Föreläsning 6: Fortsättning på genererande funktioner · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

6 februari 2023

Vi fortsätter förra föreläsningens diskussion om genererande funktioner, och ger fler exempel och sätt att använda sådana för att lösa kombinatoriska problem.

Antal lösningar till en ekvation, med begränsningar

I slutet på förra föreläsningen studerade vi antalet lösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = k$$

om vi kräver att alla x_i är ickenegativa heltal. Det var ett första exempel på en mer generell kategori av problem med att räkna lösningar på ekvationer. Låt oss börja med ett lite mer invecklat problem:

Exempel 1. Hur många lösningar finns det till

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

om vi kräver att alla x_i är ickenegativa heltal, men också kräver att x_2 är jämnt, att $x_3 \leq 10$, och x_4 är udda?

Låt, för varje k, a_k vara antalet sådana lösningar. Låt sedan a_k^1 vara antalet lösningar till $x_1 = k$ i ickenegativa heltal x_1, a_k^2 vara antalet lösningar till $x_2 = k$ i ickenegativa jämna heltal, a_k^3 vara antalet lösningar till $x_3 = k$ i heltal mellan 0 och 10, och a_k^4 vara antalet lösningar till $x_4 = k$ i udda heltal.

Precis som i förra exemplet studerar vi nu faltningen av dessa fyra följder, och ser att

$$(a^1 * a^2 * a^3 * a^4)_k = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k}} a_{k_1}^1 a_{k_2}^2 a_{k_3}^3 a_{k_4}^4 = a_k$$

eftersom $a_{k_1}^1 a_{k_2}^2 a_{k_3}^3 a_{k_4}^4$ är en produkt av ettor och nollor – att $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k$ garanteras av definitionen av faltning, och sedan är varje term i produkten ett om värdet på k_i är tillåtet av våra begränsningar, och noll annars. Så produkten är ett om summan är korrekt och varje enskild begränsning är uppfylld.

Så precis som i förra exemplet kan vi få fram genererande funktionen för a_k, följden vi faktiskt är intresserade av, genom att plocka fram den genererande funktionen för de enklare följderna.

Vad genererande funktionen för a^1 är vet vi sedan innan – den är bara en följd av ettor, så dess genererande funktion blir $\frac{1}{1-x}$. Likaledes vet vi sedan innan att följden av n stycken ettor och sedan nollor har genererande funktion $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, så genererande funktionen för a^3 blir $\frac{1-x^{11}}{1-x}$.

Däremot för a^2 behöver vi räkna ut något nytt, nämligen den genererande funktionen för följden $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, indikatorfunktionen av de jämna talen. Så vi får skriva att

$$\begin{aligned}
F_{a^2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 x^k \\
&= \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \in 2\mathbb{Z}}} x^k \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (x^2)^i
\end{aligned}$$

och sista raden här kan vi känna igen som genererande funktionen av följden $(1, 1, 1, 1, \ldots)$, *utvärderad i* x^2. Så detta är lika med $\frac{1}{1-x^2}$.

Så vad som återstår är alltså a^4, indikatorfunktionen för de udda talen. För att få fram dess genererande funktion kan vi använda vad vi just gjorde för de jämna talen:

$$\begin{aligned}
F_{a^4}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ udda}}} x^k \\
&= x \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ udda}}} x^{k-1} \\
&= x \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \in 2\mathbb{Z}}} x^k \\
&= \frac{x}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Så, om vi använder att genererande produkten av en faltning är produkten av de genererande funktionerna, ser vi att

$$\begin{aligned}
F_a(x) &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{x}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{x(1-x^{11})}{(1-x)^2(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

och ber vi vårt favorit-CAS[2] att Taylorutvidga detta uttryck så får vi att

$$F_a(x) = x + 2x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 14x^5 + 20x^6 + 30x^7 + 40x^8 + \ldots$$

[2] *Computer Algebra System*, alltså till exempel *WolframAlpha* eller något av dess öppna alternativ, såsom *Sage*.

så att följden av antalet lösningar är

$$0, 1, 2, 5, 8, 14, 20, 30, 40, 55, 70, 91, 111, 138, 163, \ldots.$$

Exempel 2. Vi vill räkna antalet lösningar a_k till ekvationen

$$2x_1 + x_2 + x_3 = k$$

där alla x_i är heltal, x_2 är en multipel av 6, och talet x_3 kan vara antingen rött eller blått.[3]

Vi börjar med att göra variabelbytet $y_1 = 2x_1$, och vill alltså nu ha lösningar till $y_1 + x_2 + x_3 = k$, med begränsningen att y_1 är jämnt. Det här förändrar så klart inte antalet lösningar, bara gör det lättare för oss att tillämpa vår metod.

Vi tillämpar samma metod som i förra exemplet, och låter a^1_k vara antalet lösningar till $y_1 = k$ med y_1 jämnt, a^2_k vara antalet lösningar till $x_2 = k$ med x_2 delbart med 6, och a^3_k vara antalet lösningar till $x_3 = k$ med x_3 färgat antingen rött eller blått. Faltningen blir då

$$(a^1 * a^2 * a^3)_k = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \geq 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = k}} a^1_{k_1} a^2_{k_2} a^3_{k_3} = a_k.$$

Vi fortsätter precis som innan med att räkna ut den genererande funktionen för varje av våra följder. För a^1 vet vi redan vad genererande funktionen för indikatorfunktionen av de jämna talen är, nämligen $\frac{1}{1-x^2}$.

För a^2 kan vi använda samma metod som vi använde för de jämna talen för att se att

$$\begin{aligned} F_{a^2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^2_k x^k = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \in 6\mathbb{Z}}} x^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{6i} = \sum_{i=0}^{\infty} (x^6)^i \end{aligned}$$

så att $F_{a^2}(x) = \frac{1}{1-x^6}$.

För a^3 så blir denna helt enkelt en följd av bara tvåor, eftersom vi har två val för färg för varje tal, och kan välja vilket tal som helst. Så vi ser att

$$F_{a^3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^k = 2\frac{1}{1-x}.$$

Sammantaget har vi alltså att

$$F_a(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\left(\frac{2}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^6)}$$

vilket vi kan Taylorutvidga i vårt favoritprogram och få att[4]

$$\begin{aligned} F_a(x) = 2 &+ 2x + 4x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 10x^7 \\ &+ 14x^8 + 14x^9 + 18x^{10} + 18x^{11} + 24x^{12} + 24x^{13} \\ &+ 30x^{14} + 30x^{15} + 36x^{16} + 36x^{17} + 44x^{18} + \ldots. \end{aligned}$$

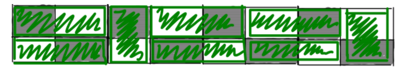
[3] Vi ser alltså, för $k = 6$, alla dessa som godtagbara distinkta lösningar:

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 4,$ $\quad x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 4,$

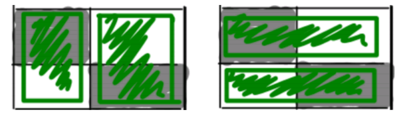
$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2,$ $\quad x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0.$

[4] Vi ser ju ett tydligt mönster här av att $a_{2k} = a_{2k+1}$. Kan du förklara varför detta måste vara fallet, baserat på våra begränsningar av variablerna?

Exempel 3. Antag att vi har ett schackbräde med $2 \times n$ rutor, och vi vill täcka det med brickor av formen 2×1 eller 1×2. Hur många sätt kan vi göra detta på?



Figur 1: Ett sätt att göra detta då $n = 8$. Figur tagen ur förra årets anteckningar.



Figur 2: De två sätten att göra det på då $n = 2$. Figur från förra årets föreläsningsanteckningar.

Låt t_n vara antalet sätt vi kan täcka vårt schackbräde. Vi vill hitta en rekursion för detta antal. Vi ser enkelt att det finns ett enda sätt att göra det för $n = 1$ – bara en bricka får plats – så $t_1 = 1$. För $n = 2$ finns det två sätt, antingen lägger vi dem horisontellt eller vertikalt, så $t_2 = 2$.

Om vi vill skapa oss en täckning av en $2 \times n$-bräda, för något $n > 2$, kan vi göra på två sätt:

- Vi börjar med en täckning av en $2 \times (n-1)$-bräda, och lägger till en till bricka vertikalt.
- Vi börjar med en täckning av en $2 \times (n-2)$-bräda, och lägger till två till brickor horisontellt.

Att varje täckning av en $2 \times n$-bräda kan skapas på detta vis är enkelt att se – antingen är den sista kolumnen täckt av en vertikal bricka, i vilket fall vi skapade täckningen på första viset, eller så är den täckt av två horisontella brickor, i vilket fall vi skapade den på det andra sättet.

Alltså har vi funnit följande rekursion för antalet täckningar

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \quad t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \, \forall n > 2$$

som ju är extremt lik den vi har för Fibonaccitalen, så vi kan finna en genererande funktion och sluten form på precis samma vis som i det fallet.

Övningar

Övning 1. Hur många heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 578$$

finns det,[5] om vi kräver att

- $x_1 \geq -7$,[6]
- $x_2 \geq 0$ är ett jämnt tal,
- och $x_3 \geq 0$ kan vara vilket tal som helst, men om det är jämnt kan det vara rött eller blått, och om det är udda kan det vara gult, grönt, eller lila.

[5] Om ni väl har hittat genererande funktionen för antalet lösningar när vi ersatt 578 med k, så kan ni enkelt få fram svaret med följande kod till *WolframAlpha*:

$$\texttt{SeriesCoefficient}[f, \{x, 0, 578\}]$$

där f då är genererande funktionen ni funnit. Att ange den genererande funktionen och säga att ni sedan plockade fram rätt koefficient ur den med hjälp av ett CAS är den förväntade metoden här.

[6] Ledtråd: Gör ett variabelbyte till y_1 för att få den vanliga begränsningen att $y_1 \geq 0$.