

中南大学数学实验与建模

建模报告

上课班级 周二 第 9-10 节 C109

队 号

编号	学号	姓名	专业班级	学院
1	8213180228	程 诚	物联网 1802	计算机学院
2	8208181514	王云鹏	物联网 1802	计算机学院
3	8203180823	陈思思	机 械 1805	机电工程学院

高温作业专用服装设计

摘 要

高温作业会使人体出现一系列生理功能改变,如超过一定限度,则会产生不良影响。因此,高温工作服的研制和生产显得尤其重要。本文通过建立一维复合介质热传导模型,对高温作业专用服中各层间的传热过程进行模拟,确定不同温度条件下作业服到皮肤表侧各层的温度分布情况。求解一定约束条件下介质层的最优厚度,为实验测试提供相关的理论分析作为参考,进而降低生产成本、提高研发效率。

针对问题一“环境—服装—皮肤”系统内的热传递过程是一个一维导热过程。在整个系统内热传递仅考虑热传导的传热,以常规热传导方程为起点,将作业服各层视为相互接触且相互平行的无限大平板,建立一维复合介质热传导方程。使用 *Crank - Nicholson* 法对方程进行求解,尽可能地与附件 2 所给出的实测数据相拟合,得到方程中实验环境与工作服 I 层、工作服 IV 层与假人皮肤之间的对流换热系数 h_I , h_{IV} 分别为 $117.41 W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 、 $8.36 W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 。再将 h_I 、 h_{IV} 与附件 1 所提供的各分层参数回代入原方程中,在问题一给定的条件(已知各分层密度、比热、热传导率、厚度等参数值或范围,环境温度为 $75^\circ C$, II 层厚度为 $6 mm$, IV 层厚度为 $5 mm$)下进行求解,得到作业服各分层同时随时间与空间两个维度变化的温度分布。

针对问题二出于对经济性的考量,所求 II 层最优厚度意为满足给定约束条件的最小厚度,因为此时所需原料最少,可以达到生产成本最低化要求。究其本质,此问题属于单变量的非线性规划问题,联系问题一所建立的温度传导模型,在附件 1 给定的 II 层厚度范围内进行步长为 $2 mm$ 的定步长搜索,在不同厚度取值下求解模型得到假人皮肤外侧温度随时间的变化。利用约束条件缩小搜索的范围,反复减小步长进行搜索,最终得到满足约束条件的 II 层最小厚度即最优厚度为 $17.6 mm$ 。

针对问题三 II 层与 IV 层的最优厚度应使得研发成本和研发周期最小化。考虑到 IV 层为空隙层,求解过程中我们首先使 II 层厚度最小化,在这一前提下搜索满足约束条件且使得研发周期最小化的 IV 层厚度。与问题二类似,我们首先使用区域搜索算法初步确定满足约束条件的 II 层、IV 层厚度取值范围。循环遍历找到所有满足条件的两者厚度组合,根据优化目标求得最终结果,得到 II 层最小厚度与对应的 IV 层最优厚度分别为 $19.3 mm$ 、 $6.4 mm$,此时皮肤外侧温度超过 $44^\circ C$ 的时长为 $290 s$ 。

通过对模型进行综合分析,不难发现一维复合介质热传导方程对厚度的描述及设计非常合理,模型拟合准确性较高。

关键词

一维热传导方程

Crank - Nicholson 法

非线性规划

有限差分

1 问题重述

1.1 问题背景

在热防护服的实际使用中,大多数使用者并不直接接触火焰,而是外界热量以热对流、热辐射、热传导形式传递给人体,对人体造成伤害。热防护服必须具备较好的减缓和阻止热量传递的性能,避免热源对人体造成伤害,给高温环境下工作的热防护服使用者提供良好的安全防护。高温作业服是重要的防护装备,可用于避免高温环境下工作人员的灼伤。在从设计到研发再到生产这一过程中,需要对产品进行多方面的实验测试,以检验其实际防护效果。在测试前对作业服在实验室条件下的工作效果进行模拟可以降低研发成本,缩短测试周期,意义重大。

理论指导: Crank-Nicolson 方法是一种数值分析的有限差分法对于扩散方程(包括许多其他方程),可以证明 Crank-Nicolson 方法无条件稳定。但是,如果时间步长与空间步长平方的比值过大(一般地,大于 $1/2$),近似解中将存在虚假的振荡或衰减。基于这个原因,当要求大时间步或高空间分辨率的时候,往往会采用数值精确较差的后向欧拉方法进行计算,这样即可以保证稳定,又避免了解的伪振荡。

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= F_i^n \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{前向欧拉方法}) \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= F_i^{n+1} \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (\text{后向欧拉方法}) \\ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left(F_i^{n+1} \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + F_i^n \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right) \quad (\text{Crank-Nicolson})\end{aligned}$$

线性扩散问题

- 线性扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

通过Crank-Nicolson方法将得到离散方程

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &= \frac{a}{2(\Delta x)^2} \left((u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \right) \\ r &= \frac{a\Delta t}{2(\Delta x)^2}.\end{aligned}$$

引入变量

$$-ru_{i+1}^{n+1} + (1 + 2r)u_i^{n+1} - ru_{i-1}^{n+1} = ru_{i+1}^n + (1 - 2r)u_i^n + ru_{i-1}^n$$

这是一个三对角问题,应用三对角矩阵算法(追赶法)即可得到 u_i^{n+1} ,而不需要对矩阵直接求逆。

- 准线性扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

离散化后则会得到非线性方程系统。但是某些情况下,通过使用 a 的旧值,即用 $a_i^n(u)$ 替代 $a_i^{n+1}(u)$,可将问题线性化。其他时候,也可能在保证稳定性的基础上使用显式方法估计 $a_i^{n+1}(u)$

1.2 问题重述

高温作业服通常由三层织物材料构成，分别记为 I、II、III 层。其中，I 层与外界环境接触，III 层与人体皮肤之间存在空隙层，记作 IV 层。测试过程中，实验室环境与用于实验的假人均保持恒温，且假人温度为 37°C ，作业服包裹在假人皮肤外侧。

根据上述条件，要研究以下三个问题：

- (1) 给定各分层密度、比热、热传导率、厚度等参数值或范围，环境温度为 75°C ，II 层厚度为 6 mm ，IV 层厚度为 5 mm 以及在该条件下测量得到的假人皮肤外侧温度在 90 分钟内的变化情况，要求建立数学模型并计算各层温度分布，生成相应的 Excel 文件。
- (2) 给定环境温度为 65°C ，IV 层的厚度为 5.5 mm ，要求确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。
- (3) 给定环境温度为 80°C ，要求确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 不超过 5 分钟。

2 模型假设

1. 不考虑热辐射的影响。由于高温热源与低温热源之间的温差不是很大故而认定其热传导系数，密度，比热容以及厚度均不变。
2. 将高温工作服各层视为平行无限大具有一定厚度的平板，即仅考虑各层在厚度方向上的温度变化。
3. 忽略 I 层、II 层、III 层、IV 层之间的接触热阻，即各层接触面两侧的温度连续。
4. 假设测试刚开始时各分层温度与假人皮肤表层温度相同。
5. 假设服装各分层内部不含热源。
6. 假人相当于冷却源，这个热量传递过程遵循牛顿冷却定律。

3 符号说明

以下表 1 列出了本文需要的符号。

表 1: 本文相关符号表示说明

符号	符号描述	单位
T_i	第 i 分层温度	$^{\circ}\text{C}$
ρ_i	第 i 分层密度	kg/m^3
t	时间	s
c_i	第 i 分层比热	$\text{J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$
k_i	第 i 分层热传导率	$\text{W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$
α_i	第 i 分层热扩散率	m^2/s
x_i	第 i 分层与第 $i+1$ 分层交界处坐标	mm
x	位置坐标	mm
d_i	各分层厚度	mm
h_I	实验室环境与 I 分层表面对流换热系数	$\text{W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$
h_{IV}	IV 分层表面与假人皮肤对流换热系数	$\text{W}/(\text{m}^2\cdot^{\circ}\text{C})$
T_s	实验室环境温度	$^{\circ}\text{C}$
T_w	假人皮肤外侧平衡温度	$^{\circ}\text{C}$
T_r	假人皮肤温度	$^{\circ}\text{C}$
T_0	第 i 分层初始温度	$^{\circ}\text{C}$

4 问题分析

4.1 关于问题一

在热防护服的的实际应用中,因为温差而引起的能量转移为传热;任何情况下,只要在某介质中或是两个介质之间存在温差,便会发生热量从高温向低温的传递过程,这个过程称为热传导,也叫热扩散。

Fourier 定律就是描述热传导的基本定律。热传导率描述的是材料导热能力的属性,材料不同热传导率也就不同,其值大小受温度影响很大。但是本文中由于高温热源与低温热源之间的温差不是很大故而认定其热传导系数,密度,比热容以及厚度均不变。

问题一本质上就是描述测试过程中实验环境与各层之间以及假人皮肤的传热过程,考虑建立热传导方程。实验室环境与 I 层之间以及 IV 层与皮肤之间

存在对流换热，而题目提供的附件中缺少相应的对流换热系数 h_1 、 h_2 ，因而考虑利用皮肤外侧的温度数据（附件2）计算得到它们，最终确定热传导方程组。

通过对 h_1 赋值，搜索得到符合附件2的值后，再对 h_1 赋值，同样进行搜索，取最符合所给数据的 T ，之后计算方均根误差，并绘制出该图像，从而寻找最优拟合项，然后生成温度分布的excel文件，最终输出模型各交界处温度。

具体步骤如下：

1. 确定各层满足的热扩散方程，两个边界条件以及三交界面的热传导方程。

此时方程中含有未知的对流换热系数 h_I 、 h_{IV} 。

2. 求解热平衡状态下的热传导方程，由于平衡时皮肤外侧温度已知，由此列出 h_I 与 h_{IV} 满足的关系式。

3. 对 h_I 进行赋值，可以得到皮肤外侧温度的模拟结果，改变 h_I 并将模拟结果与题目提供的数据（附件 2）进行比较。确定拟合结果最佳情况下的 h_I ，进而确定 h_{IV} 。

4. 将 h_I 、 h_{IV} 代入热传导方程，求解得到相关温度分布。

4.2 关于问题二

考虑到作业服的舒适性与经济性，在保证假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟的前提下应使得作业服更加轻便，节约材料，即 II 层最优厚度应理解为最小厚度。

由于题目给定了 II 层厚度的范围，且问题二本质上为单变量非线性约束的优化问题，因而可以利用问题一建立的模型得到不同 II 层厚度下假人皮肤外侧温度的变化情况，在给定 II 层厚度范围内枚举搜索满足约束条件的最小值。

可以首先通过构造一个待求矩阵 T ，用行标表示空间，列标表示时间，对 h_1 赋值搜索符合附件 2 的值，得到 $h_1=117.4000$ ； $h_4=8.3653$ 之后，再找出符合题目要求的最小第二层厚度。

4.3 关于问题三

问题三有两个变量，分别为 II 层厚度与 IV 层厚度，相比于问题二增加了一个变量。在现实生活中，IV 层并不影响研发成本，所以研发成本优化主要在于减小 II 层的厚度。此外，根据题目要求，需要缩短作业服的研发周期，那么我们可以寻求 II 层、IV 层厚度使得作业服能在更短的时间内达到稳态。在本题中，相比于缩短研发周期，我们给与成本的权重更高，即在满足 II 层的厚度尽可能小的情况下，再考虑更短的达到稳态的时间。先进行粗精度，大范围枚举搜索估算出两个厚度对符合条件的大致范围，再使用小步长找出所有的符合条件，即可得到其中的最优解。

5 模型的建立

热传递偏微分方程模型，“环境—服装—皮肤”系统内的热传递过程是一个一维导热过程。所以，可以建立以 I 层外侧与外界环境接触的某点为原点的坐标轴（如图 1 所示）。在图 1 中，I 层最外侧某点为坐标轴原点， Ox 垂直指向皮肤层。

根据傅里叶定律，能量守恒定律，以及本文的假设，服装材料无内热源。我们可以得到，三层织物材料层中的热传递方程。

假人皮肤外侧的温度变化源于实验室环境与工作服各分层及假人皮肤之间的热交换，该过程可以用非稳态热传导方程进行描述。下面我们通过建立坐标系，依次确定各分层的热传导方程及相应的边界条件，最终确定问题求解模型。

5.1 热传导方程的确定

考虑到织物之间无褶皱并且相对研究的单位面积下可以认为其是平行的平面，在假人以及织物之间的间隙层可以认为是一些孔网状结构，从而空气占有较大，近似地认为是空气层。

三层织物材料层的热传递方程应满足两个条件：初始时刻温度分布的初始条件和物体边界上的温度或换热情况的边界条件。

在三维等方向均匀介质中的热传导方程满足下式 [2]：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho} q \quad (1)$$

其中 α 、 c 、 ρ 分别为介质热扩散率、比热与密度。 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 描述温度随时间的变化， $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ 描述温度随空间的变化， $\frac{1}{c\rho}q$ 描述内部热源的影响。在作业服测试实验条件下，各分层内不含热源。由此式 1 化简为：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

为了进一步简化模型，我们将各分层视为平行无限大平板，并建立坐标系如图 1，此时只需要考虑在厚度方向（即 x 方向）上的温度变化。式 2 进一步化简为：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

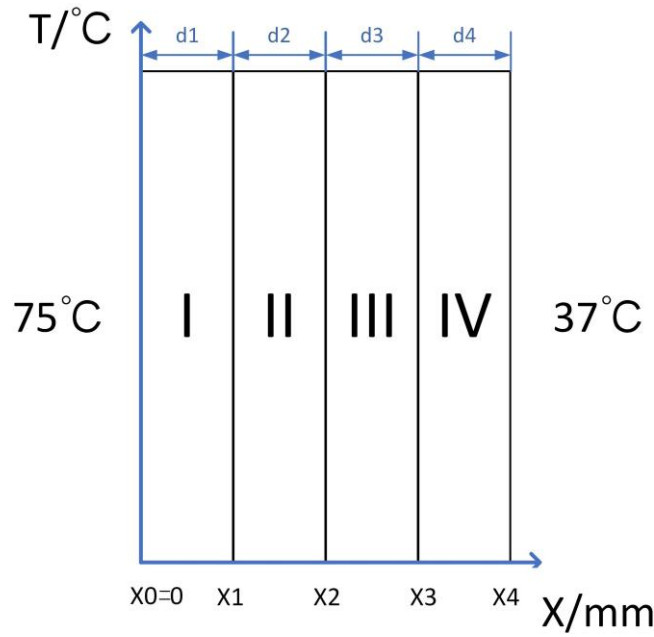


图 1: 模型示意图

对于不同分层, 热扩散率 α_i 不同, 相应地对于 i 分层热传导方程为:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \alpha_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \quad (3)$$

5.2 边界条件与初始条件的确定

热量传递主要有三种方式: 热传导、对流与热辐射。为了简便计算, 我们忽略热辐射的影响。基于本文假设, 在整个系统内热传递仅考虑热传导的传热, 故得到纺织层的边界条件, 此时, 问题变为典型的一维复合介质传热, 满足如下边界条件 [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_i|_{x=x_i} = T_{i+1}|_{x=x_i}, (i = 1, 2, 3) \\ k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} |_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} |_{x=x_{i+1}}, (i = 1, 2, 3) \\ -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} |_{x=x_0} + h_I T_1 |_{x=x_0} = h_I T_s \\ k_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} |_{x=x_4} + h_{IV} T_4 |_{x=x_4} = h_{IV} T_r \\ x_i = \sum_{j=1}^i d_j, (i = 1, 2, 3, 4) \end{array} \right. \quad (4)$$

在研究具有不同介质的问题时, 这时方程数目增多, 除边界方程外, 还需加不同介质界面处的连接条件, 易得从上到下, 各等式描述分别为分层在交接面两

侧温度连续, 热流量相等, I 层与实验室环境之间、IV 层与假人皮肤之间均以对流方式换热。

假设测试开始时, 各分层温度相同, 根据本文假设, 织物层及空气层的初始条件为:

$$T_i(x, 0) = T_0, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

5.3 模型的确定

综上, 我们逐步构建了四层织物材料层中的热传递模型。

一维空间中热流密度矢量本文考虑在一维空间下温度分布, 即只有一个坐标 x (表示厚度)

综合式 3、4、5 可以得到描述各分层温度分布及其随时间变化满足的一维复合介质热传导方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \alpha_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \\ T_i |_{x=x_i} = T_{i+1} |_{x=x_i}, (i = 1, 2, 3) \\ k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} |_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} |_{x=x_{i+1}}, (i = 1, 2, 3) \\ -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} |_{x=x_0} + h_I T_1 |_{x=x_0} = h_I T_s \\ k_4 \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=x_4} + h_{IV} T |_{x=x_4} = h_{IV} T_r \\ T_i(x, 0) = T_0, (i = 1, 2, 3, 4) \\ x_i = \sum_{j=1}^i d_j, (i = 1, 2, 3, 4) \end{array} \right. \quad (6)$$

6 问题求解

6.1 模型参数数值确定

利用附件 1 可直接得到各分层的热传导率 k , 结合热扩散率的定义, $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ 可进一步确定各分层热扩散率。空气层厚度过小, 使得热对流运动对层内热传递的影响较小, 故在空气层中不考虑热对流, 即空气层内的热传递过程主要来自于热传导。对于所给出的偏微分方程, 直接求其解析解是较为困难的, 故经常采用数值方法求偏微分方程的近似解。在本文的求解中, 采用了抛物型方程的古典隐式格式的有限差分法来求所给出热传导方程的数值解。

至此, 模型中只有 h_I 、 h_{IV} 仍为未知量。下面利用平衡状态获得 h_I 、 h_{IV} 满足的关系式, 最终通过对 h_I 进行赋值, 获得假人皮肤外侧的模拟结果对附件 2 中的数据进行拟合, 拟合程度最佳时即为实验测试条件下的 h_I 。平衡条件下温

度不再随时间变化，数学规律即 $\partial T / \partial t = 0$ 。

显然，此时各层温度分布 T_i 的通解应满足：

$$T_i = a_i x + b_i, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (7)$$

其中， a_i, b_i 为未知数。将式 7 代入方程组 6 并化简可得：

$$\begin{cases} -(k_1 + h_I x_0)a_1 + h_I b_1 = h_I T_s \\ (k_4 + h_{IV} x_4)a_4 + h_{IV} b_4 = h_{IV} T_r \\ x_{i+1}a_i - x_{i+1}a_{i+1} + b_i - b_{i+1} = 0, (i = 1, 2, 3) \\ k_i a_i - k_{i+1} a_{i+1} = 0, (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (8)$$

再由平衡条件下皮肤外侧温度模拟结果与测量结果相等这一条件，得到：

$$T_4|_{x=x_4} = T_w \quad (9)$$

其中， T_w 为附件 2 给出的皮肤外侧平衡温度。

式 8，式 9 组成了含有 10 未知数，9 个方程的方程组，我们对 h_I 进行赋值，并以此值作为已知量，于是上面的 10 个未知数变为 9 个未知数，利用 Matlab 计算出 h_{IV} ，然后使用 Crank-Nicholson 方法 [6] 对模型进行数值求解，得到皮肤外侧温度变化后对附件 2 中的数据进行拟合，确定最佳的 h_I 。在 Crank-Nicholson 方法中，定义格点 $T_{i,n}$ ，使其满足

$$x = x_{min} + ih, \quad t = nk$$

我们有如下差分方式：

$$\begin{cases} T = \frac{T_{i,n} + T_{i,n+1}}{2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,n+1} - T_{i,n}}{k} \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,n} - T_{i-1,n} + T_{i+1,n+1} - T_{i-1,n+1}}{4h} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,n} - 2T_{i,n} + T_{i-1,n} + T_{i+1,n+1} - 2T_{i,n+1} + T_{i-1,n+1}}{2h^2} \end{cases} \quad (10)$$

将上式代入³令 $r = \frac{k}{2h^2}$ ，化简可得

$$-raT_{i+1,n+1} + (1 + 2ra)T_{i,n+1} - raT_{i-1,n+1} = raT_{i+1,n} + (1 - 2ra)T_{i,n} + raT_{i-1,n}$$

在方程 11 中

$$\text{令 } A_i = -ra,$$

$$B_i = 1 + 2r\alpha,$$

$$C_i = r\alpha,$$

$$D_i = r\alpha T_{i+1,n+1} + (1 - 2r\alpha) T_{i,n+1} + r\alpha T_{i-1,n}$$

但是由于热扩散率在不同材料层中不同，因此，这个函数方程是一个分段函数，而对于每层的传热系数也是各不相同的。

因此我们可以假设 $N_i = \text{round}(\frac{d_i}{h})$ (d_i 为第 i 层厚度)

令 $i = 1, 2, 3, 4$ 则：

当 $i = 1, 2, \dots, N_1$ 时， $\alpha = \alpha_1$ ；

当 $i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2$ 时， $\alpha = \alpha_2$ ；

当 $i = N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + 2, \dots, N_1 + N_2 + N_3$ 时， $\alpha = \alpha_3$ ；

当 $i = N_1 + N_2 + N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + 2, \dots, N$ 时， $\alpha = \alpha_4$ 。

由平衡时能量守恒可知：

$$k_i \frac{\partial T}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T}{\partial x}$$

以第 I、II 层交界处为例，化简后如下所示：

$$k_1 \frac{T_{N_1+1} - T_{N_1}}{h} = k_2 \frac{T_{N_1+2} - T_{N_1+1}}{h}$$

$$-k_1 T_{N_1} + (k_1 + k_2) T_{N_1+1} - k_2 T_{N_1+2} = 0$$

II、III 层、III、IV 层交界处同理可得：

$$-k_2 T_{N_1+N_2} + (k_2 + k_3) T_{N_1+N_2+1} - k_3 T_{N_1+N_2+2} = 0$$

$$-k_3 T_{N_1+N_2+N_3} + (k_3 + k_4) T_{N_1+N_2+N_3+1} - k_4 T_{N_1+N_2+N_3+2} = 0$$

再根据边界条件：

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + h_I T \Big|_{x=x_0} = h_I T_s$$

$$k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_4} + h_{IV} T \Big|_{x=x_4} = h_{IV} T_r$$

可得：

$$-k_1 \frac{T_2 - T_1}{h} + h_I T_1 = h_I T_s$$

$$k_4 \frac{T_{I+1} - T_I}{h} + h_{IV} T_{I+1} = h_{IV} T_r$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 & & & \vdots \\ 0 & C_3 & B_3 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & A_{I-1} & \\ \vdots & & & C_I & B_I & A_I \\ 0 & \cdots & & C_{I+1} & B_{I+1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,n+1} \\ T_{2,n+1} \\ \vdots \\ T_{I+1,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{I+1} \end{pmatrix}$$

在 MATLAB 中对该矩阵方程组进行求解，即可得到模型的数值解。图 2 即为在 $110 \sim 120 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ 范围内改变 h_1 对附件 2 中的数据进行拟合得到的方均根误差变化曲线，方均根最小处对应的 h_1 为 $117.400 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$

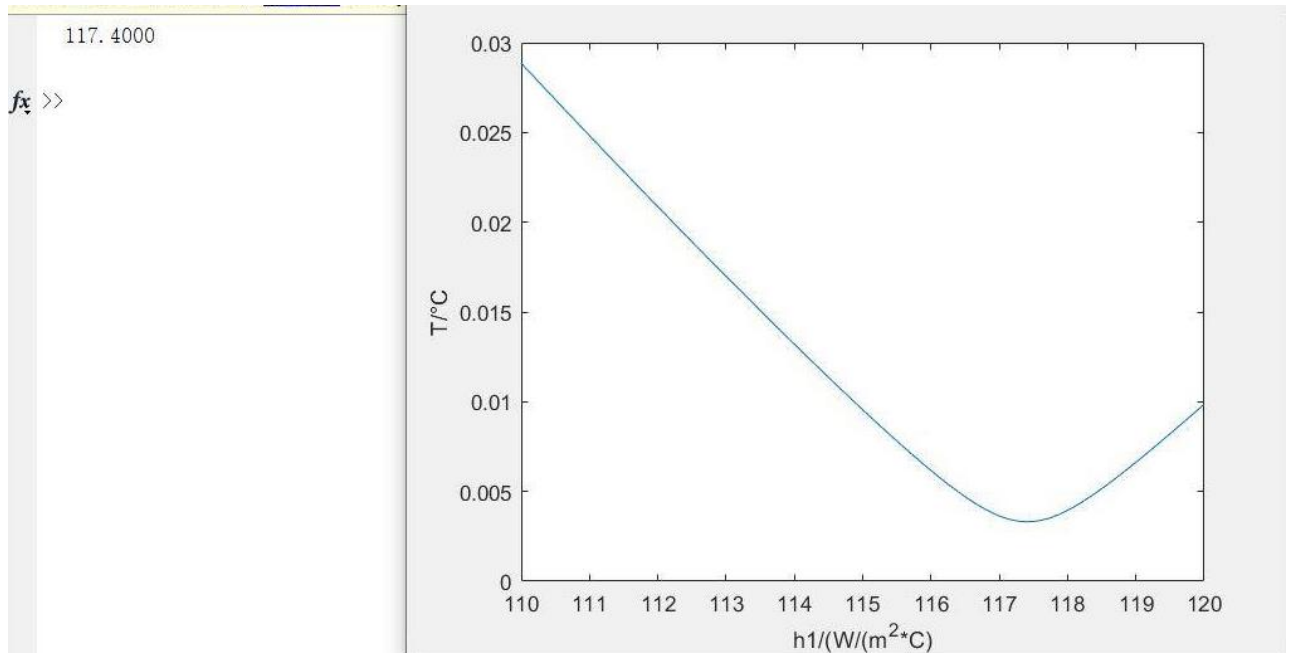


图 2: 方均根误差随 h_1 的变化曲线

图 3 为 h_1 取为该值时，皮肤外侧温度模拟结果与附件 2 在各个时间点之差，可以看到此函数一开始就达到最大值——接近 0.025°C ，随后下降进行震荡，但其最大幅度均保持在 0.01°C 内，最后快速下降无限趋近于 0°C 。由此可见，用我们拟合得到的 h_1 解出的方程，与附件 2 给出的数据符合得很好。

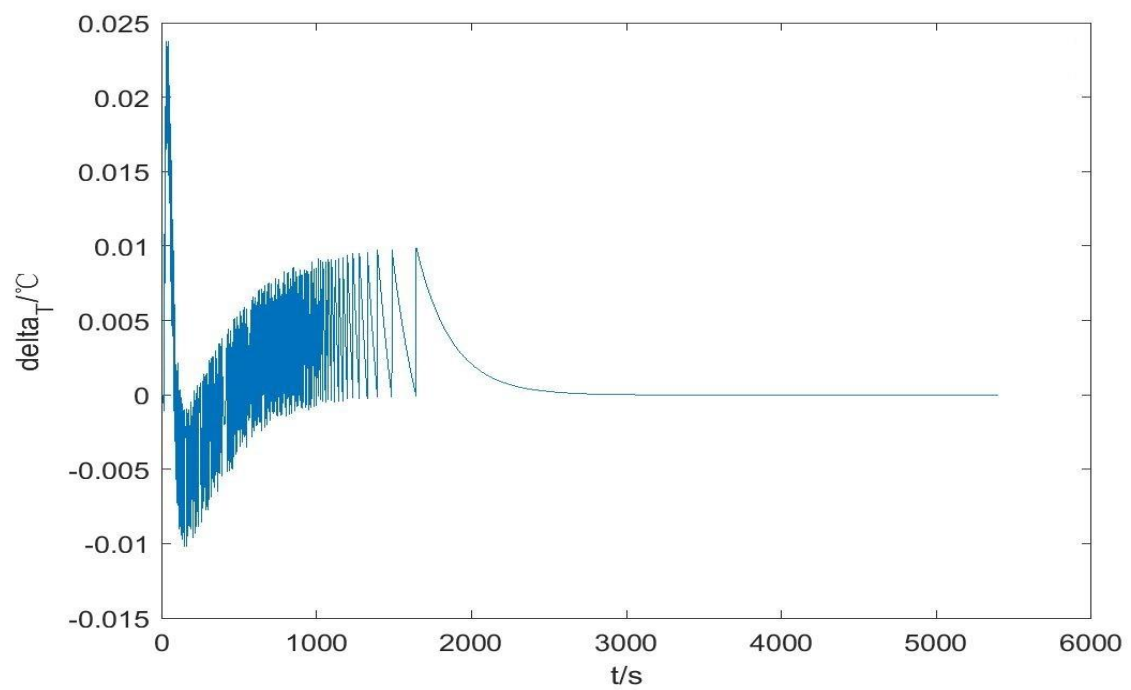
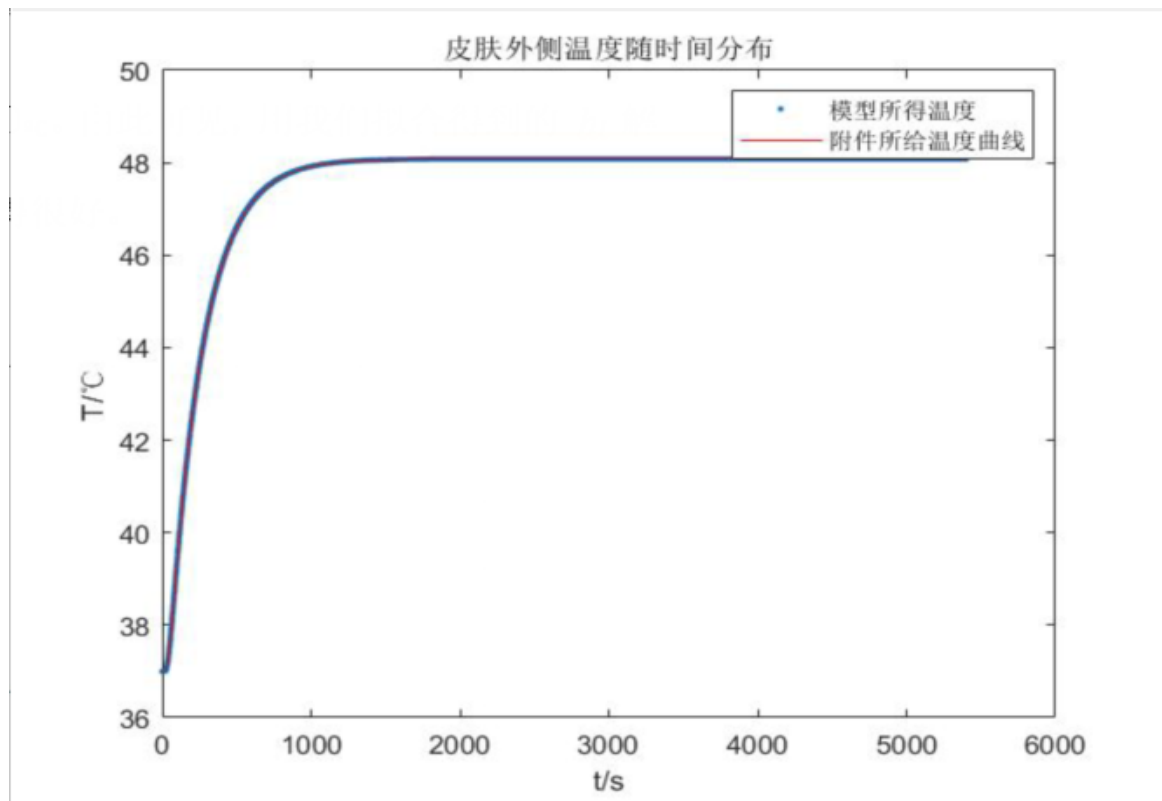


图 3: 模拟结果与附件 2 之差 ($h_l = 117.40\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$)

将 h_l 代入之前得到的 h_{IV} 关系式, 计算得 $h_{IV}=8.36W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 。

由于模型中所有参数就目前而言取值均为已知项, 因此可以利用其进行各层温度分布的相关计算。

6.2 问题一的求解

使用 Crank-Nicholson 方法对 $h_l=117.400W/(m^2 \cdot ^\circ C), h_{IV}=8.36W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 条件下的模型进行数值求解, 得到运行结果如图 4。

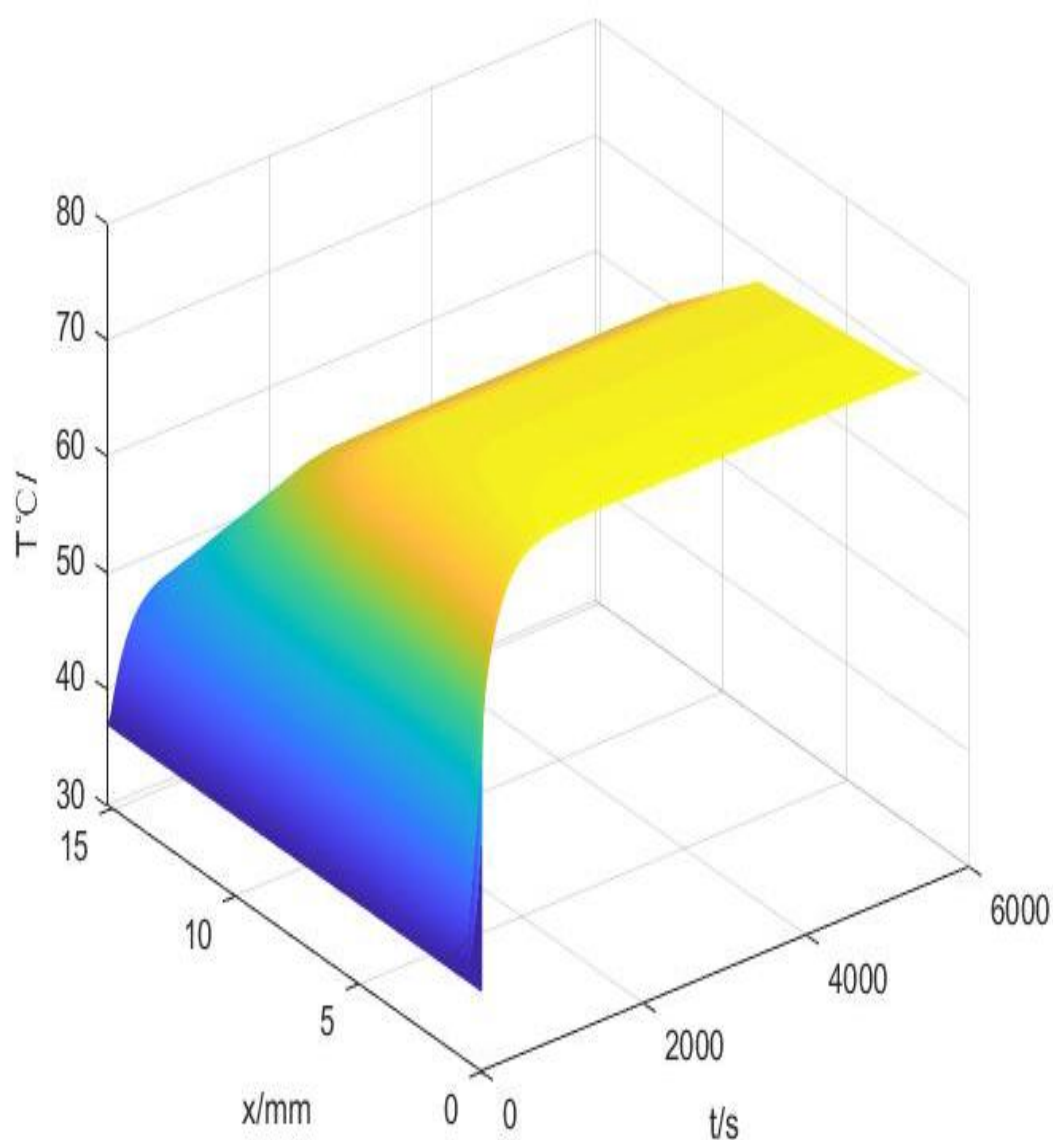
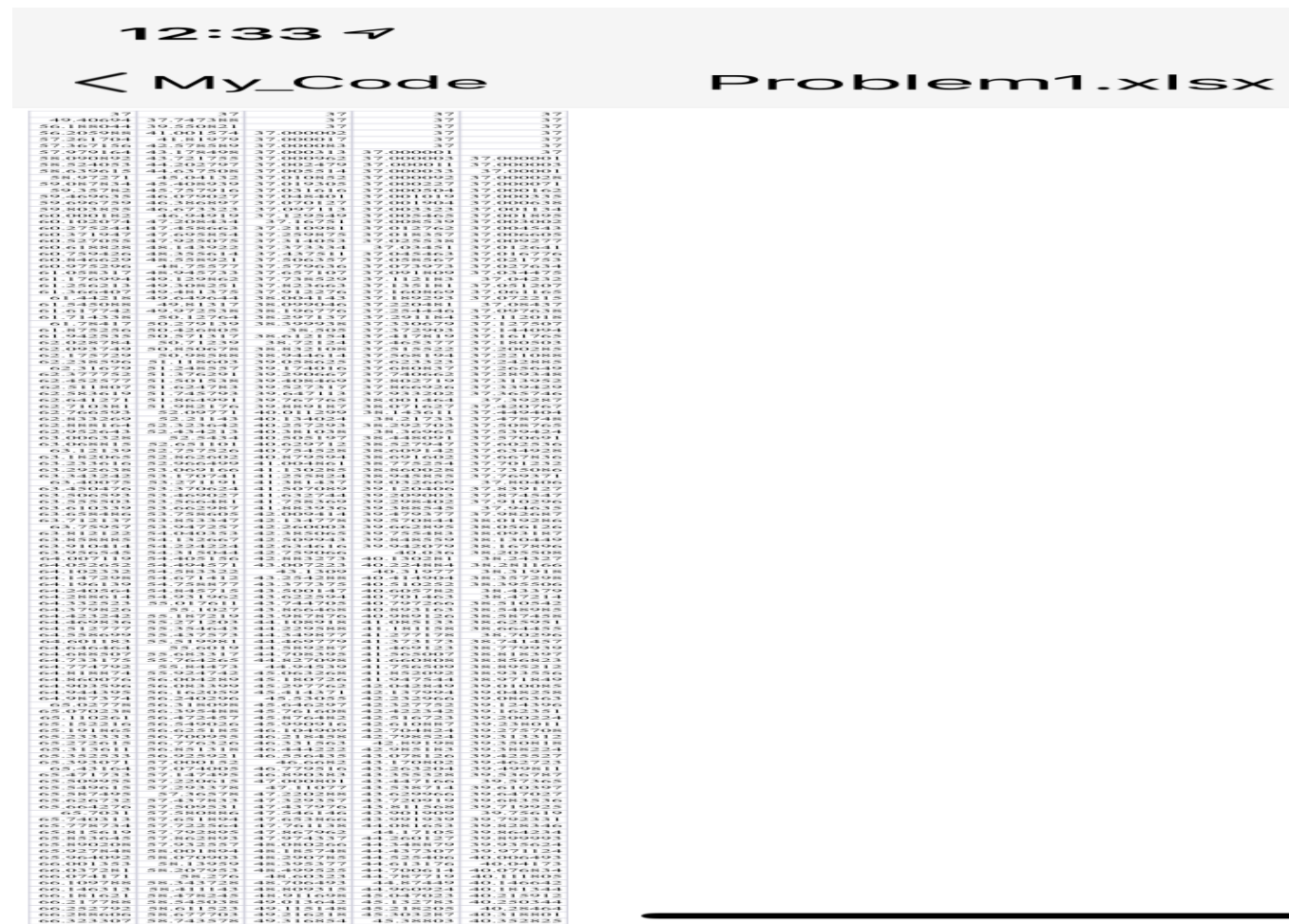


图 4: 温度分布

可以看到，在空间分布上从 I 层到 IV 层温度逐渐下降；在时间分布上，随着时间的推移各分层的温度均在上升，最终达到平衡，符合热传导的规律。

取交界面为考察点，对图 4 在交界面对应的 x 坐标处进行截取，得到图 5，并将此系列数据写入 problem1.xlsx 。

结果如下图所示。



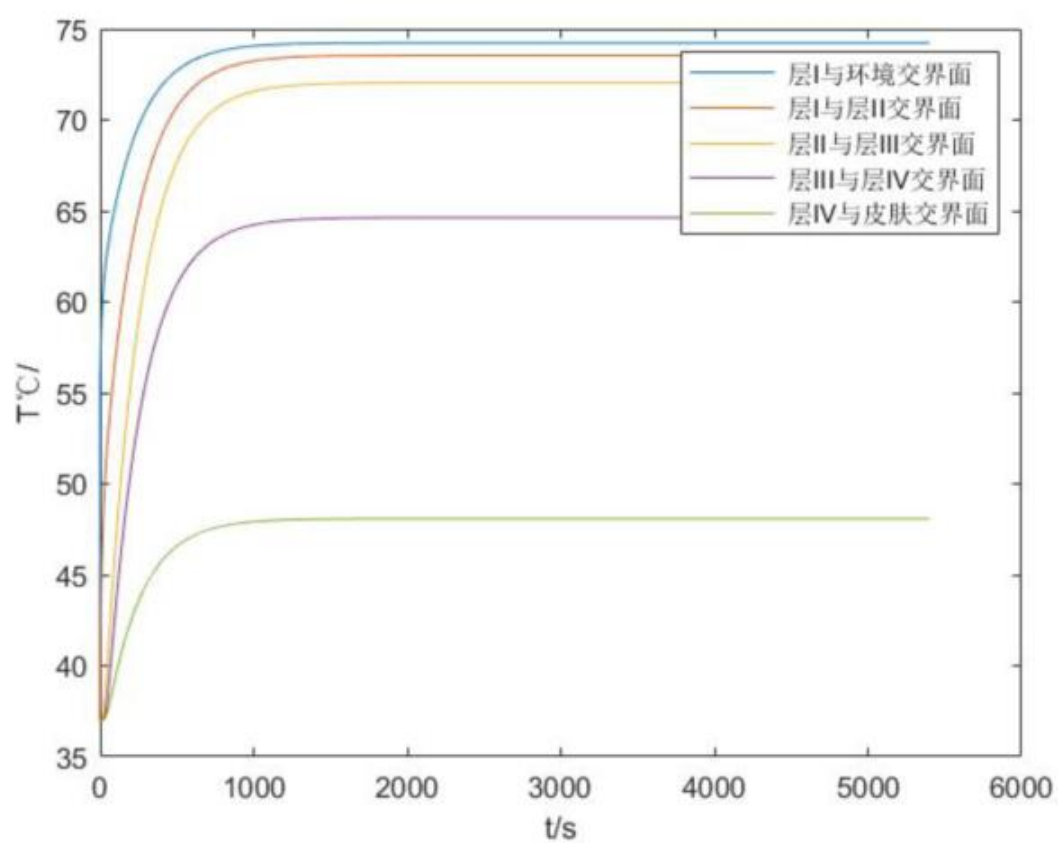
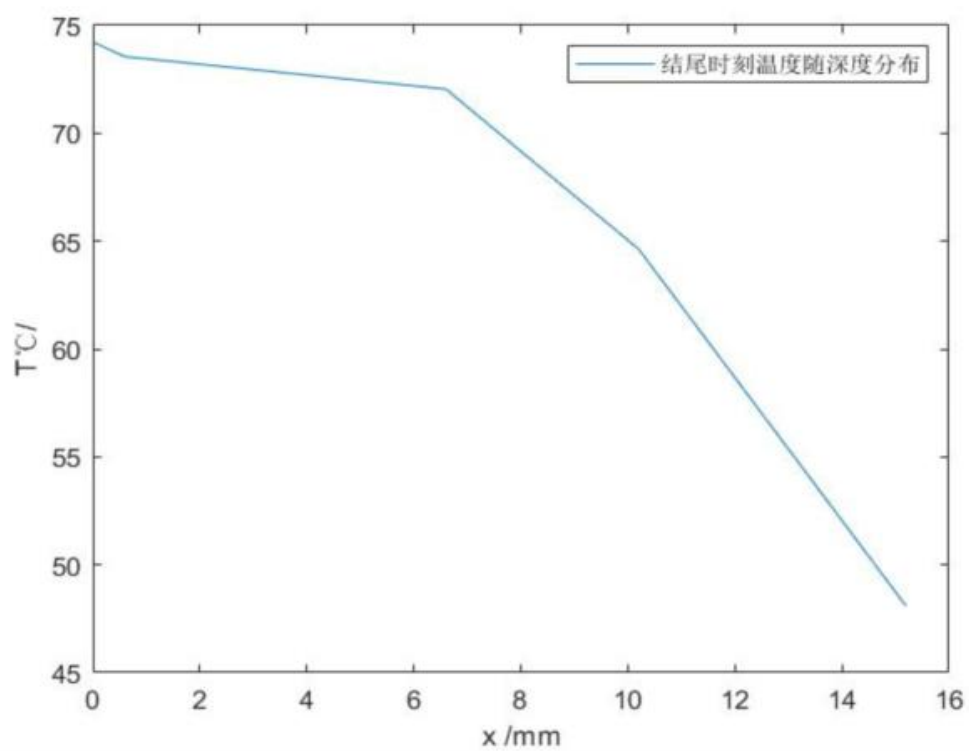


图 5: 交界面温度变化曲线直观分布图

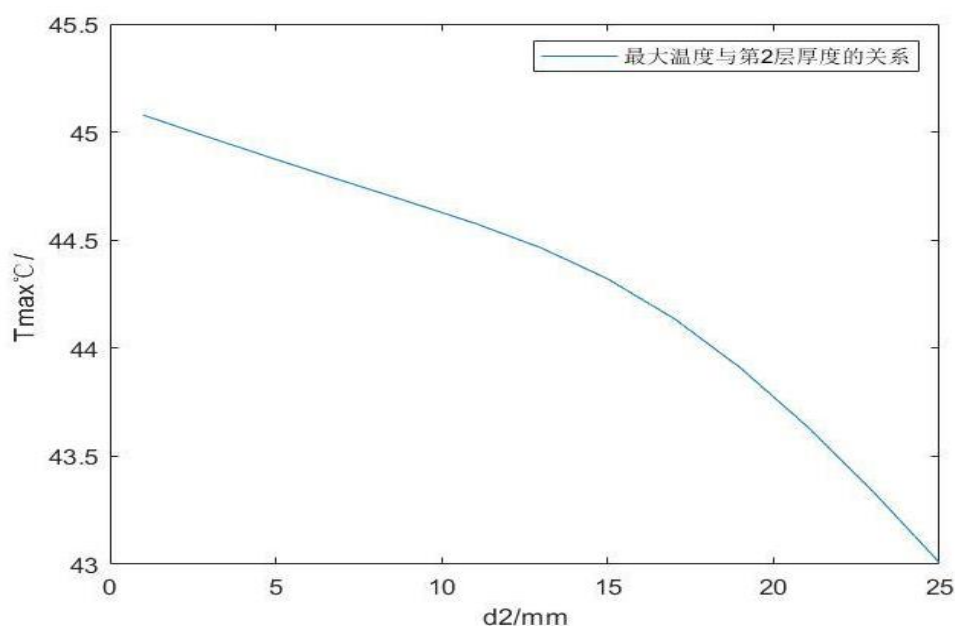


6.3 问题二的求解思路

在问题二中, 我们将最优厚度理解为满足题目约束条件的最小厚度。因为 II 层厚度越小, 作业服的制作所需原材料越少, 相应地研发成本越低。在热传递模型的基础上, 我们考虑到, II 层织物越厚, 越会提高热防护服的成本造价。过厚的防护服也不利于穿着者的行动。再结合温度越低, 穿着者会感觉越舒适。我们考虑以 II 层厚度最小目标, 建立目标函数。通过求解模型, 即求解出 II 层的最优设计厚度。在问题一的求解基础上, 我们已经得到了模型中重要的两个对流换热系数 h_i, h_{iv} 。模型中涉及的热传导 k_i , 与热扩散率 α_i 均可由附件 1 中的参数计算得到。实验室环境温度、假人温度同样由题目给出。各分层的厚度方面只有 II 层厚度未知。因此, 模型中的参数仅为 II 层厚度, 一旦 II 层厚度 d_2 确定, 模型的解就得以确定 [3]。

利用循环遍历的变步长搜索法, 对 II 层介质的所有可能厚度进行遍历, 求出满足约束条件的最小厚度。因遍历循环总时长与步长密切相关, 因此我们考虑缩小考虑的范围, 先在附件 1 给定的 d_2 取值区间内进行步长为 2mm 的定步长搜索。图 6、图 7 分别为 60 分钟内假人皮肤外侧最大温度与 II 层厚度的关系, 假人皮肤外侧温度超过 44°C 的时长与 II 层厚度的关系。

图 6: 最大温度与 II 层厚度关系



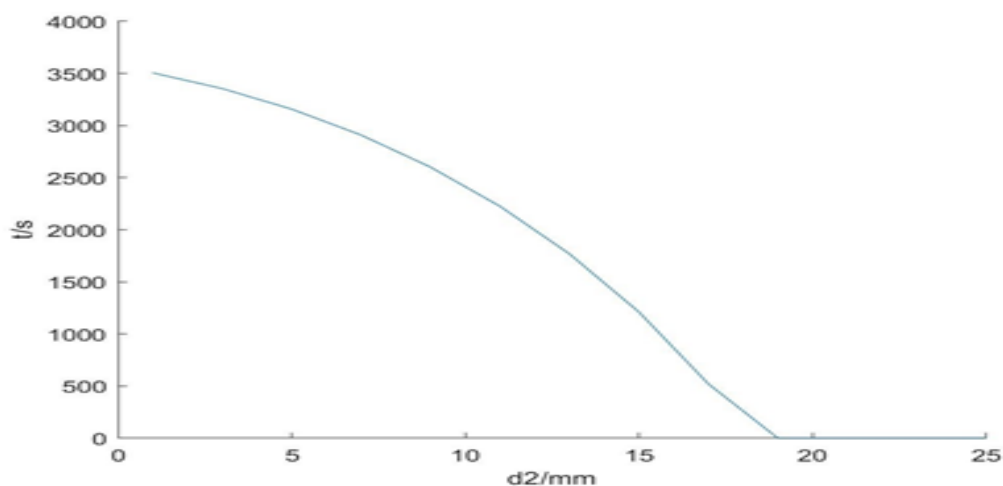


图 7: 温度超过 44°C 的时长与 II 层厚度关系

从图 6、图 7 中可以看到,随着 II 层厚度的增加,最大温度与超过 44°C 时长呈单调递减。在附件 1 所给的 II 层厚度范围及时间内,假人皮肤表面外侧最大温度始终不会超过 47°C ,则在确定 d_2 时只需要考虑超过 44°C 时长不超过 5 分钟产生的约束。进一步减小搜索步长与范围,最终在 $17.3\sim 17.9\text{mm}$ 范围内,以 0.05mm 步长搜索得到结果如图 8。

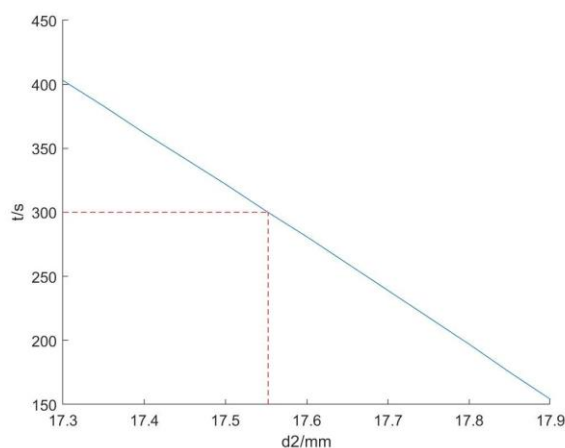


图 8: 温度超过 44°C 时长与 II 层厚度关系

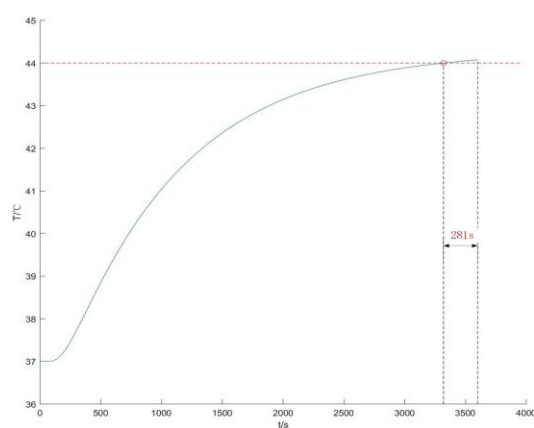


图 9: 皮肤外侧温度变化情况 ($d_2=17.6\text{mm}$)

由图 8 确定 II 层最优厚度为 17.6mm, 此时皮肤外侧温度随时间的变化如图 9 所示, 超过 44℃ 的时长为 281s, 短于 5 分钟, 温度的最大值也小于 47℃, 满足题目条件。

6.4 问题三的求解

第三问与第二问都为优化问题, 不同之处在于第三问多了一个变量 IV 层的厚度。既然作为优化问题, 我们首先定义优化的目标: 尽可能地减少成本, 在满足这个要求的前提下, 再减少开发周期。

反映到本题中即为材料层 II 的厚度应该尽可能的小, 这是由于 IV 层为空气层, 其不会被计算在隔热服的生产成本当中, 所以只考虑材料层 II 的成本。为了减少研发周期, 要使检测隔热服达到热平衡所需的平衡时间更短。

在本题中, 我们赋予成本因素的权重更大, 所以必须先满足 II 层厚度尽可能薄的情况, 再选择不同的 IV 层厚度, 使得隔热服测试时达到热平衡的所需平衡时间更短。

1. 舒适性目标: 在达到相同隔热性能的同时, 衣服厚度应尽可能小, 作业服灵活性更高, 且重量更低, 便于穿着作业;
2. 节约性目标: 尽可能的减少制作成本, 由于第四层为空气层, 不耗费成本, 故第二层厚度应尽可能小;
3. 稳定性目标: 考虑两个方面对作业服性能稳定的影响: 其一是空气层为流体, 若空气层过厚, 可能会造成厚度不均, 出现局部过热从而造成人体皮肤表层灼伤。并且空气物化性质容易受到汗液、水汽等因素的影响, 故服装第四层不能过厚。其二是第二层导热率最大, 对热辐射的隔绝性能最好, 故第二层材料不能过薄。
4. 研发效率目标: 为了缩短研发周期, 应尽可能的使作业服设计厚度满足更多实际情况下的使用。

根据常识我们可以知道, 隔热服的厚度越厚, 其隔热效果越好。但实际情况也并非绝对服从此规律。所以, 为了初步确定 (d_2, d_4) 的大致范围, 以满足体表最高温度小于 47 摄氏度且高于 44 摄氏度的时间少于 5 分钟约束条件的 (d_2, d_4) , 首先可将空气层 IV 的厚度定在最大值 6.4mm, 然后如同问题而类似方法找出最小的 II 层厚度的大致下界, 然后进行区域搜索出所有满足题目所给条件的 (d_2, d_4) 组合:

得到 h4 板块程序

```
function h4=get_h4_second(k, d, h1, T_out, T_in, T_end, Tk)
%% 9 个未知数, 9 个方程(对 h1 赋值, 故 h1 可视为已知, 此时仅 h4 和 a1234b1234
为未知), 最终返回 h4
%% 参数
x0=0;
x1=d(1);
x2=d(1)+d(2);
x3=d(1)+d(2)+d(3);
x4=d(1)+d(2)+d(3)+d(4);
%% 解出 a, b (h1)
%A*X=B;
X=zeros(8, 1);
A=[-(k(1)+h1*x0) 0 0 0 h1 0 0 0
    x1 -x1 0 0 1 -1 0 0
    0 x2 -x2 0 0 1 -1 0
    0 0 x3 -x3 0 0 1 -1
    k(1) -k(2) 0 0 0 0 0 0
    0 k(2) -k(3) 0 0 0 0 0
    0 0 k(3) -k(4) 0 0 0 0
    0 0 0 x4 0 0 0 1];
B=[h1*(T_out+Tk) 0 0 0 0 0 0 T_end+Tk]';
X=A\B;
%% 解出 h4, 化简热对流方程得
h4=(-k(4)*X(4))/(x4*X(4)+X(8)-(T_in+Tk));
```

取时间步长为1s, 空间步长为0.05m, 分别在第二层, 第四层厚度范围内进行搜索, 取符合条件的最小值即为所求, 由所列出的两个边界条件及热对流方程, 对h1进行赋值搜索, 取符合附件2的值。

计算求解方程组时, 用 T_n 更新D, 再用D计算出 T_{n+1} 。构造两个循环, 外层循环空间, 内层循环时间, 找出符合条件的最小值即为所需的第二层厚度。对于材料层 II 的厚度, 空气层 IV 的厚度, 计算时两者的步长皆为 0.1mm。

图中代表符合约束条件的 (d_2, d_4) 对, 可进一步优化得到更精确的满足要求的点集范围, 根据不同的优化目标能够得到不同的结果。根据我们定义的优化目标, 即在保证 II 层厚度最小的条件下, 选择 IV 层厚度使得平衡时间最短。唯一点即为我们的目标解 $(d_2, d_4) = (19.3\text{mm}, 6.4\text{mm})$ 。

在此条件下的皮肤外侧温度随时间变化十分直观。

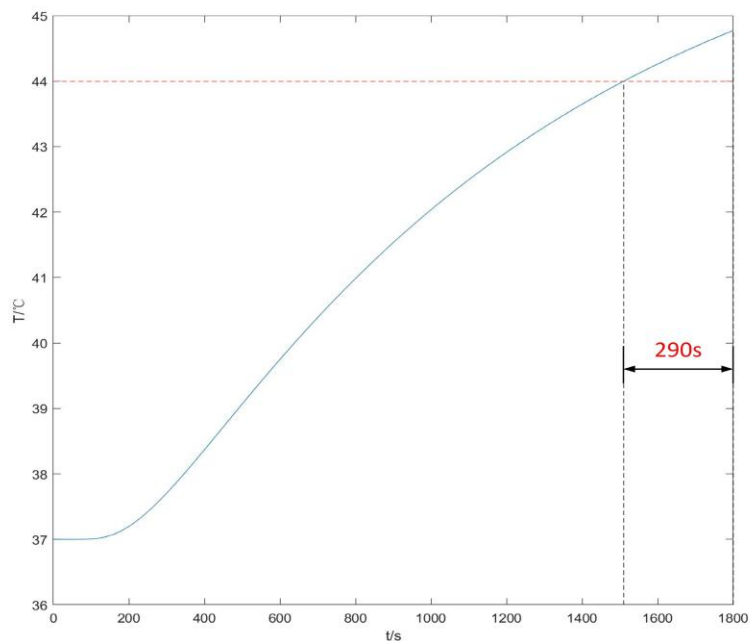


图 10: 皮肤外侧温度变化情况

如图 10 所示, 在规定时间内, 最高的体表温度低于 47 摄氏度, 且高于 44 摄氏度所持续的时间为 290s, 短于 5 分钟, 经验证, 满足题目所要求的两个条件。

7 基于模型的讨论

7.1 模型优缺点综合分析

7.1.1 模型的优点

1. 我们的模型建立在传热学理论的基础上, 使用有限差分方法数值计算出温度分布及随时间演化规律, 并与附件所给出数据吻合得非常好。
2. 得到的数学表达式, 符合数学规范, 对一些数值计算的结果, 用计算机软件绘制曲线或曲面示意图, 给出直观形象表示, 或基于计算结果, 用分析法得到了一些对实际有帮助的结果。
3. 基于对问题一的深入分析, 问题二, 三的求解较为简单直观, 且计算效率较高。整个过程分析较为科学, 具备一定的科学性, 力求逻辑上的严谨。
4. 物理规律明确切合实际, 在处理假人皮肤外侧与空气层时联系具体, 将假人视为低温恒温热源。
5. 对于问题三, 求出了整个符合条件的区域, 可自由针对不同优化目标得到不同结果。高温工作服不同层面的厚度影响隔热效果、研发成本及研发周期。

因此, 本文给出了II层最优厚度, 可避免人们在高温工作环境下被灼伤, 与此同时节约研发材料, 最终又能达到最好的隔热效果。

6. 此外, 该热传导模型具有一定的现实意义, 可用于图像修复技术、交通运输业及物流各领域。

7.1.2 模型的缺点

1. 忽略了各分层介质各处的具体形状。将高温工作服各层视为平行无限大具有一定厚度的平板, 即仅考虑各层在厚度方向上的温度变化。
2. 为了模型的简便, 本文未考虑到热辐射的影响, 忽略了热辐射的影响, 虽然可以简化方程的求解但也增大了模型在高温环境下的误差, 导致高温试验条件下的拟合度不高。
3. 使用数值方法求解偏微分方程组, 可能引入一定误差。
4. 基于假设条件下进行模型检验, 零秒时整件衣服的温度可能与 37 摄氏度存在一定偏差。
5. 存在一定的优化空间, 60min 时皮肤外侧温度最小是另一个构建方向, 考虑以II层厚度最小以及60min时假人皮肤外侧温度最小为优化目标, 建立双目标优化函数。温度和厚度无法同时达到最优值, 可考虑对二者进行线性加权进而求解。
6. 基于热传导方程的温度分布模型的求解过程中, 可以用 Crank-Nicolson 差分格式代替隐式向后差分格式, 获得截断误差更小的数值解。

7.2 模型构建的理论支撑

Crank-Nicolson 方法是一种数值分析的有限差分法, 对于扩散方程及其他方程是无条件稳定的, 但是如果时间步长乘以热扩散率, 再除以步长的平方即的值过大 (根据冯诺依曼稳定性分析, 以大于 $1/2$ 为准),

一般, 所以近似解中将存在虚假的振荡或衰减。基于这个原因, 当要求大时间步或高空间分辨率时, 通常采用数值精确交差的后向 欧拉法, 既保证了稳定性又可减少解的伪振荡。

传热问题数值求解的基本思想是将时间、空间上的连续物理量离散在各个节点上, 用有限差分法求解物理量的数值解。

7.3 模型的推广

本次高温工作服设计问题的解决我们运用了一维热传递模型进行解答, 每一次模型的选用都可以推广到现实生活中去, 这就很好的体现了数学建模的意义所在。

可以进一步扩展模型, 研究第二层和第四层在传热过程中的不同作用效果, 扩大该模型的应用范围, 缩短研发周期。

我们可以通过对一个问题的解答, 而将其推广至整类问题中甚至运用到更多的现实领域中, 让数学模型成为服务于人类的有效工具。

8 参考文献

- [1] 杨世铭, 陶文栓. 传热学 [M]. 第四版, 北京: 高等教育出版社 (2006)
- [2] CNKI 中国知网科技创新导报: 1674-098X(2018)09(a)-0125-02
- [3] 张洪济. 热传导 [M]. 第一版, 北京: 高等教育出版社, (1992)
- [4] 陆金甫, 关治. 偏微分方程 [M]. 第二版, 北京: 清华大学出版社, (2005)
- [5] 史策. 咸阳师范学院学报[N]. 热传导方程有限差分法的 MATLAB 实现.1672-2914 (2009) 040027-03
- [6] 潘斌. 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题[D].浙江理工大学,2017.

附方案源代码

A 模型求解代码

A.1 问题一代码

```
clear;
close all;
clc;
%% 构造系数矩阵
%相关参数
rou=[300;862;74.2;1.18];%密度, from 1 to 4, 1 is out, 4 is air
c=[1377;2100;1726;1005];%比热
k=[0.082;0.37;0.045;0.028];%热传导率
afa=k./(rou.*c);%热扩散率

dt=1;%时间步长1s
h=0.05*10^-3;%空间步长, 转换单位 米
r=dt/h^2;

%% 方程3, 热扩散方程
T_sum=5400;%总时间
d=[0.6;6;3.6;5]*10^-3;%厚度
N1=round(d(1)/h);%各层h个数
N2=round(d(2)/h);
N3=round(d(3)/h);
N4=round(d(4)/h);
N=N1+N2+N3+N4;
A=zeros(1,N);%行向量
B=zeros(1,N+1);
C=zeros(1,N);
for i=1:N1+N2+N3+N4%系数A, B, C
    if i<=N1
        a=afa(1);
    elseif i<=N1+N2
        a=afa(2);
    elseif i<=N1+N2+N3
        a=afa(3);
    elseif i<=N1+N2+N3+N4
        a=afa(4);
    end
    A(i)=-r*a;
    B(i)=2+2*r*a;
```



```

        C(i)=-r*a;
    end

    XI=diag(B)+diag(A,1)+diag(C,-1);%系数矩阵XI  XI*T=D
    T=zeros(N+1,T_sum+1);%待求矩阵T,行标表示空间,列标表示时间
    D=zeros(N+1,1);%方程右边D

    %% 三个交界处,热传导方程
    XI(N1+1,N1+1)=k(1)+k(2);%将所有方程统一到一个系数矩阵里去,形式上对应,
    XI(N1+1,N1)=-k(1);
    XI(N1+1,N1+2)=-k(2);
    D(N1+1)=0;

    XI(N1+N2+1,N1+N2+1)=k(2)+k(3);
    XI(N1+N2+1,N1+N2)=-k(2);
    XI(N1+N2+1,N1+N2+2)=-k(3);
    D(N1+N2+1)=0;

    XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+1)=k(3)+k(4);
    XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3)=-k(3);
    XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+2)=-k(4);
    D(N1+N2+N3+1)=0;

    %% 两个边界条件,热对流方程
    %参数
    Tk=273.15;%单位转换
    T_in=37;%体温
    T_out=75;%外界温度
    T_end=48.08;%稳态时的温度
    T(:,1)=T_in+Tk;%0s时整件衣服都是体温

    h_min=110;%由资料可得,先进行大致搜索,再缩小步长精细搜索
    h_max=120;
    dh=0.1;
    H1=h_min:dh:h_max;
    delta=zeros(1,length(H1));%预分配内存
    T_give=xlsread('C:\Users\anhuishuangqiao\Desktop\2018-A-Chinese\CUMCM-2018-Problem-A-Chinese-Appendix.xlsx','附件2','A3:B5403');

    for l=1:length(H1)%对h1赋值,进行搜索,取最符合所给数据的T
        h1=h_min+(l-1)*dh;
        h4=get_h4(k,d,h1,T_out,T_in,T_end,Tk);
    end

```

```

XI(1,1)=h1+k(1)/h;
XI(1,2)=-k(1)/h;
D(1)=h1*(T_out+Tk);

XI(N+1,N+1)=h4+k(4)/h;
XI(N+1,N)=-k(4)/h;
D(N+1)=h4*(T_in+Tk);

%% 计算方程组，每次用Tn更新D，再用D算出Tn+1
for n=1:dt:T_sum%外层循环时间，内层循环空间
    for j=1:N1+N2+N3+N4
        if j<=N1 && j>1
            a=afa(1);
        elseif j<=N1+N2 && j>N1+1
            a=afa(2);
        elseif j<=N1+N2+N3 && j>N1+N2+1
            a=afa(3);
        elseif j<=N1+N2+N3+N4 && j>N1+N2+N3+1
            a=afa(4);
        else
            continue;
        end
        D(j)=r*a*T(j+1,n)+(2-2*r*a)*T(j,n)+r*a*T(j-1,n);
    end
    T(:,n+1)=XI\D;
end
delta(1)=sqrt( sum( ( T_give(:,2)+Tk-T(N+1,:)'.^2 )/length(T_give(:,1))) );
end

%% 计算方均根误差，绘制图像，寻找最优拟合项
plot(H1,delta);
xlabel(' h1/(W/(m^2*C)') );
ylabel(' T/° C');
[~,position]=min(delta);
disp(H1(position));

clear;
close all;
clc;
%% 构造系数矩阵
%相关参数
rou=[300;862;74.2;1.18];%密度，从第一层到第四层，第一层与外界接触，第四层是空气
层

```

```

c=[1377;2100;1726;1005];%比热
k=[0.082;0.37;0.045;0.028];%热传导率
afa=k./(rou.*c);%热扩散率

dt=1;%时间步长1s
h=0.05*10^-3;%空间步长，转换单位 米
r=dt/h^2;

d2=0.1;
dmin=17;%第二层厚度范围
dmax=19;
D_enough=dmin:d2:dmax;%第二层厚度搜索域
D_select=100*ones(250,1);%满足条件的第二层厚度值
for m=1:length(D_enough)%对第二层厚度进行搜索，取符合条件得最小值
    d_enough=dmin+(m-1)*d2;
    %% 方程3，热扩散方程
    T_sum=3600;%总时间
    d=[0.6;d_enough;3.6;5.5]*10^-3;%厚度
    N1=round(d(1)/h);%各层h个数
    N2=round(d(2)/h);
    N3=round(d(3)/h);
    N4=round(d(4)/h);
    N=N1+N2+N3+N4;
    A=zeros(1,N);%行向量
    B=zeros(1,N+1);
    C=zeros(1,N);
    for i=1:N1+N2+N3+N4%系数A, B, C
        if i<=N1
            a=afa(1);
        elseif i<=N1+N2
            a=afa(2);
        elseif i<=N1+N2+N3
            a=afa(3);
        elseif i<=N1+N2+N3+N4
            a=afa(4);
        end
        A(i)=-r*a;
        B(i)=2+2*r*a;
        C(i)=-r*a;
    end
end

XI=diag(B)+diag(A,1)+diag(C,-1);%系数矩阵XI XI*T=D
T=zeros(N+1,T_sum+1);%待求矩阵T,行标表示空间，列标表示时间

```

```
D=zeros(N+1,1);%方程右边D
```

```
%% 三个交界处，热传导方程
```

```
XI(N1+1,N1+1)=k(1)+k(2);%将所有方程统一到一个系数矩阵里去，形式上对应，
```

```
XI(N1+1,N1)=-k(1);
```

```
XI(N1+1,N1+2)=-k(2);
```

```
D(N1+1)=0;
```

```
XI(N1+N2+1,N1+N2+1)=k(2)+k(3);
```

```
XI(N1+N2+1,N1+N2)=-k(2);
```

```
XI(N1+N2+1,N1+N2+2)=-k(3);
```

```
D(N1+N2+1)=0;
```

```
XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+1)=k(3)+k(4);
```

```
XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3)=-k(3);
```

```
XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+2)=-k(4);
```

```
D(N1+N2+N3+1)=0;
```

```
%% 两个边界条件，热对流方程，对h1赋值搜索符合附件2的值
```

```
%参数
```

```
Tk=273.15;%单位转换
```

```
T_in=37;%体温
```

```
T_out=65;%外界温度
```

```
T_end=48.08;%稳态时的温度
```

```
T(:,1)=T_in+Tk;%0s时整件衣服都是体温
```

```
h1=117.4000;
```

```
h4=8.3653;
```

```
XI(1,1)=h1+k(1)/h;
```

```
XI(1,2)=-k(1)/h;
```

```
D(1)=h1*(T_out+Tk);
```

```
XI(N+1,N+1)=h4+k(4)/h;
```

```
XI(N+1,N)=-k(4)/h;
```

```
D(N+1)=h4*(T_in+Tk);
```

```
%% 计算方程组，每次用Tn更新D，再用D算出Tn+1
```

```
for n=1:dt:T_sum%外层循环时间，内层循环空间
```

```
for j=1:N1+N2+N3+N4
```

```
if j<=N1 && j>1
```

```
a=afa(1);
```

```
elseif j<=N1+N2 && j>N1+1
```

```
a=afa(2);
```

```

elseif j<=N1+N2+N3 && j>N1+N2+1
    a=afa(3);
elseif j<=N1+N2+N3+N4 && j>N1+N2+N3+1
    a=afa(4);
else
    continue;
end
D(j)=r*a*T(j+1,n)+(2-2*r*a)*T(j,n)+r*a*T(j-1,n);
end
T(:,n+1)=XI\D;
end

%% 找出符合条件的最小第二层厚度(温度不超过47°C,且超过44°C的时间不超过5分钟)
times=0;
flag=1;
for b=1:T_sum+1
    if T(N+1,b)>44+Tk
        times=times+1;
    end
end

if max(T(N+1,:))>47+Tk || times>300
    flag=0;
end

if flag==1
    D_select(m)=d_enough;
end

end
d_get=min(D_select);
disp(d_get);

```

A.3 问题三代码

```

clear;
close all;
clc;
%% 构造系数矩阵
%相关参数
rou=[300;862;74.2;1.18];%密度,从第一层到第四层,第一层与外界接触,第四层是空气层

```

```

c=[1377;2100;1726;1005];%比热
k=[0.082;0.37;0.045;0.028];%热传导率
afa=k./(rou.*c);%热扩散率

dt=1;%时间步长1s
h=0.05*10^-3;%空间步长，转换单位 米
r=dt/h^2;

d2=0.1;
d2min=18;%第二层厚度范围
d2max=20;
D2_enough=d2min:d2:d2max;%第二层厚度搜索域

d4=0.1;
d4min=6.0;%第四层厚度范围
d4max=6.4;
D4_enough=d4min:d4:d4max;%第四层厚度搜索域

D2_select=100*ones(250,100);%满足条件的第二层厚度值，横坐标表示第二层，纵坐标表示第四层
D4_select=100*ones(250,100);%满足条件的第四层厚度值，横坐标表示第二层，纵坐标表示第四层
for ii=1:length(D2_enough)%对第二层厚度进行搜索，取符合条件得最小值
    for jj=1:length(D4_enough)
        d2_enough=d2min+(ii-1)*d2;%为第二层厚度赋值
        d4_enough=d4min+(jj-1)*d4;%为第四层厚度赋值
        %% 方程3，热扩散方程
        T_sum=1800;%总时间
        d=[0.6;d2_enough;3.6;d4_enough]*10^-3;%厚度
        N1=round(d(1)/h);%各层h个数
        N2=round(d(2)/h);
        N3=round(d(3)/h);
        N4=round(d(4)/h);
        N=N1+N2+N3+N4;
        A=zeros(1,N);%行向量
        B=zeros(1,N+1);
        C=zeros(1,N);
        for i=1:N1+N2+N3+N4%系数A, B, C
            if i<=N1
                a=afa(1);
            elseif i<=N1+N2
                a=afa(2);
            elseif i<=N1+N2+N3
                a=afa(3);

```

```

elseif i<=N1+N2+N3+N4
    a=afa(4);
end
A(i)=-r*a;
B(i)=2+2*r*a;
C(i)=-r*a;
end

```

```

XI=diag(B)+diag(A,1)+diag(C,-1);%系数矩阵XI XI*T=D
T=zeros(N+1,T_sum+1);%待求矩阵T,行标表示空间,列标表示时间
D=zeros(N+1,1);%方程右边D

```

%% 三个交界处,热传导方程

```

XI(N1+1,N1+1)=k(1)+k(2);%将所有方程统一到一个系数矩阵里去,形式上对应,
XI(N1+1,N1)=-k(1);
XI(N1+1,N1+2)=-k(2);
D(N1+1)=0;

```

```

XI(N1+N2+1,N1+N2+1)=k(2)+k(3);
XI(N1+N2+1,N1+N2)=-k(2);
XI(N1+N2+1,N1+N2+2)=-k(3);
D(N1+N2+1)=0;

```

```

XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+1)=k(3)+k(4);
XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3)=-k(3);
XI(N1+N2+N3+1,N1+N2+N3+2)=-k(4);
D(N1+N2+N3+1)=0;

```

%% 两个边界条件,热对流方程,对h1赋值搜索符合附件2的值
%参数

```

Tk=273.15;%单位转换
T_in=37;%体温
T_out=80;%外界温度
T_end=48.08;%稳态时的温度
T(:,1)=T_in+Tk;%0s时整件衣服都是体温

```

```

h1=117.4000;
h4=8.3653;

```

```

XI(1,1)=h1+k(1)/h;
XI(1,2)=-k(1)/h;
D(1)=h1*(T_out+Tk);

```

```

XI(N+1,N+1)=h4+k(4)/h;
XI(N+1,N)=-k(4)/h;
D(N+1)=h4*(T_in+Tk);

%% 计算方程组，每次用Tn更新D，再用D算出Tn+1
for n=1:dt:T_sum%外层循环时间，内层循环空间
    for j=1:N1+N2+N3+N4
        if j<=N1 && j>1
            a=afa(1);
        elseif j<=N1+N2 && j>N1+1
            a=afa(2);
        elseif j<=N1+N2+N3 && j>N1+N2+1
            a=afa(3);
        elseif j<=N1+N2+N3+N4 && j>N1+N2+N3+1
            a=afa(4);
        else
            continue;
        end
        D(j)=r*a*T(j+1,n)+(2-2*r*a)*T(j,n)+r*a*T(j-1,n);
    end
    T(:,n+1)=XI\D;
end

%% 找出符合条件的最小第二层厚度（温度不超过47°C，且超过44°C的时间不超过5
分钟）
times=0;
flag=1;
for b=1:T_sum+1
    if T(N+1,b)>44+Tk
        times=times+1;
    end
end

if max(T(N+1,:))>47+Tk || times>300
    flag=0;
end

if flag==1
    D2_select(ii,jj)=d2_enough;
    D4_select(ii,jj)=d4_enough;
end

end

end

[d2_get,poisition]=min(D2_select,[],'all','linear');

```



```
disp(d2_get);  
disp(D4_select(poision));
```