

12 주차

로터리 모션 센서를 활용한
관성모멘트 측정

서론

- 크기와 모양을 갖는 실제 물체는 힘을 가하면 회전운동을 한다
- 직선운동 하는 물체의 질량이 관성의 역할을 하듯이 회전운동하는 물체의 관성을 역할을 하는 것이 관성 모멘트이다
- 강체의 회전 관성은 물체의 질량 뿐 아니라 질량이 회전축에 대해 어떻게 분포되어 있느냐에 따라 달라진다.
- 여러 가지 형태의 강체들의 관성모멘트를 측정하여 관성모멘트 개념과 정의를 이해한다

1. 실험목적

- 강체는 기하학적인 형태에 따라 관성모멘트가 다르다. 여러 가지 형태의 강체들의 관성모멘트를 측정하여 관성모멘트 개념과 정의를 이해한다

2 실험 이론

(1) 관성 모멘트

강체를 작은 입자들의 집합으로 생각하고, 이 강체가 고정된 z 축을 중심으로 각속력 ω 로 회전한다고 가정하자. 질량을 m_i 인 입자가 회전축으로부터 r_i 떨어진 점에서 접선 속력 v_i 로 운동하는 경우 이 입자의 운동에너지는

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

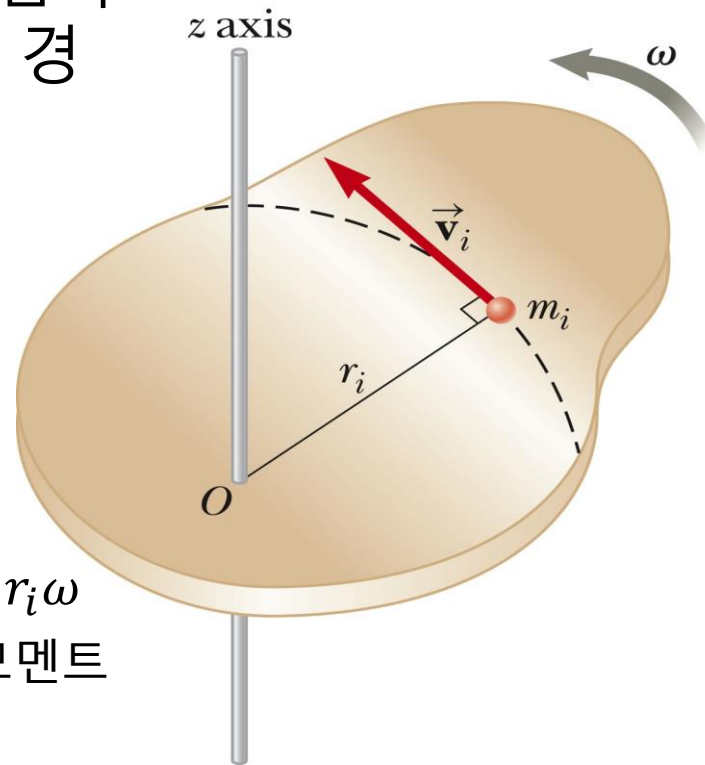
전체 운동 에너지는
$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

여기서, ω : 각속력, $v_i = r_i \omega$
 $I \equiv \sum m_i r_i^2$: 관성모멘트

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

◀ 회전 운동 에너지



$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

◀ 관성 모멘트

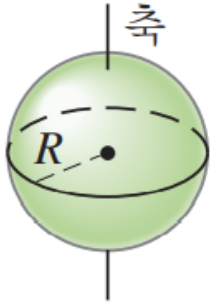
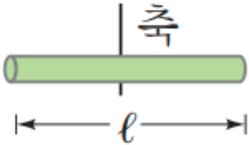
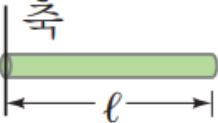
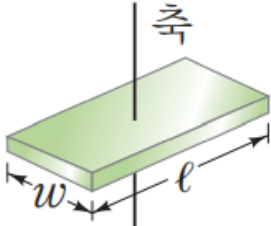
- 관성 모멘트는 물체의 각속력 변화에 저항하는 정도
- 관성 모멘트는 강체의 질량뿐 아니라 회전축에 대해 질량이 어떻게 분포하는지에 의존

회전 운동 에너지는 새로운 형태의 에너지는 아니다. 강체를 이루는 입자들의 각각의 운동 에너지의 합으로부터 유도하였으므로 일반적인 운동 에너지이다. 연속 매질 물체의 관성모멘트는 적분으로 표현된다.

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

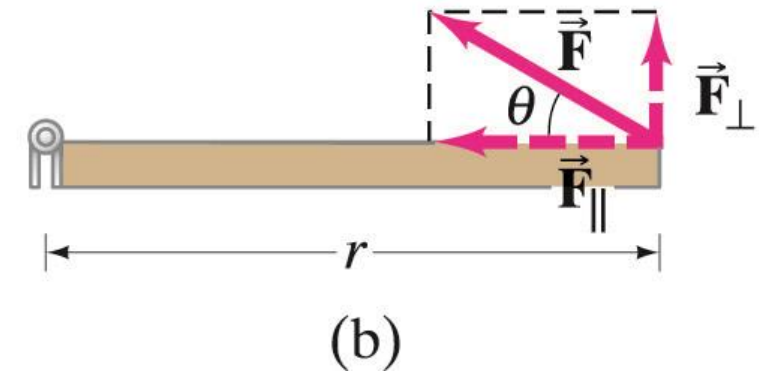
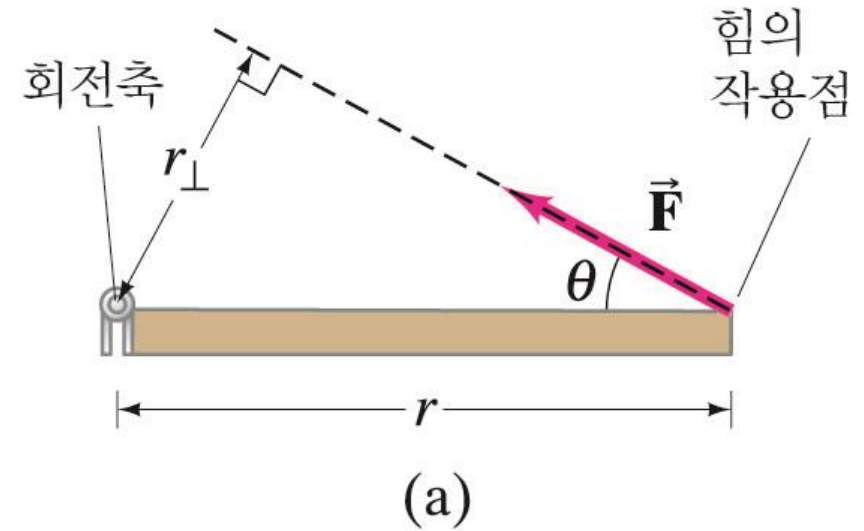
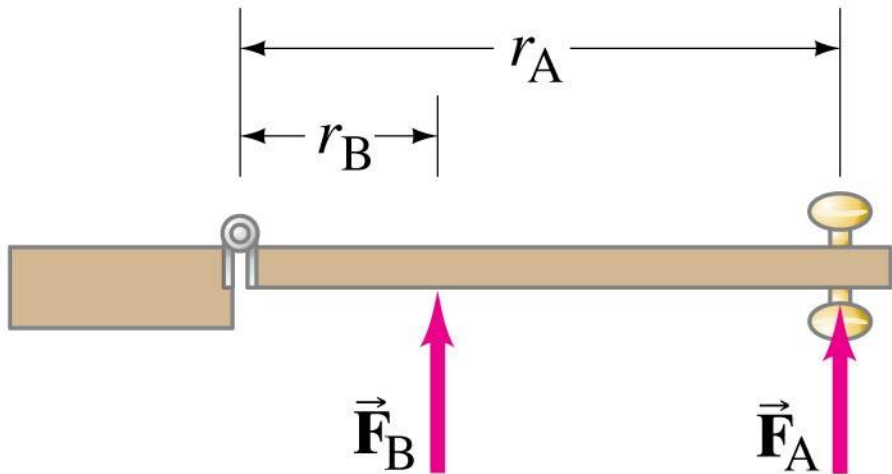
질량 M 이 균일하게 분포된 물체들의 관성 모멘트

물체	축의 위치	관성 모멘트
(a) 얇은 고리, 반지름 R	중심 통과	MR^2
(b) 얇은 고리, 반지름 R 너비 w	중심 지름 통과	$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
(c) 단단한 원통, 반지름 R	중심 통과	$\frac{1}{2}MR^2$
(d) 속이 빈 원통, 안쪽 반지름 R_1 바깥 반지름 R_2	중심 통과	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

(e)	균일한 구, 반지름 R	중심 통과		$\frac{2}{5}MR^2$
(f)	길고 균일한 막대, 길이 ℓ	중심 통과		$\frac{1}{12}M\ell^2$
(g)	길고 균일한 막대, 길이 ℓ	중심 통과		$\frac{1}{3}M\ell^2$
(h)	얇은 직사각형 평판, 길이 ℓ , 너비 w	중심 통과		$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$

(2) 강체의 회전운동 방정식

물체를 회전시키기 위해서는 힘이 필요하다. 회전은 힘이 작용한 위치와 방향에 모두 관계된다. 회전축으로부터 힘이 작용한 선까지의 수직거리를 **지레 팔** 또는 **모멘트 팔**이라 부른다.



회전력(torque) 또는 **돌림힘**, **힘의 모멘트**

$$\tau = r F \sin \theta$$

단위 : N·m

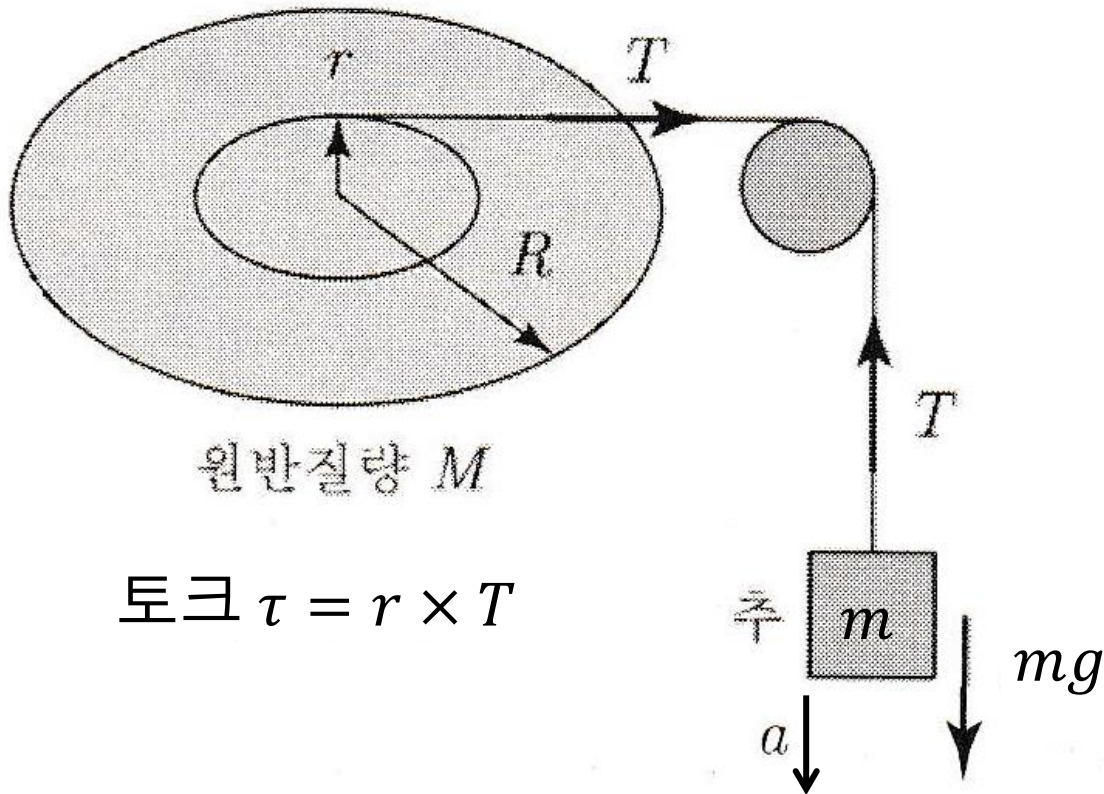
- 강체에 작용하는 알짜 토크가 영이 아니면 각가속도의 원인이 된다.

따라서 알짜토크를 받는 강체에 대해서는
회전운동에서의 뉴턴의 제2법칙

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$
를 사용하여야 한다.

(3) 강체의 관성모멘트 측정

물체의 관성 모멘트를 측정 하는 방법을 생각해보자. 원반의 회전운동에서 실험적인 값을 구하기 위해 그림과 같은 실험 장치를 생각할 수 있다.



줄은 매달린 질량 m 에 의해 당겨지고 r 은 회전 하는 원반의 중심에 고정 부착된 도르래의 반지름이다. 작용점 r 은 작용하는 힘(장력) T 에 대해 수직 이므로 회전력은 : $\tau = rT$

추에 대한 뉴턴 제2법칙: $\Sigma F = ma = mg - T$
 $\rightarrow \tau = rT = r \cdot m(g - a)$

추의 직선 가속도 a 는 회전기구의 접선가속도 a_{tan} 과 같고 각가속도 α 는 $\alpha = \frac{a_{tan}}{r} = \frac{a}{r}$ 이다

3단 도르래의 회전에 대한 뉴턴 제2법칙에 의하면 $\tau = I\alpha$ 이므로:

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{r \cdot m(g-a)}{a/r} = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right)$$

이와 같이 물체의 관성모멘트를 도르래를 통해 매달린 추에 의해 회전계가 회전할 때 접선가속도를 측정함으로써 구할 수 있다

3. 실험기구 및 장치

(1) 역학 실험 장치

- 관성모멘트 측정장치세트: 원반, 링, 막대
- 원반게이트, 3단 도르래, 도르래지지대, 중심축, 추걸이, 추세트, 버니어캘리퍼스
- 스텐드, 버니어 캘리퍼, 실

(2) 센서 실험 장치

- PC, PASCO 550 Interface, data 수집 및 분석 software (Capstone), 회전운동 센서(Rotary motion sensor)

PASPORT Rotary Motion Sensor

PS-2120A



Specifications:

Three-step Pulley: 10 mm, 29 mm, and 48 mm diameters

Sensor Dimensions: 10 cm x 5 cm x 3.75 cm, 6.35 mm diameter shaft

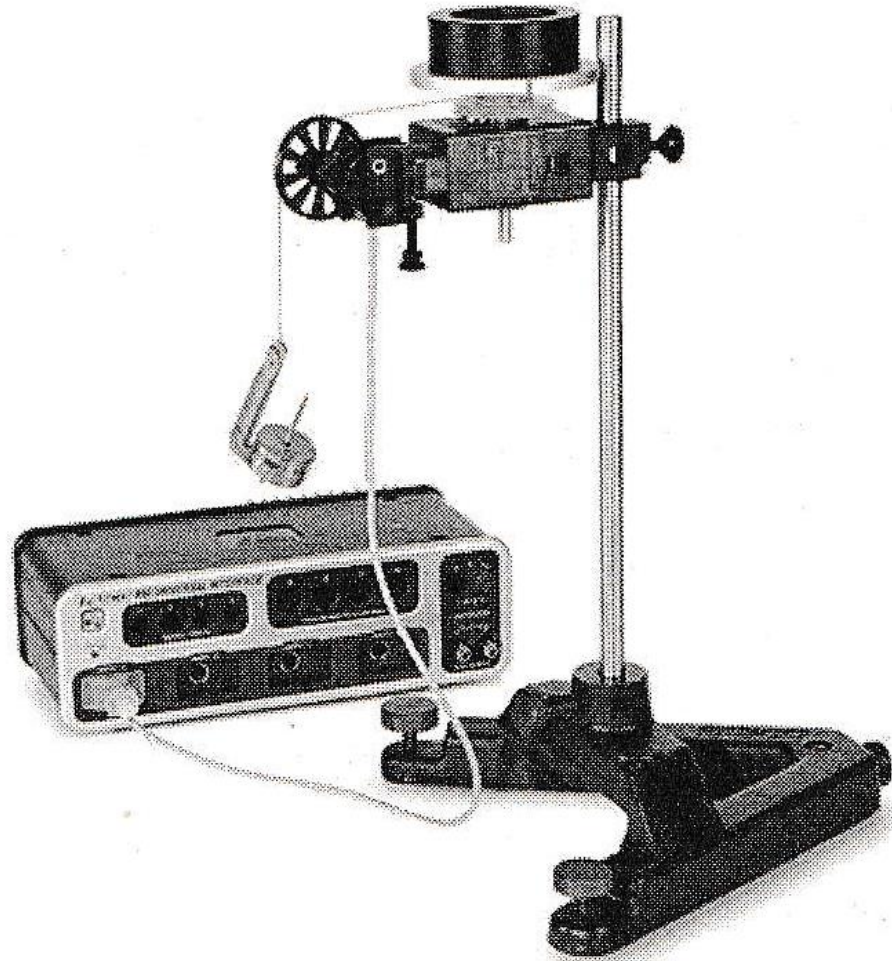
Rotary Motion Resolution: 0.09° (0.00157 rad)

Linear Motion Resolution: 0.0078 mm

Maximum Rotation Rate: 30 revs/sec

Rotary Motion Optical Encoder: Bidirectional to indicate the direction of motion; 4000 divisions/rev

4 실험방법



준비

1. 로터리 모션 센서 앞쪽에 도르래를 설치한다
2. 120cm 잘라 준비한 실을 3-step pulley(3단 도르래)의 중간 풀리에 감기도록 장치한다. 이때 3단 도르래가 헛돌지 않도록 실을 잘 묶어 준다
3. 실의 반대쪽에 추걸이를 메단다
4. 로터리 모션 센서를 550 인터페이스에 연결한다
5. 캡스톤 프로그램을 실행하고 속도 vs 시간 그래프를 구성한다
6. Sampling rate를 50 Hz로 설정한다
7. 3-step pulley의 설정에 들어가서 medium(29mm 직경)로 선택한다

실험1 강체의 관성모멘트 측정

(1) 회전축 자체의 강체의 관성모멘트 측정

1. 3단 도르래의 중간 도르래의 직경을 버니어 캘리퍼스로 측정하여 2로 나누어서 반지름(r)을 기록한다.(5회)
2. 장치를 측면과 상단에서 볼 때 일직선이 되도록 맞추고, 추가 스마트 풀리까지 거의 올라오도록 3단 도르래에 실을 감고 회전체를 잡아서 정지상태를 유지한다.
3. 회전체를 놓으며 RECORD 버튼을 누른다. 추가 바닥에 닿기 전에 STOP 버튼 누름. 이때 추가 너무 빠르거나 느리면 오차가 커지므로 적당한 추의 무게를 선택한다(이때 추의 질량은 5g)
4. 측정 종료 후, 그래프 툴바에서 fitting (추세선) 영역 선택해서 1차 함수 ($mt+b$) 로 fitting 해서 기울기 (가속도)를 구해서 데이터 테이블에 기록한다
5. 위 과정을 5번 되풀이 한다
6. 가속도 평균값을 이용하여 $I = mr^2(\frac{g}{a} - 1)$ 식을 이용하여 $I_{\text{축}}$ 을 계산한다

(2) 원반의 관성모멘트 측정

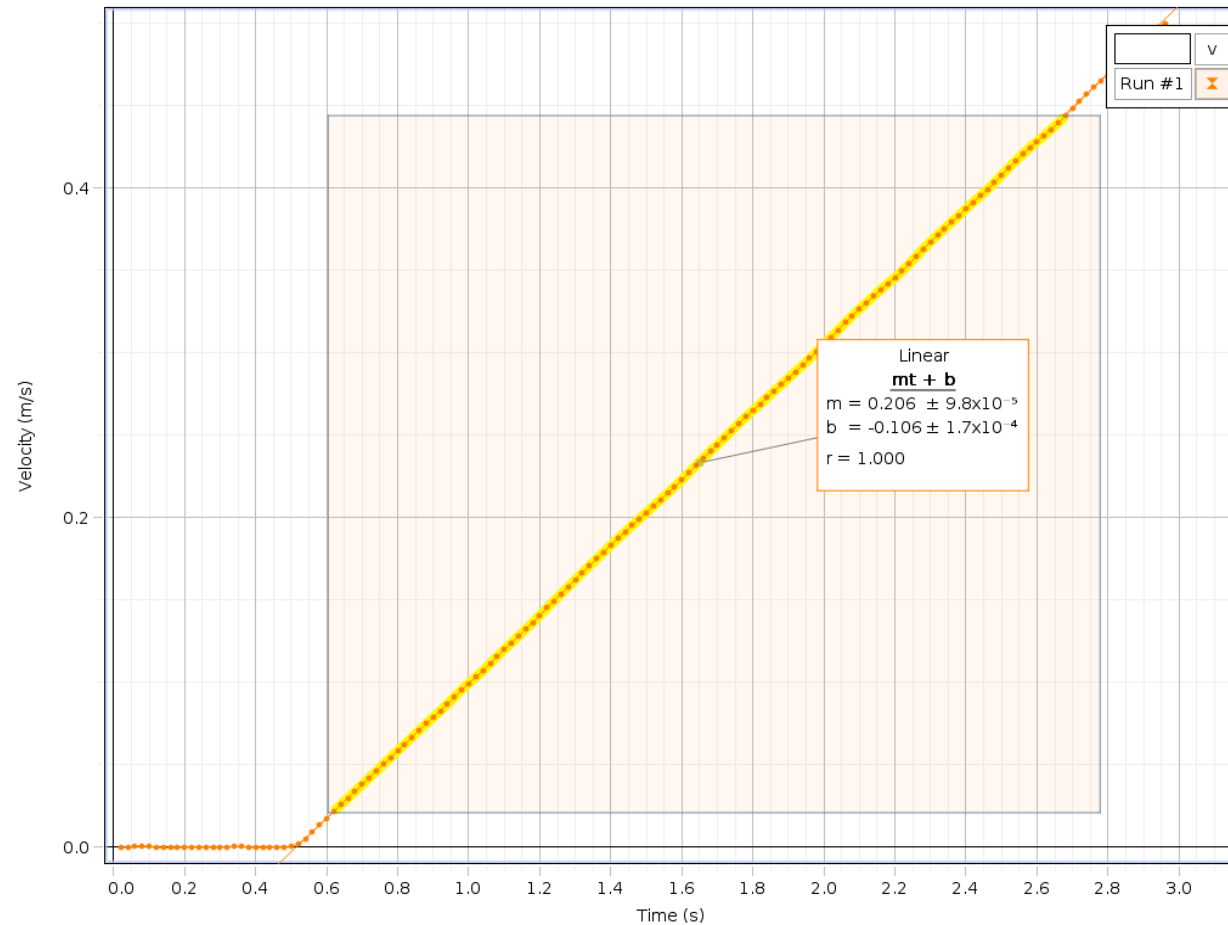
1. 측정할 원반의 반지름(R)과 질량(M)을 재어 기록하고, 사각 홈에 잘 맞추어 끼운 후 나사로 고정
2. 원반이 수평이 되게 한다
3. 추가 스마트 풀리까지 거의 올라오도록 3단 도르래에 실을 감고 회전체를 잡아서 정지상태를 유지
4. 회전체를 놓으며 RECORD 버튼을 누른다. 추가 바닥에 닿기 전에 STOP 버튼 누름. 이때 추가 너무 빠르거나 느리면 오차가 커지므로 적당한 추의 무게를 선택한다(이때 추의 질량35g 정도)
5. 측정 종료 후, 그래프 툴바에서 fitting (추세선) 영역 선택해서 1차 함수 (mt+b) 로 fitting 해서 기울기 (가속도) 를 구해서 데이터 테이블에 기록한다
6. 위 과정을 5번 반복한다
7. 가속도 평균값을 이용하여 $I = mr^2(\frac{g}{a} - 1)$ 식을 이용하여 회전계의 관성모멘트를 측정한 다음, 축에 의한값 $I_{\text{축}}$ 을 빼 주면 원반의 관성모멘트 $I_{\text{원반}}$ 가 된다
8. 실험값을 구하고 이론치와 비교한다

(3) 링의 관성모멘트 측정

1. 측정할 링의 내부반경과 외부반경과 질량을 재어 기록하고(5회), 원판위에 링을 올려놓는다
2. 추가 스마트 풀리까지 거의 올라오도록 3단 도르래에 실을 감고 회전체를 잡아서 정지상태를 유지
3. 회전체를 놓으며 RECORD 버튼을 누른다. 추가 바닥에 닿기 전에 STOP 버튼 누름. 이때 누가 너무 빠르거나 느리면 오차가 커지므로 적당한 추의 무게를 선택한다(추의 질량55g)
4. 측정 종료 후, 그래프 툴바에서 fitting (추세선) 영역 선택해서 1차 함수 (mt+b) 로 fitting 해서 기울기(가속도)를 구해서 데이터 테이블에 기록한다
5. 위 과정을 5번 되풀이 한다
6. 가속도 평균값을 이용하여 $I = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right)$ 식을 이용하여 회전계의 관성모멘트를 측정한 다음 축에 의한값 $I_{\text{축+원반}}$ 을 빼 주면 링의 관성모멘트 $I_{\text{링}}$ 가 된다
7. 평균치를 구하고 이론치와 비교한다

5.결과 및 분석

- 속도-시간 그래프에서 fitting (추세선) 영역 선택해서 1차 함수($mt+b$) 로 fitting 해서 기울기 (가속도)를 구해서 기록한다



[Graph title here]

(1) 축의 관성모멘트

1. 3단 도르래의 중간 반경(2단) r 측정(직경의 반):

	1	2	3	4	5	평균
r	0.0147	측정예				

2. 추+추걸이 (m)= 0.0050 [kg]

3. 측정한 가속도 a[m/s²]

	1	2	3	4	5	평균
a	2.06					

4. 실험한 $I_{\text{축}} = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) = 3.66 \times 10^{-6} \text{ [kgm}^2 \text{]}$
계산예

(2) 원반의 관성모멘트

3단 도르래의 중간 반지름 측정값(r): _____ m

1. 원반질량(M) : _____ kg

2. 원반 반경(R)		1	2	3	4	5	평균(m)
원반 반경 R	0.0477						

3. 추+추걸이 (m)= _____ 35 [kg] *추+추걸이에*

4. 측정한 가속도 a [m/s²]

	1	2	3	4	5	평균
a	0.473					

5. 실험한 $I_{\text{원반} + \text{추}} = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) = 1.35 \times 10^{-4}$ [kg·m²] *계산에*

6. $I_{\text{원반}} = I_{\text{원반} + \text{추}} - I_{\text{추}} = 1.31 \times 10^{-4}$ [kg·m²]

7. 이론적 관성 모멘트 $I_{\text{원반}} = \frac{1}{2}MR^2 =$ _____ [kg·m²]

8. 상대 오차= _____ %

(3) 링의 관성모멘트

3단 도르래의 중간 반경측정: 0.01449 m

1. 링의 질량 : 0.4705 kg

2. 링 반경 m

	1	2	3	4	5	평균(m)
링내부 반경 R_1	0.02685					
링외부 반경 R_2	0.0384					

3. 추+추걸이 (m)= 0.055 [kg]

4. 측정된 가속도 $a[m/s^2]$

	1	2	3	4	5	평균
a	0.165					

5. 실험한 $I_{\text{링+원반+축}} = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) = \underline{\hspace{2cm}} [kg \cdot m^2]$

6. $I_{\text{링}} = I_{\text{링+원반+축}} - I_{\text{원반+축}} = \underline{\hspace{2cm}} [kg \cdot m^2]$

7. 이론적 관성 모멘트 $I_{\text{링}} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) = \underline{\hspace{2cm}} [kg \cdot m^2]$

8. 상대 오차= %

6. 고찰

1. 회전운동의 관성을 나타내는 관성모멘트와 병진운동의 관성을 나타내는 질량의 유사점과 차이점을 비교해 보세요.
2. 만일 실험에서 3단 도르래의 가장 큰 직경의 도르래를 사용하여 실험을 한다면 측정하는 가속도는 어떻게 될 것으로 예상되는지 논하여 보세요. (시료의 관성모멘트는 도르래 반경에 따라 변하지 않는다)
3. 오차원인
4. 실험을 통해 배우게 된 것
5. 실험원리의 실생활에서의 예