Föreläsning 7: Dyck-stigar och Catalantal · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

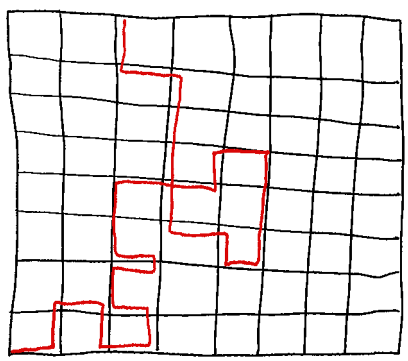
10 februari 2023

Vi introducerar Dyck-stigar, och ger två sätt att räkna dem, och ser att bägge ger oss Catalantalen. Sedan ger vi några fler exempel på saker som räknas av Catalantalen.

Dyck-stigar

Definition 1. En *gitterstig* på $\mathbb{Z}^2$ av längd n mellan a och b börjar i punkten a och tar sig sedan till punkten b med n stycken steg, som kan vara upp, ner, höger, eller vänster.[2]

[2] Vi kan betrakta en sådan stig som ett ord av längd n ur alfabetet $\{U, N, H, V\}$, tillsammans med en startpunkt.

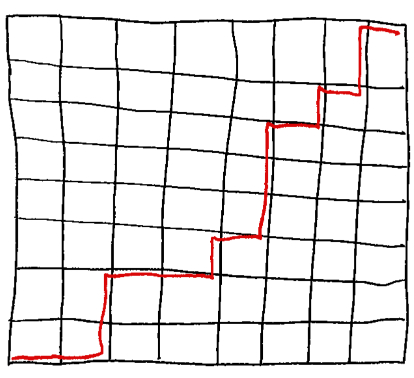


Figur 1: En gitterstig av längd 28 från $(0,0)$ till $(2,8)$.

Det finns uppenbarligen 4^n gitterstigar av längd n med en given startpunkt, om vi inte kräver att den skall sluta i någon given punkt.

Definition 2. En *uppåt-höger-stig* på $\mathbb{Z}^2$ från a till b är en gitterstig mellan a och b som enbart tar steg uppåt och åt höger.[3]

[3] I tolkningen av stigar som ord är alltså dessa ord ur det mindre alfabetet $\{U, H\}$.

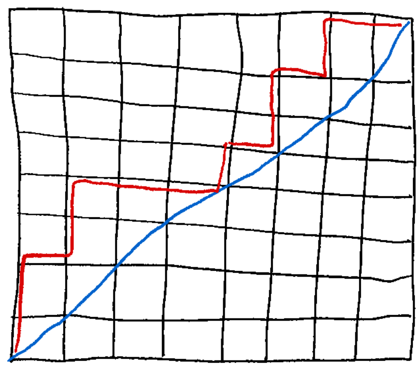


Figur 2: En uppåt-höger-stig från $(0,0)$ till $(8,8)$ av längd sexton.

Notera att till skillnad från allmänna gitterstigar bestäms en uppåt-höger-stigs längd av dess start och slutpunkt, eftersom den inte kan ta några omvägar eller gå baklänges. En stig från $(0,0)$ till (a,b) kommer alltid att ta precis a steg uppåt och b steg till höger, det enda som kan variera är i vilken ording stegen tas.

Alltså ges det totala antalet uppåt-höger-stigar från $(0,0)$ till (a,b) av $\binom{a+b}{a}$, eftersom det är antalet sätt att välja de a ställen vi tar ett steg höger av totalt $a+b$ steg.

Definition 3. En Dyck-stig av längd $2n$ är en uppåt-höger-stig från $(0,0)$ till (n,n) som aldrig går under diagonalen.



Figur 3: En Dyck-stig av längd sexton.

Notera att en Dyck-stig alltid måste börja med ett steg uppåt och sluta med ett steg åt höger, eftersom den annars ju hade varit under diagonalen.

Hur många Dyck-stigar finns det av varje given längd? Vi kan använda vår observation om att de alltid börjar med ett upp-steg för att ge en rekursion för detta antal:

Lemma 4. *Låt d_n beteckna antalet Dyck-stigar av längd $2n$. Då gäller det för alla $n \geq 0$ att*

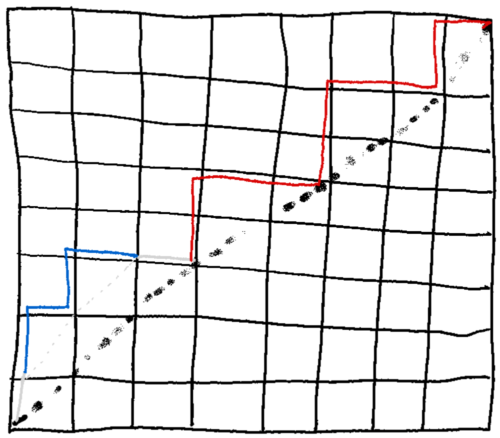
$$d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$$

och $d_0 = 1$.[4]

[4] Antalet ord av längd noll anser vi vara ett, eftersom det bara finns ett sätt att välja ett sådant.

Bevis. Överväg en Dyck-stig av längd $2(n+1)$. Vi kan dela upp den i två kortare Dyck-stigar som följer: Den börjar med ett upp-steg, som vi färgar grått. Sedan fortsätter den i ett tag tills den träffar diagonalen för första gången. Vi färgar alla steg innan det steg i vilken den träffar diagonalen röda, och steget i vilken den träffar diagonalen grått. Sedan färgar vi resten av stegen blåa.

Vi hävdar att de blå stegen utgör en Dyck-stig av längd $2k$ för något $0 \leq k \leq n$, och de röda stegen utgör en Dyck-stig av längd $2(n-k)$, så att vi tillsammans med de två gråa stegen har totalt $2k + 2(n-k) + 2 = 2(n+1)$ steg. Ekvivalent, i tolkningen av stigar



Figur 4: En illustration av vår uppdelning av en Dyck-stig i gråa, blåa, och röda steg.

som ord, så säger vi att ordet för stigen vi började med kan skrivas som

$$Uw_1Hw_2$$

för två kortare[5] Dyck-stigar w_1 och w_2.

[5] Det är tillåtet att de är av längd noll.

Vi kan välja k fritt mellan 0 och n, och vi kan sedan välja våra två kortare Dyck-stigar helt fritt så länge de har rätt längd, så multiplikations- och additionsprincipen ger oss att vi kan totalt välja på

$$\sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}$$

sätt, vilket är vad vi ville bevisa. □

Den uppmärksamme bland er kanske redan känt igen att den här rekursionen säger något om en faltning – specifikt säger den att

$$d_{n+1} = (d * d)_n,$$

vilket ser ut som något vi borde kunna använda för att räkna ut genererande funktionen av den här följden.

Proposition 5. *Den genererande funktionen för $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$, antalet Dyck-stigar, är*

$$F_d(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Bevis. Vi observerar att Lemma 4 ger oss att för alla $n \geq 0$

$$d_{n+1} = (d * d)_n,$$

så om vi tar genererande funktioner av bägge sidorna ser vi att vänster led blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n = \frac{F_d(x)-1}{x}$$

och höger led blir

$$F_{d*d}(x) = F_d(x)^2$$

så att vi har att

$$F_d(x) = xF_d(x)^2 + 1.$$

Det här är ju bara en vanlig andragradsekvation som vi kan lösa för F_d, och få att

$$F_d(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Det enda som återstår är att se om den rätta lösningen har ett plus- eller minustecken. Sättet vi ser detta på är att vi vet vad den skall ta för värde i en specifik punkt – vi kan ju nämligen räkna att

$$F_d(0) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k 0^k = d_0 = 1$$

så funktionen måste vara ett i noll.

En snabb räkning ger oss att

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = 1$$

emedan gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$$

inte existerar. Alltså måste den korrekta lösningen vara med minustecknet, såsom önskat. □

Övningar

Övning 1. Hur många gitterstigar av längd n från $(0,0)$ till (a,b) finns det?