Föreläsning 6: Fortsättning på genererande funktioner · 1MA020

Vilhelm Agdur[1]

[1] vilhelm.agdur@math.uu.se

6 februari 2023

Vi fortsätter förra föreläsningens diskussion om genererande funktioner, och ger fler exempel och sätt att använda sådana för att lösa kombinatoriska problem.

Antal lösningar till en ekvation, med begränsningar

I slutet på förra föreläsningen studerade vi antalet lösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = k$$

om vi kräver att alla x_i är ickenegativa heltal. Det var ett första exempel på en mer generell kategori av problem med att räkna lösningar på ekvationer. Låt oss börja med ett lite mer invecklat problem:

Exempel 1. Hur många lösningar finns det till

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

om vi kräver att alla x_i är ickenegativa heltal, men också kräver att x_2 är jämnt, att $x_3 \leq 10$, och x_4 är udda?

Låt, för varje k, a_k vara antalet sådana lösningar. Låt sedan a_k^1 vara antalet lösningar till $x_1 = k$ i ickenegativa heltal x_1, a_k^2 vara antalet lösningar till $x_2 = k$ i ickenegativa jämna heltal, a_k^3 vara antalet lösningar till $x_3 = k$ i heltal mellan 0 och 10, och a_k^4 vara antalet lösningar till $x_4 = k$ i udda heltal.

Precis som i förra exemplet studerar vi nu faltningen av dessa fyra följder, och ser att

$$(a^1 * a^2 * a^3 * a^4)_k = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3,k_4 \geq 0 \\ k_1+k_2+k_3+k_4=k}} a_{k_1}^1 a_{k_2}^2 a_{k_3}^3 a_{k_4}^4 = a_k$$

eftersom $a_{k_1}^1 a_{k_2}^2 a_{k_3}^3 a_{k_4}^4$ är en produkt av ettor och nollor – att $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k$ garanteras av definitionen av faltning, och sedan är varje term i produkten ett om värdet på k_i är tillåtet av våra begränsningar, och noll annars. Så produkten är ett om summan är korrekt och varje enskild begränsning är uppfylld.

Så precis som i förra exemplet kan vi få fram genererande funktionen för a_k, följden vi faktiskt är intresserade av, genom att plocka fram den genererande funktionen för de enklare följderna.

Vad genererande funktionen för a^1 är vet vi sedan innan – den är bara en följd av ettor, så dess genererande funktion blir $\frac{1}{1-x}$. Likaledes vet vi sedan innan att följden av n stycken ettor och sedan nollor har genererande funktion $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, så genererande funktionen för a^3 blir $\frac{1-x^{11}}{1-x}$.

Däremot för a^2 behöver vi räkna ut något nytt, nämligen den genererande funktionen för följden $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, indikatorfunktionen av de jämna talen. Så vi får skriva att

$$\begin{aligned} F_{a^2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 x^k \\ &= \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \in 2\mathbb{Z}}} x^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (x^2)^i \end{aligned}$$

och sista raden här kan vi känna igen som genererande funktionen av följden $(1, 1, 1, 1, \ldots)$, *utvärderad i* x^2. Så detta är lika med $\frac{1}{1-x^2}$.

Så vad som återstår är alltså a^4, indikatorfunktionen för de udda talen. För att få fram dess genererande funktion kan vi använda vad vi just gjorde för de jämna talen:

$$\begin{aligned} F_{a^4}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ udda}}} x^k \\ &= x \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ udda}}} x^{k-1} \\ &= x \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \in 2\mathbb{Z}}} x^k \\ &= \frac{x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Så, om vi använder att genererande produkten av en faltning är produkten av de genererande funktionerna, ser vi att

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{x}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{x(1-x^{11})}{(1-x)^2(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

och ber vi vårt favorit-CAS[2] att Taylorutvidga detta uttryck så får vi att

$$F_a(x) = x + 2x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 14x^5 + 20x^6 + 30x^7 + 40x^8 + \ldots$$

[2] *Computer Algebra System*, alltså till exempel *WolframAlpha* eller något av dess öppna alternativ, såsom *Sage*.

så att följden av antalet lösningar är

$$0, 1, 2, 5, 8, 14, 20, 30, 40, 55, 70, 91, 111, 138, 163, \ldots.$$

Exempel 2. Vi vill räkna antalet lösningar a_k till ekvationen

$$2x_1 + x_2 + x_3 = k$$

där alla x_i är heltal, x_2 är en multipel av 6, och talet x_3 kan vara antingen rött eller blått.[3]

Vi börjar med att göra variabelbytet $y_1 = 2x_1$, och vill alltså nu ha lösningar till $y_1 + x_2 + x_3 = k$, med begränsningen att y_1 är jämnt. Det här förändrar så klart inte antalet lösningar, bara gör det lättare för oss att tillämpa vår metod.

Vi tillämpar samma metod som i förra exemplet, och låter a^1_k vara antalet lösningar till $y_1 = k$ med y_1 jämnt, a^2_k vara antalet lösningar till $x_2 = k$ med x_2 delbart med 6, och a^3_k vara antalet lösningar till $x_3 = k$ med x_3 färgat antingen rött eller blått. Faltningen blir då

$$(a^1 * a^2 * a^3)_k = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \geq 0 \\ k_1+k_2+k_3=k}} a^1_{k_1} a^2_{k_2} a^3_{k_3} = a_k.$$

Vi fortsätter precis som innan med att räkna ut den genererande funktionen för varje av våra följder. För a^1 vet vi redan vad genererande funktionen för indikatorfunktionen av de jämna talen är, nämligen $\frac{1}{1-x^2}$.

För a^2 kan vi använda samma metod som vi använde för de jämna talen för att se att

$$\begin{aligned} F_{a^2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a^2_k x^k = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \in 6\mathbb{Z}}} x^k \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{6i} = \sum_{i=0}^{\infty} (x^6)^i \end{aligned}$$

så att $F_{a^2}(x) = \frac{1}{1-x^6}$.

För a^3 så blir denna helt enkelt en följd av bara tvåor, eftersom vi har två val för färg för varje tal, och kan välja vilket tal som helst. Så vi ser att

$$F_{a^3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^k = 2\frac{1}{1-x}.$$

Sammantaget har vi alltså att

$$F_a(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\left(\frac{2}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^6)}$$

vilket vi kan Taylorutvidga i vårt favoritprogram och få att[4]

$$\begin{aligned} F_a(x) = 2 &+ 2x + 4x^2 + 4x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 10x^7 \\ &+ 14x^8 + 14x^9 + 18x^{10} + 18x^{11} + 24x^{12} + 24x^{13} \\ &+ 30x^{14} + 30x^{15} + 36x^{16} + 36x^{17} + 44x^{18} + \ldots. \end{aligned}$$

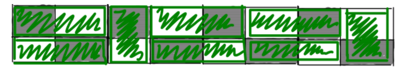
[3] Vi ser alltså, för $k = 6$, alla dessa som godtagbara distinkta lösningar:

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 4$, $\quad x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 4$,

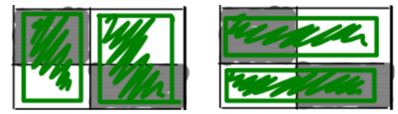
$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2$, $\quad x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 0$.

[4] Vi ser ju ett tydligt mönster här av att $a_{2k} = a_{2k+1}$. Kan du förklara varför detta måste vara fallet, baserat på våra begränsningar av variablerna?

Exempel 3. Antag att vi har ett schackbräde med $2 \times n$ rutor, och vi vill täcka det med brickor av formen 2×1 eller 1×2. Hur många sätt kan vi göra detta på?



Figur 1: Ett sätt att göra detta då $n = 8$. Figur tagen ur förra årets anteckningar.



Figur 2: De två sätten att göra det på då $n = 2$. Figur från förra årets föreläsningsanteckningar.

Låt t_n vara antalet sätt vi kan täcka vårt schackbräde. Vi vill hitta en rekursion för detta antal. Vi ser enkelt att det finns ett enda sätt att göra det för $n = 1$ – bara en bricka får plats – så $t_1 = 1$. För $n = 2$ finns det två sätt, antingen lägger vi dem horisontellt eller vertikalt, så $t_2 = 2$.

Om vi vill skapa oss en täckning av en $2 \times n$-bräda, för något $n > 2$, kan vi göra på två sätt:

- Vi börjar med en täckning av en $2 \times (n-1)$-bräda, och lägger till en till bricka vertikalt.
- Vi börjar med en täckning av en $2 \times (n-2)$-bräda, och lägger till två till brickor horisontellt.

Att varje täckning av en $2 \times n$-bräda kan skapas på detta vis är enkelt att se – antingen är den sista kolumnen täckt av en vertikal bricka, i vilket fall vi skapade täckningen på första viset, eller så är den täckt av två horisontella brickor, i vilket fall vi skapade den på det andra sättet.

Alltså har vi funnit följande rekursion för antalet täckningar

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \quad t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \, \forall n > 2$$

som ju är extremt lik den vi har för Fibonaccitalen, så vi kan finna en genererande funktion och sluten form på precis samma vis som i det fallet.

Exponentiella genererande funktioner

Ibland får vi problem med att hitta enkla uttryck för våra genererande funktioner, eftersom vår följd växer för snabbt. Hittills har vi bara studerat följder som växer långsamt nog, men om vi till exempel hade velat studera följden $0!, 1!, 2!, \ldots$ hade dess vanliga genererande funktion varit

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$$

för vilken det inte finns något enkelt uttryck.[5]

Ett annat exempel på detta är om vi räknar permutationer – dessa kommer vara ungefär $k!$ stycken, i de flesta av våra exempel. Så vi hade haft samma problem. Det finns en anledning att vi hittills bara studerat binomialkoefficienter, som ju är betydligt mindre.

Så, låt oss definiera en variant på genererande funktioner som kan hantera dessa snabbväxande följder.

[5] Om vi sätter på oss våra analytikerglasögon kan vi dessutom se att detta uttryck inte konvergerar för något $x > 0$, så vad hade vi ens kunna ha för uttryck för en funktion som är oändlig överallt?

Definition 4. Om $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ är någon följd ges dess *exponentiella genererande funktion* av[6]

$$EG_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

[6] Om vi behöver förtydliga skillnaden kallar vi de icke-exponentiella genererande funktionerna vi studerade innan för *ordinära* genererande funktioner.

Så allt vi faktiskt har gjort är att skala ner vår följd så att den inte växer så kraftigt. Som tur är fungerar detta enkla trick väldigt väl – låt oss räkna några exempel för att se hur.

Exempel 5. Den exponentiella genererande funktionen för följden $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ ges av

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Exempel 6. Den exponentiella genererande funktionen för följden $(0!, 1!, 2!, 3!, \ldots)$ ges av

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Exempel 7. Fixera något heltal n, och låt a_k vara antalet permutationer av längd k ur ett alfabete med n bokstäver, så att $a_k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Då ges den exponentiella genererande funktionen för a av

$$\begin{aligned} EG_a(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \end{aligned}$$

där vi i sista ledet kände igen en *ordinär* genererande funktion för binomialkoefficienterna.

Exempel 8. Låt oss återvända till exemplet med schackbrädena. Vi hade en följd som gavs av rekursionen[7]

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \quad t_{k+2} = t_{k+1} + t_k \, \forall k \geq 1.$$

[7] Notera att vi har ändrat om i rekursionen så att vi har plustecken i index istället för minus – det är fortfarande precis samma rekursion, men vi får finare uttryck senare.

Vad är den exponentiella genererande funktionen för denna följden? Analogt med det ordinära fallet tar vi vår rekursion, multiplicerar den med $\frac{x^k}{k!}$, och summerar över alla $k \geq 1$, för att få att

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_{k+2} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} t_{k+1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} t_k \frac{x^k}{k!}.$$

Nu kan vi komma ihåg att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

så att

$$t_{k+1}\frac{x^k}{k!} = t_{k+1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$

och

$$t_{k+2}\frac{x^k}{k!} = t_{k+2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}\right).$$

Om vi använder dessa likheter i vad vi hade innan, och bryter ut derivatorna ur summorna, får vi alltså att

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{k+2}\frac{x^{k+2}}{(k+2)!}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_{k+1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k\frac{x^k}{k!}\right).$$

Precis som i vårt exempel med Fibonaccitalen ser vi nu att vi nästan har de exponentiella genererande funktionerna, förutom att det saknas några av de första termerna i summorna. Så om vi justerar för detta får vi att

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EG_t(x) - t_0\frac{x^0}{0!} - t_1\frac{x^1}{1!} - t_2\frac{x^2}{2!}\right) &= \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EG_t(x) - t_0\frac{x^0}{0!} - t_1\frac{x^1}{1!}\right) &+ \left(EG_t(x) - t_0\frac{x^0}{0!}\right)\end{aligned}$$

så om vi substituerar in $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$ och flyttar in derivatorna i parenteserna så får vi att

$$EG_t''(x) - 2 = EG_t'(x) - 1 + EG_t(x)$$

vilket ju är en helt vanlig andra gradens linjär ordinär differentialekvation med konstanta koefficienter. Randvillkoren för den ges av $EG_t(0) = t_0$ och $EG_t'(0) = t_1$.[8]

Så vi kan antingen lösa den för hand eller med hjälp av vårt favorit-CAS, och finna lösningen

$$\frac{1}{10}\left(\sqrt{5}e^{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)x} - \sqrt{5}e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} + 5e^{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)x} + 5e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} - 10\right)$$

vilket vår CAS[9] låter oss se kan Taylorutvidgas till

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(5+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{10}\frac{x^n}{n!}$$

vilket alltså ger oss en direkt formel för varje term i följden, i samma still som för Fibonaccitalen.

Vad vi sett i detta exemplet är alltså att vi, när vi har en felmatchning mellan index i vår följd och index i $\frac{x^k}{k!}$, plockar på oss derivator – till skillnad från i fallet med ordinära genererande funktioner, då detta gav oss faktorer av x.

[8] Detta kommer ju alltid gälla för alla exponentiella genererande funktioner, av hur de är definierade.

[9] Eller vi, för hand, om vi inte är lata. Den enda funktionen som är involverad är ju e^x, så det är inget svårt att expandera, bara många termer att hålla ordning på.

Vi har också sett att de exponentiella genererande funktioner vi hittar för linjära rekursioner kommer ha en bunt olika e^{Cx} för konstanter C,[10] vilket är mycket enklare att Taylorutvidga. Så om man vill lösa linjära rekursioner i praktiken är exponentiella genererande funktioner ofta ett bättre val än ordinära.

[10] Precis som vi såg för följden $(1, 1, 1, \ldots)$, där $C = 1$ – detta beror, i alla fall andligen, på att våra följder som ges av linjära rekursioner också kommer växa ungefär så långsamt, så vi får samma sorts funktion.

Övningar

Övning 1. Hur många heltalslösningar till ekvationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 578$$

finns det,[11] om vi kräver att

- $x_1 \geq -7$,[12]
- $x_2 \geq 0$ är ett jämnt tal,
- och $x_3 \geq 0$ kan vara vilket tal som helst, men om det är jämnt kan det vara rött eller blått, och om det är udda kan det vara gult, grönt, eller lila.

Övning 2. Antag att vi vet att följden $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ har exponentiell genererande funktion F. Finn ett enkelt uttryck för den exponentiella genererande funktionen för följden $b_k = ka_k$, i termer av F.

[11] Om ni väl har hittat genererande funktionen för antalet lösningar när vi ersatt 578 med k, så kan ni enkelt få fram svaret med följande kod till *WolframAlpha*:

`SeriesCoefficient`$[f, \{x, 0, 578\}]$

där f då är genererande funktionen ni funnit. Att ange den genererande funktionen och säga att ni sedan plockade fram rätt koefficient ur den med hjälp av ett CAS är den förväntade metoden här.

[12] Ledtråd: Gör ett variabelbyte till y_1 för att få den vanliga begränsningen att $y_1 \geq 0$.