Sammanfattning av hela kursen · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

27 februari 2023

Detta dokument ger en sammanfattning av kursens innehåll, med nyckelord markerade, och saker vi räknat eller bevisat.

Kursen är uppdelad i tre delar – vi började med grundläggande kombinatorik i de första fyra föreläsningarna, sedan introducerade vi genererande funktioner i de kommande tre föreläsningarna. Sedan hade vi ett intermezzo om grafer och träd i en föreläsning, innan vi fortsatte till vår tredje del om diskret sannolikhetsteori och den probabilistiska metoden.

Del ett: Grundläggande kombinatorik

I den första föreläsningen introducerade vi de allra mest grundläggande koncepten i kombinatoriken:

1. Additionsprincipen och multiplikationsprincipen låter oss räkna olika mängder.
2. Ord bildade ur olika alfabeten är det mest basala av alla kombinatoriska objekt.
3. Ett viktigt exempel på en slags ord är permutationer – vi definierar och räknar dessa.
4. Om ord är det mest basala exemplet där ordning spelar roll är kombinationer det mest grundläggande exemplet på när vi väljer saker utan ordning.
5. Vi definierar binomialkoefficienterna och visar att dessa räknar antalet kombinationer av en viss storlek.

Precis i slutet av föreläsning ett börjar vi prata om kombinatoriska bevis. I föreläsning två fortsätter vi på detta tema, och ger ett antal olika exempel.

1. De flesta av våra kombinatoriska bevis involverar binomialkoefficienter, alltså delmängder till en viss mängd i en kombinatorisk tolkning.
2. Vi bevisar specifikt binomialsatsen med ett kombinatoriskt bevis.
3. Sedan definierar vi omordningar och använder dessa för att räkna multi-delmängder[2] med ett pinnar-och-stjärnor-argument.

[2] Just termen multi-delmängd introducerar vi tyvärr först i en senare föreläsning – i efterhand borde termen ha dykt upp redan här. Den refererar till ett sätt att fördela ut n osärskiljbara objekt till k särskiljbara personer, om vi inte kräver att varje person måste få ett objekt.

4. Vi ser vårt första exempel av att räkna lösningar till ekvationer när vi tolkar en multi-delmängd som en lösning på en ekvation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ – detta kommer dyka upp igen senare i kursen, med fler begränsningar på vad variablerna kan ta för värden.

5. Vi definierar multinomialkoefficienterna, och ser att dessa ger antalet omordningar av ett ord.

I den tredje föreläsningen i denna del av kursen introducerar vi några till enkla verktyg inom kombinatoriken.

1. Lådprincipen, i dess generaliserade form, låter oss visa en del överraskande resultat. Vi ger ett par enkla exempel, och ett lite mer sofistikerat.

2. Inklusion-exklusion låter oss räkna många saker som annars vore väldigt svåra att räkna. För att kunna bevisa den introducerar vi indikatorfunktioner och ger några räkneregler för dessa.

3. Vi använder inklusion-exklusion för att räkna lösningar till ekvationer, nu med övre begränsningar på variablerna.

4. Vi definierar derangemang, och använder inklusion-exklusion för att räkna dessa.

Föreläsning fyra sammanfattar till slut vad vi gjort i denna del av kursen.

1. Vi definierar Stirlings partitionstal, och använder inklusion-exklusion för att visa att antalet surjektioner från en mängd till en annan räknas av en formel som involverar dessa.

2. Vi definierar mängdpartitioner och visar att dessa räknas av Stirlings partitionstal. Dessa ger oss ett till vanligt exempel på något vi kan ge kombinatoriska bevis kring.

3. Vi skriver upp en stor tre-gånger-fyra tabell över många av de räkneproblem vi sysslat med hittills – den tolvfaldiga vägen – som sammanfattar och systematiserar det hela i termer av särskiljbara och osärskiljbara objekt och funktioner som kan vara generella, injektiva, eller surjektiva.

4. Vi definierar Stirlings cykeltal, och därmed också cykler i permutationer. Vi visar hur man kan omvandla mellan en permutation i vanlig form och en i cykelform.

Del två: Genererande funktioner

Intermezzo: Grafer och träd

Del tre: Diskret sannolikhetsteori och den probabilistiska metoden