

Extra övningar · 1MA020

Vilhelm Agdur¹

30 januari 2023

¹ vilhelm.agdur@math.uu.se

När jag skriver föreläsningssanteckningar och övningar till dessa hittar jag ibland extra övningar som hade platsat bland de i slutet av föreläsningssanteckningarna. Jag kan så klart inte lägga till alla övningarna till anteckningarna, för att inte inlämningsuppgifterna skall bli allt för betygande. Dessa extra övningar hamnar i stället i denna fil.

Uppgifterna kommer inte i någon särskild ordning, utan bara efter ordningen jag hittat dem. Nya uppgifter kommer alltid att läggas till sist i filen, så att numreringen av tidigare uppgifter inte ändras.

Övning 1. Ge ett kombinatoriskt bevis² för att

$$\binom{z}{n} \binom{z}{m} = \sum_{k=0}^n \binom{n+m-k}{k, n-k, m-k} \binom{z}{m+n-k},$$

där $\binom{n+m-k}{k, n-k, m-k}$ är en multinomialkoefficient.

Övning 2. Hur många heltal mellan 1 och 100 är delbara med 2, 3, eller 5?³

Övning 3. Antag att vi har en grupp av n stycken kärlekskranka tonåringar – varenda en av dem är förälskad i någon tonåring i gruppen⁴, och varje av dem har precis en tonåring i gruppen som är kär i dem.

Hur många möjliga konfigurationer av förälskelser finns det?

² Ledtråd: Vänster led räknar antalet sätt att välja en delmängd av storlek n och en av storlek m . Varför räknar också höger led detta?

³ Använd inklusion-exklusion – till exempel 30 är ju delbart med alla tre.

⁴ Det är tänkbart att någon eller några av dem är narcissist och förälskad i sig själv. Enligt vårt antagande om att varje av dem har precis en person som är kär i dem kommer alltså narcissisten inte ha någon annan som är kär i den, eftersom den redan är kär i sig själv.