

# Föreläsning 10: Diskret sannolikhets teori, fortsättning · 1MA020

Vilhelm Agdur<sup>1</sup>

25 februari 2023

<sup>1</sup> vilhelm.agdur@math.uu.se

Vi fortsätter att diskutera diskret sannolikhets teori, och introducerar slumpvariabler och deras väntevärden.

Vi använder den teori vi byggt upp för att bevisa några fler resultat inom kombinatoriken.

## Slumpvariabler

Hittills är vad vi har sett bara hälften av vad man intuitivt tänker ingår i sannolikhets teorin – vi har diskuterat slumpmässiga *händelser*, som antingen inträffar eller inte, men vi har inte definierat slumpmässiga tal. Frågan om ifall det kommer att regna imorgon eller inte kan vi modellera i vår formalism, men inte frågan om hur många millimeter det kommer regna.

**Definition 1.** Givet ett sannolikhetsrum  $(\Omega, \mu)$  är en *slumpvariabel*  $X$  som tar värden i  $V$  en funktion  $X : \Omega \rightarrow V$ . Givet varje utfall tar alltså vår slumpvariabel ett visst värde, och givet varje<sup>2</sup> delmängd  $A \subseteq V$  blir  $X \in A$  en händelse – specifikt är det händelsen

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A).$$

Det allra vanligaste fallet är när  $V = \mathbb{R}$  eller någon delmängd till  $\mathbb{R}$ . I många introtexter om sannolikhets teori *definierar* man att slumpvariabler tar värden i  $\mathbb{R}$  – men eftersom vi sysslar med kombinatorik kommer vi att vilja ha mer exotiska slumpvariabler, som slumpmässiga permutationer eller slumpmässiga mängder.

**Exempel 2.** Låt oss återbesöka vårt exempel med ett tärningskast. Vi konstaterade att vi kan ta  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  och  $\mu(\omega) = 1/6$  för alla  $\omega \in \Omega$ .

Vi kan naturligt betrakta vårt tärningskast som en slumpvariabel – i detta fall blir det en mycket enkel funktion,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skickar helt enkelt varje  $\omega$  på sig självt.

Vårt tärningskast är ett specialfall av ett mer allmänt fenomen, som det kommer vara bekvämt att ha en terminologi för.

**Definition 3.** Givet en ändlig mängd  $V$  är ett *likformigt fördelat slumpmässigt element* av  $V$  en slumpvariabel  $X$  sådan att  $\mathbb{P}(X = v) = \frac{1}{|V|}$  för varje  $v \in V$ .<sup>3</sup> Alla element av  $V$  är alltså lika sannolika. Vi kan skriva detta som

$$X \overset{u}{\in} V.$$

<sup>2</sup> Detta är lite av en lögn i det allmänna fallet, eftersom det kan finnas *väldigt* skumma delmängder till  $V$ , men så länge vi tänker oss våra diskreta sannolikhetsrum är det sant.

<sup>3</sup> Vill man göra detta fullständigt rigöröst i vår formalism kan man säga att  $X$  är definierad på sannolikhetsrummet  $(V, \mu)$  där  $\mu(v) = \frac{1}{|V|}$  för alla  $v \in V$ , och  $X : V \rightarrow V$  är identitetsfunktionen.

Men det blir väldigt många abstrakta ord för att inte säga så mycket alls som vi inte redan sade när vi definierade  $X$  som att den blir lika med varje element i  $V$  med samma sannolikhet.

Detta innebär alltså att för varje mängd  $W \subseteq V$  så blir

$$\mathbb{P}(X \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$

Om någon säger att "vi låter  $X$  vara en slumpmässig graf / träd / mängd / etc." utan att specificera hur  $X$  är fördelad menar de att den är likformig.

Vi vet att om vi slår vår tärning många gånger kommer vi i genomsnitt att få upp 3.5. Hur gör vi den intuitionen rigorös?

**Definition 4.** Väntevärdet av en slumpvariabel  $X$  som tar värden i  $\mathbb{R}$  ges av<sup>4</sup>

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x).$$

Vi tar alltså summan över alla tänkbara värden  $x$  för  $X$ , multiplicerar  $x$  med sannolikheten att  $X$  faktiskt blir  $x$ ,<sup>5</sup> och summerar. I specialfallet där  $X$  bara tar värden  $0, 1, 2, \dots$  blir alltså formeln

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k).$$

**Exempel 5.** Så om vi åter tar exemplet med tärningskastet så blir alltså väntevärdet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 1\mathbb{P}(X=1) + 2\mathbb{P}(X=2) + \dots + 6\mathbb{P}(X=6) \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{3} = 3.5 \end{aligned}$$

precis som vi förväntade oss.

Ibland är det mer användbart att skriva definitionen av väntevärde på en alternativ form:

**Lemma 6.** Det gäller att<sup>6</sup>

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega).$$

*Bevis.* Vi kan skriva

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \left( \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} \mu(\omega) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} x \mu(\omega) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} X(\omega) \mu(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega). \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Notera att detta är en summa över *alla värden som  $X$  kan tänkas ta* – eftersom vi antagit att  $\Omega$  är ändligt eller uppräknligt så kommer detta vara en summa över ändligt eller uppräknligt många summander, vilket är okej.

Hade vi velat modellera en *kontinuerlig* slumpvariabel – som till exempel en normalfördelning, som nog många sett redan – som kan ta vilket reellt tal som helst som värde, hade vi behövt definiera detta som en integral, inte en summa. Att slippa ge definitioner som fungerar i dessa fall är en av anledningarna till varför vi begränsar oss till bara diskret sannolikhetsteori.

<sup>5</sup> Notera att när den här summan löper över oändligt många tal är det fullt möjligt att den inte konvergerar, trots att  $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(x = X) = 1$ . Det finns slumpvariabler som alltid tar ändliga värden, men ändå har oändligt väntevärde.

<sup>6</sup> Det här fungerar bara för att vi har antagit att våra sannolikhetsrum är ändliga eller uppräknligt oändliga, så vi kan skriva våra sannolikheter som summer. I det mer allmänna fallet hade vi behövt skriva en integral mot sannolikhetsmåttet, och det kräver betydligt mer avancerad analys än vad vi kan.

□

Eftersom vi definierat slumpvariabler som att de helt enkelt är funktioner från  $\Omega$  kan vi göra all den algebra vi vanligen kan på funktioner in i  $\mathbb{R}$ . Till exempel är det, givet två slumpvariabler  $X$  och  $Y$ , helt väldefinierat att skriva  $X + Y$ , och det betyder precis vad vi förväntar oss att det skall betyda – vi slumpar ett  $X$  och ett  $Y$  och sedan adderar vi dem med varandra.

När vi nu har introducerat addition av slumpvariabler så kan vi bevisa vad som, i min mening, är en av de allra mest användbara satserna i hela matematiken.<sup>7</sup>

**Lemma 7** (Väntevärdets linjäritet). *Givet två slumpvariabler  $X$  och  $Y$  och två reella tal  $a$  och  $b$  gäller det att*

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

*Väntevärdet är alltså linjärt, som funktion från rummet av slumpvariabler in i  $\mathbb{R}$ .*<sup>8</sup>

*Bevis.* Vi använder den alternativa formeln för väntevärde vi fann i Lemma 6 och skriver

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aX + bY] &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX + bY)(\omega)\mu(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) + bY(\omega))\mu(\omega) \\ &= a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mu(\omega) + b \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mu(\omega) \\ &= a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

□

För att göra det här verkligt användbart behöver vi konceptet med indikatorvariabler, som vi introducerade när vi bevisade inklusion-exklusion.

**Proposition 8.** *För en händelse  $A$  blir dess indikatorfunktion  $\mathbb{1}_A$ , som ges av att  $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$  om  $\omega \in A$  och noll annars, en slumpvariabel.<sup>9</sup>*

*Det gäller att*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

*Bevis.* Per definition har vi att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] &= 0 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) \\ &= \sum_{\omega: \mathbb{1}_A(\omega)=1} \mu(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in A} \mu(\omega) = \mathbb{P}(A).\end{aligned}$$

□

<sup>7</sup> Jag är så klart oerhört partisk, eftersom just gränslandet mellan kombinatorik och sannolikhetsteori är mitt område – men det är onekligen ett otroligt användbart resultat.

<sup>8</sup> Detta sätt att formulera det skrapar lite på ytan av en väldigt djup teori – väntevärden är nämligen ”bara” integraler mot sannolikhetsmått, och samlingen av funktioner från  $\Omega$  in i  $\mathbb{R}$  blir ju ett vektorrum. Vi kan ge det vektorrummet en inre produkt genom att skriva  $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$ , och vi har börjat med funktionalanalys.

Men detta är ju en kurs i kombinatorik, så att utforska detta får vänta till en framtida kurs för er.

<sup>9</sup> Det är ju en funktion från utfall till reella tal – per definition är det en slumpvariabel. Vi behöver bara känna igen att den är det.

### Sperners lemma

Låt oss nu ta vad vi har lärt oss och tillämpa det på ett faktiskt kombinatoriskt resultat.

**Definition 9.** En samling  $\mathcal{F}$  av delmängder till  $[n]$  kallas för en *anti-kedja* ifall det för varje par  $F, G \in \mathcal{F}$  varken gäller att  $F \subset G$  eller  $G \subset F$ .

Hur stor kan en anti-kedja vara? Ett enkelt sätt att skapa sig en sådan är att ta alla delmängder av storlek  $k$  till  $[n]$  för något  $k$ . Att dessa inte kan vara delmängder till varandra är uppenbart. Att det val av  $k$  som gör denna anti-kedja som störst blir  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  är inte allt för svårt att se.<sup>10</sup> Är det möjligt att hitta en ännu större genom att ha med delmängder av olika storlekar? Sperners lemma säger oss att svaret är nej.

<sup>10</sup> Vi hade också kunnat välja  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ , det ger samma storlek.

**Lemma 10** (Sperners lemma). För varje anti-kedja  $\mathcal{F}$  i  $[n]$  gäller det att

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

*Bevis.* Vi tar en likformigt slumpmässig permutation  $\sigma$  av  $[n]$ , och låter  $I$  vara mängden av  $i$  sådana att

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\} \in \mathcal{F}.$$

Det är enkelt att se att  $I$  innehåller antingen noll eller ett element – om den innehöll både  $i$  och  $j$ , med  $i < j$ , vore ju

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j)\},$$

vilket skulle motsäga att  $\mathcal{F}$  är en antikedja.

Låt oss nu studera slumpvariabeln  $X = |I|$ . Att vi vet att  $I$  bara kan ha noll eller ett element ger oss omedelbart att  $\mathbb{E}[X] \leq 1$ ,<sup>11</sup> men låt oss studera detta väntevärde också på ett annat sätt.

Vi kan räkna att<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[|I|] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{i \in I\}}\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{i \in I\}}\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(i \in I). \end{aligned}$$

Vad är sannolikheten att  $i$  ligger i  $I$ ? Att  $i$  ligger i  $I$  betyder att  $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\} \in \mathcal{F}$ , per definition. Så vad vi behöver förstå är den slumpmässiga *mängden*

$$U_i = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i)\}.$$

<sup>11</sup> Detta kan vi göra till ett allmänt lemma:

**Lemma 11.** Om  $X(\omega) \leq C$  för varje  $\omega \in \Omega$  gäller det att  $\mathbb{E}[X] \leq C$ .

*Bevis.* Vi kan räkna

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega) \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega} C \mu(\omega) \\ &= C \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = C. \end{aligned}$$

□

<sup>12</sup> Här använder vi den kortare notationen  $\mathbb{1}_{\{i \in I\}}$  för att beteckna  $\mathbb{1}_{\{\omega \in \Omega: i \in I(\omega)\}}$ .

Eftersom vi valde  $\sigma$  som en slumpmässig permutation finns det ingen anledning till varför något tal skulle vara mer sannolikt än något annat att dyka upp i denna mängd.  $U_i$  är alltså, av symmetriskäl, ett likformigt slumpmässigt element ur  $\binom{[n]}{i}$ , mängden av delmängder av storlek  $i$ .

Vad är sannolikheten att  $U_i$  faller i  $\mathcal{F}$ ? Jo, om vi låter  $\mathcal{F}_i$  beteckna samlingen av element i  $\mathcal{F}$  av storlek  $i$  vet vi att  $\mathcal{F}_i \subseteq \binom{[n]}{i}$  och  $U_i \overset{u}{\in} \binom{[n]}{i}$ , så vi måste ha att

$$\mathbb{P}(U_i \in \mathcal{F}_i) = \frac{|\mathcal{F}_i|}{\binom{[n]}{i}}.$$

Så samlar vi ihop vad vi har listat ut hittills i ett enda uttryck, och använder olikheten<sup>13</sup>  $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{i} \geq \binom{[n]}{i}$  för alla  $i$ , har vi att

$$1 \geq \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(i \in I) = \sum_{i=1}^n \frac{|\mathcal{F}_i|}{\binom{[n]}{i}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{|\mathcal{F}_i|}{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{i}}$$

så multiplicerar vi bägge sidorna av detta med  $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{i}$  får vi att

$$\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{i} \geq \sum_{i=1}^n |\mathcal{F}_i| = |\mathcal{F}|$$

vilket är precis Spencers lemma, som vi ville bevisa.  $\square$

### Caro-Weis sats

Antag att vi har en grupp av  $n$  personer på ett läger, och säg att person nummer  $i$  känner  $d_i$  andra personer sedan tidigare. Du vill bilda en mindre grupp av personer för en lära-känna-varandra-lek<sup>14</sup>, så du vill hitta en så stor grupp som möjligt av personer som *inte* känner varandra. Finns det någon garanti för hur stor du kan göra den mindre gruppen?

**Teorem 12** (Caro-Wei). *Du kan välja den mindre gruppen sådan att den har åtminstone*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i + 1}$$

medlemmar.

Eller formulerat i mer matematiska termer: Varje graf  $G$  på  $n$  noder, där nod  $i$  har grad  $d_i$ <sup>15</sup>, har alltid en oberoende mängd<sup>16</sup>  $S$  sådan att

$$|S| \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i + 1}.$$

*Bevis.* Numrera noderna i  $G$  från 1 till  $n$ , och välj sedan likformigt slumpmässigt ett nytt sätt att etikettera  $G$ , så att nod  $i$  nu har etikett  $\sigma(i)$ .  $\sigma$  är alltså en likformig permutation av  $[n]$ .

<sup>13</sup> Vi har strikt sett inte faktiskt bevisat den någon gång, men det bör vara någorlunda enkelt att övertyga sig själv om att den är sann.

<sup>14</sup> Eftersom du är en fruktansvärt ondskefull person. Ingen tycker om sådana lekar.

<sup>15</sup> Ett ord vi inte har definierat, som får en definition i sidnoterna:

**Definition 13.** Graden av en nod  $v$  i en graf  $G = (V_G, E_G)$  är antalet kanter som går ut från  $v$ . Alltså

$$d_v = |e \in E_G \mid v \in e|.$$

<sup>16</sup> Nästa hitintills odefinierade term, och nästa sidnot:

**Definition 14.** En oberoende mängd  $S \subseteq V_G$  i en graf  $G = (V_G, E_G)$  är en mängd av noder sådana att det inte finns några kanter mellan något par av noder i  $S$ . Alltså, mängden

$$E(S) = \{\{u, v\} \in E_G \mid u, v \in S\}$$

är tom.

Hur använder vi detta för att skapa vår oberoende mängd? Jo, beteckna mängden av grannar till  $i$  med  $N(i)$  – alltså mängden av alla noder som har en kant till  $i$ . Om vi lägger in  $i$  i  $S$  får vi alltså inte ta med något annat element i  $N(i)$  om  $S$  skall vara en oberoende mängd.<sup>17</sup>

Om vi nu låter

$$S = \{i \in V_G \mid \sigma(i) < \sigma(j) \quad \forall j \in N(i)\}$$

så hävdar vi att detta måste vara en oberoende mängd. Varför? Tänk för motsägelse att det fanns ett par  $i, j$  i  $S$  med en kant mellan sig. Eftersom  $i$  ligger i  $S$  måste alla  $i$ s grannar ha högre etikett än  $i$  – specifikt så måste alltså  $\sigma(i) < \sigma(j)$ . Men det betyder ju att  $j$  har en granne med lägre etikett, så  $j$  kan inte ligga i  $S$ , och vi har en motsägelse.

Vi vill alltså förstå oss på mängden  $S$ . Låt  $A_i$  vara händelsen att  $i$  fick en lägre etikett än alla sina grannar i vår slumpmässiga ometikettering – vi har då av väntevärdets linjäritet att

$$\mathbb{E}[|S|] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Det räcker alltså för oss att förstå sannolikheterna för händelserna  $A_i$ . Eftersom  $\sigma$  var likformigt slumpmässig betyder det alltså att vi vill räkna antalet sätt att etikettera grafen sådana att  $i$  får en lägre etikett än alla sina grannar.

För att konstruera ett sådant sätt att etikettera  $G$  börjar vi med att välja vilka tal som skall stå på  $i$  och dess grannar – detta kan vi göra på  $\binom{n}{d_i+1}$  sätt, eftersom vi skall ha  $d_i$  etiketter på dess grannar och en etikett på den själv.

Sedan väljer vi hur vi placerar dessa etiketter på  $d_i$  och  $N(i)$  – vi måste så klart välja att placera det lägsta av talen på  $i$ , men de återstående  $d_i$  talen kan vi placera ut fritt<sup>18</sup>, och alltså på  $d_i!$  sätt.

Till slut väljer vi hur vi placerar resten av etiketterna på noderna utanför  $i$ s grannskap – detta kan vi också göra helt fritt, så på  $(n - d_i - 1)!$  sätt. Så totalt har vi sett att det finns

$$\binom{n}{d_i+1} d_i! (n - d_i - 1)!$$

sätt att välja en etikettering av  $G$  sådan att  $i$  får en lägre etikett än alla sina grannar.

Så sannolikheten att en slumpmässig etikettering är sådan ges

<sup>17</sup> Tänk er det som att vi lägger ett pussel, där varje bit är "formad som" en  $N(i)$ , och vi inte får lov att välja två pusselbitar som överlappar. Målet är att lyckas lägga så många bitar som möjligt. (Det här går nog att omvandla till ett faktiskt spel – jag kräver inga royalties för idén.)

<sup>18</sup> Det är här som vår teknik med väntevärdets linjäritet verkligen lönar sig – vi har kunnat zooma in bara på  $i$ , och behöver inte bry oss om vad som händer utanför just  $i$ . Hade vi inte gjort det hade vi kanske behövt bekymra oss om kanter mellan  $i$ s grannar här, och inte kunnat placera ut etiketterna helt fritt.

alltså av

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i) &= \frac{1}{n!} \binom{n}{d_i+1} d_i! (n - d_i - 1)! \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n!}{(d_i+1)!(n - (d_i+1))!} d_i! (n - d_i - 1)! \\ &= \frac{1}{d_i+1}\end{aligned}$$

så

$$\mathbb{E}[|S|] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i+1}.$$

Vi har alltså visat att vi i *genomsnitt* hittar en oberoende mängd av vår sökta storlek med denna metoden. Men det genomsnittliga utfallet kan ju omöjligt vara mindre än *alla* specifika utfall<sup>19</sup> – alltså måste det finnas något specifikt val av  $\sigma$  sådant att storleken på  $S(\sigma)$  blir åtminstone detta. Alltså är vi klara.  $\square$

### Räkneregler för slumpvariabler

Vi sammanfattar vad vi lärt oss om slumpvariabler hittills i följande räkneregler:<sup>20</sup>

**Lemma 16.** Om  $(\Omega, \mu)$  är något sannolikhetsrum,  $A \subseteq \Omega$  någon händelse, och  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  samt  $Z : \Omega \rightarrow V$  är slumpvariabler som tar värden i  $\mathbb{R}$  och i någon godtycklig mängd  $V$ , så gäller att:

1.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega).$$

2. För alla  $a, b \in \mathbb{R}$  så är

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

Väntevärdet är alltså en linjär funktional.

3.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A].$$

4. Om  $X(\omega) \leq C$  för varje  $\omega$ , eller ekvivalent om  $\mathbb{P}(X \leq C) = 1$ , så är  $\mathbb{E}[X] \leq C$ .

5. Om  $\mathbb{E}[X] = C$  så finns det åtminstone ett  $\omega$  sådant att  $X(\omega) \geq C$ .

6. Om  $Z$  är likformigt fördelad på  $V$  så gäller det för varje delmängd  $W \subseteq V$  att

$$\mathbb{P}(Z \in W) = \frac{|W|}{|V|}.$$

### Övningar

<sup>19</sup> Låt oss formulera detta som ett lemma och bevisa det:

**Lemma 15.** För varje slumpvariabel  $X$  med  $\mathbb{E}[X] = C$  måste det finnas åtminstone ett  $\omega$  sådant att  $X(\omega) \geq C$ .

*Bevis.* Antag för motsägelse att  $X(\omega) < C$  för alla  $\omega$ . Då kan vi räkna att

$$\begin{aligned}C = \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mu(\omega) \\ &< \sum_{\omega \in \Omega} C \mu(\omega) \\ &= C \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = C\end{aligned}$$

så  $C < C$ , en motsägelse.  $\square$

<sup>20</sup> Den här biten skippar vi på föreläsningen – den ligger här för att vara behjälplig som sammanfattning och när man gör övningarna. Den finns också i vår samling av formler och räkneregler.