

Extramaterial: Formler och räkneregler · 1MA020

Vilhelm Agdur¹

¹ vilhelm.agdur@math.uu.se

1 februari 2023

I detta dokument ligger en samling av viktiga resultat och räkneregler, sammanfattade utan bevis.

Den tolvfaldiga vägen

| | Generellt f | Injektivt f | Surjektivt f |
|----------------------|--|---|---|
| Bägge särskiljbara | Ord ur X av längd n x^n | Permutation ur X av längd n $\frac{x!}{(x-n)!}$ | Surjektion från N till X $x!\{x\}^n$ |
| Osärskiljbara objekt | Multi-delmängd av X av storlek n $\binom{n+x-1}{n}$ | Delmängd av X av storlek n $\binom{x}{n}$ | Kompositioner av n av längd x $\binom{n-1}{n-x}$ |
| Osärskiljbara lådor | Mängdpartition av N i $\leq x$ delar $\sum_{k=1}^x \{x\}_k^n$ | Mängdpartition av X i $\leq x$ delar av storlek 1 1 om $n \leq x$, 0 annars | Mängdpartition av N i x delar $\{x\}_x^n$ |
| Bägge osärskiljbara | Heltalspartition av n i $\leq x$ delar $p_x(n+x)$ | Sätt att skriva n som summan av $\leq x$ ettor 1 om $n \leq x$, 0 annars | Heltalspartitioner av n i x delar $p_x(n)$ |

Räkneregler för genererande funktioner

Lemma 1 (Räkneregler för genererande funktioner). Antag att vi har en följd $\{a_k\}_{k=0}^\infty$, med genererande funktion F_a . Då gäller det att

1. För varje $j \geq 1$ är

$$\sum_{k=j}^\infty a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^\infty a_k x^k \right) - \left(\sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k \right) = F_a(x) - \sum_{k=0}^{j-1} a_k x^k$$

2. För alla $m \geq 0, l \geq -m$ gäller det att

$$\sum_{k=m}^\infty a_k x^{k+l} = x^l \left(\sum_{k=m}^\infty a_k x^k \right) = x^l \left(F_a(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k \right)$$

3. Det gäller att²

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k = F'_a(x).$$

² Denna räkneregeln kan förstås generaliseras till att högre potenser av k motsvarar högre derivator – och om vi istället delar med någon potens av k får vi primitiva funktioner till den genererande funktionen.

Vanliga genererande funktioner

| Följd | Genererande funktion |
|--|-------------------------|
| $(1, 0, 0, \dots)$ | 1 |
| $(1, 1, 1, \dots)$ | $\frac{1}{1-x}$ |
| $a_k = 1$ om $k \leq n$, 0 annars | $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ |
| Fixt n , $a_k = \binom{n}{k}$ | $(1+x)^n$ |
| Fixt n , $a_k = \binom{n+k-1}{k}$ | $\frac{1}{(1-x)^n}$ |
| Fibonacci-talen | $\frac{1}{1-x-x^2}$ |
| $f_0 = f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ för $k \geq 1$ | |