

## 2017年暑期数模培训

# 偏微分方程模型及其快速计算

中南大学 数学与统计学院

2017年8月10日

# 目录

- 1 追赶问题
- 2 交通问题
- 3 带年龄层次结构的人口模型
- 4 SARS传染病建模、求解与分析
- 5 快速计算方法

## 引例: 直线上的追及模型

1/115

我们以各种不同身高的人在同一直线上前进的追赶问题作为模型, 来开始我们的讨论. 假设人的数目比较多, 可以视为一个连续模型, 我们将用函数 $u(t, x)$ 来表示 $t$ 时刻位于位置 $x$ 处(或其附近)的人的身高.

**问题: 函数 $u(t, x)$ 满足何样的方程(或关系)?**

## 引例：直线上的追及模型

2/115

假设所有的人以同一常数**速度** $a$ **沿着** $x$ **轴正方向运动**，于是在任一直线 $x - at = \text{常数}$ 上， $u(t, x)$ 对应于同一个人取常数值，从而沿该方向对 $t$ 的导数满足

$$\frac{du(t, x)}{dt} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0,$$

从而得到 $u(t, x)$ 应该满足的方程为

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

这是一个最简单的一阶常系数线性偏微分方程，它具有行波解。

## 引例: 直线上的追及模型

3/115

我们将(1)的解写为

$$u(t, x) = f(x - at),$$

其中 $f$ 为任意的单变量函数. 于是

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时, } u = u_0(x), \quad (2)$$

也就是

$$u = u_0(x - at). \quad (3)$$

这说明: 人头的曲线 $u = u(t, x)$ 的形状不随 $t$ 的变化而改变, 只是以速度 $a$ 向右方移动.

## 引例: 直线上的追及模型

4/115

我们要考虑比较一般的情况: 速度 $a$ 不再是常数, 它将随着时间 $t$ 以及空间坐标 $x$ 的变化而改变, 即就是 $a = a(t, x)$ . 这时每一个人的运动规律由如下的常微分方程刻画:

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x), \quad (4)$$

带初始条件

$$t = 0 : x = \alpha, \quad \alpha \text{ 表示此人在数轴上的初始位置.} \quad (5)$$

记(4)-(5)的解为 $x = x(t)$ .

## 引例: 直线上的追及模型

5/115

沿着(4)的任一积分曲线

$$x = x(t), u = u(t, x(t)) = \text{常数},$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + a(t, x(t)) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 引例: 直线上的追及模型

6/115

我们看到, 当初始值不同(即 $\alpha$ 不同的时候), 所有的这些积分曲线(特征线)将充满 $(t, x)$ 平面上的一个区域, 故而 $u = u(t, x)$ 满足如下的方程

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

这是一个一阶线性(但不是常系数)的偏微分方程, 它可能还具有激波解.



# 模型求解

7/115

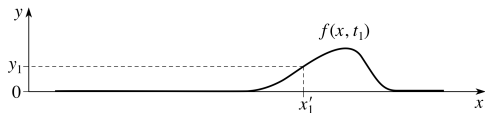
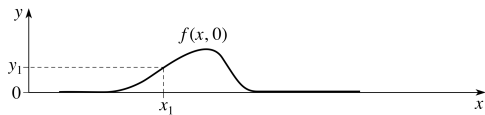
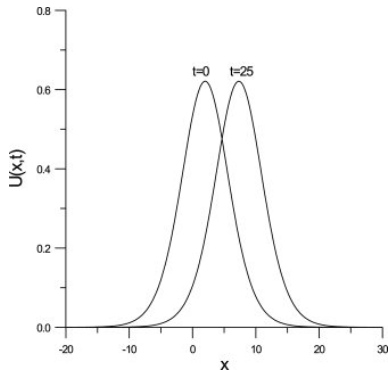
如果给定初始时刻的人头曲线(2)作为初始条件, 则(6)的解(即任一时刻 $t$ 的人头曲线)可由特征线方法决定:

- 先求解常微分方程边值问题(4)-(5), 得到过 $(0, \alpha)$ 点的特征线为 $x = x(t; \alpha)$
- 在 $x = x(t; \alpha)$ 上 $u$ 的数值为常数,  $u = u_0(\alpha)$
- 从 $x = x(t; \alpha)$ 中求解 $\alpha = \alpha(t, x)$ , 代入 $u_0(\alpha)$
- 最终得到的 $u = u_0(\alpha(t, x))$ 为边值问题(6)-(2)的解

我们可以看到: 人头曲线的形状将随着时间连续地变形.

## 模型求解

8/115



## 模型求解

9/115

事实上, 我们有

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t; \alpha) = a(t, x(t; \alpha)), \\ t = 0 : \quad x(0; \alpha) = \alpha. \end{cases}$$

关于 $\alpha$ 求导一次可得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t; \alpha) = \frac{\partial a}{\partial x}(t, x(t; \alpha)) \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t; \alpha), \\ t = 0 : \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha}(0; \alpha) = 1. \end{cases}$$

## 模型求解

10/115

因此, 在解 $x = x(t; \alpha)$ 存在的范围内, 恒成立

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t; \alpha) = e^{\int_0^t \frac{\partial a}{\partial x}(\tau; x(\tau; \alpha)) d\tau} > 0.$$

从而对任何固定的 $t \geq 0$ , 恒可由 $x = x(t; \alpha)$ 解出 $\alpha = \alpha(t, x)$ .

## 进一步的讨论

11/115

上面的讨论**没有考虑前进的速度和身高的关系**, 因此得到的都是线性方程, 解都是线性波, 其特点是**后面的人永远都赶不上前面的人**.

实际上, 步行的速度因人而异, 理所应当假设其与身高存在一定的关系. 为了便于讨论, 我们取比例系数为  $k = 1$ , 即

$$a(t, x) = k \cdot u(t, x) = u(t, x),$$

于是模型(6)推广为

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + u(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

称为**一阶拟线性偏微分方程**.

## 进一步的讨论

12/115

设 $u = u(t, x)$ 为(7)的连续解. 类似地, 求解

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x) \quad (8)$$

来获得特征线, 并由方程(7)可知, 沿任一特征线成立

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

从而 $u = \text{常数}$ . 于是由(8)知任一特征线均为直线, 在其上 $u$ 取常数值, 且此时特征线的斜率 $\frac{dx}{dt}$ 就是该常数.

## 进一步的讨论

13/115

于是, 若已知初始时刻的人头曲线形状(2), 则可利用上面求出的特征线的性质决定后续时刻的人头曲线, 即求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ t = 0 : u = u_0(x) \end{cases}$$

的解  $u = u(t, x)$ .

## 进一步的讨论

14/115

事实上, 过 $(0, \alpha)$ 点的特征线应为

$$x = u_0(\alpha)t + \alpha. \quad (9)$$

在其上

$$u = u_0(\alpha). \quad (10)$$

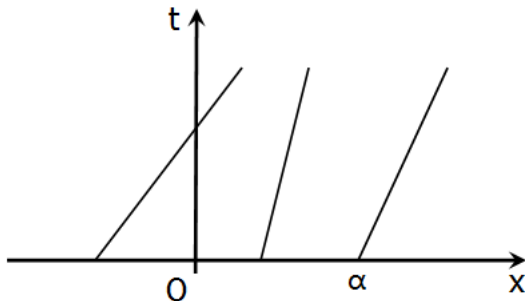
当 $\alpha$ 变动时, 这些特征线必布满 $(t, x)$ 平面上初始 $x$ 轴近旁的一个区域(见下页图), 在每一特征线上的解已知. 因此, 就可可在一定范围内决定解. 具体来说, 可从方程(9)中反解出 $\alpha = \alpha(t, x)$ , 再代入(10)式, 就得到所求的解 $u = u_0(\alpha(t, x))$ .



## 进一步的讨论

15/115

特征线分布图



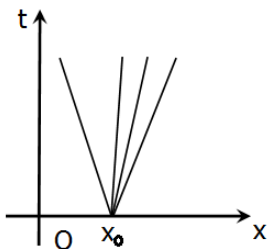
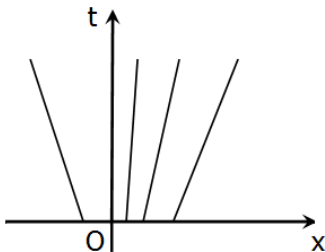
# 进一步的讨论

16/115

如果所给的初始条件满足

$$u'_0(x) \geq 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty),$$

即初始时刻, 高个子在前, 矮个子在后, 则此时特征线族  $x = u_0(\alpha)t + \alpha$  发散. 此种情形下**永远不会产生追赶上的现象, 而且人群越来越分散, 相应的波称为疏散波**, 见下图(左).



## 进一步的讨论

17/115

如果很多人集中在一起(见上页图(右)), 但仍然是高个子在前, 矮个子在后, 由上述知人群将很快地分散开来. 这时可以近似地看成一批人集中在 $x = x_0$ 处. 从这一点出发的一束特征线上,  $u$ 为常数, 对应于一个固定的人. 从而

$$x = u_0(\alpha)t + x_0, \quad \alpha \in [a, b],$$

其中 $u_0(\alpha)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $u'_0(\alpha) > 0$ ; 而在每一特征线上仍有 $u = u_0(\alpha)$ . 于是, 解可以写成

$$u = \frac{x - x_0}{t}$$

的形式. 点 $(0, x_0)$ 为解的多值性奇点. 当 $t > 0$ 时, 解连续可微.

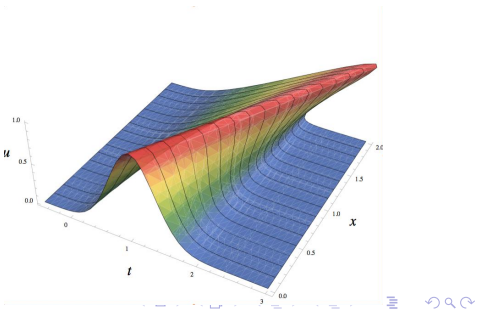
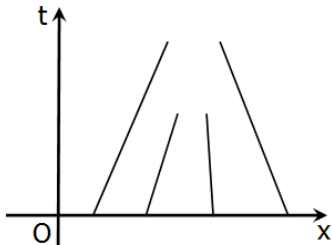
# 进一步的讨论

18/115

另一种情形则是相对应的. 如果所给的初始条件满足

$$u'_0(x) \leq 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty),$$

即初始时刻, 高个子在后, 矮个子在前, 则此时特征线族  $x = u_0(\alpha)t + \alpha$  汇聚. 此种情形下会产生追赶上的现象, 而且人群越来越密集, 相应的波称为压缩波.



## 进一步的讨论

19/115

出现压缩波时, 初始的波形

$$u(0, x) = u_0(x)$$

即使比较平坦(见上页图(右)), 也将变得越来越陡峭. 此时, 在 $t = 0$ 附近的局部范围内仍可有连续的人头曲线或者解 $u = u(t, x)$ , 但最终要发生**解的破裂**. 最早产生追赶上的时刻 $t^*$ 及地点 $x^*$ 可由特征曲线族

$$\begin{cases} x = u_0(\alpha)t + \alpha, \\ u'_0(\alpha)t + 1 = 0, \end{cases} \quad (\text{思考一下为什么?})$$

中消去 $\alpha$ 得到包络线的方程后, 求使 $t$ 最小的点而得 $(t^*, x^*)$ .

## 进一步的讨论

20/115

还可以考虑更加一般的情况：即步行速度 $a$ 不一定正比于身高 $u$ ，而是关于 $u$ 的某一单调增加的函数 $a = a(u)$ ，其中 $a'(u) > 0$ ，则有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ t = 0: \quad u = u_0(x). \end{cases}$$

这样的模型更接近实际问题，但分析起来更加困难。

## 进一步的讨论

21/115

还可以考虑更加一般的情况: 即步行速度 $a$ 不一定正比于身高 $u$ , 而是关于 $u$ 的某一单调增加的函数 $a = a(u)$ , 其中 $a'(u) > 0$ , 则有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ t = 0: u = u_0(x). \end{cases}$$

这样的模型更接近实际问题, 但分析起来更加困难. 还可以讨论

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ t = 0: u = u_0(x). \end{cases}$$

## 引例: 连续车流模型

22/115

我们来考察在高速公路上行驶的交通车辆的流动问题. 设以 $x$ 轴表示该公路,  $x$ 轴正向表示车辆前进的方向, 我们要研究何时该公路会发生交通堵塞以及如何避免这类问题的可能方法.

用连续的观点来看, 设 $u(t, x)$ 为时刻 $t$ 时交通车辆按 $x$ 正方向分布的密度. 我们将探讨和建立 $u$ 满足的约束关系.

**问题: 函数 $u(t, x)$ 满足何样的方程(或关系)?**



## 引例：连续车流模型

23/115

设 $u(t, x)$ 为时刻 $t$ 时交通车辆按照 $x$ 轴正方向分布的密度. 即在时刻 $t$ , 在区间 $[x, x + dx]$ 中的车辆数等于 $u(t, x) \cdot dx$ . 再设 $q(t, x)$ 为车辆通过位置 $x$ 处的流通率, 则在时间段 $[t, t + dt]$ 中, 通过位置 $x$ 的车流量为 $q(t, x) \cdot dt$ .

进一步假设公路是封闭的, 则车辆数量将不发生改变: 时间段 $[t, t + dt]$ 中在区间 $[x, x + dx]$ 内的车辆数的增加量应该等于时间段 $[t, t + dt]$ 中通过 $x$ 的车流量减去时间段 $[t, t + dt]$ 中通过 $x + dx$ 的车流量, 即成立

## 引例: 连续车流模型

24/115

$$u(t + dt, x)dx - u(t, x)dx = q(t, x)dt - q(t, x + dx)dt.$$

如果 $u$ 和 $q$ 连续可微, 则

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (11)$$

## 引例: 连续车流模型

25/115

$$u(t + dt, x)dx - u(t, x)dx = q(t, x)dt - q(t, x + dx)dt.$$

如果 $u$ 和 $q$ 连续可微, 则

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (11)$$

- 如果 $q = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x}$ , 其中 $c$ 为常数, 那么

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x).$$

这是一个标准的扩散方程.

# 模型分析

26/115

从方程(11)可知

- 为了预报车辆密度 $u(t, x)$ 的变化规律, 必须知道 $q(t, x)$ 的情况.
- $q(t, x)$ 通常可以跟踪实测.

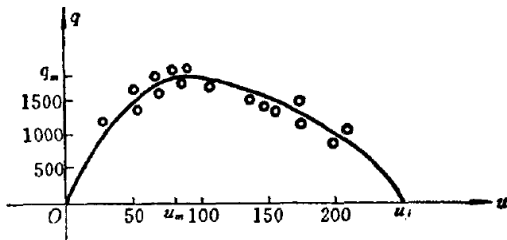
注意

- 方程(11)可以适用于其他的一维流动: 河流中污染物的浓度分布和流动; 一维细长杆中的热量流动; 直电线中电子的流动等等.
- 热传导问题中,  $q(t, x)$ 满足傅里叶实验定律:  $q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$ , 其中 $k$ 为常数.

# 模型分析

27/115

在某条高速公路上测得如下的 $u$ 与 $q$ 的关系



则可以看到如下事实:

- 当 $u$ 较小时, 随着 $u$ 的增加, 流通率 $q$ 也增加. 这是因为车辆流量随着车辆增加而增加;
- 当 $u$ 较大时, 随着 $u$ 的增加, 流通率 $q$ 反而减小. 这是因为车辆数太多时, 反而影响了流量.

## 模型分析

28/115

根据实测数据, 还需要用解析的方式给出  $q = q(u)$  的表达式. 一个比较简单的模式称为 **格林希尔兹 (Greenshield) 模型**. 它认为

$$q = a_f u \left( 1 - \frac{u}{u_j} \right), \quad u \leq u_j,$$

其中  $a_f$  为汽车的自由速度, 即整条公路上只有一辆汽车时的速度, 也可以认为是汽车的尽可能最大的速度,  $u_j$  为出现交通堵塞时的车辆密度. **这实际上是近似地用抛物线来拟合上图中的曲线**. 它在  $u = 0$  和  $u = u_j$  时为零, 而在  $u = \frac{u_j}{2}$  时达到最大值  $q_m$ , 于是

$$q_m = \frac{1}{2} a_f u_m.$$

## 模型分析

29/115

这样一来,

$$q = q(u) = -au(u - b) \quad (12)$$

其中  $a = a_f/u_j$ ,  $b = u_j$ . 然后(11)就推广为如下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial q(u)}{\partial x}(t, x) = 0, \quad (13)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (c - du) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0, \quad (14)$$

其中  $c = a_f$ ,  $d = 2a_f/u_j$ .

## 模型分析

30/115

为便于分析, 做一个未知函数的变换

$$V = c - du, \quad (15)$$

则(14)就转化为了熟悉的形式(见方程(7)), 且相应的初始条件为

$$t = 0: \quad V = V_0(x) = c - du_0(x), \quad 0 \leq u_0(x) \leq u_j. \quad (16)$$



## 模型分析

31/115

利用特征线理论, 类似地讨论可知

- (1) 沿任一特征线(求解 $dx/dt = V = c - du$ 而得),  $V$ (因而 $u$ )为常数, 特征线为直线. 但此时 $u$ 为常数, 并不仅指同一辆车, 而是指同一车辆密度.
- (2) 当 $u'_0(x) \leq 0$ 时, 即前面的车辆密度稀于后面的车辆密度, 就有 $V'_0(x) \geq 0$ , 因而特征线族是发散的, 在 $t \geq 0$ 上不会自身相交. 因此初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0, \\ t = 0: u = u_0(x), \quad 0 \leq u_0(x) \leq u_j \end{cases} \quad (17)$$

在 $t \geq 0$ 上存在连续可微解, 这对应于疏散波.

# 模型分析

32/115

利用特征线理论, 类似地讨论可知

- (3) 当  $u'_0(x) \geq 0$  时, 即前面的车辆密度大于后面的车辆密度, 就有  $V'_0(x) \leq 0$ , 因而特征线族是汇聚的, 这对应于压缩波. 此时特征线在  $t \geq 0$  后的某一时刻会自身相交. 在交汇点  $u$  不再是单值连续. 因此初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0, \\ t = 0: u = u_0(x), \quad 0 \leq u_0(x) \leq u_j \end{cases}$$

在特征线的包络上对应于  $t$  最小的点所给出的后续时间内不存在连续可微解.

## 模型分析

33/115

利用特征线理论, 类似地讨论可知

- (4) 一般的情形, 是前面两种情形的组合, 即疏散波和压缩波组合, 而在压缩波所在区域内将出现不连续性.
- (5) 由于沿着特征线“ $u = \text{常数}$ ”, 且只要初始值满足

$$0 \leq u_0(x) < u_j \quad (\text{即初始时刻没有交通堵塞}),$$

则以后车辆流动保持为连续的范围内存立  $0 \leq u_0(x) < u_j$ , 即不会出现交通堵塞.

- (6) 监控  $q(t, x)$  对交通调度具有现实意义.

# 人口问题的偏微分方程模型

34/115

回顾一些简单的常微分方程模型, 设 $p(t)$ 表示 $t$ 时刻某地区的人口总量.

- 马尔萨斯(Malthus)人口模型

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t), \quad a \text{ 为人口的净增长率.}$$

- 韦吕勒(Verhulst)人口模型

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap - \bar{a}p^2, \quad a \text{ 和 } \bar{a} \text{ 为生命常数, 且满足 } \bar{a} \ll a.$$

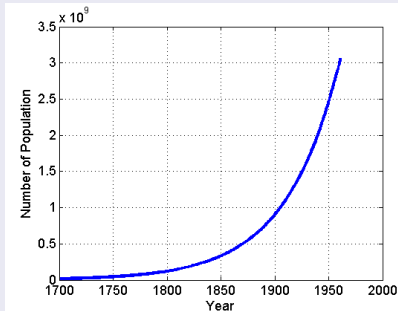
# 人口问题的偏微分方程模型

35/115

取1961年为 $t_0$ ,  $p_0 = 30.6$ 亿, 而1951–1961十年中每年人口净增长率 $a = 0.02$  (视为长期平均净增长率), 就有

$$p(t) = 3.06 \times 10^9 \times e^{0.02 \times (t-1961)}.$$

## 数值模拟



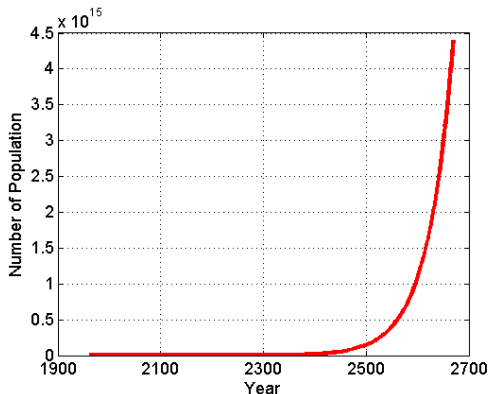
## 结论

运用上述公式计算1700–1961年间的人口, 和实际情况符合较好. 这段时期内, 地球上人口大约每35年增加一倍.

## 人口问题的偏微分方程模型

36/115

但如果对该模型**不加限制**的使用, 则会出现矛盾. 比如, 到2510年, 人口将达到 $2 \times 10^{14}$ 亿; 而到2670年, 人口将达到 $36 \times 10^{15}$ 亿, 这显然是不可能的.



# 人口问题的偏微分方程模型

37/115

因此, 马尔萨斯的这个模型并不完善, 从根本上来说是不合理的, 必须加以改进.

- 马尔萨斯(Malthus)人口模型(局限性太明显!)

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t), \quad a \text{ 为人口的净增长率.}$$

# 人口问题的偏微分方程模型

38/115

因此, 马尔萨斯的这个模型并不完善, 从根本上来说是不合理的, 必须加以改进.

- 马尔萨斯(Malthus)人口模型(局限性太明显!)

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t), \quad a \text{ 为人口的净增长率.}$$

- 韦吕勒(Verhulst)人口模型

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap - \bar{a}p^2, \quad a \text{ 和 } \bar{a} \text{ 为生命常数, 且满足 } \bar{a} \ll a.$$

可以看到: 当  $p$  较大时, 平方项不能忽略. 一般地, 一个国家越发达,  $\bar{a}$  的值越小.



# 人口问题的偏微分方程模型

39/115

于是, 考虑

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = ap - \bar{a}p^2, \\ p(t_0) = p_0. \end{cases}$$

分离变量积分, 则有

$$\int_{p_0}^p \frac{d\boldsymbol{r}}{a\boldsymbol{r} - \bar{a}\boldsymbol{r}^2} = t - t_0,$$

这意味着

$$a(t - t_0) = \ln \left( \frac{p}{p_0} \left| \frac{a - \bar{a}p_0}{a - \bar{a}p} \right| \right).$$

## 人口问题的偏微分方程模型

40/115

所以, 简单分析可知

- 若初值  $p_0 = \frac{a}{\bar{a}}$ , 则有解  $p \equiv \frac{a}{\bar{a}} = \text{常数}$ ; (为什么?)
- 若初值  $p_0 \neq \frac{a}{\bar{a}}$ , 则上式说明在  $t > t_0$  时, 恒成立

$$p(t) \neq \frac{a}{\bar{a}}.$$

但  $p(t_0) = p_0$ , 因此当  $t_0 \leq t < \infty$  时, 有

$$\frac{a - \bar{a}p_0}{a - \bar{a}p} > 0.$$

# 人口问题的偏微分方程模型

41/115

从而

$$a(t - t_0) = \ln \left( \frac{p(a - \bar{a}p_0)}{p_0(a - \bar{a}p)} \right).$$

即就是

$$\frac{p(a - \bar{a}p_0)}{p_0(a - \bar{a}p)} = e^{a(t-t_0)}.$$

所以

$$p \left( a - \bar{a}p_0 + \bar{a}p_0 e^{a(t-t_0)} \right) = p_0 a e^{a(t-t_0)}.$$

进一步就可以直接求解出 $p(t)$ .

## 人口问题的偏微分方程模型

42/115

稍作简化, 可得

$$p(t) = \frac{ap_0}{\bar{a}p_0 + (a - \bar{a}p_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

因此, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $p(t) \rightarrow \frac{a}{\bar{a}}$ . 这样, 不论初值  $p_0$  如何, 人口总数将趋近于固定值  $\frac{a}{\bar{a}}$ , 称为**饱和值**.

# 人口问题的偏微分方程模型

43/115

稍作简化, 可得

$$p(t) = \frac{ap_0}{\bar{a}p_0 + (a - \bar{a}p_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

因此, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $p(t) \rightarrow \frac{a}{\bar{a}}$ . 这样, 不论初值  $p_0$  如何, 人口总数将趋近于固定值  $\frac{a}{\bar{a}}$ , 称为**饱和值**. 简单计算还可知:

$$\begin{cases} \frac{d^2 p(t)}{dt^2} > 0, & \text{当 } p < \frac{a}{2\bar{a}} \text{ 时,} \\ \frac{d^2 p(t)}{dt^2} < 0, & \text{当 } p > \frac{a}{2\bar{a}} \text{ 时.} \end{cases}$$

这说明  $0 < p_0 < \frac{a}{\bar{a}}$  时,  $p$  的图形为  $S$  型.

# 人口问题的偏微分方程模型

44/115

## 主要缺陷

- 将群体中的每一个个体都视为同等地位来对待
- 没有区分动物的属性(高等动物和低等动物)
- 没有考虑年龄结构
- 没有考虑与年龄相关的出生率
- 没有考虑与年龄相关的死亡率
- 没有考虑物种的分类(如雄、雌)

## 人口问题的偏微分方程模型

45/115

我们将研究一个稳定社会中的人口发展过程. 设人口的数量不仅与时间 $t$ 有关, 还与年龄 $x$ 有关. 人口总数很大时可以建立连续模型, 以函数 $p(t, x)$ 表示人口在任意固定时刻 $t$ 按照年龄坐标 $x$ 的分布密度, 其意义如下

在时刻 $t$ , 年龄在 $[x, x + dx]$ 中的人口总数等于 $p(t, x)dx$ .

因此,  $t$ 时刻的人口总数为

$$P(t) = \int_0^{\infty} p(t, x) dx. \quad (18)$$

了解了函数 $p(t, x)$ , 就了解了在任一时刻人口按照年龄分布的状况, 也就知道了人口随着时间 $t$ 发展的规律.

## 人口问题的偏微分方程模型

46/115

如果不考虑死亡, 则对任何人来说, 都成立

“时间的增量 等于 年龄的增量.” 即  $\Delta t = \Delta x$ .

因此在时刻  $[t, t + dt]$ , 年龄在  $[x, x + dx]$  中的人数  $p(t + dt, x)dx$  应该等于在时刻  $t$ , 年龄在  $[x - dt, x + dx - dt]$  中的人数  $p(t, x - dt)dx$ , 从而

$$p(t + dt, x) = p(t, x - dt),$$

因此  $p(t, x)$  满足方程

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) = 0. \quad (19)$$



# 人口问题的偏微分方程模型

47/115

但实际上必须考虑死亡的影响. 年龄在 $[x, x + dx]$ 中的人口在时间段 $[t, t + dt]$ 中的死亡数可自然地假设与此年龄段人口 $p(t, x)dx$ 成正比, 并与时间区间长度成正比, 比例系数记为 $d(x)$ , 称为死亡率. 由于假设了社会是稳定的, 与年龄有关的死亡率 $d(x)$ 可以假设与时间 $t$ 无关. 则

在时刻 $t + dt$ , 年龄在 $[x, x + dx]$ 中的人数 $p(t + dt, x)$ 应等于在时刻 $t$ , 年龄在 $[x - dt, x + dx - dt]$ 中的人数 $p(t, x - dt)dx$ 减去在时间段 $[t, t + dt]$ 中, 年龄在 $[x - dt, x + dx - dt]$ 中的死亡数 $d(x - dt)p(t, x - dt)dxdt$ .

## 人口问题的偏微分方程模型

48/115

从而

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) = -d(x)p(t, x). \quad (20)$$

这是 $p(t, x)$ 满足的常系数一阶线性偏微分方程.

下面讨论 $p(t, x)$ 满足的定解条件

**初始条件** 设初始人口密度分布为 $p_0(x)$ , 即

$$t = 0 \text{ 时: } p = p_0(x). \quad (21)$$

**边界条件** 在推导方程时只考虑了死亡, 没有考虑出生, 而出生的婴儿数应该作为 $x = 0$ 的边界条件.

# 人口问题的偏微分方程模型

49/115

现在计算在时间段 $[t, t + dt]$ 中出生的婴儿总数. 我们假设社会中男女基本各半, 且男女按年龄的密度分布也是基本相等的, 同时假设适龄的男女都能及时婚配, 从而排除对影响生育率的不必要的干扰.

假设生育率为 $b(x)$ , 它与年龄 $x$ 有关, 其意义为

年龄在 $[x, x + dx]$ 中的人口数在时间段 $[t, t + dt]$ 中出生的婴儿数等于 $b(x) \cdot p(t, x) dx dt$ .

## 人口问题的偏微分方程模型

50/115

这样, 在时间段 $[t, t + dt]$ 中出生的

$$\text{婴儿总数} = \left( \int_0^{\infty} b(\xi)p(t, \xi)d\xi \right) dt,$$

注意其中的积分实际上是有限区间内的积分. 在时间  
段 $[t, t + dt]$ 中出生的婴儿总数应等于在年龄区间 $[0, dt]$ 中的人  
数 $p(t, 0)dt$ . 于是, 可得在 $x = 0$ 处的边界条件为

$$x = 0 : \quad p(t, 0) = \int_0^{\infty} b(\xi)p(t, \xi)d\xi. \quad (22)$$

# 人口问题的偏微分方程模型

51/115

定解问题(20)-(22)构成了我们需要的人口问题偏微分方程模型. 由于在边界条件(22)包含了未知数的积分, 这是一个泛函形式的边界条件, 因此定解问题(20)-(22)是一个**非局部的定解问题**.

下面我们将进行更细致的分析.

## 模型分析

52/115

设人的最大寿命为 $A$ , 于是年龄 $x$ 的变化范围为

$$0 \leq x \leq A.$$

而方程(20)的求解区域为

$$\{(t, x) : t \geq 0, 0 \leq x \leq A\}.$$

# 模型分析

53/115

初始条件和边界条件也要作对应的修改:

- 在区间 $[0, A]$ 上,  $p_0(x) \geq 0$ , 且适当光滑.
- 在区间 $[0, A)$ 上,  $d(x) \geq 0$ , 且适当光滑; 而当 $x \rightarrow A - 0$ 时,

$$d(x) \rightarrow 0, \text{ 使 } \int_0^x d(\xi) d\xi \rightarrow +\infty.$$

这个假设是和 $A$ 为人的最大年龄的假设匹配的.

当 $A \rightarrow A - 0$ 时, 死亡率应该迅速增长, 并应使所考察问题的解恒成立 $p(t, A) = 0$ .

- 设 $a$ 为可以生育的最低年龄( $a < A$ ), 于是在区间 $[0, A]$ 上,  $b(x)$ 适当光滑, 且成立

$$\begin{aligned} b(x) &\equiv 0, & \forall x \in [0, a]; \\ b(x) &\geq 0, & \forall x \in (a, A]. \end{aligned}$$

## 模型分析

54/115

这样, 模型(20)-(22)可转化为:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial p}{\partial x}(t, x) = -d(x)p(t, x), & t \geq 0, \quad 0 \leq x < A, \\ t = 0: \quad p = p_0(x), & 0 \leq x \leq A, \\ x = 0: \quad p(t, 0) = \int_a^A b(\xi)p(t, \xi)d\xi, & t \geq 0. \end{cases} \quad (23)$$

并引入如下的**相容性条件**:

$$p_0(A) = 0, \quad \text{以及} \quad p_{0(0)} = \int_a^A b(\xi)p_0(\xi)d\xi.$$



# 传染病ODE模型

55/115

我们以SARS为例, 探讨传染病动力学模型. 先回顾经典的传染病动力学的常微分方程模型.

考察传染病对人口分布的影响, 研究传染病的发展趋势和规律, 从而可以采用适当的措施来加以预防和控制. 现在, 利用数学方法来探究传染病的理论, 对它的发病机理, 动态过程和发展趋势加以研究, 已经逐渐成为应用数学研究中活跃的领域. 一些知名的期刊包括

- PNAS, Nature, Science
- Ecological Complexity; Mathematical Population Studies; 生物数学学报
- Mathematical and theoretical biology; Journal of Mathematical Biology

# 传染病ODE模型

56/115

考虑到传染病对人口的影响, 将整个人口分为三类:

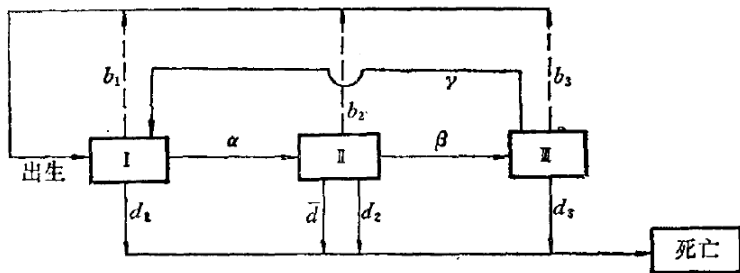
- (I) 正常人, 可以被感染者;
- (II) 患病者, 具有传染性;
- (III) 病愈者, 病愈者假设对该疾病具有免疫力.

第I类人可因为接受感染而变为第II类人, 第II类人可因治愈而变成第III类人(在一定时间段内具有免疫力), 而第III类人也可因失去免疫力而转变为第I类人. 此外, 除第II类人可因传染病而死亡外, 这三类人都可以因其他原因(年老, 其他疾病等)而死亡, 称为**自然死亡**.

## 传染病ODE模型

57/115

由于第III类人规定为病愈而具有免疫力者, 在第I类人中应包括: 病愈但失去免疫力者, 未患过此传染病者(其中包括新生儿, 尽管新生儿在一段时间内具有天然的免疫力). 因此, 我们给出一个更完整的三类人转化关系:



## 传染病ODE模型

58/115

基本假设:

- 第I类人在时刻 $t$ 的总数为 $P_1(t)$ ;
- 第II类人在时刻 $t$ 的总数为 $P_2(t)$ ;
- 第III类人在时刻 $t$ 的总数为 $P_3(t)$ ;
- 第II类人的传染病死亡率为 $\bar{d}$ ;
- 设三类人的自然死亡率分别为 $d_1, d_2, d_3$ ;
- 设三类人的出生率分别为 $b_1, b_2, b_3$ .

所以, 在时间段 $[t, t + dt]$ 中第II类人非自然死亡数为

$$\bar{d} \cdot P_2(t) \cdot dt.$$

## 传染病ODE模型

59/115

考虑到传染病的特点, 在时间段 $[t, t + dt]$ 中第I类人的发病人数不仅应和 $P_1(t)$ 成正比, 而且应和具有传染性的第II类人数 $P_2(t)$ 成正比, 还应与时间段长度 $dt$ 成正比, 其比例系数记为 $\alpha$ , 故有:

$$\text{在}[t, t + dt]\text{中发病的人数} = \alpha P_1(t) P_2(t) dt.$$

又设第II类人的治愈率为 $\beta$ , 则

$$\text{在}[t, t + dt]\text{中治愈的人数} = \beta P_2(t) dt.$$

再设第III类人失去免疫力的比例为 $\gamma$ , 则

$$\text{在}[t, t + dt]\text{中失去免疫力的人数} = \gamma P_3(t) dt.$$

假设 $d_1, d_2, d_3, \bar{d}, b_1, b_2, b_3, \alpha, \beta, \gamma$ 都为非负实数.

## 传染病ODE模型

60/115

下面我们推导 $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ 和 $P_3(t)$ 满足的方程.

在时间段 $[t, t + dt]$ 中第I类人(正常人)的增加数应等于在此时间段中三类人的出生数减去第I类人(正常人)的自然死亡人数及发病人数, 再加上第III类人(病愈者)失去免疫力人数, 因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_1(t) &= (b_1P_1 + b_2P_2 + b_3P_3) - d_1P_1 - \alpha P_1P_2 + \gamma P_3 \\ &= (b_1 - d_1)P_1 + b_2P_2 + (b_3 + \gamma)P_3 - \alpha P_1P_2. \quad (24)\end{aligned}$$

## 传染病ODE模型

61/115

同理, 由于在时间段 $[t, t + dt]$ 中第II类人(患病者)的增加数应等于在此时间段中第I类人(正常人)的发病人数减去第II类人(患病者)的自然死亡人数, 传染病死亡人数及治愈人数, 因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_2(t) &= \alpha P_1 P_2 - d_2 P_2 - \bar{d} P_2 - \beta P_2 \\ &= -(d_2 + \bar{d} + \beta) P_2 + \alpha P_1 P_2.\end{aligned}\quad (25)$$

此外, 由于在时间段 $[t, t + dt]$ 中第III类人(病愈者)的增加数应等于在此时间段中第II类人(患病者)的治愈人数减去第III类人(病愈者)的自然死亡人数及失去免疫力的人数, 因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_3(t) &= \beta P_2 - d_3 P_3 - \gamma P_3 \\ &= \beta P_2 - (d_3 + \gamma) P_3.\end{aligned}\quad (26)$$

## 传染病ODE模型

62/115

因此,  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ 和 $P_3(t)$ 满足非线性常微分方程组(24)–(26).

同时,  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ 和 $P_3(t)$ 满足初始条件

$$t = 0: \quad P_1(0) = P_1^0, \quad P_2(0) = P_2^0, \quad P_3(0) = P_3^0, \quad (27)$$

其中 $P_k^0 \geq 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

该模型是1979年由安德森(Anderson)提出. 彼时他讨论的是

$$b_1 = b_2 = b_3 = b, \quad d_1 = d_2 = d_3 = d$$

的特殊情形.



# 模型分析

63/115

方程组(24)–(26)的如下问题值得注意:

- 解的大范围存在性.
- 证明恒成立  $P_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ .
- $t \rightarrow \infty$  时解的渐近性质, 有没有稳定的极限状态?
- 如何解释很多传染病所具有的周期流行现象.

下面我们指出方程组(24)–(26)的一个显然的性质: 一个传染病要流行或者发展, 意味着

$$\frac{dP_2(t)}{dt} > 0,$$

这等价于

$$P_1(t) > \frac{1}{\alpha}(d_2 + \bar{d} + \beta),$$

即第I类人(正常而可被感染的人群)的人数必须超过一定的数量. 这是一个经典的阈值现象(门槛现象). 它说明只有正常而可被感染的数量大于阈值

$$\frac{1}{\alpha}(d_2 + \bar{d} + \beta)$$

时, 传染病才得以流行, 即患病人数才可能越来越多. 这说明, 一个生物种群不可能仅由于传染病而灭绝.

## 模型分析

65/115

从模型(24)–(26)中不难看出:

- 对终身免疫的传染病, 如天花、麻疹、白喉、伤寒等, 第III类人不会失去免疫力而变成第I类人, 故在模型中可假设 $\gamma = 0$ .
- 对有免疫力但不是终身免疫的传染病, 该模型适用.
- 对无免疫力的传染病, 即病愈后不具有免疫力, 而可以立即再被感染而发病, 则不存在第III类人. 故可令 $P_3 = \beta = 0$ . 假设第II类人治愈后化为第I类人的治愈率为 $\bar{\beta}$ , 则有

$$\begin{aligned}\frac{dP_1(t)}{dt} &= (b_1 - d_1)P_1 + (b_2 + \bar{\beta})P_2 - \alpha P_1 P_2, \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= -(d_2 + \bar{d} + \bar{\beta})P_2 + \alpha P_1 P_2.\end{aligned}$$

# 模型分析

66/115

所以, 传染病模型还特别关心如下的问题:

- 疾病的传播与患病者感染能力之间的关系
- 疾病的传播与患病人群总数之间的关系

# 模型分析

67/115

所以, 传染病模型还特别关心如下的问题:

- 疾病的传播与患病者感染能力之间的关系
- 疾病的传播与患病人群总数之间的关系

特别注意一下的几个概念:

- 无病平衡点; 地方病平衡点
- 基本再生数
- 极限环(周期解)

# 传染病动力学的偏微分方程模型

68/115

考虑偏微分方程的原因:

- **ODE模型没有考虑年龄对传染病发展情况的影响.**

# 传染病动力学的偏微分方程模型

69/115

考虑偏微分方程的原因:

- ODE模型没有考虑年龄对传染病发展情况的影响.

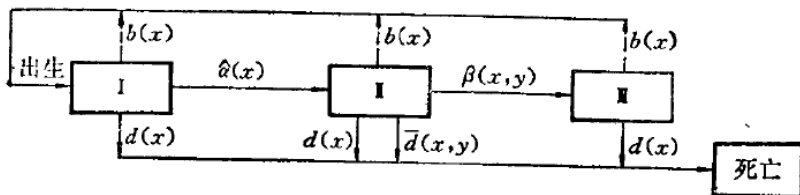
下面针对**不计预防和隔离措施, 而病愈后为终身免疫的传染病(如麻疹)**建立数学模型. 将全体人口分为三类:

- 未发病者
- 正发病者
- 病愈者

# 传染病动力学的偏微分方程模型

70/115

三类人之间的互相转化关系如下:



- 通常称这类关系图为“传染病仓室模型”。



## 传染病动力学的偏微分方程模型

71/115

以下记 $t$ 为时间,  $x$ 为年龄,  $y$ 为病程. 设 $A$ 为人的最大寿命,  $B$ 为最大病程( $B \leq A$ ). 于是, 求解区域为

$$\{t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq A, \quad 0 \leq y \leq B\}.$$

- 以 $p_1(t, x)$ 表示第I类人在 $t$ 时刻按年龄 $x$ 的分布密度函数
- 以 $p_3(t, x)$ 表示第III类人在 $t$ 时刻按年龄 $x$ 的分布密度函数
- 以 $p_2(t, x, y)$ 表示第II类人在 $t$ 时刻按年龄 $x$ 以及病程 $y$ 的分布密度函数

# 传染病动力学的偏微分方程模型

72/115

于是, 在时刻 $t$ , 年龄在 $[x, x + dx]$ 中第I类人的数量为 $p_1(t, x)dx$ , 年龄在 $[x, x + dx]$ 中第III类人的数量为 $p_3(t, x)dx$ , 年龄在 $[x, x + dx]$ , 病程在 $[y, y + dy]$ 中第II类人的数量为 $p_2(t, x, y)dxdy$ , 其中 $p_1(t, x)$ 和 $p_3(t, x)$ 的定义域为

$$\{t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq A\}.$$

而  $p_2(t, x, y)$  的定义域为

$$\{t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq A, \quad 0 \leq y \leq B\}.$$

- 由于年龄为 $x$ 的人其病程 $y < x$ , 故当 $y \geq x$ 时恒有

$$p_2(t, x, y) \equiv 0.$$

# 传染病动力学的偏微分方程模型

73/115

注意到, 对任何人来说,

时间增量 = 年龄增量 = 病程增量.

我们有

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial p_1}{\partial x}(t, x) = -(d(x) + \hat{\alpha})p_1(t, x), \quad (28)$$

其中 $d(x)$ 为自然死亡率,  $\hat{\alpha}$ 为发病率.

# 传染病动力学的偏微分方程模型

74/115

考虑到传染病的特点, 在 $[t, t + dt]$ 中年龄在 $[x, x + dx]$ 中发病的人数与人数 $p_1(t, x)$ 及时间 $dt$ 均应成正比, 同时还和第II类人的总数

$$P_2(t) = \int_0^A \int_0^B p_2(t, x, y) dx dy$$

成正比, 故

$$\hat{\alpha} = \alpha(x) P_2(t) = \alpha(x) \int_0^A \int_0^B p_2(t, x, y) dx dy,$$

从而, (28)可以写成

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial p_1}{\partial x}(t, x) = -[d(x) + \alpha(x) P_2(t)] p_1(t, x). \quad (29)$$

# 传染病动力学的偏微分方程模型

75/115

同理, 对 $p_2(t, x, y)$ , 我们有

$$\left( \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) (t, x, y) = - [d(x) + \bar{d}(x, y) + \beta(x, y)] p_2(t, x, y). \quad (30)$$

同理, 对 $p_3(t, x)$ , 我们有

$$\frac{\partial p_3}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial p_3}{\partial x}(t, x) = -d(x)p_3(t, x) + \int_0^B \beta(x, y)p_2(t, x, y)dy. \quad (31)$$

最后的积分表示第II类人中治愈的人数.

# 传染病动力学的偏微分方程模型

76/115

方程组(29)–(31)构成了传染病的偏微分方程模型. 这是一个**一阶双曲型方程组的非局部, 非线性混合边值问题**. 因为其定解条件由下面的讨论给出:

- 初始条件:

$$t = 0: \quad p_1 = p_1^0(x), \quad p_2 = p_2^0(x, y), \quad p_3 = p_3^0(x).$$

# 传染病动力学的偏微分方程模型

77/115

- 边界条件:

$$\begin{aligned}x = 0 : \quad & p_1(t, 0) \\ & = \int_0^A b(\xi) \left\{ p_1(t, \xi) + \int_0^B p_2(t, \xi, \eta) d\eta + p_3(t, \xi) \right\} d\xi, \quad t \geq 0 \\ x = 0 : \quad & p_2(t, 0, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq B. \\ y = 0 : \quad & p_2(t, x, 0) = \hat{\alpha} p_1(t, x), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq A. \\ x = 0 : \quad & p_3(t, 0) = 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

现在我们回到方程(1):

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

这个方程虽然简单, 但对于研究差分格式的构造是很有启发的. 双曲方程与椭圆方程和抛物方程的重要区别, 是双曲方程具有特征和特征关系. 初值的函数性质(如间断, 弱间断等)将沿着特征传播, 因而解一般无光滑性.

为方便讨论, 我们引入如下记号,  $u_j^n = u(t_n, x_j)$ :

用  $u_j^n$  表示函数  $u(t, x)$  在  $t = t_n$  和  $x = x_j$  处的函数值.



利用差商近似导数, 我们可得方程(1)的如下三种格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (34)$$

前两个方程的截断误差为阶为 $\mathcal{O}(\tau + h)$ , 第三个方程的截断误差的阶为 $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ .

下面我们探讨这三种格式的适用条件. 首先令

$$r = \frac{\tau}{h}, \quad \text{表示时间步长和空间步长的比值.}$$

数值格式(32)–(34)可以表示为:

$$u_j^{n+1} = aru_{j-1}^n + (1 - ar)u_j^n, \quad (35)$$

$$u_j^{n+1} = (1 + ar)u_j^n - aru_{j+1}^n, \quad (36)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{ar}{2}u_{j-1}^n - \frac{ar}{2}u_{j+1}^n. \quad (37)$$

按照**Fourier分析法**, 将

$$u_j^n = v^n e^{i\alpha x_j}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad x_j = jh, \quad \alpha \text{ 是任意实数}$$

代入(35), (36)和(37), 则分别得到

$$v^{n+1} = \left[ are^{-i\alpha h} + (1 - ar) \right] v^n = \lambda_1 v^n, \quad (38)$$

$$v^{n+1} = \left[ (1 + ar) - are^{i\alpha h} \right] v^n = \lambda_2 v^n, \quad (39)$$

$$v^{n+1} = [1 - iar \sin(\alpha h)] v^n = \lambda_3 v^n. \quad (40)$$

注意到 $|\lambda_3| = \sqrt{1 + a^2 r^2 \sin^2(\alpha h)}$ 对任何 $r \neq 0$ 都不满足von Neumann条件, 故(34)总是**不稳定**的. 另外,  $|\lambda_1| \leq 1$ 等价于 $a^2 r^2 \leq ar$ , 即就是 $(a\tau/h)^2 \leq (a\tau/h)$ , 从而

- 格式(32)是**稳定**的充要条件为

$$a \geq 0, \quad |ar| \leq 1.$$

- 格式(33)是**稳定**的充要条件为

$$a \leq 0, \quad |ar| \leq 1.$$

这说明:  $a \geq 0$ 时只有格式(32)可用, 当 $a \leq 0$ 时只有格式(33)可用.

## 算例1:

我们来具体计算一下, 考虑方程(1)

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

的几种特殊情形: 初值取为  $u(x, 0) = e^{-100(x-1)^2}$ , 系数分别为

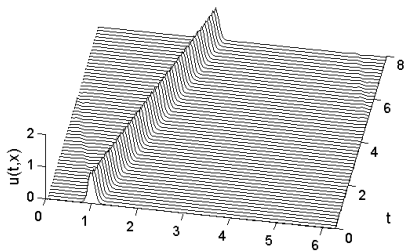
- $a = 0.2$ ;
- $a = 0.5$ ;
- $a = 0.2 + \sin^2(x - 1)$ ;
- $a = 0.01 + \sin^2(x - 1)$ .

# 迎风格式

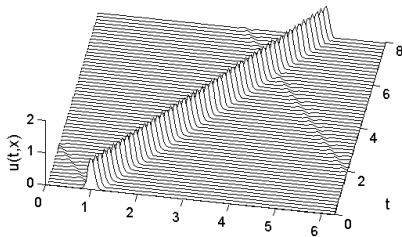
83/115

$a = 0.2$  和  $a = 0.5$ :

$a = 0.2$

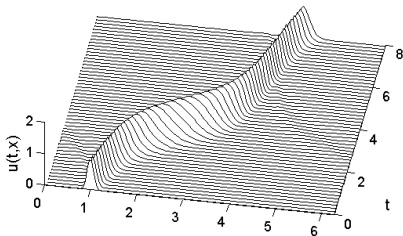


$a = 0.5$

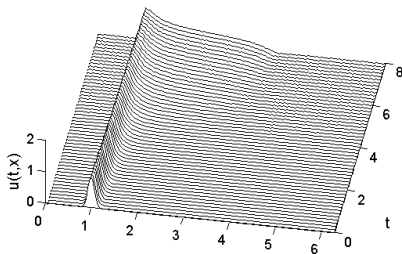


$a = 0.2 + \sin^2(x - 1)$  和  $a = 0.01 + \sin^2(x - 1)$ :

$a = 0.2 + \sin^2(x-1)$



$a = 0.01 + \sin^2(x-1)$



如果遇到了人群相对移动的情形, 则模型转化为:

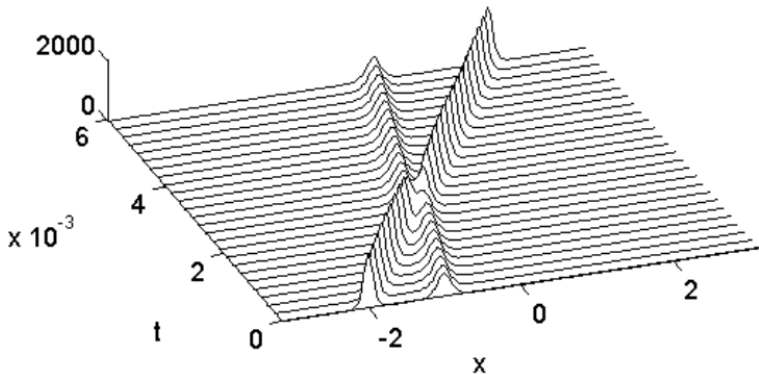
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

其中  $-\pi \leq x \leq \pi$ . 初始值取为

$$u(x, t) = 3a^2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{a}{2}(x + 2) \right) + 3b^2 \operatorname{sech}^2 \left( \frac{b}{2}(x + 1) \right).$$

我们称其为KdV方程.

取 $a = 25$ 和 $b = 16$ , 人群相向而行, 可得:





## 预估-校正格式

87/115

### 算例2:

考虑如下的Lotka-Volterra模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy + mx^2 - sx^2z = f(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy = g(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = -pz + sx^2z = h(x, y, z), \end{cases} \quad (41)$$

其中系数 $a, b, c, d$ 均为正.  $a$ 表示没有猎物的捕食者的自然增长率,  $b$ 表示捕食对猎物的影响,  $c$ 表示没有猎物的捕食者的自然死亡率,  $d$ 表示捕食者在有猎物情形下的影响和繁殖成活率,  $m, p, s$ 为正的参数值.

## 预估-校正格式

88/115

为计算方便, 可取

$$a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, m = 2, s = 2.7, p = 3,$$

初始条件为

$$[x_0, y_0, z_0] = [1.5, 1.5, 1.5].$$

记 $x_n$ ,  $y_n$ 和 $z_n$ 分别表示函数 $x(t)$ ,  $y(t)$ 和 $z(t)$ 在时刻 $t = t_n$ 的函数值.

## 预估-校正格式

89/115

### • 构造迭代格式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \times (ax_n - bx_n y_n + mx_n^2 - sx_n^2 z_n), \\ y_{n+1} = y_n + h \times (-cy_n + dx_n y_n), \\ z_{n+1} = y_n + h \times (-pz_n + sx_n^2 z_n), \end{cases} \quad (42)$$

其中 $h$ 为步长. 一般地, 根据逼近导数的方式不同, 可以构造出很多不同的迭代格式. 比如**Jacobi迭代**, **Gauss-Seidal迭代**, **SOR迭代**, **共轭梯度迭代**, **Euler迭代**, **预条件迭代**, **预估校正迭代**...

## 预估-校正格式

90/115

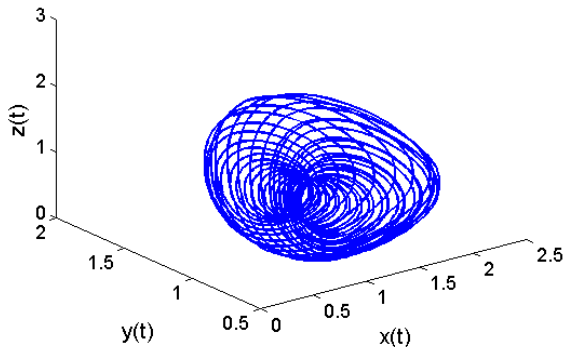
- 利用梯形公式进行校正

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \times (f_n + f_{n+1}), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times (g_n + g_{n+1}), \\ z_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times (h_n + h_{n+1}), \end{cases} \quad (43)$$

其中 $h$ 为步长. 还可以用其他的求积公式进行校正, 详见“数值分析”或者“科学计算”等.

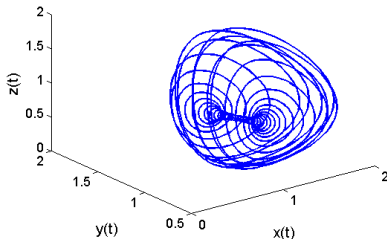
取 $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, m = 2, s = 2.7, p = 3$ :

$$p = 3$$

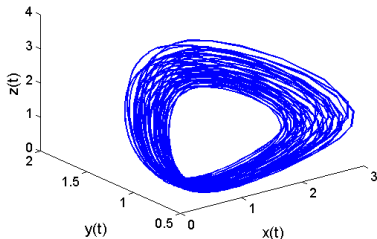


其余不变, 改变 $p$ 的值. 分别取 $p = 2.8$ 和 $p = 4$ :

$p = 2.8$



$p = 4$



数学建模中的一些常用技巧:

- 类比推广, 由此及彼

人口, 传染病, 交通, 物种之间的演化和发展...

数学建模中的一些常用技巧:

- 类比推广, 由此及彼  
人口, 传染病, 交通, 物种之间的演化和发展...
- 简化问题, 提取特征  
天体运动, 质点, 周期, 连续, 离散, 间断, 稳态...



数学建模中的一些常用技巧:

- 类比推广, 由此及彼  
人口, 传染病, 交通, 物种之间的演化和发展...
- 简化问题, 提取特征  
天体运动, 质点, 周期, 连续, 离散, 间断, 稳态...
- 善用原理, 推导平衡  
质量守恒, 能量守恒, 极小位能原理...

# 建模选择

96/115

## 何时选用PDE模型?

- 因变量与多个自变量同时相关
  - 二维三维区域上的物理量分布与动态关系
  - 依赖于时空的多变量耦合作用关系
- 
- 牢记基本模型, 建模时合理推广
  - 适当简化实际问题, 提取特征变化量(物理量)
  - 运用基本原理, 建立等式(方程组)

## 四大守恒原理

97/115

- **动量守恒:** 动量守恒定律严格成立的条件是物体系受到的合外力为零. 动量守恒定律是空间平移不变性的表现.
- **质量守恒:** 牛顿力学的质量守恒定律, 与化学领域的质量守恒定律是相同的, 都可以称为“静止质量守恒定律”.
- **能量守恒:** 任一个具有对称性的物理定律会伴随一守恒的物理量. 若一系统不随时间改变, 其守恒的物理量即为能量. 能量守恒定律是时间平移对称性下的结果.
- **连续方程:** 连续性方程是流体运动学的基本方程, 是质量守恒原理的流体力学表达式.

# 重点

98/115

- 确定主要因变量与自变量: 时间, 速度, 距离, 加速度, 温度, 等等.
- 确定物理关系: 相互作用, 相互依赖, 互为缘由, 直接因果, 等等.
- 确定方程(组)规模: 单变量方程, 多变量耦合关系, 微分方程, 差分方程, 代数方程, 等等.

## 主要参考文献

99/115

- 谷超豪等. **数学物理方程**, 高等教育出版社.
- 李荣华等. **偏微分方程数值解法**, 高等教育出版社.
- 张文生. **微分方程数值解**, 科学出版社.
- B.A.卓里奇. **自然科学问题的数学分析(中译本)**, 高等教育出版社.
- 内藤敏机等. **时滞微分方程—泛函微分方程引论(中译本)**, 高等教育出版社.
- Nail H. Ibragimov. **微分方程与数学物理问题(中译本)**, 高等教育出版社.
- 林家翘等. **自然科学中确定性问题的应用数学(中译本)**, 高等教育出版社.

- W.Gander, Martin J. Gander, F. Kwok. **Scientific Computing: An Introduction Using Maple and Matlab**, Springer.
- S. Lynch. **Dynamical Systems with Applications using Matlab**, Birkhäuser.
- S. Lynch. **Dynamical Systems with Applications using Maple**, Birkhäuser.
- S. Lynch. **Dynamical Systems with Applications using Mathematica**, Birkhäuser.
- 李航. **统计学习方法**, 清华大学出版社.

- W.Gander, Martin J. Gander, F. Kwok. **Scientific Computing: An Introduction Using Maple and Matlab**, Springer.
- S. Lynch. **Dynamical Systems with Applications using Matlab**, Birkhäuser.
- S. Lynch. **Dynamical Systems with Applications using Maple**, Birkhäuser.
- S. Lynch. **Dynamical Systems with Applications using Mathematica**, Birkhäuser.
- 李航. **统计学习方法**, 清华大学出版社.

**Note: Reading has no terminus.**

## 模拟题汇报中发现的问题(1)-(6)

102/115

- (1) 没有对模型的**可解性**进行讨论.
- (2) 没有比较模型结果与实际问题的**一般结果与形式**.
- (3) 没有按照数学论文的基本格式进行**排版**.
- (4) 没有把假设与数学表达式之间建立联系.
- (5) 没有对一些特殊算法(**如, 遗传算法, 模拟退火算法等**)的适应范围进行验证.
- (6) 没有全文统一的**公式, 图表的序号以及字符含义**.



## 模拟题汇报中发现的问题(7)-(12)

103/115

- (7) 没有**正确引用**参考文献.
- (8) 没有分析数学软件计算结果的**可信度**.
- (9) **摘要**语句不通顺, 篇幅过长.
- (10) 数学语言, 数学公式的输入不规范.
- (11) 模型和一些数学表达式中的**原则性错误(比如矩阵相乘)**.
- (12) **模型推广**写得不清楚, 改进方向可行性不高.

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

104/115

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

105/115

## 确定全文大纲

- 一. 问题重述
- 二. 问题分析
- 三. 模型假设
- 四. 变量约定
- 五. 模型建立与求解分析
- 六. 主要结论改进与分析
- 七. 优缺点分析
- 八. 参考文献 (后再接“附录部分”)

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

106/115

## 确定全文大纲

- 一. 问题重述
- 二. 问题分析
- 三. 模型假设
- 四. 变量约定
- 五. 模型建立与求解分析
- 六. 主要结论改进与分析
- 七. 优缺点分析
- 八. 参考文献 (后再接“附录部分”)

## 有逻辑, 有层次的结构

### 五. 模型建立与求解分析

5.1 .....

5.1.1 .....

5.1.2 .....

5.2 .....

5.2.1 .....

5.2.2 .....

(可以是多个模型的并列分析; 可以是一个模型的递进分析.)

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

107/115

## 一. 问题重述

- 问题重述不是问题照抄.
- 文字描述转化为数学描述
- 提炼出可求解, 有层次的数学问题

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

108/115

## 二. 问题分析

- 将问题展开, 分出求解步骤, 大致确定可行方法
- 指出**问题本身的关键点**
- 指出求解问题的**关键方法**
- 可根据问题数量独立成段描述

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

109/115

## 三. 模型假设

- 进行假设是建立数学表达式所需
- 常识不需要重提
- 三五条即可, 不需要很多
- 语言要逻辑准确, 去口语化

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

110/115

## 四. 变量约定(或, 符号说明)

- 注意数学学习习惯: 比如未知数 $x, y, z$ , 常数 $a, b, c$ 等等
- 同一字母同一文中只有**唯一**明确的意义
- 避开具有约定俗成的字符:  $\sum, e, \pi, \&$ 等等
- 一般地, 可以做一个**三线表格**



# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

111/115

## 五. 模型建立与求解分析

- 数量不在于多, 而在于逻辑清楚, 层次结构分明
- 建立, 求解与分析模型须**连贯**一致
- 详细论证主要的细节(得分点)
- 时刻想到对比自己的模型与已有结果的**区别与优势**

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

112/115

## 六. 主要结论改进与分析

- 改进理想假设对应的模型部分
- 试试“非线性”而不仅仅是“线性”
- 试试“多目标”而不仅仅是“单目标”
- 试试“偏微分方程”而不仅仅是“常微分方程”
- 改进也可以朝更简洁的方向, 不必一味地追求复杂多元

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

113/115

## 七. 优缺点分析

- 先优点后缺点, 详优点略缺点
- 优点多是方法可行, 结论可信, 推广不难等等; 缺点多因假设太强, 模型复杂, 方法单一, 难以应用等等
- 篇幅不宜过长, 建议成条描述, 推荐图文并茂
- 指出缺点的可能改进方案

# 如何撰写一篇合格的数学建模论文

114/115

## 八. 参考文献

- 统一参考文献的格式: 格式可以参考教材, 杂志以及正规连续出版物的格式
- 国际通用三种方式: 可在谷歌学术点击cite自动提示
- 数量应在**20至30篇**左右, 且包含中英文
- 一定要在文中按照**文献出现次序**正确地引用

谢谢

115/115

如有问题和讨论, 请发邮件至  
**493639750@qq.com**

预祝大家数模竞赛取得圆满成功!