1000-9825/2001/12(04)0628-05 ©2001 Journal of Software 软件学报 Vol.12, No.4

基于遗传算法求解约束优化问题的一种算法*

林 丹, 李敏强, 寇纪凇

(天津大学 系统工程研究所,天津 300072)

E-mail: ling@public.tpt.tj.cn

http://www.tju.edu.cn

摘要: 在用遗传算法求解约束优化问题时,处理好约束条件是取得好的优化效果的关键.通过考虑遗传算法和约束优化问题的某些特点,提出将直接比较方法和在进化群体中自适应地保持不可行解比例的策略相结合来处理约束条件的一种新方法,并将该方法结合到通用的遗传算法中.数值实验显示了这种方法的有效性.

关键词: 约束优化问题;遗传算法;罚函数法;FPDC(fixed proportion and direct comparison)方法

中图法分类号: TP18 文献标识码: A

科学和工程领域中的许多优化问题最终可以归结为求解一个带有约束条件的函数优化问题.对于约束优化问题,已有的许多算法[1]都基于梯度的概念,只适用于目标函数和约束可微的情形,而且一般只能保证求到局部最优解.由于遗传算法(genetic algorithms,简称GA)[2]不要求目标函数和约束是可微的,同时,GA能以较大概率求得全局最优解,因此,它成为求解约束优化问题的一个强有力的工具.

当用GA求解约束优化问题时,如何处理约束条件是得到好的优化结果的关键.针对一大类约束优化问题在约束边界上取得最优点的特性,并结合GA本身的特点,本文引入了比较个体优劣的一个新准则以实现直接比较方法,同时提出了自适应保持群体中不可行解比例的策略,二者相结合得到了处理约束条件的FPDC(fixed proportion and direct comparison)方法,并将这种方法结合到通用GA中,得到了求解约束优化问题的一种新算法.

1 处理约束条件的罚函数类方法

一个带有约束条件的函数优化问题可以写成如下形式:

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} g_j(x)\le 0, & j=1,\dots,q, \\ h_j(x)=0, & j=q+1,\dots,m, \\ x_i^l\le x_i\le x_i^u, & i=1,\dots,n. \end{cases} \tag{1}$$

这里,$x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ 是 n 维实向量,$f(x)$ 为目标(适应值)函数,g_j 表示第 j 个不等式约束,h_{q+p} 表示第 p 个等式约束,变量 x_i 在区间 $[x_i^l, x_i^u]$ 中取值.用 $S=\prod_{i=1}^{n}[x_i^l, x_i^u]$ 表示搜索空间,S 中所

---

* 收稿日期: 1999-09-07; 修改日期: 2000-06-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69974026)

作者简介: 林丹(1968-),男,福建福州人,博士,讲师,主要研究领域为进化计算,人工智能;李敏强(1965-),男,河北无极人,教授,博士生导师,主要研究领域为系统工程与信息系统,进化计算,人工智能;寇纪凇(1947-),男,上海人,教授,博士生导师,主要研究领域为管理科学,系统决策,计算机工程,人工智能.

有满足约束条件的可行解构成的可行域记为 $F\subseteq S$.

用 GA 来求解约束优化问题(1) 时, 目前使用最广泛的处理约束条件的方法是基于罚函数的罚函数类方法[3]. 一般的罚函数类方法普遍存在一个缺点, 即加上罚因子和罚函数项后生成的新目标函数 $F(x)$ 的最优解依赖于罚因子的选择. 当罚因子取得过小时, 可能造成 $F(x)$ 的最优解不是 $f(x)$ 的最优解的问题; 而罚因子取得过大, 则可能在可行域 F 外造成多个局部最优解, 给搜索增加难度. 对于要解决的约束优化问题, 事先确定适当的罚因子是很困难的, 往往需要通过多次试验来不断进行调整.

分离方法[4]是一种特殊的罚函数方法, 通过设计特定的罚函数, 使得任一可行解优于任一不可行解. 这种方法同样存在罚因子的选择问题. 最近, 文献[5]进一步将分离方法的思想与 GA 中广泛使用的竞争(tournment) 选择方法相结合, 引入了不需要罚因子而直接比较个体优劣的作法, 即对于两个给定的解个体, 当两个解个体都可行的时候, 通过比较它们的适应值 $f(x)$ 来判断优劣; 当二者之中有一个可行而另一个不可行时, 则无条件地认为可行解的个体为优; 当这两个解个体都不可行时, 则根据它们所对应的作为违反约束的度量的罚函数值来直接判定它们的优劣, 违反约束越小的个体越好. 这样做既可以避免选择罚因子, 同时也达到了使任一可行解个体优于任一不可行解个体的目的. 我们称这种处理约束的方法为直接比较(direct comparison) 方法, 简记为 DC 方法.

2 基于 GA 求解约束优化问题的 FPDC 方法

在现实中存在一大类约束优化问题, 其最优解位于约束边界上或附近, 即在最优点处不等式约束的全部或大部分取为等号. 对于这类问题, 当目标函数 f 连续时, 在最优解附近的不可行解的适应值(用 f 计算) 很可能优于位于可行域 F 内部的一个可行解的适应值. 无论是从适应值本身还是从与最优解的相对位置考虑, 这样的不可行解对找到最优解都是很有帮助的. 鉴于 GA 是一种群体搜索策略, 从提高优化效率的角度来看, 让一部分接近边界的不可行解与可行解按照它们的适应值(用 f 计算) 进行比较以便在群体中保留一定比例的不可行解个体是很有好处的.

尽管分离方法和 DC 方法在许多约束优化问题上取得了好的结果[4,5], 但处理这类约束优化问题时还存在不足之处, 因为如果让所有可行解个体无条件地优于不可行解个体, 则在群体中很难保持一定比例的不可行解个体, 从而无法利用这类优化问题的特性, 并发挥不可行解的作用.

当然, 由于我们的最终目的是求得可行解, 在群体中保持不可行解是为了更好地搜索可行的最优解, 因此, 将不可行解的比例控制在一个适当的水平是必要的. 由于 GA 的进化过程是一个动态的自适应过程, 相应的控制策略也应当设计成是自适应的.

基于以上考虑, 我们提出了一种新的约束处理方法, 它提供了一个个体比较准则来实现 DC, 同时给出在群体中保持固定比例的不可行解个体的自适应策略.

2.1 比较个体优劣的准则

考虑如下定义的一族罚函数 $\{f_j(x)\}$:

$$f_j(x)=\begin{cases}\max\{0, g_j(x)\}, & \text{如果 } 1\leq j\leq q,\\ |h_j(x)|, & \text{如果 } q+1\leq j\leq m,\end{cases}$$

对任一个体 x, 定义 $viol(x)=\sum_{j=1}^{m} f_j(x)$, 则 $viol(x)$ 的值刻画了个体 x 与约束边界的接近程度.

比较两个个体优劣的准则为: 对事先给定的常数 $\epsilon>0$,

(1) 当两个个体 x 和 x 都可行时, 比较它们之间的适应值 $f(x)$ 和 $f(x)$, 适应值小的个体为优

(对最小化问题);

(2) 当两个个体 x 和 x' 都不可行时,比较 $viol(x)$ 和 $viol(x')$, $viol$ 小的个体为优(最大化和最小化问题);

(3) 当 x 可行而 x' 不可行时,如果 $viol(x')\leq\epsilon$,比较它们之间的适应值 $f(x)$ 和 $f(x')$,适应值小的个体为优(对最小化问题);否则, x 为优.

2.2 保持固定比例不可行解个体的自适应策略

显然, ϵ 越大,群体中不可行解的比例就可能越高. 为了将不可行解的比例保持在一个固定的水平 $p>0$,我们引入如下自适应调整 ϵ 的策略:

对给定正整数 K,从群体中产生可行解的第1代起,每进化 K 代以后,计算出在这 K 代的每一代中不可行解在群体中的比例,并按下式将 ϵ 的值修正为 ϵ':

$$\epsilon'=\begin{cases}1.2\cdot\epsilon & \text{如果所有比例都}<p\\ 0.8\cdot\epsilon & \text{如果所有比例都}>p.\\ \epsilon & \text{其他}\end{cases} \tag{2}$$

将这种结合了第2.1节中的比较个体优劣的准则与本节中的自适应策略的约束处理方法称为固定比例——直接比较方法,简记为FPDC方法.

2.3 FPDC 方法与 GA 的结合

将FPDC约束处理方法与通用的GA结合,就得到了一种基于GA的求解约束优化问题的新算法,简记为FPDC-GA. 用FPDC-GA来求解问题(1)的过程可描述如下:

Step 1. 给定各个参数值,包括 ϵ, p 和 K 的值. 代数 $gen=0$,随机生成初始化群体 $P(0)$,计算每个个体的适应值和 $viol$ 值,判断有无可行解,计算不可行解的比例.

Step 2. 当终止条件不满足时,反复执行Step 3～Step 8.

Step 3. 令 $gen=gen+1$.

Step 4. 根据适应值、$viol$ 值和 ϵ,按照第2.1节中的比较准则,用竞争选择方法从 $P(gen-1)$ 中选择出群体 $P(gen)$.

Step 5. 根据交叉概率 p_c 对 $P(gen)$ 中的个体进行交叉运算,并将产生的子个体替代父个体.

Step 6. 根据变异概率 p_m 对 $P(gen)$ 中的个体进行变异运算.

Step 7. 计算 $P(gen)$ 中个体的适应值和 $viol$ 值,判断有无可行解,计算不可行解的比例.

Step 8. 在群体中第1次出现可行解后,每隔 K 代,按照公式(2)修正 ϵ 的值.

3 数值实验

3.1 测试函数与实验设置

一个被称为"Keane's bump"[6]的优化问题引起了人们广泛的兴趣,该问题的定义如下:

$$\min f(x)=\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\cos^4(x_i)-2\prod_{i=1}^{n}\cos^2(x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}ix_i^2}}\right|,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_i\leq 7.5n,\\ \prod_{i=1}^{n}x_i\geq 0.75,\\ 0\leq x_i\leq 10,\quad i=1,\ldots,n.\end{cases}$$

本文只讨论维数 $n=20$ 的情形, 这时, 该约束问题的最优值为 0.803 510 67, 最优点落在边界 $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0.75$ 上.

对于这个问题, 文献[6]利用并行 GA 求得的最好结果约为 0.76. 根据文献[7]中的报告, 用依赖于罚因子的所有罚函数类方法(包括分离方法)求解的效果都很不理想. 为此, Michalewicz 特别针对这个问题设计了几何交叉(geometrical crossover)算子[7], 并取得了理想的结果, 但是他的方法不便推广到一般情形.

我们采用基于实数编码的 FPDC-GA 来求解这个问题, 其中群体大小设为 100, 使用算术(arithmetical)和启发(heuristic)交叉算子, 交叉概率都为 0.20; 使用一致(uniform)、边界(boundary)和多重非一致(multinonuniform)变异算子, 变异概率都为 0.08. 关于这些算子的具体定义可参看文献[8]. 竞争选择方法的竞争规模取为 2, p 取值为 0.2, ϵ 的初值取为 0.1, 每隔 $K=5$ 代调整一次 ϵ 的值. 在每一次实验中 GA 共运行 4 000 代.

3.2 计算结果与分析

表 1 给出了用基于 DC 方法的 GA(简记为 DC-GA)和 FPDC-GA 求解上述问题时, 在 10 次实验中分别求得的最优解.

Table 1 Results of DC-GA and FPDC-GA
表 **1** DC-GA 和 FPDC-GA 的求解结果

Method①	Best fitness value②					S·T·D③
DC-GA	0.713 9	0.711 6	0.679 0	0.664 0	0.662 3	0.025 1
	0.661 7	0.658 5	0.655 8	0.650 5	0.637 1	
FPDC-GA	0.802 7	0.802 2	0.802 0	0.801 7	0.797 6	0.005 6
	0.795 2	0.794 0	0.792 3	0.790 1	0.787 2	

①方法, ②最优适应值, ③标准差.

其中最好的结果 0.802 747 32 在 $x=$ (3.175414, 3.129128, 3.100874, 3.062828, 3.027425, 2.964641, 2.964726, 2.965231, 0.461561, 0.512311, 0.484262, 0.449026, 0.467811, 0.453618, 0.532093, 0.498396, 0.440404, 0.445324, 0.408360, 0.435791) 处取得.

从表 1 中可以看出, 与 DC-GA 相比, FPDC-GA 搜索到高性能解的能力, 即它的效率有明显的改进, 所得到的最优结果 0.802 7 也是令人满意的. 同时, 以 10 个实验结果的标准差来衡量, FPDC-GA 的稳健性也大大优于 DC-GA.

同时可以注意到, FPDC 方法既便于与 GA 结合并实施, 又具有很强的通用性, 可应用于我们所讨论的一大类约束优化问题.

4 结束语

处理好约束条件是使用 GA 求解约束优化问题时所面临的一个关键问题. 本文结合 GA 的群体搜索特性, 并考虑到一类约束问题在边界上取得最优解的特点, 引入比较个体优劣的准则来发挥靠近边界的较优不可行解的作用, 并且引入自适应保持不可行解在群体中比例的策略, 得到了基于 GA 求解约束优化问题的一种新算法. 数值实验表明, 它是一种便于实现、通用性强、高效稳健的方法, 为利用 GA 求解一大类约束优化问题提供了一条可行的途径.

References:

[1] Himmelblau, D.M. Applied Nonlinear Programming. New York: McGraw-Hill, Inc., 1972.

[2] Goldberg, D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Readings, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[3] Michalewicz, Z., Schoenauer, M. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. Evolutionary Computation Journal, 1996, 4(1): 1～32.

[4] Powell, D., Skolnick, M. Using genetic algorithms in engineering design optimization with nonlinear constraints. In: Forest, S., ed. Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 1993. 424～430.

[5] Deb, K., Agrawal, S. A niched-penalty approach for constraint handling in genetic algorithms. In: Montana, D., ed. Proceedings of the ICANNGA-99. Portoroz, Slovenia, 1999. 234～239.

[6] Schoenauer, M., Michalewicz, Z. Boundary operators for constrained optimization problems. In: Baeck, T., ed. Proceedings of the 7th International Conference on Genetic Algorithms. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 1997. 322～329.

[7] Michalewicz, Z., Nazhiyath, G., Michalewicz, M. A note on usefulness of geometrical crossover for numerical optimization problems. In: Angeline, P., Baeck, T., eds. Proceedings of the 5th Annual Conference on Evolutionary Programming. Cambridge, MA: MIT Press, 1996. 325～331.

[8] Michalewicz, Z. Genetic Algorithms+ Data Structures= Evolution Programs. 3rd ed., New York: Springer-Verlag, 1996.

A GA-Based Method for Solving Constrained Optimization Problems*

LIN Dan, LI Min-qiang, KOU Ji-song

(*Institute of Systems Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

E-mail: ling@public.tpt.tj.cn

http://www.tju.edu.cn

Abstract: In trying to solve constrained optimization problems using genetic algorithms, the method to handle the constraints is the key factor to success. In this paper, some features of GA (genetic algorithms) and a large class of constrained optimization problems are taken into account and a new method called Fixed Proportion and Direct Comparison (FPDC) is proposed, which combines direct comparison method and the strategy to keep a fixed proportion of infeasible individuals. It has been successfully integrated with the ordinary GA. Numerical results show that it is a general, effective and robust method.

Key words: constrained optimization; genetic algorithm; penalty function method; FPDC (fixed proportion and direct comparison) method

* Received September 7, 1999; accepted June 20, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 69974026