

물리학 및 실험 1

스마트 카트를 활용한 일과 에너지



과목	물리학및실험1				
담당교수	전계진	담당조교			
조 및 조원	2조, 김민수 김민규 김민서 김백준 김연주				
제출일	2024-05-06				
작성자	김민수	학번	20518009	학과	정보보호

이 실험은 이론 시간에 배운 일과 에너지의 개념을 확인하고, 계의 역학적 에너지가 보존되는지 확인하는 실험이다. 이 실험에서는 트랙 위에서 움직이는 카트의 운동을 조사하여 일-에너지 정리가 성립하는지 알아보고, 물체에 가한 힘이 수행된 일이 물체의 운동에너지 변화와 같은지 알아본다.

1 실험목적

트랙 위에서의 물체의 운동 실험을 통해 물리학에서 정의하는 일과 에너지 개념을 이해한다. 또한 물체에 작용하는 힘이 한 일과 물체의 운동에너지의 변화량 사이의 관계를 알아보고 물체의 총 역학적 에너지가 보존되는가를 확인한다.

2 실험원리

우리는 일상에서 일이라는 용어를 자주 사용하지만 물리학에서 사용하는 일이라는 용어는 매우 엄밀히 정의된다. 물리학에서는, 힘이 물체에 작용하여 힘의 방향으로 물체의 변위가 발생했을 때 힘은 물체에 대해 일(Work)을 했다고 말한다. 물리학에서 일은 물체에

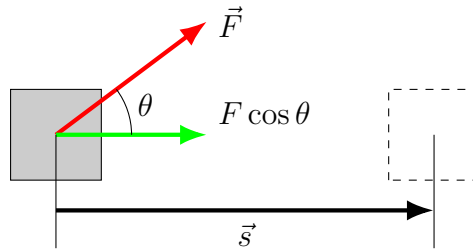


Figure 1: 일의 정의. 물체에 가해진 힘을 \vec{F} , 물체가 움직인 변위를 \vec{s} , \vec{F} 와 \vec{s} 가 이루는 각을 θ 라고 하면, 일은 $W = F s \cos \theta$ 로 정의된다.

힘을 가했을 때, 힘의 크기와 힘이 가해진 방향으로 움직인 거리의 곱으로 정의된다. 다시 말해 물체에 가해진 힘을 \vec{F} , 움직인 변위를 \vec{s} 라고 하면, 물체가 한 일 W 는 다음과 같이 정의된다.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \theta \quad (1)$$

일의 SI단위는 줄($J \equiv Nm$)이다.

$$1J = 1N \cdot m = 1kg \cdot m^2/s^2$$

이제 Figure 2와 같이 질량 m 의 물체가 일정한 힘 \vec{F} 가 $+x$ 축 방향으로 작용하여 질량 m 인 물체가 x 축을 따라 운동하는 경우를 생각해보자. 외부의 힘이 물체에 한 일은 그 물체의 변위와 관계되지만, 물체에 한 일은 물체의 속도 변화와도 관계가 있다. 물체의 가속도는 일정하며, 뉴턴 운동 제2법칙 $F = ma$ 에 따라 결정된다.

만약 물체에 일정한 힘이 작용하여 물체의 위치가 x_1 에서 x_2 로 바뀌고, 물체의 속력이 v_1 에서 v_2 로 바뀌었다고 하면, 등가속도 운동 방정식 $v_2^2 = v_1^2 + 2as$ 로부터 물체의 가속도는

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \quad (2)$$

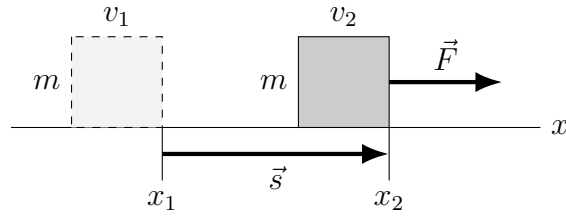


Figure 2: 물체에 일정한 힘 \vec{F} 가 작용할 때 한 일

이 되고, 뉴턴 운동 제2법칙으로부터

$$F = ma = m \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \quad (3)$$

다음 식을 얻을 수 있다.

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (4)$$

여기서 $F \cdot s$ 는 알짜힘, 즉 힘 F 에 의해 물체에 가해진 일 W 를 나타낸다. 그리고 물체의 운동에너지(K)를 다음과 같이 정의하면

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad (5)$$

식 4는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$W = \Delta K \quad (6)$$

또는

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (7)$$

위 식은 알짜 힘이 한 일이 운동에너지의 변화량과 같음을 나타내며, 이것을 일-에너지 정리 (Work-energy theorem)라 부른다. 우리는 일-에너지 정리로부터 물체의 운동 상태의 변화를 통해 물체에 한 일의 양을 알 수 있다.

우리는 앞에서 물체에 작용하는 힘 \vec{F} 가 $+x$ 축 방향으로 일정하게 작용하는 경우를 다루었지만, 일반적으로 물체에 작용하는 힘 \vec{F} 의 크기와 방향이 바뀌는 경우에는 힘이 한 일 W 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \quad (8)$$

다음에는 위치에너지를 정의해 보자. 위치에너지(Potential Energy)는 물체가 어떤 위치를 차지함으로써 갖게 되는 에너지로 물체를 그 위치로 이동할 때, 외부 힘이 하는 일로 정의할 수 있다.

예를 들어, 질량 m 인 공을 중력의 반대방향으로 높이 h 만큼 들어 올릴 때 공에 대해서 한 일 W 는 다음과 같다.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = mgh \quad (9)$$

이것을 중력에 대한 위치에너지라 한다. 위치에너지를 정의할 수 있는 힘을 보존력이라고 하는데, 중력은 대표적인 보존력이다.

일반적으로 어떤 보존력 \vec{F}_c 에 관련된 위치에너지 U 는 보존력이 한일의 음의 값으로 정의할 수 있다.

$$U = - \int \vec{F}_c \cdot d\vec{s} \quad (10)$$

지면에서의 위치에너지를 0으로 정의하면, 높이 h 인 곳에 있는 물체의 중력 위치에너지 $U(h)$ 는

$$U(h) = mgh \quad (11)$$

가 된다.

역학적 에너지(mechanical energy)란 물체의 운동 에너지와 위치 에너지의 합으로 정의된다. 중력이 작용하는 공간에서 운동하는 물체는 마찰력과 같은 비보존력의 작용을 무시할 때, 역학적 에너지 E 는

$$E = U + K \quad (12)$$

는 보존된다. 이것을 역학적 에너지 보존의 법칙이라고 한다.

2.1 평면에서의 수레의 운동

Figure 3과 같이 카트가 도르래를 통해 줄에 매달린 물체에 의해 가속되는 경우를 생각해 보자. 카트는 장력 T 에 의해 가속운동을 할 것이다. 카트는 변위 Δx 를 이동하며 정지

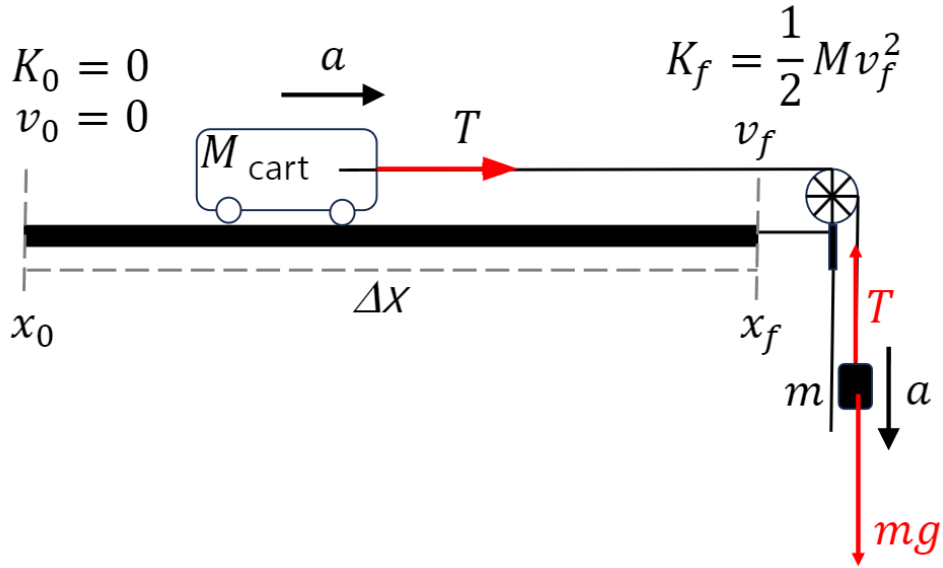


Figure 3: 줄에 매달려 운동하는 두 물체, 질량 M 인 카트가 질량 m 인 물체에 의해 가속되고 있다.

상태로부터 최종속력 v_f 까지 증가할 것이다. 마찰이 없다고 가정하면 줄의 장력 T 는 카트를 가속시키는 알짜 힘이고 카트에 가해진 일($W_{\text{장력}}$)은 카트의 운동에너지($\Delta K_{\text{카트}}$)로 변환된다.

따라서

$$W_{\text{장력}} = T\Delta x = \Delta K_{\text{카트}} \quad (13)$$

카트가 수평 방향으로 움직이는 동안 매달린 질량 m 은 수직 방향으로 움직이므로, 카트와 매달린 질량은 임의의 순간에 같은 속력과 가속도, 변위를 갖는다. 따라서 매달린 물체에 대해 중력이 한 일은

$$W_{\text{중력}} = mg\Delta x \quad (14)$$

이고, 이것은 감소한 위치에너지의 크기와 같다.

$$\Delta U = -W_{\text{중력}} = mg\Delta x \quad (15)$$

이 계는 총질량 $(M + m)$ 인 물체가 힘 mg 에 의해 직선운동으로 가속되어 가속도 a 로 움직이는 경우로 단순화할 수 있다. 이 계의 가속도를 구해보면,

$$\Sigma F = (M + m)a \text{ 이므로 } mg = (M + m)a$$

즉,

$$a = \frac{m}{M + m}g \quad (16)$$

또한, 이 계의 역학적 에너지가 보존되므로 계의 운동에너지 변화는 다음과 같다.

$$\Delta K_{\text{계}} = -\Delta U_{\text{계}} = -\Delta U_{\text{매달린물체}} \quad (17)$$

이것은 역학적 에너지 보존법칙(The Law of Conservation of Mechanical Energy)을 나타낸다. 즉, 어떤 계에서 위치에너지의 변화가 생길 때, 운동에너지는 그에 대응하여 반대변화가 일어난다. 이 경우, 계의 한 부분, 매달린 물체는 중력 위치에너지가 감소하지만, 이와 동시에 계의 모든 부분에서 운동에너지 증가가 일어난다.

3 실험기구 및 장치

- 역학트랙, 고무줄 탄성 범퍼, 자기범퍼(End Stop), 트랙 마운트, 수준기, 폴리, 추걸이, 추세트(250g, 20g, 10g), 실 1m
- 센서 실험장치: 컴퓨터, data 수집 및 분석 software(Capstone), 스마트 카트



힘	측정범위	$\pm 100\text{N}$
	정확도	$\pm 2\%$
	해상도	0.1N
	최대 샘플링 비율	500Hz
위치	해상도	$\pm 0.2\text{mm}$
	최대 속도	$\pm 3\text{m/s}$
속도	최대 샘플링 비율	100Hz
	측정범위	$\pm 16g$ ($g = 9.8\text{m/s}^2$)
가속도	최대 샘플링 비율	500Hz
	블루투스	최대 무선범위 30m(장애물이 없을 때)

(a) 스마트 카트에 내장된 센서의 특성

Figure 4: 스마트 카트

4 실험 방법

- 준비 1
1. 역학 트랙 양끝에 카트 범퍼를 설치한다.
 2. 트랙위에 수준기를 내려놓고 좌우 수평을 맞춘다.
 3. 트랙 한쪽 끝에 도르래를 설치하고 실로 추와 추걸이와 스마트 카트를 연결한다.
 4. 카트를 움직여 보면서 줄길이가 적당한지 살펴본다.
- 준비 2
1. 캡스톤 실행
 2. 스마트카트 연결하고 내장된 센서 (위치, 속도, 가속도, 힘센서) 를 설정한다 (힘센서는 [change sign]을 체크한다, 당기는 힘을 음으로 출력하기 때문)
 3. 측정 완료 조건을 구성한다 : [control]메뉴의 [Recording condition]클릭 화면에서 카트가 0.5m 이동하면 측정이 자동 완료되도록 한다.
 4. 캡스톤의 Calculator에서 운동에너지와 위치에너지를 선언한다. ※추의 질량을 바꿀 때 마다 m값 변경 ※ $KE_c = \frac{1}{2}Mv^2$, $KE_h = \frac{1}{2}Mv^2$, $KE = KE_c + KE_h$, $U = mg(0.5 - x)$
 5. 위 (3)이 정상 작동되는지 확인한다.
 6. 단위시간당 데이터 측정횟수를 설정:50Hz 표와 그래프 모드로 선택하여 표의 칼럼을 추가하여 위치, 힘, 속도를 설정하고 그래프에도 그래프를 추가하여 힘-위치, 속도-위치 축을 설정한다.
- 실험 1
1. 카트, 추걸이, 추 질량 측정하고 기록한다.
 2. 카트 출발위치 정한다.
 3. 힘센서의 영점을 조정한다.(줄을 잡아서 힘이 작용하지 않는 상태에서 힘센서의 영점버튼을 누름)
 4. [record]누른 후 카트를 출발시킨다.
 5. 추의 질량을 주어진 표의 조건대로 변화 시켜서 (1)~(4) 를 반복한다.

5 실험 결과 및 분석

5.1 실험 1

Figure 5 참조.

5.2 실험 2

Figure 6 참조.

5.3 실험 3

Figure 7 참조.

	카트에 해준 일 T-x그래프 하단의 면적 $W_{\text{장력}} = \langle T \rangle \cdot \Delta x [J]$	카트의 운동에너지 변화 $\Delta K_{\text{카트}} = \frac{1}{2} M (v_2^2 - v_1^2)$	상대 오차 (%)
1	1.47×10^{-1}	6.39×10^{-2}	130%
2	2.54×10^{-1}	1.22×10^{-1}	108%
3	2.83×10^{-1}	1.51×10^{-1}	87.4%

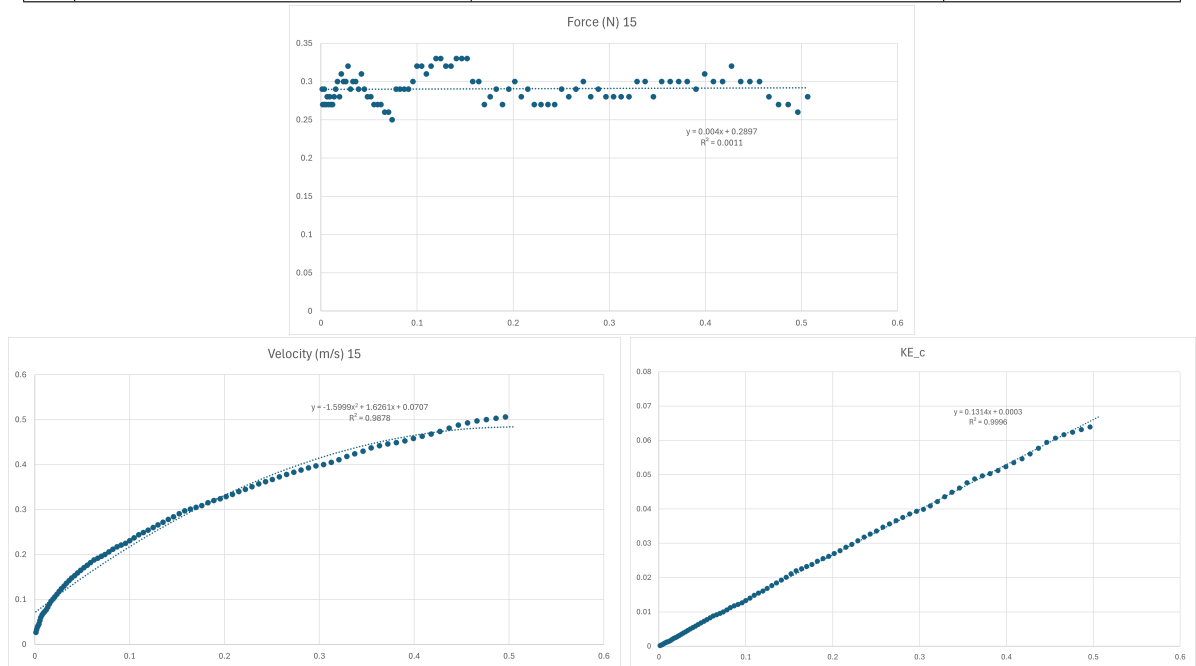


Figure 5

	계의 위치에너지 변화[J] $\Delta U_{\text{계}} = -mg\Delta x = -W_{\text{중력}}$	계의 운동에너지 변화[J] $\Delta K_{\text{계}} = \Delta K_{\text{카트}} + \Delta K_{\text{추}}$	오차(%)	에너지 손실 $\epsilon = \Delta U_{\text{계}} + \Delta K_{\text{계}}$
1	-7.33×10^{-2}	6.59×10^{-2}	10.1%	-0.74×10^{-2}
2	-1.22×10^{-1}	1.21×10^{-1}	0.820%	-0.1×10^{-2}
3	-1.71×10^{-1}	1.62×10^{-1}	5.26%	-0.9×10^{-2}

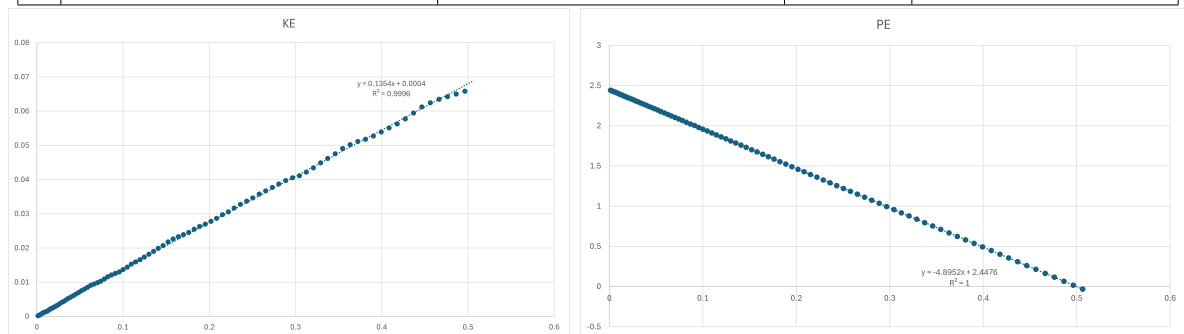


Figure 6

	추에 가해진 일 $W_{\text{추}} = \Delta K_{\text{추}}$	중력이 추에 의한 일 $W_{\text{중력}} = mg\Delta x$	장력이 추에 한 일 $W_{\text{장력}} = W_{\text{추}} - W_{\text{중력}}$	추에 작용하는 장력 $T = \frac{\Delta K_{\text{추}} - W_{\text{중력}}}{-\Delta x}$	카트에 작용하는 측정된 장력 < T >	T와 <T> 사이의 오차(%)
1	1.92×10^{-3}	7.33×10^{-2}	-7.14×10^{-2}	1.43×10^{-1}	2.90×10^{-1}	102%
2	5.78×10^{-3}	1.22×10^{-1}	-1.16×10^{-1}	2.32×10^{-1}	4.78×10^{-1}	106%
3	1.06×10^{-2}	1.71×10^{-1}	-1.60×10^{-1}	3.21×10^{-1}	6.57×10^{-1}	105%

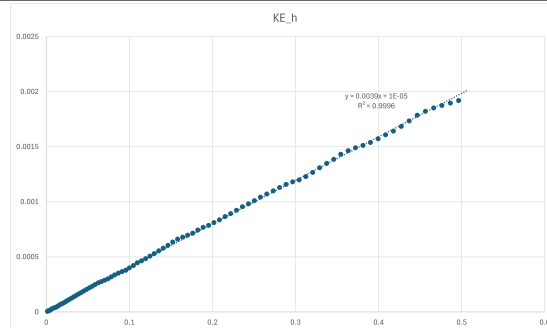


Figure 7

6 실험 고찰

6.1 추의 운동을 어떤 운동인지 설명하라 (등속인지, 등가속인지 ...)

추는 중력에 의해 등가속도 운동을 하고 있다.

6.2 분석1에서 일-에너지 이론의 실험적인 증명은 서로 얼마나 잘 일치하는가? 만일, 오차가 난다면 구해진 데이터로부터 카트에 작용하는 마찰력을 구해 보고 마찰력에 의한 일을 계산해 보자

결과를 보면 알 수 있듯이, 오차가 100% 근처에서 발생하고 있는데, 이는 실험 전에 영점보정을 했음에도 수치가 이상한 것으로 보아, 실험 기자재의 오류로 보인다.

6.3 분석2에서 에너지 보존법칙이 얼마나 잘 성립하는지 실험결과로 설명하라.

분석 2에서의 에너지 보존법칙은 각각 |위치에너지 변화| \approx |운동에너지 변화| 오차 $5 \pm 5\%$ 정도로 잘 성립하는 것을 알 수 있다. 그러므로 위치에너지 + 운동에너지가 일정하다는 에너지 보존법칙에 잘 들어맞는다.

6.4 분석3에서 장력에 의한 일은 +인가, -인가? 그 이유가 무엇인가?

분석 3에서 장력에 의한 일은 -인데, 그 이유는 가해진 힘에 비해 추가 이동한 거리가 -방향, 즉, 힘의 반대방향으로 작용했기 때문이다.

7 오차원인

Figure 5, Figure 7를 보면, 오차가 100% 근처에서 발생한 것을 볼 수 있는데, 분명 카트의 힘 센서를 영점조정을 해 주었고, 아무래도 우연이라기엔 100%근처에서 오차가 생기는 것이 이상하기 때문에, 카트의 힘 센서가 고장이 난 것으로 보인다. 그래도 부정확 하지만 힘 센서의 값을 1/2하여 따지면, Figure 5는 13.1%, 3.94%, 6.71%의 비교적 양호한 오차율을 보인다. Figure 7 또한 측정된 장력을 1/2 하여 따지면, 1.40%, 3.02%, 2.34%의 준수한 오차율을 보인다. 그러나 부당오차이기 때문에 측정값을 신뢰할 수 없으므로 이 이상 오차의 원인을 찾기는 어렵다고 생각한다.

8 실험을 통해 배우게 된 것

- 그 유명한 에너지 보존의 법칙을 배웠다.
- 위치 에너지와 운동 에너지의 계산법을 배웠다.
- 음의 일이 존재할 수 있음을 배웠다.

9 실험원리의 실생활에서의 예

- 눈 내린 산비탈길에서 스키를 타는 스키어의 운동.
- 돌을 산 위로 올리는 형벌을 받는 시시프스
- etc..