

# Föreläsning 1: Permutationer och kombinationer ·

1MA020

Vilhelm Agdur<sup>1</sup>

<sup>1</sup> vilhelm.agdur@math.uu.se

16 januari 2023

Vi börjar med att fråga oss vad kombinatorik ens är för något. Sedan introducerar vi några väldigt grundläggande begrepp och principer i ämnet, och tillämpar dem på att diskutera permutationer och kombinationer.

## Vad är kombinatorik?

Jag hörde en gång, på en fest under min masterutbildning, en utläggning av en doktorand om att all matematik handlar om att reducera sina problem till en enklare form – och i slutändan var alla matematikproblem antingen linjär algebra, i vilket fall de var lätta, eller så var de kombinatorik, i vilket fall de var svåra. Vi skall alltså studera den svåra delen av matematiken.

En annan överförenklande kategorisering av matematiken ges oss av Randall Munroe.<sup>2</sup> Kombinatorik sysslar med den mellersta sortens problem – där det är lätt att förstå frågan, och inga märkliga kontinuerliga objekt är involverade, men svaret ändå kan vara komplicerat att ta reda på.

<sup>2</sup> Randall Munroe. Unsolved math problems. <https://xkcd.com/2529/>



En mer ordboksmässig definition av vad kombinatorik är vore att säga att det handlar om att räkna saker, när sakerna är ändligt många och diskreta. Detta är dock heller ingen precis eller uttömmande definition, så det finns saker som är kombinatorik utan att nödvändigtvis handla om att räkna saker, till exempel inom grafteori.

## Varför studera kombinatorik?

Kombinatorik har som redan nämnts tillämpningar i ren matematik – många problem inom andra grenar av matematiken kan reduceras till problem i kombinatorik. Det har också otaliga tillämpningar utanför den rena matematiken:

1. Nätverk och grafer
2. Analys av algoritmer
3. Design av kretskort
4. Design av experiment

Merparten av alla pussel-spel av typen sudoku, eller "flytta bilarna för att få ut en specifik bil", etc., kan ses som rena kombinatorikproblem.

## Additions- och multiplikations-reglerna

**Definition 1** (Additions-regeln). Om  $A$  är en mängd av  $n$  objekt och  $B$  är en mängd av  $m$  objekt så finns det  $n + m$  sätt att välja ett objekt från  $A$  eller ett objekt från  $B$ . Eller formulerat i symboler, om  $|A| = n$  och  $|B| = m$  så är  $|A \coprod B| = n + m$ .<sup>3</sup>

**Exempel 2.** En restaurang har en meny med fyra drinkar, fem förätter, tio huvudrätter, och tre desserter. Hur många saker har de på menyn?

Additions-regeln säger oss att svaret är  $4 + 5 + 10 + 3 = 22$ .

**Definition 3** (Multiplikations-regeln). Om  $A$  är en mängd av  $n$  objekt och  $B$  är en mängd av  $m$  objekt så finns det  $nm$  sätt att välja ett objekt från  $A$  och ett objekt från  $B$ . Eller ekvivalent, det finns  $nm$  sätt att välja ett par av ett objekt ur  $A$  och ett objekt ur  $B$ . Eller uttryckt i symboler

$$|A \times B| = |\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}| = nm.$$

**Exempel 4.** Om du besöker restaurangen i Exempel 2, hur många olika sätt finns det att beställa en trerätters middag med en drink till?

<sup>4</sup> Multiplikations-regeln säger oss att svaret är  $4 \times 5 \times 10 \times 3 = 600$ .

## Strängar

**Definition 5.** En *sträng*  $s$  (eller ett *ord*) av längd  $n$  på en mängd  $X$  (kallad *alfabetet* för strängen) är en funktion

$$s : \{1, 2, \dots, n\} = [n] \rightarrow X$$

där  $s_i$  är den  $i$ te bokstaven i ordet.<sup>5</sup> Vi skriver detta oftast som  $s = x_1 x_2 \dots x_n$ , där  $x_i = s(i)$ .

<sup>3</sup> Symbolen  $\coprod$  betyder *disjunkt union* – vi tar unionen av de två mängderna, men vi tvingar mängderna att vara disjunkta genom att komma ihåg vilken mängd varje element kom från. Så om  $A$  och  $B$  inte har några gemensamma element är det samma sak som  $\cup$ , men om de har gemensamma element gäller att t.ex.  $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , emedan  $\{1, 2, 3\} \coprod \{3, 4\} = \{(1, A), (2, A), (3, A), (3, B), (4, B)\}$ , så de har alltså olika antal medlemmar.

För det allra mesta behöver man inte vara så här rigorös, men det kan vara bra att ha i bakhuvudet att summa-regeln inte räknar antalet element i  $A \cup B$  om  $A$  och  $B$  kan tänkas ha gemensamma element. Vad vi gör i det fallet kommer vi återkomma till senare, när vi diskuterar inklusion-exklusion.

<sup>4</sup> En fullständigt teoretisk fråga, eftersom ingen faktiskt har råd med det i dagens ekonomi.

<sup>5</sup> Från och med nu kommer vi konsekvent använda notationen  $[n]$  för mängden av tal mellan 1 och  $n$ .

**Exempel 6** (Binära strängar). Låt  $X = \{0, 1\}$ . Strängar  $s : [n] \rightarrow X$  kallas för *binära strängar*. Det finns  $2^n$  strängar av längd  $n$ .<sup>6</sup>

Hur vet vi detta? Det finns två val för varje bokstav, så multiplikationsregeln säger oss att det måste finnas  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$  att göra ett val av vad varje bokstav skall vara.

<sup>6</sup> Så det finns till exempel åtta binära strängar av längd tre, nämligen

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

**Exempel 7** ( $m$ -ära strängar). Låt  $X = \{0, 1, \dots, m-1\}$ . Strängar med detta alfabetet kallas för  $m$ -ära strängar. Om  $m = 2$  är de binära, om  $m = 3$  är de ternära.

För generella  $X$  kallar vi en sträng  $s : [n] \rightarrow X$  för en  $X$ -sträng.

## Permutationer

**Definition 8.** En sträng  $s : [k] \rightarrow X$  kallas för en *permutation* av längd  $k$  av elementen i  $X$  om alla bokstäverna i  $s$  är olika, det vill säga om  $s(i) \neq s(j)$  ifall  $i \neq j$ .

Självklart måste  $|X| \geq k$  för att det skall existera några permutationer av längd  $k$  av  $X$ .<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Hur hade du bevisat det?

**Exempel 9.** Låt  $X = [3]$ . Det finns 6 permutationer av längd 2 av  $X$ <sup>8</sup> – vi kan se detta med hjälp av multiplikationsprincipen: Vi har tre val av första bokstav, men när vi valt den har vi bara två val kvar av andra bokstav, eftersom vi inte får ha två av samma. Alltså är det totala antalet  $3 \times 2 = 6$ .

<sup>8</sup> Dessa är, specifikt,

12, 13, 21, 23, 31, 32.

**Definition 10.** För  $n = 1, 2, \dots$ , definiera  $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ . Definiera  $0! = 1$ .<sup>9</sup>

För  $k \leq n$ , definiera  $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ . Lägg märke till att  $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ .

<sup>9</sup> Att vi låter  $0!$  vara lika med ett är för att vi ser det som produkten av inga tal alls, vilket är bekvämt att se som att det blir 1. Varför detta är så kommer vi kanske att återkomma till när vi pratar om rekursioner.

**Proposition 11.** Om  $|X| = n$  och  $0 \leq k \leq n$  så finns det  $P(n, k)$  permutationer av längd  $k$  från  $X$ .

*Bevis.* Vi bevisar detta med hjälp av multiplikationsprincipen – så vi skall räkna hur många sätt vi kan välja vår permutation  $x_1 x_2 \dots x_k$  på. Det finns så klart  $|X| = n$  sätt att välja första bokstaven  $x_1$  i vår permutation. När vi sedan skall välja  $x_2$  får den inte vara lika med  $x_1$ , så vi väljer ett element ur  $X \setminus \{x_1\}$ , och  $|X \setminus \{x_1\}| = n-1$ . Likaledes för  $x_3$  så får den varken vara lika med  $x_1$  eller  $x_2$ , så vi väljer från  $X \setminus \{x_1, x_2\}$ , och har  $n-2$  val.

Den här processen fortsätter tills vi skall välja  $x_k$ , och i det skedet har vi tagit bort  $k-1$  val, och har alltså  $|X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}| = n - (k-1)$  val.

Multiplikationsregeln säger oss att det totala antalet permutationer är lika med produkten av antalet val vi hade i varje steg, det vill säga

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} = P(n, k). \end{aligned}$$

□

**Exempel 12.** På hur många olika sätt kan  $n$  personer sitta runt ett runt bord?<sup>10</sup>

Det finns två olika sätt vi kan se på frågan<sup>11</sup> – antingen är det skillnad på de olika stolarna runt bordet (vissa kan se ut genom fönstret, andra inte), så att vi får olika sätt att placera folk runt bordet genom att rotera hela placeringen, eller så är det enda som spelar roll ordningen de sitter i, och vi ser olika rotationer av samma ordning som samma sätt att sitta runt bordet.

Om platserna har etiketter, så att det inte bara är ordningen som spelar roll, så kan vi numrera platserna från plats 1 till plats  $n$ . Om vi kallar mängden med gäster för  $X$  blir alltså varje placering ett  $X$ -ord – vi kan skriva den som ”gäst ett, gäst två, etc.”. Och eftersom varje person bara kan sitta på en stol blir detta alltså en permutation – och vi vet att det finns  $n!$  permutationer av längd  $n$  ur ett alfabet med  $n$  bokstäver.

Om platserna är oetiketterade, det vill säga att det enda vi bryr oss om är ordningen folk sitter i, får vi räkna på ett annat sätt. Givet en placering kan vi godtyckligt välja en person som ”först”, och sedan numrera platserna i medurs ordning. För varje av de  $n$  sätten att välja vem som är först får vi alltså en placering där platserna har etiketter.

Detta ger oss ett annat sätt att räkna antalet placeringar med etiketter – vi räknar antalet utan etiketter, kallar det  $m$ , och får alltså att antalet med etiketter är  $nm$ .

Men eftersom vi redan vet att antalet när platserna har etiketter är  $n!$  så får vi alltså av detta att  $n! = nm$ , eller  $m = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ , och vi har räknat antalet utan etiketter till  $(n-1)!$ .<sup>12</sup>

## Kombinationer

**Definition 13.** För en mängd  $X$  så är en *kombination* av element ur  $X$  en delmängd  $A \subseteq X$ .<sup>13</sup>

**Exempel 14.** Det finns 6 kombinationer av storlek 2 från  $X = \{a, b, c, d\}$ , nämligen

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

<sup>10</sup> Det finns en liten ritning av detta i anteckningarna från föregående år, och jag lär rita den på den faktiska föreläsningen.

<sup>11</sup> Detta är ett exempel av skillnaden mellan problem med etiketter och utan, vilket är ett generellt fenomen som kommer återkomma gång på gång. Här är det platserna runt bordet som kan ha etiketter eller inte. Var noggrann med att fundera kring vilken typ av

<sup>12</sup> Detta är ett vanligt sätt att resonera inom kombinatorik – vi hittade två olika sätt att räkna samma sak, och fick på så sätt ut en likhet ( $nm = n!$ ) som vi kunde använda för att räkna en annan sak.

<sup>13</sup> Vi talade innan om etiketter och inte. Man kan se en kombination som en permutation utan etiketter – vi vet bara vilka element som är med, inte i vilken ordning de kommer.

**Definition 15.** För  $0 \leq k \leq n$ , låt  $\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Man ser också notationerna  $C(n,k)$ ,  $nCk$ , eller  $C_k^n$  för detta, men vi håller oss till  $\binom{n}{k}$ .

**Proposition 16.** Om  $|X| = n$  och  $0 \leq k \leq n$  så finns det  $\binom{n}{k}$  kombinationer av storlek  $k$  från  $X$ .

*Bevis.* Även detta bevisar vi med ”räkna på två olika sätt”-metoden. Låt oss börja med att räkna antalet *permutationer* igen, på ett annat sätt än vi gjorde i beviset av Proposition 11.

Istället för att tänka oss att vi väljer en bokstav i taget, kan vi tänka oss att vi först väljer en mängd  $A$  av bokstaver som skall vara med – och då måste ju  $|A| = k$  eftersom varje bokstav skall dyka upp exakt en gång – och sedan väljer en ordning i vilken bokstäverna skall dyka upp.

Antalet sätt att välja en ordning för våra  $k$  bokstäver är precis antalet permutationer av längd  $k$  från alfabetet  $A$ , vilket vi vet är  $P(k,k)$ . Så om vi betecknar antalet sätt att välja mängden  $A$  med  $m$ , så säger oss multiplikationsregeln att antalet permutationer av längd  $k$  från  $X$  måste vara  $m \cdot P(k,k)$ .

Men vi vet ju också, från hur vi räknade antalet permutationer innan, att  $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$  och  $P(k,k) = k!$ . Så vad vi har visat är att

$$\frac{n!}{(n-k)!} = P(n,k) = mP(k,k) = mk!$$

eller, om vi löser för  $m$ , att

$$m = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

vilket är vad vi ville bevisa. □

**Proposition 17.** För alla  $n \geq 0$  och alla  $0 \leq k \leq n$  gäller det att

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Vi ger två olika bevisa av denna proposition. Det första är algebraiskt:

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

□

Det andra är kombinatoriskt:<sup>14</sup>

*Bevis.* Låt  $X$  vara en mängd med  $n$  element.  $\binom{n}{k}$  räknar antalet sätt att välja en delmängd  $A \subseteq X$  av storlek  $k$ . Men varje sådan delmängd  $A$  har ett komplement  $X \setminus A$  av storlek  $n - k$ , och för varje delmängd av storlek  $n - k$  kan vi få en av storlek  $k$  genom att ta dess komplement.

Delmängder av storlek  $k$  och delmängder av storlek  $n - k$  står alltså i ett-till-ett-korrespondens med varandra, det finns en bijektion mellan dem, så det måste finnas lika många av storlek  $k$  som av storlek  $n - k$ .

Men vi vet att antalet delmängder av storlek  $n - k$  är  $\binom{n}{n-k}$ , och alltså måste  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .  $\square$

## Övningar

**Övning 1.** Tjugofyra studenter ska sitta vid ett långt bord<sup>15</sup> och skriva en tenta. Tio av dem är väldigt benägna att fuska genom att kolla på sin kompis tenta.

Deras kombinatoriklärare bestämmer att dessa tio studenter måste sitta på platser med udda nummer, så att de inte kan hamna bredvid varandra och fuska.

Hur många sätt finns det att placera studenterna vid bordet?

**Övning 2.** Ge ett algebraiskt bevis för att

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

**Övning 3.** Ge ett kombinatoriskt bevis för att<sup>16</sup>

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

**Övning 4.** Ge ett kombinatoriskt bevis för att

$$\binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} = \binom{n}{k} \binom{k}{2}.$$

**Övning 5.** Antag att du har två mängder  $A$  och  $B$ , med  $|A| = 15$  och  $|B| = 7$ .

1. Hur många sätt finns det att välja ett objekt från  $A$  eller ett från  $B$ ?
2. Hur många sätt finns det att välja ett objekt från  $A$  och ett från  $B$ ?
3. Vad är  $|A \times B|$ ?
4. Vad är  $|A \sqcup B|$ ?
5. Vad är det största och minsta värde som  $A \cup B$  kan ta?

<sup>14</sup> Vad menar vi när vi säger att det här beviset är "kombinatoriskt", till skillnad från det andra beviset? Nyckeln är att vi här visade att de två mängderna – mängden av delmängder av storlek  $k$  och mängden av delmängder av storlek  $n - k$  – har lika många medlemmar genom att uppvisa en bijektion mellan dem, emedan vi i det algebraiska beviset bara manipulerade våra formler för att visa att de var lika.

Bijektionen vi hittade här är själv ett kombinatoriskt objekt, och det berättar mer för oss än bara att mängderna har lika många medlemmar. Man kan se det som att den är en *anledning* till varför de har lika många mängder.

Denna bevismetod, att hitta en bijektion, kommer vara ett återkommande tema – och likaså att bijektionerna ger oss mer förståelse för objekten vi studerar än vad ett algebraiskt bevis gör.

<sup>15</sup> Ni slipper alltså runda bord i denna övningen! Bordet har en första plats, en andra plats, och så vidare till tjugofjärde platsen.

<sup>16</sup> Ledtråd: Tänk på att välja grupper med ledare för ett projekt.

6. Vad är det största och minsta värde som  $A \cap B$  kan ta?

**Övning 6.** Du har sökt ett prestigefyllt internship, och ska klä dig för intervjun. Du inser att du borde ha slips på dig, och ser att du äger fem seriösa slipsar och sju slipsar med komiska tryck.

Hur många sätt kan du välja slips för intervjun på?

Efter lite eftertanke kommer du ihåg att jobbet du sökt är som clown,<sup>17,18</sup> så du borde nog ha på dig två slipsar på samma gång, eftersom det är väldigt komiskt.

På hur många sätt kan du välja två slipsar att ha på dig på samma gång? Hur många sätt kan du välja en seriös slips och en med ett komiskt tryck på?

<sup>17</sup> Och tyvärr äger du ingen sådan där skoj fluga som kan spruta vatten i ansiktet på folk.

<sup>18</sup> Denna övningen är stulen från internet, och den handlade om en clownjobbintervju redan från början. Jag valde den helt baserat på hur mycket jag skrattade åt hur de antydde att deras studenter var clowner.

### Referenser

Randall Munroe. Unsolved math problems. <https://xkcd.com/2529/>.