

Extramaterial: Formler och räkneregler · 1MA020

Vilhelm Agdur¹

¹ vilhelm.agdur@math.uu.se

23 februari 2023

I detta dokument ligger en samling av viktiga resultat och räkneregler, sammanfattade utan bevis.

Den tolvfaldiga vägen

| | Generellt f | Injektivt f | Surjektivt f |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Bägge särskiljbara | Ord ur X av längd n x^n | Permutation ur X av längd n $\frac{x!}{(x-n)!}$ | Surjektion från N till X $x!\{x\}^n$ |
| Osärskiljbara objekt | Multi-delmängd av X av storlek n $\binom{n+x-1}{n}$ | Delmängd av X av storlek n $\binom{x}{n}$ | Kompositioner av n av längd x $\binom{n-1}{n-x}$ |
| Osärskiljbara lådor | Mängdpartition av N i $\leq x$ delar $\sum_{k=1}^x \{x\}_k^n$ | Mängdpartition av N i $\leq x$ delar av storlek 1 1 om $n \leq x$, 0 annars | Mängdpartition av N i x delar $\{x\}_x^n$ |
| Bägge osärskiljbara | Heltalspartition av n i $\leq x$ delar $p_x(n+x)$ | Sätt att skriva n som summan av $\leq x$ ettor 1 om $n \leq x$, 0 annars | Heltalspartitioner av n i x delar $p_x(n)$ |

Räkneregler för genererande funktioner

Lemma 1 (Räkneregler för genererande funktioner). Antag att vi har en följd $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, med genererande funktion F_a . Då gäller det att

1. För varje $j \geq 1$ är

$$\sum_{k=j}^{\infty} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k \right) = F_a(x) - \sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k$$

2. För alla $m \geq 0$, $l \geq -m$ gäller det att

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^{k+l} = x^l \left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k \right) = x^l \left(F_a(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \right)$$

3. Det gäller att²

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = \frac{F'_a(x)}{x}.$$

² Denna räkneregeln kan förstås generaliseras till att högre potenser av k motsvarar högre derivator – och om vi istället delar med någon potens av k får vi primitiva funktioner till den genererande funktionen.

Vanliga genererande funktioner

| Följd | Genererande funktion |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $(1, 0, 0, \dots)$ | 1 |
| $(1, 1, 1, \dots)$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| $a_k = 1$ om $k \leq n$, 0 annars | $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ |
| Fixt n , $a_k = \binom{n}{k}$ | $(1+x)^n$ |
| Fixt n , $a_k = \binom{n+k-1}{k}$ | $\frac{1}{(1-x)^n}$ |
| Fibonacci-talen $f_0 = f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ för $k \geq 1$ | $\frac{1}{1-x-x^2}$ |
| Indikatorfunktion för jämna talen $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| Catalantalen | $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ |
| Följd | Exponentiell genererande funktion |
| $(1, 0, 0, \dots)$ | 1 |
| $(1, 1, 1, \dots)$ | e^x |
| $(0!, 1!, 2!, 3!, \dots)$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| Fixt n , $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $(1+x)^n$ |

Sannolikhetsteori

Lemma 2. Det gäller för alla händelser A och B att

- per definition är $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\omega)$,
- så $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- och om A och B har tomt snitt, $A \cap B = \emptyset$, så är $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,

- och om de inte nödvändigtvis har tomt snitt har vi att

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B)$,
- och per definition är A och B oberoende precis när $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$.

Lemma 3. Om (Ω, μ) är något sannolikhetsrum, $A \subseteq \Omega$ någon händelse, och $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ samt $Z : \Omega \rightarrow V$ är slumpvariabler som tar värden i \mathbb{R} och i någon godtycklig mängd V , så gäller att:

1.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega).$$

2. För alla $a, b \in \mathbb{R}$ så är

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Väntevärdet är alltså en linjär funktional.

3.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

4. Om $X(\omega) \leq C$ för varje ω , eller ekvivalent om $\mathbb{P}(X \leq C) = 1$, så är $\mathbb{E}[X] \leq C$.

5. Om Z är likformigt fördelad på V så gäller det för varje delmängd $W \subseteq V$ att

$$\mathbb{P}(Z \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$