《平稳时间序列》讲义

1、平稳性时间序列 随机序列$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为**平稳时间序列**（*stationary time series*）.若它满足以下条件

（1）$EX_t=\mu$（常数），$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

（2）EX_tX_{t+k}与t无关，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

记$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$的**（自）协方差函数**为

$$\nu_k=E(X_t-\mu)(X_{t+k}-\mu),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

（自）相关函数为

$$\rho_k=E(\frac{X_t-\mu}{\sigma_X}\cdot\frac{X_{t+k}-\mu}{\sigma_X}),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中$\sigma_X=\sqrt{D(X_t)}$.由于$\sigma_X=\sqrt{D(X_t)}=\sqrt{\nu_0}$，因此

$$\rho_k=\frac{\nu_k}{\nu_0},\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

2、**白噪声序列** 设时间序列$\{\varepsilon_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$满足下列条件：

（1）$E\varepsilon_t=0$；（2）$E\varepsilon_t\varepsilon_s=\sigma^2\delta_{t,s}$.

其中$\delta_{t,s}=\begin{cases}1, & t=s\\ 0, & t\neq s\end{cases}$，易知$E\varepsilon_t\varepsilon_{t+k}=\begin{cases}\sigma^2, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}=\sigma^2\delta_{k,0}$

因此，$\{\varepsilon_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳时间序列，称此序列为**白噪声序列**

3、模型起源 考虑物理学中的单摆现象，单摆在第t个摆动周期最大摆幅记为X_t，由于阻尼作用，在第$(t+1)$个摆动周期中，其最大摆幅X_{t+1}满足$X_{t+1}=\rho X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots$.其中$\rho$为阻尼系数，$|\rho|<1$.事实上，单摆还受到外界环境的影响，如空气的随机流动，因此，还应考虑误差，故模型可写为

$$X_{t+1}=\rho X_t+\varepsilon_{t+1},\quad t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中$\{\varepsilon_t\}$为白噪声序列，$|\rho|<1$.

$$X_t=\rho X_{t-1}+\varepsilon_t=\rho(\rho X_{t-2}+\varepsilon_{t-1})+\varepsilon_t=\rho^2X_{t-2}+\rho\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t=\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\varepsilon_{t-k}$$

这里$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\varepsilon_{t-k}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\rho^k\varepsilon_{t-k}$. $|\rho|<1$

4、平稳时间序列模型定义

① 设$\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳随机序列,满足

$$X_t=\varphi_1X_{t-1}+\varphi_2X_{t-2}+\cdots+\varphi_pX_{t-p}+\varepsilon_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中,$\{\varepsilon_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为白噪声序列,且$EX_s\varepsilon_t=0$对一切$s<t$成立,则$\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$称为$p$**阶自回归序列**（或称$\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$满足$p$**阶自回归模型**），简称$\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为$AR(p)$**序列**（或称$\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$满足$AR(p)$**模型**). 这里$AR$是自回归的英文“*Autoregression*”的缩写. $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$ $(\varphi_p\neq0)$称为模型的**参数**，p称为模型的**阶数**.

从白噪声序列$\{\varepsilon_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$所满足的条件可以看出：$\varepsilon_t$之间互不相关，且与以前的观测值$X_s$（$s<t$）也不相关，$\{\varepsilon_t\}$也可称为新信息序列，反映了随机因素的影响。

记B为一步延迟算子，B^k为k步延迟算子.如果$\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为$AR(p)$序列，则

$$X_t=\varphi_1BX_t+\varphi_2B^2X_t+\cdots+\varphi_pB^pX_t+\varepsilon_t$$

因此

$$(1-\varphi_1B-\cdots-\varphi_pB^p)X_t=\varepsilon_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

再记$\Phi(B)=1-\varphi_1B-\cdots-\varphi_pB^p$, $AR(p)$序列$\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$满足

$$\Phi(B)X_t=\varepsilon_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

② 设$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳随机序列,满足

$$X_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}, t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中$\{\varepsilon_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为白噪声序列，$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$称为$q$**阶滑动平均序列**（或称$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$满足$q$**阶滑动平均模型**），简称$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为$MA(q)$**序列**（或$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$满足$MA(q)$**模型**）**.** $\theta_1,\cdots,\theta_q(\theta_q\neq0)$称为模型的**参数**，$q$称为模型的阶数，$MA$是英文“*Moving Average*”的缩写.

记$\Theta(B)=1-\theta_1B-\theta_2B^2-\cdots-\theta_qB^q$,则$MA(q)$**模型的算子表达式为**

$$X_t=\Theta(B)\varepsilon_t,\qquad t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

③ 设$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳随机序列,满足

$$X_t-\varphi_1X_{t-1}-\cdots-\varphi_pX_{t-p}=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q},\qquad t=0,\pm1,\pm2,\cdots,p>0,q>0$$

其中,$\{\varepsilon_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为白噪声序列,且$EX_s\varepsilon_t=0$对一切$s<t$成立，记$\Phi(u)=1-\varphi_1u-\varphi_2u^2-\cdots-\varphi_pu^p$，$\Theta(u)=1-\theta_1u-\theta_2u^2-\cdots-\theta_qu^q$. 若 $\Phi(u)=0$ 与 $\Theta(u)=0$没有公共根.则$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$称为$p$**阶回归与**$q$**阶滑动平均混合序列**，简称$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为$ARMA(p,q)$**序列**.

$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q(\varphi_p\neq0,\theta_q\neq0)$称为$ARMA(p,q)$模型的**参数.**

$ARMA(p,q)$**模型的算子表达式为**

$$\Phi(B)X_t=\Theta(B)\varepsilon_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

在$ARMA(p,q)$模型中，如果允许$p=0$或$q=0$，那么只要求$p\geq0,q\geq0$，因此，$AR(p)$**序列**或$MA(q)$**序列**可以看作$ARMA(p,q)$**序列**的特殊情况.

5、平稳性条件（应用时进行平稳性检验（ADF 检验））

设$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是零均值的平稳时间序列,,记

$$\Phi(u)=1-\varphi_1 u-\varphi_2 u^2-\cdots-\varphi_p u^p$$

$$\Theta(u)=1-\theta_1 u-\theta_2 u^2-\cdots-\theta_q u^q$$

要求$\Phi(u)=0$的根在单位圆$|u|=1$之外,也就是说,参数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$必须满足一定的条件,否则有时回出现一些荒谬的结论.

5、 偏相关函数

设$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为零均值的平稳时间序列.其数字特征除了已介绍的相关函数、协方差函数外，还有本节要介绍的偏相关函数.

设$\varphi_{k1},\varphi_{k2},\cdots,\varphi_{kk}$满足

$$\begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_{k-1} \\ \nu_1 & \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_{k-2} \\ \nu_2 & \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{k-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{k-1} & \nu_{k-2} & \nu_{k-3} & \cdots & \nu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \varphi_{k3} \\ \cdots \\ \varphi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \cdots \\ \nu_k \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \varphi_{k3} \\ \cdots \\ \varphi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \cdots \\ \rho_k \end{pmatrix}$$

约定$\varphi_{00}=1$，则称$\varphi_{kk}(k\ge 0)$为**偏相关函数**（*partial correlation function*）

偏相关函数φ_{kk}在概率上刻画了平稳时间序列$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$任意一个长为$k+1$的片段$X_t, X_{t+1},\cdots,X_{t+k-1},X_{t+k}$，在中间量$X_{t+1},X_{t+2},\cdots,X_{t+k-1}$固定的条件下，两端$X_t$和$X_{t+k}$线性联系的密切程度.它与相关函数一样，反映了平稳过程独立性结构的重要信息，而且仅与二阶矩有关；偏相关函数也可理解为在给定$X_{t+1},X_{t+2},\cdots,X_{t+k-1}$的条件下，$\varphi_{kk}$（$k\ge 0$）

是 X_t 和 X_{t+k} 的相关系数，所以有“偏”相关之称. 显然 $\varphi_{00}=1$.

6、 线性模型的性质

平稳时间序列的线性模型有 AR 模型、MA 模型、$ARMA$ 模型，不同的模型都会体现不同的性质.本节主要研究各种模型的（自）相关函数和偏相关函数的性质.研究这些性质，对于线性模型的识别、线性模型的参数估计以及线性模型的应用都是十分重要的。

我们先介绍两个概念：截尾与拖尾.

设 ρ_k 和 $\varphi_{kk}(k=0,1,2,\cdots)$ 为平稳时间序列 $\{X_t\}$ 的（自）相关函数和偏相关函数，如果 ρ_k 和 $\varphi_{kk}(k=0,1,2,\cdots)$ 满足

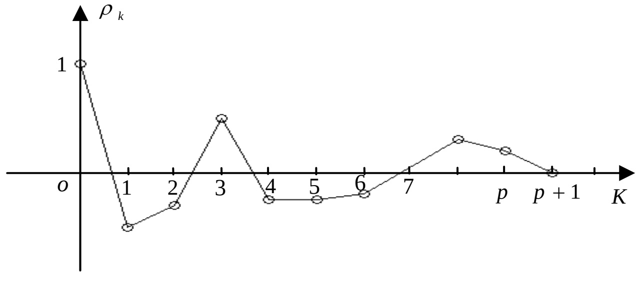
$$k=p \text{ 时，} \rho_k \neq 0; k>p \text{ 时，} \rho_k=0$$

或

$$k=p \text{ 时，} \varphi_{kk} \neq 0; k>p \text{ 时，} \varphi_{kk}=0$$

则称 ρ_k 或 φ_{kk} 在 p 处**截尾**（*truncate*）.若 ρ_k 或 φ_{kk} 不在 p 处截尾，则称 ρ_k 或 φ_{kk} 在 p **处拖尾**（*smearing*）**.**

从图象上看，如果 ρ_k 在 p 处截尾，那么，ρ_k 的图象就象在 $k=p+1$ 处截断了尾巴.下面的图形反映了截尾的性质



ρ_k 在 p 处截尾时的图像

① 设 $\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是零均值的平稳时间序列，则 $\{X_t\}$ 是 $AR(p)$ 序列的充要条件是 $\{X_t\}$ 的偏相关函数 φ_{kk} 在 p 处截尾.

② **设** $\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是零均值的平稳时间序列，则 $\{X_t\}$ 是 $MA(q)$

序列充分必要条件是$\{X_t\}$的协方差函数(或相关函数)在q处截尾.

③设$\{X_t, t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是$ARMA(p,q)$序列，$p>0,q>0$，满足平稳性条件，（自）协方差函数、偏相关函数被负指数函数所控制. MA模型中的偏相关函数和AR模型中的相关函数也有类似的性质.

线性模型性质一览表

模型 \ 属性	AR	MA	$ARMA$
模型方程	$\Phi(B)X_t=\varepsilon_t$	$X_t=\Theta(B)\varepsilon_t$	$\Phi(B)X_t=\Theta(B)\varepsilon_t$
平稳性条件	$\Phi(B)=0$ 根在单位圆外	无	$\Phi(B)=0$根都在单位圆外
可逆性条件	无	$\Theta(B)=0$的根都在单位圆外	$\Theta(B)=0$的根都在单位圆外
传递形式	$X_t=\Phi^{-1}(B)\varepsilon_t$ $=\sum_{k=0}^{\infty}G_k\varepsilon_{t-k}$	$X_t=\Theta(B)\varepsilon_t$	$X_t=\Phi^{-1}(B)\Theta(B)\varepsilon_t$ $=\sum_{k=0}^{\infty}G_k\varepsilon_{t-k}$
逆转形式	$\varepsilon_t=\Theta(B)X_t$	$\varepsilon_t=\Theta^{-1}(B)X_t=\sum_{k=0}^{\infty}I_kX_{t-k}$	$\varepsilon_t=\Theta^{-1}(B)\Phi(B)X_t$ $=\sum_{k=0}^{\infty}I_kX_{t-k}$
自相关函数	拖尾	截尾	拖尾
偏相关函数	截尾	拖尾	拖尾

《平稳时间序列的统计分析》

1、平稳性检验和样本相关函数

① 平稳性检验 （ADF 检验）

② 样本自相关函数和样本偏相关函数

（1） 设$\{X_t\}$是零均值的平稳时间序列，$x_1, x_2, \cdots, x_N$为一段样本观测值，称

$$\hat{\nu}_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k}, \qquad k = 0,1,\cdots,K$$

为**样本协方差函数**（*sample covariance function*）**.**称

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\nu}_k}{\hat{\nu}_0} \qquad\qquad k = 0,1,\cdots,K$$

为**样本自相关函数**（*sample self-correlation function*）**.**

定理表明：$\hat{\nu}_k$不是ν_k的无偏估计，但由于$\lim\limits_{n\to\infty} E\hat{\nu}_k = \nu_k$，因而，$\hat{\nu}_k$是$\nu_k$的渐近无偏估计；注意到平稳序列自协方差函数$\nu_{j-i}$为$(i,j)$之组成的矩阵也具有非负定性，故用$\hat{\nu}_k$来估计$\nu_k$具有一定的合理性.

在实际应用中，N一般取得较大（不少于 50），K值与N相比不能取得太大，通常$K \le N/10$，这是因为当K太大，上式中加项较少，估计误差随K的增大而增大，从而影响估计的精度，通常取$k = N/10$较为合理.举一个极端的例子，$K = N-1$时，$\hat{\nu}_{N-1} = \frac{1}{N}x_1 x_N$.

（2） 设$\{X_t\}$是零均值的平稳时间序列，$x_1, x_2, \cdots, x_N$为一段样本观测值，$\hat{\nu}_k$为样本协方差，称满足下列方程的$\hat{\varphi}_{kk}$（$k = 1,2,\cdots K$）为**样本偏相关函数**（*sample partial correlation function*）：

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_0 & \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \cdots & \hat{v}_{k-1} \\ \hat{v}_1 & \hat{v}_0 & \hat{v}_1 & \cdots & \hat{v}_{k-2} \\ \hat{v}_2 & \hat{v}_1 & \hat{v}_0 & \cdots & \hat{v}_{k-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{v}_{k-1} & \hat{v}_{k-2} & \hat{v}_{k-3} & \cdots & \hat{v}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{k1} \\ \hat{\varphi}_{k2} \\ \hat{\varphi}_{k3} \\ \cdots \\ \hat{\varphi}_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \cdots \\ \hat{v}_k \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \cdots & \hat{\rho}_{k-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-2} \\ \hat{\rho}_2 & \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \hat{\rho}_{k-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{k1} \\ \hat{\varphi}_{k2} \\ \hat{\varphi}_{k3} \\ \cdots \\ \hat{\varphi}_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \hat{\rho}_3 \\ \cdots \\ \hat{\rho}_k \end{pmatrix}$$

设$\{X_t\}$时零均值的正态$AR(p)$序列（即$\{X_t\}$是正态过程且是$AR(p)$序列），当N充分大且$k > p$时，样本偏相关函数$\hat{\varphi}_{kk}\ (k > p)$近似服从正态分布$N\left(0, \frac{1}{N}\right)$.

同计算样本自相关函数一样，在实际中，由于$|\hat{\varphi}_{kk}| \le 1$，$p$一般不大，而$N$很大，且$\hat{\varphi}_{kk}\ (k > p)$近似服从正态分布$N\left(0, \frac{1}{N}\right)$.我们有

$$P\left\{|\hat{\varphi}_{kk}| \le \frac{1}{\sqrt{N}}\right\} = 2\Phi(1) - 1 = 68.3\%$$

或
$$P\left\{|\hat{\varphi}_{kk}| \le \frac{2}{\sqrt{N}}\right\} = 2\Phi(2) - 1 = 95.5\%$$

2、线性模型的判别和阶数的确定

平稳时间序列常用的线性模型有自回归模型（AR模型）、滑动平均模型（MA模型）、自回归滑动平均模型（$ARMA$模型）.并且由线性模型的性质可知：如果平稳时间序列$\{X_t\}$是$AR(p)$模型，那么，$\{X_t\}$的偏相关函数φ_{kk}在p处截尾；如果平稳时间序列$\{X_t\}$是$MA(q)$模型，那么，$\{X_t\}$的自相关函数ρ_k在q处截尾. 理论上，如果样本偏相关函数$\hat{\varphi}_{kk}$

在 p 处截尾，我们就可判定该模型为 $AR(p)$ 模型；如果样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 在 q 处截尾，就可判定其为 $MA(q)$ 模型. 但在实际应用中，由于样本的随机性，估计总存在误差，对于 $AR(p)$ 模型，当 $k>p$ 时，样本偏相关函数 $\hat{\varphi}_{kk}$ 不会全为零，而是在零的附近波动；同理，对于 $MA(q)$ 模型，当 $k>q$ 时，样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 也不会全为零.用数理统计的方法来讨论平稳时间序列适合哪种线性模型？模型的阶数是多少？

（1）若 $\{X_t\}$ 是零均值的正态 $AR(p)$ 序列，当样本容量 N 很大且 $k>p$ 时，有 $P\left\{|\hat{\varphi}_{kk}|\le\frac{2}{\sqrt{N}}\right\}=2\Phi(2)-1=95.5\%$.

若记 $^{\#}A$ 为集合中元素的个数，

$$f(r)=\frac{^{\#}\{k:|\hat{\varphi}_{kk}|\le 2/\sqrt{N}, K\ge k>r\}}{K-r}$$

其中，r 为正整数，$r=1,2,\cdots,K-1$.并由此算出 $f(1),f(2),\cdots,f(K/4)$，若第一个达到 0.955 的为 $f(p)$，就可判定模型为 $AR(p)$ 序列.

（2）若 $\{X_t\}$ 是零均值的正态 $MA(q)$ 序列，当样本容量 N 很大且 $k>q$ 时，有 $P\left\{|\hat{\rho}_k|\le\frac{2}{\sqrt{N}}\right\}=2\Phi(2)-1=95.5\%$.

类似于 $AR(p)$ 模型的情况，记

$$h(r)=\frac{^{\#}\{k:|\hat{\rho}_k|\le 2/\sqrt{N}, K\ge k>r\}}{K-r}$$

其中，r 为正整数，$r=1,2,\cdots,K-1$.并由此算出 $h(1),h(2),\cdots,h(K/4)$，若第一个达到 0.955 的为 $h(q)$，就可判定其模型为 $MA(q)$ 模型.

（3）若 $\{\hat{\rho}_k\}$ 和 $\{\hat{\varphi}_{kk}\}$ 都不截尾，但收敛速度很快（都被负指数列所控制），则初步判定该序列为 $ARMA(p,q)$ 序列，但定阶较为复杂. 现在

较为流行的是日本学者赤池（*Akaike*）提出的 *AIC* 定阶准则和日本学者柴田等提出的 *BIC* 准则，在实际应用中，对于 $ARMA(p,q)$ 序列的定阶，一般采用由低到高逐个试探，如取 (p,q) 为 $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),\cdots$，直到检验为合适的模型为止.

3、线性模型参数的估计

① $AR(p)$ 模型的参数估计

设零均值平稳时间序列 $\{X_t\}$ 为 $AR(p)$ 序列，即 $\{X_t\}$ 满足

$$X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\varphi_2 X_{t-2}-\cdots-\varphi_p X_{t-p}=\varepsilon_t,\qquad t=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其中，ε_t 为白噪声序列.

② $MA(q)$ 模型的参数估计

设零均值平稳时间序列 $\{X_t\}$ 为 $MA(q)$ 序列，即 $\{X_t\}$ 满足

$$X_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

现在要估计参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q$ 和 $\sigma^2=E\varepsilon_t^2$.

③ $ARMA(p,q)$ 模型的参数估计

设平稳随机序列 $\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 为 $ARMA(p,q)$ 序列,即 X_t 满足

$$X_t-\varphi_1 X_{t-1}-\cdots-\varphi_p X_{t-p}=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

要估计的参数为 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$， $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q$ 和 $\sigma^2=E\varepsilon_t^2$.

4、 线性模型的检验（回归系数的显著性检验）

5、平稳时间序列建立模型的方法.现来总结一般步骤如下：

（1）**取样**.得到样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_N$.

（2）**数据的处理**.要做好以下两项工作：

(i) 平稳性检查.若非平稳序列，首先通过变换（差分变换、对

数变换等）变成平稳时间序列.

(ii) 均值归零.作变换 $W_i = x_i - \overline{x}, i = 1, 2, \cdots, N$，其中 $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$.

（3）**计算**.计算出 $\{W_i\}$ 的样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 和样本自协方差函数 $\hat{\nu}_k$ 及样本偏相关函数 $\hat{\varphi}_{kk}$.

（4）**模型识别.**利用平稳时间序列计算出的样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 和偏相关函数 $\hat{\varphi}_{kk}$ 的截尾性和拖尾性来判断模型的类别和阶数.

（5）**模型的参数估计**. 根据第四步确定模型的类别和阶数，利用第三节介绍的方法估计出模型的参数值.

（6）**模型的检验**.利用本节介绍的数理统计方法（一般用 χ^2 检验法）检验所建立的模型是否合适.

（7）**写出模型方程**.先写出 W_t 的模型方程，再利用 $W_i = x_i - \overline{x}, i = 1, 2, \cdots, N$，得到模型 X_t 的方程.

6、平稳时间序列的预报

平稳时间序列模型的一个重要应用是预报.所谓预报，就是由时间序列现在和过去的观测值 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 来预测未来某时刻 $N + l$ 取值 X_{N+l}，若记 X_{N+l} 的估计值为 $\hat{X}_N(l)$ 或 $\hat{X}_{N+l}$，并称它为在时刻 N 作 l 步预报值.同概率统计中的预报一样，我们以方差最小的预报为最好的预报，因此，采用最小方差预报法.

平稳时间序列的预报方法通常有两种，一是直接预报法，另一是递推法.不同模型的具体实施方法有所不同.直接预报法是利用逆函数直接预报，一般运算量较大；递推法是按照递推预报公式进行，必须按次序递推