Interpretación coeficientes β

- Modelo $\log - \log$:

  En este tipo de modelos $\log(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \log(x_{i2}) + u_i$ a β_2 se le conoce como *elasticidad* de *y* respecto a *x*, y mide el cambio porcentual de Y_i respecto a un cambio porcentual de x_{ik}.

  Ejemplo: si $\beta_2 = 0.4$, un aumento del 1% en x_{ik} provoca un aumento del 0.4% en Y_i.

- Modelo $\log - lineal$:

  Para un modelo $\log(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + u_i$ a β_2 se le conoce como *semielasticidad* y mide el cambio porcentual de Y_i por una unidad de x_{ik}, es decir que para un aumento de una unidad de x_{ik} cambia Y_i en $100 \times \beta_2\%$.

  Ejemplo: si $\log(salario) = 1 + 0.01\ experiencia$, cada año de experiencia aumenta el salario en 1%.

- Modelo $lineal - \log$:

  Para un modelo $Y_i = \beta_1 + \beta_2 \log(x_{i2}) + u_i$ a β_2 se le conoce como *semielasticidad* y mide el cambio por unidad absoluta en Y_i por cambio porcentual de x_{ik}, es decir que para un aumento del 1% de x_{ik} cambia Y_i en $\beta_2/100$ unidades.

  Ejemplo: si $salario = 1 + 500\ \log(experiencia)$, cada 1% de experiencia aumenta el salario en 5 pesos.

Prueba de multicolinealidad (Índice de condición)

Recordando que en notación matricial el MLRM se ve de la siguiente forma

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

y que el estimador de mínimos cuadrados es

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}.$$

El índice de condición se obtiene a partir de calcular los valores propios de la matriz $\boldsymbol{X'X}$, a partir de estos valores se deriva el *número de condición* (k), el cual se define como

$$k = \frac{\text{Valor propio máximo}}{\text{Valor propio mínimo}}$$

y el índice de condición

$$IC = \sqrt{k}.$$

Regla de dedo para IC: Si el IC es menor a 10 no hay un problema grave de multicolinealidad, para valores entre 10 y 30, hay multicolinealidad entre moderada y fuerte, y si excede de 30, una multicolinealidad grave.

Investigación pruebas de diagnóstico

Prueba de Chow

La prueba de Chow nos dice si los coeficientes de una regresión son los mismos para un conjunto de datos dividido. Considerando el modelo general con k variables explicativas y una constante, y una muestra con dos grupos: $g = 1, 2$.

$$Y_g = \beta_{1,g} + \beta_{2,g} x_{2,g} + \cdots + \beta_{k,g} x_{k,g} + u_g$$

La prueba de Chow busca probar si los coeficientes y las constantes son iguales en los dos, es decir,

$$H_0 : \beta_{1,1} = \beta_{1,2}, \beta_{2,1} = \beta_{2,2}, \ldots, \beta_{k,1} = \beta_{k,2},$$

esta hipótesis incluye $k + 1$ restricciones.

La prueba consiste en realizar tres estimaciones con el modelo general, una para cada grupo (Y_1 y Y_2) y la tercera para el conjunto de datos completo (Y). Ya que se tienen las estimaciones, se calcula la suma de residuales cuadrados de cada uno de los modelos:

$$\begin{aligned} SRC_1 &= \sum \hat{u}_1^2 \\ SRC_2 &= \sum \hat{u}_2^2. \\ SRC &= \sum \hat{u}^2 \end{aligned}$$

Ya que se tienen las sumas, se calcula el estadístico F de la siguiente manera:

$$F = \frac{\frac{(SRC - (SRC_1 + SRC_2))}{k+1}}{\frac{SRC_1 + SRC_2}{(n_1 + n_2 - 2(k+1))}}$$

donde n_1 y n_2 son el número de observaciones del grupo 1 y del grupo 2 respectivamente.

Si no hay un cambio estructural, es decir, Y_1 y Y_2 son las mismas, SCR y $SCR_1 + SCR_2$ no deben ser estadísticamente diferentes. Por lo tanto:

$$F \sim F_{[k+1,(n_1+n_2-2(k+1))]}.$$

De esta manera, cuando F no excede el valor crítico $F_{[k+1,(n_1+n_2-2(k+1))]}$, no se rechaza la hipótesis nula de *estabilidad paramétrica*. Caso contrario cuando F es mayor que el valor crítico $F_{[k+1,(n_1+n_2-2(k+1))]}$, se rechaza la hipótesis nula y se concluye que Y_1 y Y_2 son diferentes.

Observaciones de la prueba de Chow:

- Se generaliza fácilmente para casos de más de un cambio estructural.
- Dado que la prueba de Chow es simplemente una prueba F, sólo es válida bajo homocedasticidad. Primero se debe asegurar que las varianzas de los residuos de Y_1 y Y_2 son las mismas.
- Solo dice si las regresiones son las mismas, pero no especifica si difieren en las constantes o en los coeficientes.
- Supone que se conocen los puntos de cambio estructural.

Prueba RV de Quandt (QLR)

La prueba RV de Quandt permite comprobar la existencia de cambios estructurales cuando se desconoce la fecha de ruptura. El estadístico de esta prueba es el mismo que se utiliza en la prueba de Chow $(F(\tau))$, pero en este caso se calcula para un rango de fechas de ruptura $(\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1)$. De esta manera se tiene que:

$$QLR = \max[F(\tau_0), F(\tau_0+1), \ldots, F(\tau_1)].$$

Observaciones de la prueba RV de Quandt:

- No se necesita conocer el punto de quiebre.
- Es pesada computacionalmente, ya que requiere estimar el modelo para cada posible punto de quiebre.

Prueba CUSUM

Considerando el modelo de regresión

$$y_t = \boldsymbol{x_t'\beta_t} + u_t,\ t = 1, \ldots, T,$$

donde en el tiempo t, y_t es la observación de la variable dependiente, $\boldsymbol{x_t}$ es el vector columna de k regresores, y $\boldsymbol{\beta_t}$ es un vector columna de coeficientes, el cual tiene el subíndice t que indica que puede cambiar con el tiempo. Además se asume que los errores u_t son independientes y se distribuyen como $N(0, \sigma_t^2)$. La prueba CUSUM se basa en la hipótesis nula H_0 de constancia en el tiempo, es decir

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{\beta_2} = \cdots = \boldsymbol{\beta_T} = \boldsymbol{\beta},\\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_T^2 = \sigma^2.\end{gathered}$$

Para llevar a cabo la prueba se calculan los residuos recursivos w_r de la siguiente manera:

$$w_r = \frac{y_r - \boldsymbol{x_r'b_{r-1}}}{\sqrt{1 + \boldsymbol{x_r'(X_{r-1}'X_{r-1})^{-1}x_r}}},\ r = k+1, \ldots, T,$$

donde $\boldsymbol{X_j'} = [\boldsymbol{x_1, \ldots, x_j}]$, $\boldsymbol{Y_j'} = [y_1, \ldots, y_j]$ y $\boldsymbol{b_j} = \boldsymbol{(X_j'X_j)^{-1}X_j'Y_j}$ la estimación de mínimos cuadrados. Una propiedad de los residuos recursivos es que bajo H_0, $w_{k+1}, \ldots, w_T$ son independientes y se distribuyen como $N(0,\sigma^2)$.

Con base en lo mencionado anteriormente, si $\boldsymbol{\beta_t}$ es constante hasta $t=\tau_0$ y a partir de ahí difiere del valor constante, entonces las w_r tienen media cero hasta $r=\tau_0$, pero después, en general tendrán media distinta de cero. Por lo que se pensó en examinar graficamente el comportamiento de las medias de los valores w_r respecto a cero a lo largo del tiempo.

Después de calcular los residuos recursivos w_r, se considera la gráfica de la cantidad cusum

$$W_r = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{j=k+1}^{r} w_j$$

contra r, para $r=k+1,\ldots,T$, donde $\hat{\sigma}^2 = S_T/(T-k)$. A esta gráfica se le adicionan dos lineas rectas que crean una banda de confianza alrededor del cero para el comportamiento de W_r. Las lineas estan dadas por $y(t)=d+c(t-k)$, para $t\in(k,T)$ y con $d=\pm a\sqrt{T-k}$, $c=2a/\sqrt{T-k}$, donde a es un parámetro de la significancia.

En el gráfico obtenido, si W_r permanece dentro de las lineas, los parámetros son estables, cuando W_r sale de las bandas, hay evidencia de cambio estructural.

Observaciones de la prueba CUSUM:

- Su interpretación visual es sencilla.
- Detecta cambios pequeños en los parámetros.
- No se necesita especificar donde ocurre el cambio estructural.
- Si hay heterocedasticidad puede fallar crear falsos rechazos.
- Como depende de las primeras k observaciones, estas pueden afectar el resultado.

Prueba CUSUMSQ

Esta prueba complementa a CUSUM, y es útil especialmente cuando las $\boldsymbol{\beta_t}$ difieren del valor constante de forma aleatoria.

Consiste en graficar las cantidades

$$s_r = \left(\sum_{j=k+1}^{r} w_j^2\right) \Big/ \left(\sum_{j=k+1}^{T} w_j^2\right) = S_r/S_T,\ r=k+1,\ldots,T.$$

Se agregan las lineas $\pm c_0 + (r-k)/(T-k)$ para crear la banda de confianza y analizar el comportamiento de s_r, donde c_0 es un parámetro de la significancia.

Observaciones de la prueba CUSUMSQ:

- También se interpreta fácilmente.
- Detecta cambios abruptos.

- Detecta cambios en los parámetros o en la media de los errores, pero no indica donde sucede el cambio.
- Al elevar al cuadrado los residuos, los valores atípicos afectan la prueba.

Prueba RESET de Ramsey

La prueba consiste en que si el modelo

$$Y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + u$$

satisface que la forma funcional esta bien especificada, entonces ninguna función no lineal de las regresoras es significativa al agregarla al modelo original. A partir de esta idea se agrega en el modelo polinomios en los valores ajustados por mínimos cuadrados.

Nosotros decidimos cuantas funciones de los valores ajustados agregar. No hay una respuesta correcta para esta pregunta, sin embargo, en muchos casos los términos cuadrados y cúbicos son de utilidad.

Si $\hat{Y}$ es el valor ajustado, el modelo ampliado se ve de la siguiente, manera

$$Y_A = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \delta_1 \hat{Y}^2 + \delta_2 \hat{Y}^3 + \nu.$$

Esta ecuación busca probar si se han ignorado no linealidades importantes.

Se utiliza el estadístico F para probar la hipótesis nula $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = 0$ en el modelo ampliado, esto se hace de la siguiente manera:

$$F = \frac{(R_A^2 - R^2)/\text{número de regresoras nuevas}}{(1 - R_A^2)/(n - \text{número de parámetros en el nuevo modelo})}$$

Un estadístico F significativo sugiere algún tipo de problema en la forma funcional.

Observaciones de la prueba RESET:

- No se necesita saber cómo está mal especificado.
- No proporciona información de cómo proceder si se rechaza el modelo.
- Necesita muestras grandes.

Modelo consumo de gasolina en tasas

Pruebas de normalidad

Se realizaron pruebas de normalidad al residuo del modelo de consumo de gasolina, los resultados se muestran a continuación:

Nombre de la prueba	p-valor
Doornik-Hansen	0.166905
W de Shapiro-Wilk	0.130684
Lilliefors	0.04
Jarque-Bera	0.173408
Chi-cuadrado	0.166905

Además de los resultados de la tabla, obtuvimos el sesgo con un valor de -0.688357, el exceso de curtosis con un valor de 0.712426 y la distribución de frecuencias del residuo.

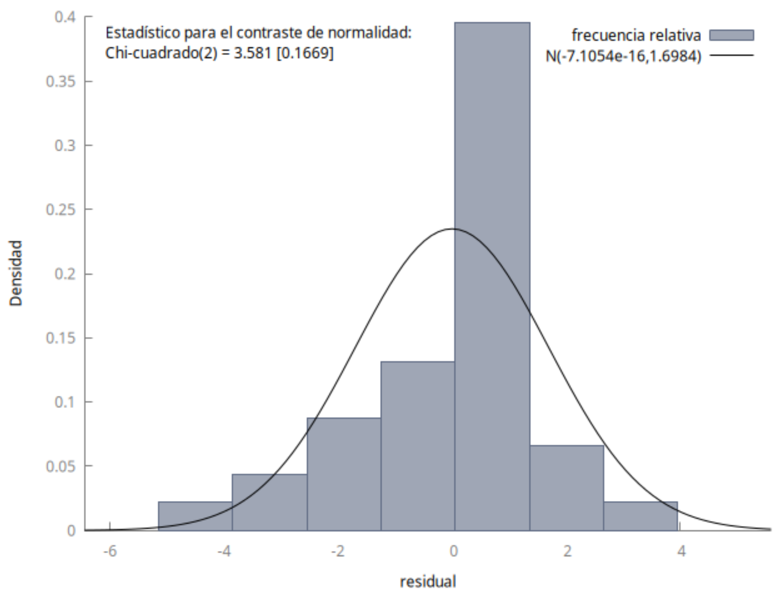

FIG 1. Distribución de frecuencias del residuo.

Notamos que el sesgo y el exceso de curtosis parecen ser razonablemente cercanos a cero, como se esperaría de una distribución normal. Estos valores no nos dan la suficiente información para poder decir si el comportamiento del residuo es normal. Para eso se realizaron las pruebas de la tabla. Considerando una confianza del 95%, cuatro de las cinco pruebas realizadas nos indican que efectivamente el comportamiento del residuo es normal, ya que $p > 0.05$.

De la gráfica también observamos que $E[\hat{u}] = -7.10543 \times 10^{-16}$, al ser un número tan pequeño, es razonable considerar que $E[\hat{u}] \approx 0$.

Por lo tanto concluimos que el residuo se distribuye de manera normal, con media cero.

Pruebas de heterocedasticidad

Podemos observar la siguiente gráfica

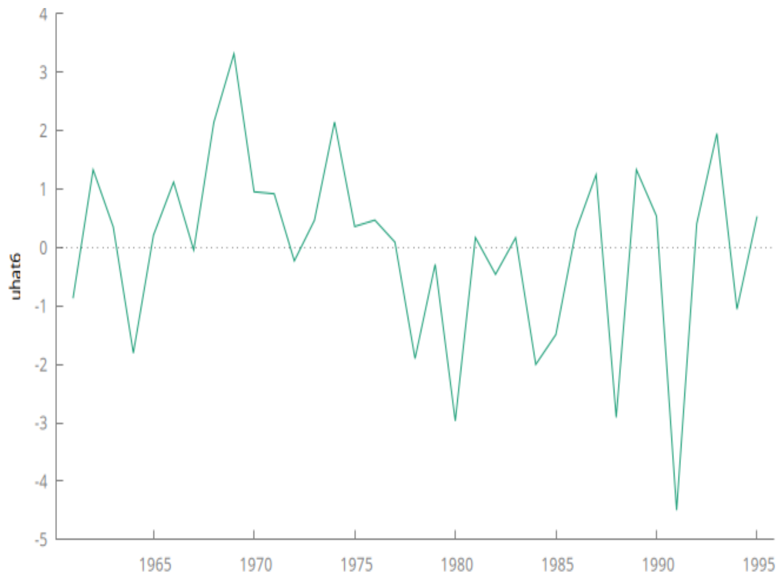

FIG 2. Comportamiento del residuo a lo largo del tiempo.

no se observa que la amplitud del residuo se expanda o se contraiga sistemáticamente, visualmente no hay indicios de heterocedasticidad. Sin embargo, la gráfica presentada no es una prueba formal, es por eso que se realizó la **prueba de heterocedasticidad de White** y se obtuvo un valor

$$p = 0.065907,$$

para una confianza del 95%, no podemos rechazar la hipótesis nula de no heterocedasticidad.

Adicionalmente, se realizó la **prueba de heterocedasticidad de White (cuadrados sólo)** y se obtuvo un valor

$$p = 0.128486,$$

en este caso tampoco podemos rechazar la hipótesis nula.

Con base en las observaciones de la gráfica y en los resultados de las dos pruebas formales realizadas, podemos concluir que no hay heterocedasticidad.

Pruebas de autocorrelación

- Prueba LM de autocorrelación: Se realizó la prueba múltiples veces, pero considerando distintos ordenes de retardo, los resultados se muestran a continuación:

Orden de retardo	p-valor
1	0.92479
5	0.407266
10	0.246433

Orden de retardo	p-valor
18	0.876064

Notamos que para los cuatro ordenes de retardo considerados, los resultados indican que no se puede rechazar la hipótesis nula de que no hay autocorrelación, para una confianza del 95%.

- Durbin-Watson: La prueba de Durbin-Watson nos dio los siguientes resultados:

H_1	p-valor
autocorrelación positiva	0.343808
autocorrelación negativa	0.656192

  Considerando una confianza del 95% Durbin-Watson nos dice que no podemos rechazar la hipótesis nula de no autocorrelación.

Notamos que Durbin-Watson y las pruebas LM realizadas coinciden en la conclusión, por lo tanto podemos decir que no hay correlación en el residuo.

Pruebas de cambio estructural

Se realizaron varias pruebas para probar si existen cambios estructurales en los datos del modelo.

- Prueba RV de Quandt: De esta prueba obtenemos la gráfica

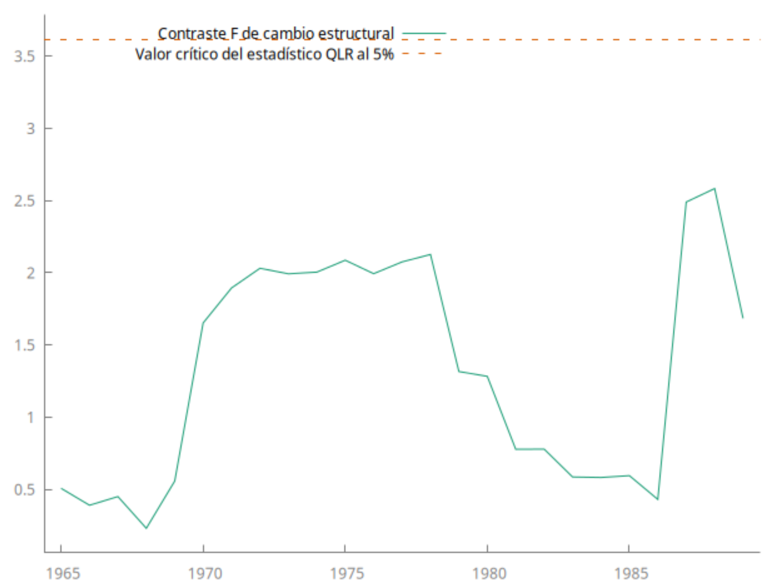

FIG 3. Gráfica de la prueba RV de Quandt.

  notamos que durante todos los años el valor del estadístico F esta por debajo de la linea punteada roja, esto nos da indicios de que puede que no existan cambios estructurales.

Además de la gráfica obtuvimos que el "valor p asintótico $= 0.25919$", con base en lo observado en la gráfica y el valor p obtenido, decimos que se sospecha que no existen cambios estructurales.

- Prueba CUSUM: Se llevó a cabo la prueba CUSUM de la cual se obtuvo un valor $p = 0.00448088$ y la siguiente gráfica:

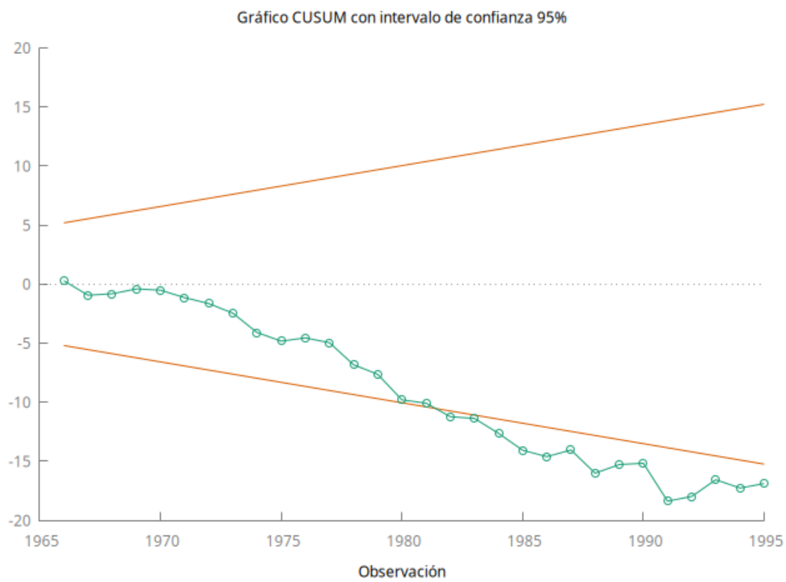

FIG 4. Prueba CUSUM.

se observa que existen puntos que cruzan las lineas rectas, más específicamente de 1982 a 1995, estas observaciones junto con el valor p indican que para esta prueba se rechaza la hipótesis nula de que no hay cambio estructural con una confianza del 95%.

- Prueba CUSUMSQ: Con el fin de obtener aún más informacion se realizó la prueba CUSUMSQ y se obtuvo lo siguiente:

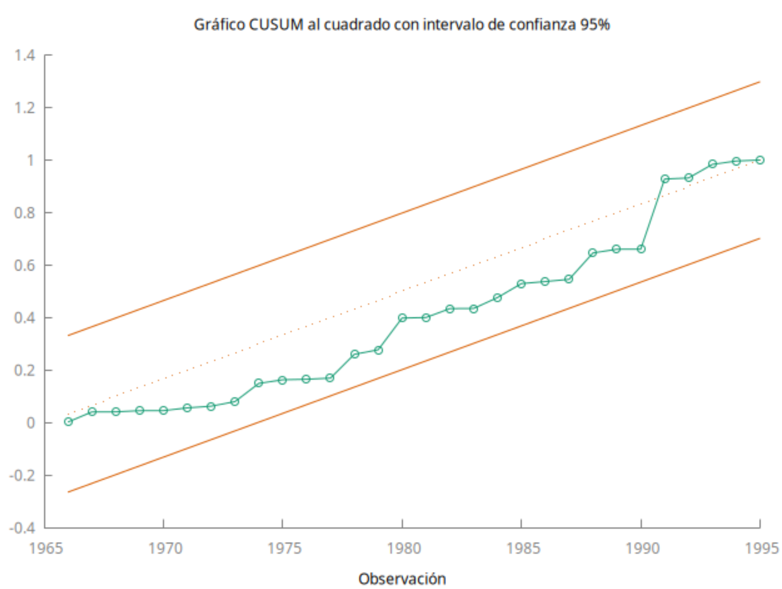

FIG 5. Prueba CUSUMSQ.

en esta gráfica se observa que ninguno de los puntos cruza las lineas rectas, por lo que no se puede rechazar la hipótesis nula.

- Prueba de Chow: Sabemos que para la prueba de Chow necesitamos un año en el que se sospeche que existe cambio estructural, la prueba se realizó para los siguientes años

Año	**p-valor**
1980	0.302679
1981	0.575158
1982	0.574472
1983	0.710725

Chow indica que no podemos rechazar la hipótesis nula de que no hay cambio estructural.

Se obtuvo que la prueba CUSUM indica que hay cambio estructural, sin embargo, la prueba RV de Quandt y CUSUMSQ coinciden en que no se puede rechazar la hipótesis nula. Además se realizaron pruebas de Chow alrededor de los puntos donde se ve que se cruzan las lineas en la gráfica de CUSUM, con el objetivo de probar si hay cambio estructural, los reultados coinciden con RV de Quandt y CUSUMSQ. Por lo tanto concluimos que no hay evidencia de cambio estructural.

Pruebas de forma funcional lineal

- RESET de Ramsey (solo cuadrados): De esta prueba se obtuvo un valor

$$p = 0.789,$$

considerando una confianza del 95%, los resultados nos indican que no podemos rechazar la hipótesis nula de especificación adecuada.

- Prueba de no linealidad (cuadrados): En este caso se obtuvo el valor

$$p = 0.15713,$$

por lo que no podemos rechazar la hipótesis nula de que la relación es lineal, considerando una confianza del 95%.

- RESET de Ramsey (solo cubos): El valor p obtenido para esta versión de la prueba RESET es

$$p = 0.503,$$

es decir, considerando una confianza del 95%, no se puede rechazar la hipótesis nula de correcta especificación.

Tomando en cuenta los resultados obtenidos en las tres pruebas realizadas, se concluye que el modelo tiene una forma funcional lineal.

Referencias

- Wooldridge, J. M. (2009). *Introductory Econometrics: A Modern Approach* (4a ed.). Mason, Ohio: South Western Cengage Learning.
- Gujarati, D. N. (2015). *Econometría* (5a ed.). México, D.F.: McGraw-Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V.
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (2020). *Introduction to Econometrics* (4a ed., Global Edition). Harlow, England: Pearson.
- Brown, R. L., Durbin, J., & Evans, J. M. (1975). *Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships Over Time*. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 37(2), 149–163. https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1975.tb01532.x