

应 用

基于元胞自动机的SARS传播模型

贺明峰^{1,2}, 邓成瑞²

(1. 大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(2. 大连理工大学 大学生创新院, 大连 116024)

摘要: 根据SARS的局部性、潜伏性特征以及传染病个体传播的特点, 人群接触通过近距离邻居发生, 利用元胞自动机模型时间、空间上离散, 以局部规则为基础, 以同步更新为前提讨论整体性质的机制, 将人群分为易感者, 带菌者, 病人, 免疫者之后, 以易感者对SARS的抵抗能力、病人或带菌者对SARS的传染能力、人群的大小为参数, 建立了基于元胞自动机的SARS传播模型. 得到的结果可为从传染动力学角度控制SARS的传播提供依据.

关键词: 系统模型; 元胞自动机; 模拟; SARS; 传染病

1 引言

SARS作为一种局部区域性传播的传染病, 具有明显的局部性与潜伏性特征^[1-3]. 在现实中, 人群的接触传播途径体现于近距离的邻居之间, 而传染病(包括SARS)的传播有显著的个体传播特点^[4]. 对其进行传播动力学研究, 一方面可借助于传统的基于微分方程的数学方法, 如SIR模型, SEIR模型^[5]等. 但微分方程模型对局部特点的处理不够灵活^[6]. 而元胞自动机模型具有时间、空间的离散性特点, 且以局部性规则为基础以同步更新为前提来讨论整体性质^[7]. 所以用元胞自动机模型来讨论传染病的传播规律, 有望通过局部规则的设定而使其更接近于实际情况. Ahmed等定义了一类基于元胞自动机的传染病模型, 讨论了传播强度的影响及传播结果的分类^[6,8]. 而Maniatty^[9], M. L. Martins^[10]也将元胞自动机模型用于社会及生态领域问题的分析当中.

本文结合SARS的特点, 将一个局部区域的人群分为易感者, 带菌者(处于潜伏期), 病人和免疫者(指治愈或死亡, 本文不考虑天然的免疫者)四种情形, 以易感者对SARS的抵抗能力, 病人和带菌者对SARS的传染能力以及人群的大小为参数, 建立了一个新的基于元胞自动机的SARS传播模型. 讨论了抵抗能力, 传染能力, 人群的大小等对传染规模和传染时间的影响, 得到的定性结果可加深对SARS传播的了解, 为从传染动力学角度控制SARS的传播提供了依据.

2 模型

考虑一 $L \times L$ 的网格. 每一格点 (i, j) 处有一人. 记 $x_{(i,j,t)}$ 为 t 时刻 (i, j) 处的人的状态, 并规定: $x_{(i,j,t)} = 0$ 为易感者状态, $x_{(i,j,t)} = 1$ 为非典潜伏期状态, $x_{(i,j,t)} = 2$ 为非典发病状态,

$x(i, j, t) = 3$ 为对非典免疫状态.

采用 Von Neumann 邻居, 定义元胞自动机模型如下:

$$x(i, j, t+1) = f(x(i-1, j, t), x(i, j-1, t), x(i, j, t), x(i+1, j, t), x(i, j+1, t))$$



为给出具体的局部规则, 记

$P_d(i, j, t)$: t 时刻 (i, j) 处的人对 SARS 病菌的抵抗概率;

$P_s(i, j, t)$: t 时刻 (i, j) 处的人为 SARS 潜伏期状态时对易感者的传染概率;

$P_b(i, j, t)$: t 时刻 (i, j) 处的人为 SARS 患者时对易感者的传染概率;

$P(i, j, t)$: t 时刻 (i, j) 处的人为易感者时, $(i-1, j), (i, j-1), (i+1, j), (i, j+1)$ 四处对 (i, j) 处总的传染概率.

设 $A(i, j, t)$ 表示事件“ t 时刻 (i, j) 处的人对健康邻居传染病菌”, 则 $P(A(i, j, t))$ 表示 t 时刻 (i, j) 处的人的传染概率. 并有

$$P(A(i, j, t)) = \begin{cases} 0, & x_{i,j,t} = 0, 3 \text{ 时}; \\ P_s(i, j, t), & x_{i,j,t} = 1 \text{ 时}; \\ P_b(i, j, t), & x_{i,j,t} = 2 \text{ 时}. \end{cases}$$

当 (i, j) 不在边或角时, 有

$$P(i, j, t+1) = P(A(i-1, j, t) \cap A(i, j-1, t) \cap A(i+1, j, t) \cap A(i, j+1, t)).$$

当 (i, j) 在边或角时 $P(i, j, t)$ 可类似定义.

用 T_i 表示从病发期进入免疫状态所需的最长时间步, $g(i, j, t)$ 表示 t 时刻 (i, j) 处的人已经感染上病菌的时间步长. $P_e(i, j, t)$ 为 t 时刻 (i, j) 处的人为潜伏状态时, 其转为 SARS 患者的概率. 设 SARS 的潜伏期为 2 到 t_0 天, $[1]$ 中 $t_0 = 7$, 本文取 $t_0 = 12$. 令

$$P_e(i, j, t) = \exp\left[-k \frac{12 - g(i, j, t)}{g(i, j, t)}\right],$$

当 $0 \leq g(i, j, t) \leq 12$ 时, $P_e(i, j, t) = 1$, 当 $g(i, j, t) > 12$ 时, $(k > 0)$.

四种状态之间的转换过程见图 1.

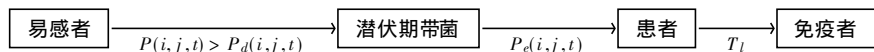


图 1 状态转移图

基于上述讨论, 可得局部演化规则如下:

在 $t = 0$ 时, 给定 N 个带菌者作为初值, 则

$x(i, j, 0) = 1, g(i, j, 0) = 1$, 若 (i, j) 处的人为带菌者;

$x(i, j, 0) = 0, g(i, j, 0) = 0$, 其余位置.

其中 $i = 1 \dots L, j = 1 \dots L$.

对任一 (i, j) , 状态从 t 到 $t+1$ 的演化规则为:

(i) 如果 $x(i, j, t) = 0$, 则

$x(i, j, t+1) = 1, g(i, j, t+1) = 1$, 若 $P(i, j, t) > P_d(i, j, t)$;

$x(i, j, t+1) = 0, g(i, j, t+1) = 0$, 否则.

(ii) 如果 $x(i, j, t) = 1$, 则

$$x(i, j, t+1) = \begin{cases} 2, & \text{with } p_e(i, j, t); \\ 1, & \text{with } 1 - p_e(i, j, t). \end{cases}$$

$$g(i,j,t+1) = g(i,j,t) + 1.$$

(iii) 如果 $x(i,j,t) = 2$, 则

$$x(i,j,t+1) = 2, g(i,j,t+1) = g(i,j,t) + 1, \text{若 } g(i,j,t) < T_l;$$

$$x(i,j,t+1) = 3, g(i,j,t+1) = 0, \text{否则}.$$

(iv) 如果 $x(i,j,t) = 3$, 则

$$x(i,j,t+1) = 3, g(i,j,t+1) = 0.$$

3 结 果

在模拟时, 取 $P_d(i,j,t) = P_d, P_s(i,j,t) = P_s, P_b(i,j,t) = P_b, T_0 = 365$ 为总的迭代步数, 从病发期进入免疫状态所需的最长时间步 $T_l = 100$. 主要讨论 P_d, P_s, P_b 及人群规模 L 对 SARS 传播的影响.

3.1 $P_b > P_d$

此时, 对任何规模的人群, 只要有一个带菌者, 则整个群体终将全部染病. 但 P_s, P_b 的大小对 SARS 的传播速度有明显的影响, 见图 2.

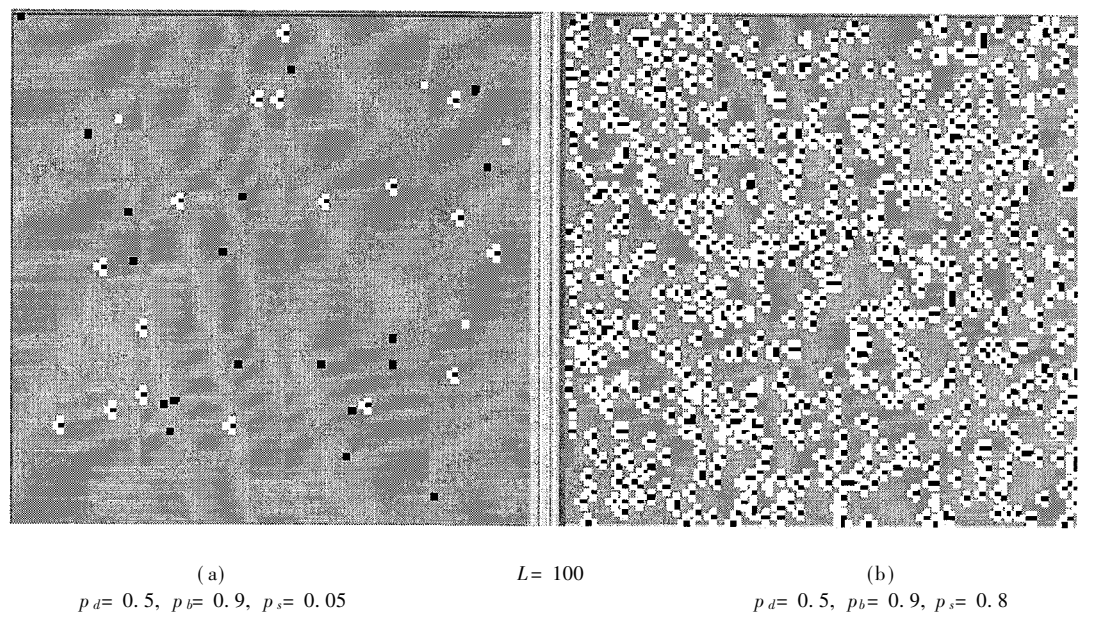


图 2 经 5 次迭代的状态分布图

其中灰色代表易感者, 白色代表潜伏期带菌者, 黑色代表得病患者

3.2 $P_b \leq P_d$

当 (i,j) 的四个邻居为病人时, (i,j) 处的易感者被传染得病的概率最大. 最大概率为

$$P_{\max} = 4P_b - 6P_b^2 + 4P_b^3 - P_b^4.$$

显然 P_{\max} 为 P_b 的增函数 $(0 \leq P_b \leq 1)$.

若 $P_e(i,j,t+1) = P_{\max} < P_d$, 则 SARS 无法传播, 由此可见, 减少 P_b 或增加 P_d 都有利于控制 SARS 的传播. 记 P_{b0} 为 $P_{\max} = P_d$ 的解, 则 $P_b < P_{b0}$ 时, SARS 传不开.

下面讨论 $P_{b0} \leq P_b \leq P_d$ 时的情形.

此时,对给定人群规模 $L \times L$, 其中的初始带菌者 N 达到一临界值时, SARS 才可能在整个人群中传开, 记该临界值为 $N(L)$. 取 $P_d = 0.5, P_b = 0.5, P_s = 0.4$, 得表 1.

表 1 人群规模与临界值

规模 $L \times L$	25 × 25	50 × 50	75 × 75	100 × 100	125 × 125	150 × 150	175 × 175	200 × 200
临界值	2	6	13	20	32	48	65	85

由表1 可知, 临界值 $N(L)$ 与 $L \times L$ 有非常好的线性关系, 在上述参数条件下, 有

$$N(L) = 0.2643 + 0.0021L \times L$$

即传播开的临界值与人群规模为线性增长关系.

在临界值处, SARS 传播开的速度与人群规模有关.

取 $P_d = 0.5, P_b = 0.5, P_s = 0.4$, 感染者和得病患者在人群中超过 95% 时的平均演化步数为 T (10 次实验的平均值), 得表 2.

表 2 不同规模人群在临界值处传播开的步数

规模 $L \times L$	25 × 25	50 × 50	75 × 75	100 × 100	125 × 125	150 × 150	175 × 175	200 × 200
T	98	162.22	203	220.2	220.4	235.17	248.6	230.875

从表2 可见, 在临界值处, 规模较小时, 疾病传开速度基本上是随着人群规模而增加的. 但当人群规模较大时, 传播开的速度几乎相同, 这一点是有警示意义的.

对给定的人群规模 $L \times L$, 只要初始带菌者 N 大于其对应的临界值, 则 SARS 就会传开且对传播速度有影响. 取 $P_d = 0.5, P_b = 0.5, P_s = 0.4$, 带菌者与得病总人数超过 95% 时对应的平均演化步数见表 3, 表 4.

表 3 $L= 50$ 时不同 N 值传播开的步数

N	6	46	86	126	166	206	246	286	326	366	406	446	486
T	162	27	15	12	10	9	8	7	6	6	6	5	5

表 4 $L= 200$ 时不同 N 值传播开的步数

N	85	125	165	205	245	285	325	365	405	445	485
T	231	111	95	75	62	56	49	45	39	38	35

从表3 和表4 可见, 当初始带菌者刚超过临界值时, 可大幅度的减少传播开的时间, 由此可见控制传染源的重要性. 而 N 大到一定程度之后, 其传播开的速度是基本不变的结果, 也为人们不必惊慌提供了理由.

3. 3 临界值 $N(L)$ 与 P_b, P_d 的关系

对给定的规模 $L \times L$, 我们讨论 $(P_b, P_d) \in \{(P_b, P_d) | 0 \leq P_b, P_d \leq 1\}$ 时对临界值的影响. 若 $P_b > P_d$, 则临界值为 1; 若 $P_b < P_d$ 时, SARS 无法传播开, 临界值为 $L \times L$.

记 $A = \{(P_b, P_d) | 0 \leq P_b, P_d \leq 1 \text{ 且 } P_{b0} \leq P_b \leq P_d\}$, 取 $L = 100, P_s = 0.5P_b$, 经模拟得下述结果:

i. 对 A 中任一点 (P_b, P_d) , 都存在相应的临界值, 在该临界值处, SARS 能在整个群体

中传开。

ii. 不同 (P_b, P_d) 对应的临界值介于 19 人到 23 人之间, 变化范围很小. 基本上可表述为对给定规模的群体, 若存在临界值能使 SARS 传开, 则传开的临界值基本不变. 即对 A 中的点, P_b 最小, P_d 最大对应的临界值与 $P_b = P_d$ 时的临界值基本相同. 这说明只要人们的抵抗能力没有增强到一定程度且疾病的传染能力没降到一定程度时, 疾病都有可能爆发, 盲目乐观是不可取的.

临界值 $N(L)$ 与 P_b, P_d 的关系见图 3.

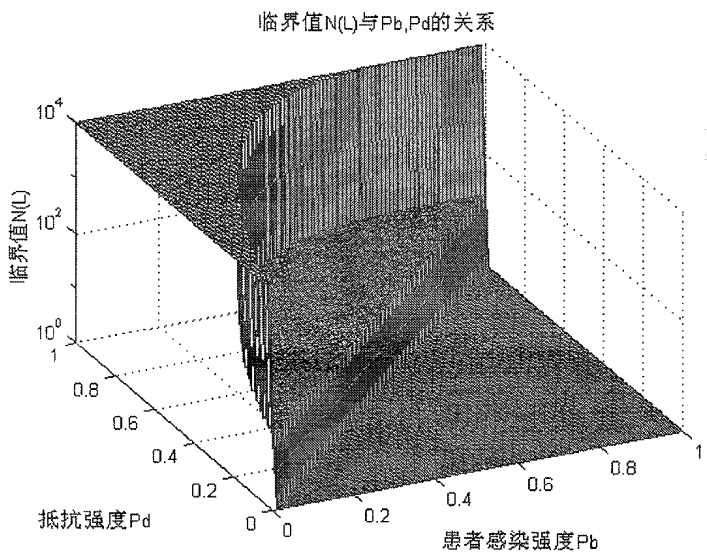


图3 $L = 100, P_s = 0.5P_b$, 临界值 $N(L)$ 与 P_b, P_d 的关系

4 结束语

本文建立了一个基于元胞自动机的 SARS 传播模型, 并得到了 SARS 传播的一些定性结论, 可加深对 SARS 传播规律的了解. 由于模型本身的灵活性, 利用此模型可进一步讨论如隔离作用, 重点传染源的影响等问题. 特别是与可改进医疗效果的事实相结合, 可进一步讨论 $P_d(i, j, t), P_s(i, j, t), P_b(i, j, t)$ 具有变化机制时的情形, 这样可望得到更深刻的结果.

参考文献:

[1] ROTA PA, *et al.* Characterization of a Novel Coronavirus Associated with Severe Acute Respiratory Syndrome[EB]. Science. 1085952, Published Online May 1, 2003, 10: 1126.

[2] LIPSITCH M, *et al.* Transmission Dynamics and Control of Severe Acute Respiratory Syndrome[EB]. Science. 1086616, Published Online May 23, 2003, 10: 1126.

[3] RILEY S, *et al.* Transmission Dynamics of the Aetiological Agent of Sever Acute Respiratory Syndrome (SARS) in Hong Kong, The Impact of Public Health Interventions [EB]. Science. 1086478, Published online May 23, 2003 10: 1126.

[4] Durye M, Caraco T, Gardner G, *et al.* Population dispersion and equilibrium infection frequency in a spatial epidemic[J]. Physic D, August, 1999, 20, 132(4): 511—519.

[5] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 1993.

[6] Ahmed E, Agiza HN, Hassan SZ. On modeling hepatitis B transmission using cellular automata[J]. Journal of

Statistical Physics, 1998, 92, Nos 3/4.

- [7] WOLFRAM S. Computation Theory of Cellular Automata, in: Cellular Automata and Complexity[M]. Addison Wesley, Reading, MA, 1994. 159—202 Originally published: Comm Math Ploys, 1984, 96: 15—57.
- [8] AHMED E, AGIZA HN. On modeling epidemics Including latency, incubation and variable susceptibility[J]. Physica A, May 1, 1998, 253(1—4): 347—352.
- [9] MANIATTY, *et al.* Population dispersion and equilibrium infection frequency in a spatial epidemic[J]. Physica D, August 20, 1999, 132(4): 511—519.
- [10] MARTINS, *et al.* A cellular automata model for citrus variegated chlorosis[J]. Physica A, June 1, 2001, 295(1—2): 42—48.

A Cellular Automata Model for SARS Spread

HE Ming-feng^{1,2}, DENG Cheng-rui²

(1. Department of Applied Mathematic, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, China)

(2. The Institute of University Students Innovation, Dalian University of
Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: According to locality and latent quality of SARS, people's contact is usually limited in neighboring areas and epidemics spread individually; a model for SARS that make use of cellular automata (CA) is proposed in this passage. CA model, which is dispersed in time and space, is based on local areas and update system simultaneously. The crowds are divided into four types: health, latent, diseased, immunity. Health people's resist, latent people or diseased people's spreading ability and the numbers of the crowds are taken into account. The result of simulation could provide some evidence for controlling SARS from spreading dynamic view.

Keywords: system model; cellular automata; simulation; SARS; epidemics