

电池剩余放电时间预测

——2016年C题讲评

主讲人：北京工业大学 薛毅

Email: xueyi@bjut.edu.cn

2016年全国大学生数学建模竞赛赛题讲评与经验交流会
广西南宁、2016年11月26日

电池剩余放电时间预测——2016年C题讲评

- 题目
- 建立剩余放电时间的数学模型
- 问题1和问题2的求解
- 问题3的求解
- 阅卷情况简述



1. 题目 —— 电池剩余放电时间预测

铅酸电池作为电源被广泛用于工业、军事、日常生活中。在铅酸电池以恒定电流强度放电过程中，电压随放电时间单调下降，直到额定的最低保护电压（ U_m ，本题中为9V）。

从充满电开始放电，电压随时间变化的关系称为放电曲线。电池在当前负荷下还能供电多长时间（即以当前电流强度放电到 U_m 的剩余放电时间）是使用中必须回答的问题。电池通过较长时间使用或放置，充满电后的荷电状态会发生衰减。



- (1) 附件1是同一生产批次电池出厂时以不同电流强度放电测试的完整放电曲线的采样数据。请根据附件1用初等函数表示各放电曲线，并分别给出各放电曲线的平均相对误差（MRE, 定义见附件1）。如果在新电池使用分别以30A、40A、50A、60A和70A电流强度放电，测得电压都为9.8伏时，根据你获得的模型，电池的剩余放电时间分别是多少？

放电时间 (min)	电流 (A) / 电压 (V)				
	20A	30A	40A	90A	100A
0	11.1781	11.0514	11.0650	11.1864	11.2179
2	10.8913	10.7179	10.6421	10.3250	10.2750
4	10.7419	10.6171	10.5521	10.2529	10.2150
6	10.6288	10.5886	10.5321	10.2843	10.2636
8	10.5581	10.5807	10.5300	10.3107	10.2857
10	10.5181	10.5786	10.5300	10.3236	10.2957
12	10.4956	10.5793	10.5321	10.3300	10.3014
14	10.4850	10.5829	10.5379	10.3343	10.3036
16	10.4819	10.5843	10.5414	10.3364	10.3050
18	10.4850	10.5871	10.5429	10.3379	10.3057
20	10.4919	10.5879	10.5457	10.3379	10.3050
22	10.5000	10.5900	10.5486	10.3379	10.3043
24	10.5075	10.5936	10.5486	10.3379	10.3029
26	10.5138	10.5964	10.5514	10.3364	10.3014

图1：附件1中Excel表的部分截图

(2) 试建立以**20A**到**100A**之间任一恒定电流强度放电时的放电曲线的数学模型，并用**MRE**评估模型的精度。用表格和图形给出电流强度为**55A**时的放电曲线。

(3) 附件2是同一电池在不同衰减状态下以同一电流强度从充满电开始放电的记录数据。试预测附件2中电池衰减状态3的剩余放电时间。

电压 (v)	放电时间 (min)			
	新电池状态	衰减状态1	衰减状态2	衰减状态3
10.500	3.6	4.8	2.0	1.2
10.495	6.1	8.4	4.1	3.3
10.490	7.0	9.4	5.7	3.5
10.485	14.5	10.3	6.3	4.0
10.480	19.2	10.9	7.7	6.2
10.475	19.5	13.2	9.7	11.6
10.470	24.5	15.9	10.8	13.0
10.465	25.4	24.0	11.5	13.3
10.460	28.3	26.1	13.6	19.3
10.455	31.9	27.0	17.0	19.5
10.450	31.9	27.2	18.9	20.4
10.445	35.9	27.2	21.9	20.9
10.440	36.7	29.1	23.0	21.5
10.435	38.3	32.0	24.3	26.5
10.430	39.3	32.3	25.8	27.2
10.425	41.8	32.4	27.3	28.4
10.420	42.0	36.1	28.9	30.8

图2：附件2中Excel表的部分截图

2. 建立剩余放电时间的数学模型

将问题1和问题2放在一起讨论，在讨论时，先对数据作处理(如绘图)，以得到一些直观的想法，给出解题的思路，建立相关的数学模型。

2.1 数据处理

首先是读取数据，画出电池的放电曲线图（见图3）。

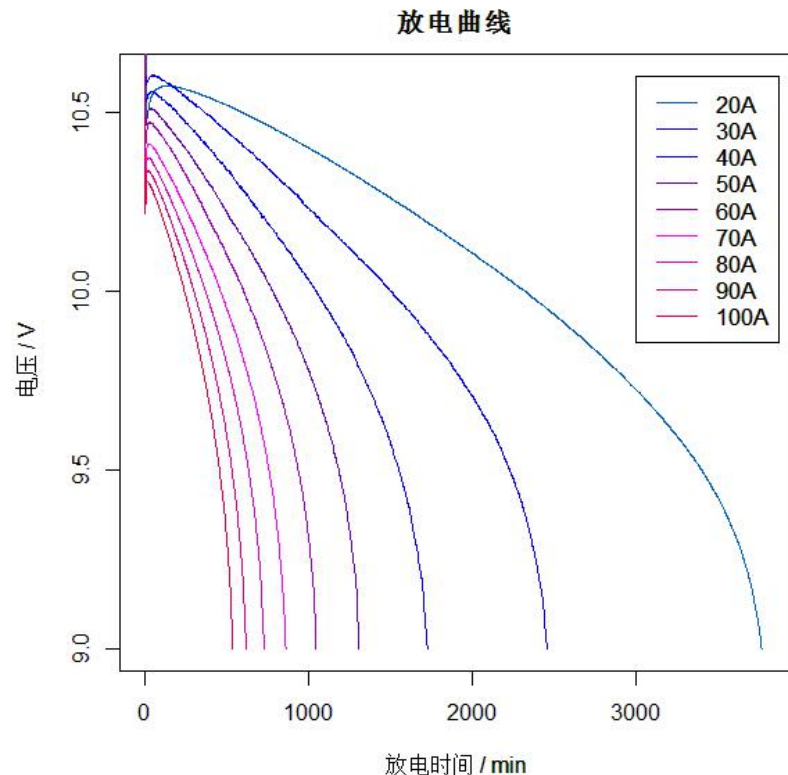


图3：电池的放电曲线图

2.2 问题分析

从题目要求，以及日常生活经验，人们更关心电池的剩余放电时间，而不是已放电时间。因此，绘出电池的剩余放电时间曲线，如图4所示。

按照题目要求，最好能够得到剩余放电时间关于电压和电流强度的整体表达式

$$t = f(U, I) \quad (1)$$

其中 t 为剩余放电时间， U 为电压， I 为电流。

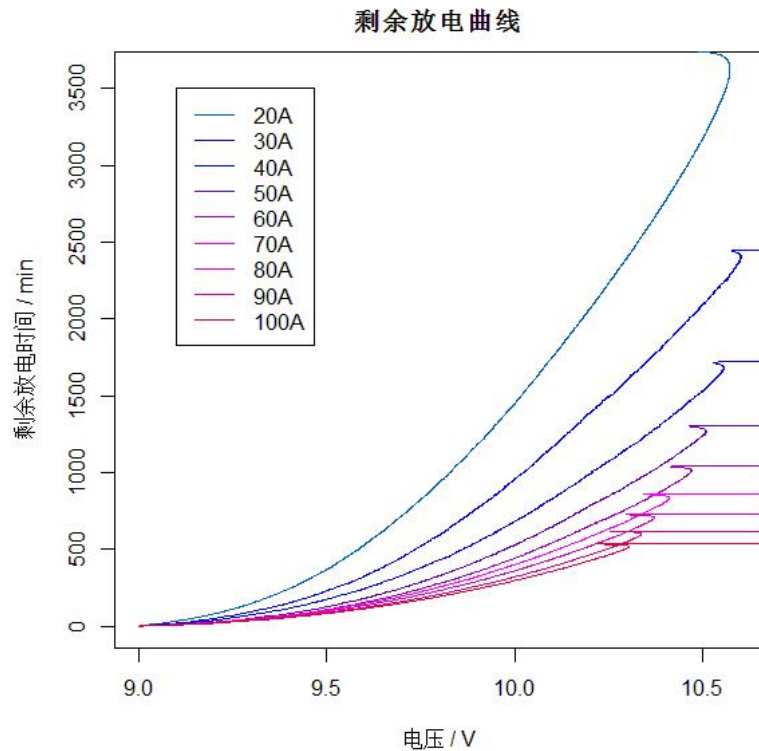


图4：电池的剩余放电曲线图



如果整体表达式计算出的误差较大，那么求其次，构造在不同电流强度下，电压与剩余放电时间的表达式

$$t = f_i(U), i = 1, 2, \dots, 9, \quad (2)$$

其中 t 为剩余放电时间， U 为电压， I 为电流， i 表示不同的电流情况。

如果得到了剩余放电时间关于电压和电流强度的整体表达式(1)，那么问题1和问题2的解答就简单了，只

需代入电压 $U = 9.8V$ 和不同的电流强度值，以及代入电流强度 $I = 55A$ 和不同的电压值就可以了。

如果只能得到在不同电流下剩余放电时间关于电压的表达式(2)，问题2求解稍复杂，需要利用公式(2)导出固定电流强度下(如 $I = 55A$)关于电压的表达式，估计出电流强度 $I = 55A$ 的剩余放电时间。



2.3 建立数学模型

从建模角度来看，得到关于电压、电流的整体表达式，且满足精度要求，是困难的，所以这里仅讨论剩余放电时间关于电压和电流强度的整体表达式(1)的建模方法。

按题目要求， f 是初等函数，即基本初等函数 --- 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函

数，以及它们的有限步四则运算。

从图形来看(见图1)，三角函数、反三角函数和对数函数都不适合作拟合函数，剩下只有幂函数和指数函数。注意：当电压 $U=9V$ 时，剩余放电时间为0，所以仅有指数是不够的。因此，利用这一性质，用幂函数作拟合

$$t = c(U - 9)^a I^b \quad (3)$$

其中 a, b, c 是待定系数。



这是一个非线性最小二乘问题，需要使用软件计算，并且初始点的选择需要作一些尝试，R软件（见[1]）的计算结果如下

$$a = 1.934672$$

$$b = -1.047256 \quad (4)$$

$$c = 33610.217827$$

在计算时，需要注意两个问题：

- (1)对于表达式(3)不能通过取对数转换成线性问题求解，因为当电压接近或达到9.0V时，它的对数会接近或达到负无穷。
- (2)非线性优化问题通常只能求出局部解，不同的初始点，或者不同的软件，其计算结果可能会是不同的。



3. 问题1和问题2的求解

有了模型(3-4)后，问题1和问题2的计算就简单了，只需代入相应的数值即可。但在模型使用之前，需要计算平均相对误差。

3.1 平均相对误差

利用放电曲线预测电池的剩余放电时间（或剩余容量）的精度取决于放电曲线在低电压段的质量。但是，

放电曲线等时间间隔采样在低电压段的采样点相对稀疏。基于这个事实，定义平均相对误差(MRE)如下：

在附件的Excel表中从Um开始按不超过0.005V的最大间隔提取231个电压样本点，这些电压值对应的模型已放电时间与采样已放电时间的平均相对误差即为MRE。



理解这段话的意义：由于关心电压在低端时的剩余放电时间，需要在低端选取**231**个点，作为样本。但还要考虑采样的稀疏性，所以才给出这样的定义。

MRE的数学表达式定义为

$$\text{MRE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{t_i - \hat{t}_i}{t_i} \right| \quad (5)$$

其中 t_i 是放电样本， \hat{t}_i 是估计值。

表1给出了在不同电流强度下，由公式(5)计算的**MRE**值。

表1：不同电流下放电时间的MRE值

电流/A	MRE/%	电流/A	MRE/%
20	0.3354	70	1.0031
30	0.7761	80	3.4490
40	1.3174	90	5.7217
50	2.6052	100	12.4465
60	2.1840		

3.2 问题的计算

如果认为上述的**MRE**值通过检验，就可以进行计算。表2给出在电压**9.8V**下剩余放电时间的估计值和实际值。表3给出在电流强度为**55A**的情况下，电池剩余放电时间的估计值。

表2：9.8V下电池的剩余放电时间

电流/A	实际值/min	估计值/min
30	594	619.53
40	430	458.37
50	326	362.85
60	277	299.78
70	254	255.08

表3：55A下电池剩余放电时间的估计值

电压/V	10.3	10.0	9.8	9.5	9.0
剩余放电时间/min	840	506	328	132	0

图5给出了在9.8V电压下, 不同电流强度下的剩余放电时间。

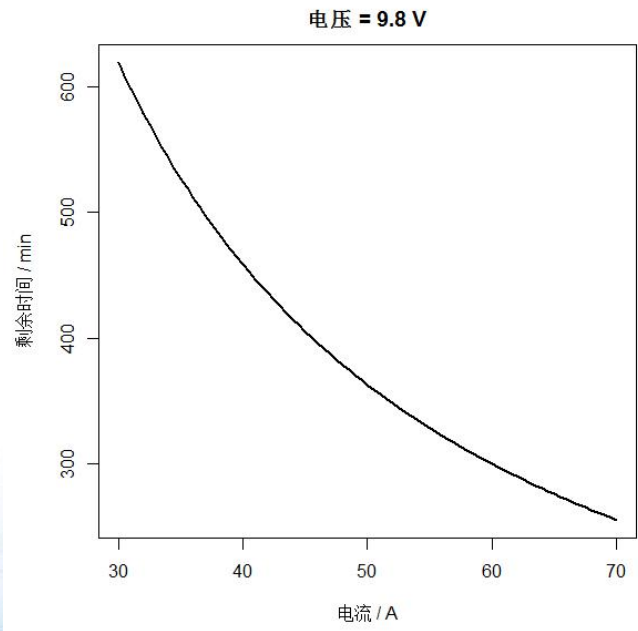


图5: 不同电流强度下的剩余放电时间

图6给出了在55A电流强度下, 不同电压下的剩余放电时间。

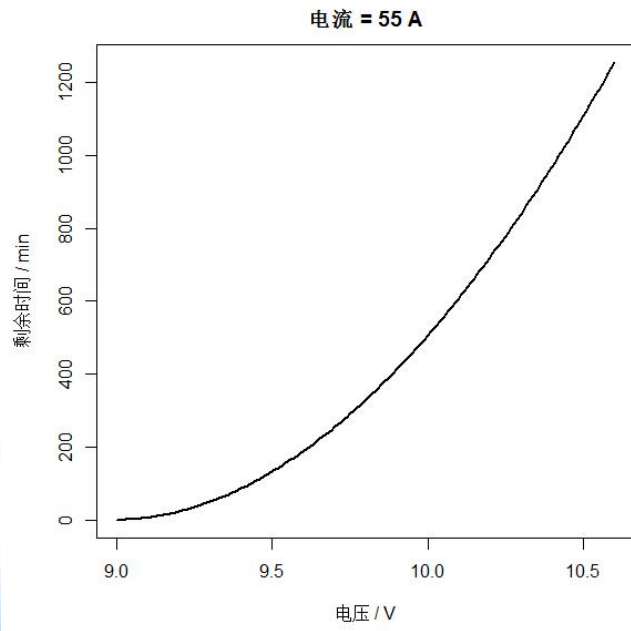
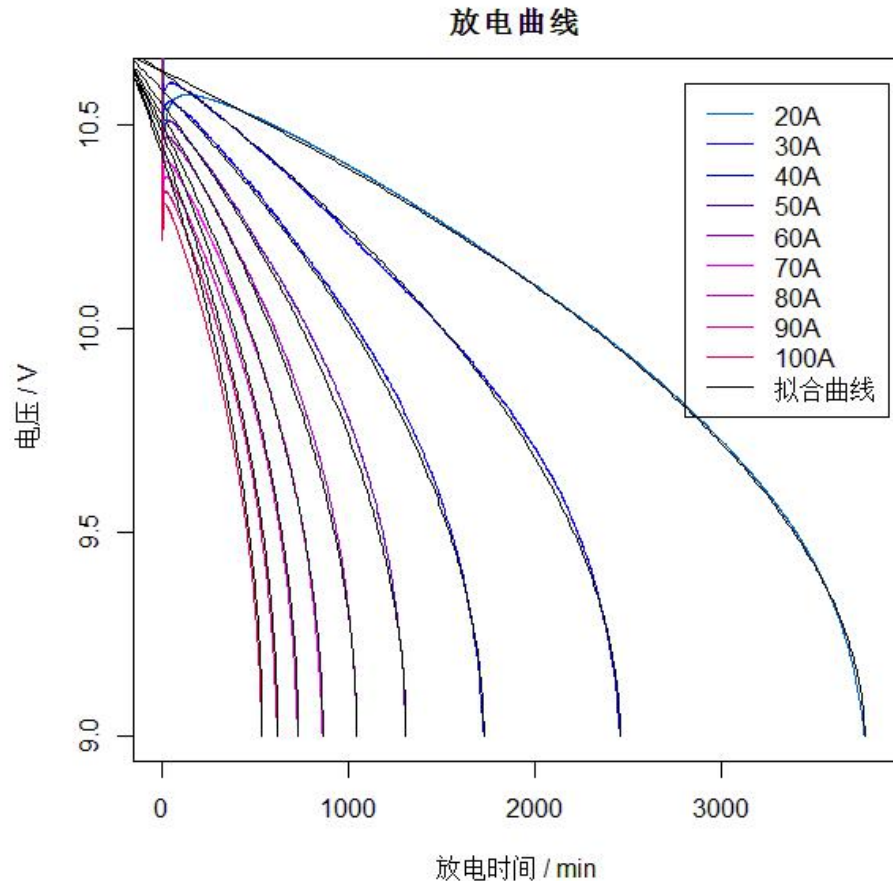


图6: 不同电压下的剩余放电时间

最后给出不同电流、不同电压下电池的放电时间曲线和拟合曲线（见图7）。

图7：放电时间曲线和拟合曲线图



4. 问题3的求解

问题3是考虑同一电池在不同衰减状态下以同一电流强度下的剩余放电时间。

4.1 幂函数方法

读取附件中的数据, 画出4个不同状态的放电曲线图 (见图8)。问题3的目标就是补齐衰减状态3这段缺失的曲线。

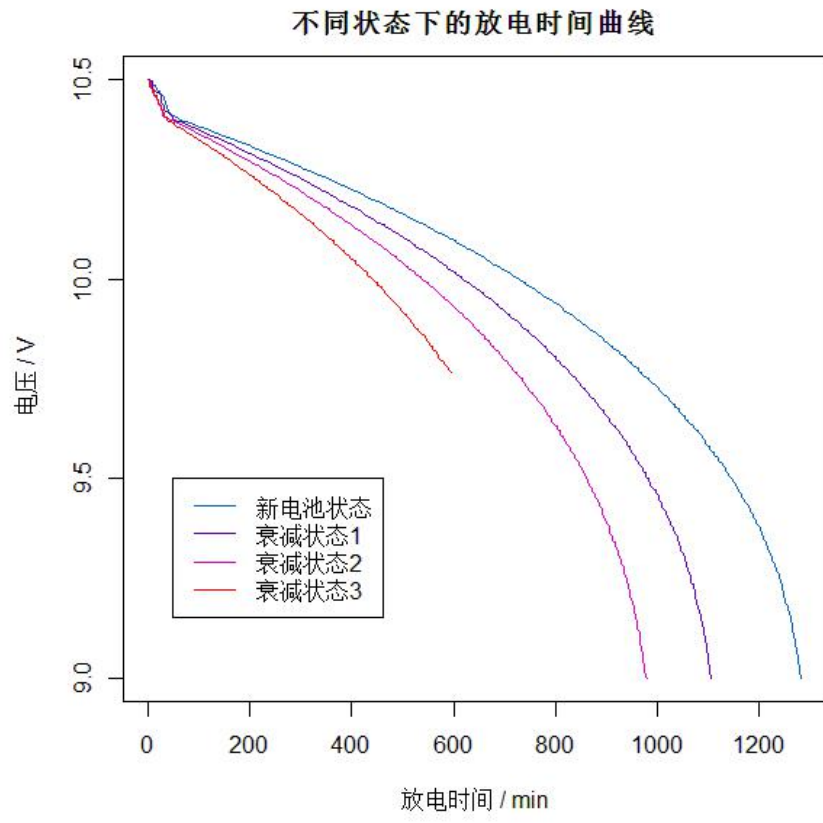


图8: 不同电压下的剩余放电时间



补充数据的方法有两种，一种是使用自身的数据，作数据拟合，拟合的方程为

$$t = b - c(U - 9)^a \quad (6)$$

其中 a , b , c 是三个待定常数。

公式(6)的形式是根据问题1和问题2的分析得到的，这里参数 b 的意义是电池的最终放电时间。

经计算得到

$$\begin{aligned} a &= 1.791842 \\ b &= 882.256937 \\ c &= 447.235959 \end{aligned} \quad (7)$$

这样得到状态3电池的剩余放电时间
 $882.26 - 596.20 = 286.06$ (分钟)。

这个结论是否正确或合理呢？需要作检验。



检验的方法：使用相同的方法来补充新电池、状态1的电池和状态2的电池的补充曲线，然后与实际数据作对比，如图9所示。

从图形可以看出，所有的预测值均偏大，预测的电池放电时间(或剩余放电时间)过长。估计不准的重要原因是，在计算电池的放电时间时，没有利用到其他状态的放电信息。

不同状态下的放电时间曲线及补充曲线

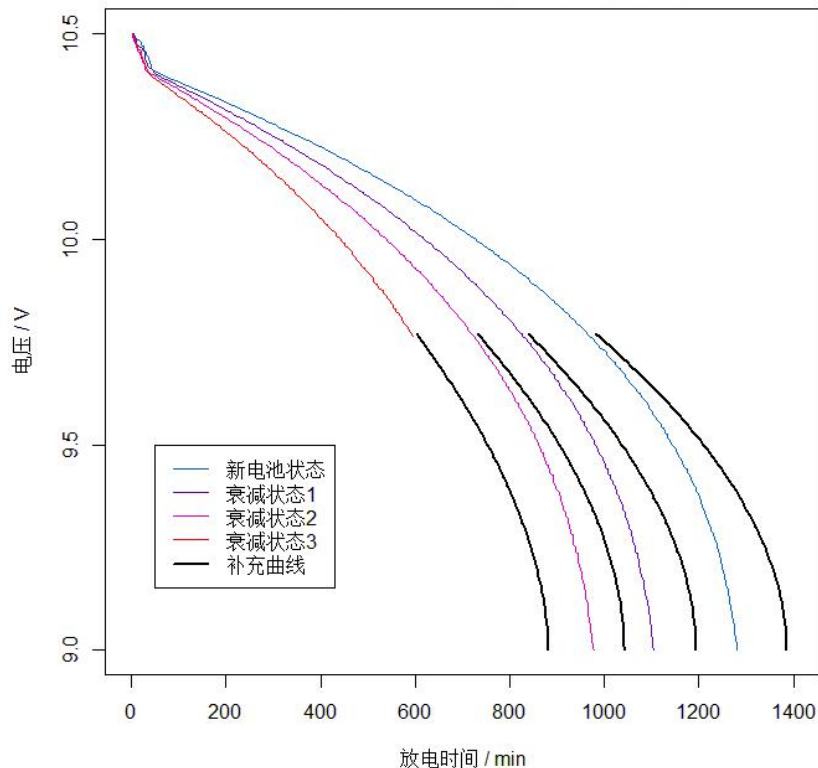


图9：拟合方法补充和预测缺失数据



4.2 线性回归方法

这里的基本思想是将衰减状态3看成另外三种状态的线性组合, 如式 (8), 在式中, **New**表示新电池状态, **I**、**II**和**III**表示状态1、状态2和状态3。 ε 是残差, 且满足 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 。

$$\text{III} = \beta_0 + \beta_1 \text{New} + \beta_2 \text{I} + \beta_3 \text{II} + \varepsilon \quad (8)$$

经R软件计算得到

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-0.6880	0.6354	-1.083	0.2807
New	-0.0928	0.1037	-0.895	0.3725
I	0.5661	0.1121	5.048	1.33e-06 ***
II	0.2953	0.1264	2.336	0.0209 *

Residual standard error: 2.48 on 144 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9998, Adjusted R-squared: 0.9998

F-statistic: 2.876e+05 on 3 and 144 DF, p-value: < 2.2e-16

从计算结果得到: 系数无法通过检验。



另外，不仅仅考虑线性组合，还可以考虑二次项，甚至更高阶项。通过使用逐步回归分析的方法，最终的回归方程确定为公式（9）。

经计算得到右边的结果，系数、方程的相关性均通过检验。

$$\text{III} = \beta_0 + \beta_1 \text{I} + \beta_2 \text{II} + \beta_3 \text{I}^2 + \varepsilon \quad (9)$$

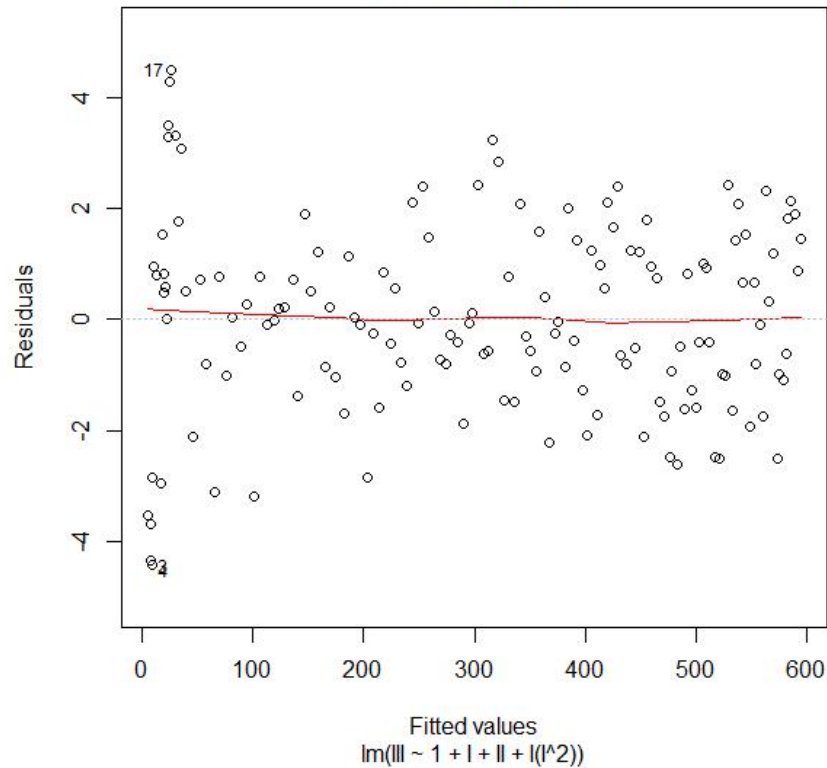
Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	1.964e+00	4.348e-01	4.517	1.29e-05	***
I	4.784e-01	6.540e-02	7.315	1.65e-11	***
II	2.425e-01	7.467e-02	3.248	0.00145	**
I(I^2)	3.095e-05	2.513e-06	12.317	< 2e-16	***

Residual standard error: 1.735 on 144 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9999, Adjusted R-squared: 0.9999
F-statistic: 5.874e+05 on 3 and 144 DF, p-value: < 2.2e-16

再作残差检验，图10是残差图，图11是Q-Q正态图。

Residuals vs Fitted



Normal Q-Q

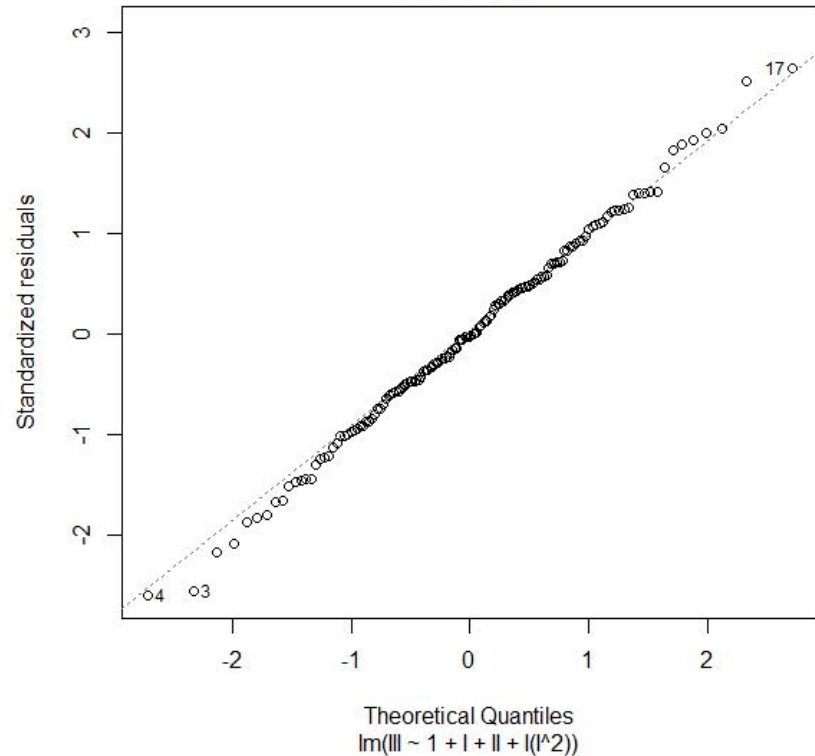


图10：回归诊断 —— 残差图

图11：回归诊断 —— Q-Q 图



在完成检验和诊断之后，可以使用状态1和状态2的后半段数据来预测状态3的后半段缺失的数据，具体的计算过程略，将补充的数据画在图上，如图12所示。

从图形来看，这种补充方法是合理的，可以用它进行估计。回归方法估计出的放电时间为**805.73**分钟，剩余放电时间为**209.53**分钟。

不同状态下的放电时间曲线及补充曲线

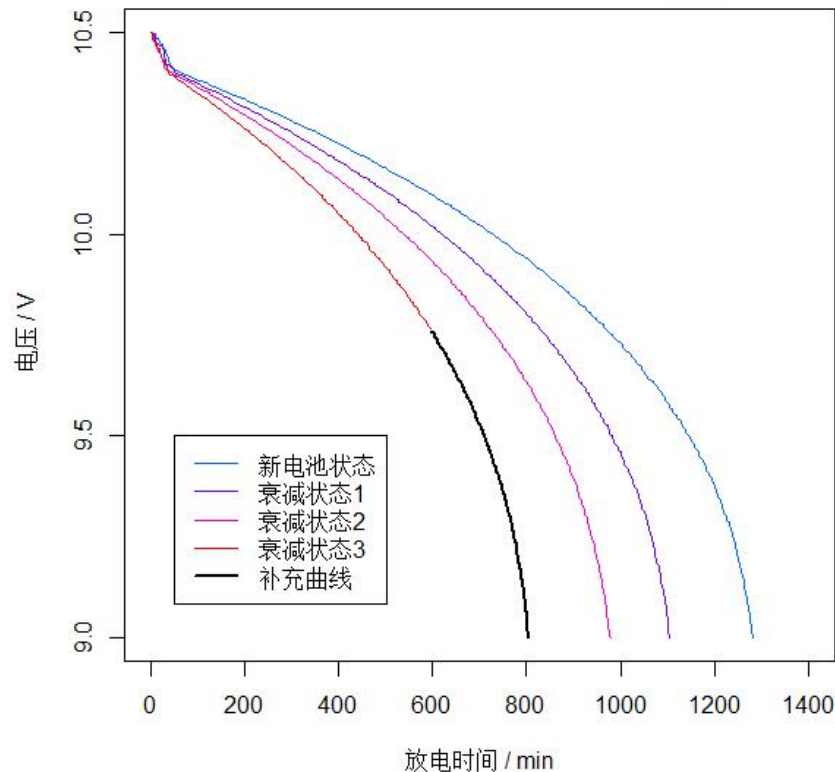


图12：回归分析的方法补充缺失数据



5. 阅卷情况简述

本人参加了北京地区和全国的C题阅卷，下面就阅卷中遇到的问题谈一谈本人一点感受。

5.1 问题1的求解

(1) 多项式回归(多项式拟合)

最直观和学生采用最多的方法是多项式回归

$$U = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_n t^n$$

最简单的方法是线性拟合，最复杂的是**9**次多项式拟合。

从回归角度来看，线性回归过于简单，且残差不满足回归方程中关于残差的正态性与方差齐性的条件。

从拟合角度来看，大于**5**次的拟合多项式，会产生较大的计算误差，因此，多项式的阶数，应该在**2~5**之间。



(2) 指数与线性函数拟合

还有一部分同学使用指数+线性函数拟合函数

$$U = \exp(at + b) + ct + d$$

这种方法最好能讲清建模的道理。

(3) 检验

无论是什么方法，重要的是作好检验工作，这里的检验有两种，一类是回归系数与回归方程的检验，另一类是计算误差精度的检验。

(4) MRE的计算

在**MRE**的计算中，大多数的队只简单给出计算结果，只有少数的队对**MRE**作分析。

因为**MRE**是计算中的重要指标，应该作认真的分析。特别应该从**MRE**的定义出发，研究它的意义，实际上，**MRE**计算的本质是要讨论剩余放电时间（曲线末端）的精确程度。



(5) 变量选择

是选择时间作为自变量，还是选择电压作为自变量，即是 $U=f(t)$ 还是 $t=f(U)$ 。

从计算数学的角度来看，应该是后者，至少是在给定电压情况下，计算时间比较方便，而前者需要计算反函数。

从应用角度来看，人们应该更关心剩余放电时间，而不是已放电时间。

因为在使用各种电器的过程中，人们更关心还能用多少时间，而不关心已经使用了多长时间。

但在学生的论文中，拟合放电时间占大多数，而使用剩余放电时间作为表达式的只占少数。

(6) 剩余放电时间的计算

应该用到剩余放电时间 T 是 $(U-9)$ 的齐次函数，即在 $9V$ 时，剩余放电时间为零。



有的队，计算出的剩余放电时间明显不合理，这是不应该的，因为这一点很容易从放电曲线上得到验证，反查附件1中的**Excel**表，就得到相应的放电时间。

5.2 问题2的求解

(1) 整体拟合方程

有的队在此时才想到整体拟合

$$U = f(t, I)$$

(2) 系数是电流的函数

如使用多项式回归，系数不再是常数，而是与电流 I 有关的函数，这里用到最多的也是电流 I 的多项式。

(3) 检验

检验的方法也包含两个方面，一是回归系数和回归方程的检验；另一个是**MRE**的计算。大多数队只关心了后一方面。



(4) 计算

在完成检验工作之后，代入 $I = 55A$ 作计算。计算时，应考虑一些特殊电压的剩余放电时间，如 $9.0V$ ，理论的剩余放电时间为 0 。那么，你公式的给出的计算值是多少？

还有，问题1中的 $9.8V$ 也是一个需要考虑的时间。其他时间，如 9.2 、 9.3 、 9.5 、 $10V$ 的剩余放电时间等。

其他的剩余放电时间用曲线表示，这样清楚明白。

有的队用几页的表格表示剩余放电时间（或放电时间），或者只是使用一条简单的曲线来描述剩余放电时间（或放电时间）。

这两种方法都有它的不足，因为它不能很好地表达你论文的计算精度，以及计算的合理性。



5.3 问题3的求解

(1) 拟合的方法作预测

这是使用最多的方法，也没有什么不妥，但没有使用全部数据总是感觉哪里不对。

(2) 检验

因此，需要对数据作检验，通过检验可以发现，预测结果偏大。

(3) 多元回归的方法作预测

有不少的队发现了这一问题，提出了使用回归分析的思想处理问题，如建立衰减状态3关于新电池、衰减状态1和衰减状态2的回归方程，共有以下几种：

$$\text{III} = \beta_0 + \beta_1 \text{New} + \beta_2 \text{I} + \beta_3 \text{II} + \varepsilon$$

$$\text{II} - \text{III} = \beta_0 + \beta_1 (\text{New} - \text{I}) + \beta_2 (\text{I} - \text{II}) + \varepsilon$$

$$\frac{\text{II}}{\text{III}} = \beta_0 + \beta_1 \frac{\text{New}}{\text{I}} + \beta_2 \frac{\text{I}}{\text{II}} + \varepsilon$$

6. 总结

从总体上讲，在问题1的处理上，大多数的队使用的方法相差不大，大同小异。主要差别在于拟合多项式的次数和**MRE**的计算。

实际上，问题2的处理才是论文分档（或是否获奖）的关键。例如，计算模型的合理性，如何使用电流强度与回归系数之间的关系，问题的方法或结论是否经过检验，其结论是否

合理等。

对于问题3的处理，各队之间也存在着差异，好的方法会对处理的方法给出验证结果，而且，计算出的剩余放电时间也较为合理。这一问题的求解，也是决定各队获奖等的关键。

本题目的主要目的是基于数据的建模，其基本思想：大胆猜测，小心论证。通过对数据的分析，建立数据模型，完成题目的基本要求。

参考文献

- [1] 薛毅, 陈立萍. R语言实用教程. 北京: 清华大学出版社, 2014.10**
- [2] 薛毅. “电池剩余放电时间预测” 问题解析. 数学建模及其应用. 第5卷第4期, 2016年12月**

谢 谢
观 看