ 。广义坐标数同上，广义坐标仍可依上文选取，每根杆件的3个坐标可用广义坐标表出，进而刚性杆件上任一点的坐标可用广义坐标表出。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

- 广义坐标与广义坐标数



例题 三质点*A*、*B*、*C*由刚性杆件和滑块约束。

解：考虑平面问题。三质点的位置由6个笛卡尔坐标刻画。每根杆件提供1个完整约束方程，滑块限制*C*点的纵坐标，提供1个完整约束方程，因此，广义坐标数为，

$$n = 2N - k = 2\times 3 - (1\times 4 + 1) = 1$$

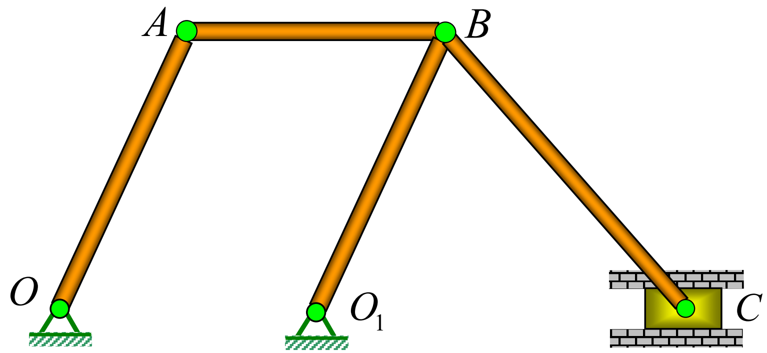
将系统视为四根刚性杆件由铰链和滑道约束。每个平面运动杆件的位置用3个坐标刻画，共需12个坐标刻画。每个铰链提供2个完整约束方程，*B*处为复铰（算两个单铰），因此共有5个铰链。滑道限制一点的纵坐标，提供1个完整约束方程。因此，广义坐标数为，

$$n = 3N - k = 3\times 4 - (2\times 5 + 1) = 1$$

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

• 广义坐标与广义坐标数

将系统视作四根刚性杆和一个刚性滑块由铰链和滑道约束。每个平面运动刚体的位置用3个坐标刻画，共需15个坐标。六个铰链提供 2×6 个完整约束方程，滑道约束了滑块的竖向运动和转动，提供2个完整约束方程。因此，广义坐标数为，



$$n=3N-k=3\times5-(2\times6+2)=1$$

广义坐标可以选作C点的水平坐标，或者OA杆的倾角，但这些选择都需要略作限定。前者无法确定体系在水平面之上还是之下，后者无法确定C点在O_1点之左还是之右。

上述例子表明：广义坐标数是约束质点系的本征量，只关乎其几何构成，与对质点系的解读方式无关，也与质点系的材质、受力和惯性无关。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

• 物理空间与位形空间

这里，阐明质点系的物理空间和位形空间。

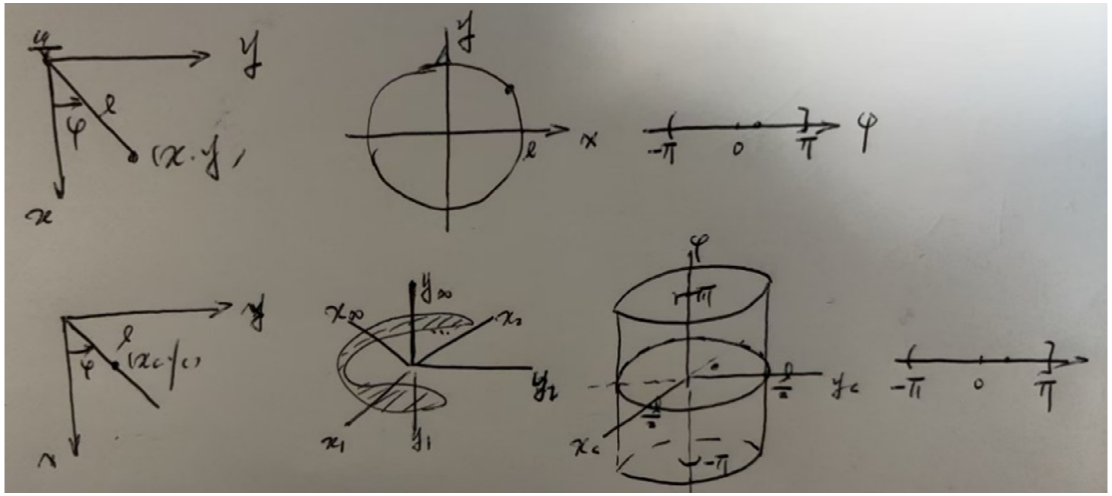
由N个质点构成的质点系，最直观地，可用$3N$个笛卡尔坐标 x_i, y_i, z_i 刻画其空间位置。可以之为坐标轴构造一个$3N$维空间，称为**物理空间**。质点系的一个确定运动在物理空间中表现为一条线，以时间t为参量。如果这N个质点不受完整约束的限制，那么，物理空间中的点和质点系的可能位置一一对应；如果这N个质点之间受到完整约束的限制，则质点系的所有可能位置对应于物理空间中的一个子域，而物理空间中的一个点并不一定对应质点系的一个可能位置。换言之，采用物理空间来描述质点系的位置不够简洁。

如前所述，我们可以取n个广义坐标来刻画约束质点系的位置。质点系的任一可能位置对应于一组广义坐标值，而（在定义域内的）任一组广义坐标值对应于质点系的一个可能位置。可以各广义坐标为轴构建一个n维空间，称为**位形空间**或**广义坐标空间**。这样，就在约束质点系的可能位置与位形空间中的点之间构成了一一对应关系。质点系从一个可能位置移动到另一可能位置，相应地，在位形空间中从一点移动到另一点；反之亦然。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

例题 平面单摆。

解： 视为单质点由刚性杆约束。物理空间为2维空间，可能位置占据一个圆；位形空间为1维空间，可能位置充满定义域 $(-\pi,\pi]$ 内的整个线段。

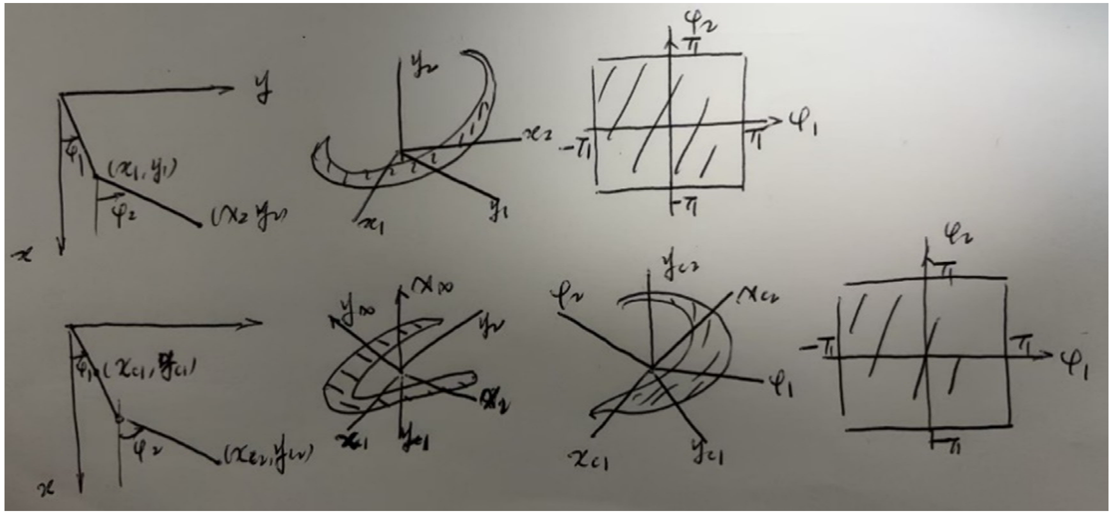


视为刚性杆由铰链约束。若视刚性杆为质点系，物理空间为无穷多维，可能位置占据一个极小的子域；若视刚性杆为平面刚体，物理空间为3维空间，可能位置占据一个圆柱面；位形空间为1维空间，可能位置充满定义域 $(-\pi,\pi]$ 内的整个线段。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

例题　平面双摆。

解：视为两个质点由刚性杆约束。物理空间为4维空间，可能位置占据一个很小的子域；位形空间为2维空间，可能位置充满定义域内的整个矩形区域。



视为两个刚性杆由铰链约束。若视刚性杆为质点系，物理空间为无穷多维，可能位置占据一个极小的子域；若视刚性杆为平面刚体，物理空间为6维空间，可能位置占据一个很小的子域；位形空间为2维空间，可能位置充满定义域内的整个矩形区域。

2.1 广义坐标、广义坐标数目、广义坐标空间

本节最后，指出以下两点：

其一，引入广义坐标的做法在本质上就是消元法。从约束方程中消元，从而用最少的独立坐标来刻画系统的位置。在有约束的函数驻值问题和有约束的积分泛函驻值问题中，采用过相同的方法。

其二：非完整约束不会限制质点系在任一时刻的可能位置，因此，即便系统中也包含非完整约束，本节通过广义坐标对约束质点系的刻画仍然有效。