

MCM数学建模丛书

MCM数学建模丛书

美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

第1辑

西北工业大学数学建模课题组

美国大学生数学建模
竞赛题解析与研究

第1辑

西北工业大学数学建模课题组

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

冰盖融化问题
数独问题
医疗保健系统评价问题
选区划分问题
飞机就座问题
肾移植问题

学科类别：数学/建模

定价 00.00元

<http://academic.hep.com.cn>

美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书

美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

第 1 辑

Meiguo Daxuesheng Shuxue Jianmo Jingsaiti Jiexi yu Yanjiu
Di-yi Ji

西北工业大学数学建模课题组



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本系列丛书是以美国大学生数学建模竞赛 (MCM/ICM) 赛题为主要研究对象, 结合竞赛特等奖的优秀论文, 对相关问题做深刻细致的解析与研究。本辑针对 2007 年及 2008 年 MCM/ICM 竞赛的 6 个题目: 冰盖融化问题、数独谜题生成问题、医疗保健系统评估问题、选区划分问题、飞机就座问题以及肾移植问题进行了解析与研究。

本书内容新颖、实用性强, 目前国内尚无同类作品。本书可作为指导学生参加美国大学生数学建模竞赛的主讲教材, 也可作为本科生、研究生学习和准备全国大学生、研究生数学建模竞赛的参考书, 同时可供研究相关问题的教师和研究生参考使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

美国大学生数学建模竞赛题解析与研究. 第 1 辑 / 西北工业大学数学建模课题组. --北京: 高等教育出版社, 2012. 7

(美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书)

ISBN 978-7-04-033845-4

I. ①美… II. ①西… III. ①数学模型-竞赛题-研究 IV. ①O141.4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 156135 号

策划编辑	刘 英	责任编辑	冯 英	封面设计	李卫青	版式设计	范晓红
插图绘制	尹 莉	责任校对	金 辉	责任印制			

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 17
字 数 320 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landraco.com>
<http://www.landraco.com.cn>
版 次 年 月第 1 版
印 次 年 月第 次印刷
定 价 45.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 33845-00

“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书” 编审委员会

顾 问

Chris Arney

美国西点军校

主 编

王 杰

美国麻省大学罗威尔分校

朱 旭

西安交通大学

秘 书

王嘉寅

美国康涅狄格大学/西安交通大学

委 员

Jay Belanger

美国杜鲁门州立大学

陈秀珍

美国乔治华盛顿大学

冯国灿

中山大学

龚维博

美国麻省大学阿默斯特分校

韩中庚

解放军信息工程大学

李向阳

美国伊利诺伊理工大学

杨新宇

西安交通大学

叶正麟

西北工业大学

张存权

美国西弗吉尼亚大学

序

数学建模的训练与经验能使同学们在解决问题时更有创意，同时也能帮助同学们成为更为优秀的研究生。“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”的出版，将通过数学建模竞赛题目和概念的解析，帮助同学们掌握数学建模的技能，并为同学们在今后的工作中获得成功打下坚实的基础。

数学建模是一种过程，也是一种理念，或者说是一种哲学。作为过程，学生在理解及使用建模过程或框架时需要指导并积累经验。作为经验，学生需要使用不同的数学方法（离散、连续、线性、非线性、随机、几何及分析）构造数学模型，从中体验不同的细节及复杂程度。作为理念，学生需要发现各种相关的、具有挑战性的及有趣的实际问题，从中培养对数学建模的兴趣，并认识到数学建模在实际生活中的作用。数学建模的主要目的是指导学生用建模的方法解决实际问题。尽管在实际中，有些问题或许可以使用已有的算法和公式来求解，但数学建模的方法比简单使用已有算法和公式能解决更多的问题，特别是解决新的、没有固定答案及没有被解决过的问题。

为了积累经验，同学们应尽早地接受数学建模训练，至少应该在大学低年级时就开始，这样可以在以后的课程学习中进一步强化数学建模能力。由于数学建模的综合与交叉特性，所以各个专业的学生都能够从数学建模活动中受益。

本套丛书从将数学模型作为研究工具的角度出发，介绍模型的构造，分析建模过程，这些都是帮助学生更好地掌握数学建模技能的重要因素。数学建模是充满挑战的高级技能，更重要的是能够帮助学生更好地成长。当今世界需要解决的问题往往很复杂，所以建立的数学模型也很复杂，通常需要通过精细的计算和模拟才能获得解答或对模型结果的分析与检验。由于数据可视化技术的普及，解题方法的增加，所以现在的确是培养更多数学建模高手的最佳时期。

我希望同学们在数学建模探索中取得进步，也希望指导教师在使用这套丛书提供的例子及方法指导学生时取得很好的效果。尽管学生的层次可能不同，但我对你们的忠告是同样的：树立你的信心、发展你的技能，用你的才能解决社会中最具挑战及最重要的问题。祝各位建模好运！

Chris Arney, 博士
美国西点军校数学系教授
ICM 竞赛主席
2011 年 10 月

Forward

Undergraduate students who receive instruction and experiences in mathematical modeling become better and more creative problem solvers and graduate students. This book series is being published to prepare and educate students on the topics and concepts of mathematical modeling to help them establish a problem solving foundation for a successful career.

Mathematical modeling is both a process and a mindset or philosophy. As a process, students need instruction and experience in understanding and using the modeling process or framework. As part of their experience, they need to see various levels of sophistication and complexity, along with various types of mathematical structures (discrete, continuous, linear, nonlinear, deterministic, stochastic, geometric, and analytic). As a mindset, students need to see problems that are relevant, challenging, and interesting so they build a passion for the process and its utility in their lives. A major goal in modeling is for students to want to model problems and find their solutions. Recipes for structured or prescribed problem solving (canned algorithms and formulas) do exist in the real world, but mathematical modelers can do much more than execute recipes or formulas. Modelers are empowered to solve new, open, unsolved problems.

In order to build sufficient experience in modeling, student exposure must begin as early as possible—definitely by the early undergraduate years. Then the modeling process can be reinforced and used throughout their undergraduate program. Since modeling is interdis-

plinary, students from all areas of undergraduate study benefit from this experience.

The articles and chapters in this series expose the readers to model construction, model analysis, and modeling as a research tool. All these areas are important and build the students' modeling skills. Modeling is a challenging and advanced skill, but one that is empowering and important in student development. In today's world, models are often complex and require sophisticated computation or simulation to provide solutions or insights into model behavior. Now is an exciting time to be a skilled modeler since methodology to provide visualization and find solutions are more prevalent and more powerful than ever before.

I wish the students well in their adventure into modeling and I likewise wish faculty well as they use the examples and techniques in this book series to teach the modeling process to their students. My advice to all levels of modelers is to build your confidence and skills and use your talents to solve society's most challenging and important problems. Good luck in modeling!

Chris Arney, PhD

United States Military Academy at West Point

Professor of Mathematics

Director of the Interdisciplinary Contest in Modeling

October, 2011

丛书简介

美国大学生数学建模竞赛（The Mathematical Contest in Modeling, MCM/The Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM），即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”，是一项国际级的竞赛活动，为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。

1985 年，在美国教育部的资助下，在美国针对在校大学生创办了一个名为“数学建模竞赛”的竞赛，其宗旨是鼓励大学师生对不同领域的各种实际问题进行阐明、分析并提出解决方案。它是一种完全公开的竞赛，参赛形式为学生三人组成一队，在三天（72 小时）（近年改为四天，即 96 小时）内任选一题，完成数学建模的全过程，并就问题的重述、简化和假设及其合理性的论述、数学模型的建立和求解（及软件）、检验和改进、模型的优缺点及其可能的应用范围的自我评述等内容写出论文。MCM/ICM 非常重视解决方案的原创性、团队合作与交流以及结果的合理性。由专家组成的评阅组进行评阅，评出优秀论文。除了不允许在竞赛期间与团队以外的任何人（包括指导教师）讨论赛题之外，允许使用图书资料、互联网上的资料、任何类型的软件等各种资料和途径，从而为参赛学生提供了广阔的创作空间。第一届竞赛时，只有美国的 158 个队参加，其中只有 90 个队提交了解答论文。2012 年 MCM/ICM 共有 5 026 个队参加，其中 MCM 有 3 697 个队，ICM 有 1 329 个队，遍及五大洲。MCM/ICM 已经成为最著名的国际大学生竞赛之一，影响极其广泛。

近年来，已有越来越多的中国学生组队参加美国大学生数学建模竞赛，其中不乏被评为最优论文（Outstanding Winners）的佼佼者，这充分显示了中国大学生参加 MCM/ICM 竞赛的积极性与实力。学生在准备竞赛的时候，除了在指导教师的帮助下阅读和研究以往竞赛的优胜论文以外，普遍希望能有一些专门针对美国大学生数学建模竞赛的书籍，指导和帮助备赛。

“美国大学生数学建模竞赛指导丛书”就是为了满足读者的这一需求而出版的，目的是帮助学生从全局出发，不受固定模式的限制，用建模的手段解决开放性问题的研究方法，并提高写作能力。丛书的读者对象包括参赛学生以及对数学建模与算法感兴趣的研究生、专业人员和业余爱好者。

我们邀请到美国麻省大学罗威尔分校王杰教授担任丛书主编，他曾为 MCM/ICM 命题，对竞赛具有很多独到的认识。丛书作者来自各高校，他们都是有经验的指导教师或参加过竞赛的优秀成员。丛书包括一本《正确写作美国大学生数学建模竞赛论文》和若干辑《美国大学生数学建模竞赛题解析与研究》，前者为一本指导学生如何正确写作 MCM/ICM 论文的工具书，后者中和每一辑将讨论若干赛题，包括问题的背景、分析技巧、建模与测试方法及算法设计，并引导读者列出进一步研究的课题。目标是培养学生多方面的能力，如数学、编程、写作及课题研究等的训练，提高学生分析问题、解决问题的水平。

丛书的出版计划得到了美国建模专家的广泛支持，ICM 主席（也是 ICM 的发起人）、美国西点军校数学系教授 Chris Arney 博士受邀担任丛书顾问并为丛书作序。

我们热切希望通过本套丛书的出版，进一步活跃我国大学生参加 MCM/ICM 的积极性，提高他们的自信心，并最终取得满意的成绩。更为重要的，提高学生的研究解决实际问题的能力。

前言

美国大学生数学建模竞赛（MCM/ICM）作为一项国际性数学赛事，尤其受到中国大学生们的青睐。历年赛题的题材广泛，其应用性、探究性、开放性和挑战性或许是吸引学生眼球并积极参赛的重要原因，同时也引发了国内不少大学数学教师的兴趣。

2007 年和 2008 年的赛题就有这些特点。2007 年 MCM 的 A 题 “Gerrymandering” 是因探讨美国州众议员选举的公平性而引发的选区划分的社会学研究问题，该年 MCM 的 B 题 “The Airplane Seating Problem”，则为研究飞机登机时间的最优化问题。2007 年 ICM 的 C 题 “Organ Transplant: The Kidney Exchange Problem”，要研究如何建立一个有效机制，以保证有效利用与开发肾源。2008 年 MCM 的 A 题 “Take A Bath” 要求研究因北极冰雪消融所导致的一系列环境、生态等方面的问题，该年 MCM 的 B 题 “Creating Sudoku Puzzles” 研究的是数独游戏的反问题：数独谜题难度级别的划分与生成算法及其复杂性分析。2008 年 ICM 的 C 题 “Finding the Good in Health Care Systems”，则是研究在医疗保健领域中，如何科学合理地评价服务系统方面的问题。

这些赛题的前沿性和现实性乃至趣味性十分明显。对于问题背景的归纳表述和所提出的希望解决的问题，都相当贴近原始问题，在专业上的简化和在数学上的提炼都比较少，问题实际、明了。有些问题本身就是一个研究课题，还没有成熟的研究成果，甚至即使有研究结论，也尚存争议，未有定论，有不少值得进行探索和研究的方面，极具挑战性。这些赛题往往要求参赛学生自己查询、获取充分的相关信息和数据。针对赛题的数学建模与算法多种多样，开放性强，参赛学生能够发挥的空间大。

分析这两年 MCM/ICM 获奖的优秀论文，它们具有下面的一些特点：或侧重于模型和方案的新颖性，自成一体；或建模分析中对于问题的理解和解决有独特的视野和观点；或表现出有价值的外延与扩展。论文在建立数学模型解决问题过程中，或者对于问题的全局及各因素的复杂关系有较好的分析与把握；或者未必做得全面，却往往对其中一两个问题颇有特色的有层次的深入的研究。对计算结果似乎比较淡化，然而强调有说服力的量化结论。尤其注重新见

解、新观点、新意或创新性。

MCM/ICM 的这些特点,无疑对于培养大学生优良的科学素质、独立的研究能力、创造性能力都是有益的。就大学数学教学而言,或多或少推动着传统数学教学模式的变化,使得大学校园里的数学课程的教与学,变得生动有趣、富有活力。师生走出课堂,走出书本,走向实际问题,走向应用探索,致力于开放教学,致力于自主学习。

本辑就 2007、2008 年 MCM/ICM 的 A、B 与 C 题共 6 道赛题的若干数学建模方法,结合当年获奖的优秀论文进行介绍和评析,希望有益于大学的数学建模教学和竞赛活动。书中不免有诸多不妥之处,敬请读者批评指正。本辑抛砖引玉,希冀有更多、更好的相关书籍问世。

本辑的第 1 章由孙中奎撰写,肖华勇撰写第 2 章,徐根玖撰写第 3 章,雷佑铭撰写第 4 章,郭千桥撰写第 5 章,吕全义撰写第 6 章。叶正麟负责组稿和统稿。

这套丛书是由美国麻省大学罗威尔分校计算机科学系王杰教授主编,王杰教授对于数学模型与算法有很深刻的研究,对美国大学生数学建模竞赛和学生的科学素质培养饶有兴趣。在本辑的撰写过程中,王教授给予了富有启示的建议,西安交通大学领导提供了诸多便利,高等教育出版社刘英副编审做了鼎力策划,冯英女士做了认真辛勤的编辑工作,得到了西北工业大学教务处领导及李辉副处长和应用数学系孙浩教授的有力支持,在此一并表示诚挚的感谢。很欣赏 ICM 主席、美国西点军校数学系教授 Chris Arney 博士所作的序,并深表感谢。

叶正麟

2012 年 6 月于西安

目录

第 1 章	冰盖融化问题	1
1.1	问题的综述	1
1.2	问题的背景资料	2
1.2.1	全球气候正在变暖	2
1.2.2	气候变暖的影响	4
1.2.3	为什么是北极	6
1.3	问题的数学模型与结果分析	7
1.3.1	模型一：多元线性回归模型	7
1.3.2	模型二：初等数学模型	21
1.4	问题的综合分析与进一步研究的问题	25
1.4.1	问题的综合分析	25
1.4.2	进一步研究的问题	28
	参考文献	29
第 2 章	数独谜题生成问题	30
2.1	数独的概念	30
2.2	问题的提出	31
2.3	问题的背景与现状	32
2.4	人工求解数独的规则	34
2.5	数独难度的划分方法	52
2.5.1	方法一：步数法	52
2.5.2	方法二：评分法	57
2.5.3	方法三：次数加权法	59
2.5.4	方法四：机器求解客观法	64
2.6	数独的生成问题	77
2.6.1	终盘生成问题	77

2.6.2	不同级别数独问题的生成·····	77
2.7	问题的综合分析与进一步研究的问题·····	78
2.7.1	问题的综合分析·····	78
2.7.2	进一步研究的问题·····	79
2.7.3	其他数独·····	79
	参考文献·····	83
第3章	医疗保健系统评估问题·····	85
3.1	问题的综述·····	85
3.2	问题的背景资料·····	88
3.3	医疗保健系统评价模型及求解·····	90
3.3.1	模型一：基于层次分析法的灰色关联评估模型·····	90
3.3.2	模型二：输入输出系统评估模型·····	103
3.3.3	模型三：医疗保健系统概率模型·····	114
3.4	问题的综合分析与进一步研究的问题·····	120
3.4.1	三个评估模型的对比·····	120
3.4.2	其他评估方法分析·····	121
3.4.3	进一步研究的问题·····	126
	参考文献·····	127
第4章	选区划分问题·····	129
4.1	问题的综述·····	129
4.1.1	问题的提出·····	129
4.1.2	问题的背景资料·····	130
4.2	问题的数学模型与结果分析·····	133
4.2.1	模型一：拓扑划分模型·····	133
4.2.2	模型二：Voronoi图划分模型·····	139
4.2.3	模型三：增长分割模型·····	149
4.3	问题的综合分析与进一步研究的问题·····	158
4.3.1	问题的综合分析·····	158
4.3.2	进一步研究的问题·····	159
	参考文献·····	159
第5章	飞机就座问题·····	161
5.1	问题的综述·····	161
5.1.1	问题的提出·····	161

5.1.2	问题的背景资料	162
5.2	问题的数学模型与结果分析	164
5.2.1	模型一：随机模型	164
5.2.2	模型二和模型三：数组模型和图论模型	177
5.2.3	模型四：元胞自动机模型	184
5.2.4	模型五：模拟（仿真）模型	193
5.2.5	下机模型	204
5.3	问题的综合分析与进一步研究的问题	206
5.3.1	问题的综合分析	206
5.3.2	进一步研究的问题	209
	参考文献	209
第6章	肾移植问题	212
6.1	问题的综述	212
6.2	问题的背景资料	217
6.2.1	肾移植概况	217
6.2.2	影响移植的因素	218
6.2.3	扩大肾源的方法	219
6.2.4	肾移植的伦理与政策问题	220
6.3	问题一：美国移植网络的模拟	221
6.3.1	方法一：随机排队服务模型	222
6.3.2	方法二：多排队多服务模型	225
6.3.3	方法三：带约束微分方程模型	229
6.3.4	计算结果与分析	230
6.3.5	政策的改进	230
6.3.6	几种方法的评价	232
6.4	问题二：其他国家的移植政策及影响	232
6.4.1	欧洲各国的移植政策	233
6.4.2	关于当前肾移植政策的建议	233
6.5	问题三：肾循环交换	235
6.5.1	环与链	235
6.5.2	优化模型	236
6.5.3	算法	237
6.5.4	计算结果与分析	238
6.5.5	肾源的进一步利用	238
6.5.6	优化方法的进一步讨论	239

6.6	问题四：患者的选择	240
6.6.1	方法一：期望存活时间目标	240
6.6.2	方法二：期望存活时间动态处理	242
6.6.3	方法三：考虑存活 5 年的概率	243
6.6.4	三种方法的评价	244
6.7	问题五：伦理与政策问题	244
6.7.1	伦理问题	244
6.7.2	政策问题	245
6.7.3	结论	247
6.8	问题六：捐赠者的决定	248
6.8.1	方法一：消费决定模型	248
6.8.2	方法二：考虑风险模型	251
6.8.3	两种方法的评价	253
6.9	问题的综合分析与进一步研究的问题	253
6.9.1	问题的综合分析	253
6.9.2	进一步研究的问题	253
	参考文献	254

第 1 章 冰盖融化问题

1.1 问题的综述

“Take a Bath”是 2008 年美国大学生数学建模竞赛 (The Mathematical Contest in Modeling, MCM2008) 的 A 题, 研究的是北极冰雪消融所导致的一系列环境、生态等方面的问题。该题目如下。

大陆遭受侵蚀

研究因全球气温升高所造成的北极冰盖融化对大陆的影响。具体而言, 为未来 50 年中每 10 年因北极冰盖融化对佛罗里达州海岸所造成的影响建立模型, 尤其要关注对大型都市所造成的影响。就此问题给出适宜的回答, 对所用数据作详细讨论应是重要的组成部分。

问题的原文如下:

Take a Bath

Consider the effects on land from the melting of the north polar ice cap due to the predicted increase in global temperatures. Specifically, model the effects on the coast of Florida every ten years for the next 50 years due to the melting, with particular attention given to large metropolitan areas. Propose appropriate responses to deal with this. A careful discussion of the data used is an important part of the answer.

(题目来源: <http://www.comap.com/undergraduate/contests/mcm/contests/2008/problems/>)

显然, 出题人希望参赛者能够收集与北极冰雪变化相关的数据, 讨论北极冰雪融化对佛罗里达海岸今后 50 年的影响。看到题目, 可能每个人都会产生这样的两个疑问: ①为什么研究的是北极冰雪融化的影响? 毕竟南极冰盖无论从规模上还是面积上都远远超过北极。②为什么是对美国佛罗里达州海岸的影响? 众所周知, 受到海平面上升影响最大的是荷兰以及太平洋上的一些岛国。第二个问题很容易回答, 因为出题人是美国人, 而且佛罗里达州海岸是美国人

享受海滩度假的最大的和最佳的地点之一，同时也是美国发生飓风最频繁的地区之一。第一个问题的答案则隐藏在下面的数据和资料中。

1.2 问题的背景资料

越来越多的证据表明，全球气候正在变暖，“我们正居住在一个急速变暖的地球上！”实际上，早在1992年，科学家关怀社会联盟的1700位世界顶尖科学家包括大多数诺贝尔科学奖得主，就已经在极力呼吁世界各国联手遏制全球暖化，“地球上的二氧化碳浓度已逼近警戒线！”“我们可以避免灾难发生的时间已经剩下不到十年抑或几十年”“我们所面临的威胁一旦无法挽救，人类的希望将非常渺茫。”^[1]

全球升温会带来什么影响？英国作家林纳斯所著的《6度变化，一个愈来愈热星球变化的未来》一书中呈现了该景象：如果全球

升温1℃，无冰海域吸收更多的热气，加速全球暖化效应；地球表面1/3的水资源流失；低海岸地区遭海水淹没。

升温2℃，欧洲居民中暑而亡；森林被大火吞噬；处于逆境的植物开始释放碳，不再具备吸碳功能；有1/3的物种濒临灭绝。

升温3℃，从植物和土壤中排出的碳物质，加速全球暖化效应；亚马逊热带雨林荡然无存；超级飓风袭击沿海城市；非洲闹饥荒。

升温4℃，永冻土无止境地溶解，造成全球暖化效应一发不可收拾；英国大部分地方也因严重的水患而不适合居住；地中海区域成为废墟。

升温5℃，甲烷从海床窜出，加速全球暖化效应；两极冰层融化；人类逐食物而居，但徒劳无功，形同野生动物在这片土地上苟延残喘。

升温6℃，地球上的生物会在狂风、山洪暴发、硫化氢毒气及带着原子弹般威力的甲烷火球流窜地表的灾难中完全灭迹；唯一存活下来的只有霉菌。

这是危言耸听吗？

现在有三个问题：全球气候是否在变暖？如果全球变暖，会有什么影响？因变暖所造成的冰雪融化最严重的是哪些地方？

1.2.1 全球气候正在变暖

时至今日，仍然有很多人在质疑一个问题：全球气候真的在变暖吗？联合国政府间气候变化专门委员会（Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC）的回答是：“气候系统变暖是毋庸置疑的，目前从全球平均气温和海温升高，大范围积雪和冰融化，全球平均海平面上升的观测中可以看出气候系统变暖是明显的”（IPCC 2007年评估报告^[2]）。根据IPCC的结论和观测数据，自1850年以来，在1995—2006年的12年中，有11个年份位列最暖的12个年份

之中。而在 1906—2005 年的 100 年中，温度以 $0.74\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的趋势线性增长。

在图 1-1 中，已观测到全球平均地表温度、分别来自验潮仪（深色）和卫星（浅色）的全球平均海平面以及 3—4 月北半球积雪的变化。图中所有变化差异均相对于 1961—1990 年的相应平均值。各平滑曲线表示 10 年平均值，各圆点表示年平均值。阴影区为不确定性区间，根据已知的不确定性和时间序列综合分析估算得出（图和数据均来源于文献 [2]）。

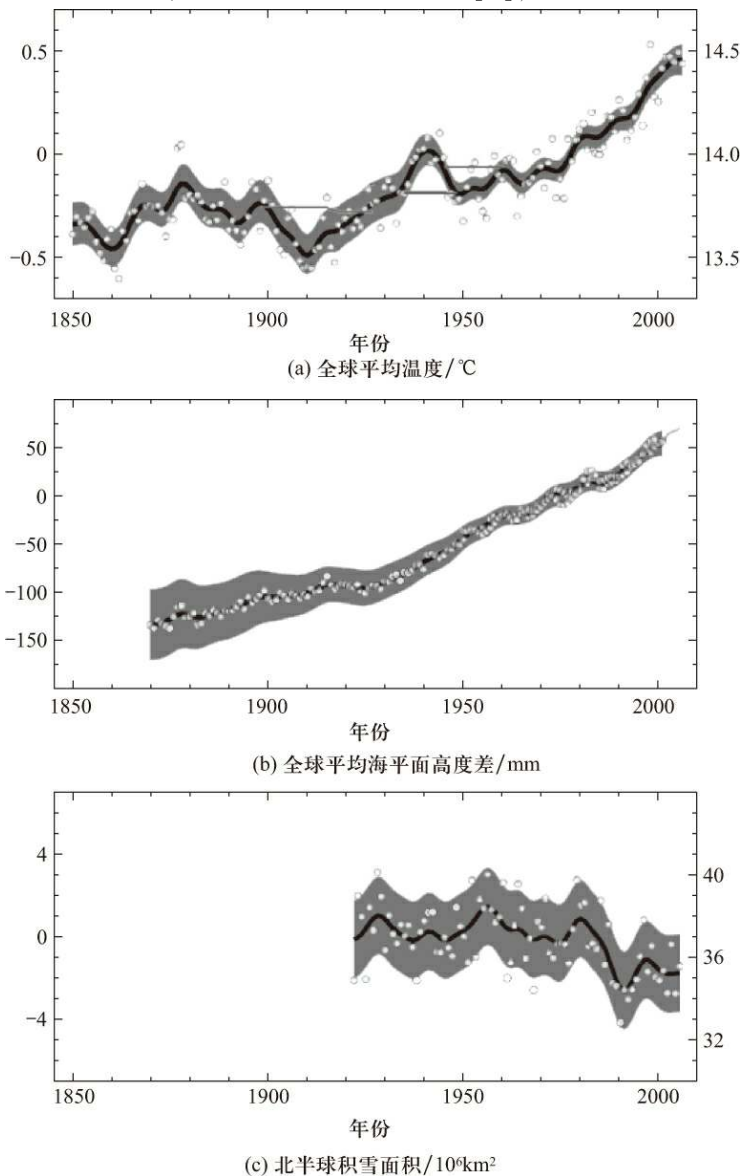


图 1-1 温度、海平面和北半球积雪变化

（图片来源：IPCC 2007 年评估报告）

图 1-2 是观测到的全球海洋和大陆温度变化与使用自然强迫和人为强迫的气候模式模拟结果的比较。相对于 1901—1950 年相应的平均值, 图 1-2 给出了 1906—2005 年观测到的 10 年平均值 (黑线), 对应于该 10 年的中心绘制。虚线部分表示空间覆盖率低于 50%。深色阴影表示仅使用太阳活动和火山自然强迫的 5 个气候模式 19 个模拟试验结果的 5% ~95% 可信度范围。浅色阴影表示同时使用自然强迫和人为强迫的 14 个气候模式 58 个模拟试验结果的 5% ~95% 可信度范围。

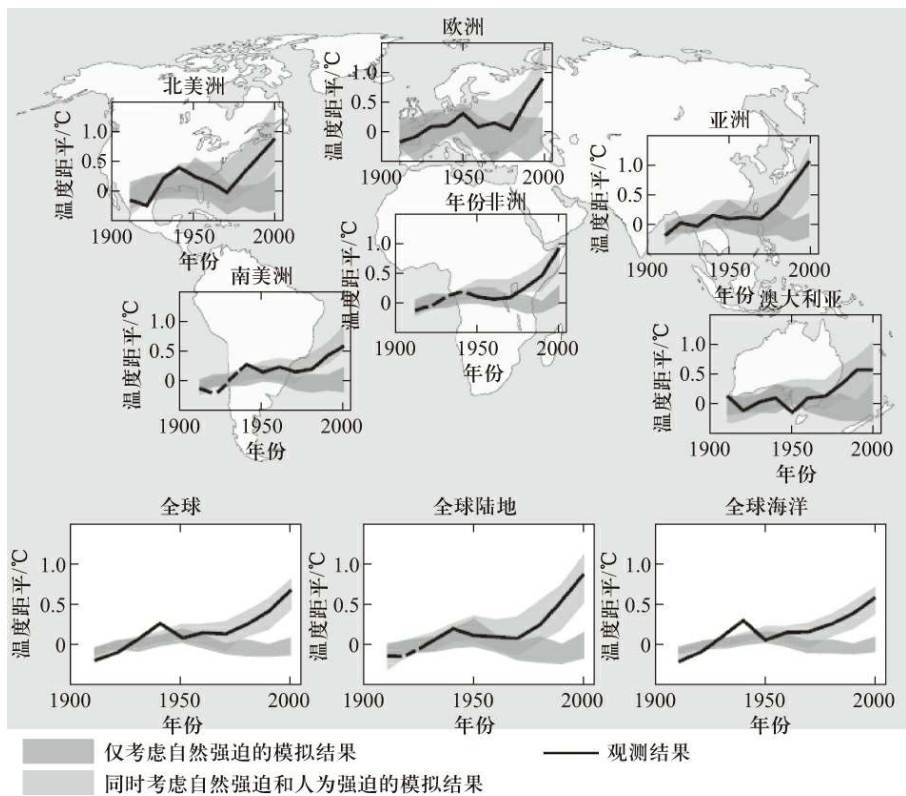


图 1-2 全球海洋和大陆的温度变化

(图片来源: IPCC 2007 年评估报告)

显然, 从图 1-2 中可以看到, 不管是全球平均温度, 还是全球陆地、全球海洋的平均温度都呈现波动上升趋势, 尤其是最近几十年, 这种上升趋势更加明显, 平均上升幅度更大。而且, 北极的冰雪覆盖面积和范围不断缩小, 全球平均海平面高度不断攀升。

1.2.2 气候变暖的影响

全球气候变暖会带来什么影响? 温度的升高带来的影响是全面的、深入的, 将涉及自然、生态、环境、社会、经济等各领域。下面的具体影响摘自

IPCC 在 2007 年的评估报告。

1. 区域尺度的变化

- 变暖区域扩大。陆地上和北半球大部分高纬度地区变暖幅度最大，南半球海洋地区和北大西洋部分地区变暖幅度最小。近期观测到的各种趋势仍在持续。

- 冰雪面积缩小。大部分多年冻土区域的融化深度增加，海冰面积退缩。在利用 SRES 情景所作的某些预估中，到 21 世纪后半叶，北冰洋夏季后期的冰几乎全部消失。

- 热极端事件、热浪以及强降水的频率很可能增加。
- 热带气旋强度可能增加，全球热带气旋数量减少具有较小的可信度。
- 温带风暴路径向极地推移，造成风、降水和温度形态的变化。
- 高纬度地区降水很可能增加，大部分亚热带陆地区域降水可能减少，已观测到的趋势仍在持续。

2. 受影响的系统和行业

- 特定的生态系统

- ① 陆地：对变暖敏感的苔原、北方森林和山区，受降雨减少影响的地中海类型的生态系统和受降雨减少影响的热带雨林。

- ② 海岸带：受到多重压力的红树林和盐沼。

- ③ 海洋：受到多重压力的珊瑚礁，对变暖敏感的海冰生物群落。

- 由于降雨和蒸散的变化，中纬度一些干旱地区和干旱的热带地区以及那些依靠冰雪融化地区的水资源。

- 面临可用水减少的低纬度地区的农业。
- 地势低洼的沿海系统，受到海平面上升的威胁和极端天气事件加大的风险。

- 适应能力低的人群的身体健康。

IPCC 的表述可能比较专业，或许下面的一组数据更能触动人类“坚强”的神经。

- 到 2050 年，世界上将有 2/3 的北极熊死亡，因为它们赖以生存的北极海冰受到全球变暖的影响而逐渐消融。此外，格陵兰冰盖消融加快还将在当地引发地震。（来源于 http://www.chinadaily.com.cn/hqbl/2007-09/10/content_6093810.htm?anchor=1）

- 几亿非洲居民和几千万拉美居民在不到 20 年内将出现饮用水短缺。到 2050 年，超过 10 亿的亚洲居民将面临水源短缺。到 2080 年，水源短缺将威胁 11 亿 ~ 32 亿人。

- 到 2030 年，全球变暖所造成的穷人死亡率将升高。疟疾、登革热以及食用污染海产品所造成疾病的发生率上升。

- 到2050年,欧洲的小冰川将会消失,陆地大冰川将会显著缩小。到2100年,欧洲超过一半的植物物种将会濒临灭绝。
- 到2080年,由于全球变暖而遭受饥荒的人数将在2亿~6亿。
- 到2080年,随着海平面的上升,每年遭受洪灾的人数约有1亿。
- 美国城市的烟霾现象将会严重。21世纪中期由于气候变化导致的臭氧污染将比20世纪90年代增加4.5%,导致健康问题。(以上数据来源于2007年IPCC报告和<http://blog.66wz.com/user3/cutycai/208185.html>)

1.2.3 为什么是北极

毫无疑问,全球暖化将直接导致地球上冰雪(如北极浮冰、格陵兰冰盖、南极冰盖等)的消融——这将促使海平面进一步升高。

那么为什么在“Take a Bath”中要求参赛队研究北极冰盖而不是南极冰盖融化的影响呢?毕竟南极冰盖无论从面积还是质量来说都远比北极的冰盖大。原因如下。

- 全球温度普遍升高,但是北半球较高纬度地区温度升幅较大。在过去的100年中,北极温度升高的速率几乎是全球平均速率的2倍。
- 1978年以来的卫星资料显示,北极年平均海冰面积已经以每10年2.7%(2.1%~3.3%)的速率退缩,夏季的海冰退缩率较大,为每10年退缩7.4%(5%~9.8%)。
- 自1900年以来,北半球季节性冻土的面积减少了大约7%,春季冻土面积的减幅高达15%。自20世纪80年代以来,北极多年冻土层上层温度普遍升高,达到3℃。
- 预估在2100年之后,格陵兰冰盖的退缩将会继续导致海平面上升。如果这种地表冰物质的负平衡(即冰物质损失的速率比由于降水增加而使冰物质增加的速率更快)持续数千年,最终将会导致格陵兰冰盖完全消融,并导致海平面上升约7m。
- 美国宇航局2007年12月卫星资料显示,北极冰层的厚度比以前减少了23%;航海资料则显示北极冰层比20世纪50年代减少了50%;格陵兰表面冰层融化的速度是15年前的4倍。

如图1-3所示为从1979—2007年北极冰层的演化。

与此同时,IPCC在2007年的报告中指出:“根据当前的全球模式研究,预估南极冰盖将会维持在非常寒冷的状态,不至于会出现表层大范围融化。而且由于降雪增加,冰质量会增加。”因此,北极冰雪融化所导致的一系列环境、生态等问题将是今后一段时间关注的焦点之一——这可能也是数学及其应用联合会(The Consortium for Mathematics and its Applications, COMAP)将北极冰雪融化所造成的影响作为2008年国际数学建模竞赛题的原因吧。

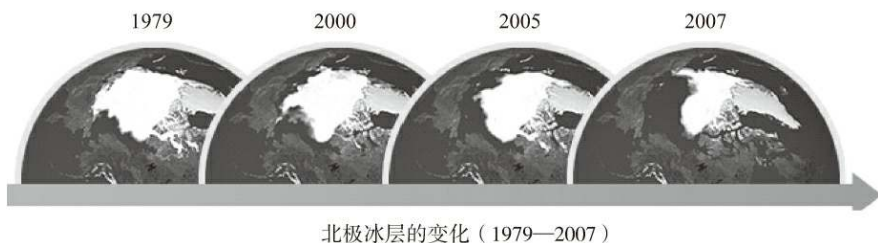


图 1-3 1979—2007 年北极冰层的演化：北极的冰雪覆盖明显在缩小

(图片来源于 <http://www.5joys.com/better/so2010/>)

1.3 问题的数学模型与结果分析

“Take a Bath”是个非常开放的问题。北极冰雪融化所带来的影响有很多，可以研究其对生态生物系统的影响、对气候系统的影响、对人类社会生活的影响、对社会经济活动的影响，等等。而且数学模型的选取更是多种多样，所获得的结论也可以是各不相同的。

本书选取了两个模型：多元线性回归模型和初等数学模型，下面分别进行介绍。这两个模型来自于两份非常优秀的答卷，一份是当年的特等奖 (Outstanding Winner) 的论文，另一份是当年的一等奖 (Meritorious Winner) 的论文。希望通过对这两个模型的介绍，能够引发读者对该问题的研究兴趣和对环境问题的深度思考。

1.3.1 模型一：多元线性回归模型

本小节将介绍如何运用多元线性回归模型^[3]来预测北极冰雪融化所带来的可能影响。首先，收集了大量数据，如全球温度数据、温室气体排放数据、佛罗里达州附近海平面数据（佛罗里达东海岸的圣彼得斯堡和彭萨科拉，佛罗里达西海岸的费南迪纳比奇和弗吉尼亚岛）等，并对数据进行了必要的整理和分析。其次，分别建立模型对格陵兰岛冰盖消融体积和北极海冰消融体积进行了计算。最后，建立了多元线性回归模型对未来 50 年的全球平均气温、全球 CO₂ 排放量以及平均海平面上升幅度进行了预测。通过求解模型，得到了未来 50 年北极冰雪融化（主要是格陵兰冰盖和北极海冰的融化）对佛罗里达海岸区域的影响，并特别讨论了由于海平面上升所导致的海岸线侵蚀问题。

一、数据的收集和处理

1. 全球温度数据

由于建立模型的需要，收集了 1950—2001 年的全球温度数据，所有数据都来源于地球政策研究所网站（<http://www.earth-policy.org/>）。从图 1-4 可

以看出,从1950—1973年,全球平均气温总是在 14°C 上下波动,变化非常平缓。但是从1973—2007年,全球平均气温上升了大约 1°C ,接近 15°C 。因此,全球变暖的趋势非常明显。

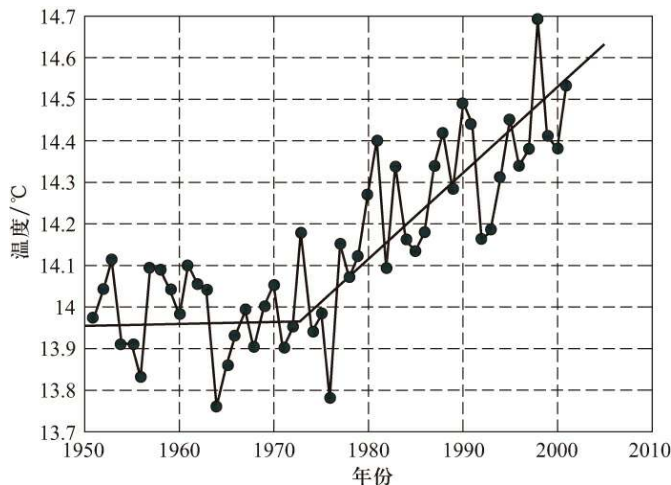


图1-4 从1950年到2001年的全球温度演化图

(图片来源文献 [3])

2. 温室气体排放数据

温室气体的排放被公认为是导致全球变暖的主要因素之一,图1-5是从美国能源部二氧化碳信息分析中心(Carbon Dioxide Information Analysis Center, CDIAC)收集的温室气体数据。

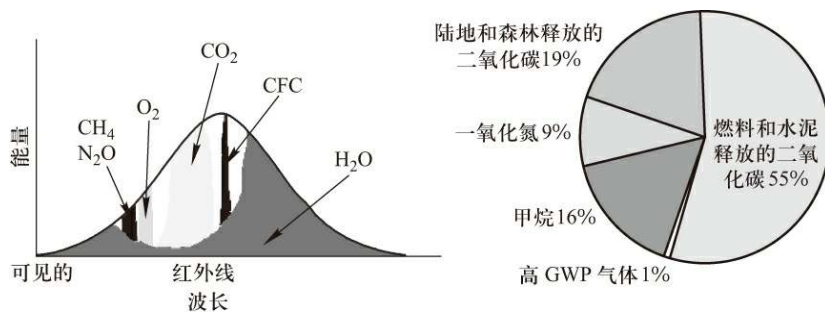


图1-5 不同温室气体对热量的吸收率以及在大气中的成分分布

(图片来源文献 [3])

从图1-6可以看出,不管是对热量的吸收率还是在大气中的含量, CO_2 都是温室气体的主要成分。图1-6给出了1950—2001年 CO_2 的排放量。

3. 佛罗里达州附近海面数据

选取佛罗里达州四个沿海城市作为观测点,它们分别是佛罗里达东海岸的圣彼得斯堡和彭萨科拉,佛罗里达西海岸的费南迪纳比奇和弗吉尼亚岛。图

1-7显示了所选取的四个城市。图 1-8 则给出了所选择的四个城市附近海平面的年平均数据。

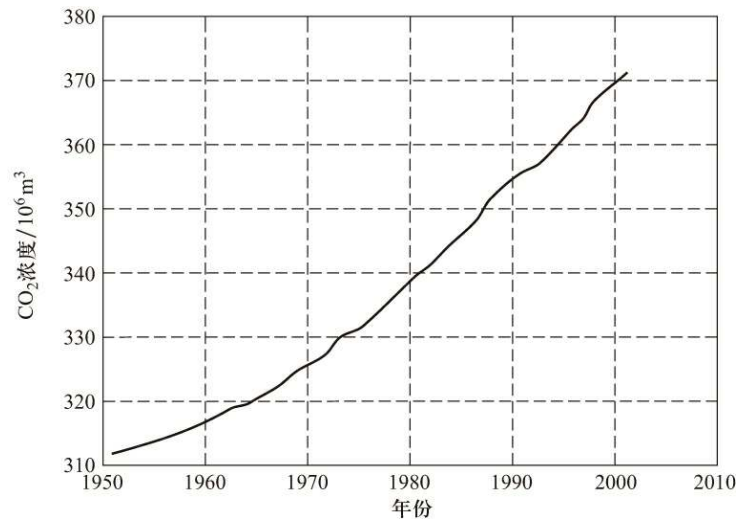


图 1-6 从1950 年到2001 年 CO₂ 的排放量
(图片来源文献 [3])



图 1-7 所选取的四个城市
(图片来源文献 [3])

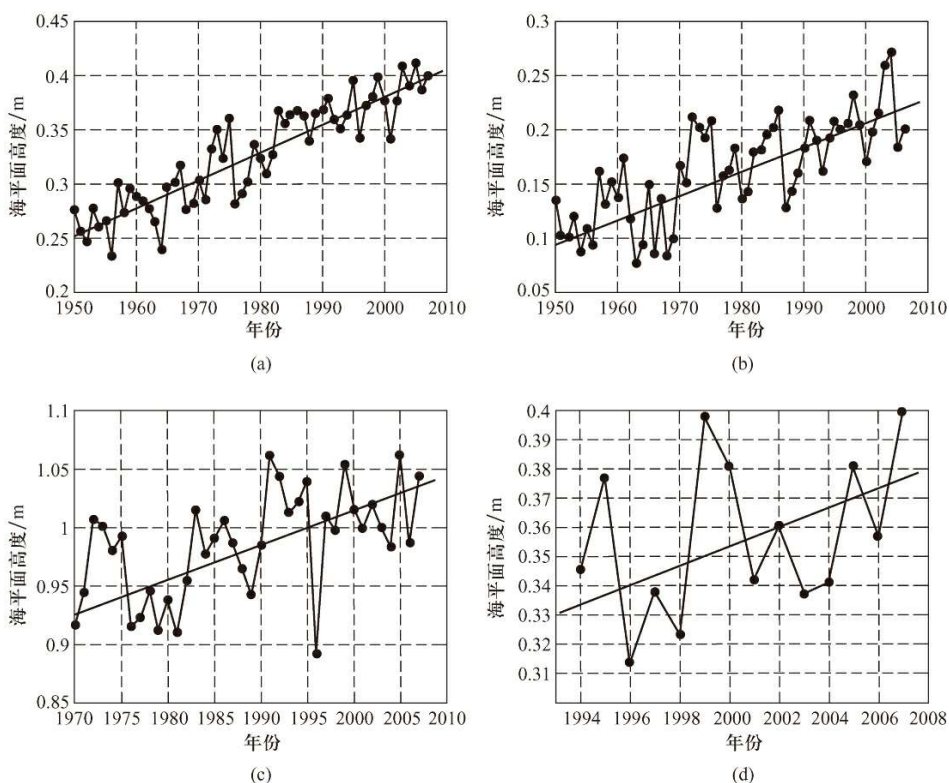


图 1-8 所选取的四个城市附近海平面的数据

(图片来源文献 [3])

二、冰雪消融体积的计算

随着温度的升高, 北极冰雪将从低纬度到高纬度不断融化。北极冰雪的构成主要包括格陵兰冰盖、北极海冰以及其他一些较小的冰河和冻土。作为北极冰雪的主体, 格陵兰冰盖和北极海冰的融化将对全球海平面的上升起到关键作用。如何合理计算格陵兰冰盖和北极海冰的融化量将直接关系到整个解决方案的成败。在原答卷中, 作者们根据阿基米德定律 (Archimedes law, 又称为阿基米德原理) 和冰水体积关系分别建立模型估计了格陵兰冰盖和北极海冰的融化量。

(一) 格陵兰冰盖消融体积的计算

1. 基本原理

格陵兰冰盖和北极海冰的主要成分是不同的, 格陵兰冰盖的主要成分是淡水, 密度是 900 kg/m^3 ; 北极海冰的主要成分是海水, 密度是 $910 \sim 915 \text{ kg/m}^3$ 。全球的不断暖化将导致这两类冰雪的显著消融, 并都将导致海平面的升高。根据阿基米德定律, 有

$$F_b = \rho_l g V_d \quad (1.1)$$

式中, F_b 表示液体的浮力, ρ_l 表示液体的密度, g 是重力加速度, V_d 是溢出的液体的体积。

因为格陵兰冰盖覆盖在大陆上, 所以当冰雪消融时, 融化的淡水将直接注入海水中, 由于冰雪和淡水的密度差异, 1 个体积单位的冰雪融化将得到 0.9 个体积单位的淡水, 即

$$\Delta V_{\text{water}} = 0.9 \Delta V_{\text{ice}} \quad (1.2)$$

忽略淡水和海水在密度上的微小差别, 则

$$\Delta V_{\text{sea}} = \Delta V_{\text{water}} \quad (1.3)$$

北极海冰的计算将复杂许多, 因为海冰是浮在海面上的, 90% 的体积沉浸在水面以下, 因此当海冰融化的时候, 并不是简单地增加海水总量进而抬升海平面。

海冰是漂浮在海面上的, 根据阿基米德定律, 重力和浮力是相等的, 故有

$$F_b = G_{\text{si}} \quad (1.4)$$

式中, G_{si} 是海冰的重量, 它可以进一步表示为

$$G_{\text{si}} = \rho_{\text{si}} g V_d \quad (1.5)$$

这样, 海冰融化对海平面上升的贡献为

$$\Delta V_{\text{si}} = \Delta V_{\text{siwater}} - \Delta V_d \quad (1.6)$$

式中, $\Delta V_{\text{siwater}}$ 是海冰融化带来的海水增量, 可以根据式 (1.2) 计算出来。

代入 $\rho_{\text{si}} = 915 \text{ kg/m}^3$ 及 $\rho_{\text{sea}} = 1030 \text{ kg/m}^3$, 并应用式 (1.1)、式 (1.2) 可以得到

$$\Delta V_{\text{sea}} \approx 0.0267 \Delta V_{\text{si}} \quad (1.7)$$

式 (1.7) 表明一个体积单位的海冰融化将带来 0.0267 个体积单位的海水增量。

显然, 根据式 (1.2) 和式 (1.7), 只要知道了格陵兰冰盖的冰雪融化量和北极海冰的冰雪融化量就可以大致计算出北极冰雪融化所带来的海水增量, 进而计算出平均海平面的上升幅度。

2. 格陵兰冰盖的年融化量计算

全球气温的不断升高, 造成格陵兰冰盖的不断融化。在原答卷中, 作者们收集了 1992—2003 年共 11 个年份由 ERS-1/ERS-2 卫星发布的数据 (卫星图像)。如图 1-9 所示为格陵兰冰盖在 1992 年和 1993 年夏季的卫星图像, 不同的深浅代表了不同的冰雪厚度。

根据格陵兰冰盖的卫星图像, 可以估算出每个单元 (色块) 上的冰盖变化量 (冰雪融化量), 因此, 整个格陵兰岛冰盖的年变化量就可以由下式计算出来

$$\Delta V_{\text{iceg}} = \sum_{i=0}^n S_i \cdot \Delta h_i \quad (1.8)$$

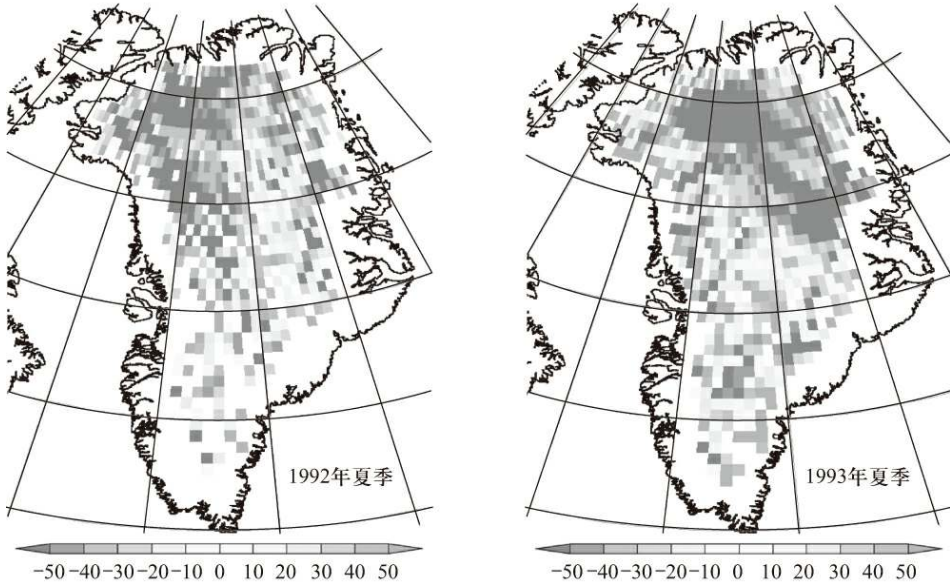
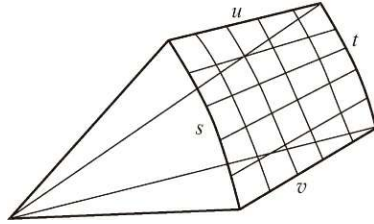


图1-9 格陵兰冰盖在1992年和1993年夏季的卫星图像

(图片来源文献 [3])

式中, S_i 表示第 i 个单元所表示的实际地表面积, Δh_i 表示第 i 个单元区域的冰雪厚度变化量, n 是整个格陵兰冰盖上总的单元数目。

显然每个 S_i 对应唯一的一个四元数组 (u, v, s, t) , 如图1-10所示。

图1-10 单元与四元数组 (u, v, s, t) 的对应关系

(图片来源文献 [3])

利用曲面积分可以比较精确地计算出 S_i 的面积, 进而计算出该单元冰雪的融化量, 但是计算过程过于复杂。简单的做法是, 根据问题的实际背景, 将这样一个不太规则的曲面近似为一个长方形, 这样其面积在 $|t-s| \rightarrow 0$, $|u-v| \rightarrow 0$ 时就可以近似地用下式计算

$$S_i \approx \frac{|t-s|}{360} \cdot \frac{|u-v|}{180} \cdot \frac{\cos u + \cos v}{2} \cdot L_1 \cdot L_2 \quad (1.9)$$

式中, L_1 和 L_2 分别表示 S_i 所对应的纬度和经度的跨度。

根据从英国气象局哈德利中心 (Met Office Hadley Center) 获得的数据, 可以得到在每个 1×1 区域 (这里的“1”分别表示1度跨度的纬度和1度跨度

的经度) 的冰雪覆盖率为 η_i (见图 1-11)。假设每个 1×1 区域上的冰雪覆盖率为 η_i , 则格陵兰冰盖的年变化量可以精确表示为

$$\Delta V_{iceg} = \sum_{i=0}^n S_i \cdot \Delta h_i \cdot \eta_i \quad (1.10)$$

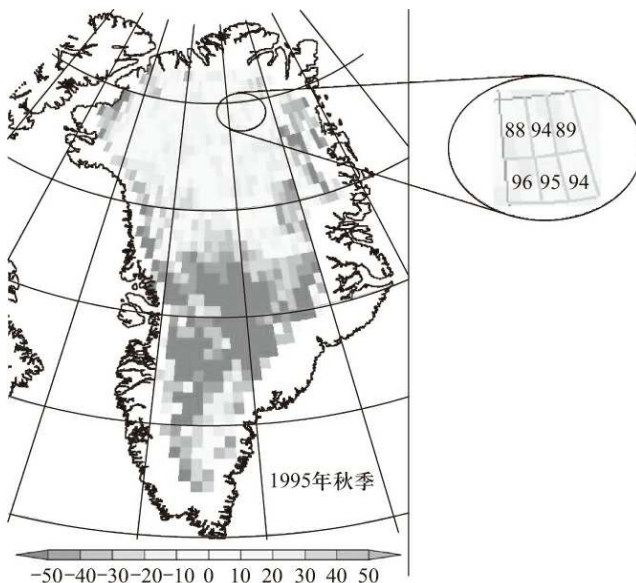


图 1-11 1×1 区域上的冰雪覆盖率

(图片来源文献 [3])

但是, 英国气象局哈德利中心 (Met Office Hadley Center) 的数据并不完善, 在某些区域上的数据存在缺失, 这就要求用户能够合理地估计、修复这些缺失的数据。通过比较格陵兰岛的等高线图和上述卫星图像, 可以发现格陵兰岛的冰雪覆盖规律 (范围、厚度等) 与该岛的地形分布大致相符, 因此根据该岛的地形可以设计一种简单有效的方法来估计、修复缺失的数据 (见图 1-12)。具体步骤如下。

第一步, 根据抛物线拟合 -42° 经度线上 1×1 区域的数据, 该抛物线可以根据 $(l_{north}, 0)$, $(0, h_{peak})$, (l_{south}, m) 三个点确定。

$$y = -\frac{h_{peak}}{l_{north}^2} \cdot x^2 + h_{peak} \quad (1.11)$$

式中, l_{north} 是图 1-12 (b) 中从 O 到 A 的距离; h_{peak} 是格陵兰岛的海拔高度; l_{south} 是从 O 到 B 的距离, O 、 A 、 B 的位置如图 1-12 (b) 所示。

第二步, 采用与第一步相同的步骤拟合出不同纬度的抛物线。

经过对缺失数据的修复, 再应用式 (1.10) 就可以计算出格陵兰岛每年大约有 $5.171 \times 10^{11} \text{ m}^3$ 的冰雪融化成淡水并注入太平洋。

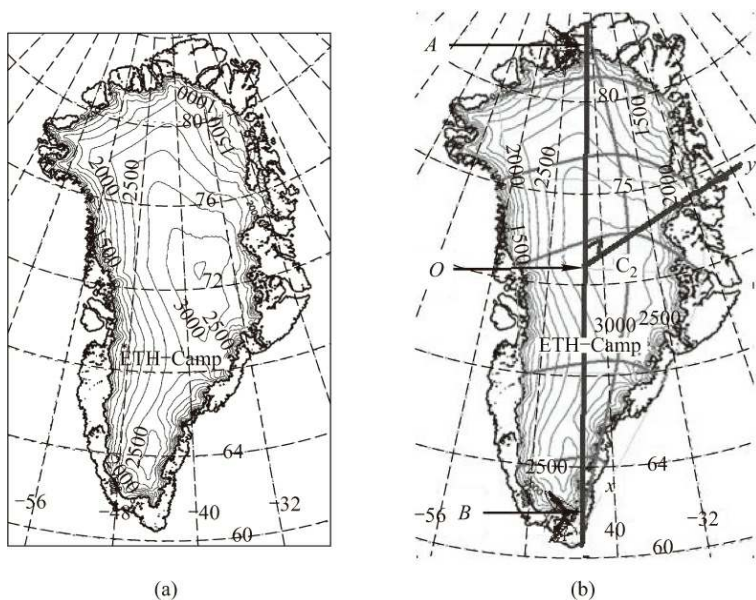


图1-12 格陵兰岛的地形图 and 解决方法

(图片来源文献 [3])

(二) 北极海冰消融体积的计算

1. 北极海冰数据

北极海冰数据可以从美国国家冰雪数据中心 (National Snow and Ice Data Center, NSIDC) 获得。图 1-13 显示了从 1979—2007 年北极海冰体积的演化, 显然海冰的区域和体积在不断缩减。

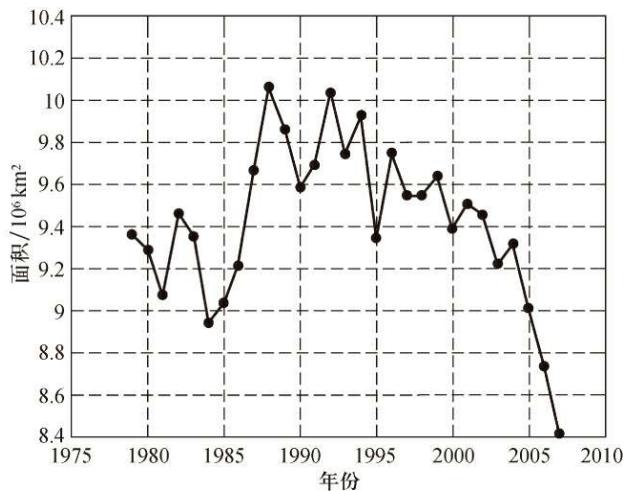


图 1-13 北极海冰变化曲线

(图片来源文献 [3])

2. 面积-厚度关系模型

如图 1-14 所示为北极海冰的面积和厚度分布。从图中不难发现，海冰的面积在迅速缩小，越靠近加拿大和格陵兰岛的海冰厚度越大。

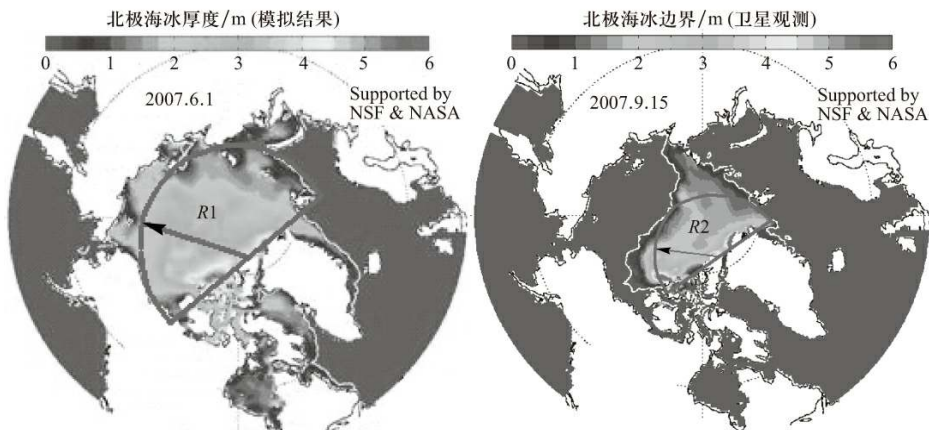


图 1-14 北极海冰的分布

(图片来源文献 [3])

通过观察北极海冰的厚度和面积，可以发现北极海冰的分布类似于一个半圆，当温度下降时北极海冰的面积和厚度将同步增加。这里建立了一个几何模型来估算融化的北极海冰体积。图 1-15 是海冰体积变化示意。海冰的融化体积等于上下两个抛物面所界定部分的体积，可以利用积分计算出来。

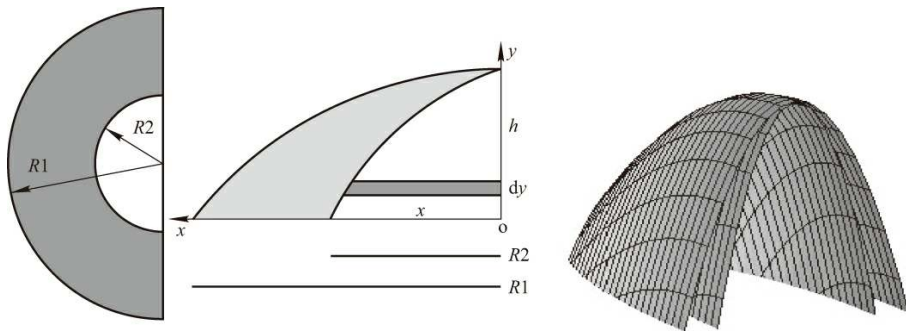


图 1-15 北极海冰体积变化示意

(图片来源文献 [3])

假设在较低温度下，新扩展的海冰面积是 S_1 ，在较高温度下，缩减的海冰面积是 S_2 。根据前面的假设，海冰的范围是一个半圆，那么该半径可以计算如下

$$R = \sqrt{2S/\pi} \quad (1.12)$$

冰体侧面轮廓形状由 $(0, h)$, $(\pm R)$ 确定

$$y = -\frac{h}{R^2} \cdot x^2 + h \quad (1.13)$$

融化的海冰体积可以通过积分计算

$$\Delta V_{\text{ices}} = \pi \cdot \int_0^h \frac{h-y}{h} \cdot R^2 dy \quad (1.14)$$

根据式 (1.14), 北极海冰总的融化体积是

$$\Delta V_{\text{ices}} = \frac{\pi h}{2} \cdot (R_1^2 - R_2^2) \quad (1.15)$$

式中, h 是海冰最厚处的厚度, 约等于 5.5 m。

最后, 应用式 (1.15) 可以计算出北极海冰融化将增加 $2.6 \times 10^9 \text{ m}^3$ 的水到海洋中, 与格陵兰岛相比, 这个数值无疑是非常小的。

三、多元线性回归模型

基于前面收集的数据和已有结果, 这里将建立多元线性回归模型来预测由于北极冰雪融化 (主要是格陵兰冰盖和北极海冰的融化) 所导致的全球海平面上升幅度。如图 1-16 所示为使用多元线性回归模型对海平面上升幅度进行预测的流程。

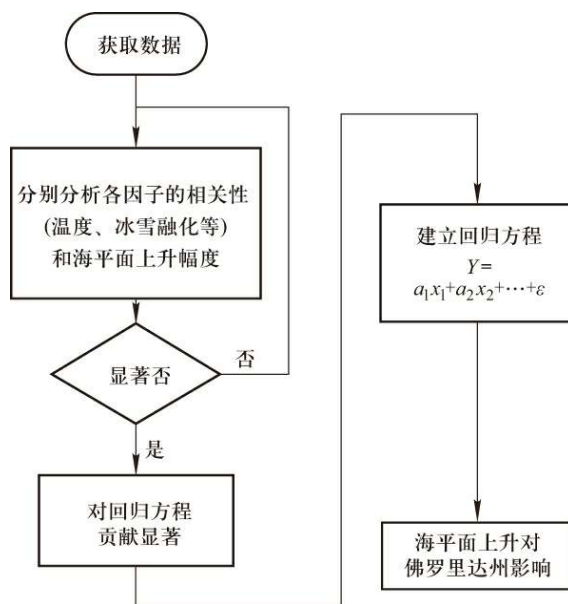


图 1-16 使用多元线性回归模型对海平面上升幅度进行预测的流程

(图片来源文献 [3])

众所周知, CO_2 等温室气体的排放以及冰雪消融对全球气温的升高具有重要影响。同时, 全球气温的升高和冰雪消融对海平面的升高也具有重要的影响。因此, 首先需要根据因素之间的相关性选取对海平面上升影响最显著的因素。

- 温室气体和全球气温变化之间的相关性。
- 北极冰雪融化和全球气温之间的相关性。
- 北极冰雪融化和海平面变化之间的相关性。
- 全球气温变化和海平面变化之间的相关性。

相关性分析的结果见表 1-1。

表 1-1 相关性分析

因素	温室气体和温度	冰雪融化量和温度	冰雪融化量和海平面	温度和海平面
相关系数	0.762	0.481	0.793	0.553

显然，全球气温直接受到温室气体排放和北极冰雪融化的影响。因此，这里首先建立对全球温度变化进行预测的多元线性回归模型

$$\Delta T = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \Delta V_{ice} + \alpha_2 \cdot \Delta M_{CO_2} + \varepsilon \quad (1.16)$$

式中， ΔV_{ice} 表示北极冰雪融化量， ΔM_{CO_2} 表示 CO_2 的排放量。

全球海平面的上升将受到北极冰雪融化和全球气温变化的直接影响。类似地，可以建立多元线性回归模型

$$\Delta h_{sea} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \Delta V_{ice} + \beta_2 \cdot \Delta T + \varepsilon \quad (1.17)$$

为了确定上述多元线性回归模型的系数，这里选取了佛罗里达州四个城市（佛罗里达东海岸的圣彼得斯堡和彭萨科拉，佛罗里达西海岸的费南迪纳比奇和弗吉尼亚岛）附近的海面的观测数据。回归方程（1.16）和（1.17）的系数可以使用 SPSS 软件确定

$$\alpha_0 = 14.269, \alpha_1 = 0.436, \alpha_2 = -0.254$$

以及

$$\beta_0 = 0.993, \beta_1 = 0.021, \beta_2 = 0.008$$

显著性检验的结果表明， α_1 和 α_2 、 β_1 和 β_2 都是显著的，而且线性关系也比较显著——这也说明选择多元线性回归模型对全球平均气温和全球海平面上升幅度进行预测是比较合理的。

四、模型的求解和结果分析

根据收集的数据，求解建立的模型，可以预测未来 50 年中全球海平面的上升幅度、佛罗里达附近海平面的上升幅度以及对海岸线的侵蚀。

（一）全球海平面的上升幅度

求解预测模型（1.16），得到全球气温在未来 50 年的变化预测值（图 1-17）。

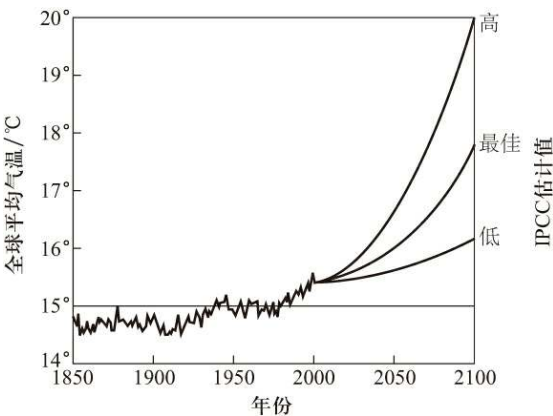


图 1-17 全球气温预测
(图片来源文献 [3])

IPCC 报告中全球未来 50 年的温度预测见表 1-2。

表 1-2 IPCC 报告中全球未来 50 年的温度预测

年份	2010	2020	2030	2040	2050
温度℃	15.43	15.56	15.68	15.99	16.28

使用预测模型 (1.17) 对未来 50 年由于北极冰雪融化所导致的海平面上升幅度进行了预测，具体结果如图 1-18 所示。

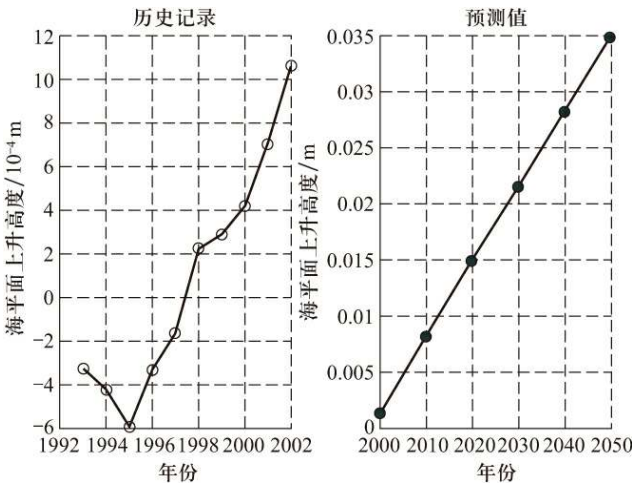


图 1-18 北极冰雪融化所导致的海平面上升幅度
(图片来源文献 [3])

根据上面的计算结果不难发现，在未来 50 年中，北极冰雪融化将导致海平面显著上升。

(二) 佛罗里达附近海平面的上升幅度

根据题目的要求，这里将预测佛罗里达州附近海平面的上升幅度，仍然以费南迪纳比奇（Fernandina）、圣彼得斯堡（St.Petersburg）、彭萨科拉（Pensacola）和弗吉尼亚岛（Virginia key）四个海岸城市为例。

因为 Fernandina 是最靠近 Jacksonville 的观测中心，这里选取它的数据来确定回归模型的系数，然后再进行预测。使用 SPSS 软件易得

$$\Delta h_{sea}=0.993+0.021 \cdot \Delta V_{ice}+0.008 \cdot \Delta T$$

根据该模型，Fernandina 附近海平面高度见表 1-3。

表 1-3 Fernandina 附近海平面高度/m

年份	2010	2020	2030	2040	2050
海平面高度	1.028 635	1.047 58	1.066 527	1.085 471	1.104 413

根据该表不难发现，Fernandina 附近的海平面将以每年 2 mm 的速度持续上升（见图 1-19）。

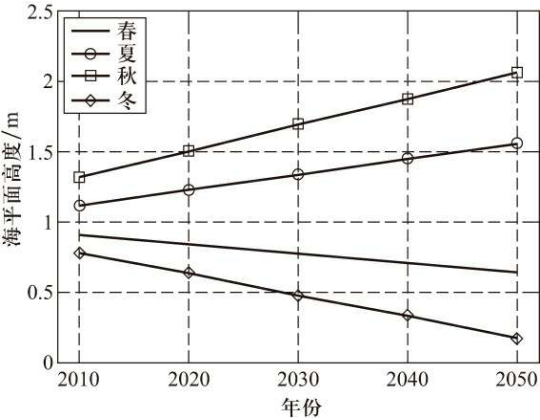


图 1-19 北极冰雪融化所导致的 Fernandina 附近海平面的上升幅度

（图片来源文献 [3]）

同样的，使用上述预测模型可以得到其他几个城市的海平面上升幅度（见表 1-4 和图 1-20）。

表 1-4 佛罗里达州其他四个城市的海平面高度/m

年份	2010	2020	2030	2040	2050
圣彼得斯堡	0.348 927	0.333 385	0.317 833	0.302 302	0.286 8
彭萨科拉	0.173 125	0.153 742	0.134 344	0.114 977	0.095 659
弗吉尼亚岛	0.410 159	0.457 869	0.505 576	0.553 29	0.601 014
基韦斯特	0.293 787	0.299 393	0.304 998	0.310 605	0.316 217

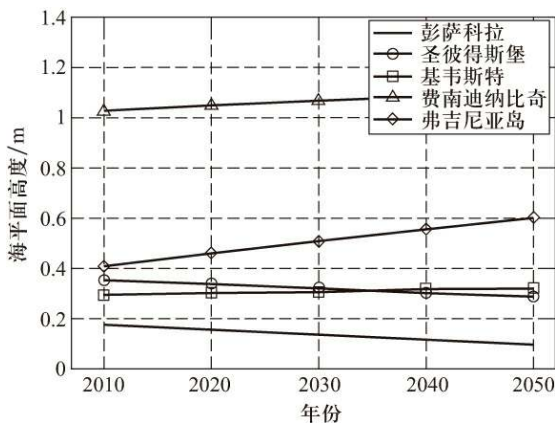


图 1-20 佛罗里达州 5 个大城市附近海平面的上升趋势图

(图片来源文献 [3])

(三) 对海岸线的侵蚀

当海平面上升时，它会产生两方面的影响。首先，部分较低的陆地和河岸会被海水淹没、侵占，因此，海岸线会向内陆侵蚀。但是，通过多年的气象观测可以证明这种影响是非常弱的。其次，随着海平面上升，海洋的波浪作用也可能对海岸造成巨大的额外侵蚀。根据布容法则 (Bruun Rule)^[4] 可以计算出被侵蚀的海岸线距离

$$R = \frac{L}{b+h} \cdot S \quad (1.18)$$

式中， R 表示海岸线被侵蚀的距离， b 表示海边沙滩的高度， h 表示近海的深度， L 表示从海滩到深度为 h 的近海的横向距离， S 为海平面高度。

一般地，可以用 $\frac{1}{\tan \theta}$ 代替 $\frac{L}{b+h}$ ，这里 $\tan \theta$ 表示海滩附近的平均倾斜度，沙滩的倾斜度一般是 $1/50 \sim 1/100$ 。所以，上面的公式可以简化为

$$R = 50S \text{ 或 } R = 100S \quad (1.19)$$

这里取 $\tan \theta = 1/50$ 。根据前面的海平面预测数据，可以预测出海平面上升对佛罗里达州海岸线的侵蚀量（见图 1-21）。

显然，佛罗里达海岸正在受到海水的侵蚀，虽然被侵蚀的“速度”各地不同，但是海平面的持续上升必然增加大陆遭受海水侵蚀的威胁。

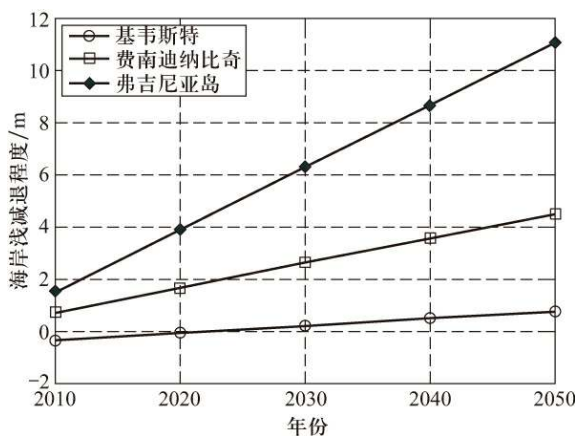


图 1-21 佛罗里达附近海平面的上升对海岸线的侵蚀

(图片来源文献 [3])

1.3.2 模型二：初等数学模型

本小节根据冰水体积关系建立了三个初等模型^[4]来预测北极冰雪融化对佛罗里达海岸可能造成的影响。第一个模型是常温模型——在极地温度不变的假设下，运用冰雪和水的体积比，计算了极地冰雪融化所增加的淡水量，并因此得到海平面的上升幅度。第二个模型是变温模型，该模型是在常温模型的基础上，根据美国国家海洋和大气管理局（National Oceanic and Atmospheric Administration, NOAA）在 2008 年的结论，分别计算了最坏和最好两种情形下北极冰雪融化所导致的海平面上升幅度。第三个模型是海洋体积膨胀模型，该模型在变温模型的基础上，又考虑了海水的热膨胀，根据热胀冷缩原理计算了全球温度升高所导致的海平面上升幅度。最后通过求解所建立的模型，详细讨论了极地冰雪融化对佛罗里达州基韦斯特（Key West）、迈阿密（Miami）、代托纳比奇（Daytona Beach）和坦帕（Tampa）四个城市的具体影响。

一、极地冰雪

极地冰雪分成以下两类：

- ① 海冰，例如北极的冰盖。
- ② 陆地淡水冰雪，主要分布在格陵兰岛和南极大陆。

因为海冰漂浮在海面上，所以海冰的融化对海面的影响是非常小的。众所周知，海水和固体冰的密度分别是 $1\,026\text{ kg/m}^3$ 和 919 kg/m^3 ，根据阿基米德定律，这些海冰约有 10% 的体积露在海面以上。所以，如果这些海冰全部融化并注入海洋，90% 体积的海冰融水将弥补由于海冰融化所造成的海水体积减小，只有 10% 体积的海冰融水被用来增加海水总量，进而抬升海平面，当然，这对全球海平面的抬升作用是非常有限的。

虽然海冰融化对全球海平面的抬升作用有限,但是当这些海冰全部融化之后,将导致一些其他方面的问题。

① 刚开始的一段时间北半球海洋的平均气温将会适当降低(幅度不大)。

② 随后,因为海冰消失,冰盖对阳光的反射作用大大降低,海水会吸收更多太阳的热量,假以时日,将显著增加全球的平均气温。

当陆地上的淡水冰融化成淡水并注入海洋以后,这些水将对海水总量的增加造成不可逆的影响。格陵兰岛上冰雪的总体积是 $2.624 \times 10^6 \text{ km}^3$ 。如果这些冰雪完全融化并注入海洋(不计算海底的变迁和海面面积的增加),全球平均海平面将上升 6.7 m——这还仅仅是格陵兰岛冰雪融化所造成的影响。

现在的问题是,未来 50 年内,陆地淡水冰雪的融化将如何影响全球海平面呢?

二、模型的建立和求解

1. 常温模型

为了预测冰盖融化对佛罗里达海岸的影响,这里建立了一个常温模型^[4]来快速预测可能的洪灾(原文使用的是“flood”)。假设:

① 冰雪融化率不会增加或减少。

② 冰雪融化的水在全球海洋中均匀分布。

③ 全球气温和气候不会显著变化。

首先引入下面的记号。

% Melt——10 年期间陆地冰雪融化百分比。

V_l ——北半球陆地冰雪的现存体积。

$C_{l \rightarrow w}$ ——从冰到水的转化因子, 0.919。

SA_{w0} ——全球海洋的表面积, $3.611 \times 10^8 \text{ km}^2$ 。

对于一个给定的 10 年,有下面的公式

$$\text{全球海平面的增加值} = \% \text{ Melt} \times V_l \times C_{l \rightarrow w} / SA_{w0}$$

卫星图像提供的数据显示,格陵兰岛的冰雪正以每年 239 km^3 的速度消融。根据线性关系计算,50 年后海平面将增加 3.3 cm。

如果加上阿拉斯加和加拿大的陆地冰雪融化量,海平面还将每年增加 0.025 cm 和 0.007 cm。同样的,根据线性关系计算,50 年后这两处陆地冰雪的贡献将导致海平面增加 1.6 cm。加上前面计算的格陵兰岛冰雪融化的贡献,到 2058 年全球海平面将总共升高 4.9 ~ 5 cm,约等于 2 in (1 in = 2.54 cm)。

根据上面的模型和结果不难看出,因为佛罗里达州所有的海滨城市都至少高出海平面 2 m,所以即使 50 年后,这些冰雪融水都不会对佛罗里达州海滨地区造成显著影响。但是,可能会增加暴风雨和飓风带来的降水。

2. 变温模型

常温模型假设两极地区的温度是常数,一般来说这样假设是不合适的。全

球的气温正在升高, 因此下一个模型将考虑温度变化 (升高) 对极地冰雪消融的影响。

在 20 世纪, 全球的平均气温大约上升了 $1\text{ }^{\circ}\text{C}$, 这些增加的热量和二氧化碳气体大部分被海洋吸收了, 又将进一步增加它的温度。因此, 科学家预计在未来 50 年中全球气温将增加 $0.7 \sim 2.9\text{ }^{\circ}\text{C}$ (Ekurzel 2007)。全球气温的升高将加速陆地上淡水冰雪的融化速度, 这意味着海平面的升高幅度将大于常温模型的预测值。

下面将分最好 (增加 $0.2\text{ }^{\circ}\text{C}$) 和最坏 ($2.9\text{ }^{\circ}\text{C}$) 两种情形来讨论在未来 50 年中全球气温的升高如何对海平面的升高产生影响。仍然利用线性模型, 在最保守的情形, 未来 50 年中全球温度将上升 $0.7\text{ }^{\circ}\text{C}$, 假设每个 10 年增加 $0.14\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。

冰盖将吸收更多的热量进而更快地融化。这里以 10 年为间隔计算海平面的上升幅度。吸收的热量 Q_x 可以用下面的公式定量计算

$$Q_x = msT$$

式中, x 是间隔时间 (年), m 是冰盖的质量 (g), s 是冰的比热容 ($2.092\text{ J}/(\text{g}\cdot^{\circ}\text{C})$), T 是全球温度的变化量。计算后得到

$$Q_{50} = 4.85 \times 10^{18} \text{ kJ}$$

为了计算由于全球气温升高 $0.7\text{ }^{\circ}\text{C}$ 所导致的冰雪融化量, 用水的潜热 (在恒定的温度和压强下某物质改变状态时所吸收或放出的热量, 如冰化成水) 去除冰雪吸收的总热量, 进而得到冰雪的融化量为 $1.45 \times 10^{16} \text{ kg}$ 。因为每立方米的水是 $1\,000 \text{ kg}$, 所以将有 $1.45 \times 10^{13} \text{ m}^3$ 的冰雪融水注入海洋, 再除以全球海平面的总面积, 不难得到全球海平面将因此升高 4 cm 。再加上常温模型中所得到的数据, 因此, 根据最保守的估计, 在未来 50 年全球海平面将升高 9 cm 。如果出现最坏的情况, 在未来 50 年全球温度升高 $2.9\text{ }^{\circ}\text{C}$, 根据上面的模型, 不难得到在未来 50 年全球海平面将升高 21 cm 。

3. 海洋体积膨胀模型

上面的两个模型计算了由于全球气温升高所导致的陆地冰雪融化总量以及注入海洋的冰雪融水总体积。但是, 上面的计算中没有区分北半球和南半球的相对海洋表面积, 北半球和南半球不同的陆地与海洋表面积比将对水的分布产生重要的影响。

资料显示, 全球约 44% 的海洋分布在北半球, 56% 的海洋分布在南半球 (Pidwirny, 2008)。北半球的海洋总面积约为 $1.58 \times 10^8 \text{ km}^2$ 。

南极的陆地冰川同样也在消融。所以, 在北极的冰雪融水注入海洋的同时, 南极的冰雪融水也在不断地注入海洋。很少有关于这些水在全球海洋的分布规律和流速的信息, 因为绝大多数的冰雪融水在注入海洋后都停留在海水的最上层, 所以这些水将受到洋流的影响, 因此北半球的冰雪融水将主要留在北

半球。有鉴于此，假定北半球的陆地冰雪融水有一半留在了北半球的海洋。
有下面几个因素导致海洋变暖。

- ① 全球大气温度的升高将导致海水变暖。
- ② 由于极地冰雪的融化，冰雪对阳光的反射越来越少，这意味着海洋将比以前吸收更多来自太阳的热量。
- ③ 越来越多的二氧化碳将被海水吸收。

在海洋深度达到 215 m 以下，巨大的压力和阳光的缺乏抵消了海水温度的上升效应。这意味着温度的上升只能使最上面 215 m 范围的海水膨胀。15 ℃ 时水的热膨胀系数是 $2 \times 10^{-4} \text{K}^{-1}$ 。水的膨胀体积可以由下面的公式计算

$$V_{\text{change}} = V_{\text{start}} B T_{\text{change}}$$

式中： V_{start} ——初始体积；
 V_{change} ——体积的变化量；
 B ——水的热膨胀系数；
 T_{change} ——温度的变化量。

再除以全球海洋表面积，可以得到，在未来 50 年，海水膨胀将导致海平面最少上升 2 cm，最多上升 12.5 cm（见图 1-22）。

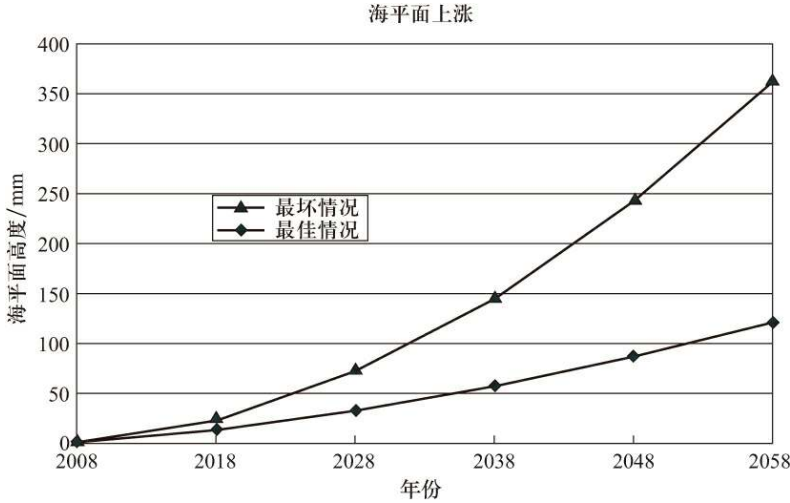


图 1-22 海洋体积膨胀模型的结果
(图片来源文献 [4])

综合前面 3 个模型的结果，在未来 50 年，佛罗里达周围的海平面将上升 12 ~ 36 cm。

三、对佛罗里达海岸的影响

海平面的升高对佛罗里达各海岸城市的影响是不同的。

1. 基韦斯特

基韦斯特 (Key West) 是所选的佛罗里达四个海岸城市中地势最低的, 平均海拔只有 2.44 m。50 年后, 根据前面模型的计算, 海平面将升高 12 ~ 36 cm。基韦斯特是最有可能受到洪水影响的城市。当海平面升高时, 该市的水面也将相应地升高。所以, 不仅该市发生洪水的可能性增加, 而且在暴风雨后下水道将更难排水, 地面更难干燥。根据模型 3 的计算结果, 在未来 50 年中, 基韦斯特市 75% 的地区, 包括机场, 将处于洪水频发的风险中。该市应该考虑如何阻止洪水进入机场区域, 或者在更高的海拔地区建立一个新的机场, 以应对可能到来的频繁发生的洪灾。

2. 迈阿密

迈阿密将遇到跟基韦斯特类似的问题。根据模型结果, 迈阿密将会失去部分海滩, 并将在迈阿密河流域发生小规模洪水。同样的, 全市水面的升高将使该市下水道的排泄功能受到影响。实际上, 该市最大的潜在威胁是可能发生的飓风灾难。由于海平面的升高和市区的低海拔, 该市将可能遭遇 36 cm 深度的洪水, 并将维持较长时间。

在未来的 50 年中, 将会有更多的建筑临近海边, 在带来舒适性的同时也会给建筑的结构安全带来新的威胁。

3. 代托纳比奇

代托纳比奇将会失去部分海岸线, 并且在一些低洼地区更容易受到洪水的侵袭。此外, 该市将在热带暴风雨和飓风来临时面临严峻的洪水威胁。当然, 随着在内陆方向的海拔急剧升高, 洪水的影响将会比较小, 排水系统也将正常工作。

4. 坦帕

因为该市最低区域的海拔也有 8 m, 所以坦帕在未来 50 年中受到的影响最小, 基本上与现在没有什么变化。但是, 坦帕市应该防备可能的洪水威胁以及可能的排水系统问题。

1.4 问题的综合分析与进一步研究的问题

1.4.1 问题的综合分析

在前面的几个部分, 对两篇 2008 年国际大学生数学建模竞赛 A 题 (Take a Bath) 的优秀答卷, 分别介绍了答卷中所用的模型以及所得的结果。

第一个模型主要采用的是多元线性回归模型来预测北极冰雪融化所可能带来的影响。首先, 文中收集了关于北极海冰、格陵兰冰盖、全球平均温度、温室气体排放量等一系列数据。其次, 根据北极海冰的地理分布特征以及格陵兰冰盖的卫星图像分别建立了几何模型来估计北极海冰、格陵兰冰盖的年平均融

化体积。再次，又建立了多元线性回归模型来预测未来 50 年中由于北极海冰和格陵兰冰盖的融化所带来的全球平均气温升高量和全球海平面上升幅度。最后，应用所建立的模型具体分析了海平面上升对佛罗里达州四个海岸城市的影响。

该模型的优点主要有两个。

(1) 数据收集的比较多，而且对数据的处理比较到位。比如，根据所收集的北极海冰数据和格陵兰冰盖数据，估计出了北极海冰和格陵兰冰盖的年平均融化量。

(2) 在结果的分析上做得比较出色，不仅按题目要求预测了北极冰雪融化对佛罗里达附近海平面的影响，而且特别讨论了由于海平面上升所导致的海岸线侵蚀问题。

第二个模型主要采用的是初等数学模型来预测冰雪融化所可能带来的影响。首先，建立了一个常温模型，在极地温度不变的假设下计算出了冰雪融水对全球海平面的抬升作用，并根据线性关系计算了未来 50 年全球海平面的上升幅度。其次，建立了一个变温模型，基于 Ekwurzel 在 2007 年对未来 50 年全球平均温度上升的预测 ($0.7 \sim 2.9\text{ }^{\circ}\text{C}$)，根据线性关系得到了未来 50 年冰雪融化所导致的海平面上升值。再次，又建立了一个海洋体积膨胀模型，在合理假设下讨论了由于全球温度升高，海水吸热膨胀问题，得到了由于海水膨胀所导致的全球海平面上升量。最后，分别讨论海平面上升对佛罗里达州四个海岸城市的具体影响。

该模型的优点主要有三个。

① 数据收集得非常有效率。例如，格陵兰岛冰雪的年融化率 ($239\text{ km}^3/\text{年}$) 等。

② 视角比较独特。虽然题目只要求讨论北极冰雪融化对佛罗里达州沿海城市的影响，但是该答卷不仅考虑了北极冰雪融化，而且考虑了全球所有冰雪融化的影响，特别是考虑了由于全球气温升高所导致的海水膨胀，突破了题目的限制。

③ 所得结论非常现实、客观。特别是海平面升高对佛罗里达州四个海岸城市基韦斯特、迈阿密、代托纳比奇和坦帕具体影响的分析，非常具有现实意义。

所选的两份答卷中，第一份是来自中国参赛队的答卷，获奖等级是 Meritorious Winner。第二份是来自美国参赛队的一份答卷，获奖等级是 Outstanding Winner。相比于第一份答卷，第二份答卷在以下方面存在优势。

① 英文表述更清楚。

② 数据收集更有效。

③ 把海平面上升对佛罗里达州沿海城市的影响分析得更具体。特别地，

第二份答卷完全突破了原题目的范畴。不仅研究了北极冰雪（含格陵兰冰盖等）融化对海平面的影响，而且研究了其他陆地冰川（如南极等）的融化对海平面的影响，特别是对全球温度升高所导致的海水热膨胀的分析，更是独树一帜——这可能也是能够获得 Outstanding Winner 的重要原因吧。

事实上，针对该题能够用来求解的模型可能还有很多。但是，不管选取什么模型，都需要解决一个核心问题——那就是北极冰雪融化对海平面的抬升作用有多大。毕竟，只有海平面上升才能给地球“洗澡”！为了解决这个核心问题，所有的工作都需要围绕它展开。查找北极冰雪数据、全球平均气温数据、温室气体排放数据，等等，然后需要合理刻画极地冰雪融化与海平面升降的数值关系，并建立模型来反映这种关系。最后根据计算结果讨论海平面上升所引起的一系列问题，特别是对佛罗里达州海岸城市的影响。如果还有余力，可以对其他相关问题再进行分析。比如减少温室气体排放对全球气温的影响，全球气温变化对极地冰雪融化的影响，等等，沿着此思路分析下来，就可以得到温室气体排放对海平面高度、佛罗里达州海岸的影响，进而评价全球节能减排政策的有效性，并提出相应的合理化建议——这将是评审专家非常乐于看到的结论。

正如前面所说，该赛题的解决方案可能还有很多，读者也可以提出自己独特的见解。本书选取这样的两份答卷实际上是有目的的——了解国际大学生数学建模竞赛赛题的特点，比较中国参赛队和美国参赛队答卷风格的不同。

先说国际大学生数学建模竞赛赛题特点。

首先是赛题的开放性。参赛队员可以从不同角度、不同领域来解读赛题，并针对某一方面提出自己的见解，给出自己的解决方案，甚至允许参赛队突破原来题目的范畴。

其次是赛题的包容性。与中国大学生数学建模竞赛赛题不同，几乎所有的国际赛赛题都没有标准答案，因此，无论参赛队从哪个角度来解读赛题，只要合理，在评审专家看来都可能是一份优秀答卷。

最后是赛题的实用性。当然，这一条是所有数学建模赛题的共性，只是国际赛赛题表现得更加突出而已——毕竟美国大学生数学建模竞赛是所有大学生数学建模竞赛的鼻祖。

再来比较一下中美参赛队答卷风格的不同。根据笔者多年的带队经验，中国的参赛队员思维比较严谨，比较追求解决方案的系统性。而美国参赛队员相对来说思维比较发散，为了解决问题“不择手段”。在写作上，中国队员注重答卷的格式，而美国队员注重答卷的系统性和可读性。当然，英文写作能力上的差距也是大家应该正视的一个重要问题。

1.4.2 进一步研究的问题

正如前面所阐述的那样，极地冰雪融化的影响是深远的、广泛的、不可逆转的。当然，极地冰雪融化最直接的影响就是前面刚讨论过的海平面上升以及由于海平面上升所导致的海岸线后退、河面升高、下水道排水困难等。事实上，针对这一问题，值得继续深入研究的问题还有很多，如下所述。

1. 与极端天气的关系

近几年，不管沿海还是内陆，不管北半球还是南半球，极端天气事件出现的频率和强度都有所增加，比如暴雨暴雪、干旱无雨、骤热骤冷、飓风台风，等等。这些极端天气事件的发生与温室气体的排放有无关系？与极地冰雪的持续融化有无关系？很显然，这都是人类最关心的问题。

2. 对洋流的影响

已有研究显示，极地冰雪融水持续注入海洋，对各洋流系统都产生了巨大的影响，比如洋流推迟、减弱或加强，等等，能否通过收集的数据定量分析极地冰雪融化对几个典型洋流系统的影响？

3. 对生物和生态系统的影响

毫无疑问，极地冰雪的融化将对海平面、洋流产生影响，进而对生物和生态系统产生影响。据英国《每日邮报》报道，全球变暖已经日益威胁到生物的生存，北极熊就是最典型的受害者（见图1-23）。能否定量分析气候变暖和极地冰雪融化对生物系统和生态系统的影响？



图1-23 北极熊母子被困在浮冰上进行海上漂流

4. 对政治和经济的可能影响

全球温度升高毫无疑问将带来一系列的政治、经济问题，各会员国在每年一次的联合国气候变化大会上的唇枪舌剑是为了什么？选取若干代表性事例，具体分析温室气体排放、极地冰雪融化等对各国政治经济的影响。

类似这样的问题还有很多，这反映了应对全球气候变暖的刻不容缓，反映了控制温室气体排放的刻不容缓。

参考文献

- [1] <http://www.5joys.com/better/sos2010/>
- [2] 政府间气候变化专门委员会. 气候变化 2007: 综合报告. 日内瓦, 2008.
- [3] Hou Song, Pan Tian, Shi Yang. Far from “The Day After Tomorrow”. MCM2008: Meritorious Winner.
- [4] Benjamin Coate, Nelson Gross, Megan Longo. The Impending Effects of North Polar Ice Cap Melt. The UMAP Journal, 2008, 29 (3): 237–247.

