木

原田 大瑚

2024/03/31

1 木

木とは連結な閉路を含まないグラフであり、閉路を持たないグラフを**森**という。森は連結でなくともよい。また、木である G の全域部分グラフを G の**全域木**という。

1.1 親と子

木のある隣接する 2 つ点の根に近い方を**親**、葉に近い方を**子**という。

1.2 根付き木

木のある点を**根**と指定した、木を**根付き木**という。根付き木の根以外の次数が 1 の点を**葉**といい、葉でも根でもない点を**内点**という。そして、葉以外の各点が 2 つ以下の**子**を持つ根付き木を**二分木**という。

1.3 高さ

木の**高さ**は根から最も経路の長さが長くなる点までの長さである。

1.4 木の点と辺の数の関係

定理 1 任意の木 T の辺の数は点の数より 1 だけ少ない。すなわち、$|E(T)| = |V(T)| - 1$ である。

$|V(T)|$ に関する数学的帰納法で証明する。まず、点数が 1 の場合は辺は存在しないので、定理は成り立つ。
T を $|V(T)| = n(n$ は 2 より大きい$)$ である任意の木とし、点数が n 未満の木に対しては定理が成り立つとする。系 $1-1$ から T には次数が 1 である点 v が存在する。T から v と v に接続する辺を取り除いたグラフ T' は明らかに連結で閉路を含まないので木である。よって仮定より、

$$|E(T')| = |V(T')| - 1$$

である。また、T' は T から点と辺を 1 つづつ取り除いたグラフなので、

$$|V(T')| = |V(T)| - 1$$

$$|E(T')| = |E(T)| - 1$$

である。よって、

$$|E(T)| = |V(T)| - 1$$

である。

1.5 高さと二分木の葉の数の関係

定理 2 高さ k の *2* 分木には 2^k 個以下の葉が存在する。

2 分木 T の高さ $h(T)$ に関する数学的帰納法で証明する。まず、高さ 0 のである 2 分木は根がはでもあり、一つの葉が存在在するため定理は成り立つ。次に、T を点 r を根とする $h(T) = k(k$ は 1 以上$)$ である任意の 2 分木とし、高さが k 未満の任意の 2 分木に対しては定理が成り立つと仮定する。r の次数は 1 または 2 であるのでそれぞれの場合について考える。

(a) まず、r の次数が 1 である場合を考える。r の子を r_1 とし、T から点 r と、r と r_1 をつなぐ辺を取り除いた、r_1 を根とする T の部分木を T_1 とする。T_1 は、高さが k 未満の任意の 2 分木に対しては定理が成り立つという仮定から、T_1 の葉の数は 2^{k-1} 以下である。T と T_1 の葉の数は同じなので、T の葉の数も 2^{k-1} 以下である。

(b)r の次数が 2 の場合も同様である。r の子をそれぞれ r_1、r_2 とし、それぞれを根とする部分木の葉の数は (a) と同様に 2^{k-1} 以下である。よって、T の葉の数は 2^k 以下である。
以上より、定理が成り立つことがわかる。