假设有一只停留在一维数轴上的蚂蚁。在每一时刻，这只蚂蚁有 1/2 的概率前进 1 格，1/2 的概率后退 1 格。假设在 [-2, 4] 有两个吸收壁，蚂蚁初始位置在 x=1. 求

(1) 蚂蚁到达吸收壁的期望步数.

(2) 蚂蚁第 2m+1 步到达 x=-3 吸收壁的概率是多少？其中 m 为正整数.

(3) 若考虑蚂蚁在 2 维平面的随机游走，那么 n 时刻距离远点的期望是多少?

(1) 不妨把问题平移到起点为原点，设两个吸收壁为 -3 和 3。那么以下一族独立同分布的随机变量 $\{X_n\}$，这里 X_n 表示蚂蚁在时刻 n 的位移。那么则有

$$p(X_n = 1) = \frac{1}{2}, p(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

那么考虑蚂蚁在 n 时刻的位置是 W_n, 则有

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} X_k.$$

此处 W_n 为一随机过程，准确说是整数值对称简单随机游走。那么我们可以注意到 W_n 具有无记忆性，实际上为一马尔可夫过程。记 $p_n(x, y)$ 表示某一时刻从位置 x 开始经过 n 步走到 y 处的概率。

$$p_n(x, y) = p_n(0, y - x) = C_n^{\frac{n+y-x}{2}} (\frac{1}{2})^n$$

这里 C 表示的是组合数。我们可以定义以下停时 $\tau_i = \inf\{n >= 1, W_n = i\}$. 这里 τ_i 所表示的就是第一次到达 i 的时刻。那么定义 $f_{i,j,k}^{(n)}$ 为从 i 出发经过 n 步第一次到达 j 或者 k 的概率。

$$f_{i,j,k}^{(n)} = P_i(\tau_j = n) + P_i(\tau_k = n).$$

记 $m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,j,k}^{(n)}$. 则 m_i 即为从 i 出发第一次到达 j 或者 k 的步数期望。那么从而可以定义从 i 时刻开始最终到达 j 或者 k 的概率的母函数为

$$F_i(u) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j,k}^{(n)} u^n$$

来计算 $m_i = \frac{dF_i}{du} \mid_{u=1}$.

那么我们有如下若干等式

$$\begin{aligned}
F_3 &= 1 \\
F_2 &= \frac{u}{2}(F_1 + 1) \\
F_1 &= \frac{u}{2}(F_0 + F_2) \\
F_0 &= \frac{u}{2}(F_1 + F_{-1}) \\
F_{-1} &= \frac{u}{2}(F_0 + F_{-2}) \\
F_{-2} &= \frac{u}{2}(F_{-1} + 1) \\
F_{-3} &= 1
\end{aligned}$$

解上述方程组可得 $F_0 = \frac{u^3}{4-3u^2}$. 故 $m_0 = F'(1) = 9$. 故第一问答案为 9。一个更广泛的答案是 $(R - x)(x - L)$. 其中 L 为左端点，R 为右端点，x 为蚂蚁位置。

(2) 考虑 F_0 的泰勒展开式中对应 x^{2m+1} 可得

$$f_{0,-3,3}^{(2m+1)} = \frac{3^{m-1}}{4^m}$$

故该蚂蚁 $2m+1$ 步到达吸收壁的概率是 $\frac{3^{m-1}}{4^m}$. 由贝叶斯公式可得

$$P = \frac{P_0(\tau_{-3} = 2m+1)}{f_{0,-3,3}^{(2m+1)}} = \frac{1}{2}.$$

实际上由对称性可知答案为 $\frac{1}{2}$. 当对称性破缺时，需要求两个概率母函数然后求得泰勒展开对应次方的系数并做除法。

(3) 设 $X_i \in \mathbb{R}^2$ 是一族独立同分布的随机变量，其中 X_i 表示在第 i 时刻 i 的位移。那么则有 $p(X_n=[1,0]^T)=p(X_n=[-1,0]^T)=p(X_n=[0,1]^T)=p(X_n=[0,-1]^T)=\frac{1}{4}$. 那么考虑蚂蚁在 n 时刻的位置是 W_n, 则有

$$W_n=\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

考虑随机变量 X_i 的特征函数为 $\phi_i(\theta)=E[e^{i<\theta,X_i>}], \theta=[\theta_1,\theta_2]^T\in\mathbb{R}^2$. 则 ϕ_i 可以计算为

$$\begin{aligned}\phi_i &= \frac{1}{4}(e^{i<\theta,[1,0]^T>}+e^{i<\theta,[-1,0]^T>}+e^{i<\theta,[0,1]^T>}+e^{i<\theta,[0,-1]^T>}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2)).\end{aligned}$$

进而可以推出 W_n 的特征函数为 $\varphi(\theta)=\phi^n(\theta)$. 那么由傅里叶逆变换我们可以求出概率密度函数 $w(x)$.

$$\begin{aligned}w(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i<\theta,x>}\bar{\varphi}(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i<\theta,x>}\phi^n(\theta)d\theta\end{aligned}$$

我们想求的实际上是 $||W_n||_2$ 的期望值。故由期望和概率密度函数的关系可知 $E[||W_n||_2]=\int_{\mathbb{R}^2}||x||_2 w(x)dx$

$$\begin{aligned}E[W_n] &= \int_{\mathbb{R}^2}||x||_2 w(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}||x||_2\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i<\theta,x>}\phi^n(\theta)d\theta dx \\ &= \frac{1}{2^{n+1}\pi}\int_{\mathbb{R}^2}||x||_2\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i<\theta,x>}(\cos(\theta_1)+\cos(\theta_2))^n d\theta dx \\ &\approx \sqrt{\frac{2n}{d}}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}, \text{where d is dimension.} = \sqrt{n}*\Gamma(\frac{3}{2})\end{aligned}$$

这个式子应该是没有显式解的，这里用 Mathematica 计算了前几个值。通过这样的方法可以有效地推广到 n 维空间的随机游走，不过分析更加困难。

n	1	2	3	4	5	6
E	1	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{6+3\sqrt{5}}{8}$	$\frac{9+9\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{16}$	$\frac{5(18+10\sqrt{5}+2\sqrt{13}+\sqrt{17})}{128}$	$\frac{3(50+50\sqrt{2}+5\sqrt{5}+15\sqrt{10}+\sqrt{26})}{256}$
E	1	1.20711	1.58853	1.75328	2.01933	2.16122

更强有力的结论可以参考：

https://math.stackexchange.com/questions/103142/expected-value-of-random-walk